

Andrés Zarabozo Martínez

# **Aerodinámica de los Años 20. Problemas**

Ingeniería Aeronáutica  
ETSEIAT  
2012

### Acerca de estos apuntes

Estos apuntes se han realizado para cubrir el temario de la asignatura “Aerodinámica Básica”, que se imparte en el tercer curso de Ingeniería Aeronáutica en la Escola Tècnica Superior d’Enginyeries Industrial i Aeronàutica de Terrassa, de la Universitat Politècnica de Catalunya (ETSEIAT – UPC). Esta asignatura también es conocida como aerodinámica de los años 20 y, ya que en aquella época no existían calculadoras, se recomiendan usar tablas de logaritmos para realizar posibles operaciones matemáticas.

### Licencia

Esta obra está bajo una licencia Attribution-ShareAlike 3.0 Unported (CC BY-SA 3.0) de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite:

[http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.es\\_ES](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.es_ES)

En líneas generales:

Es libre de:

- Compartir – Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.
- Transformar la obra y crear obras derivadas.
- Hacer un uso comercial de esta obra.

Bajo las condiciones siguientes:

- **Reconocimiento** — Debe reconocer al autor de la obra original (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoya el uso que hace de su obra).
- **Compartir bajo la Misma Licencia** — Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.



## 0. Índice

0. Índice.....	3
1. Ecuaciones generales.....	5
Problema 1. Cálculo de la resistencia mediante la exploración de la estela.....	7
Problema 2. Cálculo de la sustentación utilizando la circulación.....	11
Problema 3. Volumen de control siguiendo línea de corriente.....	13
2. Movimiento potencial bidimensional.....	16
Problema 1. Flujo alrededor de una pared con una esquina.....	18
Problema 2. Flujo generado por cuatro torbellinos.....	21
Problema 3. Manantial en presencia de dos paredes.....	25
Problema 4. Torbellino situado en el interior de un círculo.....	28
Problema 5. Torbellino sobre el suelo.....	31
Problema 6. Dos torbellinos, un sumidero y una fuente.....	35
3. Perfiles en régimen incompresible.....	38
Problema 1. Tres perfiles.....	40
Problema 2. Perfil delgado con curvatura cúbica.....	43
Problema 3. Ángulo de sustentación nula.....	46
Problema 4. Perfil con función polinómica de cuarto orden.....	49
Problema 5. Obtención la curvatura de un perfil.....	53
Problema 6. Ángulo de ataque de equilibrio.....	57
Problema 7. Perfil con flap.....	59
Problema 8. Perfil con articulación en el borde de salida.....	62
4. Perfiles en régimen compresible.....	65
Problema 1. Perfil con forma parabólica.....	68
Problema 2. Fuerza de succión en régimen incompresible.....	71
Problema 3. Sustentación de un perfil en régimen compresible.....	73
Problema 4. Variación de los coeficientes debido al parámetro $a$ .....	75
Problema 5. Centro de presiones de un perfil en vuelo supersónico.....	78
Problema 6. Ángulo de equilibrio de un perfil supersónico.....	81
Problema 7. Ángulo $\theta$ de equilibrio de un perfil supersónico.....	83
Problema 8. Perfil supersónico volando sobre el suelo.....	85
Problema 9. Perfil supersónico en un túnel poroso.....	90

Problema 10. Perfil supersónico volando sobre el suelo.....	95
5. Flujo potencial tridimensional .....	99
Problema 1. Comparación entre configuración axisimétrica y bidimensional .....	99
Problema 2. Velocidad debida a dos anillos de torbellinos .....	103
Problema 3. Herradura de torbellinos .....	106
Problema 4. Movimiento axisimétrico definido por una función de corriente .....	108
6. Alas de gran alargamiento .....	111
Problema 1. Ala de gran alargamiento con perfiles sin espesor .....	114
Problema 2. Resistencia inducida mediante la exploración de la estela .....	119
Problema 3. Ala con distribución de sustentación medida para dos $\alpha$ .....	121
Problema 4. Ala larga con torsión anti simétrica.....	126
Problema 5. Forma en planta rectangular .....	129
Problema 6. Número de Mach de vuelo de un ala elíptica.....	132
Problema 7. Ángulo de ataque del ala a Mach 0.6 .....	135
Problema 8. Ala con ley de distribución de la cuerda.....	138
7. Curva polar.....	141
Problema 1. Avión con ala recta y elíptica en túnel de viento .....	141
Problema 2. Polar de un perfil con entrada en pérdida .....	145
8. Métodos de paneles.....	148
Problema 1. Método del potencial constante .....	150
Problema 2. Método de los torbellinos discretos.....	154
Problema 3. Punto de control para el método de torbellinos discretos .....	156
Problema 4. Método de potencial constante en una placa plana.....	158

# 1. Ecuaciones generales

Este tema es de los más importantes dentro de los estudios aerodinámicos y es el más útil. En este tema se estudian las ecuaciones generales de la mecánica de fluidos. Estas ecuaciones son muy simples pero es muy difícil llegar a una solución analítica en la mayoría de los casos reales.

Se deben de tener en cuenta algunos puntos:

- Se suele trabajar en dos dimensiones por lo que las fuerzas y momentos están definidos por unidad de distancia así como las superficies de control son líneas y los volúmenes de control son superficies por unidad de distancia.
- En este tema para escribir vectores se utilizan las letras negritas.
- Se trabaja en casos estacionarios por lo que cualquier derivada respecto al tiempo es nula.

Se estudian las siguientes cuatro ecuaciones:

- Conservación de la materia o continuidad

Esta ecuación se basa en el principio básico de que la densidad en un volumen de control solo varía debido a los flujos entrantes y salientes. La ecuación integral es:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (1.0.1)$$

En forma diferencial queda:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1.0.2)$$

- Conservación de la cantidad de movimiento.

Esta ecuación se suelen escribir las ecuaciones definidas en una dirección concreta, pudiendo escribir tantas ecuaciones como dimensiones se tengan. Esta ecuación se basa en el segundo principio de Newton, es decir, la variación de la cantidad de movimiento es debido a los cambios en las fuerzas que se ejercen sobre el volumen de control. Existen tres fuerzas que pueden actuar:

- Las fuerzas de presión, normales a la superficie
- Los esfuerzos viscosos, tangenciales a la superficie
- Y las fuerzas de volumen como pueden ser la masa o fuerzas electromagnéticas

Si el Reynolds es alto se suelen despreciar los esfuerzos viscosos y las fuerzas de volumen. Los esfuerzos viscosos en ningún caso se puede despreciar si se estudia la capa límite (aunque no es el caso en este tema). Las ecuaciones integral y diferencial son:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} \, dV + \int_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS = - \int_S p \mathbf{n} \, dS + \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}' \, dS + \int_V \rho \mathbf{F}_m \, dV \quad (1.0.3)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{V} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \rho \mathbf{F}_m \quad (1.0.4)$$

- Conservación de la energía.

La ecuación de conservación de la energía esta basada en el primer principio de la termodinámica. La ecuación diferencial es:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \nabla \cdot (k\nabla T) + p\nabla \cdot \mathbf{V} + \Phi_v - \nabla \cdot \mathbf{q}_r + Q_{rq} \quad (1.0.5)$$

- Segundo principio de la termodinámica.

El segundo principio de la termodinámica forma una relación entre la energía interna específica, la presión, la densidad, la temperatura y la entropía específica.

$$\frac{De}{Dt} = -p \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) + T \frac{Ds}{Dt} \quad (1.0.6)$$

Además de estas cuatro ecuaciones se suelen usar otras ecuaciones como por ejemplo la ecuación del gas perfecto  $p = \rho RT$  (donde  $R = 287 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  para el aire).

También es importante conocer la ecuación de Bernoulli. Esta ecuación solo se puede usar si: no hay viscosidad, el flujo es incompresible y estacionario y solo se puede usar a lo largo de una línea de corriente o en un flujo irrotacional.

$$\frac{1}{2} \rho U^2 + p = cte \quad (1.0.7)$$

### Problema 1. Cálculo de la resistencia mediante la exploración de la estela

Se desea determinar la resistencia de un objeto mediante el método de exploración de estela

La Figura 1.1.1 muestra un obstáculo bidimensional sometido a una corriente incidente de densidad  $\rho$ , velocidad  $U_\infty$  y un número de mach alto. A una cierta distancia del obstáculo (donde la presión vuelve a ser uniforme y de valor  $p_\infty$ ) se mide el perfil de velocidad que tiene la siguiente forma:

$$U = U_\infty - u_d(x, z) \tag{1.1.1}$$

Donde  $u_d$  es la pérdida de velocidad en la estela y es mucho menor que  $U_\infty$ . Se puede expresar como:

$$u_d(x, z) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{x}} \cos \pi z & |z| \leq \frac{b(x)}{2} \\ 0 & |z| > \frac{b(x)}{2} \end{cases} \tag{1.1.2}$$

Siendo  $A$  una constante conocida y  $b(x)$  el ancho de la estela viscosa del obstáculo.

Mediante la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento a un volumen de control adecuado, se pide:

- a) Calcular la resistencia aerodinámica  $d$  del obstáculo en función de  $A$  y de  $b(x)$ .
- b) Deducir la expresión de la ley de ensanchamiento de la estela lejana  $b(x)$  en función de la resistencia  $d$ , del parámetro  $A$  y de la distancia  $x$ .

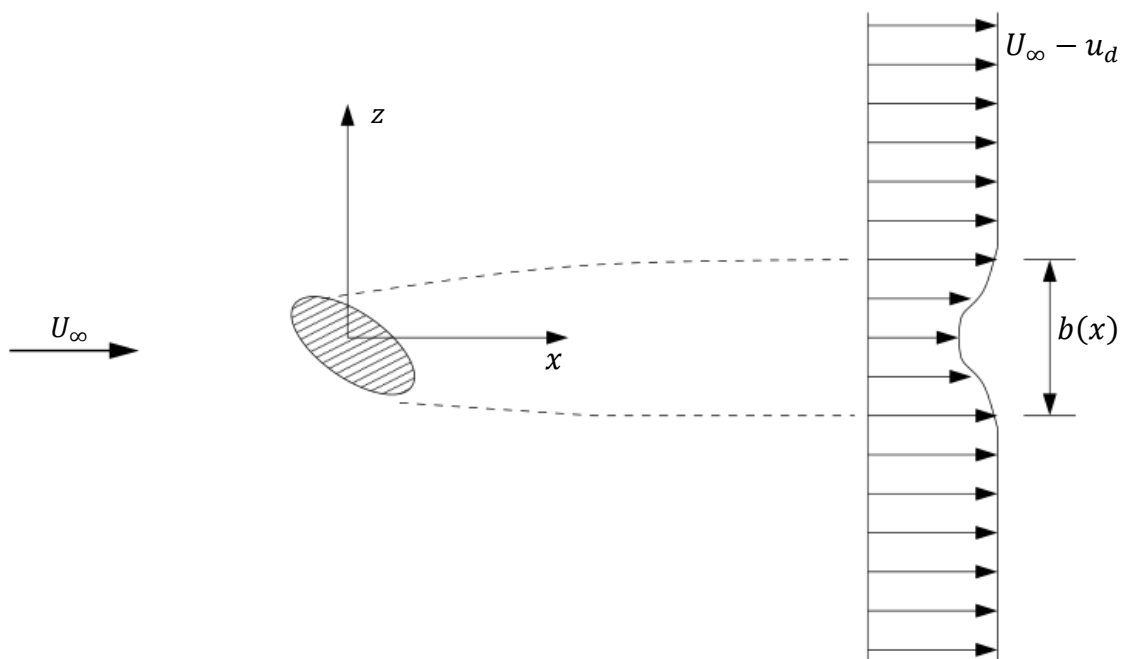


Figura 1.1.1. Diagrama del problema.

**Resolución**

a) Resistencia aerodinámica

El método de exploración de estela es utilizado en túneles de viento para determinar el coeficiente de resistencia de perfiles. Es posible obtener el perfil de velocidades en el plano perpendicular a la estela utilizando una sonda de hilo caliente o una sonda pitot. Una vez obtenido el perfil de velocidades se utiliza la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento para obtener el coeficiente de resistencia ya que la pérdida de cantidad de movimiento en la estela es debida a la resistencia del obstáculo.

Lo primero que se debe hacer es seleccionar un volumen de control apropiado. Para simplificar los cálculos se selecciona un volumen de control cuadrado con una superficie perpendicular al viento incidente, otra perpendicular al perfil de velocidades aguas abajo y dos superficies horizontales. Para que el volumen de control sea simplemente conexo se debe tener el obstáculo fuera del volumen de control y se debe conectar esta superficie que rodea el obstáculo a la descrita antes. En la Figura 1.1.2 se puede ver el volumen de control con las siete superficies definidas y el sentido de integración para la formulación integral.

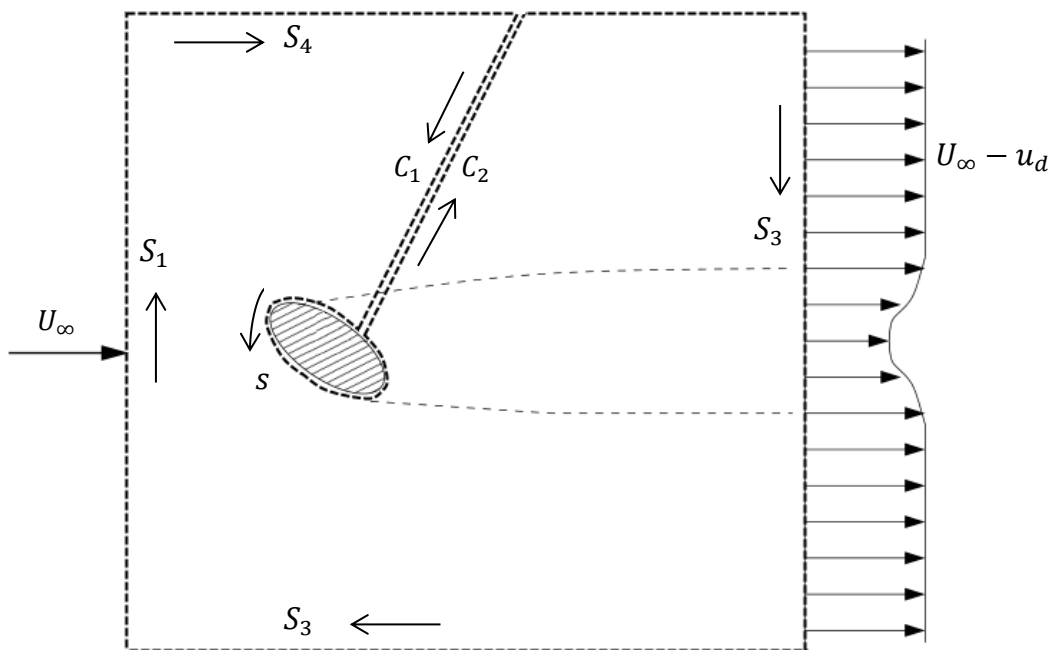


Figura 1.1.2. Volumen de control y sentido de integración.

Se utiliza ahora la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en el eje  $x$ . Esta ecuación es una transcripción de la segunda ley de Newton a un movimiento de fluido. Es decir, la variación de la cantidad de movimiento de un fluido en un volumen de control es debido a las fuerzas que actúan sobre el mismo. Pueden haber tres tipos de fuerzas actuando sobre el fluido: la presión sobre la superficie del volumen de control (fuerza normal), la fricción sobre la superficie de control (fuerza tangencial) y las fuerzas másicas dentro del volumen de control. En forma integral la ecuación es:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} \, dV + \int_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS = - \int_S p \mathbf{n} \, dS + \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}' \, dS + \int_V \rho \mathbf{F}_m \, dV \quad (1.1.3)$$



Como el número de Reynolds es suficientemente alto se pueden despreciar las fuerzas másicas y los efectos viscosos frente a los esfuerzos de presión. Además si se considera flujo estacionario se elimina también la dependencia del tiempo. La ecuación simplificada es:

$$\int_{S+C+S} \rho u_x (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = - \int_{S+C+S} p n_x dS \quad (1.1.4)$$

La resistencia generada por el obstáculo está situada lógicamente en la superficie que lo rodea y se puede definir como una caída de presión a través del obstáculo. Esto es debido al principio de acción y reacción es decir, el esfuerzo que ejerce el obstáculo sobre el fluido es contrario al esfuerzo que ejerce el fluido sobre el obstáculo (debido a la diferencia de presión).

$$d = \int_S p n_x dS \quad (1.1.5)$$

Como se indica en el enunciado la presión en  $S_3$  es la misma que aguas arriba del obstáculo, y además para  $S_2$  y  $S_4$  se tiene  $n_x$  nulo.

$$\int_S p n_x dS = \int_{S_1} p_\infty dz + 0 - \int_{S_3} p_\infty dz + 0 = 0 \quad (1.1.6)$$

Las superficies  $C_1$  y  $C_2$  no contribuyen a la fuerza sobre el obstáculo ya que al integrar se recorre dos veces pero en dirección opuesta y las dos contribuciones se cancelan entre sí.

En las superficies alejadas  $S_2$  y  $S_4$  la velocidad se define como  $\mathbf{u} = (U_\infty + u, w)$  donde  $u$  y  $w$  son perturbaciones debidas al obstáculo y son muy pequeñas en respecto a  $U_\infty$ . Como ejemplo se desarrolla la integral de la cantidad de movimiento sobre  $S_2$ , para las demás superficies el procedimiento es idéntico. El vector normal sobre esta superficie es el vector unitario que apunta hacia afuera de la superficie  $\mathbf{n} = (0, 1)$ .

$$\int_{S_2} \rho u_x (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dx = \int_{S_2} \rho (U_\infty + u_2) \left[ (U_\infty + u_2 \quad w_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] dx = \int_{S_2} \rho (U_\infty + u_2) w_2 dx \quad (1.1.7)$$

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, habiendo introducido todas las simplificaciones queda:

$$- \int_{S_1} \rho U_\infty^2 dz + \int_{S_2} \rho (U_\infty + u_2) w_2 dx + \int_{S_3} \rho (U_\infty - u_d(z))^2 dz - \int_{S_4} \rho (U_\infty + u_4) w_4 dx = -d \quad (1.1.8)$$

Se tiene que tener en cuenta que las velocidades  $u, w$  y  $u_d$  son muy pequeñas respecto a  $U_\infty$  por lo que cualquier multiplicación entre ellas es despreciable.

$$- \int_{S_1} \rho U_\infty^2 dz + \int_{S_2} \rho U_\infty w_2 dx + \int_{S_3} \rho (U_\infty^2 - 2U_\infty u_d(z)) dz - \int_{S_4} \rho U_\infty w_4 dx = -d \quad (1.1.9)$$

Las integrales sobre las superficies  $S_2$  y  $S_4$  tienen parámetros desconocidos que se deben encontrar. Las velocidades  $w$  no pueden ser nulas ya que si lo fueran violarían la ecuación de continuidad sobre el volumen de control. Se utiliza la ecuación de continuidad para obtener una relación entre las integrales de flujo másico a través de las superficies. La ecuación de continuidad dice simplemente

que la variación de la densidad de un fluido en un volumen de control es igual a los flujos entrantes y salientes a través de las superficies del volumen.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (1.1.10)$$

El flujo es estacionario por lo que no hay variación de densidad en el volumen de control. La ecuación usada en el volumen de control del problema queda:

$$-\int_{S_1} \rho U_\infty dz + \int_{S_2} \rho w_2 dx + \int_{S_3} \rho (U_\infty - u_d(z)) dz - \int_{S_4} \rho w_4 dx = 0 \quad (1.1.11)$$

Se multiplica la ecuación por  $U_\infty$  y además se simplifica sabiendo que  $S_1 = S_3$ .

$$\int_{S_2} \rho U_\infty w_2 dx - \int_{S_4} \rho U_\infty w_4 dx = \int_{S_3} \rho U_\infty u_d(z) dz \quad (1.1.12)$$

Se introduce esta resta en la ecuación (1.1.9).

$$-\int_{S_1} \rho U_\infty^2 dz + \int_{S_3} \rho (U_\infty^2 - 2U_\infty u_d(z)) dz + \int_{S_3} \rho U_\infty u_d(z) dz = -d \quad (1.1.13)$$

Volviendo a introducir la condición  $S_1 = S_3$  la resistencia queda finalmente:

$$d = \int_{S_3} \rho U_\infty u_d(z) dz \quad (1.1.14)$$

Ahora ya solo falta hacer la integral. Se debe introducir la variable  $u_d(z)$  y poner los límites de integración.

$$\begin{aligned} d &= \int_{-\frac{b(x)}{2}}^{\frac{b(x)}{2}} \rho U_\infty \frac{A}{\sqrt{x}} \cos(\pi z) dz = \\ &= \rho U_\infty \frac{A}{\sqrt{x}} \left[ \frac{1}{\pi} \sin(\pi z) \right]_{-b(x)/2}^{b(x)/2} = \\ &= \frac{2\rho U_\infty A}{\pi \sqrt{x}} \sin \frac{\pi b(x)}{2} \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

b) Ley de ensanchamiento  $b(x)$

Simplemente hay que manipular la expresión obtenida en la ecuación (1.1.15) para obtener  $b(x)$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\pi\sqrt{x}}{2\rho U_\infty A} &= \sin \frac{\pi b(x)}{2} \\ \Rightarrow b(x) &= \frac{2}{\pi} \text{asin} \frac{d\pi\sqrt{x}}{2\rho U_\infty A} \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

## Problema 2. Cálculo de la sustentación utilizando la circulación

Considere un perfil bidimensional volando en régimen incompresible a través del aire en calma con velocidad  $U_\infty$ . En el caso  $Re \gg 1$  relacione la sustentación del perfil  $l$  con la circulación de la velocidad  $\Gamma$  medida experimentalmente a lo largo de la línea  $ABCD$  mostrado en la Figura 1.2.1. Suponga que la velocidad en la estela es horizontal.

$$\Gamma = \int V dS = \int_{AB} U dx + \int_{BC} W dz + \int_{CD} U dx + \int_{DA} W dz \quad (1.2.1)$$

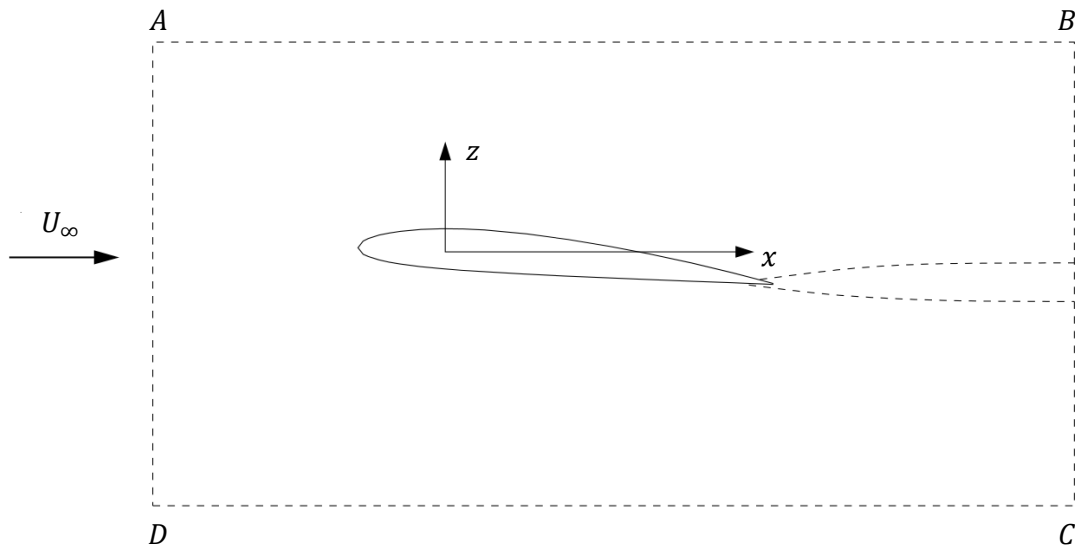


Figura 1.2.1. Perfil bidimensional volando en régimen incompresible.

## Resolución

La circulación es la integral realizada en sentido horario de la proyección de la velocidad a lo largo de cualquier línea cerrada.

En las superficies  $AD$  y  $BC$  no se tiene velocidad tangencial a la superficie por lo que la integral en esos tramos es nula (nota, en el enunciado dice que la velocidad en la estela es horizontal). En las superficies horizontales se tiene una pequeña perturbación en la velocidad (para poder cumplir la ecuación de continuidad). La velocidad por ejemplo en la superficie  $AB$  se modeliza como  $U_\infty + u_1$  donde  $u_1$  es mucho menor que  $U_\infty$ . La circulación queda:

$$\Gamma = \int_{AB} (U_\infty + u_1) dx - \int_{DC} (U_\infty + u_3) dx \quad (1.2.2)$$

Como las superficies son iguales se puede combinar las integrales y se define la diferencia de velocidades  $u_1 - u_3$  como  $\Delta u$ .

$$\Gamma = \int_{AB} \Delta u dx \quad (1.2.3)$$

Se utiliza la ecuación de Bernoulli entre el intradós y el extradós para encontrar la diferencia de presión.

$$\frac{1}{2}\rho(U_\infty + u_1)^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho(U_\infty + u_2)^2 + p_2 \quad (1.2.4)$$

Se debe recordar que las velocidades  $u_1$  y  $u_2$  son muy pequeñas en comparación con  $U_\infty$  por lo que los cuadrados se pueden considerar despreciables. Se define la diferencia de presiones entre el intradós y el extradós como  $\Delta p$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho(U_\infty^2 + 2U_\infty u_1) + p_1 &= \frac{1}{2}\rho(U_\infty^2 + 2U_\infty u_2) + p_2 \\ \Rightarrow \rho U_\infty \Delta u &= \Delta p \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

La fuerza de sustentación por unidad de envergadura del perfil es igual a la diferencia de presiones sobre el volumen de control (aplicación de ley de conservación de cantidad de movimiento).

$$l = \int \Delta p dx = \int \rho U_\infty \Delta u dx = \rho U_\infty \int \Delta u dx \quad (1.2.6)$$

Introduciendo la circulación obtenida en la ecuación (1.2.3) se obtiene finalmente:

$$l = \rho U_\infty \Gamma \quad (1.2.7)$$

**Problema 3. Volumen de control siguiendo línea de corriente.**

La Figura 1.3.1 muestra los perfiles de velocidad medidos aguas arriba (superficie 1) y aguas abajo (superficie 2) del volumen de control. El flujo es incompresible, bidimensional y estacionario. Si las superficies 3 y 4 corresponden a líneas de corriente, se pide:

- a) Calcular la semilongitud de la superficie de control 1  $H_u$ .
- b) Calcular la resistencia  $d$  que aparece sobre el perfil.

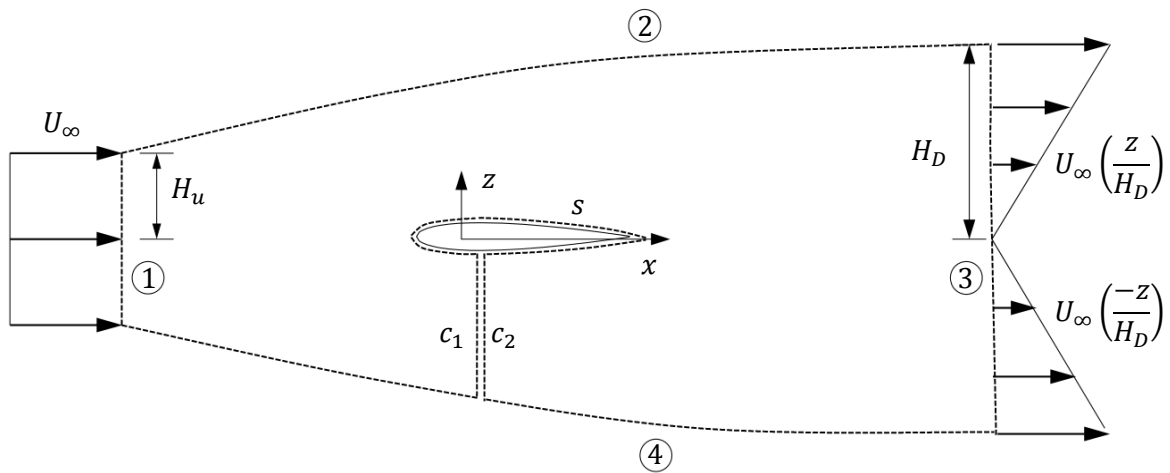


Figura 1.3.1. Perfiles de velocidades y volumen de control.

**Resolución**a) Semilongitud  $H_u$ 

Se considera  $H_D$  conocida ya que cuando se busca la resistencia de un perfil mediante el método de exploración de la estela lo que se mide es el perfil de velocidades aguas abajo.

Debido a que las superficies 3 y 4 del volumen de control dado en el enunciado son líneas de corriente no se tiene velocidad normal a esas superficies. Por lo tanto según el principio de continuidad y considerando flujo estacionario se llega a la conclusión de que el flujo entrante por la superficie 1 debe de ser igual al flujo saliente por la superficie 2. La ecuación de continuidad dice simplemente que la variación de la densidad de un fluido en un volumen de control es igual a los flujos entrantes y salientes a través de las superficies del volumen.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (1.3.1)$$

$$\Rightarrow - \int_1 U_\infty \, dz + \int_2 u_D \, dz = 0 \quad (1.3.2)$$

La integral sobre la superficie 1 se hace fácilmente y es  $2H_u U_\infty$ . La segunda integral queda:

$$\int_2 u_D \, dz = 2 \int_0^{H_D} U_\infty \left( \frac{z}{H_D} \right) \, dz = 2 \frac{U_\infty}{H_D} \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^{H_D} = U_\infty H_D \quad (1.3.3)$$

Finalmente volviendo a la ecuación (1.3.2) se puede obtener la semilongitud.

$$-2H_u U_\infty + U_\infty H_D = 0 \Rightarrow H_u = \frac{H_D}{2} \quad (1.3.4)$$

## b) Resistencia que aparece sobre el perfil

Para obtener la resistencia sobre el perfil es necesario plantear la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en el eje  $x$ . Esta ecuación es una transcripción de la segunda ley de Newton a un movimiento de fluido. Es decir, la variación de la cantidad de movimiento de un fluido en un volumen de control es debido a las fuerzas que actúan sobre el mismo. Pueden haber tres tipos de fuerzas actuando sobre el fluido: la presión sobre la superficie del volumen de control (fuerza normal), la fricción sobre la superficie de control (fuerza tangencial) y las fuerzas másicas dentro del volumen de control. En forma integral la ecuación es:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} \, dV + \int_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS = - \int_S p \mathbf{n} \, dS + \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}' \, dS + \int_V \rho \mathbf{F}_m \, dV \quad (1.3.5)$$

Como el número de Reynolds es suficientemente alto se pueden despreciar las fuerzas másicas y los efectos viscosos frente a los esfuerzos de presión. Además si se considera flujo estacionario se elimina también la dependencia del tiempo. La ecuación simplificada es:

$$\int_S \rho u_x (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS = - \int_S p n_x \, dS \quad (1.3.6)$$

La resistencia generada por el obstáculo está situada lógicamente en la superficie que lo rodea y se puede definir como una caída de presión a través del obstáculo. Esto es debido al principio de acción y reacción es decir, el esfuerzo que ejerce el obstáculo sobre el fluido es contrario al esfuerzo que ejerce el fluido sobre el obstáculo (debido a la diferencia de presión).

$$d = \int_s p n_x dS \quad (1.3.7)$$

Las superficies  $C_1$  y  $C_2$  no contribuyen a la fuerza sobre el obstáculo ya que al integrar se recorre dos veces pero en dirección opuesta y las dos contribuciones se cancelan entre sí.

Si las superficies de control están suficientemente alejadas se puede considerar que la presión en las superficies de control 1,2,3 y 4 es la misma. Como se puede considerar que estas superficies generan una línea cerrada la integral de la presión es nula. Además en las superficies 3 y 4 la velocidad nunca es normal a la superficie por lo que el producto escalar es nulo. La ecuación (1.3.6) simplificada queda:

$$-\int_1 \rho U_\infty^2 dz + \int_2 \rho u_D^2 dz = -d \quad (1.3.8)$$

La primera ecuación es fácil de hacer y es  $2\rho U_\infty^2 H_u$ . Se calcula la segunda integral.

$$2 \int_0^{H_D} \rho U_\infty^2 \left(\frac{z}{H_D}\right)^2 dx = \frac{2\rho U_\infty^2}{H_D^2} \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{H_D} = \frac{2}{3} \rho H_D U_\infty^2 \quad (1.3.9)$$

Finalmente la resistencia es:

$$d = 2\rho U_\infty^2 \left(\frac{H_D}{2}\right) - \frac{2}{3} \rho H_D U_\infty^2 = \frac{1}{3} \rho H_D U_\infty^2 \quad (1.3.10)$$

## 2. Movimiento potencial bidimensional

En este tema se estudia el movimiento potencial bidimensional, necesario para determinar el campo de velocidades de un fluido. El potencial se obtiene a base de superponer soluciones básicas de la ecuación de Laplace: manantial, torbellino y doblete. También se puede modelar el campo de velocidades sobre un obstáculo sólido encontrando una distribución de singularidades que produzca una línea de corriente análoga al contorno del obstáculo.

Para definir el potencial se utiliza un sistema de coordenadas cartesianas en forma de números complejos donde las posiciones se suelen denominar con la letra  $t$ . La función potencial compleja  $f(t)$  es la suma de la función potencial  $\Phi$  y de la función de corriente  $\Psi$ .

$$f(t) = \Phi + i\Psi \quad (2.0.1)$$

El potencial complejo existe si existen  $\Phi$  y  $\Psi$  y además la derivada del potencial complejo es la velocidad conjugada.

$$\frac{df(t)}{dt} = u - iw \quad (2.0.2)$$

Las líneas de corriente son líneas que siguen a los puntos tangentes al vector velocidad de las partículas del fluido. Por lo tanto dos líneas de corriente no se pueden cruzar a menos que ese punto sea un punto de remanso (donde la velocidad es nula). Para obtener la posición de los puntos de remanso simplemente es necesario obtener los puntos  $t$  que cumplan  $df/dt = 0$ .

Las soluciones elementales, donde  $t_0$  representa la posición del elemento, son:

- Corriente uniforme que forma un ángulo  $\alpha$  con el eje  $x$

$$f(t) = U_{\infty} e^{-i\alpha t} \quad (2.0.3)$$

- Manantial o sumidero

$$f(t) = \frac{Q}{2\pi} \ln(t - t_0) \quad (2.0.4)$$

- Torbellino

$$f(t) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(t - t_0) \quad (2.0.5)$$

- Doblete que forma un ángulo  $\beta$  con el eje  $x$

$$f(t) = \frac{Me^{i\beta}}{t - t_0} \quad (2.0.6)$$

En algunas configuraciones, cuando aparecen contornos rectos infinitos, como por ejemplo una pared, se debe utilizar el método de las imágenes. Consiste en transformar la pared por una línea de corriente y un eje de simetría, añadiendo del otro lado de la pared los elementos que aparecen en el problema. Por ejemplo si se tiene un torbellino sobre una pared se introduce otro torbellino de intensidad opuesta al otro lado de la pared.



En el caso de tener un círculo en vez de una pared se puede utilizar el teorema del círculo. Consiste en calcular el potencial complejo con la siguiente fórmula:

$$f(t) = f_{sc}(t) + \bar{f}_{sc}\left(\frac{R^2}{t}\right) \quad (2.0.7)$$

Donde  $R$  es el radio del círculo y  $\bar{f}(R^2/t)$  es el conjugado de la función potencial en el punto  $R^2/t$ .

En general en los problemas se da una configuración de elementos y se pide dibujar las líneas de corriente. También se puede pedir la fuerza ejercida sobre algún elemento. Los pasos a seguir son:

1. En el caso de tener paredes se debe utilizar el método de las imágenes para tener todos los elementos que generan el movimiento potencial.

Sumando las contribuciones de todos los elementos se obtiene la función potencial compleja  $f(t)$ .

Si se usa el teorema del círculo se debe aplicar la ecuación (2.0.7) y manipular la expresión para tener una suma de logaritmos donde se puedan diferenciar los diferentes elementos y sus posiciones.

2. Se deriva esta función para obtener la conjugada de la velocidad.

Como se ha dicho antes los puntos de remanso son puntos donde la velocidad es nula, por lo que simplemente hay que resolver la ecuación  $df(t)/dt = 0$  y obtener los valores de  $t$ .

Una vez se tienen las posiciones de los puntos de remanso se pueden ya dibujar las líneas de corriente. Hay que recordar que en los puntos de remanso pueden cruzarse más de dos líneas de corriente y que el ángulo entre las líneas es equidistante por lo que si del punto de remanso parten cuatro líneas todas estarán separadas de  $\pi/2$  rad.

3. Para obtener la fuerza sobre un torbellino o una fuente se debe resolver el potencial complejo sin el elemento.

Se obtiene la velocidad en el punto del elemento derivando el potencial complejo y sustituyendo  $t$  por la posición del elemento. La fuerza sobre los elementos es:

- Torbellino (fuerza perpendicular a la velocidad)

$$F = i\rho\Gamma U \quad (2.0.8)$$

- Fuente o sumidero (Fuerza en la dirección de la velocidad)

$$F = \rho QU \quad (2.0.9)$$

### Problema 1. Flujo alrededor de una pared con una esquina

La función compleja  $f(t) = At^n$ , con  $A$  real y  $n > 0$ , sirve para estudiar problemas de líquidos potenciales alrededor de una pared como el representado en la Figura 2.1.1. Calcule el valor del exponente  $n$ , para que las rectas  $\theta = 0$  y  $\theta = \alpha$  sean líneas de corriente, teniendo en cuenta que ninguna otra recta con  $\theta = \theta_0$  ( $0 < \theta_0 < \alpha$ ) debe serlo. Estudie también el campo de velocidades y el campo de presiones en los casos  $\alpha > \pi$ ,  $\alpha = \pi$  y  $\alpha < \pi$ .

Mediante la aplicación del principio de conservación de la cantidad de movimiento a un recinto circular, demuestre que la fuerza de succión en el borde de la placa que se obtiene en el caso  $\alpha = 2\pi$  vale  $F = -\pi\rho A^2/4$ , donde  $\rho$  es la densidad del fluido.

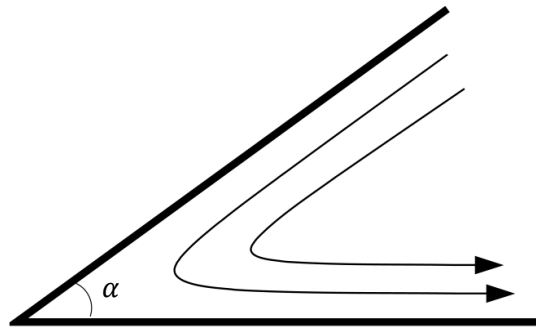


Figura 2.1.1. Flujo alrededor de una pared con una esquina de ángulo  $\alpha$ .

