莊氏算學　一

莊氏算學

一

莊氏算學

四庫全書珍本初集
子部
天文算法類

欽定四庫全書　　子部六

莊氏算學　　天文算法類二 算書之屬

提要

臣等謹案莊氏算學八卷

國朝莊亨陽撰亨陽字元仲南靖人康熙戊戌

進士官至淮徐道是編乃其自部曹出董河

防於高深測量之宜隨事推究設問答以窮

其變因筆之于書其後人取殘藁裒緝成帙

中間大旨皆遵
御製數理精蘊而參以幾何原本梅氏全書分條
採摘各加剖晰頗稱明顯末為七政步法亦
本之新法算書而節取其要其于推步之法
條目賅廣縷列星羅無不各有端緒恭案
御製數理精蘊線面體三部凡三十餘卷幾何原
本五卷梅氏全書卷帙亦為浩博學算者非
出自專門不能驟窺蹊徑今亨陽撮舉精要

別加薈萃簡而不漏括而不支可為入門之
津筏雖未能大有所發明而以為學者啟蒙
之資則殊有裨益矣乾隆四十六年十月恭
校上
總纂官臣紀昀臣陸錫熊臣孫士毅
總校官臣陸費墀

總校官進士臣朱鈴
校對官五官靈臺郎臣陳際新
謄錄監生臣秦鼎雲
繪圖天文生臣林皋

莊氏算學卷一

淮徐海道莊亨陽撰

梅勿菴開方法

一平方

平方四邊相等今所求者其一邊之數西法謂之方根方者初商也初商不盡則倍初商之根為廉法除之得兩廉又以決商為隅法自乘得隅以補兩廉之空而成

正方形是謂次商又不盡則合初商次商得數倍之為廉法除之得次兩廉又以三商為隅法自乘得隅以補次兩廉之空而成正方形自此而四商五商做而加之能事畢矣

凡減隅積皆視其隅數為何等隅數是單則積止於單位隅數是十其積止於百位百止於萬位千止於百萬位萬止於億位每隅法大一位則隅積大兩位所以初商減積止初點次商減積止次點三商四商五商皆可

以類推也自單位作點起每隔一位點之有二點商數有十三點商數有百也

凡初商得一二三四皆書於點之上一位商得五六七八九皆書於點之上兩位其故何也五以上之廉倍之則十故豫進一位以居次商四以下雖倍之猶單數也所以不同

大約所商單數必在廉法上一位乃法上得零之理也

開方有實無法廉法者乃其法也

次商用歸除凡歸除得數皆書於籌之第一位令須看

次商所減之數其籌行内第一位是空與否若不空即
以次商得數對餘實首一位書之若第一位是空則以
次商得數對餘實上一位書之雖不離籌之第一位而
所商之有空位無空位出矣立方審空位之法亦然

一立方

平方則一方次合兩廉一隅以成方面立方則一方次
有三平廉以輔於方之三面又有三長廉以補三平廉
之隙又有小方隅以補三平廉之隙推之三商四商皆

然而方體成矣

三平廉長闊相同皆如初商數三長廉長如初商數其兩頭高與闊則如次商數

立方三位作點者自乘再乘之積止於三位也初商點在首位則獨商首位點在次位則合商兩位在三位則合商三位也凡初商得一數者書於點上一位得二三四五者書於點上二位得六七八九者書於點上三位其故何也盖開方以廉為法而平方只有二廉其廉之

積數只有進一位故一進而足立方則有三平廉而其
積數有進一位者有進兩位者故必立三等也要具豫
為續商之地使所得單數居於法上之一位則同方單
一其廉法單三若方單二則廉法一十二變為十數進
一位矣故一用常法二用進法也方單五其廉法七十
五若方單六則廉法一百零八又變百數進兩位矣故
五用進法而六以上用超進之法也
三平廉用自乘者三平面積也三長廉則未有積故與

平廉異也次商數自乘以乘長廉者每長廉之一數各

分次商自乘之數也

一平方帶縱

平方帶縱者長方面也初商得平方與縱方縱方之濶

如平方之數長則加所設縱之數次商得廉縱一廉二

隅一葢倍廉不倍縱一為帶縱之廉一為不帶縱之廉

也用法與平方相似但初商時必以初廉得數乘縱數

為縱方積然後合兩積以減原實為稍異耳

若應商十數因無縱積改商單九是初商空也則於初商位紀○而紀其改商之數於○下若次商者然既為次商則減積亦盡於第二點

初商得五至得九皆書於點上二位不論縱之多寡若得四以下則視縱之多少而為之進退法以縱折半加入初商單從單十從十百千仿以類加若滿五以上則亦進書於點之上兩位如初商三而縱有四初商四而縱有四之類若縱數少雖加之而不滿五則仍書於點之上一位如初商四而縱只有一初商六而縱只有二之類

揔而言之所商單數皆書於廉法之上一位故初商得數有進退之法乃豫爲廉法之地以居次商也初商五以上倍之則十雖無縱加廉法已進位矣初商雖四以下而以半縱加之滿五則其倍之加縱而爲廉法也亦滿十而進位矣廉法進位故初商亦必進蓋豫筭所商單數已在廉法之上也

又初商若得單數其廉法即爲命分凡商得單數必在命分上一位凡開方皆然

一立方帶縱

凡立方帶縱有三一只帶一縱如云長多方若干或高多方若干是也一帶兩縱而縱數相同如云長不及方若干高不及方若干是也一帶兩縱而縱數不相同如云長多濶若干濶又多高若干是也大約帶一縱者只有縱數而已帶兩縱者有縱數又有縱方故其術不同

立方帶一縱者長多於方謂之橫縱高多於方謂之直縱初商得立方一方縱一合成長立方形次商平廉三

內帶縱者二長廉三內帶縱者一小隅一合七形而成
一形三商以上者皆倣此
以積實列位作點如立方法截首一點為初商之實視
立方表中積數有小於初商實者用其方根為初商得
數用其積數為初商積數次以初商自乘以乘縱數為
縱積合計立方積縱積共數以減原積而定初商不及
減者改商之及減而止
次商則以初商得數自乘而三之又以縱與初商相乘

而兩之共為平廉法或以初商三之縱倍之併其數以乘初商或以初商加縱而倍之併初商數以乘初商並同（所謂帶縱廉二不帶縱廉一也）又以初商三之加入縱為長廉法（所謂帶縱廉一不帶縱廉二也）乃以平廉法約第二點上餘實商除得數為次商於是以次商乘平廉法為三平廉積又以次商自乘以乘長廉為三長廉積就以次商自乘再乘為隅積合計平廉長廉隅積共若干以減餘實不及減者改商之及減而止

三商則以初商次商所得數加縱而倍之併商得數為
法仍與商得數相乘為平廉法又以初商次商所得數
三之加縱為長廉法以除原實如次商法餘倣此
列商得數依立方法得一書於點之上一位得二三四
五書於點之上兩位得六七八九書於點之上三位若
縱數多廉法有進位則宜用常法者改用進法宜用進
法者用超進之法宜超進者更超一位書之其法於次
商時酌而定之蓋次商時有三平廉三長廉再加隅一

為命分之法法上一位單數也從此單數逆尋而上自單而十而百而千至初商位止有不合者改而書之若與初商恰合不必強改此法甚妙平方帶縱亦可用之也

若宜商一十而改單九或宜商一百而改九十凡得數改退小一等數者皆不用最上一點而以第二點論之此尤要訣不可忘或於初商外作圈而以所商小一等數書於圈下亦可以上一點論也

立方帶兩縱縱數相同者如高不及方若干則方之横

與直俱多於高是為兩縱初商有縱廉二縱方一并立
方而四盖兩縱廉輔立方之兩面而縱方以補其隅合
為一短方形也次商平廉三內帶一縱者二帶兩縱者
一長廉三內帶縱者二不帶縱者一小隅一共七形合
一短方形也
用法先以縱倍之為縱廉法又以縱自乘為縱方法乃
如立方法列位作點視表中求初商方數及立方積次
以初商得數乘縱方數為縱方積又以初商自乘數乘

縱廉數為縱廉積合計縱方縱廉立方之積共若干數
以減原實而定初商不及減改商之及減而止
次商則以初商得數加縱倍之以乘初商得數所謂帶一縱之廉二也
又以初商加縱自乘得數所謂帶兩縱之廉一也
併之共為平廉法或以初商三之加縱以初商加縱乘之亦同次
以初商加縱倍之併初商數共為長廉法所謂帶縱者二不帶縱者一也
或以初商三之縱倍之亦同乃置餘實列位以廉法
位酌定初商列法而進退之以平為法而除餘實得數

為次商皆所以減首位是空與否而為之進若退或合平廉長廉兩法以求次商亦同於是以次商乘平廉法為平廉積又以次商自乘數乘長廉法為長廉積又以次商自乘再乘為隅積合計平廉長廉隅積共若干以減餘實而定次商又法以次商乘長廉法為長廉法又以次商自乘為隅法併長廉平廉隅法以與次商相乘為次商廉隅共積以減餘實亦同不及減者改商之及減而止三商四商倣此

立方帶兩縱縱數不相同者如長多於濶高又多於長初商有大廉縱一小廉縱一縱方一并立方形而四葢大廉縱以輔高之一面小廉縱以輔長之一面而縱方以補兩縱之闕也次商平廉三內帶小縱者一帶大縱者亦一兼帶兩縱者又一長廉三內帶小縱者一帶大縱者一不帶縱者一小隅共七形合成不等方形也用法以兩縱相併為縱廉以兩縱相乘為縱方乃如立方法列位作點求初商之實以立方表求得初商立方

積次以初商乘縱方數得縱方積以初商自乘乘縱廉
數得縱廉積合計三積以減原實皆如前法
次商則以初商長濶維乘得數而併之為平廉法又以
初商長濶高併之為長廉法乃置餘實列位以平廉酌定初商之
位而進退之遂以平廉為法求次商以次商乘平廉為平廉
積以次商自乘數乘長廉為長廉積以次商自乘再乘
為隅積合三積以減餘實不及則改及則止以待三商
餘做此

凡不能成一單數者則以所商長濶高維乗併之如平廉又以長濶高併之如長廉又加單一如隅為命分母以所餘之數為命分子

維乗之法如初商三十尺為濶加縱五尺共三十五尺為長又加縱一尺共三十六尺為高濶乗長得一千零五十尺高乗濶得一千零八十尺長乗高得一千二百六十尺併三維乗數共得三千三百九十尺為平廉法若合長廉加隅一即為命分母也

若在次商後則加次商得數若在三商後則加三商得數

用籌法

開方用籌㨗法廉隅二形也故有二法今借開方大籌為隅法列於廉法籌下而共商之則隅廉合為一法而用加㨗矣存前法者所以著其理用㨗法者所以善其事

既得初商即倍根數為廉法以廉法數用籌如商根為四則用八

商根為六則用十二以列於立方籌之上為廉隅共法合視共法籌其行內有與次商之實同者或畧少者減實以得次商以本行內方根命之既得次商則合初商次商倍之以其數用籌列平方籌以求三商四商以下倣此

隅者小平方也故可以平方籌為法廉之數每大于隅一位今以平方籌為隅列於廉下則隅之進位與廉之本位兩半圓合成一數故廉隅可合為一法也何以知廉大於隅一位也曰有次商則初商是十數矣平方之

廉法是初商倍數故大於隅一位

若次商之實小於廉隅共法之第一行則知次商是空位也不能成一數故空則於廉法籌下平方籌上加一空位籌為廉隅共法以求三商既得三商則合初商三商數倍之去空位籌以倍數用籌列於平方籌之上以求四商如初商得四次商得空則用空位籌列於八籌之下及三商既得九則倍四〇九而為八一八之數空位籌可不用矣若兩空位則加兩空籌三空位則加三空籌餘

倣此

凡餘實必在商數下一位起倘空位則可作圈補之又凡廉隅共法籌第一行數即命分母也蓋能滿此數即成一單數矣

若立方則以初商數自乘而三之為平廉法以平廉法用籌列於立方籌之上為平廉小隅共法別以初商數三之而比共法尾位進一位為長廉法以長廉法用籌列於立方籌之下法于長廉法籌下加一空籌以合進一位之數

視共法籌內有小於實者為平廉小隅共積用其根數為次商次以次商自乘數即平方籌之積數與長廉法相乘以平方籌之數尋長廉籌之行取其行內積數用之得數加入平隅共積為次商總積以減次商實乃如法以求三商餘倣此

隅者小立方也故可以立方籌為法平廉之數每大於隅二位今以立方籌為隅法列於平廉下則隅之首位與平廉之末位兩半圓合成一數故平廉小隅可合為一法長廉之兩頭皆如次商自乘之數故可以平方乘

之又長廉之數每大於隅一位故於下加一空籌以進其位便加積也何以知平廉大于隅二位而長廉只大一位也蓋平廉者初商自乘之積也初商於次商為十數十乘十則成百數矣隅積者次商本位也故平廉與隅如百與單相去二位也若長廉則是初商之三倍位同初商初商與次商如十與單故長廉與小隅亦如十與單相去一位也

