

FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

COMMENTARII
ACADEMIAE
SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE.

5.06 1974

Tomus XII.
AD ANNVM MDCCXL.



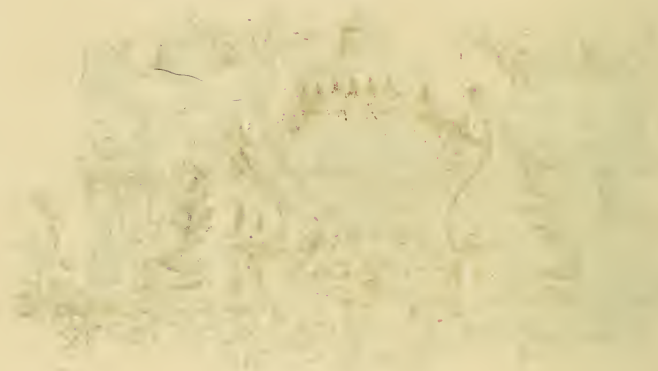
PETROPOLI.
TYPIS ACADEMIAE
cl b cc L.

4/17/1911
17.589-311
1911

COMMENTARIJ
ACADEMIAE
SCIENTIARVM
IMPERIALIS
METROPOLITANAE

06.70262 April 28

TOMUS XII
ANNO MDCCCXXXIII



PHAROS
TYPIS ACADEMICIS
MDCCCXXXIII

INDEX COMMENTARIORVM.

In Classe Mathematica

- L. Euleri**, Inuestigatio curuarum, quae euolutae sui fimiles producunt. p. 3.
- Eiusd.* De seriebus quibusdam considerationes. p. 53.
- Dan. Bernoulli**, Commentationes de oscillationibus compositis, praesertim iis, quae fiunt in corporibus ex filo flexili suspensis. p. 97.
- L. Euleri**, Emendatio tabularum Astronomicarum, per loca planetarum Geocentrica. p. 109.
- C. N. de Winsheim**, Determinatio exactior graduum parallelorum aequatoris et meridiani, in figura telluris hypothetice *sphaerica*, aut (prouti per recentissimam dimensionem stabilitur) *sphaeroide*. p. 222.

In Classe Physica

- G. W. Krafftii**, De loco imaginis puncti radiantis in speculum curuilineum dissertatio catoptrica p. 243.
- Eiusd.* De corporum plano inclinato impositorum descensu. p. 261.
- Eiusd.* De viribus attractionis magneticae experimenta. p. 276.
- I. Ammani**, Descriptio Cassiae Americanae procumbentis, herbaceae, mimosae foliis, floribus paruis, filiquis angustis, planis. p. 288.

C. E.

C. E. Gellertii De phaenomenis plumbi fusi in tubis capillaribus. p. 293.

Eiusd. De tubis capillaribus prismaticis. p. 302.

I. C. Wildii Observaciones Anatomicae rariores p. 312.

1. De vena caua duplici ascendente. ibid.

2. De vena iugulari externa, quoad progressum, triplici, quoad infertionem autem, quadruplici. p. 316.

3. De venae Azigos trunco duplici p. 318.

4. De musculo singulari gemino sternum superiacente. p. 320.

5. De tendinum, digitos manus sinistrae extendentium, extraordinario numero. p. 321.

6. De intestino coeco et processu vermiculari. p. 324.

Eiusd. de renibus succenturiatis in puero disquisitis notata. p. 327.

Observ. Astronom.

G. Heinsii, Observatio Eclipsis solaris d. $\frac{24. Jul.}{4. Aug.}$ 1739. in Observatorio Imp. Petropolitano habita. p. 333.

Eiusd. Observatio transitus lunae ad Saturnum d. $\frac{20. April}{1. Maii}$ 1740. Petropoli habita. p. 349.

Eiusd. De declinationum syderum determinatione absque exacta elevationis aequatoris cognitione. p. 352.

CLASSIS PRIMA
CONTINENS
MATHEMATICA

Tom. XII.

A

INVE.

MEMORANDUM
ASTORIA

1901

4

1901

INVESTIGATIO CURVARVM QVAE EVOLVTAE SVI SIMILES PRODVCVNT

A. L. Eulero.

§. 1.

In hac differtatione nomini euolutarum aliquanto latiorTab. I.em significationem tribuo, quam vulgo fieri solet, ac non solum eam curuam, ex cuius euolutione data curua nascitur, huius euolutam appello, sed insuper euolutam huius euolutae, similiterque vniuersam curuarum seriem, quarum quaelibet praecedentis est euoluta; interim tamen hoc discrimen in denominatione obseruabo, vt ipsam datae curuae euolutam, quae hoc nomine insigniri consuevit, eius euolutam primam appellem, huius vero euolutam secundam, eamque ex cuius euolutione ista nascitur, tertiam atque ita porro. Sic si datae curuae A euoluta sit curua B, curuae autem B euoluta C, atque huius curuae C euoluta D, huiusque E et ita deinceps, erit mihi respectu curuae A curua B euoluta prima, curua C euoluta secunda, curua D euoluta tertia, E quarta atque ita porro.

§. 2. Hac vocis euolutae significatione praemissa in hac differtatione in eas curuas inquirere constitui, quarum euolutae vel primae vel secundae vel tertiae etc. ipsis sint similes. Quod quidem ad euolutas primas attinet a Viro Clarissimo Prof. Krafft iam est ostensum, praeter spiralem logarithmicam et cycloidem alias non dari curuas, quae cum suis euolutis primis conueniant; atque idem alia methodo hic sum demonstraturus, quae simul viam praeparet ad eas curuas inuestigandas, quae similes sint suis euo-

4 INVESTIGATIO CURVAR. QVAE EVOLVTAE

lutis vel secundis vel tertiis, etc. Neque vero in hoc negotio viam simplicissimam sum secuturus, quae facillime ad cognitionem curvarum quaesitarum manuducat; sed praecipue mihi propositum est relationem inter arcum curvae et respondentem radium curvedinis inuestigare, quae etsi differentialibus altiorum graduum est inuoluta, quae alia methodo plerumque euitari possunt, tamen magis videtur genuina atque ad institutum accommodata. Praeterea vero non tam sollicitus ero de ipsis his curuis definiendis quam de ratione aequationes differentiales altiorum graduum debito modo tractandi, ex iisque curuis, ad quas pertineant assignandi. Eum scilicet in finem hoc negotium potissimum suscepi, vt varias vias aequationum differentialium altiorum graduum resoluendarum patefacerem, quae in plurimis aliis casibus vtilitatem non contemnendam asferre queant.

Fig. 1.

§. 3. Initium igitur facio ab iis curuis inuestigandis quae similes sint suis euolutis primis, quae quaestio duplicem requirit solutionem. Primo enim, si curva quaesita ponatur AMB , cuius euoluta sit amb , quaestioni satisfiet, si curva amb ita fuerit similis curvae AMB , vt punctum a homologum sit puncto A , b homologum puncto B , atque quoduis punctum m homologum illi puncto M , ex cuius evolutione nascitur. Hoc enim ipsa natura evolutionis et similitudinis postulat, si enim punctum a homologum fuerit puncto A , atque curva amb similis curvae AMB : arcui cuius AM similis erit arcus am , qui est aequae amplus; hoc est qui ductis normalibus ad curuas AN , MN , an , mn , angulum complectitur anm aequalem angulo ANM : haec vero aequalitas locum habet, si normalis MN producta tangat curuam am in m , seu m fuerit

cen-

centrum circuli osculantis curuam AMB in M . Cum igitur quaestionem hoc modo considerando quaelibet curuae AMB portio similis sit sui euolutae, hanc quaestionis partem ita restringi conueniet, vt in ea quaerantur curuae, quae suis euolutis sint *directe* similes, hocque modo istam partem quaestionis ab altera parte distinguo, qua curuae quaeruntur, quae suis euolutis *inuerse* sint similes.

§. 4. Inuersam autem similitudinem, qua alter quaestionis casus continetur, ita animo repraesentari oportet. Curua scilicet AMB ita similis esse potest suae euolutae bma , vt modo inuerso punctum b , quod ratione euolutionis puncto A respondet homologum sit alteri extremitati B , punctum a ratione euolutionis puncto B respondens homologum puncto A ; ideoque curua tota $ameb$ similis curuae $AEMB$. Quare si ducantur normales AC, BC, ac et bc , erit primo ex euolutionis quidem natura $\text{ang. } bca = \text{ang. } ACB$, deinde $AC:BC = ac:bc$. Ducatur nunc in puncto quocunque M radius osculi Mm euolutam in m tangens, erit punctum m ita comparatum vt normalis mn cum bc producta angulum constituat aequalem angulo ANM , ex quo inter puncta M et m ista relatio intercedet, vt summa angulorum $ANM + anm$ quos normales in M et m cum axibus AC et ac constituunt perpetuo aequalis sit angulo ACB . Quodsi ergo in curua ab capiatur punctum μ homologum ipsi M , et ad μ normalis ducatur $\mu\nu$: erit summa angulorum $av\mu + anm = acb$. Dabitur igitur casus, quo duo puncta m et μ conueniunt puta in e , id quod accidit, vbi angulus afe est semissis anguli ACB , hocque punctum e

Fig. 2.

6 INVESTIGATIO CURVAR. QVAE EVOLVTAE

erit homologum ipsi puncto E cui ratione evolutionis respondet.

§. 5. Notatis itaque in vtraque curua punctis E et e, quae simul ratione similitudinis sunt homologa, atque ratione evolutionis sibi mutuo respondent, reliqua puncta homologa omnia ratione evolutionis a se inuicem discrepabunt; ita punctum m ratione evolutionis respondet in curua A MB illi puncto M quod homologum est puncto μ , amboque puncta m et μ vtrinque circa punctum fixum e ita erunt disposita, vt ductis normalibus $\mu\nu$ et mn summa angulorum $anm + av\mu$ aequalis sit angulo acb , vel duplo angulo afe . Quare si normales $\mu\nu$ et mn producantur, donec concurrant cum normali fixa ef producta in p et r, erunt anguli mre et μpe aequales, arcusque em et e μ aequae ampli, eam huic vocabulo significationem tribuendo, qua vsus est Celeb. Bernoullius in dissertatione de motu reptorio: atque haec est proprietas binorum quorumque punctorum m et μ in euoluta, quorum alterum ex alterius puncto homologo per evolutionem nascitur, haecque proprietas non solum communis est euolutis primis sed etiam secundis, tertiis et omnibus sequentibus.

§. 6. Si ergo quaestio de curua inuenienda proponatur, quae similis sit cuicumque euolutae, ea quaestio bipartito est tractanda, primo enim ea curua debet definirī, quae suae euolutae designatae directe sit similis, hoc est cuius singula puncta ratione evolutionis in euoluta generent puncta homologa. In altera vero solutionis parte in eas curuas erit inquirendum, quae similes sint suis euolutis ordine inuerso, hoc est, quarum singula puncta non generent
sibi

sibi homologa per euolutionem. Notandum autem est binorum horum casuum posteriorem ad priorem reduci, nam si curua *AMB* euolutam habeat *bma* sibi inuerse similem, eius euoluta secunda eidem erit directe similis; si enim punctum *M* generet in euoluta prima punctum *m* sibi non homologum, idem in euoluta secunda generabit punctum sibi homologum. Simili modo, quae curua habet euolutam secundam sibi similem inuerse, eadem habebit euolutam quartam sibi directe similem; similiterque erit comparata ratio euolutarum reliquorum graduum.

Fig. 2.

§. 7. Antequam autem solutionem horum problematum aggrediar, generalem nexum, quem quaeuis curua cum suis euolutis cuiusque ordinis tenet, considerasse iuuabit. Sit igitur proposita curua quaecunque *AM* cuius euoluta prima fit *BN*, secunda euoluta *CP*, tertia *DQ*, quarta *ER* et ita porro; erunt ex natura euolutionis omnes arcus *AM*, *BN*, *CP*, *DQ*, ect. aequae ampli. Quare si in ipsa curua proposita *AM* ponatur arcus $AM = s$; et radius osculi $MN = r$; erit pro euoluta prima *BN* arcus $BN = a + r$ prout radius osculi *MN* recedendo a puncto *A* vel crescit vel decrescit: secundum autem figuram est curua $BN = a + r$. Ob aequalem autem amplitudinem est euolutae primae radius osculi $NP = \frac{rdr}{ds}$ hinc porro euolutae secundae *CP* est arcus $CP = b - \frac{rdr}{ds}$ siquidem figuram sequamur: eiusdemque radius osculi $PQ = -\frac{r}{ds}d.\frac{rdr}{ds}$. Euolutae itaque tertiae arcus *DQ* est $= c + \frac{r}{ds}d.\frac{rdr}{ds}$, eiusque radius osculi $QR = \frac{r}{ds}d.\frac{r}{ds}d.\frac{rdr}{ds}$. Simili modo euolutae quartae *ER* est arcus $ER = e + \frac{r}{ds}d.\frac{r}{ds}d.\frac{rdr}{ds}$ atque eiusdem radius osculi $= \frac{r}{ds}d.\frac{r}{ds}d.\frac{r}{ds}d.\frac{rdr}{ds}$, hocque pacto

Fig. 3.

cto pro qualibet datae curuae euoluta facile erit tum arcum ratione evolutionis dato arcui s in data curua respondentem assignare, tum etiam radium osculi; hae vero singulae expressiones tam affirmatiue sunt accipiendae quam, negatiue, siquidem solutiones problematum proponendorum lauisime patentes desideramus.

§. 8. Proponatur igitur ex isto quaestionum genere problema primum, quod ita se habet

Fig. 1. *Inuenire curuam AMB quae suae euolutae primae abm directe sit similis.*

Ponatur pro curua quaesita AMB arcus ad libitum assumtus $AM = s$, et radius osculi in puncto $M = r$, crescantque radii osculi ab A versus B recedendo, qua quidem conditione amplitudo problematis non restringitur, cum initium A , a quo arcus AM computantur vbi libuerit, accipi queat. Sit radius osculi in A seu $Aa = a$, et quia curua amb directe similis esse debet curuae AMB , erit arcus $am = ns$ et radius osculi euolutae in $m = ns$. Hanc ob rem ex natura evolutionis erit vel $a + ns = r$ vel $nr = \frac{r \cdot dr}{ds}$, quae ambae aequationes congruunt. Erit ergo pro curua quaesita AM haec aequatio $s = \frac{r-a}{n}$; et quia arcus data quantitate augeri diminuiue potest ob initium A arbitrarium, erit $s = \frac{r}{n}$ seu $r = ns$; quae aequatio exprimit naturam curuae, quae euolutam habet sui similem, existente similitudinis ratione vt $1 : n$, haec scilicet ratio exprimit rationem linearum ad curuam quaesitam pertinentium ad lineas homologas in euoluta.

§. 9. Quoniam autem ex aequatione, quae datur inter arcum et radium osculi, natura curuae non distincte perspicitur, etiamsi ex tali aequatione immediate curuae
con-

Fig. 4.

constructio deduci queat, eliciamus ex aequatione inuenta $r = ns$ aequationem inter coordinatas orthogonales $AP = x$ et $PM = y$ pro eadem curua quaesita AMB . Quum vero positus sit arcus $AM = s$, erit $dx^2 + dy^2 = ds^2$; atque si fiat $dx = p ds$ et $dy = ds \sqrt{1 - pp}$ erit curuae radius osculi $r = \frac{ds \sqrt{1 - pp}}{dp}$. Hac itaque substitutione facta ista emergit aequatio $\frac{ds \sqrt{1 - pp}}{dp} = ns$ seu $\frac{ndp}{\sqrt{1 - pp}} = \frac{ds}{s}$ cuius integrale est $nA \sin. p = l \frac{s}{a}$, seu $p = \sin. A \frac{1}{n} l \frac{s}{a}$, vnde fit $\sqrt{1 - pp} = \cos. A \frac{1}{n} l \frac{s}{a}$. Quapropter nanciscimur $dx = ds \sin. A \frac{1}{n} l \frac{s}{a}$ et $dy = ds \cos. A \frac{1}{n} l \frac{s}{a}$.

§. 10. Ad has aequationes denuo integrandas sequens, notandum est lemma, quod in solutionibus sequentium problematum maximum afferet subsidium. Est scilicet:

$$\int ds \sin. A \cdot \int \frac{ds}{\sqrt{(\alpha + \beta ss)}} = \frac{\beta s}{1 + \beta} \sin. A \cdot \int \frac{ds}{\sqrt{(\alpha + \beta ss)}} - \frac{\sqrt{(\alpha + \beta s^2)}}{1 + \beta} \cos. A \cdot \int \frac{ds}{\sqrt{(\alpha + \beta ss)}}$$

atque

$$\int ds \cos. A \cdot \int \frac{ds}{\sqrt{(\alpha + \beta ss)}} = \frac{\beta s}{1 + \beta} \cos. A \cdot \int \frac{ds}{\sqrt{(\alpha + \beta ss)}} + \frac{\sqrt{(\alpha + \beta s^2)}}{1 + \beta} \sin. A \cdot \int \frac{ds}{\sqrt{(\alpha + \beta ss)}}$$

quae formulae vsum habent solo excepto casu, quo est $\beta = -1$. Hoc autem casu, quia est $\int \frac{ds}{\sqrt{(\alpha - ss)}} = A \sin. \frac{s}{\sqrt{\alpha}}$, erit $\sin. A \cdot \int \frac{ds}{\sqrt{(\alpha - ss)}} = \frac{s}{\sqrt{\alpha}}$; hincque $\int ds \sin. A \cdot \int \frac{ds}{\sqrt{(\alpha - ss)}} = \frac{ss}{2\sqrt{\alpha}}$, et $\int ds \cos. A \cdot \int \frac{ds}{\sqrt{(\alpha - ss)}} = \int \frac{ds}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{(\alpha - ss)} = \frac{s\sqrt{(\alpha - ss)}}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{\alpha}}{2} A \cos. \frac{s}{\sqrt{\alpha}}$.

§. 11. Quia nunc in nostro casu est $\frac{1}{n} l \frac{s}{a} = \int \frac{ds}{ns}$ erit lemmate ad hunc casum accommodando, $\alpha = 0$, $\beta = nn$, quibus valoribus substitutis fit $x = \int ds \sin. A \cdot \int \frac{ds}{ns} =$

$\frac{nns}{1+n^2}$ fin. A. $\frac{1}{n} l \frac{s}{a} - \frac{ns}{1+n^2}$ cof. A. $\frac{1}{n} l \frac{s}{a}$ atque $y = \int ds$
 cof. A. $\frac{1}{n} l \frac{s}{a} = \frac{nns}{1+n^2}$ cof. A. $\frac{1}{n} l \frac{s}{a} + \frac{ns}{1+n^2}$ fin. A. $\frac{1}{n} l \frac{s}{a}$:
 vbi in integrationibus nouis constantibus addendis non est
 opus, quia natura curuae non mutatur, quacunque quan-
 titate coordinatae siue augeantur siue diminuuntur. Ex his
 autem binis expressiõibus, quibus coordinatae per eandem
 quantitatem s definiuntur, curua desiderata ope logarith-
 morum et circuli poterit construi; interim tamen ista con-
 structio satis est operosa, aliaeque complures faciliores
 hinc deduci possunt.

§. 12. Vt autem ipsam curuam propius cognosca-
 mus, sumamus aequationes inuentas pro coordinatis ortho-
 gonalibus:

$$x = \frac{nns}{1+n^2} \text{fin. A. } \frac{1}{n} l \frac{s}{a} - \frac{ns}{1+n^2} \text{cof. A. } \frac{1}{n} l \frac{s}{a}$$

$$y = \frac{nns}{1+n^2} \text{cof. A. } \frac{1}{n} l \frac{s}{a} + \frac{ns}{1+n^2} \text{fin. A. } \frac{1}{n} l \frac{s}{a}$$

ex quibus si sinus et cosinus arcus $\frac{1}{n} l \frac{s}{a}$ eliminentur, prodit
 ista aequatio $xx + yy = \frac{n^2 ss + n^2 ns^2}{(1+n^2)^2} = \frac{n^2 ss}{1+n^2}$, in qua $xx + yy$
 exhibet quadratum chordae arcum s subtendentis; vnde
 curua quaesita hanc habet proprietatem, vt omnes arcus
 ab initio A sumti ad suas chordas datam teneant rationem,
 ex qua iam sponte sequitur curuam esse spiralem logarith-
 micam.

§. 13. Quoniam vero iam supra erat $dx = ds \text{ fin. A. } \frac{1}{n} l \frac{s}{a}$
 et $dy = ds \text{ cof. A. } \frac{1}{n} l \frac{s}{a}$, erit fin. A. $\frac{1}{n} l \frac{s}{a} = \frac{dx}{ds}$ et cof.
 A. $\frac{1}{n} l \frac{s}{a} = \frac{dy}{ds}$, ex quibus valoribus in aequationibus integra-
 tis substitutis emergent sequentes aequationes:

$$x ds = \frac{nns dx - ns dy}{1+n^2} \text{ et } y ds = \frac{nns dy + ns dx}{n^2 + 1}$$

quarum illa per hanc
 diuisa praebet istam $\frac{x}{y} = \frac{ndx - dy}{ndy + dx}$ seu $nx dy + x dx = ny dx - y dy$
 quae

quae adeo inter solas coordinatas, x et y continetur. Cum igitur sit $n(y dx - x dy) = x dx + y dy$, diuidatur per $xx + yy$, quo factò integrale aequationis erit $n A \text{ tang. } \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{a}$: ex qua admodum breuis et facilis constructio curuae quaesitae consequitur ope logarithmicae et circuli, quae eadem autem mox alia via eruetur. Interim ex hac constructione natura curuae quaesitae, qua ea est spiralis logarithmica, non difficulter colligitur.

§. 14. Quodsi autem aequationem $xx + yy = \frac{mss}{1+nn}$ euoluere velimus, facile intelligitur id commodissime fieri per relationem distantiae cuiusque puncti M a puncto fixo A ad perpendicularum quod ex A in tangentem in M demittitur. Sit igitur AM curua quaesita, et ducta $AM = \sqrt{(xx + yy)} = z$, demittatur ex A in tangentem MT perpendicularum AT , sitque $AT = p$ et $MT = t = \sqrt{(zz - pp)}$ erit ob triangula Mmn , MAT similia, et $mn = dz$, elementum arcus $Mm = ds = \frac{z dz}{t}$. At aequatio inuenta praebet $ss = \frac{(1+nn)zz}{nn}$ et $s = \frac{z}{n} \sqrt{(1+nn)}$ hincque $ds = \frac{dz}{n} \sqrt{(1+nn)} = \frac{z dz}{t}$ vbi, cum commode accidat vt per dz diuidi queat aequatio, habetur statim aequatio in terminis finitis $t \sqrt{(1+nn)} = nz$ seu $\frac{t}{z} = \frac{n}{\sqrt{(1+nn)}}$ et $\frac{p}{z} = \frac{1}{\sqrt{(1+nn)}}$. Cognoscitur igitur angulum TMA , quem curuae tangens cum recta AM constituit vbique esse eundem ideoquae constantem, quo ipso logarithmica spiralis solet definiri: anguli vero huius constantis AMT tangens est $= \frac{p}{t} = \frac{1}{n}$.

fig. 5.

§. 15: Quodsi ad curuam construendam centro A describamus circulum arbitrarii radii $AF = r$ arcumque a puncto fixo F sumtum, FS ponamus $= q$; erit ob $Ss = dq$, $Mn = zdq$, et $dz = zdq = t : p = n : 1$: vnde obtinetur dz

B 2

= n

$=nzdq$ et $ndq = \frac{dz}{z}$, quae integrata dat $nq = l_a^z$ ex qua aequatione intelligitur, quanta sit recta AM, quae per quodque punctum S traducitur, haecque simul est constructio, quae ex aequatione integrali §. 13. data consequitur: arcus scilicet circuli FS exprimunt logarithmos radiorum AM, hancque ob causam ista curua vocata est logarithmica spiralis.

Fig. 2.

§. 16. Progrediamur ad problema secundum, quod ita se habet:

Inuenire curuam AMB quae suae evolutae bma inuerse sit similis.

Ad curuam AB ducatur primum is radius osculi Ee, qui euolutam in puncto e homologo ipsi E tangat, sitque hic radius osculi $Ee = a$; a puncto nunc hoc E computetur arcus $EM = s$, et ponatur radius osculi $Mm = r$, qui euolutam tanget in m, eritque arcus $em = r - a$. Iam in euoluta sumatur punctum μ homologum puncto M, positaque ratione similitudinis curuae quaesitae ad suam euolutam $= 1:n$, erit arcus $e\mu = ns$ et radius osculi in $\mu = nr$. Nunc ex μ ducatur tangens μR quae simul erit radius osculi curuae AMB in R, puncto ipsi m homologo. Ponatur arcus $ER = S$ et radius osculi $R\mu = R$, erit $e\mu = a - R$; atque $em = nS$ et radius osculi in m $= nr$.

§. 17. Hinc itaque obtinentur sequentes aequationes; prima scilicet $em = r - a = nS$, secunda $e\mu = a - R = ns$, ex quibus elicitur $S = \frac{r-a}{n}$, et $R = a - nS$. At quia arcus EM et ER sunt aequae ampli, erit $\frac{ds}{R} = \frac{dr}{na - nns} = \frac{ds}{r}$, hincque $rds = nads - nnsds$ et integrando $rr = 2nas - nns + aa$ eiusmodi addita constante vt posito $s = 0$ fiat

$$r = a,$$

$r = a$, vti assumimus. Ponamus autem ns loco $ns - a$, seu initium, a quo arcus mensuramus, mutemus in alium locum B existente $BE = \frac{a}{n}$, quo pacto natura curuae nil mutatur, habebimus $rr = 2aa - nns$, et $r = \sqrt{2aa - nns}$. Ex qua aequatione si curua fuerit determinata, punctum E circa quod arcus aequae ampli sunt abscindendi, vt prodeat curua suae euoluae inuerse similis, ibi est sumendum vbi fit radius osculi $r = a$: id quod eueniet si ab initio nunc capto abscindamus arcum $s = \frac{a}{n}$.

Fig. 4.

§. 18. Quaeramus aequationem inter coordinatas orthogonales $AP = x$, $PM = y$, sitque $dx = pds$ et $dy = ds \sqrt{(1 - pp)}$ erit radius osculi in M, scilicet $r = \frac{ds\sqrt{(1 - pp)}}{dp}$, vnde obtinetur ista aequatio $\frac{dp}{\sqrt{(1 - pp)}} = \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nns)}}$ quae integrata dat $A \sin. p = \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nns)}} = \frac{1}{n} A \sin. \frac{ns}{a\sqrt{2}}$, si quidem axem AP in A ad curuam normalem ponimus. Nisi autem sit $n = 1$, quo casu euoluta curuae quaesitae non solum sit similis sed etiam aequalis, praestabit formam $\int \frac{ds}{\sqrt{(2a1 - nns)}}$ retinere, ne calculus multiplicatione arcuum implicetur. Si enim expressionem $\frac{1}{n} A \sin. \frac{ns}{a\sqrt{2}}$ sumeremus, foret $p = \sin. A \cdot \frac{1}{n} A \sin. \frac{ns}{a\sqrt{2}}$ quae expressio, nisi $\frac{1}{n}$ sit numerus integer ad computum accommodate exhiberi non potest.

§. 19. Euoluamus igitur primum casum quo $n = 1$ seu curuam quaeramus, quae suae euoluae primae inuerse similis sit et aequalis: erit igitur pro hac curua $A \sin. p = A \sin. \frac{s}{a\sqrt{2}}$ seu $p = \frac{s}{a\sqrt{2}}$ et $\sqrt{(1 - pp)} = \frac{\sqrt{(2aa - ss)}}{a\sqrt{2}}$. Hinc itaque obtinetur $dx = pds = \frac{sd s}{a\sqrt{2}}$ atque integrando $2ax\sqrt{2} = ss$, quae aequatio indicat curuam quaesitam esse cycloidem vulgarem, minimam curuedinem in puncto A et rectam AP pro dia-

metro habentem. Punctum vero E in curva hac, ubi radius osculi $= a$ respondet abscissae $x = \frac{a}{2\sqrt{2}}$, quod punctum in centrum circuli generatoris incidit; est enim diameter circuli generatoris $= \frac{a}{\sqrt{2}}$. Satisfacit igitur cyclois ordinaria huic quaestioni eo quidem modo, qui iam pridem constat, atque inter praecipuas cycloidis proprietates referri solet.

§. 20. Ad curvas iam definiendas quae suis evolutis primis in verso modo sint saltem similes, utamur hac aequatione $p = \sin. A \cdot \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa + 1^2ss)}}$, ex qua fluit ista $\sqrt{(1 - pp)} = \cos. A \cdot \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}}$. Erit itaque $dx = ds \sin. A \cdot \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}}$ et $dy = ds \cos. A \cdot \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}}$ quarum aequationum integralia per lemma §. 10. datum reperiuntur $x = \frac{nns}{nn-1} \sin. A \cdot \int \frac{ds}{\sqrt{(2a^2 - n^2s^2)}} + \frac{\sqrt{(2a^2 - n^2s^2)}}{nn-1} \cos. A \cdot \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}}$ et $y = \frac{nns}{nn-1} \cos. A \cdot \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}}$ $-\frac{\sqrt{(2aa - n^2ss)}}{nn-1} \sin. A \cdot \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}}$. Cum igitur sit $\int \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}} = \frac{1}{n} A. \sin. \frac{ns}{a\sqrt{2}}$, intelligitur quoties fuerit n numerus rationalis, solo excepto casu $n = 1$, valores coordinatarum x et y algebraice per s posse exhiberi, indeque curvam quaesitam esse algebraicam.

§. 21. Si utriusque expressionis quadrata inuicem addantur, prodibit haec aequatio $xx + yy = \frac{n^2ss + 2aa - nnss}{(nn-1)^2}$; ex qua commode elicitur aequatio inter distantias cuiusvis puncti M a centro fixo C et perpendicularum CT, quod ex C in tangentem in M demittitur. Posito enim $CM = \sqrt{(xx + yy)} = z$, $CT = p$ et $MT = t = \sqrt{(zz - pp)}$ erit $ds = \frac{zdz}{t}$. Natura autem curvae exprimitur hac aequatione $zz = \frac{2aa}{(nn-1)^2} + \frac{nns}{nn-1}$, quae praebet $s = \frac{1}{n} \sqrt{((nn$

Fig. 6.

$((nn-1)zz - \frac{2aa}{nn-1})$ et $ds = \frac{(nn-1)zdz}{n\sqrt{(nn-1)zz - \frac{2aa}{nn-1}}} = \frac{zdz}{t} =$
 $\frac{zdz}{\sqrt{(zz - pp)}}$ quae diuisa per zdz et quadrata, suppeditat
 hanc $(nn-1)^2 zz - (nn-1)^2 pp = nn(nn-1)zz - \frac{2nnaa}{nn-1}$
 seu $p = \sqrt{(\frac{2nnaa}{(nn-1)^2} - \frac{zz}{nn-1})}$ et $t = n\sqrt{(\frac{zz}{nn-1} - \frac{2aa}{(nn-1)^2})}$
 Ducto autem ad M radio osculi $MR = r$, ob $ns = \sqrt{$
 $(nn-1)zz - \frac{2aa}{nn-1})$, erit $r = (nn-1)p$, et $s = \frac{(nn-1)t}{nn}$

§. 22. Initium ergo curuae, a quo arcus aestimantur incidit in punctum B, vbi recta CB ad curuam est normalis seu $t = 0$, eritque recta $BC = \frac{a\sqrt{2}}{nn-1}$. Hoc igitur puncto B notato erit quouis arcus $BM = s = \frac{(nn-1)t}{nn}$ seu erit $BM : MT = nn-1 : nn$; et cum sit radius osculi $MR = r = (nn-1)p$, erit $MR : CT = nn-1 : 1$. Radius osculi itaque euanescet in puncto A, cuius tangens per C transit, eritque $AC = \frac{na\sqrt{2}}{nn-1}$. Describatur centro C radio $AC = \frac{na\sqrt{2}}{nn-1}$ circulus, et ponatur breuitatis gratia $\frac{na\sqrt{2}}{nn-1} = c$, seu $a = \frac{(nn-1)c}{n\sqrt{2}}$, erit $BD = c - \frac{c}{n} = \frac{(n-1)c}{n}$ ergo $CD : BD = n : n-1$. Porro in radium osculi productum demittatur perpendicularum $CQ = t = n\sqrt{(\frac{zz}{nn-1} - \frac{2aa}{(nn-1)^2})}$ erit ducto radio CN spatium $NQ = n\sqrt{(\frac{2nnaa}{(nn-1)^2} - \frac{zz}{nn-1})} = np = n$. MQ hincque $MN = (n-1)p$. Quare cum sit $MR = r = (nn-1)p$, erit $MR : MN = n+1 : 1$ quia porro est $NQ : MN = n : n-1 = CN : VN$ fiet $VN = \frac{(n-1)c}{n} = BD$: ex quo punctum M est in peripheria circuli tangentis circulum AD in N, cuius diameter est $NV = BD$.

§. 23. Ex his ergo proprietatibus manifesto consequitur curuam inuentam esse hypocycloidem ABa , genitam reuolutione circuli diametrum habentis $BD = \frac{(n-1)c}{n} = \frac{a\sqrt{2}}{n+1}$, super concauitate circuli maioris AD semidiametrum habentis $CD = c = \frac{(n\sqrt{2})}{n-1}$; si quidem fuerit numerus n vnitatem maior. At si n fuerit vnitatem minor, curua satisfaciens erit Epicyclois ob valorem ipsius $BD = \frac{(n-1)c}{n}$ negativum, quae generetur reuolutione circuli super parte conuexa circuli ADC , existente ratione diametri circuli reuoluentis ad semidiametrum circuli quiescentis vt $1 - n$ ad n : ex quo simul intelligitur; quoties fuerit n numerus rationalis vnitatem excepta, curuam satisfaciendam esse algebraicam.

§. 24. Pro hypocycloide igitur seu casu, quo $n > 1$, positis abscissa $CP = x$, applicata $PM = y$, et arcu $BM = s$ habetur ista aequatio $xx + yy = \frac{2aa}{(nn-1)^2} + \frac{nnss}{nn-1}$. At si ponatur abscissa $BP = u$, erit $x = u + \frac{a\sqrt{2}}{nn-1}$, atque inter u, y et s haec habebitur aequatio $yy + uu + \frac{2au\sqrt{2}}{nn-1} = \frac{nnss}{nn-1}$ seu $nnss = 2au\sqrt{2} + (nn-1)(uu + yy)$, ex qua sponte patet, casu $n = 1$ prodire cycloidem ordinariam, fit enim $ss = 2au\sqrt{2}$. Quodsi autem semidiameter circuli quiescentis CD ponatur $= c$, et diameter circuli voluti $BD = b$, erit $a = \frac{(nn-1)c}{n\sqrt{2}}$ et $b = \frac{(n-1)c}{n}$ erit $n = \frac{c}{c-b}$ et $a = \frac{2bc-bb}{(c-b)\sqrt{2}}$; vnde pro hypocycloide ABa haec oritur aequatio $ss = \frac{2b(c-b)(2c-b)u}{cc} + \frac{b(2c-b)(uu+yy)}{cc}$. Pro epicycloide vero ex iisdem circulis nata fit u negativum, atque ista habebitur aequatio $ss = \frac{2b(c+b)(2c+b)u}{cc} - \frac{b(2c+b)(uu+yy)}{cc}$.

§. 25.

§. 25. Vt autem aequationem inter coordinatas CP = x et PM = y obtineamus differentialem, saltem in qua non insit arcus s, ea ex aequationibus §. 20. datis eruetur: cum enim sit fin. A. $\int \frac{ds}{\sqrt{(2aa-nns)}} = \frac{dx}{as}$ et cosf. A. $\int \frac{ds}{\sqrt{(2aa-nns)}} = \frac{dy}{as}$, erit $x ds = \frac{nns dx + dy \sqrt{(2aa-nns)}}{nn-1}$ et $y ds = \frac{nns dy - dx \sqrt{(2aa-nns)}}{nn-1}$ ex quibus eliminato arcu s, resultat sequens aequatio differentialis $\frac{2nnaads^2}{(nn-1)^2} = cc ds^2 = nn(x dy - y dx)^2 + (xdx + ydy)^2 = cc dx^2 + cc dy^2$ inter x et y tantum. Ad quam aequationem tractandam ponamus $\frac{y}{x} = v$ et $\sqrt{(xx + yy)} = z$, seu $x = \frac{z}{\sqrt{(1+v^2)}}$ et $y = \frac{vz}{\sqrt{(1+v^2)}}$ erit $ds^2 = dz^2 + \frac{z^2 dv^2}{(1+v^2)^2}$; hisque substitutionibus factis pervenitur ad hanc aequationem $c^2 dz^2 + \frac{ccz^2 dv^2}{(1+v^2)^2} = \frac{nnz^4 dv^2}{(1+v^2)^2} + z z dz^2$, quae porro reducitur ad hanc: $\frac{dv}{1+v^2} = \frac{dz \sqrt{(cc-zz)}}{z \sqrt{(nnzz-cc)}}$. Ponatur porro $\frac{\sqrt{(nnzz-cc)}}{\sqrt{(cc-zz)}} = t$, seu $z = \frac{c \sqrt{(1+t^2)}}{\sqrt{(nn+t^2)}}$ fiet $\frac{dv}{1+v^2} = \frac{dt}{1+t^2} - \frac{dt}{nn+t^2}$: atque integrando A tang v = A tang. t - $\frac{1}{n}$ A tang $\frac{t}{n}$ seu n A tang. $\frac{t-v}{1+t^2} = A$ tang. $\frac{t}{n}$; quae restitutis prioribus valoribus transmutatur in hanc n A tang. $\frac{x \sqrt{(nnzz-cc)} - y \sqrt{(cc-zz)}}{x \sqrt{(cc-zz)} + y \sqrt{(nnzz-cc)}} = A$ tang. $\frac{\sqrt{(nnzz-cc)}}{n \sqrt{(cc-cc)}}$ quae quoties n est numerus rationalis, fit algebraica. Cum autem his expressionibus ad figuram relatis sit $p = \frac{\sqrt{(cc-zz)}}{\sqrt{(nn-1)}}$ et CQ = MT = t = $\frac{\sqrt{(nnzz-cc)}}{\sqrt{(nn-1)}}$, itemque NQ = $\frac{n \sqrt{(cc-zz)}}{\sqrt{(nn-1)}}$, erit n A tang. $\frac{tx - py}{px + ty} = A$ tang. $\frac{t}{NQ}$ indeque n ang. BCT = ang. TCV; ex quo erit ang. TCV : ang. TCB = n : 1 seu ang. TCV : ang. BCV = n : n - 1 = CD : BD. atque hinc quoque oritur BC : BD = ang. BCT : ang. BCV = arc. DX : DN. quae omnia cum receptis epicycloidum et hypocycloidum proprietatibus apprime conueniunt.

§. 26. Sic itaque definitae sunt omnes curuae, quae suis euolutis primis tam directe quam inuerse sint similes, priori scilicet casu satisfaciunt omnes spirales logarithmicae, posteriori vero omnis generis cycloides, quae communiter tam epicycloidum quam hypocycloidum nomine comprehendendi solent. Manifestum autem est has easdem curuas omnibus quaestionibus sequentibus satisfacere debere, quibus quaeruntur curuae, quae sint similes suis euolutis altioris cuiusdam gradus, siue directe siue inuerse. Logarithmicae enim spirales suis euolutis cuiuscunque ordinis directe sunt similes, quia omnes euolutae manent logarithmicae spirales. Deinde omnes cycloides, quae suis euolutis primis inuerse similes esse repertae sunt, suis euolutis secundis, quartis, sextis omnibusque ordine paribus directe erunt similes: euolutis vero tertiis, quintis, septimis omnibusque ordine imparibus similes erunt inuerse. His vero iisdem quaestionibus innumerabiles aliae satisficient curuae, eoque plures, quo ad vltiores ordines procedatur: quarum curvarum satisficientium vt plures species detegamus, quaestionem nostram ad euolutas secundas accommodatam pertractabimus.

§. 27. Ad cuius igitur inuestigandas, quae similes sint suis euolutis secundis, quaestio pro similitudine directa et inuerse bipartienda est: vnde primum hoc nobis problema erit resoluendum.

Fig. 7. *Inuenire curuas quae suis euolutis secundis directe sint similes.*

Sit AM eiusmodi curua, quae problemati satisficiat, cuius initium sumatur in puncto A , a quo versus M recedendo radii osculi crescant. Sit igitur BN huius curuae euoluta,

luta, quae vel ita erit comparata, vt ab B ad N radii osculi crescant, sicuti figura repraesentat, vel decrescant, ex quo huius problematis duplex nascitur solutio. Ad priorem igitur, cui figura est accommodata, absoluendam ponatur curuae quaesitae AM arcus $AM = s$, radius osculi $MN = r$; erit eius euoluae BN arcus $BN = r - a$; radius osculi $Nm = \frac{rdr}{ds}$; atque euoluae secundae arcus $am = \frac{rdr}{ds} - b$; eiusque in m radius osculi $= \frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$.

§. 28. Cum igitur curua am similis esse debeat directe curuae AM, erit eius arcus $am = ns$, et radius osculi $= nr$, vnde duplex nascitur aequatio $\frac{rdr}{ds} - b = ns$ et $nr = \frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$, quarum vtraque eodem redit. Sumamus itaque aequationem $\frac{rdr}{ds} = ns + b$, quae ob initium A arbitrium transit in hanc $\frac{rdr}{ds} = ns$, quae integrata dat $rr = nss + aa$, ita vt curuae quaesitae AM radius osculi in initio A sit $= a$: circa hocque punctum A curua vtrinque habebit arcus similes et aequales. Ceterum apparet, si fiat $a = 0$, tum prodire aequationem pro spirali logarithmica, quam huic casui satis facere perspicuum est. Praeterea etiam hoc notari oportet in aequatione $rr = nss + aa$ constantem aa , quae per integrationem est inducta negatiue nullo pacto accipi posse, ne radius osculi r vsquam fiat imaginarius: omnis enim aequatio, quae inter arcum et radium osculi exhibetur, ita debet esse comparata, vt cuique arcui radius osculi realis respondeat, nisi forte curua alicubi in puncto quodam terminetur seu retrogrediatur, tum enim si curuae vltra id punctum constans longitudo addita concipiatur, per id intervallum radius osculi debet esse imaginarius.

fig. 4.

§. 29. Quoniam itaque habemus hanc aequationem $rr = nss + aa$, erit $r = \sqrt{aa + nss}$. Consideremus nunc curuam quaesitam ad axem AP relatum, sitque abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$, et ponatur $dx = pds$ et $dy = ds\sqrt{1 - pp}$ erit radius osculi $r = \frac{ds\sqrt{1 - pp}}{dp} = \sqrt{aa + nss}$: hincque $\frac{dp}{\sqrt{1 - pp}} = \frac{ds}{\sqrt{aa + nss}}$. Quodsi autem huius curuae euolutae primae arcus ponatur = S et radius osculi = R, erit $S = r$, et $R = \frac{rdr}{ds} = ns$ ex quo pro euoluta prima ista emergit aequatio $RR = nSS - naa$, quae ergo curua in puncto quopiam terminabitur, ultra quod curuae adiecta est longitudo = a. Quare si in aequatione pro curua quaesita ponamus -naa loco aa simul prodibit aequatio pro euoluta prima, quae adeo pariter problemati satisfaciet, suamque euolutam secundam sibi directe habebit similem.

§. 30. Cum itaque problemati satisfaciat aequatio $\frac{dp}{\sqrt{1 - pp}} = \frac{ds}{\sqrt{aa + nss}}$, in eaque loco aa, quantitatem tam affirmatiuam quam negatiuam accipere liceat, ponamus ab loco aa, ne forma quadrati solum signum affirmatiuum involuere videatur: hincque erit A sin. $p = \int \frac{ds}{\sqrt{aa + nss}}$ et $p = \sin. A \int \frac{ds}{\sqrt{aa + nss}}$ atque $\sqrt{1 - pp} = \cos. A \int \frac{ds}{\sqrt{aa + nss}}$. Quae aequationes si multiplicentur per ds, obtinebitur $dx = ds \sin. A \int \frac{ds}{\sqrt{aa + nss}}$ et $dy = ds \cos. A \int \frac{ds}{\sqrt{aa + nss}}$, quae per lemma §. 10. datum ita integrabuntur, vt sit $x = \frac{ns}{1+n} \sin. A \int \frac{ds}{\sqrt{aa + nss}} = \frac{ns}{1+n} \cos. A \int \frac{ds}{\sqrt{aa + nss}}$ atque $y = \frac{ns}{1+n} \cos. A \int \frac{ds}{\sqrt{aa + nss}} + \frac{\sqrt{aa + nss}}{1+n} \sin. A \int \frac{ds}{\sqrt{aa + nss}}$.

§. 31. Quoniam autem ex aequationibus differentia- libus est sin. A $\int \frac{ds}{\sqrt{aa + nss}} = \frac{dx}{ds}$ atque cos. A $\int \frac{ds}{\sqrt{aa + nss}} = \frac{dy}{ds}$, prodibit his valoribus in aequationibus integratis

substitu-

substituendis $x ds = \frac{ns dx - dy \sqrt{ns s + ab}}{1+n}$ et $y ds = \frac{ns dy + dx \sqrt{ns s + ab}}{1+n}$.
 ex quibus si arcus s eliminetur, sequens inter solas coor-
 dinatas x et y nascitur aequatio $\frac{nabds^2}{(1+n)^2} = n(y dx - x dy)^2 -$
 $(x dx + y dy)^2$, quae quomodo ad separationem atque
 constructionem fit perducenda ex §. 25. intelligi potest.
 Constructio scilicet commodius deducetur ex aequatione
 inter distantias singulorum curvae punctorum a dato puncto
 fixo ceu centro et perpendiculara in tangentes: eiusmodi
 autem aequatio deriuabitur facillime sumendis quadratis co-
 ordinatarum x et y , tum enim prodibit ista aequatio
 $xx + yy = \frac{ab}{(1+n)^2} + \frac{ns s}{1+n}$. seu $s = \sqrt{\left(\frac{(1+n)(xx+yy)}{n} - \frac{ab}{n(1+n)}\right)}$. Pro huius vero curvae euoluta prima aequatio
 simili modo accepta erit $s = \sqrt{\left(\frac{(1+n)(xx+yy)}{n} + \frac{ab}{1+n}\right)}$
 pro euoluta secunda haec $s = \sqrt{\left(\frac{(1+n)(xx+yy)}{n} - \frac{nab}{1+n}\right)}$
 pro euoluta tertia $s = \sqrt{\left(\frac{(1+n)(xx+yy)}{n} + \frac{n^2 ab}{1+n}\right)}$ etc. ex
 quo si habeatur pro prima curua aequatio vel constructio,
 eadem totius seriei euolutarum naturam in se complectetur:
 quarum singulae problemati aequae ac ipsa prima satisfaciet.

§. 32. Referatur itaque curua ad centrum fixum A, in quo ante axis AP terminabatur, ponaturque recta AM = $\sqrt{xx + yy} = z$, perpendicularum in tangentem, AT = p ipsaque tangens MT = $\sqrt{zz - pp} = t$, erit elementum curuae $ds = \frac{z dz}{t}$. At ex praecedente aequatione pro curua nostra inuenta emergit haec $s = \sqrt{\left(\frac{(1+n)zz}{n} - \frac{ab}{n(1+n)}\right)}$, vnde fit $ds = \frac{(1+n)z dz}{\sqrt{n(1+n)zz - \frac{nab}{1+n}}} = \frac{z dz}{t}$: quae cum per $z dz$ diuidi queat, erit $t = \sqrt{\left(\frac{nz z}{1+n} - \frac{nab}{(1+n)^2}\right)} = \frac{s}{1+n}$

Fig. 5.

$\frac{s}{1+n}$; et $p = \sqrt{\left(\frac{zs}{1+n} + \frac{ab}{(1+n)^2}\right)}$. Radius osculi vero r , qui est $= \sqrt{(nss + ab)}$, erit $= \sqrt{\left((1+n)zs + \frac{ab}{1+n}\right)}$ ex quo erit $r = (1+n)p$ et $s = (1+n)t$, quae sunt proprietates notatu dignae pro curua quaesita.

Tab. 1.
fig. 8.

§. 33. Ad figuram curuae inuestigandam habeat primum constans ab valorem affirmatiuum sitque $\frac{ab}{(1+n)^2} = cc$, erit $t = \sqrt{\frac{n}{1+n}(zs - cc)}$ et $p = \sqrt{\frac{1}{1+n}(zs + ncc)}$: vnde perspicitur z necessario maiorem esse debere quam c . Casu autem quo $z = c$ fit $t = 0$, et $p = c$; quare hoc loco ipsa recta AM in curuam erit normalis. Describitur igitur centro C radio $CA = c$ circulus AS , sitque curuae quaesitae initium in A , vbi curua ad radium CA erit normalis, ibique radium osculi habebit $= (1+n)CA$. Iam sumatur curuae punctum quodcumque M , positaque vt ante $CM = z$, $CT = p$ et $MT = t$, erit $p = \sqrt{\frac{1}{1+n}(zs + ncc)}$ et $t = \sqrt{\frac{n}{1+n}(zs - cc)}$, et anguli CMT tangens $= \frac{p}{t} = \sqrt{\frac{zs + ncc}{nzs - ncc}}$; quare crescente distantia z , hic angulus continuo decreset, donec tandem, quando fit $z = \infty$, huius anguli tangens fiat $= \sqrt{\frac{1}{n}}$, vbi curua cum logarithmica spirali confundetur.

§. 34. Vt vero curuae huius commodam constructionem tradamus, ponatur arcus circularis $AS = q$, cuius elementum Ss erit $= dq$, vnde fiet $Mn = \frac{z dq}{c}$, atque $t:p = dz : \frac{z dq}{c}$, ex quo oritur $dq = \frac{c p dz}{z t} = \frac{c dz}{z} \sqrt{\frac{zs + ncc}{nzs - ncc}}$. Ponatur $\sqrt{\frac{nzs - ncc}{zs + ncc}} = u$ erit $z = \frac{ncc(1+uu)}{n-uu}$ et $\frac{dz}{z} = \frac{u du}{1+uu} + \frac{u du}{n-uu}$, hincque $\frac{dq}{c} = \frac{du}{1+uu} + \frac{du}{n-uu}$, cuius integrale est $\frac{q}{c} = A \text{ tang. } u + \frac{1}{2\sqrt{n}} l \frac{\sqrt{n+u}}{\sqrt{n-u}} = A \text{ tang. } \sqrt{\frac{nzs - ncc}{zs + ncc}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} l \frac{\sqrt{(zs + ncc) + \sqrt{(zs - cc)}}}{\sqrt{(zs + ncc) - \sqrt{(zs - cc)}}}$ Sumta igitur prohibita distantia

distantia z eius positio respectu CA ita definietur. Dabitur primo triangulum MCT , cuius anguli MCT tangens erit $= \sqrt{\frac{nz - ncc}{zz + ncc}}$. Deinde hoc triangulum circa C ita erit disponendum, vt angulus ACT fiat $= \frac{1}{2\sqrt{n}}$ $\int \frac{\sqrt{(zz + ncc)} + \sqrt{(zz - cc)}}{\sqrt{(zz + ncc)} - \sqrt{(zz - cc)}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \int \frac{p\sqrt{n} + t}{p\sqrt{n} - t}$. Quodsi ergo fiat $z = \infty$, arcus AS infinite magnus euadet, ac propterea curva AMO infinitis spiris circa C peragendis in infinitum excurreret: ac recta AC erit huius curuae diameter.

§. 35. Sit nunc ab quantitas negatiua, et ponatur $\frac{-nab}{(1+n)^2} = cc$, erit $p = \sqrt{\frac{1}{1+n}(zz - cc)}$ et $t = \sqrt{\frac{1}{1+n}(nzz + cc)}$ vnde perspicuum est z non posse esse $< c$: casu autem quo $z = c$, fit $p = 0$ et $t = c$; ex quo tangens curuae hoc loco per ipsum centrum transibit. Describatur igitur centro C radio $CA = c$ circulus, sitque AMO curua quaesita, quae in A circulo normaliter insitat, ita vt recta AC sit tangens huius curuae in A . Sumto ergo puncto quocunque M , et ex C in tangentem MT demisso perpendicularo CT , erit $CM = z$. $CT = p$ et $MT = t$, atque anguli CMT tangens erit $= \frac{p}{t} = \sqrt{\frac{zz - cc}{nzz + cc}}$. Quare distantia z in infinitum crescente fiet anguli CMT tangens $= \sqrt{\frac{1}{n}}$, ibique curua cum logarithmica spirali confundetur.

Tab. II.
Fig. 1.

§. 36. Constructio huius curuae simili modo perficitur, quo casu praecedente; posito enim arcu circulari $AS = q$, erit $t : p = dz : \frac{z dq}{c}$, vnde fit $dq = \frac{cp dz}{tz} = \frac{cdz}{z} \sqrt{\frac{zz - cc}{nzz + cc}}$. Facta nunc simili substitutione prodibit sequens aequatio integralis $\frac{q}{c} = A \text{ tang. } \sqrt{\frac{nzz + cc}{zz - cc}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \int \frac{\sqrt{n(zz - cc)} + \sqrt{n(zz + cc)}}{\sqrt{(nzz + cc)} - \sqrt{n(zz - cc)}} - A \text{ tang. } \infty$; quae reducitur ad hanc

$$\frac{q}{c} +$$

$\frac{q}{c} + A \text{ tang. } \sqrt{\frac{zz-cc}{nzz+cc}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \int \frac{\sqrt{(nzz+cc)+\sqrt{(nzz-ncc)}}}{\sqrt{(nzz+cc)-\sqrt{(nzz-ncc)}}} \text{ Quod}$
 si ergo longitudo MC pro lubitu accipiatur, super ea formetur triangulum rectangulum CPM , ita vt sit $CP = t = \sqrt{\frac{1}{1+n}(nzz+cc)}$ et $PM = p = \sqrt{\frac{1}{1+n}(zz-cc)}$ quo factò hoc triangulum in talem situm collocetur vt angulus ACP fiat $= \frac{1}{2\sqrt{n}} \int \frac{\sqrt{(nzz+cc)+\sqrt{(nzz-ncc)}}}{\sqrt{(nzz+cc)-\sqrt{(nzz-ncc)}}}$.

Tab. II. §. 37. Cum igitur his duobus casibus solutionis pro-
 fig. 2: blematis pars prior absoluat, accedamus ad alteram partem, in qua euolutae primae BN radii osculi a B ad N pergendo decrescunt. Quare si in curua quaesita ponatur arcus $AM = s$, radius osculi $MN = r$, erit euolutae primae BN arcus $BN = r - a$, radius osculi $Nm = \frac{rdr}{ds}$ hincque pro euoluta secunda arcus $am = b - \frac{rdr}{ds} = ns$; et radius osculi $mn = -\frac{r}{ds} d \cdot \frac{rdr}{ds} = ns$. Ex vtraque aequatione mutato initio A resultat ista $ns ds + r dr = 0$, quae integrata dat $ns s + r r = a a$ seu $r = \sqrt{(a a - ns)}$, quae cum omnino similis fit illi quae supra §. 17. est inuenta, huic casui satisfaciunt epicycloides et hypocycloides omnes. Curuarum itaque, quae suis euolutis secundis directe sunt similes quinque nacti sumus genera; quorum primum omnes spirales logarithmicas complectitur, tum sequentur bina spiraliū genera noua §. §. 33, 35. exposita; reliqua bina genera constituunt epicycloides et hypocycloides.

§. 38. Circa similitudinem euolutarum secundarum restat hoc problema.

Tab. II.
fig. 3.

Inuenire curuas, quae suis euolutis secundis inuerse sint similes.

Huius

Huius problematis pariter ac praecedentis duplex requiritur solutio, prout euoluae primae radii osculi ab H pergendo vel crescunt vel decrescunt, si quidem in curua quaesita AEB curuedo ab A ad B decrescat. Ponamus igitur euoluae primae radios osculi ab H ad N crescere, sitque E id punctum in curua quaesita ita comparatum vt portionis EB euoluta secunda ac similis sit portioni AE, huiusque euoluta secunda *be* similis illi portioni BE, prouti similitudo inuerfa postulat. Circa E sumantur vtrinque arcus EM et EQ aequae ampli, atque euolutis prima HN et secunda *ba* descriptis, debebit arcus *em* similis esse arcui EM, et arcus *eq* ipsi EQ.

§. 39. Vocetur radius osculi $EF = a$, et $Fe = b$, atque ponantur arcus $EM = s$; $EQ = S$; itemque radii osculi $MN = r$ et $QR = R$, habebitur ob arcus aequae amplos $\frac{ds}{r} = \frac{dS}{R}$. Iam itaque in euoluta secunda erit propter similitudinem $em = ns$, $eq = nS$, radius osculi in $m = n r$, et radius osculi in $q = nR$. At ex natura euolutionis habebitur $FN = r - a$; $FR = a - R$; $Nq = \frac{rdR}{ds}$; et $Rm = \frac{-rdR}{ds} = \frac{-rdR}{ds}$. Denique in euoluta secunda erit $eq = \frac{rdR}{ds} - b$; et $em = b + \frac{rdR}{ds}$: atque radius osculi in $q = \frac{r}{ds} d. \frac{rdR}{ds}$, ac radius osculi in $m = \frac{r}{ds} d. \frac{rdR}{ds}$. His cum expressionibus ex similitudine natis coniungendis orientur haec aequationes $ns = b + \frac{rdR}{ds}$; $nS = \frac{rdR}{ds} - b$; $nr = \frac{r}{ds} d. \frac{rdR}{ds}$; $nR = \frac{r}{ds} d. \frac{rdR}{ds}$ quae binae posteriores aequationes in prioribus continentur ob aequationem fundamentalem $\frac{ds}{R} = \frac{ds}{r}$.

§. 40. Habemus itaque tres istas aequationes

I. $rdS = Rds$

II. $nsds = r dR + bds$

III. $nSds = r dr - bds$

ex quibus curuae constructio debet formari: quae ita absoluetur, vt binae variables S et R eliminentur, atque aequatio eruatur inter s et r ; haec enim si ita fuerit comparata, vt ad datum arcum s quantitas radii osculi r possit assignari, simul ipsa curua poterit construi, quemadmodum alibi ostendi. Est vero ex tertia aequatione $S = \frac{rdr}{nds} - \frac{b}{n}$, atque ex prima $R = \frac{rds}{ds} = \frac{r}{nds} d. \frac{rdr}{ds}$, qui in secunda substitutus dat hanc $\frac{(ns-b)ds}{r} = \frac{1}{n} d. \frac{r}{ds} d. \frac{rdr}{ds}$: haec vero aequatio euoluta ad differentialia tertii gradus exfurgit, quae vix vlllo modo deprimi atque ad constructionem accommodari queat. Ipsa quidem aequatio haec mutato initio E seu scripto ns loco $ns-b$ ita se habebit: $n^2 s ds^3 = r^3 d^3 r + 4r^2 dr ddr + r dr^3$; posito ds constante, haec vero commode integrabilis existit, est namque integralis $n^2 s^2 ds^2 + C ds^2 = 2r^3 ddr + r^2 dr^2$.

§. 41. Quantumuis autem difficilis huius aequationis differentio-differentialis constructio videatur, tamen ea ex aequationibus primitiuis deduci potest. Secunda scilicet aequatio per primam abit in hanc

$$n s dS = R dR + b dS$$

ad quam si tertia addatur, obtinebitur ista:

$n s dS + n S ds = R dR + r dr + b dS - b ds$, cuius integralis est $2nSs = R^2 + r^2 + 2bS - 2bs - 2aa$ eiusmodi adhibita constante, vt euanescentibus arcibus s et S radii osculi R et r fiant $= a$. Simili modo si ad tertiam aequationem per primam in hanc transformatam:

$n S dS = R dr - b dS$ addatur secunda, prodit

$n s ds + n S dS = r dR + R dr + b ds - b dS$, cuius integralis est $ns^2 + nS^2 = 2Rr + 2bs - 2bS - 2aa$. Hinc itaque emergunt binae sequentes aequationes:

$$R^2 +$$

$$R^2 + r^2 = 2aa + 2bs - 2bS + 2nSs ; \text{ et}$$

$$2Rr = 2aa - 2bs + 2bS + nS^2 + ns^2$$

ex quibus additis et subtractis obtinetur

$$(r+R)^2 = 4aa + n(s+S)^2 \text{ atque}$$

$$(r-R)^2 = 4b(s-S) - n(s-S)^2$$

§ 42. Ex his duabus aequationibus si eliminetur R, obtinebitur aequatio algebraica inter S, s et r in qua si porro loco S substituaturs eius valor $\frac{rdr}{nds} - \frac{b}{n}$, habebitur aequatio differentialis primi gradus inter r et s quae propterea erit integralis illius aequationis differentialis secundi gradus supra inuentae

$$n^2 s^2 ds^2 + C ds^2 = 2r^3 ddr + r^2 dr^2$$

Haec eadem vero aequatio differentialis secundi gradus resultat si in aequatione $2Rr = 2aa - 2bs + 2bS + nS^2 + ns^2$ loco R et S substituantur valores per r et s scilicet $R = \frac{r}{nds} d \cdot \frac{rdr}{ds} = \frac{r^2 dr + r dr^2}{nds^2}$ et $S = \frac{rdr}{nds} - \frac{b}{n}$ fiet enim $\frac{2r^3 ddr + 2r r dr^2}{nds^2} = 2aa - 2bs + \frac{b r dr}{nds} - \frac{2bb}{n} + \frac{r^2 dr^2}{nds} - \frac{2b r dr}{nds} + \frac{bb}{n} + n s s$ seu $2r^3 ddr + r^2 dr^2 = (n^2 s^2 - 2nbs - bb + 2naa) ds^2$. Quare si vt supra fecimus loco $ns - b$ scribamus simpliciter ns , prodibit aequatio $n^2 s^2 ds^2 + 2(naa - bb) ds^2 = 2r^3 ddr + r^2 dr^2$.

§. 43. Vt nunc huius aequationis differentialis secundi gradus veram assignemus aequationem integram, quae erit differentialis primi gradus, ponamus etiam $s = S + \frac{b}{n}$ et $S = S - \frac{b}{n}$, erit $(r+R)^2 = 4aa + n(S+s)^2$ atque $(r-R)^2 = \frac{4bb}{n} - n(s-S)^2$ existente $S = \frac{rdr}{nds}$ seu $R^2 + r^2 = 2aa + \frac{2bb}{n} + 2nSs$ atque $2Rr = 2aa - \frac{2bb}{n} + nS^2 + ns^2$ ex qua erit $4R^2 r^2 = n^2 (S^2 + s^2)^2 + 4n$

D 2

(a² -

$(a^2 - \frac{b^2}{n^2})(S^2 + s^2) + 4(a^2 - \frac{b^2}{n^2})^2$: at ex priore aequatione est $4R^2r^2 = 8(aa + \frac{bb}{n})rr + 8Ssr^2 - 4r^4$, scribatur f loco $aa - \frac{bb}{n}$ et g loco $aa + \frac{bb}{n}$, ac proueniet sequens aequatio:

$r^4 dr^4 + 2n^2 s^2 r^2 ds^2 dr^2 + n^4 s^4 ds^4 + 4nfr^2 ds^2 dr^2 + 4n^3 fs^2 ds^4 + 4n^2 j^2 ds^4 = 8n^2 gr^2 ds^4 - 4n^2 r^4 ds^4 + 8n^2 sr^3 ds^3 dr$, quae adeo est integralis huius $n^2 s^2 ds^2 + 2nfd s^2 = 2r^3 ddr + r^2 dr^2$, id quod eo magis est notandum, quod nulla pateat via alteram ex altera deducendi, immediate scilicet. Nam si differentialis aequatio secundi gradus resoluitur in plures aequationes per valores assumptios $S = \frac{rdr}{nds}$ et $R = \frac{r^2 ddr + r dr^2}{nds^2}$, tum congruentia satis perspicitur eo modo quo sumus vsi. Atque hinc fortasse aliquando nouam methodum detegere licebit, ad aequationes differentiales altiorum graduum integrandas. Hic quidem sufficiat speciem quandam huius methodi indicasse, ex qua ipsius vsus ingens, si quando excoletur, perspicatur.

§. 44. Interim tamen istae aequationes ad curuam quaesitam construendam non multum iuuant, quam ob causam aliam viam ad constructionem perueniendi aperimus. Ponamus $s + S = p$; $s - S = q$; $r + R = u$; et $r - R = v$: erit $s = \frac{p+q}{2}$; $S = \frac{p-q}{2}$; $r = \frac{u+v}{2}$ et $R = \frac{u-v}{2}$; qui valores in aequatione $r dS = R ds$ substituti dabunt $udq = vdp$; aequationes vero §. 41. inuentae abibunt in sequentes $u^2 = 4aa + np^2$ et $v^2 = 4bq - nq^2$, ex quibus obtinebitur $\frac{dp}{\sqrt{4aa + np^2}} = \frac{dq}{\sqrt{4bq - nq^2}}$, in qua cum variables p et q sint a se inuicem separatae, dabitur q per p et proinde S per s ; hincque porro v et u atque adeo r et R per s .

Quare

Quare cum ad datum ipsius s valorem quemuis assignari queat valor ipsius r , ipsa curua, in qua s arcum et r radium osculi denotat, construi poterit, ex quo problema propositum, quantum quidem desiderari potest, est resolutum, cum id sit perductum ad aequationem differentialem primi gradus, in qua variables p et q sunt a se invicem separatae.

§. 45. Quodsi autem detur relatio inter arcum curuae cuiuspiam s ac radium osculi r , ipsa curua sequenti modo construetur. Ponatur abscissa $= x$, applicata $= y$, sitque $dx = p ds$, erit $dy = ds \sqrt{(1 - pp)}$ atque $r = \frac{ds \sqrt{(1 - pp)}}{ap}$; vnde fiet $\frac{dp}{\sqrt{(1 - pp)}} = \frac{ds}{r}$ et $A. \sin. p = \int \frac{ds}{r}$ quod integrale dabitur ob datam relationem inter s et r . Hanc ob rem habebitur $p = \sin. A. \int \frac{ds}{r}$ atque $\sqrt{(1 - pp)} = \cos. A. \int \frac{ds}{r}$; hincque $dx = ds \sin. A. \int \frac{ds}{r}$ et $dy = ds \cos. A. \int \frac{ds}{r}$. Ex quibus tandem per integrationem prodit $x = \int ds \sin. A. \int \frac{ds}{r}$ atque $y = \int ds \cos. A. \int \frac{ds}{r}$; ita vt per quadraturas ad datum cuiusque arcus valorem assignari queant tam abscissa quam applicata.

§. 46. Accedamus iam ad casum alterum problematis §. 38. propositi, ac de rescant radii osculi euolutae primae HN ab H ad N pergendo. Maneant uti in praecedente casu radii osculi fixi $EF = a$, $Fe = b$, vocenturque arcus $EM = s$, $EQ = S$ et radii osculi $MN = r$, et $QR = R$; vnde ob similitudinem in euoluta secunda erit $em = ns$ et $eq = nS$. Per naturam vero euolutionis erit in euoluta prima $FN = r - a$; $FR = a - R$ $Nq = \frac{rdr}{ds}$ et $Rm = \frac{-RdR}{ds}$; ex quibus pro euoluta secunda oritur $em = ns = \frac{-RdR}{ds} - b$, atque $eq = nS = b -$

Tab. II.
fig. 4.

$\frac{rdR}{ds}$. Ob arcus denique EM et EQ aequae amplos erit
 $\frac{ds}{r} = \frac{ds}{R}$. Quamobrem habebuntur tres sequentes aequa-
 tiones :

$$I. r dS = R ds$$

$$II. ns dS = -R dR - b dS.$$

$$III. nS ds = -r dr + b ds$$

quarum binae posteriores ope primae transmutantur in has:

$$II. ns ds = -r dR - b ds$$

$$III. nS dS = -R dr + b dS.$$

§. 47. Addamus primum binas aequationes posteriores in forma priore, eritque summa :

$$ns dS + nS ds = -R dR - r dr + b ds - b dS$$

quae integrata dat hanc aequationem

$$2nSs = 2aa - R^2 - r^2 + 2bs - 2bS$$

$$\text{feu } R^2 + r^2 = 2a^2 + 2b(s-S) - 2nSs$$

Deinde addamus easdem aequationes in forma posteriori, erit $ns ds + nS dS = -r dR - R dr - b ds + b dS$ cuius integrale est $ns^2 + nS^2 = 2a^2 - 2Rr - 2b(s-S)$ feu $2Rr = 2a^2 - 2b(s-S) - n(s^2 + S^2)$, quae cum illa coniuncta tum addendo tum subtrahendo praebet

$$(r+R)^2 = 4a^2 - n(s+S)^2 \text{ atque}$$

$$(r-R)^2 = 4b(s-S) + n(s-S)^2$$

quae aequationes ab illis, quas casu praecedente inuenimus non differunt, nisi quod n habeat valorem negativum.

§. 48. Quodsi ergo ad curuam construendam faciamus vt ante $s+S=p$; $s-S=q$; $r+R=u$; et $r-R=v$ erit $u = \sqrt{4aa - npp}$ et $v = \sqrt{4bq + nqq}$ hincque per aequationem primam $r dS = R ds$ obtinebitur

$$\frac{dp}{\sqrt{4aa - npp}} = \frac{dq}{\sqrt{4bq + nqq}}$$

per

per quam dabitur relatio inter p et q , unde s et r per eandem variabilem vel p vel q determinabitur; id quod ad curvam construendam sufficit.

§. 49. Ut autem naturam huius curvae propius inspicere liceat, tentabimus ipsam constructionem perficere, atque aequationem inter coordinatas orthogonales x et y elicere. Quod quo commodius fieri queat, introducamus novam variabilem z sitque

$$dz = \frac{dp\sqrt{n}}{\sqrt{(aa-npp)}} = \frac{d\sqrt{nbq+nnqq}}{\sqrt{(bq+nnq)}}, \text{ atque tam } p \text{ quam } q \text{ per eandem variabilem } z \text{ definiatur, primo autem prodibit A. sin. } \frac{p\sqrt{n}}{2a} = z \text{ hincque } p = \frac{2a}{\sqrt{n}} \text{ sin. A. } z; \text{ tum vero habebitur } z = \frac{\sqrt{nbq+2b+V(4nbq+nnqq)}}{c} \text{ hincque } q = \frac{(ce^z-2b)^2}{2nce^z}$$

Per z igitur definitis p et q , porro reperientur u et v , ex quibus tandem consequitur.

$$s = \frac{a}{\sqrt{n}} \text{ sin. A. } z + \frac{(ce^z-2b)^2}{4nce^z} \text{ et}$$

$$r = a \text{ cos. A. } z + \frac{(c^2e^{2z}-4bb)}{4ce^z\sqrt{n}}$$

§. 50. Hinc differentiando emergit $ds = \frac{adz \text{ cos. A. } z}{\sqrt{n}}$

$$+ \frac{dz(c^2e^{2z}-4bb)}{4nce^z}, \text{ ita ut sit } \frac{ds}{r} = \frac{dz}{\sqrt{n}} \text{ et } \frac{ds}{s} = \frac{z}{\sqrt{n}}. \text{ Quare si}$$

ponatur abscissa $= x$ et applicata $= y$ erit per §. 45.

$$x = \frac{a}{\sqrt{n}} \int dz \text{ cos. A. } z. \text{ sin. A. } \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{c}{\sqrt{n}} \int e^z dz \text{ sin. A. } \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{bb}{nc} \int e^{-z} dz$$

$$\text{ sin. A. } \frac{z}{\sqrt{n}}$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{n}} \int dz \text{ cos. A. } z. \text{ cos. A. } \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{c}{\sqrt{n}} \int e^z dz \text{ cos. A. } \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{bb}{nc} \int e^{-z} dz$$

$$\text{ cos. A. } \frac{z}{\sqrt{n}}$$

quae

quae quidem formulae iam sufficere possent ad curuam per quadraturas construendam; at constructio facilior inde euadet, quod singulae hae formulae differentiales actu integrationem admittant.

§. 51. Singulas autem has formulae differentiales sequenti modo integramus: $\int dz \operatorname{cof.} A z. \operatorname{fin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} = \operatorname{fin.} A z$
 $\operatorname{fin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \int dz \operatorname{fin.} A z \operatorname{cof.} A \frac{z}{\sqrt{n}} = \operatorname{fin.} A z \operatorname{fin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} +$
 $\frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{cof.} A z \operatorname{cof.} A \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \int dz \operatorname{cof.} A z \operatorname{fin.} A \frac{z}{\sqrt{n}}$; unde oritur
 $\int dz \operatorname{cof.} A z \operatorname{fin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{n \operatorname{fin.} A z. \operatorname{fin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} \operatorname{cof.} A z. \operatorname{cof.} A \frac{z}{\sqrt{n}}}{n-1}$

at casu quo $n=1$, quia est $\operatorname{cof.} A z. \operatorname{fin.} A z = \frac{1}{2} \operatorname{fin.} A z z$ erit $\int dz \operatorname{cof.} A z. \operatorname{fin.} A z = -\frac{1}{4} \operatorname{cof.} A z z$. Deinde pari modo est $\int dz \operatorname{cof.} A z. \operatorname{cof.} A \frac{z}{\sqrt{n}} = \operatorname{fin.} A z \operatorname{cof.} A \frac{z}{\sqrt{n}}$
 $+ \frac{1}{\sqrt{n}} \int dz. \operatorname{fin.} A z. \operatorname{fin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} \operatorname{fin.} A z \operatorname{cof.} A \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{cof.} A \operatorname{fin.} A \frac{z}{\sqrt{n}}$
 $+ \frac{1}{n} \int dz \operatorname{cof.} A z \operatorname{cof.} A \frac{z}{\sqrt{n}}$. ergo $\int dz \operatorname{cof.} A z \operatorname{cof.} A \frac{z}{\sqrt{n}} =$
 $\frac{n \operatorname{fin.} A z \operatorname{cof.} A \frac{z}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \operatorname{cof.} A z. \operatorname{fin.} A \frac{z}{\sqrt{n}}}{n-1}$. Casu au-

tem quo $n=1$ ob $\operatorname{cof.} A z \operatorname{cof.} A z = \frac{1}{2} \operatorname{cof.} A z z$ erit $\int dz \operatorname{cof.} A z \operatorname{cof.} A z = \frac{z}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{fin.} A z z$.

§. 52. Reliquas formulae simili modo integramus; est scilicet $\int e^z dz \operatorname{fin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} = e^z \operatorname{fin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \int e^z dz \operatorname{cof.} A \frac{z}{\sqrt{n}}$
 $= e^z \operatorname{fin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{e}{\sqrt{n}} \operatorname{cof.} A \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \int e^z dz \operatorname{fin.} A \frac{z}{\sqrt{n}}$,
hincque $\int e^z dz \operatorname{fin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{ne^z \operatorname{fin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} - e^z \sqrt{n} \operatorname{cof.} A \frac{z}{\sqrt{n}}}{n+1}$.

At $\int e^z dz \operatorname{cof.} A \frac{z}{\sqrt{n}} = e^z \operatorname{cof.} A \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \int e^z dz \operatorname{fin.} A \frac{z}{\sqrt{n}} =$
 $\frac{ne^z \operatorname{cof.} A \frac{z}{\sqrt{n}} + e^z \sqrt{n} \operatorname{fin.} A \frac{z}{\sqrt{n}}}{n+1}$. Deinde simili modo

$\int e^{-z} dz$

$$\begin{aligned}
 & se^{-z} dz \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} = -e^{-z} \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} se^{-z} dz \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} \\
 & = -e^{-z} \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} \frac{e^{-z}}{\sqrt{n}} \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} se^{-z} dz \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} \\
 & \text{hincque } se^{-z} dz \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{-ne^{-z} \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} - e^{-z} \sqrt{n} \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}}}{n+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Denique } se^{-z} dz \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} = -e^{-z} \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} se^{-z} dz \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} \\
 & \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{-ne^{-z} \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} + e^{-z} \sqrt{n} \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}}}{n+1}
 \end{aligned}$$

His igitur integralibus inuentis habebimus $x =$

$$x = \frac{a \sqrt{n} \sin. A z \cdot \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} + a \cos. A z \cdot \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}}}{n-1} +$$

$$\frac{e \sqrt{n} e^{z} \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} - c e^{z} \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} + b b \sqrt{n} e^{-z} \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} + b b e^{-z} \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}}}{4(n+1) \sqrt{n}} + \frac{c b \sqrt{n} e^{-z} \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} + b b e^{-z} \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}}}{c(n+1) \sqrt{n}}$$

atque $y =$

$$\frac{a \sqrt{n} \sin. A z \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} - a \cos. A z \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}}}{n-1} +$$

$$\frac{c \sqrt{n} \cdot e^{z} \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} + c e^{z} \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}} + b b \sqrt{n} \cdot e^{-z} \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} - b b e^{-z} \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}}}{4(n+1) \sqrt{n}} + \frac{c b \sqrt{n} \cdot e^{-z} \cos. A \frac{z}{\sqrt{n}} - b b e^{-z} \sin. A \frac{z}{\sqrt{n}}}{c(n+1) \sqrt{n}}$$

sumendis quadratis obtinebitur $x x + y y =$

$$\frac{a^2 (n \sin. A z \cdot \sin. A z) + \cos. A z \cdot \cos. A z + a c e^{z} (n \sin. A z - \cos. A z)}{(n-1)^2} + \frac{2(n^2-1) \sqrt{n}}{2(n^2-1) \sqrt{n}}$$

$$+ \frac{2 a b b e^{-z} (n \sin. A z + \cos. A z)}{c n (n-1) \sqrt{n}} + \frac{c c e^{2z}}{16 n (n+1)} + \frac{b b (n-1)}{2 n (n+1)^2} +$$

$$\frac{b^4 e^{-2z}}{c^2 n (n+1)^2}$$

Simili autem modo curuae casui praecedenti huius problematis satisfaciens constructio potest adornari. Ceterum curuae istae, quae suis evolutis secundis inuerse sunt similes, simul ita sunt comparatae vt directe sint similes suis evolutis quartis.

§. 52. Quod autem ad curuas attinet, quae cuiun-
que euolutae directe sint similes, lex aequationum inter
arcum s et radium osculi r contentarum facile patet.
Pro curuis enim quae suis euolutis primis directe sunt si-
miles haec habetur aequatio $\pm ns = r$. Pro curuis
quae suis euolutis secundis sint similes haec $\pm ns = \frac{rdr}{ds}$.
Pro curuis quae suis euolutis tertiis sint similes haec $\pm n$
 $s = \frac{r}{ds} d \cdot \frac{rdr}{ds} = \frac{r^2 ddr + r dr^2}{ds^2}$; pro curuis quae suis euolutis
quartis sint similes haec $\pm ns = \frac{r}{ds} d \cdot \frac{r}{ds} d \cdot \frac{rdr}{ds} =$
 $\frac{r^3 d^2 r + r^2 d r d r + r dr^3}{ds^3}$. Pro curuis vero, quae suis euolutis
quintis sint similes, habebitur haec aequatio $\pm ns = \frac{r}{ds} d \cdot$
 $\frac{r}{ds} d \cdot \frac{r}{ds} d \cdot \frac{rdr}{ds}$. quas aequationes quousque lubuerit continu-
are licet.

§. 53. Consideremus igitur curuas, quae suis euolutis
tertiis sint similes, quae hac aequatione continentur $\pm n$
 $s ds^2 = r^2 ddr + r dr^2$ posito ds constante. Ad hanc
aequationem in differentialem primi gradus transmutandam

ponamus $s = e^y$ et $r = e^y u$ erit ob ds constans
 $d du = \frac{du}{y} - \frac{du}{u} - \frac{u du^2}{y}$ atque $ds = e^y \frac{f du}{y}$; $dr =$
 $e^y (du + \frac{u v du}{y})$; $ddr = e^y (\frac{du dy}{y} + \frac{ndw^2}{y} - \frac{dw^2}{w})$, qui-
bus valoribus substitutis aequatio nostra differentialis secun-
di gradus abit in hanc $\pm n du = y dy + 3 uy dn +$
 $u^2 du$, cuius aequationis integrale particulare reperitur esse
 $y = -u^2 - u \sqrt{\pm n - \sqrt{n^2}}$ Ad integrale igitur genera-
le inueniendum ponamus $y = z - u^2 - u \sqrt{\pm n - \sqrt{n^2}}$
erit

erit $dy = dz - zu du - du \sqrt{z} + n$ atque $0 = zdz + zudu - zdu \sqrt{z} + n - uudz - udz \sqrt{z} + n - dz \sqrt{z} n^2$ Ponamus $+n = m^2$ quia m perinde assignari potest siue sit n numerus affirmatiuus siue negatiuus; eritque $0 = zdz + zudu - mzd u - uudz - m u dz - m^2 dz$.

§. 54. Haec vero aequatio ex earum est numero, quae separabiles redduntur, si ponatur $dz = pdu$, hoc enim facto erit $0 = pz + zu - mz - pu^2 - mpu - m^2 p$ vnde fit $z = \frac{p(u^2 + mu + m^2)}{p + u - m}$, quae substitutio adhibeatur. Differentietur scilicet, eritque $dz = pdu = \frac{u^3 dp + pu^2 du - 2m^2 pdu - 2mpudu + 2up^2 du + mp^2 du - m^3 dp}{(p + u - m)^2}$ quae re-

ducta abit in hanc: $\frac{du}{u^2 - m^2} = \frac{dp}{p^2 - 3mp + 3m^2}$ seu $\frac{du}{(u-m)(u^2 + mu + m^2)}$
 $= \frac{dp}{p^2 - 3mp + 3m^2}$ quae integrata dat $\frac{1}{3m^2} \int \frac{u-m}{\sqrt{(u^2 + mu + m^2)}} - \frac{1}{m^2 \sqrt{3}} A \text{ tang. } \frac{u\sqrt{3}}{u+2m} = \frac{1}{3m^2} \int \frac{p}{\sqrt{(pp-3mp+3m^2)}} + \frac{1}{m^2 \sqrt{3}} A \text{ tang. } \frac{p}{3m\sqrt{3} - p\sqrt{3}} + C$ seu $\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{(u-m)\sqrt{(p^2 - mp + 3m^2)}}{p\sqrt{(uu + mu + m^2)}} = A \text{ tang. } \frac{u\sqrt{3}}{u+2m} + A \text{ tang. } \frac{p}{2m\sqrt{3} - p\sqrt{3}} + \text{Const.} = A \text{ tang. } \frac{3mu + mp - pu}{2m^2\sqrt{3} - mp\sqrt{3} + mu\sqrt{3} - pu\sqrt{3}} + \text{Const.}$ Quia vero est $p = \frac{(m-u)(y+uu+mu+mm)}{y}$ erit $\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{(y^2 + y(2uu - mu - m^2) + (m-u)^2(uu + mu + mm))}}{y + uu + mu + mm} = A \text{ tang. } \frac{(y + (m-u)^2)(u^2 + mu + m^2)}{(y(uu + mu + mm) + (u^2 - m^2)(uu + mu + mm))\sqrt{3}} + \text{Const.}$ vbi est $u = \frac{r}{r}$ et $y = \frac{rdr}{sds} - \frac{rr}{ss}$.

§. 55. Quoniam inuenimus quaestioni particulariter satisfieri aequatione $y + uu + mu + mm = 0$ prodibit haec aequatio inter r et s partem quaestioniis resoluens $rdr + mrds + m^2 sds = 0$, quae igitur aequatio erit integralis
 E 2 huius

huius $m^2 s ds^2 = r^2 ddr + r dr^2$ id quod illius differentia-
tio indicat, etiamfi vice versa per integrationem illa ex
hac erui vix queat: Ponamus igitur ad integrale latissimo
sensu acceptum inueniendum id esse $r dr + m r ds + m^2 s ds$
 $= V ds$ erit differentiando $r ddr + dr^2 + m dr ds + m^2$
 $ds^2 = dV ds$, ergo $r^2 ddr + r dr^2 = r dV ds - m r dr ds -$
 $m^2 r ds^2 = m^2 s ds^2$. Hinc erit porro $r dV ds = m^2 s ds^2 +$
 $m^2 r ds^2 + m r dr ds = m V ds^2$ ex qua fit $\frac{dV}{V} = \frac{m ds}{r}$ et V
 $= ce^{\int \frac{m ds}{r}}$ vbi $\int \frac{ds}{r}$ per coordinatas exprimi potest vt con-
flat, ita vt fit integrale $r dr + m r ds + m^2 s ds =$
 $ce^{\int \frac{m ds}{r}} ds$.

