中國科學社叢書

中國數學大綱

上 冊

李 儼 著

商務印書館發行

中國科學社叢書

中　國　數　學　大　綱

上　冊

李　儼　著

商務印書館發行

中國科學社叢書

中國數學大綱

上　冊

此書有著作權翻印必究

中華民國二十年六月初版

每册定價大洋壹元伍角

外埠酌加運費匯費

著作者　李　儼

上海寶山路五〇一號

發行人　王　雲　五

上海寶山路

印刷所　商務印書館

上海及各埠

發行所　商務印書館

The Science Society of China Series

AN OUTLINE OF CHINESE MATHEMATICS

Vol. I

BY LI YEN

PUBLISHED BY Y. W. WONG

1st ed., June, 1931

Price: $1.50, postage extra

THE COMMERCIAL PRESS, LTD., SHANGHAI

七八二白

中國數學大綱

敘　例

吾國向無數學專史，各家所編疇人傳記，每失之繁重，而收集史料，亦多脫略。吾國算書現存者數雖不少，而聚集之爲難，算式之歧異，學者欲研國算，往往無從入手。儼嘗有志撰述中國算史，十餘年來，收聚史材，大略粗備。爰先成此編，俾世之讀中算者，可略識其源流派別。

凡引用原文用『……』號，原文中小註用〔……〕號，補註用（……）號。

此書上册初稿曾經張崟年，錢寶琮，曾遠榮諸君詳細校閱，特致謝意。尙望海內通人，訂其缺譌，則幸甚矣。

中華民國十七年二月二日李儼記於靈寶。

中國數學大綱

上　册

目　錄

中國數學大綱

上　冊

第一編　中國上古數學

第一章　中國數學之分期

中國數學盛衰之大勢,可約分爲五期:一曰上古期,自黃帝至周,秦,約當公元前二七〇〇年,迄公元前二〇〇年;二曰中古期,自漢至隋,約當公元前二〇〇年,迄公元後六〇〇年;三曰近古期,自唐至宋,元,約當公元後六〇〇年,迄一三六七年;四曰近世期,自明至清初,約當公元後一三六七年,迄一七五〇年;五曰最近世期,自淸中葉以後,約當公元後一七五〇年,迄一九〇〇年。

第二章 太古之數學

太古學跡,窵遠難稽。西人論此者,以爲石器時代之末期,卽公元前一萬七千年,華人已具天文知識。❶ 吾國古物學未盡發達,史前事實,尙有待於證明。而雲瓦,結網,畫卦,幷具算數觀念。至數學之應用,必遠在伏羲以前。易繫辭云:『上古結繩而治,後世聖人易之以書契。』老子,莊子亦言結繩。漢班固漢書,於律曆志稱:『自伏羲畫八卦,由數起。至黃帝,堯,舜而大備。三代稽古,法度章焉。』太古數學之可知者,如是而已。

❶ G. Schlegel: Uranographie Chinoise, 2 vols, II, 796 (Leyden, 1875)

第三章　黃帝堯舜時代之數學

班固以為算數之事,大備於黃帝,堯,舜。❶ 司馬遷史記稱:『黃帝考定星曆,建立五行,起消息,正閏餘。』❷ 是為曆算學之鼻祖,後此傳說,如:

唐司馬貞史記索隱引世本及律曆志,稱:『黃帝使羲和占日,常儀占月,臾區占星氣,伶倫造律呂,大橈作甲子,隸首作算數。』❸

唐釋法琳辨正論注一,稱:『隸首造算數。』

宋范曄後漢書律曆志,稱:『隸首作數。』

梁劉昭後漢書補註引博物記曰:『隸首,黃帝之臣。一說,隸首善算者也。』

徐岳數術記遺謂:『隸首注術,乃有多種。』又謂:『黃帝為法,數有十等,及其用也,乃有三焉。』

故『世本作篇,幷言覩造。羲和,常儀之倫,乃占天之元始,算學之厥初也。』❹

共和以前紀年,各書互異。據皇極經世及通鑑輯覽幷稱黃帝紀元,在公元前二六九七年。是中國算數在公元前二六九七年,已經成立。

堯,舜(公元前2357－2204年)時代天算發展,事具尚書。

❶ 後漢班固前漢書卷二二上,律曆志第一上。

❷ 漢司馬遷史記卷二六,曆書第四。

❸ 詳書,唐司馬貞索隱,唐房玄齡,晉書卷一七,志第七,律歷中。

❹ 清阮元疇人傳卷第一引。

第四章　周秦之數學

周代教育制度,漸臻完備,以算數爲必修學科。周官保氏『教國子以六藝:一曰禮,二曰樂,三曰射,四曰御,五曰書,六曰數。』內則云:『六年教之數與方名。十年出就外傅,居宿於外,學書計。』此種教授算數之制,至漢尚沿用之。前漢書食貨志,稱:『八歲入小學,學六甲,五方,書計之事。』是也。

周髀算經記爲周公,商高問答之辭,宋書云:『蓋天之術,云出周公旦,訪之殷商,蓋假託之說也。其書號曰周髀,髀者表也,周天之數也。』❶

漢鄭玄(康成)釋周官保氏數稱:『九數:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今有重差,夕桀,句股。』唐賈公彥疏鄭註云:『方田以下,皆依九章算術而言。今有重差,夕桀,句股也者,此漢法增之。』後人以爲九數即九章算術,實則西漢典籍,尚未提及九章算術。其方田,衰分(即差分),商功,均輸各章,并著漢法,是九章算術,亦非周代作品也。

周秦之際爲哲學思想發達時期。與此相伴而生者,則有數學,其間著作如墨子,莊子,呂氏春秋,管子,幷雜言算數。

❶ 梁沈約宋書卷二三,志第一三,天文一。

第五章　九九

古代之有九九,事當在周髀算經及九章算術前。管子輕重戊篇曰:『宓戲作九九之數。』❶ 韓詩外傳曰:『齊桓公設庭燎,東野人有以九九見者。』❷ 至周髀算經乃稱:『數之法出於圓方。圓出於方。方出於矩。矩出於九九八十一。』趙君卿注曰:『九九乘除之原也。』魏劉徽九章注曰:『包羲始畫八卦,作九九之術。』蓋并以乘法表之『九九八十一』至『一一如一』為數之始也。

其應用則古代『律數:九九八十一以為宮;三分去一,五十四以為徵;三分益一,七十二以為商;三分去一,四十八以為羽;三分益一,六十四以為角。』❸ 而淮南子,唐司馬貞史記索隱,唐張守節史記正義,并參用九九乘法表,以為計算。❹

❶ 唐顏師古曰:宓讀與伏同。

❷ 戰國策同。

❸ 史記卷二五,律書第三。

❹ 淮南子卷三,卷一二引:二八十六;三四十二,三七二十一,三九二十七;四四十六;五八四十,五九四十五;六六三十六。索隱引:二九十八;五六三十;六六三十六。正義引:二七十四,二八十六;七七四十九;八八六十四。

第六章　周髀算經

上古算書以周髀爲最古。宋鮑澣之周髀算經跋（公元 1213 年）謂:『周髀算經二卷,古蓋天之學也。隋書經籍志有周髀一卷,趙嬰註;周髀一卷,甄鸞重述。❶而唐之藝文志,天文類有趙嬰註周髀一卷,甄鸞註周髀一卷;其曆算類仍有李淳風注周髀算經一卷,本此一書耳。』❷鮑氏又云:『崇文總目與夫中興館閣目,皆有周髀算經二卷,云:趙君卿注,甄鸞重述,李淳風等注釋。趙君卿名爽,君卿其字也。……趙嬰,趙爽止是一人,豈其字文相類,轉寫之誤耶。』❸宋史藝文志題:『趙君卿周髀算經二卷。李籍周髀算經音義一卷。』❹直齋書錄解題謂:『周髀算經,……崇文總目,中興館目皆莫詳時代。』❺明代刊本有周髀算經上下卷,題:漢趙君卿撰,北周漢中郡守,前司隸臣甄鸞重述,唐朝議大夫,行太史令,上輕車都尉臣李淳風等奉勑注釋;周髀音義一卷,假承務郎祕書省鈎考算經文字臣李籍撰。❻此周髀流傳之大概也。

周髀言蓋天之學。而蓋天之名,最初見於揚雄法言重黎篇。且晉志稱:漢靈帝時蔡邕於朔方上書言『周髀術文具存。』❼周髀本文又引呂氏春秋,倘此非後人羼入,則周髀之成書,至早不能在戰國前。清姚際恆且以『漢志無。隋志始有。周髀之義未詳。』認爲僞書。❽其謂爲周公所作,則

久已不成定論矣。

德人俾厄內替克(Biernatzki)因周髀算經卷上周公,商高問答之語,歸納爲下之八事:(一)割圜說引源;(二)平面量法;(三)正三角形有 3:4:5 之比,卽 $3^2+4^2=5^2$;(四)二正三角形爲矩形;(五)全量爲各部之和;(六)句羃股羃爲弦羃;(七)三角量法應用於量地;(八)圓爲正三角形所轉成。[9] 周髀算經又屢言等差級數,如七衡之直徑,以 2×(19833里 200步)遞進,二十四氣以9寸9分$\frac{1}{6}$分遞爲加減是也。[10]

① 唐魏徵,隋書卷三四,志第二九,經籍三,又有:周髀圖一卷。

② 按鮑氏乃據新唐書卷五九。若舊唐書卷四七,經籍志第二七,經籍下,則稱:周髀一卷趙嬰註,又一卷甄鸞註,又二卷李淳風撰。

③ 九章算術序,見算經十書,孔繼涵微波榭叢書刻本。

④ 元脫脫等宋史卷二〇七,藝文志第一六〇,藝文六。

⑤ 宋陳振孫直齋書錄解題卷一二,第一三頁,江蘇書局刊本。

⑥ 此據明胡震亨等編祕册彙函,明趙開美校本。所稱漢趙君卿未知有所本否?

⑦ 唐房玄齡晉書卷一一,志第一,天文上。

⑧ 清姚際恆古今僞書考。

⑨ K. L. Biernatzki: Die Arithmetik der Chinesen, Crelle's Journal, Vol. LII, (1856)。

⑩ 飯島忠夫支那古代史論,第二四四頁至第二四八頁,日本,東京東洋文庫,大正一四年(公元1925年),一二月。

第七章　九數及九章算術

九數之名,自來註家各異其辭,如:

漢鄭玄釋周禮,作:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今有重差,夕桀,句股。

廣韻卷四,數條,作:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要。

宋史卷六八律歷志,作:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,盈朒,旁要。

唐李賢註後漢書鄭玄傳,作:方田,粟米,差分,少廣,均輸,方程,傍要,盈不足,鉤股。

宋李石續博物志,宋冊府元龜,悉如李賢註,鄭玄傳之解釋,此一說也。

魏劉徽九章注,作:方田,粟米,衰分,少廣,商功,均輸,盈不足,方程,句股。

隋書卷一六,律歷志,作:方田,粟米,衰分,少廣,商功,均輸,盈朒,方程,句股。

唐李賢註,後漢書馬援傳,作:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,盈不足,方程,句股。

宋楊輝詳解九章算法,作:方田,粟米,衰分,少廣,商功,均輸,盈朒,方程,句股;旁要附。

宋秦九韶數學九章,作:方田,粟米,衰分,少廣,商功,均輸,

盈朒,方程,句股;重差及夕桀附。此又一說也。

茲據劉徽注,九章算術則:

方田第一,以御田疇界域;

粟米第二,以御交質變易;

衰分第三,以御貴賤稟稅;

少廣第四,以御積冪方圓;

商功第五,以御功程積實;

均輸第六,以御遠近勞費;

盈不足第七,以御隱雜互見;

方程第八,以御錯糅正負;

句股第九,以御高深廣遠。

就中方田章畝法二百四十步爲秦漢田制。衰分章公士,上造,簪裊(褭同),不更,大夫爲秦漢爵名,說見前漢書百官公卿表,及續漢志百官志,梁劉昭注補引劉劭爵制。均輸爲漢法,說見史記平準書,及前漢書食貨志;故均輸章算,僦,𨂳,并爲漢代賦稅名詞;而長安爲漢惠帝都,上林爲漢武苑名。鄭玄注周禮不著句股,李賢註後漢書鄭玄傳不著商功,疑句股,商功亦爲漢法。張衡(公元 78-139 年)靈憲謂:『用重鉤股。』前漢書食貨志稱:『(耿)壽昌習於商功,分銖之事。』似句股,商功爲漢時算法,後乃納入九章算術焉。

九章算術,漢,唐人或偕稱爲算術,九章,九章術。❶ 六朝前後(公元 263-656? 年)傳本甚多。隋書經籍志,有:九章術義序一卷,九章算術十卷,劉徽撰(註,公元 263 年);九章算

術二卷,徐岳,甄鸞重述;九章算術一卷,李遵義疏;九章算術二卷,楊椒撰;九章別術二卷,九章算經二十九卷,徐岳,甄鸞等撰;九章算經二卷,徐岳注;九章六曹算經一卷,九章重差圖一卷,劉徽撰;九章推圖經法一卷,張峻撰。❷ 舊唐書經籍志,有:九章算經一卷,徐岳撰;九章重差一卷,劉向（？）撰;九章重差圖一卷,劉徽撰;九章算經九卷,甄鸞撰;九章雜算文二卷,劉祐撰;九章術疏九卷,宋泉之撰。❸ 新唐書藝文志則於上記六種之外,復有:李淳風注,九章算術九卷,注九章算經要略一卷。❹ 劉李注本出後,他本寖失,故宋史藝文志僅記李淳風注釋,九章算經要略一卷;劉徽[一作徽],九章算田草九卷;注九章算經九卷,魏劉徽,唐李淳風注;賈憲九章算經細草九卷。❺ 入宋而九章忽被黃帝之名,且頗盛行於宋元間。❻ 據明程大位,算法統宗（公元1593年）『算經源流』所記,則宋元豐七年（公元1084年）刻入秘書省,又刻於汀州學校者,有:黃帝九章等十書。又有賈憲九章,則元豐,紹興,淳熙以來刊刻者。嘉定,咸淳,德祐等年又刻詳解黃帝九章等書。❼ 最後一書即詳解九章算法後附纂類,總十二卷,景定辛酉（公元1261年）楊輝本黃帝九章而作者。此九章算術流傳之大概也。

❷ 前漢書律歷志錄劉歆論『備數』云:『其法在算術,宣於天下,小學是則。』趙君卿注周髀算經卷上,於『偃矩以望高,覆矩以測深,臥矩以知遠。』註稱:『言施用無方,曲從其事,術在九章。』唐顏師古注前漢書梅福傳,云:『九九算術,若今九章五曹之輩。』廣韻卷四『算』條謂:『九章術漢許商,

杜忠,陳熾;魏王粲幷善之。』

❽ 隋書卷三四,志第二九,經籍三,子。

❾ 後晉劉昫舊唐書卷四七,經籍下。

❿ 宋歐陽修新唐書卷五九,藝文志第四九。

⓫ 宋史卷二〇七,藝文志第一六〇,藝文六。

⓬ 元朱世傑,四元玉鑑卷中『如意混和』第一問,稱『玉,方一寸,重一兩。[按黃帝九章法]』;又莫若四元玉鑑前序亦再稱黃帝九章。李冶,敬齋古今黈卷九,亦引:『黃帝九章,五曰商功……。』

按元史誤以李冶爲李治,繆荃孫已正其誤。見繆荃孫刻本,敬齋古今黈,附錄,繆荃孫跋語。(公元1902年,1903年)。

⓭ 明程大位算法統宗卷一三,第三五頁,古今圖書集成算法部彙考一七,曆法典第一二五卷。

第二編　中國中古數學

第一章　中古之數學

中古數學，自漢迄隋，凡歷八紀。西漢數學之可記者，爲：張蒼，耿壽昌之删定九章；陳農之訪求遺書；尹咸之校稽數術；與劉歆之規定圓率。東漢之可記者，爲：張衡，蔡邕之言圓率；馬續，鄭玄之述九章。而魏劉徽注九章，立重差，乃於句股，圓率，九章之研究，告一段落。至兩晉南北朝諸家紛起，最著者爲祖氏父子之圓率說。而現傳之孫子算經，張丘建算經，夏侯陽算經，五曹算經，五經算術，其作者事蹟與著書時代，并未確定。疑并爲兩晉南北朝之著作。入隋而算事漸衰，惟唐代選舉之制，實始於此。中古數學似專言圓率與算術。時天元一術，尚未肇始也。

第二章　中古數學家小傳

（一）前漢:張蒼,耿壽昌,許商,尹咸,劉歆。

張蒼　陽武人也。好書律歷。秦時爲柱下御史,明習天下圖書計籍,又善用算律歷。漢高祖六年（公元前 202 年）封北平侯,遷爲計相。呂后八年（公元前 180 年）爲御史大夫。文帝四年（公元前 176 年）爲丞相。孝景五年（公元前 152 年）薨,諡曰文侯。年百餘歲。漢家言律歷者本張蒼,著書八十篇,言陰陽律歷事。[1] 魏劉徽九章算術注序,稱:『往昔暴秦焚書,經術散壞。自時厥後,漢北平侯張蒼,大司農中丞耿壽昌,皆以善算命世。蒼等因舊文之遺殘,各稱删補。』[2] 現傳九章算術是否爲蒼等所删補者,尙無明證也。

耿壽昌　漢宣帝時大司農中丞。習於商功,分銖之事。五鳳四年（公元前 54 年）奏設常平倉以給北邊,省轉漕。賜爵關內侯。[3]

許商　字長伯,長安人。善爲算,爲度功用。著五行論歷,四至九卿。又著許商算術二十六卷。[4] 其自建始元年（公元前 32 年）迄綏和元年（公元前 8 年）歷官事蹟,具見前漢書。[5]

杜忠　著算術二十六卷。廣韻卷四,云:『九章術漢許商,杜忠,吳陳熾;魏王粲并善之。』[6] 故沈欽韓,王先謙幷謂漢志許商,杜忠算術卽是九章。

尹咸　漢成帝河平三年(公元前26年)謁者陳農使使求遺書於天下。太史令尹咸校數術。許商杜忠算術亦在其列。元始五年(公元前5年)咸爲大司農。❹

劉歆　字子駿,少爲黃門郎,河平中(公元前28-25年)與父向(公元前80-9年)領校祕書。數術方技無所不究。哀帝崩,王莽持政,留歆爲右曹太中大夫。元始五年(公元後5年)爲羲和,後封紅休侯。王莽簒位,歆爲國師嘉新公。更始元年(公元後23年)爲莽所誅,年七十餘。歆考定律歷,著三統歷譜。班固前漢書律歷志,實本劉歆舊文。❸

❶　史記卷九八,張丞相列傳第三六。前漢書卷一九下,百官公卿表第七下,又卷四二,張周趙任申屠傳第一二。

❷　九章算術序第一頁,算經十書本。

❸　前漢書卷八,宣帝紀第八,卷二四上,食貨志第四。捿後漢書卷一二律歷志第二,稱:『甘露二年(公元前52年)大司農中丞耿壽昌奏以圓儀度日月行,考驗天運,狀日月行。』

❹　前漢書卷三〇,志第一〇,藝文。又卷八八,儒林傳第五八。宋王欽若等册府元龜卷八六九。

❺　『成帝初(建始元年,公元前32年)清河都尉馮逡奏言治河。事下丞相。御史白:博士許商治尚書,善爲算,能度功用。遣行視。以爲屯氏河盈溢,所爲方,用度不足。可且勿浚。後三歲(建始四年,公元前29年)河果決於館陶及東郡金隄。杜欽說大將軍王鳳,以爲宜遣將作大匠許商。諫大夫乘馬延年共襄治河事。商,延年皆明計算,能商功利,必能成功。鳳如欽言。白遣焉。後九歲,鴻嘉四年(公元前17年)勃海清河河溢。河隄都尉許商,與丞相史孫禁共行視,圖方略。』見前漢書卷二九,溝洫志第九。『永始三年(公元前

14年)詹事許商爲少府,二年爲侍中光祿大夫。綏和元年(公元前8年)侍中光祿大夫許商爲大司農。數月遷爲光祿勳。四月遷。」見前漢書卷一九下,百官公卿表第七下。

❻ 前漢書卷三〇。廣韻卷第四,換第二十九,……算。

❼ 前漢書卷一〇,帝紀第一〇,成帝;又卷三〇,志第一〇,藝文。

❽ 前漢書卷一二,帝紀第一二,平帝;又卷二一,志第一上,律歷;又卷三〇,志第一〇,藝文;又卷三六,列傳第六,楚元王,劉向,子歆;又卷九九,列傳第六九中,王莽。

第三章　劉歆圓周率

漢嘉量『律嘉量：斛，方尺而圜其外，庣旁九氂五毫，羃百六十二寸，深尺，積千六百二十寸，容十斗。』[1]『祖冲之以圓率考之，此斛當徑一尺四寸三分六釐一毫九秒三忽。庣旁一分九毫有奇。劉歆庣旁少一釐四毫有奇；歆數術不精之所致也。』[2]

蓋　$\frac{1}{2}\times 14.36193$ 寸 $= 7.180965$ 寸　(半徑)

$(7.180965)^2 = 51.56625\ 83312\ 25$ 方寸　(半徑羃)

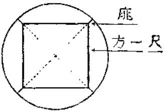
$\pi = 3.14159265$　(祖冲之圓率)

$10\,\pi(7.180965)^2 = 1620.00178\ 16137\ 77254\ 9625$

$= 1620$(立)方寸　(容積)

庣旁 $=7.180965-(\sqrt{5^2+5^2}=7.071068=0.109+$ 即一分九毫有奇。

又按王莽銅斛，則半徑為 $0.095+7.071065=7.166068$ 寸　(半徑)



$(7.166068)^2=51.35253\ 05806\ 24$　(半徑羃)

$\pi=3.1547$　(劉歆圓率)

$10\,\pi\ (7.166068)^2=1620.01828\ 22269\ 45328$

$=1620$ (立) 方寸。　(容積)

王莽銅斛謂:『龍在己巳,歲次實沈,初班天下,萬國永遵。』蓋斛成於建國元年(公元後9年)孟夏,而劉歆圓率,$\pi=3.1547$亦當成於此年也。[1] 隋書曰:『圓周率三,圓徑率一,其術疏舛。自劉歆,張衡,劉徽,王蕃,皮延宗之徒,各設新率,未臻折衷。』[2] 祖冲之與戴法興論歷,謂:『立員舊誤,張衡述而弗改。漢時斛銘,劉歆詭謬其數,此則算氏之劇疵也。』[3] 九章注之$\pi=\frac{3927}{1250}$,清岑建功割圜密率捷法序,謂:『注載王莽銅斛云云,未詳誰氏之率,玆據隋志,定爲歆率。』[4] 蓋屬誤記。此率實出於祖冲之。

[1] 隋書卷一六,律歷志。西清古鑑卷三四,第一至四頁,上海商務印書館。

[2] 隋書卷一六,律歷志。

[3] 西清古鑑卷三四,第一至四頁。

[4] 隋書卷一六,律歷志。

[5] 梁沈約宋書卷一三,志第三,歷下。

[6] 割圜密率捷法序第一頁,石梁岑氏校刊,道光己亥,(公元1839年)

第四章　中古數學家小傳

(二)後漢:張衡,劉洪,馬續,鄭玄,蔡邕,徐岳,趙爽。

張衡　字平子,南陽西鄂人。生章帝建初三年(公元後78年),卒順帝永和四年(公元後139年),年六十二。❶衡善機巧,尤致力陰陽,天文,歷算。安帝雅聞衡善學術,公車特徵拜郎中,再遷爲太史令。❷未幾遷爲尚書郎。順帝時再轉爲太史令。積年不徙,遂自去太史令職,五年復還。嗣是續居史職,至陽嘉末乃遷。蓋十八餘年間,三任太史令矣。❸衡初太史令時,遂乃研覈陰陽,妙盡琁璣之正。作渾天儀,著靈憲,算罔論,言甚詳明。❹算罔論今已不傳。劉徽九章注少廣開立圓術引張衡算。淸李潢按:『張衡算一節,文多舛錯。……周率一十之面,開方除之,得三·一六有奇,故云增周太多。』❺是張衡以 $\pi=\sqrt{10}=3.16$ 也。開元占經引祖暅渾天論謂:『張衡日月在徑當周天七百三十六分之一,地廣一百三十二分之一。按此而論,天周分母圓周率也,廣分母圓徑率也。以八約之,得周率九十二,徑率二十九。其率傷於周多徑少,衡之疏也。』❻或疑 $\pi=\sqrt{10}$ 出於 $\pi=\frac{92}{29}$,而印度婆羅門加塔(Brahma-gupta)(公元598年—?)於其著述(Brāhma-Sphuta-Sidd'hānta)(公元628年)中,及其後二百年亞拉伯算書,幷言 $\pi=\sqrt{10}$。❼

劉洪　字元卓,泰山蒙陰人。魯王之宗室也。延熹(公

元158–166年）中以校尉應太史徵拜郎中。遷常山長史，以父憂去官。後爲上計掾，拜郎中，檢東觀著作律歷記。遷謁者。光和（公元178–183年）中爲穀城門候。洪善算，當世無偶，作七曜術。及在東觀與蔡邕共述律歷記，又造乾象術。[9]

馬續　字季則。七歲能通論語。十三明尚書。十六治詩。博觀羣籍。善九章算術。順帝（約公元130年）時爲護羌校尉。遷度遼將軍。所在有威恩稱。[10]

鄭玄　字康成。北海高密人。玄少學書數。八九歲能下算乘除。年二十一博極羣書。兼精算術。[11] 師事京兆第五元先，始通三統曆，九章算術。建安元年（公元196年）受乾象歷於劉洪，爲加注釋。生永建二年（公元127年）卒建安五年（公元200年）。年七十四。[12]

蔡邕　字伯喈。陳留圉人。好辭章數術天文。生漢順帝陽嘉二年（公元133年）。卒獻帝初平三年（公元192年）。年六十。[13] 史記五帝本紀，唐張守節正義於『璿璣玉衡，以齊七政』文下引:『蔡邕云:玉衡長八尺……徑八尺，周二尺五寸而強。』[14] 是蔡氏已知 $\pi>3.125$ 也。

徐岳　字公河。東萊人。生於漢末。受歷學於漢靈帝（公元168–189年）時會稽東部尉劉洪。語見後漢書及晉書歷志。會稽因述天目先生之語，岳爲成數術記遺一卷。三國吳中書令闞澤受劉洪乾象法於東萊徐岳，著有乾象歷注。隋書，唐書幷記徐岳撰九章，今已亡失。[15]

趙爽　字君卿。一曰名嬰。宋李籍謂:『不詳何代人。』[16]

宋鮑澣之疑爲:『魏晉之間人。』⓮清阮元云:『今本周髀算經題云漢趙君卿注,故系於漢代。』⓯

❶ 後漢書卷八九,張衡列傳第四九,稱:『年六十二。永和四年卒。』

❷ 後漢書卷八九。

❸ 據張蔭麟考證。見張蔭麟撰,張衡別傳,學衡雜誌第四〇期,第三至四頁,民國一四年(公元1925年)四月。

❹ 後漢書卷八九。

❺ 清李潢九章算術細草圖說卷四,少廣第四六至四七頁,誥鴻堂刻本,嘉慶庚辰(公元1820年)。

❻ 唐瞿曇悉達開元占經卷一,第二五至二六頁,恒德堂刻本。

❼ 參閱 Zeuthen, H. G.: Histoire des Mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen Age, Tr. par J. Mascart, p. 256, Paris, 1902. 及 Kaye, G. R.: Indian Mathematics, p. 33, Calcutta, 1915, 又 Cajori, F.: A History of Elementary Mathematics, rev. ed. p. 94, New York, 1917.

❽ 後漢書卷一二,律曆志第二,梁劉昭注引袁崧山書。又卷一三,律曆志第三,梁注。

❾ 後漢書卷五四,馬援列傳第一四。

❿ 世說新語文學篇注,太平廣記二一五。

⓫ 後漢書卷六五,張曹鄭列傳第二五。晉書卷一七,志第七,律曆中。

⓬ 後漢書卷九〇下,蔡邕列傳第五〇下。吳修續疑年錄謂:『本傳邕死獄中,年六十一。今從王昶所列年表。』較爲近是,姑從其說。

⓭ 史記卷一,五帝本紀第一。

⓮ 後漢書卷一二;晉書卷一七,志第七,律曆中;宋書卷一二,志第二,曆上;宋嘉定五年(公元1212年)鮑澣之數術記遺序;丁福保算學書目提要第二頁,無錫刻本,光緒己亥(公元1899年)。 按三國志五二,吳書八,張,

嚴,程,闞,薛傳第八,稱:「闞澤字德潤。會稽山陰人也。……又著乾象歷注。」

⑨ 宋李籍周髀音義第一頁,附明趙開美校刊本周髀算經後。

⑩ 宋鮑澣之周髀算經序第二頁,明趙開美校刊本周髀算經。

⑪ 清阮元疇人傳卷四,第一五頁,觀我生室彙稿本。明趙開美校刻本周髀算經,亦題:「漢趙君卿撰。」

第五章　數術記遺

數術記遺稱:『黃帝為法,數有十等,及其用也,乃有三焉。十等者:億,兆,京,垓,秭,壤,溝,澗,正,載。三等者,謂上中下也。其下數者,十十變之,若言十萬曰億,十億曰兆,十兆曰京也。中數者萬萬變之,若言萬萬曰億,萬萬億曰兆,萬萬兆曰京也。上數者數窮則變,若言萬萬曰億,億億曰兆,兆兆曰京也。』又記天目先生之言曰:『隸首注術,乃有多種。及余遺忘,記憶數事而已。其一積算,其一太乙,其一兩儀,其一三才,其一五行,其一八卦,其一九宮,其一運算,其一了知,其一成數,其一把頭,其一龜算,其一珠算,其一計算。』❶ 甄鸞注謂:『九宮者,卽二四為肩,六八為足,左三右七,戴九履一,五居中央。』❷ 如圖是也。

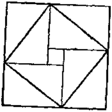
2	9	4
7	5	3
6	1	8

❶ 數術記遺第七及八頁,算經十書,孔繼涵微波榭叢書本。

❷ 『九宮之圖古矣。大戴禮明堂篇:二,九,四;七,五,三;六,一,八。明堂九室之制,蓋準乎此。易乾鑿度四正四維,皆合乎十五,亦謂此圖也。』見清錢大昕,十駕齋養新錄卷一,「河圖洛書」條。參觀清陸燿切問齋集卷三,第八至一〇頁,惲吉堂刻本,乾隆壬子(公元1792年)。鄒伯奇則不信此說,見『明堂會通圖跋,』學計一得卷下(公元1844年)。

第六章 句股方圓圖注

『趙君卿曰：句股各自乘,併之爲弦實,開方除之,卽弦也。



（弦 圖）

案弦圖,又可以句股相乘爲朱實二,倍之爲朱實四。以句股之差自乘爲中黃實。加差實,亦成弦實。

以差實減弦實,半其餘。以差爲從法,開方除之,復得句矣。加差於句,卽股。

凡幷句股之實,卽成弦實。或矩於內,或方於外。形詭而量均,體殊而數齊。

句實之矩,以股弦差爲廣,股弦幷爲袤。而股實方其裏。減矩句之實於弦實,開其

令 $a=$句, $b=$股, $c=$弦。

則 $$a^2+b^2=c^2,$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}. \qquad (1)$$

如弦圖:

$$2ab+(b-a)^2=c^2, \qquad (2)$$

此與印度巴斯卡剌·阿刻雅(Bhaskara Acarya)在公元一一五〇年所證明者相類。❶

從(2)得 $$\frac{c^2-(b-a)^2}{2}=ab$$

$$=A. \qquad (3)$$

令 $$b-a=p, \quad a=x,$$

則 $$x^2+px-A=0, \qquad (4)$$

$$x+p=b.$$

$$(c-b)(c+b)=c^2-b^2=a^2=B, (5)$$

$$\sqrt{c^2-(c-b)(c+b)}=b,$$

餘,即股。倍股在兩邊為從法,開矩句之角,即股弦差,加股為弦。

令 $2b=q,\quad c-b=y,$

則 $$y^2+qy-B=0, \tag{6}$$

$$y+b=c.$$

以差除句實,得股弦幷。以幷除句實,亦得股弦差。

$$\left.\begin{aligned}\frac{a^2}{c-b}&=c+b,\\ \frac{a^2}{c+b}&=c-b.\end{aligned}\right\}\text{[2]} \tag{7}$$

令幷自乘,與句實為實,倍幷為法,所得亦弦。句實減幷自乘,如法為股。

$$\left.\begin{aligned}\frac{(c+b)^2+a^2}{2(c+b)}&=c,\\ \frac{(c+b)^2-a^2}{2(c+b)}&=b.\end{aligned}\right\}\text{[3]} \tag{8}$$

兩差相乘,倍而開之,所得以股弦差增之為句。以句弦差增之為股。兩差增之為弦。

$$\sqrt{2(c-a)(c-b)}=a+b-c. \tag{9}$$

倍弦實,列句股差實,見弦實者。以圖考之:倍弦實滿外大方,而多黃實。黃實之多,即句股差實。以差實減之,開其餘,得外大方。大方之面,即句股幷也。令幷自乘,倍弦實,乃減之,開其餘,得中黃方。黃方之面,即句股差。

$$2c^2-(a+b)^2=(b-a)^2\text{[4]} \tag{10}$$

$$\sqrt{2c^2-(b-a)^2}=a+b=s, \tag{11}$$

$$\sqrt{2c^2-(a+b)^2}=b-a=t. \tag{12}$$

以差減幷,而半之,為句。加差於幷,而半之,為股。

$$\frac{s-t}{2}=a, \tag{13}$$

$$\frac{s+t}{2}=b. \tag{14}$$

其倍弦為廣袤合,而令

因 $$2c=y(=c-b)+y_1(=c+b) \tag{15}$$

句股見者自乘爲其實。四實以減之,開其餘,所得爲差。以差減合,半其餘爲廣。減廣於弦,卽所求也。

而 $$yy_1=a^2 \qquad (16)$$

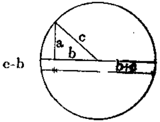
則 $$\sqrt{4c^2-4a^2}=y_1-y. \qquad (17)$$

$$y=\frac{2c-\sqrt{4c^2-4a^2}}{2}, \qquad (18)$$

故 $$b=c-y. \qquad (19)$$

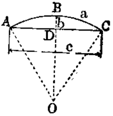
❶ Cajori F. A.: History of Elementary Mathematics, p. 123, N. Y. 1917. 又此式在九章算術及緝古算經多見其應用。宋,元人之書演段者,亦以此式爲基本定理。

❷ 此式明史卷三二,『推白赤道正交距黃赤道正交極數,』曾應用之。



❸ 宋楊輝之弧矢式, $d=\frac{b^2+(\frac{1}{2}c)^2}{b}$, 可由此寫出。如圖ABC爲弧矢形或弓形 (segment of a circle), OC=r, 2OC=d, AC=弦,或弧弦=c, BD=矢,或弧矢=b, ABC=弧,或弧背=a, 面積=A。

此式又可證幾何原本第二卷,第七題,蓋兩邊各加 b^2, 則得: $(c+b)^2+c^2=2c(c+b)+b^2$。



❹ 此式可證幾何原本第二卷,第九題,蓋此式可化爲:

$$a^2+b^2=2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2。$$

第七章　中古數學家小傳

(三)三國,吳:陸績,王蕃,陳熾;魏:王粲,劉徽。

陸績　字公紀。吳人也。博學多識,星曆算數,無不該覽。孫權統事,辟爲奏曹掾,出爲鬱林太守,年三十二卒。❶ 陸績云:周天一百七萬一千里,東西南北徑三十五萬七千里,此言周三徑一也。❷

王蕃　字永元。盧江人也。博覽多聞,兼通術藝。始爲尚書郎,孫休郎位爲散騎中常侍,加駙馬都尉。又爲夏口監軍。孫皓初復入爲中常侍。甘露二年(公元 257 年)皓大會羣臣。蕃沈醉頓伏,皓怒斬之。時年三十九。(公元 219-257 年)❸ 關於圓率,蕃嘗更考,周百四十二,而徑四十五。❹ 即

$\pi=\frac{142}{45}=3.155.$

陳熾　吳人也。善九章術,與漢許商,杜忠;魏王粲,并稱。❺

王粲　字仲宣。南陽高平人也。蔡邕嘗見重之。博物多識,強記默識,性善算,作算術,略盡其理。建安二十一年(公元 216 年)從征吳,二十二年道病卒,年四十一歲。(公元 177-217 年。)❻

劉徽　魏陳留王景元四年(公元 263 年),注九章算術。求圓率以圓內容六邊形起算。謂:『割之彌細,所失彌少,割之又割,以至不可割,則與圓周合體,而無所失矣。』其方

法爲前人所未道,法以:

$l=$有法n邊形一邊之長,

$r=$圓半徑。

$$L=\text{有法}2n\text{邊形一邊之長}=\sqrt{[r-\sqrt{r^2-(\tfrac{l}{2})^2}]^2+[\tfrac{l}{2}]^2}\qquad(1)$$

$$=\sqrt{r(2r-\sqrt{(4r^2-l^2)})}\qquad(2)$$

徽準是式,求至九十六邊,得 $\pi=3.141024=3.14\frac{64}{625}$ 於是定 $\pi=\frac{157}{50}=3.14$ 號曰徽率。隋書經籍志又有劉數九章重差圖一卷,新唐書,舊唐書幷記九章重差一卷劉向(?)撰,九章重差圖一卷,劉徽撰。❼

❶ 晉陳壽三國志吳志第一二。

❷ 宋書卷二三,志第一三,天文一。晉書卷一一,志第一,天文上。開元占經卷一,第一三頁。

❸ 三國志,吳志第二〇。開元占經卷二。

❹ 宋書卷二三,晉書卷一一,開元占經卷一。

❺ 廣韻卷第四,換第二九,……算。

❻ 三國志,魏志第二一,王粲。廣韻卷第四。

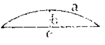
❼ 晉書卷一六,志第六,律曆上。隋書卷一六,律曆志第一一,律曆上。九章算術,算經十書,孔繼涵,微波榭叢書本,依汲古閣影宋刻本重雕,乾隆三八年(公元1773年)。

第八章　劉徽學說

第一節　劉徽九章注

唐李賢後漢書注,稱:『劉徽九章算術曰:方田第一,粟米第二,差分第三,少廣第四,商功第五,均輸第六,盈不足第七,方程第八,句股第九。』❶ 宋慶元庚申(公元1200年)之夏,鮑澣之於楊忠輔家得元豐刻本。❷ 其年六月因傳寫入祕閣時則舊圖已亡,盈不足,方程之篇,咸缺淳風注。❸ 且方田章注自晉武庫以下,疑是祖沖之語。❹ 故楊輝以為所傳之本,亦不得其眞。❺

劉徽九章注篇目凡九,設問二百四十,約言之:方田第一,詳分數及田畝算法。以弧矢形之面積,稱: $A=\frac{1}{2}(c\times b+b^2)$。粟米第二,詳百分,比例之論。衰分第三,說明比例之用。少廣第四,詳單分數,❻ 在用求從,開平立方。復以 $\pi=3$,得:(圓球之全徑)$=(\frac{16}{9}\times$圓球之體積$)^{\frac{1}{3}}$ 或 $D=\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$。商功第五,詳各色體積之計算。均輸第六,詳比例均輸。盈不足第七,言盈不足本術並及推解,❼ 而第十一問『蒲莞並生,』第十二問『兩鼠對穿,』須用指數函數解,第十三問『良馬與駑馬俱發長安』題,宜用二次式解答。盈不足本術所解,祇得其近似值。方程第八,以正負損益術計聯立方程,或疑為行列式



及大衍求一術之先河。[9] 其第十三問『五家共井』題,答數爲整寸數,似不定方程。[10] 句股第九,詳句股弦互求,句股和較,句股容方圓,相似句股形比例各術。其第二十問爲:$x^2+(14+20)x=2(1775\times20)$ 之二次方程式。[11] 就中二百四十問雖非盡屬舊傳,[12] 而在劉徽作注時,各題俱備,則大致可信。其 $A=\frac{1}{2}(c\times b+b^2)$, $\pi=3$, $D=\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$ 三式,劉徽頗以爲非,因有割圓術之作。

❶ 後漢書卷五四,馬援列傳第一四。隋書卷一六,律曆志第一一,律歷上,稱:『一,十,百,千,萬,所同用也;律,度,量,衡,歷,率,其別用也。……夫所謂率者,有九流焉:一曰方田,以御田疇界域;二曰粟米,以御交質變易;三曰衰分,以御貴賤廩稅;四曰少廣,以御積冪方圓;五曰商功,以御功程積實;六曰均輸,以御遠近勞費;七曰盈朒,以御隱雜互見;八曰方程,以御錯糅正負;九曰句股,以御高深廣遠。』同書又屢引劉徽注九章。則上之所舉,卽爲劉注本九章算術篇目名義也。

❷ 今所傳者爲宋元豐七年(公元1084年)九月祕書省刻木,卽明程大位算法統宗卷一二,所謂黃帝九章,宋元豐七年刊入祕書省者。淸初傳本有二:一則從永樂大典輯出,四庫提要所謂:『惟分載於永樂大典者,依類裒輯,尚九篇具在,』其書由聚珍版印行(乾隆三九年?),一則毛扆得自黃虞稷者,算經十書九章算術後題『大淸乾隆三十八年癸巳(公元1773年)秋鬮里孔氏依汲古閣影宋刻本重雕。』世多誤以爲一,長沙葉德輝,郋園讀書志,唐宋祕本書目考證,其一例也。

❸ 武英殿聚珍版九章算術提要第一及二頁。

❹ 李潢九章算術細草圖說卷一,第三五頁。

❺ 宋楊輝詳解九章算法纂類第一頁,宜稼堂叢書本。

⑥ 埃及阿默斯(Ahmes)(約公元前1550年)亦善單分數(unit fraction)。參看 Smith D. E.: History of Mathematics, p. 210, 212. Boston, 1925.