若次商之實小於平廉小隅共法之第一行或僅如共

法之第一行而無長廉積則次商是空位也法於初商下作空位圈以為次商而于平廉籌下立方籌上加兩空位籌為三商平廉小隅之共法以求三商其長廉法下又加一空位籌并原有一空位籌共兩空位籌為三商長廉法或長廉不必加空籌但于得數下加兩圈若商數有兩空位者平廉下小隅上加四空位籌長廉積下加三圈

葢有空位則所求者三商也初商與三商如百與單而

平廉者初商之自乘百乘百成萬故平廉與三商之隅如萬與單大四位也此加兩空籌之理平廉原大二位加二空籌則大四位矣

初商與三商既如百與單則長廉與隅亦如百與單大兩位也此又加一空籌之理也

命分還原法如原實八步開得方二步除實四步不盡命為方二步又五分步之四然在兩廉可得五之四在隅則得二十五分步之十六而已實不及五之四也故

通分法還原以分母五通二步得一十分又納分子四共一十四分自乘得一百九十六為實以命分五自乘得二十五為法除之只得七步又二十五分步之二十一以較原實少二十五之四矣故必另置分母五以分子四減之餘一以轉乘分子四得四即隅差也加隅差入方積中然後以分母自乘除之則合原積矣

若立方積一十七步開得立方每面二步除八步餘九步如法命為立方二步又十九分步之九在平廉可得

十九分步之九在長廉與隅則不滿也法以分母十九通二步為三十八分又納分子九分共四十七分為立方全數以全數自乘再乘得一十○萬三千八百二十三分為通積另置分母十九自乘得三百六十一內減分子九自乘八十一餘二百八十分以分子九乘之得二千五百二十分為隅差又置分母十九內減得分九餘十分轉乘分子九得九十分以乘命分母十九得一千七百一十分為長廉每步虛數又以長廉法六步乘

之得一萬〇二百六十分為長廉差合二差共一萬二千七百八十分以加入通積共得一十一萬六千六百〇三分為實以分母十九自乘再乘得六千八百五十九分為法以除實得一十七步合原積

莊氏算學卷一

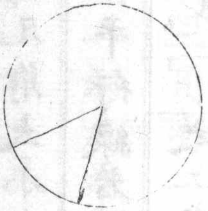
欽定四庫全書

莊氏算學卷二

淮徐海道莊亨陽撰

幾何原本舉要

凡角度皆起於圓心而見於圓界圓不論大小俱有三



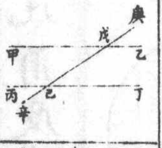
百六十度之數度有六十分分有六十

秒秒有六十微微有六十纖自此以下

又有不盡之數分之故執有度之圓界

為凡角大小之規也

二平行線若作一斜線交加於上則二橫線內外所成



之二角俱為相等

在平行線上作一斜直線即成八角此八角之

庚戊乙甲戊己兩相等角謂之對角甲戊庚庚戊乙兩角同心謂之並角庚戊乙戊己丁二角相等角一邊謂內外角甲戊己戊己丁二角相等角其尖錯交謂相對錯角庚戊乙丁己辛二角之等角一邊謂之外角乙戊

己丁己戊二角之相等角一邊謂之內角八角之中半
鈍半銳各自相等推之三平行線四平行線皆然也
凡三角形之三角相並必與二直角等而具半周之度
凡三角形自一界線引長成一外角將三角形內所對
二角並之始與一外角等
凡三角有二形兩邊線之度各等二線所合之角俱等
則二形底線之度必等式亦等其下各二角皆等也
若二形三界線之度各相等則三角度亦必等而形內

所函亦等也

若二形一界線之度相等於相等線左右所生之二角入相等則他線他角俱各等而二形之度俱等也

三角形有二邊等線者其底線之兩角度亦為相等也

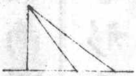
蓋作一長線上剖角下剖底成兩直角三角形各相等也則底線左右所成角必等可知

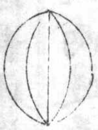
凡三角形之長界線必對大角最長對最大次長對次大短者對小者

凡三角形必有二銳角何也凡三角形將三角並之必與二直角等故一鈍必兩銳一直亦兩銳即三等角亦皆銳也

凡自一點至一橫線作衆線衆線內有一垂線必短於他線而他線之與垂線相離愈遠者線愈長也

凡三角無論直銳鈍合並二界線必長於所餘之一界線所以凡自一點又至





一點畫幾線其各線中僅一線直而短餘必曲而長矣

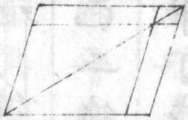
四邊形有五種一四方形邊角俱等也一長方形角等而兩邊長兩邊短也若四邊等而角兩鈍兩銳者謂斜方形又兩邊長兩邊短而角兩鈍兩銳者謂長斜方形若四邊不等四角又不等者謂無法形

凡四邊平行線形其角之各兩對角必俱相等於對角作線分為兩三角形是為對角線必將平行線四邊形分為兩平分

凡平行線之四邊作兩對角線相交處為平分二線之

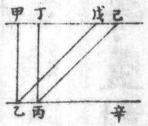
正中

凡於四邊形對角線之正中作一斜橫線截開則將四邊形為兩平分



四邊形若於對角線不拘何處交加依兩界作二平行線即成四四邊形二形為對角線內之形二形為對角線旁餘之形此兩旁形其積必等蓋對角線原屬平分而等今交加線中所成兩大三角兩小三角形亦屬平分而等於原兩三角內對減兩

大三角兩小三角則所旁餘四邊形其積亦必等



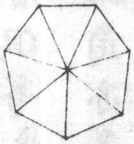
兩平行線內凡同底所成之四邊形其面積俱等何也如甲乙戊丁丙己兩三角形其甲丁戊己二線之度俱與乙丙平行線為等故互相等也若於甲丁戊己二線每加一戊丁線即甲戊丁己兩線俱等因甲乙丙丁之四邊形為平行線則所各相對之線亦俱等也再戊甲乙己丁丙二角為甲乙丁丙平行線一邊之內外角兩形為等自此兩三角形減去丁戊庚所

存之甲乙庚丁戊庚丙己二形俱等於此所存之二形每加一庚乙丙形則成甲乙丙丁戊己丙乙之相等積四邊形矣故凡兩平行線内凡同立於一底者則線無論短長所存之四邊形俱等積也

兩平行線内若同立一底凡所有各種三角形之面積亦俱等也盖三角為平行四邊形之一半四邊既等則三角亦等也底度同亦然

凡衆角形自角至心作線有幾界即成幾角形若作六

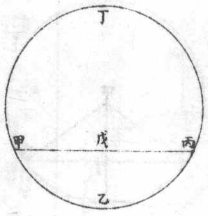
界即成六三角形矣



欲知衆邊形角度之數將邊數加倍於得總數内減四其所餘之數為直角數即為衆角度也如七邊形是七個三角形凡三角形併三角等兩直角則七三角形等十四直角而圓心所有之七角當四直角矣故将十四直角減四直角餘十直角之度為衆角之總度也

凡一直線切於圓界雖長過界而不與圓界出入交加

此謂之切線又兩圜之圜界相遇相切而不相交加出
入謂之切圜

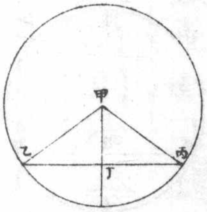


凡一直線橫分圜界謂之弦如戊所分
圜界之一段謂之弧如甲乙丙弦線與
弧線相遇處成兩形如甲乙丙俱為圜
之弧分之角
凡自弦之兩頭作兩線外向圜界相遇此角名為圜分
內角又謂對弧立角

自圓心作二輻線至弧線成三角形謂之分圓面形

凡自與圓界相切輻線之末作垂線必在圓外

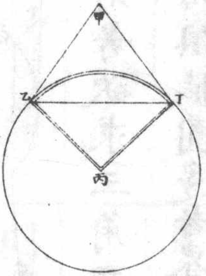
凡在圓弦線若自圓心作垂線可以平分弦線垂至圓



界便可平分弧線蓋自甲心作兩半徑至乙丙二處其線相等則丙乙二角相等故自甲角至乙丙底線之丁處作垂線便是平分也

凡自圓外一點至圓界兩邊作二切線此二線必相等

蓋自圜心作二輻線與二切線相切則二切線與二輻

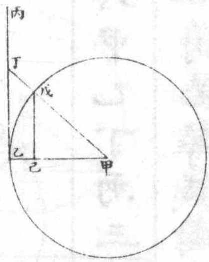


線互為垂線而兩線相遇之角必俱為直角又於兩直角作一對角線是謂弦線而成丁乙丙

與甲乙丁兩三角形丙乙丙丁係輻線原等則底線兩合角必等減圜內兩角數則甲乙丁甲丁乙二角乃兩直角之所餘也二角既等二切線亦必等矣

凡圜有兩弦線若等其分圜弧面之積亦等若自心至

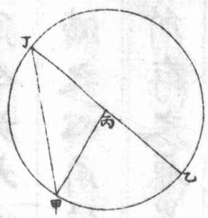
兩弦各作一垂線則二垂線度亦等又自心至兩弦線之各兩頭作四輻線亦等則所成之兩三角形亦等

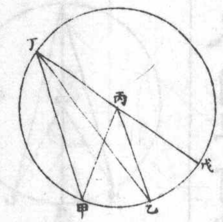


於甲乙輻線末作垂線者切線也甲輻線割圜於戊而至丁者割線也戊垂線至己者正弦也凡立於乙戊弧之角者欲求三角之度三邊之數皆於是取也

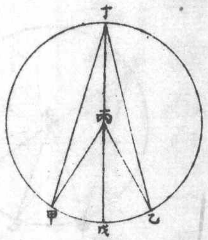
三角俱抵圜邊者界角也一角居心二角抵邊者心角也

心角交與界角有三種具圓心所生界角或在二直線



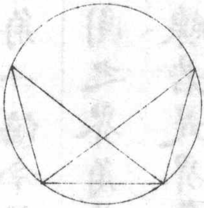


之一線者或在二直線之外者或在二直線之間者此三種心角皆大於界角一倍如第一圖心角在丁乙直線之內則心角為甲丙丁鈍角形之外角外角則兼有本形丁甲二角之度而丙丁丙甲為一圜之輻線相等則所合丁甲二角亦必相等外角既兼有二角之度則比丁角為大一倍可知矣第二圖心角



在丁乙直線之外則自丁過內心至戊作一直線成甲丙戊一大心角甲丁戊一大界角乙丙戊一小心角乙丁戊一小界角準前論大心角倍於大界角小心角亦倍於小界角今於大心角減去小心角大界角減去小界角則所減之心角倍於所減之界角而所存之原心角亦倍於所存之原界角也第三圖心角在丁乙丁甲直線之間自丁界過丙心至對界作一直線亦如第一圖論將

心角剖為二界角亦剖為二則分為兩心角各倍於兩
界角仍合為一心角則倍於一界角也
自圜之弧線凡一段任與圜界何處其尖相切所成之

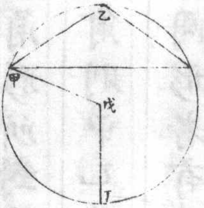


界角有幾何其度俱為等也蓋同立一
弧者心角皆大於界角一倍如上節所
云則同弧之界角不論何處皆小於心
角一倍也因其俱為心角之半則不拘何處作界角皆
相等也

圜内有一心角一界角若心角所對弧度得界角所對弧度之一半此兩角度必相等也盖同弧之心角大於界角一倍今於心角弧度去一半則兩角必相等也

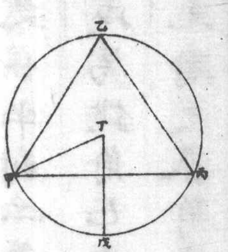
凡圜之界角若立於圜界之半必為直角盖心角所對弧線若是界角所對弧線之一半則二角之度必等今界角對弧為半周將半周弧剖作二心角則二角皆為直角既為直角則界角對弧乃兼兩心角對弧者安得不為直角乎

凡圓之界角若在半圓分之小分內必為鈍角也如圖
甲乙丙為小半圓則所餘甲丁丙為大半圓若將甲丁



丙弧線於丁處平分又自圓心作戊丁
戊甲兩線丁甲弧大於圓周四分之一
為鈍角也又心角對弧若為界角對弧
之一半則二角度為相等今甲丁正得甲丁丙之半則
戊為鈍角乙亦為鈍角也
凡圓之界角若在半圓分之大分內必為銳角也如圖

甲乙丙為大半圓所餘甲戊丙為小半圓若將甲丙為弧線兩分於戊又自丁作丁甲丁戊兩線成甲丁戊心角形此



心角形所對既不足圓界四分之一則為銳角也既為銳角則甲乙丙角必為銳角可知矣

函圓形者有函圓切三角形函圓切四方形有函圓切多邊形圓內切形者有圓內切三角形圓內切四方形圓內切多邊形函圓衆界形之度大於函於圓之界其

函衆界形之圓界度亦大於所函之衆界形在外者大
在内者小也故函形界必大於函於形界也
有一函圓衆界形又一直角三角形此三角形一直角
所生二直線内一直線度若與所函圓之輻線度等又
一直線度與函圓衆界形之各界共度等則三角形面
積與衆界形面積俱等也如自幾邊形之心至角作幾
線分為幾三角求三角之中長線即輻線也底等高等
所作三角形俱等即所云二平行線内同底所作三角

