屈曾發先生九數通考

同治癸酉春中

德馨堂藏版

重刊九數通考引

數學之書已簡則患疏已繁則苦眩吾邑屈君省園九數通考一書卷帙不繁諸法畧備尙善本也粵匪之亂版亡賊既平大憲力圖善後凡規畫輿圖清理田賦營造城郭開浚河渠修治廟宇衙署度

基址程土物量工計日一一需
九數於是大崇數學學者皆
愛是書之簡易而詳備也
求者日衆而印本罕存其從
元孫承斡訪諸窮鄉僻壤得
其版十五六而補刊其所闕以
存手澤以應求者時同治
壬申仲夏後進潘欲仁謹識

序

余少時讀周官經六書九數之目因尋求漢永元中南閣祭酒許慎說文解字以為古小學賴是以存而前此北平侯張蒼傳古九章算術魏劉徽為之註者卒不可得近有宣城梅氏撰中西算學通獨九數存古有錄無書蓋唐宋立之學官所謂算經十書歷歷周髀有全文梅氏所論述周髀而外絕不見徵引是以意欲存古而未能歟常熟屈君省園嗜古好深湛之思於書

靡不披覽尤加意實學俾足以致用既撰萬言肄雅為識字津涉其治算數也妙盡其能亦兼中西而會通之乃舉而分隸九章則又梅氏所志焉未逮也古者九數司徒掌之以教萬民保氏掌之以教國子與五禮六樂五射五馭六書之倫合而謂之道藝夫德行以為體道藝以為之用是故司諫巡問民間則以時書其德行道藝辨其能而可任於國事者由是言之士有國事之責期在體用賅備有如是今屈君將出為

國家分理斯民凡用之於官施之為教淵乎其有本也君以是編屬余撰序余曰昔鄭康成氏遊於馬季長之門三年不得親相質問季長集諸生考論圖緯因疑於算聞其能乃召見之樓上漢晉閒達人學士若張衡王粲闞康之高允咸稱明算且於此學各有論著今屈君所為書信足以補道藝中一事矣適

朝廷開館纂四庫全書九章算經於是逸而復出而以是編者方之古算經猶說文之後不可

無玉篇廣韻以今之詳廣古之略以今之逐事
加密盡抉古之奧其在是歟其在是歟
乾隆癸巳日在箕初休寧戴震謹序

自序

古者九數列於六藝掌於保氏以教國子故七十子之徒身通其術秦漢而後代不乏人如洛下閎張衡劉焯祖冲之輩各有著述號爲專家唐宋設明經算學科其書須在學宮令博士弟子肄習誠以算雖小學實格物致知之要務也夫九章之術用以齊七政正五音敬天授民格神和人以至同量衡通食貨便營作莫不賴之以爲統紀其爲道豈淺鮮哉近世以來學士文人以其無關進取遂視爲賈人胥吏之事棄置不復留心而里塾教授又僅抄因乘歸除歌訣及方田粟布數法轉相傳習問以九章名目茫然不能舉對良可慨已曾自早歲遊心算學間嘗采輯傳本手自抄錄以備遺忘然於按題立法之故究未能通曉

原委洞悉其所以然心嘗格而不化己丑之春因事入都
得
聖祖仁皇帝御製數理精蘊伏而讀之討古今之同異集中西之
大成蒐羅美備剔抉奧微平日之格而不化者一旦渙然
冰釋且得開拓其心胸增廣其聞見因歎
大聖人之制作超出百代之上而又惜薄海內外窮儒寒畯未獲
悉覩全書乃不揣固陋舉曩時所輯重加增改一折衷於
數理精蘊書凡十有五卷名曰九數通考學者誠取而習
之不特古者六藝教人之法可以得其旨趣卽我
朝文軌大同制作明備之休亦藉以仰窺萬一矣是爲序
乾隆壬辰季冬之月虞山屈曾發識

例言

謹按
御製數理精蘊以線面體分部九章之義包括無遺精深浩博
非初學所能驟窺茲編專爲學算而輯故仍以九章分卷
俾學者知九數之名義
近代算書流傳者少坊間所刻程氏統宗號爲善本而平
方立方定位未經指明平圓立圓比例未能密合又或僅
傳其法而弗申其解習者未能了然於心手間也伏讀
數理精蘊條理分明本末昭晰始若發蒙茲編分類輯錄
中西一貫迥非向來傳本所及
數理精蘊所載設如各題大約舊傳者十之五新增者十
之四舊題而用新法者十之一茲編限於卷帙未能悉登

每種僅列一題間有一題而備數法者所以明算法殊途同歸之趣也

算學理數非圖不顯非說不明茲編圖則細列說則詳著庶幾理數既明而所以用算之法亦迎刃而解學者果能精思熟玩觸類引伸即以窮天下之變不難矣

舊本各種歌訣便於學者記習茲編仍舊俱載間有隱晦舛誤之處重加刪潤改正俾讀者一覽了然

九章設如坊本混淆雜出茲編明分條貫皆有理義細玩自見非好為更張也

難題昉於劉氏通明算法嗣後吳氏比類程氏統宗遞相纂集然其法皆不離乎九章明其法而善用之題雖難無難也故分輯於各條之中不另標出

數理本原肇於圖書度量權衡根於黃鍾周髀為算書之祖幾何乃西法之宗學算而不講求非先河後海之旨也故弁於卷首竊比數理精蘊之上編所以立綱明體云爾

方五斜七周三徑一正六面七諸說皆舉大概以立言非可定率以立算向來刻本皆據此為問答鶻突了事安所得真數而求之乎

數理精蘊所載諸物輕重面體比例皆有定率求之不爽毫釐今彙輯卷首以便檢閱

坊本開卷多載因乘歸除自一至九之說如以為初學入門茲編不載非畧也諸法業已散見各條細玩自可得其端緒若初學者無從入手只消以自一至九之數挨列於

盤另以自一至九之數各爲法以漸習之可耳

各面形求積爲丈量田地之原各體形求積爲盤量倉窖之原各面形求邊周爲分田截積之原各體形求邊周爲米求倉窖之原坊本於方田章僅載量田盤倉諸法少廣章僅載截田求倉諸法是求末而遺本也茲編於此二章輯錄獨詳亦欲其探其本耳

割圓之法屢求句股相傳已久西法又有八線六宗三要等說而圓度內外諸線相求之法始備坊本皆闕而不載非通儒之見也茲編另爲一卷附於九章之後庶明於三角之法乃得爲算學之全云若夫弧三角算係造歷者專家之業故未編入

數理精蘊後載借根方之法以假數求眞數有對數比例之法以加減代乘除皆西人用算之捷徑因卷帙浩繁未能悉載惟比例規一法既可以尺代算而於畫圖製器尤所必需故另輯末卷以備參考至於外間所傳籌算筆算等法雖不學可也

數理精蘊命位皆以筆記故有作〇作、之號茲編從俗所便槪用珠盤中間立說不無小異然說雖殊而理與法則仍一也

是編所輯大要本於

數理精蘊其間歌訣雜法兼採舊本他如河洛圖說則本周易折衷方程設例則參梅氏全書不敢忘其所自也

九數通考目錄

卷五 少廣章第四

卷六 商功章第五

卷七　均輸章第六

卷八　盈朒章第七

卷九　方程章第八

卷十 句股章第九

正割線 三題

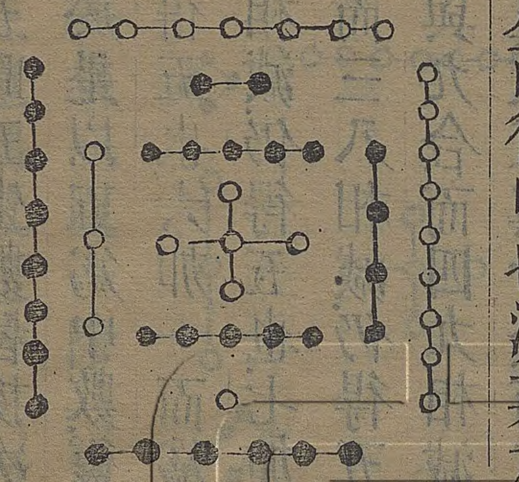
九數通考卷首

虞山屈曾發省園氏輯

圖書爲數學之源

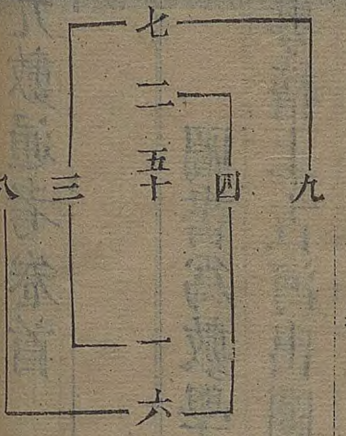
粤稽上古河出圖洛出書八卦是生九疇是敘數學亦於是乎肇焉蓋圖書應天地之瑞因聖人而始出數學窮萬物之理自聖人而得明也溯其本源加減出於河圖乘除出於洛書朱子

河圖



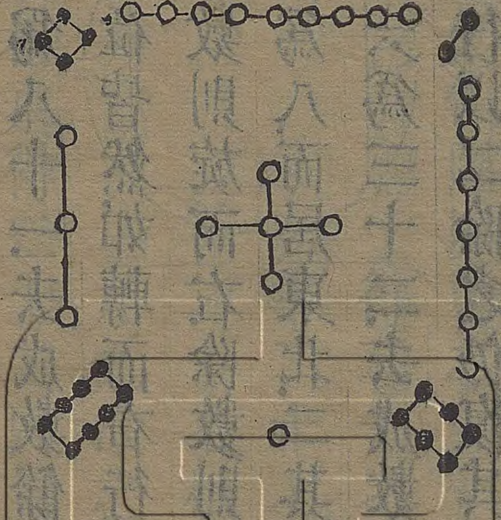
曰河圖以五生數統五成數而同處其方蓋揭其全以示人而道其常數之體也其位一六居下二七居上三八居左四九居右五十居中今考其數始於一中於五終於十而加減之法由是生焉蓋自一而二自二而三自三而四自四

而五此五生數皆挨次遞加一者也自一至五則五又爲一體矣於是以五爲中數復加一而爲六故一與六合而一六相減仍得五也六加一而爲七以五計之實加二故二與七合而二七相減仍得五也七加一而爲八以五計之實加三故三與八合而三八相減仍得五也八加一而爲九以五計之實加四故四與九合而四九相減仍得五也九加一而爲十以五計之實加五故五與十合而五十相減仍得五也此五成數亦挨次遞加而以中數五計之又爲挨位遞加之數凡兩數相加求得一



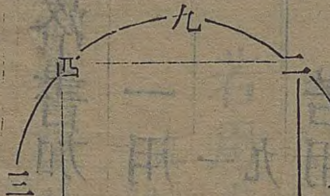
數者兩數相減仍還原數此加減二法相爲對待者也又作圖以明之如一三七九爲四奇數用中兩率三七相加得十以首率一減之得末率九以末率九減之得首率一若以首末兩率一九相加亦得十以中兩率三減之得七七減之得三如二四六八爲四耦數用中兩率四六相加得十以首率二減之得末率八以末率八減之得首率二若以首末兩率二八相加亦得十以中兩率四減之得六六減之得四故曰河圖爲加減之原也

洛書



朱子曰洛書以五奇數統四耦數而各居其所蓋主於陽以統陰而肇其變數之用也其位戴九履一左三右七二四爲肩六八爲足而五居中今考其數陽以三左行陰以二右行易曰參天兩地而倚數蓋以一乘一以一除一皆不可變故奇數起於三因天圓徑一而圍三也耦數起於二因地方徑一而圍四兩其二也陽以三左

行乘數則旋而左除數則返而右如三其一爲三而居東三其三爲九而居南三其九爲二十七而居西三其二十七爲八十一去成數餘一而居北等而上之至於億兆其餘數之位皆然如轉而右行以三除之仍復其原數矣陰以二右行乘數則旋而右除數則返而左如二其二爲四而居東南二其四爲八而居東北二其八爲十六去成數餘六而居西北二其十六爲三十二去成數餘二而居西南上而億兆亦然如轉而左行以二除之仍復其原數矣此乘除之數見於運行者如此若以對待者觀之一與九對一爲數之始九爲數之終互乘互除其數不變也二與八對二八互乘皆得十六二除之得八八除之仍得二此二與八之相倚也三與七對三七互乘皆得二十一三除之得七七除之仍得三此三與七之相倚也四與六對四六互乘皆得二十四四除之得六六除之仍得四此四與六之相倚也至五爲參兩之合而位於中三二之合五也一四之合亦五也一一二二之積又五也三三四四之積又五之積也此五所以爲數之會而位之中與故斜直四圍皆得十五進退循環縱橫交錯總不外於乘除蓋乘除二法相爲對待者也又作圖以明之如一三九七爲奇數用中兩率三九相乘



得二十七以首率一除之得末率二十七以末率二十七除之得首率一若以首末兩率一與二十七相乘亦得二十七以中兩率三除之得九九除之得三如二四八六爲耦數用中兩率四八相乘得三十二以首率二除之得末率十六以末率十六除之得首率二若以首末兩率二與十六相乘亦得三十二以中兩率四除之得八八除之得四故曰洛書爲乘除之原也然

洛書圖爲乘除之原，而亦爲加減之本。今推得洛書加減之法四，乘除之法十六，積方之法五，句股之法四，併圖書合一之妙，各爲圖表以明之如左，俾學者知算法之所自昉焉。

洛書加減四法

一用奇數左旋相加，得相連之耦數。

一加三爲四　　三加九爲十二
九加七爲十六　七加一爲八

若用奇數減左旋相連之耦數，得右旋相連之奇數。

三減四爲一　　九減十二爲三
七減十六爲九　一減八爲七

一用耦數左旋相加，得相連之耦數。

二加六爲八　　六加八爲十四
八加四爲十二　四加二爲六

若用耦數減左旋相連之耦數，得右旋相連之耦數。

六減八爲二　　八減十四爲六
四減十二爲八　二減六爲四

一用奇數右旋加耦數，得相連之奇數。

一加六爲七　　七加二爲九
九加四爲十三　三加八爲十一

若用奇數減相連之耦數，得相連之奇數。

一減七爲六　　七減九爲二
九減十三爲四　三減十一爲八

一用耦數右旋加奇數，得相對之奇數。

二加九爲十一　四加三爲七
八加一爲九　　六加七爲十三

若用奇數減相對之奇數，得相連之耦數。

九減十一爲二　三減七爲四
一減九爲八　　七減十三爲六

洛書乘除十六法

一用三左旋乘奇數，得相連之奇數。

三三如九　　九二十七
三七二十一　三一如三

一用八左旋乘耦數，得相連之耦數。

八八六十四　八四三十二
八二一十六　八六四十八

一用三左旋乘耦數得相連之耦數

三四一十二　三二如六
三六一十八　三八二十四

一用八左旋乘奇數得相連之耦數

八三二十四　八九七十二
八七五十六　八一如八

一用二右旋乘耦數得相連之耦數

二二如四　二四如八
二八一十六　二六一十二

一用七右旋乘奇數得相連之奇數

七七四十九　七九六十三
七三二十一　七一如七

一用二右旋乘奇數得隔二位之耦數

二九一十八　二三如六
二一如二　二七一十四

一用七右旋乘耦數得相連之耦數

七二一十四　七四二十八
七八五十六　七六四十二

一用一乘奇數得本位之奇數

一一如一　一三如三
一九如九　一七如七

一用六乘耦數得本位之耦數

六六三十六　六八四十八
六四二十四　六二一十二

一用一乘耦數得本位之耦數

一二如二　一四如四
一八如八　一六如六

一用六乘奇數得相連之耦數

六七四十二　六九五十四
六三一十八　六一如六

一用四乘耦數得相對之耦數

四四一十六　四六二十四
四二如八　四八三十二

一用九乘奇數得相對之奇數

九九八十一九一如九
九三二十七九七六十三
一用四乘奇數得隔二位之耦數
四九三十六四七二十八
四一如四四三一十二
一用九乘耦數得相對之耦數
九二一十八九八七十二
九四三十六九六五十四
凡除法除其所得之數得其所乘之數茲不再設
數有合數有對數合數生於五對數成於十一六二七三八
四九此合數也皆相減而爲五者也五加一爲六六減五爲一是六與一同根也五
加二爲七七減五爲二是七與二同根也三八四九其理亦然故凡同根數爲合數一九二八三七四
六此對數也皆相併而爲十者也在河圖則合數同方而對
數相連在洛書則合數相連而對數相對相合之相從者六
從一也七從二也八從三也九從四也如前乘除十六法相對之相
從者九從一也八從二也七從三也六從四也如後積方五法凡以
合數共乘一數所得之數必同乘耦既同數乘奇則同根若各自乘焉則
又必合矣如三三得九八八六十四以對數共乘一數所得之數必對如三
三得九七三二十一若各自乘焉則又必同矣如一一得一九九亦八十一二二得四八八亦
六十四是以自乘之數相合之相從者此得自數則彼亦得自
數也如一得一六得六此得對數則彼亦得對數也如四得六九得一此得
連數則彼亦得連數也如三得九八亦得四二得四七亦得九相對之相從者
此得自數則彼得對數也如一得一九亦得一二得四八亦得四此得連數則
彼亦得連數也如三得九七亦得九二得四八亦得四要皆會於一六四九而
齊焉故開平方之自乘數止於一六四九而洛書之位一六
四九居上下以爲經二七三八居左右以爲緯者此也