**Resolución**

a) Valor de  $n$

El potencial complejo se puede escribir en forma cartesiana como  $f(t) = \Phi(t) + i\Psi(t)$  donde  $\Phi$  define el campo de velocidades y  $\Psi$  las líneas de corriente. Por lo tanto la función  $t$  debe de ser un número complejo.

$$t = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (2.1.1)$$

Se introduce esta expresión en la función  $f(t)$ .

$$f(t) = A(re^{i\theta})^n = Ar^n e^{in\theta} = Ar^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad (2.1.2)$$

De modo que la función de líneas de corriente  $\Psi$  es:

$$\Psi = Ar^n \sin n\theta \quad (2.1.3)$$

El valor de la línea de corriente en la pared horizontal ( $\theta = 0$ ) es  $\Psi = 0$ . Este valor debe ser el mismo si se quiere que la otra pared ( $\theta = \alpha$ ) sea la misma línea de corriente.

$$Ar^n \sin n\alpha = 0 \quad (2.1.4)$$

Se debe cumplir que  $\sin n\alpha$  sea cero por lo que la solución de esta ecuación es:

$$n = \frac{k\pi}{\alpha}, \quad \text{para } k = 1, 2, 3 \dots \quad (2.1.5)$$

Para que ninguna otra recta con  $\theta = \theta_0$  ( $0 < \theta_0 < \alpha$ ) sea también línea de corriente, se toma la solución para  $k = 1$  y  $n = \pi/\alpha$ .

b) Campo de velocidades y campo de presiones

Para obtener el campo de velocidades se debe derivar la función potencial compleja.

$$\frac{df(t)}{dt} = Ant^{n-1} = Anr^{n-1}\{\cos[(n-1)\theta] + i \sin[(n-1)\theta]\} \quad (2.1.6)$$

Como  $n = \pi/\alpha$  se tiene:

$$\dot{f}(t) = A \frac{\pi}{\alpha} r^{\pi/\alpha-1} \left\{ \cos \left[ \left( \frac{\pi}{\alpha} - 1 \right) \theta \right] + i \sin \left[ \left( \frac{\pi}{\alpha} - 1 \right) \theta \right] \right\} \quad (2.1.7)$$

Para obtener el campo de presiones se utiliza la ecuación de Bernoulli utilizando como velocidad el módulo del número complejo del campo de velocidades.

$$\begin{aligned} p_\infty + \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 &= p + \frac{1}{2} \rho_\infty |\dot{f}(t)|^2 = p + \frac{1}{2} \rho_\infty \left( A \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 r^{2(\pi/\alpha-1)} \\ \Rightarrow p &= p_\infty + \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 - \frac{1}{2} \rho_\infty \left( A \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 r^{2(\pi/\alpha-1)} \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Se debe estudiar la solución para los tres casos propuestos en el enunciado.

- $\alpha > \pi$ : se tiene  $n < 1$  y por lo tanto  $\dot{f}(t) \rightarrow \infty$  y  $p \rightarrow \infty$
- $\alpha < \pi$ : se tiene  $n > 1$  y por lo tanto  $\dot{f}(t) \rightarrow 0$  y  $p = p_\infty + 0.5 \rho_\infty U_\infty^2$
- $\alpha = \pi$ : se tiene  $n = 1$  y por lo tanto  $\dot{f}(t) = A(\cos \theta - i \sin \theta)$  y  $p = p_\infty + 0.5 \rho_\infty [U_\infty^2 + |\dot{f}|^2]$

Se puede ver que para valores de  $\alpha$  entre 0 y  $\pi$  se obtienen valores reales mientras que para valores de  $\alpha$  entre  $\pi$  y  $2\pi$  no se obtienen.

c) Fuerza de succión de una placa plana

Se debe utilizar la teoría de cantidad de movimiento para obtener la fuerza de succión de una placa plana. Se puede observar en la Figura 2.1.2 la forma del volumen de control que se utiliza para la ecuación integral. Para formar una placa plana se utiliza  $\alpha = 2\pi$ .

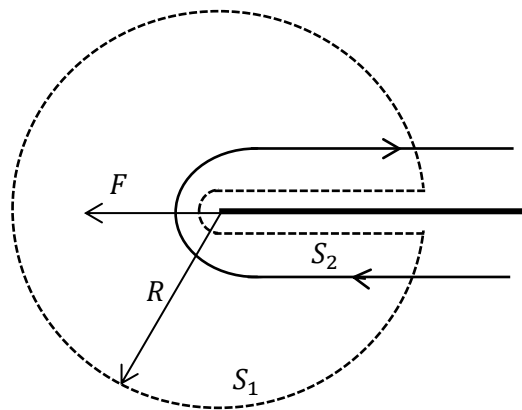


Figura 2.1.2. Placa plana con el volumen de control.

La ecuación integral de conservación de cantidad de movimiento se estudia en la dirección  $x$ .

$$\int_{S_1} \rho u (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS + \int_{S_2} \rho u (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS = - \int_{S_1} p \cdot n_{x1} dS - \int_{S_2} P \cdot n_{x2} dS \quad (2.1.9)$$

La parte de la integral de los esfuerzos de presión sobre la segunda superficie es directamente la fuerza de succión y es la contribución de la zona del borde de ataque de la placa. Además el producto sobre la segunda superficie  $\vec{v} \cdot \hat{n}$  es nulo haciendo la integral nula.

$$F = - \int_{S_1} \rho u (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS - \int_{S_1} p \cdot n_{x1} dS \quad (2.1.10)$$

**Problema 2. Flujo generado por cuatro torbellinos**

Considere el campo fluido generado por dos torbellinos de intensidad  $\Gamma$  situados en los puntos  $t = i$  y  $t = -1$  y otros dos torbellinos de intensidad  $-\Gamma$  situados en los puntos  $t = 1$  y  $t = -i$ . Se pide:

- a) Calcular el campo potencial complejo.
- b) Calcular el campo de velocidades conjugadas.
- c) Calcular la posición de los puntos de remanso.
- d) Esquematizar las líneas de corriente.

Superponga ahora una corriente incidente de intensidad  $\sqrt{2}\Gamma/\pi$  en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante. En estas condiciones se pide:

- e) Calcular el nuevo potencial complejo.
- f) Calcular la posición de los puntos de remanso.
- g) Esquematizar las líneas de corriente.

**Resolución**

## a) Campo potencial complejo

Se sabe que el potencial de un torbellino es:

$$f_{torb}(t) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(t - t_0) \quad (2.2.1)$$

El campo potencial completo es la suma de las contribuciones de los cuatro torbellinos.

$$f(t) = \frac{i\Gamma}{2\pi} [\ln(t - i) + \ln(t + 1) - \ln(t + i) - \ln(t - 1)] = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left[ \frac{(t - i)(t + 1)}{(t + i)(t - 1)} \right] \quad (2.2.2)$$

## b) Campo de velocidades

El campo de velocidades se obtiene derivando es campo potencial complejo.

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \left( \frac{1}{t - i} + \frac{1}{t + 1} - \frac{1}{t + i} - \frac{1}{t - 1} \right) = -\frac{i\Gamma}{\pi} \left[ \frac{t^2(i - 1) - (i + 1)}{t^4 - 1} \right] \quad (2.2.3)$$

## c) Puntos de remanso

Los puntos de remanso son puntos de velocidad nula. Se deben obtener los valores de  $t$  en los que se cumple que el campo de velocidades es nulo.

$$\begin{aligned} \frac{i\Gamma}{2\pi} \left[ \frac{t^2(i - 1) - (i + 1)}{t^4 - 1} \right] &= 0 \\ \Rightarrow t^2 = \frac{i + 1}{i - 1} &= \frac{-1 + 2i + 1}{-2} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ \therefore t = \pm e^{-i\frac{\pi}{4}} &= \begin{cases} t_{pr1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ t_{pr2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

## d) Esquematizar las líneas de corriente

Debido a la disposición de los torbellinos y como tienen todos igual intensidad se forman un eje de simetría y un eje de antisimetría.

Se pueden ver en la Figura 2.2.1 las líneas de corriente esquematizadas. Los puntos de remanso han esquematizado por un cuadrado. Estos puntos son los únicos que permiten un cruce entre líneas de corriente. A través del eje de antisimetría las líneas de corriente cruzan con un ángulo de noventa grados respecto al eje, a menos que el punto de remanso esté situado sobre el eje. El eje de simetría es también una línea de corriente.

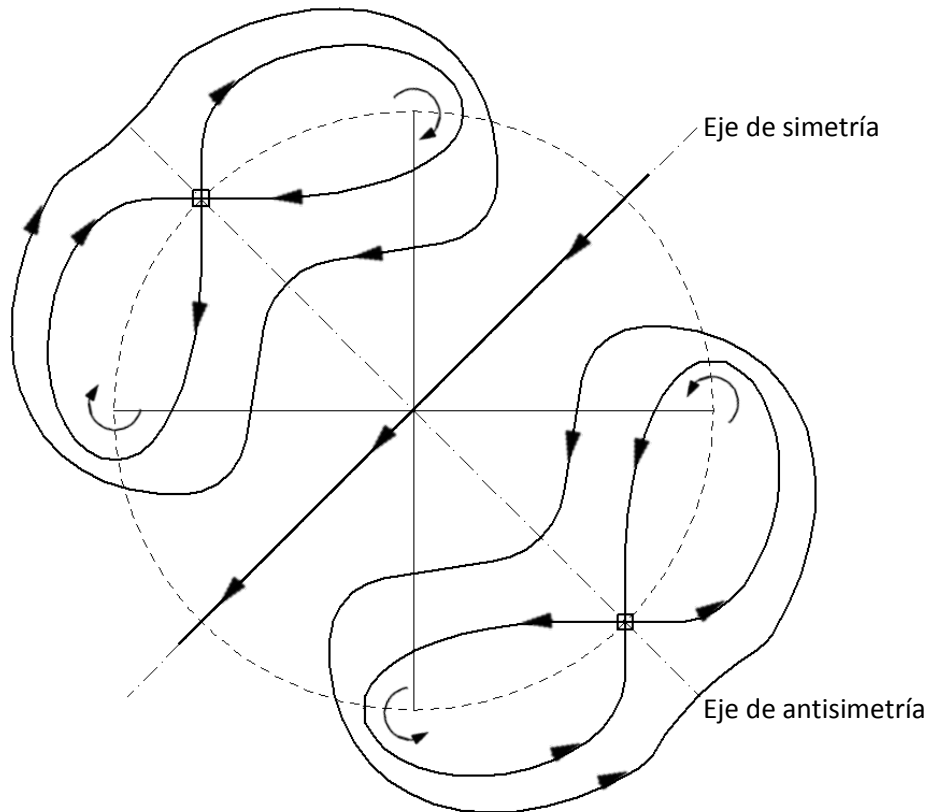


Figura 2.2.1. Líneas de corriente esquematizadas para el primer caso.

e) Potencial complejo con corriente incidente

Se añade ahora una corriente de intensidad  $\sqrt{2}\Gamma/\pi$  en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante. Se debe sumar la contribución de la corriente incidente al potencial complejo obtenido en la ecuación (2.2.2).

$$f(t) = \frac{\Gamma}{\pi} \left\{ \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot t + \frac{i}{2} [\ln(t - i) + \ln(t + 1) - \ln(t + i) - \ln(t - 1)] \right\} \quad (2.2.5)$$

f) Puntos de remanso

Para obtener los puntos de remanso se debe primero encontrar el campo de velocidades.

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \frac{\sqrt{2}\Gamma}{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}} - \frac{i\Gamma}{\pi} \left[ \frac{t^2(i-1) - (i+1)}{t^4 - 1} \right] \\ &= \frac{\Gamma}{\pi} \left[ \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} - \frac{t^2(i-1) - (i+1)}{t^4 - 1} \right] \\ &= \frac{\Gamma}{\pi(t^4 - 1)} \left[ (t^4 - 1)\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - t^2(i-1) - (i+1) \right] \\ &= \frac{\Gamma}{\pi(t^4 - 1)} [(t^4 - 1)(1 + i) - t^2(i - 1) - (i + 1)] \\ &= \frac{\Gamma}{\pi(t^4 - 1)} [(1 + i)t^4 - t^2(i - 1)] \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Los puntos de remanso se obtienen cuando la velocidad es nula. Se debe resolver la siguiente ecuación:

$$(1 + i)t^4 - t^2(i - 1) = 0 \tag{2.2.7}$$

Se puede obtener la solución trivial ( $t = 0$ ).

$$t^2 = \frac{i - 1}{i + 1} = \frac{-1 - 2i + 1}{-1 - 1} = i \Rightarrow t = \pm i \tag{2.2.8}$$

$$\therefore t_{pr1} = 0, \quad t_{pr2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad t_{pr3} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{2.2.9}$$

g) Esquematizar las líneas de corriente

Se vuelve a tener un eje de antisimetría (perpendicular a la corriente incidente) y un eje de simetría (paralelo a la corriente incidente). Se debe tener en cuenta que los puntos de remanso pueden tener varias líneas de corriente que pasen por ese punto (incluso más de cuatro líneas).

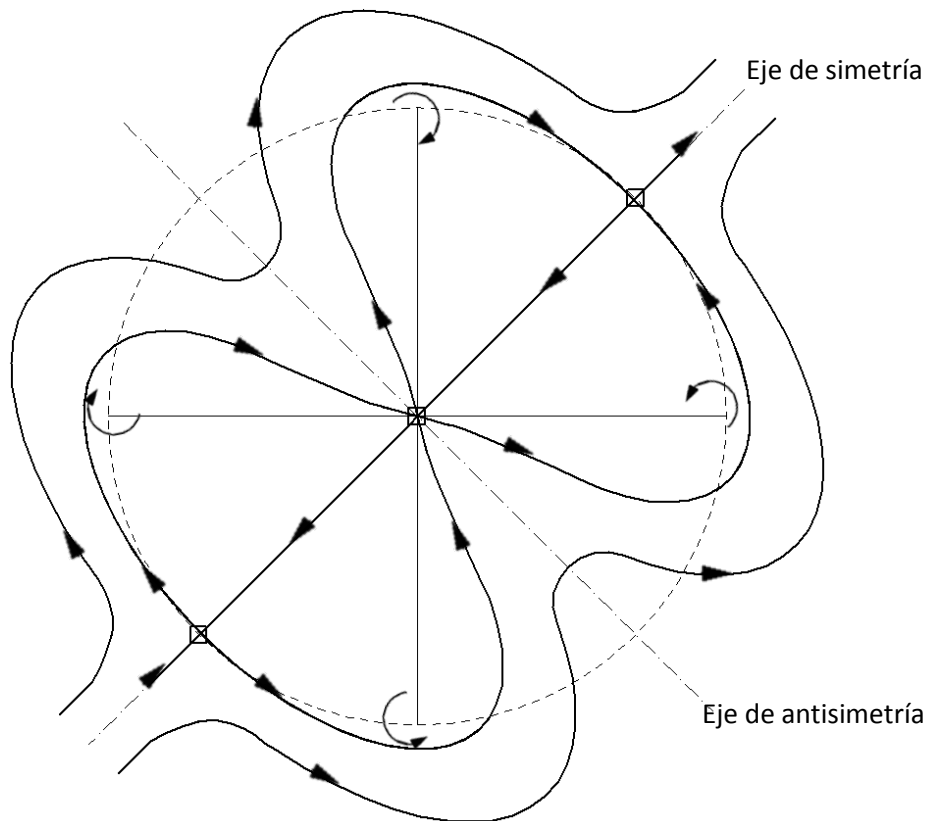


Figura 2.2.2. Líneas de corriente esquematizada para el segundo caso.



**Problema 3. Manantial en presencia de dos paredes**

Dibuje las líneas de corriente divisorias y los puntos de remanso correspondientes a un manantial de intensidad  $Q$  situado en el punto genérico  $(a, b)$  en presencia de unas paredes, como se puede ver en la Figura 2.3.1.

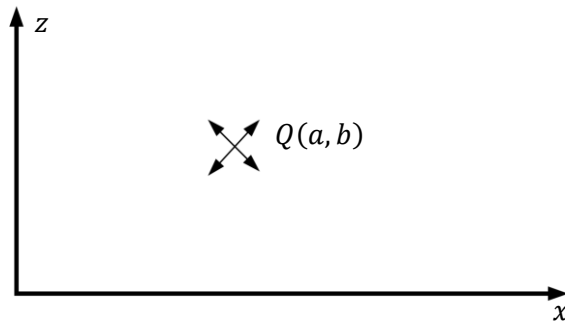


Figura 2.3.1. Manantial en presencia de dos paredes.

**Resolución**

a) Líneas de corriente

Al haber dos paredes, se debe usar el método de las imágenes colocando hasta tres manantiales más como muestra la Figura 2.3.2. Esto es debido a que si primero se aplica el método de las imágenes en una pared se tienen dos manantiales, pero al aplicarlo a la segunda pared se deben duplicar los dos manantiales.

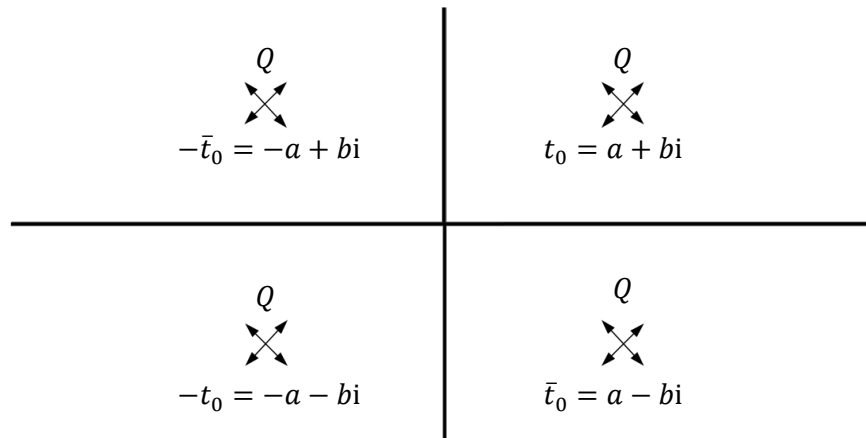


Figura 2.3.2. Cuatro manantiales resultantes de usar el método de las imágenes.

La función potencial compleja es la suma del potencial de los cuatro manantiales.

$$f(t) = \frac{Q}{2\pi} [\ln(t - t_0) + \ln(t - \bar{t}_0) + \ln(t + t_0) + \ln(t + \bar{t}_0)] \tag{2.3.1}$$

Para obtener la velocidad se debe derivar la función potencial compleja.

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{Q}{2\pi} \left( \frac{1}{t - t_0} + \frac{1}{t - \bar{t}_0} + \frac{1}{t + t_0} + \frac{1}{t + \bar{t}_0} \right) \tag{2.3.2}$$

Los puntos de remanso son puntos donde la velocidad es nula, por lo tanto para obtener las posiciones de estos puntos hay que igualar la velocidad a cero y obtener los valores de  $t$ .

$$\frac{1}{t - t_0} + \frac{1}{t - \bar{t}_0} + \frac{1}{t + t_0} + \frac{1}{t + \bar{t}_0} = 0 \tag{2.3.3}$$

$$\Rightarrow (t - \bar{t}_0)(t + t_0)(t + \bar{t}_0) + (t - t_0)(t + t_0)(t + \bar{t}_0) + (t - t_0)(t - \bar{t}_0)(t + \bar{t}_0) + (t - t_0)(t - \bar{t}_0)(t + t_0) = 0 \tag{2.3.4}$$

$$\Rightarrow (t^2 + 2ibt - a^2 - b^2)(t + \bar{t}_0 + t - t_0) + (t^2 - 2ibt - a^2 - b^2)(t + t_0 + t - \bar{t}_0) = 0 \tag{2.3.5}$$

$$\Rightarrow (t^2 + 2ibt - a^2 - b^2)(t - ib) + (t^2 - 2ibt - a^2 - b^2)(t + ib) = 0 \tag{2.3.6}$$

$$\Rightarrow 2t^3 + 2(b^2 - a^2)t = 0 \tag{2.3.7}$$

La primera solución trivial es  $t = 0$ .

$$\Rightarrow t^2 + (b^2 - a^2) = 0 \tag{2.3.8}$$

Se debe resolver el polinomio. Hay que recordar que  $t$  es un número complejo por lo que es posible que aparezcan términos negativos en la raíz, los números  $a$  y  $b$  son reales puros.

$$t = \pm \frac{\sqrt{-4 \cdot (b^2 - a^2)}}{2} = \pm \sqrt{a^2 - b^2} \tag{2.3.9}$$

Pese a que hay dos soluciones de  $t$  solo se tiene un punto de remanso ya que con los ejes de coordenadas seleccionados solo se tienen puntos de remanso en el primer cuadrante. Por lo tanto:

$$t = \sqrt{a^2 - b^2} \tag{2.3.10}$$

Se pueden tener tres casos genéricos, que sean iguales o que uno sea mayor o menor que el otro. Se puede ver en la Figura 2.3.3 Se pueden ver las líneas de corriente para los tres casos.

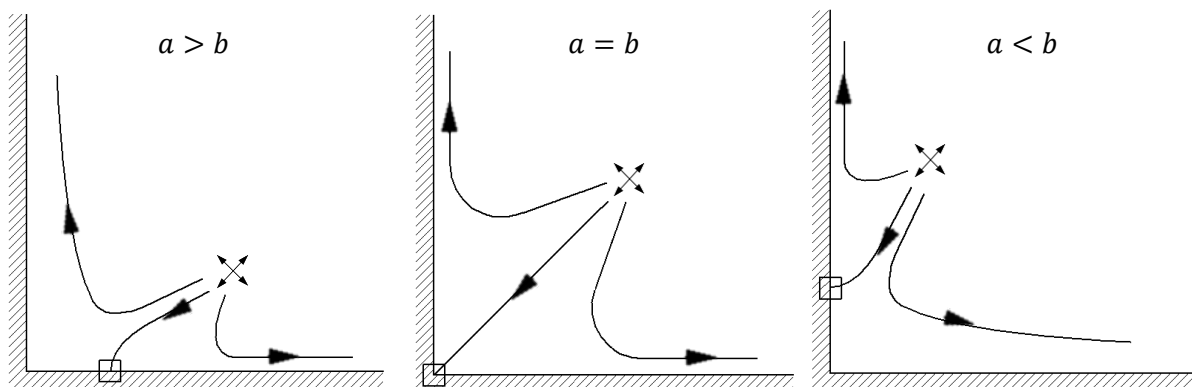


Figura 2.3.3. Líneas de corriente para los tres casos.

**Problema 4. Torbellino situado en el interior de un círculo**

Considere la configuración bidimensional formada por un torbellino de intensidad  $\Gamma$  situado en el interior de un círculo de radio  $R$ , tal como se esquematiza en la Figura 2.4.1. Se pide:

- Determinar el potencial complejo, identificando las distintas singularidades que aparecen.
- Calcular y representar cómo varía la velocidad en el origen con la distancia  $x_0$ .
- Calcular y representar en función de  $x_0$  la fuerza ejercida por el torbellino sobre el contorno circular.

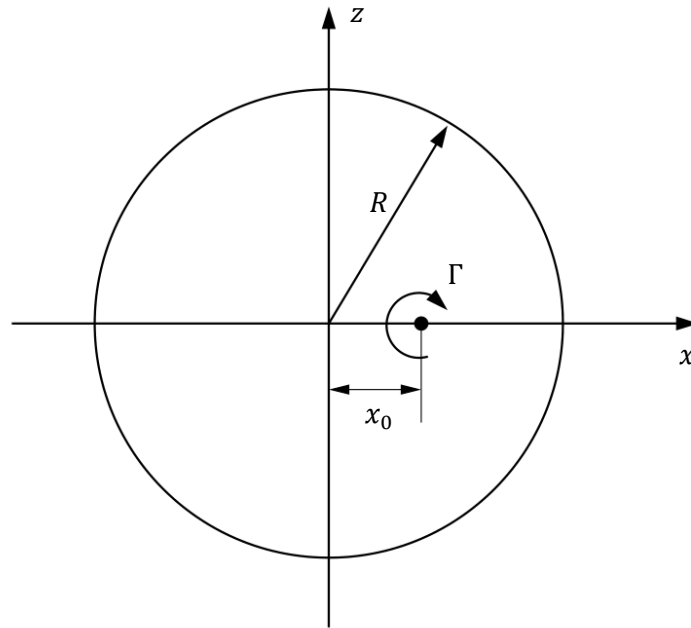


Figura 2.4.1. Torbellino situado en el interior de un círculo.

**Resolución**

a) Potencial complejo

Se aplica el teorema del círculo.

$$\begin{aligned}
 f(t) &= f_{sc}(t) + \bar{f}_{sc}(\bar{t}) = \\
 &= f_{sc}(t) + \bar{f}_{sc}\left(\frac{R^2}{t}\right) = \\
 &= \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(t - t_0) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{R^2}{t} - \bar{t}_0\right) = \\
 &= \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(t - t_0) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln\left[\left(\frac{R^2}{\bar{t}_0 \cdot t} - 1\right) \bar{t}_0\right] = \\
 &= \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(t - t_0) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln\left[\left(-\frac{\bar{t}_0}{t}\right) \left(t - \frac{R^2}{\bar{t}_0}\right)\right] = \\
 &= \frac{i\Gamma}{2\pi} \left[ \ln(t - t_0) + \ln(t) - \ln\left(t - \frac{R^2}{\bar{t}_0}\right) - \ln(-\bar{t}_0) \right] \tag{2.4.1}
 \end{aligned}$$

El último logaritmo que aparece en la función potencial es un valor constante, por lo tanto se tienen tres torbellinos de igual intensidad  $\Gamma$ .

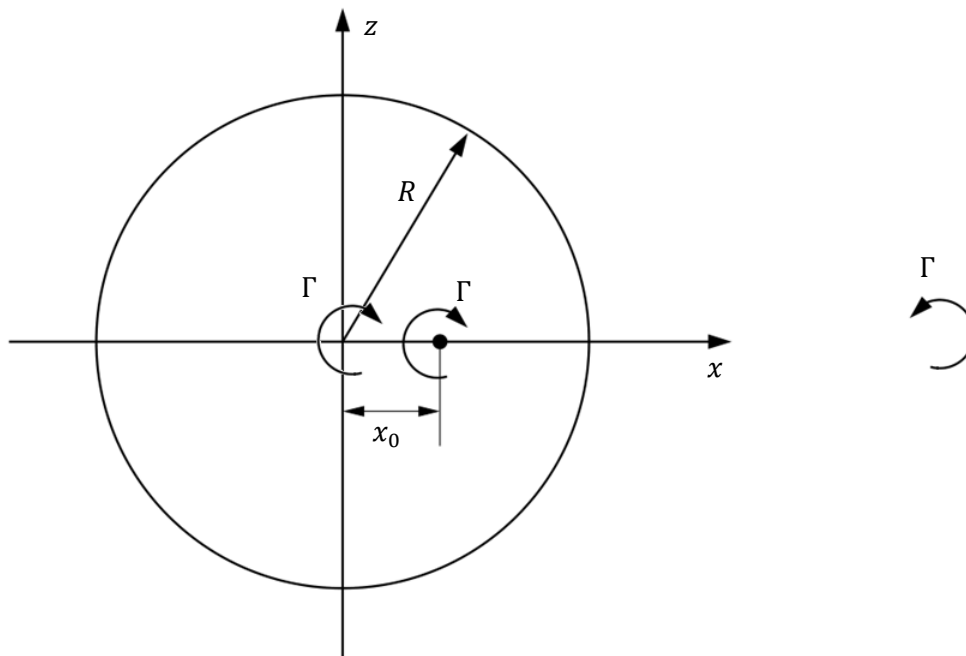


Figura 2.4.1. Posición de los tres torbellinos.

Sumar un torbellino en el centro del círculo no cambia la configuración del problema, pero al estar estudiando el interior del círculo no puede aparecer una singularidad adicional en el interior, por lo tanto se elimina esta singularidad.

b) Variación de la velocidad en el origen

Para conocer la velocidad en el centro del círculo se debe derivar la función potencial. Como se ha dicho en el apartado anterior no se tiene en cuenta el torbellino centrado en el círculo.

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_0 = u(0) - iw(0) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \left( \frac{1}{0 - x_0} - \frac{1}{0 - \frac{R^2}{x_0}} \right) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{x_0^2 - R^2}{R^2 x_0} \quad (2.4.2)$$

Como los números  $x_0$  y  $R$  son reales, la velocidad solo tiene componente compleja.

$$u(0) = 0, \quad w(0) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{R^2 - x_0^2}{R^2 x_0} \quad (2.4.3)$$

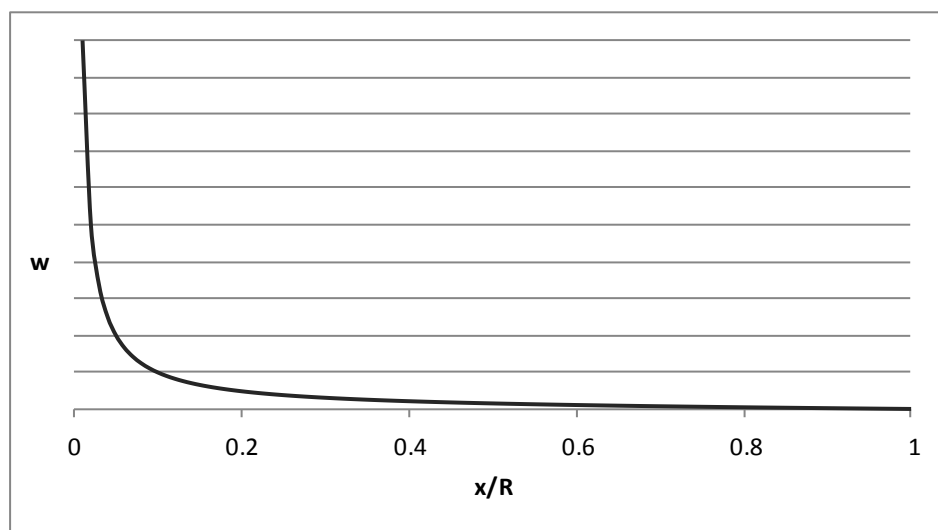


Figura 2.4.1. Velocidad vertical en función de la distancia.

c) Fuerza ejercida sobre el torbellino

Utilizando la teoría de Kutta-Yukovsky la fuerza ejercida sobre un torbellino debido a una corriente incidente es:

$$L = \rho U \Gamma \quad (2.4.4)$$

Ésta fuerza es perpendicular a la corriente incidente y por eso se llama sustentación. En caso de tener una fuente la fuerza es en la dirección de la corriente y se denomina resistencia.

La velocidad ejercida por el torbellino exterior sobre el punto  $x_0$  es:

$$\left. \frac{df^*}{dt} \right|_{x_0} = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_0 - R^2/x_0} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{x_0}{R^2 - x_0^2} \quad (2.4.5)$$

La velocidad es vertical y en dirección del eje  $z$  ( $R > x_0$ ). La fuerza que recibe el torbellino interior es igual a la fuerza que ejerce este torbellino sobre el contorno (acción y reacción), y es igual a:

$$F_{T \rightarrow C} = -F(C \rightarrow T) = -\rho \Gamma \left( \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{x_0}{R^2 - x_0^2} \right) \quad (2.4.6)$$

### Problema 5. Torbellino sobre el suelo

Considere una configuración fluida formada por un torbellino potencial de intensidad  $\Gamma$  situado a una altura  $h$  sobre el suelo en presencia de una corriente incidente de velocidad  $U_\infty$ . Calcule la fuerza sobre el torbellino para el siguiente caso:

$$\Gamma = 12 \text{ m}^2/\text{s}, \quad h = 3/\pi \text{ m}, \quad \rho = 1.2 \text{ kg/m}^3, \quad U_\infty = 11 \text{ m/s} \quad (2.5.1)$$

Determine para qué valor de  $U_\infty$  se presenta un punto de remanso sobre el suelo, justo en la vertical del torbellino (suponga los mismos valores que antes para  $\Gamma$ ,  $h$  y  $\rho$ ) y esquematice para este caso, las líneas de corriente divisorias, indicando los valores de los ángulos que forman con el suelo.

Esquematice también las líneas de corriente divisorias para otros valores de  $U_\infty$ .

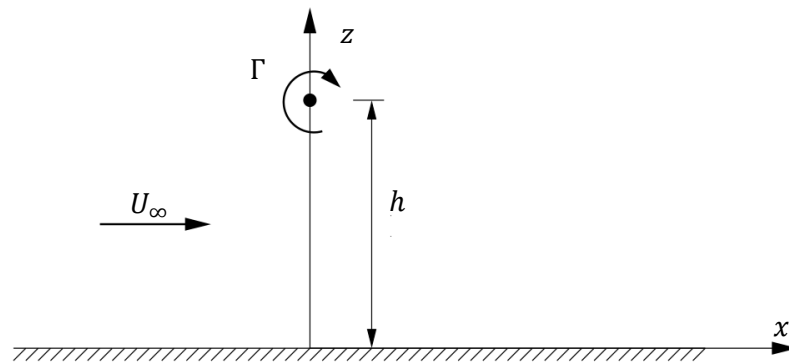


Figura 2.5.1. Torbellino sobre el suelo.

**Resolución**

a) Fuerza ejercida sobre el torbellino

Al tener un suelo se utiliza el método de las imágenes situando un torbellino de intensidad opuesta.

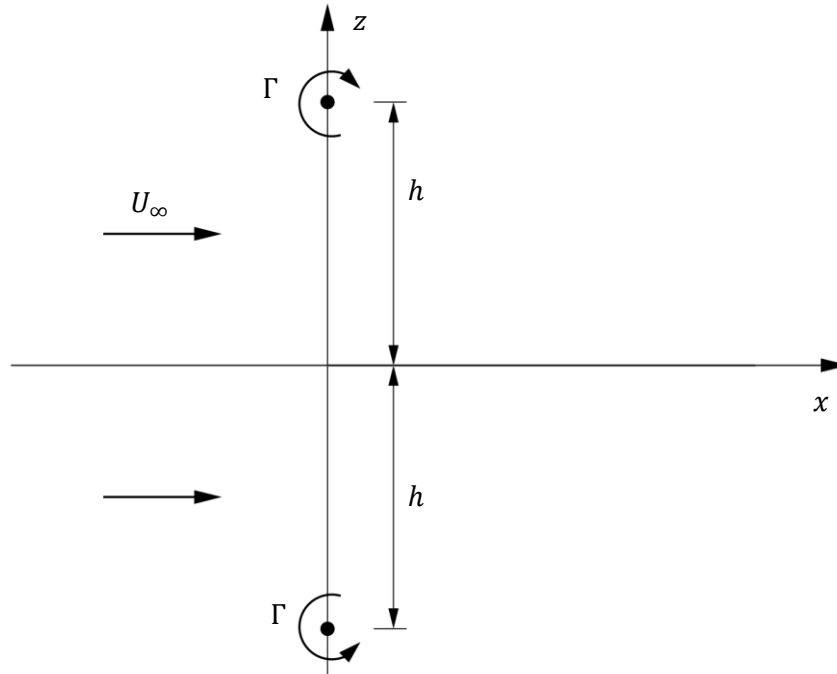


Figura 2.5.2. Resultado de aplicar el método de las imágenes.

Para calcular la fuerza sobre el torbellino se debe de obtener la velocidad del flujo incidente sobre el torbellino. La función potencial compleja sin tener en cuenta el torbellino es:

$$f(t) = U_{\infty}t - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(t + hi) \tag{2.5.2}$$

La velocidad se obtiene derivando la función potencial en el punto  $t = hi$ .

$$\frac{df(t)}{dt} = u - iw = U_{\infty} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{hi + hi} = U_{\infty} - \frac{\Gamma}{4\pi h} \tag{2.5.3}$$

La velocidad es por lo tanto:

$$u = U_{\infty} - \frac{\Gamma}{4\pi h} = 11 - \frac{12}{4\pi \cdot \frac{3}{\pi}} = 10 \tag{2.5.4}$$

Se utiliza el teorema de Kutta-Yukovsky para calcular la fuerza ejercida:

$$F = \rho\Gamma u = \rho\Gamma U_{\infty} - \frac{\Gamma^2\rho}{4\pi h} = 1.2 \cdot 12 \cdot 10 = 144 \text{ N} \tag{2.5.5}$$

Esta fuerza es perpendicular a la velocidad incidente por lo tanto es una fuerza vertical.



b) Valor de  $U_\infty$  donde se tiene un punto de remanso sobre el suelo

La función potencial considerando ahora todos los elementos es:

$$f(t) = U_\infty t - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(t + hi) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(t - hi) \quad (2.5.6)$$

Se deriva la expresión para obtener la velocidad.

$$\frac{df(t)}{dt} = U_\infty + \frac{i\Gamma}{2\pi} \left( \frac{1}{t - hi} - \frac{1}{t + hi} \right) = U_\infty + \frac{i\Gamma}{2\pi} \left( \frac{2hi}{t^2 + h^2} \right) \quad (2.5.7)$$

Se quiere que el punto de remanso esté situado en el punto  $t = 0 + 0i$ , por lo tanto en ese punto la velocidad es cero y la derivada de la función potencial también lo es.

$$U_\infty - \frac{\Gamma}{\pi} \left( \frac{h}{0 + 0i + h^2} \right) = 0$$

$$U_\infty = \frac{\Gamma}{\pi h} = \frac{12}{3} = 4 \text{ m/s} \quad (2.5.8)$$

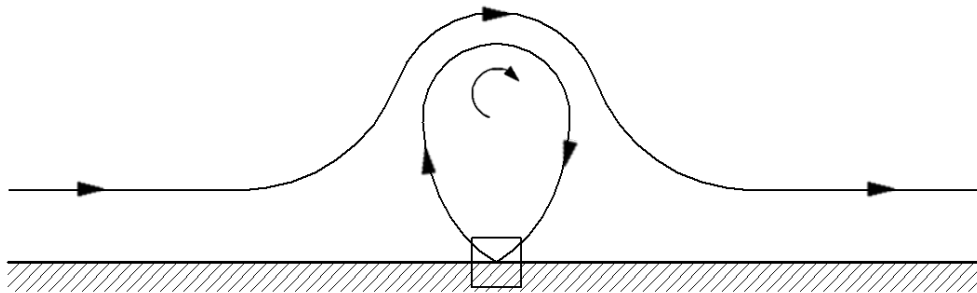


Figura 2.5.3. Líneas de corriente y punto de remanso (cuadrado).

Como hay seis líneas de corriente (contando dos debido al torbellino que aparece tras utilizar el método de las imágenes) el ángulo entre las líneas de corriente es de  $2\pi/6 = \pi/3$ .

c) Esquematizar el flujo para otros valores de  $U_\infty$ .

Se vuelve a utilizar la ecuación (2.5.7), pero esta vez se buscan las posiciones de los puntos de remanso para el valor dado de velocidad.

$$\frac{df(t)}{dt} = U_\infty - \frac{\Gamma}{\pi} \left( \frac{h}{t + h^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow t^2 + h^2 = \frac{\Gamma h}{\pi U_\infty}$$

$$\Rightarrow t = \pm \sqrt{\frac{\Gamma h}{\pi U_\infty} - h^2} \quad (2.5.9)$$

Se pueden tener tres casos, uno ya se ha estudiado en el apartado anterior:

$$\frac{\Gamma h}{\pi U_\infty} - h^2 = 0 \Rightarrow t = 0 \quad (2.5.10)$$

Los otros dos casos dan como solución un número real puro o un número complejo puro para las posiciones de los puntos de remanso.

- $\Gamma > h\pi U_\infty$

Para este caso  $t$  es un número real y tiene dos posiciones sobre el suelo.

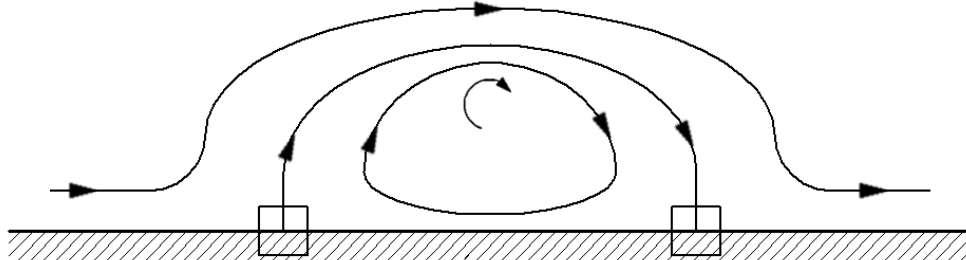


Figura 2.5.4. Líneas de corriente para el primer caso.

- $\Gamma < h\pi U_\infty$

Para este caso  $t$  es un número complejo puro. Solo se tiene un punto de remanso ya que el segundo está situado por debajo del suelo.