形俱等也合衆三角形之底為一大三角形之底其面積當無不等也

一圜所函之衆界形一直角三角形此三角形之一直角所生二直線内一直線度與彼圜自心至衆界形界所作垂線度若等再一直線度與彼衆界形之共界度若等則兩形之面積俱等也

有一圜形有一勾股形若股如半徑勾若全周則兩形之面積必等也葢比前函圜之衆界形則為小比前函

於圓之衆界形則為大就中間取之恰合無疑也夫函於圓之衆界形輻線及界而不及弧是比圓為小也函圓之衆界形輻線雖及弧而衆界度共線又長是比圓為大也今以圓周及輻線取直角三角形而合之相等無疑則可得圓之面積也盖圓線式異於直線式難於符合然苟將圓線作萬萬段亦與直線近也

衆界形或函圓或函於圓其界數愈多愈與圓界度相近如自函三邊而為六邊六邊而為十二邊十二邊而

為廿四邊無論内外愈近圓界度數也試設一函於圓
九十六邊形又設一函圓九十六邊形而作一圓若將
函圓形作一千五百六十二分又將他形照此所分之
度分之則函於圓形僅得一千五百六十一分矣而圓
界度大於所函之衆界小於函圓之衆界必得一千五
百六十一分餘其圓界中心徑線必得四百九十七分
若即小數筭之將圓界作二十二分則中心徑線必得
七分餘故在圓界可得直線之度在直線亦可得圓界

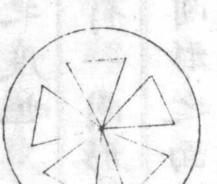
之度也
有一圓形又一衆界形此圓界度若與彼衆界度等則圓形之面積必大于衆界形之面積也試準前半徑作股界度作勾之法求之則方周圓周之界度雖同而圓之垂線長方之垂線短則方所成之三角不及圓所成之三角而所函之面積方亦不及圓矣

凡平面上所立之線若無偏斜猶平階立直柱其各邊所生之角若俱直是謂平面上之垂線

相對兩平面之角各垂線度若俱等此相對二平面謂之平行面

平面上所立之平面若無偏斜猶平地上作直壁是謂平面上之直平面

自三面四面以上其各瓣相並所存之角謂之厚角



成厚角之平面各角度不足於四直角度也何也試將五面厚角尖使其平伸共為一平面則五瓣各相離而有空處

不能成圓面故不足四直角也若欲將四直角顯尖作厚角其辮大而不能成平面厚角矣平面三稜厚角其三面內若將兩面角並之必大於所餘之一角度也試將三平面使之平伸而兩角相並一角弧行則可見矣

凡平面上二直線相交處作一垂線莫偏斜則此線於平面上在在俱為垂線也蓋若有偏則自平面上視之或成鈍角或成銳角既無偏斜則為直角既為直角則

移向平面上處處俱為垂線矣

衆線相交處立一垂線其角若俱直此所交之各線必在平面一也

平面上作二垂線正直立之此二線必互為平行也蓋於平面上作一直線而正直作二垂線則所交直線之角皆為直角所謂二直線一邊成内外之二角也

凡平行二線之間任意自此一線至彼一線隨處作直線斜線交線三角形線俱同原平行線在平面上

二線與他一線平行雖在別面此二線亦互相爲平行也

相對二平面間若橫一線正垂在二平面上俱生直角此相對二面互相爲平行面也蓋於二平面上各作對角斜線兩相交處爲兩平面之中而垂線正當兩線相交之處而俱成直角則兩平面上之兩對角四邊俱係平行則兩平面亦必爲平行者也

二平行而上凡相當之各二線俱爲平行也

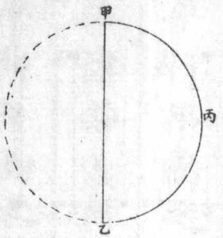
二平行面横穿一平面而皆成直角則中間縫線亦必平行也如以木版穿木版之狀

各種面内積之處謂體依面之端名之也設如全身無角只有一圓面此謂圓體全身各面俱平而有角此謂平體立方是也其身有曲平兩相襍謂之襍體如半截橄欖是也全身相對之各二面俱平行此謂平行面體長立方長斜立方是也全身相對之面不平行而獨兩底面平行此謂底平行面體三角柱是也周圍圓形而

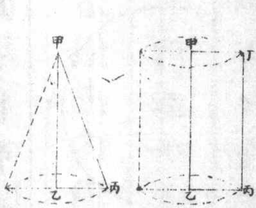
底與面平謂長圓體圓柱是也一平面底而立幾平面俱合於一角而成大此總謂尖瓣體也底三角者為三瓣尖體底四角者謂四瓣尖體底衆角者謂衆瓣尖體

若在平面上立圓面而成鋭尖此謂尖圓體也

所云圓體長圓體尖圓體此三種面俱生於一動之間耳以甲乙為樞心將甲乙丙作轉式旋轉一周即成為圓體也於甲乙丙丁平面形以甲乙為樞心以丙丁線界作轉式旋轉



一周即為長圓體也於甲乙丙三角形以甲乙為樞心以丙界作轉式旋轉一周即尖圓體也樞心正則為正體樞心偏則偏體矣



凡體若面平行相當所對兩邊面積俱為等也如正方體六面相當則六面面積俱等如長方體各底面相當則底面之面積俱等也

凡體苟面積形式一同俱等謂全等體形不等而積等

謂等積體積不等而式等謂等式體

平行面三凡體形自對角線分為兩段此兩段為全等體也

平行平面之間若同在一底立各平行體形其積俱為等如面例

平行平面之間有在等積底所立之各平行體形其積必俱等蓋所立之處不同而其度同也故等也

平行平面之間有在等積三角形兩底所立各三面體

形此所立各體之積必俱等也理如前節

平行平面之間同在一底作一平行體形作一三面體

形則三面體形必為平行體形之一半

各種體形難以發明必作圖以明然有空實二端空者

宗其空實者宗其實乃可耳

凡等式體茍立於等積之底其體之高若等則其積俱

為等凡尖圓尖瓣皆然也蓋將大體截分為衆小體其

小體底度亦等也

有各種平行底之平面體與各種平面尖體兩底積若
等其高數又等則此一平行底之平面體與彼平面尖
體三形之積等推之平行面體與四瓣尖體三形之積
等平行底之圓面體與圓面尖體三形之積等蓋三面
尖體為三平面平行底平面體三分之一四面尖體為
平行面體三分之一尖圓體為圓柱體三分之一也若
將實形作空形以水注之作比例可見
凡相等界度之體內其圓體所函之積數強於他種體

所函之積也如一圓一方一十二辮體論積皆不及圓
蓋如論面函於圓界之積大於各等邊平形所函之積
也六面俱為等面八角俱為直角是謂正方體
厚角正體有五種觀於各面數而名之也一為四辮面
之體此四面每面有三角各三角各三界度若俱等是
謂四辮體二為六辮面之體即正方體也三為八辮面
之體共八面面各三角各三界度若俱等是為八辮面
體四為十二辮面之體此每面有五角各五界度若俱

等是謂十二辦體五為二十辦面之體此每面有三角每面各三角各三界度若俱等是謂二十辦體此正體五種外不生他形總不外三角四角五角之平面合而成也蓋將三角平面形三辦形合成一厚角餘一面求角合角界合界必取等角等界之平面三角形也四辦體是也將三角平面四形合之復加四形八辦體是也將三角平面五形合之復加十五形二十辦體是也然欲以三角六形合之不能成厚角矣蓋六三角平面形

界於界角於角而對合之成六角之平面形能為平尖不能顯也是故三角形所生只於四瓣八瓣二十瓣自此而外無有也四角所成只於正方角此外無有也將五角平面形三形合之所成厚角即如十二瓣體是也此外不能成他角也至六角平面形則將三角相合已等於四直角能為平而已不成厚角也六角如此七八以上可知矣

凡比例面比面體比體線比線不同者不相謀也

凡將兩物度數互相比之此比出之度數為大為小謂之比例其比者與所比於物者俱謂率齊數之謂也其比之物謂前率其所比於之物謂後率也如甲乙二線相比此所比出之甲線或為長或為多乙線或為短或為少謂之比例也將此二線相比故謂之二率而所比之甲線謂之前率其比於之乙線謂之後率矣

凡兩兩相比謂之四率如一率與二率之比同於三率與四率之比此為同理比例也如一率甲二率乙三率

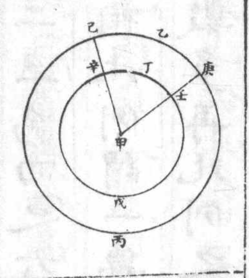
丙四率丁乙線為甲線六分之五丁線為丙線六分之五則甲乙二線之比同於丙丁二線之比是謂同理比例苟求得乙線有甲幾倍之數則可知丁線有丙幾倍之數也

又凡四率將一率與三率分作幾分將分數相等定準此兩率分度雖不同而分數為等於是以二從一以四從三看幾分為均其一與二之比即如三與四之比為同理比例也

有兩不同之比例如二率四率之分數相等而一率於二率為四之六三率於四率為四之五則不同矣而可相比例謂一與二之比大於三與四之比也前比例之數多再比例之數少也故又謂之兩不相同之比例也

有相連比例率如甲線一一率乙線二二三率同丙線四四率甲與乙之比同於乙與丁之比是謂相連比例倣此於相連比例之內將一率甲與三率丙比者謂隔一位加一倍之比例也將甲與丁比者謂隔二位加二倍之比例

也將甲與戊比者謂隔三位加三倍之比例也比例難於講解試作圖以明之於大圓內作小圓於圓之中心作二線割小圓弧抵大圓弧則成大圓己甲庚小圓辛甲壬之甲角此甲角之對弧己庚苟為大圓之六十度



則亦為辛壬小圓之六十度蓋圓之大小雖不同而分數為等故以大圓周為一率庚己弧為二率小圓周為三率壬辛弧為四率一與二之比同於三與四之比也兩圓周

為比之之率為前率兩弧為比於之率為後率兩兩相當分數俱等是為順理比例也倣此凡各率各度雖異相當之數若等一二之比同於三四之比俱為順理比例又有幾種論如左一種反比例反一為二反三為四仍相等也如前大圓周為一率大弧界為二率小圓周為三率小弧界為四率今以大弧界為一率大圓周為二率小弧界為三率小圓周為四率比例亦同也一種轉理比例謂一與三比二與四比也以大圓周為

一率小圓周為二率大弧界為三率小弧界為四率其比例亦無不同也

一種分理比例謂於一率三率中各減與二率四率相等之一分以比二率四率仍為相當比例也如二率四率原於一率三率為六之一今各減一率三率之一分則又為五之一比例亦然也

一種合理比例謂合原一率二率之數以比二率合原三率四率之數以比四率原各為六之一今又各為七

之一也
一種更理比例謂換却二率四率之原數各更以他數
如原各為六之一今又各為六之五也
一種隔位比例如有兩項四率原為相當比例則以此
四率中之一率與四率為比又以彼四率中之一率與
四率為比合為一四率仍為相當比例率也
一種錯綜比例如此邊有相連比例三率彼邊亦有相
連比例三率取此中末之比例彼中末之比固也尚錯

綜之則取此中末之比例彼另設一線置於彼第一線之比又取此上末之比例彼另設一線與彼中線之比蓋彼雖另設一線仍是相連比例線此相連之比同於彼相連之比此隔位之比亦同於彼隔位之比也

一種相減比例如甲丙乙丁二線所有之三倍内減去丙戊丁己二倍互相之比同於原甲丙乙丁二線之比

也

一種相加比例如甲乙二線照本度各加三倍為丙丁

線互相之比同於原甲乙二線之比也得此比例線之法則面之相當者為比例面體之相當者為比例體也且線亦可以例面面亦可以例體也如甲六分線與乙三分線相比丙六分面與丁三分面相比戊六分體與己三分體相比每每相當分數相等則互相為比例也

