Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2017**

Grundkurs Mathematik II

Vorlesung 47

Der Isomorphiesatz

Zum folgenden Satz vergleiche man Satz 7.2. So wie die Dedekind-Peano-Axiome die natürlichen Zahlen eindeutig festlegen, werden die reellen Zahlen durch die Eigenschaften, die in einem vollständigen archimedisch angeordneten Körper zusammengefasst werden, eindeutig charakterisiert.

Satz 47.1. *Es gibt genau einen vollständigen archimedisch angeordneten Körper, die reellen Zahlen. Genauer: Wenn zwei vollständige archimedisch angeordnete Körper $\mathbb{R}_1$ und $\mathbb{R}_2$ vorliegen, so gibt es einen eindeutig bestimmten bijektiven Ringhomomorphismus*

$$\varphi\colon \mathbb{R}_1 \longrightarrow \mathbb{R}_2.$$

Beweis. Wir können davon ausgehen, dass der eine Körper M das Cauchy-Folgen-Modell C/N der reellen Zahlen ist, wobei C den Ring aller rationalen Cauchy-Folgen und N das Ideal der Nullfolgen bezeichnet. Der andere Körper sei mit K bezeichnet. Beide Körper enthalten die rationalen Zahlen. Ein Ringhomomorphismus respektiert auch die Quadrate. In einem vollständigen archimedisch angeordneten Körper sind die nichtnegativen Elemente genau die Quadrate, deshalb muss eine solcher Ringhomomorphismus auch positive Elemente in positive Elemente überführen. Da man in einem archimedisch angeordneten Körper die Konvergenz mit Stammbrüchen allein überprüfen kann, erhält eine solche Abbildung auch die Konvergenz. Da in M nach Konstruktion und Lemma 46.8 jedes Element Limes einer rationalen Cauchy-Folge ist, und diese auch in K wegen der Vollständigkeit konvergiert, kann es nur eine solche Abbildung geben. Diese Überlegung zeigt zugleich, wie man die Abbildung φ ansetzen muss. Ein Element $x \in M$ werde repräsentiert durch eine rationale Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Diese Folge konvergiert in K gegen ein y und man setzt $\varphi(x) = y$. Dies ist wohldefiniert. Wenn man nämlich eine andere repräsentierende Cauchy-Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nimmt, so ist die Differenz zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und dann konvergieren die beiden Folgen in K gegen das gleiche Element.

Aufgrund der Verträglichkeit mit der Konvergenz haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & M = C/N \\ & \psi \searrow & \downarrow \varphi \\ & & K \end{array} ,$$

wobei ψ eine Cauchy-Folge auf ihren Limes in K abbildet. Nach Lemma 44.11 ist diese Abbildung ein Ringhomomorphismus. Da die horizontale Abbildung surjektiv ist, ist auch φ ein Ringhomomorphismus.

Die Injektivität gilt für jeden Ringhomomorphismus zwischen Körpern. Zum Nachweis der Surjektivität von φ sei $y \in K$. Nach Korollar 28.10 gibt es eine Dezimalbruchfolge, die gegen y konvergiert. Da diese Dezimalbruchfolge eine rationale Cauchy-Folge ist, gehört sie zu C und definiert ein Element in M, das durch φ auf y abgebildet wird. Insgesamt ist also φ ein bijektiver Ringhomomorphismus. □

Nachdem wir nachgewiesen haben, dass die reellen Zahlen durch ihre axiomatisch fixierten Eigenschaften eindeutig festgelegt sind, werden wir in Zukunft nur noch mit diesen Axiomen und daraus abgeleiteten Eigenschaften arbeiten, die Konstruktion der reellen Zahlen mit Hilfe der Cauchy-Folgen wird in den Hintergrund treten. Den Körper der reellen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}$.

Definition 47.2. Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x \notin \mathbb{Q}$ heißt eine *irrationale Zahl*.

Monotone Folgen

Korollar 47.3. *Eine beschränkte und monotone Folge in* $\mathbb{R}$ *konvergiert.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Folge wachsend und nach oben beschränkt oder fallend und nach unten beschränkt. Nach Lemma 45.7 liegt eine Cauchy-Folge vor, und diese konvergiert in $\mathbb{R}$. □

Zifferndarstellung reeller Zahlen

Eine Folge der Form
$$x_n = \frac{a_n}{10^n}$$
mit $a_n \in \mathbb{Z}$ und
$$\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} < \frac{a_n + 1}{10^n}$$
heißt Dezimalbruchfolge. Eine Ziffernfolge (eine Ziffernentwicklung) z_{-i}, $i \in \mathbb{N}_+$, mit $z_{-i} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ definiert die Folge
$$x_n = \sum_{i=1}^{n} z_{-i} 10^{-i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_{-i} 10^{n-i}}{10^n} = \frac{a_n}{10^n}$$
mit
$$a_n := \sum_{i=1}^{n} z_{-i} 10^{n-i}.$$

Inwiefern stellt eine solche Dezimalbruchfolge eine reelle Zahl dar und inwiefern ist die Darstellung eindeutig? Zu jedem Element $x \in K$ in einem archimedisch angeordneten Körper K gibt es nach Verfahren 28.6 eine Dezimalbruchfolge, nämlich die durch

$$x_n = \lfloor x \cdot 10^n \rfloor \cdot 10^{-n}$$

gegebene Folge, die nach Korollar 28.10 gegen x konvergiert.

