Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2022/2023

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 14

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 14.1. Oma Müller hat 13581 Kekse gebacken, die ihr Enkel Mustafa auf der Haseigelschule unter den insgesamt 187 Schülern und Schülerinnen gerecht verteilen soll, den Rest bekommt Frau Maier-Sengupta. Wie viele Kekse bekommt jedes Kind und wie viele Kekse bekommt Frau Maier-Sengupta?

Übungsaufgaben

Aufgabe 14.2.*

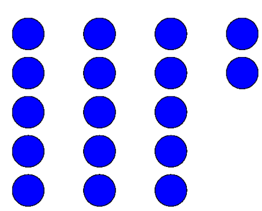
Heute ist Freitag. Welcher Wochentag ist in 1000 Tagen?

Aufgabe 14.3. Bestimme den Rest von 123456789 bei Division durch 7.

Aufgabe 14.4.*

Bestimme den Rest von 123456789 bei Division durch 8.

Aufgabe 14.5. Bringe die Division mit Rest damit in Verbindung, wie man eine Punktmenge in Blöcke konfigurieren kann.



Aufgabe 14.6. Es seien n, d natürliche Zahlen mit $d \geq 1$. Zeige, dass d genau dann ein Teiler von n ist, wenn bei der Division mit Rest von n durch d der Rest gleich 0 ist.

Aufgabe 14.7. Es seien $q, d, s \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 1$ und $n = qd + s$. Zeige, dass der Rest von n bei Division durch d gleich dem Rest von s bei Division durch d ist.

Aufgabe 14.8. Bestimme den Rest von 100 bei Division durch $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Aufgabe 14.9. Bestimme den Rest von 3708175 bei Division durch $1, 10$, 100,1000, $10000, 100000, 1000000, 100000000$.

Aufgabe 14.10. Es sei d eine positive natürliche Zahl. Es seien a, b natürliche Zahlen und es seien r bzw. s die Reste von a bzw. b bei Division durch d. Zeige, dass der Rest von $a + b$ bei Division durch d gleich dem Rest von $r + s$ bei Division durch d ist. Formuliere und beweise die entsprechende Aussage für die Multiplikation.

Für die folgenden Aufgaben vergleiche man Aufgabe 14.10 und Beispiel 11.4.

Aufgabe 14.11. Erstelle Verknüpfungstabellen, die das Verhalten der Reste bei der Division durch 3 bei der Addition und der Multiplikation wiedergeben.

Aufgabe 14.12. Erstelle Verknüpfungstabellen, die das Verhalten der Reste bei der Division durch 4 bei der Addition und der Multiplikation wiedergeben.

Aufgabe 14.13. Es sei $d \geq 2$ eine natürliche Zahl. In welcher Beziehung stehen die Verknüpfungstabellen, die das Verhalten der Reste bei der Division durch d bei der Addition und der Multiplikation wiedergeben, zum kleinen Einsundeins und zum kleinen Einmaleins im d-System?

Aufgabe 14.14. Es seien $a, d \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$. Zeige, dass bei Division mit Rest durch d aller Potenzen von a (also $a^0, a^1, a^2, \ldots$) schließlich eine Periodizität eintreten muss. Es gibt also $i < j$ derart, dass sich die Reste von $a^i, a^{i+1}, a^{i+2}, \ldots, a^{j-2}, a^{j-1}$ bei den folgenden Potenzen periodisch (oder „zyklisch") wiederholen (insbesondere besitzen also a^i und a^j den gleichen Rest). Zeige ebenfalls, dass diese Periodizität nicht bei $a^0 = 1$ anfangen muss.

Aufgabe 14.15. Es seien a und d teilerfremde ganze Zahlen. Zeige, dass es eine Potenz a^i mit $i \geq 1$ gibt, deren Rest bei Division durch d gleich 1 ist.

Aufgabe 14.16. Zeige, dass eine natürliche Zahl n genau dann gerade ist, wenn ihre letzte Ziffer im Dezimalsystem gleich $0, 2, 4, 6$ oder 8 ist.

Aufgabe 14.17. Begründe die Eindeutigkeit der Ziffernentwicklung im Zehnersystem mit Hilfe der Eindeutigkeit bei der Division mit Rest.

Aufgabe 14.18. Zeige, dass eine positive natürliche Zahl genau dann von 10^k geteilt wird, wenn sie in der Dezimaldarstellung mit mindestens k Nullen endet.

Aufgabe 14.19. Ein Land besitzt Geldscheine der Größe 1 Taler, 10 Taler, 100 Taler, 1000 Taler, 10000 Taler. Der Kiosk hat heute die folgenden Scheine in der Kasse: 8137 Einer, 498 Zehner, 25 Hunderter und 3 Tausender. Der Besitzer geht zur Wechselbank, um den Geldbetrag in möglichst wenige Scheine einzutauschen. Wie viele Scheine hat er danach von jeder Sorte?

Aufgabe 14.20. Ein Land besitzt Geldscheine der Größe 1 Taler, 10 Taler, 100 Taler, 1000 Taler, 10000 Taler, u.s.w. Zeige, dass für jeden Betrag die minimale Darstellung mit diesen Scheinen eindeutig ist.

Aufgabe 14.21.*

Eine natürliche Zahl heißt palindromisch, wenn es egal ist, ob man ihre Dezimalentwicklung von vorne nach hinten oder von hinten nach vorne liest. Bestimme die kleinste Potenz

$$1001^n ,$$

die nicht palindromisch ist.

