LEZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Dott. GUIDO FUBINI

Professore ordinario del R. Politecnico di Torino

LEZIONI

DI

ANALISI MATEMATICA

Quarta edizione interamente rifusa.

S. T. E. N.

SOCIETÀ TIPOGRAFICO-EDITRICE NAZIONALE

(già: Roux e Viarengo - Marcello Capra - Angelo Panizza)

Torino, 1920.

PRINTED IN ITALY

(3204)

PREFAZIONE

Ecco in questo libro riassunte le lezioni che svolgo al Politecnico di Torino. Nel redigerlo sono partito dalla convinzione che l'insegnamento teorico conserverà l'importanza, che merita, soltanto quando lo si sfrondi di tutto quanto è formale, oppure d'importanza soltanto teorica. La tecnica ha bisogno di concetti matematici, ma non ha per niente bisogno, per es., della concezione più generale degli enti, che possiamo chiamare *punto* o *funzione*, o della teoria delle funzioni a derivata non integrabile.

Ridurre perciò le teorie esposte alla parte essenziale; scegliere le dimostrazioni più facili; dimenticare, per quanto possibile, ogni considerazione di indole prevalentemente critica; dare il massimo sviluppo ai procedimenti induttivi, o di intuizione *a priori;* ricordare che il libro è destinato a giovani, per cui la matematica è mezzo, e non fine; illustrare pertanto le varie teorie con esempi suggeriti anche dalla fisica e dalla meccanica: ecco lo scopo prefissomi: Il lettore dirà se io l'ho raggiunto!

Ho ridotto in questa ultima edizione il numero degli esempi ed esercizi, perchè essi meritavano uno sviluppo maggiore; ad essi il Prof. Vivanti ed io abbiamo dedicato una pubblicazione a parte. L'ordine dei capitoli mi è stato suggerito dalle esigenze del Corso di Meccanica, che richiede svolti al più presto i principii del calcolo integrale, e possibilmente della teoria delle equazioni differenziali. Ma senza alcun danno per la facile lettura dell'opera si potrebbe mutare profondamente l'ordine dei varii Capitoli: Così, per es., si potrebbero invertire i Capitoli 12 e 13, oppure i Capitoli 13, 14, oppure i Capitoli 18, 19, e così via.

Nelle successive edizioni il libro è stato quasi completamente rifatto. Ho continuato l'opera di semplificare le dimostrazioni in quasi tutti i Capitoli del libro, di scegliere esempi semplici fuori dall'ambito delle matematiche pure, di illustrare quelle che io chiamo: *locuzioni abbreviate*, così comode nelle scienze applicate, che ricorrono al Calcolo. Ho ridotto ancora più i Capitoli dedicati alle equazioni algebriche, cercando di fondere, per quanto possibile, le teorie algebriche con le infinitesimali. Nelle ultime due edizioni, oltre a molti cambiamenti particolari, ho rifatto la trattazione della teoria dei determinanti; ho portato nell'Appendice il paragrafo sulla decomposizione delle frazioni razionali, perchè in questo libro a tale teoria non si ricorre mai, neanche per la ricerca degli integrali indefiniti.

Per quanto riluttante a introdurre nella scuola idee che non siano di primissima importanza, mi sono occupato dei limiti superiore ed inferiore di una classe di numeri, della teoria generale delle serie di potenze, e, ciò che può costituire una novità per un libro elementare, delle funzioni addittive di insieme. Spero però che i metodi seguìti, nuovi per la massima parte, sieno trovati così semplici e spontanei da rendere questi nuovi capitoli utili a una più facile lettura dell'opera complessiva e all'esatta intelligenza dei principii fondamentali del calcolo.

In questa 4ª edizione sono state intercalate in carattere piccolo molte osservazioni di indole critica; cosicchè la differenza fra gli argomenti svolti per lunga tradizione nei nostri primi biennii universitari e quelli di cui qui ci occupiamo sono soltanto i eguenti:

a) minore estensione data alla teoria delle equazioni algebriche (a cui l'esperienza dell'insegnamento mi ha provato preferibile sostituire lunghe esercitazioni di matematica elementare);

b) quasi nessun sviluppo alla definizione di integrali di Riemann (che oramai, dopo gli studii del Lebesgue, ha soltanto un valore storico anche per il matematico puro);

c) minore sviluppo alla teoria delle equazioni differenziali, che nei corsi di calcolo assume troppo sovente l'aspetto di un lungo elenco di artifici.

Possa pertanto questo volume essere ancora giudicato non difficile dai giovani cui è destinato; ed essere trovato accettabile anche da un teorico puro!

CAPITOLO I.

NUMERI REALI

§ 1. — Numeri razionali positivi.

L'aritmetica dopo i numeri interi positivi [il cui studio risolve completamente il problema di *contare*] considera i numeri fratti positivi, che insieme ai numeri interi risolvono in qualche caso il problema della misura (*). Se noi, per fissare le idee ci riferiamo ai segmenti, e ne scegliamo uno determinato M come unità di misura (potremo dire come *metro*) noi diciamo che un altro segmento N è uguale ad $\frac{n}{m}$ di M, o anche che N ha per *misura* $\frac{n}{m}$, o anche che il rapporto di N ad M vale $\frac{n}{m}$

(*) Nelle scienze più svariate si presenta il problema della *misura* delle grandezze di una certa classe G. Affinchè tale problema abbia senso, è necessario che, date due grandezze a, b distinte o no di G, si possa dire sempre quando $a > b$, oppure $a = b$, oppure $a < b$. E questi simboli $>, =, <$ dovranno essere definiti in modo che $a = a$; che, se $a > b$, sia $b < a$; che, se $a = b$, $b = c$ sia $a = c$, ecc.

Date due o più grandezze distinte o no di G, si deve poter definire la loro somma in guisa che $a + b = b + a$; $a + (b + c) = a + b + c$. Si potranno così definire i multipli di una qualsiasi grandezza a; e dovrà valere il postulato di Archimede che, se b è un'altra qualsiasi grandezza di G, esista un multiplo di a che sia maggiore di b. E dovranno anche esistere tutti i sottomultipli di una grandezza qualsiasi di G. La somma di più grandezze di G dovrà essere non minore di ogni suo addendo, ecc. ecc.

Se una classe G di grandezze gode delle precedenti proprietà, per essa si potrà porre il problema della *misura*. Tali, ad esempio, sono la classe delle lunghezze dei segmenti, la classe delle grandezze degli angoli; e queste classi sono specialmente semplici, perchè l'uguaglianza delle lunghezze di due segmenti, o dell'ampiezza di due angoli si riduce alla sovrapponibilità di tali segmenti o di tali angoli. Più complesse sono altre classi di grandezze (aree delle figure piane, volumi o pesi dei (dove con n, m sono indicati interi positivi), se N è la somma di n segmentini uguali δ, ciascuno dei quali è la m^{esima} parte di M (cioè M è la somma di m segmenti uguali a δ). E la definizione di uguaglianza di due numeri fratti (si pone $\frac{n}{m} = \frac{p}{q}$ se $nq = mp$) è scelta appunto in modo tale che, se un segmento N ha per misura tanto la frazione $\frac{m}{n}$, quanto l'altra $\frac{p}{q}$, allora le due frazioni siano uguali (*).

A tutti è nota poi quale importanza abbia (specialmente per i calcoli numerici) la trasformazione di una frazione in un numero decimale. Quando noi scriviamo, p. es.

$$\frac{1}{5} = 0{,}2\,; \qquad \frac{1}{50} = 0{,}02\,; \qquad \frac{6}{5} = 1{,}2$$

noi intendiamo soltanto di scrivere in altro modo le uguaglianze:

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10}\,; \qquad \frac{1}{50} = \frac{2}{100}\,; \qquad \frac{6}{5} = \frac{12}{10}\,.$$

In altre parole noi abbiamo trasformato le frazioni $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{6}{5}$ in altre, il cui denominatore è il numero 10, od una delle sue potenze $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, ecc.

---

corpi solidi, ecc.). Se noi scegliamo, per fissar le idee, il problema della misura delle lunghezze dei segmenti come problema iniziale, dobbiamo in sostanza definire dei simboli (*numeri*) e definire le proprietà di questi simboli in guisa che a segmenti di ugual lunghezza corrisponda lo stesso numero, che a ogni numero corrisponda un segmento, che a segmento di lunghezza maggiore corrisponda numero maggiore, che a un segmento α somma di due segmenti β, γ corrisponda una misura somma delle misure delle lunghezze di β e γ, ecc. Il problema analogo per ogni altra classe di grandezze si propone di definire una corrispondenza, dotata di proprietà analoghe, tra le grandezze considerate, e i numeri precedentemente definiti. E' noto che tale problema della misura ammette (se risolubile) infinite soluzioni: una delle quali si definisce fissando la grandezza *unitaria* (unità di misura), cioè la grandezza a cui si farà corrispondere il numero 1.

Per certe grandezze *orientate* (debiti e crediti, altezza sopra o sotto il livello del mare, ecc.) si pone pure un analogo problema della misura: il quale richiede però la considerazione dei numeri negativi.

(*) Si dice poi che $\frac{n}{m} < \frac{p}{q}$ e $\frac{p}{q} > \frac{n}{m}$ se $nq < mp$. In tal caso il segmento che ha $\frac{n}{m}$ per misura è minore del segmento, la cui misura vale $\frac{p}{q}$.

Sarà però qui opportuno (per analogia con quanto segue) scrivere ogni numero decimale limitato come un numero decimale illimitato (con infinite cifre decimali) scrivendo:

$$\frac{1}{5} = 0{,}2000000\ldots; \quad \frac{1}{50} = 0{,}020000\ldots; \quad \frac{6}{5} = 1{,}200000\ldots;$$

ciò che, per note convenzioni, non muta il significato delle precedenti uguaglianze.

Di significato assai più riposto sono le uguaglianze tra un numero fratto generico, e il corrispondente numero decimale (che è o *periodico*, o *periodico misto*), quali, ad es., le uguaglianze:

$$\frac{4}{3} = 1{,}3333\ldots\ldots$$

$$\frac{31}{30} = 1{,}0333\ldots\ldots$$

che possiamo considerare insieme alle analoghe:

$$\frac{9}{9} = 1 = 0{,}9999\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{5} = 0{,}2 = 0{,}19999\ldots\ldots$$

Per es. la $\frac{4}{3} = 1{,}333\ldots\ldots$ ci dice che il segmento N, la cui misura è $\frac{4}{3}$, è compreso:

α) tra i segmenti aventi per misura 1 o 2;
β) tra i segmenti aventi per misura 1,3 e $1{,}3 + 0{,}1 = 1{,}4$;
γ) tra i segmenti aventi per misura 1,33 e

$$1{,}33 + 0{,}01 = 1{,}34, \text{ ecc.}$$

In altre parole il segmento N di misura $\frac{4}{3}$ contiene una volta, e non due volte il segmento M.

Se da N sottraggo M il massimo numero di volte possibile (una volta), nel segmento residuo N_1 la decima parte di M è contenuta tre volte e non quattro volte. Se da N_1 sottraggo il massimo numero di volte possibile (tre volte) la decima parte di M, nel segmento residuo N_2 la centesima parte di M è contenuta tre volte e non quattro volte, e così via.

In altre parole la $\frac{4}{3} = 1{,}333.\ldots$ equivale alle seguenti disuguaglianze

$$\left.\begin{aligned} 1 &< \frac{4}{3} < 2 \\ 1{,}3 &< \frac{4}{3} < 1{,}3 + \frac{1}{10} = 1{,}4 \\ 1{,}33 &< \frac{4}{3} < 1{,}33 + \frac{1}{100} = 1{,}34 \\ 1{,}333 &< \frac{4}{3} < 1{,}333 + \frac{1}{1000} = 1{,}334, \text{ ecc.} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Osservazioni perfettamente analoghe valgono per la

$$\frac{31}{30} = 1{,}0333\ldots, \text{ ecc.}$$

Anzi queste osservazioni ci permettono di dare un metodo per sviluppare in numero decimale un numero fratto generico $\frac{p}{q}$. Se N è, p. es., il segmento, di cui $\frac{p}{q}$ è la misura, si sottragga da N il numero massimo possibile n di volte il metro M. Questo massimo numero n è la parte intera dello sviluppo. Dal segmento residuo N_1 si sottragga il massimo numero possibile n_1 di volte la decima parte di M. Questo intero n_1 sarà la prima cifra decimale dello sviluppo. Dal segmento residuo N_2 si sottragga il massimo numero possibile n_2 di volte la centesima parte di M. Il numero n_2 sarà la seconda cifra decimale del cercato sviluppo. E così via.

Analogo, ma leggermente distinto, è il significato delle

$$\frac{1}{5} = 0{,}2000000\ldots.. ; \qquad \frac{1}{5} = 0{,}19999\ldots..$$

La prima di queste significa che:

$$\left.\begin{aligned} 0 &\leqq \frac{1}{5} < 0 + 1 = 1 \\ 0{,}2 &\leqq \frac{1}{5} < 0{,}2 + \frac{1}{10} = 0{,}3 \\ 0{,}20 &\leqq \frac{1}{5} < 0{,}20 + \frac{1}{100} = 0{,}21 \\ 0{,}200 &\leqq \frac{1}{5} < 0{,}200 + \frac{1}{1000} = 0{,}201, \text{ ecc.} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

La seconda significa che:

$$\left.\begin{aligned}0 &< \frac{1}{5} \leqq 0 + 1 = 1\\ 0{,}1 &< \frac{1}{5} \leqq 0{,}1 + \frac{1}{10} = 0{,}2\\ 0{,}19 &< \frac{1}{5} \leqq 0{,}19 + \frac{1}{100} = 0{,}20\\ 0{,}199 &< \frac{1}{5} \leqq 0{,}199 + \frac{1}{1000} = 0{,}200, \text{ ecc.}\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

È a tutti evidente l'analogia tra le (1), (2), (3). Unica differenza è la seguente: In ciascuna delle (1) compare due volte il segno $<$. Nelle (2) il primo dei segni $<$ è sostituito da un $\leqq$; nelle (3) il secondo dei segni $<$ è sostituito da $\leqq$.

E ciò perchè il numero $\frac{1}{5}$ è uguale al numero decimale limitato $0{,}2 = 0{,}20 = 0{,}200 = \ldots$; il quale compare, a partire da una delle (2) o delle (3) in poi, nei primi membri delle (2), nei secondi membri delle (3).

Un fatto analogo si presenta per ogni numero, che sia uguale a un numero decimale limitato. Così, p. es.:

$$0{,}52 = 0{,}520000\ldots\ldots = 0{,}51999\ldots\ldots$$

perchè, per nota convenzione aritmetica, si considerano come *uguali* due numeri decimali l'uno formato da certe cifre seguìte da infiniti zeri, l'altro formato dalle stesse cifre (tranne l'ultima cifra non nulla, che viene diminuita di 1) seguìte da infiniti 9. Per tali sviluppi decimali valgono disuguaglianze analoghe alle (2), (3), mentre per ogni numero decimale, che non sia del tipo ora studiato, valgono disuguaglianze analoghe alle (1). I primi numeri si possono scrivere in due modi distinti sotto forma di numero decimale; i secondi si possono scrivere in un sol modo come numeri decimali.

Diremo che due numeri α, β sono uguali fino alla n^{esima} cifra decimale, se la parte intera e le prime n cifre dopo la virgola nello sviluppo decimale di α (o in uno dei due sviluppi di α, se α ammette due sviluppi decimali) sono uguali alla parte intera ed alle prime n cifre dopo la virgola nello sviluppo, o in uno dei due sviluppi del numero β.

Così, p. es.:

$$\frac{13}{99} = 0{,}131313..... ; \qquad \frac{131}{999} = 0{,}131131..... ;$$

sono uguali fino alla terza decimale.

Si noti che, secondo tale convenzione, p. es.:

$$\frac{1}{9} = 0{,}1111..... \quad \text{e} \quad \frac{2}{9} = 0{,}2222..... ;$$

pure non avendo la prima decimale comune, sono entrambi uguali fino alla prima cifra decimale con

$$\frac{1}{5} = 0{,}1999..... = 0{,}2000.....$$

Notiamo che:

La lunghezza di un segmento N *commensurabile con* M (cioè la cui misura è un numero fratto) *ha una misura e una sola, che si può scrivere sotto forma di numero decimale* (periodico). E viceversa *ogni numero decimale periodico è misura della lunghezza di un segmento* N *commensurabile con* M, *e dei segmenti ad esso sovrapponibili, ma di nessun altro segmento.*

Se N_1, N_2 *sono segmenti commensurabili con* M, *altrettanto avviene del segmento somma* $N_1 + N_2$; *il quale*, come è noto, *ha per misura la somma delle misure dei segmenti* N_1, N_2.

Se N_1 *è il più grande dei due segmenti* N_1, N_2, *la misura di* N_1 *è maggiore di quella di* N_2 *e viceversa.* (È detto per brevità: misura di N_1 anzichè misura della lunghezza di N_1).

§ 2. — Numeri irrazionali.

Come è ben noto, le precedenti considerazioni e i precedenti risultati sono stati estesi anche ai segmenti N incommensurabili con M (p. es. alla diagonale del quadrato, il cui lato è M). Anche per tali segmenti si è definita la *misura* che è un numero che ancora gode delle proprietà testè enunciate.

Se N è un tale segmento, si sottragga da N il massimo numero possibile p di volte il metro M [cioè $pM < N < (p+1)M$]. Dal segmento residuo N_1 si sottragga il massimo numero possibile n_1 di volte la decima parte di M. Dal segmento residuo N_2 si sottragga il massimo numero n_2 di volte la centesima parte di M e così via.

Il simbolo $p, n_1 n_2 n_3 \ldots\ldots$ ottenuto scrivendo dopo l'intero p successivamente le cifre $n_1, n_2, n_3, \ldots\ldots$ si chiama *numero irrazionale*, e si assume come *misura* di N. Esso è un numero decimale illimitato non periodico (perchè altrimenti N sarebbe commensurabile con M).

Ogni segmento N *determina così la sua misura; segmenti uguali hanno misure uguali.*

Viceversa *due segmenti aventi misure uguali sono uguali.*

Infatti, se n è un intero qualsiasi, i due segmenti contengono lo stesso numero di volte la $(10^n)^{esima}$ parte di M (cioè il segmento σ ottenuto dividendo M in 10^n parti uguali). La differenza δ dei due segmenti dati non può perciò superare σ; e ciò, qualunque sia n. Ma, se δ non è zero, io posso prendere n così grande che $\sigma < \delta$ (*). Ciò che contraddirebbe al già dimostrato. Quindi $\delta = 0$, e i due segmenti sono uguali.

Il postulato della continuità della retta ci assicura poi che:

Ogni numero decimale limitato o no è misura di un segmento N (e soltanto dei segmenti uguali a questo).

Vi è dunque una corrispondenza biunivoca tra i segmenti N di una retta ed i numeri razionali o no (quando segmenti uguali si considerino come non distinti).

Tutti i numeri fin qui definiti diconsi *positivi*.

Di due numeri (razionali o irrazionali) positivi disuguali si dice naturalmente maggiore quello che misura segmento maggiore. È facile trasformare questa definizione. Se, per semplicità, escludiamo i numeri le cui cifre decimali sono da un certo punto in poi tutte uguali a *nove*, sostituendoli con altri, le cui cifre decimali sono da un certo punto in poi tutte uguali a zero, troviamo, come è ben noto:

Il numero p *è maggiore del numero* q *se*

1° *la parte intera di* p *supera la parte intera di* q oppure, se

2° *le parti intere di* p, q *sono uguali, ma la prima cifra decimale di* p *supera l'omologa di* q oppure, se

3° *i numeri* p, q, *sono uguali fino alle* $\mathrm{n}^{\mathrm{esima}}$ *cifra decimale, ma la* $(\mathrm{n}+1)^{\mathrm{esima}}$ *cifra decimale di* p *supera l'omologa di* q.

Non insistiamo sulle altre ben note proprietà delle disuguaglianze.

Secondo le nostre convenzioni, il numero non è che un simbolo per indicare il rapporto di due grandezze di una stessa classe di grandezze (per cui si può porre il problema della misura). Cosicchè al *numero* e all'algebra dei numeri potremmo

(*) E ciò in virtù del postulato di Archimede.

in fondo sostituire il concetto di un tale *rapporto* e l'algebra dei *rapporti*. E come simbolo per indicare un rapporto, p. es., delle lunghezze di due segmenti potremmo addirittura assumere una figura composta con due segmenti uguali ai segmenti dati. Ognuno capisce quanto ciò sarebbe incomodo; e lo studio dei rapporti, così come ha svolto Euclide, indica già quanta complicazione ne verrebbe alla teoria.

Ma non è detto che i simboli da noi introdotti sieno gli unici possibili. Che si possano mutare è ben evidente. Basta, p. es., pensare che nel nostro sistema (decimale) di numerazione il numero 10 (il numero delle dita delle due mani) ha un posto preponderante. Se noi gli sostituissimo un altro numero (è stato già proposto il numero 12) come base del sistema di scrittura dei numeri, sarebbe già cambiato il nostro simbolismo.

Osservazione critica. — Il presente modo di esporre la teoria dei numeri irrazionali, per quanto molto semplice sotto molti riguardi, ha però l'inconveniente che la definizione *pare* dipenda appunto dal numero 10 scelto a base del nostro sistema di numerazione. Bisognerebbe perciò definire l'uguaglianza di due numeri (che avessero anche infinite cifre dopo la virgola) scritti in due differenti sistemi di numerazione: ciò che del resto non presenterebbe alcuna difficoltà. Se p. es. si ammettesse di ricorrere alla misura dei segmenti, due tali numeri si direbbero uguali, quando sono misura di segmenti uguali. E sarebbe anche molto facile trasformare questa proprietà in una proprietà equivalente di carattere puramente aritmetico.

§ 3. — Limite superiore e inferiore. Operazioni sui numeri positivi.

α) Sia G una classe di numeri n positivi. Cerchiamo, se esiste, *il più grande* di questi numeri, che noi indicheremo con N. Evidentemente la parte intera di N dovrebbe essere la più grande delle parti intere dei numeri n. Distinguiamo due casi:

A) Tra le parti intere dei numeri n non ve n'è alcuna che sia più grande di tutte le altre; cioè, preso *ad arbitrio* un intero K, esiste almeno un numero n di G, la cui parte intera è uguale o maggiore di K. In tal caso diremo che $+\infty$ è il *limite superiore* dei numeri n di G; frase che è soltanto un modo di dire e che non vuole introdurre affatto l'infinito come nuovo ente o numero. Si suole anche dire che $+\infty$ è maggiore di ogni numero (frase che anch'essa è soltanto un modo di dire). In questo caso A la classe G *non* contiene un numero *massimo* (maggiore di tutti gli altri). Esempi di questo tipo sono le classi di tutti gli interi, o di tutti gli interi pari.

B) Tra le parti intere dei numeri n di G ve ne è una *massima;* esiste cioè un intero m, tale che *almeno* un numero n di G abbia m come parte intera, ma *nessun* numero di G abbia parte intera maggiore di m. In questo caso sia m_1 la *massima* prima cifra decimale di quei numeri di G, che hanno m come parte intera; sia m_2 la *massima* seconda cifra decimale di quei numeri di G, che hanno m per parte intera ed m_1 per prima cifra decimale; sia m_3 la *massima* terza cifra decimale di quei numeri di G, che hanno m per parte intera ed m_1, m_2 rispettivamente come prima e seconda cifra decimale. E così via. Noi chiameremo *limite superiore* dei numeri di G il numero $L = m, m_1 m_2 m_3 \ldots$, che si ottiene scrivendo dopo m le successive cifre decimali $m_1, m_2, m_3, \ldots$ Evidentemente il numero cercato N coincide, se esiste, con questo numero L.

B_1) Può avvenire che la classe G contenga tra i suoi numeri il numero L. *Ciò avviene evidentemente*, p. es., *se la classe* G *contiene un numero finito di numeri n.* In tal caso L è proprio il *massimo* numero di G, che noi cercavamo.

B_2) Può invece avvenire che il numero L *non* appartenga alla classe G. Ciò avviene, p. es., se G è la classe dei numeri *minori* di 2; in tal caso $L = 1{,}9999 \ldots = 2$, che *non* appartiene a G. In tal caso di nuovo la classe G *non possiede* un numero massimo (questo, se esistesse, coinciderebbe con L, che viceversa non è un numero di G, mentre invece N dovrebbe essere un numero di G).

Una classe G di numeri possiede in ogni caso un limite superiore L. Se questo appartiene alla classe G, esso è anche il massimo numero di G. Se esso non appartiene a G, la classe G non contiene un numero massimo. Se L non è $+\infty$, allora L è il minimo numero, che non sia superato da alcun numero di G; se k è un intero qualsiasi, esiste in G almeno un numero che coincide col limite superiore L fino alla k^{esima} cifra decimale inclusa (*).

Perciò sono possibili tre soli casi:

1°) **Non vi è alcun numero maggiore di tutti i numeri di G** (ossia $L = \infty$);

2°) **Tra i numeri di G ve n'è uno L massimo** (L **è finito ed appartiene a** G);

3°) **Tra i numeri positivi maggiori di ogni numero di G ve n'è uno L minimo** (L **è finito e non appartiene a** G).

Un numero decimale illimitato N è il limite superiore dei numeri decimali limitati, che se ne deducono trascurando le cifre decimali da un certo punto in poi. Così, p. es., $0{,}3333 \ldots$ è il limite superiore dei numeri $0{,}3$; $0{,}33$; $0{,}333$; ecc.

Se ogni numero m della classe G soddisfa alla $m < k$, oppure alla $m \leqq k$, oppure alla $m > k$, oppure alla $m \geqq k$ (dove k è un numero prefissato), allora il limite superiore L soddisferà rispet-

(*) Si dimostra che il limite superiore non varia, se si cambia il numero assunto come base del sistema di numerazione, servendosi delle proprietà qui enunciate per L.

tivamente nei primi due casi alla $L \leqq k$, nel terzo alla $L > k$, nel quarto alla $L \geqq k$. Notiamo in particolare che alla disuguaglianza $m < k$ per i numeri m di G corrisponde per il limite superiore L la disuguaglianza *attenuata* $L \leqq k$.

β) Se nelle precedenti considerazioni, anzichè scegliere la massima parte intera, e successivamente le massime cifre decimali, avessimo scelto la minima parte intera, e successivamente le minime cifre decimali, avremmo definito il *limite inferiore* l di G.

Nessun numero di G *è minore del limite inferiore* l, *il quale è il più grande dei numeri che non superano alcun numero di* G. *Se tra i numeri di* G *ve ne è uno minimo, e soltanto in tale caso, il numero* l *appartiene a* G, *e coincide allora con tale numero minimo. Se* k *è un intero arbitrario, vi è in* G *almeno un numero uguale ad* l *almeno fino alla* $\mathrm{k}^{\text{esima}}$ *cifra decimale. Se i numeri* m *di* G *soddisfano alla* $\mathrm{m} > \mathrm{h}$, *allora* $\mathrm{l} \geqq \mathrm{h}$; ecc. ecc.

Nei casi 2° e 3° del precedente teorema L *(che è finito) è anche il limite inferiore della classe* G′ *formata dai numeri positivi maggiori di ogni numero di* G. *Il numero* L *o è il* massimo *dei numeri di* G, *perchè appartiene a* G, *oppure è il* minimo *dei numeri di* G′, *perchè appartiene a* G′.

γ) *La somma di due o più numeri positivi* n, m, ... *è il limite superiore della classe dei numeri* (*razionali*) *ottenuta sommando i numeri decimali limitati dedotti da* n, m, ... *tenendo conto soltanto di un numero finito di cifre decimali.*

Questa definizione è la più naturale estensione del teorema: *La somma di due o più numeri decimali* LIMITATI n, m, ... *è maggiore del numero ottenuto sommando quei numeri che si deducono da* n, m, ..., *trascurando le cifre decimali a partire da un certo posto in poi.*

È ben noto che da questa definizione si deduce: *Se il segmento* N *è somma di più segmenti* $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \ldots$, *la misura di* N *è eguale alla somma delle misure dei segmenti* $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \ldots$

Sono ben note le seguenti proprietà dell'addizione:

$$n + m = m + n \qquad \text{(proprietà commutativa)}$$
$$n + (m + p) = n + m + p \qquad \text{(proprietà associativa).}$$

In modo perfettamente analogo si definisce il prodotto (*)

(*) Ricordo che, se m, n sono le misure della base ed altezza di un rettangolo, il prodotto $m\,n$ è la misura dell'area del rettangolo, quando come unità di misura delle aree si scelga il quadrato, il cui lato è l'unità M di misura delle lunghezze.

di due o più numeri positivi; e si dimostrano poi le seguenti proprietà fondamentali della moltiplicazione:

$$n\,m = m\,n \qquad \text{(proprietà commutativa)}$$
$$n\,m\,p = n\,(m\,p) \qquad \text{(proprietà associativa)}$$
$$n\,(m + p) = n\,(m + p) \qquad \text{(proprietà distributiva).}$$

La differenza [quoziente] di due numeri n, m si definisce poi come quel numero $n - m$ [quel numero $\frac{n}{m}$] che sommato con m [moltiplicato per m] riproduce il numero n.

Esistono regole di calcolo numerico per eseguire nel modo più rapido, ed evitando calcoli inutili, le operazioni elementari dell'aritmetica sui numeri decimali limitati od illimitati, quando sia prefissata l'approssimazione, che si esige dal risultato finale.

Queste regole possono essere assai utili per chi abbia da eseguire calcoli numerici. E il loro studio, di cui qui non ci possiamo occupare, perchè estraneo all'argomento di questo corso, è perciò assai raccomandabile per ogni calcolatore.

Restando nell'ambito dei numeri positivi o nulli, si può parlare della differenza $n - m$, soltanto se $n \geqq m$.

Non si può parlare del quoziente $\frac{n}{m}$ se $m = 0$.

Con x^n, se x è un numero positivo, ed $n > 1$ è un intero positivo, si indica il prodotto di n fattori uguali ad x. E si pone poi $x^1 = x$; e, se $x \neq 0$, $x^0 = 1$. Il simbolo 0^0 si considera privo di significato.

Se $n > 1$ è un intero positivo, con $\sqrt[n]{x}$ si indica il numero y tale che $y^n = x$ (*). Se x aumenta, aumenta tanto la $\sqrt[n]{x}$ quanto la x^n. Se m, n sono interi positivi ed $n > 1$, con $x^{\frac{m}{n}}$ si intende la $\sqrt[n]{x^m}$ Se poi p è un numero positivo qualsiasi, con x^p si intende il limite superiore delle potenze x^q, quando q sia uno dei numeri ottenuti da p, tenendo conto soltanto di un numero finito di cifre decimali (dell'esponente p).

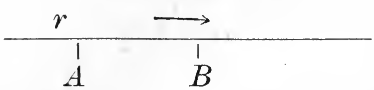
È noto che, se p, q sono numeri positivi o nulli arbitrari, allora:

$$x^p\,x^q = x^{p+q}.$$

(*) Si può dimostrare l'esistenza di y, definendo y come il limite superiore della classe formata da quei numeri z, che soddisfano alla $z^n \leqq x$.

§ 4. — Numeri reali.

Insieme ai numeri positivi l'algebra considera, come è noto, anche i numeri negativi; i quali con le seguenti convenzioni, trovano pure applicazione nel problema della misura dei segmenti.



α) Una retta r si dice orientata, se è fissato su di essa un verso che si assume come positivo (nella figura e in quanto segue da sinistra a destra). Un segmento orientato di tale retta AB si ritiene percorso nel verso dal punto A al punto B, e si ritengono distinti i segmenti (orientati) AB, BA i cui versi sono opposti.

Misura algebrica di un segmento AB di r è il rapporto di tale segmento al segmento unitario, preso col segno $+$ o col segno $-$, secondo che il verso del segmento (il verso da A a B) coincide col verso positivo o col verso negativo di r. E se noi indichiamo con uno stesso simbolo un segmento e la sua misura, e per convenzione poniamo in generale $a = -(-a)$, avremo $AB = -BA$, $AB + BA = 0$. Cioè:

La misura di un segmento cambia di segno se ne invertiamo gli estremi.

I numeri razionali o irrazionali, positivi o negativi, fin qui definiti, hanno ricevuto complessivamente il nome di *numeri reali*. Se a è un numero reale, con $|a|$ ne indichiamo il valore assoluto; indichiamo cioè con $|a|$ lo stesso numero a, se a è positivo e il numero a cambiato di segno, se a è negativo.

β) Due segmenti orientati si diranno uguali, se hanno lo stesso verso e sono uguali dal punto di vista della geometria elementare: ossia se hanno misure uguali e dello stesso segno.

Due numeri si diranno uguali se hanno uguale segno e uguale valore assoluto. I numeri negativi si considerano minori di zero e dei numeri positivi. Di due numeri negativi si considera *maggiore* quello che è *minore* in valore assoluto.

Siano dati i segmenti c, d; preso un punto qualsiasi A di r, si consideri il segmento AB uguale (e quindi anche ugualmente orientato) a c, e quindi il segmento BC uguale (e quindi anche ugualmente orientato) a d. Il segmento AC (ed ogni segmento ad esso uguale) si dirà somma dei segmenti c, d. Questa definizione coincide evidentemente con la solita, quando i segmenti c, d sono entrambi positivi.

Diremo poi somma di due numeri x, y il numero che misura il segmento somma dei due segmenti che hanno per misura x oppure y.

Si riconosce facilmente che:

1° *Il segno della somma di due numeri è uguale al segno dell'addendo, il cui valore assoluto è più grande.*

2° *Il valore assoluto della somma di due numeri è uguale alla somma o alla differenza dei valori assoluti dei due addendi, secondo che questi hanno o non hanno lo stesso segno.*

Queste proprietà potrebbero servire alla definizione puramente analitica della somma di due numeri.

Si estendono facilmente queste definizioni alla somma di più numeri, e si dimostrano le solite regole del calcolo algebrico.

Se A, B, C, sono tre punti qualsiasi di r, è per definizione:

$$AB + BC = AC = -CA, \text{ ossia } AB + BC + CA = 0.$$

Così se A_1, A_2, A_3, A_4 sono punti qualsiasi di r, è:

$$A_1 A_2 + A_2 A_3 = A_1 A_3 \,; \quad A_1 A_3 + A_3 A_4 + A_4 A_1 = 0$$

donde: $$A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4 + A_4 A_1 = 0.$$

Più in generale, se $A_1 A_2 \ldots\ldots, A_n$ sono punti qualsiasi di r, è $A_1 A_2 + A_2 A_3 + \ldots\ldots A_{n-1} A_n + A_n A_1 = 0$.

E questa formola vale anche se i punti A non sono tutti distinti.

γ) Si definisce poi il prodotto di due o più numeri reali (fattori) quel numero che ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori, e il segno $+$ o il segno $-$ secondo che vi è numero pari o dispari di fattori negativi.

Si definiscono poi la sottrazione e la divisione come le operazioni inverse dell'addizione e della moltiplicazione, estendendo quindi le solite regole del calcolo algebrico.

Un numero a è minore o maggiore di un altro numero b, secondochè $a - b$ è negativo o positivo.

δ) È poi evidente che se a, b sono numeri reali qualsiasi

$$|a \pm b| \leqq |a| + |b|$$
$$|a \pm b| \geqq |a| - |b|$$
$$|a \pm b| \geqq |b| - |a|$$
$$|a \,.\, b| = |a| \,.\, |b|.$$

Se $b \neq 0$, allora $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

ε) Se G è una classe di numeri negativi $-m$, e se L, l, sono i limiti superiore e inferiore dei numeri m, allora $-L$ e $-l$ si dicono rispettivamente il limite inferiore e superiore dei numeri di G. Queste definizioni appariranno spontanee a chi pensi che (secondo le proprietà da noi ricordate) di due numeri negativi si considera come minore quello che è maggiore in valore assoluto.

Se G è una classe che contiene sia numeri positivi p, sia numeri negativi n, si dirà limite superiore (inferiore) di G il limite superiore (inferiore) dei numeri positivi p (negativi n) che appartengono a G.

Anche in questo caso generale si può ripetere quanto per tali limiti si disse al § 3.

ζ) Se G, Γ sono due classi di numeri *reali* tali che il limite λ inferiore di G coincida con il limite superiore di Γ, noi diciamo che le classi G, Γ sono *contigue*, che G è la classe superiore e che λ è il *numero di separazione* delle due classi. In tal caso nessun numero di G può essere inferiore ad alcun numero di Γ; e, preso un intero positivo k arbitrario, esiste tanto in G che in Γ almeno un numero che coincide con λ fino alla k^{esima} decimale. I due numeri così scelti in G e in Γ differiranno al più per $\frac{2}{10^k}$.

Viceversa, se nessun numero della classe G è inferiore ad un numero della classe Γ, e se per ogni numero intero positivo k esistono un numero di G e un numero di Γ, la cui differenza non supera $\frac{2}{10^k}$, è ben evidente che le classi G, Γ sono contigue, e che G è la classe superiore.

η) La teoria delle potenze e delle radici rapidamente riassunta al § 3 si estende con qualche modificazione ai numeri negativi. Così, se x è negativo, ed n intero positivo, la x^n è positiva se n è pari, negativa se n è dispari. Se ne deduce che, se n è pari ed x è negativo, il simbolo $\sqrt[n]{x}$ si deve considerare come sprovvisto di significato nell'attuale campo dei numeri reali.

E se, pure essendo n pari, la x è positiva, il simbolo $\sqrt[n]{x}$ ha un doppio significato. Perchè se y è un numero positivo tale che $y^n = x$, cosicchè $y = \sqrt[n]{x}$, anche $-y$ soddisfa alla analoga uguaglianza $(-y)^n = x$, cosicchè anche $-y$ si può considerare come radice n^{esima} della x. Salvo però avvertenza contraria, col simbolo $\sqrt[n]{x}$ indicheremo sempre la radice positiva.

Se n è dispari, $\sqrt[n]{x}$ ha sempre uno e uno solo significato.

Secondo tali convenzioni non si parlerà mai di uua potenza $x^{\frac{m}{n}}$, quando x è negativo, e dei due numeri interi m, n il secondo è pari. Nè parleremo mai di una potenza x^p se x è negativo, p è irrazionale.

Se n è un numero negativo, poniamo $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$.

Vale anche nel caso attuale la formola

$$x^p x^q = x^{p+q}$$

in tutti i casi in cui i simboli x^p, x^q hanno un significato.

θ) Se tre numeri a, x, y sono legati dalla $a^x = y$, noi diremo che x è il logaritmo di y in base a, e scriveremo $x = \log_a y$. La base a si suppone positiva e quasi sempre maggiore di 1 (anzi assai spesso uguale a 10). Si dimostra:

1° Ogni numero positivo $y \neq 0$ ha un logaritmo e uno solo, che è uguale a zero per $y = 1$, è uguale ad 1 per $y = a$, e che cresce (se $a > 1$) al crescere di y. I numeri negativi non hanno logaritmo.

2° Se $b \neq 1$, allora $\log_a y = \log_a b \log_b y$.

3° $\mathrm{Log}_a (y_1 y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$

$$\log_a \frac{y_1}{y_2} = \log_a y_1 - \log_a y_2 ; \qquad \log_a (y_1^m) = m \log_a y_1.$$

CAPITOLO II.

APPLICAZIONI GEOMETRICHE

§ 5. — Misura (algebrica) degli angoli.

α) È uso universale misurare gli angoli, assumendo ad unità di misura il grado: che di solito si definisce come la novantesima parte di un angolo retto (e soltanto da pochissimi come la centesima parte di un angolo retto). La sessantesima parte del grado dicesi minuto primo, la sessantesima parte di un minuto primo dicesi minuto secondo.

Se poi vogliamo parlare di misura algebrica degli angoli posti nel piano del foglio col vertice in O, dovremo cominciare ad assumere come positivo uno dei versi secondo cui può rotare un raggio di origine O intorno ad O mantenendosi nel piano del foglio; e in generale assumeremo come verso positivo il verso contrario a quello secondo cui si muoverebbero gli indici di un orologio posto nel piano del foglio col quadrante rivolto al lettore; questo verso è quello che trasporta (nel caso della fig. 1) il raggio a sul raggio b attraverso l'angolo acuto. L'angolo descritto da un raggio (semiretta) a, che ruota attorno alla propria origine O, sarà considerato come positivo o come negativo secondo che la rotazione è avvenuta nel verso scelto come positivo o nel verso opposto; alla misura (p. es. in gradi) di quest'angolo premetteremo nei due casi rispettivamente il segno $+$ o il segno $-$. L'angolo ab [oppure (a, b)] di due raggi a, b, aventi l'origine comune O, sarà poi per definizione l'angolo di cui primo raggio a deve rotare intorno ad O per sovrapporsi al secondo raggio b.

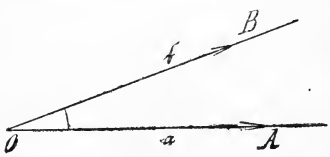


Fig. 1.

Quest'angolo non è determinato, ma anzi ha infiniti valori: infatti, se un giro positivo di α gradi porta a in b, un giro negativo di $360^\circ - \alpha$ porta ancora a in b; è, poichè un giro di $\pm k\, 360^\circ$ (k essendo un qualsiasi intero positivo) porta a in a, anche un giro positivo di $k\,360^\circ + \alpha$, oppure un giro negativo di $360^\circ - \alpha + k\,360^\circ$ porta a in b. Quindi, se α è la misura (algebrica) di (a, b) in gradi, $\alpha + h\, 360^\circ$ sono altrettanti valori della misura dello stesso angolo, qualunque sia l'intero h positivo o negativo; e viceversa, se α è un valore di (a, b) tutti gli altri valori di (a, b) differiscono da α per un multiplo di $\pm 360^\circ$. Noi considereremo naturalmente questi infiniti valori come equivalenti, ossia considereremo come equivalenti due angoli α e β, quando la loro differenza è un multiplo di 360° e scriveremo in tal caso $\alpha \equiv \beta$, e anche talvolta $\alpha = \beta$.

Se è nota la posizione di un raggio a uscente da O, la posizione di ogni altro raggio b uscente da O è determinata, quando si conosca un valore dell'angolo (a, b). È poi evidente che se a, b sono due raggi aventi la stessa origine O e se con un giro di α gradi intorno ad O (essendo α numero positivo o negativo qualunque) il raggio a si sovrappone a b, con un giro uguale ma di segno contrario il raggio b si sovrappone ad a, cosicchè:

$$(a, b) \equiv -(b, a) \text{ ossia } \widehat{ab} + \widehat{ba} \equiv 0.$$

Se a, b, c sono tre raggi posti nello stesso piano ed aventi la stessa origine O, se un giro di α gradi porta a nel raggio b, e un giro di β gradi porta b nel raggio c, allora un giro di $\alpha + \beta$ gradi porterà a in c: quindi

$$(a, b) + (b, c) \equiv (a, c)\,;\ (a, b) + (b, c) + (c, a) \equiv 0,$$
$$(a, b) \equiv (c, b) - (c, a)\,;\ (b, a) \equiv (c, a) - (c, b).$$

In generale se $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sono raggi posti nello stesso piano ed uscenti da O si avrà:

$$(a_1, a_2) + (a_2, a_3) + \ldots + (a_{n-1}, a_n) + (a_n, a_1) \equiv 0.$$

β) Se A, B sono due punti, per raggio AB intenderemo sempre il raggio uscente da A e contenente B.

Siano ora r, r' due rette, su ciascuna delle quali è fissato il verso positivo, che si incontrino in un punto O: se R, R' sono due punti di r, r' tali che i segmenti OR, OR' siano positivi, l'angolo (r, r') sarà per definizione l'angolo dei raggi OR, OR'.

Se r, r' non s'incontrano, e se OR, $O'R'$ sono due segmenti positivi di r, r', per angolo (rr') s'intende l'angolo del raggio OR col raggio OS parallelo ad r' ed avente la stessa orientazione di r' (vale a dire tale che i segmenti $O'R'$, OS cadano da una stessa banda della retta OO').

Se r indica una retta, su cui è fissato un certo verso come positivo, si suole indicare con $-r$ la stessa retta, in cui si sia invertito il verso considerato come positivo; sono evidenti allora le seguenti uguaglianze:

$$(r, r') + (r', -r) \equiv (r, -r) \equiv 180^\circ$$
$$\text{ossia } (r, r') \equiv 180^\circ + (-r, r').$$

Similmente si trova:

$$(r, r') \equiv 180^\circ + (r, -r') \qquad (-r, -r') \equiv (r, r').$$

γ) Come unità di misura degli angoli è però teoricamente preferibile un'altra unità di misura, che sarà ora definita e che verrà sempre adottata in questo libro.

Sia α un angolo qualsiasi di vertice C: si descriva una circonferenza avente il centro C, il raggio R arbitrario, e sia β la lunghezza dell'arco di circonferenza sotteso dall'angolo (al centro) α. Il rapporto $\frac{\beta}{R}$ è uguale alla lunghezza di detto arco, quando si assuma come unità di misura delle lunghezze il raggio R. Questo rapporto non varia al variare di R (perchè archi di cerchi concentrici sottesi da uno stesso angolo al centro hanno lunghezze proporzionali al raggio del cerchio su cui giacciono) ed è proporzionale all'angolo α. Noi assumeremo questo rapporto come misura dell'angolo α e chiameremo radiante l'angolo che in questo sistema di misura ha per misura 1; il radiante sarà quindi l'angolo che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio. Se $\alpha = 360^\circ$, l'arco di cerchio corrispondente è uguale all'intera circonferenza e ha per lunghezza $\beta = 2\pi R$; quindi l'angolo di 360°, misurato in radianti, ha per misura

$$\frac{2\pi R}{R} = 2\pi.$$

Due angoli sono equivalenti se le loro misure in gradi differiscono per un multiplo di 360°. Poichè in radianti l'angolo di 360° ha per misura 2π, due angoli saranno equivalenti, se le loro misure in radianti differiscono per un multiplo di 2π.

Un angolo piatto ha in gradi la misura $\frac{360}{2} = 180$; in radianti esso ha quindi per misura π; l'angolo retto ha per misura $\frac{\pi}{2}$, l'angolo di 45° ha per misura $\frac{\pi}{4}$.

Se x, y sono le misure di uno stesso angolo rispettivamente in radianti e in gradi, si avrà:

$$\frac{x}{y} = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}.$$

L'angolo di un radiante vale in gradi $180 : \pi = 57,2957795$, cioè vale minuti secondi $206264,8\ldots..$; perciò, se φ è la misura in radianti di un angolo e α'' la sua misura in minuti secondi sarà con grande approssimazione $\varphi : \alpha'' = 1 : 206265''$.

δ) Se x è la misura di un angolo acuto in radianti (quindi $0 < x < \frac{\pi}{2}$) allora si ha:

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x.$$

Sia AOB l'angolo x e sia OC la retta simmetrica di OB rispetto ad OA; sarà $COB = 2x$. Sia BAC il cerchio di centro O e di raggio 1. Sarà (fig. 2) arco $AB =$ arco $CA = x$;

arco $CAB = 2x$; segmento $AH = \operatorname{tg} x$; segmento $MB = CM = \operatorname{sen} x$; segmento $CB = 2 \operatorname{sen} x$.

Poichè: segmento $CB <$ arco CAB, sarà $2 \operatorname{sen} x < 2x$, ossia $\operatorname{sen} x < x$.

D'altra parte: area triangolo $OHK = OA.AH = \operatorname{tg} x$; area settore $OCAB = \frac{OA}{2}$. Arco $CAB = x$.

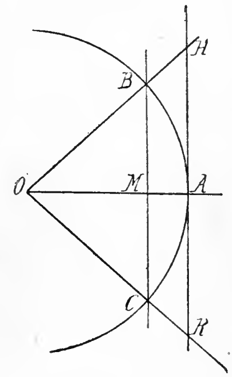


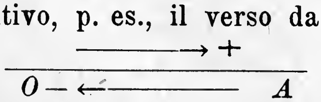
Fig. 2.

Poichè: area triangolo $OHK >$ area settore $OCAB$, sarà $\operatorname{tg} x > x$. Le disuguaglianze così ottenute dimostrano completamente il nostro teorema.

Se y è l'ampiezza in gradi di un angolo, la cui misura in radianti è x, sarà $x = \frac{\pi}{180} y$; perciò $\operatorname{sen} y < \frac{\pi}{180} y < \operatorname{tg} y$.

§ 6. — Coordinate di un punto di una retta.

α) Sia r una retta orientata, su cui cioè si è scelto come positivo, p. es., il verso da sinistra a destra.



Fissiamo sopra la retta un punto O, che chiameremo l'origine; la posizione di un punto qualsiasi A di r è determinata quando si conosca la misura del segmento OA in valore assoluto e in segno (il quale segno sarà + oppure — secondo che A si trova a destra od a sinistra di O): così, se p. es. $OA = +3$, il punto A è quel punto di r, posto a destra dell'origine O che ne dista il triplo dell'unità di lunghezza; se $OA = -5$, A è quel punto di r posto a sinistra di O, la cui distanza da O è il quintuplo dell'unità di lunghezza.

In generale la misura del segmento OA si chiama la coordinata di A e si indica di solito con una delle lettere x, y, z ...

L'origine O è l'unico punto della retta r che abbia la coordinata nulla; poichè un punto di r ha una coordinata perfettamente individuata, e viceversa ad ogni valore della coordinata corrisponde uno (e un solo) punto di r, vi è una corrispondenza *biunivoca senza eccezione* tra i valori della coordinata ed i punti di r.

β) Se A, B sono due punti di r, le cui coordinate sono rispettivamente x_1, x_2 sarà:

$$OA = x_1, \quad OB = x_2, \quad AO = -x_1, \quad BO = -x_2.$$

Ma $AB = OB - OA$; quindi la misura del segmento AB, i cui estremi A, B hanno rispettivamente le coordinate x_1, x_2, è $x_2 - x_1$ (in valore assoluto e in segno).

Se $x_2 - x_1$ è positivo, ossia se $x_2 > x_1$, allora il segmento AB è positivo, ossia A giace a sinistra di B; se invece $x_2 - x_1$ è negativo, ossia $x_2 < x_1$, allora A giace a destra di B; ciò che è intuitivo per la definizione stessa di coordinata. I punti del segmento AB sono i punti, le cui coordinate sono comprese tra x_1 ed x_2; se p. es. $x_1 < x_2$, essi sono i punti x per cui $x_1 \leqq x \leqq x_2$.

Se $A_1, A_2, \ldots A_n$ sono punti di r di coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n$, avrà luogo l'identità:

$$(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + \ldots.. + \\ + (x_n - x_{n-1}) + (x_1 - x_n) = 0$$

che equivale alla $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots.. + A_{n-1}A_n + A_nA_1 = 0$ dimostrata nel § 4, β (pag. 13).

γ) Noi spesso identificheremo un valore della variabile x col punto di coordinata x; così, p. es., diremo il punto a anzichè dire il numero a; viceversa diremo talvolta il numero a per indicare il punto A, tale che il segmento OA abbia per misura a.

La relazione biunivoca, da noi così determinata tra i numeri dell'aritmetica ed i punti di una retta, permette di trasformare proprietà geometriche in teoremi aritmetici e viceversa.

§ 7. — Aree e volumi.

Quando si studia in geometria elementare il problema della misura dell'area o del volume di una figura piana (*) o solida, si sceglie un poligono o un poliedro come unità di misura; il quale (secondo l'uso universale) è il quadrato o il cubo, il cui lato è l'unità di misura delle lunghezze.

Osservazioni. — Nonostante la scrittura in doppia colonna, il rigore richiede che la trattazione qui svolta per i volumi segua quella svolta nella prima colonna per le aree delle figure piane.

Nelle matematiche elementari è definita l'*area* di ogni poligono (**) che è un numero positivo soddisfacente alle seguenti proprietà:

1°) *Poligoni uguali hanno aree uguali.*

2°) *Se il poligono* P *è somma dei poligoni* P_1, P_2, *l'area di* P *è somma delle aree dei poligoni* P_1, P_2. Da cui segue:

3°) *Se il poligono* P_1 *è contenuto in* P, *l'area di* P_1 *non supera l'area di* P.

Possiamo noi definire *l'area* di figure piane più generali dei poligoni? Ecco il problema che vogliamo esaminare. Naturalmente dobbiamo porre una *definizione* che conservi all'area di figure piane più generali dei poligoni le proprietà su accennate per le aree dei poligoni: proprietà del resto comuni alle

Nelle matematiche elementari è definito il *volume* di ogni pluricilindro (***) che è un numero positivo soddisfacente alle seguenti proprietà:

1°) *Pluricilindri uguali hanno volumi uguali.*

2°) *Se il pluricilindro* P *è somma dei pluricilindri* P_1, P_2, *il volume di* P *è somma dei volumi di* P_1, P_2. Ne segue:

3°) *Se il pluricilindro* P_1 *è contenuto in* P, *il volume di* P_1 *non supera il volume di* P.

Possiamo noi definire *i volumi* di solidi più generali dei pluricilindri? Ecco il problema che vogliamo esaminare. Naturalmente dobbiamo porre una *definizione* che conservi al volume delle figure solide più generali dei pluricilindri le proprietà su accennate per i volumi dei pluricilindri: proprietà del resto

---

(*) Qui e nel seguito usiamo la parola *figura piana* (sarebbe più preciso dire *dominio connesso*) (cfr. l'oss. critica in fine del § 7).

Nei casi più comuni delle applicazioni si tratta di figure limitate da tratti di rette, cerchi, ellissi, ecc.

Osservazioni analoghe valgono per i *solidi* di cui ci occuperemo.

(**) Vedremo che sovente potremmo parlare soltanto di *plurirettangoli* (cioè poligoni somma di un numero finito di rettangoli parziali). Ciò che rende più evidente ancora l'analogia tra i due problemi: quello della misura delle aree, quello della misura dei volumi.

(***) Si potrebbe anche parlare di piramidi, o di poliedri. Ma per noi basta parlare di pluricilindri (cioè di un solido somma di un numero finito di cilindri).

misure delle grandezze di una specie qualunque.

Osserviamo che, se F è una figura piana, la quale contiene un poligono p ed è a sua volta contenuta in un altro poligono P, e se F possiede un'area che goda di proprietà analoghe alle precedenti, bisognerà che tale area di F sia definita come un numero non minore dell'area di p, nè maggiore dell'area di P.

Guidati da questa osservazione noi converremo di parlare di area di una figura piana F soltanto se esistono tanto dei poligoni p tutti contenuti in F, quanto dei poligoni P contenenti F (*).

E per area di F intenderemo un numero che non sia minore delle aree di un p, nè maggiore delle aree di un P. In altre parole l'area di F dovrà *almeno* essere uguale al *limite superiore* λ delle aree dei p e *al più* essere uguale al *limite inferiore* Λ delle aree dei P. (È evidentemente $\lambda \leqq \Lambda$).

Ma noi vogliamo che l'area di F sia completamente determinata da F (**). Il caso *più elementare* in cui questo avviene (Peano-Jordan) è il caso che $\lambda = \Lambda$, ossia che le aree dei p e quelle dei P formino due classi contigue. In questo caso (che è l'unico considerato in questo

comuni alle misure delle grandezze di una specie qualsiasi.

Osserviamo che, se F è una figura solida qualsiasi, la quale contiene un pluricilindro p ed è a sua volta contenuta in un altro pluricilindro P, e se F possiede un volume che goda di proprietà analoghe alle precedenti, bisogna che tale volume di F sia definito come un numero non minore del volume di p, nè maggiore del volume di P.

Guidati da questa osservazione noi converremo di parlare di volume di una figura solida F soltanto se esistono tanto dei pluricilindri p tutti contenuti in F, quanto dei pluricilindri P contenenti F (*).

E per *volume* di F intenderemo un numero che non sia minore del volume di un p, nè maggiore del volume di alcun P. In altre parole il volume di F dovrà *almeno* essere uguale al *limite superiore* λ dei volumi dei p e *al più* essere uguale al *limite inferiore* Λ dei volumi dei P. (È evidentemente $\lambda \leqq \Lambda$).

Ma noi vogliamo che il volume di F sia completamente determinato da F (**). Il caso *più elementare* in cui questo avviene (Peano-Jordan) è il caso che $\lambda = \Lambda$ ossia che i volumi dei p e quelli dei P formino due classi contigue. In questo caso (che è l'unico considerato

(*) Cioè ogni punto interno a p è interno ad F, ed ogni punto interno ad F è interno a P.

(**) Naturalmente se è prefissata l'unità di misura.

libro) le precedenti osservazioni bastano a definire completamente l'*area* di F *come il numero* $\lambda = \Lambda$ *di separazione tra la classe delle aree dei* p, *e la classe delle aree dei* P.

Noi parleremo dunque di area di una figura F, soltanto se esistono poligoni p contenuti in F, e poligoni P contenenti F; e se inoltre le classi delle loro aree sono contigue. Il numero $\lambda = \Lambda$ di separazione delle due classi si dirà *l'area di* F.

Questa definizione non è che la naturale estensione della definizione, che nelle matematiche elementari si dà per l'*area* σ di un *cerchio* S. Ivi infatti tale area σ viene definita come il numero che separa le classi contigue formate dalle aree dei poligoni p tutti interni a S, e dei poligoni P che comprendono il cerchio S all'interno (*).

in questo libro) le precedenti osservazioni bastano a definire completamente il *volume* di F *come il numero* $\lambda = \Lambda$ *di separazione tra la classe dei volumi dei* p, *e la classe dei volumi dei* P.

Noi parleremo dunque di volume di una figura F, soltanto se esistono pluricilindri p, contenuti in F, e pluricilindri P contenenti F; e se inoltre le classi dei loro volumi sono contigue. Il numero $\lambda = \Lambda$ di separazione delle due classi si dirà *il volume di* F.

Questa definizione non è che la naturale estensione della definizione che nelle matematiche elementari si dà per il *volume* σ di una *sfera* S. Ivi infatti tale volume σ viene definito come il numero che separa le classi contigue formate dai volumi dei pluricilindri p tutti interni ad S, e dei pluricilindri P che comprendono la sfera S all'interno (**).

(*) Si noti ancora che nel caso del cerchio S i poligoni p si suppongono inscritti in S, i poligoni P circoscritti. E ciò perchè i poligoni inscritti in S sono interni ad S, i poligoni circoscritti ad S contengono S all'interno. Nel caso generale non si può più parlare di poligoni inscritti e circoscritti; perchè (anche ammessa l'esistenza di tali poligoni) i poligoni p inscritti possono essere non tutti interni a S, e i poligoni P circoscritti possono non contenere S tutto all'interno, come dimostrano le seguenti figure 3-4.

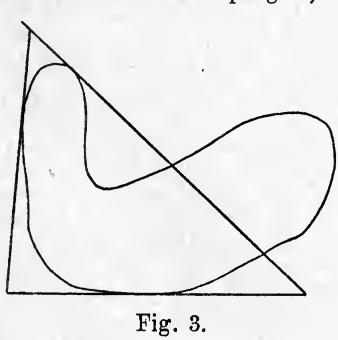


Fig. 3.

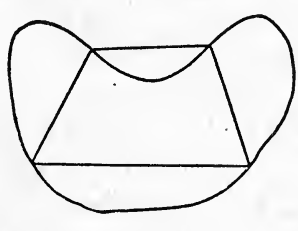


Fig. 4.

(**) Veramente nei trattati elementari ci si limita a considerare generalmente dei pluricilindri inscritti o circoscritti (cfr. Nota precedente).

È poi evidente che l'*area* così definita gode delle proprietà enunciate sopra a pag. 21 (*).

Queste proprietà sono del resto insite nel fatto, che le precedenti considerazioni trattano il problema della misura di una classe particolare di grandezze.

Se invece fosse $\Lambda > \lambda$, il numero Λ si potrebbe chiamare l'area *esterna*, il numero λ l'area *interna* della figura considerata. Questi due numeri godono, come è evidente, di alcune, ma non di tutte le proprietà dell'*area* nel senso elementare (sopra definito) della parola. Noi lo proveremo nel modo esposto in fine al §.

Sia C un cilindro avente per base una figura piana F e per altezza un segmento di misura h (**). Chiameremo *volume* di C un numero *maggiore* dei volumi dei prismi di uguale altezza h aventi per base un poligono p (prismi che sono contenuti in C)

È poi evidente che il *volume* così definito gode delle proprietà enunciate sopra a pag. 21 (*).

Queste proprietà sono del resto insite nel fatto, che le precedenti considerazioni trattano il problema della misura di una classe particolare di grandezze.

Se invece fosse $\Lambda > \lambda$, il numero Λ si potrebbe chiamare il volume *esterno*, il numero λ il volume *interno* della figura considerata. Questi due numeri godono, come è evidente, di alcune, ma non di tutte le proprietà del *volume* nel senso elementare (sopra definito) della parola.

(*) Infatti sia F, p. es., una figura piana somma di due figure F_1, F_2 senza punti interni comuni. Tra i poligoni p interni ad F vi sono quelli (ad uno o più pezzi), che sono somma di un poligono p_1 relativo ad F_1, e di un poligono p_2 relativo ad F_2. Quindi il limite *superiore* λ delle aree dei poligoni p vale *almeno* la somma dei limiti superiori λ_1, λ_2 delle aree dei poligoni p_1, p_2, cioè $\lambda \geqq \lambda_1 + \lambda_2$. Sia P_1 un poligono che contiene F_1 all'interno, e P_2 un poligono analogo per F_2; sia π la parte comune. Il poligono $P_1 + P_2 - \pi$ contiene F all'interno, ed è perciò un poligono P relativo ad F. La sua area non supera la somma delle aree dei poligoni P_1, P_2. Perciò, sommando insieme l'area di un poligono P_1 con l'area di un poligono P_2, si trova un numero, che non è inferiore all'area di qualche poligono P relativo alla figura F. Quindi il limite inferiore Λ delle aree dei poligoni P non può superare la somma $\Lambda_1 + \Lambda_2$ dei limiti analoghi per F_1, F_2. Perciò $\Lambda_1 + \Lambda_2 \geqq \Lambda \geqq \lambda \geqq \lambda_1 + \lambda_2$. Poichè $\lambda_1 = \Lambda_1$, $\lambda_2 = \Lambda_2$ per ipotesi, sarà $\Lambda_1 + \Lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = \Lambda = \lambda$, come volevasi provare.

(**) È noto che, se π è il piano della figura F, allora C è il luogo dei punti posti da una stessa banda di π, i quali distino da π non più di h, e che abbiano per proiezione su π un punto di F.

e *minore* dei volumi dei prismi di uguale altezza h e aventi per base un poligono P (prismi contenenti C). I volumi di tali prismi sono dati dal prodotto di h rispettivamente per l'area della base p e P. Quindi, con le notazioni precedenti, il volume di C sarà non minore di λh e non maggiore di Λh. Se la base F ha un'area, se cioè $\lambda = \Lambda$, il volume di C sarà $\lambda h = \Lambda h$, cioè sarà dato dal *prodotto dell'area della base per la misura dell'altezza*. Noi considereremo nel seguito soltanto cilindri la cui base ha un'area. Diremo *pluricilindro* un solido, che si possa decomporre in un numero finito di cilindri, e suo volume la somma dei volumi dei cilindri parziali.

Ecco una proprietà delle aree, che vale anche per le aree esterna ed interna. *Se i punti comuni a due figure piane* F_1, F_2 *formano un segmento rettilineo* r, *ed* F_1, F_2 *giacciono da bande opposte rispetto ad* r, *l'area esterna* (interna) *della figura* $F = F_1 + F_2$ *vale la somma delle aree esterne* (interne) *delle* F_1, F_2.

Per l'area interna si osservi che un poligono p tutto interno ad F è diviso da r in due poligoni p_1, p_2 interni rispettivamente a F_1, F_2. E viceversa la somma di due tali poligoni p_1, p_2 si può considerare come un poligono p (eventualmente non connesso) interno ad F. Tanto basta per asserire che il limite superiore dell'area dei p (area interna di F) vale la somma dei limiti superiori delle aree dei p_1, p_2 (cioè delle aree interne di F_1, F_2).

Una dimostrazione analoga vale per le aree esterne. Si osservi a tal fine che l'area esterna di F_i (per $i = 1,2$) si può definire come il limite inferiore delle aree dei poligoni P_i contenenti F_i all'interno e posti rispetto ad r dalla stessa banda di F_i. Per tali poligoni P_1, P_2 e per i poligoni P contenenti F all'interno si possono svolgere considerazioni analoghe alle precedenti relative a p, p_1, p_2.

Osservazioni critiche.

Il concetto intuitivo di *dominio* si può precisare nel modo seguente, in cui per brevità ci riferiremo a *dominii* piani (cfr. la prima nota a piè di pag. 21).

Sia C una classe di punti. Sia A un punto di questa classe. Noi diremo che esso è *interno* a C, se esiste un cerchio di centro A, i cui punti appartengono tutti a C; diremo che un punto B non appartenente a C è *esterno* a C, se esiste un cerchio di centro B, nessun punto del quale appartiene a C.

Diremo che un punto L del piano appartiene al *contorno* di C, se in ogni cerchio di centro L esistono sia punti che appartengono, sia punti che non appartengono a C.

Diremo che una classe C di punti del piano è un *dominio* se:

α) Ogni punto di C o è interno a C, o appartiene al contorno di C.

β) Ogni punto che non appartiene a C è esterno a C.

γ) Esiste almeno un punto interno a C.

Diremo che il dominio è *connesso*, se, scelti ad arbitrio due suoi punti interni E, F si può trovare un numero finito di cerchi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ tali che:

α) Due cerchi consecutivi hanno infiniti punti comuni (cioè le loro periferie si incontrano in due punti).

β) Il primo cerchio contiene E, l'ultimo contiene F.

γ) I punti di ogni cerchio sono tutti *interni* a C.

I poligoni, i cerchi, ecc. della geom. elementare sono dominii connessi; l'insieme di due cerchi esterni l'uno all'altro è un dominio non connesso. Le precedenti definizioni si possono porre per ogni dominio connesso.

I poligoni p saranno quei poligoni, i cui punti (esclusi al più i punti del perimetro) sono tutti punti *interni* al dominio considerato. I poligoni P saranno quei poligoni che contengono ogni punto interno o posto sul contorno del dominio considerato. La differenza di due poligoni P, p è un poligono (dominio limitato da segmenti) che contiene tra i suoi punti tutti i punti del contorno del dominio dato. Il dominio dato avrà un'area, se esisterà almeno un poligono P (ciò che si esprime dicendo che il dominio dato è finito) e se le aree dei poligoni P, p formeranno due classi contigue. Ciò avviene soltanto quando i poligoni che contengono tutti i punti del suo contorno hanno aree, il cui limite inferiore è nullo.

CAPITOLO III.

I NUMERI COMPLESSI

§ 8. — Coordinate di un punto nel piano.

Assai spesso avviene che si voglia determinare con numeri la posizione di un punto sopra una superficie. Così, p. es., la posizione di un punto M sulla superficie terrestre si determina assegnandone la longitudine e la latitudine, che si potranno chiamare le coordinate di M.

La posizione di un punto M, posto sul pavimento di una stanza poligonale, si può determinare assegnandone le distanze da due pareti concorrenti, ecc.

α) Vogliamo vedere come si possa, mediante una coppia di numeri, determinare la posizione di un punto M su un piano assegnato.

Molteplici metodi possono servire a tale scopo: il più semplice è quello delle cosidette coordinate cartesiane.

Siano $x'x$ ed $y'y$ due rette distinte (fig. 5) (*assi coordinati*) concorrenti in un punto O (*origine*), su cui sia fissato il verso positivo, p. es. quello da x' ad x e quello da y' ad y. Ad uno dei due assi, generalmente all'asse $x'x$, si dà il nome di asse delle *ascisse*, all'altro asse $y'y$ il nome di asse delle *ordinate*; e si suppone che l'angolo $\omega = (xy)$ sia congruo ad un angolo positivo minore di 180°. Per determinare la posizione M di un punto del piano, basterà determinare la posizione dei punti P, Q, intersezioni degli assi con le parallele agli assi stessi

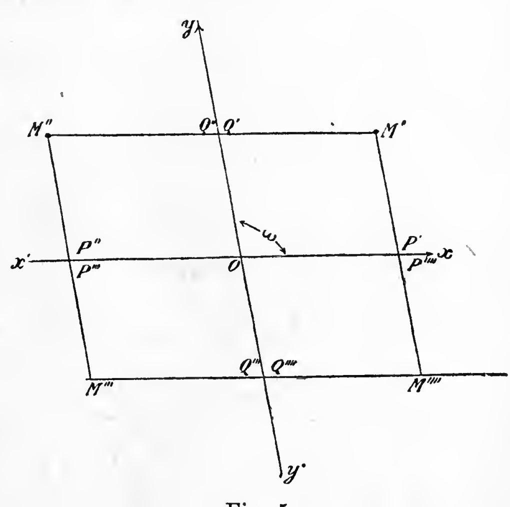


Fig. 5.

tirate da M, ossia dare le misure dei segmenti OP, OQ in valore assoluto e in segno. Queste misure, che si dicono le coordinate di M, si indicano rispettivamente con x, y ed hanno ricevuto il nome di *ascissa* e di *ordinata* del punto M.

Viceversa è ben chiaro che, scelti due numeri qualunque a, b, esiste uno ed un solo punto del piano il quale abbia a per *ascissa* e b per *ordinata*. Infatti si costruiscano il punto P ed il punto Q sui due assi, in guisa che sia in valor assoluto ed in segno $OP = a$, $OQ = b$; il punto M d'incontro delle parallele tirate da P, Q rispettivamente alla rette Oy, Ox è il punto cercato.

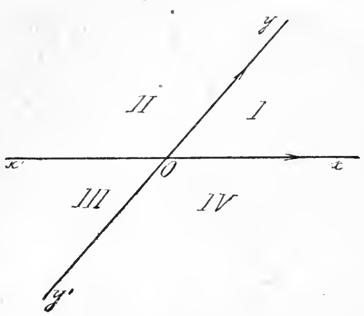


Fig. 6.

I raggi Ox, Oy, Ox', Oy' dividono il piano in 4 regioni, che portano rispettivamente i nomi di I, II, III, IV quadrante (fig. 6). Un punto del I quadrante ha positive entrambe le coordinate; un punto del II quadrante ha positiva l'ordinata, negativa l'ascissa; un punto del III ha negative entrambe le coordinate; un punto del IV ha positiva l'ascissa, negativa l'ordinata.

I punti della retta $x'x$ hanno nulla l'ordinata, quelli della $y'y$ hanno nulla l'ascissa, l'origine O ha nulle entrambe le coordinate.

Sono poi vere le proposizioni reciproche.

Se l'angolo $\omega = (x, y)$ è retto, come supporremo quasi sempre, gli assi si dicono cartesiani ortogonali. In tal caso i valori assoluti delle coordinate di M sono uguali alle distanze di M dai due assi.

β) Supposti gli assi ortogonali, siano M' ed M'' due punti di coordinate x', y' ed x'', y''. Siano P', P'' le proiezioni di M', M'' su $x'x$; e Q', Q'' le proiezioni di M', M'' su $y'y$. Il segmento PQ è evidentemente l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, i cui cateti sono paralleli agli assi, e sono rispettivamente uguali a $P'P''$ ed a $Q'Q''$. La misura di questi cateti è perciò $x'' - x'$ e $y'' - y'$; per il teor. di Pitagora dunque:

$$PQ^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2.$$

In particolare la distanza OP dall'origine al punto P di coordinate (x, y) è data dalla $OP^2 = x^2 + y^2$.

γ) La posizione di un punto P in un piano si può individuare anche mediante un altro sistema di coordinate: il sistema delle coordinate polari. Si scelgano ad arbitrio nel piano un punto O e un raggio Ox uscente da O. Si assumano poi come coordinate di un punto P del piano la distanza OP (considerata come positiva), a cui si dà il nome di *raggio vettore*, e l'angolo dei raggi Ox, OP, a cui si dà il nome di *anomalia* (fig. 7). Il primo s'indica generalmente con ρ, la seconda con θ. Le coordinate cartesiane x, y di P, quando si assumano come assi coordinati la retta Ox e la retta normale Oy (tale che l'angolo xy sia retto), sono le proiezioni di OP sopra Ox ed Oy; cosicchè si ha:

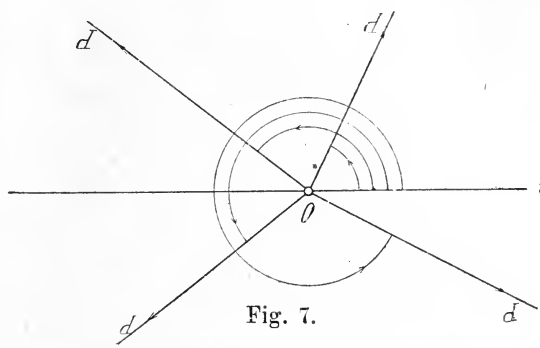


Fig. 7.

$$x = \rho \cos (x \rho) = \rho \cos \theta \,;$$

$$y = \rho \cos (y \rho) = \rho \cos (yx + x \rho) = \rho \operatorname{sen} (x \rho) = \rho \operatorname{sen} \theta.$$

Per il punto O (origine) si ha $\rho = 0$, mentre θ è indeterminato.

Per tutti gli altri punti θ è determinato a meno di multipli di 360°, ossia di $2\,\pi$ radianti.

Dalle precedenti formole si trae anche:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\rho}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{\rho},$$

(dove il radicale si considera come positivo); queste formole servono a trovare ρ e θ quando siano date x, y.

Questi metodi si possono perfezionare ed estendere allo spazio; è però ufficio della geometria analitica svolgere la teoria delle coordinate, e dimostrarne le importantissime applicazioni. Noi, nel seguito di questo libro, supporremo noti al lettore i principî fondamentali di questa scienza.

§ 9. — **Definizione di numero complesso e delle operazioni sui numeri complessi.**

α) Nell'aritmetica e nell'algebra elementare si è man mano esteso il concetto di numero, introducendo dopo i numeri interi positivi i numeri fratti, i numeri irrazionali, i numeri negativi.

Con questi successivi ampliamenti si era risoluto completamente il problema della misura delle grandezze (cfr. i Cap. 1° e 2°), si era resa possibile ogni sottrazione, ogni divisione per un numero non nullo, ogni estrazione di radice da un numero positivo, ecc.

Mentre si è così ampliato assai il campo delle operazioni eseguibili, sono rimaste alcune operazioni che non sono eseguibili, nonostante l'avvenuto ampliamento del concetto di numero: l'estrazione di radice di indice pari da un numero negativo, la determinazione del logaritmo di un numero negativo, ecc. A questo inconveniente si ripara estendendo ancora il concetto di numero. I nuovi numeri che noi introdurremo, sono però completamente inutili per il problema della misura delle grandezze, il quale è già stato completamente risoluto dai numeri già noti dalle matematiche elementari e che noi abbiamo chiamato numeri reali.

Noi diremo numero *complesso*, ed indicheremo con (a, b) una coppia di numeri reali a, b, che si seguano nell'ordine ora scritto.

Due numeri complessi (a, b) ed (a', b') si diranno uguali allora soltanto che $a = a'$, $b = b'$.

Il numero complesso $(a, 0)$ s'intenderà come uguale al numero reale a (*).

Il numero complesso $(0, b)$ si dirà puramente immaginario e s'indicherà con ib, indicando poi col solo simbolo i il numero $(0, 1)$, che chiameremo l'unità immaginaria.

Due numeri (a, b) ed $(a, -b)$ si diranno *complessi coniugati*.

Somma dei numeri complessi (a, b), (a', b') *si chiamerà il numero complesso* (a + a', b + b'); questa definizione non contrasta con quella adottata per i numeri reali. Infatti, se (a, b) e (a', b') sono reali, ossia se $b = b' = 0$, la loro somma (nel senso testè definito) è proprio uguale ad $(a + a', 0)$, cioè ad $a + a'$. Si potrà perciò porre $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ ed in particolare $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + ib$. Perciò di solito il numero complesso (a, b) si indica con $a + ib$.

La nostra definizione di somma di due numeri complessi si può quindi anche enunciare nel modo seguente: la somma dei numeri $a + ib$, $a' + ib'$ uguaglia $(a + a') + i(b + b')$.

La somma di due numeri $a + ib$, $a - ib$ immaginari coniugati è il numero reale $2a$.

(*) Ciò equivale a convenire che un numero reale a si possa indicare col nuovo simbolo (a, o); convenzione ben lecita, perchè (a, o) è un simbolo affatto nuovo.

In generale, se $a_1 + ib_1$, $a_2 + ib_2$, ..., $a_n + ib_n$ sono n numeri complessi, noi diremo che

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n) + i\,(b_1 + b_2 + ... + b_n)$$

è la loro somma.

Così pure si chiamerà differenza dei due numeri complessi $a + ib$, $a' + ib'$ quel numero $(a - a') + i\,(b - b')$ che, sommato con $a' + ib'$, riproduce il numero $a + ib$.

È ben evidente da quanto precede che per la somma e la sottrazione di uno o più numeri complessi valgono le ordinarie regole del calcolo algebrico.

Porremo, per definizione, uguale a -1 *il prodotto di* i *per* i, *ossia il quadrato di* i *ed uguale ad* ia *il prodotto di* i *per il numero reale* a (*).

Prodotto di due numeri complessi a + ib, c + id *si chiamerà il numero che si ottiene facendo la moltiplicazione con le abituali regole dell'algebra.*

Si avrà così *per definizione:*

$$(a + ib)\,(c + id) = ac + ibc + ida + i^2bd\,;$$

ossia, poichè per definizione $i^2 = -1$,

$$(a + ib)\,(c + id) = (ac - bd) + i\,(bc + ad).$$

Se $b = d = 0$, il prodotto così definito coincide proprio con ac; la nostra definizione non è dunque contraddittoria con la definizione dell'algebra elementare. E, se $b = 0$, e $c + id = i$ (se è cioè $c = 0$, $d = 1$), tale prodotto di i per il numero reale a si riduce appunto ad ia, come richiede anche la convenzione preliminare.

Si noti che il prodotto di due numeri $a + ib$, $a - ib$ immaginari coniugati vale $a^2 + b^2$, ed è perciò sempre reale positivo (nullo soltanto se $a = b = 0$).

Prodotto di tre numeri complessi è per definizione il prodotto che si ottiene moltiplicando il prodotto dei primi due fattori per il terzo: facilmente si estende la definizione al prodotto di n fattori.

Si dimostra facilmente:

1° Il prodotto di più numeri complessi è indipendente dall'ordine dei fattori.

(*) Che ciò sia logicamente lecito è ben evidente. Per es. *il prodotto di* i *per* i è una frase nuova, che per la prima volta incontriamo. Siamo padroni di darle quel significato che più ci piace, così come siamo padroni di introdurre un nuovo vocabolo nella lingua italiana, dandogli un significato a nostro arbitrio.

2° Il prodotto di un numero complesso N per la somma S di più numeri complessi è uguale alla somma dei prodotti di N per ciascuno degli addendi di S.

3° Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ e $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sono più numeri complessi, il prodotto $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$ si ottiene moltiplicando il prodotto $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m$ per il prodotto $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$.

Valgono cioè anche per la moltiplicazione dei numeri complessi le regole del calcolo algebrico elementare.

Quoziente dei numeri a + ib, c + id *si dirà quel numero* x + iy *il cui prodotto con* c + id *riproduce il numero* a + ib *quando* x + iy *esista e sia determinato.*

I numeri x ed y sono perciò definiti dalle equazioni $\left\{\begin{array}{l} xc - yd = a \\ xd + yc = b \end{array}\right\}$, le quali determinano x ed y soltanto se $c^2 + d^2$ è differente da zero (*), ossia se c e d non sono entrambe nulli, ossia se il divisore $c + id$ è differente da zero; questa limitazione (che il divisore sia differente da zero) è la stessa che si presenta nel campo dei numeri reali.

β) I numeri reali si rappresentano coi punti di una retta, i numeri complessi $a + ib$ si rappresentano assai spesso coi punti di un piano, ove sia fissato un sistema di coordinate x, y cartesiane ortogonali (figura 8): il punto A, che ha per ascissa a e per ordinata b, si assume come immagine del numero $a + ib$. Se O è l'origine delle coordinate cartesiane, se indicansi con ρ e θ le coordinate $\rho = OA$ e $\theta = (x, \rho)$ polari di A, sarà:

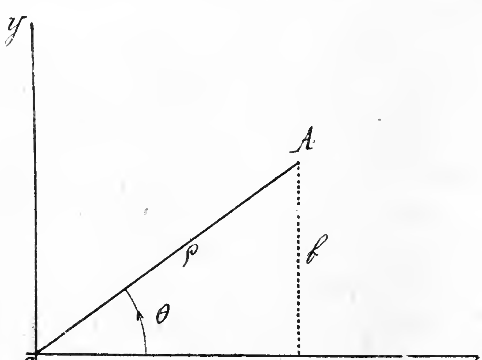


Fig. 8.

$$a = \rho \cos\theta,\ b = \rho \operatorname{sen}\theta,\ \rho = \left| \sqrt{a^2 + b^2} \right|,\ \cos\theta = \frac{a}{\rho},$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho},\ \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a};\ \text{e quindi}\ a + ib = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

(*) Risolvendo, si trova infatti

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Se $c^2 + d^2 = 0$, ossia se $c = d = 0$, allora dovrebbe essere anche $a = b = 0$. E in tal caso le x, y sono indeterminate.

I numeri ρ e θ si dicono rispettivamente *il modulo* e *l'argomento* di $a + ib$.

Se $a + ib = 0$, allora soltanto è anche $\rho = 0$ e l'argomento θ è completamente indeterminato; il modulo di ogni altro numero $a + ib$ è positivo e l'argomento è determinato a meno di multipli di 2π. L'argomento di un numero reale vale *zero* oppure π, secondo che il numero è positivo, o negativo. Il suo modulo coincide col valore assoluto. Pertanto, per ragioni di analogia, se z è un qualsiasi numero anche complesso, con $|z|$ se ne indica il modulo.

Due numeri immaginari coniugati hanno lo stesso modulo ed hanno argomenti uguali, ma di segno opposto.