⑦ 推解之名見筆算數學。盈不足術之世界史,見錢寶琮,九章算術盈不足術流傳歐州考,科學雜誌第十二卷第六期,民國一六年(公元1927年)六月。

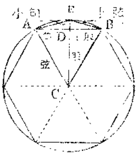
⑧ Smith D. E.: "Chinese Mathematics," The Popular Science Monthly, p. 598. Vol. LXXX.(公元1912年)。

⑨ 錢寶琮九章問題分類考,學藝雜誌,第三卷,第一號民國一〇年(公元1919年)五月。

⑩ Mikami Y.: The Developement of Mathematics in China and Japan, p. 24, Leipzig, 1913.

⑪ 唐王孝通上輯古算經表,稱「訣代成晉,刪補殘缺,校其條目,頗與古術不同。」

第二節　劉徽割圓術



劉徽求圓率,由圓內容六邊形起算,以 l 爲有法 n 邊形一邊之長,r 爲圓半徑。令 r 爲弦,$\frac{l}{2}$ 爲句,求得 $\sqrt{r^2-(\frac{l}{2})^2}$ 爲股。以半徑減股得 $r-\sqrt{r^2-(\frac{l}{2})^2}$ 爲小句,前之 $\frac{l}{2}$ 句爲小股,求得小弦 L,即爲有法 2n 邊形一邊之長,l_{2n}。而 4n 邊形之面積,$S_{4n}=2n\cdot\frac{r\cdot L(=l_{2n})}{2}$。邊數愈增,其面積與圓積愈近。終可圓積合。

如圖內容六邊形之一邊爲 AB,以 C 爲中心,1 爲半徑;

則大三角形ABC可分爲兩相等句股形ADC及BDC。先於句股形ADC求得DC,次於小句股形ADE求得AE小弦0.517638,即爲內容十二邊形之一邊,l_{12}。而內容二十四邊形之面積,$S_{24}=12\times\frac{1\times0.517638}{2}=3.105828$,或$\pi_{12}=3.105828$。次以內容六邊形內所求之小弦冪,或內容十二邊形之一邊冪0.267949193445^{16}之四分一,即0.066987298361爲句冪,半徑冪爲弦冪,求得股。再得小句,自乘得小句冪0.001161051105^{64},以0.066987298361爲小股冪,相和得二十四邊形之一邊冪0.068148349466。同理得四十八邊形之一邊冪0.017402758813。開方除之,得四十八邊形之一邊,$l_{48}=0.130806$。而內容九十六邊形之面積,$S_{96}=48\times\frac{1\times0.130806}{2}=3.139344=3.13\frac{584}{625}$,或$\pi_{48}=3.13\frac{584}{625}$。最後得九十六邊形之一邊冪0.004282154012。開方除之,得九十六邊形之一邊,$l_{96}=0.065438$。而內容一百九十二邊之面積,$S_{192}=96\times\frac{1\times0.065438}{2}=3.141024=3.14\frac{64}{625}$或$\pi_{96}=3.14\frac{64}{625}$或3.14。劉徽祇以$\pi=3.14$入算。隋書:『劉徽注九章商功曰,當今大司農斛,圓徑一尺三寸五分五釐,深一尺,積一千四百四十一寸十分之三。』❶蓋

$$\tfrac{1}{2}\times13.55\text{ 寸}=6.775\text{寸} \qquad \text{(半徑)}$$

$$(6.775)^2=45.900625\text{ 方寸} \qquad \text{(半徑冪)}$$

$$\pi=3.14 \qquad \text{(徽率)}$$

則 $$10\pi\times(6.775)^2=1441\tfrac{3}{10}\text{(立方)寸} \qquad \text{(容積)}$$

『其逐步演算,蓋引用下列五原理以成之:

(一) 圓內容整六邊形,每邊長與半徑相等。

(二) 兩尖形(kite)之面積,爲二對角線相乘積之半。

(三) 句冪股冪等於弦冪(即 Pythagoras 定理)。

(四) 圓內整多邊形之邊數愈增,其面積與圓積愈近。至邊數增至無窮時,積與圓積合。

(五) S_n, S_{2n} 若爲圓內容整 n 邊形及整 2n 邊形之面積, S 爲圓面積,則:

$$S_{2n}<S<S_{2n}+(S_{2n}-S_n)$$。』❷

劉徽計算次序至爲整齊,可於下表見之。❸

	由六邊形求十二邊形	由十二邊形求二十四邊形
弦, r	1.000000	1.000000
句, $\frac{r}{2}$	0.500000	$\frac{0.517638}{2}$
股, $\sqrt{r^2-(\frac{r}{2})^2}$	0.866025^{4}	0.965925^{8}
弦冪, r^2	1.000000000000	1.000000000000
句冪, $(\frac{r}{2})^2$	0.250000000000	$\frac{0.267949193445^{1.6}}{4}$ $=0.066987298361$
股冪, $r^2-(\frac{r}{2})^2$	0.750000000000	0.933012701639
小句, $r-\sqrt{r^2-(\frac{r}{2})^2}$	0.133974^{6}	0.034074^{2}
小股, $\frac{r}{2}$	0.500000	$\frac{0.517638}{2}$
小弦, $\sqrt{[r-\sqrt{r^2-(\frac{r}{2})^2}]^2+[\frac{r}{2}]^2}$	$0.517638=l_{12}$	$0.261052^{3}=l_{24}$
小句冪, $(r-\sqrt{r^2-(\frac{r}{2})^2})^2$	$0.017949193445^{1.6}$	$0.001161051105^{6.4}$
小股冪, $(\frac{r}{2})^2$	0.25	0.066987298361
小弦冪, $(r-\sqrt{r^2-(\frac{r}{2})^2})^2+(\frac{r}{2})^2$	$0.267949193445^{1.6}$	0.068148349466

	由二四邊形求四八邊形	由四八邊形求九六邊形
弦, r	1.000000	1.000000
句, $\frac{1}{2}$	$\frac{0.261052}{2}$	$\frac{0.130806}{2}$
股, $\sqrt{r^2-(\frac{1}{2})^2}$	0.991444^{8}	0.997858^{2}
弦冪, r^2	1.000000000000	1.000000000000
句冪, $(\frac{1}{2})^2$	$\frac{0.068148349466}{4}$ $=0.017037087366$	$\frac{0.017110278813}{4}$ $=0.004277569703$
股冪, $r^2-(\frac{1}{2})^2$	0.982962912634	0.995722430298
小句, $r-\sqrt{r^2-(\frac{1}{2})^2}$	0.008555^{2}	0.002141^{1}
小股, $\frac{1}{2}$	$\frac{0.261052}{2}$	$\frac{0.130806}{2}$
小弦, $\sqrt{[r-\sqrt{r^2-(\frac{1}{2})^2}]^2+[\frac{1}{2}]^2}$	$0.130806=l_{48}$	$0.065438=l_{96}$
小句冪, $(r-\sqrt{r^2-(\frac{1}{2})^2})^2$	0.000073191447^{24}	0.000004584309^{21}
小股冪, $(\frac{1}{2})^2$	0.017037087366	0.004277569703
小弦冪, $(r-\sqrt{r^2-(\frac{1}{2})^2})+(\frac{1}{2})^2$	0.017110278813	0.004282154012
	$S_{96}=48\cdot\frac{r\cdot l_{48}}{2}$ $=3.139344$ $=3.13\frac{584}{625}$	$S_{192}=96\cdot\frac{r\cdot l_{96}}{2}$ $=3.141240$ $=3.14\frac{64}{625}$
	$\pi_{48}=3.13\frac{584}{625}$	$\pi_{96}=3.14\frac{64}{625}$

❶ 隋書卷一六,律曆志第一一,律曆上。九章算術卷五,第一八頁,算經十書本。又n邊形,n邊形之邊,n邊形之面積,原作n觚,n觚之面,n觚之冪。

❷ 錢寶琮中國算書中之周率研究,科學雜誌,第八卷,第二期,第一一八頁,民國一二年(公元1923年),二月。

❸ 九章算術卷一,第一一至一四頁,算經十書本。李潢九章算經細草圖說卷一,第二一至三四頁。 如按劉徽次序,再求一次得一百九十二邊形之邊爲 0.032724 仍可得 $\pi=3.1415$。

第二節　劉徽重差術

劉徽九章序謂:『九數有重差之名,……,以重差爲率,故曰重差也,……,輒造重差,并爲注解,以究古人之意,綴於句股之下。度高者重表,測深者累矩,孤離者三望,離而又旁求者四望。』隋書經籍志於九章增作十卷,下題劉徽撰,蓋重差列於九章終篇也。❶ 而隋志唐志又皆有九章重差圖一卷,今其圖已亡。唐以後稱重差爲海島算。宋史有海島算經一卷,夏翰[一作翺]新重演議海島算經一卷。❷ 淸戴震於永樂大典中輯出一卷,有李淳風注釋文。李潢并爲補圖。❸

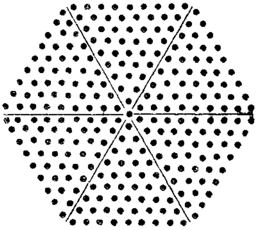
❶ 王孝通上緝古算經表稱:『九數即九章。……魏朝劉徽……更爲之注。徽思極毫芒,觸類增長,乃造重差之法,列於終篇。』見緝古算經,算經十書本。

❷ 宋史卷二〇七,藝文志第一六〇,藝文六。

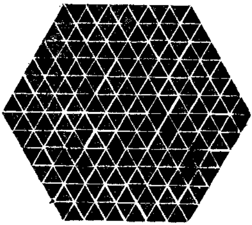
❸ 附李潢九章算術細草圖說後。 關於重差術之詳細論述,參看李儼,重差術源流及其新註,學藝雜誌,第七卷,第八號,民國一五年(公元1926年)四月。

第九章　籌制

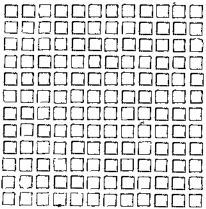
古人算數用籌。說文竹部曰:『算長六寸,計曆數者。』❶前漢書律曆志曰:『其算法用竹,徑一分,長六寸,二百七十一枚,而成六觚爲一握。』❷如圖(1)。五代及宋元尙以『一把』爲度。❸九章算術『方程』劉徽注曰:『正算赤,負算黑,否則以邪正爲異。』❹隋書律曆志曰:『其算用竹,廣二分,長三寸,正策三廉,積二百十六枚,成六觚,乾之策也。負策四廉,積一百四十四枚,坤之策也,觚方皆徑十二,天地之大數



(1)



(2)



(3)

也.』[8] 如圖 (2), (3)。甄鸞註數術記遺曰:『積算今之常算者也,以竹爲之,長四寸,以效四時,方三分,以象三才。』[9] 而世說及唐語林幷云:『王戎牙籌。』後魏世宗宣武帝(公元500-516年)鑄鐵爲籌。[10] 宋沈括夢溪筆談謂:『算法用赤籌黑籌以別正負之數。』[11] 邵博邵氏聞見後錄謂:『白玉籭……有中官取以作算籌。』[12]

舊唐書載上元元年(公元674年)制:一品以下文官幷帶手巾,算袋,景雲二年(公元711年)又令內外官依上元元年,九品以上文武官咸帶手巾,算袋。[13] 新唐書稱:初職事官一品以下,則有手巾,算袋,佩刀,礪石。至睿宗(公元685-689年)時罷佩刀,礪石。[14] 此與唐顏師古所言之算幐;段成式所言之算袋相類。[15] 至宋尚存此稱。[16] 西湖老人繁勝錄載:『京都有四百十四行,略而言之,闘慢道業,……算子筒。』[17] 淸梅文鼎古算器考引浦江吳氏中饋錄有:『切肉長三寸,各如算子樣。』之語。[18] 觀上所記,則其名稱,古作算,後作籌策,籌算,籌,[19] 及算子。如算幐,算袋,算子筒,幷爲留置算子之用。其制舊用竹,分赤黑,亦有用鐵,用牙,用玉者。其先長而後漸短。枚數亦無一定,總以盈握爲度。

❶ 淸段玉裁說文解字注第九卷,第二〇頁,蘇州刻本,光緒辛巳(公元1881年)。又說文繫傳竹部曰:『籌,壺矢也,從竹,壽聲。臣(南唐徐)鍇曰:投壺之矢也。其制似箸,人以之算數也。』

❷ 前漢書卷二一,律曆志第一上。

❸ 宋薛居正舊五代史卷一〇七,漢書第九,列傳四,……王章……;宋歐陽修新五代史卷三〇,漢臣傳第一八,……王章……;宋陳世崇隨隱漫錄卷一;并云:『此輩與一把算子,未知顚倒。』宋羅大經鶴林玉露天集(公元1248年)卷二『算子』條,稱:『五代史……算子本俗語,……,溫公通鑑改作授之握算,不知縱橫,不如歐史安』元陶宗儀輟耕錄九姑玄女課條稱:『其法折草一把,不計草數多寡,苟用算籌亦可。』

❹ 九章算術卷八,第四頁,算經十書本。

❺ 隋書卷一六,律曆志第一一,律曆上。

❻ 數術記遺第九頁,算經十書本。

❼ A. Terrien de Lacouperie: The old Numerals, the Counting Rod and the Swan-pan in China, Numismatic Chronicle, III (3), pp. 34-36, reprinted in London in 1888. 引述其說。

❽ 宋沈括夢溪筆談卷八。

❾ 宋邵博邵氏聞見後錄(公元1157年)卷二七,第一條。

❿ 舊唐書卷五,卷七,卷八,及卷四五。

⓫ 新唐書卷二四,志第一四,車服志。

⓬ 前漢書外戚傳第六七下:『綠綈方底。』唐顏師古注曰:『綈,厚繒也;綠其色也。方底盛書,囊形。若今之「算幐」耳。』按說文:幐,囊也。廣韻:幐,囊可帶者。唐段成式酉陽雜俎前集卷一七,烏賊條:『海人言:昔秦王東遊棄「算袋」於海,化爲此魚,形如算袋,兩帶極長。』

⓭ 宋劉延世孫公談圃(公元1101年)卷下,兩言「算袋」。

⓮ 永樂大典卷七六〇三,杭字韻,西湖老人繁勝錄第二三頁。涵芬

樓祕笈三集本。上海商務印書館,民國六年(公元1917年)一一月。

⑮　清梅文鼎古算器考,『古算衍略』第二頁,曆算全書本,柏鄉魏荔彤輯刊,雍正元年(公元1723年)。

⑯　太平御覽引老子曰:『善計者不用籌算。』廣韻:『籌,籌算。』前漢書:『(桑)弘羊……有心計,』(顏)師古(注)曰:『不用籌算。』

第十章 中古數學家小傳

(四)孫子,張丘建;北涼:趙歐;宋:何承天,皮延宗;南齊:祖冲之;梁:祖暅之。

孫子 著孫子算經三卷,隋書經籍志作二卷,未詳何代人。戴震以書中有長安,洛陽相去,及佛書二十九章語,斷爲漢明帝以後人。❶ 阮元以書中有棊局十九道語,亦擬爲漢以後人。❷ 其言籌位,詳縱橫布算之義;九九則始九九,終於一一;下卷記物不知數題,大衍求一術之起原;并爲他書所未道。夏侯陽算經序,謂:『五曹,孫子,述作滋多。』張丘建算經序,謂:『夏侯陽之方倉,孫子之蕩杯,』則其人至遲在夏侯陽,張丘建前矣。❸

張丘建 清河人。宋傳本作張丘建算經三卷,甄鸞注,李淳風注釋,劉孝孫細草。❹ 其雞翁母雛題一問三答,如:

$$\left.\begin{aligned}5x+3y+\tfrac{1}{3}z&=100\\ x+y+z&=100\end{aligned}\right\},\qquad \begin{aligned}x&=4, & x&=8, & x&=12,\\ y&=18, & y&=11, & y&=4,\\ z&=78; & z&=81; & z&=84.\end{aligned}$$

實著不定式一問數答之制。其分數除法及平面形與高線爲比例,亦爲前人所未論。球積計算尙憑古法。書中又示二次方程式題二問。如:『今有弧田,弦六十八步五分步之三,爲田三畝三十四步四十五分步之三十二,問矢幾何?答曰:十二步三分步之二。』題,$x^2+68\frac{3}{5}x=2\times514\frac{31}{45}$, $x=12\frac{2}{3}$. 又

『今有圓圖,上周一丈五尺……』題, $x^2+15x=594$, $x=18$ 是也。惜今本前題卷末殘缺,後題亦僅言開方除之卽得。古代帶從開平方之法,因不得其詳。[5]

趙歐　北涼河西人。善曆算。宋元嘉十四年(公元 437 年)河西王茂虔獻書於宋文帝,內有趙歐傳并甲寅元曆一卷,隋書經籍志有趙歐算經一卷,河西甲寅元曆一卷,涼太史趙歐撰。又甲寅元曆序一卷,七曜曆數算經一卷,陰陽曆術一卷,亦趙歐撰。[6]

何承天　東海郯人。生晉帝奕太和五年(公元 370 年)。卒元嘉二十四年(公元 447 年)。年七十八。[7] 宋太祖頗好曆數。承天時爲太子率更令,私撰新法。元嘉二十年(公元 443 年)上之。二十二年(公元 445 年)遂普用元嘉曆。[8] 或謂何承天受印度曆法於僧慧嚴,乃有元嘉曆之作。[9] 何承天調日法,以四十九分之二十六爲彊率,十七分之九爲弱率。累彊弱之數,得中平之率,以爲日法,朔餘。唐宋演撰家,皆墨守其法,無敢失墜。[10] 承天論渾天象體,又云:『周天三百六十五度三百四分之七十五。天常西轉,一日一夜,過周一度。南北兩極,相去一百一十六度三百四分之六十五彊,卽天徑也。』[11] 由是 $\pi=\dfrac{365\frac{75}{304}}{116\frac{65}{304}+}=\dfrac{365\times304+75}{116\times304+65+}=\dfrac{111035}{35329+}=3.1428$,與 $\pi=\frac{22}{7}$ 之率相近。且南北二極相去度數下,本有一『彊』字,或承天因 $\pi=\frac{22}{7}$ 而得周徑之率也。

皮延宗　宋書稱:『員外散騎郞皮延宗又難承天,』事在元嘉曆頒行(公元 445 年)之前。[12] 隋書稱:『圓周率三,

圓徑率一,其術疏舛,自劉歆,張衡,劉徽,王蕃,皮延宗之徒,各設新率,未臻折衷。』[10] 皮率今亡。

祖沖之　字文遠。范陽薊人也。宋孝武使直學林省。賜宅宇車服。解褐南徐州從事。公府參軍。大明六年(公元462年)上書論曆。上愛奇慕古,欲用沖之新法。尋薨,事寢。轉長水校尉,領本職。又特善算。生元嘉六年(公元429年)卒永元二年(公元500年)年七十二。注九章,造綴述數十篇。[11]

祖暅之　字景爍,沖之子。少傳家業,究極精微,亦有巧思入神之妙。梁天監(公元502–519年)初修乃父所改何承天曆,位至太府卿。子皓少傳家業,善算曆。[12] 隋書律曆志作曆員外散騎侍郎祖暅,并記天監三年,八年,九年三次上書論曆。以遭侯景亂,未及施用。天文志,謂:梁奉朝請祖暅,天監中造八尺銅表,又稱爲漏經。律曆志,謂:梁表尺卽奉朝請祖暅所算造銅圭影表。[13] 夢溪筆談謂:北齊祖亘有綴術二卷。[14] 按隋書經籍志:綴術六卷,不著撰人姓名,或以爲祖沖之所撰。[15] 而舊唐書經籍志題綴術五卷,祖沖之撰,李淳風注。[16] 沈括所謂綴術二卷,或爲暅修其父遺著,而簡約之歟?九章算術開立圓注,『臣淳風等謹按祖暅之謂:劉徽,張衡二人,皆以圓囷爲方率,九爲圓率,乃設新法。祖暅之開立圓術曰,以二十一乘積,十一而一,謂立方除之,卽立圓徑。』[17] 蓋以 $D=\sqrt[3]{\frac{21}{11}V}$, 卽 $V=\frac{11}{21}D^3$, 或 $V=\frac{1}{6}\pi D^3$, 而 $\pi=\frac{22}{7}$, $V=$ 圓球之體積, $D=$ 圓球之全徑。已視九章原術 $D=\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$ 爲加

密，且知圓體立方之確比矣。北史稱：『江南人祖暅者，先於邊境被獲，在（魏安豐王）延明家。舊明算曆，而不爲王所待。方（即信都芳）諫王禮遇之。暅後還，留諸法授芳。』❿

❶ 孫子算經，四庫提要。

❷ 清阮元疇人傳卷一。

❸ 孫子算經，算經十書本，乾隆癸巳（公元1773年）刻。又知不足齋叢書本，乾隆四二年（公元1777年）刻。

❹ 宋陳振孫直齋書錄解題卷一四，第一二頁。

❺ 張丘建算經，算經十書本。又知不足齋叢書本，乾隆四五年（公元1780年）刻。按前題『四十五分之三十二，』應作三十一。顧觀光九數存古卷四第三九至四〇頁，江蘇書局本，以意補草，實屬強合題意。原題見張丘建算經卷中第二一至二二頁，卷下第九至一〇頁，算經十書本。

❻ 隋書卷三四，志第二九，經籍三。宋書卷九八，列傳第五八，氐胡。

❼ 宋書卷六四，列傳第二四，……何承天。南史卷三三，列傳第二三，……何承天。

❽ 宋書卷一二，志第二，曆上。

❾ 見高僧傳。

❿ 清李銳日法朔餘彊弱考，李氏算學遺書本，上海醉六堂，光緒一六年（公元1890年）。按新唐書卷二五，志第一五，曆志，作：『宋御史中丞何承天。』

⓫ 隋書卷一九，天文志第一四，天文上，『天體』條。

⓬ 宋書卷一二，志第二，曆上。按新唐書卷二五，志第一五，曆志，作：『散騎侍郎皮延宗。』

⓭ 隋書卷一六，律曆志第一一，律曆上。

⓮ 梁蕭子顯南齊書卷五二，列傳第三三，文學，……祖冲之……。唐

李延壽南史卷七二,列傳第六二,文學,……祖冲之,……。宋書卷一三,志第三,曆下。按阮元疇人傳誤作:『永元三年卒。』Smith D. E.: History of Mathematics, p. 143, Boston, 1923. 亦沿其誤。

⑮ 南史卷七二,列傳第六二,文學,……祖冲之,子暅之。

⑯ 隋書卷一六,一七,律曆志第一一,一二,律曆上,中。又卷一九,天文志第一四,天文上。北史,開元占經,王應麟玉海,正字通,顏氏家訓并作暅無之字。

⑰ 宋沈括夢溪筆談卷一,第二頁。

⑱ 隋書卷三四,志第二九,經籍三,子。隋書卷一六考證,(臣召南)按:『經籍志有:綴術六卷,不言撰人,當即祖冲之所著也。南史祖冲之傳作:注九章,造綴述數十篇,則訛以術爲述字。』

⑲ 舊唐書卷四七,經籍志第二七,經籍下。算經十書本,宋李籍周髀算經音義第三頁,亦稱:『祖冲之……撰綴術五卷。』又算經十書本,唐王孝通上緝古算經表,則稱:『祖暅之綴術曾不覺方邑進行之術,全錯不通;芻甍方亭之間,於理未盡。』

⑳ 九章算術卷四,第一七頁,算經十書本。

㉑ 唐李延壽,北史卷八九,列傳第七七,藝術上,……信都芳。按祖暅被擄,當在徐州(公元 525 年)以延明討徐州在孝昌元年(公元 525 年)也。

第十一章　祖冲之割圓術

隋書,稱:『祖冲之更開密法,以圓徑一億爲一丈。圓周:盈數,二(當作三)丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽;朒數,三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽。正數在盈朒之間。密率,圓徑一百一十三,圓周三百五十五;約率,圓徑七,周二十二。又設開差冪,開差立,兼以正圓參之。指要精密,算氏之最也。所著之書,名爲綴術,學官莫能究其深奧,是故廢而不理。』[1]蓋冲之因 $3.1415926<\pi<3.1415927$,以 π 之正數,$\pi=3.14159265$,密率,$\pi=\frac{355}{113}$,約率,$\pi=\frac{22}{7}$ 也。[2]晉書,隋書並稱:『周禮㮚氏爲量,鬴深尺,內方尺,而圜其外,其實一鬴。…祖冲之以算術考之,積凡一千五百六十二半方寸,而圓其外,減傍一釐八毫,其徑一尺四寸一分四毫七秒二忽有奇,而深尺,即古斛之制也。』[3]

蓋

$$\tfrac{1}{2}\times 14.10472=7.05236 \qquad \text{(半徑)}$$

$$(7.05236)^2=49.7357815696 \qquad \text{(半徑冪)}$$

$$\pi=3.14159265 \qquad \text{(祖冲之圓率)}$$

$$10\pi\times(7.05236)^2=1562.47915391993122344$$

$$=1562.5\text{(立)方寸}. \qquad \text{(容積)}$$

其校劉歆斛銘,亦用 $\pi=3.14159265$。清李潢謂:劉徽九章注方田,自晉武庫以下,疑是祖冲之語。[4]冲之亦曾注九章,後人或以所註九章文,竄入徽注中。故梅文鼎云劉徽祖冲之以割六觚起數,而數理精蘊亦云祖冲之以圓容六邊起算

也。●此節注文稱:『全徑二尺與周數通相約,徑得一千二百五十,周得三千九百二十七,即其相之率。若此者蓋盡其纖微矣。舉而用之,上法仍約耳。當求一千五百三十六觚之一面,得三千七十二觚之冪,而裁其微分。』●

至 $\pi=\frac{3927}{1250}$ 之求法,冲之九章注亦言之,蓋劉徽因

$n=48$ 時　S_{96} 或 $\pi_{48}=3.13\frac{584}{625}$.

$n=96$ 時　S_{192} 或 $\pi_{96}=3.14\frac{64}{625}$.

而差冪,$S_{192}-S_{96}=3.14\frac{64}{625}-3.13\frac{584}{625}=\frac{105}{625}$.

以差冪加入 S_{192},即:$3.14\frac{64}{625}+\frac{105}{625}=3.14\frac{169}{625}$. 劉徽以其數太大,故僅用 $\pi=3.14$。祖冲之則因

$n=96$ 時　S_{192} 或 $\pi_{96}=3.14\frac{64}{625}$

於差冪 $\frac{105}{625}$ 中,取其 $\frac{36}{625}$,● 加入 S_{192} 得 $\pi=3.14\frac{64}{625}+\frac{36}{625}=3.14\frac{4}{25}$ $=\frac{3927}{1250}$. 隋書所謂:『又設開差冪,』或即指此方法而言。●

至 $\pi=\frac{355}{113}$ 之求法,錢寶琮以為或由何承天調日法算得。即 $\pi=\dfrac{157+22\times9}{50+7\times9}=\frac{355}{113}$。其率視德人鄂圖(Valentinus Otto,或Valentin Otho,— 作 Parthenopolitanus)於公元一五七三年所述者,● 蓋先千一百餘年。

● 隋書卷一六,律曆志第一一,律曆上。

● 唐李淳風,注九章算術卷四,張丘建算經卷上;宋楊輝田畝比類乘除捷法卷上;及元李冶,益古演段卷中,皆稱 $\pi=\frac{22}{7}$ 為密率。

● 晉書卷一六,『嘉量』條。隋書卷一六,『嘉量』條。

● 李潢九章算術細草圖說,卷一,第三五頁。

● 清梅文鼎三角法舉要卷一,補遺二,第一六頁,曆算全書本,柏鄉魏荔彤輯刊,雍正元年(公元1723年)。又數理精蘊下編,卷一五,面部五,割圜。

● 今假定祖冲之推算步驟,與劉徽相同,令半徑 $r=1.0000000$,則 $n=1536$ 時, S_{3072} 或 $\pi_{1536}=3.14159078^{4}$,可於下表見之:

	由六邊形求一二邊形	由一二邊形求二四邊形
弦, r	1.00000000	1.00000000
句, $\frac{l}{2}$	0.50000000	$\frac{0.51763809}{2}$
股, $\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}$	0.86602540^{4}	0.96592582^{6}
弦冪, r^2	1.0000000000000000	1.0000000000000000
句冪, $\left(\frac{l}{2}\right)^2$	0.2500000000000000	$\frac{0.2679491923733632}{4}$ $=0.0669872980933408$
股冪, $r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2$	0.7500000000000000	0.9330127019066592
小句, $r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}$	0.13397459^{6}	0.03407417^{4}
小股, $\frac{l}{2}$	0.50000000	$\frac{0.51763809}{2}$
小弦, $\sqrt{\left[r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}\right]^2+\left[\frac{l}{2}\right]^2}$	$0.51763809^{0}=l_{12}$	$0.26105238^{4}=l_{24}$
小句冪, $\left(r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}\right)^2$	0.0179491923733632^{16}	0.0011610493337822^{16}
小股冪, $\left(\frac{l}{2}\right)^2$	0.2500000000000000	0.0669872980933408
小弦冪, $\left(r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}\right)^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2$	0.2679491923733632	0.0681483474271230

	由二四邊形求四八邊形	由四八邊形求九六邊形
弦, r	1.00000000	1.00000000
句, $\frac{l}{2}$	$\frac{0.26105238}{2}$	$\frac{0.13080625}{2}$
股, $\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}$	0.99144486^{1}	0.99785892^{1}
弦冪, r^2	1.0000000000000000	1.0000000000000000

句冪, $\left(\frac{l}{2}\right)^2$	$\frac{0.0681483474271230}{4}$	$\frac{0.0171102772600900}{4}$
	$=0.0170370868567807$	$=0.0042775693150225$
股冪, $r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2$	0.9829629131432193	0.9957224306849775
小句, $r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}$	0.00855513^{9}	0.00214107^{7}
小股, $\frac{l}{2}$	$\frac{0.26105238}{2}$	$\frac{0.13080625}{2}$
小弦, $\sqrt{\left[r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}\right]^2+\left[\frac{l}{2}\right]^2}$	$0.13080625^{9}=l_{48}$	$0.06543816^{9}=l_{96}$
小句冪, $\left(r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}\right)^2$	0.0000731901033093^{21}	0.0000045812107199^{22}
小股冪, $\left(\frac{l}{2}\right)^2$	0.0170370868567807	0.0042775693150225
小弦冪, $\left(r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}\right)^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2$	0.0171102772600900	0.0042821535257424

	由九六邊形求一九二邊形	由一九二邊形求三八四邊形
弦, r	1.00000000	1.00000000
句, $\frac{l}{2}$	$\frac{0.06543816}{2}$	$\frac{0.03272346}{2}$
股, $\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}$	0.99946458^{7}	0.99986613^{4}
弦冪, r^2	1.0000000000000000	1.0000000000000000
句冪, $\left(\frac{l}{2}\right)^2$	$\frac{0.0042821535257424}{4}$	$\frac{0.0010708250485161}{4}$
	$=0.0010705383814356$	$=0.0002677062621290$
股冪, $r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2$	0.9989294616185644	0.9997322937378710
小句, $r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}$	0.00053541^{5}	0.00013386^{4}
小股, $\frac{l}{2}$	$\frac{0.06543816}{2}$	$\frac{0.03272346}{2}$

小弦，$\sqrt{\left[r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}\right]^2+\left[\frac{l}{2}\right]^2}$	$0.03272346^{8}=l_{192}$	$0.01636227^{9}=l_{384}$
小句冪，$\left(r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}\right)^2$	0.0000002866670805^{69}	0.0000000179190350^{44}
小股冪，$\left(\frac{l}{2}\right)^2$	0.0010705383814956	0.0002677062621290
小弦冪 $\left(r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}\right)^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2$	0.0010708250465161	0.0002677241811640

	由三八四邊形求七六八邊形	由七六八邊形求一五三六邊形
弦，r	1.00000000	1.00000000
句，$\frac{l}{2}$	$\frac{0.01636227}{2}$	$\frac{0.00818120}{2}$
股，$\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}$	0.99996653^{4}	0.99999163^{5}
弦冪，r^2	1.0000000000000000	1.0000000000000000
句冪 $\left(\frac{l}{2}\right)^2$	$\frac{0.0002677241811640}{4}$	$\frac{0.0000669321652641}{4}$
	$=0.0000669310452910$	$=0.0000167330413160$
股冪，$r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2$	0.9999330689547090	0.9999832669586840
小句，$r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}$	0.00003346^{6}	0.00000836^{5}
小股，$\frac{l}{2}$	$\frac{0.01636227}{2}$	$\frac{0.00818120}{2}$
小弦，$\sqrt{\left[r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}\right]^2+\left[\frac{l}{2}\right]^2}$	$0.00818120^{8}=l_{768}$	$0.00409061^{8}=l_{1536}$
小句冪，$\left(r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}\right)^2$	0.0000000011199731^{56}	0.0000000000699899^{56}
小股冪，$\left(\frac{l}{2}\right)^2$	0.0000669310452910	0.0000167330413160
小弦冪，$\left(r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}\right)^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2$	0.0000669321652641	0.0000167331113059

		$S_{3072}=1536\times\frac{r\times l_{1536}}{2}$
		$\pi_{1536}=3.14159078$[4]

● 其餘未詳,或取[illegible]之[illegible],亦當作[illegible],則[illegible]蓋舉成數而言。祖沖之或已認弧矢形之近似面積爲A=[illegible]bc。

● 九章算術卷一,第一四頁,算經十書本。

● Enestrom, Bibliotheca Mathematica, Leipzig, XIII. (3), p. 264.

