余介石
孫克定 編

數學學習法

中華書局印行

八〇

數學學習法

編著 余介石暨孫克定

中華書局印行

數 學

目 錄

數學學習法

第一章　緒　論

算學的重要性和有用性

算學※是研究數量與空間的科學，世界上一切東西都有數量可稽，都佔據一定的空間，所以算學是無所不在，無所不包的。地球和其他星球的運行軌道，金字塔及其後各種建築物的構造形式，蜂巢，花，葉，及自然界裏面形形色色的佈置，雪花及其他結晶體以及各種物質分子間，原子間，電子間的排列，這一切的空間圖形都是算學的研究對象，宇宙中各天體的體積，質量，溫度等條件，社會中人口的增減，經濟的盛衰，國家的預算，下及家庭或個人日用帳目，以及生物的遺傳，工程的設計製造的各種計量，這一切的數量關係也都是算學的研究對象，沒有了算學，我們非但不能推算日月蝕，建築橋梁，廣播無線電，我們甚至要沒有時日，不知遠近，忘却耕種和紡織，失去一切計劃，演算，估量，推論的能力，這就失去人之所以為人的要件。所以就整個宇宙及自然而言，算學是普遍地客觀地存在着的，算學的法則存在於一切事物之中；就人類而言，算學

※按算學一名，原包括算術代數幾何等科，現在教部新定名詞，仍復改爲數學，本書出版在前，書中未及一一更正，請讀者注意。

是認識自然控制自然的最重要的手段之一，算學是科學中最基本的一種，理論的科學，如物理，化學，生物等，固然少不了算學，並且各種科學發達的程度，可以算學所佔成分的多少來作爲標誌，而應用的科學，更以算學的計算及測定爲樞紐。我們試來無論是電機工程，機械工程，化學工程，土木工程等等，那一種是能離得了算學的；醫學，農學等雖然應用算學的成分較爲少些，但病情的診測，藥劑的配合，和種子肥料的選擇等等又豈能屏除算學的方法？甚至最抽象的藝術如音樂，在節奏，拍子以及作曲，和聲等也必須有算學的幫助。所以算學非但是“科學界的女王”同時也是人類征服自然，增進福利的利器。

算學既然是這樣地有用而又這樣重要，所以我們每個人都得學習它，應用它，並企圖進一步發展它。這我們就須在中學時代把基礎打好。對於企圖將來以算學研究及算學教育爲事業的人，是不用說的了，他們負担起發展算學，推廣算學的責任，但這一類人只要占全體中一小部份，讓在算學方面有特殊才能及興趣的人去做好了，其餘的大部份人，或者準備從事於自然科學及工程，或者企圖從事於文學，藝術，政治經濟或其他方面，算學雖然不是他們的

本行，但也得把算學學好。因為對於他們所認定的本行，算學或者是基本條件，或是雖非主要而又不可少的因素，他們就是算學的應用者，我們如果要充分發揮個人的能力，如果要多多對社會有供獻，那末請不要忽視算學這一門最基本的知識罷！

算學沒有假的

別的東西常常有假，算學却不能有假的。別的東西有時可以馬虎，算學却不能絲毫苟且。作文可以有修辭工整，言之無物的文章，音樂可以有油腔滑調，社會科學可以有似是而非的理論，就在自然科學中也常有不怎樣可靠的假定，這些都可濫竽充數，暫時蒙混過去。可是在算學的領域裏面，這是絕對不行的。算學是最有系統，最為嚴密，最為完整的學問。在這裏面絕對沒有矛盾不符，絕對沒有漏洞。即使因為我們自己的錯誤帶進了矛盾，那也可立即發覺出來，真偽顯然，取舍立斷。算學就像一座大建築物，壁壘森嚴，每一部份都是必要的。算學又像有組織的軍隊，異己份子是參雜不進的。所以我們學習算學，這給予我們一種精神上的訓練。我們的思維及行動必須有系統，精密，嚴正而完整。無論什麼都得有根據，合邏輯。這種習慣是

最最重要最最有用的，而這些都可從學習算學得來。

算學又是最抽象的，最客觀的學問，我們只有用冷靜的理智去對付它。學習算學不是像學習語言文字那樣以記憶爲主，也不像學習藝術，文學等那樣以感覺及情緒爲主。算學是純粹的推理，全靠思考與悟性，感覺和記憶對於算學只有間接的幫助，情緒在算學裏面全用不着。我們學習算學，必須首尾貫注，一絲不苟，把全部了解才行。許多人見了算學害怕，或者總是學不好，主要就是沒有把握住算學的特性，因此用了錯誤的研究方法的緣故。

學習算學並非苦事也非難事

我們常聽到有人這樣說："我見到算學就頭痛"或者說："算學是最難的一門功課"果眞算學是這樣可怕，這樣難學嗎？實際上並不是這樣。如果說學習算學很苦，很難，那末學習別的課程又何嘗不苦，何嘗不難？學英文要記生字和文法，國文要作文，史地要記人名，地名，年代等等，甚至於音樂，圖畫都得弄五線譜，練聲，學寫生；嚴格說來，任何一門學問或藝術，在學習過程中，總得經過一番刻苦的訓練，而各種課程的學習，也各有其特殊困難之點。不過這些困難都不是不可超越的絕對的困難，這些

只是相對的困難，是在發展過程中難以避免的困難。大家想都有這種經驗，經過了艱難困苦，到後來自然會感到無上的樂趣。在學習算學或其他課程的時候，每經過一層難關，就有一層進步，對於已經學過的東西就覺得容易得多。並且這種從苦難中所得的樂趣，足以把學習時的努力與辛苦抵償而有餘。譬如是把一個難題找出解答，或者是把一條較爲深奧的定理了解清楚，那時就感到有說不出的愉快，又如我們打破從算術到代數的難關，回過頭來弄算術，就覺到較以前容易得多。所以苦樂是相生的，難易是相成的，而苦後之樂，難中之易，却要超過原來的苦與難，這無論是在讀書，做事，都是如此，不獨在學習算學才這樣。

總結起來說：學習算學，不是一件絕對困難的事，當然也不是絕對容易的事。算學正和我們所學的別的科目相仿，也並不比別的科目特別困難，只是各科各有各的特殊困難點就是了。再舉一個比喻，學習算學就像爬山一樣，我們向山上爬去，自然是很費力的，但越爬得高，越能看到前所未見的美景，我們自會覺得心曠神怡；先前的努力，就是這時的代價。但如果我們只是站着不動而空想向上飛騰，這當然絕對不可能的。勞而後獲這條規律，無論在那裏都

適用，無論在那裏都是不能違反的。

所謂"天性不近算學"

又有人說，"我很知道算學並不是絕對地難學，因爲別的人能夠學得很好，可是這在我却又是一回事，我的天性不近算學啊"！固然各人都有特長和所短，智力的發展在一切方面並不一致，這我們是承認的。可是某個人的天性對於某件事到底近不近却不是一下子就可決定的。一般說起來，對於算學有很好的天資的人固然很少，但反過來說，對於算學的學習能力極低的人也佔很少數，大多數的人，對於算學無所謂近不近，學得好就算近，學不好就不近，所以這主要是後天的問題，先天的問題只對於極少數一部份人才值得注意。許多自以爲對算學天性不近的人，實際上十有七八是被自己欺騙了，他們有的是因爲在開始就得到壞的印象，從此失去興趣，不努力去學；有的是因爲學習的方法不適當，如學幾何只是拚命背定理，學代數只是記公式或硬記書上的方法，雖努力而難有效果；有的是因爲在學習的過渡階段中沒有轉換得好，或跳過必要的階段（如從算術到代數，從代數到幾何的轉換過程中）沒有弄清新的部門的特性及特殊方法；或者學三角而跳過幾何，這樣就難

於繼續學習下去。因爲這些原因以及其他的原因就感得失望和灰心，但又不明瞭原因所在，或者知道了原因而又不能克服，於是只得一半自慰一半自嘲地說，"我的天性不近算學，"其實這種態度也就是自暴自棄的態度。即是天性眞的不近，對於算學學習能力很低的人，對於算學也絕對不應該完全放棄。讓我們舉個譬喻，是否有人天性不近於說話，是否有人天性不近於寫文章，有的，有些口才拙，文思差的人就是。可是沒有口才的人雖不能成爲演說家，欠缺文思的人雖不能成爲文人，他們無論如何總得會日常會話，以及寫信寫便條。他們雖然天性不近，但必須努力學習起來，達到社會所需最低限度的水準以上。同樣對於天性不近算學的人也這樣。我們並不是要大家都成爲算學家，正如並不要大家都成爲演說家或文人一樣，這讓一部份特殊適宜的人去做好了。但我們每個人必需具備最低限度的算學知識及技能。隨便說幾樣，我們必須會計數，會加減乘除，會求比例及簡單方程式，會計算簡易的面積體積，會了解並應用簡易的表格及圖解，及其他等等。這是現代社會所要求於每個常人的（特別是每個受過教育的人）知識條件中一部份。不論他對於這些性情近不近，如果

他不去努力獲得，是會受到事實上的懲罰的。

初等算學的兩大類——代數和幾何

要替算學下一個精密而完善的定義，這是十分困難的。好在我們現在還不用管到這些，我們只要知道算學的大概意義就行。簡單說來，算學是研究數量和空間圖形的科學。數量是代表實際東西的分量的，譬如三斗米，二尺半布，我們可用3斗，2.5尺來表示各個的分量或者除掉單位化成不名數用3,2.5來表示，或者拿更抽象的文字a,b來表示。圖形是代表實際東西的形狀的，譬如直的光線，圓的車輪，拱形的橋洞，我們可用直線，圓，擺線（曲線的一種）來表示。又如磚塊，皮球，雨傘等物的形狀，我們可用立方體，球體，圓錐形來表示。