以二數相乘所得兩數為均若以二線均為幾度每各線度作小方形以此線小方乘彼線小方即成兩直角

四界形葢以一線為横一線為縱彼此互乘形亦均也

又一線分為三度作小方形一線分為四度有竒作小

方形一線横一線縱乘成函十二長方形而竒數亦附

於方末也

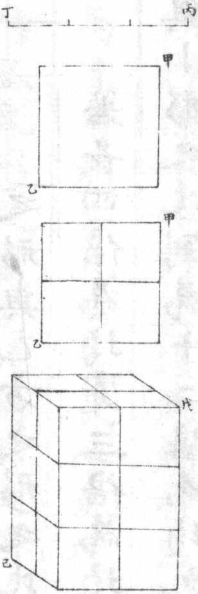
又將前線所作方形取其半相乘亦得四方形也葢取

三方之半而為六小方取四方之半而為八小方八六

四十八六八亦四十八便成兩函四十八之長方形而

其總度仍相等也葢兼取其半而無改於原度故也

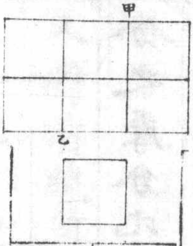
四方直角平面形凡在一線可以相乘也如甲乙形欲



乘丙丁線則將此形作四小方體又將丙丁依甲乙所分之厚分比之若得三分則將甲乙形三層堞之遂成函十二小方形之直角體也凡六面平行直角體必得壘一四邊直角平面與一直線相乘而成也

凡兩直角平面形欲相比例有兩比例焉如大形之長

度與小形之長度幾倍為均大形之寛度與小形之寛度幾倍為均是也然合闕比兩比例仍是一比例如甲



方之長與乙方之長三倍為均甲方之寛與乙方之寛兩倍為均二三相乘為六則甲方之形與乙方之形之比例為六倍為均也

若長四倍為均寛三倍為均三四一十二則大形與小形之比例為十二倍為均也再若大形之横度比小形十二為均小形之直度比大横直度三倍為均

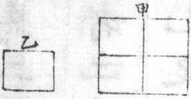
則以三除十二得四大形比小形四倍為均也若四倍則以四除十二得三倍為均皆成一比例也

有兩直角形若此形之長倍於彼形之長而彼形之寬反倍於此形之寬則此兩形之積為等也或一倍或三四五六倍皆然凡有相比例四率其在中之二率三率相乘所得數必同於一率四率相乘所得數也如一率二二率四三率三四率六以中率三四相乘為十二首尾率二六相乘亦一十二也試將三度四度之線相乘

作長方形又將二度四度線相乗作長方形形雖不同
而積等也故一二三率已知者也所求四率未知者也
既求得四率則以一率與四率相乗所得數與二率三
率相乗所得數無以異也如東河之水流速三倍西河
之水流速六倍東河之流一秒十缸欲知西河之流一
秒幾何缸則以東河之三倍為一率西河之六倍為一
率東河之十缸為三率求得西河之流二十缸試相乗
之數為等也又如三個兵每月餉六兩今已五月應餉

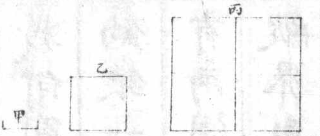
幾何則以三兵為一率六兩為二率五月為三率求得餉銀一十兩試相乘之數又等也

有兩個直角面尚此面之橫界與他面之橫界此面之縱界與他面之縱界比例若等則此兩面相比之比例即為兩界相比之比例隔一位加一倍之比例即前相



連比例一係所云也蓋兩界之比例第為一倍之比例而兩面之比例為加一倍之比例也如甲之橫界大于乙一倍而為二縱界亦大於乙一倍而

為二則甲之面大於乙之面三倍而為四為二倍為均
者二若甲之横界縱界各大於乙五倍則甲之面内與
乙之面内六倍為均者有六矣
丙乙之邊線為相連比例丙乙之面於相連比例中為
隔一位加一倍比例令設一甲線為一分乙線



為二分丙線為四分為相連比例則丙面與乙
面之比同於丙線與甲線之比蓋丙面大於乙
面三倍丙線長於甲線三倍共為隔一位加一

倍之比例也

前數節所論直角面之縱橫界比例等者謂之同直角面其兩相比例之橫界俱謂之相當界也

在相同直角面縱橫兩相當界之比例必等也

在相同直角面於兩面相當之一界作為兩方面則所作兩方面互相之比即同於原面互相之比亦為隅一位加一倍之比例也

直角體則有三比例長也寬也厚也如大形之長寬厚

各大於小形之長寛厚一倍則先成長寛倍之平面形於平面形上又疊一相等之平面形則亦倍厚矣倍而成平面則二倍為均者有二倍而成體則四倍為均者有二矣

有直角兩體苟此一體之底與他一體之底為大一倍而他一體之厚與此一體之厚亦大一倍則此二體之積等盖即一體之竪起與放倒也

有兩直角體苟此體之長寛厚界與彼體之長寛厚界

相比之比例若俱同謂之同式體而長寛厚各一邊相比例之界俱謂相當界也

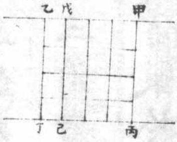
凡兩直角同式體互相比之比例為界比例之隔二位加二倍之比例也如大體之長寛厚比小體各大一倍則此兩體相比之比為隔二位相加之比例也蓋界線為相連之比例者倍而為平面為隔一位相加之比例又倍而為體則為隔二位相加之比例也茍作一相連比線之率甲為一分乙為二分丙為四分丁為八分又

作一直角體與三界各加一倍之直角體則小體與大體之比同於一辛甲線與四辛丁線之比若知甲線比丁線為八分之一即可知大體比小體為八分之一也

有直角同式兩體在此兩體比例相當之二界立作兩四方體互相以比之其比例仍同於原體之比也蓋原體為隔一位加一倍之比例則於兩相當界所作體亦為隔一位加一倍之比例均是八分之一也

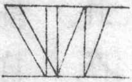
凡二平行線內凡有直角面互相之比同於與此兩底

互相之比也如甲己面之丙己底界與戊丁面之已丁底界若大三倍則甲已面與戊丁面亦大三倍也試将戊已相兼之縱界依此



界分與丙已已丁底界相乘成甲已面十二分戊丁面四分總為大三倍也

凡二平行線內所有凡平行四邊面互相之比同於其兩底界互相之比也蓋同底所立之直面斜面積俱同則直面斜面之比例俱等故底若大三倍則

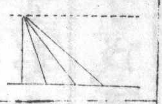


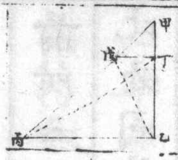
面亦大三倍也

凡在二平行線之間若有兩三角形以兩形積互相之比必同於兩底界互相之比也蓋同底所作之三角形為四邊形之一半四邊形之比例等則三角形之比例亦等故三角底若大一倍則三角形積亦大一倍底若大三倍則積亦大三倍也

凡三角幾形之底俱在於一直線又與各底相對之衆角皆聚於一處則其三角衆形必在二平行線之間也

觀圖可見





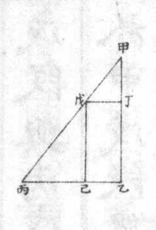
凡三角形作與底線平行之線不拘何處截斷則兩旁之線皆成四比例線如圖甲丁與丁乙之比同於甲戊與戊丙之比是二段互相比之比例同也又甲丁一段與甲乙全線之比同於甲戊一段與甲戊全線之比是分線之比例同也故曰四相比例也蓋自乙至戊自丙至丁作乙戊丙丁二線分為幾三角形此內之乙戊丁丙丁戊兩三角形既在二平

行線之間又同立於丁戊之底則其積等也又各增入甲戊丁三角形其積亦等也又甲丁戊丙丁戊兩三角形其底線同在甲丙一直線而兩角又相遇於丁即如前所云二平行線之間有兩三角形則兩形積互相之比必同於兩形底界互相之比則甲丁戊形積比丙戊丁形亦同於底線甲戊比戊丙之比例再彼甲丁戊乙丁戊兩形積之比亦同於甲丁丁乙兩底線之比也再甲乙戊甲丁丙兩形之積既等則甲丁戊形積與乙丁

戊形積之比同於甲丁段與乙丁段之比而又同於甲戊段與丙戊段之比是以甲丁段與乙丁段之比必同於甲戊段與丙戊段之比也故以甲丁為一率丁乙為二率甲戊為三率可以求戊丙之四率也誠如是以甲乙丙全形之三角或與所分甲乙戊三角或與所分甲丙丁三角之比例俱為同也因其比例同而此三角全形所分兩形之積既為等則甲丙丁所分形之甲丁底與甲丙乙全形之甲乙底互相之比其甲乙戊所分形

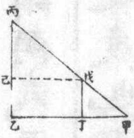
之甲戊底與甲丙乙全形之甲丙底互相之比俱為同
也則甲丁段之一分為一率甲乙全線三分為二率甲
戊段一分為三率甲丙全線四分為四率亦為相比例
率也

凡在三角形內不論何處作與底平行直線則以所作



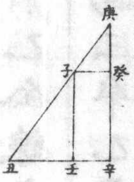
平行線與原底線之比同於兩邊所截一
段與各每邊全線之比也

如圖所截若甲丁段二分甲乙線六分則丁戊線亦為

二分乙丙線亦為六分可知也何也試將甲


乙丙三角形轉以乙甲線為底於戊丁線之
戊處至己處作與甲乙平行線則己乙之度即戊丁之
度準前節全線與截段相比之例則戊丁平行線與原
為底乙丙全線之比必同於甲戊與甲丙全線甲丁與
甲乙全線之比也故以甲戊為一率甲丙為二率戊丁
為三率乙丙為四率為四相比例以甲丁為一率甲乙
為二率戊丁為三率乙丙為四率亦四相比例率也

大小三角形每每相當角若等則其積雖異而其形為



同謂同式三角形也再有一三角形自此形分之出一庚子癸三角形又出一子丑壬三角形此所分出兩形與原形每每相當角俱等亦謂同式形也

三角衆形内相當各二角度若等則餘一角度必等亦謂同式三角形也蓋三角相合必與二直角等足半周之度也

有衆大小三角形若同式將衆形相當界互相比之比例為同俱為相比例率也如二勾股同式形則此股與相當股之比必同於勾與勾之比股與股之比也試將勾股如前截一小勾股可騐矣

同式直角兩形互相之比同於在此各一面相當界所作方形相比之比例蓋三角積得方形之半全與全之比若半與半之比也

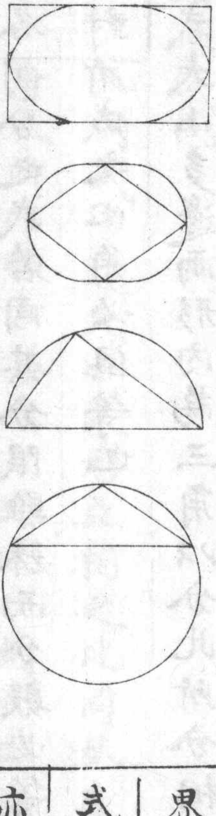
同式直角兩形互相之比即是各一面相當界相比之

比例為加一倍之比例也如甲線一分乙線二分丙線四分為相連比例線今兩形之三邊線若各大一倍則亦如直角四邊形積為大三倍矣大三倍則非相連比例線而為甲線一分與丙線四分隔一位加一倍之比例也

同式鈍角銳角互相之比亦同於此各一面相當界所作方形互相比之比例而為在此各一邊相當界互相比之比例隔一位加一倍之比例也理如前節

有多邊衆形其邊數同而相當角度等謂同式多邊形則大形甲邊之比與小形甲邊之比同於乙邊與乙邊之比也

有衆曲界形在曲界形之或内或外作相函之各種直

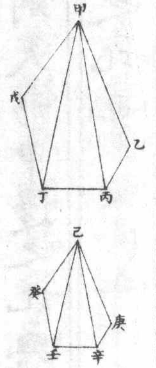


界形具式若等亦謂同式曲界形也兩襍界形二圓分形亦於兩中間各作三

角形若同式即謂之同式襍界同式圓分也

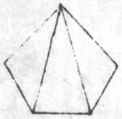
大小各圓分之式若同其分限雖殊而分數必等與其分相對所成之心角必俱等也

將同式大小多邊兩形內為三角以分此所分相當大小三角形之式俱同也如兩五邊形各分為三三角形

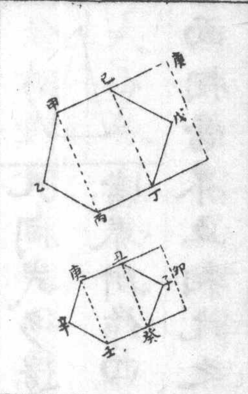


則甲乙丙與己庚辛相當為同式甲丙丁與己辛壬相當為同式己壬癸與甲丁戊相當為同式蓋兩形相當角度等

則相當界互相比之比例等也乙丙庚辛二界相當之比同於甲丙巳辛相當二界相比之比例由是甲丙巳辛之比同於丙丁辛壬之比而丙丁辛壬之比亦猶甲丁巳壬之比而甲丁巳壬之比亦猶丁戊壬癸之比故曰相同式也



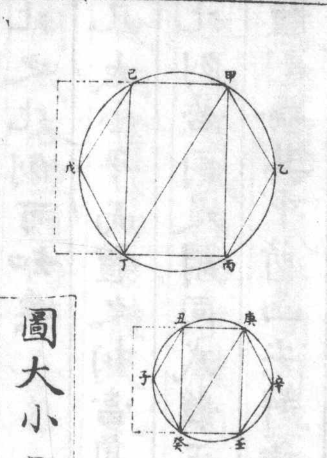
凡同式多邊大小衆形互相之比同於在此相當界所作四方形互相比之比例而與此各一面相當界互相比之比例為加一倍之比例也理如前