§. 56. Succinctiores autem prodeunt aequationes pro
omnibus huiusmodi curuis, quae cuiuspiam euolutae debent
esse similes, si non inter r et s sed inter s et $\frac{ds}{r}$ quae-
rantur aequationes. Hunc in finem ponatur $\frac{ds}{r} = dv$ erit r
 $= \frac{ds}{dv}$ positoque elemento dv constante habebitur pro cur-
uis

quae similes sunt	ista aequatio
euolutis primis	$+ n s dv = ds$
euolutis secundis	$+ n s dv^2 = dds$
euolutis tertiis	$+ n s dv^3 = d^2 s$
euolutis quartis	$+ n s dv^4 = d^3 s$
euolutis quintis	$+ n s dv^5 = d^4 s$
euolutis sextis	$+ n s dv^6 = d^5 s$
	etc.

quae aequationes etsi sunt vno gradu differentialium altiores
quam praecedentes, tamen tractatu sunt faciliores. Dein-
de

de s determinetur per v , mox habebitur aequatio inter coordinatas orthogonales, x et y , ope aequationum $x = \int ds \sin. A v$ et $y = \int ds \cos. A v$.

§. 57. Quanquam hae aequationes pluribus modis tractari possunt, tamen hic reliquis praefendus esse videtur, quo primo eiusmodi valores ipsius s perpenduntur, quae suis differentialibus cuiusvis ordinis sint similes. Cum enim generaliter sit $\frac{d^v s}{d^v v} = \pm n s$, valorem ipsius s ita comparatum esse oportet, vt ipsius differentiale cuiusvis gradus ipsi sit simile, seu per id diuisum constantem quantitatem producat, Huiusmodi autem quantitatum tria dantur genera, quorum primum quantitates exponentiales complectitur, secundum sinus et cosinus arcuum circularium, tertium vero vtriusque speciei quantitatum exponentialibus, scilicet et sinibus cosinibusque arcuum circularium coniunctim continetur.

§. 58. Primum igitur genus ita est comparatum vt sit $s = e^{g^v}$, huiusque formulae differentia huiusque gradus sequenti modo pro-

grediuntur	eritque
I. $\frac{ds}{dv} = e^{g^v} g$	$\frac{ds}{dv} = g = \pm n$
II. $\frac{dds}{dv^2} = e^{g^v} g^2$	$\frac{dds}{dv^2} = g^2 = \pm n^2$
III. $\frac{d^3s}{dv^3} = e^{g^v} g^3$	$\frac{d^3s}{dv^3} = g^3 = \pm n^3$
IV. $\frac{d^4s}{dv^4} = e^{g^v} g^4$	$\frac{d^4s}{dv^4} = g^4 = \pm n^4$
etc.	etc.

Apparet igitur aequationem $s = e^{g^v}$ satisfacere plerisque quaestionum casibus, quibus curuae euolutis suis dati ordi-

nis similes requiruntur. Quodsi enim quaeratur curua, quae suae euolutae ordinis ν sit similis, duplex pro ea habetur aequatio scilicet vel $d^{\nu} s = n s d v^{\nu}$, vel $d^{\nu} s = -n s d v^{\nu}$; quarum aequationum priori semper satisfacit valor $s = e^{\varepsilon v}$, sumto $g = \sqrt[n]{n}$. Alteri vero casui haec aequatio tantum satisfacit, si ν fuerit numerus impar, fitque $g = \sqrt[n]{-n} = \sqrt[n]{n}$; sin autem fuerit ν numerus par, aequationi $d^{\nu} s = -n s d v^{\nu}$ iste valor $s = e^{\varepsilon v}$ ob g imaginarium satisfacere nequit.

§. 59. Perspicuum porro est quibus casibus aequationi $d^{\nu} s = \pm n s d v^{\nu}$ satisfaciat valor $s = e^{\varepsilon v}$, id quod euenit si fiat $g^{\nu} = \pm n$, iisdem casibus satisfacere valorem $s = c e^{\varepsilon v}$, quia constans c utramque aequationis partem afficit. Quando autem ad hanc peruentum fuerit aequationem $s = c e^{\varepsilon v}$, pro curua quaesita, aequationes $x = \int ds$ sin. $A \cdot v$ et $y = \int ds$ cos. $A \cdot v$ suppeditabunt aequationem inter coordinatas orthogonales curuae quaesitae. Erit autem $x = c g s e^{\varepsilon v} d v$ sin. $A v = c e^{\varepsilon v}$ sin. $A v - c \int e^{\varepsilon v} d v$ cos. $A \cdot v = c e^{\varepsilon v}$ sin. $A v - \frac{c}{\varepsilon} e^{\varepsilon v}$ cos. $A v - (\frac{c}{\varepsilon} \int e^{\varepsilon v} d v$ sin. $A \cdot v) - \frac{x}{\varepsilon}$; vnde fit $x = c g e^{\varepsilon v} \frac{(g \sin. A v - \cos. A v)}{1 + g g}$ Cum vero sit $y = c g s e^{\varepsilon v} d v$ cos. $A v$ erit $y = c g e^{\varepsilon v}$ sin. $A v - g x$ seu $y = \frac{c g e^{\varepsilon v} (\sin. A v + g \cos. A v)}{1 + g g}$, quae aequatio semper est ad logarithmicam spiralem.

§. 60. Secundum genus valorum ipsius s qui suis differentialibus cuiusque ordinis sunt similes est $s = a$ sin. A .
 $b v +$

$h v + \mathcal{E} \text{ cof. } A . h v$: cuius differentialia sequenti modo pro-
gredientur.

$$\frac{ds}{dv} = - \mathcal{E} b \sin . A . h v + a b \text{ cof. } A . h v$$

$$\frac{dds}{dv^2} = - a b^2 \sin . A . h v - \mathcal{E} b^2 \text{ cof. } A . h v$$

$$\frac{d^3s}{dv^3} = + \mathcal{E} b^3 \sin . A . h v - a b^3 \text{ cof. } A . h v$$

$$\frac{d^4s}{dv^4} = + a b^4 \sin . A . h v + \mathcal{E} b^4 \text{ cof. } A . h v \text{ etc.}$$

Differentialia igitur tantum ordinum parium ita sunt com-
parata , vt per s diuisa quantitatem constantem producant.
Aequationi scilicet $d^2s = + n s dv^2$ satisfaciet aequatio $s =$
 $a \sin . A . h v + \mathcal{E} \text{ cof. } A . h v$ sumendo $(-b^2)^2 = + n$.

§. 61. Tertium genus valorum ipsius s ambo priora
in se complectitur , atque ideo solum considerari meretur ,
cum per id omnibus omnino casibus satisfieri queat. For-
mula autem generalis ita se habet $s = e^{gv} (a \sin . A h v +$
 $\mathcal{E} \text{ cof. } A . h v)$ differentialia vero sequenti modo progre-
diuntur

$$\frac{ds}{dv} = e^{gv} \left\{ \begin{array}{l} -\mathcal{E} b \\ +ag \end{array} \sin . A . h v \quad \begin{array}{l} +ab \\ +\mathcal{E} g \end{array} \text{ cof. } A . h v \right\}$$

$$\frac{dds}{dv^2} = e^{gv} \left\{ \begin{array}{l} -ab^2 \\ +2\mathcal{E}gb \\ +ag^2 \end{array} \sin . A . h v \quad \begin{array}{l} -\mathcal{E}b^2 \\ +2agb \\ +\mathcal{E}g^2 \end{array} \text{ cof. } A . h v \right\}$$

$$\frac{d^3s}{dv^3} = e^{gv} \left\{ \begin{array}{l} +\mathcal{E}b^3 \\ -3agb^2 \\ +3\mathcal{E}g^2b \\ +ag^3 \end{array} \sin . A . h v \quad \begin{array}{l} -ab^3 \\ -3\mathcal{E}gb^2 \\ +3ag^2b \\ +\mathcal{E}g^3 \end{array} \text{ cof. } A . h v \right\}$$

$$\frac{d^4s}{dv^4} = e^{gv} \left\{ \begin{array}{l} +ab^4 \\ +4\mathcal{E}gb^3 \\ -6ag^2b^2 \\ +4\mathcal{E}g^3b \\ +ag^4 \end{array} \sin . A . h v \quad \begin{array}{l} +\mathcal{E}b^4 \\ -4agb^3 \\ -6\mathcal{E}g^2b^2 \\ +4ag^3b \\ +\mathcal{E}g^4 \end{array} \text{ cof. } A . h v \right\}$$

etc.

Ex

Ex quibus formulis colligitur fore generaliter $\frac{d^v s}{dv^v} = e^{\alpha v}$

$$\left(\frac{(g + bV - 1)^v + (g - bV - 1)^v}{2} \alpha \sin. A. bv + \frac{(g - bV - 1)^v - (g + bV - 1)^v}{2V - 1} \xi \sin. A. bv + \frac{(g + bV - 1)^v + (g - bV - 1)^v}{2} \xi \cos. A. bv + \frac{(g + bV - 1)^v - (g - bV - 1)^v}{2V - 1} \alpha \cos. A. bv \right)$$

§. 62. Ponamus esse debere $\frac{d^v s}{dv^v} = m s$ existente $m = \pm n$, ita vt m quantitatem quamcumque siue affirmatiuam siue negatiuam significet: eritque comparatione instituta

$$m \alpha = \frac{(g + bV - 1)^v (\alpha + \xi V - 1)}{2} + \frac{(g - bV - 1)^v \alpha - \xi V - 1}{2}$$

$$\text{et } m \xi = \frac{(g + bV - 1)^v (\xi - \alpha V - 1)}{2} + \frac{(g - bV - 1)^v \xi + \alpha V - 1}{2};$$

ex quibus aequationibus eliminata m conficitur haec aequatio

$$(g + bV - 1)^v (\alpha^2 + \xi^2) V - 1 = (g - bV - 1)^v (\alpha^2 + \xi^2) V - 1$$

cui quidem satisfacit expressio $\alpha^2 + \xi^2 = 0$, at quia hinc ad imaginaria peruenitur, hic valor tanquam inutilis est reiiciendus. Quamobrem habebitur $(g + bV - 1)^v = (g - bV - 1)^v$; quae euoluta abit in hanc $v g^{v-1} b - \frac{v(v-1)(v-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} g^{v-3} b^3 + \frac{v(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} g^{v-5} b^5 - \text{etc.} = 0$ ex qua aequatione g per b definiri oportet.

§. 63. Ex inspectione harum formularum mox intelligitur eas diuisionem arcuum circularium inuoluere. Quodsi scilicet sumatur arcus quispiam w in circulo, cuius radius $= 1$, ponaturque $g = f \cos. A. w$ et $b = f \sin. A. w$,

w , debet w eiusmodi esse arcus, ut sit $\sin A. \vee w = o$. Sumtis autem huius modi arcibus pro w , reperietur valor litterae $m = f^v \cos. A. \vee w$. Hanc ob rem pro $\vee w$ successiue substitui debent arcus 0° , 180° , 360° , 540° , etc. pro singulisque valores cum arcuum w tum litterarum g et h definiiri; quo facto obtinebitur valor ipsius m , qui semper erit vel $+f^v$ vel $-f^v$. Litterae autem α et ξ omnino manent indeterminatae, indeque solutiones latius patentes colligentur:

§. 64. Quoniam pro α et ξ quantitates quaecunque accipi possunt, sumatur $\alpha = c \cos. A. \zeta$; et $\xi = c \sin. A. \zeta$ erit $s = c e^{\xi v} \sin. A. (h v + \zeta)$: in qua aequatione litterae g et h ex valoribus n et \vee determinantur. Cum autem haec determinatio pendeat ab resolutione aequationis \vee dimensionum, in qua omnes radices sint reales, manifestum est totidem valores pro s inventum iri. At si aequationem $d^v s = \pm n s d^v v$ inspiciamus, facile intelligimus, si satisfaciant valores $s = P, s = Q, s = R$; etc. singulatim existentibus P, Q et R functionibus ipsius v , tum etiam satisfacere aequationem ex his coniunctam $s = \alpha P + \xi Q + \gamma R$; haecque aequatio integralis aequae late patebit ac differentialis proposita, si pro P, Q, R . omnes particulares ipsius s valores accipiantur.

§. 65. Percurramus igitur ordine singulos ipsius \vee valores, et pro angulo 180 graduum ponamus π , ita ut sit $360^\circ = 2 \pi$; $540^\circ = 3 \pi$ etc. Primum ergo sit $\vee = 1$, seu satisfiat aequationi $d s = m s d v$ eritque $\vee w = w = o$; atque hinc $g = f$, et $h = o$ et $m = f$; ex quo aequationis huius

$$ds = f s dv$$

erit aequatio integralis haec :

$$s = C e^{fv}$$

Quodsi autem ponatur $\nu w = w = \pi$, fiet $g = -f$; $b = 0$; et $m = -f$, vnde prodit huius aequationis $ds = -f s dv$ integralis haec $s = C e^{-fv}$ quae quidem in praecedente iam continetur facta f negatiuo. Quare aequatio $s = C e^{\pm fv}$ omnes praebet curuas, quae similes sunt suis euolutis primis, quas iam ostendimus esse logarithmicas spirales.

§. 66. Sit porro $\nu = 2$, seu integretur aequatio $dds = msdv^2$: atque primo ponatur $\nu w = 2w = 0$, erit $w = 0$, et $g = f$, ac $b = 0$, atque $m = ff$, vnde huius aequationis $dds = ffsdv^2$ integralis erit $s = C e^{fv}$. Secundo fit $\nu w = 2w = \pi$, erit $w = \frac{1}{2}\pi = 90^\circ$; atque $g = 0$; $b = f$; et $m = -ff$: vnde aequationis $dds = -ffsdv^2$ integralis erit $s = C \sin. A (fv + \zeta)$. Tertio fit $\nu w = 2w = 2\pi$ seu $w = \pi = 180^\circ$; erit $g = -f$; $b = 0$; et $m = ff$; vnde aequationis $dds = ffsdv^2$ integralis est $s = C e^{-fv}$. Quarto fit $\nu w = 2w = 3\pi$ seu $w = \frac{3}{2}\pi$; erit $g = 0$; $b = -f$; et $m = -ff$, ex quo aequationis $dds = -ffsdv^2$ integralis erit $s = C \sin. A (\zeta - fv) = C \sin. A (fv - \zeta)$ quae quidem aequatio cum superiori casu secundo inuenta congruit, vtraque enim continetur in forma $\alpha \sin. A. fv + \frac{\pi}{8} \cos. A. fv$.

§. 67. Hinc itaque vtriusque aequationis differentialis secundi gradus $dds = ffsdv^2$ et $dds = -ffsdv^2$ completa nanciscimur integralia, atque adeo curuas obtinemus omnes, quae sint suis euolutis secundis similes. Scilicet cum pro casu priore duplex inuenta sit aequatio integralis,

ambo

ambo ipsius s valores per constantes quantitates multiplicati et inuicem coniuncti dabunt completum integrale. Sic aequationis huius :

$$dds = +ffsdv^3$$

integrale erit completum :

$$s = Ce^{fv} + De^{-fv}$$

At alterius aequationis

$$dds = -ffsdv^3$$

integrale completum erit hoc :

$$s = C \sin. A. fv + D \cos. A. fv$$

in vtroque enim integrali insunt duae nouae constantes C et D , quae ex duabus integrationibus sunt natae.

§. 68. Ponamus $v = 3$, ita vt integranda sit aequatio haec $d^3s = msdv^3$; ac primo ponatur $3w = 0$ seu $w = 0$ erit $g = f$, $h = 0$, et $m = f^3$ vnde aequationis $d^3s = hs^3dv^3$ integralis erit $s = Ce^{fv}$. Deinde sit $3w = \pi$ seu $w = \frac{1}{3}\pi = 60^\circ$; erit $g = f \cos. A. \frac{1}{3}\pi$ et $h = f \sin. A. \frac{1}{3}\pi$ atque $m = -f^3$, vnde aequationis $d^3s = -f^3s$

dv^3 integralis erit $s = e^{fv \cos. A. \frac{1}{3}\pi} (\alpha \sin. A. fv \sin. A. \frac{1}{3}\pi + \mathcal{E} \cos. A. fv \sin. A. \frac{1}{3}\pi)$. Tertio sit $3w = 2\pi$ seu $w = \frac{2}{3}\pi = 120^\circ$, erit $g = f \cos. A. \frac{2}{3}\pi$, $h = f \sin. A. \frac{2}{3}\pi$, et $m = f^3$,

vnde aequationis $d^3s = f^3s dv^3$ integrale erit $s = e^{fv \cos. A. \frac{2}{3}\pi} (\alpha \sin. A. fv \sin. A. \frac{2}{3}\pi + \mathcal{E} \cos. A. fv \sin. A. \frac{2}{3}\pi)$. Ex quibus huius aequationis

$$d^3s = +f^3s dv^3$$

prodit integrale completum.

$$s = Ce^{fv} + e^{fv \cos. A. \frac{2}{3}\pi} (D \sin. A. fv \sin. A. \frac{2}{3}\pi + E \cos. A. fv \sin. A. \frac{2}{3}\pi)$$

Alterius vero aequationis differentialis

44 INVESTIGATIO CURVAR. QVAE EVOLVTAE

$$d^3 s = -j^3 s d v^3$$

integrale completum erit hoc

$$s = C e^{-f v} + e^{f v \cos. \Lambda \frac{1}{4} \pi} (D \sin. A. f v \sin. A \frac{1}{4} \pi + E \cos. A. f v \sin. A \frac{1}{4} \pi$$

vbi notandum est esse $\sin. A \frac{1}{4} \pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin. A \frac{3}{4} \pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos. A \frac{1}{4} \pi = \frac{1}{2}$ et $\cos. A \frac{3}{4} \pi = -\frac{1}{2}$.

§. 69. Ponamus nunc $v = 4$ seu hanc contemplemur aequationem $d^4 s = m s d v^4$, ac primo fit $4 w = 0$, erit $g = f$, $b = 0$, et $m = f^4$ vnde fit $s = C e^{f v}$. Deinde fit $4 w = \pi$ seu $w = \frac{1}{4} \pi$ erit $g = f \cos. A. \frac{1}{4} \pi$ et $b = f \sin. A. \frac{1}{4} \pi$, atque $m = -j^4$ vnde fit $s = C e^{f v \cos. \Lambda \frac{1}{4} \pi} \sin. A (f v \sin. A. \frac{1}{4} \pi + \zeta)$ hanc enim formam praestat adhibere quam alteram, in qua insuper cosinus arcus $b v$ occurrit. Tertio si ponatur $4 w = 2 \pi$ seu $w = \frac{2}{4} \pi$ erit $g = f \cos. A \frac{2}{4} \pi = 0$; $b = f \sin. A \frac{2}{4} \pi = f$ et $m = j^4$, vnde fit $s = C e^{f v \cos. \Lambda \frac{2}{4} \pi} \sin. A (f v \sin. A \frac{2}{4} \pi + \zeta)$. Quarto si ponatur $4 w = 3 \pi$ seu $w = \frac{3}{4} \pi$, fit iterum $m = -j^4$ et $s = C e^{f v \cos. \Lambda \frac{3}{4} \pi} \sin. A (f v \sin. A \frac{3}{4} \pi + \zeta)$. Ex his igitur colligitur huius aequationis $d^4 s = -j^4 s d v^4$ integrale completum hoc :

$$s = C e^{f v} + D e^{f v \cos. \Lambda \frac{2}{4} \pi} \sin. A (f v \sin. A \frac{2}{4} \pi + \delta) + E e^{-f v}$$

Alterius vero aequationis huius $d^4 s = -j^4 s d v^4$ integrale completum erit hoc :

$$s = C e^{f v \cos. \Lambda \frac{1}{4} \pi} \sin. A (f v \sin. A \frac{1}{4} \pi + \gamma) +$$

$$D e^{f v \cos. \Lambda \frac{3}{4} \pi} \sin. A (f v \sin. A \frac{3}{4} \pi + \delta).$$

§. 70. Non opus est, vt haec ulterius prosequamur, cum tam ex his formis quam methodo ipsa iam pateat lex progressionis. Habebimus igitur generaliter huius aequatio-

quationis differentialis $d^{\nu} s = + f^{\nu} s d v^{\nu}$ istam aequationem integram completam

$$s = C e^{f v} + D e^{f v \cosf. \Lambda \frac{2}{\nu} \pi} (\sin. A (f v \sin. A \frac{2}{\nu} \pi + \delta)) +$$

$$E e^{f v \cosf. \Lambda \frac{4}{\nu} \pi} \sin. A (f v \sin. A \frac{4}{\nu} \pi + \varepsilon) + F e^{f v \cosf. \Lambda \frac{6}{\nu} \pi}$$

$$\sin. A (f v \sin. A \frac{6}{\nu} \pi + \zeta) + G e^{f v \cosf. \Lambda \frac{8}{\nu} \pi} \sin. A (f v \sin. A \frac{8}{\nu} \pi + \eta)$$

etc. quos terminos quidem in infinitum continuare licet, at sufficit eousque continuasse, quoad terminus occurat primo similis, id quod accidit sumendis terminis vel $\frac{\nu+2}{2}$ vel $\frac{\nu+1}{2}$ prout ν fuerit numerus vel par vel impar.

§. 71. Simili modo integrale alterius aequationis differentialis indefiniti gradus erit comparatum

$$d^{\nu} s = - f^{\nu} s d v^{\nu}$$

huius scilicet aequationis integrale completum erit

$$s = C e^{f v \cosf. \Lambda \frac{1}{\nu} \pi} \sin. A (f v \sin. A \frac{1}{\nu} \pi + \gamma) + D e^{f v \cosf. \Lambda \frac{3}{\nu} \pi}$$

$$\sin. A (f v \sin. A \frac{3}{\nu} \pi + \delta) + E e^{f v \cosf. \Lambda \frac{5}{\nu} \pi} \sin. A (f v \sin. A \frac{5}{\nu} \pi + \varepsilon)$$

+ etc. quam itidem non opus est in infinitum producere, cum sumtis vel $\frac{\nu}{2}$ vel $\frac{\nu+1}{2}$ terminis iidem termini recurrant, sequentesque iam in praecedentibus contineantur.

Completum autem integrale vtriusque aequationis differentialis propositae cognoscetur, si tot quantitates constantes C, D, E etc. γ , δ , ε etc. iam fuerint ingressae, quod ν continet unitates. Deinde etiam isto plures termini non accipientur, si π nusquam per fractionem unitate maiorem multiplicetur.

§. 72. In vtraque igitur expressione integrali alii termini non continentur nisi huius formae

$$B e^{f v \cosf. \Lambda \frac{\mu}{\nu} \pi} \sin. A (f v \sin. A \frac{\mu}{\nu} \pi + \xi)$$

F 3

Neque

Neque vero tantum arcus curuarum quaesitarum s per huiusmodi formulas ipsius v exprimuntur, sed etiam abscissae et applicatae x et y . Cum enim sit $x = \int ds \sin. A \cdot v$ et $y = \int ds \cos. A \cdot v$; si pro s expressiones inuentae substituantur, hae formulae actu integrari poterunt. Namque formula generali assumpta erit $ds = Be^{fv \cos. A \frac{\mu}{v} \pi} dv (f \cos. A \frac{\mu}{v} \pi \cdot \sin. A (fv \sin. A \frac{\mu}{v} \pi + \xi) + f \sin. A \frac{\mu}{v} \pi \cdot \cos. A (fv \sin. A \frac{\mu}{v} \pi + \xi))$, quae expressio, si pro B et ξ substituantur successive litterae C, D, E etc. et $\gamma, \delta, \varepsilon$, etc. itemque pro μ numeri vel $0, 2, 4, 6$, etc. vel $1, 3, 5, 7$, etc. prout vel prioris vel posterioris aequationis differentialis integrale desideratur, verum elementi ds valorem exhibet.

§. 73. Multiplicetur igitur istud differentiale ds primum per $\sin. Av$, vt prodeat elementum dx , reperieturque integrando $x = Be^{fv \cos. A \frac{\mu}{v} \pi}$

$$\frac{(f^2 \sin. A (fv \sin. A \frac{\mu}{v} \pi + \xi) \sin. Av - f^2 \sin. A (fv \sin. A \frac{\mu}{v} \pi + \xi - \frac{\mu}{v} \pi) \cos. Av)}{j^2 + 2jj \cos. A} \\ - \frac{f \sin. A (fv \sin. A \frac{\mu}{v} \pi + \xi + \frac{\mu}{v} \pi) \cos. Av + f \sin. A (fv \sin. A \frac{\mu}{v} \pi + \xi - \frac{\mu}{v} \pi) \sin. Av}{\frac{2\mu}{v} \pi + 1}$$

Simili modo cum per quantitates exponentiales, tum per sinus cosinusque arcuum circularium applicata y determinabitur idque per eandem variabilem v quae curuae amplitudinem designat, est enim $v = \int \frac{ds}{r}$. Ex quo intelligitur omnes omnino curuas, quae quampiam evolutam sui habeant similem concessis circuli et hyperbolae quadraturis construi posse.

§. 74. His ergo expositis problema initio propositum sensu latissimo acceptum poterimus resolvere, et omnes curvas assignare quae similes sint suis euolutis cuiuscunque gradus. Hocque ipso limites analyticos non parum amplificasse iure mihi videor, cum aequationes differentiales altiorum graduum, ad quas peruenitur, non solum commode tractare sed etiam integrare docuerim. Hac scilicet methodo non solum aequationum $d^v s = \pm f^v s d^v v$ integratio est in potestate, verum etiam earum aequationum, ex quibus hae sunt ortae, quae sunt $\pm ns = r$; $\pm ns = \frac{r dr}{ds}$; $\pm ns = \frac{r}{ds} d. \frac{r dr}{ds}$; $\pm ns = \frac{r}{ds} d. \frac{r}{ds} d. \frac{r dr}{ds}$; $\pm ns = \frac{r}{ds} d. \frac{r}{ds} d. \frac{r}{ds} d. \frac{r dr}{ds}$ etc. in infinitum. Quin etiam constructio omnium earum aequationum, quae ex his oriuntur quibuscunque adhibitis substitutionibus consequitur, quae aliis viis omnino frustra tentantur, cuiusmodi aequationes iam nonnullas eliciimus.

§. 75. Quodsi ergo quaeratur curva, quae suae euolutae ordinis cuiuscunque v sit similis, eiusque curvae arcus ponatur $= s$, radius osculi r , atque elementum amplitudinis $\frac{ds}{r} = dv$, obtinebitur posito dv constante pro curva quaesita vel haec aequatio $d^v s = + f^v s dv^v$ vel haec $d^v s = - f^v s dv^v$ quarum utraque ita integrari potest, ut valor ipsius s per v definiatur, uti ex praecedentibus apparet. Inuenta autem hac aequatione integrali, innotescit mox radius osculi r , qui est $= \frac{ds}{dv}$; ac praeterea relatio inter coordinatas orthogonales poterit definiiri; positis enim abscissa $= x$ et applicata $= y$ erit $x = \int ds \sin. v$, et $y = \int ds \cos. v$ quae ambae integrationes adeo actu perfici possunt.

§. 76.

§. 76. Vt igitur natura harum curuarum facile in conspectum cadat, singula problemata breuiter repetere atque aequationes integrales inter s et v exhibere est visum. Hic autem tantum similitudinem directam consideramus, quoniam similitudo inuersa ad directam reducitur, vt iam supra notauimus. Singula vero haec problemata, quibus curuae desiderantur, quae suis euolutis dati ordinis sint similes, duplicem admittunt solutionem ob aequationem ambigam $d^{\nu} s = \pm f^{\nu} s d v^{\nu}$. Quauquam enim haec ambiguitas, si ν est numerus impar, nullum discrimen infert, tamen si ν est par, ambo casus a se inuicem maxime sunt diuersi, quocirca pro singulis problematis vtrumque casum seorsim euoluemus.

Problema I.

Inuenire curuas, quae similes sint suis euolutis primis.

Solutio 1. $d s = + f s d v$
et integrando

$$s = C e^{f v}$$

Solutio 2. $d s = - f s d v$
et integrando

$$s = C e^{-f v}$$

Problema II.

Inuenire curuas, quae similes sint suis euolutis secundis.

Solutio 1. $d^2 s = + f^2 s d v^2$
et integrando

$$s = C e^{f v} + D e^{-f v}$$

Solutio

Solutio 2. $d^2 s = -f^2 s dv^2$
 et integrando
 $s = C \sin. A (fv + \gamma)$

Problema III.

Inuenire curuas, quae similes sint suis euolutis tertijs.

Solutio 1. $d^2 s = +f^2 s dv^2$
 et integrando
 $s = Ce^{fv} + De^{-\frac{1}{2}fv} \sin. A (\frac{fv\sqrt{2}}{2} + \delta)$

Solutio 2. $d^2 s = -f^2 s dv^2$
 et integrando
 $s = Ce^{\frac{fv}{2}} \sin A (\frac{fv\sqrt{2}}{2} + \gamma) + De^{-fv}$

Problema IV.

Inuenire curuas, quae similes sint suis euolutis quartis.

Solutio 1. $d^4 s = +f^4 s dv^4$
 et integrando
 $s = Ce^{fv} + D \sin A (fv + \delta) + Ee^{-fv}$
 Solutio 2. $d^4 s = -f^4 s dv^4$
 et integrando

$s = Ce^{\frac{fv}{2}} \sin A (\frac{fv}{\sqrt{2}} + \gamma) + De^{\frac{-fv}{\sqrt{2}}} \sin. A (\frac{fv}{\sqrt{2}} + \delta)$

Problema V.

Inuenire curuas, quae similes sint suis euolutis quintis.

Solutio 1. $d^5 s = +j^5 s dv^5$
 et integrando

$$s = C e^{f v} + D e^{\frac{f v (\sqrt{3}-1)}{4}} \sin. A \left(\frac{f v \sqrt{(10+2\sqrt{3})}}{4} + \delta \right) + \\ E e^{\frac{-f v (\sqrt{3}+1)}{4}} \sin. A \left(\frac{f v \sqrt{(10-2\sqrt{3})}}{4} + \varepsilon \right)$$

Solutio 2. $d^5 s = -j^5 s dv^5$
 et integrando

$$s = C e^{\frac{f v (\sqrt{3}+1)}{4}} \sin. A \left(\frac{f v \sqrt{(10-2\sqrt{3})}}{4} + \gamma \right) + D e^{\frac{-f v (\sqrt{3}-1)}{4}} \\ \sin. A \left(\frac{f v \sqrt{(10+2\sqrt{3})}}{4} + \delta \right) + E e^{-f v}$$

Problema VI.

Inuenire curvas, quae similes sint suis euolutis sextis.

Solutio 1. $d^6 s = +f^6 s dv^6$
 et integrando

$$s = C e^{f v} + D e^{\frac{f v}{2}} \sin. A \left(\frac{f v \sqrt{3}}{2} + \delta \right) + E e^{\frac{-f v}{2}} \\ \sin. A \left(\frac{f v \sqrt{3}}{2} + \varepsilon \right) + F e^{-f v}$$

Solutio 2. $d^6 s = -f^6 s dv^6$
 et integrando

$$s = C e^{\frac{f v \sqrt{3}}{2}} \sin. A \left(\frac{f v}{2} + \gamma \right) + D \sin. A (f v + \delta) + \\ E e^{\frac{-f v \sqrt{3}}{2}} \sin. A \left(\frac{f v}{2} + \varepsilon \right)$$

§. 77. Concessa igitur peripheriae circuli sectione in partes aequales, problemata huius generis, quousque luberit continuari, atque facili negotio resolui possunt. Ita ad curvas

curvas definiendas, quae suis euolutis septimis sint similes, nosse oportet sinus et cosinus partium septimarum peripheriae circuli seu partium $\frac{1}{7}\pi$, $\frac{2}{7}\pi$, $\frac{3}{7}\pi$, quorum determinatio a resolutione aequationis cubicae pendet. Cum autem in hoc negotio aequationum algebraicarum cuiusvis gradus resolutio merito postuletur, tota methodus, quam ad huiusmodi problemata resoluenda exhibuimus, nulla amplius laborat difficultate; neque aequationes differentiales cuiuscunque gradus molestiam afferent, sed omnes aequali fere opera tractabuntur et construentur.

§. 78. Quoniam autem per hanc methodum eae tantum curvae determinantur, quae cuiuspiam ex suis euolutis directe sint similes, tamen per eandem viam eas curvas quoque assignare licet, quae suis euolutis dati ordinis inverte sint similes. Quodsi enim curva requiratur, quae suae euolutae ordinis v inverte sit similis, atque aequatio inter s et v eo, quo supra vti sumus modo eruatur, reperietur ea esse $d^v s = -f^v s dv^{2v}$. Ita curvae, quae suis euolutis primis inverte sunt similes, continentur in aequatione $dds = -f^2 s dv^2$, et curvas, quae suis euolutis secundis inverte similes sunt, complectitur aequatio $d^4 s = -f^4 s dv^4$ et ita porro: quae aequationes omnes methodo tradita tractari et integrari possunt.

§. 79. Denique praeterire non possum, quin moneam methodum hanc multo latius patere, quam ad eas tantum aequationes differentiales altiorum graduum, quae se in hoc negotio obtulerunt integrandas. Maximum enim eadem methodus praestat usum in integratione infinitarum aliarum aequationum differentialium altiorum graduum; quae

aliis viis frustra tractantur : cuiusmodi est aequatio haec α
 $s = \frac{\epsilon ds}{dv} + \frac{\gamma dds}{dv^2} + \frac{\delta d^2s}{dv^3} + \frac{\epsilon d^3s}{dv^4} + \text{etc.}$ posito d v constante.
 Quousque enim etiam haec aequatio fuerit continuata, eius
 integrale seu valor finitus ipsius s per v semper potest ex-
 hiberi. Sed quoniam in hac dissertazione tantum proble-
 ma propositum de euolutarum similitudine euoluere con-
 stitui, pleniorum huius methodi vsum alia occasione de-
 clarabo.

DE SERIEBUS QVIBVSDAM CONSIDERATIONES.

AVCTORE

Leonb. Eulero.

§. 1.

Postquam inuenissem serierum reciprocarum hac forma contentarum

$$1 \pm \frac{1}{3^n} \pm \frac{1}{5^n} \pm \frac{1}{7^n} \pm \frac{1}{9^n} \pm \frac{1}{11^n} \pm \text{etc.}$$

vbi ambiguum signorum superiora valent, si n est numerus par, inferiora vero si n est numerus impar, summas a quadratura circuli pendere, ac per tantam peripheriae circuli π potestatem determinari, cuius exponens sit $= n$; nonnullae se mihi obtulerunt observationes, cum ad has ipsas series, tum ad earum vsum in summandis aliis seriebus spectantes. Quae cum non admodum sint obuiaae, ac fortasse ad alia negotia vtilitatem non spernendam asferre queant, eas hic exponere non abs re fore sum arbitratus.

§. 2. Posita constanter ratione diametri ad circuli peripheriam vt 1 ad π , considero circulum, cuius radius seu semidiameter sit $= 1$, et denotabit π eius semicircumferentiam seu arcum 180 graduum. Quod si nunc accipiat in hoc circulo arcus $= s$, cuius sinus sit $= y$; cosinus $= x$, et tangens $= t$; erit

$$y = s - \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{s^7}{1 \cdot 2 \dots 7} + \text{etc.}$$

$$x = 1 - \frac{s^2}{1 \cdot 2} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{s^6}{1 \cdot 2 \dots 6} + \text{etc.}$$

G 3

atque

atque hinc

$$0 = t - s - \frac{s^2 t}{1 \cdot 2} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5} - \frac{s^6 t}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6} + \text{etc.}$$

feu

$$0 = 1 - \frac{s}{t} + \frac{s^2}{1 \cdot 2} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5} - \frac{s^6}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6} + \text{etc.}$$

§. 3. Consideremus primo aequationem, qua relatio inter sinum y et arcum s continetur, ac manifestum est, valorem s pro dato y non esse constantem, sed omnes eos arcus denotare, quorum idem est communis sinus y . Sit arcuum horum minimus $= \frac{m}{n} \pi$, habebunt omnes sequentes arcus

$$\frac{m}{n} \pi, \frac{n-m}{n} \pi, \frac{2n-m}{n} \pi, \frac{3n-m}{n} \pi, \frac{4n-m}{n} \pi, \text{etc.}$$

$$-\frac{n-m}{n} \pi; -\frac{2n-m}{n} \pi; -\frac{3n-m}{n} \pi, -\frac{4n-m}{n} \pi, -\frac{5n-m}{n} \pi \text{ etc.}$$

eundem communem sinum y , Quocirca huius aequationis:

$$0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot y} - \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5 y} + \frac{s^7}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7 y} - \text{etc.}$$

habebuntur sequentes innumerabiles factores:

$$\left(1 - \frac{ns}{m\pi}\right) \left(1 + \frac{ns}{(n-m)\pi}\right) \left(1 - \frac{ns}{(n-m)\pi}\right) \left(1 + \frac{ns}{(2n-m)\pi}\right) \left(1 - \frac{ns}{(2n-m)\pi}\right) \text{etc.}$$

§. 4. Hinc itaque valores ipsius $\frac{s}{y}$ constituent sequentem seriem:

$$\frac{n}{n\pi} + \frac{n}{(n-m)\pi} - \frac{n}{(n-m)\pi} - \frac{n}{(2n-m)\pi} + \frac{n}{(2n-m)\pi} + \frac{n}{(3n-m)\pi} - \text{etc.}$$

Horum itaque summa aequalis erit coefficienti ipsius $-s$ in aequatione, qui est $= \frac{s}{y}$: Summa factorum ex binis erit $= 0$, summa ex ternis $= -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 y}$, etc. uti sequitur:

summa terminorum	=	$\frac{s}{y}$
summ. fact. ex binis	=	0
summ. fact. ex ternis	=	$-\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 y}$
summ. fact. ex quaternis	=	0

sum.

$$\begin{aligned} \text{summ. fact. ex quinis} &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \\ \text{summ. fact. ex senis} &= 0 \\ \text{summ. fact. ex septenis} &= \frac{-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \\ \text{summ. fact. ex octonis} &= 0 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

§ 5. Quod si autem generatim seriei cuiuscunque
 $a + b + c + d + e + \text{etc.}$ fuerit

$$\begin{aligned} \text{summa ipsorum terminorum} &= \alpha \\ \text{summa factorum ex binis} &= \beta \\ \text{summa factorum ex ternis} &= \gamma \\ \text{summa factorum ex quaternis} &= \delta \\ \text{summa factorum ex quinis} &= \epsilon \\ \text{summa factorum ex senis} &= \zeta \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

poterunt ex his summae quadratorum, cuborum, biquadratorum, et potestatum quarumvis terminorum huius seriei assignari. Quod si enim sit

$$\begin{aligned} a + b + c + d \quad \text{etc.} &= A \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.} &= B \\ a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \text{etc.} &= C \\ a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + \text{etc.} &= D \\ a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + \text{etc.} &= E \\ a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + \text{etc.} &= F \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

sequenti modo istarum summarum valores determinabuntur.

$$\begin{aligned} A &= \alpha \\ B &= \alpha A - 2 \beta \\ C &= \alpha B - 3 \beta A + 3 \gamma \\ D &= \alpha C - 6 \beta B + 3 \gamma A - 4 \delta \end{aligned}$$

$$E =$$

$$E = \alpha D - \beta C + \gamma B - \delta A + \varepsilon \varepsilon$$

$$F = \alpha E - \beta D + \gamma C - \delta B + \varepsilon A - \zeta \zeta$$

etc.

Quae progressio cum facilem legem teneat, et ex terminis praecedentibus quivis terminus expedite definiri possit, poterimus seriei superioris valores ipsius $\frac{z}{\varepsilon}$ exhibentis summam potestatum quarumcunque terminorum definire.

§. 6. Antequam autem hanc generalem progressionem reliquamus, notari conveniet singularem proprietatem, quam valores litterarum A, B, C, D etc. inter se tenent. Oriuntur ii scilicet ex evolutione huius expressionis

$$\alpha - 2\beta z + 3\gamma z^2 - 4\delta z^3 + 5\varepsilon z^4 - 6\zeta z^5 + 7\eta z^6 - \text{etc.}$$

$$1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4 - \varepsilon z^5 + \zeta z^6 - \text{etc.}$$

si quidem per diuisionem actualem quotus secundum potestates ipsius z eruatur. Prodibit namque diuisione consueto more instituta sequens quotus $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc.}$ ita vt ista series aequalis sit illi fractioni. Praeterea notandum est, si seriei $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4 - \text{etc.}$ summa ponatur $= Z$, ita vt sit Z denominator illius fractionis, fore numeratorem $= \frac{dz}{bz}$. Ex quo seriei $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$ summa erit $= \frac{dz}{az}$. Non solum itaque ex datis factis binorum, ternorum, quaternorum etc. summae potestatum seriei propositae $a + b + c + d + \text{etc.}$ scilicet valores litterarum A, B, C, D, etc. poterunt inueniri, sed etiam summa seriei, quam hae ipsae potestates in nouam progressionem geometricam respecti-

spective ducti, nimirum huius seriei

$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$ summa poterit assignari. Hancque proprietatem probe notasse in sequentibus plurimum iuuabit, ubi in nouas series sumus inquisituri.

§. 7. Cum igitur huius seriei :

$\frac{x}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} - \text{etc.} \right)$
 dentur primo ipsorum terminorum summa, tum etiam summae factorum ex binis, ternis, quaternis et ita porro;

$$A = \frac{1}{1y}$$

$$B = \frac{A}{1y}$$

$$C = \frac{B}{1y} - \frac{1}{1 \cdot 2y}$$

$$D = \frac{C}{1y} - \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3y}$$

$$E = \frac{D}{1 \cdot y} - \frac{B}{1 \cdot 2 \cdot 3y} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4y}$$

$$F = \frac{E}{1y} - \frac{C}{1 \cdot 2 \cdot 3y} + \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5y}$$

$$G = \frac{F}{1y} - \frac{D}{1 \cdot 2 \cdot 3y} + \frac{B}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5y} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6y} \quad \text{etc.}$$

erit vt sequitur

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \text{etc.} = \frac{A \pi}{n}$$

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-m)^2} + \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(2n-m)^2} + \frac{1}{(2n+m)^2} + \text{etc.} = \frac{B \pi^2}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n-m)^3} - \frac{1}{(n+m)^3} - \frac{1}{(2n-m)^3} + \frac{1}{(2n+m)^3} + \text{etc.} = \frac{C \pi^3}{n^3}$$

$$\frac{1}{n^4} + \frac{1}{(n-m)^4} + \frac{1}{(n+m)^4} + \frac{1}{(2n-m)^4} + \frac{1}{(2n+m)^4} + \text{etc.} = \frac{D \pi^4}{n^4}$$

$$\frac{1}{n^5} + \frac{1}{(n-m)^5} - \frac{1}{(n+m)^5} - \frac{1}{(2n-m)^5} + \frac{1}{(2n+m)^5} + \text{etc.} = \frac{E \pi^5}{n^5}$$

$$\frac{1}{n^6} + \frac{1}{(n-m)^6} + \frac{1}{(n+m)^6} + \frac{1}{(2n-m)^6} + \frac{1}{(2n+m)^6} + \text{etc.} = \frac{F \pi^6}{n^6}$$

etc.

Tom. XII,

H

vbi

vbi pro potestatibus paribus omnes termini habent signum +, pro imparibus vero signa conueniunt cum signis ipsius seriei primae.

§. 8. Retineant litterae A, B, C, D, E, etc. valores, quos ipsis modo tribuimus, sitque nobis haec seriei proposita

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 \text{ etc.}$$

cuius summam ex regula §. 6 data inuestigamus. Huius autem seriei summa inde est $= \frac{dz}{Zdz}$ existente $Z = 1 - \frac{z}{y}$

$$+ \frac{z^2}{1+2z+y} - \frac{z^4}{1+2z+y} + \frac{z^6}{1+2z+y} - \text{etc.} = 1 - \frac{z}{y} \sin. A \cdot z.$$

Ex quo ob y hoc loco constans ponendum erit $dZ = \frac{-dz \cos. Az}{y}$ ac propterea summa seriei propositae

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc}$$

erit $= \frac{\cos. A \cdot z}{y - \sin. Az}$. Hinc erit istius seriei summa $Az + Bz^2$

$$+ Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.} = \frac{z \cos. A \cdot z}{y - \sin. Az}.$$

§. 9. Sit $z = \frac{p\pi}{n}$, exprimet haec series summam omnium harum serieium :

$$+ \frac{p}{m} + \frac{p}{n-n} - \frac{p}{n+m} - \frac{p}{2n-m} + \frac{p}{2n+m} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{p^2}{m^2} + \frac{p^2}{(n-n)^2} + \frac{p^2}{(n+m)^2} + \frac{p^2}{(2n-m)^2} + \frac{p^2}{(2n+m)^2} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{p^3}{m^3} + \frac{p^3}{(n-n)^3} - \frac{p^3}{(n+m)^3} - \frac{p^3}{(2n-m)^3} + \frac{p^3}{(2n+m)^3} + \text{etc.}$$

etc.

Haec autem series verticaliter additae dant

$$\frac{p}{m-p} + \frac{p}{n-m-p} - \frac{p}{n+n+p} - \frac{p}{2n-n+p} + \frac{p}{2n+m-p} + \text{etc.}$$

cuius seriei igitur summa est $= \frac{p\pi \cos. A \cdot \frac{p\pi}{n}}{ny - n \sin. A \cdot \frac{p\pi}{n}}$ seu cum

y sit

y fit sinus arcus $\frac{m\pi}{n}$, habebitur istius seriei summa

$$= \frac{p \pi \cos. A \cdot \frac{p\pi}{n}}{n \sin. A \cdot \frac{m\pi}{n} - n \sin. A \cdot \frac{p\pi}{n}} \quad \text{Quod si ponatur } m - p = a$$

et $m + p = b$ ita vt fit $m = \frac{a+b}{2}$ et $p = \frac{b-a}{2}$ prodibit huius seriei

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{n-b} - \frac{1}{n+b} - \frac{1}{2n-a} + \frac{1}{2n+a} + \frac{1}{3n-b} - \frac{1}{3n+b} - \text{etc.}$$

sive huius

$$\frac{a}{a} + \frac{1}{n^2-b^2} - \frac{2a}{4n^2-a^2} + \frac{2b}{9n^2-b^2} - \frac{2a}{16n^2-a^2} + \frac{2b}{25n^2-b^2} - \text{etc.}$$

$$\text{summa} = \frac{\pi \cos. A \cdot \frac{(b-a)\pi}{2n}}{n \sin. A \cdot \frac{(b+a)\pi}{2n} - n \sin. A \cdot \frac{(b-a)\pi}{2n}}$$

§. 10. Verum haec nimis sunt generalia, vt difficulter omnia, quae in iis comprehenduntur, perspici queant. Quamobrem ad specialiora descendamus, ac ponamus sinum $y =$ sinui toti $= 1$: erit $m = 1$ et $n = 2$. Hinc igitur sequentes nanciscimur series

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \text{etc.} = \frac{A\pi}{2}$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} = \frac{B\pi^2}{2^2}$$

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} - \text{etc.} = \frac{C\pi^3}{2^3}$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.} = \frac{D\pi^4}{2^4}$$

etc.

seu hae

$$I - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.} = \frac{A\pi}{2^2}$$

$$I + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.} = \frac{B\pi^2}{2^3}$$

$$I - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \text{etc.} = \frac{C\pi^3}{2^4}$$

$$I + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{etc.} = \frac{D\pi^4}{2^5}$$

60 DE SERIEBUS QVIBVSDAM CONSIDERAT.

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.} &= \frac{E\pi^2}{16} \\
 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{72} + \frac{1}{108} + \text{etc.} &= \frac{F\pi^6}{37} \\
 1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \text{etc.} &= \frac{G\pi^7}{28} \\
 1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{etc.} &= \frac{H\pi^8}{29} \\
 &\text{etc.}
 \end{aligned}$$

Valores autem litterarum A. B, C, D etc. ex sequenti lege inuenientur.

$$\begin{aligned}
 A &= 1 \\
 B &= \frac{A}{1} \\
 C &= \frac{B}{1} - \frac{1}{1 \cdot 2} \\
 D &= \frac{C}{1} - \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\
 E &= \frac{D}{1} - \frac{B}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\
 F &= \frac{E}{1} - \frac{C}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \\
 G &= \frac{F}{1} - \frac{D}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{B}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{1 \cdot 2 \dots 6} \\
 H &= \frac{G}{1} - \frac{E}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{C}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{A}{1 \cdot 2 \dots 7} \\
 &\text{etc.}
 \end{aligned}$$

Vnde reperuntur sequentes valores litterarum

$$\begin{aligned}
 A &= 1 \cdot \frac{\pi^2}{2 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.} \\
 B &= \frac{1}{1} \cdot \frac{\pi^2}{2 \cdot 3} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} \\
 C &= \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\pi^3}{2 \cdot 4} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \text{etc.} \\
 D &= \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\pi^4}{2 \cdot 5} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.} \\
 E &= \frac{5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\pi^5}{2 \cdot 6} = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \text{etc.} \\
 F &= \frac{16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{\pi^6}{2 \cdot 7} = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.} \\
 G &= \frac{61}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \frac{\pi^7}{2 \cdot 8} = 1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \text{etc.} \\
 H &= \frac{272}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 7} \cdot \frac{\pi^8}{2 \cdot 9} = 1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

I =

$$I = \frac{1385}{1.2.3\dots 8} \cdot \frac{\pi^9}{2^{10}} = I - \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} - \frac{1}{7^9} + \text{etc.}$$

$$K = \frac{7916}{1.2.3\dots 9} \cdot \frac{\pi^{10}}{2^{11}} = I + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \text{etc.}$$

$$L = \frac{5021}{1.2.3\dots 10} \cdot \frac{\pi^{11}}{2^{12}} = I - \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{5^{11}} + \frac{1}{7^{11}} + \text{etc.}$$

$$M = \frac{35792}{1.2.3\dots 11} \cdot \frac{\pi^{12}}{2^{13}} = I + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \frac{1}{7^{12}} + \text{etc.}$$

$$N = \frac{2722765}{1.2.3\dots 12} \cdot \frac{\pi^{13}}{2^{14}} = I - \frac{1}{3^{13}} + \frac{1}{5^{13}} + \frac{1}{7^{13}} + \text{etc.}$$

$$O = \frac{22363256}{1.2.3\dots 13} \cdot \frac{\pi^{14}}{2^{15}} = I + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{5^{14}} + \frac{1}{7^{14}} + \text{etc.}$$

§. 11. Denotant hic litterae A, B, C, etc. numerales tantum coefficientes potestatum π per potestates binarii diuisarum: quarum valores etfi satis commode ex lege data definiri possunt, tamen alia lex potest exhiberi, quae magis ad calculum videtur expedita. Considero scilicet seriem $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$ cuius summa, quae tantisper designetur littera s , est per

§. 8. $= \frac{\text{cof. } A \cdot z}{1 - \text{fin. } Az}$, ob $y = 1$. Quod si igitur ex hac aequatione $s = \frac{\text{cof. } A \cdot z}{1 - \text{fin. } Az}$ valor ipsius s in serie exprimitur,

quae secundum potestates ipsius z progrediatur, prodire debet ipsa series $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.}$ Nulla enim alia series similis formae puta $P + Qz + Rz^2 + Sz^3 + \text{etc.}$ assignari potest aequalis illi $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.}$ quin simul coefficientes potestatum z congruant, sitque $P = A$; $Q = B$; $R = C$; $S = D$, etc.

At vero exprimit $\frac{\text{cof. } A \cdot z}{1 - \text{fin. } Az}$ tangentem arcus $\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}$ seu erit $s = \text{tang. } A \left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} \right)$ et hancobrem conuertendo $\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} = A \text{ tang. } s = \int \frac{ds}{1 + ss}$ sumtisque differentialibus ob $\frac{\pi}{4}$ constans seu arcum 45 graduum, habebitur $\frac{dz}{2} = \frac{ds}{1 + ss}$ siue $dz + ss ds = 2 ds$. Nunc ponatur $s = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$ erit

62 DE SERIEBUS QVIBVSDAM CONSIDERAT.

$$\begin{aligned} \frac{zds}{dz} &= 2B + 4Cz + 6Dz^2 + 8Ez^3 + 10Fz^4 + \text{etc.} \\ ss &= A^2 + 2ABz + 2ACz^2 + 2ADz^3 + 2AEz^4 + \text{etc.} \\ 1 &= + 1 \quad + B^2 z^2 + 2BCz^3 + 2BDz^4 + \text{etc.} \\ &\quad + C^2 z^4 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Comparatis nunc terminis homogeneis inter se valores litterarum ita definiantur, vt coefficientes singularum potestatum ipsius z euanescent; atque sequentes litterarum $A, B, C, D, E, \text{etc.}$ obtinebuntur determinationes, existente vt iam inuenimus $A = 1$.

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= \frac{A^2 + 1}{2} \\ C &= \frac{2AB}{4} \\ D &= \frac{2AC + B^2}{6} \\ E &= \frac{2AD + 2BC}{8} \\ F &= \frac{2AE + 2BD + C^2}{10} \\ G &= \frac{2AF + 2BE + 2CD}{12} \\ H &= \frac{2AG + 2BF + 2CE + D^2}{14} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Atque hinc eadem profus determinationes litterarum A, B, C, D etc. prodibunt, quas altera lex supra data §. 10 suppeditat.

§. 12. Cum denominatores fractionum, quibus litterae $A, B, C, D, \text{etc.}$ aequales sunt inuentae, satis regulariter progrediantur, potest hinc peculiaris regula ad inueniendos numeratores reperiri: Ponamus enim

$$A =$$

$A = \alpha$	$F = \frac{\zeta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$	
$B = \frac{\beta}{2}$	$G = \frac{\eta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$	
$C = \frac{\gamma}{1 \cdot 2}$	$H = \frac{\theta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 7}$	
$D = \frac{\delta}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	$I = \frac{\iota}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 8}$	
$E = \frac{\epsilon}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$	$K = \frac{\kappa}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9}$	etc.

eritque factis substitutionibus haec lex :

$\alpha = 1$	$\epsilon = \alpha \delta + 3 \beta \gamma$
$\beta = \frac{\alpha^2 + 1}{2}$	$\zeta = \alpha \epsilon + 4 \beta \delta + 3 \gamma^2$
$\gamma = \alpha \beta$	$\eta = \alpha \zeta + 5 \beta \epsilon + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \gamma \delta$
$\delta = \alpha \gamma + \beta^2$	$\theta = \alpha \eta + 6 \beta \zeta + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \gamma \epsilon + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\delta^2}{\beta}$
$\iota = \alpha \theta + 7 \beta \eta + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \gamma \zeta + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \delta \epsilon$	
$\kappa = \alpha \iota + 8 \beta \theta + \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \gamma \eta + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \delta \zeta + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\epsilon^2}{\beta}$	

Lex haec perspicua est, si hoc modo notetur, quoties postremus terminus sit quadratum, eum insuper per binarium diuidi debere.

§. 13. Consideremus nunc hanc seriem :

$$A z + B z^2 + G z^3 + D z^4 + E z^5 + \text{etc.}$$

cuius summam constat esse $= \frac{z \cos A z}{1 - \sin A z}$, ac ponatur

$$z = \frac{p\pi}{2}, \text{ erit } \frac{p \pi \cos A \cdot \frac{p\pi}{2}}{2 - 2 \sin A \cdot \frac{p\pi}{2}} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2p + \frac{B\pi^2}{2^3} \cdot 2p^2 + \frac{C\pi^3}{2^4} \cdot 2p^3 + \frac{D\pi^4}{2^5} \cdot 2p^4 + \text{etc.}$$

$$\text{feu } \frac{\pi \cos A \cdot \frac{p\pi}{2}}{4 - 4 \sin A \cdot \frac{p\pi}{2}} = \frac{A\pi}{2^2} + \frac{pB\pi^2}{2^3} + \frac{p^2 C\pi^3}{2^4} + \frac{p^3 D\pi^4}{2^5} + \text{etc.}$$

Quodsi ergo loco singulorum terminorum substituantur series

ries ex §. 10 prodibit $\frac{\pi \cos. A. \frac{p\pi}{2}}{4-4 \sin. A. \frac{p\pi}{2}} =$

$$+ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.}$$

$$+ p + \frac{p}{3^2} + \frac{p}{5^2} + \frac{p}{7^2} + \frac{p}{9^2} + \text{etc.}$$

$$+ p^2 - \frac{p^2}{3^3} + \frac{p^2}{5^3} - \frac{p^2}{7^3} + \frac{p^2}{9^3} - \text{etc.}$$

$$+ p^3 + \frac{p^3}{3^4} + \frac{p^3}{5^4} + \frac{p^3}{7^4} + \frac{p^3}{9^4} + \text{etc.}$$

etc.

Omnes autem hae series deorsum additae abeunt in hanc:

$$\frac{1}{1-p} - \frac{1}{3+p} + \frac{1}{5-p} - \frac{1}{7+p} + \frac{1}{9-p} - \text{etc.}$$

cuius adeo summa est $= \frac{\pi \cos. A. \frac{p\pi}{2}}{4-4 \sin. A. \frac{p\pi}{2}}$

§. 14. Plures huius generis series summabiles derivare licebit ex §. 9. serie sub finem exposita. Ponamus $a = b = m$: et habebimus hanc

$$\frac{2m}{n^2-m^2} - \frac{2m}{4n^2-m^2} + \frac{2m}{9n^2-m^2} - \frac{2m}{16n^2-m^2} + \frac{2m}{25n^2-m^2} - \text{etc.}$$

cuius summa erit $= \frac{\pi}{n \sin. A. \frac{m\pi}{n}} - \frac{1}{m}$ ob $\cos. A. \circ \pi = 1$

et $\sin. A. \circ \pi = 1$. Quamobrem habebitur, si per $2m$ diuidatur

$$\frac{1}{n^2-m^2} - \frac{1}{4n^2-m^2} + \frac{1}{9n^2-m^2} - \frac{1}{16n^2-m^2} + \frac{1}{25n^2-m^2} - \text{etc.}$$

$= \frac{\pi}{2mn \sin. A. \frac{m\pi}{n}} - \frac{1}{2nm}$. Ponamus porro $a = -m$ et

$b = +m$, ac proveniet $= \frac{\pi \cos. A. \frac{m\pi}{n}}{n \sin. A. \frac{m\pi}{n}} + \frac{1}{m} =$

$$\frac{2m}{n^2-m^2} + \frac{2m}{4n^2-m^2} + \frac{2m}{9n^2-m^2} + \frac{2m}{16n^2-m^2} + \frac{2m}{25n^2-m^2} + \text{etc.}$$

feu

seu facta diuisione per $2m$, erit $\frac{1}{2m^2} - \frac{\pi \cos A \cdot \frac{m\pi}{n}}{2mn \sin A \cdot \frac{m\pi}{n}}$

$$= \frac{1}{n^2 - m^2} + \frac{1}{4n^2 - m^2} + \frac{1}{9n^2 - m^2} + \frac{1}{16n^2 - m^2} + \frac{1}{25n^2 - m^2} + \text{etc.}$$

Quoties itaque euenit vt $\cos A \cdot \frac{m\pi}{n}$ euanescat, toties seriei summa algebraice erit assignabilis quippe $= \frac{1}{2m^2}$.

Fit autem hoc, si fuerit $\frac{m}{n} = \frac{2i+1}{2}$ seu $m = 2i + 1$, et $n = 2$ vnde erit:

$$\frac{1}{4(2i+1)^2} = \frac{1}{4 - (2i+1)^2} + \frac{1}{16 - (2i+1)^2} + \frac{1}{36 - (2i+1)^2} + \frac{1}{64 - (2i+1)^2} + \text{etc.}$$

Ex quo sequens oritur propositio paradoxa: esse scilicet

$$\frac{1}{4-p} + \frac{1}{16-p} + \frac{1}{36-p} + \frac{1}{64-p} + \frac{1}{100-p} + \text{etc.} = \frac{1}{2p}$$

quoties fuerit p numerus quadratus integer et impar.

§. 15. Ponamus $n = 1$, atque $m^2 = p$, erit

$$\frac{1}{1-p} - \frac{1}{4-p} + \frac{1}{9-p} - \frac{1}{16-p} + \frac{1}{25-p} + \text{etc.} = \frac{\pi\sqrt{p}}{2p \sin A \cdot \pi\sqrt{p}} - \frac{1}{2p}$$

$$\frac{1}{1-p} + \frac{1}{4-p} - \frac{1}{9-p} + \frac{1}{16-p} - \frac{1}{25-p} + \text{etc.} = \frac{1}{2p} - \frac{\pi\sqrt{p} \cos A \cdot \pi\sqrt{p}}{2p \sin A \cdot \pi\sqrt{p}}$$

quae series si addantur sequitur fore:

$$\frac{1}{1-p} + \frac{1}{9-p} + \frac{1}{25-p} + \text{etc.} = \frac{\pi\sqrt{p} \sin A \cdot \pi\sqrt{p}}{4p \sin A \cdot \pi\sqrt{p}}$$

at si eadem a se inuicem subtrahantur; erit

$$\frac{1}{4-p} + \frac{1}{16-p} + \frac{1}{36-p} + \text{etc.} = \frac{1}{2p} - \frac{\pi\sqrt{p} (1 + \cos A \cdot \pi\sqrt{p})}{4p \sin A \cdot \pi\sqrt{p}}$$

$$\text{At est } \frac{\sin A \cdot \pi\sqrt{p}}{\sin A \cdot \pi\sqrt{p}} = \text{tang. } A \cdot \frac{\pi\sqrt{p}}{2} \text{ et } \frac{1 + \cos A \cdot \pi\sqrt{p}}{\sin A \cdot \pi\sqrt{p}} = \text{cosec. } A \cdot \frac{\pi\sqrt{p}}{2}$$

ex quo summae posteriores simpliciores reddentur.

§. 16. Possumus itaque hinc summare sequentes series

$\frac{1}{1-p} + \frac{1}{4-p} + \frac{1}{9-p} + \frac{1}{16-p} + \text{etc.}$ si quidem p significet numerum affirmatiuum quemcunque. At si loco p substituatur numerus negatiuus puta $-q$, tum fiunt tam sinus et cosinus, quam ipsi arcus $\pi\sqrt{p}$ seu $\pi\sqrt{-q}$ quantitates imaginariae. Cum autem summae serierum nihilo

minus maneant reales et finitae, imaginaria sese destruent. Quamobrem inuestigari conueniet, cuiusmodi quantitates reales in his formis $\frac{\pi\sqrt{-q}}{\sin.A.\pi\sqrt{-q}}$ et $\frac{\pi\sqrt{-q}}{\tanq.A.\pi\sqrt{-q}}$ continentur. Ad hoc ponamus $u = \frac{\pi\sqrt{-q}}{\sin.A.\pi\sqrt{-q}}$ eritque $\sin.A.\pi\sqrt{-q} = \frac{\pi\sqrt{-q}}{u}$ et $\pi\sqrt{-q} = A \sin. \frac{\pi\sqrt{-q}}{u}$; sumantur differentia- lia positis π et u variabilibus, habebitur $d\pi = \frac{u d\pi - \pi du}{u\sqrt{(u+\pi^2)}}$. Po- natur $u = \pi v$, prodibit $d\pi = \frac{-dv}{v\sqrt{(q+vv)}}$ et $\pi = \frac{1}{\sqrt{q}}$ $l \frac{\sqrt{q+vv}}{cv}$. Hinc erit $e^{\pi\sqrt{q}c} v = \sqrt{q+vv}$ et $v = \frac{2 e^{\pi\sqrt{q}c} \sqrt{q}}{e^{2\pi\sqrt{q}c^2} - 1}$ atque $u = \frac{2\pi c^{\pi\sqrt{q}c} \sqrt{q}}{e^{2\pi\sqrt{q}c^2} - 1}$. Constans autem c ita debet esse comparata vt facto $\pi = 0$ fiat $u = 1$ ex quo fit $c = 1$

Quamobrem erit $\frac{\pi\sqrt{-q}}{\sin.A.\pi\sqrt{-q}} = \frac{2 e^{\pi\sqrt{q}} \pi \sqrt{q}}{e^{2\pi\sqrt{q}} - 1}$. Simili modo ponatur $\frac{\pi\sqrt{-q}}{\tanq.A.\pi\sqrt{-q}} = \frac{\pi}{v}$ erit $v\sqrt{-q} = \tanq.A.\sqrt{-q}$ et $\pi\sqrt{-q} = A \tanq. v\sqrt{-q}$ ac differentiando $d\pi = \frac{-dv}{1-vv}$. Inte- gretur denuo, erit $\pi = \frac{1}{2\sqrt{q}} l \frac{1+vv\sqrt{q}}{1-v\sqrt{q}}$ et $e^{2\pi\sqrt{q}} - e^{2\pi\sqrt{q}v\sqrt{q}} = 1 + v\sqrt{q}$, vnde fit $v = \frac{e^{2\pi\sqrt{q}} - 1}{(e^{2\pi\sqrt{q}} + 1)\sqrt{q}}$ atque

$$\frac{\pi\sqrt{-q}}{\tanq.A.\pi\sqrt{-q}} = \frac{(e^{2\pi\sqrt{q}} + 1)\pi\sqrt{q}}{e^{2\pi\sqrt{q}} - 1}$$

§. 17. Nacti igitur sumus octo sequentes series, quarum summae assignari possunt, quas cum summis consp- ectui exponemus

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-p} - \frac{1}{4-p} + \frac{1}{9-p} - \frac{1}{16-p} + \frac{1}{25-p} - \text{etc.} &= \frac{\pi\sqrt{p}}{2p \sin.A.\pi\sqrt{p}} - \frac{1}{2p} \\ \frac{1}{3-p} + \frac{2}{4-p} + \frac{1}{9-p} + \frac{1}{16-p} + \frac{1}{25-p} + \text{etc.} &= \frac{1}{2p} - \frac{\pi\sqrt{p}}{2p \tanq.A.\pi\sqrt{p}} \\ \frac{1}{3-p} + \frac{1}{9-p} + \frac{1}{25-p} + \frac{1}{49-p} + \text{etc.} &= \frac{\pi\sqrt{p}}{4p \cos.A.\frac{\pi\sqrt{p}}{2}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4-p} + \frac{1}{16-p} + \frac{1}{36-p} + \frac{1}{64-p} + \text{etc.} = \frac{1}{2p} - \frac{\pi\sqrt{p}}{4p \operatorname{tang}. A. \frac{\pi\sqrt{p}}{2}}$$

$$\frac{1}{1+q} - \frac{1}{4+q} + \frac{1}{9+q} - \frac{1}{16+q} + \text{etc.} = \frac{1}{2q} - \frac{e^{\pi\sqrt{q}} \pi \sqrt{q}}{(e^{2\pi\sqrt{q}} - 1)q}$$

$$\frac{1}{1+q} + \frac{1}{4+q} + \frac{1}{9+q} + \frac{1}{16+q} + \text{etc.} = \frac{(e^{2\pi\sqrt{q}} + 1) \pi \sqrt{q}}{2(e^{2\pi\sqrt{q}} - 1)q} - \frac{1}{2q}$$

$$\frac{1}{4+q} + \frac{1}{9+q} + \frac{1}{25+q} + \frac{1}{49+q} + \text{etc.} = \frac{(e^{\pi\sqrt{q}} - 1) \pi \sqrt{q}}{4(e^{\pi\sqrt{q}} + 1)q}$$

$$\frac{1}{4+q} + \frac{1}{16+q} + \frac{1}{36+q} + \frac{1}{64+q} + \text{etc.} = \frac{(e^{\pi\sqrt{q}} + 1) \pi \sqrt{q}}{4(e^{\pi\sqrt{q}} - 1)q} - \frac{1}{2q}$$

§. 18. Cum supra legem exhibuerim, qua summae potestatum omnium terminorum huius seriei

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.}$$

progrediuntur, iuueſtigabo nūc legem, quam potestates impares tantum inter ſe tenent, quo hae summae sine cognitione parium, quousque libererit, continuari possint; ſit itaque

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.} = A \pi$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{3^9} - \text{etc.} = B \pi^3$$

$$1 - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{5^7} + \frac{1}{5^9} - \text{etc.} = C \pi^5$$

$$1 - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^5} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{7^9} - \text{etc.} = D \pi^7$$

$$1 - \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{9^7} + \frac{1}{9^9} - \text{etc.} = E \pi^9$$

etc.

atque iuueſtiganda erit lex, qua coefficientes A, B, C, D etc. progrediuntur. Hunc in finem conſidero hanc ſeriem $A \pi z + B \pi^3 z^3 + C \pi^5 z^5 + D \pi^7 z^7 + \text{etc.}$ cuius ſumma ſit $= s$; erit ergo his ſeriebus per reſpondentes potestates ipſius z multiplicatis reſpectiue:

$$1 = 2$$

$$s =$$

$$s = \frac{z}{1-zz} - \frac{z^2}{5-zz} + \frac{z^3}{25-zz} - \frac{z^4}{49-zz} + \text{etc. et}$$

$$\frac{z^2}{z} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{3-z} - \frac{1}{3+z} + \frac{1}{5-z} + \frac{1}{5+z} \text{ etc.}$$

Cum autem ex §. 9. fit $\frac{\pi \text{ cof. } A \frac{(b-a)\pi}{2n}}{n \text{ fin. } A \frac{(b+a)\pi}{2n} - n \text{ fin. } A \frac{(b-a)\pi}{2n}} =$

$\frac{z}{a} + \frac{1}{n-b} - \frac{1}{n+b} - \frac{1}{2n-a} + \frac{1}{2n+a} + \frac{1}{3n-b} - \frac{1}{3n+b} - \text{etc.}$
 fiat $a=1-z$; $n=2$; et $b=1-z$; atque haec series transibit in illam; ex quo prodibit

$$\frac{z^2}{z} = \frac{\pi}{2 \text{ fin. } A \frac{(1-z)\pi}{1}} \text{ et } s = \frac{\pi z}{4 \text{ fin. } A \frac{(1-z)\pi}{2}} \text{ siue } s =$$

$$\frac{\pi z}{4 \text{ cof. } A \frac{\pi z}{2}} = \frac{\frac{\pi z}{4}}{1 - \pi^2 z^2} + \frac{\pi^2 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} - \frac{\pi^6 z^6}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2^6} + \text{etc.}$$

quae fractio cum, si actu diuidatur, ipsam assumptam seriem $A \pi z + B \pi^3 z^3 + C \pi^5 z^5 + \text{etc.}$ reproducere debeat, erit:

$$A = \frac{\pi}{4}$$

$$B = \frac{A}{2 \cdot 4}$$

$$C = \frac{B}{2 \cdot 4} - \frac{A}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$$

$$D = \frac{C}{2 \cdot 4} - \frac{B}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{A}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12}$$

$$E = \frac{D}{2 \cdot 4} - \frac{C}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{B}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} - \frac{A}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 16}$$

etc.

§. 19. Vel si ponatur:

$$I - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.} = \frac{A\pi}{2^2}$$

$$I - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \text{etc.} = \frac{B\pi^3}{2^4}$$

$$I - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \text{etc.} = \frac{C\pi^5}{2^6}$$

$$I - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \text{etc.} = \frac{D\pi^7}{2^8}$$

etc.

coeffi-

coefficientes A, B, C, etc. hanc tenebunt legem :

$$A = 1$$

$$B = \frac{A}{1 \cdot 2}$$

$$C = \frac{B}{1 \cdot 3} - \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$D = \frac{C}{1 \cdot 2} - \frac{B}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6}$$

$$E = \frac{D}{1 \cdot 2} - \frac{C}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{B}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6} - \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 8}$$

Quodsi autem illae series retro continuentur, vt ad potestates affirmatiuas deueniatur, erunt omnium illarum serierum summae = 0; ita vt etiamsi in his formis vltierus progredieremur, tamen alii valores non prodituri essent. Est scilicet

$$1 - 3^7 + 5^7 - 7^7 + 9^7 - \text{etc.} = 0$$

$$1 - 3^5 + 5^5 - 7^5 + 9^5 - \text{etc.} = 0$$

$$1 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + 9^3 - \text{etc.} = 0$$

$$1 - 3^1 + 5^1 - 7^1 + 9^1 - \text{etc.} = 0$$

§. 20. Quemadmodum autem summae potestatum imparium peculiarem inter se tenent progressionis legem, ita etiam potestates pares simili proprietate gaudent, vt omnes ex se ipsis sine subsidio potestatum imparium definiri queant. Quam legem vt eruamus, simili vtamur operatione. Sit igitur

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.} = A \pi^2$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{etc.} = B \pi^4$$

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{etc.} = C \pi^6$$

$$1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{etc.} = D \pi^8$$

ac inuestigetur summa huius seriei :

$$A \pi^2 z^2 + B \pi^4 z^4 + C \pi^6 z^6 + D \pi^8 z^8 + \text{etc.} = s,$$

$$\text{erit } s = \frac{z^2}{1-z^2} + \frac{z^4}{9-z^2} + \frac{z^6}{25-z^2} + \frac{z^8}{49-z^2} + \text{etc. vnde ex}$$

§. 17. fiet $s = \frac{\pi z}{4 \cos. A \frac{\pi z}{2}}$; siue per seriem

$$s = \frac{\pi^2 z^2}{1 \cdot 2^3} - \frac{\pi^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^5} + \frac{\pi^6 z^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^7} - \text{etc.}$$

$$I = \frac{\pi^2 z^2}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} + \frac{\pi^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4} + \frac{\pi^6 z^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2^6} + \text{etc.}$$

ex qua diuisione cum ipsa series assumpta oriri debeat, erit

$$A = \frac{1}{8}$$

$$B = \frac{A}{2 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4}$$

$$C = \frac{B}{2 \cdot 4} - \frac{A}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 4}$$

$$D = \frac{C}{2 \cdot 4} - \frac{B}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{A}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 12} - \frac{1}{2 \cdot 4 \dots 14 \cdot 4}$$

etc.

§. 21. Lex haec facilius inspicietur, si ponatur

$$I + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} = A \frac{\pi^2}{2^3}$$

$$I + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.} = B \frac{\pi^4}{3^5}$$

$$I + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.} = C \frac{\pi^6}{3^7}$$

$$I + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \text{etc.} = D \frac{\pi^8}{3^9}$$

etc.

Hic enim coefficientes A, B, C etc. sequentem tenebunt progressionem:

$$A = I$$

$$B = \frac{A}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$C = \frac{B}{1 \cdot 2} - \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$D = \frac{C}{1 \cdot 2} - \frac{B}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{1}{1 \cdot 2 \dots 7}$$

etc.

Quodsi ergo fingatur series haec: $s =$

$$A z + B z^3 + C z^5 + D z^7 + E z^9 + \text{etc. erit}$$

$$s = \frac{z}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{z^5}{1 \cdot 2 \dots 7} + \text{etc.}$$

$$I = \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{z^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 6} + \text{etc.}$$

atque

atque hinc $s = \text{tang. } A. z$, seu $z = \text{tang. } s$. Habebimus ergo $dz = \frac{ds}{1+ss}$ et $dz + s s dz = ds$ cui aequationi cum satisfacere debeat valor hic

$$s = A z + B z^3 + C z^5 + D z^7 + E z^9 + \text{etc.}$$

substituuntur valores loco ds et ss , eritque

$$\frac{ds}{dz} = \frac{A + 3Bz^2 + 5Cz^4 + 7Dz^6 + 9Ez^8 + \text{etc.}}{1 + A^2z^2 + 2ABz^4 + 2ACz^6 + 2ADz^8 + \text{etc.}}$$

$$ss = \frac{1}{1 + B^2z^6 + 2BCz^8 + \text{etc.}}$$

$$1 = 1$$

Hinc itaque formatis aequationibus aliae sequentes prodibunt determinationes litterarum A, B, C, D, etc.

$$A = 1$$

$$B = \frac{A^2}{3}$$

$$C = \frac{2AB}{5}$$

$$D = \frac{2AC + B^2}{7}$$

$$E = \frac{2AD + BC}{9}$$

$$F = \frac{2AE + BD + C^2}{11}$$

etc.

§. 22. Ab his seriebus potestatum parium pendent summae serierum sub hac forma generali contentarum

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc.}$$

denotante n numerum parem. Quodsi enim fuerit

$$1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \text{etc.} = N \pi^n$$

$$\text{erit } 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc.} = \frac{2^n N \pi^n}{2^n - 1}$$

vnde omnium harum serierum dummodo sit n numerus

par,

par, summae per quadraturam circuli poterunt inueniri, atque ex iam inuentis summis similibus potestatum parium pro numeris imparibus folis. Verum vt hae summae directe inueniri queant, in legem peculiarem qua istae summae progrediuntur, inquiramus. Sit itaque

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.} = A \pi^2$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{etc.} = B \pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.} = C \pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc.} = D \pi^8$$

etc.

ac contemplantur hanc seriem: $s =$

$$A \pi^2 z^2 + B \pi^4 z^4 + C \pi^6 z^6 + D \pi^8 z^8 + E \pi^{10} z^{10} + \text{etc.}$$

quae substitutis loco $A \pi^2$, $B \pi^4$, $C \pi^6$, etc. seriebus quas denotant, additisque terminis homologis, prodibit

$$s = \frac{zz}{1-zz} + \frac{zz}{4-zz} + \frac{zz}{9-zz} + \frac{zz}{16-zz} + \frac{zz}{25-zz} + \text{etc.}$$

quae series per §. 17. summata dat $s = \frac{1}{2} - \frac{\pi z}{2 \text{ tang} \Lambda \cdot \pi z}$ vel si tangens arcus πz per seriem exprimitur:

$$s = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{\pi^2 z^2}{1 \cdot 2} + \frac{\pi^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\pi^6 z^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{etc.}}{1 - \frac{\pi^2 z^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\pi^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{\pi^6 z^6}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7} + \text{etc.}}$$

$$s = \frac{\frac{\pi^2 z^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{2\pi^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{2\pi^6 z^6}{1 \cdot \dots \cdot 7} - \frac{4\pi^8 z^8}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 9} + \text{etc.}}{1 - \frac{\pi^2 z^2}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{\pi^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{\pi^6 z^6}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7} + \frac{\pi^8 z^8}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 9} - \text{etc.}}$$

qua expressioe euoluta, cum ipsam seriem assumtam $A \pi^2 z^2 + B \pi^4 z^4 + C \pi^6 z^6 + D \pi^8 z^8 + \text{etc.}$ praebere debeat, sequentur hae coefficientium determinationes

$$A = \frac{1}{6}$$

$$B = \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$C = \frac{B}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{5}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7}$$

$$D = \frac{C}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{B}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7} - \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 9}$$

etc.

§. 23. At pro iisdem his coefficientibus alia lex progressionis potest exhiberi, cuius ope eos multo expeditius reperire licebit. Cum enim sit $s = \frac{1}{3} - \frac{\pi z}{2 \operatorname{tang.} \Lambda \pi^2}$ erit tang. A. $\pi z = \frac{\pi z}{1-2s}$ et $\pi z = A \operatorname{tang.} \frac{\pi z}{1-2s}$; ponatur $\pi z = u$, erit $u = A \operatorname{tang.} \frac{u}{1-2s}$ et differentiando $du = \frac{du-2sdu+2uds}{1-4s+4s^2+u^2}$ vel $u u du + 4 s s du = 2 s du + 2 u d s$: cui aequationi satisfacit valor hic $s = A u^2 + B u^4 + C u^6 + D u^8 + E u^{10} + \text{etc.}$ quo substituto fiet

$$u u = u u$$

$$4 s s = 4 A^2 u^4 + 8 A B u^6 + 8 A C u^8 + 8 A D u^{10} + 8 A F u^{12} \\ + 4 B^2 u^8 + 8 B C u^{10} + 8 B D u^{12} \\ + 4 C^2 u^{14}$$

$$2 s = 2 A u^2 + 2 B u^4 + 2 C u^6 + 2 D u^8 + 2 E u^{10} + 2 F u^{12}$$

$$\frac{2 u d s}{d u} = 4 A u^2 + 8 B u^4 + 12 C u^6 + 16 D u^8 + 20 E u^{10} + 24 F u^{12}$$

vnde sequentes consequuntur determinationes:

$A = \frac{1}{6}$	$E = \frac{4 A F + B C}{11}$
$B = \frac{2 A^2}{5}$	$F = \frac{4 A F + B D + 2 C^2}{13}$
$C = \frac{4 A B}{7}$	$G = \frac{4 A^2 + B E + C D}{15}$
$D = \frac{4 A C + 2 B^2}{9}$	$H = \frac{4 A G + B F + C E + 2 D^2}{17}$
	etc.

§. 24. Ipsae autem huiusmodi serierum summae, quotusque-quidem eas supputavi, sequentes sunt:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.} = \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3} \pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = \frac{2^3}{1 \cdot 3 \cdot 15} \cdot \frac{1}{8} \pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.} = \frac{2^5}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7} \cdot \frac{1}{8} \pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc.} = \frac{2^7}{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 9} \cdot \frac{7}{70} \pi^8$$

$$\Sigma + \frac{1}{2}10 + \frac{1}{3}10 + \frac{1}{4}10 + \frac{1}{5}10 + \text{etc.} = \frac{2^9}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 11} \cdot \frac{5}{8} \pi^{10}$$

$$\Sigma + \frac{1}{2}12 + \frac{1}{3}12 + \frac{1}{4}12 + \frac{1}{5}12 + \text{etc.} = \frac{2^{11}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 13} \cdot \frac{691}{310} \pi^{12}$$

$$\Sigma + \frac{1}{2}14 + \frac{1}{3}14 + \frac{1}{4}14 + \frac{1}{5}14 + \text{etc.} = \frac{2^{13}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 15} \cdot \frac{35}{2} \pi^{14}$$

$$\Sigma + \frac{1}{2}16 + \frac{1}{3}16 + \frac{1}{4}16 + \frac{1}{5}16 + \text{etc.} = \frac{2^{15}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 17} \cdot \frac{3617}{30} \pi^{16}$$

$$\Sigma + \frac{1}{2}18 + \frac{1}{3}18 + \frac{1}{4}18 + \frac{1}{5}18 + \text{etc.} = \frac{2^{17}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 19} \cdot \frac{43867}{42} \pi^{18}$$

$$\Sigma + \frac{1}{2}20 + \frac{1}{3}20 + \frac{1}{4}20 + \frac{1}{5}20 + \text{etc.} = \frac{2^{19}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 21} \cdot \frac{1222277}{110} \pi^{20}$$

$$\Sigma + \frac{1}{2}22 + \frac{1}{3}22 + \frac{1}{4}22 + \frac{1}{5}22 + \text{etc.} = \frac{2^{21}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 23} \cdot \frac{854513}{6} \pi^{22}$$

$$\Sigma + \frac{1}{2}24 + \frac{1}{3}24 + \frac{1}{4}24 + \frac{1}{5}24 + \text{etc.} = \frac{2^{23}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 25} \cdot \frac{1181820455}{546} \pi^{24}$$

In his expressionibus fractionum mediarum tantum lex non est manifesta, reliquae partes vero perspicue progrediuntur. Cum autem istas fractiones medias $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{5}{8}$ etc. attentius esse contemplatus, easdem deprehendi occurrere in expressione generali, quam olim tradidi pro summa cuiuscunque seriei ex dato termino generali inuenienda, ita vt alterius expressionis ope altera possit confici.