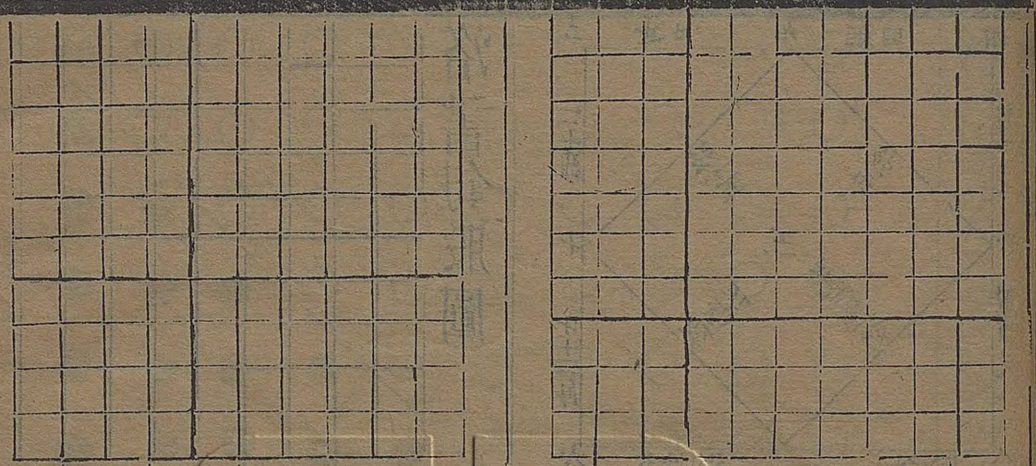
洛書對位成十互乘成百圖

一與九對成十。十自乘其積一百。九自乘八十一。一自乘一。一乘九。九乘一。俱為九。共十八。

合之一百。與十自乘積同。

二與八對成十。八自乘六十四。二自乘四。二乘八。八乘二。俱十六。共三十二。

合之一百。

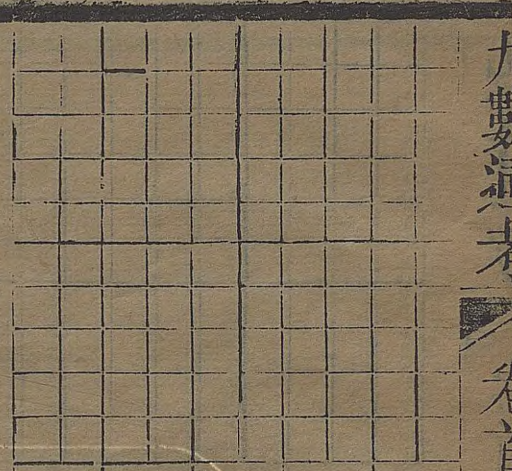


三與七對成十。七自乘四十九。三自乘九。三乘七。七乘三。俱二十一。共四十二。

合之一百。

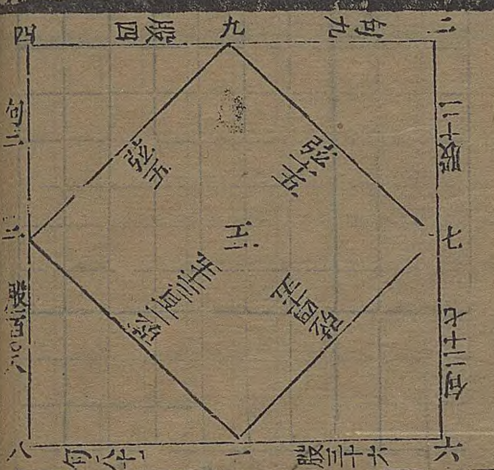
四與六對成十。六自乘三十六。四自乘十六。四乘六。六乘四。俱二十四。共四十八。

合之一百。



中五含五成十。五自乘二十五。又五自乘二十五。又五五乘各二十五共五十。合之一百。

洛書句股圖



句三股四弦五。

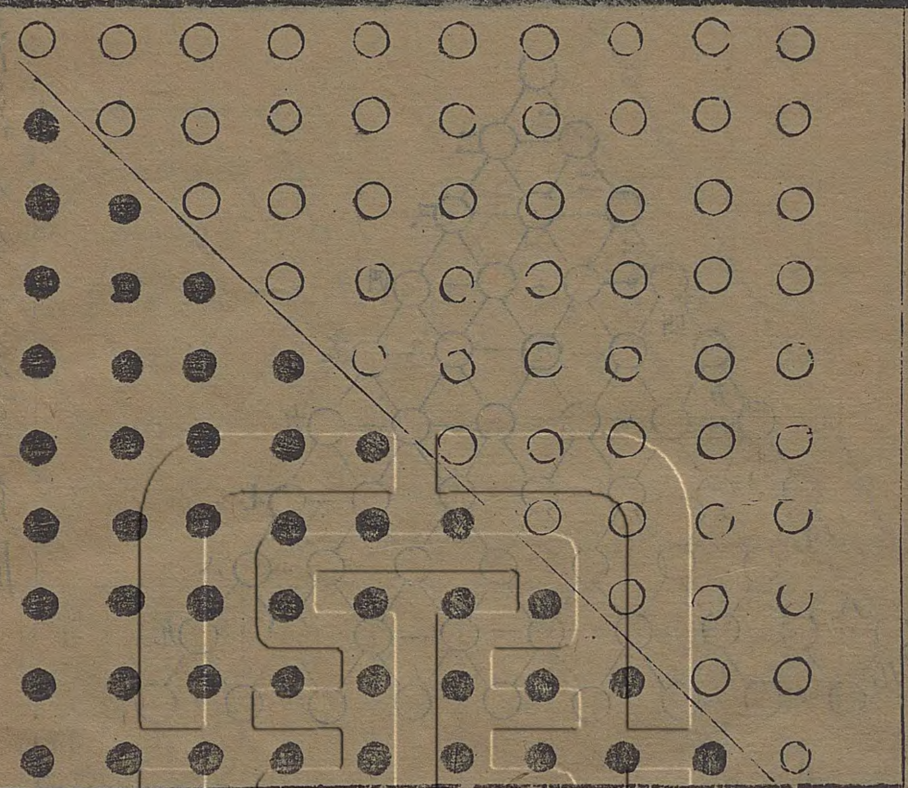
句九股十二弦十五。

句二十七股三十六弦四十五。

句八十一股一百〇八弦一百三十五。

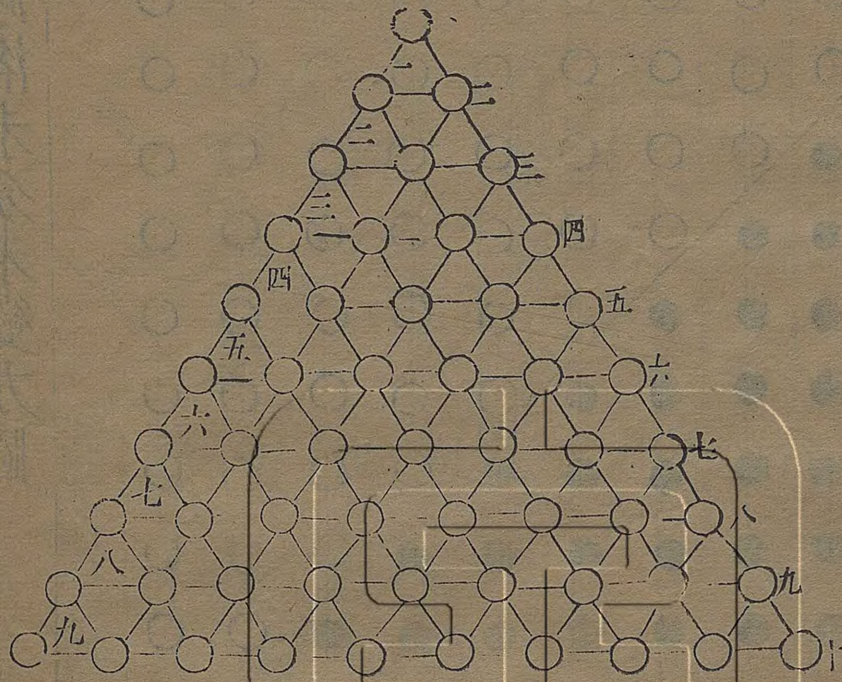
此洛書四隅合中方而寓四句股之法者推之至於無窮法皆視此。

河洛未分未變方圖



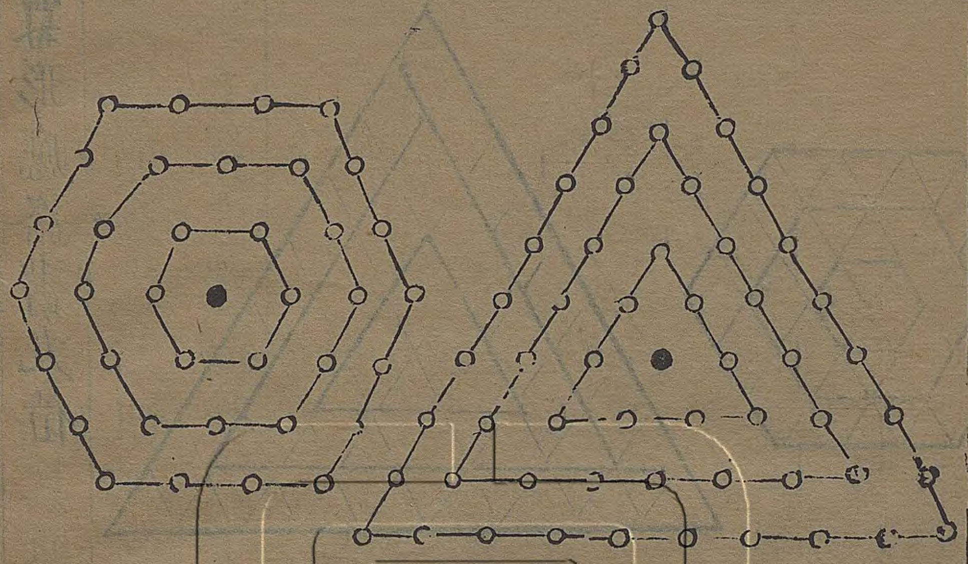
河圖之數五十有五。洛書之數四十有五。合爲一百。此天地之全數也。以一百之全數爲斜界而中分之。則自一至十者積數五十有五。自一至九者積數四十有五。二者相交而成河洛數之兩三角形矣。凡積數自少而多。必以三角而破百數之全方以爲三角。其形不離乎此。此二者下諸圖之根實出於此。

河洛未分未變三角圖



河圖之數自一至十洛書之數自一至九象之已分者也圖則生數居內成數居外書則奇數居正偶數居偏位之已變者也如前圖破前方之百數以爲河洛二數又就點數十位中涵羃形之九層以爲河洛合一之數則雖其象未分其位未變而陰陽相包之理三極互根之道已粲然默寓於其中矣故爲分析以明之如後論

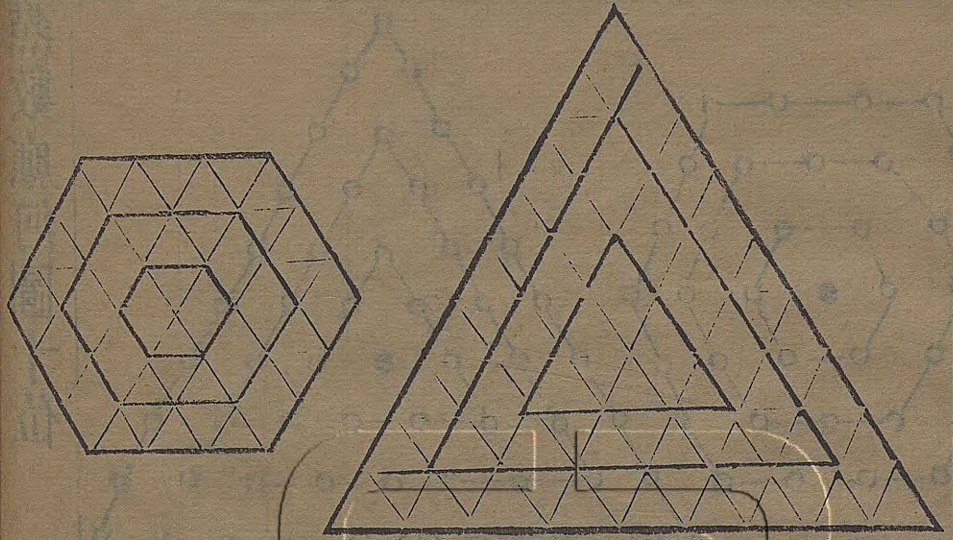
點數應河圖十位



河圖三角分三重中一重九次內一重二九一十八外一重三九二十七除中心凡五十四

中含六角亦分三重中一重六次內一重二六一十二外一重三六一十八除中心凡三十六

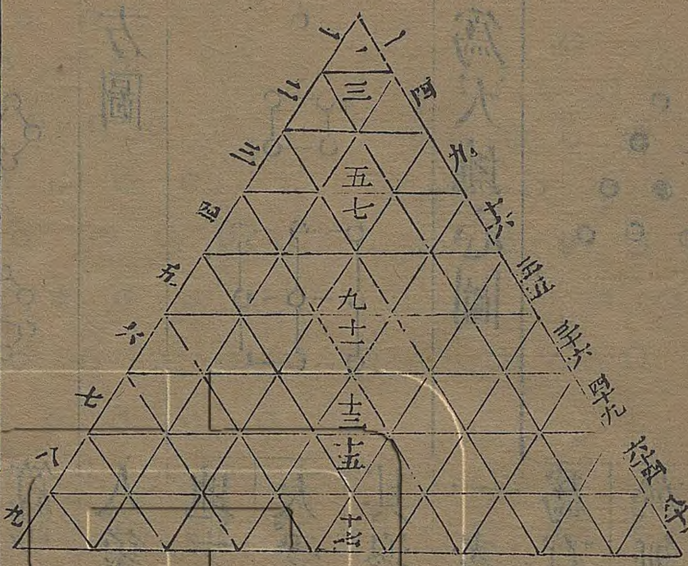
冪形應洛書九位



周圍三角分三重。中一重九。次內一重三九二十七。外一重五九四十五。凡八十一。

中含六角亦分三重。中一重六。次內一重三六一十八。外一重五六三十。凡五十四。○以上諸圖本同一根。雖積數若異。而其爲九六之變則一也。

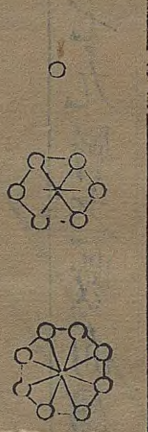
冪形爲算法之原



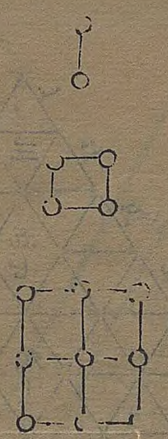
此圖左方注者本數也。自一至九而用數全矣。中列注者加數也。一加二爲三。二加三爲五。至八加九而爲十七。皆以本數遞加。而每層之冪積如之。右方注者乘數也。一自乘一。其冪積一。二自乘四。其冪積合一三兩層而爲四。至九自乘八十一。則其冪積亦合自一至十七九層之數而爲八十一。皆以本數自乘。而每形之冪積亦如之。得加乘之法。則減除在其中矣。自此而衍至於無窮。其數無不合焉。九章之術。其理無不貫焉。此圖圖書所以爲算法之原也。