Il prodotto di due numeri complessi

$$\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta), \quad \rho'(\cos\theta' + i\operatorname{sen}\theta')$$

uguaglia:

$$\rho\rho'(\cos\theta\cos\theta' - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta') + i\,\rho\rho'(\cos\theta\operatorname{sen}\theta' + \operatorname{sen}\theta\cos\theta') =$$
$$= \rho\rho' \{ \cos(\theta + \theta') + i\operatorname{sen}(\theta + \theta') \}.$$

Se ne deduce facilmente che:

Il prodotto di due o più numeri complessi ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti.

Ne segue che: *Il quoziente di due numeri complessi* (di cui il divisore sia differente da zero), *ha per modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti.*

γ) Siano $a_1 + ib_1$, $a_2 + ib_2$ due numeri complessi, ne siano A_1, A_2 i punti immagine, sia A_3 il quarto vertice del parallelogramma di cui A_1, A_2 sono vertici opposti e l'origine O è un terzo vertice; dico che A_3 è il punto immagine del numero somma dei numeri $a_1 + ib_1$, $a_2 + ib_2$ (fig. 9) (*). Infatti l'ascissa di A_3 uguaglia la proiezione di OA_3 sopra Ox, ossia la somma delle proiezioni di

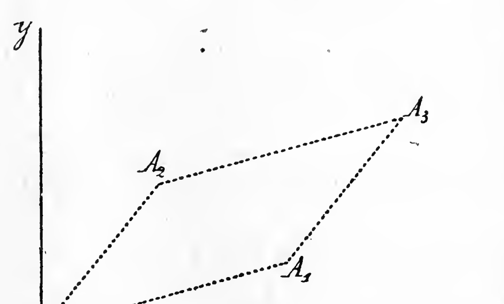


Fig. 9.

(*) Se noi consideriamo un numero complesso come definente la forza rappresentata dal segmento che congiunge l'origine O al punto A immagine del numero complesso, si deduce dall'enunciato del testo che l'operazione di *somma* di due numeri complessi corrisponde a trovare la *risultante* delle due forze corrispondenti. Come i numeri reali x servono a misurare le forze uscenti da un punto e

OA_1, A_1A_3. Poichè OA_2 ed A_1A_3 sono segmenti uguali ed ugualmente orientati, la proiezione di A_1A_3 è uguale a quella di OA_2; e quindi l'ascissa di A_3 uguaglia la somma delle proiezioni di OA_1, OA_2 sopra Ox, ossia la somma $a_1 + a_2$ delle ascisse a_1, a_2 di A_1, A_2: in modo simile si prova che l'ordinata di A_3 è $b_1 + b_2$.

Il lato OA_3 del triangolo OA_1A_3 è minore od uguale alla somma $OA_1 + A_1A_3$ (l'uguaglianza avviene solo se il punto A_1 appartiene al segmento OA_3). Ma poichè $A_1A_3 = OA_2$ ed i segmenti OA_1, OA_2, OA_3 sono i moduli dei numeri complessi dati e della loro somma, avremo che: *Il modulo della somma di due (o più) numeri non supera la somma dei moduli, non è inferiore alla differenza dei moduli.* Questo teorema è la generalizzazione di un teorema già dato per i numeri reali.

δ) Se n è un intero positivo, con x^n indicheremo, anche se x è complesso, il prodotto di n fattori uguali ad x (ponendo poi $x^0 = 1$ se $x \neq 0$, e $x^1 = x$) e con x^{-n} il quoziente $\frac{1}{x^n}$ (se $x \neq 0$). *Se* m *è intero, il modulo di* x^{m} *vale* $|\mathrm{x}|^{\mathrm{m}}$ (cioè il modulo della x innalzato alla m^{esima} potenza); *e l'argomento di* x^{m} *vale il prodotto di* m *per l'argomento della* x.

Sia $P(z)$ un polinomio nella z e precisamente

$$P(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_m z^m \quad \text{(le } b \text{ numeri } \textit{non tutti nulli}\text{)}.$$

Sia b_h la prima delle b differente da zero. Sarà

$$P(z) = 1 + b_h z^h + [b_h z^h]\, z \left(\frac{b_{h+1}}{b_h} + \frac{b_{h+2}}{b_h} z + \dots + \frac{b_m}{b_h} z^{m-h-1} \right).$$

Sia A la massima delle $\left|\frac{b_{h+1}}{b_h}\right|$, $\left|\frac{b_{h+2}}{b_h}\right|$, ..., $\left|\frac{b_m}{b_h}\right|$. Siano r, θ modulo e argomento di b_h, e siano ρ, δ modulo e argomento della z. Sarà

$$b_h z^h = r \rho^h \left\{ \cos(\theta + h\delta) + i \operatorname{sen}(\theta + h\delta) \right\},$$

cosicchè $b_h z^h$ sarà un numero reale negativo, se $\theta + h\delta = \pi$, cioè se $\delta = \frac{\pi - \theta}{h}$.

Sarà in tale ipotesi

$$|P(z)| \leq |1 + b_h z^h| + |b_h z^h|\,|z| \left| \frac{b_{h+1}}{b_h} + \frac{b_{h+2}}{b_h} z + \dots + \frac{b_m}{b_h} z^{m-h-1} \right|$$

$$|P(z)| \leq |1 - r\rho^h| + r\rho^{h+1} A (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m-h-1})$$

$$|P(z)| \leq |1 - r\rho^h| + A r \frac{\rho^{h+1}(1 - \rho^{m-h})}{1 - \rho}.$$

---

aventi la direzione dell'asse delle x (in un verso o nell'altro), così i numeri complessi $x + iy$ possono servire a definire (e potremmo forse dire, ampliando il significato della parola, a misurare) le forze uscenti da un punto O e poste nel piano xy, in guisa che alla forza *risultante* di due o più forze date corrisponda il numero complesso *somma* dei numeri complessi corrispondenti alle singole forze componenti. I numeri complessi trovano importantissime applicazioni nello studio delle correnti alternate: p. es. alle estensioni delle leggi di Ohm e di Kirchhoff.

Supponiamo ρ così piccolo che

$$r\rho^h < 1 \qquad \text{cosicchè } 1 - r\rho^h \text{ è positivo}$$
$$\rho < 1 \qquad \text{cosicchè } 1 - \rho^{m-h} \text{ è minore di } 1$$
$$\frac{A\rho}{1-\rho} < 1 \qquad \text{cosicchè } r\rho^h > Ar\frac{\rho^{h+1}}{1-\rho}.$$

Da (1) si dedurrà

$$P(z) \leq 1 - r\rho^h + Ar\frac{\rho^{h+1}(1-\rho^{m-h})}{1-\rho} < 1 - r\rho^h + Ar\frac{\rho^{h+1}}{1-\rho} < 1.$$

Possiamo dunque dare alla z un valore tale che $|P(z)| < 1$.
Moltiplicando $P(z)$ per un numero $k \neq 0$, e mutando z in $z-\alpha$ si trova:
Se un polinomio P (z) *ha per* z $= \alpha$ *un valore* k $\neq 0$, *esiste qualche valore di* z *per cui il polinomio assume un valore, che in modulo è minore di* $|P(\alpha)|$.

Senza parlare delle potenze più generali (ad esponente fratto, irrazionale o anche complesso) noi parleremo ancora soltanto di $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ per $n > 1$ intero positivo. Con tale simbolo noi indicheremo ogni numero complesso, la cui n^{esima} potenza sia uguale ad x.

Siano ρ, θ il modulo e l'argomento della x; cosicchè $x = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. Siano analogamente r, δ modulo e argomento di $\sqrt[n]{x}$. Per definizione

$$\{r(\cos\delta + i \operatorname{sen}\delta)\}^n = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

ossia:

$$r^n(\cos n\delta + i \operatorname{sen} n\delta) = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Cosicchè $r^n = \rho$, ed $n\delta$ differisce da θ per un multiplo di 2π. Cioè *il modulo* r *di* $\sqrt[n]{x}$ *uguaglia il valore* (aritmetico) *della radice* n^{esima} *del modulo* ρ *della* x. *E l'argomento* δ *di* $\sqrt[n]{x}$ *vale* $\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, *dove* θ *è l'anomalia della* x *e* k *è un intero.*

Così avremo:

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\rho}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right\} = \sqrt[n]{\rho}\left\{\cos\frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right\}\varepsilon_k$$

dove si è posto:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}.$$

Ora al variare di k (k = intero) quanti valori può ricevere la quantità ε_k qui definita?

Si osservi che, se h e k sono due numeri interi, sarà $\varepsilon_k = \varepsilon_h$ allora ed allora soltanto che:

$$\cos\frac{2h\pi}{n} = \cos\frac{2k\pi}{n}, \qquad \operatorname{sen}\frac{2h\pi}{n} = \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n};$$

il che accade solo quando $\frac{2k\pi}{n}$ e $\frac{2h\pi}{n}$ differiscono per un multiplo di 2π,

$$\left(\frac{2k\pi}{n} - \frac{2h\pi}{n} = \text{multiplo di } 2\pi\right),$$

ossia quando:

$$k - h = \text{multiplo di } n;$$

e però, dando a k gli n valori $0, 1, 2, \ldots\ldots, n-2, n-1$, si otterranno radici distinte, mentre i valori $n, n+1, \ldots\ldots, 2n-1$ di k riprodurranno le stesse radici nello stesso ordine, e così via periodicamente. Del pari, dando a k i valori $-1, -2, \ldots\ldots, -n$, si riprodurranno le stesse radici in ordine inverso, e così via periodicamente.

Dunque: *Un numero reale o complesso ha* n *radici* n$^{\text{esime}}$ *fra reali e complesse, che si ottengono moltiplicando una di esse per ciascuno dei numeri* ε_k, *ossia per ciascuna delle radici* n$^{\text{esime}}$ *di* 1. Infatti supponendo $x = 1$, cioè $\rho = 1$ e $\theta = 0$, $x^{\frac{1}{n}}$ si riduce ad ε_k.

La formola che ci dà i numeri ε_k, ossia le n radici n^{esime} dell'unità, è

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n},$$

dove basta dare a k gli n valori $0, 1, 2, \ldots\ldots, n-1$.

Questa formola mostra che i punti corrispondenti alle n radici n^{esime} dell'unità sono distribuiti sulla circonferenza avente l'origine per centro e per raggio l'unità, e dividono la circonferenza in n parti eguali; vale a dire tali punti sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in essa.

Basta infatti osservare che i numeri $\varepsilon_0 = \varepsilon_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_{n-1}$ hanno tutti per modulo l'unità, e che l'argomento di uno qualunque di essi differisce dall'argomento del suo successivo per un angolo uguale a $\frac{2\pi}{n}$ radianti, cioè all'n^{esima} parte di $360°$ (2π radianti).

Per esempio, i valori di $\sqrt[3]{1}$ sono:

$$1, \qquad \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\eta = \cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

È evidente che η è immaginario coniugato di ε e che

$$\frac{1}{\eta^2} = \eta = \varepsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon}.$$

E si può anche provare geometricamente che il punto di ascissa $x = 1$ e ordinata $y = 0$, il punto $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e il punto $x = -\frac{1}{2}$ ed $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sono i tre vertici di un triangolo equilatero inscritto nel cerchio col centro nell'origine e raggio 1.

Negli esercizi calcoleremo per via puramente algebrica le ε per i casi $n = 3, 4, 5$ (es. 33 a pag. 61).

Oss. È appena necessario ricordare che da tutto questo si deduce in particolare che, nel campo dei numeri complessi, si può estrarre la radice quadrata anche da un numero negativo $n = -|n|$ e che tale radice quadrata ha i valori $\pm i\sqrt{|n|}$.

Non ci occuperemo per ora delle potenze il cui esponente è un numero complesso, nè della estensione della teoria dei logaritmi ai numeri negativi o complessi.

§ 10. — **Equazioni di 2°, 3° e 4° grado.**

Le formole (equivalenti) ben note

$$x = -\frac{p}{4} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad \Bigg| \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

che dànno le radici di un'equazione di secondo grado

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \Bigg| \qquad \begin{matrix} ax^2 + bx + c = 0 \\ (a \neq 0) \end{matrix}$$

acquistano significato generale (anche se $\frac{p^2}{4} - q$ o $b^2 - 4ac$

sono negativi) nel campo dei numeri complessi. Se x_1, x_2 sono tali radici è noto che valgono le identità:

$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
$x_1 + x_2 = -p$	$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$
$x_1 x_2 = q$	$x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$

La teoria dei numeri complessi permette di risolvere in generale anche le equazioni di terzo e quarto grado. Noi, come esempio e più che altro a titolo di utile esercitazione, ci occuperemo qui delle equazioni di terzo grado, riassumendo nel modo più rapido uno dei metodi di risoluzione delle equazioni di quarto grado.

Sia data l'equazione di terzo grado

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0.$$

Posto $x = y - \dfrac{a_1}{3}$, l'equazione si trasforma in un'equazione del tipo:

$$y^3 + py + q = 0;$$

la quale, posto $y = u + v$, diventa

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0,$$

cosicchè, se poniamo inoltre $uv = -\dfrac{p}{3}$ (*), la nostra equazione si riduce alla

$$u^3 + v^3 = -q.$$

Ma è pure $u^3 v^3 = -\dfrac{p^3}{27}$; e quindi u^3, v^3 sono le radici dell'equazione:

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

ossia:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

(*) Ciò è lecito; perchè dei numeri u, v è finora soltanto prefissata la somma y; e quindi si può anche scegliere ad arbitrio il valore del prodotto uv.

Estraendo le radici cubiche, si traggono i valori di u, v e si trova:

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Ciascuna di queste radici cubiche ha tre valori; scelto, p. es., per la prima uno di essi arbitrariamente tra i tre possibili, il valore da darsi alla seconda radice cubica è completamente determinato da ciò che il prodotto delle due radici cubiche (ossia uv) deve uguagliare $-\frac{p}{3}$.

Siano a, b due valori dei nostri radicali, il cui prodotto uguaglia $-\frac{p}{3}$. Se $\varepsilon \neq 1$ è una radice cubica di $+1$, la terza radice cubica di 1 sarà (come si è visto al § 9) $\frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon^2$. I tre valori del primo radicale saranno: $a, \varepsilon a, \varepsilon^2 a$; i valori corrispondenti del secondo saranno $b, \varepsilon^2 b, \varepsilon b$, quindi la nostra equazione avrà le tre radici $a + b$, $\varepsilon a + \varepsilon^2 b$, $\varepsilon^2 a + \varepsilon b$ generalmente distinte. Se $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, allora posso supporre chiaramente (*) $a = b$, e delle tre radici almeno le seconde due sono uguali tra loro.

Siano p, q reali; se $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ posso supporre a, b reali; delle tre radici, una è quindi reale, le altre due immaginarie coniugate. Invece, se $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ [per il che è necessario che $\frac{p^3}{27}$ sia minore di $-\frac{q^2}{4}$, e quindi che p sia negativo ($p = -|p|$)], le radici sono tutte e tre reali, nonostante che $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ sia immaginario, come ora proveremo. Posto:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -r^2 \qquad (r \text{ reale}),$$

la nostra formola diventa:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + ir} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - ir}.$$

(*) Almeno, se p, q sono reali. Il lettore esamini il caso generale.

Si scriva ciascuno dei due radicandi sotto forma trigonometrica, ponendo:

$$\rho^2 = \frac{q^2}{4} + r^2 = -\frac{p^3}{27}, \qquad \cos\theta = -\frac{q}{2\rho}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{r}{\rho};$$

si avrà:

$$y = \sqrt[3]{\rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)} + \sqrt[3]{\rho(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)}.$$

I tre valori della prima radice cubica sono:

$$\sqrt[3]{\rho}\left\{\cos\frac{\theta}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}\right\}, \quad \sqrt[3]{\rho}\left\{\cos\frac{\theta+2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\theta+2\pi}{3}\right\},$$

$$\sqrt[3]{\rho}\left\{\cos\frac{\theta+4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\theta+4\pi}{3}\right\}.$$

I tre valori della seconda radice cubica sono:

$$\sqrt[3]{\rho}\left\{\cos\frac{\theta}{3} - i\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}\right\}, \quad \sqrt[3]{\rho}\left\{\cos\frac{\theta+2\pi}{3} - i\operatorname{sen}\frac{\theta+2\pi}{3}\right\},$$

$$\sqrt[3]{\rho}\left\{\cos\frac{\theta+4\pi}{3} - i\operatorname{sen}\frac{\theta+4\pi}{3}\right\}.$$

Si osservi che ogni valore di y si ottiene sommando un valore del primo radicale con un valore del secondo, scelti in guisa che il loro prodotto sia reale. Si avranno dunque le tre radici:

$$y_1 = \sqrt[3]{\rho}\left\{\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}\right) + \left(\cos\frac{\theta}{3} - i\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}\right)\right\} = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta}{3}$$

$$y_2 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta+2\pi}{3}; \qquad y_3 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta+4\pi}{3},$$

dove:

$$\sqrt[3]{\rho} = \sqrt{-\frac{p}{3}} = \sqrt{\frac{|p|}{3}} \text{ (perchè } p \text{ dev'essere negativo).}$$

Queste formole si possono dedurre per via elementare.

Infatti, posto $z = \dfrac{y}{2\sqrt[3]{\rho}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{y}{\sqrt{-p}}$, l'equazione diventa:

$$-4\frac{2p\sqrt{-p}}{3\sqrt{3}}z^3 + 2p\frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{3}}z + q = 0 \text{ ossia:}$$

$$4z^3 - 3z - q\frac{3\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}} = 0.$$

Ora dalla $\cos\theta = \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{\theta}{3} + \frac{\theta}{3}\right)$ si deduce:

$$\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}\,.$$

Mutando θ in $\theta + 2k\pi$ (dove k è un intero), si trova:

$$4\cos^3\frac{\theta + 2k\pi}{3} - 3\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} - \cos\theta = 0$$

che si riduce alla precedente equazione quando si ponga:

$$z = \cos\frac{\theta + 2k\pi}{3}\,;\quad \cos\theta = \frac{3\sqrt{3}\,q}{2p\sqrt{-p}} = -\frac{3\sqrt{3}\,q}{2\,|p|\sqrt{|p|}} = -\frac{q}{2\rho}\,.$$

È facile riconoscere che, se x_1, x_2, x_3 sono le tre radici della nostra equazione, valgono le identità:

$$\begin{aligned} x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ a_1 &= -(x_1 + x_2 + x_3) \\ a_2 &= x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 \\ a_3 &= -x_1 x_2 x_3, \end{aligned}$$

formole che sono affatto analoghe a quelle testè ricordate relative alle equazioni di secondo grado (Cfr. anche il § 14).

Equazioni di quarto grado (*).

Per risolvere l'equazione di quarto grado

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$

si indichino con c_1, c_2, c_3, c_4 le quattro radici (Cfr. il § 14), e si ponga:

$$z_1 = c_1 c_2 + c_3 c_4 \quad ;\ z_2 = c_1 c_3 + c_2 c_4 \quad ;\ z_3 = c_1 c_4 + c_2 c_3.$$

Sia $z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ l'equazione di terzo grado, che ha le radici z_1, z_2, z_3. I coefficienti di questa equazione non cambiano, come è facile verificare, permutando le c ossia sono funzioni *simmetriche* delle c, che si possono subito calcolare quando sono date le a (Cfr. il seg. § 14).

Risolvendo tale equazione di *terzo* grado, si troveranno i valori delle z. Poichè $(c_1 c_2)(c_3 c_4) = a_4$ e $c_1 c_2 + c_3 c_4 = z_1$, delle $c_1 c_2$ e $c_3 c_4$ si conoscono somma e prodotto, e quindi si possono calcolare, risolvendo un'equazione di secondo grado, sia $c_1 c_2$ che $c_3 c_4$. Dalle equazioni (Cfr. il § 14)

$$\begin{aligned} c_1 c_2 (c_3 + c_4) + c_3 c_4 (c_1 + c_2) &= -a_3 \\ (c_3 + c_4) + \qquad (c_1 + c_2) &= -a_1 \end{aligned}$$

si possono poi generalmente ricavare $c_3 + c_4$ e $c_1 + c_2$. Delle c_1, c_2 (come anche delle c_3, c_4) si conosceranno così somma e prodotto; e pertanto si possono dedurre i valori di tutte le c.

(*) Le righe seguenti si potranno studiare soltanto dopo letto il § 14 a pag. 48 e seg.; lo studio delle equazioni di 4° grado trova però ben scarse applicazioni.

CAPITOLO IV.

POLINOMII ED EQUAZIONI ALGEBRICHE

§ 11. — Calcolo combinatorio. Prodotti di binomii e formola del binomio.

α) Ricordiamo rapidamente una ben nota formola di calcolo combinatorio.

Sia $\binom{n}{h}$ il numero delle *combinazioni* di n oggetti ad h ad h, cioè il numero dei modi possibili, in cui possiamo scegliere un gruppo di h elementi tra $n \geqq h$ elementi prefissati. Per $h = 1$ è evidentemente $\binom{n}{1} = n$. Se poi G_{h-1} è un gruppo di $h - 1$ elementi scelti tra i dati, noi potremo dedurne un gruppo G_h di h elementi, aggiungendo a G_{h-1} uno dei residui $n - (h - 1)$ elementi; otteniamo così da ogni G_{h-1} proprio $n - (h - 1)$ gruppi G_h. Operando però in tal modo sui vari G_{h-1}, otteniamo ogni G_h precisamente h volte, perchè ogni G_h contiene h gruppi G_{h-1} Perciò il numero $\binom{n}{h}$ dei G_h è uguale al prodotto di $\frac{n - (h - 1)}{h}$ per il numero $\binom{n}{h-1}$ dei G_{h-1}. Quindi

$$\binom{n}{1} = n = \frac{n}{1};\ \binom{n}{2} = \frac{n-1}{2}\binom{n}{1} = \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2};$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n-2}{3}\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3};\ \text{ecc.}$$

$$\binom{n}{h} = \frac{n(n-1)(n-2) \,.....\, [n-(h-1)]}{\underline{|h}} \qquad (1)$$

che si può scrivere $\binom{n}{h} = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|h}\;\underline{|n-h}}$. Ne risulta in particolare $\binom{n}{h} = \binom{n}{n-h}$ (*).

Il numeratore $n(n-1)(n-2).....(n-h+1)$ della (1) dà il numero delle disposizioni di n oggetti ad h ad h cioè il numero dei modi con cui si possono scegliere ed ordinare h oggetti tra n oggetti dati, quando si considerino come distinti due gruppi, anche se differiscono soltanto per l'ordine in cui si susseguono i dati oggetti. Infatti il primo oggetto di una di tali disposizioni si può scegliere ad arbitrio tra gli n oggetti dati; il secondo si potrà poi scegliere tra i residui $n-1$; scelti i primi due oggetti, il terzo si può scegliere tra i residui $n-2$; e così via; lo h^{esimo} ultimo oggetto della disposizione si può scegliere tra $n-h+1$ oggetti.

Così il denominatore $\underline{|h} = h(h-1)(h-2).....(h-h+1)$ è il numero delle disposizioni di h oggetti ad h ad h, cioè è il numero delle *permutazioni* di h oggetti.

La formola precedente dimostra dunque che, come si può dimostrare direttamente nel modo più semplice, *il numero* $\binom{n}{h}$ *delle combinazioni di* n *oggetti ad* h *ad* h *è uguale al quoziente ottenuto dividendo il numero delle disposizioni di* n *oggetti ad* h *ad* h *per il numero delle permutazioni di* h *oggetti* (**).

β) Siano $x, a_1, a_2, ... a_n$ numeri qualsiasi. Consideriamo il prodotto:

$$(x + a_1)(x + a_2).....(x + a_n).$$

L'algebra elementare insegna che questo prodotto è uguale alla somma di tutti i prodotti P ottenuti moltiplicando tra di loro un addendo del binomio $x + a_1$, un addendo del binomio $x + a_2$, ..., un addendo del binomio $x + a_n$. Tra questi prodotti P ve ne saranno alcuni che non contengono la x (o, come si dice, che contengono il solo fattore x^0), altri che contengono il fattore x e non il fattore x^2, altri che contengono il fattore x^2 e non il fattore x^3, ecc., altri che contengono il fattore x^n. Per formare quelli dei prodotti P, che contengono il fattore x^h e non il fattore x^{h+1} $(0 \leqq h \leqq n)$, si dovrà scegliere in h dei binomii $x + a_1$, $x + a_2$, ..., $x + a_n$ il primo addendo x, e negli altri $n - h$ binomii si dovrà scegliere il secondo addendo, per fare poi il prodotto degli n addendi così scelti. Ognuno di questi prodotti P sarà dunque il prodotto di x^h per un prodotto di $n - h$ fattori scelti tra le n quantità $a_1, a_2, ..., a_n$. La somma di questi prodotti P sarà dunque il prodotto di x^h per la

(*) Questa uguaglianza diventa intuitiva per chi consideri che ogni gruppo di h elementi determina un gruppo di $n-h$ elementi: quello formato con gli $n-h$ elementi residui. E viceversa. Dunque tanti sono i gruppi di h elementi, quanti i gruppi di $n-h$ elementi.

(**) Infatti, permutando nei $\underline{|h}$ modi possibili gli h oggetti di ogni combinazione, si ottengono *tutte* le disposizioni.

somma b_{n-h} di tutti i possibili prodotti ad $n-h$ ad $n-h$ delle n quantità $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Si avrà così:

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)=x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots$$
$$+b_{n-1}x+b_n$$

dove il coefficiente b_k di x^{n-k} $(k=1, 2, \ldots, n)$ è la somma degli $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ prodotti, che si ottengono moltiplicando a k a k in tutti i modi possibili le $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Se $a_1=a_2=\ldots=a_n=a$, questi prodotti sono tutti uguali ad a^k. E perciò:

$$(x+a)^n=x^n+\binom{n}{1}ax^{n-1}+\binom{n}{2}a^2x^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}a^{n-1}x+\binom{n}{n}a^n.$$

Come si riconosce dal teor. di questo § 11 a pag. 43, i coefficienti del 2° membro equidistanti dagli estremi sono uguali tra di loro, ciò che si poteva prevedere *a priori*, osservando che il 1° e quindi anche il 2° membro non mutano scambiando x con a. Se nella formola iniziale poniamo $-a_i$ al posto di a_i troviamo, indicando ancora con b_h la somma degli $\binom{n}{h}=\binom{n}{n-h}$ prodotti ad h ad h delle n quantità $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)=$$
$$x^n-b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+(-1)^hb_hx^{n-h}+\ldots+(-1)^nb_n.$$

§ 12. — Divisione di due polinomii.

Siano $M(x)$, $N(x)$ due polinomii della variabile x, i cui gradi sieno rispettivamente m, n. Sarà:

$$M(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m,$$
$$N(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n,$$

(dove a, b sono costanti).

Dividendo $M(x)$ per $N(x)$ con le regole dell'algebra elementare si troverà un quoziente $Q(x)$ ed un resto $R(x)$, entrambi polinomii nella x.

Il grado di $R(x)$ è inferiore a quello del divisore $N(x)$. E si ha identicamente:

$$M(x)=N(x)\ Q(x)+R(x)\ (*).$$

(*) Il problema di determinare $Q(x)$ ed $R(x)$ è per definizione quello di determinare i due polinomii in guisa che questa uguaglianza sia una identità, e che il

Se $m \geqq n$, Q è un polinomio di grado $m-n$; se $m<n$, allora Q è identicamente nullo ed $R=M$. In particolare, se $m=n$, allora Q è di grado nullo, cioè non dipende da x, o, come si suol dire, è una costante.

Viceversa, se p. es. $m \geqq n$, e se Q ed R sono due polinomii, che soddisfano identicamente alla precedente uguaglianza, se il grado di R non supera quello di N, allora Q è di grado $m-n$ ed i due polinomii Q ed R sono precisamente il quoziente ed il resto che si ottengono dividendo M per N.

(Tutti questi risultati sono una facile estensione dei teoremi analoghi per i numeri intieri).

Se $R(x)=0$, il polinomio $N(x)$ si dice essere un divisore di $M(x)$. In tale caso, se k è una costante qualsiasi non nulla, anche $k\,N(x)$ è un divisore di M perchè si ha:

$$M(x)=k\,N(x)\left[\frac{1}{k}\,Q(x)\right].$$

Ogni polinomio di grado zero si riduce ad una costante k ed è un divisore di $M(x)$, perchè dividendo $M(x)$ per k si ottiene il quoziente $\frac{1}{k}\,M(x)$ ed un resto nullo. I polinomii di grado zero (le costanti) hanno quindi nell'attuale teoria un ufficio analogo a quello che il numero 1 ha nella teoria dei divisori dei numeri intieri.

Se noi applichiamo gli stessi metodi che si adoprano nella aritmetica nello studio dei divisori dei numeri intieri troviamo:

Un polinomio, che sia divisore comune dei due polinomii M (x) *e* N (x) *è un divisore anche del resto ottenuto dividendo* M *per* N; *e viceversa un polinomio che è divisore di questo resto, e divide il polinomio* N (x), *divide anche l'altro polinomio* M (x).

grado di $R(x)$ non superi quello del divisore $N(x)$. Quest'ultima convenzione è necessaria per rendere univocamente determinato il problema.

Si noti che *altre* sono le convenzioni dell'aritmetica. Nell'aritmetica dei numeri fratti (come nell'algebra delle frazioni) non si parla del resto (che si suppone nullo). Nell'aritmetica dei numeri interi positivi si rende univocamente determinata la divisione, imponendo al *resto* di non superare il divisore (così che non si dice mai p. es. che, dividendo 22 per 7, si ha 2 per quoziente, 8 per resto). Così che il risultato ottenuto nella divisione algebrica di due polinomii può contrastare con tale convenzione aritmetica, quando ai coefficienti e alla x si diano particolari valori interi positivi. Il lettore lo può riconoscere, osservando che il quoziente e il resto ottenuti dividendo $x^2+(b-a^2)$ per $x-a$ sono rispettivamente $x+a$ e b; e ponendo p. es. $x=5$, $a=4$, $b=3$.

Dividiamo $M(x)$ per il polinomio $N(x)$, sia $R(x)$ il resto della div.
» $N(x)$ » » » $R(x)$, sia $R_1(x)$ » » » 2ª »
» $R(x)$ » » » $R_1(x)$, sia $R_2(x)$ » » » 3ª »
» $R_1(x)$ » » » $R_2(x)$, sia $R_3(x)$ il resto;

così continuiamo fino a che si trovi un resto nullo; si dimostra (come si dimostra in aritmetica per i numeri intieri) che l'ultimo resto ottenuto differente da zero (lo stesso polinomio $N(x)$ se $R(x) = 0$) è un divisore comune di $M(x)$, $N(x)$ ed è anzi il *M. C. D.* (*) di questi polinomii, perchè ogni divisore comune di M, N è un divisore anche di quest'ultimo resto e viceversa.

Se questo massimo comune divisore è di grado zero (è costante), i due polinomii M, N si dicono primi tra loro.

Se si vogliono cercare i divisori $mx + n$ di primo grado di un polinomio $P(x)$, si osserva che, se $\left[x - \left(-\frac{n}{m}\right)\right] = x - \alpha$ $\left(\text{essendo } \alpha = -\frac{n}{m}\right)$ è un divisore di $P(x)$, anche $mx + n$ è un divisore di $P(x)$ e viceversa.

La ricerca dei divisori di primo grado equivale alla ricerca dei divisori del tipo $x - \alpha$, di cui parleremo nei seguenti paragrafi.

§ 13. — Regola di Ruffini.

Vogliamo dividere il polinomio

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

per $x - \alpha$. Il quoziente sarà un polinomio

$$Q(x) = q_0 x^{n-1} + q\, x^{n-2} + \ldots + q_{n-1}$$

di grado $n - 1$; il resto sarà un polinomio di grado zero, cioè un numero R indipendente da x. Calcoliamo quoziente e resto. Sarà identicamente

$$P(x) = (x - \alpha)\ Q(x) + R.$$

Cioè, confrontando i coefficienti delle varie potenze della x:

$$a_0 = q_0;\ a_1 = q_1 - \alpha q_0;\ a_2 = q_2 - \alpha q_1;\ \ldots;\ a_{n-1} = q_{n-1} - \alpha q_{n-2};\ a_n = R - \alpha q_{n-1}.$$

(*) Tale massimo comun divisore è determinato a meno di un fattore costante.

Le quali formole equivalgono alle seguenti che consentono il più semplice e rapido calcolo dei coefficienti q_i e del resto R:

$$\begin{aligned} q_0 &= a_0 \\ q_1 &= a_1 + \alpha\, q_0 \\ q_2 &= a_2 + \alpha\, q_1 \\ &\ldots\ldots \\ q^s &= a_s + \alpha\, q_{s-1} \\ &\ldots\ldots \\ q_{n-1} &= a_{n-1} + \alpha\, q_{n-2} \\ R &= a_n + \alpha\, q_{n-1}. \end{aligned}$$

Cioè: *I primi coefficienti* a_0, q_0 *sono uguali; e per* $s \geqq 1$ *ogni* q_s *è uguale al coefficiente omologo* a_s *aumentato dal prodotto di* α *per il precedente coefficiente* q_{s-1}. *Posto* $R = q_n$, *questa proposizione è vera anche per* $s = n$.

Le precedenti formole dimostrano che:

$$q_0 = a_0 \quad ; \quad q_1 = a_0\,\alpha + a_1 \quad ; \quad q_2 = a_0\,\alpha^2 + a_1\,\alpha + a_2$$
$$q_s = a_0\,\alpha^s + a_1\,\alpha^{s-1} + \ldots\ldots + a_{s-1}\,\alpha + a_s$$
$$R = q_n = a_0\,\alpha^n + a_1\,\alpha^{n-1} + \ldots\ldots\; a_{n-1}\,\alpha + a_n.$$

L'ultima delle quali si enuncia così:

Il resto ottenuto nella divisione di un polinomio P (x) *per* x — α *si ottiene scrivendo* α *al posto della* x *in* P (x). Cosicchè: *Il polinomio* P (x) *è divisibile per* x — α *allora e allora soltanto che* α *soddisfa alla* P (α) = 0, *cioè che* α *è radice dell'equazione* P (x) = 0.

Caso particolare di queste formole sono le identità:

$$x^n - a^n = (x - a)\ (x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2\,x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}\,x + a^{n-1})$$

per n intero positivo

e per m intero *dispari*

$$x^m + a^m = (x + a)\ (x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2\,x^{m-3} - \ldots\ldots$$
$$- a^{m-2}\,x + a^{m-1}).$$

Se nella penultima formola poniamo $x = 1$, $a = q$, troviamo

$$1 + q + q^2 + \ldots\ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

che è una formola ben nota nella teoria delle progressioni geometriche.

§ 14. — Relazioni tra coefficienti e radici di un'equazione algebrica.

α) Dedurremo più tardi dalla teoria delle funzioni continue in più variabili il teorema fondamentale dell'algebra (teorema di GAUSS).

Ogni polinomio $\mathrm{P}(\mathrm{x}) = \mathrm{a}_0 \mathrm{x}^{\mathrm{n}} + \mathrm{a}_1 \mathrm{x}^{\mathrm{n}-1} + \ldots + \mathrm{a}_{\mathrm{n}-1} \mathrm{x} + \mathrm{a}_{\mathrm{n}}$ *di grado* n *nella* x *è decomponibile in uno e in un solo modo nel prodotto di* a_0 *e di* n *fattori di primo grado* $\mathrm{x} - \alpha_1, \mathrm{x} - \alpha_2, \ldots\ldots \mathrm{x} - \alpha_{\mathrm{n}}$ *dove le* α *sono numeri distinti o no, reali o complessi.*

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = \\ &= a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n). \end{aligned} \tag{1}$$

[Ricordo che, dicendo che $P(x)$ è di grado n, si è detto anche che $a_0 \neq 0$].

Questa decomposizione in fattori ha qualche analogia con la decomposizione di un numero intero in fattori primi. Nell'algebra dei polinomii, che noi studiamo, i polinomii di primo grado hanno così un ufficio analogo a quello che i numeri primi hanno nell'aritmetica dei numeri interi.

Gli n *numeri* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{\mathrm{n}}$ (*) *sono tutte e sole le radici dell'equazione* $\mathrm{P}(\mathrm{x}) = 0$ (perchè $P(x)$ può essere nullo soltanto se uno dei fattori $x - \alpha$ è nullo).

Ciò che rende intuitivo il teor. del RUFFINI relativo al caso in cui il polinomio $P(x)$ è divisibile per un binomio $x - \alpha$.

Le formole del § 11 (pag. 44) ci dicono allora che:

La somma delle radici α *vale* $-\dfrac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_0}$.

La somma dei prodotti ottenuti moltiplicando a due a due le radici α *vale* $\dfrac{\mathrm{a}_2}{\mathrm{a}_0}$.

La somma dei prodotti ottenuti moltiplicando ad h *ad* h (se $h \leqq n$) *le radici* α *vale* $(-1)^{\mathrm{h}} \dfrac{\mathrm{a}_{\mathrm{h}}}{\mathrm{a}_0}$.

Il prodotto delle n *radici* α *vale* $(-1)^n \dfrac{\mathrm{a}_{\mathrm{n}}}{\mathrm{a}_0}$.

Questi teoremi sono la generalizzazione di quelli ricordati nel § 10 per le equazioni di secondo e terzo grado.

(*) Ricordo che le α possono anche essere non tutte distinte.

β) Dal teorema sopra enunciato si deduce anche che, se $P(x)$ è un polinomio di (apparente) grado n, e se l'equazione $P(x) = 0$ ammette più di n radici, allora $P(x)$ è identicamente nullo, e *ogni numero è radice della* P (x) = 0 (in altre parole *tutti i coefficienti di* P (x) *sono nulli*).

Se due polinomii $P(x)$, $Q(x)$ sono uguali *per tutti i valori* della x, allora l'equazione $P(x) - Q(x) = 0$ ammette infinite radici (perchè ogni numero ne è radice). Quindi il polinomio $P(x) - Q(x)$ ha nulli tutti i suoi coefficienti; cioè *il grado di* P (x) *è uguale al grado di* Q (x); ed ogni potenza della x ha coefficienti uguali in $P(x)$ e in $Q(x)$: in una parola i polinomii $P(x)$, $Q(x)$ *sono identicamente uguali.*

Più precisamente due polinomii $P_1(x)$, $P_2(x)$ di grado $n-1$ sono uguali identicamente, se assumono gli stessi valori in n punti distinti $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Cioè è completamente determinato un polinomio $P(x)$ di grado $n-1$, quando sieno dati i valori $P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_n)$, che esso assume in n punti distinti $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ed è facile intuire e verificare che un tale polinomio è dato dalla

$$\begin{aligned} P(x) = {} & P(a_1)\frac{(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)} + \\ & + P(a_2)\frac{(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)} + \\ & + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + \\ & + P(a_n)\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(a_i)\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})(x-a_{i+2})\ldots(x-a_n)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})(a_i-a_{i+2})\ldots(a_i-a_n)}.$$

γ) Alle formole di § 14, α, possiamo dare un altro aspetto notevole (Newton). Se noi nel secondo e terzo membro di (1) poniamo $x+h$ al posto della x, i coefficienti di h nelle espressioni che se ne deducono saranno uguali. Si trova così con facile calcolo che:

$$\begin{aligned} & n\,a_0 x^{n-1} + (n-1)\,a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = \\ & = a_0(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n) + \\ & + a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n) + \\ & + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & + a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-2})(x-\alpha_n) + \\ & + a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-2})(x-\alpha_{n-1}) = \\ & = \frac{P(x)}{x-\alpha_1} + \frac{P(x)}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{P(x)}{x-\alpha_n}. \end{aligned} \tag{2}$$

Se noi calcoliamo i quozienti dell'ultimo membro di (2) con le regole del § 13 troviamo:

$$n\,a_0 x^{n-1} + (n-1)\,a_1 x^{n-2} + \ldots\ldots + 2\,a_{n-2}\,x + a_{n-1} =$$
$$= a_0 x^{n-1} + (a_0\alpha_1 + a_1) x^{n-2} + (a_0\alpha_1^2 + a_1\alpha_1 + a_2) x^{n-3} + \ldots + (a_0\alpha_1^{n-1} + a_1\alpha_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) +$$
$$+ a_0 x^{n-1} + (a_0\alpha_2 + a_1) x^{n-2} + (a_0\alpha_2^2 + a_1\alpha_2 + a_2) x^{n-3} + \ldots + (a_0\alpha_2^{n-1} + a_1\alpha_2^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ a_0 x^{n-1} + (a_0\alpha_n + a_1) x^{n-2} + (a_0\alpha_n^2 + a_1\alpha_n + a_2) x^{n-3} + \ldots + (a_0\alpha_n^{n-1} + a_1\alpha_n^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) =$$
$$= n\,a_0\,x^{n-1} + (a_0 s_1 + n\,a_1) + (a_0 s_2 + a_1 s_1 + n\,a_2) x^{n-3} + \ldots +$$
$$+ (a_0 s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + \ldots + a_{n-2}\,s_1 + n\,a_{n-1}),$$

dove con s_h ho indicato la somma $\alpha_1^h + \alpha_2^h + \ldots + \alpha_n^h$ delle h^{esime} potenze delle radici α. Se ne deduce, confrontando primo e terzo membro:

$$a_0\,s_1 + a_1 = 0$$
$$a_0\,s_2 + a_1\,s_1 + 2\,a_2 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n\,s_{n-1} + a_1\,s_{n-2} + \ldots + a_{n-2}\,s_1 + (n-1)\,a_{n-1} = 0.$$

Le quali formole permettono di calcolare successivamente le $s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots, s_{n-1}$. Moltiplicando $P(x)$ per $x^h (h = 0, 1, 2, \ldots\ldots)$, sostituendo nel prodotto una delle α al posto di x (col che tale prodotto si annulla) e sommando tali prodotti si trova: (posto $m = n + h = n, n+1, n+2, \ldots\ldots$)

$$a_0\,s_m + a_1\,s_{m-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}\,s_{m-n+1} + a_n\,s_{m-n} = 0\ (m \geqq n)$$

che permette di calcolare successivamente $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots\ldots$

Cosicchè: *Si possono calcolare le* s_h *appena sono noti i coefficienti* a_i *dell'equazione* $P(x) = 0$.

δ) *Si calcoli la somma* $s_{\alpha,\beta}$ *dei prodotti ottenuti moltiplicando la potenza* α^{esima} *di una radice di una data equazione per la potenza* β^{esima} *di un'altra radice.*

Basta osservare che il prodotto $s_\alpha\,s_\beta = s_{\alpha,\beta} + s_{\alpha+\beta}$ se $\alpha \neq \beta$, e che $s_\alpha\,s_\alpha = s_{2\alpha} + 2\,s_{\alpha,\alpha}$.

Cosicchè $s_{\alpha,\beta} = s_\alpha\,s_\beta - s_{\alpha+\beta}$, se $\alpha \neq \beta$, e $s_{\alpha,\alpha} = \dfrac{1}{2}(s_\alpha\,s_\alpha - s_{2\alpha})$.

Le formole di Newton permettono così di esprimere in ogni caso $s_{\alpha,\beta}$ per mezzo dei coefficienti dell'equazione. In modo analogo si deduce all'esame del prodotto $s_\alpha\,s_\beta\,s_\gamma$ che: *La somma* $s_{\alpha,\beta,\gamma}$ *dei prodotti ottenuti moltiplicando la* α^{esima} *potenza d'una radice di una equazione per la* β^{esima} *potenza d'una seconda radice, e la* γ^{esima} *potenza d'una terza radice è esprimibile razionalmente* (*) *mediante i coefficienti dell'equazione stessa.*

In modo simile si definiscono e si insegnano a calcolare le $s_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$, ecc., ecc.

Tanto le s_α che le $s_{\alpha,\beta}$, $s_{\alpha,\beta,\gamma}$, ecc., sono funzioni simmetriche delle radici d'una equazione (cioè non cambiano di valore, quando tali radici si permutino tra di loro in un modo qualsiasi). Ed è facile persuadersi che ogni *polinomio simmetrico delle radici di un'equazione* si ottiene come combinazione lineare delle somme s_α, $s_{\beta,\gamma}$, $s_{\alpha,\beta,\gamma}$ ..... testè calcolate, ed è quindi esso stesso *calcolabile razionalmente mediante i coefficienti dell'equazione* (senza che sia necessario risolverla).

Così, p. es., se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sono le quattro radici di una equazione di quarto grado, l'espressione:

$$5\,\alpha_1 (\alpha_2^2\,\alpha_3^2 + \alpha_3^2\,\alpha_4^2 + \alpha_4^2\,\alpha_2^2) + 5\,\alpha_2 (\alpha_3^2\,\alpha_4^2 + \alpha_4^2\,\alpha_1^2 + \alpha_1^2\,\alpha_3^2) +$$
$$+ 5\,\alpha_3 (\alpha_4^2\,\alpha_1^2 + \alpha_1^2\,\alpha_2^2 + \alpha_2^2\,\alpha_4^2) + 5\,\alpha_4 (\alpha_1^2\,\alpha_2^2 + \alpha_2^2\,\alpha_3^2 + \alpha_3^2\,\alpha_1^2) +$$
$$+ 4\,\alpha_1^2 (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + 4\,\alpha_2^2 (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1) + 4\,\alpha_3^2 (\alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2) +$$
$$+ 4\,\alpha_4^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 5\,s_{1,2,2} + 4\,s_{2,1} = 5\,(s_1\,s_{2,2} - s_{2,3}) + 4\,s_{2,1} =$$
$$= 5\left(s_1 \frac{s_2^2 - s_4}{2} - \left[s_2\,s_3 - s_5\right]\right) + 4\left(s_2\,s_1 - s_3\right).$$

(*) Vale a dire con sole addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni.

Il suo calcolo è ridotto a quello di s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, che noi sappiamo eseguire per mezzo delle formole di Newton. Ma, naturalmente, speciali artifici potrebbero abbreviarlo di gran lunga.

§ 15. — Radici razionali di un'equazione a coefficienti razionali.

Data un'equazione di grado superiore al quarto, è generalmente impossibile ridurne la risoluzione alla estrazione di radici, come avviene per le equazioni di 2°, di 3°, ed anche di 4° grado. Svariatissimi metodi sono stati trovati per calcolare con approssimazione tali radici; ma questi metodi hanno ben scarsa importanza per l'ingegnere. Per noi tale ricerca rientrerà nello studio più generale della risoluzione approssimata di un'equazione anche non algebrica (*).

Cionostante vogliamo aggiungere un'osservazione specialmente semplice. Poniamo che i coefficienti dell'equazione:

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{1}$$

siano numeri razionali (cioè numeri interi o fratti). Senza diminuire la generalità possiamo supporli interi, perchè, qualora fra di essi ve ne fossero dei fratti, basterebbe moltiplicare ambo i membri dell'equazione per il minimo multiplo comune dei denominatori dei coefficienti fratti, per ottenere un'altra equazione (avente le stesse radici della prima) ed a coefficienti tutti interi.

Supposto adunque che le a siano numeri interi, noi dimostreremo che, *se la nostra equazione possiede una radice razionale* $\frac{\alpha}{\beta}$ (α, β interi primi tra di loro) *allora* α *è un divisore* di a_n, β *un divisore* di a_0. Infatti in tali ipotesi si ha: $a_0 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + a_1 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} \frac{\alpha}{\beta} + a_n = 0$, che si può scrivere (moltiplicando per β^n):

$$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} \beta + a_2 \alpha^{n-2} \beta^2 + \ldots\ldots + a_{n-1} \alpha \beta^{n-1} + a_n \beta^n = 0,$$

ossia:

$$a_0 \alpha^n = - \beta \left\{ a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} \beta + \ldots\ldots + a_n \beta^{n-1} \right\}$$

oppure:

$$a_n \beta^n = - \alpha \left\{ a_0 \alpha^{n-1} + a_{\cdot} \alpha^{n-2} \beta + \ldots\ldots + a_{n-1} \beta^{n-1} \right\}.$$

Poichè le a_i, α, β sono numeri interi, le quantità tra $\{\ \}$ nei secondi membri di queste equazioni sono numeri interi; e perciò questi secondi membri sono rispettivamente divisibili per α e per β. Altrettanto avverrà quindi dei primi membri; ossia $a_0 \alpha^n$ è divisibile per β, $a_n \beta^n$ per α.

(*) Rinvio ai trattati di algebra complementare chi volesse approfondire tali studii (di cui noi daremo un breve cenno in un venturo paragrafo).

Nel trattato di *Nomographie* del D'Ocagne lo studioso troverà molti metodi grafici per eseguire tali calcoli; metodi, che ricorrono all'uso di una bilancia o del galvanometro, si trovano svolti in Ghersi, *Matematica dilettevole e curiosa* (edita da Hoepli).

Ma, poichè α e β sono primi tra loro, α^n è primo con β, β^n con α. Se ne deduce tosto che a_0 è divisibile per β, a_n divisibile per α. c. d. d.

Ponendo $\beta = 1$ in questo teorema si ha:

COROLL. *Le radici intere della nostra equazione a coefficienti a interi sono tutte divisori del termine noto* a_n.

Se $a_0 = 1$ dal precedente teorema si trae:

COROLL. *Se* $a_0 = 1$, *la nostra equazione non può avere radici fratte, ma soltanto al più radici intere.*

Questi teoremi riducono a pochi tentativi la ricerca delle radici intere o fratte di una equazione algebrica. E si potrebbero aggiungere altri teoremi dello stesso tipo, che abbrevierebbero ancora la ricerca.

§ 16. — **Polinomii a coefficienti reali.**

Supponiamo che i coefficienti $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$ del polinomio

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$$

sieno numeri reali. Cionostante le radici α possono essere numeri complessi (come è ben noto già dalla teoria delle equazioni di secondo grado). Sia $\beta + i\gamma$ una tale radice. Sarà

$$P(\beta + i\gamma) = a_0(\beta + i\gamma)^n + a_1(\beta + i\gamma)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(\beta + i\gamma) + a_n = 0.$$

Il numero complesso coniugato sarà pure nullo.

Tale numero si deduce dal precedente cambiando i in $-i$. Ma questo cambiamento non muta i coefficienti $a_0, a_1, \ldots$, che sono *reali*. Dunque questo numero immaginario coniugato, che è ancora nullo, vale:

$$P(\beta - i\gamma) = a_0(\beta - i\gamma)^n + a_1(\beta - i\gamma)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(\beta - i\gamma) + a_n = 0.$$

E questa uguaglianza dimostra che anche $\beta - i\gamma$ è radice dell'equazione $P(x) = 0$.

Tra i fattori lineari $x - \alpha$, in cui è decomposto $P(x)$ figurano perciò entrambi i fattori $[x - (\beta + i\gamma)]$ e $[x - (\beta - i\gamma)]$: il cui prodotto è il fattore *reale di secondo grado* $p_1(x) = (x - \beta)^2 + \gamma^2 = x^2 - 2\beta x + (\beta^2 + \gamma^2)$. E il polinomio $P(x)$ è divisibile per questo fattore. Il quoziente $P_1(x)$ sarà ancora polinomio a coefficienti reali. E, se la equazione $P_1(x) = 0$ possiede qualche radice immaginaria (che sarà pure radice di $P(x) = 0$), allora $P_1(x)$ sarà ancora divisibile per un polinomio $p_2(x)$ di secondo grado a coefficienti reali. Sarà perciò $P_1(x) = p_2(x)\, P_2(x)$, e quindi $P(x) = p_1(x)\, p_2(x)\, P_2(x)$, dove $P_2(x)$ è ancora un polinomio. E così via. Se ne deduce:

Ogni polinomio P (x) *a coefficienti reali si può scomporre nel prodotto di polinomii di primo o di secondo grado a coeffi-*

cienti reali. I fattori di primo grado corrispondono alle radici reali della P (x) = 0. *I fattori di secondo grado corrispondono alle radici complesse.* Anzi ognuno di questi fattori individua una coppia di radici immaginarie coniugate.

Se il polinomio è di grado *dispari*, evidentemente esso non può essere prodotto di soli fattori di secondo grado. Quindi:

Ogni equazione di grado dispari a coefficienti reali possiede almeno una radice reale.

Sarà bene enunciare esplicitamente la osservazione iniziale:

Se P (x) = 0 *è un'equazione a coefficienti reali che possiede una radice complessa, essa possiede anche la radice immaginaria coniugata.* Essa si può, per quanto abbiamo qui dimostrato, generalizzare così: *Se un'equazione* P (x) *a coefficienti reali possiede* r *radici complesse uguali a un numero* $\alpha + i\beta$, *essa possiede anche* r *radici uguali al numero complesso coniugato* $\alpha - i\beta$.

In tal caso tra i precedenti fattori ve ne sono r uguali ad $(x - \alpha)^2 + \beta^2$.

§ 17. — **Sistemi di equazioni algebriche.**

α) Se $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ sono due equazioni algebriche, che hanno comune la radice α, allora $x - \alpha$ è divisore sia di $f(x)$ che di $g(x)$ e quindi anche del loro massimo comun divisore; cioè α è radice dell'equazione ottenuta uguagliando a zero tale M. C. D. E reciprocamente, una radice di questa ultima equazione è radice comune delle $f(x) = 0$, $g(x) = 0$. Se tale M. C. D. è una costante (differente da zero), se cioè $f(x)$, $g(x)$ sono primi tra di loro, le equazioni $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ non avranno radici comuni.

β) Si può scrivere in vari modi la condizione necessaria e sufficiente affinchè le equazioni $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ abbiano almeno una radice comune.

Se p. es. $\alpha_1, \alpha_2 ..., \alpha_m$ sono le radici della $g(x) = 0$, basta esprimere che è nulla una almeno delle $f(\alpha_1), f(\alpha_2), ..., f(\alpha_m)$, ossia che il loro prodotto

$$f(\alpha_1)\, f(\alpha_2) \,.....\, f(\alpha_m) = 0.$$

Il primo membro di questa equazione, essendo un polinomio *simmetrico* delle radici della $g(x) = 0$, si può calcolare (§ 14, δ) senza risolvere questa equazione. *Tale polinomio* (che si può calcolare anche in altri modi, p. es., esprimendo che almeno una delle radici di $f(x)=0$ soddisfa alla $g(x)=0$), *il cui annullarsi è condizione necessaria e sufficiente affinchè le due equazioni abbiano almeno una radice comune, si dice il risultante delle due equazioni:* esso è un polinomio formato coi coefficienti a_i e b_i delle due equazioni.

γ) *Sistemi di due equazioni algebriche intere a due incognite.* Uguagliando a zero un polinomio in più variabili si ha un'equazione algebrica a più incognite, ed i gruppi dei valori delle incognite, che soddisfano l'equazione, sono le soluzioni di essa. Date due equazioni algebriche in due incognite x, y, consideriamo il loro sistema, e cerchiamo le loro soluzioni comuni.

Siano:

$$f(x, y)=0 \quad , \quad g(x, y)=0$$

le due equazioni; la prima di grado n, la seconda di grado m nella x. Ordinate secondo le potenze decrescenti di x, esse prendono la forma

$$f(x, y)=\varphi_0(y)\, x^n+\varphi_1(y)\, x^{n-1}+\varphi_2(y)\, x^{n-2}+\ldots+\varphi_n(y)=0$$
$$g(x, y)=\psi_0(y)\, x^m+\psi_1(y)\, x^{m-1}+\psi_2(y)\, x^{m-2}+\ldots+\psi_m(y)=0$$

dove le φ e le ψ sono polinomii nella y.

Se una coppia di valori di x ed y, p. es., $x=\alpha$, $y=\beta$, soddisfa entrambe le equazioni, allora, immaginando in esse posto $y=\beta$, si hanno due equazioni nella sola x, che avranno per radice comune il valore $x=\alpha$; cosicchè per $y=\beta$ sarà nullo il risultante R di queste due equazioni in x. Si noti che, per calcolare R, nelle due date equazioni si considera come incognita la sola x; cosicchè questo loro risultante R sarà un polinomio $R(y)$ nella sola y, perchè dipenderà solo dalle $\varphi_i(y)$, $\psi_j(y)$, coefficienti delle date equazioni.

Se $x=\alpha$, $y=\beta$ soddisfano le due equazioni, la $R(y)=0$ ammette β come radice. Viceversa ogni valore β di y che annulli $R(y)$, sostituito nelle due equazioni date, le riduce a due equazioni in x aventi almeno una radice a comune, che si calcola servendosi dell'algoritmo del M. C. D. Si trovano così tutte le coppie di valori di y ed x soddisfacenti alle due date equazioni.

L'equazione $R(y)=0$ dicesi l'equazione risultante dalla eliminazione di x dalle due date equazioni. In generale, però, per calcolare $R(y)$, o per risolvere il dato sistema di equazioni, è opportuno ricorrere ad artifici che variano da caso a caso, e che solo la pratica può suggerire.

δ) Vediamo come il problema di trovare le radici $z = x + iy$ reali o complesse dell'equazione

$$f(x) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

a coefficienti $a_j = b_j + ic_j$ reali o complessi (x, y, c_j, b_j numeri reali) si riduca al problema di trovare le radici reali di un'equazione a coefficienti reali. La nostra equazione diventa nelle attuali ipotesi:

$$(b_0 + ic_0)(x + iy)^n + (b_1 + ic_1)(x + iy)^{n-1} + \dots +$$
$$+ (b_{n-1} + ic_{n-1})(x + iy) + (b_n + ic_n) = 0.$$

Sviluppando ed eseguendo tutte le operazioni, il primo membro si ridurrà in fine al tipo

$$P(x, y) + iQ(x, y),$$

ove P e Q saranno polinomii nelle x, y a coefficienti reali, onde l'equazione precedente diventerà:

$$P(x, y) + iQ(x, y) = 0$$

e si scinderà nelle due:

$$P(x, y) = 0 \quad ; \quad Q(x, y) = 0.$$

Siamo così ridotti alla risoluzione di un sistema di due equazioni in due incognite, che si potrà fare col metodo dato in γ). Ogni soluzione reale $x = x_0$, $y = y_0$ di questo sistema dà una radice $x_0 + iy_0$ dell'equazione proposta, e viceversa.

Esercizi.

1° Dati n punti, tre qualunque dei quali non sono mai in linea retta, quante sono le rette che contengono due di tali punti?

Ris. $\binom{n}{2}$.

2° Quante sono le estrazioni possibili distinte al gioco del lotto?

Ris. $\binom{90}{5}$.

3° Quante sono le estrazioni possibili al gioco del lotto, in cui k ($k < 5$) dei numeri estratti sono prefissati a priori?

Ris. Dei 5 numeri estratti, k sono prefissati; i restanti $5 - k$ devonsi scegliere tra i residui $90 - k$ numeri. Il numero cercato è perciò $\binom{90-k}{5-k}$. Per $k = 2, 3, 4$ si ottiene il numero dei casi, in cui è possibile vincere un ambo, un terno, una quaterna secca. Tale numero diviso per il numero (eserc. 2°) $\binom{90}{5}$ delle possibili estrazioni dà la cosidetta *probabilità* di vittoria.

4° Dati $n < 90$ numeri interi positivi non maggiori di 90, in quante estrazioni del lotto può avvenire che k dei numeri estratti, e *non più* di k siano tra gli n numeri dati?

Poichè k dei numeri estratti sono da scegliere tra gli n numeri dati e gli altri $5 - k$ tra i residui $90 - n$, il numero cercato è $\binom{n}{k}\binom{90-n}{5-k}$.

5° Dati n interi positivi non maggiori di 90, in quante estrazioni del lotto può avvenire che *almeno* $h < 5$ dei numeri estratti sieno fra gli n numeri dati?

Si devono sommare, se p. es. $n \geqq 5$, il valore delle estrazioni di cui all'esercizio 4°, relativi ai valori $k = h$, $k = h + 1, \ldots\ldots$, $k = 5$.

6° Dimostrare che $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$.

RIS. 1ª. Si verifichi direttamente.

RIS. 2ª. Si osservi che tra le $\binom{n}{m}$ combinazione degli n elementi $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ ad m ad m ve ne sono $\binom{n-1}{m}$ che non contengono a_1 ed $\binom{n-1}{m-1}$ che lo contengono.

7° Dimostrare che $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-2}{m-1} + \ldots\ldots + \binom{m-1}{m-1}$; (Cfr. eserc. 6°).

8° Sviluppare $(x + a + b)^n$.

RIS. Si ponga $c = a + b$ e si sviluppi, sostituendo poi alle singole potenze di c lo sviluppo corrispondente di $(a + b)$, $(a + b)^2$, ecc. Si trova che il coefficiente di $x^p\, a^q\, b^r$ (p, q, r interi positivi di somma n) è $\dfrac{|\underline{n}}{|\underline{p}\ |\underline{q}\ |\underline{r}}$, come si può provare anche direttamente.

9° La somma dei coefficienti dello sviluppo di $(x + a)^n$ vale 2^n: la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(x - a)^n$ vale zero.

RIS. Infatti tali somme sono uguali ai valori di $(x \pm a)^n$ per $x = a = 1$.

10° Sviluppare $(2\,x \pm 3\,a)^n$ e calcolare la somma dei coefficienti dello sviluppo.

11° Dimostrare che i numeri contenuti nelle orizzontali del quadro

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

sono ordinatamente i coefficienti dello sviluppo di $(x+a)^0$, $(x+a)^1$, $(x+a)^2$, $(x+a)^3$, ecc. Si noti che il termine di posto h della riga di posto k si ottiene sommando i termini di posto h ed $h-1$ della riga precedente $(1<h<k)$.

12° Calcolare il numero $\left[{n \atop h}\right]$ delle combinazioni con ripetizione (in cui cioè uno stesso elemento può essere ripetuto una o più volte) di n elementi ad h ad h?

Ris. Quelle di tali combinazioni che non contengono il primo degli n elementi dati sono (se $n>1$) in numero di $\left[{n-1 \atop h}\right]$. Quelle che lo contengono sono in numero di $\left[{n \atop h-1}\right]$, quando sia posto $\left[{n \atop o}\right]=1$. Dunque si ha $\left[{n \atop h}\right]=\left[{n-1 \atop h}\right]+\left[{n \atop h-1}\right]$. Queste proprietà, insieme alle $\left[{1 \atop h}\right]=1$, $\left[{n \atop 1}\right]=n$ bastano a definire $\left[{n \atop h}\right]$. Dunque $\left[{n \atop h}\right]=\binom{n+h-1}{h}$, perchè $\binom{n+k-1}{h}$ gode (esercizio 6°) di tutte queste proprietà.

13° Dalla $(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n=\cos n\,\theta+i\,\mathrm{sen}\,n\,\theta$ si deducano, sviluppando il primo membro con la formola del binomio, i valori di $\cos n\,\theta$ e $\mathrm{sen}\,n\,\theta$.

Ris.

$$\cos n\,\theta=\cos^n\theta-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\,\mathrm{sen}^4\,\theta-\ldots..$$

$$\mathrm{sen}\,n\,\theta=\mathrm{sen}\,\theta\left\{\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\,\mathrm{sen}^4\,\theta-\ldots.\right\}$$

che si possono scrivere anche in altro modo ricordando che

$$\mathrm{sen}^2\,\theta=1-\cos^2\theta;\ \mathrm{sen}^4\,\theta=(1-\cos^2\theta)^2,\text{ ecc.}$$

14° In modo simile dalla

$$(\cos a_1+i\,\mathrm{sen}\,a_1)\,(\cos_2+i\,\mathrm{sen}\,a_2)\ldots(\cos a_n+i\,\mathrm{sen}\,a_n)=$$
$$=\cos[a_1+a_2+\ldots a_n]+i\,\mathrm{sen}\,[a_1+a_2+\ldots+a_n]$$

si possono dedurre le formole di addizione più generali per calcolare $\cos[a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n]$ e $\operatorname{sen}[a_1 + a_2 + \ldots + a_n]$.

15° Il lettore deduca in modo analogo dalla

$$\cos^r x \operatorname{sen}^s x = k \{[\cos x + i \operatorname{sen} x] + [\cos x - i \operatorname{sen} x]\}^r .$$
$$. \{[\cos x + i \operatorname{sen} x] - [\cos x - i \operatorname{sen} x]\}^s$$
$$\left(\frac{1}{k} = 2^{r+s} i^s\right)$$

che $\cos^r x \operatorname{sen}^s x$ si può esprimere come funzione lineare di seni e di coseni di multipli dell'angolo x.

16° Dimostrare che

$$i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i, \quad i^{4n} = 1,$$

per tutti i valori dell'intero n.

17° Calcolare $\sqrt{i}$.

Ris. È $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$. Quindi $\pm\sqrt{i} = \cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$.

18° Calcolare per via trigonometrica $\sqrt[n]{1+i}$, $\sqrt[n]{i}$, $\sqrt[n]{i}$, $\sqrt[n]{-1}$, per ogni valore dell'intero positivo n.

19° Porre sotto forma trigonometrica i numeri

$$2 + 2\sqrt{-3}, \quad \frac{2+3i}{3+2i}, \quad 5 + 5i.$$

20° Calcolare per via trigonometrica le radici n^{esime} di ± 1 per $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

21° Semplificare le espressioni

$$\frac{2+5i}{3+\sqrt{-3}} + \frac{2-5i}{3-\sqrt{-3}}; \quad \frac{1+i}{2+\sqrt{-5}} - \frac{1-i}{2-\sqrt{-5}};$$
$$\frac{3}{5+6i} + \frac{3}{5-6i}; \quad \frac{1+i}{2+\sqrt{-4}} + \frac{1+i}{2-\sqrt{-4}};$$
$$\frac{1+i}{2+\sqrt{-4}}\,\frac{1-i}{2-\sqrt{-4}}; \quad \frac{1+i}{2-3i}; \quad \frac{2+3i}{1-i};$$
$$3(x+iy)^3 + 3(x-iy)^3 + 4i(x+iy)^2 - 4i(x-iy)^2.$$

22° L'equazione $x^n - 1 = 0$ ha per radici $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$, cioè le radici n^{esime} dell'unità. Queste radici soddisfano dunque alle :

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_n = 0 \; ; \; \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + ... + \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n = 0$$
$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + ... + \varepsilon_{n-2} \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n = 0 \; ; \; .... ;$$
$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 .... \varepsilon_{n-1} + ... + \varepsilon_2 \varepsilon_3 .... \varepsilon_n = 0 \; ; \; \varepsilon_1 \varepsilon_2 .... \varepsilon_n = (-1)^{n+1}.$$

23° Calcolare i coefficienti di un'equazione di 4° grado, che ha per radici 0, 1, -1, 2.

RIS. L'equazione è $x\,(x^3 - 2\,x^2 - x + 2) = 0$.

24° Calcolare la somma delle prime, o delle seconde, o delle terze potenze delle radici dell'equazione

$$x^4 - 2\,x^3 + 4\,x^2 - 1 = 0.$$

RIS. Dalle $s_1 - 2 = 0$, $s_2 - 2\,s_1 + 8 = 0$, $s_3 - 2\,s_2 + 4\,s_1 = 0$ si trae $s_1 = 2$, $s_2 = -4$, $s_3 = -16$.

25° Trovare le radici razionali di $x^3 - \frac{7}{2} x_2 + \frac{7}{2} x - 1 = 0$.

Moltiplicando per 2 l'equazione diventa

$$2\,x^3 - 7\,x^2 + 7\,x - 2 = 0.$$

Se $\frac{\alpha}{\beta}$ è una radice razionale, mutando, caso mai, i segni di α, β (ciò che non muta la nostra radice) possiamo renderne il denominatore β positivo. Il numero β è da scegliersi tra i divisori positivi di $a_0 = 2$, cioè vale 1 oppure 2 ; il numero α, essendo un divisore positivo o negativo di $a_3 = -2$, potrà avere uno dei valori $\pm 1, \pm 2$. Le eventuali radici razionali sono dunque da cercarsi tra i numeri $\pm 1, \pm \frac{1}{2}; \pm 2$. Si trova che 1, 2, $\frac{1}{2}$ sono effettive radici.

26° Risolvere l'equazione $x^3 + x^2 + 2\,x + 2 = 0$ (cercando dapprima le sue radici razionali).

Una tale equazione (per cui $a_0 = 1$) non ha radici fratte; si trova che -1 è una radice intera. Dividendo il primo membro per $x + 1$, l'equazione si riduce ad $x^2 + 2 = 0$, che determina le altre due radici $\pm i \sqrt{2}$.

27° L'equazione $x^3 + 2\,x^2 + x + 2 = 0$ ha i come radice. Risolvere l'equazione.

Essa avrà $-i$ come seconda radice. Il primo membro diviso per $(x+i)\,(x-i)=x^2+1$ dà $x+2$ per quoziente. La terza radice è -2.

28° Si decomponga in fattori reali il polinomio

$$P(x)=x^6-2\,x^5+2\,x^4-x^2+2\,x-2,$$

sapendo che l'equazione $P(x)=0$ ha le radici $1, -1, i, 1-i$.

Si noti che $(x-i)\,(x+i)=x^2+1$;

$$[x-(1-i)]\,[x-(1+i)]=x^2-2\,x+2.$$

Quindi:

$$P(x)=(x-1)\,(x+1)\,(x^2+1)\,(x^2-2\,x+2).$$

29° Come si cercano le radici comuni alle due equazioni

$$f(x)=x^3-2\,x^2+x-2=0,\; g(x)=x^2-4=0\;?$$

Ris. Uguagliando a zero il Massimo C. Divisore delle $f(x)$, $g(x)$ si ha un'equazione, le cui radici sono tutte e sole le radici comuni alle due equazioni.

Le due equazioni

$$\begin{aligned} x^3-2\,x^2+x-2&=0\\ x^2-4&=0 \end{aligned}$$

hanno dunque l'unica radice comune 2, perchè $x-2$ è il Massimo C. Divisore dei primi membri.

30° Per un'equazione $x^3+a_1\,x^2+a_2\,x+a_3=0$ sono date le somme s_1, s_2, s_3 delle prime, delle seconde, delle terze potenze delle radici. Si determinano i coefficienti a_1, a_2, a_3. (Basta ricordare le formole di Newton, in cui questi coefficienti si riguardino come incognite).

31° Si calcoli

$$\alpha_1^4\alpha_2\alpha_3+\alpha_2^4\alpha_1\alpha_3+\alpha_3^4\alpha_1\alpha_2+3\,(\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_2^2\alpha_1+\alpha_1^2\alpha_3+\alpha_3^2\alpha_1+\alpha_2^2\alpha_1+\alpha_2\,\alpha_1^2)$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono le radici di $x^3+x+1=0$.

Si noti che la somma $s_{4,\,1,\,1}$ dei primi tre termini vale $s_4\,s_{1,\,1}-s_{5,\,1}$.

32° Si risolvano le equazioni

$$x^4+3\,x^3+x^2-3\,x-2=0 \quad , \quad x^5-x^3+x^2-1=0$$
$$x^3-x^2+4\,x-4=0,$$

cercandone prima di tutto le radici razionali.

33° Trovare direttamente le radici quadrate, cubiche, quarte, quinte, di ± 1; cioè si risolvano direttamente le equazioni

$$x^2 \pm 1 = 0 \quad ; \; x^3 \pm 1 = 0 \quad ; \; x^4 \pm 1 = 0 \quad ; \; x^5 \pm 1 = 0.$$

Basta osservare che

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \quad ; \; x^2 + 1 = x^2 - i^2 = (x - i)(x + i)$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \quad ; \; x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$$

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}\, x)^2 =$$

$$= (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$$

$$(x^5 - 1) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

e che per $x \neq 0$ si ha $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^2 \{ z^2 + z - 1 \}$ ove $z = x + \frac{1}{x}$

$$(x^5 + 1) = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

e che per $x \neq 0$ si ha $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = x^2 \{ z^2 - z - 1 \}$ ove $z = x + \frac{1}{x}$.

Si confrontino i risultati ottenuti per questa via coi risultati ottenuti per via trigonometrica.

34° Quando avviene che le due equazioni

$$x^3 + px + q = 0 \quad , \; x^2 + bx + c = 0$$

hanno una radice comune?

35° Analoga domanda per le

$$x^3 + px + q = 0 \quad , \; x^4 + a = 0.$$

36° Trovare se esistono radici comuni alle

$$x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 3 = 0 \qquad x^4 + 4x^2 + 3 = 0.$$

37° Date le somme s_1, s_2, s_3 di tre numeri, dei loro quadrati, dei loro cubi, si trovi la somma s_4 delle loro quarte potenze. Si cominci col calcolare l'equazione di cui i tre numeri sono radici.

38° Data un'equazione algebrica a coefficienti razionali, come se ne determinano le eventuali radici del tipo $a\sqrt{-1}$, dove a è un numero razionale? Si faccia poi tale ricerca per l'equazione

$$x^4 + x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = 0.$$

39° Costruire un polinomio di terzo grado, che sia uguale ad 1 per $x = 1, 2, 3, 4$.

CAPITOLO V.

DETERMINANTI, SISTEMI DI EQUAZIONE DI PRIMO GRADO

Nel § 17 abbiamo dato un metodo generale per affrontare il problema di risolvere i sistemi di due equazioni algebriche in due incognite: metodo che è estendibile anche a casi più generali. Ma questi studi vanno rapidamente complicandosi, conservando un carattere di grande semplicità soltanto per i sistemi di equazioni di primo grado. Questo caso (che del resto si può trattare coi metodi più elementari dell'algebra) ha dato origine a nuovi simboli e algoritmi, il cui studio costituisce la *teoria dei determinanti*, ed offre rapidi metodi di calcolo in alcune ricerche di geometria e di meccanica razionale. Per quanto si tratti di una teoria di importanza più formale, che essenziale, noi vogliamo ora esporne i tratti salienti.

§ 18. — **Matrici.**

α) Si dice *matrice* ad m righe ed n colonne l'insieme di $m\,n$ numeri o simboli, od espressioni algebriche (*elementi*) disposte in m righe ed n colonne (*) racchiuse tra due coppie di sbarre verticali. Così, ad esempio:

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ l & m & n & p \end{matrix}\right\| \qquad \left\|\begin{matrix} l & m & n & p & q \\ h & k & r & s & t \end{matrix}\right\|$$

sono rispettivamente una matrice a 3 righe e 4 colonne ed una matrice a 2 righe e 5 colonne.

Nella prima matrice gli elementi a, b, c, d costituiscono la prima riga, o, come si suol dire, la riga d'indice 1; gli elementi e, f, g, h costituiscono la seconda riga o la riga d'indice 2, ecc.

Gli elementi a, e, l, costituiscono la colonna d'indice 1; gli elementi b, f, m costituiscono la colonna d'indice 2, ecc.

(*) È inutile definire il significato della frase: « *simboli disposti in una riga o in una colonna* ». Gli esempi seguenti basteranno a renderne chiaro il senso.

L'elemento p della prima matrice è l'elemento posto nella riga d'indice 3 e nella colonna d'indice 4.

Assai spesso gli $m\,n$ simboli che costituiscono la matrice (gli *elementi* della matrice), si indicano con una stessa lettera dell'alfabeto (p. es., con la lettera a) accompagnata da due indici, che variano da elemento ad elemento; il primo è l'indice della riga, il secondo è l'indice della colonna alle quali appartiene l'elemento.

Così, p. es., se si indicano gli elementi della prima matrice con la lettera a, e si vuol seguire la convenzione ora fissata, si indicheranno gli elementi della prima riga a, b, c, d rispettivamente coi simboli $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$; gli elementi e, f, g, h rispettivamente coi simboli $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}$; i quattro elementi della terza riga coi simboli $a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}$.

In generale una matrice a m righe ed n colonne s'indicherà:

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots & a_{1,\,n-1} & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots\dots & a_{2,\,n-1} & a_{2\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots\dots & a_{m,\,n-1} & a_{mn} \end{matrix}\right\|$$

Il simbolo a_{rs} indica l'elemento di una matrice, che appartiene alla r^{ma} riga (riga d'indice r) ed alla s^{ma} colonna (colonna d'indice s). Queste convenzioni si usano spesso per semplificare e rendere più chiare le notazioni.

Se $m \neq n$, la matrice dicesi matrice rettangolare; se $m = n$, si usano due sbarre verticali soltanto; e la matrice dicesi matrice quadrata o *determinante* di ordine n.

β) Sia k un numero intero positivo non superiore nè a m, nè a n; scegliamo a piacere k colonne e k righe tra le n colonne e le m righe della nostra matrice; i k^2 elementi in cui si incrociano le k righe e le k colonne scelte si troveranno disposti in modo da costituire una matrice quadrata (determinante) di ordine k, il quale si chiama un *minore* della data matrice.

Così, p. es., se $m = 4$, $n = 5$, si scelgano tre colonne, p. es., la 2^a, la 4^a, la 5^a e tre righe, p. es., la 2^a, la 3^a, la 4^a.

I nove elementi determinati dalle intersezioni di dette righe e colonne formano il determinante $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$, che è un minore del terzo ordine contenuto nella matrice considerata.

I minori del 1° ordine sono gli stessi elementi della matrice.

γ) Tra gli elementi di una matrice quadrata di ordine n sono specialmente notevoli gli n elementi della *diagonale principale:* cioè quelli che appartengono a riga e colonna di ugual indice. Per es., nel determinante $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ A & B & C & D \\ p & q & r & s \end{vmatrix}$ di ordine 4, la diagonale principale è costituita dai 4 elementi a, β, C, s.

Diciamo che abbiamo trasposto (scambiato) due righe, p. es. la i^{esima} e la j^{esima} se scriviamo la i^{esima} riga al posto della j^{esima} e viceversa. Altrettanto dicasi per le colonne. Così, p. es., dal precedente determinante si ottiene il determinante $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ A & B & C & D \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ p & q & r & s \end{vmatrix}$, trasponendo la seconda e la terza riga.

§ 19. — **Definizione di determinante.**

I determinanti si considerano come simboli comodi a scriversi per indicare certe quantità che ora definiremo (*).

Un determinante $|a|$ del primo ordine si considera come identico al suo unico elemento a. Tale notazione non è però usata, perchè con $|a|$ si indica invece di solito non un determinante, ma bensì il valore assoluto o modulo di a. Molti dei seguenti teoremi non hanno del resto senso per determinanti del primo ordine.

Un determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ del secondo ordine si considera come un simbolo equivalente alla differenza $a\,d - b\,c$. (Ciò che, come è facile a riconoscere, è conforme alla seguente definizione).

Noi ora, supposto noto il significato di un determinante di ordine $n-1$, definiamo il valore di un determinante di ordine n. (Abbiamo così una definizione generale *per induzione completa*). I determinanti più usati sono quelli del secondo, del terzo e del quarto ordine.

(*) Taluni usano due coppie di sbarre verticali per scrivere un determinante, pensato come matrice quadrata, usando poi due sole sbarre verticali se si vuole indicare il valore che ora definiremo.

Un elemento di un determinante si dirà di posto *pari* o di posto *dispari* secondochè è *pari* o *dispari* la somma degli indici della riga e colonna cui appartiene l'elemento secondo le convenzioni del § 18, α, pag. 63.

E chiaramente: *Di due elementi consecutivi di una stessa linea* (riga o colonna) *uno è di posto pari, l'altro di posto dispari.*

Sia dato un determinante D di ordine n e ne sia a un elemento; sopprimiamo la riga e la colonna, cui appartiene a: otteniamo un determinante (minore) D' di ordine $n-1$, di cui per ipotesi conosciamo il valore. La quantità $+D'$, se a è di posto pari, o la quantità $-D'$, se a è di posto dispari, diconsi il *complemento algebrico* di a.

Se un elemento di un determinante è indicato con una lettera minuscola seguìta da uno o più indici, e se non vi è a temere alcuna ambiguità, molto spesso il suo complemento algebrico si indica con la corrispondente maiuscola seguìta dagli stessi indici. Così, per esempio, se

$$(1) \qquad D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

si scrive

$$A_1 = + \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = b_2 c_3 - c_2 b_3,$$

$$B_3 = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = a_2 c_1 - a_1 c_2$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2 b_3 - b_2 a_3, \text{ ecc.}$$

TEOR. I. *Se noi cambiamo tutti gli elementi di una linea, i loro complementi algebrici non cambiano.*

E ciò perchè per formare il complemento algebrico di un elemento si *sopprimono* proprio le due linee cui appartiene l'elemento stesso.

OSSERVAZIONE. Sia data una successione di oggetti, p. es. $a, b, c, d, e, f, g, h, k$.

Sceglíamone due, uno di posto r, l'altro di posto $\rho \neq r$; p. es. l'elemento d di posto $r = 4$, e g di posto $\rho = 7$. Sia r' il posto del primo elemento, quando si cancelli il secondo, e ρ' il posto del secondo quando si cancelli il primo. Nell'es. precedente $r' = 4$ è il posto di d nella successione a, b, c, d, e, f, h, k

ottenuta dalla precedente sopprimendo g; e $\rho' = 6$ è il posto di g nella successione a, b, c, e, f, g, h, k ottenuta sopprimendo invece d.

Il *posto di un elemento non varia se si sopprime un elemento che lo segue, mentre invece diminuisce di uno, se si cancella un elemento che lo precede;* perciò

$$r' = r, \rho' = \rho - 1 \qquad \text{se } r < \rho,$$
$$r' = r - 1, \rho' = \rho \qquad \text{se } r > \rho.$$

In ogni caso $r' + \rho$ ed $r + \rho'$ differiscono di una unità; cosicchè, se uno di essi è pari, l'altro è dispari; cioè

$$(-1)^{r'+\rho} = -(-1)^{r+\rho'}.$$

Analogamente, se in una matrice si cancella una linea di indice r, allora le linee parallele che precedono la linea cancellata (di indice $\rho < r$) conservano nella nuova matrice l'indice ρ; le linee parallele, che seguivano la linea cancellata, che cioè avevano un indice $\rho > r$, avranno nella nuova matrice l'indice $\rho - 1$ (appunto perchè la r^{esima} linea *precedente* è stata cancellata). Anche nel caso delle linee di una matrice si possono pertanto applicare le precedenti considerazioni.

Sia dato un determinante D; sia a un suo elemento posto sulla r^{esima} riga e sulla s^{esima} colonna; esso è di posto pari o dispari secondo che $r + s$ è pari o dispari [nel primo caso $(-1)^{r+s} = +1$, nel secondo $(-1)^{r+s} = -1$].

Il complemento algebrico A di a è il minore μ ottenuto cancellando riga e colonna incrociantisi in a e preceduto dal segno $(-1)^{r+s}$.