§. 25. Operae pretium igitur erit in consensum harum duarum expressionum inter se tantopere diuersarum diligentius inquirere. Altera quidem expressio quam pro summatione serierum dedi, ita se habet: si seriei cuiuscunque terminus generalis, seu is qui respondet exponenti indefinito numerico x fuerit $= X$; et summa seriei a termino primo vsque ad hunc X inclusiue ponatur $= S$, erit $S =$

$$\int X dx + \frac{X}{1 \cdot 2} + \frac{dX}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 dx} - \frac{d^3 X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 dx^3} \\ + \frac{d^5 X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6 dx^5} - \frac{d^7 X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9 \cdot 10 dx^7} + \frac{d^9 X}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 11 \cdot 6 dx^9} \\ - \frac{d^{11} X}{691 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 13 \cdot 210 dx^{11}} + \frac{d^{13} X}{35 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 15 \cdot 2 dx^{13}} - \frac{d^{15} X}{3617 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 17 \cdot 30 dx^{15}}$$

+

$$+ \frac{48867d^{17}X}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 19 \cdot 42 dx^{17}} - \frac{122277d^{19}X}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 21 \cdot 110dx^{19}}$$

$$+ \frac{854517d^{21}X}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 23 \cdot 6 dx^{21}} - \frac{119182045d^{23}X}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 25 \cdot 546dx^{23}} \text{ etc.}$$

in qua expressione apparet easdem omnino fractiones irregulares $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{5}{6}$, etc. inesse, quae ante in expressionibus summarum occurrerunt, hoc tantum discrimine, quod hic signa habeant alternantia, cum ibi omnia signo + essent affectae. Atque hic ipse consensus mihi hanc praestitit utilitatem, vt istam generalem summae S expressionem eousque continuare potuerim, cum hoc per eam legem, quae tum temporis mihi pro istorum terminorum progressionem inuenta erat, sine multo maiore labore praestare non potuissem.

§. 26. Tametsi autem haec tanti consensus mera obseruatio sufficere posset, ad consensum in sequentibus terminis, qui nondum constant, euincendum, tamen praestabit ex ipsa rei natura eandem conuenientiam eruere, vt ea non casu, sed necessario accidisse intelligatur. Hanc vero posteriorem expressionem sequenti modo sum affecutus. Cum S denotet summam tot terminorum in serie quacunque, quot vnitates continentur in exponente x, vltimusque horum terminorum sit = X: manifestum est, si in S ponatur x - 1 loco x, tum prodire debere summam eandem S vltimo termino minutam, seu S - X. At posito x - 1 loco x quantitas S abibit in hanc :

$$S - \frac{ds}{1 \cdot dx} + \frac{dds}{1 \cdot 2 dx^2} - \frac{d^3s}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^3} + \frac{d^4s}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 dx^4} - \text{etc.}$$

quae propterea aequalis est ipsi S - X; vnde habetur haec aequatio :

$$X = \frac{ds}{1 dx} - \frac{dds}{1 \cdot 2 dx^2} + \frac{d^3s}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^3} - \frac{d^4s}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 dx^4} + \text{etc.}$$

Vt nunc ex hac aequatione S in X exprimatur, accipio hanc aequationem :

$$S = fX dx + aX + \frac{\epsilon dx}{dx} + \frac{\gamma dx}{dx^2} + \frac{\delta dx^2}{dx^3} + \text{etc.}$$

cuius in illa facta substitutione habebitur

$$\begin{aligned} X = X + \frac{adX}{dx} + \frac{\epsilon ddX}{dx^2} + \frac{\gamma d^2X}{dx^3} + \frac{\delta d^3X}{dx^4} \\ - \frac{dX}{1 \cdot 2 dx} - \frac{a ddX}{1 \cdot 2 dx^2} - \frac{\epsilon d^2X}{1 \cdot 2 dx^3} - \frac{\gamma d^3X}{1 \cdot 2 dx^4} \\ + \frac{d^2X}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^2} + \frac{a d^3X}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^3} + \frac{\epsilon d^4X}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^4} \\ - \frac{d^3X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 dx^3} - \frac{a d^4X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 dx^4} \\ + \frac{d^5X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 dx^5} \end{aligned}$$

§. 27. Ex hac aequalitate nascuntur sequentes coefficientium α , ϵ , γ , δ , etc. determinaciones.

$$\alpha = \frac{1}{1 \cdot 2}$$

$$\epsilon = \frac{\alpha}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\gamma = \frac{\epsilon}{1 \cdot 2} - \frac{\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\delta = \frac{\gamma}{1 \cdot 2} - \frac{\epsilon}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$\epsilon = \frac{\delta}{1 \cdot 2} - \frac{\gamma}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\epsilon}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

etc.

atque ex formulis tum temporis valores harum litterarum definiui, idque multo labore. Neque, quod hic euenit, aliter nisi sola obseruatione cognoui valores alternos γ, ϵ, η , etc. euanescere. At ex principiis nunc stabilitis idem luculenter ostendi poterit, si alia huius progressionis lex inuestigetur. Considero ad hoc istam feriem :

$$s = 1 + \alpha z + \epsilon z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \epsilon z^5 + \text{etc.}$$

eritque ex praecedente coefficientium lege :

$$s =$$

$$s = \frac{1}{1 - \frac{z}{1 \cdot 2} + \frac{z^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{etc.}}$$

quae aequatio abit in hanc $s = \frac{z}{1 - e^{-z}}$ seu $s = \frac{e^z z}{e^z - 1}$. Hinc

oritur $e^z s - s = e^z z$ et $e^z = \frac{s}{s-z}$ atque $z = 1s - 1(s-z)$.

Differentiando autem habebitur $dz = \frac{ds}{s} - \frac{ds + dz}{s-z}$ siue

$$s s dz - s z dz = s dz - z ds$$

cui aequationi satisfacere debet valor assumtus

$$s = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \epsilon z^5 + \text{etc.}$$

substituatur itaque hic valor in hac aequatione

$$\frac{z ds}{dz} - s - s z + s s = 0$$

atque obtinebitur :

$$\begin{aligned} \frac{z ds}{dz} &= + \alpha z + 2\beta z^2 + 3\gamma z^3 + 4\delta z^4 + 5\epsilon z^5 \\ -s &= -1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \epsilon z^5 \\ -s z &= -z - \alpha z^2 - \beta z^3 - \gamma z^4 - \delta z^5 \\ +s^2 &= 1 + 2\alpha z + 2\beta z^2 + 2\gamma z^3 + 2\delta z^4 + 2\epsilon z^5 \\ &\quad + \alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\alpha\delta \\ &\quad + \beta^2 + 2\beta\gamma \end{aligned}$$

Hinc igitur colligitur fore :

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha - \alpha^2}{3}$$

$$\gamma = \frac{\beta - 2\alpha\beta}{4}$$

$$\delta = \frac{\gamma - 2\alpha\gamma - \beta\beta}{5}$$

$$\epsilon = \frac{\delta - 2\alpha\delta - 2\beta\gamma}{6}$$

$$\zeta = \frac{\epsilon - 2\alpha\epsilon - 2\beta\delta - \gamma\gamma}{7}$$

$$\eta = \frac{\zeta - 2\alpha\zeta - 2\beta\epsilon - \gamma\delta}{8}$$

§. 28. Cum igitur sit $\alpha = \frac{1}{2}$ erit $1 - 2\alpha = 0$, qui valor cum in omnibus terminis sequentibus occurrat, erit:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \\ \beta &= \frac{1}{12} \\ \gamma &= 0 \\ \delta &= -\frac{6\beta}{5} \\ \varepsilon &= -\frac{2\beta\gamma}{6} \\ \zeta &= -\frac{2\beta\delta - \gamma\gamma}{7} \\ \eta &= -\frac{2\beta\varepsilon - 2\gamma\delta}{8} \\ \theta &= -\frac{2\beta\zeta - 2\gamma\varepsilon - \delta\delta}{9} \\ \iota &= -\frac{2\beta\eta - 2\gamma\zeta - 2\delta\varepsilon}{10} \end{aligned}$$

etc.

cum nunc sit $\gamma = 0$, perspicuum est fore etiam $\varepsilon = 0$, hincque porro $\eta = 0$, $\iota = 0$, etc. ita vt omnes termini alterni incipiendo ab γ sint $= 0$, id quod ex praecedente lege tantum per obseruationes patebat, nunc vero id necessario euenire debere intelligitur. Hinc ergo manente $\alpha = \frac{1}{2}$ erit vt sequitur

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\gamma}{12} \\ \delta &= -\frac{6\beta}{5} \\ \zeta &= -\frac{2\beta\delta}{7} \\ \theta &= -\frac{2\beta\zeta - \delta\delta}{9} \\ \kappa &= -\frac{2\beta\theta - 2\delta\zeta}{11} \end{aligned}$$

Quod si ergo ponatur $\beta = \frac{A}{2}$; $\delta = -\frac{B}{25}$; $\zeta = \frac{C}{75}$; $\theta = -\frac{D}{27}$, $\kappa = \frac{E}{27}$, etc. ita vt sit $S = \int X dx + \frac{X}{2} + \frac{Adx}{2dx} - \frac{B^2x}{2^3 dx^2} + \frac{Cd^2x}{2^5 dx^3} - \frac{Dd^2x}{2^7 dx^7} + \frac{Ed^2x}{2^9 dx^9} - \frac{Fd^2x}{2^{11} dx^{11}} +$ etc. tenebunt coefficients A, B, C, D, etc. hanc legem

A =

$A = \frac{1}{6}$	$E = \frac{4AD + 4BC}{11}$
$B = \frac{2A^2}{5}$	$F = \frac{4AE + 4BD + 2C^2}{13}$
$C = \frac{4AB}{7}$	$G = \frac{4AF + 4BE + 4CD}{15}$
$D = \frac{4AC + 2B^2}{7}$	etc.

Obtinent ergo litterae A, B, C, D, etc. eos ipsos valores, quos ipsis supra in §. §. 22 et 23 tribuimus. Atque hinc de consensu coefficientium in his expressionibus maxime diuersis plene summus certi, neque eum casui amplius adscribere conueniet.

§. 29. Quanquam autem hoc modo satis expedite

summam huius seriei $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc.}$

assignare valemus, si n est numerus par, tamen ex his iisdem principiis nihil omnino concludere possumus ad summas inueniendas, si n sit numerus impar. Videri quidem posset, etiam has series a quadratura circuli ita pendere, vt summa earum sit $= N \pi^n$ casibus scilicet quoque, quibus est n numerus impar: verum si has summas actu per approximationes sumamus, videbimus coefficientem N non fieri numerum rationalem, nisi sit n numerus par, id quod ex hac tabella clarebit:

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \text{etc.} = 1,644934066 = \frac{\pi^2}{6}$
$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \text{etc.} = 1,202056903 = \frac{\pi^4}{96}$
$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \text{etc.} = 1,082323233 = \frac{\pi^6}{945}$
$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \text{etc.} = 1,036927755 = \frac{\pi^8}{7056}$
$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \text{etc.} = 1,017343062 = \frac{\pi^{10}}{283450}$
$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \text{etc.} = 1,008349329 = \frac{\pi^{12}}{249093600}$
$1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \text{etc.} = 1,004077356 = \frac{\pi^{14}}{2445000000}$

$$1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^9} + \text{etc.} = 1,002008392 = \frac{\pi^9}{21749,37}$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{10}} + \text{etc.} = 1,000994575 = \frac{\pi^{10}}{93557}$$

$$1 + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^{11}} + \text{etc.} = 1,000494188 = \frac{\pi^{11}}{29435,9}$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{12}} + \text{etc.} = 1,000246086 = \frac{\pi^{12}}{924041,697}$$

Neque vero vlla relatio inter summas. potestatum imparium cernitur similis ei, quam summae potestatum parium inter se tenent.

§. 30. Videtur autem aliquid circa summas potestatum imparium concludi posse, si signa ponantur alternantia. Cum enim imparium potestatum prima $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.}$ cognitam habeat summam scilicet $1/2$: valde verisimile videtur, etiam sequentium potestatum imparium summas a logarithmo binarii pendere, ac fortasse insuper a quadratura circuli. Sed antequam hic aliquid concludere queamus, inuestigemus summas potestatum parium: fitque

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2} + \text{etc.} = A \pi^8$$

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^4} + \text{etc.} = B \pi^4$$

$$1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^6} + \text{etc.} = C \pi^6$$

$$1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^8} + \text{etc.} = D \pi^8$$

$$1 - \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{10}} - \frac{1}{2^{10}} + \text{etc.} = E \pi^{10}$$

etc.

vbi valores litterarum A, B, C, D etc. facile ex cognitibus valoribus pro seriebus iisdem, dum omnes termini accipiuntur affirmatiui, concludi possunt, sed praestabit peculiarem legem pro his elicere. Considero itaque sequentem seriem:

$s =$

$s = A\pi^2 z^2 + B\pi^4 z^4 + C\pi^6 z^6 + D\pi^8 z^8 + \text{etc.}$
 quae substitutis ipsis seriebus abibit in hanc :

$$s = \frac{2z}{1-2z} - \frac{8z}{4-2z} + \frac{2z}{9-2z} - \frac{2z}{16-2z} + \text{etc.}$$

quae series per §. 17. summata dabit

$$s = \frac{\pi z}{2/m.A.\pi z} - \frac{1}{2} \text{ siue sinu expresso}$$

$$s = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\pi^2 z^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\pi^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{\pi^6 z^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{etc.}}$$

Quodsi nunc ponatur terminus precedens in serie litterarum A, B, C, D, E, etc. seu ante primum A existens = Δ erit

$$\Delta = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{\Delta}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{12}$$

$$B = \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{\Delta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$C = \frac{B}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{\Delta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$$

$$D = \frac{C}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{B}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{\Delta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$$

At valor ipsius Δ non est mere assumptivus, sed reipsa summam seriei praecedentis exprimit, quae est

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = \Delta \pi^0 = \frac{1}{2}$$

serierum vero reliquarum, quae hanc praecedunt, omnium summae sunt = 0 : scilicet

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \text{etc.} = 0$$

$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \text{etc.} = 0$$

$$1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + \text{etc.} = 0$$

etc.

§. 31. Ex his igitur sequitur summam cuiusvis seriei ex praecedentibus omnibus recte concludi posse hoc modo, si fuerit

$$\mathbb{I} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \text{etc.} = \alpha \pi^n$$

$$\mathbb{I} - \frac{1}{2^{n-3}} + \frac{1}{3^{n-2}} - \frac{1}{4^{n-1}} + \text{etc.} = \beta \pi^{n-3}$$

$$\mathbb{I} - \frac{1}{2^{n-4}} + \frac{1}{3^{n-4}} - \frac{1}{4^{n-4}} + \text{etc.} = \gamma \pi^{n-4}$$

$$\mathbb{I} - \frac{1}{2^{n-5}} + \frac{1}{3^{n-5}} - \frac{1}{4^{n-5}} + \text{etc.} = \delta \pi^{n-5}$$

$$\text{erit } \alpha = \frac{\beta}{1.2.3} - \frac{\gamma}{1.2.3.4.5} + \frac{\delta}{1.2...7} - \frac{\epsilon}{1.2...9} + \frac{\zeta}{1.2...11} - \text{etc.}$$

Vt igitur summam huius seriei inueniamus

$$\mathbb{I} - \frac{1}{2}s + \frac{1}{3}s - \frac{1}{4}s + \frac{1}{5}s - \frac{1}{6}s + \text{etc.}$$

omnes, quae secundum hanc legem ipsam antecedunt considerari oportebit, quae sunt:

$$\mathbb{I} - \frac{1}{2}s + \frac{1}{3}s - \frac{1}{4}s + \text{etc.} = A \pi^s$$

$$\mathbb{I} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.} = A \pi$$

$$\mathbb{I} - 2 + 3 - 4 + \text{etc.} = \frac{\alpha}{\pi}$$

$$\mathbb{I} - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \text{etc.} = \frac{\beta}{\pi^2}$$

$$\mathbb{I} - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \text{etc.} = \frac{\gamma}{\pi^3}$$

$$\text{eritque } B = \frac{A}{1.2.3} - \frac{\alpha}{1.2.3.4.5} + \frac{\beta}{1.2...7} - \frac{\gamma}{1.2...9} + \text{etc.}$$

At harum serierum omnium summae exhiberi possunt, est enim

$$\mathbb{I} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.} = l 2$$

$$\mathbb{I} - 2 + 3 - 4 + \text{etc.} = \frac{1}{4} = \frac{2^{-2}}{\pi^2} (\mathbb{I} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \text{etc.})$$

$$\mathbb{I} - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \text{etc.} = \frac{-1}{8} = \frac{-2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{\pi^4} (\mathbb{I} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \text{etc.})$$

$$\mathbb{I} - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \text{etc.} = \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{\pi^6} (\mathbb{I} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \text{etc.})$$

$$\mathbb{I} - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \text{etc.} = \frac{-17}{16} = \frac{-2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7}{\pi^8} (\mathbb{I} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \text{etc.})$$

etc.

Atque

Atque hinc erit

$$A = \frac{1_2}{\pi}$$

$$\alpha = \frac{2 \cdot 1}{\pi} (1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.})$$

$$\epsilon = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{\pi} (1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.})$$

$$\gamma = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{\pi} (1 + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{11^6} + \text{etc.})$$

$$\delta = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7}{\pi} (1 + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{11^8} + \frac{1}{13^8} + \text{etc.})$$

$$\epsilon = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{\pi} (1 + \frac{1}{11^{10}} + \frac{1}{13^{10}} + \frac{1}{17^{10}} + \text{etc.})$$

etc.

§. 32. Summas autem potestatum parium fractionum, quarum denominatores sunt numeri impares supra exhibuimus. Sit

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.} = P \pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.} = Q \pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.} = R \pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{etc.} = S \pi^8$$

Erit per §. 21: $P \pi^2 + Q \pi^4 + R \pi^6 + S \pi^8 + \text{etc.} = \frac{\pi}{4} \text{tang} A. \frac{\pi}{2}$

At litterae α , ϵ , γ , δ , etc. sequentes obtinebunt valores.

$$\alpha = \frac{2 \cdot 2}{\pi} P \pi^2$$

$$\epsilon = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{\pi} Q \pi^4$$

$$\gamma = \frac{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{\pi} R \pi^6$$

$$\delta = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7}{\pi} S \pi^8$$

etc.

Ex lege ergo progressionis, si ponatur

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \text{etc.} = A \pi = 1a$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \text{etc.} = B \pi^3$$

84 DE SERIEBUS QVIBVSDAM CONSIDERAT.

$$I - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^5} + \text{etc.} = C \pi^5$$

$$I - \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} - \frac{1}{4^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{6^7} + \text{etc.} = D \pi^7$$

etc.

Poterimus hos coefficientes A, B, C, D, etc. ita determinare, vt sit:

$$A = \frac{I_2}{\pi} \left(\frac{P\pi^2}{2 \cdot 3} + \frac{Q\pi^4}{4 \cdot 5} + \frac{R\pi^6}{6 \cdot 7} + \frac{S\pi^8}{8 \cdot 9} + \text{etc.} \right)$$

$$B = \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{P\pi^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{Q\pi^4}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{R\pi^6}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} + \text{etc.} \right)$$

$$C = \frac{B}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{P\pi^2}{2 \cdot 3 \dots 7} + \frac{Q\pi^4}{4 \cdot 5 \dots 9} + \frac{R\pi^6}{6 \cdot 7 \dots 11} + \text{etc.} \right)$$

$$D = \frac{C}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{B}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{A}{1 \cdot 2 \dots 7} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{P\pi^2}{2 \cdot 3 \dots 9} + \frac{Q\pi^4}{4 \cdot 5 \dots 11} + \text{etc.} \right)$$

§. 33. Antequam autem quicquam hinc concludere fuscipiamus, exemplo vno doceamus regulam hanc inuentam recte se habere; ac valores veros litterarum inde prodire. Sumamus igitur primam formulam, et cum sit

$$A = \frac{I_2}{\pi} \text{ habebitur ista aequatio}$$

$$\frac{I_2}{2} = \frac{P\pi^2}{2 \cdot 3} + \frac{Q\pi^4}{4 \cdot 5} + \frac{R\pi^6}{6 \cdot 7} + \frac{S\pi^8}{8 \cdot 9} + \text{etc.}$$

Est vero ad veros valores appropinquando

$$I_2 = 0,693147180$$

$$P\pi^2 = 1,233700550$$

$$Q\pi^4 = 1,014678031$$

$$R\pi^6 = 1,001447077$$

$$S\pi^8 = 1,000155179$$

$$T\pi^{10} = 1,000017041$$

$$V\pi^{12} = 1,000001885$$

$$W\pi^{14} = 1,000000209$$

$$X\pi^{16} = 1,000000023$$

$$Y\pi^{18} = 1,000000002$$

Sumamus primum vnitates integras, pro $P\pi^2$, $Q\pi^4$ etc. habe-

habebimus $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{8 \cdot 9} +$ etc. cuius seriei summa constat, quippe quae est $= 1 - \frac{1}{2}$ seu

0,306852810

nunc sumamus eorundem terminorum fractiones annexas, quae per respectiuos denominatores diuisae dabunt :

0,038950091

0,000733901

34454

2155

155

12

1

0,039720771 addatur $1 - \frac{1}{2}$

0,306852819

0,346573590 At vero est $\frac{1}{2} =$

0,346573590

unde aequalitas luculenter perspicitur.

§. 34. Cum igitur certo nunc constat de veritate propositionis §. 32. assertae, legem habemus, secundum quam summae serierum $1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} +$ etc. denotante n numerum imparem quemcunque progrediuntur. Verum quia ex observatione tantum nobis constat esse

$\frac{1}{2} = \frac{P\pi^2}{2 \cdot 3} + \frac{Q\pi^4}{4 \cdot 5} + \frac{R\pi^6}{6 \cdot 7} + \frac{S\pi^8}{8 \cdot 9} +$ etc. siue

$$1/2 = \begin{cases} \frac{1}{1} (1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.}) \\ \frac{1}{10} (1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{etc.}) \\ \frac{1}{24} (1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{etc.}) \\ \frac{1}{36} (1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{etc.}) \\ \frac{1}{54} (1 + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \frac{1}{9^{10}} + \text{etc.}) \\ \text{etc.} \end{cases}$$

operae pretium erit in demonstrationem huius veritatis inquirere. Ponamus igitur

$$s = \frac{P\pi^2}{2 \cdot 3} + \frac{Q\pi^4}{4 \cdot 5} + \frac{R\pi^6}{6 \cdot 7} + \frac{S\pi^8}{8 \cdot 9} + \text{etc.}$$

atque instituantur sequentes transformationes:

$$\frac{d \cdot \pi s}{d\pi} = \frac{P\pi^2}{2} + \frac{Q\pi^4}{4} + \frac{R\pi^6}{6} + \text{etc.}$$

$$\frac{d \cdot \pi s}{d\pi^2} = P\pi + Q\pi^3 + R\pi^5 + \text{etc.}$$

Quia haec vltima series si per π multiplicetur, summam habet $\frac{\pi}{4}$ tang. A. $\frac{\pi}{2}$, quae expressio locum habet, etiam si π quantitas sit variabilis, quemadmodum hic posuimus. Erit itaque

$$d \cdot d \cdot \pi s = \frac{d \cdot \pi^2}{4} \text{ tang. A. } \frac{\pi}{2} \text{ et hinc}$$

$$d \cdot \pi s = \frac{d \cdot \pi}{4} \int d\pi \text{ tang. A. } \frac{\pi}{2} \text{ ac denique}$$

$$s = \frac{1}{4\pi} \int d\pi \int d\pi \text{ tang. A. } \frac{\pi}{2}$$

cuius aequationis radix iam patet, quippe est $s = -\frac{1}{2}$.

§. 35. Consideremus primum formulam hanc $\int d\pi$

tang. A. $\frac{\pi}{2}$ quae abit in $\int \frac{d\pi \sin A. \frac{\pi}{2}}{\cos A. \frac{\pi}{2}} = -2 \int \text{ cof. A. } \frac{\pi}{2}$ hoc

vero integrali substituto habebimus $s = \frac{-1}{\pi} \int \frac{d\pi}{2} \int \text{ cof. A. } \frac{\pi}{2}$.

Ad hanc formulam integrandam pono tang. A. $\frac{\pi}{2} = t$, erit cof. A. $\frac{\pi}{2}$

$= \frac{1}{\sqrt{1+tt}}$ et $- \int \text{ cof. A. } \frac{\pi}{2} = \int \sqrt{1+tt} = \frac{1}{2} \int (1+tt)$

et $\frac{d \cdot \pi}{2} = \frac{ds}{1+tt}$; ex quo erit $s = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dt}{1+tt} \int (1+tt)$ at-

que ideo quaestio huc est reducta, vt definiatur integrale

$\int \frac{dt \int (1+tt)}{1+tt}$ tali adhibita constante vt integrale euanescat posi-

to, $t = 0$; quo facto restitui oportet $t = \text{ tang. A. } \frac{\pi}{2}$ feu

ob $\frac{\pi}{2} = \text{ arcui } 90^\circ$, erit $t = \infty$. Formula autem haec,

quia est $\int (1+tt) = \frac{t}{1+tt} + \frac{tt^2}{2(1+tt)^2} + \frac{t^3}{3(1+tt)^3} + \frac{t^4}{4(1+tt)^4}$
+ etc.

+ etc. transit in sequentem ita ut sit $\int \frac{dt}{1+tt} l(x+tt) =$
 $\int \frac{t dt}{(1+tt)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{t^3 dt}{(1+tt)^3} + \frac{1}{3} \int \frac{t^5 dt}{(1+tt)^4} + \frac{1}{4} \int \frac{t^7 dt}{(1+tt)^5} +$ etc.
 Per reductionem autem formularum integralium est generaliter.

$$\int \frac{t^{2m} dt}{(1+tt)^{m+1}} = \frac{-t^{2m-1}}{2m(1+tt)^m} + \frac{2m-1}{2m} \int \frac{t^{2m-2} dt}{(1+tt)^m}$$

Quare cum sit $\int \frac{dt}{1+tt} = \frac{\pi}{2}$ erit

$$\int \frac{t dt}{(1+tt)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{1+tt}$$

$$\int \frac{t^3 dt}{(1+tt)^3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{t}{1+tt} - \frac{1}{4} \cdot \frac{t^3}{(1+tt)^2}$$

$$\int \frac{t^5 dt}{(1+tt)^4} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{t}{1+tt} - \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{t^3}{(1+tt)^2} - \frac{1 \cdot 5}{6(1+tt)^3}$$

$$\int \frac{t^7 dt}{(1+tt)^5} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{t}{1+tt} - \frac{1 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{t^3}{(1+tt)^2} - \frac{1 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{t^5}{(1+tt)^3}$$

$$- \frac{1}{8} \cdot \frac{t^7}{(1+tt)^4}$$

$$\int \frac{t^{20} dt}{(1+tt)^6} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{t}{1+tt} - \frac{1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{t^3}{(1+tt)^2}$$

$$- \frac{1 \cdot 7 \cdot 9}{6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{t^5}{(1+tt)^3} - \frac{1 \cdot 9}{8 \cdot 10} \cdot \frac{t^7}{(1+tt)^4} - \frac{1}{10} \cdot \frac{t^9}{(1+tt)^5} \text{ etc.}$$

Ex his substitutis orietur $\int \frac{dt}{1+tt} l(x+tt) =$

$$+ \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 5} + \text{etc.} \right) +$$

$$- \frac{t}{1+tt} \left(\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4} + \text{etc.} \right)$$

$$- \frac{t^3}{4(1+tt)^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 8 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 5} + \text{etc.} \right)$$

$$- \frac{t^5}{6(1+tt)^3} \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{8 \cdot 4} + \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 10 \cdot 5} + \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 6} + \text{etc.} \right)$$

$$- \frac{t^7}{8(1+tt)^4} \left(\frac{1}{4} + \frac{9}{10 \cdot 5} + \frac{9 \cdot 11}{20 \cdot 12 \cdot 6} + \frac{9 \cdot 11 \cdot 13}{20 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 7} + \text{etc.} \right)$$

etc.

§. 36. Queramus primum summam seriei huius

$$\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4} + \text{etc.}$$

ponamusque :

$\delta =$

$$s = \frac{x}{2 \cdot 1} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^2}{2 \cdot 4 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4} + \text{etc.}$$

erit $s = \int \frac{dz}{x\sqrt{(1-x)}} \ln x$, vt euoluenti facile patebit. At est $\int \frac{dx}{x\sqrt{(1-x)}} = c - l(1 + \sqrt{(1-x)}) - l(1 - \sqrt{(1-x)})$ hincque $s = c - l(1 + \sqrt{(1-x)}) + l(1 - \sqrt{(1-x)}) - \ln x$. ubi constans c ita debet esse comparata, vtposito $x = 0$ fiat $s = 0$. Fiat igitur x infinite paruum, erit $\sqrt{(1-x)} = 1 - \frac{x}{2}$ et $l(1 - \sqrt{(1-x)}) = l\frac{x}{2} = \ln x - l 2$ et $l(1 + \sqrt{(1-x)}) = l 2$; vnde $c = 2 l 2$. Ponatur nunc $x = 1$, erit $s = 2 l 2$ atque

$$\frac{1}{3 \cdot 1} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4} + \text{etc.} = 2 l 2$$

Ex hac autem serie reliquarum serierum summae ita determinabuntur vt fit:

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{6 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{6 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 5} + \text{etc.} = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \cdot 2 l 2 - \frac{2 \cdot 6}{1 \cdot 7 \cdot 2}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{7}{8 \cdot 4} + \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 10 \cdot 5} + \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 6} + \text{etc.} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} 2 l 2 - \frac{2 \cdot 1 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2} - \frac{6}{5 \cdot 2}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{9}{10 \cdot 5} + \frac{9 \cdot 11}{10 \cdot 12 \cdot 6} + \text{etc.} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot 2 l 2 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2} - \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7 \cdot 3} - \frac{8}{7 \cdot 5}$$

etc.

Quibus summis substitutis proueniet $\int \frac{dt}{1+tt} l(1+tt)$

$$= + \frac{\pi}{2} \cdot 2 l 2$$

$$- \frac{t}{1+tt} \cdot 2 l 2$$

$$- \frac{t^3}{(1+tt)^2} \left(\frac{2}{3} \cdot 2 l 2 - \frac{1}{3 \cdot 1} \right)$$

$$- \frac{t^5}{(1+tt)^3} \left(\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} 2 l 2 - \frac{4}{3 \cdot 5 \cdot 1} - \frac{1}{5 \cdot 2} \right)$$

$$- \frac{t^7}{(1+tt)^4} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} 2 l 2 - \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1} - \frac{6}{5 \cdot 7 \cdot 2} - \frac{1}{7 \cdot 3} \right)$$

$$- \frac{t^9}{(1+tt)^5} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} 2 l 2 - \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 1} - \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 2} - \frac{8}{7 \cdot 9 \cdot 3} - \frac{1}{9 \cdot 4} \right)$$

etc.

§. 37. Quoniam vero ad institutum no strum post integrationem absolutam poni debet $t = \infty$, fiet $\int \frac{dt}{1+tt} l(1+tt) = \pi/2$ atque $s = \frac{1}{2} \pi \int \frac{dt}{1+tt} l(1+tt) = \frac{\pi^2}{2}$, qui est ille ipse valor quem praecidimus prodire debere (§. 34). Reliqui enim termini in expressione, quam pro $\int \frac{dt}{1+tt} l(1+tt)$ inuenimus, si ponatur $t = \infty$ omnes euanescent, quia in denominatoribus singulorum terminorum t plures habet dimensiones quam in numeratoribus, atque insuper coefficientes numerici decrescunt. Nisi enim hoc eueniret, tuto concludere non possemus summam omnium terminorum, quorum quisque euanescit esse $= 0$. Nam si verbi gratia priores tantum coefficientium numericorum partes accipiuntur, vt prodiret haec series:

$\frac{t}{1+tt} + \frac{2t^3}{3(1+tt)^2} + \frac{2 \cdot 4t^5}{2 \cdot 5(1+tt)^3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot t^7}{3 \cdot 5 \cdot 7(1+tt)^4}$ etc.
 summa ipsius casu quo $t = \infty$, fit finita et $= \frac{\pi}{2}$ etiam si singuli termini euanescant, quodsi autem integri coefficientes capiantur ob seriem eorum valde conuergentium, tota quoque series euadit $= 0$.

§. 38. Inquiramus nunc in summam huius seriei

$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \text{etc.} = B \pi^3$ quae summa per §. 32.

erit $B \pi^3 = \frac{\pi^2 L_2}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 2 \pi^2 \left(\frac{P \pi^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{Q \pi^4}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{R \pi^6}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} + \text{etc.} \right)$

Ad valorem huius quantitatis inueniendum sit $s =$

$\frac{P \pi^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{Q \pi^4}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{R \pi^6}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} + \text{etc.}$

erit $\frac{d \cdot \pi^3 s}{d \pi} = \frac{P \pi^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{Q \pi^6}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{R \pi^8}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \text{etc.}$

$\frac{dd \cdot \pi^3 s}{d \pi^2} = \frac{P \pi^3}{2 \cdot 3} + \frac{Q \pi^4}{4 \cdot 5} + \frac{R \pi^7}{6 \cdot 7} + \text{etc.}$

$\frac{d^3 \cdot \pi^3 s}{d \pi^3} = \frac{P \pi^2}{2} + \frac{Q \pi^4}{4} + \frac{R \pi^6}{6} + \text{etc.}$

$\frac{d^4 \cdot \pi^3 s}{d \pi^4} = P \pi + Q \pi^3 + R \pi^5 + \text{etc.} = \frac{1}{4} \text{ tang. } A \frac{\pi}{2}.$

Regrediendo erit ergo.

$$\frac{d^3 \pi^3 s}{d\pi^3} = \frac{1}{4} \int d\pi \operatorname{tang.} A \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{dd. \pi^3 s}{d\pi^2} = \frac{1}{4} \int d\pi \int d\pi \operatorname{tang.} A \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{d. \pi^3 s}{d\pi} = \frac{1}{4} \int d\pi \int d\pi \int d\pi \operatorname{tang.} A \frac{\pi}{2}.$$

$$\pi^3 s = \frac{1}{4} \int d\pi \int d\pi \int d\pi \operatorname{tang.} A \frac{\pi}{2}.$$

Atque hinc habebitur summa seriei propositae $B \pi^3 = \frac{\pi^2 l^2}{6} - \frac{1}{2} \pi \int d\pi \int d\pi \int d\pi \operatorname{tang.} A \frac{\pi}{2}$, quae omnia integralia ita debent accipi, vt evanescant posito $\pi = 0$.

§. 39. Ponatur $\frac{\pi}{2} = q$, ita vt integrationibus absolutis q denotet quartam peripheriae partem circuli, cuius radius = 1 seu arcum 90. graduum. Sitque porro $\sin. A q = y$ et $\cos. A q = x = \sqrt{1 - yy}$, erit $\operatorname{tang.} A \frac{\pi}{2} = \frac{y}{x}$. Quare ob $\pi = 2q$, erit summa nostrae seriei $B \pi^3 = \frac{2qq l^2}{3} - \frac{4}{3} \int dq \int dq \int dq \int \frac{y dq}{x}$. Ponamus tantisper $\int dq \int dq \int dq \int \frac{y dq}{x} = u$ erit $B \pi^3 = \frac{2qq l^2}{3} - \frac{4u}{3}$, vbi in quantitate u invenienda omnes integrationes ita debent accipi, vt integralia singula evanescant posito $q = 0$ et $y = 0$, integralibus vero absolutis erit $y = 1$ et $x = 0$. Est vero $\int \frac{y dq}{x} = \int \frac{y dy}{1 - yy} = -l \sqrt{1 - yy} = l \frac{1}{x}$. et $l \frac{1}{x} = \frac{yy}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6} + \frac{y^8}{8} + \frac{y^{10}}{10} + \text{etc.}$ Cum nunc fit $u = \int dq \int dq \int dq l \frac{1}{x}$, erit per reductionem integralium

$$u = q \int dq \int dq l \frac{1}{x} - \int q dq \int dq l \frac{1}{x}$$

atque porro

$$\int dq \int dq l \frac{1}{x} = q \int dq l \frac{1}{x} - \int q dq l \frac{1}{x}$$

$$\int q dq \int dq l \frac{1}{x} = \frac{qq}{2} \int dq l \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \int qq dq l \frac{1}{x}$$

ergo

$$u = \frac{1}{3} qq \int dq l \frac{1}{x} - q \int q dq l \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \int qq dq l \frac{1}{x}$$

ita ut nunc tres formulas habeamus simpliciter differentiales, quas integrare debemus.

§. 40. Consideremus singulas has tres formulas seorsim, ac primo quidem hanc $\int dq \, l \frac{x}{x}$, quam etsi iam supra integravimus, tamen eandem ex consideratione sinuum et cosinum denuo integremus, ut via facilior paretur ad reliquas integrandas. Est igitur:

$$\int dq \, l \frac{x}{x} = \int dq \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6} + \frac{y^8}{8} + \frac{y^{10}}{10} + \text{etc.} \right)$$

Ad hoc integrale inveniendum consideretur membrum eius quodcumque $\int y^{n+2} dq$, et cum fit $dq = \frac{dy}{x} = \frac{-dx}{y}$ et $xx + yy = 1$, erit

$$\int y^{n+2} dq = -\int y^{n+1} dx = -y^{n+1} x + (n+1) \int y^n x dy$$

$$\text{at est } \int y^n x dy = \int y^n x^2 dq = \int y^n dq - \int y^{n+2} dq$$

ob $xx = 1 - yy$: ex quo erit:

$$\int y^{n+2} dq = -y^{n+1} x + (n+1) \int y^n dq - (n+1) \int y^{n+2} dq$$

atque

$$\int y^{n+2} dq = \frac{-y^{n+1} x}{n+2} + \frac{n+1}{n+2} \int y^n dq$$

Hinc itaque integrale cuiusque membri reducit ad integrale praecedentis, et quoniam integratione absoluta fit $x = 0$; erit pro hoc casu

$$\int y^{n+2} dq = \frac{n+1}{n+2} \int y^n dq.$$

Ex hac ergo formula reperientur singulae integralis partes ut sequitur.

$$\int y^2 dq = \frac{1}{2} q$$

$$\int y^4 dq = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} q$$

$$\int y^6 dq = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} q$$

$$\int y^8 dq = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} q$$

M 2

Hanc

Hancobrem habebitur: $\int dq l \frac{1}{x} = \frac{1}{2} q \left(\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4} + \text{etc.} \right)$ cuius seriei cum iam supra inuenta fit summa (§. 36.) $= 2 l 2$ erit $\int dq l \frac{1}{x} = q l 2$.

§. 41. Progrediamur iam ad secundam formulam integrale $\int q dq l \frac{1}{x}$, quae abit in

$\int q dq l \frac{1}{x} = \int q dq \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6} + \frac{y^8}{8} + \text{etc.} \right)$
 cuius partem consideremus quamcunque $\int y^{n+2} q dq = - \int y^{n+1} q dx = - y^{n+1} q x + \int y^{n+1} x dq + (n+1) \int y^n q x dy$
 $= - y^{n+1} q x + \frac{y^{n+2}}{n+2} + (n+1) \int y^n q dq - (n+1) \int y^{n+2} q dq$
 Posito itaque $y = 1$ et $x = 0$, erit

$$\int y^{n+2} q dq = \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{n+1}{n+2} \int y^n q dq$$

Integralia igitur singulorum membrorum ita se habebunt:

$$\int y^2 q dq = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{2}$$

$$\int y^4 q dq = \frac{1}{4^2} + \frac{3}{4 \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{q^2}{2}$$

$$\int y^6 q dq = \frac{1}{6^2} + \frac{5}{6 \cdot 4^2} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{q^2}{2}$$

$$\int y^8 q dq = \frac{1}{8^2} + \frac{7}{8 \cdot 6^2} + \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 8 \cdot 4^2} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{q^2}{2}$$

etc.

Ex quo obtinebitur integrale $\int q dq l \frac{1}{x} =$

$$+ \frac{qq}{4} \left(\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4} \text{ etc.} \right)$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 2^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4} + \text{etc.} \right)$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 4^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 8 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 5} + \text{etc.} \right)$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 6^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{7}{8 \cdot 4} + \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 10 \cdot 5} + \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 6} + \text{etc.} \right)$$

etc.

Vel etiam hac forma $\int q dq l \frac{1}{x} =$

$$\frac{qq}{4} \left(\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4} + \text{etc.} \right)$$

+

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{1}{2^2 \cdot 2} + \frac{1}{4^2 \cdot 4} + \frac{1}{6^2 \cdot 6} + \frac{1}{8^2 \cdot 8} + \text{etc.} \\
 &+ \frac{3}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{5}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{7}{6^2 \cdot 8^2} + \frac{9}{8^2 \cdot 10^2} + \text{etc.} \\
 &+ \frac{3 \cdot 5}{2^2 \cdot 4 \cdot 6^2} + \frac{5 \cdot 7}{4^2 \cdot 6 \cdot 8^2} + \frac{7 \cdot 9}{6^2 \cdot 8 \cdot 10^2} + \frac{9 \cdot 11}{8^2 \cdot 10 \cdot 12^2} + \text{etc.} \\
 &+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8^2} + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{4^2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10^2} + \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{6^2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12^2} + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

hae autem series id ipsum, quod est in quaestione inuolunt, nempe summationem cuborum terminorum seriei harmonicae.

§. 42. Quod si sequamur priorem formam, omnes series summabiles §. 36, habebiturque

$$\begin{aligned}
 \int qdql \frac{1}{x} &= \frac{aq}{2} l 2 \\
 &+ \frac{1}{2^2} \left(\frac{2}{1} l 2 \right) \\
 &+ \frac{1}{4^2} \left(\frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} l 2 - \frac{4}{3 \cdot 2} \right) \\
 &+ \frac{1}{6^2} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} l 2 - \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 2} - \frac{6}{5 \cdot 4} \right) \\
 &+ \frac{1}{8^2} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} l 2 - \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2} - \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7 \cdot 4} - \frac{8}{7 \cdot 6} \right) \text{etc.}
 \end{aligned}$$

quae si denuo series deorsum capiantur, dant.

$$\begin{aligned}
 \int qdql \frac{1}{x} &= \frac{aq}{2} l 2 \\
 &+ l 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} + \text{etc.} \right. \\
 &- \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{5 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} + \text{etc.} \right. \\
 &- \frac{1}{4 \cdot 5} \left(\frac{1}{6} + \frac{6}{7 \cdot 8} + \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 9 \cdot 10} + \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12} + \text{etc.} \right. \\
 &- \frac{1}{6 \cdot 7} \left(\frac{1}{8} + \frac{8}{9 \cdot 10} + \frac{8 \cdot 10}{9 \cdot 11 \cdot 12} + \frac{8 \cdot 10 \cdot 12}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 14} + \text{etc.} \right)
 \end{aligned}$$

At est $\frac{1}{2} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} + \text{etc.} = \frac{qq}{2}$
 vnde erit

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} + \frac{4}{5 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 7 \cdot 8} + \text{etc.} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{qq}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
 \frac{1}{6} + \frac{6}{7 \cdot 8} + \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 9 \cdot 10} + \text{etc.} &= \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{qq}{2} - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4} \\
 \frac{1}{8} + \frac{8}{9 \cdot 10} + \frac{8 \cdot 10}{9 \cdot 11 \cdot 12} + \text{etc.} &= \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{qq}{2} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{2} - \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{4} - \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

etc.
 M 3

Quam-

Quamobrem habebitur $\int qdql^{\frac{1}{x}} = qq1z$
 $-\frac{qq}{2} \left(\frac{1}{2z} + \frac{3}{2 \cdot 4z^2} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6z^3} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8z^4} + \text{etc.} \right)$
 $+ \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{2}$
 $+ \frac{3}{2 \cdot 4z^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4z} \cdot \frac{3}{4}$
 $+ \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6z^3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{4 \cdot 6z^2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{6z} \cdot \frac{5}{6}$
 $+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8z^4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8z^3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{7}{6 \cdot 8z^2} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{8z} \cdot \frac{7}{8}$
 etc.

§. 43. At fortassé difficultas commodam expressionem inueniendi diminuetur, si tres illas formulas integrales colligamus. Hancobrem sumamus tertiam formulam $\int sqdql^{\frac{x}{n}}$ quae abit in $\int sqdql^{\frac{x}{n}} \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6} + \frac{y^8}{8} + \text{etc.} \right)$

Consideretur formula $\int y^{n+2} qqdq$ quae abit in $-\int y^{n+1} qqdx = -y^{n+1} qqx + 2\int y^{n+1} qxdq + (n+1)\int y^n qqxdy = -y^{n+1} qqx + 2\int y^{n+1} qdy + (n+1)\int y^n qqdq - (n+1)\int y^{n+2} qqdq$: hinc ergo erit

$$\int y^{n+2} qqdq = -\frac{y^{n+1} qqx}{n+2} + \frac{2}{n+2} \int y^{n+1} qdy + \frac{n+1}{n+2} \int y^n qqdq$$

$$\text{At est } \int y^{n+1} qdy = \frac{y^{n+2}}{n+2} - \frac{1}{n+2} \int y^{n+2} dq = \frac{q}{n+2} -$$

$$\frac{1}{n+2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (n+2)} q \text{ posito } y=1 \text{ (§. 10). Consequenter erit}$$

$$\int y^{n+2} qqdq = \frac{2q}{(n+2)^2} \left(1 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (n+2)} \right) + \frac{n+1}{n+2} \int y^n qqdq$$

ac integralis quaesiti singula membra erunt:

$$\int y^2 qqdq = \frac{1}{2} \cdot 2q - \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot 2q + \frac{1}{2} \cdot \frac{q^3}{3}$$

$$\int y^4 q^2 dq = \frac{1}{4} \cdot 2q - \frac{1}{4} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot 2q + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2q - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot 2q + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{q^3}{3}$$

$$\int y^6 q^2 dq = \frac{2q}{6} \left(1 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) + \frac{5}{6} \cdot \frac{2q}{4} \left(1 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{2q}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{q^3}{3}$$

His valoribus substitutis et terminis in ordinem redactis redactis reperietur tandem

sqd

$$\begin{aligned} \int q q d q l \frac{x}{\infty} &= \frac{q^3}{6} \left(\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3} + \text{etc.} \right) \\ + \frac{1}{2^2} q \left(1 - \frac{1}{2} \right) &\left(1 + \frac{3}{4 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4} + \text{etc.} \right) \\ + \frac{1}{4^2} q \left(1 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) &\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 8 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 5} + \text{etc.} \right) \\ + \frac{1}{6^2} q \left(1 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) &\left(\frac{1}{3} + \frac{7}{8 \cdot 4} + \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 10 \cdot 5} + \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 6} + \text{etc.} \right) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Cum autem fit $u = \frac{1}{2} q q f d q l \frac{x}{\infty} - q \int q d q l \frac{x}{\infty} + \frac{1}{2} \int q q d q l \frac{x}{\infty}$
erit his integralibus, vt sunt inuenta additis

$$\begin{aligned} u &= \frac{q^3}{2} \left(\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3} + \text{etc.} \right) \\ &- \frac{q}{2 \cdot 2^2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{3}{4 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4} + \text{etc.} \right) \\ &- \frac{q}{2 \cdot 4^2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 8 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 5} + \text{etc.} \right) \\ &- \frac{q}{2 \cdot 6^2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{1}{3} + \frac{7}{8 \cdot 4} + \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 10 \cdot 5} + \text{etc.} \right) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

His autem seriebus integratis vt supra, erit

$$\begin{aligned} u &= \frac{q^3}{6} l 2 \\ &- \frac{q}{2 \cdot 2^2} \cdot 2 l 2 \\ &- \frac{q}{2 \cdot 4^2} \cdot \left(2 l 2 - \frac{1}{2 \cdot 1} \right) \\ &- \frac{q}{2 \cdot 6^2} \left(2 l 2 - \frac{1}{2 \cdot 1} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 2} \right) \\ &- \frac{q}{2 \cdot 8^2} \left(2 l 2 - \frac{1}{2 \cdot 1} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 3} \right) \\ &- \frac{q}{2 \cdot 10^2} \left(2 l 2 - \frac{1}{2 \cdot 1} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4} \right) \end{aligned}$$

Est vero $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \text{etc.} = \frac{q q}{6}$ vnde

$$\begin{aligned} u &= \frac{q}{2 \cdot 2} \left(+ \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot q}{2 \cdot 4 \cdot 4} \left(\frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot q}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \left(\frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{12^2} + \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot q}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8} \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{14^2} + \text{etc.} \right) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Hinc

Hinc igitur erit :

$$u = \frac{q}{2 \cdot 2} \left(\frac{qq}{6} - \frac{1}{2^2} \right) \\ + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} q \left(\frac{qq}{6} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} q \left(\frac{qq}{6} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} \right)$$

vel serie prima verticali actu summata

$$u = \frac{q^3}{6} l 2 \\ - \frac{q}{2 \cdot 2} \left(\frac{1}{2^2} \right) \\ - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} q \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} \right) \\ - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} q \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} \right) \\ \text{etc.}$$

§. 44 Cum nunc seriei nostrae propositae $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \text{etc.}$ summa sit $= B \pi^2 = \frac{2qq l 2}{3} - \frac{4u}{4}$ fiet eadem summa $=$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot 1 \\ + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} \right) \\ \text{etc.}$$

Vel cum sit $\frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \text{ etc.} = l 2$ erit seriei propositae summa $B \pi^2 = l 2 + \frac{1}{2^2} \left(l 2 - \frac{1}{2 \cdot 2} \right) + \frac{1}{3^2} \left(l 2 - \frac{1}{2 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) + \frac{1}{4^2} \left(l 2 - \frac{1}{2 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) + \text{etc.}$ siue haec eadem summa ita poterit exprimi ut sit

$$B \pi^2 = \frac{\pi^2}{6} l 2 - \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2 \cdot 2} \right) \\ - \frac{1}{3^2} \left(\frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} \right) \\ - \frac{1}{4^2} \left(\frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \right) \\ - \frac{1}{5^2} \left(\frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8} \right) \text{ etc.}$$

Quoniam autem utcumque has series transmutemus, eas ad seriem simplicem, cuius summa constet, reducere non possumus, negotium hoc abruptamus, pluribus his expressionibus contenti, quas seriei propositae $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \text{etc.}$ aequales esse inuenimus.

COM-

COMMENTATIONES
DE OSCILLATIONIBVS COMPOSITIS
PRAESERTIM IIS QVAE FIVNT IN CORPORIBVS
EX FILO FLEXILI SVSPENSIS.

AVCTORE

Daniele Bernoulli.

§. 1.

De oscillationibus sermonem facturo ante omnia mihi Tab. II.
monendum erit, solas eas considerari hic pro more solito, quae ita parvae sunt, vt in calculo pro infinite paruis haberi possint. Possunt autem in systemate, cuius singulae partes motibus reciprocis agitantur, duo potissimum oscillationum genera considerari: primum est cum singulae systematis partes necessario itus reditusque suos simul incipiunt, simulque finiunt: tales oscillationes faciunt corpora ex filo rigido firmata et suspensa iam pridem a Geometris exploratas: alterum genus est, cum diuersae systematis partes diuersis temporibus oscillationes suas perficere possunt, quamuis nexus partium talis sit, vt singularum oscillationum indoles a mutatione vnuscuiusuis mutantur. Has postremas oscillationes voco *compositas*. Huiusmodi oscillationum exemplum haud inelegans dedi desumptum a corporibus filo flexili connexis et suspensis vid. Comm. tom VI. pag. 108. et nuperrime exposui aliud, quo duplices in corporibus humido insidentibus oscillationum species simul existentes, quaeque non possint aliter, quam simul determinari, examinaui et definiui.

Tom. XII.

N

§. 2.

§. 2. Oscillationes nostrae compositae quam maxime differunt a simplicibus, praesertim autem, eo quod sint valde inaequales, dum quaevis systematis particula modo minorem modo maiorem excursionem facit, easque modo citius modo tardius percurrit. At vero potest, quod imprimis hic notandum, excursionum magnitudinibus talis assignari proportio constans, ut ea semel posita perpetuo conservetur, fiantque oscillationes non solum uniformes, sed et singulae tam maiores quam minores inter se isochronae atque toutochronae: statuo autem, tam ratione quam pluribus experimentis inductus, oscillationes compositas ad hunc uniformitatis statum semper magis magisque tendere seque tandem sua sponte componere, aliae citius quidem aliae lentius, quaedam autem citissime: ita v. gr. chorda musica non potest non ab initio vibrationes facere inaequales, quae tamen dicto citius fiunt tantum non regulares, dum chorda vibrata mox se componit ad curvaturam toutochronismo essentialem.

§. 3. Nec vno tantum modo oscillationes fiunt uniformes, sed aliquando pro re nata duobus modis, aliquando pluribus, aliquando etiam infinitis, quod egregie illustratur eodem, quod supra citaui exemplo corporum filo flexili connexorum et suspensorum. Si enim duo sunt corpora, duobus diversis modis fiunt oscillationes uniformes, idemque tribus obtinetur modis, cum corpora sunt tria, et sic porro; atque si tandem corpora sumas numero infinita catenam quasi perfecte flexilem efformantia, infinitis simul modis obtinetur in catena oscillante isochronismus: pro quovis autem modo durationes oscillationum aliae sunt: status interim uniformitatis, quem partes systematis oscillantes

lantes maxime affectant, ille est, quo oscillationes inter omnes possibiles fiunt lentissimae.

§. 4. Similiter multis imo et infinitis modis chorda musica tensa motus suos tremulos efformat isochronos in theoria, quamuis illi difficulter obtineantur, singulis autem modis alius editur sonus magis minusue acutus. Modus primus et maxime naturalis est, quum chorda inter oscillandum efformat arcum vnicum, tuncque facit oscillationes lentissimas, sonumque edit inter omnes possibiles maxime grauem reliquis omnibus fundamentalem. Modus alter postulat vt chorda inter oscillandum duos arcus ad partes diuersas positos efformet, tuncque fiunt oscillationes duplo frequentiores, iamque editur soni fundamentalis *octaua*: tum si chorda inter oscillandam incuruatur in tres, quatuor, quinque etc. arcus alterna serie positos, fiunt oscillationes vnuscuusuis arcus triplo, quadruplo, quintuplo etc. frequentiores, sonique eduntur ratione soni fundamentalis *octauae quinta*, *octaua duplex*, *octauae duplicis tertia maior* proxime et sic porro. Inseruiunt hae obseruationes ad multa phaenomena acustica circa chordas musicas explicanda; cur v. gr. soni tam sonori sint in tuba marina? cur in hoc instrumento vnichordo ii tantum modo soni grati, pleni et perfecti sint, cum pars chordae, quae arcu pulsatur, praecise submultipla est chordae totius? et quae sint tam in hoc instrumento musico, quam in aliis phaenomena reliqua, quae singula a Merfénno in libris Harmonicorum recensentur quidem, at minime recte explicantur. Haec autem obiter monuisse sufficiat: pergo nunc ad problema mechanicum, quo argumentum de oscillationibus compositis vltorius explicabitur.

§. 5. Considerabimus itaque corpora finitae extensionis ex puncto fixo mediante filo flexili datae longitudinis suspensa. Haec corpora cum hinc inde agitantur, motum duplicem angularem obrinere considerari possunt; alterum quo angulus filum inter et lineam verticalem per punctum fixum transeuntem continue mutatur, alterum quo angulus inter idem filum et lineam, quae per punctum, ubi filum corpori alligatur et per centrum grauitatis corporis transit, perpetuo variat. Hi motus angulares irregulares, inaequales, perturbati, tam ratione durationis quam magnitudinis statim sunt: at fieri potest vt simul incipiant simulque finiantur, tuncque oscillationes ad statum vniuniformitatis reductae sunt, ad quem sua sponte magis magisque accedunt. Atque iste est status, quem solum considerabimus, et cuius indolem explorare constituimus.

Tab. II. §. 6. Sit igitur primo (nec enim argumentum statim generalissime inquirere iuuat) linea recta CH (fig. 5.) crassitiei et grauitatis vtcunque inaequalis, suspensa ex filo AC perfecte flexili omnique destituta grauitate, Patet autem requirere legem vniuniformitatis oscillationum, vt singula puncta lineae grauis oscillantis simul perueniant in situm verticalem CH simulque in situm extremum DG, in quo tota linea ad temporis punctum veluti quiescit. Si vero putemus lineam DG a statu quietis versus lineam verticalem motu accelerato progredi, tunc facile intelligimus, si singula virgae puncta vim acceleratricem patiantur distantis eorundem à linea verticali constanter proportionalem, fore tunc vt singula etiam puncta simul in situm lineae verticalis perueniant. Igitur situs virgae vbique talis esse debet, vt vis acceleratrix pro quouis virgae puncto

cto hanc praefatam habeat legem. Ceterum habetur, ut notum est, vis acceleratrix, si vis punctum horizontaliter versus lineam verticalem vrgens diuidatur per massam puncti. His praemonitis iam inquirenda nobis venit vis acceleratrix pro singulis virgae punctis.

§. 7. Sit igitur virga in situ extremo DG posita, haecque dein producaturs vsque in B , vbi lineam verticalem secat: tum centro B ducantur arculi DC , EF , OQ et GH , qui pro lineolis infinite paruis horizontalibus haberi possunt, quia hic tantum de oscillationibus minimis sermo est. Denotat autem punctum D locum, ex quo filum virgae alligatum est, siue is sit in extremitate virgae, siue alicubi in medio. In puncto E ponimus centrum grauitatis virgae; per O intelligimus punctum quodcumque in virga sumtum, et per G punctum virgae infimum.

Producaturs nunc AD vsque in M , ponaturque $AC = n$; $CH = m$; $CF = g$; incognita $BC = \alpha$; $EF = q$; erit $DC = \frac{\alpha q}{\alpha + g}$; vis grauitatis designetur per vnitatem, sitque variabilis BQ vel $BO = x$; massa $DO = \xi$ data per x et constantes; massa totius virgae = M : Ducatur minima oq alteri OQ parallela et infinite propinqua: sic erit massa elementi $Oo = d\xi$. Quoniam autem vis acceleratrix elementi Oo seu potentia elementum Oo horizontaliter versus lineam verticalem vrgens diuisa per massulam $d\xi$ est proportionalis (per §. 6.) lineae OQ seu etiam lineae BQ , faciemus vim istam acceleratricem = $\frac{x}{a}$ intelligendo per a aliquam constantem: sic igitur quoduis punctum O vim acceleratricem patitur indicatam per $\frac{x}{a}$ et massula elementi Oo vim horizontalem

lem exercet indicandam per $\frac{\alpha d\xi}{a}$: vnde si cuius elemento Oo potentia contraria intelligatur applicata, quae sit $= \frac{\alpha d\xi}{a}$, totum systema in aequilibrio, ad quod in situ extremo ad momentum temporis reductum fuisse censei potest (§. 6.) perpetuo seruabitur.

§. 8. Si iam ducatur horizontalis OR , quae exprimat praefatam potentiam horizontalem $\frac{\alpha d\xi}{a}$ elementum Oo ab O versus R trahentem, oportet vt omnes istae potentiae systema in aequilibrio seruent: exinde per regulas staticae concludere licet, *primo* summam omnium potentialium virgam in situ DG detinentium eamque, ne ad verticalum accedat impredientium esse aequalem summae omnium potentialium horizontalium contrariarum, quae nempe à grauitate virgae oriuntur. *Secundo* si consideretur virga DG tanquam vectis mobilis circa punctum D , vectem hunc etiamnum in statu quietis et aequilibrii permanfurum. Hisce igitur duobus requisitis erit satisfaciendum.

§. 9. Conditioni *primae* ita satisfaciemus. Summa omnium potentialium OR elementis Oo applicatarum est $= \int \frac{\alpha d\xi}{a}$; sed praeter hanc potentialium classẽ alia adhuc potentia est consideranda ab obliqua fili actione oriunda, tenditur enim filum AD à toto virgae pondere M (quia excursions virgae censentur infinite paruae) et propter fili reactionem punctum D trahitur simul in directione DA pari potentia M , vnde sequitur ex resolutione potentialium virgam in puncto D extrorsum trahi potentia quae est $= \frac{EN}{ED} \times M = \frac{(n-\alpha)q}{n(\alpha+g)} \times M$. Est itaque summa omnium et singularum potentialium horizontalium

talium virgam extrorsum trahentium $= \int \frac{x d\xi}{a} + \frac{(n-\alpha)q}{n(\alpha+g)}$.
 M. Iam vero inquiramus in summam potentiarum contrariarum, quae virgam horizontaliter introrsum ad situm verticalem trahunt: hae omnes oriuntur à gravitate virgae, estque summa earum $= \frac{DC}{DE} \cdot M = \frac{q}{\alpha+g} \cdot M$. Habemus itaque vi primae conditionis hanc aequationem.

$$\int \frac{x d\xi}{a} + \frac{(n-\alpha)q}{n(\alpha+g)} \cdot M = \frac{q}{\alpha+g} \cdot M.$$

Est autem $\int x d\xi = BF \cdot M = (a+g) \cdot M$. Hoc igitur valore substituto reductaque aequatione prodit

$$I. n(a+g)^2 = a \alpha q.$$

Conditionem problematis *secundam* in praecedente paragrapho expositam sic implebimus; Est momentum potentiae OR ad vectem GD circa punctum D extrorsum rotandum $= \frac{x d\xi}{a} \cdot OD = \frac{x d\xi}{a} \cdot (x-\alpha)$ et summa omnium momentorum $= \int \frac{(x-\alpha)x d\xi}{a}$; tensio fili hic nequiquam facit: momentum autem omnium potentiarum, contrariarum, quae à pondere virgae oriuntur, habetur si pondus totius virgae M applicatum putetur in centro gravitatis E, istudque pondus multiplicetur per rationem $\frac{EF}{EB}$ atque per longitudinem vectis ED, id est, per $\frac{g}{\alpha+g}$ et per g: est itaque momentum omnium potentiarum contrariarum $= \frac{gq}{\alpha+g} \times M$: Vnde habemus nunc hanc aequationem

$$\int \frac{(x-\alpha)x d\xi}{a} = \frac{gq}{\alpha+g} \times M.$$

Poterimus autem quantitati isti summatoriae $\int \frac{(x-\alpha)x d\xi}{a}$ aliam substituere intelligibiliorem; ponatur nempe CQ seu $x-\alpha = y$ erit $\int \frac{(x+\alpha) \cdot x d\xi}{a} = \int \frac{ay d\xi}{a} + \int \frac{yy d\xi}{a} = \frac{\alpha g M}{a} + \int \frac{yy d\xi}{a}$

Vt vero intelligatur etiam terminus $\int \frac{yy d\xi}{a}$, notandum est, longitudinem penduli simplicis (quam vocabimus L) isochroni

chroni cum oscillationibus minimis virgae CH ex puncto fixo C suspensae esse $= \frac{hy d\xi}{gM}$ adeo vt sit $\frac{hy d\xi}{gM} = L$ atque adeo $\int \frac{yy d\xi}{a} = \frac{LgM}{a}$. Est igitur $\int \frac{(x-a)xd\xi}{a} = \frac{\alpha gM}{a} + \frac{LgM}{a}$: Hoc igitur valore substituto in praemissa aequatione oritur haec alia $\frac{\alpha gM}{a} + \frac{LgM}{a} = \frac{Eq}{\alpha+g} \cdot M$, quae reducta dat

$$\text{II. } (\alpha + L) \cdot (\alpha + g) = a q$$

Ope duarum, quas inuenimus, aequationum, eliminanda prius est arbitraria assumpta a deindeque determinandus valor incognitae α per quantitates pure cognitae. Hoc modo inuenitur

$$\alpha = \frac{\alpha - L + \sqrt{(\alpha - L)^2 + 4ng}}{2}$$

Et haec aequatio determinat situm virgae extremum DG, quod negotium, in quo omne problematis momentum positum est, in hoc paragrapho expedire constitueram. Situm autem similem virgae, dum oscillationes uniformes perficit, perpetuo seruat, ita vt virga in omni situ continuata transeat per idem punctum B. Nec tamen inde concludendum est virgam eadem lege oscillationes suas perficere atque si ex virga rigida DB omni gravitate destituta esset suspensa, quia linea DB non exacte eandem longitudinem seruat.

§. 10. Determinato valore ipsius α facile est longitudinem quaesitam penduli simplicis isochroni definire: Quia enim cuiusvis elementi Oo vis acceleratrix est $= \frac{x}{a}$, via autem ab eodem puncto describenda seu OQ $= \frac{qx}{\alpha+g}$ et quia longitudo penduli isochroni habetur diuidendo viam describendam per vim acceleratricem, erit longitudo ista $= \frac{\alpha q}{\alpha+g}$: Est autem per aequationem secundam praecedentem,

cedentis paragraphi $\alpha g = (\alpha + L) \cdot (\alpha + g$; erit itaque longitudo quaesita penduli simplicis isochroni l simpliciter $= \alpha + L$, siue (per §. 9.)

$$l = \frac{n+L + \sqrt{(n-L)^2 + 4ng}}{2}$$

§. II. Aequationes quas in duobus superioribus paragraphis erimus, singulares nos docent proprietates, quibus hae oscillationes gaudent. Memorabimus sequentes

(a) Praecipue notandum est, duobus modis oscillationes fieri posse uniformes, prouti in expressione quantitatis α ex signis, quae quantitati radicali praefiguntur, seligatur vel superius vel inferius: si autem superius accipitur, simul etiam superius est seligendum in expressione quantitatis l idemque de signo inferiori dicendum. Pro signo itaque superiori oscillationes fiunt multo tardiores quam pro inferiori: tardiores autem plerumque parum admodum differunt ab oscillationibus Hugenianis pro systemate rigido.

(b) Si longitudo virgae minima sit respectu habito ad longitudinem fili ex quo virga suspenditur, erunt etiam quantitates L et g minimae, fietque proxime $l = n + g$, si signum ex ambiguis affirmatiuum ponatur aut $l = L - g$ si signum negatiuum accipiatur: in casu priori fit $\alpha = n - L - g$, in posteriori $\alpha = -g$: in hoc igitur casu virga circa centrum suum grauitatis veluti rotatur inter oscillandum habetque longitudinem penduli simplicis isochroni aequalem distantiae centri grauitatis à centro oscillationis quod virgae competeret, si ex puncto fixo C suspenderetur.

(c) Si è contrario virga longissima ex filo breuissimo suspensa fit, erit in casu priori $\alpha = \frac{ng}{L}$ et $l = L + \frac{ng}{L}$, at verò in casu posteriori, qui hic notari praecipue meretur, habebimus proxime $\alpha = -L$ et $l = n - \frac{ng}{L}$, quod indicat, fieri nunc inter oscillandum rotationem circa centrum oscillationis quod virgae ex puncto fixo l suspensae competit et esse tunc longitudinem penduli isochroni $l = \frac{L-g}{L} \times n$.

(d) Si virga ex centro grauitatis suspensa fit, euanescit posterior oscillationum classis fitque pro classe priori $\alpha = \infty$ et $l =$ longitudini fili.

Ceterum obseruandum est solutionem nostram minime requirere, vt filum virgae ex eiusdem summitate alligatum putetur: potest enim ex quocunque puncto esse alligatum. Igitur per punctum D aut C non intelligitur virgae summitas sed punctum ex quo virga filo est annexa. Figura sexta litteris suis analogis ostendit exemplum secundae oscillationum classis: tum etiam figura septima et octava ambas oscillationum classes illustrant, quum virgae non sunt ex summitate suspensae.

Tab. II.

§. 12. Ista quae diximus nunc porro illustrabimus exemplis particularibus, supponendo scilicet virgas homogeneas et vniformiter crassas, quarum longitudines designabimus per m : sic erit $g = \frac{1}{2} m$ et $L = \frac{2}{3} m$, si virgae sunt ex summitate sua suspensae: his autem valoribus substitutis fit $\alpha = \frac{3n-2m \pm \sqrt{(qnn+6mn+4mm)}}{6}$ atque $l = \frac{3n+2m \pm \sqrt{(qnn+6mn+4mm)}}{6}$ si vero virga ratione fili sit praelonga simulque ad modum figurae sextae oscilletur, fiet CB dupla ipsius BH et longitudo penduli simplicis isochroni

chroni est aequalis quartae parti longitudinis fili virgam suspendentis. Igitur sic virgae longiores breuiioresque, modo ex eodem filo breuissimo suspendantur, in hoc oscillationum genere isochronae sunt.

§. 13. Denique etiam exemplum dabo virgae vni-
formis ex puncto aliquo intermedio suspensae. Ponamus
itaque longitudinem virgae $m = 3$, putemusque distan-
tiam puncti suspensionis D vel C. (fig. 7. et 8.) a sum **Tab. II.**
mitate virgae $= 1$, longitudinem autem fili DA vel CA
expressam per $n = 2$; hae positiones faciunt $g = \frac{1}{2}$ et
 $L = 2$ hincque fit pro oscillationibus tardioribus, quae ad
norman figurae septimae perficiuntur, $\alpha = 1$, sic vt in
hoc exemplo summitas virgae veluti immobilis maneat nec
a situ lineae verticalis recedat, statim atque oscillationes fa-
ctae sunt vniformes: erit autem longitudo penduli simpli-
cis isochroni aequalis ipsi longitudini virgae, id est, $l = 3$.
At vero pro altera oscillationum classe, quae figurae octa-
vae respondent, fit $\alpha = -1$ et longitudo penduli isochro-
ni aequalis tertiae parti longitudinis virgae, siue $l = 1$.

§. 14. Postquam sic generalissime hoc argumentum
expediimus, pro linea recta vtcunque inaequaliter graui,
facillimum est solutionem extendere ad plana et ad corpo-
ra qualiacunque, imo non difficile est videre, solutio-
nem cum ea quam dedimus, prorsus eandem esse: cum
enim, vt hoc solum moneam, oscillationes nostrae com-
positae sint ex duabus oscillationum simplicium classibus,
nimirum fili circa punctum A et virgae circa punctum
D, perspicuum est, neutram mutari, si loco virgae filo
in D appendatur planum vel corpus quodcunque, cuius
tam centrum grauitatis, quam centrum oscillationis, quum
O 2 pun-

punctum suspensionis D ut fixum consideratur, eadem manent. Erunt itaque aequationes nostrae pro a et l semper verae si per n intelligatur distantia inter duos axes horizontales ac parallelos per puncta A et D transeuntes, sique similiter per L intelligatur distantia centri oscillationis ab axe per punctum C aut D transeunte, cum axis isse immobilis est, et si denique pro g substituiatur distantia centri gravitatis a praefato axe per punctum C aut D transeunte.

§. 15 Sic igitur problemati nostro secundum totam eius extensionem satisfactum est, indeque simul illustratam atque confirmatam puto sententiam nostram, in omni systemate oscillationes compositas, quarum singularum duratio et excursionis magnitudo a se invicem pendent, utcumque statim sint inaequales et perturbatae, tandem fieri uniformes et inter se tautochronas: saltem hoc certum est, posse singularum oscillationum excursionibus talem assignari proportionem, siue excursionis istae maiores siue minores fiat per se, ut cum singulae simul incipiunt, simul etiam finiuntur, atque sic constanter uniformes et inter se tautochronae permaneant.

EMENDATIO
TABVLARVM ASTRONOMICARVM
 PER LOCA PLANETARVM
GEOCENTRICA.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. I.

Quemadmodum ex tribus planetae cuiusque primarii locis heliocentricis cum integro tempore periodico comparatis orbita planetae inuestigari atque tabulae astronomicae confici queant, in Comment. Tomo VII. fusius exposui. Cum autem non solum difficile summopere sit loca heliocentrica ex observationibus eruere, sed etiam ad orbitarum determinationem loca tam exquisita nullique vel minimo errori obnoxia requirantur, methodus ibi tradita neque semper neque satis tuto ad hoc institutum adhiberi potest. Atque hanc ob causam iam illo tempore ad orbitam solis vel potius terrae definiendam potissimum adstruxi, eo quod singula solis loca geocentrica observata totidem praebeant terrae loca heliocentrica, quae adeo satis copiose exhiberi possunt.

Tab. II.

§ 2. Ad loca autem heliocentrica planetarum primariorum accurate observanda tot diligentissime institutis observationibus tantaque circumspectione opus est, ut non

facile pro quouis planeta terna tantum eiusmodi loca ex tanta obseruationum multitudine deriuari queant. Neque vero ad istud institutum ternae obseruationes quaecunque heliocentricae sunt accommodatae, sed eiusmodi tria loca requiruntur, quae in orbita planetae satis a se inuicem sint remota, ex quo intelligitur maiorem locorum heliocentricorum numerum pro singulis planetis requiri, quo delectus ternarum obseruationum maxime idonearum institui queat.

§. 3. Tres autem omnino habentur modi ex obseruationibus planetarum loca heliocentrica concludendi, qui omnes absolutam ac perfectam solis theoriam postulant: quam quidem tanquam satis cognitam assumere licet, cum ea per methodum ante expositam ex obseruationibus exactissime colligi queat. Primus modus consistit in obseruatione oppositionis cuiusque planetae cum sole, qui vero tantum ad planetas superiores patet, cum in inferioribus oppositio solis nunquam contingat. Neque vero oppositio planetarum respectu solis immediate obseruari potest, sed ea demum ex pluribus obseruationibus circa oppositionis tempus institutis deriuari debet. Ex huiusmodi scilicet obseruationibus per computationem verum momentum temporis, quo planeta soli e diametro opponitur, definitur, quo ipso momento locus terrae heliocentricus cum planetae loco heliocentrico congruet; siquidem planeta in ipsa ecliptica moueri ponatur. Quodsi autem planeta cum latitudine obseruetur, tum istud momentum oppositionis ex obseruationibus collectum vltiore correctione indiget, vt vera oppositio secundum longitudinem inueniatur, in quo negotio ipsa iam planetae theoria quasi cognita assumi debet.

§. 4. In planetis inferioribus Venere et Mercurio quia oppositiones cum sole non contingunt, eorum coniunctiones cum sole diligenter solent obseruari: ex his enim pari modo loca heliocentrica deriuari possunt. Interim tamen istiusmodi obseruationes ob summam horum planetarum et solis propinquitatem hoc tempore perraro et non satis accurate institui possunt. Quare ex hoc obseruationum genere in iis tantum maxima fiducia poni potest, in quibus isti planetae in ipso solis disco conspiciuntur. Hoc autem non solum rarissime euenit, sed etiam iis tantum temporibus, quibus hi planetae nodis suis sunt proximi; ex quo per hanc viam duo tantum loca heliocentrica in orbita planetae diuersa elicere licet, quae ad theoriam stabiliendam non sufficiunt. Neque vero ex planetarum inferiorum elongationibus maximis a sole obseruatis loca heliocentrica deduci possunt, nisi orbitae planetarum circulares assumantur, quae positio pro Mercurio a veritate nimium abhorret. Ex quibus clarissime perspicitur, quam parum utilitatis loca planetarum heliocentrica ex oppositionibus et coniunctionibus cum sole collecta ad nostrum institutum afferre queant.

§. 5. Alter modus loca heliocentrica planetarum ex obseruationibus astronomicis concludendi, in obseruatione latitudinis cuiusque planetae consistit; ex qua si tam loci nodorum quam inclinatio orbitae planetae ad planum eclipticae iam ante fuerit cognita, locus planetae heliocentricus utique colligi potest, quemadmodum ostenditur in Astronomica Gregorii. Sed quamuis haec requisita exactissime essent cognita, tamen vel minimus error in obseruatione commissus, qui euitari nullo modo potest, conclusionem

clufionem maxime incertam reddet. Primum enim manifestum est, si planetae orbita ab ecliptica prorsus non discreparet, per hanc methodum nihil omnino ad locum heliocentricum determinandum, inferri posse; ex hoc vero sponte sequitur, si inclinationes orbitarum admodum sint exiguae uti reuera sunt, tum istam methodum ingentibus erroribus obnoxiam esse oportere; ita ut ea in nostro instituto, in quo exactissima loca heliocentrica desideramus, nullius plane usus esse possit.

§. 6. His autem duobus modis expositis loca heliocentrica planetarum inuestigandi, tertius modus longe anteferendus esse videtur, qui neque latitudinem planetae spectat, neque determinatum situm respectu solis requirit. Tempus autem periodicum planetae, cui iste modus accommodatur, accuratissime cognitum ac determinatum esse oportet, id quod ex tot observationibus tam longo temporis intervallo factis, satis exacte colligi potest. Quodsi enim binae eiusmodi planetae observationes eligantur, quae integro tempore periodico a se inuicem distant, certum erit planetam utraque observatione in eodem orbitae suae loco versatum esse, etiamsi ex terra in diuersis coeli locis conspiciatur. Ex hac ipsa autem differentia locorum geocentricorum versus locus heliocentricus facile concluditur. Interim tamen haec methodus alias tutissima hoc habet incommodi, quod difficulter et raro ad datum quoduis temporis momentum situs cuiusque planetae in coelo obseruari possit.

§. 7. Cum igitur loca heliocentrica planetarum vel non satis exacta, qualia requirimus, exhiberi queant, vel tanta temporum opportunitas ad ea definienda postuletur, qualis

qualis raro contingere solet, in eam incidi cogitationem, quemadmodum per loca quaecunque geocentrica orbitae planetarum determinari, ac tabulae astronomicae confici queant. Quanquam autem mox intellexeram, problema hoc esse determinatum; atque ex aliquot locis geocentricis orbitas planetarum determinari, tamen ipsa solutio tantopere fit difficilis et molestissimis calculis implicata, ut ea nullo modo ad finem perducere, multo minus ad usum accommodari queat. Perspicuum quidem est praeter tempus periodicum planetae cognitum tria loca geocentrica ad problema determinandum sufficere, verum, quia quivis locus geocentricus primum loco solis, et deinde tam longitudine quam latitudine planetae definiri debent, tot quantitates diversae in calculum introduci debent, ut is non maxime intricatus fieri omnino nequeat.

§. 8. Postquam autem cogitasset orbitas planetarum nunc quidem non adeo esse incognitas, ut earum investigatio a primis principiis repeti debeat, motusque ipsorum planetarum omnino ignoretur; sed non solum tempora periodica per plurimas observationes accuratissime iam esse definita, verum etiam ipsas orbitas satis prope cognitae haberi: ex his si debito modo in calculum inferantur, facile prospexi, laborem vehementer sublevari posse. Quando enim non tam verus planetarum motus ex solis observationibus, quam eius tantum aberratio a theoria iam stabilita, quae minima est, indagatur, calculus ex eo principio facilius reddetur, quod errores theoriae seu tabularum astronomicarum tanquam quantitates infinite parvae tractari queant, quo ipso formulae et aequationes alias intricatissimae satis planae et simplices fieri solent.

§. 9. Negotium igitur, quod in hac differtatione mihi expediendum summi, in hoc constat, vt tabulas astronomicas vsu receptas, quae quidem ad veram theoriam motus planetarum sint constructae, per aliquot obseruationes seu loca geocentrica corrigam, atque definiam, quantum illae a veritate dissentiant; errore enim cognito tabulae etiam maxime vitiosae facili negotio emendabuntur. In hoc autem instituto ipsas aberrationes tabularum a veritate, in quas inquirō, tanquam quantitates infinite parvas seu differentiales sum contemplanturus, ita vt termini, in quibus earum plures dimensiones occurrunt, tuto negligi queant. Videndum igitur erit, quantum loca planetae obseruata a locis, quae tabulae pro iisdem temporibus suppeditant, cum secundum longitudinem tum latitudinem differant, quae ipsa discrimina tam erunt exigua, vt instar quantitatum differentialium tractari queant; deinde ex his ipsis differentiis definiri debet, quantum et quibus in locis tabulae immutandae sint, vt cum obseruationibus perfectissime consentiant.

§. 10. Quoniam autem orbitae planetarum determinari ex obseruationibus terrestribus non possunt, nisi orbita terrae perfecte sit cognita, eam hic tanquam perfecte cognitam assumo, ita vt eius ope locus solis ad quodvis tempus sine vllō errore assignari queat. Ad motum quidem solis definiendum maxime accommodata est methodus supra memorata determinandi orbitas planetarum ex tribus locis heliocentricis; verum tamen hic quoque modum trademus theoriam solis quamcunque, si correctione egeat, per obseruationes corrigendi. Hocque modo etiam

etiam facilius vera solis theoria obtinebitur, quam si ea omnino a priori indagari deberet.

§. 11. Deinde etiam data pono singulorum planetarum tempora periodica, quippe quae ex tot seculorum interuallo institutis obseruationibus multo accuratius sunt definita, quam per obseruationes nunc instituendas vel exquisitissimas expectari possent. Ex datis autem temporibus periodicis planetarum simul ratio, quam inter se tenent orbitalium axes trasuersi, seu distantiae a sole mediae, innotescit; omnino enim sequi conueniet theoriam motus planetarum a Newtono stabilitam. Hanc autem theoriam secuturus singulorum planetarum tam aphelia quam nodos respectu stellarum fixarum quiescere assumo; seu ipsis respectu aequinoctiorum motum ipsi praecessioni aequinoctiorum aequalem tribuo. Quae assumptio uti rationi maxime est consentanea, ita etiam cum obseruationibus apprime consentit. neque, uti quibusdam astronomis videtur, per obseruationes refellitur.

§. 12. Quodsi nunc tabulas astronomicas contemplemur, ex quibus loca planetarum supputari solent, deprehendemus eas quinque rebus ex obseruationibus desumptis niti, totidemque propterea nominibus erroneas esse posse. Primum enim error in loco aphelii assumpto inesse potest, ita ut eius vera longitudo vel maior sit vel minor, quam in tabulis ponitur. Secundo excentricitas orbitae seu solis distantia a centro orbitae vel nimis magna vel nimis parua assumpta esse potest. Tertio vero error inesse potest in anomalia media, quae ad datam aeram constituitur: ita ut ea vel maior statui debeat vel minor, qui error si quis fuerit deprehensus pro quouis tempore idem manebit, si quidem tempus perio-

dicum recte est assumtum. Quarto loca nodorum in tabulis assignata possunt esse vitiosa, ceteri his maxime fidere posse videmur. Quinto denique euenire potest, ut inclinatio orbitae ad eclipticam; quae in tabulis ponitur, a veritate recedat. Fieri igitur potest, ut tabulae astronomicae quintuplici correctione opus habeant.

§. 13. Vnus autem planetae locus ex obseruationibus deductus duplici modo a tabulis dissentire potest ratione scilicet vel longitudinis vel latitudinis. Quare si singuli dissensus obseruationum a tabulis ad totidem tabularum errores detegendos sufficiant, bina alicuius planetae loca geocentrica obseruata non erunt sufficientia ad quinque errores corrigendos, terna autem non solum omnes errores, qui in tabulis inesse possint, patefacient et corrigent, sed vna etiam conditio redundabit, quae ad confirmationem emendationis instituendae adhiberi potest. Ita se res habet si quinque erroribus tabulae sint obnoxiae, ex quo videri possit, paucioribus obseruationibus negotium expediri posse, si inclinatio et nodi recte constituti sint in tabulis: nihilo tamen minus etiam tum tribus opus erit obseruationibus, cum ipsae obseruationes veritatem nodorum et inclinationis orbitae in tabulis assumptae declarare debeant.

§. 14. Ponamus iam pro quocunque planeta cuius correctio suscipitur, eius distantiam a sole mediam seu orbitae ipsius semiaxem transuersum esse $= a$ cuius quantitas, quia a solo tempore periodico pendet in tabulis recte assignata ponitur, ita ut correctione non egeat. Deinde sit excentricitas seu distantia solis a centro orbitae ad distantiam mediam applicata, qualis in tabulis habetur $= k$, vera autem excentricitas sit $= k + dk$. Tertia anomalia

malia media in tabulis ad quoduis tempus exhibita ita a veritate discrepet, vt ea perpetuo augeri debeat angulo dm . Quarto fit longitudo aphelii in tabulis exhibita, atque a prima stella arietis computata $= p$, vera autem eiusdem aphelii longitudo fit $= p + dp$. Quinto fit longitudo nodi ascendentis in tabulis posita a prima pariter stella arietis computata $= q$; at vera eiusdem nodi longitudo fit $q + dq$. Sexto denique fit inclinatio orbitae planetae ad planum eclipticae, quae in tabulis indicatur $= n$; vera autem inclinatio fit $= n + dn$.

