

Einführung in die mathematische Logik

Vorlesung 25

Weitere Axiomenschemata

DEFINITION 25.1. Das modallogische Axiomenschema

$$\Box\alpha \rightarrow \alpha$$

nennt man *Reflexivitätsaxiom*.

Durch das Reflexivitätsaxiom wird die eigene Welt bei Möglichkeitsüberlegungen mitberücksichtigt.

DEFINITION 25.2. Das modallogische Axiomenschema

$$\alpha \rightarrow \Box\alpha$$

nennt man *Autismusaxiom*.

Durch das Autismusaxiom werden andere Welten bei Möglichkeitsüberlegungen nicht berücksichtigt, eventuell noch nicht einmal die eigene Welt. Wenn das Leerheitsaxiom gilt, so auch das Autismusaxiom.

DEFINITION 25.3. Das modallogische Axiomenschema

$$\alpha \leftrightarrow \Box\alpha$$

nennt man *Fatalismusaxiom*.

In diesem Fall gilt auch

$$\alpha \leftrightarrow \Diamond\alpha$$

und damit auch

$$\Box\alpha \leftrightarrow \Diamond\alpha.$$

Es gilt als auch das Ideologieaxiom. Im Fatalismus wird die Realität zur Ideologie gemacht.

Die folgenden Axiomenschemata sind sinnvoller, die Bezeichnungen werden sich später erklären, wenn wir die semantische Interpretation zur Verfügung haben.

DEFINITION 25.4. Das modallogische Axiomenschema

$$\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$$

nennt man *Symmetrieaxiom*.

DEFINITION 25.5. Das modallogische Axiomenschema

$$\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$$

nennt man *Transitivitätsaxiom*.

DEFINITION 25.6. Das modallogische Axiomenschema

$$\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$$

nennt man *euklidisches Axiom* (oder Axiom 5).

LEMMA 25.7. *In einem modallogischen K-System, in dem das Symmetrieaxiom und das euklidische Axiom gelten, gilt auch das Transitivitätsaxiom.*

Beweis. Es sei S das in Frage stehende System. Eine spezielle Instanz des Symmetrieaxioms liefert

$$S \vdash \Box\alpha \rightarrow \Box\Diamond\Box\alpha.$$

Eine Umformulierung des euklidischen Axioms ist

$$S \vdash \Diamond\Box\alpha \rightarrow \Box\alpha.$$

Mit Lemma 24.5 (1) folgt daraus

$$S \vdash \Box\Diamond\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$$

und insgesamt mit dem Kettenschluss

$$S \vdash \Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha.$$

□

Paradoxe Axiome

Einen modallogischen Ausdruck nennen wir *paradox*, wenn er, wenn man alle darin auftretenden \Box (und somit auch alle \Diamond) weglässt, ein aussagenlogischer Widerspruch ergibt. Ein modallogisches Axiomenschema heißt paradox, wenn es davon eine paradoxe Instanz gibt.

DEFINITION 25.8. Das modallogische Axiomenschema

$$\Box\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$$

nennt man *Antiaxiom*.

Wenn das Antiaxiom gilt, so ist auch

$$\Diamond\alpha \leftrightarrow \neg\Box\neg\alpha \leftrightarrow \neg\neg\neg\alpha \leftrightarrow \neg\alpha \leftrightarrow \Box\alpha,$$

das Antiaxiom ist also ideologisch. In einer K -Modallogik führt das Antiaxiom zu einem Widerspruch, da ja dann zu einer aussagenlogischen Tautologie α wegen der Nezegierungsregel auch $\Box\alpha$ und somit der Widerspruch $\neg\alpha$ gilt. Wenn man dagegen das Antiaxiom auf Aussagenvariablen beschränkt, also

$$\Box p \leftrightarrow \neg p$$

betrachtet, so ergibt sich ein sinnvolles K -System.

DEFINITION 25.9. Das modallogische Axiomenschema

$$\Box(\Box\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \Box\alpha$$

nennt man *Löb-Axiom*.

BEMERKUNG 25.10. Für das Ableitungsprädikat

$$\alpha(y) = \exists x(\delta_\Gamma(x, y))$$

zu einer die Peano-Arithmetik umfassenden entscheidbaren Satzmenge Γ gilt neben den in Bemerkung 23.7 angeführten Eigenschaften auch der Satz von Löb, nämlich

$$\alpha(GN(\alpha(GN(s)) \rightarrow s)) \rightarrow \alpha(GN(s)).$$

Wenn man

$$\Box s = \alpha(GN(s))$$

setzt, so kann man dies als

$$\Box(\Box s \rightarrow s) \rightarrow \Box s$$

schreiben, es liegt also genau das Löb-Axiom vor (daher der Name des Axioms). Unter der modallogischen *Beweisbarkeitslogik* versteht man die K -Modallogik, die durch das Löb-Axiom gegeben ist (das Transitivitätsaxiom lässt sich daraus ableiten). Es handelt sich um eine paradoxe Modallogik, in der man die Unvollständigkeit nachbilden kann.