Satz 47.4. (1) *Jede Dezimalbruchfolge konvergiert gegen eine eindeutig bestimmte reelle Zahl.*

(2) *Zu jeder reellen Zahl $x \geq 0$ konvergiert die durch*

$$x_n = \lfloor x \cdot 10^n \rfloor \cdot 10^{-n}$$

gegebene Dezimalbruchfolge gegen x.

(3) *Zwei verschiedene Dezimalbruchfolgen $x_n = \frac{a_n}{10^n} = \sum_{i=0}^n w_{-i}10^{-i}$ und $y_n = \frac{b_n}{10^n} = \sum_{i=0}^n z_{-i}10^{-i}$ konvergieren genau dann gegen die gleiche Zahl x, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit*

$$w_{-i} = z_{-i}$$

für $-i > -k$,

$$z_{-k} \neq 9$$

und

$$w_{-k} = z_{-k} + 1$$

und

$$w_{-i} = 0$$

und

$$z_{-i} = 9$$

für $-i < -k$ (oder umgekehrt).

Beweis. (1) Dies folgt aus Lemma 45.4 und der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

(2) Dies wurde in Korollar 28.10 bewiesen.

(3) Eine Dezimalbruchfolge der Form

$$\frac{10^n - 1}{10^n}$$

konvergiert gegen 1, daher konvergieren die beiden Folgen gegen den gleichen Grenzwert. Wenn die beiden Cauchy-Folgen gegen die gleiche reelle Zahl konvergieren, so muss ihre Differenz eine Nullfolge sein. Eine Dezimalbruchfolge erfüllt die Abschätzungen

$$\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} < \frac{a_n + 1}{10^n},$$

somit gilt für den Grenzwert x insbesondere

$$\frac{a_n}{10^n} \leq x \leq \frac{a_n + 1}{10^n}.$$

Wenn sich die beiden Dezimalbruchfolgen unterscheiden, so gibt es einen vordersten Index $-k$, wo sie sich unterscheiden. Es ist dann (ohne Einschränkung) $a_k > b_k$. Wenn sie gegen den gleichen Grenzwert konvergieren, so muss wegen den Abschätzungen

$$x = \frac{b_k + 1}{10^k} = \frac{a_k}{10^k}$$

sein. Dies kann nur bei den angegebenen Bedingungen gelten.

$\square$

Bemerkung 47.5. Es ist nicht trivial, aus den Ziffernentwicklungen von reellen Zahlen die Ziffernentwicklung ihrer Summe oder ihres Produktes abzulesen. Die Ziffernentwicklung ist eine konvergente Dezimalbruchfolge, und für jede Folge ist die Summe und das Produkt eindeutig definiert. Man weiß, dass das Ergebnis wieder eine konvergente Folge ist, und so ist die Summe und das Produkt von Dezimalbruchfolgen eindeutig definiert. Daraus kann man aber nicht unmittelbar ablesen, wie die (kanonische) Dezimalbruchfolge zur Summe oder zum Produkt aussieht. Insbesondere kann man die ersten n Nachkommastellen der Summe *nicht* aus den ersten n Nachkommastellen der beteiligten Summanden ablesen. Wenn beispielsweise von den Zahlen

$$x = 0,22222222222222222222...$$

und

$$y = 0,77777777777777777777...$$

die ersten zwanzig Nachkommastellen bekannt sind, so hat man die Abschätzungen

$$0,22222222222222222222 \leq x \leq 0,22222222222222222223$$

bzw.

$$0,77777777777777777777 \leq y \leq 0,77777777777777777778$$

und damit hat man auch die Abschätzung

$$0,99999999999999999999 \leq x + y \leq 1,00000000000000000001.$$

Man weiß aber nicht, ob die ersten Ziffern Neuen oder Nullen sind, und das weiß man auch dann im Allgemeinen nicht, wenn man noch mehr Ziffern der Zahlen kennt.

Bei der Multiplikation ist das Problem noch deutlicher. Selbst wenn ein Faktor z eine natürliche Zahl, so kann man die Ziffernentwicklung eines Produktes zw nicht aus den entsprechenden Ziffern von w ablesen. Sei beispielsweise $z = 3$ und

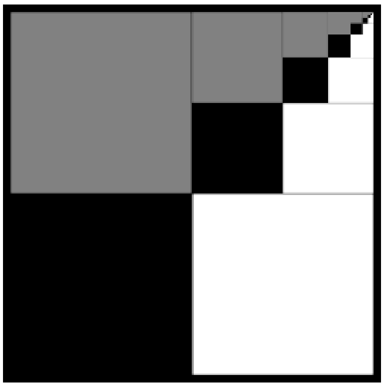
$$w = 0,33333333333333333333....$$

Dann weiß man nur

$$0,99999999999999999999 \leq zw \leq 1,00000000000000000002,$$

man hat aber keine Kenntnis der ersten Ziffern des Produktes.

