

Analysis II

Arbeitsblatt 58

Übungsaufgaben

AUFGABE 58.1. Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und

$$f: \mathbb{R} \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^i y^j.$$

Wir setzen

$$\varphi(x) = \int_a^b x^i y^j dy.$$

Berechne $\varphi'(x)$ auf zwei unterschiedliche Weisen.

AUFGABE 58.2. Bestätige Satz 58.3 für die Funktion

$$f: [1, 2] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x) \longmapsto e^{xt}.$$

AUFGABE 58.3. Es sei

$$f(x, y) = x^3 - yx^2 + 7 \sin y.$$

Berechne die Integrale zum Parameter $y \in [0, \pi]$ über $x \in [0, 1]$ und zum Parameter $x \in [0, 1]$ über $y \in [0, \pi]$. Bestimme jeweils die extremalen Integrale.



Die Himmelscheibe von Nebra. Ist die Mondsichel darauf sternförmig?

AUFGABE 58.4. Betrachte zu $r, s \in \mathbb{R}_+$ mit $r + s > 1$ und $s < r + 1$ die „sichelförmige“ Menge

$$M_{r,s} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq r, \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \geq s \right\}.$$

Für welche r, s ist diese Menge sternförmig?

AUFGABE 58.5. Zeige, dass eine sternförmige Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ zusammenhängend ist.

AUFGABE 58.6. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Zeige, dass T genau dann ein (nichtleeres) Intervall ist, wenn T sternförmig ist.

AUFGABE 58.7. Es seien P_1, \dots, P_k ($k \geq 1$) endlich viele Punkte im \mathbb{R}^n . Zeige, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{P_1, \dots, P_k\}$ nicht sternförmig ist.

AUFGABE 58.8. Man gebe ein Beispiel für eine sternförmige Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^2$ an, die nur bezüglich eines einzigen Punktes sternförmig ist.

AUFGABE 58.9. Man gebe ein Beispiel für eine offene, sternförmige Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^2$ an, die nur bezüglich eines einzigen Punktes sternförmig ist.

AUFGABE 58.10. Man gebe ein Beispiel für zwei sternförmige Mengen $S, T \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass ihr Durchschnitt $S \cap T$ nichtleer und nicht sternförmig ist.

AUFGABE 58.11. Überprüfe, ob das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto \left(\frac{-2x^2 + 2y^4}{(x^2 + y^4)^2}, \frac{8xy^3}{(x^2 + y^4)^2} \right),$$

die Integrabilitätsbedingung erfüllt oder nicht.

AUFGABE 58.12. Überprüfe, ob das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto \left(\frac{-2x^2 + 2y^4}{(x^3 + y^3)^2}, \frac{8xy^3}{(x^3 + y^3)^2} \right),$$

die Integrabilitätsbedingung erfüllt oder nicht.

AUFGABE 58.13. Zeige, dass das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (2x - y \cos x, -\sin x),$$

ein Gradientenfeld ist und bestimme ein Potential dazu.

Ob ein Vektorfeld auf $U \subseteq \mathbb{R}^3$ die Integrabilitätsbedingung erfüllt lässt sich äquivalent mit der sogenannten Rotation ausdrücken.

Zu einem partiell differenzierbaren Vektorfeld

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ nennt man

$$\operatorname{rot}(G)(P) := \begin{pmatrix} \frac{\partial G_3}{\partial x_2}(P) - \frac{\partial G_2}{\partial x_3}(P) \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_3}(P) - \frac{\partial G_3}{\partial x_1}(P) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(P) - \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(P) \end{pmatrix}$$

die *Rotation* von G .

Die Rotation ist ebenfalls ein Vektorfeld.

AUFGABE 58.14. Es sei $G: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Zeige, dass G genau dann die Integrabilitätsbedingung erfüllt, wenn $\operatorname{rot}(G) = 0$ ist.

AUFGABE 58.15. Berechne zum Vektorfeld

$$G: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto \left(x^3 - z^2, \frac{xy}{z}, \frac{z}{x^2y}\right)$$

die Rotation.

AUFGABE 58.16.*

Wir betrachten das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$G(x, y) = (y, -x^3)$$

Zeige auf zweifache Weise, dass G kein Gradientenfeld ist.

- (1) Mit der Integrabilitätsbedingung.
- (2) Mit Wegintegralen.

AUFGABE 58.17.*

Wir betrachten das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (y - \cos(x + z), x, 2z - \cos(x + z)).$$

a) Zeige mit Hilfe der Integrabilitätsbedingung, dass G ein Gradientenfeld ist.

b) Bestimme ein Potential zu G .

AUFGABE 58.18.*

Wir betrachten das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto \left(ye^{xy} + \ln z, xe^{xy} - 2yz, \frac{x}{z} - y^2 \right).$$

a) Zeige mit Hilfe der Integrabilitätsbedingung, dass G ein Gradientenfeld ist.

b) Bestimme ein Potential zu G .

AUFGABE 58.19.*

(1) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei $G: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld auf U . Zeige, dass das Potential zu G bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist.

(2) Es seien $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ offene sternförmige Mengen mit der Eigenschaft, dass $S \cap T$ zusammenhängend ist. Es sei

$$G: S \cup T \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Zeige, dass G ein Gradientenfeld ist.

(3)

AUFGABE 58.20.*

Es sei

$$F: G \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $G \subseteq \mathbb{R}^2$ und es sei

$$\rho(P) := \frac{\partial F_2}{\partial x}(P) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(P).$$

Zeige

$$\rho(P) = \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\gamma_\epsilon} F,$$

wobei γ_ϵ den einmal gegen den Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreisweg um P mit Radius ϵ bezeichnet.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 58.21. (3 Punkte)

Bestimme, ob zur Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2,$$

der Subgraph und ob der Epigraph sternförmig ist.

AUFGABE 58.22. (6 Punkte)

Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine sternförmige Teilmenge. Zeige, dass auch der Abschluss \overline{T} sternförmig ist.

AUFGABE 58.23. (3 Punkte)

Zeige, dass das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (ye^z - 3x^2z, xe^z + 2yz, xye^z + y^2 - x^3),$$

ein Gradientenfeld ist und bestimme ein Potential dazu.

AUFGABE 58.24. (3 Punkte)

Berechne zum Vektorfeld

$$G: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \neq 0, z > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto \left(\frac{e^{3x} - z}{y}, \frac{\cos x}{z^2}, \frac{\ln z}{xy} \right)$$

die Rotation.

Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Nebra Scheibe.jpg , Autor = Benutzer Dbachmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 1
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7