第十二章　中古數學家小傳

(五) 梁:庾曼倩,張纘;後魏:元延明,殷紹,高允,信都芳,夏侯陽;後周:甄鸞。

庾曼倩　字世華。新野人也。梁世祖在荊州,辟爲主簿。遷中錄事。轉諮議參軍。疏注算經,及七曜曆術。❶

張纘　著算經異義一卷,見隋書經籍志。❷南史稱:張纘,字伯緒。范陽方城人。尙(梁)武帝第四女富陽公主。太淸二年(公元548年)徙授領軍。俄改雍州刺史,卒。❸此二張纘未知是否一人。

元延明　安豐王猛子。亦稱安豐王延明。延昌初(公元512年)散家財拯饑。延明博極羣書,鳩集圖書萬有餘卷。正光三年(公元522年)詔延明定服章。正光中(公元520-525年)受詔監修金石,博採古今樂事。孝昌元年(公元525年)元法僧反,詔爲東道行臺徐州大都督,共討徐州。二年(公元526年)從驃騎大將軍徐州刺史遷爲儀同三司。莊帝時元灝入洛,延明受灝委寄。永安二年(公元529年)七月,灝敗,延明南奔;死於江南。延明撰五經宗略二十三卷,一作四十卷。以河間人信都芳工算術,引之在館,共撰古今樂事九章十二圖。又集器準九篇,芳別爲之注。❹

殷紹　長樂人也。達九章七曜。太武(公元424-451年)時爲算生博士,給事西曹。太安四年(公元458年)上書稱其受九章

要術於成公興,[5] 受九章數學法要於道人法穆。[6]

高允　字伯恭。渤海蓨人也。神䴥四年(公元431年)徵拜中書博士。遷侍郎。生魏登國五年(公元390年)。卒太和十一年(公元487年)正月。年九十八。允尤明算法,爲算術三卷。[7]

信都芳　字玉琳。河間人也。少明算術,爲州里所稱。後爲安豐王延明召入賓館。延明家有羣書,欲鈔集五經算事爲五經宗,及古今樂事爲樂書,又爲器準,並令芳算之。會延明南奔,芳乃自注樂書七卷,器準三卷,黃鐘算法二十卷。又注重差句股,周髀四術,一作著四術周髀宗。武定中(公元543-550年)卒。[8]

夏侯陽　著夏侯陽算經三卷。[9] 今本乃韓延所傳,而以已說纂入之,序亦當爲延所作。戴震擬韓延爲隋人。[10] 茲擬夏侯陽爲後魏時人,似較切當。[11] 其說視古,略有更革:定位之法,以本位爲身,他位爲外;相乘之辨,謂單位曰因,多位曰乘;又以倍,折代乘除;以添,減之誼,致用於身外,隔位,故有隔位加幾,身外減幾之說。其後宋楊輝乘除通變算寶,元李治益古演段,多宗其說。其引時務云:十乘加一等,百乘加二等,$(10=10^1, 100=10^2, \cdots\cdots)$ 十除退一等,百除退二等,$(\frac{1}{10}=10^{-1}, \frac{1}{100}=10^{-2}, \cdots\cdots)$,則具指數之義。唐李淳風所注海島稱:退位一等,退位二等,說亦本此。中半$(\frac{1}{2})$,太半$(\frac{2}{3})$,少半$(\frac{1}{3})$,弱半$(\frac{1}{4})$謂爲漏刻之數,自來曆家並應用之以誌十二辰之分數,爲吾國引用十二進位之一證。[12] 又謂四不等田面積 $A=\frac{a+b}{2}\times\frac{c+d}{2}$,乃與埃及,希臘相同。[13]

甄鸞　字叔遵。● 北周漢中郡守,司隸校尉。夏侯陽算經言斛法不同,謂:梁大同元年(公元535年)甄鸞校之。隋書引甄鸞算術云:玉升一升,得官斗一升三合四勺。按玉升於周保定五年(公元565年)頒行,是甄鸞入周尚司校斛法也。●(後周)武帝時(公元561 577年)鸞造甲寅元曆,隋書有周天和(公元566年)年曆一卷。● 舊唐書稱:『周髀一卷,甄鸞注。又七曜曆算二卷,曆術一卷,九章算經九卷,五曹算經五卷,張丘建算經一卷,並題甄鸞撰。又孫子算經三卷,甄鸞撰注。夏侯陽算經三卷,甄鸞注。數術記遺一卷,徐岳撰,甄鸞注。三等數一卷,董泉撰,甄氏注。』宋史題:『甄鸞注,徐岳大衍算術法一卷。』● 未知是否僞托。今所傳者,有甄鸞注周髀二卷,張丘建算經三卷,並其自撰五經算術二卷(?)。甄鸞亦自設百鷄問二題,如:

$$\left.\begin{aligned} 5x+4y+\tfrac{1}{4}z&=100,\\ x+y+z&=100, \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} x&=15,\\ y&=1,\\ z&=84; \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y+\tfrac{1}{3}z&=100,\\ x+y+z&=100, \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} x&=8,\\ y&=14,\\ z&=78. \end{aligned}$$

● 唐姚思廉梁書卷五一,列傳第四五,處士…庾詵,…。

● 隋書卷三四,志第二九,經籍三。

● 南史卷五六,列傳第四六,張弘策子纘。

❹　北齊魏收魏書卷二〇,列傳第八,安豐王。並參看同書卷九,帝紀九,肅宗紀;卷一〇,帝紀一〇,孝莊紀;卷一〇九,志第一四,樂五。按隋書卷三二,有:『五經宗略二十三卷,元延明撰,』舊唐書卷四六,新唐書卷五七,並作四十卷。

❺　『成公興字廣明。自云膠東人。…,能達九章算術。…(寇)謙之算七曜有所不了,…興曰:先生試隨興語布之,俄然便決。』見魏書卷一一四,志第二〇,釋老一〇;又卷九一,列傳卷七九,術藝,…殷紹。

❻　北史卷八九,列傳第七七,藝術上,…殷紹,…。魏書卷九一,列傳第七九,術藝,…殷紹,…。

❼　魏書卷四八,列傳第三六,高允。北史卷三一,列傳第一九,高允。并參看同書卷二,魏本紀第二,神䴥四年條。

❽　北史卷八九,列傳第七七,藝術上,……信都芳,……。北齊書卷四九,列傳第四一,方技,…,信都芳…。魏書卷九一,列傳第七九,術化,…。隋書卷一九,天文志第一四,天文上,晷景。甄鸞注周髀算經卷上,第一六頁,算經十書本。新唐書卷五九,藝文志卷四九。按隋書卷三二,有:『樂書七卷,後魏丞相士曹參軍信都芳撰。』同書卷三四,有:『器準圖三卷。』又舊唐書卷四六,新唐書卷五七,並作:『樂書九卷,信都芳注。』

❾　隋志作二卷,唐志作一卷,文獻通考作一卷,直齋書錄解題作三卷,元豐京監本。見直齋書錄解題卷一四,第一二頁。

❿　夏侯陽算經跋,算經十書本。夏侯陽算經目錄,武英殿聚珍本。

⓫　其『定脚價』條,有『從納洛州』之語。魏書卷一〇六,中,志第六,地形二中,稱:洛州,『太宗置,太和十七年改爲司州,天平初復。』其『分祿科,』有:太守,別駕,司馬,錄事參軍,司倉參軍,司法參軍,司戶參軍,參軍等名目。按魏書食貨志稱:『公田:太守十頃,治中別駕八頃,』與『分祿科,』太守十分,別駕七分,約略相合。且隋已改別駕爲長史,而法曹僅有行參軍,並無參軍,則算經所記者,爲後魏制度,而夏侯陽爲後魏人矣。

⑫ 如魏楊偉景初曆(237),令$\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4}$為少,半,太;$\frac{1}{12},\frac{1}{12}$為強,小弱;各加於上三數,得$\frac{4}{12},\frac{7}{12},\frac{10}{12}$為少強,半強,太強;$\frac{5}{12},\frac{8}{12},\frac{11}{12}$為少弱,太弱,一辰強。元嘉曆(公元445年)因之。見宋書卷一二,一三,志第二,三,曆上,下。隋劉焯有小($\frac{3}{12},\frac{1}{4}$),小太或少($\frac{4}{12},\frac{1}{3}$),半少($\frac{5}{12}$),半($\frac{6}{12},\frac{1}{2}$),半太($\frac{7}{12}$),大少或太($\frac{8}{12},\frac{2}{3}$),大($\frac{9}{12},\frac{3}{4}$),大太($\frac{10}{12},\frac{5}{6}$),窮辰少($\frac{11}{12}$),全($\frac{12}{12}$,1)之稱。古代羅馬亦用十二進小數。

⑬ 以上所舉見算經十書本夏侯陽算經。并參看海島算經,緝古演段,楊輝算法,數書九章,算學啓蒙。

⑭ 『隋書經籍志:(後魏)甄叔遵撰七曜本啓三卷唐藝文志:七曜本啓五卷,甄鸞撰。叔遵或即鸞之字也。』見黃鍾駿疇人傳四篇卷三,第一三頁,光緒戊戌(公元1898年)家刻本。

⑮ 夏侯陽算經卷上,第五頁,算經十書本。又隋書卷一六,志第一一,律曆上。

⑯ 隋書卷三四,志第二九,經籍三。

⑰ 隋書卷一七,律曆志第一二,律曆中。舊唐書卷四七,經籍志第二七,經籍下。宋史卷二〇七,藝文志第一六〇,藝文六。

第十三章　五曹算經

四庫提要,稱:『隋書經籍志有:九章六曹算經一卷,❶而無五曹之目。其六曹篇題亦不傳。唐書藝文志有甄鸞五曹算經五卷,韓延五曹算經五卷,李淳風注五曹,孫子等算經二十卷,魯靖新集五曹時要術三卷。❷甄,韓二家皆注是書者也。其作者則不知爲誰。考漢書,梅福上書言,臣聞齊桓之時,有以九九見者,(唐)顏師古注云:九九算術若今九章,五曹之輩。❸……唐書選舉志稱孫子,五曹共限一歲,❹……姑斷以甄鸞之注,則其書確在北齊前耳。……夏侯陽算經引田曹,倉曹者二,引金曹者一,而此(永樂大典本五曹算經)書,皆無其文。』❺至後來之演其說者:宋史題甄鸞五曹算經二卷,李淳風注,甄鸞五曹算法二卷,程柔五曹算經求一法三卷,魯靖五曹時要算術三卷,五曹乘除見一捷例算法一卷,五曹算經五卷李淳風注。❻今考夏侯陽算經所題四不等田之計算,與五曹算經同術,則其書或在後魏,北周間。

❶ 隋書卷三四,志第二九,經籍三。

❷ 此據新唐書卷五九,藝文志第四九。舊唐書卷四七,經籍志第二七,則作:『五曹算經五卷,甄鸞撰;又五曹算經三卷,甄鸞撰。』

❸ 前漢書卷六七列傳第三七,……,梅福。

❹ 新唐書卷四四,志第三四。

❺ 五曹算經目錄第一至二頁,武英殿聚珍本。

❻ 宋史卷二〇七,藝文志第一六〇,藝文六。按崇文目作一卷,宋紹興續書目作三卷。

第十四章　五經算術

四庫提要云:『隋書經籍志有五經算術一卷,五經算術錄遺一卷,皆不著撰人姓名。唐藝文志,則有李淳風注五經算術二卷,亦不言爲誰所撰。今考是書……悉加「甄鸞按」三字於上,則是書當卽鸞所撰。』❶按元延明鈔集五經算事爲五經宗,在甄鸞之前,事見魏書,❷隋書,新唐書且著錄其卷數。❸今所傳者旣不著撰人姓氏,而四庫提要乃斷爲甄鸞所作,實屬未妥。

❶ 五經算術,四庫提要。

❷ 魏書卷一〇,二〇及九一。

❸ 隋書卷三二,新唐書卷五七。

第十五章　籌算之方法

第一節　籌位

孫子算經曰:『凡算之法,先識其位,一從十橫,百立千僵,千十相望,萬百相當。』又曰:『六不積,五不隻。』❶夏侯陽算經曰:『夫乘除之法,先明九九,一從十橫,百立千僵,千十相望,萬百相當。滿六已上,五在上方,六不積聚,五不單張。』❷蓋籌之記數,五以下以一籌各當一,五以上者,以一籌當五,餘籌各當一。一至九縱列之,一十至九十橫列之。以後縱橫相間,布列成數。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
縱者爲	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
橫者爲	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

如有數六七二八則作𝍮𝍦𝍪𝍧,又六七〇八則作𝍮𝍦 𝍧。亥有二首六身之說,爲春秋時用籌之證。❸秦時『貨貝錢』中有一錢,第三字『𝍮』爲六之省。新莽泉布則作『𝍥』爲六,更作『𝍦,𝍧,𝍨』爲七,八,九。亦從一橫爲五,以𝍡,𝍢,𝍣遞增其數。❹此則秦,漢籌法之可考者。

❶ 孫子算經卷上,第一一頁,算經十書本。

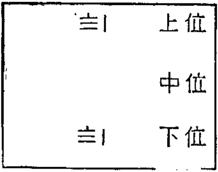
❷ 夏侯陽算經卷上,第二頁,算經十書本。

● 漢許愼說文:『亥……春秋傳曰:亥有二首六身。』註稱:『左傳襄三十年文。孔氏左傳正義二畫爲首,六畫爲身。按今篆法,祗有五畫,畫周時首二畫,下作六畫,與今篆法不同也。』見說文解字注第二八卷,說文解字第一四篇註下,第四四頁,光緒辛巳(公元1881年),蘇州刊本。

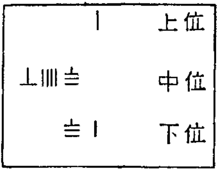
● 清馬昂貨布文字考卷四,第一九至二〇頁,初刻本。

第二節　乘除

孫子算經言乘法,謂:『凡乘之法,重置其位,上下相觀。上位有十步至十,有百步至百,有千步至千。以上命下,所得之數,列於中位。上位乘訖者先去之。下位乘訖者,則俱退之。』● 如 81×81, 列式如:



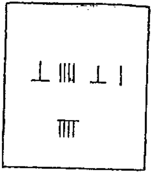
先以 80 乘 81, 即 $80\times81=80\times80+80\times1=6480$, 去 80 位列式爲:



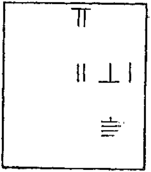
又以 1 乘 81,即 $1\times81=81$ 加入前所得,上下位俱去爲

此與韓克爾(H. Hankel, 1839—1873)所述印度乘法相似。惟印度係中下位重置,得數列上位。[3]

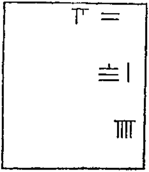
孫子算經言除法,謂:『凡除之法,與乘相異。乘得在中央,除得在上方。實有餘者,以除命之,以法爲母,實爲子。』[4]夏侯陽算經曰:『實居中央。以法除之,宜得上商,從算相似,橫算相當。以次右行,極於左方。言法之上,見十步至十,見百步至百,見千步至千,見萬步至萬。悉觀上數,以安下位。上不滿十,下不滿一,隨步多少,以爲階式。』[5]故6561÷9演算之序,如:



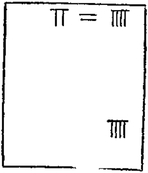
(1)



(2)



(3)



(4)

不盡之數,以分數記之,如 $6562 \div 9 = 729\frac{1}{9}$ 是也。

● 孫子算經卷上,第一一至一二頁,算經十書本。

● Cajori, F, A History of Elementary Mathematics, pp. 96. 97. N. Y. 1917

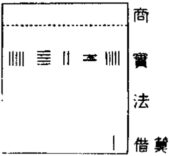
● 孫子算經卷上,第一二頁,算經十書本。

● 夏侯陽算經卷上,第一一頁,算經十書本。

第三節　開方

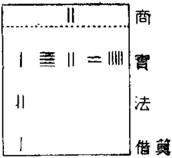
開方說之見於九章算術者,(1) 開平方,謂:

『置積爲實,借一算步之,超一等。』



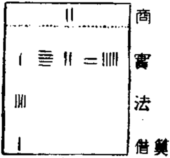
(1)

『議所得,以一乘所借一算爲法,而以除。』



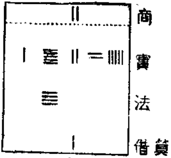
(2)

「除已,倍法,為定法。」



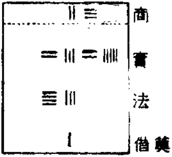
(3)

「其復除,折法而下。」



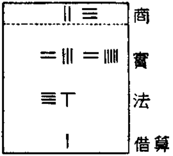
(4)

「復置借算步之如初,以復議一乘之。所得,副,以加定法,以除。」



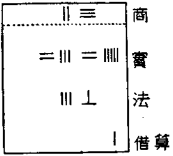
(5)

『以所得,副,從定法。』



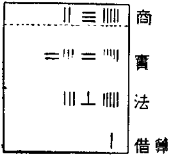
(6)

『復除折下。』



(7)

『如前開之。(議所得,以一乘所借一算爲法,而以除,適盡。)』



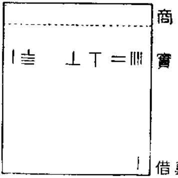
(8)

其後孫子算經,張丘建算經,夏侯陽算經,五經算術,開元大衍曆經,宋賈憲立成釋鎖幷言開平方除。[1]孫子等書稱法曰方法,借算曰下法。其第五,六段與九章算術少廣章所述稍異。九章稱:(5)『復置借算步之如初,以復議一乘之。所得副以加定法,以除。』(6)『以所得副從定法。』孫子等書則稱:(5)『復置上商,以次前商;(上商單位乘上商首位,如爲百乘百,爲十乘十,爲一乘一,)副置於方法之下,下法之上,名曰隅法;以方,隅二法,皆命上商,以除實。』(6)『除訖,倍隅法,從方法。』宋劉益帶從開方,『益積及益隅法,』布置應列五級,亦憑此說。

開方初商以後,求次,三商已爲帶從開方式,故九章張丘建常言及此。而唐王孝通緝古算經則擴爲四次式。

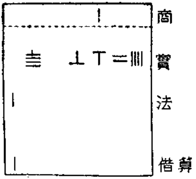
開方說之見於九章算術者,(2)開立方,謂:

『置積爲實,借一算步之,超二等。』



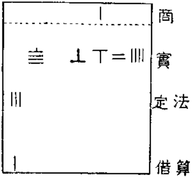
(1)

『議所得,以再乘所借一算爲法,而除之。』



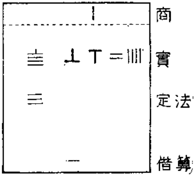
(2)

『除已,三之,爲定法。』



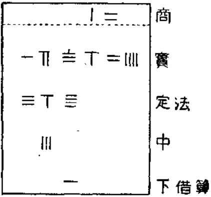
(3)

『復除折而下。』



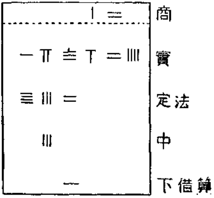
(4)

「以三乘所得置中行,復借一算置下行:步之,中超一,下超二位。復置議以一乘中,再乘下,皆副以加定法,以定法除。」



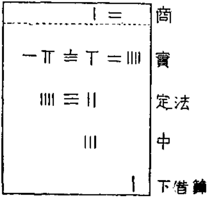
(5)

「除已倍下併中,從定法。」



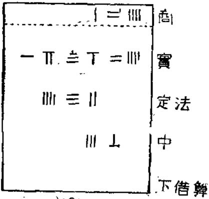
(6)

「復除折下。」



(7)

『如前開之。』



(8)

開方說之見於張丘建算經者，(2) 開立方除，謂：

(1)『借一算子於下為下法，常超二位，步至10^n。』

	商
34012224	實
	方法
	廉法
	隅
1	下法

(1)

(2)『上商x_1置10^n位下，置$x_1^2\,(10^n)^3$於下法之上，名曰方法。以法命上商，除實。』

3	商
7012224	實
9	方法
	廉法
	隅
1	下法

(2)

(3)「方法三因之,又置 $x_1(10^n)^3$ 於方法之下,名曰廉法。三因之。」

3	商
7012224	實
27	方法
9	廉法
	隅
1	下法

(3)

(4)「方法一退,廉法二退,下法三退。」

3	商
7012224	實
27	方法
9	廉法
	隅
1	下法

(4)

(5)「又置 x_2 於上商 10^{n-1} 位下,置 $x_2^2\cdot(10^{n-1})^3$ 於下法之上,名曰隅法。以 x_2 乘廉法。以方廉,隅三法皆命上商,除實。」

32	商
1244224	實
27	方法
18	廉法
4	隅
1	下法

(5)

(6)『畢,又倍廉法,三因隅法,皆從方法,又置$(x_1\cdot10^n+x_2\cdot10^{n-1})$於方法之下,三因之,名曰廉法。』

32	商
1244224	實
3072	方法
96	廉法
	隅
1	下法

(6)

(7)『方法一退,廉法再退,下法三退。』

32	商
1244224	實
3072	方法
96	廉法
	隅
1	下法

(7)

(8)『又置 x_3 於上商 10^{n-2} 位下,置 $x_3^2\cdot(10^{n-2})^3$ 於下法之上,名曰隅法。以 x_3 乘廉法,以方,廉,隅,三法,皆命上商,除實。』❶

324	商
1244224	實
3072	方法
384	廉法
16	隅
1	下法

(8)

開平方不盡，在周髀則僅題『有奇』，在九章則有『以面命之』之說。此外又有下之三式:

(一) 不加借算，孫子算經:

$$\sqrt{234567}=484\frac{311}{968},\quad \text{卽}\quad \sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a}.$$

(二) 加借算，如張丘建算經:

$$\sqrt{175692}=419\frac{131}{839},\quad \text{卽}\quad \sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a+1}.$$

$$\sqrt{13068}=114\frac{72}{229}.$$

又五經算術:

$$\sqrt{9000000000}=94868\ \frac{62576}{189737},$$

及甄鸞註周髀算經:

$$\sqrt{14208000000}=119197\frac{75191}{238395}.$$

(三) 以奇命之，如夏侯陽算經:

$$\sqrt{522900}=723\ \text{奇}\ 171。$$

就中以奇命之，祇可視爲一種記法。魏劉徽註九章少廣章:『開之不盡者，爲不可開，當以面命之，』稱:『……故惟以面命之，爲不失耳。譬猶以三除十，以其餘爲三分之一，而復，其數可舉，』當是『以奇而之』之法也。至小數開方之法，劉徽註九章實著其說，謂『加定法如前，求其徽數，徽數無名者，以爲分子，其一退以十爲母，其再退以百爲母，……退之彌下，其分彌

細,』故:

$$\sqrt{\frac{314}{25}\times1518\frac{3}{4}}=138.1=138\frac{1}{10}$$

$$\sqrt{\frac{314}{25}\times300}=61.38=61\frac{38}{100}=61\frac{19}{50}.$$

至孫子算經,張丘建算經有以方五斜七爲率,非開方之正軌也。

開立方不盡,張丘建算經,唐劉孝孫細草,謂:

$$\sqrt[3]{1572864}=116\frac{11968}{40369},\text{ 即 }\sqrt[3]{a^3+r}=a+\frac{r}{3a^2+1}.$$

$$\sqrt[3]{1293732}=108\frac{34020}{34993},$$

❶ 孫子算經卷中第七至八頁,張丘建算經卷中,第一八至一九頁,夏侯陽算經卷上,第一二至一三頁,五經算術卷上,第八至一〇頁,算經十書本,舊唐書卷三四,志第一四,曆三,宋楊輝詳解九章算法纂類。

❷ 此據張丘建算經卷下,唐劉孝孫細草演述。

第四節　方　程

九章方程術以一行爲主,徧乘諸行,作一度或幾度減之,以頭位減盡爲度,謂之『直除』,如:

$3x+2y+z=39,$

$2x+3y+z=34,$

$x+2y+3z=26.$

列式爲:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 3, & 2, & 1, & 39 \\ 2, & 3, & 1, & 34 \\ 1, & 2, & 3 & 26 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc|c} 3, & 2, & 1, & 39 \\ 6, & 9, & 3, & 102 \\ 3, & 6, & 9 & 78 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc|c} 3, & 2, & 1, & 39 \\ 0, & 5, & 1, & 24 \\ 0, & 4, & 8 & 39 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 3, & 2, & 1, & 39 \\ 0, & 5, & 1, & 24 \\ 0, & 20, & 40 & 195 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{ccc|c} 3, & 2, & 1, & 39 \\ 0, & 5, & 1, & 24 \\ 0, & 0, & 36 & 99 \end{array}\right|, \quad \therefore z=\frac{99}{36}=2\frac{3}{4}.$$

又如:

$$-2x+5y-13z=1000,$$

$$3x-9y+3z=0,$$

$$-5x+6y+8z=-600.$$

亦如直除法。其後張丘建算經唐劉孝孫細草尙應用其法孫子算經卷下乃稍變其術,如:

$$2x+y=96,$$

$$2x+3y=144,$$

列式如:

$$\left|\begin{array}{cc|c} 2, & 1, & 96 \\ 2, & 3 & 144 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|c} 4, & 2, & 192 \\ 4, & 6 & 288 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|c} 4, & 2, & 192 \\ 0, & 4 & 92 \end{array}\right| \quad \because y=\frac{96}{4}=24.$$

劉徽注九章算術於下列一題:

$$9x+7y+3z+2v+5w=140,$$

$$7x+6y+4z+5v+3w=128,$$

$$3x+5y+7z+6v+4w=116,$$

$$2x+5y+3z+9v+4w=112.$$

$x+3y+2z+8v+5w=95.$

有方程新術及其一術并用約法,甚簡要。其後宋楊輝詳解九章算法於方程,術以甲行首位徧乘其乙,復以乙行首位徧乘其甲,求其有等,以少行減多行,……行繁者次第求之。❷

❶　按籌算列位,應作:

𝍠	𝍠	𝍢	上禾乘數
𝍡	𝍢	𝍡	中禾乘數
𝍢	𝍠	𝍠	下禾乘數
𝍪𝍥	𝍫𝍣	𝍫𝍨	共實斗數
左行,	中行,	右行。	

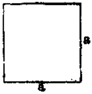
玆爲簡便起見,列式如此,餘倣此。

❷　九章算術卷八,第一頁,第一題;第八頁,第八題;第一四頁,第末題。張丘建算經卷下,第一一頁至一四頁。孫子算經第一一頁至一二頁,算經十書本。詳解九章算法第四三頁,宜稼堂叢書本。

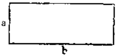
第十六章　中古平面立體形之計算

中古晉平面立體形之計算者,有: (1) 九章算術, (2) 孫子算經, (3) 張丘建算經, (4) 五曹算經, (5) 夏侯陽算經。玆分列如下:

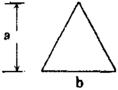
(一) 平方形(square): (1) 方田, $S=a^2$; (3) 方田, $S=a^2$; (4) 方田, $S=a^2$; (5) 方田,$S=a^2$。



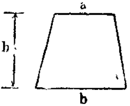
(二) 矩形(rectangle): (1) 廣田, $S=ab$; (4) 直田, $S=ab$; (5) 直田, $S=ab$。



(三) 三角形(triangle): (1) 圭田, $S=\frac{ab}{2}$; (4) 圭田, $S=\frac{a+o}{2}\times b$; (5) 圭田, $S=\frac{ab}{2}$。



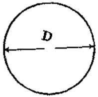
(四) 梯形(trapezium): (1) 斜田,箕田, $S=\frac{a+b}{2}\times h$; (4) 簫田, 箕田, $S=\frac{a+b}{2}\times h$; (5) 箕田, $S=\frac{a+h}{2}\times h$。



(五) 圓(circle)：(1) 圓田, $S=\frac{P}{2}\times\frac{D}{2}$, 而 $P=2\pi r$;

(2) 圓田, $S=\frac{P}{2}\times\frac{D}{2}$; (3) 圓田, $S=\frac{P}{2}\times\frac{D}{2}$;

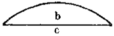
(4) 圓田, $S=\frac{P}{2}\times\frac{D}{2}$; (5) 圓田, $S=\frac{P}{2}\times\frac{D}{2}$。



(六) 弓形(segment of circle)：(1) 弧田,

$S=\frac{bc+b^2}{2}$; (3) 弧田, $S=\frac{bc+b^2}{2}$;

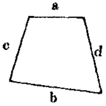
(5) 弓田, $S=\frac{bc+b^2}{2}$。



(七) 四邊形(trapezoid)：(4) 四不等田,

$S=\frac{a+b}{2}\times\frac{c+d}{2}$; (4) 四不等田,

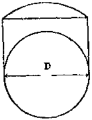
$S=\frac{a+b}{2}\times\frac{c+d}{2}$。



(八) 球缺 (spherical segment)：(1) 宛田,

$S=\frac{P\times D}{4}$; (2) 丘田, $S=\frac{P}{2}\times\frac{D}{2}$; (4)

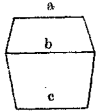
邱田, $S=\frac{P}{2}\times\frac{D}{2}$; (5) 丸田, $S=\frac{P\times D}{4}$。



(九) 鼓形：(4) 鼓田, 腰鼓田, 蛇田,

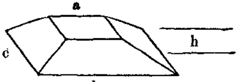
$S=\frac{a+b+c}{3}\times h$; (5) 腰鼓田,

$S=\frac{a+b+c}{3}\times h$。



(一〇) 楔之平截體(frustum of wedge):

(1) 城,垣,隄,溝,壍,渠,

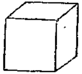


$V=\frac{a+b}{2}\times c\times h$;

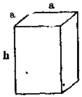
(2) 城,隄,溝,渠,

$V=\frac{a+b}{2}\times c\times h$; (3) 城,牆, $V=\frac{a+b}{2}\times c\times h$。

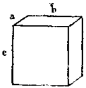
(一一) 立方(cube): (1) 立方, $V=a^3$; (2) 方, $V=a^3$; (3) 立方, $V=a^3$。



(一二) 平行六面體(parallelopiped): (1) 方堡壔, $V=a^2h$。

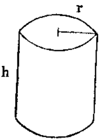


(一三) 平行六面體 (parallelopiped): (1) 倉, $V=abc$; (2) 方窖, $V=abc$; (4) 倉,方窖, $V=abc$; (5) 方窖, $V=abc$。

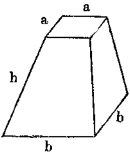


(一四) 球(sphere): (1) 立圓, $V=\frac{9}{16}D^3$; (3) 立圓, $V=\frac{9}{16}D^3$。

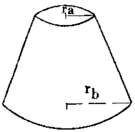
(一五) 圓柱 (cylinder): (1) 圓堡壔,圓囷, $V=(\pi r^2)h$; (2) 圓窖, $V=(\pi r^2)h$; (3) 圓堡壔, $V=(\pi r^2)h$; (4) 圓倉, $V=(\pi r^2)h$。



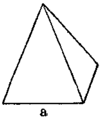
(一六) 角臺 (frustum of pyramid): (1) 方亭, $V=(a^2+b^2+ab)\times\frac{h}{3}$; (3) 方亭,窖, $V=(a^2+b^2+ab)\times\frac{h}{3}$。



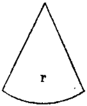
(一七) 圓臺 (frustum of cone): (1) 圓亭, $V=\pi(r_a{}^2+r_b{}^2+r_ar_b)\times\frac{h}{3}$; (3) 圓圌, $V=\pi(r_a{}^2+r_b{}^2+r_ar_b)\times\frac{h}{3}$; (5) 圓篅, $V=\pi(r_a{}^2+r_b{}^2+r_ar_b)\times\frac{h}{3}$。



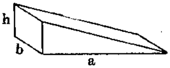
(一八) 角錐 (pyramid): 方錐, 陽馬, $V=a^2\times\frac{h}{3}$,



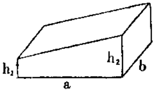
(一九) 錐(cone): (1) 圓錐, $V=(\pi r^2)\times\frac{h}{3}$; (2) 聚粟, $V=(\pi r^2)\times\frac{h}{3}$; (3) 委粟, $V=(\pi r^2)\times\frac{h}{3}$; (4) 聚粟, $V=(\pi r^2)\times\frac{h}{3}$。



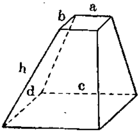
(二〇) 角錐(prism): (1) 塹堵, $V=ab\times\frac{h}{2}$。



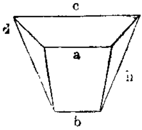
(二一) 平行六面體截體 (frustum of parallelopiped): (3) 倉, $V=ab\times\frac{h_1+h_2}{2}$。



(二二) 角錐平截體 (frustum of pyramid): (1) 芻童,曲池,盤池,冥谷, $V=\frac{h}{6}[(2h+d)a+(2d+b)c]$; (3) 窖, $V=\frac{h}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]$。

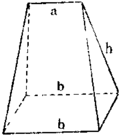


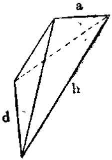
(二三) 楔(wedge): (1) 羨除, $V=\frac{h}{6}\times d\times(a+b+c)$。



(二四) 楔(wedge): (1) 芻甍,

$$V=\frac{h}{6}\times d\times(2b+a).$$





(二五) 楔(wedge): (1) 鼈臑,

$$V=\frac{h}{6}\times d\times a;$$

第十七章　中古數學家小傳

(六) 隋:劉焯,劉炫,韓延。

劉焯　字士元。信都昌亭人也。以儒學知名,爲州博士。隋開皇中與修國史,兼參議律曆,九章算術,周髀,七曜,曆書十餘部。推步日月之經,量度山海之術,莫不覈其根本,窮其秘奧。著稽極十卷,曆書十卷。大業六年(公元610年)卒。年六十七(公元544—610年)。❶

劉炫　字光伯。河間景城人也。爲旅騎尉。與劉焯同時。卒年六十八。著算述一卷,一作算術一卷。❷

韓延　新唐書有韓延,夏侯陽算經一卷,又韓延,五曹算經五卷。❸清戴震斷韓延爲隋代人。❹

❶　北史卷八二,列傳第七〇,儒林下,……劉焯。又隋書卷七五,列傳第四〇,儒林,……劉焯。

❷　北史卷八二,列傳第七〇,儒林下,……劉炫。又隋書卷七五,列傳第四〇,儒林,……劉炫。又册府元龜卷八六九,總錄部一一九。

❸　新唐書卷五九,藝文志第四九。

❹　戴震,夏侯陽算經跋,算經十書本。

第十八章 隋代算學制度及其算書

隋氏始置算學博士於國庠。❶其制度則博士二人,算助教二人,算學生八十人,幷隸於國子寺。❷隋書經籍志有:李遵義疏,九章算術一卷;楊椒撰,九九算術二卷,張峻撰,九章推圖經法一卷,張去斤,算疏一卷,其著作人時代,幷未能詳。而不著撰人者,又有:九章術義序一卷,九章別術二卷,九章六曹算經一卷,五經算術錄遺一卷,五經算術一卷,算法一卷,黃鍾算法三十八卷,算律呂法一卷,衆家算陰陽法一卷。其時國外所輸入者,又有婆羅門算法三卷,婆羅門陰陽算曆一卷,婆羅門算經三卷。❸