Un elemento b di D, che appartiene a una riga e una colonna distinte da quelle passanti per a, appartiene anche al minore μ. *Se* r + s *è pari, cioè* μ *coincide con* A, *il complemento algebrico di* b *nel minore* μ *si dirà il complemento algebrico di* b *nel complemento algebrico* A *di* a (nel determinante iniziale). Se *invece* r + s *è dispari, cioè* A $= -\mu$, allora *il complemento algebrico di* b *in* μ, *cambiato di segno, si chiamerà il complemento algebrico di* b *nel complemento algebrico* A *di* a. Cioè il complemento algebrico di b nel complemento algebrico A di a vale il complemento di b nel minore μ ottenuto sopprimendo riga e colonna incrociantisi in a, cambiato o non di segno secondo che A coincide con μ o con $-\mu$, [cioè secondo che a ha posto pari o dispari in D, cioè secondo che $(-1)^{+s}$ vale $+1$ oppure -1].

Siano ρ, δ i numeri d'ordine della riga e colonna che b ha in D; siano ρ', δ' i numeri d'ordine della riga e colonna che b ha in μ (che si è ottenuto da D cancellando la riga r^{esima} e colonna s^{esima}). Il complemento algebrico di b in μ vale il minore M ottenuto cancellando da μ la riga e colonna incrociantisi in b, preceduto dal segno $+$ o $-$ secondo che $\rho' + \delta'$ è pari o dispari, cioè preceduto dal segno di $(-1)^{\rho'+\delta'}$.

Quindi il complemento di b in A, vale M preceduto dal segno del prodotto $(-1)^{r+s}$ $(-1)^{\rho'+\delta'}$, cioè dal segno di $(-1)^{(r+\rho')+(s+\delta')}$.

Ora M non è che il minore ottenuto da D sopprimendo entrambe le righe ed entrambe le colonne che si incrociano in a ed in b.

Così pure, se r' ed s' sono i numeri d'ordine della riga e colonna, cui appartiene a nel minore ottenuto da D sopprimendo le righe e colonne che si incrociano in b, il complemento di a nel complemento di b vale

$$(-1)^{r'+s'+\rho+\delta}\,M,$$

dove M è ancora il minore ottenuto sopprimendo in D le righe e colonne che si incrociavano in a e in b.

Ora per l'osservazione precedente

$$(-1)^{r+\rho'} = -(-1)^{r'+\rho}.$$

Analogamente è

$$(-1)^{s+\delta'} = -(-1)^{s'+\delta}.$$

Moltiplicando, se ne deduce:

$$(-1)^{r+s+\rho'+\delta'} = (-1)^{r'+s'+\rho+\delta}.$$

Perciò:

TEOR. II. *Se* a, b *sono due elementi di un determinante appartenenti a righe e colonne distinte, il complemento algebrico di* a *nel complemento algebrico di* b *è uguale al complemento algebrico di* b *nel complemento algebrico di* a.

DEF. **Si dice valore di un determinante la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando gli elementi di una linea qualsiasi per i loro complementi algebrici** (*).

(*) Applicando questa definizione a un determinante di ordine 2, si ritorna al valore sopra definito di un tale determinante.

Se invece moltiplichiamo gli elementi di una linea per i loro complementi algebrici cambiati di segno, e poi sommiamo, troviamo il valore del determinante cambiato di segno.

Così, p. es., nel caso precedente tale valore sarebbe: $a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1$, oppure $a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2$, oppure $a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3$, ecc.

Perchè tale definizione non sia contraddittoria in termini bisogna però dimostrare che, da qualunque linea si parta, si giunge sempre allo stesso valore (che, p. es., per il determinante (1) è $a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3 =$ ecc. ...).

Poichè il teorema si verifica tosto per i determinanti del 2° ordine noi potremo dimostrarlo col metodo di induzione completa provando che, ammesso il teorema per i determinanti di ordine $n - 1$, e quindi anche per i *complementi algebrici* (*) degli elementi di un determinante di ordine n, esso si dimostra valido anche per i determinanti di ordine n. E così noi faremo. Per provare che, partendo da una linea qualunque, si giunge sempre allo stesso risultato, basterà provare che, partendo da una riga qualsiasi (p. es. la r^{esima}) si giunge allo stesso risultato, come partendo da una colonna qualsiasi (p. es. la s^{esima}). E, poichè il teorema è stato ammesso per i determinanti di ordine $n - 1$, noi, per calcolare i complementi di un elemento qualsiasi, potremo calcolarli partendo da una loro linea qualsiasi.

Se noi sviluppiamo, come abbiamo detto, il determinante iniziale prima secondo gli elementi della riga r, poi secondo gli elementi della colonna s, troviamo due somme S, S' di n prodotti (di un elemento per il suo complemento) che hanno un addendo comune: il prodotto dell'elemento c in cui si incrociano la riga r e la colonna s per il suo complemento C. Basterà provare che i risultati R, R' ottenuti sopprimendo dalle due somme S, S' questo addendo comune, risultano uguali. Ogni addendo di R è il prodotto di un elemento a della riga r per il suo complemento A; questo complemento si può, come abbiamo detto, calcolare partendo da una sua linea qualsiasi, p. es. da quella sua colonna, che in D aveva il posto s; esso è uguale perciò alla somma dei prodotti ottenuti moltiplicando ogni elemento b di questa sua colonna per il complemento di tale elemento b in A. Quindi R si ottiene così: *Si moltiplichi ogni elemento* a *della* r^{esima} *riga per ogni elemento* b *della* s^{esima} *colonna* (*distinti*

(*) Ciò è evidente se si tratta del complemento di un elemento di posto pari (il quale complemento è precisamente un determinante di ordine $n - 1$). Se invece si tratta di un elemento di posto dispari, tale complemento è un determinante di ordine $n - 1$ cambiato di segno; ma tale cambiamento di segno si ha, per definizione, anche nei complementi algebrici dei suoi elementi.

dall' elemento c *di incrocio) e per il complemento algebrico di* b *nel complemento algebrico* A *di* a *e si sommino i risultati così ottenuti.*

R' si otterrebbe similmente sommando i prodotti di ogni a per ogni b e per il complemento di a nel complemento B di b. Per il teor. II sarà dunque $R = R'$, c. d. d.

Osservazione — Da questa dimostrazione segue che il valore di un determinante si ottiene sommando insieme:

α) il prodotto di un suo elemento c scelto ad arbitrio per il suo complemento algebrico;

β) i prodotti ottenuti moltiplicando un elemento a posto sulla riga di c per un altro elemento b posto sulla stessa colonna di c, per il complemento algebrico di a nel complemento di b (o, ciò che è lo stesso, il complemento di b nel complemento di a).

Un risultato analogo si ottiene se gli elementi a, b descrivono due linee parallele, p. es. due righe, restando però sempre in colonne distinte. In tale caso naturalmente non si parla più di elemento di incrocio.

§ 20. — Proprietà di un determinante.

Teor. I. *Se noi scambiamo ordinatamente le righe con le colonne, il determinante* D *non muta* (cioè diventa un determinante D' uguale a D).

(Per es. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$).

Ciò si può dimostrare o notando che per la stessa definizione le righe e le colonne hanno lo stesso ufficio nel calcolo di D, oppure [ammesso il teorema per i determinanti di ordine più piccolo dell'ordine di D, perchè il teorema è evidente per i determinanti di ordine 1, 2] osservando che, sviluppando D secondo gli elementi della prima riga, si ha un risultato identico come sviluppando D' a partire dalla prima colonna.

Teor. II. *Trasponendo* (scambiando) *due linee parallele, il determinante* D *cambia di segno* (cioè si muta in un determinante $D' = -D$; anzi i termini di D' sono ordinatamente uguali e di segno opposto a quelli di D) (*).

(*) Un determinante D di ordine n è una somma di più quantità T, ciascuna delle quali è un prodotto di n elementi del determinante stesso. Queste T si dicono i *termini* di D (cfr. i teor. del seg. § 21). Un termine di D è il prodotto di un suo elemento per un termine del complemento algebrico dell'elemento stesso.

Il teorema è evidente per i determinanti di ordine 2. Ammesso il teorema per determinanti di ordine $n-1$, dimostriamolo per un determinante D di ordine $n > 2$. Il teorema così sarà completamente provato col metodo di induzione completa. Scambiamo in D, p. es., le righe r^{esima} ed s^{esima}. Consideriamo la t^{esima} riga con $t \neq r$, $t \neq s$. Scambiando le righe di posto r ed s, si scambiano due righe nei complementi algebrici degli elementi di tale t^{esima} riga, che sono (a meno del segno) determinanti di ordine $n-1$ e per i quali vale per ipotesi il teorema. Basta ricordare lo sviluppo di D ottenuto partendo dalla t^{esima} riga, perchè il teorema risulti provato anche per D.

Teor. III. *Se un determinante ha due righe parallele uguali, esso è nullo.* Infatti, scambiando tali righe, D resta immutato; ma, per il teorema precedente, esso cambia segno. Dunque $D = -D$, cioè $D = 0$.

Teor. IV. *Se io moltiplico i complementi degli elementi di una linea di* D *rispettivamente per delle quantità* $l_1, l_2, l_3 \ldots\ldots$ *e sommo, il numero così ottenuto è uguale al determinante* D' *che si deduce dal dato, sostituendo le* $l_1, l_2, l_3 \ldots\ldots$ *ordinatamente al posto degli elementi della linea considerata.*

Così, p. es., se

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ si ha p. es. } l_1 A_2 + l_2 B_2 + l_3 C_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D'$$

Infatti i complementi delle a_2, b_2, c_2 in D e quelli delle l_1, l_2, l_3 in D' sono per il teor. I di pag. 65 ordinatamente uguali. Ora per definizione D' vale la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando le l_1, l_2, l_3 per i loro complementi algebrici in D', che per la precedente osservazione valgono appunto i complementi algebrici A_2, B_2, C_2 delle a_2, b_2, c_2 in D. c. d. d.

Teor. V. *La somma dei prodotti ottenuta moltiplicando gli elementi di una linea ordinatamente per i complementi algebrici degli elementi corrispondenti di un'altra linea parallela alla prima e sommando, è nulla.*

Così, p. es., per il determinante D del precedente teor. IV e $a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2 = 0$, oppure $a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 = 0$, ecc. Infatti la somma dei prodotti degli elementi a_1, b_1, c_1 della prima riga per i complementi degli elementi a_2, b_2, c_2 della seconda riga vale (per il teor. IV ove si ponga $l_1 = a_1$, $l_2 = b_1$, $l_3 = c_1$) quel determinante D' che si ottiene da D scrivendo a_1, b_1, c_1 al posto di a_2, b_2, c_2. Ma tale determinante D' avrà uguali la prima e la seconda riga e perciò (teor. III) è nullo. c. d. d.

TEOR. VI. *Se moltiplichiamo gli elementi di una linea del determinante* D *per un numero* K, *il determinante resta moltiplicato per* K (cioè si muta in un determinante $D' = KD$). Infatti i complementi algebrici degli elementi di quella linea restano invariati; dallo sviluppo di D secondo gli elementi di tale linea si deduce pertanto subito il nostro teorema.

COR. α) *Se due linee parallele di un determinante sono proporzionali, il determinante è nullo* (perchè, moltiplicando gli elementi di una di queste linee per un conveniente fattore, il determinante si muta in un determinante con due linee parallele uguali).

TEOR. VII. *Se gli elementi di una linea di un determinante* D *sono ordinatamente* $l_1 + m_1$, $l_2 + m_2$, $l_3 + m_3$, ..., *il determinante* D *è uguale alla somma dei due determinanti ottenuti da* D *sostituendo agli elementi di tale linea una volta le* l_1, l_2, ..., *un'altra volta le* m_1, m_2, ...

Ciò risulta subito dallo sviluppo del determinante ottenuto partendo dalla linea considerata.

TEOR. VIII. *Se agli elementi* a_i, b_i, c_i, ... *di una linea aggiungiamo gli elementi* a_j, b_j, c_j, ... *di una linea parallela moltiplicati per un numero qualsiasi* k (cioè scriviamo $a_i + k a_j$, $b_i + k b_j$, ... al posto di a_i, b_i, ...), *il determinante resta immutato* (cioè si muta in un determinante $D' = D$). Infatti D' è (teor. VII) somma del determinante che ha come elementi della linea considerata le a_i, b_i, ..., e dell'altro che in tale linea ha gli elementi $k a_j$, $k b_j$, ... Il primo è lo stesso determinante D, il secondo ha proporzionali la riga degli elementi a_j, b_j, ... e la riga degli elementi $k a_j$, $k b_j$, ..., ed è perciò nullo (Cor. α del teor. VI). Donde segue il teorema enunciato.

TEOR. IX. *Un determinante* D *di ordine* n *ha* $\underline{|n}$ *termini.*

Ciò è evidente per $n = 2$; ammesso al solito vero per i determinanti d'ordine $n - 1$, si noti che i complementi algebrici degli elementi di D hanno $\underline{|n-1}$ termini. Per ottenere D si deve moltiplicare ognuno degli n elementi di una linea di D per il suo complemento e sommare. Si avranno così $n\,\underline{|n-1} = \underline{|n}$ termini generalmente *distinti*.

Il teorema è così provato per induzione completa. (Si noti che per determinanti particolari qualcuno di tali termini può essere nullo, due termini si possono elidere; se un elemento è somma di più quantità, qualche termine si può scomporre nella somma di parecchi, ecc.).

Teor. X. *Sono poi immediate le seguenti proposizioni:*

a) *Se tutti gli elementi di una stessa linea sono nulli, il determinante è nullo.*

b) *Se tutti gli elementi posti da una stessa banda della diagonale principale sono nulli, il determinante si riduce al termine principale.*

c) *Un determinante di ordine* n *si può trasformare in un determinante uguale di ordine* n + 1, *premettendo una riga ed una colonna, purchè gli elementi dell'una o dell'altra siano tutti nulli, eccettuato il primo che sia uguale all'unità.*

Così, p. es.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & a & b \\ f & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & n & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & a & b \\ 0 & f & c & d \end{vmatrix}, \text{ ecc.}$$

§ 21. — Altre proprietà di un determinante.

Teor. I. *Un termine* T *di un determinante* D *di ordine* n *è* (a meno del segno) *prodotto* P *di* n *elementi, due dei quali non appartengono nè alla stessa riga, nè alla stessa colonna.*

Ciò è evidente per $n=2$; come sopra ammettiamo il teor. per determinanti di ordine $n-1$. Un termine T di D è il prodotto di un elemento a di D per un termine T' del complemento algebrico A di a. Poichè il teor. è ammesso per i termini T' di A (che è un determinante d'ordine $n-1$) e poichè gli elementi di A appartengono a righe e colonne distinte dalle due linee, cui appartiene a, il termine $T = a\,T'$ di D godrà pure delle proprietà enunciate.

Teor. II. *Viceversa un prodotto* P *di* n *elementi di* D, *due dei quali non appartengono nè alla stessa riga nè alla stessa colonna, è, a meno del segno, un termine* T *di* D.

(Dimostraz. analoga alla precedente).

Per quanto riguarda i segni si può poi dimostrare:

Teor. III. *Se gli elementi di* P *si possono portare sulla diagonale principale con* k *trasposizioni di righe o di colonne, allora* $T = (-1)^k P$, (cioè $T = P$ se k è pari, $T = -P$ se k è dispari).

P. es. il termine $b_1 c_2 a_3$ di $\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = D$ si porta sulla diagonale principale trasponendo, p. es., dapprima le colonne prima e seconda, e poi le colonne che (dopo la precedente trasposizione) si trovano al 2° e 3° posto. Pertanto è $k=2$, e $+\,b_1 c_2 a_3$ è perciò un termine T di D.

Le trasposizioni con cui un termine si porta nella diagonale principale si possono scegliere in modo molteplice; dal teorema III segue però che, se con un metodo occorre un numero, p. es., *pari* di trasposizioni, con ogni altro metodo il numero delle trasposizioni necessarie sarà ancora *pari*.

DIM. Il teorema è evidente se $k=0$. In tal caso P è proprio il prodotto degli elementi della diagonale principale, che è un termine del determinante (*il termine principale*).

In ogni altro caso il determinante D' dedotto da D con tali k trasposizioni vale $(-1)^k D$ (teor. II del § 20); ogni termine di D' vale il corrispondente di D moltiplicato per $(-1)^k$.

Ora il prodotto P da noi considerato è il termine principale di D', e perciò P è un termine di D'. Dunque $(-1)^k P$ è un termine di D, *c. d. d.*

TEOR. IV. *I termini di un determinante* D, *che hanno come fattori* h *elementi scelti dalle prime* h *righe e colonne, hanno per somma il prodotto del minore* Δ *formato con tali righe e colonne per il minore complementare* Δ' (formato con le residue righe e colonne).

Per $h=1$ si trova un'immediata conseguenza della definiz. di determinante.

DIM. Uno di questi termini T è, a meno del segno, il prodotto P di h elementi, appartenenti a righe e colonne distinte del minore Δ, per $n-h$ elementi appartenenti a righe e colonne distinte di Δ'.

Ora il prodotto p dei primi h elementi vale, a meno del segno, un termine τ di Δ; e precisamente $\tau=(-1)^k p$, se con k trasposizioni si portano gli h elementi di p sulla diagonale principale di Δ. Il prodotto p' degli altri $n-h$ elementi vale, a meno del segno, un termine τ' di Δ'; e precisamente $\tau'=(-1)^l p'$, se con l trasposizioni si portano tali $n-h$ elementi sulla diagonale principale di Δ'.

Allora evidentemente, facendo tutte le citate $p+l$ trasposizioni, tutti gli n elementi considerati sono portati sulla diagonale principale di D. E perciò $T=(-1)^{k+l}P$. Poichè $P=pp'=(-1)^k\tau(-1)^l\tau'$, sarà $T=\tau\tau'$. Cioè i termini T considerati sono tutti e soli i prodotti di un termine τ di Δ per un termine τ' di Δ'.

c. d. d.

Siano scelte h righe qualunque che abbiano i posti $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_h$ scritti in ordine crescente. Trasponiamo la riga r_1^{esima} con quella di posto r_1-1, poi con quella di posto r_1-2, ecc. ecc., poi con la prima riga; avremo così fatto r_1-1 trasposizioni: la riga di posto r_1 è andata al primo posto, senza che ne resti turbato l'ordine in cui si seguono le altre righe.

In modo analogo con r_2-2 trasposizioni porteremo la riga r_2^{esima} al secondo posto, ecc., con r_h-h trasposizioni porteremo la riga r_h^{esima} al posto h, in tutto con $(r_1+r_2+\ldots\ldots+r_h)-(1+2+\ldots\ldots+h)$ trasposizioni avremo portato le nostre h righe ai primi posti senza cambiare nè l'ordine in cui si succedono tali righe, nè l'ordine in cui si succedono le altre $n-h$.

Altrettanto dicasi per h colonne di posti $s_1, s_2, \ldots\ldots, s_h$.

In tutto con $(r_1+r_2+\ldots\ldots+r_h)+(s_1+s_2+\ldots\ldots+s_h)-2(1+2+\ldots\ldots+h)$ trasposizioni avremo portato sia le righe, che le colonne considerate ai primi h posti senza che sia mutato nè l'ordine in cui si seguono le linee considerate, nè l'ordine in cui si seguono le linee residue. Poichè ogni trasposizione di linee parallele cambia il determinante di segno, e poichè $2(1+2+\ldots\ldots+h)$ è un numero pari, con le trasposizioni citate avremo dedotto dal determinante D un determinante $D'=(-1)^c D$ se $c=(r_1+r_2+\ldots.+r_h)+(s_1+s_2+\ldots\ldots+s_h)$. E anzi da ogni termine di D' si deduce il corrispondente di D, moltiplicandolo per $(-1)^c$. Applicando a D' il teor. IV, avremo in conclusione:

TEOR. V. *Se* Δ *è un qualsiasi minore di un determinante* D *di ordine* n, *formato con* h $<$ n *righe e* h *colonne di* D, *e* Δ' *è il minore formato con le residue* n — h *righe e colonne, il prodotto di* Δ, *di* Δ' *e di* $(-1)^c$, *dove* c *uguaglia la somma degli indici delle righe e delle colonne di* Δ, *è uguale alla somma di tutti e soli quei termini di* Δ, *che contengono come fattori* h *elementi di* Δ.
Il prodotto $(-1)^c\Delta'$ si chiama *complemento* di Δ: è facile vedere che $(-1)^c\Delta$ è il complemento di Δ'.

Così, per es., nel determinante

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

la somma di tutti i termini del suo sviluppo, i quali contengono per fattori due elementi del minore $\Delta = \begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{42}a_{43} \end{vmatrix}$, uguaglia $(-1)^c \Delta \Delta'$, dove $c = 2+3+2+4 = 11$ (perchè gli indici delle colonne di Δ sono 2 e 3 e quelli delle righe sono 2 e 4) e dove Δ' è il $\begin{vmatrix} a_{11}a_{14} \\ a_{31}a_{34} \end{vmatrix}$ ottenuto da Δ' sopprimendovi le righe e le colonne che contribuiscono a formare Δ. Si ha poi che $(-1)^c \Delta'$ e $(-1)^c \Delta$ sono rispettivamente i complementi algebrici di Δ e di Δ'. Se ne deduce che:

Scelte h *linee parallele di* D, *la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando i minori di ordine* h *di* D, *formati con queste* h *righe, per i minori complementari, uguaglia* D.

Basta ricordare che ogni termine di D è prodotto di n elementi, h dei quali appartengono alle h linee considerate, ed anzi ad uno solo dei minori di ordine h formati con queste h linee.

Così, per esempio:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a \;\; a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{23}a_{24} \\ a_{43}a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22}a_{44} \\ a_{42}a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11}a_{14} \\ a_{31}a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{42}a_{43} \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} a_{12}a_{13} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21}a_{24} \\ a_{41}a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}a_{14} \\ a_{32}a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21}a_{23} \\ a_{41}a_{43} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{13}a_{14} \\ a_{33}a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21}a_{22} \\ a_{41}a_{42} \end{vmatrix}.$$

§ 22. — Prodotto di due determinanti.

Siano dati due determinanti

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots\ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots\ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots\ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

di ordine n. *Io dico che il loro prodotto è uguale al determinante* C *di ordine* n,

$$C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots\ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots\ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots\ldots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

ove $c_{rs} = a_{r1}\, b_{s1} + a_{r2}\, b_{s2} + \ldots\ldots + a_{rn}\, b_{sn}$.

Cosicchè, supposto per fissar le idee $n=3$:

$$(1)\quad AB=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13} & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23} & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{23}b_{13} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23} & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{12}+a_{33}b_{13} & a_{31}b_{21}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{23} & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

Il determinante del secondo membro è la somma dei 27 determinanti che si ottengono conservando in ciascuna colonna uno solo dei tre addendi: il primo, il secondo o il terzo. Se in due colonne conserviamo addendi di egual posto (in entrambe le colonne il primo addendo, o in entrambe il secondo, o in entrambe il terzo), il determinante così ottenuto avrà due colonne proporzionali e quindi (teor. VI, α, § 20, pag. 71) sarà nullo. [Così, p. es., conservando nelle prime due colonne il primo addendo, gli elementi di queste colonne si ottengono moltiplicando a_{11}, a_{21}, a_{31} rispettivamente per b_{11} e per b_{21}]. Dei 27 determinanti basta per ciò tener conto dei soli *sei* differenti da zero, che si ottengono scegliendo in una colonna il primo addendo, in un'altra il secondo, nella residua il terzo. Consideriamo uno di questi sei determinanti, p. es.

$$\begin{vmatrix} a_{12}b_{12} & a_{13}b_{23} & a_{11}b_{31} \\ a_{22}b_{12} & a_{23}b_{23} & a_{21}b_{31} \\ a_{32}b_{12} & a_{33}b_{23} & a_{31}b_{31} \end{vmatrix}$$

ottenuto, scegliendo nella 1ª colonna il secondo addendo, nella seconda il terzo, nella terza il primo. Esso vale

$$b_{12}b_{23}b_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Ora con c trasposizioni di colonne il determinante $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}$ si muti in A. Tale determinante varrà $(-1)^c A$; e quindi (2) vale $(-1)^c b_{12}b_{23}b_{31}A$. Ma con le stesse c trasposizioni di colonne eseguite sul determinante B, il termine $b_{12}b_{23}b_{31}$ va nel termine principale; perciò (teor. III del § 21) $(-1)^c b_{12}b_{23}b_{31}$ vale un termine di B. Perciò (2) è il prodotto di A per un termine di B. Ripetendo questa considerazione per i *sei* determinanti sopra citati, si trova che il secondo membro di (1) vale il prodotto di A per la somma dei *sei* termini di B, cioè vale il prodotto AB, come dovevasi provare.

β) Osservazioni. Notiamo che, invertendo l'ordine dei due determinanti A e B, il loro prodotto non cambia; ciò si verifica facilmente osservando che questa inversione equivale a scambiare in C le orizzontali con le verticali.

Il determinante C si dice il prodotto eseguito per orizzontali dei due determinanti A e B; e la regola esposta per ottenere questo prodotto si dice regola di moltiplicazione per orizzontali degli stessi A e B.

Per moltiplicare A per B potrei anche scambiare nei determinanti A e B le righe con le colonne, ciò che non altera i valori dei due determinanti, e poi eseguire il prodotto con la regola precedente. Ciò equivale a trasporre, nell'ultima formola del prodotto AB, i due indici di ogni elemento a e quelli di ogni elemento b od anche a porre $c_{rs}=a_{1r}b_{1s}+a_{2r}b_{2s}+a_{3r}b_{3s}$. Il prodotto così ottenuto dicesi prodotto per verticali.

Infine si potevano scambiare le righe con le colonne in uno solo dei due fattori A, B.

Se i due determinanti A, B non fossero del medesimo ordine, allora, per eseguire il prodotto col metodo precedente, si deve elevare l'ordine del determinante di ordine minore, finchè i due determinanti abbiano lo stesso ordine, ed applicare infine la regola precedente (§ 20, teor. X c, pag. 72).

Ricordo che il quadrato di A uguaglia A, A e si ottiene dalla formola precedente, ponendo $a_{rs}=b_{rs}$.

γ) Consideriamo le due matrici:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \right\| , \quad \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{matrix} \right\| .$$

Se le moltiplichiamo per orizzontali, come se fossero determinanti, otteniamo il determinante di secondo ordine

$$C = \begin{vmatrix} a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{12} + a_{13}\,b_{13} & a_{11}\,b_{21} + a_{12}\,b_{22} + a_{13}\,b_{23} \\ a_{21}\,b_{11} + a_{22}\,b_{12} + a_{23}\,b_{13} & a_{21}\,b_{21} + a_{22}\,b_{22} + a_{23}\,b_{23} \end{vmatrix} ,$$

che si verifica subito uguale a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} ,$$

e che si chiamerà prodotto delle due matrici.

Se invece si moltiplica per verticali, si ottiene un determinante di terzo ordine identicamente nullo, perchè uguale al prodotto per verticali dei determinanti nulli

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

Mentre le *due matrici sono simboli privi di significato, il loro prodotto ha dunque un significato preciso.*

Queste osservazioni si possono generalizzare a matrici qualsiasi, ma per tali studii rinvio ai trattati di algebra.

§ 23. — Il determinante di Vandermonde e il discriminante di un'equazione algebrica. Separazione delle radici di una tale equazione.

Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono n numeri qualsiasi, si calcoli il determinante (di Vandermonde)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots\ldots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \ldots\ldots & \alpha_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \ldots\ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} .$$

Sottraendo successivamente dalla n^{esima}, dalla $(n-1)^{esima}$, ..., dalla 2ª orizzontale la precedente moltiplicate per α_1, il determinante D resta scritto nella forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_3 - \alpha_1 & \ldots\ldots & \alpha_n - \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \alpha_3(\alpha_2 - \alpha_1) & \ldots\ldots & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \alpha_2^{n-3}(\alpha_2 - \alpha_1) & \alpha_3^{n-3}(\alpha_3 - \alpha_1) & \ldots\ldots & \alpha_n^{n-3}(\alpha_n - \alpha_1) \\ 0 & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) & \alpha_3^{n-2}(\alpha_3 - \alpha_1) & \ldots\ldots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 & \ldots\ldots & \alpha_n - \alpha_1 \\ \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \ldots\ldots & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_2^{n-3}(\alpha_2 - \alpha_1) & \ldots\ldots & \alpha_n^{n-3}(\alpha_n - \alpha_1) \\ \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) & \ldots\ldots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \ldots\ldots (\alpha_n - \alpha_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_2^{n-3} & \alpha_3^{n-3} & \ldots & \alpha_n^{n-3} \\ \alpha_2^{n-2} & \alpha_3^{n-2} & \ldots & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Ora, se $n = 2$, si trova che $D = \alpha_2 - \alpha_1$; servendosi della precedente identità, che riduce il calcolo di un determinante di Vandermonde di ordine n al calcolo di un determinante analogo di ordine $n - 1$, si trova che:

Se $n = 3$, $D = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)$.

Se $n = 4$, $D = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1)$.
$.(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_3)$.

Per n qualsiasi D è uguale al prodotto delle $\frac{1}{2} n(n-1)$ differenze delle quantità $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ a due a due, in cui l'indice del minuendo superi l'indice del sottraendo.

α) Se noi innalziamo al quadrato il determinante di Vandermonde troviamo

$$D^2 = \Delta = \begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \ldots\ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots\ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots\ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

dove con s_h ho indicato la somma delle h^{esime} potenze delle α (per $h = 1, 2, \ldots, 2n - 2$).

Questo determinante Δ si chiama il *discriminante* degli n numeri dati; esso è nullo soltanto se almeno due di questi numeri sono uguali tra di loro. Se le α sono le radici di una data equazione algebrica, le formole del § 14 γ, pag. 50, permettono di calcolare tale discriminante senza risolvere l'equazione, perchè le s_h si possono calcolare tosto, appena sono dati i coefficienti dell'equazione. Abbiamo così un metodo per riconoscere quando due delle radici di una data equazione sono tra loro uguali.

β) Il discriminante può servire (almeno teoricamente) a calcolare approssimativamente le radici reali di una equazione a coefficienti reali, *che abbia radici tutte distinte.*

Se $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ è una tale equazione, esistono molti metodi per trovare un numero positivo B maggiore del modulo di ogni sua radice (*) reale o complessa.

Noi diremo che abbiamo calcolato in prima approssimazione, o anche che abbiamo *separato le radici reali* di tale equazione, se per ogni tale radice α sappiamo assegnare un intervallo dentro al quale sia contenuta la radice α e nessuna altra radice. Impareremo più avanti come il metodo di Newton-Fourier permetta poi di dedurre valori di α approssimati a piacere. Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ sono le radici reali di tale equazione, è $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_r) Q(x)$, dove $Q(x)$ è un prodotto di fattori di secondo grado sempre positivi per x reale. Cosicchè, se μ, ν sono due numeri tali che $P(\mu)$ e $P(\nu)$ abbiano segni opposti, certo nell'intervallo (μ, ν) esiste un numero *dispari* di radici α, e quindi *almeno* una radice α.

Se λ è un numero positivo minore dei valori assoluti di tutte le differenze tra le radici reali combinate a due a due, allora, formando una progressione aritmetica indefinita in ambo i sensi, in cui la differenza tra due termini consecutivi sia eguale a codesto numero λ, tra due termini consecutivi della progressione potrà essere compresa una sola radice o nessuna. E, per quanto si disse, sarà facile assicurarsi se tra due termini consecutivi della progressione sia compresa o no una radice, poichè nel primo caso essi, sostituiti all'incognita x, faranno prendere al primo membro $P(x)$ dell'equazione segni opposti, nel secondo caso lo stesso segno (**).

Evidentemente è inutile protrarre la progressione indefinitamente: basta tener conto solo di quei termini della progressione che cadono nell'intervallo compreso tra $-B$ e $+B$. In ognuno degli intervallini, ai cui estremi $P(x)$ ha segni opposti, e in essi soli, cade una e una sola radice di $P(x) = 0$. Basterà tener conto di tali intervallini e trascurare gli altri perchè sia risoluto il nostro problema di *separare* le radici della nostra equazione.

Il nostro problema è dunque ridotto alla determinazione del numero λ. Si noti che, se α_1, ed α_2 sono due radici qualunque, è $|\alpha_1 - \alpha_2| \leqq |\alpha_1| + |\alpha_2| \leqq 2B$.

Sostituendo nel valore (che sappiamo calcolare) di

$$\Delta = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 \ldots\ldots (\alpha_{n-1} - \alpha_n)^2$$

in luogo di tutti i fattori, eccettuato $(\alpha_1 - \alpha_2)$, il numero maggiore (in valore assoluto) $|2B|$, si avrà:

$$|\Delta| \leqq |\alpha_1 - \alpha_2|^2 (2B)^{2\left(\frac{n(n-1)}{2} - 1\right)}; \text{ onde } \sqrt{|\Delta|} \leqq |\alpha_1 - \alpha_2| \; |2B|^{\frac{n(n-1)}{2} - 1}$$

(*) Ecco, p. es., un metodo teoricamente semplice. Sia A la massima delle $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|$. Sarà

$$|P(x)| \geqq |x|^n - \{ |a_1 x^{n-1}| + |a_2 x^{n-2}| + \ldots + |a_n| \} \geqq$$

$$|x|^n - A \{ |x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \ldots + |x| + 1 \} = |x|^n - A \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}$$

cioè

$$|P(x)| \geqq \frac{|x|^n \{ |x| - A - 1 \} + A}{|x| - 1}.$$ Se dunque $|x| \geqq A + 1$, allora sarà $|P(x)| > 0$. Quindi se x è radice di $P(x) = 0$, il suo modulo $|x|$ sarà inferiore ad $A + 1$. Potremo dunque porre $B = A + 1$. Per altri metodi, che permettono di assegnare un valore più piccolo del numero B rinvio ai trattati di algebra.

(**) Non porta che semplificazioni il caso che uno dei termini della progressione sia esso stesso una radice.

ossia

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \geqq \sqrt{|\Delta|} : (2B)^{\frac{n(n-1)}{2} - 1}.$$

Il secondo membro è minore del modulo della differenza tra le due radici reali α_1, α_2, che si possono scegliere ad arbitrio tra le radici reali dell'equazione. Possiamo dunque assumere:

$$\lambda = \frac{|\sqrt{\Delta}|}{(2B)^{\frac{n(n-1)}{2} - 1}}.$$

Oss. Supponiamo in particolare che i coefficienti dell'equazione siano interi, ed il primo a_0 uguagli l'unità. Allora il discriminante, essendo un polinomio a coefficienti interi formato coi rapporti $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots\ldots, \frac{a_n}{a_0}$ che sono numeri interi, sarà un numero intero, e quindi certamente sarà $\sqrt{|\Delta|} \geqq 1$ (*). Dunque possiamo anche assumere

$$\lambda = \frac{1}{(2B)^{\frac{n(n-1)}{2}} - 1}.$$

Se poi a_0 non fosse uguale ad 1, si ponga $z = \frac{y}{a_0}$, assumendo y come incognita. L'equazione diventa $a_0 \left(\frac{y}{a_0}\right)^n + a_1 \left(\frac{y}{a_0}\right)^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} \frac{y}{a_0} + a_n = 0$, ossia $y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 a_0 y^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} a_0^{n-2} y + a_n a_0^{n-1} = 0$, che è un'equazione a coefficienti interi col primo coefficiente uguale all'unità. E siamo ricondotti al caso precedente.

Nei trattati di algebra complementare sono dati molti altri metodi per separare e per calcolare approssimativamente le radici di una equazione algebrica.

Esempi (**).

1° Se $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ed $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, sono i coseni direttori di due rette, rispetto a una terna di assi cartesiani ortogonali, è noto dalla geometria analitica che l'angolo θ delle due rette soddisfa alla

$$\cos\theta = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2.$$

Quindi:

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{Vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta.$$

donde:

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{\begin{Vmatrix} \alpha_1\beta_1\gamma_1 \\ \alpha_2\beta_2\gamma_2 \end{Vmatrix}^2} = \pm\sqrt{(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)^2 + (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)^2 + (\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2)^2}.$$

(*) Non può essere $\Delta = 0$ nell'attuale ipotesi che le radici della nostra equazione sieno distinte.

(**) I seguenti esempi sono importanti specialmente per le applicazioni che se ne fanno nei corsi di geometria analitica.

2° Siano $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ i coseni di direzione di tre rette r_i, a due ortogonali ($i = 1, 2, 3$). Sarà:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \\ \alpha_2 \beta_3 \gamma_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ ; e quindi } \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \\ \alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

3° *Determinanti reciproci.* — Dato un determinante di ordine n

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

con i complementi algebrici A_{rs} dei suoi elementi, in numero di n^2, si può formare un altro determinante pure di ordine n

$$A' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots\dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots\dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots\dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

che dicesi reciproco del primitivo A.

Il determinante reciproco di un determinante di ordine n è uguale alla $(n - 1)^{ma}$ potenza del primitivo, ossia $A' = A^{n-1}$.

Infatti moltiplicando per orizzontali i due determinanti A e A', l'elemento generico c_{rs} del determinante prodotto sarà uguale ad A se $r = s$, ed uguale a zero se $r \neq s$. Infatti:

$$c_{rs} = a_{r1} A_{s1} + a_{r2} A_{s2} + \dots\dots + a_{rn} A_{sn} = 0, \ (r \neq s)$$
$$c_{rr} = a_{r1} A_{r1} + a_{r2} A_{r2} + \dots\dots a_{rn} A_{rn} = A,$$

come risulta dalle formole di pag. 70, § 20, Teor. V°. Quindi:

$$AA' = \begin{vmatrix} A & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & A & \dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots\dots & A \end{vmatrix} = A^n.$$

Se $A \neq 0$, dividendo per A, si ha subito la formola da dimostrare. Se poi $A = 0$, anche $A' = 0$ e la formola è ancora vera, come ora proveremo.

Infatti ciò è evidente se tutti gli elementi di A sono nulli; se invece non sono tutti nulli, ed è, p. es., $a_{11} \neq 0$, moltiplichiamo nel determinante A' la prima colonna per a_{11} (il che equivale a moltiplicare A' per a_{11}) e ad essa aggiungiamo tutte le altre colonne moltiplicate ordinatamente per $a_{12}, a_{13}, \ldots\ldots a_{1n}$ (il che non altera il valore del determinante); per le stesse formole del teor. cit., avremo

$$a_{11} A' = \begin{vmatrix} A & A_{12} & A_{13} & \ldots\ldots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \ldots\ldots & A_{2n} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & \ldots\ldots & A_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & A_{n2} & A_{n3} & \ldots\ldots & A_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

poichè la prima colonna è tutta costituita di termini nulli, essendo $A = 0$.

Dividendo per a_{11} ($\neq 0$), otteniamo appunto $A' = 0$.

§ 24. — **Sistemi di equazioni lineari. Teorema preliminare.**

Per sistema di m equazioni di primo grado (o, come anche si dice, *lineari*) ad n incognite $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, s'intende naturalmente un sistema di m equazioni, ciascuna delle quali sia della forma:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \ldots\ldots + \lambda x_n = p,$$

dove le $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \lambda, p$ sono numeri costanti dati ($\alpha, \beta, \ldots\ldots, \lambda$ coefficienti dell'equazione; p termine noto).

Il problema della risoluzione di queste equazioni consiste dunque nel cercare tutti gli speciali sistemi di valori da darsi alle $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, in modo che le m equazioni ne restino tutte soddisfatte simultaneamente.

Indicando in generale con a_{ij} il coefficiente della incognita x_j nella i^{ma} equazione e con α_i il termine noto, che sta al secondo membro di questa stessa equazione, è chiaro che il sistema delle m equazioni date fra le n incognite assumerà la forma seguente:

$$[1] \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots + a_{1,n-1} x_{n-1} + a_{1n} x_n = \alpha_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots\ldots + a_{2,n-1} x_{n-1} + a_{2n} x_n = \alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots\ldots + a_{m,n-1} x_{n-1} + a_{m,n} x_n = \alpha_m \end{cases}$$

Due tali sistemi di equazioni lineari nelle stesse n incognite si dicono *equivalenti*, se ogni sistema di valori delle x, che soddisfa all'uno, soddisfa anche all'altro, e viceversa.

Due sistemi equivalenti a [1] sono equivalenti tra di loro. È poi noto ed evidente:

Un sistema [1] *è equivalente ad un altro sistema che si deduce da* [1] *moltiplicando una delle date equazioni per un numero* **differente da zero** e lasciando invariate le altre equazioni.

Un sistema [1] *è equivalente al sistema che se ne deduce moltiplicando una delle sue equazioni per un numero* **differente da zero**, *e aggiungendo ad essa le precedenti equazioni moltiplicate per un numero arbitrario, mentre si lasciano invariate le altre equazioni di* [1].

Nell'algebra elementare si insegna a risolvere un tale sistema, mostrando che, dato un sistema di più equazioni in più incognite, se ne può generalmente dedurre uno con un minor numero di incognite *eliminando* almeno una incognita. Nelle righe seguenti ci occupiamo in generale della eliminazione anche di più incognite da un tale sistema di equazioni.

Cominciamo dal considerare un sistema di $n+1$ equazioni in n incognite; e, per fissare le idee, supponiamo $n=3$. Ragionamento e risultato valgono però in generale. Siano

$$(2)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \alpha_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \alpha_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \alpha_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 = \alpha_4 \end{cases}$$

le date equazioni.

Consideriamo il determinante

$$(3)\qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \alpha_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \alpha_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \alpha_4 \end{vmatrix}.$$

Con A_r indicheremo il complemento algebrico di α_r

$$(r = 1, 2, 3, 4).$$

Sarà $D = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4$. Supponiamo $A_4 \neq 0$.

Per la precedente osservazione il sistema (2) si muta in un sistema equivalente se noi, pure lasciando immutate le prime tre equazioni, sostituiamo alla quarta l'equazione che si ottiene moltiplicandola per A_4 ed aggiungendo le prime tre moltiplicate rispettivamente per A_1, A_2, A_3. Vale a dire il sistema (2) si trasforma in un sistema equivalente se ne conserviamo le prime tre equazioni, e alla quarta sostituiamo:

$$(4)\qquad \begin{aligned} & A_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + A_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \\ & + A_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) + A_4(a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3) = \\ & = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4. \end{aligned}$$

Il secondo membro di questa equazione vale D. Nel primo membro il coefficiente della x_1 è $a_{11}A_1 + a_{21}A_2 + a_{31}A_3 + a_{41}A_4$, cioè è la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando gli elementi della prima colonna di (3) per i complementi algebrici degli elementi della quarta colonna, ed è quindi nullo. Altrettanto dicasi per x_2 e per x_3. Dunque alla quarta equazione di [1] noi possiamo costituire la $D = 0$; il sistema si muta in un sistema equivalente.

Se invece $A_4 = 0$, allora è ancora vero che l'uguaglianza $D = 0$ è conseguenza delle equazioni date (4). Ma non è in tale caso sempre vero che, sostituendo alla quarta delle (2) la $D = 0$, il sistema sia mutato in un sistema equivalente. Dunque:

Se sono date n + 1 *equazioni lineari in* n *incognite, è conseguenza di tali equazioni l'uguaglianza che si ottiene ponendo uguale a zero il determinante* D *formato coi coefficienti e coi termini noti* (cosicchè, se $D \neq 0$, il dato sistema è assurdo, o, come si suol dire, è *incompatibile*, cioè non ammette alcun sistema di soluzioni). **Ed anzi se il determinante formato coi coefficienti delle prime n incognite nelle prime n equazioni è diverso da zero, il dato sistema di equazioni si muta in un sistema equivalente, quando si lascino invariate le prime n equazioni, e si sostituisca all'ultima la $D = 0$.**

§ 25. — Regola di Leibniz-Cramer.

Siano date n equazioni in n incognite: p. es. le seguenti, ove per semplicità è posto $n = 3$.

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \alpha_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \alpha_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

che possiamo scrivere, p. es., nella forma

$$\begin{aligned} a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= \alpha_1 - a_{11}x_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= \alpha_2 - a_{21}x_1 \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= \alpha_3 - a_{31}x_1 \end{aligned}$$

Se noi per un momento consideriamo x_1 come noto, questo è un sistema di tre equazioni nelle due incognite x_2, x_3.

Per il risultato del § 24 ne verrà:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ \alpha_2 - a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ \alpha_3 - a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Posto

$$(2) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

otterremo, sviluppando secondo gli elementi della prima colonna

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_{12} & a_{13} \\ \alpha_2 & a_{22} & a_{23} \\ \alpha_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

E, se $\Delta \neq 0$, e se indichiamo con A_{rs} il complemento algebrico di a_{rs} in Δ:

$$(3) \qquad x_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_{12} & a_{13} \\ \alpha_2 & a_{22} & a_{23} \\ \alpha_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{\alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{21} + \alpha_3 A_{31}}{\Delta}.$$

In modo analogo si prova:

$$(3)_{bis} \qquad x_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha_1 & a_{13} \\ a_{21} & \alpha_2 & a_{23} \\ a_{31} & \alpha_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{\alpha_1 A_{12} + \alpha_2 A_{22} + \alpha_3 A_{32}}{\Delta}.$$

$$(3)_{ter} \qquad x_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \alpha_2 \\ a_{31} & a_{32} & \alpha_3 \end{vmatrix} = \frac{\alpha_1 A_{13} + \alpha_2 A_{23} + \alpha_3 A_{33}}{\Delta}.$$

Se esistono quindi dei valori di x che soddisfano a (1), tali valori debbono essere quelli dati da (3), se $\Delta \neq 0$. Verifichiamo ora che, se $\Delta \neq 0$, i valori dati dalle (3) soddisfano effettivamente ad (1), p. es. alla prima delle (1). Infatti, sostituendo alle x i valori dati dalle (3) nel primo membro della (1), si trova:

$$a_{11} \frac{\alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{21} + \alpha_3 A_{31}}{\Delta} + a_{12} \frac{\alpha_1 A_{12} + \alpha_2 A_{22} + \alpha_3 A_{32}}{\Delta} +$$
$$+ a_{13} \frac{\alpha_1 A_{13} + \alpha_2 A_{23} + \alpha_3 A_{33}}{\Delta} =$$
$$= \alpha_1 \frac{a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}}{\Delta} + \alpha_2 \frac{a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23}}{\Delta} +$$
$$+ \alpha_3 \frac{a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33}}{\Delta}.$$

Ora, per i teoremi fondamentali sui complementi algebrici, il coefficiente di α_1 in questa equazione vale 1, mentre i coefficienti di α_2, α_3 sono nulli. Dunque tutta questa espressione è proprio uguale ad α_1; e la prima delle (1) è soddisfatta dalle (3). Altrettanto si può ripetere per le altre equazioni (1).

Esaminando le (3) si vede che il nostro risultato si può enunciare così:

Dato un sistema di n *equazioni di primo grado ad* n *incognite col determinante dei coefficienti diverso da zero tutte le incognite risultano determinate.* **E precisamente ogni incognita è uguale alla frazione che ha per denominatore il determinante dei coefficienti e per numeratore il determinante che si ottiene sostituendo nel determinante dei coefficienti alla colonna dei coefficienti dell'incognita stessa la colonna dei termini noti.**

Così, p. es., il determinante dei coefficienti del sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 5z &= 2 \\ x - 7y + 4z &= 0 \\ 9x + 2y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

è:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -7 & 4 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 304.$$

Il sistema dato è quindi soddisfatto soltanto dalle:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{304} = -\frac{15}{304}\,; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{304} = \frac{59}{304}\,; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -7 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{304} = \frac{107}{304}.$$

Un caso particolare notevole.

Siano $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, i coseni di direzione di tre rette r_i a due a due ortogonali. Risolviamo le equazioni

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = 0. \end{cases}$$

Il determinante del sistema è (pag. 80, esempio 2°)

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \varepsilon,$$

dove ε indica il numero $+1$, o il numero -1.

Dunque il sistema dato ammette una e una sola soluzione, data dalla regola di Cramer

(3) $$x=\varepsilon\begin{vmatrix}1 & \beta_1 & \gamma_1\\ 0 & \beta_2 & \gamma_2\\ 0 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix};\ y=\varepsilon\begin{vmatrix}\alpha_1 & 1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & 0 & \gamma_2\\ \alpha_3 & 0 & \gamma_3\end{vmatrix};\ z=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & 1\\ \alpha_2 & \beta_2 & 0\\ \alpha_3 & \beta_3 & 0\end{vmatrix}.$$

Ma ora il nostro sistema (1) è per le nostre ipotesi soddisfatto, quando si ponga $x=\alpha_1$, $y=\beta_1$, $z=\gamma_1$. Quindi dalle (3) si ricava che α_1, β_1, γ_1 sono uguali al prodotto di ε per i loro complementi algebrici nel determinante (2) del sistema (1).

Queste proprietà del determinante (2) trovano svariate applicazioni nella geometria analitica e nella meccanica razionale.

§ 26. — Regola di Rouché.

Ritorniamo al sistema più generale [1] del § 24. Scegliamo tra le [1] un certo numero h di equazioni, e in queste equazioni diamo valori arbitrarii ad $n-h$ incognite (con h indichiamo un intero non maggiore nè di n, nè di m). Otterremo così un sistema di h equazioni in h incognite. Senz'altro supporremo che le equazioni scelte sieno le prime h, e che le incognite a cui sono stati dati valori arbitrarii sieno le ultime $n-h$, cioè le $x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_n$. Nè ciò del resto diminuisce la generalità, perchè possiamo sempre ridurci a questo caso, mutando l'ordine delle equazioni e quello delle incognite. In questo modo avremo ottenuto un sistema di h equazioni in h incognite $x_1, x_2, \ldots x_h$

(2) $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1h}x_h=[\alpha_1-a_{1,\,h+1}x_{h+1}-\ldots-a_{1n}x_n]\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2h}x_h=[\alpha_2-a_{2,\,h+1}x_{h+1}-\ldots-a_{2n}x_n]\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{h1}x_1+a_{h2}x_2+\ldots+a_{hh}x_h=[\alpha_h-a_{h,\,h+1}x_{h+1}-\ldots-a_{hn}x_n]\end{cases}$$

dove le $x_{h+1}, \ldots, x_n$ sono da riguardarsi come note, perchè ad esse diamo valori arbitrarii, che ancora indichiamo con $x_{h+1}, \ldots, x_n$. Queste equazioni si potranno risolvere con la regola di Leibniz-Cramer del § 25, se il determinante dei coefficienti

(3) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1h}\\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2h}\\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\ a_{h1} & a_{h2} \ldots\ldots & a_{hh}\end{vmatrix}$$

è *differente* da zero. Generalmente potremo in modi molteplici scegliere le h equazioni ed h incognite in guisa che sia soddisfatta quest'ultima condizione. E noi anzi cercheremo di fare tale scelta in guisa che l'intero h riceva il *massimo valore* possibile (massimo valore, che chiameremo la *caratteristica* del dato sistema di equazioni). Dire che h è scelto in questo modo (così da ricevere il massimo valore possibile) è come dire che *i determinanti di ordine* $k > h$ formati coi coefficienti di k incognite in k delle nostre equazioni *sono tutti nulli* (ammesso che di tali determinanti ce ne siano, cioè che $h < m$, e che $h < n$), mentre almeno un minore di ordine h (che, come dicemmo, possiamo supporre sia il minore (3)) è differente da zero.

In virtù dei risultati del § 24 alla r^{esima} delle residue $m - h$ equazioni ($r = h + 1, h + 2, \dots, n$) possiamo sostituire la

$$\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1h} & \alpha_1 - [a_{1,h+1}\, x_{h+1} + \dots + a_{1n}\, x_n] \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2h} & \alpha_2 - [a_{2,h+1}\, x_{h+1} + \dots + a_{2n}\, x_n] \\ \dots & \dots \\ a_{h1}\, a_{h2} \dots a_{hh} & \alpha_h - [a_{h,h+1}\, x_{h+1} + \dots + a_{hn}\, x_n] \\ a_{r1}\, a_{r2} \dots a_{rh} & \alpha_r - [a_{r,h+1}\, x_{h+1} + \dots + a_{rn}\, x_n] \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1h} & \alpha_1 \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2h} & \alpha_2 \\ \dots & \dots \\ a_{h1}\, a_{h2} \dots a_{hh} & \alpha_h \\ a_{r1}\, a_{r2} \dots a_{rh} & \alpha_r \end{vmatrix} - x_{h+1} \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1h} & a_{1,h+1} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2h} & a_{2,h+1} \\ \dots & \dots \\ a_{h1}\, a_{h2} \dots a_{hh} & a_{h,h+1} \\ a_{r1}\, a_{r2} \dots a_{rh} & a_{r,h+1} \end{vmatrix} -$$

$$\dots\dots - x_n \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1h} & a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2h} & a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{h1}\, a_{h2} \dots a_{hh} & a_{hn} \\ a_{r1}\, a_{r2} \dots a_{rh} & a_{rn} \end{vmatrix} = 0.$$

In questa equazione i coefficienti di $x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_n$ sono tutti nulli, per quanto abbiamo detto poco sopra circa la caratteristica h.

Quindi questa equazione si può scrivere:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1h} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2h} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hh} & \alpha_h \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rh} & \alpha_r \end{vmatrix} = 0 \; (r = h+1, h+2, \dots, m).$$

Se h *è la caratteristica del sistema* [1] *del* § 24, *ed è differente da zero il determinante* (3), *noi possiamo alle* m — h *equazioni dopo la* h^{esima}, *sostituire le uguaglianze* (4) *che si ottengono uguagliando a zero gli* m — h *determinanti* (4) *dedotti da* (3) ORLANDO *con una riga di coefficienti di una di queste* m — h *equazioni, e con una colonna dei corrispondenti termini noti.*

Distinguiamo ora due casi:

1°) **Uno di questi $m - h$ determinanti orlati è differente da zero.** In tal caso le (4) sono contraddittorie; e quindi il dato sistema [1] **non è risolubile** (non ammette alcun sistema di risoluzioni).

2°) **I determinanti orlati sono tutti nulli**; allora il dato sistema [1] si riduce a (2). Scelti arbitrariamente i valori di $x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_n$, si dedurranno da (2) con la regola di Leibniz-Cramer i valori di $x_1, x_2, \ldots, x_h$. E otteniamo così, se $h = n$, **un solo sistema di soluzioni di** (1) **e, se $h < n$, infiniti sistemi di soluzioni**, ciascuno dei quali è determinato dagli $n - h$ valori dati arbitrariamente a ciascuna delle $x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_n$.

§ 27. — Sistemi di equazioni lineari omogenee.

Se le α_i sono nulle, le nostre equazioni [1] del § 24 si dicono, come è noto, *omogenee*. I deteminanti *orlati* (4) sono tutti nulli, perchè l'ultima colonna è tutta formata di elementi nulli. E il nostro sistema è dunque sempre *risolubile*: cosa, del resto, evidente *a priori*, perchè ognuna delle sue equazioni è soddisfatta, ponendo uguale a zero ognuna delle x. Se la caratteristica h del sistema è proprio uguale al numero n delle incognite, allora, come sappiamo dal § 26, il sistema di equazioni [1] ammette un *unico* sistema di soluzioni: quello che si ottiene uguagliando ogni incognita a zero. Quindi:

Un sistema di m *equazioni lineari omogenee in* n *incognite ammette sempre un sistema di soluzioni, almeno quello formato imponendo il valore zero ad ogni incognita. Esso ammette ulteriormente altre soluzioni soltanto se la caratteristica* h *del sistema è inferiore al numero* n *delle incognite, perchè in tal caso si possono scegliere* n — h *incognite a cui si possono dare valori arbitrari* (restando poi univocamente determinati i valori delle residue h incognite).

In particolare **un sistema di n equazioni lineari omogenee in n incognite ammette uno e quindi infiniti sistemi di soluzioni non tutte nulle soltanto se il determinante del sistema è nullo.**

Sia, per esempio :

(1) $$a_{r1}\, x_1 + a_{r2}\, x_2 + \ldots\ldots + a_{rn}\, x_n = 0$$
$$(r = 1\,,\, 2\,, \ldots\ldots, n)$$

il dato sistema di equazioni, che supponiamo di caratteristica $h = n - 1$. Il determinante D di ordine n formato con tutti i loro coefficienti sarà nullo; e noi potremo supporre che sia differente da zero il seguente minore di ordine $n - 1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1,\, n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2,\, n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,\, 1} & a_{n-1,\, 2} & \ldots\ldots & a_{n-1,\, n-1} \end{vmatrix}$$

che è il complemento algebrico A_{nn} di a_{nn} nel determinante D. Noi sappiamo in tal caso che, scelto ad arbitrio il valore μ di ne risulteranno determinati i valori delle altre x.

Posto $\lambda = \dfrac{\mu}{A_{nn}}$ (ricordo che $A_{nn} \neq 0$), il valore dato ad x sarà λA_{nn}, dove λ è una quantità arbitraria. Con questo valore della x_n, restano fissati i valori di $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}$, e senza nessun calcolo si può verificare che questi valori sono

$$\lambda A_{n1},\ \lambda A_{n2}, \ldots\ldots, \lambda A_{n,\, n-1}.$$

Infatti se si pone:
(2) $x_i = \lambda A_{ni}\ (i = 1\,,\, 2\,, \ldots\ldots n)$ ($\lambda =$ cost. arbitraria) nella r^{esima} $(r = 1, 2, \ldots\ldots n)$ delle nostre equazioni, il suo primo membro diventa $\lambda\, (a_{r1}\, A_{n1} + a_{r2}\, A_{n2} + \ldots\ldots + a_{rn}\, A_{nn})$, che è zero se $r \neq n$ (pag. 70, § 20, teor. V°), ed è pure nullo se $r = n$, perchè per $r = n$ esso diventa λD, che è nullo per ipotesi.

Le (2) dànno dunque nel caso attuale la più generale soluzione di (1).

Esempi.

1° Se $\Delta, \Delta'\, \Delta''$ sono i discriminanti delle equazioni

$$f(x) = 0\,;\ g(x) = 0\,;\ f(x)\ g(x) = 0,$$

allora, se $\Delta \neq 0$, $\Delta' \neq 0$, si ha che $\dfrac{\Delta''}{\Delta\, \Delta'}$ è il quadrato del risultante delle

$$f(x) = 0,\ g(x) = 0.$$

2° Dimostrare direttamente che un polinomio $P(x)$ di grado $n - 1$ è univocamente determinato, quando se ne conoscano i valori $P(a_1)$, $P(a_2), \ldots\ldots, P(a_n)$ che esso assume in n punti distinti $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$; e calcolare tale polinomio.

Posto

$$P(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1} \tag{1}$$

sarà

$$\left.\begin{aligned} P(a_1) &= b_0 a_1^{n-1} + b_1 a_1^{n-2} + \dots\dots + b_{n-2} a_1 + b_{n-1} \\ P(a_2) &= b_0 a_2^{n-1} + b_1 a_2^{n-2} + \dots\dots + b_{n-2} a_2 + b_{n-1} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P(a_n) &= b_0 a_n^{n-1} + b_1 a_n^{n-2} + \dots\dots + b_{n-2} a_n + b_{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Le (2) costituiscono un sistema di n equazioni lineari nelle n incognite $b_0, b_1, \dots, b_{n-2}, b_{n-1}$, (i coefficienti di $P(x)$). Il determinante dei coefficienti di tali incognite è il determinante di Vandermonde dei numeri $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$; il quale è differente da zero, perchè tali numeri sono distinti. Il teorema di Leibniz-Cramer ci assicura che le b e quindi anche $P(x)$ sono univocamente determinati. Si potrebbe così dalle (2) dedurre i valori delle b, e sostituire in (1). Ma più direttamente, considerando le (1), (2) come un sistema di $n+1$ equazioni nelle n incognite $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$, si trae:

$$\begin{vmatrix} P(x) & x^{n-1} & x^{n-2} & \dots\dots & x & 1 \\ P(a_1) & a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \dots\dots & a_1 & 1 \\ P(a_2) & a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \dots\dots & a_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ P(a_n) & a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \dots\dots & a_n & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando secondo gli elementi della prima colonna ed indicando con $V(a, b, \dots, c)$ il determinante di Vandermonde delle quantità $a, b, \dots, c$, si ottiene

$$0 = -P(a_1)\, V(a_2, a_3, \dots, a_n, x) + P(a_2)\, V a_1, a_3, \dots, a_n, x) + \dots$$
$$+ (-1)^n P(a_n)\, V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x) + (-1)^{n+1} P(x)\, V(a_1, a_2 \dots, a_n)$$

donde

$$P(x) = -P(a_1)(-1)^n \frac{V(a_2, a_3, \dots a_n, x)}{V(a_1, a_2, \dots, a_n)} +$$
$$+ P(a_2)(-1)^n \frac{V(a_1, a_3, \dots, a_n, x)}{V(a_1, a_2, \dots, a_n)} + \dots + P(a_n) \frac{V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x}{(V(a_1, a_2, \dots, a_n)} .$$

Sopprimendo in ogni frazione del secondo membro i fattori comuni al numeratore e al denominatore si ritrova la formola del § 14 (pag. 49).

Esercizi.

1° Calcolare e moltiplicare fra di loro a due a due i determinanti

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} ; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} ; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} ; \quad D_5 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Calcolare i determinanti reciproci, verificando il teorema di pag. 80-81.

Ris. Lo studioso farà bene a calcolare i precedenti determinanti anche con lo sviluppo secondo gli elementi di una qualche linea. Più rapidamente si può osservare che $D_1 = 0$, perchè la terza riga è somma delle prime due; che $D_2 = 1$, perchè D_2 si riduce al termine principale; che $D_4 = -1$, perchè, scambiando la seconda e la terza riga di D_4, se ne deduce un determinante il cui sviluppo è ridotto al suo termine principale.

Il determinante D_3 si può semplificare, p. es., sottraendo dalla prima riga la seconda e la terza; il determinante D_5 si semplifica sottraendo dalla prima riga il doppio della seconda.

2° Calcolare

$$D = \begin{vmatrix} l & a & b & d & t \\ l & m & c & e & s \\ l & m & n & f & r \\ l & m & n & g & k \\ l & m & n & g & q \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x & a & a & a & a \\ a & x & a & a & a \\ a & a & x & a & a \\ a & a & a & x & a \\ a & a & a & a & x \end{vmatrix}$$

Ris. Con opportune sottrazioni di righe o di colonne si trova:

$$D = \begin{vmatrix} l & a & b & d & t \\ 0 & m-a & c-b & e-d & s-t \\ 0 & 0 & n-c & f-e & r-s \\ 0 & 0 & 0 & g-f & k-r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q-k \end{vmatrix} = l\,(m-a)\,(n-c)\,(g-f)\,(q-k),$$

donde in particolare

$$\begin{vmatrix} l & a & b & c & d \\ l & l & a & b & c \\ l & l & l & a & b \\ l & l & l & l & a \\ l & l & l & l & l \end{vmatrix} = l\,(l-a)^4.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & 0 & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 & a \\ 0 & a-x & x-a & 0 & a \\ 0 & 0 & a-x & x-a & a \\ 0 & 0 & 0 & a-x & x \end{vmatrix} = (x-a)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

E con opportune addizioni di righe, si trova:

$$\Delta = (x - a)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x + 4a \end{vmatrix} = (x - a)^4 (x + 4a).$$

3° Risolvere i sistemi di equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x + 2y + 3z &= b \\ 2x + 3y + 4z &= c \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y + z &= a \\ x + 2y + 3z &= b \\ 2x + 3y + 5z &= c \end{aligned}$$

Ris. Per il secondo sistema basta applicare la regola di Cramer; per il primo si noti che il determinante del sistema è nullo, che esso è risolubile soltanto se $c = a + b$, nel qual caso si può dare un valore arbitrario alla z, tenendo poi conto delle sole prime due equazioni.

4° Discutere i seguenti sistemi di equazioni per tutti i valori dei coefficienti $a, \alpha, \beta, \gamma, p, q, r, l, m, n$:

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 1 \\ 4x + 5y + 6z + at &= 2 \\ 2x + 3y + 4z + 5t &= 3 \\ -x + y - z + t &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y + z + t &= 0 \\ 4x + 5y + 6z + at &= 0 \\ 2x + 3y + 4z + 5t &= 3 \\ -x + y - z + t &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= l \\ \alpha x + \beta y + \gamma z &= m \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z &= n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + z + 3t &= 1 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + (\alpha + \beta + \gamma) t &= 2 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) t &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma &= 0 \\ p x + q y + r &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma &= 0 \\ p x + q y + r &= 0 \\ l x + m y + n &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + 3y + 4z &= 2 \\ 3x + 4y + 5z &= 3 \\ 6x + 8y + pz &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + 3y + 4z &= 2 \\ 4x + 9y + 16z &= 3 \\ 7x + 13y + pz &= 6 \end{aligned}$$

5° Risolvere il seguente sistema di 5 equazioni nelle 5 incognite x, y, z, t, v.

$$\begin{aligned} lx + ay + bz + ct + dv &= 0 \\ lx + ly + az + bt + cv &= 0 \\ lx + ly + lz + at + bv &= 0 \\ lx + ly + lz + lt + av &= 0 \\ lx + ly + lz + lt + lv &= 0. \end{aligned}$$

RIS. Il determinante D dei coefficienti è (es. 2° a pag. 91) uguale a $l(l-a)^4$.

1° Se $l(l-a)^4 \neq 0$, sarà $x = y = z = t = v = 0$.

2° Se $l = 0$, $a \neq 0$, la caratteristica di D è 4, perchè è differente da zero il minore formato dalle prime 4 righe ed ultime 4 colonne. Si dà allora alla x un valore arbitrario e si tien conto delle prime 4 equazioni, che, essendo $l = 0$, risultano omogenee nelle y, z, t, v a determinante non nullo, cosicchè $y = z = t = v = 0$.

3° Se $l = a = 0$, alle x, y si possono dare valori arbitrari; e il nostro sistema si riduce al sistema:

$$\begin{aligned} bz + ct + dv &= 0 \\ bt + cv &= 0 \\ bv &= 0 \end{aligned}$$

che si discute senza difficoltà.

4° Se $l = a \neq 0$, il minore formato dalle prime quattro righ e ultime quattro colonne è

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-d & d \\ 0 & a-b & b-c & c \\ 0 & 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a(a-b)^3.$$

Se $a \neq b$, questo minore è differente da zero; dato alla x un valore arbitrario, si ricavino i valori di y, z, t, v, dalle prime quattro equazioni.

5° Resta ad esaminare il caso che $l = a = b \neq 0$, ecc. ecc.

6° Calcolare il discriminante della equazióne

$$x^2 + px + q = 0$$

e quello della $x^3 + px + q = 0$, confrontando poi coi risultati già noti relativi a queste equazioni.

RIS. Per l'equaz. $x^2 + px + q = 0$ la somma dei quadrati s_2 delle due radici vale $p^2 - 2q$. Quindi il discriminante vale

$$\begin{vmatrix} 2 & -p \\ -p & p^2 - 2p \end{vmatrix} = p^2 - 4q = 4\left(\frac{p^2}{4} - q\right).$$

Ed è ben noto che le due radici di tale equazione sono uguali soltanto se $\frac{p^2}{4} = q$, ecc. ecc.

7° Per quali valori di a può avvenire che l'equazione $x^n + a = 0$ abbia due radici uguali?

8° Per quali valori delle p, q l'equazione $x^3 + px + q = 0$ ha due radici uguali?

CAPITOLO VI.

FUNZIONI, LIMITI

§ 28. — Intervalli, intorni.

L'insieme dei numeri reali compresi tra due numeri dati a, b si chiama *intervallo finito* e si indica con (a, b). Nella corrispondenza tra numeri e punti di una retta r tale intervallo ha per immagine un segmento finito. Dei due *estremi* a, b il minore si chiama estremo inferiore, o sinistro; il maggiore si chiama estremo superiore o destro. Il valore assoluto $|b - a|$ dicesi *grandezza* o *ampiezza* dell'intervallo. Gli estremi a, b si considerano, salvo avvertenza contraria, come appartenenti all'intervallo (a, b).

L'insieme dei numeri non minori di un numero a si indica con $(a, +\infty)$ e si dice costituire l'*intervallo infinito*, che ha a per estremo sinistro o inferiore e $+\infty$ come estremo destro o superiore (notando al solito che questa frase si deve considerare soltanto come un modo di dire e niente più). Il punto a si può talvolta (purchè si avverta esplicitamente) escludere dall'intervallo $(a, +\infty)$. Questo intervallo ha sulla retta r per immagine la semiretta (il raggio) posta a destra del punto a (cioè del punto che ha per ascissa a).

Osservazioni analoghe per i numeri non maggiori di a, che formeranno un intervallo $(-\infty, a)$. Per intervallo $(-\infty, +\infty)$ intenderemo la classe di tutti i numeri reali, che hanno per immagine tutti i punti della retta r.

Assai spesso diremo intervallo in luogo di segmento o viceversa, così come diciamo punto invece che numero, o viceversa.

Se c è un punto dell'intervallo (a, b), questo intervallo si dice *intorno* di c. Se c è l'estremo destro di (a, b), cioè se p. es. $c = b > a$, e quindi il segmento (a, b) cade a sinistra di c, si suol dire che (a, b) è un intorno sinistro di c. Se c coincide invece con l'estremo sinistro di (a, b) si suol dire che (a, b) è un intorno destro di c.

Gli intervalli $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ si dicono poi rispettivamente essere un intorno sinistro o destro di ∞.

§ 29. — Funzioni; funzioni di funzioni.

α) Assai spesso avviene di dover considerare nei calcoli un *simbolo* (lettera), a cui nel ragionamento si dànno valori distinti: Un tale simbolo si dirà essere una *variabile;* i simboli, a cui conserviamo in tutto il discorso lo stesso valore, si diranno essere una *costante.* Uno stesso simbolo potrà in un certo ragionamento essere costante, in un ragionamento successivo variabile (*).

Molto spesso avviene pure che di due variabili reali x, y, una, p. es. la y, sia determinata, appena sia dato il valore della x. Così, per esempio:

1° Se non varia la temperatura, il volume y, che occupa un grammo di ossigeno, è completamente determinato dal valore x della pressione, a cui è sottoposto;

2° La lunghezza y di una data sbarra di ferro è completamente determinata dalla temperatura x (se si trascurano le variazioni dovute alla pressione, cui è assoggettata la sbarra, o se si opera a pressione o tensione costante);

3° Lo spazio y percorso nel vuoto da un grave che cade senza velocità iniziale in un certo luogo, è completamente determinato dal numero x dei secondi impiegati nella caduta;

4° L'area y di un poligono regolare inscritto in un dato cerchio è perfettamente determinata dal numero x dei lati;

5° Il logaritmo decimale y di un numero positivo x è determinato dal valore di x, ecc.

Noi diciamo in questi casi che y è *funzione* della x. Non è però detto che la x possa ricevere valori arbitrari. Nel 1° esempio x non può avere che valori positivi (perchè non ha senso parlare di un gas sottoposto a una pressione negativa); nel 4° esempio x non può che ricevere valori interi maggiori di 2; nel 5° esempio la x non può ricevere valori negativi, perchè non esistono (nel campo dei numeri reali) i logaritmi decimali dei numeri negativi.

L'insieme G dei valori della x, per cui esiste il corrispondente valore della y, si dirà il campo di esistenza della funzione y.

(*) Se noi studiamo, p. es., come variano il volume v, la pressione p, la temperatura t di una certa massa di gas, allora in una serie di esperienze, in cui non si faccia variare la temperatura, si considereranno p e v come variabili; e in una successiva serie di esperienze, in cui non facciamo variare v, considereremo t e p come variabili.

DEF. **Una variabile** (*reale*) y **si dice funzione della variabile** (*reale*) x **per i valori di** x **che appartengono a un certo insieme** G **(campo di esistenza della** y**) se ad ogni valore dato alla** x **nell'insieme** G **corrisponde uno e un solo valore della** y (*).

Se poi y e z sono due tali funzioni della x, definite nello stesso insieme G, allora $y + iz$ si dirà funzione *complessa* della variabile reale x definita nel campo G.

Salvo avvertenza contraria, noi parleremo soltanto di funzioni *reali*.

β) Si hanno spessissimo funzioni definite analiticamente. Così p. es.: $y = mx + n$ (m, n costanti arbitrarie) rappresenta una variabile y che ha un valore determinato, qualunque sia il valore dato allo x [cioè il campo di esistenza della y è formato da tutto l'intervallo $(-\infty, +\infty)$]. Altrettanto avviene della $y = \operatorname{sen} x$.

La $y = +\sqrt{x-3}$ definisce una funzione (reale) y della x nell'intervallo $(3, +\infty)$.

La $y = +\sqrt{x-3} + \sqrt{4-x}$ definisce una funzione (reale) della x nell'intervallo $(3, 4)$.

Invece la $y = +\sqrt{x-3} + \sqrt{2-x}$ non definisce nessuna funzione (reale) della x. Infatti, qualunque sia il valore dato alla x, uno almeno dei binomii $x - 3$, $2 - x$ è negativo, così che non esiste (nel campo dei numeri reali) la sua radice quadrata.

La $y = \dfrac{1}{x}$ definisce una funzione della x nel campo formato da tutti i valori della x differenti da zero.

Per indicare che y è una funzione della x si suole scrivere $y = f(x)$. Se poi si considera x come un numero dato, lo stesso simbolo indica il valore corrispondente della funzione; in altri termini si fa la convenzione di rappresentare con $f(a)$ il valore che la funzione assume per il valore particolare a della variabile: così $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}$ è il valore, che la funzione $\operatorname{sen} x$ assume per $x = \dfrac{\pi}{2}$.

L'uguaglianza $y = f(x)$ esprime dunque semplicemente che y

(*) In sostanza dunque l'idea di *funzione* non è che l'idea di *corrispondenza* tra due classi di numeri x, y (univoca in un senso), ossia coincide con l'idea di classe di coppie di numeri (x, y) tale che per ogni x di G esista una e una sola coppia che lo contenga.

è una funzione di x, ossia che y per ciascun valore $x = a$ di x (almeno compreso in un certo gruppo G) assume un valore determinato che si indicherà con $f(a)$. Si può benissimo adoperare anche un'altra lettera diversa da f, scrivere p. es.:

$$F(x),\ \varphi(x),\ \Phi(x),\ \Psi(x),\ g(x),\ .....;$$

e l'uso di questi diversi simboli è conveniente, quando si deve parlare di più funzioni distinte.

Si suole anche considerare una classe estremamente particolare di funzioni y della x: quelle funzioni cioè che conservano uno stesso valore (sono *costanti*), qualunque sia il valore dato alla x. Così, p. es., il volume y di un prisma di data base ed altezza conserva uno stesso valore al variare dell'angolo x, che gli spigoli del prisma formano con la base (o, come si dice anche, è *indipendente* da x).

γ) Talvolta si presentano quantità y, funzioni di una variabile z, la quale è a sua volta funzione di una terza variabile x. Così p. es., il volume y di un kg. di una certa sostanza è una funzione della densità z, la quale è funzione della temperatura x. E spesso avviene, come risulta chiaro da questo esempio, che si possa senz'altro considerare la y come funzione della stessa x. Così, p. es., $y = \log z$ è una funzione della z; e, se $z = \operatorname{sen} x$, è $y = \log \operatorname{sen} x$ una funzione della x. Ma si osservi che, mentre z è definita per ogni valore della x, la y è definita soltanto per i valori positivi di z. E quindi la y, come funzione della x, è definita solo per gli angoli x dei primi due quadranti. In generale, se $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, potrà darsi che la y si possa considerare come funzione $f[\varphi(x)]$ della x. E una tal funzione esisterà per quei valori della x, tali che il corrispondente valore della $z = \varphi(x)$ appartenga al campo ove è definita la $f(z)$. Una tal funzione $f[\varphi(x)]$ si suol anche chiamare una *funzione di funzione* della x. Se fosse, p. es., $f(z) = \sqrt{z}, z = \varphi(x) = -x^2 - 1$ non esisterebbe la $f[\varphi(z)]$, perchè, essendo sempre $-x^2 - 1$ negativo, il simbolo $\sqrt{-x^2 - 1}$ è privo di significato (nel campo dei numeri reali).

§ 30. — Rappresentazione grafica delle funzioni.

Si voglia rappresentare una data funzione $f(x)$; si voglia cioè dare un mezzo o per studiare come varia $f(x)$ al variare di x, o senz'altro per calcolare i valori che assume $f(x)$ per ogni valore dato alla x (nel campo G). Tra i metodi che possono servire a tale scopo, uno, il metodo delle tavole numeriche, è ormai famigliare al lettore, che ben conosce gli esempi delle tavole logaritmiche e trigonometriche, tanto utili per il calcolo rapido e sufficientemente approssimato delle funzioni:

$$y = \log x, \quad y = \operatorname{sen} x, \quad y = \cos x, \quad y = \log \operatorname{sen} x, \quad \text{ecc.}$$

Naturalmente si possono, almeno teoricamente, costruire tabelle numeriche per ogni funzione. La fisica ne porge numerosi esempi. Ricorderò, p. es., le tavole che dànno la densità y dell'acqua alle varie temperature x, la temperatura y di ebollizione dell'acqua alle varie pressioni x, ecc.

Ma talvolta si suole ricorrere a procedimenti grafici, i quali, sebbene generalmente meno precisi, hanno il vantaggio di permettere di abbracciare con un solo colpo d'occhio l'andamento di una funzione $y = f(x)$, e talvolta persino di risolvere con rapidità questioni che analiticamente porterebbero a lunghi sviluppi di calcolo. Ciò che è specialmente utile, se il campo G dei valori, per cui è definita la y, è formato da tutti i punti di un intervallo; caso, al quale soltanto sono dedicate le considerazioni seguenti.

Su un foglio di carta si scelgono due rette normali Ox, Oy come assi cartesiani ortogonali.

Sulla prima si portino dei segmenti OA uscenti da O, aventi lunghezze $x = OA$ arbitrarie, ma appartenenti al campo G, ove la y è definita.

Si innalzino dagli estremi A di questi segmenti delle perpendicolari uguali in lunghezza e segno al valore della y corrispondente al valore OA della x. Otteniamo così vari punti; e tanti più ne otterremo, e (nei casi comuni) tanto più vicini, quanto sarà maggiore il numero dei valori della x che si considerano, e quanto meno distano l'uno dall'altro questi valori. Se noi immaginiamo eseguite queste operazioni per tutti i valori della x, gli estremi delle perpendicolari innalzate si trovano su una curva, che diremo immagine della funzione $f(x)$, e che la Geometria Analitica chiamerebbe la curva che ha per equazione $y = f(x)$. Dobbiamo anzitutto fare alcune osservazioni:

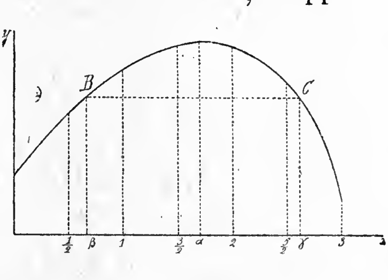
1° Il disegno resta molto facilitato se la carta è millimetrata, perchè così più facilmente si misurano i segmenti paralleli o normali ad Ox (purchè Ox sia una delle righe tracciate sulla carta). Il Regnault, per maggiore precisione, in taluni suoi studi ricorse a curve tracciate su tavole di rame.

2° È impossibile disegnare effettivamente tutti i segmenti normali ad Ox, di cui si ha bisogno. Generalmente se ne traccia soltanto un numero sufficientemente grande, congiungendo poi gli estremi con una *linea possibilmente regolare*. Questo è sufficiente nei casi più comuni. (La frase *linea regolare* non ha un preciso significato matematico, ma un ben chiaro significato intuitivo).

3° Talvolta però si usano speciali disposizioni pratiche, che permettono di ottenere senz'altro la nostra curva, o, come si suol anche dire, il nostro *diagramma*.

Immaginiamo, p. es., che il nostro foglio di carta strisci su sè stesso, in modo che la retta Ox strisci su sè stessa. La velocità di tale strisciamento sia uniforme e tale da far percorrere verso sinistra l'unità di lunghezza (p. es. 1 cm.) nell'unità di tempo (p. es. 1'); in altre parole, il punto posto a destra di O su Ox, alla distanza di x cm. dal punto O, sia dopo x minuti primi venuto proprio in O. Il punto M sia mobile sulla retta che è la posizione iniziale di Oy, parta dal punto O, percorra lo spazio $f(x)$ in x minuti secondi (*), e porti una punta scrivente sul foglio di carta. La traccia lasciata da esso sarà precisamente la $y = f(x)$.

In pratica il foglio di carta è avvolto su un cilindro (che un movimento d'orologeria fa rotare di velocità uniforme) e viene poi svolto su un piano; la punta scrivente congiunta ad M è da una molla premuta su tale cilindro. Se il punto mobile M fosse, p. es., un punto invariabilmente congiunto all'estremità superiore di una colonna termometrica o barometrica, l'apparecchio diverrebbe un registratore automatico della temperatura (termografo), o della pressione atmosferica (barografo).



4° È inutile avvertire che generalmente i punti della retta Ox a sinistra di O corrispondono a valori negativi della x, i punti della Oy posti al di sotto di O a valori negativi della y.

Dall'esame della curva $y = f(x)$ si possono dedurre molte proprietà della $f(x)$. Così, per esempio, se noi ritorniamo al punto mobile M, e alla figura qui sopra disegnata, noi vediamo tosto da essa che y cresce fino a che x assume un valore

(*) Lo spazio OM percorso da M su Oy è evidentemente una funzione del tempo x impiegato a percorrerlo.

$x = \alpha$ di poco inferiore a $\frac{7}{4}$ per poi diminuire. Ciò vuol dire che nei primi α minuti il punto M si allontana da O per poi di nuovo avvicinarsi ad O. Essendo, diremo così, più ripida la curva per $x > \alpha$, che per $x < \alpha$, ne deduciamo che la velocità con cui M ritorna verso O è maggiore di quella con cui se ne era allontanato, ecc.

Se ci proponiamo di vedere in quali istanti la distanza OM era, p. es., uguale a 1, basta cercare i punti della nostra curva, la cui distanza da Ox vale 1; si trovano facilmente i punti B, C, le cui ascisse la nostra figura dimostra approssimativamente uguali a $\frac{5}{8}$ e $\frac{21}{8}$. Quindi dopo circa $\frac{5}{8}$ o $\frac{21}{8}$ minuti la distanza OM vale 1, ecc., ecc.