圖形合洛書爲象法之原

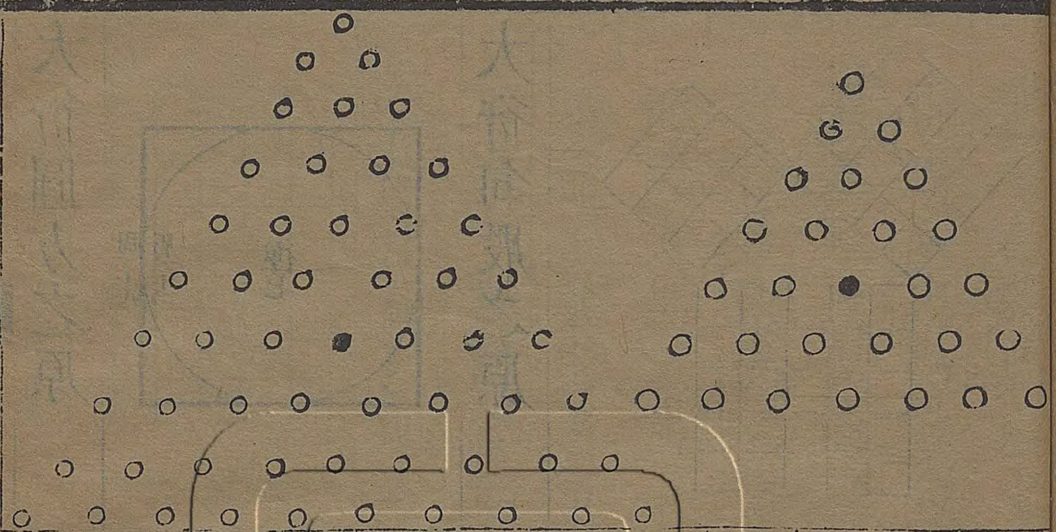
天圓圖



地方圖

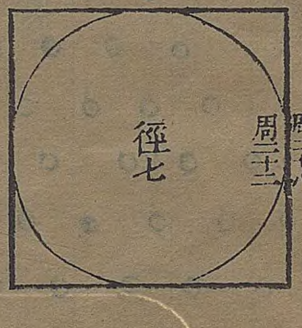


人爲天地心圖



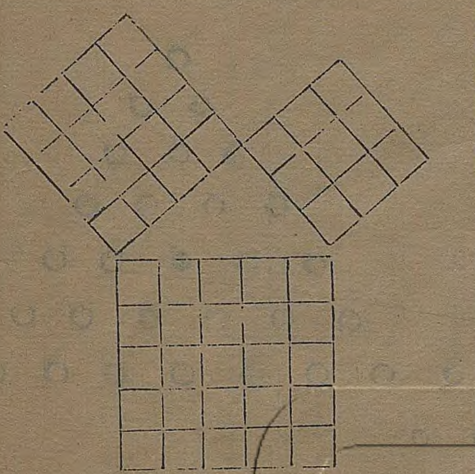
凡有數則有象，象不離乎數也。萬象起於方圓，而測方圓者以三角，此句股所以爲算之宗也。圓者天象，方者地象，三角形者人象。何則，天之道如環無端，故其象圓也；地之道尊定有常，故其象方也；人受性於天，受形於地，猶三角之形，其心則圓之心，其邊則方之邊也。今就九數而三分之，則一者圓之根也，而十數之內惟六角八角爲有法之圓形，其自十以後角愈多以至於無角者視此矣，此一六八所以爲圓象之數也。二者方之根也，而十數之內惟四九可以積成方，而其自十以後積愈多而皆可成方者視此矣，此二四九所以爲方形之數也。以十數裁爲三角，自一至四則三其心也，自一至七則五其心也，自一至十則七其心也，所謂三角求心之法者如是。其自十以後數愈多而皆可以求心者視此矣，此三五七所以爲三角形之數也。洛書之位，二六八居下，爲天道之下濟；二四九居上，爲地道之上行；三五七居中，爲人道之中處。其數其象亦於圖形乎有合矣。

大衍圓方之原



凡方圓可為比例惟徑七者方周二十八圓周二十二即兩積相比例之率也用其半故若十四與十一合二十八與二十二共五十是大衍之數含方圓同徑兩周數

大衍句股之原



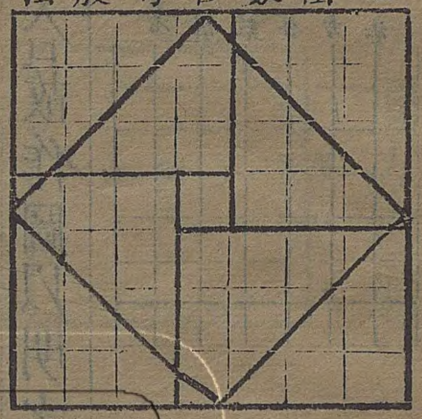
句三其積九
股四其積十六
弦五其積二十五
合之五十是大衍之數含句股弦三面積

著策之數必以七為用者蓋方圓之形惟以徑七為率則能得周圍之整數句股之形亦惟以三四為率則能得斜弦之整數徑七固七也句三股四之合亦七也是故論方圓周圍之合數則五十論句股弦之合積亦五十此大衍之體也因而開方則不盡一數而止於四十九此大衍之用也開方而不盡一數則著策之虛一者是已方面之中函八句股而又不盡一數則著策之掛一者是已惟老陽老陰之數與此密合故作圖以明之

老陽數合方法

全方四十九
中含大方六六三十六為過揲之數
小角一十如一二一六五乘共十二併成十三為掛扐之數

老陰數合句股法



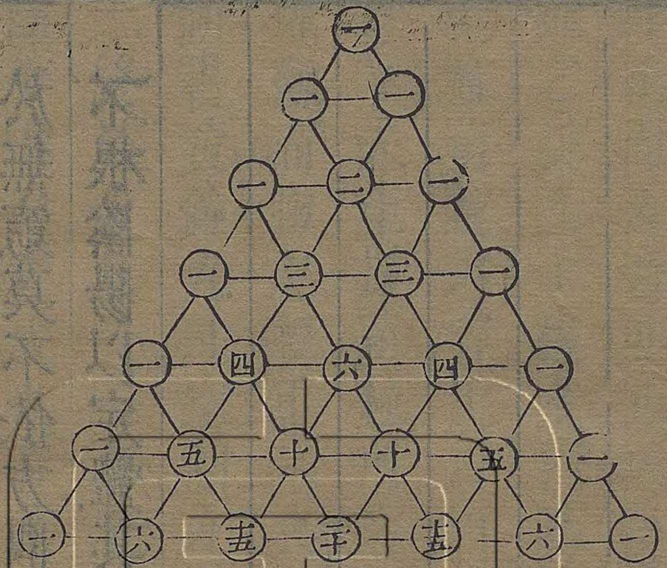
全方四十九．

句三股四其積六四因之得二十四為過揲之數

弦五其積二十五為掛扐之數（弦實亦含四句股積而多句股較一）

十數之中除一一不變自二二至十十皆可成方然惟三三則五數居中七七則二十五數居中此二者為能得天地之中數蓋三三者洛書之數七七者蓍策之數洛書之數五居中矣而其四方則又成四句股之數而以中五為弦之法焉蓍策之數二十五居中矣而其四方則又具四句股之積而即以二十五為弦之實焉蓋大衍之數本於河圖之數其同條共貫者有如此．

加倍法圖



此圖用加一倍法如第二層兩一生第三層中位之二併左右兩一成四是倍二為四也第三層一二各生第四層中位之三併左右兩一成八是倍四為八也以下放此出於數學中謂之開方求廉率其法以左一為方右一為隅而中間之數則其廉法也（第三層為平方第四層為立方第五層六層七層為三乘四乘五乘方）於成卦之理亦相肖合何則陽大陰小陽如方陰如隅分居兩端陰陽合則生中間之兩象如平方之方偶合而生兩廉其長如方其廣如隅也又乘則生中間

之六卦如立方之方隅合而生六廉三平廉根於方而其厚如隅三長廉根於隅而其長如方也故開方之法雖相乘至於無窮莫不依方隅以立算成卦之法雖相加至於無窮莫不根陰陽以定體其理亦一而已

黃鐘爲萬事根本

大哉黃鐘萬事之本也黃鐘立則元聲協而十二律呂亦協宮聲正而五音亦正天下萬物紛錯而不齊者皆由是以定焉黃鐘之長九十橫黍以爲分寸尺丈引則曰度而物之長短不差毫釐黃鐘之容千二百黍以爲龠合升斗斛則曰量而物之多寡不失圭撮黃鐘所容千二百黍之重以爲銖兩斤鈞石則曰權衡而物之輕重不爽忽微蓋得其本而物自不能外也律呂新書黃鐘九寸空圍九分積八百一十分注曰天地之數始於一終於十其一三五七九爲陽九者陽之成也二四六八十爲陰十者陰之成也黃鐘陽聲之始陽氣之動也故其數九寸分之數具於聲氣之元不可得而見及斷竹爲管吹之而聲和候之而氣應而後數始形焉均其長得九寸審其圍得九分積

其實得八百一十分是爲律本度量權衡於是而受法十一律由是而損益焉蓋理者氣之體氣者理之用惟理出於自然故數亦出於自然也

黃鐘生度

黃鐘之管其長橫累秬黍中者九十粒一粒爲一分十分爲寸十寸爲尺十尺爲丈十丈爲引古法四丈爲疋五丈爲端今無定數分下有釐毫絲忽微纖沙塵埃渺漠模糊逡巡須臾瞬息彈指剎那六德虛空清淨釐毫以下皆以十析若平方則百分爲寸立方則千分爲寸丈尺與毫釐以下皆同

黃鐘生量

黃鐘之管容秬黍中者一千二百粒爲一龠兩其龠爲合十合爲升十升爲斗十斗爲石今法合下有勺撮抄圭粟亦以十析

黃鐘生衡

黃鐘所容千二百黍重十二銖倍其銖爲兩十六兩爲斤三十斤爲鈞四鈞爲石今法兩下有錢分釐分釐以下並與度法同凡度量衡自單位以上如度法之丈量法之石衡法之斤兩皆爲單位則曰十百千萬億兆京垓秭穰溝澗正載極恒河沙阿僧祇那由他不可思議無量數自億以上有以十進者有以萬進者有以自乘之數進者今立法俱以萬進如萬萬曰億萬億曰兆之類是也歷法則曰宮三十度度六十分分六十秒秒六十微微六十纖纖六十忽忽六十芒芒六十塵凡自度以下須每項列兩位如幾十幾度幾十幾分之類又有日十二時又爲二十四小時時爲八刻又以小時爲四刻小刻十五分分以下與前同田法則曰頃百畝畝積二百四十步分積二十四步分以下釐毫絲忽同度法里法則三百六十步計一百八十丈爲一里古稱在天一度在地二百五十里今尺驗之在天一度在地二百里蓋古尺得今尺十分之八實緣縱黍橫黍之分也按今尺係工部營造尺古尺係周尺今將二尺圖後

黃鐘爲萬事之本

石法二千五百寸。此亦舊法，古今尺度不同，量法又異，須以今斛米一石，量得今尺上若干寸，較准石法，推算方得斛合。今設例從舊法。

諸物輕重率

此係較準新法，用工部營造尺，將諸物製爲立方，其邊一寸，其積千分，較量毫釐。諸物如一，乃以部平逐樣細較，得其輕重，故與舊法迥殊焉。

赤金十六兩八錢	紋銀九兩
水銀十二兩二錢八分	紅銅七兩五錢
白銅六兩九錢八分	黃銅六兩八錢
鋼六兩七錢三分	生鐵六兩七錢
熟鐵六兩七錢三分	高錫六兩三錢

六錫七兩六錢	倭鉛六兩
黑鉛九兩九錢三分	白玉二兩六錢
金珀八錢	白瑪瑙二兩三錢
紅瑪瑙二兩二錢	硨磲一兩五錢二分
青石二兩八錢八分	白石二兩五錢
紅石二兩五錢六分	象牙一兩五錢四分
牛角一兩九錢	沉香八錢三分
白檀八錢三分	紫檀一兩〇二分
花梨八錢七分	楠木四錢八分
黃楊七錢五分	烏木一兩一錢
油八錢	水九錢三分

附各面各體比例定率 凡各面各體皆有比例之定率，其散見於各法者，恐難查考，茲特彙

黃鐘爲萬事根本

周徑定率　列卷首以便檢閱

		又	
徑	一〇〇〇〇〇〇〇〇	周	一〇〇〇〇〇〇〇〇
周	三一四一五九二六五	徑	三一八三〇九八八

圓面積與周方積比例定率

		又	
圓面	一〇〇〇〇〇〇〇〇	周方	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
周方	一二五六六三七〇六三	圓面	七九五七七四七

方斜定率

方	一〇〇〇〇〇〇〇
斜	一四一四二一三五六

理分中末線定率

全分	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
大分	六一八〇三三九九
小分	三八一九六六〇一

邊線相等面積不同定率

		又	
方	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇	圓	一〇〇〇〇〇〇〇〇
圓	七八五三九八一六	方	一二七三二三九五四
三邊	四三三〇一二七〇	三邊	五五一三二八八九
五邊	一七二〇四七七四一	五邊	一二九〇五七九八六
六邊	二五九八〇七六二一	六邊	三三〇七九七三三四
七邊	三六三三九一二四〇	七邊	四六二六八四〇九八
八邊	四八二八四二七一二	八邊	六一四七七四四三五
九邊	六一八一八二四二〇	九邊	七八七〇九四三〇二
十邊	七六九四二〇八八三	十邊	九七九六五七〇九九

面積相等邊綫不同定率

方	一〇〇〇〇〇〇〇〇
圓	一一二八三七九一六
三邊	一五一九六七一三七
五邊	七六二三八七〇五
六邊	六二〇四〇三一四
七邊	五二四五八一三六
八邊	四五五〇八九八五
九邊	四〇二一九九六三
十邊	三六〇五一〇五八
圓徑	一〇〇〇〇〇〇〇〇

求圓內各形之一邊定率

三邊	八六六〇二五四〇
方	七〇七一〇六七八
五邊	五八七七八五二五
六邊	五〇〇〇〇〇〇〇
七邊	四三三八八三七四
八邊	三八二六八三四三
九邊	三四二〇二〇一四
十邊	三〇九〇一六九九

求圓外各形之一邊定率

圓徑	一〇〇〇〇〇〇〇〇
三邊	一七三二〇五〇八〇
方	一〇〇〇〇〇〇〇〇

又

圓	一〇〇〇〇〇〇〇〇
方	八八六二二六九二
三邊	一三四六七七三六九
五邊	六七五六四七九三
六邊	五四九八一八〇五
七邊	四六四八九八〇三
八邊	四〇三三一二八八
九邊	三五六四四〇一四
十邊	三一九四九四一八
圓徑方	一〇〇〇〇〇〇〇〇

求圓內各形之面積定率

三邊	三二四七五九五三
方	五〇〇〇〇〇〇〇
五邊	五九四四一〇三一
六邊	六四九五一九〇五
七邊	六八四一〇二五四
八邊	七〇七一〇六七八
九邊	七二三一三六〇六
十邊	七三四七三一五六

求圓外各形之面積定率

圓徑方	一〇〇〇〇〇〇〇〇
三邊	一二九九〇三八一〇
方	一〇〇〇〇〇〇〇〇

五邊　七二六五四二五二
六邊　一五七七三五〇二七
七邊　四八一五七四六三
八邊　四一四二一三五六
九邊　三六三九七〇二四
十邊　三二四九一九七〇

圓與圓內各形面積定率

圓積　一〇〇〇〇〇〇〇
三邊　四一三四九六六七
方　六三六六一九七七
五邊　七五六八二六七二
六邊　八二六九九三三四
七邊　八七一〇二六四一
八邊　九〇〇三一六三二
九邊　九二〇七二五四二
十邊　九三五四八九二八

邊線相等體積不同定率

立方　一〇〇〇〇〇〇〇〇
球　五二三五九八七七五
四面　一一七八五一一三九
八面　四七一四〇四五二一
十二面　七六六三一一八九〇三
二十面　二一八一六九四九六九

體積相等邊線不同定率

各面體比例定率

五邊　九〇八一七八一六
六邊　八六六〇二五四〇
七邊　八四二七五五八
八邊　八二八四二七一二
九邊　八一八九三三〇三
十邊　八一二三九九二四

圓與圓外各形面積定率

圓積　一〇〇〇〇〇〇〇
三邊　一六五三九八六六九
方　一二七三二三九五四
五邊　一一五六三二八三四
六邊　一一〇二六五七七九
七邊　一〇七三〇二一九七四
八邊　一〇五四七八六一七
九邊　一〇四二六九七九一
十邊　一〇三四二五一五二

又

球　一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
立方　一九〇九八五九三一七
四面　二二五〇七九〇七七
八面　九〇〇三一六三一七
十二面　一四六三五四七九〇五一
二十面　四一六六七三〇四六三