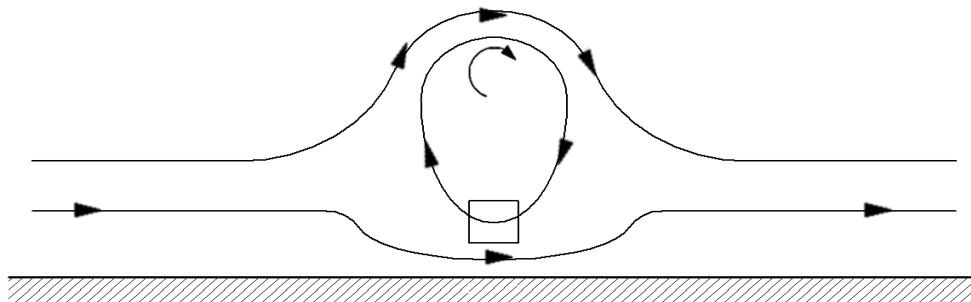


Figura 2.5.5. Líneas de corriente para el segundo caso.

### Problema 6. Dos torbellinos, un sumidero y una fuente

Considere la configuración fluida formada por dos manantiales de igual intensidad  $Q$  y signo contrario situados a una distancia  $a$  del origen sobre la bisectriz del primer y tercer cuadrante y dos torbellinos de igual intensidad  $\Gamma$  y signo contrario situados a una distancia  $a$  del origen sobre la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante, tal como se muestra en la siguiente figura. Se pide:

- Potencial complejo  $f(z)$  del campo fluido resultante.
- Hallar la posición de los puntos de remanso en función de la relación entre las intensidades  $\Gamma$  y  $Q$ .
- Describir como es el campo fluido en función de la relación entre las intensidades  $\Gamma$  y  $Q$ .

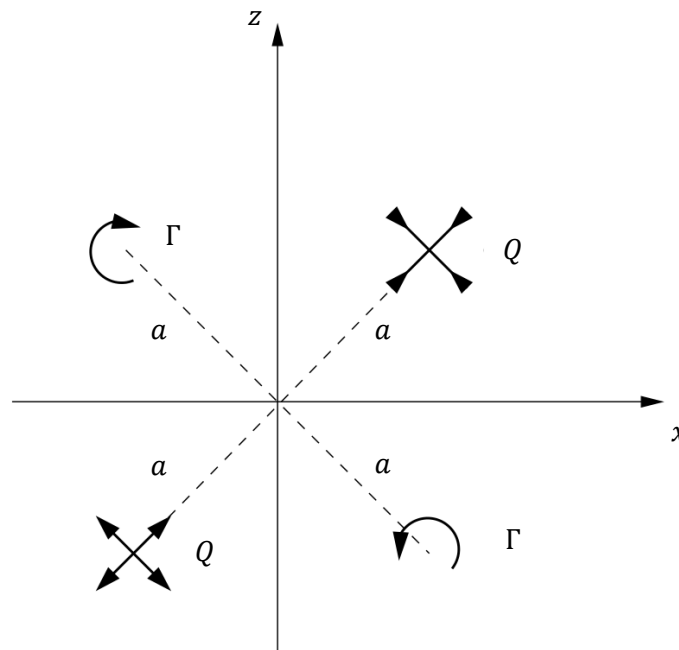


Figura 2.6.1. Configuración de torbellinos y manantiales.

**Resolución**

a) Potencial complejo  $f(t)$

El potencial complejo es la suma del potencial de todos los elementos.

$$f = \frac{1}{2\pi} \left[ Q \ln \left( t - a \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}} \right) - Q \ln \left( t - a \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \right) + \Gamma i \ln \left( t - a \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) - \Gamma i \ln \left( t - a \cdot e^{i\frac{7\pi}{4}} \right) \right] \quad (2.6.1)$$

b) Posición de los puntos de remanso

Para obtener la velocidad se deriva el potencial. Es importante recordar que  $e^{i\pi} = -1$ .

$$f' = \frac{i}{2\pi} \left( \frac{Q}{t + a \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}} - \frac{Q}{t - a \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{\Gamma \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}}{t - a \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}} - \frac{\Gamma \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}}{t + a \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}} \right) \quad (2.6.2)$$

Las posiciones de los puntos de remanso se obtienen igualando la derivada del potencial a cero.

$$\begin{aligned} Q \frac{(t - a \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}) - (t + a \cdot e^{i\frac{\pi}{4}})}{(t - a \cdot e^{i\frac{\pi}{4}})(t + a \cdot e^{i\frac{\pi}{4}})} + \Gamma \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{(t + a \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}) - (t - a \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}})}{(t + a \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}})(t - a \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}})} &= 0 \\ \Rightarrow -Q \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{t^2 - a^2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}} + \Gamma \frac{e^{i\frac{5\pi}{4}}}{t^2 - a^2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{Q}{t^2 - a^2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}} + \frac{\Gamma}{t^2 - a^2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}} &= 0 \\ \Rightarrow Q(t^2 + a^2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}) + \Gamma(t^2 - a^2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}) &= 0 \\ \Rightarrow t^2(Q + \Gamma) - a^2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}(\Gamma - Q) &= 0 \\ \Rightarrow t^2 &= a^2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma - Q}{\Gamma + Q} \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Por lo tanto los dos puntos de remanso son:

$$t_1 = a \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\Gamma - Q}{\Gamma + Q}}, \quad t_2 = a \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}} \sqrt{\frac{\Gamma - Q}{\Gamma + Q}} \quad (2.6.4)$$

c) Describir el campo fluido en función de la relación de  $\Gamma$  y  $Q$ .

Se pueden definir tres casos:

- $\Gamma > Q$

En este caso la raíz cuadrada es real y los puntos de remanso se sitúan sobre una recta con pendiente  $\pi/4$ .

- $\Gamma < Q$

De forma opuesta la raíz es negativa y se tiene que multiplicar y por lo tanto la pendiente es  $\pi/4 + \pi/2 = 5\pi/4$ .

- $\Gamma = Q$

Los dos puntos de remanso se sitúan en el origen de coordenadas  $t_1 = t_2 = 0$ .

### 3. Perfiles en régimen incompresible

En este tema se trabaja con la teoría potencial linealizada en perfiles en régimen incompresible. Se estudian las principales características de los perfiles:

- Los coeficientes aerodinámicos  $c_l$  y  $c_{mca}$ .
- La distribución del coeficiente de sustentación o del coeficiente de presión.
- El centro de presiones.
- El ángulo de ataque ideal y el ángulo de ataque de sustentación nula.

Se define el centro de presiones como el punto de aplicación de las fuerzas aerodinámicas, por eso respecto a ese punto no existe momento aerodinámico. Este punto no resulta muy útil ya que no es un punto fijo y cambiando por ejemplo el ángulo de ataque se mueve este punto. Existe otro punto denominado centro aerodinámico en el que el momento aerodinámico respecto a ese punto no cambia (o cambia poco). Se suelen centrar los esfuerzos aerodinámicos a ese punto y al desplazar la fuerza de sustentación desde el centro de presiones hasta el centro aerodinámico se debe introducir el momento aerodinámico.

Se deben de tener en cuenta algunos puntos:

- El centro aerodinámico se sitúa a un cuarto de la cuerda desde el borde de ataque.
- El ángulo de ataque y el momento aerodinámico se miden positivos cuando el borde de ataque se levanta respecto al borde de salida.
- Al ser un estudio bidimensional se utilizan fuerzas y momentos por unidad de longitud. Las adimensionalizaciones por lo tanto son para fuerzas  $q_\infty c$  y para momentos  $q_\infty c^2$ . Las fuerzas y momentos se escriben en minúscula.

Los problemas más típicos de este tema son los problemas sustentadores. El procedimiento básico suele ser el mismo pero el desarrollo puede variar mucho entre problemas. Normalmente la pauta a seguir es la siguiente:

1. Se debe obtener la función de la curvatura del perfil  $z_c(x)$ . Una vez obtenido la función de la curvatura se deben obtener los coeficientes de la serie de cosenos.

Si la función es continua se deriva la función respecto a  $x$  y se hace el siguiente cambio de variable, donde  $a$  es la posición del borde de ataque y  $b$  es la posición del borde de salida:

$$\frac{x}{c} = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \theta \quad (3.0.1)$$

Una vez introducido este cambio se deben hacer manipulación trigonométrica para dejarlo como una serie de cosenos.

$$\frac{dz_c(\theta)}{dx} = A'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \quad (3.0.2)$$

Se debe añadir ahora la contribución del ángulo de ataque por lo que los coeficientes para obtener los coeficientes aerodinámicos se obtienen de:

$$\frac{dz_c(\theta)}{dx} = (\alpha - A'_0) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \quad (3.0.3)$$

Si en cambio la función no es continua se deben obtener los coeficientes directamente con la formulación integral.

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_c(\theta)}{dx} d\theta, \quad A_n = -2\pi \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} \cos n\theta d\theta \quad (3.0.4)$$

2. El ángulo de ataque ideal se obtiene resolviendo el ángulo de ataque para el caso que  $A_0$  sea cero.

3. El coeficiente de sustentación se obtiene con la siguiente ecuación:

$$c_l = 2\pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \quad (3.0.5)$$

El coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico es:

$$c_{mca} = -\frac{\pi}{4} (A_1 + A_2) \quad (3.0.6)$$

4. La distribución del coeficiente de presión se calcula gracias a los coeficientes de la serie de Fourier.

$$c_{pe} = -2 \frac{u(x, 0^+)}{U_\infty}, \quad c_{pi} = -2 \frac{u(x, 0^-)}{U_\infty} \quad (3.0.7)$$

$$c_{pe}(\theta) = -2 \left( A_0 \tan \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right), \quad c_{pi}(\theta) = 2 \left( A_0 \tan \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) \quad (3.0.8)$$

Para acordarse siempre la presión en el extradós es menor que en el intradós. Se debe hacer el cambio de variable inverso para volverlo a dejar en función de  $x$ .

5. La distribución del coeficiente de sustentación se obtiene a partir del coeficiente de presión.

$$c_l(\theta) = 4 \left( A_0 \tan \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) \quad (3.0.9)$$

De forma similar, hay que hacer el cambio de variable inverso para obtener la distribución del coeficiente de sustentación en función de  $x$ .

6. El ángulo de ataque de sustentación nula se obtiene igualando la sustentación a cero.

7. La sustentación y el momento aerodinámico respecto al centro aerodinámico son:

$$l = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 c \cdot c_l, \quad m_{ca} = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 c^2 \cdot c_{mca} \quad (3.0.10)$$

### Problema 1. Tres perfiles

En las siguientes figuras están definidas las distribuciones del coeficiente de sustentación a lo largo de la cuerda ( $\xi = x/c$ ) medidas en tres perfiles diferentes, todos de cuerda  $c = 1.2$  m. Se pide para cada perfil:

- Calcular el valor del coeficiente de sustentación global del perfil, la posición del centro de presiones y el coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico.
- Calcular la sustentación y el momento respecto al centro aerodinámico suponiendo que los perfiles vuelan a través del aire en calma ( $\rho = 1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) con una velocidad de  $80 \text{ ms}^{-1}$ .

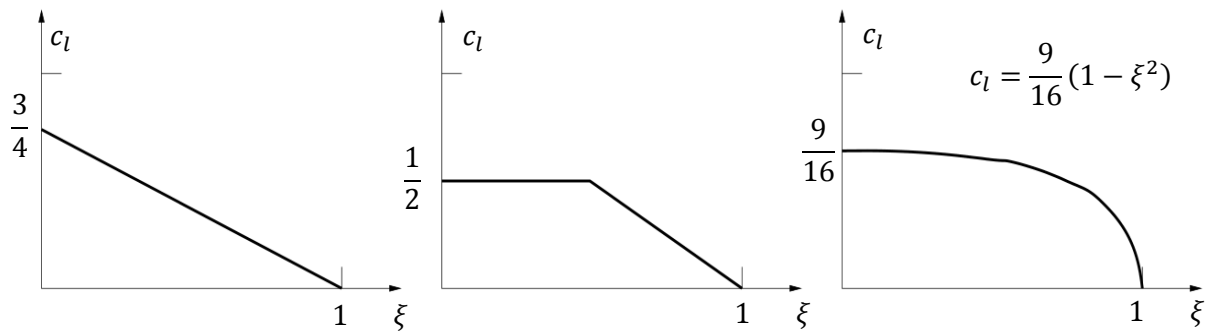


Figura 3.1.1. Distribución del coeficiente de sustentación para los tres perfiles.



**Resolución**

- a) Coeficiente de sustentación global del perfil, posición del centro de presiones y coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico

Lo primero que se debe obtener es la función de la distribución de sustentación en función del parámetro adimensional  $\xi$ . En el caso de ponerlo en función de una distancia dimensional esta distribución de sustentación tendría que tener unidades de  $m^{-1}$ .

$$c_{l1}(\xi) = \frac{3}{4}(1 - \xi) \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

$$c_{l2}(\xi) = \begin{cases} 0.5 & 0 \leq \xi \leq 0.5 \\ 1 - \xi & 0.5 < \xi \leq 1 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

$$c_{l3}(\xi) = \frac{9}{16}(1 - \xi^2) \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

Para obtener la distribución de sustentación hace falta integrar la distribución sobre toda la cuerda.

$$c_{l1} = \int_0^1 \frac{3}{4}(1 - \xi) d\xi = \frac{3}{4} \left[ \xi - \frac{\xi^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{8} \quad (3.1.2)$$

$$c_{l2} = \int_0^{0.5} 0.5 d\xi + \int_{0.5}^1 (1 - \xi) d\xi = \left[ \frac{1}{2} \xi \right]_0^{0.5} + \left[ \xi - \frac{\xi^2}{2} \right]_{0.5}^1 = \frac{3}{8} \quad (3.1.3)$$

$$c_{l3} = \int_0^1 \frac{9}{16}(1 - \xi^2) d\xi = \frac{9}{16} \left[ \xi - \frac{\xi^3}{3} \right]_0^1 = \frac{3}{8} \quad (3.1.4)$$

El centro de presiones se obtiene igualando el momento causado por la distribución de coeficiente de sustentación al momento generado por el coeficiente de sustentación del perfil.

$$c_l \xi_{cp} = \int_0^1 c_l(\xi) \cdot \xi d\xi \Rightarrow \xi_{cp} = \frac{\int_0^1 c_l(\xi) \cdot \xi d\xi}{c_l} \quad (3.1.5)$$

$$\xi_{cp1} = \frac{8}{3} \cdot \int_0^1 \frac{3}{4}(1 - \xi)\xi d\xi = 2 \left[ \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \quad (3.1.6)$$

$$\xi_{cp2} = \frac{8}{3} \cdot \left( \int_0^{0.5} 0.5\xi d\xi + \int_{0.5}^1 (1 - \xi)\xi d\xi \right) = \frac{8}{3} \left( \left[ \frac{1}{4} \xi^2 \right]_0^{0.5} + \left[ \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} \right]_{0.5}^1 \right) = \frac{7}{18} \quad (3.1.7)$$

$$\xi_{cp3} = \frac{8}{3} \cdot \int_0^1 \frac{9}{16}(1 - \xi^2)\xi d\xi = \frac{3}{2} \left[ \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{8} \quad (3.1.8)$$

Como el flujo es subsónico el centro aerodinámico se sitúa a un cuarto de la cuerda ( $\xi_{ca} = 1/4$ ). El momento se define positivo en el sentido del eje  $y$ , por lo que un momento positivo hace que el borde de ataque se levante.

El momento se obtiene multiplicando cada diferencial de coeficiente de sustentación por el brazo de palanca entre el punto y el centro aerodinámico. O bien conociendo la posición del centro de presiones (punto en el que el no hay momento aerodinámico) se obtiene el coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico calculando el momento generado por el coeficiente de sustentación del perfil.

$$c_{mca} = - \int_0^1 c_l(\xi) \cdot \left( \xi - \frac{1}{4} \right) = c_l \left( \frac{1}{4} - \xi_{cp} \right) \quad (3.1.9)$$

$$c_{mca1} = \frac{3}{8} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{32} \quad (3.1.10)$$

$$c_{mca2} = \frac{3}{8} \left( \frac{1}{4} - \frac{7}{18} \right) = -\frac{5}{96} \quad (3.1.11)$$

$$c_{mca3} = \frac{3}{8} \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \right) = -\frac{3}{64} \quad (3.1.12)$$

b) Sustentación y momento respecto al centro aerodinámico

Para obtener la sustentación y el momento simplemente hay que volver a dar dimensiones a los coeficientes. El coeficiente de sustentación se adimensionaliza con la presión dinámica y la cuerda mientras que el coeficiente de momento se adimensionaliza con la presión dinámica y la cuerda al cuadrado.

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 = \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot 80^2 = 3840 \text{ Pa} \quad (3.1.13)$$

$$l = q_\infty c \cdot c_l, \quad m_{ca} = q_\infty c^2 \cdot c_{mca} \quad (3.1.14)$$

Las fuerzas y los momentos para cada perfil son:

$$l_1 = 3840 \cdot 1.2 \cdot \frac{3}{8} = 1728 \text{ N/m}, \quad m_{ca1} = 3840 \cdot 1.2^2 \cdot -\frac{1}{32} = -172.8 \text{ Nm/m} \quad (3.1.15)$$

$$l_2 = l_1 = 1728 \text{ N/m}, \quad m_{ca2} = 3840 \cdot 1.2^2 \cdot -\frac{5}{96} = -288 \text{ Nm/m} \quad (3.1.16)$$

$$l_3 = l_1 = 1728 \text{ N/m}, \quad m_{ca3} = 3840 \cdot 1.2^2 \cdot -\frac{3}{64} = -259.2 \text{ Nm/m} \quad (3.1.17)$$

**Problema 2. Perfil delgado con curvatura cúbica**

La ecuación de la línea de curvatura de un perfil delgado es:

$$\frac{z}{c}(x) = \varepsilon x \left(1 - \frac{x}{c}\right) \left(2 - \frac{x}{c}\right), \quad \varepsilon \ll 1, \quad 0 \leq \frac{x}{c} \leq 1 \quad (3.2.1)$$

Se pide:

- a) Determinar en primer lugar el valor del ángulo de ataque ideal del perfil.
- b) Suponiendo que el perfil vuela con ángulo de ataque ideal, calcular el coeficiente de sustentación, el coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico, la distribución de sustentación a lo largo de la cuerda y la abscisa del centro de presiones.

**Resolución**

## a) Ángulo de ataque ideal

El ángulo de ataque ideal es el ángulo de ataque que hace que no haya singularidad en el borde de ataque. Al ser un perfil con curvatura se debe usar el método Glauert para problemas sustentadores. Al tener un perfil con una ecuación fácil de derivar se deriva antes de hacer el cambio de variable.

$$z(x) = \varepsilon \left( 2x - 3 \frac{x^2}{c} + \frac{x^3}{c^2} \right)$$

$$\frac{dz(x)}{dx} = \varepsilon \left( 2 - 6 \frac{x}{c} + 3 \frac{x^2}{c^2} \right) \quad (3.2.2)$$

Se hace el siguiente cambio de variable teniendo como parámetros  $a = 0$  y  $b = 1$ :

$$\frac{x}{c} = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) \quad (3.2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz(\theta)}{dx} &= \varepsilon \left[ 2 - 3(1 + \cos \theta) + \frac{3}{4}(1 + \cos \theta)^2 \right] = \\ &= \varepsilon \left( 2 - 3 - 3 \cos \theta + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} \cos \theta + \frac{3}{4} \cos^2 \theta \right) = \\ &= \varepsilon \left[ -\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \cos \theta + \frac{3}{8} (1 + \cos 2\theta) \right] = \\ &= \varepsilon \left( \frac{1}{8} - \frac{3}{2} \cos \theta + \frac{3}{8} \cos 2\theta \right) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Se pueden obtener los coeficientes de la serie de cosenos.

$$\frac{dz(\theta)}{dx} = -(A_0 - \alpha) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \quad (3.2.5)$$

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{8}\varepsilon, \quad A_1 = \frac{3}{2}\varepsilon, \quad A_2 = -\frac{3}{8}\varepsilon, \quad A_n = 0 \quad \forall n > 2 \quad (3.2.6)$$

El ángulo de ataque ideal se obtiene igualando el coeficiente  $A_0$  a cero.

$$\alpha_{id} - \frac{1}{8}\varepsilon = 0 \Rightarrow \alpha_{id} = \frac{1}{8}\varepsilon \quad (3.2.7)$$

a)  $c_l, c_{mac}$ , distribución de sustentación y abscisa del centro de presiones.

Como ya se tienen los coeficientes de la serie de cosenos y el ángulo de ataque de vuelo es fácil obtener los coeficientes aerodinámicos, se recuerda que para este caso  $A_0$  es cero.

$$c_l = 2\pi \left( \frac{A_1}{2} \right) = \frac{3\pi}{2} \varepsilon \quad (3.2.8)$$

$$c_{mac} = -\frac{\pi}{4} (A_1 + A_2) = -\frac{\pi}{4} \left( \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{3}{8}\varepsilon \right) = -\frac{9\pi}{32} \varepsilon \quad (3.2.9)$$

La distribución del coeficiente de sustentación en función del ángulo  $\theta$  es:

$$c_l(\theta) = A_0 \tan \frac{\theta}{2} + \sum_{(n=1)}^{\infty} A_n \sin n\theta = \frac{3}{2} \varepsilon \sin \theta - \frac{3}{8} \varepsilon \sin 2\theta \quad (3.2.10)$$

El centro de presiones es el punto en el que las fuerzas aerodinámicas no generan momento respecto a ese punto. Por lo tanto el momento respecto al centro aerodinámico es igual a la sustentación multiplicada por la distancia entre el centro aerodinámico (un cuarto de la cuerda) y el centro de presiones. Al usar coeficientes adimensionales las distancias deben de ser también adimensionales.

$$c_l \cdot \frac{\frac{c}{4} - x_{cp}}{c} = c_{mca} \quad (3.2.11)$$

$$\Rightarrow \frac{x_{cp}}{c} = \frac{1}{4} - \frac{c_{mac}}{c_l} = \frac{1}{4} - \frac{-9\pi\varepsilon}{32} \cdot \frac{2}{3\pi\varepsilon} = \frac{7}{16} \quad (3.2.12)$$

### Problema 3. Ángulo de sustentación nula

Dentro de la validez de la teoría potencial linealizada de perfiles en régimen incompresible, considere una línea de curvatura como la representada en la Figura 3.3.1. La corriente incidente está alineada con la cuerda. Determine el ángulo de sustentación nula  $\alpha_{SN}$  y represéntala sobre el dibujo.

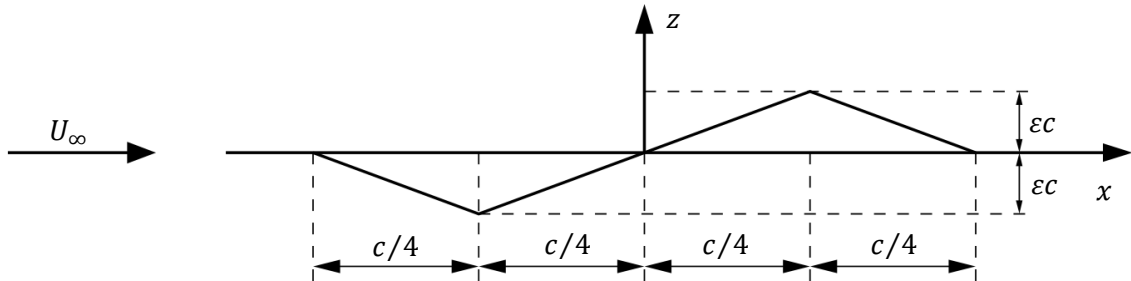


Figura 3.3.1. Perfil del problema

**Resolución**

El ángulo de sustentación nula es el ángulo en el que el perfil no sustenta. Si en vez de medir los ángulos respecto a la horizontal se miden respecto a la línea que forma este ángulo la ecuación del coeficiente de sustentación queda  $c_l = c_{l\alpha}\alpha$ .

Se debe utilizar el método de Glauert para problemas sustentadores para obtener el coeficiente de sustentación y obtener el ángulo para el cual el coeficiente es nulo.

Se debe primero obtener la función de la curvatura del perfil.

$$z_c = \begin{cases} -4\epsilon x & -\frac{c}{2} \leq x \leq -\frac{c}{4}, & \pi \geq \theta \geq \frac{2\pi}{3} \\ 4\epsilon x & -\frac{c}{4} < x \leq \frac{c}{4}, & \frac{2\pi}{3} > \theta \geq \frac{\pi}{3} \\ -4\epsilon x & \frac{c}{4} < x \leq \frac{c}{2}, & \frac{\pi}{3} > \theta \geq 0 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Al ser una función discontinua se debe obtener la serie de cosenos utilizando la ecuación integral.

$$A_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_p(x)}{dx} d\theta = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_c(x)}{dx} d\theta \quad (3.3.2)$$

$$A_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_p(x)}{dx} \cos n\theta d\theta = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_c(x)}{dx} \cos n\theta d\theta \quad (3.3.3)$$

Al necesitar obtener solo el  $c_l$  solo es necesario obtener los dos primeros coeficientes de la serie.

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{3}} -4\epsilon d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} 4\epsilon d\theta + \int_{\frac{2\pi}{3}}^\pi -4\epsilon d\theta \right] = \alpha - \frac{4\epsilon}{\pi} \left( -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) = \alpha + \frac{4}{3}\epsilon \quad (3.3.4)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{3}} -4\epsilon \cos \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} 4\epsilon \cos \theta d\theta + \int_{\frac{2\pi}{3}}^\pi -4\epsilon \cos \theta d\theta \right] = \\ &= -\frac{8\epsilon}{\pi} \left\{ -[\sin \theta]_0^{\pi/3} + [\sin \theta]_{\pi/3}^{2\pi/3} - [\sin \theta]_{2\pi/3}^\pi \right\} = \\ &= -\frac{8\epsilon}{\pi} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Ya se tienen los dos coeficientes necesarios para calcular el coeficiente de sustentación.

$$c_l = 2\pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right) = 2\pi \left( \alpha + \frac{4}{3}\epsilon \right) \quad (3.3.6)$$

Para obtener el ángulo de sustentación nula se debe igualar el coeficiente de sustentación a cero.

$$\alpha = -\frac{4}{3}\epsilon \quad (3.3.7)$$

El ángulo de ataque es positivo cuando el giro es horario. Este ángulo es el giro desde la posición horizontal del perfil por lo que se debe girar el perfil  $4\varepsilon/3$  de forma anti horaria.

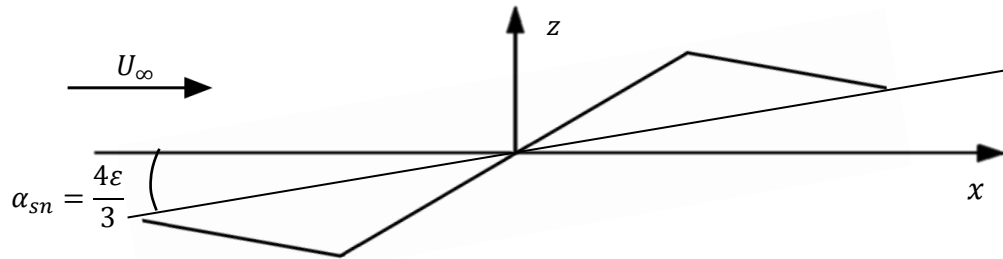


Figura 3.3.2. Perfil con el ángulo de sustentación nula.



**Problema 4. Perfil con función polinómica de cuarto orden**

Considere la línea de curvatura de ecuación:

$$z(x) = \varepsilon c \left[ 1 - \left( \frac{2x}{c} \right)^4 \right], \quad \varepsilon \ll 1 \quad \left| \frac{2x}{c} \right| \leq 1 \quad (3.4.1)$$

Dicha línea de curvatura se encuentra en presencia de una corriente incidente de velocidad  $U_\infty$ . Dentro de la validez de la teoría potencial linealizada de perfiles en régimen incompresible, se pide:

- a) Calcular el ángulo de ataque ideal
- b) Obtener el coeficiente de sustentación cuando el perfil vuela al ángulo de ataque ideal
- c) Obtener el coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico
- d) Encontrar la posición del centro de presiones
- e) Determinar la distribución del coeficiente de presión a lo largo de la cuerda si el ángulo de ataque es el ideal.
- f) Calcular el ángulo de sustentación nula y representarlo mediante un esquema

**Resolución**

## a) Ángulo de ataque ideal

El perfil se define mediante un polinomio de cuarto orden y por lo tanto no es un perfil simétrico. Se debe utilizar el método de Glauert para problemas sustentadores y obtener los coeficientes de la serie de cosenos.

Como la función es continua y derivable no hace falta utilizar la formulación integral para la obtención de los coeficientes de cosenos. Se deriva primero la función de la curvatura y luego se hace un cambio de variable.

$$\frac{dz_c(x)}{dx} = -64\varepsilon \left(\frac{x}{c}\right)^3 \quad (3.4.2)$$

Según el enunciado el borde de ataque está en  $a = -c/2$  y el borde de ataque está en  $b = c/2$ . El cambio de variables queda entonces:

$$\frac{x}{c} = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \theta = \frac{\cos \theta}{2} \quad (3.4.3)$$

Se introduce el cambio de variable en la derivada de la función de la curvatura. Se debe dejar como una serie de cosenos.

$$\frac{dz_c(\theta)}{dx} = -8\varepsilon \cos^3 \theta = -4\varepsilon \cos \theta (1 + \cos 2\theta) = -4\varepsilon (\cos \theta + \cos \theta \cos 2\theta) \quad (3.4.4)$$

Se debe desarrollar  $\cos \theta \cos 2\theta$ , para ello se utiliza una combinación de la ecuación de suma y de resta de ángulos en el coseno.

$$\begin{cases} \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta \\ \cos(2\theta - \theta) = \cos 2\theta \cos \theta + \sin 2\theta \sin \theta \end{cases} \quad (3.4.5)$$

$$\Rightarrow \cos 3\theta + \cos \theta = 2 \cos \theta \cos 2\theta \quad (3.4.6)$$

Por lo tanto la derivada de la función de la curvatura queda:

$$\frac{dz_c(\theta)}{dx} = -4\varepsilon \left( \cos \theta + \frac{\cos \theta + \cos 3\theta}{2} \right) = -6\varepsilon \cos \theta - 2\varepsilon \cos 3\theta \quad (3.4.7)$$

Se pueden obtener ahora los coeficientes de la serie de cosenos.

$$\frac{dz_c(\theta)}{dx} = -6\varepsilon \cos \theta - 2\varepsilon \cos 3\theta = -(A_0 - \alpha) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \quad (3.4.8)$$

$$A_0 = \alpha, \quad A_1 = 6\varepsilon, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 2\varepsilon, \quad A_n = 0 \quad \forall n > 3 \quad (3.4.9)$$

El ángulo de ataque ideal se obtiene cuando el coeficiente  $A_0$  es cero por lo que:

$$\alpha_{id} = 0 \quad (3.4.10)$$

b) Coeficiente de sustentación cuando  $\alpha = \alpha_{id}$

El coeficiente de sustentación cuando el ángulo de ataque es ideal es:

$$c_l = 2\pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right) = 6\pi\varepsilon \quad (3.4.11)$$

c) Coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico

El coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico es:

$$c_{mca} = -\frac{\pi}{4}(A_1 + A_2) = -\frac{3\pi}{2}\varepsilon \quad (3.4.12)$$

d) Posición del centro de presiones

El centro de presiones se obtiene a partir del momento respecto al centro aerodinámico ya que éste se obtiene cuando se mueve la sustentación del centro de presiones al centro aerodinámico. Al no indicar que el perfil vuela con ángulo ideal se debe primero obtener el  $c_l$ .

$$c_l = 2\pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right) = 2\pi(\alpha + 3\varepsilon) \quad (3.4.13)$$

$$c_{mca} + c_l \cdot \left( \frac{x_{cp}}{c} - \frac{x_{ca}}{c} \right) = 0 \quad (3.4.14)$$

$$\Rightarrow \frac{x_{cp}}{c} = -\frac{c_{mca}}{c_l} + \frac{x_{ca}}{c} = \frac{3\pi\varepsilon}{2 \cdot 2\pi(\alpha + 3\varepsilon)} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{3\varepsilon}} - 1 \right) \quad (3.4.15)$$

e) Distribución del coeficiente de presión a lo largo de la cuerda

Se utilizan los coeficientes de la serie de cosenos para obtener la distribución del coeficiente de presiones. El enunciado dice que se vuela con ángulo de ataque ideal por lo que  $A_0 = 0$ .

$$c_{pe} = -2 \frac{u(x, 0^+)}{U_\infty}, \quad c_{pi} = -2 \frac{u(x, 0^-)}{U_\infty} \quad (3.4.16)$$

$$c_{pe} = -2 \left( A_0 \tan \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) = -2(6\varepsilon \sin \theta + 2\varepsilon \sin 3\theta) \quad (3.4.17)$$

Hay que deshacer el cambio de variable  $x/c = \cos \theta/2$ .

$$\begin{aligned} 3 \sin \theta + \sin 3\theta &= 3 \sin \theta + \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta = \\ &= 3 \sin \theta + [2 \sin \theta \cos^2 \theta + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \theta] = \\ &= \sin \theta (3 + 2 \cos^2 \theta + 2 \cos^2 \theta - 1) = \\ &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} (2 + 4 \cos^2 \theta) \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

$$\rightarrow c_{pe} = -8\varepsilon \sqrt{1 - \left( \frac{2x}{c} \right)^2} \left( 1 + 2 \left( \frac{2x}{c} \right)^2 \right) \quad (3.4.19)$$

Al ser un problema de curvatura la distribución del coeficiente de presión en el intradós es igual pero de sentido contrario que el del extradós.

$$c_{pi} = 8\varepsilon \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{c}\right)^2} \left(1 + 2\left(\frac{2x}{c}\right)^2\right) \quad (3.4.20)$$

f) Ángulo de sustentación nula

Se utiliza la expresión del coeficiente de sustentación obtenido en la ecuación (3.4.13) para obtener el ángulo de ataque en el que el  $c_l$  es nulo.

$$2\pi(\alpha_{sn} + 3\varepsilon) = 0 \Rightarrow \alpha_{sn} = -3\varepsilon \quad (3.4.21)$$

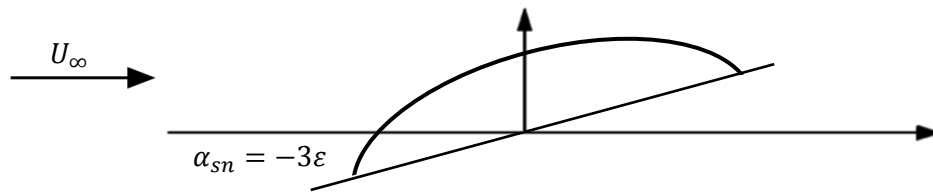


Figura 3.4.1. Perfil con ángulo de sustentación nula.

**Problema 5. Obtención la curvatura de un perfil**

Dentro de la validez de la teoría potencial linealizada de perfiles en régimen incompresible, determine la ecuación de la línea de curvatura que satisfaga las siguientes condiciones:

- El coeficiente de sustentación  $c_l$  debe valer  $\pi/24$  cuando el perfil vuela con ángulo de ataque nulo  $\alpha = 0$  y  $\pi/8$  cuando vuela con ángulo de ataque ideal  $\alpha_i$ .
- El coeficiente de momento respecto del punto medio del perfil ha de ser  $c_{m0} = \pi/32$  cuando el ángulo de ataque es el ideal.

Suponga que la ecuación de la línea de curvatura en variables adimensionalizadas con la cuerda es un polinomio de grado  $m$ :

$$z_c = \sum_{n=0}^m a_n x^n \quad (3.5.1)$$

Se pide

- a) Determinar el valor mínimo de  $m$  compatible con las ligaduras enunciadas.
- b) Calcular la ecuación de la línea de curvatura.
- c) Obtener el valor del ángulo de ataque ideal y la posición de la línea de sustentación nula, dibujando la línea de curvatura y la línea de sustentación nula.

**Resolución**

a) Valor mínimo de  $m$  compatible con las ligaduras

Con los dos valores de sustentación que se dan en las condiciones del enunciado se pueden obtener los dos coeficientes  $A_0$  y  $A_1$ .

$$c_l = 2\pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \quad (3.5.2)$$

$$\frac{\pi}{8} = \pi A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{8} \quad (3.5.3)$$

Se define el parámetro  $A'_0$  como  $A_0 = \alpha + A'_0$ .

$$\frac{\pi}{24} = 2\pi \left( A'_0 + \frac{1}{16} \right) \Rightarrow A'_0 = -\frac{1}{24} \quad (3.5.4)$$

$$\rightarrow A_0 = \alpha - \frac{1}{24} \quad (3.5.5)$$

Se utiliza ahora condición de coeficiente de momento respecto al centro del perfil. La función de curvatura de perfil tiene forma parabólica por lo que la posición del borde de ataque está en  $-c/2$ , el borde de salida  $c/2$  y el centro está en el origen de coordenadas.

$$c_{m0} = c_l \cdot (0 - x_{ca}) + c_{mca} \quad (3.5.6)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{32} = \frac{\pi}{8} \left( 0 + \frac{1}{4} \right) + c_{mca}$$

$$\Rightarrow c_{mca} = 0 \quad (3.5.7)$$

Se obtiene el coeficiente  $A_2$  gracias al coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico.

$$c_{mca} = -\frac{\pi}{4} (A_1 + A_2) \Rightarrow 0 = -\frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{8} + A_2 \right) \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{8} \quad (3.5.8)$$

Ya no quedan más condiciones por lo que no se pueden obtener más coeficientes. Se tienen tres parámetros donde el mayor es no. Además se tiene que imponer la condición geométrica del perfil. Por lo tanto se tienen cuatro ecuaciones siendo  $n_{min} = 3$  ya que  $n$  empieza en 0.

b) Función de la línea de curvatura

Al tener que obtener la función de la curvatura del perfil se debe usar el método de Glauert para problemas sustentadores. Se deriva la función de la curvatura.

$$z_c = \sum_{n=0}^3 a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (3.5.9)$$

$$\frac{dz_c(x)}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \quad (3.5.10)$$

Se hace el cambio de variable, al tener una función polinómica se sabe que el perfil está centrado en  $x = 0$ .

$$x = \frac{\cos \theta}{2} \quad (3.5.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_c(\theta)}{dx} &= a_1 + 2a_2 \frac{\cos \theta}{2} + 3a_3 \left(\frac{\cos \theta}{2}\right)^2 = \\ &= a_1 + a_2 \cos \theta + \frac{3a_3}{8} (\cos 2\theta + 1) = \\ &= \left(a_1 + \frac{3}{8}a_3\right) + a_2 \cos \theta + \frac{3}{8}a_3 \cos 2\theta \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

Los parámetros de la serie de cosenos son entonces:

$$A_0 = \alpha - \left(a_1 + \frac{a_3}{8}\right), \quad A_1 = a_2, \quad A_2 = \frac{3}{8}a_3 \quad (3.5.13)$$

Utilizando los valores obtenidos de  $A_0$ ,  $A_3$  y  $A_2$  se pueden obtener los valores de  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$ .

$$a_3 = -\frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{8}, \quad a_1 = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12} \quad (3.5.14)$$

De momento la función de la curvatura es:

$$z_c = a_0 + \frac{1}{12}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \quad (3.5.15)$$

Se imponen ahora la condición geométrica.

$$z_c(0.5) = a_0 + \frac{1}{24} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = 0 \Rightarrow a_0 = -\frac{1}{32} \quad (3.5.16)$$

Este coeficiente se puede obtener también utilizando la posición del borde de ataque y da el mismo resultado. La ecuación del perfil es finalmente:

$$z_c = -\frac{1}{32} + \frac{1}{12}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \quad (3.5.17)$$

a) Ángulo de ataque ideal y de sustentación nula

Para obtener el ángulo de ataque ideal se utiliza la ecuación (3.5.5), se debe obtener el valor de  $\alpha$  para el cual  $A_0$  es cero.

$$\alpha_{id} = \frac{1}{24} \quad (3.5.18)$$

El ángulo de sustentación nula es el ángulo para el cual el  $c_l$  es nulo. Se debe obtener primero el coeficiente de sustentación del perfil.

$$c_l = 2\pi \left(\alpha - \frac{1}{24} + \frac{1}{16}\right) \Rightarrow \alpha_{sn} = -\frac{1}{48} \quad (3.5.19)$$

Se pueden ver, en la siguiente figura, las líneas que forman el ángulo de sustentación nula y el ángulo de ataque ideal.