Es sei $\perp = p \wedge \neg p$ (gesprochen Falsum) eine Abkürzung für einen Widerspruch. Im Kontext der Beweisbarkeitslogik bedeutet dann $\neg\Box\perp$ die Nichtableitbarkeit eines Widerspruchs, also die Widerspruchsfreiheit des Systems. Aus dem Löb-Axiom (also der K -Modallogik L , die durch das Löbaxiom gegeben ist) lässt sich ableiten, dass diese Widerspruchsfreiheit ein Fixpunkt der Nichtableitbarkeit ist, d.h. es gilt

$$L \vdash \neg\Box\neg\Box\perp \leftrightarrow \neg\Box\perp,$$

siehe Aufgabe 25.6. Dies bedeutet insbesondere, dass weder $\Box\perp$ noch $\neg\Box\perp$ aus L ableitbar ist (die Widerspruchsfreiheit des Systems ergibt sich aus Satz 26.10 (6)). Insbesondere ist dieses Ableitungssystem unvollständig, was dem ersten Gödelschen Fixpunktsatz entspricht. Darüber hinaus ist die letzte Unableitbarkeit gerade die Aussage des zweiten Gödelschen Fixpunktsatzes, den man also so modallogisch nachbilden kann (die Hauptarbeit liegt aber darin, zu zeigen, dass das arithmetische Ableitungsprädikat das Löb-Axiom erfüllt).

Einige klassische modallogische Systeme

DEFINITION 25.11. Das modallogische K -System, in dem das Möglichkeitsaxiom gilt, heißt *D-System*.

DEFINITION 25.12. Das modallogische K -System, in dem das Reflexionsaxiom gilt, heißt T -System.

LEMMA 25.13. *Im modallogischen T -System gelten die folgenden Aussagen. Es ist*

$$T \vdash \alpha \rightarrow \Diamond \alpha .$$

Insbesondere ist

$$T \vdash \Box \alpha \rightarrow \Diamond \alpha$$

und damit ist ein T -System auch ein D -System.

Beweis. Die Kontraposition des Reflexivitätsaxioms ergibt direkt

$$T \vdash \neg \alpha \rightarrow \neg \Box \alpha ,$$

also

$$T \vdash \neg \alpha \rightarrow \Diamond \neg \alpha .$$

Da dies für alle α gilt, gilt nach Lemma 24.5 (5) auch

$$T \vdash \alpha \rightarrow \Diamond \alpha .$$

Der Zusatz folgt aus

$$T \vdash \Box \alpha \rightarrow \alpha \text{ und } T \vdash \alpha \rightarrow \Diamond \alpha .$$

□

DEFINITION 25.14. Das modallogische K -System, in dem das Reflexionsaxiom und das Symmetrieaxiom gilt, heißt B -System.

DEFINITION 25.15. Das modallogische K -System, in dem das Reflexionsaxiom und das Transitivitätsaxiom gilt, heißt $S4$ -System.

DEFINITION 25.16. Das modallogische K -System, in dem das Reflexionsaxiom, das Symmetrieaxiom und das Transitivitätsaxiom gilt, heißt $S5$ -System.

LEMMA 25.17. *Für ein modallogisches K -System S sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1) *Es gilt das Reflexivitätsaxiom und das euklidische Axiom*
- (2) *Es gilt das Möglichkeitsaxiom, das Symmetrieaxiom und das Transitivitätsaxiom*
- (3) *Es handelt sich um das $S5$ -System.*

Beweis. Aus (1) folgt (2). Es sei Γ_1 das modallogische System, das durch die Gültigkeit von Reflexivitätsaxiom und euklidischem Axiom festgelegt ist. Nach Lemma 25.13 gilt mit dem Reflexivitätsaxiom auch das Möglichkeitsaxiom. Durch das Reflexivitätsaxiom gilt

$$\Gamma_1 \vdash \alpha \rightarrow \Diamond \alpha$$

und mit dem euklidischen Axiom gilt

$$\Gamma_1 \vdash \Diamond \alpha \rightarrow \Box \Diamond \alpha ,$$

was mit dem Kettenschluss

$$\Gamma_1 \vdash \alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha,$$

also die Symmetrie ergibt. Aus dem euklidischen Axiom und der Symmetrie ergibt sich nach Lemma 25.7 auch die Transitivität.