這樣看來，算學所研究的有兩種東西，數量和圖形。因此初等算學在本質上可以分成兩類，研究數量的稱為代數，研究圖形的稱為幾何。代數包括着算術和代數，幾何包含着幾何與三角。通常的辦法，是把算術，代數，幾何，三角這四門並列，這是為了學習上與教課上的便利，但我們從算學的基礎看來，可以看出算學和代數是非常接近的，幾何與三角是非常接近的，這在下面我們就要詳細講到。

第二章 算術和代數的學習法

不要見了數字害怕

不要見了數字害怕，這是我們對每個人的勸告。世界越進步，科學越發展，數字的應用也就越加普遍。野蠻人是很缺乏數的概念的，他們往往不會數三以上或十以上的數目。遊牧民族需要計數牲畜的個數，才開始有了較大的進步，以後到了農業社會，需要計量土地面積，收穫量，節候氣時等等，又到了商業社會，需要計算貿易額，價格，利息等等，一直到了現代的工業社會，數字的應用更為突飛猛進，除了包括上舉的各項外，更在機器生產，工程建築，科學研究這幾方面達到了精深嚴密的地步。不但如此，就是在日常生活方面，數字的需要也更多起來。過去不能以數量來表示的，現在也有辦法，譬如人的肥瘦，可用體重來表示，人的智慧，可用智力商數來表示。凡是能用數字來表示的，總是較為精密確實。現在的世界，是一個非常複雜的世界，如果我們不從數量的關係來把握，簡直是沒有辦法的。我們既然生為現代的人，即不能重返古代，歸真返樸，也不能閉關自守，與世無爭，因此對於現

代的一個要素——數量，是不能不加以理會的。對於數字覺得憎厭或害怕，不僅對於自己不利，而且是不應該的。

實在說來，我們在實際生活中間不能沒有數字，我們的年齡是數字，所住的地址的門牌號數是數字，經濟的收入和支出也是數字。這些數字是每個人都得知道，都得記住的，不管他喜歡不喜歡。更進一步，如果他是從事於商業的，他必須熟習貿易及會計上的數字；如果從事於法律，他必須熟習於法律條款的數字；即使從事於音樂，也必須熟習於音階拍子的數字。數字存在於各方面，一切領域，我們不能逃避它。

那麼為什麼有些人害怕數字呢？這主要是因為他們對這不習慣，並對這沒有興趣。他們對於數字抱着錯誤的觀念，認為數字是乾枯的，死板的，抽象的東西。他們不知道數字和文字一樣，可以是死的，呆的，但也可以是活的，有意義的。一篇文章裏面如果主要只有人"生於世""今夫天下""由此觀之"等一類套語，自然這使誰見了都要頭痛；做算術習題如果只做 $3+5=8$，$\sqrt{16}=4$ 也使人久則生厭。可是我們如果提到"中國不識字的人佔全人口中 8 %，"這個 8 % 就不是空洞的數字而是極有意義，足以使

人警惕的一種概念，我們學習算學的目的，不是玩弄抽象的數量，在數字裏面翻觔斗；而是使我們熟習於數量的關係及運算，能夠把這應用於實際方面。雖然我們在算學裏常遇着抽象的數字，但這些只是供演習之用，等我們演習得相當熟練，就應該把數字和實際的事物連繫起來，同時這也就是把算術與生活打成一片。這樣，我們不但不害怕數字，反而要喜愛數字，把數字放到應得的地位上去。

演算時首先要認清題目

我們遇着一個算術題目，在下手之前，首先要把題目的意義認清，得着透徹的了解，然後再開始去做。做的時候也要經常顧到題目，當心不要違犯題目所規定的條件。做好之後，要把求得的答數和題目對一對，如果答數應該有單位，千萬不要忘記把單位加上，這樣才成為完全的答案。又答案的數字，在求出來之後還得加以一番考察，看它是否合理，譬如求人數或不可分的物件的個數會得出小數或分數來，這顯然是不通的，一定是演算中間有錯誤，必須重做一遍，求出正確的答數；又譬如答數過分大或是過分小，按題目看來似乎可疑的，也應該覆算一下。覆算的最好方法是還原。所謂還原就是把所得答數代入題目裏

面去，看它是否能符合題目所規定的條件。還原如果對，那麼雖是可疑的答數也一定正確。又有時答數雖然看來沒有什麼不合理，也沒有什麼可疑，但說不定仍然會有錯誤，所以最妥當的方法是：每個題目在求出答數後都加以還原。

就一般的情形看來，算術演習的錯誤，由於認題不清及演算疏忽這兩個原因的佔大部份，而實在做不出的只佔一小部份。遇着一個題目，無論我們怎樣思索還是做不出，這或者是由於題目太難，或者是由於我們自己的能力不足，但這兩種情形在通常是比較少的，許多人把題目做錯，並不是因爲眞的不會做，而是因爲他在做的時候沒有用心，有的把題目的意思錯弄了，有的把題目所給的條件或數字看錯，有的在演算的中間不小心以致算錯，有的雖然一切都對但在得出答數後忘記加上單位還會留下一點小錯。尤其是在性急要趕快的人，更容易發生錯誤。

我們並不反對做算題做得快，我們只反對快而做錯的潦草從事；與其快而錯，不如慢而少錯些，當然，能夠快而不錯是最好，但總之，算題的解決最要緊的是正確不錯，其次才是演算的快捷和形式的整潔，而正當的快捷，也必

須把認清題目及這備必要步驟這兩件事作為前題。

注意題目的特殊條件

我們在上面曾說過做題時要首先認清題目，現在再來補充說一下：有許多題目，往往具有特殊條件，如果疏忽了這些特殊條件而把普通的法則隨便拿來應用，一定會得着錯誤的結果，譬如我們有這個題目：

一百丈長的路，每間隔一丈。種樹一棵，如果路的兩端都種樹，問有幾棵樹？（又如路的兩端不種，問有幾棵樹？）

假使我們對這個題直接就回答有一百棵樹，這樣就錯了。這題目的特殊點，就在於"兩端"和"間隔"，我們知道，在能排成一排的東西，兩件東西中間有一個間隔，三件中間有兩個間隔，四件中間有三個間隔，如此類推，十件東西有九個間隔，所以一百件東西有九十九個間隔。在這個題目裏面，樹是代表每丈的間隔的，所以如果兩端不算，就應該有九十九個棵樹，如果兩端也算，那麼要添上兩棵，就有一百〇一棵樹。如果不留心這題目的特殊點，是一定要做錯的。

題目的引伸和變化

我們做過一個題目，就是做得對了也不要把題目就此丟開，好像還了債似的彼此各不相干。我們應該把題目的意義和解法記一個大概（當然不是把這像背公式似的記住），這樣我們每做了一個題目，就添了一分經驗，增了一分學力，如果不這樣，那末即使我們做過幾百個幾千個題目，做過後忘得乾乾淨淨，這豈不是白做。

做過一個題目後，最好能多多引伸變化，以求觸類旁通。譬如我們在前面所提到的路旁種樹的題目，我們還可加以引伸和變化，這方法大概有下列的三種：

（1）把題中的數字改變　這是最簡單最容易的改變，例如原題是路長一百丈，每隔一丈種樹一棵，這裏的一百丈可以改爲六十丈或五百丈，每隔一丈可以改爲每隔兩丈或五丈，種樹一棵可以改爲種樹二棵等等。

（2）把題中的單位改變　這是較進一步的改變，樹可以換成電線桿，也可以換成排隊或放步的哨兵上，更可以換成較抽象的東西，如打棋盤格子的線條等等。

（3）把題目的條件改變　這是最高級的變化，譬如原題的路假定一條直線，我們現在把它改成一條有折角的直

線或是一段曲線，這題的結果依然不變，但要是我們把這兩種有兩端的曲線改成沒有端的（就是成圍一個面積的）曲線或折角直線，例如成為圓形的，橢圓形的，六角形的或長方形的道路，這時的條件就和以前大不相同，原有的兩端現在合而為一，成為一個間隔。原題的答數99棵樹或是101棵樹在這裏因條件改變都不對，倒反100棵樹的答案是對的。

（4）使題目普遍化　這就是用代數的方法來處理算術問題，譬如原題可改為路長a，每隔距離b種樹n棵。那麼結果可以用代數公式來表示：——如果兩端不種，總共樹數是$\left(\frac{a}{b}-1\right)n$棵；如果兩端都種，計有：

$\left(\frac{a}{b}+1\right)n$棵；如果路是兩端相接的，計有$\frac{an}{b}$棵，

我們如果能這樣地把題目引伸和變化，那麼做了一個題目就等於做了十幾個題目。對於這題目更記得牢，更了解得透徹。我們能養成了這種能力，無論遇到什麼題目都可觸類旁通指揮如意，這樣才真是受用無窮呢。

練習心算和記憶數字

在前面我們已經解說了爲什麼我們要和數字熟習，不要見了它害怕。現在我們再說一說怎樣和數字熟習：這除了正規地學習算術以外，還有兩種補助的方法——練習心算和記憶數字。

心算是很有用的。我們常看到有許多鄉下賣菜人，飯館裏的堂倌等，儘管他們不認識字，他們的心算十分敏捷，而又正確無誤，當然我們不一定要學得像他們那樣熟練，尤其是因爲現在的計算越來越複雜，只靠心算是不夠的，但我們應該會一點最低限度的心算技能，以供隨時隨地的應用。其實這並不難，只要多來幾番練習，最好同時學些簡捷算法，如"加98等於加100再減2""乘25等於乘100再除4"，並且記憶些最常用的計算，如$1/8=0.125$，$12^2=144$等等。這樣我們雖然不一定成爲心算家，但遇着較簡單的計算也可隨口報出結果來，這豈非一件很方便很痛快的事嗎？

