

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 30

AUFGABE 30.1. Beweise für die projektive Gerade den Satz von Riemann-Roch direkt.

AUFGABE 30.2. Es sei $f \in K[X, Y, Z]$ ein homogenes Polynom vom Grad e über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K derart, dass

$$C = \text{Proj}(K[X, Y, Z]/(f)) \subseteq \mathbb{P}_K^2$$

eine glatte projektive Kurve ist. Es seien

$$g_1, \dots, g_n \in K[X, Y, Z]$$

homogene Elemente vom Grad d_1, \dots, d_n derart, dass die $D_+(g_i)$ die Kurve überdecken. Wir fassen die g_i als Garbenhomomorphismen $\mathcal{O}_C(-d_i) \rightarrow \mathcal{O}_C$, $h \mapsto hg_i$, (bzw. $\mathcal{O}_C(m - d_i) \rightarrow \mathcal{O}_C(m)$, $h \mapsto hg_i$, für $m \in \mathbb{Z}$) auf.

(1) Zeige, dass der Garbenhomomorphismus

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_C(m - d_i) \longrightarrow \mathcal{O}_C(m)$$

surjektiv ist.

(2) Es sei $\text{Syz}(g_1, \dots, g_n)(m)$ die Kerngarbe zum Homomorphismus aus (1). Zeige, dass diese Garbe lokal frei ist.

(3) Bestimme den Rang von $\text{Syz}(g_1, \dots, g_n)(m)$.

(4) Bestimme den Grad von $\text{Syz}(g_1, \dots, g_n)(m)$.

AUFGABE 30.3. Man gebe auf der projektiven Geraden \mathbb{P}_K^1 Beispiele für lokal freie Garben vom Rang 2 und vom Grad derart an, dass die Dimension der globalen Schnitte beliebig groß wird.

AUFGABE 30.4. Es sei (vergleiche Satz 19.8)

$$\text{Syz}(x, y, z) \cong \Omega_{\mathbb{P}_K^2|K}$$

die Kotangententialgarbe auf der projektiven Ebene und sei $L \subseteq \mathbb{P}_K^2$ eine projektive Gerade. Zeige

$$\text{Syz}(x, y, z)|_L \cong \mathcal{O}_L(-1) \oplus \mathcal{O}_L(-2).$$

AUFGABE 30.5. Es sei (vergleiche Satz 19.8)

$$\mathrm{Syz}(x, y, z) \cong \Omega_{\mathbb{P}_K^2|K}$$

die Kotangentialgarbe auf der projektiven Ebene und sei $C = V_+(F) \subseteq \mathbb{P}_K^2$ eine glatte Quadrik. Zeige $\mathrm{Syz}(x, y, z)|_C$ eine direkte Zerlegung als Summe von zwei invertierbaren Garben besitzt.

Betrachte einen Isomorphismus $\mathbb{P}_K^1 \cong C$.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 3
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 3