§. 15. Ex tabulis ergo astronomicis quibusque habentur valores litterarum a , k , n , p et q , ex quibus distantiam mediam a ex tempore periodico deductam reliquas litteras vero vndeunque ex obseruationibus conclusas esse pono. Praeter hos vero valores nihil quicquam ex tabulis desumam; aequationem enim anomaliae mediae vel addendam vel subtrahendam non ex tabulis desumam, sed ipse quouis casu calculo definiam, non tam quasi tabulis aequationum parum considerem, quam quia iste ipse calculus quo aequatio anomaliae definitur, ad correctiones instituendas requiritur. Correctio autem in hoc consistet, vt errores tabularum a veritate, quos his expressionibus differentialibus dk , dm , dp , dq et dn denotaui, determinem; hoc enim facto, dubium erit nullum, quin tabulae perfectissime sint emendatae, si quidem obseruationibus certissimis ad has correctiones vtamur.

§. 16. Eiusmodi autem obseruationes adhiberi conuenit, quibus planetae ad datum tempus tam longitudo quam latitudo contineatur; fit igitur pro definito quodam tempore longitudo planetae ex obseruationibus deducta $=$

F, quae pariter a prima stella arietis fit computata, latitudo vero fit $= G$. Ad idem vero tempus locus planetae ex tabulis supputetur, sitque longitudo ex tabulis innenta $= f$, latitudo autem $= g$. Quodsi vero tabulis correctis vti liceret, foret longitudo $= f + df$, et latitudo $= g + dg$, quae perfecte cum obseruationibus consentire deberent; erit itaque $F = f + df$ atque $G = g + dg$, hincque $df = F - f$ et $dg = G - g$. Cognoscuntur igitur isti valores df et dq , quos tanquam differentialia specto, ex comparatione tabularum astronomicarum cum obseruationibus; iidem vero ex assumtis tabularum erroribus dk , dm , dp , dq , et dn definiri poterunt; vnde vicissim errores tabularum per obseruationes dignosci, ipsaeque tabulae corrigi poterunt.

§. 17. Cum igitur habetur obseruatio planetae omnibus numeris absoluta, ad id tempus, quo obseruatio est facta, locus planetae hoc est eius longitudo ac latitudo ex tabulis supputetur; quas litteris f et g designaui. Quod si autem valores f et g ex tabulis eruantur, compositi erunt ex litteris cognitis, quibus tabulae sunt superstructae, scilicet a , k , p , q et n , eruntque harum litterarum quasi functiones. Ex his vero ipsis valoribus per calculum differentialem definiri poterunt longitudo $f + df$ et latitudo $g + dg$, ponendo $k + dk$; $p + dp$; $q + dq$; $n + dn$ loco k , p , q et n , atque anomalam mediam tabularem augendo angulo dm , etiamsi ipsae quantitates hae differentiales dk , dp , dq , dn et dm sint per se incognitae. Quoniam autem longitudo $f + df$ et latitudo $g + dg$ ex tabulis correctis nata cum longitudine et latitudine obseruata congruere debet, hae differentiae df et dq ex discrimine
tabula-

tabularum et obseruationis primum cognoscentur, eadem vero etiam per correctiones adhibendas determinabuntur, vnde huius modi binæ aequationes ex qualibet obseruatione conficiuntur

$$df = A dm + B dk + C dp + D dq + E dn$$

$$dg = \alpha dm + \varepsilon dk + \gamma dp + \delta dq + \epsilon dn$$

atque cum ex tribus obseruationibus sex huiusmodi aequationes oriantur, eae abunde sufficient ad valores differentiales dm , dk , dp , dq et dn determinandos, quibus determinatis tota tabularum astronomicarum correctio erit absoluta.

§. 18. Videamus igitur quemadmodum ex iis rebus datis, quibus tabulae inniti solent, et quas litteris a , k , p , q et n indicauimus, ad datum tempus planetæ tam longitudo quam latitudo computari debeat. Ad datum igitur tempus ante omnia tabulae præbent planetæ anomaliæ mediæ, quæ sit $=x$, qua cognita inuestigari debet anomalia excentri, quam tautisper littera v indicemus. Ita autem hæc anomalia excentri cum anomalia mediæ est connexa vt sit $x = v + k \sin. v$ ex qua aequatione quidem data anomalia excentri, anomalia mediæ per transmutationem sinuum in arcus facile definitur. At vicissim ex anomalia mediæ, excentri anomalia per hanc aequationem determinabitur $v = x - k \sin. (x - k \sin. (x - k \sin. (x - \text{etc.}$ quæ etsi est infinita, tamen facili negotio valorem ipsius v tam prope suggerit, quam quidem ad institutum requiri potest. In circulo scilicet, cuius radius est 1. quaeritur arcus æqualis ipsi $k \sin. x$. isque ab anomalia mediæ x subtrahatur; residui arcus denuo sumatur sinus, eique per k multiplicato arcus capiatur æqualis,

qui

qui denuo ab anomalia media x auferatur : arcus residui iterum sinus sumatur, eique per k multiplicato arcus aequalis sumatur, ab anomalia media x subtrahendus; haecque operatio tam diu repetatur, quoad residui arcus amplius neque crescant neque decrescant, quod si euenerit, id quod semper ante quartam operationem continget, vltimum residuum dabit valorem anomaliae excentri v . Interim in hoc negotio annotari oportet, quod si anomaliae mediae sinus fuerit negatiuus, arcus inde natos quoque futuros esse negatiuos, ac propterea ab z non subtrahi, sed ad id addi debere; quod ei, qui in calculo est exercitatus nullam pariet difficultatem, Ex tabulis itaque ad datum tempus planetae cognoscitur anomalia media, atque ex hac coniunctim cum excentricitate k reperietur anomalia excentri v .

§. 19. Cognita anomalia excentri v , ex ea primum facillime colligitur vera planetae distantia a sole, vel eius ratio ad distantiam mediam a ; posita enim planetae distantia a sole $= y$, erit $y = a (1 + k \cos. v)$ Deinde etiam ex anomalia excentri v inueniri potest vera anomalia planetae, seu eius ab aphelio distantia ex sole visa; quod si enim planetae anomalia vera ponatur $= z$, poterit satis commode valor ipsius z ex hac aequatione etsi infinita expedite determinari, qua est $z = v - k \sin. v + \frac{1}{2} k^2 \sin. 2v - \frac{1}{2} k^3 (\sin. 3v + 3 \sin. v) + \text{etc.}$ aptior autem ad praesens institutum est haec aequatio, qua valor ipsius z absolute reperitur; qua est $\cos. z = \frac{k + \cos. v}{1 + k \cos. v} = \frac{a}{y} (k + \cos. v)$ ob $y = a (1 + k \cos. v)$: vel per sinus versos hoc modo: $\sin. z = \frac{(1-k) \sin. v}{1 + k \cos. v}$; vel etiam per sinus ita: $\sin. z = \frac{\sin. v \cdot \sqrt{1-k^2}}{1 + k \cos. v}$
 $= \frac{a}{y} \sin. v \cdot \sqrt{1-k^2}$. §. 20.

§. 20. Ex anomalia vera hoc modo inuenta, atque ex datis orbitae planetae aphelio, nodo ascendente, et inclinatione ad eclipticam porro planetae longitudo ac latitudo heliocentrica sequenti modo definientur: Repraesentet Tab. II.
fig. 9.
 circulus $\sphericalangle Nap$ in cuius centro S sol versatur eclipticam et $NAPn$ orbitam planetae in coelo proiectam; sitque \sphericalangle prima stella arietis seu potius eius locus ad eclipticam relatus, N orbitae planetae nodus ascendens, A aphelium orbitae planetae, et P eius locus, quem pro dato tempore tabulae monstrant. Centro porro S per A et P arcus circulares Aa et Pp normales ad eclipticam ducantur, quorum ille Aa seu potius angulus ASa latitudinem aphelii heliocentricam, hic vero Pp seu angulus PSp ipsius planetae in P versantis latitudinem heliocentricam praebet. Longitudo autem heliocentrica a prima stella arietis \sphericalangle computata primum nodi ascendentis N erit arcus $\sphericalangle N=q$; deinde aphelii A arcus $\sphericalangle a=p$ ipsius autem planetae in P existentis longitudo heliocentrica erit arcus $\sphericalangle Nap$; orbitae vero ad eclipticam inclinatio quam posuimus $=n$, repraesentatur angulo ANa seu PNp .

§. 21. Anomalia autem vera planetae z est arcus AP seu angulus ASP. Quare cum sit $Na=p-p$ ex triangulo sphaerico ANa elicitur arcus NA tangens $=\frac{\text{tang.}(p-q)}{\text{cos. } n}$, hincque erit $NA =$ arci, cuius tangens erit $=\frac{\text{tang.}(p-q)}{\text{cos. } n}$, quem arcum, quia tam facile reperitur ponamus $=e$ ita vt sit $NA=e$, et $\text{tang. } e = \frac{\text{tang.}(p-q)}{\text{cos. } n}$. Cum nunc sit arcus AP $=z$ erit arcus $NAP=e+z$, vnde reperitur tang. arcus $Nap = \text{cos. } n. \text{ tang. } (e+z)$; ponatur iste arcus $Nap=r$, ita vt sit tang. $r = \text{cos. } n. \text{ tang. } (e+z)$, erit

Tom. XII.

Q

$q+r$

$q+r$ longitudo planetae heliocentrica a prima stella arietis \heartsuit computata. Praeterea vero erit arcus Pp seu anguli PSp sinus = sin. n . sin. $(e+z)$, qui est sinus latitudinis heliocentricae planetae ad boream declinantis; si quidem ea est affirmatiua. Ponamus autem hanc planetae latitudinem heliocentricam esse = s , erit sin. s = sin. n . sin. $(e+z)$.

§. 22. Vt haec facilius sub conspectum cadant, omnia in sequenti tabella complecti visum est. Erit igitur

Distantia planetae media a sole	= a
Excentricitas	= k
Aphelii longitudo helioc.	= p
Nodi ascendenti longit.	= q
Inclinatio orbitae	= n

Porro ad datum tempus ponatur.

Plan. anom. med. = x	$x = v + k \sin. v$ vel
Anomal. excent. = v	$v = x - k \sin. (x - k \sin. (x - k \sin. (x - \text{etc.}))$
Distantia a sole = y	$y = a(1 + k \cos. v)$
Anomalia vera = z	$\cos. z = \frac{a}{y} (k + \cos. v)$
Dist. aph. a Nodo = e	$\text{tang. } e = \frac{\text{tang. } (p-q)}{\cos. n}$
Long. Plan. a nodo = r	$\text{tang. } r = \cos n \text{ tang. } (e+z)$
Long. plan. heliocentr.	
a pr. * $\heartsuit = q+r$	
Lat. plan. heliocentrica boreal. = s	$\sin. s = \sin. n. \sin (e+z)$

§. 23. Inuentis autem cum longitudine planetae, tum etiam latitudine heliocentrica, ex iis sequenti modo longitudo et latitudo geocentrica determinabitur. Sit T ter-

§. 24. Hoc igitur modo ex positionibus, quae in tabulis assumuntur, ad datum tempus planetae determinatur longitudo et latitudo, primo quidem heliocentricae, tum vero etiam geocentricae: quae itaque recte se habere, et cum observationibus conspirare deberent, si quidem tabulae omni vitio carerent. Quodsi autem ponamus errores quam minimos tabulis inesse, ex iis, etsi nobis adhuc incognitis, loca planetae tamen corrigi poterunt. Cum igitur correctiones adhibendas instar differentialium earum quantitatum, quibus respondent, consideremus et designemus, errores longitudinis et latitudinis planetae ex tabulis inuenta inueniemus, si ipsas expressiones pro iis erutas more solito differentiemus, ponendis iis quantitibus variabilibus, in quibus errores inesse possunt. Differentialia autem quae in hoc calculo occurrent erunt haec dm ; dk ; dp ; dq et dn , ex quibus differentialia reliquarum litterarum assumptiarum determinari poterunt. Quoniam autem dm significat errorem anomaliae mediae tabularis addendum, anomalia media ex tabulis inuenta x augeri debet illa particula dm , ex quo erit $dx = dm$.

§. 25. Quia deinde est $x = v + k \sin. v$, erit differentiendo $dx = dm = dv + dk \sin. v + k dv \cos. v$ hincque $dv = \frac{dm - dk \sin. v}{1 + k \cos. v} = \frac{a}{y} (dm - dk \sin. v)$. Porro est $y = a (1 + k \cos. v)$, hincque $dy = a dk \cos. v - a k dv \sin. v$. in qua si loco dv valor superior substituatur, prodibit $dy = \frac{a dk \cos. v + a dk k - a k dm \sin. v}{1 + k \cos. v} = a dk \cos. z - \frac{a k dm \sin. v}{1 + k \cos. v}$. Ex aequatione autem $\cos. z = \frac{k + \cos. v}{1 + k \cos. v}$ sequitur $-dz \sin. z = \frac{dk \sin. v^2 \sin. v - (-k^2) dv \sin. v}{(1 + k \cos. v)^2}$ quae posito $(1 + k \cos. v)^2 = \frac{(1 - k^2) (\sin. v)}{(\sin. z)^2}$ praebet hanc $dz = \frac{dv \sin. z}{\sin. v} - \frac{dk \sin. z}{1 - k^2} = \frac{a dm \sin. z}{y \sin. v}$
 $= \frac{a dk \sin. z}{y} - \frac{dk \sin. z}{1 - k^2}$ §. 26.

§. 26. Dehinc ad differentialia reliquarum litterarum peruenimus, ac primo quidem aequatio tang. $e = \frac{\text{tang}(p-q)}{\text{cof}.n}$. praebet $de = \frac{(dp-dq)\text{cof}.e^2}{\text{cof}.n(\text{cof}(p-q))^2} + \frac{dn \sin n. \text{tang}(p-q)(\text{cof}.e)^2}{(\text{cof}.n)^2}$. Sequens vero aequatio tang. $r = \text{cof}. n. \text{tang}. (e + z)$ differentiata dat $\frac{dr}{(\text{cof}.r)^2} = -dn \sin. n. \text{tang}. (e + z) + \frac{(de+dz)\text{cof}.n}{(\text{cof}.e+zs)^2}$, in qua aequatione non expedit valores superiores loco de et dz substituere, ne formulae nimis fiant intricatae. Interim tamen quouis exemplo oblato minori opera valor ipsius dr per differentialia primitiua dm, dk, dp, dq , et dn poterit definiri. Hoc autem inuento erit longitudinis heliocentricae $q+r$ differentiale $= dq + dr$. Latitudinis autem heliocentricae s differentiale determinabitur per hanc aequationem $ds \text{cof}. s = dn \text{cof}. n \sin. (e + z) + (de + dz) \sin. n. \text{cof}. (e + z)$ Ex his itaque mutationes in longitudine et latitudine heliocentrica, quas quinque tabularum errores assumti atque per obseruationes determinandi producent, cognoscuntur.

§. 27. Progrediamur igitur ad mutationes in longitudine ac latitudine geocentrica ortas definiendas, quo in negotio, quia solis theoriam perfectam ponimus, quantitates locum terrae determinantes, quae sunt c et u , tanquam constantes tractari oportet. Primum autem ad differentiale anguli t assignandum utamur aequatione hac $\cot. t = \cot. (u - q - r) - \frac{c}{y \text{cof}. s. \sin. (u - q - r)}$ cuius differentiale est $-\frac{dt}{(\sin. t)^2} = \frac{dq + dr}{(\sin. (u - q - r))^2} + \frac{cdy}{yy \text{cof}. s. \sin. (u - q - r)} - \frac{cds \text{tang}. s}{y \text{cof}. s. \sin. (u - q - r)} - \frac{c(dq + dr) \cot. (u - q - r)}{y \text{cof}. s. \sin. (u - q - r)}$. Inuento autem differentiali dt , erit longitudinis geocentricae f incrementum $df = -dt = \frac{(dq + dr)(\sin. t)^2}{\sin. (u - q - r)^2} + \frac{cdy(\sin. t)^2}{yy \text{cof}. s. \sin. (u - q - r)} - \frac{cds \text{tang}. s (\sin. t)^2}{y \text{cof}. s. \sin. (u - q - r)} -$

$\frac{e(dq+dr)\cos.(u-q-r)(\sin.t)^2}{y\cos.s\sin.(u-q-r)}$. Latitudinis autem geocentricae g incrementum cognoscetur ex hac aequatione differentiali

$$\frac{dg}{(\cos.g)^2} = \frac{ds\sin.t}{(\cos.s)^2\sin.(u-q-r)} - \frac{df\cos.t.\text{tang}.s}{\sin.(u-q-r)} + \frac{(d.+dr) i.t.\text{tang}.s}{\sin.(u-q-r)t.\text{ang}.(u-q-r)}$$

§. 28. Quod si autem eo tempore, pro quo iste calculus est factus, per obseruationes habeatur locus planetae, eiusque longitudo geocentrica a prima stella arietis computata sit $= F$, latitudo autem geocentrica $= G$; correctiones tabulae, quae consistunt in valoribus dm , dk , dp , dq , et dn , ita debebunt esse comparatae, vt fiat, $df = F - f$ et $dg = G - g$. Quare cum df et dg ex aberratione tabularum ab obseruationibus cognoscantur, ex tribus obseruationibus determinari poterunt ipsa illa differentialia dm , dk , dp , dq et dn , quibus cognitio tabulae etiam correctae habebuntur. Erit scilicet pro tabula vera

Planetae distantia a sole media $= a$.

Excentricitas orbitae $= k + dk$

Longitudo Aphelii heliocentrica $= p + dp$

Longitudo nodi asc. heliocentrica $= q + dq$

Inclinatio orbitae planetae ad Eclipt. $= n + dn$

Tabula autem mediorum motuum planetae ita corrigi debebit, vt anomalia media, quam tabulae ad quodvis tempus monstrant, augeatur angulo dm . Atque hoc pacto tabulae, nisi enormiter a veritate aberrauerint, ita emendabuntur, vt tum perpetuo cum obseruationibus quam exactissime consentire debeant.

§. 29. Obseruationes autem, quibus ad hoc propositum vti expedit, summa diligentia adhibita exquisitissimis instrumentis factas esse oportet, vt de vero planetae loco

loco obseruato omnino certi esse queamus, quamobrem haec obseruationes a refractionibus ante penitus purgari debent, quam ex iis longitudo ac latitudo geocentrica planetae concludatur. Praeter has autem vſitatas cautiones maxime ratio propagationis lucis haberi debet, qua longitudo planetae obseruata modo augetur modo diminuitur. Nisi enim haec correctio habeatur, motus planetae nequidem talis spectabitur, qualis cum theoria planetarum Kepleriana congruit: hancque praecipuam esse causam existimo, quod etiam nunc per exactissimas obseruationes tabulae astronomicae cum obseruationibus penitus conciliari non potuerint. Vicissim autem si tabulae prorsus sint correctae, loca planetarum ex iis per calculum deducta non immediate cum obseruationibus comparari conuenit, verum ea quoque in loca apparentia antea conuerti debent, adhibita ea correctione, quam propagatio lucis suppeditat: qua de re in ea dissertatione, qua phaenomena a propagatione lucis successiua oriunda exposui, fusius egi.

§. 30. Aequatio autem ex propagatione lucis orta pro terra ita se habet, vt longitudo terrae obseruata perpetuo augeri debeat $20''$ quo facto is prodit terrae vel solis locus, in quo appareret, si lumen in instanti propagaretur. Ex cuiusuis autem planetae loco obseruato locus verus, in quo conspiceretur, si lumen in instanti ad nos perueniret, per sequentem regulam eruatur. A loco planetae in eclipſtica obseruato, seu eius longitudine geocentrica obseruata subtrahatur longitudo terrae, quam eo tempore obtinet, residuique arcus sinus sit $= \mu$, cosinus $= m$: tum quaeratur angulus cuius sinus est $= \frac{\mu a}{b}$ eiusdemque anguli capiatur cosinus, qui sit $= q$: seu a
lon-

longitudine planetae geocentrica subtrahatur longitudo planetae heliocentrica et residui arcus capiatur cosinus, qui erit q , quo facto ad longitudinem planetae obseruatam addi oportebit angulum, cuius sinus est $\frac{s}{c}q - \frac{r}{c}m$. In his expressionibus denotat a distantiam terrae mediae a sole, b distantiam planetae mediae a sole; estque posito $la = 6,0000000$, pro singulis planetis vt sequitur.

pro Saturno $lb = 6,9794600$

pro Ioue $lb = 6,7160965$

pro Marte $lb = 6,1829850$

pro Venere $lb = 5,8593365$

pro Mercurio $lb = 5,5878232$

Praeterea habet fractio $\frac{c}{r}$ valorem constantem; quo est $l\frac{c}{r} = 4,0201540$

altera autem fractio $\frac{s}{c}$ pro singulis planetis peculiare induit valores, erit enim

pro Saturno $l\frac{s}{c} = 4,5098840$

pro Ioue $l\frac{s}{c} = 4,3782022$

pro Marte $l\frac{s}{c} = 4,1116465$

pro Venere $l\frac{s}{c} = 3,9498222$

pro Mercurio $l\frac{s}{c} = 3,8140656$

Calculus autem pro angulo illo addendo fiet facilius, si a logarithmis sinuum $\frac{s}{c}q$ et $\frac{r}{c}m$ subtrahatur hic logarithmus constans $4,6855749$, residuorumque logarithmorum quaerantur numeri respondentes, qui praebent partes aequationis $\frac{s}{c}q$ et $\frac{r}{c}m$ in minutis secundis.

§. 31. Accommodemus nunc methodum hanc tabulas astronomicas corrigendi ad theoriam motus solis seu terrae

terrae emendandam; fitque pro dato tempore longitudo terrae obseruata = F, latitudo uero erit nulla. Si nunc ponatur in tabulis

Terrae distantia media a sole = a

Excentricitas orbitae terrae = k

Longitudo aphelii = p .

Quae est longitudo perigaei solis.

Ad tempus obseruationis fit porro

Anomalia media solis = x

Anomalia excentri = v

Anomalia uera solis = z

Ex his ergo erit longitudo terrae = $p + z$, quae posita est = f . Est autem ut uidimus $x = v + k \sin. v$ uel $v = x - k \sin. (x - k \sin.)$ et $\cos. z = \frac{a}{y} (k + \cos. v)$ existente y terrae a sole distantia hoc tempore, quae est $y = a (1 + k \cos. v)$.

§. 32. Ponamus autem tabulas has esse uitiosas, atque ad consensum cum ueritate impetrandum anomalias medias augeri debere angulo dm ; excentricitatem k elemento dk , et longitudinem aphelii p arcuulo dp . His autem correctionibus in tabulas introductis prodibit ad tempus obseruationis

anomalia media solis = $x + dx = x + dm$

anomalia excentri = $v + dv = v + \frac{dm - dk \sin. v}{1 + k \cos. v}$

distantia a terra = $y + dy = y + e dk \cos. z - \frac{ak dm \sin. v}{1 + k \cos. v}$

anomalia uera = $z + dz = z + \frac{adm \sin. z}{y \sin. v} - \frac{adk \sin. z}{y} - \frac{dk \sin. z}{1 - kk}$

longitudo igitur terrae ex his tabulis correctis prodibit = $p + z + dp + dz = f + df$, quae cum longitudine

obseruata F congruere debet. Ex obseruatione ergo habetur $df = F - f = dp + dz = dp + \frac{adm \sin. z}{y \sin. v} - \frac{adk \sin. z}{y} - \frac{dk \sin. z}{1 - kk}$. Obseruatio igitur cum calculo secundum tabulas instituto comparata dat $df = F - f$, vnde ad tabulas corrigendas obtinetur sequens aequatio

$$df = dp + \frac{adm \sin. z}{y \sin. v} - \frac{adk \sin. z}{y} - \frac{dk \sin. z}{1 - kk}$$

Tres igitur huiusmodi aequationes ex tribus obseruationibus solis formatae sufficient ad aberrationes tabularum ternas dm , dk et dp indicandas, atque adeo ad tabulas corrigendas.

§. 33. Similis fere correctio adhiberi potest pro tabulis cuiuscunque planetae primarii, si eius loca heliocentrica obseruare liceat. Si enim ad datum tempus obseruata sit longitudo planetae heliocentrica F vna cum latitudine heliocentrica G ; ad idem tempus ex tabulis corrigendis supputetur longitudo heliocentrica f et latitudo pariter heliocentrica g , ponaturque $F - f = df$ et $G - g = dg$.

Exhibeant autem tabulae :

Distantiam planetae mediam a sole	$= a$	reuera autem esse
Excentricitatem	$= k$	
Aphelii longitud. heliocentricam	$= p$	
Nodi ascendentis long. heliocentr.	$= q$	
orbitae inclinationem	$= n$	

anomaliam mediam vero tabularem ad quoduis tempus augeri debere angulo $= dm$.

Ad tempus autem obseruationis fit

Ex

Ex tabulis non correctis		ex tabulis correctis
Anomalia media	= x	= $x + dx$
Anomalia excentri	= v	= $v + dv$
Distantia a sole	= y	= $y + dy$
Anomalia vera	= z	= $z + dz$
Distantia aphelii a nodo	= e	= $e + de$
Longitudo planetae a nodo	= r	= $r + dr$
Longitudo heliocentrica planetae a prima * ∇	= f	= $f + df$
Latitudo heliocentrica	= g	= $g + dg$

Erit autem vt supra vidimus :

$$v = x - k \text{ fin. } (x - k \text{ fin. } (x - k \text{ fin. } (x - \text{etc.})))$$

$$y = a(1 + k \text{ cof. } v)$$

$$\text{cof. } z = \frac{a}{y} (k + \text{cof. } v) \text{ vel saepe commodius}$$

$$z = v - k \text{ fin. } v + \frac{1}{2} k^2 \text{ fin. } 2v - \frac{1}{24} k^3 (\text{fin. } 3v + 3 \text{ fin. } v) + \text{etc.}$$

$$\text{tang. } e = \frac{\text{tang. } (p-q)}{\text{cof. } n}$$

$$\text{tang. } r = \text{cof. } n \text{ tang. } (e + z)$$

$$f = q + r$$

$$\text{fin. } g = \text{fin. } n \text{ fin. } (e + z)$$

Valores autem differentiales, qui ex correctionibus oriuntur ita se habebunt

$$dx = dm$$

$$dv = \frac{adm}{y} - \frac{adk \text{ fin. } v}{y}$$

$$dy = a dk \text{ cof. } z - \frac{aakdm \text{ fin. } v}{y}$$

$$dz = \frac{adm \text{ fin. } z}{y \text{ fin. } v} - \frac{adk \text{ fin. } z}{y} - \frac{dk \text{ fin. } z}{1 - kk}$$

$$de = \frac{(dp - dq)(\text{cof. } e)^2}{\text{cof. } n (\text{cof. } (p-q))^2} + \frac{dn \text{ tang. } n \text{ tang. } (p-q)(\text{cof. } e)^2}{\text{cof. } n}$$

$$dr = \frac{(de + dz) \text{ cof. } n (\text{cof. } r)^2}{(\text{cof. } (e+z))^2} - dn \text{ fin. } n \text{ tang. } (e+z) (\text{cof. } r)^2$$

$$df = dq + dr$$

$$dg = \frac{dn \text{ cof. } n \text{ fin. } (e+z)}{\text{cof. } g} + \frac{(de + dz) \text{ fin. } n \text{ cof. } (e+z)}{\text{cof. } g}$$

quae duae vltimae aequationes inferuent ad tabulas corrigendas; si tres accipiantur obseruationes; vt iam ostendimus.

§. 34. Quodsi nunc haec praecepta ad vsum accommodare velimus, neceffe est vt ante omnia primam illam stellam arietis determinemus, quoniam ab ea non solum planetarum longitudes computamus, sed etiam aphelia eorum et nodos constantem distantiam seruaere ponimus. Assumimus igitur initio anni 1701 longitudinem huius stellae ab aequinoctio fuisse 29° , $0'$, $30''$, quae siue vera sit eius longitudo siue secus, non multum curamus; ab hoc enim eclipticae puncto, siue stella quaedam eo referatur siue secus, cum longitudes planetarum, tum apheliorum et nodorum situs describemus. Praeterea aequinoctia quotannis $50''$ regredi ponimus, ex quo ad praecipuas epochas sequens tabella longitudinem istius nostrae primae stellae arietis ab aequinoctio verno sumtam indicabit.

Anno Christi	Longitudo primae stellae arietis ab aequinoctio verno		
1	0 S,	5°	23', 50''
1601	0	27,	37, 10
1621	0	27,	53, 50
1641	0	28,	10, 30
1661	0	28,	27, 10
1681	0	28,	43, 50
1701	0	29,	0, 30
1721	0	29,	17, 10
1741	0	29,	33, 50
1761	0	29,	50, 30

1781	I	,	0	,	7	,	10
1801	I	,	0	,	23	,	50
1821	I	,	0	,	40	,	30
1841	I	,	0	,	57	,	10
1861	I	,	1	,	13	,	50
1881	I	,	1	,	30	,	30
1901	I	,	1	,	47	,	10
1921	I	,	2	,	3	,	50
1941	I	,	2	,	20	,	30
1961	I	,	2	,	37	,	10
1981	I	,	2	,	53	,	50

Quantum autem aequinoctia dato tempore recedant, cognoscetur ex hac tabula

Anni	Praecessio aequin.		Anni	Praecessio aequin.	
1	0'	50''	20	0 S,	0°, 16', 40''
2	1,	40	40	0,	0, 33, 20
3	2,	30	60	0,	0, 50, 0
4	3,	20	80	0,	1, 6, 40
5	4,	10	100	0,	1, 23, 20
6	5,	0	200	0,	2, 46, 40
7	5,	50	300	0,	4, 10, 0
8	6,	40	400	0,	5, 33, 20
9	7,	30	500	0,	6, 56, 40
10	8,	20	600	0,	8, 20, 0
11	9,	10	700	0,	9, 43, 20
12	10,	0	800	0,	11, 6, 40
13	10,	50	900	0,	12, 30, 0
14	11,	40	1000	0,	13, 53, 20
15	12,	30	2000	0,	27, 46, 40

Anni	Præcessio æquin.	Anni	Præcessio æquin.
16	13', 20''	3000	1 S, 11°, 40' 0''
17	14, 10	4000	1, 25, 33, 20
18	15, 0	5000	2, 9, 26, 40
19	15, 50		
20	16, 40		

Ex hac igitur tabula ad quoduis tempus distantia æquinoctii verni ab hac prima stella arietis poterit assignari; id quod omnino necesse est, cum in obseruationibus longitudes planetarum ab æquinoctio verno soleant exhiberi.

§. 35. His præmissis, quia ad theoriam motus planetarum singulorum emendandam ante omnia accurata tabula pro motu solis requiritur; methodum nostram primum ad tabulas solares corrigendas accommodare iuuabit. Tabulae autem, quarum correctionem suscipimus ad obseruatorium Greenwichense et stilum veterem sunt accommodatae, eaeque ponunt longitudinem aphelii orbitae terrae heliocentricam ab assumpta prima stella arietis = 8S, 8°, 39', 40'', atque excentricitatem orbitae terrae = $\frac{1700}{100000}$; distantiam terrae a sole mediam = 100000: vnde erit ex his tabulis $a = 100000$; $k = \frac{17}{1000}$ et $p = 248^\circ, 39', 40''$.

Anomaliam autem mediam eadem tabulae ostendunt pro praecipuis epochis, vt sequitur.

Initio anni	Anomalia media terrae	
1601	6S, 13°, 41', 40''	Hae anomaliae
1621	6, 13, 34, 4	referendae sunt ad
1641	6, 13, 26, 28	meridiem diei postremi
1661	6, 13, 18, 52	anni cuiusque praeteriti.

Initio

Initio anni | Anomalia media terrae

1681	6 , 13 , 11 , 16
1701	6 , 13 , 3 , 40
1721	6 , 12 , 56 , 4
1741	6 , 12 , 48 , 28
1761	6 , 12 , 40 , 52
1781	6 , 12 , 33 , 16
1801	6 , 12 , 25 , 41

Pro annis vero singulis Iulianis anomalia media augetur vt sequens tabella indicat.

Anni Iuliani | Anomalia media

expansi

Terrae

1	11 S, 29°, 44', 50''
2	11 , 29 , 29 , 40
3	11 , 29 , 14 , 30
4	11 , 29 , 58 , 28
5	11 , 29 , 43 , 18
6	11 , 29 , 28 , 8
7	11 , 29 , 12 , 58
8	11 , 29 , 56 , 56
9	11 , 29 , 41 , 46
10	11 , 29 , 26 , 37
11	11 , 29 , 11 , 27
12	11 , 29 , 55 , 26
13	11 , 29 , 40 , 16
14	11 , 29 , 25 , 6
15	11 , 29 , 9 , 56
16	11 , 29 , 53 , 54
17	11 , 29 , 38 , 44
18	11 , 29 , 23 , 34
19	11 , 29 , 8 , 24
20	11 , 29 , 52 , 24

Multa-

Mutationes autem anomaliae mediae, quae singulis anni partibus respondent ex tabulis desumere licet.

§. 36. Proposita nobis primum fit ista observatio Greenouici instituta, qua A. 1690 Martii die 7, 12^b , $8'$, $24''$, tempore medio longitudo solis ab aequinoctio observata fuit.

$11S$, 27° , $21'$, $27''$. Ob propagationem lucis autem haec longitudo observata augeri debeat $20''$, ita ut sol, si lux in instanti propagaretur, eo tempore visus fuisset in longitudine $11S$, 27° , $21'$, $47''$. Pro hoc nunc tempore quaeratur longitudo primae stellae arietis, ita

1681	$0^s, 28^\circ, 43', 50''$
9	$7', 30''$
1690	$0, 28^\circ, 51', 20''$
Mart. 7	9
Subtrahatur	$0, 28, 51, 29$
ab	$11, 27, 21, 47$
$10, 28, 30, 18$	

quae est longitudo solis a prima stella arietis sumpta unde longitudo terrae ex sole visa hoc tempore fuit $F = 4S$, 28° , $30'$, $18''$. Quaeratur nunc pro hoc tempore anomalia terrae vel solis media, quod tempus astronomice expressum est 1690 Mart. 7 d. 0 h, $8'$, $24''$

Anni	Anomalia media terrae
1681	$6S, 13^\circ, 11', 16''$
9	$11, 29, 41, 46$
Mart. d. 7	$2, 5, 3, 1$
$8'$	20
$24''$	1
$8S, 17, 56, 24$	

§. 37. Ad computum ergo instituendum erit $x = 257^\circ, 56', 24''$; et $\sin. x = -\sin. 77^\circ, 56', 24''$. Sinus autem in arcum commutatur, si a logarithmo sinus subtrahatur 4, 6855749, numerus enim residuo logarithmo respondens dabit arcum in minutis secundis expressum: at quia sinus insuper per $k = \frac{17}{1000}$ debent multiplicari insuper subtrahi debet $l \frac{1000}{17} = 1, 7695510$; a logarithmo sinus ad anomaliam excentri v inveniendam, omnino subtrahi debet iste logarithmus 6, 4551259. Cum igitur sit $v = x - k \sin. (x - k \sin. (x - k \sin. (x - \text{etc.}$ calculus ita institui debet.

$$l \sin. x = 9, 9902967$$

$$\text{subtrahatur } 6, 4551259$$

$$3, 5351708$$

$$\text{numerus } 3429'' \text{ seu } 57' 9'' = -k \sin. x$$

$$257^\circ, 56', 24'' = x \text{ addatur}$$

$$258^\circ, 53', 33'' = x - k \sin. x$$

$$180$$

$$78^\circ, 53', 33''$$

$$l \sin. \quad 9, 9917737$$

$$\text{subtr.} \quad 6, 4551259$$

$$3, 5366478$$

$$\text{numerus } 3441'' \text{ seu } 57', 21''$$

$$257^\circ, 56', 24'' \text{ addatur } x$$

$$258^\circ, 53', 45''$$

$$180$$

$$78^\circ, 53', 45''$$

$$l \text{ fin. } 9, 9917737$$

$$\text{subtr. } 6, 4551259$$

$$\hline 3, 5360478$$

$$\text{numerus } 3441'' \text{ seu } 57', 21''$$

$$257^\circ \quad 56', 24$$

$$v = 258^\circ, 53', 45''$$

§ 38. Hinc quaeratur distantia terrae a sole $y = a$
 $+ k a \text{ cof. } v$. Est vero $\text{cof. } v = - \text{cof. } 78^\circ, 53', 45''$
 unde

$$l \text{ cof. } 78^\circ, 53', 45'' = 9, 2846411$$

$$l a k \quad \quad \quad = 3, 2304489$$

$$\hline 2, 5150900$$

$$\text{ergo } k a \text{ cof. } v = - 327$$

$$\text{addatur } a = 100000$$

$$y = 99672 \text{ et } l y = 4, 9985732$$

Quoniam vero posita anomalia vera $= z$ est $\text{cof. } z =$

$$\frac{a k \text{ sin. tot.}}{y} + \frac{a \text{ cof. } v}{y}, \text{ calculus ita se habebit :}$$

$$l a k \text{ sin. tot.} = 13, 2304489$$

$$l y \quad \quad \quad = 4, 9985732$$

$$\hline 8, 2318757$$

$$\text{numerus ex tabula sinuum } 170559$$

$$l \text{ cof } v = 9, 2846411$$

$$l a = 5, 0000000$$

$$\hline 14, 2846411$$

$$\text{subtr. } l y = 4, 9985732$$

$$\hline 9, 2860679$$

numerus

$$\begin{array}{r} \text{numer} \text{ ex tabulis finuum } 1932270 = - \frac{a \cos v}{y} \\ \text{subtr.} \qquad \qquad \qquad 170559 \\ \hline - 1761711 \end{array}$$

At numerus 1761711 est finus anguli huius
 $10^\circ, 8', 48''$ qui subtractus a tribus rectis
 270°

$$\begin{array}{l} \text{dat } 259^\circ, 51', 12'' \text{ pro anomalia vera } z. \text{ ergo} \\ z = 8 S, 19^\circ, 51', 12'' \text{ addatur} \\ p = 8 \quad , \quad 8 \quad , \quad 39 \quad , \quad 40'' \\ \hline f = 4 S. 28^\circ, 30', 52'' \end{array}$$

haecque est longitudo terrae ex tabulis inuenta a prima
 stella arietis computata. Quare cum sit

$$\begin{array}{l} F = 4 S, 28^\circ, 30', 18'' \text{ et} \\ f = 4 S, 28^\circ, 30', 52'' \text{ erit } F - f = \\ dj = - 34''. \end{array}$$

§. 39. Quoniam vero est $df = dp + \frac{adm \sin z}{y \sin v} - \frac{adk \sin z}{y}$
 $-\frac{dk \sin z}{(1-kk)}$ haec aequatio ad nostram obseruationem se-
 quenti modo accommodabitur. Est $\sin. z =$
 $-\sin. 79^\circ, 51', 12''$; $\sin. v = -\sin. 78^\circ, 53', 45''$ et
 $l \frac{1}{1-kk} = l \frac{1.000000}{933.1017} = 0,0001254$. Hinc fiat
 $l \sin. z = 9,9931539$ negatio vero postea in
 $l \sin. v = 9,9917924$ computum duci debet.

$l \frac{a}{y} = 0,0014267$
 unde valor ipsius df sequenti modo definitur

$$\begin{array}{l} l \sin. z = 9,9931539 \\ l \frac{a}{y} = 0,0014267 \\ \hline \end{array}$$

$$l \sin. v = 9,9945806 = l \frac{-\sin.z}{y}$$

$$\underline{\underline{0,0027882}}$$

numerus respondens = 1,0064 = $\frac{a \sin.z}{y \sin.v}$

$$l \frac{-\sin.z}{y} = 9,9945806$$

$$l \sin. tot. = 10,0000000$$

$$\underline{\underline{(-1),9945806}}$$

numerus respondens = 0,9876 = $\frac{-\sin.z}{y \sin.tot.}$

$$l \sin. z = 9,9931539$$

$$l \frac{1}{1-kk} = 0,0001254$$

$$\underline{\underline{9,9932793}}$$

$$l \sin. tot. = 10,0000000$$

$$\underline{\underline{(-1),9932793}}$$

numerus respondens = 0,9846 = $\frac{-\sin.z}{1-kk}$

Ex his erit $df = -34'' = dp + 1,0064 dm + 1,9722 dk$. (406795''. dk)

§. 40. Sumamus aliam obseruationem solis etiam Grenouici factam Anno 1690, M. Sept. d. 15, 11 h, 51', 27'' tempore medio, seu astronomico more Anno 1690, d. 14. Sept. 23 h, 51', 27'', quo tempore solis longitudo ab aequinoctio verno obseruata fuit 6 S, 2°, 45', 37'', quae ob lucis propagationem 20'' aucta fit 6 S, 2°, 45', 57''. Ad hoc tempus longitudo primae stellae arietis quaeratur

	Longitudo primae stellae Arietis
A. 1690	0 S, 28°, 51', 20''
14 Sept.	35

subtra-

PER LOCA PLANETARVM GEOCENTRICA. 141

$$\begin{array}{r|l} \text{subtrahatur} & \circ \text{ S, } 28^{\circ}, 51', 55'' \\ \text{ab} & 6 \text{ S, } 2^{\circ}, 45', 57'' \\ \hline & 5 \text{ S, } 3^{\circ}, 54', 2'' \end{array}$$

quae est longitudo solis a prima stella arietis sumpta vnde longitudo terrae ex sole visa erat $F = 11 \text{ S, } 3^{\circ}, 54', 2''$. Quaeratur nunc pro hoc tempore anomalia media solis vel terrae :

	Anomalia Terrae media
A. 1690	6 S, 12°, 53', 2''
d. 14. Sept.	8 S, 13, 18, 6
23 h.	56, 40
51'	2, 6
27''	1

$$\hline 20, 27^{\circ}, 9', 55''$$

vnde erit anomalia media $x = 87^{\circ}, 9', 55''$

§. 41. Ad anomaliā excentri inueniendam iterum a logarithmis sinuum subtrahi debet iste logarithmus 6, 4551259, eritque calculus vt sequitur.

$$l \sin. x = 9, 9994683$$

$$\text{subtr. } 6, 4551259$$

$$\hline 3, 5443424$$

$$\text{numerus } 350 \text{ } 2'' = 58', 22'' = k \sin. x \text{ subtrahatur}$$

$$87^{\circ}, 9', 55'' \text{ ab } x$$

$$\hline 86^{\circ}, 11', 33'' = x - k \sin. x$$

$$l \sin. = 9, 9990402$$

$$6, 4551259$$

$$\hline 3, 5439143$$

S 3

nume-

$$\begin{array}{r} \text{numerus} = 3499'' = 58', 19'' \quad \text{subtrahatur} \\ \text{ab} \quad \quad \quad 87^\circ, 9', 55'' \\ \hline \quad \quad \quad 86^\circ, 11', 36'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} l \sin. = 9, 9990405 \\ \quad \quad 6, 4551259 \\ \hline \quad \quad 3, 5439146 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{numerus} = 3499'' = 58', 19'' \\ \text{ab } x = 87^\circ, 9', 55'' \\ \hline v = 86^\circ, 11', 36'' \end{array}$$

Cum nunc sit distantia Terrae a sole $y = a + k a \cos.$
 v fiat $l \cos. 86^\circ, 11', 36'' = 8, 8221016$
 $l a k = 3, 2304489$
 $\hline 12, 0525505$

$$\begin{array}{r} \text{ergo } k a \cos. v = 113 \\ \text{addatur } a = 100000 \end{array}$$

$$y = 100113 \text{ et } l y = 5, 0004905$$

Quoniam porro ad anomaliam veram z inueniendam est

$$\cos. z = \frac{ak \sin. tob}{y} + \frac{a \cos. v}{y} \text{ fiat}$$

$$l ak \sin. tot. = 13, 2304489$$

$$l y = 5, 0004905$$

$$\hline 8, 2299584$$

numerus ex tabula sinuum 169808

$$l \cos. v = 8, 8221016$$

$$l a = 5, 0000000$$

$$\hline 13, 8221016$$

$$l y = 5, 0004905$$

$$\hline 8, 8216111$$

numerus ex tabula sinuum = 663149
 169808

$\cos z = 832957$

ergo $z = 85^\circ, 13', 20''$

sive anomalia vera $z = 2S, 25^\circ, 13', 20''$

addatur $p = 8, 8, 39, 40$

long. terrae $f = 11S, 3^\circ, 53', 0''$

at est $F = 11S, 3, 54, 2$

ergo $F - f = df = 62''$.

§. 42. Quoniam vero est $df = dp + \frac{adm \sin. z}{y \sin. v} - \frac{dk \sin. z}{y} - \frac{dk \sin. z}{1 - kk}$, atque df , dp et dm arcus denotant in secundis exprimendos, dk vero fit numerus absolutus, eius coefficientes in arcus transformari atque in minutis secundis exprimi debent, quod fit si a logarithmis sinuum subtrahatur 4, 6855749; residuorum enim logarithmorum numeri respondententes dabunt arcus in minutis secundis expressos; quam reductionem etiam in prima observatione adhibuimus.

$l \sin. z = 9, 9984883$

$l a = 5, 0000000$

$l a \sin. z = 14, 9984883$

$l \sin. v = 9, 9990408$

$l y = 5, 0004905$

14, 9995313

$l \frac{a \sin. z}{y \sin. v} = (-1) 9989570$

ergo $\frac{a \sin. z}{y \sin. v} = 0, 9976$

$$la \sin. z = 14,9984883$$

$$ly = 5,0004905$$

$$9,9979978$$

$$4,6855749$$

$$5,3124229$$

$$\text{ergo } \frac{a \sin. z}{y} = 205316''$$

$$\text{Porro } l \sin. z = 9,9984883$$

$$l \frac{1}{1-kk} = 0,0001254$$

$$9,9986137$$

$$4,6855749$$

$$5,3130388$$

$$\text{ergo } \frac{\sin. z}{1-kk} = 205607''$$

$$205316$$

$$\frac{a \sin. z}{y} + \frac{\sin. z}{1-kk} = 410923''$$

$$\text{Ergo } df = 62'' = dp + 0,9976. dm - 410923''. dk$$

§. 43. Pro tertia obseruatione assumamus talem, quae cum alio loco, tum tempore aliquantum remoto fit facta. Parisiis nimirum A. 1716 Maii d. 12, 11^b 55', 53'', tempore medio stili noui locus solis ab aequinoctio distare deprehensus est 1 S, 21°, 44', 35'', quae longitudo ob lucis propagationem 20'' aucta fit 1 S 21°, 44', 55''. Tempus autem obseruationis ad stilum veterem reductum est A. 1716 Maii d. 1, 11^b, 55', 53''. Deinde quia Lutetia Parisiorum 9' temp. orientalis est quam Londinum, hoc tempus Londini erat A. 1716 Maii d. 1, 11^b, 46', 53'' tempore ciuili, quod secundum tempus Astro-

nomi-

nomicum dat A. 1716 Apr. 30 d. $23^b, 46', 53''$; at quia hic annus est bissextilis, dies addici debet ita ut habeatur A. 1716 Maii 1 d. $23^b, 46', 53''$. Ad hoc igitur tempus primum longitudo primae stellae arietis supputetur,

Longitudo primae stellae arietis

A. 1701	$0 S, 29^{\circ}, 0', 30''$ $12', 30''$ $17''$
— 15	
Mai. 1 d.	

subtrahatur ab	$0 S, 29^{\circ}, 13', 17''$ $1 S, 21^{\circ}, 44', 55''$ $0 S, 22^{\circ}, 31', 38''$

quae est longitudo solis a prima stella arietis; unde longitudo terrae ex sole visa ab eadem prima stella arietis erit $F = 6 S, 22^{\circ}, 31', 38''$.

§. 44. Quaeratur nunc ad hoc tempus solis vel terrae anomalia media ex tabulis assumtis.

Anomalia media terrae

A. 1701	$6 S, 13^{\circ}, 3', 40''$ $11, 29, 9, 56$ $3, 29, 15, 31$ $56, 40$ $1, 53$ $.. .. 2$
Anni. 15	
Mai. 1 d.	
23 h.	
46'	
53''	

$10 S, 12^{\circ}, 27', 42''$

Erit ergo $x = 312^{\circ}, 27', 42''$ et $\sin. x = -\sin. 47^{\circ}, 32', 18''$

quare calculus ad anomaliam excentri v inueniendam in-
stituitur vt supra §. 37;

$$I\text{-fin. } x = 9, 8678950$$

$$\text{subtr. } 6, 4551259$$

$$3, 4127691$$

$$\text{numerus } 2587'' = 43', 7'' = -k \text{ fin. } x$$

$$x = 312^\circ, 27', 42'' \quad \text{addatur}$$

$$313^\circ, 10', 49'' \quad a$$

$$360^\circ \quad \text{subtr.}$$

$$46^\circ, 49', 11''$$

$$I \text{ fin. } = 9, 8628490$$

$$6, 4551259$$

$$3, 4077231$$

$$\text{numerus } 2557'' = 42', 37''$$

$$x = 312^\circ, 27', 42''$$

$$313^\circ, 10', 19''$$

$$360$$

$$46^\circ, 49', 41''$$

$$I \text{ fin. } = 9, 8629065$$

$$6, 4551259$$

$$3, 4077806$$

$$\text{numerus ; } 2557'' = 42', 37''$$

$$x = 312^\circ, 27', 42''$$

$$v = 313^\circ, 10', 19''$$

§. 45. Distantia Solis a terra $y = a + k \text{ a cos. } v$ ita
reperietur $\text{cos. } v = \text{cos. } 46^\circ, 49', 41'' = \text{sin. } 43^\circ, 10', 19''$

$l \text{ cos}$

PER LOCA PLANETARVM GEOCENTRICA 147

$$l \text{ cof. } v = 9, 8351791$$

$$l a k = 3, 2304489$$

$$l k a \text{ cof. } v = 3, 0656280$$

$$\text{ergo } k a \text{ cof. } v = 1163$$

$$a = 100000$$

$$y = 101163 \text{ et } l y = 5, 0050216$$

$$\text{Porro est cosinus anomaliae verae } z = \frac{a k \text{ fin. tot.}}{y} + \frac{a \text{ cof. } v}{z}$$

$$l a k \text{ fin. tot.} = 13, 2304489$$

$$l y = 5, 0050216$$

$$8, 2254273$$

$$\text{numerus ex tabulis sinuum} = 168046$$

$$l a \text{ cof. } v = 14, 8351791$$

$$l y = 5, 0050216$$

$$9, 8301575$$

$$\text{numerus ex tabulis sinuum} = 6763284$$

$$168046$$

$$\text{cof. } z = 6931330$$

qui est sin. $43^{\circ}, 52', 43''$ addantur tres recti
270

$$z = 313^{\circ}, 52', 43'' \text{ seu}$$

$$z = 10S, 13^{\circ}, 52', 43''$$

$$p = 8, 8, 39', 40$$

$$f = 6S, 22^{\circ}, 32', 23''$$

$$F = 6S, 22^{\circ}, 31', 38''$$

$$F - f = df = -45''$$

T 2

§. 46.

§. 46. Cum nunc sit $df = dp + \frac{a \sin. z}{y \sin. v} - dk$
 ($\frac{a \sin. z}{y} + \frac{\sin. z}{1 - kk}$ instituatür sequens calculus; existente
 $\sin. z = -\sin. 46^\circ, 7', 17''$ et $\sin. v = -\sin. 46^\circ, 49', 41''$.

$$1 - \sin. z = 9, 8578207$$

$$1 \frac{z}{\sigma} = 0, 0050216$$

$$9, 8527991$$

$$1 - \sin. v = 9, 8629065$$

$$(-1), 9898926$$

$$\frac{a \sin. z}{y \sin. v} = 0, 97700$$

$$1 - \sin. z = 9, 8578207$$

$$1 \frac{z}{\sigma} = 0, 0050216$$

$$9, 8527991$$

$$4, 6855749$$

$$5, 1672242$$

$$-\frac{a \sin. z}{y} = 146969''$$

$$1 - \sin. z = 9, 8578207$$

$$d \frac{1}{1 - kk} = 0, 0001254$$

$$9, 8579461$$

$$4, 6855749$$

$$5, 1723712$$

$$-\frac{\sin. z}{1 - kk} = 148721''$$

$$146969$$

$$295690'' = \frac{-a \sin. z - \sin. z}{y \frac{1}{1 - kk}}$$

Quare erit $df = -45'' = dp + 0, 97700 dm + 295690'' . dk$

§. 47. Ex his tribus aequationibus nacti sumus ad tabulas solares assumtas corrigendas tres sequentes aequationes.

$$\text{I. } -34'' = dp + 1.0064 dm + 406795''. dk$$

$$\text{II. } 62'' = dp + 0,9976 dm - 410923''. dk$$

$$\text{III. } -45'' = dp + 0; 9770 dm + 295690''. dk$$

quae praebent eliminato dp has duas

$$-96'' = 0,0088 dm + 817718''. dk \quad | \quad \text{per. } 10$$

$$+11'' = 0,0294 dm + 111105''. dk \quad | \quad \text{per. } 3.$$

hincque $-993'' = 7843865''. dk$ ex quo reperitur dk

$$= \frac{-993}{7843865} = \frac{-126}{1000000}. \quad \text{Cum igitur excentricitas } k \text{ posita esset}$$

$$= \frac{17}{1000} = \frac{17000}{1000000} \text{ erit excentricitas vera } k + dk = \frac{16874}{1000000}.$$

Porro quia est $dk = \frac{-126}{1000000}$ erit $11'' = 0,0294 dm -$

$$14''. \text{ seu } dm = \frac{25020''}{294} = 14', 10'' = 850''. \text{ Ex quo}$$

anomaliae mediae tabularum ad quoduis tempus augeri debent angulo $14', 10''$. His autem valoribus loco dk

et dm substitutis inuenitur $dp = -838'' = -13', 58''$.

Quare cum aphelii orbitae terrae longitudo a prima stella

arietis in tabulis sit posita $p = 8 S, 8^\circ, 39', 40''$ erit

vera aphelii longitudo $p + dp = 8 S, 8^\circ, 25', 42''$.

Cum ergo longitudo primae stellae arietis ab aequinoctio

verno Anni 1701 initio esset $0 S, 29^\circ, 0', 30''$, fuit

hoc tempore aphelii terrae ab aequinoctio verno longitu-

do $= 9 S, 7^\circ, 26', 12''$, hinc apogaei solis eo teni-

pore longitudo ab aequinoctio $= 3 S, 7^\circ, 26', 12''$. Hae-

que correctiones satis prope conueniunt cum iis, quas in

Tomo VII. Comment. altera methodo vsus exhibui. Ta-

bulae autem solares hoc modo correctae non ad quoduis

tempus solis locum ostendunt, in quo reuera conspicietur,

sed in quo conspicuus foret, si lumen in instanti ad nos pertingeret: quamobrem a loco solis ex his tabulis correctis eruto perpetuo subtrahi oportet 20'', vt locus apprens obtineatur.

§. 48. En igitur tabulas solares, quibus terra in orbita sua circa solem mouetur, maxime exactas, si quidem obseruationes, quibus sum vsus, sint summa cura institutae. Est igitur, a prima nostra stella arietis longitudes computando, aphelii terrae longitudo constans = 8S, 8°, 25', 42''. Deinde orbitae terrae excentricitas seu distantia solis a centro ellipsis terrenae = $\frac{16873}{1000000}$, ita vt sit distantia terrae a sole media ad solis a centro orbitae distantiam vt 1000000 ad 16873. Hinc inuenitur per regulam Tomo VII. Comment. p. 98 datam maxima aequatio hoc modo

$$\begin{array}{r} 5, 6154596 \\ l\ 16873 = 4, 2271923 \end{array}$$

$$\hline 3, 8426519 \text{ demto } l\ 1000000$$

Ergo aequatio maxima est 6961'' = 1°, 56', 1''

Tabulae autem anomaliarum mediarum ad praecipuas epochas sequentes, vbi semper eae respondent meridiei postremi diei anni eum, quem tabulae monstrant, praecedentis, pro obseruatorio Londinensi seu potius Grenouicensi ita se habebunt

A. C.	Anomalia terrae media
1601	6S, 13°, 55', 50''
1621	6, 13, 48, 14
1641	6, 13, 40, 38
1661	6, 13, 33, 2

A. C.	Anomalia terrae media
1681	6 S, 13°, 25', 26''
1701	6, 13, 17, 50
1721	6, 13, 10, 14
1741	6, 13, 2, 38
1761	6, 12, 55, 2
1781	6, 12, 47, 26
1801	6, 12, 39, 51

Tabula vero pro mutatione anomaliae pro dato annorum numero, et pro datis anni partibus manet vt ante, cum ea, quia tempore periodico terrae in orbita sua nititur, correctione non egeat. Ex his igitur tabulis correctis ad quoduis tempus locum solis in ecliptica exactissime assignare licebit, qui tutissime in inuestigandis reliquorum planetarum locis adhiberi poterit.

§. 49. Orbita terrae nunc stabilita pergo ad vsum huius methodi monstrandum in orbita cuiuscunque planetae per loca Geocentrica determinanda. Eligo autem ad hoc ex planetis Mercurium potissimum, cum quod eius loca heliocentrica rarissime obseruare licet, tum quod tabulae astronomicae pro hoc planeta maxime differunt, ideoque correctione prae ceteris indigent. Tabulas autem hic eas corrigendas suscipio, quae lexico Technico Harrisii sunt insertae, atque ad obseruatorium Londinense accommodatae. Statuitur autem in his tabulis

Distantia mercurii media a sole $a = 38710$

existente terrae distantia media $= 100000$

Distantia solis a centro orbitae Mercurii $= 7970$

Vnde excentricitas $k = \frac{797}{3871} = \frac{20559}{100000}$

atque

atque a prima stella arietis statuitur

Longitudo aphelii $p = 7^{\circ} S, 13', 48''$

Longitudo nodi asc. $q = 0^{\circ} S, 15', 42''$

Inclinatione orbitae ad eclipticam $n = 6^{\circ}, 54''$

Anomaliae mediae autem ad quoduis tempus in iis tabulis exhibentur, quas huc transcribere non est opus, cum vero fuerint correctae, eas hic indicabo. Pono autem ad quoduis tempus anomaliam mediam, quam hae tabulae monstrant, augeri debere angulo dm ; excentricitatem k vero fractione dk , longitudinem aphelii p arcuulo dp , longitudinem nodi q arcuulo dq atque inclinationem orbitae n angulo dn augendam esse; quas correctiones quinque ex tribus sequentibus observationibus deducam.

§. 50. Tres istae observationes, quibus in hoc negotio uti visum est, institutae sunt Parisiis, atque tam longitudo quam latitudo mercurii geocentrica ad tempora terna notata observata est ut sequitur.

Tempore apparente stili novi	Longitudo ☿	Latitudo
A. 1715 Mai. 20 d. 22 ^b 39'	1S, 8°, 36', 0''	2°, 23', 55'' Austr.
A. 1716 Aug. 18 d. 22 ^b 51'	4S, 8°, 56', 30''	0°, 13', 30'' Bor.
A. 1717 Mai. 6 d. 23 ^b 48'	1S, 13°, 42', 20''	0°, 18', 30'' Austr.

Tempora autem haec triplici correctione opus habent, primum scilicet a stilo novo ad veterem debent reduci, deinde ad meridianum Londinensem transferri; ac tertio, quia sunt tempora apparentia, in media transformari debent. Hoc facto tempore medio Londinensi observationes ita se habebunt

	Longitudo ☿	Latitudo
A. 1715 Mai. 9d. 22 ^b 25' 55''	1S, 8°, 36', 0''	2°, 23', 55'' Austr.
A. 1716 Aug. 7d. 22 ^b 45' 6''	4S, 8°, 56', 30''	0°, 13', 30'' Bor.
A. 1717 Apr. 25d. 23 ^b 35' 7''	1S, 13°, 42', 20''	0°, 18', 30'' Austr.

Longitudines mercurii autem hae ab aequinoctio verno sunt computatae, quae ideo ad primam stellam arietis sunt reducendae: facta autem hac reductione observationes ita se habebunt.

Tempus medium	Long. ☿ a 1 * ♀	Latitudo
A. 1715 Mai. 9d. 22 h. 25', 55''	0S, 9°, 23', 32''	2°, 23', 55'' Austr.
A. 1716 Aug. 7d. 22 h. 45', 6''	3S, 9°, 43', 0''	0°, 13', 30'' Bor.
A. 1717. Apr. 25 d. 23 h. 35', 7''	0S, 14°, 28', 14''	0°, 18', 30'' Austr.

Hae longitudes obseruatae porro correctione opus habent ex lucis propagatione orta, ad quam inueniendam oportet, vt ad singula obseruationum tempora loca terrae in orbita sua supputemus; quae loca vna cum distantis terrae a sole his temporibus necessaria sunt, ad loca mercurii geocentrica ex tabulis computanda.

§. 51. Ad tempus igitur primae obseruationis locus terrae in sua orbita, seu eius longitudo heliocentrica a prima stella arietis sequenti calculo ex tabulis nostris correctis eruetur.

Anno	Anomalia media terrae
1701	6S, 13°, 17', 50''
14 A.	11, 29, 25, 6
Mai. 9 d.	4, 7, 8, 36
22 h.	54, 13
25', 55''	1, 4

	10S, 20°, 46', 59''

154 EMENDATIO TABVLARVM ASTRONOMICÆ.

Calculus ergo instituitur vt supra: eritque anomalia media
 terrae $x = 320^{\circ}, 46', 59''$. ex qua anomalia excentri
 inuenietur $v = x - k \sin. (x - k \sin. (x - k \sin. (x \text{ etc.}$
 at est $ik = (-2)$, 2271923 et $l\frac{1}{4} = 1$, 7728076.
 ex quo a logarithmis finuum, vt ii in arcus conuertantur
 subtrahi debet $1, 7728076$
 $+ 4, 6855749$

hic logarithmus. $6, 4583825$

Atqui est $\sin. x = -\sin. 39^{\circ}, 13', 1''$

$l - \sin. x = 9, 8008947$

subtr. $6, 4583825$

$3, 3425122$

numerus. $2201'' = 36', 41'' = -k \sin. x$

$x = 320^{\circ}, 46', 59''$ addatur

$321^{\circ}, 23', 40''$ subtr.

ab 360

$38^{\circ}, 36', 20''$

$l \sin. = 9, 7951536$

$6, 4583825$

$3, 3367711$

numerus $2171'' = 36', 11''$ addatur ad

$x = 320^{\circ}, 46', 59''$

$v = 321^{\circ}, 23', 10''$ anomalia excentri.

Hinc reperitur distantia terrae a sole $y = a + ka \cos. v$
 existente $a = 100000$ et $\cos. v = \sin. 51^{\circ} 23', 10''$.

$$lka = 3, 2271923$$

$$l \cos. v = 9, 8928563$$

$$3, 1200486$$

$$\text{numerus} = 1318$$

$$\text{Ergo distantia terrae a sole } y = 101318$$

$$\text{et } ly = 5, 0056867.$$

Anomalia vera z commodissime reperietur ex hac aequatione $z = v - k \sin. v + \frac{1}{2} k^2 \sin. 2v$. ubi est

$$\sin. v = - \sin. 38^\circ, 36', 50''$$

$$\sin. 2v = - \sin. 57^\circ, 13', 40''$$

$$l \frac{1}{2} k = - 2, 3748676.$$

Calculus ergo ita instituetur:

$$l - \sin. v = 9, 7952327$$

$$6, 4583825$$

$$3, 3368502$$

$$- k \sin. v = 2172'' = 36', 12''$$

$$l - \sin. 2v = 9, 9246535$$

$$6, 4583825$$

$$3, 4662710$$

$$l \frac{1}{2} k = - 2, 3748676$$

$$1, 0914034$$

$$- \frac{1}{2} k^2 \sin. 2v = 12''.$$

$$\text{Ergo } z = v + 36', = 321^\circ, 59', 10''$$

$$\text{seu } z = 10S, 21^\circ, 59', 10''$$

$$\text{addatur } p = 8S, 8^\circ, 25', 42''$$

$$\text{longit. terrae} = 7S, 0^\circ, 24', 52''$$

a prima stella arietis computata.

156 EMENDATIO TABULARVM ASTROMIC.

§ 52. Instituatur simili modo inuestigatio longitudinis terrae tempore secundae obseruationis, qui annus cum sit biffextilis pro Aug. d. 7 sumi debet d. 8.

Anno	Anomalia media
1701	6 S., 13°, 17', 50''
15	11, 29, 9, 56
Aug. 8 d.	7, 6, 50, 2
22 h	54, 13
45', 6''	1, 51

$$1 S., 20°, 13', 52''$$

Ergo anomalia media terrae $x = 50°, 13', 52''$

$$l \sin. x = 9, 8857300$$

$$6, 4583825$$

$$3, 4273475$$

$$k \sin. x = 2675'' = 44', 35'' \text{ subtrahatur}$$

$$\text{ab } x = 50°, 13', 52''$$

$$49°, 29', 17''$$

$$l \sin. = 9, 8809376$$

$$6, 4583825$$

$$3, 4225551$$

$$\text{numerus} = 2646'' = 44', 6'' \text{ subtrahatur}$$

$$\text{ab } x = 50°, 13', 52''$$

$$v = 49°, 29', 46''$$

$$l \cos. v = 9, 8125789$$

$$l k a = 3, 2271923$$

$$3, 0397712$$

$$\text{numerus} = 1096$$

Ergo

Ergo distantia terrae a sole $y = 101096$

atque $ly = 5, 0047340$

Nunc $l \sin v = 9, 8810206$

6, 4583825

3, 4226381

$k \sin. v = 2646'' = 44', 6''$

$2v = 98^\circ, 59', 32''$

$\sin. 2v = \text{cof. } 8^\circ, 59', 32''$

$l \sin. 2v = 9, 9946400$

6, 4583825

3, 5362575

$l \frac{1}{2} k = -2, 3748676$

1, 1613899

$\frac{1}{4} k^2 \sin. 2v = 14''$

Ergo $z = v - 43', 52'' = 48^\circ, 45', 54''$

Ergo anomalia terrae vera $= 1 S, 18^\circ, 45', 54''$

longitudo aphelii $p = 8, 8, 25, 42$

longitudo terrae a $1 * V = 9 S, 27^\circ, 11', 36''$

§. 53. Peruenimus tandem ad tertiam obseruationem, ad quam locus terrae sequenti modo reperietur.

Anno	Anomalia media terrae
1701	6 S, 13°, 17', 50''
16 A.	11, 29, 53, 54
Apr. 25. d.	3, 23, 20, 42
23 h.	56, 40
35', 7''	1, 27
	<u>10 S., 7°, 30', 33''</u>

V 3

Ergo

Ergo anomalia media $x = 307^\circ, 30', 33''$ et $\sin. x = -\sin. 52^\circ, 29', 27''$ $l - \sin. x = 9, 8993697$ 6, 4583825

3, 4409872

 $-k \sin. x = 2760'' = 46', 0''$ $x = 307^\circ, 30', 33''$ 308^\circ, 16', 33'' ab

360

51^\circ, 43', 27'' $l \sin. = 9, 8948900$ 6, 4583825

3, 4365075

numerus $= 2732'' = 45', 32''$ $x = 307^\circ, 30', 23''$ $v = 308^\circ, 16', 5''$ cof. $v = \sin. 38^\circ, 16', 5''$ $l \text{ cof } v = 9, 7919200$ $l k a = 3, 2271923$ 3, 0191123 $k a \text{ cof. } v = 1045$ Ergo distantia terrae a sole $y = 101045$ et $ly = 5, 0045148$ Porro est $-k \sin. v = 45', 32''$ atque $\sin. 2v = -\sin. 76^\circ, 32', 10''$ Ergo $l - \sin. 2v = 0, 9878921$ 6, 4583825

PER LOCA PLANETARVM GEOCENTRICA 159

$$3, 5295096$$

$$l \frac{1}{4} k = -2, 5748676$$

$$1, 1546420$$

$$-\frac{1}{4} k^2 \sin. 2v = 14''$$

$$\text{hincque } z = v + 45' + 18'' = 309^\circ, 1', 23''$$

$$\text{seu anomalia vera } z = 10 \text{ S, } 9^\circ, 1', 23''$$

$$\text{addatur longitudo aph. p} = 8 \text{ S, } 8^\circ, 25', 42''$$

$$\text{Longitudo terrae} = 6 \text{ S, } 17^\circ, 27', 5''$$

§ 54. Inuentis terrae locis heliocentricis ad singulorum obseruationum momenta, poterimus loca mercurii obseruata per luminis propagationem corrigere secundum regulam §. 30. datam. Erat autem pro obseruatione prima

$$\text{longitudo } \zeta \text{ obseruata } 0 \text{ S, } 9^\circ, 23', 32''$$

$$\text{longitudo terrae} = 7 \text{ S, } 0^\circ, 24', 52'' \text{ subtr.}$$

$$5 \text{ S, } 8^\circ, 58', 40''$$

qui arcus est $158^\circ, 58', 40''$ vnde erit

$$\mu = \sin. 21^\circ, 1', 20''$$

$$m = - \sin. 68^\circ, 58', 40''$$

$$l \mu = 9, 5546581$$

$$l a = 6, 0000000$$

$$15, 5546581$$

$$l b = 5, 5878232$$

$$l \frac{m a}{b} = 9, 9668349$$

angulus cuius sinus est $\frac{m a}{b}$ est $67^\circ, 54'$

$$q = \cos. 67^\circ . 54' \text{ et } lq = 9, 5754468$$

$$l\frac{c}{r} = 3, 8140656$$

$$l\frac{sq}{c} = 5, 7613812$$

$$\text{subtr. } 4, 6855749$$

$$1, 0758063$$

$$\text{Ergo } \frac{s}{c} q = 12''$$

Porro est

$$l-m = 9, 9700900$$

$$l\frac{c}{r} = 4, 0201540$$

$$5, 9499360$$

$$4, 6855749$$

$$1, 2643611$$

$$\text{Ergo } -\frac{rm}{c} = 18''$$

Ad longitudinem mercurii obseruatam ob propagationem lucis addi debent $12'' + 18''$ seu $30''$, ita vt vera mercurii longitudo in prima obseruatione sit

$$o S, 9^\circ, 24', 2''.$$

§. 55. Simili modo pro obseruatione secunda correctio ex propagatione lucis orta inuestigetur.

$$\text{Longitudo mercurii obseruata } 3 S, 9^\circ, 43', 0''$$

$$\text{Longitudo terrae helioc. } 9 S, 27^\circ, 11', 36''$$

$$5 S, 12^\circ, 31', 24''$$

$$\text{qui arcus est } 162^\circ, 31', 24''$$

$$\text{vnde erit } \mu = \sin. 17^\circ, 28', 36''$$

$$m = -\sin. 72^\circ, 31', 24''$$

$$la \mu = 15, 4775000$$

$$lb = 5, 5878232$$

$$9, 8896768$$

angulus

angulus cuius sinus est $\frac{m}{b}$ est $50^{\circ}, 52'$

$$q = \cos. 50^{\circ}, 52', = \sin. 39^{\circ}, 8'$$

$$lq = 9, 8001169$$

$$l\frac{c}{s} = 3, 8140656$$

$$5, 9860513$$

$$4, 6855749$$

$$1, 3004764$$

Ergo $\frac{s}{c} q = 20''$

Porro $l - m = 9, 9794593$

$$l\frac{c}{r} = 4, 0201540$$

$$5, 9593053$$

$$4, 6855749$$

$$1, 2737304$$

Ergo $-\frac{r}{c} m = 18'' \frac{2}{3}$

Ad longitudinem mercurii obseruatam addi debent $38''$ ita vt vera longitudo mercurii tempore secundae obseruationis a prima stella arietis sit

$$3 S, 9^{\circ}, 43', 38''.$$

§. 56. Pro tertia denique obseruatione correctio ad longitudinem mercurii obseruatam addenda sequenti modo inuenietur.

Longitudo mercurii obseruata. $0S, 14^{\circ}, 28', 14''$

Longitudo terrae a $\Gamma * V = 6S, 17^{\circ}, 27', 5''$

$$5S, 27^{\circ}, 1', 9''.$$

Qui arcus est $177^{\circ}, 1', 9''$

vnde $\mu = \sin. 2^{\circ}, 58' 51''$

et $m = -\sin. 87^{\circ}, 1', 9''$

Tom. XII.

X

1 a μ.

$$la \mu = 14, 7163829$$

$$lb = 5, 5878232$$

$$9, 1285597$$

angulus cuius sinus $\frac{a\mu}{b}$ est, $7^\circ, 44'$

$$q = \text{cof. } 7^\circ, 44', = \text{fin. } 82^\circ, 16'$$

$$lq = 9, 9960321$$

$$l\frac{c}{s} = 3, 8140656$$

$$6, 1819665$$

$$4, 6855749$$

$$1, 4963916$$

$$\text{Ergo } \frac{s}{c} q = 31\frac{1}{3}''$$

$$\text{Porro est } l - m = 9, 9994110$$

$$l\frac{c}{s} = 4, 0201540$$

$$5, 9792570$$

$$4, 6855749$$

$$1, 2936821$$

$$\text{Ergo } -\frac{r}{c} m = 19\frac{2}{3}''$$

Ad longitudinem mercurii obseruatam addi debent $51''$ ita vt tertia obseruatione longitudo mercurii fuerit

$$\circ S, 14^\circ, 29', 5''$$

Haec ita se habent, quando mercurius a terra longius distat quam sol: quodsi autem mercurius terrae propior esset quam sol, tum aequatio non erit, vt hic posuimus $-\frac{r}{c} m + \frac{s}{c} q$ sed erit $-\frac{r}{c} m - \frac{s}{c} q$. Hoc autem apparebit, si cum mercurii locus heliocentricus fuerit inuentus, distantia mercurii et terrae heliocentrica minor fuerit quam 90 graduum.

duum. Cum igitur partes aequationis inuenerimus, post modum apparebit, vtrum eae partes addi, an a se inuicem subtrahi debeant; quare plenam correctionem ex propagatione luminis ortam eo vsque differemus, quoad longitudo mercurii heliocentrica fuerit determinata.

§. 57. His praepatatis primam mercurii obseruationem consideremus, atque ad hoc tempus ex tabulis locum mercurii supputemus. Erat igitur

Tempore medio A. 1715 Mai. 9 d. 22 h, 25', 55''

Longitudo ζ obseruata a $1^* \nu = 0 S, 9^\circ, 23, 32''$

quae longitudo, si distantia mercurii et terrae heliocentrica maior sit 90° , augeri debet $18'' + 12''$. E contrario autem, si haec distantia heliocentrica minor fuerit 90° , augeri debet $18'' - 12''$

Latitudo ζ obseruata est $2^\circ, 23', 55''$ Australis.

Hoc porro tempore inuenta est

Longitudo terrae a $1^* \nu = 7 S, 0^\circ, 24', 52''$.

Distancia terrae a sole $= 101318$

Log. distantiae terrae a sole $= 5, 0056867$.

Deinde ex tabulis mercurii est

Distancia mercurii a sole media $a = 38710$

Log. huius distantiae seu $la = 4, 5878232$

Excentricitas orbitae mercurii $k = 205889$

1000000

hincque $lk = (-1), 3136332$

Longitudo Aphelii ζ a $1^* \nu p = 7 S, 13^\circ, 48'$

Longitudo Nodi asc. $q = 0 S, 15^\circ, 42'$

Inclinatio orbitae ad Eclipt. $n = 6^\circ, 54'$.

Iam ex tabulis ad tempus obseruationis supputetur anomalia media.

A. 1701	8 S, 4°, 2', 0''
Anni 14	1, 14, 6', 14
Mai.	4, 11, 4, 48
9 d.	1, 6, 49, 52
22 h.	3, 45, 5
25', 55''	4, 25
	3 S, 9°, 52', 24''

§. 58. Cum igitur §. 22. anomalia media posita sit x , erit pro hoc tempore $x = 99^\circ, 52', 24''$, ex qua anomalia excentri v reperietur per hanc aequationem $v = x - k$ fin. ($x - k$ fin. ($x - k$ fin. ($x - \text{etc.}$)). Cum autem sit $lk = (-1)$. 3136332, atque a logarithmis finuum subtrahi debeat, 4, 6855749, coniunctim subtrahi debebit 5, 3719417, vt sinus per k multiplicati in arcus conuertantur. Calculus ergo ita se habebit

$$l \text{ fin. } x = 9, 9935285$$

$$5, 3719417$$

$$4, 6215868$$

$$k \text{ fin. } x = 41839'' = 697' 19'' = 11^\circ, 37', 19''$$

$$\text{subtr. ab } x = 99^\circ, 52', 24''$$

$$x - k \text{ fin. } x = 88^\circ, 15', 5''$$

$$l \text{ fin. } = 9, 9997974$$

$$5, 3719417$$

$$4, 6278557$$

$$\text{numerus: } 42248'' = 707', 28'' = 11^\circ, 47', 28''$$

$$\text{subtrahatur ab } x = 99^\circ, 52', 24''$$

$$88^\circ, 4', 56''$$

$$l \text{ fin.}$$

PER LOCA PLANETARVM GEOCENTRICA 165

$$l \sin. = 9, 9997566$$

$$5, 3719417$$

$$4, 6278149$$

$$\text{numerus: } 42444'' = 707', 24'' = 11^\circ, 47', 24''$$

$$\text{subtr. ab } x = 99^\circ, 52', 24''$$

$$\text{Anomalia excentri } v = 88^\circ, 5', 0''$$

Hinc est distantia mercurii a sole $y = a + ak \cos. v$

$$l a = 4, 5878232$$

$$l k = (-1), 3136332$$

$$l ak = 3, 9014564$$

$$l \cos. v = 8, 5243430$$

$$2, 4257994$$

$$ak \cos. v = 266$$

$$a = 38710$$

$$y = 38976 \text{ Distantia mercurii a sole}$$

$$l y = 4, 5907973.$$

Ex his inuenitur anomalia vera z ope huius aequationis

$\cos. z = \frac{ak \sin. tot.}{y} + \frac{a \cos. v}{y}$, quae praebet hunc calculum.

$$l a k \sin. tot. = 13, 9014564$$

$$l y = 4, 5907973$$

$$9, 3106591$$

$$\frac{ak \sin. tot.}{y} = 2044839$$

$$l \cos. v = 8, 5243430$$

$$l a = 4, 5878232$$

$$13, 1121662$$

$$l y = 4, 5907973$$

$$8, 5213689$$

$$X 3$$

$\frac{ak \cos. v}{y}$
7

$$\frac{a \operatorname{cof} v}{y} = \frac{332176}{2044839}$$

$$\operatorname{cof}. z = 2377015 = \sin. 13^{\circ}, 45', 3''$$

Ergo anomalia vera $z = 76^{\circ}, 14', 57''$.

§. 59. Nunc ordo postulat vt in distantiam aphellii a nodo inquiramus, quae posita est e , ex aequatione

$$\operatorname{tang}. e = \frac{\operatorname{tang}. (p-q)}{\operatorname{cof}. n}$$

$$p = 7 S, 13^{\circ}, 40'$$

$$q = 0 S, 15^{\circ}, 42'$$

$$p - q = 6 S, 28^{\circ}, 6' = 208^{\circ}, 6'$$

$$\operatorname{tang}. (p - q) = \operatorname{tang}. 28^{\circ}, 6'$$

$$l \operatorname{tang}. (p - q) = 9, 7275008$$

$$l \operatorname{cof}. n = 9, 9968431$$

$$l \operatorname{tang}. e = 9, 7306577 = l \operatorname{tang}. 28^{\circ}, 16', 24''$$

$$\text{Ergo } e = 6 S, 28^{\circ}, 16', 24'' = 208^{\circ}, 16', 24''$$

qui valor pro omnibus observationibus idem manet. Sequitur longitudo planetae a nodo r , estque

$$\operatorname{tang}. r = \operatorname{cof}. n \operatorname{tang}. (e + z)$$

$$e = 6 S, 28^{\circ}, 16', 24''$$

$$z = 2 S, 16^{\circ}, 14', 57''$$

$$e + z = 9 S, 14^{\circ}, 31', 21''$$

$$\operatorname{tang}. (e + z) = -\operatorname{tang}. 75^{\circ}, 28', 39''$$

$$l - \operatorname{tang}. (e + z) = 10, 5866389$$

$$l \operatorname{cof}. n = 9, 9968431$$

$$l - \operatorname{tang}. r = 10, 5834820$$

$$\text{Ergo } r = 9 S, 14^{\circ}, 37', 26''$$

Ad longitudinem planetae a nodo r addatur longitudo nodi

PER LOCA PLANETARVM GEOCENTRICA 167

nodi a prima stella arietis q , et summa erit longitudo mercurii heliocentrica a prima stella arietis

$$r = 9S, 14^{\circ}, 37', 36''$$

$$q = 0S, 15^{\circ}, 42'$$

$$r + q = 10S, 0^{\circ}, 19', 36''$$

Cum igitur longitudo terrae sit $7S, 0^{\circ}, 24', 52''$ longitudo heliocentrica mercurii a longitudine geocentrica subtracta relinquitur

$$0S, 9^{\circ}, 23', 32''$$

$$10S, 0^{\circ}, 19', 36''$$

$$2S, 9^{\circ}, 3', 56''$$

ergo $q = \cos. 69^{\circ}, 4'$ et $\frac{s}{c} q = 11''$, cum nunc sit $-\frac{r}{c} m = 18''$ erit $\frac{s}{c} q - \frac{r}{c} m = 29''$; hincque longitudo mercurii obseruata ob lucis propagationem augeri debet $29''$ etc. ut ea sit $0S, 9^{\circ}, 24', 1''$

Latitudo autem heliocentrica s ad boream respiciens ex hac aequatione $\sin. s = \sin. n \cdot \sin. (e+z)$ definietur, estque $\sin. (e+z) = -\sin. 75^{\circ}, 28', 39''$ unde

$$l - \sin. (e+z) = 9, 9858974$$

$$l \sin. = 9, 0796762$$

$$l - \sin. s = 9, 0655736$$

ergo $s = -6^{\circ}, 40', 42''$, ex quo latitudo heliocentrica mercurii erit australis atque $= 6^{\circ}, 40', 42''$.

§. 60. Definito loco heliocentrico pergo ad locum mercurii geocentricum supputandum, ad quod erit distantia terrae a sole $c = 101318$.

$$lc = 5,0056867$$

longitudo terrae $u = 7S, 0^{\circ}, 24', 52''$

Nunc

Nunc quaeratur angulus $pTV = t$, ex aequatione

$$\cot. t = \cot. (u - q - r) - \frac{c}{y \cos. s \sin. (u - q - r)}$$

Est vero $u = 7S, 0^{\circ}, 24', 52''$

$q + r = 10S, 0^{\circ}, 19', 36''$

$u - q - r = 9S, 0^{\circ}, 5', 16''$

ergo $\cot. (u - q - r) = -\text{tang. } 0^{\circ}, 5', 16'' = -15319$

Porro $ly = 4, 5907973$

$l \cos. s = 9, 9974701$

$l - \sin. (u - q - r) = 9, 9999994$

$l - y \cos. s \sin. (u - q - r) = 24, 5882668$

$lc (\sin. \text{tot.})^2 = 35, 0056867$

$l - y \cos. s \sin. (u - q - r) = 24, 5882668$

10, 4174199

ergo $\frac{c}{y \cos. s \sin. (u - q - r)} = 26146880$

$+ \cot. (u - q - r) = -15319$

$\cot. t = 26131561$

Ergo t est $20^{\circ}, 56', 27''$ vna cum sex signis, vti conditio problematis requirit, quod figurae repraesentio facile commonstrat. Quare cum sit $t = 6S, 20^{\circ}, 56', 27''$, hinc longitudo mercurii geocentrica f innotescit ex hac aequatione $f = u - t$

Est vero $u = 7S, 0^{\circ}, 24', 52''$

$t = 6S, 20^{\circ}, 56', 27''$

$f = 0S, 9^{\circ}, 28', 25''$

Actu autem longitudo mercurii ad hoc tempus obseruata est $F = 0S, 9^{\circ}, 24', 1''$

Ex quo est $F - f = df = -4', 24'' = -264''$
qui est error tabularum in longitudine commissus.

§. 61. Latitudo denique Geocentrica g reperietur ex hac aequatione $\text{tang. } g = \frac{\sin. t \cdot \text{tang. } s}{\sin. (u-q-r)}$

$$l - \sin. t = 9, 5531590$$

$$l - \text{tang. } s = 9, 0685182$$

$$18, 6216772$$

$$l - \sin. (u-q-r) = 9, 9999994$$

$$l - \text{tang. } g = 8, 6216778$$

Ergo $g = -2^\circ, 23', 46''$. Latitudo ergo Geocentrica erit australis atque aequalis $2^\circ, 23', 46''$

Latitudo autem observata est $= 2^\circ, 23', 55''$

Erit ergo $G = -2^\circ, 23', 55''$

$$g = -2^\circ, 23', 46''$$

Atque $G-g = d_g = -9''$

Qui est error tabularum in latitudine commissus.