記憶數字比較心算更爲有用而重要。不說別的，就是朋友們的住址號數和電話號碼，最好是記在心頭，省得每次

查找多費事。至於在各科中間，需要記憶的數字更多：歷史上的年代；地理上的土地面積，人口，山高，水長；物理化學的各種常數，如標準氣壓，熱當量，原子量等；以及算學上的常數，如圓周率$=3.1416$，$\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$等及其他。這裏面的最重要最有用的數字我們都應該記牢。記憶數字也是一種技能，需要多多練習，這也沒有什麽固定方法，只有多用，多寫，多讀，每逢記不清楚的時候，馬上翻書查出，重記一遍；或者把重要的數字寫在一起，貼在牆上每天讀幾遍，也是很有效的。

還有一種幫助記憶數字的方法，這稱爲"機械的記憶術"就是在數字之間硬找出意義來，這種意義不是數字本身所固有的，而是我們機械地加上去的機械。記憶術大致可分三種第一種就是數相互間的關係着想，我們利用連續數，偶數，奇數，倍數，平方數等關係來記憶數字，例如12345(連續數)，8642(偶數連續倒置)，3417（前兩位是後兩位的二倍），36912（順序爲3的倍數），256162（把末位2寫成6的指數就等於前三位），13531（左右對稱的連續奇數）。第二種是把數字與已經熟習的數字連繫起來，例

如12365（把這分爲12，365兩部份，前者相當於一年內的月份，後者相當於日數），935（相當於今年的年份1935除去1），9140（前三位相當於一種藥名）第三種是用數字的諧音來記憶例如法國大革命的年代是1789，這可諧音爲"一齊拔了"（北方音）或"一切拔舊"（南方音）這三種記憶術，第一種用處最廣，第二種次之，第三種更次之。在應用的時候，常會遇着不易處置的數字，但我們如多想些辦法，總可以記住全部數字或至少一部份數字，這也就很有幫助。我們還可把這三種方法揉合起來應用，這樣範圍就可以更廣。

最後讓我們再來舉幾個例子；0.14167（這數是圓周率去掉整數，最後加上7，而7又是14的一半），52729（我們在兩個2上加弧線52729，餘下的是三個連續奇數），3481（0不算，3的4乘方是81），81684（寫成81684，餘下16和4是8的一倍或一半）。

我們如果把數字的記憶，及心算加以相當的注意，這不僅增進日常生活的方便，並且使我們加強對數字的控制能力，我們遇着數字，不至於害怕或束手無計，反而是操縱自如，得心應手。波蘭的天才心算家芬凱斯坦曾說："數

字是有生命有友情的東西”，我們要能了解他這句話的意義。

關於單位的運算

實在說來，無論什麼數字，一定附有單位，這就是所謂名數，至於不附有單位的所謂不名數，只是一種極爲抽象的東西，在實際上是不存在的。譬如3這個數字，實際上只有3匹馬，3枝筆或是3年，3尺，3倍，這些都是附着單位的名數；而沒有單位的3，在實際中間是找不到的。這種不名數是把名數的單位去掉爲便於運算起見而創造出來的，

因此單位是很重要的東西，數字必須和單位結合起來，才有確定的意義。我們在做算題時，先遇着有單位的名數，演算時往往將名數的單位省掉，以求計算的便捷，得出結果後再將答數的後面加上適當的單位。不過嚴格說來，單位也是可以演算的，單位可以和數字合在一起演算。在下面是幾個例：

20人＋15人＝35人

4.5尺－3.2尺＝1.3尺

8里×15里＝120平方里（又可寫爲“里²”，

100斤÷25斤＝4倍（“倍”這個單位常不寫出）

我們看到相同的單位是可以舉行加減乘除的運算的。在加和減：任何相同的單位都可適用，其結果所得的單位也相同。在乘法，只有表示距離的單位可以自乘，所得結果爲原來單位的平方。在除法，任何相同的單位可以自行相除，所得結果爲倍數。

至於不同的單位，雖然不能互相加減，但卻可以用於乘除，例如：

6呎×9磅＝54呎磅（呎磅是工作的單位）

3平方寸×5寸＝15立方寸

12瓩×4時＝48瓩時（瓩是電力的單位）

96担÷3人＝32担/人（每人32担）

75尺÷10秒＝7.5尺/秒（每秒7.5尺）

兩個不同的單位相乘，結果得着一個較爲複雜的單位，包含着原來的兩種單位，這在物理學裏面常遇着。兩種單位相除，結果是一種採取分數形式的單位，這表示在分母上的每一單位相當於分子上的若干單位，譬如“斤/元”表示每一元錢可買貨品多少斤，而“元/斤表”表示每一斤的貨物值多少錢。又“英呎/公尺”表示每一公尺的長度可轉化若干英呎。

在運算中間，各種單位也可以合併，相消，或調轉，例如：

4 斤×1.3元/斤＝52元

76 糎×13.6克/立方糎＝1033.6克/平方糎
（高）　（密度）　（壓力）

360里÷40里/時＝9時

1÷2.54 糎/吋＝0.3937吋/糎

上面這些例子，明顯地指出了各種單位也可施行運算，它們也遵從一般的運算法則。我們如果對這有了清楚的了解，那麼遇着單位的計算就可減少困難。這在通常是不大被人注意的，所以我們要在這裏着力地提出解說一下。

六種基本運算法則

普通所謂“四則”的意義就是指的加減乘除四種運算法則，一般認爲加減乘除是四種基本運算，其實這是不充分的，除了這四則之外還應該添進乘方和開方成爲六種基本運算，所以有人稱之爲“六則”。

在算術裏面，普通就用四則就夠了，乘方，開方在這裏很少用。在代數，卻非用六則不行。

這六種基本運算，是逐步發展出來的，最初從加法開始。加法如果還原起來，就得出減法，減法是加法的逆運算。同一數目相加，積累起來就成爲乘法，乘法是比加法

更高一級的運算。乘法的還原是除法，除法是乘法的逆運算。除法還有種意義，連續減去同一數目，也可得着除法，所以除法也是比減法更高一級的運算。同一數目相乘，積累起來就成為乘方，乘方是比乘法更高一級的運算。乘方的還原是開方，開方是乘方的逆運算。又連續以同一數字去除，也可得着開方，所以開方是比除法更高一級的運算。

這六種運算可分為兩類：加法，乘法，乘方稱為正運算；減法，除法，開方稱為反運算。在每一類中間，後面的一種運算是從前面的一種運算所發展出來，而較前者為高級。在這裏我們可以看到正反的關係，以及從低級到高級的發展。

上面所說的可以列成一表如下：——

$$
\begin{tikzcd}
\text{加法} \arrow[r, dash] & \text{乘法} \arrow[r, dash] & \text{乘方} \\
\text{減法} \arrow[r, dash] \arrow[u, shift left] & \text{除法} \arrow[r, dash] \arrow[u, shift left] & \text{開方} \arrow[u, shift left]
\arrow[from=1-1, to=2-1, shift left] \arrow[from=1-2, to=2-2, shift left] \arrow[from=1-3, to=2-3, shift left]
\end{tikzcd}
$$

數的系統

數的體系是隨着運算而發展的。最初我們只有數的單位1，用加法把1連續加起來就得着1，2，3，4，5…10，…等等的

數　這些是最簡單最基本的數，稱爲自然數，這在加法的範圍內是很夠應用的，可是在減法，自然數有時就要不夠用，譬如3－4，所得結果就非自然數所能表示，於是我們就添進了一種新的數　稱爲負數，而自然數就被稱爲正數。

正數和負數完全適用於加減法，也適用於乘法，可是遇着除法，有的時候就要遇着難關，譬如2÷3，這解答不能拿正數或負數來表示，於是我們再添進了一種新的數，稱爲分數，分數變換形式，就成爲小數，對應於分數小數，正數和負數就合稱爲整數。

整數和分數完全適用於加減乘除的四則　，也適用於乘方。但遇着開方，有時就不適用，譬如$\sqrt{2}$，這就非整數也非分數，我們就把這數加入的體系裏面，稱之爲無理數，與這對應，我們就把整數與分數合稱爲有理數。

數的體系發展到無理數還不能算完，還有新的數可加入進去。我們知道一切正數都可開平方，但負數却不能開平方，因爲無論什麼有理數或無理數，它們的平方總是正數不會得出負數來的。所以如$\sqrt{-1}$這類式子就不能用無理數來表示，更不能用有理數來表示，爲了使這成爲可能，我們更介紹一種新的數，稱之爲虛數，對這而言，有理數與

無理數就合稱爲實數。

實數和虛數完全適用於加減乘除，乘方，開方的運算，我們可以用來解一切的方程式。可是除此以外難道沒有新的數了嗎？不，還有，實數和虛數，只適用於有限次的運算，所謂有限就是限制的，數得清的。在這裏加減的項數，乘除的因子數，都是有限的。無論是有幾十個因子連乘，幾百項相加，這都是有限次數的運算。但當我們遇到了級數，就有了無限運算。收斂級數的無限項的和，它的極限是一種特殊的數，這也非實數也非虛數，例如圓周率，π；三角函數的值，對數的值等等，這被稱爲超越數。對這而言，實數與虛數就被稱爲代數數，兩者合稱爲數。

現在數的體系是完全了，至少在目前我們所知道的數是這樣。從上面的敍述我們可以看來數的系統是逐步發展出來的。而其發展的原因却是由於減法，除法，開方這三種反運算以及無限運算。我們可以把這列成如下的表：

正數
　　整數
負數
〔由於減法〕　　有理數
如 $1-3=-2$　分數
　　　　　　　　　實數
(小數)　　無理數
〔由於除法〕〔由於開方〕
如 $1\div 3=\frac{1}{3}$　如 $\sqrt{2}$
　　　　　　　　　　　　　　代數數
　　　　　　　　　虛數　　　　　　　數
〔由於負數開平方〕　　超越數
如 $\sqrt{-1}$　　〔由於無限運算〕
　　　　　　　　　如 π