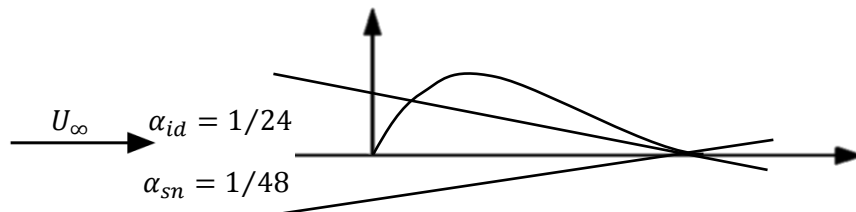


Figura 3.5.1. Línea de sustentación nula y ángulo de ataque ideal.



**Problema 6. Ángulo de ataque de equilibrio**

Considere un perfil volando en régimen incompresible con velocidad  $U_\infty$ . Su línea de curvatura en variables adimensionalizadas con la cuerda  $c$  es:

$$z_c = \frac{1}{2\pi}(1 - 4x^2)(1 - 2x), \quad |x| \leq 1/2 \quad (3.6.1)$$

Siendo  $k\pi$  el coeficiente de peso (peso por unidad de envergadura dividido por la cuerda del perfil y la presión dinámica de la corriente incidente). Se supone que el centro de masas del perfil coincide con el punto medio de la cuerda y que éste está articulado, en su borde de ataque, a un punto fijo.

Utilizando la teoría potencial linealizada de perfiles en régimen incompresible, calcule el ángulo de ataque de equilibrio.

**Resolución**

Para que el perfil esté en equilibrio debe de cumplirse que el sumatorio de momentos desde cualquier punto es nulo. Se deben por lo tanto obtener los coeficientes aerodinámicos y hacer un sumatorio de momentos respecto al borde de ataque (podría ser cualquier otro punto).

Se utiliza el método de Glauert para problemas sustentadores. Como la función es continua se puede derivar la ecuación de la curvatura y luego aplicar el siguiente cambio de variable:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \theta = \frac{\cos \theta}{2} \quad (3.6.2)$$

La derivada de la línea de curvatura respecto a  $x$  es:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dx} (1 - 2x - 4x^2 + 8x^3) = \frac{1}{2\pi} (-2 - 8x + 24x^2) \quad (3.6.3)$$

Se aplica el cambio de variable para dejarlo como una serie de cosenos.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\pi} (-2 - 4 \cos \theta + 6 \cos^2 \theta) = \frac{1}{2\pi} (1 - 4 \cos \theta + 3 \cos 2\theta) \quad (3.6.4)$$

La velocidad vertical adimensional es:

$$\frac{w(\theta)}{U_\infty} = -\alpha + \frac{dz_c}{dx} = -\alpha + \frac{1}{2\pi} - \frac{4}{2\pi} \cos \theta + \frac{3}{2\pi} \cos 2\theta = -A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \quad (3.6.5)$$

Por lo tanto los coeficientes de la serie de cosenos son:

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{2\pi}, \quad A_1 = \frac{4}{2\pi}, \quad A_2 = -\frac{3}{2\pi}, \quad A_n = 0 \quad \forall n \geq 3 \quad (3.6.6)$$

El coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico es:

$$c_{mca} = -\frac{\pi}{4} (A_1 + A_2) = -\frac{\pi}{4} \left( \frac{4}{2\pi} - \frac{3}{2\pi} \right) = -\frac{1}{8} \quad (3.6.7)$$

El coeficiente de sustentación del ala es:

$$c_l = 2\pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right) = 2\pi\alpha + 1 \quad (3.6.8)$$

Se hace el sumatorio de momentos respecto al borde de ataque y se iguala a cero para obtener el ángulo de ataque de equilibrio.

$$\begin{aligned} c_{mca} - c_l \cdot \frac{1}{4} + c_w \cdot \frac{1}{2} &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{1}{8} - (2\pi\alpha_{eq} + 1) \cdot \frac{1}{4} + k\pi \cdot \frac{1}{2} &= 0 \\ \Rightarrow \alpha_{eq} &= k - \frac{3}{4\pi} \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

**Problema 7. Perfil con flap**

Considere un perfil sin curvatura de cuerda  $c = 3$  m volando en régimen incompresible a velocidad  $U_\infty = 60$  m/s. El perfil tiene un flap simple de cuerda  $c/2$ . Sabiendo que, con el flap sin deflejar, el coeficiente de sustentación es  $c_l = 1/3$ , y que la velocidad de despegue es  $U_\infty/2$ , calcule el ángulo de deflexión del flap en el despegue, suponiendo que la parte fija no varía su posición respecto a la del vuelo de crucero. Desprecie el efecto suelo en el despegue.

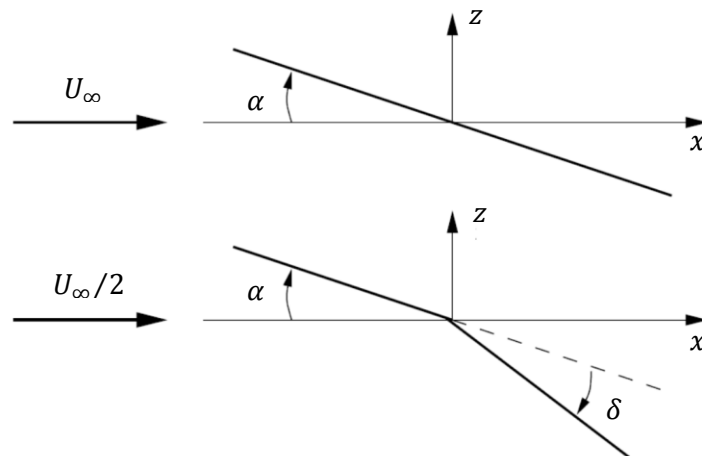


Figura 3.7.1. Perfil con las dos configuraciones de flap.

**Resolución**

El perfil sin curvatura es simplemente una placa plana. La única contribución al problema sustentador es el ángulo de ataque, por lo tanto solo hay un coeficiente de la serie de cosenos de la velocidad vertical adimensional.

$$A_0 = \alpha, \quad A_n = 0 \quad \forall n \geq 1 \tag{3.7.1}$$

El coeficiente de sustentación es por lo tanto:

$$c_l = 2\pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right) = 2\pi\alpha \tag{3.7.2}$$

El ángulo de ataque es por lo tanto:

$$\alpha = \frac{c_l}{2\pi} = \frac{1}{6\pi} \tag{3.7.3}$$

Se estudia ahora la segunda configuración. El perfil ahora tiene curvatura, está compuesto de dos placas planas como se puede ver en la Figura 3.7..

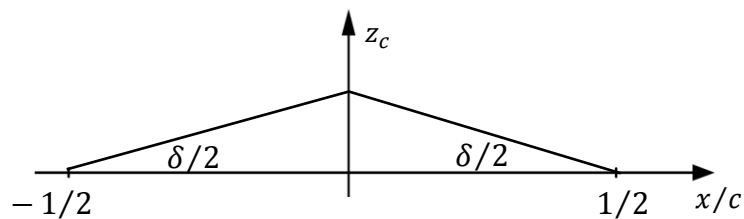


Figura 3.7.2. Función de la curvatura del perfil.

La función de curvatura es:

$$z_c(x) = \begin{cases} \frac{\delta}{2} \cdot \frac{x}{c} - \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{c} < 0 \\ -\frac{\delta}{2} \cdot \frac{x}{c} + \frac{1}{2}, & 0 \leq \frac{x}{c} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.7.4}$$

La derivada de esta función respecto a  $x$  es:

$$\frac{dz_c(x)}{d(x/c)} = \begin{cases} \frac{\delta}{2}, & -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{c} < 0 \\ -\frac{\delta}{2}, & 0 \leq \frac{x}{c} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.7.5}$$

Se debe aplicar la ecuación integral para obtener la serie de Fourier de la velocidad vertical adimensional.

$$A_0 = \alpha' - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} d\theta = \alpha' - \frac{1}{\pi} \left( \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\delta}{2} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta}{2} d\theta \right) = \alpha' - \frac{\delta}{2\pi} \left( \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \alpha' \tag{3.7.6}$$

Se calcula ahora el segundo coeficiente de la serie.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_c}{dx} \cos \theta \, d\theta = \\
 &= -\frac{2}{\pi} \left( \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\delta}{2} \cos \theta \, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta}{2} \cos \theta \, d\theta \right) = \\
 &= -\frac{\delta}{\pi} \left( \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} + \sin 0 \right) = \\
 &= \frac{2\delta}{\pi} \tag{3.7.7}
 \end{aligned}$$

El coeficiente de sustentación para el segundo caso es:

$$c'_l = 2\pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right) = 2\pi\alpha' + 2\delta \tag{3.7.8}$$

Se tiene que calcular cual es el ángulo de ataque  $\alpha'$  y dejarlo en función de  $\alpha$  (ángulo de ataque para el primer caso). En la Figura 3.7.2 se puede ver que el perfil se gira un ángulo  $\delta/2$  para poder obtener la ecuación de la curvatura, por lo tanto el ángulo de ataque  $\alpha'$  es:

$$\alpha' = \alpha + \frac{\delta}{2} \tag{3.7.9}$$

El coeficiente de sustentación del segundo caso es por lo tanto:

$$c'_l = 2\pi\alpha + \delta(\pi + 2) = \frac{1}{3} + \delta(\pi + 2) \tag{3.7.10}$$

Finalmente para obtener la deflexión del flap se debe igualar la sustentación del primer caso con la del segundo, nota no se pueden igualar los coeficientes de sustentación porque la presión dinámica del aire en los dos casos no es la misma pero el peso que debe generar el ala sí.

$$\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c \cdot c_l = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{U_\infty}{2}\right)^2 c \cdot c'_l \tag{3.7.11}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{3} + \delta(\pi + 2) \right] \tag{3.7.12}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{\pi + 2} \tag{3.7.13}$$

**Problema 8. Perfil con articulación en el borde de salida**

Considere una línea de curvatura, de cuerda  $c$ , formada por tres tramos rectos, como se muestra en la Figura 3.8.1. Dentro del marco de la teoría potencial linealizada de perfiles en régimen incompresible, se pide:

- Ángulo de ataque de equilibrio del perfil cuando se articula en el borde de salida.
- Posición del punto en el que se debe articular el perfil para que el ángulo de ataque de equilibrio coincida con el ángulo de ataque ideal.

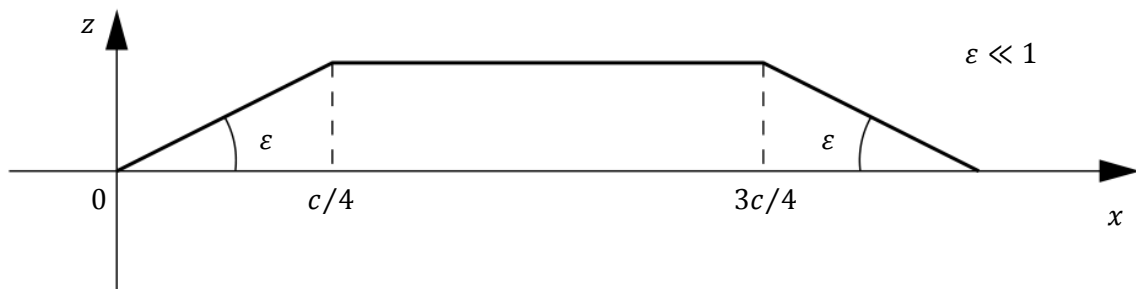


Figura 3.8.1. Diagrama del perfil.

**Resolución**

a) Ángulo de ataque de equilibrio del perfil cuando se articula en el borde de salida

Para obtener el ángulo de ataque se debe obtener el coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico y el coeficiente de sustentación. Para ello lo primero es obtener los coeficientes de la serie de cosenos. La función del perfil, en variables adimensionales, es:

$$z_p = \begin{cases} \varepsilon x & 0 \leq x \leq 1/4 \\ \varepsilon/4 & 1/4 \leq x \leq 3/4 \\ -\varepsilon x + 1 & 3/4 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.8.1)$$

Como la función está definida a trozos se debe usar la formulación integral para obtener los coeficientes de la serie. Primero se obtiene la derivada de la función.

$$\frac{dz_p}{dx} = \begin{cases} \varepsilon & 0 \leq x \leq 1/4 \\ 0 & 1/4 \leq x \leq 3/4 \\ -\varepsilon & 3/4 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.8.2)$$

Para utilizar la formulación integral se debe hacer el siguiente cambio de variable:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \theta = \frac{1}{2} + \frac{\cos \theta}{2} \quad (3.8.3)$$

La derivada del perfil queda:

$$\frac{dz_p}{dx}(\theta) = \begin{cases} \varepsilon & 2\pi/3 \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \pi/3 \leq \theta \leq 2\pi/3 \\ -\varepsilon & 0 \leq \theta \leq \pi/3 \end{cases} \quad (3.8.4)$$

Los coeficientes quedan:

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_p}{dx} d\theta = \alpha - \frac{1}{\pi} \left( -\varepsilon \frac{\pi}{3} + \varepsilon \frac{\pi}{3} \right) = \alpha \quad (3.8.5)$$

$$A_1 = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_p}{dx} \cos \theta d\theta = -\frac{2}{\pi} \left\{ [-\varepsilon \sin \theta]_0^{\pi/3} + [\varepsilon \sin \theta]_{2\pi/3}^\pi \right\} = \frac{2\varepsilon\sqrt{3}}{\pi} \quad (3.8.6)$$

$$A_2 = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_p}{dx} \cos 2\theta d\theta = -\frac{2\varepsilon}{\pi} \left\{ \left[ -\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/3} + \left[ \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{2\pi/3}^\pi \right\} = 0 \quad (3.8.7)$$

El coeficiente de sustentación y el coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico son:

$$c_l = 2\pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right) = 2\pi \left( \alpha + \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{\pi} \right) = 2\pi\alpha + 2\varepsilon\sqrt{3} \quad (3.8.8)$$

$$c_{mca} = -\frac{\pi}{4} (A_1 + A_2) = -\frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2} \quad (3.8.9)$$

Para obtener el ángulo de equilibrio si el perfil está articulado en el borde de salida se debe igualar el coeficiente de momentos respecto al borde de salida a cero.

$$c_{mbs} = c_{mca} + c_l \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \pi \alpha_{eq} + \frac{3}{2} \varepsilon \sqrt{3} - \frac{\varepsilon \sqrt{3}}{2} = 0 \quad (3.8.10)$$

$$\Rightarrow \alpha_{eq} = -\frac{2\varepsilon\sqrt{3}}{3\pi} \quad (3.8.11)$$

b) Posición de la articulación para que  $\alpha_{eq} = \alpha_{id}$

El ángulo de ataque ideal es aquel que cumple que  $A_0 = 0$ , por lo tanto  $\alpha_{id} = 0$ . La posición de la articulación se calcula igualando el coeficiente de momento respecto a ese punto a cero.

$$c_m = c_{mca} + c_l \cdot (x_{eq} - x_{ca}) = 2\varepsilon\sqrt{3} \left( x_{eq} - \frac{1}{4} \right) - \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2} = 0 \quad (3.8.12)$$

$$\Rightarrow x_{eq} = \frac{1}{2} \quad (3.8.13)$$



## 4. Perfiles en régimen compresible

En este tema se sigue trabajando con la teoría potencial linealizada para perfiles pero esta vez el régimen ya no es incompresible. Se tienen tres casos de régimen compresible: subsónico, transónico y supersónico. En este tema se estudian el régimen subsónico ( $M < 1$ ) y el supersónico ( $M > 1$ ).

Para el caso subsónico se utiliza la analogía de Prandtl-Glauert por lo que la resolución de los problemas no dista tanto de los problemas en régimen incompresible. Se define  $\beta$  como  $\sqrt{1 - M^2}$ .

Los problemas supersónicos son distintos a los subsónicos. Se diferencian dos tipos de problemas, los que se tiene un perfil aislado y los que no (por ejemplo en el caso de que el perfil esté en un túnel de viento). Se define  $\beta$  como  $\sqrt{M^2 - 1}$

### 1. Problema subsónico

La metodología de cálculo de los coeficientes aerodinámicos es el mismo que en el caso incompresible.

El coeficiente de sustentación en régimen compresible se puede obtener a partir de la analogía de Prandtl-Glauert.

$$c_{lc} = \frac{c_{li}}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}} c_{li} \quad (4.0.1)$$

Una vez calculada la distribución de la sustentación, se puede calcular directamente el coeficiente de momento para el problema compresible.

### 2. Problema supersónico para perfiles aislados

En régimen supersónico, las perturbaciones no avanzan aguas arriba por lo que un perfil compuesto por varias placas planas se pueden considerar cada una por separado. El coeficiente de sustentación de una placa plana aislada o de un perfil es:

$$c_l = \frac{4\alpha}{\beta} \quad (4.0.2)$$

La distribución del coeficiente de sustentación en un perfil es:

$$c_l(x) = \frac{4}{\beta} \left( \alpha - \frac{dz_c}{dx} \right) \quad (4.0.3)$$

El centro aerodinámico en régimen supersónico se sitúa en el punto medio de del perfil. El coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico es:

$$c_{mca} = \int_a^b c_l(x) \cdot (x_{ca} - x) dx \quad (4.0.4)$$

También se puede obtener el coeficiente de momento si se divide el perfil en placas planas y se calcula la sustentación de cada una, pudiendo luego hacer un sumatorio de momentos respecto al centro aerodinámico.

El coeficiente de resistencia de onda es:

$$c_d = \frac{4\alpha^2}{\beta} + \frac{4}{\beta} \int_a^b \left[ \left( \frac{dz_e}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dz_c}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (4.0.5)$$

### 3. Problema supersónico para perfiles con condiciones de contorno

Para resolver este tipo de problemas se deben analizar como cambian las propiedades siguiendo las líneas características. Las líneas características que se consideran en este problema son:

$$\xi = x - \beta z, \quad \eta = x + \beta z \quad (4.0.6)$$

La solución del potencial  $\varphi(x, z)$  es:

$$\varphi(x, z) = F(\xi) + G(\eta) \quad (4.0.7)$$

Donde  $F(\xi)$  representa una perturbación que se propaga sin amortiguarse a lo largo de las líneas  $\xi = ct$  y  $G(\eta)$  representa otra perturbación que se propaga a lo largo de  $\eta = ct$ . En la teoría potencial linealizada en régimen supersónico se considera que las perturbaciones no se amortiguan.

El ángulo que forman las líneas características, medido desde el eje vertical, es:

$$\sin \delta = \frac{1}{M_\infty} \quad (4.0.8)$$

Lo primero que se debe hacer es identificar la configuración de las líneas características y numerar las distintas zonas. En la Figura 4.0.1 se puede ver un ejemplo de configuración para el caso de un perfil sobre el suelo.

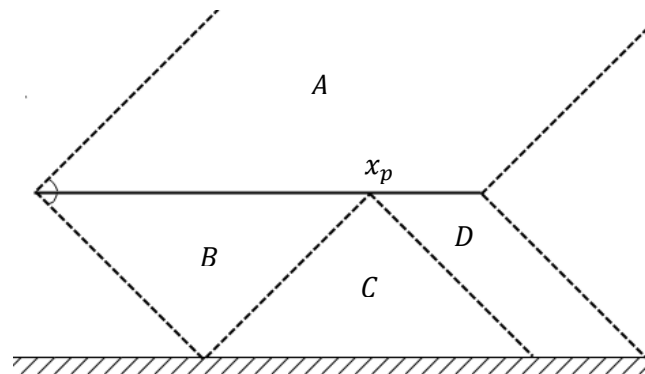


Figura 4.0.1. Ejemplo de definición de las líneas características y de las distintas zonas.

Para las distintas zonas se tiene que encontrar el potencial  $\varphi$ . Siempre se tiene alguna zona que se comporta como un perfil aislado, en el caso del ejemplo se tiene que tanto la zona A como la zona B están aislados. En la zona B se podría indicar directamente que  $F_B(\xi)$  es cero ya que el intradós está aislado. Esto permite saber que:

$$\varphi_B = G_B(\eta) = \frac{U_\infty}{\beta} z_i(\eta) \quad (4.0.9)$$

La línea característica que parte del borde de ataque llega hasta el suelo. Desde ese punto parte otra línea característica que comparten las zonas  $B$  y  $C$ , por lo que  $G_B(\eta) = G_C(\eta)$ . En el caso de la línea común entre  $C$  y  $D$  se cumple que  $F_C(\xi) = F_D(\xi)$ .

En cada zona se tienen tres variables  $\varphi$ ,  $F$  y  $G$  y normalmente de la zona anterior solo se conoce una. Para obtener otra ecuación es necesario introducir una condición de contorno. En el ejemplo anterior se puede introducir una condición de contorno en el punto de contacto con el suelo entre las zonas  $B$  y  $C$  para obtener el valor de  $F_C(\eta)$ . Normalmente las condiciones de contorno son sobre paredes o sobre el propio perfil.

Las condiciones de contorno dependen del contorno de estudio. Si se sabe cual es la velocidad vertical se deriva  $\varphi$  respecto a  $z$ , mientras que si lo que se conoce es el coeficiente de presiones se deriva  $\varphi$  respecto a  $x$ . Los casos más usuales son los siguientes:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=suelo} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=perfil} = U_\infty \frac{dz_p}{dx}, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{z=aire libre} = 0 \quad (4.0.10)$$

Se utiliza la regla de la cadena en la derivada de  $\varphi$  respecto a  $z$ .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial(F + G)}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = -\beta \frac{\partial F}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial G}{\partial \eta} \quad (4.0.11)$$

Como siempre se tiene una de las dos funciones ( $F$  o  $G$ ) se puede resolver la otra y luego obtener el potencial de la zona de estudio.

El coeficiente de presión sobre el perfil se calcula con el potencial para cada zona.

$$c_p = -\frac{2}{U_\infty} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{z_p} \quad (4.0.12)$$

Y la sustentación se obtiene de la diferencia de los coeficientes de presión del intradós y extradós.

$$c_l(x) = c_{pi}(x) - c_{pe}(x) \quad (4.0.13)$$

El coeficiente de resistencia de onda es:

$$c_d = \int_a^b \left( c_{pe} \frac{dz_e}{dx} - c_{pi} \frac{dz_i}{dx} \right) dx \quad (4.0.14)$$

**Problema 1. Perfil con forma parabólica**

Considere un perfil de cuerda  $c$  que vuela con un ángulo de ataque nulo  $\alpha = 0$ , siendo  $M_\infty = 0.6$ . Dicho perfil tiene forma de arco de parábola, de manera que la flecha máxima de valor  $\varepsilon c$  se alcanza en el punto medio de la cuerda. El perfil presenta una articulación situada en este último punto, en torno a la que puede girar su parte posterior.

Calcule el momento que es preciso ejercer sobre dicho timón para que éste no sufra deflexión alguna.

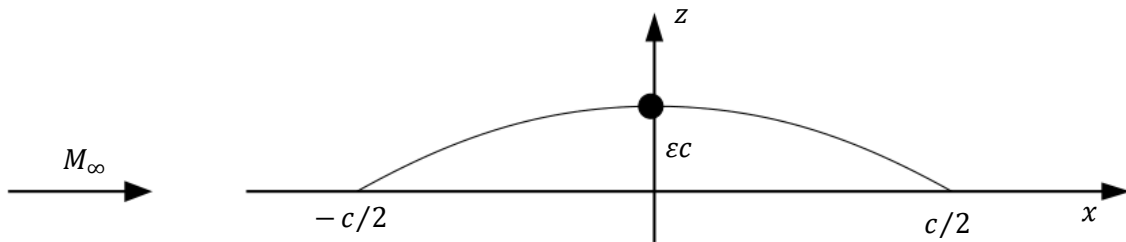


Figura 4.1.1. Perfil del problema.

**Resolución**

Se debe obtener la función del perfil. Como no hay ángulo de ataque en el problema  $z_p = z_c$ . La función de la curvatura tiene forma parabólica:

$$z_c = Ax^2 + Bx + C \quad (4.1.1)$$

El máximo de la función está en  $x = 0$ :

$$\frac{dz_c}{dx} = 2Ax + B \Rightarrow B = 0 \quad (4.1.2)$$

En esta posición  $z_c = \varepsilon c$ .

$$C = \varepsilon c \quad (4.1.3)$$

La función tiene sus raíces en  $-c/2$  y  $c/2$ .

$$0 = A \cdot \frac{c^2}{4} + \varepsilon c \Rightarrow A = -\frac{4\varepsilon}{c} \quad (4.1.4)$$

Por lo tanto, la función de la curvatura es:

$$z_c = -\frac{4\varepsilon}{c}x^2 + \varepsilon c \quad (4.1.5)$$

Se deriva la función de la curvatura.

$$\frac{dz_c(x)}{d\theta} = -\frac{8\varepsilon}{c}x \quad (4.1.6)$$

Se hace el siguiente cambio de variable:

$$\frac{x}{c} = \frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)}{2} \cos \theta = \frac{\cos \theta}{2} \quad (4.1.7)$$

$$\rightarrow \frac{dz_c(\theta)}{d\theta} = -4\varepsilon \cos \theta \quad (4.1.8)$$

Los coeficientes de la serie de cosenos son:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 4\varepsilon, \quad A_n = 0 \quad \forall n > 1 \quad (4.1.9)$$

Se calcula ahora la distribución del coeficiente de sustentación. Como es régimen subsónico pero compresible, se utiliza la analogía de Prandtl-Glauert.

$$c_l(\theta) = \frac{4}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \left( A_0 \tan \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) = \frac{16\varepsilon}{\sqrt{1-0.6^2}} \sin \theta = 20\varepsilon \sin \theta \quad (4.1.10)$$

Se debe calcular ahora el momento que generan las fuerzas en la mitad trasera del perfil respecto al centro del perfil y así saber el momento que se debe ejercer sobre la articulación. Esto es distinto a calcular el momento aerodinámico respecto al centro ya que en ese caso se calcula usando todo el perfil.

$$c_m = \int_0^{1/2} c_l(x) \cdot \frac{x}{c} d\frac{x}{c} \quad (4.1.11)$$

Como se tiene la distribución de sustentación en función de  $\theta$  se debe hacer el cambio de variable en la integral.

$$\frac{dx}{c} = -\frac{\sin \theta}{2} d\theta \quad (4.1.12)$$

$$\begin{aligned} c_m &= -\int_{\pi/2}^0 c_l(\theta) \frac{\sin \theta}{2} \cdot \frac{\cos \theta}{2} d\theta = \\ &= -5\varepsilon \int_{\pi/2}^0 \sin^2 \theta \cdot \cos \theta d\theta = \\ &= -5\varepsilon \left[ \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_{\pi/2}^0 = \\ &= \frac{5}{3} \varepsilon \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Se debe poner dimensión a este momento, se multiplica el coeficiente de momentos por  $c^2$  y por la presión dinámica.

$$m = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 c^2 \cdot c_m = \frac{5}{6} \rho_\infty U_\infty^2 c^2 \varepsilon \quad (4.1.14)$$

**Problema 2. Fuerza de succión en régimen incompresible**

Una placa bidimensional, de cuerda  $c = 2$  m, vuela en régimen incompresible a una velocidad  $U_\infty = 100$  m/s en el seno de una atmósfera de densidad  $\rho_\infty = 1.2$  kg/m<sup>3</sup>, proporcionando una sustentación de valor  $l = 6280$  N/m. Considérese que esa misma placa vuela a idéntica velocidad y ángulo de ataque en el seno de un fluido compresible que tiene la misma densidad, aguas arriba del obstáculo, que en el caso anterior, siendo ahora el número de Mach no nulo y de valor  $M_\infty = 0.6$ . Determine, en este caso, el valor de la fuerza de succión que actúa en el borde de ataque de la placa.

**Resolución**

La sustentación en régimen incompresible es:

$$l_i = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 c \cdot c_{li} \quad (4.2.1)$$

Al ser una plaza plana la función de la curvatura es  $z_c = 0$  por lo que  $c_{li}$  es:

$$c_{li} = 2\pi\alpha \quad (4.2.2)$$

Se puede obtener el ángulo de ataque de vuelo en régimen incompresible.

$$\alpha = \frac{l_i}{\rho_{\infty} u_{\infty}^2 c \pi} = \frac{6280}{1.2 \cdot 100^2 \cdot 2 \cdot \pi} = 0.0833 \text{ rad} \quad (4.2.3)$$

La sustentación en régimen compresible se obtiene utilizando la analogía de Prandtl Glauert.

$$l_c = \frac{l_i}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}} = \frac{6280}{\sqrt{1 - 0.6^2}} = 7850 \text{ N/m} \quad (4.2.4)$$

La sustentación es la fuerza aerodinámica vertical pero el perfil está inclinado por lo que la componente de la sustentación en la dirección del perfil es:

$$F = l_c \cdot \sin \alpha = \frac{l_i^2}{\rho_{\infty} u_{\infty}^2 \pi \sqrt{1 - M_{\infty}^2}} = 653 \text{ N/m} \quad (4.2.5)$$

Esta es la fuerza de arrastre provocada por la sustentación, la fuerza de succión es la misma pero en sentido opuesto.



**Problema 3. Sustentación de un perfil en régimen compresible**

Considere un perfil de ala de cuerda  $c = 1$  m, como el que se muestra en la Figura 4.3.1. Calcule la sustentación del perfil cuando vuela con ángulo de ataque nulo a una velocidad  $U_\infty = 180$  m/s. A la altitud de vuelo, la densidad del fluido es  $\rho_\infty = 1$  kg/m<sup>3</sup> y la velocidad del sonido es  $a_\infty = 300$  m/s.

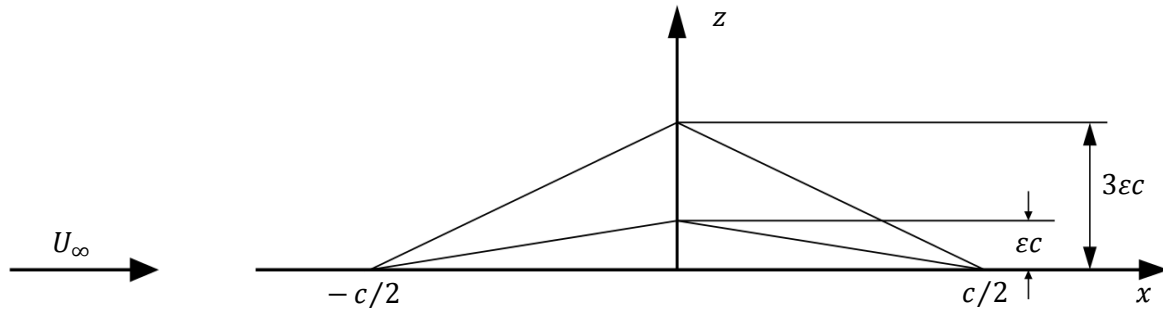


Figura 4.3.1. Perfil del problema.

**Resolución**

En este problema se pide encontrar la sustentación de un perfil en régimen subsónico compresible. El procedimiento a seguir es obtener primero la solución del problema incompresible y luego utilizar la analogía de Prandtl-Glauert.

Se debe primero obtener la función de la curvatura del perfil. La curvatura es similar al perfil de la Figura 4.3.1 pero el máximo está en  $2\varepsilon$ . Por lo tanto la función de curvatura es:

$$z_c = \begin{cases} 4\varepsilon x + 2\varepsilon, & -c/2 \leq x < 0 \\ -4\varepsilon x + 2\varepsilon, & 0 \leq x \leq c/2 \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Como la ecuación del perfil está definida a trozos se tiene que obtener la serie de cosenos utilizando la formulación integral. La contribución del ángulo de ataque no se pone porque el enunciado ya dice que  $\alpha = 0$ .

$$A_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_p}{dx} d\theta = -\frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi/2} -4\varepsilon d\theta + \int_{\pi/2}^\pi 4\varepsilon d\theta \right) = -\frac{4\varepsilon}{\pi} \left( -\frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad (4.3.2)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dz_p}{dx} \cos \theta d\theta = \\ &= -\frac{8\varepsilon}{\pi} \left( \int_0^{\pi/2} -\cos \theta d\theta + \int_{\pi/2}^\pi \cos \theta d\theta \right) = \\ &= -\frac{8\varepsilon}{\pi} \left( -\sin \frac{\pi}{2} + \sin 0 + \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= \frac{16\varepsilon}{\pi} \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

La sustentación que tendría el perfil en régimen incompresible es:

$$c_{li} = 2\pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right) = 16\varepsilon \quad (4.3.4)$$

La sustentación en régimen compresible se obtiene utilizando la analogía de Prandtl-Glauert.

$$c_{lc} = \frac{c_{li}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} = \frac{16\varepsilon}{\sqrt{1 - \left(\frac{180}{300}\right)^2}} = 20\varepsilon \quad (4.3.5)$$

La sustentación es finalmente:

$$l = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 c \cdot c_{lc} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 180^2 \cdot 1 \cdot 20\varepsilon = 324\varepsilon \text{ kN/m} \quad (4.3.6)$$

**Problema 4. Variación de los coeficientes debido al parámetro  $a$** 

En la ecuación (4.4.1) se muestra la expresión de la línea de curvatura de un perfil en variables adimensionalizadas con la cuerda.

$$z_c = \varepsilon(1 - 4x^2)(a - x), \quad |x| \leq 0.5 \quad (4.4.1)$$

Donde  $a$  es un parámetro comprendido entre  $-0.5$  y  $0.5$  y  $\varepsilon$  es una constante muy pequeña. Suponiendo que el perfil vuela en régimen supersónico y dentro de la validez de la teoría potencial linealizada de perfiles en régimen supersónico, calcule y represente la variación con el parámetro  $a$  de:

- a) El coeficiente de sustentación
- b) El coeficiente de momento respecto del punto medio del perfil
- c) El coeficiente de resistencia de onda

**Resolución**

a) Coeficiente de sustentación

Como el perfil está volando en régimen supersónico y sin ángulo de ataque el coeficiente de sustentación es nulo. Esto es debido a que sea cual sea el perfil que esté volando la sustentación viene dada por:

$$c_l = \frac{4\alpha}{\beta} = 0 \tag{4.4.2}$$

El  $c_l$  no depende del parámetro  $a$  por lo que siempre es nulo, como se puede ver en la Figura 4.4.1.

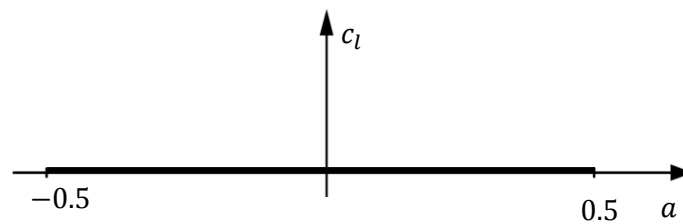


Figura 4.4.1. Coeficiente de sustentación en función de  $a$

b) Coeficiente de momento respecto al punto central del perfil.

Se debe calcular la distribución del coeficiente de sustentación en el perfil y obtener el momento aerodinámico.

$$c_l(x) = \frac{4}{\beta} \left( \alpha - \frac{dz_c}{dx} \right) = -\frac{4\varepsilon}{\beta} (12x^2 - 8ax - 1) \tag{4.4.3}$$

En régimen supersónico el centro aerodinámico se sitúa en el punto medio del perfil. Se calcula el coeficiente aerodinámico respecto al punto medio integrando esta distribución de sustentación.

$$c_{mca} = - \int_{-1/2}^{1/2} c_l(x) \cdot x \, dx = \frac{4\varepsilon}{\beta} \int_{-1/2}^{1/2} (12x^3 - 8ax^2 - x) \, dx \tag{4.4.4}$$

Cuando se tiene una integral con límites de signo opuesto (como es el caso) se puede eliminar todas las funciones cuadráticas de exponente impar. Al integrarlas se convierten en exponentes pares y al poner los límites de integración se anulan.

$$c_{mca} = \frac{4\varepsilon}{\beta} \left[ -\frac{8}{3}a \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{8}{3}a \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \right] = -\frac{8\varepsilon a}{3\beta} \tag{4.4.5}$$

El  $c_{mca}$  es linealmente dependiente de  $a$  como se puede ver en la Figura 4.4.2.

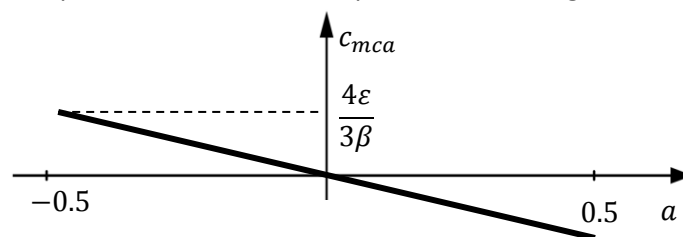


Figura 4.4.2. Coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico en función de  $a$ .

## c) Coeficiente de resistencia de onda

Se calcula el coeficiente de resistencia de onda utilizando la ecuación integral.

$$c_d = \frac{4\alpha^2}{\beta} + \frac{4}{\beta} \int_{-1/2}^{1/2} \left[ \left( \frac{dz_e}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dz_c}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (4.4.6)$$

Se considera que el espesor no varía en el perfil ya que no se indica lo contrario en el enunciado.

$$\begin{aligned} c_d &= \frac{4}{\beta} \int_{-1/2}^{1/2} \varepsilon^2 (12x^2 - 8ax - 1)^2 dx = \\ &= \frac{4\varepsilon^2}{\beta} \int_{-1/2}^{1/2} [144x^4 - 192ax^3 + (64a^2 - 24)x^2 + 16ax + 1] dx = \\ &= \frac{4\varepsilon^2}{\beta} \left[ \frac{144}{5}x^5 + \frac{(64a^2 - 24)}{3}x^3 + x \right]_{-1/2}^{1/2} = \\ &= \frac{8\varepsilon^2}{\beta} \left[ \frac{144}{5} \left( \frac{1}{2} \right)^5 + \frac{(64a^2 - 24)}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^3 + \frac{1}{2} \right] = \\ &= \frac{8\varepsilon^2}{\beta} \left( \frac{2}{5} + \frac{8}{3}a^2 \right) = \\ &= \frac{8\varepsilon^2}{15\beta} (6 + 40a^2) \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Esta ecuación tiene forma parabólica, con un mínimo absoluto y ese mínimo está centrado en el origen. El valor del  $c_d$  en ese mínimo es  $16\varepsilon^2/5\beta$ .

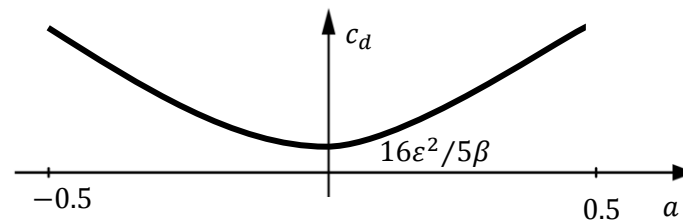


Figura 4.4.3. Coeficiente de resistencia en función de  $a$ .

**Problema 5. Centro de presiones de un perfil en vuelo supersónico**

Considere un perfil de cuerda  $c$ , intradós plano y extradós formado por dos planos que se unen en el punto medio de éste, como se puede observar en la Figura 4.5.1. El perfil vuela en régimen supersónico y con ángulo de ataque  $\alpha$ . Calcule la posición del centro de presiones del perfil.

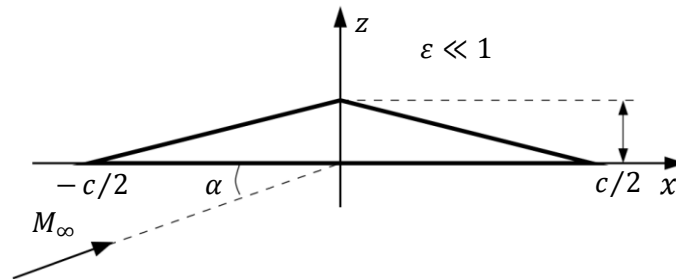


Figura 4.5.1. Perfil en vuelo supersónico.