§. 62. Quod si nunc, vt supra fecimus, tabulas ponamus correctas, valores inuenti df et dq per aberrationes tabularum inueniendas dm , dp , dq , dn et dk sequenti modo determinabuntur.

$$df = \frac{(dq+dr)\sin. t}{(\sin. (u-q-r))^2} + \frac{acdk \cos. z (\sin. t)^2}{yy \cos. s \sin. (u-q-r)} - \frac{a^2 ckd m \sin. v (\sin. t)^2}{y^2 \cos. s \sin. (u-q-r)}$$

$$- \frac{cds \text{ tang. } s (\sin. t)^2}{y \cos. s \sin. (u-q-r)} - \frac{c(dq+dr) \cot. t (u-q-r) (\sin. t)^2}{y \cos. s \sin. (u-q-r)}$$

$$dg = \frac{ds \sin. t (\cos. g)^2}{(\cos. s)^2 \sin. (u-q-r)} - \frac{df \cos. t \cdot \text{tang. } s (\cos. g)^2}{\sin. (u-q-r)} + \frac{(dq+dr) \sin. t \cdot \text{tang. } s (\cos. g)^2}{\sin. (u-q-r) \text{ tang. } s (u-q-r)}$$

Aequationes autem subsidiariae sunt hae :

$$ds = \frac{dn \cos. n \sin. (e+z)}{\cos. s} + \frac{(de+dz) \sin. n \cos. (e+z)}{\cos. s}$$

$$dr = \frac{(de+dz) \cos. n' \cos. r)^2}{(\cos. (e+z))^2} - dn \sin. n \text{ tang. } (e+z) (\cos. r)^2$$

$$de = \frac{(db-dt) (\cos. e)^2}{\cos. n (\cos. (p-q))^2} + \frac{dn \sin. n \text{ tang. } (p-q) (\cos. e)^2}{(\cos. n)^2}$$

$$dz = \frac{adm \sin. z}{y \sin. v} - \frac{adk \sin. z}{y} - \frac{dk \sin. z}{1-kk}$$

Quantitatum autem finitarum valores, quae in his formulis insunt, ita se habent

$$a = 38710 . la = 4, 5878232$$

$$c = 101318 . lc = 5, 0056867$$

$$\frac{1}{1-kk} = \frac{1000000}{794111 \cdot 1205889} . l \frac{1}{1-kk} = 0, 0188112$$

$$n = 6^{\circ}, 54'$$

$$v = 88^{\circ}, 5'$$

$$y = 38976 . ly = 4, 5907973$$

$$z = 76^{\circ}, 14', 57''$$

$$p-q = 6S, 28^{\circ}, 6'$$

$$e = 6S, 28^{\circ}, 16', 24''$$

$$e+z = 9S, 14^{\circ}, 31', 26''$$

$$r = 9S, 14^{\circ}, 37', 26''$$

$$s = - 6^{\circ}, 40', 42''$$

$$u-q-r = 9S, 0^{\circ}, 5', 16''$$

$$t = 6S, 20^{\circ}, 56', 27''$$

$$g = -2^{\circ}, 23', 46''$$

§. 63. Quaeramus primum dz ex aequatione:

$$dz = \frac{adm \sin. z}{y \sin. v} - \frac{adk \sin. z}{y} - \frac{dk \sin. z}{1-kk}$$

vbi notandum est coefficientes ipsius dk in minutis secundis exprimi oportere, quia reliqua differentialia omnia dm , dp , dq , et dn in minutis secundis definiiri debent.

Erit ergo

$$la = 4, 5878232$$

$$l \sin. z = 9, 9873707$$

$$14, 5751939$$

$$ly = 4, 5907973$$

$$9, 9843966$$

$l \sin. v$

$$l \sin. v = 9, 9997570$$

$$(-1), 9846396 \text{ l coeff. } dm$$

$$\text{numerus} = 0, 9652 = \text{coeff. } dm$$

$$l \frac{a \sin. z}{y} = 9, 9843966$$

$$4, 6855749$$

$$5, 2988217 = l \frac{a \sin. z}{y} \text{ in sec.}$$

$$\frac{a \sin. z}{y} = 198985''$$

$$l \sin. z = 9, 9873707$$

$$l \frac{1}{1-kk} = 0, 0188112$$

$$10, 0061819$$

$$4, 6855749$$

$$5, 3206070 = l \frac{\sin. z}{1-kk} \text{ in sec.}$$

$$\frac{\sin. z}{1-kk} = 209222''$$

$$408207'' = \text{coeff. } dk$$

$$\text{Ergo } dz = 0, 9652. dm - 408207''. dk$$

$$10, 9652 = (-1), 9846396$$

$$1408207' = 5, 6108805.$$

§. 64. Deinde quaeratur expressio, cui de est aequalis ex hac aequatione

$$de = \frac{(dp-d.) (\text{cof. } e)^2}{\text{cof. } n (\text{cof. } (p-q))^2} + \frac{dn \sin. n \tan. c. (p-q) (\text{cof. } c)^2}{(\text{cof. } n)^2}$$

$$l-\text{cof. } e = 9, 9448270 \quad | \quad l \sin. n = 9, 0796762$$

$$l(\text{cof. } e)^2 = 19, 8896540 \quad | \quad l \tan. (p-q) = 9, 7275008$$

$$l \text{cof. } n = 9, 9968431 \quad | \quad l-\text{cof. } (p-q) = 9, 9455310$$

$$l(\text{cof. } n)^2 = 19, 9936862 \quad | \quad l(\text{cof. } (p-q))^2 = 19, 8910620$$

Y 2

l(cof.

$$l(\text{cof. } e) = 19, 8896540$$

$$\text{cof. } n = 9, 9968431$$

$$19, 8928109$$

$$l \text{ cof. } (p-q)^2 = 19, 8910620$$

$$0, 0017489$$

$$\text{coeff. } (dp-dq) = 1, 0040$$

$$\text{Porro } l \text{ fin. } n = 9, 0796762$$

$$l \text{ tang. } (p-q) = 9, 7275008$$

$$l \text{ cof. } e^2 = 19, 8896540$$

$$38, 6968310$$

$$l(\text{cof. } n)^2 = 19, 9936862$$

$$(-2), 7031448$$

$$\text{coeff. } dn = 0, 0505$$

$$\text{Ergo } de = 1, 0040, dp - 1, 0040 dq + 0, 0505 \cdot dn$$

$$l 1, 0040 = 0, 0017489; l 0, 0505 = (-2), 7031448$$

§. 65. Sequitur differentiale ipsius dr ex hac aequatione definiendum :

$$dr = \frac{(de+dz)\text{cof. } n(\text{cof. } r)^2}{(\text{cof. } (e+z))^2} - dn \text{ fin. } n \cdot \text{tang. } (e+z)(\text{cof. } r)^2$$

$$l - \text{tang. } (e+z) = 10, 5866389$$

$$l \text{ cof. } r = 9, 4022145$$

$$l(\text{cof. } r)^2 = 18, 8044290$$

$$l \text{ cof. } (e+z) = 9, 3992584$$

$$\text{Ergo } l \text{ cof. } n = 9, 9968431$$

$$l(\text{cof. } r)^2 = 18, 8044290$$

$$28, 8012721$$

$$l(\text{cof. } (e+z))^2 = 18, 7985168$$

$$0, 0027553$$

coeff.

$$\begin{aligned} \text{coeff. } (de + dz) &= 1, 0064 \\ \text{Porro } l \sin. n &= 9, 0796762 \\ l - \text{tang. } (e + z) &= 10, 5866389 \\ l(\text{cof. } r)^2 &= 18, 8044290 \\ & \hline & (-2), 4707441 \end{aligned}$$

coeff. $-dn = 0, 0296$.

Ergo $dr = 1, 0064 \cdot dz + 1, 0064 \cdot de + 0, 0296 \cdot dn$

$l 1, 0064 = 0, 0027553$; $l 0, 0296 = (-2), 4707441$

Valoribus autem ipsorum dz et de substitutis prodit dr

$= 0, 9714 \cdot dm - 410805'' \cdot dk + 1, 0104 \cdot dp -$

$1, 0104 \cdot dq + 0, 0804 \cdot dn$

$l 0, 9714 = (-1), 9873949$

$l 410805'' = 5, 6136358$

$l 1, 0104 = 0, 0045042$

$l 0, 0804 = (-2), 9052560$

§. 66. Habetur praeterea haec aequatio :

$$ds = \frac{dn \cos n \cdot \sin(e+z)}{\cos s} + \frac{(de+dz) \sin n \cdot \cos(c+z)}{\cos s}$$

$l - \sin. (e + z) = 9, 9858973$

$l \cos. n = 9, 9968431$

$19, 9827404$

$l \cos. s = 9, 9974701$

$(-1), 9852703$

coeff. $-dn = 0, 9667$

Porro $l \sin. n = 9, 0796762$

$l \cos. (e + z) = 9, 3992584$

$18, 4789346$

$l \cos. s = 9, 9974701$

$(-2), 4814645$

coeff.

$$\text{coeff. } (de + dz) = 0, 0303$$

Ergo $ds = -0, 9667 \cdot dn + 0, 0303 \cdot dz + 0, 0303 \cdot de$. Substitutis autem loco dz et de valoribus erit: $ds = 0, 0292 \cdot dm - 12369'' \cdot dk + 0, 0304 \cdot dp - 0, 0304 \cdot dq - 0, 9652 \cdot dn$

$$l 0, 0304 = (-2), 4832134$$

$$l 0, 0292 = (-2), 4661041$$

$$l 12369'' = 4, 0923450$$

$$l 0, 9652 = (-1), 9846173$$

§. 67. His prae paratis poterimus tandem definire df ex hac aequatione.

$$df = \frac{(dq + dr)(\sin. t)^2}{(\sin. (u - q - r))^2} + \frac{acdk \cos. z (\sin. t)^2}{yycos. s. \sin. (u - q - r)} - \frac{a^2 ekdm \sin. v (\sin. t)}{y^5 \cos. s. \sin. (u - q - r)}$$

$$- \frac{cds \tan. s (\sin. t)^2}{y \cos. s. \sin. (u - q - r)} - \frac{c(dq + dr) \cos. (u - q - r) (\sin. t)^2}{y \cos. s. \sin. (u - q - r)}$$

$$\text{Estque } l - \sin. (u - q - r) = 9, 9999994$$

$$l - \cot. (u - q - r) = 21852304$$

$$l - \sin. t = 9, 5531590$$

$$l \cos. z = 9, 3760292$$

$$l \sin. v = 9, 9997570$$

$$l - y \cos. s. \sin. (u - q - r) = 24, 5882668$$

$$lk = (-1), 3136332$$

$$\text{Hinc habetur: } l(\sin. t)^2 = 19, 1063180$$

$$l(f(u - q - r))^2 = 19, 9999988$$

$$l \text{coeff. } (dq + dr) = (-1), 1063192 : n. = 0, 1277$$

$$\text{Porro: } lac = 9, 5935099$$

$$l \cos. z = 9, 3760292$$

$$l(\sin. t)^2 = 19, 1063180$$

$$38, 0758571$$

$$ly = 4, 5907973$$

$$33, 4850598$$

$$l-y \text{ cof. } s \text{ fin. } (u-q-r) = 24, 5882668$$

$$8, 8967930$$

$$4, 6855749$$

$$l \text{ coeff. } - dk = 4, 2112181 \quad n : = 16264''$$

$$\text{Porro } lac \text{ (fin. } t)^2 = 28, 6998279$$

$$la = 4, 5878232$$

$$lk = (-1) \quad 3136332$$

$$l \text{ fin. } v = 9, 9997570$$

$$42, 6010413$$

$$ly^2 = 9, 1815946$$

$$33, 4194467$$

$$l-y \text{ cof. } s \text{ fin. } (u-q-r) = 24, 5882668 + 10$$

$$l \text{ coeff. } + dm = (-2), 8311799 \quad n : = 0, 0678$$

$$\text{Porro } lc = 5, 0056867$$

$$l - \text{tang. } s = 9, 0685182$$

$$l \text{ (fin. } t)^2 = 19, 1063180$$

$$33, 1805229$$

$$l-y \text{ cof. } s \text{ fin. } (u-q-r) = 24, 5882668 + 10$$

$$l \text{ coeff. } - ds = (-2), 5922561 \quad n = 0, 0391$$

$$\text{Denique } lc \text{ (fin. } t)^2 = 24, 1120047$$

$$l - \text{cot. } (u-q-r) = 7, 1852304$$

$$l-y \text{ cof. } s \text{ fin. } (u-q-r) = 31, 2972351$$

$$24, 5882668$$

$$l \text{ coeff. } - dq - dr = (-4), 7089683 \quad n : = 0, 0005. \text{ Erit}$$

$$\text{Erit ergo } df = 0, 1272. dq + 0, 1272. dr - 16264''. dk \\ + 0, 0678. dm - 0, 0391. ds$$

Atque substitutis loco dr et ds valoribus inuentis; erit

$$df = 0, 1902. dm - 68035''. dk + 0, 1273. dp \\ - 0, 0001. dq + 0, 0479. dn$$

§. 68. Restat denique vt pari modo alteram aequationem ad hanc obseruationem accommodemus, quae est haec.

$$dg = \frac{ds \sin. t (\cos. p)^2}{(\cos. s)^2 \sin. (u-q-r)} - \frac{d \cos. t \tan. s (\cos. p)^2}{\sin. (u-q-r)} + \frac{(dq+dr) \sin. t \tan. s (\cos. p)^2}{\sin. (u-q-r) \sin. (u-q-r)}$$

$$l \cos. g = 9, 9996201$$

$$l \cos. g)^2 = 19, 9992402$$

$$l - \sin. t = 9, 5531590$$

$$29, 5523992$$

$$l \cos. s)^2 = 19, 9949402$$

$$9, 5574590$$

$$l - \sin. (u-q-r) = 9, 9999994$$

$$l \text{coeff. } + ds = (-1), 5574596 \text{ num : } = 0, 36096$$

$$\text{Porro } l - \cos. t = 9, 9703236$$

$$l - \tan. s = 9, 0685182$$

$$l \cos. g)^2 = 19, 9992402$$

$$39, 0380820$$

$$l - \sin. (u-q-r) = 9, 9999994 + 30$$

$$l \text{coeff. } + df = (-1), 0380826 \text{ num : } = 0, 10916$$

$$\text{Deinde } l - \sin. t = 9, 5531590$$

$$l - \tan. s = 9, 0685182$$

$$l \cos. g)^2 = 19, 9992402$$

$$38, 0209174$$

$l - \sin.$

$$l - \text{fin. } (u - q - r) = \frac{9,9999994}{28,6209180}$$

$$l - \text{cot. } (u - q - r) = \frac{7,1852304}{-40}$$

$$l \text{ coeff. } + dq + dr = (-5),8061484 \text{ num : } 0,00006$$

Quamobrem erit.

$$dg = 0,36096 . ds + 0,10916 . df + 0,00006 . dq + 0,00006 . dr.$$

substitutis autem loco dr et ds valoribus inuentis erit

$$dg = 0,10916 . df + 0,01062 . dm - 4491'' . dk$$

$$+ 0,01104 . dp - 0,01098 . dq - 0,3480 . dn$$

Cum igitur sit $df = -264''$, et $dg = -9''$, vt supra

inuenimus §. §. 60 et 61, erit $0,10916 . df = -29''$

atque ex hac prima obseruatione habebuntur istae duae aequationes pro correctione tabularum:

$$-264'' = 0,1902 . dm - 68035'' . dk + 0,1273 . dp$$

$$- 0,0001 . dq + 0,0479 . dn$$

et

$$20'' = 0,01062 . dm - 4491'' . dk + 0,01104 . dp$$

$$- 0,01098 . dq - 0,3480 . dn$$

§. 69. Progrediamur iam ad secundam mercurii obseruationem, quae ita se habet:

Tempore medio A. 1716. Aug. 7 d. 22 h. 45', 6''

Longitudo ☿ a $\mathbf{1} * \mathbf{V}$ obseruata est 3S, 9°, 43', 0''

quam ob lucis propagationem postmodum corrigemus.

Latitudo ☿ obseruata fuit: 0°, 13', 30'', Borealis

Pro hoc autem tempore inuenta est

Longitudo terrae a $\mathbf{1} * \mathbf{V} = 9S, 27^\circ, 11', 36'' = u$

Distantia terrae a Sole = 101096 = c

vnde $lc = 5, 0047340$

Data autem, quibus tabulae corrigendae sunt superstructae

Tom. XII.

Z

supra

178 EMENDATIO TABULARVM ASTRONOMICARVM

supra §. 57. exhibuimus. Iam ad hoc tempus ex tabulis
supputemus anomaliam mediam.

A. 1701	8S, 4°, 2', 0''
Anni 15	3, 7, 48, 21
Aug. Mensis	4, 27, 34, 29
ob bissext: 8.d.	1, 2, 44, 19
22 h.	3, 45, 5
45'6''	7, 41.

$$5S, 16^{\circ}, 1', 55''$$

Erit igitur anomalia media $x = 166^{\circ}, 1', 55''$
et $\sin. x = \sin. 13^{\circ}, 58', 5''$. Hinc reperietur anomalia
media $v = 162^{\circ}, 28', 52''$; et ex hac porro distantia
mercurii a sole: $lak = 3, 9014564$

$$l - \cos. v = 9, 9793743$$

$$3, 8808307$$

$$ak \cos. v = -7600$$

$$a = 38710$$

Ergo distantia ζ a Sole $y = 31110$, et $ly = 4, 4929000$

Deinde hinc colligitur anomalia vera mercurii, z

$$lak \sin. \text{tot.} = 13, 9014564$$

$$ly = 4, 4929000$$

$$9, 4085564$$

$$\frac{ak \sin. \text{tot.}}{y} = 2561867$$

$$\text{Porro } l - \cos. v = 9, 9793743$$

$$la = 4, 5878232$$

$$14, 5671975$$

$$ly = 4, 4929000$$

$$10, 0742975$$

$$- \frac{a \text{ cof. } v}{y} = 11865817$$

$$+ \frac{a k \text{ fin. tot.}}{y} = 2561867$$

$$\text{cof. } z = -9303950 = -\text{fin. } 68^{\circ}, 29', 49''$$

$$\text{Ergo } z = 158^{\circ}, 29', 49''$$

§. 70. Distantia aphelii a nodo e manet perpetuo eadem, estque $e = 6S, 28^{\circ}, 16', 24''$. Ex hac vero reperietur longitudo mercurii a nodo tang. $r = \text{cof. } n$ tang. $(e+z)$

$$e = 6S, 28^{\circ}, 16', 24''$$

$$z = 5S, 8^{\circ}, 29', 49''$$

$$e+z = 0S, 6^{\circ}, 46', 13''$$

$$l \text{ tang. } (e+z) = 9, 0745115$$

$$l \text{ cof. } n = 9, 9968431$$

$$l \text{ tang. } r = 9, 0713546$$

$$\text{Ergo } r = 0S, 6^{\circ}, 43', 18''$$

$$\text{at } q = 0S, 15^{\circ}, 42', 0''$$

$$r+q = 0S, 22^{\circ}, 25', 18''$$

quae est longitudo planetae heliocentrica: Latitudo autem heliocentrica ita inuenietur.

$$l \text{ fin. } (e+z) = 9, 0714725$$

$$l \text{ fin. } n = 9, 0796762$$

$$l \text{ fin. } s = 8, 1511487$$

Ergo $s = 0^{\circ}, 48', 41''$ Latitudo ergo heliocentrica est borealis, atque $= 0^{\circ}, 48', 41''$. Sic itaque inuentus est locus mercurii heliocentricus ad tempus secundae obseruationis.

§. 71. Antequam hinc ad locum mercurii geocentricum inuestigandum procedam, correctionem ex propagatione lucis ortam definire conueniet, quae cum fit $= \frac{s}{c} q - \frac{r}{c}$ atque iam supra inuentum fit $\frac{r}{c} m = -18''\frac{3}{4}$: quaeratur q

$$\text{long. } \varphi \text{ geocentrica} = 3S, 9^{\circ}, 43', 0''$$

$$\text{long. } \varphi \text{ heliocentrica} = 0S, 22^{\circ}, 25', 18''$$

$$\text{diff.} = 2S, 17^{\circ}, 17', 42''$$

$$\text{Ergo } q = \text{cof. } 77^{\circ}, 17', 42''$$

$$lq = 9, 3421190$$

$$\text{subtr. } 8, 4996405$$

$$\hline 0, 8424785$$

$$\text{Ergo } \frac{s}{c} q = 7''$$

Quamobrem longitudo mercurii obseruata augeri debet $26''$ ita vt fit vera longitudo mercurii $F = 3S, 9^{\circ}, 43', 26''$ atque latitudo $G = 0^{\circ}, 13', 30''$.

§. 72. Vt nunc locum mercurii geocentricum definiamus, quaerendus primum est angulus pTV ex hac aequatione $\text{cot. } t = \text{cot. } (u-q-r) - \frac{c}{y \text{coj. } s \text{sin. } (u-q-r)}$.

$$\text{at est } u = 9S, 27^{\circ}, 11', 36''$$

$$q+r = 0S, 22^{\circ}, 25', 18''$$

$$u-q-r = 9S, 4^{\circ}, 46', 18''$$

$$\text{cot. } (u-q-r) = -\text{tang. } 4^{\circ}, 46', 18'' = -834743$$

$$ly = 4, 4929000$$

$$l \text{ cof. } s = 9, 9999564$$

$$l - \text{sin. } (u-q-r) = 9, 9984921$$

$l-y$

$$l-y \operatorname{cof}. s \sin.(u-q-r) = 24, 4913485$$

$$a l(\sin. \operatorname{tot.})^2 = 35, 0047340$$

$$10, 5133855$$

$$\frac{-c}{y \operatorname{cof}. s \sin.(u-q-r)} = 32612610$$

$$+ \operatorname{cot.}(u-q-r) = -834743$$

$$\operatorname{cot.} t = 31777867 = \operatorname{tang.} 72^\circ, 31', 55''$$

Ergo $t = 17^\circ, 28', 5''$ vna cum 6 signis.

Cum igitur inuentus fit valor anguli $pTV = t$; ita longitudo geocentrica reperietur

$$t = 6S, 17^\circ, 28', 5''$$

$$u = 9S, 27^\circ, 11', 36''$$

$$u-t = 3S, 9^\circ, 43', 31''$$

Erit igitur ob $f = u-t$ longitudo geocentrica ex tabulis inuenta $f = 3S, 9^\circ, 43', 31''$

Quare cum vera longitudo hoc tempore ex obseruationibus deducta sit:

$$F = 3S, 9^\circ, 43', 26''$$

$$\text{Erit } F - f = df = -5''.$$

§. 73. Latitudo g denique geocentrica g obtinebitur

$$\text{ex hac aequatione } \operatorname{tang.} g = \frac{\sin. i \operatorname{tang.} s}{\sin.(u-q-r)}$$

$$\text{vnde } l - \sin. t = 9, 4773730$$

$$l \operatorname{tang.} s = 8, 1511923$$

$$17, 6285653$$

$$l - \sin.(u-q-r) = 9, 9984921$$

$$l \operatorname{tang.} g = 7, 9300732$$

$$Z 3$$

Ergo

Ergo $g = 0^{\circ}, 14', 40''$ At est latitudo
 vera $G = 0, 13', 30''$ Quare erit
 $G-g=dg = -, 70''$

§. 74. Definiamus nunc ordine valores differentia-
 um dz, de, dr, ds, df et dg . ac primo quidem dif-
 ferentiale dz ad modum §. 63.

$$la = 4, 5878232$$

$$l \sin. z = 9, 5641341$$

$$14, 1519573$$

$$ly = 4, 4929000$$

$$9, 6590573$$

$$l \sin. v = 9, 4785956$$

$$l \text{coeff. } dm = 0, 1804617$$

$$\text{coeff. } +dm = 1, 5151$$

$$\text{Porro est } l \frac{a \sin. z}{y} = 9, 6590573$$

$$4, 6855749$$

$$4, 9734824$$

$$\text{Num. in secundis} = 94077$$

$$l \sin. z = 9, 5641341$$

$$l \frac{1}{i-kk} = 0, 0188112$$

$$9, 5829453$$

$$4, 6855749$$

$$4, 8973704$$

$$\text{Numerus in secundis} = 78954''$$

$$94077$$

$$\text{Coeff. } dk = 173031''.$$

Ergo

Ergo $dz = 1,5151 \cdot dm - 173031'' \cdot dk$

$$l 1,5151 = 0,1804617$$

$$l 173031 = 5,2381230$$

Deinde de retinet valorem suum vt ante §. 64. $de =$

$$1,0040 \cdot dp - 1,0040 \cdot dq + 0,0505 \cdot dn$$

$$l 1,0040 = 0,0017489$$

$$l 0,0505 = (-2),7031448$$

§. 75. Hunc ad modum §. 65 quaeramus dr .

$$l \text{ cof. } r = 9,9970045$$

$$l \text{ cof. } (e+z) = 9,9969610$$

Ergo $l \text{ cof. } n = 9,9968431$

$$l (\text{cof. } r)^2 = 19,9940090$$

$$\hline 29,9908521$$

$$l \text{ cof. } (e+z)^2 = 19,9939220$$

$$(-1),9969301 = l \text{ coeff. } (de + dz)$$

$$l \text{ fin. } n = 9,0796762$$

$$l \text{ tang. } (e+z) = 9,0745115$$

$$l (\text{cof. } r)^2 = 19,9940090$$

$$\hline (-2),1481967$$

$$\text{coeff. } -dn = 0,01406$$

Ergo $dr = 1,5045 \cdot dm - 171812'' \cdot dk + 0,99696 \cdot$

$$dp - 0,99696 \cdot dq - 0,03606 \cdot dn$$

$$l 1,5045 = 0,1773918 \quad | \quad l 0,99696 = (-1),9986790$$

$$l 171812'' = 5,2350531 \quad | \quad l 0,03606 = (-2),5570257$$

Ad modum §. 66 quaeratur valor ipsius ds vt sequitur

$l \text{ fin.}$

$$l \text{ fin. } (e+z) = 9, 0714725$$

$$l \text{ col. } n = 9, 9968431$$

$$\hline 19, 0683156$$

$$l \text{ col. } s = 9, 9999564$$

$$l \text{ coeff. } dn = (-1), 0683592$$

$$\text{coeff. } dn = 0, 11704$$

$$l \text{ fin. } n = 9, 0796762$$

$$l \text{ col. } (e+z) = 9, 9969610$$

$$\hline 19, 0766372$$

$$l \text{ col. } s = 9, 9999564$$

$$l \text{ coeff. } (de+dz) = (-1), 0766808$$

$$\text{Ergo } ds = 0, 18078 \cdot dm - 20644'' \cdot dk + 0, 1198 \cdot$$

$$dp - 0, 1198 \cdot dq + 0, 12306 \cdot dn$$

$$l 0, 18078 = (-1), 2571425$$

$$l 20644'' = 4, 3148038$$

$$l 0, 1198 = (-1), 0784297$$

$$l 0, 12306 = (-1), 0901170$$

§. 76. His praemissis determinetur valor ipsius df secundum §. 67 :

$$l(\text{fin. } t)^2 = 18, 9547460$$

$$l(\text{fin. } (u-q-r))^2 = 19, 9969842$$

$$\hline (-2), 9577618$$

$$\text{coeff. } + dq + dr = 0, 09073$$

$$l ac = 9, 5925572$$

$$l - \text{cof. } z = 9, 9686688$$

$$l(\text{fin. } t)^2 = 18, 9547460$$

$$38, 5159720$$

$$ly = 4, 4929000$$

$$34, 0230720$$

$$l - y \text{ cof. } s \text{ fin. } (u - q - r) = 24, 4913485$$

$$9, 5317235$$

$$4, 6855749$$

$$l \text{ coeff. } + dk = 4, 8461486$$

$$\text{coeff. } + dk = 70169''$$

$$l \text{ ac } (\text{fin. } t)^2 = 28, 5473032$$

$$la = 4, 5878232$$

$$lk = (-1), 3136332$$

$$l \text{ fin. } v = 9, 4785956$$

$$41, 9273552$$

$$l - y^3 \text{ cof. } s \text{ fin. } (u - q - r) = 33, 4771485$$

$$l \text{ coeff. } + dm = (-2), 4502067$$

$$\text{coeff. } + dm = 0, 02819$$

$$lc = 5, 0047340$$

$$l \text{ tang. } s = 8, 1511923$$

$$l(\text{fin. } t)^2 = 18, 9547460$$

$$32, 1106723$$

$$-y \text{ cof. } s \text{ fin. } (u - q - r) = 24, 4913485$$

$$l \text{ coeff. } + ds = (-3), 6193238$$

$$lc(\text{fin. } t)^2 = 23, 9594800$$

Tom. XII.

A a

l-

$$l - \cot. (u - q - r) = 8, 9215526$$

$$\underline{32, 8710326}$$

$$l - y \text{ cof. } s \text{ fin. } (u - q - r) = 24, 4913485$$

$$\underline{(-2), 3796841}$$

$$\text{coeff. } - dq - dr = 0, 02397$$

$$\text{coeff. } + dq + dr = 0, 09073$$

$$\text{coeff. } + dq + dr = 0, 06676 \text{ log. } = (-2), 8245163$$

$$\text{Ergo } df = 0, 1294. dm + 58612''. dk + 0, 0670.$$

$$dp - 0, 00028. dq - 0, 0019. dn$$

§. 77. Restat denique valor dg , ex §. 68. inueniendus

$$l(\text{cof. } g)^2 = 19, 9999922$$

$$l - \text{fin. } t = 9, 4773730$$

$$\underline{29, 4773652}$$

$$l(\text{cof. } s)^2 = 19, 9999128$$

$$\underline{9, 4774524}$$

$$l - \text{fin. } (u - q - r) = 9, 9983921 - 10$$

$$l \text{ coeff. } + ds = (-1), 4789603$$

$$l - \text{cof } t = 9, 9794958$$

$$l \text{ tang. } s = 8, 1511923$$

$$l(\text{cof. } g)^2 = 19, 9999922$$

$$\underline{38, 1306803}$$

$$l - \text{fin. } (u - q - r) = 9, 9984921 + 30$$

$$\underline{(-2), 1321882}$$

$$\text{coeff. } - df = 0, 01356$$

$$\begin{aligned}
 l - \sin. t (\cos. g)^2 &= 29, 4773652 \\
 l \text{ tang. } s &= 8, 1511923 \\
 l - \cot. (u-q-r) &= 8, 9215526 \\
 & \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 & 46, 5501101 \\
 l - \sin. (u-q-r) &= 9, 9984021 + 40 \\
 l \text{ coeff. } -dq - dr &= (-4), 5516180 \\
 \text{coeff. } -dq - dr &= 0, 00036.
 \end{aligned}$$

Hinc itaque prodit

$$\begin{aligned}
 dg &= -0, 01356 \cdot df + 0, 0539 \cdot dm - 6158'' \cdot dk \\
 &+ 0, 03574 \cdot dp - 0, 0361 \cdot dq + 0, 3708 \cdot dn.
 \end{aligned}$$

Cum nunc sit $df = -5''$ et $dg = -70''$ habebuntur ex obseruatione secunda hae duae aequationes:

$$\begin{aligned}
 -5'' &= 0, 1294 \cdot dm + 58612'' \cdot dk + 0, 0670 \cdot dn \\
 dp - 0, 00028 \cdot dq &= 0, 0019 \cdot dn
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 -70'' &= 0, 0539 \cdot dm - 6158'' \cdot dk + 0, 0357 \cdot dp \\
 &- 0, 0361 \cdot dq + 0, 03708 \cdot dn.
 \end{aligned}$$

§. 78. Residua est vltima obseruatio, quae ita se habet :

Tempore medio A. 1717. April. 25 d. h. 33', 7''
 Longitudo ♀ a I * V obseruata est 0 S, 14°, 28', 14''
 Latitudo ♀ obseruata est 0°, 18', 30'. Australis.

Pro hoc autem tempore inuenta est

$$\begin{aligned}
 \text{Longitudo terrae } a \text{ I * V : } u &= 6 S, 17°, 27', 5'' \\
 \text{Distantia terrae } a \text{ sole } c &= 101045 \\
 \text{et } lc &= 5, 0045148.
 \end{aligned}$$

188 EMENDATIO TABULARVM ASTRONOMIC.

Ex tabulis igitur assignemus ad hoc tempus anomaliam mercurii mediam:

A. 1701		3 S, 4°, 2', 0''
Anni: 10		5, 5, 36, 0
April.		7, 8, 18, 36
25 d		3, 12, 18, 30
23 h		3, 55, 19
35', 7''		5, 59

$$5 S, 4^{\circ}, 10', 25''$$

Est ergo $x = 154^{\circ}, 16', 25''$. et fin. $x = \text{fin. } 25^{\circ}, 43', 35''$, unde inuenitur anomalia excentri v .

$$\int \text{fin. } x = 9, 6375000$$

$$5, 3719417$$

$$4, 2655583$$

$$\text{num.} = 18431'' = 5^{\circ}, 7', 11''$$

$$x = 154^{\circ}, 16', 25''$$

$$149^{\circ}, 9', 14'' | 30^{\circ}, 50', 46''$$

$$\int \text{fin.} = 9, 7099000$$

$$5, 3719417$$

$$4, 3379583$$

$$\text{num.} = 21775'' = 6^{\circ}, 2', 55''$$

$$x = 154^{\circ}, 16', 25''$$

$$148^{\circ}, 13', 30'' | 31^{\circ}, 46', 30''$$

$$\int \text{fin.} = 9, 7214684$$

$$5, 3719417$$

$$5, 3495267$$

num.

PER LOCA PLANETARVM GEOCENTRICA 189

$$\text{num.} = 22363'' = 6^{\circ}, 12', 43''$$

$$x = 154^{\circ}, 16', 25''$$

$$\hline 148^{\circ}, 3', 42'' \mid 31^{\circ}, 56', 18''$$

$$l \text{ fin.} = 9, 7234607$$

$$5, 3719417$$

$$\hline 4, 3515190$$

$$\text{num.} = 22475'' = 6^{\circ}, 14', 35''$$

$$x = 154^{\circ}, 16', 25''$$

$$\hline 148^{\circ}, 1', 50'' \mid 31^{\circ}, 58', 10''$$

$$l \text{ fin.} = 9, 7238388$$

$$5, 3719417$$

$$\hline 4, 3518971$$

$$\text{num.} = 22485'' = 6^{\circ}, 14', 45''$$

$$x = 154^{\circ}, 16', 25''$$

$$\hline 148^{\circ}, 1', 40'' \mid 31^{\circ}, 58', 20''$$

$$l \text{ fin.} = 9, 7238726$$

$$5, 3719417$$

$$\hline 4, 3519309$$

$$\text{num.} = 22487'' = 6^{\circ}, 14', 47''$$

$$x = 154^{\circ}, 16', 25''$$

$$\hline v = 148^{\circ}, 1', 38''$$

Ergo anomalia excentri $v = 4S, 28^{\circ}, 1', 38''$

et $l \text{ fin. } v = 9, 7238793$ et

$$l \text{ - cof. } v = 9, 9285494$$

$$l a k = 3, 9014564$$

$$\hline 3, 8300058$$

$$+ ak \text{ cof. } v = - 6761$$

$$a = 38710$$

$$y = 31949 \text{ et } ly = 4, 5044573$$

$$la k \text{ fin. tot.} = 13, 9014564$$

$$ly = 4, 5044573$$

$$9, 3969991$$

$$\frac{ak \text{ fin. tot.}}{y} = 24 94589$$

$$\text{Porro } l - \text{cof. } v = 9, 9285494$$

$$la = 4, 5878232$$

$$14, 5163726$$

$$ly = 4, 5044573$$

$$10, 0119153$$

$$\frac{-a \text{ cof. } v}{y} = 10278160$$

$$\frac{ak \text{ fin. tot.}}{y} = 2494589$$

$$\text{cof. } z = -7783571 = - \text{fin. } 51^{\circ}, 6', 38''$$

$$\text{vnde } l - \text{cof. } z = 9, 8911799$$

$$\text{Ergo } z = 4S, 21^{\circ}, 6', 38''$$

$$\text{et } l \text{ fin. } z = 9, 7978349$$

§. 79 Pergamus ad longitudinem mercurii a nodo,
r definiendam :

$$e = 6S, 28^{\circ}, 16', 24''$$

$$z = 4S, 21^{\circ}, 6', 38''$$

$$e + z = 11S, 19^{\circ}, 23', 2''$$

$$l - \text{tang. } (e + z) = 9, 2728529$$

$$l \text{ cof. } n = 9, 9968431$$

$$l \text{ tang. } -r = 9, 2096960$$

Ergo

Ergo $r = 11^{\circ} S, 19', 27'', 32'''$

$q = 0^{\circ} S, 15', 42'', 0'''$

$r + q = 0^{\circ} S, 5', 9'', 32'''$

quae est longitudo mercurii heliocentrica.

Longitudo ♀ geocentrica $0^{\circ} S, 14', 28'', 14'''$

- - - - - heliocentrica $0^{\circ} S, 5', 9'', 32'''$

$9^{\circ}, 18', 42'''$

Ergo ad correctionem a lucis propagatione oriundam est

$q = \cos. 9^{\circ}, 18', 42'''$

et $lq = 9, 9942537$

$l\frac{c}{s} = 3, 8140656$

$6, 1801881$

$4, 6855749$

$1, 4946132$

Ergo $\frac{s}{c} = 31'''$ et $-\frac{r}{c} m = 19'''$. Ergo longitudo obseruata augeri debet $56'''$, ita vt ea futura sit

$F = 0^{\circ} S, 14', 29'', 4'''$

§. 80. Latitudo heliocentrica s obtinebitur ad modum

§. 59. ex aequatione $\sin. s = \sin. n. \sin (e + z)$

At est $l - \sin. (e + z) = 9, 2653550$

$l \sin. n = 9, 0796762$

$l - \sin. s = 8, 3450312$

Ergo $s = -1^{\circ}, 16', 5'''$

Quaere latitudo heliocentrica est australis, atque

$= 1^{\circ}, 16', 5'''$.

§. 81. Ad locum geocentricum mercurii definiendum sequamur operationes §. 60. institutas.

$$u = 6 S. 17^{\circ}, 27', 5''$$

$$q+r = 0 S, 5^{\circ}, 9', 32''$$

$$u-q-r = 6 S, 12^{\circ}, 17', 33''$$

$$\cot(u-q-r) = \text{tang. } 77^{\circ}, 42', 27'' = 45893023$$

$$\text{Porro } l y = 4, 5044573$$

$$l \cos s = 9, 9998937$$

$$l - \sin.(u-q-r) = 9, 3281807$$

$$lc(\sin. \text{tot.})^2 = \frac{23, 8325317}{35, 0045148} = l - y \cos. s \sin.(u-q-r)$$

$$11, 1719831$$

$$\frac{-c}{y \cos. s \sin.(u-q-r)} = 148587800$$

$$\cot.(u-q-r) = 45893023$$

$$\cot. t = 194480823$$

$$l \cot. t = 11, 2888767 = l \text{ tang. } 87^{\circ}, 3', 2''$$

et $t = 2^{\circ}, 56', 58''$ vna cum 6 signis: ex quo ita longitudo geocentrica prodibit

$$u = 6 S, 17^{\circ}, 27', 5''$$

$$t = 6 S, 2^{\circ}, 56', 58''$$

$$u-t = 0 S, 14^{\circ}, 30', 7'' = f.$$

Haecque est longitudo geocentrica, quam tabulae praebent, quae cum obseruata comparata dabit valorem ipsius df .

$$F = 0 S, 14^{\circ}, 29', 4''$$

$$f = 0 S, 14^{\circ}, 30', 7''$$

$$F-f = -1', 3'' = -63'' = df.$$

qui est error tabularum in longitudine commissus.

§.

§. 82. Latitudo geocentrica g ita inuenietur secundum §. 61.

$$l - \text{fin. } t = 8,7114246$$

$$l - \text{tang. } s = 8,3451375$$

$$\hline 17,0505621$$

$$l - \text{fin. } (u - q - r) = 9,3281807$$

$$l - \text{tang. } g = 7,7283514$$

Ergo $g = -0^{\circ}, 18', 24''$ latitudo geocentrica

At est $G = -0^{\circ}, 18', 30''$ unde

$$G - g = dg = -6''. \text{ error latitudinis.}$$

§. 83. Definiamus nunc ordine valores differentiales dz, dr, ds, df et dg , ac primum dz ad modum §. 63

$$la = 4,5878232$$

$$l \text{ fin. } z = 9,7978349$$

$$\hline 14,3856581$$

$$ly = 4,5044573$$

$$\hline 9,8812008$$

$$l \text{ fin. } v = 9,7238793$$

$$\hline 0,1573215$$

$$\text{coeff. } dm = 1,4366$$

$$l \frac{a \text{ fin. } z}{y} = 9,8812008$$

$$\hline 4,6855749$$

$$\hline 5,1956259$$

$$\text{num.} = 156901''$$

$$l \text{ fin. } z = 9,7978349$$

Tom. XII.

Bb

7.

$$l \frac{1}{1-kr} = 0,0188112$$

$$9,8100461$$

$$4,6855749$$

$$5,1310712$$

$$\text{num} : = 135229''$$

$$156901$$

$$292130'' = \text{coeff.} - dk$$

$$\text{Ergo } dz = 1,4366. dm - 292130''. dk$$

$$l 1,4366 = 0,1573215$$

$$l 292130'' = 5,4655762$$

Atque ut hactenus manet ;

$$de = 1,0040. dp - 1,0040. dq + 0,0505. d\pi$$

$$l 1,0040 = 0,0017489$$

$$l 0,0505 = (-2),7031448$$

§. 84. Definiatur nunc differentialis dr valor

$$l - \text{tang} (e+z) = 9,2728529$$

$$l \sin. n = 9,0796762$$

$$l (\text{cof. } r)^2 = 19,9852164$$

$$38,3377455 - 40$$

$$l \text{coeff. } dn = (-2),3377455$$

$$\text{coeff. } dn = 0,02176$$

$$l \text{cof. } n = 9,9968431$$

$$l (\text{cof. } r)^2 = 19,9852164$$

$$29,9820595$$

$$l (\text{cof. } (e+z))^2 = 19,9850042$$

$$l \text{coeff. } de + dz = (-1),9970553 \text{ hincque}$$

dr

$$dr = 1,4268 \cdot dm - 290156 \cdot dk + 0,9974 \cdot dp - 0,9974 \cdot dq + 0,0719 \cdot dn$$

$$l 1,4268 = 0,1543768$$

$$l 290156 = 5,4626315$$

$$l 0,9974 = (-1),9988042$$

$$l 0,0719 = (-2),8567289$$

Porro l -fin. $(e+z) = 9,2653550$

$$l \text{ cof. } n = 9,9968431$$

$$19,2621981$$

$$l \text{ cof. } s = 9,9998937$$

$$l \text{ coeff. } -dn = (-1),2623044$$

$$\text{coeff. } -dn = 0,1829$$

$$l \text{ cof. } (e+z) = 9,9925021$$

$$l \text{ fin. } n = 9,0796762$$

$$19,0721783$$

$$l \text{ cof. } s = 9,9998937$$

$$l \text{ coeff. } de+dz = (-1),0722846 \text{ hincque}$$

$$ds = 0,16967 \cdot dm - 34503 \cdot dk + 0,1186 \cdot dp$$

$$- 0,1186 \cdot dq - 0,1770 \cdot dn$$

$$l 0,16967 = (-1),2296061$$

$$l 34503 = 4,5378608$$

$$l 0,1186 = (-1),0740335$$

$$l 0,1770 = (-1),2479733$$

§. 85. His praeparatis quaeramus valorem ipsius df

$$l(\text{fin. } b)^2 = 17,4228492$$

$$l(\text{fin. } (u-q-r))^2 = 18,6563614$$

$$l \text{ coeff. } dq+dr = (-2),7664878$$

B b 2

coeff.

196 EMENDATIO TABULARVM ASTRONOMIC.

$$\text{coeff } dq + dr = 0,05841$$

$$la = 4,5070232$$

$$lc = 5,0045148$$

$$l - \text{cof. } z = 9,8911799$$

$$l(\sin.t)^2 = 17,4228402$$

$$36,9003071$$

$$ly = 4,5044573$$

$$32,4019098$$

$$l - y \text{ cof. } s \text{ fin. } (u - q - r) = 23,8325317$$

$$8,5093781$$

$$4,6855749$$

$$l \text{ coeff. } + dk = 3,8838032$$

$$\text{coeff. } + dk = 7653''$$

$$lac(\sin.t)^2 = 27,0151072$$

$$lak = 3,9014564$$

$$l \text{ fin. } v = 9,7238703$$

$$40,6405229$$

$$lx^2 = 9,0089146$$

$$31,0310083$$

$$l - y \text{ cof. } s \text{ fin. } (u - q - r) = 23,8325317 + 10$$

$$l \text{ coeff. } + dm = (-3),7990766$$

$$\text{coeff. } + dm = 0,0063$$

$$lc = 5,0045148$$

$$l - \text{tang. } s = 8,3451375$$

l fin.

$$l(\sin. t)^2 = 17,4228492$$

$$30,7725015$$

$$l-y \text{ cof. } s \text{ fin. } (u-q-r) = 23,8325317 + 10$$

$$l \text{ coeff. } - ds = (-4),9399098$$

$$l c (\sin t)^2 = 22,4273640$$

$$l \text{ cot. } (u-q-r) = 10,6617465$$

$$33,0891105$$

$$l-y \text{ cof. } s \text{ fin. } (u-q-r) = 23,8325317 + 10$$

$$l \text{ coeff. } + dq + dr = (-1),2565788$$

$$\text{coeff. } + dq + dr = 0,14055$$

$$0,05841$$

$$\text{coeff. } + dq + dr = 0,23896 : \log. = (-1),3783252$$

Ex his inuenitur :

$$dj = -63'' = 0,3471. dm = 60074'' dk = 0,2382. dp$$

$$+ 0,00056. dq + 0,01733. dn =$$

§. 86. Restat ut dg definiamus secundum §. 68.

$$l(\text{cof. } g)^2 = 19,9999876$$

$$l - \sin. t = 8,7114246$$

$$28,7114122$$

$$l(\text{cof. } s)^2 = 19,9997874$$

$$8,7110248$$

$$l - \sin. (u-q-r) = 9,3281807$$

$$l \text{ coeff. } + ds = (-1),3834441$$

$$l(\text{cof. } g)^2 = 19,9999876$$

$$l - \text{tang. } s = 8, 3451375$$

$$l - \text{col. } t = 9, 9994244$$

$$38, 3445495$$

$$l - \text{fin. } (u - q - r) = 9, 3281807 + 30$$

$$l \text{ coeff. } + df = (-1), 0103688$$

$$\text{coeff. } + df = 0, 10384$$

$$l(\text{col. } g)^2 - \text{tang. } s = 28, 3451251$$

$$l - \text{fin. } t = 8, 7114246$$

$$37, 0565497$$

$$l - \text{fin. } (u - q - r) = 9, 328187$$

$$27, 7283690$$

$$l \text{ cot. } (u - q - r) = 10, 6617465$$

$$l \text{ coeff. } - dq - dr = (-2), 3901155$$

$$\text{coeff. } - dq - dr = 0, 02455 \text{ hincque}$$

$$dg = -6'' 0, 10384. df + 0, 006. dm - 1219''. dk$$

$$+ 0, 0042. dp - 0, 0287. dq - 0, 0445. dn$$

atque loco df restituto valore $63''$ prodibit

$$0 = 0, 006. dm - 1219''. dk + 0, 0042. dp$$

$$- 0, 0287. dq - 0, 0445. dn$$

§. 87. Ex his igitur tribus observationibus, earumque cum tabulis comparatione affecti sumus sequentes sex aequationes :

$$\text{I. } -264'' = 0, 1902. dm - 68035''. dk + 0, 1273. dp$$

$$- 0, 0001. dq + 0, 0479. dn$$

$$\text{II. } 20'' = 0, 01062. dm - 4491''. dk + 0, 01104. dp$$

$$- 0, 01098. dq - 0, 3480. dn$$

III.

$$\text{III. } -5'' = 0,1294.dm + 58612''.dk + 0,0670.dp$$

$$- 0,00028.dq - 0,0019.dn$$

$$\text{IV. } -70'' = 0,0539.dm - 6158''.dk + 0,0357.dp$$

$$- 0,0361.dq + 0,03708.dn$$

$$\text{V. } -63'' = 0,3471.dm - 60074''.dk + 0,2382.dp$$

$$+ 0,00056.dq + 0,01733.dn$$

$$\text{VI. } 0 = 0,006.dm - 1219''.dk + 0,0042.dp$$

$$- 0,0287.dq - 0,0445.dn.$$

inter quas aequationes quarta nobis aliquantum suspecta esse debet, eo quod orta est ex discrimine latitudinis obseruatae, et per tabulas inuentae, satis enormi scilicet $70''$: quamobrem reliquis quinque aequationibus uti conueniet. Vltima autem aequatio praebet:

$$dm = 203166''.dk - 0,7.dp + 4,783.dq + 7,416.dn$$

quae in prima substituta dat hanc:

$$-264'' = -29393''.dk - 0,0058dp + 0,9096.dq + 1,4585.dn$$

ex qua deducitur

$$dn = -181'' + 20153''.dk + 0,00398 dp - 0,62363 dq$$

et

$$dm = -1342'' + 352622''.dk - 0,67dp + 0,158 dq$$

Hi valores in aequatione secunda substituti dabunt

$$dq = -148'' + 39647''.dk - 0,01277.dp$$

$$dn = -89'' - 4572''.dk + 0,01194.dp$$

$$dm = -1365'' + 358886''.dk - 0,67202.dp$$

In subsidium vocentur aequationes tertia et quinta, atque habebitur

$$0 = -177'' + 105050''.dk + 0,01968.dp$$

et

$$0 = -410'' + 64439''.dk + 0,00518.dp$$

ex quibus si eliminetur dp , deducetur

dk

$$dk = \frac{177}{34918} = 0,003635$$

hincque retrogrediendo obtinebitur

$$dp = 10417'' = 2^{\circ}, 53', 37''$$

$$dm = -7061'' = -1^{\circ}, 57', 40''$$

$$dq = -137'' = -2', 17''$$

$$dn = 19'' = +19''$$

§. 88. His igitur correctionibus inuentis Tabulae mercurii sequenti modo se habebunt. Primo scilicet tabula motus medii mercurii, quam assumimus, usurpari poterit, verum ab anomalia media ad quoduis tempus ex his tabulis inuenta constanter subtrahi debet $1^{\circ}, 57', 40''$, ita vt ad initium huius seculi A. 1701 pro mercuriano Londinensi fuerit anomalia media mercurii $8S, 2^{\circ}, 4', 20''$. Secundo ex centricitas orbitae mercurii vera excedit eam, quae in tabulis est assumpta, eritque ea $= \frac{20924}{100000}$ atque huius excentricitatis logarithmus est $= (-1), 3212338$. Tertio longitudo aphelii a prima stella arietis erit $= 7S, 16^{\circ}, 41', 37''$. Quarto longitudo nodi ascendentis ab eodem termino est $= 0S, 15^{\circ}, 59', 43''$; et quinto inclinatio orbitae $= 6^{\circ}, 54', 19''$.

§. 89. Cum nunc hae tabulae correctae cum veritate exactissime consentire debeant, si quidem obseruationes, quibus sum usus, summa cura sint factae; earum ope ad quod vis tempus locus mercurii verus poterit assignari, isque adeo geocentricus, si tabulae solares supra correctae simul adhibeantur. Quo igitur certitudo harum tabularum tam mercurii, quam solis ad obseruationes examinari queat, inuestigabo per illas transitum mercurii per solem, qui huius anni mense Aprili intra dies 21 et 22

contingere debet : quem in finem ante omnia tam loca solis quam mercurii ad meridiem vtriusque diei determinari oportet , vt quo inter illos meridies momento transitus mercurii per solem celebretur , colligi queat : computabo autem haec loca ad tempus medium pro meridiano Londinensi , quia inde conclusio ad quascunque regiones transferri potest.

§. 90. Incipiamus a loco solis , quem ad meridiem cum diei 21 tum 22 Aprilis huius anni 1740 quaeramus , qui annus cum sit bisextilis , dies computari debent 22 et 23. Erit igitur

		Anomalia media solis			
A. 1721	.	6 S,	13°,	10′,	14″
Anni 19	.	11,	29,	8,	24
April. d. 22	:	3,	20,	23,	18
		10,	2°,	41′,	56″
				59′,	8″
April. d. 23.		10,	3°,	41′,	4″

Erit ergo pro meridiano Londinensi et stilo veteri

A. 1740		Anomalia media terrae
meridie Aprilis 21		10 S, 2°, 41′, 56″
meridie Aprilis 22		10 S, 3, 41, 4

Ad has anomalias medias quaerantur iam anomaliae excentri per excentricitatem orbitae terrae correctam methodo supra tradita. Priore nempe die erit $x = 10S, 2^\circ, 41', 56''$, atque $\text{fin. } x = - \text{fin. } 57^\circ, 18', 4''$, vnde sequens orietur calculus :

Tom. XII.

C c

l-x

$$\begin{array}{r}
 l - x = 9, 9250651 \\
 \text{subtr.} \quad 6, 4583825 \\
 \hline
 3, 4666826 \\
 \text{num. } 2929'' = 48', 49'' \\
 \text{addatur } x = 10 S, 2^\circ, 41' 56'' \\
 \hline
 10 S, 3^\circ, 30', 45'' \\
 \text{ab} \quad 12 S \\
 \hline
 56^\circ, 29', 15''
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 l - \text{fin.} = 9, 9210438 \\
 \text{subtr.} \quad 6, 4583825 \\
 \hline
 3, 4626613 \\
 \text{num. } 2902'' = 48', 22'' \\
 x = 10 S, 2^\circ, 41', 56'' \\
 \hline
 v = 10 S, 3^\circ 30', 19'' \text{ anomalia excentri.}
 \end{array}$$

Pro sequente meridie est $x = 10 S, 3^\circ, 41', 4''$, et
 fin. $x = -\text{fin. } 56^\circ, 18', 56''$

$$\begin{array}{r}
 l - \text{fin. } x = 9, 9201836 \\
 \quad \quad \quad 6, 4583825 \\
 \hline
 3, 4618011 \\
 \text{num. } 2896'' = 48', 16'' \\
 x = 10 S, 3^\circ, 41', 4'' \\
 \hline
 10 S, 4^\circ, 29', 20'' \\
 \text{ab} \quad 12 S \\
 \hline
 55^\circ, 30', 40''
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 l - \text{fin.} = 9, 9160516
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6, 4583825 \\
 \hline
 3, 4576691 \\
 \text{num. } 2868'' = 47', 48'' \\
 x = 10 S, 3^\circ, 41', 4'' \\
 \hline
 10 S, 4^\circ, 28', 52'' \\
 12 S
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 55^\circ, 31', 8'' \\
 l - \sin. = 9, 9160900 \\
 6, 4583825 \\
 \hline
 3, 4577075
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{num. } 2869'' = 47', 49'' \\
 x = 10 S, 3^\circ, 41', 4'' \\
 \hline
 10 S, 4^\circ, 28', 53''
 \end{array}$$

$v = 10 S, 4^\circ, 28', 53''$ Anomalia excentri.

§. 91. Hinc ad haec tempora reperitur distantia terrae a sole $y = a + k a \cos. v$. At est pro prior meridie $\cos. v = \cos. 56^\circ, 29', 41'' = \sin. 33^\circ, 30', 19''$;

pro posteriore meridie vero $\cos. v = \cos. 55^\circ, 31', 7'' = \sin. 34^\circ, 28', 53''$.

Pro prior meridie

$$\begin{array}{r}
 l \cos. v = 9, 7419500 \\
 l k a = 3, 2271923 \\
 \hline
 2, 9691423
 \end{array}$$

num. = 931.

Ergo distantia terrae a sole $y = 100931$

et $l y = 5, 0040203$

Pro altero meridie

$$l \text{ cof. } v = 9, 7529228$$

$$l \text{ k a} = 3, 2271923$$

$$\hline 2, 9801151$$

$$\text{numerus} = 955.$$

$$\text{Ergo distantia terrae a sole } y = 100955$$

$$\text{et } l y = 5, 0041278$$

§. 92. Anomalia vera z reperietur ex hac aequatione
 $\text{cof. } z = \frac{ka \text{ fin. tot.}}{y} + \frac{a \text{ cof. } v}{y}$

Ergo pro priore meridie

$$l \text{ k a fin. tot.} = 13, 2271923$$

$$l y = 5, 0040203$$

$$\hline 8, 2231720$$

$$\text{num.} = 167175$$

$$l \text{ cof. } v = 9, 7419500$$

$$l a = 5, 0000000$$

$$\hline 14, 7419500$$

$$l y = 5, 0040203$$

$$\hline 9, 7379297$$

$$\text{num.} = 5469274$$

$$\hline 167175$$

$$\text{cof. } z = 5636449 = \text{fin. } 34^{\circ}, 18', 29''$$

$$\text{Ergo } z = 10 \text{ S}, 4^{\circ}, 18', 29''$$

$$\text{addatur } p = 8 \text{ S}, 8, 25, 42$$

longitudo terrae = $6 \text{ S}, 12^{\circ}, 44', 11''$ a prima stella arietis,
 hinc longitudo solis = $0 \text{ S}, 12^{\circ}, 44', 11''$ vera

ob

ob lucis propogationem subtr. $20''$ hinc
 longitudo folis apparens = $0S, 12^{\circ}, 43', 51''$

Pro meridie fequente.

$$lka \text{ fin. tot.} = 13, 2271923$$

$$ly = 5, 0041278$$

$$8, 2230645$$

$$\text{numerus} = 167134$$

$$l \text{ cof. } v = 9, 7529228$$

$$l \frac{z}{a} = 0, 0041278$$

$$9, 7487950$$

$$\text{num:} = 5607833$$

$$167134$$

$$\text{cof. } z = 5774967 = \text{fin. } 35^{\circ}, 16', 29''$$

$$\text{Ergo } z = 10S, 5^{\circ}, 16', 29''$$

$$\text{addatur } p = 8, 8, 25, 42$$

$$\text{longitudo terrae} = 6S, 13^{\circ}, 42', 11''$$

$$\text{hinc longitudo folis} = 0S, 13^{\circ}, 42', 11'' \text{ vera}$$

$$\text{ob lucis propogationem subtr.} \quad 20''$$

$$\text{longitudo folis} = 0S, 13^{\circ}, 41', 51'' \text{ appatens}$$

§. 93. Definitis locis folis progrediamur ad mercurii loca inuestiganda, ac primo quidem anomalie mediae ita prodibunt ex tabulis correctis.

206 EMENDATIO TABULARVM ASTRONOMIC.

A. 1721	8 S, 16° 34', 20''	
19	10 , 16', 42 , 21	
April.	0, 8, 18, 36	
<hr/>		
d. 22	7 S, 11°, 35', 17''	
	3, 0, 14, 53	
<hr/>		
d. 23	10 S, 11, 50', 10''	Anom. media
	3, 4, 7, 25	
<hr/>		
	10 S, 15, 42, 42	Anom. media

Pro priore meridie erit ergo $x = 10 S, 11^{\circ}, 50', 10''$

et $\sin. x = - \sin. 48^{\circ}, 9', 50''$

pro sequente vero meridie $x = 10 S, 15^{\circ}, 42', 42''$

et $\sin. x = - \sin. 44^{\circ}, 17', 18''$

Hinc reperietur anomalia excentri sequenti modo pro priore meridie.

$l - \sin. x = 9, 8721888$

subtr. $5, 3643411$

 $4, 5078477$

num: $= 32199'' = 8^{\circ}, 56', 39''$

$x = 10 S, 11^{\circ}, 50', 10''$

 $10 S, 20^{\circ}, 46', 49''$

ab $12 S$

 $39^{\circ}, 13', 11''$

$- \sin. = 9, 8009204$

$5, 3643411$

 $4, 4365793$

num:

PER LOCA PLANETARVM GEOCENTRICA 207

sum. = 27326'' = 7°, 35', 26''

x = 10 S, 11, 50, 10

10 S, 19°, 25', 36''

ab 12 S

40°, 34', 24''

l - sin. = 9, 8131944

5, 3643411

4, 4488533

sum. = 28110'' = 7°, 48', 30''

x = 10 S, 11, 50, 10

10 S, 19°, 38', 40''

ab 12 S

40°, 21', 20''

l - sin. = 9, 8112592

5, 3643411

4, 4469181

sum. = 27984'' = 7°, 46', 24''

x = 10 S 11, 50, 10

10 S, 19°, 36', 34''

ab

12

40°, 23', 26''

l - sin. = 9, 8115712

5, 3643411

4, 4472301

sum.

$$\text{num.} = 28005'' = 7^{\circ}, 46', 45''$$

$$x = 10S, 11, 50, 10$$

$$\hline 10S, 19^{\circ}, 36', 55''$$

$$\text{ab } 12S$$

$$\hline 40^{\circ}, 23', 5''$$

$$l - \text{fin.} = 9, 8115193$$

$$5, 3643411$$

$$\hline 4, 4471782$$

$$\text{num.} = 28001'' = 7^{\circ}, 46', 41''$$

$$x = 10S, 11, 50, 10$$

$$\hline 10S, 19, 36, 51''$$

$$\text{ab } 12S$$

$$\hline 40^{\circ}, 23', 9''$$

$$l - \text{fin.} = 9, 8115288$$

$$5, 3643411$$

$$\hline 4, 4471877$$

$$\text{num.} = 28002'' = 7^{\circ}, 46', 42''$$

$$x = 10S, 11, 50, 10$$

$$v = 10S, 19^{\circ}, 36', 52'' \text{ anomalia excentri}$$

Pro sequente meridie

assumatur prior differentia $7^{\circ}, 46', 42''$

$$x = 10S, 15, 42, 42$$

$$\hline 10S, 23^{\circ}, 29', 24''$$

$$\text{ab } 12S$$

$$\hline 36^{\circ}, 30', 36''$$

$l - \text{fin.}$

PER LOCA PLANETARVM GEOCENTRICA 209

l - fin. = 9, 7744899

5, 3643411

4, 4101488

num. 25712'' = 7°, 8', 32''

x = 10S, 15, 42, 42

10S, 22°, 51', 14''

ab 12S

37°, 8', 46''

l - fin. = 9, 7806760

5, 3643411

4, 4163349

num. = 26081'' = 7°, 14', 41''

x = 10S, 15, 42, 42

10S, 22, 57, 23''

ab 12S

37° 2' 37''

- fin. = 9, 7799013

5, 3643411

4, 4155602

num. = 26035'' = 7°, 13', 55''

x = 10S, 15, 42, 42

10S, 22°, 56', 37''

ab 12S

37°, 3', 23''

l - fin. = 9, 7800296

5, 3643411

4, 4156885

Tom. XII.

D d

num.

$$\text{num.} = 26043'' = 7^{\circ}, 14', 3''$$

$$x = 10S, 15, 42, 42$$

$$\hline 10S, 22^{\circ}, 56', 45''$$

$$\text{ab } 12S$$

$$\hline 37^{\circ}, 3', 15''$$

$$l - \text{fin.} = 9, 7800073$$

$$5, 3643411$$

$$\hline 4, 4156662$$

$$\text{num.} = 26042'' = 7^{\circ}, 14', 2''$$

$$x = 10S, 15, 42, 42$$

$$v = 10S, 22^{\circ}, 56', 44'' \text{ anomalia excentri}$$

§. 94. Ex anomalia excentri reperietur primo distantia mercurii a sole $y = a + ka \cos v$

Pro priorie meridie

$$\cos v = \sin. 49^{\circ}, 36', 52''$$

$$la = 4, 5878232$$

$$-lk = (-1), 3212338$$

$$\hline lka = 3, 9090570$$

$$l \cos v = 9, 8817849$$

$$\hline 3, 7908419$$

$$ka \cos v = 6178$$

$$a = 38710$$

$$y = 44888 \text{ distantia Mercurii a sole}$$

$$ly = 4, 6521303$$

Pro sequente meridie

$$\cos v = \sin. 52^{\circ}, 56', 44''$$

$$lka = 3, 9090570$$

l cos.

$$l \text{ cof. } v = 9, 9020390$$

$$\underline{3, 8110960}$$

$$ka \text{ cof. } v = 6472$$

$$a = 38710$$

$$y = 45182 \text{ distantia Mercurii a sole}$$

$$ly = 4, 6549654$$

§. 95. Nunc reperietur anomalia vera z ex hac aequatione $\text{cof. } z = \frac{ka \text{ fin. tot.}}{y} + \frac{a \text{ cof. } v}{y}$

Pro priore meridie

$$lka \text{ fin. tot.} = 13, 9090570$$

$$ly = 4, 6521303$$

$$\underline{9, 2569267}$$

$$\frac{ka \text{ fin. tot.}}{y} = 1806869$$

$$la = 4, 5878232$$

$$l \text{ cof. } v = 9, 8817849$$

$$\underline{14, 4696081}$$

$$ly = 4, 6521303$$

$$\underline{9, 8174778}$$

$$\frac{a \text{ cof. } v}{y} = 6568676$$

$$\underline{1806869}$$

$$\text{cof. } z = 8375545 = \text{fin. } 56^\circ, 52', 57''$$

Ergo $z = 10S, 26^\circ, 52', 57''$ anomalia vera

Pro sequente meridie

$$lka \text{ fin. tot.} = 13, 9090570$$

$$ly = 4, 6549654$$

$$\underline{9, 2540916}$$

$$\frac{ka \text{ fin. tot.}}{y} = 1795113$$

D d 2

la =

$$la = 4,5878232$$

$$l \text{ cof. } v = 9,9020390$$

$$\hline 14,4898622$$

$$ly = 4,6549654$$

$$\hline 9,8348968$$

$$\frac{l \text{ cof. } v}{2} = 6837492$$

$$\hline 1795113$$

$$\text{cof. } z = 8632605 = \text{fin. } 59^\circ, 41', 5''$$

Ergo $z = 10S, 29^\circ, 41', 5''$ Anomalia vera.

§. 96. Antequam ulterius progrediamur, necesse est ut in distantiam aphelii a nodo ascendente inquiramus, quae posita est $= e$, et ex hac aequatione inuenitur.

$$\text{tang. } e = \frac{\text{tang. } (p-q)}{\text{cof. } n}$$

$$\text{Est vero } p = 7S, 16^\circ, 41', 37''$$

$$q = 0S, 15^\circ, 39', 43''$$

$$\hline p - q = 7S, 1^\circ, 1', 54''$$

$$n = 6^\circ, 54', 19''$$

$$\text{tang. } (p-q) = \text{tang. } 31^\circ, 1', 54''$$

$$l \text{ tang. } (p-q) = 9,7793173$$

$$l \text{ cof. } n = 9,9968382$$

$$l \text{ tang. } e = 9,7824791 = l \text{ tang. } 31^\circ, 12', 58''$$

$$\text{Ergo } e = 7S, 1^\circ, 12', 58''$$

Hicque valor est constans, et pro omni tempore idem manet.

§. 97. Sequitur iam determinanda longitudo mercurii a nodo ascendente r per hanc aequationem:

$$\text{tang. } r = \text{cof. } n \text{ tang. } (e+z)$$

Pro.

Pro priore meridie.

$$e = 7S, 1^{\circ}, 12', 58''$$

$$z = 10S, 26^{\circ}, 52', 57''$$

$$e+z = 5S, 28^{\circ}, 5', 55''$$

$$\text{tang. } (e+z) = -\text{tang. } 1^{\circ}, 54', 5''$$

$$l - \text{tang. } (e+z) = 8,5211068$$

$$l \text{ cof. } n = 9,9968382$$

$$l - \text{tang. } r = 8,5179450 = l \text{ tang. } 1^{\circ}, 53', 15''$$

$$\text{Ergo } r = 5S, 28^{\circ}, 6', 45''$$

Pro fequente meridie

$$e = 7S, 1^{\circ}, 12', 58''$$

$$z = 10S, 29^{\circ}, 41', 5''$$

$$e+z = 6S, 0^{\circ}, 54', 3''$$

$$l \text{ tang. } (e+z) = 8,1965556$$

$$l \text{ cof. } n = 9,9968382$$

$$l \text{ tang. } r = 8,1933938 = l \text{ tang. } 0^{\circ}, 53', 39''$$

$$\text{Ergo } r = 6S, 0^{\circ}, 53', 39''$$

§. 98. Quod si ad longitudinem mercurii a nodo r addatur longitudo nodi a prima stella arietis q , obtinebitur mercurii longitudo heliocentrica a prima stella arietis.

Pro primo meridie

$$q = 0S, 15^{\circ}, 39', 43''$$

$$r = 5S, 28^{\circ}, 6', 45''$$

$$\text{longitudo} = 6S, 13^{\circ}, 46', 28'' \text{ mercurii heliocentrica}$$

Pro altero meridie

$$q = 0S, 15^{\circ}, 39', 43''$$

$$r = 6S, 0^{\circ}, 53', 39''$$

$$\text{longitudo} = 6S, 16^{\circ}, 33', 22'' \text{ mercurii heliocentrica}$$

Latitudo autem heliocentrica ad boream respiciens s inuenietur ex hac aequatione $\sin s = \sin n \sin (e+z)$
Quare erit

Pro meridie priore.

$$\sin (e+z) = \sin. 1^{\circ}, 54', 5''$$

$$l \sin. (e+z) = 8, 5208680$$

$$l \sin. n = 9, 0800068$$

$$l \sin. s = 7, 6008748 = l \sin. 0^{\circ}, 13', 43''$$

Ergo $s = 0^{\circ}, 13', 43''$ latitudo heliocentrica.

Pro meridie sequente.

$$\sin. (e+z) = - \sin. 0^{\circ}, 54', 3''$$

$$1 - \sin. (e+z) = 8, 1965020$$

$$l \sin. n = 9, 0800068$$

$$1 - \sin. s = 7, 2765088 = l \sin. 0^{\circ}, 6', 30''$$

Ergo $s = -0^{\circ}, 6', 30''$, latitudo heliocentrica australis.

§. 99. Inuentis mercurii locis heliocentricis, pergo ad eius loca geocentrica definienda. Ac primo quidem pro meridie priore erit

$$\text{Distantia terrae a sole } c = 100931$$

$$\text{et } lc = 5, 0040203$$

$$\text{longitudo terrae } u = 6S, 12^{\circ}, 44', 11''$$

Nunc angulus quaeratur p TV = t , ex aequatione

$$\cot. t = \cot. (u-q-r) - \frac{c}{y \cos. s \sin. (u-q-r)}$$

$$\text{cum autem sit } u = 6S, 12^{\circ}, 44', 11''$$

$$\text{subtrahatur } q+r = 6S, 13^{\circ}, 46', 28''$$

$$\text{erit } u-q-r = 11S, 28^{\circ}, 57', 43''$$

$$\text{tang. } (u-q-r) = - \text{tang. } 1^{\circ}, 2', 17''$$

fin.

PER LOCA PLANETARVM GEOCENTRICA. 215

$$\sin. (u-q-r) = -\sin. 1^{\circ}, 2', 17''$$

$$\cot. (u-q-r) = -551919660$$

$$lc = 5,0040203$$

$$ly = 4,6521303$$

$$\hline 30,3518900$$

$$l \cos. s = 9,9999965$$

$$\hline 20,3518935$$

$$l \sin. (u-q-r) = 8,2580776$$

$$\hline 12,0938159$$

$$\frac{c}{2 \cos. s \sin. (u-l-r)} = 1241126000$$

$$\hline - 551919660$$

$$\cot. t = 689206340 = \text{tang. } 89^{\circ}, 10', 7''$$

$$\text{Ergo } t = 6 \text{ S}, 0^{\circ}, 49', 53''$$

Pro sequente meridie

$$\text{Distantia terrae a sole } c = 100955$$

$$\text{et } lc = 5,0041278$$

$$\text{Longitudo terrae } u = 6 \text{ S}, 13^{\circ}, 42', 11''$$

$$\text{subtr. } q+r = 6 \text{ S}, 16^{\circ}, 33', 22''$$

$$\hline u-q-r = 11 \text{ S}, 27^{\circ}, 8', 49''$$

$$\cot. (u-q-r) = -\text{tang. } 87^{\circ}, 8', 49''$$

$$\sin. (u-q-r) = -\sin. 2^{\circ}, 51', 11''$$

$$\cot. (u-q-r) = -200657567$$

$$lc = 5,0041278$$

$$ly = 4,6549654$$

$$\hline 30,3491624$$

col.

$$\begin{aligned}
 & \text{I cof. } s = 9,9999992 \\
 & \quad \quad \quad \underline{20,3491632} \\
 & \text{I-fin.}(u-q-r)8,6970069 \\
 & \quad \quad \quad \underline{11,6521563} \\
 & - \frac{c}{y \text{ cof. } s \text{ fin.}(u-q-r)} = -448907000 \\
 & \quad \quad \quad \underline{-200657567} \\
 & \text{cot. } t = 248249433 = \text{tang. } 87^{\circ}, 41', 35'' \\
 \text{Ergo } t & = 6 \text{ S}, 2^{\circ}, 18', 25''
 \end{aligned}$$

§. 100. Ex his reperitur longitudo mercurii geocentrica = $u - t$. Quare erit

Pro priori meridie

$$\begin{aligned}
 u & = 6 \text{ S}, 12^{\circ}, 44', 11'' \\
 t & = 6 \text{ S}, 0^{\circ}, 49', 53'' \\
 \hline
 u - t & = 0 \text{ S}, 11^{\circ}, 54', 18''
 \end{aligned}$$

quae est longitudo mercurii geocentrica a prima stella arietis.

Pro sequenti meridie

$$\begin{aligned}
 u & = 6 \text{ S}, 13^{\circ}, 42', 11'' \\
 t & = 6 \text{ S}, 2^{\circ}, 18', 25'' \\
 \hline
 u - t & = 0 \text{ S}, 11^{\circ}, 23', 46''
 \end{aligned}$$

quae est longitudo mercurii geocentrica.

Latitudo autem geocentrica g , oriatur ex hac aequatione

$$\text{tang. } g = \frac{\text{fin. } t \text{ tang. } s}{\text{fin.}(u-q-r)}$$

Ergo pro priori meridie

$$\begin{aligned}
 \text{I-fin. } t & = 8,1616658 \\
 \text{I tang. } s & = 7,6008779 \\
 \hline
 & = 15,7625437
 \end{aligned}$$

$$l - \text{fin. } (u - q - r) = 8, 2580776$$

$$l \text{ tang. } g = 7, 4044061 = l \text{ tang. } 0^\circ, 8', 44''$$

Ergo latitudo geocentrica = $0^\circ 8', 44''$ Borealis

pro altero meridie

$$l - \text{fin. } t = 8, 6047970$$

$$l - \text{tang. } s = 7, 2765095$$

$$15, 8813065$$

$$l - \text{fin. } (u - q - r) = 8, 6970069$$

$$l - \text{tang. } g = 7, 1842996 = l - \text{tang. } 0^\circ, 5', 15''$$

Ergo latitudo geocentrica = $0^\circ 5', 15''$ Australis.

§. 101. Longitudines istae inuentae geocentricae sunt verae, in quibus mercurius conspiceretur, si lumen in instanti propagaretur: quamobrem eae ad longitudes apparentes per sequentem aequationem reducentur.

Pro primo meridie

$$\text{longitudo } \zeta \text{ geocentrica} = 0S, 11^\circ, 54', 18''$$

$$\text{longitudo } \zeta \text{ heliocentrica} = 6S, 13^\circ, 46', 28''$$

$$6S, 1^\circ, 52', 10''$$

$$l - \text{cos. } 1^\circ, 52' = l - q = 9, 9997720$$

$$l \frac{c}{s} = 3, 8140656$$

$$6, 1857064$$

$$4, 6855749$$

$$1, 5001315$$

$$\text{Ergo } \frac{3}{c} q = - 32''$$

longitudo ☿ geocentrica = 0S, 11°, 54', 18''

longitudo terrae = 6S, 12°, 44', 11''

6S, 0°, 49', 53

l - cof. 0°, 50' = l - m = 9, 9999541

l^c_r = 4, 0201540

5, 9798001

4, 6855749

1, 2942252

Ergo $-\frac{r}{c} m$ = 20''

$+\frac{s}{c} q$ = -32''

Aequatio = - 12''

quae 12'' a longitudine observata subtrahi deberent; et hanc obrem ad longitudinem veram mercurii addi debent. Quocirca priori meridie fuit apprensus mercurii longitudo = 0S, 11°, 54', 30''.

Pro sequente meridie

longitudo. ☿ geocentrica = 0S, 11°, 23', 46''

longitudo. ☿ heliocentrica = 6S, 16°, 33', 22''

Differentia = 6S, 5°, 9', 36''

l cof. diff. = l - q = 9, 9982433

l^c_s = 3, 8140656

6, 1841777

4, 6855749

1, 4986028

$r q$ = - 31'', 5

longi-

longitudo ♀ geocentrica = 0S, 11°, 23', 46''

longitudo terrae = 6S, 13°, 42', 11''

Diff. = 6S, 2°, 18', 25''

1 col. diff = $l - m = 9, 9996500$

$l^c = 4, 0201540$

5, 9794960

4, 6855749

1, 2939211

Ergo $-\frac{7}{c} m = + 19'' 6$

$+\frac{5}{c} q = - 31'' 5$

Aequatio = - 12''

Longitudo ergo geocentrica inuenta augeri debet 12'',
unde longitudo mercurii apparens pro fequente meridie pro-
dibit = 0S, 11°, 23', 58''

§. 102. His inuentis erit ad meridiem diei 21 Apri-
lis A. 1740 tempore medio sub meridiano Londinenfi,
vt fequitur.

Longitudo folis apparens 0S, 12°, 43', 51''

Longitudo ♀ geocentrica 0S, 11°, 54', 30''

Latitudo mercurii geocentrica 0°, 8', 44'' Borealis.

At ad meridiem diei fequentis, qui eft 22 Aprilis tem-
pore medio sub meridiano Londinenfi pariter erit

Longitudo folis apparens 0S, 13°, 41', 51''

Longitudo ♀ geocentrica 0S, 11°, 23', 58''

Latitudo ♀ geocentrica 0°, 5', 15'' australis.

Vt inueniatur tempus coniunctionis ☉ et ♀, quo longitudi-
nes vtriusque fient aequales, apparet primum coniunctio-
nem ante meridiem diei 21 Aprilis contingere debere.

Namque excessus longitudinis solis super longitudinem mercurii illo meridie est $49'$, $21''$, sequenti vero meridie est excessus 2° , $17'$, $83''$. Tempore ergo 24 horarum mercurius a sole secundum longitudinem recedit per 1° , $28'$, 32 . Hinc inueniri poterit tempus ante meridiem diei 21 Aprilis, quo ☿ a sole per spatium $49'$, $21''$ iam recessit per regulam auream

$$1^\circ, 28', 32'' : 24^b = 49', 21'' : 13^b, 22'$$

sub meridiano Londinensi ergo coniunctio ☿ cum sole continget Aprilis die 20 : 10^b , $38'$ ideoque nocte cum sol iam occidit, ex quo haec coniunctio Londini non erit conspicua. Hic autem Petropoli haec coniunctio incidet in diem 21 Aprilis mane 0^b , $58'$, hoc est mox post mediam noctem, tempore ciuili. Verum Obdoraë, quo Cel. De l' Isle Noster huius coniunctionis causa est profectus, haec coniunctio incidet in eundem diem 21 Aprilis secundum tempus ciuile mane 3^b , $18'$ quo tempore isto loco sol iam supra horizonteram versatur : ita ut ista coniunctio Obdoraë conspicua esse debeat.

§. 103. Videamus iam, an in hac coniunctione ☿ vere in discum solis intret, et quousque se in solem immergere debeat. Ex locis computatis autem patet, latitudinis mutationem tempore 24 horarum esse $13'$, $59''$, unde tempore 13^b , $22'$ mutatio latitudinis erit $7'$, $47''$. Tempore igitur coniunctionis mercurii et solis, latitudo mercurii erit $16'$, $31''$; vix igitur ac ne vix quidem mercurius solis discum attinget, quia latitudo mercurii minor non est, quam semidiameter solis apparens. Hoc autem intelligendum, quando spectator in centro terrae versaretur : quod si is autem in loco boreali constituatur, ubi hoc tem-

tempore solem prope horizontem cernit, propter parallaxin latitudo mercurii aliquantulum minor ipsi apparebit, atque differentia exsurget prope ad $8''$. Quamobrem Obdoraë, vbi haec coniunctio, sole horizontem tenente, contingit, latitudo mercurii apparebit $16'$, $23''$. vnde si diameter solis apparens maior fuerit $32'$, $46''$, mercurius per solis discum transire conspicietur. Tabulae autem Astronomicae apparentem diametrum solis hoc tempore maiorem non ostendunt quam $32'$, ex quo concludendum est mercurium in hac coniunctione extra limbum solis versari debere. Scilicet momento coniunctionis, quo mercurius et centrum solis eandem tenent longitudinem; post coniunctionem autem, quia latitudo mercurii decrescit singulis horis $35''$; vna hora post coniunctionem latitudo mercurii erit $15'$, $48''$; atque tum mercurius secundum longitudinem a centro solis distabit $3'$, $41''$, in qua distantia solis latitudo adhuc maior quam $15'$, $34''$. Quod si autem inuestigemus, quam prope post coniunctionem mercurius ad centrum solis accedat, inueniemus minimam distantiam esse $16'$, $11''$, idque Obdoraë, vbi sol prope horizontem hoc tempore spectatur, atque per parallaxin latitudo mercurii apparens diminuitur, quae distantia cum adhuc maior sit, quam semidiameter solis apparens, sequitur omnino secundum istas tabulas correctas, quibus sum vsus, mercurium per discum solis non esse transiturum.



DETERMINATIO EXACTIOR GRADVVM PARALLELORVM

AEQVATORIS et MERIDIANI

*in figura Telluris hypothetice sphaerica, aut (prouti per
recentissimam dimensionem stabilitur) sphaeroide.*

AVCTORE

C. N. de WINSHEIM.

Geographorum molimina, circa figuram Telluris determinandam, vsque ad *Riccioli* tempora, qui ipse huic operi inuigilauit, ex ipsius *Geographia Reformata* abunde constant; Recentiorum vero conatus, et praeclaris eorum de demensione telluris operibus editis, vberius perspiciuntur.

Plerique eorum, dum dimensionem terrae aggressi sunt, eam figuram habere *sphaericam*, tacite supposuerunt; hinc quoque ex arcu quodam meridiani cuiusdam, aut circuli maximi mensurato, magnitudinem totius globi terraquei, eiusque proin diametrum, peripheriam, superficiem et soliditatem, determinare allaborarunt.

Et quamuis in diuersas abierint sententias Eruditorum nonnulli, *Hugenio* et *Newtono* terram *sphaeroidem* esse, cuius diameter, axem data ratione superet. *Cassini* vero patre et filio diametrum ab axe superari affirmantibus; non desinere tamen magni nominis Viri qui Illustrissimorum Academiae nostrae Membrorum, *Marchionis Poleni* et *Wolfii* sententiam amplectentes, terram nihilominus pro *sphaerica* reputari, seque in dimensione a *Piccardo* in *Gal-
lia*, secundo proxime elapso instituto, acquiescere posse au-

tum.

tumarunt. His perpenſis, me rem haud inutilem ac ingratiſſimam facturum ratus, tabulam ſingulorum parallelorum, per partes aequatoris expreſſorum, denuo ad calculum reuocaui, et a variis, quibus diuerſi Geographorum libri ſciant, mendis purgaui. Adieci e regione quantitatem gradus paralleli, per hexapedas Gallicas, de nouo ad ductum praecedentis tabulae ſupputatas, vt et per pedes expreſſam Londinenſes; quoniam ratio harum menſurarum, ceteris notior erat, et maiori cum cura haud ita pridem in Academia noſtra determinata, vt facile cum Menſura hoc in Imperio uſitata comparari poſſit.

vid. Tab. A.