凡大小同式直界形互相之比同於在其形內外相函之同式形各相當界立作平面方形互相比之比例如圖甲乙丙庚辛壬相當三角各二形之比同於在甲丙庚壬所作方形相比之比例也蓋大形所函者甲丙巳丁之形小形所函者庚壬癸丑之形故於甲丙庚壬相當二界立作方形而得比例也

凡圓曲䙡各種界形之內將每每一類同式形互相之

比同於在所比形之內外相函同式形之每每相當所作方形相比之比例也如



圖大小二圓形內雖函六面同式多邊兩形函甲己丙丁庚丑壬癸直角四邊同式兩形函甲丙丁庚壬癸三角同式兩形兩但取所函四邊形甲丙壬庚相當界所作之方形便得圓形比例也蓋衆界之界愈多則於圓界愈近故將直角形分為千萬界形在

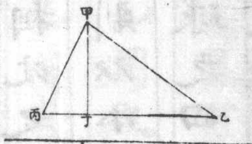
圓界可以近用之而圓曲形亦既可以為千萬直界形以用之故將此二圓為同式直界互相之比同於在所函同式形之相當二界所作方形相比之比例也然則二圓互相之比同於或在輻線或在徑線所作方形相比之比例可知矣

凡大小平面體之相當角度若俱等相當界互相比而比例若同是謂同式體正方體四辦面體皆然若圓柱體則論其中所函尖辦等體若同式則謂之同式圓體

各種體之式若同將每每一類體互相之比同於在每一每相當界作四方體相比之比例如於兩同式尖瓣體之相當作四方體是也

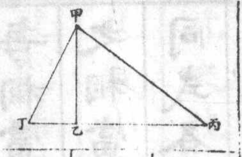
同式各種體內將每每一類體互相比者同於在此內外各所函者函於者同式體之每每相當界作方體互相比之比例也如兩球體函於兩方體以小球則大球則以小方為一率小球為二率大方為三率可以得大球之四率也

自直角三角形之直角至相對界作一垂線分為兩直角形則此大小三三角形俱為同式也蓋中垂兩傍所成俱為直角而乙角又不變兩



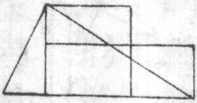
角相等則一角亦等而丁變為甲甲變為丁矣丙角亦不變而與乙甲丁同為同式三三角形也

自直角三角形之直角至於對界作一垂線截相對界為兩段則所截之兩段長者為一率短



者為三率而垂線為中率為相連比例三率也如甲乙

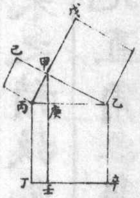
丙甲丁乙兩角俱為同式則比例必同以乙丁比甲丁同於甲丁比丁丙也



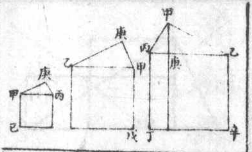
自直角作垂線至於對界在此垂線作四方形又將所分對界兩段一段為長一段為高合作長方形兩積俱等也蓋三線既為相連比例線

凡相連比例三線其中線自乘之積同於一線三線相乘之積故也

凡直角三角形是謂勾股勾股上兩方合之與弦上方



等積何也如圖以甲乙丙全形分為甲乙庚甲庚丙大小兩形是為同式形而每每相當界互相比之比例同也於是以小形庚丙與全形



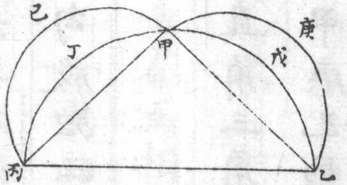
甲丙之比同於全形甲丙與全形乙丙之比為相連比例率也則在甲丙中率所作四方形必同於一率庚丙為高與三率乙丙為長相乘所作長方形之積等也又大形乙庚與全形甲乙之比同於全形甲乙與全形乙丙之比亦為相連比例率而在

甲乙中率所作方形同於一三合率所作方形之積等也今庚丁乙壬所分之兩形與巳丙戊乙兩方形每等則將所分兩形相合則乙丁方形自然與巳丙戊乙兩方形等可知矣

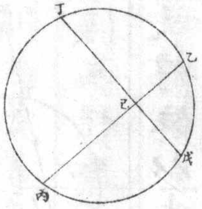
在勾股弦三界作凡同式三形弦上積兼有勾股之積也

在直角三角形之大界作乙戊丁丙一半圓在二小界作甲庚乙丙兩半圓亦如前節為等也而甲庚乙半圓之

甲戊乙弧一段甲已丙半圓之甲丁丙弧一段若減之則所餘甲庚乙戊甲已丙丁二段又與甲乙丙原三角形之積等也



一圓之內二弦線不拘何處相交以相交所截之段互相轉比之比例俱同為四相比例率也如圖二線於已處相交以此戊已段與已丙段相比之比例將已丁已

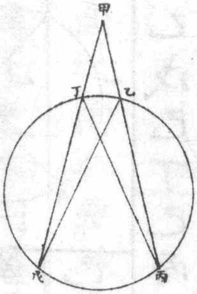


乙相比之位轉之為己乙己丁雖以後為前以前為後比之其比例仍同而戊己己丙己乙己丁四段為相比例率也

蓋乙戊己丁己丙兩形此兩形之乙角丁角既俱切於圜界而又同立於戊丙之弧則此二角為等而二角之己角為對尖之角其角亦為等二形之三角俱等即為同式也同式則戊己己丙相當二線互相之比即同於己乙己丁相當二線互相比之比例又戊己己丙己乙

己丁四段俱為相比例率也

於圜徑線不拘何處作一垂線將徑線截為兩段則所截之兩段為一率三率而垂線為中率成相連比例也即勾股垂線之理

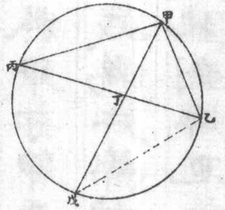


自圜外之凡一點出二線過圜界之二處至相對弧界則此兩全線互相之比同於在圜界外所有之二段轉位以比之比例而為四相比例率也如圜自丙

至丁自戊至乙相交作二線成甲丙丁甲乙戊兩三角形則兩形之丙戊二角既同切於圜界同立於乙丁之弧則丙戊等角也再甲角既係公共則亦等角也二角既等則同式矣同式則甲丙甲戊相當二界互相之比同於甲丁甲乙相當二界相比之比例以甲丙為一率甲戊為二率轉位甲丁為三率轉位甲乙為四率俱為相比例率也

將函於圜之三角形於甲角作平分角之甲戊直線則

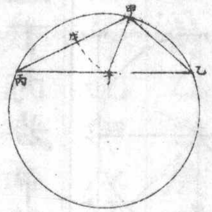
甲乙傍線與甲丁段直線之比即同於甲戊全直線與



甲丙傍線之比也蓋甲乙戊甲丁丙形之丙戊二角同弧同切其度為等而甲乙戊之甲角丁甲丙之甲角既自一角兩平分為兩角其度亦必等是為同式形也則以兩形之相當甲乙小界與甲丁小界之比同於又相當甲戊大界與甲丙大界之比也

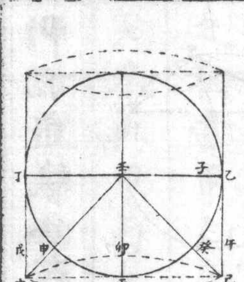
將函於圓三角形之甲角為兩平分自甲角至底線作

甲丁直線分底線為兩段以乙丁與丁丙之比同於甲

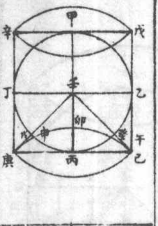


乙傍線與甲丙傍線之比也蓋自丁處作甲乙平行之丁戊線成戊丁丙小三角形則全形之乙角與小形之丁角為平行線一邊之內外角為等而丙角係公共角亦為等為同式形也再甲丁戊之丁角乙甲丁之甲角為平行線間之尖錯交角度為等而甲丁戊甲乙丁之甲角原係平分亦為等是甲丁戊角之丁角甲角等可知兩角

既等則兩等角所對甲戊丁戊線亦必等也是故全形甲乙線與甲丙線之比同於相當丁戊線與戊丙之比而甲戊線與丁戊線等則甲乙比甲丙亦若甲戊比戊丙也又丙乙丙甲二線既為丁戊平行線所截則乙丁比丁丙若甲戊比甲丙也

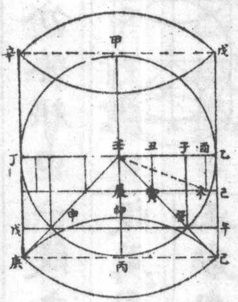


凡球體在長圓內尚此球徑線與長圓體之底徑高度若俱等則此球積為長圓體三分之二也何則將球體

合長圓體於乙丁平分之又將半長圓體內減去半球
體餘乙己庚丁申丙癸凹面體為與己庚壬尖圓體等
積等也何以知之將尖圓凹面二體俱與己庚底平行分
為幾段之面則兩體之面積每段各相等也試將尖圓
體分癸卯申一段之面積必與分曲凹形午癸申戌一


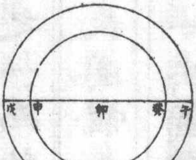
段周圍之面積等矣何也以壬癸半徑作
正方與壬子子癸兩線作兩正方並之為
等也又以壬癸半徑線作一圓與以壬子子癸為兩半

經線作兩圜並之為等也再壬乙與壬癸俱是一圜之



半徑線必等而壬乙與卯午俱為一長方之平行線亦必等則卯午與壬癸亦必等也是則以壬子子癸為兩半徑作兩圜亦必等於卯午半徑線所作一圜也今將卯午所作圜內減去與壬子線相等之癸卯線所作之圜即餘癸午曲凹形一段周圜之面與癸子為半徑線所作圜面等也夫卯癸線與癸子線既為等線

而卯癸與癸子為半徑作兩圓亦必等則癸午曲凹形



之面積必與卯癸為半徑作圓之面積等矣再將壬未半徑作一圓以壬辰辰未為兩半徑作兩圓等亦如前所云以辰未為半徑作一圓與壬未相等辰巳線為半徑作一圓之面積內減去辰未作圓之面積所餘未巳曲凹形一段周圍之面積與壬辰為半徑作圓之面積等而壬辰與辰寅既為正方之等線則以尖體內之辰寅為半

徑作圜之面積與相對末已曲凹形之面積等也夫兩體每段所分既俱相等則全體亦必相等矣前云一尖圓體與一長圓體其底積高數若等則尖圓體與長圓體為三分之一也所餘曲凹形既與尖圓等積則亦三分之一而所減半球為半長圓體三分之二而全球為全長圓體三分之二矣

有一尖圓體又一半球體苟尖圓體底徑與半球體徑度等而尖圓體高度與半球體半徑又等則此尖圓體

為半球體積之一半也蓋尖圓為長圓三分之一而半球為長圓體三分之二則尖圓為半球之半也又球體徑度與尖圓體底徑度若等而球體半徑與尖圓體高又等則此一球體之積當四尖圓體之積也蓋將尖圓加一倍則與半球等合四尖圓則與全球等也有一球體又一尖圓體苟尖圓體底面積與球體外面總積若等而尖圓高度與球體半徑又等則此兩體之積為等也何也將球體從外面至心分為千萬尖體此所分千

萬尖體之底積必與原球外面之總積等亦即與尖圓體之底面積等也又原尖圓體之高與所分千萬尖體之高既等則一尖圓體之積與所分千萬尖體總積等也如是其所分千萬尖體之總積既與原球之積等則此尖圓體之積必與此球體之積等可知矣

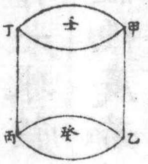
凡有一球體苟以此球體之半徑作一圓則所作圓之面積於此球體外面積為四分之一也如前節之言既為相等又作一小尖圓體其底徑與原球徑等其高與

原球體半徑等則於原球為四分之一而於前大尖圓體亦為四分之一也此大小兩尖圓體之高度既等其兩底面積之比同於兩體積之比例體積為四分之一底面積亦為四分之一而於球體外面之積亦為四分之一也因其為四分之一而小尖圓體之半徑原與球體半徑等則以此球體半徑作圓之面積亦與球體外面積為四分之一可知矣

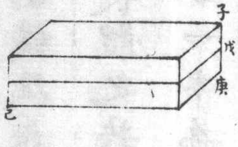
有一球體又一圓形苟此圓形之半徑與球體徑度若

等則此一圓形之面積為與一球體外面積等也葢以球之半徑作圓之半徑則其面積為球四分之一若以球之全徑為圓之半徑則半徑所作之圓視全徑所作之圓面積又為四分之一矣何則凡圓互相之比同於相當界所作方形互相比之比例又為每相當界互相比之比例為加一倍之比例也兹兩半徑之比為大一倍而兩圓面之比又加一倍即是半徑作圓為一分全徑作圓為四分既為四分則此圓面積與球體外面等