又

立方	一〇〇〇〇〇〇〇〇
球	一二四〇七〇〇九八
四面	二〇三九六四八九〇
八面	一二八四八九八二九
十二面	五〇七三二二〇七
二十面	七七一〇二五三四

球	一〇〇〇〇〇〇〇〇
立方	八〇五九九五九七
四面	一六四三九四八八一
八面	一〇三五六二二八五
十二面	四〇八八一八九五
二十面	六二一四四三三二

求球內各形之一邊定率

球徑	一〇〇〇〇〇〇〇〇
四面	八一六四九六五八
立方	五七七三五〇二六
八面	七〇七一〇六七八
十二面	三五六八二二〇九
二十面	五二五七三一一一

求球內各形之體積定率

球徑方	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
四面	六四一五〇〇二九
立方	一九二四五〇〇八六
八面	一六六六六六六六
十二面	三四八一四五四八二
二十面	三一七〇一八八三

求球外各形之一邊定率

球徑	一〇〇〇〇〇〇〇〇
四面	二四四九四八九七四
立方	一〇〇〇〇〇〇〇〇
八面	一二二四七四四八七
十二面	四四九〇二一七九七
二十面	六六一五八四五三

求球外各形之體積定率

球徑方	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
四面	一七三二〇五〇八〇七
立方	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
八面	八六六〇二五四〇三
十二面	六九三七八六三六七
二十面	六三一七五六九九九

球與球內各形體積定率

球積	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
四面	一二二五一七五三〇
立方	三六七五五二五九〇

球與球外各形體積定率

球積	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
四面	三三〇七九七三三七二
立方	一九〇九八五九三一七

八面　三一八三〇九八八五　　八面　一六五五三九八六六八六
十二面　六六四九〇八八九一　　十二面　一三三二五〇三四三五八
二十面　六〇五四八一三七二　　二十面　一二〇八五六六九九一

周髀經解

昔者周公問於商高曰竊聞乎大夫善數也請問古者庖犧立
周天歷度

周天歷度者分周天三百六十度爲推求歷日之用也按通鑑載包犧作甲歷文易大傳言包犧仰以觀於天文俯以察於地理其觀察之時必有度數以紀其法象則歷度始於包羲無疑矣

夫天不可階而升地不可將尺寸而度請問數從安出

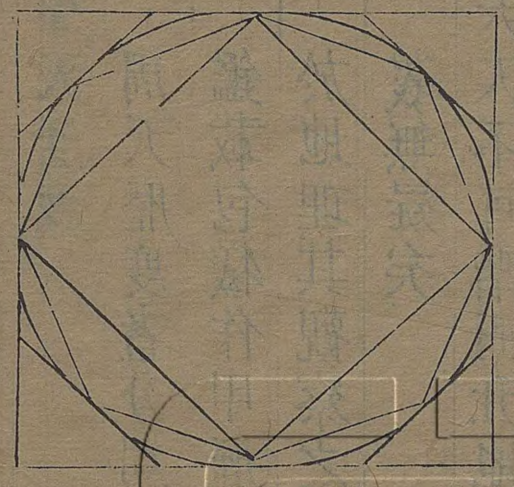
天之高明地之博厚非人力所能及其歷度之數不知從何而得也

商高曰數之法出於圓方

萬物之象不出圓方萬象之數不離圓方河圖者方之象也

洛書者圓之象也太極者圓之體奇也四象者方之體偶也奇數天也耦數地也有天地而萬物於是乎生有圓方而萬象於是乎定有奇耦而萬數於是乎立矣

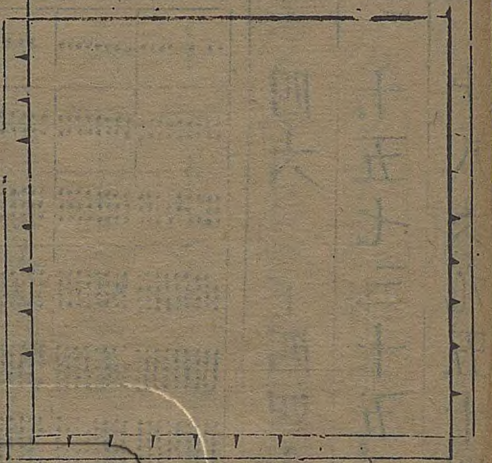
圓出於方



以數而論出於圓方以圓方而論則圓出於方蓋方易度而圓難測方有盡而圓無盡故推圓者以方度之以有盡而度無盡也是以圓周內苙外切屢求句股為無數多邊形以切近圓界將合而為一而圓周始得故曰圓出於方也

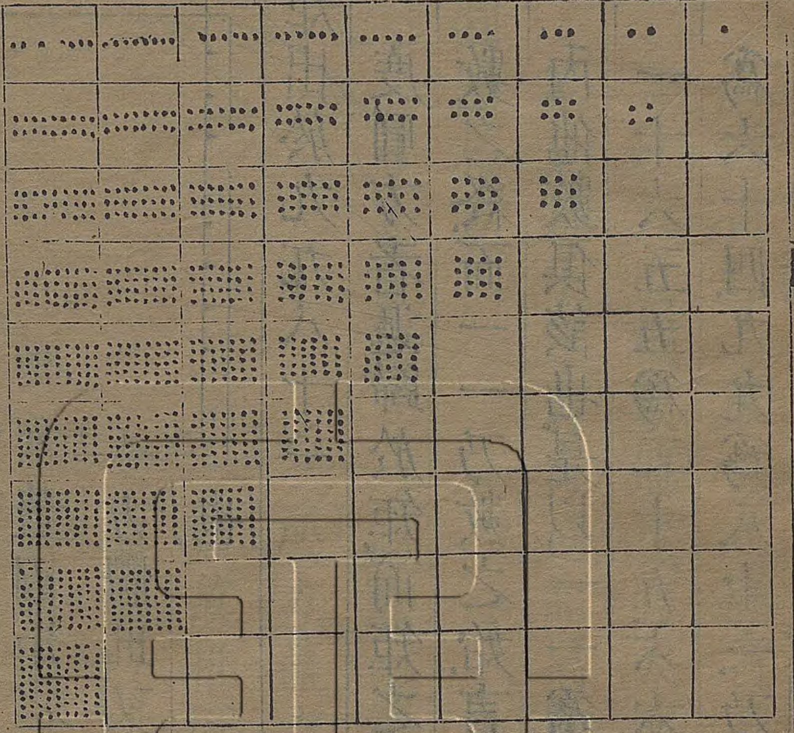
方出於矩

孟子曰不以規矩不能成方圓夫規所以成圓而矩所以成方也故凡方形必出於二矩相合如矩之二股均者合之即為正方矩之二股一大一小者合之則為長方蓋因矩之為形其角直其線正所以能成方體此又直內方外之理故曰方出於矩也



矩出於九九八十一

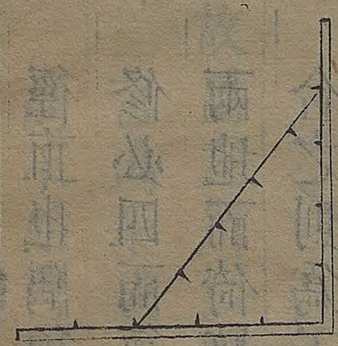
度圓方者遞歸於矩而矩之形總不外乎二數相乘九九者數之終而一一乃數之始言九九而不及他數者以九九之內他數俱該也是以一一為一二二為四三三為九四四為一十六五五為二十五六六為三十六七七為四十九八八為六十四九九為八十一乃矩之二股均平所成之正方也



一二爲二．一三爲三．一四爲四．
一五爲五．一六爲六．一七爲七．
一八爲八．一九爲九．形雖未方．
而其理猶存也．二三爲六．二四
爲八．二五一十．二六一十二．二
七一十四．二八一十六．二九一
十八．三四一十二．三五一十五．
三六一十八．三七二十一．三八
二十四．三九二十七．四五二十．
四六二十四．四七二十八．四八三十二．四九三十六．五六三
十．五七三十五．五八四十．五九四十五．六七四十二．六八四
十八．六九五十四．七八五十六．七九六十三．八九七十二．乃

矩之一股小一股大所成之長方也．至於一百之類．雖爲正
方．乃十之相乘．十則仍歸於一也．又如八十四．九十六之類．
乃六七四十二．六八四十八之倍．不得自立爲數之本．又或
十一．十三．十七．十九之類．十一爲二五一十之奇．十三爲二
六一十二之奇．十七爲二八一十六之奇．不得成正方．亦不
得成長方．故不入九九之數也．是以九九之數爲方之本．而
方之形．必合以矩．故曰．矩出於九九八十一也．

故折矩以爲句廣三．股修四．徑隅五．



前言圓方之形．此言句股生成之正數也．以二
矩合之．既爲方形．今以一矩折之．則爲一方之
兩邊．是以折矩之橫者爲句之廣．折矩之縱者
爲股之長．於句股之末．以斜弦連之．是爲徑隅．

徑直也隅角也言自兩角想對直連之也句之廣必三股之修必四而徑隅始得五此乃自然生成之正分也易曰參天兩地而倚數天數一參之而爲三地數二兩之則爲四三二合之則爲五此又句三股四弦五之正義也

旣方其外半其一矩

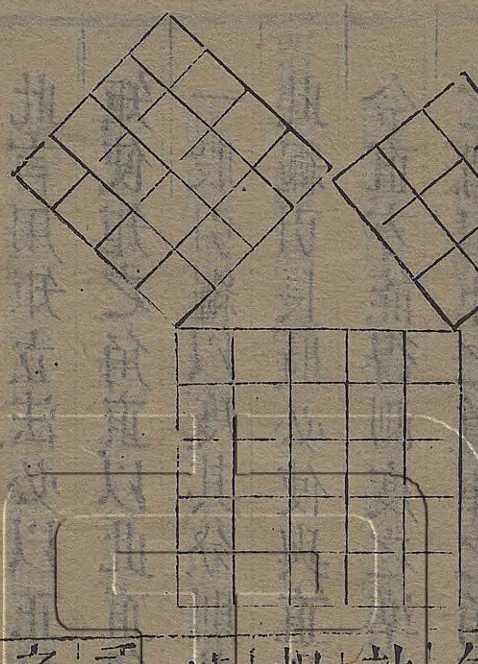
此言句股之面積也句股以弦連之不得爲方形必再合一矩乃爲一長方所謂方其外者言弦之外復加一矩以成方也句三股四相乘得一十有二即爲兩矩合成之數半之得六乃句股之面積所謂半其一矩者也

環而共盤得成三四五

此言句股弦相和之數也環而共盤者環繞盤旋於句股弦之周圍得成三四五共之爲一十有二乃三數相和總數也

兩矩共長二十有五是爲積矩

此言句股相求之法也兩矩者句與股也其所以相求者以句股弦各面積彼此加減以立法也



句三自乘爲九股四自乘爲十六合計之爲二十五是句股各自乘之積相併而與弦自乘積等故曰積矩也弦自乘積內減句自乘之積得股自乘之積若減股自乘之積得句自乘之積故爲句股弦相求之法也

故禹之所以治天下者此數之所由生也

言禹平成之功昭垂萬古揆厥所以奏績者必藉句股以審高下始得順水之性而告厥成功然則禹之所以治水者非

此句股之法所由生乎。

周公曰。大哉言數。請問用矩之道。

商高曰。平矩以正繩。

此言用矩立法。必以正且直也。平矩以正繩有兩義。平置其矩。使矩之角直。以此直角之一股。或横或平。横以度遠平以度高復自一股引繩以度其分。則此分為我所知。故以所知推所不知。此繩引長時。必使與直角對正。不論其分之幾何。引之又必令直。方能得測度之準。故為平矩以正繩。又平者均平準齊之謂。用矩之道。矩之角正。即直角之謂然後二股得直。以之測高測遠。乃得度其大小之分。此矩既正。而所測之度亦正矣。孟子曰。規矩準繩。以為方圓平直。繩者即準之之意。規矩所以度方圓。而準繩所以考平直。故準之以平。繩之以直。始得立法之精微。故曰平矩以正繩也。

偃矩以望高。

此用矩測高之法也。偃者仰也。仰矩方可測高。矩之一股直立在前。一股定平在下。然後比例推之。蓋平股與立股之比。即所知之遠與所測之高之比也。故仰測而得高。

覆矩以測深。

此用矩測深之法也。覆者俯也。俯矩方可測深。矩之一股立者在前。一股平者在上。平股與立股之比。即所知之遠與所測之深之比也。故俯測而得深。

臥矩以知遠。

此用矩測遠之法也。臥者平也。平矩方可測遠。以矩之一股為横向內。一股為縱向前。是以横與縱之比。即所知之度與

所求之遠之比也故平測之而得遠

環矩以爲圓

此用矩爲圓之法也以矩之一端爲樞一端旋轉爲圓則成一圓環矩者卽旋規之說也

合矩以爲方

此用矩爲方之法也矩二股也兩矩相合乃成一方卽前方出於矩之說也

方屬地圓屬天天圓地方

前言用矩以測高深廣遠復用矩以爲圓方此以圓方屬之天地者非以形體言蓋以陰陽動靜之理言也樂記云著不息者天也著不動者地也不息故運而不積圓之象也不動故靜而有常方之理也且圓之數無盡而方之數有盡天不可階而升測天者恒於地上度之是仍以方度圓也凡數之不盡者必奇數之可盡者必耦是以陽爲奇陰爲耦此方圓之理數所以屬乎天地也

方數爲典以方出圓

典則也言圓之數奇零不盡不可爲則故惟方數可爲典則以方出圓者以方之形度圓之外從方數中生出圓數卽前圓出於方之說也如圓徑求積則以徑自乘之爲正方形而以方率圓率比例推之卽得圓積是皆以方出圓之理也

笠以寫天天青黑地黃赤天數之爲笠也青黑爲表丹黃爲裏以象天地之位

此卽儀象以表天地之形色也笠形圓故以象天寫象也青黑天之色黃赤地之色天數之爲笠形則以青黑爲表丹黃

為裏以象天地之位蓋取天包地之象也是故知地者智知天者聖智出於勾勾出於矩夫矩之於數其裁制萬物惟所為耳

天地之高深廣遠非聖智不能知然聖智非由理之自然亦不能無所憑藉而知也故明句股之數即可以知地而為智知地之數即可因地以知天而為聖矣故曰智出於句也然句股之形又賴矩以成故矩為句股之本而天地之高深廣遠皆賴矩以測況萬物之大小巨細豈能外於矩之度分乎故矩之於數其裁制萬物惟其所為而無不可也

周公曰善哉

以周公之聖而與之曰善哉則其得數之本立法之妙可謂全矣至是而周髀之義盡矣

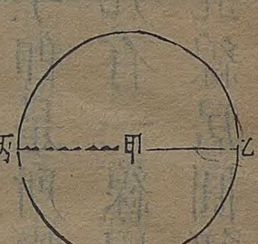
幾何原本節錄

凡論數度必始於一點自點引之而為線自線廣之而為面自面積之而為體是名三大綱是以有長而無廣者謂之線有長與濶而無厚者謂之面長與濶厚俱全者謂之體

線有直曲兩種其二線之一端相合一端漸離必成一角二線若俱直者謂之直線角一直一曲者謂之不等線角二線俱曲者謂之曲線角

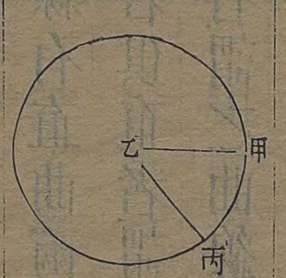
凡命角必用三字而以中一字為所指之角如甲乙丙三角形指甲角則云乙甲丙角是也亦有單舉一字者則其所舉之一字即是所指之角也

凡有一線以此線之一端為樞一端為界旋轉一周即成一圓此線居圓徑之半謂之半徑線如甲乙若引長至圓之對界將全

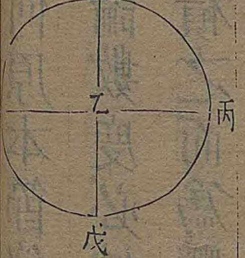


圓平分為二,即為全徑線。如丙乙。若自圓心至圓界作幾何半徑線,皆謂之輻線。其圓線即謂之圓界。圓界所積之面,謂之圓面。

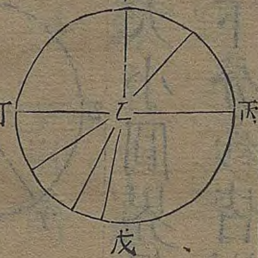
凡圓線分界之所,皆以所對之角而命其弧。因其形似弧,故名之。以所對之弧而命其度。弧大者角亦大,弧小者角亦小。蓋角度俱在圓界,而圓界為角度之規也。如乙角為心,甲丙為角相對之界,即甲丙弧,而甲丙弧即乙角之度也。