Anche solo queste prime e semplicissime applicazioni basteranno a dare un'idea di alcuni dei vantaggi che presenta il metodo grafico di rappresentare una funzione. E oramai negli studi più svariati di fisica, di economia, ecc., si ricorre ad esso. Ricorderò qui soltanto i così utili orari grafici delle strade ferrate, che sono appunto costruiti per rappresentare il movimento su una linea Ox di un treno M secondo i principii sopra svolti.

Voglio citare ancora un esempio di rappresentazione grafica (*). Sia data dell'anidride carbonica che alla temperatura 0° e alla pressione di un'atmosfera ha il volume 0,9936. Tenendo costante la temperatura, la pressione y, misurata in atmosfere, a cui si assoggetta il gas, è funzione del volume x occupato dallo stesso gas. E si ha precisamente l'equazione di Van Der Waals:

$$\left(y + \frac{0,00874}{x^2}\right)(x - 0,0023) = 1$$

che permette, per ogni valore della x, di calcolare il corrispondente valore della y.

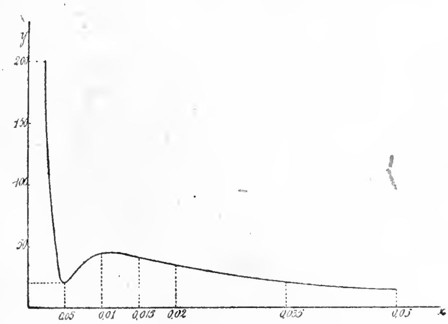
In questa equazione sono contenute tutte le leggi di dipendenza della y dalla x. Ma queste diventano ben più intuitive, se ricorriamo alla rappresentazione grafica. Calcolando per mezzo

(*) Tolgo questo esempio dal libro di NERNST u. SCHÖNFLIESS: *Einführung in die mathem. Behandlung der Naturwissenschaften.*

di questa equazione i valori di y corrispondenti a un dato valore della x, costruiamo facilmente la seguente tabella:

x	y	x	y
0,1	9,4	0,008	38,8
0,05	17,5	0,005	20,9
0,015	39,9	0,004	42,0
0,01	42,6	0,003	45,7

E la rappresentazione grafica dà la curva qui disegnata, in cui però per misurare i segmenti dell'asse delle x e quelli dell'asse delle y si sono scelte distinte unità di lunghezza.



Ne deduciamo, p. es., che:

1° Data la distanza y di un punto della curva dall'asse delle x, il punto è determinato, e ne è quindi determinata l'ascissa x, se p. es. $y > \alpha$ o $y < \beta$, essendo α un numero che la figura dimostra compreso tra 40 e 50, e β prossimamente uguale a 20. Vale a dire: Se la pressione è minore di β atmosfere o maggiore di α, il volume del gas è completamente determinato dalla pressione a cui si assoggetta. Invece si vede tosto che a ogni valore della pressione y compreso tra α e β corrispondono *tre* possibili valori del volume x;

2° Si vede pure che mentre il volume cresce da 0,01 in poi, la pressione va diminuendo dapprima con una certa rapidità, poi con una certa lentezza. E, mentre il volume diminuisce da 0,005 in poi, la pressione va rapidamente aumentando, ecc.

Esercizi.

1° Una funzione $y =$ cost. è rappresentata da una retta parallela all'asse delle x.

2° Rappresentare le funzioni $y = 3x + 4$, $y = 3x + 5$, $y = 4x + 6$, $y = 4x + 7$.

Risp. Si deve verificare col disegno: α) che le curve corrispondenti sono rette; β) che le prime due sono tra loro parallele, perchè hanno lo stesso coefficiente angolare 3; γ) che anche le ultime due sono parallele.

3° Rappresentare graficamente la legge di Boyle-Mariotte. (Se x è il volume d'un gas perfetto alla pressione y, è $x \cdot y =$ costante; si supponga questa costante, p. es., uguale a 1). E dedurne come varia y al variare della x. (La curva immagine è un'iperbole equilatera).

4° Rappresentare la curva $y = +\sqrt{1 - x^2}$.

Risp. Si deve trovare un semicerchio.

5° Si rappresenti graficamente qualche fenomeno fisico, partendo o da una legge fisica o da tavole numeriche.

Così, p. es., si può rappresentare come varia la intensità luminosa y al variare della distanza x dalla sorgente luminosa ($y\,x^2 =$ cost.), oppure come varia la densità y di un corpo, l'acqua, p. es., col variare della temperatura x, ecc.

§ 31. — **Esempi preliminari di limiti.**

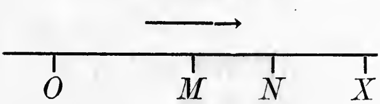
α) Sia OP un pendolo mobile attorno ad un punto O; e ne sia OV la posizione di equilibrio stabile. Supponiamo che il pendolo si muova in un mezzo così viscoso, che la resistenza del mezzo impedisca al pendolo OP di risalire dopo che sia disceso in OV. L'angolo y che OP forma con OV va diminuendo, e diminuisce indefinitamente fino a diventare tanto piccolo quanto si vuole, e, quando è *diventato* minore di un qualsiasi angolo ε, non cresce più, ma *resta* minore di ε. Ora y è una funzione del tempo x impiegato dal pendolo nel suo movimento. Quanto più x aumenta, tanto più piccolo y *diventa* e *resta*. Ciò che esprimeremo dicendo, che y tende a zero, (ha per limite zero, diventa infinitesimo) se x cresce indefinitamente (per $x = +\infty$) e scrivendo $\lim\limits_{x=+\infty} y = 0$.

β) Sia ancora OP un pendolo oscillante attorno ad un punto O; e ne sia OV la posizione di equilibrio stabile. Per fissare le idee, supponiamo che gli attriti, la resistenza del mezzo siano tali che, se il pendolo parte da una posizione OP che con OV fa un angolo α, esso, oscillando, giunga dall'altra parte di OV fino alla posizione OP_1 che con OV fa angolo $-\dfrac{\alpha}{2}$. Cosicchè, tenendo conto dei segni, possiamo dire che, se l'angolo y di OP con OV ha il valore α al principio di una oscillazione, il valore di y varia durante l'oscillazione e, partendo da α, e passando per lo zero, giunge fino al valore $-\dfrac{\alpha}{2}$. Naturalmente poi il pendolo retrocede fino a che il valore di y, ripassando per lo zero, giunge al valore $-\frac{1}{2}(-\frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{4}$, per poi retrocedere di nuovo giungendo al valore $-\frac{\alpha}{8}$, e così via.

E resta evidente che, se si prende il numero delle oscillazioni compiute dal pendolo *abbastanza grande*, si rendono piccoli a piacere i valori che può poi assumere y: ciò che esprimeremo scrivendo $\lim_{x=+\infty} y = 0$.

Infatti, se ε è un numero positivo piccolo a piacere, sia n così grande che $2^n > \frac{|\alpha|}{\varepsilon}$. Per $x \geqq n$ sarà $2^x > \frac{|\alpha|}{\varepsilon}$, $\frac{|\alpha|}{2^x} < \varepsilon$. E quindi per $x > n$ l'angolo y è a *fortiori* minore di ε.

γ) Tra i due precedenti esempi passa una certa differenza di comportamento. Mentre nel 1° la y varia al crescere della x sempre in un verso, e, senza mai essere nulla, finisce col *diventare* e *restare* piccola a piacere, la quantità y del secondo esempio tende pure a zero. Ma essa non varia sempre in un verso: il suo valore assoluto prima diminuisce fino ad annullarsi, poi aumenta di nuovo, torna a diminuire, e così via. I massimi valori che $|y|$ raggiunge in ogni oscillazione vanno diventando però sempre più piccoli; cosichè anche la y del secondo esempio, come la y del primo, finisce da un certo momento in poi con l'essere diventata e *restare* piccola a piacere in valore assoluto.



δ) Se un punto M si muove di moto *uniforme* su una retta OX, partendo da O, e movendosi p. es. verso destra, la distanza $y = OM$ cresce sempre, anzi da un certo istante in poi diventa e *resta* maggiore di una qualsiasi lunghezza L assegnata. Se, per es., misuriamo il tempo (in minuti, o in secondi, o ecc.) a partire dall'istante iniziale del movimento, e se v è la velocità (supposta costante) del movimento, dopo $x > \frac{L}{v}$ unità di tempo, si ha $OM = y = x\,v > L$. Ciò che noi esprimeremo scrivendo $\lim y = \infty$ (quando x cresce indefinitamente), o anche senza altro $\lim_{x=\infty} y = \infty$.

Sia ora N un punto che oscilli rapidamente intorno al precedente punto mobile M, e supponiamo che l'ampiezza di tali oscillazioni sia costantemente di 1 cm. La distanza $y = ON$

potrà anche in certi intervalli di tempo diminuire (quando N si muove oscillando in direzione opposta al movimento di M). Ma ciononostante i valori minimi che successivamente acquista $x = ON$ vanno crescendo sempre, vanno diventando grandi ad arbitrio, cosicchè ad un certo istante x in poi anche $y = ON$ diventa e *resta* maggiore di una qualsiasi lunghezza assegnata. Perciò noi diciamo ancora che $\lim\limits_{x=\infty} y = \infty$.

ε) Consideriamo la quantità $y = \dfrac{1}{x-3}$; essa è una funzione della x nel campo formato da tutti i possibili valori della x, eccettuato il valore $x = 3$.

Si noti che per $x = 3,1$; $3,01$; $3,001$; ..... si ha rispettivamente $y = 10$; $y = 100$; $y = 1000$, ecc. E si riconoscerà tosto che, man mano che la x si avvicina a 3, il numero $x - 3$ diventa e resta piccolissimo, il numero $\dfrac{1}{x-3}$ grandissimo (in valore assoluto); ciò che noi indichiamo scrivendo $\lim\limits_{x=3} y = \infty$.

Il lettore costruisca il diagramma (la curva immagine) della nostra funzione (che si trova essere un'iperbole equilatera) e cerchi di illustrare col disegno i fatti qui enunciati.

Si noti che, per assegnare il $\lim\limits_{x=3} y$, si sono considerati i valori delle x prossimi al valore 3, e *non il valore* 3, per il quale anzi la y non è neppur definita.

ζ) Consideriamo infine un pendolo OP che oscilla senza smorzamento attorno al punto O. L'angolo y di OP con la posizione OV di equilibrio stabile varierà da un certo valore α fino a $-\alpha$, per poi tornare al valore α, e così via. In ogni oscillazione esistono valori di y vicinissimi ed anzi coincidenti con ogni numero γ scelto nell'intervallo $(-\alpha, \alpha)$. Ma y, dopo essersi avvicinato al valore γ, se ne allontana; e la misura $|y - \gamma|$ di questo avvicinamento, pur raggiungendo ad ogni oscillazione addirittura il valore zero, continua pure a raggiungere i valori $|\alpha - \gamma|$ e $|-\alpha - \gamma|$; cosicchè, pur *diventando* minore di un numero ε piccolo a piacere, non *resta*, da nessun istante in poi, minore di un tal numero ε. Noi diremo perciò che $\lim y$ non esiste, o che y non tende ad alcun limite, quando il numero delle oscillazioni tende all'infinito.

§ 32. — Limiti.

Cerchiamo di dare una definizione di limite, che corrisponda alla nozione intuitiva messa in evidenza dagli esempi del § 31.

A) In generale sia y una funzione della x definita in un certo campo G.

Noi scriviamo $\lim\limits_{x=a} y = b$ (a, b numeri finiti), se, preso un numero positivo ε piccolo a piacere (*), la differenza $y - b$ è minore in valore assoluto di ε ($|y - b| \leqq \varepsilon$), per tutti i numeri x di G abbastanza vicini ad a, ma *differenti* da a.

Noi scriviamo $\lim\limits_{x=\infty} y = b$ (b numero finito) se, preso un numero positivo ε piccolo a piacere, la differenza $y - b$ è minore in valore assoluto di ε ($|y - b| \leqq \varepsilon$) per tutti i valori x di G abbastanza grandi in valore assoluto.

Per precisare tale definizione, osserviamo che sono equivalenti le frasi seguenti:

α) « Il numero x è abbastanza vicino al numero a ».

β) « La differenza $x - a$ è abbastanza piccola in valore assoluto ».

γ) Il punto x appartiene ad un certo intorno del numero a (o anche ad un intorno abbastanza piccolo di a).

α') Il numero x è abbastanza grande in valore assoluto.

β') Il numero $\frac{1}{x}$ è abbastanza piccolo in valore assoluto.

γ') Il punto x appartiene ad un certo intorno di ∞.

Se poi vogliamo precisare il significato delle parole « abbastanza », « un certo », che compaiono nelle frasi precedenti, e che possono avere un significato più o meno ampio a seconda del problema trattato, possiamo dire:

δ) La differenza $x - a$ non supera in valore assoluto un certo numero σ ($|x - a| < \sigma$) (**).

ε) Il punto x appartiene ad un intorno $(a - \sigma, a + \sigma)$ del numero a.

δ') Il numero x supera in valore assoluto un certo numero m.

ε') Il punto x appartiene ad un certo intorno $(m, +\infty)$ o $(-\infty, m)$ del punto ∞.

(*) La definizione non cambierebbe di significato se io dicessi solamente: « un numero ε arbitrario ».

(**) L' « *abbastanza piccolo* » acquista così il significato preciso di « *minore di σ in valore assoluto* ».

Con queste osservazioni le definizioni precedenti si possono enunciare anche così:

Noi scriviamo $\lim\limits_{x=a} y = b$ (a, b numeri finiti) se, comunque si scelga un numero positivo ε piccolo a piacere, esiste un numero σ tale che, se x appartiene a G, se $x \neq a$, ed $|x-a| < \sigma$, i valori corrispondenti della y sono tali che la differenza $y-b$ non superi ε in valore assoluto.

Noi scriviamo $\lim\limits_{x=\infty} y = b$ (b numero finito) se, comunque si scelga un numero positivo ε piccolo a piacere, esiste un numero m tale che, se x appartiene a G, e se $|x| > |m|$, i valori corrispondenti della y sono tali che la differenza $y-b$ non superi ε in valore assoluto.

Ed infine si possono dare le precedenti definizioni nella forma seguente, valida in entrambi i casi, affatto completa e precisa:

Si dice che $\lim\limits_{x=a} y = b$ (a **finito o infinito,** b **finito), se, preso ad arbitrio un numero** ε **positivo** *(piccolo a piacere)*, **esiste un intorno** γ **di** a, **tale che in tutti i punti di questo intorno (il punto** a **escluso), che appartengono al campo** G, **ove la** y **è definita, la** y **assume (*) valori, che differiscono da** b **per non più di** ε, **ossia che soddisfano alla**

$$|y-b| \leq \varepsilon.$$

Questa disuguaglianza non varrà per tutti i valori di y, ma soltanto per quelli che corrispondono a punti di γ. Si noti che γ varia in generale, quando ε varia. Perchè, se γ *non variasse*, tale disuguaglianza varrebbe, *qualunque fosse* ε, per tutti i valori di y corrispondenti ai punti dell'intorno *fisso* γ. Perciò ognuna delle corrispondenti differenze $|y-b|$, essendo minore di un numero $\varepsilon > 0$ arbitrario, sarebbe nulla. Pertanto questi valori di y sarebbero *tutti* uguali a b. Cioè esisterebbe un intorno γ di a, in cui la y avrebbe *sempre* lo stesso valore b.

Notiamo che porre la disuguaglianza

$$|y-b| \leq \varepsilon \tag{1}$$

equivale a dire che entrambe le differenze $y-b$, $b-y$ sono algebricamente minori di ε. Infatti, quella di queste differenze, che è positiva, è uguale a $|y-b|$, ed è quindi per ipotesi non maggiore di ε; e quella delle due precedenti differenze, che è negativa, è certamente minore di ε, perchè ε è positivo.

(*) Ricordo che si dice valore *assunto* dalla y in un punto, p. es., nel punto $x=c$, il valore di y corrispondente al valore c della x.

Alla precedente disuguaglianza si possono sostituire le seguenti due:

$$y - b \leqq \varepsilon \quad ; \quad b - y \leqq \varepsilon \tag{2}$$

che si possono scrivere

$$b - \varepsilon \leqq y \leqq b + \varepsilon. \tag{3}$$

La (3) dice che y è *compreso* tra $b - \varepsilon$ e $b + \varepsilon$.

I valori che la y assume per i citati valori di x formano dunque una classe di numeri, il cui limite inferiore l non è inferiore a $b - \varepsilon$, e il cui limite superiore L non è superiore a $b + \varepsilon$.

Osservazione critica.

Questa ultima osservazione permette di presentare sotto nuova luce la definizione di limite, e di vederne le possibili generalizzazioni. E forse per qualche lettore la seguente trattazione potrà apparire più facile della precedente. Premettiamo una osservazione.

Siano γ_1, γ_2 *due intorni del punto* a; *e sia* γ_1 *una parte di* γ_2 (cioè i punti di γ_1 appartengano a γ_2). Tra i valori che y assume per i valori di x (distinti da a e che appartengano a G) appartenenti a γ_2 saranno compresi anche i valori assunti da y, quando x (sempre appartenendo G ed essendo distinto da a) si muove entro γ_1 (e ciò perchè, per ipotesi, γ_1 è interno a γ_2). Quindi evidentemente: *I limiti* L_1, l_1 *superiore e inferiore dei valori assunti da* y *quando* x *varia in* γ_1 (colle solite restrizioni) *e i limiti analoghi* L_2, l_2 *relativi a* γ_2 *soddisfano alle* $L_2 \geqq L_1 \geqq l_1 \geqq l_2$ (*). Cioè, *mentre un intorno* γ *di* a *impicciolisce, il limite superiore* L *dei valori corrispondenti di* y *non aumenta, il limite inferiore* l *non diminuisce*, pure essendo sempre $L \geqq l$. Dunque *il limite inferiore* Λ *degli* L, *e il limite superiore* λ *degli* l *soddisfano alle* $\Lambda \geqq \lambda$.

Nel nostro caso (il caso elementare) in cui $\lim\limits_{x=a} y = b$, preso un ε piccolo a piacere, esiste, come abbiamo veduto, un intorno γ di a per cui il limite superiore L non supera $b + \varepsilon$, l'inferiore l non è minore di $b - \varepsilon$, per cui cioè $L - l$ non supera 2ε. In tale caso dunque la classe degli L è contigua alla classe degli l; cioè $\Lambda = \lambda$. E questo numero $\Lambda = \lambda$ di separazione delle due classi coincide appunto col limite b di y per $x = a$. Potremmo dunque anche dire:

Si dice che *il limite di* y per x = a *esiste, se la classe degli* L *è contigua alla classe degli* l; *come valore* $\lim\limits_{x=a} y$ *di questo limite s'intende in tal caso il numero di separazione delle due classi.*

Questa definizione è molto analoga a quella data per le aree e i volumi delle figure piane o solide. Si capisce che dalle nostre ricerche elementari resta escluso il caso $\Lambda > \lambda$, in cui secondo le attuali definizioni, non esiste il *limite* di y per $x = a$; Λ e λ sono nel caso generale i cosidetti *massimo e minimo limite* di y per $x = a$. Si possono poi distinguere i limiti per $x = a +$ da quelli per $x = a -$.

Oss. 1ª. Affinchè queste definizioni abbiano senso, si deve però ammettere che *in ogni intorno di* a *esistano punti* x *appartenenti a* G, *ma distinti da* a. Vale a dire, se a è finito

(*) Ciò è una facile estensione del teorema evidente:

Se a_1, a_2, ..., a_n sono dei numeri, e a_1, a_2, ..., a_m (con $m \leqq n$) sono una parte dei precedenti, il massimo (minimo) dei primi non è inferiore (superiore) al massimo (minimo) di questi ultimi.

si deve per ogni numero σ ammettere l'esistenza di punti x, differenti da a, in cui la y è definita e che soddisfano alla $|x-a|<\sigma$; se $a=\infty$, si deve per ogni numero m ammettere l'esistenza di numeri x, per cui la y è definita, e tali che $|x|>|m|$ (*).

Così, p. es., non avrebbe senso parlare del $\lim_{x=1} \sqrt{x-2}$, perchè la y è definita soltanto nel campo G formato dai valori della x, che non sono inferiori a 2. Ed evidentemente vicino ad 1 $\left[\text{p. es., nell'intorno } (1-\sigma,\ 1+\sigma) \text{ ove } \sigma=\frac{1}{2}\right]$ non esistono valori di G.

Oss. 2ª. Se i valori della x, di cui si parla nelle precedenti definizioni, sono scelti tutti in intorni a sinistra del punto a, allora, anzichè scrivere $\lim_{x=a} y$, si scrive spesso $\lim_{x=a-0} y$ (se a è finito) oppure $\lim_{x=+\infty} y$ (se a è infinito). Si scrive $\lim_{x=a+0}$ oppure $\lim_{x=-\infty}$, se i valori considerati della x sono scelti in intorni destri del punto a. Le notazioni $\lim_{x=a}$, $\lim_{x=\infty}$ sono però usate anche in tali casi, se non vi è possibilità di un equivoco.

Si scrive anche $\lim_{x=a-}$ e $\lim_{x=a+}$, anzichè $\lim_{x=a-0}$ e $\lim_{x=a+0}$.

Così, p. es., la $y=x+\frac{|x-1|}{x-1}$ è una funzione definita per tutti i valori della x, il punto $x=1$ eccettuato. Ed è $\lim_{x=1-0} y=0$. Infatti, se ε è un numero piccolo a piacere, per i valori della x dell'intorno $1-\varepsilon<x<1$ del punto 1 è $|0-y|=|y|=\left|x+\frac{1-x}{x-1}\right|=|x-1|<\varepsilon$. In modo simile si prova che $\lim_{x=1+0} y=2$.

(Si ricordi che per $x<1$ è $|x-1|=|1-x|=1-x$, $\frac{|x-1|}{x-1}=-1$ e che per $x>1$ è $\frac{|x-1|}{x-1}=1$).

Oss. 3ª. È essenziale notare che, pure esistendo il $\lim_{x=a} y$, può darsi benissimo che per $x=a$ la y non sia definita, od anche che vi abbia un valore affatto distinto da $\lim_{x=a} y$, perchè,

(*) Questa proprietà si suole anche enunciare dicendo: Il punto a è *punto limite* di G

per la stessa definizione, per calcolare il $\lim\limits_{x=a} y$ si devono esaminare i valori che y assume in punti *distinti* dal punto $x = a$.

Oss. 4ª. Se in un intorno di $x = a$ la y riceve costantemente uno stesso valore b, evidentemente $\lim\limits_{x=a} y = b$.

Oss. 5ª. La $\lim y = b$ si legge: Il limite di y per $x = a$ è b; oppure y tende al limite b, o anche tende a b per $x = a$, oppure per $x = a$ la $y - b$ tende a zero, diventa infinitesima, è infinitesima.

Sarà un utile esercizio al lettore illustrare le precedenti definizioni con gli esempi del § 31.

Oss. 6ª. Supponiamo che esista il $\lim\limits_{x=a} y = l$, e che, quando $x \neq a$, si abbia $y > k$ oppure $y \geqq k$.

Dovranno esistere dei valori di y tali che $|y - l| < \varepsilon$, e in particolare che $l \geqq y - \varepsilon$. Poichè ogni valore della y non e inferiore a k, sarà $l \geqq k - \varepsilon$; ma ε è un numero piccolo a piacere. Dovrà dunque essere $l \geqq k$.

Così pure, se per $x \neq a$ è $y < k$, oppure $y \leqq k$, è $l \leqq k$.

Come si vede, le disuguaglianze precedenti relative alla y si conservano *attenuate* (mi sia lecita la frase) per un limite di y. Dico *attenuate*, perchè se, p. es., $y > k$, dalla $l = \lim y$ posso non già dedurre che $l > k$, ma *soltanto* che $l \geqq k$. Un fatto analogo ci è già noto (pag. 10) per i limiti superiore ed inferiore.

Oss. 7ª. Viceversa, se, p. es., $\lim y = l < k$, esiste per ogni $\varepsilon > 0$ arbitrario un intorno γ di a tale che in questo intorno $y \leqq l + \varepsilon$. Scelto $\varepsilon < k - l$, sarà dunque in tale intorno $y < k$. Un risultato analogo si ottiene se $l > k$.

Dalla disuguaglianza $\lim y < k$ **[oppure** $\lim y > k$**] si deduce quindi una disuguaglianza** $y < k$ **[oppure** $y > k$**] per i valori della** y; **la quale però** (si noti) **è valida non già per tutti i valori della** y; **ma** *soltanto* **per quei valori che la** y **riceve in un** CONVENIENTE **intorno del punto** a.

Invece dalla $y < k$ **[oppure** $y > k$**] si ricava soltanto** $\lim y \leqq k$ **[oppure** $\lim y \geqq k$**], se questi limiti esistono e sono finiti. Anche dalla** $y \leqq k$ **[oppure** $y \geqq k$**] si ricava la stessa disuguaglianza.**

B) Converremo di scrivere $\lim\limits_{x=a} y = \infty$ se $\lim\limits_{x=a} \dfrac{1}{y} = 0$.

Scelto ad arbitrio un numero ε positivo, e, posto $k = \dfrac{1}{\varepsilon}$, dovrà dunque esistere un intorno γ di a tale che per tutti i punti di questo intorno (il punto a escluso) che appartengono al campo G ove y è definita, sia $\left|\frac{1}{y}\right| \leqq \varepsilon$, ossia $|y| \geqq k$, cioè valga l'una o l'altra delle disuguaglianze: $y \geqq k$ oppure $y \leqq -k$.

Possiamo dunque dire:

È $\lim\limits_{x=a} y = \infty$, *se, scelto ad arbitrio un numero* k *positivo* (arbitrariamente grande), *esiste un intorno* γ *di* a, *tale che nei punti di* γ, *ove la* y *è definita, e che sono distinti da* a, *valga la* $|y| \geqq k$, *cioè valga la:*

$$y \geqq k \qquad \text{oppure la} \qquad y \leqq -k.$$

Se vale sempre in γ *la prima di queste ultime due disuguaglianze, se cioè* y *è positiva in tutto un intorno di* a, *si dirà che il limite di* y *è* $+\infty$.

Se vale in γ *la seconda, si dirà che* $\lim\limits_{x=a} y = -\infty$.

Se in ogni intorno di a la y assume valori tanto positivi che negativi, essa, pur tendendo a ∞, non tende nè a $+\infty$, nè a $-\infty$.

Anche qui potremo distinguere il limite per $x = a + 0$, e il limite per $x = a - 0$.

Dunque $\lim\limits_{x=a} y = b$, (*essendo anche* $a = \infty$ *oppure* $b = \infty$) *allora e allora soltanto che, dato a piacere un intorno* β *di* b, *si può trovare un intorno* α *di* a *tale che quando* $x \neq a$ *varia in* α *assumendo valori per cui* y *è definita, i corrispondenti valori di* y *appartengono a* β.

Il lettore veda come si modifica questa proposizione, se, p. es., $b = +\infty$, oppure $b = -\infty$, o se si tratta del limite per $x = a +$ oppure per $x = a -$.

C) Come abbiamo visto in un esempio precedente, può bene avvenire che $\lim\limits_{x=a-0} y$, $\lim\limits_{x=a+0} y$ esistano entrambi, e siano differenti l'uno dall'altro; nè ciò può stupire, perchè per il primo limite si considerano i valori di y per x posto a sinistra di a; e per il secondo limite si considerano tutt'altri valori della y: quelli corrispondenti a valori di x posti a destra di a.

Vogliamo dimostrare però il seguente:

TEOREMA DI UNICITÀ. *La* y *non può avere due limiti distinti, p. es., per* $x = a + 0$; *cosicchè il* $\lim\limits_{x=a+0} y$ *o non esiste, oppure ha un unico valore ben determinato.*

Supponiamo, p. es., che la y abbia per $x = a + 0$ due limiti finiti h, k. Io dico che $h = k$.

Sia ε un numero piccolo a piacere. Esiste un intorno α a destra di $x = a$, in cui $|y - h| < \frac{\varepsilon}{2}$, ed esiste un intorno β a destra di $x = a$, in cui $|y - k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sia A un punto (del solito campo G e distinto da a), che appartiene al più piccolo di questi intorni; esso apparterrà ad entrambi gli intorni.

Il valore y_A, che y assume in tal punto, soddisferà perciò ad entrambe le disuguaglianze $|y_A - h| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|y_A - k| < \frac{\varepsilon}{2}$.

I numeri h, k avendo da uno stesso numero y_A una distanza minore di $\frac{\varepsilon}{2}$, disteranno l'uno dall'altro per meno di ε, ossia $|h - k| < \varepsilon$.

Ciò che si può anche dimostrare osservando che

$$|h - k| = |(h - y_A) + (y_A - k)| \leqq |h - y_A| + |k - y_A| =$$
$$= |y_A - h| + |y_A - k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La differenza $h - k$, essendo in valore assoluto minore di ogni numero positivo ε, è quindi nulla. c. d. d.

Un utile esercizio sarà quello di completare la dimostrazione del precedente teorema per il caso che sia, p. es., $h = +\infty$.

§ 33. — Funzioni complesse e loro limiti.

Se $u(x)$, $v(x)$ sono funzioni reali della x definite in uno stesso insieme G, la $u(x) + i\,v(x)$ è (§ 29, α, pag. 96) una funzione (complessa) della variabile (reale) x definita nel campo G.

Se $\lim\limits_{x=a} u(x) = m$, se $\lim\limits_{x=a} v(x) = n$, si suol dire che

$$\lim_{x=a} [u(x) + i\,v(x)] = m + i\,n. \tag{1}$$

Poichè, scelto un $\frac{\varepsilon}{2}$ piccolo a piacere, esistono un intorno γ_1, e un intorno γ_2 di a, tale che nei punti di G (il punto a escluso) che appartengono a tali intorni, valgano le

$$|u(x) - m| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad |v(x) - n| \leqq \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2}$$

in un intorno γ interno a γ_1 e a γ_2 varranno entrambe le (2). Varrà anche la

$$\left| \{ u(x) + i\, v(x) \} - \{ m + i\, n \} \right| \leqq \varepsilon, \tag{3}$$

perchè il primo membro di (3) non può superare

$$| u(x) - m | + | v(x) - n |.$$

Viceversa, se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intorno γ per il quale valga la (3), allora è vera la (1). È così trovata una stretta analogia tra le definizioni di limite di una funzione reale o complessa. È evidente che dalla (1) segue

$$\lim_{x=a} \sqrt{[u(x)]^2 + [v(x)]^2} = m^2 + n^2, \text{ cioè:}$$

$$\lim_{x=a} | u(x) + i\, v(x) | = | m + i\, n |$$

(limite del modulo = modulo del limite).

Una formola analoga non si può scrivere per gli argomenti perchè l'argomento di un numero complesso non è univocamente determinato.

Se però $u(x) + i\, v(x)$ è una funzione complessa, il cui modulo per $x = a$ ha per limite r, mentre l'argomento (o, per meglio dire, uno degli argomenti) ha per limite θ, allora $u(x) + i\, v(x)$ ha per limite proprio $r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

Se anche una sola delle funzioni $u(x)$, $v(x)$ ha per limite ∞, ossia se $| u + i\, v | = \sqrt{u^2 + v^2}$ ha per limite l'infinito, ossia se $\dfrac{1}{u + i\, v}$ ha per limite zero, diremo che $u + i\, v$ ha ∞ per limite.

§ 34. — Ricerca del $\lim\limits_{x=\infty} p^x$.

Se p è negativo, oppure complesso, supporremo senz'altro x intero. Distinguiamo parecchi casi:

1° Sia $|p| > 1$, $x > 0$.

Si osservi che $|p^x| \geqq k$ se $x \geqq \dfrac{\log_{10} k}{\log_{10} |p|}$ ossia se x appartiene all'intorno $\left(\dfrac{\log_{10} k}{\log_{10} |p|}, +\infty \right)$ di $+\infty$.

Quindi: $\lim\limits_{x=+\infty} p^x = \infty$ se $|p| > 1$.

2° Sia $|p| < 1$, $x < 0$. In tal caso $\frac{1}{|p|} > 1$, $y = -x > 0$,

$$\lim_{x=-\infty} p^x = \lim_{y=+\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^y = \infty .$$

3° Sia $|p| < 1$; $x > 0$; sarà, posto $q = \frac{1}{p}$,

$|q| > 1$ e quindi $\lim_{x=+\infty} q^x = \infty$. donde $\lim_{x=+\infty} \frac{1}{q^x} = 0$, ossia $\lim_{x=+\infty} p^x = 0$.

4° Sia $|p| > 1$; $x < 0$; posto $q = \frac{1}{p}$, sarà $|q| < 1$ e quindi per il 2° caso $\lim_{x=-\infty} q^x = \infty$, donde $\lim_{x=-\infty} \frac{1}{q^x} = \lim_{x=-\infty} p^x = 0$.

5° Per $p = 1$ è $\lim_{x=\pm\infty} p^x = 1$ (perchè $p^x = 1$ per ogni valore di x).

6° Per $p = -1$ ed x intero, p^x assume i valori $+1$ o -1, secondo che x è pari o dispari; e quindi $\lim_{x=\pm\infty} p^x$ non esiste. Altrettanto avviene se $|p| = 1$, e p è un numero complesso.

§ 35. — Primi teoremi sui limiti.

Enuncieremo e dimostreremo questi teoremi per le funzioni reali.

Tali teoremi valgono però, come apparirà evidente, anche per funzioni complesse.

È ben evidente che, se due quantità y_1, y_2 si avvicinano indefinitamente a (hanno per limite) due numeri finiti l_1, l_2, la loro somma, la loro differenza, il loro prodotto e il loro quoziente (se $l_2 \neq 0$) si avvicinano indefinitamente a $l_1 + l_2$, $l_1 - l_2$, $l_1 l_2$, $\frac{l_1}{l_2}$ (nell'ultimo caso si suppone $l_2 \neq 0$). Questa semplice osservazione si enuncia rigorosamente, e in modo più generale, coi seguenti teoremi:

α) *Se* $y_1, y_2, \ldots . y_n$ *sono funzioni della* x *definite in uno stesso gruppo* G, *e se, p. es., per* $x = a + 0$ *esse hanno dei limiti* $l_1, l_2, \ldots l_n$ *finiti, allora per* $x = a + 0$, *la somma* $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ *ha per limite la somma* $l_1 + l_2 + \ldots . + l_n$ *dei limiti.*

Dimostreremo il teorema nel caso $n = 2$: il caso generale si tratta, o con metodo analogo, oppure col metodo di induzione completa, osservando che:

$$(y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_n) = (y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{n-1}) + y_n.$$

Sia η un numero arbitrario: esisterà un intorno destro α_1 di a, in cui $|y_1 - l_1| < \eta$, ed un intorno α_2 di a, in cui $|y_2 - l_2| < \eta$. Se α è un intorno *interno* tanto ad α_1 che ad α_2, allora in α valgono entrambe le precedenti disuguaglianze; donde si deduce:

$$|(y_1 + y_2) - (l_1 + l_2)| \leqq |y - l_1| + |y_2 - l_2| < \eta + \eta = 2\eta.$$

Quindi, dato un numero ε piccolo a piacere e positivo, se ne deduce, posto $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$, che esiste un intorno α di a, in cui $(y_1 + y_2) - (l_1 + l_2)$ è minore di $2\eta = \varepsilon$ in valore assoluto.

c. d. d.

Oss. Per stabilire la precedente disuguaglianza sono partito dalla $|a + b| \leqq |a| + |b|$ del § 4, δ, pag. 13.

β) Nelle stesse ipotesi di α) *il limite del prodotto* $y_1 y_2 \ldots\ldots y_n$ *esiste ed è uguale al prodotto* $l_1 l_2 \ldots\ldots l_n$ *dei limiti.*

Supponiamo, come sopra, $n = 2$. Come sopra si dimostra che, dato un numero positivo η qualsiasi, esiste un intorno α di a, in cui valgono entrambe le $|y_1 - l_1| \leqq \eta$, $|y_2 - l_2| \leqq \eta$. E quindi in α sarà $|y_1| < |l_1| + \eta$.

Si avrà in tale intorno:

$$\begin{aligned} &|y_1 y_2 - l_1 l_2| = \\ &= |y_1(y_2 - l_2) + l_2(y_1 - l_1)| \leqq |y_1|\,|y_2 - l_2| + |l_2|\,|y_1 - l_1| \\ &\leqq \{|l_1| + \eta\}\eta + |l_2|\eta \leqq \eta\{|l_1| + |l_2| + \eta\}. \end{aligned}$$

Sia ora ε un numero piccolo a piacere; scelto η tale che $\eta < 1$. $\eta < \frac{\varepsilon}{1 + |l_1| + |l_2|}$, esisterà un intorno α di a, in cui:

$$|y_1 y_2 - l_1 l_2| \leqq \eta\{|l_1| + |l_2| + \eta\} < \frac{\varepsilon}{1 + |l_1| + |l_2|}\{|l_1| + |l_2| + 1\} = \varepsilon$$

ossia: $|y_1 y_2 - l_1 l_2| < \varepsilon$. c. d. d.

γ) Se $\lim y_1 = l_1$ e se l_1 è un numero finito diverso da zero, esiste un intorno α di a, in cui $|y_1 - l_1| < \left|\frac{l_1}{2}\right|$, e quindi

$|y_1| > \left|\frac{l_1}{2}\right|$, $y_1 \neq 0$. In tale intorno α ha dunque significato il rapporto $\frac{1}{y_1}$. Analoga considerazione vale se $l_1 = \infty$.

TEOREMA. *Se* $\lim\limits_{x=a} y_1 = l_1$, *e se* l_1 *è un numero finito non nullo, allora* $\lim\limits_{x=a} \frac{1}{y_1} = \frac{1}{l_1}$. *Se invece* $l_1 = \infty$, *allora* $\lim \frac{1}{y_1} = 0$.

Se y_1 *è differente da zero nei punti di un intorno* α *di* a (*distinti da* a) *e se* $\lim\limits_{x=a} y_1 = 0$, *allora* $\lim\limits_{x=a} \frac{1}{y_1} = \infty$.

Se $l_1 = \infty$, $\lim \frac{1}{y_1} = 0$ e viceversa (§ 32, B, pag. 109). Supponiamo che $l_1 \neq 0$ sia un numero finito. Se ε è un numero piccolo a piacere, esiste un intorno β di a, in cui $|y_1 - l_1| < \varepsilon \frac{l_1^2}{2}$.

Se γ è un intorno comune a β e all'intorno α, di cui parla la precedente osservazione, in tale intorno γ sarà:

$$|y_1| > \left|\frac{l_1}{2}\right|, \quad |y_1 - l_1| < \varepsilon \frac{l_1^2}{2},$$

donde:

$$\left|\frac{1}{y_1} - \frac{1}{l_1}\right| = \left|\frac{y_1 - l_1}{y_1 l_1}\right| < \frac{\varepsilon \frac{l_1^2}{2}}{l_1 \frac{l_1}{2}} = \varepsilon.$$

Per ogni numero ε esiste quindi un intorno γ, dove $\left|\frac{1}{y_1} - \frac{1}{l_1}\right| < \varepsilon$; da ciò segue tosto il nostro teorema.

COROLLARIO. Se due funzioni y_2, y_1 sono definite nello stesso gruppo G ed hanno per $x = a$ limiti finiti l_2, l_1, e se il limite di y_1 è differente da zero, allora *la frazione* $\frac{y_2}{y_1}$ ha significato (se il denominatore non è nullo) in un intorno α di a, ed *il suo limite per* x = a *è uguale al quoziente* $\frac{l_2}{l_1}$ *dei limiti di* y_2 *e* y_1.

Ciò si dimostra osservando che $\frac{y_2}{y_1}$ è il prodotto di y_2 per $\frac{1}{y_1}$.

Oss. Esistano ancora per $x = a$ i limiti delle y_1, y_2. Se $\lim y_2 = \infty$, $\lim y_1 \neq \infty$, allora $\frac{y_2}{y_1}$ ha per limite ∞.

Se $\lim y_2 \neq 0$, $\lim y_1 = 0$, e se il rapporto $\frac{y_2}{y_1}$ ha significato, allora $\lim \frac{y_2}{y_1} = \infty$.

Se $\lim y_1 = \infty$, $\lim y_2 \neq \infty$, allora $\lim \frac{y_2}{y_1} = 0$.

Se dunque esistono i limiti di y_2 e di y_1, noi sappiamo trovare il limite del quoziente $\frac{y_2}{y_1}$ in tutti i casi, esclusi quelli che entrambe le y_1, y_2 tendano a zero, o che entrambe tendano all'infinito. Questi casi particolari saranno da noi studiati più tardi per altra via. È naturalmente inteso [nel caso che il $\lim y_1$ sia nullo] che si possa parlare del rapporto $\frac{y_2}{y_1}$ e che cioè nei punti di un intorno α di a (il punto a escluso) sia $y_1 \neq 0$ (*).

δ) Sia $y = f(z)$, $z = \varphi(x)$; sia $\lim\limits_{x=a} z = b$, $\lim\limits_{z=b} y = c$. La y si possa considerare come funzione $f[\varphi(x)]$ della x in un intorno di a. È intuitivo che sarà anche $\lim\limits_{x=a} y = c$.

Se però in ogni intorno del punto a esistono punti $x \neq a$, in cui la z assume il valore b, bisogna in più ammettere che $f(b) = c$.

Infatti, preso un numero ε piccolo a piacere, della $\lim\limits_{z=b} y = c$, si deduce che esiste un numero δ tale che per $z \neq b$ e $|z - b| < \delta$ è $|y - c| < \varepsilon$. Dalla $\lim\limits_{x=a} z = b$ si deduce che esiste un numero σ tale che, se $x \neq a$ e se $|x - a| < \sigma$ sia $|z - b| < \delta$. Sarà quindi anche, per quanto trovammo, $|y - c| < \varepsilon$ se $z \neq b$. La disuguaglianza $|y - c| < \varepsilon$ vale però anche se $z = b$ per il valore considerato della x, perchè per ipotesi in tal caso $y = f(b) = c$. Dunque, dato un numero ε piccolo a piacere, esiste un numero σ tale che par $|x - a| < \sigma$ è $|y - c| < \varepsilon$. Donde, per definizione di limite, $\lim\limits_{x=a} y = c$. c. d. d.

In modo simile si tratta il caso che $c = \infty$, oppure $b = \infty$, ecc.

(*) Se fosse $l_1 \neq 0$, questa ultima condizione è sempre soddisfatta, come abbiamo già osservato.

§ 36. — **Funzioni continue.**

α) Sia $y = f(x)$ una funzione reale della x definita in un certo intervallo. Hanno speciale importanza tra così fatte funzioni (*) quelle funzioni che si sogliono chiamare *continue*, perchè variano con continuità al variare della x, cosicchè se la x varia di pochissimo, anche la y varia di pochissimo. Prima di dare una definizione precisa di tali funzioni, osserviamo che la fisica ci dà esempio non soltanto di funzioni continue, ma anche di funzioni non continue (discontinue).

Sia, p. es., data una certa quantità di ghiaccio alla temperatura di -10°. Noi indicheremo con y la minima quantità di calore necessaria per elevare la temperatura del ghiaccio da -10° a x gradi. La y sarà una quantità definita per tutti i valori di x, che corrispondono a temperature sperimentalmente raggiungibili; sarà cioè una funzione di x (positiva per $x > -10$, negativa per $x < -10$, nulla per $x = -10$). Consideriamo la y come funzione della x nell'intervallo $(-10,0)$. In questo intervallo la y è continua, perchè varia con continuità al variare continuo di x, in quanto che per piccolissimi innalzamenti di temperatura occorrono piccolissime quantità di calore. Anzi, se noi ricorriamo ad una rappresentazione grafica, la curva immagine è, come insegna la fisica, prossimamente coincidente con un segmento rettilineo MC (**) (fig. 10).

Ma consideriamo la y in tutto l'intervallo $(-10, +2)$.

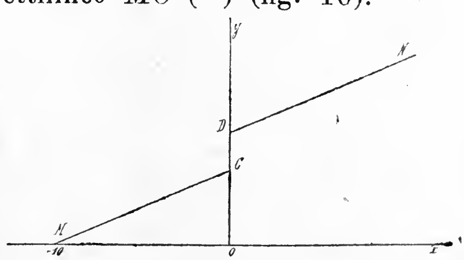


Fig. 10.

Ricordiamo che, se si somministra a poco a poco del calore al ghiaccio per innalzarne la temperatura, si osserva che, giunto a 0, il termometro per un po' di tempo non segna aumento di temperatura, perchè il calore fornito viene assorbito dalla liquefazione del ghiaccio.

Quando questo è tutto liquefatto, la temperatura ricomincia a salire man mano. Per $100 > x > 0$ la nostra funzione y è

(*) Restano così escluse dalle seguenti considerazioni le funzioni definite in un gruppo G di punti, che non sia un intervallo.

(**) Avverto che la figura rappresenta soltanto qualitativamente, e non quantitativamente, il fenomeno fisico.

rappresentata sensibilmente da un altro segmento DN, che non è però il prolungamento di MC.

Il segmento CD rappresenta il *salto*, la discontinuità che ha la y per $x=0$, ed ha per misura proprio la misura della quantità di calore che la liquefazione del ghiaccio ha assorbito. Come si vede, per far variare di pochissimo la temperatura, si richiede *generalmente* pochissimo calore; ma, se si tratta invece di passare da una temperatura negativa di $-\varepsilon$ alla temperatura positiva di $+\varepsilon$, dove ε è un numero positivo, la quantità di calore necessaria non è piccolissima, anche se ε è piccolissimo, ed è sempre maggiore della quantità di calore necessaria alla fusione del ghiaccio.

In altre parole, il valore di y per $x=0$ è rappresentato dal segmento OC, mentre i valori di y nei punti di un intorno destro di O, per quanto piccolo, non sono già assai prossimi alla misura di OC, ma sono rappresentati da segmenti che differiscono da OC per non meno che CD, cosicchè il lim y per $x=0+0$ (cioè quando x tende a zero venendo da destra) è uguale ad OD, e non al valore OC, che y ha nel punto $x=0$. Perciò si dice che la y è discontinua nel punto $x=0$.

Si pone anzi la seguente definizione generale:

Sia $y = f(x)$ *una funzione definita in un intervallo* (a, b). *Sia* c *un punto interno a questo intervallo. Se* $\lim\limits_{x=c+0} f(x) = f(c)$ *ed anche* $\lim\limits_{x=c-0} f(x) = f(c)$ *noi diremo che* $f(x)$ *è continua nel punto* c.

Se c *coincide con l'estremo sinistro (destro) di* (a, b) *la funzione* $f(x)$ *si dirà continua in* c, *se* $\lim\limits_{x=c+0} f(x) = f(c)$ [*se* $\lim\limits_{x=c-0} f(x) = f(c)$]. *In tal caso infatti non avrebbe significato parlare del* $\lim\limits_{x=c-0} f(x)$ [*del* $\lim\limits_{x=c+0} f(x)$] *perchè* $f(x)$ *non è definita a sinistra (a destra) di* c.

La formola $\lim\limits_{x=c\pm 0} f(x) = f(c)$ *si può anche scrivere nella forma* $\lim\limits_{h=\pm 0} f(c+h) = f(c)$.

Affinchè dunque $f(x)$ sia continua, p. es., in un punto c interno all'intervallo (a, b), i due limiti $\lim\limits_{x=c+} f(x)$, $\lim\limits_{x=c-} f(x)$ devono esistere *entrambi* ed essere uguali ad $f(c)$. Nell'es. precedente il $\lim\limits_{x=0+} y$ esisteva, ma *non* era uguale al valore di y per $x=0$. In altri casi di funzioni *discontinue* (non continue), mancano l'uno o l'altro dei limiti precedenti, o mancano tutti e due.

Se una funzione $f(x)$ è continua in ogni punto c dell'intervallo (a, b) la $f(x)$ si dice *continua nell'intervallo* (a, b).

Una funzione complessa $u(x) + i\, v(x)$ si dirà continua per $x = a$, se $u(x)$, $v(x)$ sono continue per $x = a$.

β) Dalla definizione stessa e dai teoremi del § 35 segue che:

La somma ed il prodotto di più funzioni continue in un punto c [*o nell'intervallo* (a, b)] *sono continui nello stesso punto* (*nello stesso intervallo*).

Se f (x), φ (x) *sono continue in* c, *e* φ (c) ≠ 0, *allora il rapporto* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *esiste in un intorno di questo punto ed è continuo per* x = c.

Esempi di funzioni continue.

1° La funzione sen x è continua dappertutto. Basta far vedere che $\lim\limits_{h=0} \operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen} x$, ossia che:

$$\lim_{h=0} [\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x] = 0.$$

$$\text{Ora } |\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x| = 2 \left| \operatorname{sen}\frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \right| \leq |h|,$$

perchè $\left|\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\right|$ non può superare l'unità e $\left|\operatorname{sen}\frac{h}{2}\right| \leq \left|\frac{h}{2}\right|$.

Quindi, se ε è un numero positivo piccolo a piacere, in tutto l'intorno $(-\varepsilon, \varepsilon)$ del punto $h = 0$, ossia per $|h| < \varepsilon$, si ha $|\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x| < \varepsilon$.

2° La funzione a^x $(a > 0)$ è continua.

3° La funzione $\log_a x$ $(a > 0)$ è continua.

4° La funzione $y = \operatorname{tang} x$ è continua per $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$ poichè è quoziente delle funzioni continue sen x, cos x, di cui la seconda è nulla solo per $x = \pm\frac{\pi}{2}$ (a meno di multipli di 2π).

γ) Talvolta avviene che una funzione è continua in tutti i punti di un intervallo, eccetto che in uno o più punti, in cui la funzione può anche non essere definita. Tali punti si diranno i punti *singolari* della funzione in tale intervallo.

Così, p. es., la funzione $y = \frac{1}{x - a}$ è continua dappertutto, eccetto che nel punto $x = a$, dove essa non è definita. Il punto $x = a$ è il punto singolare di questa funzione nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$. In questo caso però esiste il $\lim_{x=a} y$ e si ha $\lim_{x=a} y = \infty$.

Ogni qualvolta una funzione continua $f(x)$ ha il punto $x = a$ come punto singolare, ed è $\lim_{x=a} f(x) = \infty$, noi diremo che $x = a$ è un punto d'infinito di $f(x)$, o anche che $f(x)$ ivi diventa infinita.

A meno di esplicita dichiarazione in contrario, noi, quando parleremo di funzioni continue in un intervallo, escluderemo sempre che posseggano punti singolari in tale intervallo.

δ) Sia $y = f(z)$, $z = \varphi(x)$ e sia $\lim_{x=a} \varphi(x) = b$. Sia la y continua per $z = b$; e si possa considerare la $y = f[\varphi(x)]$ come funzione della x in un intorno del punto $x = a$. Dico che

$$\lim_{x=a} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x=a} \varphi(x)] = f(b),$$

ossia che *il simbolo* f *di funzione continua si può permutare col simbolo di limite.* Infatti, poichè $f(z)$ è continua per $z = b$, è $\lim_{z=b} y = \lim_{z=b} f(z) = f(b)$. E quindi (§ 35, δ, pag. 116) anche

$$\lim_{x=a} y = \lim_{x=a} f[\varphi(x)] = f(b). \qquad \text{c. d. d.}$$

Così, p. es., $\lim_{x=a} \log f(x) = \log [\lim_{x=a} f(x)]$, se il $\lim_{x=a} f(x)$ è finito e positivo, cioè brevemente, ma incompletamente: *Il limite del logaritmo è uguale al logaritmo del limite.*

Se $\lim_{x=a} f(x)$ esiste ed è uguale ad un numero b finito

$$\lim_{x=a} h^{f(x)} = h^b \text{ (supposto } h > 0).$$

Se $\lim_{x=a} f(x) = b$ si ha $\lim_{x=a} \operatorname{sen} f(x) = \operatorname{sen} b$, ecc.

ε) *Se* $\mathbf{z} = \varphi(\mathrm{y})$, $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ *sono funzioni continue, e se* z *si può considerare come funzione di* x *in tutto un intervallo* (a, b), *la* z *è in tale intervallo funzione continua della* x.

Esempi.

1° Si dimostri che x^c ($c = \text{cost.}$, $x > 0$) è continua.

Ris. Infatti $x^c = a^y$, dove $y = \log_a (x^c) = c \log_a x$. Poichè a^y è continua, $y = f(x) = c \log_a x$ è pure continua, anche x^c è continua.

Oss. Questo teorema, se $x < 0$, e c è, p. es., un intero positivo, è ancora vero; lo si dimostra osservando che x^c è il prodotto di c funzioni tutte uguali a x e quindi continue.

2° La funzione $y = \log f(x)$ è continua per quei valori della x, per cui $f(x)$ è continua e positiva.

§ 37. — **Un limite fondamentale.**

α) È ben evidente che, se due punti A_1, A_2 si avvicinano indefinitamente nello stesso tempo ad uno stesso punto L, un punto A, il quale sia sempre compreso nell'intervallo $A_1 A_2$, dovrà pure tendere ad L. Questa osservazione rende intuitivo il

Teor. *Se* y, y_1, y_2 *sono tre funzioni reali della* x *definite in uno stesso gruppo* G, *se per ogni valore di* x *in* G *la* y *è compresa tra* y_1 *ed* y_2 ($y_1 \leqq y \leqq y_2$ *oppure* $y_1 \geqq y \geqq y_2$), *e se* $\lim_{x=a} y_1 = \lim_{x=a} y_2$, *anche* $\lim_{x=a} y = \lim_{x=a} y_1 = \lim y_2$.

Supponiamo, p. es., $\lim_{x=a} y_1 = \lim_{x=a} y_2 = A =$ numero finito. Come al § 35 si dimostra che, dato un numero $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, esiste un intorno α di a, in cui valgono entrambe le $|y_1 - A| < \varepsilon$, $|y_2 - A| < \varepsilon$. Poichè y è compreso tra y_1 ed y_2, sarà in α anche $|y - A| < \varepsilon$. Ne segue quindi che, dato ε piccolo a piacere, esiste un intorno α di a, in cui vale la $|y - A| < \varepsilon$. Perciò sarà $\lim_{x=a} y = A$.

Il lettore troverà un utile esercizio, completando questa dimostrazione per il caso $A = \infty$.

β) Applicheremo ora questo teorema alla dimostrazione della

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Per una retta interpretazione di questa formola si ricordi che l'angolo x deve essere misurato in radianti. Lo studente farà bene a rendersi intuitiva detta formola costruendo un diagramma della curva $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Noi ci accontenteremo di scrivere varii valori approssimati di detta funzione: ciò che basterà a rendere sensibile il fatto che, quanto più x si avvicina a zero, tanto più $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ si avvicina ad 1.

Per $x = \pm \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{2}{\pi} = \frac{2}{3{,}14159...} = 0{,}63662...$

Per $x = \pm \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{2\sqrt{2}}{3{,}14159...} = 0{,}90032...$

Per $x = \pm \frac{\pi}{180}$, $y = 0{,}99995...$

Per $x = \pm \frac{\pi}{60.180}$, $y = 0{,}99999....$

Se con z indichiamo la misura in gradi dell'angolo di x radianti, sarà: $z = \frac{180\,x}{\pi}$; e quindi $\lim\limits_{z=0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{\pi}{180} \lim\limits_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ $= \frac{\pi}{180} = \frac{3{,}14159...}{180} = 0{,}01745...$ (*).

La misura in radianti è appunto per ciò fondamentale, perchè, se misurassimo gli angoli in gradi, dovremmo continuamente nelle corrispondenti formole di calcolo introdurre la costante $\frac{3{,}14159.....}{180}$ testè determinata.

La dimostrazione della nostra formola si compie facilmente. Per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ è $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$ (§ 5, δ, pag. 19).

Dividendo per $\operatorname{sen} x$ (positivo) si ha:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Poichè $\lim\limits_{x=0} \cos x = 1$, anche $\lim\limits_{x=0} \frac{1}{\cos x} = 1$. Poichè la funzione $y = 1$ ha pure per limite 1, il teorema precedente dimostra che

$$\lim_{x=0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 = \lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

(*) Questo numero è la misura in radianti dell'angolo di un grado. Se si misurasse invece l'angolo in gradi centesimali, il valore di questo limite sarebbe $\frac{\pi}{200} = 0{,}01570.....$

E il limite non muta, supponendo x negativo; perchè, se si cambia il segno di x, anche sen x cambia di segno, e quindi $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ rimane invariato.

Es. Trovare $\lim\limits_{x=0} \frac{1-\cos x}{x}$. Si ha, posto $x=2\,y$,

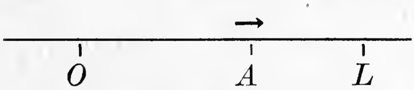
$$\frac{1-\cos x}{x}=\frac{2\operatorname{sen}^2 y}{2\,y}=\frac{\operatorname{sen} y}{y}\operatorname{sen} y.$$

Per $x=0$, ossia per $y=0$, è $\lim \operatorname{sen} y=0$, $\lim \frac{\operatorname{sen} y}{y}=1$.

Quindi $\lim\limits_{x=0} \frac{1-\cos x}{x}=1.0=0$.

§ 38. — **Un altro limite fondamentale.**

α) Se un punto A si muove sopra una retta sempre nello stesso verso, p. es., verso destra, è ben chiaro che possono presentarsi due soli casi:



1° Il punto A finisce con l'allontanarsi indefinitamente a destra.

Oppure

2° Esiste un punto L, che il punto A non supera, pure avvicinandosi ad esso indefinitamente. Così, p. es., se il punto A ha una velocità costante, si presenterà evidentemente il primo caso. Se invece A nel primo minuto percorre cm. 1, nel secondo cm. $\frac{1}{2}$, nel terzo cm. $\frac{1}{4}$, nel quarto cm. $\frac{1}{8}$, ... nello n^{esimo} minuto cm. $\frac{1}{2^{n-1}}$, esso dopo n minuti avrà percorso

$$\text{cm.}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots..+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Il punto A non sarà perciò mai riuscito ad allontanarsi al di là di quel punto L, che ha una distanza di cm. 2 dal punto di partenza, pure diventando (al crescere di n) la distanza $A\,L$ $\left(\text{che è } \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ piccola a piacere.

Questa osservazione rende intuitivo il teorema che dobbiamo ora esporre.

Si dice che una funzione reale $y = f(x)$ è *crescente*, se essa cresce al crescere della x, o più precisamente, se, indicati con x_1, x_2 due punti qualsiasi del gruppo G ove la $f(x)$ è definita tali che $x_1 > x_2$, si ha $f(x_1) > f(x_2)$.

La y si dice *decrescente*, se invece dalla $x_1 > x_2$ segue $f(x_1) < f(x_2)$, ossia se la y decresce al crescere della x (come, p. es., avviene se y è inversamente proporzionale ad $x > 0$). La $y = f(x)$ si dice *non crescente*, oppure *non decrescente*, se dalla $x_1 \geqq x_2$ segue $f(x_1) \leqq f(x_2)$, oppure $f(x_1) \geqq f(x_2)$.

Se una funzione non è crescente, o non è decrescente in un dato gruppo G di punti, si dice che la funzione *varia sempre nello stesso verso* (*senso*) nel gruppo G.

TEOR. *Se* f (x) *è una funzione definita nel gruppo* G, *che varia sempre nello stesso verso e se in ogni intorno* (*p. es. sinistro*) *del punto* x = a *esistono punti di* G *distinti da* a, *esiste il* $\lim\limits_{x=a-0} f(x)$.

Supponiamo per fissar le idee che $f(x)$ non sia decrescente a sinistra del punto a, e che si voglia dimostrare l'esistenza del $\lim\limits_{x=a-0} f(x)$. Noi dimostreremo che *tale limite è precisamente il limite superiore* L *dei valori che* f (x) *assume, quando* x *assume i valori di* G *più piccoli* (a sinistra) di a.

Distinguiamo due casi:

1° L è finito. Sia n un intero così grande che $\frac{1}{10^n}$ sia minore di un ε prefissato. Tra i citati valori di y ne esisterà almeno uno (p. es. quello $f(c)$ assunto da y nel punto $x = c < a$) che è uguale ad L fino alla n^{esima} decimale (e ciò per la stessa definizione di limite superiore). I valori che y assume nei punti di G dell'intervallo (c, a) non possono nè superare il limite superiore L, nè essere inferiori a $f(c)$ (perchè y è per ipotesi funzione non decrescente).

Dunque tali valori (compresi tra $f(c)$ ed L) dovranno pure coincidere con L fino alla n^{esima} decimale.

In altre parole nei punti x di G dell'intervallo (c, a) vale la:

$$|f(x) - L| \leqq \frac{1}{10^n} < \varepsilon.$$

Per definizione di limite è dunque

$$\lim_{x=a} f(x) = L.$$

2° L è infinito. Questo caso, assai meno importante, si potrebbe ricondurre al caso precedente con lo studio della funzione $\frac{1}{f(x)}$. Per studiarlo direttamente si osservi che, se k è un numero arbitrario, esiste un punto $x = c < a$, ove $f(c) > k$ (*). In tutto l'intervallo (c, a) sarà dunque $f(x) \geqq f(c) > k$, perchè $f(x)$ non è decrescente. Pertanto

$$\lim_{x=a-} f(x) = +\infty.$$

Così, p. es., l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C è una funzione crescente di n, che ha per limite per $n = \infty$ proprio l'area di C.

β) Applicheremo questo teorema allo studio di un limite fondamentale. Dalla formola del binomio si trae che, se m è un intero positivo, allora:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{m}{1}\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2}+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-[m-1])}{\underline{|m}}\frac{1}{m^m} =$$

$$= 1+1+\frac{1-\frac{1}{m}}{\underline{|2}}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{\underline{|3}}+\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{\underline{|m}}$$

donde, osservando che i numeratori degli addendi terzo, quarto, ecc., non superano l'unità, e che i denominatori sono $\underline{|2} = 2$, $\underline{|3} = 2.3 > 2.2 = 2^2$, $\underline{|4} > 2^3$, ecc., si trae che per $m > 1$ è:

$$2 < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 2 + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.2.2}+\ldots+\frac{1}{2^{m-1}}\right) < 3. \quad (**)$$

D'altra parte il k^{esimo} $(2 < k \leqq m+1)$ termine del terzo membro della penultima formola cresce al crescere della m $\left(\text{al diminuire di } \frac{1}{m}\right)$; di più il numero stesso dei termini (che è $m+1$) cresce con m.

Quindi $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ cresce al crescere di m; e perciò, per il precedente teorema, tende per $m = \infty$ a un limite $e > 0$; e, poichè per l'ultima delle precedenti formole, è (per ogni valore dell'intero

(*) Questa affermazione è conseguenza dell'ipotesi $L = \infty$.

(**) Infatti $\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\ldots+\frac{1}{2^{m-1}} = 1-\frac{1}{2^{m-1}} < 1$.

$m > 1$) $2 < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < 3$, sarà pure $2 < e \leqq 3$; donde in particolare si trae che e è un numero finito positivo. Io dico che

$$\lim_{m=+\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e,$$

anche se m non è intero. Infatti, se m è compreso tra gli interi n, $n+1$, è

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leqq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leqq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

E, poichè il limite del primo e terzo membro sono rispettivamente

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n+1=\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e.\ 1 = e,$$

ossia sono uguali ad e, anche (§ 37, α, p. 121) il $\lim\limits_{m=\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$.

Io dico infine che è anche $\lim\limits_{m=-\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$.

Infatti, posto $m = -(k+1)$, è:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{-(k+1)} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^{-(k+1)} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \left(1+\frac{1}{k}\right).$$

E perciò:

$$\lim_{m=-\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \lim_{k=+\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \lim_{k=+\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right) = e.\ 1 = e. \quad \text{c.d.d.}$$

γ) Dalla $\lim\limits_{m=\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$, che vale dunque, sia m positivo o negativo, razionale o irrazionale, si trae (*), supposto $a > 0$,

$$\lim_{m=\infty} m \log_a \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \log_a e,$$

ossia, posto $m = \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x=0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e$.

(*) Basta ricordare che $\log_a x$ è funzione continua nei punti $x > 0$.

Se si pone $\log_a(1+x)=z$, e quindi $x=a^z-1$, se ne deduce

$$\lim_{x=0}\frac{z}{a^z-1}=\log_a e,\text{ donde }\lim_{x=0}\frac{a^z-1}{z}=\frac{1}{\log_a e}=\log_e a.$$

Se esponiamo $a=e$ si trova:

$$\lim_{x=0}\frac{\log_e(1+x)}{x}=1\ ;\ \lim_{x=0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Dalla prima di queste formole si vede quanto semplice diventi il $\lim\limits_{x=0}\dfrac{\log(1+x)}{x}$, appena si assuma il numero e come base di un sistema di logaritmi. Poichè questo limite si presenta continuamente nel calcolo, noi adotteremo d'ora in poi (salvo esplicita dichiarazione in contrario) questo numero e come base del sistema di logaritmi. I logaritmi così ottenuti si diranno neperiani, iperbolici, naturali.

Per uno studio geometrico dei limiti precedenti si vegga l'esempio terzo.

Esempi.

1° Dimostrare che $\lim\limits_{m=\infty}\left(1+\dfrac{x}{m}\right)^m=e^x$.

Ris. Posto $\dfrac{m}{x}=n$, si noti che

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x.$$

2° Se il capitale c è impiegato al tasso r (rapporto dell'interesse al capitale), esso, dopo un anno, diventa $c\,(1+r)$. Ma se il tasso è pagato per metà ad ogni semestre, il capitale dopo il 1° semestre è diventato $c\left(1+\dfrac{r}{2}\right)$; e se tutta questa somma viene impiegata allo stesso tasso per il 2° semestre, si avrà alla fine dell'anno una somma $c\left(1+\dfrac{r}{2}\right)^2$. In generale se ad ogni n^{esima} parte dell'anno viene pagata la n^{esima} parte dell'interesse, che viene anch'essa impiegata allo stesso tasso per la residua parte dell'anno, il capitale c, dopo un anno, è diventato $c\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n$ (*). Quando n diventa grandissimo (per $n=\infty$), questa espressione tende a ce^r. Si suol dire che un capitale c impiegato ad interesse continuo al tasso r diventa ce^r dopo un anno. Così, p. es., si calcola che $e^{0,05}=1,05127.....$ Impiegare per un anno un capitale all'interesse *continuo* del 5 % equivale a impiegarlo all'interesse del 5,127 ..... %.

Dunque e *rappresenta la somma ottenuta impiegando per un anno un capitale* 1 *all'interesse continuo del* 100 %. Che, se z è piccolo, $\dfrac{e^z-1}{z}$ sia prossimo ad 1, è evidente, perchè, se il tasso è piccolo, interesse semplice r e continuo e^r-1 quasi si equivalgono, ecc.

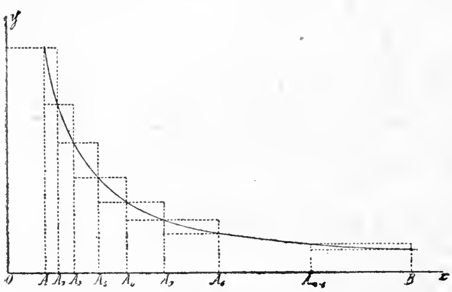


Fig. 11.

3° Consideriamo un'iperbole equilatera $xy=1$ (fig. 11). Siano A, B due punti dell'asse delle ascisse di ascisse a, b $(0<a<b)$. Dividiamo l'intervallo AB in n parti coi punti $A_1, A_2, ... A_{n-1}$ in guisa che i segmenti OA, OA_1, OA_2 ....., OA_{n-1}, OB siano in progressione geometrica. Questi segmenti saranno così uguali ordinatamente ad $a, aq, aq^2, ..., aq^{n-1}$. $aq^n=b$, dove $q=\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$. Le ordinate dei punti corrispondenti dell'iperbole $\left(xy=1,\text{ donde } y=\dfrac{1}{x}\right)$ saranno

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{aq},\ .....,\ \frac{1}{aq^n}=\frac{1}{b}.$$

Quindi le aree dei rettangoli aventi per basi i segmenti AA_1, A_1A_2, ... , $A_{n-1}B$ e per altezza le ordinate dell'estremo sinistro corrispondente saranno

$$\left(aq-a\right)\frac{1}{a},\ \left(aq^2-aq\right)\frac{1}{aq},\ .....,\ \left(aq^n-aq^{n-1}\right)\frac{1}{aq^{n-1}},$$

(*) Resta perciò intuitivo il teorema dimostrato nel testo che per $r=1$ (anzi per ogni $r>0$), il numero $\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n$ cresce al crescere di n; infatti un impiego di capitale è tanto più redditizio, quanto maggiore è il numero n delle volte che in un anno (a ugual intervallo l'una dall'altra) si pagano gli interessi maturati.

cioè saranno tutte uguali a $(q-1)$. La loro somma Σ_n è perciò $n(q-1)$.

In modo simile si prova che la somma σ_n delle aree dei rettangoli aventi per base gli stessi segmenti e per altezza l'ordinata del corrispondente estremo destro è $n(q-1)\frac{1}{q}$.

Si ha così, posto $v=\frac{1}{n}$,

$$\Sigma_n = n\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right\} \text{ donde } \lim_{n=\infty}\Sigma_n = \lim_{v=0}\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^v-1}{v} = \log_e\frac{b}{a}$$

$$\sigma_n = \frac{\Sigma_n}{q} \qquad \text{donde } \lim_{n=\infty}\sigma_n = \log_e\frac{b}{a}\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \log_e\frac{b}{a}.$$

Il limite inferiore delle Σ_n e il limite superiore delle σ_n coincidono dunque, e sono uguali a $\log_e\frac{b}{a}$. Dunque la figura α racchiusa tra il segmento AB, le ordinate di A, B e la porzione corrispondente di iperbole equilatera ha un'area che vale precisamente $\log_e\frac{b}{a}$ (*).

Se noi rappresentiamo la nostra figura in scala un po' grande su carta millimetrata divisa in quadratini molto piccoli, si può avere un metodo approssimato per calcolare $\log_e\frac{b}{a}$, misurando l'area α: cioè contando quanti dei quadratini in cui è diviso il nostro foglio millimetrato sono contenuti in α.

4° Sia $f(x)$ una funzione di x, che tende ad un limite finito L, p. es., per $x=\infty$. Come si può calcolare approssimativamente questo limite? È ben evidente che $f(x)$ si può considerare come un valore approssimato di L, e che l'approssimazione sarà generalmente tanto migliore, quanto più grande si suppone x; o meglio, e più precisamente, che, prendendo x abbastanza grande, si potrà rendere piccolo a piacere l'errore che si commette quando si supponga $f(x)=L$.

Ma simile considerazione ha un valore scarso, se per ogni valore della x non si può dare una misura del grado di ap-

(*) Infatti i rettangoli considerati, le cui aree hanno per somma Σ_n (σ_n) formano un poligono, che contiene la figura α all'interno (che è interno alla figura α) (cfr. § 7).

prossimazione raggiunto. Ora questo è possibile in molti casi. Per es., dall'esercizio 3° si deduce, posto $\frac{b}{a} = k$, che la quantità

$$(1) \qquad \log_e k = \lim_{n=\infty} n\left(\sqrt[n]{k} - 1\right)$$

è compresa, per ogni valore di n, tra

$$n\left(\sqrt[n]{k} - 1\right) \quad \text{e} \quad \frac{n\left(\sqrt[n]{k} - 1\right)}{\sqrt[n]{k}}.$$

Cosicchè, se si pone $\log_e k = n\left(\sqrt[n]{k} - 1\right)$, l'errore commesso non supera

$$\left| n\left(\sqrt[n]{k} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{k}}\right) \right|.$$

La (1) può così servire al calcolo approssimativo dei logaritmi iperbolici. Se ne ricava, per es., posto $k = 2$, $n = 16$ che $\log_e 2 = 0,70$, con un errore non superiore a 0,03 ..... Poichè però calcolare la $\sqrt[16]{2}$ equivale a estrarre successivamente quattro radici quadrate, questo metodo di calcolare i logaritmi neperiani è troppo poco rapido.

§ 39. — **Alcune applicazioni.**

Se a è un numero reale, $z = x + iy$ è un numero complesso, il simbolo $a^z = a^{x+iy}$ è un simbolo, a cui finora non abbiamo attribuito alcun senso. I matematici si servono però di tale simbolo specialmente quando $a = e$, ponendo con Eulero la seguente definizione:

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

È questa definizione accettabile? è essa opportuna?

Essa è accettabile perchè priva di contraddizioni, e perchè, se $y = 0$, cioè se $z = x + iy$ è reale, essa non contraddice all'ordinario significato di tale simbolo.

Molte poi sono le ragioni, che rendono opportuna tale definizione e che noi stessi incontreremo in questo libro. Qui ne accenneremo due specialmente importanti.

1° Se $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, allora, per la definizione di Eulero, il teorema:

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'}$$

è vero anche se z, z' sono numeri complessi.

Infatti:

$$e^{z+z'} = e^{x+x'+i(y+y')} = e^{x+x'} \{ \cos(y+y') + i \,\mathrm{sen}\,(y+y') \} =$$
$$= e^x(\cos y + i \,\mathrm{sen}\, y)\, e^{x'} (\cos y' + i \,\mathrm{sen}\, y) = e^z e^{z'}.$$

2° Sappiamo già che, se z è reale, allora

$$e^z = \lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m.$$

Ebbene in virtù della definizione di Eulero, questa stessa formola vale anche se z è complesso.

Infatti: $\left(1 + \frac{z}{m}\right) = \left[\left(1 + \frac{x}{m}\right) + i\frac{y}{m}\right] = \rho(\cos\theta + i \,\mathrm{sen}\,\theta)$,

dove $\rho = \left\{\left(1 + \frac{x}{m}\right)^2 + \frac{y^2}{m^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$, $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x+m}$, $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. (*)

Sarà: $\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m = \rho^m \{\cos m\theta + i \,\mathrm{sen}\, m\theta\}$.

Ora, posto $\frac{1}{n} = \frac{2x}{m} + \frac{x^2+y^2}{m^2}$, è:

$$\lim_{m=\infty} \rho^m = \lim_{m=\infty} \left\{\left(1 + \frac{x}{m}\right)^2 + \frac{y^2}{m^2}\right\}^{\frac{m}{2}} = \lim_{n=\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{m}{2n}}.$$

Ossia, poichè $\lim_{m=\infty} \frac{m}{2n} = x$, si ha $\lim_{m=\infty} \rho^m = e^x$.

D'altra parte $\lim_{m=\infty} \theta = 0$, perchè $\lim tg\,\theta = \lim \frac{y}{x+m} = 0$ e $|\theta| < \frac{\pi}{2}$; e

$$\lim_{m=\infty} m\theta = \lim_{m=\infty} m\,\mathrm{tg}\,\theta \frac{\theta}{\mathrm{tg}\,\theta} = \lim_{m=\infty} \frac{my}{x+m} \lim_{\theta=0} \frac{\theta}{\mathrm{tg}\,\theta} = y.1 = y.$$

E quindi $\lim (\cos m\theta + i \,\mathrm{sen}\, m\theta) = \cos y + i \,\mathrm{sen}\, y$.

Perciò

$$\lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m = e^x(\cos y + i \,\mathrm{sen}\, y) = e^{x+iy} = e^z. \qquad \text{c. d. d.}$$

Di tale definizione possiamo servirci per estendere anche a numeri negativi o complessi la teoria dei logaritmi neperiani. Sia $w = \rho(\cos\theta + i \,\mathrm{sen}\,\theta)$ un numero complesso. Io dirò che $z = x + iy$ ne è un logaritmo a base e, se

$$e^z = e^x(\cos y + i \,\mathrm{sen}\, y) = w = \rho(\cos\theta + i \,\mathrm{sen}\,\theta)$$

cioè se

$$e^x = \rho \quad , \quad \cos y = \cos\theta \quad , \quad \mathrm{sen}\, y = \mathrm{sen}\,\theta.$$

Dunque x è il logaritmo aritmetico del modulo ρ di w. Ed y o è l'argomento θ di w, o differisce da θ per un multiplo

(*) Per m molto grande il segno di $\cos\theta$, cioè il segno di $1 + \frac{x}{m}$ è positivo, anche se $x < \theta$; e posso supporre θ compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

$2k\pi$ di 2π (k intero). Ciò che è ben naturale, appunto perchè l'anomalia di un numero complesso è definita a meno di multipli di 2π.

Nel campo dei numeri complessi ogni numero

$$w = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

ha infiniti logaritmi

$$\log_e \rho + i\theta + 2k\pi i.$$

Di questi logaritmi ve ne è uno (e uno solo) reale, se esiste un intero k tale che $\theta + 2k\pi = 0$, ossia se θ è un multiplo di 2π, cioè se si può supporre $\theta = 0$, cioè se w coincide col suo modulo ρ, ossia se w è reale positivo.

I soli numeri reali positivi posseggono un logaritmo reale (quello di cui si occupa l'algebra elementare). Gli altri logaritmi se ne deducono aggiungendo un multiplo qualsiasi di $2\pi i$, e sono complessi.

I numeri reali negativi $w = -\rho$ hanno gli infiniti logaritmi (tutti complessi)

$$\log\rho + i\pi + 2\pi k i.$$

In particolare -1 ha tra i suoi logaritmi il numero $i\pi$.

Il teorema fondamentale della teoria dei logaritmi reali diventa ora: *Sommando insieme un logaritmo di ciascuno dei fattori di un prodotto, si trova uno dei logaritmi del prodotto* (*). Il lettore ne deduca i teoremi analoghi per i quozienti, le potenze, ecc.

Così, p. es., dalla $2\log(-1) = \log(-1)^2 = \log 1$ non si può già dedurre che, essendo $\log 1 = 0$, anche $\log(-1) = 0$, ma soltanto che il doppio di *uno* dei logaritmi di -1 vale *uno* dei logaritmi di 1; infatti i logaritmi di -1 sono $(2k+1)i\pi$, il cui doppio è un multiplo di $2\pi i$, che è un logaritmo di 1 (**).

Dalla $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \operatorname{sen} x$ si deduce

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \qquad (1)$$

Posto $x = iz$ (z reale) il primo membro non ha significato; noi porremo *per definizione* $\cos iz$, $\operatorname{sen} iz$ uguali ai valori

(*) Così anzi si possono trovare *tutti* i logaritmi del prodotto.

(**) Il logaritmo 0 del numero 1 si trova, p. es., sommando insieme $i\pi$ e $-i\pi$, che sono entrambi logaritmi di -1, e non già facendo il doppio di uno dei logaritmi di -1.

che si ottengono dai secondi membri di (1) per $x = iz$. Cioè porremo:

$$\cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{sen} iz = i\,\frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Perciò $\cos iz$ e $\frac{\operatorname{sen} iz}{i}$ sono *reali* per z *reale*; noi li chiameremo rispettivamente il *coseno iperbolico* di z, e il *seno iperbolico* di z. E le indicheremo con $\cosh z$ e $\operatorname{senh} z$ (più brevemente $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$). È dunque:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz \quad ; \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{\operatorname{sen} iz}{i}$$

Si verifica tosto che $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$; posto cioè $x = \operatorname{ch} z$, $y = \operatorname{sh} z$, il punto x, y descrive al variare di z una iperbole (donde il nome di funzioni *iperboliche*), mentre invece le equazioni $x = \cos z$, $y = \operatorname{sen} z$ definiscono il cerchio $x^2 + y^2 = 1$ (donde il nome di funzioni *circolari*).

Si prova facilmente che $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$, che $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$, che $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$, che $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$. Adottando le (1) per definiz. di $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ per ogni valore della $x = y + iz$, si trova ancora che

$$\cos(y + iz) = \cos y \cos iz - \operatorname{sen} y \operatorname{sen} iz = \cos x \operatorname{ch} z - \\ - i \operatorname{sen} y \operatorname{sh} z$$

e che

$$\operatorname{sen}(y + iz) = \operatorname{sen} y \cos iz + \cos y \operatorname{sen} iz = \\ = \operatorname{sen} y \operatorname{ch} z + i \cos y \operatorname{sh} z.$$

Anche se x, y sono numeri complessi continuano a valere le formole fondamentali della goniometria

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y;$$
$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y.$$

Posto per z reale $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$ (tangente iperbolica di z) è $1 - \operatorname{th}^2 z = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}$.

Per ogni z reale si può perciò trovare un angolo φ del primo o quarto quadrante (che sarà funzione di z) tale che:

$$\frac{1}{\operatorname{ch} z} = \cos\varphi; \quad \operatorname{th} z = \operatorname{sen}\varphi; \quad \frac{\operatorname{th} z}{\left(\frac{1}{\operatorname{ch} z}\right)} = \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{sh} z.$$

Ricordando la definizione di ch z, si consideri la prima di queste formole come un'equazione in e^z; se ne trae:

$$z = \pm \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

§ 40. — Proprietà fondamentali delle funzioni continue.

α) I teoremi, di cui ci occuperemo nel seguente paragrafo, possono sembrare intuitivi; e del resto per molto tempo furono ammessi come evidenti. Una critica accurata dimostrò però la necessità di una precisa dimostrazione; chi poco si occupi di questioni teoriche può forse, appena abbia ben compreso l'enunciato di tali teoremi, non approfondire lo studio delle dimostrazioni; le quali però costituiscono un utile esempio di deduzione logica.

Il primo dei teoremi, di cui qui ci occuperemo, risponde alle seguenti domande: Tra i valori che una funzione continua $f(x)$ assume un intervallo *finito* (a, b), *estremi inclusi*, esiste un valore M massimo [che non sia minore di alcun altro valore di $f(x)$ *in* (a, b)]? esiste un valore minimo m?

A queste domande si deve rispondere affermativamente. Ciò ammesso, si deve ancora domandare: Se μ è un numero compreso tra m ed M, vi è qualche valore della nostra funzione, che sia uguale a μ? E anche a questa domanda si deve rispondere affermativamente.

Nè i teoremi qui accennati si debbono ritenere come intuitivi *a priori*. I valori di una funzione continua $f(x)$ in (a, b) sono (se la $f(x) \neq$ cost.) in numero infinito. Ora, se abbiamo infiniti numeri, può darsi benissimo, come sappiamo, che nessuno di essi sia un numero più grande di tutti gli altri, cioè che il limite superiore non sia un massimo. Il nostro teorema ci assicura che questo non può avvenire per i valori assunti da una funzione continua; cosicchè, p. es., se ne dedurrà in particolare che una funzione $f(x)$ continua in (a, b) (estremi inclusi) è *limitata;* che cioè si può trovare una costante (positiva) H, che $f(x)$ non supera mai in valore assoluto in tale intervallo. Basta, p. es., porre H uguale al più grande dei due numeri $|M|, |m|$.