**Resolución**

En este perfil para encontrar la distribución del coeficiente de sustentación se tienen que tener en cuenta las contribuciones del espesor, de la curvatura y del ángulo de ataque.

La función del espesor se compone de dos rectas como se puede ver en la Figura 4.5.2 donde el máximo está en el centro y vale  $\epsilon c/2$ .

$$E(x) = \begin{cases} \epsilon x + \frac{\epsilon c}{2}, & -\frac{c}{2} \leq x \leq 0 \\ -\epsilon x + \frac{\epsilon c}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{c}{2} \end{cases} \quad (4.5.1)$$

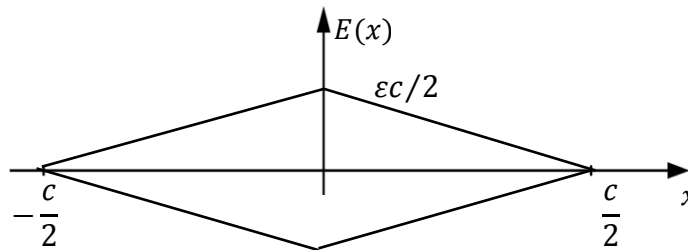


Figura 4.5.2. Función del espesor del perfil.

La función de la curvatura está también compuesta por dos rectas y tiene la misma función que la del espesor. La Figura 4.5.3 muestra la función de curvatura del perfil.

$$C(x) = \begin{cases} \epsilon x + \frac{\epsilon c}{2}, & -\frac{c}{2} \leq x \leq 0 \\ -\epsilon x + \frac{\epsilon c}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{c}{2} \end{cases} \quad (4.5.2)$$

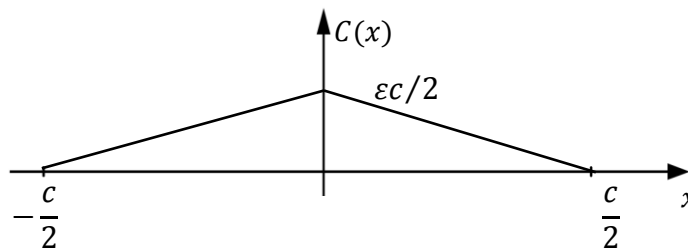


Figura 4.5.3. Función de la curvatura del perfil.

La función del ángulo de ataque es siempre la misma sea cual sea el perfil y vale  $-\alpha x$  como se puede ver en la Figura 4.5.4.

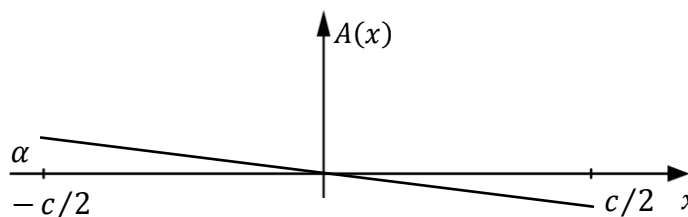


Figura 4.5.4. Función del ángulo de ataque del perfil.

La distribución del coeficiente de sustentación teniendo en cuenta la contribución del ángulo de ataque y de la curvatura es:

$$c_l(x) = \frac{4}{\beta} \left( \alpha - \frac{dC}{dx} \right) \quad (4.5.3)$$

Se pueden separar las contribuciones del coeficiente de sustentación de los distintos tramos de la curvatura y del ángulo de ataque como se puede ver en la Figura 4.5.5

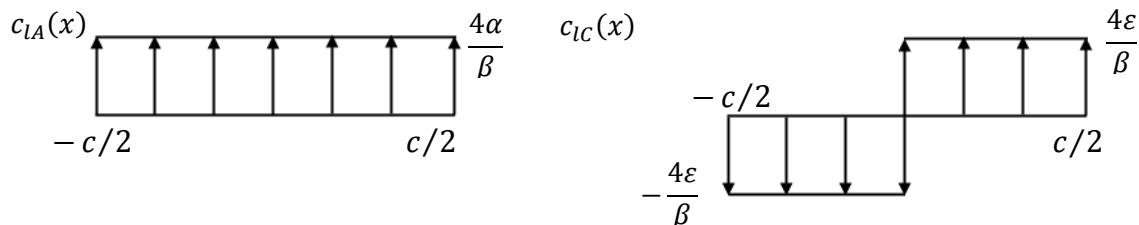


Figura 4.5.5. Distribución del coeficiente de sustentación.

Como las distribuciones de sustentación son lineales se pueden dejar en función de una sola fuerza situada en medio de la distribución.

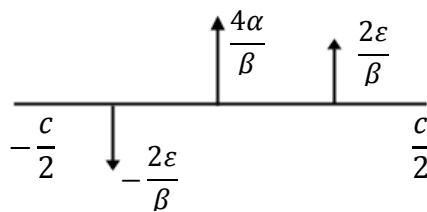


Figura 4.5.6. Fuerzas resultantes de las distribuciones del coeficiente de sustentación.

Se calcula ahora el coeficiente de momentos respecto al centro de presiones. Como se sabe que debe ser nulo se puede resolver la ecuación y obtener así la posición del centro de presiones.

$$c_{mcp} = -\frac{2\epsilon}{\beta} \left( x_{cp} + \frac{c}{4} \right) + \frac{4\alpha}{\beta} x_{cp} + \frac{2\epsilon}{\beta} \left( x_{cp} - \frac{c}{4} \right) = 0 \quad (4.5.4)$$

$$\Rightarrow x_{cp} = \frac{c\epsilon}{\beta} \cdot \frac{\beta}{4\alpha} = \frac{c\epsilon}{4\alpha} \quad (4.5.5)$$

Se puede ver la dependencia que tiene la posición del centro de presiones con el ángulo de ataque.



**Problema 6. Ángulo de equilibrio de un perfil supersónico**

Un perfil, cuya masa es despreciable, está formado por dos placas planas rígidamente unidas formando entre sí un ángulo  $\delta$ . Dicho perfil se sitúa en el seno de un flujo supersónico de densidad  $\rho$  con  $M_\infty = \sqrt{2}$ . El perfil permanece sujeto mediante una articulación rígida al borde de ataque. Dentro de la validez de la teoría potencial linealizada de perfiles y alas en régimen compresible, determine el ángulo  $\alpha$  de equilibrio.

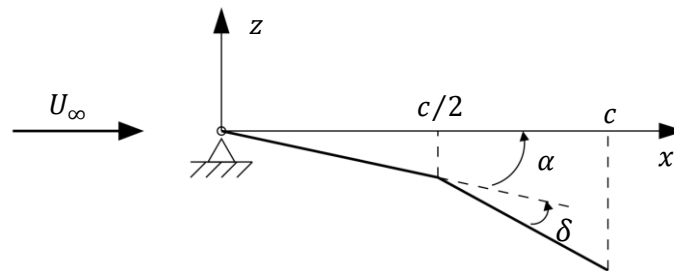


Figura 4.6.1. Perfil del problema.

**Resolución**

El problema pide encontrar el punto de equilibrio en el que el momento en la articulación es nulo. Se debe por lo tanto buscar la distribución del coeficiente de sustentación. Al estar volando con  $M = \sqrt{2}$  el parámetro  $\beta$  es la unidad.

La función del perfil es:

$$z_p(x) = \begin{cases} -\alpha x & 0 \leq x \leq c/2 \\ -(\alpha + \delta)x & c/2 < x \leq c \end{cases} \quad (4.6.1)$$

Se puede dividir el perfil en dos tramos y calcular la distribución de sustentación que genera cada tramo.

$$c_{l1}(x) = \frac{4\alpha}{\beta}, \quad c_{l2}(x) = \frac{4(\alpha + \delta)}{\beta} \quad (4.6.2)$$

La Figura 4.6.2 muestra las fuerzas resultantes de las distribuciones. Al tener distribuciones lineales, el punto de aplicación e la fuerza es el centro del tramo.

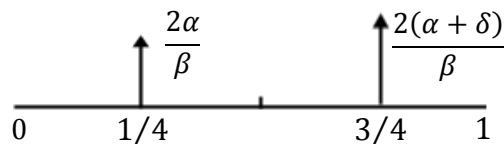


Figura 4.6.2. Distribución de las fuerzas resultantes.

Se iguala ahora el coeficiente de momento respecto al borde de ataque del perfil para obtener el ángulo de ataque de equilibrio.

$$c_{mba} = 0 = -\frac{2\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{4} - \frac{2(\alpha + \delta)}{\beta} \cdot \frac{3}{4} \quad (4.6.3)$$

$$\Rightarrow \alpha_{eq} = -\frac{3}{4}\delta \quad (4.6.4)$$

**Problema 7. Ángulo  $\theta$  de equilibrio de un perfil supersónico**

Considere un perfil sin masa ni espesor como se observa en la Figura 4.7.1. El perfil tiene una cuerda de 2 m y está situado en el seno de una corriente supersónica de velocidad  $U_\infty = 200$  m/s y densidad  $\rho_\infty = 0.1$  kg/m<sup>3</sup>, cuyo número de Mach es  $M_\infty = \sqrt{5}$ . El perfil está sujeto a un soporte por medio de una articulación y hay además un muelle de torsión de constante elástica  $k = 100\pi$  N/rad por unidad de envergadura que se opone a su giro. Se sabe que, en ausencia de fuerzas aerodinámicas, dicho ángulo tiene por valor  $\theta_0 = 0$  rad.

Bajo la hipótesis de que ni la articulación ni el muelle perturban el flujo, y dentro de la validez de la teoría potencial linealizada de perfiles y alas en régimen compresible, determine el ángulo de ataque de equilibrio del perfil  $\theta$ .

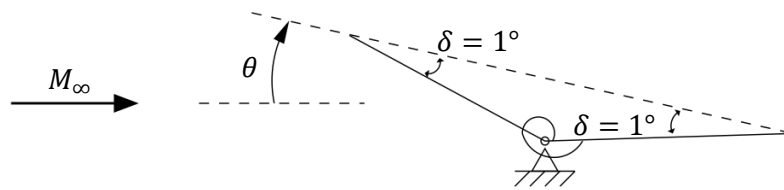


Figura 4.7.1. Perfil del problema.

**Resolución**

El problema consiste en encontrar el momento aerodinámico respecto al centro e igualarlo al momento generado por la torsión del muelle.

Se debe por lo tanto obtener la función del perfil en sus distintos tramos. El ángulo de ataque  $\alpha$  es igual al ángulo de giro del muelle  $\theta$ .

$$z_p(x) = \begin{cases} -(\theta + \delta)x & -c/2 \leq x \leq 0 \\ -(\theta - \delta)x & 0 < x \leq c/2 \end{cases} \quad (4.7.1)$$

La distribución de sustentación que genera cada tramo es:

$$c_{l1}(x) = \frac{4(\theta + \delta)}{\beta}, \quad c_{l2}(x) = \frac{4(\theta - \delta)}{\beta} \quad (4.7.2)$$

La Figura 4.6.2 muestra las fuerzas resultantes de las distribuciones. Al tener distribuciones lineales, el punto de aplicación e la fuerza es el centro del tramo.

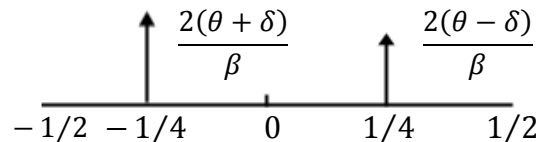


Figura 4.7.2. Distribución de las fuerzas resultantes.

Se iguala ahora el coeficiente de momento respecto al centro del perfil al momento generado por el muelle para obtener el ángulo de ataque de equilibrio. El coeficiente de momento respecto al centro del perfil es:

$$c_{m0} = \frac{2(\theta + \delta)}{\beta} \cdot \frac{1}{4} - \frac{2(\theta - \delta)}{\beta} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\delta}{\beta} \quad (4.7.3)$$

El momento aerodinámico es:

$$m_0 = q_\infty c^2 \cdot \frac{\delta}{\beta} \quad (4.7.4)$$

Igualando al momento generado por la torsión del muelle se encuentra el ángulo  $\theta$  de equilibrio.

$$\theta = \frac{q_\infty c^2 \delta}{\beta k} \quad (4.7.5)$$

Se introducen los valores numéricos dados en el enunciado.

$$\theta = \frac{0.1 \cdot 200^2 \cdot 2^2}{2 \cdot \sqrt{5} - 1 \cdot 100 \cdot \pi} \cdot \frac{1 \cdot \pi}{180} = 0.222 \text{ rad} \quad (4.7.6)$$

### Problema 8. Perfil supersónico volando sobre el suelo.

Considere un perfil de intradós y extradós parabólicos como el que se puede ver en la Figura 4.8.1. La ecuación del perfil adimensionalizada con la cuerda es:

$$z = \pm \varepsilon(1 - 4x^2), \quad |x| \leq \frac{1}{2}, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (4.8.1)$$

Dicho perfil vuela en régimen supersónico con  $M_\infty = \sqrt{2}$  a una altura  $h$  sobre un suelo plano, siendo  $1/4 \leq h/c \leq 1/2$ . Dentro de la validez de la teoría potencial linealizada de perfiles en régimen supersónico se pide:

- Calcular la variación con  $h/c$  de los coeficientes de sustentación, resistencia de onda y momento respecto de  $x = 0$ .
- Calcular el coeficiente de presión sobre el suelo.

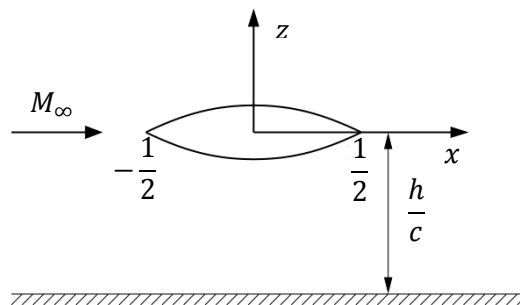


Figura 4.8.1. Perfil supersónico volando sobre el suelo.

**Resolución**

a) Coeficientes de sustentación, resistencia de onda y momento respecto de  $x = 0$

Como se vuela a  $M_\infty = \sqrt{2}$  el parámetro  $\beta$  y también el ángulo del cono de Mach son:

$$\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 1, \quad \delta = \text{asin} \frac{1}{M_\infty} = \frac{\pi}{4} \tag{4.8.2}$$

Se considera un caso genérico en el que las líneas características rebotan en el suelo y luego vuelven a rebotar en el perfil en el punto  $x_p$  como se puede ver en la Figura 4.8.2.

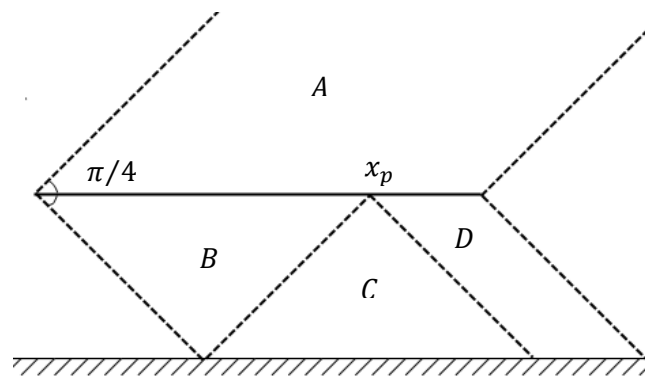


Figura 4.8.2. Líneas características y distintas zonas.

La distancia entre  $x_p$  y el borde de ataque es igual a dos veces la altura, por lo tanto:

$$x_p = -\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{h}{c} \tag{4.8.3}$$

Se debe ahora ir calculando las propiedades del fluido para las distintas zonas.

- Zona A

En esta zona el flujo se comporta como un perfil aislado, se puede calcular directamente el coeficiente de presiones del extradós.

$$\frac{dz_e}{dx} = -8\epsilon x \rightarrow c_{pe} = \frac{2}{\beta}(-8\epsilon x) = -\frac{16\epsilon x}{\beta} \tag{4.8.4}$$

- Zona B

En esta zona el flujo también se comporta como un perfil aislado pero se necesita obtener el valor de  $\varphi_B$  para las demás zonas.

$$\varphi_B = F_B(\xi) + G_B(\eta) \tag{4.8.5}$$

Se sabe que  $F_B(\xi)$  es cero ya que el intradós está aislado.

$$\varphi_B = G_B(\eta) = \frac{U_\infty}{\beta} z_i(\eta) = \frac{U_\infty}{\beta} [-\epsilon(1 - 4\eta^2)] \tag{4.8.6}$$

- Zona C

Esta zona empieza cuando la línea característica toca el suelo. De la zona B se sabe el valor de  $G_B(\eta)$  que es el mismo que  $G_C(\eta)$ .

$$\varphi_c = F_c(\xi) + G_c(\eta) = F_c(\xi) + G_B(\eta) \quad (4.8.7)$$

La condición de contorno es que en el suelo la variación de  $\varphi$  respecto a  $z$  es nulo.

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-\frac{h}{c}} = \left. \frac{\partial F_c}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right|_{z=-\frac{h}{c}} + \left. \frac{\partial G_B}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right|_{z=-\frac{h}{c}} = 0 \quad (4.8.8)$$

Se sabe que  $\partial \xi / \partial z = -\beta$  y que  $\partial \eta / \partial z = \beta$ , por lo tanto se puede obtener ahora  $\partial F_c / \partial \xi$ .

$$\frac{\partial F_c}{\partial \xi} = \left. \frac{\partial G_B}{\partial \eta} \right|_{z=-\frac{h}{c}} = \frac{8U_\infty \varepsilon}{\beta} \eta \Big|_{z=-\frac{h}{c}} = \frac{8U_\infty \varepsilon}{\beta} \left( x - \frac{\beta h}{c} \right) \Big|_{z=-\frac{h}{c}} = \frac{8U_\infty \varepsilon}{\beta} \left( \xi - \frac{2\beta h}{c} \right) \quad (4.8.9)$$

Se integra ahora respecto a  $\xi$ .

$$F_c(\xi) = \int \frac{8U_\infty \varepsilon}{\beta} \left( \xi - \frac{2\beta h}{c} \right) d\xi = \frac{8U_\infty \varepsilon}{\beta} \left( \frac{\xi^2}{2} - \frac{2\beta h}{c} \xi \right) \quad (4.8.10)$$

Por lo tanto  $\varphi_c$  es:

$$\varphi_c = \frac{8U_\infty \varepsilon}{\beta} \left( \frac{\xi^2}{2} - \frac{2\beta h}{c} \xi \right) + \frac{U_\infty}{\beta} [-\varepsilon(1 - 4\eta^2)] \quad (4.8.11)$$

- Zona D

La zona D empieza en el punto sobre el perfil  $x_p$ . En este punto  $F_D(\xi)$  es igual a  $F_c(\xi)$ .

$$\varphi_D = F_D(\xi) + G_D(\eta) = F_c(\xi) + G_D(\eta) \quad (4.8.12)$$

La condición de contorno es:

$$\left. \frac{\partial \varphi_D}{\partial z} \right|_{z=0^-} = \left. \frac{\partial F_c}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right|_{z=0^-} + \left. \frac{\partial G_D}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right|_{z=0^-} = -\beta \left. \frac{\partial F_c}{\partial \xi} \right|_{z=0^-} + \beta \left. \frac{\partial G_D}{\partial \eta} \right|_{z=0^-} = U_\infty \frac{dz_i}{dx} \quad (4.8.13)$$

Se calcula la derivada  $dz_i/dx$ .

$$U_\infty \frac{dz_i}{dx} = 8U_\infty \varepsilon x \quad (4.8.14)$$

Se debe encontrar la expresión de  $G_D$ . Se aísla primero la expresión diferencial.

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_D}{\partial \eta} &= \left. \frac{\partial F_c}{\partial \xi} \right|_{z=0^-} + \frac{8U_\infty \varepsilon x}{\beta} = \frac{8U_\infty \varepsilon}{\beta} \left( \xi - \frac{2\beta h}{c} \right) \Big|_{z=0^-} + \frac{8U_\infty \varepsilon x}{\beta} = \\ &= \frac{8U_\infty \varepsilon}{\beta} \left( x - \frac{2\beta h}{c} \right) + \frac{8U_\infty \varepsilon x}{\beta} = \frac{16U_\infty \varepsilon}{\beta} \left( x - \beta \frac{h}{c} \right) = \\ &= \frac{16U_\infty \varepsilon}{\beta} \left( \eta - \beta \frac{h}{c} \right) \end{aligned} \quad (4.8.15)$$

Se debe integrar ahora para obtener la función  $G_D$ .

$$G_D = \frac{16U_\infty \varepsilon}{\beta} \left( \frac{\eta^2}{2} - \beta \frac{h}{c} \eta \right) \quad (4.8.16)$$

Por lo tanto  $\varphi_D$  es:

$$\varphi_D = \frac{8U_\infty \varepsilon}{\beta} \left( \frac{\xi^2}{2} - \frac{2\beta h}{c} \xi \right) + \frac{8U_\infty \varepsilon}{\beta} \left( \eta^2 - \frac{2\beta h}{c} \eta \right) \quad (4.8.17)$$

Para calcular las fuerzas aerodinámicas se debe obtener el coeficiente de presiones en las zonas del intradós y del extradós. El coeficiente de presiones del extradós ya está calculado ya que es el equivalente a la zona A y es igual a un perfil aislado. El intradós se divide en dos tramos: el tramo en contacto con la zona B y el tramo en contacto con la zona D. La zona B se comporta como un perfil aislado por lo que el coeficiente de presiones es:

$$c_{pB} = -\frac{16\varepsilon x}{\beta} \quad (4.8.18)$$

Se calcula ahora el coeficiente de presiones en la zona D.

$$c_{pD} = -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi_D}{\partial x} \Big|_{z=0^-} \quad (4.8.19)$$

Hay que dejar la expresión de  $\varphi_D$  en la ecuación (4.8.17) en función de  $x$  y de  $z$ .

$$\varphi_D = \frac{8U_\infty \varepsilon}{\beta} \left[ \frac{(x - \beta z)^2}{2} - \frac{2\beta h}{c} (x - \beta z) + (x + \beta z)^2 - \frac{2\beta h}{c} (x + \beta z) \right] \quad (4.8.20)$$

Se puede introducir la condición de contorno  $z = 0^-$  antes de derivar.

$$\varphi_D = \frac{8U_\infty \varepsilon}{\beta} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{2\beta h}{c} x + x^2 - \frac{2\beta h}{c} x \right) = \frac{8U_\infty \varepsilon}{\beta} \left( \frac{3x^2}{2} - \frac{4\beta h}{c} x \right) \quad (4.8.21)$$

Por lo tanto el coeficiente de presión en la zona D es:

$$c_{pD} = -\frac{16\varepsilon}{\beta} \left( 3x - \frac{4\beta h}{c} \right) \quad (4.8.22)$$

La distribución del coeficiente de sustentación es:

$$c_l(x) = c_{pi}(x) - c_{pe}(x) = \begin{cases} 0 & -\frac{1}{2} \leq x < x_p \\ -\frac{16\varepsilon}{\beta} \left( 2x - \frac{4\beta h}{c} \right) & x_p \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.8.23)$$

El coeficiente de sustentación es por lo tanto la integral del tramo comprendido entre  $x_p$  y  $c/2$ .

$$c_l = \int_{x_p}^{\frac{1}{2}} -\frac{16\varepsilon}{\beta} \left( 2x - \frac{4\beta h}{c} \right) dx = \frac{16\varepsilon}{\beta} \left[ x^2 - \frac{4\beta h}{c} x \right]_{\frac{1}{2}}^{x_p} = \frac{16\varepsilon}{\beta} \left[ x_p^2 - \frac{1}{4} - \frac{4\beta h}{c} \left( x_p - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (4.8.24)$$



Se calcula ahora el coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico. En vuelo supersónico el centro aerodinámico se sitúa en el centro del perfil.

$$\begin{aligned}
 c_{mca} &= - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x c_l(x) dx = \\
 &= \int_{x_p}^{\frac{1}{2}} x \frac{16\varepsilon}{\beta} \left( 2x - \frac{4\beta h}{c} \right) dx = \\
 &= \frac{16\varepsilon}{\beta} \left[ \frac{2}{3} x^2 - \frac{2\beta h}{c} x \right]_{x_p}^{\frac{1}{2}} = \\
 &= \frac{16\varepsilon}{\beta} \left( \frac{1}{6} - \frac{\beta h}{c} - \frac{2}{3} x_p^2 + \frac{2\beta h}{c} x_p \right) \tag{4.8.25}
 \end{aligned}$$

Finalmente se calcula el coeficiente de resistencia de onda.

$$\begin{aligned}
 c_{d0} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( c_{pe} \frac{dz_e}{dx} - c_{pi} \frac{dz_i}{dx} \right) dx = \\
 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{x_p} \left( c_{pe} \frac{dz_e}{dx} - c_{pi} \frac{dz_i}{dx} \right) dx + \int_{x_p}^{\frac{1}{2}} \left( c_{pe} \frac{dz_e}{dx} - c_{pi} \frac{dz_i}{dx} \right) dx = \\
 &= 8\varepsilon \int_{-\frac{1}{2}}^{x_p} \left( \frac{16\varepsilon x}{\beta} + \frac{16\varepsilon x}{\beta} \right) x dx + 8\varepsilon \int_{x_p}^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{16\varepsilon x}{\beta} + \frac{16\varepsilon}{\beta} \left( 2x - \frac{4\beta h}{c} \right) \right] x dx = \\
 &= \frac{128\varepsilon^2}{\beta} \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{x_p} 2x^2 dx + \int_{x_p}^{\frac{1}{2}} \left( 3x^2 - \frac{4\beta h}{c} x \right) dx \right] = \\
 &= \frac{128\varepsilon^2}{\beta} \left\{ \left[ \frac{2}{3} x^2 \right]_{-\frac{1}{2}}^{x_p} + \left[ x^3 - \frac{2\beta h}{c} x^2 \right]_{x_p}^{\frac{1}{2}} \right\} = \\
 &= \frac{128\varepsilon^2}{\beta} \left( \frac{2}{3} x_p^2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{\beta h}{2c} - x_p^3 + \frac{2\beta h}{c} x_p^2 \right) \tag{4.8.26}
 \end{aligned}$$

b) Coeficiente de presión sobre el suelo

Se calcula el coeficiente de presión sobre el suelo de forma parecida que en el perfil salvo que la condición de contorno es  $z = -h/c$ .

$$c_{ps} = - \frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi_D}{\partial x} \Big|_{z=-\frac{h}{c}} = \begin{cases} -\frac{16\varepsilon}{\beta} \left( 2x - \frac{2\beta h}{c} \right) & -\frac{1}{2} + \frac{h}{c} < x < x_p + \frac{h}{c} \\ -\frac{16\varepsilon}{\beta} \left( 3x - \frac{5\beta h}{c} \right) & x_p + \frac{h}{c} < x < \frac{1}{2} \end{cases} \tag{4.8.27}$$

### Problema 9. Perfil supersónico en un túnel poroso

La Figura 4.9.1 muestra la sección de ensayo de un túnel supersónico, en cuyo interior se ha situado una placa plana a un ángulo de ataque  $\alpha \ll 1$ . Parte de las paredes están hechas de un material poroso que descarga a una cámara de tranquilización. La velocidad de succión es proporcional a la diferencia de presiones entre los lados de la pared porosa mediante la ley:

$$\frac{v_s}{U_\infty} = k \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} \quad (4.9.1)$$

Se pide:

- Estudiar la condición de contorno en la pared porosa.
- Calcular los valores de  $c_l$ ,  $c_{mac}$  y  $c_d$  en función del parámetro  $k$ .

Nota: considérese que  $3\beta h > c > 2\beta h$

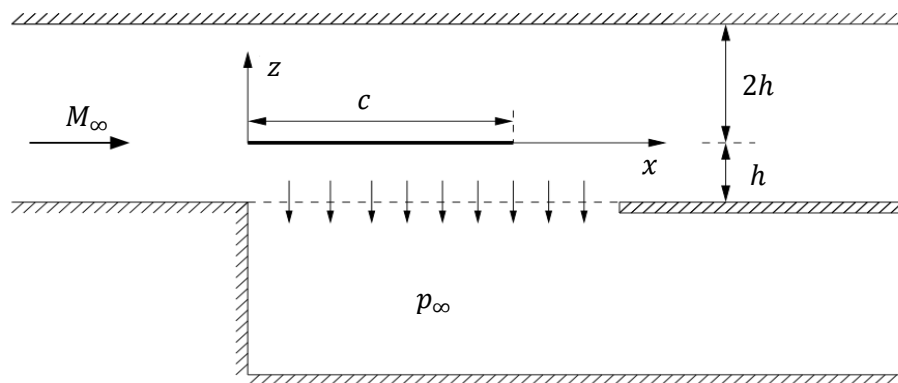


Figura 4.9.1. Perfil dentro del túnel.

**Resolución**

a) Condición de contorno en la pared porosa

Al estar situado el perfil dentro de un túnel se debe analizar como van cambiando las líneas características y las condiciones que se tienen en las distintas zonas. Lo primero que hay que saber es cuantas zonas se tiene en el perfil. Para que se tenga una sola zona por la parte del intradós se debe cumplir que  $c = 2\beta h$ . Pero se sabe que la cuerda es mayor que  $2\beta h$  por lo que se tienen dos zonas distintas en el intradós. En cambio como se sabe que  $c < 3\beta h$  se sabe que la línea característica que rebota en la parte superior del túnel no llega a alcanzar el perfil. El caso genérico se puede ver en Figura 4.9.2.

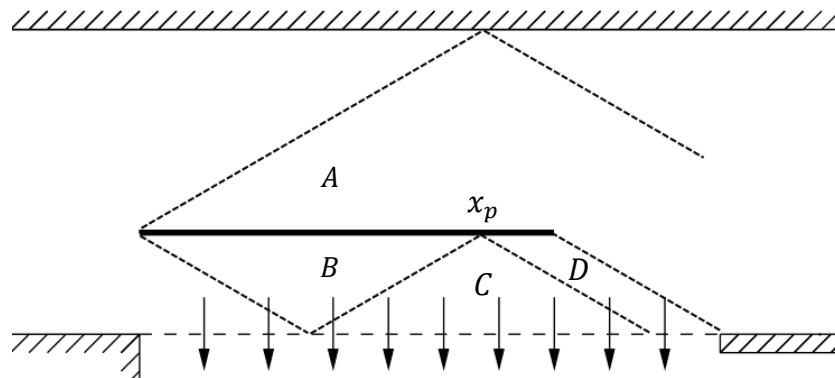


Figura 4.9.2. Líneas características de un caso genérico.

El perfil vuela con un cierto ángulo de ataque  $\alpha$  por lo tanto la ecuación del perfil es:

$$z_p = -\alpha x \tag{4.9.2}$$

La zona B se comporta como un perfil aislado de forma que  $F_B(\xi)$  es nulo.

$$\varphi_B = G_B(\eta) = \frac{U_\infty}{\beta} z_e(\eta) = -\frac{U_\infty}{\beta} \alpha \eta \tag{4.9.3}$$

Para calcular las condiciones de la zona C se tiene que aplicar la condición de contorno en la pared porosa. En esta zona se tiene que  $G_B(\eta) = G_C(\eta)$ , por lo tanto:

$$\varphi_C = F_C(\xi) + G_B(\eta) \tag{4.9.4}$$

La condición de contorno es que la velocidad vertical en el punto de la pared es igual a la que se da en la ecuación (4.9.1). Esta velocidad es linealmente dependiente del coeficiente de presión que también se puede expresar en función de la velocidad horizontal.

$$\frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = -k U_\infty \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = -k U_\infty c_{pD} = -k U_\infty \left( -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{z=-h} \right) \tag{4.9.5}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-h} - 2k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{z=-h} = 0 \tag{4.9.6}$$

Se utiliza la regla de la cadena para desarrollar las derivadas parciales sabiendo que  $\partial\xi/\partial x = 1$  y  $\partial\eta/\partial x = 1$ .

$$\frac{\partial F_c}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} \Big|_{z=-h} + \frac{\partial G_B}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \Big|_{z=-h} - 2k \left( \frac{\partial F_c}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{z=-h} + \frac{\partial G_B}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{z=-h} \right) = 0 \quad (4.9.7)$$

$$\rightarrow -\beta \frac{\partial F_c}{\partial \xi} \Big|_{z=-h} + \beta \frac{\partial G_B}{\partial \eta} \Big|_{z=-h} - 2k \left( \frac{\partial F_c}{\partial \xi} \Big|_{z=-h} + \frac{\partial G_B}{\partial \eta} \Big|_{z=-h} \right) = 0 \quad (4.9.8)$$

Finalmente la condición de contorno queda:

$$(-\beta - 2k) \frac{\partial F_c}{\partial \xi} \Big|_{z=-h} + (\beta - 2k) \frac{\partial G_B}{\partial \eta} \Big|_{z=-h} = 0 \quad (4.9.9)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_c}{\partial \xi} \Big|_{z=-h} = \frac{\beta - 2k}{\beta + 2k} \cdot \left( -\frac{U_\infty \alpha}{\beta} \right) \quad (4.9.10)$$

Se debe integrar ahora la expresión para obtener  $F_c$

$$F_c = - \int \frac{\beta - 2k}{\beta + 2k} \cdot \frac{U_\infty \alpha}{\beta} d\xi = \frac{2k - \beta}{2k + \beta} \cdot \frac{U_\infty \alpha}{\beta} \xi \quad (4.9.11)$$

Con esto ya se puede calcular  $\varphi_c$ .

$$\varphi_c = \frac{2k - \beta}{2k + \beta} \cdot \frac{U_\infty \alpha}{\beta} \xi - \frac{U_\infty \alpha}{\beta} \eta \quad (4.9.12)$$

b) valores de  $c_l$ ,  $c_{mac}$  y  $c_d$  en función del parámetro  $k$

Se calculan ahora las condiciones en la zona D. En esta zona  $F_D(\xi) = F_c(\xi)$ . Por lo tanto:

$$\varphi_D = F_c(\xi) + G_D(\eta) \quad (4.9.13)$$

Se debe imponer la condición de contorno sobre el perfil igualando las velocidades verticales.

$$\frac{\partial \varphi_D}{\partial z} \Big|_{z=0^-} = U_\infty \frac{dz_p}{dx} \Big|_{z=0^-} = -U_\infty \alpha \quad (4.9.14)$$

$$\rightarrow \frac{\partial F_c}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} \Big|_{z=0^-} + \frac{\partial G_D}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \Big|_{z=0^-} = -U_\infty \alpha \quad (4.9.15)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial G_D}{\partial \eta} \Big|_{z=0^-} = -\frac{U_\infty \alpha}{\beta} + \frac{\partial F_c}{\partial \xi} \Big|_{z=0^-} = -\frac{U_\infty \alpha}{\beta} + \frac{2k - \beta}{2k + \beta} \cdot \frac{U_\infty \alpha}{\beta} \quad (4.9.16)$$

Se integra esta expresión para obtener  $G_D$ .

$$G_D = \int \frac{U_\infty \alpha}{\beta} \left( -1 + \frac{2k - \beta}{2k + \beta} \right) d\eta = \frac{U_\infty \alpha}{\beta} \cdot \frac{-2\beta}{2k + \beta} \eta \quad (4.9.17)$$

Y por lo tanto  $\varphi_D$  es

$$\varphi_D = \frac{2k - \beta}{2k + \beta} \cdot \frac{U_\infty \alpha}{\beta} \xi - \frac{U_\infty \alpha}{\beta} \cdot \frac{2\beta}{2k + \beta} \eta \quad (4.9.18)$$

Se deben calcular ahora los coeficientes de presión de todas las zonas. La zona A se comporta como un perfil aislado por lo que el coeficiente de presión es:

$$c_{pA} = \frac{2 dz_e}{\beta dx} = -\frac{2\alpha}{\beta} \quad (4.9.19)$$

El coeficiente de presiones en la zona B es el mismo.

$$c_{pB} = \frac{2 dz_i}{\beta dx} = -\frac{2\alpha}{\beta} \quad (4.9.20)$$

La zona C no afecta a la distribución de presiones en el intradós por lo que se puede pasar directamente a calcular el coeficiente de presión en la zona D.

$$c_{pD} = -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi_D}{\partial x} \Big|_{z=0^-} \quad (4.9.21)$$

Se debe dejar primero la expresión de  $\varphi_D$  de la ecuación (4.9.18) en función de  $x$  y de  $z$ .

$$\begin{aligned} \varphi_D &= \frac{2k - \beta}{2k + \beta} \cdot \frac{U_\infty \alpha}{\beta} (x - \beta z) - \frac{U_\infty \alpha}{\beta} \cdot \frac{2\beta}{2k + \beta} (x + \beta z) = \\ &= \frac{U_\infty \alpha}{\beta(2k + \beta)} [(2k - 3\beta)x + (-2k - \beta)z] \end{aligned} \quad (4.9.22)$$

Por lo tanto el  $c_{pD}$  es:

$$c_{pD} = \frac{2\alpha(-2k + 3\beta)}{\beta(2k + \beta)} \quad (4.9.23)$$

La distancia entre  $x_p$  y el borde ataque, en unidades adimensionales es:

$$x_p = \frac{2\beta h}{c} \quad (4.9.24)$$

El coeficiente de sustentación es igual a la diferencia del coeficiente de presiones entre el intradós y el extradós.

$$c_l(x) = c_{pi}(x) - c_{pe}(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < x_p \\ \frac{2\alpha}{\beta} \left( \frac{-2k + 3\beta}{2k + \beta} + 1 \right) & x_p \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (4.9.25)$$

Para encontrar el coeficiente de sustentación se debe integrar la expresión sobre toda la envergadura. Como la distribución es constante el coeficiente de sustentación total es simplemente multiplicar la constante de la distribución por la distancia entre  $x_p$  y el borde de salida.

$$c_l = \frac{2\alpha}{\beta} \left( \frac{-2k + 3\beta}{2k + \beta} + 1 \right) \left( 1 - \frac{2\beta h}{c} \right) = \frac{2\alpha}{\beta} \left( \frac{4\beta}{2k + \beta} \right) \left( 1 - 2\beta \frac{h}{c} \right) \quad (4.9.26)$$

Se calcula ahora el coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico. En vuelo supersónico el centro aerodinámico se sitúa en el centro del perfil.

$$\begin{aligned}
 c_{mca} &= - \int_{-1}^1 x c_l(x) dx = \\
 &= \int_{x_p}^1 x \frac{2\alpha}{\beta} \left( \frac{4\beta}{2k + \beta} \right) dx = \\
 &= \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{4\beta}{2k + \beta} \right) [x^2]_{x_p}^1 = \\
 &= \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{4\beta}{2k + \beta} \right) \left( 1 - 4\beta^2 \frac{h^2}{c^2} \right) \quad (4.9.27)
 \end{aligned}$$

Se calcula finalmente el coeficiente de onda mediante la formulación integral.

$$c_{D0} = \int_0^1 \left( c_{pe} \frac{dz_e}{dx} - c_{pi} \frac{dz_i}{dx} \right) dx = \alpha \int_0^1 (c_{pi} - c_{pe}) dx = \alpha c_l \quad (4.9.28)$$

Esta ecuación es válida siempre que se trate de una placa plana.

$$c_{D0} = c_l \cdot \alpha = \frac{2\alpha^2}{\beta} \left( \frac{4\beta}{2k + \beta} \right) \left( 1 - 2\beta \frac{h}{c} \right) \quad (4.9.29)$$

**Problema 10. Perfil supersónico volando sobre el suelo**

Considere una línea de curvatura de cuerda  $c$  formada por dos tramos rectos, como se muestra en la Figura 4.10.1. Ésta se encuentra sometida a una corriente supersónica de Mach  $\sqrt{5}/2$  y situada a una distancia  $c/2$  de un suelo plano y horizontal. Además se encuentra a un ángulo de ataque de valor  $\alpha$ . Dentro del marco de la teoría potencial linealizada de perfiles en régimen supersónico, se pide:

- El coeficiente de sustentación
- El coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico

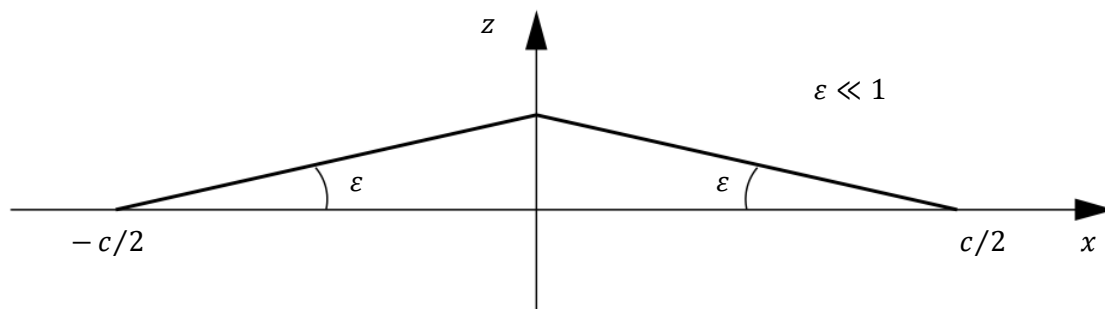


Figura 4.10.1. Diagrama del perfil.