凡角相對之弧,得圓界四分之一者,此角必直,謂之直角。如第一圖丁乙丙、丙乙戊、丁乙甲、甲乙戊四角是也。若不足四分之一者,謂之銳角。如第二圖丁乙丙、甲乙戊二角是也。若過於四分之一者,謂之鈍角。如第二圖丁乙甲、丙乙戊二角是也。其二角兩尖相對,則曰對角。如兩銳角相對、兩鈍角相對也。二角兩尖相並,則曰並角。如一銳角與一鈍角相並也。

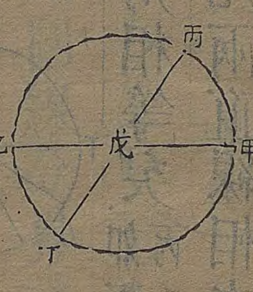


凡有一圓,將全徑線平分為二,如丙乙丁線。每半圓界內,自徑線中心乙作相並之幾角,如乙。此幾角之共度,必與兩直角等。蓋用雖多寡不同,銳鈍各異,然總在全徑線所限半圓界內,為全圓界四分之二,故與二直角相等也。若合全圓論之,作眾輻線,眾角雖多,亦必與四直角相等矣。如丙甲丁乙半圓內三角,與兩直角度等。丙乙丁戊半圓內四角,亦與兩直角度等。



凡兩直線相交,所成二對角之度必俱相等。如甲乙丙丁二線交於戊處,成甲戊丁、丙戊乙二對角,斯二鈍角之度必等。又成

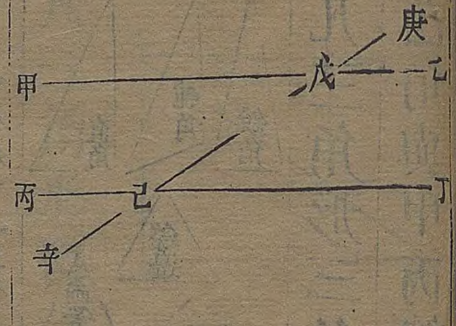
甲戊丙丁戊乙二對角斯二鈍角之度亦必等今試以二線相交之處爲心旋轉作一圓則二線俱爲此圓之全徑線而一圓俱兩平分其相對之弧度必俱相等弧度既等故相對之角度亦必相等也



凡大小圓界俱定爲三百六十度取其數無奇零便於布算也度下分杪皆以六十起數以三百六十乃六六所成以六十度之可得整數也

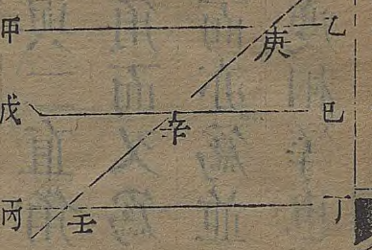
凡二線之間寬狹相離之分俱等則此二線謂之平行線雖引至無窮其端必不能相合以其遠近雖殊皆爲平行線也

凡平行二線或縱或斜作一直線交加於上如庚辛則成八角此八角度有相等者必是對角或內外角如庚戊乙甲戊己二角其度相等因其兩尖相對謂之對角庚戊乙戊己丁二角其度

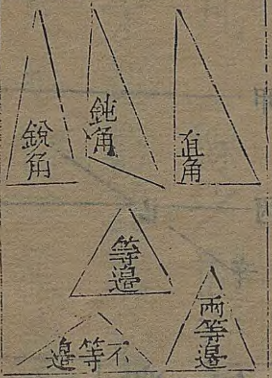


亦相等因其在平行二線之內外故謂之內外角甲戊己戊己丁二角其度亦相等因其俱在二平行線之內而立斜線之左右故又謂之相對錯角庚戊甲丁己辛二角其度亦相等因其俱在平行二線之外故謂之外角乙戊己丙己戊二角其度亦相等因其又俱在平行二線之內故又謂之內角總之二平行線上交以斜線所成八角必兩兩相等也惟平行線上一邊之二內角或一邊之二外角謂之並角其度不等而與二直角相等如甲戊庚與乙戊庚丁己辛與丙己辛雖爲外角而又爲並角乙戊己與甲戊己丁己戊與丙己戊雖爲內角而亦爲並角以其同出於一線之一邊故謂之並角與二直角度相等也

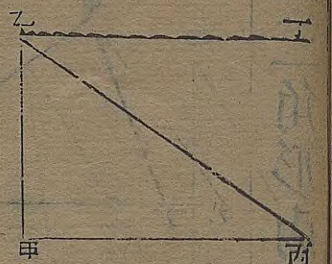
凡平行二線之間，再作一平行線，如己戊。則三線互相為平行也。在此三線上，照前作一庚辛壬斜線，則所成之庚辛二角必相等，而辛壬二角亦必相等也。



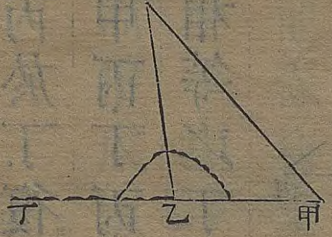
凡各種界所成俱謂之形。其直界所成者為直界形，曲界所成者為曲界形。直界形未有少於三角形者，故三角形為諸形之首。一角直者為直角三角形，一角鈍者為鈍角三角形，三角俱銳者為銳角三角形。三邊線度等者為等邊三角形，兩邊線度等者為兩等邊三角形，三邊線度俱不等者為不等邊三角形。



凡三角形三角度相併，必與二直角度等。如甲乙丙三角形，自乙角與甲丙線平行作乙丁線，則成丙乙丁角，與丙角為一尖交錯之角，其度必等。而甲乙丁角亦為直角。今於直角內減丙乙丁角，所餘為甲乙丙角，與丙角相併，不適得一直角之度耶？再加以甲角，與二直角等矣。

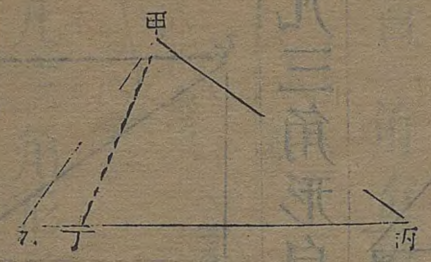


凡三角形自一界線引長成一外角，此外角度與形內二銳角度等。蓋甲乙丙三角形三角度相併，原與二直角等。今乙內外角（丙乙甲為內角，丙乙丁為外角）相併亦與二直角等，則減去內角，所餘外角與甲丙二銳角其度相等矣。

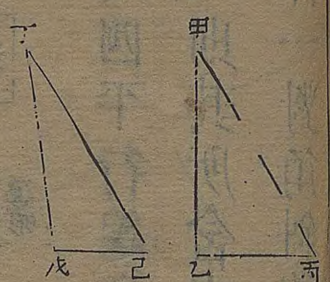


凡三角形之兩邊線若等，其底線之兩角度亦必等。若自上角至底作一直線，將底線平分為兩，則此線為上角之分角線，又為底線之中垂線也。如甲丁

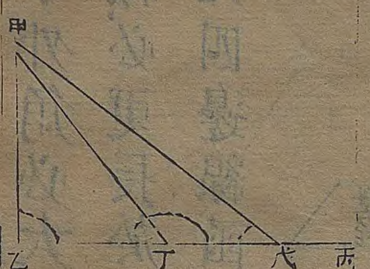
凡三角形內長界所對之角必大短界所對之角必小如甲乙丙三角形乙丙界長於甲丙界故所對之甲角大於乙角而甲乙界短於甲丙界故所對之丙角小於乙角試依甲丙界度截乙丙於丁復自甲至丁作甲丁線即成甲丙丁兩等邊三角形夫甲丙丁丙兩界既等則甲丁丙丁甲丙兩角亦等今甲丁丙角相等之丁甲丙角原自乙甲丙角所分則乙甲丙角必大於甲丁丙角矣然此甲丁丙角爲甲乙丁小三角形之外角與小形內之甲乙二角共度等既與甲乙二角共度等則大於乙角可知矣夫甲丁丙角既大於乙角則乙甲丙角必更大於乙角矣丙角之小於乙角其理亦同



凡三角形內必有二銳角蓋三角形之三角併之與三直角等如甲乙丙三角形乙角爲直角則所餘甲角丙角併之始與乙角等故此甲丙二角爲銳角也又如丁戊己三角形戊角爲鈍角則所餘之丁角己角愈小於直角而爲銳角矣

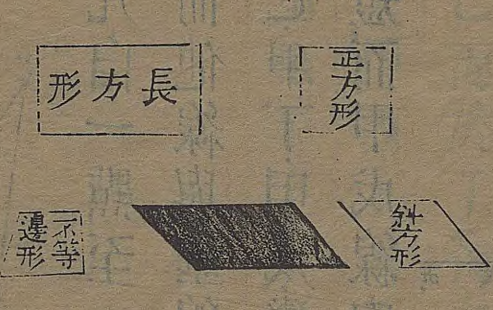


凡自一點至一橫線作衆線而衆線內有一垂線必短於他線而他線與垂線相離愈遠則愈長也如自甲點至乙丙線作甲乙甲丁甲戊幾線此內甲乙爲垂線較之甲丁甲戊線其度最短而甲戊線與甲乙線相離既遠於甲丁故更長於甲丁線蓋甲乙爲垂線則乙角必爲直角而甲乙丁三角形內丁角甲角必俱爲銳角而小於乙角矣因乙角大於丁角故所對之甲丁線必長於甲乙線又甲丁戊外角原與甲乙二內角共度等則



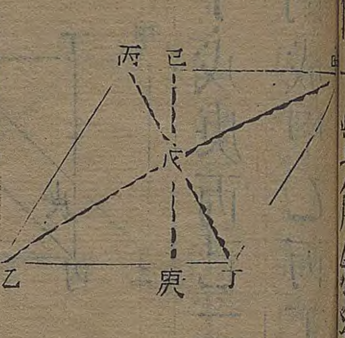
丁外角必大於乙丙角矣因丁外角大於乙角故所對之甲戊線必更長於甲丁線也

凡四邊線函四角者其形有五四邊線度而角度亦等者爲



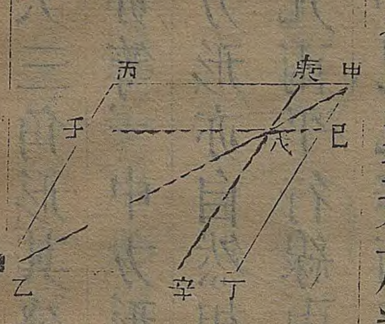
正方形四直角而兩邊線短兩邊線長者爲長方形四邊線度等而角度不等者爲等邊斜方形兩邊線長兩邊線短而角度又不等者爲兩等邊斜方形以上四形俱自平行線出如四邊線不等亦不平行而四角度又不等者爲不等邊斜方形

凡四平行線所成方形其兩兩平行線度俱相等如丙甲與乙丁丙乙與甲丁則其所含之角成兩對角亦必兩兩相等如甲乙兩對角丙丁兩對角若作一對角斜線如甲乙則平分爲兩三角形如丙甲乙與丁甲乙其對角之



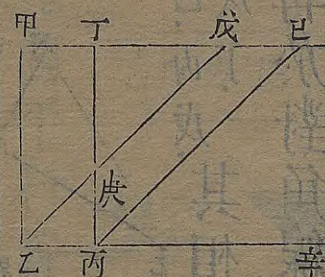
度必等如丙角與丁角而二尖交錯之角其度亦必兩兩相等如丙甲乙與丁乙甲丙乙甲與丁甲乙若作兩對角線如甲乙與丙丁則平分爲四三角形其相交處必平分二線之正中如戊而所成四線亦必兩兩相等如甲戊戊乙丙戊戊丁其相對之各角與二尖交錯之各角亦必兩兩相等若再於對角線上或縱或橫正中截開如己庚則又平分爲六三角形其相對之線度角度亦無不相等也

凡四邊形於對角線不拘何處如戊復作相交二平行線如壬戊己辛戊庚二線相交則成四四邊形如甲己戊庚戊辛乙壬庚戊壬丙己丁辛戊四形又即成四三角形如甲己戊甲庚戊兩小三角形戊辛乙戊壬乙兩中三形角及兩長方形如己丁辛戊庚戊壬丙蓋甲丁乙丙之

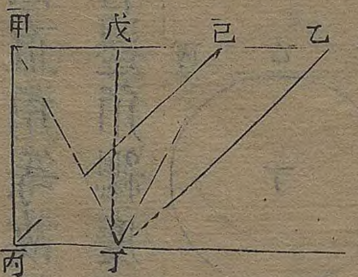


全形因甲乙對角線平分爲甲丁乙甲丙乙兩

大三角形其分俱等今一小方形復平分為兩小三角形其分亦等一中方形復平分為兩中三角形其分亦等則所餘二長方形亦自然相等也



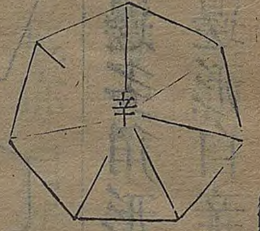
凡兩平行線內所作之四邊形其底度若等則面積必俱等如甲己乙辛兩平行線內於乙丙底作甲乙丙丁長方形戊乙丙己斜方形此兩形雖不同而所容之分必等何也試以兩三角形考之如甲乙丁戊丁丙己兩三角形其甲乙丁丙二線等甲戊丁己二線等甲角丁角俱為直角其度又等則此兩三角形自然相等今於兩三角形內各減去丁戊庚形則所餘之甲乙庚丁戊庚丙己二形之分必等復於此二形內各加一庚乙丙形則戊甲乙丙丁戊乙丙己兩四邊形其面積必然相等也



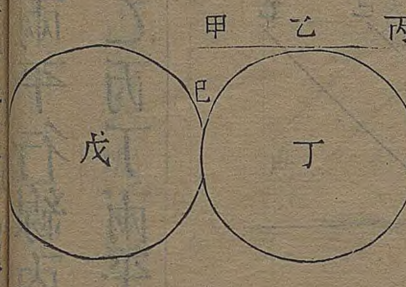
凡兩平行線內所作之三角形其底度若等則面積必俱等如甲乙丙丁兩平行線內於丙丁底作甲丙丁三角形己丙丁三角形此兩形之積必等何也自丁至戊作一直線與甲丙平行再自丁至乙作一直線與丙己平行即成甲丙丁戊己丙丁乙兩四邊形此二形既同出於丙丁底其面積相等今兩三角形俱平分四邊形之一半其面積亦必相等矣

凡等邊等角各形內五邊者為五角形六邊者為六角形邊愈多角愈多者俱隨其邊與角而名之焉

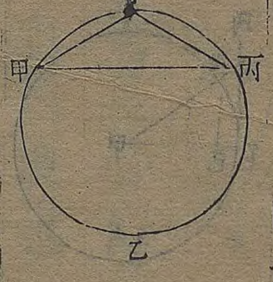
多邊多角形自角至心作線凡有幾界即成幾三角形設如辛七邊形自辛至邊七角作七線即成七三角形而此各三角形



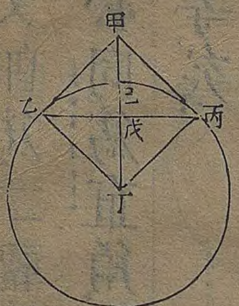
之分俱等若欲知各邊角之總度則將邊數加一倍得數減四所餘卽各邊角之總度如辛七邊形則加一倍得十四減去四餘十卽七邊形之各邊角總度也何則凡三角形之三角與二直角等七邊形成三角形者七共與十四直角等而辛心所有之七角又與四直角等故於十四直角內減四直角餘十直角與七邊形之各邊角總度相等矣



凡有直線切於圓界而不與圓界出入相交者謂之切線如甲乙丙線切於丁圓之乙界是也又如此圓界與彼圓界相切而不相交則謂之切圓如丁戊二圓於己界相切二界總未相交也



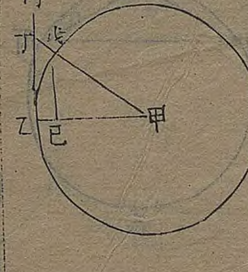
凡一直線橫分圓之兩界謂之弦線如甲丙其所分圓界之兩段皆謂之弧如甲丁丙甲乙丙此弧與弦相交所成之二角謂之弧分角如甲丙乙丙甲丁二角又如甲丙丁丙甲乙二角自弦線之兩端作二直線相遇於圓界之一處如甲丁丙二線相遇於丁所成之角如甲丁丙角謂之圓分內角又謂之弧分相對之界角以其與甲乙丙弧相對也



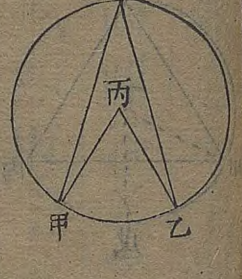
圓弦線上自圓心作一中垂線如丁戊則將弦線兩平分如戊丙與戊乙若自圓心至弦線兩端作二輻線如丁丙與丁乙成一丁丙乙三角形此三角形之二輻線既等則中垂線所分之戊丙戊乙二段必等若將中垂線引長至弧界己則又將弧界兩平分矣如己丙與己乙若自弦線兩端與圓界相切各作一切線如丙甲與乙甲相遇於甲此二線之度必等