La risposta affermativa all'ultima domanda può essere giustificata intuitivamente. Un disegnatore di curve e di diagrammi troverebbe forse superfluo il dimostrare che, muovendoci su una curva continua $y = f(x)$, la distanza y dall'asse delle x non possa passare da M a m senza ricevere tutti i valori intermedi. Ma, appena si ricordi che esistono curve continue $y = f(x)$ che in (a, b) fanno infinite oscillazioni, e non sono quindi disegnabili, si vedrà quanto sia insufficiente per i nostri studi una intuizione, che assume a punto di partenza i diagrammi e le curve continue disegnabili.

Ecco qui gli enunciati dei teoremi in discorso:

Sia y *una funzione continua* f (x) *nell'intervallo finito* (a, b), *estremi inclusi*. (*Sia, p. es.* a < b). *Io dico che:*

1° *Il limite superiore* M *dei valori assunti da* f (x) *nell'intervallo* (a, b) *è un massimo. Cioè esiste nell'intervallo* (a, b) *almeno un punto ove la funzione riceve il massimo valore* M, *ossia un valore* M *non minore dei valori assunti negli altri punti dello stesso intervallo.*

2° *Il limite inferiore* m *dei valori assunti da* f (x) *in* (a, b) *è un minimo; cioè esiste nell'intervallo* (a, b) *almeno un punto, ove* f (x) *riceve il minimo valore* m, *ossia un valore* m *non maggiore di quello assunto negli altri punti dello stesso intervallo* (teoremi di Weierstrass).

3° *Se* λ *è un numero intermedio tra* m *ed* M ($m < \lambda < M$), *esiste almeno un punto di* (a, b), *in cui* f (x) *assume il valore* λ (*).

La differenza M — m *si dice l'oscillazione* D *di* f (x) *in* (a, b). Essa è generalmente positiva, ed è nulla soltanto se $M = m$, ossia se il più grande ed il più piccolo valore di $f(x)$ coincidono, ossia se $f(x)$ è costante nell'intervallo (a, b).

Ricordiamo anche il seguente importante teorema di Heine, a cui non ricorreremo mai in questo libro (e che dimostreremo anche con altri e più semplici metodi in casi particolari).

4° *Dato un numero (positivo)* ε *piccolo a piacere, si può dividere l'intervallo* (a, b) *in un numero finito di intervalli parziali* j, *in ciascuno dei quali l'oscillazione di* f (x) *è uguale o minore di* ε.

Dimostriamo ora i primi tre dei precedenti teoremi. E per brevità indichiamo, se α, β sono due punti dell'intervallo (a, b) con $l(\alpha, \beta)$, e con $L(\alpha, \beta)$ i limiti inferiore e superiore dei valori assunti da $f(x)$ nell'intervallo (α, β). È $M = L(a, b)$ ed è $m = l(\alpha, \beta)$. I nostri teoremi saranno provati, quando sia dimostrato che, scelto comunque un numero λ tale che $m \leqq \lambda \leqq M$ (non escluso $\lambda = m$, $\lambda = M$) esiste un punto c soddisfacente alla $f(c) = \lambda$. Se già $f(a) = \lambda$, il teorema è provato. Sia dunque $f(a) < \lambda$ (in modo analogo si studia il caso $f(a) > \lambda$). Sia c il limite superiore dei punti x dell'intervallo (a, b) tali che $L(a, x) < \lambda$. Sarà $a < c \leqq b$. Preso un numero ε arbitrario positivo, esistono (poichè $f(x)$ è continua)

(*) Questi teoremi ci dicono che i valori assunti da una funzione $y = f(x)$ continua in un intervallo finito (a, b) (estremi inclusi) riempiono tutto un segmento finito (m, M), compresi gli estremi.

due numeri σ_1, σ_2 non negativi tali che i valori assunti da $f(x)$ nell'intervallo $(c-\sigma_1, c+\sigma_2)$ e quindi anche $L(c-\sigma_1, c+\sigma_2)$ siano compresi tra $f(c)-\varepsilon$ ed $f(c)+\varepsilon$. E anzi $\sigma_1 > 0$, ed è pure $\sigma_2 \geqq 0$, essendo $\sigma_2 = 0$ soltanto se $c = b$. Per la stessa definizione di c è

$$L(a, c-\sigma_1) < \lambda \qquad\qquad L(a, c+\sigma_2) \geqq \lambda. \qquad (*)$$

Ora $L(a, c+\sigma_2)$ è uguale al massimo dei due numeri $L(a, c-\sigma_1)$ e $L(c-\sigma_1, c+\sigma_2)$ corrispondenti ai due intervalli parziali in cui si può dividere l'intervallo $(a, c+\sigma_2)$. E non potendo essere per le precedenti disuguaglianze $L(a, c-\sigma_1) \geqq L(a, c+\sigma_2)$, sarà $L(c-\sigma_1, c+\sigma_2) = L(a, c+\sigma_2)$. Dunque $L(a, c+\sigma_2) \geqq \lambda$ è compreso tra $f(c)+\varepsilon$ ed $f(c)-\varepsilon$. Cosicchè $\lambda \leqq f(c)+\varepsilon$, qualunque sia ε. Dunque $\lambda \leqq f(c)$. D'altra parte $f(c-\sigma_1) < \lambda$. Quindi $f(c) = \lim_{\sigma_1=0} f(c-\sigma_1) \leqq \lambda$. Unendo queste disuguaglianze si deduce che $f(c) = \lambda$, come si doveva dimostrare.

Dimostrazione del 4º teorema e osservazioni critiche.

Supponiamo che il teorema non sia vero; che cioè l'intervallo (a, b) non sia divisibile in un numero finito di tali intervalli j. Se β è un punto di (a, b) così vicino ad a che in (a, β) l'oscillazione di $f(x)$ sia minore di ε, l'intervallo (a, β) è divisibile in un numero finito di intervalli j, perchè esso stesso ed ogni sua parte è un intervallino j. [Che un tale punto β esista è conseguenza del fatto che $f(x)$ è continua per $x = a$]. Se β è un punto qualsiasi di (a, b) tale che (a, β) sia divisibile nel modo voluto, altrettanto avverrà *a fortiori* di ogni intervallo (a, β'), se $a < \beta' < \beta$. E quindi, se γ è un punto di (a, b) tale che (a, γ) non sia divisibile in un numero finito di intervalli j, allora neanche (a, γ') sarà divisibile in tal modo se $b \geqq \gamma' > \gamma$. Dividiamo i punti di (a, b) in due classi: ponendo in una classe i punti β tali che (a, β) sia divisibile nel modo voluto, e nell'altra classe i punti γ tali che (a, γ) non sia così divisibile. Sia c il punto di divisione di tali due classi ($c \leqq b$). Costruiamo se $c < b$ un intorno $(c-\delta, c+\delta)$ del punto c, in cui la oscillazione di $f(x)$ non superi ε; se fosse $c = b$ ci limiteremo ad un intorno $(c-\delta, c)$. Il punto $c-\delta$ sarà un punto β, e perciò l'intervallo $(a, c-\delta)$ è divisibile in numero finito di intervallini j; aggiungendo a questi l'intervallo $(c-\delta, c+\delta)$ oppure $(c-\delta, c)$ secondo che $c < b$ oppure $c = b$ vediamo che anche l'intervallo $(a, c+\delta)$ se $c < b$ oppure l'intervallo (a, c) se $c = b$ è divisibile nel modo voluto. Il primo caso è assurdo perchè $c+\delta$ è un punto γ; il secondo contrasta con l'ipotesi iniziale. Dunque il teorema è dimostrato (per assurdo).

Sia δ la minima lunghezza di uno di questi intervallini parziali j. Se c è un punto qualsiasi di (a, b), quella parte del segmento $(c-\delta, c+\delta)$ che è interna ad (a, b) sarà uguale o minore della somma di tre intervallini j consecutivi. In tale intorno di c dunque l'oscillazione di $f(x)$ sarà minore di $3\,\varepsilon$ (il quale è un numero prefissato ad arbitrio). Che per ogni punto c di (a, b) esista un tale numero δ è conseguenza della stessa definizione di continuità; ora abbiamo in più dimostrato che si può scegliere un numero δ, che convenga *a tutti* i punti c dell'intervallo (a, b). Si poteva sospettare che al variare di c in (a, b) si fosse costretti a far variare i δ in modo che avessero lo zero per limite inferiore, e che perciò nessun numero δ andasse bene contemporaneamente per tutti i punti c. Il fatto che si può scegliere uno stesso δ per tutti i punti c si chiama anche il teorema della *continuità uniforme* e si enuncia dicendo che *una funzione continua in un intervallo finito, estremi inclusi, è uniformemente continua.*

(*) Questa disuguaglianza vale anche quando $\sigma_2 = 0$, ossia quando $c = b$. In tal caso $L(a, c+\sigma_2) = L(a, b) = M \geqq \lambda$.

I teoremi di Weierstrass si estendono alle funzioni discontinue col seguente enunciato, che mi accontenterò di citare.

Se f (x) *è una funzione definita nell'intervallo* (a, b), *estremi inclusi, esiste almeno un punto di questo intervallo tale che in ogni suo intorno la funzione assuma valori, il cui limite superiore coincida col limite superiore dei valori che* f (x) *ha in* (a, b).

Osserv. Se $f(x)$ è una funzione qualsiasi definita in un intorno del punto a, potremo considerarne il massimo limite e il minimo limite (§ 32, osserv. critica a pag. 107) per $x = a +$ e quelli per $x = a -$. Tutti questi limiti coincidono con $f(a)$ se $f(x)$ è continua in a. Si sono studiate anche le funzioni (semicontinue) per cui $f(a)$ coincide non con tutti, ma soltanto con alcuni dei limiti precedenti; e si è in particolare studiato per esse un teorema analogo al teorema di Weierstrass.

§ 41. — Funzioni di più variabili.

Si dice che z è una funzione di n variabili $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$, se per qualche sistema di valori dati alle $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, la z ha un valore determinato.

L'insieme di questi sistemi di valori si chiama il campo di esistenza della funzione z.

Si scrive in tal caso $z = f(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$; in luogo della lettera f si può scrivere un'altra lettera F, φ, X, ecc.

Così, p. es., dalla fisica sappiamo che il volume z di una certa massa di gas perfetto è funzione della temperatura x_1 e della pressione x_2. Il campo G dei valori che possiamo dare alle x_1, x_2 è formato in questo caso dai valori *positivi* delle x_1, x_2 (se adottiamo la scala termometrica assoluta) e non superiori a certi limiti dipendenti dai mezzi sperimentali.

Se $n = 2$, si suole indicare la x_1 con x, la x_2 con y; e in questo caso si adottano le x, y come coordinate cartesiane in un piano π. Ogni sistema di valori per le $x_1 = x$, $x_2 = y$ individua un punto di π, e viceversa. Il caso più importante è quello in cui i punti di π, a cui corrispondono valori delle x, y, per cui esiste la z, riempia tutta un'area connessa di π (rettangolare o circolare, ecc.) (*). Se noi consideriamo x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali nello spazio, la $z = f(x, y)$ è in tal caso l'equazione di una superficie, che si può considerare come l'immagine geometrica della funzione f.

Nel caso di $n > 2$ cessa la possibilità di una simile rappresentazione geometrica (se non si vuole adottare il linguaggio iperspaziale).

(*) Non insistiamo di più (cfr. § 7) sul significato della parola: « area connessa » (area di un sol pezzo).

Noi, perciò, studieremo specialmente il caso $n = 2$: metodi e risultati sono però generali.

Intorno di un punto di ascissa a ed ordinata b si dice il quadrato lungo dei punti (x, y), per cui $|x - a| \leqq \sigma, |y - b| \leqq \sigma$, dove σ è una qualsiasi costante positiva.

Le definizioni di limite, di funzione continua, date nei paragrafi 32, 33, 35, 36, e i teoremi relativi si estendono quasi parola per parola al caso attuale.

Basta soltanto parlare di *area piana connessa* (area rettangolare, circolare, ellittica, ecc.) invece che di intervallo.

Noteremo che, se z è una funzione $f(x, y)$ delle variabili x, y in un'area piana S, allora se poniamo $x = x_0$ dove x_0 è una costante, la $f(x, y)$ diventa una funzione $f(x_0, y)$ della sola variabile y, che esiste per tutti e soli i valori di y, tali che i punti (x_0, y) della retta $x = x_0$ appartengano a S (*); un fatto perfettamente analogo si presenta se si pone $y = y_0$ ($y_0 =$ cost.).

Ciò si suol esprimere dicendo che la $f(x, y)$, se si considera la x oppure la y come costante, diventa una funzione della sola y, o della sola x.

Per le funzioni continue di due o più variabili si possono pure estendere i teoremi dell'ultimo § 40.

Si può da ciò dedurre una dim. del teor. di Gauss già enunciato al § 14, α. Cominciamo a dimostrare che ogni equazione algebrica $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$ ammette almeno una radice. Posto $z = x + iy$, il modulo $|P(z)|$ è una funzione continua di x ed y. Di più notiamo che

$$|P(z)| = |z|^n \left| 1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} \right|.$$

Potremo evidentemente scegliere una costante ρ così grande che

α) $\rho > 1$ cioè che il punto $z = 1$ sia *interno* al cerchio C di equazione $|z|^2 = x^2 + y^2 = \rho^2$.

β) Per $|z| > \rho$ sia $|z|^n > 2\,|P(1)|$.

γ) Per $|z| > \rho$ sia $\left|1 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}\right| > \frac{1}{2}$.

Dunque, se $|z| > \rho$, cioè se z è esterno a C, è $|P(z)| > |P(1)|$.

Per il teor. di Weierstrass esiste dentro, o sulla periferia di C (**) almeno un punto α_1, ove $|P(z)|$ è minimo, cioè assume un valore $|P(\alpha_1)|$, che non è superiore al valore di $|P(z)|$ *in ogni altro* punto interno a C o posto sulla periferia di C; cosicchè in particolare $|P(\alpha_1)|$ non potrà superare $|P(1)|$, e quindi *neanche* alcuno dei valori assunti da $|P(z)|$, quando z è *fuori* di C. Perciò $|P(\alpha_1)|$ è *il minimo di tutti i possibili valori che assume* $|P(z)|$, quando z si muove comunque nel piano. Dunque $P(\alpha_1) = 0$, perchè altrimenti (§ 9, pag. 34-35) esisterebbe un valore di z tale che ivi $|P(z)|$ ha un valore minore di $|P(\alpha_1)|$.

(*) Naturalmente se la retta $x = x_0$ non avesse punti comuni con S, non avrebbe senso parlare della funzione $f(x_0, y)$.

(**) Perchè la regione interna a C è *finita*; il teor. cit. non vale per regioni illimitate.

Per il teor. di Ruffini (essendo α_1 radice di $P(z) = 0$) il polinomio $P(z)$ è divisibile per $z - \alpha_1$, cosicchè $P(z) = (z - \alpha_1) P_1(z)$ ove $P_1(z)$ è un polinomio di grado $n - 1$, il quale a sua volta ammetterà almeno una radice α_2. Sarà perciò $P_1(z) = (z - \alpha_2) P_2(z)$ e $P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) P_2(z)$ dove $P_2(z)$ è un polinomio di grado $n - 2$ che possiederà almeno una radice α_3, ecc., ecc. Si trova così in conclusione che $P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$. Questa decomposizione in fattori è *unica*. Se infatti per altra via si trovasse anche

$$P(z) = (z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_m).$$

allora sarebbe

$$(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n) = (z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_m).$$

Dividendo, caso mai, i due membri per i fattori di primo grado comuni ad entrambi, ne dedurremmo un'uguaglianza del medesimo tipo, in cui però nessuna delle α è uguale ad una delle β. Passando allora al limite per $z = \alpha_1$, il primo membro avrebbe limite nullo, il secondo membro avrebbe limite differente da zero; ciò che è assurdo. Dunque i fattori $z - \alpha$ del primo membro devono (tutt'al più in altro ordine) coincidere ciascuno con uno dei fattori $z - \beta$ del secondo membro; e viceversa. Il teorema di Gauss è così completamente provato.

CAPITOLO VII.

SERIE

§ 42. — Definizioni e primi teoremi.

α) Siano date infinite quantità $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ determinate dal valore dell'indice supposto intero positivo. Consideriamo **la somma s_n delle prime n tra esse**; poniamo cioè

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n.$$

Se esiste ed è finito il

$$\lim_{n=\infty} s_n,$$

la serie $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$

si dice convergente; e il valore s di questo limite si chiama somma della serie. E si scrive:

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

Se $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ *esiste, ma è infinito, la serie*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

si dice *divergente*. Se il $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ *non esiste*, la serie dicesi *indeterminata*. Una serie non convergente è dunque un simbolo privo di significato; e (come, p. es., le frazioni a denominatore nullo) si deve escludere dai nostri calcoli (*).

Se moltiplichiamo i termini di una serie convergente, per una stessa costante k, *la serie resta ancora convergente*; e la sua somma resta moltiplicata per k.

(*) Si potrebbe chiamare valore s di una serie, anzichè il $\lim\limits_{n=\infty} s_n$, qualche altro limite, p. es., il $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}$. Con questa nuova definizione alcune serie non convergenti acquistano significato e si possono introdurre nel calcolo. (Le serie convergenti non mutano di valore con la nuova definizione). Con la nuova definizione, p. es., la serie indeterminata $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ ha il valore $\dfrac{1}{2}$. Esistono molte definizioni di tale tipo: il significato della frase: *valore di una serie* varia con la definizione scelta. Noi ci atterremo a quella classica data nel testo.

Se le u_n sono numeri complessi, se, p. es., $u_n = v_n + iw_n$ (v_n, w_n reali), dire che *la serie delle* u_n *converge ed ha per somma* $a + ib$ equivale a dire che *la serie delle* v_n *converge ed ha per somma* a *e che la serie delle* w_n *converge ed ha per somma* b.

Il lettore cerchi gli errori della seguente dimostrazione che conduce ad erronei risultati. È

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots\right).$$

Donde

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \ldots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots$$

cioè

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots$$

Poichè $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$, ecc., se ne deduce

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots$$

cioè $\frac{1}{2} > 1$, ciò che è assurdo.

β) *Se* a, q *sono numeri qualsiasi, la serie*

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots$$

è convergente se $|q| < 1$, perchè in tal caso la somma s_n dei primi n termini è data dalla

$$s_n = a\,\frac{1 - q^n}{1 - q},$$

ed ha per $n = \infty$ il limite $\frac{a}{1 - q}$; cosicchè

$$\frac{a}{1 - q} = a + aq + aq^2 + \ldots$$

Una tal serie si dice una progressione geometrica decrescente.

Se $|q| > 1$ (e $a \neq 0$) *la nostra serie diverge,* perchè la $s_n = a\,\frac{1 - q^n}{1 - q}$ ha per $n = \infty$ il limite ∞.

Se $a \neq 0$, $q = 1$, la serie è divergente, perchè la somma $s_n = na$ dei primi n termini ha ancora per $n = \infty$ il limite infinito.

Se $a \neq 0$, $q = -1$ la serie è indeterminata, perchè la somma s_n è uguale a $+ a$ per n dispari, a zero per n pari, e quindi non tende ad alcun limite per $n = \infty$. Altrettanto avviene (come si potrebbe provare) se $|q| = 1$, e q è complesso.

Se $a = 0$, la nostra serie è convergente, ed ha somma nulla.

γ) *Se la serie* $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ *è convergente, e se* $b_1, b_2 \ldots, b_m$ *sono costanti qualsiasi, la serie*

$$(1) \qquad b_1 + b_2 + \ldots + b_m + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

(*essendo* $m =$ *intero positivo finito*) *converge ed ha per somma*

$$S' = S + b_1 + b_2 + \ldots b_m.$$

Se S *diverge od è indeterminata, altrettanto avviene di* (1), *o viceversa.*

Per definizione di serie la prima parte del nostro teorema equivale alla

$$S + b_1 + b_2 + \ldots + b_m = \lim_{n=\infty} (b_1 + b_2 + \ldots + b_m + a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Ma questa formola è evidente, perchè, essendo per definizione $S = \lim\limits_{n=\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, si ha:

$$\lim_{n=\infty} (b_1 + b_2 + \ldots + b_m + a_1 + a_2 + \ldots a_n) =$$
$$= b_1 + b_2 + \ldots b_m + \lim_{n=\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) =$$
$$= b_1 + b_2 + \ldots + b_m + S.$$

La seconda parte del nostro teorema se ne deduce pure immediatamente.

δ) *Se le serie* $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, v_1 + v_2 + v_3 \ldots$ *convergono ed hanno per somma* U *e* V, *anche la serie*

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots$$

converge ed ha per somma $U + V$.

Infatti:

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots =$$
$$= \lim_{n=\infty} [(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n)] =$$
$$= \lim_{n=\infty} [(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) + (v_1 + v_2 + \ldots + v_n)] =$$
$$= \lim_{n=\infty} (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) + \lim_{n=\infty} (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) =$$
$$= U + V.$$

ε) *Se la serie* $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ *converge, allora* $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$.

Infatti la somma S della serie si può definire con l'una o l'altra delle

$$S = \lim_{n=\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n); \quad S = \lim_{n=\infty} (a_1 + a_2 + \ldots a_{n-1}).$$

Sottraendo membro a membro si deduce appunto $0 = \lim\limits_{n=\infty} a_n$.

La $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$ è dunque una condizione *necessaria* (ma *non sufficiente*) per la convergenza della nostra serie.

ζ) *Se le* u_n *sono reali e positive, se* $u_{n+1} < u_n$, *se* $\lim_{n=\infty} u_n = 0$, *la serie* $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - \ldots$ *converge.*

È facile infatti riconoscere che la somma s_{2m} dei primi $2m$ termini aumenta con m, che la somma s_{2m+1} dei primi $2m + 1$ termini diminuisce con m, che le prime somme sono minori delle seconde, che la classe formata dalle prime è contigua alla classe formata dalle seconde, e che il numero di separazione delle due classi è la somma delle serie.

§ 43. — Serie a termini positivi.

α) È specialmente importante lo studio delle serie, i cui termini sono reali ed hanno tutti lo stesso segno, sono cioè o tutti positivi o tutti negativi.

A noi basterà studiare, p. es., le serie i cui termini sono tutti positivi, perchè le proprietà delle serie, i cui termini sono tutti negativi, se ne dedurranno immediatamente. È evidente infatti che la serie $k_1 + k_2 + \ldots$ e la serie $(-k_1) + (-k_2) + \ldots$, che si ottiene cambiando i segni a tutti i termini della precedente, sono contemporaneamente convergenti, o divergenti, od indeterminate. Ed anzi, se la prima converge ed ha per somma S, la seconda converge ed ha per somma $-S$.

Lo studio dunque delle serie di termini tutti negativi è equivalente allo studio della serie con tutti i termini positivi.

Se i termini della serie $a_1 + a_2 \ldots$ sono tutti positivi, la somma $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ dei primi n termini è una funzione crescente di n, e quindi (pag. 124, § 38) tende ad un limite per $n = \infty$.

Una serie a termini positivi non è mai indeterminata.

β) *Se*

$$(1) \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

$$(2) \qquad b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

sono due serie a termini positivi, e se per tutti i valori di n *si ha*

$$(3) \qquad a_n \leqq b_n,$$

allora, se la serie (2) *converge, anche la serie* (1) *converge; e la somma* s *di* (1) *non può superare la somma* σ *di* (2). *E quindi, se la serie* (1) *diverge, diverge anche la* (2).

Infatti, se s_n, σ_n sono rispettivamente la somma dei primi n termini della (1) e della (2), allora dalla (3) segue

$$(4) \qquad s_n \leqq \sigma_n.$$

Se la (2) converge, allora $\sigma = \lim_{n=\infty} \sigma_n$ è finito; dalla (4) segue che in tal caso s_n non può tendere all'infinito, ossia che la (1) non può divergere. Quindi, per il teorema precedente, la (1) converge (perchè nè diverge, nè è indeterminata). Di più dalla (4) segue che $s = \lim_{n=\infty} s_n \leqq \sigma$.

γ) In particolare se $b_n = bq^n$, dove $0 < q < 1$, $b > 0$, ossia se la (2) è una progressione geometrica decrescente (che noi sappiamo già convergente), si ha:

Se i teoremi della serie

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots..$$

sono positivi, ed esistono due numeri positivi b, q, *tali che* q < 1 *e che*

$$a_n \leqq bq^n,$$

allora la nostra serie converge.

E in modo analogo si vede che, se fosse

$$a_n \geqq bq^n,$$

dove $q \geqq 1, b > 0,$

la serie $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots..$

sarebbe divergente.

δ) Supponiamo ora che esista un numero $k < 1$, tale che per tutti i valori di n sia

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq k < 1 \quad (*).$$

Ciò equivale a supporre che il limite superiore dei rapporti $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sia un numero *minore* di 1.

(*) Da questo segue che i rapporti $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sono minori di 1. Non è però vero viceversa che, se tutti questi rapporti sono minori di 1, allora esista necessariamente un tale numero k minore di 1, e non minore dei nostri rapporti (come avverrebbe se i rapporti $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ fossero in numero finito); e ciò perchè potrebbe avvenire che il limite superiore di tali rapporti fosse proprio *uguale* ad 1.

Infatti, per esempio, nella serie divergente

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.. \text{ è } u_n = \frac{1}{n}, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} = \left[1 - \frac{1}{n+1}\right].$$

Tutti questi rapporti sono minori di 1.

Ciò nonostante, se k è un qualsiasi numero positivo minore di 1, si può trovare un intero h così grande che per $m > h$ sia $1 - \frac{1}{m+1} > k$.

Dunque, pure essendo tutti i nostri rapporti minori di 1, ciò nonostante, preso un qualsiasi numero $k < 1$, infiniti dei nostri rapporti sono maggiori di k, perchè il loro limite superiore è proprio uguale ad 1.

Allora sarebbe

$$\frac{a_2}{a_1} \leqq k, \qquad \frac{a_3}{a_2} \leqq k, \ldots.., \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq k;$$

donde, moltiplicando membro a membro:

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} \leqq k^n,$$

ossia:
$$a_{n+1} \leqq a_1 k_n.$$

I termini della nostra serie

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots..$$

sarebbero ordinatamente minori o uguali dei termini della progressione geometrica decrescente

$$a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \ldots..$$

Quindi la nostra serie sarebbe convergente.

In modo analogo si prova che, se per tutti i valori di n è $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1$, la nostra serie è divergente.

Per il primo caso, p. es., invece di ammettere che fosse

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq k < 1 \tag{5}$$

per tutti i valori di n, basterebbe ammettere che questa disuguaglianza valesse a partire da un certo valore di n in poi, p. es., per $n \geqq m$. La serie $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots..$ sarebbe ancora convergente.

Infatti, essendo soddisfatta la (5) per $n \geqq m$, è convergente la serie

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots..$$

e quindi anche (§ 42, γ, pag. 142) la serie

$$a_1 + a_2 + \ldots.. + a_{m-1} + a_m + a_{m+1} + \ldots..$$

Considerazioni analoghe valgono pel secondo caso.

Concludendo si ha il teorema: *Se in una serie a termini positivi*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots..$$

il rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *di un termine al precedente, da un certo punto in poi* (ossia per n maggiore o uguale ad un certo m), *è uguale o minore di un numero fisso* k *minore di* 1, *la serie è con-*

vergente; se detto rapporto è maggiore od uguale ad 1, *la serie è divergente.*

Se ne deduce facilmente il seguente corollario, molto utile in pratica: **Se in una serie a termini tutti positivi (o tutti negativi) il rapporto di un termine al precedente ha un limite minore di 1 (*), la serie è convergente; se ha un limite maggiore di 1, la serie è divergente.** Sia $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha < 1$. Sia k un numero *compreso tra* α *ed* 1. Poniamo $\varepsilon = k - \alpha$. Esisterà per definizione di limite un intero m tale che per $n \geqq m$ (cioè quando n è nell'intorno $(m, +\infty)$ di $+\infty$), valgano le

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \alpha < \varepsilon \quad , \quad \alpha - \frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon \quad ,$$

e in particolare quindi la $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \varepsilon = k < 1$. Quindi per il teorema precedente la serie $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$ sarà convergente.

Se invece $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, allora $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ finirà per diventare e restare maggiore od uguale a 1; e, pel teorema precedente, la serie sarà divergente (**).

Se lim $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *non esiste, o vale* 1, *nulla si può affermare in generale.*

Un altro criterio di convergenza sarà dato al § 63, δ.

Es. La serie $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots$ è convergente.

(*) Si potrebbe dire anche: minore di un numero k minore di 1. Ma questa frase più complicata sarebbe nel caso attuale equivalente a quella più semplice del testo.

(**) La convergenza di $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$ nel caso che $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ si può anche in modo meno completo, ma più intuitivo, esporre così. Se $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tende ad $\alpha < 1$, esso finisce col diventare e restare tanto vicino quanto si vuole ad α: cioè, se k è un numero compreso tra α ed 1, il rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, da un certo valore di n in poi, sarà minore di $k < 1$. E quindi la serie converge. Del resto (oss. 6, pag. 109) sappiamo già che dalla $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha < k$ si deduce che da un certo valore di n in poi il rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n} < k$.

Infatti in questo caso

$$a_n = \frac{1}{\underline{|n-1}}\,, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\underline{|n}} : \frac{1}{\underline{|n-1}} = \frac{1}{n}$$

e quindi

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$$

Vedremo in seguito che la somma di questa serie è proprio il numero e.

Si voglia calcolare la somma S di questa serie con l'approssimazione di $\frac{1}{4000}$. Si osservi che la somma di tutti i termini dopo lo n^{mo} termine uguaglia

$$\frac{1}{\underline{|n}}\left\{1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right\} < \frac{1}{\underline{|n}}\left\{1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right\} =$$

$$= \frac{1}{\underline{|n}} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n\underline{|n}}.$$

Se dunque scegliamo n così grande che $\frac{n+1}{n\underline{|n}} < \frac{1}{4000}$, la somma dei primi n termini della nostra serie differisce dal valore vero della serie per meno di $\frac{1}{4000}$. Ora questa disuguaglianza è soddisfatta per $n = 7$. Quindi si può scrivere:

$$S = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \frac{1}{\underline{|4}} + \frac{1}{\underline{|5}} + \frac{1}{\underline{|6}} \text{ con un}$$

errore (in difetto) minore di $\frac{1}{4000}$. Con tre cifre decimali esatte è quindi $S = 2{,}718$.

Oss. In generale la somma s_n dei primi n termini di una serie convergente rappresenta la somma S della serie con un errore che si può rendere piccolo a piacere scegliendo n abbastanza grande. Una serie è tanto più conveniente al calcolo effettivo (converge tanto più rapidamente) quanto maggiore è l'approssimazione che si ottiene dando ad n valori non troppo grandi. Così, p. es., se i termini di a_n di una serie $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots..$ sono positivi, e se $\frac{a_n + 1}{a_n} \leq k < 1$, la serie, come sappiamo, è convergente; ed essa sarà generalmente tanto più comoda al calcolo numerico, quanto più piccolo si può scegliere k in modo da soddisfare alle precedenti disuguaglianze. Lo studioso può illustrare questo fatto con esempi numerici, e anche ricorrendo soltanto a progressioni geometriche decrescenti.

§ 44. — Cambiamento nell'ordine dei termini di una serie a termini positivi.

Se
$$a_1 + a_2 + a_3 + ...$$
è una serie, i cui termini appartengono anche alla serie
$$b_1 + b_2 + b_3 + ...,$$
se i termini di entrambe le serie sono positivi, se la seconda serie converge, anche la prima serie converge, ed ha una somma che non supera la somma della seconda.

Infatti se n è un intero qualsiasi, potremo trovare un altro intero $m \geqq n$ tale che nei primi m termini della seconda serie siano contenuti tutti i primi n termini della prima.

Sarà
$$(a_1 + a_2 + ... + a_n) \leqq (b_1 + b_2 + ... + b_m) \qquad (1).$$

Il limite del 2° membro per $m = \infty$ e quindi anche per $n = \infty$ uguaglia la somma Σ della seconda serie, che per ipotesi è un numero finito: quindi il primo membro di (1) non può tendere all'infinito, e perciò la prima serie converge ed ha una somma finita S. Passando poi al limite per $n = \infty$, la (1) dimostra che $S \leqq \Sigma$.

Se

[1] $$a_1 + a_2 + a_3 + ...$$

è una serie convergente a termini tutti positivi (o tutti negativi), e se

[2] $$b_1 + b_2 + b_3 + ...$$

è una serie dedotta da [1], *cambiando l'ordine dei termini, anche la* [2] *è convergente, e le due serie* [1] *e* [2] *hanno la stessa somma.*

Infatti, poichè i termini della [2] appartengono tutti alla [1], per il lemma precedente la serie [2] converge; e se S, Σ sono le somme di [1] e [2], è $\Sigma \leqq S$. Ma, poichè viceversa anche tutti i termini di [1] sono termini di [2], è anche $S \leqq \Sigma$. Quindi necessariamente $S = \Sigma$.

Questo teorema vale naturalmente, anche se la serie è a termini tutti negativi. c. d. d.

§ 45. — Serie a termini negativi e positivi. Serie a termini complessi.

Cominciamo dalla considerazione di una serie a termini reali

[1] $$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots..$$

Sul segno dei termini non facciamo alcuna ipotesi. Siano a_1, a_2, ... quei termini di questa serie che sono positivi, $-b_1$, $-b_2$, $-b_3$, ... quei termini della nostra serie che sono negativi. Tra i primi n termini della [1] ce ne saranno, per es., m positivi, p negativi: $m + p = n$. E sarà quindi

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_p).$$

Supponiamo che sieno convergenti le due serie

[2] $$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots..$$

[3] $$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots.. \text{ (*)}$$

e ne siano S, s le somme. Allora

$$\lim_{n=\infty} (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = \lim_{m=\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) -$$
$$- \lim_{p=\infty} (b_1 + b_2 + \ldots.. + b_p) = S - s.$$

Quindi: la [1] è convergente ed ha per somma $S - s$.

Con le notazioni precedenti si ha evidentemente

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| = (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) +$$
$$+ (b_1 + b_2 + \ldots b_p)$$

donde, come sopra, si deduce che la serie

[4] $$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots..$$

è convergente, ed ha per somma $S + s$.

Supponiamo ora viceversa che la [4] sia convergente, ed abbia quindi una somma finita T.

Siccome ognuna delle quantità a_i è un termine di [4], per il lemma del precedente paragrafo, la [2] è convergente. In modo analogo si dimostra che la [3] converge, e che quindi, per quanto si è visto, converge anche la [1].

Dunque:

Una serie [1] *converge, quando converge la serie* [4] *dedotta dalla* [1], *sostituendo a ogni termine il suo valore assoluto.*

Si avverta che il teorema reciproco non è vero.

(*) I risultati seguenti valgono anche se di termini positivi, o di termini negativi nella [1] ve n'è solo un numero finito, se cioè una delle serie [2], [3] si riduce a una somma. Questi risultati valgono anche se la [1] ha dei termini nulli.

Così, p. es., se ne trae che [1] converge se il $\lim\limits_{n=\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ esiste, ed è minore di 1.

Una serie [1], tale che converga la serie [4] formata coi valori assoluti dei suoi termini, si dice *assolutamente convergente.*

TEOREMA. *Una serie* [1] *assolutamente convergente rimane tale, e non muta di valore, comunque si cambi l'ordine dei suoi termini.*

Infatti il cambiare l'ordine dei termini della [1] equivale a mutare al più l'ordine dei termini delle [2], [3]. Ma come sappiamo, comunque si muti quest'ordine, le serie [2], [3] a termini positivi restano convergenti, e le loro somme continuano ad essere rispettivamente uguali a S, s. Per le considerazioni precedenti la [1] resterà ancora convergente, e la sua somma sarà ancora $S - s$.

Si può invece dimostrare che in una serie convergente, ma non assolutamente convergente, si può mutare l'ordine dei termini in guisa che la serie diventi o divergente, o indeterminata, o abbia quella somma che più ci piace. Naturalmente è necessario cambiar l'ordine di un numero infinito di termini per ottenere una tale variazione.

Questi teoremi si estendono subito a una serie a termini complessi

$$(1) \qquad w_1 + w_2 + w_3 + \dots\dots$$
$$(w_n = u_n + iv_n)$$

col teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè siano assolutamente convergenti tanto le serie $u_1 + u_2 + \dots\dots$ *formata con le parti reali dei termini di* (1) *quanto la serie* $v_1 + v_2 + \dots\dots$ *formata coi coefficienti di* i *nei termini di* (1) *è che sia convergente la serie* $|w_1| + |w_2| + \dots$ *dei moduli dei termini di* (1). (Ricordo che $|w_n| = \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$).

Infatti $|w_n| \leqq |u_n| + |v_n|$. Se le serie delle $|u_n|$ e delle $|v_n|$ convergono, converge anche la serie somma, ed *a fortiori* converge la serie delle $|w_n|$. Viceversa, se converge quest'ultima serie, convergono le serie delle $|u_n|$ e quella delle $|v_n|$, perchè $|u_n| \leqq |w_n|$, $|v_n| \leqq |w_n|$.

Tali serie si dicono ancora assolutamente convergenti. Anche per una serie $w_1 + w_2 + \dots\dots$ a termini complessi vale il teorema che, se $\lim\limits_{n=\infty} \left|\dfrac{w_{n+1}}{w_n}\right| < 1$, la serie è *assolutamente convergente*, ed ha una somma indipendente dall'ordine dei suoi termini.

Esempi.

La serie $w_1 + w_2 + \ldots\ldots$, dove $w_1 = 1$, $w_n = \dfrac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}}$ converge assolutamente per ogni valore (anche complesso) della x perchè il rapporto

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = \left|\frac{x^n}{\underline{|n}}\right| : \left|\frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}}\right| = \left|\frac{x}{n}\right|$$

tende a zero per $n = \infty$. Dal teor. ε) del § 42 segue in particolare che $\lim\limits_{n=+\infty} \dfrac{x_n}{\underline{|n}} = 0$.

2° Studiamo ora la serie $1 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots$ ove si è posto: $u_n = \dfrac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)\,x^n}{\underline{|n}}$ ossia la serie

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots\ldots$$

dove m è una qualsiasi costante.

Se m è un intero positivo, tutti i termini dopo lo $(m+1)^{esimo}$ sono nulli e la serie si riduce ad un polinomio uguale (§ 11, pag. 44) ad $(1+x)^m$.

Se m non è un intiero positivo, allora si noti che:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)(m-n)}{\underline{|n+1}}}{\dfrac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{\underline{|n}}}\,\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \left|\frac{m-n}{n+1}\right|\,|x| =$$

$$= |x|\left|\frac{\dfrac{m}{n}-1}{1+\dfrac{1}{n}}\right|;$$

e quindi

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|.$$

Se dunque $|x| < 1$, la nostra serie converge assolutamente. E in particolare ne consegue che, se $|x| < 1$, allora

$$\lim_{n=\infty}\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{\underline{|n}}\,x^n = 0.$$

§ 46. — Serie di funzioni.

Siano $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... infinite funzioni determinate in un campo T. Siano M_1, M_2, M_3, ... rispettivamente i limiti superiori dei loro moduli $|f_1(x)|$, $|f_2(x)|$, $|f_3(x)|$, ecc.

Se la serie di questi limiti superiori

[1] $$M_1 + M_2 + M_3 + ...$$

converge, allora è convergente *assolutamente* anche la serie

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ...$$

in ogni punto del campo T (*).

Una tale serie $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ...$ si dirà *totalmente convergente.*

Se la costante L_n *non è inferiore ad alcuno dei valori delle* $|f_n(x)|$, *e se la serie* $L_1 + L_2 + L_3 + ...$ *converge, la serie* $f_1 + f_2 + f_3 + ...$ *è totalmente convergente.*

Infatti dalle $L_n \geqq |f_n(x)|$ si deduce $L_n \geqq M_n$. Dalla convergenza della serie delle L si deduce quindi la convergenza della serie delle M, e quindi per definizione, la totale convergenza della serie delle $f_n(x)$.

Una serie totalmente convergente è (come abbiamo già osservato) *anche assolutamente convergente.* Il teorema reciproco non è generalmente vero.

Supponiamo che esista il $\lim_{x=a+} f_i(x)$, che noi indicheremo con l_i (**).

È chiaramente $|l_n| \leqq M_n$; e quindi la serie

[2] $$l_1 + l_2 + l_3 + ...$$

converge *assolutamente.* Sia M la somma di [1], e sia ε un numero piccolo a piacere. Esisterà un intero n così grande che

$$M - (M_1 + M_2 + ... + M_n) < \frac{\varepsilon}{3}$$

cioè

$$M_{n+1} + M_{n+2} + M_{n+3} + ... < \frac{\varepsilon}{3}.$$

(*) Infatti dalle $|f_n| \leqq M_n$ si deduce che per ogni valore di x nel campo T la serie

$$|f_1| + |f_2| + |f_3| + ...$$

converge, e quindi (§ 45) la serie

$$f_1 + f_2 + f_3 + ...$$

converge assolutamente.

(**) È inclusa l'ipotesi che la x varii in T, e quindi anche che in ogni intorno destro di a esistano punti di T, distinti da a.

Poichè $|f_n| \leqq M_n$, $|l_n| \leqq M_n$, sarà pure

[3] $$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + f_{n+3}(x) + \dots\dots| < \frac{\varepsilon}{3},$$

[4] $$|l_{n+1} + l_{n+2} + l_{n+3} + \dots\dots| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'altra parte poichè (§ 35, α, pag. 113)

$$\lim_{x=a} (f_1 + f_2 + \dots\dots + f_n) = (l_1 + l_2 + \dots\dots + l_n),$$

si potrà trovare un intorno di a, in cui

[5] $$|(f_1 + f_2 + \dots\dots + f_n) - (l_1 + l_2 + \dots\dots + l_n)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Cosicchè, in virtù delle [3], [4], [5], in questo intorno, sarà

$$|(f_1 + f_2 + \dots\dots + f_n + f_{n+1} + \dots\dots) - (l_1 + l_2 + \dots\dots + l_n + l_{n+1} + \dots\dots)| \leqq$$
$$\leqq |(f_1 + f_2 + \dots\dots + f_n) - (l_1 + l_2 + \dots\dots + l_n)| +$$
$$+ |f_{n+1} + f_{n+2} + \dots\dots| + |l_{n+1} + l_{n+2} + \dots\dots| \leqq \varepsilon.$$

Dunque, dato un ε piccolo a piacere, esiste un intorno di a in cui vale questa disuguaglianza.

Per la definizione di limite avremo pertanto:

Se una serie di funzioni (reali o complesse) è totalmente convergente in un intorno del punto a, *e se per* $x = a$ *i suoi termini ammettono un limite* (certo finito), *il limite della serie per* $x = a$ *è uguale alla serie dei limiti.*

Ne segue tosto che: *Se i termini di una serie totalmente convergente sono funzioni continue, la somma della serie è una funzione continua.*

I precedenti teoremi valgono anche per le serie *uniformemente* convergenti, di cui le serie totalmente convergenti sono un caso particolare. Si dice che la serie $f_1(x) + f_2(x) + \dots\dots$ converge ed ha per somma $f(x)$, se, prefissato un $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, per ogni valore di x nell'intervallo considerato esiste un intero m tale che per $n > m$ sia $|f(x) - [f_1(x) f_2(x) + \dots\dots + f_n(x)]| < \varepsilon$.

Questo valore di m varia generalmente con x; ma se (comunque sia stato scelto ε) si può trovare un valore di m, tale che la precedente disuguaglianza valga per tutti i valori della x, la serie si dice *uniformemente convergente.* In altre parole per una serie convergente il numero m è generalmente funzione di x e di ε (che, al variare di x, può anche avere $+\infty$ per limite superiore); per una serie uniformemente (in ugual grado) convergente si deve poter scegliere un m, che sia funzione della sola ε.

Questi teoremi si estendono senz'altro alle serie, i cui termini sono funzioni di più variabili; *essi*, si noti, *sono affatto analoghi ai teoremi corrispondenti per le somme di un numero finito di funzioni.*

Osservazione.

Accanto alle serie i matematici hanno studiato altri algoritmi analoghi che hanno grande importanza per il teorico, e ben poca per l'ingegnere. Voglio alludere ai prodotti infiniti, alle frazioni continue illimitate, ai determinanti infiniti.

Così, p. es., dati infiniti numeri u_1, u_2, u_3, ..., ecc. si dice che il prodotto infinito $u_1 u_2 u_3 \ldots$ converge ed ha il valore p se il limite per $n = \infty$ del prodotto $p_n = u_1 u_2 \ldots u_n$ dei primi n numeri u esiste, è finito, ed è uguale a p. Lo studio di un tale prodotto si può ridurre a quello di una serie, osservando che in particolare sarà $\log|p| = \log|u_1| + \log|u_2| + \log|u_3| + \ldots$

CAPITOLO VIII.

DERIVATE, DIFFERENZIALI

§ 47. — Velocità ad un istante, velocità di reazione, intensità di corrente, coefficiente di dilatazione, calore specifico.

α) Studiamo un fenomeno dei più semplici: la caduta di un grave che parte senza velocità iniziale. L'esperienza insegna che il numero y dei metri percorsi in x minuti secondi di libera caduta vale $\frac{1}{2}gx^2 = 4{,}905\,x^2$ $(g = 9{,}81)$.

Da tale formola resta analiticamente individuata la funzione y della x, così da poterne calcolare il valore per ogni valore positivo della x. E si trova che dopo

$3''$ il grave ha percorso metri	$y = 4{,}905.\,(3)^2$	$= 44{,}145$
3,1	$y = 4{,}905.\,(3{,}1)^2$	$= 44{,}145 + 2{,}992$
3,01	$y = 4{,}905.\,(3{,}01)^2$	$= 44{,}145 + 0{,}295$
3,001	$y = 4{,}905.\,(3{,}001)^2$	$= 44{,}145 + 0{,}0294$

Ora è ben noto che la velocità media in un intervallo di tempo è data dal quoziente tra la lunghezza del segmento percorso in tale intervallo e il tempo impiegato a percorrerlo.

Siccome nell'intervallo $(3''\,;\,3'',1)$ si sono percorsi m. 2,992, la velocità media in questo intervallo di tempo $\left(\frac{1}{10}\right.$ di minuto secondo$\left.\right)$ vale $\dfrac{2{,}992}{\left(\frac{1}{10}\right)} = 29{,}92$.

Nell'intervallo $(3''\,;\,3'',01)$ la velocità media varrà analogamente $\dfrac{0{,}295}{\left(\frac{1}{100}\right)} = 29{,}5$; la velocità media nell'intervallo $(3''\,;\,3{,}001)$ sarà $\dfrac{0{,}0294}{\left(\frac{1}{1000}\right)} = 29{,}4$.

Noi potremo continuare il calcolo per intervalli di tempo ancor più piccoli: ciò che naturalmente non avrebbe alcun significato fisico, sia perchè 4,905 è un numero solamente approssimato, sia perchè non sono sperimentalmente apprezzabili frazioni di secondo tanto piccole. Checchè sia di ciò, noi troveremmo che la velocità media in un intervallo di tempo che comincia dopo il terzo secondo, diminuisce con l'ampiezza dell'intervallo e finisce, per intervalli di tempo inferiori p. es. al millesimo di secondo, con l'essere sensibilmente uguale a 29,4..... Ma si suole parlare, tanto in fisica che nel linguaggio comune, della velocità che ha il grave p. es. all'istante $x = 3$ (dopo 3″ di libera caduta); si suole dire anche volgarmente: il grave dopo 3″ aveva la velocità di tanti metri al minuto secondo. È ben chiaro il significato che uno sperimentatore darebbe a una simile frase: *velocità del grave all'istante* $x = 3''$. Supposto, per fissare le idee, che il millesimo di secondo sia il minimo intervallo di tempo, che egli sappia apprezzare e misurare coi mezzi sperimentali che ha a sua disposizione, egli chiamerebbe la velocità media del grave nell'intervallo (3″; 3″, 001) la velocità all'istante $x = 3$.

Così un macchinista di un treno, che difficilmente può apprezzare intervalli di tempo inferiori al minuto secondo, potrà dire che, p. es., alle ore 4 egli aveva raggiunto la velocità di 100 km. all'ora (cioè m. $\frac{100.000}{3600}$ = m. 27,77 al minuto secondo) se nell'intervallo di tempo trascorso dalle ore 4 alle ore 4 più un minuto secondo egli ha percorso m. 27,77. Questa definizione diremo così, sperimentale della frase: *velocità all'istante* x è sufficiente in pratica.

Dal punto di vista della teoria essa darebbe origine a gravi difficoltà, p. es., per il fatto che il minimo intervallo di tempo apprezzabile varia da caso a caso, può variare col perfezionarsi dei metodi di misura; mentre invece noi vogliamo una definizione che, pur trascendendo i bisogni della pratica, sia adottabile in ogni caso. Riprendendo lo studio della caduta di un grave, notiamo che lo spazio y percorso in x secondi vale $\frac{1}{2} gx^2$, mentre lo spazio $y + k$ percorso nei primi $x + h$ secondi vale $\frac{1}{2} g (x + h)^2$. Lo spazio k percorso nell'intervallo di tempo $(x, x + h)$ vale dunque:

$$k = \frac{1}{2} g (x + h)^2 - \frac{1}{2} gx^2 = gxh + \frac{1}{2} gh^2.$$

Cosicchè la velocità *media* in tale intervallo di tempo è

$$\frac{k}{h} = gx + \frac{1}{2} gh.$$

Quanto più perfetto è il metodo di misura, tanto più piccoli sono gli intervalli di tempo, che si sanno apprezzare.

Ora, quanto più piccolo è l'intervallo di tempo $(x, x + h)$ ossia quanto più piccolo è h, tanto più piccolo è il termine $\frac{1}{2} gh$. Anzi questo termine è sperimentalmente trascurabile se h è molto piccolo. Per questa ragione diciamo che la velocità all'istante x vale gx: cioè poniamo per definizione tale velocità uguale al

$$\lim_{h=0} \frac{k}{h} = \lim_{h=0} \frac{\frac{1}{2} g (x + h)^2 - \frac{1}{2} gx^2}{h} = gx.$$

Così p. es. la velocità all'istante $x = 3$ vale $3\,g = 3.9{,}81 = 29{,}4\ldots\ldots$ (che è in perfetto accordo coi valori sopra determinati).

Come si vede, questa velocità gx varia con x, è una nuova funzione della x. E da questo risultato deduciamo anzi il ben noto teorema di Galileo che le velocità sono proporzionali al tempo x di libera caduta.

β) Applichiamo le considerazioni precedenti al caso generale. Sia M un punto mobile con legge qualsivoglia, p. es. su una retta orientata OX. Dopo un certo numero x di minuti secondi la distanza $y = OM$ sia uguale a un certo numero $f(x)$ di metri (y funzione di x). Quale significato avrà la frase: velocità di M all'istante $x = a$?

Usiamo un procedimento analogo al precedente.

Dopo a secondi la distanza OM è $f(a)$;

» $a + h$ » $f(a + h)$.

Dunque nell'intervallo $(a, a + h)$ di h minuti secondi lo spazio percorso è $k = f(a + h) - f(a)$. La velocità media in tale intervallo di tempo è quindi

$$\frac{k}{h} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Noi chiameremo velocità di M all'istante a il limite (se un tal limite esiste) del precedente rapporto per $h = 0$. Questo limite varierà generalmente al variare dell'istante a considerato. E per indicare che a può ricevere uno qualsiasi dei valori dati alla x, noi indicheremo a con la stessa lettera x, dicendo così che la velocità all'istante x è quella funzione $F(x)$ della x, che è definita dalla

$$F(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

se un tale limite esiste.

γ) Se noi immaginiamo noto *a priori* il significato della frase: « *velocità all'istante* x », possiamo usare un'altra forma di ragionamento, che ci servirà anzi come modello per altri problemi analoghi.

Se la velocità $F(x)$ si mantenesse costante nell'intervallo $(x, x+h)$, lo spazio $f(x+h) - f(x)$ percorso in tale intervallo di tempo sarebbe proprio uguale al prodotto $h\,F(x)$ della velocità $F(x)$ per il tempo h impiegato a percorrerlo. Ma $F(x)$ può variare (se, come capita in pratica, $F(x)$ è funzione continua) nel dato intervallo da un valore minimo m ad un valore massimo M. Lo spazio percorso sarà quindi compreso tra hm ed hM, che misurano rispettivamente gli spazi percorsi nel caso che la velocità abbia costantemente il valore minimo m o il valore massimo M (*). Quindi $f(x+h) - f(x) = h\,\mu$, dove μ è un valore compreso tra m ed M, ossia è il valore $F(x+\lambda)$ che F assume in un certo punto $x+\lambda$ (a noi generalmente ignoto) dell'intervallo $(x, x+h)$ $(|\lambda| \leqq |h|)$. Dalla $f(x+h) - f(x) = hF(x+\lambda)$ si trae:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = F(x+\lambda),$$

donde, passando al limite per $h=0$, e ricordando che λ tende a zero per $h=0$, si ha appunto:

$$F(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

δ) In generale, se y è una grandezza variabile col tempo x, che è una funzione $y = f(x)$ di x, il limite precedente si chiama la *velocità di variazione* di y. Così, se y è la quantità di una certa sostanza che si è formata o si è decomposta in una certa reazione chimica, tale limite ha il nome di *velocità di reazione*. Se y è la quantità di elettricità passata in un dato circuito all'istante x, tale limite ha il nome di *intensità di corrente*.

(*) Che a velocità maggiore corrisponda spazio percorso maggiore è un postulato direttamente suggerito dalla intuizione.

Se x indica invece la temperatura, ed y è, p. es., la lunghezza di una certa sbarra alla temperatura x, tale limite si chiama il *coefficiente di dilatazione* (*della sbarra*).

Se y è la quantità di calore necessaria per portare alla temperatura x la massa 1 di un certo corpo, quel limite si chiama il *calore specifico* di quel corpo.

Insomma quasi tutte le scienze, che si propongono problemi di misura, conducono alla considerazione di quel limite per i problemi più svariati.

§ 48. — **Retta tangente a una curva.**

Come possiamo definire la retta tangente a una curva in un punto A in modo conforme alla nostra intuizione?

Le seguenti figure dimostrano che non si può definire tale tangente, dicendo che essa è la retta che ha il solo punto A comune con la curva, oppure che essa è la retta che ha con la curva a comune il punto A, ma che non attraversa la curva in A (figure 12-13).

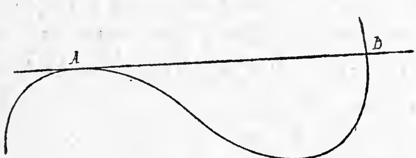


Fig. 12.

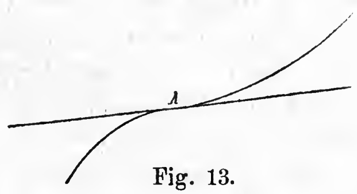


Fig. 13.

Noi partiremo dall'osservazione che la retta che congiunge due punti A, B *molto vicini* di una curva si confonde sensibilmente con la retta, che la nostra intuizione dice tangente alla curva nel punto A. Così che un abile disegnatore potrebbe chiamare retta tangente a una curva in un suo punto A la retta AB (fig. 14), essendo B il punto della nostra curva più vicino al punto A, tale che la retta AB possa venire da lui tracciata con l'approssimazione richiesta (se il punto B fosse troppo vicino al punto A, il tracciare con la precisione voluta la retta AB gli presenterebbe difficoltà insormontabili). Una tale definizione non è però accettabile da un matematico, il quale prescinde da ogni possibile disegno, e non può tener conto della maggiore o minore abilità di un disegnatore.

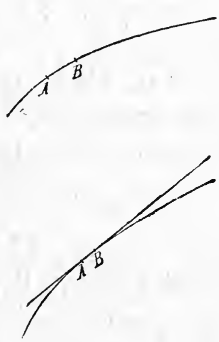


Fig. 14.

Noi, assumendo come punto di partenza i fatti intuitivi ora accennati, porremo la definizione seguente:

Tangente a una curva nel punto A *è la posizione limite* (se questa posizione esiste) *di una secante* AB *congiungente il punto* A *con un altro punto* B *della curva, quando il punto* B *tende ad* A (*).

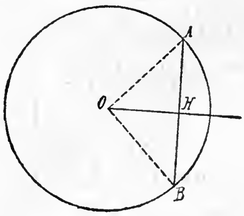


Fig. 15.

Bisogna dimostrare che questa definizione coincide nel caso del cerchio con la definizione data dalla geometria elementare.

Sia dato un punto A su un cerchio di centro O. Preso un altro punto B su tale cerchio, tiriamo la retta AB; essa sarà la perpendicolare tirata da A alla bisettrice OH dell'angolo $A\,(O)\,B$ (fig. 15).

Facciamo avvicinare il punto B al punto A; allora l'angolo BOA tende a zero, e la bisettrice OH di questo angolo tende al raggio OA. La retta AB, che è sempre perpendicolare alla bisettrice OH, si avvicinerà alla perpendicolare alla retta OA nel punto A, e si ha così che la posizione limite della retta AB, ossia la tangente al cerchio nel punto A, nel senso ora definito, è la perpendicolare al raggio del cerchio che ha l'estremo in quel punto A, e coincide quindi con la retta che in geometria elementare si chiama « tangente al cerchio nel punto A ».

Sia la curva data dall'equazione $y = f(x)$. Il coefficiente angolare della retta AB è la tangente dell'angolo ω che la direzione positiva dell'asse delle x fa con un raggio di essa, p. es., col raggio AB. Sia AC parallela all'asse delle x. Dal triangolo ABC (fig. 16) si ha che questo coefficiente angolare vale in grandezza e segno

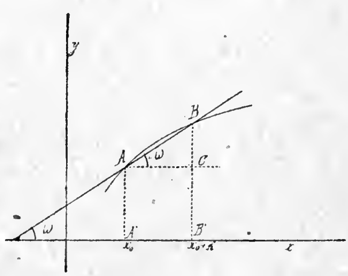


Fig. 16.

$$\frac{CB}{AC} = \frac{B'B - B'C}{OB' - OA'} = \frac{B'B - A'A}{OB' - OA'},$$

dove $B'B$ e $A'A$, OB' ed OA' sono rispettivamente le ordinate e le ascisse dei punti B, A.

(*) Qui si tratta di una facile estensione del concetto di limite. Noi diciamo che la retta AB tende a una posizione AP, se l'angolo di AB ed AP tende a zero. Dicendo poi che B si avvicina ad A, vogliamo dire che, se la curva è rappresentata da una equazione $y = f(x)$, noi cerchiamo la posizione limite di AB per $x_2 = x_1$ (essendo x_1, x_2 le ascisse di A e di B).

Siano x_0 ed x_0+h le ascisse OA', OB' dei punti A, B. Le corrispondenti ordinate $A'A$, $B'B$ saranno $f(x_0)$, $f(x_0+h)$, cosicchè il coefficiente angolare della nostra retta è

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

come del resto si poteva trarre direttamente da note formole di Geometria analitica.

E per la definizione precedente avremo che il coefficiente angolare della retta tangente in A esiste ed è uguale a

$$\lim_{h=0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

se questo limite esiste. Se noi vogliamo tener conto che x_0 può avere un valore qualsiasi dell'intervallo che si considera, possiamo scrivere x al posto di x_0, e dire così:

La retta tangente alla curva $y=f(x)$ *nel punto di ascissa* x *ha per coefficiente angolare il* $\lim\limits_{h=0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

§ 49. — **Derivata.**

α) Sia $f(x)$ una funzione reale.

Nei due precedenti §§ si è presentato il rapporto

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Il denominatore e il numeratore sono il primo la differenza di due valori della variabile indipendente x, l'altro la differenza dei due valori corrispondenti della funzione $f(x)$. Perciò si suol anche porre (ricordando la lettera iniziale della parola: *differenza*)

$$h=(x+h)-x=\Delta x,$$
$$f(x+h)-f(x)=\Delta f.$$

Il primo sarà detto *incremento* della x, l'altro *incremento* della $f(x)$. Il rapporto

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

viene perciò anche chiamato *rapporto incrementale.*

In entrambi i problemi precedentemente trattati, si è trovato necessario di calcolare il

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h=0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Questo limite, se esiste ed è finito, ha ricevuto il nome di derivata della funzione $f(x)$ nel punto x; esso è una funzione di x, che si suole indicare con $f'(x)$.

Se è posto $y = f(x)$, questo limite, se esiste, si indica brevemente anche con y' senz'altro, o con y'_x, se si vuol mettere in evidenza la variabile x rispetto alla quale si deriva (*).

Se il punto x che si esamina è all'estremo sinistro (destro) dell'intervallo, in cui $f(x)$ è definita, è sottinteso che h tende a zero per valori positivi (negativi); se invece il punto x è interno a tale intervallo, si dice che la funzione $f(x)$ ha in tal punto la derivata $f'(x)$ soltanto se il $\lim\limits_{\Delta x=0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ esiste, ed è sempre lo stesso, sia che h tenda a zero per valori positivi, sia che h tenda a zero per valori negativi.

Di più, quando diremo che esiste la derivata $f'(x)$, noi supporremo sempre che il nostro limite abbia valore finito (sebbene si parli talvolta anche di *derivate infinite*). I risultati dei precedenti paragrafi si possono perciò anche enunciare così:

1° Se $y = f(x)$ è lo spazio percorso da un punto M mobile su una retta in x unità di tempo, allora la derivata $y' = f'(x)$ di $f(x)$ ci dà la velocità del punto M all'istante x (dopo che sono trascorse x unità di tempo).

2° La retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto di ascissa x ha per coefficiente angolare $y' = f'(x)$.

Così, p. es., la derivata di $y = a x^2$ ($a =$ cost.) è

$$\lim_{h=0} \frac{a(x+h)^2 - a x^2}{h} = \lim_{h=0} \frac{2axh + ah^2}{h} =$$

$$= \lim_{h=0} (2ax + ah) = 2ax.$$

Quindi: Se un punto in x minuti secondi percorre ax^2 metri, la sua velocità (misurata in metri secondi) dopo x secondi è

(*) Cioè la variabile, alla quale si è dato l'incremento *arbitrario* h, che si fa tendere a zero. L'arbitrarietà di h è naturalmente limitata dalla sola condizione che i punti $x, x+h$ appartengono al campo, in cui la $f(x)$ è definita.

$2\,ax$. (Da ciò si deduce il risultato del penultimo paragrafo ponendo $a = \frac{1}{2}\,g = 4{,}905$).

La retta tangente alla parabola $y = a\,x^2$ nel punto di ascissa x, ha per coefficiente angolare $2\,a\,x$.

β) Un teorema di importanza specialmente teorica è il seguente:

Se una funzione f(x) *ha in un punto* x_0 *derivata (finita), essa è continua in tale punto.*

Infatti dalla

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

si trae

$$\lim_{h=0} [f(x_0+h)-f(x_0)] = \lim_{h=0} h\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h=0} h \lim_{h=0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0.f'(x_0) = 0$$

ossia

$$\lim_{h=0} f(x_0+h) = f(x_0). \qquad \text{c. d. d.}$$

Il teorema reciproco non è vero; esistono funzioni continue senza derivata, per quanto tutte le funzioni, che può incontrare il tecnico nei suoi studi, sieno derivabili nei punti non singolari (*).

γ) Chiuderemo questo paragrafo con alcune osservazioni sulla equazione della retta tangente ad una curva. Si tratta di osservazioni evidenti, sebbene talvolta io mi sia accorto della difficoltà incontrata da molti studenti a scrivere tale equazione in modo corretto.

Il punto di ascissa x_0 sulla curva $y = f(x)$ ha per ordinata $y_0 = f(x_0)$. [Con $f(x_0)$ si indica, come è noto, il valore di $f(x)$ quando alla variabile x si dà il valore x_0]. Il coefficiente angolare della tangente corrispondente è $f'(x_0)$ (**). Ora, affinchè la retta passante per il punto (x_0, y_0) e un altro punto (x, y) abbia il coefficiente angolare $f'(x_0)$ è condizione necessaria e sufficiente che $y - y_0 = (x - x_0) f'(x_0)$. Questa è dunque l'equazione della retta tangente alla curva $y = f(x)$ in quello dei suoi punti, che ha per ascissa x_0. Si noti:

1° La y che figura in questa equazione è l'ordinata di un punto mobile sulla tangente ed è perciò *completamente distinta* dalla $y = f(x)$, ordinata di un punto mobile sulla data curva.

2° Siccome il punto (x_0, y_0) appartiene per ipotesi alla nostra curva, la y_0 è precisamente il valore assunto dalla $f(x)$, quando alla variabile x si dà il valore x_0. Così pure $f'(x_0)$ è il valore di $f'(x)$ nel punto $x = x_0$.

Così, p. es., l'equazione della tangente alla curva $y = ax^2$ nel punto di ascissa x_0 è $(y - y_0) = 2\,a\,x_0(x - x_0)$, ossia (poichè $y_0 = a\,x_0^2$) è $y + y_0 = 2\,a\,x_0 x$.

(*) È facile riconoscere che una funzione può essere continua in un punto $y = a$, senza essere derivabile in tale punto. Basti pensare alle funzioni $f(x)$ tali che la curva $y = f(x)$ abbia per $x = a$ un punto *angolare*.

Ma sono stati dati esempi di funzioni continue in tutto un intervallo, sprovviste di derivata in *ogni* punto di tale intervallo.

(**) E non già $f'(x)$. Si osservi del resto che la $y - y_0 = (x - x_0) f'(x)$ *non* è generalmente l'equazione di una retta, e tanto meno della retta tangente, perchè non è neanche lineare (di primo grado) nelle x, y.

δ) Sia data una curva $y = f(x)$ definita in un intorno destro o sinistro di ∞; poniamo, p. es., nell'intorno $(a, +\infty)$ di ∞. La retta tangente nel punto di ascissa x_0 ha per equazione

$$y - y_0 = (x - x_0)\, f'(x_0) \text{ ossia } y = x\, f'(x_0) + [f(x_0) - x_0\, f'(x_0)].$$

Se per $x_0 = \infty$ le $f'(x_0)$ e $f(x_0) - x_0 f'(x_0)$ hanno limiti finiti m, n la retta che ha per equazione $y = mx + n$ si dirà *asintoto* della curva, nel punto di ascissa infinita (e si considererà come la posizione limite della tangente considerata per $x_0 = \infty$).

Così pure, se $f(x)$ è definita per $x \neq a$, e se, quando x_0 è in un intorno di a, si ha $f'(x_0) \neq 0$, allora l'equazione della tangente nel punto di ascissa x_0 si può scrivere:

$$\frac{y}{f'(x_0)} - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x - x_0.$$

Se è $\lim\limits_{x_0 = a} f(x_0) = \infty$, $\lim\limits_{x_0 = a} f'(x_0) = \infty$, $\lim\limits_{x_0 = a} \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0$ (*), allora la retta che ha l'equazione $x - a = 0$ [che si deduce dalla precedente passando al limite per $x_0 = a$] si chiama ancora un *asintoto* della nostra curva *nel punto di ascissa* a.

Così, p. es., la curva $xy = 1$ ha per tangente nel punto di ascissa x_0 la retta

$$y - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0).$$

Passando al limite per $x_0 = 0$ e per $x_0 = \infty$ si trova che asintoti di tali curve sono le rette $x = 0$, $y = 0$, ossia gli assi coordinati.

Esempi.

1° Sia $y = f(x)$ una funzione continua e non negativa per $a \leqq x \leqq b$. Consideriamo la figura piana (fig. 17) racchiusa tra l'asse delle x, la curva $y = f(x)$, e le perpendicolari all'asse delle ascisse innalzate dal punto A di ascissa a e dal punto B di ascissa variabile $x > a$.

Ad una tale figura daremo il nome di *rettangoloide*.

(*) Si potrebbe dare a queste condizioni (non tutte tra loro indipendenti) una forma che almeno apparentemente fosse meno restrittiva.

Dimostreremo altrove che questa figura possiede un'area (che cioè le sue aree esterna ed interna sono uguali).

Ed anche senza ammettere tale teorema, il lettore noti che le seguenti considerazioni (da noi svolte per l'*area* di tale rettangoloide) *valgono del resto tanto per l'area esterna che per l'area interna* (cfr. § 7, pag. 25).

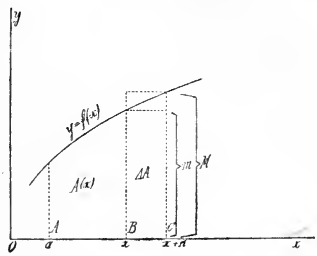


Fig. 17.

Tale area sarà una funzione $A(x)$ dell'ascissa variabile x. Noi non sappiamo per ora calcolare tale area, qualunque sia la funzione $f(x)$, ma, come ora vedremo, sappiamo in ogni caso calcolarne la derivata $A'(x)$.

Per calcolare tale derivata, diamo alla x un incremento positivo h (ad identico risultato si giunge con ragionamenti analoghi se $h < 0$).

L'incremento $\Delta A = A(x+h) - A(x)$ ricevuto dalla nostra area sarà l'area del rettangoloide limitato dall'asse delle x, dalla nostra curva, e dalle ordinate dei punti B e C di ascisse x ed $x+h$. Se in questo intervallo la $f(x)$ conservasse un valore costante, la curva $y = f(x)$, sarebbe in questo intervallo un segmento parallelo all'asse della x; la nostra figura sarebbe un rettangolo di base h e di altezza $y = f(x)$, cosicchè la sua area ΔA sarebbe uguale ad $hf(x)$. Ma $f(x)$ può variare nel nostro intervallo da un minimo m ad un massimo M; cosicchè la nostra figura contiene all'interno il rettangolo di base h ed altezza m, ed è contenuta nel rettangolo di base h ed altezza M. La sua area ΔA è perciò compresa tra i numeri hm ed hM, ossia sarà uguale ad $h\mu$, essendo μ il valore assunto dalla $f(x)$ in un punto $x+\lambda$ dell'intervallo $(x, x+h)$. Dalla

$$\Delta A = hf(x+\lambda)$$

abbiamo

$$\frac{\Delta A}{h} = f(x+\lambda)$$

cosicchè

$$A'(x) = \lim_{h=0} \frac{\Delta A}{h} = \lim_{h=0} f(x+\lambda) = \lim_{\lambda=0} f(x+\lambda) = f(x).$$

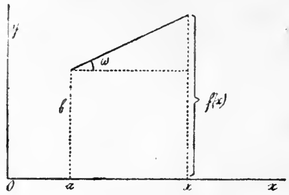


Fig. 18.

α) Sia, p. es,, la curva $y = f(x)$ (fig. 18) la retta uscente del punto di ascissa a ed ordinata b col coefficiente angolare m; sia cioè $f(x) = b + m\,(x - a)$ dove $m = \operatorname{tg}\omega$, essendo ω il solito angolo della retta con l'asse delle x. L'area della nostra figura (un trapezio) è

$$\frac{b + f(x)}{2}(x - a) = b\,(x - a) + \frac{m}{2}(x - a)^2.$$

Ne deduciamo che la derivata di

$$b\,(x - a) + \frac{m}{2}(x - a)^2$$

è $b + m\,(x - a)$: ciò che si può dimostrare direttamente col metodo di pag. 162.

β) Sia ora la curva $y = f(x)$ un arco di cerchio col centro nell'origine e raggio R. Dalla equazione $x^2 + y^2 = R^2$ di questo cerchio si trae $y = f(x) = +\sqrt{R^2 - x^2}$ (fig. 19). L'area racchiusa tra l' asse delle x, il cerchio, l'ordinata (di lunghezza nulla) di ascissa $-R$ e l'ordinata di ascissa variabile x è data da $(\pi - \alpha)\,R\,\frac{R}{2} + \frac{xy}{2}$, dove α (cfr. fig. 19) è l'arco minore di π che ha per coseno $\frac{x}{R}$,

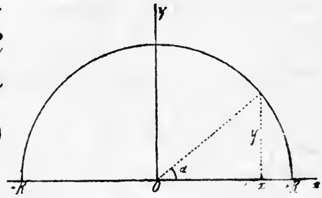


Fig. 19.

o, come si suol dire, $\alpha = \arccos\frac{x}{R}$ ed $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Quindi la derivata di

$$\left(\pi - \arccos\frac{x}{R}\right)\frac{R^2}{2} + \frac{1}{2}\,x\sqrt{R^2 - x^2} \quad (0 \leqq \operatorname{arc}\cos x \leqq \pi) \text{ è}$$

uguale a $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

γ) Infine, se $f(x) = \frac{1}{x}$ e quindi la curva $y = \frac{1}{x}$ è un'iperbole equilatera con gli assi coordinati per asintoti, noi sappiamo (§ 38, es. 3°, pag. 128) che $A(x) = \log_e \frac{x}{a}$. Quindi la derivata di $\log_e \frac{x}{a}$ e in particolare di $\log_e x$ vale $\frac{1}{x}$.

2° Sia dato un solido S. Esista e sia $y = f(x)$ il volume di quella porzione di S che è racchiusa tra un certo piano fisso π, e un piano parallelo π' posto alla distanza x dal precedente. L'*area* della sezione s fatta da π' in S esista, e sia una funzione $F\ (x)$ continua della x. Dimostreremo che $f'(x) = F(x)$.

Oss. Ammettiamo il teorema che il volume dello strato di S, che è compreso tra due piani π_1 e π_2 qualsiasi paralleli a π sia compreso tra i prodotti della distanza di questi due piani per i valori massimo e minimo dell'area d'una sezione fatta in S da un piano parallelo a π_1 od a π_2. Questo teorema, che troveremo più tardi dimostrato in generale, è evidente se, p. es., S è una sfera, o un ellissoide avente π per piano di due assi, o una piramide avente la base parallela a π e tale che il piede dell'altezza sia interno alla base, ecc. A tutti questi solidi il nostro ragionamento è quindi applicabile senza necessità di ammettere alcun teorema non dimostrato.

Ris. Se π', π'' sono due piani paralleli a π, il volume $f(x+h) - f(x)$ dello strato limitato in S da π' e da π'' è, per l'osservazione precedente, compreso tra hM ed hm, se con M e con m indichiamo rispettivamente il massimo ed il minimo valore di $F(x)$ nell'intervallo $(x, x+h)$.

E col metodo tante volte usato si deduce

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = F(x).$$

L'allievo controlli questo risultato nei casi su citati che S sia una sfera, od una piramide, calcolando effettivamente $f(x)$ e $F(x)$.

Varie e molteplici sono le applicazioni della definizione di derivata di una funzione $f(x)$ e in moltissimi problemi la considerazione di $f'(x)$ si presenta spontanea. Perciò assai importanti sono i problemi fondamentali del calcolo:

1° Trovare la derivata di una funzione data.

2° Trovare le funzioni, che hanno una derivata assegnata.

Del primo si occupa il calcolo differenziale, del secondo il calcolo integrale.

§ 50. — Estensione alle funzioni complesse.

α) Se $y = f(x) = u(x) + i\,v(x)$ è una funzione *complessa* della variabile reale x, chiameremo derivata di x e indicheremo con $y' = f'(x)$ ancora il

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

quando questo limite esiste ed è finito. Ciò che avviene allora e allora soltanto che esistono e sono finite le $u'(x), v'(x)$; ed è in tal caso

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x).$$

β) In casi *estremamente particolari* si conviene talvolta di considerare delle variabili complesse Z come funzioni di un'altra variabile pure complessa z; tale convenzione si pone per una Z che sia uguale a una serie convergente, di cui lo $(n+1)^{esimo}$ termine sia il prodotto di una costante k_n per z^n o per $\frac{1}{z^n}$ (o più generalmente per $[z-\alpha]^n$, dove α è una costante). Di ciò parleremo più a lungo in altro capitolo. Qui ci basterà considerare il caso particolare che i termini di tale serie dopo lo $(n+1)^{esimo}$ siano nulli, ossia brevemente che Z sia un polinomio:

$$(1) \qquad Z = a_n + a_{n-1}z + a_{n-2}z^2 + \ldots.. + a_0 z^n = P(z).$$

Anche nel campo delle variabili complesse chiameremo derivata e indicheremo con Z' il limite del rapporto incrementale (se esiste). Per la funzione (1) tale derivata *esiste e si calcola, come se si trattasse di variabili reali.* Infatti

$$Z' = \lim_{h=0} \frac{P(z+h) - P(z)}{h} = \sum_{j=1}^{n} a_j \lim_{h=0} \frac{(z+h)^j - z^j}{h}.$$

Si noti che h si deve considerare come un numero complesso $m + in$. Il limite per $h = 0$ significa il limite per $m = n = 0$. Si noti che

$$\frac{(z+h)^j - z^j}{h} = \frac{(z+h)^j - z^j}{(z+h) - z} = (z+h)^{j-1} + z(z+h)^{j-2} + z^2(z+h)^{j-3} + \ldots + z^{j-1}.$$

E per $h = 0$ questa espressione ha per limite proprio $j\,z^{j-1}$ (tanto se le a e le z sono reali, quanto se sono complesse), cosicchè in ogni caso

$$Z' = P'(z) = na_0 z^{n-1} + (n-1)\, a_1 z^{n-1} + \ldots\ldots + 2\, a_{n-2}\, z + a_{n-1}.$$

Salvo avvertenza contraria in quanto segue ci riferiremo esclusivamente a variabili reali.

§ 51. — Derivate fondamentali.

α) Sia $y =$ cost. (p. es. $y = 3$, oppure $y = 5$). Vale a dire la y non varii al variare della x. Gli incrementi Δy della y saranno sempre nulli; è quindi costantemente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, e perciò anche $y' = \lim\limits_{\Delta x = 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

Ciò che del resto è geometricamente intuitivo, poichè $y =$ cost. è una retta parallela all'asse delle x.

Le sue tangenti coincidono quindi con essa, e perciò hanno coefficiente angolare y' nullo.

β) Si trovi la derivata di $y = \operatorname{sen} x$.

Il rapporto incrementale è $\dfrac{\operatorname{sen}\,(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$; e perciò

$$y' = \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \operatorname{sen} x \lim_{h=0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} =$$

$$= 0 . \operatorname{sen} x + 1 . \cos x = \cos x.$$

Si ricordi che al § 37, p. 122-123, si è dimostrato $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$, $\lim\limits_{h=0} \dfrac{1 - \cos h}{h} = 0$.

γ) Si trovi la derivata di $y = \cos x$.

In modo analogo al precedente si trova:

$$y' = \lim_{h=0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h=0} \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h} =$$

$$= \cos x \lim_{h=0} \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = - \operatorname{sen} x.$$

δ) Si trovi la derivata di $y = a^x$ $(a > 0)$.

Si ha

$$y' = \lim_{h=0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h=0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h=0} \frac{a^h - 1}{h} =$$

$$= a^x \log_e a \text{ (cfr. § 38, pag. 127).}$$

In particolare la derivata di $y = e^x$ è uguale a

$$y' = e^x \log_e e = e^x.$$

ε) Si trovi la derivata di $y = \log_a x$ $(a > 0)$ $(x > 0)$.

Si ha $y' = \lim\limits_{h=0} \dfrac{\log_a (x + h) - \log_a x}{h}$.

Posto $h = \dfrac{x}{m}$, ossia posto $m = \dfrac{x}{h}$, se ne deduce:

$$y' = \lim_{m=\infty} \frac{\log_a \left(x + \frac{x}{m}\right) - \log_a x}{x : m} = \frac{1}{x} \lim_{m=\infty} m \log_a \frac{x + \frac{x}{m}}{x} =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{m=\infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \log_a e.$$

In particolare, se $a = e$, si ha che la derivata di $y = \log_e x$ è $y' = \dfrac{1}{x}$: ciò che del resto avevamo già trovato (pag. 166, es. 1°, γ) per via geometrica.

λ) Derivare $y = x^n$ (n intero positivo).

Ris. Si noti che

$$(x + h)^n = x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} h^2 x^{n-2} + \ldots..$$

Si troverà $y' = nx^{n-1}$.

η) Derivare $y = \sqrt{x}$.

Si ha

$$y' = \lim_{h=0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim \frac{(x+h) - x}{h \{ \sqrt{x+h} + \sqrt{x} \}}.$$

Si trova $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

θ) Derivare $y = \mathrm{tg}\, x$.

Ris. Il rapporto incrementale è

$$\frac{\mathrm{tg}\,(x + h) - \mathrm{tg}\, x}{h} = \frac{1}{\cos x \cos (x + h)} \frac{\mathrm{sen}\, h}{h}.$$

Si trova $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Derivare $x = \mathrm{cotg}\, x$.

Si trova $y' = -\dfrac{1}{\mathrm{sen}^2 x}$.

La derivata di $y = sh\, x$ vale $ch\, x$; e quella di $y = ch\, x$ vale $sh\, x$ (e *non* $- sh\, x$) (cfr. pag. 133).

§ 52. — Infinitesimi e infiniti.

α) Se α ed h sono numeri piccoli, allora secondo che il rapporto $\dfrac{\alpha}{h}$:

1° è piccolissimo;
2° è estremamente grande;
3° non è nè piccolissimo, nè grandissimo;

noi diciamo rispettivamente che:

1° α è di un ordine di piccolezza maggiore di quello di h;
2° α è di un ordine di piccolezza minore di quello di h;
3° α ed h sono di uno stesso ordine di piccolezza.

Così, p. es., per chi si occupa di lunghezze di qualche chilometro, tanto un millimetro, che la lunghezza d'onda della luce rossa, sono lunghezze piccole. La seconda è però molto più piccola della prima, e perciò diciamo che essa è di un ordine di piccolezza maggiore.

Così, p. es., quando diciamo che le lunghezze d'onda di un raggio verde e di un raggio azzurro sono dello stesso ordine di piccolezza, vogliamo dire che il loro rapporto non è nè un numero enorme, nè un numero piccolissimo.

