中等算學月刊

第二卷第六期

第二卷第六期目錄

封面　勿而馬肖像　　頁數

方 之 基 礎

劉 應 光

第一章 整數二次方冪之分所

凡數之方指數爲零者，其值皆爲1. 方指數爲1者，其值卽爲原數. 故零次與一次冪本篇不必列入，而從二次方冪研究之. 茲將整數1,2,3,……X等之二次方析爲奇數之和，列之於次:—

$1^2=1=1.$

$2^2=4=1+3.$

$3^2=9=1+3+5.$

$4^2=16=1+3+5+7.$

$5^2=25=1+3+5+7+9.$

$6^2=36=1+3+5+7+9+11.$

由上諸式觀之，可見1之平方卽爲一個奇數1，2的平方卽爲兩個奇數1與3之和，……6的平方卽爲六個奇數1,3,5,7,9,11諸數之和. 今假定x的平方，亦有上列諸式之形，爲自1起的x個連續奇數之和，則可依等差級數而求其和，以覘其是否爲x的平方. 因此奇數級數的首項爲1，公差爲2，故知其末項爲$1+2(x-1)$，(見等差級數之公式)卽$2x-1$. 設此x個奇數級數之和爲S，則

$$S=X\cdot\frac{1+(2X-1)}{2}=X\cdot X=X^2.$$

由上之假定與証明，可知凡整數之二次方，皆爲自1起的連續奇數之和. 如x的二次方，卽爲X個連續奇數之和.

第二章 整數三次方冪之分析

今將整數的三次方分析之於次:—

$1^3=1=1.$

$2^3=8=3+5.$

$3^3=27=7+9+11.$

$4^3=64=13+15+17+19.$

$5^3=125=21+23+25+27+29.$

$6^3=216=31+33+35+37+39+41.$

由上諸式觀之，可知從1至6各整數之三次方，亦爲連續奇數之和，2的三方卽爲二個奇數之和，3的三方卽爲三個奇數之和，……6的三方卽爲六個奇數之和。惟各連續奇數級數的首項，非如二次方所析成之奇數級數的首項之皆爲1，乃因整數之不同，其奇數級數的首項亦隨之而異，茲將各奇數級數的首項，分析之於次：—

$1=(0)\times2+1.$

$3=(1)\times2+1.$

$7=(1+2)\times2+1.$

$13=(1+2+3)\times2+1.$

$21=(1+2+3+4)\times2+1.$

$31=(1+2+3+4+5)\times2+1.$

今假設X的三次方，亦能析成X個連續奇數，其首項亦依上列各式之形而排列，則此X個連續奇數之首項，應爲

$$[1+2+3+\cdots+(X-1)]\times2+1,$$

卽 $$X(X-1)+1.$$

其末項應爲

$$[X(X-1)+1]+2(X-1).$$

設此X個奇數級數的和爲S，則

$$S=\tfrac{1}{2}\Big\{[X(X-1)+1]+[X(X-1)+1]+2(X-1)\Big\}\cdot X$$

$$=\tfrac{1}{2}\Big\{2[X(X-1)+1]+2(X-1)\Big\}\cdot X$$

$$=\left\{[X(X-1)+1]+(X-1)\right\}\cdot X$$

$$=\left\{X^2-X+1+X-1\right\}\cdot X$$

$$=X^2.X=X^3.$$

由上之假設與證明，可知凡整數之三方，皆爲連續奇數級數之和，X的三次方卽爲X個連續奇數之和.

第三章 整數四次方冪之分析

今將整數的四次方分析之於次：—

$1^4=1=1.$

$2^4=16=7+9.$

$3^4=81=25+27+29.$

$4^4=256=61+63+65+67.$

$5^4=625=121+123+125+127+129.$

$6^4=1296=211+213+215+217+219+221.$

由上諸式觀之，知由1至6各整數的四次方，皆爲連續奇數級數之和，且2的四次方，卽爲二個連續奇數之和，6的四次方卽爲六個連續奇數之和.而各連續奇數級數的首項，與二次方及三次方析成之連續奇數的首項亦不相同.今取各首項分析之於次：—

$1=[(0\times1)+1]\times1+0^2.$

$7=[(1\times2)+1]\times2+1^2.$

$25=[(2\times3)+1]\times3+2^2.$

$61=[(3\times3)+1]\times4+3^2.$

$121=[(4\times5)+1]\times5+4^2.$

$211=[(5\times6)+1]\times6+5^2.$

今假設X的四次方，亦能析成X個連續奇數，其首項亦依上列各式之形而排

列，則此X個連續奇數之首項，應爲

$$\{(X-1)X+1\}\times X+(X-1)^2$$

即　$X^3-X+1.$

其末項應爲

$$(X^3-X+1)+2(X-1)$$

即　$X^3+X-1.$

設此X個連續奇數級數之和爲S，則

$$S=\frac{(X^3-X+1)+(X^3+X-1)}{2}\cdot X=X^3\cdot X=X^4.$$

由上之假設與證明，可知凡整數之四方皆爲連續奇數級數之和，X的四次方，即爲X個連續奇數之和。

第四章　整數五次方羃之分析

今將整數的五次方分析之於次：—

$1^5=1=1.$

$2^5=32=15+17.$

$3^5=243=79+81+83.$

$4^5=1024=253+255+257+259.$

$5^5=3125=621+623+625+627+629.$

$6^5=7776=1291+1293+1295+1297+1299=1301.$

由上諸式觀之，知由1至6各整數的五次方，皆爲連續奇數級數之和，且2的五次方，即爲二個連續奇數之和，6的五次方，即爲六個連續奇數之和，今取各整數析成的連續奇數級數之首項，分析之於次：—

$$1=\underline{\{0\times 6+1\}\times 1+0^2}.$$

$$15=\underline{\{[0+1]\times 6+1\}\times 2+1^2}.$$

$$79=\left\{[0+1+(1+2)]\times6+1\right\}\times3+2^2$$

$$=\underline{\left\{[0+1+3]\times6+1\right\}\times3+2^2}.$$

$$253=\left\{[0+1+(1+2)+(1+2+3)]\times6+1\right\}\times4+3^2$$

$$=\underline{\left\{[0+1+3+6]\times6+1\right\}\times4+3^2}.$$

$$621=\left\{[0+1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)]\times6+1\right\}\times5+4^2$$

$$=\underline{\left\{[0+1+3+6+10]\times6+1\right\}\times5+4^2}.$$

$$1291=\left\{[0+1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+(1+2+3+4+5)]\right.$$

$$\left.\times6+1\right\}\times6+5^2.$$

$$=\underline{\left\{[0+1+3+6+10+15]\times6+1\right\}\times6+5^2}.$$

今假設X的五次方,亦能析成X個連續奇數,其首項亦依上列各式之形而排列,則此X個連續奇數之首項,應爲

$$\left\{[0+1+3+\cdots\cdots+(1+2+3\cdots+\overline{X-1})]\times6+1\right\}\times X+(X-1)^2.$$

然 $1+2+\cdots+\overline{X-1}=\frac{X(X-)}{2}$,

故首項奇數卽如下式

$$\left\{[0+1+3+\cdots+\frac{X(X-1)}{2}]\times6+1\right\}\times X+(X-1)^2.$$

其末項應爲

$$\left\{[0+1+3+\cdots+\frac{X(X-1)}{2}]\times6+1\right\}\times X+(X-1)^2+2(X-1).$$

今先求 $0,1,3,6,10,\cdots\cdots\frac{X(X-1)}{2}$.級數之和於次:

作上級數之差數得1,2,3,4,5……

故知上級數爲二次算術級數,二次級數各項之和的普通公式爲

$$S_x=A_0X^3+A_1X^2+A_2X+A_3.$$

於上式內依次以0,1,2,3,諸數代X之值,則得:

$$S_0=0=A_3.$$

$$S_1=1=A_0+A_1+A_2+A_3,$$

$$S_2=4=8A_0+4A_1+2A_2+A_3,$$

$$S_3=10=27A_0+9A_1+3A_2+A_3.$$

由上四方程得　$A_0=\frac{1}{6}$，$A_1=\frac{1}{2}$．$A_2=\frac{1}{3}$，$A_3=0$.

故　$S_x=\frac{1}{6}X^3+\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{3}X$

$$=\frac{X}{6}(X+1)(X+2).$$

上式中之X係代二次算術級數之項數,而0,1,3,6,10,……級數的項數,恆較方冪之底數少1.如1的五方所析之首項奇數,其中所含二次算術級數爲0項,2的五方所含二次算術級數爲一項,依同理3爲1與3兩項,4爲1,3,6,三項,5爲1,3,6,10,四項,6爲1,3,6,10,15,五項是也.設整數爲X則其五次方所析成的奇數級數的首項中,所含之二次算術級數的項數必爲X－1.今試以X－1代上式中之X則得

$$S_{x-1}=\frac{X-1}{6}\cdot X\cdot(X+1)=\frac{X^3-X}{6}$$

再以S_{x-1}之值代入首項奇數中得

$$\left\{\left[\frac{X^3-X}{6}\right]\times 6+1\right\}\times X+(X-1)^2,$$

即　$X^4-X+1.$

以 S_{x-1} 之值代入末項奇數中得

$$\left\{\left[\frac{X^3-X}{6}\right]\times 6+1\right\}\times 6+(X-1)^2+2(X-1),$$

即　$X^4+X-1.$

設X的五方所析成的連續奇數其和爲S,則

$$S=X\cdot\frac{1}{2}(X^4-X+1+X^4+X-1)=X\cdot X^4=X^5.$$

由上之假設與證明，可知凡整數之五方，皆爲連續奇數級數之和，X的五次方，即爲X個連續奇數之和.

第五章 整數六次方羃之分析

今將整數的六次方分析之於次：—

$1^6=1.$

$2^6=64=31+33.$

$3^6=729=241+243+245.$

$4^6=4096=1021+1023+1025+1027.$

$5^6=15625=3121+3123+3125+3127+3129.$

$6^6=46656=7771+7773+7775+7777+7779+7781.$

由上諸式觀之，知由 1 至 6 各整數的六次方，皆爲連續奇數級數之和，且 2 的六次方，即爲二個連續奇數之和. 6 的六次方，即爲六個連續奇數之和. 今取各整數所析成的連續奇數級數之首項，分析之於次：—

$1=[1\times 1]+0^2.$

$31=[2\times 15]+1^2.$

$241=[3\times 79]+2^2.$

$1021=[4\times 253]+3^2.$

$3121=[5\times 621]+4^2.$

$7771=[6\times 1291]+5^2.$

今先求 1, 15, 79, 253, ……級數各項之一般式於次：上級數之一次差級數爲

14, 64, 174, 368, 670……,

二次差級數爲

50, 110, 194, 302……,

三次差級數爲

60, 84, 108, ……,

四次差級數爲

$$24, 24, 24, \cdots\cdots.$$

故知上級數爲一四次算術級數，按四次算術級數任意項之普通式爲

$$Y_x = a_0X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X + a_4.$$

上式中之X表項數，Y_x 則表四次算術級數第X項之値，今依次以 0, 1, 2, 3, 4 代上式中之X，而求 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 各係數之値於次：

$$Y_0 = 1 = a_4,$$

$$Y_1 = 15 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3,$$

$$Y_2 = 79 = 16a_0 + 8a_1 + 4a_2 + 2a_3 + a_4,$$

$$Y_3 = 253 = 81a_0 + 27a_1 + 9a_2 + 3a_3 + a_4,$$

$$Y_4 = 621 = 256a_0 + 64a_1 + 16a_2 + 4a_3 + a_4,$$

由上五方程得 $a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 6, a_3 = 3, a_4 = 1$。 故知級 1, 15, 79, 253, 621, 1291……其任意項之一般式爲

$$Y_x = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 3X + 1.$$

惟上式中之X亦如前節，恆較六次方冪之底數少 1，設X爲一整數，則其六次方所析成的連續奇數，其首項中所含四次算術級數之項，必爲X－1也．故由此可得X個連續奇數級數的首項爲

$$X[(X-1)^4 + 4(X-1)^3 + 6(X-1)^2 + 3(X-1) + 1] + (X-1)^2,$$

卽 $\quad X^5 - X + 1,$

其末項爲

$$X^5 + X - 1,$$

設此X個連續奇數級數之和爲S，則

$$S = X \cdot \frac{(X^5 - X + 1) + (X^5 + X - 1)}{2} = X \cdot X^5 = X^6.$$

由上之假設與證明，可知凡整數之六次方皆爲連續奇數級數之和，X的六次方，卽爲X個連續奇數之和．

第六章　整數N次方冪之分析

整數之二次方以至六次方,既皆可析爲連續奇數級數矣.然整數六次以上之方冪,以至任何次方,亦可析爲連續奇數乎?此則本章之所研究者也.前數章係由一定方冪而研究整數1以至X各整數之方冪皆爲連續奇數之和,是爲縱的研究.今再作橫的研究,卽由一定之整數,而考其二次冪三次冪以至任何次冪,是否皆可析爲連續奇數級數.今試以整數2,3,4,5,6等爲例,而分別述之於次:

1. 2的諸次方

$2^2=1+3=[(0)\times2+1]+\cdots\cdots,$

$2^3=3+5=[(1)\times2+1]+\cdots\cdots,$

$2^4=7+9=[(2+1)\times2+1]+\cdots\cdots,$

$2^5=15+17=[(2^2+2+1)\times2+1]+\cdots\cdots,$

$2^6=31+33=[(2^3+2^2+2+1)\times2+1]+\cdots\cdots,$

由上各式可知整數2的各方所析成的二連續奇數,其首項奇數皆有一定之形式,茲假定2的n次方所析出之二連續奇數,其首項奇數亦依上列之形式,則應如下式

$$\begin{aligned}2^n&=[(2^{n-3}+2^{n-4}+\cdots+2+1)\times2+1]+\cdots\\&=[2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2+(2-1)^2]+\cdots\\&=[2^{n-2}+(2-1)^2(2^{n-3}+2^{n-4}+\cdots2+1)]+\cdots\\&=[2^{n-2}+(2-1)(2^{n-2}-1)]+\cdots.\end{aligned}$$

2^n之第一奇數旣爲$2^{n-2}+(2-1)(2^{n-2}-1)$,則其第二奇數應爲$2^{n-2}+(2-1)\times(2^{n-2}-1)+2$,設此二奇數之和爲S,則

$$\begin{aligned}S&=[2^{n-2}+(2-1)(2^{n-2}-1)]+[2^{n-2}+(2-1)(2^{n-2}-1)+2]\\&=2[2^{n-2}+(2-1)(2^{n-2}-1)]+2\\&=2\left\{[2^{n-2}+(2-1)(2^{n-2}-1)]+1\right\}\end{aligned}$$

$$=2\left\{[2^{n-2}+2^{n-1}-2-2^{n-2}+1]+1\right\}$$

$$=2\left\{2^{n-1}-2+1+1\right\}$$

$$=2\times 2^{n-1}=2^n.$$

由此證明可知 2 的任何次方，皆能析成二個連續奇數之和，其第奇數之一般式爲

$$2^{n-2}+(2-1)(2^{n-2}-1).$$

II. 3的諸次方

$$3^2=1+3+5,$$

$$3^3=7+9+11=[3+(3-1)^2]+\cdots,$$

$$3^4=25+27+29=\left\{[3+(3-1)^2]\times 3+(3-1)^2\right\}+\cdots$$

$$=\left\{3^2+(3-1)^2(3+1)\right\}+\cdots,$$

$$3^5=79+81+83$$

$$=\left\{[3^2+(3-1)^2(3+1)]\times 3+(3-1)^2\right\}+\cdots$$

$$=\left\{3^3+(3-1)^2(3^2+3+1)\right\}+\cdots,$$

$$3^6=241+243+245$$

$$=\left\{[3^3+(3-1)^2(3^2+3+1)]\times 3+(3-1)^2\right\}+\cdots$$

$$=\left\{3^4+(3-1)^2(3^3+3^2+3+1)\right\}+\cdots.$$

由上各式可知整數 3 的各方，所析成的三連續奇數，其首項奇數皆有一定之形式。茲假定 3 的 n 次方所析出之三連續奇數，其首項奇數亦依上列之形式。則應如下式

$$3^n=[3^{n-2}+(3-1)^2(3^{n-3}+3^{n-4}+\cdots+1)]+\cdots+.$$

$$=[3^{n-2}+(3-1)(3^{n-2}-1)]+\cdots+\cdots.$$

其第三奇數應爲

$$[3^{n-2}+(3-1)(3^{n-2}-1)]+2(3-1).$$

設此三連續奇數之和爲S，則

$$S=3\cdot\frac{[3^{n-2}+(3-1)(3^{n-2}-1^2)]+\{[3^{n-2}+(3-1)(3^{n-2}-1]+2(3-1)\}}{2}$$

$$=3\cdot\frac{2[3^{n-2}+(3-1)(3^{n-2}-1)]+2(3-1)}{2}$$

$$=3\cdot\left\{[3^{n-2}+(3-1)(3^{n-2}-1)]+(3-1)\right\}$$

$$=3\cdot\left\{3^{n-2}+3^{n-1}-3-3^{n-2}+1+3-1\right\}$$

$$=3\cdot3^{n-1}=3^n$$

由此証明可知3的任何次方，皆能析成三個連續奇數之和，其第一奇數之一般式爲

$$3^{n-2}+(3-1)(3^{n-2}-1).$$

III. 4的諸次方

$$4^2=1+3+5+7,$$

$$4^3=13+15+17+19$$

$$=[4+(4-1)^2]+\cdots+\cdots+\cdots,$$

$$4^4=61+63+65+67$$

$$=\left\{[4+(4-1)^2]\times4+(4-1)^2\right\}+\cdots+\cdots+\cdots,$$

$$=\left\{4^2+(4-1)^2(4+1)\right\}+\cdots+\cdots+,$$

$$4^5=253+255+257+259$$

$$=\left\{[4^2+(4-1)^2(4+1)]\times4+(4-1)^2\right\}+\cdots+\cdots$$

$$=\left\{4^3+(4-1)^2(4^2+4+1)\right\}+\cdots+\cdots+\cdots,$$

$$4^6=1021+1023+1025+1027$$

$$=\left\{[4^3+(4-1)^2(4^2+4+1)]\times 4+(4-1)^2\right\}+\cdots$$

$$=\left\{4^4+(4-1)^2(4^3+{}^2+4+1)\right\}+\cdots+\cdots+\cdots$$

由上各式可知整數4的各方所析成的四連奇續數，其首項奇數皆有一定之形式，玆假定4的n次方所析出之四連續奇數，其首項奇數亦依上列之形式，則應如下式

$$4^n=[4^{n-2}+(4-1)^2(4^{n-3}+4^{n-4}+\cdots+1)]+\cdots+\cdots$$

$$=[4^{n-2}+(4-1)(4^{n-2}-1)]+\cdots+\cdots+.$$

其第四奇數應爲

$$[4^{n-2}+(4-1)(4^{n-2}-1)]+2(4-1).$$

設此四連續奇數之和爲S，則

$$S=\frac{4}{2}\cdot\left\{[4^{n-2}+(4-1)(4^{n-2}-1)]+[4^{n-2}+(4-1)(4^{n-2}-1)+2(4-1)]\right\}$$

$$=\frac{4}{2}\cdot\left\{2[4^{n-2}+(4-1)(4^{n-2}-1)]+2(4-1)\right\}$$

$$=4\cdot\left\{[4^{n-2}+(4-1)(4^{n-2}-1)]+(4-1)\right\}$$

$$=4\cdot\left\{4^{n-2}+4^{n-1}-4-4^{n-2}+1+4-1\right\}$$

$$=4\cdot 4^{n-1}=4^n.$$

由此証明可知4的任何次方，皆能析成四個連續奇數之和，第其一奇數之一般式爲

$$4^{n-2}+(4-1)(4^{n-2}-1).$$

IV. 5的諸次方

$$5^2=1+3+5+7+9,$$

$$5^3=21+23+25+27+29$$

$$=[5+(5-1)^2]+\cdots\cdots,$$

$$5^4=121+123+125+127+129$$

$$=\left\{[5+(5-1)^2]\times5+(5-1)^2\right\}+\cdots\cdots$$

$$=\left\{5^2+(5-1)^2(5+1)\right\}+\cdots\cdots,$$

$$5^5=621+623+625+627+629$$

$$=\left\{[5^2+(5-1)^2(5+1)]\times5+(5-1)^2\right\}+\cdots$$

$$=\left\{5^3+(5-1)^2(5^2+5+1)\right\}+\cdots,$$

$$5^6=3121+3123+3125+3127+3129$$

$$=\left\{[5^3+(5-1)^2(5^2+5+1)]\times5+(5-1^2)\right\}+\cdots\cdots$$

$$=\left\{5^4+(5-1)^2(5^3+5^2+5+1)\right\}+\cdots\cdots.$$

由上各式可知整數5的各方所析成的五連續奇數，其首項奇數皆有一定之形式，玆假定5的n次方所析出之五連續奇數，其首項奇數亦依上列之形式，則應如下式 .

$$5^{n-2}+(5-1)^2(5^{n-3}+5^{n-4}+\cdots+1)$$

$$=5^{n-2}+(5-1)(5^{n-2}-1).$$

其第五奇數應為

$$[5^{n-2}+(5-1)(5^{n-2}-1)]+2(5-1).$$

設此五連續奇數之和為S，則

$$S=\frac{5}{2}\cdot\left\{[(5^{n-2}+(5-1)(5^{n-2}-1)]+[5^{n-2}+(5-1)(5^{n-2}-1)+2(5-1)]\right\}$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\left\{2[5^{n-2}+(5-1)(5^{n-2}-1)]+2(5-1)\right\}$$

$$=5\cdot\left\{[5^{n-2}+(5-1)(5^{n-2}-1)]+(5-1)\right\}$$

$$=5\cdot\left\{5^{n-2}+5^{n-1}-5-5^{n-2}+1+5-1\right\}$$

$$=5\cdot5^{n-1}=\underline{5^n}$$

由此證明可知 5 的任何次方，皆能析成五個連續奇數之和，其第一奇數之一般式爲

$$5^{n-2}+(5-1)(5^{n-2}-1).$$

V. 6的諸次方

$$6^2=1+3+5+7+9+11,$$

$$6^3=31+33+35+37+39+41$$

$$=[6+(6-1)^2]+\cdots\cdots,$$

$$6^4=211+213+215+217+219+221$$

$$=\left\{[6+(6-1)^2]\times 6+(6-1)^2\right\}+\cdots$$

$$=\left\{6^2+(6-1)^2(6+1)\right\}+\cdots,$$

$$6^5=1291+1293+1295+1297+1299+1301$$

$$=\left\{[6^2+(6-1)^2(6+1)]\times 6+(6-1)^2\right\}+\cdots$$

$$=\left\{6^3+(6-1)^2(6^2+6+1)\right\}+\cdots,$$

$$6^6=7771+7773+7775+7777+7779+7781$$

$$=\left\{[6^3+(6-1)^2(6^2+6+1)]\times 6+(6-1)^2\right\}+\cdots$$

$$=\left\{6^4+(6-1)^2(6^3+6^2+6+1)\right\}+\cdots.$$

由上各式可知整數 6 的各方所析成的六連續奇數，其首項奇數皆有一定之形式，茲假定 6 的 n 次方所析出之六連續奇數，其首項奇數亦依上列之形式，則應如下式

$$6^{n-2}+(6-1)^2(6^{n-3}+6^{n-4}+\cdots+1)$$

$$=6^{n-2}+(6-1)(6^{n-2}-1).$$

其第六奇數應爲

$[6^{n-2}+(6-1)(6^{n-2}-1)]+2(6-1)$。

設此六連續奇數之和爲S，則

$$S=\frac{6}{2}\cdot\left\{[6^{n-2}+(6-1)(6^{n-2}-1)]+[6^{n-2}+(6-1)(6^{n-2}-1)+2(6-1)]\right\}$$

$$=\frac{6}{2}\cdot\left\{2[6^{n-2}+(6-1)(6^{n-2}-1)]+2(6-1)\right\}$$

$$=6\cdot\left\{(6^{n-2}+(6-1)(6^{n-2}-1))+(6-1)\right\}$$

$$=6\cdot\left\{6^{n-2}+6^{n-1}-6-6^{n-2}+1+6-1\right\}$$

$$=6\cdot 6^{n-1}=6^n.$$

由此證明，可知6的任何次方皆能析成六個連續奇數之和，其第一奇數之一般式爲

$$6^{n-2}+(6-1)(6^{n-2}-1).$$

VI. X的諸次方

由整數2至整數6的任何次方，皆可析成諸奇數之和，且其首項奇數皆有一定之形式，茲再求任何整數的任何次方，是否亦能分爲諸奇數之和？並求其首項奇數是否亦有一定之形式？今將以上各節所得之各方的第一奇數之一般式，列之於次，而比較之：—

$$2^n=2^{n-2}+(2-1)(2^{n-2}-1)+\cdots\cdots,$$

$$3^n=3^{n-2}+(3-1)(3^{n-2}-1)+\cdots\cdots,$$

$$4^n=4^{n-2}+(4-1)(4^{n-2}-1)+\cdots\cdots,$$

$$5^n=5^{n-2}+(5-1)(5^{n-2}-1)+\cdots\cdots,$$

$$6^n=6^{n-2}+(6-1)(6^{n-2}-1)+\cdots\cdots.$$

由上可知由2至6各整數的任何方，所析成之連續奇數，其第一奇數，皆具同一之形式。今假定整數X的n次方，亦可析成X個連續奇數，其第一奇數亦依上式之

形，則應如下式

$$X^n=[X^{n-2}+(X-1)(X^{n-2}-1)]+\cdots\cdots.$$

而其第X個奇數應爲

$$[X^{n-2}+(X-1)(X^{n-2}-1)]+2(X-1).$$

設此X個連續奇數之和爲S，則

$$S=\frac{X}{2}\cdot\Big\{[X^{n-2}+(X-1)(X^{n-2}-1)]+[X^{n-2}+(X-1)(X^{n-2}-1)]+2\times(X-1)\Big\}$$

$$=\frac{X}{2}\cdot\Big\{2[X^{n-2}+(X-1)(X^{n-2}-1)]+2(X-1)\Big\}$$

$$=X\cdot\Big\{[X^{n-2}+(X-1)(X^{n-2}-1)]+(X-1)\Big\}$$

$$=X\cdot\Big\{X^{n-2}+X^{n-1}-X-X^{n-2}+1+X-1\Big\}$$

$$=X\cdot X^{n-1}=X^n.$$

由此證明可得一定理於次卽

【定理】凡整數之任何次方，皆爲連續奇數之和，整數爲若干，卽爲若干個連續奇數之和，

惟此連續奇數排列之次序則因方冪次數之不同亦隨之而異，此點俟後章詳之．

【未完】

二元二次聯立方程式解法詳論

張伯康譯述

設有一對二元二次聯立方程式

$$\begin{cases} f(x,y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \cdots\cdots(1) \\ \phi(x,y)=a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x+2f'y+c'=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