❶ 舊唐書卷四四,職官三。

❷ 隋書卷二八,志二三,百官下。

❸ 隋書卷三四,志二九,經籍三。

第三編　中國近古數學

第一章　近古之數學

近古數學爲中國數學最重要之時期。蓋前此所論者,多屬算術範圍,至此乃進爲代數之計算。

近古前期數學,多由政府主持。九章算術諸書,前人傳註,至爲尨雜。至唐李淳風與梁述,王眞儒受詔譯算經十書,顯慶丙辰(公元656年)付國學行用。宋元豐七年(公元1084年)又刊算經十書入祕書省後,流傳始廣。唐初以算學取士。至宋尙沿其制,元豐,崇寧,大觀,宣和之間,算學置廢無常。至元始廢。此皆由政府主持算數事業也。

其後大河東北,算士紛起。成就最大者,有:秦九韶,李治,楊輝,郭守敬,朱世傑,半無祿位。蓋近古後期數學,已由朝廷之主持,進爲民衆之研究矣。

此期又有婆羅門,天竺數學之輸入。同時中算亦輸入百濟,日本。至算盤似亦爲此期產品,惜尙未得確證。

第二章　唐代算學制度

唐初廢算學。顯慶丙辰(公元656年)左僕射于思志寧等奏以十部算經付國學行用。❶同年(公元656年)復置算學。❶其制因隋。有算博士二人,[從九品下],學生三十人。博士掌教文武八品以下及庶人子爲生者。二分其經,以爲之業。習九章,海島,孫子,五曹,張丘建,夏侯陽,周髀十五人。習綴術,緝古十五人。其紀遺,三等亦兼習之。❶學制各爲七歲。第一組,孫子,五曹共限一歲;九章,海島共三歲;張丘建,夏侯陽各一歲;周髀,五經算共一歲。第二組,綴術四歲;緝古三歲;記遺,(董泉)三等數皆兼習之。其考試之法:第一組,凡算學,錄大義本條爲問答;明數造術,詳明術理,然後爲通;試九章三條,海島,孫子,五曹,張丘建,夏侯陽,周髀,五經算各一條,十通六;記遺,三等數,帖讀十得九爲第。第二組,試綴術,緝古,錄大義爲問答者,明數造術,詳明術理,無注者,合數造術,不失義理,然後爲通;試綴術七條,(志云:七條,六典云:六條),緝古三條,(志云:三條,六典云:四條),十通六;記遺,三等數,帖讀十得九爲第;落經者,雖通六不第。❶顯慶二年(公元657年)廢書算律學,龍朔二年(公元662年)二月復置律及書算學,三年(公元663年)以書隸蘭臺,算隸祕閣局,律隸詳刑寺。❶自天寶(公元742—755年)後,學校益廢,生徒流散。元和二年(公元807年)始定員額,西京書算館各十人,東都算館二人而已。然流風

所被,尙有以課吏目者。❻

❶　册府元龜卷八六九。

❷　舊唐書卷四四,及新唐書卷四八,志第三八,百官志。

❸　舊唐書卷四四,職官三,志第二四;按新唐書卷四八,志第三八,百官志,則博士下多助教一人;周髀下多五經算;綴術作記遺。

❹　新唐書卷四四,志第三四,選舉志。

❺　舊唐書卷四,本紀第四,高宗上,及舊唐書卷二四,志第四,禮儀四。

❻　如唐僖宗中和四年(公元884年)乾符中人高彥休唐闕史內『楊尚書補吏』條,載青州楊尚書損,以算術課吏目,言曰:『有夕,道於叢林者,聆羣盜評竊賄之數。且曰:人六匹則長七匹,人七匹則短八匹,不知幾人復幾匹?』令俯階籌之,先得者勝。

第三章　近古數學家小傳

(一) 唐：王孝通。

王孝通　唐高祖武德二年(公元 619 年)擢傅仁均爲員外散騎侍郎。三年(公元 620 年)正月望,及二月,八月朔當蝕,比不效。六年(公元 623 年)詔吏部郎中祖孝孫考其得失。孝孫使算曆博士王孝通以甲辰法詰之。九年(公元 626 年)復詔大理卿崔善爲與孝通等較善爲所改數十條。❶ 舊唐書曆志曰:戊寅術武德九年(公元 626 年)五月二日校曆人:算曆博士臣王孝通。❷ 孝通又著緝古算經。❸ 今傳宋本題:『唐通直郎太史丞臣王孝通撰并注,』而上緝古表又言『少小學算,……迄將皓首。……伏蒙聖期收拾,用臣爲太史丞。比年已來,奉敕校勘傅仁均術,凡駁正術錯三十餘道,即付太史施行。』❹ 觀此則緝古之作,在武德(公元 618—626 年)後,唐太宗(公元 627—644 年)時矣。❶

❶　新唐書卷二五,志第一五,曆志。按崔善爲,舊唐書卷一九一,新唐書卷九一,有傳。

❷　舊唐書卷三二,志第一二,曆一。

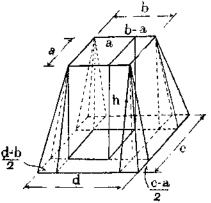
❸　『是書一名緝古算術,唐書藝文志,崇文總目俱稱李淳風註,……又宋志作一卷,唐志,鄭樵,藝文略俱作四卷。王應麟,玉海謂今亡其三,案孝通原表稱二十術。』語見四庫全書提要。按今本緝古算經共二十問。第二,三問各四術,第四至第七問,第九至第十問各二術,餘則每問一術。

❹　緝古算經,『上緝古表』第一及第二頁,算經十書本。

● 清陳杰已主此說,見緝古算經音義第一頁.緝古算經,道光庚子(公元1840年)斐文堂重鐫。

第四章　輯古算經術解上

輯古算經第二問第一術,於仰觀臺:已知上下廣差 $c-a$, 上下袤差 $d-b$, 上廣袤差 $b-a$, 截高 $h-a$。則其積:



$$A=\frac{(c-a)(d-b)}{3}\times h$$

$$+a\times\frac{d-b}{2}\times h+b\times\frac{c-a}{2}\times h$$

$$+a(b-a)\times h+a^2h.$$

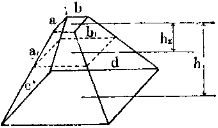
即 $$\frac{(d-b)(c-a)}{3}\times(h-a)$$

$$+\frac{(c-a)(b-a)}{2}\times(h-a)+\left[\frac{(c-a)+(d-b)}{2}+(b-a)\right]\times(h-a)\times a$$

$$+\left[\frac{(d-b)(c-a)}{3}+\frac{(c-a)(b-a)}{2}\right]\times a+\left[(h-a)+(b-a)\right.$$

$$\left.+\frac{(c-a)+(d-b)}{2}\right]\times a^2+1\times a^3=A. \tag{A}$$

就中 $\frac{(d-b)(c-a)}{3}$ 稱為隅陽冪, $\frac{(c-a)(b-a)}{2}$ 稱為隅頭冪, $\frac{(c-a)+(d-b)}{2}$ 稱為正數。a 之係數稱為方法, a^2 之係數稱為廉法。

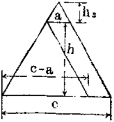
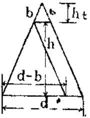


又第二問第二術,於仰觀臺,設臺高 h, 截高

於 h_x，則其積:

$$B=\frac{1}{3}\times\frac{(c-a)(d-b)}{h^2}\times\left[3\times\frac{h\cdot a}{c-a}\times\frac{h\cdot b}{d-b}\times h_x+\frac{3}{2}\left(\frac{h\cdot a}{c-a}+\frac{h\cdot b}{d-b}\right)\times h_x^2+h_x^3\right]. \qquad (B)$$

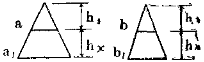
關於第二問第二術曾有自註如下:

『此應三因乙積，臺高再乘，上下廣差乘袤差而一。	$\frac{3B\cdot h^2}{(c-a)(d-b)}$,
又以臺高乘上廣，爲上廣之高，	按術曰：又以臺高乘上廣，廣差而一，爲上廣之高。自注係省文。如圖，上廣之高，$h_s=\frac{h\cdot a}{c-a}$. 
又以臺高乘上袤，爲上袤之高，	此亦係省文，蓋言袤差而一，爲上袤之高，如圖:  $2\times\frac{h\cdot a}{(c-a)}\times\frac{h\cdot b}{(d-b)}$,
爲小冪二。	爲小冪二。 ………………(1)
因下袤之高，爲中冪一。	此句亦係省文，蓋言以上廣

之高,因下袤之高,爲中冪一,

即 $\frac{h\cdot a}{(c-a)}$, $\frac{h\cdot b}{(d-b)}$,爲中冪一.(2)

凡下袤下廣之高,即是截高與上袤上廣之高,相連并數。



如上二圖,h_x 爲截高,則:

$$\text{下袤之高}=h_t+h_x=\frac{h\cdot b_1}{d-b},$$

$$=\frac{h\cdot b}{d-b}+\frac{h(b_1-b)}{d-b};$$

$$\text{下廣之高}=h_s+h_x=\frac{h\cdot a_1}{c-a},$$

$$=\frac{h\cdot a}{c-a}+\frac{h(a_1-a)}{c-a}.$$

然此有中冪,定有小冪一,又有上廣之高乘截高,爲冪各一。

如 (2): $\frac{h\cdot a}{c-a}\times\frac{h\cdot b_1}{d-b}$

$$\left.\begin{aligned}&=\frac{h\cdot a}{c-a}\times\frac{h\cdot b}{d-b} \quad \text{小冪一}\\ &+\frac{h\cdot a}{c-a}\times\frac{h(b_1-b)}{d-b} \quad \text{中冪一}\end{aligned}\right\}(2)_1$$

又下廣之高,乘下袤之高,爲大冪二;乘上袤之高,爲中冪一。」

$$2\times\frac{h\cdot a_1}{c-a}\times\frac{h\cdot b_1}{d-b} \qquad \text{大冪二} \ (3)$$

$$\frac{h\cdot a_1}{c-a}\times\frac{h\cdot b}{d-b} \qquad \text{中冪一} \ (4)$$

此術蓋應用九章芻童公式: $A=\frac{h}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]$ 即

$B=\frac{h}{6}[(2b+b_1)a+(2b_1+b)a_1]$,括弧右邊上下各乘 $\frac{h^2}{(c-a)(d-b)}$

得: $\frac{3B\times h^2}{(c-a)(d-b)}=\frac{h}{2}\Big[2\times\frac{h\cdot a}{(c-a)}\times\frac{h\cdot b}{(d-b)}+\frac{h\cdot a}{(c-a)}\times\frac{h\cdot b_1}{(d-b)}$

$+2\times\frac{h\cdot a_1}{(c-a)}\times\frac{h\cdot b_1}{(d-b)}+\frac{h\cdot a_1}{(c-a)}\times\frac{h\cdot b}{(d-b)}$, 括弧冇邊各數, 卽上述之大,中,小冪。次述以 h_x 消去 a_1 及 b_1 之法:

『其大冪之中,又小冪一,復有上廣上袤之高,(爲中冪)各乘截高,爲中冪各一,又截高各乘爲冪一。	從 (3) 內, $2\times\frac{h\cdot a_1}{c-a}\times\frac{h\cdot b_1}{d-b}$ $=2\Big[\frac{h(a_1-a)}{c-a}+\frac{h\cdot a}{c-a}\Big]\times\Big[\frac{h(b_1-b)}{d-b}+\frac{h\cdot b}{d-b}\Big]$ $=2\times\frac{h\cdot a}{c-a}\times\frac{h\cdot b}{d-b}$　小冪二 $+2\times\frac{h\cdot a}{c-a}\times\frac{h(b_1-b)}{d-b}$, 或 $2\frac{h\cdot a}{c-a}\times h_x$,　中冪二 $+2\times\frac{h\cdot b}{d-b}\times\frac{h(a_1-a)}{c-a}$, 或 $2\times\frac{h\cdot b}{d-b}\times h_x$,　中冪二 $+2\times\frac{h(b_1-b)}{d-b}\times\frac{h(a_1-a)}{c-a}$, 或 $2h_x^2$　自乘冪二。(3)₁
其中冪之內,有小冪一,又上袤之高乘截高爲冪一。	從 (4) 內, $\frac{h\cdot a_1}{c-a}\times\frac{h\cdot b}{d-b}$ $=\Big[\frac{h(a_1-a)}{c-a}+\frac{h\cdot a}{c-a}\Big]\times\frac{h\cdot b}{d-b}$ $=\frac{h\cdot a}{c-a}\times\frac{h\cdot b}{d-b}$　小冪一

$$+\frac{h\cdot b}{d-b}\times\frac{h(a_1-a)}{c-a},\ 或\ \frac{h\cdot b}{d-b}\times h_x.$$

中冪一 $(4)_1$

然則截高自相乘爲冪二,小冪六,又上廣上袤之高各三,以乘截高爲冪六。

以上 $(1),(2)_1,(3)_1,(4)_1$ 并之得

$2\times h_x^2$ 自相乘冪二

$+6\times\frac{h\cdot a}{c-a}\times\frac{h\cdot b}{d-b}$, 小冪六

$+3\times\frac{h\cdot a}{c-a}\times h_x$, 中冪三

$+3\times\frac{h\cdot b}{d-b}\times h_x$. 中冪三

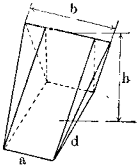
今皆半之,故以乘小冪,又上廣上袤之高各三。今但半之,各得一又二分之一,故三之二而一。

半之得:

$$\left[3\times\frac{h\cdot a}{c-a}\times\frac{h\cdot b}{d-b}+\frac{3}{2}\left(\frac{h\cdot a}{c-a}+\frac{h\cdot b}{d-b}\right)\times h_x+h_x^2\right].$$

諸冪截爲積尺。』

又第二問第三術,於羨道,已知上廣 $b-a$, 上廣少袤 $d-b$, 高多袤 $h-d$, 則下廣少袤 $d-a=(d-b)+(b-a)$, 下廣少高 $h-a=(h-d)+(d-a)$。羨道之積,在九章爲芻甍,乃兩鼈臑 $2\times\frac{h}{6}\times d\times\frac{b-a}{2}$, 或 $\frac{1}{6}[(h-a)+a][(d-a)+a](b-a)$, 夾一壍堵, $\frac{dah}{2}$, 或 $\frac{1}{2}[(d-a)+a]a[(h-a)+a]$, 故羨道: 下廣 $a=x$, 其積爲 c 時, 得求 a 之三次式:

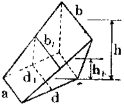


$$\frac{6c-(h-a)(d-a)(b-a)}{3}=\left\{\frac{[(d-a)+(h-a)](b-a)}{3}+(h-a)(d-a)\right\}\times a+\left\{\frac{(b-a)}{3}+[(d-a)+(h-a)]\right\}a^2+a^3 \qquad (C)$$

而 $(h-a)(d-a)(b-a)$ 稱爲鼈臑。

又第二問第四術於羨道截袤於 d_1,則其積爲:

$$D=\frac{3a+(b_1-a)}{6}\times h_1\times d_1.$$



如圖 $\frac{(b-a)d_1}{d}=b-a$, $\frac{h\times d_1}{d}=h_1$,

則得求 d_1 之三次式:

$$\frac{6d^2D}{(b-a)h}=\frac{3ad}{b-a}\times d_1^2+d_1^3. \qquad (D)$$

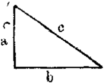
此外各術又績及羨除,鼈臑,壍堵,芻甍,隄,河,瀆,方窖,亭倉,圓囤。其求積諸法,幷出於九章。王孝通,『上緝古表』亦言:『伏尋九章商功篇有平地役功受袤之術,……遂於平地之餘,續狹斜之法。』而應用之方程式,則有:$x^2=A$, $x^2+px=A$, $x^3+px^2=A$, $x^3+px^2+qx=A$, $x^4+qx^2=A$, 各式,幷以 A 爲實, p 爲方法, q 爲廉法;方,廉法且幷爲正數。❶按九章少廣篇開平方,開立方,旣得初商後,卽爲帶從平方,帶從立方。故緝古算經於 $x^3+px^2+qx=A$ 式,術曰:『以從開立方除之,』幷不言其草也。

❶ 參看緝古算經,算經十書本,或知不足齋叢書本。張敦仁緝古算經細草上中下卷,嘉慶六年(公元 1801 年)自序。李潢緝古算經考注上下卷,道光壬辰(公元 1832 年)刻。陳杰緝古算經細草一卷,圖解上中下卷,音義一卷,嘉慶二十年(公元 1815 年),汪廷珍序。孔廣森少廣正負術外篇下,『斛方補問』。蔣維鍾,隄積術辨。

第五章 緝古算經術解下

緝古算經第十五問，於句股形，已知 ab, $c-a$，求 a, b, c。

如圖，因 $b^2=c^2-a^2=(c-a)(c-a+2a)$



故 $$\frac{a^2b^2}{2(c-a)}=\frac{a^2[(c-a)+2a]}{2}$$

$$=\frac{c-a}{2}\cdot a^2+a^3 \qquad \text{(XV)}$$

又第十六問，於句股形，已知 ab, $c-b$，求 c。

$$\frac{a^2b^2}{2(c-b)}=\frac{c-b}{2}\cdot b^2+b^3,\quad \text{又}\quad b+(c-b)=c \qquad \text{(XVI)}$$

又第十七問，於句股形，已知 ac, $c-b$，求 b。

$$a^2c^2=(c^2-b^2)[(c-b)+b]^2$$

$$=[(c-b)(c-b+2b)][(c-b)+b]^2$$

故得：$$\frac{a^2b^2}{2(c-b)}-\frac{(c-b)^3}{2}=2(c-b)^2b+\frac{5}{2}(c-b)b^2+b^3 \qquad \text{(XVII)}$$

又第十八問，於句股形，已知 bc, $c-a$，求 a。

$$b^2c^2=(c^2-a^2)[(c-a)+a]^2$$

故得：$$\frac{b^2c^2}{2(c-a)}-\frac{(c-a)^3}{2}=2(c-a)^2a+\frac{5}{2}(c-a)a^2+a^3 \qquad \text{(XVIII)}$$

又第十九問，於句股形，已知 bc，及 a，求 b。

$b^2c^2=b^2(a^2+b^2)$，故得 $b^2c^2=a^2b^2+b^4$ (XIX)

又第二十問，於句股形，已知 ac，及 b，求 a。

如前得 $a^2c^2=b^2a^2+a^4$ (XX)

第六章　近古數學家小傳

(二)唐:李淳風,瞿曇悉達,僧一行,邊岡,劉孝孫,陳從運,江本,龍受。

李淳風　岐州雍人。明天文,曆算,陰陽之學。貞觀(公元627—649年)初,以駁傅仁均曆議,多所折衷。授將仕郎,直太史局。顯慶元年(公元656年)復以修國史,功封昌樂縣男。先是太史監候王思辯表稱:五曹,孫子十部算經,理多踳駁。淳風復與國子監算學博士梁述,太學助教王眞儒等,受詔注五曹,孫子十部算經。書成,高祖令付國學行用。龍朔二年(公元662年)淳風改授祕閣郎中。咸亨(公元670—673年)初官名復舊,還爲太史令,年六十九。❶新唐書藝文志稱:『李淳風注周髀算經二卷,又注九章算術九卷,注九章算經要略一卷,注五經算術二卷,注張丘建算經三卷,注海島算經一卷,注五曹孫子等算經二十卷(?),注甄鸞,孫子算經三卷,釋祖冲之,綴術五卷;又王孝通,輯古算術四卷,亦題太史丞李淳風注。』❷高宗時(公元650—683年)太史奏舊曆加時寖差,宜有改定。曾詔李淳風造麟德曆。❸

瞿曇悉達　唐景雲三年(卽先天元年,公元712年)詔銀青光祿大夫行太史令瞿曇悉達修渾儀,先天二年(卽開元元年,公元713年)儀成。❶開元六年(公元718年)詔太史監瞿曇悉達譯九執曆。九執曆者出於西域,其算皆以字書,不

用籌策,其術繁碎。❾瞿曇悉達又著開元占經一百一十卷,則在開元十七年(公元729年)前矣。❿開元占經內『算字法』條稱:『右天竺算法用上件九個字乘除;其字皆一舉札而成,凡數至十,進入前位,每空位處,恆安一點,有間咸記,無由輒錯,運算便眼,趁須先及。』❼此則印度筆算輸入中國之始。

僧一行　姓張氏,先名遂。魏州昌樂人。開元十五年(公元727年)卒。年四十五(公元683—727年)。❺先是開元九年(公元721年)麟德曆署日蝕比不效,詔僧一行作新曆,推大衍數,立術以應之,較經史所書氣朔日名宿度,可考者皆合。十五年草成,而一行卒。❿所成大衍曆,開元二十一年(公元733年)詔侍御史李麟,太史令桓執圭較靈臺候簿,大衍十得七八,麟德纔三四,九執一二焉。⓫宋人小說又載唐僧一行算棋局都數,凡若干局盡之,宋沈括曾爲演算。⓬宋史題:僧一行開元大衍曆議十三卷,僧一行心機算術括〔一作格〕,僧僂嚴注。⓭

邊岡　唐乾符(公元874—879年)時爲術士。⓮昭宗(公元889—905年)時宣時曆漸差,詔太子少詹事邊岡,與司天少監胡秀林,均州司馬王墀改治新曆。景福元年(公元892年)成崇玄曆。岡巧於用算,能馳騁反覆於乘除間,立先相減後相乘之法,令衰殺有倫。⓯阮元謂:授時平立定三差,亦由是加精。⓰宋史題:『邊岡唐景福崇玄曆十三卷。』⓱

劉孝孫　宋本張丘建算經三卷,題:『唐算學博士,臣劉孝孫細草』。⓲

陳從運　『唐試右千牛衛,胄曹參軍陳從運著得一算經,其術以因折而成。取損益之道,且變而通之,皆合於數。』[18] 新唐書題:『陳從運,得一算經七卷,』宋史題:『陳從運得一算經七卷,三問田算術一卷。』[19]

江本　撰三位乘除一位算法二卷,又以一位因折進退作一位算術九篇,頗爲簡約。[20] 新唐書,宋史並題:江本,一位算法二卷。[21]

龍受　唐書藝文志有:貞元(公元 785—804 年)人龍受算法二卷。[22] 宋史藝文志作龍受益,算法二卷,求一算術化零歌一卷,新易一法算範九例要訣一卷,又龍受益法,王守忠,求一術歌一卷,算範要訣二卷,明算指掌三卷。[23]

[1] 舊唐書卷七九,列傳第二九,……李淳風。及新唐書卷二〇四,列傳第一二九,方技,李淳風……。按册府元龜卷八六九,總錄部第一一九,明算部稱:『顯慶元年(公元 656 年)左僕射于思志寧等奏以十部算經付國學行用。』于思志寧當係于志寧(公元 588—665 年)。於永徽二年(公元 651 年)拜尙書左僕射,舊唐書卷七八,新唐書卷一〇四有傳。

[2] 此據新唐書卷五九,藝文志第四九。而舊唐書則僅於綴術五卷題祖冲之撰,李淳風注;輯古算術四卷,題王孝通撰,李淳風注而已。宋史卷二〇七,藝文志第一六〇,藝文六,題:『李淳風注釋九章算經要略一卷,又注釋孫子算經三卷,注王孝通五經算法一卷(?),注甄鸞五曹算法一卷,……注九章算經九卷,魏劉徽,唐李淳風注,五曹算經五卷,李淳風注。』今傳孔刻算經十書本周髀算經二卷,九章算術九卷,海島算經一卷,孫子算經三卷,五曹算經五卷,張丘建算經三卷,五經算術二卷,並題:『唐朝議大夫,行太史令上輕車都尉,臣李淳風等奉勅注釋。』

[3] 此據舊唐書卷三二,志第一二,歷一。參看新唐書卷二五,及卷二

二六,志第一五及第一六,歷志。

❹ 開元占經卷一,第二二頁,恆德堂藏版。

❺ 新唐書卷二八下,志第一八,歷志。

❻ 恆德堂藏版本,開元占經,卷首所錄四庫提要第一及第二頁。按宋史卷二〇六,藝文志,天文類作瞿曇悉達占經四卷,疑非全書。

❼ 開元占經卷一〇四,第一頁。

❽ 舊唐書卷一九一,列傳第一四一,方技,……,一行。

❾ 新唐書卷二七上,志第一七上,歷志。參看同書卷三一,志第二一,天文志;及卷三二,志第一二,歷一。

❿ 新唐書卷二七上,志第一七上,歷志。

⓫ 宋沈括夢溪筆談卷一八。

⓬ 宋史卷二〇七,藝文志第一六〇,藝文六。按新唐書卷五九,藝文志,作:『心機算術括一卷,黃栖巖註。』

⓭ 宋薛居正舊五代史卷三。

⓮ 新唐書卷三〇下,志第二〇,歷志。並參看同書卷三一。

⓯ 清阮元疇人傳卷一七,……邊岡。

⓰ 見宋史卷二〇七,藝文志第一六〇,藝文六。按新唐書卷五九,藝文志,作四十卷。

⓱ 乾隆四五年(公元1781年)一二月,知不足齋叢書倣汲古閣影宋本重雕。

⓲ 宋史卷六八,律曆志第二一,律曆一。

⓳ 新唐書卷五九,藝文志第四九,及宋史卷二〇七,藝文志第一六〇,藝文六。

⓴ 黃鍾駿,疇人傳四編卷四,第五頁,引玉海。

㉑ 新唐書卷五九,及宋史卷二〇七。

㉒ 新唐書卷五九。

❻ 宋史卷二〇七。按宋紹興(公元 1131—1162 年)祕書省續編到四庫書目卷二,光緒癸卯(公元 1903 年)長沙葉氏觀古堂刊本,第六九頁,有:『求一算術歌一卷,唐龍受益注算範九例訣一卷,算範訣二卷。』同書第七一頁,有:『龍受益撰新易一法算範九例要訣一卷。』

第七章　近古數學家小傳

(三) 後唐:宋延美;南漢:薛崇譽。

宋延美　後唐天成五年(公元930年)宋延美明算科及第;是年明算五人,而延美爲之首。❶天成五年二月改元長興,『長興元年(公元930年)夏四月,張溥請復八館以廣生徒,而算學居其一。』❷張溥奏請立館之前,明算科舉似尙未廢。

薛崇譽　南漢韶州曲江人,善孫子,五曹算。❸

❶ 疇人傳四編卷四,第七頁,引册府元龜。

❷ 舊五代史卷四一:唐書卷一七,明宗紀七。

❸ 宋史卷四八一,列傳第二四〇,南漢世家。

第八章　近古初期數學書志

近古初期數學作家之可考者,旣如上述。此外見於舊唐書者,有:九章術疏九卷,宋泉之撰;七經算術通義七卷,陰景愉撰。❶新唐書藝文志於宋泉之九經(?)術疏九卷,陰景愉七經算術通義七卷外,又列魯靖新集五曹時要術三卷,謝察微算經三卷。❷宋史亦有魯靖五曹時要算術三卷,謝察微算經三卷,謝察微發蒙算經三卷。❸就中謝經在宋尙有流傳。宋元豐本張丘建算經末題敍稱:『此問……疑其流來脫漏闕文,蓋流傳旣久,無可考證。自漢唐以來,雖甄鸞,李淳風注釋,未見詳解,今將算學教授,並謝察微擬立術草,類新添入。』一節,❹疑爲宋人所記。而明刻本,宋楊輝算法中續古摘奇算法,亦有引及謝經者。❺至敦煌所遺算書殘卷,或亦爲此期作品,雖復殘缺不完,而吾華寫本算書,流傳天壤,此爲最舊矣。❻

❶　舊唐書卷四七,經籍志第二七,經籍下。按舊唐書卷四六,又有:漢書律歷志音義一卷,陰景愉作。

❷　新唐書卷五九,藝文志第四九。

❸　宋史卷二〇七,藝文志第一六〇,藝文六。按謝察微算經:說郛及唐宋叢書二書目錄,俱作周髀算經,唐趙爽注,不知因何致誤。且明陶宗儀說郛一百卷本,原無此書。新唐書卷五九,有:『趙爽長短要術十卷,[字太賓,梓州人,開元中召之不赴],』未聞其曾注周髀,或撰發蒙算經也。

❹　張丘建算經卷下,第三八至第三九頁,知不足齋叢書本。

⑫ 北平北海北平圖書館藏楊守敬舊藏明刻本，宋楊輝算法有此文。

⑬ 李儼敦煌石室算書，第一至四頁，中國大學季刊第一卷，第二期，民國十五年（公元1926年）六月，北平。

第九章　婆羅門,天竺數學輸入中國

印度數學由佛教連帶輸入者,以近古爲最顯著。唐人作隋書經籍志,所記者,有:婆羅門,捨仙人所說婆羅門天文經二十一卷,婆羅門竭伽仙人天文說三十卷,婆羅門天文一卷,婆羅門算法三卷,婆羅門陰陽算曆一卷,婆羅門算經三卷。❶唐書稱:『天竺國即漢之身毒,或云婆羅門地也,……其中分五天竺,……有文字,善天文算曆之術。』❷開元六年(公元718年)瞿曇悉達譯九執曆,即出於西域。此外舊唐書西戎傳,稱:『罽賓國於開元七年(公元719年)遣使來朝,進天文經一夾,』❸册府元龜稱:『吐火羅國於開元七年(公元719年)表進解天文人大慕闍,謂智慧幽深,問無不知。』❹其後貞元(公元785—804年)中都利術士李彌乾自西天竺得聿斯經,有璩公者,譯其文,成都利聿斯經二卷,新唐書藝文志以此經與陳輔聿斯四門經一卷,列入曆算類。❺唐志又有文殊所說宿曜經一卷,而釋藏優字函,有乾元二年(公元759年)不空譯文殊師利菩薩及諸仙所說吉凶時日善惡宿曜經二卷,(新)五代史(卷五八)司天攷云:初唐建中(公元780—783年)時,術士曹士蔿作七曜符天曆,謂之小曆,止行於民間。焦竑國史經籍志云:有曹公小曆一卷,李思議重注,本天竺舊法。❻又唐于闐國三藏沙門實叉難陀譯,大方廣佛華嚴經卷四,阿僧祇品第三十,言:『一百洛叉(此云萬)爲一俱

胝,俱胝俱胝爲一阿庾多,……爲不可說不可說轉,』此即數術記遺所謂:『上數者數窮則變,若言萬萬曰億,億億曰兆,兆兆曰京也。』以上幷爲近古婆羅門天竺數學輸入中國之可考者。現今國外學者,有謂印度歷算,後漢時已輸入中國者,❼則未論定之問題也。

❶　隋書卷三四,志二九,經籍三。

❷　舊唐書卷一九八,列傳第一四八,西戎……天竺。

❸　舊唐書卷一九八,西戎……罽賓。

❹　清俞正燮癸己類稿卷一〇,第二八至三〇頁引。

❺　此據新唐書卷五九,藝文志第四九。按宋史卷二〇六,則以都利聿斯經一卷,聿斯四門經一卷,聿斯歌一卷入天文類;又聿斯四門經一卷,聿斯經訣一卷,聿斯都利經一卷,聿斯隱經三卷入五行類。宋紹興祕書省續編到四庫闕書目卷二,則以都利聿斯經歌一卷入歷算類。宋陳振孫直齋書錄解題卷一二,有:聿斯歌一卷,青羅山人,布衣王希明撰,不知何人;又四門經一卷,唐待詔陳周(?)輔撰。

❻　清俞正燮癸己類稿卷一〇,第二八至三〇頁引。

❼　飯島忠夫支那古代史論第三五五,三五六及四九三頁,日本東京東洋文庫,大正一四年(公元1925年)一二月。

第十章　中國數學輸入百濟,日本

有唐拓境,遠極安西。四方來朝,史不絕書。百濟歲時伏臘,間於中國。其書籍有五經,子,史。❶ 欽明十五年(公元554年)百濟易博士王道良,歷博士王保孫,始以中國曆法輸入日本。於是改良度量衡制,置漏刻器,立天文臺,行元嘉曆及儀鳳曆,一惟中土之法是遵。大寶二年(公元702年)立學校,授算術,所採算經爲:周髀,孫子,六章,三開,重差,五曹,海島,九司,九章,綴術;并置曆士,算生等名稱。❷

❶ 舊唐書卷一九九上,列傳第一四九,東夷,……百濟。

❷ 其詳參看李儼中算輸入日本之經過,東方雜誌第二二卷,第一八號,第八二頁至第八八頁,上海商務印書館,民國一四年(公元1925年)九月。

第十一章　宋代算學制度

宋元豐七年(公元1084年)刊十書入祕書省,又刻於汀州學校。十書者:黃帝九章,周髀算經,五經算法,海島算經,孫子算法,張丘建算法,五曹算法,輯古算法,夏侯陽算法,算術拾遺是也。❶今傳宋本每卷後有祕書省官銜姓名一幅,又一幅宰輔大臣,自司馬(光)相公而下,俱列名於後,用見當時鄭重。❷元豐七年(公元1084年)詔選命官通算學者,通於吏部就試,其合格者上等除博士,中次為學諭。元祐元年(公元1086年)初議者謂:本監雖準朝旨造算學,元未興工;其試選學官,亦未有應格。竊慮徒有煩費,乞罷修建。崇寧三年(公元1104年)六月壬子置書,畫,算學。遂將元豐算學條例,修成敕令,學生員以二百一十八人為額。許命官及庶人為之。其業以九章,周髀,及假設疑數為算問,仍兼海島,孫子,五曹,張丘建,夏侯算法,并歷算三式,天文書,為本科。崇寧五年(公元1106年)正月丁巳,罷書,畫,算,醫,四學。以算學附於國子監。十一月,從薛昂請,復置算學。大觀三年(公元1109年)太常寺考究,以黃帝為先師,風后等八人配饗。自常先,力牧至周王朴以上,從祀凡七十人。大觀四年(公元1110年)三月,以算學併入太史局。宣和二年(公元1120年)罷算學,并罷官吏。❸南渡以後,此學亦廢。❹惟民間尚有能言者。故紹興戊辰(公元1148年)臨安府汴陽學算榮棨尚命工鏤板善本九章,孝宗

時(約公元 1186 年)蔣繼周言試用民間有知星曆者,遴選提領官,以重其事。理宗時(約公元 1248 年)尹渙亦言天文曆數一切付之太史局,荒疏乖謬,安心爲欺。朝士大夫,莫有能詰之者。請召四方之通曆算者至都,使曆官學焉。❺ 是時民間天文之學,蓋有精於太史者。❻ 算數之學,既爲民衆所重,元學遂於此期稍啓。

❶ 明程大位算法統宗卷一三,第三五頁;古今圖書集成,算法部彙考一七,曆法典第一二五卷。

❷ 清毛扆算經跋第一頁,附輯古算經,知不足齋叢書本後。

❸ 宋史卷一九,本紀第一九;卷二〇,本紀第二〇;卷二二,本紀第二二;卷一〇五,禮志第五八,禮八;卷一五七,選舉志第一一〇,選舉三;又卷一六四,職官志第一一七,職官四。參看宋洪邁慶元二年(公元 1196 年)容齋三筆卷一三,『大觀算學』條。

❹ 宋鮑澣之九章序,稱:『本朝崇寧(公元 1104 年)亦立於學官,故前世算數之學,相望有人。自衣冠南渡以來,此學殆廢;非獨好之者寡,而九章算經亦幾泯沒無傳矣。』

❺ 宋史卷八二,律曆志第三五,律曆一五。

❻ 宋史卷四八,天文志第一,天文一。

第十二章 近古數學家小傳

(四)宋:李籍,李紹穀,夏翰,徐仁美,楚衍,韓公廉,沈括,劉益,賈憲,蔣周,蔣舜元,李文一,曹唐,朱吉,石信道。

李籍 宋史題:『李籍,九章算經音義一卷,又周髀算經音義一卷。』❶ 明趙開美校本周髀音義題:『假承務郎,祕書省鉤考算經文字臣李籍撰,』或題唐李籍者誤。❷

李紹穀 撰求一指蒙玄要一卷,見宋史。❸ 求一爲乘除之別法,宋錢希曾南部新書,及沈括夢溪筆談並題求一,其詳則見宋楊輝算法。❹

夏翰 一作翱,撰新重演議海島算經一卷,見宋史。❺

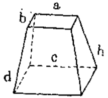
徐仁美 宋史律歷志於唐陳從運下稱:『復有徐仁美者作增成玄一法,設九十三問以立新術,大則測於天地,細則極於微妙,雖粗述其事,亦適用於時。』❻ 徐氏著作唐書未錄,宋史藝文志有徐仁美增成玄一法三卷。❼ 則徐至早亦宋初人,至增成一法,沈括曾言不用乘除,但補虧就盈而已,假如九除者增一便是,八除者增二便是。❽