Tutte queste locuzioni hanno naturalmente un significato poco preciso, perchè poco preciso è il significato delle parole: « piccolissimo », « grandissimo ». Noi, però, partendo dalle idee intuitive contenute in dette frasi, poniamo le seguenti definizioni precise.

Sia h un infinitesimo, cioè una variabile che tenda a zero, e supponiamo che non assuma il valore zero (*).

Sia poi β un altro infinitesimo che tenda a zero con h. Consideriamo il rapporto $\frac{\beta}{h}$ e poi il

$$\lim_{h=0} \frac{\beta}{h},$$

se h è la variabile indipendente, e β funzione di h.

Se invece x fosse la variabile indipendente, e β ed $\alpha = h$ fossero funzioni della x infinitesime per $x = b$, alla considerazione di questo limite si sostituerebbe quella del

$$\lim_{x=b} \frac{\beta}{h} = \lim_{x=b} \frac{\beta}{\alpha}.$$

Secondo che questo limite

1° non esiste;
2° esiste ed è una quantità finita e diversa da zero;
3° esiste ed è zero;
4° esiste ed è infinito;

noi diremo rispettivamente che:

1° *i due infinitesimi* β *e* h *non sono paragonabili;*
2° β *ed* h *sono infinitesimi dello stesso ordine;*
3° β *è un infinitesimo d'ordine superiore ad* h;
4° β *è un infinitesimo d'ordine inferiore ad* h.

Esempi.

1° h e $\beta = h \operatorname{sen} \frac{1}{h}$ sono (per $h = 0$) infinitesimi non paragonabili, perchè $\lim_{h=0} \frac{\beta}{h} = \lim_{h=0} \operatorname{sen} \frac{1}{h}$ *non esiste*, poichè, mentre h tende a zero, $\operatorname{sen} \frac{1}{h}$ oscilla sempre da $+1$ a -1 e da -1 a $+1$;

(*) Può darsi che h sia la variabile indipendente, od anche che h sia funzione di un'altra variabile x, che tenda a zero, p. es., per $x = b$. In questo secondo caso non potrebbe però essere, p. es., $h = (x - b) \operatorname{sen} \frac{1}{x-b}$, perchè h assumerebbe infinite volte il valore zero, mentre x si avvicina a b (cioè in ogni intorno del punto $x = b$).

2° h e $\beta = \operatorname{sen} h$ sono per $h = 0$ infinitesimi dello stesso ordine, perchè $\lim\limits_{h=0} \frac{\beta}{h} = \lim\limits_{h=0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$;

3° Se $\beta = h^2$, è $\lim\limits_{h=0} \frac{\beta}{h} = \lim\limits_{h=0} h = 0$; cosicchè (per $h = 0$) β è un infinitesimo d'ordine superiore ad h;

4° Se $\beta = \sqrt{h}$, β per $h = +0$ è infinitesimo d'ordine inferiore ad h, perchè $\lim\limits_{h=+0} \frac{\beta}{h} = \lim\limits_{h=0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim\limits_{h=+0} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$.

Evidentemente se α è un infinitesimo d'ordine superiore a β, e β è di ordine superiore a γ, allora α è di ordine superiore a γ, perchè

$$\lim \frac{\alpha}{\gamma} = \lim \frac{\alpha}{\beta} \lim \frac{\beta}{\gamma} = 0.$$

Se esiste un numero positivo k tale che il rapporto $\frac{a}{h^k}$ abbia un limite finito e diverso da zero, allora α è infinitesimo dello stesso ordine di h^k. Si suol dire allora che *α è un infinitesimo di ordine k* (rispetto ad h). Per esempio, $\operatorname{sen} h$ è un infinitesimo di 1° ordine per l'es. 2°; h^k $(k > 0)$ è un infinitesimo di ordine k; $1 - \cos h$ è un infinitesimo di 2° ordine, perchè:

$$\lim_{h=0} \frac{1 - \cos h}{h^2} = \lim_{h=0} \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{h}{2}}{h^2} = \frac{1}{2} \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{h}{2}}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h=0} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{1}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot$$

Quest'ultima definizione non è contraddittoria con le precedenti.

β) Considerazioni affatto simili valgono per gli infiniti, ossia per le quantità che tendono a ∞.

Se α, β sono quantità che tendono contemporaneamente a ∞, si dirà che:

1° *α e β non sono paragonabili;*

2° *α e β sono infiniti dello stesso ordine;*

3° α *è infinito di ordine superiore a* β;
4° α *è infinito di ordine inferiore a* β *secondo che:*

1°) $\lim \frac{\alpha}{\beta}$ non esiste,

2°) $\lim \frac{\alpha}{\beta}$ è finito e diverso da zero,

3°) $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$,

4°) $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$.

Le considerazioni precedenti hanno un grande interesse, perchè in molti problemi è lecito trascurare gli infinitesimi di ordine superiore. Eccone qui un primo esempio. Un altro esempio assai più importante sarà dato più avanti.

Se $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *sono funzioni della* x *infinitesime per* $x = b$, *se* γ, δ *sono rispettivamente di ordine superiore ad* α *e* β, *allora per trovare il*

$$\lim_{x=b} \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

si possono trascurare questi infinitesimi γ, δ *di ordine superiore, ossia*

$$\lim \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \lim \frac{\alpha}{\beta}. \qquad (*)$$

Infatti

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{1+\frac{\gamma}{\alpha}}{1+\frac{\delta}{\beta}}.$$

Poichè $\lim \frac{\gamma}{\alpha} = \lim \frac{\delta}{\beta} = 0$, è $\lim\limits_{x=b} \frac{1+\frac{\gamma}{\alpha}}{1+\frac{\delta}{\beta}} = 1$, c. d. d.

(*) Si potrebbe anche supporre che γ e δ fossero entrambi di ordine superiore rispetto ad α oppure a β.

Basta osservare che $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \frac{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}}{1+\frac{\delta}{\beta}} = \frac{1+\frac{\gamma}{\alpha}}{\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\delta}{\alpha}}$, ecc.

§ 53. — Differenziali.

α) Poichè $f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, si avrà, posto $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = \varepsilon$, che $\lim_{h=0} \varepsilon = 0$. Cioè ε è infinitesimo per $h = 0$. La ε è stata definita per tutti i valori di $h \neq 0$ (perchè h figura al denominatore delle precedenti formole) (*). Noi converremo di porre $\varepsilon = 0$ quando $h = 0$. E la ε resterà così definita per ogni valore possibile di h. Si ha per definizione

$$\Delta f = f(x+h) - f(x); \quad \Delta x = h; \quad \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Donde $\Delta f = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Delta x = [f'(x) + \varepsilon] \Delta x = \Delta x f'(x) + \varepsilon \Delta x$.

E, posto $\varepsilon \Delta x = \alpha$, si ha

$$\Delta f = f'(x) \Delta x + \alpha \tag{1}$$

dove α è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad h, perchè $\lim_{h=0} \frac{\alpha}{h} = \lim_{h=0} \frac{\varepsilon \Delta x}{h} = \lim_{h=0} \varepsilon = 0$. Invece $f'(x) \Delta x$ (se $f'(x) \neq 0$), è un infinitesimo dello stesso ordine di h.

Allora si potrà dire, per l'uguaglianza (1), che l'incremento Δf ricevuto dalla funzione $f(x)$ è uguale al prodotto della derivata della funzione $f(x)$ per l'incremento Δx della variabile, più un infinitesimo α di ordine superiore (rispetto ad $h = \Delta x$).

La prima parte del secondo membro della (1), cioè $f'(x) \Delta x$, si suole indicare col simbolo df e si chiama il *differenziale* della funzione $f(x)$; cioè il *differenziale di una funzione* f (x) *è uguale alla derivata della funzione moltiplicata per l'incremento della variabile.*

Il differenziale dipende dunque non solo dalla x, ma anche dall'incremento $h = \Delta x$ della variabile x e, se $f'(x) \neq 0$, è un infinitesimo dello stesso ordine di h.

La (1), che può anche scriversi $\Delta f = df + \alpha$, sdoppia Δf nella somma df e di α: i quali (se $f' \neq 0$), sono rispettivamente di ordine uguale e superiore a Δx. Essa vale anche per $\Delta x = 0$, poichè per $\Delta x = 0$ è $\alpha = \varepsilon \Delta x = 0$.

(*) Supposto naturalmente in più che $x + h$ appartenga all'intervallo, ove esiste la $f(x)$.

β) Vediamo che cosa rappresenta geometricamente il differenziale. Sia data una curva di equazione

$$y = f(x).$$

Siano NM, QS le ordinate dei punti M e S della curva che corrispondono ai valori x e $x + h$ della variabile (fig. 20).

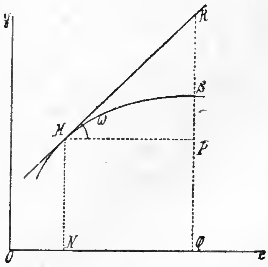


Fig. 20.

Sia P il punto d'incontro della SQ con la parallela per M all'asse delle x; sia poi R il punto d'incontro della SQ con la tangente alla curva nel punto M, ed ω sia l'angolo formato da questa tangente con la MP, ossia con l'asse x. L'incremento h che riceve la variabile indipendente x sarà

$$\Delta x = NQ = MP.$$

Abbiamo visto che la derivata $f'(x)$ della funzione $f(x)$ è uguale al coefficiente angolare della tangente alla curva, ossia che

$$f'(x) = \operatorname{tang} \omega;$$

ma il differenziale è

$$df = f'(x) \, \Delta x;$$

quindi

$$df = \Delta x \operatorname{tang} \omega.$$

Ora Δx misura il cateto MP del triangolo rettangolo MPR, quindi $df = \Delta x \operatorname{tang} \omega = PR$. Dunque *il differenziale è rappresentato dal segmento* PR *compreso tra la parallela condotta per il punto* M *all'asse delle* x *e* **la tangente** *alla curva nel punto* M.

L'incremento Δf che riceve la funzione quando alla variabile x si dà l'incremento h, sarà dato dalla differenza tra il valore della funzione nel punto $x + h$, valore che nella figura è rappresentato dal segmento QS e il valore della funzione nel punto x (valore che nella figura è rappresentato dal segmento NM); dunque

$$\Delta f = QS - NM = QS - QP = PS;$$

cioè l'incremento Δf *che riceve la funzione* f (x), *quando si dà alla variabile* x *l'incremento* Δx, *è rappresentato dal segmento* PS *compreso tra la parallela all'asse delle* x *condotta per il punto* M *di ascissa* x *e* **la curva** y = f (x).

Se $f(x) = x$, la derivata di x è 1; e quindi

$$df = dx = 1 \, . \, \Delta x = \Delta x,$$

cioè *il differenziale di* x *è uguale all'incremento di* x.

Si potrà così scrivere in generale:

$$df = f'(x)\,dx,$$

cioè *il differenziale della funzione* f(x) *è uguale alla sua derivata moltiplicata per il differenziale della variabile indipendente* x.

Se ne deduce $$f'(x) = \frac{df}{dx},$$

cioè *la derivata di una funzione* $f(x)$ *è uguale al rapporto tra il differenziale della funzione e quello della variabile indipendente* x.

§ 54. — **Metodi abbreviati di esposizione.**

In molti trattati (specialmente di scienze applicate) si scrive spesso df al posto di Δf. Rigorosamente ciò è lecito, soltanto se $df = \Delta f$ cioè (§ 53, pag. 176) *se la curva coincide con la sua tangente*, ossia è una retta ed f è quindi una funzione lineare di x.

Il sostituire df a Δf equivale così a sostituire nell'intervallo $(x, x + dx)$ alla curva $y = f(x)$ la sua tangente nel suo punto di ascissa x, ossia a considerare la $f(x)$ come una funzione lineare $mx + n$ della x in tale intervallo, in altre parole a considerare in un tale intervallo $f'(x)$ come una costante m.

Il sostituire df a Δf equivale a trascurare un infinitesimo di ordine superiore rispetto a dx: e già abbiamo detto che in qualche studio il trascurare siffatti infinitesimi non conduce ad errori.

Il procedere in questo modo permette di esporre molti ragionamenti in modo specialmente semplice e rapido; così si può procedere senza tema d'errori, quando si riguardino tali esposizioni soltanto come procedimenti abbreviati, che hanno significato logico solo quando si può dar loro quella forma precisa, a cui conducono le nostre definizioni.

Il modo più semplice di chiarire questi metodi abbreviati di locuzione sarà quello di trattare con essi alcuni degli esempi svolti ai §§ 47, 49. Sia (§ 47, pag. 158), p. es., $y = f(x)$ lo spazio percorso da un punto mobile all'istante x. Se ne determini la velocità $F(x)$ allo stesso istante. Nell'intervallo infinitesimo $(x, x + dx)$ si può *considerare come costante la velocità* $F(x)$ cosicchè lo spazio $f(x + dx) - f(x) = df$ percorso in detto intervallo sarà uguale al prodotto $F(x)\,dx$ della velocità $F(x)$

per il tempo dx impiegato a percorrerlo; cosicchè $\frac{df}{dx} = F(x)$, ossia la velocità $F(x)$ vale la derivata di $f(x)$.

A chi volesse considerare questo procedimento come un ragionamento vero e proprio, si obbietterebbe che due sono gli errori commessi:

α) quello di considerare $F(x)$ costante nell'intervallo $(x, x+dx)$;

β) quello di porre $f(x+dx) - f(x) = df$, anzichè

$$f(x+dx) - f(x) = \Delta f;$$

ossia di confondere il differenziale df con l'incremento Δf.

Il ragionamento rigoroso fatto al § 47 dimostra che *questi due errori si compensano*, almeno nel caso che $F(x)$ *sia funzione continua*. Si noti che considerare $F(x)$ come costante, o supporre $\Delta f = df$ equivale a scambiare la curva $y = f(x)$ con la sua tangente nel punto x; cosicchè in quanto precede si è scambiata due volte la curva con la sua tangente: ciò che rende intuitivo il perchè i due errori si siano compensati.

Es. Sia $A(x)$ l'area del rettangoloide racchiuso dalla curva

$$y = f(x) \ [f(x) \geqq 0],$$

dall'ordinata di ascissa a, dall'ordinata variabile di ascissa x, e dall'asse delle x.

Si voglia trovare $A'(x) = \frac{dA}{dx}$.

Nell'intervallo infinitesimo $(x, x+dx)$ la $f(x)$ *si può considerare come costante*; cosicchè *l'incremento*

$$dA = A(x+dx) - A(x),$$

che riceve l'area A nel passare dall'ordinata di ascissa x all'ordinata di ascissa $x+dx$, si può considerare come un rettangolo di base dx ed altezza $f(x)$. È quindi

$$dA = f(x)\,dx, \quad A'(x) = \frac{dA}{dx} = f(x).$$

Valgono anche per questo esempio osservazioni analoghe a quelle fatte per il precedente.

§ 55. — **Derivazione di una somma.**

α) La funzione $f(x)$ sia uguale alla somma

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots\ldots + \varphi_n(x)$$

delle n funzioni φ_i, che supponiamo derivabili.

Cerchiamo la derivata della $f(x)$. Supporremo $n = 2$. La dimostrazione vale però affatto analoga in generale.

Si ha per definizione

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h=0} \left\{ \frac{\{\varphi_1(x+h)+\varphi_2(x+h)\} - \{\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\}}{h} \right\} =$$

$$= \lim_{h=0} \left\{ \frac{\varphi_1(x+h)-\varphi_1(x)}{h} + \frac{\varphi_2(x+h)-\varphi_2(x)}{h} \right\} =$$

$$= \lim_{h=0} \frac{\varphi_1(x+h)-\varphi_1(x)}{h} + \lim_{h=0} \frac{\varphi_2(x+h)-\varphi_2(x)}{h} = \varphi'_1(x) + \varphi'_2(x).$$

Donde:

La derivata della somma di due o più funzioni, che posseggono derivata (finita), esiste ed è uguale alla somma delle derivate di queste funzioni.

Questo teorema vale anche per funzioni complesse (cfr. § 50).

β) Oss. 1ª. Un caso particolare del precedente teorema è evidentemente il seguente:

Le derivate di $y = \varphi(x)$ e di $y = \varphi(x) +$ cost. *sono uguali* (poichè la derivata di $y =$ cost. è nulla) (naturalmente, se esistono).

Si propone al lettore di illustrare geometricamente questo teorema, osservando che dalla curva $y = f(x)$ si passa alla $y = f(x) +$ cost. mediante una traslazione.

Nel caso che y sia lo spazio percorso da un punto mobile all'istante x, quale significato assume quest'osservazione?

Oss. 2ª. Un teorema affatto analogo al precedente vale per la differenza di due funzioni; in particolare la derivata di $-f(x)$ è $-f'(x)$.

§ 56. — Derivata del prodotto di due o più funzioni.

Siano $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due funzioni derivabili (e *quindi continue*). Vogliamo trovare la derivata della funzione prodotto

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x).$$

Essa sarà uguale al limite per $h = 0$ del rapporto incrementale

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\varphi(x+h)\,\psi(x+h) - \varphi(x)\,\psi(x)}{h}.$$

Aggiungendo e togliendo al numeratore $\varphi(x)\psi(x+h)$, tale rapporto diventa

$$\frac{\varphi(x+h)\psi(x+h)-\varphi(x)\psi(x+h)+\varphi(x)\psi(x+h)-\varphi(x)\psi(x)}{h}$$

che si può scrivere sotto la forma:

$$\psi(x+h)\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}+\varphi(x)\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}.$$

Il primo addendo è il prodotto di due fattori. Per $h=0$, il primo fattore tende a $\psi(x)$, perchè $\psi(x)$ è funzione continua; il secondo è il rapporto incrementale della funzione $\varphi(x)$, e quindi il suo limite per $h=0$ è la derivata $\varphi'(x)$ (che per ipotesi esiste ed è finita). Dunque il limite del primo addendo è $\psi(x)\varphi'(x)$. Analogamente si trova che il limite del secondo addendo è $\varphi(x)\psi'(x)$. Cosicchè il limite di tutta l'espressione, cioè la derivata della funzione $f(x)$, sarà

$$f'(x)=\varphi'(x)\psi(x)+\varphi(x)\psi'(x);$$

da cui il

Teorema. *La derivata della funzione* f (x) *prodotto di due altre funzioni* φ (x) e ψ (x) *che hanno la derivata finita, esiste e si ottiene moltiplicando la funzione* ψ (x) *per la derivata della funzione* φ (x), *poi moltiplicando* φ (x) *per la derivata della funzione* ψ (x) *e sommando i prodotti così ottenuti.*

Se uno dei fattori è costante, se p. es. $\varphi(x)=m$, essendo m una costante qualsiasi, allora $\varphi'(x)=0$; e la derivata di $m\,\psi(x)$, si riconosce uguale a $m\,\psi'(x)$.

Cioè: *la derivata del prodotto* $m\,\psi(x)$ ($m=$ cost.) *è* $m\,\psi'(x)$.

Questo teorema vale anche per funzioni complesse.

Osservazione.

Se $f(x)=\varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x)$, dove φ_1, φ_2, φ_3 sono funzioni derivabili, si ha:

$$f(x)=\psi(x)\varphi_3(x) \text{ dove si è posto } \psi(x)=\varphi_1(x)\varphi_2(x).$$

Quindi:

$$\psi'(x)=\varphi'_1(x)\varphi_2(x)+\varphi_1(x)\varphi'_2(x)$$
$$f'(x)=\psi'(x)\varphi_3(x)+\psi(x)\varphi'_3(x).$$

Sostituendo a $\psi(x)$, $\psi'(x)$ i valori dedotti dalle precedenti formole, si ha infine:

$$f'(x) = \varphi'_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x) + \varphi_1(x)\varphi'_2(x)\varphi_3(x) + \varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi'_3(x).$$

Studiando in modo simile i prodotti di n funzioni derivabili, si ha:

La derivata del prodotto di n *funzioni derivabili esiste ed è la somma degli* n *prodotti ottenuti moltiplicando la derivata di uno dei fattori per gli altri* n — 1 *fattori.*

Questo teorema vale anche per funzioni complesse.

§ 57. — **Derivata del quoziente di due funzioni.**

Ora cerchiamo la derivata di $y = \dfrac{1}{\psi(x)}$, supponendo che $\psi(x)$ sia una funzione differente da zero avente derivata finita. Avremo

$$y' = \lim_{h=0} \frac{\dfrac{1}{\psi(x+h)} - \dfrac{1}{\psi(x)}}{h} = \lim_{h=0} \frac{\psi(x) - \psi(x+h)}{h\,\psi(x)\,\psi(x+h)} =$$

$$= \lim_{h=0} \frac{-1}{\psi(x)\,\psi(x+h)} \quad \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h},$$

che è il limite del prodotto di due fattori.

La $\psi(x)$ è continua, perchè la sua derivata esiste (ed è finita); quindi $\psi(x+h)$ tende a $\psi(x)$ per $h = 0$, e perciò $\psi(x)\,\psi(x+h)$ tende a $[\psi(x)]^2$; dunque il limite del primo fattore è $-\dfrac{1}{[\psi(x)]^2}$.

Il secondo fattore è il rapporto incrementale della funzione $\psi(x)$ e il suo limite per $h = 0$ è la derivata $\psi'(x)$ (che esiste ed è finita); quindi:

$$y' = -\frac{1}{[\psi(x)]^2}\psi'(x);$$

cioè *per derivare la funzione* $\dfrac{1}{\psi(\mathrm{x})}$ *si divide la derivata della funzione* $\psi(\mathrm{x})$ *per il quadrato della funzione stessa e si cambia segno al quoziente.*

Ora, per il teorema sulla derivazione del prodotto di due funzioni, se $f(x)$ e $\psi(x)$ sono due funzioni continue aventi derivata finita, se $\psi(x) \neq 0$, e si pone $y = \frac{f(x)}{\psi(x)} = f(x) \frac{1}{\psi(x)}$, si ha:

$$y' = f'(x) \frac{1}{\psi(x)} - f(x) \frac{\psi'(x)}{[\psi(x)]^2},$$

ossia

$$y' = \frac{f'(x)\,\psi(x) - f(x)\,\psi'(x)}{[\psi(x)]^2};$$

cioè si ha il

TEOREMA. *La derivata del quoziente* $\frac{f(x)}{\psi(x)}$ *di due funzioni continue* ($\psi(x) \neq 0$) *che hanno derivata finita è una frazione il cui denominatore è il quadrato della funzione denominatore* $\psi(x)$, *e il cui numeratore si ottiene sottraendo dal prodotto della derivata* $f'(x)$ *del numeratore* $f(x)$ *per il denominatore* $\psi(x)$ *il prodotto della derivata* $\psi'(x)$ *del denominatore per il numeratore* $f(x)$.

Questo teorema vale anche per funzioni complesse.

ESEMPI.

1° La derivata di $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ è $\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$, cioè è $\frac{1}{\cos^2 x}$.

2° Nello stesso modo si prova che la derivata di $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ vale $-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$.

Questa formola si può anche dimostrare ricordando che $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, e usando poi del primo risultato di questo paragrafo.

§ 58. — Regola di derivazione delle funzioni inverse.

α) Tra le due variabili x ed y esista una corrispondenza *biunivoca*, in guisa cioè che ad ogni valore della x in un certo intervallo α corrisponda uno ed un solo valore della y di un certo altro intervallo β, e viceversa. Vale a dire la y si possa considerare come funzione $f(x)$ della x (per x appartenente all'intervallo α) e viceversa la x si possa considerare come funzione $\varphi(y)$ della y (per y appartenente all'intervallo β). In altre parole in tali intervalli le

$$y = f(x) \quad , \quad x = \varphi(y)$$

definiscano una stessa curva. Queste funzioni si diranno *inverse* l'una dell'altra. Così, p. es., avviene della coppia di funzioni

$$y = \log_a x \quad , \quad x = a^y \quad (a > 0\,;\ a \neq 1)$$

[intervallo $\alpha = (0, +\infty)$] [intervallo $\beta = (-\infty, +\infty)$]

$$y = \sqrt[n]{x} \qquad x = y^n \text{ (n intero positivo dispari)}$$

[intervallo $\alpha = (-\infty, +\infty)$] [intervallo $\beta = (-\infty, +\infty)$]

$$y = \sqrt[n]{x} \qquad x = y^n \text{ (n intero positivo pari)}$$

[intervallo $\alpha = (0, \infty)$] [intervallo $\beta = (0, +\infty)$].

(In questi intervalli si debbono trascurare gli estremi, eccetto l'estremo 0 dell'ultimo esempio).

Nell'ultimo esempio si suppone $x > 0$, affinchè il simbolo $\sqrt[n]{x}$ non sia privo di significato; e si suppone $y = \sqrt[n]{x} > 0$, perchè altrimenti a un valore della x corrisponderebbero due valori distinti per la y.

Supposte continue entrambe le $f(x)$, $\varphi(y)$, e supposto che $f'(x)$ esista e sia differente da zero, si vuol calcolare $\varphi'(y)$. Evidentemente per ipotesi l'incremento Δx dato alla x individua l'incremento Δy dato alla y; e viceversa. Di più (per la supposta continuità delle f, φ) gli incrementi Δx, Δy tendono contemporaneamente a zero (*). Ora:

$$\varphi'(y) = \lim_{\Delta y = 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y = 0} \frac{1}{\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x = 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Poichè $\lim\limits_{\Delta x = 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ esiste ed è uguale a $f'(x) \neq 0$, se ne deduce:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Cioè, nelle nostre ipotesi, *la derivata* $\varphi'(y)$ *è il numero reciproco di* $f'(x)$; *e viceversa.* Così, p. es., si verifica, posto

(*) Le ipotesi si possono ridurre. Così, p. es., nel Capitolo dedicato alla teoria delle funzioni implicite si vedrà che, se $y = f(x)$ possiede una derivata $f'(x)$ differente da zero per $x = a$, e se $b = f(a)$, allora esiste una funzione x della y, uguale ad a per $y = b$ $\left(\text{che ha in tale punto per derivata proprio } \dfrac{1}{f'(a)}\right)$, che è quindi continua per $y = b$ e soddisfa alla $y = f(x)$. Si noti che: *Se* y *è funzione continua della* x *nell'intervallo* α, *se essa è sempre crescente o sempre decrescente, allora la* x *è funzione continua della* y *nell'intervallo* β *corrispondente.*

$y = \log_a x$, $x = a^y$, che le due derivate $y'_x = \frac{1}{x} \log_a e$ e $x'_y = a^y \log_e a$ sono reciproche, perchè $a^y = x$, $\log_a e \log_e a = 1$.

Esercizi.

1° Si derivi $y = \sqrt[n]{x}$.

RIS. Si ha $x = y^n$, $x'_y = ny^{n-1}$, $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{ny^{n-1}} =$ $= \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{(n-1)}}}$, cosicchè la derivata di $y = x^{\frac{1}{n}}$ vale:

$$y' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \quad (x \neq 0).$$

2° Si derivi $y = x^{\frac{m}{n}}$.

RIS. È $y = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$, donde $y' = m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$.

3° Si derivi $y = x^{-\frac{m}{n}}$.

RIS. È $y = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$, donde $y' = \frac{-1}{x^{\frac{2m}{n}}} \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} = -\frac{m}{n} x^{-\frac{m}{n}-1}$.

4° (Da tutte queste formole si trae che) la derivata di $y = x^n$ per ogni valore *razionale* di n vale $y' = nx^{n-1}$. Più avanti estenderemo questa importante formola anche al caso di n *irrazionale*. (Il lettore esamini il caso $x \leqq 0$).

β) Sia $y = \operatorname{sen} x$. La curva immagine è la cosidetta *sinusoide*. Se ne ricava che $x = \operatorname{arcsen} y$ (x = arco, che ha il seno uguale ad y). Osserviamo però che, dato il valore y ($|y| \leqq 1$) del seno, l'arco x corrispondente non è univocamente determinato, ma ha infiniti valori, come è ben noto, e come si può verificare

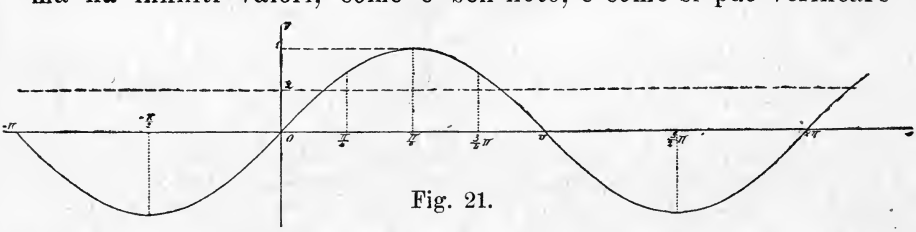


Fig. 21.

dalla figura 21. Questa rende ben evidente che, p. es., al valore $y = \frac{1}{2}$ del seno corrispondono infiniti valori dell'arco x. La corrispondenza si rende biunivoca, se noi ci limitiamo a considerare, p. es., i valori della x compresi tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. Ad ogni valore possibile y di sen x (cioè ad ogni valore y dell'intervallo $[-1, +1]$ corrisponderà allora un solo valore di x; e viceversa. Sarà allora

$$x'_y = (\operatorname{arcsen} y)'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(\operatorname{sen} x)'_x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

per $|y| \neq 1$.

L'ambiguità di segno dovuta al radicale $\sqrt{1-y^2}$ è dovuta all'arbitrarietà con cui possiamo scegliere l'arco di sinusoide che rende biunivoca la corrispondenza tra x, y. Se adottiamo la convenzione fatta più sopra, siccome $\sqrt{1-y^2}$ è scritto al posto $\cos x$, e $\cos x$ per $|x| < \frac{\pi}{2}$ è positivo, si dovrà dare al radicale il segno $+$. Scambiando il significato delle lettere x, y, si ha: Se $y = \operatorname{arcsen} x$, $|y| < \frac{\pi}{2}$, è $y' = +\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

γ) In modo simile si prova che, se $y = \arccos x$, e quindi $x = \cos y$, e se $0 < y < \pi$, allora $y'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Ciò che si può controllare, osservando che nelle attuali convenzioni $\arccos x + \operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{2} = \text{cost.}$ e quindi $\arccos x = \text{cost} - \operatorname{arcsen} x$, cosicchè $\arccos x$ ed $\operatorname{arcsen} x$ devono avere derivate uguali e di segno opposto.

δ) Vogliamo derivare la funzione $y = \operatorname{arctg} x$ inversa della $x = \operatorname{tg} y$. Anche qui, se si vuole rendere determinata la y e biunivoca la corrispondenza tra le x, y, si deve limitare in qualche modo la variabilità della y, p. es., supponendo $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Del resto le varie possibili determinazioni della y si ottengono aggiungendo a una di esse un multiplo di π, cioè una costante, e perciò hanno la stessa derivata. Si ha poi

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 y}\right)} = \frac{1}{1+\operatorname{tang}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

OSSERVAZIONE.

Si può dimostrare direttamente che $(\text{arcsen}\, x)'_x = + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$(\text{arccos}\, x)'_x = - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\text{arctg}\, x)'_x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

RIS. Dimostriamo, p. es., l'ultima formola. Ricordo che:

$$\text{tg}\,(\text{arctg}\,\alpha - \text{arctg}\,\beta) = \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}\,, \text{ ossia:}$$

$$\text{arctg}\,\alpha - \text{arctg}\,\beta = \text{arctg}\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}\,.$$

Se ne deduce:

$$(\text{arctg}\, x)'_x =$$

$$= \lim_{h=0} \frac{\text{arctg}\,(x+h) - \text{arctg}\, x}{h} = \lim_{h=0} \frac{\text{arctg}\,\dfrac{h}{1 + x\,(x+h)}}{h} =$$

$$= \lim_{h=0} \frac{1}{1 + x\,(x+h)} \lim_{k=0} \frac{\text{arctg}\, k}{k}\,, \text{ dove } k = \frac{h}{1 + x\,(x+h)}\,.$$

Se ne deduce: $(\text{arctg}\, x)'_x = \dfrac{1}{1+x^2} \cdot 1 = \dfrac{1}{1+x^2}$.

§ 59. — **Derivazione delle funzioni di funzioni.**

Sia y una funzione di una funzione z della x. Sia cioè

$$y = f(z) \quad , \quad z = \varphi(x).$$

Vale a dire, quando la x varia in un certo intervallo, sia individuato il valore della variabile z; e questo valore della z individui alla sua volta il valore di y (§ 29, γ, pag. 97).

Supponiamo che esistano le derivate $y'_z = f'(z)$ e $z'_x = \varphi'(x)$ della y rispetto alla z, e della z rispetto alla x. Si vuol trovare la derivata y'_x della y (considerata come funzione della x) rispetto alla x.

L'incremento Δx dato alla x individua il corrispondente incremento Δz ricevuto dalla z; e questo individua l'incremento Δy della y.

Sarà (ricordando che $\lim\limits_{\Delta x = 0} \Delta z = 0$)

$$y'_x = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} =$$

$$= f'(z)\, \varphi'(x) = y'_z\, z'_x. \quad (*)$$

Cioè: *Se* y *è funzione derivabile della* z, *e la* z *è funzione derivabile della* x, *la derivata* y'_x *della* y *rispetto alla* x *uguaglia il prodotto della derivata di* y *rispetto alla* z *per la derivata della* z *rispetto alla* x.

Osserv. Sia $y = f(z)$, $z = \varphi(x)$; e tanto la y che la z si possano considerare come funzioni della x. Sarà quindi *per definizione* in tale ipotesi

$$dy = y'_x\, dx \quad (1); \qquad dz = z'_x\, dx \quad (2)$$

Ma è $y'_x = y'_z\, z'_x$. Quindi la (1) equivale alla $dy = y'_z\, z'_x\, dx$, che per (2) si può scrivere:

$$dy = y'_z\, dz. \quad (3)$$

Questa formola, vera *per definizione* se z è la variabile indipendente, è vera dunque *anche se* z *non è la variabile indipendente* (ma invece le y, z sono pensate funzioni di una terza variabile x).

Si noti che, per il teorema di derivazione delle funzioni inverse, essa è vera anche se la stessa y si assume a variabile indipendente, e si considera z come funzione di y.

In tal caso infatti, essendo $y'_z = \dfrac{1}{z'_y}$, tale formola si riduce alla $dz = z'_y\, dy$.

Applicazione.

Siano $x = x(t)$, $y = y(t)$ le coordinate di un punto, che al variare della t descrive una curva. Siano $x(t)$, $y(t)$ funzioni con derivata finita; e si possa in un certo intorno del punto $t = \alpha$ con-

(*) Questa dimostrazione cessa di essere valida, se per valori di $\Delta x \neq 0$ è $\Delta z = 0$. Ma si osservi che $\Delta y = y'_z\, \Delta z + \varepsilon\, \Delta z$, dove $\lim \varepsilon = 0$. Quindi in ogni caso

$$y'_x = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} y'_z \frac{\Delta z}{\Delta x} + \lim_{\Delta x = 0} \varepsilon \frac{\Delta z}{\Delta x} = y'_z\, z'_x\,.$$

siderare (*) y come funzione di x. Sarà $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)\,dt}{x'(t)\,dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$.
L'equazione della retta tangente sarà

$$y - y(\alpha) = [x - x(\alpha)]\,\frac{y'(\alpha)}{x'(\alpha)},$$

ossia $[y - y(\alpha)] : y'(\alpha) = [x - x(\alpha)] : x'(\alpha)$; questa equazione si può dimostrare direttamente, anche senza ammettere che y si possa considerare come funzione della x, e senza usare il linguaggio differenziale. L'allievo applichi tale formola p. es. alla curva $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$ (che coincide con l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$). (Cfr. Cap. 19, § 117).

§ 60. — **Derivata logaritmica.**

Sia $y = \log f(x)$, dove $f(x)$ è una funzione positiva derivabile. Posto $z = f(x)$, è $y = \log z$, dove $z = f(x)$. Sarà

$$y'_x = \frac{1}{z} z'_x = \frac{1}{f(x)} f'(x).$$

Cioè:

La derivata del logaritmo di una funzione derivabile $f(x) > 0$ *o, come si suol dire, la derivata logaritmica di* $f(x)$ *si ottiene dividendo la derivata* $f'(x)$ *di* $f(x)$ *per la stessa funzione* $f(x)$.

Viceversa sia

$$y = e^{\varphi(x)}, \text{ ossia } \varphi(x) = \log y.$$

Sarà $y = e^z$ dove $z = \varphi(x)$; e quindi $y'_x = y'_z z'_x = e^z \varphi'(x)$ ossia $y'_x = y\,\varphi'(x)$.

(Se il logaritmo di una funzione è derivabile), la derivata della funzione è uguale alla derivata del suo logaritmo moltiplicata per la funzione stessa.

Quest'ultimo teorema è spesso molto utile, perchè è talvolta più facile derivare il logaritmo di una funzione che la funzione stessa.

Se ne deduce che la derivata di e^{cx} vale $c e^{cx}$. Questa formola *vale anche se la costante* c *è complessa* (così che risulta

(*) Cioè si possa considerare t come funzione della x [inversa della $x = x(t)$]. La y sarà funzione di t, funzione della x, che si considererà come funzione della x.

ancora una volta l'opportunità della definizione di Eulero). Infatti, se

$$c = a + ib$$

allora

$$e^{cx} = e^{ax} (\cos bx + i \operatorname{sen} bx).$$

Derivando con le regole abituali si prova facilmente l'asserto.

Esempi.

1° Si derivi $y = x^n$.

Ris. $\log y = n \log x$, $(\log y)'_x = \frac{n}{x}$, $y'_x = x^n \frac{n}{x} = nx^{n-1}$.

Questo *risultato fondamentale* era stato già da noi dimostrato per n razionale (pag. 184 del § 58, eserc. 4°). Il lettore esamini il caso di $x \leqq 0$.

2° Si derivi $y = [f(x)]^n$.

Ris. $\log y = n \log f(x)$; $(\log y)'_x = n\,[\log f(x)]'_x = n \frac{f'(x)}{f(x)}$,

donde $y'_x = ny \frac{f'(x)}{f(x)} = n\,[f(x)]^{n-1} f'(x)$. Si esamini il caso di $f(x) \leqq 0$.

Con altro e più semplice metodo si ponga $z = f(x)$. Sarà $y = z^n$, $z = f(x)$ donde $y'_x = nz^{n-1} z'_x = n\,[f(x)]^{n-1} f'(x)$.

Anche questa formola fondamentale ci era già nota per il caso di n intero positivo (eserc. 2° del § 56, pag. 181).

3° Si derivi $y = [f(x)]^{\varphi(x)}$.

Si ha $\log y = \varphi(x) \log f(x)$; e perciò

$$y'_x = f^\varphi\,[\varphi(x) \log f(x)]'_x = f^\varphi \left\{ \varphi \frac{f'(x)}{f(x)} + \varphi'(x) \log f(x) \right\}.$$

Riassunto.

Si possono riassumere così i precedenti risultati:

Teorema.

Se y è una funzione della x, che si può calcolare con somme, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, innalzamenti a potenza, consultazioni di tavole logaritmiche e trigonometriche, altrettanto avviene generalmente per y'.

Il calcolo di y' si esegue con le regole riassunte dai quadri seguenti:

QUADRO DELLE REGOLE DI DERIVAZIONE.

FUNZIONE	DERIVATA
$y = \varphi(x) \pm \psi(x)$	$y' = \varphi'(x) \pm \psi'(x)$
$y = \varphi(x)\psi(x)$	$y' = \varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x)$
$y = \dfrac{1}{\varphi(x)}$	$y' = -\dfrac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}$
$y = \dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}$	$y' = \dfrac{\psi'(x)\varphi(x) - \psi(x)\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}$
$y = f(x),\ x = \varphi(y)$	$f'(x)\varphi'(y) = 1$
$y = f(z),\ z = \varphi(x)$	$y'_x = f'(z)\varphi'(x) = y'_z z'_x$
(1) $y = \log_e z$; (2) $y = e^z$ (*)	(1) $y' = \dfrac{1}{z} z'$; (2) $y' = e^z z'_x = y z'_x$
$y = \varphi(x)^{\psi(x)}$	$y' = \varphi(x)^{\psi(x)} \left[\psi'(x) \log \varphi(x) + \psi(x) \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right]$

QUADRO DELLE DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI.

FUNZIONE	DERIVATA
$y = \text{costante}$	$y' = 0$
$y = x^m$	$y' = mx^{m-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$
$y = \operatorname{tang} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y = \cot x$	$y' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$
$y = \log x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x} \log_a e$
$y = a^x$	$y' = a^x \log_e a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \operatorname{arc} \begin{smallmatrix}\operatorname{sen}\\ \cos\end{smallmatrix} x$	$y' = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arc\,tang} x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

(*) Cioè $z = \log y$.

ALTRE DERIVATE NOTEVOLI ($a = \text{cost}$).

$y = \text{cost};$	$y' = 0$	$y = \sqrt[n]{x};$	$y' = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y = [f(x)]^n;$	$y' = n\,[f(x)]^{n-1} f'(x)$	$y = \sqrt{x};$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \text{arctg}\,\dfrac{x}{a};$	$y' = \dfrac{a}{x^2 + a^2}$	$y = \sqrt[n]{f(x)};$	$y' = \dfrac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
$y = \text{arcsen}\,\dfrac{x}{a};$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$y = \sqrt{f(x)};$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$
$y = a\,\varphi(x);$	$y' = a\,\varphi'(x)$		

§ 61. — Derivate successive.

α) Sia $v(x)$ la velocità di un punto mobile M all'istante x. Il movimento si dice uniformemente accelerato, se la velocità riceve incrementi uguali in tempi uguali; e in tal caso il rapporto $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$, dove Δv è l'incremento ricevuto dalla velocità in un intervallo di tempo di ampiezza Δx, si dice l'*accelerazione* del movimento.

Nel caso generale tale rapporto assume il nome di *accelerazione media* nell'intervallo $(x, x + \Delta x)$ di tempo considerato. E, per ragioni analoghe a quelle svolte negli esempi di pag. 157 e seg., il suo limite per $\Delta x = 0$, ossia $v'(x) = \lim\limits_{\Delta x = 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ si dice *accelerazione* all'istante x. L'accelerazione si presenta così come la derivata della velocità $v(x)$ rispetto al tempo x.

Ora, se $y = f(x)$ è lo spazio percorso dal nostro punto M all'istante x, è $v(x) = f'(x)$. Quindi l'accelerazione è data dalla derivata della derivata $f'(x)$ di $f(x)$.

β) In generale la derivata della derivata f' di una funzione $y = f(x)$ si indica con y'' o con $f''(x)$ e si chiama derivata seconda di $y = f(x)$. Questa è una nuova funzione di x, che a sua volta può ammettere una derivata che si chiama derivata terza di y e si indica con y''' o con $f'''(x)$. E così via.

In generale y può ammettere una derivata n^{esima} o dell'ordine n che si indica con $y^{(n)}$ o con $f^{(n)}(x)$.

La $y' = f'(x)$ si chiama anche prima derivata di y.

Con $d^2 y$ si indica il prodotto di $f''(x)$ per dx^2.

Con $d^n y$ » » » $f^{(n)}(x)$ » dx^n.

Il simbolo $d^n y$, testè definito, riceve il titolo di differenziale n^{esimo}.

Osserviamo che $d^n y = y^{(n)} dx^n$ è il differenziale di

$$d^{(n-1)} y = y^{(n-1)} dx^{n-1}$$

quando per un momento si consideri dx come costante (*). Infatti in questa ipotesi la derivata di $d^{(n-1)} y$, ossia di $y^{(n-1)} dx^{n-1}$ è $y^{(n)} dx^{n-1}$, e il suo differenziale è $y^{(n)} dx^n$.

Con queste convenzioni, la derivata $y^{(n)}$ si può scrivere nella forma $\frac{d^n y}{dx^n}$.

γ) Abbiamo detto (§ 59, pag. 187) che, se $y = f(x)$, allora

$$dy = f'(x)\, dx,$$

anche se x non è la variabile indipendente.

Un teorema analogo non vale per i differenziali di ordine superiore al primo; tutte le volte che si introducono nel calcolo tali differenziali, bisogna *prefissare quale è la variabile indipendente scelta, e non più mutarla nel resto del calcolo.*

Basti ricordare che il differenziale secondo $d^2 x$ della variabile indipendente x è nullo, perchè la derivata seconda della x rispetto alla x è nulla.

Esempio.

Calcolare le derivate successive del polinomio:

$$p(x) = a_0 + a_1 (x - \alpha) + a_2 (x - \alpha)^2 + \ldots\ldots + a_n (x - \alpha)^n.$$

Si trova:

$$p'(x) = a_1 + 2 a_2 (x - \alpha) + 3 a_3 (x - \alpha)^2 + \ldots\ldots + n a_n (x - \alpha)^{n-1}$$
$$p''(x) = \underline{|2}\, a_2 + 3.2\, a_3 (x - \alpha) + \ldots\ldots + n(n-1)\, a_n (x - \alpha)^{n-2}$$

. . . .

$$p^{(i)}(x) = \underline{|i}\, a_i + 2.3.4 \ldots\ldots (i+1)\, a_{i+1} (x - \alpha) + 3.4 \ldots (i+2)\, a_{i+2} (x - \alpha)^2 + \ldots + (n-i+1)(n-i+2) \ldots n a_n (x - \alpha)^{n-i}$$

. . . .

$$p^{(n-1)}(x) = \underline{|n-1}\, a_{n-1} + 2.3.4 \ldots\ldots (n-1)\, n a_n (x - \alpha).$$
$$p^{(n)}(x) = \underline{|n}\, a_n.$$

E le derivate successive, dalla $(n+1)^{esima}$ in poi, sono nulle.

(*) Cioè si considera dx come indipendente dalla x, ossia come avente uno stesso valore in ogni punto x, e perciò come avente derivata nulla rispetto alla x.

CAPITOLO IX.

TEOREMI FONDAMENTALI SULLE DERIVATE E LORO PRIME APPLICAZIONI

§ 62. — Proprietà fondamentali delle derivate.

Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo (a, b). Sia c un punto *interno* a tale intervallo.

α) DEFIN. *Si dice che la funzione* f (x) *è crescente nel punto* c, *se esiste un numero positivo* k *tale che, per ogni numero* h *positivo minore di* k, *valga la:*

$$f(c-h) < f(c) < f(c+h).$$

[OSS. Altri impongono soltanto che

$$f(c-h) \leqq f(c) \leqq f(c+h)].$$

Con notazioni analoghe la $f(x)$ si dice *decrescente* nel punto c, se:

$$f(c-h > f(c) > f(c+h).$$

[Altri impongono soltanto $f(c-h) \geqq f(c) \geqq f(c+h)$].

OSS. *Se nel punto* c *la funzione riceve il suo massimo o il suo minimo valore, ivi la funzione non è nè crescente nè decrescente* (quando però si addotti la nostra prima definizione).

LEMMA. *Se* f' (c) *esiste ed è positivo, la* f (x) *è crescente nel punto* c. *Se* f' (c) < 0, *la funzione è decrescente nel punto* c. *Quindi, se nel punto* c *la* f (x) *raggiunge il suo massimo, o il suo minimo valore, e se* f' (c) *esiste ed è finita, allora* f' (c) $= 0$.

Dimostriamo, p. es., la prima parte.

Poichè $f'(c) = \lim_{h=+0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h=+0} \frac{f(c-h)-f(c)}{-h}$,

dalla $f'(c) > 0$ segue (§ **32**, oss. 6, pag. 109) che esiste un numero k tale che, per $0 < h < k$, i rapporti

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \text{ e } \frac{f(c-h)-f(c)}{-h}$$

sono positivi (*). Cioè $f(c+h)-f(c)$ è positivo; $f(c-h)-f(c)$ è negativo: cioè $f(c-h) < f(c) < f(c+h)$, c. d. d.

β) Il teorema fondamentale del calcolo, di cui, si può dire, tutti gli altri sono conseguenza, è un teorema intuitivo. Sia $y = f(x)$ una curva C dotata di tangente in ogni punto interno all'intervallo (a, b). La sola ispezione della figura 22 dimostra l'esistenza su C di un punto (nella figura quello di ascissa c) interno all'intervallo, in cui la tangente alla curva è parallela alla corda congiungente i punti della curva di ascissa a, b. Queste due rette formeranno perciò angoli uguali con l'asse delle x, e avranno quindi ugual coefficiente angolare; sarà cioè:

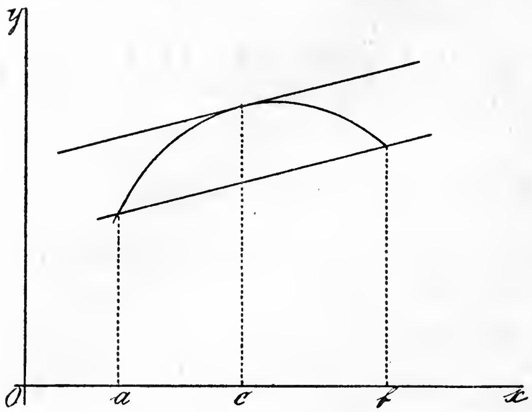


Fig. 22.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Posto $b = a + h$, $c = a + k$, i numeri k, h hanno lo stesso segno, e il valore assoluto di k è minore di quello di h. Posto dunque $\frac{k}{h} = \theta$, ossia $k = h\,\theta$, è $0 < \theta < 1$; e la nostra formola si scrive:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a+\theta h)\ ,\quad (0<\theta<1).$$

Cioè *un rapporto incrementale per la funzione* f (x) *è uguale alla derivata in un punto intermedio*. Al limite (per $h = 0$) esso diventa poi proprio la derivata nel punto $x = a$.

Questo importantissimo teorema si deve considerare intuitivo e in parte a noi già noto anche per le seguenti ragioni.

Noi sappiamo infatti che, se $f(x)$ è lo spazio percorso da un mobile all'istante x, allora $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ rappresenta la

(*) Prefissato un $\varepsilon > 0$ arbitrario, esiste un k tale che per $0 < h < k$ tali rapporti sono compresi (pag. 107) tra $f'(c) - \varepsilon$ e $f'(c) + \varepsilon$; cioè [se è stato scelto $\varepsilon < f'(c)$] tra due quantità positive, e quindi sono essi stessi positivi.

velocità media nell'intervallo $(a, a+h)$, mentre $f'(a+\theta h)$ rappresenta la velocità all'istante intermedio $a+\theta h$. La formola precedente dice dunque soltanto che la velocità media in un certo intervallo di tempo è uguale alla velocità in un qualche istante intermedio. E ciò è ben chiaro: Se, p. es., un treno percorre 300 km. in cinque ore, cioè con una velocità media di 60 km. all'ora, potrà darsi benissimo che in qualche istante il treno sia fermo, in qualche altro abbia velocità di 80, di 100 km. all'ora; ma esiste certamente almeno un istante del viaggio, in cui la velocità del treno è proprio uguale alla velocità media di 60 km. all'ora (almeno se ammettiamo che la velocità varii in modo continuo, cioè sia una funzione continua del tempo x. La dimostrazione, che daremo, prova però che il nostro teorema vale anche in casi più generali).

Anzi, se ricordiamo quanto abbiamo detto al § 47, troviamo che la penultima formola di esso (pag. 158) coincide proprio con quella che abbiamo ora scritta; appena si pongano a e k al posto di x e di λ, e si ricordi che F è uguale alla derivata della $f(x)$. Si può dire dunque che noi abbiamo enunciato il teorema di cui qui ci occupiamo, ancora prima di definire la derivata di una funzione (almeno nel caso particolare che questa derivata sia continua).

γ) Si voglia ora dimostrare il nostro teorema in modo generale e rigoroso. E cominciamo a supporre $f(a)=f(b)$. In questo caso la nostra proposizione assume la seguente forma precisa (teorema di *Rolle*).

Se $\mathrm{f(x)}$ *è una funzione continua definita nell'intervallo* $\mathrm{(a, b)}$ *tale che* $\mathrm{f(a)=f(b)}$, *e se possiede derivata* (finita) *in tutti i punti interni a questo intervallo, esiste in esso almeno un punto* c, *per cui* $\mathrm{f'(c)=0}$.

Nell'enunciato di questo teorema non si ammette nè che $f'(x)$ sia continua, nè che $f'(x)$ esista agli estremi dell'intervallo (a, b). Si potrebbe anche ammettere che nei punti interni a questo intervallo la $f'(x)$ fosse infinita, purchè di segno determinato.

Per il teorema di Weierstrass la $f(x)$ assume almeno in un punto A di questo intervallo il valore massimo M, e almeno in un punto B il valore minimo m. Se questi due punti sono entrambi agli estremi a, b, allora, siccome $f(a)=f(b)$, sarà $M=m$. Essendo uguali i valori massimo e minimo della $f(x)$, la $f(x)$ avrà in tutto l'intervallo valore costante, e quindi in *qualsiasi* punto c interno all'intervallo stesso sarà $f'(c)=0$.

Rimane ora a studiare l'altro caso che la funzione acquisti il suo valore massimo o minimo in un punto c interno ad (a, b); ma in tal caso il lemma precedente dimostra che ivi $f'(c) = 0$.

Poichè c è *interno* ad (a, b), potremo scrivere:

$$c = a + \theta (b - a) \quad (0 < \theta < 1)$$

dove θ è compreso tra 0 ed 1 (i numeri 0 ed 1 esclusi).

Se si pone $b = a + h$, sarà $c = a + \theta h$ (*).

GENERALIZZAZIONI.

Siano $f(x)$, $\varphi(x)$ due funzioni derivabili nell'intervallo (a, b). E sia $\varphi(a) \neq \varphi(b)$; in altre parole la $\varphi(x)$ assuma valori differenti agli estremi dell'intervallo (a, b).

Costruiamo la funzione

$$F(x) = f(x) + k\,\varphi(x),$$

dove k è una costante, che noi sceglieremo in guisa che $F(a) = F(b)$, ossia che

$$f(a) + k\,\varphi(a) = f(b) + k\,\varphi(b);$$

da cui si trae $k = -\dfrac{f(a) - f(b)}{\varphi(a) - \varphi(b)}$; formola che è lecito scrivere, perchè per ipotesi il denominatore $\varphi(a) - \varphi(b) \neq 0$.

Quindi la funzione

$$F(x) = f(x) - \frac{f(a) - f(b)}{\varphi(a) - \varphi(b)}\,\varphi(x)$$

è una funzione derivabile (perchè $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono derivabili) e assume valori uguali per $x = a$ e per $x = b$.

Perciò, per il teorema di Rolle, esiste almeno un punto dell'intervallo (a, b) in cui la derivata $F'(x)$ è zero; questo punto

(*) Il teorema può non essere vero se non sono soddisfatte le ipotesi enunciate, cioè se la $f(x)$ ha in qualche punto interno ad (a, b) derivata infinita non determinata di segno o indeterminata.

Il lettore se ne convincerà facilmente pensando a una linea $y = f(x)$ composta di due segmenti di rette concorrenti in un punto di ascissa c, nel quale la $f(x)$ raggiunga, p. es., il suo massimo valore; oppure pensando a una linea $y = f(x)$ composta di due archi di cerchi concorrenti in un punto di ascissa c, nel quale posseggano una stessa tangente perpendicolare all'asse delle x, nel caso che in tale punto la y raggiunga, p. es., il suo massimo valore. Nel primo caso la y' non è per $x = c$ determinata, nel secondo la y' non è finita. In tali casi, secondo le nostre convenzioni, noi diciamo che y' non esiste.

Un'osservazione analoga si presenterà nel paragrafo 70, ove studieremo i punti di massimo o di minimo di una funzione $f(x)$.

sarà un punto

$$c = a + \theta(b - a), \tag{1}$$

dove $0 < \theta < 1$.

Il punto c soddisferà quindi alla:

$$F'(c) = 0 \quad \text{ossia} \quad f'(c) - \frac{f(a) - f(b)}{\varphi(a) - \varphi(b)} \varphi'(c) = 0,$$

per cui si avrà:

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{\varphi(a) - \varphi(b)} \varphi'(c). \tag{2}$$

Questa formola fondamentale costituisce il **teorema di Cauchy.**

Se $\varphi(x) = x$, $\varphi'(c) = 1$, la (2) diventa

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(b)}{b - a};$$

e se $b = a + h$, diventa

$$f'(c) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

ossia, essendo per (1) $c = a + \theta h$:

$$f'(a + \theta h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}. \tag{3}$$

Questa formola costituisce appunto il **teorema della media di Lagrange,** da cui siamo partiti, e che nel caso $f(a+h) = f(a)$ si riduce al teorema di Rolle.

§ 63. — Prime applicazioni del teorema della media.

α) Si può dimostrare semplicemente il teorema di Heine (pag. 135) per una funzione $f(x)$ definita in un intervallo (a, b) nel caso che la sua derivata $f(x)$ sia limitata, che cioè esista una costante H tale che $|f'(x)| < H$. Se $\varepsilon > 0$ è un numero arbitrario, sia α un qualsiasi intervallo parziale di ampiezza non superiore ad $\frac{\varepsilon}{H}$. Siano γ_1, γ_2 due punti di α, ove la $f(x)$ assume il massimo e il minimo dei valori, che $f(x)$ assume in α. L'oscillazione $f(\gamma_1) - f(\gamma_2)$ di $f(x)$ in α vale $(\gamma_1 - \gamma_2) f'(\gamma)$, dove γ è un punto intermedio tra γ_1 e γ_2. Poichè $|\gamma_1 - \gamma_2| \leqq \frac{\varepsilon}{H}$ e $|f'(\gamma)| < H$, tale oscillazione non supera ε. c. d. d.

β) La formola $f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{\varphi(a) - \varphi(b)} \varphi'(c)$ diventa (se $\varphi'(c) \neq 0$)

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Se si suppone senz'altro $\varphi'(x) \neq 0$ nei punti *interni* all'intervallo (a, b), allora non soltanto nel punto (incognito) c sarà $\varphi'(c) \neq 0$, ma sarà anche soddisfatta l'altra ipotesi iniziale $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Infatti, se fosse $\varphi(a) = \varphi(b)$, esisterebbe, per il teorema di Rolle, almeno un punto x_1 interno all'intervallo, ove si avrebbe $\varphi'(x_1) = 0$.

Se $f(a) = \varphi(a) = 0$, allora, posto $b = x$, $c = x_1$, se ne deduce:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)} \qquad (1)$$

[x_1 appartenente all'intervallo (a, x)].

Cioè:

Se le funzioni continue e derivabili $f(x)$, $\varphi(x)$ *sono nulle per* $x = a$, *e nei punti interni all'intervallo* (a, x) *la* $\varphi'(x)$ *è differente da zero, allora il rapporto* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *è uguale al rapporto delle derivate prime in un punto* x_1 *interno all'intervallo* (a, x).

Al variare della x in un intorno α di a, la x_1 percorrerà un certo insieme γ di valori dello stesso intorno (cfr. Nota a pag. 200).

Se esiste il $\lim\limits_{x=a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, esisterà anche il $\lim\limits_{x_1=a} \frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)}$, e quindi per la (1) *esisterà anche il* $\lim\limits_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$; cioè il *limite del rapporto delle* $f(x)$, $\varphi(x)$ *per* $x = a$ *esisterà, e sarà uguale al limite del rapporto delle loro derivate prime* $f'(x)$, $\varphi'(x)$.

Se anche le derivate prime di f, φ sono nulle nel punto a, e se $\varphi'' \neq 0$ quando $x \neq a$, potremo, applicando di nuovo lo stesso teorema, scrivere l'uguaglianza

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f''(x_2)}{\varphi''(x_2)}$$

dove x_2 è un punto intermedio tra a ed x_1 e quindi anche intermedio tra a ed x.

Così continuando troviamo infine che, *se esistono le derivate delle* f, φ *fino a quelle di ordine* $n+1$, *se le* f, φ *e le prime loro* n *derivate sono nulle per* $x = a$ (*mentre le* φ', φ'', ..., $\varphi^{(n)}$, $\varphi^{(n+1)}$ *sono differenti da zero per* $x \neq a$), *allora*

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(n+1)}(\xi)},$$

dove ξ *è un punto intermedio tra* a *ed* x.

Se ne deduce una celebre formola dovuta pure a Lagrange conservando le ipotesi fatte per $f(x)$ e ponendo $\varphi(x) = (x - a)^{n+1}$ col che le ipotesi fatte per $\varphi(x)$ risultano soddisfatte. Poichè

$\varphi^{(n+1)}(x) = |\underline{n+1}$ si deduce il seguente teorema d'importanza fondamentale:

Se f (x) *possiede le prime* n + 1 *derivate, e se* f (x) *insieme alle prime* n *derivate è nulla nel punto* a, *allora*

$$f(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{|\underline{n+1}} f^{(n+1)}(\xi),$$

dove ξ *è un punto intermedio tra* a *ed* x.

Osservazione. Se ne deduce in tal caso

$$\frac{1}{|\underline{n+1}} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{f(x)}{(x-a)^{n-1}}.$$

Poichè $\lim\limits_{x=a} \xi = a$ sarà, *se* $f^{(n+1)}(x)$ *è continua nel punto* a, *e se* $f(a) = f'(a) = \ldots f^{(n)}(a) = 0$:

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{|\underline{n+1}}.$$

Questa formola vale anche nella *ipotesi che esista la* (n + 1)$^{\text{esima}}$ *derivata di* f (x) *nel punto* a *e sia determinata e finita* (senza che sia necessario ammetterne la continuità). Infatti si trova, come sopra,

$$\frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(x_1)}{|\underline{n+1}(x_1-a)} \qquad (x_1 \text{ intermedio tra } a \text{ ed } x).$$

Poichè $f^{(n)}(a) = 0$, sarà, posto $x_1 - a = h$,

$$\frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{1}{|\underline{n+1}} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

Da cui, passando al limite per $h = 0$, si trae subito il teorema enunciato.

In particolare, poichè $\dfrac{1}{|\underline{n+1}}$ è positivo, e poichè $\dfrac{f(x)}{(x-a)^{n+1}}$ ha, per x abbastanza prossimo ad a, il segno del suo limite per $x = a$, se ne deduce che, per x prossimo ad a, la $\dfrac{f(x)}{(x-a)^{n+1}}$ *ha il segno di* $f^{(n+1)}(a)$, se questa derivata è determinata e finita e se $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$.

Posto $x = a + h$, si vede che, per h abbastanza piccolo, nelle nostre ipotesi coincidono i segni di $\dfrac{f(a+h)}{h^{n+1}}$ e di $f^{(n+1)}(a)$, cioè coincidono i segni di $f(a+h)$ e di $h^{n+1} f^{(n+1)}(a)$.

Noi abbiamo dato in questo paragrafo un procedimento per calcolare il limite di un quoziente in qualche caso, in cui non sono applicabili i teoremi del § 35, pag. 115-116. Ad altri casi analoghi sono applicabili le seguenti osservazioni.

OSSERVAZIONI.

1° Si è dimostrato che se $\lim_{x=a} f(x) = \lim_{x=a} \varphi(x) = 0$, e se esiste il $\lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}$ esiste anche il $\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, ed è uguale al precedente (*). Un teorema analogo vale se $\lim_{x=a} f(x) = \lim_{x=a} \varphi(x) = \infty$. Lasciando ai trattati di calcolo la dimostrazione completa (piuttosto delicata) di tale teorema, noi la esporremo nell'ipotesi che $\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ esista, sia finito e diverso da zero. Poichè nelle nostre ipotesi è

$$\lim_{x=a} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x=a} \frac{1}{\varphi(x)} = 0,\ \text{sarà} \lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=a} \frac{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)} = \lim_{x=a} \frac{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'} =$$

$$= \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} \left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]^2 = \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} \left\{ \lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right\}^2.$$

Moltiplicando primo e ultimo membro per $\left\{ \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} \right\}^2$ si ottiene appunto $\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

2° Questi teoremi valgono anche per $a = \infty$, cioè se i termini della frazione tendono per $x = \infty$ entrambi a 0, oppure ad ∞. Posto infatti $x = \frac{1}{z}$, si ha:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{z=0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z=0} \frac{\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\right]'_z}{\left[\varphi\left(\frac{1}{z}\right)\right]'_z} = \lim_{z=0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{z=0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

3° Talvolta con questi teoremi si riesce a calcolare il limite di un prodotto che si presenta nella forma $0.\infty$, ossia il limite del prodotto di due fattori $f(x)$, $\varphi(x)$ di cui uno tende a zero, l'altro a ∞. Basterà scrivere il prodotto $f(x)\,\varphi(x)$ nella forma $\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)} = \frac{\varphi(x)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)}$, e poi applicare a questi quozienti il metodo precedente.

4° Si deve talvolta trovare il limite di una potenza, che si presenta nella forma 1^∞, oppure 0^0, oppure $+\infty^0$, ecc., vale a dire di una potenza, la cui base tende ad 1, e l'esponente ad ∞, oppure di cui base ed esponente tendono entrambi a zero, ecc. In tal caso si cerca dapprima col metodo dell'esercizio 3° il limite L del logaritmo di una tale potenza. Il limite della potenza sarà e^L.

5° Si deve talvolta cercare il limite di una differenza $f(x) - \varphi(x)$, che si presenta nella forma $\infty - \infty$, perchè entrambi i termini tendono ad ∞. In tal caso si scrive $f(x) - \varphi(x)$ nella forma di un prodotto $f(x)\left[1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)}\right] = \varphi(x)\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)} - 1\right]$, cercando poi di applicare i metodi precedenti.

(*) Il teor. reciproco non è generalmente vero. Infatti noi abbiamo dimostrato che $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}$ ove x_1 è un certo punto intermedio tra a ed x. Non è detto però che, al variare di x, la x_1 assuma *tutti* i valori di un intorno di a e che non ne salti qualcuno; cosicchè studiando i valori di $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ si studierebbero alcuni, ma non tutti i valori che il rapporto delle loro derivate assume in un intorno del punto a. E quindi nulla si può concludere per il limite di tale rapporto senza studi più minuti.

γ) *Interpolazione.*

Capita molte volte di dover trovare un numero $\varphi(x)$ approssimato del valore che $f(x)$ assume nei punti x di un intervallo (a, b), quando si conoscano i valori $f(a)$ ed $f(b)$ che la $f(x)$ assume nei punti a, b. Ciò capita in pratica specialmente per il calcolo delle funzioni logaritmiche e trigonometriche: così, p. es., se $f(x) = \log x$, se dalle tavole logaritmiche sono dati i valori di log 1000 e di log 1001, e si deve scrivere un valore approssimato del logaritmo di 1000,5.

La formola, p. es., che si usa, come è ben noto, è la seguente:

$$\varphi(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)]$$

(dove, nel caso che si ricorra a tavole numeriche, la $f(b) - f(a)$ dicesi la differenza tavolare).

Quale errore si commette usando tale formola, cioè scrivendo $\varphi(x)$ al posto di $f(x)$?

Si noti che in virtù del teorema della media,

$$\varphi(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)] = f(a) + (x-a) f'(c) =$$
$$= f(b) + \frac{x-b}{a-b}[f(a) - f(b)] = f(b) + (x-b) f'(c)$$

dove c è un punto intermedio tra a e b. Così pure in virtù del teorema della media $\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(\xi)$, cosicchè $f(x) = f(a) + (x-a) f'(\xi)$; e similmente

$$f(x) = f(b) + (x-b) f'(\eta)$$

dove ξ è un punto intermedio tra a ed x e quindi anche tra a e b, ed η è un altro punto dell'intervallo (a, b).

Quindi l'errore $|f(x) - \varphi(x)|$ commesso scrivendo $\varphi(x)$ al posto di $f(x)$ vale $|x-a||f'(c) - f'(\xi)| = |x-b||f'(c) - f'(\eta)|$. E, se $f(x)$ possiede derivata seconda, tale errore vale $|(x-a)(c-\xi) f''(\xi_1)| = |(x-b)(c-\eta) f''(\eta_1)|$ dove, secondo il teorema della media, ξ_1 è intermedio tra c e ξ, mentre η_1 è intermedio tra c ed η. Cosicchè ξ_1 ed η_1 sono punti di (a, b). Se dunque $|f''(x)|$ in (a, b) non supera la costante M, allora, poichè $|c - \xi| < |b-a|$ e $|(c-\eta)| < |b-a|$, tale errore non supererà $|(x-a)(b-a)M|$, nè $|(x-b)(b-a)M|$ e quindi neanche il più piccolo di questi due, che è certo non superiore a $\frac{1}{2}(b-a)^2 M$.

Il lettore applichi questo risultato alle usuali tavole logaritmiche.

Oss. Si noti che, sostituendo la $\varphi(x)$ alla $f(x)$, si è sostituito alla $f(x)$ un polinomio di primo grado che in due punti (nei punti $x = a, x = b$) assume lo stesso valore di $f(x)$. Si potrebbe generalizzare il metodo, sostituendo, p. es., ad $f(x)$ un polinomio di grado $n-1$, che in n punti assumesse lo stesso valore che la $f(x)$. Per la determinazione di tale polinomio cfr. i §§ 14 pag. 49, 27 pag. 90.

δ) *Criterio di convergenza di Cauchy.*

Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo $(1, +\infty)$, che ha la derivata $f'(x)$ sempre positiva; al crescere di x la $f'(x)$ diminuisca. Se a, b sono due valori di x, se $a < b$, allora $\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ è uguale al valore di $f'(x)$ in un punto dell'intervallo (a, b); tale frazione è dunque *positiva* minore di $f'(a)$, maggiore di $f'(b)$. In particolare $f(b) - f(a)$ è positivo, $f(b) > f(a)$. Cosicchè $f(x)$ cresce quando cresce il valore dato ad x, e tende quindi a un limite per $x = +\infty$. Di più, ponendo $a = m, b = m+1$, oppure $a = m-1, b = m$, si trova:

$$f(m+1) - f(m) < f'(m) < f(m) - f(m-1).$$

Scrivendo queste disuguaglianze per $m = 2, 3, 4, \ldots\ldots, n$, e sommando si trova:

$$f(n+1) - f(2) < f'(2) + f'(3) + \ldots\ldots + f'(n) < f(n) - f(1).$$

Quindi la serie
$$f'(1)+f'(2)+f'(3)+\ldots..$$
converge o *diverge* secondo che $\lim_{x=+\infty} f(x)$ è finito o infinito, perchè la somma dei suoi primi n termini è compresa tra
$$f(n+1)+[f'(1)-f(2)] \text{ e } f(n)+[f'(1)-f(1)],$$
e tende per $n=\infty$ a un limite finito soltanto quando altrettanto avviene per $f(n)$, $f(n+1)$.

Ponendo $f(x)=\log x$, oppure $f(x)=\log\log x$, oppure $f(x)=\log\log\log x$ si dimostra subito, p. es., che le serie
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots,$$
$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{4\log 4}+\ldots\ldots, \text{ ecc.}$$
sono divergenti. Nella seconda si è cominciato dal termine corrispondente ad $x=2$ perchè per $x=1$ la $f(x)=\log\log x$ non ha derivata finita.

ε) *Funzioni a derivata nulla.*

Ricordiamo il teorema:

Una funzione costante ha derivata identicamente nulla.

Dimostriamo il teorema reciproco, d'importanza fondamentale: *Una funzione* f (x), *la cui derivata è identicamente nulla, è costante.*

Infatti siano a e $b=a+h$ due punti qualsiasi dell'intervallo, ove la $f(x)$ è definita. Per il teorema della media di Lagrange, il rapporto
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
è uguale alla derivata $f'(x)$ in un punto intermedio, ed è quindi nullo, perchè $f'(x)$ è nulla dappertutto. Il suo numeratore è quindi nullo; cioè $f(a)=f(b)$. La funzione $f(x)$, riprendendo lo stesso valore in due punti qualsiasi a, b, è quindi una costante. c. d. d.

Questo teorema è geometricamente intuitivo. Dire che $f'(x)$ è *sempre* nullo è asserire che le tangenti alla curva $y=f(x)$ sono *tutte* parallele all'asse delle x. Dire che $f(x)$ è costante equivale ad asserire che la curva $y=f(x)$ è una retta o un segmento, i cui punti distano ugualmente dall'asse delle x, ossia che tale curva è un segmento parallelo all'asse delle x. Il teorema geometricamente significa dunque:

Se le tangenti della curva y = f (x) *sono tutte parallele all'asse delle* x, *tale curva è una retta o un segmento parallelo all'asse delle* x.

Meccanicamente questo teorema è pure evidente, e ci dice che *un punto il quale si muove su una retta* (ed ha all'istante

x una distanza $y = f(x)$ da un punto fisso M della rete stessa) *ed ha la velocità* f$'$ (x) *sempre nulla, sta fermo* (perchè resta ad una distanza y costante dal punto M). Ciò non è una osservazione banale; essa è piuttosto un'osservazione che conferma l'accordo tra l'idea *intuitiva* di velocità e la definizione matematica da noi datane.

Se due funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$ hanno in ogni punto di un certo intervallo ugual derivata finita, esse differiscono in esso di una costante. La loro differenza ha infatti per derivata la differenza delle derivate che è nulla, ed è quindi costante (Cfr. § 74, γ).

§ 64. — **Radici multiple di un'equazione.**

Sia a una radice dell'equazione algebrica, o non algebrica $f(x) = 0$. Nei casi più comuni esiste una costante positiva h tale che $f(x)$ sia infinitesimo di ordine h rispetto ad $x - a$, ossia che, posto $\dfrac{f(x)}{(x-a)^h} = \varphi(x)$, la $\varphi(x)$ abbia per $x = a$ un limite, che indicheremo con $\varphi(a)$, finito e diverso da zero. In tal caso diremo che $x = a$ è una radice di ordine h per l'equazione $f(x) = 0$.

Se $h = 1$, la radice si dirà *semplice*; se $h > 1$ è un intero positivo, la radice a si dirà *multipla*.

Se $h > 1$, *se* f (x) *e* φ (x) *sono derivabili anche nel punto* x = a (*), dalla $f(x) = (x-a)^h \varphi(x)$ si deduce derivando che $f'(x) = (x-a)^{h-1}\theta(x)$ dove $\theta(x) = h\varphi(x) + (x-a)\varphi'(x)$ ha per $x = a$ un limite finito e diverso da zero. Quindi:

Nelle nostre ipotesi per la f (x), *una radice di ordine* h > 1 *per la equazione* f (x) = 0 *è radice di ordine* h — 1 *per l'equazione* f$'$ (x) = 0.

Viceversa, se *a è radice della* f (x) = 0, *ed è anche radice di ordine* h — 1 > 0 *per la* f$'$ (x), sarà:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^h} = \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^h} = \frac{f'(x_1)}{h(x_1-a)^{h-1}}$$

(dove x_1 è un punto intermedio tra a ed x).

Per ipotesi esiste il limite per $x_1 = a$ del terzo membro (finito e diverso da zero). Altrettanto avverrà del primo; cioè $f(x) = 0$ *avrà* a *come radice di ordine* h.

(*) La $\varphi(x)$ vale per definizione $\dfrac{f(x)}{(x-a)^h}$ per $x \neq a$, e vale $\lim\limits_{x=a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^h}$ nel punto $x = a$. L'ipotesi del testo è soddisfatta se p. es. $f(x)$ è razionale, oppure è una serie di potenze.

In particolare:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè a *sia radice della* f(x) = 0 *di ordine maggiore di* 1 *è che* a *sia radice della* f(x) = 0, *e sia radice* (di ordine positivo) *della* f′(x) = 0.

Questo teorema ha particolare importanza nel caso dei polinomi $P(x)$. Se $P(x) = \alpha_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots\ldots (x - \alpha_n)$, uno dei numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$, p. es. α_1, sarà radice della $P(x) = 0$ di ordine h, soltanto se h *è un intero positivo*, e se tra i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ ve ne sono h uguali ad α_1. Il fattore corrispondente $x - \alpha_1$ compare $h - 1$ volte in $P'(x)$, $h - 2$ volte in $P''(x), \ldots\ldots$, una volta in $P^{(h-1)}(x)$, nessuna volta in $P^{(h)}(x)$. È facile dedurne:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè α_1 sia radice di ordine h per un'equazione algebrica $P(x) = 0$ è che h sia un intero, e che α_1 sia radice delle $P(x) = 0$, $P'(x) = 0, \ldots\ldots$, $P^{(h-1)}(x) = 0$ e non sia radice della $P^{(h)}(x) = 0$.

Questo ultimo teorema vale anche se α_1 è un numero complesso ed anche se i coefficienti di $P(x)$ sono complessi.

Se ne deduce anche:

Il massimo comun divisore di P(x) *e* P′(x) *contiene tutti e soli i fattori multipli del polinomio* P(x); *e precisamente contiene* h − 1 *volte un fattore multiplo di ordine* h. *Se* Q(x) *è il quoziente di* P(x) *per tale massimo comun divisore, l'equazione* Q(x) = 0 *ha per radici semplici tutte e sole le radici di* P(x) = 0.

Si può, del resto, dedurre da quanto precede un metodo più completo per approfondire l'esame di una equazione algebrica dotata di radici multiple. E noi, per semplicità, lo esporremo in un caso particolare.

Consideriamo un'equazione dotata di radici multiple, p. es., la:

$$0 = f(z) = (z - a)(z - b)(z - c)^2 (z - d)^2 (z - e)^3 (z - f)^4$$

Il massimo comune divisore $\varphi(z)$ tra la $f(z)$ e la sua prima derivata $f'(z)$ è:

$$\varphi(z) = (z - c)(z - d)(z - e)^2 (z - f)^3.$$

Del pari il massimo comune divisore tra $\varphi(z)$ e $\varphi'(z)$ è:

$$\varphi_1(z) = (z - e)(z - f)^2.$$

Così il massimo comune divisore tra $\varphi_1(z)$ e $\varphi'_1(z)$ è:

$$\varphi_2(z) = (z - f);$$

infine il M. C. D. tra $\varphi_2(z)$ e $\varphi'_2(z)$ è:

$$\varphi_3(z) = 1.$$

Ciò posto, si formino i quozienti:

$$\psi(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)} = (z - a)(z - b)(z - c)(z - d)(z - e)(z - f);$$

$$\psi_1(z) = \frac{\varphi(z)}{\varphi_1(z)} = (z - c)(z - d)(z - e)(z - f);$$

$$\psi_2(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} = (z - e)(z - f);$$

$$\psi_3(z) = \frac{\varphi_2(z)}{\varphi_3(z)} = z - f.$$

Indi si formino i quozienti:

$$X(z) = \frac{\psi(z)}{\psi_1(z)} = (z-a)(z-b); \qquad X_1(z) = \frac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)} = (z-c)(z-d);$$
$$X_2(z) = \frac{\psi_2(z)}{\psi_3(z)} = z - e; \qquad X_3(z) = \frac{\psi_3(z)}{1} = z - f.$$

Uguagliando a zero questi quattro quozienti si hanno quattro equazioni: la prima ha per radici le radici semplici della proposta $f(z) = 0$, la seconda ha per radici le radici doppie, la terza ha per radici le triple e la quarta ha per radici le radici quadruple di $f(z)$, ma tutte come radici semplici.

Il metodo qui applicato vale in generale; e, generalmente, si ottiene il risultato seguente.

Sia data un'equazione intera ad un'incognita:

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} z + a_n = 0.$$

Della $f(z)$ e della sua prima derivata $f'(z)$ si calcoli il massimo comune divisore; indi di questo e della sua prima derivata si calcoli M. C. D. e così si prosegua fino ad ottenere una costante. Ciò fatto si divida $f(z)$ per il primo massimo comune divisore trovato, indi si divida questo primo M. C. D. per il secondo massimo comune divisore e così via fino a dividere il penultimo M. C. D. trovato per l'ultimo. Finalmente si divida il primo quoziente per il secondo, il secondo per il terzo e così via fino a dividere l'ultimo per l'unità. I quozienti ottenuti uguagliati a zero avranno per radici le radici semplici, doppie, ecc. dell'equazione data, tutte come radici semplici.

Esempio.

Consideriamo l'equazione:

$$f(z) = z^6 - z^5 - 7z^4 + 9z^3 + 10z^2 - 20z + 8 = 0.$$

Cercando il massimo comune divisore tra $f(z)$ ed $f'(z) = 6z^5 - 5z^4 - 28z^3 + 27z^2 + 20z - 20$, si trova:

$$\varphi(z) = z^3 - 3z + 2.$$

Ora $\varphi'(z) = 3z^2 - 2$, il M. C. D. tra $\varphi'(z)$ e $\varphi(z)$ è:

$$\varphi_1(z) = z - 1$$

e il M. C. D. tra $\varphi_1(z)$ e $\varphi'_1(z)$ è:

$$\varphi_2(z) = 1.$$

Ora, dividendo ciascuna delle funzioni $f(z)$, $\varphi(z)$, $\varphi_1(z)$ per la seguente, si hanno le funzioni:

$$\psi(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)} = z^3 - z^2 - 4z + 4; \qquad \psi_1(z) = \frac{\varphi(z)}{\varphi_1(z)} = z^2 + z - 2;$$
$$\psi_2(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} = z - 1.$$

Infine eseguendo le divisioni $\psi(z) : \psi_1(z)$; $\psi_1(z) : \psi_2(z)$; $\psi_2(z) : 1$ si ottengono rispettivamente i quozienti:

$$z - 2, \qquad z + 2, \qquad z - 1,$$

i quali, posti uguali a zero, dànno le equazioni:

$$z - 2 = 0, \qquad z + 2 = 0, \qquad z - 1 = 0,$$

che hanno per radici rispettivamente le radici semplici, doppie, triple della proposta (ma tutte come semplici). Dunque l'equazione proposta ha una radice semplice 2, una radice doppia -2, una radice tripla 1.

Osservazione. — L'equazione $f(z) = 0$ avrà radici tutte semplici, soltanto se il primo massimo comun divisore (quello tra $f(z)$ e $f'(z)$) è una costante: questa osservazione dà, come già dicemmo, il più semplice modo per riconoscere se una equazione ha radici multiple, senza ricorrere al discriminante.

Esercizi.

1° Riconoscere coi metodi precedenti se e quando avviene che una delle seguenti equazioni ha una radice doppia, o tripla, o ecc.

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$
$$x^4 + p x^2 + q x + r = 0$$
$$\cos x - p = 0$$
$$e^x - p = 0$$
$$\log x - p = 0$$

dove le a_i, p, q, r sono costanti.

2° Risolvere le seguenti equazioni, tutte dotate di radici multiple.

$$x^7 + 3x^6 + 5x^5 + 7x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 3x + 1 = 0$$

(radici $\pm i$ doppie e -1 tripla);

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0$$

(radici 2 e -1 doppie).