積可知矣有長圓體又一長方體苟此長方體底面積與長圓體周圍面積若等又此長方體高度與長圓體



半徑之半又等則此長方體之積為與一長圓體之積等也何也將長圓體從壬癸心線至外面分為千萬長體則此所分千萬長體之共



積為子己長方體積之一半也蓋子庚高度與所分千萬長體之壬丁高度相等又長方體之庚己底面積與所分千萬長體之底共

面積及長圓體甲丙周圍面積等如前所云所分千萬

長體之共積與子巳長方體為一半亦如以子庚高度

分一半為戊庚丙戊巳長體即與所分千萬長體相等

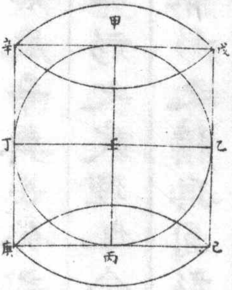
矣如是則戊巳長方體積與甲丙長圓體等積可知也

有一球體一長圓體苟比長圓體之底徑度高度與球

體徑度若等則比球體外面之積為與長圓體周圍之

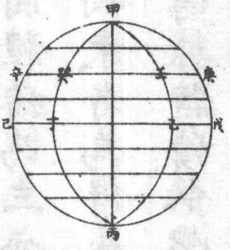
面積等也

蓋將球體半徑乙壬分為六分用半徑之半三分與戊



己庚辛長圓體之面積相乘得數照前節所云為長圓體之積也又用所分六分之二為乙壬半徑三分之一與球體外面積相乘得數為球體之積也夫球體比長圓體積為三分之二矣然用三與長圓體周圍之面積相乘者為得長圓體積用二與球體外面積相乘者為得球體積今以球體與長圓體相比之比例同於為乘面積用三二兩數之比例如是則球體外面之積與長

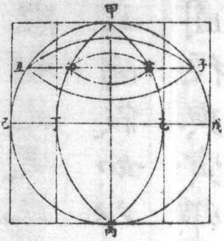
圓體周圍之積等可知也



有一平面鴨卵形其大徑度與圓徑若等則鴨卵形之平面積與圓面積之比同於以鴨卵形之小徑與大徑相比之比例也何也將與戊己徑線平行任分幾線此每線假如庚辛與壬癸之比同於戊己與乙丁之比而為作鴨卵形之定理也今每平行線俱依此之比例即平行鴨蛋形之積與圓形之積相比同於乙丁小徑與戊己大

徑之比例也

長方面內有平面鴨卵形正方面內有圓形苟長方之寬與鴨蛋形小徑度等長與大徑度等而正方一邊度又圓徑度俱與鴨蛋形大徑度等則以長方面積與正方面積之比例同於以鴨蛋形面積與圓形面積相比



之比例也又鴨蛋體大徑與球體徑度若等則鴨蛋體外面積與球體外面積相比之比例同於以鴨蛋體小徑與大

徑相比之比例也何則將兩體外面俱分幾平行圓此每圓假如以子丑圓界與寅卯圓界之比同於以子丑圓徑與寅卯圓徑之比也今照作鴨蛋形之定理而子丑徑與寅卯徑之比同於戊巳徑乙丁徑相比之比例誠如是其每大圓界與相對小圓界俱依此為比例則兩外面積之相比同於兩徑之相比可知矣

有能函鴨蛋體之長圓體則鴨蛋體外面之全積為與長圓體周圍之積等也則試以鴨蛋體之大徑作球之

徑又作一函球之長圓則函球之長圓與函鴨蛋之長
圓周圍面積之比同於兩底圓界相比之比例亦同於
大徑線與小徑線相比之比例也又球體之面積與函
球體之周圍面積既等則以函球體周圍面積與函鴨
蛋體周圍面積之比亦同於大徑與小徑之比也則是
鴨蛋體面積與函鴨蛋體周圍面積二項與球體面積
相比皆同於大徑與小徑之比則鴨蛋與函蛋體兩項
面積相等可知矣

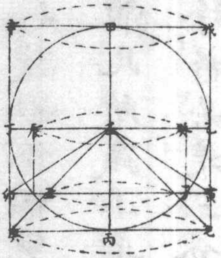
有一鴨蛋體函於一球體則兩積之比同於鴨蛋體小徑線所作正方面與球體大徑線所作正方面相比之比例也

有一鴨卵體有一恰函鴨蛋體此兩體積之比同於球體積與函球體積相比之比例也

有一鴨蛋體恰函於長圓體內則鴨蛋體積為得長圓體積三分之二也蓋蛋體與函卵體之比同於球體與函球體之比則彼為三分之二此亦三分之二也

有一長方體恰函鴨蛋體有一見方體恰函球體則長方體積與鴨蛋體積之比同於見方體積與球體積相比之比例也又長方體積與見方體積之比同於鴨蛋體積與球體積相比之比例也

有一球體恰函於長圓體內若將此兩體俱於寅卯處



分之此所分球體子丙丑一段之凸面積與所分相對長圓體寅巳庚卯一段之周圍外面積為等也

何則假如於癸子丑辰小長圓體內減去壬子丑小尖圓體此所減小尖圓體積為小長圓體積三分之一其所餘者必是三分之二而此所分寅子丑夘曲凹體之一段周圜面積與子丑線為徑作相對圓之面積等矣如是則乙寅子丑卯丁辰癸長圓一段空心體與癸子丑辰小長圓體此二體之底面積高度既等其體積亦等而乙寅子丑卯丁曲凹體之積與壬子丑小尖圓之積等矣然因何為等蓋壬子丑小尖圓體所分每每圓

之面積與所分相對每每曲凸體周圓之面積等也
壬子丑小尖圓體積既為癸子丑辰小長圓體積三分
之一又此小長圓體積與乙寅子丑卯丁辰癸長圓一
段空心體積為相等則是乙寅子丑卯丁曲凹體之積
與乙寅子丑卯丁辰癸長圓一段空心體積為三分之
一尚於乙子丑丁球段內減去壬子丑一小尖圓體餘
乙子壬丑丁球體一段之積與乙寅卯丁一長圓體積
為三分之二也若於乙寅卯丁長圓體內減去壬寅卯

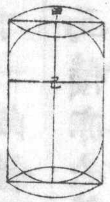
尖圓體爲此乙寅卯丁長圓體三分之一餘乙寅壬卯丁長圓體一段之積與乙子壬丑丁球體一段之積等也今將乙寅壬卯丁一段之體從外面至心之壬處分爲千萬尖體之尖底面積相乘得數爲乙寅壬卯丁一段之體積數也又以此乙子壬丑丁一段之體從外面至心之壬處分爲千萬尖體若以乙壬半徑爲高度用三分之一與所分千萬尖體之尖底面積相乘得數爲乙子壬丑丁一段之體積數也如前所云此乙寅壬卯

丁一段體積與乙子壬丑丁一段體積既等則此兩體面積亦必等而此乙丙丁半球體凸面積與乙巳庚丁半長圓體周圍外面積亦等若於半長圓内減去乙寅卯丁一段外面積於半球體内減去乙子丑丁一段外面積此所減之乙子丑丁一段面積與彼所減之乙寅卯丁一段面積為相等此所餘子丙丑球體一段面積與彼所餘寅巳庚卯長圓體一段面積相等可知也

有鴨蛋體一半有球體一半若全球體徑度與全蛋體

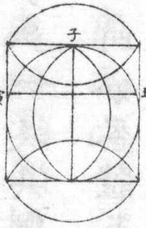
大徑度等而半鴨蛋體高度與半球體高度亦等則此半蛋體外面之積與半球體外面積同於以蛋體小徑度與球體徑度相比之比例也理同前

有大小半鴨蛋體有大小半長圓體若全體之小徑與全體之底徑等而大小半體之高度又等則此大小半鴨蛋體外面之積與大小半長圓體周圍外面之積等



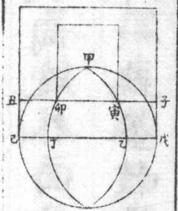
也何則試作一鴨蛋體外函以球體又外函以長圓體照甲巳高度截於寅丑為長

三分之一則全與全半與半之比亦若三分之一與三分之一之比也是小半蛋體之外面積與小半球體外面之積之比亦若函小半蛋體外面之積與函小半球



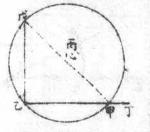
體長圓之外面積相比之比例而小半球之外面積既與函球小半長圓之外面積等則小半蛋體之外面積安得不與函蛋體小半長圓之外面積等乎

有一鴨蛋體恰函於一球體內則以鴨蛋每段之積與



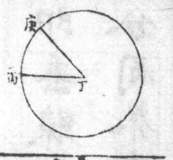
相對球體每段積之比同於以鴨蛋體小徑之所作正方面積與球體徑度所作正方面積之比也如圖甲寅夘一段與相對球體甲子丑一段俱與乙丁戊己大小徑線平行分為幾圓面比所分蛋體每圜之面積與所分相對球體之每圜面積之比同於以乙丁小徑度所作正方面積與戊己大徑度所作正方面積相比之比例如是則以甲寅夘之體積與甲子丑之體積之比同於乙丁徑之方面積與

戊己徑方面積相比之比例可知矣

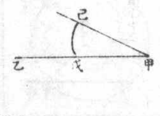


在一直線一邊立垂線法如乙丁線欲於乙邊作垂線則將規矩一股任意立於甲丁線上或丙處為心又以一股自乙處轉作一圓則於丁乙線之甲處相交自相交丁處過丙心至相對圜界作一直線此線於戊處與圜界合自戊處至乙處作一戊乙直線即垂線也

分圜界為三百六十度法則照圜之輻線度分此界為

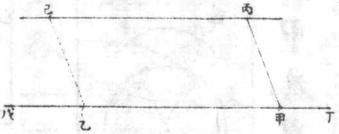


六段六段分為十二段十二段各平分為三段則為三十六段三十六段各平分為五段則為一百八十段一百八十段又各平分為二段則成三百六十段矣



一直線上欲作一三十度角則將甲乙線照分度圓之丙丁輻線度截於戊處又以規矩一股立於甲一股自戊處旋轉作一弧線乃以規矩取圓界之丙庚度將弧線截於己處自己至甲作一直線即為

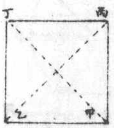
三十度角也

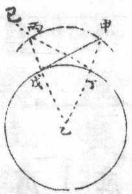


有丁戊直線欲於丙處作平行線則以規立於丙向丁戊線作弧線如甲又以規取丙甲度立於乙向丙點平行作一弧線又照甲乙度以規立於丙向第二次所作弧線處再作一弧線則二線於巳處相交自丙至乙作一直線則成平行線也

如甲乙線上作一四方形則以規矩立於甲作丙乙弧

線又立於乙作甲丁弧線又於甲乙兩頭如法立甲丙乙丁垂線於丙丁二處相切又作丙丁一直線即成為四方形矣





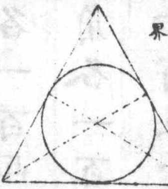
如乙圓之外有甲點欲於此點作切圓線則於甲點至圓心作一直線又以乙為心以甲為界作甲丙弧線又自甲乙線所割丁處作丁己垂線截外圓界於丙又自丙至乙作一直線又於丙乙線所割戊處作甲戊線則所求之切線也

欲知圓界內等角之角度則三角形各六十度四界形角各九十度五界形角各一百〇八度六界形角各一百二十度七界形角各一百二十八度三十四分十七秒度各六十分分各六十秒八界形角各一百三十五度九界形角各一百四十度十界形角各一百四十四度十一界形角各一百四十七度十六分二十二秒十二界形角各一百五十度

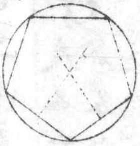
作函圓多界等度之各種形法則自圓心作幾輻線三邊

作三線四邊作四線餘倣此

函圓之界



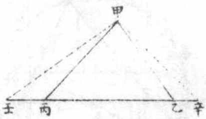
函界之圓



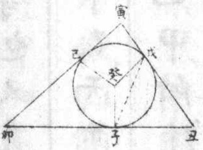
於輻線末各作切界線引至合角則成函圓多界形也

作函多界俱等各種形圓法則照平分直線法作垂線引二垂線相交處為心以角為界即成函多界之圓形也

各形作內切圓亦照分直線法以交合處為心以邊為界即是也

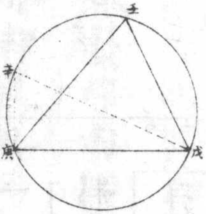


一三角形一圓形欲於此圓外作切界三角形與原有之三角形同式如圖將乙丙底線引長作辛壬線即成乙丙兩外角即於圖作與辛乙甲等之子癸戊角作與壬丙甲等之巳癸子角

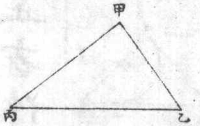


於癸巳子三輻線末作垂線引而合之即成同式形也何也蓋三角形之三角相並必與兩直角等今丑戊癸子四邊形作戊子線分為兩形此四邊形之四角相並必與四直角等就中減

戊子原作之兩直角所餘癸丑兩角相并亦與兩直角等也又直線上內外并必與二直角等則辛乙甲外角甲乙丙內角并之必為兩直角今令戊癸子角既為效辛乙甲所作則戊丑子角必等甲乙丙角可知矣準此而論則丙角必等於卯角甲角必等於寅角又可知矣