於此，解之云者，卽求其公根之謂也．按消去法理，可先視 x,y 二未知數中之一者(設爲 y)爲常數而自此二式中消去 x 得一僅含 y 之方程式．解此新方程式可得 y 之值則 x 值當亦隨之而定矣．今按柯西(Cauchy)氏消去法求之如下：

先書原方程組爲：

$$\begin{cases} f(x,y)=ax^2+2(hy+g)x+(by^2+2fy+c)=0 \\ \phi(x,y)=a'x^2+2(h'y+g')x+(b'y^2+2f'y+c')=0 \end{cases}$$

令
$$\left.\begin{matrix} p=hy+g, & q=by^2+2fy+c \\ p'=h'y+g', & q'=b'y^2+2f'y+c' \end{matrix}\right\} \cdots\cdots(3)$$

則上式卽變爲：

$$\begin{cases} f(x,y)=ax^2+2px+q=0 \cdots\cdots(4) \\ \phi(x,y)=a'x^2+2p'x+q'=0. \cdots\cdots(5) \end{cases}$$

先自此二式中消去 x^2 得

$$2(ap'-a'p)x+aq'-a'q=0. \cdots\cdots(6)$$

復自下二式中

$$(ax+2p)x+q=0$$

$$(a'x+2p')x+q'=0$$

消去 x 得

$$(aq'-a'q)x+2(pq'-p'q)=0. \cdots\cdots(7)$$

若 $ap'-a'p\neq0$，則原方程組實與方程組

$$\begin{cases} x=-\dfrac{aq'-a'q}{2(ap'-a'p)} \cdots\cdots\cdots\cdots (8) \\ (aq'-a'q)^2-4(ap'-a'p)(pq'-p'q)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (9) \end{cases}$$

爲同値者．將(3)式中諸値代入方程式(9)而化簡之卽易知所得者乃一僅含 y 之四次方程式：

$$R=\alpha y^4+\beta y^3+\gamma y^2+\delta y+\epsilon=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \alpha&=(ab'-a'b)^2+4(ah'-a'h)(bh'-b'h), \\ \beta&=4\Big\{(ab'-a'b)(af'-a'f)+(ag'-a'g)(bh'-b'h) \\ &\quad+(ah'-a'h)(bg'-b'g)+2(ah'-a'h)(fh'-f'h)\Big\}, \\ \gamma&=2(ab'-a'b)(ac'-a'c)+4\Big\{(af'-a'f)^2 \\ &\quad+(ah'-a'h)(ch'-c'h)+2(ah'-a'h)(fg'-f'g) \\ &\quad+(ag'-a'g)(bg'-b'g+2(ag'-a'g)(fh'-f'h)\Big\}, \\ \delta&=4\Big\{(ac'-a'c)(af'-a'f)+(ah'-a'h)(cg'-c'g) \\ &\quad+(ag'-a'g)(ch'-c'h)+2(ag'-a'g)(fg'-f'g)\Big\}, \\ \epsilon&=(ac'-a'c)^2+4(ag'-a'g)(cg'-c'g). \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (11)$$

由此以觀，可知欲解(1)，(2)，必也先解一四次方程式(10)得 y 之四根．以此四根代入(8)中卽得 x 之四根．故就普遍情形論之，方程組(1)與(2)實有四組根焉．

適所述者乃就 $ap'-a'p\neq0$ 之情形立論也．今者若有 y 之一値 y_1 使 $ap'-a'p=0$ 而 a，a' 中復有一者(設爲a)不爲零，則此 y_1 必也爲 R=0 之一二重根，請進論其故．蓋若 $ap'-a'p=0$，則(9)式解成立之充要條件爲

$$\begin{cases} aq'-a'q=0 \\ pq'-p'q=0. \end{cases}$$

質言之即 y_1 亦必適合於此二方程式.設 $ah'-a'h\neq 0$，則自(3)式易知

$$ap'-a'p=(y-y_1)(ah'-a'h).$$

復設

$$aq'-a'q=(y-y_1)P$$

$$pq'-p'q=(y-y_1)Q.$$

以此代入(9)式即得

$$R=(y-y_1)^2\left\{P^2-4(ah'-a'h)Q\right\}=0.$$

故 y_1 乃為 $R=0$ 之二重根,而原方程組仍有四組根焉. 更就特例論之,若 $ah'-a'h=0$,則上式即變為:

$$R=(y-y_1)^2P^2=(aq'-a'q)^2=0.$$

在此情形中 $R=0$ 仍有四組根不過此四組根乃兩對二重根耳.此二組根中 y 之值即下二方程式

$$ap'-a'p=0$$

$$aq'-a'q=0$$

之根也.

視 y 為常數而消去 x 固可自原方程組中求得其同值方程組(8)與(9). 然若視 x 為常數而消去 y,則依同理亦可得其另一同值方程組:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{bs'-b's}{2(br'-b'r)} & \cdots\cdots(12) \\ R'=\alpha'x^4+\beta'x^3+\gamma'x^2+\delta'x+\epsilon'==0, & \cdots\cdots(13) \end{cases}$$

此中

$$\left.\begin{aligned}
&s=ax^2+2gx+c,\quad r=hx+f,\\
&s'=a'x^2+2g'x+c',\ r'=h'x+f',\\
&\alpha'=(ab'-a'b)^2+4(ah'-a'h)(bh'-b'h),\\
&\beta'=4\{-(ab'-a'b)(bg'-b'g)+(ah'-a'h)(bf'-b'f)\\
&\qquad+(af'-a'f)(bh'-b'h)+2(bh'-b'h)(gh'-g'h)\},\\
&\gamma'=-2(ab'-a'b)(bc'-b'c)+4\{(bg'-b'g)^2\\
&\qquad+(bf'-b'f)(af'-a'f)+2(bf'-b'f)(gh'-g'h)\\
&\qquad+(bh'-b'h)(ch'-c'h)-2(bh'-b'h)(fg'-f'g)\},\\
&\delta'=4\{(bc'-b'c)(bg'-b'g)+(bh'-b'h)(cf'-c'f)\\
&\qquad+(bf'-b'f)(ch'-c'h)-2(bf'-b'f)(fg'-f'g)\},\\
&\epsilon'=(bc'-b'c)^2+4(bf'-b'f)(cf'-c'f).
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(14)$$

細察(11)與(14)二式,卽可知當 $a=a'=0$ 或 $b=b'=0$ 時,方程式

$$\begin{cases}ax^2+2hxy+by^2=0\\ a'x^2+2h'xy+b'y^2=0\end{cases}$$

之結式

$$\alpha=\alpha'=(ab'-a'b)^2+4(ah'-a'h)(bh'-b'h)$$

乃爲等於零者,而 $R=0$ 及 $R'=0$ 二方程式已各有一根變爲無窮大矣.是故原方程組僅當其中含二次項之部份

$$ax^2+2hxy+by^2$$

$$a'x^2+2h'xy+b'y^2$$

有公約數時,方有一組根化爲無窮大,而其有限根僅有三組焉.此乃明顯之事實也.

總上所述,乃就普遍情形而略加論究.吾人自可由四次方程式根之理論而詳述原方程組根之性質,然爲節省篇幅計,姑從略.玆僅就原方程組可化歸二次方程式解者之數種特例分別論之如下:

特例1. 如 $f=f'=g=g'=0$,則原方程組變爲;

$$(\text{I})\cdots\cdots\cdots\cdots\begin{cases} ax^2+2hxy+by^2+c=0 \\ a'x^2+2h'xy+b'y^2+c'=0 \end{cases}$$

而

$$\begin{cases} R=\alpha y^4+\gamma y^2+\epsilon=0, \\ R'=\alpha x^4+\gamma' x^2+\epsilon'=0. \end{cases}$$

此類方程組卽所謂聯立同次方程式是也．其根固可由解 $R=0$ 及 $R'=0$ 而得之，然以 $R=0$, $R'=0$ 之求得演算過繁，反不若下所述之特殊方法爲便． 在此有須申述者，卽今而後，$R=0$ 與 $R'=0$ 之主要用途不過藉以表明原方程組是否可用解二次方程式法以求得其根耳．至若由解 $R=0$, $R'=0$ 以求原方程組之根，在理論方面固屬至當，在實際方面殊非至善．蓋以其演算過繁，方法笨重也．是故於演算之際，吾人恒先試直接化原方程組爲數二次方程式而解之．萬一中途發生困難，或對求得根之性質有所懷疑，則不妨訴之於 $R=0$，$R'=0$ 而作理論上之探討，此讀者所不可不注意也．

此類方程組之特殊解法如下：

先自原二方程式中消去常數項而得

$$(ac'-a'c)x^2-2(ch'-c'h)xy+(bc'-b'c)y^2=0.$$

如 $ac'-a'c\neq 0$，則令 $x=vy$ 而上式變爲

$$[(ac'-a'c)v^2-2(ch'-c'h)v+(bc'-b'c)]y^2=0.$$

但 $y\neq 0$，故由方程式

$$(ac'-a'c)v^2-2(ch'-c'h)v+(bc'-b'c)=0$$

可得 v 之二根．此二根設爲 v_1 及 v_2．則以 $x=v_1y$，代入原方程組中第一式卽可求得 y 之二值

$$y=\pm\sqrt{\frac{c}{av_1^2+2hv_1+b}}$$

因而

$$x=\pm v_1\sqrt{\frac{c}{av_1^2+2hv_1+b}}$$

依同理，如令 $x=v_2y$，復可得

$$y=\pm\sqrt{\frac{c}{av_2^2+2hv_2+b}}$$

$$x=\pm v_2\sqrt{\frac{c}{av_2^2+2hv_2+b}}$$

於此，x，y 之號須同，故所求之根僅有四組.

如 $av_1^2+2hv_1+b=0$，而 $c\neq0$. 則此四組根中僅有二者爲有限而他二組已化爲無窮大矣！於斯二方程式

$$av^2+2hv+b=0$$

$$a'v^2+2h'v+b'=0$$

乃爲有一公根者. 至若 $av_2^2+2hv_2+b$ 亦爲零，則上式之兩根全同而原方程組之四根均化爲無窮大矣！但有須注意者即在此情形中欲原方程組爲聯立必也．

$c'=\frac{a'}{a}c$ 而後可，蓋以若欲三項式

$ax^2+2hxy+by^2$，$a'x^2+2h'xy+b'y^2$ 有公因子 $y(x-v_1y)(x-v_2y)$ 則必也

$$a'x^2+2h'xy+b'y^2=\frac{a'}{a}(ax^2+2hxy+by^2).$$

是故如 $c'\neq\frac{a'}{a}c$，則原方程組實不能成立.

於特例中若(I)中 $a=b$，$a'=b'$. 則原組中二方程式已各變爲對稱者. 其解法以用二變換爲較便：

(a). $x=u+v$, $y=u-v$.

(b). $x+y=p$, $xy=q$.

茲不詳述. 後再論之.

特例2. 若 $h=h'=0$，且 $f=f'=0$，或 $g=g'=0$. 則方程式(1)與(2)各變爲

$$(\text{II})\cdots\cdots\cdots\begin{cases}ax^2+by^2+2gx+c=0\\a'x^2+b'y^2+2g'x+c'=0\end{cases}$$

或
$$\begin{cases}ax^2+by^2+2fy+c=0\\ a'x^2+b'y^2+2f'y+c=0.\end{cases}$$

在第一組方程式中易知

$$R=\alpha y^4+\gamma y^2+\epsilon=0$$

而在第二組方程式中則有

$$R'=\alpha'x^4+\gamma'x^2+\epsilon'=0.$$

此類方程組之解法殊屬易易，蓋若就第一組方程式而論，則可先消去 y^2 而得一僅含 x 之二次式．解之卽得 x 之二根．再以此二根逐次代入原方程式中任一者卽可得 y 之四值，是故此類方程組，就普遍情形論之固有四組根，不過在第一組方程式中 x 僅有相異之兩根而 y 之四根則均爲不同者；在第二組方程式中則適反乎是．

特例3． 若 $c=c'=0$ 且 $f=f'=0$ 或 $g=g'=0$． 則原方程式(1)與(2)各變爲：

$$(\text{III})\cdots\cdots\cdots\begin{cases}ax^2+2hxy+by^2+2gx=0\\ a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x=0,\end{cases}$$

或
$$\begin{cases}ax^2+2hxy+by^2+2fy=0\\ a'x^2+2h'xy+b'y^2+2f'y=0.\end{cases}$$

於此兩組方程式中易知均有 $\delta=\delta'=\epsilon=\epsilon'=0$ 而

$$R=y^2(\alpha y^2+\beta y+\gamma)=0,$$
$$R'=x^2(\alpha'x^2+\beta'x+\gamma')=0.$$

由上二式可知方程組(III)恒有

$$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$$

兩組根．今進論其他二組根之求法：

為便利計，僅論第一組方程式之解法。至若第二組者則不難依同理求得，實無需分別論之也。

自原方程組中消去含 x 項得

$$(ag'-a'g)x^2-2(gh'-g'h)xy+(b'g-b'g)g^2=0.$$

設 $ag'-a'g\neq 0$，則令 $x=vy$，由解方程式

$$(ag'-a'g)v^2-2(gh'-g'h)v+(bg'-b'g)=0$$

可得 v 之二值 v_1 及 v_2. 以 $x=v_1y$ 或 $x=v_2y$ 代入原方程中可得其二組根為：

$$\begin{cases} y=\dfrac{-2gv_1}{av_1^2+2hv_1+b} \\ x=\dfrac{-2gv_1^2}{av_1^2+2hv_1+b}, \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\dfrac{-2gv_2}{av_2^2+2hv_2+b} \\ x=\dfrac{-2gv_2^2}{av_2^2+2hv_2+b}. \end{cases}$$

若 $ag'-a'g=0$，則易知 $r=r'=0$ 而原方程組之根為：

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{-2gv_1^2}{av_1^2+2hv_1+b} \\ y=\dfrac{-2gv_1}{av_1^2+2hv_1+b}, \end{cases}$$

其中 $$v_1=\frac{bg'-b'g}{2(gh'-g'h)}.$$

舍此法外，吾人復可自原方程組中消去含 y^2 項而得

$$(ab'-a'b)x^2-2(bh'-b'h)xy-2(bg'-b'g)x=0$$

即 $$x\left\{(ab'-a'b)x-2(bh'-b'h)y-2(bg'-b'g)\right\}=0.$$

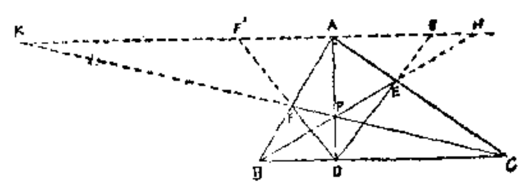
由此式中可求得 x 與 y 間之關係，將此關係代入原方程組中任一者按法推演，亦可求得其兩組根。

（未　完）

幾何難題二則

孫振憲

(1) AD爲三角形ABC中之高，P爲其一任意一點。聯BP,CP與AC,AB各交於EF，則$\angle ADF=\angle ADE$.