§ 65. — Derivazione per serie.

Teor. *Se la serie*

$$(1) \qquad u_1(x) + u_2(x) + \ldots\ldots$$

è convergente nell'intervallo $a \leqq x \leqq b$, *se esiste la derivata di ogni suo termine, se la serie delle derivate*

$$(2) \qquad u'_1(x) + u'_2(x) + u'_3(x) + \ldots\ldots$$

è totalmente convergente in (a, b), *allora* (2) *rappresenta proprio la derivata di* (1). Cioè *la derivata di* (1) *si può ottenere derivando termine a termine.*

Sia L_n il limite superiore dei valori di $|u_n(x)|$. Per ipotesi la serie $L_1 + L_2 + L_3 + \ldots\ldots$ è convergente. Consideriamo i valori assoluti dei rapporti incrementali

$$(3) \qquad \left| \frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{h} \right|,$$

quando x ed $x + h$ variano nell'intervallo (a, b). Per il teorema della media, la quantità (3) vale $|u'_n(x + \theta h)| \leqq L_n$. Quindi (3) non può superare L_n. E quindi la serie

$$(4) \qquad \frac{u_1(x+h) - u_1(x)}{h} + \frac{u_2(x+h) - u_2(x)}{h} + \\ + \frac{u_3(x+h) - u_3(x)}{h} + \ldots\ldots$$

è *totalmente* convergente. Il suo limite per $h = 0$ è dunque uguale alla serie ottenuta passando al limite termine a termine. Perciò il limite di (4) per $h = 0$ vale

$$(2) \qquad u'_1(x) + u'_2(x) + u'_3(x) + \ldots\ldots$$

Ora, se $u(x)$ è la somma di (1), la (4) vale $\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}$.

Dunque la serie (2) è il $\lim\limits_{h=0} \dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}$ cioè vale $u'(x)$.

CAPITOLO X.

SERIE DI POTENZE

§ 66. — **Cerchio di convergenza.**

Diciamo *serie di potenze* una serie del tipo

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots\ldots$$

dove le a_n sono costanti, x si considera variabile.

Non escludiamo che le a, x possano anche essere numeri complessi. Tali serie sono la più naturale generalizzazione dei polinomi.

TEOR. *Se* (1) *converge per* $\mathrm{x} = \alpha \neq 0$, *e se* β *è un numero positivo minore di* $|\alpha|$, *allora la serie* (1) *converge totalmente nel campo definito dalla*:

$$|x| \leqq \beta.$$

Se (1) *non converge per* $\mathrm{x} = \mathrm{A}$, *essa non può convergere per nessun valore di* x, *di modulo superiore ad* A.

DIM. Se (1) converge per $x = \alpha$, allora (§ 42, ε, pag. 142)

$$\lim_{n=\infty} |a_n \alpha^n| = 0.$$

Si potrà trovare un numero positivo k maggiore di tutte le $|a_n \alpha^n|$ (*). Ora per $|x| \leqq \beta$ si ha

$$|a_n x^n| = \left| a_n \alpha^n \frac{x^n}{\alpha^n} \right| = |a_n \alpha^n| \left| \frac{x^n}{\alpha^n} \right| < k \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|^n.$$

Poichè $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| < 1$, i termini di (1) hanno nel campo $|x| \leqq \beta$ dei valori, il cui limite superiore non può superare rispettivamente k, $k\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|$, $k\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|^2$, ... ; le quali costanti non sono che i

(*) Infatti, preso un numero $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si troverà un m tale che per $n > m$ sia $|a_n \alpha^n| < \varepsilon$. Sarà soddisfatta la condizione del testo, se si assume come numero k un numero maggiore della più grande tra le seguenti quantità:

$$|a_0|, |a_1 \alpha|, |a_2 \alpha^2|, \ldots\ldots, |a_m \alpha^m|, \varepsilon.$$

termini di una progressione geometrica *convergente*. Quindi è dimostrata la prima parte del teorema.

E la seconda parte se ne deduce immediatamente. Se infatti (1) convergesse per un valore in modulo più grande di A, allora (1) sarebbe *assolutamente* convergente per $x = A$ (secondo quanto abbiamo ora dimostrato). Ciò che è contro l'ipotesi.

Sia R il limite superiore dei moduli di quei valori di x per cui la serie (1) converge. Sarà $R = 0$ soltanto se (1) converge solo per il valore $x = 0$. Sarà $R = \infty$ se esistono valori della x di modulo grande a piacere, per cui la (1) converge.

Supponiamo $R \neq 0, \infty$.

Sia k un qualsiasi numero positivo minore di R. Esisterà un valore x_0 di x tale che $k < |x_0|$, che $|x_0| < R$, e che per $x = x_0$ la (1) sia convergente. Per il nostro teorema la serie sarà totalmente convergente nel campo definito dalla $|x| \leq k$.

In modo analogo si prova che per un valore x_1 della x tale che $|x_1| > R$ la serie (1) *non converge*.

Osserviamo che il luogo dei punti x per cui $|x| \leq k$ è un cerchio che ha per centro l'origine e per raggio k.

Riassumendo, concludiamo:

Per ogni serie (1) *esiste un numero positivo* R *tale che, se* x *varia dentro un qualsiasi cerchio, che ha per centro l'origine e per raggio un numero* k *minore di* R, *ivi la serie è totalmente convergente*

Invece la (1) *non può convergere per i valori di* x *tali che il punto immagine sia esterno al cerchio che ha per centro l'origine e raggio* R.

Questo cerchio (che ha per centro l'origine e per raggio R) si dirà il *cerchio di convergenza* di (1).

Nei punti interni la (1) *converge, nei punti esterni non converge.*

Naturalmente, se $R = 0$, non si può parlare di cerchi interni al cerchio di convergenza (che è ridotto al solo centro). E, se $R = \infty$, non si può parlare di punti esterni al cerchio di convergenza. Salvo questa limitazione, il precedente teorema è vero in ogni caso.

Nulla si può dire in generale per il comportamento di (1) *sulla periferia del cerchio di convergenza.*

Poichè $\sum a_n x^n$ converge e quindi ha uno e un solo valore per ogni numero x reale o complesso, interno al cerchio di convergenza, noi potremo dire e diremo che, dentro tale cerchio, tale serie è *funzione della variabile* x *reale o complessa* (*).

Poichè le nostre serie sono la più naturale estensione dei polinomi, la precedente definizione è la più naturale generalizzazione delle definizioni date al § 50, pag. 168.

§ 67. — Derivate di una serie di potenze.

Consideriamo la serie

(2) $a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + \dots + n\,a_n\,x^{n-1} + \dots,$

che si deduce derivando (1) termine a termine. Io dico che anche la (2) *converge totalmente in ogni regione tutta interna al cerchio di convergenza della* (1). Infatti sia γ il massimo valore della $|x|$ in tale regione. Sia α un numero per cui $|\alpha| > \gamma$ ed $|\alpha| < R$. La (1) convergerà per $x = \alpha$. Esisterà quindi, come dicemmo, una costante k tale che $k \geqq |a_n \alpha^n|$ per tutti i valori di n.

Quindi, quando x si muove in guisa tale che $|x| \leqq \gamma$:

$$|na_n x^{n-1}| \leqq |na_n \gamma^{n-1}| = \left|na_n \alpha^n \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{n-1}\right| \leqq \left|\frac{k}{\alpha}\right| n \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|^{n-1} =$$

$$= \left|\frac{k}{\alpha}\right| nq^{n-1}, \text{ dove è posto } q = \left|\frac{\gamma}{\alpha}\right| < 1.$$

La serie

(3) $$\sum_n \left|\frac{k}{\alpha}\right| nq^{n-1} = \left|\frac{k}{\alpha}\right| + 2\left|\frac{k}{\alpha}\right| q + 3\left|\frac{k}{\alpha}\right| q^2 + 4\left|\frac{k}{\alpha}\right| q^3 + \dots$$

converge, perchè il rapporto

$$\frac{nq^{n-1}\left|\frac{k}{\alpha}\right|}{(n-1)\,q^{n-2}\left|\frac{k}{\alpha}\right|} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) q$$

di un termine al precedente tende per $n = \infty$ a $q < 1$.

(*) Per dare almeno un cenno del perchè si considerino come funzioni di una variabile complessa x soltanto i polinomi e le serie di potenze, ricorderò l'enunciato di un celebre e meraviglioso teorema di Cauchy:

Se y *è un numero (reale o complesso) che ha un valore determinato per ogni valore reale o complesso di una variabile* x, *quando il punto immagine di* x *è interno ad una regione* R, *se cioè la* y *è in* R *funzione della* x, *e se esiste ed è continua la sua derivata prima* y', *allora, se* α *è un qualsiasi punto di* R, *la* y *è sviluppabile in serie di potenze di* x $-\ \alpha$. *E tale sviluppabilità vale in tutti i punti interni al massimo cerchio che ha per centro il punto* α *e non contiene punti esterni ad R.*

Il lettore, che si diletta di questioni teoriche, confronti questo semplice teorema coi teoremi ben più complicati che troveremo più avanti per la sviluppabilità in serie di potenze di una funzione di variabile *reale* x.

Dunque, poichè, per quanto si è dimostrato, i termini di (2) non superano nelle nostre ipotesi ($|x| \leqq \gamma$) i corrispondenti di (3), la (2) convergerà *totalmente.*

In virtù del teorema dato al § 65 di derivazione per serie se ne deduce quindi (almeno se le a_i e la x sono reali) che:

La derivata di una serie (1) *di potenze nei punti interni al cerchio di convergenza è uguale alla serie ottenuta derivando* (1) *termine a termine.*

E questo teorema vale anche *se i coefficienti della serie sono complessi e se consideriamo valori complessi della* x (corrispondenti a punti interni al cerchio di convergenza) (cfr. § 50, β, pag. 168).

Infatti un rapporto incrementale di un termine $a_n x^n$ della (1) vale, anche se x ed a_n sono numeri complessi:

$$a_n \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h)-x} = a_n \left\{ (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} x + \ldots + (x+h) x^{n-2} + x^{n-1} \right\}.$$

Il suo modulo non supera in nessun caso pertanto $|n a_n X^{n-1}|$, se X è il maggiore dei due moduli $|x|$ ed $|x+h|$. Poichè, anche per a_n ed x complessi, la $n a_n x^{n-1}$ è la derivata di $a_n x^n$ (§ 50), si trova che il modulo del rapporto incrementale, anche in questo caso generale, non può superare il massimo modulo della derivata prima. Possiamo dunque *per le nostre serie di potenze* ripetere nel caso più generale le considerazioni svolte al § 65 per le funzioni reali di variabile reale.

Applicando il teorema or ora citato alla serie (2), e così continuando, si prova facilmente:

Tutte le derivate della funzione definita da una serie (1) *di potenze esistono entro il cerchio di convergenza; e si ottengono semplicemente derivando termine a termine.*

§ 68. — Formole di Mac-Laurin e di Taylor.

Se dunque poniamo entro il cerchio di convergenza

$$f\ (x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots$$

sarà

$$f'\ (x) = a_1 + 2\, a_2 x + \ldots\ldots$$

$$f''\ (x) = \underline{|2}\, a_2 + 3 \,.\, 2\, a_3 x + \ldots\ldots$$

$$f'''\ (x) = \underline{|3}\, a_3 + 4 \,.\, 3 \,.\, 2\, a_4 x + \ldots\ldots$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = \underline{|n}\, a_n + (n+1)\, n\, (n-1) \ldots\ldots 3 \,.\, 2\, a_{n+1} x + \ldots\ldots$$

. . . .

Ponendo $x = 0$, ne deduciamo

$$f(0) = a_0;\quad f'(0) = a_1;\quad f''(0) = \underline{|2}\, a_2;\quad f'''(0) = \underline{|3}\, a_3; \;\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots f^{(n)}(0) = \underline{|n}\, a_n;\ \text{ecc.}$$

ossia

$$a_0 = f(0);\quad a_1 = \frac{f'(0)}{\underline{|1}};\quad a_2 = \frac{f''(0)}{\underline{|2}};\ \ldots\ldots;\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{\underline{|n}};\ \text{ecc.}$$

Quindi:

$$(4)\quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{\underline{|2}}x^2 + \frac{f'''(0)}{\underline{|3}}x^3 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{\underline{|n}}x^n + \ldots\ldots$$

Cioè:

Se f(x) *è una funzione definita da una serie di potenze della* x, *tale serie di potenze è la serie* (4).

Questo celebre teorema si chiama teorema di Mac-Laurin. Esso costituisce, tra l'altro, il punto di partenza del calcolo infinitesimale per le funzioni di variabile complessa. (Cfr. il teorema citato in nota al § 66, pag. 209).

Una prima conseguenza molto importante è che, se una funzione $f(x)$ è sviluppabile in serie di potenze, questa serie è certo il secondo membro di (4); cioè due serie *differenti* di potenze della x non possono avere la stessa somma $f(x)$.

Uno studio affatto analogo si può compiere per le funzioni $f(x)$ definite da una serie di potenze della variabile $x - \alpha$ ($\alpha =$ cost.), cioè da una serie

$$(5)\qquad f(x) = a_0 + a_1(x - \alpha) + a_2(x - \alpha)^2 + \ldots\ldots$$

Si troverebbe anche qui un *cerchio di convergenza, il quale però ha per centro il punto* $x = \alpha$, *anzichè il punto* $x = 0$. Si troverebbe pure che *la* (5) *è derivabile termine a termine, cosicchè la* (5) *coincide con*

$$(6)\quad f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{\underline{|2}}(x-\alpha)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{\underline{|n}}(x-\alpha)^n + \ldots$$

La (6) *ha il nome di serie di Taylor.* Del resto la (6) si deduce dalla (4), ponendo $x - \alpha$ al posto della x.

Come caso estremamente particolare delle serie di potenze noi abbiamo i polinomi $P_n(x)$ di grado n. Ad essi è dunque applicabile il nostro risultato: essi sono, cioè, sviluppabili in serie (6): anzi in tal serie saranno naturalmente nulli i coefficienti dei termini di grado superiore ad n. Ciò che si può verificare, osservando che un polinomio di grado n ha nulle tutte le derivate di ordine superiore ad n. Per ogni polinomio $P_n(x)$ di grado n vale dunque (posto $P = P_n$) la:

$$(7) \quad P_n(x) = P(\alpha) + \frac{P'(\alpha)}{1}(x-\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{\lfloor 2}(x-\alpha)^2 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{\lfloor n}(x-\alpha)^n.$$

Il lettore verifichi direttamente che (7) è una identità, sviluppando i singoli termini del secondo membro con la formola del binomio.

§ 69. — Sviluppabilità di una funzione in serie di potenze.

Ci proponiamo ora un problema intimamente connesso al precedente risultato, cioè il problema seguente:

Se f (x) *è una funzione reale prefissata della variabile reale* x, data in un intorno del punto $x = \alpha$, *come si può riconoscere se essa è sviluppabile in serie* (di Taylor) *di potenze della variabile* $x - \alpha$?

Se tale sviluppo è lecito, allora in un intorno di α dovrebbe, come sappiamo, valere la:

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1} f'(\alpha) + \ldots\ldots + \frac{(x-\alpha)^n}{\lfloor n} f^{(n)}(\alpha) + \ldots\ldots$$

che equivale (per definizione di serie) alla

$$\lim_{n=\infty} \left[f(x) - \left\{ f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1} f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{\lfloor 2} f''(\alpha) + \ldots\ldots \right.\right.$$
$$\left.\left. \ldots\ldots + \frac{(x-\alpha)^n}{\lfloor n} f^{(n)}(\alpha) \right\} \right] = 0.$$

La quantità tra [ ] si chiama *resto*, e si indica con R_n. È dunque

$$(8) \quad R_n(x) = f(x) - P_n(x) \text{ dove } P_n(x) = f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1} f'(\alpha) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{(x-\alpha)^n}{\lfloor n} f^{(n)}(\alpha).$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè f (x) *sia sviluppabile in un certo intervallo in serie di potenze è che la* f (x) *possegga ivi tutte le derivate e che il limite del resto* R_n *per* $n = \infty$ sia nullo (*).

Esistono formole notevoli, che permettono di scrivere R_n sotto forma più semplice. La più importante per il teorico è la *formola di Cauchy*. La più semplice, che basta per noi, *è dovuta a Lagrange*. Di essa ora ci occuperemo, facendo la *sola* ipotesi che $f(x)$ in un intorno di α possegga le prime $n+1$ derivate.

Se noi confrontiamo la (7) valida per ogni polinomio $P_n(x)$ col polinomio $P_n(x)$ definito in (8), troviamo che per questo polinomio valgono le:

$$P_n(\alpha)=f(\alpha);\quad P'_n(\alpha)=f'(\alpha);\quad P''_n(\alpha)=f''(\alpha);\ \ldots;\ P_n^{(n)}(\alpha)=f^{(n)}(\alpha):$$

cosicchè:

$$R_n(\alpha)=0;\quad R'_n(\alpha)=0;\quad R''_n(\alpha)=0;\ \ldots\ldots;\ R_n^{(n)}(\alpha)=0;$$

d'altra parte la $(n+1)^{esima}$ derivata di $P_n(x)$ è dappertutto nulla, perchè $P_n(x)$ è di grado n. E quindi si ha:

$$R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x).$$

Applicando alla $R_n(x)$ il teorema di Lagrange del § 63, pag. 199, troviamo così:

$$(8^{\text{bis}})\qquad R_n(x)=\frac{(x-\alpha)^{n+1}}{\lfloor n+1}R_n^{(n+1)}(\xi)=\frac{(x-\alpha)^{n+1}}{\lfloor n+1}f^{(n+1)}(\xi),$$

dove ξ è un punto intermedio tra α ed x.

Notiamo le seguenti due forme, che si possono dare alle (8), (8^{bis}), ponendo $\alpha=0$, oppure $x=\alpha+h$:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{\lfloor 2}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{\lfloor n}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{\lfloor n+1}f^{(n+1)}(x\theta)$$

$$f(\alpha+h)=f(\alpha)+hf'(\alpha)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(\alpha)+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{h^n}{\lfloor n}f^{(n)}(\alpha)+\frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1}f^{(n+1)}(\alpha+\theta h).$$

Formole tutte che valgono, purchè nell'intervallo considerato esistano e siano finite le prime $n+1$ *derivate di* f (x).

(*) Il teorema di Cauchy, citato in nota al § 66, ci dice che queste condizioni sarebbero certamente soddisfatte in un certo cerchio, *se* f (x) *fosse* funzione della variabile *complessa* x con derivata *prima* finita e continua!!

Ponendo $n = 1, 2, 3, \ldots$ si trova

$$(9)\quad \begin{cases} f(\alpha+h) = f(\alpha)+hf'(\alpha+\theta h) = f(\alpha)+hf'(\alpha)+\dfrac{h^2}{\underline{|2}}f''(\alpha+\theta h) \\ \qquad = f(\alpha)+hf'(\alpha)+\dfrac{h^2}{\underline{|2}}f''(\alpha)+\dfrac{h^3}{\underline{|3}}f'''(\alpha+\theta h) = \ldots \end{cases}$$

La prima formola coincide col teorema della media di Lagrange. Si avverta che i numeri θ, che compaiono nel 2°, nel 3°, nel 4° ..... membro, sono generalmente distinti l'uno dall'altro (pure essendo tutti compresi tra 0 ed 1).

Se $f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(n)}(\alpha) = 0$, tale formola si riduce al citato teorema di Lagrange del § 63.

Esempi.

1° Per ottenere la forma, sotto cui Cauchy scrisse il resto R, poniamo in (8) b al posto di x ed x al posto di α. Otterremo:

$$f(b) = f(x) + \frac{b-x}{1}f'(x) + \frac{(b-x)^2}{\underline{|2}}f'(x) + \ldots \frac{(b-x)^n}{\underline{|n}}f^{(n)}(x) + R_n$$

donde:

$$R_n = f(b) - [f(x) + \frac{b-x}{1}f'(x) + \ldots + \frac{(b-x)^n}{\underline{|n}}f^{(n)}(x)].$$

Consideriamo R_n come funzione $R_n(x)$ della x. Si ha:

$$R_n(b) = 0,\ R_n(x) = R_n(x) - R_n(b) = (x-b)R'_n(y),$$

dove y è (per il teorema della media) un punto interno all'intervallo (b, x). Quindi, poichè (come dimostra un facile calcolo)

$$R'_n(x) = -\frac{(b-x)^n}{\underline{|n}}f^{(n+1)}(x),$$

si ha:

$$R_n(x) = -(x-b)\frac{(b-y)^n}{\underline{|n}}f^{(n+1)}(y).$$

Questa formola è dovuta a Cauchy. Se poniamo $b = x+h$, e quindi $y = x+\theta h$ $(0 < \theta < 1)$ si otterrà:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{\underline{|2}}f''(x) + \ldots + \frac{h_n}{\underline{|n}}f^{(n)}(x) + R_n,$$

ove

$$R_n = h^{n+1}\frac{(1-\theta)^n}{\underline{|n}}f^{(n+1)}(x+\theta h)$$

dove naturalmente figura un θ affatto distinto da quello che compare nella formola di Lagrange.

Teorema 2° *A* (di Bernstein). *Condizione necessaria affinchè* f(x) *sia sviluppabile in serie di Taylor nell'intervallo* $0 \leqq x < R$ *è che* f(x) *sia in tale intervallo differenza di due funzioni* $\varphi_1(x)$ *e* $\varphi_2(x)$, *che ivi non sono negative insieme a tutte le loro derivate.*

Infatti, se $f(x) = \sum_n a_n x^n$, si può indicare con $\varphi_1(x)$ [*con* $-\varphi_2(x)$] rispettivamente la somma di quei termini della nostra serie, che hanno coefficiente positivo [*negativo*]; oppure porre

$$\varphi_1(x) = \sum |a_n| x^n, \qquad \varphi_2(x) = \sum (|a_n| - a_n) x^n.$$

TEOREMA 2° *B* (di Bernstein). *La precedente condizione necessaria è anche sufficiente.*

Sia infatti $\varphi(x)$ una funzione positiva in $0 \leqq x < R$ con tutte le sue derivate. Se $0 < h < R$, nell'intervallo $h \leqq x < R$ si avrà

$$\varphi^{(n)}(x) \geqq \varphi^{(n)}(h) \qquad (\text{perchè } \varphi^{(n+1)} \geqq 0),$$

donde, integrando

$$\varphi^{(n-1)}(x) \geqq \varphi^{(n-1)}(x) - \varphi^{(n-1)}(h) \geqq (x-h)\,\varphi^{(n)}(h)$$

$$\varphi^{(n-2)}(x) \geqq \varphi^{(n-2)}(x) - \varphi^{(n-2)}(h) \geqq \frac{(x-h)^2}{\lfloor 2} \varphi^{(n)}(h)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi''(x) \quad \geqq \qquad\qquad \geqq \frac{(x-h)^{n-2}}{\lfloor n-2} \varphi^{(n)}(h).$$

Cioè, posto $\dfrac{h}{x} = \theta$, dove θ è compreso tra 0 ed 1, sarà:

$$\varphi^{(n)}(\theta x) \leqq \frac{\varphi''(x)}{(1-\theta)^{n-2} x^{n-2}} \lfloor n-2 .$$

Posto:

$$\Phi_n(\theta, x) = x^n \frac{(1-\theta)^{n-1}}{\lfloor n-1} \varphi^{(n)}(\theta x),$$

si ha (*Cauchy*) che (per un valore, generalmente ignoto, di θ) la $\Phi_n(\theta, x)$ rappresenta il resto della serie di Taylor relativa alla funzione $\varphi(x)$. Ora, per il nostro risultato,

$$\Phi_n(\theta, x) \leqq x^2 \varphi''(x) \frac{1-\theta}{n-1}$$

e tende per $n = \infty$ a zero (ciò che basta ad assicurare la sviluppabilità di $\varphi(x)$ in serie di Taylor). Essendo $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ sviluppabili in serie di Taylor, altrettanto avverrà di

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

Anzi il resto della corrispondente serie di Taylor, scritto nella forma di Cauchy, sarà uguale alla differenza tra le $\Phi_n(\theta, x)$ corrispondenti a $\varphi_1(x)$ ed a $\varphi_2(x)$.

Tale *resto di Cauchy* sarà dunque minore di

$$x^2 \frac{1-}{n-1} [\varphi_1''(x) + \varphi_2''(x)] \leqq$$

$$\leqq \frac{r^2}{n-1} (1-\theta) [\varphi_1''(r) + \varphi_2''(r)] \qquad (\text{se } x \leqq r < R),$$

e perciò, prendendo n abbastanza grande, si può rendere minore di un numero ε piccolo a piacere. Basta prendere $n - 1 \geqq \dfrac{r^2 [\varphi_1''(r) + \varphi_2''(r)]}{\varepsilon}$. Il secondo membro di questa disuguaglianza non dipende da θ; cioè l'espressione del *resto di Cauchy* si può rendere, scegliendo n abbastanza grande, minore di un numero ε prefissato (piccolo a piacere) *contemporaneamente* per tutti i valori di θ compresi tra 0 ed 1.

TEOREMA 3° (di Pringsheim). *L'espressione trovata del resto di Cauchy converge pertanto* **uniformemente** *a zero, quando* x *varia in un qualsiasi intervallo* $0 \leqq x \leqq r$, *dove* $r < R$, *e* θ *varia arbitrariamente nell'intervallo* (0, 1).

Un risultato analogo **non vale** *per il resto di Lagrange;* il quale perciò presenta nelle applicazioni il difetto che talvolta non si può affermare esser nullo il suo limite, perchè non si conosce il valore esatto di θ. L'ignorare tale valore non ha invece importanza per il resto di Cauchy.

3° Dimostrare che:

$$f(x) = f(0) + xf'(x) - \ldots\ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{\lfloor n} f^{(n)}(x) + R_n,$$

ove:

$$R_n = (-1)^{n+2} \frac{x^{n+1}}{\lfloor n+1} f^{(n+1)}(\theta x).$$

E scrivere R_n sotto una forma analoga a quella di Cauchy.
Ris. Si ponga $f(0) = f(x - x)$.
4° Dimostrare che:

$$f\left(\frac{x}{1+x}\right) = f(x) - \frac{x^2}{1+x} f'(x) + \ldots\ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(1+x)^n} \frac{f^{(n)}(x)}{\lfloor n} + R_n,$$

ove:

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(1+x)^{n+1}} \frac{1}{\lfloor n+1} f^{(n+1)}\left(x - \theta \frac{x^2}{1+x}\right).$$

Ris. Si ponga $\frac{x}{1+x} = x + h$, ossia $h = -\frac{x^2}{1+x}$.

4° Applicheremo quanto abbiamo detto allo sviluppo in serie di qualche funzione. Vediamo, p. es., di sviluppare in serie di Taylor la funzione sen x.

Occorre anzitutto cercare le successive derivate di $f(x) = \text{sen}\, x$ e calcolarne il valore per $x = 0$. Si ha:

$$\begin{array}{llll}
f'(x) = & \cos x, & \text{per cui } f'(0) = & 1 \\
f''(x) = & -\,\text{sen}\, x, & \text{per cui } f''(0) = & 0 \\
f'''(x) = & -\cos x, & \text{per cui } f'''(0) = & -1 \\
f''''(x) = & \text{sen}\, x, & \text{per cui } f''''(0) = & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Essendo $f^{(4)}(x) = f(x)$ sarà $f^{(5)}(x) = f'(x)$..... ; cosicchè le derivate di $f(x) = \text{sen}\, x$ si riproducono periodicamente a quattro a quattro, ed in particolare si riprodurranno a quattro a quattro i valori che le successive derivate assumono per $x = 0$ e che noi abbiamo precedentemente calcolati. Per la formola di Mac-Laurin, supposto $n = 2m$, cioè n pari, abbiamo:

$$\text{sen}\, x = x - \frac{1}{\lfloor 3} x^3 + \frac{1}{\lfloor 5} x^5 - \frac{1}{\lfloor 7} x^7 + \ldots \mp \frac{1}{\lfloor 2m-1} x^{2m-1} + R_n(x)$$

dove $R_n(x) = \pm \frac{x^{2m+1}}{\lfloor 2m+1} \cos(\theta x)$ soddisfa certamente alla $|R_n| \leq \left|\frac{x^{2m+1}}{\lfloor 2m+1}\right|$, poichè $|\cos(\theta x)| \leq 1$. Per passare dalla formola di Mac-Laurin alla serie, basterà dimostrare che R_n tende a zero quando $n = 2m$ tende all'infinito; ciò è evidente perchè già abbiamo visto (esempio 1° di pag. 151) che:

$$\lim_{n=\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Si ha dunque:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots..$$

In modo analogo si dimostra che:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots..$$

Il resto della serie di Taylor per la funzione e^x vale $\frac{x^n}{n!} e^{\theta x}$, ove $e^{\theta x}$ è compreso tra $e^0 = 1$ ed e^x (perchè θ è compreso tra 0 ed 1, e di due potenze di e è maggiore quella con esponente maggiore). Quindi $e^{\theta x}$ non supera il più grande dei due numeri 1 ed e^x (*) (che non varia con n). D'altra parte $\frac{x^n}{n!}$ tende a zero per $n = \infty$. Quindi e^x è sviluppabile in serie di Taylor, perchè il resto R_n tende a zero per $n = \infty$. Si trova:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots..$$

Quest'ultima serie si dice esponenziale, e serve a calcolare un numero $y = e^x$, di cui sia dato il logaritmo neperiano x.

5° Si sviluppi in serie di Taylor $y = (1 + x)^m$. Poichè

$$y^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\,(1+x)^{m-n},$$

sarà

$$y = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \ldots..$$

quando il limite del resto sia nullo. Se m è intero positivo, allora, per ogni valore della x, la precedente serie si riduce a un polinomio, perchè $y^{(n)} = 0$ per $n > m$, ed il resto stesso è nullo già per $n = m + 1$. Si ritorna in tal caso alla nota for-

(*) Se $x > 0$, e^x è più grande di 1; invece, se $x < 0$, è $e^x < 1$.

mola del binomio di Newton. Se m non è intero positivo, si dimostra che il resto tende a zero, e che il precedente sviluppo in serie è legittimo se $|x| < 1$ (e non se $|x| > 1$; il caso $|x| = 1$ non ci interessa) (*).

Tale serie dicesi *binomiale.*

Questo risultato si può provare direttamente nel seguente modo. Dal § 45, pag. 151, sappiamo che la serie precedente converge per $|x| < 1$. Sia $f(x)$ il suo valore. Sarà:

$$f'(x) = m \left\{ 1 + \frac{m-1}{1} x + \frac{(m-1)(m-2)}{\underline{|2}} x^2 + \ldots.. \right\} \quad (\text{per } |x| < 1).$$

Cosicchè si trova facilmente che:

$$(1+x) f'(x) = mf(x), \text{ ossia } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{1+x}, \text{ ossia } \frac{d \log |f|}{dx} = \frac{d \log |1+x|^m}{dx}.$$

Quindi $\log |f| - \log |1+x|^m = \log \left| \frac{f}{(1+x)^m} \right|$ ha derivata nulla, cioè è costante. Dunque $\left| \frac{f(x)}{(1+x)^m} \right|$ è costante, ossia (poichè è uguale ad 1 per $x = 0$) vale 1. Dunque $f(x)$ non è mai nullo; e, poichè è positivo per $x = 0$, sarà positivo in tutto il campo $|x| < 1$, ove $f(x)$ è definito. Dunque $|f(x)| = f(x)$. Per

$|x| < 1$ anche $(1+x)^m > 0$. Quindi $\frac{f(x)}{(1+x)^m} = \left| \frac{f(x)}{(1+x)^m} \right| = 1$, cioè

$f(x) = (1+x)^m$. c. d. d.

6° Per sviluppare in serie $y = \log(1+x)$ si noti che

$$y' = (1+x)^{-1},\ y'' = -(1+x)^{-2}, \text{ ecc.},$$
$$y^{(n)} = (-1)^{n+1} \underline{|n-1} (1+x)^{-n}.$$

Lo sviluppo in serie sarà:

$$(1) \qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots..,$$

purchè il *resto tenda a zero.* Senza studiare il resto possiamo provare direttamente la (1) per $|x| < 1$. [Nel caso $|x| > 1$ si può dimostrare similmente che la serie precedente non converge; il caso di $x = \pm 1$ non ci interessa]. Se $|x| < 1$, il valore asso-

---

(*) Questo sviluppo in serie può essere talvolta utile per calcolo di $\sqrt[r]{N}$, se $N > 0$. Detto h un intero positivo tale che $\frac{N}{10^{hr}}$ sia compreso tra 0 e 2, si ponga $\frac{N}{10^{hr}} = 1 + x$, dove sarà $|x| < 1$. Sarà $\sqrt[r]{N} = 10^h (1+x)^m$, dove è posto $m = \frac{1}{r}$. Si può allora applicare la formola precedente. Il calcolo è specialmente rapido, se $|x|$ è piccolo.

E' forse inutile avvertire che è sempre sottinteso di dare alla x valori tali che esista un valore *reale* di $(1+x)^m$ (ciò che avviene se $|x| < 1$) e che tra i valori, di cui $(1+x)^m$ può essere suscettibile, si sceglie quello *reale* e *positivo.*

luto del rapporto di un termine al precedente nella serie (1), cioè $\left| \frac{x^n}{n} : \frac{x^{n-1}}{n-1} \right| = \left| x \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right|$ tende per $n = \infty$ ad $|x| < 1$. Cosicchè la serie del secondo membro di (1) converge. Se $\varphi(x)$ ne è la somma, si trova derivando:

$$\varphi'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \dots\dots;$$

il secondo membro è una progressione geometrica decrescente, il cui rapporto è $-x$, e la cui somma vale dunque $\frac{1}{1+x} = \frac{d}{dx}[\log(1+x)]$. Dunque $\varphi(x) - \log(1+x)$ ha derivata nulla, ed è quindi costante. Ma per $x = 0$ tale differenza è nulla. Dunque $\varphi(x) - \log(1+x)$ è sempre nulla. E, come si doveva provare, $\varphi(x) = \log(1+x)$.

Questa serie serve al calcolo diretto dei logaritmi dei numeri $1 + x$, ove $|x| < 1$, ossia dei numeri minori di 2. Ora, preso un qualsiasi numero positivo k, almeno uno dei due numeri k, $\frac{1}{k}$ è minore di 2. E quindi per mezzo della serie precedente si può calcolare uno dei numeri $\log k$, $\log \frac{1}{k}$ e quindi anche l'altro, perchè questi due numeri sono uguali e di segno contrario, cosicchè, se uno di essi è noto, è noto anche l'altro. Ma si possono trovare serie assai più comode per il calcolo numerico. Posto in (1) $-x$ al posto di x, si trae:

$$\log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots\dots \quad (|x| < 1);$$

la quale, sottratta dalla (1), dà:

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right\} \quad (|x| < 1).$$

Posto $\frac{1+x}{1-x} = z$, ossia $x = \frac{z-1}{z+1}$, sarà $|x| < 1$ per $z > 0$, cosicchè per *ogni numero positivo* z si avrà:

$$(2) \quad \log z = 2\left\{\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \dots\dots\right\}.$$

Così, p. es., se si pone $z = 2$, si trova:

$$\log 2 = \frac{2}{3}\left\{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \dots\dots\right\}.$$

Se, tenendo conto, p. es., dei soli primi 8 termini, poniamo:

$$\log 2 = \frac{2}{3}\left\{1 + \frac{1}{3}\frac{1}{9} + \ldots\ldots + \frac{1}{15}\left(\frac{1}{9}\right)^7\right\},$$

commettiamo l'errore (in difetto)

$$\frac{2}{3}\left\{\frac{1}{17}\left(\frac{1}{9}\right)^8 + \frac{1}{19}\left(\frac{1}{9}\right)^9 + \ldots\ldots\right\} = \frac{2}{3.9^8}\left\{\frac{1}{17} + \frac{1}{19}\frac{1}{9} + \frac{1}{21}\frac{1}{9^2} + \ldots\ldots\right\} <$$

$$< \frac{2}{3.9^8}\frac{1}{17}\left\{1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \ldots\right\} = \frac{2}{3.17.9^8}\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{975725676} = 0{,}000000001\ldots$$

Un tale errore è già dunque estremamente piccolo; e ancor minore lo si renderebbe, se aumentassimo il numero dei termini di cui si tien conto.

Si calcoli log 5. Si trova

$$\log 5 = \log 4 + \log\frac{5}{4} = 2\log 2 + \log\frac{5}{4}\cdot$$

Essendo noto log 2, basterà calcolare

$$\log\frac{5}{4} = 2\left\{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5 + \ldots\ldots\right\}$$

ancor più comoda della precedente al calcolo numerico, come il lettore può verificare con metodo simile. I logaritmi fin qui calcolati sono in base e. Per trovare i logaritmi decimali si ricordi che $\log_{10} z = M \log_e z$, ove $M = \dfrac{1}{\log_e 10} = \dfrac{1}{\log_e 2 + \log_e 5}$ si trova facilmente, in virtù dei precedenti calcoli numerici, uguale a 0,434294481 ..... e si dice *modulo* dei logaritmi decimali.

Si ha così $\log_{10} z = 2M\left\{\dfrac{z-1}{z+1} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3 + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\ldots\right\}\cdot$

Il calcolo delle tavole logaritmiche viene poi facilitato da altri artifici: p. es., dall'osservazione che $\log_{10} 10^n = n$, che il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori, che $\log(n+1) = \log n + \log\dfrac{n+1}{n}$; cosicchè, noto $\log n$, si calcola tosto $\log(n+1)$ quando si conosca $\log\dfrac{n+1}{n}$; il quale ultimo logaritmo viene espresso da (2) sotto forma di serie rapidamente convergente, specialmente se n è un numero non troppo piccolo, ed è la cosidetta *differenza tavolare*, il cui ufficio è così noto a chi abbia consultato tavole di logaritmi (pag. 201, § 63, γ).

7° In modo affatto analogo si prova che per

$$|x| < 1, -\frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{4},$$

vale la:

$$y = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots..$$

Basta osservare che per $|x| < 1$ la serie al secondo membro converge ed ha $\frac{1}{1+x^2}$ per derivata, e che per $x = 0$ essa si annulla come $\operatorname{arctg} x$. Da tale serie si deducono formole notevoli per il calcolo di π.

Così osservando che $\frac{\pi}{6} = \operatorname{artg} \frac{1}{\sqrt{3}}$ e che $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, si trova, ponendo $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\pi = 2\sqrt{3}\left\{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots..\right\}$$

Un metodo ancor più comodo per il calcolo numerico di π è il seguente. Sia α l'angolo, la cui tangente è $\frac{1}{5}$. Sarà

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{5}{12}$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} = 1 + \frac{1}{119}.$$

Essendo $\operatorname{tg} 4\alpha > 1$, sarà $4\alpha > \frac{\pi}{4}$. Esisterà un angolo positivo β tale che

$$\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}.$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{239}.$$

Sarà allora:

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta = 4 \operatorname{arctg} \frac{2}{10} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

donde, ponendo nella nostra serie successivamente $x = \frac{2}{10}$, $x = \frac{1}{239}$ si trova:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \left\{ \frac{2}{10} - \frac{1}{3} \frac{2^3}{1000} + \frac{1}{5} \frac{2^5}{100.000} - \ldots . \right\} -$$
$$- \left\{ \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{239}\right)^5 - \ldots . \right\},$$

la quale formola ha servito al calcolo di π fino alla 704$^{\text{esima}}$ cifra decimale. Come esercizio, il lettore ne deduca il valore di π con due cifre decimali esatte.

8° Analogamente si osservi che:

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

che per $|x| < 1$ si può sviluppare in serie binomiale:

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)}{1 \, . \, 2} (-x^2)^2 +$$
$$+ \ldots . = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \, . \, 3}{2^2 \underline{|2}} x^4 + \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5}{2^3 \underline{|3}} x^6 + \ldots .$$

Si trova per $|x| < 1$ con metodo analogo al precedente che:

$$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{x^3}{2 \, . \, 3} + \frac{1 \, . \, 3}{2^2 \underline{|2}} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5}{2^3 \underline{|3}} \frac{x^7}{7} + \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, 7}{2^4 \underline{|4}} \frac{x^9}{9} + \ldots .$$

CAPITOLO XI.

MASSIMI, MINIMI, FLESSI

OSSERVAZIONE. Lo studente, che segua contemporaneamente il corso di meccanica razionale, potrà dopo questo Capitolo studiare i paragrafi dedicati alle rette tangenti, ai cerchi osculatori, ecc. di una sghemba.

§ 70. — Massimi e minimi (relativi).

α) Una prima applicazione della teoria delle derivate è quella della ricerca dei massimi o minimi di una funzione.

Per un tale studio è opportuno però precisare un po' il significato della frase: punto di massimo o di minimo, con le seguenti definizioni. Diremo che (cfr. le definizioni del § 62, pag. 193):

Una funzione $f(x)$ *ha nel punto* a, interno *all'intervallo ove è definita la funzione, un massimo relativo, se esiste un numero* k *tale che in tutto l'intervallo* $(a - k, a + k)$ *la funzione assume valori non maggiori di* $f(a)$, *ossia se la differenza* $f(a+h) - f(a)$ *è negativa o nulla per* $|h| \leqq k$.

Analogamente si dice che nel punto a *la funzione ha un minimo relativo, se esiste un numero* k *tale che nell'intervallo* $(a - k, a + k)$ *la funzione assume valori non minori di* $f(a)$, *ossia se la differenza* $f(a+h) - f(a)$ *è positiva o nulla per* $|h| \leqq k$.

La funzione $f(x)$ *si dice crescente nel punto* a, *se esiste un numero* $k > 0$ *tale che la funzione assume in* $(a, a + k)$ *valori maggiori che in* a *ed in* $(a - k, a)$ *valori minori che in* a, *ossia se* $f(a+h) - f(a)$ *ha il segno di* h *per* $|h| \leqq k$.

La funzione $f(x)$ *si dice decrescente nel punto* a, *se esiste un numero* $k > 0$ *tale che la funzione assume in* $(a, a + k)$ *valori minori che in* a *ed in* $(a - k, a)$ *valori maggiori che in* a, *ossia se* $f(a+h) - f(a)$ *ha segno opposto al segno di* h *per* $|h| < k$.

Talvolta si dice senz'altro che un punto di massimo o di minimo relativo è un punto di massimo o di minimo (*).

È interessante osservare che esistono funzioni continue $f(x)$, le quali in un punto $x = a$ non hanno nè un massimo, nè un minimo relativo, pure non essendo

(*) Taluni chiamano un punto di a punto di *massimo* soltanto se $f(a+h) - f(a)$ è positiva; punto di ***minimo*** se $f(a+h) - f(a)$ è negativa (cfr. l'oss. al § 62, pag. 193).

in tale punto nè crescenti nè decrescenti; e ciò, perchè in ogni intorno di a esse assumono tanto valori maggiori, che valori minori di $f(a)$. Tale è, p. es., la funzione $f(x)$ che è nulla per $x = a$ ed è uguale ad $(x - a)$ sen $\frac{1}{x-a}$ per $x \neq a$.

Tali funzioni non hanno quasi importanza nelle scienze applicate.

Da queste definizioni segue che una funzione $f(x)$ può in un dato intervallo avere parecchi massimi o minimi (relativi). Così, p. es., la funzione rappresentata dalla curva della nostra figura 23 ha punti di massimo relativo in A, B, C, D, E e punti di minimo relativo in A', B', C', D' ..... Essa è crescente, p. es., in H e decrescente, p. es., in K.

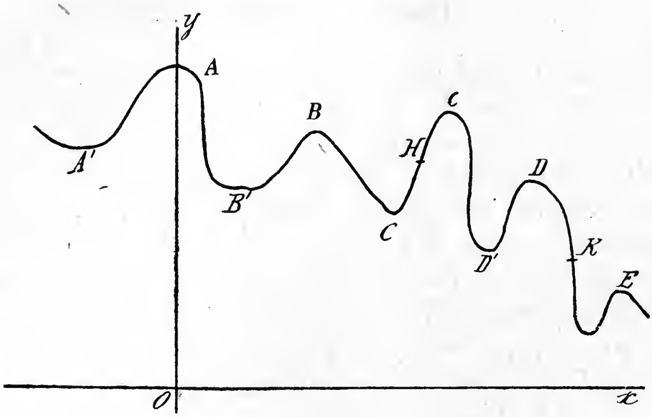


Fig. 23.

È utile anche osservare che può succedere che il valore di una funzione in un punto, cui corrisponde un massimo relativo, sia uguale od anche minore del valore, che la funzione ha in un altro punto, in cui la funzione possiede un minimo relativo. Così, p. es., nel caso della figura, il valore della funzione nel punto E, che è un punto di massimo, è minore del valore della funzione nel punto A' che è un punto di minimo. Ne ciò deve stupire, perchè l'essere un punto A $(x = a)$ un punto di massimo o di minimo relativo per $f(x)$ dipende soltanto dai valori che $f(x)$ ha in un intorno

$$(a - k, a + k)$$

del punto a, e non dai valori che $f(x)$ ha nei punti lontani dal punto A (*).

Molte volte si presenta il problema di cercare in quali punti A una data funzione $f(x)$ riceve il suo più grande, o il suo più piccolo valore. E che tali punti A esistano viene spesso

(*) Così una catena di monti può avere parecchie cime (massimi) e parecchi colli (minimi); e possono esistere delle cime più basse di qualche colle.

dedotto o dallo stesso problema che si studia, o dal fatto che si esamina una funzione $f(x)$ *continua* in un intervallo *finito*: cosicchè in tal caso il teorema di Weierstrass ci assicura dell'esistenza di tali punti A. Notiamo che:

Un punto A, *dove* f(x) *riceve il suo massimo, o il suo minimo valore, o è un punto di massimo o di minimo* (relativo) *secondo le precedenti definizioni, oppure cade agli estremi dell'intervallo* I *ove* f(x) *è definito* (perchè le precedenti definizioni si riferiscono soltanto ai punti *interni* all'intervallo, ove $f(x)$ è definita). Cosicchè *tali punti* A *sono da ricercarsi* tra i punti che o sono punti di massimo o minimo relativo, oppure sono estremi dell'intervallo I. Anzi *è nei casi più elementari lecito trascurare gli estremi di* I.

Da ciò risalta quanta importanza abbia, anche per la ricerca di tali punti A, cioè *dei punti di massimo o minimo assoluto*, la ricerca dei *punti di massimo o minimo relativo, di cui ora ci occupiamo.*

Dalla figura 25 appare intuitivo che in un punto di massimo o di minimo relativo la tangente alla curva $y = f(x)$ è parallela all'asse delle x, ossia più precisamente che in un tale punto $f'(x)$ (ammesso che $f'(x)$ esista e sia finita) è nulla. *Non è però vera* la proposizione reciproca.

In un punto $x = a$ (fig. 24) tale tangente può essere parallela all'asse delle x, senza che il punto $x = a$ sia un punto nè di massimo, nè di minimo.

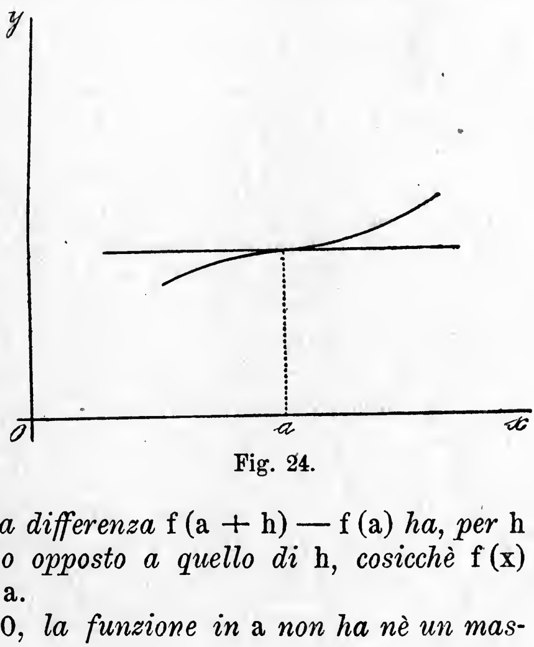


Fig. 24.

β) Sia a un punto interno all'intervallo, ove $f(x)$ è definita. Esista e sia finito $f'(a)$. Sappiamo già (§ 62, pag. 193) che:

1° *Se* $f'(a) > 0$ *la differenza* $f(a + h) - f(a)$ *ha per* h *abbastanza piccolo, il segno di* h, *cosicchè* f(x) *è crescente nel punto* a.

2° *Se* $f'(a) < 0$, *la differenza* $f(a + h) - f(a)$ *ha, per* h *abbastanza piccolo, segno opposto a quello di* h, *cosicchè* f(x) *è decrescente nel punto* a.

Quindi, se $f'(a) \neq 0$, *la funzione in* a *non ha nè un massimo nè un minimo.*

Se quindi per x $=$ a *la funzione ha un massimo o un minimo, è* f$'$(a) $= 0$. (Il teor. reciproco, come già vedemmo, e come proveremo più avanti, non è sempre vero).

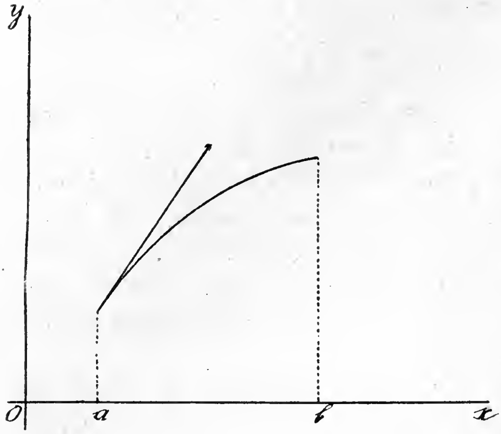


Fig. 25.

Oss. Già qui si vede come sia essenziale l'ipotesi che il punto a sia interno, e non agli estremi dell'intervallo, ove $f(x)$ è definita.

Per es., nel caso della figura 25, il valor minimo di $f(x)$ è all'estremo sinistro, ove $f'(x) \neq 0$, perchè la tangente non vi è parallela all'asse delle x.

Questi teoremi sono dimostrati senza ricorrere all'ipotesi che $f'(x)$ sia continua per $x = a$; e sono generalizzabili al caso che $f'(x)$ sia infinita per $x = a$, purchè di segno determinato. Si osservi ancora che il precedente risultato si può enunciare così:

In un punto x $=$ a (interno all'intervallo ove $f(x)$ è definita) *che sia un punto di massimo o di minimo per la* f(x), *o la* f(x) *non possiede derivata determinata e finita, oppure* f$'$(x) $= 0$.

Il lettore può illustrare il primo di questi due casi ricorrendo, p. es., ad una curva $y = f(x)$ formata di due segmenti concorrenti in un punto, ove la y ha il massimo valore, oppure ad una curva $y = f(x)$ formata di due archi di cerchio che si toccano in un punto, ove la tangente comune è normale all'asse delle x. (Cfr. l'ultima Nota al § 62, pag. 196).

Con metodi analoghi si dimostra:

Se b *è l'estremo sinistro dell'intervallo ove è definita, o dove si studia la* f(x), *allora, se* f$'$(b) > 0, *il valore* f(b) *assunto da* f(x) *per* x $=$ b *è minore dei valori assunti in un intorno (naturalmente destro) abbastanza piccolo del punto* x $=$ b. *E, se,* f$'$(b) < 0, *il valore* f(b) *è maggiore dei valori assunti in un tale intorno. Viceversa, se* b *è l'estremo destro dell'intervallo ove* f(x) *è definita.*

Il caso che in un tale estremo sia $f'(b) = 0$ si può trattare in modo simile a quello che noi useremo nelle seguenti pagine. Al lettore è lasciato un simile studio, che ha pure una qualche importanza.

2° *caso.* Esaurito il caso $f'(a) \neq 0$, studiamo ciò che avviene se $f'(a) = 0$ (supposto naturalmente che a sia interno all'intervallo, ove $f(x)$ è definita). E supponiamo dapprima che $f''(a) \neq 0$. La seconda delle formole di Taylor-Lagrange (cfr. la (9) di pag. 214) ci dice che sarà:

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^2}{\underline{|2}} f''(a + \theta h).$$

Se $f''(x)$ è continua per $x = a$, potremo trovare un intervallo $a - k$, $a + k$ tale che in ogni punto di questo intervallo la $f''(x)$ abbia lo stesso segno che $f''(a)$. Se $|h| < k$, allora, poichè $0 < \theta < 1$, il punto $a + \theta h$ apparterrà all'intervallo $(a - k, a + k)$ ed $f''(a + \theta h)$ avrà il segno di $f''(a)$. Quindi $f(a + h) - f(a)$ avrà il segno di $\frac{h^2}{2} f''(a)$, ossia, poichè $\frac{h^2}{2}$ è positivo, il segno di $f''(a)$. Perciò:

Se $f''(x)$ *è continua per* $x = a$, *se* $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$, *la differenza* $f(a + h) - f(a)$ *ha, per* $|h|$ *minore di un certo numero* k, *segno positivo, e quindi* $f(x)$ *ha in* a *un minimo. Se invece* $f'(a) = 0$, $f''(a) < 0$, *la* $f(x)$ *ha nel punto* $x = a$ *un massimo.*

Rimane da esaminare il caso $f'(a) = f''(a) = 0$. Per maggiore generalità supponiamo

$$f'(a) = f''(a) = \ldots\ldots = f^{(n-1)}(a) = 0; \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

E sia $f^{(n)}(x)$ continua per $x = a$. Esisterà un numero k tale che nell'intorno $(a - k, a + k)$ la $f^{(n)}(x)$ conserva lo stesso segno che ha nel punto a. La formola di Lagrange dice che:

$$f(a + h) - f(a) = \frac{h^n}{\underline{|n}} f^{(n)}(a + \theta h).$$

Se $|h| < k$ (ossia se h è abbastanza piccolo) allora, essendo $0 < \theta < 1$, anche il punto $a + \theta h$ appartiene all'intervallo $(a - k, a + k)$: e quindi $f^{(n)}(a + \theta h)$ ha il segno di $f^{(n)}(a)$. E quindi, per la formola citata, $f(a + h) - f(a)$ ha il segno di $\frac{h^n}{\underline{|n}} f^{(n)}(a)$, ossia, poichè $\underline{|n} > 0$, ha il segno di $h^n f^{(n)}(a)$. Ora h^n è sempre positiva se n è pari, ed ha il segno di h, se n è dispari.

Quindi $h^n f^{(n)}(a)$ ha il segno di $f^{(n)}(a)$, se n è pari; e, se n è dispari, esso ha il segno di h se $f^{(n)}(a) > 0$, ed ha segno contrario a quello di h se $f^{(n)}(a) < 0$. Se ne deduce tosto il seguente teorema che comprende i precedenti come casi particolari.

Se la derivata n^{esima} *di* $f(x)$ *è continua e differente da zero per* $x = a$, *mentre le precedenti derivate vi sono nulle, allora:*

Se n *è pari, la* $f(a + h) - f(a)$ *ha il segno di* $f^{(n)}(a)$ *per* h *abbastanza piccolo; e quindi* $f(x)$ *ha per* $x = a$ *un minimo se* $f^{(n)}(a) > 0$, *un massimo se* $f^{(n)}(a) < 0$.

Se n *è dispari, e* $f^{(n)}(a) > 0$, *la* $f(a+h) - f(a)$ *ha il segno di* h, *per* h *abbastanza piccolo; e quindi* $f(x)$ *è crescente nel punto* $x = a$.

Se n *è dispari e* $f^{(n)}(a) < 0$, *la* $f(x)$ *è decrescente nel punto* a (*).

L'ipotesi della continuità di $f^{(n)}(x)$ per $x = a$ si potrebbe rendere meno restrittiva, come abbiamo già visto nel primo caso di $n = 1$.

Infatti se $f^{(n)}(a)$ è determinato e finito, allora (cfr. oss. a § 63 β pag. 199 ove è scritto $n+1$ al posto di n), poichè la funzione $f(x) - f(a)$ ha nel punto a nulle le prime $n-1$ derivate, $f(a+h) - f(a)$ ha il segno di $h^n f^{(n)}(a)$.

Della derivata n^{esima} basta dunque supporre che essa è *determinata e finita* nel punto a.

Si può dire che la curva $y = f(x)$ e la retta parallela all'asse delle x definita dall'equazione $y = f(a)$, che con la curva precedente ha comune il punto di ascissa $x = a$, si attraversano in un punto ove $f(x)$ è crescente o decrescente, mentre si toccano senza attraversarsi in un punto, ove $f(x)$ ha un massimo o un minimo.

I risultati precedenti si possono provare anche così: Se $f'(a) \neq 0$ ed $|f''(x)|$ ammette un limite superiore finito, la $f(a+h) - f(a) = hf'(a) + \frac{1}{2}h^2 f''(a+\theta h)$ prova che $f(a+h) - f(a)$ ha per $|h|$ abbastanza piccolo il segno di $hf'(a)$, perchè $h^2 f''(a+\theta h)$ è infinitesimo d'ordine superiore e che quindi in a la $f(x)$ è crescente o decrescente secondo che $f'(a)$ è positivo o negativo. Se $f'(a) = 0$, se $f''(a) \neq 0$, e se $|f'''(x)|$ ha limite superiore finito, la $f(a+h) - f(a) = \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{\underline{|3}} f'''(a+\theta h)$ prova che per $|h|$ abbastanza piccolo il segno di $f(a+h) - f(a)$ è quello di $\frac{h^2}{2} f''(a)$ [perchè $\frac{h^3}{\underline{|3}} f'''(a+\theta h)$ è infinitesimo d'ordine superiore] ecc.

Esempi.

1° Trovare il massimo e il minimo della somma $x + y$ di due numeri, di cui è dato il prodotto $xy = 1$.

Ris. Si ha $y = \frac{1}{x}$; per cui

$$x + y = x + \frac{1}{x}\cdot$$

Perchè tale funzione ammetta un massimo o un minimo, la

(*) Così, p. es., se $f'(a) = f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$, la funzione $f(x)$ è crescente in $x = a$ se $f'''(a) > 0$, decrescente se $f'''(a) < 0$.

Se $f'(a) = f''(a) = f'''(a) = 0$, $f^{(4)}(a) \neq 0$, la funzione ha nel punto $x = a$ un minimo se $f^{(4)}(a) > 0$, un massimo se $f^{(4)}(a) < 0$; e così via. Nulla ci dice il nostro teorema, se nel punto $x = a$ sono nulle tutte le derivate della $f(x)$.

sua prima derivata deve essere nulla. La derivata prima di $x + \frac{1}{x}$ è $1 - \frac{1}{x^2}$; deve dunque essere:

$$1 - \frac{1}{x^2} = 0,$$

da cui: $$x^2 - 1,$$

ossia: $$\begin{cases} x = 1, \text{ oppure} \\ x = -1. \end{cases}$$

La derivata seconda della funzione $x + \frac{1}{x}$ è $\frac{2}{x^3}$. Per $x = 1$ questa derivata è uguale a 2; perciò, essendo la prima derivata diversa da zero d'ordine (2) pari e positiva, la funzione data per $x = 1$ ammette un minimo che è 2. Per $x = -1$ la seconda derivata della funzione $x + \frac{1}{x}$ diventa -2; essendo dunque la prima derivata diversa da zero per $x = -1$ di ordine pari e negativa, la funzione data ammette nel punto $x = -1$ un massimo che è -2. L'allievo illustri col disegno.

La somma $x + y$ ha dunque un solo massimo che è -2 (per $x = -1$) e un solo minimo che è 2 (per $x = 1$). Questo risultato può sembrare a prima vista paradossale, perchè il massimo è minore del minimo. Ciò si spiega notando che la funzione $x + \frac{1}{x}$ non è continua in tutto l'intervallo da -1 a 1, essendovi in questo intervallo il punto 0, in cui la funzione non è neanche definita. La funzione data $x + \frac{1}{x}$ si sdoppia per così dire in due altre: l'una definita per $x < 0$, che ha il massimo in $x = -1$; l'altra definita per $x > 0$, che ha minimo per $x = 1$.

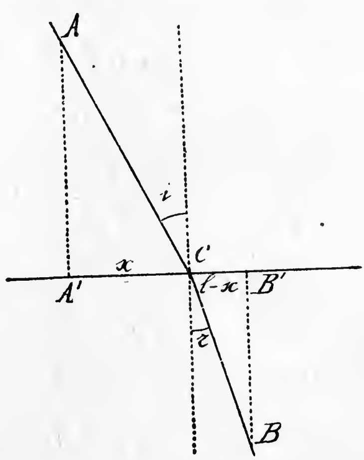


Fig. 26.

2° Un raggio di luce va da un punto A al punto B attraverso una retta r complanare con AB (fig. 26). Prima di giungere ad r ha la velocità v; poi acquista la velocità w. Cercare il punto C ove il raggio incontra la retta r, in guisa che il tempo y impiegato a percorrere complessivamente i segmenti AC, CB sia minimo.

RIS. Dette h, k la distanza da A, B ad r (in valore assoluto), detta l la distanza delle due proiezioni A', B' dei punti A, B su r, con x la distanza $A'C$, si avrà

$$AC = \sqrt{h^2 + x^2}, \qquad BC = \sqrt{(l-x)^2 + k^2}$$

$$y = \frac{AC}{v} + \frac{BC}{w} = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v} + \frac{\sqrt{(l-x)^2 + k^2}}{w}.$$

Affinchè y sia minimo, dev'essere $y'_x = 0$, ossia:

$$\frac{1}{v}\frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{1}{w}\frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + k^2}},$$

ossia
$$\frac{1}{v}\frac{A'C}{AC} = \frac{1}{w}\frac{B'C}{BC}.$$

Indicati con i, r (cfr. fig. 26) gli angoli (di incidenza e rifrazione) di AC, CB con la normale r, se ne deduce

$$\frac{\operatorname{sen} i}{v} = \frac{\operatorname{sen} r}{w}, \text{ ossia } \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v}{w},$$

che è la nota legge della rifrazione della luce.

Lo studente verifichi che il punto C così determinato rende y effettivamente minimo.

§ 71. — **Concavità, convessità, flessi.**

Sia $y = f(x)$ definita in un intervallo, a cui è interno il punto a; e possegga la $f(x)$ finite e continue tutte le derivate

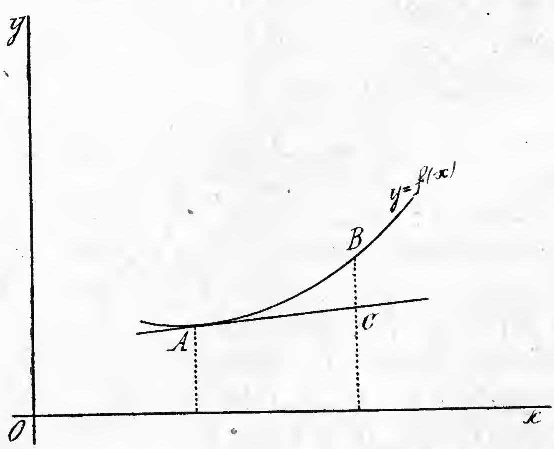


Fig. 27.

di cui avremo bisogno (fig. 27 e 28). (Basterebbe supporle finite e determinate).

Consideriamo i punti A, B della curva, aventi per ascissa a ed $a+h$, e la retta AC tangente in A. Sia C il punto di tale retta tangente, che ha $a+h$ per ascissa. L'ordinata di A sarà $f(a)$; quella di B sarà $f(a+h)$, perchè i punti A, B giacciono sulla curva $y=f(x)$.

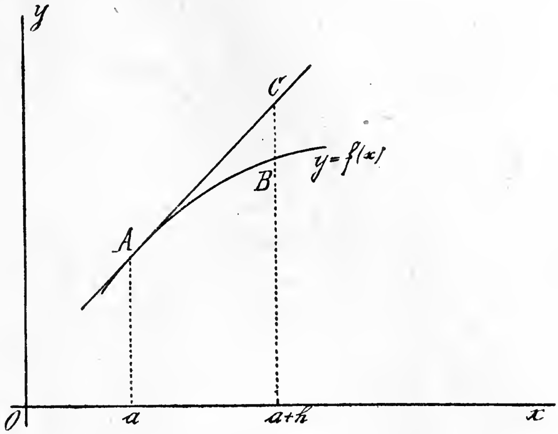


Fig. 28.

Se η è l'ordinata di C, il coefficiente angolare della retta AC è

$$\frac{\text{ordinata di } C - \text{ordinata di } A}{\text{ascissa di } C - \text{ascissa di } A} = \frac{\eta - f(a)}{h}.$$

Ma AC è tangente in A alla $y=f(x)$; il suo coefficiente angolare è perciò $f'(a)$. E si ha quindi

$$\frac{\eta - f(a)}{h} = f'(a).$$

Donde, risolvendo rispetto ad η, si ha che l'ordinata η di C vale $f(a)+hf'(a)$. Quindi la differenza

$$\begin{gathered}(\text{ordinata di } B) - (\text{ordinata di } C) = \\ = f(a+h) - [f(a)+hf'(a)] = [f(a+h) - f(a)] - hf'(a) = \\ = hf'(a+\theta h) - hf'(a) = h\,\{ f'(a+\theta h) - f'(a) \}; \qquad (1) \\ 0<\theta<1,\end{gathered}$$

come si riconosce tosto in virtù del teorema della media di Lagrange.

Distinguiamo ora parecchi casi:

1° La $f'(x)$ sia in $x=a$ crescente. In tal caso

$$f'(a+\theta h) - f'(a)$$

ha (per h sufficientemente piccolo) il segno di θh, ossia il segno di h. E la (1) è perciò positiva. Quindi:

Se $f'(x)$ *è crescente per* $x = a$, *la curva* $y = f(x)$ *in un intorno abbastanza piccolo di* $x = a$ *rimane al disopra della sua tangente nel punto* $x = a$; ciò che si enuncia dicendo che *volge la concavità verso l'alto.*

2° In modo simile si prova che

Se $f'(x)$ *è decrescente per* $x = a$, *la curva* $y = f(x)$ *in un intorno abbastanza piccolo di* $x = a$ *rimane al disotto della sua tangente nel punto* $x = a$; ciò che si enuncia dicendo che *essa volge la concavità verso il basso.*

3° Se $f'(x)$ ha per $x = a$ un massimo o un minimo, $f'(a + \theta h) - f'(a)$ ha per h sufficientemente piccolo un segno costante, che non varia cambiando il segno di h. Quindi la (1) ha un segno che cambia, mutando il segno di h.

Se $f'(x)$ *ha per* $x = a$ *un massimo o un minimo, la curva* $y = f(x)$ *attraversa la sua tangente nel punto* $x = a$; ciò che si enuncia dicendo che *il punto* $x = a$ *è un punto di flesso per la curva* $y = f(x)$. (Cfr., p. es., la fig. 13, a pag. 159).

Ne segue che in un punto di *flesso* $x = a$ l'angolo ω che l'asse delle x forma con la tangente alla curva $y = f(x)$ ha un valore massimo o minimo. Se dunque andiamo da un punto posto a sinistra ad un punto posto a destra del flesso, l'angolo ω, nei casi più comuni, o diminuisce per poi aumentare, oppure aumenta per poi diminuire. In una parola, quando si cammina, attraversando il flesso, l'angolo ω da crescente diventa decrescente, o viceversa. In una parola cambia il verso in cui gira la direzione della retta tangente.

Ricordo che negli enunciati precedenti la frase: « verso l'alto » [basso] è scritta invece della: « verso la direzione positiva [negativa] dell'asse delle y ».

Se, p. es., $f''(a) > 0$, allora $f'(x)$ è crescente per $x = a$. Se $f''(a) < 0$, allora $f'(x)$ è decrescente per $x = a$; se $f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$, allora $f'(x)$ ha un massimo o un minimo per $x = a$.

Dal precedente teorema si deduce quindi in particolare:

Se $f''(a) > 0$, *la curva* $y = f(x)$ *volge in* $x = a$ *la concavità verso l'alto; se* $f''(a) < 0$ *essa volge in* $x = a$ *la concavità verso il basso; infine, se* $f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$, *la curva ha un flesso nel punto* $x = a$.

Oss. Ricordiamo che, *mentre in un punto* $x = a$ *di flesso è* $f''(a) = 0$, può darsi benissimo *che* $f''(a) = 0$, *senza che* $x = a$ *sia un punto di flesso;* e ciò perchè, come già osservammo, può in un punto $x = a$ essere nulla la derivata di $f'(x)$, senza che in tale punto $f'(x)$ abbia un massimo o un minimo.

In un punto della curva di ordinata $y > 0$, anzichè dire che la concavità (o la convessità) sono volte verso il basso, si suol dire che in tale punto la curva volge la concavità o convessità) verso l'asse delle x. La stessa locuzione si usa in un punto di ordinata negativa per dire che la concavità (o convessità) sono volte verso l'alto. Dunque: *Una curva volge in un suo punto (di ordinata differente da zero) la concavità (convessità) verso l'asse delle* x *se* y *ed* y″ *hanno ivi segno contrario (ugual segno), ossia se* y y″ *è negativo (positivo).*

ESEMPIO.

Si studii l'andamento della curva:

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

RIS. Posto $Y = y$, $X = x + \frac{a}{3}$ (ciò che equivale, quando si considerino X, Y come nuove coordinate, a fare una traslazione parallela all'asse delle x), si avrà

$$Y = \left(X - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(X - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(X - \frac{a}{3}\right) + c,$$

ossia $Y = X^3 + pX + q$, dove p, q sono costanti facili a determinarsi, dipendenti soltanto dalle a, b, c. I massimi e minimi di Y si ottengono risolvendo la

$$Y' = 3\,X^2 + p = 0 \quad \text{donde} \quad X = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Se $p > 0$ non vi sono nè massimi nè minimi e la Y è sempre crescente (perchè $Y' > 0$ dappertutto). Se invece $p \leqq 0$, sostituendo il valore trovato di X in $Y'' = 6\,X$, si ottiene $\pm 6\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Se $p = 0$, questa derivata è nulla, e poichè $Y''' = 6 \neq 0$, il punto trovato non è un punto nè di massimo, nè di minimo.

Rimane dunque il solo caso di $p < 0$. In tal caso

$Y'' > 0$ per $X = +\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Questo punto è un punto di minimo.

$Y'' < 0$ per $X = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Questo punto è un punto di massimo.

A sinistra del punto di massimo la funzione Y (che per $X = -\infty$ tende a $-\infty$) è crescente (come si riconosce verificando $Y' > 0$); poi Y decresce fino al punto di minimo, per poi crescere di nuovo tendendo a $+\infty$ per $X = +\infty$.

Per trovare i flessi si deve risolvere la $Y'' = 6X = 0$.

Se ne deduce $X = 0$, il quale è certo un flesso, perchè $Y''' = 6 \neq 0$.

Con la $x = X - a$ si ritorna all'antica variabile x.

L'allievo illustri col disegno l'andamento della curva in tutti i casi ($p > 0$, $p = 0$, $p < 0$) anche per qualche valore numerico particolare delle a, b, c.

Il lettore veda in quanti punti nei varii casi la nostra curva incontra l'asse delle X: punti, che saranno le radici *reali* dell'equazione $X^3 + pX + q = 0$ (*). E confronti coi risultati del § 10, esaminando a quali disuguaglianze le p, q soddisfano nei varii casi.

Applicazione.

Sia $y = f(x)$ lo spazio percorso da un punto M mobile su una retta r all'istante x. Come si può, dall'esame della curva $y = f(x)$ (che viene spesso tracciata automaticamente in casi pratici, come ad esempio nel varo di una nave) determinare in quali istanti la velocità di M raggiunge il massimo o il minimo valore?

Ris. Basta determinare quei valori di x, a cui corrisponde un flesso della nostra curva.

§ 72. — **Metodo di Newton-Fourier.**

α) *Lemma. Se* AB *è un arco di curva* $y = f(x)$ *e se* $f''(x)$ *è finita, non è mai nulla e conserva lo stesso segno nell'arco considerato, allora l'arco* AB *è tutto interno al triangolo*

(*) Se il valore massimo $\left(\text{per } X = -\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$ della Y è negativo, la nostra curva incontra in un solo punto $\left(\text{a destra del punto di minimo } X = +\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$ l'asse delle x.

Un risultato simile si ha se il valore minimo della Y è positivo. In tali casi la nostra equazione ha una sola radice reale.

Se il valore minimo di Y è negativo, quello massimo è positivo, vi sono tre radici reali poste rispettivamente negli intervalli

$$\left(-\infty, -\sqrt{-\frac{p}{3}}\right),\ \left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}, +\sqrt{+\frac{p}{3}}\right),\ \left(+\sqrt{-\frac{p}{3}}, +\infty\right).$$

rettilineo ABD *formato dalla corda* AB *e dalle tangenti in* A *e in* B (fig. 29).

Questo teorema è geometricamente intuitivo, perchè nelle attuali ipotesi l'arco $y = f(x)$ volge la sua concavità sempre da una stessa parte. Essa si dimostra rigorosamente così.

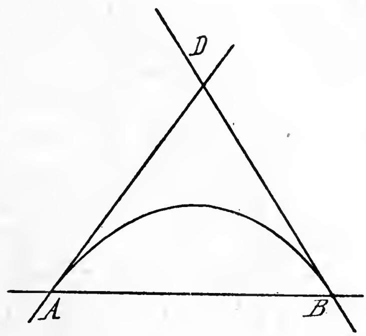


Fig. 29.

In due punti distinti dell'arco AB le tangenti all'arco non possono essere parallele, perchè i valori corrispondenti di $f'(x)$ sarebbero uguali; e, per il teorema di Rolle, in un punto intermedio sarebbe $f'' = 0$ contro l'ipotesi.

L'arco AB non ha con la corda AB comune (oltre ai punti A, B) alcun altro punto C; perchè altrimenti per il teorema della media esisterebbe nell'arco AC un punto E, e nell'arco CB un punto F, in cui le tangenti all'arco sarebbero parallele ad AB e quindi parallele tra di loro.

Così pure l'arco AB non può avere, oltre al punto A, comune alcun altro punto C con la tangente in A; altrimenti nell'arco AC vi sarebbe un punto intermedio E, ove la tangente all'arco sarebbe parallela alla tangente in A.

E altrettanto dicasi per la tangente in B. Quindi il nostro arco, o è tutto interno al triangolo ADB, oppure, pure essendo interno all'angolo $A(D)B$, è posto rispetto ad AB, dall'altra parte di D. Quest'ultimo caso è però da escludersi, perchè il nostro arco deve essere interno alla striscia limitata dalle normali tirate dai punti A, B all'asse delle x: e perciò l'intersezione D delle due tangenti in A e in B è interna a tale striscia e cade rispetto alla corda AB dalla stessa banda dell'arco AB. c. d. d.

β) Sia $f(x)$ una funzione finita e continua nell'intervallo da noi considerato con derivate prime e seconde finite e continue.

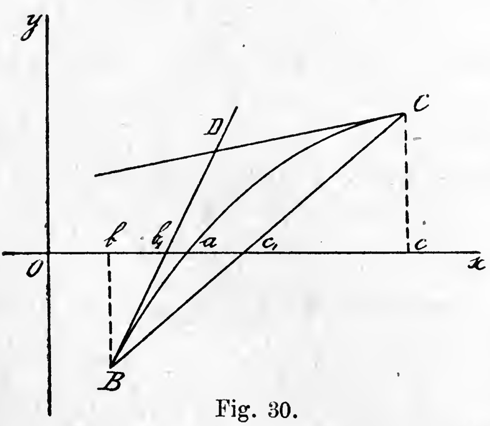


Fig. 30.

I punti $x = a$ che la curva $y = f(x)$ ha comuni con l'asse delle x sono i punti a per cui $f(a) = 0$, o, come si suol dire, sono le radici dell'equazione $f(x) = 0$ (*) (fig. 30).

Se per $x = b$, ed $x = c$ la funzione $f(x)$ assume valori di segno opposto, essa assumerà (teor. 3°, pag. 135) nell'intervallo (b, c) ogni valore intermedio e quindi anche il valore zero.

Se cioè f (b) *e* f (c) *sono di segno opposto, nell'intervallo* (b, c) *esiste almeno una radice* a *dell'equazione* f (x) = 0. Questo

(*) Qui si parla delle *radici della equazione* f (x) = 0 e della *curva di equazione* y = f (x). Il lettore inesperto noti che *non si parla* della linea di equazione $f(x) = 0$ che si scompone in rette $x = \text{cost.}$!

teorema è geometricamente intuitivo; dall'ipotesi scende infatti che i punti della curva $y = f(x)$ di ascissa b, o di ascissa c sono da banda opposta dell'asse delle x. La curva $y = f(x)$ quindi deve incontrare almeno in un punto dell'intervallo (b, c) l'asse delle x.

γ) Supponiamo: 1° che nell'intervallo (b, c) la $f''(x)$ conservi un segno invariabile, che quindi la curva $y = f(x)$ volga la concavità sempre da una stessa parte in tale intervallo; 2° che $f(b)$ ed $f(c)$ siano di segno opposto; 3° che nell'intervallo (b, c) esista una sola radice a dell'equazione $f(x) = 0$.

I numeri b, c si possono considerare come valori approssimati (l'uno per difetto, l'altro per eccesso) dalla radice a. Vogliamo trovarne dei valori più approssimati. Ricordiamo che per il precedente lemma la curva $y = f(x)$ è tutta interna al triangolo BCD formato dalle tangenti DB, CD nei punti B, C di ascissa b, c, e dalla corda BC.

Il punto a cercato è dunque compreso tra i punti ove l'asse delle x incontra la corda BC e la spezzata $BD + DC$. Tali punti b_1, c_1 sono due valori più approssimati che b, c al valore cercato a. Ripetendo per tali punti quanto si è detto per i punti b, c, troveremo due valori b_2, c_2 ancor più approssimati. E si può dimostrare che, così continuando, si può ottenere il valore di a con qualsiasi approssimazione prefissata.

δ) Il nostro procedimento geometrico si può facilmente tradurre in formole analitiche. L'equazione della corda BC è $\dfrac{y - f(b)}{x - b} = \dfrac{f(c) - f(b)}{c - b}$; l'ascissa della sua intersezione con l'asse delle x si ottiene ponendo $y = 0$, cosicchè $x = \dfrac{b\,f(c) - c f(b)}{f(c) - f(b)}$.

Le tangenti in B e C hanno per equazione

$$\frac{y - f(b)}{x - b} = f'(b), \qquad \frac{y - f(c)}{x - c} = f'(c);$$

ed incontrano l'asse delle x rispettivamente nei punti

$$x = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \qquad x = c - \frac{f(c)}{f'(c)}.$$

Quale di questi punti è l'intersezione dell'asse delle x con la spezzata $BD + DC$? Evidentemente quello che appartiene all'intervallo (b, c); e se entrambi appartengono a tale intervallo, quello che è più vicino al punto già determinato ove la retta BC incontra l'asse delle x.

Se non si vogliono calcolare entrambi questi punti, si può limitarci a considerare l'intersezione con l'asse della x della tangente in quello dei punti B, C, in cui la curva volge la convessità all'asse delle x, ossia in cui $f''(x)$ ed $f(x)$ hanno lo stesso segno. Con un tal procedimento però spesso si ottiene un'approssimazione minore di quella ottenuta col nostro metodo.

I punti $\dfrac{bf(c) - cf(b)}{f(c) - f(b)}$ e quello dei punti $b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$, $c - \dfrac{f(c)}{f'(c)}$, che noi scegliamo secondo i principii sopra esposti, costituiscono i due valori più approssimati della radice a cercata.

Per es. noi sappiamo che l'equazione $x^5 = 2$ ha una, e una sola radice nell'intervallo $(1, 2)$, in cui la derivata seconda $20\, x^3$ di $f(x) = x^5 - 2$ ha segno costante.

Poichè (posto $b = 1$, $c = 2$)

$$\frac{bf(c) - cf(b)}{f(c) - f(b)} = 1 + \frac{1}{31},$$

$$c - \frac{f(c)}{f'(c)} = 2 - \frac{3}{8} = 1 + \frac{5}{8}, \quad b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 1 + \frac{1}{5},$$

e di questi ultimi due punti il punto $1 + \dfrac{1}{5}$ è il più vicino a $1 + \dfrac{1}{31}$, la radice di $x^5 = 2$ è compresa tra $1 + \dfrac{1}{31}$ e $1 + \dfrac{1}{5}$.

Riapplicando a questi due numeri il nostro procedimento, si ha un'approssimazione maggiore; e, così continuando, si può dimostrare che si ottiene una approssimazione grande a piacere.

§ 73. — Alcune osservazioni relative alla risoluzione approssimata delle equazioni algebriche.

Il metodo di Newton-Fourier serve naturalmente a calcolare con un'approssimazione grande a piacere le radici reali di un'equazione algebrica a coefficienti reali. Delle radici complesse, o delle equazioni a coefficienti complessi qui non ci occupiamo, perchè abbiamo già visto (§ 17, δ, pag. 55) essere il loro studio riducibile alla ricerca delle radici reali di un'equazione a coefficienti reali.

Sia dunque $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (1)$

un'equazione algebrica a coefficienti reali. La ricerca delle sue radici reali equivale alla ricerca delle intersezioni della curva reale C definita dall'equazione

$$y = f(x) \tag{2}$$

con l'asse delle x (*). Si può senz'altro supporre che la (1) non

(*) Noto che il metodo di Newton-Fourier sarebbe applicabile al problema più generale di calcolare le intersezioni di due curve qualsiasi.

abbia radici multiple (a questo caso ci possiamo ridurre coi metodi del § 64); cosicchè (2) non sarà in alcun punto tangente all'asse delle x. Possiamo anche supporre che le $f(x) = 0$, $f''(x) = 0$ non abbiano radici comuni; perchè la ricerca di queste radici equivale a risolvere l'equazione ottenuta uguagliando a zero il massimo comun divisore $\varphi(x)$ delle $f(x)$, $f''(x)$; e, ammesso anche che $\varphi(x)$ non sia una costante, che cioè tale equazione $\varphi(x) = 0$ possegga radici (caso che si presenterà soltanto per equazioni di tipo molto particolare), ne verrà che alcune delle radici della $f(x) = 0$ si ottengono risolvendo la equazione più semplice (perchè di grado inferiore) $\varphi(x) = 0$. Le altre radici poi saranno le radici dell'altra più semplice equazione che si ottiene uguagliando a zero il polinomio quoziente della divisione di $f(x)$ per $\varphi(x)$.