Aufgabe 14.22. Finde die Primfaktorzerlegung der Zahlen

$$11,\ 111,\ 1111,\ 11111,\ 111111 .$$

Aufgabe 14.23.*

Betrachte im Zehnersystem die Zahl

$$473 .$$

Wie sieht diese Zahl im Dualsystem aus?

Aufgabe 14.24. Bestimme für die im Zehnersystem gegebene Zahl 300 die Ziffernentwicklung im Dreiersystem.

Aufgabe 14.25. Betrachte im 15er System mit den Ziffern $0, 1, \ldots, 8, 9, A, B, C, D, E$ die Zahl

$$5E6BB\,.$$

Wie sieht diese Zahl im Zehnersystem aus?

Aufgabe 14.26.*

Wir zählen im Einsilbensystem, also mit den Abweichungen

sechs, sie, ben, acht, ... , sechzehn, siezehn, benzehn, achtzehn, ..., sechsundsiezig, sieundsiezig, benundsiezig, achtundsiezig, .. ., sechsundbenzig, sieundbenzig, benundbenzig, achtundbenzig, ...

(1) Drücke die übliche Zahl Siebenundachtzig als Einsilbenzahl aus.
(2) Drücke die Einsilbenzahl Sieundachtzig in der üblichen Weise aus.
(3) Drücke die Einsilbenzahl Bentausendsiehundertbenundbenzig in der üblichen Weise aus.

Aufgabe 14.27. Bestimme für die als Strichfolge gegebene natürliche Zahl

$$n = ||||||||||||$$

für jede mögliche Basis $g = 2, 3, \ldots$ die Zifferndarstellung. Ab welchem g ist die Zifferndarstellung einstellig?

Aufgabe 14.28. Zeige, dass es für jede natürliche Zahl n nur endlich viele Basen $g = 2, 3, \ldots$ gibt, für die die Zifferndarstellung von n nicht einstellig ist.

Aufgabe 14.29. Inwiefern kann man das Strichsystem als Einersystem auffassen, inwiefern nicht?

Aufgabe 14.30.*

Auf der Haseigelschule wird mit der folgenden Tadelwährung gerechnet. 5 Ermahnungen sind ein Tagebucheintrag, 3 Tagebucheinträge sind ein Strafnachmittag, 4 Strafnachmittage sind ein Elterngespräch. Die Tadelwährung wird in absteigender Tadelschwere angegeben.

(1) Im dritten Schuljahr hatte Gabi Hochster insgesamt (im Zehnersystem) 67 Einzelermahnungen. Wie lautet das Ergebnis in der Tadelwährung?

(2) Im vierten Schuljahr hatte Gabi Hochster insgesamt 2114 Einheiten in der Tadelwährung. Wie viele Einzelermahnungen stecken da dahinter?
(3) Inwiefern ist die Analogie mit einem Münzsystem oder dem Dezimalsystem mathematisch fragwürdig?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.31. (2 Punkte)

Erstelle Verknüpfungstabellen, die das Verhalten der Reste bei der Division durch 5 bei der Addition und der Multiplikation wiedergeben.

Aufgabe 14.32. (4 Punkte)

Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, die modulo 4 (also bei Division durch 4) den Rest 3 besitzen.

Aufgabe 14.33. (6 (2+4) Punkte)

Zu einer natürlichen Zahl n sei $\psi(n)$ gleich der Summe aller Reste, die bei der Division von n durch die Zahlen $d = 1, 2, \ldots, n$ auftreten.

(1) Berechne $\psi(n)$ für die Zahlen $n = 1, 2, \ldots, 10$.
(2) Zeige, dass für $n \geq 7$ stets
$$\psi(n) \geq n$$
gilt.

Aufgabe 14.34. (4 (1+1+2) Punkte)

Ein Land besitzt Geldscheine der Größe 1 Taler, 10 Taler, 100 Taler, 1000 Taler, 10000 Taler. Der Kiosk hat heute die folgenden Scheine in der Kasse: 7906 Einer, 623 Zehner, 39 Hunderter und 4 Tausender. Der Besitzer geht mit dem Betrag zur Wechselbank, um ihn umzutauschen.

(1) Zuerst tauscht er den Geldbetrag in möglichst wenige Scheine um. Wie viele Scheine hat er danach von jeder Sorte?
(2) Jetzt fällt ihm ein, dass er für morgen auch Wechselgeld braucht, und zwar möchte er mindestens 100 Einer und mindestens zehn Zehner haben. Ansonsten möchte er so wenig Scheine wie möglich haben. Wie viele Scheine hat er von jeder Sorte nach dem Umtausch?

(3) Jetzt kommt er auf die Idee, dass er morgen lieber Urlaub auf der Insel Magma machen möchte. Dort ist die Währung der Gulden, der zum Taler im Verhältnis 1 : 1 getauscht wird. Auf Magma gibt es Scheine der Größe 1 Gulden, 5 Gulden, 25 Gulden, 125 Gulden, 625 Gulden, 3125 Gulden. Er möchte so wenig Scheine wie möglich mit sich rumtragen. Wie viele Guldenscheine hat er von jeder Sorte nach dem Umtausch?

Aufgabe 14.35. (2 Punkte)

Bestimme für die im Zehnersystem gegebene Zahl 626 die Ziffernentwicklung im Fünfersystem.

Aufgabe 14.36. (3 Punkte)

Bestimme für die im Vierersystem gegebene Zahl 321002 die Ziffernentwicklung im Zehnersystem.

Abbildungsverzeichnis