[証] 過A作$KH \parallel BC$，則$KH \perp AD$，設此平行線與BE,CF,DE,DF等延長線之交點，各爲H,K,E',F'.

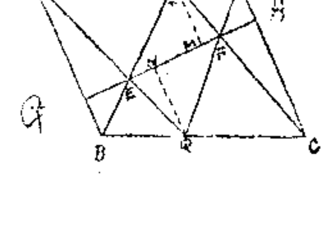
$$\because \frac{AK}{BC}=\frac{AF'}{BD} \qquad \therefore \frac{AK}{AF'}=\frac{BC}{BD}.$$

同理 $\dfrac{AE'}{AH}=\dfrac{DC}{BC}$ $\qquad \therefore \dfrac{AK}{AF'}\cdot\dfrac{AE'}{AH}=\dfrac{DC}{BD}$ $\qquad$ (I)

但 $\dfrac{AH}{BD}=\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{AK}{CD}$ $\qquad \therefore \dfrac{AK}{AH}=\dfrac{CD}{BD}$ $\qquad$ (II)

由(I)(II)得 $\dfrac{AE'}{AF'}=1$ 卽 $AE'=AF'$ $\therefore \angle ADF'=\angle ADE'$.

(2) ABCD爲一平行四邊形，P爲AD上任意一點，聯PB,PC；Q爲BC上任意一點，聯QA,QD與PB,PC各交于E,F. 聯EF與AB,CD交于G,H；則BG=DH.



［証］ 過 P,Q,各作 PM,QN ∥ AB ∥ CD 與 GH 交于 M 及 N.

$$\frac{DH}{QN}=\frac{DF}{QF}=\frac{PD}{QC} \qquad \therefore \frac{DH}{QN}=\frac{PD}{QC} \quad \text{同理} \quad \frac{BG}{PM}=\frac{BQ}{AP}$$

又 $$\frac{PM}{CH}=\frac{PF}{CF}=\frac{PD}{QC} \qquad \therefore \frac{PM}{CH}=\frac{PD}{QC} \quad \text{同理} \quad \frac{QN}{AG}=\frac{BQ}{AP}$$

$$\therefore \frac{DH}{QN}=\frac{PM}{CH} \qquad \text{且} \quad \frac{BG}{PM}=\frac{QN}{AG}.$$

$$\therefore \quad CH\cdot DH=AG\cdot BG.$$

$$(CD-DH)DH=(AB-BG)BG$$

$$AB\cdot BG-CD\cdot DH+\overline{DH}^2-\overline{BG}^2=0$$

$$AB(BG-DH)-(\overline{BG}^2-\overline{DH}^2)=0$$

$$(BG-DH)(AB-BG-DH)=0$$

但 P 與 Q 爲平行四邊形對邊上任意點，故在一般情形 $AB-BG-DH\neq0$，因是必有

$$BG-DH=0, \qquad \text{即} \qquad BG=DH.$$

三角學中各公式之相依性 (Dependence)

余介石

1. 初等三角學中所述公式有二種，一爲恒等式，二爲三角形邊角關係式。本文所討論者，卽此二種公式中，各有若干基本式，爲推出其他各公式之根據。

在一組公式中，如不能自一部份公式推得其他，則稱諸公式爲獨立(independent)；否則稱爲相依。今吾人所欲求者卽一組獨立之基本公式也。

2. 先就恒等式論之，吾人當已知有單角與複角者二類。複角恒等式以和較公式，如 $\sin(A\pm B)$, $\cos(A\pm B)$ 等展式爲基礎，取特例卽得倍角分角諸式。故凡複角式倍角分角之恒等式，率可化爲單角者證之(其可以特法解之者爲例外，然其原則仍不外此)。故玆僅論單角之情形。

單角恒等式，最簡者爲各函數關係式，而有

(一) 平方關係式 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$,

$\sec^2 A-\tan^2 A=1$,

$\csc^2 A-\cot^2 A=1$,

(二) 逆數關係式 $\sin A\cdot\csc A=1$,

$\cos A\cdot\sec A=1$,

$\tan A\cdot\cot A=1$,

(三) 商數關係式 $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$ 等

今試求其獨立之基本式如次。

3. 定理一 基本獨立關係式之數，不能多于五。

吾人應熟知各函數之值，因 $\angle A$ 之大小而定。今如有六個獨立關係式，卽可視爲六個聯立方程式，遂解得諸函數之值，而爲一定，不復與 $\angle A$ 之大小相關矣。

4. 定理二 三逆數關係式與平方關係式，商數關係式各一，合成五個基本獨立

關係式．

三逆數關係式中各含不同之函數，自無其二推得餘一式之可能，且亦不能由此三式，消去某函數而得商數關係式，故此四式應爲獨立．

如取一非直角三角形，則三邊所成六比，仍有上述四關係式，但其三邊既不合畢塔哥拉斯定理，故不能合於平方關係式．是以知任一平方關係式，均對于上述四式爲獨立．

5．按上所述，即可知任何單角恒等式，皆應可從上述五獨立基本關係式推證．因苟不然，則此恒等對於上述五式爲獨立，而與定理一相背也．

6．次請論三角形邊角關係式之相依性．

三角形邊角關係式，各初等三角皆論及者，計有

(一)正弦定律　$a:\sin A=b:\sin B=c:\sin C$ 式中 a,A,b,B,c,C 指相對之邊角，下文同此．

(二)內角和定理　$A+B+C=180°$．

(三)餘弦定律　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$　等三式．

(四)正切定律　$\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}$　等三式．

(五)半角定理　$\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$　等三式．

式中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$．

定理一　邊角獨立關係式之數有三而不能多于三．

按幾何理一三角形須由三元素（且至少應含一邊，因按內角和定理，如三已知元素皆角，非獨立之條件也）決定．如獨立關係式少於三，則合之不足六式，不能解得三角形六元素之值，而與幾何情形相背．同理可知亦不能多於三，否則不必有三已知元素，即可解三角形矣．

定理二　正弦定律與內角和定理或餘弦定律三公式均得爲三獨立關係式

正弦定律，僅爲二個獨立關係式，自不能消去三邊而推出內角和定理，故可成一組三個獨立關係式.

餘弦定律三公式，每式只含一角，顯然不能由其二推出第三式.

至於正切定律半角定理等，皆係從上述獨立關係式推求，其証法各初等三角學本皆載及，學子當已習知，故不具論.

7. 上述二組公式，任取一組爲基本，則應可推得他一組，此問題初等三角學鮮有論及者，茲略述如次.

(一)由正弦定律及內角和定理推餘弦定律.

因 $A+B+C=180°$，故 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\sin C\cos B$

但按正弦定律 $\sin A=ak$, $\sin B=bk$, $\sin C=ck$，代入得

$$a=c\cos B+b\cos C \qquad \text{是爲射影定律.}$$

同理 $b=c\cos A+a\cos C$, $c=a\cos B+b\cos A$.

再自此三式消去任二角，結果即爲餘弦定律.

(二)自餘弦定律推求正弦定律及內角和定理.

由餘弦定律，解得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 代入 $1-\cos^2 A$ 化簡即得

$$\sin A=\frac{2}{cb}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad s=\tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

同法可得 $\sin B$, $\sin C$(或就上式輪換 a, b, c 三邊亦可). 再相除即得正弦定律.

再以正弦定律結果，代入餘弦定律三公式，即可消去各邊. 化簡之即得

$$\sin A=\sin(B\pm C), \quad \sin B=\sin(C\pm A)$$

$$\sin C=\sin(A\pm B)$$

三關係式，由三角均不得大于 180° 之限制，而取其公共結論，即爲內角和定理.

[註] 本文所論，係引伸余所著新課程標準高中三角學(中華書局出版)中§§14, 66 之說.

勿　而　馬

(Pierre de Fermat 1601—1665 A.D.)

瘦　桐

大凡學過初等幾何學的，無人不知從古昔希臘時代傳下來有所謂三大難題．這些難題經過二千多年的研究，到了今日，已經完全解決，由許多聰敏的算學家證明了是些規尺作圖不能的問題．可是十七世紀時法國的一位算學家勿而馬所提出的一個勿而馬大定理（亦稱勿而馬最後定理），自從他歿後凡三百年，其間縱然經過懸償十萬馬克的激勵，濟濟多士之算學界的努力，仍然是未猜破的一個秘謎，未解決的一道難題．

什麼是這個難題呢？勿而馬在帶奧蕃塔斯(Diophantus)書中的邊沿上寫着說：『如果n是3以上的正整數，那麼絕沒有滿足$x^n+y^n=z^n$的正整數或正分數的解答．』原來勿而馬生平有個特性，從不著書，也不發表論文，只和友人作學術上探討的通信．他的發明頗多，每有重大的創見，恆隨時註在書沿上，可惜這書沿的紙面很是有限，使他不能詳細的把證明列記下來，以致後世的算學家為了牠們絞去不少的腦汁，實在是一件遺憾的事．

勿而馬在書沿註下的一些定理，全都被後世的算學家苦心闡明了．不能解決的只剩有這一個——最後定理．約莫在這定理發現後一百年的光景，瑞士之尤拉(Euler)曾就n＝3，加以證明，復有法之拉格蘭(Lagrange)於1824年就n＝4，勒戎德(Legendre)於1823年就n＝5，德之狄利略勒(Dirichlet)於1832年就n＝14，法之拉梅(Lamé)及雷伯士革(Lebesgue)於1840年就n＝7，德之昆麥(Kummer)，於同年就n為100以下之素數，為之論證，但皆是特別的場合，沒有一般的證明．不過有一件值得我們注意的，證明本定理的目的雖沒達到，昆麥却由研究這問題，而創設近世數論中有名的幻想數(Ideal number)之理論，到是算學界意外的收穫．

這定理既經多數大算學家研究失敗，於是遂舉世聞名。1850年巴黎學士院首先懸價三千法郎募集解法，應徵者雖多，皆不稱意。1853年曾再行募集一次，仍無結果，巴黎學士院至是殆已宣告絕望。其後又過五十餘年，德國有一個大商人窩夫斯克爾(Walfskehl 1856—1906)，同時又是一個算學家，特在他的遺產中，劃出馬克十萬，交托德國科學協會遺囑贈予這問題的解決人，為科學界空前的壯舉。科學協會受此委托遂於1908年6月在德國數學聯合會報上正式發佈這個消息。惟應募者須有限制，必須論文先印刷須出版須且須出版在兩年以上。自此驚人的懸價佈諸後，科學協會接到之論文為數滋夥，但有價值的依舊寥寥無幾。因此應募期限不得不特別延長，截止展至2007年9月13日。如果到期還無人解決，這筆大懸價就算撤消。讀者諸君，致富的途徑就在這裏，有勇氣嘗試一下麼？

勿而馬係1601年生在蒙托遼(Montauban)的近傍，1665年1月12日死於土魯斯(Toulouse)，是一個革商的兒子。1631年曾充土魯斯地方議會的評議員，奉公勤慎，忠於職務，生性酷好算學，公餘閑暇，常以研究算學為樂，專心致力，除了有一個時期和笛喀兒作一度關於解析幾何的爭論外，不為任何事務所動搖。好學深思的精神，真值得我們的敬佩。

