Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Analysis I

Arbeitsblatt 21

Übungsaufgaben

AUFGABE 21.1. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$D \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Was ist die Definitionsmenge D des *Tangens*?

AUFGABE 21.2.*

Zeige, dass die Sinus- bzw. die Kosinusfunktion die folgenden Werte besitzt.

a)

$$\sin \frac{\pi}{4} \,=\, \cos \frac{\pi}{4} \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b)

$$\cos \frac{\pi}{3} \,=\, \frac{1}{2}.$$

c)

$$\sin \frac{\pi}{3} \,=\, \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

AUFGABE 21.3.*

Zeige, dass die reelle Sinusfunktion eine bijektive, streng wachsende Funktion

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert, und dass die reelle Kosinusfunktion eine bijektive, streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert.

AUFGABE 21.4.*

Zeige, dass die komplexe Exponentialfunktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z \longmapsto \exp z,$$

surjektiv ist.

Aufgabe 21.5.
(1) Zeige, dass die reelle Sinusfunktion auf $[0,\pi]$ konkav ist.
(2) Zeige, dass die reelle Sinusfunktion auf $[-\pi,0]$ konvex ist.
(3) Zeige, dass die reelle Sinusfunktion im Nullpunkt einen Wendepunkt besitzt.

Aufgrund von Korollar 21.4 ist die reelle Sinusfunktion und die reelle Kosinusfunktion bijektiv auf gewissen Intervallen. Die Umkehrfunktionen heißen folgendermaßen.

Die Umkehrfunktion der reellen Sinusfunktion ist

$$[-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ x \longmapsto \arcsin x,$$

und heißt *Arkussinus*.

Die Umkehrfunktion der reellen Kosinusfunktion ist

$$[-1,1] \longrightarrow [0,\pi],\ x \longmapsto \arccos x,$$

und heißt *Arkuskosinus*.

Aufgabe 21.6. Zeige, dass die reelle Tangensfunktion eine bijektive, streng wachsende Funktion

$$]-\pi/2,\pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$$

und die reelle Kotangensfunktion eine bijektive streng fallende Funktion

$$[0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

induziert.

Die Umkehrfunktion der reellen Tangensfunktion ist

$$\mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ x \longmapsto \arctan x,$$

und heißt *Arkustangens*.

Die Umkehrfunktion der reellen Kotangensfunktion ist

$$\mathbb{R} \longrightarrow]0,\pi[,\ x \longmapsto \operatorname{arccot} x,$$

und heißt *Arkuskotangens*.

Aufgabe 21.7. Zeige, dass die inversen trigonometrischen Funktionen die folgenden Ableitungen besitzen.

(1)
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(2)
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(3)
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

(4)
$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Aufgabe 21.8. Zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \in \,]0,1], \\ 0 \text{ für } x = 0, \end{cases}$$

stetig ist und unendlich viele Nullstellen besitzt.

Aufgabe 21.9.*

Wir betrachten die durch

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

definierte Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Zeige, dass es zu jedem λ, $-1 \leq \lambda \leq 1$, eine Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+$ derart gibt, dass die Folge der Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n}$$

gegen λ konvergiert.

Aufgabe 21.10.*

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n},\ n \in \mathbb{N}_+\,.$$

Aufgabe 21.11. Zeige, dass die Folge

$$x_n := \sin n$$

nicht konvergiert.

Aufgabe 21.12.*

Zu einem Startwert $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sei eine Folge rekursiv durch

$$x_{n+1} := \sin x_n$$

definiert. Entscheide, ob $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 21.13. Untersuche die Funktionenfolge

$$f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto (\sin x)^n,$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. An welchen Punkten existiert die Grenzfunktion, an welchen ist sie stetig, an welchen differenzierbar? Wie verhält sich die abgeleitete Funktionenfolge, also $g_n(x) = f_n'(x)$?

Aufgabe 21.14. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Es sei F eine komplexe, auf $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe der Form

$$F = \sum_{j=0}^{\infty} c_{jn} z^{jn}.$$

Zeige, dass für jede n-te komplexe Einheitswurzel ζ die Gleichheit $F(\zeta z) = F(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Aufgabe 21.15. Es sei $F = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ eine komplexe auf $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe und $n \in \mathbb{N}_+$. Für jede n-te komplexe Einheitswurzel ζ gelte $F(\zeta z) = F(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass $c_i = 0$ für alle i gilt, die kein Vielfaches von n sind.

Aufgabe 21.16.*

Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei ζ eine n-te komplexe Einheitswurzel. Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto f(z),$$

eine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass die Gleichheit $f(\zeta z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gelte. Zeige unter Bezug auf den Differenzenquotienten, dass die Ableitung die Beziehung $f'(\zeta z) = \zeta^{n-1} f'(z)$ erfüllt.

Was bedeutet die vorstehende Aufgabe für gerade und ungerade Funktionen?

Aufgabe 21.17. Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Es gibt eine stetige Funtion
$$g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$$
mit $f(z) = g(|z|)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(2) Für alle n-ten Einheitswurzeln $\zeta \in \mathbb{C}$ (alle $n \in \mathbb{N}$) ist $f(\zeta z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(3) Für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$ ist $f(wz) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.18. (3 Punkte)

Zeige, dass die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \in \,]0,1], \\ 0 \text{ für } x = 0, \end{cases}$$
unendlich viele isolierte lokale Maxima und unendlich viele isolierte lokale Minima besitzt.

Aufgabe 21.19. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige Funktion
$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$
die unendlich viele Nullstellen und unendlich viele isolierte lokale Maxima besitzt, deren Funktionswert ≥ 1 ist.

Aufgabe 21.20. (6 Punkte)

Zeige, dass es keine stetige Funktion
$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$
gibt, die unendlich viele Nullstellen besitzt derart, dass zwischen je zwei Nullstellen ein lokales Maximum existiert, dessen Funktionswert ≥ 1 ist.

Aufgabe 21.21. (6 Punkte)

Es sei $z_n \in \mathbb{C}$ eine Folge von komplexen Zahlen, die wir in Polarkoordinaten als
$$z_n = r_n e^{\mathrm{i}\varphi_n}$$
mit $r_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi_n \in [0, 2\pi[$ schreiben. Zeige, dass die Folge genau dann konvergiert, wenn einer der folgenden Fälle vorliegt.

(1) Die Folge r_n konvergiert gegen 0.

(2) Die beiden Folgen r_n und φ_n konvergieren (in $\mathbb{R}$).

(3) Die Folge r_n konvergiert und die Folge φ_n besitzt die Punkte 0 und 2π als einzige Häufungspunkte.

Aufgabe 21.22. (6 Punkte)

Zu $n \geq 3$ sei A_n der Flächeninhalt eines in den Einheitskreis eingeschriebenen gleichmäßigen n-Eckes. Zeige $A_n \leq A_{n+1}$.

Abbildungsverzeichnis