**Resolución**

a) Coeficiente de sustentación

Al tener el suelo suficientemente cerca del perfil se deben resolver el problema siguiendo las líneas características y obtener los coeficientes de presión de las distintas zonas. El ángulo que forman las líneas características, medido desde el eje vertical es:

$$\sin \delta = \frac{1}{M_\infty} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 63.43^\circ \tag{4.10.1}$$

Se calcula también el parámetro  $\beta$ .

$$\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \frac{1}{2} \tag{4.10.2}$$

Se deben identificar las líneas características y las distintas zonas. El perfil tiene una discontinuidad en el punto medio, por lo tanto el extradós tiene dos zonas diferentes.

Como el ángulo  $\delta > \pi/4$  y la distancia al suelo es de tan solo  $c/2$ , se tienen por lo menos tres zonas distintas en el intradós. Además al saber que  $\beta = 0.5$ , la línea característica que rebota en el suelo vuelve al perfil en el punto medio de éste, y de forma similar vuelve en otra vez al borde de salida. Como desde el punto medio del perfil ya sale una línea característica no se genera una nueva debido a la discontinuidad del perfil

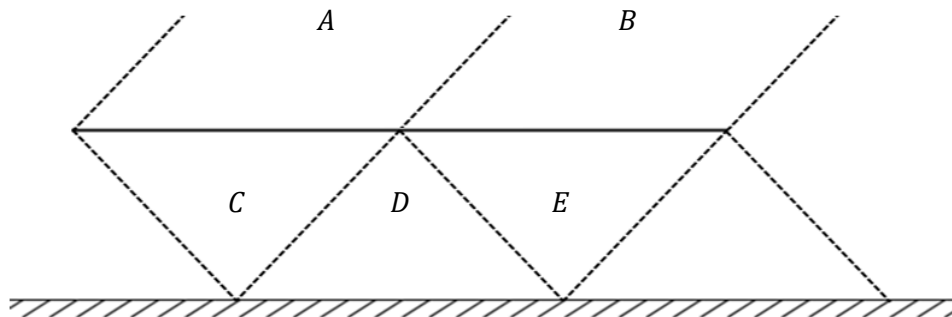


Figura 4.10.2. Definición de las líneas características y zonas.

La función del perfil es:

$$z_p = \begin{cases} (\varepsilon - \alpha)x + \frac{\varepsilon - \alpha}{2} & -0.5 \leq x \leq 0 \\ -(\varepsilon + \alpha)x + \frac{\varepsilon + \alpha}{2} & 0 \leq x \leq 0.5 \end{cases} \tag{4.10.3}$$

La derivada de la función de perfil es:

$$\frac{dz_p}{dx} = \begin{cases} \varepsilon - \alpha & -0.5 \leq x \leq 0 \\ -\varepsilon - \alpha & 0 \leq x \leq 0.5 \end{cases} \tag{4.10.4}$$

Una vez definido el problema se calculan los coeficientes de presión de las distintas zonas.



- Zona A

En esta zona el perfil se comporta como un perfil aislado. Se puede calcular directamente el coeficiente de presión del extradós.

$$\varphi_A = F_A = \frac{U_\infty}{\beta} z_e \Rightarrow c_{pA} = \frac{2}{\beta} (\varepsilon - \alpha) \quad (4.10.5)$$

- Zona B

De forma similar, el perfil se comporta como un perfil aislado.

$$\varphi_B = F_B = \frac{U_\infty}{\beta} z_e \Rightarrow c_{pB} = \frac{2}{\beta} (-\varepsilon - \alpha) \quad (4.10.6)$$

- Zona C

Empezando ahora con la parte del intradós, la zona C se comporta como un perfil aislado.

$$\varphi_C = G_C = \frac{U_\infty}{\beta} z_i \Rightarrow c_{pC} = -\frac{2}{\beta} (\varepsilon - \alpha) \quad (4.10.7)$$

La función  $G_C(\eta)$  se necesita para calcular la siguiente zona.

$$G_C(\eta) = \frac{U_\infty}{\beta} z_i(\eta) = \frac{U_\infty}{\beta} (\varepsilon - \alpha)\eta \quad (4.10.8)$$

- Zona D

En esta zona no es necesario obtener el coeficiente de presión. La solución potencial de esta zona es:

$$\varphi_D = F_D + G_C = F_D + \frac{U_\infty}{\beta} (\varepsilon - \alpha)\eta \quad (4.10.9)$$

La condición de contorno es que en el suelo la velocidad vertical es nula, es decir:

$$\left. \frac{\partial \varphi_D}{\partial z} \right|_{z=-0.5} = \left. \frac{\partial F_D}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right|_{z=-0.5} + \left. \frac{\partial G_C}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right|_{z=-0.5} = 0 \quad (4.10.10)$$

Se sabe que  $\partial \xi / \partial z = -\beta$  y que  $\partial \eta / \partial z = \beta$ , por lo tanto se puede obtener  $\partial F_C / \partial \xi$ .

$$-\frac{\partial F_D}{\partial \xi} + \frac{\partial G_C}{\partial \eta} = -\frac{\partial F_D}{\partial \xi} + \frac{U_\infty}{\beta} (\varepsilon - \alpha) = 0 \quad (4.10.11)$$

Se obtiene la función  $F_D$  integrando.

$$F_D = \int \frac{U_\infty}{\beta} (\varepsilon - \alpha) d\xi = \frac{U_\infty}{\beta} (\varepsilon - \alpha)\xi \quad (4.10.12)$$

El potencial en la zona es:

$$\varphi_D = \frac{U_\infty}{\beta} (\varepsilon - \alpha)\xi + \frac{U_\infty}{\beta} \left[ (\varepsilon - \alpha)\eta + \frac{\varepsilon - \alpha}{2} \right] \quad (4.10.13)$$

- Zona  $E$

El potencial de esta zona es:

$$\varphi_E = F_D + G_E = \frac{U_\infty}{\beta}(\varepsilon - \alpha)\xi + G_E \quad (4.10.14)$$

La condición de contorno se aplica en el perfil. Al estar la zona  $E$  por debajo de la segunda mitad del perfil, se utiliza la derivada del perfil para  $0 \leq x \leq 0.5$ .

$$\left. \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} \right|_{z=-0.5} = \left. \frac{\partial F_D}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right|_{z=-0.5} + \left. \frac{\partial G_E}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right|_{z=-0.5} = U_\infty \frac{dz_p}{dx} = U_\infty(-\varepsilon - \alpha) \quad (4.10.15)$$

Se sabe que  $\partial \xi / \partial z = -\beta$  y que  $\partial \eta / \partial z = \beta$ , por lo tanto se puede obtener  $\partial F_D / \partial \xi$ .

$$-\frac{\partial F_D}{\partial \xi} + \frac{\partial G_E}{\partial \eta} = -\frac{U_\infty}{\beta}(\varepsilon - \alpha) + \frac{\partial G_E}{\partial \eta} = -\frac{U_\infty}{\beta}(\varepsilon + \alpha) \quad (4.10.16)$$

Se obtiene la unción  $G_E$  integrando.

$$G_E = \int \left[ \frac{U_\infty}{\beta}(\varepsilon - \alpha) - \frac{U_\infty}{\beta}(\varepsilon + \alpha) \right] d\eta = -2 \frac{U_\infty \alpha}{\beta} \eta \quad (4.10.17)$$

Por lo tanto el potencial es:

$$\varphi_E = F_D + G_E = \frac{U_\infty}{\beta}[(\varepsilon - \alpha)\xi - 2\alpha\eta] \quad (4.10.18)$$

El coeficiente de presiones en esta zona es:

$$c_{pE} = -\frac{2}{U_\infty} \left. \frac{\partial \varphi_E}{\partial x} \right|_{z=0^-} = -\frac{2}{\beta}(\varepsilon - 3\alpha) \quad (4.10.19)$$

Ya se puede calcular la distribución del coeficiente de sustentación.

$$c_l(x) = \begin{cases} c_{pC} - c_{pA} = \frac{4}{\beta}(\alpha - \varepsilon) & -0.5 \leq x \leq 0 \\ c_{pE} - c_{pB} = \frac{8}{\beta}\alpha & 0 \leq x \leq 0.5 \end{cases} \quad (4.10.20)$$

Integrando la función entre  $-0.5$  y  $0.5$  se obtiene el coeficiente de sustentación del perfil.

$$c_l = \frac{2}{\beta}(\alpha - \varepsilon) + \frac{4}{\beta}\alpha = \frac{6\alpha}{\beta} - \frac{2\varepsilon}{\beta} = 12\alpha - 4\varepsilon \quad (4.10.21)$$

b) Coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico

El coeficiente de momento se puede calcular directamente sumando la contribución del momento de las dos mitades del perfil respecto al centro del perfil.

$$c_{mca} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\beta}(\alpha - \varepsilon) - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{\beta}\alpha = -\frac{\alpha}{2\beta} - \frac{\varepsilon}{2\beta} = -(\alpha + \varepsilon) \quad (4.10.22)$$

## 5. Flujo potencial tridimensional

### Problema 1. Comparación entre configuración axisimétrica y bidimensional

Considere dos configuraciones bidimensional y axisimétrica compuestas por un cilindro y una superficie esférica respectivamente, de radio  $a$  y en presencia de una corriente incidente de velocidad  $U_\infty$ . Para simular la influencia en las fuerzas ejercidas por el fluido sobre dichos cuerpos del desprendimiento de la corriente, se supone que la distribución de  $c_p$  en ambos casos responde al modelo potencial en la cara del obstáculo situada a barlovento, y que es  $c_p = -1/2$  en la cara situada a sotavento. Calcule para cada configuración el coeficiente de resistencia del obstáculo y compare ambos valores.

**Resolución**

- Bidimensional

Se considera un perfil circular bidimensional como el que se ve en la Figura 5.1.1. Se sabe que el coeficiente de presiones en barlovento sigue la ley de la teoría potencial y que en sotavento es un medio.

$$c_{pb} = 1 - 4 \sin^2 \theta, \quad c_{ps} = -\frac{1}{2} \tag{5.1.1}$$

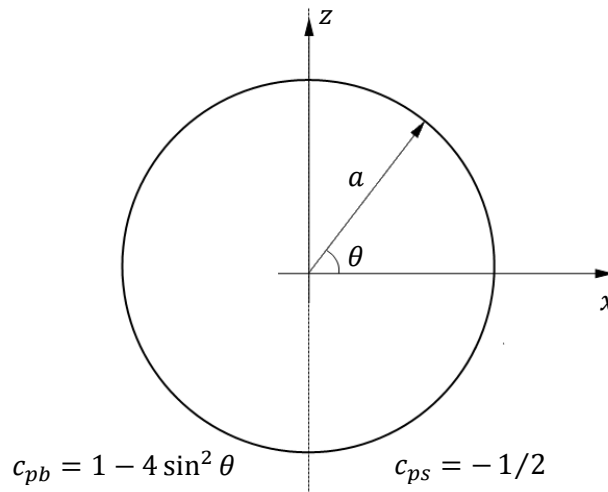


Figura 5.1.1. Perfil circular bidimensional.

Utilizando la ecuación de la teoría de conservación de la cantidad de movimiento la resistencia se calcula como la integral de las fuerzas de presión sobre el eje horizontal.

$$\begin{aligned} d &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (p_b(\theta) - p_s) \cos \theta \, ds = \\ &= \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( 1 - 4 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \right) \cos \theta \, a \, d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ \frac{3}{2} - 4 \sin^2 \theta \right] \cos \theta \, a \, d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 a \left[ \frac{3}{2} \sin \theta - \frac{4}{3} \sin^3 \theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\ &= \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 a \left( 3 - \frac{8}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 a \cdot \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

El coeficiente de resistencia se adimensionaliza con el diámetro (que sería equivalente a la cuerda si eso fuese un perfil).

$$c_d = \frac{d}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \cdot 2a} = \frac{1}{6} \quad (5.1.3)$$

- 3D Axisimétrico

La metodología a seguir para el caso de una esfera tridimensional es similar. En este caso el coeficiente de presión en barlovento es:

$$c_p(\varphi) = 1 - \frac{9}{4}\sin^2 \varphi \quad (5.1.4)$$

La resistencia se calcula también mediante la teoría de conservación de la cantidad de movimiento.

$$D = \int (p_b(\varphi) - p_s) d\sigma_x \quad (5.1.5)$$

Donde  $d\sigma_x$  es el diferencial de superficie proyectada en la dirección  $x$ .

Si se mira la esfera de frente, como en la Figura 5.1.2, se pueden ver que en los anillos proyectados sobre la superficie y centrados en el origen se tiene una presión constante.

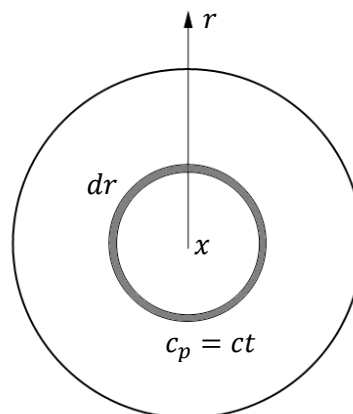


Figura 5.1.2. Esfera vista por adelante.

La distancia entre el eje de coordenadas y la proyección del anillo es  $r = a \sin \varphi$ . El diferencial es  $dr = a \cos \varphi d\varphi$  y por lo tanto el diferencial de superficie proyectada sobre la dirección  $x$  es:

$$d\sigma_x = 2\pi r dr = 2\pi a^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \quad (5.1.6)$$

Se puede ya integrar para obtener la resistencia.

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \int_0^{\pi/2} (c_{pb}(\varphi) - c_{ps}) 2\pi a^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{9}{4}\sin^2 \varphi + \frac{1}{2}\right) 2\pi a^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Para hacer esta integral se debes utilizar las igualdades trigonométricas  $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$  y  $2 \sin^2 \varphi = 1 - \cos 2\varphi$ .

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 \cdot \pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{3}{2} - \frac{9}{8} (1 - \cos 2\varphi) \right] \sin 2\varphi \, d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 \cdot \pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{3}{8} \sin 2\varphi + \frac{9}{8} \cos 2\varphi \sin 2\varphi \right) d\varphi \quad (5.1.8)
 \end{aligned}$$

La integral de la multiplicación entre el coseno y el seno es igual a cero debido a los límites de integración y porque tienen el mismo ángulo.

$$D = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 \cdot \frac{3\pi a^2}{8} \left[ -\frac{\cos 2\varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 \cdot \frac{3\pi a^2}{8} \quad (5.1.9)$$

Para adimensionalizar la resistencia se utiliza como superficie de referencia la proyección en  $x$  de la superficie, es decir  $S_{ref} = \pi a^2$ .

$$c_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty} \pi a^2} = \frac{3}{8} \quad (5.1.10)$$

**Problema 2. Velocidad debida a dos anillos de torbellinos**

Determine la velocidad en el punto  $(0,0)$  debida a los dos anillos de torbellinos representados en la Figura 5.2.1, de radio  $a$ , intensidad  $\Gamma$ , paralelos, coaxiales y separados entre sí una distancia  $d$ . Considere los casos  $d = 4\sqrt{2}a$  y  $d = 2\sqrt{3}a$ .

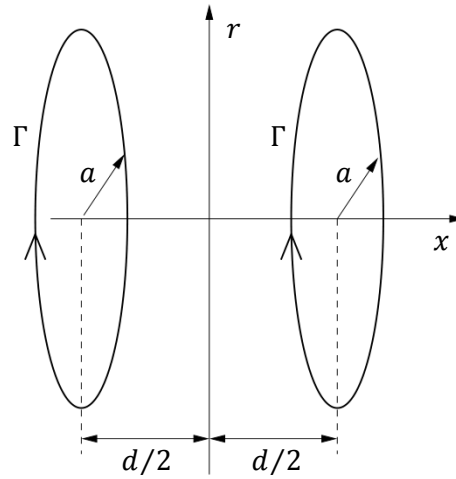


Figura 5.2.1. Distribución de los dos anillos de torbellinos.

**Resolución**

La ley de Biot Savart permite calcular la velocidad inducida por un hilo de torbellino tridimensional.

$$\vec{v}(\vec{x}) = \frac{\Gamma}{\pi} \int_C \frac{d\vec{x}_0 \wedge \vec{r}}{r^3} \tag{5.2.1}$$

Se empieza calculando la contribución de solo un anillo. Se cambia también el eje de referencia centrándolo en el centro del disco. Se utiliza un sistema de referencia cartesiano como se ve en la Figura 5.2.2.

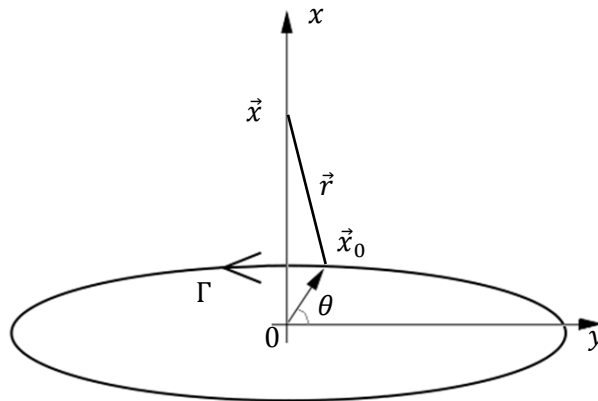


Figura 5.2.2. Un solo anillo de torbellino con el origen en el centro del anillo.

El punto donde se quiere calcular la velocidad inducida es  $\vec{x} = (x, 0, 0)$ . La posición de un diferencial de anillo es  $\vec{x}_0 = (0, a \cos \theta, a \sin \theta)$  por lo tanto su diferencial es:

$$d\vec{x}_0 = (0, -a \sin \theta \, d\theta, a \cos \theta \, d\theta) \tag{5.2.2}$$

El vector  $\vec{r}$  que une el punto de estudio con el punto del diferencial es:

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_0 = (x, -a \cos \theta, -a \sin \theta) \tag{5.2.3}$$

El producto vectorial entre el diferencial y  $\vec{r}$  es:

$$d\vec{x}_0 \wedge \vec{r} = (a^2 \, d\theta, xa \cos \theta \, d\theta, xa \sin \theta \, d\theta) \tag{5.2.4}$$

Por lo tanto la velocidad es:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} a^2 \, d\theta \\ xa \cos \theta \, d\theta \\ xa \sin \theta \, d\theta \end{pmatrix} \tag{5.2.5}$$

Se sabe que las integrales las siguientes integrales son nulas:

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta = 0 \tag{5.2.6}$$

Por lo tanto la velocidad solo tiene componente no nula en la dirección del eje  $x$ .



$$v_x = \frac{\Gamma}{4\pi(x^2 + a^2)^{3/2}} (a^2 \cdot 2\pi) = \frac{\Gamma}{2} \cdot \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (5.2.7)$$

Como la velocidad inducida no cambia si  $x$  es positivo o negativo significa que los dos anillos inducen una velocidad en el mismo sentido. Por lo tanto la velocidad es simplemente la suma de los dos.

$$V_x = \Gamma \cdot \frac{a^2}{\left(\frac{d^2}{4} + a^2\right)^{3/2}} \quad (5.2.8)$$

Se deben de considerar ahora dos casos.

- $d = 4\sqrt{2} a$

La velocidad queda:

$$V_x = \Gamma \cdot \frac{a^2}{\left(\frac{32a^2}{4} + a^2\right)^{3/2}} = \Gamma \cdot \frac{a^2}{(9a^2)^{3/2}} = \Gamma \frac{a^2}{(3a)^3} = \frac{\Gamma}{27a} \quad (5.2.9)$$

- $d = 2\sqrt{3} a$

La velocidad queda:

$$V_x = \Gamma \cdot \frac{a^2}{\left(\frac{12a^2}{4} + a^2\right)^{3/2}} = \Gamma \cdot \frac{a^2}{(4a^2)^{3/2}} = \Gamma \frac{a^2}{(2a)^3} = \frac{\Gamma}{8a} \quad (5.2.10)$$

### Problema 3. Herradura de torbellinos

Considere una herradura de torbellinos como la representada en la Figura 5.3.1. Calcule el punto o puntos del eje  $x$  en los que la velocidad inducida por la herradura de torbellinos es nula.

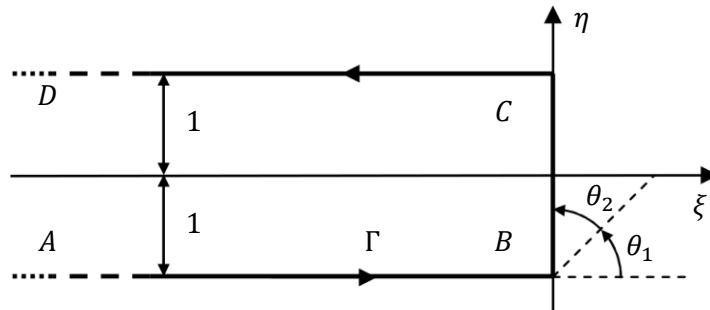


Figura 5.3.1. Herradura de torbellinos.

### Resolución

Para resolver este problema se debe encontrar la velocidad inducida por el hilo de torbellinos en función del ángulo  $\theta_1$  y luego encontrar la posición del punto donde ésta velocidad es nula.

La velocidad inducida por un torbellino rectilíneo es:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad (5.3.1)$$

Está claro que si existe un punto donde la velocidad es nula tiene que ser en la parte positiva del eje  $\xi$  ya que la velocidad inducida por el tramo  $BC$  tiene sentido opuesto a la de los tramos  $CD$  y  $AB$ .

La velocidad inducida por el tramo  $AB$  sobre un punto  $\xi_0$  positivo es:

$$v_{AB} = \frac{\Gamma}{4\pi} (\cos 0 - \cos \theta_1) = \frac{\Gamma}{4\pi} (1 - \cos \theta_1) \quad (5.3.2)$$

Por simetría del problema, la velocidad inducida por el tramo  $CD$  es igual a la del tramo  $AB$ .

Se calcula ahora la velocidad inducida por el tramo  $BC$ . Se sustituye el ángulo  $\theta_2$  por  $\pi/2 - \theta_1$ .

$$v_{BC} = \frac{\Gamma}{4\pi\xi_0} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{2} + \theta_1\right) \right] = \frac{\Gamma}{4\pi\xi_0} (\sin \theta_1 + \sin \theta_1) \quad (5.3.3)$$

La posición  $\xi_0$  es igual a  $\tan \theta_2$ , y por lo tanto también es igual a  $1/\tan \theta_1$ . La velocidad inducida por éste tramo es:

$$v_{BC} = \frac{2\Gamma}{4\pi} \tan \theta_1 \sin \theta_1 \quad (5.3.4)$$

La suma de las contribuciones debe ser nula.

$$v_{AB} + v_{CD} - v_{BC} = 0 \quad (5.3.5)$$

$$\Rightarrow 1 - \cos \theta_1 - \tan \theta_1 \sin \theta_1 = 0 \quad (5.3.6)$$

$$\Rightarrow \cos \theta_1 - \cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1 = 0 \quad (5.3.7)$$

$$\Rightarrow \cos \theta_1 - 1 = 0 \quad (5.3.8)$$

Como el valor de  $\theta_1$  solo puede ir de 0 a  $\pi/2$ , la única solución es  $\theta_1 = 0$ . Por lo tanto la posición  $\xi_0$  es  $\infty$  (ya que  $1/\tan 0 = \infty$ ).

**Problema 4. Movimiento axisimétrico definido por una función de corriente**

Considere el movimiento axisimétrico de un líquido definido por la función de corriente  $\Psi = Ar^n x$ , siendo  $n > 1$ .

Calcule el potencial de velocidades para aquel o aquellos valores de  $n$  para los que exista dicho potencial.

**Resolución**

Conociendo la función de corriente se puede sacar la velocidad en la dirección del eje  $x$ .

$$u = \frac{1}{2\pi r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{2\pi r} \cdot Anr^{n-1}x = \frac{Anr^{n-2}}{2\pi}x \quad (5.4.1)$$

Esta velocidad se puede también calcular derivando el potencial respecto de  $x$ .

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Rightarrow \Phi = \int u(x) dx \quad (5.4.2)$$

Por lo tanto el potencial es:

$$\Phi = \int \frac{Anr^{n-2}}{2\pi}x dx = \frac{An}{4\pi}r^{n-2}x^2 \quad (5.4.3)$$

## Resolución

Para resolver este problema se debe encontrar la velocidad inducida por el hilo de torbellinos en función del ángulo  $\theta_1$  y luego encontrar la posición del punto donde ésta velocidad es nula.

La velocidad inducida por un torbellino rectilíneo es:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad (5.4.1)$$

Está claro que si existe un punto donde la velocidad es nula tiene que ser en la parte positiva del eje  $\xi$  ya que la velocidad inducida por el tramo  $BC$  tiene sentido opuesto a la de los tramos  $CD$  y  $AB$ .

La velocidad inducida por el tramo  $AB$  sobre un punto  $\xi_0$  positivo es:

$$v_{AB} = \frac{\Gamma}{4\pi} (\cos 0 - \cos \theta_1) = \frac{\Gamma}{4\pi} (1 - \cos \theta_1) \quad (5.4.2)$$

Por simetría del problema, la velocidad inducida por el tramo  $CD$  es igual a la del tramo  $AB$ .

Se calcula ahora la velocidad inducida por el tramo  $BC$ . Se sustituye el ángulo  $\theta_2$  por  $\pi/2 - \theta_1$ .

$$v_{BC} = \frac{\Gamma}{4\pi\xi_0} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{2} + \theta_1\right) \right] = \frac{\Gamma}{4\pi\xi_0} (\sin \theta_1 + \sin \theta_1) \quad (5.4.3)$$

La posición  $\xi_0$  es igual a  $\tan \theta_2$ , y por lo tanto también es igual a  $1/\tan \theta_1$ . La velocidad inducida por éste tramo es:

$$v_{BC} = \frac{2\Gamma}{4\pi} \tan \theta_1 \sin \theta_1 \quad (5.4.4)$$

La suma de las contribuciones debe ser nula.

$$v_{AB} + v_{CD} - v_{BC} = 0 \quad (5.4.5)$$

$$\Rightarrow 1 - \cos \theta_1 - \tan \theta_1 \sin \theta_1 = 0 \quad (5.4.6)$$

$$\Rightarrow \cos \theta_1 - \cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1 = 0 \quad (5.4.7)$$

$$\Rightarrow \cos \theta_1 - 1 = 0 \quad (5.4.8)$$

Como el valor de  $\theta_1$  solo puede ir de 0 a  $\pi/2$ , la única solución es  $\theta_1 = 0$ . Por lo tanto la posición  $\xi_0$  es  $\infty$  (ya que  $1/\tan 0 = \infty$ ).

## 6. Alas de gran alargamiento

La teoría de ala larga de Prandtl sirve para predecir el comportamiento aerodinámico de alas de gran alargamiento. A principios del siglo XX, los aviones se componían normalmente de alas rectas con grandes alargamientos. Solían tener alas de forma en planta rectangular o elíptica. Las ventajas de las alas elípticas es que son las que tienen menos resistencia inducida (debido a la distribución de la circulación a lo largo de la envergadura), pero son más difíciles de construir y de mantener.

Los siguientes parámetros son importantes:

- Alargamiento  $\Lambda = b/\bar{c}$ , donde  $\bar{c}$  es la cuerda media y  $b$  es la envergadura.
- Cambio de variable  $\theta$ :

$$\frac{2y}{b} = \cos \theta \quad (6.0.1)$$

- Cuerda adimensional  $\kappa(\theta) = c(\theta)/b$ , depende de la forma en planta.

$$\text{Rectangular: } \kappa(\theta) = \frac{1}{\Lambda}, \quad \text{Elíptica: } \kappa(\theta) = \frac{4}{\pi\Lambda} \sin \theta \quad (6.0.2)$$

- Torsión del ala  $\varepsilon(\theta)$ , función que expresa el ángulo que forma la línea de sustentación nula del perfil situado en  $\theta$  con la línea de sustentación nula del perfil central.

$$\varepsilon(\theta) = \alpha(\theta) - \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (6.0.3)$$

En la teoría se estudian una serie de funciones que se pueden desarrollar en series de senos. Las funciones son:

- Circulación adimensional  $G(\theta) = \Gamma/bU_\infty$ , los coeficientes de la serie son  $A_n$ .

$$G(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta = \frac{1}{2} \kappa(\theta) \frac{dc_l}{d\alpha} \left( \alpha(\theta) - \frac{1}{2 \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin n\theta \right) \quad (6.0.4)$$

- Circulación inicial  $G_I(\theta)$ , los coeficientes de la serie son  $I_n$ .

$$G_I(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sin n\theta = \frac{1}{2} \kappa(\theta) \frac{dc_l}{d\alpha} \left( \varepsilon(\theta) - \frac{1}{2 \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} n I_n \sin n\theta \right) \quad (6.0.5)$$

- Circulación adicional unitaria  $g(\theta)$ , los coeficientes de la serie son  $a_n$ .

$$g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta = \frac{1}{2} \kappa(\theta) \frac{dc_l}{d\alpha} \left( 1 - \frac{1}{2 \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin n\theta \right) \quad (6.0.6)$$

- Sustentación básica  $G_B(\theta)$ , los coeficientes son  $B_n$ . El primer coeficiente  $B_1$  es nulo.

$$G_B(\theta) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \sin n\theta \quad (6.0.7)$$

- Sustentación adicional unitaria  $g_b(\theta)$ , los coeficientes son  $b_n$ .

$$g_b(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta \quad (6.0.8)$$

Se deben cumplir además las siguientes igualdades:

$$A_n = I_n + \alpha \left(\frac{\pi}{2}\right) a_n = B_n + \alpha_w a_n = B_n + c_L b_n \quad (6.0.9)$$

Donde  $\alpha_w$  es el ángulo de ataque del ala.

En general cualquiera que sea el ángulo de ataque el problema queda reducido al cálculo de la distribución de sustentación inicial, donde está incluida la información sobre la forma del ala (forma en planta y torsión), y al de la adicional unitaria (que es la misma para todas las alas de la misma forma en planta).

Conocidos de los coeficientes  $B_n$  y los  $a_n$  se puede también calcular la distribución de sustentación para cualquier ángulo de ataque geométrico del ala (medido respecto a la dirección de sustentación nula del ala).

Una vez se conocen todos los coeficientes de las series de senos se pueden empezar a calcular los coeficientes aerodinámicos.

El coeficiente de sustentación es:

$$c_L = \frac{\pi\Lambda}{2} A_1 \quad (6.0.10)$$

El coeficiente de resistencia inducida es:

$$c_{Di} = \frac{\pi\Lambda}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2 = \frac{c_L^2}{\pi\Lambda} \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{A_n^2}{A_1^2} \right) \quad (6.0.11)$$

Los coeficientes de momento de balance y el de guiñada son:

$$c_{Mx} = \frac{\pi\Lambda}{8} A_2, \quad c_{Mz} = -\frac{\pi\Lambda}{16} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) A_n A_{n+1} \quad (6.0.12)$$

La pendiente del coeficiente de sustentación se puede calcular conociendo el parámetro  $\tau$  que solo depende de la forma en planta del ala, aunque en general se usan valores tabulados.

$$\tau = \frac{\Lambda}{4} \sum_{n=2}^{\infty} n a_n \int_0^{\pi} \kappa(\theta) \sin n\theta \, d\theta \quad (6.0.13)$$

$$\frac{dc_L}{d\alpha} = \frac{dc_L/d\alpha}{\pi\Lambda + dc_L/d\alpha} \pi\Lambda(1 - \tau) \quad (6.0.14)$$



En caso de que el problema sea compresible se debe hacer un procedimiento similar al del tema 4. Se calcula el coeficiente de sustentación para el caso incompresible y luego se transforma utilizando la analogía de Prandtl Glauert al problema compresible.

Al ser un tema tridimensional, la analogía de Prandtl Glauert no se puede aplicar directamente sobre el coeficiente de sustentación calculado para el caso incompresible. Se debe hacer el cambio de los distintos parámetros del ala. Entre ellos se destacan el ángulo de ataque y el alargamiento.

$$\Lambda_c = \frac{\Lambda_i}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}, \quad \alpha_{wc} = \sqrt{1 - M_\infty^2} \cdot \alpha_{wi} \quad (6.0.15)$$

**Problema 1. Ala de gran alargamiento con perfiles sin espesor**

Un ala de gran alargamiento  $\Lambda = 8$  y de envergadura  $b$  está formada por perfiles sin espesor cuya ecuación es la siguiente:

$$z_p(x) = f(y)(1-x)x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad f(y) = \frac{1}{20\pi} \left( \frac{2y}{b} \right) \quad (6.1.1)$$

Donde las longitudes  $z_p$  y  $x$  están adimensionalizadas con la cuerda  $c(y)$ . El ala tiene forma en planta elíptica. Se pide:

- a) Torsión del ala.
- b) Distribución de circulación adicional unitaria.
- c) Distribución de circulación inicial.
- d) Ángulo de ataque del ala cuando  $c_L = 1$ .
- e) Ángulo de ataque del perfil central cuando el ala no sustenta.
- f) Coeficiente de resistencia inducida.
- g) Coeficiente de momento de balance.

**Resolución**

## a) Torsión del ala

La torsión se mide como el ángulo de ataque que tiene el perfil en referencia al perfil medio.

$$\varepsilon(\theta) = \alpha(\theta) - \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (6.1.2)$$

Se hace el siguiente cambio de variable:

$$\frac{2y}{b} = \cos \theta \quad (6.1.3)$$

$$\rightarrow f(\theta) = \frac{1}{20\pi} \cos \theta \quad (6.1.4)$$

El ángulo de ataque  $\alpha(\theta)$  se mide en referencia al ángulo de sustentación nula. Se debe por lo tanto encontrar cual es el  $\alpha_{sn}$  de los perfiles en función de  $\theta$ . Como la función de los perfiles es directamente la función de la curvatura y además es una función continua se puede derivar primero respecto a  $x$ .

$$\frac{dz_c(x)}{dx} = f(y)(1 - 2x) \quad (6.1.5)$$

Se hace el siguiente cambio de variable para conseguir una serie de Fourier:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \varphi \quad (6.1.6)$$

$$\rightarrow \frac{dz_c(\varphi)}{dx} = f(y) \left[ 1 - 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \varphi \right) \right] = -f(y) \cos \varphi \quad (6.1.7)$$

Por lo tanto la derivada del perfil respecto a  $x$  es:

$$\frac{dz_p(\varphi)}{dx} = -\alpha + \frac{dz_c}{dx} = -\alpha - f(y) \cos \varphi \quad (6.1.8)$$

Los términos de la serie de Fourier son:

$$A_0 = \alpha, \quad A_1 = f(y), \quad A_n = 0 \quad \forall n > 1 \quad (6.1.9)$$

El coeficiente de sustentación de los perfiles es:

$$c_l = 2\pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right) = 2\pi \left( \alpha + \frac{f(y)}{2} \right) \quad (6.1.10)$$

El ángulo de ataque de sustentación nula se obtiene igualando el coeficiente de sustentación a cero.

$$\alpha_{sn} = -\frac{f(y)}{2} \quad (6.1.11)$$

$$\Rightarrow \alpha_{sn}(\theta) = -\frac{\cos \theta}{40\pi} \quad (6.1.12)$$

El ángulo de ataque  $\alpha(\theta)$  es por lo tanto:

$$\alpha(\theta) = \frac{\cos \theta}{40\pi} \quad (6.1.13)$$

La torsión es finalmente:

$$\varepsilon(\theta) = \frac{\cos \theta}{40\pi} - \frac{\cos(\pi/2)}{40\pi} = \frac{\cos \theta}{40\pi} \quad (6.1.14)$$

b) Distribución de la circulación adicional

La distribución de la circulación adicional unitaria se calcula mediante una serie de senos.

$$g_a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta = \frac{1}{2} \kappa(\theta) \frac{dc_l}{d\alpha} \left( 1 - \frac{1}{2 \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin n\theta \right) \quad (6.1.15)$$

Como se tiene un ala en forma de planta elíptica se tiene:

$$\kappa(\theta) = \frac{4}{\pi\Lambda} \sin \theta \quad (6.1.16)$$

La derivada del coeficiente de sustentación se obtiene derivando la ecuación (6.1.10) y es igual a  $2\pi$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta = \frac{4}{\Lambda} \sin \theta \left( 1 - \frac{1}{2 \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin n\theta \right) \quad (6.1.17)$$

Agrupando los términos en  $a_n$  se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2} + \frac{\Lambda}{4} \right) a_n \sin n\theta = \sin \theta \quad (6.1.18)$$

Se puede ver que los coeficientes  $a_n$  deben ser nulos para  $n > 2$ .

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2} + \frac{\Lambda}{4} \right) a_1 \sin \theta &= \sin \theta \\ \Rightarrow a_1 &= \frac{4}{2 + \Lambda} \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

Por lo tanto la circulación adicional es:

$$g_a = \frac{4}{2 + \Lambda} \sin \theta \quad (6.1.20)$$

Esta expresión indica que si la forma en planta es elíptica la distribución de circulación unitaria es también elíptica.

c) Distribución de circulación inicial.

Los pasos a seguir para calcular esta circulación son similares a los del apartado b). La circulación inicial también se define como una serie de senos donde los coeficientes son  $I_n$ .

Se tiene la siguiente igualdad que permite encontrar los coeficientes de la serie:

$$G_I = \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sin n\theta = \frac{1}{2} \kappa(\theta) \frac{dc_l}{d\alpha} \left( \varepsilon(\theta) - \frac{1}{2 \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} n I_n \sin n\theta \right) \quad (6.1.21)$$

Sabiendo que el ala es de planta elíptica, que el  $c_{l\alpha}$  es  $2\pi$  y usando la expresión de la torsión calculada en el apartado a) se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sin n\theta &= \frac{4}{\Lambda} \sin \theta \left( \frac{\cos \theta}{40\pi} - \frac{1}{2 \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} n I_n \sin n\theta \right) \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\Lambda}{4} + \frac{n}{2} \right) I_n \sin n\theta &= \frac{1}{40\pi} \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{80\pi} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (6.1.22)$$

Se puede ver que el único coeficiente que se puede tener es  $I_2$  ya que para  $n \neq 2$  no se cumple la ecuación.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Lambda}{4} + 1 \right) I_2 \sin 2\theta &= \frac{1}{80\pi} \sin 2\theta \\ \Rightarrow I_2 &= \frac{1}{20\pi(\Lambda + 4)} \end{aligned} \quad (6.1.23)$$

Por lo tanto la circulación inicial es:

$$G_I = \frac{1}{20\pi(\Lambda + 4)} \sin 2\theta \quad (6.1.24)$$

d) Ángulo de ataque del ala cuando  $c_L = 1$ .

