Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2023/24**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 17

Übungsaufgaben

Aufgabe 17.1. Bestimme sämtliche Taylor-Polynome der Funktion

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

im Entwicklungspunkt $a = 3$.

Aufgabe 17.2. Bestimme das Polynom

$$f(z) = z^3 + 3z^2 - 7z - 4$$

in der neuen Variablen $z - 2$ (also das umentwickelte Polynom) auf zwei verschiedene Arten, nämlich

a) direkt durch Einsetzen,

b) über das Taylor-Polynom im Entwicklungspunkt 2.

Aufgabe 17.3. Bestimme das Taylor-Polynom der Ordnung 4 zur Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ im Entwicklungspunkt $a = 3$.

Aufgabe 17.4.*

Bestimme das Taylor-Polynom der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Entwicklungspunkt $a = 2$ der Ordnung 4.

Aufgabe 17.5. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 3 der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 5}{x - 2}$$

im Entwicklungspunkt 0.

Aufgabe 17.6. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 4 der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sin x \cos x,$$

im Nullpunkt.

Aufgabe 17.7.*

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

im Reellen.

a) Bestimme den Definitionsbereich von f.

b) Skizziere f für x zwischen -2π und 2π.

c) Bestimme die ersten drei Ableitungen von f.

d) Bestimme das Taylor-Polynom der Ordnung 3 von f im Punkt $\frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 17.8.*

Bestimme das Taylor-Polynom der Ordnung 3 zur Funktion

$$f(x) = x \cdot \sin x$$

im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 17.9. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Vergleiche die polynomiale Interpolation zu $n+1$ gegebenen Punkten und die Taylor-Polynome vom Grad n zu einem Punkt.

Aufgabe 17.10. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine im Punkt a n-fach differenzierbare Funktion. Zeige, dass das n-te Taylor-Polynom zu f im Punkt a, geschrieben in der verschobenen Variablen $x-a$, gleich dem n-ten Taylor-Polynom der Funktion $g(x) = f(x+a)$ im Nullpunkt (geschrieben in der Variablen x) ist.

Aufgabe 17.11. Man mache sich klar, dass man zu einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das n-te Taylor-Polynom von f im Entwicklungspunkt b nicht aus dem n-ten Taylor-Polynom in einem Entwicklungspunkt a bestimmen kann.

Aufgabe 17.12. Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynome n-ten Grades und es seien $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ Punkte und $n_1, \ldots, n_k \geq 1$ natürliche Zahlen mit

$$\sum_{j=1}^{k} n_j > n.$$

Die Ableitungen von f und g in den Punkten a_j sollen bis einschließlich zur $(n_j - 1)$-ten Ableitung übereinstimmen. Zeige $f = g$.

Man mache sich zuerst die Aussage bei $k = 1$ und $n_1 = n+1$ und bei $k = n+1$ und $n_j = 1$ für alle j klar.

Aufgabe 17.13. Es sei $f(x) := \frac{x^2-x+5}{x^2+3}$. Bestimme ein Polynom h vom Grad ≤ 3, das in den beiden Punkten $x = 0$ und $x = 1$ die gleichen linearen Approximationen wie f besitzt.

Aufgabe 17.14.*

Es sei $f(x) = \sin x$. Bestimme Polynome P, Q, R vom Grad ≤ 3, die jeweils folgende Bedingungen erfüllen.

(a) P stimmt mit f an den Stellen $-\pi, 0, \pi$ überein.

(b) Q stimmt mit f in 0 und in π bis zur ersten Ableitung überein.

(c) R stimmt mit f in $\pi/2$ bis zur dritten Ableitung überein.

Aufgabe 17.15. Bestimme die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion für einen beliebigen Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 17.16. Es sei $p \in \mathbb{R}[Y]$ ein Polynom und

$$g\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto g(x) = p\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass die Ableitung $g'(x)$ ebenfalls von der Form

$$g'(x) \,=\, q\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

mit einem weiteren Polynom q ist.

Aufgabe 17.17. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ die Eigenschaft

$$\lim_{x \in \mathbb{R}_+,\, x \to 0} f^{(n)}(x) \,=\, 0$$

besitzt.

Aufgabe 17.18. Bestimme das Taylor-Polynom der dritten Ordnung zur Funktion $\frac{1}{x^2+1}$ im Nullpunkt mit dem in Bemerkung 17.9 beschriebenen Potenzreihenansatz.

Aufgabe 17.19.*

Es sei

$$f(x) \,=\, -3x + x^3.$$

Wegen

$$f'(x) \,=\, -3 + 3x^2$$

ist diese Funktion auf dem offen Intervall $]-1,1[$ streng fallend und damit injektiv (mit dem Bildintervall $]-2,2[$). Dabei ist $f(0) \,=\, 0$. Es sei

$$g(y) \,=\, \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k$$

die Umkehrfunktion, die wir als eine Potenzreihe ansetzen. Bestimme aus der Bedingung

$$(g(f(x)) \,=\, x$$

die Koeffizienten b_0, b_1, b_2, b_3, b_4.

Aufgabe 17.20. Bestimme das Taylor-Polynom bis zur vierten Ordnung der Umkehrfunktion des Sinus im Punkt 0 mit dem in Bemerkung 17.11 beschriebenen Potenzreihenansatz.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.21. (4 Punkte)

Bestimme die Taylor-Polynome im Entwicklungspunkt 0 bis zum Grad 4 der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sin(\cos x) + x^3 \exp\left(x^2\right).$$

Aufgabe 17.22. (5 Punkte)

Es sei $f(x) := \frac{x^2+2x+1}{x^2+5}$. Bestimme ein Polynom h vom Grad ≤ 3, das in den beiden Punkten $x = 0$ und $x = -1$ die gleichen linearen Approximationen wie f besitzt.

Aufgabe 17.23. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der Funktion

$$f\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = (\sin x)(\cos x),$$

hinsichtlich Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraphen.

Aufgabe 17.24. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der Funktion

$$f\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \sin^3 x - \frac{1}{4}\sin x,$$

hinsichtlich Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraphen.

Aufgabe 17.25. (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom bis zur vierten Ordnung des natürlichen Logarithmus im Entwicklungspunkt 1 mit dem in Bemerkung 17.11 beschriebenen Potenzreihenansatz aus der Potenzreihe der Exponentialfunktion.

Aufgabe 17.26. (6 Punkte)

Zu $n \geq 3$ sei A_n der Flächeninhalt eines in den Einheitskreis eingeschriebenen gleichmäßigen n-Eckes. Zeige $A_n \leq A_{n+1}$.

Abbildungsverzeichnis