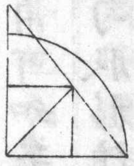


若欲於圜內作切界同式三角形如圖任意作與甲角等度之辛角將角逐線引至圜界作辛庚辛戊二線再自戊至



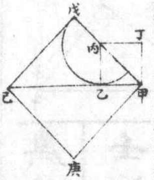
庚作一直線又於戊處做乙角作戊角引線至壬切圓界再自壬至庚作直線即成同式形何也蓋戊壬庚庚辛戊兩形同立於戊庚之弧而壬辛兩角同切於圓界則兩角為等因其為等比辛角原做甲角而為比壬等於辛則亦必等於甲也又戊角乃做乙角而為比亦必等也二角既等則庚角之等丙角可知矣

勾股形作容方則以直角為心勾末為界規作一象限



將弧線兩平分處作直線至直角分弦線為兩於弦線分處作一勾垂線又作一股垂線即成兩直角也

有甲乙直線欲將此直線為正方對角線與正方邊相較之所餘求作一正方則以甲乙線為一邊線作一小正方作甲丙小對角線又以丙為心乙為界作一圓又引甲丙線至戊作甲戊為大正方一邊線作大正方即是所求之正方也何也引甲

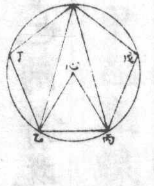


乙線至巳為對角線乙巳之線與戊巳之線等盖丙乙丙戊同為小圜之輻線則戊乙兩角為等也若於丙乙巳丙戊巳二直角内減去乙丙戊則所餘乙戊兩角又等也兩角既等則兩邊亦等而甲乙為戊巳相較之餘也

有一直線將此線為底作一兩邊等度而兩邊各一角為上一角之倍則將兩頭各作七十二度角兩線引長相交則上角必三十六度也若以一直線為兩邊等度

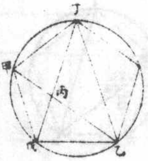
線則作一三十六度角兩邊如線之長而止又作一底線則下兩角各七十二度也

若欲以一直線為五邊形之一邊則如前於此線之兩



頭各作七十二度之兩邊等形於此形外作切角圓形再於兩長邊弧線度各平分之則成五邊形也何則丙乙弧之界角為三十六度若為心角則七十二度則丙乙弧乃得圓分之七十二度於圓分為五分之一也則於甲丙弧及甲乙弧各兩分

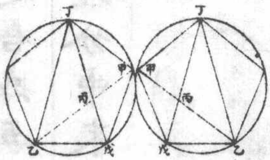
之合成五分故為五邊形也
理分中末線將全線求大小分則將全線為一邊線作



一兩邊等度兩底角與上一角各大一倍
之三角形又作五邊形乃自甲至乙作直

線截於丙處則丁戊為全丁丙為大分戊丙為
小分得相連比例也蓋丁甲乙戊兩弧線度等
則甲戊丁乙甲戊兩角度必等又戊甲乙角與
戊丁乙角共立於乙戊弧則角度亦等也再甲戊乙與

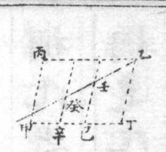
戊甲丁兩角本相等若以等角內減去甲丙戊形則所餘丁甲乙丁戊乙兩角必等矣然則丁戊乙角原係與乙丁戊角為大一倍作者則丁戊乙角比甲戊丙戊甲丙兩角為等矣其丁丙甲角因為甲丙戊之一外角與



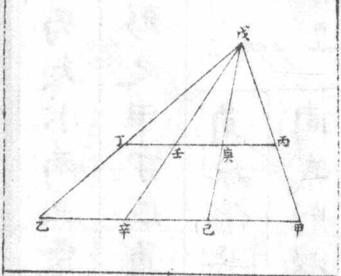
丙甲戊丙戊甲兩內角為等而丁丙甲與丁甲丙兩角為等矣因其等則丁甲丁丙兩線為等也又丁甲甲戊兩線原等其甲丁戊角必與甲乙丁角等而丁戊甲甲戊

丙大小兩三角形內小三角形之丙甲戊角與大三角形之甲丁戊角亦等又丙戊甲之戊角與丁戊甲之戊

角原係共角亦必等因大小兩三角形既等是為同式則以戊丁線與甲丁線相比之比同於以戊甲線與丙戊線相比之比例而丁甲與丁丙等戊甲與丁甲等亦與丁丙等則以丁戊全線與大分丁丙相比之比同於丁丙大分與丙戊小分相比之比例為相連比例也



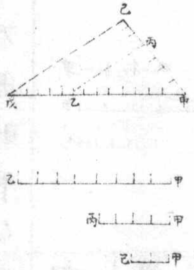
欲平分甲乙一直線為數段則於甲乙末各作一直線如丙丁將丙丁各為平分作線割甲乙線則甲乙線亦為平分也於是甲乙線與乙壬線之比同於甲丁線與丁己線相比之比例矣



又如有甲乙線於巳辛兩處分為三分又有丙丁一線亦欲分為三分為相比例三率則以甲乙線丙丁線為平行線自甲乙之末各分直線切丙丁線末至

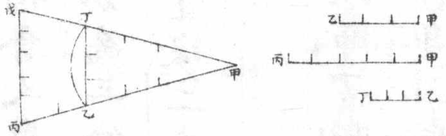
戊相會又自辛己兩處各作兩線亦合於戊則丙丁線即分為三分兩為甲乙線之相比例三率矣

有直線二率作與此相連比例三率線法如有八分



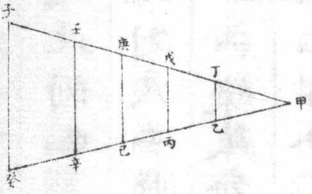
甲乙四分甲丙之二線求作一二分之相連線則將甲丙甲乙二線合成甲角又於乙末增甲丙線度為甲戊線自乙至丙作一直線又於戊作乙丙之平行線如戊己將甲丙線引至己處則所引丙己

線度即為二分之分而為甲乙甲丙相連比例第三率也甲乙甲丙乙戊丙巳為比例四率乙戊同甲丙除去不用則甲乙與甲丙之比同於甲丙與丙巳之比也



有直線三率欲作相比例第四率線再為相比例數率線則照樣作甲丙線而以甲乙線度截於乙處乃用規矩以甲為心以乙為界作一弧線而取乙丁線度一股立於乙一股交於弧線得相交之丁處遂作乙丁線又作甲戊線切丁

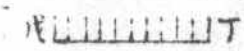
末如甲丙度長又作與乙丁平行之戊丙線其戊丙線即為第四率也蓋甲丙全與甲乙段之比同於丁乙平行線與戊丙底之比比例同也若欲作相比例數率則

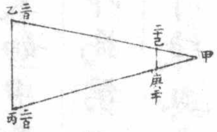


將甲戊甲丙線引長如癸子中作平行數線分為五段即得十相比例率也故以甲乙與甲丙之比同於丁乙與戊丙之比例甲丙與甲己之比同於戊丙與庚己之比例甲己與甲辛之比同於庚

已與壬辛之比例甲辛與甲癸之比同於壬辛與子癸之比例也

比例尺二股各有平分線分為二百餘分假如有丁戊一線欲分為十分則以規矩取丁戊線度立於尺各二百分之乙丙二點將尺乙丙二處照丁戊線度開



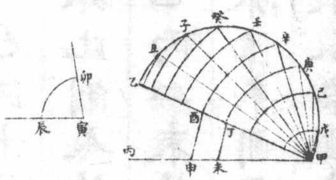


之使不移動次以規矩立於尺之第二十分之己庚二點取己庚之間度此間度即是平分丁戊線為十分之度也何也如甲乙丙三

角形為己庚平行線所截則甲己與甲乙之比同於己庚與乙丙之比例甲己二十分甲乙二百分為十分之一乙丙十分己庚一分亦為十分之一也

於比例尺作圓之諸弦線之總線法則自甲之合處至乙丙二末作二線於甲乙之丁處為心以甲乙兩末為界作半圓而分半圓界為百八十度自甲處至所分圓界各作弦線而立規矩一股於甲處又以一股於戊二十度己四十度庚六十度辛八十度壬百度癸百二十

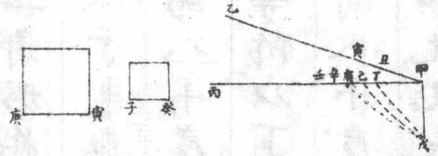
度子百四十度丑百六十度等處取弦線度各作於甲乙甲丙兩線上即為諸弦線度之總線也



其取用之法若欲知寅角之度則以規矩一股立寅處一股任意作卯辰弧線隨取寅卯輻線之度立於尺之六十度之丁未處將尺之丁未照輻線度開之勿動乃將規矩取卯辰弧線之度放於尺兩股所容中間何處恰好若恰容在八十度之申酉處則是現原有寅角八十

度之弦線也何則若作丁未申酉二直線則甲申酉之三角形為平行之丁未線所截則甲丁與甲酉之比同於丁未與申酉之比也然則甲丁為六十度弦線甲酉為八十度弦線其與底平行之丁未線既與小圓輻線等所以丁未線為小圓六十度之弦線申酉線亦為小圓八十度之弦線以此知寅角卯辰度之為八十度也如此凡大小圓之輻線度安於尺之六十度處照此開之其大小圓之諸弦線之度俱現於兩股間也以六十度通弦

即半徑故



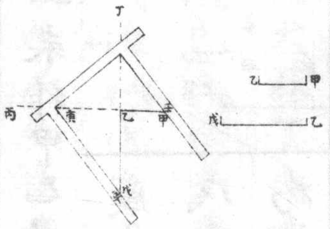
於比例作分平面線法自甲之合處至乙丙二末作直線截甲丙線於丁處照甲丁度於甲末作甲戊垂線自戊處至所截丁處作戊丁線照戊丁線度將甲丙線截於己處自戊至己作戊己線又照戊己線度將甲丙線截於庚處自戊至庚作戊庚線照此不止作至丙末又將甲乙線亦照甲丙所截截之即成分平面線

也何則於甲丁戊直角三角形之三界作三正方形甲丁甲戊上方相等者也丁戊上方兼甲丁甲戊兩方者也至甲己之界即丁戊之界是甲己上方比甲丁上方為大一倍甲庚方大甲丁方為二倍也由是推之甲庚方大甲己方一倍甲辛方又大甲庚方一倍如此則甲辛甲壬等界上方俱是大於甲丁界上方三倍四倍可知也苟有一癸子平面四方形欲大於此形二倍之四方形則以規矩取癸子界度立於丁處將尺照此度開

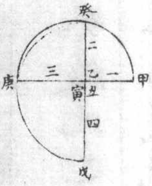
之勿動次將規矩取尺庚寅處度作方即大於癸子方二倍也盖於丁丑庚寅作二線而甲庚寅之三角為丑丁平行線所分則以甲丁比甲庚若丑丁比寅庚也甲庚既大於甲丁二倍則寅庚亦大於丑丁二倍矣

有二直線欲以此二線作中比例線法則將二直線相連為圓徑以平分處為心以兩末為界作圓形然後於二線連接處作垂線切圓界則為中比例線也

有二直線作中二率比例線如圖將二線合為直角又

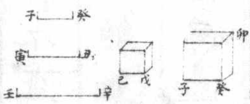


引作十字線如丁與丙取矩尺庚癸二角正跨兩引線上使矩尺壬辛股二處正切於甲戊之末遂作甲癸癸庚庚戊三線其所現乙癸乙庚則為中二率線也蓋以戊癸之丑為心戊末為界作半圓以甲庚之寅為心甲末為界作半圓則乙癸線者甲庚半圓徑上之垂線為甲乙乙庚之中率也乙庚線者戊癸半圓徑上之垂線



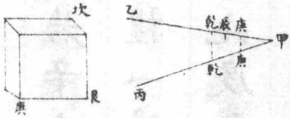
為乙戊乙癸之中率也則以甲乙線比乙癸線同於以乙癸線比乙庚線也以乙癸線比乙庚線同於以乙庚線比乙戊線也故曰中二率也

於此例尺作分體線法則於甲之合處至二股之乙丙二末作甲乙甲丙二線以規矩取丁巳方體之戊巳界度立於甲而截於甲乙線之庚處次作大於戊巳界一倍之辛壬線依前法求得中二率為癸子丑寅二線將癸子界作見方體則此



體大於丁巳見方體一倍也蓋四線為相連比例率而
戊巳與辛壬為加二倍之比例則丁巳卯子二體為同
式而以戊巳癸子各一界相比之比例為加二倍之比
例也戊巳辛壬二線之比因同於丁巳卯子二體之比
例若辛壬第四線大於戊巳一倍則卯子體亦大於丁
巳體一倍矣次將規矩取癸子界度一股立於甲一股
照此度截於甲乙線之辰處則此度所作方體大於原
丁巳體一倍矣再作比原丁巳體之戊巳界長二倍之

