Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 33

Übungsaufgaben

Aufgabe 33.1.*

Berechne das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 33.2. Berechne das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 4-7i \\ 3+5i \\ -1-2i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6+4i \\ -2-8i \\ 1-9i \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{C}^3$.

Aufgabe 33.3. Berechne das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im K^3, wobei K den Körper mit fünf Elementen bezeichnet.

Aufgabe 33.4. Berechne das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

im K^3, wobei K den Körper mit sieben Elementen bezeichnet.

Aufgabe 33.5. Es sei K ein Körper. Zeige, dass das Kreuzprodukt auf dem K^3 bilinear und alternierend ist.

Aufgabe 33.6. Zeige, dass für das Kreuzprodukt für Vektoren $x, y, z \in K^3$ die Beziehung

$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0$$

gilt.

Aufgabe 33.7. Es sei u_1, u_2, u_3 eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$. Zeige $u_1 \times u_2 = \pm u_3$.

Aufgabe 33.8. Bestimme die Isometrien von $\mathbb{R}$.

Aufgabe 33.9. Welche Isometrien des $\mathbb{R}^2$ kennen Sie aus der Schule?

Aufgabe 33.10. Es seien U, V $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Skalarprodukt und $\varphi\colon U \to V$ eine Isometrie. Zeige, dass φ injektiv ist.

Aufgabe 33.11. Es seien U, V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Skalarprodukt. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Die Identität $V \to V$ ist eine Isometrie.
(2) Wenn $\varphi\colon U \to V$ eine bijektive Isometrie ist, so ist auch die Umkehrabbildung φ^{-1} eine Isometrie.
(3) Wenn $\varphi\colon U \to V$ und $\psi\colon V \to W$ Isometrien sind, so ist auch die Hintereinanderschaltung $\psi \circ \varphi$ eine Isometrie.

Aufgabe 33.12. Bestimme die Isometrien von $\mathbb{C}$.

Aufgabe 33.13. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt,

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine Isometrie und $U \subseteq V$ ein φ-invarianter Untervektorraum. Zeige, dass

$$\varphi|_U\colon U \longrightarrow U$$

ebenfalls eine Isometrie ist.

Aufgabe 33.14.*

Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension n. Zeige, dass eine Vektorfamilie $u_1, \ldots, u_n \in V$ genau dann eine Orthonormalbasis von V ist, wenn die zugehörige lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V,\ e_i \longmapsto u_i,$$

eine Isometrie zwischen $\mathbb{R}^n$ und V ist.

Aufgabe 33.15.*

Seien V und W euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) φ ist eine Isometrie.
(2) Für jede Orthonormalbasis $u_i, i = 1, \ldots, n$, von V ist $\varphi(u_i), i = 1, \ldots, n$, Teil einer Orthonormalbasis von W.
(3) Es gibt eine Orthonormalbasis $u_i, i = 1, \ldots, n$, von V derart, dass $\varphi(u_i), i = 1, \ldots, n$, Teil einer Orthonormalbasis von W ist.

Aufgabe 33.16.*

Man gebe ein Beispiel einer bijektiven linearen Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit der Eigenschaft, dass es einerseits eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^2$ gibt, die unter φ in eine Orthogonalbasis überführt wird, es andererseits aber auch eine Orthogonalbasis gibt, die unter φ nicht in eine Orthogonalbasis überführt wird.

Aufgabe 33.17.*

Es sei V ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft, dass die Determinante von φ gleich 1 oder -1 ist. Ferner besitze φ die Eigenschaft, dass zueinander orthogonale Vektoren stets auf orthogonale Vektoren abgebildet werden. Zeige, dass φ eine Isometrie ist.

Aufgabe 33.18. Man gebe ein Beispiel einer bijektiven linearen Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

an, die keine Isometrie ist, für die aber für alle $u, v \in V$ die Beziehung

$$\langle u, v \rangle = 0 \text{ genau dann, wenn } \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = 0$$

gilt.

Aufgabe 33.19. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

derart, dass φ flächentreu, aber keine Isometrie ist.

Aufgabe 33.20.*

Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

an, deren Ordnung 2 ist und die keine Isometrie ist.

Aufgabe 33.21. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge $\mathrm{GL}_n(K)$ der invertierbaren Matrizen eine Gruppe ist. Zeige ferner, dass diese Gruppe bei $n \geq 2$ nicht kommutativ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 33.22. (2 Punkte)

Berechne das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

im K^3, wobei K den Körper mit sieben Elementen bezeichnet.

Aufgabe 33.23. (3 Punkte)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeige, dass die Menge der Isometrien auf V eine Gruppe unter der Hintereinanderschaltung von Abbildungen bildet.

Aufgabe 33.24. (2 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine eigentliche Isometrie. Es sei vorausgesetzt, dass f trigonalisierbar ist. Zeige, dass dann f sogar diagonalisierbar ist.

Aufgabe 33.25. (3 Punkte)

Es seien V, W komplexe Vektorräume mit Skalarprodukten und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann eine Isometrie bezüglich der gegebenen komplexen Skalarprodukte ist, wenn φ eine Isometrie bezüglich der zugehörigen reellen Skalarprodukte ist.