又即為二輻線之垂線矣。因其為垂線，則甲乙丁、甲丙丁二角必同為直角，而甲丙乙與丁丙乙兩三角形，其度亦必兩兩相等矣。

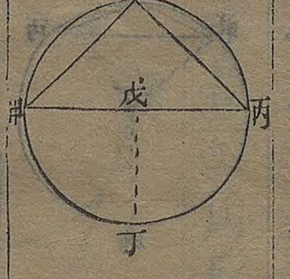
凡一圓有二輻線（如甲乙與甲戊）截弧之一段，所成三角形，謂之分圓面形（如甲戊乙一段）。若欲取弧界各角之度，則用三種線求之：一為弧之切線，如於甲乙輻線之末與圓界相切作丙乙垂線是也；二為弧之割線，如自圓心甲將甲戊線引長割出至切線丁處作甲丁線是也；三為弧之弦線，如從圓界戊至甲乙輻線作戊己垂線是也。若欲取甲角相對弧度，於此三線取之，皆得乙戊弧之度焉。



一圓界內任於圓界一段至圓心作二線（如甲丙與乙丙），至圓界作二線（如甲丁與乙丁），即成二角。在圓心者為心角（如甲丙乙），在圓界者為界角（如甲丁乙）。凡心角界角形雖不一，其所對弧度若等，則心角皆大於界角一倍。若心角所對弧度居界角所對弧度之一半，則兩角之度相等。蓋凡量角度，必以角為圓心，真度乃見。故界角所對之弧，僅得其半為真角度也。

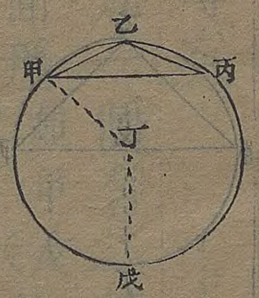


凡圓內界角，立於圓界之半者，為直角。如甲乙丙界角，立於甲丁丙圓界之正一半，則乙角必為直角也。試自圓心戊至圓界丁作戊丁輻線，即成甲戊丁心角。其相對之甲丁弧，為圓界四分之一，則戊角亦必為直角。夫戊心角所對甲丁弧，正為乙界角所對甲丁丙弧之一半，則戊心角度必與乙界角度相等也。



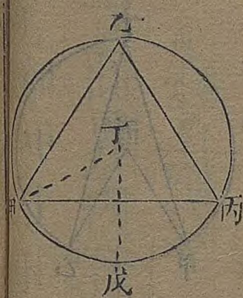
凡圓內界角，其所對之弧，過於圓界之一半者為鈍角。如甲乙

丙界角相對之甲戊丙弧。大於圓界之一半。則乙角必爲鈍角也。試將甲戊丙弧平分於戊。爲甲戊、丙戊兩段。復自圓心丁。至



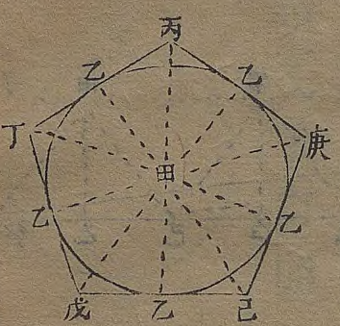
甲戊作二輻線。卽成甲丁戊心角。其相對之甲戊弧。過於圓界四分之一。則丁角亦必爲鈍角。夫丁心角所對甲戊弧。正爲乙界角所對甲戊丙弧之一半。則丁心角度。必與乙界角相等也。

凡圓內界角。其所對之弧。不及圓界之一半者。爲銳角。如甲乙丙界角。相對之甲戊丙弧。小於圓界之一半。則乙角必爲銳角也。試將甲戊丙弧平分於戊。爲甲戊、丙戊二段。復自圓心丁。至

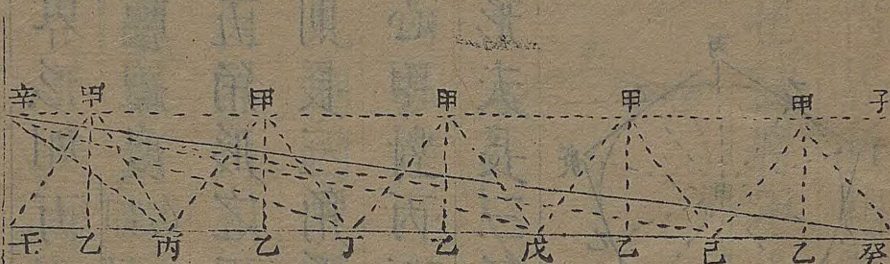


甲戊作二輻線。卽成甲丁戊心角。其相對之甲戊弧。小於圓界四分之一。則丁角亦必爲銳角。夫丁心角所對甲戊弧。正爲乙界角所對甲戊丙弧之一半。則丁心角度。必與乙界角度相等也。

凡函圓各形之各邊線。與圓界相切而不相交。則謂之函圓切界形。如丙丁戊己庚五角形。各邊皆切於圓界也。其所函圓之輻線度。如甲乙與一直角長三角形之小邊度等。如辛壬癸形之辛壬邊而五角形之五邊共度。如丙丁類五邊又與長三角形之大邊度等。如壬癸邊則長三角形之面積。與函圓五角形之面積亦等。何則。試自圓心甲。對丙丁戊己庚五角。各作分角線。卽成甲丙丁類五三角形。夫長三角形之壬癸度。既與五角形之五邊共度等。今將壬



癸底線平分爲五。依前所分五三角形式作甲壬丙類五正式三角形。復自所分丙丁戊己四處。俱向辛角各作四線。遂分辛壬丙類五斜式三角形。再於五正式三角形內。自甲角至底。各

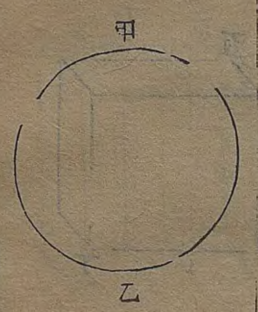


作甲乙垂線。俱與圓輻線等。則五正式三角形之高度。亦自相等。於是復自辛角與壬癸平行。作辛子切角線。則此兩式三角形。同底又同在二平行線內。其面積必兩兩相等。夫分形之面積等者。全形之面積。自無不等。此辛壬癸長三角形。與丙丁戊己庚函圓五角形。其面積必然相等也。若以圓形論之。則以圓之輻線。爲長三角形之小邊。以圓之周線。爲長三角形之大邊。其長三角形面積。亦與圓面積等矣。夫圓周界曲線也。前所設五角形之邊界。直線也。觀之似難於相通者。然以圓之內外。各設無數多邊形。逼近圓界。則直線曲線。將合而爲一。其理亦無不同矣。

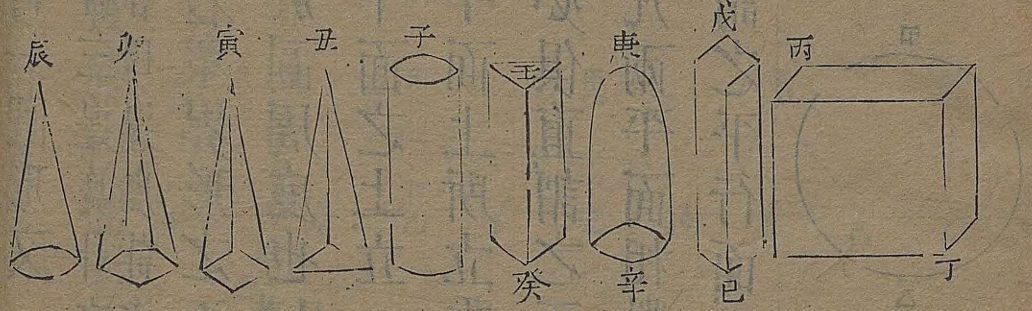
有一圓形。又一衆界形。此圓周度若與彼衆界形總度等（如三角形。合三邊度計之。正方形。合四邊度計之之類也。）則圓形之面積。必大於衆界形之面積。若衆界形之面積。與圓形面積同者。則衆界形之總度。必復大於圓周度也。（蓋圓積可用周求。衆界形之積。只可用邊求。不可用周求也。）

平面之上。立一直線。無少偏倚。則各邊所生之角。必俱直。謂之平面上所立垂線。若立一平面。無少偏倚。則四邊所成之角亦必俱直。謂之平面上所立直面。

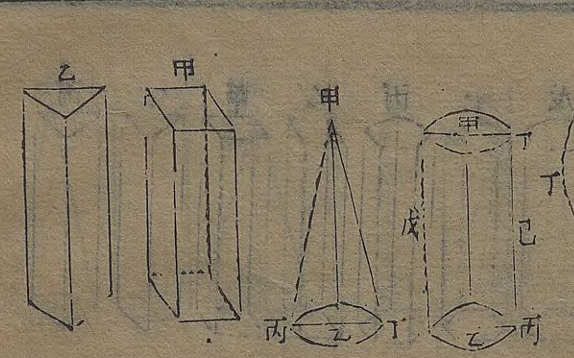
凡兩平面相對。其所立衆垂線度。俱各相等。則此相對之平面。謂之平行面。



凡各種面內所積之實。爲體。而皆因其面以名之焉。如全體不成角度。止現圓之圓面。則謂之圓體。甲乙圖是也。全體各面俱平。各邊相等。所

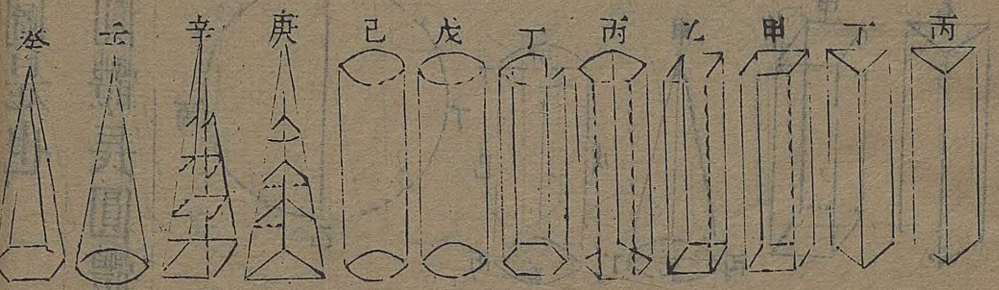


成各角又等則謂之正方體丙丁圖是也全體各面雖平體長而面成兩式其相對各面仍兩兩相等相對各邊則又平行角又相等則謂之長方體戊己圖是也體有曲平兩面相雜而不成等邊等面則謂之平底平圓體庚辛圖是也全體相對之各面不平行上下兩面平行則謂之上下面平行三稜體壬癸圖是也底爲平面下面俱平則謂之長圓體子圖是也體圓而上其各面俱合於一角而成厚角則謂之尖瓣體底三角者謂之三瓣尖體底四角者謂之四瓣尖體底衆角者謂之衆瓣尖體如丑寅卯三圖是也又或底面圓而漸銳成形則謂之尖圓體辰圖是也



凡圓體長圓體尖圓體俱生於圓面故其外皮面積亦生於圓界一旋轉之度分耳如取甲乙丙丁之圓形則以甲乙徑線爲樞心將甲丙乙半圓作轉式旋轉復還於原處卽成甲丙乙丁一圓形體如取甲乙戊己長圓形則以甲乙中線爲樞心將丙丁線界作轉式旋轉復還於原處卽成甲乙戊己一長圓體如取甲丙丁平底尖圓形則以甲乙中線爲樞心將甲丁邊線作轉式旋轉復還於原處卽成甲乙丙丁一尖圓體矣

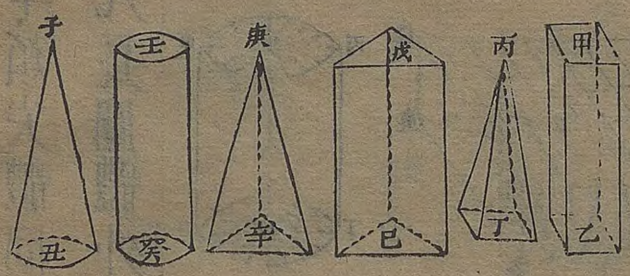
凡體面式不一而積等者爲積數相等之體面式既同而體積又等者爲面式體積全等之體



如甲乙二體爲積數相等之體也丙丁二體爲面式體積全等之體也

凡各面所成體形內其各面俱平行或上下面爲平行而立於等積之底其體之高又等則其體之積亦相等如甲乙體其各面俱平行又如丙丁體其上下面平行立於等積之底其高又等或又如戊己體其上下面平行圓面積又等高又等則其兩兩體積必相等矣又如庚辛壬癸之類尖體形苟立於等積之底其體之高若等則其體之積亦等何以見之若將衆尖體分爲平行底之衆小體其所分之衆小體底度高度必俱相等如庚辛圖其所分小體之積俱等故其全體之積亦相等也

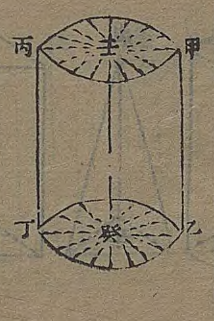
凡上下面平行各體與平底尖體同底同高者不論平面圓面凡平底尖體皆得上下面平行體三分之一如甲乙上下面平行之長方體與丙丁四瓣尖體其乙丁兩底積等甲乙丙丁兩

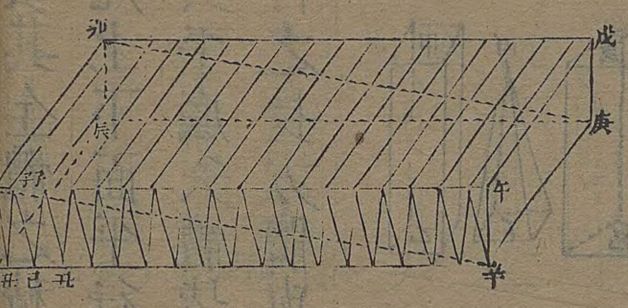


高度又等則甲乙體與三丙丁體等如戊己上下面平行之三稜體與庚辛三瓣尖體其己辛兩底積等戊己庚辛兩高度又等則戊己體與三庚辛體等如壬癸上下面平行之長圓體與子丑尖圓體其癸丑兩底積等壬癸子丑兩高度又等則壬癸體與三子丑體等又如壬癸長圓體與甲乙戊己類體同底同高則亦與三丙丁庚辛類尖體等又或子丑尖圓體與丙丁庚

辛類尖體同底同高則亦得甲乙戊己類體三分之一矣

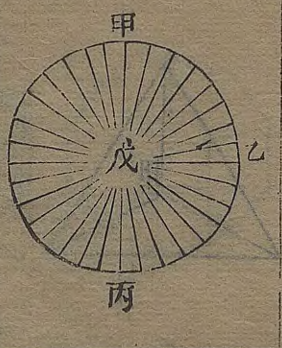
凡長圓體外周面積與長方體底面積等而長圓體半徑又與

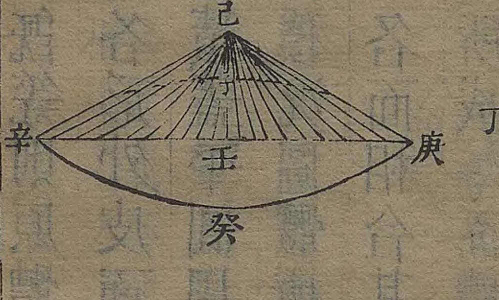




長方體高度等則長方體積必得長圓體積之半如甲乙丙丁一長圓體戊己一長方體試將長圓體從壬癸中線至周圍外面剖為無數分則成子丑巳類無數長尖體此無數長尖體之高與長圓體之壬甲半徑等而無數長尖體之其底即長圓體之周圍外面積則此無數長尖體必為戊己長方體之一半矣蓋寅己辛三角面為午巳長方面之一半而此子丑巳類衆三角面與寅巳辛三角面等則卯辰庚辛巳寅三角體為戊己長方體之一半而此子丑己類衆長尖體亦必與卯辰庚辛巳寅三角體等而為長方體之一半矣故甲乙丙丁長圓體為戊己長方體之一半也