El coeficiente de sustentación se obtiene de la siguiente expresión (sabiendo que  $B_1$  es cero):

$$c_L = \frac{\pi\Lambda}{2} \alpha_w a_1 = \frac{\pi\Lambda}{2} \alpha_w \cdot \frac{4}{2 + \Lambda} \quad (6.1.25)$$

Cuando el coeficiente de sustentación es uno el ángulo de ataque del ala es:

$$\alpha_w = \frac{2 + \Lambda}{2\pi\alpha} \quad (6.1.26)$$

e) Ángulo de ataque del perfil central cuando el ala no sustenta.

Se puede obtener el coeficiente de sustentación en función del ángulo de ataque del perfil central utilizando la ecuación de la circulación adimensional.

$$G = G_I(\theta) + \alpha \left( \frac{\pi}{2} \right) g_a(\theta) = \frac{1}{20\pi(\Lambda + 4)} \sin 2\theta + \alpha \left( \frac{\pi}{2} \right) \frac{4}{2 + \Lambda} \sin \theta \quad (6.1.27)$$

Esta circulación también se puede poner en forma de serie de senos donde los coeficientes son:

$$A_1 = \frac{4}{2 + \Lambda} \alpha \left( \frac{\pi}{2} \right), \quad A_2 = \frac{1}{20\pi(\Lambda + 4)}, \quad A_n = 0 \quad \forall n > 2 \quad (6.1.28)$$

El coeficiente de sustentación es:

$$c_L = \frac{\pi\Lambda}{2} A_1 = \frac{\pi\Lambda}{2} \cdot \frac{4}{2+\Lambda} \alpha \left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (6.1.29)$$

Por lo tanto cuando el coeficiente de sustentación es nulo el ángulo de ataque del perfil medio es nulo también.

f) Coeficiente de resistencia inducida

El coeficiente de resistencia inducida es:

$$c_{Di} = \frac{\pi\Lambda}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2 = \frac{\pi\Lambda}{4} \left[ \frac{16}{(2+\Lambda)^2} \alpha^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{400\pi^2(\Lambda+4)^2} \right] \quad (6.1.30)$$

g) Coeficiente de momento de balance

El coeficiente de momento de balance es:

$$c_{Mx} = \frac{\pi\Lambda}{8} A_2 = \frac{\Lambda}{160(\Lambda+4)} \quad (6.1.31)$$

**Problema 2. Resistencia inducida mediante la exploración de la estela**

La exploración de la estela lejana de un ala larga, plana, de forma en planta elíptica, con  $\Lambda = 10$  y  $S = 100/\pi \text{ m}^2$  y que se mueve a través del aire en calma con  $U_\infty = 100 \text{ m/s}$  indica que la velocidad vertical en la estela, lejos del ala es constante y de valor  $w = 2 \text{ m/s}$ . Calcule la resistencia inducida del ala.

**Resolución**

Se considera que se tiene una serie de hilos de torbellino en forma de herradura que generan el potencial provocado por el ala.

La velocidad inducida por un hilo recto de torbellino, en un punto que dista  $h$  y que las rectas que parten desde los extremos del hilo hasta el punto tienen un ángulo  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , es:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (6.2.1)$$

La velocidad vertical de la estela provocada por un hilo de intensidad  $d\Gamma$ , sabiendo que  $x \gg b$  es:

$$dw_i(y, y_0) = -\frac{d\Gamma}{4\pi(y - y_0)} (\cos 0 - \cos \pi) = -\frac{d\Gamma}{2\pi(y - y_0)} \quad (6.2.2)$$

Por lo tanto la velocidad vertical de la estela es la integral de todos los hilos que parten por toda la envergadura del ala.

$$w_i(y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma(y_0)}{y - y_0} dy_0 \quad (6.2.3)$$

Conocida la velocidad vertical inducida se puede definir el ángulo de ataque inducido como:

$$\alpha_i(y) = -\frac{1}{2\pi U_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma(y_0)}{y - y_0} dy_0 \quad (6.2.4)$$

Éste ángulo de ataque inducido se puede poner en forma de serie de senos si se hacen los cambios de variable  $2y/b = \cos \theta$  y  $2y_0/b = \cos \theta_0$ .

$$\alpha_i(\theta) = -\frac{1}{\sin \theta} \sum_1^\infty n A_n \sin n\theta \quad (6.2.5)$$

La tangente de este ángulo es la relación entre la velocidad vertical y la horizontal.

$$\alpha_i \approx \tan \alpha_i = \frac{w_i}{U_\infty} = -0.02 \quad (6.2.6)$$

Por lo tanto para que se cumpla la serie de senos solo se tiene un coeficiente.

$$A_1 = 0.02, \quad A_n = 0 \quad \forall n \leq 2 \quad (6.2.7)$$

El coeficiente de resistencia inducida es:

$$c_{Di} = \frac{\pi \Lambda}{4} \sum_1^\infty n A_n^2 = \frac{\pi \Lambda}{4} A_1^2 = 0.001\pi \quad (6.2.8)$$

La resistencia es finalmente:

$$D_i = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 S \cdot c_{Di} = 500\rho \quad (6.2.9)$$



### Problema 3. Ala con distribución de sustentación medida para dos $\alpha$

Considere un ala de gran alargamiento  $\Lambda = 8$  cuyos perfiles tienen una pendiente de la curva de sustentación dada por la expresión  $dc_l/d\alpha = 2\pi \text{ rad}^{-1}$ . Se ha medido la distribución de sustentación a lo largo de la envergadura  $b$  de éste ala a dos ángulos de ataque distintos obteniéndose los valores siguientes:

$$\alpha_1 \Rightarrow \frac{l_1(\theta)}{q_\infty \bar{c}} = \frac{4}{\pi} (0.2 \sin \theta + 0.04 \sin 3\theta + 0.05 \sin 5\theta) \quad (6.3.1)$$

$$\alpha_2 \Rightarrow \frac{l_2(\theta)}{q_\infty \bar{c}} = \frac{4}{\pi} (\sin \theta + 0.04 \sin 3\theta + 0.05 \sin 5\theta) \quad (6.3.2)$$

En las expresiones anteriores se ha tomado  $2y/b = \cos \theta$ . Se pide:

- Calcular la distribución de sustentación adicional  $G(\theta)$  en uno y otro caso, así como los coeficientes de sustentación del ala y los coeficientes de resistencia inducida asociados a cada distribución.
- Calcular las distribuciones de sustentación básica y adicional unitaria ( $c_L = 1$ ).
- Determinar la forma en planta del ala y la distribución de torsión.
- Calcular los ángulos de ataque del ala en uno y otro caso, indicando claramente respecto de qué dirección están medidos dichos ángulos de ataque.
- Calcular la pendiente de la curva de sustentación.

**Resolución**a)  $G(\theta)$ ,  $c_L$ ,  $c_{Di}$ 

La circulación adimensional se define como:

$$G(\theta) = \frac{\Gamma}{bU_\infty} \quad (6.3.3)$$

Se puede reemplazar  $\Gamma$  por la definición del teorema de Kutta-Yukovski.

$$G(\theta) = \frac{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \bar{c} c_l}{bU_\infty \cdot \rho U_\infty} = \frac{c_l}{2\Lambda} = \frac{c_l(\theta)}{16} \quad (6.3.4)$$

Se reemplaza el coeficiente de sustentación para los dos casos, obteniendo dos circulaciones adimensionales.

$$G_1(\theta) = \frac{1}{4\pi} (0.2 \sin \theta + 0.04 \sin 3\theta + 0.05 \sin 5\theta) \quad (6.3.5)$$

$$G_2(\theta) = \frac{1}{4\pi} (\sin \theta + 0.04 \sin 3\theta + 0.05 \sin 5\theta) \quad (6.3.6)$$

Se pueden obtener los coeficientes de las series de senos.

$$A_{11} = \frac{0.2}{4\pi}, \quad A_{12} = \frac{1}{4\pi}, \quad A_3 = \frac{0.04}{4\pi}, \quad A_5 = \frac{0.05}{4\pi} \quad (6.3.7)$$

El coeficiente de sustentación se puede obtener utilizando el primer coeficiente de la circulación adimensional.

$$c_{L1} = \frac{\pi\Lambda}{2} A_{11} = 0.2, \quad c_{L2} = \frac{\pi\Lambda}{2} A_{12} = 1 \quad (6.3.8)$$

El coeficiente de resistencia inducida también se obtiene usando los coeficiente de  $G(\theta)$ .

$$c_{Di} = \frac{\pi\Lambda}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2 \quad (6.3.9)$$

$$c_{Di1} = \frac{1}{8\pi} (0.2^2 + 3 \cdot 0.04^2 + 5 \cdot 0.05^2) = \frac{7.1625 \cdot 10^{-3}}{\pi} \quad (6.3.10)$$

$$c_{Di2} = \frac{1}{8\pi} (1^2 + 3 \cdot 0.04^2 + 5 \cdot 0.05^2) = \frac{0.127162}{\pi} \quad (6.3.11)$$

b) Distribuciones de sustentación básica y adicional unitaria

La distribución de sustentación básica es la distribución de sustentación que se tiene sobre el ala cuando la corriente no perturbada incide según la dirección de sustentación nula del ala, siendo:

$$G_B = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \sin n\theta \quad (6.3.12)$$

Se puede igualar la distribución de sustentación adicional con la distribución de sustentación básica de la siguiente forma:

$$G(\theta) = G_B(\theta) + c_L \cdot g_b(\theta) \quad (6.3.13)$$

Donde  $g_b(\theta)$  es la distribución de sustentación unitaria. También se puede expresar como una serie.

$$g_B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta \quad (6.3.14)$$

Las distribuciones de sustentación adicional para los dos casos son:

$$G_1(\theta) = G_B(\theta) + c_{L1} \cdot g_b(\theta), \quad G_2(\theta) = G_B(\theta) + c_{L2} \cdot g_b(\theta) \quad (6.3.15)$$

Hay que destacar que tanto  $G_B$  como  $g_b$  no varían cuando se cambia el ángulo de ataque del avión, la distribución de sustentación básica está definida respecto al ángulo de ataque de sustentación nula y la distribución de sustentación adicional unitaria es la distribución de sustentación cuando  $c_L = 1$ . La información sobre el efecto del cambio de ángulo de ataque está en el coeficiente de sustentación.

Se restan las dos distribuciones de sustentación adicional.

$$G_2 - G_1 = (c_{L2} - c_{L1})g_b \quad (6.3.16)$$

$$\rightarrow \frac{1}{4\pi} 0.8 \sin \theta = 0.8 g_b \quad (6.3.17)$$

Por lo tanto la distribución de sustentación adicional unitaria es:

$$g_b(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sin \theta \quad (6.3.18)$$

Se encuentra ahora la distribución de sustentación básica utilizando por ejemplo la distribución de sustentación adicional del segundo caso.

$$G_2 = G_B + c_{L2} \cdot g_B \quad (6.3.19)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G_B &= \frac{1}{4\pi} (\sin \theta + 0.04 \sin 3\theta + 0.05 \sin 5\theta) - \frac{1}{4\pi} \sin \theta = \\ &= \frac{1}{4\pi} (0.04 \sin 3\theta + 0.05 \sin 5\theta) \end{aligned} \quad (6.3.20)$$

c) Forma en planta del ala y distribución de torsión

Se miran los coeficientes de la distribución de sustentación unitaria.

$$b_1 = 1/4\pi \neq 0, \quad b_n = 0 \quad \forall n \geq 2 \quad (6.3.21)$$

La forma en planta del ala es elíptica porque la distribución de sustentación adicional unitaria lo es.

$$\kappa(\theta) = \frac{4}{\pi\Lambda} \sin \theta = \frac{1}{2\pi} \sin \theta \quad (6.3.22)$$

La torsión del ala se obtiene gracias a la ecuación de la distribución de sustentación adicional.

$$G(\theta) = \frac{1}{2} \kappa(\theta) \frac{dc_l}{d\alpha} \left( \alpha(\theta) - \frac{1}{2 \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin n\theta \right) \quad (6.3.23)$$

Tomando por ejemplo el primer caso ( $G_1(\theta)$ ):

$$\frac{1}{4\pi} (0.2 \sin \theta + 0.04 \sin 3\theta + 0.05 \sin 5\theta) = \frac{1}{2} \sin \theta \left( \alpha(\theta) - \frac{1}{2 \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin n\theta \right) \quad (6.3.24)$$

$$\Rightarrow \left( 0.2 + \frac{0.2}{4} \right) \sin \theta + \left( 0.04 + 3 \cdot \frac{0.04}{4} \right) \sin 3\theta + \left( 0.05 + 5 \cdot \frac{0.05}{4} \right) \sin 5\theta = 2\pi \sin \theta \alpha(\theta) \quad (6.3.25)$$

$$\Rightarrow \alpha(\theta) = \frac{1}{\pi \sin \theta} (0.125 \sin \theta + 0.035 \sin 3\theta + 0.05625 \sin 5\theta) \quad (6.3.26)$$

La torsión es la diferencia entre este ángulo  $\alpha(\theta)$  y el ángulo de en el perfil central.

$$\varepsilon(\theta) = \alpha(\theta) - \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (6.3.27)$$

El ángulo de ataque del perfil medio es:

$$\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi \sin \frac{\pi}{2}} \left( 0.125 \sin \frac{\pi}{2} + 0.035 \sin \frac{3\pi}{2} + 0.05625 \sin \frac{5\pi}{2} \right) = \frac{117}{800\pi} \quad (6.3.28)$$

Finalmente la torsión es:

$$\varepsilon(\theta) = \frac{1}{\pi \sin \theta} (0.035 \sin 3\theta + 0.05625 \sin 5\theta) - \frac{0.02125}{\pi} \quad (6.3.29)$$

d) Ángulos de ataque del ala para los dos casos

El ángulo de ataque del ala se puede obtener gracias a la siguiente igualdad:

$$A_1 = \alpha_w a_1 \quad (6.3.30)$$

Donde  $a_1$  es el primer coeficiente de la serie de senos de la distribución de la circulación adicional unitaria. La distribución de la circulación adicional unitaria se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$g_a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta = \frac{1}{2} \kappa(\theta) \frac{dc_l}{d\alpha} \left( 1 - \frac{1}{2 \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin n\theta \right) \quad (6.3.31)$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta = \frac{4}{\Lambda} \sin \theta \left( 1 - \frac{1}{2 \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin n\theta \right) \quad (6.3.32)$$

Agrupando los términos en  $a_n$  se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2} + \frac{\Lambda}{4} \right) a_n \sin n\theta = \sin \theta \quad (6.3.33)$$

Se puede ver que los coeficientes  $a_n$  deben ser nulos para  $n > 2$ .

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{\Lambda}{4}\right) a_1 \sin \theta &= \sin \theta \\ \Rightarrow a_1 &= \frac{4}{2 + \Lambda} = \frac{2}{5} \end{aligned} \quad (6.3.34)$$

Los ángulos de ataque de las alas son:

$$\alpha_{w1} = \frac{A_{11}}{a_1} = \frac{1}{8\pi}, \quad \alpha_{w2} = \frac{A_{12}}{a_1} = \frac{5}{8\pi} \quad (6.3.35)$$

Estos ángulos de ataque del ala están medidos respecto a la dirección de sustentación nula del ala.

e) Pendiente de la curva de sustentación

La pendiente de la curva de sustentación se puede obtener calculando la pendiente que hay entre los dos casos, teniendo primero que calcular el coeficiente de sustentación.

$$c_L = \frac{\pi\Lambda}{2} A_1 \quad (6.3.36)$$

$$c_{L1} = \frac{\pi\Lambda}{2} A_{11} = 0.2, \quad c_{L2} = \frac{\pi\Lambda}{2} A_{12} = 1 \quad (6.3.37)$$

Y por lo tanto la pendiente de la curva de sustentación es:

$$c_{L\alpha} = \frac{c_{L2} - c_{L1}}{\alpha_{w2} - \alpha_{w1}} = \frac{0.8}{4/8\pi} = \frac{8\pi}{5} \quad (6.3.38)$$

Otra forma de obtener esta pendiente es utilizando el coeficiente  $a_1$ .

$$c_{L\alpha} = \frac{\pi\Lambda}{2} a_1 = \frac{8\pi}{5} \quad (6.3.39)$$

**Problema 4. Ala larga con torsión anti simétrica**

Un ala de forma en planta elíptica y alargamiento  $\Lambda = 16/\pi$ , tiene una torsión anti simétrica  $\varepsilon(y) = -\varepsilon(-y)$ . Sabiendo que en cierta situación de vuelo tanto el coeficiente de sustentación como los coeficientes de momento de guiñada y de balance son no nulos, y bajo la hipótesis de que en esta situación el coeficiente de momento de guiñada tiene por valor  $c_{Mz} = 2^{5/2}\delta^2$ , con  $\delta \ll 1$ , determine, dentro de la validez de la teoría del ala larga de Prandtl, los valores de los coeficientes de sustentación y de momento de balance, con la condición de que el coeficiente de resistencia inducida se mínimo.

**Resolución**

Si el coeficiente de sustentación y los coeficientes de momento de balance y de guiada son no nulos se sabe que al menos los coeficientes  $A_1$  y  $A_2$  no son nulos.

$$c_L = \frac{\pi\Lambda}{2} A_1, \quad c_{Mx} = \frac{\pi\Lambda}{8} A_2, \quad c_{Mz} = -\frac{\pi\Lambda}{16} \sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1) A_n A_{n+1} \quad (6.4.1)$$

Como el coeficiente de resistencia tiene que ser mínimo se deben tener cuantos menos coeficientes  $A_n$  posibles. Por lo tanto  $A_n = 0 \quad \forall n \geq 3$

Se sabe que la torsión es anti simétrica y eso afecta a la distribución de circulación inicial, en especial a los coeficientes  $I_n$ .

$$G_I = \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sin n\theta = \frac{1}{2} \kappa(\theta) \frac{dc_l}{d\alpha} \left( \varepsilon(\theta) - \frac{1}{2 \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} n I_n \sin n\theta \right) \quad (6.4.2)$$

Para que la torsión sea anti simétrica se debe cumplir que  $n$  sea un número par como se puede ver en la Figura 6.4.1.

$$I_n = 0 \quad \forall n = 2p - 1 \quad p = 1,2,3, \dots \quad (6.4.3)$$

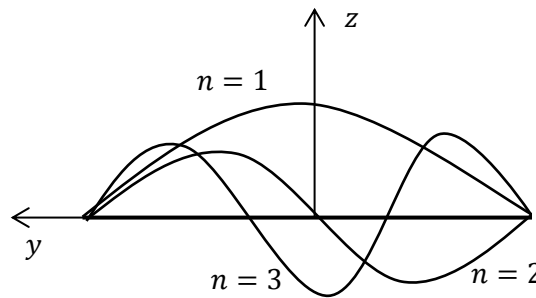


Figura 6.4.1. Distintas formas de la torsión con valores distintos de  $n$ .

Se sabe que en cierta condición de vuelo el coeficiente de momento de guiñada vale  $2^{5/2} \delta^2$ .

$$c_{Mz} = -\frac{\pi\Lambda}{16} \cdot 3A_1 A_2 = 2^{5/2} \delta^2 \quad (6.4.4)$$

$$\Rightarrow A_1 = -\frac{16}{3\pi\Lambda A_2} 2^{5/2} \delta^2 = -\frac{2^{5/2} \delta^2}{3A_2} \quad (6.4.5)$$

La resistencia inducida es:

$$c_{Di} = \frac{\pi\Lambda}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2 = \frac{\pi\Lambda}{4} (A_1^2 + 2A_2^2) = 4(A_1^2 + 2A_2^2) \quad (6.4.6)$$

Se introduce la expresión de  $A_1$  obtenida en la ecuación (6.4.5).

$$c_{Di} = 4 \left( \frac{2^5 \delta^4}{9 A_2^2} + 2A_2^2 \right) \quad (6.4.7)$$

Para que  $c_{Di}$  sea mínima se debe cumplir que la derivada parcial respecto a  $A_2$  sea cero.

$$\frac{\partial c_{Di}}{\partial A_2} = 4 \left( -\frac{64}{9} \delta^4 A_2^{-3} + 4A_2 \right) = 0 \quad (6.4.8)$$

$$\Rightarrow -\frac{64}{9} \delta^4 + 4A_2^4 = 0 \quad (6.4.9)$$

$$\Rightarrow A_2 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \delta \quad (6.4.10)$$

Y por lo tanto  $A_1$  es:

$$A_1 = -\frac{2^{5/2} \delta^2}{3A_2} = \pm \frac{2^{3/2}}{\sqrt{3}} \delta \quad (6.4.11)$$

Ya se tienen todos los coeficientes de la distribución de circulación adimensional. Ya se pueden encontrar los coeficientes que se piden en el enunciado.

El coeficiente de sustentación para la condición de vuelo con mínima resistencia es:

$$c_L = \frac{\pi \Lambda}{2} A_1 = 8 \cdot \left( \pm \frac{2^{3/2}}{\sqrt{3}} \delta \right) = \pm 16 \sqrt{\frac{2}{3}} \delta \quad (6.4.12)$$

El coeficiente de momento de balance es:

$$c_{Mx} = \frac{\pi \Lambda}{8} A_2 = 2 \cdot \left( \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \delta \right) = \pm \frac{4}{\sqrt{3}} \delta \quad (6.4.13)$$



**Problema 5. Forma en planta rectangular**

Dentro de la validez de la teoría del ala larga de Prandtl se desea diseñar un ala de forma en planta rectangular con alargamiento  $\Lambda \gg 1$ , tal que en ciertas condiciones de vuelo el coeficiente de sustentación del ala valga  $c_L = 1$  y el coeficiente de momento de balance sea  $c_{Mx} = 1/8$ , ofreciendo además mínima resistencia inducida. Se pide:

- a) Determinar la distribución de sustentación a lo largo de la envergadura compatible con las condiciones anteriores.
- b) Determinar la torsión del ala  $\varepsilon(\theta)$  y ángulo que forma la línea de sustentación nula del perfil central con la corriente incidente no perturbada  $\alpha(\pi/2)$ .
- c) Coeficientes de resistencia inducida y de momento de guiñada.

**Resolución**

a) Distribución de sustentación

Para obtener la distribución de sustentación se necesita obtener la circulación adimensional y sus coeficientes de la serie de seno.

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta = \frac{1}{2} \kappa(\theta) \frac{dc_l}{d\alpha} \left( \alpha(\theta) - \frac{1}{2 \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin n\theta \right) \quad (6.5.1)$$

Conociendo los coeficientes se pueden obtener los coeficientes aerodinámicos.

$$c_L = \frac{\pi \Lambda}{2} A_1, \quad c_{Mx} = \frac{\pi \Lambda}{8} A_2, \quad c_{Di} = \frac{\pi \Lambda}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2 \quad (6.5.2)$$

Se debe cumplir que la resistencia inducida es mínima por lo que  $A_n = 0 \quad \forall n \geq 3$ . En cierto momento se tiene  $c_L = 1$  y  $c_{Mx} = 1/8$ , por lo que se pueden obtener los coeficientes de serie de la circulación adimensional.

$$A_1 = \frac{2}{\pi \Lambda}, \quad A_2 = \frac{1}{\pi \Lambda}, \quad A_n = 0 \quad \forall n \geq 3 \quad (6.5.3)$$

Según la definición de la circulación adimensional  $G(\theta) = \Gamma / (bU_\infty)$  y el teorema de Kutta Yukovsky  $l = \rho \Gamma U_\infty$ , se puede relacionar la distribución de circulación adimensional con la distribución de sustentación.

$$l(\theta) = \rho U_\infty^2 b \cdot G(\theta) = \rho U_\infty^2 b \cdot \frac{1}{\pi \Lambda} (2 \sin \theta + \sin 2\theta) \quad (6.5.4)$$

b) Torsión y ángulo  $\alpha(\pi/2)$

Se debe buscar lo primero la distribución del ángulo de ataque de los perfiles para éste caso. Se introducen los coeficientes en la ecuación (6.5.1) para encontrar  $\alpha(\theta)$ . Al tener una forma en planta rectangular  $\kappa = 1/\Lambda$ , además se considera que todos los perfiles tienen la pendiente  $c_{l\alpha} = 2\pi$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Lambda} \cdot 2\pi \left( \alpha(\theta) - \frac{1}{2 \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin n\theta \right) \\ \Rightarrow \frac{\Lambda}{\pi} \left( \frac{2}{\pi \Lambda} \sin \theta + \frac{1}{\pi \Lambda} \sin 2\theta \right) &= \alpha(\theta) - \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{2}{\pi \Lambda} \sin \theta + \frac{2}{\pi \Lambda} \sin 2\theta \right) \\ \Rightarrow \frac{2}{\pi^2} \sin \theta + \frac{1}{\pi^2} \sin 2\theta &= \alpha(\theta) - \left( \frac{2}{\pi \Lambda} + \frac{4}{\pi \Lambda} \cos \theta \right) \\ \Rightarrow \alpha(\theta) &= \frac{2}{\pi \Lambda} + \frac{4}{\pi \Lambda} \cos \theta + \frac{2}{\pi^2} \sin \theta + \frac{1}{\pi^2} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

Con ésta función se puede obtener el valor del ángulo de ataque del perfil medio

$$\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi \Lambda} + \frac{4}{\pi \Lambda} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi) = \frac{2}{\pi \Lambda} + \frac{2}{\pi^2} \quad (6.5.6)$$

Ya se puede obtener la torsión del ala.

$$\varepsilon(\theta) = \alpha(\theta) - \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi\Lambda} \cos \theta + \frac{2}{\pi^2} \sin \theta + \frac{1}{\pi^2} \sin 2\theta - \frac{2}{\pi^2} \quad (6.5.7)$$

c) Coeficiente de resistencia inducida y coeficiente de momento de guiñada

El coeficiente de resistencia inducida es:

$$c_{Di} = \frac{\pi\Lambda}{4} \sum_1^{\infty} nA_n^2 = \frac{\pi\Lambda}{4} \left( \frac{4}{\pi^2\Lambda^2} + \frac{2}{\pi^2\Lambda^2} \right) = \frac{3}{2\pi\Lambda} \quad (6.5.8)$$

El coeficiente de momento de guiñada es:

$$c_{Mz} = -\frac{\pi\Lambda}{16} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)A_nA_{n+1} = -\frac{\pi\Lambda}{16} \left( \frac{6}{\pi^2\Lambda^2} \right) = -\frac{3}{8\pi\Lambda} \quad (6.5.9)$$

**Problema 6. Número de Mach de vuelo de un ala elíptica**

Calcule el número de Mach de vuelo  $M_\infty$  al que debe volar un ala de alargamiento  $\Lambda = 10$ , plana y con forma en planta elíptica para que proporcione un coeficiente de sustentación  $c_L = 0.20\pi$  cuando vuela a un ángulo de ataque  $\alpha = 5.7^\circ$ .

**Resolución**

Se considera que el vuelo es subsónico pero compresible. Considerando válida la analogía de Prandtl-Glauert se debe primero calcular el problema con la teoría incompresible y luego transformarla a compresible.

$$x_c = x_i, \quad y_c = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} y_i, \quad \alpha_c = \sqrt{1-M^2} \alpha_i \quad (6.6.1)$$

Por lo tanto el alargamiento del ala para el caso incompresible es:

$$\Lambda_i = \sqrt{1-M^2} \Lambda_c \quad (6.6.2)$$

Se empieza calculando el problema incompresible. Se calcula la circulación adimensional. Debido a que el ala es plana el ángulo  $\alpha(\theta)$  es constante.

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta = \frac{1}{2} \kappa(\theta) \frac{dc_l}{d\alpha} \left( \alpha(\theta) - \frac{1}{2 \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin n\theta \right) \quad (6.6.3)$$

Se tiene una forma en planta elíptica y se considera que todos los perfiles tienen una pendiente de sustentación igual a la de una placa plana.

$$\kappa(\theta) = \frac{4}{\pi \Lambda_i} \sin \theta, \quad \frac{dc_l}{d\alpha} = 2\pi \quad (6.6.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta = \frac{4}{\Lambda_i} \sin \theta \left( \alpha_i - \frac{1}{2 \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin n\theta \right) \quad (6.6.5)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\Lambda_i}{4} + \frac{n}{2} \right) A_n \sin n\theta = \alpha_i \sin \theta \quad (6.6.6)$$

Solo puede haber un coeficiente en esta serie.

$$\left( \frac{\Lambda_i}{4} + \frac{1}{2} \right) A_1 = \alpha_i \Rightarrow A_1 = \frac{4}{\Lambda_i + 2} \alpha_i \quad (6.6.7)$$

El coeficiente de sustentación del ala es:

$$c_{Li} = \frac{\pi \Lambda_i}{2} A_1 = \frac{2\pi \Lambda_i}{\Lambda_i + 2} \alpha_i \quad (6.6.8)$$

Se calcula ahora el coeficiente de sustentación en compresible.

$$c_{Lc} = \frac{2\pi \sqrt{1-M^2} \Lambda_c}{\sqrt{1-M^2} \Lambda_c + 2 \sqrt{1-M^2}} \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \alpha_c \quad (6.6.9)$$

Se sabe que para  $\alpha_c = 5.7^\circ = 0.0995$  rad el coeficiente de sustentación es  $c_{Lc} = 0.2\pi$ .

$$0.2\pi = \frac{2\pi \cdot 10}{\sqrt{1-M^2} \cdot 10 + 2} \cdot 0.0995$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - M^2} \cdot 10 + 2 = 9.95$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - M^2} = 0.795$$

$$\Rightarrow M = \sqrt{1 - 0.795^2} = 0.6 \quad (6.6.10)$$

**Problema 7. Ángulo de ataque del ala a Mach 0.6**

Considere un ala plana de forma en planta elíptica, con una superficie en planta  $S = 10 \text{ m}^2$  y una envergadura  $b = 10 \text{ m}$ , volando a través del aire en calma con una trayectoria horizontal, rectilínea y uniforme, con una velocidad  $U_\infty = 200 \text{ m/s}$ , siendo  $M_\infty = 0.6$  y de peso  $W = 2.4 \cdot 10^4 \text{ N}$ . Suponiendo que la densidad del aire es  $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ , calcule el valor del ángulo de ataque del ala.

**Resolución**

Al ser un problema compresible se debe usar la analogía de Prandtl Glauert. Se calcula primero la sustentación necesaria para poder compensar el peso del avión, esta sustentación es la sustentación del problema compresible ya que es la que realmente ejerce sobre el avión.

$$L = W = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 S \cdot c_{Lc} \quad (6.7.1)$$

$$\Rightarrow c_{Lc} = \frac{2W}{\rho U_{\infty}^2 S} = \frac{2 \cdot 2.4 \cdot 10^4}{1.2 \cdot 200^2 \cdot 10} = 0.1 \quad (6.7.2)$$

Debido a que se estudia un caso tridimensional no se puede utilizar directamente la analogía de Prandtl Glauert para calcular directamente el coeficiente de sustentación para el caso incompresible. Se debe calcular el coeficiente de sustentación para el problema incompresible en función del ángulo de ataque y transformarlo al caso compresible una vez identificado todos los parámetros de la ecuación. El coeficiente de sustentación es:

$$c_{Li} = \frac{\pi \Lambda_i}{2} \alpha_{wi} a_1 \quad (6.7.3)$$

El coeficiente  $a_1$  pertenece a la serie de senos de la distribución de circulación adicional. Ésta se puede calcular ya que se sabe que la forma en planta es elíptica.

$$\kappa(\theta) = \frac{4}{\pi \Lambda} \sin \theta \quad (6.7.4)$$

Utilizando la siguiente igualdad se pueden obtener los coeficientes de la serie. Se considera que todos los perfiles tienen una pendiente de sustentación  $c_{l\alpha} = 2\pi$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta = \frac{1}{2} \kappa(\theta) \frac{dc_l}{d\alpha} \left( 1 - \frac{1}{2 \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin n\theta \right) \quad (6.7.5)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\Lambda_i}{4} + \frac{n}{2} \right) a_n \sin n\theta = \sin \theta \quad (6.7.6)$$

Solo puede existir un coeficiente de la serie.

$$\left( \frac{\Lambda_i}{4} + \frac{1}{2} \right) a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{4}{\Lambda_i + 2} \quad (6.7.7)$$

El coeficiente de sustentación para el problema incompresible es por lo tanto:

$$c_{Li} = \frac{2\pi \Lambda_i}{\Lambda_i + 2} \alpha_{wi} \quad (6.7.8)$$

Se transforma este coeficiente de sustentación para el problema compresible.

$$c_{Lc} = \frac{2\pi \left( \Lambda_c \sqrt{1 - M_{\infty}^2} \right)}{\left( \Lambda_c \sqrt{1 - M_{\infty}^2} \right) + 2} \cdot \frac{\alpha_{wc}}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}} = \frac{2\pi \Lambda_c}{\left( \Lambda_c \sqrt{1 - M_{\infty}^2} \right) + 2} \cdot \alpha_{wc} \quad (6.7.9)$$



El alargamiento del ala es:

$$\Lambda = \frac{b^2}{S} = 10 \quad (6.7.10)$$

Finalmente el ángulo de ataque del ala es:

$$\alpha_{wc} = c_{Lc} \cdot \frac{(\Lambda_c \sqrt{1 - M_\infty^2}) + 2}{2\pi\Lambda_c} = 0.1 \cdot \frac{10\sqrt{1 - 0.6^2} + 2}{2\pi \cdot 10} = \frac{1}{20\pi} \approx 0.0159 \text{ rad} \quad (6.7.11)$$

**Problema 8. Ala con ley de distribución de la cuerda**

Sea un ala de envergadura  $b = 10$  m volando horizontalmente con una velocidad de 80 m/s a través del aire en calma ( $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ ). Sabiendo que su peso es de  $(2\pi/3) \cdot 10^4$  N y que la ley de cuerda es la siguiente:

$$c(\theta) = \frac{b}{2\pi} (\sin \theta + \delta \sin 3\theta), \quad \cos \theta = \frac{2y}{b}, \quad \delta \ll 1 \quad (6.8.1)$$

Calcule el ángulo de ataque del perfil central y la torsión del ala necesaria para que el ala tenga resistencia inducida mínima.

Determine el valor de  $\delta$  sabiendo que la torsión en las puntas del ala vale  $-1/32$  rad.

**Resolución**

a) Ángulo de ataque del perfil central y torsión del ala.

Conociendo la distribución de la cuerda se puede conocer la cuerda adimensional  $\kappa(\theta)$ .

$$\kappa(\theta) = \frac{c(\theta)}{b} = \frac{1}{2\pi}(\sin \theta + \delta \sin 3\theta) \quad (6.8.2)$$

Se puede igualar la sustentación del avión al peso para obtener el primer coeficiente  $A_1$ .

$$q_\infty S \cdot c_L = W \quad (6.8.3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \frac{b^2}{\Lambda} \cdot \frac{\pi \Lambda}{2} A_1 = W \quad (6.8.4)$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{4W}{\pi \rho U_\infty^2 b^2} = \frac{4 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot 10^4}{\pi \cdot 80^2 \cdot 10^2} = \frac{1}{24} \quad (6.8.5)$$

Como la resistencia inducida debe ser mínima, la distribución de circulación adimensional debe ser elíptica.

La distribución de ángulos de ataque de los perfiles se obtiene utilizando la ecuación de la circulación adimensional. Se considera que todos los perfiles tienen una pendiente de sustentación igual a  $2\pi$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta = \frac{1}{2} \kappa(\theta) \frac{dc_l}{d\alpha} \left( \alpha(\theta) - \frac{1}{2 \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin n\theta \right) \quad (6.8.6)$$

Como la resistencia inducida debe ser mínima, la distribución de circulación adimensional debe ser elíptica, es decir:

$$G(\theta) = A_1 \sin \theta \quad (6.8.7)$$

Por lo tanto la ecuación (6.8.6) queda:

$$A_1 \sin \theta = \frac{1}{2} (\sin \theta + \delta \sin 3\theta) \left( \alpha(\theta) - \frac{A_1}{2} \right) \quad (6.8.8)$$

$$\Rightarrow \alpha(\theta) = \frac{1}{12} \cdot \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \delta \sin 3\theta} + \frac{1}{48} \quad (6.8.9)$$

El ángulo de ataque del perfil medio es:

$$\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{12} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \delta \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)} + \frac{1}{48} = \frac{1}{12(1-\delta)} + \frac{1}{48} \quad (6.8.10)$$

La distribución de torsión es la diferencia entre la distribución del ángulo de ataque y el ángulo de ataque del perfil medio.

$$\varepsilon(\theta) = \alpha(\theta) - \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{12} \left( \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \delta \sin 3\theta} - \frac{1}{1-\delta} \right) \quad (6.8.11)$$

b) Valor de  $\delta$ 

En los extremos la torsión debe ser igual a  $-1/32$  rad. Se debe por lo tanto hacer uno de los dos límites siguientes:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \varepsilon(\theta) = -\frac{1}{32}, \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi} \varepsilon(\theta) = -\frac{1}{32} \quad (6.8.12)$$

Tomando el primero caso (el segundo da el mismo resultado):

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{12} \left( \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \delta \sin 3\theta} - \frac{1}{1 - \delta} \right) \right] = -\frac{1}{32} \quad (6.8.13)$$

El límite es indeterminado ya que queda una división del tipo  $0/0$ . Se utiliza la regla de l'Hôpital para encontrar el límite de la fracción que causa la indeterminación.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \delta \sin 3\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta}{\cos \theta + 3\delta \cos 3\theta} = \frac{1}{1 + 3\delta} \quad (6.8.14)$$

Volviendo a la ecuación (6.8.13) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \left( \frac{1}{1 + 3\delta} - \frac{1}{1 - \delta} \right) &= -\frac{1}{32} \\ \Rightarrow \frac{1 - \delta - 1 - 3\delta}{(1 + 3\delta)(1 - \delta)} &= -\frac{3}{8} \\ \Rightarrow -4\delta &= -\frac{3}{8}(1 - \delta + 3\delta - 3\delta^2) \\ \Rightarrow \frac{9}{8}\delta^2 + \frac{13}{4}\delta - \frac{3}{8} &= 0 \end{aligned} \quad (6.8.15)$$

Resolviendo este polinomio se tienen las dos soluciones:

$$\delta_1 = -3, \quad \delta_2 = \frac{1}{9} \quad (6.8.16)$$

## 7. Curva polar

### Problema 1. Avión con ala recta y elíptica en túnel de viento

Un avión está provisto de un ala recta, plana, de forma en planta elíptica, con una superficie  $S = 180 \text{ m}^2$  y un alargamiento  $\Lambda = 10$ . Se ha ensayado en un túnel aerodinámico un modelo a escala 1:10 de este avión, en condiciones tales que la velocidad en la cámara de ensayos es de  $60 \text{ m/s}$ , la densidad del aire  $1.2 \text{ kg/m}^3$  y su viscosidad dinámica  $1.983 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ . Del análisis de los resultados se deducen los siguientes valores para los parámetros de la polar del modelo:  $c_{D0} = 0.0265$ ,  $k = 0.0400$ . Durante los ensayos se ha podido determinar, además que el punto de transición de la capa límite en el ala está situado en el 50% de la cuerda. Las gráficas que se muestran en la Figura 7.1.1 y en la Figura 7.1.2 representan el coeficiente de resistencia de una placa plana sin ángulo de ataque en función del número de Reynolds.