楚衍 開封阼城人,衍於九章,輯古,綴術,海島諸算經,尤得其妙。自陳試宣明曆,補司天監學生,遷保章正。❾ 乾興初(公元1022年)議改曆,命司天役人張奎運算,詔以奎補保章正;又推擇學者楚衍授靈臺郎,與掌曆官宋行古等九人集天章閣,詔內侍金克隆監造曆。至天聖元年(公元1023年)

九月成,詔翰林學士晏殊製序施行。衍進司天監丞,入隸翰林天文。皇祐(公元 1049—1053 年)中同造司辰星漏歷十二卷。久之,與周琮同管司天監。卒無子。有女亦善算術。⑩宋世司天算者,以衍爲首。既老且昏,有弟子二人:賈憲,朱吉著名。⑪

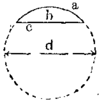
韓公廉　紹聖二年(公元 1095 年)爲吏部令史。通九章算術及鉤股重差之義。作九章鉤股驗測渾天書一卷。⑫

沈括　字存中。錢塘人。以父任爲沐陽主簿。擢進士第。爲館閣校勘。熙寧六年(公元 1073 年),括以提舉司天監論渾儀浮漏,遷爲右正言司天監秋官正。括任至權三司使。元祐(公元 1086—1090 年)初以光祿少卿分司,居潤八年卒。年六十五。⑬疑年錄據朱彧可談,謂沈括生天聖八年(公元 1030 年),卒紹聖元年(公元 1094 年)。⑭括博學善文,於天文,方志,律歷,無所不通。著夢溪筆談二十六卷,補筆談二卷,續筆談一卷,修城法式二卷。夢溪其潤州別業,則筆談蓋其晚年所成。



筆談第十八卷有隙積術,『謂積之有隙者,如累棋,層壇,及酒家積罌之類。』設上下廣爲 a 及 c,上下長爲 b 及 d,其高爲 h,則

$$V=\frac{h}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{h}{6}(c-a).$$



又有會圓術求弧矢形之弦及弧,即

$$c=2\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}-b\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},\ a=\frac{2b^2}{d}+c.$$

沈括自謂:『此類皆造微之術,古書所不到

者。』阮元亦言:『隙積會圓二術,補九章之未及,授時術草以三乘方取矢度,即寫會圓術也。』[16] 宋楊輝詳解九章算法(公元1261年),『商功第五』之方垛,芻童菓子垛,芻甍菓子垛,及朱世傑四元玉鑑(公元1303年)卷下,『果垛疊藏』之三角臺垛,四角臺垛,芻童垛,芻甍垛,並依隙積術立算。

劉益　中山人。以句股之術,治演段,鎖方。作議古根源。撰成直田演段百問。[17] 其書引用帶從開方,正方損益之法,帶益隅開方,爲前古所未聞。程大位算法統宗列其書於元豐(公元1078－1085年),紹興(公元1131－1162年),淳熙(公元1174－1189年)以來刊刻算書之首。[18] 議古根源(約公元1080年)所舉帶從開方,雖僅及二次式,已與和涅之法(Horner's method, 1819)相似。後此賈憲黃帝九章細草(約公元1200年),秦九韶數學九章(公元1247年),李治測圓海鏡(公元1248年),益古演段(公元1259年),郭守敬授時曆(公元1280年),朱世傑算學啓蒙(公元1299年),四元玉鑑(公元1303年),所引正負開方術,並本於此。

賈憲　憲爲楚衍弟子,著有算法斅古集二卷。[19] 宋楊輝稱:『黃帝九章……聖宋右班(殿)值賈憲撰草。』[20] 宋史稱賈憲黃帝九章細草九卷是也。[21] 鮑澣之稱:『近世民間之本,題曰黃帝九章,……雖有細草,類皆簡捷殘闕,情於本原。』[22] 楊輝詳解九章算法引有『賈憲立成釋鎖平方法,及立方法。』[23] 程大位亦謂賈憲九章爲元豐,紹興,淳熙以來刊刻算書之一。[24]

蔣周　祖頤四元玉鑑後序稱:平陽蔣周撰益古;博陸●李文一撰照膽;鹿泉石信道撰鈐經;平水劉汝諧撰如積釋鎖,絳人元裕細草之;後人始知有天元也。李治益古演段稱:益古集可與劉徽,李淳風相頡頏,猶嫌其閟匿而不盡發。程大位算法統宗列益古算法爲元豐,紹興,淳熙以來刊刻算書之一。

蔣舜元　撰應用算法一卷。宋楊輝算法曾引用之。●宋陳振孫直齋書錄解題卷十四稱:『應用算法一卷,夷門吏郭京元豐三年(公元1080年)序稱:平陽奇士蔣舜元撰。凡八篇:曰釋數,田畝,粟米,端匹,斤秤,修築,差分,雜法。總爲百五十七問。』●

李文一　博陸人。撰照膽,演天元之書也。見四元玉鑑後序。

曹唐　算法統宗列曹唐算法於賈憲九章之前。●或曰曹唐唐末進士,賦游仙詩。●

朱吉　與賈憲同爲楚衍弟子。吉隸太史,曾駁憲乘餘分,於法未善。●

石信道　鹿泉人。撰鈐經,演天元之書也。見四元玉鑑後序。李治測圓海鏡卷七『明叀前第二問』曾引鈐經解法。程大位算法統宗以鈐經爲元豐,紹興,淳熙以來刊刻算書之一。●

● 宋史卷二〇七,藝文志第一六〇,藝文六。

● 武英殿聚珍本,周髀算經音義第一頁,誤作唐李籍撰。

❸ 宋史卷二〇七題其書於夏翰,徐仁美著作之前。又『求一指掌玄要一卷』見紹興祕書省續編到四庫書目卷二第七〇頁,光緒癸卯(公元1903年)長沙葉氏觀古堂刻本。

❹ 『乃至開方,立方,求一,立一,皆可通其體例耳。』見宋錢希晉南部新書癸集,子明逸嘉祐元年(公元1056年)十一月序。『算術多門,如求一,上驅,搭因,重因,皆不離乘除。』見宋沈括夢溪筆談卷一八。

❺ 宋史卷二〇七,題其書於徐仁美著作之前。

❻ 宋史卷六八,律歷志第二一,律歷一。

❼ 宋史卷二〇七,藝文志第一六〇,藝文六。

❽ 宋沈括夢溪筆談卷一八,技藝。

❾ 宋史卷四六二,列傳第二二一,方技下……楚衍。

❿ 宋史卷四六二,并參看宋史卷七一,律歷志第二四,律歷四。

⓫ 黃鍾駿疇人傳四編卷五第五頁引鄭樵通志及宋王洙王氏談錄。

⓬ 宋蘇頌新儀象法要卷上第二頁,中西算學叢書初編本。按『元祐(三年,公元1088年)時,尚書右丞蘇頌,與昭文館校理沈括奉勅詳定渾儀法要,遂奏舉吏部勾當官韓公廉通九章句股法。……公廉將造儀時,先撰九章句股驗測渾天書一卷,貯之禁中,今失其傳,故世無知者。』見元脫脫等金史卷二二,志第三,曆下。

⓭ 宋史卷三三一,列傳第九〇,沈遘弟括。參看宋史卷八〇,律曆志第三三,律曆一三。

⓮ 清錢大昕,疑年錄卷二。

⓯ 見清阮元疇人傳卷二〇。按由梅瑴成赤水遺珍引:『授時曆(草)立天元一術』中,知郭守敬由沈括公式:

$$a=\frac{2b^2}{d}+c,$$ 及楊輝公式: $$d=\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{b}+b,$$ 消去 c, 得 $b^4+d^2b^2-adb^2+\frac{a^2d^2}{4}=0$.

至隙積術之成就,則因:

$$V=ab+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)+\ldots\ldots+\{(a+h-1)(b+h-1)=cd\}$$

$$=ab+\{ab+\overline{a+b}+1\}+\{ab+2(a+b)+2^2\}+\ldots\ldots+\{ab+(n-1)(a+b)+(n-1)^2\}$$

$$=hab+(a+b)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot h(h-1)+\tfrac{1}{3}(h-1)(h-\tfrac{1}{2})h.$$

因 $a+h-1=c,\qquad h=c-a+1,$

$b+h-1=d,\qquad h=d-b+1,$ 代入消得:

$$V=\frac{h}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{h}{6}(c-a).$$

⑯ 曾遠榮云:『宋楊輝田畝比類乘除捷法序稱:中山劉先生……撰成直田演段百問。同書卷下稱:中山劉先生……議古根源故立演段百問。算法通變本末卷上稱:劉徑以句股之術治演段鎖方,撰議古根源二百問,帶益隅開方,實冠前古。按此云二百問,與前云百問者不同,疑議古根源原有二百問,有演段者僅百問耳。』

⑰ 程大位算法統宗卷一三。

⑱ 黃鍾駿疇人傳四編卷五第五頁,引鄭樵通志,及王洙,王氏談錄。

⑲ 宋楊輝九章算法纂類第一頁,宜稼堂叢書本。按當時尚有無撰輯之單行本黃帝九章。

⑳ 宋史卷二〇七,藝文志第一六〇,藝文六。

㉑ 宋鮑澣之九章算術後序第一頁,九章算術,武英殿聚珍版本。

㉒ 宋楊輝詳解九章算法纂類第三七頁至第三九頁,宜稼堂叢書本。

㉓ 算法統宗卷一三。

㉔ 漢霍光河東平陽人,以功封博陸侯。此言博陸即指平陽也。

㉕ 宋楊輝續古摘奇算法第四頁,第七頁;田畝比類乘除捷法卷上,第一五頁;詳解九章算法第一〇頁;宜稼堂叢書本引之。

㉖ 宋陳振孫直齋書錄解題第一四,第一二頁。曾遠榮云:『按蔣周與蔣舜元疑是一人,因同爲山西平陽人,著作又俱刻於元豐初年也。』

[37] 算法統宗卷一三。

[38] 黃鍾駿疇人傳四編卷五,第一四頁,引宋孫光憲北夢瑣言。

[39] 黃鍾駿疇人傳四編卷五,第五頁,引鄭樵通志及王洙王氏談錄。

[40] 四元玉鑑後序;測圓海鏡卷七;算法統宗卷一三。

第十三章　近古次期數學書志

近古次期數學書,見於宋史藝文志者,有:李紹穀求一指蒙算術玄要一卷;夏翰(一作翺)新重演議海島算經一卷;徐仁美增成玄一算經三卷,(宋史律曆志作增成玄一法);任弘濟一位算法問答一卷;楊鍇明微算經一卷,法算機要賦一卷,法算口訣一卷,算法祕訣一卷,算術玄要一卷。❶宋紹興(公元1131－1162年)中官撰祕書省續編到四庫書目:於求一指蒙玄要一卷外,復有應時算法一卷,算法序說一卷,算法一卷,乘除算例一卷,里田要例算法一卷。❷明程大位謂:元豐(公元1078－1085年),紹興(公元1131－1162年),淳熙(公元1174－1189年)以來刊刻者,有議古根源(劉益撰),益古算法(蔣周撰),證古算法,明古算法,辯古算法,金科算法,指南算法,應用算法(蔣舜元撰),曹唐算法,賈憲九章,(宋史作賈憲,黃帝九章細草九卷),通微集,通機集,盤珠集,走盤集,三元化零歌(宋史藝文志有張祚注法算三平化零歌一卷),鈐經(石信道撰),鈐釋諸書。❸就中議古根源,辯古通源,指南算法,應用算法,賈憲九章諸書,宋楊輝皆引用之。❹宋鄭樵通志又載青陽人中山子著算學通元九章一卷。❺元朱世傑算學啓蒙卷下『開方釋鎖』第八問以下,又爲明源活法,逐問備立細草。❻及其末流,或隱問答以欺衆,或添歌彖以衒己。[榮棨(公元1148年)語]。至祖頤四元玉鑑後序

稱:『平陽蔣周,撰益古;博陸李文一,撰照膽;鹿泉石信道,撰鈐經;平水劉汝諧,撰如積釋鎖,絳人元裕細草之;後人始知有天元也。』蓋亦此時期之產物。前乎此者,則元豐七年(公元1084年)刊刻十書,獨遺綴術。而宋史楚衍傳,尙稱:『衍於九章,緝古,綴術,海島諸算經尤得其妙。』是綴術在天聖初(約公元1023年)尙有傳人。

❶　宋史卷二〇七,藝文志第一六〇,藝文六。

❷　宋紹興祕書省續編到四庫書目第六九頁至第七一頁,長沙葉氏觀古堂,光緒癸卯(公元1903年)刊本。

❸　算法統宗卷一三。

❹　辯古通源當即辯古算法:宋楊輝續古摘奇算法第二頁,第三頁,第一二頁,宜稼堂叢書本引之。指南算法:宋楊輝續古摘奇算法第八頁;算法通變本末卷上,第四頁,宜稼堂叢書本引之。應用算法:宋楊輝續古摘奇算法第四頁,第七頁;田畝比類乘除捷法卷上,第一五頁;詳解九章算法第一〇頁;宜稼堂叢書本引之。

❺　黃鍾駿疇人傳四編卷五,第一五頁,引鄭樵通志。

❻　算學啓蒙卷下『開方釋鎖』門,第八問註稱:『今以天元演之,明源活法,省功數倍。……予故於逐問備立細草。……』按『活法』者活用之法也,可作『定理』解。楊輝田畝比類乘除捷法卷下,宜稼堂叢書本稱:『活法詳載九章少廣』,又永樂大典卷一六三四四第一六頁,楊輝詳解(九章),『立方法曰,賈憲細草,編爲活法』等是也。算學啓蒙所稱『明源活法』,謂明源算法所編之活法也。

第十四章 近古數學家小傳

(五) 宋: 楊忠輔, 鮑澣之, 秦九韶.

楊忠輔 字德之。官成忠郎。淳熙十二年(公元1185年)九月,上言淳熙曆簡陋,於天道不合。慶元三年(公元1197年)以來,氣景比舊曆有差。四年(公元1198年)詔胡紘充提領官正字,馮履充參定官,監楊忠輔造新曆。五年(公元1199年)忠輔曆成,賜名統天。❶慶元六年(公元1200年)之夏,鮑澣之在都城,與太史局同知算造楊忠輔德之論曆,因從其家得古本九章。❷是年統天曆日食不驗,嘉泰二年(公元1202年)日食又不驗,罷楊忠輔。❸

鮑澣之 字仲祺。處州人。慶元庚申(公元1200年)六月一日序九章算法,題:『迪功郎,新興隆府靖安縣主簿,括蒼鮑澣之仲祺謹書。』❹開禧三年(公元1207年)澣之官大理評事,上書言曆。嘉定三年(公元1210年)以戴溪充提領官,澣之充參定官,鄒淮演撰,王孝禮,劉孝榮提督推算官生十四人。嘉定四年(公元1211年)曆成,未及頒行,溪等去國,曆亦隨廢。❺嘉定五年(公元1212年)復錄得數術記遺於汀州七寶山三茅寧壽觀中,因爲之序。嘉定六年(公元1213年)十一月一日跋周髀算經題:『承議郎,權知汀州軍州,兼管內勸農事,主管坑冶,括蒼鮑澣之謹書。』❻

秦九韶 字道古。自題魯郡人,❼或稱蜀人,❽或稱秦

胍間人。[1]年十八,在鄉里爲義兵首。既出東南,多交豪富。性極機巧。星象音律算術,以至營造等事,無不精究。[2]早歲侍親中都,因得訪習於太史,又嘗從隱君子受數學。[3]父季槱,寶慶(公元1225—1228年)中官潼川,九韶隨侍。[4]又嘗從李梅亭(名劉,字公甫)學駢儷詩詞。[5]李梅亭集有回秦縣尉九韶謝差校正啓,云:善繼人志,當爲黃素之校讐;肯從吾游,小試丹鉛之點勘。李梅亭嘗爲成都漕,九韶差校正,當在其時,其在何縣尉,則無可考矣。[6]嘉熙以後(公元1237年—),蜀中屢受元兵侵略,故數書九章(公元1247年)自序稱:『際時狄患,歷歲遙塞,不自意全於矢石間。嘗險罹憂,荏苒十禩,心槁氣落,』是也。其至東南,當亦在此時。或以曆學薦於朝,得對。[7]淳祐四年(公元1244年)以通直郎通判建康府。十一月,丁母憂解官。寶祐(公元1253—1258年)間,九韶爲沿江制置司參議官。[8]淳祐七年(公元1247年)七月,成數學九章十八卷。[9]九韶嘗知瓊州數月,與吳潛(履齋)交尤稔。[10]景定元年(公元1260年)四月,吳潛罷相。十月,竄吳潛於湖州。三年(公元1262年),詔吳潛黨人永不錄用。[11]癸辛雜識謂:九韶竄之梅州,在梅治政不輟,竟殂於梅;當亦在此時。

[1] 宋史卷八二,律曆志第三三,律曆一五
[2] 宋楊輝詳解九章算法序第五頁,宜稼堂叢書本。
[3] 宋史卷八二。
[4] 楊輝詳解九章算法序第五頁。
[5] 宋史卷八二。

❻ 周髀算經音義第八頁及第九頁;又數術記遺,算經十書本。錢寶琮據明程大位算法統宗卷一三,『古今算法書目』,謂:『算經十書又刊於汀州學校,』未詳年代,較元豐本多數術記遺一種,想亦鮑澣之官汀州時,主其事也。見錢編中國算學史講義。

❼ 數書九章,宜稼堂叢書本。

❽ 錢大昕,十駕齋養新錄卷一四引稱直齋所錄崇天,紀元二曆,云近之蜀人秦九韶,道古。

❾ 錢大昕同書引宋周密癸辛雜識續集語,而焦循天元一釋謂秦鳳閣,乃指階,成,岷,鳳四州。

❿ 錢大昕同書引癸辛雜識。

⓫ 數書九章自序,宜稼堂叢書本。

⓬ 陸心源儀顧堂題跋卷八,『原本數書九章跋』,據四川石魚題字。

⓭ 錢大昕同書引癸辛雜識。

⓮ 錢大昕同書。

⓯ 錢大昕同書引癸辛雜識。

⓰ 錢大昕同書引景定建康志,『通判廳名』,及『制幕題名』。

⓱ 癸辛雜識續集作數學大略;直齋書錄解題作數術大略;永樂大典及阮元疇人傳作數學九章九卷;宜稼堂叢書本,從王應麟,作數書九章十八卷。

⓲ 錢大昕同書引癸辛雜識。

⓳ 宋史卷四五。

第十五章　秦九韶學說

第一節　秦九韶正負開方術

羅士琳謂:『秦氏著數學九章,而古正負術顯。』❶其言籌位與古無異,而應用〇號及簡號㐅,ó或ō,又或乂,則爲後世暗碼之起源。

	〇,	1,	2,	3,	4,	5,
縱者爲:	〇,	𝍠,	𝍡,	𝍢,	𝍣或㐅,	𝍤或ó或ō,
橫者爲:	〇,	𝍩,	𝍪,	𝍫,	𝍬或㐅,	𝍭或ó或ō,

	6,	7,	8,	9,
縱者爲:	𝍥,	𝍦,	𝍧,	𝍨或又,
橫者爲:	𝍮,	𝍯,	𝍰,	𝍱或乆,

秦氏論正負開方,至多者爲九乘方,即十次方程式,而自平方至九乘方,各數應列之地位,如:

平方	商	實,方,隅	即二次方程式,
立方	商	實,方,廉,隅	即三次方程式,
三乘方	商	實,方,上廉,下廉,隅	即四次方程式,…
九乘方	商	實,方,上廉,次廉,方廉,維廉,行廉,爻廉,星廉,下廉,隅	
或	商	實,方,上廉,二廉,三廉,四廉,五廉,六廉,七廉,下廉,隅	即十次方程式

而實,方,廉,隅之係數符號有正,負,或益,從,如從廉,益隅,正實,負廉,等是也。❷李銳謂:『秦道古(九韶)卷四上開方圖,負算畫黑,正算畫赤。』❸蓋李氏所見本如此。今所傳宜稼堂叢書刻本,已無朱黑之別。其種類有連枝,玲瓏,同體之分;而變式有翻法,換骨,投胎之別。秦氏曰:『乘方一位開盡者,不用翻法,』否則有翻法。而焦循以爲:『測望篇第六題望敵圓營用開連枝三乘玲瓏方。因初商之積,小於原積,故不名翻法。翻以減去下實爲義也。』❹秦書翻法僅一見,是否應如焦氏之解釋,尚屬疑問。

至「超步進位」之法，蓋因方程式:

$$x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+a_{n-3}\cdot x^{n-3}+\cdots\cdots+a_3\cdot x^3$$
$$+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x-a_0=0$$

如令　$x=10y$，則上式可書爲:

$$10^n y^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}y^{n-1}+a_{n-2}\cdot 10^{n-2}y^{n-2}+\cdots\cdots+a_3 10^3 y^3$$
$$+a_2 10^2 y^2+a_1\cdot 10y-a_0=0$$

同理遞進以求大數，遞退以求小數，如:

$$0.5x^2-152x-11552=0,$$

令　$x=100y$，則上式可書爲:

$$5000y^2-15200y-11552=0,$$

故三乘方商十時，方一進，上廉二進，下廉三進，隅四進；商百時，同前各進，卽方再一進，上廉再二進，下廉再三進，隅再四進，是也，餘做此。其約商之法，先約最高數，以次遞退，如某式之根 $x=366$，先約商 300，次 60，次 6，卽 $x=300+60+6$ 也。

數書九章卷四，論玲瓏正負三乘方，卽四次方程式未知數之各項，其係數相間爲零者，如:

$$-x^4-763200x^2-40642560000=0,$$

正負三乘方圖				
	商	常爲正	0	商
	實	常爲負，	－40642560000	實
	虛方		0	方
	從上廉		763200	上廉
	虛下廉		0	下廉
	益隅		－1	隅

可開玲瓏翻法三乘方,『凡一位開盡者,不用翻法。』

步法乃以『從上廉超一位,益隅超三位,商數進一位,約商得十位,』或稱:『方一進,上廉二進,下廉三進,隅四進,』如:

00	商
−40642560000	實
0	方
763200	上廉
0	下廉
−1	隅

『今再超進,上廉再超一位,益隅再超三位,商數再進一位,』或稱:『同前各進,』『乃置商百(位),其上廉爲: 763200^{0000}, 其益隅爲: $-1^{00000000}$』

000	商
−40642560000	實
0	方
763200	上廉
0	下廉
−1	隅

『約上商800爲定商,以商生隅,得 -800^{000000} 爲益下廉,又以商生下廉,得 -640000^{0000} 爲益上廉。』

800	商
−40642560000	實
0	方
763200	從上廉
−640000	益上廉
−800	益下廉
−1	益隅

『益上廉與從上廉 763200^{0000} 相消，從上廉餘 123200^{0000}。』

800	商
−40642560000	實
0	方
123200	上廉
−800	下廉
−1	隅

『又與商生上廉，入方，得 98560000^{00} 爲從方。』

800	商
−40642560000	實
98560000	方
123200	上廉
−800	下廉
−1	隅

『又與商相生，得 7884800000 爲正積，與原負積 4064250000 相消。』

800	商
−40642560000	負實
7884800000	正實
98560000	方
123200	上廉
−800	下廉
−1	隅

秦氏曰:『以負實積正積,其積乃有餘爲正實,謂之換骨。』

『又前相消餘 38205440000 爲正實。』

800	商
38205440000	正實
98560000	方
123200	上廉
−800	下廉
−1	隅

一變

『又以益隅 $-1^{00000000}$ 與商 8 相生,得 $-8^{00000000}$ 增入益下廉得 -1600^{000000}。』

800	商
38205440000	實
98560000	方
123200	上廉
−1600	下廉
−1	益隅

『又以益下廉與商相生,得 -1280000^{0000} 爲益上廉。』

800	商
38205440000	實
98560000	方
123200 −1280000	正上廉 負上廉
−1600	下廉
−1	益隅

『以正負上廉相消得 -1156800^{0000} 爲益上廉。』

800	商
38205440000	實
98560000	方
−1156800	益上廉
−1600	益下廉
−1	益隅

『以商生上廉得 925440000^{00} 爲益方。』

800	商
38205440000	實
98560000	正方
−925440000	益方
−1156800	益上廉
−1600	益下廉
−1	益隅

『正負方相消餘 -826880000^{00} 爲益方。』

800	商
38205440000	實
−826880000	益方
−1156800	益上廉
−1600	益下廉
−1	益隅

二變

『又以商8生益隅 $-1^{00000000}$ 得 $-8^{00000000}$，增入益下廉 -1600^{000000}，得 -2400^{000000}。』

800	商
38205440000	實
−826880000	益方
−1156800	益上廉
−2400	益下廉
−1	益隅

『以商生下廉，得 -19200^{000000}，入益上廉，得 -3076800^{0000} 為益上廉。』

三變

800	商
38205440000	實
−826880000	益方
−3076800	益上廉
−2400	益下廉
−1	益隅

『又以商生益隅，得 $-8^{00000000}$，入益下廉，得 -3200^{000000}。』

四變

800	商
38205440000	實
−826880000	益方
−3076800	益上廉
−3200	益下廉
−1	益隅

『方一退,上廉二退,下廉三退,隅四退畢,以方約實,續商40。』

800	商
38205440000	實
−826880000	方
−3076800	上廉
−3200	下廉
−1	隅

『以續商生隅,入下廉內,得:』

840	商
38205440000	實
−826880000	方
−3076800	上廉
−3240	下廉
−1	隅

『以商生下廉,入上廉內,得:』

840	商
38205440000	實
−826880000	方
−3206400	上廉
−3240	下廉
−1	隅

『以商生上廉入方內，得:』

840	商
38205440000	實
−955136000	方
−3206400	上廉
−3240	下廉
−1	隅

『以商命方法，除實適盡。』

840	商
00000000000	實
−955136000	方
−3206400	上廉
−3240	下廉
−1	隅

『所得商數，為 840 矣。』

蓋方程式: $-x^4+763200x^2-40642560000=0,$ ……………(1)

令 $100y=x$, 則變式:

$$-(100y)^4+763200\cdot(100y)^2-40642560000=0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

可約商 8, 亦卽原 (1) 式可約商 800 也。

秦九韶正負三乘方圖，並可以和涅 (Horner) (公元 1819 年)相類之法記之，如:

$$\begin{array}{lllll|l}
-1\times(100)^4+ & & +763200\times(100)^2 & & -40642560000 & \underline{8} \\
 & -800\times(100)^3- & 640000\times(100)^2+ & 98560000\times(100)+ & 78848000000 & \\ \hline
-1\times(100)^4- & 800\times(100)^3+ & 123200\times(100)^2+ & 98560000\times(100)+ & 38205440000 & \text{一變} \\
 & -800\times(100)^3- & 1280000\times(100)^2- & 925440000\times(100) & & \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
-1\times(100)^4-1600\times(100)^3-1156800\times(100)^2-826880000\times(100)+38205440000 & \text{二變} \\
\qquad -\ 800\times(100)^3-1920000\times(100)^2 & \\
\hline
-1\times(100)^4-2400\times(100)^3-3076800\times(100)^2-826880000\times(100)+38205440000 & \text{三變} \\
\qquad -\ 800\times(100)^3 & \\
\hline
-1\times(100)^4-3200\times(100)^3-3076800\times(100)^2-826880000\times(100)+38205440000 & \text{四變}
\end{array}$$

故 (2) 式約商 8 後,卽原式 (1) 約商 800 後,四變爲:

$$-1\times(100)^4y^4-3200\times(100)^3y^3-3076800\times(100)^2y^2$$

$$-826880000\times(100)y+38205440000=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

令 $10y=z$, 或 $10z=x$, 則變式

$$-1\times(10)^4z^4-3200\times(10)^3z^3-3076800\times(10)^2z^2-826880000\times(10)z$$

$$+38205440000=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

可約商 4。

$$\begin{array}{ll}
-1\times(10)^4-3200\times(10)^3-3076800\times(10)^2-826880000\times(10)+38205440000 & \underline{|\ 4} \\
\qquad -\ 40\times(10)^3-\ 129600\times(10)^2-128256000\times(10)-38205440000 & \\
\hline
-1\times(10)^4-3240\times(10)^3-3206400\times(10)^2-955136000\times(10) & \text{一變。}
\end{array}$$

卽原式 (1) 約商 40 後,一變爲:

$$-1\times(10)^4z^4-3240\times(10)^3z^3-3206400\times(10)^2z^2$$

$$-955136000\times(10)z=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

或 $-x^4-3240x^3-3206400x^2-955136000x=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$

而 $x=840$ 爲一根。(6) 式卽方程式論所稱之降低式(depressed equation), 如上第一除實不盡,則三乘方有四變, 卽 $x^n-A=0$ 式有 n 變,其 n 變之式卽爲第一次之降低式。❶ 上式第一商一變後,原負實變爲正實,是謂『換骨』。秦氏所設之例,實常爲負,(亦有作正實者),如第一商一變後,於原負實有所增益,

是謂『投胎』,例如 $0.5x^2-152x-11552=0$ 約 300 後變式爲 $5000y^2+14800y-12152=0$, 而 $x=100y$ 是也。蓋背通變後實多漸小,如加多而生『換骨』,『投胎』,則當特別注意,慮布算或有差誤也。

其開方不盡者,共有三種記法:

(一) 進一位,如 $\sqrt{8000}=89+\quad=90$,

(二) 加借算,如 $\sqrt{640}=25\frac{15}{2\times 15+1}=25\frac{5}{17}$, 此加借算之法,自古已有,祇及於開平立方。秦九韶則擴充而應用於多乘方,如方程式 $-x^4+15245x^2-6262506.25=0$, 初商 $x_1=20$ 後,變原式爲 $-x_2^4-80x_2^3+14045x_2^2+577800x_2-324506.25=0$, 假定此變式根數爲1, 故『以方,廉,隅,各數正負相併爲分母,餘實爲分子,』即 $x\doteq 20\frac{324506.25}{590564}$ 或 $x=20\frac{1389025}{2362256}$。如所得分數爲負數時,則當棄此分數不用,如數書九章卷十二,『囷積量容』題, $16x^2+192x-1863.2=0$, $x=6.35-\frac{1.06}{3,9156}=6.35$; 又 $36x^2+360x-13068.8=0$, $x=14.7-\frac{2.14}{139,68}=14.7$, 所謂『實不及收,就續商』也。

(三) 退商進求小數,有『進退開除』之法,如前言 $16x^2+192x-1863.2=0$, $x=6.35$; 又 $36x^2+360x-13068.8=0$, $x=14.7$ 是也。在 $16x^2+192x-1863.2=0$ 題,演算之次序,先約商 6:

$$
\begin{array}{l}
16+192-1863.2 \\
\underline{\qquad\ 96+1728} \\
16+288-\ 135.2 \\
\underline{\qquad\ 96\qquad\qquad} \\
16+384-\ 135.2
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\underline{|\ 6\ } \\
\\
(\text{一變}) \\
\\
(\text{二變})
\end{array}
$$

『方一退,隅再退,續商 0.3。』

0.16+38.4 −135.2　　| 3

　　+ 0.48+116.64

0.16+38.88− 18.56　(一變)

　　0.48

0.16+39.36− 18.56　(二變)『方一退,隅再退,續商 0.05。』

0.0016+3.936−18.56　　| 5

　　+0.008+19.72

0.0016+3.944+ 1.06

因餘實爲 1.06, 卽得數 $x=6.35-\frac{1.06}{3.9456}=6.35=6.4$ 也。秦九韶於退商求小數之法,實與和湼氏同具明確之見解。李治益古演段(公元 1259 年)第二十二問, $-0.96x^2+91x-306.74=0$, $x=3.5$, 及朱世傑四元玉鑑(1303)『鎖套吞容』第十七問 $135x^2+4608x-138240x=0$, $x=19.2$, 雖亦言小數開方,而其商數尚非奇零不盡;若秦九韶則知求略近値得商至『實不及收,』卽最後之小數,算至略大於眞數爲止,則較李,朱,所示,尤爲明顯。前此劉益,賈憲之正負開方術,亦不及此完備。秦書序於淳祐七年(公元 1247 年)比魯飛尼(Ruffini)(公元 1804 年)及和湼(公元 1819 年)之發明,實先五百餘年,而二人全未知華人在十三世紀已應用此術,爲可惜也。❶

秦九韶於數書九章卷六,『漂田推積』題: $121x^2-43264=0$, 稱:『開方不盡,以連枝術入之,用隅乘實得定實,以 1 爲隅,』蓋原式依正負開方術,開得 $x=18$ 後,得數尚未盡,得變式函有實數。今於原式中,令 $x=\frac{y}{n}=\frac{y}{121}$, 卽先以 121 乘其根數,得

$y^2+\frac{0}{121}\times(121)y-\frac{43264}{121}(121)^2=0$, 或 $y^2-121\times43264=0$, 由是得商爲 $y=2288$, 故知原式之根 $x=18\frac{10}{11}$。又卷七『臨臺測深』題,『開同體連枝平方,』其術中夾註稱:『同體格先以隅開平方,得數名同隅,以同隅乘定實開之,得數爲實,以同隅爲法除之,得(商),』如: $121x^2-43264=0$, $\sqrt{121}=11$, 故於原式中,令 $x=\frac{y}{n}=\frac{y}{11}$,如前先以11乘其根數,得 $y^2-\frac{0}{121}\times(11)y-\frac{43264}{121}\times(11)^2=0$, 或 $y^2=43264=0$, 由是得商爲 $y=208$, 故知原式之根 $x=18\frac{10}{11}$。此又一法也。其後李治益古演段第四十問亦言『連枝同體術』, 如 $-22.5x^2-648x+23002=0$, 平方開之,『今不可開,先以隅法22.5乘實23002得517545爲實,原從 -648 依舊爲從, -1 爲益隅,』即得 $-y^2-648y+517545=0$, $y=465$, $x=\frac{465}{22.5}=20\frac{2}{3}$。按秦九韶,李治之連枝同體術,並因知原式開方不盡,故先變原式之根, x 爲 $\frac{y}{n}$, 其後朱世傑四元玉鑑內『端匹互隱』第一問,『和分索隱』第一問之『按連枝同體術求之,』蓋亦如是。若『和分索隱』第十三問之『按之分法求之,』則先求得大數,次於變式按連枝同體術,令 x_2 爲 $\frac{y}{n}$ 求其小數。此『連枝同體術』及『之分法』之所以異,羅士琳幷二者爲一,失其原義矣。[4]

[1] 算學啓蒙卷末,羅士琳識語,覲我生室叢稿本。

[2] 秦九韶數書九章卷四,開玲瓏翻法三乘方術曰:『從常爲正,益常爲負,』蓋以正爲從,以負爲益也。四元玉鑑梯法七乘方圖中,有云:『正者爲從,負者爲益,』亦是此意。

[3] 益古演段卷上第二頁,知不足齋叢書本。

[4] 清焦循天元一釋上,第一二頁,上海著易堂倣聚珍本。

● 參看倪德基譯, Cajori, 方程式論,上海中華書局,民國一四年(公元1923年)五月。

● 參看倪譯前書, § 56,『和涅之法,』第七四頁至第七九頁。Cajori, F. A History of Elementary Mathematics, p. 240, New York, 1917.

● 秦九韶數書九章,宜稼堂叢書本。李治益古演段,知不足齋叢書本。朱世傑四元玉鑑,觀我生室彙稿本。

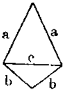
第二節 秦九韶數理雜說

秦九韶於學無所不通。數書九章(公元1247年)搜羅宏富,分爲九類:一,大衍;二,天時;三,田域;四,測望;五,賦役;六,錢穀;七,營造;八,軍旅;九,市易。各類之中,幷分九題。其書於古九章:方田,粟米,(互易或互換附),衰分,少廣,商功,均輸,盈朒,● 方程(正負附),句股(重差及夕桀附)外,又有大衍 ● 率變,堆積,招法。數書九章卷十三『計造石壩』題,謂『以招法入之,』卽:

$$a+(a+1\cdot b)+(a+2\cdot b)+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}b)=n\cdot a+\frac{n(n+1)}{2}\cdot b.$$

而 $a=$上積或初積, $b=$次積.