Aus (2) folgt (3). Sei Γ_2 die Vereinigung aus dem Möglichkeitsaxiom, dem Symmetrieaxiom und dem Transitivitätsaxiom. Das Symmetrieaxiom ergibt

$$\Gamma_2 \vdash \alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha,$$

das Möglichkeitsaxiom liefert

$$\Gamma_2 \vdash \Box\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\Diamond\alpha$$

und das Transitivitätsaxiom liefert

$$\Gamma_2 \vdash \Diamond\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\alpha.$$

Der Kettenschluss darauf angewendet liefert

$$\Gamma_2 \vdash \alpha \rightarrow \Diamond\alpha,$$

also das Reflexivitätsaxiom.

Aus (3) folgt (1). Aus dem Transitivitätsaxiom

$$S_5 \vdash \Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$$

ergibt sich mit Lemma 24.5 (2)

$$S_5 \vdash \Diamond\Box\alpha \rightarrow \Diamond\Box\Box\alpha.$$

Aufgrund des Symmetrieaxioms gilt

$$S_5 \vdash \Diamond\Box\beta \rightarrow \beta.$$

Angewendet auf $\beta = \Box\alpha$ ergibt dies

$$S_5 \vdash \Diamond\Box\alpha \rightarrow \Box\alpha.$$

Dies ist gleichwertig zum euklidischen Axiom. \square

LEMMA 25.18. *In einem modallogischen K-System, in dem das Löb-Axiom gilt, gilt auch das Transitivitätsaxiom.*

Beweis. Wir wenden das Löb-Axiom auf den Ausdruck $\Box\alpha \wedge \alpha$ an und erhalten (L steht für dieses modallogische System)

$$L \vdash \Box(\Box(\Box\alpha \wedge \alpha) \rightarrow (\Box\alpha \wedge \alpha)) \rightarrow \Box(\Box\alpha \wedge \alpha).$$

Wegen Lemma 24.5 (3) ist

$$\vdash \Box(\Box\alpha \wedge \alpha) \rightarrow \Box\Box\alpha$$

und

$$\vdash \Box(\Box\alpha \wedge \alpha) \rightarrow \Box\alpha.$$

Wegen der zuletzt angeführten Ableitung erhält man

$$\vdash \alpha \rightarrow (\Box(\Box\alpha \wedge \alpha) \rightarrow (\Box\alpha \wedge \alpha))$$

und daraus mit Lemma 24.5 (1) auch

$$\vdash \Box\alpha \rightarrow \Box((\Box(\Box\alpha \wedge \alpha) \rightarrow (\Box\alpha \wedge \alpha))).$$

Ein zweifacher Kettenschluss liefert

$$L \vdash \Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha.$$

□

Gerichtete Graphen

Für die Modelltheorie der Modallogik benötigen wir gerichtete Graphen. Dies ist mathematisch betrachtet einfach eine zweistellige Relation auf einer Menge.

DEFINITION 25.19. Ein *gerichteter Graph* ist eine Menge M versehen mit einer fixierten Relation $R \subseteq M \times M$.

Die Menge der Punkte $x \in M$ nennt man auch die Knoten des Graphen und man sagt, dass ein Pfeil von x nach y geht, wenn $(x, y) \in R$ ist. In dieser Weise werden gerichtete Graphen veranschaulicht. Einen Pfeil von einem Knoten zu sich selbst heißt *Schleife*.

Im Kontext von Ordnungsrelationen und Äquivalenzrelationen haben wir schon die Eigenschaften reflexiv, symmetrisch, transitiv kennengelernt. Einen symmetrischen gerichteten Graphen nennt man auch einen *ungerichteten Graphen*. In diesem Fall nennt man einen verbindenden Pfeil eine Kante. Wir besprechen einige weitere Begrifflichkeiten und Eigenschaften.

DEFINITION 25.20. Es sei (M, R) ein gerichteter Graph. Zu einer Teilmenge $T \subseteq M$ nennt man

$$\text{Vorg}(T) = \{x \in M \mid \text{es gibt } y \in T \text{ mit } xRy\}$$

die *Vorgängermenge* zu T .

DEFINITION 25.21. Es sei (M, R) ein gerichteter Graph. Zu einer Teilmenge $T \subseteq M$ nennt man

$$\text{Nachf}(T) = \{z \in M \mid \text{es gibt } y \in T \text{ mit } yRz\}$$

die *Nachfolgermenge* zu T .

Ein Knoten ohne Nachfolger, also ohne abgehenden Pfeil (also auch keine Schleife), heißt *Sackgasse*.

DEFINITION 25.22. Eine Relation auf einer Menge M heißt *euklidisch*, wenn zu $x, y, z \in M$ mit xRy und xRz stets yRz gilt.