Determine la polar del avión en las mismas condiciones ambientales que en la cámara de ensayos suponiendo que en éste la transición de la capa límite se produce en el 30% de la cuerda

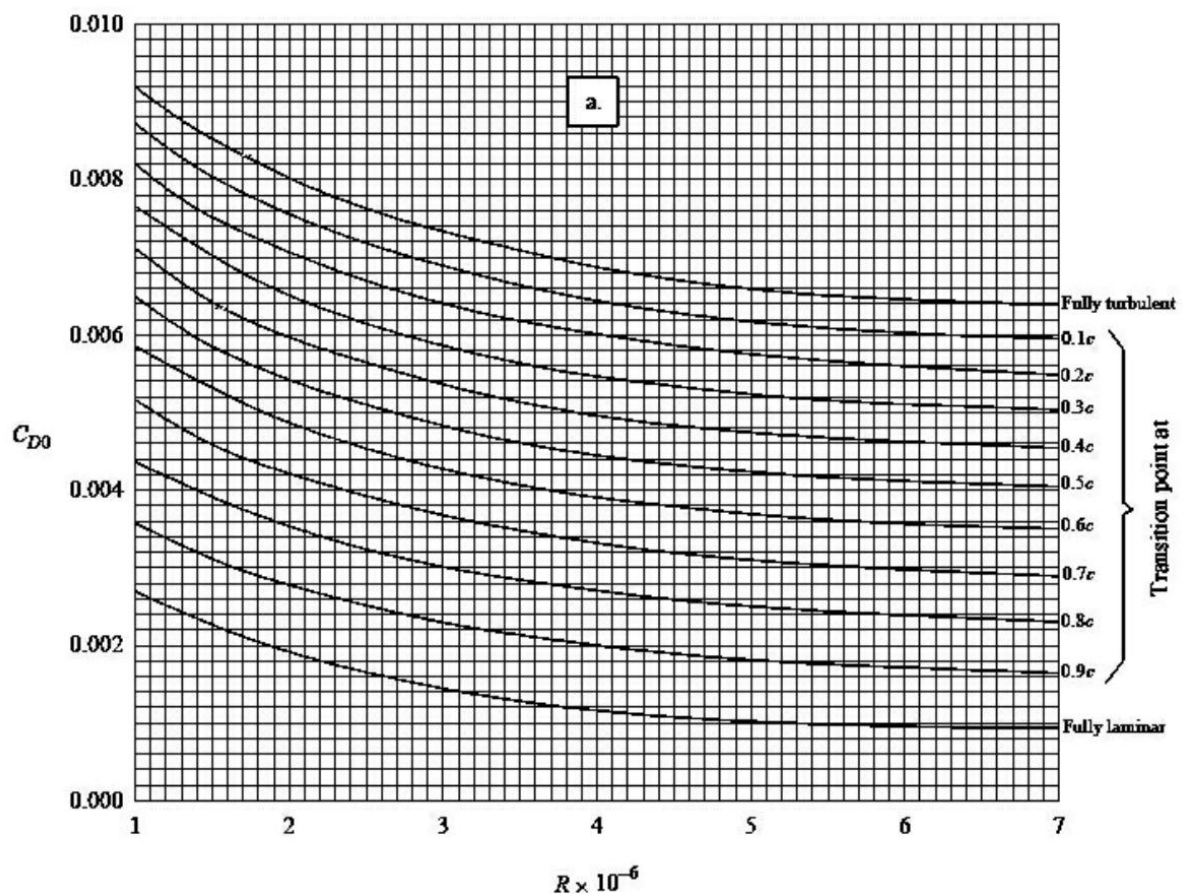


Figura 7.1.1. Coeficiente de resistencia de una placa plana sin ángulo de ataque en función del número de Reynolds.

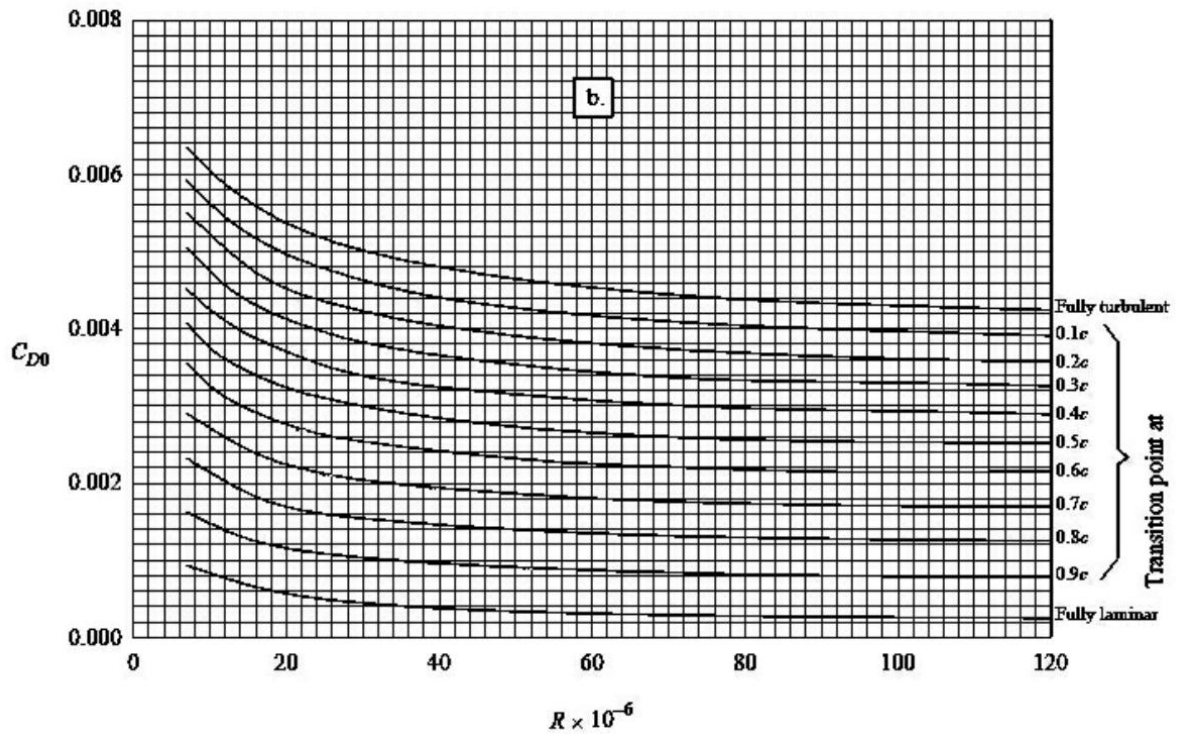


Figura 7.1.2. Coeficiente de resistencia de una placa plana sin ángulo de ataque en función del número de Reynolds.

**Resolución**

Se considera que el coeficiente de resistencia sigue una ley parabólica de la forma:

$$c_D = c_{D0} + kc_L^2, \quad k = \frac{1}{\pi\Lambda e} \tag{7.1.1}$$

Donde  $e$  es el factor de Oswald o de eficiencia, al tener forma en planta elíptica este factor es uno, aunque al haber interacciones con el fuselaje el factor no es uno.

El avión real tiene un alargamiento  $\Lambda = 10$  y una superficie de  $S = 180 \text{ m}^2$ . Por lo tanto la envergadura y la cuerda media son:

$$b = \sqrt{\Lambda S} = \sqrt{1800} \text{ m} \approx 42.43 \text{ m}, \quad \bar{c} = \frac{b}{\Lambda} = \sqrt{18} \text{ m} \approx 4.24 \text{ m} \tag{7.1.2}$$

Por lo tanto el número de Reynolds para del avión real, utilizando una velocidad  $U_\infty = 60 \text{ m/s}$ , es:

$$Re = \frac{\rho U_\infty \bar{c}}{\mu} = \frac{1.2 \cdot 60 \cdot \sqrt{18}}{1.983 \cdot 10^{-5}} \approx 1.54 \cdot 10^7 \tag{7.1.3}$$

La escala del modelo es 1: 10, por lo tanto la cuerda media del modelo es:

$$\bar{c}' = \frac{\bar{c}}{10} = \frac{\sqrt{18}}{10} \text{ m} \approx 0.424 \text{ m} \tag{7.1.4}$$

Y por lo tanto el número de Reynolds con una velocidad  $U_\infty = 60 \text{ m/s}$  es:

$$Re = \frac{\rho U_\infty \bar{c}'}{\mu} = \frac{1.2 \cdot 60 \cdot \sqrt{18}}{1.983 \cdot 10^{-5} \cdot 10} \approx 1.54 \cdot 10^6 \tag{7.1.5}$$

Se determinan los coeficientes de resistencia polar para los dos casos. La transición de la capa límite ocurre en el 30%  $\bar{c}$  en el avión real y en el 50%  $\bar{c}'$  en el modelo.

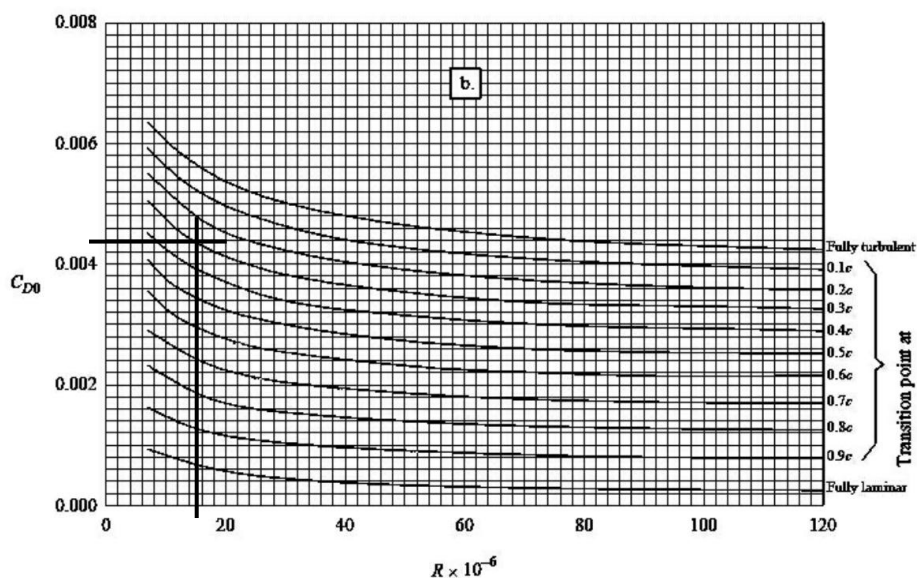


Figura 7.1.3. Obtención del coeficiente de resistencia polar para el avión real.

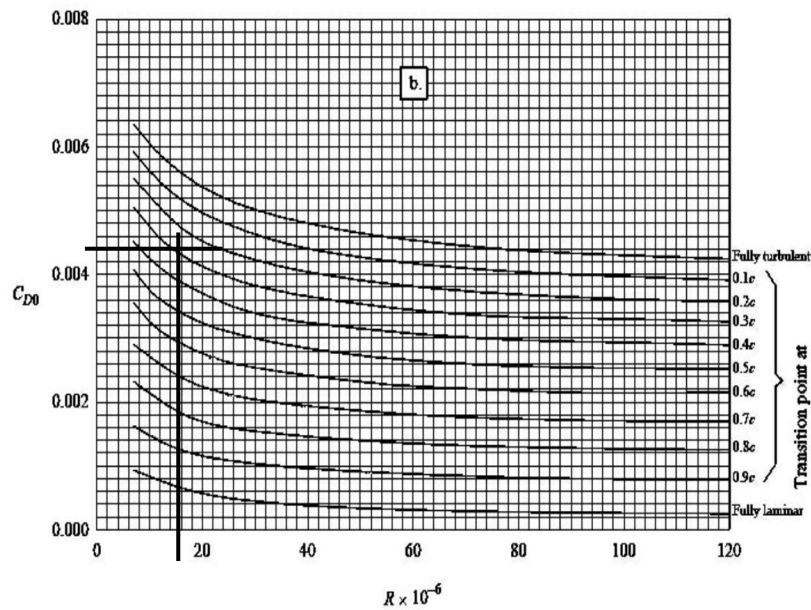


Figura 7.1.4. Obtención del coeficiente de resistencia polar para el modelo.

Los coeficientes de resistencia polar son:

$$c_{D0} = 0.0044, \quad c'_{D0} = 0.0056 \tag{7.1.6}$$

Con esta solución para placas planas se han elaborado los gráficos, por eso la resistencia dada por las gráficas es diferente a la obtenida en el túnel  $c_{D0m} = 0.0265$ . Por lo tanto se puede estimar el coeficiente de resistencia del avión real extrapolando.

$$c_{D0real} = c_{D0m} \cdot \frac{c_{D0}}{c'_{D0}} = 0.0265 \cdot \frac{0.0044}{0.0056} = 0.021 \tag{7.1.7}$$

Para determinar  $k_{real}$  se debe considerar que solo depende de parámetros geométricos de forma que  $k_{real} = k_m = 0.04$ .

Finalmente la curva polar del avión es:

$$c_{Dreal} = c_{D0real} + k_{real}c_{Lreal}^2 = 0.021 + 0.04 \cdot c_{Lreal}^2 \tag{7.1.8}$$



**Problema 2. Polar de un perfil con entrada en pérdida**

Estime la polar de un ala plana de forma en planta elíptica, de 12 m de envergadura y alargamiento 6, formada por perfiles simétricos de espesor medio y que vuela a través del aire en calma con una velocidad de 80 m/s. La viscosidad cinemática y la densidad del aire valen  $1.45 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  y  $1.2 \text{ kg}/\text{m}^3$  respectivamente. Suponga que el número de Reynolds crítico es  $Re_{cr} = 5 \cdot 10^5$ .

Compare el resultado obtenido con el que se obtendría si la capa límite fuera en todo momento laminar.

A continuación, considere que el perfil entra en pérdida por el borde de salida, de modo que alcanzando un ángulo de ataque  $\alpha_s = 16^\circ$  la corriente queda desprendida en la mitad posterior del perfil. En esta zona la presión sobre el extradós puede considerarse constante  $p - p_\infty = -300 \text{ Pa}$ . Estime la nueva polar y compare el resultado con el que se tiene antes de la entrada en pérdida.

**Resolución**

a) Estimar la polar

Conociendo la envergadura del ala y su alargamiento se puede conocer la cuerda media del ala necesaria para calcular el número de Reynolds.

$$\bar{c} = \frac{b}{\Lambda} = \frac{12}{6} = 2 \text{ m} \quad (7.2.1)$$

Hay que tener cuidado al calcular el número de Reynolds ya que el enunciado da la viscosidad cinemática  $\nu$  y no da información de la viscosidad dinámica  $\mu$ .

$$Re_{\bar{c}} = \frac{\rho U_{\infty} \bar{c}}{\mu} = \frac{U_{\infty} \bar{c}}{\nu} = \frac{80 \cdot 2}{1.45 \cdot 10^{-5}} = 1.103 \cdot 10^7 \quad (7.2.2)$$

Para calcular el punto de transición de la capa límite se debe usar el número de Reynolds crítico dado en el enunciado. Si el número de Reynolds calculado con la cuerda media fuese menor que el de transición significaría que toda la capa límite es laminar.

$$Re_{cr} = \frac{U_{\infty} x_t}{\nu} \Rightarrow x_r = \frac{Re_c \nu}{U_{\infty}} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 1.45 \cdot 10^{-5}}{80} = 0.09 \text{ m} \quad (7.2.3)$$

Adimensionalizando este valor con la cuerda media queda:

$$\frac{x_r}{\bar{c}} = 0.045 = 4.5\% \quad (7.2.4)$$

La transición está suficientemente adelantada para poder suponer que la capa límite es completamente turbulenta. Al tener una forma en planta elíptica el factor de Oswald o de eficiencia es igual a la unidad. El factor  $k$  es:

$$k = \frac{1}{\pi \Lambda e} = \frac{1}{6\pi} = 0.0531 \quad (7.2.5)$$

Se utiliza la solución de Blasius para calcular el coeficiente de fricción y con este calcular el coeficiente de resistencia de resistencia parásita.

$$c_{flam} = \frac{1.328}{Re_{\bar{c}}^{1/2}}, \quad c_{fturb} = \frac{0.073}{Re_{\bar{c}}^{1/5}} \quad (7.2.6)$$

$$c_{fturb} = \frac{0.073}{(1.103 \cdot 10^7)^{1/5}} = 2.85 \cdot 10^{-3} \quad (7.2.7)$$

El coeficiente de resistencia parásita es igual a dos veces el coeficiente de fricción ya que hay que contar con la fricción que ocurre en el intradós y en el extradós (consideradas iguales).

$$c_{D0t} = 2 \cdot c_{fturb} = 0.0057 \quad (7.2.8)$$

Finalmente la curva polar es:

$$c_{Dt} = 0.0057 + 0.053 \cdot c_L^2 \quad (7.2.9)$$

## b) Polar con capa límite laminar

Lo único que cambia respecto al apartado anterior es que el coeficiente de resistencia es menor.

$$c_{flam} = \frac{1.328}{\sqrt{1.103 \cdot 10^7}} = 3.99 \cdot 10^{-4} \quad (7.2.10)$$

$$\rightarrow c_{D0l} = 2c_{flam} = 0.0008 \quad (7.2.11)$$

Este coeficiente de fricción es 14 veces menor. La curva polar es:

$$c_{Dl} = 0.0008 + 0.053 \cdot c_L^2 \quad (7.2.12)$$

## c) Con perfil en pérdida

En este caso también hay que buscar el coeficiente de resistencia parásita  $c_{D0st}$ . Como la corriente queda desprendida a partir de la mitad del extradós, la resistencia parásita en la primera mitad es debida a la fricción y en la segunda es debida a la diferencia de presión.

$$D_{0st} = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 S \left( c_{fi} + \frac{c_{fe}}{2} \right) + |\Delta P| \cdot \frac{S}{2} \sin \alpha_{st} \quad (7.2.13)$$

$$c_{D0st} = \frac{3}{2} c_{fturb} + \frac{|\Delta P| \sin \alpha}{\rho U_\infty^2} = \frac{3}{2} \cdot 2.85 \cdot 10^{-3} + \frac{300 \sin 16^\circ}{1.2 \cdot 80^2} = 0.015 \quad (7.2.14)$$

La resistencia parásita es bastante mayor que en el caso de tener capa límite turbulenta. La curva polar queda:

$$c_{Dst} = 0.015 + 0.053 \cdot c_L^2 \quad (7.2.15)$$

## 8. Métodos de paneles

Los métodos de paneles son métodos numéricos de cálculo de la dinámica del fluido alrededor de alas. En este tema se ven solo dos métodos, ambos se utilizan para flujos bidimensionales:

- Método de los torbellinos discretos

El primer método se emplea únicamente para líneas de curvatura. Consiste en discretizar el perfil en paneles y sustituir cada panel por un torbellino colocado situado normalmente a un cuarto del borde del panel. El punto de control se suele situar a tres cuartos del borde del panel.

- Método del potencial constante

Para este método se pueden tomar perfiles con espesor. De forma similar se discretiza el perfil en paneles y en cada panel se supone que la intensidad de los dobletes es constante. El potencial generado por estos dobletes se puede sustituir por dos torbellinos de misma intensidad pero sentido opuesto situados uno en cada extremo del panel. Los puntos de control para este método se suelen situar en el punto medio del panel. A parte de los paneles que forman el perfil se debe introducir un panel extra que es el que pertenece a la estela, parte desde el borde de salida y se considera infinita. Debido a que se añade una incógnita más (la intensidad del potencial del panel de la estela) se debe añadir una ecuación, que viene dada por la condición de Kutta.

La metodología de cálculo para ambos métodos es muy parecida, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Se discretiza el perfil situando los torbellinos de cada panel y los puntos de control.

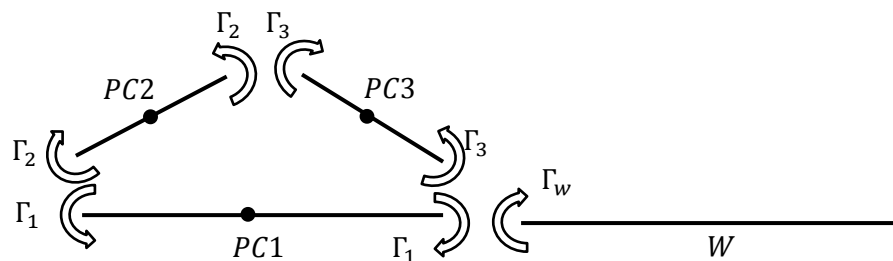


Figura 8.0.1. Ejemplo de discretización y numeración de paneles.

2. Para cada punto de control se impone la condición de velocidad normal nula, ya que cada panel simboliza una porción del perfil y no puede haber fluido pasando a través del perfil. Para facilitar el cálculo se suele considerar que los ángulos son pequeños.

Se debe calcular la contribución de los torbellinos de todos los paneles, incluyendo el panel de estudio y en el caso de utilizar el método de potencial constante se debe incluir la contribución del torbellino de la estela. La velocidad inducida por un torbellino sobre un punto es:

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (8.0.1)$$

Donde  $\Gamma$  es la intensidad del torbellino y  $r$  es la distancia entre el torbellino y el punto. Hay que tener en cuenta que la velocidad inducida por un torbellino es perpendicular a la línea que une el

punto con el torbellino por lo que a veces es necesario descomponer esta velocidad en una componente tangencial al panel y otra normal al panel.

Hay que acordarse también de sumar la contribución de la velocidad incidente  $U_\infty \alpha_i$  donde  $\alpha_i$  es el ángulo que forma el panel con el viento incidente.

3. En caso de que se esté utilizando el método de potencial constante se debe cumplir la condición de Kutta.

La circulación en ese punto debe ser nula, por lo que la suma de los torbellinos de la estala y del primer y último panel debe ser nula.

4. Una vez se tienen ya todas las ecuaciones ya se pueden encontrar todas las incógnitas que son las intensidades de todos los torbellinos. Para calcular la sustentación se debe utilizar el teorema de Kutta-Yukovsky.

$$l = \rho \Gamma U_\infty \quad (8.0.2)$$

Donde  $\Gamma$  es la circulación alrededor del perfil, es decir la suma de todos los torbellinos situados sobre el perfil.

**Problema 1. Método del potencial constante**

Se desea obtener el coeficiente de sustentación de un perfil con forma de triángulo isósceles, de cuerda  $c$  y altura  $h$ , que vuela en régimen incompresible en el seno de una corriente uniforme de velocidad  $U_\infty$ . Se define un sistema de ejes centrado en el punto medio del intradós tal como se muestra en la Figura 8.1.1. Para resolverlo se utiliza el método de paneles del potencial constante, discretizando el perfil en tres paneles, coincidiendo cada uno de ellos con una cara del triángulo. Como puntos de control se toman los puntos medios de cada panel.

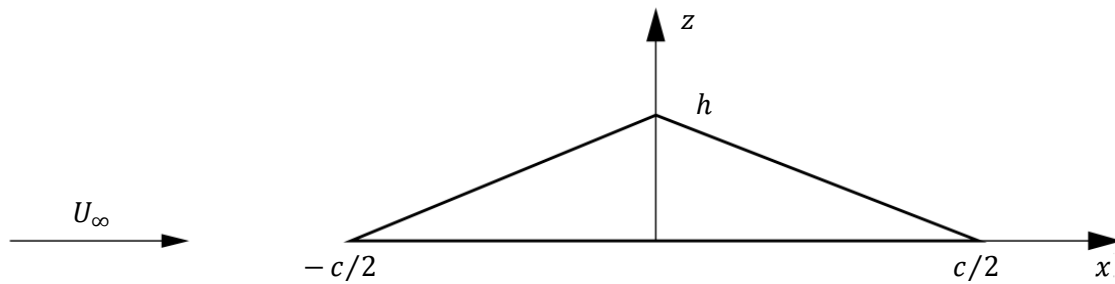


Figura 8.1.1. Perfil del problema.

**Resolución**

El método de potencial constante se basa en distribuir un potencial constante de intensidad  $m(t_0)$  a lo largo del panel. El potencial generado es análogo a colocar dos torbellinos de sentido opuesto en cada punta del panel de intensidad  $2\pi m$ .

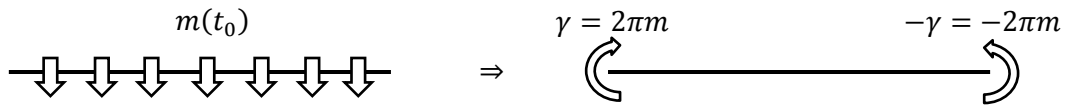


Figura 8.1.2. Transformación de la distribución de potencial constante a dos torbellinos.

Al hacer esta conversión se debe introducir un panel más que es el de la estela. Éste es un panel infinito que empieza en el borde de ataque. En el punto de contacto de los tres paneles en el borde de salida se debe de cumplir la condición de Kutta:

$$\gamma_1 - \gamma_n = \gamma_{n+1} \tag{8.1.1}$$

Se discretiza pues el perfil como se muestra en la Figura 8.1.3. Los puntos de control se sitúan en el centro de cada panel.

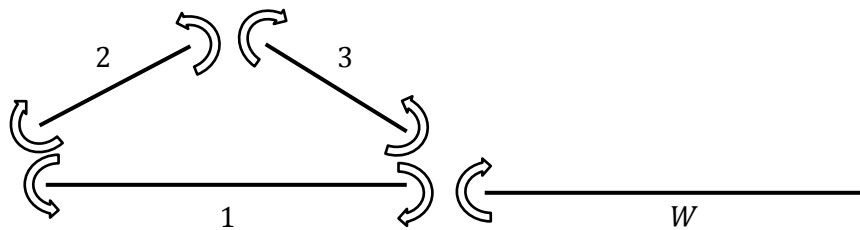


Figura 8.1.3. Numeración de los paneles con sus torbellinos.

Se debe imponer ahora la condición de velocidad normal nula en los puntos de control. Además la condición de Kutta impone que el potencial en el borde de ataque sea nulo. Por lo que simplemente se tienen que considerar los torbellinos definidos en la

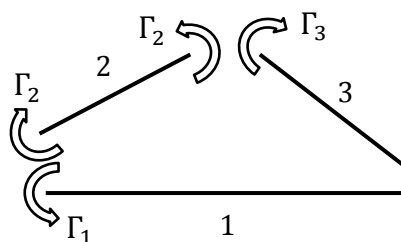


Figura 8.1.4. Torbellinos después de imponer la condición de Kutta.

Se empieza en el punto de control del primer panel. Hay que tener en cuenta que al ser un perfil con mucha simetría los torbellinos situados entre el panel 2 y 3 no contribuyen a la velocidad normal.

$$\frac{1}{2\pi} \left( -\frac{\Gamma_1}{c/2} + \frac{\Gamma_2}{c/2} \right) = 0 \Rightarrow \Gamma_1 = \Gamma_2 \tag{8.1.2}$$

Para el segundo punto de control se debe primero calcular el ángulo con el que incide el viento y la longitud del panel.

$$L_2 = \sqrt{h^2 + \frac{c^2}{4}} \quad (8.1.3)$$

Se puede decir que  $c$  es mucho más grande que  $h$  y simplificar la expresión a  $L_2 = c/2$ . El ángulo de incidencia del viento, considerando que es un ángulo pequeño, es:

$$\alpha_2 = \frac{2h}{c} \quad (8.1.4)$$

Se impone la condición de velocidad normal nula en el segundo panel.

$$-U_\infty \frac{2h}{c} + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\Gamma_1}{c/4} - \frac{2\Gamma_2}{c/4} + \frac{\Gamma_3}{c/4} \right) = 0 \quad (8.1.5)$$

Simplificando, la segunda ecuación queda:

$$\Gamma_1 - 2\Gamma_2 + \Gamma_3 = \pi U_\infty h \quad (8.1.6)$$

Para el calculo del tercer punto de control se necesita saber la distancia entre el borde de ataque y el tercer punto de control.

$$d_3 = \sqrt{\left(\frac{c}{2} + \frac{c}{4}\right)^2 + \left(0 - \frac{h}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16}c^2 + \frac{h^2}{4}} \approx \frac{3}{4}c \quad (8.1.7)$$

Por simetría la longitud del panel es la misma que el segundo y el ángulo de incidencia del viento tiene es el mismo pero positivo. Se impone la condición de velocidad nula en el tercer punto de control.

$$U_\infty \frac{2h}{c} + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\Gamma_1}{3c/4} - \frac{\Gamma_2}{3c/4} - \frac{\Gamma_2}{c/4} - \frac{\Gamma_3}{c/4} \right) = 0 \quad (8.1.8)$$

Simplificando la tercera ecuación del sistema queda:

$$-\Gamma_1 + 4\Gamma_2 + 3\Gamma_3 = 3\pi U_\infty h \quad (8.1.9)$$

Ya se tiene por lo tanto el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Escrito en forma matricial queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{Bmatrix} = \pi U_\infty h \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad (8.1.10)$$

La solución de este sistema es:

$$\Gamma_1 = 0, \quad \Gamma_2 = 0, \quad \Gamma_3 = 3\pi U_\infty h \quad (8.1.11)$$



El coeficiente de sustentación del perfil está generado por un torbellino de igual intensidad pero de sentido contrario al que se tiene en el infinito en la estela. La intensidad del torbellino de la estela se obtiene de la ecuación que dada por la condición de Kutta.

$$\Gamma_w = \Gamma_1 - \Gamma_3 = -3\pi U_\infty h \quad (8.1.12)$$

Por lo tanto el coeficiente de sustentación es:

$$c_l = \frac{\Gamma \rho U_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 c} = \frac{6\pi h}{c} \quad (8.1.13)$$

También se puede calcular el coeficiente de sustentación sumando todos los torbellinos sobre los paneles del perfil. En este caso solo hay un torbellino de intensidad  $3\pi U_\infty h$ .

## Problema 2. Método de los torbellinos discretos

Se ha representado mediante un modelo de dos torbellinos discretos el perfil cuya línea de curvatura se muestra en la Figura 8.2.1. Los segmentos corresponden con los paneles a utilizar. Los torbellinos se sitúan en los puntos  $1/4$  de cada panel y los puntos de control en los puntos  $3/4$ . Sabiendo que  $h/L = 0.1$ , se pide:

- Escribir el sistema de ecuaciones que permite calcular la circulación de los torbellinos discretos.
- Determinar el coeficiente de sustentación del perfil

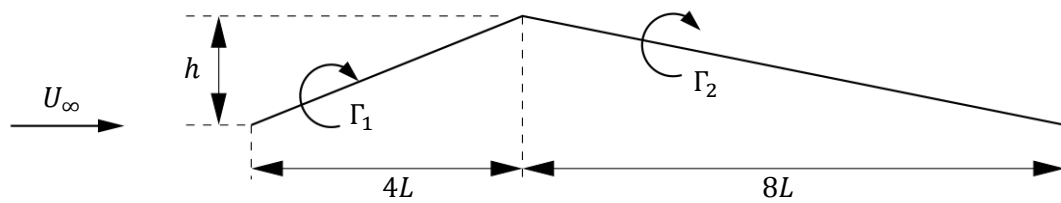


Figura 8.2.1. Perfil con los paneles elegidos.

**Resolución**

## a) Sistema de ecuaciones

Se definen  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  el ángulo que forman los paneles 1 y 2 respectivamente con la horizontal. Se consideran que son ángulos pequeños.

$$\tan \alpha_1 = \alpha_1 = -\frac{h}{4L} = -\frac{1}{40}, \quad \tan \alpha_2 = \alpha_2 = \frac{h}{8L} = \frac{1}{80} \quad (8.2.1)$$

Se empieza con el primer panel. Se impone que la velocidad normal al punto de control es nula. Se recuerda que se consideran los ángulos pequeños.

$$-\frac{U_\infty}{40} - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\Gamma_1}{2L} - \frac{\Gamma_2}{3L} \right) = 0 \quad (8.2.2)$$

Se calcula ahora el segundo panel. Se impone también que la velocidad normal en el punto de control es nula.

$$\frac{U_\infty}{80} - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\Gamma_1}{9L} + \frac{\Gamma_2}{4L} \right) = 0 \quad (8.2.3)$$

Se tiene ya el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Si se pone en sistema matricial queda:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{Bmatrix} = \frac{\pi LU_\infty}{40} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (8.2.4)$$

## b) Coeficiente de sustentación

Se debe primero obtener los valores de los torbellinos. Se multiplica la primera ecuación por dos y la segunda por nueve.

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{9}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{Bmatrix} = \frac{\pi LU_\infty}{40} \begin{Bmatrix} 4 \\ 9 \end{Bmatrix} \quad (8.2.5)$$

Se suman ambas ecuaciones para eliminar la dependencia de  $\Gamma_1$ .

$$\frac{35}{12} \Gamma_2 = \frac{13}{40} \pi LU_\infty \Rightarrow \Gamma_2 = \frac{39}{350} \pi LU_\infty \quad (8.2.6)$$

Se utiliza ahora la segunda ecuación para obtener  $\Gamma_1$ .

$$\Gamma_1 = \pi LU_\infty \left( \frac{9}{40} - \frac{9}{4} \cdot \frac{39}{350} \right) = -\frac{9}{350} \pi LU_\infty \quad (8.2.7)$$

La sustentación se calcula con la suma de los torbellinos de cada panel. La cuerda es  $12L$ .

$$c_l = \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2) \rho U_\infty}{q_\infty 12L} = \frac{30}{350} \pi \cdot \frac{2}{12} = \frac{\pi}{70} \quad (8.2.8)$$

**Problema 3. Punto de control para el método de torbellinos discretos**

Determine la posición del punto de control para el método de torbellinos discretos. Para ello utilice un perfil en forma de placa plana compuesto de un solo panel. Considere también que el ángulo de ataque es pequeño.

### Resolución

El perfil es una placa plana compuesta de un solo panel. Como el centro aerodinámico se sitúa a un cuarto de la cuerda del borde de ataque es lógico colocar ahí la posición del torbellino ya que es ahí donde se produce la sustentación. El problema que se va a estudiar es el de la Figura 8.3.1.

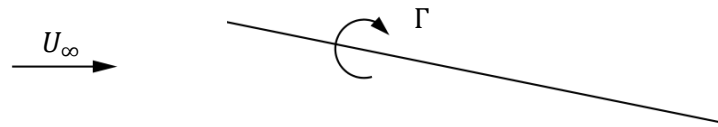


Figura 8.3.1. Perfil compuesto de un solo panel.

Se considera que el punto de control está en el punto  $x_{pc}$  medido desde el torbellino. Imponiendo la condición de velocidad normal a la superficie nula se tiene:

$$U_\infty \alpha - \frac{\Gamma}{2\pi x_{cp}} = 0 \quad (8.3.1)$$

De aquí se aísla la intensidad del torbellino.

$$\Gamma = 2\pi\alpha U_\infty x_{cp} \quad (8.3.2)$$

El coeficiente de sustentación generado por este torbellino es:

$$c_l = \frac{\rho U_\infty \Gamma}{q_\infty c} = \frac{4\pi\alpha x_{cp}}{c} \quad (8.3.3)$$

Considerando válida la teoría potencial linealizada para régimen incompresible, el coeficiente de sustentación de una placa plana es  $c_l = 2\pi\alpha$ .

$$\begin{aligned} 2\pi\alpha &= \frac{4\pi\alpha x_{cp}}{c} \\ \Rightarrow x_{cp} &= \frac{1}{2}c \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

La distancia de  $x_{cp}$  está medida desde el torbellino que se sitúa a un cuarto de la cuerda. Por lo tanto el punto de control está situado a tres cuartos de la cuerda desde el borde de ataque.

**Problema 4. Método de potencial constante en una placa plana**

Se elabora un modelo de una placa plana utilizando dos paneles de dobletes distribuidos de potencial constante. Cada panel tiene una longitud  $c/2$ . Suponiendo que el ángulo de ataque es pequeño ( $\alpha \ll 1$ ) se pide:

- a) Plantear el sistema de ecuaciones que permite resolver el problema. Hágase uso de la hipótesis de pequeños ángulos de ataque para simplificar las expresiones.
- b) Determinar las intensidades de los paneles.
- c) Calcular el coeficiente de sustentación del perfil (usando el modelo propuesto)
- d) Determinar el coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico.
- e) Discutir la validez de los resultados obtenidos en los apartados c) y d) y proponer alguna manera de mejorarlos.

**Resolución**

a) Sistema de ecuaciones

El método de potencial constante se basa en distribuir un potencial constante de intensidad  $m(t_0)$  a lo largo del panel. El potencial generado es análogo a colocar dos torbellinos de sentido opuesto en cada punta del panel de intensidad  $2\pi m$ .

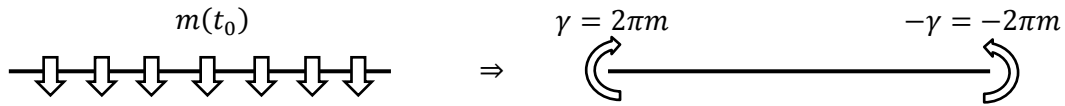


Figura 8.4.1. Transformación de la distribución de potencial constante a dos torbellinos.

Al hacer esta conversión se debe introducir un panel más que es el de la estela. Éste es un panel infinito que empieza en el borde de ataque. Se discretiza la placa plana utilizando solo dos paneles.



Figura 8.4.2. Numeración de los paneles con sus torbellinos.

En el borde de ataque se debe cumplir la condición de Kutta, se deben cancelar mutuamente los dos torbellinos del borde de salida.

$$\Gamma_2 = \Gamma_w \tag{8.4.1}$$

Se puede por lo tanto reducir el problema a encontrar la intensidad de únicamente dos torbellinos.

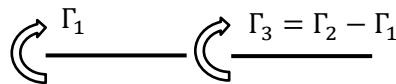


Figura 8.4.3. Reducción del problema a dos torbellinos.

Se impone la condición de velocidad normal nula en el primer panel, el punto de control se sitúa en el centro del panel.

$$U_\infty \alpha + \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{\Gamma_1}{c/4} + \frac{\Gamma_3}{c/4} \right) = 0 \Rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_3 = \frac{\pi \alpha U_\infty c}{2} \tag{8.4.2}$$

Se impone ahora la condición de velocidad normal nula en el segundo panel.

$$U_\infty \alpha - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\Gamma_1}{3c/4} + \frac{\Gamma_3}{c/4} \right) = 0 \Rightarrow \Gamma_1 + 3\Gamma_3 = \frac{3\pi \alpha U_\infty c}{2} \tag{8.4.3}$$

b) Determinar la intensidad de los paneles

Se resta la primera ecuación a la segunda para obtener  $\Gamma_3$ .

$$4\Gamma_3 = \pi \alpha U_\infty c \Rightarrow \Gamma_3 = \frac{\pi \alpha U_\infty c}{4} \tag{8.4.4}$$

Por lo tanto:

$$\Gamma_1 = \Gamma_3 + \frac{\pi\alpha U_\infty c}{2} = \frac{3\pi\alpha U_\infty c}{4} \quad (8.4.5)$$

Se calcula ahora la intensidad  $\Gamma_2$ .

$$\Gamma_2 = \Gamma_3 + \Gamma_1 = \pi\alpha U_\infty c \quad (8.4.6)$$

c) Coeficiente de sustentación

El coeficiente de sustentación se calcula a partir de la fuerza que ejercen los torbellinos.

$$c_l = \frac{\rho U_\infty (\Gamma_1 + \Gamma_3)}{q_\infty c} = \frac{\rho U_\infty \pi\alpha U_\infty c}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c} = 2\pi\alpha \quad (8.4.7)$$

d) Coeficiente de momento respecto al centro aerodinámico

Se calcula el momento generado por los torbellinos respecto al centro aerodinámico situado en  $c/4$ .

$$c_{mac} = \frac{\rho U_\infty \left( \Gamma_1 \frac{c}{4} - \Gamma_3 \frac{c}{4} \right)}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 c^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{3\pi\alpha}{4} - \frac{\pi\alpha}{4} \right) = \frac{\pi\alpha}{4} \quad (8.4.8)$$

e) Comentar los resultados

El resultado del apartado c) es el mismo que predice la teoría potencial linealizada y por tanto puede considerarse aceptable. Sin embargo, el valor obtenido en el apartado d) no es razonable puesto que en un perfil simétrico el coeficiente de momentos respecto al centro aerodinámico debe ser muy pequeño (nota: no es nulo, contrariamente a lo que predice la teoría potencial linealizada, salvo para incidencia nula). La mala calidad del resultado se debe a lo grosera de la discretización, que no puede capturar correctamente la distribución de sustentación a lo largo de la cuerda del perfil. Para obtener un mejor resultado es preciso aumentar considerablemente el número de paneles.