已未線照前求中二率之申酉戌亥二線將申酉第二率線度取於規矩一股立於甲一股截甲乙線之乾處則甲乾界度所作方體比原丁已體為二倍可知也照此不止作大於丁已體之戊已界或三四倍或五六倍之

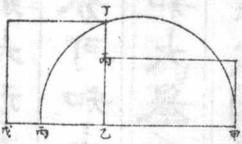


長線如前求得中二率將所求第二率度截於尺線上即戊比例尺之分體線也若有一坎庚見方體欲作一大於此二倍之體則以規矩取坎庚體之艮庚界度將

比例尺之所截庚處照此開之勿動次將比例尺第三所截乾處之開度取於規矩即是大於坎庚體二倍之形界盖甲庚線與甲乾線之比同於以庚庚與乾乾線之比例甲乾上方大於甲庚上方二倍則乾乾上方必大於庚庚上方二倍可知矣又有易分之法如一面之界度長一百釐則以此界一百釐自乘再乘則此體積共乙百萬釐大比一倍之體數為二百萬釐具二百萬釐體之一面界度為一百二十五釐又大二倍之體數

為三百萬𨫼其三百萬𨫼體之一面界度為一百四十四𨫼如此累加將外界之𨫼數書明又將𨫼度分於尺寸欲書入比例尺則將所書之數以規矩取所分之度初照一百𨫼界度截比例尺之庚處次照一百二十五𨫼界度截於辰處三照一百四十四𨫼界度截於乾處不止至末與前法所分俱為同也

有一直角四界形作為與此等積之正方形如圖將甲乙乙丙合為一直線求得中率之丁乙線作丁戊正方



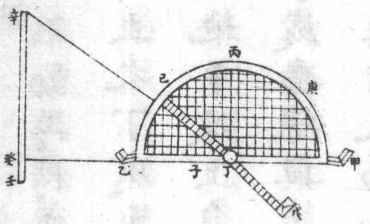
形為與甲丙等積也蓋相連比例三率其中率自乘之積與首率末率相乘之積等故丁巳上方與甲乙乘乙丙之方等積也

凡有三角形知其一角之度及角兩旁之界度或知其二角之度及一界之度或知三界度而不知角度欲求全知法如甲乙丙三角形知丙角為三十七度角兩旁丙甲界長十四丈丙乙界長十三丈則作與丙角為等之丁角亦三十七度角傍丁戊界作為十四

分長丁巳界作為十三分長自戊至巳作直線相會與甲乙丙大形同式將戊角之度取於規矩安於分度圜界看容多少便知戊角度若干若容七十度則大形甲角之度亦為七十度矣又小形巳角可知為七十三度則大形乙角亦七十三度矣再因小形戊巳界分作九分可知大形甲乙界之為九丈矣餘時如此蓋即小以知大舉一以例餘也

作不用比㫜測高深廣遠各種三角形之儀器法先作

甲乙丙半圓界分為百八十度將此半圓之丁甲丁乙丁丙三半徑線每每分為一百分各作直線縱橫相交

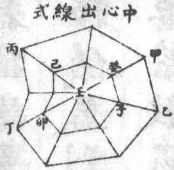


會如碁局再於徑線之兩末作兩立表安住不動又於丁心處如圖作一遊表如戊已將遊表亦如半徑度分為二百分再於此儀器後面掛一墜線為庚即可挼線而測矣如欲測旗杆之高則將儀器之丁心安於所立之處定准墜線

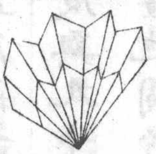
以甲乙經線兩末之立表與旗杆癸處對準為地平穩住不動再將戊已遊表與旗杆尖之辛處相對準次量所立之丁處至旗杆癸處得若干若得四十丈則看儀器地平線上自丁心起用四十分當四十丈如子再看子處垂線與上遊表相交處得若干若得三十分如丑則旗杆之高為三十丈也若欲測丁辛弦線數則看自丁至丑相交處得若干分若得五十分則相當數為五十丈也若欲測丁癸辛三角形之各角度則癸角既為

直角再看圓界自乙至遊表相交處得若干度為丁角
度與九十度相減所餘者為辛角度也
畫地圖者選戊已兩處可以盡見諸形先於戊處立儀
器指諸要緊數處看所成之數角各得幾何度記之次
移儀器到已處將不動表與已對准為地平亦指於諸
要緊數處看所成之數角亦各幾何度亦記之然後取
一幅紙任意作一線為戊已相當線將前所測角度倣
而作之一一與前相當成數三角形其中邊所有之形

一一畫上即成圖也若將大圖蹲入小圖則將大圖分
為數正方形小圖亦分為數正方形與大圖相當將大



中心出線式


一角發線式

圖中某方形内所函之山河城渠村林依蹲
而入於小圖即與原大圖同也 凡有多界
形倣此或為大或為小之同式形方如甲乙
丙丁一無法形欲減各界之半作同式形則
任意自一壬處作諸對角線又任意將甲乙
界之度取其半為甲乙平行線作於甲壬乙

壬二線之間恰容癸子處照此於對角線間作諸界之平行線則所成癸子卯巳之形即是原有形每界減一半之同式小形也若欲作大於原有之形則將對角線任意引長而照前任意加為界度與原界作平行線即成所欲作之大形也或自一角發線亦可

凡兩數相乘者平行方數也如二三相乘為六是也三數連乘者立方數也如二三乘得六又乘以四則為四六二十四也以上為幾何原本

凡一與三之比同於四與十二之比一與五之比同於十二與六十之比二之比三亦猶四之比六也六之比九也蓋凡可以倍計者皆可為比例二其二而為四二其三而為六三其二而為六三其三而為九故三與九之比同於六與三十六之比按末句有誤數

凡可以度盡大數之衆小數相合於此加數根之一所得之總數與所度之大數等也如大數有六可以小數二三度盡若加數根一則亦六也

大數二十八可以小數二四七十四度盡若將二四七十四與數根之一并之則亦二十八也

有一比例數求與此比例相等之相連比例數法如三與五之比例求與此比例相等之相連比例幾將三自因得九又三與五因得十五又五自因得二十五則此九與十五及二十五之三數為三與五比例相等之相連比例三數也三與五之比同於九與十五之比例九與十五之比同於十五與二十五之比為相連比例也

又將三因九因十五因二十五得二十七及四十五與七十五又將五因二十五得一百二十五此所得二十七四十五七十五一百二十五之四數為三與五比例相等之相連比例四數同於三與五之比例也

凡一數除衆數所除得數之比同於原衆數之比也如以三歸十二而得四以三歸十五而得五則四與五之比若十二與十五之比也而四與十二之比同於五與十五之比也

有同相比例四數其首末相乘所得數與中兩數相乘之得數等也有相等兩方數則此縱與彼縱之比同於以彼橫與此橫之比也如四六相乘與三八相乘皆為二十四則以此之六比彼之八以彼之三比此之四比例為等也

凡以兩數除一數而盡此得之兩數相比若所用以歸除兩數之比也如四除三十六而得九六除三十六而得六則九六兩數之比若六四之比也

凡有平加衆數此衆數內之凡一數若作為原數將此數以上有幾位平加幾次相差之數與首數並之得數為與原數等也如上所列之數若將十五作原數此十五以上有四位而衆數原平加之數係三若將三之四次數而與首數三相並得十五與所作原數之數等也由此推之若於平加衆數內凡減一位將所餘之位數與原平加之數相乘得數與衆小數內至小數相並與衆數內至大數為等也假如上六數內減一數餘五數

将此五與平加之三相因得十五與至小數三相並得

三　六　九　二　五　八
　　　　　　一　一　一

十八為與至大數相等矣

凡平加衆數若将此數內之兩數相並所得數與兩傍相等隔位之他兩數相並得數等也如十二與九為廿一十五與六亦廿一十八與三亦廿一也盖升愈升降愈降合降與升則但見平也

又将此內凡一數之兩傍數相加折半即與中間數等也如十五加九為廿四折半斯得十二矣十二加六為

十八折半斯得九矣十八加十二為三十折半斯得十五矣其理則前節可推也

又此平加衆數若將首末兩數相加以所有幾位之位數相乘得數折半則與原有衆數之總數等也如十八加三為廿一以位數六乘之得乙百二十六折半得六十三與衆數之總數等也盖照前節推六數相加合成三十三今以六乘故必折半也若五位或七位之奇數理亦相同

凡平加之位若是奇數則以中一位之數與位數幾相乘即得衆數之總數也如所列以中一位一〇乘位數五得五十即為衆數之總數也盖首尾相加乘位數折半而得總數今中位乃首尾相加之一半故以乘位數

四七〇三六
一一一
總數五〇

即為總數也

凡有自一每位平加二比例衆奇數之總與位數自乘之得數等也如所列總數得四十九以位數七七自乘亦四十九也若一三五七九五位總數二十五以位數

五自乘亦二十五也理如前節以中一位數乘位數同

蓋七位則七為中五位則五為中故也亦如首乘相並

一 三 五 七 九 一一 一三

折半乘位數之理也

凡有自二每位平加二之比例衆偶數以位數加一以

與位數相乘即與衆數之總數等也如所列位數是七

加一為八以與位數七相乘為五十六即總數之數也

亦即首末相加折半乘中一位之理也若位數是偶則

二 四 六 八 一〇 一二 一四

以位數自乘可得衆數之總數也

凡平加比例之衆數如所列以小數一與大數十一相減餘十以平加數根二除之得五再加入小數一得六

一三五七九一一

即原有之位數也

凡平加比例知小數及位數與平加數根而求大數法

如所列知小數三知位數六知平加數根四將位數六減一餘五與平加數四相因得二十加十入小數三即大數為廿三也

若欲知小數則亦以位數六減一餘五與平加數四相

因得二十以與大數十三相減餘三則此三即為至小數也

若知小數及位數及平加數根而求知總數則先察得大數為二十三加入小數三為二十六以與位數六相乘得一百五十六折半得七十八為所求之總數也

若知大數及平加數根及位數而求知總數法亦如之

若知大小兩數及位數求平加數根法則將三與廿三相減餘二十又將位數六減一為五除之得四則此四

為平加數之根也
若知大小兩數及平加數根而求位數法則將大數與
小數相減餘二十以平加數四除之得五加一為六即
是所求之位數也
若知平加之數根與位數及衆位之總數而求至大至
小之兩數法則將總數七十八以位數六除之得十三
為首末兩數相加之一半又將十三加倍作廿六為首
末兩數相加之總數乃將位數六減一餘五與平加數

根四相乘得二十為至大數又將前所得之二十六與此二十相減餘六為小數之加一倍數此數折半為三是所求之至小數也將三加入二十得二十三為所求之至大數也此法之理備於前矣

凡不等兩數求一數可以度盡之法如二十與廿四相減餘四又將四與二十相減餘十六以十六與四相減餘八以四減八則無餘則此四為度盡兩數之數也謂之轉減亦謂之紐數

三邊無角不可以相比例則必先求中長線以為正弦然後角可求也然中長線之數為正弦而僅有半徑無角無餘弦則其數又不可知故以勾弦求股之術求之除一邊為弦則總較之術所求者勾也盖兩弦之總之較既具於上兩邊矣所求者欲破下邊以為兩勾而得其較耳兩弦之總乘弦之較以兩勾之總除之必得較矣鈍角則以較除而得總以勾較之餘取其半以益較必得大勾矣存其半必得小勾矣如此則中長線之數可明而勾

股弦相求之術可施既得勾股之數則用以與半徑正餘弦相比例而角可得矣

一角有角無對邊數兩邊有邊無對角數則皆不可以互求矣然此兩邊所對之角乃與得角合成半周度是此角之外之弧度即兩角之度也但未知兩角之大小何如剖分耳惟外角有平行之對角與兩角之一角等度則雖其數未可知而其形可剖欲知其數者必以兩角之較求之欲知兩角之較者又必以兩邊之較例之

兩邊有總有較半外角又有切線則可因是以求半較角矣以半較角減半外角則小邊對角之度得矣其餘一角則可以三隅反矣

三較連乘者求三角容圓之半徑也○三較者三邊與半總相較之餘也三較連乘所得之數乃容員半徑自乘又乘半總之數也故以三較連乘為中率而以半總除之則得容員半徑之積數矣以積數開方則得半徑矣

兩數所以相合者何也蓋引伸三較於一邊則半

總也從兩邊之角直剖為長線於第一較處橫斷作小勾即容員半徑也至末總斷作大勾而以容員半徑乘之即二較三較相乘之數也小勾自乘比乘大勾如第一較與半總之比例則二較相乘以小勾自乘乘之亦如第一較與半總之比例

闕

錢百文買果百顆　梨一顆錢三文　柑一顆錢二文

橄欖七顆錢一文　算得梨四顆錢十二文　柑四十

顆錢八十文　橄欖五十六顆錢八文按此條前後皆有闕文

莊氏算學卷二