在算術裏面，常用的是理數中的整數、分數和小數，負數倒反避而不用。在代數裏面，代數數之中的一系列：實數和虛數，有理數和無理數，整數和分數，正數和負數都被用到了。而超越數却要在高等算學裏才詳細地深入地被研究。但這樣說法並非絕對的。算術中也有開方，就涉及無理數，代數中的無限級數和對數就涉及超越數，而幾何中的圓周率，三角中的三角函數也講到超越數，但在大體上看來，就如上所述，

注意　有一點可注意的，正負不僅限於整數、分數也有正負如 $+\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{3}$，整數和分數不僅限於有理數，無理數也有整數無理數和分數的無理數，如 $2\sqrt{3}$，$\frac{2}{\sqrt{3}}$ 同樣，虛數中也有有理與無理如 $\sqrt{-9}=3\sqrt{-1}=3i$，$\sqrt{-3}=\sqrt{3i}$，超越數中也有實和虛，如 Cos θ 和 Sin θ。上面的表只是簡單把新發現的數列出，其他的就略去沒有放在裏面。

代數是普遍化的算術

算術代數，從根源上看來，這兩樣東西是一樣的。算術和代數都是研究數量的科學，它們的基本法則也是相同的。但爲什麼要分出算術和代數這兩門呢？簡單說來這是因爲

算術是數字，而代數却用文字（即英文字母 a,b,c,x,y,z 等）來代替數字。更進一步說，算術是用具體的，個別的量數。而代數却用抽象的，一般的數量。算術的範圍小，代數的範圍大，代數可以說是普遍化的算術。

最明顯的是算術上的許多四則應用題，用算術來算比較困難，用代數就迎刃而解。在算術、必須呆板地從已知數字一層層推到未知數字。在代數，無論已知未知的數字都可拿文字來代，形成一個方程式，然後把這方程式來演化來求出未知數，這比算術的方法便利得多。又在算術應文字如有改變必須重做，另求答數。但在代數的文字題就不必，因為它本來以文字來代替數字，任何數都適宜的。所以比較起來，算術較為呆板，笨滯，而代數却靈活，巧捷得多。

代數的好處，就在於使用符號。我們用文字來代替數字，這裏所用的文字的意義也就是作為符號而使用。譬如某兩數相加，就可用符號寫成 $a+b$，某數要開幾次方，就用符號寫成 $\sqrt[n]{a}$ 代數的 $a+b$ 較之算術的 $3+5$ 有什麼好處呢？我們說，$3+5$ 只能代表三加上五，不能代表別的，而 $a+b$ 不僅可以代表 $3+5$，還可表示別的任何兩數的和。又

代數的 $a+b$ 較之普通語句所表示的"某數加上某另一數"有什麼好處呢？這兩種在意義上及範圍的大小上完全是一樣的，但有繁簡的不同。普通語句要常用來說出數量間的關係太覺麻煩了。譬如 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 這個代數式雖然也可用語句表現起來，但要好幾十個字，何如代數式的簡明易曉，而又易於運算。

代數是算術的更上一步的進展，但其基本原理和方法是一致的。所以我們認爲代數是普遍化的算術。

注意各種運算的特殊性

我們常看到有人寫出這種的錯誤算式來：

$$(a+b)^2=a^2+b^2 \qquad \sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

$$\frac{x^2-y^2}{x-y}=x-y \qquad \mathrm{Sin}(A+B)=\mathrm{Sin}A+\mathrm{Sin}B$$

$$\mathrm{Log}\ mn=\mathrm{Log}m.\ \mathrm{Log}n$$

這些算式既然特別提出來誰都知道是錯誤的，可是許多人在計算時往往不知不覺地犯了這種錯誤，這原因是：他沒有熟習各種不同的運算法則，在使用時就把這些不同的法則混淆起來。例如上面所舉的第一，二，四這幾個例，就是錯把乘法的分配律——$a(b+c)=ab+ac$——應用到乘

方，開方，以及三角函數的運算上面來。第三例是由於忘記了約分的法則；只有分母與分子的共同因子才能互相消去，而錯把分母分子的某一項單獨提出來相約。第五例是由於忘記了對數的法則，錯把對數的運算看成與指數的運算錯完全一樣，把它分配到每個因子上去。

為了得到正確可靠的計算結果，我們必須把各種運算法則弄得十分熟諫，分別得十分清楚，我們已經知道在算術和代數中間一共有六種運算，這就是加，減，乘，除，乘方，開方，卽所謂六則。我們又知道初等算學所研究的數大致有四種卽整數，分數（算術裏面的小數也就是從分數化出），根數〔卽無理數〕和複數。這樣我們必須記住整數的六則，分數的六則，以及根數的六則，現在我們把代數中間的六種運算在整，分，根，複四種數的領域內的運用法則列表如下；

	加法	減法	乘法	除法	乘方	開方
整數	$a+b$	$a-b$	ab	a/b	a^n	$\sqrt[n]{a}$
	$ax\pm ay=a(x\pm y)$			$\frac{ax}{ay}=\frac{x}{y}$	$(ab)^n=a^n b^n$	$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
分數	$\frac{a}{x}\pm\frac{b}{y}=\frac{ay\pm bx}{xy}$		$\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{y}=\frac{ab}{xy}$	$\frac{a}{x}\div\frac{b}{y}=\frac{ay}{bx}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
	$\frac{a}{x}\pm\frac{b}{x}=\frac{a\pm b}{x}$		$\frac{a}{bx}\cdot\frac{bx}{y}=\frac{a}{y}$			
根數	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[mn]{a^m b^n}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[mn]{\frac{a^m}{b^n}}$	$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$
	$m\sqrt{a}\pm n\sqrt{a}=(m\pm n)\sqrt{a}$		$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$(\sqrt[n]{a})^n=a$	
複數	$(a+bi)\pm(c+di)$ $=a\pm c+(b\pm d)i$		$(a+bi)(c+di)$ $=(ac-bd)$ $+(ad+bc)i$	$\frac{a+bi}{c+di}=$ $\frac{(ac+bd)-(bc-ad)i}{c^2+d^2}$	$(a+bi)^k=(r\cos\theta+ir\sin\theta)^k$ $=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$	

這表裏面所列的沒有等號的式子是最基本的形式，如整數的六種運算；或者是不能化的，如根數的加減，又如種數的運算在表中有兩排，這兩排的區別是：第一排是普通的形式，第二排是特殊的形式，特殊的形式在表中有時有，有時沒有，這表中所列的，只是最簡單的形式，最好我們另外再找些代數計算中實際例子，按照這數所分的類來歸類。這樣一來，我們對於各種特殊運算法則可以弄得更清楚，在演算可以少犯錯誤了，

不要忽視了圖解法

所謂圖解法就是以圖形來表示數量，這又叫設格欄福。圖解方法的基礎是根據於兩條垂直相交的直線，這稱爲坐標軸，橫的直線，就稱爲x軸，縱的直線就稱爲y軸。任何一點離開x，y兩軸的距離，就可表示兩個數量；反過來說，任何兩個數量，如果化成距離的長度，也可用一點來表示。

圖解法最適宜於表示兩種數量的關係，即所謂函數。譬如有一個二元一次方程式 $x-y=1$，這裏面有兩個變數構成互爲函數的兩種數量。這些數量用圖解法畫起來，就得着許多點，它的軌跡是一條直線。如果是二元二次方程式，

在圖解裏面就得出圓，橢圓， 雙曲線，拋物線 ，由於這樣的圖解方法，數量和圖形就被溝通起來，專門研究這個的， 是所謂解析幾何， 我們現在對這還不能作深入的研究，但我們必須熟習於圖解中的簡單圖形。

圖解法使數量與圖形結合起來 ， 這不僅有理論上的價值，並且還有極重要的實際上的應用。各種統計圖表，大都是利用圖解把統計數字表現出來，統計圖表在目前是一天比一天普遍發達，地位愈來愈重要，所以我們在學習初等算學時應該對圖解法多加注意，求得基本的了解才好。

第三章 幾何和三角的學習法

幾何定理是否需要記憶

要回答這問題，只有一句簡單的話，就是：幾何定理不要“死記”，而要“活記”。怎麼叫做死記？往往有人把幾何定理一條條地念熟，以求能背誦，能默寫（特別是在用英文本幾何的學習者）。這樣他花費了很大的功夫和氣力，雖然暫時間硬記得，可是不久便忘得乾乾淨淨。我們常看到許多熟讀幾何的人，遇着簡單的題目便束手無策。這完全是因為他學習方法的錯誤。學習幾何，主要是靠理解，而記憶是次要的，我們遇着一條幾何定理，首先要看這定理的圖形，已知條件是什麼？需要證明的是什麼？從已知條件（就是定理的假設），怎樣能得着需要證明的結果（就是定理的結論）？這樣就可把這個定理，全部了解得清清楚楚，我們無須費力去記定理，就自然而然的記得，即使偶然間忘了定理的文字，我們根據理解就可自己重行寫出來。譬如關於三角形的三角之和這個定理，無論寫成“三角形內角之和等於一平角”或者，“三角形的三角相和等於180度”，或者“三角形各角之和相當於兩直角”都是一樣。總之我