勿而馬的名氣，不單是以大定理而得名。他那用極微數去求曲線的切線，次切線及面積，和函數的極大極小的方法，要算微分積分學思想的發端，妥當應和牛頓，來布尼茲同垂不朽。他那用方程式去表示圖形，藉方程以推究圖形的性質的創見，在笛喀兒幾何學未發表前，早已發見於他的書信中，該當和笛喀兒並雄。他那計算博奕家瑟發雷得梅列提出的問題，其法則比巴斯喀還要正確，在確率學上，應該和巴斯喀平分榮譽。所以德國的大算學家坎托(M.Cantor)稱贊他是「十七世紀法國最大的算學家」。的確他的天才，比起同時代的算學家笛喀兒，巴斯喀還要勝過一籌咧。

在勿而馬大定理中，若令n等于2，即為畢達哥拉斯的定理，
讀者請參看本卷第一期王元吉君"畢達哥拉斯數"一文。

科學之女王

E. T. Bell 原著 乙閣譯

第六章 羣及陣式

由克萊因之理論，可見出前世紀中，羣的概念，至少在一大部分算學上，佔重要的地位．此蓋指幾何部分而言，至近世代數方面，亦有許多部分與羣的概念有深切的關係，尤以代數方程式論為然．總之凡可應用羣論之處，莫不化繁雜而為簡單．最近哲學家，且有對此概念深感興趣者，以其有統一全盤之權力，為科學思想一種重要之表現也．職是之故，吾人對於羣的概念，稍詳述之如次．

在提出羣的正式定義以前，有必須注意而為著者所不能已於言者．自羣之概念出發，所見景象，雖極偉大之觀，然即謂古今算學，全體為其所包容，則又不可．許多算學分科中，並無羣之概念在內，即有之亦居最不重要的地位．其實羣之理論，在前世紀代數學中，不過一附屬品而已．

羣分二類，曰有限羣，曰無限羣．有限羣中不同之變換（或運算），為數有限，無限羣中不同之變換，則為數無窮．此科之發展，皆十九世紀中諸算學家之功，若迦羅華，若柯西，若約當（Jordan），若李（Lie），若賽洛（Sylow）諸賢皆是也．

1854年凱萊（Cayley）氏曾謂一個有限羣，可依其中各種運算之結合法，列為一表而觀之．茲示一例於右，以資說明．

	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	D	E	C
B	B	I	A	E	C	D
C	C	E	D	I	B	A
D	D	C	E	A	I	B
E	E	D	C	B	A	I

羣中有六種不同的運算，以I，A，B，C，D，E表之．此表讀法，有如普通算術中之九九表．例如自左方豎行內取B，自上方横行內取D，則見B列與D行相交於C．此即謂B，D兩種運算繼續施行，所得結果，即為C之運算，此其結果，以BD＝C記之．

但若先D而後B，則見結果非C而爲E，卽$DB=E$. 故此種結合法中，交換定律不能有效，但締合律則仍成立.例如$(AB)C=A(BC)$，讀者可自驗之.

設有一組事物於此，於其上可施行I,A,B,C,D,E各運算，又設x爲組中任意之一元.假定此六種運算中任何一種施行於x上所得結果，仍舊爲組中之一元.以B施行於x上所得結果，記如$B(x)$，由上之假定，則$B(x)$亦爲組中之一元，因之又可以D施行於其上.此其結果記如$BD(x)$，又爲組中之一元.依表中所示，$BD=C$，意謂B，D兩運算繼續施行，先B而後D，所得結果，可以一步求出，卽於x上施行C之運算是也. 如是，則此組事物，對於I,A,B,C,D,E等運算而言，爲自滿的，蓋繼續施行運算，無論如何，結果仍在組中也.讀者如不信吾言，請依表中所示規則，如$BD=C$，$DB=E$，$CE=A$，$EC=B$，等等，自行試驗，將見無論如何，不能逃出表示之範圍以外.閉卷細思，便知如此自滿有限之組，事實上確有之也.

再觀I之運算，其影響爲何若.據表知$AI=IA=A$；$BI=IB=B$，施行於其他運算時亦然.故I之運算，不生任何變化，是謂同運算(identity).

最後應注意者，六種運算中任取一種爲X，則必有唯一的運算Y存在，使$XY=I$.再則如此成對之運算，可以交換，卽$XY=YX$，且X，Y不必互異.例如X代表B之運算，則$Y=A$，因$BA=I$故也；但若X爲E，則Y亦爲E. 若此X，Y之兩運算，互稱爲反運算(inverse). 由表中可見每一運算，各有唯一的反運算存在.

一組之運算，具有上述各性質者，謂之一羣. 羣之正式定義，可用幾條公設代之，其說詳後.今先舉一實例，以見如前表所示之羣，確有其事.此種之例甚多，散見於算學之各部份中，茲特其最簡單者耳.

任取一數x，其值僅限於不爲零.吾人可自1減去該數，亦可將該數除1，因之得$1-x$及$1/x$兩個新數. 於此等新數上，再施行頃間所述之兩種運算，則由$1-x$得兩數，其一卽x，其他另爲一新數$1/(1-x)$；又由$1/x$亦得兩數，其一爲新數$1-1/x$或$(x-1)/x$，其他仍舊爲x. 繼續依此運算，所得之數，祇有六個，卽x，$1/x$，$1-x$，$1/(1-x)$，$(x-1)/x$，$x/(x-1)$、今設$I(x)=x$，$A(x)=1/(1-x)$；$B(x)=(x-1)/x$，

$C(x)=1/x, D(x)=1-x, E(x)=x/(x-1)$.稍加考察,即見此等 I,A,B,C,D,E,恰與表中所示相合。

羣中所含不同運算之數,爲羣之級.例如上述之羣,即爲六級羣.若將前表細加考察,則見有較小之羣,存於其中,例如

$$
\begin{array}{c|c} & I \\ \hline I & I \end{array}\,,\qquad
\begin{array}{c|cc} & I & C \\ \hline I & I & C \\ C & C & I \end{array}\,,\qquad
\begin{array}{c|ccc} & I & A & B \\ \hline I & I & A & B \\ A & A & B & I \\ B & B & I & A \end{array}
$$

各爲一級羣,二級羣及三級羣是也.此等小羣對於大羣言,謂之子羣(sub-group).今1,2,3皆爲6之因數,由是得知羣論中之一重要定理,即:子群之級,恒爲其所屬羣之級之因數.

羣之正式定義,今當不難明言矣.設有一組及一規則於此,組中任何二事物A,B依序成爲一對,以(A,B)記之,此一對事物,依所設規則結合之,記其結果爲
$A\circ B$

公設1. (對於$\circ$之自滿性).設A,B屬於所設之組,則$A\circ B$亦然.

公設2. ($\circ$之締合性).若A,B,C屬於所設之組,則$(A\circ B)\circ C=A\circ(B\circ C)$.

公設3. (同運算之存在).組中有唯一之事物I,與組中每一事物A結合,恒有$A\circ I=I\circ A$之關係.

公設4. (反運算之存在). 若A爲組中之任一事物,則必有唯一之事物A'存在,適合 $A\circ A'=I$之關係.

此等公設,爲羣之正式定義,所設之組,對於規則$\circ$而言,謂之一羣.

若將羣之公設,與前述集之公設比較,則見其形式,殆爲一致,所不同者,特交換律之存廢問題耳.若規則$\circ$仍具有交換性,則所定之羣稱爲交換羣,或曰亞柏爾羣(Abelian group,從Abel也).

今請返觀第五章所述之一次變換

$$x = pX + qY,$$

$$y = rX + sY.$$

將此變換式中之係數,照樣寫如

$$\begin{Vmatrix} p, & q \\ r, & s \end{Vmatrix}$$

之形,如凱萊於1858年所著"Memoir on Matrices"中之所爲,則得一陣式,爲二級的(a matrix of order 2,因其列行爲數各二也).有以"此胡爲哉"爲問者,則告以就物理學家請敎後,再待本書之解答.今所欲言者,爲陣式之由來,乃1858年時凱萊所發明,爲純粹算學之用,八十八年之後,此種算法,竟可利用之以釋宇宙間最深奧之秘密,此不獨凱萊之所未夢及,即任何人亦意料所不到者矣.

凱萊之論陣式,係直接研究,與一次變換式無關.其最要者爲陣式之運算法,以專門術語言之,則謂之乘法.其規則爲

$$\begin{Vmatrix} p, & q \\ r, & s \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} P, & Q \\ R, & S \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} pP+qR, & pQ+qS \\ rP+sR, & rQ+sS \end{Vmatrix},$$

式中×號讀爲"乘",而等號右端之陣式,則謂之左端陣式施行×之運算所得之結果.但此種乘法,次序大有關係,例如

$$\begin{Vmatrix} 1, & 3 \\ 2, & 4 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 3, & 5 \\ 6, & 7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 21, & 26 \\ 30, & 38 \end{Vmatrix};$$

$$\begin{Vmatrix} 3, & 5 \\ 6, & 7 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 1, & 3 \\ 2, & 4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 13, & 29 \\ 20, & 46 \end{Vmatrix}.$$

故知陣式之乘法,不守交換律.

若將兩個一次變換,繼續施行,則所得一次變換之陣式,恰可由上法求之,推而至於高級的陣式亦然.由此可見羣與陣式間有密切的關係.陣式之理論,凱萊及其後繼者已發揮盡致,羣之理論,則尙待吾儕之努力,始可開發其中寶藏也.

陣式之爲物,乍見之似極無用,然算學家却瘁其心力以研究之,此種純粹算學

之神，促進算學之發展，在算史上若此之例，尙不多覯。實則陣式於算學上爲用尙不若於另一方面之爲顯著，下文當明言之。科學家及教育家有時主張算學不能離開實用而存在，故言算學必及工業及商業上之應用，或物理方理現今之情形。觀斯例後，當懔然於所見之非，而願算學之順自然而發展矣。爲實用而研究算學，決不能得上好的結果，而祈獨利益，每令人失望，此已於前言之，其實日常應用之算學，早已完成，且應用極其簡便。至若日新月異之科學，於近代生活上極爲重要者，其爲事並不簡單。今日之收穫，固皆前人之心血結晶，將來之發展，自必在乎今年之努力。算學家但就性之所近孳孳爲之，即是對於時代的貢獻，正不必問其有何實用也。

今請仍就陣式而言其在物理方面之功用。原子動力學(the mechanics of the atoms)爲二十世紀物理中重要的發明。當1926年時海森堡氏欲得一完善方法，以治斯學，細加研求，乃知陣式理論，正合所需，a 乘 b 之結果，不必與 b 乘 a 者相同。由此所謂新的力學及關於光帶與原子之新物理學，乃相繼而產生，其進步之速，誠足令人驚訝不已。

此後至1931年，外爾(Hermann Weyl)氏再將新物理學融會貫通，利用羣之理論，以解釋量子力學(quantum mechanics)。於是前此七十年間代數學者所苦心經營之學說，乃得充分利用。而三十年來所發明之高等解析，積分方程等等，亦均取用無遺焉。

論無限羣

今請就無限羣言之。此亦分爲二類。第一類中之事物，爲可以枚舉的(denumerable)，即可與1，2，3，……諸數以至無窮兩兩並列者。此種羣謂之離散羣(discrete infinite group)。其他一類中之事物，亦爲無窮多，但不可以枚舉，例如在一直線上之點，此種羣謂之連續羣(continuous infinite group)。

在初等幾何中，凡圖形均可不變其大小形狀而移動其位置，此種動法謂之剛體運動(rigid motion)。剛體運動在平面上所成之羣，顯然爲連續的，因吾人可將一圖形作無限小的運動(infinitesimal transformations)也。

又如一物體繞定軸而旋轉,其位置之變換,亦可爲無限小,故旋轉羣亦爲連續的.此等運動,吾人可視爲整個物體位置之變換,或認作物體各分子之分別變動,兩種看法,皆無不可.

讀者當憶及力學及算理物理學中之方程式,槪爲微分方程式.粗略言之,此等方程式所示,皆爲物體連續變化之速度,例如物體下降之速度,卽物體位置對於時間的變率是也.此種微分方程式之理論,範圍基廣,然自引入連續羣之理論,以助其研究後,斯學乃大有進展,例如高等力學中最重要之方程式,所謂罕彌勒登方程式者,自連續羣論之觀點察之,比以前更易於明瞭,連續羣論之效用,卽此可見其一斑矣.

自1873年而後,算學家對此等羣之研究,極感興趣,直至1894年卡乔(Elie Cartan)發表其大作,將重大問題,逐漸解決,始告一段落.此連續羣之論理,就其大部言之,幾全爲李氏(Sophus Lie)一人之功.自1915年相對通論行世,繼以1926年之量子力學,連續羣乃一躍而爲解釋宇宙秘密之最重要的工具.且由是而發生許多新的幾何學,此等幾何學雖由物理方面引起,然溯本尋源,連續羣論至少爲其功首之一.在此方面,卡乔氏爲首倡,且至今仍居領導地位云.

本節云云,又爲算學上重要進步之一端.最近七十年來,克萊因氏之理論,執幾何界之權盛垂數十年者,已漸感其不足.幾何學之發展,今更自由,不復受羣論之限制矣.

二十面體與羣

吾人於此雖不欲討論羣論中特殊之結果,然尙有一事可略加叙述,以終吾篇.此事之新奇,殊足令人驚詫,而其經過之悠久,乃幾及二千二百年.茲僅擇其要點言之.

昔者希臘幾何學家發見歐幾里得空間中,有正多面體凡五種,且爲數祗限於此,卽四面體,六面體,八面體,十二面體及二十面體是也.