此與朱世傑四元玉鑑(公元1303年),『如像招數』首問同術,而如像招數之招,與此招法之招,有同源之勢。



此外田域類尖田求積中,兩尖田之面積 x, 由

$$-x^4+2(A+B)x^2-(B-A)^2=0,$$

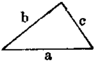
$$A=\left[b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]\times\left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

$$B=\left[a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]\times\left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

而得。

三斜求積之面積 x, 由

$$x^4-\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]=o,$$

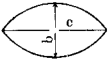


即　$x=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,　$s=\dfrac{a+b+c}{2}$,

而得。❸

蕉田求積中,蕉田之面積 y, 由

$$4y^4+\left[\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]\times 2y^2-10(c+b)^8=o,$$

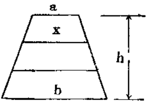


而得。

均分梯田,作爲三分,已知 a, b, h, 則 x 之值,可由

$$\frac{b-a}{2}\times x^2+ahx-\frac{k}{2}\times h=o,$$

$$k=\frac{1}{3}\times\frac{(a+b)}{2}\times h,$$



而得。

在數書九章卷十四,『積木計餘』題,謂『尖垛』以堆積入之,』即

$1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{(2m-1)2m}{2}$, 而 $m=\dfrac{1+n}{2}$ 爲中面數。又稱 3, 2, 1 爲反錐差; 1, 3, 6 爲蒺藜差; 1, 4, 9 爲方錐差。其論小數之類,一之下,有:分,釐,毫,絲,忽,微,塵,沙,渺,莽,輕,清,煙; 分數之類,有:中半 ($\frac{1}{2}$), 少半 ($\frac{1}{3}$), 太半 ($\frac{2}{3}$), 弱半 ($\frac{1}{4}$), 強半 ($\frac{3}{4}$) 之別。❹

❶ 𠈌髄即𠈌髈,毛鈔本楊輝,詳解九章算法亦作盈朒。

❷ 關於大衍求一術之詳細論述,參看李儼,大衍求一術之過去與未來,第一至四五頁,學藝雜誌第七卷第二號,上海,中華學藝社,民國一四年(公元1925年)九月。

❸ 此即有名之希倫公式(Heronic formula)。希倫(Heron)爲公元50年或200年時人。

❹ 秦九韶數書九章,宜稼堂叢書本。Mikami, Y., The development of mathematics in China and Japan, pp. 63-76, Leipzig, 1913.

第十六章 近古數學家小傳

(六) 劉汝諧, 元裕; 金: 楊雲翼, 洞淵, 李德載;
元: 瞻思, 彭澤, 李治。

劉汝諧, 元裕　祖頤四元玉鑑後序稱:『平水劉汝諧撰如積釋鎖, 絳人元裕細草之, 後人始知有天元也。』按平水為金時縣名, 則汝諧當為金人。❶ 羅士琳以元裕為元好問, ❷ 山西通志已論其非。

楊雲翼　字之美。客平定之樂平縣, 遂家焉。明昌五年(公元 1194 年)成進士; 大安元年(公元 1209 年)楊元簡薦其材, 且精術數, 召授提點司天臺, 俄兼禮部郎中。貞祐三年(公元1215年)轉禮部侍郎。興定(公元 1217—1221 年)中司天臺不置渾儀, 又缺測候人數, 金宣宗嘗以問雲翼。雲翼生金大定十年(公元 1170 年)。卒金正大五年(公元 1228 年), 年五十九。著有句股機要, 象數雜說等藏於家。❸

洞淵　不詳其姓氏里居。李治測圓海鏡序(公元 1248 年)稱:『老大以來, 得洞淵九容之說, 日夕玩繹,……遂累一百七十問, 既成編, 客復目之測圓海鏡。』❹ 李善蘭謂九容『即測圓海鏡二卷中, 句上容圓, 股上容圓, 弦上容圓, 句股上容圓, 句外容圓, 股外容圓, 弦外容圓, 句外容半圓, 股外容半圓, 九題是也。』❺

李德載　平陽人。撰兩儀羣英集, 兼有地元, 見祖頤四

元玉鑑後序。李治敬齋古今黈稱:『予至東平,得一算經,大概多明如積之術,以十九字志其上下層數曰:仙,明,霄,漢,壘,層,高,上,天;人;地,下,低,減,落,逝,泉,暗,鬼。此蓋以人爲太極,而以天,地,各自爲元,而涉降之。』❸此算經亦言地元,當與李德載同時。

瞻思　字得之。其先大食國人。泰定三年(公元1326年),詔以遺逸徵至上都。天曆三年(公元1330年)召入爲應奉翰林文字。至元二年(公元1336年)拜陝西行臺監察御史。至正十年(公元1350年)召爲祕書少監,議治河事。皆辭疾不赴。十一年(公元1351年)卒於家。年七十四。(公元1278－1351年)。瞻思邃於經,而易學尤深。至於天文,地理,鐘律算數,水利,旁及外國之書,皆究極之。❹瞻思有河防通議二卷,今刊入守山閣叢書,蓋輯自永樂大典者。其書亦『太在元下』。李治敬齋古今黈稱:『予偏觀諸家如積圖式,皆以天元在上,乘則升之,除則降之。』瞻思亦沿此制也。❺

彭澤　李治敬齋古今黈稱:『獨太原彭澤彥材法,立天元在下,凡今之印本復軌等俱下置天元者,悉踵彥材法耳。彥材在數學中,亦入域之賢也。』❻李治益古演段(公元1259年)亦言『元在太下』,蓋受彭澤之影響也。其後郭守敬,授時曆草亦『元在太下』。

李治　字仁卿,號敬齋。李遹次子。❼金眞定府欒城縣人。自幼善算數。❽正大七年(公元1230年)登詞賦進士第,調高陵簿。未上,辟權知(河南)鈞州事。壬辰(公元1232年)正月,

城潰,微服北渡。[12] 又二年(公元1234年),金亡。遂流落忻,崞間。先隱於崞山(在代州崞縣)之桐川。聚書環堵。[13] 戊申(公元1248年)成測圓海鏡二十卷,謂得洞淵九容之說,日夕玩繹,遂成此書。[14] 後由崞而之太原,居太原藩府;[15] 之平定,居聶珪帥府。[16] 晚家眞定府元氏縣之封龍山,學徒益衆。[17] 元世祖居潛邸聞其賢。歲丁巳(公元1257年),遣使召之,問對稱旨。[18] 己未(公元1259年),成益古演段三卷,謂近世有某者,以方圓移補成編,號益古集,再爲移補條段,細繙圖式,遂成此書。[19] 至元元年(公元1264年),元世祖始立翰林院,王鶚薦李治爲學士。[20] 至元二年(公元1265年),召拜翰林學士,同修國史。明年以疾辭,歸封龍山。十六年(公元1279年),卒於家。年八十八。(公元1192－1279年)。[21] 子克修。治病革語克修曰:『測圓海鏡一書,雖九九小數,吾常精思致力焉,後世必有知者。』[22] 其自信如此。著作之存目者,有古今黈四十卷,[23] 文集四十卷,壁書叢削十二卷,泛說四十卷。[24]

[11] 元脫脫等金史卷二六,志第七,地理下,稱:『絳州……縣八,……絳,平水,[(金)宣宗興定四年(公元1220年)七月,徙置汾河之西,從平陽公胡天作之請也。]』

[12] 清羅士琳疇人傳卷四七,第三頁至第四頁,觀我生室彙稿本。

[13] 金史卷二二,志第三,曆下;又同書卷一一〇,列傳第四八,楊雲翼。三續疑年錄據遺山集;清金門詔補三史藝文志;錢大昕元史藝文志。

[14] 測圓海鏡序第一,二頁,光緒丙子(公元1876年),同文館集珍版本。

[15] 清李善蘭天算或問卷一第一頁,則古昔齋算學一三,同治丁卯

(公元1867年)刻本。

⑥ 敬齋古今黈卷之三,第三頁,藕香零拾本。

⑦ 元史卷一九〇,列傳第七七,儒林二,……韓思。

⑧ 清顧觀光九數存古卷五,第五〇頁,及第五一頁,江蘇書局校刊,光緒一八年(公元1892年)。敬齋古今黈卷之三,第三頁,藕香零拾本。

⑨ 敬齋古今黈卷之三,第三頁及第四頁,藕香零拾本。

⑩ 繆荃孫刊本敬齋古今黈附錄引:元遺山集,寄庵先生碑記(公元1242年)。

⑪ 測圓海鏡自序。

⑫ 繆荃孫刊本敬齋古今黈附錄引:事跡。

⑬ 前書引:門生集賢焦公撰文集序。

⑭ 測圓海鏡自序。

⑮ 繆荃孫刊本敬齋古今黈附錄引:元蘇天爵元名臣事略。

⑯ 前書引:太常徐公撰四賢堂記。

⑰ 前書引:王文忠公撰書院記。惟河朔訪古記謂此事在至元三年(公元1266年)後。

⑱ 繆荃孫刊本敬齋古今黈附錄引:王磐問對。

⑲ 益古演段自序。

⑳ 元史卷一六〇,列傳第四七,王磐。

㉑ 據元蘇天爵元名臣事略。

㉒ 測圓海鏡:虞乎王德淵後序。

㉓ 繆刊本得十二卷。

㉔ 元史卷一六〇,列傳第四七,李冶。

第十七章　李冶學說

第一節　李冶天元一術

李冶測圓海鏡,益古演段於『天元一』術言之獨詳。法以常數(constant)爲『太極』,旁記『太』字,未知數一次者(x)爲『天元』,旁記『元』字。測圓海鏡中太在元下,卽『元下必太,太上必元,故有元字,不記太字,有太字不記元字。元上一層則元自乘數,又上一層則元再乘數,凡上一層則增一乘。太下一層則元除太數,又下一層則元再除太數,凡下一層則增一除。』[1]

如: 244800=…… 𝍪𝍣𝍬𝍧〇〇 太;

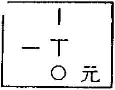
x+160=……

𝍠 元
𝍠𝍮〇
;

$x^2+680x+96000$=……………………………

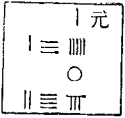
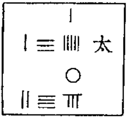
𝍠
𝍥𝍱〇元
𝍨𝍮〇〇〇
,　或

𝍠
𝍥𝍱〇
𝍨𝍮〇〇〇太
;

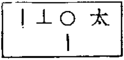
$x^3+16x^2=$…… ;

$x+2+4x^{-1}=$… ; 或 ;

$x+135+248x^{-2}=$……………………………………………

 或 ;

李治偏觀諸家如積圖式,皆以天元在上,乘則升之,除則降之。其後益古演段元太次序,除第十一問別紙所記一題外,并反測圓海鏡之例,『元在太下』,則受彭澤之影響,故

$x+160=$…… ,宋元後期作品,并從此例。

❶ 測圓海鏡卷二,第九頁,李銳案語,同文館集珍版,光緒丙子(公元1876年)。

第二節　李治正負開方術

李治籌位亦應用〇號,卽:

〇,1,2,3,4,5,6,7,8,9

縱者爲:〇,𝍠,𝍡,𝍢,𝍣,𝍤,𝍥,𝍦,𝍧,𝍨

橫者爲:〇,𝍩,𝍪,𝍫,𝍬,𝍭,𝍮,𝍯,𝍰,𝍱

李氏論正負開方,至多者爲五乘方,卽六次方程式,其自平方至五乘方各數應列之地位,如:

平方	商
	實,從,隅

或平實,二次方;程式

立方	商
	實,從,廉,隅

或立實,三次方;式程

三乘方	商
	實,從,第一廉,第二廉,隅

四次方程式;………

五乘方	商
	實,從,第一廉,第二廉,第三廉,第四廉,隅

六次方程式

就中測圓海鏡實無論正負并稱實,或於平方之實稱平實,立方之實稱立實,三乘方之實,稱三乘方實。從之正者稱從,或從方;爲負者稱益從,益方,或虛從。廉之正者稱廉,第一廉,或從廉;爲負者稱益廉,或第一益廉;餘廉同此。隅之正者稱隅,隅法,常法;爲負者稱益隅,虛隅,虛法,虛常法。益古演段僅言平方,列位亦『下法上實,』實無論正負並稱實.正從稱從,負從稱益從或虛從。正隅稱常法或隅法,負隅稱益隅,虛隅,虛常法。而舊術中從稱從法,隅稱爲廉;又二次方程式 $ax^2-bx+c=0$, 或 $-ax^2+bx-c=0$, 時稱爲減從,此外隅之在平方者亦稱平隅。

『測圓海鏡不言正負,而邪畫以標異數,……李尙之(銳)云(益古演段)第五十四問,五十七問,條段圖,虛積及應減處並以紅色爲誌,知當時算式亦必以紅黑爲別,而傳寫者改去也。』❶ 李銳又以益古演段元本算式正負無別爲證。❷ 玆爲下文便利起見,假定其已知負算以斜畫爲記,如 -3 或 ||| 是也。

而變式有益積,倒積,翻法,或翻之別。就中益積并『益在積』,與秦九韶之投胎相同,與楊輝之益積或益隅又復有別,如測圓海鏡,

明叀前第一問, $-x^2+204x+8640=0$, $x=240$.

又, $-x^2+102x+2160=0$, $x=120$.

大和第四問, $4x^3-2640x^2+264960x+6156000=0$, $x=150$.

明叀前第二問, $-x^4+8640x^2+652320x+4665600=0$, $x=120$.

又，$-2x^4+604x^3+17280x^2-8553244x$

$+401067842=0,\ x=289.$

是也。而倒積，翻法意義相同，如『三事和第八問』，$-4x^2+1600x-81600=0$，法中稱：『翻開之得半大弦三百四十』，草中稱：『倒積開得三百四十』是也。楊輝稱爲翻積，而草中亦有『乃命翻法』之語。其言翻法，或『翻在實』，如測圓海鏡，

底句第五問，$x^2-170x+6000=0,\ x=120.$

明叀前第三問，$x^2-144x+2880=0,\ x=120.$

三事和第八問，$-4x^2+1600x-81600=0,\ x=340.$

大股第九問，$x^3-1200x^2+213600x-10080000=0,\ x=120.$

底句第五問，$x^3-140x^2+900x+180000=0,\ x=120.$

大股第十二問，$0.5x^3-1200x^2+427200x-40320000=0,\ x=240.$

則與秦九韶之換骨相同。亦有『翻在從』者，亦稱翻法，如測圓海鏡，

明叀前第四問，$-x^2+60x+7200=0,\ x=120.$

雜糅第四問，$-8x^2+448x+61440=0,\ x=120.$

明叀後第九問，$400x^2-1280x-81920=0,\ x\doteq16.$

明叀前第十問，$63x^4-15782x^3+1336328x^2-46428480x$

$+553180400=0,\ x=120.$

雜糅第十六問，$-x^4-600x^3-22500x^2+11681280x$

$+768486400=0,\ x=120.$

是也。又有『倒積倒從開平方』之法，如益古演段，

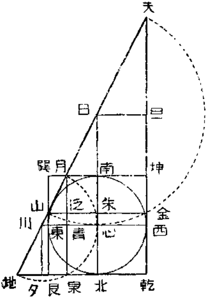
第二十四問，$1.75x^2-108x+1449=0$，$x=42$，倒積倒從開平方，初商40後，變式得$1.75y^2+32y-71=0$，從，實之符號適與原式相反，此亦與秦氏之換骨相類。

❶ 清焦循天元一釋上第九頁，蒼易堂倣聚珍版印本。

❷ 益古演段卷上，第二頁，知不足齋叢書本。

第三節　李治圓城圖式名義

測圓海鏡十二卷，『以句股容圓爲題，自圓心圓外縱橫取之，得大小十五形，皆無奇零。』❶ 如通△天地乾，天地爲通弦，天乾爲通股，乾地爲通句，而所取之句股弦，幷爲$8^2+15^2=17^2$之倍數，如通弦$=40\times17$，通股$=40\times15$，通句$=40\times8$是也。所得十五形正數，爲：



弦，c，　句，a，　股，b，

大或通△天地乾 680, 320, 600,

邊△天川西 544, 256, 480,

底△日地北 425, 200, 375,

黃廣△天山金 510, 240, 450,

黃長△月地泉 272, 128, 240,

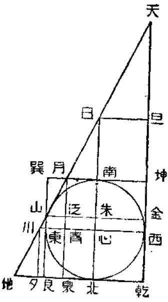
上高△天日旦 255, 120, 225,

下高△日山朱 255, 120, 225,

上平△月川青 136, 64, 120,

下平△川地夕 136, 64, 120,

大差△天月坤 408, 192, 260,



小差△山地艮170, 80, 150,

(皇)極△日川心289, 136, 255,

(太)虛△月山泛102, 48, 90,

明△日月南153, 72, 135,

重△山川東 34, 16, 30,

释名:

句=a, 股=b, 弦=c。

黃=黃方=內容圓徑=圓=2r。

句股和=和=a+b=弦黃和

=(a+b−c)+c。

句股較=較=差=中差=b−a

=雙差較=(c−a)−(c−b)。

句弦和=a+c。

句弦較=大差=c−a=股黃較=股黃差=b−(a+b−c)。

股弦和=b+c。

股弦較=小差=c−b=句黃較=句黃差=a−(a+b−c)。

雙差=大差+小差。

弦較和=(c)+(b−a)=股較和=b+(c−a)

=句和較=(b+c)−a。

弦較較=c−(b−a)=股和較=(c+a)−b

=句較和=(c−b)+a。

弦和和=總和=三事和=a+b+c

=句和和=(b+c)+a=股和和=(a+c)+b。

弦和較＝黃＝黃方＝圓徑＝a+b−c

　＝句較較＝a−(c−b)＝股較較＝b−(c−a)。

雜率:

角差＝遠差＝(上或下)高b−(上或下)平a

　＝高(b−a)+平(b−a)

　＝明(a+b)−叀(a+b)＝通(b−a)−極(b−a)

　＝極(b−a)+虛(b−a)。

次差＝近差＝戾(音列)差＝明(b−a)+叀(b−a)

　＝明(c−a)−叀(c−b)。

混同和＝小差b+大差a＝2r+虛c。

傍差＝明(b−a)−叀(b−a)＝高(b−a)−平(b−a)

　＝極(c−a)+極(c−b)−虛(a+b)＝極c−2r。

叀(音對)差＝虛(b−a)−傍差＝大差(b−a)−角差

　＝極(b−a)−2平(b−a)＝次差−小差(b−a)

　＝明b+叀a−2明a。

叀和＝虛(b−a)+傍差。

如積:

半段(圓)徑冪＝大差b×小差a＝大差a×小差b

　＝虛b×通a＝虛a×通b。

(圓)徑冪＝黃廣b×黃長a。

半徑冪＝高b×平a＝(明c+明b)×(叀c+叀a)

　＝(明c+明a)×(叀c+叀b)。

皇極積＝高c×平c。

太虛積 $=2$ 明 $a\times$ 叀 $b=$ 明 $b\times$ 叀 b。

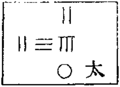
❶ 四庫全書提要,測圓海鏡條。

第四節　李冶天元一術之應用

茲錄測圓海鏡卷七『明叀前第二問』一題,以見天元一術之應用,及其對於幾何之知識。題曰:

『或問丙出南門直行一百三十五步而立,甲出東門直行一十六步見之,問(徑幾里),答(曰城徑二百四十步)。	此卽有叀句,有明股求圓徑。如『圓城圖式』有川東,有日南,求東西徑也。
草曰:立天元一爲皇極上股弦差。[卽東行步上斜也。亦謂叀弦。]	令　$x=$ 皇極上股弦差。 $=$ 極 $(c-b)$ $=$ 日川 $-$ 日心 $=$ 山川 $=$ 叀 c。
以天元加二行差,得 丨 元 丨一𝍨 卽明弦也。 (此卽皇極弦上句弦差也。)	二行差 $=$ 日南 $-$ 川東 $=$ 日心 $-$ 川心。 $x+$ 二行差 $=$ 山川 $+$ 日心 $-$ 川心 $=$ 日川 $-$ 川心 $=$ 極 $(c-a)$,皇極上句弦差, $=$ 日月 $=x+119$。 (明弦)。

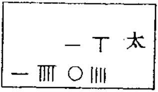
以天元乘之,又倍之,得:



,即皇極內黃方冪也。(泛寄)

置皇極弦上句弦差,以東行步乘之,得:

以天元除之,得下:



爲明句也。

又置天元,以南行乘之,得:

合用明弦除,不除,寄爲母,便以此直股

$2x(x+119)$

$=2$ 極$(c-b)\times$極$(c-a)$

$=$極$[2c^2-2(a+b)c+2ab]$.

$=$極$(a+b-c)^2$,極黃方冪。

$=2x^2+238x$。(泛寄)

因△。日月南;山川東爲相似,

故 $\dfrac{\text{日月}[=\text{極}(c-a)]\times\text{川東}}{\text{山川}}$

$=$月南,

即 $\dfrac{(x+119)\times 16}{x}$

$=16+1904x^{-1}$。(明句)。

又因△,日月南;山川東爲相似,

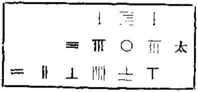
故 $\dfrac{\text{山川}\times\text{日南}}{\text{日月}}=$山東,

即 $\dfrac{x\times 135}{x+119}=135\times x\times\dfrac{1}{x+119}$,

於上。(寄明弦母)

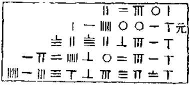
乃再置明句,以明弦乘之,得:

亦爲帶分明句,加入上位,得:



即是一個虛弦也。

以自增乘得下:



(重股)。

而 $\frac{1}{x+119}$ 爲寄母。

測圓海鏡第一卷『識別雜記』中『諸弦』稱:『太虛弦內減重股,即明句,』即山月−山東=月南。蓋因自心作直乘心中,則△日中心=△日朱山。即山月−山東=山月−中山=月中=月南也。

故山月=月南+山東

$$=(16+1904x^{-1})+\frac{135}{x+119}$$

$$=\frac{(16+1904x^{-1})(x+119)+135}{x+119}$$

$$=\frac{151x+3808+226576x^{-1}}{x+119}$$

(太虛弦)。

以太虛弦自乘之,其

$$(151x+3808+226576x^{-1})^2$$

$$=22801x^2+1150016x$$

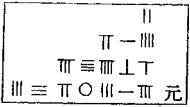
$$+82926816+1725602816x^{-1}$$

$$+51336683776x^{-2}$$

爲太虛弦分子之自乘冪。故稱爲一段虛弦冪也。

然後置明弦以自之，得：

爲明弦冪，以乘泛寄，得：



爲同數。

與左相消，得下：

尙有分母之明弦自乘冪 $(x+119)^2$ 另置之。

測圓海鏡第一卷『識別雜記』中『諸弦』稱：『太虛弦加入極弦爲極和，』卽極黃方＝虛弦。因日心＋川心－日川＝日心＋山川＋山月－（日心＋山川）＝山月。

故 虛弦冪＝極黃方冪。

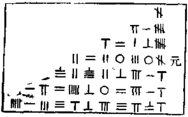
卽 一段虛弦冪＝明弦冪×極黃方冪。

故明弦冪 $(x+119)^2=x^2+238x+14161$，乘泛寄極黃方冪 $(2x^2+238x)$，得 $(x^2+238x+14161)(2x^2+238x)=2x^4+714x^3+84966x^2+3370318x$ 爲一段虛弦冪之同數。

爲同數，卽：$22801x^2+1150016x+82926816+1725602816x^{-1}+51336683776x^{-2}=2x^4+714x^3+84966x^2+3370318x$。

與左相消，卽：

$-2x^4-714x^3-84966x^2+22801x^2$



開五乘方得三十四步,爲叀行上斜步也[卽叀弦]。其叀行步得 |⊥,卽叀句也。

句弦各自爲冪,以相減餘九百步,開方得三十步,卽叀股也。

旣各得此數,乃以股外容圓半法,求圓徑得二百四十步,卽城徑也,合問。』❶

$-3370318x+1150016x$

$+82926816+1725602816x^{-1}$

$+51336683776x^{-2}=0,$

或 $-2x^4-714x^3-62165x^2$

$-2220302x+82926816$

$+1725602816x^{-1}$

$+51336683776x^{-2}=0.$

$\therefore\ x=34=$叀 $c,$

$16=$叀 $a.$

而叀 $b=\sqrt{34^2-16^2}=30$ (晝股)。

股外容圓半法,見測圓海鏡卷二,『正率一十四問』之第十,『法曰:……以句股相乘,倍之,爲實,以小差爲法,』

卽 $\dfrac{2\times16\times30}{34-30}=240$ 也。

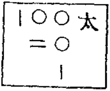
玆再錄益古演段卷中第二十三問一題,以見如積,相消之義,題曰:

『今有圓方田各爲段,共計積一千三百七步半,只云方面

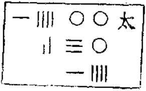
大如圓徑一十步。圓依密率，問面徑各多少。答曰：方面三十一步；圓徑二十一步。

法曰：立天元一爲圓徑，加一十步，得

爲方面，以自之，得：



爲方田積，以十四之，得下式：



爲十四段方田積，於頭。

又立天元圓徑，以自乘爲冪，又以十一之，得

便爲十四段圓田積。〔依密率合以徑自乘又十一之，如十四而一。今以十一乘，不受除，

令 x = 圓徑 = D,

$x+10$ = 方面。

$(x+10)^2=x^2+20x+100.$

(方田積)。

$14(x^2+20x+100)=14x^2+280x+1400.$ (十四段方田積)。

x^2 = 圓徑冪，

$11x^2=11x^2$.(十四段圓田積)。

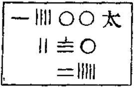
因密率，$\pi=\frac{22}{7}$，

圓田積 $=\frac{11}{14}D^2$。

一段圓田積，應有分母 14，十四段圓田積，便無分母矣。

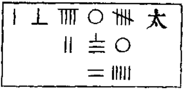
故就爲十四分母也。]

以併入頭位，得：

，

爲十四段如積，寄左。

然後列眞積一千三百七步半，就分十四之，得一萬八千三百五步，與左相消，得：

，

開平方除之，得二十一步，爲密率徑也，加不及步，爲方田也。

依條段求之，十四之積步於上，內減十四段不及步冪爲實，二十八之不及步爲從，二十五常法，

義曰：將此十四個方冪之式，只作一個方冪求之，自見隅從也。』●

$$14x^2+280x+1400+11x^2$$

$$=25x^2+280x+1400$$

（十四段如積）。

$14\times1307\frac{1}{2}=18305$，與左相消，

$$25x^2+280x+1400=18305,$$

$$25x^2+280x+1400-18305=0,$$

$$25x^2+280x-16905=0,$$

$x=21$,　　（圓徑）。

$x+10=31$.　　（方田）。

換言之，卽：

$$25x^2+2\times14\times10x-(14\times1307\frac{1}{2}-14\times10^2)=0.$$

如圖 14 方面積 $=14(x+10)^2$

$=14x^2$（十四徑方積）

$+14\times10x$（十四之從）

$+14\times10x$（十四之從）

$+14\times10^2$(此係十四段不及步冪,應與左相減,故書減為誌。)

總十四方面積

十四之從	十四徑方積
減	十四之從

十四圓積合為十一徑方積

$14(x+10)^2$

$14\times10\times x$	$14x^2=14D^2$
14×10^2	$14\times10x$

$14\times\frac{11}{14}D^2$ $=11D^2$ $=11x^2$

又 14 圓積 $=14\times\frac{11}{14}D^2=11x^2$ (為十一徑方積)。如題意,故以『十四徑方積』($14x^2$),加『十一徑方積』($11x^2$),得 25 為 x^2 之係數,又以兩倍『十四之從』得 2×14 之不及步 (10),即 $2\times14\times10$ 為 x 之係數。而 14 之總積內減 14×10^2 即 $14\times1307\frac{1}{2}-14\times10^2$ 為實也。

❶ 測圓海鏡卷第七,第一頁及第八頁,同文館聚珍版本。

❶ 益古演段卷中第一頁及第二頁,知不足齋叢書本。

第十八章　近古數學家小傳

(七) 宋: 楊輝。

楊輝　字謙光,錢塘人。景定辛酉(公元1261年)作詳解九章算法,後附纂類,總十二卷。今所傳者,非其全帙。❶又詳解算法若干卷,盡乘除,九歸,飛歸之蘊。景定壬戌(公元1262年)作日用算法二卷,以明乘除,爲初學用,編詩括十有三首,立圖草六十六問,永嘉陳幾先爲之題跋。❷咸淳甲戌(公元1274年)作乘除通變本末三卷:上中卷乘除通變算寶爲輝自撰,下卷法算取用本末則與史仲榮合撰。德祐乙亥(公元1275年)作田畝比類乘除捷法二卷。是年冬因劉碧澗,丘虛谷及舊刊遺忘之文,而作續古摘奇算法二卷。以上七卷稱爲楊輝算法。洪武戊午(公元1378年)古杭勤德書堂新刊行世。❷

❶　宜稼堂叢書本,詳解九章算法存商功第五,均輸第六,盈不足第七,方程第八,句股第九,凡五章。脫去方田第一,粟米第二,衰分第三,少廣第四,凡四章。所存者不循舊次,宋景昌亦未爲之排比。若從永樂大典卷一六三四四,尚可輯出少廣第四,一章。李儼藏有影攝本永樂大典卷一六三四三之一六三四四,十輸,算法一四之一五,由法儒伯希和寄贈,原書藏英,劍橋大學。參看李儼,永樂大典算書考,圖書館學季刊,第二卷,第二期。

❷　其序跋及標題,載入李儼所藏諸家算法中,爲莫友芝(公元1811—1871年)子繩孫舊藏本。永樂大典卷一六三四三,第一九頁至第二一頁,又引一題爲諸家算法所未記。

⑥ 北京北海,北京圖書館有楊守敬舊藏韓刻本楊輝算法。楊輝算法,日本東京共有三部:一在內宮省,一在內閣文庫,一在大塚高等師範學校。

第十九章　楊輝學說

第一節　楊輝引用之劉益,賈憲正負開方術

楊輝籌位亦應用〇號及簡號,卽:

〇, 1, 2, 3, 4, 5,

縱者爲: 〇, 𝍠, 𝍡, 𝍢, 𝍣 或 ㄨ, 𝍤 或 〇̄,

橫者爲: 〇, 𝍩, 𝍪, 𝍫, 𝍬 或 ㄨ, 𝍭 或 〇̍,

6, 7, 8, 9,

縱者爲: 𝍥, 𝍦, 𝍧, 𝍨,

橫者爲: 𝍮, 𝍯, 𝍰, 𝍱,

負數以斜畫爲記,如 −5 爲 𝍤̸ 是也。其算法通變本末卷上,稱:『開方乃算法中大節目,句股,旁要,鎖積乃用例,有七種:一曰開平方,二曰開平圓,三曰開立方,四曰開立圓,五曰開分子方,六曰開三乘以上方,七曰帶從開方。』❶ 楊輝不言天元一法,除帶縱平方外,其自平方至三乘方應列之地位,幷出於賈憲,爲秦九韶,正負開方術所自本,如:

帶從平方

上商	第一級
實,	第二級
方法,	第三級
從方,	第四級
隅算	第五級

平方

上商
實,
方法,
下法

或方，立方

上商
實,
方,
廉,
下法,

三乘方

上商
實,
三乘方法,
上廉,
下廉,
下法

，或立方，或方…………

或隅算.

五乘方

上商
實,
方,
上廉,
二廉,
三廉,
四廉,
下廉,
隅算

就中實之正者稱爲實;爲負者稱負實;從之正者稱從方,從法;爲負者稱負從;隅之正者稱下法,隅算,或正隅,爲負者稱負隅,益隅。

(一) 劉益法

宋楊輝田畝比類乘除捷法卷下,❷ 引有劉益議古根源,帶從開平方,布算應列五級,(例 1)與孫子,張丘建,夏侯陽,五經算,大衍曆開方法相同。又有『益積及益隅法,』(例 2, 3)則因上商與從方所命之積,與實符號相同。當先益入實,稱爲『益積,』次再以上商與方法所命之積,與益積相消爲定實。或因上商與方法所命之積,與實符號相同,當先益入實,

稱爲『益隅』，次再以上商與從方所命之積，與益隅相消爲定實。以上二法并言：『二因方法，一退爲廉，』布算列爲五級，爲便於益積，益隅之故。至『減從及翻積法』（例 4, 5, 6）與秦九韶正負開方術相類，布算僅列四級。不用二因，僅以『餘從一退，』布算時省去第三級之方法，共爲四級。

（例 1）　$x^2+12x=864$，令 $x=x_1+x_2$　第一上商，$x=20$

開方列位圖

商位	
置積	𝍧𝍮𝍣
方法	
從方	𝍠𝍪
隅筭	𝍠

商第一位數圖

商闘	𝍪
置積	𝍧𝍮𝍣
方法	𝍡
從方	𝍠𝍩
隅筭	𝍠

商第二位數圖

商闘	𝍪𝍣
置積	𝍡𝍪𝍣
方法	𝍫𝍣
從方	𝍩𝍡
隅筭	𝍠

即	（隅）	（從方）	（方法）	（實）
	100 +	120		− 864
				+ 240
			+ 200	+ 400
	100 +	120	+ 200	− 224
			×	2
	100 +	120	+ 400	− 224

（上商）

20　　$x_1=20$

『二因方法，一退名廉』得變式 $x_2^2+12x_2+40x_2=224$

$\therefore\ x_2=4$

蓋 $x^2+bx+c=o$, 初商 x, 代入後餘實$=f$, 得變式:

$(2x_1+x_2)x_2+bx_2+f=o$, 或 $x_2^2+(b+2x_1)x_2+f=o$.

