Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 10

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 10.1. Es sei $R = \mathbb{Z}[\frac{2}{3}]$ der von $\mathbb{Z}$ und $2/3$ erzeugte Unterring von $\mathbb{Q}$. Zeige, dass R alle rationalen Zahlen enthält, die sich mit einer Potenz von 3 im Nenner schreiben lassen.

AUFGABE 10.2. Zeige, dass die Menge der algebraischen Zahlen $\mathbb{A}$ keine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.

AUFGABE 10.3. Zeige, dass es nur abzählbar viele algebraische Zahlen gibt.

AUFGABE 10.4.*

Es seien $K \subseteq L$ und $L \subseteq M$ algebraische Körpererweiterungen. Zeige, dass dann auch $K \subseteq M$ eine algebraische Körpererweiterung ist.

AUFGABE 10.5. Es sei K ein Körper. Zeige, dass es außer K keine endliche K-Unteralgebra $A \subseteq K[X]$ gibt.

AUFGABE 10.6. Es sei K ein kommutativer Ring und A eine kommutative K-Algebra. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Die Identität ist ein K-Algebraautomorphismus.
(2) Die Verknüpfung $\varphi \circ \psi$ von zwei K-Algebraautomorphismen φ und ψ ist wieder ein Automorphismus.
(3) Die Umkehrabbildung φ^{-1} zu einem K-Algebraautomorphismus φ ist wieder ein Automorphismus.
(4) Die Menge der K-Algebraautomorphismen bilden mit der Hintereinanderschaltung als Verknüpfung eine Gruppe.

AUFGABE 10.7. Es sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und sei $K \subseteq L$ eine quadratische Körpererweiterung. Zeige, dass es neben der Identität einen weiteren K-Algebraautomorphismus $L \to L$ gibt.

AUFGABE 10.8. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass ein Polynom $P \in K[X]$ genau dann irreduzibel ist, wenn das um $a \in K$ „verschobene“ Polynom (das entsteht, wenn man in P die Variable X durch $X - a$ ersetzt) irreduzibel ist.

AUFGABE 10.9.*

Sei $x = \sqrt{2} + \sqrt{5} \in \mathbb{R}$ und betrachte die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(x) = L\,.$$

Zeige, dass diese Körpererweiterung algebraisch ist und bestimme den Grad der Körpererweiterung, das Minimalpolynom von x und das Inverse von x. (Man darf dabei verwenden, dass $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ irrationale Zahlen sind.)

AUFGABE 10.10.*

Es sei p eine Primzahl.

a) Bestimme den Grad der Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt[3]{p}].$$

Man gebe auch eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{p}]$ an.

b) Zeige, dass in $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{p}]$ alle Elemente der Form $m^3 p$ und $n^3 p^2$ mit $m, n \in \mathbb{Q}$ eine dritte Wurzel besitzen.

c) Die rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ besitze in $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{p}]$ eine dritte Wurzel. Zeige, dass x die Form

$$x = k^3 \text{ oder } x = m^3 p \text{ oder } x = n^3 p^2$$

mit $k, m, n \in \mathbb{Q}$ besitzt.

d) Es sei nun q eine weitere, von p verschiedene Primzahl. Bestimme den Grad der Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{q}].$$

AUFGABE 10.11.*

Es sei K ein Körper und seien $K \subseteq L_1$ und $K \subseteq L_2$ endliche Körpererweiterungen. Zeige, dass es eine endliche Körpererweiterung $K \subseteq M$ gibt, die sowohl L_1 als auch L_2 als Zwischenkörper enthält.

AUFGABE 10.12. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und es sei $x_i \in L$, $i \in I$, ein Körper-Erzeugendensystem (als Körper) von L über K. Es seien $\varphi, \psi \in \operatorname{Gal}(L|K)$ mit $\varphi(x_i) = \psi(x_i)$ für alle $i \in I$. Zeige, dass $\varphi = \psi$ ist.

Aufgabe 10.13.*

Es sei $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, eine algebraische Zahl. Zeige, dass auch die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$ sowie der Real- und der Imaginärteil von z algebraisch sind. Man bestimme den Grad der Körpererweiterung

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}\,.$$

Aufgabe 10.14.*

Es sei $\epsilon = \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ die dritte komplexe Einheitswurzel. Wir betrachten die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\epsilon\sqrt[3]{7}] = L \subseteq \mathbb{C}.$$

(1) Bestimme das Minimalpolynom von $\epsilon\sqrt[3]{7}$.
(2) Zeige, dass der Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L$ gleich 3 ist.
(3) Zeige, dass die komplexe Konjugation nicht L in L überführt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 10.15. (3 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und sei $f \in L$ ein Element. Zeige: f ist genau dann algebraisch über K, wenn $K[f] = K(f)$ ist.

Aufgabe 10.16. (3 Punkte)

Bestimme das Inverse von $2x^2+3x-1$ im Körper $\mathbb{Q}[X]/(X^3-5)$ (x bezeichnet die Restklasse von X).

Aufgabe 10.17. (4 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, wobei L algebraisch abgeschlossen sei. Zeige, dass auch der algebraische Abschluss $\overline{K}$ von K in L algebraisch abgeschlossen ist.[1]

Aufgabe 10.18. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei $K[X,Y]$ der Polynomring über K in zwei Variablen. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom in der einen Variablen X. Zeige, dass durch die Einsetzung $X \mapsto X$ und $Y \mapsto Y + P(X)$ ein K-Algebraautomorphismus von $K[X,Y]$ in sich definiert wird, der im Allgemeinen nicht linear ist.

[1] Die Bezeichnungen wären natürlich schlecht gewählt, wenn dies nicht gelten würde.

AUFGABE 10.19. (5 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $L = K(X)$ der rationale Funktionenkörper über K. Zeige, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon L \to L$ derart gibt, dass $L \cong \varphi(L) \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad n ist.

Abbildungsverzeichnis