們要記幾何定理的意義，而不必注重於定理的文字，我們必須首先了解幾何定理的意義，然後再把它記住，這就可以稱爲"活記"。

"死記"與"活記"，不僅在記憶定理的本身有顯著的優劣。特別是在應用定理，解答題目時更有極大的高低。死記定理的人，大都不會應用，而活記定理的人却會靈活地運用，他遇着題目，就先畫出圖來，分別已知的和要證明的，然後再設法找出適當的定理，把在已知的與要證明的這中間的橋梁搭起來，在這時從前學過的定理都是他的建築材料，他同建築工程師一樣要選擇有用的，去掉沒有用的。譬如在這定理裏面有平行線或要增添平行補助線，他就搜集有關平行線的定理，如果要證明兩角相等，他就要搜集與等角有關的定理。但只搜集還不夠，這只是記憶的事，他還得選擇，同時把選擇出來的互相配合，結果才能得着堅實而正確的解答。選擇和配合，都要靠理解，這時"死記"就無能爲力了。

幾何定理的歸類

我們學習幾何，不單是要理解每個個別的定理，並且要進一步把各個零星的定理

連繫起來、這樣才能把幾何學全都理解，融會貫通。要做到了這個地步，我們首先要會把幾何定理歸類，這就是把幾何定理揀其中性質相似而有密切關係的放在一起。最簡單的幾何歸類，是所謂"駢偶命題"，譬如"在三角形內，如有兩邊相等，則所對的角也相等"，這一等腰三角形定律，可以和另一定理"在三角形內，如有兩邊不等，則大邊對大角，小邊對小角"聯連合起來，成為"等邊對等角，大邊對大角，小邊對小角"一個駢偶定理。而各個的逆定理也可同樣處置。這可以寫成下列的形式：——

		(逆定理)
在三角形內	等邊對等角	等角對等邊
	大邊對大角	大角對大邊
	小邊對小角	小角對小邊

我們還可以舉幾個例：

		(逆定理)
在同圓或等圓內，	等弦對等弧	等弧對等弦
	大弦對大弧	大弧對大弦
	小弦對小弧	小弧對小弦

在兩個三角形，有二邊各各相等——

如第三邊不等　則大邊對大角

小邊對小角

如所夾角不等 則大角對大邊

小角對小邊

如第三邊相等，則等邊對等角

（這就是三等邊全同三角形定理）

如所夾角相等，則等角對等邊

（這就是兩邊夾一角全同三角形定理）

其他如關於圓心角所抱弧的幾個定理，以及其他定理，也可用"駢偶定理"的形式使它們結合起來，

上面所說的還只是小規模的歸類，我們還可推廣起來作大規模的歸類，，例如在幾何學關於平行線的定理是很多的。教科書上講得很多，往往要占二三十頁的篇幅，可是我們可以把這些定理揀最基本最重要的聚在一起，依先後的次序排列起來，就得着像下面的形式；——

1.在一平面內的兩條直線無論如何延長永不相交，這就是平行線。（定義）

2.過一點可作一直線與另一直線平行，並且只能作一條直線。（公理）

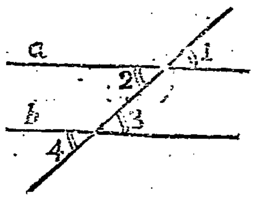
3.設a, b, c各代表直線，∥表示平行，⊥表示垂直

如 $a \parallel b$, $a \parallel c$, 則 $b \parallel c$

如 $a \perp b$, $a \perp c$, 則 $b \parallel c$

如 $a \perp b$, $b \parallel c$, 則 $a \perp c$

4.兩條平行線為第三線所截



如 $a \parallel b$ 則 內錯角相等，（$\angle 2=\angle 3$）

外錯角相等，（$\angle 1=\angle 4$）

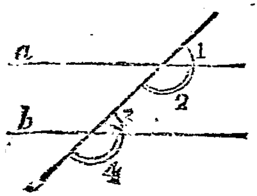
同位角相等，（$\angle 1=\angle 3$）

逆定理，如內錯角相等，則 $a \parallel b$

如外錯角相等，則 $a \parallel b$

如同位角相等，則 $a \parallel b$

5.兩條平行線為第三線所截



如 $a=b$，則同旁內角互爲補角

$(\angle 2+\angle 3=180^\circ)$

如 $a \parallel b$，則同旁外角互爲補角

$(\angle 1+\angle 4=180^\circ)$

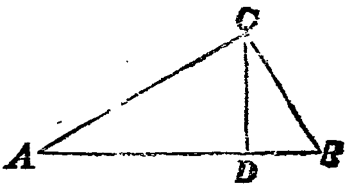
逆定理，如同旁內角互爲補角，則 $a \parallel b$

如同旁外角互爲補角，則 $a \parallel b$

這樣一來，我們就把關於平行線的最重要的定義，公理，定理和逆定理集合在一起，其他如關於平行四邊形的，關於圓的，關於相似三角形的等等，都可照這樣的方法寫起來。

有些定理自身就是公式，這樣我們可以把這些有關的公式集合起來，如下例——

在ABC直角三角形內，C角是直角，D點是AB上的垂線足，則有下列之關係



(1) $\triangle ABC \backsim \triangle ACD \backsim \triangle BCD$

(2) $CD^2 = AD \cdot DB$

$AC^2 = AB \cdot AD$

$BC^2 = AB \cdot BD$

(3) $AC^2 + BC^2 = AB^2$

(4) $AC^2 : BC^2 = AD : BD$

$AB^2 : AC^2 = AB : AD$

$AB^2 : BC^2 = AB : BD$

(5) $AC^2 \quad AB^2 - BC^2$

$BC^2 = AB^2 - AC^2$

$AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD$

$$=CD^2$$

$$(6)\ \triangle ABC\text{之面積}=\frac{1}{2}AB\cdot CD$$

$$=\frac{1}{2}AC\cdot BC$$

像這樣把幾何定理按其性質相同的來歸類，用簡單明瞭的形式集合在一起。這不但便於了解，並且便於應用，對於幾何的學習，是很有益處的。

幾何的證題通法

幾何證明題是非常之多的，證題的方法也千變萬化，隨題不同，不能拘拘於一定不易的成法。但雖在這樣複雜而繁多的方法中間，我們可以歸納出幾種較為普遍的規律或通法，一切證題法，無論是最難的或是最容易的，都可包括在這幾條簡單的規律之下。我們把握住這些，在證明幾何問題就有大致的方向可遵循。這就給予了我們極大的幫助。

幾何的證題通法，可分為順證法，逆證法，疊合法，間接法四種，順證法又稱為綜合法，這種證法是從問題的假設開始，引用已知的定理，順着次序逐步推演，直到結論為止。中間所經過的推理，互成假設和結論，步步連屬，有條不紊，寫起來很簡單，看起來也很清楚，這是順證法的優點。但它的缺點是：引用的定理不容易選擇，並且推

演的時候容易走錯路。順證法是最簡單最直接的方法，所以適宜於用來證明簡單易證的問題，例如幾何教本上的許多定理及較容易的問題等等。

逆證法又稱爲解析法，這種證法剛剛與順證法的程序相反。它是從問題的結論開始，引用已知定理逆推到假設。這種證法的優點是：推演步步都有根據，不至於走冤枉路；引的定理在逆推的過程中容易確定，不必多費力去找來一個個地試驗，逆證法比較適於證明複雜繁難的幾何問題。不過它寫起來沒有順證法那樣簡單，所以尋常用逆證法來證明的問題，最後結果要把逆證法的程序重新倒過來，寫成順證法的形式，比較方便。

疊合法是根據問題的假設，推證兩個圖形可以相合，然後用來證明這兩圖形的某些對應部份各各相等的證題方法。疊合法是一種證明初步定理的方法除了證全等圖形（如兩邊和一夾角的全等三角形定理）以外，在別處就簡直用不到這方法。我們只要知道這種方法就是，用到它的時候是極少的。

間接法是不能用上述三種證法時的特殊證題的方法。這又可分爲三種：（1）歸謬法，（2）窮舉法，（3）定一

法。歸謬法是先否認問題的結論，再逐步推理，得到最後的結果，證明這種否認是不合理的，那麼反過來說，該問題的結論便是真確的。例如我們要證兩直線平行，首先否認這句話，假定它們不平行，然後逐步推演下去，結果指出如果兩線不平行就會荒謬不合理，違反了假設，這樣就自然證明出這兩線必須是平行的。窮舉法是把從問題的假設所可能推出來的結論——羅舉起來，這裏面當然也包含所要證明的原有的結論，再證明其他的各種結論都不合理，那麼具有原來的結論才是正確的。譬如我們要證明兩線等長，首先舉出兩線長度間的關係有三種可能：大於，小於，相等。然後再證明如果這條線大於那條線或小於那條線都是不合理，這樣我們就證明了這兩條線必然相等。同一法又可稱爲合一法。我們如要證一圖形具有某種性質，可先作出有這種性質的圖形，再證原有圖形和所作的圖形實在是相合而爲一，這樣就可證明原有圖形必然具有這種性質。譬如我們要證某線是三角形的中線，首先另作一條中線，然後證明原來的一條線，和所作中線是相合的同一條線，那麼原有的線當然就是中線。

上面所說的四種證題通法，各有各的適用範圍，不能獨

麼，但比較起來，順證法和逆證法的應用範圍最廣，間接法中的三種方法用得最少，疊合法最少用到。又順證法和逆證法，不僅在證明題中廣泛地被應用，並且在作圖題中也要用到，我們要特別注意這兩種方法，把它們使用純熟，可以得益不少。

幾何定理與形式邏輯

所謂幾何定理是從幾何公理及公法推演出來的事實。定理有兩部份，第一部份是定理的出發點，稱為假設或前提，第二部份是定理的終點，稱為結論，例如“成為對頂角的兩個角必相等”這是一個定理，它的前提是：這兩個角成為對頂角，結論是：這兩個角相等。有許多定理，它只是一句話，前提和結論不能一下子就分辨出來，這時我們必須小心，首先把前提和結論這兩部份拆開來，如“對頂角相等”這一定理，粗看起來只是一句話，要細分起來，那末假設是“有兩個角成為對頂角”，結論是“這兩個角相等”；又如“平行四邊形的對角綫互相平分”，這個定理的假設是：“有兩條線是平行四邊形的對角綫”結論是“這兩條線互相平分”。