第二要點,則距此時約2000年後.代數學者欲解一般五次方程式如

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$$

者，嘗試垂二百年，直至1826年亞柏爾氏及1831年伽羅華氏，始證明五次方程式之代數解法爲不可能。所謂代數解法，即將式中之x，表爲含有 a,b,c,d,e,f 等係數之式，而該式中所包含運算（即加減乘除及開方）之次數，須爲有限。伽羅華氏二十一歲時，與人決鬥而死，正當決鬥之日，伽氏寫出其算學上的大發明，亦即爲其絕筆，其中有關於一切代數方程式之大定理一條，將方程式之代數解法，化爲羣論中之一問題。此爲代數史中最重要之一頁，爲提起讀者興趣，俾自行查考起見，特將伽氏定理照錄如下：代數方程式之能否解出，視其羣之能否解出而定。欲了解此定理之證明，祇須有中學畢業程度卽可，由此定理，可斷定四次以上之一般方程，其代數解法爲不可能。

1858年愛爾彌(Hermite)氏曾解五次方程，但所用非代數解法，乃用橢模函數以表其未知數。克萊因氏又更進一步，證明愛氏之解法，與二十面體羣有關。所謂二十面體羣者，乃許多種變換所成之一羣，此等變換，施行於二十面體之上，令其頂點之地位變動，而整個二十面體所占之地位不動。法將該立體繞其任一對稱軸而旋轉，每繞一軸有五種旋轉，共計六十種，合成一羣。

二十面體之旋轉與五次方程之解法，本如風馬牛之不相及，今竟從羣之觀點，治爲一爐，具見抽象羣之概念之權威矣。 （第六章完，全書待續）

教科書難題解答

甲. 范氏高等代數學(Fine: College Algebra)

肇 父

42. 兩賭徒擲兩顆骰子爲戲,商定A在B投得7點以前投得6點則A勝,若B在A投得6點以前投得7點則B勝,A開始投後,交換投之,試比較其遇. (422面,第10題)

(解)當骰面爲1,5;2,4;3,3時卽投得6點,共有2×2+1=5法.

當骰面爲1,6;2,5;3,4時,卽投得7點,共有2×3=6法.

而兩個骰子所有同等可能機會之數目應爲6×6=36.

∴ A之適遇爲$\frac{5}{36}$;

B之適遇爲$\frac{6}{36}\times\frac{31}{36}=\frac{31}{216}$.

$\therefore A:B=\frac{5}{36}:\frac{31}{216}=\frac{30}{216}:\frac{31}{216}$

$=30:31$

43. 三賭徒A,B及C置4白球,8黑球於一袋中,商定誰先取得1白球者爲得勝.取球時按A,B,C之次序;若取後不准放回袋中,則各人之有希望適遇爲何?若准放回袋中,則其機遇爲何?(422面第11題)

(解)(甲)球取出不准放回袋中時:

第一次A取得白球之適遇爲$\frac{4}{12}$卽$\frac{1}{3}$.

A失敗後B取得之適遇爲$\frac{2}{3}\times\frac{4}{11}=\frac{8}{33}$.

A失敗B又失敗後C取得之適遇爲

$\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{4}{10}=\frac{28}{165}$.

第二次A取得白球之適遇爲$\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}$

$\times\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{56}{495}$

第二次A失敗後B取得之適遇爲$\frac{2}{3}\times$

$\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{7}{99}$.

第二次A,B失敗後C取得之適遇爲

$\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{4}{99}$.

第三次A取得白球之適遇爲$\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times$

$\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{99}$.

第三次A失敗後B取得白球之適遇爲

$\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}$

$=\frac{4}{495}$.

第三次A,B失敗後C取得白球之適遇

為 $\frac{2}{3}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{495}$.

故A之所有適遇為 $\frac{1}{3}+\frac{56}{495}+\frac{2}{99}=\frac{7}{15}$.

B之所有適遇為 $\frac{8}{33}+\frac{7}{99}+\frac{4}{495}=\frac{53}{165}$.

C之所有適遇為 $\frac{28}{165}+\frac{4}{99}+\frac{1}{465}=\frac{7}{33}$.

因之三人適遇之比為 $\frac{7}{15}:\frac{53}{165}:\frac{7}{33}$.

(乙)球取出仍准放回袋中時：

第一次A勝之適遇為 $\frac{4}{12}$ 即 $\frac{1}{3}$；A失敗後B勝之適遇為 $\frac{2}{3}\times\frac{4}{12}=\frac{2}{9}$ A,B均失敗後C勝之適遇為 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=4/27$.

三人依次取球，其後幾次之適遇亦均相同。

故其所有適遇之比為 $\frac{1}{3}:\frac{2}{9}:\frac{4}{27}$ 即 9:6:4，因之A之所有適遇為 $\frac{9}{19}$，B之所有適遇為 $\frac{6}{19}$，C之所有適遇為 $\frac{4}{19}$.

44. 設一人投兩顆骰子，第一次投得7點即得1元，第二次投得7點亦得1元，如此進行，直到投得7點為止，問其希望價值如何？(423面，18題)。

(解) 第一次投得7點之適遇為 $\frac{6}{36}$ 即 $\frac{1}{6}$，第二次投得7點之適遇為 $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$，第三次投得7點之適遇為 $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=(\frac{5}{6})^2\times\frac{1}{6}$，同理第四次投得7點之適遇為 $(\frac{5}{6})^3\times\frac{1}{6}$，以後依次可推.

故某人投得7點之總適遇為

$\frac{1}{6}+(\frac{5}{6})(\frac{1}{6})+(\frac{5}{6})^2(\frac{1}{6})+(\frac{5}{6})^3(\frac{1}{6})+\cdots\cdots$;

而其希望價值為

$$\$1\times\frac{1}{6}[1+\frac{5}{6}+(\frac{5}{6})^2+(\frac{5}{6})^3+\cdots]$$
$$=\$1\times\frac{1}{6}\left[\frac{1}{1-5/6}\right]$$
$$=\$1\times\frac{1}{6}\times\frac{6}{1}$$
$$=\$1.$$

45. 試求 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之一根等於他一根之倒數之條件.(435面，5題)

[解]設 $\alpha, 1/\alpha, \beta$ 為三根，則該方程式為 $(x-\alpha)(x-1/\alpha)(x-\beta)=0$,

即 $x^3-(\alpha+1/\alpha+\beta)x^2+[(\alpha+1/\alpha)\beta+1]x-\beta=0$.

$$\therefore\ -(\alpha+1/\alpha+\beta)=p\cdots\cdots(1),$$
$$(\alpha+1/\alpha)\beta+1=q\cdots\cdots(2),$$
$$-\beta=r\cdots\cdots(3).$$

將 $\beta=-r$ 代入(1)得

$$\alpha+1/\alpha=-p+r$$

再代入(2)，得

$$-r(-p+r)+1=q$$

即 $$r^2-pr+q-1=0$$

46. 試解方程式 $x^4-x^3-56x^2+36x+720=0$，已知其二根之比為2:3，而其餘二根之差為1.(435面，8題)

(解)設 $3\alpha, 2\alpha, \beta, \beta+1$ 為四根，則

$$3\alpha+2\alpha+\beta+\beta+1=1,$$

即 $$5\alpha+2\beta=0\cdots\cdots(1);$$

又 $6\alpha^2+3\alpha\beta+3\alpha+3\alpha\beta+2\alpha\beta+2\alpha+2\alpha\beta+\beta+\beta^2=-56$,

即 $$6\alpha^2+\beta^2+10\alpha\beta+5\alpha+\beta=-56\cdots\cdots(2).$$

由(1)得$\beta=-\frac{5}{2}\alpha$,代入(2),則

$$6\alpha^2+(-\tfrac{5}{2}\alpha)^2+10\alpha(-\tfrac{5}{2}\alpha)+5\alpha-\tfrac{5}{2}\alpha=-56,$$

即 $51\alpha^2-10\alpha-224=0$,

即 $(51\alpha-112)(\alpha+2)=0$

$\therefore\ \alpha=-2,\quad \beta=5,$

及 $\alpha=\frac{112}{51},\quad \beta=-\frac{280}{51}.$

故四根為$-6,-4,5,6$.

47. 設$x^3+px^2+qx+r=0$之諸根為α,β,γ.試求一新方程式,其根為

(1) $\frac{\alpha\beta}{\gamma},\ \frac{\beta\gamma}{\alpha},\ \frac{\gamma\alpha}{\beta}$. (2) $\frac{\alpha}{\beta+\gamma},\ \frac{\beta}{\gamma+\alpha},\ \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$.

[解](1)因$\frac{\alpha\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\beta\gamma}{\gamma^2}=-\frac{r}{\gamma^2}$,

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha}=-\frac{r}{\alpha^2},\quad \frac{\gamma\alpha}{\beta}=-\frac{r}{\beta^2}.$$

令 $y=-\frac{r}{x^2}$ 則 $x^2=-\frac{r}{y}$,

$$\therefore\ x=\pm\sqrt{\frac{r}{y}}\cdot i.$$

代入原方程式,即得

$$\left(\sqrt{\frac{r}{y}}\cdot i\right)^3+p\left(\sqrt{\frac{r}{y}}\cdot i\right)^2+q\left(\sqrt{\frac{r}{y}}\cdot i\right)+r=0,$$

$$-\frac{r}{y}\sqrt{\frac{r}{y}}\cdot i-p\frac{r}{y}+q\sqrt{\frac{r}{y}}\cdot i+r=0,$$

$$r-p\frac{r}{y}=\sqrt{\frac{r}{y}}\cdot i\left(\frac{r}{y}-q\right),$$

$$r^2(1-p/y)^2=-r/y(r/y-q)^2,$$

$$r^2-2\frac{pr^2}{y}+\frac{r^2p^2}{y^2}=-\frac{1}{y}\left(\frac{r^3}{y^2}-2\frac{rq}{y^2}+rq^2\right)=-\frac{r^3}{y^3}+2\frac{r^2q}{y^2}-\frac{rq^2}{y}.$$

$$r^2y^3-2pr^2y^2+r^2p^2y=-r^3+2r^2qy-rq^2y^2$$

$$r^2y^3-r(2rp-q^2)y^2+r^2(p^2-2q)y\ r+r^3=0$$

$\therefore\ ry^3+(q^2-2rp)y^2+r(p^2-2q)y+r^2=0.$

(2) 因$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}$之倒數為$\frac{\beta+\gamma}{\alpha}$,

$\frac{\beta}{\alpha+\gamma}$之倒數為$\frac{\gamma+\alpha}{\beta}$,

$\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$之倒數為$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$.

則$\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+1-1=\frac{\beta+\gamma+\alpha}{\alpha}-1=-\frac{p}{\alpha}-1$,

及$\frac{\gamma+\alpha}{\beta}=-\frac{p}{\beta}-1,\ \frac{\alpha+\beta}{\gamma}=-\frac{p}{\gamma}-1.$

令 $y=-\frac{p}{x}-1$ 則 $xy+x=-p$,

即 $x=-\frac{p}{y+1}$.

代入原方程式,即得

$$\left(-\frac{p}{y+1}\right)^3+p\left(-\frac{p}{y+1}\right)^2+q\left(-\frac{p}{y+1}\right)+r=0,$$

$$-p^3+p^3(y+1)-pq(y+1)^2+r(y+1)^3=0,$$

$$ry^3+3ry^2+3ry+r-pqy^2-2pqy-pq+p^3y=0.$$

$$\therefore ry^3+(3r-pq)y^2+(3r-2pq+p^3)y+r-pq=0$$

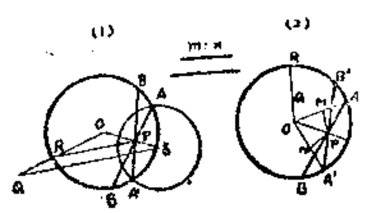
變上方程式之根之倒數作方程式,得

$$(r-pq)y^3+(3r-2pq+p^3)y^2+(3r-pq)yr+=0.$$

乙．吳在淵編：　高級幾何學

迺　　樾

30．過所設圓周內一定點，引一弦，分其二部分之比如所設比．(P.234,Ex.20)



解：m:n為定比，P為圓O內一定點，求過P引弦AB，令AP:BP＝m:n．

作法(1)：過圓心O任引半徑OR，並延長至Q，令OR:RQ＝n:m．

聯OP，PR．作QS∥PR，交OP之延線於S．以S為心AS＝RQ為半徑畫圓，交定圓周於A及A'．

則過A及A'所引定圓之二弦APB，及A'PB'均合於所求．

證：聯OB．在△OBP，SAP中：

∵　OP:PQ＝OR:RQ＝n:m，

　　OB:SA＝OR:RQ＝n:m，

∴　OP:PQ＝OB:SA．

又∵　∠OPB＝∠SPA，且∠OBP，∠SAP俱為銳角，由是知

　　△OBP∽△SAP，

而　AP:BP＝PQ:OP＝m:n．

同樣可證A'P:B'P＝m:n．

作法(2)：內分定圓半徑OR於Q，令QR:OQ＝m:n．聯OP，作△OMP，令OM＝OQ，PM＝QR．延長OM，交定圓周於A．過A，P引弦APB．

次，關於OP取APB之對稱圖A'PB'，則APB及A'PB'均合於所求．

證：聯OB，∵AM＝QR＝PM，

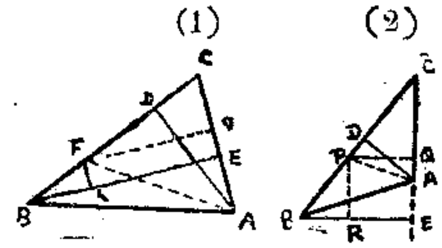
又 OA＝OB，∴∠APM＝∠ABO；

而　PM∥OB，△APM∽△ABO．

由是　AP:BP＝AM:OM＝m:n．

31．三角形之二邊不相等，則大邊與其相對之高之和比小邊與其相對之高之和大．(P.235．Ex.11)

(1)　　(2)



解：在△ABC中，已知BC＞AC，AD⊥BC，BE⊥AC．

求證　AD＋BC＞BE＋AC．

證：∵ △BEC∽△ADC，

∴ BC:AC=BE:AD.