Eundem porro quem in priori columna Tabulae A. dedi, hic denuo ſiſto laterculum, cui, prouti titulus frontis innuit, non ſolum partes temporis partibus aequatoris reſpondentes iunxi, ſed etiam ulterius, gradum aequatoris cum gradibus parallelorum comparando, quis ille in horum vnoquoque valeat, per partes circuli aequae ac temporis, exprimere volui; hos ſiquidem laterculos, calculi Aſtronomici et Geographici moleſtiam certis in analogiis inſtituendis, quodammodo minuere poſſe conſido.

vid. Tab. B.

Anno tandem proxime elapſo, ad manus noſtras peruenit, liber Celeberrimi Academiae noſtrae Sodalis *de Maupertuis*, qui Figuram Telluris, vna cum laborum Sociis eruditis, in *Lapponia* aequae ac *Gallia*, maioribus ad id uſus, magisque exacte elaboratis inſtrumentis Aſtronomiſis, quam praecedentia quidem viderant ſecula, determinare aggreſſus erat.

Hoc

Hoc libro lecto, cupido animum incescit, parallelorum gradus in *Figura Telluris Sphaeroide*, inibi stabilita supputandi, illisque gradus meridiani iungendi, qui quidem ex comparatione gradus sub circulo polari mensurati, cum gradu sub Parallelo 49° a *Piccardo* iam ante mensurato, nunc autem curatius determinato, deducendi erant.

Communicavit mecum, hunc in finem benignissime methodum suam, Celeberrimus *Eulerus*, mire facilem et compendiosam, quam ipsissimis Viri Celeberrimi Verbis, bona cum eius venia, praemitto; quoniam ea mediante, quae mox exhibebuntur, confectae sunt Tabulae C. et D.

METHODVS

VIRI CELEBERRIMI LEONH. EVLERI

Determinandi gradus Meridiani pariter ac Paralleli Telluris secundum Mensuram a CELEB. *de Maupertuis* cum sociis institutam.

Ex duobus gradibus Meridiani exacte mensuratis, quorum alter sub ipso circulo polari compertus est 57438 hexap. Paris. alter sub elevatione Poli 49° 57183 hexap. Figura et magnitudo terrae ita determinatur, vt sit:

Semiaxis terrae = 3263626 hexap.

Semid. aequatoris = 3281570 hexap.

Hincque axis terrae ad diametrum aequatoris rationem teneat proxime vti

182 ad 183.

Ex

Ex his datis regulæ poterunt tradi, tam ad singulos Meridianorum gradus, quam ad gradus Parallelorum definiendos.

Problema. I.

Sub data Eleuatione Poli definire quantitatem unius gradus in Meridiano.

Solutio.

Bini casus sunt respiciendi, prior, si Eleuatio Poli *maior* sit, quam 45° , posterior, si *minor* sit quam 45° . Vtroque casu Eleuatio Poli bis sumatur, ac *priori* casu excessus supra 90° , posteriori defectus infra 90° . notetur; atque siue excessus siue defectus capiatur Logarithmus sinus, ad eumque perpetuo addatur iste Logarithmus

2,6718815

atque a summa subtrahatur Logarithmus sinus totius

10 0000000

Logarithmi residui quaeratur numerus respondens.

Iste numerus hoc modo inuentus, priori casu, quo Eleuatio Poli maior est, quam 45° , addatur ad 57117, 6 hexap. posteriori casu autem, quo Eleuatio Poli minor erat, quam 45° subtrahatur a 57117, 6 et numerus resultans dabit magnitudinem gradus Meridiani in hexapedis Parisinis. Q. E. I.

Exemplum. I.

Quaeratur gradus Meridiani sub ipso Aequatore

Tom. XII.

F f

Ele-

Elevatio Poli ergo est	0°
duplum eius - - -	0°
auferatur 2 - - -	90°
remanet - - -	90°
Log. fin. 90° =	10,0000000
addatur	2,6718815

Subtrahatur Log. fin. tot. 12,6718815

Numerus respondens 469,7

subtrahatur ab 57117,6

Gradus Meridiani = 56648 hexap. Parif. circa Aequatorem.

Exempl. 2.

Quaeratur Meridiani gradus sub ipso Polo.

Elevatio Poli est	90°
eius duplum	180°
ab eo subtrahatur	90°
remanet -	90°
Log. fin. 90° =	10,0000000
addatur	2,6718815

subtrah. Log. fin. tot. 12,6718815

Num. respond. 469,7

addatur ad 57117,6

Gradus Meridiani = 57587 hexap. Parif. sub ipso Polo.

Exempl. 3.

Quaeratur Meridiani Gradus sub Eleuatione Poli 49°

Ele-

Eleuatio Poli est 49°
 eius duplum 98°
 ab eo subtrahantur 90°
 remanent 80°

Logar. sin. $8^{\circ} = 9,1435553$
 addatur $2,6718815$

subtrah. Log. sin. tot. $11,8154368$

Numer. respond. $65,3$
 addatur ad $57117,6$

Gradus Merid. $= 57183$ hexap. Paris. in latit. 49°

Exempl. 4.

Quaeratur Gradus Meridiani sub circulo Polari

Eleuatio Poli est $66^{\circ} 30'$
 eius duplum 133°
 auferantur 90°

remanet 43°

Logar. sin. $43^{\circ} = 9,8337833$
 addatur $2,6718815$

$12,5056648$

Num. respond. $320,4$
 addatur $57117,6$

Gradus Merid. $= 57438$, hexap. Paris. sub circulo Polari.

Exemplum 5.

Queratur gradus Meridiani ad Latitudinem 60°

Eleuatio Poli est 60°

eius duplum 120°

auferantur 90°

remanet 30°

Log. sin. $30^\circ = 9,6989700$

addatur $2,6718815$

$12,3708515$

Numerus respond. $234,8$

addatur ad $57117,6$

Gradus Merid. $= 57352,$ Hexap. Parif. sub

Eleuatione Poli 60°

Problema II.

Ad datam Eleuationem Poli inuenire Gradum vnum in Parallelo.

Solutio.

Primo sumatur Logarithmus Cosinus Eleuationis Poli, ad eumque constanter addatur hic Logarithmus

$4,7591447$

a summa auferatur Logarithmus sinus totius, et Logarithmi residui quaeratur numerus respondens.

Secundo duplicetur Eleuatio Poli atque vel a duplo subtrahantur 90° vel ipsum duplum a 90° gradibus auferatur, prout Eleuatio Poli fuerit vel maior quam 45° vel minor.

nor.

nor. Vtroque dein casu capiatur Logarithmus sinus residui, ad eumque addatur Logarithmus Cofinus Eleuationis Poli, insuperque perpetuo addatur 2, 1947602 et a summa subtrahatur Logarithmus sinus totius bis sumtus nempe

2, 0000000

Logarithmi residui quaeratur numerus respondens, hincque priori casu, quo Eleuatio Poli maior est 45° addatur ad numerum supra inuentum, altero casu quo Eleuatio Poli minor est quam 45° subtrahatur a numero supra inuento, sicque prodibit magnitudo Gradus in Parallelo proposito.

Q. E. I.

Exempl. 1.

Quaeratur magnitudo vnus Gradus in ipso Aequatore

Eleuatio Poli ergo est 0°

Logar. cof, 0° = 10, 0000000

addatur 4, 7591447

14, 7591447

Num. respond. = 57430, 8

duplum Eleuationis Poli 0°

subtr. a 90°

remanet 90°

Log. sin. 90° = 10, 0000000

Log. cof. 0° = 10, 0000000

addatur 2, 1947602

subtrah. 2 log. sin. tot. 22, 1947602

F f 3

Num.

Num. resp.	156,6
subtrahatur ab	57430,8
<hr/>	
Gradus Aequat. =	57274 Hex. Paris.

Exempl. 2.

Quaeritur magnitudo vnus gradus in parallelo latitudinis 60°

Eleuatio poli est 60°

Log. cof. 60° =	9,6989700
addatur	4,7591447
<hr/>	
	14,4581147

Num. respond.	28715,4
Duplum Eleu. Poli est	120°
auferantur	90
	<hr/>
remanet	30°

Log. sin. 30° =	9,6989700
Log cof. 60° =	9,6989700
addatur	2,1947602
<hr/>	

subtr. 2. Log. sin. tot. 11,5927002

Num. respondens	39,1
addatur ad	28715,4
<hr/>	

Gradus Parall. =	28754½
Eleuatione Poli 60°	Hex. Paris. sub

Exempl. 3.

Quaeratur sub Eleuatione Poli 40° magnitudo vnus gradus in parallelo

Eleuatio

Eleuatio Poli est	40°	
Log. cof. 40° =	9, 8842540	
addatur	4, 7591447	
	14, 6433987	
Numer. respond.	43994, 6	
Eleuatio Poli bis sumta		80°
auferatur ab		90°
	remanet	10°
Log. fin. 10. =	9, 2396702	
Log. cof. 40° =	9, 8842540	
addatur	2, 1947602	
	11, 3186844	
Numer. respond.	20, 8	
subtrahatur ab	43994, 6	
	43974	
Gradas Paralleli =	43974	Hex. Paris. sub Eleuatione Poli 40°

Tab.

Tab. A.

Singuli gradus Parallelorum Aequatoris, per minutias Aequatoris expressi, quarum valores quoque per Hexapedas Gallicas et Pedes Anglicanos, supposita figura Telluris Sphaerica, per mensuram Piccardianam determinati exhibentur.

Gradus latitudinis	Minutiae Aequat.			Hexapedae Gallicae	Pedes Anglicani
0	60'	0"	0'''	57060	364734
1	59	59	27	57051	364678
2	59	57	48	57025	364511
3	59	55	4	56982	364234
4	59	51	14	56921	363846
5	59	46	18	56843	363346
6	59	40	17	56747	362737
7	59	33	10	56635	362015
8	59	24	58	56505	361185
9	59	15	41	56357	360244
10	59	5	18	56193	359192
11	58	53	51	56012	358032
12	58	41	20	55813	356764
13	58	27	44	55598	355386
14	58	13	4	55365	353900
15	57	57	20	55116	352306
16	57	40	33	54850	350606
17	57	22	42	54567	348797
18	57	3	48	54267	346882
19	56	43	52	53951	344863
20	56	22	54	53619	342739
21	56	0	53	53270	340508
22	55	37	52	52905	338176
23	55	13	49	52524	335739
24	54	48	46	52127	333201
25	54	22	42	51714	330560
26	53	55	39	51285	327820
27	53	27	37	50841	324980
28	52	58	37	50381	322042
29	52	28	38	49906	319004
30	51	57	41	49415	315868

Singu-

Singuli gradus Parallelorum Aequatoris per minutias Aequatoris expressi, quarum valores quoque per Hexapedas Gallicas, et Pedes Anglicanos, supposita Figura Telluris Sphaerica, per Mensuram Piccardianam determinati exhibentur.

Gradus Latitudinis	Minutiae Aequat.			Hexapedae Gallicae	Pedes Anglicani
31	51	25	48	48910	312638
32	50	52	58	48389	309311
33	50	19	13	47854	305892
34	49	44	32	47305	302378
35	49	8	58	46741	298774
36	48	32	28	46163	295077
37	47	55	5	45571	291289
38	47	16	50	44964	287414
39	46	37	44	44344	283452
40	45	57	46	43711	279403
41	45	16	57	43064	275268
42	44	35	19	42404	271050
43	43	52	52	41731	266749
44	43	9	37	41045	262367
45	42	25	35	40347	257906
46	41	40	46	39637	253365
47	40	55	12	38915	248749
48	40	8	52	38180	244054
49	39	21	49	37435	239287
50	38	34	2	36677	234446
51	37	45	33	35909	229534
52	36	56	23	35130	224553
53	36	6	32	34340	219502
54	35	16	2	33539	214386
55	34	24	53	32728	209204
56	33	33	6	31908	203907
57	32	40	42	31077	198645
58	31	47	43	30237	193280
59	30	54	8	29388	187852
60	30	0	0	28530	182367

Singuli Gradus Parallelorum Aequatoris per Minutias Aequatoris expressi, quarum valores quoque per Hexapedas Gallicas et Pedes Anglicanos, supposita Figura Telluris Sphaerica, per Mensuram Piccardianam determinati exhibentur.

Gradus Latitudinis	Minutiae Aequat.			Hexapedae Gallicae	Pedes Anglicani
61	29'	5"	19'''	27663	176827
62	28	10	6	26788	171232
63	27	14	22	25905	165586
64	26	18	8	25013	159889
65	25	21	26	24115	154144
66	24	24	15	23208	148350
67	23	26	38	22295	142513
68	22	28	35	21375	136632
69	21	30	7	20448	130708
70	20	31	16	19516	124746
71	19	32	3	18577	118746
72	18	32	28	17633	112710
73	17	32	32	16683	106637
74	16	32	18	15728	100535
75	15	31	45	14768	94400
76	14	30	55	13804	88237
77	13	29	49	12836	82047
78	12	28	29	11863	75833
79	11	26	55	10888	69595
80	10	25	8	9908	63335
81	9	23	10	8926	57057
82	8	21	1	7941	50760
83	7	18	44	6954	44450
84	6	16	18	5964	38125
85	5	13	46	4973	31789
86	4	11	7	3980	25442
87	3	8	25	2986	19089
88	2	5	38	1991	12729
89	1	2	50	996	6366
90	0	0	0	000	0000

Tab-

Tab. B.

Tabula Quadripartita

Partim singulos Gradus Parallelorum per Minutias Aequatoris pariter ac Temporis exhibens,
 Partim Gradum Aequatoris per Gradus Parallelorum et Minutias Temporis respondentes ex-
 primens.

Decl. f. Latitudo Parall.	Minutiae Aequatoris aequivalentes vni Gradui Paralleli			Minutiae Temporis Minutiis Aequatoris respondentes.			Decl. f. Latitudo Parall.	Grad. Aequatoris per Gr. Min. etc. singulo- rum Parall. expressus			Minutiae Temporis Partibus Circuli respondentes.					
	M.	S.	Q.	M.	S.	Q.		M.	S.	Q.	M.	S.	Q.			
1	59	59	27	3	59	57	48	1	1	0	33	4	0	2	12	
2	59	57	48	3	59	51	12	2	1	0	2	12	4	0	8	48
3	59	55	4	3	59	40	16	3	1	0	4	56	4	0	19	44
4	59	51	14	3	59	24	56	4	1	0	8	47	4	0	35	8
5	59	46	18	3	59	5	12	5	1	0	13	45	4	0	55	0
6	59	40	17	3	58	41	8	6	1	0	19	50	4	1	19	20
7	59	33	10	3	58	12	40	7	1	0	27	2	4	1	48	8
8	59	24	58	3	57	39	52	8	1	0	35	23	4	2	21	32
9	59	15	41	3	57	2	44	9	1	0	44	52	4	2	59	28
10	59	5	18	3	56	21	12	10	1	0	55	33	4	3	42	12
11	58	53	51	3	55	35	24	11	1	1	7	23	4	4	29	32
12	58	41	20	3	54	45	20	12	1	1	20	25	4	5	21	40
13	58	27	44	3	53	50	56	13	1	1	34	42	4	6	18	48
14	58	13	4	3	52	52	16	14	1	1	50	12	4	7	20	48
15	57	57	20	3	51	49	20	15	1	2	7	0	4	8	28	0
16	57	40	33	3	50	42	12	16	1	2	25	4	4	9	40	16
17	57	22	42	3	49	30	48	17	1	2	44	29	4	10	57	56
18	57	3	48	3	48	15	12	18	1	3	5	16	4	12	21	4
19	56	43	52	3	46	55	28	19	1	3	27	26	4	13	49	44
20	56	22	54	3	45	31	36	20	1	3	51	2	4	15	24	8
21	56	0	53	3	44	3	32	21	1	4	16	8	4	17	4	32
22	55	37	52	3	42	31	28	22	1	4	42	43	4	18	50	52
23	55	13	49	3	40	55	16	23	1	5	10	54	4	20	43	36
24	54	48	46	3	39	15	4	24	1	5	40	41	4	22	42	44
25	54	22	42	3	37	30	48	25	1	6	12	10	4	24	48	40
26	53	55	39	3	35	42	36	26	1	6	45	23	4	27	1	32
27	53	27	37	3	33	50	28	27	1	7	20	23	4	29	21	32
28	52	58	37	3	31	54	28	28	1	7	57	15	4	31	49	0
29	52	28	38	3	29	54	32	29	1	8	36	4	4	34	24	16
30	51	57	41	3	27	50	44	30	1	9	16	56	4	37	7	44

Decl. f. Latitudo Parall.	Minutiae Aequatoris aequivalentes vni Gradui Paralleli	Minutiae Temporis Minutis Aequatoris respondentes.	Decl. f. Latitudo Parall.	Gradius Aequatoris per Gr. Min. etc. singulo- rum Parall. expressus.	Minutiae Temporis Partibus Circuli re- spondentes.
		M. S. T. Q.		° ' " "	M. S. T. Q.
31	51 25 48	3 25 43 12	31	1 9 59 53	4 39 59 32
32	50 52 58	3 23 31 52	32	1 10 45 3	4 43 0 12
33	50 19 13	3 21 16 52	33	1 11 32 30	4 46 10 0
34	49 44 32	3 18 58 8	34	1 12 22 23	4 49 29 32
35	49 8 58	3 16 35 52	35	1 13 14 46	4 52 59 4
36	48 32 28	3 14 9 52	36	1 14 9 50	4 56 39 20
37	47 55 5	3 11 40 20	37	1 15 7 42	5 0 30 48
38	47 16 50	3 9 7 20	38	1 16 8 28	5 4 33 52
39	46 37 44	3 6 30 56	39	1 17 12 19	5 8 49 16
40	45 57 46	3 3 51 4	40	1 18 19 27	5 13 17 48
41	45 16 57	3 1 7 48	41	1 19 30 3	5 18 0 12
42	44 35 19	2 58 21 16	42	1 20 44 17	5 22 57 8
43	43 52 52	2 55 31 28	43	1 22 2 23	5 28 9 32
44	43 9 37	2 52 38 28	44	1 23 24 36	5 33 38 24
45	42 25 35	2 49 42 20	45	1 24 51 10	5 39 24 40
46	41 40 46	2 46 43 4	46	1 26 22 25	5 45 29 40
47	40 55 12	2 43 40 48	47	1 27 58 36	5 51 54 24
48	40 8 52	2 40 35 28	48	1 29 40 7	5 58 40 28
49	39 21 49	2 37 27 16	49	1 31 27 18	6 5 49 12
50	38 34 2	2 34 16 8	50	1 33 20 37	6 13 22 28
51	37 45 33	2 31 2 12	51	1 35 20 28	6 21 21 52
52	36 56 23	2 27 45 32	52	1 37 27 22	6 29 49 28
53	36 6 32	2 24 26 8	53	1 39 41 54	6 38 47 36
54	35 16 2	2 21 4 8	54	1 42 4 40	6 48 18 20
55	34 24 53	2 17 39 32	55	1 44 36 23	6 58 25 32
56	33 33 6	2 14 12 24	56	1 47 17 50	7 9 11 20
57	32 40 42	2 10 42 48	57	1 50 9 53	7 20 39 32
58	31 47 43	2 7 10 52	58	1 53 13 28	7 32 53 52
59	30 54 8	2 3 36 32	59	1 56 29 47	7 45 59 8
60	30 0 0	2 0 0 0	60	2 0 0 0	8 0 0 0
61	29 5 19	1 56 21 16	61	2 3 45 35	8 15 2 20
62	28 10 6	1 52 40 24	62	2 7 48 11	8 31 12 44
63	27 14 22	1 48 57 28	63	2 12 9 40	8 48 38 40
64	26 18 8	1 45 12 32	64	2 16 52 14	9 7 28 56
65	25 21 26	1 41 25 44	65	2 21 58 17	9 27 53 8

Tab. C.

Gradus singuli Parallelorum Aequatoris per mensuram Telluris sub circulo polari et 49° latitudinis Celeber. de Maupertuis determinati, methodo a Celeber. Eulero tradita supputati et in Hexapedis Gallicis exhibiti.

G. lat.	Hexa. Dec.	Diff. 1.	Diff. 2.	G. lat.	Hexa. Dec.	Diff. 1.	Diff. 2.
0	57274.	2		45	40009.	7	
1	57266.	7	7. 5	46	39898.	5	711. 2
2	57236.	7	27. 0	47	39175.	1	723. 4
3	57196.	6	43. 1	48	38439.	6	735. 5
4	57136.	0	60. 6	49	37692.	3	747. 3
			77. 4				11. 8
5	57058.	6		50	36933.	2	759. 1
6	56963.	9	94. 7	51	36162.	8	770. 4
7	56852.	6	111. 3	52	35381.	2	781. 6
8	56722.	7	130. 1	53	34588.	6	792. 6
9	56576.	6	146. 1	54	33785.	4	803. 2
			163. 2				813. 7
10	56413.	4	180. 3	55	32971.	7	824. 0
11	56233.	1	197. 0	56	32147.	7	834. 1
12	56036.	1	214. 4	57	31313.	6	843. 6
13	55821.	7	231. 1	58	30470.	0	853. 2
14	55590.	6	248. 7	59	29616.	8	862. 3
			264. 5				871. 3
15	55341.	9	279. 2	60	28754.	5	880. 5
16	55077.	4	298. 8	61	27883.	2	888. 5
17	54798.	2	314. 2	62	27003.	2	896. 5
18	54499.	4	329. 6	63	26114.	7	904. 4
19	54185.	2	348. 0	64	25218.	2	912. 0
			363. 1				919. 3
20	53855.	6	379. 3	65	24313.	8	926. 4
21	53507.	6	395. 3	66	23401.	8	933. 1
22	53144.	5	411. 1	67	22482.	5	939. 5
23	52765.	2	427. 0	68	21556.	1	945. 7
24	52369.	9	441. 6	69	20623.	0	951. 6
			459. 1				957. 2
25	51958.	8	473. 5	70	19683.	5	962. 3
26	51531.	8	488. 8	71	18737.	8	967. 4
27	51090.	2	504. 1	72	17786.	2	972. 1
28	50631.	1	518. 6	73	16829.	0	976. 5
29	50157.	6	534. 0	74	15866.	7	980. 5
			548. 4				984. 2
30	49668.	8	563. 0	75	14899.	3	987. 8
31	49164.	7	577. 3	76	13927.	2	990. 8
32	48646.	1	591. 5	77	12950.	7	993. 7
33	48112.	1	605. 6	78	11970.	2	996. 2
34	47563.	7	619. 5	79	10986.	0	998. 4
			633. 1				1000. 3
35	47000.	7	646. 6	80	9998.	2	1001. 8
36	46423.	4	659. 8	81	9007.	4	1003. 2
37	45831.	9	673. 0	82	8013.	7	1004. 1
38	45226.	3	686. 0	83	7017.	5	1004. 7
39	44606.	8	698. 6	84	6019.	1	1005. 0
			713. 5				
40	43973.	7	727. 0	85	5018.	8	
41	43327.	1	741. 1	86	4017.	0	
42	42667.	3	754. 4	87	3013.	8	
43	41994.	3	767. 0	88	2009.	7	
44	41308.	3	779. 6	89	1005.	0	
			792. 1	90	0	0	

Tab. D.

Singuli Gradus Meridiani Telluris e determinatione Celeb. de Mau-
pertsuis etc. Methodo a Celeb. Eulero suppeditata, calculati et per
Perticas Gallicas expressi.

G.lat.	Hexap.Dec.	Diff. I	Diff. 2	G.lat.	Hexap. Dec.	Differ. I	I.
●	56647. 9	0. 3		40	57134. 0	16. 3	
1	56648. 2	0. 8	5	47	57150. 3	16. 4	I
2	56649. 0	1. 5	7	48	57166. 7	16. 3	I
3	56650. 5	2. 0	5	49	57183. 0	16. 2	I
4	56652. 5	2. 5	5	50	57199. 2	16. 1	I
5	56655. 0		6	51	57215. 3	15. 9	2
6	56658. 1	3. 1	6	52	57231. 2	15. 8	I
7	56661. 8	3. 7	6	53	57247. 0	15. 7	I
8	56666. 1	4. 3	5	54	57262. 7	15. 5	2
9	56670. 9	4. 8	5	55	57278. 2	15. 3	2
10	56676. 2	5. 3	6	56	57293. 5	15. 1	2
		5. 9	5	57	57308. 6	14. 9	2
11	56682. 1	6. 4	5	58	57323. 5	14. 6	3
12	56688. 5	6. 9	6	59	57338. 1	14. 3	3
13	56695. 4	7. 5	6	60	57352. 4	14. 1	2
14	56702. 9	7. 9	4				
15	56710. 8	8. 5	6	61	57366. 5	13. 7	4
		8. 9	4	62	57380. 2	13. 5	2
16	56719. 3	9. 4	5	63	57393. 7	13. 1	4
17	56728. 2	9. 9	5	64	57406. 8	12. 7	4
18	56737. 6	10. 3	4	65	57419. 5	12. 4	3
19	56747. 5	10. 7	4				
20	56757. 8	11. 2	5	66	57431. 9	12. 0	4
		11. 6	4	67	57443. 9	11. 6	4
21	56768. 5	12. 0	4	68	57455. 5	11. 2	4
22	56779. 7	12. 4	4	69	57466. 7	10. 7	5
23	56791. 3	12. 7	3	70	57477. 4	10. 3	4
24	56803. 3	13. 1	4				
25	56815. 7	13. 5	4	71	57487. 7	9. 9	4
		13. 7	2	72	57497. 6	9. 4	5
26	56828. 4	14. 1	4	73	57507. 0	8. 9	4
27	56841. 5	14. 3	2	74	57515. 9	8. 5	5
28	56855. 0	14. 6	2	75	57524. 4	7. 9	6
29	56868. 7	14. 9	3				
30	56882. 8	15. 1	4	76	57532. 3	7. 5	4
		15. 3	2	77	57539. 8	6. 9	6
31	56897. 1	15. 5	2	78	57546. 7	6. 4	5
32	56911. 7	15. 7	1	79	57553. 1	5. 9	5
33	56926. 6	16. 1	1	80	57559. 0	5. 3	6
34	56941. 7	16. 2	1				
35	56957. 0	16. 3	1	81	57564. 3	4. 8	5
		16. 4	1	82	57569. 1	4. 3	5
36	56972. 5	16. 5	1	83	57573. 4	3. 7	6
37	56988. 2	16. 6	1	84	57577. 1	3. 1	6
38	57004. 0	16. 7	1	85	57580. 2	2. 5	6
39	57019. 9	16. 8	1				
40	57036. 0	16. 9	1	86	57582. 7	2. 0	5
		16. 1	1	87	57584. 7	1. 5	5
41	57052. 2	16. 2	1	88	57586. 2	0. 8	7
42	57068. 5	16. 3	1	89	57587. 0	0. 3	5
43	57084. 9	16. 4	1	90	57587. 3		
44	57101. 2	16. 4	0				
45	57117. 6	16. 4	0				

CLASSIS SECVNDA.

CONTINENS

PHYSICA.

Tom XII.

H h

DE

§. 2. Antequam autem rem aggrediar, necesse erit prae-
mittere aliquas definitiones, quas optici, et veteres et re-
centiores, ad describendum, quid sit imago in speculo ali-
quo apparens, concinnarunt. *Alhazen* igitur opticae lib. V.
cap. XI. dicit; *Imago est forma visibilis a polita superficie*
reflexa; vel *forma comprehensa in corpore polito nomi-*
natur imago. *Barronius* in lect. opticis pag. 4. magis
adaequate loquitur, cum dicit: *imagines autem nil plane*
sunt aliud, quam lux ab obiectis ita reflexa vel refracta,
ut rursus in unum locum talemque recolligatur situm, qua-
lem tunc obtinuit, quum ab originali proflueret obiecto,
directoque versus oculum itinere procederet, quo fit, ut si-
militer obiecta, sed tanquam alibi collocata, repraesentent.
Bene haec certe se habent, si sola vox: *similiter*, omittatur,
nisi eam generalissime intellectam velis. In nullo enim
speculorum curvilinearum genere imago similis plane dici
potest suo obiecto. Plura, quam quae huic definitioni
necessaria sunt, miscet *Keplerus*, dum parabolam in Vi-
tellationem pag. 60. inquit: *imago est visio rei alicuius*
cum errore facultatum, ad visum concurrentium, coniuncta.
Sapit enim magis metaphysicam, quam physicam aut
geometricam, haec explicatio.

§. 3. Praemissis his definitionibus imaginis in speculo
quocunque, ad institutum iam propius accedam, ad lo-
cum nempe eum designandum, quem obiectum quodcum-
que, speculo cuiuscunque generis oppositum, in speculo
occupare videtur. Absolvit enim totius catoptricae tracta-
tionem praecipuam haec quaestio; sed agit tantum de lo-
co puncti unius in speculum radiantis; quoniam, si signa-
lorum

lorum talium punctorum imagines et loca determinata fuerint, totius deinde etiam obiecti extensi locus iustus habetur. Ab antiquissimis igitur catoptricæ scriptoribus hæc lex stabilita fuit: *puncti in speculum quodcunque radiantis imaginem ibi apparere, ubi cathetus incidentiæ cum radio reflexo concurrat*; vt, si ex. gr. punctum radians sit in R , à quo in speculum sphaericum conuexum cadat radius RI , cuius reflexus intret oculum intuentem in O ; duxerunt ex R cathetum incidentiæ RD , vergentem ad C , si C fuerit centrum arcus specularis AB , deinde reflexum OI continuarunt in directum, donec concurreret cum catheto incidentiæ in r , atque tum in loco r imaginem puncti R hæsuram esse asseruerunt. *Euclides* quidem in catoptricis non iisdem hæc verbis sententiam hanc, iam eo tempore receptam, plene effert, sed id solum demonstrat: in planis, conuexis et cauis speculis aspectabile quodlibet cerni in linea recta, ducta ab aspectabili perpendiculariter ad planitiem, aut ad centrum sphaerae, cuius portio est speculum. Cùm vero hoc per se intelligatur, punctum quodcunque apparere debere in radio reflexo, qui imaginem puncti sui oculo quasi affert; manifestissimum est, ipsum quoque hanc sententiam exprimere voluisse; quamuis nusquam discrete asserat, punctum radians apparere in radio reflexo; ex eius Prop. VII. et aliis tamen hoc non obscure intelligi potest. *Ptolemaeus* deinde et *Albasen* opticae lib. V. cap. 2 Nr. 8. discrete ponunt: *imago in quocunque speculo videtur in concursu perpendicularis incidentiæ et lineæ reflexionis*. Hos secuti sunt *Vitello*, *Fabry*, *Taquez* et plures recentiorum alii, vt mirum sit, errorem

Tab. III.
Fig. 1.

hunc ad nostram aetatem vsque per doctissimos viros potuisse propagari.

§. 4. At videamus iam probationes, quibus hoc assertum stabilire conati sunt viri modo allegati; nam in hac re sibi non defuerunt argumentis utcumque speciosis. Primus itaque *Euclides* experimenti seu phaenomeni loco praemittit suae demonstrationi: *in speculis quibuscunque, occupato, hoc est, obiecto, eo speculi loco, in quem cadit perpendicularis, ducta à re aspectabili ad speculum, rem aspectabilem non cerni.* Hinc Propp. XVI. XVII. XVIII. argumentatus est: quoniam occupato loco D punctum R cerni non potest, videbitur punctum R in aliquo puncto lineae rectae *Rd*, productae in directum; videtur autem simul in radio *OI*, producto in directum; ergo videbitur in puncto aliquo, quod utriusque rectae *RC* et *OI* commune est, hoc est, in *r*. Quae vero in hac demonstratione reiicienda sint, dicam postea.

§. 5. Secundus *Alhazen* duplex argumentum affert ad sententiam eandem probandam. Prius nititur iterum experimento, nempe sequenti. In speculo ex. gr. sphaerico conuexo *EF*, cuius centrum *C*, erigatur perpendiculariter bacillus *BD*, cuius tota imago intra speculum apparet. Ponatur in hoc bacillo alicubi signum *A*, dicit illud appariturum in *a* sic, ut distantiae *BA* et *Ba* futurae sint aequales, oculorum nempe iudicio, lib. V. cap. 2. Nr. 3. quod quidem experimentum, etiam si verum esset, sententiam tamen hanc potius euerteret, quam adstrueret: ita legitimi nexus experimentorum cum conclusionibus illa actas fuit inscia; et in hoc solo sapere vide-

videtur Arabs, quod argumentum *Euclidis*, modo allatum, cum ceteris ex eo decerptis, non afferat. Alterum eius argumentum metaphysicum esse videri potest, dum censet, nullum digniorem imagini locum tribui posse, quam ab ipso assignatum; atque sic dignitatem situs perpendicularo metitur. *Albazenum* presso pede sequitur *Vitello*, ita, ut alter priori etiam hic, uti in ceteris quoque, sit simillimus.

§. 6. Asserti falsi adhuc emendatiorem dedit probationem *Tacquetus*, catoptricae lib. 1. prop. 22. male tamen idcirco laudatus a *Clarkio* in notis ad *Robalti* physicam parte 1. cap. 34. §. 18. quasi recte propositum demonstrasset suum. Is adhibito eodem bacillo perpendiculari ad speculum *B D*, sed omisso signo *A*, experientia nos edoceri ponit, imaginem huius bacilli *Bd* esse in directum cum bacillo ipso. Hoc experimentum, adiungit porro, vel centies ab ipso fuisse exploratum, atque eos, qui negant hoc phaenomenon, experimentum fecisse aut oscitanter, aut imperite, dum nempe stylum speculo non exacte ad angulos rectos imposuerint; causam quoque phaenomeni in eo sitam esse ait, quod, cum perpendicularis stylus nusquam inclinatur, nulla etiam ratio adsit, cur imago in ullam partem magis, quam in aliam inclinet; ac proinde necesse esse, ut ea unam cum suo prototipo lineam rectam efficiat. Hoc eodem utroque argumento nituntur quoque adhuc omnes illi recentiorum, qui eandem sententiam hucusque propagarunt; sed et ob ipsum hunc errorem admissum coguntur cum *Tacqueto* fateri, locum hanc sententiam non habere in speculis cauis, sed veritatem asserti veterum deficere a phaenomenis in casu

casu non vno. Quod quidem, vt *Keplerus* loquitur, *macula foeda est in pulcherrima scientia.*

Fig. 3. §. 7. Primus autem, quantum inuenire potui; veterum huic sententiae obstitit *Keplerus* in *Paralipom. ad Vitellionem* pag. 56 seqq. eandemque emendaturus pag. 75. pro loco imaginis assignando in speculo parabolico convexo sequentia profert: sit speculum parabolicum $\alpha\beta\gamma$, oculus in ζ , obiectum in η , sic, vt incidens $\eta\beta$, et reflexus $\beta\zeta$ faciant angulos aequales vtrique cum tangente $\epsilon\beta\delta$. Iam veteres optici, pro loco imaginis determinando, iubent ex η in speculum ducere perpendicularem $\eta\theta$, atque reflexum $\zeta\beta$ tamdiu continuare, donec priorem perpendicularem fecet in ω , statuuntque punctum hoc sectionis locum esse imaginis. At, pergit ille, *verior ratio iubet inuenire circulum, qui contineat rationem curvitatatis, quam habet sectio in β , puncto repercussus: (habent autem aliam atque aliam huiusmodi mixtae lineae) Sit quantitas $\kappa\beta$, et ducta ex β ipsi $\epsilon\delta$ perpendiculari, quae sit $\beta\kappa$, centrum circuli ponetur in linea $\beta\kappa$, coniungeturque $\beta\kappa$, eritque locus imaginis, ubi $\zeta\beta$ continuata secat $\eta\kappa$, scilicet in μ . Vocat deinde disertis verbis rectam $\kappa\beta$ rationem curvitatatis.*

§. 8. Quamuis itaque haud diffiteri possim, nescire me, qua ex causa veterum regulae hanc novam substituerit *Keplerus*, cum nullam ipse constructionis suae afferat rationem: videtur tamen id solum efficere voluisse, vt hoc modo speculum parabolicum pro situ puncti repercussus β reducatur quamproxime ad speculum circulare, vt deinde simili modo illud tractari possit, quo haec tractata vsque ad illam aetatem fuerunt. Adeoque sagacissimus

ciffimus auctor methodum veterum ad alia specula, quam circularia, extendi non posse, potius docet, quam ipsam methodum antiquam euertit. Nam facile patet, eandem hanc methodum keplerianam coincidere plane cum antiqua, si transferatur ad specula circularia. Sed hoc praeterire non possum, primam in allegato loco omnium, quantum quidem scio, circuli osculantis notionem occurrere. Quamvis enim quantitatem ipsius $\beta \kappa$ determinare non potuerit *Keplerus*, ideam tamen circuli osculantis et radii osculi animo ipsius infedisse euincunt omnia ipsi adhibita verba, qualia sunt: *inuenire circulum, qui contineat rationem curvitatatis, quam habet sectio in β ; habent aliam atque aliam rationem curvitatatis huiusmodi lineae mixtae; sit $\kappa \beta$ perpendicularis ad tangentem $\epsilon \delta$; recta $\beta \kappa$ est ratio curvitatatis.* Vt plane iucundum sit intelligere, quae negotii huius, a recentioribus iam diligentissime pertractati, umbra perspicacissimo huic viro iam tum obuersata fuerit.

§. 9. Meliori autem longe successu veterum hanc opinionem, quam errorem in optica capitalem vocat, plane euertit *Barrouius*, substituitque illi primus aliam, suam, et quae veritati conformis est. *Si enim*, arguit ille in lectionibus opticis, lect. VI. §. 19. *imago a puncto reflexionis B tanto distat interuallo, quanto punctum radians ab eodem semouetur: sol, ex huiusmodi reflexione conspicuus, ad tantam, quantam directe spectatus, distantiam deberet apparere; quod immane quantum experientiae refragatur.* Aliud deinde subiungit experimentum, cum speculo cauo instituendum, l. c. lect. X. §. 27. *Si tanquam circa punctum a accensa candela speculo cauo EBF exponatur,*
 Tom. XII. I i oculo

oculo, velut ad d' sito, longe maiori distans interuallo conspicietur, quam ipso a B; quinimo, tantillo versus centrum illam adducendo, non aequali distantia, sed admodum maiori vidbitur elongari, tanta circiter ad sensum probabilemque coniecturam, quantam proportio requirit a nobis praestita. Ita vero deinde vir egregius erroneae legitimam substituit opinionem, vt mirum sit, hanc neglectam hucusque in scriptis opticorum iacere.

§. 10. Accedam nunc ad id, vt ostendam, vbi haereant vitia in probationibus veterum occurrentia. Igitur *Euclidis* demonstratio nititur experimento plane falsissimo, cuius falsitas manibus fere palpari potest, ita, vt vix speculum, vel planum, vel aliud, vnquam ad manus huic fuisse credi possit. Tegatur enim ex eius sententia punctum D in quocunque speculo: obiecti imago nihilominus in oculos, plane vt ante, incurret. *Alhazeni* et *Vitellonis* experimenta, ad probationem suam adducta, vim quoque naturae inferre, abunde iam probaui ex *Barrouio*, §. 9; et quae de dignitate loci ab ipsis assignati in medium proferunt, prudenti harum rerum aestimatori quam minime persuadebunt.

§. 11. Paulo autem difficilius est inuenire ea, quae in *Tacqueti* demonstratione monenda occurrunt. Vera dixisset celebris hic auctor, si dixisset: imago bacilli Ba
 Fig. 2. apparet in directum iacens cum bacillo ipso: cum vero dixit: est in directum iacens, veritatem rei praeteruectus est. Nego itaque plane, in tali experimento imaginem reuera iacere in directum cum bacillo, quamuis oculo phaenomenon hoc ita appareat eique illudat. Quodsi enim ae-
 qua

qua lance trutinemus demonstrationem tacquetianam, eius ratiocinium huc redit, vt sequens exinde formetur syllogismus, quo probat punctum a esse in perpendiculari producta DAC: quicquid apparet in perpendiculari Ead , illud est in perpendiculari; ergo punctum a est in perpendiculari. Quod iam attinet ad minorem propositionem huius syllogismi, ea negari non potest, sed omnino recte se habet et experimento comprobatur: sed maior propositio vera non est, quod sequenti nouo experimento testatum facio. Imponatur speculo conuexo GAH gnomon chartaceus ABD, ita, vt crus AB perpendiculariter insistas polo speculi A, et crus BD antrorsum versus oculum O spectet. Tum inspiciatur imago huius gnomonis vno oculo, eoque sic posito, vt existat in plano trianguli BAD: apparebit totius gnomonis ABD imago in speculo Abd in lineam rectissimam extensa, et iacens in perpendiculari BA protracta, vbiunque oculus in plano memorato versetur. Idem experimentum simili successu institui potest, si polo speculi A insistas rectus tantum bacillus, sed versus oculum O inclinatus, cuius imago pariter in perpendiculari apparet. Iam si quis argumentari vellet: punctum d apparet in perpendiculari ABb , ergo existit reuera in eadem: nonne Tacquetus ipse huic aduersaretur, dicendo: sit DE radius incidens, et reflexus EO, ducatur cathetus incidentiae DC, secans reflexum retro productum in d , erit locus imaginis puncti D in d , extra perpendicularem BAb . Ex his igitur manifestissimum est plane concludi non posse: imago rectae perpendiculariter insistentis apparet in perpendiculari hac producta, ergo reuera ibi existit. Accidit enim profecto

Fig. 4.

hic fallacia optica, quae oculo illudit eodem modo, quo bacillum vel gnomonem in quouis plano horizontali versus oculum inclinate erectum horizonti perpendicularem esse putamus, quod reipsa tamen longe aliter se habet. Apparebit enim ex vera determinatione imaginis in tali speculo, §. 12. adducenda, si constructione geometrica mox indicanda res perficiatur, imaginem bacilli *Abd* revera versus oculum aspicientem inclinatam esse, sed declinatione ab ipsa perpendiculari *BC* tam parva, si oculus propius positus sit, ut impossibile sit eam ab oculo distigui. Valeat ergo *Tacquetus*, et cum eo recentiores ii omnes, qui putant se quam rigidissime demonstrasse, punctum in speculum sphaericum radians imaginem suam nancisci ibi, ubi cathetus incidentiae radium reflexum secat.

§. 12. Reiecta igitur hac falsa opinione, accedam ad eam, quae vera, nova tamen non est, sed inde iam a *Barrouii* temporibus, et ab ipso, et ab aliis quibusdam, exulta fuit. Dico itaque, imaginis locum in speculo quocunque ibi esse, ubi duo radii incidentes infinite vicini *BM*, *Bm*, post reflexionem, in *M* et *m* factam, concurrunt, vel se inuicem secant, scilicet in *F*. Ut itaque etiam quantitas huius rectae *MF*, in radio reflexo positione dato, ad usus sequentes in promptu sit: notum est ex analysi infinite parvorum *Hospitalii* §. 119. vocatis radio incidente $BM = y$, et demissa in hunc ex centro *C* perpendiculari *CE*, appellataque $EM = a$, futuram esse $MF = \frac{ay}{2y-a}$; quae eadem formula deducitur etiam ex constructione geometrica ea, quam *Barrouius* tradit lect. opt. lect. IX. §. 11. ubi subiungit, punctum *F*. esse locum ipsissimum, circa

circa quem puncti B imago consistit. Vnde sequens oritur constructio geometrica pro inueniendo puncto F, quae in *Hospitalii* analysi infinite paruorum ommissa est, in speculo sphaerico concauo: demittatur in incidentem perpendicularis ex centro C, quae sit CE, et ducatur in punctum reflexionis M radius CM; tum bisecta EM in G, ducatur GH parallela radio reflexo MF; secabit haec GH alicubi radium, scilicet in H; si itaque ex puncto radiante B per punctum H ducatur recta BHF, signabit ea in radio reflexo locum imaginis F quaesitum. Nam erit sic ob triangulum MGH aequicrurum, $BG(y - \frac{1}{2}a)$: $GH(\frac{1}{2}a) = BM(y) : MF(\frac{ay}{2y-a})$. Quodsi autem radius incidens BM minor fuerit, quam $\frac{1}{2}a$ vel MG, fiet MF negatiua, atque tum sequens constructio locum habebit:

Fig. 6.

demittatur in productam MB perpendicularis CE ex centro C, et ducatur in punctum reflexionis M radius CM, tum, bisecta EM in G, ducatur GH parallela radio reflexo retro producto MF, secabit haec GH alicubi radium, scil. in H; si itaque ex puncto radiante B, et puncto H, ducatur recta HB, secabit ea radium reflexum in loco quaesito imaginis F. Erit enim sic $BG(\frac{1}{2}a - y)$: GH

$(\frac{1}{2}a) = BM(y) : MF(\frac{ay}{a-2y})$. Similis constructio locum quoque habet in speculo sphaerico conuexo. Nam cum ibi y fiat negatiua, erit $MF = \frac{-ay}{-2y-a} = \frac{ay}{2y+a}$. Productantur itaque et radius incidens et reflexus retro; tum demissa in illum perpendiculari CE bisecetur ME in G, et per G ducatur parallela reflexo MF, secans radium in H, et ducta BH secabitur radius reflexus in F, loco imaginis quaesito. Est enim sic $BG(y + \frac{1}{2}a)$: $GH(\frac{1}{2}a) = BM(y) : MF(\frac{ay}{2y+a})$.

Fig. 7.

§. 13. Cum itaque duorum radiorum incidentium sibi proxime vicinorum focus quoque sit in reflexorum mutuo concursu: patet generaliter verum esse, quod locus imaginis ibi sit, vbi radiorum datur focus; adeoque focum, a puncto radiante productum, et eiusdem imaginem, esse vnum idemque. Iam vero videamus quoque, an casus aliqui dentur, in quibus veterum hypothesis in assignando loco imaginis coincidat cum hac vera. Igitur in sententia veterum, posito speculi centro in C, et ducta catheto incidentiæ BCL, erit puncti radiantis B imago in L, in quo nempe puncto reflexus ML secatur. Pro determinanda autem ML, positus vt ante $BM = y$, $EM = a$, $CM = r$, et sinu toto $= 1$, erit CME sinus $= \frac{\sqrt{rr-aa}}{r^2}$ cosinus $= \frac{a}{r}$, adeoque dupli huius, nempe BML sinus $= \frac{2a\sqrt{rr-aa}}{r^2}$, cosinus $= \frac{\sqrt{(r^4 - 4a^2r^2 + 4a^4)}}{r^2} = \frac{r^2 - 2a^2}{r^2}$; erit porro $BC = \sqrt{(BE^2 + EC^2)} = \sqrt{(y^2 - 2ay + a^2 + r^2 - a^2)} = \sqrt{(y^2 - 2ay + r^2)}$, adeoque LBM sinus $= \frac{CE}{BC} = \frac{\sqrt{rr-aa}}{\sqrt{(y^2 - 2ay + r^2)}}$, cosinus $= \frac{BE}{BC} = \frac{y-a}{\sqrt{(y^2 - 2ay + r^2)}}$. Hinc componetur sinus BLM $=$ sin. BLN $=$ sin. (BML + LBM) $= \frac{2a \cdot y - a \cdot \sqrt{rr-aa} + (r^2 - 2a^2)\sqrt{rr-aa}}{r^2 \sqrt{(y^2 - 2ay + r^2)}}$; vnde instituta analogia: sin. BLM : sin. LBM $=$ BM : ML, inuenitur ML $= \frac{r^2 y}{2ay - 2a^2 + (r^2 - 2a^2)}$; qui valor ipsius ML, si ponatur æqualis valori ipsius MF $= \frac{ay}{2, -a}$, inuenitur $y = \frac{ar^2 - 2a^3}{r^2 - a^2}$, vel $y = 0$. Si itaque radii incidentis BM longitudo habuerit alterutrum horum valorum assignatorum, locus imaginis ex veterum hypothesis coincidat cum loco imaginis vero; in omnibus vero reliquis casibus hæc duo loca discrepabunt inter se.

§. 14. At vero memoratu dignum est, in solis speculis planis hypothese[m] veterum et hypothese[m] veram, quam *barrouianam* appellare licebit, coincidere, et vnum eundemque locum imaginis producere, quod certe in falsam opinionem veteres deducere potuit, quod credebant vniuersaliter verum esse, quod in solis speculis planis locum habet. Sit enim tale speculum planum AC, punctum radians B, et radii incidentes infinite vicini BM, Bm; cum reflexis MN, mn; et quia recta AC, tanquam arcus circuli spectata, centrum habet infinite distans, erit in formula $\frac{ay}{2y-a}$ ponenda $a = \infty$, hinc erit $MF = \frac{ay}{2} = -y$, hoc est, in retro producta NM erit capienda $MF = y = MB$. Coniungantur ergo puncta B et F recta linea, secatura speculum in A; atque erit in duobus triangulis FAM, BAM, angulus $p = n = m$; $MB = MF$, et MA communis vtrique triangulo; quare triangula haec erunt aequalia et similia; hoc est, apud A erunt anguli recti; eritque sic punctum F in concursu radii reflexi MN et catheti incidentiae BA.

§. 15. Ingerit denique se hic dubium quoddam, quod effecit, vt *Tacquetus* suam imaginis definiendae hypothese[m] speculis concauis non nisi in quibusdam casibus conuenire asseruerit, quam in planis et conuexis vniuersaliter veram esse contendit, prout videre licet in eius catoptricae libro III. prop. 29. et 30; et ad quod ne *Barrouius* quidem in recta sententia responsonem inuenire potuit, sed illud, *improbam difficultatem* vocatum, lect. opt. XVII. §. 13. tanquam scopulum praeteriit potius, quam sustulit. Versatur dubium hoc in eo, vt quaestio-

moue-

Fig. 9. moueatur, in quonam loco appariturum sit obiectum AB longius a speculo remotum, oculo O proxime apud speculum posito. Si veteres audiamus, iuxta eorum sententiam ductis cathetis incidentiae Aa et Bb imago erit in ba; sed intra hanc et speculum ipsum ED oculus situs esse supponitur, et consequenter incapax videndae imaginis ba. Idem vero accidit quoque, si puncta imaginis b et a legitima methodo, *barrouiana* nempe, quaerantur. Suspensa igitur hic et ambigua haeret theoria, docens obiectum videri per radios DO, EO, *tanquam ex infinito interuallo fluentes, et nihil hic reliquum esse, praeter merum praeeudicium, quo distantia imaginis aestimetur.* Vide annotationes ad *Robalti* physicam, parte I. cap. 34. §. 18. Decidit vero atque ad oculum demonstrat experientia, obiecta in his circumstantiis apparere oculo erecta, naturali sua magnitudine praedita, sed aliquantum minus distincta. Qua ergo via huic veritati ratio sua assignanda erit? Dico itaque: si obiectum fuerit remotius, et oculus valde propinquus speculo, spatium reflectens ED esse, ne dicam infinite, sed ita tamen paruum, vt pro speculo plano haberi possit; quod sequenti ratiocinio demonstro. Ducantur radii EC, DC, nec non diameter GOCH, ponanturque radii GC, EC, DC, = r, CO = a, OD = q, OE = p; atque demissis in diametrum perpendicularis DK, EI, leui calculo inuenitur, esse $OK = \frac{r^2 - a^2 - q^2}{2a} = m$; et $OI = \frac{r^2 - p^2 - a^2}{2a} = n$, quare habebitur EOC sinus = $\frac{\sqrt{p^2 - nn}}{p}$, cosinus = $\frac{-n}{p}$; nec non DOC sinus = $\frac{\sqrt{qq - mm}}{q}$, cosinus = $\frac{-m}{q}$; vnde erit sinus differentiae EOD = $\frac{-m\sqrt{pp - nn} + n\sqrt{qq - mm}}{pq}$. Iam vero sit oculus O speculo

culo ED valde vicinus, aut vero sint q et p quantitates valde paruae, erit OC, siue a , fere aequalis radio r ; ponamus itaque $a=r$, fiet hinc $m=\frac{q^2}{2a}$, $n=\frac{p^2}{2a}$; vnde sinus EOD euadet $=\frac{q\sqrt{(a^2-p^2)}-p\sqrt{(a^2-q^2)}}{a^2}$; quoniam vero vterius respectu ipsius a euanescent p et q , erit sinus EOD $=\frac{q-p}{a}$, hoc est, quia q et p fere sunt aequales, erit sinus EOD fere aequalis nihilo, adeoque multo magis arcus ED pro portione speculi valde parua, vel pro paruo speculo plano habendus; vnde non mirum est, indicata phaenomena in eo ita occurrere, prout natura speculi plati ea requirit; repraesentatio tamen obiectorum debet esse aliquantum obscurior et confusior, quam in speculo per totum plano, quia hic se ex speculis parualis planis similibus adiacentibus immiscent nouae imagines, ad multiplicandam imaginem, sed non cum integro effectu, tendentes. Neque praetereundum hoc loco est, allegatum phaenomenon, vt nempe imagines obiectorum remotorum erectae appareant in speculo cauo, non cerni in tali speculo, quod paruum sit, et conuexitatem habeat magnam; oculus enim tam prope huic speculo applicari non potest, vt spatium reflexionis efficiat valde paruum, seu vt efficiat speculum paruum planum.

§. 16. Vt occasione horum ex dioptricis quoque aliquid tangam, afferam coronidis loco methodum determinandi concursum duorum radorum infinite vicinorum, in lentem quamcunque incidentium, quorum radorum fons, vel punctum radians, ab axe lentis vtrunque distet, et in vtraque superficie lentis, in ingressu et egressu, hoc

est, duplicem refractionem patiantur. Sit igitur diaphanum ab aëre diuersum, terminatum duabus superficiebus sphaericis Mm , cuius radius MC , et Nn , cuius radius Nk ; in hoc ex puncto radiante B quomodocunque sito incidant radii infinite vicini BM et Bm , qui post primam hanc refractionem uniantur in puncto F , sed post alteram refractionem in superficie Nn concurrant in puncto f ; quaeritur determinatio puncti f , seu quantitas lineae Nf . Sit igitur radii incidentis BM longitudo $=y$, et demissis ex centro C perpendicularibus in radium incidentem continuatum et refractum, quae sint CE et CG , sint $ME=a$, $MG=b$, sitque tandem ex aëre in diaphanum ratio sinus inclinationis ad sinum anguli refracti $=m:n$, atque erit ex *Hospitalii* analysi infinite parvorum §. 133. $MF = \frac{b^2my}{bmy - any - a^2n}$; qui valor ipsius MF , cum vniuersaliter verus sit, locum quoque habebit in puncto f , si hoc tanquam radians concipiatur. Ponatur itaque radius incidens $fN = x$, sintque duo tales incidentes radii sibi infinite proximi fN , fn , qui post primam hanc refractionem punctum concursus versus B nullum habebunt, sed in diaphano infinito CK diuergentes versabuntur, aut vero habebunt focum virtuale in F ; quod si itaque ad analogiam radii prioris incidentis BM pro hoc incidente fN iam ponatur $NH = ANL = B$, erit nunc eodem, quo prius, iure $NF = \frac{-B^2mx}{Bmx - Anx - A^2n}$ vbi scilicet $m:n$ est ratio refractionis, uti ante, ex aëre in diaphanum. Ex modo inuenta hac aequatione eruatur iam valor ipsius x , qui ergo inuenitur hic: $Nf = \frac{A^2n}{Bm - An + B^2m}$.

Igitur, dato diaphano quocunque, terminato, vtrinque super-

perficie circulari, ex gr. cuius centra sint C et K, determinatur focus duorum radiorum vicinissimorum, ex puncto radiante quomodocunque sito egressorum, sequenti modo: ducatur radius incidens productus B M E, atque huic conueniens assignetur refractus, huic refractioni primae debitus, qui sit M F; ex centro C demissis perpendicularibus C E, C G, capiantur mensurae in scala geometrica ipsarum M E = a, et M G = b, quo facto calculus arithmeticus haud difficulter dabit numerum ip-

sus $M F = \frac{b^2 m}{b m - a n - \frac{a^2 n}{y}}$; cum itaque vitrum vel diapha-

num datum in charta delineatum esse supponatur: dabitur ex hac mensura quoque longitudo N F. Tum itaque ex assumpto radio incidente M N, ducatur conueniens ipsi refractus N f, atque in hoc sumta longitudo N f =

$\frac{A n}{B m - A n - \frac{B^2 m}{N F}}$, determinatum erit f, punctum concursus

post duplicem refractionem, idque geometrice et accuratissime, non vero quam proxime tantum, vti communiter fieri solet. Tab. IV.

Vel si desideretur constructio geometrica, illa pro determinando primum puncto F ex *Hofpi* fig. 2.

talio l. c. erit haec: fiat angulus E C b = G C M, capiatur M k = $\frac{a^2}{y}$, fiatque b k : b E = M G : M F; pro inueniendo etiam porro puncto f fiat angulus L K Z = H K N, addatur ad Z N recta N X = $\frac{B^2}{N F}$, et fiat Z X Z L = H N : N f.

Vt vero punctum radians reduci quoque possit ad axem talis diaphani, coniungantur centra C et K inter se Fig. 1. linea recta producta vtrinque C K, atque ad hunc axem

ex B demittatur perpendicularis Ba , sintque $\alpha\beta = p$, $\beta C = r$, $KN = R$, nempe pro diaphano, superficiebus circularibus praedito, $\alpha B = q$, crassities diaphani siue lentis $= d$, eritque $BC = \sqrt{(\alpha B^2 + \alpha C^2)} = \sqrt{(BE^2 + EC^2)}$; retentis igitur antecedentibus adhuc denominationibus habebitur aequatio $\sqrt{(p^2 + 2pr + r^2 + q^2)} = \sqrt{(y^2 + 2ay + r^2)}$; unde deducitur $y = \sqrt{(p^2 + 2pr + q^2 + a^2)} - a$; valere autem potest solum signum $+$, ut ne radius incidens CM fiat negativus. Ut iam punctum radians sit in ipso axe lentis alicuius dioptricae, ponatur $q = 0$, eritque sic iam $y = \sqrt{(p^2 + 2pr + a^2)} - a$, et $MF = b^2 m : [bm - a n \frac{a^2 n}{\sqrt{(pp + 2pr + a^2)} - a}]$. Sint praeterea radii incidentes axi vicinissimi, ut obtineatur focus principalis, poni debet a

$= r$, $b = r$, et hinc $MF = \frac{r^2 m}{r m - r n - \frac{r^2 n}{p}}$; erit quoque

$A = R$, et $B = R$, hinc generaliter pro omni lege refractionis oritur $Nf = \frac{nR(r-d.p.m+r+p.nd)}{m-n(r-d.p.m+r+p.nd)+mR(m-n.p-nr)}$

quae formula, ex genuina methodo deducta, coincidit cum illis, quae approximatione tantum derivatae sunt ab auctoribus, si pro refractione ex aere in vitrum ponatur $m = 3$, $n = 2$. Si denique crassities lentis negligatur, erit $Nf = \frac{npRr}{m-n.R+r.p-nrR}$; aut si fuerit $R = r$, quod in

plerisque lentibus obtinet, oritur $Nf = \frac{pr}{\frac{m-n}{n} 2p-r}$.

DE CORPORVM PLANO INCLINATO IMPOSITORVM DESCENSV.

AUCTORE

Georg. Wolffg. Krafft.

§. I.

Corpus firmum, plano inclinato impositum, duplici modo descendere per plani longitudinem potest. Primo enim descensum suum absoluit vel sic, ut centrum eius grauitatis C describat lineam rectam Cc, plano inclinato Eb parallelam, atque ut latus corporis vnum idemque, veluti AB; semper plano inclinato maneat contiguum; in hoc casu corpus dicitur: *descendere simpliciter, descendere radendo*, vel *labi* aut *reperere*. Deinde etiam quibusdam in casibus corpus solidum obseruari potest descensum suum in plano inclinato perficere sic, ut centrum grauitatis in eo C, aut describat durante descensu arcus circulares CD, DE, Ec, circa angulos suos sibi succedentes B, F, G, H, tanquam circa totidem centra; aut ut ipsum circa se gyretur, quod id globo et cylindro transuersim plano tali impositis accidit; neque adeo vnum idemque latus AB, sed singula corporis latera successiue plano inclinato fiant contigua; in hoc casu corpus dicitur: *deuolui* vel *rotari*, vel *descendere voluendo*.

Tab. IV.
Fig. 3.

Fig. 4.

§. 2. In horum casuum altero, quo nempe corpus rotando descendit per planum inclinatum, initium motus semper ita fit, ut corpus prono capite prolabatur, atque deinde denuo erectum simili rursus modo procidat. Analogus.

logus itaque hunc lapsui casus esse videtur is, in quo corpus, plano horizontali insistens, pronum prolabitur, quotiescunque *linea directionis* in eo cadit extra basin, qua insistit plano horizontali. Voco autem *lineam directionis* lineam rectam CF, quae ex corporis centro grauitatis C perpendicularis ducitur ad horizontem Db. Quae procidentia, in plano horizontali facta, cum a figura corporis et situ lineae directionis dependeat; similiter in plano inclinato locum habere visa fuit. Atque hinc factum esse puto, vt celeberrimi auctores physici hucusque omnes in ea opinione fuerint: *corpus plano inclinato impositum rependo descendere, si linea directionis eius intra basin cadat, qua plano inclinato insistit; aliud vero corpus rotando descendere, si eadem linea cadat extra basin eius.*

§. 3. In hac regula falsum est corpus semper rotando descendere, quotiescunque linea directionis cadit extra basin. In multis enim casibus contrariatur experientiae hoc assertum; vt, *si capiatur ex. gr. parallelepipedum ligneum, altum 3 poll. latum 2, crassum $1\frac{1}{2}$, atque illud imponatur plano inclinato eousque eleuato, vt linea directionis CF manifesto cadat extra basin; obseruabitur, illud non rotando, sed rependo descendere, quod tamen accidere non deberet.* Vt igitur in hac re non tam facili, ac prima quidem fronte videri posset, ingenium naturae addiscerem, sequenti primum modo ratiocinatus sum.

§. 4. Quoniam in omni motu a grauitate oriundo centrum grauitatis descendit, quantum potest et vbicunque potest: putauit exinde secuturum esse, vt, si rotatione corporis ingruente centrum hoc descendere possit, corpus

pus rotaretur; sin autem, rotatione corporis supposita, centrum grauitatis ascendere in altum deberet, in eius locum reptionem successuram esse. Veluti, quia centrum grauitatis C , supposita rotatione circa G , tanquam fulcrimentum, descendit per arcum circulem CH , neque in hoc casu supposita rotatio corporis ascensum aliquem centri grauitatis requirit: putauit futurum esse, vt corpus sic locatum rotando descenderet. Verum enim vero et huic explicationi plane repugnat experientia, atque etiam experimentum. I. modo allegatum. Deinde congruit penitus eadem haec regula cum vulgari hucusque vsitata, quod paulo post deprehendi, et sequentem in modum demonstro.

Fig. 5.

§. 5. Quotiescunque centrum grauitatis descensurum esset, supposita rotatione, toties linea directionis cadit extra basin corporis. Nam sit corpus ECI plano inclinato AD ita impositum, vt supposita rotatione circa E centrum grauitatis C descendat per arcum CG , ducatur per E recta horizontalis FEG , cum verticali EH ex E educta. Necessesse igitur est, vt centrum grauitatis corporis C sit aliqui in quadrante circuli descendente HCG , non autem in quadrante circuli ascendente FH . Si igitur centrum grauitatis fuerit in C , ex eo demissa linea directionis CB parallela erit cum recta EH , et versus partes G iacebit; cadet ergo extra punctum E , hoc est, extra basin corporis KE ; consequentur, si quis dixerit, subsequente rotatione centrum grauitatis descendere, idem dicit, ac corporis lineam directionis cadere extra basin.

Fig. 6.

§. 6. Voti igitur mei hac opera compos non factus, deprehendi ex variis ab initio institutis tentaminibus potius quam

quam experimentis: corpus, quod in plano inclinato descenderet rependo, si libere sibi permittatur, ex quiete ipsi conciliata concitari in motum rotatorium: et prono capite prolabi, si filum, etiam tenue, aut fascia chartacea, ipsi transuersim opposatur primum, atque tum demum illud sibi relinquatur, et simul linea directionis extra basin cadat. Deinde porro aliquoties vidi, corpus quod in plano inclinato descendit rependo, descendere rotando in eodem, si planum obducatur panno aliquo rudiori et aspero, etiamsi linea directionis cadat utrobique extra basin. Vnde manifestum fit, deberi haec phaenomena vnice asperitatibus plani inclinati, modo maioribus modo minoribus, atque in his causam eorum esse quaerendam. In qua sententia eo magis confirmatus fui, cum viderem, corpus in vna plani inclinatione rependo vel rotando descendens, in omnibus aliis plani inclinationibus simili modo descendere.

§. 7. Ex his mihi enata fuit sequens theoria, quam explicatam prius dabo, vt deinde eo applicatius varia experimenta adducere possim, quae eam optime confir-

Fig. 7. mant. Sit plano inclinato BD impositum corpus quodcunque FCI, cuius centrum grauitatis G, basis FI; sintque praeterea AB linea horizontalis, huic perpendicularis AD, et corporis linea directionis CG. Manifestum nunc est, corpus hoc deorsum sollicitari a pondere suo respectiuo, hoc est, a potentia, quae, posito corporis pondere absoluto $\equiv P$, inuenitur esse $\equiv \frac{AD}{DB} \times P$. Hac potentia sollicitatur quidem corpus centrum grauitatis, eademque perfecte obediret quoque corporis basis IF, nisi obesset ipsi scabrities plani, aut frictio eius in hac inclinatione

natione sub angulo ABD reperiunda, quam frictionem vocabo *f*. Cum autem motui baseos frictio obstat, efficit ea, vt in punctum quoduis baseos, plano inclinato contiguae, agere censi tantum possit potentia $\frac{AD}{DB} \times P - f$. Quantum autem praeualeat potentia agens in centrum grauitatis supra potentiam agentem in punctum baseos quodcunque F: tantum increfcit potentia corpus ad rotationem sollicitans, vt hinc differentia harum potentiarum, quae est *f*, pro potentia corpus ad rotationem impellente assumi possit; quoniam per potentiam, quae protrahit basin corporis, hoc se motui rotatorio quasi subducit in singulis momentis. Agit autem haec potentia rotatoria in C, atque sic in brachium vectis homodromi CF, quia rotatio circa punctum F, tanquam circa hypomochilium peragi debet. Momentum itaque huius potentiae rotatoriae, vecti CF applicatae, demissa ex C perpendiculari CE ad DB, erit $= f \times CE$. Haec potentia rotatoria integrum effectum suum ederet, si planum BD esset verticale, et puncto F aliquid resisteret; neque adeo pars ponderis P corpus ad planum inclinatum adhuc apprimeret. Ergo sequitur hinc, inter duas has potentias, priorem rotatoriam atque hanc alteram, quam *appressoriam* voco, dari conflictum esseque hanc illi contrariam, vt si illa vincat, corpus rotando, si vero haec praeualeat; corpus rependo descendat. Vt igitur definiatur potentia appressoria, exponatur corporis pondus absolutum P per CG verticalem, atque resolvatur ea in CE perpendicularem ad planum, quam voco *lineam appressionis*, et CK, plano BD parallelam; eritque magnitudo potentiae appressoriae $= CE$; quoniam vero etiam haec agit in vectem

CE: erit eius momentum $= CE \times EF$. Orietur itaque haec regula; *corpus plano inclinato impositum descendere rotando, si fuerit $f \times CE > CE \times EF$, aut vero $f > EF$; idem autem corpus descendere rependo, si fuerit $f < EF$.*

§. 8. Hinc, vt casus pro rotatione vel pro reptione determinentur, determinari antea oportet frictionem, quam planum sub data inclinatione in basin corporis exercet. Cum autem difficilius frictio haec explorari possit in plano inclinato, quam in horizontali: vocabo hic in subsidium theorema ab excellentiss. *Bullfingero in Commentariorum Tomo II. pag. 405.* traditum; quo ad schematicum meum reuocato, et vocata frictione horizontali F, habetur $f = \frac{AB}{DB} \times F$. Est autem ob similia triangula DAB et GEC, $\frac{AA}{DB} = \frac{CE}{CG}$, vel, ob $CG = P$, erit $\frac{AB}{DB} = \frac{CE}{P}$, et hinc $f = \frac{CE}{P} \times F$. Ex quibus regula fluit haec, iam magis concinna: *corpus plano inclinato impositum descendere rotando, si fuerit $F > \frac{EF}{CE} \times P$; idem autem corpus descendere rependo, si fuerit $F > \frac{F^2}{CE} \times P$.*

§. 9. Eruta nunc regula pro definiendo quolibet motu corporis plano inclinato impositi, superest, vt ea ad experimenta, tanquam ad lapidem lydium, exploretur videaturque, an experientiam sibi habeat amicam, nec ne. Cum autem pro instituendis iam experimentis requirantur mensurae exactae frictionis horizontalis rectorum EF, CE, et ponderis absoluti: exponam antea breuiter, qua ratione corporis cuiuscunque sub examen vocati centrum grauitatis et frictionem horizontalem explorauerim; quoniam

niam ex illo inuento dimensiones rectorum EF , CE , per se fluunt, et pondus absolutum bilance accurata quam facillimum est inuentu.

§. 10. Pro cognoscendo centro grauitatis in corporibus, quae disquisitioni meae subieci, suspendi ea ex filo serico tenuissimo, ope cerae agglutinato, in variis superficie punctis eousque, donec aliquod reperirem, ex quo suspensum corpus superiorem superficiem haberet perfecte horizontalem; atque tum in directione fili suspendentis perfoffa cera mediante acu subtili, centrum quaesitum angusto puncto notauit et expressi. Sed sic quidem obtinui solum centrum grauitatis superficie superioris. Quoniam vero in experientiam non vocauit, nisi corpora, quae constant ex materia homogenea et sunt figurae prismatica; centrum ipsum grauitatis in medio huius inuenti axis, ad superficiem superiorem perpendicularis, tuto assumere licet.

§. 11. Ad determinandam frictionem horizontalem horum corporum adhibui planum, in situm horizontalem prius exactissime redactum. Huic imposui corpus, illique ope cerae agglutinaui ex parte propiori basi filum sericum tenue, recta protensum, et horizontaliter exiens, trochleamque mobilissimam, in extremo plani firmatam, ambiens et lancem affixam sibi gerens; huic deinde lanci tot successiue ponduscula imposui, donec ea iamiam inciperent quietem corporis plano impositi sollicitare; quae ponduscula vna cum pondere lancis pro mensura frictionis horizontalis tenui.

§ 12. Vt igitur ratio reddatur experimenti I. supra allegati, in quo corpus, cuius linea directionis manifesto cadit extra basin, rependo tamen descendit: assumo regulam inuentam, in qua pro reptione corporis requiritur tantum, vt fit $F < \frac{EF}{CE} P$. Sunt autem pro quolibet corpore et rectae EF, CE, et frictio horizontalis F eadem, pendentes nempe illae a situ centri grauitatis versus basin, neque hic in computum cadit recta FG, quae lineam directionis definit. Poterit igitur planum BD eoque pro lubitu eleuari, imposito corpore quocunque, donec tandem huius linea directionis extra basin cadat, neque idcirco valor ipsius $\frac{EF}{CE} \times P$ mutabitur. Si enim in minima plani eleuatione est $F < \frac{EF}{CE} \times P$, aut $F > \frac{EF}{CE} \times P$, in maxima eleuatione et in omnibus intermediis res eodem modo se habebit; vnde simul etiam causa patet experimenti IV, superius adducti; quod, etsi mirum ab initio videatur, ex hac tamen theoria prono alueo fluit et deriuatur. Ex eadem hac regula, quae casum reptionis definit, deducitur quoque facile experimentum III, antea allatum. Cum enim pro reptione requiratur $F < \frac{EF}{CE} \times P$, et haec posterior quantitas pro dato corpore maneat constans: poterit, aucta asperitate plani, quod per varios pannos diuersae texturee successiue ipsi impositos fit, frictio horizontalis ita tandem augeri, vt desinat esse $F < \frac{EF}{CE} \times P$, sed contrarium accidat, quo obtento rotatorio motus consequitur. Neque difficilius explicatu est experimentum II. Cum enim, vt supra iam dixi, §. 7. per potentiam, quae protrahit basin, corpus se motui rotatorio singulis momentis quasi subducatur: euidentis est, fieri debere,

debere, vt, potentia protrahente basin per obstaculum transuersum fixum penitus exhausta, motus rotatorius vim suam exercent eo liberius, atque promde corpus proum in caput prolatur, eo modo, qui in similibus corporibus plano horizontali insistentibus contingere solet.

§. 13. Praemissis hisce generalioribus descendam nunc ad magis particularia, in sequentibus exponenda et ope eiusdem huius regulae explicanda. Igitur *corpus ligneum C*, quod horizontali plano impositum eadem base, qua hic plano inclinato incumbit, tutum erat a lapsu, rependo descendit in omnibus inclinationibus, quantumuis linea directionis extra basin cadat, per plana laeuigata, buxinum, chartaceum et quernum; sed per planum asperum panni vulgaris rotando cursum absoluit suum. Instituta dimensione determinationum necessariorum deprehendi eius pondus absolutum, seu $P = 1277$ Granorum, quorum 7680 faciunt libram amstelodamensem; $CE = 51$ partium, quarum 382 faciunt pedem londinensem, $EF = 18$ part. Porro inueni frictionem horizontalem in plano buxino 346 Gran. in chartaceo 316 Gr. in querno 350 Gr. in panno aspero autem 716 Gr. Igitur in hoc corpore erat $\frac{EF}{CE} \times P = 450$. Est hinc in primis tribus planis F , hoc est, 346 aut 316 vel 350 < 450 ; quare in his planis obtinuit motus reptorius. In panno aspero autem fuit $F = 716 > 450$, quare in hoc corpus descendit rotando.

§. 14. Sed multo adhuc melius theoriam hanc comprobatur experimentum sequens, quod in hunc finem ita perfecti. *Corpus ligneum C*, quod horizonti insitens lapsui
L 13
Exper. VI.
Fig. 2.

resistere non poterat, rotando descendit in omnibus inclinationibus planorum modo memoratorum, buxini, chartacei, et querni. Captis mensuris inueni in eo $P = 1207$ Gr. $CE = 53$ part. $EF = 0$; frictionem horizontalem vero inueni huius baseos in plano buxino 245 Gr. in chartaceo 136 Gr. in querno 296 Gr. Igitur in hoc corpore erat $\frac{EF}{CE} \times P = 0$, et consequenter in enumeratis planis omnibus erat $F > \frac{EF}{CE} \times P$; quare rotando descendit corpus.

Exper. VII.
Fig. 3.

§. 15. Idem autem corpus modo memoratum, plano inclinato situ tantum inuerso impositum, rependo descendebat per buxum, chartam et quercum. In hoc casu est uti antea $CE = 53$, $EF = 32$, reliqua autem manent uti in experimento praecedente. Quare nunc habebitur $\frac{EF}{CE} \times P = 728$ gr. Est itaque $F = 245$ vel 136 aut 296 < 728 , veluti hoc facta reptio postulavit. Patet igitur ex hoc et praecedente experimento, posse eandem basin modo rependo, modo rotando devehere corpus sibi impositum, prouti situm ea acquirit, qui huic aut alteri motui fuerit conueniens.

Exper. VIII.
Fig. 4.

§. 16. Examinaui deinde corpus prismaticum octogonum ligneum, transuersim plano inclinato impositum, quod obseruaui repere in quercu, et rotari in panno aspero. In illa frictio horizontalis lateris repentis erat 296 gr. in hoc autem lateris rotati 700 gr. et porro erat $CE = 31$, $EF = 13$, $P = 1661$, hinc $\frac{EF}{CE} \times P = 696$ gr. At vero in casu experimenti primo est $F = 296 < 696$, hinc corpus motum repletorium sequebatur, in altero vero casu est $F = 700 > 696$, hinc corpus motui rotatorio obediuit.

§. 17.

§. 17. *Cubum tiliaceum obseruavi repere in quercu*, Exper. IX
sed rotari in panno aspero. In illa erat frictio horizon- Fig. 5.
 talis 656, in hoc 2036. $CE = EF = 42$, $P = 1940$
 $= \frac{FP}{CE} \times P$. Cum itaque in quercu sit $F = 656 < 1940$,
 haec reptionem effecit. In hoc autem est $F = 2036 >$
 1940 , igitur motus rotatorius consequebatur.

§. 18. *Adbibui cubum vitreum politissimum, qui in* Exper. X.
plano querno rependo descendit. Erat in hoc $P = 9369$ Fig. 5.
 gr. $CE = EF = 37$ part. et frictio horizontalis =
 1556 gr. Cum itaque hic sit $F = 1556 < 9369$, ne-
 cesse est, vt motus reptorius obtineat.

§. 19. *Parallelepipedum vitreum, hedra sua minori* Exper. XI.
quadrata planis impositum, in quercu repebat, in panno Fig. 6.
rotabatur. Erat in hoc $P = 3486$ gr. $CE = 47$, E
 $F = 20$, hinc $\frac{FP}{CE} \times P = 1483$ Frictionem horizontalem
 obseruavi in quercu 1136, in qua repebat, quia 1136
 < 1483 . Sed in panno inuenta fuit frictio horizontalis
 1556 > 1483 , hinc in panno rotabatur.

§. 20. *Idem parallelepipedum vitreum, hedra sua* Exper. XII.
maiori, rectangula, planis impositum, in quercu repfit, Fig. 5.
et in panno. Erat enim, vti ante, $P = 3486$, $CE =$
 $EF = 20$, hinc $\frac{FP}{CE} \times P = 3486$, et consequenter in quercu
 $F = 1106 < 3486$; nec non in panno $F = 1496 <$
 3486

§. 21. *Aliud parallelepipedum vitreum, minus quam* Exper. XIII.
praecedens, iterum hedra sua minori, quadrata, planis Fig. 6.
impositum, in quercu rependo, in panno rotando, descendit.
 Mensuras ineundo deprehendi $P = 1774$, $CE = 42$, EF
 $= 15$, hinc $\frac{FP}{CE} \times P = 633$, et frictio horizontalis erat
 in

in plano querno = 506, supra pannum autem 686. Igitur, quia in quercu $F = 506 < 633$, hic rependo descendit. Sed quia in plano panneo fuit $F = 686 > 633$, in hoc rotabatur.

Exper. XIV. §. 22. Idem parallelepipedum vitreum minus imposui
Fig. 5. nunc hedra sua maiori rectangula plano querno et panneo, et vidi, in utroque illud rependo descendere. Erat enim, ut ante, $P = 1774$, $CE = EF = 15$, hinc $\frac{EF}{CE} \times P = 1774$; et deprehensa fuit frictio horizontalis in illo = 536, in hoc autem = 746, quare in utroque $F = 536$ vel $746 < 1774$, unde motus rectorius in utroque plano corpori huic vitreo placuit.

§. 23. Quoniam autem adhibui pannum rudiorum, laneum, ex filis crassioribus contextum et hirtum, aliquoties obseruavi, dari in eo circa corpora leuiora exceptiones quasdam, nisi summa cautio adhibeatur, pilis prominentibus elasticis sine dubio adscribendas, quia hi piluli extantes, elastici, in corpus non satis ponderosum satis efficaciter, illud eleuando, agere possunt. Ita ex. gr. vidi, corpus ligneum, quod superiori experimento V. in §.

Exper. XV. 13. allegato inseruierat, plano horizontali ligneo aut alteri glabro, AB, impositum in situ DCE vel dce supra basin CD quiescere; similibus vero modis panno allegato impositum, in utroque casu in faciem CE, aut ce, procumbere. Quod certe phaenomenum, satis paradoxum, nulli alteri causae, quam modo memoratis fibris extantibus elasticis panni rudioris adscribere possum.

§. 24. Patet itaque ex omnibus his experimentis, ea theoriam et mensuram superius expositam confirmare quam pulcher-

pulcherrime, ita, vt nullus dubitem, eam naturae atque eius operationibus in hoc negotio esse conformem. Patet etiam exinde per se, *corpora omnia sphaerica et cylindrica, transuersim plano cuiunque, etiam minimae asperitatis, imposita, rotando defensaere.* Exper XVI.
Fig. 8 Fit enim in his omnibus $EF = 0$; quare si vel minimam frictionem horizontalem habeat tale corpus, erit semper $F > \frac{EF}{CE} \times P = 0$, prouti hoc motus rotatorius requirit.

§. 25. Si vero quaestio sit de plano et corpore imposito, perfecte politis et omnis frictionis expertibus, ne tum quidem theoria hucusque vsitata phaenomenis satisficere potest. Requiritur enim pro motu rotatorio, vt fit $F > \frac{EF}{CE} \times P$; ergo si $F = 0$, requiritur vt sit $0 > \frac{EF}{CE} \times P$ quod aliter fieri nequit, nisi, si EF fiat negativa, hoc est, Tab. IV.
Fig. 7.
Tab. V.
Fig. 9. nisi cadat in alteram oppositam partem respectu puncti E . At vero tum recta CE vel linea *appressionis* cadit extra basin corporis FI . Sin itaque pro plano perfecte polito regula sit accommodanda, respici debet ad lineam appressionis, non vero ad lineam directionis; in plano autem solo horizontali coincidunt lineae directionis et appressionis. Consequenter *in plano inclinato perfecte polito corpus descendit rotando, si linea appressionis cadit extra basin; descendit vero rependo, si linea appressionis cadat intra basin corporis.* Neque adeo, si et planum inclinatum et basis corporis impositi perfecte polita forent, corpus semper rependo descensurum esset.

§. 26. Postquam communicassem hoc problema cum
Cel. Dan. Bernoulli, Academiae nostrae Membro meritissimo,
Tom. XII. M m per

perſcripfit is beneuole ad me ſolutionem ſuam, quae principiis quidem paulo diuerſis a meis vtitur, ſed cum con-
 cluſione mea plane coincidit, quam proinde honoris cau-
 ſa hic recenſebo, ſed redactam in compendium. Solutio
 Fig. 10. Celeb. viri ex *epiſtola d. d. Baſilae 6. Aug. 1740* huc
 redit. Sit AB horizontalis, AC verticalis, CB ſectio
 plani inclinati, DF ſectio baſis corporis in plano inclina-
 to, centrum grauitatis corporis in plano inclinato, cen-
 trum grauitatis corporis in H , verticalis, ſiue linea dire-
 ctionis, HG , quae ſimul exprimat pondus corporis abſolu-
 tum. Reſoluatur HG in HL et HE , potentias laterales, illam
 parallelam, hanc perpendicularem plano inclinato. His
 poſitis erit in F , vbi baſis corporis impoſiti deſinit, vel
 obſtaculum aliquod inuincibile, quod corpus ſiſtat quidem,
 ſed non impediatur quin prolabatur, vel non aderit tale re-
 tinaculum. Sin adſuerit tale obſtaculum, tunc palam eſt
 futurum eſſe, vt potentia HL multiplicata per ſuum ve-
 ctorem HE conetur corpus voluere; et potentia HE ,
 multiplicata per ſuum vectorem EF , conetur corpus in ſi-
 tu ſuo ſeruare: ſequitur hinc, corpus prolapſurum eſſe, ſi
 fuerit $HL \times HE > EF \times HE$, aut $EG > EF$, hoc eſt,
 ſi linea directionis ceciderit extra baſin DF . Sed e con-
 trario corpus in ſitu ſuo manebit, ſi fuerit $EF \times HE >$
 $HL \times HE$, aut $EF > EG$, hoc eſt, ſi linea directionis
 ceciderit intra baſin corporis DF . Vnde concludit Vir
 celeberr. factum fuiſſe, vt hac proprietate auctores qui-
 dam abuſi ſtatuertint, eandem quoque obtinere, ſi corpus
 ab obſtaculo inuincibili non retineatur, ſed actu deſcendat.
 §. 27. In altero autem caſu, ſi obſtaculum nullum
 adſit, quod deſcenſum impediatur, rem aliter ſe habere
 con-

concludit. Namque tum potentiam HL duplicem habere effectum, quorum vnus conatur, vt antea, subuertere corpus, alter vero accelerare corpus. Si igitur iam frictio omnis absit, fore vt vis accelerans sola praepolleat, neque vnquam corpus rotari possit. Si vero frictio detur in plano, subire illam vicem alicuius retinaculi firmi, atque sic potentiam HL actu diuidi in accelerantem et subuertentem; et posita frictione horizontali $=R$, esse vim acceleratricem $=HL - \frac{AB}{CB} \times R$, et vim subuertentem $=HL$ minutae vi acceleratrice, vel $=HL - HL + \frac{AB}{CB} \times R = \frac{AB}{CB} \times R$. Itaque porro momentum potentiae rotatoriae vel subuertentis esse $= \frac{AB \cdot HE}{CB} \times R = \frac{HE^2}{HG} \times R$; sed momentum potentiae contrariae $=HE \times EF$. Vnde deducitur, corpus reperi, si fuerit $HE \times EF > \frac{HE^2}{HG} \times R$, aut $\frac{EP}{HE} \times P > R$; rotari vero et reperi simul, si contrarium accidat, quo in casu oriatur motus mixtus ex reptorio et rotatorio, etiam in ipsis sphaeris descendibus. Monet tandem Vir acutissimus, haec omnia ita se habere, si frictio ponatur constanter eadem et vniformis, neque dependens a velocitate corporis; si vero haec ita se non habeat, intelligi debere per R frictionem horizontalem corporis, ea velocitate moti, quam super plano inclinato descendens habet in dato loco.