我們旣然分清了假設和結論，就可更進一步看出這兩者

相互間的轉變。抽象地說；一切幾何定理都可表現爲這種形式："如有A則有B"，在這裏"有A"是假設，"有B"是結論。我們現在可以把"有A"和"有B"的位置顚倒變化，又可以把肯定改爲否定，"有A""有B"改成"無A""無B"（有A的意義就是A的條件能成立，無A的意義就是A的條件不能成立。）這樣我們可以得出四種變化：——

（1）原定理　　有A則有B

（2）倒定理　　有B則有A

（3）否定理　　無A則無B

（4）倒否定理　無B則無A

例如把"三角形的邊等則所對角等"這定理可變形如下：

（1）原定理　　三角形的邊等則所對角等

（2）倒定理　　三角形的角等則所對邊等

（3）否定理　　三角形的邊不等則所對角不等

（4）倒否定理　三角形的角不等則所對邊不等

在這裏我們看到這四個定理都是對的，但在有些場合，這四個不一定同時都對，（1）與（4）同時是正確的，但這一

許（2）和（3）是錯誤的 譬如：

（1）原定理 對頂角一定相等（眞）

（2）倒定理 相等的角一定是對頂角（假）

（3）否定理 不是對頂角一定不相等（假）

（4）倒否定理 不相等的角一定不是對頂角（眞）

在這裏，原定理和倒否定理都是對的，而倒定理和否定理都是錯的。這在一般都是這樣，原定理總是和倒否定理一致，或者同時是眞的，對的，或者同時是假的，錯的，因此，我們只要能證明原定理，就可確定倒否定理一定是眞的。反過來也是一樣，如果我們把倒否定理證明，原定理也就隨着被證明了。

不僅是幾何的定理才能有這四種變化，普通的語句也都可以，例如

原定理 天下雨一定地溼

倒定理 地溼一定天下雨

否定理 天不下雨一定地不溼

倒否定理 地不溼一定天不下雨

在這中間第一句和第四句一般說來是對的，但第二，第三兩句就不對，因爲地溼也許因爲別的原因，如由人工灑

的或由別處流來的，所以我們不能因地溼而推定天下雨，或因天不下雨而推定地不溼。專門探討像這樣的語句形式的變換的學科，稱爲形式邏輯。形式邏輯與幾何以及算學一般有着很密切的連繫。近世發展了一門新的學科，所謂數理邏輯，就是從邏輯與算學的關係出發的。

三角的實用性

三角是算學各部門中間最有實用性的一種，三角的主要的目標也就在於實用。這從它的名稱也可看出來。三角往往被稱爲“三角術”或“三角法”，而很少被稱爲“三角學”，正如算術一樣，沒人稱它爲“算術學”。反之，幾何與代數卻常被稱爲“幾何學”和“代數學”，我們從來沒有聽到“幾何法”或“代數術”這種說法。“學”與“術”或“法”的區別，就在於學是注重於理論的，而術及法是注重於應用的，當然，這只是相對的說法，作爲理論體系的學，是與實際應用有着直接或間接的關係，而作爲實用法則的術，也是不能離開學理的，但一般說來，學與術是各有偏重的。雖然在三角中比較高深的一部份，理論的成分很重，但這已踏到高等算學的裏面去，至於一般所學習的三角，是只能稱

爲三角術或三角法的。

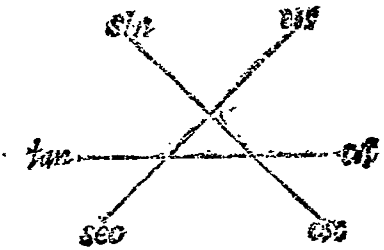
三角與測量有密切的關係，此外和天文，航海，建築，電機工程等也是很有關係的。我們如果要測量山的高度，或是間接量度一段距離，只有用三角的方法才能獲得最有效最精確的結果。又如天文學上測定星的位置及速度，航海的確定方向和經緯度，建築，機械及電機工程的各種計算，都必須用到三角。

因此我們在學習三角時，應該注意到三角與實際應用的相互關係，不要只偏重於三角恆等式，方程式等抽象的演算，在這裏，解三角形，對數計算及各種實用題是比較最重要的幾部份，我們必須多加注意。

三角公式記憶圖

三角公式的記憶，最感困難，並且公式繁多，記不勝記，初學的人，都因此感到痛苦。但實在說來，三角裏面的公式雖多，但最重要最常用的公式還是有限幾個，我們只要把這少數幾個公式記牢，其他的儘可根據這些推演出來，或者在用的時候查書就行。

爲了幫助記憶，我們可以用兩個記憶圖，它們的形式及使用法如下——



上面的圖是由三條交叉直線構成，中間圍成一個小三角形，裏面寫1，在四周各直線的盡頭就寫出六個三角函數，寫的規則是這樣：把Sin與Cos寫在最高的地位，Tan寫在靠近Sin而較低的地位，然後在每條直線的另一端寫出各函數的倒數，如對着Tan的另一端寫Cot，對着Cos，寫See對着Sin寫Csc.這個記憶圖就完成了。

這圖有三種用途：第一，這能表示函數的倒數關係 在每條直線上，兩極端的函數互為倒數，這兩個函數相乘總是等於1.從這我們可記起下列公式——

$$\cot A=\frac{1}{\tan A} \qquad \tan A\cdot\cot A=1$$

$$\sec A=\frac{1}{\cos A} \qquad \cos A\cdot\sec A=1$$

$$\csc A=\frac{1}{\sin A} \qquad \sin A\cdot\csc A=1$$

第二 這能表示出函數的相除關係，在周圍的任何三個相鄰函數，中間的一個函數被任一邊的函數來除就等於其他一邊的函數，換句話說，中間的一個函數等於兩邊的兩個函數的乘積，例如——

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sec A}{\csc A}$$

$$\cos A=\sin A\cot A$$

第三，這能表示各函數的平方關係：如果周圍的兩個相鄰函數和中心的數字1這三個位置可以合成像▽的三角形，那末在上面兩個角頂地方的數平方之和等於下面一數的平方，這樣的關係一共有三個，就是——

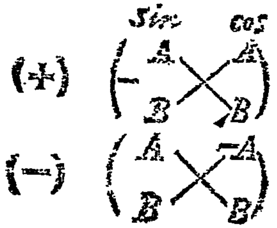
$$\sin^2A+\cos^2A=1$$

$$\tan^2A+1=\sec^2A$$

$$\cot^2A+1=\csc^2A$$

另外還有一種記憶圖，這是用來記憶二角和及差的正餘弦函數的，它的寫法是：先把sin和Cos並排寫起，在Sin下面寫ABAB四個字母成一直行，同樣在Cos的下面也如此。然後在兩行中間畫兩個斜叉，在兩行外面畫兩對括

弧，每一斜叉或括弧在盡頭必需對準一字母，如圖所示。



又在Sin這一行第一括弧的左面，寫（＋）號，第二括弧的右面寫（－）號，緊靠着Sin行第一括弧的右面寫一號緊靠着Cos行第二交叉的左上端，也寫一號。

圖中各符號的意義是：在Sin下各字母，表示SinA或SinB，在Cos下各字母則表示CosA或CosB，（＋）號表示二角之和即，（A+B），（－）表示二角之差。斜叉中每直線表示在Sin（A+B）或Sin（A－B）的公式中個別函數的相乘，括弧則表示在Cos（A+B）或Cos（A－B）的公式中個別函數的相乘，緊靠着某一括弧或斜叉中某一直線的負號－表示這乘積的前面要加負號。我們就可從這記憶住二角和差的正餘弦函數這四個基本公式

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

這兩個記憶圖，可以幫助我們記憶重要的三角公式，確是很有用的。

怎樣證明三角恆等式

許多人遇着要證明三角恆等式就深以爲苦、的確，三角恆等式的證明是千變萬化，沒有一定方法的。這不比解三角形，有固定的規則可以遵循、可是我們也不要把它看得太難，這最多不過和證明幾何定理一樣，基本公式和已知條件是現成地擺着，所成爲問題的只是怎樣運用基本公式來把已知條件引到要證明的公式就是了。

證明三角恆等式用的基本公式並不怎樣多，不過是最常用的這幾個，分別說來，則有——

同角數的倒數關係，如 $\frac{1}{\sin A}=\csc A$ 等

相除關係，如 $\frac{\sin A}{\cos A}=\tan A$ 等

平方關係，如 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 等

二角和差函數，如

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$ 等

倍角與半角函數，如$\sin 2A = 2\sin A\cos A$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$ 等

化和爲積式，如$\sin A+\sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ 等

這些公式，最好都能熟記，即使不能全部記得，至少要把同角函數關係和二角和差函數記住（我們在前面已經有了兩種記憶圖，可以幫助記憶），其他的公式至少要知道它們的來源和出處，記不得的時候可以自己導出或查書

至於怎樣運用這些公式來證明恆等式，這隨題目而不同，本來是很難說的。但就一般的情形而言，三角恆等式的證題法可以歸納成下面的幾條。

（1）恆等式的證明無論從左面開始或從右面開始都是一樣的最好從較爲複雜的一邊，容易分解因子的一邊，或者容易應用公式的一邊來開始。

（2）如果試了一次不成功，我們就換了路走。我們可以應用別的公式，或者用在別一個函數上，或換一邊來開始。

（3）要注意到公式不可胡亂採用，如果恆等式內沒有$\sin(A+B)$或$\sin A$, $\sin B$一類的函數，那就絕對不要用

三角和差函數公式，如果沒有Sin 2A或Sin$\frac{A}{2}$這一類，那就絕對不要用倍角半角函數公式，反之如果有這些函數出現，那麽這些公式也就用得着了。