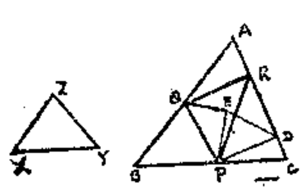
既BC>AC,BE,且AC>AD,是BC為比例式中之最大項,故

AD+BC>BE+AC.

本題亦可不用比例定理另證之如下：

於邊BC上取P點,令CP=AC.過P引PQ⊥AC,PR⊥BE.則因△PQC≡△ADC,知PQ=AD;因PQER為一矩形,知PQ=RE;又由△BRP中,知BP>BR;故得BP+PC+AD>BR+AC+RE.即BC+AD>AC+BE. Q.E.D.

32. 在一所設三角形內作一內接三角形,令與他一所設三角形相似,而其一頂點為原三角形一邊上之所設點.(Ex.12)



解：△ABC及△XYZ均為一定,求過BC上P點作△PQR∽△XYZ.

作法：自P引PD⊥AC,定D點；

作△PDE∽△XYZ,定E點；

過E引QE⊥PE,交AB於Q.聯PQ,作∠QPR=∠EPD,引直線PR,交AC於R;則△PQR即為所求.

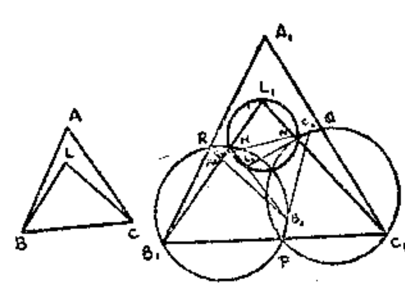
證：∵∠QPR=∠EPD,

∴△PDR∽△PEQ,

而 PR:PQ=PD:PE,

由是△PQR∽△PDE∽△XYZ.

33. 一三角形與一所設三角形相似,而其三邊恆過三定點；則此形內任意一點之軌跡為一圓周.(P.235.Ex.16)



解：動三角形ABC各角之大小一定,其各邊或延長線恆各過P,Q,R三定點,求證形內一點L之軌跡為一圓周.

證：設$A_1B_1C_1$為此動三角形之任一位置,L_1為合於所設條件之一點.

因P,Q,R為定點,$\angle B_1$,$\angle C_1$為定角,則⊙PB_1R及⊙PC_1Q均為定圓.

聯B_1L_1,C_1L_1與此二圓周各交於M,N.

既$\angle A_1B_1L_1$,$\angle A_1C_1L_1$各為定角.故M, N 均爲定點.

而L 在以MN爲弦,含弓形角ML_1N之$\odot ML_1N$周上.

次,於$\odot ML_1N$周上任取一點L_2.

聯ML_2, NL_2,與$\odot PB_1R$及$\odot PC_1Q$各交於B_2及C_2.聯B_2R, C_2Q,二者交於A_2.

$\because \angle B_2L_2C_2 = \angle B_1L_1C_1$,

$\angle A_2B_2L_2 = \angle MB_2R = \angle A_1B_1L_1$,

$\angle A_2C_2L_2 = \angle NC_2Q = \angle A_1C_1L_1$,

$\therefore \angle B_2A_2C_2 = \angle B_1A_1C_1$;而$A_1RA_2Q$四點同在一圓周上.

又聯PC_2, PB_2.若L_2與L_1在MN兩傍,

$\because \angle B_1PB_2 = \angle A_1RA_2$

$= \angle C_1QC_2 = \angle B_1PC_2$,

或L_2與L_1在MN同傍,

$\because$ $\angle B_1PB_2 = \angle C_1PC_2$,而P, B_2, C_2三點均應在一直線上.

即L_2爲合於所設條件之點.

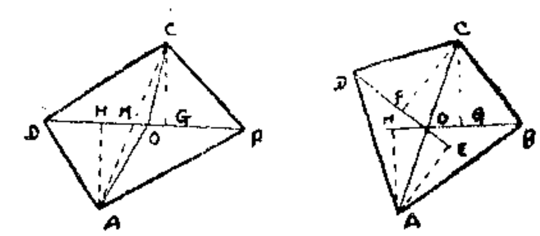
由是知所求軌跡爲$\odot ML_1N$之周.

34．在四邊形ABCD內求一點O,令OA,OB,OC,OD分此四邊形爲四等分,(P.293.Ex.5.)

解析:設O即爲所求之一點,延長BO.自A,C引AG, CH ⊥BO,

$\because$ $\triangle AOB = \triangle BOC$, $\therefore AG \perp\!\!\perp CH$.

(1)　　　(1')



聯對角線AC,知HG,AC必互相等分.

而OB必過AC之中點M.同理,由$\triangle AOD = \triangle COD$,知OD亦過M點.

故(I)若O,M二點不相重合:

則OB,OD成一直綫,即直綫BOD必過AC之中點;

或(I')若O,M二點恰相重合:

則O點即爲AC之中點.

同理,由$\triangle AOB = \triangle AOD$,

及 $\triangle BOC = \triangle COD$,

知(II)直線AOC必過BD之中點;

或(II')O爲BD之中點.

題設此四三角形之面積互相等,故所求之點,必同時滿足(I),(II)之條件可知.

由是推得本題之解法如下:

解法: (1)原四邊形二對角綫互等分時:其交點即爲所求之點;此際有一解;

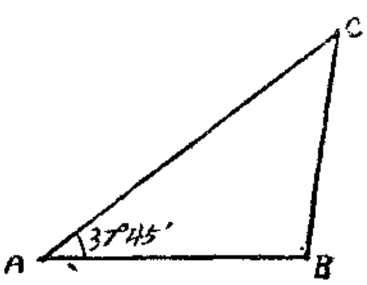
(2)一對角線過他一對角線中點時:第一對角線中點即所求之點,仍有一解;

(3)二對角綫兩不等分時;此際無解.

丙.趙修乾編:新學制高級中學教科書三角術

蕭 而 廣

32．遠方有二船各發一炮，某人測見光至聞聲之時間得5秒與7秒，又二船與觀測間作37°45'之角;假定音波每秒333公尺,求二船之距離.(第八章習題十七,16題.)



[解] 設A爲觀測者之位置,B,C爲二船發砲時之所在地，AB=333公尺×5=1665公尺,AC=333公尺×7=2331公尺.

今因 $-\log(b+c)=-\log 3996 \fallingdotseq \overline{4}\cdot 39837$,

$$\log(b+c)=\log 666 \fallingdotseq 2\cdot 82341.$$

$$\log\tan\frac{\angle B+\angle C}{2}=\log\tan 71^\circ 7\cdot 5' \fallingdotseq 10\cdot 46615,$$

故得 $\log\tan\frac{\angle B-\angle C}{2} \fallingdotseq 9\cdot 687955,$

而 $\frac{\angle B-\angle C}{2} \fallingdotseq 25^\circ 59' 18''.$

由 $\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=71^\circ 7' 30'',$

$\frac{1}{2}(\angle B-\angle C) \fallingdotseq 25^\circ 59' 18'',$

故 $\angle C \fallingdotseq 45^\circ 8' 12''.$

次因 $\log c=\log 1665 \fallingdotseq 3\cdot 22141,$

$\log\sin A=\log\sin 37^\circ 45' \fallingdotseq 9\cdot 78691,$

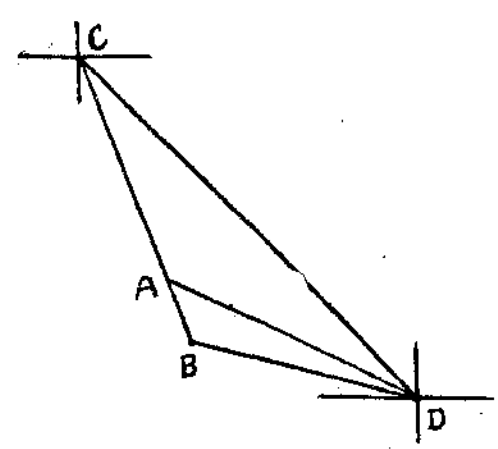
$-\log\sin C \fallingdotseq -9\cdot 850516,$

故得 $\log BC \fallingdotseq 3\cdot 157804,$

而 $BC \fallingdotseq 1438\cdot 15.$

故二船之距離爲1438·15公尺.

33．某人在船中,見南22°30'東有二島適在一直線,待船向南東前進8公里後,見一島在北65°13'西,一島在北76°46'西,求兩島之距離.(同習題,17題.)



[解] 設A,B爲二島,C及D爲某船先後之位置;

觀測者在C時,CD爲南東向,CAB爲南22°30'東，$\therefore \angle BCD=45^\circ-22^\circ 30'=22^\circ 30'$.

觀測者在D時,CD爲北西向,DA爲北65°13'西,DB爲北76°46'西,

$\therefore \angle ADB = 76°46' - 65°13' = 11°33'$,

$\angle ADC = 65°13' - 45° = 20°13'$.

但以CD爲8公里,

$$\therefore\quad AD = \frac{CD}{\sin CAD} \times \sin ACD$$

$$= \frac{8}{\sin\{180° - (22°30' + 20°13')\}}$$

$$\times \sin BCD = \frac{8}{\sin 42°43'} \times \sin 22°30'$$

$$= 8 \times \frac{\sin 22°30'}{\sin 42°43'}.$$

由是得 $AB = \dfrac{AD}{\sin ABD} \times \sin ADB$

$$= AD \times \frac{\sin 11°33'}{\sin\{180° - (42°43' + 11°33')\}}$$

$$= 8 \times \frac{\sin 22°30'}{\sin 42°43'} \times \frac{\sin 11°33'}{\sin 54°16'},$$

$\log AB = \log 8 + \log\sin 22°30' + \log\sin 11°33'$

$$- \log\sin 42°43' - \log\sin 54°16'$$

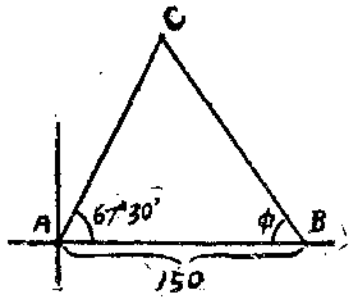
$$= 0\cdot 90309 + 9\cdot 58284 + 9\cdot 30151$$

$$- 9\cdot 83147 - 9\cdot 90942$$

$$= 0\cdot 04655 = \log 1\cdot 1131.$$

故知兩島間之距離約爲1·11公里.

34. 一船以每時36里之速度開向北北東; 又一船在其東150里, 以每時45里之速度同時直往追之; 問此船當取何針路, 幾時追及?(同習題, 18題.)



[略解] 設A,B爲甲,乙兩船所在之位置, AC之向爲北北東, 即 $\angle BAC = 67°30'$, $\angle ABC$爲ϕ, 即乙船應取之方向, x爲所求之時間.

於是 $AB = 150$里, $AC = 36x$里, $BC = 45x$里.

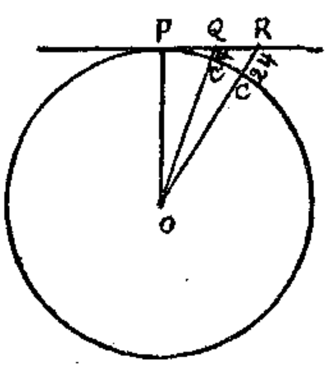
由正弦公式得 $\dfrac{\sin\phi}{\sin 67°30'} = \dfrac{36x}{45x} = \dfrac{36}{45}$,

故$\sin\phi$可求, 即ϕ已知也.

ϕ既求出, 是$\triangle ABC$已知其兩角, $\angle C$可求.

再由正弦之理x即易知也.

35. 船之前方有一燈台; 其始因沒於水平線下, 須登船桅之頂, 乃可望見; 待船前進45分鐘後, 則在艙面亦得見之. 假設地爲圓形, 其半徑6368公里, 桅頂與艙面各比海面高24公尺與4公尺; 問此船之速度如何?(同習題, 19題.)



[略解] 設P爲燈塔C, C'爲船先後之位置, R爲桅頂, Q爲艙面;

於是 $OP = 6368$公里, $OC = 6368$公里24公尺,

OC'＝6368公里4公尺.

先由直角三角形QPO,因已知其斜邊及一般OP,

故∠QOP可求.

依同理,由直角三角形RPO,可求得∠ROP.

故∠ROQ＝∠ROP－∠QOP亦可求.

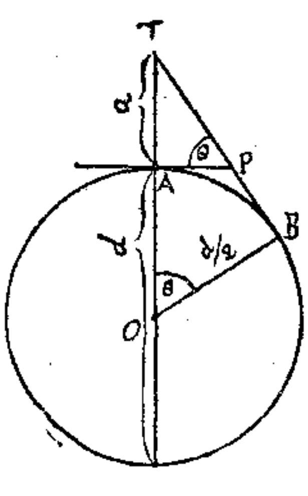
∠ROQ既經求得,與此角所對之弧CC'即易知.