DE
 VIRIBVS ATTRACTIONIS
 MAGNETICAE EXPERIMENTA.

AVCTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

§. I

Quod ferrum trahat magnes, occulta ac ne hodie quidem detecta ratione, Thaleti Milesio iam cognitum fuisse perhibet Aristoteles de anima lib. I. cap. 2. adeoque mirandi huius effectus cognitio aetatem suam deducit ab ipsis philosophiae naturalis initiis. Deriuata ad nos est per longinquam aetatum seriem huius phaenomeni notitia magis, quam scientia, cum nemo repertus fuerit, qui regulas et leges, quas tenet, industria peruestigatione eruere conaretur, vsque ad haec nostra tempora, in quibus demum ea cura animos incescit, vt in mensuram attractionis magneticae inquirerent. Cum itaque leui experimento constare possit, ferrum validissime attrahi a magnete in immediato vtriusque contactu, debilius in aliquo vnus ab altero interuallo, et tandem plane non, in distantia nimis remota: videtur exinde certe hoc patere, attractionis huius vim habere legem in mutua horum corporum a se inuicem distantia fundatam; quaenam vero sit illa lex, aut quaenam comparatio distantiarum, attractionis magnitudinem indicans, id experimentis solertissime institutis definiendum quidem esset, sed nondum definitum est.

§. 2.

§. 2. Imperfectioni certe huius disquisitionis adscribi debet, quod facile sit catalogum texere illorum, qui experimenta huic vsui inferuentia instituerunt atque iis attractiones magneticas ad mensuras suas reuocare studuerunt. Ostendunt monumenta Societatis Regiae Anglicae, primos ibi labores huic rei insumtos fuisse, atque *Hauksbeium*, optime gnarum, quantum ad proprietates magnetis referat, scire proportionem virium attractricium ad diuersa interualla, diligentissime captis experimentis huic studio incubuisse. Methodus ab ipso adhibita his obseruationibus iussu Societatis Regiae emendata fuit a *Tayloro*, et denuo magis perfecta a *Whiflono*, qui reperisse sibi visus est, sequi has attractiones quam proxime rationem distantiarum sesquiduplicatam, vel, posita distantia magnetis et ferri $= d$, quantitate constante $= a$, esse attractiones magneticas inter se vti $\frac{\alpha}{a^{-1}}$. *Taylorus* vero, suis innixus tentaminibus,prehendit, easdem attractiones non esse vti $\frac{\alpha}{a^2}$, neque vti $\frac{\alpha}{a^3}$, quae omnia leguntur in *Transact. anglicanis* Nr. 368. *Newtonus* ex captis quibusdam a se experimentis statuit, decrefcere attractionem hanc in ratione fere triplicata distantiae in recessu a magnete, vel esse eam vti $\frac{\alpha}{a^3}$, in princip. p. 368.

§. 3. Omnibus autem in sedula huius rei indagatione palmam praeripuit hodie Celeberr. Petrus van *Muschenbroek*, qui in eximia dissertatione physica experimentalis de magnete nulli operae neque labori pepercit, vt experimentis prudentissime institutis veram huius negotii legem et proportionem, naturae operationibus conformem, prederet. Postquam vero omnem lapidem mouisset, fateri

Tab. VI.
fig. 1.

tandem coactus est, nullam se inuenisse distantiarum functionem, quae proportionem attractionis exhiberet; neque etiam fieri attractionem ferri ad magnetem in proportione aliqua magnitudinis superficiei, quae magneti opponitur. Tandem autem in edito hoc anno opere praeclarissimo, *Essai de Physique* pag. 280. detexit, dari aliquam inter attractiones duarum sphaerarum, magneticae et ferreae, aequalium proportionem, easque esse in ratione inuersa quadruplicata spatiorum cauorum, quae interposita sint successiue inter vtramque sphaeram. Vt si sint duae sphaerae aequales, magnetica AB et ferrea CD, esse attractionem magneticam pro diuersis distantis EF in ratione inuersa quadruplicata spatii interpositi cylindracei ACFD BE. Quam regulam haud sane inconcinnam, experimento, quod ibidem affert, optime probat in duabus sphaerulis aequalibus, quarum diameter erat 0, 95 pollicis londinensis duodecimalis.

§. 4. Quam primum itaque mihi nobile hoc inuentum innotuit, statim ingens cupido animum meum incessit, id variis nouis experimentis examinandi atque inquirendi, an veritas vbique hic sibi constet; an haec proprietas ad sphaeras inaequales se extendat; an in duabus sphaeris magneticis quoque obtineat, nec ne. Adhibui itaque sequentem methodum, vt in tabula, ex qua omne ferramentum remoueri, susponderem bilancem exactissimam, eo plane modo, qui in celeb. *Grauesandii* physices elementis mathematicis ad vsus hydrostaticos Tab. XXVII. figura 1 depingitur et describitur. Cepi deinde tres globos, magneticos duos, ferreum vnum, de quibus in sequen-

quentibus sermo occurreret, quorum dimensiones sunt frequentes in partibus, quarum 120 efficiunt pedem londinensem. Erat nimirum globi magnetici maioris pondus 1726½ granorum talium, quorum 7680 efficiunt libram hollandicam, diameter autem 14 part. ante memoratarum. Globi denique ferrei, qui magnetico maiori aequalis est, pondus deprehendi 2798½ Gran. et diametrum eandem cum priori, nempe 14 part. Vbi obiter tantum hoc adiicio, me occasione horum globorum indagasse quoque methodo consueti hydrostatica magnetum a me adhibitorum, qui ex metallifodinis sibiricis allati ad nos sunt, densitatem, quam frustra in tabulis huic scopo conditis quaesivi, eamque inuenisse in vno eorum 4, 806, in altero 4, 778 posita aquae purae densitate 1, 000. Fuerunt hi globi omnes extus exacte laeuigati, et materiae ad sensum bene homogeneae; quod idcirco adnoto, quia primo facto tentamine, in quo globus ferreus superficiem nondum satis politam tenebat, aliae prodierunt attractiones, regulae allegatae non conuenientes.

§. 5. Postmodum igitur, suspenso ex vna lance magnetico globo, ita vt axis eius verticalis esset, imposui alteri lanci tot ponduscula, quot requirebantur ad exactissimum aequilibrium restituendum in bilance. Quo obtento auxi haec ponduscula dimidio grano, vno, et successiue pluribus granis, ex quo noua praeponderatio lancis ponderibus onustae sequebatur. Tum vero leniter demisi integram bilancem ope funiculorum, quibus suspensa est, eamque tamdiu magis magisque supposito verticaliter globo ferreo admoui, donec vltima haec facta praeponderatio

ratio attractionis vi rediret ad pristinum aequilibrium. Deinde distantiam inter summitates vtriusque globi dimensus sum circino, qui totus ex orichalco confectus est; atque simul semper caui, vt ne contingerent se hi duo globi, durante primo experimento, vtque sic ferrum illibatum et magnetica vi nulla imbutum tenerem. Discrepat itaque in aliquibus circumstantiis haec mea operatio à muschenbroekiana, sed hac ratione mihi visus sum optime institutum meum posse peragere.

§. 6. Assidua igitur patientia et multo labore obtinui sequentes obseruationes, quas nunc suo quamque ordine recensero; postquam hoc vnicum adhuc adnotauero, globum ferreum post peractum primum experimentum adhaesisse quidem magneti: sed tam parum exinde recepit virium, vt in scobe ferrea volutus fere nihil huius attraxerit. Igitur *primo* 1740 Febr. 24, st. v. post meridiem suspendi globum magneticum maiorem ex bilance, sic, vt polus eius boreus ferrum respiceret, illique suspensi ferreum aequalem in linea verticali, atque sic sequentes obtinui numeros:

	Obseruatio	Distantiae	Attractiones
	Gloror.		
I	- - - 8 $\frac{3}{4}$	part.	- - - $\frac{1}{2}$ Granum
II	- - - 6	-----	- - - 1
III	- - - 4 $\frac{4}{5}$	-----	- - - 2
IV	- - - 3 $\frac{4}{5}$	-----	- - - 3
V	- - - 3	-----	- - - 4
VI	- - - 2 $\frac{4}{5}$	-----	- - - 5
VII	- - - 0	-----	- - - 1977

Secundo

Secundo deinde simile experimentum feci cum sphaera magnetica minore, cuius polus boreus deorsum spectabat, et cum eodem, quo prius, globo ferreo, ut deinde erui possim, an eadem memorata proportio locum quoque obtineat inter duas sphaeras inaequales. Hic inueni Iulii 10, ante merid. sequentia:

Observatio Distantiae Attractiones
Gloror.

I	- - -	14½ part	- - -	¾ Gran.
II	- - -	9	- - -	1 - -
III	- - -	4	- - -	2 - -
IV	- - -	2	- - -	3 - -
V	- - -	0	- - -	67 - -

Tertio iterum adhibui Augusti 30. ante merid. sphaeram magneticam minorem, in qua nunc polus boreus sursum spectabat, et ferream eandem, atque deprehendi haec:

Observatio Distantiae Attractiones
Gloror.

I	- - -	4 part.	- - -	1 Gran
II	- - -	3	- - -	1½
III	- - -	2	- - -	2
IV	- - -	1½	- - -	3
V	- - -	0	- - -	50

Quarto denique, Augusti 30. post merid. examinaui utramque sphaeram magneticam, minorem sic ex balance suspensam, ut polus boreus sursum spectaret, et maiorem ita locatam, ut polus huius boreus etiam sursum spectaret, atque sic poli amici se respicerent; quo facto sequentem tabulam erui:

Observatio Distantiae Attractiones
Gloror.

I	- - -	27 $\frac{1}{2}$	part.	- - -	$\frac{1}{2}$	Gran.
II	- - -	14	---	- - -	1	
III	- -	11 $\frac{1}{2}$	---	- - -	1 $\frac{1}{2}$	
IV	- -	9 $\frac{1}{2}$	---	- - -	2	
V	- -	8	---	- - -	2 $\frac{1}{2}$	
VI	- -	7 $\frac{2}{3}$	---	- - -	3	
VII	-	6 $\frac{1}{2}$	---	- - -	4	
VIII	-	5	---	- - -	5	
IX	-	4	---	- - -	6	
X	-	0	---	- - -	134	

§. 7. Vt nunc ex his captis experimentis veritatem regulae muschenbroeckianae eruamus, via nobis antea praesternenda est sequentibus duobus problematibus geometricis; quorum primum, etiamsi ab *Archimede* iam solutum reperitur, sequenti modo explicatum dabo. Quaeitur soliditas segmenti sphaerici FEGD. Sit hunc in finem ratio radii ad peripheriam = 1:p, EP = x, PM = y, CE = q, CB = e, ED = f; erit CP = q + x, et peripheria radio PM descripta = py, area huius circuli = $\frac{py^2}{2}$, et elementum segmenti sphaerici = $\frac{py^2 dx}{2}$. Cum autem sit CP² + PM² = CM², habebitur q² + 2qx + x² + y² = e², aut y² = e² - q² - 2qx - x², atque adeo $\frac{py^2 dx}{2}$ = $\frac{pe^2 dx}{2}$ - $\frac{pq^2 dx}{2}$ - $\frac{2pqxdx}{2}$ - $\frac{px^2 dx}{2}$, et consequenter integrando habebitur $\int \frac{py^2 dx}{2}$ = $\frac{pe^2 x}{2}$ - $\frac{pq^2 x}{2}$ - $\frac{pqx^2}{2}$ - $\frac{px^3}{6}$; abeat nunc x in FD = f, orietur soliditas segmenti sphaerici FEGD = $\frac{pf}{2}$ (e² - q²) - $\frac{pqf^2}{2}$ - $\frac{pf^3}{6}$; vel, quia q = e - f, habebitur eadem soliditas = $\frac{pf^2(e-f)}{6}$.

§. 8. Sint nunc porro duae sphaerae, maior FKEI et minor DHBO, distantia HI inter se remotae, quaeritur spatium cauum interceptum, quod formant haec duae sphaerae, FIEBHD. Ponantur iterum ratio radii ad peripheriam = 1 : p, KE = R, CB = r, HI = a, sinus totus = 1, anguli LEA sinus = s cos. = c; eritque distantia centrorum CK = R + r + a. Ex figura satis patet, similia esse triangula LKE, LEA, GCB et GBA; quare locum inuenient sequentes analogiae; nempe: 1 : R = s : LE = sR; c : sR = s : LA = $\frac{s^2 R}{c}$; nec non; 1 : r = s : GB = sr, et c : sr = s : GA = $\frac{s^2 r}{c}$; cum praeterea sit radii LE peripheria = p s R, area huius circuli = $\frac{p s^2 R^2}{2}$, oriatur coni FEA soliditas = $\frac{p s^4 R^3}{6c}$, et simili ratione coni DBA soliditas = $\frac{p s^4 r^3}{6c}$; vnde habebitur conus truncatus FEBD = $\frac{p s^4}{6c} (R^3 - r^3)$. Restant iam indaganda adhuc duo segmenta sphaerica FEI et DHB, quae auferenda adhuc erant ab inuento cono truncato, vt obtineatur tandem quaesitum spatium cauum FIEBHD. Inuenietur itaque ex praemisso lemmate geometrico

$$\begin{aligned} \text{soliditas FEI} &= p \cdot \frac{LI^2 (3R-LI)}{6}, = \frac{p \cdot 1 - c \cdot R^2 (2+c)}{6}, = \frac{p R^3 (2-3c+c^2)}{6} \\ \text{et soliditas DHB} &= \frac{p \cdot GH^2 (r-GH)}{6} = \frac{p \cdot 1 + c^{-2} r^3 (2-c)}{6} = \\ &= \frac{p r^3 (2+3c-c^2)}{6}. \text{ Eruetur hinc spatium cauum quaesitum} = \\ &= \frac{p s^4}{6c} (R^3 - r^3) - \frac{p R^3 (2-3c+c^2)}{6} - \frac{p r^3 (2+3c-c^2)}{6} = \frac{p s^4}{6c} (R^3 - r^3) - \\ &= \frac{2p R^3}{6} - \frac{2p r^3}{6} + \frac{3c-c^2}{6} p R^3 - \frac{3c-c^2}{6} p r^3 = \frac{p s^4}{6c} (R^3 - r^3) + \frac{(3c^2-c^4)p}{6c} \\ &= \frac{p(1+3c)}{6c} (R^3 - r^3) - \frac{2p}{6} (R^3 + r^3), \text{ substituto valore ipsius} \\ & s^4 = 1 - 2c^2 + c^4. \text{ Ducatur ex C recta CN, quae sit} \end{aligned}$$

parallela ipsi AE, erit apud N angulus rectus, et in triangulo KNC erit KC $(R+r+a) : \sin. \text{tot.} (1) = \text{KN} (R-r) : \sin. \text{KCN} (c)$, vt adeo valor ipsius c fit =

$$\frac{R-r}{R+r+a}$$

§. 9. Est itaque soliditas spatii caui inter duos globos inaequales = $\frac{p \cdot (1+c \cdot c \cdot (R^3-r^3))}{6c} - \frac{p(R^3+r^3)}{3}$, ex qua formula difficilis est applicatio ad eum casum, quo globi ponuntur aequales, quia poni debet in hoc casu $c=0$ et $R=r$. Substituatur ergo in inuenta expressione valor ipsius c modo inuentus, obtinebitur soliditas caui

= $\frac{p(2R^2+2r^2+2aR+2ar+a^2)}{6(R+r+a)(R-r)} (R^3-r^3) - \frac{p(R^3+r^3)}{3}$;

facta nunc diuisione actuali per $R-r$, oritur idem cauum

$$= \frac{p(2R^2+2r^2+2aR+2ar+a^2)(R^2+Rr+r^2)}{6(R+r+a)} - \frac{p(R^3+r^3)}{3}$$

et multiplicatione actu instituta, facta reductione ad eandem denominationem, et abiectis quantitibus, quae se destruant, fit tandem, vltima aequatione prodeunte in factores rursus soluta, $6 \times \text{solidit. caui} =$

$\frac{p}{p} \frac{r^2(4R^2+a^2)+aR(a+4r)(R+r)}{R+r+a}$, quam expressionem indigitabo vnica litera, et ponam = M.

§. 10. Si deinde accidat, vt fit $R=r$, in casu sphaerarum aequalium, obtinebitur facile $6 \times \text{solid. caui} =$

$\frac{(4r^2+3ar+3a^2)r^2}{2r+a^2}$, et diuisione actu instituta $\frac{6 \times \text{solid. caui}}{p}$

= $(2r+3a)r^2$. Est vero hic pro omnibus distantis soliditas caui vti $2r+3a$, ob r^2 vbique idem, quare in hoc casu erit $2r+3a=M$, et assumpta constante a , experimento vnico definienda, erit attractio magnetica

=

$= \frac{\alpha}{M^4}$, vbi loco ipsius M numeri casuum alterutri respondentes debebunt adhiberi.

§. 11. Subducto nunc calculo numerico, fatis molesto quidem, inveni sequentia; quae hac tabula continentur:

	Exprim.	dist.	M.	attr. observ.	attr. theoriae
I casus	1	$- 8\frac{3}{5}$	$- 39\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	2	$- 6\frac{3}{10}$	$- 32\frac{9}{10}$	1	$1\frac{7}{103}$
	3	$- 4\frac{4}{5}$	$- 28\frac{2}{5}$	2	$1\frac{93}{103}$
	4	$- 3\frac{4}{5}$	$- 25\frac{2}{5}$	3	$3\frac{7}{103}$
	5	$- 3\frac{1}{5}$	$- 23\frac{3}{5}$	4	$4\frac{7}{103}$
	6	$- 2\frac{4}{5}$	$- 22\frac{2}{5}$	5	$4\frac{93}{103}$
	7	0	14	1977	$32\frac{65}{103}$
II casus	1	$- 14\frac{1}{2}$	- 2594	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
	2	- 9	- 1843	1	2,94
	3	- 4	- 1159	2	18,82
	4	- 2	- 886	3	55,10
	5	0	- 613	67	240,40
III. casus	1	- 4	- 1159	1	1
	2	- 3	- 1023	$1\frac{1}{2}$	1,65
	3	- 2	- 886	2	2,93
	4	$- 1\frac{3}{5}$	- 832	3	3,76
	5	0	- 614	50	12,69
IV. casus	1	$- 27\frac{1}{2}$	- 4372	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	2	- 14	- 2526	1	4,49
	3	$- 11\frac{1}{2}$	- 2184	$1\frac{1}{2}$	8,03
	4	$- 9\frac{1}{2}$	- 1911	2	13,69
	5	- 8	- 1706	$2\frac{1}{2}$	21,56

$$6 = 7\frac{1}{2} - 1651 \quad \text{---} \quad 3 \quad \text{---} \quad 24,59$$

$$7 = 6\frac{1}{2} - 1501 \quad \text{---} \quad 4 \quad \text{---} \quad 35,98$$

$$8 = 5 - 1296 \quad \text{---} \quad 5 \quad \text{---} \quad 64,75$$

$$9 = 4 - 1159 \quad \text{---} \quad 6 \quad \text{---} \quad 101,20$$

$$10 = 0 - 613 \quad \text{---} \quad 134 \quad \text{---} \quad 1293,00$$

Nempe pro experimento quocunque expositorum, ex datis radiis sphaerarum et earum qualibet distantia subdixi ex paragrapho 9 et 10 valorem ipsius M , et cum attractio debeat esse $= \frac{\alpha}{M^4}$, erit logarithmus attractionis $= l\alpha - 4lM$, ubi $l\alpha$ in quolibet experimento ex primo eius casu determinatur.

§. 13. Apparet nunc facile ex comparatione tabulae huius vltimae, experimentum primum ita conspirare cum theoria musschenbroekiana, vt melius non possit; de quo etiam casu sphaerarum nempe aequalium solo theorema hoc pronunciauit Vir sagacissimus. Dubitari itaque non potest, obtinere allegatam musschenbroekianam proportionem attractionum magneticarum in casu sphaerarum aequalium, quanuis, vt verum fatear, a priori eam derivare ex vlla attractionum hypothese generali nequeam. Deinde id etiam incommodi secum fert haec theoria, quod attractiones mutui contactus sphaerarum exhibeat nimis paruas. Nam saepius laudata haec theoria in experimento primo iubet attractionem esse in immediato vtriusque sphaerae contactu fere 33 granorum, cum tamen 1977 Gran. obseruata fuerit. Apparet vero porro etiam in casu sphaerarum inaequalium, siue vtraque sphaera magnetica sit, siue non, praefatam theoriā plane non ita comparatam esse, vt pro verosimili tantum haberi possit, vbi doleandum certe est, perniciosam quasi

quasi huius lapidis tantam esse, quae nullis legibus generalibus se adstringi hucusque patiat. Id tamen merito honoris cel. *Musschenbroekio* exinde accrescit, quod in re tam difficili, atque in obscuritate hac naturae hucusque indomita futuris seculis facem, quam sequi tuto licet, ingenii sui acrimonia et laborum constantia accenderit.

§. 13. Reuocabo nunc ad examen aliud experimentum, quod ipse cel. *Musschenbroekius* instituit cum duobus globis magneticis inaequalibus, quorum vnus diamentum erat 6½ poll. londinens. siue 78 lin. alterius 18 lin. et quod legitur in dissertatione de magnete cap. 1. p. 16. Absoluto casuum quorundam huius experimenti calculo, sequens mihi enata est tabella.

distancia	M	attract. observ.	attr. theoriae
70 lin.	- 125253	- - 1¼	Gran. - - - 1¼
45 - -	80433	- - 3	--- - - 7
28 - -	51459	- - 9	--- - - 44
12 - -	26379	- 23	--- - - 634

Vnde rursus patet, laudatissimam theoriam ad casum globorum inaequalium non extendi.

DESCRIP.

DESCRPTIO

CASSIAE AMERICANAE PROCUMBENTIS, HERBACEAE, MIMOSAE FOLIIS, FLORIBVS PARVIS, SILIQVIS ANGVSTIS, PLANIS.

A. I. A.

Cassias cum clariff. Tournefortio voco omnes plantas, quae floribus praeditae sunt pentapetalis, quorum pistillum abit in siliquam nunc teretem et cylindraceam, nunc compressam, in varia loculamenta diuisam a dissepimentis transuersa positis, medulla quadam subinde obductis, foetam semipibus duris. His notis addi potest, quod petala florum fere semper diuersae sint magnitudinis et formae, quod stamina habeant ut plurimum decem variae longitudinis et formae; variis etiam apicibus onusta.

Vix datur aliud plantarum genus, cuius species statura, proceritate, crescendi modo et fructu adeo inter se diuersae sunt; dantur enim arborescentes, dantur frutescentes vel erectae vel procumbentes perennes; dantur herbaceae annuaeque species; dantur Cassiae fructu tereti cylindraceo pulpa quadam nigricante repletae; dantur fructu tereti et angulato duplici seminum ordine foeto; dantur etiam siliquis planis compressis; dantur denique siliquis articulosis, qualem ante aliquot annos circa Campechy nouae Hispaniae urbem detexit G. Houstonus. Taceo folia, in quibus non minor differentia deprehenditur.

Ne vnica quidem pulchritudine et vsu medico insignis huius generis species in Europa sponte prouenit, sed

sed omnes fere americanae et asiaticae sunt originis, exceptis paucis Africae indigenis. Harum plurimae mihi sunt aut penitus hactenus incognitae, aut non bene ab auctoribus descriptae. Hoc autem loco animus tantum est exhibere descriptionem vnicæ sed raræ admodum speciei, quæ maioris et clarioris distinctionis causâ ab aliis huius generis speciebus a me sic appellatur:

CASSIA americana procumbens, herbacea, Mimosae foliis, floribus parvis, siliquis angustis, planis.

E radice albenti, valde fibrosa, cauliculus surgit admodum gracilis, teres, pedalis aut sequipedalis, inferne purpurascens et parum hirsutus, superne versus extremitatem pallide viridis et glaber, mox supra radicem duos emittens ramos coniugatos, in terram reclinatos. Breui post hocce ramos intervallo caulis in tres quatuor pluresue alios, aequalis fere longitudinis prioribusque per omnia similis alterno semper ordine diuaticatur, ita, vt vix dignosci possit, quinam proprie horum ramorum caulis sit continuatio. Rami omnes teretes sunt, hinc inde parum intorti, terram versus inflexi vel humi plane procumbentes.

His ad vncialia praeter propter interualla alterno ordine folia adnascuntur fescunciam, vncias duas aut tres subinde longa, pollicem siue sesquipollicem in medio lata, vtrinque angusta et obtusa, ex octo, nouem, decem, vndecim, duodecim aut tredecim, raro pluribus pinnae coniugationibus composita, nulla cum impari costam claudente. Costae, quibus pinnae hae adhaerent, prope

bini geniculatæ sint, tenuissimæ, hirsutæ, ab altera parte gibbæ, ab altera canaliculatæ seu carinatæ, ad extremum dantis auricularis parvis, angustis et valde acutis, ramisque appressis præditæ. Pinnæ vero brevissimæ et vix conspicuis pedunculis geniculatæ insident, sinuque pollicis trientem aut dimidium circiter vaciam latæ, glabræ, si oculis nudis spectantur, parum ad oras præcipue hirsutæ, si microscopio armatis cernuntur, in tenuissimum spinulam inermem et mollem terminatæ, superne læte virides, inferne dilutioni colore ad glaucum vergente tinctæ. Hæram nervus non medium telæ percurrit, sed ad oras propius admoventur. Noctu folia clausa sunt, interdum vero expansa Mimosaarum aliarumque plantarum ad instar.

Flores non ex alis foliorum sed ex lateribus ramorum ad duarum aut trium linearum ab illis distantiam, mox supra memoratarum auricularum mucrones, per totam fere ramorum longitudinem, in pediculis brevibus, lineam unam aut alteram longis oriuntur, modo singulares, modo bini aut terni, exiles valde, vix duas aut tres lineas lati, pentapetali, rosæci, flavi, calyculis contenti e viridi flavescentibus, in quinque ut plurimum segmenta acutissima et inaequalia fissis. Petala diversæ quoque sunt magnitudinis, quorum quatuor fere æqualia, oblonga et obtusa, interdum etiam ut plurimum clausa, quintum et infimum, contra ac in plerisque Cassiæ speciebus fieri solet, quatuor superioribus triplo maius est, subrotundum, concavum.

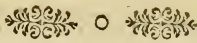
E fundo calyculi pistillum surgit oblongum, planum, dorso et ventre viride et glabrum, ad latera pilosum et
inca-

incanum, decem flaminibus paruis, magnitudinis et formae diuersae, vt in congeneribus, circumdatum, quod progressu temporis in siliquam excrefcit planam, compressam, vnicam plus minus longam, duas circiter lineas latam, initio viridem, per maturitatem fuscam, glabram vel parum admodum hirsutam, ex duabus membranis compositam, seminibusque foetam quinque aut sex, compressis, lacubus, nigricantibus et splendentibus, argulatis, tenuibus dissepimentis inter se distinctis, nulla omnino pulpa ceteris.

Elegans haec planta in horto Academico sicercuit ex seminibus cum integris siliquis circa Philadelphiae urbem in Pensyluania, Americae septentrionalis prouincia, sitam collectis, floruitque Iulio, Augusto et Septembri mensibus. Quamuis primo semper a saturo anno flores magna copia producat, fructus tamen raro maturat; cum floribus enim marcentibus eorum rudimenta vt plurimum simul delabuntur. Et si illorum aliquot augmentum capiunt, ob nimis breuem huius regionis aestatem ad plenam maturitatem non perueniunt. Ceterum notandum adhuc est, plantam, quam descripsi, in fecili enutritam fuisse. Illae quidem, quas solo fimi equini calore tepente plantauit, laetius creuerunt, folia et ramos plures atque maiores humi procumbentes obtinuerunt, flores autem nunquam multo minus fructus protulerunt. Hycme vero omnes radicibus perierunt.

Est porro sine dubio eadem planta, quae *Chamaecrista Mariana*, flore minore Petiv. hort. sicc. apud Rai. Hist. Plant. Tom. III. App. cuius specimen ipsum, ex quo denominatio haec originem traxit, in musaeco sloaniano vidi. Icon sennae spuriae virginianae, *Mimosae foliis*, floribus

ribus parvis, niſtitantibus, Pluk. Alm. Bot. Tab. 314. fig. 5. Si florum paruitatem et ſiliquarum formam ſpectes, ſatis ad plantam noſtram accedere videtur. Flores autem et ſiliquae in planta Plukenetiana ex aliſ foliorum egrediuntur, ſecus ac in noſtra; flores quoque omnes ſingulares pinguntur, cum in noſtra duo aut tres vt plurimum ab vno exortu enaſcantur; auriculae etiam baſin coſtarum ambientes ſimplices repraeſentantur, in noſtra vero duplices ſunt; foliorum pinnae longiores et latiores quoque ſunt, vtrinque obtuſae et aequalis fere vbique latitudinis. Differt praeterea noſtra haec planta a Chamaecriſta Pauonia americana, ſiliqua multiplici Breyn. Cent. I. p. 66. Cap. XXIV, poſſimum creſcendi et ramos emittendi modo; ſtatura maiori et crecta; pinnis foliorum paucioribus, iisque praecipue, quae in medio eorundem poſitae ſunt, longioribus et latioribus, in ſpinulam abeuntibus; florum denique ſtaminibus breuioribus.



DE
PHAENOMENIS PLUMBI
FVSI IN TVBIS CAPILLARIBVS.

C. E. Gellert.

In doctrina de tubis capillaribus experimenta haecenus sunt instituta circa corpora, quae perpetuam fluidatem praeseferunt: quibus debito modo institutis pro comperto affirmari potest, altitudines mercurii, infra libellam depressi, et omnium liquorum, supra eandem ascendentium, esse in ratione reciproca diametrorum. Perpendens itaque metalla in vasis puris fusa ad modum referre argentum viuum et istud ideo a Chemistis dici metallum igne minimo fusum, suspicabar phaenomena metalli fusi in tubis capillaribus similia eis, quae in argento viuo reperiuntur, esse futura. Apud animum igitur statuebam periculum facere, quo intelligerem, an experientia coniecturis meis sit responsura. Nec spes me fefellit. Nam experimentis in plumbo capitis obseruaui haec quatuor phaenomena generaliora:

- 1) plumbum fusum in tubo capillari semper subsistere ad altitudinem aliquam infra libellam metalli in vase contenti.
- 2) altitudinem istam esse propemodum in ratione reciproca diametrorum, propemodum dico, nam neque inaequalitatibus, licet sint perexiguae, vllus tubus carere, neque eam ob causam diametrorum mensura, prout decet, institui potest:
- 3) in tubis, qui non vbiuis aequae sunt lati, pro diametro eius superficiei, ad quam summitas plumbi in tubo pertingit, istud subsistere:

4) idem euenire in tubis figulinis.

Præcipua autem experimenta sunt ista.

Tab. VI.

Exp. I. fig. 4.

Immersi tubum capillarem vitreum AB in plumbum fusum et ebulliens vsque ad D, intrauit quidem plumbum, sed subsistebat ad altitudinem aliquam infra libellam, nempe in C; quo gracilioribus vsus sum tubulis, eo maior erat ista altitudo DC.

Exp. II. fig. 5.

AB et ab significant tubos vitreos aequalium diametrorum, quibus plumbo liquefacto immerfis altitudines DC et dc sibimet inuicem sunt æquales. Idem quoque euenit, si alterutri tubus figulinus, dummodo sit eiusdem diametri, substituatur; quod commode fistulis, vsui herbae nicotianae inseruentibus peragi potest, vtpote quæ fatis accurata in hunc vsum gaudent diametro.

Exp. III. fig. 6.

Diameter tubi AB sese habebat ad diametrum tubi ab vti 3 : 1 ista enim erat $\frac{21}{15}$ lin. haec autem $\frac{7}{15}$ lin. His immerfis in plumbum fusum altitudo dc $\frac{7}{15}$ lin. ad quam istud infra libellam subsistebat, erat propemodum ad altitudinem alterius tubi DC $\frac{21}{15}$ lin. vti 3 : 1, seu altitudines erant in ratione reciproca diametrorum. In tubis, quorum diametri erant in ratione quacunque, eundem semper oriri euentum sæpius iterato experimento didici.

In dimetiendis istis altitudinibus et diametris mensura vsus sum anglicana, in qua pes in duodecim pollices, et pollex in decem lineas diuiditur.

Exper. IV.

Sumatur tubus inflexus, quem repraesentat fig. 7. hunc

hunc immergas in plumbum fufum, hoc fubfifitet in C infra libellam, et erit altitudo perpendicularis DC aequalis altitudini, quae obferuatur in tubo recto eiusdem diametri.

Exp. 5. fig. 8.

Testam fieri curavi figulinam ABCD, cavitatis *abc* prifma repraefentat, latitudo huius cavitatis in *ac* est vnus pollicis et femper decrefcens verfus *b*, ibi denique fit $\frac{3}{15}$ lin. Pofita testa in fitu horizontali et infufo plumbum altitudo huius verfus *b* femper decrefcabat. Fateor hoc experimentum bis non ex voto fuffiffiffe. Nam diftincte quidem videre erat, metallum fufum feffe attollere ad maiorem minoremue altitudinem, pro maiore aut minore intercapedine; fed cum testa ob intenfum huius hiemis frigus non bene effet exficcata, infundendo plumbum inaequales huius oriebantur motus, vt nulla decrementi lex obferuari poffet. Interim hoc experimentum, vtut mancum, reticere nolui, quia in metallis, ad quae fundenda maior, quam ferre vitrum poffit, requiritur gradus caloris, egregie cautelis neceffariis adhiberi poffet.

Exp. VI fig. 9.

Sit tubus AB, altitudo plumbi infra libellam fubfifitens diametro tubi rcfpondens GH. Immergas illum in plumbum fufum et altitudo immerfionis fit aequalis GH, aut illa minor, nihil metalli in tubum intrabit.

Exper. VII. fig. 10.

Si tubum ABC, conftantem duobus partibus, ampliore et anguftiore, immittas in plumbum fufum, et altitudo immerfionis superet altitudinem, quae debetur diametro tubi

gra-

gracilioris, hoc pro ratione diametri amplioris subsistet in tubo, etsi diameter nimis sit magna, ad libellam perveniet.

Exp. VIII. fig. 11.

Sit ABC tubus, parte ampliore et strictiore instructus; EF denotet altitudinem plumbi depressi, quae respondet tubo graciliori, et GH, altitudinem tubi amplioris. Mergatur ut in experimento antecedenti, sed ita, ut pars tubi amplioris submersa aut altitudini EF aequalis, aut illa minor sit, nihil metalli in tubo ampliore reperies. Invertatur deinceps tubus et denuo mergatur, sed ita, ut pars submersa tubi gracilioris non superet GH, deprehendes, plumbum nec in graciliorem intrasse.

Exp. IX. fig. 1.

Tab. VII.

Sit tubus conicus ABC, immittas illum plumbo liquefacto eo situ, quem figura exhibet, istud infra libellam subsistet ad altitudinem DC; quo profundius deinceps detruditur, eo maior fit altitudo DC.

Exp. X fig. 2.

Invertatur eiusmodi tubus et immergatur eius pars exilior, habebis DC pro altitudine plumbi infra libellam subsistentis; quo profundius illum immergis, eo magis decrescit altitudo DC.

Exp. XI. fig. 3.

Inflexatur tubus diametri inaequalis in formam ABC, immittatur plumbo fuso, istud subsistet in C. Sit C diam. superficiei supremae plumbi in tubo, erit altitudo perpendicularis DC ea, quae debetur tubo recto diametri C.

Ex-

Exponendum hoc in loco cenſeo, quomodo haec experimenta in tubis capillaribus inſtituerim, quo melius diiudicari poſſit, vtrum momentum aliquod habeant nec ne? et quo facilior aliis, quibus volupe fuerit, ea reiterare ſeu alia tentare pateat via.

Mihi manus operi admoventi duae potiffimum ſuboriebantur difficultates remouendae. Nam 1) tubi quidam vitrei vim caloris plumbi fuſi ferre non poterant, et 2) altitudo ad quam plumbum infra libellam ſubſiſtebat, non conſpici et eam ob cauſam menſuratione definiri nequibat. Quod ad priorem attinet, ſaepe iterato experimento animaduerti, rumpi tantum craſſiores, tenuiores autem nihil detrimenti pati. Caleſeci itaque craſſiores paulatim, antequam in plumbum fuſum immergebam, quo factò non conatus meos infringebant. Ad alteram tollendam prima vice hac uſus ſum methodo. Filo aeneo circumuoluto annotaui in tubo altitudinem, ad quam illum in plumbum immerſurus eram, licet et iſtud in parietibus tubi externis adhaerens altitudinem immerſionis oſtenderet. Immerſo tubo orificium eius digito aut cera obturaui, aut hermetice clauſi; tum vero admodum leniter extraxi, ne motus in cauſa eſſet, quo excideret plumbum, et, cum metallum ad altitudinem aliquam ſuſpenſum haereret, menſuraui differentiam inter hanc et altitudinem immerſionis nempe CD. His peractis in plurimis experimentis reperi phaenomena paullo ante memorata. Nullus itaque de ipſorum veritate dubitabam, praefertim cum et diametros tubulorum ſumma, qua potui, induſtria dimenſus eſſem. Verum enim vero bis obſeruans, plumbum in tubo leniter et verticaliter extracto duobus ſaltibus pollicis longi-

tudinem superantibus superiora petere, minuti secundi temporis spatio propemodum ibi morari, et deinceps rursus ad imum descendere; non potui a me impetrare, vt mihi persuaderem, hanc methodum omnibus numeris absolutam esse. Ideo hoc singulare phaenomenon ad aliam et quidem tutiorem viam quaerendam me impellebat, quam mox indicabo,

Exp, XII. fig. 4,

Immerso tubo ampliori, sed tamen respectu metalli capillari, e. g. diam. 2. lin. in plumbum fusum, animadvertentem metallum istud infra libellam in tubo subsistens, conspici posse in forma sphaerica; superficiem istius supremam in tubo prius figi, quam in vase; et, cum tunc tubo firmiter adhaereat, locum suum, illo extracto non mutare.

His fretus facile et exacte altitudinem istam DC in tali tubo et huius ope in gracilioribus determinare potui hunc in modum. Vna cum tubo ampliore immerfi duos tresue graciliores vtrinque apertos, simulac in ampliore tubo plumbum consistebat, omnes leniter extraxi, quo facto plumbum in omnibus suspensum haerebat; mensuravi deinceps differentiam inter altitudinem plumbi in tubo suspensi et altitudinem immersionis, et deprehendi eadem prorsus phaenomena, quae cognoueram methodo priore. Veritatem itaque dictorum phaenomenorum non amplius in dubium reuocavi, sed cum nihil egisse viderer, nisi et causam illorum qualemcunque allegassem, quae de ea pro viribus meditatui sum in medium proferre et aliorum maturiori iudicio relinquere volui. Prius autem quam me ad istam exponendam accingam, propositiones quaedam,

qui

quibus innititur, erunt ponendae et veritas singulorum experientia comprobanda.

Propositio I.

Particulae plumbi liquefacti sese mutuo attrahunt.

Simulac plumbum funditur, in globum se colligit, et immerso in istud tubulo capillari ampliori, vt intra illum etiam conspici possit, forma sphaerica apparet, quae et eo concreto remanet. Cum autem experimenta in vacuo instituta ostendant, figuram sphaericam aquae et mercurii, attractioni particularum, non pressioni aeris esse tribuendam (a); inde colligere licet, formam sphaericam plumbi fusi nulla alia ex causa nisi attractione particularum proficisci. Idem probant duae guttae plumbi ad contactum mutuum in vnum coeuntes.

Propositio II.

Particulae plumbi fusi et ebullientis cohaerent vitro aut argilla.

Si detrudas vitrum candefactum seu instrumentum quoddam figulinum in plumbum fusum, et id postea extrahas; apparebit particulas metalli perexiguas ipsi adhaerere.

Propositio III.

Particulae plumbi liquefacti sese inuicem fortius attrahunt, quam cum vitro aut argilla cohaerent.

Propositiones duae priores ostendunt, particulas plumbi fusi sese mutuo attrahere et cum vitro aut argilla cohaerere.

(a) Tent. Exper. Academ. del. Cimento Exp. 2. in vac. instit. et les Memoires de l'Academie Royal. de Sciences a. 1724. p. 149.

rere. Immerso tubo capillari in plumbum fusum, cylindrus plumbi istius in vase aequalis DC innititur impellere plumbum intra tubum ad libellam vsque, quem etiam adiuuat cohaesio cum vitro; hoc si fieret, particulas intra tubum ascensuras a metallo in vase contento, quod a lateribus contingunt, recedere oporteret, quod autem, quo minus fiat, impedire conatur attractio mutua particularum plumbi. Cum itaque plumbum in tubo capillari ad altitudinem aliquam DC infra libellam subsistat, attractio mutua particularum plumbi aequalis est ponderi metalli DC et cohaesioni cum vitro, ergo ista multo maior. Addi insuper potest superficies supremas omnium liquorum in tubis capillaribus supra libellam ascendentium esse concavas, plumbi autem et argenti viui, vtpote quae infra libellam subsistunt, conuexas.

Haec cum ita sint, meo quidem iudicio causa praecipua plumbi in tubo capillari infra libellam subsistentis sita est in attractione mutua particularum plumbi.

Experimentis certiores facti sumus, altitudines plumbi esse in ratione reciproca diametrorum. Nunc autem ostendere conabor, quamobrem hoc ita fieri debeat.

Attractio mutua particularum plumbi et cohaesio ipsius cum vitro pro vnoquoque tubo capillari est determinanda ex tubi peripheria, seu, quod idem est, ex ipsius diametro. Quo maior enim est peripheria, eo plures particulae a reliqua plumbi massa recedere necesse habent, et eo maior fit cohaesio plumbi cum vitro.

Sit itaque fig. 3. tubus ADCB eius diameter = B, altitudo capillaris = C, attractio mutua plumbi pro hoc tubo = P = B, et cohaesio cum vitro = E = B; attractio

tractio mutua plumbi pro tubo $adcb$, cuius diameter $= b$, et altitudo capillaris $= c$, sit $= p = b$ et cohaesio cum vitro $= e = b$. Iam vero scimus ex modo dictis esse $P = B^2C + E$, et $p = b^2c + e$, erit igitur $P : B^2C + E = p : b^2c + e$, multiplicando extrema et media $Pb^2c + Pe = pB^2C + pE$ et cum sit $Pe = pE$, diuidendo et multiplicando per Pe et pE erit $Pb^2c = pB^2C$, diuidendo porro per $P = B$ et $p = b$, restat $bc = BC$. Quod si denique diuidas per b , et B , est $c : B = C : b$.

Experimenta 7. 8. 9. 10. 11. ostenderunt in tubis, qui non vbiuis aequae sunt lati, altitudinem DC deberi aestimari pro diametro istius superficiei, ad quam plumbum in tubo pertingit, quod phaenomenon sequentem in modum explico. Est lex hydrostatica, fluida quaecunque premere pro altitudine et basi. Sit itaque ABCDEG, tubus non capillaris communicans, quem fig. 16. exhibet, et in E fundus mobilis F, ita adaptatus, vt fluido circa latera eiusdem nulla pateat via, huius basis sit $= b^2$, densitas fluidi autem $= d$; repleatur tubus fluido vsque ad A erit pressio in fundum $F = ABb^2d$. In applicatione ad nostrum casum nobis tantum concipiamus, fundum mobilem esse summam superficiem plumbi intra tubum, reliqua sua sponte fluent.

DE
TUBIS CAPILLARIBVS PRISMATI-
CIS.*C. E. Gellert.*

Philosophi ideo potissimum doctrinam de tubis capillari-
bus excoluerunt, quo operationes naturae a capillari-
tate pendentibus eo melius perspicerent, vti hucusque tan-
tum tubis cylindricis in experimentis ab ipsis institutis.
Cum vero a fertili natura non solum formentur cavitates
capillares cylindricae; sed potius multiformes a diligentibus
naturae scrutatoribus in animalibus, vegetabilibus et
mineralibus reperiantur; operae pretium iudicavi experi-
menta in tubis capillaribus prismaticis capere, phaenome-
na ibi obuenientia sollicitè annotare, cum iis, quae in
tubis cylindricis iam obseruata sunt, comparare et eo
animam appellere, vt generalior doctrina de tubis capil-
laribus euadat.

Tubi capillares prismatici artificiales, quantum me-
mini, ad haec vsque tempora fuere incogniti. Arduum
insuper prima fronte videtur, illos construere, cum tamen
reuera facili negotio parantur. Praeponam itaque experi-
mentis methodum illos conficiendi, quae haec est.

Paretur prisma ferreum triangulare seu quadrangulare,
longitudinis 6 seu 8. dig. et crassitiei circiter $\frac{1}{2}$ dig. hoc
obducatur in officina vitraria vitro candente ductili, per-
petuo circumuertendo, vitrum forcipe prismati bene ap-
primatur, ita, vt perfecte eius formam acquirat; prismate
extracto, vitrum rursus bene candefacias, et exinde re-
cta

DE TVBIS CAPILLARIBVS PRISMATICIS

Tubi capillares prismatici quadrangulares.			
No.	Longitudo	Adscensus aquae.	
		in parte ang.	in parte lat.
Partes pedis in 1200		diuisi.	
I.	1210	154	133
II.	1500	80	75
III.	1550	179	166
IV.	1590	80	76
V.	1597	167	142
VI.	1535	160	150
VII.	1690	192	185
VIII.	1620	190	186
Tubi capillares prismatici triangulares.			
No.	Longitudo	Adscensus aquae.	
		in parte ang.	in parte lat.
Partes pedis in 1200.		diuisi	
I.	1320	110	95
II.	1610	180	168
III.	1745	207	200
IV.	1790	177	171
V.	1810	190	190

Has altitudines saepius reiteratis experimentis reperi constantes, praeter quod in tubis amplioribus aqua in angulis altius et pyramidis instar ascendebat; cuius mensura vero nequaquam capi potuit, a pice ita extenuato, ut tandem omnem aciem oculorum effugeret.

Nactus altitudines, ad quas aqua eleuabatur, sollicitus fui de mensura basium instituenda; quam cum minus accurate absolute determinare possem, sequens mensurandi genus relatiuum adhibui.

Tubum *AB*, fig. 6. amplio rem prismaticum affigui perpendiculariter machinae lignae *FGHI*, ita ut firmus ac immobilis staret, eius orificium inferius clausi cera, in superius inferui infundibulum vitreum in tubum valde gracilem desinens; deinde impleui alium graciliorem *ab*, fig. 7: sugendo mercurio, ab omnibus sordibus apprime purgato, ad certam altitudinem *ac*, filo aeneo annotatam; eandem mercurii massam ex hoc tubo immisi in tubum maiorem *AB* per infundibulum *K*, et mensuraui altitudinem *AC*. Iam vero haec prismata *ac*, et *AC* sunt aequalia, et aequalia prismata reciprocant bases et altitudines, legitime itaque inferebam: uti altitudo *ac* ad altitudinem *AC*, ita basis A^2 ad basin a^2 . Notandum est mercurium lente in infundibulum esse infundendum, impetu enim si irruit, globuli quidam resiliunt. Contingit quoque, ut interdum mercurius tubum ingredi ab aere in tubo contento prohibeatur, et in infundibulo retineatur; tunc caute cera ab orificio inferiori est paululum remouenda, ut liber aeri pateat exitus, simulac vero omnis mercurius in tubum descendit, hic dextre et celeriter cerae est apprimendus, ne qua pars mercurii euadat.

Tab. VII.
fig. 6.

256 DE TVBIS CAPILLARIBVS PRISMATICIS

In iisdem tubis, quorum altitudines capillares paullo ante annotavi, altitudines aequalium massarum mercurii in binis tubis erant sequentes.

	No.	altitudo		No.	altitudo	altit. ex part. alt.
Mercurius, qui erat in tubo prismatico quadrangulari.	I.	1050	erat in tubo prismatico quadrangulari.	II.	319	332
	III.	1050		II.	142	150
	IV.	165		II.	164	173
	V.	1050		II.	218	227
	VI.	1050		II.	220	230
	VII.	896		II.	130	138
	VII.	1050		II.	160	170
	VII.	1250		II.	193	205
	VIII.	1050		II.	165	174
Mercurius qui erat in tubo prismatico triangulari.	No.	altitudo	erat in tubo prismatico quadrangulari.	No.	altitudo	altit. ex alt. part.
	I.	216		II.	160	170
	II.	1300		II.	255	267
	II.	1090		II.	202	215
	III.	1090		II.	176	186
	III.	1300		II.	205	215
	IV.	1300		II.	270	280
	IV.	1090		II.	229	239
	V.	1050		II.	181	192

Bases

Bases igitur horum tuborum erant inuerse vti altitudines in ista tabula designatae, e. g. Basis tubi quadrang. prism. No. II. ex parte arctiore sese habet ad basin tubi prism. quadr. No. I. vti 1050 ad 332, ex parte ampliore autem vti 1050 ad 319.

Ex tabula prima et secunda videre est, aquam in tubis prismaticis gracilioribus aequae ac in cylindricis altius ascendere quam in amplioribus, et capacitatem exinde in tubis vbiuis aequae latis esse causam diuersarum altitudinum aquae supra libellam eleuatae. Hanc ob rem in rationem quandam inter bases tuborum meorum prismaticorum et altitudines aquae eleuatae inquisiui, aggressisque quibusdam viis, in rectam reductus certior factus sum, istas altitudines capillares esse propemodum interse inuerse vti radices basium: quod, vt eo melius patefiat, quosdam tubos ad calculum reuocabo. Radix baseos tubi prismatici quadrangularis No. I. sese habet ad radicem baseos tubi prismatici quadrangularis No. II. quam proxime vti 36 : 65. Adscensus aquae in tubo No. II. ex parte arctiore fuit $\frac{89}{19}$ lin. quaesito quarto proportionali ad hos tres numeros prodit altitudo capillaris pro No. I. $\frac{144}{15}$ lin. aequidifferens a $\frac{144}{15}$ et $\frac{133}{15}$ lin. altitudinibus experimento in tabula prima obseruatis, quod mirum non est, cum hic tubus admodum conicus altus $\frac{1219}{18}$ lin. mercurio repletus fuit ad $\frac{1050}{18}$ lin. Radix baseos tubi prismatici quadr. No. III. sese habet ad radicem baseos tubi No. II. ex parte ampliore ferme vti 28 : 65. Aqua in tubo No. II. ex parte ampliore est eleuata ad $\frac{75}{16}$ lin. finita operatione quartus proportionalis est $\frac{174}{16}$ lin. pro altitudine adscensus aquae in No. III. quam experimentum mihi exhibuit $\frac{179}{16}$ et $\frac{66}{16}$ lin.

Radix baseos tubi prismatici quadr. No. VIII. est ad radicem baseos tubi prism. quadr. No. II. ex parte ampliori uti 26 : 65. Altitudo aquae supra libellam eleuatae in tubo No. II. ex parte ampliore $\frac{2}{3}$ lin. Quartus proportionalis 187 $\frac{1}{2}$ lin. dat altitudinem capillarem pro No. VIII. ab ista in tabula $\frac{192}{10}$ et $\frac{186}{10}$ lin. non admodum differentem. Radix baseos tubi prismatici triangularis N. V. est ad radicem baseos tubi prism. quadrangularis No. II. quam proxime uti 13 : 33. Aqua in tubo No. II. eleuata ad $\frac{2}{3}$ lin. vna cum istis radicibus dat $\frac{20}{3}$ lin. pro altitudine capillari in tubo triangulari No. V. quae experimento obseruata fuit $\frac{39}{10}$ et $\frac{20}{10}$ lin. Radix baseos tubi prism. triangularis No. VI. sese habet ad radicem baseos tubi prism. quadrangularis No. II. uti 17 : 36. Altitudo capillaris in No. II. quadr. est $\frac{2}{3}$ lin. et quartus proportionalis ad hos tres numeros $\frac{19}{3}$ lin. designat. altitudinem capillarem tubi prismatici triangularis No. VI. quae in tabula inuenitur $\frac{17}{10}$ et $\frac{17}{10}$ lin. Inficias quidem ire non possum, in his tubis et in reliquis, si calculus inspiciatur, hunc non ad amissim congruere cum experientia; sed spero fore, ut haec differentia, cum sit exigua, non euertat legem antea traditam: altitudines capillares tuborum capillarum prismaticorum esse in ratione inuersa subduplicata basium.

Porro, quia circuli sunt inter se ut quadrata diametrorum, erunt quoque altitudines capillares in tubulis prismaticis inter se inuersae ut diametri circulorum basibus inscriptorum. Itidem, cum figurae regulares similes circulis inscriptae sunt inter se ut quadrata diametrorum circulorum circumscriptorum; altitudines capillares etiam sunt inter se inuersae ut diametri circulorum basibus circumscriptorum.

Peripheriae circulorum sunt inter se vt diametri, e-
 runt itaque adscensus aquae in hos tubos seu altitudines
 capillares in ratione inuerfa peripheriarum circulorum ba-
 fibus tam incriptorum quam circumscriptorum. Altitu-
 dines capillares sunt quoque in ratione inuerfa quantitatum
 aquae eleuatae. Nam fit altitudo aquae eleuatae supra li-
 bellam in tubo prismatico ampliori = A , eius basis = Q^2 ,
 denotet in arctiori adscensum aquae a , et basin q^2 . Erit
 $A : a = q : Q$, vti iam ostendi : multiplicando extrema
 et media inter se erit $AQ = aq$ et cum AQ^2 et aq^2 ,
 dant quantitates aquae ; diuidendo per aequalia AQ et aq ,
 restant Q et q , radices nempe basium. Sunt itaque quan-
 titates aquae eleuatae vt radices basium. Sed radices ba-
 sium sunt inter se inuerse vti altitudines capillares, ideo
 quantitates aquae erunt etiam inuerse vti altitudines capil-
 lares, nempe erit $AQ^2 : Q = aq^2 : q$ et cum fit $Q : q$
 $= a : A$, erit $AQ^2 : a = aq^2 : A$.

Quantum itaque altitudine aqua, quae in tubis gra-
 cilioribus adscendit, superat istam, in tubis amplioribus ele-
 uatam, tantum haec illam quantitate.

Nunc dispiciendum est, quomodo adscensus aquae in
 tubis capillaribus prismaticis se habeant ad illos, qui ob-
 veniunt in tubis capillaribus cylindricis ; et an non genera-
 lis regula pro omnibus tubis capillaribus cuiuscunque figu-
 rae condi possit ?

Regula pro tubis cylindricis stabilita ita sonat : alti-
 tudines ad quas aqua in tubos capillares supra libellam
 rapitur, sunt in ratione inuerfa diametrorum.

Sit ACQ fig. 8. tubus capillaris prismaticus amplior
 triangularis aut quadrangularis ; acq fig. 9. eiusmodi tubus

Qq 3 arctiori

arctior. Designet C , altitudinem adscensus aquae, Q radicem baseos in ampliori, et c , altitudinem aquae eleuatae, q , vero radicem baseos in arctiori, erit $C : c = q : Q$.

TBDE fig. 10, denotet tubum capillarem cylindricum ampliorem, $fbde$, fig. 11, arctiorem. E et e sint altitudines, ad quas aqua ascendit, D et d diametri B et b , bases circulorum, erit $E : e = d : D$ sed bases circulorum sunt inter se vt quadrata diametrorum, ideo $B : b = D^2 : d^2$; extrahendo radices est $\sqrt{B} : \sqrt{b} = D : d$, possum itaque pro diametris radices substituere et dicere vti $\sqrt{b} : \sqrt{B} = E : e$. Igitur omnes altitudines tam in tubis capillaribus prismaticis quam cylindricis sunt in ratione inuersa subduplicata basium.

Institui insuper et alia experimenta cum his tubis prismaticis, sed cum phaenomena prorsus conueniebant, cum iis, quae in tubis cylindricis fieri obseruata; super vacuum habeo ista experimenta sigillatim enumerare, sufficiat potius praecipuas propositiones ex iis erutas hic apponere.

In tubis prismaticis ex aqua sublatis et in aere perpendiculariter positis aqua suspensa haeret.

In tubis prismaticis ad horizontem inclinatis aqua ascendit pro altitudine perpendiculari.

In vacuo aqua ascendit in tubos hos prismaticos aequae ac in libero aere. In tubis, diuersam amplitudinem in sua longitudine continentibus, baseos tubi supremae, ad quam aqua pertingit, ratio est habenda. In tubis vario modo inflexis aqua eleuatur pro altitudine perpendiculari. Mercurius in tubis prismaticis infra libellam consistit et quidem quam proxime in ratione inuersa subduplicata basium.

Perti-

Pertinent quoque ad doctrinam capillarem phaenomena speculis vitreis parallelis obseruata. Videndum igitur est, an stabilita nostra regula generalis et apud ista locum obtineat.

Viri clarissimi Hauksbeius et Muschenbroekius deprehenderunt, altitudinem aquae ascendentis intra specula esse in ratione inuersa distantiarum a se inuicem. Sit distantia maior duorum speculorum inter se $= d$, altitudo aquae eleuatae $= a$, distantia minor $= D$, altitudo aquae eleuatae $= A$, erit $a : A = D : d$, et aqua eleuata repraesentabit duo parallelepipeda. Sed si haec parallelepipeda resoluantur in prismata $d^2 a$ et $D^2 A$, quorum bases sunt quadrata distantiarum, constituunt d, D , latera seu radices, et erunt itaque altitudines aquae eleuatae in ratione inuersa subduplicata basium.

OBSERVATIONES ANATOMICAE
RARIORES.

AVCTORE

I. C. Wilde.

Observatio I.

De

Vena caua duplici ascendente.

Anno 1737. extraordinarius et plane insolitus in corpore cuiusdam cadaveris masculi venae cauae status aperto abdomine oculis se obtulit. Iniectione in vasa cruralia tam arteriosa quam venosa facta, et remotis visceribus tres sub peritoneo, iuxta et super spina lumborum sitae visae fuerunt elevationes, quae clarius detectae palam fecerunt, unam et mediam aortam magnam, binas laterales vero duos venae cauae ascendentes truncos constituere sequentem in modum: aorta descendens, processibus diaphragmatis egressura, ramos suos insignes, coeliacum videlicet et mesaraicum superiorem, qui posterior duplo fere maior coeliaco erat, dabat. Hic mesaraicum superior etiam de se spargebat cysticam gemellam arteriam, quae consueto proventus modo alias ortum suum coeliaco debet. Aortae truncus descendens viam paullo plus dexterius ac solet, et super spina lumborum ipsa sumebat, in itinere suo emulgentes, spermaticas, mesaraicam inferior-

inferiorem, et lumbares, quasque consueto suo loco producens arterias: inferius diuarcabatur et vasa iliaca dimittebat. Vena vero caua ascendens non longe ab introitu in hepar, vbi vncialis crassitudinis existebat, ex duobus distinctis et aequalibus conflare truncis videbatur. Ita autem trunci ipsi erant locati, vt vnus dexter latus spinae dextrum, alter sinister eiusdem spinae latus occuparet sinistrum, et aortam vterque contineret mediam. Quo ab ortu istorum truncorum ipso, respectu itineris progressiui, quo sanguinem versus cor vehunt, et vbi vena caua ipsa implantatur, exordiamur, neccessè erit ibi descriptionem inchoare, vbi diuisiones in vnum coguntur truncum; etenim iliacis tam internis quam externis post arterias iliacas congregentibus, truncus ille venae cauae ascendens solitarius conficitur, qui dextrum spinae latus possidens, penes renem succenturiatum dextrum in hepatis substantiam immergitur. In nostro subiecto, vti duo trunci venae cauae, sic etiam iliacorum immersio in sui lateris quemque truncum erat separatim conspicua, eo tantum discrimine, vt truncus incipiens sinistri lateris paullo inferior ac ille dextri lateris apparuerit; siquidem canalis quidam oblique transversalis duas vncias longus et dimidiam vnciae crassus, super vertebra lumborum quinta et pone ramos iliacos arteriae magnae traiciens, binos truncos copulabat, ita quidem, vt in dextri trunci latere prope distantiam vnus vnciae ab iliacis emergeret, inque sinistri lateris trunco, vbi iliaca vasa, vt externum atque internum, concurrunt, figeretur, in via vero et paullo sinisterius venam emitteret sacram. Trunci in itinere sibi pares post hunc transuerse obliquum et communicatiuum

canalem diametrum dimidia vncia maiorem tenebant ; latiores et ad tres quartas partes superius , vbi coniunctionem subeunt , euadentes. Dexter truncus ascendens non procul ab emulgente vena vas spermaticum dextrum suscipiebat , paulo superius vero venam emulgentem , quo iterum aliud vas spermaticum abscedebat : sinister vero truncus itidem sub vasis renalibus assumebat vas spermaticum sinistrum , posthac binas venas renales , super renalibus denique in arcum dextrorsum vergentem et arteriam magnam transcendentem excurrebat , in arcum vena atrabilaria sinistra infigebatur. Lumbares venas quisque truncus sui lateris fouebat , in vnum tandem , suppeditata insula , combinati trunci stipitem sesquiunciam longum principalem porrigebant , quem hepatis committebant et qui hepar antequam ingrediebatur , venam atrabiliariam dextram , vel potius breuem canalem , (quia ren succenturiatus proxime stipitem adiacebat) admittebat.

Hic adiacere meretur : sinistrum hepatis lobum in hoc subiecto solito multo maiorem , lienem ad vsque protractum , ac cum illo ad quatuor vncias , quoad tunicas vtriusque proprias , concretum exstitisse. Item ductum pancreaticum duplici trunco et insertione gauisum fuisse , in talem quippe modum efformatum : apud lienem , vbi pancreas incipit , ex ramulis conflatatur ductus ; hic duas , et quod excedit , vncias progressus in binos alios dirimebatur ductus , quorum vnus et superior in distantia duorum ferme digitorum transuersorum ab altero versus pylorum , alter et inferior vero cum cholidocho ductu , vti in homine solet , coniunctim duodenum intestinum pertundebat.

Tab.

Tab. VIII. Fig. 1.

- A Arteria magna.
 a . . . coeliaca.
 b . . . mesaraica superior, ex quo cystica gemella e-
 mergit.
 c c Arteriae renales.
 d d . . . spermaticae.
 e Arteria mesaraica inferior.
 f Arteriae magnae diuisio in iliacos.
 g g g g lumbares arteriae.
 B Stipes venae cauae principalis hepar ingrediens.
 C Truncus v. cauae dexter.
 D sinister arcum super aorta faciens.
 E Communicationis canalis v. cauas intersitus
 e Vena sacra.
 FF Vasa iliaca interna.
 GG externa.
 hh Venae spermaticae dextrae.
 i Vena spermatica sinistra.
 KKK Venae renales.
 l Vena atrabiliaria sinistra.
 LL Renes.
 MM . . . succenturiati.
 N Crepido, vbi stipes hepar intrat.
 O Diaphragma reflexum.
 PP Processus musculi diaphragmatis.
 QQ Vreteres.

Tab. VIII. Fig. 2.

Monstrat communicationis canalem, duabus venis cauis insertam.

Observatio II.

De

Vena iugulari externa, quoad progressum, triplici, quoad insertionem autem quadruplici.

Visi consideratuque elegans venarum iugularium exter-
narum in cadauere quodam, 1738. dissecto, trigeminis
truncis obuiarum constitutio sequens nobis occurrit.

Cute colli myodeque expansione demta, extraordi-
narius tracheam supercurrens conspectus fuit atque satis
largus ramus, qui capiti propior factus se sinistrorsum
post glandulam thyroideam abscondebatur. Hic ramus a
subclauia vtrinque inter venas iugulares externam et inter-
nam medius, duabus quasi radicibus propullulabat, quae
radices crassitie quidem impares, sed conuergentes, in me-
dia tracheae parte coibant et ramum, magnitudine iugu-
laribus nil cedentem, praebebant. Hic ramus insignis,
dum musculos sterno-hyoideum et thyroideum sinisterius
incedens transcenderet super glandula thyroidea sinistri la-
teris quasi immergebatur, et per canalem breuem,
quatuor lineas longum, cum vena iugulari interna sinistra
copulabatur. Haec iugularis interna principali suo ramo
e sinu laterali durae meningis, reliquis vero huc appropre-
rantibus et minoribus ex musculis capitis et capite
ipso sanguinem vehebat. Truncus vero extraordinarius
et accessorius magis ab anteriori colli et interiori linguae
parte

parte, nec non a glandula thyroidea ramulos suos atque furculos accipiebat. Radix huius dextra ramo a glandula thyroidea descendente instructa erat; sinistra vero, ut angustior, sic nullis omnino ramulis gaudebat. Iugulares externae, in diametro multo minores internis, aduentabant ab exterioribus et musculosis tam colli quam faciei partibus; et radices iuxta praedictas exterius in subclaviis implantabantur. Hinc inde prodeuntes furculos cum ramulis trunci extraordinarii in anastomoseos vinculum congrederi vel ex eo patebat, quia inflato vno trunco, alter statim flatum admittebat. Propter hanc ramulorum communicationem, et propter huius venae accessoriae infertionem quoad venas iugulares externas, immo propter situm exteriora magis respicientem, hanc venam inferius bifurcatam potius iugularibus adnumeramus externis, quam internis, quamquam propter congressum cum iugulari sinistra interna et propter priuatum cum externis consortium et distinctam infertionem aliis ad internas magis referendam illam esse aptius videri possit. Communitas interim venarum iugularium internarum, externarum, et subclaviarum, intermedio descripto ramo, caput huius subiecti omnino commodius atque facilius ab onere sanguinis subleuare potuit ac debuit, ac nec in alio sperare licebit.

Tab. VIII. fig. 3.

A, Truncus iugularis externus extraordinarius.

B, Eius communicatio cum iugulari interna.

CC, Eiusdem radices, quarum dextra ramum *c.* a glandulis thyroideis suscipit, sinistra vero multo erectior existit.

DD, Infertiones apud venas iugulares externas.

EE, V. iugulares externae.

FF, V. subclaviae.

GG, V. iugulares internae.

H, ductus thoracici infertio.

I, V. caua descendens.

Observatio III.

De Venae azygos trunco duplici.

Hominis venae sine pari varia et singularia incessus atque distributionis apud auctores consignata exempla prostant. Nostra quam exhibemus venam azygon duplicem, hunc in modum constituta fuit. Truncus ad latus spinae dorsi vtrumque singularis, magnitudine minimo digito aequalis, notatus fuit; dexter ceu principalis truncus suam ac alterius trunci farcinam in venam cauam descendentem transuehens, ex interstitio intercostali, vt videbatur, ultimo et regione lumbari apud vertebrae lumborum primam ortum capebat; quatuor inter ascendendum intercostalibus ramis assumtis communicationis canalem super corpore vertebrae dorsi nono oblique appropinquantem recipiebat, et iterum duobus aliis ramis sibi vindicatis, alium communicationis canalem septimae vertebrae corpus oblique transcendentem fouebat. Vterius progrediendo, quatuor intercostales ramos suscipiebat, quorum primus tribus aliis, ex interstitiis intercostalibus supremis accurrentibus ramis, conflatus erat; truncus tandem, super bronchia dextra reclinatus, in venam descendentem ipsam consueto loco immergebatur.

Alter

Alter et sinister truncus tribus apud primam vertebram lumbarem ramis incipiebat, quos inter unus diaphragmaticum inferiorem, alter iuxta processum diaphragmatis a tunica peritonaei adiposa accedens adiposum, tertius vero a musculo quadrato et interstitio, quod inter ultimas costas est, adueniens, lumbarem et intercostalem ultimum constituebant: assurgentem duo rami intercostales intrabant, post canalis vertebram nonam supercandens sequebatur: tribus deinde intercostalibus ramis in truncum hunc sinistram insertis, canalis communicationis alter septimam dorsi vertebram superans associabatur: postremo adhuc tribus intercostalibus in truncum immixtis superius ramus accedebat in arteria aspera et oesophago ortum ducens; tandem ramus supremus insignis, duobus ramulis ab interstitiis intercostalibus superioribus aduentantibus compositus intercostalem superiorem sinistri lateris dabat.

Quoad situm horum truncorum notandum venit, sinistram huius azygae truncum profundiores aliquatenus positum visum fuisse prae illo dextri lateris. Vena praeterea caua tam descendens quam ascendens amplitudine quaeque consueta et haud diminuta deprehensa fuit.

Tab. VIII. fig. 4.

- A A, Vertebrae spinae dorsi.
 B B B, - - - tres lumbor.
 C, Truncus V. azygos dextrae.
 c c c c etc. Venae intercostales.
 d, princip. huius trunci.
 e, ramus intercostalis super.

F.

- F, truncus V. azygos sinister.
 c c c c etc. Venae intercostales.
 g, ramulus diaphragmaticus inferior.
 h, - - - - adiposus.
 i, - - - - lumbaris.
 k, - - - - arteriae asperae et oesophi.

Observatio IV.

De

Musculo singulari gemino sternum superiacente.

ANNO 1739. in cadauere virili musculorum par singulare, super sterno situm, contemplati sumus. Illud, vti conspectum fuit, litteris atque icone sistimus. Ad latera osis sterni tractus fibrarum carnosarum longitudinalium obueniebat, quae an ad platysmamyoides referendae sint, vel alium repraesentent musculum ex examine indagatori inclaruit: nempe remotis remouendis patuit iuxta cartilagine[m] xiphoidem vtrinque musculum locari sesqui digitum latum: porro innotuit, hunc ipsum musculum geminum, superato dimidio sterno, in tendinosam siue aponeuroticam abire constitutionem ad vsque clauiculas continuantem; deinde aperte dignosci potuit, hanc aponeurosin siue tendinem clauiculas transgredientem cum sterno-mastoideo musculo anterieus intime connecti: separatim hic musculus geminus, quousque carnosus erat, incedebat; in tendinem vero structura tribus oblique transversis productionibus tendinosis atque ansulis mutuo coniungebatur; congressum cum mastoideo per lineam conspicuum antopsia ipsa probabat. Musculus hic quasi bicorporeus et capiti et pectori inseruisse videtur.

Tab. VIII.

Tab. VIII. fig. 5.

- A A Musculi gemini , carnosò principio.
 B B - - - - - tendinosus progressus.
 C C C - . - - - anfulae tendinae.
 D D - - - - - carnosì fines cum
 d d Mastoideis musculis iuncti.
 E E Claviculae transparentes.
 F F Musculi pectorales magni.
 G Musculus deltoides.

Observatio V.

De

*Tendinum , digitos manus sinistrae extendentium , extraor-
 dinario numero.*

Quemadmodum naturam aliquando in musculorum fab-
 rica variare animadvertere licet ; sic haud minus tendi-
 nes quorundam musculorum crassitudine vel numero ad-
 augeri conspicuum obuenit. A tali augmentatione vel
 pluralitate roboris maioris vim et diuersimodam partis
 institutionis atque quandoque actionem singularem in ho-
 mine vno atque altero dependere , nemo facile , qui mu-
 sculos cum tendinibus tanquam motuum instrumenta prin-
 cipalia esse cognoscit , ibit inficias.

In subiecto quodam , quod nobis 1740. ad disse-
 candum oblatum fuit , vidimus manum sinistram , quoad
 tendines digitos extendentes , multo a dextra , quae , vt
 solet , constituta erat , differentem , quippe dorsum eius
 tendinibus quasi obrutum erat. Quo tales tendines , nu-
 mero duplicatas specialius indicemus , musculos phalangerum

Tom. XII.

S s

exten-

extensores , tam communem quam proprios considerabimus.

Musculus huius manus , vel potius digitorum extensor communis, quoad oriundi principia in condylo humeri externo ac parte posteriori ulnae atque radii , ut solet , nascebatur , carnosus ultra dimidiam sui partem procedebat , in 4. posthac productiones tendinosas , ligamentum annulare traicientes , excurrebat , quarum prima super indicis , secunda super medii digiti phalangis in latere interiori protendebatur , tertia in duos abscedebat tendines , qui , ligamento transverso superato , iterum dirimebantur , binisque singulis tendinibus digitis annulari atque auriculari donatis finiebant , illo excursus discrimine , ut tendo duplicatus vnus separatim annularis digiti phalanges transcenderet , alter digiti minimi vero post ligamentum annulare quidem geminatus , apud extremitatem ossis metatarsi , quod digitum istum sustinet , iterum coiret , et sic adunatus phalanges praedicti digiti , ad latus interius transcurreret ; quarta denique duos ablegabat tendines , quorum vnus et interior post ligamentum transversale diuaticatus os metatarsi et digitum minimum transcendebat ; alter exterius latus tam metacarpi , quam digiti occupans , iuxta phalanges ipsas definebat , et sic dictum auricularem proprium praebebat. Nouem itaque tendines hic musculus , qui alias tantum 4 aut 5 (quia auricularis proprius cum eo cohaeret) dimittit , emittebat. Reliqui qui adiacebant musculi extensores proprii , ut indicator et bicornis in media ulnae ac radii parte nati carnosam prodibant coniunctione , ita vero , ut indicator mox separatus ante ligamentum binos produceret tendines , vnum super indicem , alterum

alterum super digitum medium, exterius latus respicientes, exporrectos; extensor autem pollicis non longe a ligamento in quinque diuideretur tendines ex quibus vnus in phalange pollicis vltima et latere exteriori, alter eiusdem in secunda, tres caeteri vero in osse metatarsi, quod pollicis sustentaculo est, terminabantur. Loco trium vel 4 (si extensor pollicis tricornis est) tendinum igitur, 7 hic notabantur tendines, et sic in his propriis aequae ac communibus musculis, numero quam quem natura alias largiri solet, alterum tantum plures.

Tab. IX. Fig. 1.

A Musculus extensor digitorum manus communis, in 4 productiones tendinosas excurrens, quorum

1. dat tendinem indici.

2. porrigit medio.

3. ante ligamentum transuersale duplicatur, et post ligamentum iterum singulus tendo geminatur, et ad anularem duos, totidemque tendines ad auricularem ablegat.

4. duos tendines ad minimum digitum dimittit, interior post ligamentum denuo partitur, exterior auricularem proprium repraesentat.

B musculus indicator proprius 2 tendinibus conspicuus, quorum vnus indici, alter medio digito impertitur.

C musculus pollicis proprius, bicornis vel tricornis dictus tendinibus 5 phalangibus et ossi metatarsi pollicis infertis, obuius.

Observatio VI.

De Intestino caeco et processu vermiculari.

Nonnunquam obtigit, praeter glandulas mesenterio humano solitas, prope angulum, quem ileum et colon coniuncta faciunt, vnam glandulam nucem moschatam aequantem, vel duas ac plures simul congregatas, sed minoris differentisque magnitudinis vidisse.

In quodam eiusmodi subiecto, cuius coecum intestinum eiusdem cum colo amplitudinis et digitum transversum tantum longum erat, ac cuius fundus in processum vermicularem finiebat, inter ileum et colon, glomum, plus quam triginta glandularum, auellanas, pinearum nubes et pisorum magnitudinem aequantium conspexi: Vasa itidem a colo, coeco, et appendicula vermiculari accurrentia lymphatica, non solum quia tuebant lympham, oculis lustrare, sed etiam quaedam singularis amplitudinis cernere dabatur. Haec vasa tam superficiem coli, coeci, et appendiculae perreptabant, quam glandularum cohorti ex parte appropinquabant, ex parte vero per mesocolon, mesaraeum ipsum intrabant. Hoc interim hic adferre praeterire non possumus, flatum ramis venosis, colo coecoque vicinis, immissum vtrumque penetrasse intestinum vtrumque eleuasse. Quod phaenomenon et alio tempore et in aliis intestinorum tam tenuium quam crassiorum portionibus expertus sum.

Aliud, quod hac occasione haud intactum relinquere volumus, nobis alio tempore obuenit intestinum coecum, eiusdem tantum cum colo diametri, processumque vermicularem bis circumtortum habens. Hoc coecum, tanquam

quam appendix coli, quia vix latum digitum ab infertione ilei protendebatur, processum vermicularem spiritaliter tortum atque retortum et 5—6 vncias longum in fine suo gerebat affidentem, qui processus in principio cœci infundibulum excauatum dilatabatur, et digiti pollicis capax erat, post vero in vermicularem formam angustabatur; ubi coecum intrabat, valvula spirali instructus erat, quæ ovale digiti apicem comprehendens foramen suppeditabat, apud foramen intestinum coecum, vt dictum, breue incipiebat, et recessu quodam siue sinu et valvula coniuente ab ileo, quod iuxta patebat, et a colo, quod ante valvulam Bauhini ascendebat, discriminabatur. Hic processus, quemadmodum singulariter constructus et locatus imo magno orificio patulus erat, sic facile illum recrementa ingredi immo ibi stabulari poterant; hinc non multum mirati sumus, quod illum processum scybalis induratis tumidum et constipatum reperiremus. Praeterea inter ileum et colon tres adhuc glandulas, nucem auellanam magnas, simul offendimus.

Tab. IX. Fig. 2.

Monstrat portionem coli atque ilei cum coeco, admodum breui, atque appendicula vermiformi, in fine coeci pendente.

A A A Vasa sanguifera, atque iuxta decurrentia vasa lymphatica.

B B Glandularum in angulo ilei atque coli residentium cohors.

C C Vasa lymphatica, mesaraeum versus tendentia,

D Ligamentum coli.

Tab. IX. Fig. 3.

Ostendit aliud coecum admodum breue cum sua appendicula spirali.

A Portio intestini coli.

B Intestinum coecum.

C Initium appendiculae magnopere dilatatum.

D Reliqua eius portio angustata atque spiralis.

E Portio intestini ilei.

I Vasa sanguifera.

G Tres glandulae colo et ileo adfatae.

Tab. IX. Fig. 4.

Exhibet eiusdem interiorem faciem, in qua praeter valvulas coniucentes obuiam eunt

A Orificium ilei s. dicta valuula Bauhini, hic admodum hians.

B Orificium appendiculae, cum valuula spirali.

DE

RENIBVS SVCCENTVRIATIS IN
PVERO DISQVISITIS NOTATA.

AVCTORE

I. C. Wilde.

Puerum 3 - 4 annos natum 1739. mense martio quoad renes succenturiatos percrutatus sum, sequentiaque animaduerti.

Tunica adiposa renes circumueftiens ex parte etiam renes succenturiatos cingebat, ita, vt prae illa glandulae istae renales vix internosci vel distingui possent. Sed tunica ipsa paullulum ablata, vasa succenturiatorum facta sunt perspicua, quae insequendo corpora manifestarunt ipsa. Erant autem illa vasa partim arteriosa partim venosa. Arteriarum, quas notabimus quaternas, binae propriae, alterae binae communes non opposite aequalem sumebant originem; propriarum scilicet dextra ab emulgente dextra ipsa, quae alias etiam a trunco aortae post mesaraicam superiorem propullulat. Sinistra vero, quae aliquando quoque ex coeliaca prouenit, penes radicem mesaraici rami superioris ex trunco ipso aortae nascebatur, vtroque vero, (quam quoque in adultis subiectis vel vnus vel vtriusque lateris gemino principio atque trunco, anterius vno, altero posterius capsulae latus suis ramis percurrente vidimus) in corporibus succenturiatorum ipsis distribuebatur. Communium vero vel potius arteriarum phrenicarum

rum posteriorum, quae consueto modo ex coeliaca incipiente ipsa prodeunt, altera summitatem dextri renis succenturiati praetergrediens, ex angulo, quem truncus arteriae et ramus coeliacae efficiunt; altera vero super sinistro progrediens paullo inferius et infra coeliacum, mesaraicum ramum superiorem versus, proueniebat, vtraque diaphragma versus assurgens arcum dabat, qui dum capsulam renalem praeteriret, varios ramulos ceu radios in superficie capsulae in surculos sese dispergentes dimittebat, superius vero ramis insignibus diaphragma petebat. Flatu arteriis propriis commissio et capsulae adiposa tunica singulatim eleuabantur, quod aequè quidem, si arteriae phrenicae siue communes insufflarentur, sed non tam eminenter fiebat; incisa porro tunica adiposa, aer contentus euauit remanentibus capsulis ipsis tumidis. Nostrum, quod circa haec phaenomena est iudicium, putamus, quia ramuli tam ab atrabiliaris quam phrenicis tunicam adiposam perreptant, apprehensu facile esse, etiam praefatam adiposam flatu distendi, dum autem ramuli admodum exigui et pauci a phrenicis illam tunicam adrepunt, capsulaeque atrabiliariae etiam superficie tenus quasi tantum illis percurruntur, nec tunicam pinguedinosam, nec capsulas a flatu phrenicis immisso eodem modo attolli, tunicam adiposam inflatam vero, vulnuscule facto, subsidere relictis capsulis elatis posse, quia rami phrenici et his et illi ramulos largiuntur singulos diuersos. Vasa caeteroquin venosa a consuetis locis, vt dextri lateris vena atrabiliaria a v. caua ipsa, sinistri lateris ab emulgente procedebant, vtraque vena insufflata capsulae nimium eleuabantur. Capsulae ipsae in nostro subiecto ceu massa vesiculosa adipe obscure

obscurè albido constans et pinguedine circumuoluta consistenti admodum similes comparebant, vnde primo intuitu adipem mentiebantur et nobis ipsis imponebant: insufflatae maiorem iuglandem aequabant et aliquo modo pellucidae conspiciantur; sed vtraque cavitatae intus aequali erat praedita et gelatinoso pallide rubro tineta et obducta humore.

Tab. IX. Fig. 5.

Ostendit partes quasdam hypochondrii a posteriori facie conspicuas ex adulto homine.

A A Renes.

B B - - - succenturiati.

c Arteria aorta.

D Vena caua.

E E Arteriae atrabilariae.

e e Venae atrabilariae.

F F Arteriae phrenicae cum radiatis ramis in capsulae demersis.

G Hepar.

H Lien.

I I Diaphragma reflexum eiusque ii. processus.

OBSERVATIONES
ASTRONOMICAE.

T t z

OBSER-

ASTORIA M. C. A. S.

OBSERVATIO ECLIPSIS SOLARIS

d. $\frac{24 \text{ Iulii}}{4 \text{ August.}}$ 1739.

In Observatorio Imperiali Petropolitano habita

a G. Heinſio.