凡球體外面積與尖圓體之底積等而球體之半徑又與尖圓



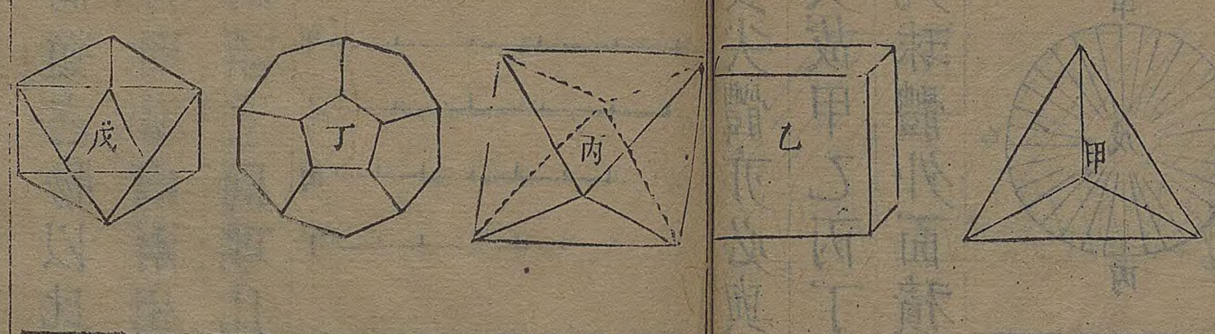


體之高度等則球體之積與尖圓體之積等如甲乙丙丁一球體己庚辛一尖圓體試將球體從中心平分為兩半圓體又從兩半圓體中心各分為無數尖體此所分尖體每一分必皆與尖圓體所分尖體一分等何則球體所分尖體皆以球外面甲乙丙丁為底以球甲戊半徑為高尖圓體所分尖體皆以尖圓之庚子辛癸底為底以尖圓之己壬高為高故此兩種無數尖體皆為同底同高其積相等無疑矣夫所分之

體既等則原體亦必相等故曰球體與尖體俱相等也

凡各形外皮面積相等之體惟圓體所函之積大於他體所含之積蓋平圓周度與各形線邊總度等則圓面積必大於各形面積況圓體所函有不大於他體所函者乎

凡各面相合其每面之角所合處復成一種體角謂之厚角厚角所成等面體形有五種各以面數而名之其一為四面體每面有三角各三角之各三界度俱等如甲圖是也二為六面體每面俱為正方其方面之四角俱為直角而各界互等故又為正方體如乙圖是也三為八面體每邊有三角各三角之各三界度俱等如丙圖是也四為十二面體每面有五角各五角之五界度俱等如丁圖是也五為

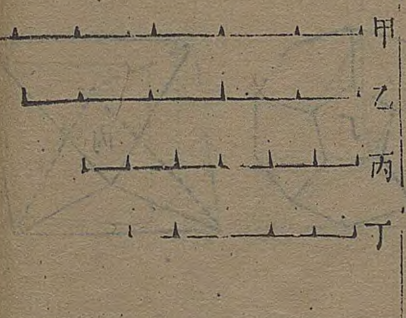


二十面體每面有三角各三角之各三界度俱等如戊圖是也此外不能復生他形蓋此五種厚角體俱是等邊三角四角五角之平面相合所成凡平面自三角以下不能成面而厚角自三面以下亦不能成角故厚角自三面始然平面三角四角五角所成厚角除此五種體亦不能復成他形也若平面六角以外並不能成厚角矣

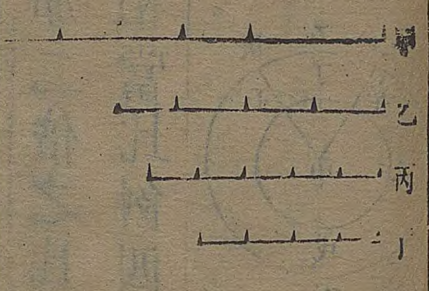
大凡欲論諸物之不齊必借同類之物以比之始可以得其不齊之度數此比例之法所由設也其比者與所比者俱謂之率率者法也矩也以數互相準之之謂也如一線與他線相比其度之或長或短其數之或多或少自能見之如一面與他面相比其面度之或大

或小其積數之或多或少自能見之如一體與他體相比其體
度之或厚或薄其積數之或多或少自能見之若將一線與一
面相比或一面與一體相比既不同類又不同形則線之長短
面之大小體之厚薄俱不可辨矣故曰欲論諸物之不齊必借
同類之物以比之也

有四率兩兩相比其一率與二率之比同於三率與四率之比
則謂之同理比例亦謂之相當比例也如甲乙丙丁四數甲與



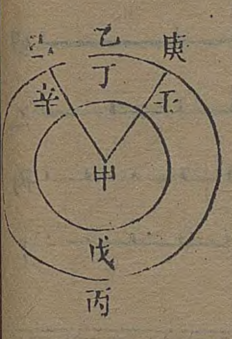
乙比丙與丁比若乙爲甲六分之五丁爲丙六
分之五則甲與乙之比例丙與丁之比例此兩
比例相同而乙有甲幾分之數卽可知丁有丙
幾分之數矣故凡四率內將一率與三率分數
定爲相等二率與四率分數亦定爲相等其度



之長短雖有不同苟分數定準則一率與二率
之比卽如三率與四率之比也若一率與二率
相比之分大於三率與四率相比之分則爲不
同理之比例而比例不得行矣如甲與乙相比
之分爲六與四而丙與丁相比之分爲五與四
則此甲與乙之比大於彼丙與丁之比矣若以一率二率相比
之分爲準則三率四率相比之分爲小若依三率四率相比之
分爲準則一率二率相比之分又大故謂之不同理之比例而
比例不能行也

凡三率互相爲比此一率與二率之比同於二率與三率之比
則謂之相連比例率也如甲乙丙三數互相爲比苟甲數與乙
數之比同於乙數與丙數之比則此三數謂之相連比例率矣

若相連比例率內將一率與三率比之則爲隔一位加一倍之比例或有相連比例四率將一率與四率比之則爲隔二位加二倍之比例大凡有幾率隔幾位以比者皆以隔幾位而爲加幾倍之比例也如甲乙丙三數其甲與丙之比爲隔一位加一倍之比例或甲乙丙丁戊五數俱爲相連比例率其甲與丁之比卽爲隔二位加二倍之比例而甲與戊之比又爲隔三位加三倍之比例矣



相當比例四率爲數學之要因其理之所該最廣故設爲雙圜圖以申明之立甲點爲心作乙丙一大圜丁戊一小圜此二圜界各爲三百六十分象天度也於是自圜之甲心過小圜界之辛壬二處至大圜己庚二處作二線則大圜之己甲庚小圜之辛甲壬俱同一甲角此甲通相對之己庚大弧界設爲六十度爲大圜六分之一則辛壬小弧界亦爲六十度爲小圜六分之一矣大凡角度俱定於相對之圜界今大圜之己庚弧界小圜之辛壬弧界俱與一甲角相對其度雖依圜之大小不同而分數則等分數既等則大圜小圜大弧大弧兩兩互相爲比卽如四率之兩兩相比爲同理比例也是以大圜之三百六十分爲一率大弧之六十分爲二率小圜之三百六十分爲三率小弧之六十分爲四率其大圜與大弧之比卽同於小圜與小弧之比也故凡各率各度雖異相當之分數若同則一率與二率之比必同於三率與四率之比而俱謂之順推比例矣此例亦曰正要之分合加減各率之法總不越此圖之互轉相較之理也

一種反推比例將一率與二率之比同於三率與四率之比者反推之以二率與一率爲比四率與三率爲比其所比之例仍同故亦謂之相當比例率也如前雙圜圖以大弧界與大圓界爲比小弧界與小圓界爲比也因其以一率爲二率以三率爲四率前後互移故謂之反推比例然名雖爲反推而相當比例之率仍與順推相同也

一種遞轉比例將一率與二率之比同於三率與四率之比者轉較之以一率與三率爲比二率與四率爲比其所比之例仍爲相當比例率也如前雙圜圖以大圓界與小圓界爲比大弧界與小弧界爲比也因其以三率爲二率以二率爲三率遞轉相較故謂之遞轉比例然其所比之例亦仍爲相當比例率也

一種分數比例將相比之率較數截開以一率與二率之較爲一率與二率爲比以三率與四率之較爲三率與四率爲比其所比之例仍爲相當比例率也如前雙圜圖大圓界內減去大弧界仍與大弧界爲比小圓界內減去小弧界仍與小弧界爲比也因其各分內有分開相減之故所以謂之分數比例然其所比之例仍同於相當比例率也

一種合數比例將相比之率併之以一率與二率之和爲一率與二率爲比以三率與四率之和爲三率與四率爲比其所比之例仍同於相當比例率也如前雙圜圖大圓界所分大段加入大弧界仍與大弧界爲比小圓界所分大段加入小弧界仍與小弧界爲比也因其有相加之分故謂之合數比例然其所比之例仍同於相當比例之四率也

一種更數比例以一率與二率之比同於三率與四率之比者

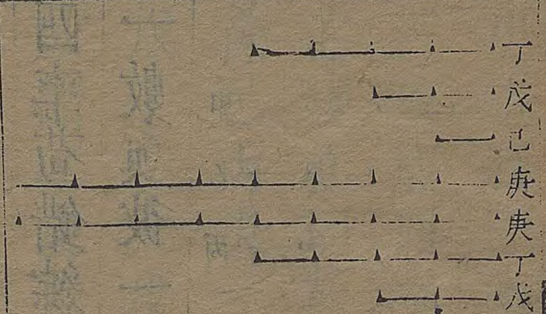
更之將一率與二率相減用其餘分爲二率仍與一率爲比將三率與四率相減用其餘分爲四率仍與三率爲比則其比例之理亦同於相當比例率也如前雙圜圖將大圜與大弧相減餘己丙庚一大段仍與六圓界爲比將小圓與小弧相減餘辛戊壬一大段仍與小圓界爲比也因其以所餘之大段更弧界故謂之更數比例然雖更入比之仍與相當比例四率同也

一種隔位比例有兩相比例四率將此一邊四率內一率與末率爲比彼一邊四率內一率與末率爲比則其所比之例仍同於相當比例率也如前雙圓圖以所分弧界之兩線引長

自庚壬過甲至癸丑作一全徑線自己辛過甲至子寅作一全徑線則分大圓爲庚己己丑丑寅寅庚四段分小圓爲壬辛辛癸癸子子壬四段其大圜四段爲相當四率而小圜四段亦爲相當四率度之大小雖異而分數相同故以此各相當四率隔位以比之其大圓之庚己一段與寅庚一段爲比而小圓之壬辛一段與子壬一段爲比其比例仍同於相當比例四率但以其兩邊各取兩率隔位以比之故謂之隔位比例耳

一種錯綜比例有兩連比例三率此一邊三率內中率與末率之比同於彼一邊三率內中率與末率之比則爲相當比例之四率若錯綜其位分以此一邊首率與末率隔位爲比復取另一數與彼一邊中率爲比而成同理之四率則此另一數必與

彼邊三率爲連比例四率矣如此一邊有甲乙丙三數彼一邊有丁戊己三數將此一邊中率乙數與末率丙數之比同於彼一邊中率戊數與末率己數之比則爲同理比例矣今錯綜其



位分使此一邊首率甲數與末率丙數隔位為比復另取一庚數與彼一邊中率戊數為比則亦同於相當比例之四率而此庚數與彼邊丁戊己三數為連比例之四率矣何則試以庚數置於彼邊丁數之上而為首率丁移為中率戊移為末率則此邊甲首率與丙末率之比同於彼邊庚首率與戊末率之比但以兩連比例率互相易位增入比之之不同故謂之錯綜比例耳

一種加分比例凡有二率依本度各加幾倍所加之分數若等則此二率互相為比仍同於原二率之互相為比謂之等倍相加之比例也如甲乙二數依甲度加三倍為丙依乙度加三倍為丁則此丙丁二數互相為比仍同於甲乙二數之互相為比因於原數有相加之分故謂之加分比例也

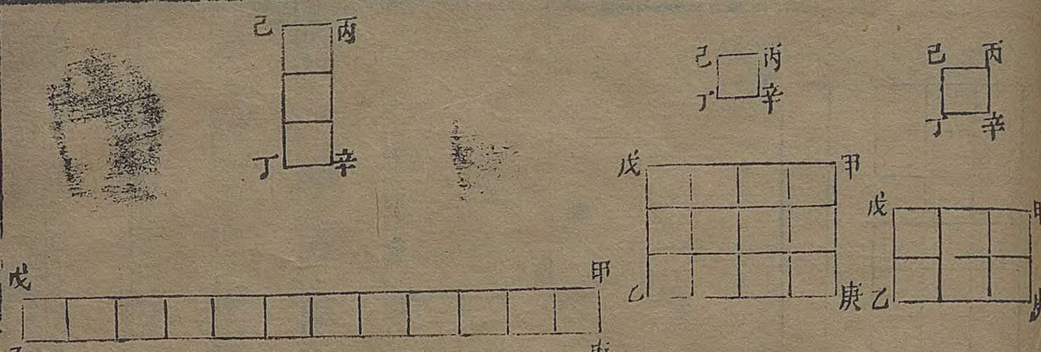
一種減分比例凡有二率依本度各減幾倍所減之分數若等則此二率互相為比仍同於原二率之互相為比謂之等分相減之比例也如有甲乙丙丁二數甲乙三分內減去甲戊一分丙丁三分內減去丙己一分則戊乙己丁互相為比仍同於原甲乙丙丁全數之互相為比因其於原數有相減之分故謂之減分比例也

前所論比例之法凡一十有二雖種種變化不窮其每相當分數所成之率依然一理故其相比之例俱同而皆為相當比例四率也是故線與線為比面與面為比體與體為比據前各種比例之法線之比例若同則為相當比例線面之比例若同則為相當比例面體之比例若同則為相當比例體矣夫線面體

爲類不同雖不能互相爲比假使線面體之毎相當分數若等則按其各類相當分數比之亦爲同理比例率也如甲之六分線與乙之三分線相比丙之六分面與丁之三分面相比戊之六分體與己之三分體相比此三種毎相當分數既俱相等故其比例亦俱相等而六率互爲同理比例可知矣

大凡直角平方面積皆生於二線之度故欲知方面所生比例之分將二形之縱横線分考之即可得而知矣如甲乙丙丁兩方面形甲乙形之甲戊横界比丙丁形之丙己横界大一倍而丙丁形之丙庚縱界比甲乙形之甲辛縱界亦大一倍則甲乙丙丁兩形之分必相等如甲乙大形之甲戊横界比丙丁小形

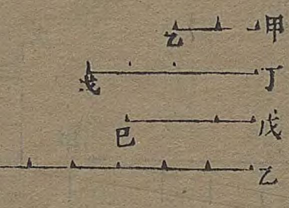
之丙己横界大三倍甲乙大形之甲庚縱界比丙丁小形之丙辛縱界大二倍則大形與小形



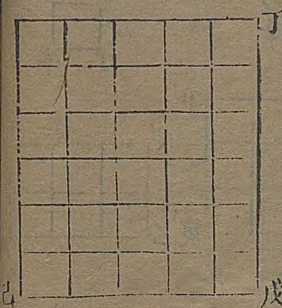
三倍者有二其爲六分可知矣再如甲乙大形之甲戊横界比丙丁小形之丙己横界大四倍甲乙大形之甲庚縱界比丙丁小形之丙辛縱界大三倍則大形與小形四倍者有三其爲十二分可知矣再或甲乙大形之甲戊横線比丙丁小形之丙己横線大十二倍而丙丁小形之丙辛縱線比甲乙大形之甲庚縱線反大三倍則大形之寬雖比小形多十一倍而大形之長又比小形少二倍將此縱横二線之多少較之則大形與小形止爲四分可知矣故凡直角平方面形與他一形相比其比例有二以此形之長與他形之長比之爲一比例以此形之寬與

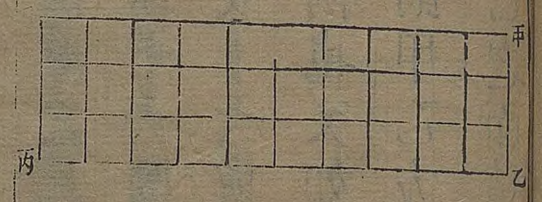
他形之寬比之爲一比例兩形相比之間而兼兩比例者正以平面之積自二線之度生之之故也

凡有相比例四率其二率與三率相乘一率與四率相乘則所得之分數俱相等也如甲乙丁戊戊己乙丙相比例四率甲乙



一率爲二分丁戊二率爲四分戊己三率爲三分乙丙四率爲六分將二率三率相乘一率四率相乘其分數俱得十二也是故四率中凡有三率欲求其不知之一率將兩率之分相乘所得之數以一率之分除之即得其一率矣如甲乙三分爲一率丁戊六分爲二率戊己五分爲三率乙丙十分爲四率今只知一率二率三率之分欲推四率則以二率三率相乘爲丁己三