(例 2) $x^2-12x=864$

(隅)	(從方)	(方法)	(實)	(上商)
100 −	120		− 864	30 　 $x_1=30$
		+ 300	− 360	(益積)
100 −	120	+ 300	−1224	『二因方法,一退名廉』得
		× 2	+ 900	變式 $x_2^2-12x_2+60x_2=324$
100 −	120	+ 600	− 324	∴ $x_2=6$

(例 3) $-x^2+60x=864$

(隅)	(從方)	(方法)	(實)	(上商)
−100 +	600		− 864	20 　 $x_1=20$
		− 200	− 400	(益隅)
−100 +	600	− 200	−1264	『二因方法,一退名廉』得
		× 2	+1200	變式 $-x_2^2+60x_2-40x_2=64$
−100 +	600	− 400	− 64	∴ $x_2=4$

(例 4) $x^2-12x=864$

(隅)	(方法)	(下法)	(上商)
100 −	120	− 864	30 　 $x_1=30$
	+ 300	+ 540	按 180=300−120 爲減從
100 +	180 (減從)	−324	『餘從一退』得變式
	+ 300		$x_2^2+48x_2=324$
100 +	480	−324	∴ $x_2=6$

(例 5) $-8x^2+312x=864$, 以翻積術入之。

(隅)	(方法)	(下法)	(上商)	
-800	$+3120$	-864	30	$x_1=30$
	-2400	$+2160$		
-800	$+720$	$+1296$	(翻積)	
	-2400		『餘從一退』得變式	
-800	-1680	$+1296$	$-x_2^2-168x_2=-1296$	
			$\therefore\ x_2=6$	

(例 6)　$-x^2+60x=864$, 以翻積術入之。

(隅)	(方法)	(下法)	(上商)	
-100	$+600$	-864	30	$x_1=30.$
	-300	$+900$		
-100	$+300$	$+36$	(翻積)	
	-300		得變式	
-100		$+36$	$-x_2^2=-36$	
			$\therefore\ x_2=6$	

其言益積,益隅,與秦九韶之投胎,李冶之益積,實異其義,蓋秦李幷『益在實,』而此則僅爲齊同原實符號之故,先同名相益,次異名相減也。

(二)　賈憲法

宋楊輝詳解九章算法纂類所引有:『賈憲立成釋鎖平方法,增乘開平方法,賈憲立成釋鎖立方法,增乘開立方法』四種。❸ 永樂大典本楊輝詳解九章算法有『開方作法本源,』言增乘方求廉草,自註稱:『出釋鎖算書,賈憲用此術,』蓋卽巴斯噶(Pascal)三角形也,其圖如下。❹

左積　　右隅

本積 1

商除 1 1

平方 1 2 1

立方 1 3 3 1

三乘 1 4 6 4 1

四乘 1 5 10 10 5 1

五乘 1 6 15 20 15 6 1

左袤乃積數,

右袤乃隅算,

中藏者皆廉,

以廉乘商方,

命實而除之。

『增乘方求廉法草曰,[釋鎖求廉本源],列所開方數,[如前五乘方,列五位,隅算在外],以隅算一,自下增入前位,至首位而止。[首位得六,第二位得五,第三位得四,第四位得三,下一位得二],復以隅算如前陞增,遞低一位求之。

求第二位:

六[舊數],　五[加十而止],　四[加六爲十],　三[加三爲六],　二[加一爲三]。

求第三位:

六,　十五[幷舊數],　十[加十而止],　六[加四爲十],　三[加一爲四]。

求第四位:

六，　十五，　二十〔并舊數〕，　十〔加五而止〕，　四〔加一爲五〕。

求第五位:

六，　十五，　二十，　十五〔并舊(數)〕，　五〔加一爲六〕。
上廉，二廉，　三廉，　四廉，　　　下廉。

宋楊輝詳解九章算法少廣第四，又有『增乘開平方圖』，言增乘開平方布算之式。●

增乘開平方法〔以商數乘下法，遞增乘之〕。商第一位：上商得數以乘下法爲乘方。命上商除實，上商得數以乘下法入乘方，一退爲廉，下法再退。商第二位：商得數以乘下法爲隅，命上商除實訖，以上商得數乘下法入隅，皆名曰廉，一退，下法再退，以求第三位商數。商第三位：用法如第二位求之。

例如　$x^2-71824=0$

『別置一算，名曰下法定一。超一位定十，超一位定百。

	商
71824	實
	方
1	下法

(1)

上商得數(2)，以乘下法爲平方。命上商除實。

200	商
31824	實
2	方
1	下法

(2)

(又) 以上商得二,乘下法入平方。

200	商
31824	實
4	方
1	下法

(3)

方法一退,爲廉,下法再退。

200	商
31824	實
4	廉
1	下法

(4)

上商得六,以乘下法,爲隅,命上商除實。

260	商
4224	實
46	廉
1	下法

(5)

以上商得數乘下法,增隅入廉。

260	商
4224	實
52	廉
1	下法

(6)

廉法一退，下法再退。

268	商
4224	實
52	廉
1	下法

(7)

以上商乘下法爲隅，與廉皆命上商，除實盡。』

268	商
4224	實
528	廉
1	下法

(8)

其演算次序，可以和涅相類之法記之：

$x^2-71824=0$

(下法)	(方)	(實)	(商)	
10000 +		−71824	200，	先得 $x_1=200$
	+20000	+40000		
10000	+20000	−31824		
	20000			『方法一退爲廉，下法再退，』得變式
10000	+40000	−31824		$100x_2^2+4000x_2-31824=0$

(下法)	(廉)	(實)	(商)	
100	+4000	−31824	60，	續得 $x_2=60$
	600	+27600		
100	+4600	− 4224		
	600			『廉法一退，下法再退，』得變式
100	+5200	− 4224		$x_3^2+520x_3-4224=0$

$$
\begin{array}{rrrl}
(\text{下法}) & (\text{廉}) & (\text{實}) & (\text{商}) \\
1 & +520 & -4224 & \underline{|8}\ , \quad \text{終得 } x_3=8 \\
 & 8 & +4224 & \\
\hline
1 & +528 & +0 &
\end{array}
$$

$\therefore\ x=x_1+x_2+x_3=268$

又有『遞增三乘開方法』,❶亦見楊輝詳解九章算法,題曰:『積一百三十三萬六千三百三十六尺,問爲三乘方幾何?』『答曰:三十四尺。』

『遞增三乘開方法草曰:置積爲實,別置一算,名曰下法,於實末常超三位約實。[一乘超一位,三乘超三位,萬下定實],上商得數[三十],乘下法生下廉[三十],乘下廉生上廉[九百],乘上廉生立方[二萬七千],命上商除實[餘五十二萬六千三百三十六]。作法,商第二位得數,以上商乘下法入下廉[共六十],乘下廉入上廉[共二千七百],乘上廉入方[共一十萬八千]。又乘下法入下廉[共九十],乘下廉入上廉[共五千四百]。又乘下法入下廉[共一百二十]。方一,上廉二,下廉三,下法四退[方一十萬八千,上廉五千四百,下廉一百二十,下法定一]。又於上商之次,續商置得數[第二位四],以乘下法入廉[一百二十四],乘下廉入上廉[共五千八百九十六],乘上廉併爲立方[一十三萬一千五百八十四],命上商除實盡,得三乘方一面之數。[如三位立方,依第二位取用。]』

楊輝所引遞增三乘開方法,幷可以和湼相類之法記之。

$x^4=1336336,\qquad x=34$

$$
\begin{array}{rrrrrl}
1(10)^4+ & 0\times(10)^3+ & 0\times(10)^2+ & 0\times(10) & -1336336 & \underline{|\,3} \\
+ & 30\times(10)^3+ & 900\times(10)^2+ & 27000\times(10) & +\ 810000 & \\
\hline
1(10)^4+ & 30\times(10)^3+ & 900\times(10)^2+ & 27000\times(10) & -\ 526336 & \\
 & 30\times(10)^3+ & 1800\times(10)^2+ & 81000\times(10) & & \\
\hline
1(10)^4+ & 60\times(10)^3+ & 2700\times(10)^2+ & 108000\times(10) & -\ 526336 & \\
 & 30\times(10)^3+ & 2700\times(10)^2 & & & \\
\hline
1(10)^4+ & 90\times(10)^3+ & 5400\times(10)^2+ & 108000\times(10) & -\ 526336 & \\
 & 30\times(10)^3 & & & & \\
\hline
1(10)^4+ & 120\times(10)^3+ & 5400\times(10)^2+ & 108000\times(10) & -\ 526336 &
\end{array}
$$

又

$$
\begin{array}{l}
1+120+5400+108000-526336 \quad \underline{|\,4} \\
\quad\ \ 4+\ 496+\ 23584+526336 \\
\hline
1+124+5896+131584
\end{array}
$$

❶ 宋楊輝算法通變本末卷上,第三頁,宜稼堂叢書本。

❷ 宋楊輝田畝比類乘除捷法卷下,第一八頁,宜稼堂叢書本。

❸ 宋楊輝詳解九章算法纂類第三七頁至第三九頁,宜稼堂叢書本。

❹ 此圖與程大位算法統宗(公元1593年)卷六所載,字句相同。程氏謂出於吳信民九章比類,實亦本之楊輝也。昔多以朱世傑四元玉鑑(公元1303年)卷首所列,爲此圖之最先記載,而四元玉鑑亦明著『古法七乘方圖』,則非朱氏所發明也明甚。且至遲亦在楊輝前,輝書成於景定辛酉(公元1261年)。在歐州則其圖發明於巴斯噶(Pascal, 1623-1662),稱爲巴氏三角形(Pascal Triangle),而亞比亞納(Petrus Apianus, 1495-1552)亦列其圖於一五二七年著作之封面,則亦尚後於楊輝二百餘年也。

❺ 以下所引,見永樂大典卷一六三四四,第八頁及第九頁。并參著宋楊輝詳解九章算法纂類第三七頁至第三九頁,宜稼堂叢書本。

❻ 以下所引,見永樂大典卷一六三四四,第二六頁及第二七頁。

第二節 楊輝數理雜說

宋楊輝,續古摘奇算法上卷載有縱橫圖。洛書數:『九子斜排,上下對易,左右相更,四維挺出。』四語,爲奇行縱橫圖作法之根源。此外又有花十六圖,花十六陰圖,五五圖,五五陰圖,六六圖,六六陰圖,衍數圖,衍數陰圖,易數圖,易數陰圖,九九圖,百子圖;聚五圖,聚六圖,聚八圖,攢九圖,八陣圖,連環圖。[1] 玆略示一二圖,如:

31	76	13	36	81	18	29	74	11
22	40	58	27	45	63	20	38	56
67	4	49	72	9	54	65	2	47
30	75	12	32	77	14	34	79	16
21	39	57	23	41	59	25	43	61
66	3	48	68	5	50	70	7	52
35	80	17	28	73	10	33	78	15
26	44	62	19	37	55	24	42	60
71	8	53	64	1	46	69	6	51

(1) 九九圖

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

(2) 百子圖

輝於級數,❷謂:

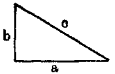
三角垛, $1+(1+2)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

四隅垛, $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{1}{3}n(n+\frac{1}{2})(n+1)$

方垛, $a^2+(a+1)^2+\cdots+(c-1)^2+c^2=\frac{1}{3}(c-a+1)\left(c^2+a^2+ca+\frac{c-a}{2}\right)$

輝於田畝比類乘除捷法言小數之用,於乘除通變算寶著九歸詳說,而應用於籌策,後此珠算用訣,卽以此爲始。至於二次方程解法,則詳解九章算法句股章,『今有戶高』題。因句股形已知 c, 及 $d=a-b$, 則 $c^2=2a^2+4\left(\frac{d}{2}\right)^2+4\left(\frac{d}{2}\times a\right)$,

兩邊各減 $2\left(\frac{d}{2}\right)^2$, 得:

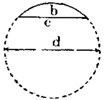


$$c^2-2\left(\frac{d}{2}\right)^2=2a^2+4\left(\frac{d}{2}\times a\right)+2\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

$$=2\left(a+\frac{d}{2}\right)^2.$$

故 $a=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{c^2-2\left(\frac{d}{2}\right)^2\right\}}-\frac{d}{2}$, 卽爲二次式之根。

至論弧矢形,則謂:



$$-(2A)^2+4Ab^2+4db^3-5b^4=0,$$

$$c=\frac{2A}{b}-b,\qquad d=\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{b}+b,$$

前二式疑出自劉益,末式爲輝所自發。

❶ 關於縱橫圖之詳細論述,參看李儼:中算家之縱橫圖研究,學藝雜誌。

❷ 見宋楊輝詳解九章算法,商功第五。其後朱世傑稱四隅垛爲四角垛。

第二十章　近古數學家小傳

(八) 元:郭守敬。

郭守敬　字若思。順德邢臺人。大父榮,通五經,精於算數,水利。時劉秉忠(公元1216—1274年),張文謙(公元1216—1283年),張易,王恂(公元1235—1281年),同學於(磁)州西,紫金山。榮使守敬從秉忠學。元中統三年(公元1263年)文謙薦守敬習水利,巧思絕人。……十三年平宋,遂詔前中書左丞許衡,太子贊善王恂,都水少監郭守敬改治新曆。衡等率南北日官陳鼎臣,鄧元麟,毛鵬翼,劉巨淵,王素,岳鉉,高敬等,分掌測驗,推步於下,而命張文謙,與樞密張易,爲之主領。至元十七年(公元1280年)曆成,名賜授時曆,所創法凡五事。元史曆志僅錄李謙曆議。清梅文鼎因授時曆草,❶及大統曆通軌爲成大統曆法,載於明史,說較詳盡。守敬卒於延祐三年(公元1316年)。年八十六(公元1231—1316年)。❷

❶　梅文鼎所據授時曆草二卷,乃清初欽天監藏本,題:嘉議大夫太史令臣王恂奉敕撰。梅氏疑爲郭守敬所續成,見明史卷三四。

❷　明宋濂等元史卷五二,志第四,曆一;又卷一六四,列傳第五一。清張廷玉等明史卷三一至卷三三,曆一至曆三。

第二十一章　郭守敬學說

第一節　郭守敬正負開方術

清梅瑴成稱:『嘗讀授時曆草,求弦矢之法,先立天元一爲矢,』[1] 梅文鼎古算術略內『古算器考』引(授時)曆草算式,[2] 其籌位與李治,朱世傑相同,不用籌號。又『乘除法實式』,則法在上,實在中,商在下,與夏侯陽算經所謂:『實居中央,…以法除之,宜得上商。』者,稍異其制。[3] 其『黃道出入赤道二十四度,求矢』題,則因沈括公式: $a=\frac{2b^2}{d}+c$, 及楊輝公式 $d=\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{b}+b$, 消去 c, 得:

$$b^4+d^2b^2-adb^2-d^3b+\frac{a^2d^2}{4}=0$$

隅,　上廉,　下廉,　益從方,　正實.

其開方之法,令 x_1 爲初商,即 $x_1 \doteqdot b$,

則　$\{(d^2x_1-d^3)+(x_1^2+ad)x_1\}x_1+\frac{a^2d^2}{4}=0$,

如　$f(b)-f(x_1)=f$,　即 $b>x_1$,　則 $x=x_1+x_2$ 時,

$$(\overline{x_1+x_2}^2+x_1^2)(2x_1+x_2)x_2+d^2(2x_1+x_2)x_2-ad(2x_1+x_2)x_2-d^3x_2+f=0,$$

又如　$f(b)-f(x_1+x_2)=f_1$,　即 $b>x_1+x_2$,　則 $x=x_1+x_2+x_3$ 時,

$$(\overline{x_1+x_2+x_3}^2+\overline{x_1+x_2}^2)(2\cdot\overline{x_1+x_2}+x_3)x_3+d^2(2\cdot\overline{x_1+x_2}+x_3)x_3$$
$$-ad(2\cdot\overline{x_1+x_2}+x_3)x_3-d^3x_3+f_1=0,$$

同理,如　$f(b)-f(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{n-1})=f_{n-2}$,

卽　$b > x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_{n-1}$，　則 $x = x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n$ 時，

$$(\overline{x_1+x_2+\cdots+x_n}^2 + \overline{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}^2)(2\cdot\overline{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}+x_n)x_n$$
$$+d^2(2\cdot\overline{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}+x_n)x_n - ad(2\cdot\overline{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}+x_n)x_n$$
$$-d^3x_n+f_{n-2}=0$$

故明史『割圓求矢術』稱:『以初商乘上廉,得數,以減益從方。餘爲從方。置初商自之,以減下廉,餘以初商乘之,爲從廉。從方,從廉相幷爲下法。下法乘初商,以減正實,實不足減,改初商;實有不盡,次第商除之。倍初商數與次商相幷,以乘上廉,得數,以減益從方,餘爲從方。幷初商,次商而自之,又以初商自之,幷二數以減下廉,餘以初商倍數幷次商乘之,爲從廉。從方,從廉相幷爲下法。下法乘次商以減餘實,而定次商。有不盡者,如法商之,皆以商得數爲矢度之數。』❹ 其術與楊輝田畝比類乘除捷法卷下帶從開方法中『二因方法,一退爲廉』之制相類。❺

❶　梅瑴成赤水遺珍,梅氏叢書輯要卷六一。

❷　梅文鼎古算衍略第五頁,兼濟堂刻,曆算全書本。

❸　古算衍略第六頁,引曆草。

❹　明史卷三二,志第八,曆二,大統曆法一上。

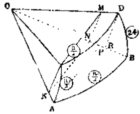
❺　此法如應用於二次式 $ax^2+bx+c=o$，而 $x=x_1+x_2$ 時，即初商 x_1，代入後，餘實 $=f$，又次商 x_2 代入得 $a(2x_1+x_2)x+bx_2+f=o$，或 $ax_2^2+(2a+b)x_2+f=o$，與楊輝田畝比類乘除捷法卷下所記帶縱開方法,完全一致。

第二節　郭守敬弧矢割圓術

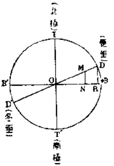
郭守敬割圓術,不僅割平圓,且割渾圓爲分圓。梅文鼎

以其黃道面,赤道面在分圖中僅成直線,乃於塹堵測量中補作合形(如圖1),較見明晰。郭守敬因周天, $\pi d=365\frac{1}{4}$, $\pi=3$, 故全徑=121.75,半徑=60.875, ∴ 象限=91.31, 又實測得二至黃赤道內外半弧背 (angle between the celestial equator and the ecliptic) 二十四度。[所測就整]。

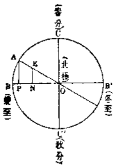
茲示有黃道積度 (complement of celestial longitude) 求赤道積度 (complement of right accession), 及赤道內外度 (declination) 之術。郭守敬割渾圓即算弧三角法。其術在國中此爲首創。



(1) 合形



(2) 側立之圖



(3) 平視之圖

「求黃道各度下赤道積度術。 置周天半徑,內減去黃道矢度,餘爲黃赤道小弦。	已知CD弧,求AB弧。 用 $b^4+d^2b^2-adb^2-d^3b+\frac{a^2d^2}{4}=o$, 四次式,求得黃道積度: CD弧$\left(\frac{a}{2}\right)$之矢	例如:在第一度時, $\frac{a}{2}=1°$, $b=0.0082$, $OM=60.875-0.0082$.

置黃赤道小弦，以黃赤道大股乘之，爲實，黃赤道大弦[半徑]爲法，實如法而一，爲黃赤道小股。	$MD(=b)$. $r-b=OM$. (爲黃赤道小弦)。 $\frac{OM\times OR}{OD}=ON$. (爲黃赤道小股)。	因二至黃赤道內外半弧背， DB弧$=24^\circ$. $b=4.8482$, $OR=60.875-4.8482$ $=56.0268$.(爲常數)。 $\therefore\quad ON=56.0192$.
置黃道矢自乘爲實，以周天全徑爲法；實如法而一，爲黃道半背弦差。 以差去減黃道積度，[卽黃道半弧背]，餘爲黃道半弧弦。	由沈括公式， $a=\frac{2b^2}{d}+c$, 故　$\frac{b^2}{d}=\frac{a-c}{2}$ $=\frac{1}{2}(\overline{2CD}-\overline{2CM})$. (爲黃道半背弦差)。 $\frac{a}{2}-\frac{b^2}{d}=\frac{c}{2}=CM$. (爲黃道半弧弦)。	$\frac{1}{2}(\overline{2CD}-\overline{2CM})$ $=\frac{0.0082^2}{121.75}$. $CM=1-\frac{0.0082^2}{121.75}$ $=1.0000$.
置黃道半弧弦自之爲股冪，黃赤道小股自之爲句冪，二冪并之，以開平方法除之，爲赤道小弦。	因　$CM=KN$, $\sqrt{\overline{KN}^2+\overline{ON}^2}=OK$. (爲赤道小弦)。	$OK=\sqrt{1^2+56.0192^2}$ $=56.0281$.
置黃道半弧弦，以周天半徑，[亦爲赤道大弦]，乘之，爲實；	因 $CM=KN$, $OB=OA$,	$AP=\frac{1\times 60.875}{56.0281}$ $=1.0865$.

以赤道小弦爲法而一，爲赤道半弧弦。	$\frac{KN\times OA}{OK}=\frac{c_1}{2}=AP.$ (爲赤道半弧弦)。	
置黃赤道小股〔亦爲赤道橫小句〕，以赤道大弦，〔卽半徑〕乘之，爲實，以赤道小弦爲法而一，爲赤道橫大句，以減半徑，餘爲赤道橫弧矢。	$\frac{ON\times OA}{OK}=OP.$ (爲赤道橫大句)。 $r-OP+PB.$ (爲赤道橫弧矢)。	$OP=\frac{56.0192\times 60.875}{56.0281}$ $=60.8653.$ $PB=60.875-60.8653$ $=0.0097.$
橫弧矢自之爲實，以全徑爲法而一，爲赤道半背弦差。以差加赤道半弧弦，爲赤道積度。	$\frac{\overline{PB}^2}{d}=\frac{b_1^2}{d}=\frac{a_1-c_1}{2}$ $=\frac{1}{2}(\overline{2AB-2AP}).$ (爲赤道半背弦差)。 $\frac{a_1-c_1}{2}+\frac{c_1}{2}=\frac{a_1}{2}=AB.$ (爲赤道積度)。	$\frac{1}{2}(\overline{2AB-2AP})$ $=\frac{\overline{0.0097}^2}{121.75}.$ $AB=\frac{\overline{0.0097}^2}{121.75}+1.0865$ $=1.0865.$

推黃道各度距赤道內外度術。	已知OD弧求AC弧。	例『如冬至後四十四度，求太陽去赤道內外度。』
置半徑內減去赤道小弦，餘爲赤道	由前 OK $=\sqrt{\overline{KN}^2+\overline{ON}^2}$	$AK=60.875-58.3569$ $=2.5181.$

二弦差,[又爲黃赤道小弧矢,又爲內外矢,又爲股弦差]。	(爲赤道小弦)。 $r-OK=AK.$ (爲赤道二弦差)。	
置半徑內減去黃道矢度,餘爲黃赤道小弦,以二至黃赤道內外半弧弦乘之爲實,以黃赤道大弦爲法,[即半徑]。除之,爲黃赤道小弧弦,[即黃赤道內外半弧弦,又爲黃赤道小句]。	$r-b=r-MD=OM.$ (爲黃赤道小弦)。 因 $MN=CK$, $\frac{OM\times DR}{OD}=\frac{c_2}{2}=CK.$ (爲黃赤道小弧弦)。	$OM=60.875-16.5682$ $=44.3068.$ $CK=\frac{44.3068\times 23.71}{60.875}$ $=17.2569.$
置黃赤道小弧矢自之,[即赤道二弦差],以全徑除之,爲半背弦差。	$\frac{\overline{AK}^2}{d}=\frac{b_2^2}{d}=\frac{a_2-c_2}{2}$ (爲半背弦差)。	$\frac{a_2-c_2}{2}=\frac{\overline{2.5181}^2}{121.75}$ $=0.0520.$
以差加黃赤道小弧弦爲黃赤道小弧半背,即黃赤道內外度。❶	$\frac{c_2}{2}+\frac{a_2-c_2}{2}=\frac{a_2}{2}.$ (爲黃赤道內外度)。	$\frac{a_2}{2}=17.2569+0.0520.$ $=17.3089.$

❶ 明史卷三二,曆二,大統曆法一上。梅文鼎塹堵測量卷一及卷二,曆算全書本。Gauchet. L, Note sur La Trigonométrie Sphérique de Kouo Cheou-

King, T'oung-Pao, pp. 151－174, Vol. XVIII, 1917.

第三節　授時平立定三差法

郭守敬授時曆因太陽,太陰,及五星行天,有盈有縮。如古法以91度31奇爲一象限,而太陽自冬至至春分本該行九十一日三十一刻有奇,而實際每於冬至後八十八日九十一刻,太陽已到春分宿度,是爲盈曆。而夏至前後則爲九十三日七十一刻,是爲縮曆。今因每年爲二十四氣,則每季爲六氣。如以盈曆爲例,則 $\frac{1}{6}\times 88$ 日 91 刻 = 14 日 82 刻爲每氣日數。其盈縮之差,由多而漸少,或由少而漸多,絕非平派。故授時曆,大統曆立爲平立定三差之法,求合天度。

郭守敬言『太陽盈縮平立定三差之源』

命積(日)爲: $n,\quad 2n,\quad 3n,\quad 4n,\quad 5n,\quad 6n$;

積差爲: $S_n,\quad S_{2n},\quad S_{3n},\quad S_{4n},\quad S_{5n},\quad S_{6n}$;

(日)平差爲: $(\mu_0=\mu_1+v_1-w_1)$, $\mu_1=\frac{S_n}{n}$, $\mu_2=\frac{S_{2n}}{2n}$, $\mu_3=\frac{S_{3n}}{3n}$,

$$\mu_4=\frac{S_{4n}}{4n},\quad \mu_5=\frac{S_{5n}}{5n},\quad \mu_6=\frac{S_{6n}}{6n};$$

以逐差之法 (finite differences) 求得一差,二差,如:

一差,或汎平差爲: $(v_0=v_1-w_1)$, $v_1=\mu_2-\mu_1$, $v_2=\mu_3-\mu_2$,

$$v_3,\quad v_4,\quad v_5.$$

二差,或汎立差爲: (w_0), $w_1=v_2-v_1$, $w_2=v_3-v_2$,

$$w_3,\quad w_4.$$

此時 w_0, w_1, w_2, w_3, w_4 已全相等,即:

$$\mu_0,\quad \mu_1,\quad \mu_2,\quad \mu_3,\quad \mu_4,\quad \mu_5,\quad \mu_6.$$

$$v_0,\quad v_1,\quad v_2,\quad v_3,\quad v_4,\quad v_5.$$

$$w_0=w_1=w_2=w_3=w_4.$$

令 汎平積$=\mu_1$, 汎平積差 $=v_1-w_1=\mu_0-\mu_1$,

汎立積差$=\frac{w_2}{2}$.

又令 汎平積差$=v_1-w_1=\mu_0-\mu_1=nq+n^2c$.

就中 定差, $d=\mu_0$, 平差, $q=\dfrac{v_1-w_1-\frac{w_1}{2}}{n}$, 立差, $c=\dfrac{\frac{w_1}{2}}{n^2}$.

則代入得: $\mu_1=d-nq-n^2c$.

$$\mu_2=d-2nq-\overline{2n}^2c,$$

$$\mu_3=d-3nq-\overline{3n}^2c,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

或 $$s_n=nd-n^2q-n^3c,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$s_{2n}=(2n)d-(2n)^2q-(2n)^3c,$$

$$s_{3n}=(3n)d-(3n)^2q-(3n)^3c,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

爲n日末, 2n日末, 3n日末,……盈縮積,或限積。

又可知:

$$s_1=d-q-c,$$

$$s_2=2d-2^2q-2^3c,$$

$$s_3=3d-3^2q-3^3c,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n=nd-n^2q-n^3c.$$

爲1日末，2日末，3日末，……n日末盈縮積，或限積。再以逐差之法，求得加分，a，平立合差，b，加分立差，k，如：

(加分)	(平立合差)	(加分立差)
$s_1-s_0=d-q-c=a$,		
	$\overline{-2q}\,\overline{-6c}=6$	
$s_2-s_1=d-3q-7c$,		$-6c=k$
	$\overline{-2q}\,\overline{-6c}-6c$	
$s_3-s_2=d-5q-19c$,		$-6c$
	$\overline{-2q}\,\overline{-6c}-2\times 6c$	
$s_4-s_3=d-7q-37c$,		$-6c$
	$\overline{-2q}\,\overline{-6c}-3\times 6c$	
…………………………		$-6c$
	…………………	
…………………………		……
	…………………	
…………………………		$-6c$
	$\overline{-2q}\,\overline{-6c}-(n-3)6c$	
$s_{n-1}-s_{n-2}=d-(2n-3)q-(3n^2-9n+7)c$,		$-6c$
	$\overline{-2q}\,\overline{-6c}-(n-2)6c$	
$s_n-s_{n-1}=d-(2n-1)q-(3n^2+3n-1)c$,		

而，

初日加分 $=d-q-c=a$，　次日加分 $=(d-q-c)+(-2q-6c)$，

初日平立合差 $=\overline{-2q}\,\overline{-6c}=b$，次日平立合差 $=(-2q-6c)-6c$，

n日平立合差 $=(-2q-6c)-(n-2)6c$

加分立差 $=-6c=k$，

初日末盈縮積 $=d-q-c$，

次日末盈縮積 $=2(d-q-c)+(-2q-6c)$，

三日末盈縮積 $=3(d-q-c)+3(-2q-6c)+(-6c)$，

四日末盈縮積 $=4(d-q-c)+6(-2q-6c)+4(-6c)$，

五日末盈縮積 $=5(d-q-c)+10(-2q-6c)+10(-6c)$，

…………………………………………………………………………

$$n\text{日末盈縮積} = n(d-q-c) + \frac{(n-1)n}{2}(-2q-6c) + \frac{(n-2)(n-1)n}{6}(-6c)$$

$$= na + \frac{(n-1)n}{2}\cdot b + \frac{(n-2)(n-1)n}{6}\cdot k.$$

$$s_n = nd - n^2q - n^3c.$$

換言之,卽 n 日末盈縮積:

$$s_n = a + (a+b) + (a+2b+k) + (a+3b+3k) + (a+4b+6k)$$

$$+ \cdots\cdots + \left[a + \overline{n-1}\cdot b + \frac{(n-2)(n-1)}{2}\cdot k\right]$$

$$= na + \frac{(n-1)n}{2}\cdot b + \frac{(n-2)(n-1)n}{6}\cdot k \quad \cdots\cdots (2)$$

$$= nd - n^2q - n^3c.$$

故旣知 a, b, k, 則冬至後按日盈縮,及每日盈行度,可依次加減,而造立成。❶按朱世傑招差之術其義未詳,似卽本於授時平立定三差法,因授時曆之加分,平立合差,加分立差,卽朱氏之二差,三差,下差也。

❶ 明史卷三三。

第二十二章　近古數學家小傳

(九) 劉大鑑; 元: 朱世傑.

劉大鑑　字潤夫。霍山邢頌不高弟也。撰乾坤括囊,末有人元二問。❶

朱世傑　字漢卿,號松庭。寓居燕山。周流四方二十餘年。復遊廣陵,踵門而學者雲集。撰算學啓蒙三卷,分二十門,立二百五十九問,首總括無卷數。大德己亥(1299)趙城序而梓傳焉。朱世傑又因宋元之間,蔣周,李文一,石信道,劉汝諧,元裕僅言天元;李德載僅言地元;劉大鑑僅言人元;乃按天地人物立成四元,以元氣居中,立天元一於下,地元一於左,人元一於右,物元一於上,上升下降,左右進退,互通變化,乘除往來,用假象真,以虛問實,錯綜正負,分成四式,必以寄之,剔之,餘籌易位,橫衝直撞,精而不雜,自然而然,消而和會,以成開方之式也。書成名曰四元玉鑑,釐爲三卷,分門二十四,立問二百八十八,大德癸卯(公元 1303 年)臨川莫若序而傳焉。❷

❶ 祖頤四元玉鑑後序,觀我生室叢稿本。

❷ 算學啓蒙四元玉鑑序,觀我生室叢稿本。

第二十三章　朱世傑學說

第一節　朱世傑正負開方術

朱世傑算學啓蒙,四元玉鑑中籌位與李冶相同,不用簡號,負數則以斜畫爲記。其論正負開方,至多者爲十三乘方,而『上實下法』,亦與李冶相同,而自平方至十三乘方各數應列之地位,如:

平方		立方		三乘方		十三乘方
上商		上商		商		商
實,		實,		實,		實,
方,	或方法,	方,	或方法,	方,	,......	方,
隅	或廉法	廉,	或廉法	上廉,		上廉,
		隅,	或隅法	下廉,		二廉,
				隅		三廉,
						四廉,
						......
						......
						十廉,
						十一廉,
						十二廉,
						下廉,
						隅

就中平方,立方,三乘方或不記正,負,從,益。正負開方中,實之正者稱正實,爲負者稱益實;方之正者稱從方,爲負者稱益方;廉之正者稱從廉,爲負者稱益廉;隅之正者稱正隅,或從隅,爲負者稱益隅。四元玉鑑卷前『今古開方會要之圖』,所

謂:『正者爲從,負者爲益。』是也。

算學啓蒙卷下『開方釋鎖門』開平方術,與『賈憲立成釋鎖平方法』相同,其開立方術則與楊輝所引『增乘方法』相同。算學啓蒙卷上『開方釋鎖門』又言:『平方翻法開之,』『三乘方翻法開之,』并翻在從,不翻在實,與秦九韶之翻法,換骨;楊輝之翻積,并異其義。❶ 如:

$7x^2-104x-6156=0,\ x=34;$

變式爲 $x_2^2+316x_2-2976=0,$

$109x^2-2288x-348432=0,\ x=68;$

變式爲 $109x_2^2+10792x_2-93312=0,$

$x^2-17x-3120=0,\ x=65;$

變式爲 $x_2^2+103x_2-540=0,$

$x^4-1496x^2-x+558236=0,\ x=28;$

變式爲 $x_2^4+80x_2^3+904x_2^2-27841x-119816=0,$

$9x^4-2736x^2-48x+207936=0,\ x=12;$

變式爲 $9x_2^4+360x^3+2664x^2-18768x+23856=0.$

且秦九韶曰:凡『乘方一位開盡者,不用翻法,』而算學啓蒙則:

$x^2-3.75x-1=0,\quad x=4,$

$x^3-76x^2+10192x-181440=0,\quad x=20.$

尚稱『翻法開之』,蓋秦之換骨,楊之翻積,并翻在實,而此則獨翻在從也。

其開方不盡者,共有四種術法。

(一) 退商進求小數，如：

算學啓蒙『開方釋鎖』第十九問： $x^2-4.25x+1=0$，$x=0.25$.

四元玉鑑『鎖套吞容』第十七問： $135x^2+4608x-138240=0$，

$x=19.2$

(二) 加借算，所謂『開之不盡命分』是也，如：

四元玉鑑『三率究圓』第十一問： $\sqrt{265}=16\frac{9}{2\times16+1}=16\frac{9}{33}$。

同書『雜範類會』第七問： $\sqrt{74}=8.6\frac{4}{2\times86+1}=8.6\frac{4}{173}$。此種加借算之法，朱世傑亦如秦九韶之例，擴充而應用於多乘方，如：

四元玉鑑『三率究圓』第十三問：如方程式 $x^3-574=0$，初商 $x_1=8$ 後，變原式爲 $x_2^3+24x_2^2+192x_2-62=0$，假定此變式根數爲 1，故『方，廉，隅，同名相併爲分母，餘實異名爲分子，』即 $x=x_1+x_2=8\frac{64}{1+24+192}=8\frac{62}{217}=8\frac{2}{7}$。四元玉鑑『鎖套吞容』第十九問： $x^2+252x-5292=0$，初商 $x_1=19$ 後，變原式爲 $x_2^2+290x_2-143=0$，故 $x=19\frac{143}{291}$。

(三)『以連枝同體術求之，』其例秦九韶曾有說述，僅用於開平方；今朱氏亦然，如：

四元玉鑑『端匹互隱』第一問： $-8x^2+578x-3419=0$，令 $x=\frac{y}{8}$，代入原式得 $-y^2+578y-3419\times8=0$，$y=526$，故知原式之根 $x=\frac{526}{8}=65\frac{3}{4}$。

同書『和分索隱』第一問： $2500x^2-105625=0$，令 $x=\frac{y}{50}$，

則 $y^2-105625=0$，$y=325$，$x=\frac{325}{50}=6\frac{1}{2}$。

同書『三率究圓』第二問： $24649x^2-1562500=0$，令 $x=\frac{y}{157}$，

則 $y^2-1562500=0$, $y=1250$, $x=\frac{1250}{157}=7\frac{151}{157}$.

(四)『以之分法或之分術』求之, 如:

四元玉鑑『和分索隱』第十三問:

『術曰:立天元一爲平,如積求之,得一百六十九萬五千二百五十二爲益實,三千九百六十爲從方,一千七百二十九爲從上廉,二千六百四十爲益下廉,五百七十六爲從隅,三乘方開之,得平,不盡。按之分法求之,再得一百四萬二千八十四億五千二百八十一萬二千八百爲益實,二千三百三十七億三十六萬一百九十二爲從方,九千一百九十萬二千五百二十八爲從上廉,一萬五千七百九十二爲從下廉,一爲正隅,三乘方開之,得三百八十四,與分母約之合問。』

$$576x^4-2640x^3+1729x^2+3960x-1695252=0,$$

得 $x_1=8$ 後, 變式爲:

$$576x_2^4+15792x_2^3+159553x_2^2+704392x_2-545300=0,$$

令 $x_2=\frac{y}{576}$, 則上式化爲:

$$y^4+15792y^3+159553\times576y^2+704392\times\overline{576}^2y-545300\times\overline{576}^3=0,$$

或

$$y^4+15792y^3+91902528y^2+233700360192y-104208452812800=0$$

$$\therefore\quad y=384$$

$$x=6\tfrac{384}{576}=6\tfrac{2}{3}.$$

此外『和分索隱』第二至第十二問;『撥換截田』第四問: $-9x^2+2500=0$, $x=16\frac{2}{3}$;『鎖套吞容』第十八問: $15x^2-128x-960=0$, $x=13\frac{1}{3}$; 及『雜範類會』第三問: $63x^2-740x-432000=0$,

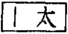
$x=88\frac{8}{9}$; 幷如前術求之。

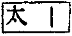
❶ 日本建部賢弘,註算學啓蒙翻法曰:初商入方及乘廉,正變爲負,負變爲正,如: $7x^2-104x-6156=0$, 先進廉二位爲七百,進方一位爲一千〇四十。初商三十,以乘正廉七百;三七,二千一百正,與負方一千〇四十,異名相減,負方變爲正一千〇六十,是稱翻法。見算學啓蒙諺解卷下末,第一七頁,元祿三年(公元1690年)刻本。

第二節　朱世傑四元術

四元者:天,地,人,物元也。天元術前已具言,至四元列式,則:

天元, 

= x, 地元, 

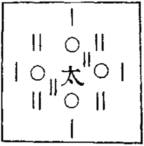
= y, 人元, 

= z,

物元, 

= w, 『併之』得: 

$=x+y+z+w$.

『自乘爲冪得:』 

$=x^2+y^2+z^2+w^2+2\times y+2\times z+2\times w+2yz+2yw+2zw$.