Ordo Tempus
Obſer. verum

1. - 5^b. 10'. 49". Initium eclipteos per tubum
15. ped. exacte obſervatum.
In partibus ſcalae, qualem
ſemidiameter Solis continet
267

Differētia aſcenſ. rectar. centr. ☉ et ☽.	Differētia declination. centr. ☉ et ☽.	Quantitas phaſium in digitis.	Quantitas phaſium in minut.
---	--	--	--------------------------------------

- | | | | | | | |
|----------|-----|---------------------|---------------------|---------------------|----|----|
| 2. - 17. | 27. | 439 $\frac{1}{2}$. | 164 $\frac{1}{2}$. | 49. | 1. | 6 |
| 3. - 22. | 24. | 400 $\frac{1}{2}$. | 154. | 89. | 2. | 0 |
| 4. - 30. | 45. | 340. | 138. | 147 $\frac{1}{2}$. | 3. | 19 |
| 5. - 37. | 3. | 295 $\frac{1}{2}$. | 123 $\frac{1}{2}$. | 197. | 4. | 26 |
| 6. - 41. | 59. | 256. | 114. | 237. | 5. | 20 |

7. - 47. 11. Macula erat in diſco Solis magni-
tudine reliquas ibi exiſtentes ante-
cellens, quam littera M designavi
in fig. 1. Appulſum limbi Luna-
ris ad eam obſervavi, et conta-

ctum mutuum, ad tempus iam notatum animaduerti. Declinavit autem istius maculae centrum circa tempus eclipsios a centro Solis versus austrum 92. part. scalae seu 5'. 29'' circuli maximi; quoad ascensionem vero rectam maculae centrum occidentalius fuit a centro Solis 53. part. scalae seu 13 1/2 secund. in tempore

8. - 47. 5. Peripheria Lunae in per medium dictae maculae transit. Praecedens et haec observatio facta est per tubum 15. ped.

9. - 58. 1. 136. 81 1/2 359 8. 4

10. 6. 4. 26 88. 69 1/2 495 1/2 9. 7

Ab observazione prima ad hanc usque centrum Lunae occidentalius fuit centro Solis quoad ascensionem rectam. In sequentibus centrum Lunae orientalius intelligi debet centro Solis.

11. - 18. 10. 91 22 1/2 42 1/2 468. 10. 31

12. - 28. 50 109 1/2 19. 02 405. 9. 6

13. - 38. 15. Medium supra memoratae maculae emerit

14. - 39. 0. Integra macula emerit, utraque observatio facta est per tubum 15. ped.

Ab

Ab observat. 15. usque ad 12. cen-
 trum Lunae a centro Solis declina-
 vit septentrionem versus. In sequen-
 tibus declinatio centri Lunae a cen-
 tro Solis versus austrum accipi debet.

15. 54. 57. 312 $\frac{1}{2}$. 350. 202. 4. 32

16. 7. 1. 7. 363 $\frac{1}{2}$. 47 $\frac{1}{2}$. 150. 3. 22

17. 7. 21. 415 $\frac{1}{2}$. 58. 98 $\frac{1}{2}$. 2. 13

18. 18. 53. Finis eclipsios exacte observatus
 peritubum 15 ped.

Figura prima Phases enumeratas declarat et numeri in
 femita centri Lunae adscripti notant loca, in quibus centrum
 Lunae fuit iis temporis momentis, quae iisdem numeris
 in praecedenti recensioe insigniuntur. Coelum toto eclipsios
 tempore serenum observationi optime favit. Cum autem
 Sol deficiens ad horizontem occidentum vergeret, ne refra-
 ctionis diuersitas ad horizontem observationibus vim infer-
 ret, pro observandis eclipsios phasibus methodum sequen-
 tem extra periculum refractionis positam adhibui. Vfus
 nempe sum quadrante portatili tubum instructo, in cuius
 foco duo fila V T, H R, ad angulos rectos sibi insisten-
 tia extabant. Tubum in Solem direxi sic, vt posito qua-
 drantis plano in situ proxime verticali, filum H R situm
 prope horizontalem, filum V T verticalem, nanciscerentur.
 His factis notavi moram transitus disci solaris vel per fi-
 lum horizontale H R vel per verticale V T, prout sci-
 licet totius disci transitus, habito partis Solis deficientis re-
 spectu, observari potuit. Praeterea animaduerti momen-
 ta appulsus cornuum phasios, limbi Lunaris et limbi Solis
 ab eclipsi immunis ad eundem filum siue horizontale siue
 verti-

Tab. XI.

Fig. 1^a

verticale. Quibus datis constructio phaëos absolui et positio centri Lunae respectu centri Solis et circularum coelestium, nec non quantitas diametri Lunae definiri possunt.

Repraesentent HR , VT fila ad angulos rectos sibi insistentia, ADB exhibeat discum Solis vtrumque filum tangentem in A et B . Referat RCI positionem diurni centri Solis respectu filorum VT , HR ; radius vero CD (CB vel AC) expressus intelligatur per partes temporis, quo dimidium disci Solis per meridianum vel horarium quemuis transit. Et exponet CR semimoram transitus disci Solaris per filum HR . EC vero semimoram transitus Solis per filum VT . Concessis igitur mora transitus Solis per horarium et mora transitus eius per alterutrum filum HR vel VT , dabitur positio diurni RCI respectu filorum.

Fig. 2. Notati iam sint appulsus cornuum B, A , periphæriae Lunae M et limbi Solis sequentis F , ad filum VT . Descriptus sit discus Solis ABF vtrumque filum tangens et quidem limbo sequenti F filum VT ; expressa autem sit diameter disci per moram transitus eius per horarium. Sit RC positio diurni centri Solis respectu filorum secantis filum VT in E . Capta sit Eb aequalis interuallo temporis inter appulsus cornu B et limbi Solis F ad VT . Eodem modo sit Ea aequalis interuallo temporis inter appulsus cornu A et limbi solis F ad VT ; nec non Em aequalis interuallo temporis inter appulsus periphæriae Lunae M et limbi Solis F ad VT . Per puncta b, a, m sic definita actae intelligantur ad VT parallelae $bB, aA, m\mu$; quarum bB fecet peripheriam Solis in B , aA in A ; et dabuntur loca cornuum B, A in periphæria disci Solis, rectam vero $m\mu$ tanget limbus Lunae. Datis iam
pua-

punctis A, B, et recta $m\mu$ positione, dantur centrum G et radius circuli per puncta A, B transeuntis et rectam $m\mu$ tangentis, hoc est, dantur centrum Lunae positione et semidiameter eius magnitudine. Huius rei vltiorem et analyticam expositionem dedi in recensione observationis eclipsis Lunarum d. 8. Septembr. 1737. st. n. Simili modo proceditur, si aliae dentur observationum conditiones.

Haec phaeseos constructio, quae satis expedita videtur, supponit discum Lunae intra discum Solis immotum interea, dum appulsus cornuum et limbi Lunae ad fila tubi observati sunt. Hoc autem supponere non licet, nisi eximiis subinde erroribus locum concedere velimus. Discus Lunae intra discum Solis situm continuo mutat, adeoque momenta appulsus cornuum observata multum saepissime discrepare debent a momentis, quibus appulsus isti observati fuissent, si discus Lunae intra discum Solis durante observatione immotus perstitisset. Si igitur iuxta methodum supra expositam constructio phaeseos suscipi debeat, necesse est, ut appulsus cornuum et limbi Lunae ex observatione acquisiti correctione aliqua tales efficiantur, quales observati fuissent, si Luna situm in disco Solis interea non mutasset.

Pro definiendis eiusmodi correctionibus requiritur, ut sciatur, qua ratione progressus Lunae per discum Solis factus sit. Ad hunc ergo cognoscendum projectionem eclipsis orthographicam effeci ope elementorum, quae calculus ex Tabulis Ludovicianis institutus subministravit, exinde vero positionem semitae visae centri Lunae per discum Solis determinavi. Exponat figura 3. projectionem, qua-

lis pro eclipsi Solari fieri solet. Sint ADB semidiscus Terrae, AB Ecliptica, DC circulus latitudinis, PC meridianus vniuersalis, FI orbita Lunae, 0. 1. 2. 3. 4. etc. parallelus Petropolitanus in suas horas iuxta numeros 1, 2, 3, 4 etc. diuisus. Cum momenta initii et finis eclipsios obseruata aliquot minutis descresparent ab iis, quae calculus praedixerat, consultum duxi, vt momenta ista ex obseruatione acquisita schemati infererentur. Hunc in finem in parallelo Petropolitano determinauit puncta *i* et *f* respondentia respectiue momenti initii $5^b, 10', 49''$, et finis $7^b, 18', 53''$. Ex punctis istis *i* et *f* interuallo semidiametri penumbrae interfecit orbitam Lunae in I et F; quibus factis obtinui loca centri Lunae in initio et fine eclipsios, puta in I et F; nec non interuallum IF in orbita Lunae, quod tempori durationis Eclipsios responderet. Inde facillime puncta V. VI. VII. etc. in orbita Lunae definire potui, in quibus centrum Lunae respectiue fuit horis V. VI. VII. etc. Iam ex diuisione paralleli Petropolitani innotuerunt puncta 5. 6. 7. etc. in quibus centrum Solis fuit horis 5. 6. 7. Igitur ad datam quamuis horam positio centri Lunae respectu centri Solis et circuli alicuius coelestis incognita esse non potuit. Verbi causa ad horam 5^{am} quaeri debeat positio centri Lunae respectu centri Solis et circuli declinationis eius. Quoniam hora 5^{ta} centrum Solis est in puncto 5. paralleli Petropolitani, per hoc punctum 5. duco rectam GH parallelam ad PC meridianum vniuersalem; et G H repraesentat positionem circuli declinationis Solis. Sed eadem hora 5. centrum Lunae est in puncto V. suae orbitae, quamobrem duco VG ad GH perpendicularem,

vt per rectas VG , $G5$. acquiram positionem centri Lunae respectu centri Solis et circuli declinationis GH . Scilicet hora 5. recta VG exhibet differentiam inter ascensiones rectas centrorum Solis et Lunae in diurno; GV 5. vero exponit differentiam declinationum centrorum Solis et Lunae.

Hac methodo ad singulos horae quadrantes determinavi differentias ascensionum rectorum et declinationum centrorum Solis et Lunae. Descripsi deinceps circulum PDQ (fig. 4.), cuius radius CP est ad radium disci Terrae DC (fig. 3), vt semidiameter Solis ad parallaxin Lunae horizontalem. (In adiecta fig. 4. circulus PDQ iusto maior euidentiae causa factus est). Assumpta porro diametro PQ pro circulo declinationis, ex cognitis per constructionem praecedentem ascensionum rectorum et declinationum differentiis ad singulos horae quadrantes definiui puncta $5\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$, 6. etc. in quibus centrum Lunae respectiue fuit horis $5\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$, 6. etc. Denique punctis istis ope rectorum inter se connexis acquisiui semitam centri Lunae visam in disco Solis pro immoto habito. Neceffe autem fuit, vt ad singulos horae quadrantes loca centri Lunae determinarentur, partim quia portiones semitae visae à centro Lunae singulis horae quadrantibus percurfae ex continua parallaxeos Lunae mutatione sunt inaequales, partim quoniam ipsa semita curuam nanciscitur figuram, dum declinatio Lunae non solum ex motu eius proprio, sed ex variata quoque Lunae parallaxi continuo mutatur.

His praeparatis correctiones obseruationum supra dictas sequentem in modum inuestigauit. Exempli loco habitae sint obseruationes appulsuum ad filum V T (fig. 2.)

Cornu B $5^b 30'. 45''$.

cornu A $- 31. 1\frac{1}{2}$.

peripher. ☽ in M. $- 31. 17\frac{3}{4}$.

limbi ☉ sequentis F $- 33. 6\frac{1}{2}$.

Cum in semita centri Lunae visa (fig. 4) dentur puncta $5\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$, in quibus centrum Lunae exitit horis $5\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$; ex intervallo horum punctorum 15. minutis temporis respondente, si motus Lunae in orbita visa per quadrantem horae vniformis supponatur, facile determinari possunt puncta f , g , k , in quibus centrum Lunae respectiue fuit $5^b. 30'. 45''$; $5^b. 31' 1\frac{1}{2}''$, $5^b. 31'. 17\frac{3}{4}''$. Semidiametro Lunae, cuius ratio ad semidiametrum Solis ex calculo eclipteos datur, centris f , g , k descripti sint arcus B M A, ba , $\beta\mu\alpha$, intra discum Solis, qui exponent situm peripheriae Lunarum in Sole ad dicta respectiue momenta. Igitur momento $5^b. 30'. 45''$. appulit ad filum verticale quadrantis cornu seu punctum B peripheriae Solaris, cornu autem A tunc temporis exitit in A. Momento $5^b. 31'. 1\frac{1}{2}''$ cornu A iam processit in a , adeoque hoc momento punctum peripheriae Solaris a appulit ad filum verticale. Denique momento $5^b. 31'. 17\frac{3}{4}''$ peripheria Lunae in βma posita filum quadrantis verticale tetigit. Hi ergo appulsus in diuersis Lunae intra discum Solis positionibus obseruati sic corrigi debent, vt tales prodeant, quales obseruati fuissent, si durante appulsuum obseruatione Luna situm in disco Solis non mutasset.

Ad circulum declinationis PQ per centrum Solis C ducta sit normalis DE , quae diurnum Solis repraesentabit. Igitur cum per supra dicta in quavis obseruatione detur positio diurni respectu filorum, ad quae appulsus obseruati sunt; vicissim in fig. 4. dabitur positio filorum respectu diurni DE . Exponat ergo VT filum verticale ad quod appulsus notati sunt. Per A, a , ductae intelligantur Ab, ai , parallelae ad VT et secantes diurnum DE in b et i ; et manifestum est, punctum b simul cum cornu in A , punctum i simul cum cornu in a ad filum verticale VT appellere. Si igitur detur tempus, quo spatiolum bi filum VT traiecit, dabitur interuallum temporis inter appulsus cornu in a et cornu in A . Expressa autem diametro Solis DE per partes temporis, quo discus Solis meridianum transit; exponet spatiolum ib tempus, quo ib filum VT traiecit, vnde propter ib ex constructione datam, dabitur interuallum temporis inter appulsus cornu in a , et cornu in A , veluti in nostro casu $= \frac{1}{3}''$. Iam momentum appulsus cornu a ad VT ex obseruatione datur, scilicet $5^b. 31'. 1\frac{1}{2}''$. Subtrahendo igitur ab hoc momento interuallum inuentum $= \frac{1}{3}''$, (quoniam A citius per VT quam a transit,) habebitur momentum appulsus ipsius A ad VT , veluti $5^b. 31'. 1\frac{1}{2}''$, quod est momentum, quo cornu in A appulisset ad VT , si centrum Lunae in f immotum persistisset.

Eodem modo si ad VT ducantur parallelae qn, po , tangentes respectiue limbum Lunae $BM A$, $\beta m a$ in M et m , et secantes diurnum DE in n et o ; spatiolum no exponet interuallum temporis inter appulsus limbi

Lunae βma , et BMA ad VT, quod exempli loco in hoc casu erit $= 1\frac{1}{4}''$. Cum ergo ex obseruatione datur momentum appulsus limbi Lunae βma , nimirum $5^b. 31'. 17\frac{3}{4}''$, subducendo interuallum inuentum ab hoc momento (quia BMA citius traiecit VT, quam βma) habetur $5^b. 31'. 16\frac{1}{2}''$ pro momento appulsus peripheriae Lunae in BMA, quo casu centrum Lunae adhuc in f extat.

Ex obseruatione datur momentum appulsus cornu B, $5^b. 30'. 45''$, centro Lunae in f existente. Vi praecedentis correctionis dantur momenta appulsus cornu A, $5^b. 31'. 1\frac{1}{8}''$, et limbi Lunae BMA $5^b. 31'. 16\frac{1}{2}''$, Lunae centro etiam in f haerente; vnde haec momenta inuenta talia sunt, qualia obseruata fuissent, si durante appulsus obseruatione limbus Lunae intra discum Solis immotus perstitisset, puta in BMA.

Haec ergo momenta sic correcta in constructione phaseos supra exposita adhiberi debent. Phasis exinde constructa respondet momento temporis, quo motus Lunae quasi cohibetur seu quo limbus Lunae in nostro casu fuit in BMA, scilicet $5^b. 30'. 45''$. Hoc momentum, ad quod phasis proposita construitur, voco *momentum obseruationis*.

Quoniam determinatio memoratarum correctionum a calculo et projectione eclipseos pendet, adeoque ex dissensu calculi cum coelo in constructa pro eruendis correctionibus figura positio Lunae intra discum Solis nonnunquam diuersa prodire solet ab ea quam Luna ad datum tempus reuera respectu Solis habuit; methodo quidem praecedenti correctiones definiui, et phasin ex obseruationibus

nibus correctis construxi, ast ubi hanc ab ea, quam projectio eclipsios indicabat, nimis discrepantem animaduerti, in constructa ex observationibus phasi correctiones denuo definiui; et exinde nouam phasios constructi-
onem ad veram magis appropinquauit suscepi.

Vt de phasibus praecipuis huius Eclipsios rationem reddam, obseruationes, ex quibus istae constructae sunt, hic transcribam, additis correctionibus methodo praecedenti erutis. Eligam autem prae ceteris obseruationes numeris, 4, 9, 10, 11, 15, in recensione superiori notatas, quibus praesertim diametrum Lunae determinauit.

Tempore horologii.

Obseruat. 4.

Obseruat. 4. correcta

S ad —	5 ^b 28' 6''	5 ^b 28' 6''
B ad	30. 21 $\frac{1}{2}$	30. 21 $\frac{1}{2}$
A ad	30. 38	30. 37 $\frac{2}{3}$
periph. ☉ ad	30. 54 $\frac{1}{4}$	30. 53
I ad —	32. 28 $\frac{1}{2}$	32. 28 $\frac{1}{2}$
C ad	32. 43	32. 43
Momentum obseruationis B ad		
5 ^b 30' 21 $\frac{1}{2}$ horologii vel		
5. 30. 45. temporis veri		

Obfer-

Observat. 9.		Observat. 9. correct.	
S ad —	5 ^b 56' 43''	5 ^b 56' 43''	
A et B ad	57. 40 ¹ / ₂	57. 40 ¹ / ₂	
periph. ☉ ad	58. 40 ¹ / ₂	58. 38 ¹ / ₂	
C ad	59. 29 ¹ / ₄	59. 29 ¹ / ₄	
I ad —	6. 1. 6 ¹ / ₂	6. 1. 6 ¹ / ₂	

Momentum observationis B ad |

5^b 57' 40¹/₂'' horologii vel

5. 58. 1. temporis veri

Observat. 10.		Observat. 10. correct.	
S ad —	6 ^b 2' 35''	6 ^b 2' 35''	
A ad	4. 8	4. 8	
B ad	4. 30	4. 29 ² / ₃	
periph. ☉ ad	5. 28	5. 26	
C ad	6. 2 ¹ / ₂	6. 2 ¹ / ₂	
I ad —	7. 7	7. 7.	

Momentum observationis A ad |

6^b 4'. 8'' horologii vel

6. 4. 26 temporis veri

Observat. 11.		Observat. 11. correct.	
S ad —	6 ^b 14'. 35 ¹ / ₂ ''	6 ^b 14'. 35 ¹ / ₂ ''	
periph. ☉ ad —	15. 5 ¹ / ₂	15. 8 ¹ / ₂	
P ad	15. 53	15. 53	
A ad —	17. 41	17. 44 ¹ / ₄	
B ad —	17. 54	17. 54	
C ad	18. 27 ¹ / ₂	18. 27 ¹ / ₂	

Momentum observationis B ad —

6^b 17'. 54'' horologii vel

6. 18. 10 temporis veri

Observat. 15.	Observ. 15. correct.
S ad — 6 ^b 50' 29½''	6 ^b 50' 29½''
P ad 52. 24½	52. 24½
periph. ☉ ad 53. 50	53. 52¼
A ad 54. 2½	54. 3½
B ad 54. 47	54. 47
I ad — 55. 12	55. 12
Momentum observationis B ad	
6 ^b 54' 47''	horologii vel
6. 54. 57	temporis veri

Designant hic S limbum Solis pro apparentia tubi astronomici superiorem; I inferiorem, P praecedentem, C consequentem. In observ. 4, 9, 10, 11, A est cornu phaseos quoad apparentiam superius B inferius; in observ. 15. vero A cornu secundum apparentiam inferius, B superius (—) denotat filum in reticulo tubi quadrantis horizontale, (|) verticale.

Ex observationibus iam expositis semidiameter Lunae deprehensa est

ex observat. 4 —	249
9 —	249½ partium scalae, quarum semi-
10 —	249¾ diameter Solis continet 267.
11 —	249½
15 —	251

Consentiant et aliae observationes, quas hic brevitatis causa omisi. Assumsi ergo pro media Lunae semidia-

metro 250, eamque ad tempus obscurationis maximae retuli, quo altitudo Lunae visa supra horizontem circiter erat 13° . Inde in hac altitudine prodit ratio diametri Solis ad diametrum Lunae vt 267 : 250. Ex transitu Solis per meridianum d. 4. Augusti st. n. innotuit mora transitus disci Solaris per horarium = $2'. 13\frac{1}{2}''$ temporis 1^{mi} mobilis. Inde habetur diameter Solis $31'. 51''$ in partibus circuli maximi; adeoque diameter Lunae in iisdem partibus = $29'. 49''$, et diameter Lunae horizontalis $29'. 42''$, quae ab ea $29'. 40''$, quam calculus ex tabulis Ludouicianis praedixerat, non nisi $2''$ differt. Si placeat secundum tabulas astronomicas assumere diametrum Solis $31'. 46''$; prodibit diameter Lunae $29'. 44''$ in altitudine 13° ; et diameter Lunae horizontalis $29'. 37''$.

Vt ex observationibus, quas ab initio recensui, deriuari possint tempora obscurationum singulorum digitorum, in quos diuisum concipiunt Astronomi discum Solis, necesse fuit, vt in semita centri Lunae visa ex observationibus ab initio positis respectu disci Solaris definita (fig. 1.) cognoscatur progressus Lunae ad singulos horae quadrantes. Per tantum enim temporis intervallum motus Lunae visus absque errore sensibili vniformis haberi potest, cum caeteroquin motus Lunae in semita visa ex variatione parallaxeos continuo mutetur, et in praesenti casu, Luna ad horizontem occiduum vergente, semper crescat. Comparando ergo interualla locorum centri Lunae in singulis observationibus ab initio positis cum interuallis temporis respondentibus, inueni, Lunam in 15. minutis primis temporis veridum Luna progressa est

ab initio Eclipsis vsque ad obseru.	4	- - -	114	partium sca-
ab obseru.	4	vsque ad 9	- - -	117 $\frac{1}{4}$ lae, qualium
	9	- - - - 11	absoluisse spatium	121 $\frac{1}{4}$ femidiamet-
	11	- - - - 15	- - -	123 terSolis con-
	15	- - - finem	- - -	127 tinet 267.

His cognitis et diuiso Solis disco in suos digitos, ope femidiametri Lunae in orbita eius visa definitiua loca centri Lunae, in quibus istud extitit, dum 1, 2, 3, 4, etc. digiti disci Solaris obscurati fuerunt. Innotuerunt ergo distantiae horum locorum in semita visa a locis centri Lunae, quae ex obseruationibus ab initio expositis iam cognita erant; vnde etiam ope motus horarii Lunae in semita visa cognoscebantur interualla temporum respondentia, adeoque ipsa temporis momenta, quibus singuli digiti obscurati sunt.

En deductiones hac methodo erutas,

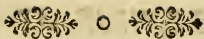
Tempus verum

5 ^b	10'	49''	-	-	-	Initium Eclipsis
	16.	37	-	-	-	digitus 1
	22.	24	-	-	-	2
	28.	19	-	-	-	3
	34.	14	-	-	-	4
	40.	9	-	-	-	5
	46.	0	-	-	-	6
	51.	50	-	-	-	7
	57.	39	-	-	-	8

X x 2

6.

6.	3.	36	—	—	—	—	—	9
	10.	6	—	—	—	—	—	10
	16.	54	—	—	—	—	—	10. 34 $\frac{1}{2}$ ' ob- servatio maxima, Distantia centro- rum ☉ et ☽ mi- nima, 2' 46'' par- tium circuli max.
	23.	42	—	—	—	—	—	10
	30.	5	—	—	—	—	—	9
	35.	49	—	—	—	—	—	8
	41.	25	—	—	—	—	—	7
	46.	52	—	—	—	—	—	6
	52.	19	—	—	—	—	—	5
	57.	45	—	—	—	—	—	4
7.	3.	7	—	—	—	—	—	3
	8.	25	—	—	—	—	—	2
	13.	41	—	—	—	—	—	1
	18.	53	—	—	—	—	—	Finis Eclipsis.



OBSEVATIO
TRANSITVS LVNAE
AD
SATVRNVM

die $\frac{20. \text{ April.}}{1. \text{ Maii.}}$ an. 1740. Petropoli habita,

G. Heinsio.

Exacta motus Lunarum cognitio obseruatorum operam continuo requirit. Theoria quidem Lunae recentiorum studio certis superstructa est fundamentis; ex quibus variabilis Lunae motus diiudicari debet; sed data adhuc plurima, non nisi ex obseruationibus astronomicis petenda, desiderantur, vt illorum ope inaequalitates motus Lunarum à se inuicem probe discerni, earumque effectus sub certis Lunae circumstantiis cognosci possint. Hanc ob causam in obseruatorio Imperiali obseruationes Lunae tum in meridiano tum extra istum, quando Luna fixas vel planetas prope transit, assiduo instituuntur, vt sufficiens locorum Lunae numerus ex obseruationibus acquiratur, quae deinceps cum theoria conferri possint. Sed commodum hoc, quod obseruationes eiusmodi praebent, vnicum non est. Nexus, qui inter labores in obseruatorio Imperiali peragendos et molimina obseruatorum in Siberia et Camtschatka degentium intercedit; istas necessario requirit, vt ex comparatione locorum Lunae hic et in aliis locis obseruatorum, differentiae meridianorum determinari possint.

Vtilibus his obseruationibus merito adnumero transitum Lunae ad Saturnum die $\begin{smallmatrix} 20 & \text{April.} \\ 1 & \text{Maii.} \end{smallmatrix}$ an. 1740. hic obseruatum, quem impraesentiarum expositurus sum.

In eius obseruatione vsus sum tubo 8. ped. in cuius foco extensa erant quatuor fila ad angulos semirectos versus se inuicem inclinata. Machina parallactica in situm debitum redacta sustinebat tubum, qui in Lunam ita directus fuit, vt limbus Lunae pro apparentia tubi astronomici inferior (reuera superior), dum tubum traiciebat, exacte vnum ex filis istis in foco extensis raderet, quod proinde diurnum Lunae apparentem referebat. Hoc apparatu obseruauī appulsus limbi Lunae praecedentis et centri Saturni ad filum, quod diurno normaliter insistebat et circulum horarium repraesentabat, vt inde differentiae ascensionum reclarum limbi Lunae praecedentis et Saturni innotescerent. Praeterea vero annotaui quoque appulsus centri Saturni ad fila obliqua cum filis diurno et horario angulos semirectos formantia, vt exinde differentias declinationum limbi Lunae borealis et centri Saturni colligere possem. En deductiones ex obseruationibus habitis.

Ordo obser.	Temp. verum.	Differentiae		Differentiae	
		Ascens. reclarum limbi Lunae praeced. et cen- tri hui in tempore pri- mi mobilis	declinationum limbi borealis et centri Saturni exi- stente hno boream versus ab hoc limbo, in partibus circu- li maximi.		
1.	8 ^b . 14'. 34''	3'. 13 $\frac{1}{2}$	15'. 36''		
2.	— 26. 44	2. 50 $\frac{3}{4}$	15 54		
3.	— 34. 42	2. 36 $\frac{3}{4}$	16 25		

4. 8 ^b . 41'. 16''	2'. 24 $\frac{3}{4}$	16'. 49''
5. — 46. 41	2. 15 $\frac{1}{2}$	17. 20
6. — 53. 49	1. 59 $\frac{1}{2}$	17. 27
7. — 58. 36	1. 51 $\frac{1}{2}$	18. 1
8. 9. 4. 0	1. 40 $\frac{1}{2}$	18. 16
9. — 8. 9	1. 32 $\frac{1}{2}$	18. 37
10. — 12. 13	1. 24	18. 37
11. — 16. 13	1. 16 $\frac{1}{2}$	18. 51
12. — 19. 53	1. 9 $\frac{3}{4}$	19. 19
13. — 35. 14	0. 39	20. 29
14. — 38. 52	0. 32 $\frac{1}{2}$	20. 36
15. — 42. 2	0. 26 $\frac{1}{4}$	20. 53
16. — 44. 59	0. 20	21. 4
17. 9. 48. 10	0. 14	21. 11

Saturnus nunc ad tantam à limbo Lunae boreali septentrionem versus distantiam peruenerat, vt fila obliqua reticuli non nisi prope marginem tubi traiceret, quamobrem ab his obseruationibus abstinere debui.

Obseruaciones 5. et 7. quoad differentiam ascensionum rectorum limbi Lunae praecedentis et Saturni; obseruationes vero 2, 6, 10, quoad differentias declinationum limbi borealis Lunae et Saturni, paulisper dubiae censendae sunt.

DE
DECLINATIONVM SYDERVM
DETERMINATIONE ABSQVE EXACTA ELEVA-
TIONIS AEQVATORIS COGNITIONE.

G. Heinsius:

Quantum interfit, vt syderum declinationes et ascensiones rectae ex obseruationibus astronomicis exactae determinentur, abunde constat. Altitudines syderum meridianae, habita eleuationis Aequatoris, refractionum, parallaxium ratione, declinationes; momenta culminationum syderum relata ad momentum transitus Solis per meridianum, ascensiones rectas suppeditant. Cum igitur praecipuum negotium respiciat obseruationes syderum in Meridiano, Astronomi instrumentum altimetricum muro firmiter ita infigere solent, vt planum eius conueniat cum plano Meridiani, diuisiones autem in limbo instrumenti exacte respondeant gradibus eleuationis obiecti super horizonte. Hoc pacto facili negotio altitudo syderis meridiana obseruari et ope horologii momentum transitus eius per Meridianum annotari possunt. Propositum meum non est, prolixam eiusmodi instrumenti descriptionem hic exhibendi; cogitata tantummodo quaedam proferam, quae declinationem syderis ope huiusmodi instrumenti inuestigandam concernunt, sic vt positio instrumenti respectu horizontis et eleuatio aequatoris exactissime cognitae non praesupponantur.

Ex

Ex obseruationibus Solis meridianis prope solstitia hoc instrumento peragens, inuestigentur puncta diuisionis in limbo instrumenti, quibus altitudines centri Solis solstitiales, maxima aestate et minima hyeme respondent. Interuallum inter haec puncta in limbo instrumenti definiturum esset distantiam tropicorum; punctum vero medium huius interualli locum aequatoris in instrumento, si refractione altitudinibus syderum nullam mutationem induceret. Accedente refractione, differentia inter refractiones, quae altitudinibus Solis solstitialibus, aestiuae et brumali, competunt, dicto interuallo addi debet, vt distantia tropicorum vera prodeat. Huius dimidium obliquitatem eclipticae exhibet, quae, si ab altitudine Solis solstitiali aestiua per refractionem conuenientem correctam aufertur, in limbo instrumenti punctum manifestat, quod aequatori coelesti respondet. Iam si in transitu alicuius syderis per meridianum, distantia eius ab hoc puncto obseruetur, eique refractione, quae altitudini syderis obseruati conuenit, applicetur, addendo, si declinatio syderis sit australis, subtrahendo, si borealis; habebitur vera syderis declinatio.

Videtur quidem haec methodus requirere altitudines syderum cognitatas, adeoque positionem instrumenti respectu horizontis cognitatas, vt ex altitudinibus refractione conueniens inueniri possit; quod etiam verum est de syderibus prope horizontem meridianum traicientibus, vbi refractione ad exiguam altitudinis mutationem sensibiliter variatur. Ast vbi sydera ultra 10. vel 12. gradus eleuata meridianum transeunt, in quantitate refractionis parum peccabitur etiam si altitudo syderis ad aliquot minuta incerta

fit, ita, ut hoc modo altitudines syderum praeter propter scire sufficiat. Hunc casum praecipue respicio, cum prior casus observationis syderis ad horizontem tantis erroribus obnoxius sit, ut istum Astronomi, quantum fieri potest, semper evitare studeant.

Per-suasum igitur habeo, in iis Terrae regionibus, in quibus altitudo solstitialis brumalis 25 gradus superat, hanc methodum probe successuram esse; cum differentia refractionum, quae in hoc casu altitudinibus solstitialibus competunt, satis exacta habeatur, ut inde nullus error sensibilis in determinatione distantiae tropicorum verae exsurgat. Inuestigatio autem declinationis syderis ex hac methodo resultans ei praestare videtur, in qua eleuatio aequatoris et syderum altitudines meridianae exactae praesupponuntur; saltem in ista cuitantur examina instrumentorum, quibus cognoscere debemus an diuisiones in limbo instrumenti gradibus altitudinis syderis super horizonte recte respondeant; quae vero multis saepe difficultatibus praesertim si instrumentum sit prae grande vel muro iam infixum, premuntur, et subinde errores haud exiguos in definiendis altitudinibus producant.

In iis regionibus, in quibus Sol tempore solstitii brumalis parum super horizonte in meridiano eleuatus conspicitur, veluti in his terris; methodus hactenus exposita non aequae succedet, cum maiores et variabiles in vicinia horizontis refractiones determinationi distantiae tropicorum verae errores nimios inducere valeant. Econtrario si in his locis instrumentum murale in septentrionali plaga extet ut opè istius stellae circumpolares in meridiano supra et
infra

infra polum obseruari possint; methodo, praecedenti simili, locum in instrumento definire licebit, qui vero loco poli coelestis respondet; a quo deinceps distantiae syderum a polo, habita refractionum ratione, computari possunt; vt adeo, absque exacta eleuationis Poli vel Aequatoris cognitione, syderum declinationes innotescant.

Cum in posteriori hoc casu instrumentum murale australem coeli regionem respiciens non admittat exactam per altitudines Solis solstitiales determinationem loci in instrumento, qui Aequatori coelesti respondeat; cogitationes subortae sunt, an non alia quaeuis Solis loca in instrumento obseruata ad exactam istiusmodi loci Aequatori respondentis definitionem conducere possint. Differentiae Ascensionum rectorum et Declinationum Solis in tribus diuersis Eclipticae locis existentis huc facere videbantur.

Sint EC Ecliptica, EG aequator, in E punctum aequinoctiale, Sol autem primo in A deinceps in B et denique in C . Per A, B, C , intelligantur circuli declinationum AD, BF, CG ; Ac sit circulus Aequatori parallelus: et erunt DF, DG differentiae Ascensionum rectorum; Bb, Cc differentiae Declinationum locis Solis B et A, C et A respondentium. Dentur iam dictae differentiae DF, DG, Bb, Cc ; patebit via perueniendi ad determinationem Declinationis AD , Ascensionis rectorum ED , et obliquitatis Eclipticae AED . Affigendo enim expressiones incognitarum AD, ED et AED , dabuntur expressiones arcuum EF, EG, BF, CG ; et ex analysi triangulorum sphaericorum rectangu-

Tab. XI.
fig. 5.

lorum AED , BEF , CEG quaestio ad aequationem redigi potest. Calculum tentavi, qui vero tam prolixus et intricatus euasit, ut nulla spes superferret, eum concisorem reddendi et in usum transferendi. Nec medela allata est, etiamsi obliquitatem Eclipticae AED cognitam statuerem, et ex differentia Ascensionum rectarum DF et differentia Declinationum Bb , Declinationem AB et Ascensionem rectam ED quaererem.

Data, quae ad solutionem huius problematis requiruntur, per observationes astronomicas admodum exacta haberi posse videntur. Observando Solem per instrumentum murale in diuersis limbi eius locis, ex horum intervallo differentiae declinationum immediate innotescunt, absque praecua situs instrumenti respectu vel Horizontis vel Aequatoris cognitione. Cum autem necesse sit, ut diuersitatis refractionis, quae differentiae declinationum obseruatae applicari debet, ratio habeatur: sufficit altitudines meridianas Solis tempore obseruationum praeterpropter scire, ut ope istarum differentiae refractionum conuenientes ex tabulis inueniri possint. Hae refractionum differentiae eo certiores sunt, quo maiores sunt altitudines Solis meridianae tempore obseruationum, quas hic requiro; ut adeo certitudo differentiae declinationum quaesitae solummodo pendeat ab exactitudine obseruationis et bona instrumenti constitutione; quae requisita in omnibus aliis obseruationibus supponuntur. Differentiae Ascensionum rectarum Solis aequae exactae per obseruationes acquiri posse videntur. Ex altitudinibus Solis respondentibus meridies verus certo inuestigatur. Si tubus reticulo instructus in fi-

xam claritate conspicuam in quacunq; coeli plaga (praestat prope Meridianum) extantem dirigatur, et in hoc situ ita firmetur, vt nullam positionis suae mutationem subire possit; singulis tunc fixae reuolutionibus etiam interdiu ista per tubum memoratum obseruari poterit. Dabitur ergo per obseruationes interuallum temporis inter transitum Solis per Meridianum et transitum fixae per reticulum sui tubi. Si iam eiusmodi interualla diuersis diebus notata inter se comparentur, innotescet, quantum Sol interea ad fixam accesserit vel ab ea recesserit in Aequatore, hoc est, dabuntur Differentiae Ascensionum rectorum Soli temporibus obseruationum, competentium.

Cum tantam in acquisitione datorum, quae praecedens problema requirit, facilitatem et certitudinem animaduertentem; ipsum vero problema calculum aptum non admitteret; istud paululum mutauit, vt tractabilius euaderet. Introduxi scilicet iter a Sole in Ecliptica confectum ab vna obseruatione vsque ad alteram. Sint, vt ante, EC Ecliptica EG aequator, E punctum aequinoctiale, $Fig. 6.$ Sol primo in A , deinde in C obseruatus; AD , CG circuli declinationum in polo aequatoris P concurrentes; Cc differentia declinationum, DG differentia ascensionum rectorum, vtraque per obseruationes data. Supposui ergo, dari quoque arcum Eclipticae AC , quem Sol ab vna obseruatione vsque ad alteram emensus est. Hoc suppositum quidem non admittendum esse prima fronte videtur, cum theoriam Solis requirat adeoque hypotesiu obseruationibus immisceat. Attamen re perpensa credidi, parum peccari posse in determinatione quantitatis arcus A

C, vt istum absque periculo erroris nimii supponere liceret. Ponamus enim Solem aequabili motu per Eclipticam ferri; et manifestum est, ex interuallo temporis inter obseruationes Solis in A et C exacte haberi posse arcum AC, ob tempus periodicum Solis datum. Cum Sol in Ecliptica vniformiter non moueatur, motus eius aequalis seu medius, cuius quantitas ex dato tempore cognoscitur, corrigi solet per aequationes centri Solis, ita vt motus Solis verus per AC innotescat ex motu eius medio (tempori, quo Sol ex A in C peruenit, respondente) comparato cum differentia aequationum centri Solis locis eius in A et C competentium. In determinatione motus medii ex dato tempore parum vel nihil peccari potest. Quod ad differentiam aequationum centri locis Solis in A et C conuenientium, in ista parum quoque errari posse credo. Aberrent enim loca Solis per tabulas astronomicas computata aliquot minutis a locis, in quibus Sol tempore obseruationum reuera versatus est; haec tamen aberratio exiguum errorem producet, cum variatio aequationis variationi vnus Gradus in anomalia media respondens nondum ad 2. minuta ascendat, si maxima sit; vt adeo aequatio loco Solis ex calculo competentis parum differe possit ab aequatione quae loco Solis in celo respondet, praesertim in illis casibus, in quibus aequatio per vnum anomaliae mediae gradum lente variatur. Differentia ergo aequationum ex tabulis parum discrepare debet a differentia aequationum, quae locis Solis in A et C reuera respondent. Imo cum quaestio ad differentias reducta sit, error exiguus ad modum erit etiamsi in situ Apogaei et magnitudine excentricitatis orbitae Solaris tabulae astro-

astronomicae a se differant ; quo casu quidem ipsae centri Solis aequationes in vna tabula diuersae erunt ab homologis aequationibus in altera tubula ; differentia tamen duarum aequationum in vna tabula non multum abluet a differentia aequationum homologarum in altera , cum homologae aequationes similiter fere varientur in orbitis eclipticis , quarum Excentricitates non multum a se inuicem discrepant prouti fit in specie orbitae Solaris iuxta diuersas tubulas considerata. Rem exemplum infra declarabit.

Detur ergo per tabulas astronomicas arcus eclipticae AC , quem Sol ab vna obseruatione vsque ad alteram peragrauit. Dentur praeterea ex obseruatione differentia Declinationum Cc et differentia ascensionum rectarum DG seu angulus DPG vel APC ; et quaestio huc reducta erit , vt in triangulo Sphaerico APC , ex datis arcu AC , angulo APC , et differentia laterum AP , PC , quae est Cc , inueniatur latus PC complementum declinationis CG quaesitae : quo PC dato inueniri quoque potest angulus PCA , eiusque complementum ad duos rectos ECG , ex quo et declinatione inuenta CG in triangulo ECG ad G rectangulo innotescunt , obliquitas Eclipticae CEG , ascensio recta EG , longitudo Solis EC :

Pro solutione problematis praecedentis sint

$$\begin{array}{ll} AC = a & PC = x \\ Cc = b & PA = x + b \\ APC \text{ seu } P = p & PA + PC = 2x + b \\ & PA - PC = Cc = b \end{array}$$

Iam

Iam per theorema Cl. Euleri in Tom. IV. Comment. p. 98.posito sinu toto = 1, est

$$\text{cof. AC} = \frac{\text{Cof.}(PA+PC) + \text{cof.}(PA-PC) + \text{cof. P. cof.}(PA-PC) - \text{cof. P. cof.}(PA+PC)}{2}$$

feu introductis symbolis

$$\text{cof. } a = \frac{\text{cof.}(2x+b) + \text{cof. } b + \text{cof. } p \cdot \text{cof. } b - \text{cof. } p \cdot \text{cof.}(2x+b)}{2}$$

Facta ergo terminorum transpositione inuenitur

$$\begin{aligned} \text{cof.}(2x+b) &= \frac{2 \cdot \text{cof. } a - \text{cof. } b - \text{cof. } p \cdot \text{cof. } b}{1 - \text{cof. } p} \\ &= \frac{2 \cdot \text{cof. } a - \text{cof. } b - \text{cof. } p \cdot \text{cof. } b}{\text{sin. vers. } p} \end{aligned}$$

vt hoc problema exemplo illustrarem, elegi obseruationes Solis et Sirii diebus 26. Aprilis et 24. Maii stylo nouo anno 1740. institutas. Transitum Solis per meridianum ex altitudinibus eius respondentibus determinauit; Sirium vero obseruauit in sextante murali, nulla habita ratione, an tempus transitus Sirii per reticulum huius instrumenti conueniat cum tempore culminationis eius verae, nec ne d. 26. Aprilis deprehendi interuallum inter meridiem verum et transitum Sirii per sextantem muralem $4^b 17' 32''$ temporis primi mobilis d. 24. Maii istud interuallum inueniebatur $2^b 28' 16\frac{1}{2}''$ temporis primi mobilis. Differentia igitur horum interuallorum est $1^b 49' 15\frac{1}{2}''$, cui respondet arcus Aequatoris $27^\circ 18. 52'' = DG$ seu ang. APC, si Sol d. 26. Aprilis in A, d. 24. Maii in C extitisse ponatur, d. 26. Aprilis altitudinem limbi superioris Solis in Sextante murali notauit $43^\circ 59' 45''$; d. 24. Maii, $51^\circ 10' 52''$, non attendendo, an hae altitudines sint iustae, an vero propter aberrationem instrumenti a situ horizontali correctione aliqua indigeant. Prodit inde differentia declinationum $7^\circ 11' 7''$ cui propter differentiam refractionum et mutatam Solis semidiametrum addi-

uerent

debent $17''$, vt vera declinationum differentia prodeat $7^{\circ} 11' 24'' = Cc$. Differentiam parallaxium Solis quippe insensibilem hic neglexi.

Pro arcu AC obtinendo, quem Sol a meridie vero d. 26. Aprilis vsque ad meridiem verum d. 24. Maii in Ecliptica emensus est, computum ex tabulis tum *de la Hire*, tum *Cassini* institui. Ex prioribus inueni locum Solis medium d. 26. April: meridie vero Petropoli $1^{\circ} 4' 41' 11''$ et d. 24. Maii $2^{\circ} 2' 17' 2''$; vnde motus Solis medius interea factus est $27^{\circ} 35' 51''$. Aequatio centri Solis d. 26. April. erat $1^{\circ} 42' 53''$ addit. et d. 24. Maii $1^{\circ} 7' 21''$ addit.; hinc differentia aequationum prodit $= 35' 32''$, quae ex motu medio $27^{\circ} 35' 51''$ subducta relinquit motum Solis verum seu arcum AC $= 27^{\circ} 0' 19''$. Ex tabulis *Cassini* ad meridiem verum Petropoli d. 26. April. deprehendi locum Solis medium $1^{\circ} 4' 41' 12''$; d. 24. Maii $2^{\circ} 2' 17' 10''$ quapropter motus Solis medius interea factus est $27^{\circ} 35' 58''$. Aequatio centri Solis loco priori respondebat $1^{\circ} 43' 44''$, loco posteriori $1^{\circ} 7' 30''$ vtraque additiua. Si differentia aequationum $36' 14''$ auferatur ex motu medio $27^{\circ} 35' 58''$, restat motus Solis verus seu arcus AC $= 26^{\circ} 59' 44''$. Occurrit ergo in determinatione arcus AC ex tabulis *de la Hire* et *Cassini* differentia $35''$, quae tolerari posse videtur, vt autem eo minus a vero aberrem, inter vtrumque arcus AC valorem accipi medium $27^{\circ} 0' 2''$. Ex hoc ergo computu dantur

Cc seu $b = 7^{\circ} 11' 24''$. Cosin. $b = 9921365$

ang. P seu $p = 27^{\circ} 18' 52''$. Cos $p = 8885015$

Sinus. versus $p = 1114984$

AC seu $a = 27^{\circ} 0' 2''$. Cos. $a = 8910021$

Tom. XII.

Z z.

Hinc

Hinc 2. *cof. a* = 17820042

2. *cof. a* - *cof. b* = 7898677

cof. b . *cof. p* = 8815148 , si finis totus = 1.

Quapropter , si hi valores substituantur in formula

$$\text{cof. } (2x + b) = \frac{2 \cdot \text{cof. } a - \text{cof. } b - \text{cof. } p \cdot \text{cof. } b}{\text{Sin. } \text{verj. } p}$$

prodit *cof. (2x + b)* = $\frac{916471}{1114534} \times \text{Sin. tot.}$ (seu 10000000)

$$- \text{cof. } (2x + b) = 8219589$$

$$= \text{sin. } 55^{\circ}.16'.53'' \text{ vel } \text{cof. } 34^{\circ}.43'.7''$$

Igitur ob *cof. (2x + b)* negitium , erit

$$2x + b = \text{Complemento } 34^{\circ}.43'.7'' \text{ ad duos rectos}$$

$$= 145^{\circ}.16'.53''.$$

$$\text{et } x = 69^{\circ}.2'.44\frac{1}{2}'' = \text{P C seu distantiae So-$$

lis a polo d. 24. Maii ; vnde hoc die declinatio centri Solis inuenitur $20^{\circ}.57'.15\frac{1}{2}''$.

Vt innotescat , quantum declinatio sic inuenta conueniat cum declinatione methodo ordinaria definita , ex supposita Aequatoris eleuatione et altitudine Solis meridiana d. 24. Maii per idem instrumentum murale obseruata adhibitis debitis correctionibus , declinationem Solis inuestigari quam $20^{\circ}.53'.12''$. inueni , quae a priori $4'.3\frac{1}{2}''$. differt. Vnde tanta discrepantia ? De posteriori declinatione certus sum , in illa errorem locum habere non posse , qui ad dimidiam minuti partem ascendat. E contrario de certitudine Datorum et calculi , ex quibus declinatio prior innotuit , nullus quoque scrupulus superest. Cogitationes igitur subortae sunt , an non ex erroribus illis exiguis , a quibus obseruationes , etiam si omnis cura adhibeatur , liberari nequeunt , tantus denique error conflatus sit.

Vt hac de re certus fierem , exemplum elegi , in quo quaesitum iam constabat. Data huius exempli deinceps paululum mutati , eaque talia effeci , qualia prodire

pos-

possent, si ipsis errores, qui in observationibus committi queunt, adhaerent. Ea, quae exinde resultabant, denique comparavi cum quaesito iam cognito, ut innotesceret, quantus error in quaesito per errores observationum produci posset. Sint in A $20^{\circ} 7'$, in C $24^{\circ} 8'$. Ex tabulis igitur astronomicis erunt $ED = 18^{\circ} 27' 37''$, $EG = 51^{\circ} 36' 55''$, $AD = 7^{\circ} 50' 0''$, $CG = 18^{\circ} 48' 25''$, unde AC seu $a = 34^{\circ}$, DG seu $p = 33^{\circ} 9' 18''$, Cc seu $b = 10^{\circ} 58' 25''$; quaesitum autem PC seu $x = 71^{\circ} 11' 35''$. Tantus praecise arcus PC quoque prodit, si ex datis a , b , p , iuxta problema superius quaeritur. Cogitemus iam b et p ex observationibus; a vero ex tabulis Solaribus desumpta esse. Ponamus in p seu ang. APC per observationes errorem unius minuti commissum esse, quod facile fieri potest. Si enim in observatione meridiei peccetur vno secundo temporis et in observatione fixae itidem vno secundo error in intervallo harum observationum ad $2''$, assurgere potest. Duo iam eiusmodi intervalla inter meridiem et observationem fixae requiruntur pro determinando angulo APC ; quapropter si alteri intervallo etiam errorem $2''$ adscribamus, in determinationem anguli APC error $4''$ irrepere valet, qui in quantitate anguli APC errorem unius minuti producit. Ponamus porro in b seu in differentiam declinationum Cc per observationes introductum esse errorem $20''$, quod fieri posse patet, cum ad determinationem ipsius Cc requirantur duae observationes quarum quaelibet errori $10''$ subiecta est. Denique in quantitate ipsius a ex tabulis Solaribus desumpta facillime error $30''$ locum habere potest.

Introducantur iam hi errores suppositi in data superiora et fiant.

$a =$

$$a = 34^{\circ}. 0'. 30''.$$

$$b = 10. 58. 5.$$

$$p = 33. 10. 18.$$

quibus factis inuenietur PC seu $x = 71^{\circ}. 9'. 26\frac{1}{2}''$, qui a vero arcus PC valore differt $2', 8\frac{1}{2}''$.

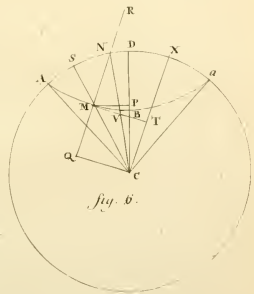
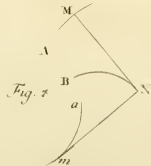
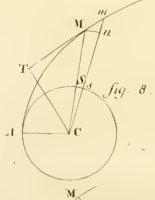
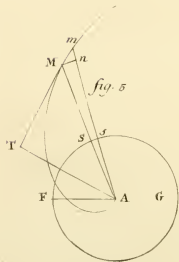
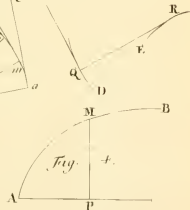
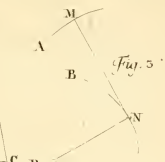
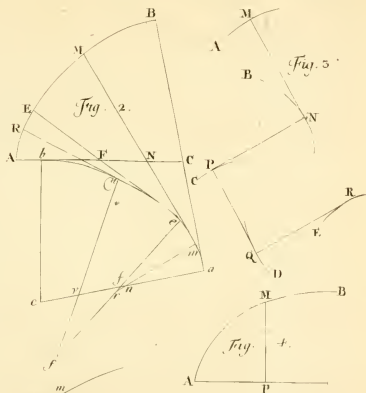
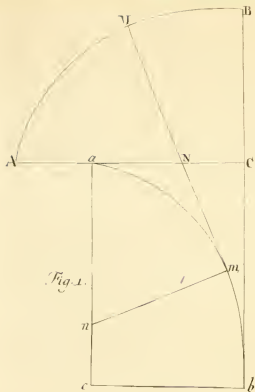
Ponantur $a = 33^{\circ}. 59'. 30''.$

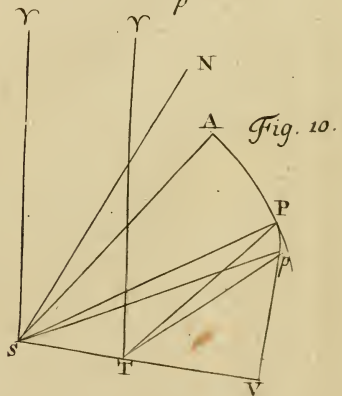
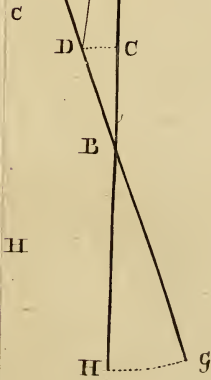
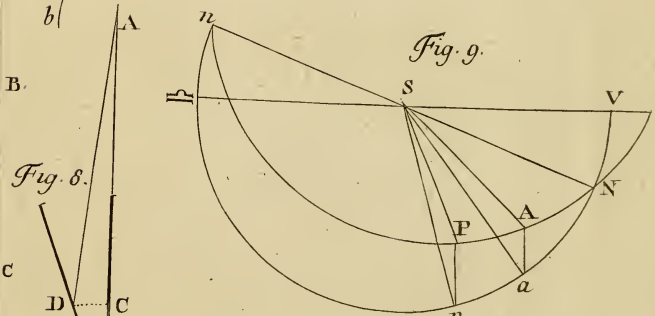
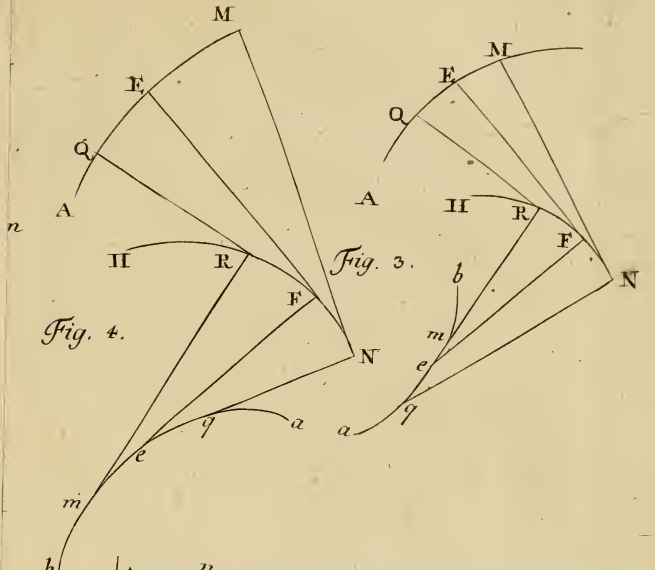
$$b = 10. 58. 5.$$

$$p = 33. 10. 18.$$

et deprehendetur PC $= 71^{\circ}. 1'. 50\frac{1}{2}''$, qui a vero eius valore discrepat $9'. 44\frac{1}{2}''$.

Et hac ratione combinando errores cum Datis superioribus hoc vel illo modo plures suppositiones fieri possunt, quas vero ulteriori calculo profequi non opus esse iudico. sufficit hoc exemplo indicasse, problema nostrum ita comparatum esse, vt committendo exiguos errores in Datis ingens error in Quaesito exurgat. Plura eius modi problemata in astronomicis occurrere solent, quae iuxta theoriam quidem vsu eximium spondent, in applicatione vero ad exempla omni vsu destituuntur, dum errores exiguos exaggerant. Astronomia per eiusmodi theorias parum prouehitur, et omnino interest, vt propositiones istius conditionis innotescant. Examinanda sunt problemata et ista seligenda, quae errores ab obseruationibus inseparabiles magis magisque imminuunt. Ratio huius scripti inde patet; et facile nunc persuasum habeo, problema superius, quo ex datis differentiis Ascensionum rectorum et Declinationum Solis Ascensiones rectorae et Declinationes ipsae inueniri debent, quoque calculum respicit, vsu denegaturum esse, etiamsi, quocumque artificio, elegans et concisa formula algebraica pro solutione istius exhiberi posset.





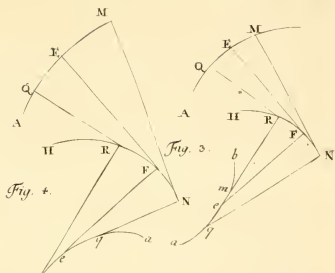
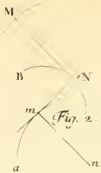
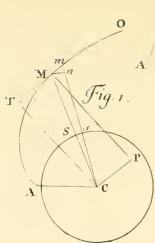
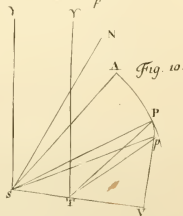
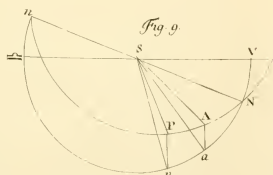
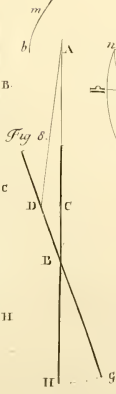
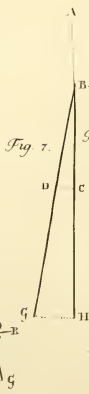
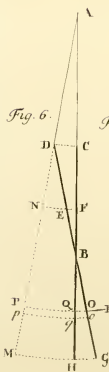
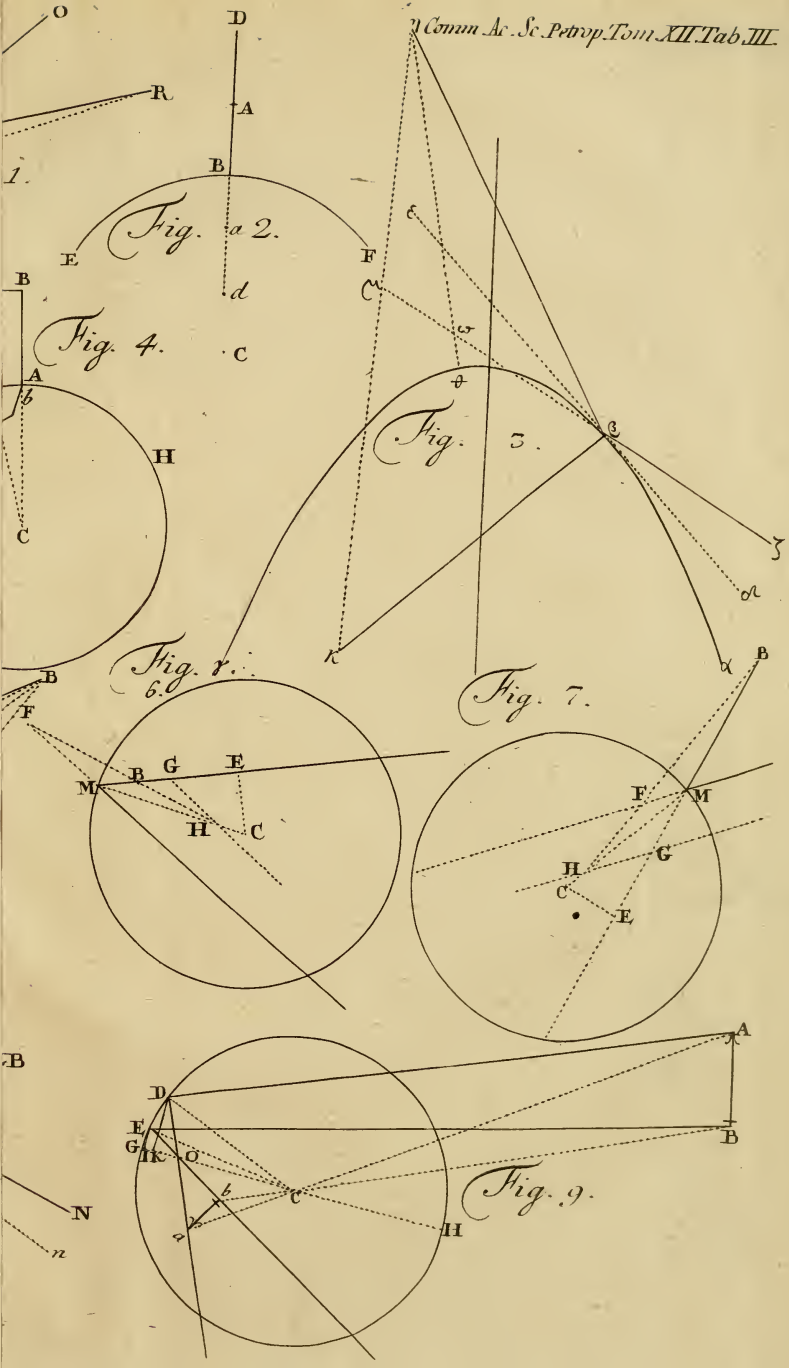


Fig. 4.





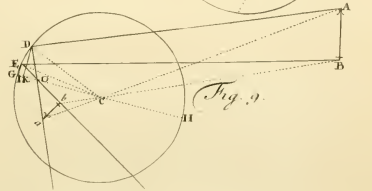
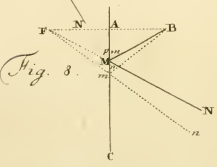
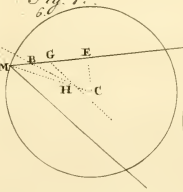
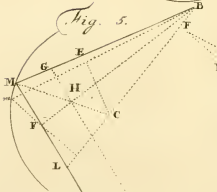
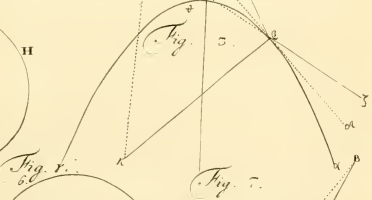
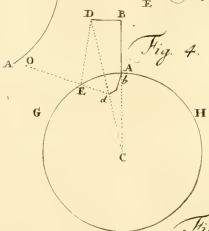
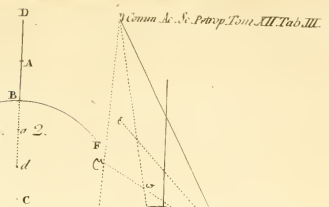


Fig. 1.

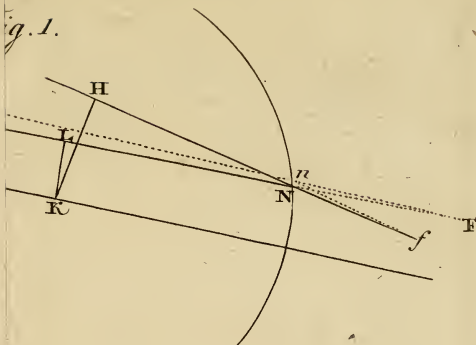


Fig. 2.

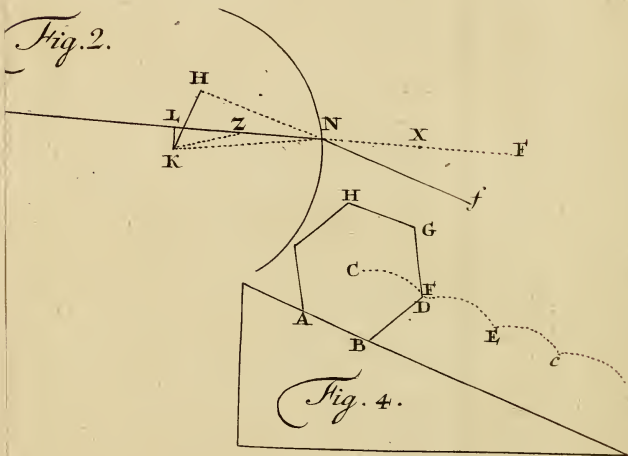


Fig. 4.

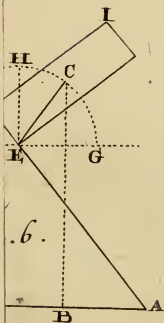


Fig. 6.

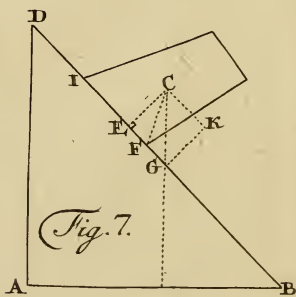
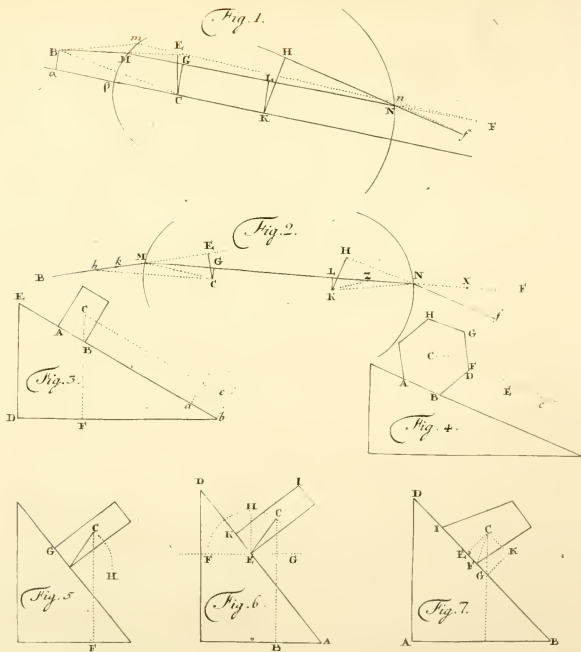
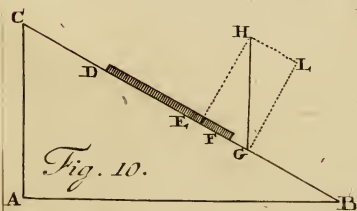
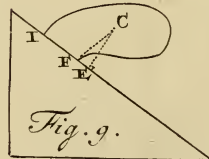
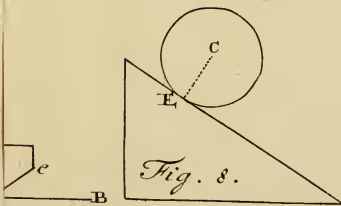
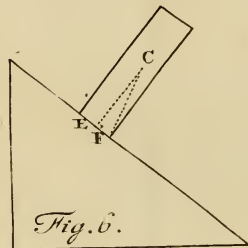
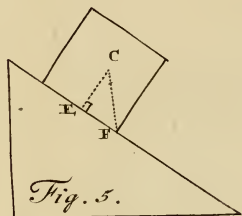
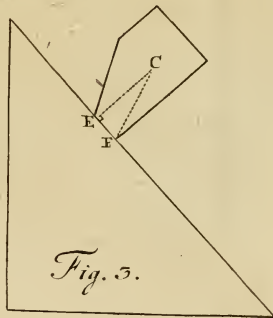
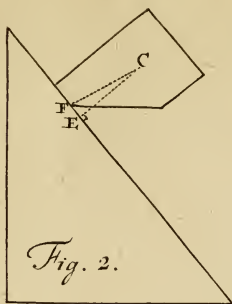


Fig. 7.





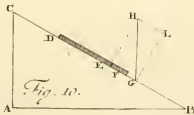
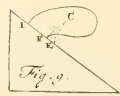
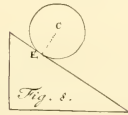
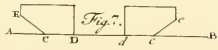
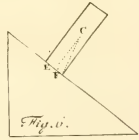
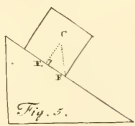
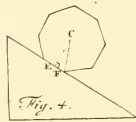
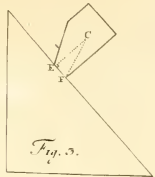
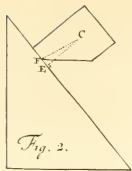
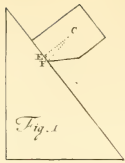


Fig. 1.

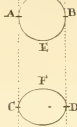


Fig. 3.

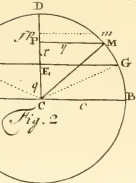
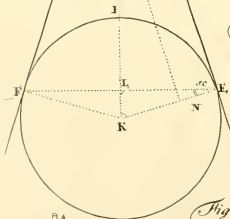


Fig. 4.



Fig. 5.

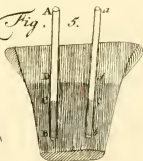


Fig. 6.

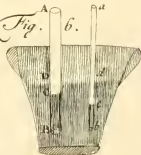


Fig. 7.



Fig. 8.

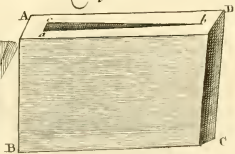


Fig. 9.

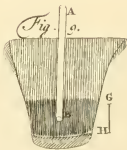


Fig. 10.

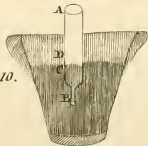
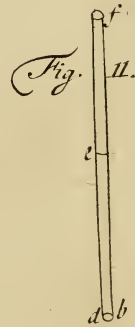
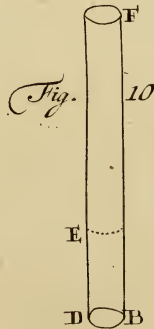
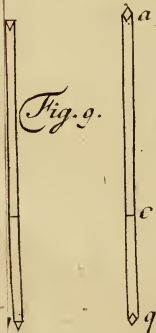
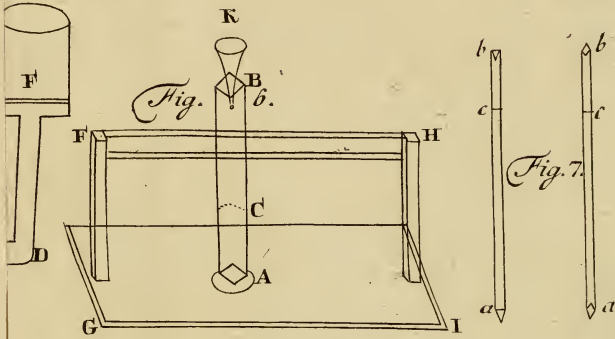
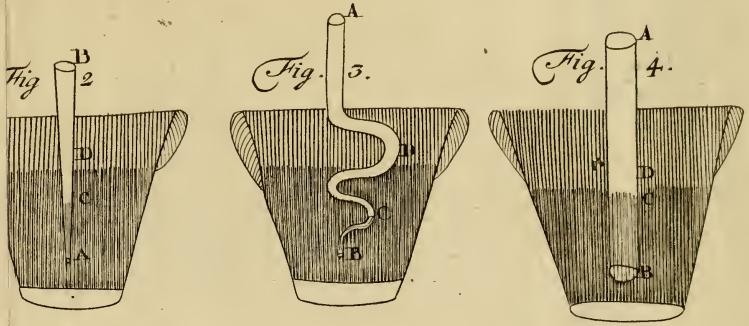
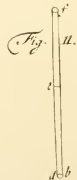
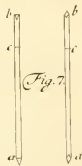
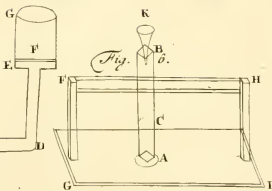
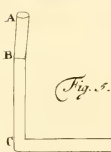
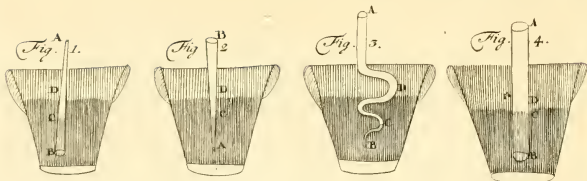


Fig. 11.







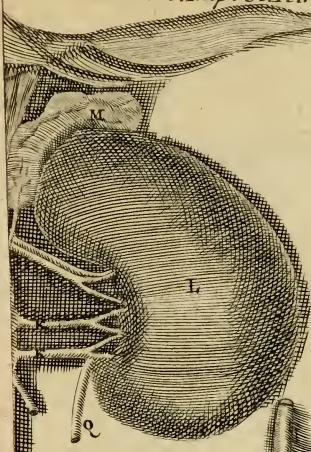
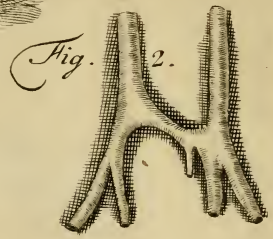


Fig. 3.

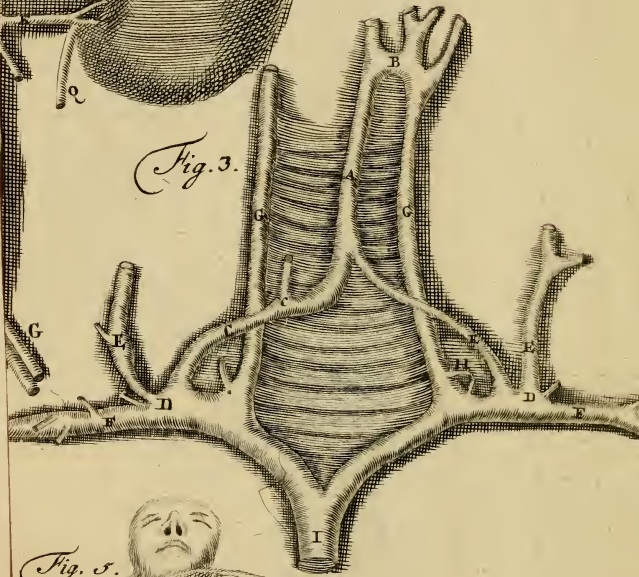


Fig. 5.

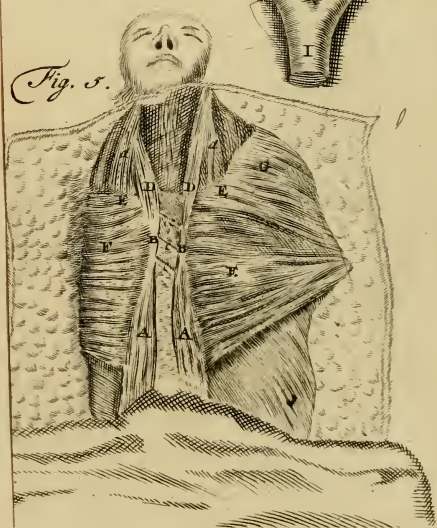


Fig. 2.

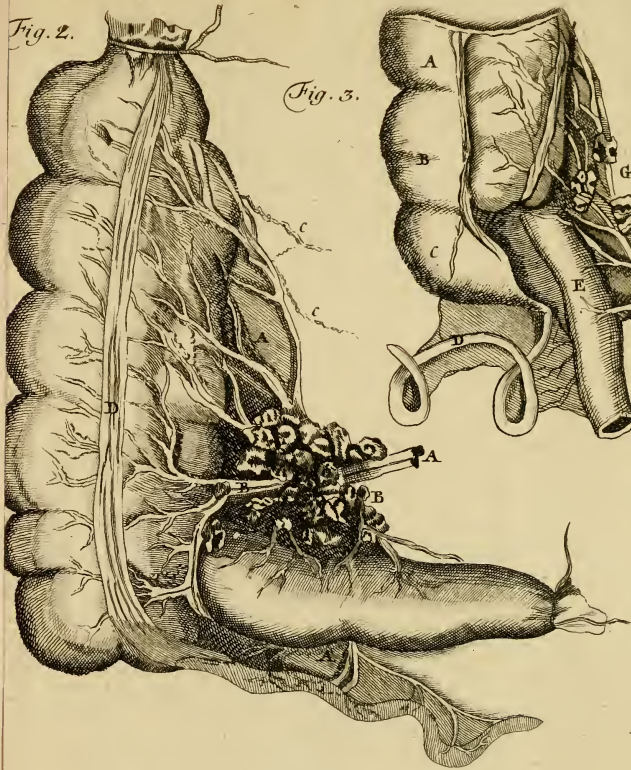


Fig. 3.

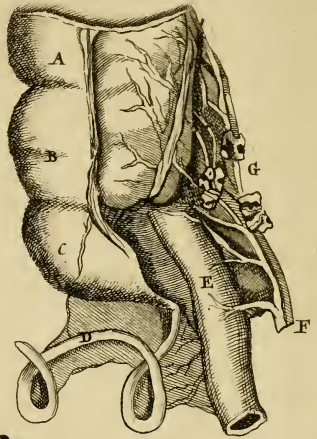
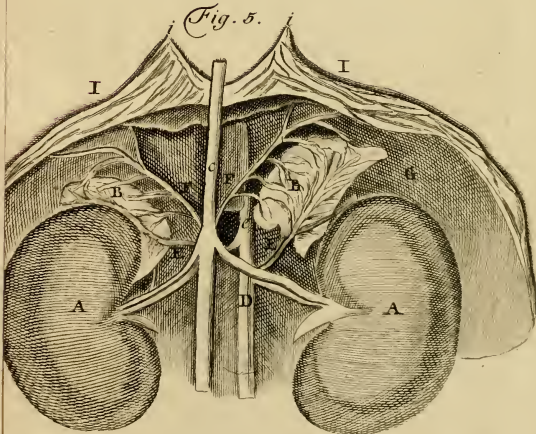
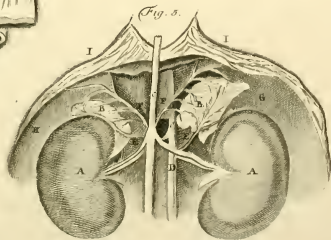
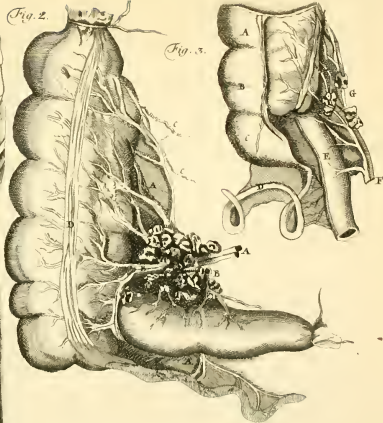
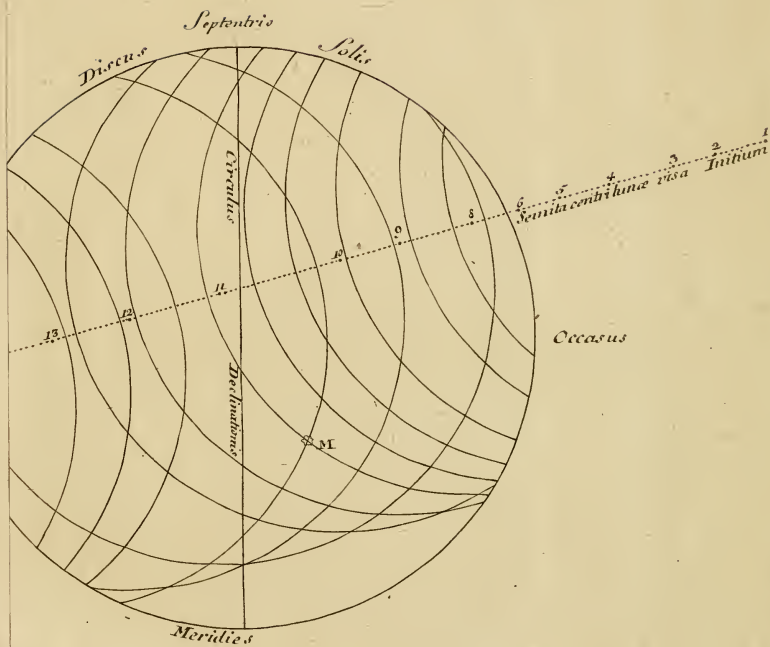
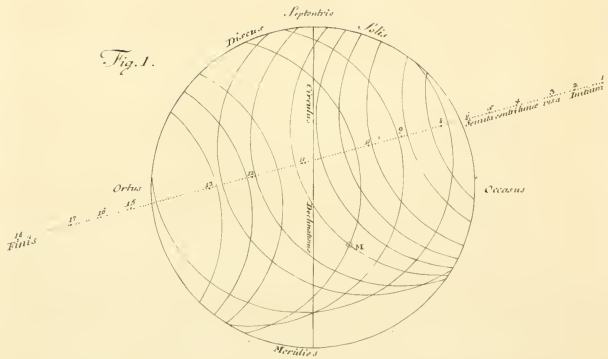


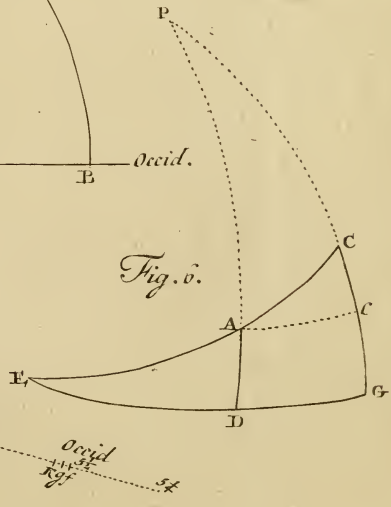
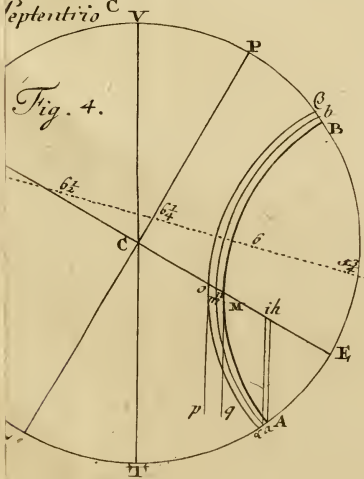
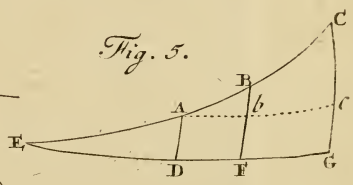
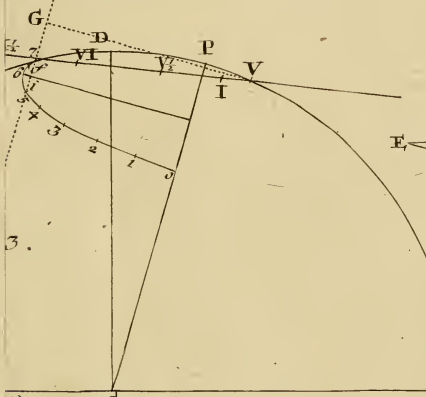
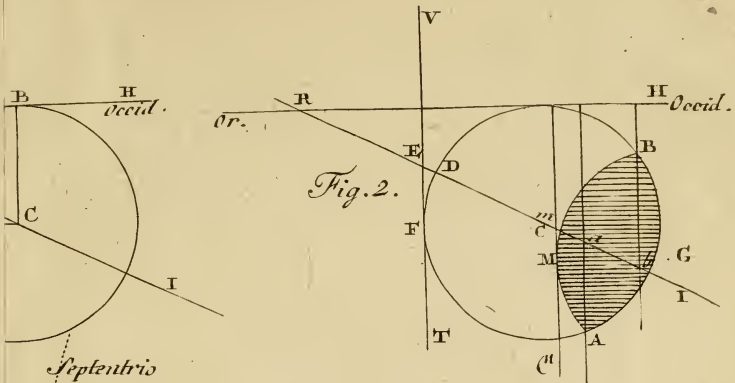
Fig. 5.

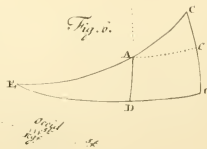
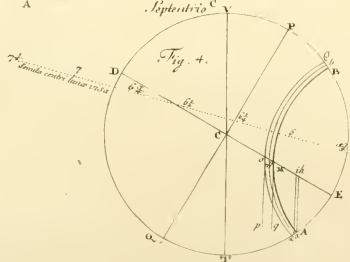
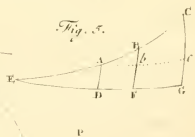
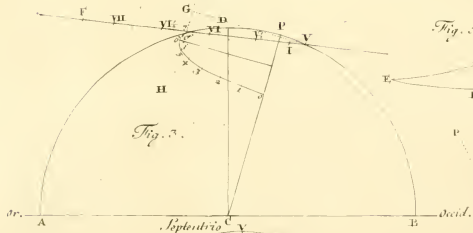
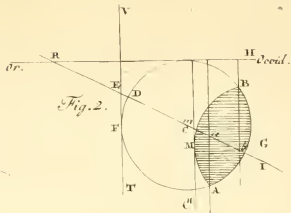
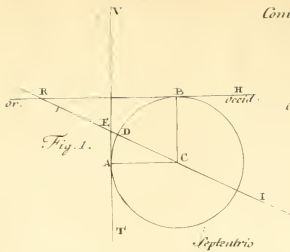












AMNH LIBRARY



100127239