（4）如果從一邊開始而不能化出其他的一邊，那末我們可以把這擱在中途，然後再從其他的一邊開始，使之在中途相會，這樣就可得着證明，要是更求完備，可將從某一邊到中途的步驟倒轉來，再與其他一邊到中途的步驟連接，就成爲首尾一貫。

（5）如果從兩邊開始還不能在中途相會，那末我們就如（2）所說的一樣，換了路走，把中途換到另一個地點，

（6）如果在一個恆等式裏有好幾種三角函數，例如Sin, Cos, Tan, Sec. 之類，我們可以首先把這許多種類的函數化成兩種或一種函數，這樣可以很容易得出證明來。

（7）如果恆等式中有半角及倍角的函數，則應先用半角及倍角的公式把這些特殊的函數化爲普通的函數，

（8）如果恆等式中只有同角的函數，那末各函數可用直角三角形二邊之比來代，用代數的演算法一定可以證明

原來的恆等式、但這法最好少用，因為這不是純粹三角的方法。

對數的應用

對數是英國算學家納披爾（Napier）所發明的，這是近代算學一個極大的貢獻。納披爾為了這發明，費了幾十年的時間，把畢生的精力貫注在這上面；但我們只要想像，用對數可使本複雜極繁難的演算化為簡單容易的，那末納披爾的畢生研究並非不値得而是極值得極便利的了。有位天文學家說過，“對數可延長天文學家的壽命，因為在從前需要幾個月的辛苦的計算，用了對數只要幾天就可算好，，，一般說來對數不僅造福於天文學家，並且造福於一切用着計算的人。現在雖然有了各種計算儀，在某些方面比對數還要便利，可是對數依然在算學理論和實際應用佔著很高的地位，我們對於它是不能忽視的。

對數是從指數來的，而指數最簡單的形式就是乘方。在這個式子$a^x=N$裏面，我們已知a和指數x來求N，這就是乘方；如果已知x和N，來求a，這式就變為$\sqrt[x]{N}$這就是開方；如果已知a和N，要求指數x，這式又變為$\log_a N=x$，這就是

對數。在乘方和開方，我們是從指數求別的數，在對數，我們從別的數求出指數來。

因此，對數的許多特性，也與指數相似。應用對數，可用加法或減法代替乘法除法，而用乘法或除法代替乘方或開方。對數計算的手續，可以用下面的表來表示：

$$\text{原式中各數}\xrightarrow[\text{用表化成}]{(1)}\text{對數}$$

$$\text{原式中諸數的}\left\{\begin{matrix}\text{積}\\\text{商}\\\text{冪}\\\text{根}\end{matrix}\right\}\xrightarrow[\text{代以}]{(2)}\text{對數的}\left\{\begin{matrix}\text{和}\\\text{差}\\\text{積}\\\text{商}\end{matrix}\right\}\xrightarrow[\text{再用表反求}]{(3)}\text{原式的結果}$$

這樣我們可以看到，應用對數計算雖然似乎兜了個圈子，我們先從原數求對數，最後又從對數求原來的結果，可是這樣兜圈子卻並不費事反而省事，這就是對數的好處，讓我們說個比喻：如果你有一筆鉅錢要從某處帶到另一較遠的地方去，假使你自己直接帶去，一來麻煩，二來路上又怕有危險，假使你託銀行間接匯去，那就便利而又安全得多，雖然你要到兩處銀行匯款，提款跑兩趟，這並不算什麼。對數的功用，也就像銀行匯款一樣，雖然多些手續，但反而便捷穩當。

對數的使用有一定的成法，簡直是機械的，一點也不

難；只是有許多人嫌它太乾燥無味，但我們如能了解對數的意義，再把它的方法練習純熟，自會感覺對數計算的樂趣而對於納披爾的偉大發明，也會有深刻的欣賞了。

第四章 結論

算學各部門的相互連繫

算學是最有系統最為嚴密的學問。雖然在算學中分成各部門，可是這些部門並不是支離割裂各不相關的，而是互相關聯，互相連帶，成為統一的全體的。我們知道，代數是普通化的算術，而三角是幾何的一個特殊部門。所以代數與算術，幾何與三角，在相互間有着密切關係，所有的算術問題都可用代數的方法來做，而有些代數題也可應用算術的方法，全部三角在其根本上必須用幾何來作為證明，而有些幾何題用三角函數來解却更為便當。

至於代數和幾何，雖然是一個研究數量，一個研究圖形，表面上看來似乎是各不相關的，但數量和圖形在算學中却是兩種相對應的元素，可以互相表示的。這在解析幾何及其他的高等算學有詳盡的探討，我們現在還不能談到，我們只要知道在算學中有這樣的一個部門，叫做解析幾何，這就是用解析的方法（就是代數的方法）來研究幾何的圖形的一種算學。從此我們就可知道幾何與代數是可以合在一起來講的。

在初等算學裏面，也有好些地方講到圖形與數量的關係。譬如 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 這公式，就可以用一大一小兩個正方和相等的兩個長方合在一起組成一個更大的正方來表示。把數量與圖形貫串在一起做得最好的，是圖解法，這就是解析幾何的基本方法。圖解法的重要性我們已經在上面講過。應用這方法，可以用兩個數量來表示一點，用兩個變數的函數來表示一條直線或曲線，因為這樣，兩個二元聯立方程式的解答，就可用兩條相交的直線或曲線的交點的坐標來表示。由於圖解法，我們可以任意把數量的關係化為圖形的關係，或把圖形的關係，化為數量的關係，十分靈活，十分便利，並且這種數與形的轉化，絕不是像把一桶水倒到另一桶去，變不出新的花樣，我們從這種轉化，可以發現新的途徑，新的東西。

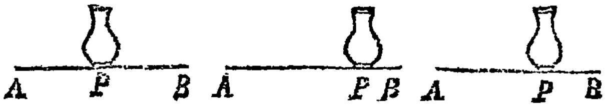
我們既然了解算學各部門的連繫性，就應該時時注意到這一點，在研究某一部門的時候，最好能用別的部門作為參照，在使用某種方法解答問題以後，最好能用別的方法再做一次。這不但餘有興趣，而且是極有益的。

算學與藝術

許多人以為算學與藝術是不相干的，算學是枯燥無味的學問，其中並不含有美的成分，這種看法是很錯誤的。我們要知道：第一，算學與藝術有密切的連繫，藝術必須得算學的幫助；第二，算學自身就含有美的要素，算學可以看做一種特殊的藝術。

就算學給予藝術的幫助而言，這是很顯著的，建築是種實用藝術，可是建築工程的原理和計算就非算學不可，我們試看各種巍峨的，雄壯的，華麗的大建築物，它們的形體和結構都是算學法則的結晶。就是在純粹藝術如圖畫音樂等，也得用到算術。譬如我們要畫桌子上的一個花瓶，這花瓶的位置應該在那兒才好呢。如果放在正中間，這太呆板；放在桌子沿邊，又不穩定，這只有擺在不太正又不太偏的位置，這樣才最適宜、最美。可是這位置得用算學的方法來確定。在幾何上說起來，就是把一條線段分為兩部份，使較大部份與較小部份之比等於全體與較大部份之比。這就是有名的古希臘的"黃金分法"。我們如把幾種位置用簡單的圖表示，一望而知只有黃金分法是最好

看最美的。



(1) $AP=PB$　(2) AP接近於AB　(3) $AP:PB=AB:AP$

又在音樂，我們都知道拍子是由算學的法則所規定的，尤其是在高深的樂理和作曲，算學是常被應用着的。

現在再說到算學自身的美。美的要素是和諧，節奏，對稱等等，這些在算學自身內也存在。近代有一派藝術家畫圖畫時只用許多三角形，四邊形，圓錐體，柱體等來表示物體的形象。雖然這種圖畫普通人不容易懂，但我們不能否認它的藝術價值。我們再舉些粗淺的例：菱形，正五邊形，正六邊形，圓內接正三角形及其他等等豈不是具有和諧，對稱的美嗎？二次方程式的兩個根，只是略有符號的不同，相加相乘又各相等於原有係數，這豈非也具有和諧，對稱的美嗎？二項式展開式及等差等比各種級數，各項依一定規律而變化，這豈非節奏的美嗎？此外，算學自身還具特殊的美，這就是謹嚴，明確，組織化，系統化的

美。這些美的所在是容易領會的，例子隨處都是，不必列舉了。

眞，善，美是三位統一體。眞的東西，同時就是善的美的。算學本來是眞的東西，因此也就有善和美。算學與善的關係，表現在算學的訓練價值上，這到後面再講。

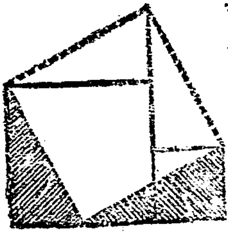
算學遊戲

算學遊戲對於算學的正規學習是很有幫助的。它可以增進學算的興趣，啓發對算學的好奇心，使人不知不覺地跨入算學的領域。

不論是有沒有受過教育的人，對於算學上的奇妙有趣的問題總是樂於加以思索，能夠得着正確的解答就感到莫大的快樂。這是基於人類共同的求知慾和創造慾，我們如果能把這因勢利導，可得極好的結果。譬如流行於國內各地的一首算術歌謠：“一百饅頭一百僧，大僧一人得三個，小僧三人一個分，問有幾多饅頭幾多僧？”這歌是個很好的算術題目，可惜許多人只是猜得答數，不大能夠用算術的方法去理解。