Die geometrische Reihe



Dieses Bild veranschaulicht das Verhalten der geometrischen Reihe zu $x = \frac{1}{4}$. Die Grundseite des Quadrates sei 2, dann passt die geometrische Reihe dreimal in dieses Quadrat rein. Der jeweilige Flächeninhalt der drei Reihen ist $\frac{4}{3}$.

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ heißt *geometrische Reihe* zu $x \in \mathbb{R}$, es geht also um die Summe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots .$$

Die Konvergenz hängt wesentlich vom Betrag von x ab.

Satz 47.6. *Für alle reellen Zahlen x mit $|x| < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Beweis. Für jedes x und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt die Beziehung

$$(x-1)\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = x^{n+1} - 1$$

und daher gilt für die Partialsummen die Beziehung (bei $x \neq 1$)

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

Für $n \to \infty$ und $|x| < 1$ konvergiert dies gegen $\frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$. $\square$

Rationale Zahlen und periodische Ziffernentwicklung

Für einen Bruch $\frac{a}{b}$ zu $a, b \in \mathbb{N}_+$ liefert der Divisionsalgorithmus nach Lemma 28.3 (3) eine periodische Entwicklung $z, z_{-1}z_{-2}\ldots$. die nach Lemma 28.8 die Dezimalbruchfolge zur Zahl $\frac{a}{b}$ ist. Zu einer rationalen Zahl gehört also eine periodische Ziffernentwicklung. Die Umkehrung gilt ebenfalls.

Satz 47.7. *Eine reelle Zahl ist genau dann eine rationale Zahl, wenn sie eine periodische Ziffernentwicklung (im Dezimalsystem) besitzt.*

Beweis. Die Periodizität der Ziffernentwicklung zu $\frac{a}{b}$ wurde in Lemma 28.3 (3) in Verbindung mit Korollar 28.11 bewiesen. Es liege eine periodische Ziffernentwicklung für die reelle Zahl x vor. Da sich die Eigenschaft, eine rationale Zahl zu sein, weder bei Multiplikation mit einer rationalen Zahl $\neq 0$ noch bei Addition mit einer rationalen Zahl ändert, können wir sofort annehmen, dass die Ziffernentwicklung die Form

$$0, z_{m-1}z_{m-2}\cdots z_0 z_{m-1}z_{m-2}\cdots z_0 z_{m-1}z_{m-2}\cdots z_0\cdots$$

besitzt. Die dadurch definierte Zahl können wir als

$$\left(\sum_{i=0}^{m-1} z_i 10^i\right) \cdot 0,00\ldots 00100\ldots 00100\ldots 00100\ldots 001\ldots$$

auffassen, wobei die Einsen an der m-ten, $2m$-ten u.s.w. Stelle stehen. Wir müssen uns also nur noch um periodische Ziffernentwicklungen von dieser speziellen Art kümmern. Wir betrachten also die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^m}\right)^i .$$

Nach Satz 47.6 konvergiert dies gegen

$$\frac{1}{1-\left(\frac{1}{10}\right)^m} - 1 = \frac{1}{\left(\frac{99\cdots 99}{10^m}\right)} - 1 = \frac{10^m}{99\cdots 99} - 1 = \frac{1}{99\cdots 99},$$

wobei jeweils m Neunen vorkommen. Diese Zahl ist also rational. $\square$

Die entsprechende Aussage gilt für die Ziffernentwicklung zu jeder Basis, nicht nur im Dezimalsystem. Eine reelle Zahl mit einer periodischen Ziffernentwicklung wird so geschrieben, dass man einen Strich über die Periode macht, also beispielsweise

$$351,0528\overline{82700}\,.$$

Beispiel 47.8. Wir bestimmen mit Hilfe des Beweises zu Satz 47.7 die rationale Zahl, die durch die periodische Zifferententwicklung

$$0,7\overline{41}$$

gegeben ist. Es ist

$$\begin{aligned} 0,7\overline{41} &= 0,7 + 0,0\overline{41} \\ &= 0,7 + \frac{1}{10}\cdot 0,\overline{41} \\ &= \frac{7}{10} + \frac{1}{10}\cdot 41 \cdot 0,\overline{01} \\ &= \frac{7}{10} + \frac{1}{10}\cdot 41 \cdot \frac{1}{99} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{7}{10} + \frac{41}{990} \\
&= \frac{693 + 41}{990} \\
&= \frac{734}{990} \\
&= \frac{367}{495}.
\end{aligned}
$$

Abbildungsverzeichnis