如令 x=句, y=股, z=弦, w=黄方, 則 $(x+y+z+w)^2$ 自相乘,得『四元自乘演段之圖』,『玫圖認之,其理顯然。』

四元玉鑑卷首又有:『四象細草假令之圖』,具『一氣混元』,『兩儀化元』,『三才運元』,『四象會元』四問細草,用以解析天,地,人,物元之應用。天元,如積,寄左,之說,算學啓蒙下卷具言其義,玆不復贅。其天元以外,二元者稱『天地配合求之』,三元者稱『三才相配求之』,四元者稱『四象和會求之』,雖有細草,亦語焉不詳,玆另爲解釋,如:

『兩儀化元:

今有股冪(b^2)減弦較較($c-\overline{b-a}$),與股(b)乘句(a)等,只云句冪(a^2),加弦較和($c+\overline{b-a}$)與句(a)乘弦(c)同,問股幾何?答曰:四步。

草曰:立天元一爲股,地元一爲句弦和,天地配合求之得今式:

卄	○	太
十	‖	○
○	‖	○
○	○	丨

求到云式:

‖	○	太
十	‖	○
○	○	○
○	○	丨

互隱通分消之,

如題意,$b^2-(c-\overline{b-a})=b\times a$,

又　$a^2+(c+\overline{b-a})=a\times c$,

求 b。

令 $x=b,\ y=c+a$,

因 $\frac{b^2}{c+a}=c-a$,代入第一式得今式:

$x^3+2xy+2x^2y-2y^2-xy^2=0$,

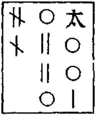
以 $(c+a)-\frac{b^2}{c+a}=2a$,代入第二式,得云式:

$y^3+2xy+2y^2-xy^2=0$。

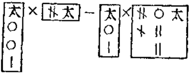
(今)−(云),得右式

卄	太
	○
	丨

,

從今式 

及右式 ，則



得左式  從右式及左式則卄乘  得式 。

又‖乘  得式 

內二行得式：，外二行得：，兩位相消，得

開方式:  ,平方開之,得股四步,合問。』

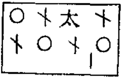
『三才運元:

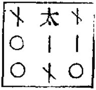
今有股弦較(c−b),除弦和和(a+b+c)與直積(ab)等,只云句弦較(c−a),除弦較和(c+$\overline{b-a}$)與句(a)同,問弦幾何?

答曰: 五步。

草曰: 立天元一爲句,地元一爲股,人元一爲弦,三才相配,求得今式:

❶

 ,求得云式:

 ,求得三元之式:

兩位相消,得開方式:  ,平方開之,得股四步,合問。

如題意, $\frac{a+b+c}{c-b}=ab$,

又 $\frac{c+b-a}{c-a}=a$,

求 c。

令 $x=a,\ y=b,\ z=c$,

則如題意,得今式:

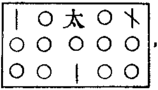
$-x-y-xy^2-z+xyz=0$;

得云式:

$x-x^2-y-z+xz=0$;

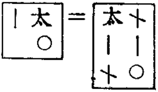
得三元之式:

$x^2+y^2-z^2=0$.

，

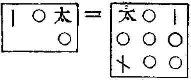
以三式剔而消之。

從云式：



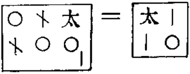
…(1)

從三元之式：



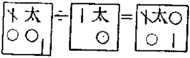
……………(2)

再從今式：

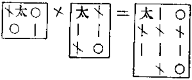


……………(A)

令 (A) 中



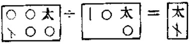
又從上式及 (1) 式，得：



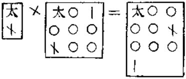
……………(B)

二式皆人易天位,❷前得:

再令(A)中

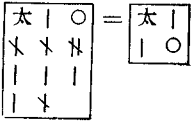


又從上式及(2)式,得:

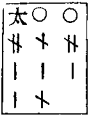


……………(C)

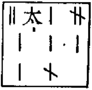
因(B)+(C)=(A),故



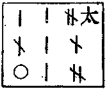
即

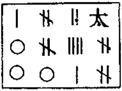


或

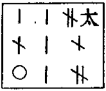


人易天位,得前式:



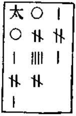
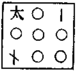
後得:  ,

互隱通分相消,

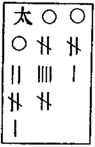
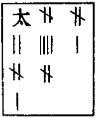


(1) 式自相乘,與 (2) 式相等。

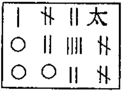
卽

 = 

卽

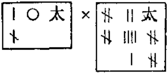
 或 

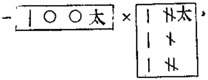
人易天位,得後式:



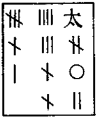
從前式及後式,則二式相消,

如:

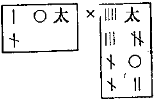


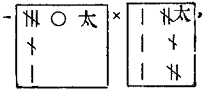


得初齊式:

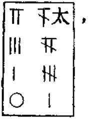


從初齊式及前式,則二式相消,如:

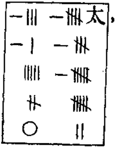




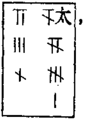
左得:



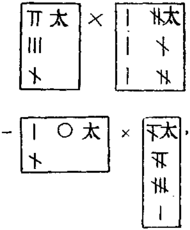
右得:



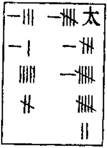
得左式:



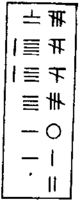
從右式及前式,則二式相消,如:

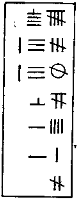


得右式:



……………………………………

內二行得：，

外二行得：，

內外相消，四約之得開方式：三乘方開之，得弦五步，合問。』

『四象會元:

今有股(b)乘五較(句股較, b−a, 句弦較, c−a, 股弦較, c−b, 弦較較, $c-\overline{b-a}$, 弦和較, a+b−c) 與弦冪 (c^2) 加句乘弦 (a×c)等。只云句(a)除五和(句股和, a+b, 句弦和, a+c, 股弦和, b+c, 弦和和, a+b+c, 弦較和, $c+\overline{b-a}$) 與股冪(b^2)減句弦較(c−a)同。問黃方 (a+b−c) 帶句股弦 (a+b+c) 共幾何?

答曰: 一十四步。

草曰: 立天元一爲句,地元一爲股,人元一爲弦,物元一爲問數,四象和會求之,求得今式:

卝	太	丨
○	丨	○

,求得云式:

如題意,

$$b\{(b-a)+(c-a)+(c-b)+(c-\overline{b-a})+(a+b-c)\}=c^2+ac.$$

又

$$\frac{(a+b)+(a+c)+(b+c)+(a+b+c)+(c+b-a)}{a}=b^2-(c-a).$$

求 $(a+b-c)+(a+b+c)$.

令 $x=a$, $y=b$, $z=c$,

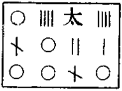
$w=(a+b-c)+(a+b+c)$,

因, 五和 $=2a+4b+4c$,

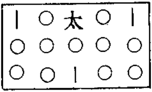
五較 $=2c$.

如題意, 得今式:

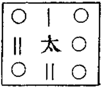
$x-2y+z=0$; 得云式:



，求得三元之式：



，求得物元之式：



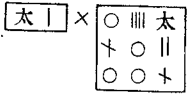
四元和會消而剔之。

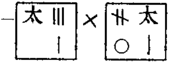
$$2x-x^2+4y-xy^2+4z+xz=0;$$

得三元之式，$x^2+y^2+z^2=0$，

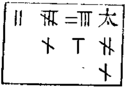
得物元之式，$2x+2y-w=0$.

從今式及云式，則二式相消，如：

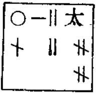




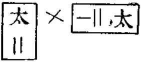
皆物易天位,得前式:

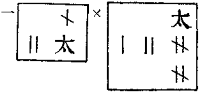


得上式

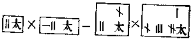


從上式及物元之式,則二式相消,如:

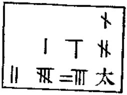




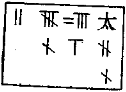
或



得:

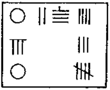


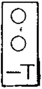
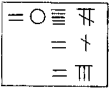
物易天位得前式:



後式：，便爲左行；

以左行消後式，得：

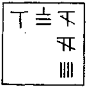


便爲右行，內二行得式：，其外二行得式：。

又從今式及三元之式，則二式相消得下式：

從下式及物元之式，則二式相消得：，物易天位得後式：。

…………………………………………

內外二行相消三約得開方式: , 平方開之,得一十四步,合前問。』

❶ 羅士琳寄xyz在太左下,丁取忠寄在天左下,今從陳棠寄在天右下。

❷ 所謂易位者,不過認定天位爲人,地位爲天,其體雖變,而數之性情,仍無變也。李善蘭曰:若立天元一爲弦,立人元一爲句,則不須易位矣。

第三節 朱世傑級數論

(一) 垛積。

1. 落一形(三角形):

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+n)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

即 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$

2. 撒星形(三角落一形):

$$1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots\cdots+\left\{1+3+6+\cdots\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3),$$

卽 $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

3. 四角落一形:

$$1+(1+4)+(1+4+9)+\cdots\cdots+(1+4+9+\cdots\cdots+n^2)$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+1)(n+2)$$

即 $$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot5+3\cdot4\cdot7+\cdots\cdots+n(n+1)(2n+1)$$
$$=\frac{1}{2}(n)(n+1)(n+1)(n+2).$$

4. 嵐峯形:

$$1+(1+5)+(1+5+12)+\cdots\cdots+\left\{1+5+12+\cdots\cdots+\frac{1}{2}n(3n-1)\right\}$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$$

即 $$1\cdot1+2\cdot(1+2)+3(1+2+3)+\cdots\cdots+n(1+2+3+\cdots\cdots+n)$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$$ [1]

或 $$1\cdot2\cdot1+2\cdot3\cdot2+3\cdot4\cdot3+\cdots\cdots+n(n+1)n$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1).$$

5. 三角嵐峯形(一稱嵐峯更落一形):

$$1\cdot1+2(1+3)+3(1+3+6)+\cdots+n\left\{1+3+6+\cdots\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$
$$=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1)$$

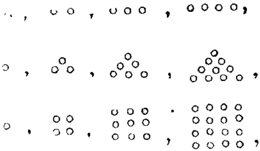
即 $$1\cdot2\cdot3\cdot1+2\cdot3\cdot4\cdot2+3\cdot4\cdot5\cdot3+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)n$$
$$=\frac{1}{20}n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1).$$

6 四角嵐峯形:

$$1\cdot1+2(1+4)+3(1+4+9)+\cdots\cdots+n(1+4+9+\cdots\cdots+n^2)$$
$$=\frac{1}{60}n(n+1)(n+2)\left\{n\left(4n+1\frac{1}{2}\right)+\left(4n+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

即 $$1\cdot2\cdot3\cdot1+2\cdot3\cdot5\cdot2+3\cdot4\cdot7\cdot3+\cdots\cdots+n(n+1)(2n+1)n$$
$$=\frac{1}{10}n(n+1)(n+2)\left\{n\left(4n+1\frac{1}{2}\right)+\left(4n+\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

就中嵐峯形之1,2,3,……n；三角嵐峯之1,3,6,……，$\frac{1}{2}n(n+1)$；四角嵐峯形之1, 4, 9,……n^2；謂之菱草形，三角形，四角形。



菱草形：…, $S=\frac{1}{2}n(n+1)$,

三角形：…, $S=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$,

四形角：…, $S=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

7. 撒星更落一形：

$$1+(1+4)+(1+4+10)+\cdots\cdots+\Big\{1+4+10+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\Big\}=1\cdot1+(2\cdot1+1\cdot3)+(3\cdot1+2\cdot3+1\cdot6)$$
$$+(4\cdot1+3\cdot3+2\cdot6+1\cdot10)+\cdots\cdots+\Big\{n\cdot1+\overline{n-1}\cdot3+\overline{n-2}\cdot6+\cdots\cdots$$
$$+1\cdot\left[\frac{1}{2}n\cdot\overline{n+1}\right]\Big\}=1+[1+(1+3)]+[1+(1+3)+(1+3+6)]$$
$$+\cdots\cdots+\Big[1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots\cdots+(1+3+6+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{2}n(n+1)\Big]=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

即
$$1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+3\cdot4\cdot5\cdot6+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

8. 三角撒星更落一形

$$1+(1+5)+(1+5+15)+\cdots\cdots\cdots+\Big\{1+5+15+\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)\Big\}=1\cdot1+(3\cdot1+1\cdot3)+(6\cdot1+3\cdot3+1\cdot6)$$

$$+(10\cdot1+6\cdot3+3\cdot6+1\cdot10)+\cdots\cdots+\Big\{\frac{1}{2}n(n+1)\cdot1$$

$$+\frac{1}{2}(n-1)n\cdot3+\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\cdot6+\cdots\cdots$$

$$+1\cdot\Big[\frac{1}{2}n(n+1)\Big]\Big\}=1+[1+(1+4)]+[1+(1+4)$$

$$+(1+4+10)]+\cdots\cdots+\Big[1+(1+4)+(1+4+10)+\cdots\cdots$$

$$+(1+4+10+\cdots\cdots+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\Big]$$

$$=\frac{1}{720}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5).$$

卽 $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5+2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6+3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5).$$

9. 圓錐垜積: ❶

如 r_1 爲奇數, r_2 爲偶數, 則

$1+3+7+12+19+27+37+48+61+\cdots\cdots$

中奇項, $\mu r_1=\frac{(d_1+3)^2+3}{12}$, 而 $d_1=6\left(\frac{n-1}{2}\right)$.

偶項, $\mu r_2=\frac{(d_2+3)^2}{12}$, 而 $d_2=6\left(\frac{n}{2}-1\right)+3$.

如 n 爲奇, 則 $S\mu_{r_1}$:

$1+3+7+12+19+27+37+48+61+\cdots\cdots$

$$=\frac{d_1\{(d_1+6)^2+(d_1+3)^2\}+3^2\{(d_1+6)(d_2+3)+6\}}{216},$$

如 n 爲偶, 則 $S\mu_{r_2}$

$1+3+7+12+19+27+37+48+61+\cdots\cdots$

$$=\frac{d_2\{(d_2+6)^2+(d_2+3)^2\}+3^2\{(d_2+6)(d_2+3)+3\}}{216}.$$

(二) 招差。

四元玉鑑『如像招數』門，最後一問，題曰:

『今有官司依立方招兵，初招方面三尺，次招方面轉多一尺，每人日支錢二百五十文，已招二萬三千四百人，支錢二萬三千四百六十二貫，問招來幾日?

答曰:一十五日。』

原書此問自註曰:

『或問還原依立方招兵:初招方面三尺，次招方面轉多一尺，得數爲兵，今招十五方，每人日支錢二百五十文，問招兵及支錢各幾何?

答曰:兵二萬三千四百人，錢二萬三千四百六十二貫。

術曰:求得上差二十七，二差三十七，三差二十四，下差六。』

其求差之術，未詳其義，似卽本於『授時平立定三差法』，因授時曆之『加分』，『平立合差』，『加分立卽』，卽朱氏之二差，三差，下差也。故此處亦可如授時曆之例，得表如下:

上差	二差	三差	下差
$a^3=27$,			
	$3a^2b+1\times3ab^2+b^3=37$,		
$(a+1b)^3=64$,		$2\times3ab^2+6b^3=24$,	
	$3a^2b+3\times3ab^2+7b^3=61$,		$6b^3=6$,
$(a+2b)^3=125$,		$2\times3ab^2+12b^3=30$,	
	$3a^2b+5\times3ab^2+19b^3=91$,		$6b^3=6$,
$(a+3b)^3=216$,		$2\times3ab^2+18b^3=36$,	
	$3a^2b+7\times3ab^2+37b^3=127$,		
$(a+4b)^3=343$,			

卽:上差　二差　三差　下差

$d_1=\mu_1$,　$d_2=\mu_2-\mu_1$,　$d_3=\mu_3-(2\mu_2-\mu_1)$, $d_4=\mu_4-[3(\mu_3-\mu_2)+\mu_1]$,

$=\mu_3-(2d_2+d_1)$,　$=\mu_4-[3(d_3+d_2)+d_1]$,

μ_2,　$\mu_3-\mu_2$,　$\mu_4-(2\mu_3-\mu_2)$,

$=\mu_4-(2d_3+d_2)$,

μ_3,　$\mu_4-\mu_3$,　$\mu_5-(2\mu_4-\mu_3)$,

μ_4,　$\mu_5-\mu_4$,

μ_5,

故　上差, $d_1=\mu_1$,

二差, $d_2=\mu_2-\mu_1$,

三差, $d_3=\mu_3-(2d_2+d_1)$,

下差, $d_4=\mu_4-[3(d_3+d_2)+d_1]$.

今考原書此問自註又曰:

『求兵者今招爲上積;又今招減一爲茭草底子,積爲二積;又今招減二爲三角底子,積爲三積;又今招減三爲三角落一(底子),積爲下積。以各差乘各積,四位併之,卽招兵數也。』

卽　$$a^3+(a+1b)^3+(a+2b)^3+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}b)^3$$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3$$

$$+\frac{1}{24}(n-3)(n-2)(n-1)nd_4.$$

原書此問自註又曰:

『求支錢者,以今招爲茭草(底子),積爲上積;又今招減一

爲三角底子,積爲二積;又今招減二爲三角落一(底子),積爲三積;又今招減三爲三角撒星(底子),積爲下積。以各差乘各積,四位併之。所得又以每日支鏹乘之,即得支鏹之數也。』

即 $$na^3+(n-1)(a+1b)^3+(n-2)(a+2b)^3+\cdots\cdots+1(a+\overline{n-1}b)^3$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3$$
$$+\frac{1}{120}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)d_4$$

由是可得下:(1)築堤差夫,差夫給米;(2)圓箭束招兵,招兵給米;(3)平方招兵,招兵支銀,招兵給米;(4)立方招兵,招兵支鏹,各式。

1. 築堤差夫:

上差, $d_1=a$;　　下差, $d_2=b$.

$$a+(a+1b)+(a+2b)+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}b)=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2.$$

差夫給米:

$$na+(n-1)(a+1b)+(n-2)(a+2b)+\cdots\cdots$$
$$+(n+1-r)(a+\overline{r-1}b)+\cdots\cdots+1(a+\overline{n-1}b)=\frac{1}{2}n(n+1)d_1$$
$$+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2.$$

2. 圓箭束招兵: ❺

上差, $d_1=\mu_1$, 二差, $d_2=\mu_2-\mu_1$, 下差, $d_3=\mu_3-(2d_2+d_1)$.

$$[1+K(1+2+3+\cdots\cdots+b)]+[1+K(1+2+3+\cdots\cdots+\overline{b+1})]$$
$$+\cdots\cdots+[1+K(1+2+3+\cdots\cdots+\overline{b+n-1})]$$
$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3.$$

招兵給米：

$$n[1+K(1+2+3+\cdots\cdots+b)]+(n-1)[1+K(1+2+3+\cdots\cdots+\overline{b+1})]+\cdots\cdots+1[1+K(1+2+3+\cdots\cdots+\overline{b+n-1})]$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3.$$

3. 平方招兵：

上差, $d_1=\mu_1$, 二差, $d_2=\mu_2-\mu_1$, 下差, $d_3=\mu_3-(2d_2+d_1)$.

$$a^2+(a+1b)^2+(a+2b)^2+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}b)^2$$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3.$$

招兵支銀：

$$na^2+(n-1)(a+1b)^2+(n-2)(a+2b)^2+\cdots\cdots+1\cdot(a+\overline{n-1}b)^2$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3.$$

招兵給米：

$$a^2+[a^2+(a+1b)^2]2+[a^2+(a+1b)^2+(a+2b)^2]3+\cdots\cdots+[a^2+(a+1b)^2+(a+2b)^2+\cdots\cdots+(a+\overline{r-1}b)^2]r+\cdots\cdots+[a^2+(a+1b)^2+(a+2b)^2+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}b)^2]n$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)d_1+\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)d_2+\frac{1}{120}(n-2)(n-1)n(n+1)(4n+3)d_3.$$ ❶

4. 立方招兵：

上差, $d_1=\mu_1$, 二差, $d_2=\mu_2-\mu_1$, 三差, $d_3=\mu_3-(2d_2+d_1)$,

下差, $d_4=\mu_4-[3(d_3+d_2)+d_1]$.

$$a^3+(a+1b)^3+(a+2b)^3+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}b)^3$$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3$$

$$+\frac{1}{24}(n-3)(n-2)(n-1)nd_4.$$

招兵支錢:

$$na^3+(n-1)(a+1b)^3+(n-2)(a+2b)^3+\cdots\cdots+1(a+\overline{n-1}b)^3$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2$$

$$+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3+\frac{1}{120}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)d_4.$$

清阮元稱:四元玉鑑卷中『茭草形段,如像招數,果積疊藏各門,爲自來算書所未及,』❶今考如像招數出於秦九韶,郭守敬;果積疊藏出於沈括,楊輝,似非全無本原也。

❶ 取湯天棟茭草形段羅草補註,科學雜誌第十一卷,第十一期,民國一五年(公元1926年)十一月,上海。

❷ 此稱更迭(alternating)級數,見四元玉鑑果積疊藏第七問。此據羅士琳壼錐演積術釋(公元1837年)。

❸ 并見算學啓蒙及四元玉鑑中。

❹ 此可由『平方招兵』化得,如:

$$a^2+[a^2+(a+1\cdot b)^2]2+[a^2+(a+1\cdot b)^2+(a+2\cdot b)^2]3+\cdots\cdots$$

$$+[a^2+(a+1\cdot b)^2+(a+2\cdot b)^2+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot b)^2]n$$

$$=1(d_1)+2(2d_2+d_2)+3(3d_1+3d_2+d_3)+4(4d_1+6d_2+4d_3)$$

$$+5(5d_1+10d_2+10d_3)+\cdots\cdots+(n-1)\left\{\overline{n+1}\cdot d_1+\frac{1}{2}(n-2)(n-1)d_2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}(n-3)(n-2)(n-1)d_3\right\}+n\left\{nd_1+\frac{1}{2}(n-1)n\,d_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3\right\}$$

$$=(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)d_1+\left\{1\cdot1+2\cdot3+3\cdot6+4\cdot10+\cdots\cdots+(n-2)\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\right.$$

$$+(n-1)\frac{1}{2}(n-1)n\Big\}d_2+\Big\{1+3+6+10+\ldots\ldots+\frac{1}{2}(n-2)(n-1)+\frac{1}{2}(n-1)n\Big\}d_2$$

$$+\Big\{1\cdot1+2\cdot4+3\cdot10+\ldots+(n-3)\frac{1}{6}(n-3)(n-2)(n-1)+(n-2)\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n\Big\}d_3.$$

$$+2\Big\{1+4+10+\ldots\ldots+\frac{1}{6}(n-3)(n-2)(n-1)+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n\Big\}d_3$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)d_1+\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)\{3(n-1)+1\}d_2+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2$$

$$+\frac{1}{120}(n-2)(n-1)n(n+1)\{4(n-1)+1\}d_3+2\cdot\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)d_1+\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)d_2$$

$$+\frac{1}{120}(n-2)(n-1)n(n+1)(4n+3)d_3.$$

● 阮元，研經室外集，四庫未收書提要。

第二十四章　近古數學家小傳

(十)元:丁巨,趙友欽,賈亨,陳尙德,彭絲,安止齋,何平子。

丁巨　撰丁巨算法八卷,有至正十五年(公元1355年)自序。知不足齋叢書所收不足一卷。今殘本永樂大典又收有此書『異乘同除』及『少廣』題問。❶

趙友欽　一曰名敬;一曰名友某,字子恭;一曰字子公;一曰敬夫,鄱陽人;一曰饒之,德興人;弗能詳也。著革象新書五卷明王煒刪定者凡二卷。其『乾象周髀』篇言割圓術,以內容四邊形起算。計算次序與劉徽相似,惟以

大弦 $=D$,

大句 $=l$,

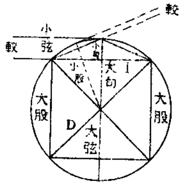
大股 $=\sqrt{D^2-l^2}$,

又　較 = 大弦 − 大股,

小句 $=\dfrac{D-\sqrt{D^2-l^2}}{2}$,

小股 $=\dfrac{l}{2}$,

小弦 $=\sqrt{\left(\dfrac{D-\sqrt{D^2-l^2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{l}{2}\right)^2}$.



逐次如是,由四邊求八邊,由八邊求十六邊,求至16384邊,知 $\pi=3.1415926+$,以證 $\pi=\frac{355}{113}$,其爲法所以極精密。其入算

用 $\pi=3.1416$，故赤道周天與其中徑之比為 $\pi=\frac{365.2575}{116.2561}$。

賈亨　字季通。長沙人。永樂大典作賈通。總目有總說五項：銀，糧，端匹，斤秤，田畝。常用法二十項：因法，加法，乘法，減法，〔卽定身除〕，歸法，歸除，求一，商除，異乘同除，就物抽分，差分，和合差分，端匹，斤秤，堆垛，盤量倉窖，丈量田畝，修築，約分，開平方是也。❸

陳尙德　字玉汝。寧德人。著石塘算書四卷。見陳第世善堂書目，及補元史藝文志。

彭絲　一作彭絲。著算經圖釋九卷，見文獻通攷，及陳第世善堂書目。❹

安止齋，何平子。　元儒。里居未詳。著詳明算法上下卷。程大位稱其有乘除而無九章。其算題之見於諸家算法序記，及永樂大典殘本者，與賈亨算法全能集完全一致，疑詳明算法出於賈亨也。❺

❶　丁巨算法，知不足齋叢書本。永樂大典卷一六三四三……卷一六三四四，影攝本。

❷　革象新書，重修革象新書，四庫全書本。

❸　賈亨算法全能集，元刻本。元刻本作二卷。也是園書目作六卷，疑誤。

❹　張惟驤疑年錄彙編（公元1925年），謂：彭絲字魯叔（公元1239—1299年），不知卽此彭絲否？　（嚴敦傑）

❺　算法統宗卷一三，圖書集成本。諸家算法序記，鈔本。永樂大典卷一六三四三，卷一六三四四，影攝本。

第二十五章 近古末期數學書志

近古末期數學最爲發達。各家著述幷記於前。此外之見於永樂大典,而不記撰述人姓名者,又有透簾細草及錦囊啓源二書,知不足齋叢書及諸家算法序記所收,幷出於永樂大典,而不得其全。今永樂大典殘本卷一六三四四,引有透簾細草一問,如:

『今有立方,圓,平方各一所,共計積二十二萬九千六百七尺,只云立方面多如立圓徑七尺,其平方面如立圓徑三分之二,問三事各多少?

答曰:立方面五十五尺。立圓徑四十八尺。平方面三十二尺。』

算得:

實	33014016,
從法	21168,
廉法	3088,
隅法	225.

立方開之,得 48 尺。其演算次序,一如秦九韶云。❶

❶ 永樂大典,影模本。

第二十六章　歸法,歸除,一撞歸法

宋楊輝乘除通變算寶卷中謂:『今人以第一位用歸,第二位,第三位仍用商除。』元朱世傑算學啓蒙,總括『九歸除法』條謂:『古法多用商除,爲初學者難入,則後人以此(九歸除)法代之,非正術也。』元賈亨算法全能集,歸法歌曰:『九歸之法乃分平。湊數從來有現成。數若有多歸作十。歸如不徹答添行。』是宋時始由商除進用歸法,楊輝以爲不便,乃另立歌訣,此其始也。其後乃有歸除中『撞歸,』『起一』之法,如:

元賈亨算法全能集,歸除歌曰:『惟有歸除法更奇。將身歸了次除之。有歸若是無除數,起一回將元數施。或值本歸歸不得,撞歸之法莫教遲。若還識得中間法,算者并無差一黨。』法[謂:四歸見四,本作一十,然下位無除,不以爲十,以四撞身爲九十四,則下位有數除也,故謂之撞歸。推此法內用之,餘倣此。]

二歸爲九十二,　三歸爲九十三,　四歸爲九十四,
五歸爲九十五,　六歸爲九十六,　七歸爲九十七,
八歸爲九十八,　九歸爲九十九,

元丁巨算法:『今有子粒折收』題云:『此重法也;去租,破錠,歸除,減除,皆有之,……撞歸九十三,……。』

元安止齋詳明算法序稱:『夫學者初學因歸,則口授心會,至於撞歸,起一,時有差謬,……。』按撞歸之說,不見於宋人

著述,是起於元代也。明程大位算法統宗卷二,所載歸除歌,與賈亨歸除歌相同。其起一之說,亦昉自賈亨,如言:『已有歸,而無除,用起一還原法。』註稱:『即是起一還將原數施』是也。●

今錄丁巨算法(公元1355年)題問,以見撞歸法之應用。

『今有子粒折收輕賫,●每石正價三兩五錢,分例耗穀●三升五合,今欲先起解鈔一百錠,●內除帶解租鈔二錠一兩四分八釐三毫五絲,問該正耗分例各若干?

答曰:鈔一百錠,子粒正耗分例穀一千三百九十九石六斗七升一合九勺,……

此重法也。去租,破錠,歸除,減乘,皆有之,故曰重也。置一百錠,先除二錠一兩一錢四分八釐三毫五絲,餘九十七錠四十八兩八錢五分一釐三毫五絲。	此節爲去租。
折錠得四千八百九十八兩八錢五分一釐六毫五絲。	此節爲破錠。
以五歸五除之;呼逢三進一十,除一五如五。呼三一三十一,除三五一十五。呼撞歸九十三,除五九四十五。呼撞歸九十三,除五九四十五。呼三	此節爲歸除。 如圖用35除4898,85165,先將4898.85165列第一排。實數之首兩位48,可容35之一倍,先以3除4,呼『逢三進一十』於

二六十二,除五六三十。呼三二六十二,逢三進一十;除五七三十五。呼逢三進一十,除一五如五。撞歸九十三,除五九四十五。總得穀一千三百九十九石六斗七升一合九勺。

4898,85165	35
118	
139	
349	
348	
968	
338	
968	
235	
655	
251	
671	
741	
66	
136	
315	
945	
900	

4 內減 3, 進一位於前, 如第二排。

再『除』去商數 1, 和法數 5 相乘數『一五如五,』如第三排。以 35 之首位 3 除第三排之 139, 首兩位上 10, 先商得 3 餘 1,『呼三一三十一,』如第四排。再『除』去『三五一十五,』如第五排。

第五排之 34, 不能容 35,『呼撞歸九十三,』如第六排。

再『除五九四十五,』如第七排。

第七排之 33, 不能容 35,『呼撞歸九十三,』如第八排。

再『除五九四十五,』如第九排。

以 35 之首位 3, 除第九排 235 之首兩位上 20, 先商得 6 餘 2,『呼三二六十二,』如第十排。

再『除六五三十,』如第十一排。

以35之首位3,除第十一排251首兩位上20,先商得6餘5,『呼三二六十二,』如第十二排。

餘數2,并前位5爲7,以35之首位3除7,至少可得商7,再『除五七三十五,』如第十四排。

以35之首位3,除第十四排66之首位6,至少可得商1,『呼逢三進一十,』如第十五排。

再『除一五如五,』如第十六排。

第十六排之31,不能容35,呼『撞歸九十三,』如第十七排。

再『除五九四十五,』如第十八排。

此時所留139,96719即商得數。

自首退位減三五得正穀一千三百五十二石三斗四升,反減總數得正耗穀四十七石三斗三升一合九勺,各以價乘之合問。』❶

此節爲減乘。

觀上所記,其歸除次序與珠算方法完全一致。❻錢大昕且據陶宗儀輟耕錄有走盤珠,算盤珠之喻,謂元代已有算盤。❼

❶　宋楊輝乘除通變算寶,宜稼堂叢書本。元賈亨算法全能集,元刻本。丁巨算法,知不足齋叢書本。諸家算法序記,鈔本。程大位算法統宗,圖書集成本。

❷　元史卷九三,食貨志第四二『稅糧』條作『折輸糧資』或『折納糧資』。

❸　元史卷九三,作:『鼠耗,分例』。

❹　一錠爲五十兩。

❺　丁巨算法第一〇頁,第一一頁,知不足齋叢書本。

❻　參看龔季光日用珠算學習法(三),第三頁至第五頁,上海商務印書館,民國一四年(公元1925年)一月初版。

❼　清錢大昕十駕齋養新錄卷一七,『算盤』條。

第二十七章 元代域外數學家

有元全盛之時,教皇之使臣,來自印度之佛徒,巴黎,意大利及中國之藝士,東羅馬及阿美尼亞之商賈,皆與阿剌伯之官吏,波斯印度之天算家會合於蒙古王庭。❶其於史實有徵者,則『元世祖(公元1280—1368年)在潛邸時,有旨徵回回爲星學者札馬剌丁等以其藝進,未有官署。』❷『至元四年(公元1267年)西域札馬魯丁撰進萬年曆,世祖稍頒行之。』❸『至元八年(公元1271年)始置(回回)司天臺,秩從五品。』❹至元十七年(公元1280年)頒行授時曆,而回回曆尚兼用焉。其後西方納速剌丁,兀魯伯以算數見稱,亦兼曉中國曆法。

納速剌丁 納速剌丁(Nasir ed—dîn)❶者譯數之義也,以宋寧宗嘉泰辛酉(公元1201年)生於途思(一作徒思)。擅長百科之學,特精數理,早歲卽聞名於鄉黨。所著有論代數,論幾何者見稱。稍後又成一極完備之平面弧面三角術。三角術之離天文而成純粹數學者,實自此始。❷旭烈兀以宋理宗寶祐丙辰(公元1256年)西征,納速剌丁說其會木斯大生(Mostasem)降。翌年夏,遂獲居旭烈兀之左右。又翌年受命在馬拉加(Maragha)建觀象臺。❸白塔怖曰:旭烈兀左右集中國學人,天文家甚衆,中有一名傅穆齋(譯音)通稱先生。❹納速剌丁實從知中國紀年,與其計算表之方。❺曾獻伊兒

汗表 (Ilkhanic table) 於蒙古汗,嘗疏歐幾里得幾何,多祿某大輯 (Almagest),及柏拉圖,亞理斯多得之倫理。歷仕旭烈兀(公元1258—1265年),阿八哈(公元1265—1282年)兩朝。以宋度宗咸淳甲戌(公元1274年)六月二十五日,卒於報達(Bagdad),或曰馬拉加;或又謂卒於其年之十二月十二日,生於一二〇一年二月十七日。●有子二人,亦善天文。

兀魯伯 跛帖木兒 (Timur the Lame, 或 Timurlane) 系出成吉斯汗後裔之女支。建國於撒馬爾干 (Samaricand)。跛帖木兒孫兀魯伯 (Ulûġ Beg) 生於奧厥 (Sultanich),時在洪武癸酉 (公元 1393 年),或云甲戌 (公元 1394 年)。至正統丁卯(公元1447年),繼父沙魯哈爲撒馬爾干王。後二年見弒於長子,以欲廢之也。兀魯伯善天文曆數。● 當其未即位時 (公元 1420—1437 年) 嘗協助人觀象。因或兀魯伯表四卷。其第一卷亦論中國曆法紀閏之義。此表之成,波斯師傅阿羅徹(Al-Kashî 或 Jemshîd ibn Mes'ûd ibn Mahmud, Ġiyât ed-dîn al-Kâshî 或作 Kazi Zadeh al Rumi, ?—C. 1436) 實爲之助。● 阿羅徹又自著書論算術及幾何,其所舉圓周率之數,有十六位正確。●

● 漢譯韋爾斯世界史綱下册第六〇七頁,上海,民國一六年(公元1927年)。

● 元史卷九〇。

● 元史卷五二。

● 元史卷九〇。

● 實名: Mahammed ibn Mahammed ibn al-Hasan, Abû Ja'far, Nasîr ed-dîn al-Tûsî.

❻ Eneström's Bibliotheca Mathematica, p. 6. Leipzig, 1893.

❼ Howorth, History of Mongols, vol. IV. pp. 102, 103, 108, 109, 115, 137, 138. Maximilies, M., Histoires des Sciences Mathématiques et Physiques, Tome II. pp. 155—158, Paris, 1883. Zeuthen, H. G. Histoire des Mathématiques dans L'Antiqnité et le Moyen Age, Tr. par J. Mascart, pp. 267—270, Paris, 1902.

❽ 白塔怖(Beidavi)所謂 Sing-Sing, 即元典章卷二三所記之道教法籙先生,馬可波羅遊記所題之 Sensim 或 Sensin。

❾ "Tempore Hulagu-Chan magna manus Philosophum & Astronomorum Chataicorum cum illo huc profecti sunt. Ex his Fu-muen-gi erat, vir Philosophus, Sing-Sing Cognomento dictus, h. e. polyhistor. Eodem tempore Dominus, Nasiro'd Din, Tuso, (urbe Chorasanoa) Oriundus de mandata Hulagu Chan Tabulas Ilchanicas condidit." in Abdallah Beidavi's History of China (Latin translation by A Müller, Geiffenhag, 1689. pp. 5, 6).

❿ Howorth, History of Mongols, vol IV. p 282.

⓫ "Fuit Rex justus, doctus, perfectus, praesertim in mathematicis, scientiam et ejusdem cultores dilexit."—Abu Muhammed Mustapham.

⓬ Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, vol. I. 1907, pp. 780—781. Knobel, E. B, Ulug Beg's Catalogue of Stars, Washington, 1917, pp. 5—14.

⓭ Hankel, H., Geschichte der Mathematik, p. 289, Leipzig, 1874. Smith. D. E., History of Mathematics, vol. I. pp. 289—290, Boston, 1923.