我們所注重的，不在於猜謎似的去猜出算學遊戲的答案，而在於由正確的算學理論導出解答來。譬如有一個剪

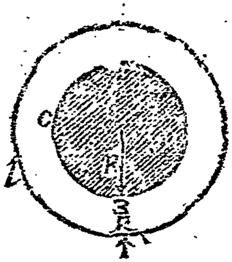
紙的游戲題：一塊紙片由大小兩方塊合成，大方塊是小方塊的四倍，兩塊在底邊相齊。現在要剪兩下使合成一正方形。要解決這問題，只是用剪子來試剪或在紙上隨便試着畫是不容易獲得正確的解答的，即使能夠得到也只是偶然，我們應當從幾何學的觀點去了解並算出這題：設小方塊的每邊長度是a，那末大方塊的每邊長度應該是$2a$，小方塊的面積是a^2，大方塊的面積是$4a^2$，總共的面積是$5a^2$（$=a^2+4a^2$）。現在要把這個總面積化成一個正方形，它的邊長必須是$\sqrt{5}a$（$=\sqrt{5a^2}$），又我們知道代表$\sqrt{5}$的線長，可從直角三角形兩短邊各為1和2時求斜邊的長求出（因（$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$）。這樣我們就可得出紙的剪法來：從大方塊的左上角到底邊的中點作一剪，又從大方塊底邊的中點到小方塊的右上角作一剪，這樣剪下來的兩個直角三角形分別地補到原來兩方塊的上面就可得出所求正方形，這一切都如圖所示。



再舉一個例：假定地球是個渾圓的球體，我們用一根極長的繩子把地球圍繞一道，這無論是圍繞在赤道，或是通

過南北極，或是圍在任何地方，只要是把地球分成兩個"半球"都可以。我們先把繩子拉緊使接觸地面，然後再放寬使繩子的各部份都離開地面三尺，問這繩子要放寬多少尺？

乍一看，這題目好像很難做，題中沒有給出地球的半徑，簡直難以着手；又地球是非常之大的東西，恐怕答數也是很大很大的。但我們不憑想像和猜測而用算學的推理方法去做，這就一點也不難。我們先畫起圖來，地球的半徑設為R，圍繞一道的長度設為c，放寬後的圓線全長設為l，



那麼

$$c=2\pi R$$

$$\therefore\ l=2\pi(R+3)=2\pi R+6\pi$$

$$l-c=6\pi=6\times3.14=18.84\text{尺}$$

結果算出這條長繩只要放寬18尺多些，就可使它在圍繞地球的各處一律提高3尺，這個答數似乎太小了，我們知道地球的半徑約為4000英哩，繞地球一週約為24000英哩，化為英呎約為120,000,000英呎。我們現在有一條一萬萬呎以上的繩子，要使它從圍繞的地位普遍提高3呎（把英

呎來換中尺，在計算時依然是一樣的），只要放長18吋多些，這很奇怪，這樣的答數似乎是不合理，至少是可疑的，可是這確是完全合理的，絕對不是錯誤，在幾何學上，圓形的周圍與半徑成正比，隨半徑而變化，周圍的增加量，也和半徑的增加量成正比$\left(\frac{c_1-c_2}{r_1-r_2}=2\pi\right)$，所以不管圓形是大是小，要使它的半徑增加一個單位長，周圍就必然增加18.84個單位長，無論地球也好，橘子也好，甚至銅元也好，筆桿也好結果是一律如此。

我們不惜篇幅來詳細敘述這兩個算學遊戲題，並非只是為了趣味，主要還在於表示出算學的推理方法及具體應用。雖然是遊戲題，但我們還得把它看成同正式題一樣正正經經做。算學可以用在遊戲上，但遊戲卻不能用在算學上，在算學遊戲中，遊戲只是手段，而不是目標，這是大家要認清的。

隨時隨地想出算學問題

注重實際的人，到處都看出利害關係來：買一件東西，就要問是否合算，做一點事情，就要問是否值得。富於美術興味的人，到處找出美的意味來：天上的星座，被幻化為仙女或飛馬、一個平

常的玻璃盃，也可發現出光線明暗變化的美。

同樣地，在科學研究者，也把一切東西看成科學研究的對象，用科的眼光來加以觀察。希臘的科學家亞幾米德因洗浴而發現浮力定律，牛頓因看到蘋果落地而建立了萬有引力的理論，這都是最有名的例證。但科學的考察離不了數量關係。如果亞幾米德只是說物體在液體中受到浮力作用而減少重量，如果牛頓只是說任何兩物體相互間俱有吸引力，而不把液體浮力或萬有引力的大小及其與物體體積，重量，相隔距離的數量關係給以確定，這還不能成爲正式的科學定律。科學定律最簡明的形式惟有用算學的公式來表示。科學家在他的研究過程中必須帶上算學的'眼鏡'，正如藝術家必須帶上美的'眼鏡'，實際家必需帶上功利的'眼鏡'一樣。

雖然我們不必每人去做畫家或音樂師，但我們總得多少有些審美的眼光和欣賞的能力，雖然我們不必都去做理財家或企業家，但總得約略具備些計劃權度的才幹，同樣地，雖然我們不能都成爲科學家，但總得對於科學的理解及應有相當的了解。我們不一定能成爲這三類或任一類的專家，但我們至少應該具備這三類的常識，我們享受這三

副眼鏡的使用權，這使我們的生活便利，豐富而向上。

我們要隨時隨地，想出算學問題來。為什麼照相機的架子只有三個脚？為什麼蜂巢的洞是六角形的？為什麼人在階梯上的影子，自己看來是直的，旁人看來是波折的？為什麼在月夜走路月亮好像跟着人走？為什麼複利的利率雖小而息金增加得快，單利的利率雖較高而息金反加得慢？諸如此類的問題，在日常處處可以遇到，我們絕不要把這些輕易放過，要立刻抓住而用算學的方法來加以解答。我們不要以為這是小事，或者以為這是與算學課程及算學成績無關的事，可以不用去管。其實，這就是算學課程的重要補充，這就是算學的活用。我們學習算學不在死讀課程而在於培養算學的能力，我們必須把課內的算學與課外的生活連繫起來，這才是最有效的學習法。

學會算學的方法，養成推理的習慣

我們學習算學的目的，有客觀與主觀兩方面。就客觀的需要而言，學習算學是為了實際應用；就主觀的要求而言，學習算學是為了訓練思想。所以算學對於我們在一方面有實用上的價值，在另一方面又有訓練上的價值。

算學的實用價值，不在於給我們的知識，而在於給我

們以最可貴的算學方法。在這裏可以舉一個有名的笑話來作個比喻：有一個人上山去求仙，遇見了呂洞賓，呂洞賓試他是否誠心，就隨手點石成金，送一塊金子給他。這人不要，呂仙大喜，說"你這樣誠心，不為錢財所動，我可以收你做徒弟了"。那人拜了師傅，就說："那麼請師尊把點石成金的仙法傳授給我罷"！我們的知識相當於金子，而方法就相當於點石成金的秘法。金子雖然可貴，比起這秘法來卻不算什麼。我們學習算學，不是在於知道些x，y，z和點，線，面，體這些東西，這只是算學的材料，雖然知道得多，記得多，不見得有用；我們所重視的是在於算學的方法。算學的方法是全部算學的精髓，不是簡單幾句話可了。現在略舉幾點來說：我們怎樣去求出事物所有特性的程度，分量，大小，多少及位置，形狀等而以準確的數量及圖形來表示；怎樣確定各種數量或各種圖形所含有的相互關係；怎樣從雜多的數量中來判別有用的與無用的，相關與不相關的，固定的與變動的，主要的與次要的，已知的與未知的種種數量；怎樣從所根據的前提，用推理的方法逐步推演以達於一定的結論；怎樣從特殊的，部分的法則中抽出普遍的，一般的，更高級的法則；又怎

樣從基本的總的法則，演繹出適用於具體的，個別的法則。上面所說的這一切，不過是算學方法的片段，可是如果我們能很好地把握住這些而施之於實用，就能發揮出極大的功效。算學的方法，不僅在自然科學中占着重要的地位，並且還浸入社會科學以及哲學的範圍。至於日常生活中也少不了算學方法的應用，這是不消說的了。儘管一個人不知道什麼是一次方程式什麼是平形四邊形，可是他總得知道他自己或其家屬的經濟收支是怎樣的。沒有學過算學的人，尚且因生活的經驗不得不在無意識的狀態上應用着算學的方法；學過算學的人，難道對於算學方法還不加以應有的注意嗎？

算學的訓練上的價值，在於它能增進我們思維推理的能力，助成我們理智而客觀的態度，扶植我們有條理有計劃的習慣，鍛鍊我們愛確實向眞理的精神。算學是最好的推理的科學，它能使我們更富於分析及綜合的能力，使思維銳利而開展，如秋空的鷹隼，俯視一切而又能立即擒住目的物。算學又是最客觀的科學，學習算學必須拋棄一切成見及感情作用，這在算學裏是絕不允許的。算學使我們冷靜，沈着，虛心，使我們不需滯於迹，能捨能取，使我

們一切確信智之命是從。算學又是最謹嚴最有系統的科學。在算學的陣營裏不存在着陀條，雜亂，矛盾，躐等的東西。算學使我們遵照必然的規律，按步就班地踏實地向前進行。算學又是最真實最明確的科學，算學的公理定理等是最易了解而又最堅牢顛撲不破的真理。在算學裏面沒有游移不定，昨是今非的東西。我們學習算學，自然會打破依違兩可，懷疑不決，背明投暗，以假作真的惡德，而堅定地站在科學的真理旗幟之下。

（完）

民國二十五年二月發行
民國三十二年八月渝第一版

數學學習法（全一冊）

◎定價國幣壹元四角
（郵運匯費另加）

編者　余介石
　　　孫克定
發行者　中華書局有限公司
印刷者　中華書局印刷廠
　　　重慶
發行處　各埠中華書局
（九六二四）

重慶市圖書雜誌審查處審查證安圖字第二一七號