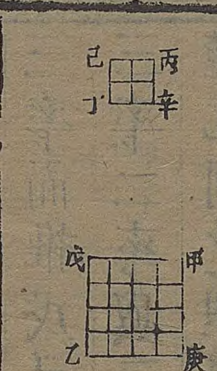




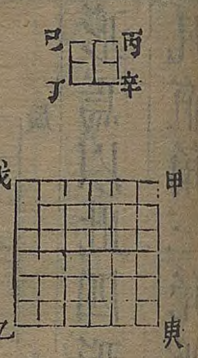
十分乃以甲乙一率除之即得乙丙四率爲十分矣此以小分爲首率者也或知乙丙戊己丁戊之三率而推甲乙之一率則以乙丙十分爲一率戊己五分爲二率丁戊六分爲三率二率與三率相乘一率除之即得甲乙之四率矣此以大分爲首率者也又或知甲乙丁戊乙丙之三率而推戊己之一率則以丁戊爲一率甲乙爲二率乙丙爲三率二率與三率相乘一率除之即得戊己之四率矣此即反推比例之理也又或知戊己乙丙甲乙之三率而推丁戊之一率則以戊己爲一率甲乙爲二率乙丙爲三率二率與三率相乘一率除之即得丁戊之四率矣此即遞轉比例之理也

凡有兩直角方面形其兩界之比例大幾倍者其兩方面之比

例較兩界爲隔一位相加之比例也如甲乙丙丁同式兩方面形甲乙方面之縱橫界比丙丁方面之縱橫界爲二倍則甲乙方面內如丙丁方面之二倍者有二二其二爲四故甲乙方面



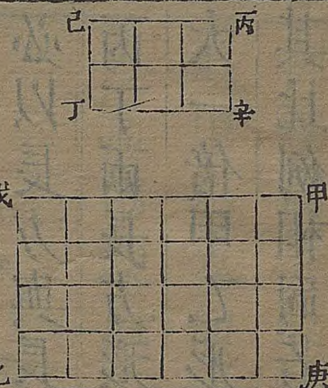
積比丙丁方面積爲四倍凡欲求其比例相連之率則於甲乙形之界上倍之得八分與丙丁方界二分爲比即如甲乙面積十六與丙丁面積四分之比矣夫八與十六四與八二與四皆二分之一之比例而十六隔八與四比八隔四與二比則皆成四分之一之比例故十六與四較之四與二爲兩界上連比例隔一位相加之比例也又如甲乙方面之縱橫界比丙丁方面之縱橫界爲三倍則甲乙方面內如丙丁方面之三倍者有三三其三爲九故甲乙之面積比丙丁面積爲九倍凡欲求其比例相連之率則



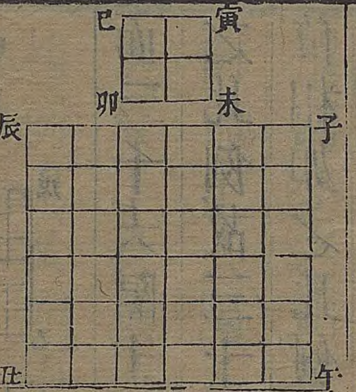
於甲乙形之界三倍之得十八與丙丁界二分爲比即如甲乙面積三十六與丙丁面積四之比矣夫十八與六六與二皆三分之一之比例而三十六隔十二與四比十八隔六與二比則皆成九分之一之比例故三十六與四較之六與二亦爲兩界上連比例隔一位相加之比例也

凡直角方面形有二種一爲長方一爲正方因其縱橫界之比例各異故其所生之形不同而積不得互相爲比也如欲比之必以長方與長方爲比正方與正方爲比其比例始行如甲乙丙丁兩長方形其甲乙形之甲戊橫界比丙丁形之丙己橫界大一倍甲乙形之甲庚縱界比丙丁形之丙辛縱界亦大一倍其比例相同若以甲乙形之甲戊橫界比丙丁形之丙辛縱界

則大三倍以甲乙形之甲庚縱界比丙丁形之丙己橫界止大一分猶不得大一倍其比例則異故甲乙形所生之積爲二十四而丙丁形所生之積爲六俱爲長方形焉又如子丑寅卯兩

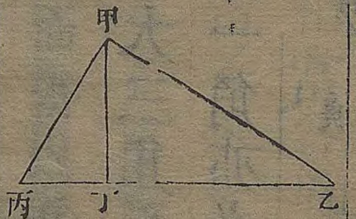


正方形其子丑形之子辰橫界比寅卯形之寅己橫界子丑形之子午縱界比寅卯形之寅未縱界俱大三倍而比例相同復

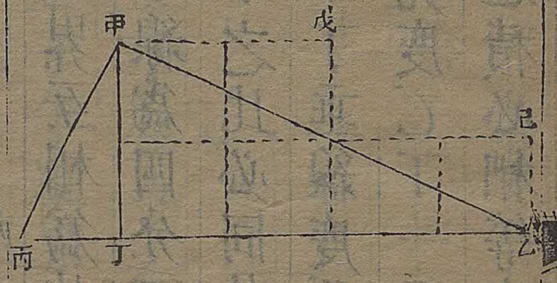


以子丑形之子辰橫界比寅卯形之寅未縱界以子丑形之子午縱界比寅卯形之寅己橫界亦俱大三倍而比例相同故子丑形所生之積爲三十六而寅卯形所生之積爲四俱爲正方形焉以此四形兩兩相比各爲相當比例之四方面也

凡直角三角形自直角至相對界作一垂線則所截之兩段一爲一率一爲三率而所作之垂線爲中率此三率即爲相連比例率也如甲乙丙直角三角形自甲直角至相對乙丙界作一

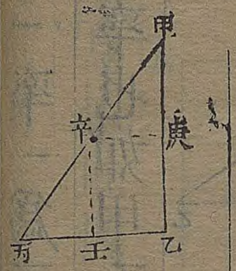


甲丁垂線則截乙丙界爲兩段以乙丁段爲一率則丁丙段爲三率若丁丙段爲一率則乙丁段爲三率而甲丁垂線總爲中率蓋甲乙丁甲丁丙兩三角形爲同式故其相當之乙丁甲丁二界互相爲比即同於甲丁丁丙二界之互相爲比也今以乙丁線爲四分丁丙線爲一分則甲丁線必得二分因四分與二分之比必同於二分與一分之比故爲相連比例三率也若依甲丁垂線度作一戊丁正方形即爲中率自乘之數以所截丁丙一段爲寬度乙丁一段爲長度作一己丁長方形即爲首率末率相乘之數此兩形之積必相等也何也乙丁線既爲一率則甲丁線爲二率甲丁



線復爲三率則丁丙線爲四率此相連比例三率又爲相當比例四率矣因其可爲相當比例四率故二率與三率相乘一率與四率相乘所得之分數相同也此乃首率末率求中率之法也要之首率末率相乘中率相乘其所成之二式雖異因俱自相連比例四率而生故其積相等而得以爲準也

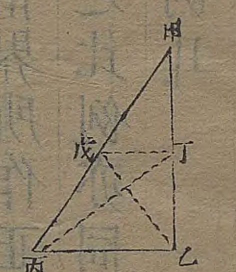
凡大三角形內作小三角形其相當之二角度兩兩相等則其餘一角亦必等謂之同式形也如甲乙丙三角形內作辛庚辛



壬二線遂成甲庚辛壬丙兩小三角形此兩形庚角壬角既與大形乙角同爲直角而大形甲角又爲甲庚辛小形所同用則小形所餘辛角必與大形丙角等大形丙角又爲辛壬丙小形所同形所餘辛角亦必與大形甲角等凡同式之形其積雖不同而其相當各界互相爲比俱爲相當比例之率也是故同式形之相當各界比例既同則同式形之面積比例亦同而爲隔一位相加之比例矣然此不獨三角形爲然也凡各等邊形其邊數同相當角度俱等而相當界之比例又同則皆謂之同式直界形又衆曲線形於其內外作各種直界形其式若同則亦謂之同式曲界形凡此大小各種同式形其相爲比例同於其各相當界所作正方形或三角形之互相爲比也若同式各種體積之比例亦同此理惟較之各界之比例則爲隔二位相加之比例耳

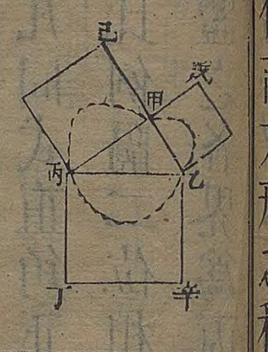
凡三角形在二平行線之間又共立於一線之底則其面積必

兩兩相等如甲乙丙三角形與乙丙平行作一丁戊線復自丁



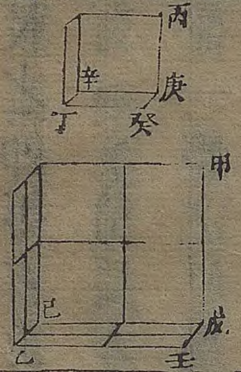
至丙自戊至乙作二線則分爲四三角形此四
形丙乙戊丁丙丁戊兩形既在乙丙丁戊二平
行線之間又共立於丁戊之底其積必等於此
二形各加一所截甲丁戊形卽成甲戊乙甲丁丙兩形其積亦
必等又如甲丁戊乙丁戊兩形其底俱在甲乙一線上而戊角
又共在一處亦爲二平行線所限甲丁戊丙丁戊兩形其底俱
在甲丙一線上而丁角又共在一處亦爲二平行線所限其積
亦無不相等然則各形之積互相爲比亦卽同於各界線之互
相爲比也

凡直角三角形其直角相對界所作方形之積必與兩旁界所
作兩方形之積等而直角相對界所作半圓形與小三角形之



積亦必與兩旁界所作兩半圓形與兩小三角
形之積等如乙丙界所作乙丁方積與甲乙界
所作戊乙方甲丙界所作己丙方兩形之積相
等也其所作半圓形三角形直界與兩旁相等亦同此圖

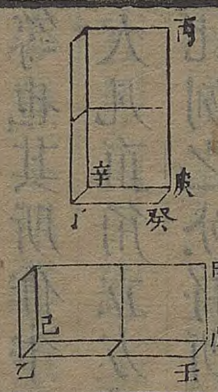
大凡直角立方體積皆生於面線互乘之度故欲知方體所生
比例之分將所比形之長寬與厚詳較之卽可得而知矣如甲
乙丙丁直角立方二體甲乙體之戊己戊壬長寬之度比丙丁
體之庚辛庚癸長寬之度大一倍則戊乙平面底形之內如庚
丁平面底形二倍者有二矣而甲乙體之甲戊厚度又比丙丁



體之丙庚厚度又大一倍則甲乙體形之內如
丙丁體形四倍者有二可知矣是故欲知直角
方體之比例以本體之長寬與厚互相比例以

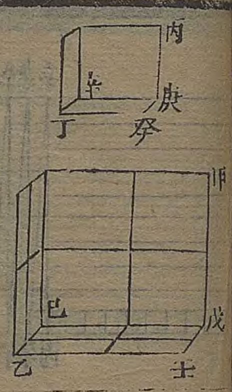
較之，即得直角方體互相為比之比例也。

有兩直角長方體，若將此一體之底度與他一體之底度，又將他一體之厚度與此一體之厚度為比，其比例若同，則此二體之積必等也。如甲乙、丙丁兩直角長方體，甲乙體之戊乙底度比丙丁體之庚丁底度大一倍，而丙丁體之丙庚厚度比甲乙體之甲戊厚度亦大一倍，則甲乙、丙丁二體之積必相等。是故



兩體之底積與厚度相較，則兩體之積可知矣。蓋體積之比例，視其面線，今兩體之底面厚度交互相等如此，其體積不得不等也。

凡同式直角正方體，其體積之比例，比之兩界線之比例為連比例隔二位相加之比例也。如甲乙、丙丁同式兩正方體，甲乙體之各界為丙丁體之各界之二倍，則甲乙體內如丙丁體之二倍者有四，二其四為八，故甲乙體積比丙丁體積大八倍。凡欲求其相連比例之率，則於甲乙體之界四倍之，得八分，與丙丁體界一分為



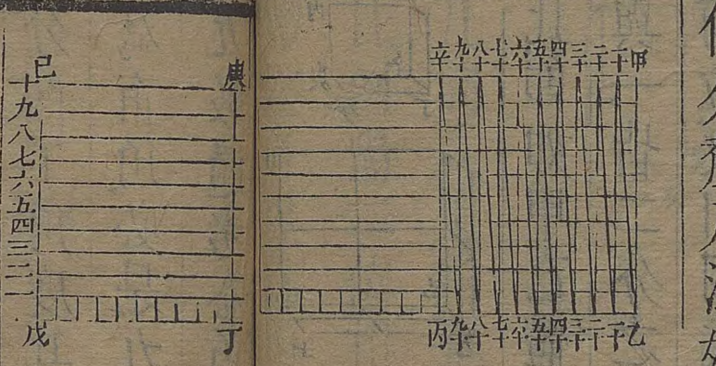
比，即如甲乙體積與丙丁體積之比例矣。夫八與四，四與二，二與一，皆二分之一之比例，今以八與一為比，其間隔四與二之兩位，故曰同式兩體積之比例為兩界上連比例隔二位相加之比例也。若邊為三倍，則面為九倍，而體為二十七倍，亦為隔二位相加之比例也。

凡圓面半徑與球體半徑等者，其圓面積為球體外面積四分之一，而圓面半徑與球體全徑等者，其圓面積與球體外面積等。又球體全徑與長圓體底徑高度等者，則球體之外面積與長圓體之周圍外積等，而球體積為長圓體積三分之二。又尖圓體之底徑與球體全徑等，而高與球之半徑等者，則尖圓體

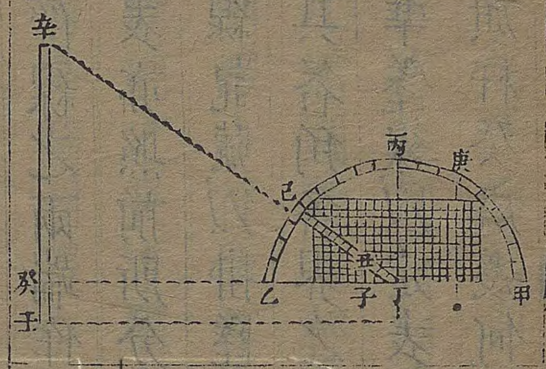
積爲球體積四分之一。又即爲半球體積二分之一也。凡此各種之比例，皆以比例而得者也。

凡橢圓體大徑，與圓球體徑相等者，其二體積之比例，同於橢圓體小徑所作方面與圓球體徑所作方面之比。又即同於函橢圓之長方體與函球之正方體之比。其外面積之比例，又即同於橢圓體小徑與球體全徑之比也。

作分釐尺法。如甲戊尺三寸，每寸欲分爲百釐，則將甲乙與戊己邊，俱平分爲十分，作諸橫線。次將一寸之甲辛乙丙兩邊，俱分爲十分，再於甲辛邊之第一分，作斜線至乙丙邊之乙處。如此作十斜線，俱與第一分斜線平行，即分乙丙之一寸爲一百釐也。何則，甲辛乙丙，皆爲一寸之度，俱平分爲十分矣。今又作橫線斜線各十，其橫斜相交處共有百分，此百分即百釐也。如第一斜線與第一橫線相交處，即爲一釐；與第二橫線相交處，即爲二釐；至第十橫線相交處，即爲十釐。一線十釐，十線百釐矣。



作分數比例測量儀器法。以甲丙乙半圓界，分爲十百八十度，每度作六十分。將丁甲、丁乙、丁丙三半徑線，照所容方界分截開，分爲一百分。於每分上，俱與三半徑平行，作縱橫線。於甲乙徑線之兩端，作兩定表，以圓丁心爲樞，作一遊表。亦照前所分度分，作一百四十分。復於此儀器後面，作一垂線記號，以掛墜線。如庚即戌一全儀器，用以測高深廣遠，可知其各角各界之度矣。如有一辛壬棋杆，欲測其高，則將儀器定準墜線，以定表對地平癸，遊表對旗杆頂辛，乃量儀器中心至旗杆癸處幾何。如有四十丈，則看儀器丁乙線上自丁心至子



得四十分以當四十丈即看與子相對垂線至遊表相交處有幾何如丑子三十分即爲旗杆自辛至癸相當數三十丈也再加癸壬高即得旗杆辛壬之高矣蓋儀器上之丁子丑與所測之丁癸辛爲同式三角形其相當各界之比例俱同故丁子與子丑之比即同於丁癸與癸辛之比也若欲知丁辛弦線數即視遊表自丁至丑相交之處得幾何如有五十分其相當數即爲五十丈也若欲知丁癸辛三角度則視圓界與遊表相交處如己其乙己弧三十五度十三分即丁角度其餘己丙弧五十度四十七分即辛角度而癸角爲直角必是九十度也

九數通考卷首終