CC'即得,則以船行之時間45分除之,故船行度速不難察知也.

36. 登海拔a尺之高山,俯視海天相連之處,知視線與水平面成θ角,然則地直徑如下式;試證之:

$$d=\frac{2a\cos\theta}{1-\cos\theta}\text{尺}.$$

(同習題,20題.)



[證] 設T爲山頂,A爲山麓,AP爲A處之水平面,TB爲自T望瞭海天相連處之視綫,∠TPA爲θ,

於是因AP,TB均與圓O相切,則∠PAO與∠PBO均爲直角,

故 ∠AOB＝∠TPA＝θ.

今由直角三角形TOB,知

$$\frac{\frac{d}{2}}{\frac{d}{2}+a}=\cos\theta,$$

即 $d=(d+2a)\cos\theta$,

$$\therefore\quad d=\frac{2a\cos\theta}{1-\cos\theta}.$$

37. 同一之角以級,度,弧度表之,則各爲g,d,r;試証$\pi(g-d)=20r$.

(第九章習題十八題16題.)

[証] 因由 $200:g=\pi:r$,

得 $g=200r/\pi$.

次由 $180:d=\pi:r$,

得 $d=180r/\pi$.

故 $\pi(g-d)=\pi\left(\frac{200r}{\pi}-\frac{180r}{\pi}\right)$

$=20r.$

[注意] g,d,π 只代數字不含單位.

38. 對於任意之θ角,試證

$\sin(\theta-R)=-\cos\theta$,

$\cos(\theta-3R)=-\sin\theta$,

(第十章習題十九,22題.)

[証] 本章諸公式易故

$$\sin(\theta-R)=\sin\left\{(\theta-R)+4R\right\}$$

$$=\sin(3R+\theta)$$

$$=-\cos\theta.$$

$$\cos(\theta-3R)=\cos\left\{(\theta-3R)+4R\right\}$$

$$=\cos(R+\theta)$$

$$=-\sin\theta.$$

丁· 斯盖倪三氏新解析幾何學

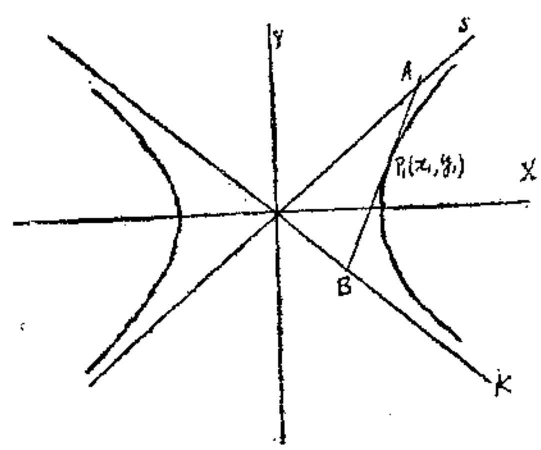
川　島

29. 雙曲線之切線之切點爲此切線介於漸近綫間之綫分之中點．試用解析法證之．(146面習題(1))

釋義：設 AB 爲雙曲線

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \qquad (1)$$

之一切綫，過其漸近綫於A，B；$P_1(x_1,y_1)$爲其切點，則吾人所應證明者乃：P_1爲AB 之中點．



證：雙曲線(1)之漸近綫爲

$$OK: \quad bx+ay=0, \qquad (2)$$

$$OS: \quad bx-ay=0, \qquad (3)$$

其切綫AB之方程式則爲

$$b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2. \qquad (4)$$

由(2)，$y=-\dfrac{b}{a}x.$

代入(4)，$b^2x_1x+a^2\dfrac{b}{a}y_1x=a^2b^2.$

$$\therefore \quad x=\frac{a^2b^2}{b^2x_1+aby_1}=\frac{a^2b}{bx_1+ay_1};$$

$$y=-\frac{ab^2}{bx_1+ay_1},$$

是乃 B 之坐標．

由(3)，$y=\dfrac{b}{a}x.$

代入(4)，$b^2x_1x-aby_1x=a^2b^2.$

$$\therefore \quad x=\frac{a^2b^2}{b^2x_1-aby_1}=\frac{a^2b}{bx_1-ay_1};$$

$$y=\frac{ab^2}{bx_1-ay_1},$$

是乃 A 之坐標．

設 $P_2(x_2,y_2)$爲AB之中點，則得：

$$x_2=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2b}{bx_1-ay_1}+\frac{a^2b}{bx_1+ay_1}\right)$$

$$=\frac{a^2b}{2}\;\frac{2bx_1}{b^2x_1^2-a^2y_1^2}$$

$$=\frac{a^2b^2x_1}{a^2b^2}$$

$$=x_1;$$

$$y_2=\frac{1}{2}\left(\frac{-ab^2}{bx_1+ay_1}+\frac{ab^2}{bx_1-ay_1}\right)$$

$$=\frac{ab^2}{2}\;\frac{2ay_1}{b^2x_1-a^2y_1^2}$$

$$=\frac{a^2b^2y_1}{a^2b^2}$$

$$=y_1.$$

是故$P_1(x_1,y_1)$與$P_2(x_2,y_2)$相同，而爲 AB 之中點．吾人之證明遂告完成．

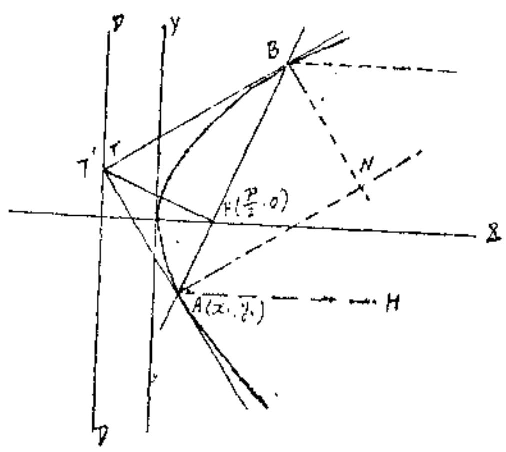
30. 試証：(I)與拋物綫之焦點弦垂直於焦點之垂線必與過此弦兩端之切線同交於準線上，且(Ⅱ)是二切線互相垂直．(146面習題(2))

釋義：設 AB 爲拋物綫

$$y^2=2px \qquad (1)$$

之焦點弦；AT',BT 各爲過A,B之切綫，且分別交準綫於T',T.所證明者乃：

（I）FT⊥AB,FT'⊥AE 而 T 與 T' 相合；及（II）TA⊥TB.



證：（I）AT之方程式爲

$$y_1y=p(x+x_1) \qquad (2)$$

DD'之方程式爲 $x=-\frac{p}{2}$. (3)

由(2)及(3),得T之坐標爲 $\left(-\frac{p}{2},\frac{2px_1-p^2}{2y_1}\right)$.故AB之斜度爲 $m_1=\frac{2y_1}{2x_1-p}$, FT之斜度爲 $m_2=-\frac{2x_1-p}{2y_1}$. 由是，$m_1=-\frac{1}{m_2}$.

∴ FT⊥AB.

同理， FT'⊥AB.

但T,T'皆在DD'上，故T,T'應重合.

（II）作AH,BK平行OX；AN,BN垂直BT,則∠ABN＝∠KBN＝½∠KBA,

∠NAB＝∠NAH＝½∠HAB,

∴ ∠ABN＋∠NAB＝½(∠KBA＋∠HAB)＝rt.∠.

∴ ∠BNA 爲直角.

又因∠NBT及∠NAT皆直角，∴∠ATB亦爲一直角.

∴ AT⊥BT.

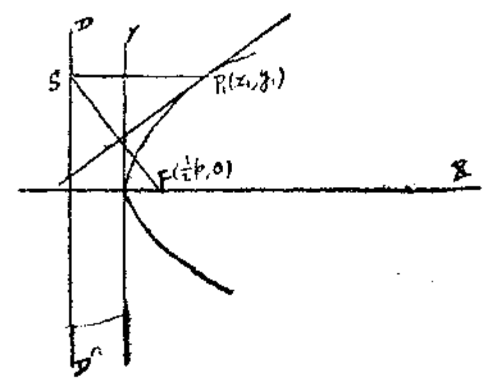
31．自焦點至拋物線之切綫之垂綫必被過其切點且平行於此拋物線之軸之直線同交於準線上.（146面習題(3)）

釋義：設與拋物綫爲

$$y^2=2px, \qquad (1)$$

其切線P_1T爲：$y_1y=px-px_1$, (2)

且P_1S∥OX.求證SF⊥P_1T,



證：SP之方程式爲 $y=y_1$, (3)

DD'之方程式爲 $x=-\frac{1}{2}p$. (4)

由(3)及(4),得S之坐標：$(-\frac{1}{2}p,y_1)$.

∴SF之斜度爲 $m_1=\frac{y_1}{-p/2-p/2}=-\frac{y_1}{p}$,

P_1T之斜度爲$m_2=\frac{p}{y_1}$.

故 $m_1=-\frac{1}{m_2}$.

卽 SF⊥P_1T.

32．拋物線之切線與準線及通徑之延長線之交點距焦點等遠.（146面習題4）

釋義：設與拋物線爲

$$y^2=2px, \tag{1}$$

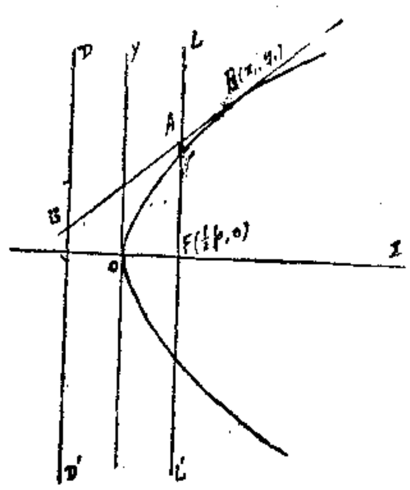
則其 $P_1(x_1,y_1)$ 之切線 AP_1 爲：

$$y_1y=px+px_1, \tag{2}$$

其準綫 DD' 爲：　$x=-\frac{1}{2}p$，　(3)

其通徑 LL' 爲：　$x=\frac{1}{2}p$，　(4)

而吾人所求證者乃：$FA=FB$.



證：由(2)及(4)，　$x=\frac{1}{2}p$，

$$y=\frac{px+px_1}{y_1}=\frac{p^2/2+px_1}{y_1},$$

是乃A之坐標．由(2)及(3)，得B之坐標：

$$x=-\tfrac{1}{2}p,$$

$$y=\frac{px+px_1}{y_1}=\frac{-\frac{1}{2}p+px_1}{y_1}.$$

由是，$FB=\sqrt{\left[\left(\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}p\right)^2+\left(0-\frac{-\frac{1}{2}p+px_1}{y_1}\right)^2\right]}$

$$=\sqrt{p^2+\left(\frac{p^2-2px_1}{2y_1}\right)^2}$$

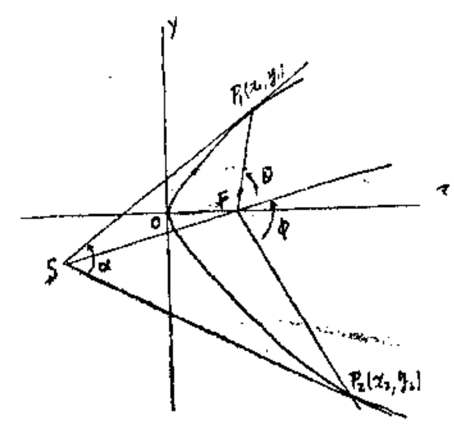
$$=\frac{p}{2y_1}(p+2x).$$

今FB等於A之縱坐標即 $\frac{\frac{1}{2}p+px_1}{y_1}$

或　$\frac{p}{2y_1}(p+2x)$.　$\therefore$ $FA=FB$.

*33．拋物綫二切線之交點與焦點之聯結線必等分此二切線所夾之角．

(146面習題5)



證：就圖言，雙曲綫

$$y^2=2px \tag{1}$$

之切線 SP_1 爲：　$y_1y=px+px_1$，　(2)

SP_2 爲：　$y_2y=px+px_2$；　(3)

而求証者乃：$\theta=\Phi$.

今由(2)及(3)，得 S 之坐標爲

$$\left(\frac{x_1y_2-y_1x_2}{y_1-y_2},\ \frac{p(x_1-x_2)}{y_1-y_2}\right).$$

$\therefore$ SF 之斜度爲

$$m_1=\frac{p(x_1-x_2)}{y_1-y_2}\Big/\left(\frac{x_1y_2-y_1x_2}{y_1-y_2}-\frac{p}{2}\right)$$

$$=\frac{p(y_1+y_2)}{y_1y_2-p^2},$$

P_1F 之斜度爲：$m_2=\frac{y_1}{x_1-\frac{p}{2}}=\frac{2py_1}{y_1^2-p^2}$，

且 P_2F 之斜度爲 $m_3=\frac{y_2}{x_2-\frac{p}{2}}=\frac{2py_2}{y_2^2-p}$.

$$\therefore\ \tan\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}=\frac{p(y_2-y_1)}{y_1y_2+p^2};$$

$$\tan(180^\circ-\Phi)=\frac{m_3-m_1}{1+m_1m_3}=\frac{p(y_1-y_2)}{y_1y_2+p^2}.$$

由是　$\tan\theta=\tan\Phi$，

$\therefore$　　$\theta=\Phi$.