Supposto dunque che $f(x) = 0$, $f''(x) = 0$ non abbiano radici comuni, ogni radice della $f(x) = 0$ apparterrà a un intorno dove $f''(x)$ conserva sempre lo stesso segno, cioè dove la (2) volge la convessità, o la concavità da una stessa parte. E ad un tale intorno sarà dunque applicabile il metodo di Newton-Fourier.

La più grave difficoltà consiste dunque di determinare due valori approssimati (uno per eccesso, uno per difetto) per ogni radice. Al § 23, β, pag. 78, abbiamo esposto un metodo semplice in teoria (ma che in pratica richiede calcoli troppo lunghi) per una simile determinazione. Altri svariatissimi metodi furono inventati a tale scopo. Ma al tecnico basteranno le seguenti due osservazioni:

1° Valori approssimati di ogni radice sono nei casi pratici suggeriti dallo stesso problema che si deve risolvere.

2° Valori approssimati si possono dedurre disegnando effettivamente la (2) e trovandone le intersezioni con l'asse delle x. Anzi le teorie fin qui svolte agevolano di molto tale disegno e possono dare indicazioni preziose (cfr. l'esempio della curva $Y = X^3 + pX + q$ studiato all'esempio 10° del § 71). Del resto esistono strumenti che possono disegnare tali curve. L'integrafo di Abdank-Abakanowicz (cfr. l'ultimo Capitolo) permette, per es., di passare dal disegno della linea $y = f^{(n)}(x) = a_0 \underline{|n}$ (che è una retta parallela all'asse delle x) successivamente alle curve

$$y = f^{(n-1)}(x)\,;\; y = f^{(n-2)}(x)\,;\, \ldots\ldots;\; y = f'(x)\,;\; y = f(x).$$

(Cfr. la nota a pag. 51, § 15, per indicazioni bibliografiche relative al problema qui esaminato).

CAPITOLO XII.

INTEGRALI

(Il lettore, a cui non importa affrettare la conoscenza del calcolo integrale, potrà far precedere la lettura del Cap. 13° a quella del presente Capitolo).

§ 74. — Primi teoremi.

α) Proponiamoci le seguenti domande fondamentali:

1° *È ogni funzione continua* F (x) *la derivata di un'altra funzione* f (x)?

2° *Tale funzione* f (x) *è determinata dall'ipotesi che la sua derivata* f′ (x) *valga* F (x)? *E, se non è tale, quale è la sua indeterminazione?*

L'intuizione permette di prevedere le risposte che si dovranno dare a tali domande.

Consideriamo la funzione (da determinarsi) $f(x)$ come il valore che la distanza OM da un punto M mobile su una retta r ad una origine fissa O ha all'istante x. Se noi ammettiamo lecita questa supposizione, le nostre domande si riducono (§ 47) semplicemente a queste: Può una qualsiasi funzione continua $F(x)$ essere pensata come misura della velocità che un punto M mobile su una retta r possiede all'istante x? Data tale velocità $F(x)$, la distanza $OM = f(x)$ di M dall'origine O resta essa completamente determinata? oppure quale indeterminazione possiede?

A noi appare come intuitivo che alla prima domanda si debba rispondere affermativamente; e appare pure evidente che, per dare la posizione di M su r all'istante x, non basti dare la velocità $F(x)$, ma si debba anche assegnare la posizione di M in un istante almeno, p. es., per $x = a$. E, se anche una tale posizione è nota, sembra intuitivo che ne resti individuata la posizione di M ad ogni altro istante.

Così di un treno M che si muova su una linea nota r noi sappiamo assegnare la posizione ad ogni istante, se conosciamo per ogni istante la velocità del treno M, e conosciamo o l'ora e il punto di partenza, o anche, se si vuole, la posizione del treno su r ad un'ora prefissata $x = a$.

Se invece non conosciamo per nessun istante la posizione di M (non sappiamo donde e a che ora è partito il treno M), allora, pur conoscendone la velocità $F(x)$ ad ogni istante x, non possiamo dire dove si trovi M all'istante x. Ma possiamo ciononostante sapere quale spazio abbia percorso il punto M tra due dati istanti a, b; in altre parole tale spazio è perfettamente determinato, quando è nota ad ogni istante x la velocità del punto M.

Se M_1, M_2 sono due punti mobili sulla stessa retta r, e se essi posseggono ugual velocità $F(x)$ all'istante x, la distanza $M_1 M_2$ non varia col tempo (*è costante*); cosicchè le distanze $f_1(x) = OM_1$, $f_2(x) = OM_2$ hanno una differenza costante, ossia differiscono solo per una costante additiva.

Analiticamente ciò significa:

Teorema di esistenza.

1° **Esiste almeno una funzione $f(x)$ che possiede una derivata continua $F(x)$ prefissata.**

2° *Data* F (x), *per determinare completamente* f (x), *si deve dare in più il valore di* f (x) *per un qualche valore della* x, *p. es., per* x = a.

3° *Data* F (x), *pure non essendo* f (x) *completamente determinata, è però univocamente determinata la differenza* f (a) — f (b) *dei valori che* f (x) *assume in due punti* x = a, x = b *prefissati arbitrariamente nell'intervallo, ove* F (x) *è definita.*

4° *Se* f₁ (x), f₂ (x) *sono due funzioni che hanno la stessa derivata* F (x), *la differenza* f₁ (x) — f₂ (x) *è una costante. Cosicchè, per trovare tutte le funzioni che hanno per derivata* F (x), *basta trovarne una sola* f (x) *e aggiungere poi ad essa una costante arbitraria*; *la* f (x) + cost. *sarà la più generale funzione che ha* F (x) *per derivata.*

β) Dimostriamo il primo di questi teoremi. Se $F(x) \geq 0$, l'area A del rettangoloide considerato a pagina 165 (ove si scriva F al posto di f) (oppure se tale area non è determinata, la sua area esterna od interna) è proprio (pag. 165) una funzione $f(x)$, la cui derivata vale $F(x)$.

Se poi $F(x)$ assume anche valori negativi, consideriamola in un intervallo finito. Sia $-k$ il suo valore minimo. Allora $\Phi(x) = F(x) + k$ non è mai negativa, e, per quanto si è dimostrato, è perciò la derivata di una qualche funzione $\varphi(x)$. Anche $F(x)$ è quindi una derivata; è precisamente la derivata di

$$f(x) = \varphi(x) - kx.$$

γ) Per dimostrare le 2ª, 3ª, 4ª precedenti proposizioni, ricordiamo il teorema:

Una funzione costante ha derivata sempre nulla e il teorema reciproco (§ 63, pag. 202):

Una funzione, la cui derivata è identicamente nulla, è una costante.

Ne deduciamo come al l. cit. (§ 63, ε):

Se $f_1(x)$, $f_2(x)$ *sono due funzioni aventi la stessa derivata* (determinata e finita) $F(x)$, *la loro differenza è una costante.*

Infatti la differenza $f_1(x) - f_2(x)$ ha per derivata

$$f'_1(x) - f'_2(x) = F(x) - F(x) = 0.$$

Essa, per il teorema citato più sopra, è dunque costante.

Geometricamente questo teor. si enuncia così: *Se le tangenti alla curva* $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ *in punti di uguali ascissa sono parallele, le due curve si deducono l'una dall'altra con una traslazione parallela all'asse delle* y.

Si ha dunque:

$$f_1(x) = f_2(x) + k \ (k = \text{cost}) \quad (\text{teor. } 4^\circ).$$

Ponendo $x = a$, e quindi $x = b$ si ha:

$$f_1(a) = f_2(a) + k$$
$$f_1(b) = f_2(b) + k.$$

Sottraendo, se ne deduce:

$$f_1(a) - f_1(b) = f_2(a) - f_2(b).$$

Data cioè la funzione $F(x)$, è completamente individuata la differenza dei valori che in due punti a, b assume una funzione $f(x)$, che abbia $F(x)$ per derivata (teor. 3°).

Una funzione $f(x)$ che abbia $F(x)$ per derivata, sarà data (teor. 4°) della formola

$$f(x) = f_1(x) + C,$$

dove C è una costante indeterminata. Se noi vogliamo che per $x = a$ sia $f(x) = A$, sarà

$$A = f(a) = f_1(a) + C, \quad \text{ossia} \quad C = A - f_1(a)$$

e quindi
$$f(x) = f_1(x) - f_1(a) + A.$$

La funzione $f(x)$ è perciò completamente determinata (teor. 2°).

Sono così completamente dimostrate tutte le proposizioni enunciate più sopra.

δ) Una conseguenza molto importante si trae da quanto abbiamo dimostrato.

Se $F(x) \geqq 0$, consideriamo il rettangoloide, di cui ci siamo già serviti per dimostrare il primo teorema del presente paragrafo. Le sue aree esterna ed interna, avendo entrambe la stessa derivata $F(x)$, differiscono per una costante. Ma questa costante è nulla, perchè tutte e due queste aree sono nulle per $x = a$. Cosicchè la loro differenza è nulla per $x = a$; ed, essendo costante, è nulla per ogni valore della x. Quelle due aree sono perciò uguali.

Se dunque $y = F(x) \geqq 0$ è una funzione continua, il rettangoloide racchiuso tra l'asse delle x, la curva e le due ordinate ha uguali l'area esterna ed interna, cioè possiede un'area nel senso più elementare della parola: area (cfr. § 7).

ε) Una funzione $f(x)$, che abbia $F(x)$ per derivata si indica con $\int F dx$, e si chiama *integrale indefinito della* $F(x)$. Questo nome è dovuto a ciò che un tale integrale non è completamente definito, ma è definito soltanto a meno di una costante additiva. Così, poichè $\cos x$ è la derivata di $\operatorname{sen} x$, noi scriveremo.

$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$ (C = costante arbitraria). La differenza $f(b) - f(a)$ si dice *integrale definito* di $F(x)$ nell'intervallo (a, b), perchè *non varia* qualunque costante si aggiunga ad $f(x)$, e si indica con $\int_a^b F(x)\, dx$. I numeri a e b si dicono rispettivamente i *limiti di integrazione* (il limite *inferiore*, ed il *superiore*).

Un tale integrale è completamente definito dalla funzione F, e dai limiti a, b. Il suo valore non dipende perciò dal nome dato dalla variabile di integrazione. Così, p. es.

$$\int_a^b \cos x dx = \int_a^b \cos z dz = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a.$$

La differenza $f(b) - f(a)$ si indica anche con $[f(x)]_a^b$. Cosicchè, se

$$\int F(x)\, dx = f(x),$$

$$\text{sarà} \int_a^b F(x)\, dx = f(b) - f(a) = [f(x)]_a^b.$$

È poi evidente che:

$$(1) \qquad \int_a^b F(x)\, dx = - \int_b^a F(x)\, dx.$$

$$(2) \quad \int_a^b F(x)\, dx + \int_b^c F(x)\, dx = \int_a^c F(x)\, dx\,; \int_a^a F(x)\, dx = 0.$$

Le (1), (2) equivalgono infatti alle identità

$$f(b) - f(a) = -[f(a)] - f(b)]$$
$$[f(b) - f(a)] + [f(c) - f(b)] = f(c) - f(a)$$
$$f(a) - f(a) = 0.$$

Inoltre per il teor. della media:

$$\int_a^b \mathrm{F}(\mathrm{x})\, d\, \mathrm{x} = \mathrm{f}(\mathrm{b}) - \mathrm{f}(\mathrm{a}) = (\mathrm{b} - \mathrm{a})\, \mathrm{f}'(\mathrm{c}) = (\mathrm{b} - \mathrm{a})\, \mathrm{F}(\mathrm{c}),$$

dove c *è un punto intermedio tra* a *e* b. *Quindi:*

Se M *è il massimo di* $|\mathrm{F}(\mathrm{x})|$, *sarà:*

(3) $$\left|\int_a^b \mathrm{F}(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}\right| \leqq \mathrm{M}\, |\mathrm{b} - \mathrm{a}|.$$

Se, p. es., $F(x)$ indica la velocità di un mobile all'istante x, la seconda e la terza di queste uguaglianze (se $a < b < c$), dicono che la somma degli spazi percorsi nell'intervallo (a, b) e nell'intervallo (b, c) è uguale allo spazio percorso nell'intervallo (a, c); e che lo spazio percorso in un istante (se pure è lecito dire una tale frase) è nullo. La prima delle precedenti uguaglianze ci dice che lo spazio percorso nell'intervallo (b, a) si deve riguardare come uguale in valore assoluto e di segno opposto a quello percorso nell'intervallo (a, b); cosicchè la precedente osservazione assume un significato generale.

È evidente che: *L'area del rettangoloide limitato dalla curva* $\mathrm{y} = \mathrm{F}(\mathrm{x}) \geqq 0$, *dall'asse delle* x *e dalle ordinate* $\mathrm{x} = \mathrm{a}$, $\mathrm{x} = \mathrm{b}$ *vale* $\int_a^b \mathrm{F}(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}$, *se* $\mathrm{a} < \mathrm{b}$.

Se gli assi fossero *obliqui e formassero un angolo* ω, *il prodotto di questo integrale per* sen ω *varrebbe l'area della figura analoga* $0 \leqq \mathrm{y} \leqq \mathrm{F}(\mathrm{x})$; $\mathrm{a} \leqq \mathrm{x} \leqq \mathrm{b}$. *Questo teorema coincide col precedente per* $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Se nell'integrale definito $\int_a^b F(x)\, dx = \int_a^b F(z)\, dz$ consideriamo l'estremo superiore b come variabile, e per fissar le idee, poniamo $b = x$, otteniamo

$$\int_a^x F(x)\, dx = \int_a^x F(z)\, dz$$

che è uguale ad $f(x) - f(a)$ e quindi differisce da $f(x)$ soltanto per una costante additiva. Esso è pure un integrale indefinito della $F(x)$.

Quindi anche

$$\int_a^x F(x)\,dx + A = \int_a^x F(z)\,dz + A$$

$$(A = \text{costante arbitraria})$$

è un integrale indefinito di $F(x)$. *Esso è anzi proprio quell'integrale indefinito che per* x = a *assume il valore* A.

E lo $\int_a^x \mathrm{f}(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\mathrm{x}$ *è quell'integrale indefinito che si annulla per* x = a.

ζ) Quindi:

Da un integrale indefinito $f(x) = \int F(x)\,dx$ si ottiene l'integrale definito $\int_a^b F(x)\,dx$ eseguendo la differenza $f(b) - f(a)$.

Dall'integrale definito $\int_a^b F(x)\,dx$ si deducono gli integrali indefiniti, ponendo $b = x$, ed aggiungendo una costante arbitraria.

Vi è uno e un solo integrale indefinito che per $x = a$ assuma il valore A; precisamente lo

$$f(x) = \int_a^x F(x)\,dx + A.$$

La seguente tabella, dedotta dal quadro di pag. 190, dà gli integrali indefiniti fondamentali.

INTEGRALI FONDAMENTALI.

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C\,; \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C\,; \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C; \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C\,; \int \frac{dx}{x+a} = \log|x+a| + C \quad (*)$$

(*) Se $x > 0$, esiste $\log x$; e dalla $(\log x)' = \frac{1}{x}$ si trae $C + \log x = \int \frac{dx}{x}$.

Se $x < 0$, esiste $\log(-x)$; e dalla $\left[\log(-x)\right]'_x = \frac{1}{x}$ si trae $C + \log(-x) = \int \frac{dx}{x}$.

$$\int (x + a)^m \, dx = \frac{(x + a)^{m+1}}{m + 1} + C \; (m \text{ intero positivo} \neq -1) \; (*)$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$2m\, a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{m+1}} = (2m-1) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^m} + \frac{x}{(x^2 + a^2)^m} + C \; (**)$$

(m intero positivo).

η) Se $f(x) = \int \varphi(x)\, dx$, ossia $f'(x) = \varphi(x)$, e k è una costante, è $[kf(x)]' = kf'(x) = k\,\varphi(x)$ e quindi $\int k\,\varphi(x)\, dx = = k\, f(x) = k \int \varphi(x)\, dx$ (a meno della solita costante additiva arbitraria).

Se $f_1(x) = \int \varphi_1(x)\, dx$, $f_2(x) = \int \varphi_2(x)\, dx$, allora $[f_1(x) + f_2(x)]' = = f'_1(x) + f'_2(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$; quindi $\int \varphi_1\, dx + \int \varphi_2\, dx = = f_1(x) + f_2(x) = \int [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)]\, dx +$ cost.

Si hanno così le formole (se φ, $\varphi_1\, \varphi_2$ sono continue):

$$\int k\,\varphi(x)\, dx = k \int \varphi(x)\, dx + C \; (k = \text{cost.}),$$

$$\int [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)]\, dx = \int \varphi_1(x)\, dx + \int \varphi_2(x)\, dx + C,$$

che sono di uso assai frequente.

(*) Così $\dfrac{(x+a)^{m+1} - (1+a)^{m+1}}{m+1}$ è quell'integrale indefinito che si annulla per $x = 1$. Se noi ne cerchiamo il limite per $m + 1 = 0$ (p. es. ponendo $m + 1 = z$, derivando num. e den. rispetto z, e quindi ponendo $z = 0$ secondo la regola del § 63, β) si trova $(x + a)^z \log(x + a) - (1 + a)^z \log(1 + a)$, che per $z = 0$ diventa $\log(x + a) - \log(1 + a)$, cioè precisamente quell'integrale $\int \dfrac{dx}{x + a}$ che si annulla per $x = 1$.

(**) Dalla quarta riga di questo quadro si trae il valore di $\int \dfrac{dx}{(x^2 + a^2)^m}$ quando $m = 1$. Ponendo nell'ultima riga successivamente $m = 1, 2, 3, \ldots..$, se ne deduce successivamente il valore del nostro integrale per ogni valore intero positivo della m. Questa formola si dimostra osservando che:

$$\left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^m}\right)' = \frac{2\, m\, a^2}{(x^2 + a^2)^{m+1}} - (2\, m - 1) \frac{1}{(x^2 + a^2)^m}.$$

§ 75. — Regole generali di integrazione.

Ci si potrebbe proporre di trovare per l'integrazione metodi analoghi a quelli svolti nei §§ 55-60 per la derivazione. Ma per l'integrazione non esistono metodi così perfetti, come quelli dati per calcolare le derivate. Si può dimostrare che al teorema di pag. 189 si può opporre il seguente:

Esistono delle funzioni F (x) *calcolabili con un numero finito di operazioni elementari* (*), *il cui integrale non è calcolabile con un numero finito di tali operazioni* (ciò che avviene, p. es., per la radice quadrata di un polinomio generico di grado superiore al secondo; che pure è una funzione tanto semplice).

I pochi metodi che esporremo e che servono nei casi più semplici non sono in fondo che l'enunciato, con altre parole, di teoremi a noi già noti.

α) Abbiamo già detto al § 74, η, pag. 245, che se noi conosciamo

$$\int f(x)\,dx \text{ e } \int \varphi(x)\,dx,$$

noi possiamo subito calcolare

$$\int [f(x)+\varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx + C$$

$$\int kf(x) = k\int f(x) + C \quad (k = \text{cost.}).$$

Formole affatto analoghe valgono per gli integrali definiti. Si ha cioè:

$$\int_a^b [f(x)+\varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Così, per esempio:

$$\int (\operatorname{sen} x + \cos x)\,dx = \int \operatorname{sen} x\,dx + \int \cos x\,dx = -\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + \cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 1 + 1 = 2.$$

(*) Cioè somme, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, innalzamento a potenza, consultazioni di tavole logaritmiche o trigonometriche.

β) *Teorema di integrazione per sostituzione.* Sia $y = \int F(x)\,dx$ donde $y'_x = F(x)$. Sia $x = G(z)$ (*) una funzione di una nuova variabile z con derivata $G'(z)$ continua. Per la regola di derivazione di funzione di funzione sarà:

$$y'_z = y'_x x'_z = F(x)\,G'(z) = F[G(z)]\,G'(z);$$

donde, per la stessa definizione d'integrale:

$$\int F(x)\,dx = y = \int F[G(z)]\,G'(z)\,dz.$$

Questa formola costituisce il cosidetto teorema d'integrazione per sostituzione; dal primo si passa al terzo membro, *sostituendo alla* x *ed alla* dx *i loro valori* G (z), G′ (z) dz.

Questa regola dimostra che **il simbolo** dx, che figura in $\int f(x)\,dx$, è scelto **così opportunamente, che nel calcolo lo si può trattare come un differenziale** (**).

Da quanto precede si scorge che così l'integrazione del differenziale $F(x)\,dx$ è ridotta a quella del differenziale

$$F[G(z)]\,G'(z)\,dz,$$

l'integrale del quale, presa convenientemente la funzione $x = G(z)$ potrà talvolta riuscire più agevolmente calcolabile che quello del differenziale

$$F(x)\,dx.$$

Naturalmente non possono stabilirsi regole per riconoscere in ogni caso quale sia la sostituzione da farsi, ed il successo dipenderà anche dalla maggiore o minore pratica che si ha in calcoli di tal genere.

Talvolta è invece più comodo calcolare l'integrale $\int F(x)\,dx$, anzichè lo $\int F(G)\,G'(z)\,dz$. E in questo caso la nostra dimostrazione serve a ridurre al primo questo secondo integrale.

Osserviamo ancora che se, p. es., col nostro metodo riduciamo il calcolo di $\int F(x)\,dx$ al calcolo di $\int F(G)\,G'(z)\,dz$, allora noi otteniamo l'integrale espresso come funzione non più di x, ma della variabile ausiliaria z.

(*) È sottinteso che, mentre la z varia in un certo intervallo, la x varii nell'intervallo ove è definito il nostro integrale.

(**) Noi lo avevamo introdotto soltanto come un modo per indicare un integrale. Così, p. es., avremo potuto introdurre altro modo di scrittura, p. es. scrivere $\int f(x)$ anzichè $\int f(x)\,dx$. Già di qui vediamo come sia felice il simbolismo adottato (cfr. anche il Cap. 15).

Perchè la sostituzione riesca utile, e cioè si possa avere y espresso come funzione della x, occorrerà che l'equazione

$$x = G(z)$$

sia risolubile rispetto a z in modo univoco, cioè che se ne possa dedurre

$$z = H(x),$$

ove H è funzione di x.

In tal caso l'integrale *definito* $\int_a^b F(x)\,dx$ è uguale a $\int_\alpha^\beta F[G(z)]\,G'(z)\,dz$, dove α e β sono i valori assunti dalla z rispettivamente per $x = a$, o $x = b$.

Così, p. es., $\int (x+a)^m\,dx$, posto $x + a = z$ e quindi $dx = dz$, diventa $\int z^m\,dz$ che è, come sappiamo $\frac{z^{m+1}}{m+1} + C$ o $\log|z| + C$ secondo che $m + 1 \neq 0$ oppure $m + 1 = 0$. Quindi ritroviamo la formola nota (ponendo $z = x + a$).

$$\int (x+a)^m\,dx = \begin{cases} \dfrac{(x+a)^{m+1}}{m+1} + C & \text{sè } m + 1 \neq 0 \\ \log|x + a| + C & \text{se } m = -1. \end{cases}$$

Così, se $a \neq 0$, posto $x = az$, $dx = a\,dz$, $z = \frac{x}{a}$, si ha:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{a\,dz}{a^2(z^2+1)} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} z + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a\,dz}{\sqrt{a^2(1-z^2)}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \operatorname{arcsen} z + C = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C.$$

Così, posto $z = \varphi(x)$, $dz = \varphi'(x)$, dx, si trova

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \int \frac{dz}{z} = \log|z| + C = \log|\varphi(x)| + C,$$

formole tutte, che noi già conoscevamo.

Ben presto troveremo nuove importanti applicazioni di questo metodo.

γ) *Teorema di integrazione per parti.* — Il teorema di integrazione per parti non è altro che una differente enunciazione della regola di derivazione del prodotto di due funzioni.

Supponiamo che u e v siano due funzioni continue insieme alle loro derivate prime. Poichè

$$(uv)' = u'v + uv',$$

per definizione di integrale otteniamo:

$$uv = \int (u'v + uv')\, dx.$$

Ed essendo l'integrale di una somma uguale alla somma degli integrali, è

$$uv = \int u'v\, dx + \int uv'\, dx.$$

Donde ricaviamo:

$$\int u'\, v dx = uv - \int uv'\, dx.$$

Posto $v = \psi$, $u' = \varphi$, sarà $u = \int \varphi\, dx$. E si ha il:

TEOREMA. — *Se* φ *è una funzione continua che ha per integrale* u, *e* ψ *è una funzione continua che ha per derivata la funzione* ψ' *pure continua, allora l'integrale del prodotto* $\varphi\psi$ *è uguale al prodotto del secondo fattore* ψ *per l'integrale* u *del primo diminuito dell'integrale del prodotto che si ottiene moltiplicando l'integrale trovato* u *del primo fattore per la derivata* ψ' *del secondo fattore.*

ESEMPI:

1° Trovare:

$$\int \log x\, dx.$$

Si può scrivere:

$$\int \log x\, dx = \int 1. \log x\, dx\,;$$

e, ponendo

$$\varphi = 1, \text{ donde } u = \int 1.\, dx = \int dx = x,$$

$$\psi = \log x, \qquad \psi' = \frac{1}{x},$$

si ottiene:

$$\int 1. \log x\, dx = x \log x - \int x \frac{1}{x}\, dx = x\,(\log x - 1) + C.$$

2° Così pure si trova:

$$f(a) - f(0) = \int_0^a 1.\, f'(x)\, dx = \Big[(x-a)\, f'(x)\Big]_0^a - \int_0^a (x-a) f''(x)\, dx =$$

$$= a\, f'(0) - \left[\frac{(x-a)^2}{\underline{|2}} f''(x)\right]_0^a + \int_0^a \frac{(x-a)^2}{\underline{|2}} f'''(x)\, dx = \text{ecc.}$$

Si ritrova così la formola di Taylor, col resto sotto forma di integrale (cfr. la (9) del § 69 a pag. 214, dove si ponga $h = a$, $\alpha = 0$).

3° Trovare: $\int \operatorname{arctg} x \, dx$.

Possiamo scrivere:

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \int 1 . \operatorname{arctg} x \, dx ;$$

posto

$$\begin{matrix} \varphi = 1, \\ \psi = \operatorname{arctg} x, \end{matrix} \quad \text{è} \quad \left| \begin{matrix} u = x, \\ \psi' = \dfrac{1}{1 + x^2} . \end{matrix} \right.$$

Quindi:

$$\int 1 . \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int x \frac{1}{1 + x^2} dx =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + x^2} dx$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log (1 + x^2) + C.$$

§ 76. — **Integrazione delle frazioni razionali.**

1° Ci occupiamo naturalmente soltanto delle frazioni reali (quozienti di polinomi a coefficienti reali). Diremo *semplice* ogni frazione del tipo $\dfrac{A}{x + a}$, cioè ogni quoziente di una costante A per un polinomio di primo grado $x + a$, ed ogni frazione del tipo

$$\frac{Mx + N}{x^2 + px + q} ,$$

cioè ogni quoziente di un polinomio $Mx + N$ di primo grado per un trinomio $x^2 + px + q$ di secondo grado, purchè

$$\frac{p^2}{4} - q < 0 \quad \text{ossia} \quad q - \frac{p^2}{4} > 0 ,$$

cioè purchè l'equazione $x^2 + px + q = 0$ abbia radici complesse.

TEOR. *Ogni frazione* $\dfrac{P(x)}{T(x)}$ *è somma*

α) *di un polinomio* $Q(x)$ (il quoziente ottenuto dividendo $P(x)$ per $T(x)$; esso è nullo soltanto se il grado p di $P(x)$ è inferiore al grado t di $T(x)$);

β) *di frazioni semplici, ciascuna delle quali ha per denominatore uno dei fattori di primo o di secondo grado, in cui, secondo il teorema del* § 16, pag. 52-53, *si può decomporre il denominatore* T (x);

γ) *della derivata di una frazione*

$$\frac{V(x)}{W(x)},$$

il cui denominatore W (x) *è il massimo comun divisore di* T (x) *e* T$'$ (x), *ossia è il polinomio che si deduce da* T (x) *diminuendo di un'unità l'esponente di ognuno dei suoi fattori precedentemente citati, mentre* V (x) *è un polinomio di grado inferiore al grado di* W (x). Cosicchè, *se* T (x) *è privo di fattori multipli, $W(x)$* è una costante (polinomio di grado zero), $V(x)$ è quindi nullo; e *questa frazione* $\frac{V}{W}$ *è nulla.*

Oss. Notiamo che in γ) abbiamo dato due modi per calcolare $W(x)$. Secondo il caso, sarà più utile l'uno o l'altro procedimento.

Così, p. es., se

$$T(x) = k\,(x + a_1)\,(x + a_2)^2\,(x^2 + px + q)^3 \left(\frac{p^2}{4} - q < 0\right),$$

dal teorema precedente risulta che ogni frazione $\frac{P(x)}{T(x)}$ si può decomporre nella somma:

α) del polinomio $Q(x)$ ottenuto dividendo $P(x)$ per $T(x)$;

β) di tre frazioni semplici

$$\frac{A_1}{x + a_1}, \quad \frac{A_2}{x + a_2}, \quad \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)};$$

γ) e infine di una derivata

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4}{(x + a_2)\,(x^2 + px + q)^2}\right].$$

E noi, anzichè dimostrare il teorema in generale, ci riferiremo per semplicità a questo esempio. La dimostrazione si estende però al caso più generale soltanto con qualche complicazione di notazioni.

Dim. Siano $Q(x)$, $R(x)$ quoziente e resto ottenuti dividendo $P(x)$ per $T(x)$. Tale resto $R(x)$ sarà di grado inferiore al grado di $T(x)$, che nel caso attuale vale 9. Potremo porre

$$\frac{P(x)}{T(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{T(x)}, \tag{1}$$

dove R (x) *è al massimo di ottavo grado.* Basterà provare che $\frac{R(x)}{T(x)}$ si può decomporre nella somma di addendi β) e γ); ossia che si possono trovare delle costanti $A_1, A_2, M, N, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4$ cosicchè sia

$$\frac{R(x)}{T(x)} = \frac{A_1}{x+a_1} + \frac{A_2}{x+a_2} + \frac{Mx+N}{x^2+xp+q} + \frac{d}{dx}\left[\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_4x^4}{(x+a_2)(x^2+px+q)^2}\right]. \quad (2)$$

Il metodo migliore per calcolare l'ultimo termine (da seguirsi anche negli esercizi numerici) *è quello di derivare applicando la regola di derivazione di un prodotto*, considerando p. es. nel caso attuale la frazione da derivare come il prodotto di $b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_4x^4$ per $(x+a_2)^{-1}$ e per $(x^2+px+q)^{-2}$. Si trova allora che la nostra uguaglianza diventa:

$$\frac{R(x)}{T(x)} = \frac{A_1}{x+a_1} + \frac{A_2}{x+a_2} + \frac{Mx+N}{x^2+px+q} + \frac{b_1+2b_2x+\ldots+4b_4x^3}{(x+a_2)(x^2+px+q)^2} -$$

$$-\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_4x^4}{(x+a_2)^2(x^2+px+q)^2} - 2\frac{(b_0+b_1x+\ldots+b_4x^4)(2x+p)}{(x+a_2)(x^2+px+q)^3}. \quad (2)^{\text{bis}}$$

Moltiplicando per $\frac{1}{k}\,T(x) = (x+a_1)(x+a_2)^2(x^2+px+q)^3$, tutti i denominatori svaniscono; e l'uguaglianza precedente diventa:

$$\frac{1}{k}R(x) = A_1(x+a_2)^2(x^2+px+q)^3 + A_2(x+a_1)(x+a_2)(x^2+px+q)^3$$
$$+ (Mx+N)(x+a_1)(x+a_2)^2(x^2+px+q)^2$$
$$+ (x+a_1)(x+a_2)(x^2+px+q)(b_1+2b_2x+\ldots+4b_4x^3)$$
$$- (b_0+b_1x+\ldots+b_4x^4)(x+a_1)(x^2+px+q)$$
$$- 2(b_0+b_1x+\ldots+b_4x^4)(2x+p)(x+a_1)(x+a_2),$$

dove *il secondo membro è ancora al massimo di ottavo grado,* perchè ogni suo termine è stato ottenuto moltiplicando $\frac{1}{k}\,T(x)$ (di grado *nove*) per una frazione il cui numeratore è di grado *inferiore* al denominatore.

Se noi sviluppiamo il secondo membro, otterremo un'espressione del tipo:

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots\ldots + c_7x^7 + c_8x^8,$$

dove evidentemente le c_i sono polinomii omogenei di primo grado nelle 9 costanti da determinarsi $A_1, A_2, M, N, b_0, b_1 \dots b_4$. Se

$$\frac{1}{k} R(x) = r_0 + r_1 x + \dots + r_8 x^8,$$

la nostra uguaglianza diventa:

$$\left.\begin{array}{l} c_0 = r_0 \\ c_1 = r_1 \\ \dots\dots \\ c_8 = r_8 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Le (3) sono effettivamente un sistema di nove equazioni lineari nelle nove *incognite* $A_1, A_2, \dots, b_4$; le quali come ora proveremo, si possono risolvere con la regola di Cramer.

Infatti, se la regola di Cramer non fosse applicabile alle (3), il determinante dei coefficienti delle nove incognite in tali equazioni sarebbe nullo. E in tal caso per il teorema del § 27 alle equazioni omogenee che si deducono dalle precedenti (3) sostituendo lo zero al posto delle r, si potrebbe soddisfare con valori non tutti nulli delle incognite. Se le r sono nulle, anche $R(x)$ sarebbe nullo. Quindi, poichè le (3) sono equivalenti alle (2) e $(2)_{bis}$, si potrebbe soddisfare identicamente alla (2) supponendo $R(x)$ identicamente nullo, e le $A_1, A_2, \dots b_4$ nno tutte nulle. Dimostreremo che ciò è assurdo.

Infatti, se così fosse, da (2) si dedurrebbe in tali ipotesi:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{b_0 + \dots + b_4 x^4}{(x+a_2)(x^2+px+q)^2}\right] = -\frac{A_1}{x+a_1} - \frac{A_2}{x+a_2} - \frac{Mx+N}{x^2+px+q}.$$

Se passiamo al limite per $x = -a_1$, il primo membro tende a un limite finito; altrettanto dovrà accadere del secondo membro. E quindi è $A_1 = 0$.

Il secondo membro diventa per $x = -a_2$ infinito del primo (e non del secondo) ordine (*); altrettanto dovrà avvenire del primo membro. E quindi $b_0 + \dots + b_4 x^4$ è divisibile per $x + a_2$. Ma in tal caso il primo membro è finito per $x = -a_2$. Altrettanto deve avvenire del secondo membro. E quindi $A_2 = 0$.

Il secondo membro è infinito del primo (e non del terzo) ordine nei punti (complessi) che annullano $x^2 + px + q$. Come sopra se ne dedurrà che $b_0 + \dots + b_4 x^4$ è divisibile per $(x^2 + px + q)^2$ e quindi che $M = N = 0$.

D'altra parte il polinomio $b_0 + b_1 x + \dots + b_4 x^4$ di quarto grado può essere divisibile per $(x + a_2)$ e per $(x^2 + px + q)^2$, soltanto se è divisibile per il loro prodotto, che è un polinomio di quinto grado; cioè soltanto se tutte le b sono nulle.

È dunque impossibile che $R(x) = 0$, se qualcuna delle nostre incognite $A_1, A_2, \dots b_4$ è differente da zero.

Il nostro teorema risulta così dimostrato; e si vede in più che gli addendi cercati sono *determinati in modo univoco*.

2° Noi dunque sapremo integrare ogni frazione, se sappiamo integrare

α) ogni polinomio $Q(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots + k_s x^s$;

(*) Quando naturalmente si assuma $\frac{1}{x + a_2}$ come infinito principale.

β) ogni frazione semplice del tipo

$$\frac{A}{x+a};$$

β′) ogni frazione semplice del tipo

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} \qquad \left(\frac{p^2}{4}-q<0\right);$$

γ) ogni espressione $\quad \dfrac{d}{dx}\dfrac{Vx}{W(x)}$.

Ora gli integrali di (α), (β), (γ) sono rispettivamente

$$k_o\,x + k_1\frac{x^2}{2} + k_2\frac{x^3}{3} + \ldots\ldots + k_s\frac{x^{s+1}}{s+1} + \text{cost.}$$

$$A \log|x+a| + \text{cost.}$$

$$\frac{V(x)}{W(x)} + \text{cost.}$$

Basterà saper calcolare l'integrale di β′), cioè:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx \qquad \left(\begin{array}{c}\dfrac{p^2}{4}-q<0\\ \text{cioè } k=\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}} \text{ reale}\end{array}\right).$$

Ora:

$$Mx+N=\frac{M}{2}(2\,x+p)+\left(N-p\,\frac{M}{2}\right).$$

Cosicchè:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx=\frac{M}{2}\int\frac{2\,x+p}{x^2+px+q}\,dx+\left(N-p\,\frac{M}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Ora:

$$\int\frac{2\,x+p}{x^2+px+q}\,dx=\log\,(x^2+px+q).$$

E, poichè

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k^2,$$

sarà:

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{d\left(x+\dfrac{p}{2}\right)}{\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+k^2}=\frac{1}{k}\,\text{artg}\,\frac{x+\dfrac{p}{2}}{k}.$$

Dunque:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\log(x^2+px+p) + \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{artg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + \text{cost.}$$

Il nostro problema è completamente risoluto.

Così, p. es., per integrare

$$\frac{x^5+2x^3+5x^2+x+1}{x^2(x^2+1)^2},$$

si ponga:

$$\frac{x^5+2x^3+5x^2+x+1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{b_0+b_1x+b_2x^2}{x(x^2+1)}\right),$$

dove manca al secondo membro ogni polinomio, perchè nel primo membro il grado del numeratore è inferiore a quello del denominatore. Si trova:

$$A=1,\quad M=0,\quad N=1,\quad b_2=1,\quad b_1=0,\quad b_0=-1.$$

E quindi l'integrale cercato vale:

$$\log|x| + \operatorname{artg} x + \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} + \text{cost.}$$

§ 77. — **Integrazione di alcune funzioni trascendenti o irrazionali.**

α) Sia f una funzione razionale (quoziente di polinomi) nella variabile e^x. Si voglia calcolarne l'integrale $\int f(e^x)\,dx$. Posto $e^x = z$, $zdx = dz$ questo integrale si riduce all' integrale $\int \frac{f(z)}{z}\,dz$ (che noi sappiamo calcolare) della funzione razionale $\frac{f(z)}{z}$.

β) Sia F una funzione razionale delle funzioni goniometriche $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, ecc. della x. Le formole $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, ecc. ci permettono di trasformarla in una funzione razionale f delle sole variabili $\operatorname{sen} x$, $\cos x$. Per calcolare l'integrale $\int f(\operatorname{sen} x, \ \cos x)\, dx$ di una tale funzione, si ponga $x = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, cosicchè

$$dx = 2\frac{dz}{1+z^2},$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2}; \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Il nostro integrale diventerà:

$$2\int f\left(\frac{2z}{1+z^2}, \ \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{dz}{1+z^2};$$

e si ridurrà così all'integrale, che sappiamo eseguire, della funzione razionale

$$f\left(\frac{2z}{1+z^2}, \ \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{1}{1+z^2}.$$

Oss. Se la f è una funzione razionale delle sole $\operatorname{sen}^2 x$, $\cos^2 x$, $\operatorname{tg} x$, il calcolo diventa più rapido ponendo $z = \operatorname{tg} x$, e quindi $dx = \dfrac{dz}{1+z^2}$, $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{z^2}{1+z^2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+z^2}$.

γ) Si voglia calcolare:

$$(1) \qquad \int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \qquad (a, b, c = \text{cost.})$$

dove f è una funzione razionale di x e $\sqrt{ax^2+bx+c}$, e quindi irrazionale nella x. Distingueremo varii casi:

γ^1) Supposto $a > 0$, porremo $a = k^2$, $k = \sqrt{a}$, e

$$(2) \qquad \sqrt{ax^2+bx+c} = k(x+z),$$

dove z è una nuova variabile. Quadrando e risolvendo rispetto alla x, si trova:

$$(3) \qquad x = \frac{az^2-c}{b-2az}; \qquad (a = k^2)$$

e quindi:

$$(3)_1 \qquad dx = \frac{-2a^2z^2+2abz-2ac}{(b-2az)^2}\,dz,$$

e, per (2):

$$(3)_2 \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = k(x+z) = \sqrt{a}\,\frac{-az^2+bz-c}{b-2az}.$$

In virtù delle (3) e della regola di integrazione per sostituzione, l'integrale (1) diventa

$$-2a\int f\left(\frac{az^2-c}{b-2az}, \ \sqrt{a}\,\frac{-az^2+bz-c}{b-2az}\right)\frac{(az^2-bz+c)}{(b-2az)^2}\,dz;$$

cioè diventa l'integrale di una funzione razionale della z, che noi sappiamo calcolare.

γ^2) Si calcoli ora (1) nell'ipotesi $a < 0$. Se α, β sono le radici di $ax^2 + bx + c = 0$, è (posto $a = -k^2$):

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) = -k^2(x-\alpha)(x-\beta).$$

Questo polinomio dovendo essere positivo, affinchè (1) abbia significato reale, dovrà essere:

$$(x-\alpha)(x-\beta) < 0, \tag{4}$$

cosicchè le α, β non potranno essere complesse coniugate, nè uguali e reali (*). Le α e β saranno quindi reali e distinte. Dalla (4) si deduce che $x - \alpha$ e $x - \beta$ sono di segno contrario, e quindi che $x - \alpha$ e $\beta - x$ hanno lo stesso segno, ossia che si può porre

$$\frac{x-\alpha}{\beta - x} = z^2,$$

dove z è un'altra variabile *reale*. Risolvendo rispetto ad x si ha:

$$x = \frac{\alpha + \beta z^2}{1 + z^2}; \quad \text{donde:} \quad dx = 2(\beta - \alpha)\frac{zdz}{(1+z^2)^2},$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = \sqrt{-a(x-\alpha)(\beta - x)} =$$

$$= \sqrt{-a\frac{x-\alpha}{\beta-x}(\beta-x)^2} = kz(\beta - x) = kz\frac{\beta-\alpha}{1+z^2},$$

cosìcchè l'integrale (1) diventa:

$$2(\beta-\alpha)\int f\left(\frac{\alpha+\beta z^2}{1+z^2},\ k(\beta-\alpha)\frac{z}{1+z^2}\right)\frac{zdz}{(1+z^2)^2},$$

che è un integrale di una funzione razionale delle z, e che noi quindi sappiamo calcolare (**).

δ) Il caso $a = 0$ è (per $m = 2$) un caso particolare dell'integrale

$$\int f\left(x, \sqrt[m]{bx+c}\right)dx \qquad (m = \text{intero positivo});\ (b \neq 0).$$

Questo integrale, posto $\sqrt[m]{bx+c} = z$, $x = \dfrac{z^m - c}{b}$, $dx = \dfrac{m}{b}z^{m-1}\,dz$, diventa l'integrale $\dfrac{m}{b}\displaystyle\int f\left(\frac{z^m - c}{b},\ z\right)z^{m-1}\,dz$

(*) Se $\alpha = a + ib$, $\beta = a - ib$ con $b = 0$, o $b \neq 0$, allora $(x-\alpha)(x-\beta) = (x-a)^2 + b^2 \geqq 0$.

(**) In γ^1) e γ^2) l'indeterminazione del segno per $\sqrt{ax^2+bx+c}$ corrisponde all'indeterminazione del segno per k.

di una funzione razionale della z: integrale che quindi sappiamo calcolare.

Oss. Il caso di una funzione f razionale nella x, $\sqrt[p]{bx+c}$, $\sqrt[q]{bx+c}$, $\sqrt[r]{bx+c}$, ... (p, q, r, ... interi positivi) si riduce subito al precedente, assumendo per m il minimo comune multiplo di p, q, r, ...

ε) Calcoliamo l'integrale $\int f(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\, dx$ ($a, b, c, d =$ cost.) ($a \neq 0$) di una funzione razionale f di x, $\sqrt{ax+b}$, $\sqrt{cx+d}$. Posto $z = \sqrt{ax+b}$ e quindi $x = \dfrac{z^2 - b}{a}$, $dx = \dfrac{2}{a} z dz$, questo integrale diventa $\dfrac{2}{a}\int f\left(\dfrac{z^2-b}{a}, z, \sqrt{\dfrac{c}{a} z^2 + \dfrac{(da-cb)}{a}}\right) z dz$, che è l'integrale di una funzione razionale di z e di $\sqrt{\dfrac{c}{a} z^2 + \left(d - \dfrac{cb}{a}\right)}$, cioè un integrale del tipo che noi abbiamo già imparato a calcolare in γ).

ζ) **Integrali binomii.** — Si voglia calcolare l'integrale $\int x^m (ax^n + b)^p\, dx$ ove a, b sono costanti ed m, n, p numeri razionali.

A) *Se* p *è intero*, si ponga $x = z^s$, indicando con s il minimo comune multiplo dei denominatori di m, n, che per ipotesi sono numeri fratti (cfr. δ), e ci si riduce al solito caso dell'integrale di una funzione razionale.

B) Se p è una frazione $\dfrac{r}{s}$ (con r, s interi), posto

$$t = (ax^n + b)^{\frac{1}{s}},\ x = \left(\frac{t^s - b}{a}\right)^{\frac{1}{n}},\ dx = \frac{s}{na}\left(\frac{t^s - b}{a}\right)^{\frac{1}{n} - 1} t^{s-1}\, dt,$$

il nostro integrale diventa:

$$\frac{s}{na^{\frac{1+m}{n}}} \int t^{r+s+1} (t^s - b)^{\frac{m+1}{n} - 1}\, dt,$$

che è l'integrale di una funzione razionale, e noi sappiamo calcolare, *se* $\dfrac{m+1}{n}$ *è intero*.

Possiamo trovare un altro caso, in cui possiamo calcolare il nostro integrale. Basti osservare che, posto $x = \dfrac{1}{y}$, esso diventa

$$-\int y^{\mu} (a + by^n)^p\, dy \text{ con } \mu = -(m + 2 + np)$$

che, per quanto dicemmo in *B)* sappiamo calcolare se $\dfrac{\mu+1}{n}$ è intero cioè se $\dfrac{-m-1-np}{n}$ è intero, cioè se $\dfrac{m+1}{n} + p$ *è intero*.

In conclusione sappiamo *calcolare il precedente integrale, riducendolo al calcolo di una funzione razionale, quando è intero uno dei tre numeri* p, *oppure* $\dfrac{\mathrm{m}+1}{\mathrm{n}}$, *oppure* $\dfrac{\mathrm{m}+1}{\mathrm{n}} + \mathrm{p}$.

Oltre al quadro del § 74, ζ, pag. 244, noi ne daremo qui un altro che riassume i più importanti risultati ottenuti fin qui.

QUADRO DEI METODI DI INTEGRAZIONE (cfr. pag. 244 e 190).

$$\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx + \text{cost.} \quad \text{(integrazione per somma)}$$

$$\int f(x)\,dx = \int f[x(z)]\,x'(z)\,dz + \text{cost.} \quad \text{(integrazione per sostituzione)}$$

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx + \text{cost.} \quad \text{(integrazione per parti).}$$

Se f indica nei singoli casi una funzione razionale della variabile, o delle variabili da cui dipende

$\int f(x)\,dx$	Si calcola scomponendo $f(x)$ nella somma di frazioni semplici, di un polinomio, e di una derivata.	
$\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$	Si calcola introducendo come nuova variabile di integrazione	$z = tg\,\frac{x}{2}$. Si può anche porre $z = tg\,x$, se in f entrano solo $tg\,x$ e potenze ad esponente pari di $\operatorname{sen} x$, $\cos x$.
$\int f(x, \sqrt[m]{ax+b})\,dx$; $a, b = \text{cost.}$; $a \neq 0$, (m intero positivo)	Si calcola introducendo come nuova variabile di integrazione	$z = \sqrt[m]{ax+b}$ (*).
$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ $a, b, c = \text{cost.}$	Si calcola, assumendo a variabile z di integrazione quella definita dalla	$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(x+z)$ se $a > 0$; $z^2 = \frac{x-\alpha}{\beta - x}$ se $a < 0$, ed α, β sono le radici di $ax^2+bx+c=0$.
$\int f(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\,dx$ $a, b, c, d = \text{cost.}$; $a, c \neq 0$	Si riduce al caso precedente assumendo a variabile di integrazione	$z = \sqrt{ax+b}$
$\int f(e^x)\,dx$	Si calcola assumendo a variabile di integrazione	$z = e^x$
Integrali binomii		cfr. pag. 258.

(*) Se capitano parecchi radicali $z = \sqrt[\mu]{ax+b}$, $z = \sqrt[\nu]{ax+b}$, ecc. si porrà $z = \sqrt[m]{ax+b}$, dove m è il minimo comune multiplo degli indici μ, ν, ecc.

§ 78. — Integrali singolari.

α) Finora ci siamo limitati ad integrali di funzioni continue nell'intervallo considerato. Vogliamo ora definire gli integrali di una funzione $f(x)$ che nell'intervallo (a, b) che si considera è dappertutto continua, eccettuato un numero finito di punti singolari.

Ciò, per es., avviene se volessimo studiare l'espressione $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, poichè $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è singolare per $x = 0$. Osserveremo che, se ε è un numero positivo piccolo a piacere, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è continua nell'intervallo $\varepsilon \ldots\ldots 1$; cosicchè ha un significato perfettamente determinato lo $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, che, calcolato coi soliti metodi, si riconosce uguale a $(2 - 2\sqrt{\varepsilon})$.

Calcoliamo ora il

$$\lim_{\varepsilon = 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon = 0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}).$$

Tale limite esiste ed è uguale a 2.

E noi porremo per definizione

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon = 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2.$$

Più in generale, se nello $\int_a^b f(x)\, dx$ è, per esempio, $a < b$ e la $f(x)$ è singolare in a, ma è continua nell'intervallo $a + \varepsilon, \ldots\ldots b$, dove ε è un numero positivo piccolo a piacere $(\varepsilon < b - a)$, allora noi cercheremo il $\lim_{\varepsilon = 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\, dx$. Se questo limite esiste ed è finito, porremo per definizione

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon = 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\, dx.$$

Se invece tal limite non esiste o non è finito (come, p. es., avviene di $\lim_{\varepsilon = 0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x - a}$), tale integrale sarà per noi un simbolo privo di significato.

Analogamente si procederebbe, se $f(x)$ fosse singolare in b. Se $f(x)$ diventa singolare in un punto c (*) interno ad (a, b), allora se esistono, secondo le definizioni ora poste, gli integrali $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$, si pone per definizione

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

β) Può esistere una funzione $f(x)$ che è singolare in c, pure essendo finita: p. es. una funzione discontinua nel punto c. Il caso più notevole è che siano finiti il $\lim\limits_{x=c-0} f(x)$ ed il $\lim\limits_{x=c+0} f(x)$, ma che tali limiti sieno differenti l'uno dall'altro. Ciò, p. es., avviene per la funzione $\operatorname{sen} x + \dfrac{x-c}{|x-c|}$. In tal caso la nostra definizione si può esporre in forma più semplice. Se, p. es., $a < b$, consideriamo in (a, c) una funzione $f_1(x)$ che, per $x \neq c$ sia uguale ad $f(x)$ e nel punto c sia uguale al $\lim\limits_{x=c-0} f(x)$ ed in (c, b) una funzione $f_2(x)$ che nel punto c sia uguale al $\lim\limits_{x=c+0} f(x)$, e nei punti $x \neq c$ sia uguale ad $f(x)$. Sarà:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f_1(x)\,dx + \int_c^b f_2(x)\,dx.$$

Per l'esempio ora citato sarà se $a < c < b$

$$\int_a^b \left\{ \operatorname{sen} x + \frac{x-c}{|x-c|} \right\} dx = \int_a^c (-1 + \operatorname{sen} x)\,dx + \int_c^b (+1 + \operatorname{sen} x)\,dx.$$

γ) Se $f(x)$ è definita nell'intervallo $(a, +\infty)$ e se esiste ed è finito il $\lim\limits_{k=+\infty} \int_a^k f(x)\,dx$, noi porremo per definizione:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{k=\infty} \int_a^k f(x)\,dx.$$

Analogamente, se $f(x)$ è definita per $x \leqq a$, porremo per definizione

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{k=-\infty} \int_k^a f(x)\,dx,$$

(*) Si può porre una definizione analoga nel caso che vi sia un numero finito di punti singolari.

se il limite del secondo membro esiste ed è finito. Infine porremo, se $f(x)$ è definita per ogni valore della x,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{h=-\infty\\k=+\infty}} \int_h^k f(x)\,dx,$$

se il limite del 2° membro esiste ed è finito.

Così, p. es., essendo

$$\lim_{k=+\infty} \int_1^k \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{k=\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^k = 1,$$

è:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

Così, poichè $\lim_{k=\infty} \int_0^b \cos x\,dx = \lim_{k=\infty} (\operatorname{sen} k)$ non esiste, non ha alcun significato l'espressione $\int_0^\infty \cos x\,dx$ (*).

Agli integrali di questo paragrafo si possono in molti casi estendere le regole di integrazione per somma, per sostituzione, per parti.

Così $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^n}\,dx$ esiste, se esiste ed è *finito* il $\lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{1}{(x-a)^n}\,dx$ (ove ε abbia il segno di $b-a$) cioè il $\lim_{\varepsilon=0} \left[\frac{(b-a)^{1-n}}{1-n} - \frac{\varepsilon^{1-n}}{1-n}\right]$ se $n \neq 1$, oppure il $\lim_{\varepsilon=0} \Big[\log|b-a| - \log|\varepsilon|\Big]$ se $n=1$. Questo limite è infinito per $n \geqq 1$, *finito per* $n<1$. Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo (a, b), il punto a al più escluso; esista un intorno (a, c) di a [c compreso fra a e b], tale che in esso $|f(x)| < k \frac{1}{(x-a)^n}$ con k, n costanti, ed $n<1$. Definiamo due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ ponendo $\varphi(x) = f(x)$ e $\psi(x) = 0$ nei punti ove $f(x) > 0$; ponendo $\psi(x) = -f(x)$, $\varphi(x) = 0$ nei punti ove $f(x) \leqq 0$. Le $\varphi(x)$, $\psi(x)$ saranno funzioni continue positive o nulle (escluso al più il punto $x=a$), non superiori ad $|f(x)|$. Ora sia $\int_{a+\varepsilon}^b \varphi(x)\,dx$ che $\int_{a+\varepsilon}^b \psi(x)\,dx$ variano nello stesso verso quando ε (che ha il segno di $b-a$) tende a zero, e perciò *tendono per* $\varepsilon = 0$ *ad un limite.* Poichè p. es. $\int_{a+\varepsilon}^b \varphi(x)\,dx = \int_{a+\varepsilon}^c \varphi(x)\,dx + \int_c^b \varphi(x)\,dx$, e $\varphi(x)$ nell'intervallo $(a+\varepsilon, c)$ non

(*) Si lascia al lettore di completare le precedenti definizioni, per il caso che nell'intervallo $(a, +\infty)$ o $(-\infty, a)$ o $(-\infty, \infty)$ vi fosse un numero finito di punti singolari per $f(x)$.

supera $|f(x)| \leq \frac{k}{(x-a)^n}$ [se $|\varepsilon| < |c-a|$], lo $\int_{a+\varepsilon}^{c} \varphi(x)\,dx$ non supera in valore assoluto l'integrale di $\frac{k}{(x-a)^n}$, che tende per $\varepsilon = 0$ a un *limite finito*. Perciò $\int_{a+\varepsilon}^{b} \varphi(x)\,dx$ tende per $\varepsilon = 0$ a un limite *finito*, che sarà il valore di $\int_{a}^{b} \varphi(x)\,dx$; altrettanto dicasi di $\int_{a+\varepsilon}^{b} \psi(x)\,dx$. Poichè $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, lo integrale $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ *esisterà dunque, se in un intorno di* a *vale la*

$$|f(x)| \leq \frac{k}{(x-a)^n} \quad (k, n \text{ costanti}; \; n < 1)$$

ossia, come si suol dire, *se* f(x) *è per* $x - a = 0$ *infinito di ordine non maggiore di* $n < 1$.

In modo analogo si prova che se, per x abbastanza grande, la funzione continua $f(x)$ soddisfa alla $|f(x)| \leq k \frac{1}{x^n}$ (k, n cost.; $n > 1$), ossia *se* f(x) *per* $x = \infty$ *diventa infinitesima di ordine non minore di* $n > 1$, *allora esiste lo* $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$.

Osservazione.

Certe frazioni razionali si possono integrare in modo semplice e diretto.

Poniamo, p. es., $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ dove n è un intero positivo. Integrando per parti si trova:

$$I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{(1+x^2)\,dx}{(x^2+1)^{n+1}} -$$

$$- 2n \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\,I_n - 2n\,I_{n+1} + \text{cost.}$$

donde:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n + \text{cost.}$$

Ora, essendo $I_1 = \operatorname{arctg} x$, la formola precedente per $n = 1, 2, 3$, ecc. permette di calcolare successivamente I_2, I_3, ecc. (cfr. la seconda formola di pag. 245.

§ 79. — Integrazione per serie.

α) Nel paragrafo precedente abbiamo dato, partendo da alcune formole di calcolo differenziale, metodi che *in qualche caso particolare* servono a calcolare gli integrali di una funzione continua. Ma poichè ogni funzione continua possiede integrali, sorge spontanea la domanda: Come si calcolano, almeno approssimativamente, gli integrali di una funzione continua, al calcolo dei quali non bastino i metodi esposti nei precedenti paragrafi? L'importanza di questa domanda si rileva tosto, appena si ricordi che anche l'integrazione di una funzione razionale richiede la risoluzione di un'equazione algebrica: che noi sappiamo costituire un calcolo spesso ben lungo, anche se si vuole soltanto una piccola approssimazione. Di più si noti che quando, per es., diciamo che $\int \frac{1}{x}\, dx = \log |x| + C$ e asseriamo perciò che sappiamo integrare $\frac{1}{x}$, ciò è dovuto soltanto al fatto che nelle tavole logaritmiche abbiamo un mezzo per calcolare con sufficiente approssimazione i valori di $\int \frac{1}{x}\, dx$. Si tratta dunque di trovare un mezzo per calcolare approssimativamente un dato integrale o, se si vuole, di costruire per ogni dato integrale delle tavole numeriche, che compiano per esso l'ufficio che le tavole logaritmiche hanno per l'integrale $\int \frac{1}{x}\, dx$.

Varii sono i metodi a tal fine, e di essi noi parleremo anche in altri capitoli. Per ora parleremo soltanto del metodo che ricorre agli *sviluppi* in serie. Il teorema su cui si basa tale procedimento, è il seguente:

β) *Se nell'intervallo finito* (a, b) *la serie di funzioni continue*

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots\ldots = \Sigma\, u_n \qquad (1)$$

è totalmente convergente, allora (per $a \leq x \leq b$) *lo* $\int^x f(x)\, dx$ *esiste ed è uguale proprio alla serie degli integrali*

$$F(x) = \int_a^x u_1(x)\, dx + \int_a^x u_2(x)\, dx + \int_a^x u_3(x)\, dx + \ldots\ldots \qquad (2)$$

Divideremo la dimostrazione in 3 parti:

1° *La serie* (2) *converge*. Infatti, se M_n è il massimo di $|u_n(x)|$, la nostra ipotesi equivale a questa che la serie $\Sigma_n M_n$ converge. Dalla $|u_n(x)| \leqq M_n$ segue (§ 74, pag. 243) che

$$\left|\int_a^x u_n(x)\,dx\right| \leqq M_n\,|x - a|;$$

dunque la serie (2) converge assolutamente, perchè così avviene della $\Sigma\, M_n\,|x - a|$, ottenuta moltiplicando per $|x - a|$ la serie convergente $\Sigma\, M_n$.

2° *La serie* (2) *è un integrale indefinito di* f (x). Infatti la serie (1), ottenuta derivando (2) termine a termine, è totalmente convergente, e pertanto (§ 65, pag. 206) è la derivata di (2); cioè (2) è un integrale indefinito di $f(x)$.

3° *La* (2) *vale proprio* $\int_a^x f(x)\,dx$. Essendo

$$F(x) = \int f(x)\,dx, \text{ è } \int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Ora, ponendo $x = a$ in (2), i termini di (2) si annullano. Pertanto $F(a) = 0$; e quindi $\int_a^x f(x)\,dx = F(x)$. c. d. d. (*)

Si deduce tosto la seguente osservazione notevolissima. Se una funzione $f(x)$ non si sa integrare coi metodi da noi svolti, ma se si sa sviluppare $f(x)$ in una serie totalmente convergente, i cui termini hanno integrali noti o facilmente calcolabili, allora si può avere un valore approssimato di $\int_a^b f(x)\,dx$, calcolando la somma degli integrali dei primi n termini della serie considerata, se n è abbastanza grande. Nei casi più comuni basta lo sviluppo in serie di Taylor. E si noti che a pag. 218 e seg. proprio con questo metodo abbiamo trovato le serie così comode per calcolare numericamente le funzioni

$$\log(1 + x) = \int_0^x \frac{1}{1 + x}\,dx; \text{ artg } x = \int_0^x \frac{dx}{1 + x^2}; \text{ arcsen } x =$$

$$= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(*) Non vale un teorema analogo per integrali indefiniti; e ciò, perchè le costanti arbitrarie che figurano nell'integrale indefinito di ogni termine di (1) potrebbero esser scelte in modo che la serie

$$\left[\int u_1(x)\,dx + C_1\right] + \left[\int u_2(x)\,dx + C_2\right] + \ldots$$

sia divergente.

ESEMPIO.

Voglio calcolare il tempo T impiegato da un pendolo OP che oscilla attorno O nel passare dalla posizione OP alla posizione OQ simmetrica di OP rispetto alla verticale OV. Detto θ l'angolo di una retta OM con OV, questo angolo durante l'oscillazione varierà da un minimo $-\alpha$ ad un massimo $\alpha = V(O)\,Q$ (fig. 31). Posto $OP = l$ la forza viva del pendolo, quando esso si trova in OM, è data da $\frac{1}{2} ml^2 \frac{d\theta^2}{dt^2}$, se la massa vale m, e t indica il tempo. Questa forza viva è uguale al lavoro

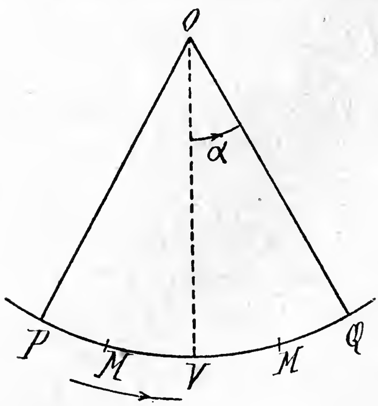


Fig. 31.

$$mgl\,(\cos\theta - \cos\alpha)$$

eseguito dal pendolo nel passare dal piano orizzontale a cui appartiene P al piano orizzontale cui appartiene M (g = costante di gravità). Quindi:

$$\frac{m}{2}\,l^2\,\frac{d\theta^2}{dt^2} = mg\,(\cos\theta - \cos\alpha)\,l, \text{ donde } t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}};$$

$$\text{e quindi } T = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Posto $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\varphi$, si ottiene

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - h^2 \operatorname{sen}^2\varphi}},$$

dove si è posto $h = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$. È quindi $|h| < 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - h^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = (1 - h^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\,h^2\operatorname{sen}^2\varphi + \frac{1.3}{2^2\,\underline{|2}}\,h^4\operatorname{sen}^4\varphi + \frac{1.3.5}{2^2\,\underline{|3}}\,h^6\operatorname{sen}^6\varphi + \ldots\ldots$$

donde:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \frac{1}{2} h^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{1\,.\,3}{2^2 \,\underline{|2}} h^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \varphi \, d\varphi + \frac{1.\,3.\,5}{2^3 \,\underline{|3}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^6 \varphi \, d\varphi + \ldots\ldots \right\}$$

Se α è così piccolo da poter tener conto del solo primo termine, si trova la formola classica $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Nel caso generale invece è:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \frac{1}{2^2} h^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2^2 \,\underline{|2}} \right)^2 h^4 + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2^3 \,\underline{|3}} \right)^2 h^6 + \ldots \right\}$$

Qual è p. es. l'errore commesso se α non supera l'angolo di 10 gradi, quando si tenga conto del solo primo termine?

CAPITOLO XIII.

CALCOLO DIFFERENZIALE PER LE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

§ 80. — Continuità. Derivate parziali.

α) Al § 41, pag. 137, abbiamo già visto che alle funzioni di più variabili si può estendere sia la definiz. di limite, che quella di continuità, ecc. Vogliamo qui aggiungere un'osservazione, che per maggior chiarezza esporremo per una funzione di due sole variabili $f(x, y)$. Sia essa definita in un intorno j del punto $x = a$, $y = b$; e siano $x = a + ht$, $y = b + kt$ (h, k cost.) le equazioni parametriche di una retta generica r uscente da tale punto. La f diventerà funzione del solo parametro t, se ci limitiamo a considerare i punti di r interni ad j, e i valori ivi assunti da f. *Questa funzione di* t *sarà continua per* $t = 0$ (qualunque siano h, k, cioè qualunque sia la r considerata uscente dal punto $[a, b]$) *se la* $f(x, y)$ *è continua nel punto* (a, b).

Il teorema reciproco non è vero, cioè: *Se* $f(a + ht, b + kt)$ *è funzione continua per* $t = 0$, *qualunque siano* h, k, *la* $f(x, y)$ *può non essere continua nel punto* (a, b). Infatti da tale ipotesi segue che, scelto un $\varepsilon > 0$ arbitrario, *su ogni retta r* uscente da (a, b) esiste un intorno R, tale che per i punti (x, y) di questo intorno vale la $|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$. Ma al variare di r, può variare la lunghezza di questi intorni R; se anzi questa lunghezza ha limite inferiore *nullo*, tutti questi intorni (uno su ogni retta uscente dal punto $[a, b]$) non riempiono alcun intorno j del punto (a, b) nel piano; cioè non esiste alcun numero $\delta > 0$ tale che ogni punto soddisfacente alle $|x - a| < \delta$, $|y - b| < \delta$ appartenga ad almeno uno di questi intorni R.

Sia $f(x, y, z, \ldots\ldots, t)$ una funzione di più variabili $x, y, z, \ldots., t$. Se diamo alla $y, z, \ldots., t$ valori determinati $b, c, \ldots., d$, la f si ridurrà una funzione della sola x. Se tale funzione è derivabile (rispetto alla x) nel punto $x = a$, noi chiameremo tale derivata *la derivata parziale* di f rispetto alla x nel punto $x = a$, $y = b, \ldots\ldots, t = d$; e la indicheremo con $f'_x(a, b, \ldots\ldots, d)$ o con $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=a,\ y=b,\ \ldots\ldots,\ t=d}$. Se poi questa derivata esiste non solo in un punto, ma in tutto il campo ottenuto, p. es., facendo variare $x, y, \ldots\ldots, t$ in certi intervalli, questa derivata sarà una funzione delle $x, y, \ldots\ldots, t$ in tali intervalli; e si indicherà più semplicemente con f'_x o con $\frac{\partial f}{\partial x}$. E, se si vuol ricordare, come talvolta è opportuno, che per calcolare tale derivata si è cominciato col dare alle $y, z, \ldots\ldots, t$ valori determinati, si suol indicare tale derivata col simbolo:

$$(f'_x)_{y,\, z,\, \ldots\ldots,\, t = \text{cost.}} \quad \text{o} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,\, z,\, \ldots\ldots,\, t = \text{cost.}}$$

È ancora da ricordare che *nei casi più comuni* si può calcolare f'_x in un dato punto, derivando la f rispetto alla x e considerando $y, z, \ldots\ldots, t$ come costanti, e, *soltanto dopo aver eseguito la derivazione*, sostituire alle $x, y, z, \ldots\ldots, t$ le coordinate del punto che si considera.

Altrettanto dicasi per le derivate parziali della f rispetto alla y, o alla $z, \ldots\ldots$, od alla t.

Queste derivate $f'_x, f'_y \ldots\ldots$ possono a loro volta essere funzioni derivabili e possedere derivate parziali. E noi con

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f''_{xz} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \ldots\ldots$$

indicheremo rispettivamente le derivate di f'_x rispetto x, y, z, ecc. Con

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \text{ ecc.}$$

indichiamo le derivate di f'_y rispetto x, y, ecc.

Queste nuove derivate si diranno derivate parziali (*del secondo ordine*) della f.

Le derivate di queste, se esistono, si diranno derivate parziali del terz'ordine e così via. Così, p. es.:

$$f^{(5)}_{xyxzy} = \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y \partial x \partial z \partial y}$$

sarà quella derivata del 5° ordine, che si ottiene derivando f rispetto alla x, la derivata f'_x così ottenuta rispetto alla y, la derivata f''_{xy} così ottenuta rispetto alla x, la f'''_{xyx} così calcolata rispetto a z, e infine la f''''_{xyxz} così ottenuta rispetto alla y.

Così, p. es., se

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2yz + 3zx,$$

per ottenere f'_x si deve derivare rispetto alla x considerando le y, z come costanti (espressioni aventi derivata nulla rispetto alla x). Si ha così che y^2, z^2, yz hanno derivata nulla, xy ha per derivata y, ecc.; cosicchè:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 2x + y + 3z.$$

Analogamente si troverebbe:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = 2y + x + 2z,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f'_z = 2z + 2y + 3x.$$

Ciascuna di queste tre derivate è a sua volta una funzione delle x, y, z, che si può derivare rispetto alla x, o alla y, o alla z. Si hanno così $3 \cdot 3 = 9$ derivate del secondo ordine della

$$f(x, y, z).$$

Così, p. es., derivando $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$ rispetto alla x, o alla y, o alla z, si ottengono le tre derivate che indichiamo rispettivamente con

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = f''_{xz};$$

e che, nel nostro caso, sono ordinatamente uguali a 2, 1, 3. In modo simile si trovano le altre 6 derivate del 2° ordine

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = f''_{yz}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = f''_{zx}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = f''_{zy}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f''_{zz}.$$

Dalle derivate di second'ordine si giunge facilmente alle derivate di terz'ordine e di ordine superiore mediante nuove derivazioni rispetto alle variabili x, y, z; tutte queste derivate sono nell'esempio precedente uguali a zero.

β) Non tutte le derivate successive definite in α) sono però distinte, almeno finchè restiamo nel caso più comune ed importante di funzioni aventi finite e continue tutte le derivate che consideriamo e finchè consideriamo soltanto punti interni alla regione, ove sono soddisfatte queste condizioni. Noi dimostreremo infatti che per tali funzioni l'ordine in cui più derivazioni si eseguono non ha alcuna influenza sul risultato finale: che p. es., se f è funzione delle x, y, z, valgono nelle nostre ipotesi le uguaglianze:

$$f''''_{x,x,y,z} = f''''_{x,y,z,x} = f''''_{x,z,y,x} = f''''_{y,x,z,x} = \text{ecc.}$$

perchè tutte queste derivate sono state ottenute derivando due volte rispetto alla x, una volta rispetto ad y, una volta rispetto a z. In altre parole, le operazioni di derivazione parziale godono della proprietà *commutativa*, così come ne godono i fattori di un prodotto.

E, come, per dimostrare questa proprietà per i fattori di un prodotto, basta dimostrarla per i prodotti di due soli fattori, così a noi basterà provare che:

Se la funzione f (x y) *possiede in un punto* (*) *finite e continue sia le* f'_x, f'_y *che la derivata* f''_{xy} *ottenuta derivando prima rispetto ad* x *e poi rispetto ad* y, *essa possiede in tale punto anche la* f''_{yx}; *ed è in tal punto* $f''_{xy} = f''_{yx}$.

La f''_{yx} è definita come il $\lim\limits_{h=0} \dfrac{1}{h}\left[f'_y(x+h, y) - f'_y(x, y)\right]$.

Si deve dimostrare che questo limite esiste ed è uguale a f''_x

Poichè $f'_y(\xi, y) = \lim\limits_{k=0} \dfrac{f(\xi, y+k) - f(\xi, y)}{k}$, il limite da esaminare è

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h}\left\{\lim_{k=0} \frac{f(x+h, y+k) - f(x+h, y)}{k} - \lim_{k=0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}\right\}$$

cioè è il limite di

$$\frac{1}{h}\left\{\frac{f(x+h, y+k) - f(x+h, y)}{k} - \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}\right\} \qquad (1)$$

quando si passi al limite prima per $k = 0$, e poi per $h = 0$.

Posto $\varphi(x) = \dfrac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$, la (1) diventa $\dfrac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$, cioè per il teorema della media $\varphi'_x(x + \theta h)$, dove $0 < \theta < 1$, ossia $\dfrac{f'_x(x+\theta h, y+k) - f'_x(x+\theta h, y)}{k}$. Posto $\psi(y) = f'_x(x + \theta h, y)$, la (1) diventa dunque $\dfrac{\psi(y+k) - \psi(y)}{k}$, cioè per il teorema della media $\psi'(y + \theta' k)$ ossia $f''_{xy}(x + \theta h, y + \theta' h)$, dove ancora $0 < \theta' < 1$.

La f''_{xy} nel punto che si considera è continua; il limite di $f''_{xy}(x + \theta h, y + \theta' k)$ per $h = 0$, $k = 0$ è perciò (in qualunque modo si faccia il passaggio al limite) $f''_{xy}(x, y)$. Il limite che noi cercavamo, cioè il valore di f''_{yx}, esiste dunque ed è uguale a f''_{xy}, come volevamo provare.

(*) Suppongo tale punto *interno* alla regione ove $f(x, y)$ è definita ed ove, per le stesse ipotesi del nostro teorema, esistono le f'_x, f'_y, f''_{xy}.

Notiamo un semplice corollario, che è una generalizzazione del teorema della media. Il rapporto

$$R_f = \frac{1}{h}\left\{\frac{f(x+h,y+k)-f(x+h,y)}{k} - \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}\right\} =$$
$$= \frac{f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)}{hk}$$

ha per $h = k = 0$ *per limite la derivata mista nel punto* (x, y); *esso stesso, prima di passare al limite, vale la derivata mista in un punto* (diciamo così) *intermedio* $x + \theta h, y + \theta' k$. [Precisamente come $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ ha per $h = 0$ il limite $\varphi'(x)$ e prima di passare al limite vale $\varphi'(x+\theta h)$, se $\varphi'(x)$ è nell'intervallo $(x, x+h)$ determinato e finito]. Nel caso attuale si suppone che la derivata mista sia anche *continua*.

§ 81. — Teorema della media per funzioni di due o più variabili.

Se $\varphi(x)$ è una funzione derivabile della x nell'intervallo $(a, a+h)$ il teorema della media si enuncia con la formola:

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = h\,\varphi'(a+\theta h), \text{ dove } 0 < \theta < 1.$$

Troveremo una formola analoga per le funzioni di più variabili.

Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili x e y definita in un campo R e derivabile in tutto R sia rispetto alla x che rispetto alla y. Sia A un punto di R di coordinate x e y: e B (fig. 32) un altro punto del campo di coordinate $x+h, y+k$. Per passare dal punto A al punto B si può, p. es., seguire una spezzata, di cui un segmento è parallelo all'asse delle x e l'altro segmento è parallelo all'asse delle y. Se questi due segmenti sono interni al campo R, e C è il loro punto comune, il punto C avrà per ascissa l'ascissa di B e per ordinata la ordinata di A (*). Allora la differenza $f(x+h, y+k) - f(x, y)$ si può porre,

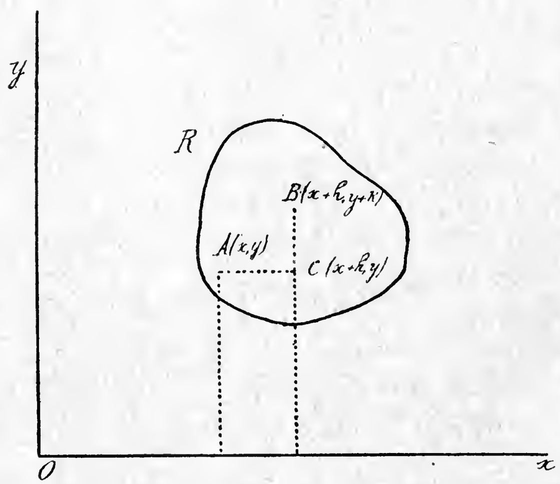


Fig. 32.

(*) Supponiamo dunque i segmenti AC, CB interni al campo che esaminiamo; nel precedente § 80 non si è fatta analoga ipotesi, perchè superflua, in quanto che h, k si supponevano tendere a zero, ed il punto (x, y) si supponeva *interno* al campo R.

aggiungendo e togliendo il valore della funzione nel punto C, uguale a

$$[f(x+h, y+k) - f(x+h, y)] + [f(x+h, y) - f(x, y)]$$

che è la somma di due differenze.

Se considero x ed h come costanti, la $f(x+h, y)$ si può considerare funzione della sola y, ponendo $f(x+h, y) = \varphi(y)$.

Sarà allora:

$$f(x+h, y+k) = \varphi(y+k),$$

cosicchè:

$$f(x+h, y+k) - f(x+h, y) = \varphi(y+k) - \varphi(y),$$

che per il teorema della media (per le funzioni di una sola variabile) è uguale a

$$k\varphi'_y(y+\theta k) \quad (0 < \theta < 1);$$

cioè, essendo

$$\varphi'_y(y+\theta k) = f'_y(x+h, y+\theta k),$$

sarà:

$$[f(x+h, y+k) - f(x+h, y)] = kf'_y(x+h, y+\theta k).$$

Analogamente si dimostrerebbe:

$$[f(x+h, y) - f(x, y)] = hf'_x(x+\theta' h, y) \quad (0 < \theta' < 1).$$

Sommando membro a membro queste due ultime uguaglianze si ottiene:

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = hf'_x(x+\theta' h, y) + \\ + kf'_y(x+h, y+\theta k).$$

Quest'ultima formola estende il *teorema della media* a funzioni di due variabili. Essa ci dice che *la differenza dei valori della funzione* f (x, y) *in due punti* (x + h, y + k) *e* (x, y) *è uguale alla somma del prodotto di* h *per la derivata parziale della funzione data, rispetto alla* x, *calcolata in un punto intermedio del segmento* (x, y), (x + h, y) *e del prodotto di* k *per la derivata parziale rispetto a* y *della funzione data, calcolata in un punto intermedio del segmento* (x + h, y), (x + h, y + k).

Qui si suppone *soltanto che le* f'_x, f'_y *esistano* (e siano quindi finite).

Scambiando gli assi delle x, y si ottiene una nuova formola della media.

Altre formole si potrebbero ottenere variando la linea che congiunge il punto A al punto B.

Più avanti, p. es., daremo un'altra formola ottenuta congiungendo A con B col segmento rettilineo AB, imponendo però alle f'_x, f'_y la ulteriore condizione di essere funzioni *continue*.

Il teorema della media si può estendere in generale alle funzioni di n variabili con metodi e ragionamenti affatto analoghi a quelli da noi adoperati nel caso di funzioni di due variabili.

Se $f(x, y, \ldots z, t)$ è una funzione di n variabili, si trova la formola generale:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k \ldots z+l, t+m) - f(x, y \ldots z, t) = \\ = hf'_x(x+\theta h, y \ldots z, t) + \\ + kf'_y(x+h, y+\theta' k, \ldots, z, t) + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ + lf'_z(x+h, y+k, \ldots, z+\theta'' l, t) + \\ + mf'_t(x+h, y+k, \ldots, z+l, t+\theta''' m). \end{aligned}$$

§ 82. — **Differenziali.**

Supponiamo che f'_x e f'_y siano tutte e due continue. Allora sarà:

$$\lim_{h=0} f'_x(x+\theta h, y) = f'_x(x, y)$$

e

$$\lim_{h=0} [f'_x(x+\theta h, y) - f'_x(x, y)] = 0.$$

Ponendo:

$$f'_x(x+\theta h, y) - f'_x(x, y) = \alpha,$$

si ha:

$$f'_x(x+\theta h, y) = f'_x(x, y) + \alpha. \qquad (1)$$

Con le stesse considerazioni si trova che:

$$f'_y(x+h, y+\theta' k) = f'_y(x, y) + \beta, \qquad (2)$$

dove α e β sono delle quantità che tendono a zero con h e k.

Dalla formola che esprime il teorema della media, ricordando la (1) e la (2), si deduce:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x, y) = h[f'_x(x, y) + \alpha] + \\ + k[f'(x, y) + \beta] = [hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y)] + \\ + [\alpha h + \beta k]. \qquad (3) \end{aligned}$$

Questa formola dice che la differenza $f(x+h, y+k) - f(x, y)$, *incremento che la funzione* f *subisce nel passare dal punto* A = (x, y) *al punto* B = (x + h, y + k) è la somma di due quantità: la prima: $hf'_x + kf'_y$ che è nota, la seconda $\alpha h + \beta k$ che è una quantità incognita, infinitesima di ordine superiore rispetto a $\sqrt{h^2+k^2}$, perchè α, β, come sappiamo, tendono a zero per $h=0$, $k=0$. La prima quantità $kf'_x+kf'_y$ sarà detta *differenziale della funzione* e sarà indicata brevemente col simbolo df.

Possiamo dunque scrivere, quando l'incremento

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)$$

della funzione si indichi con Δf,

$$\Delta f = df + (\alpha h + \beta k).$$

Osserviamo che, se $f(x, y) = x$, è $f'_x = 1$, $f'_y = 0$; e quindi

$$dx = h \,.\, 1 + k \,.\, 0 = h.$$

Analogamente il differenziale dy vale k.

Il differenziale della funzione generale $f(x, y)$ sarà dunque

$$df = f'_x\, dx + f'_y\, dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Ne risulta confermato che $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *non* sono (almeno secondo le definizioni qui poste) (*) *quozienti* di differenziali, ma veri e proprii simboli.

In modo analogo si pone per una funzione di più variabili $f(x, y, \ldots\ldots, z, t)$ la quale possegga derivate prime *continue*:

$$df = f'_x\, dx + f'_y\, dy + \ldots\ldots + f'_z\, dz + f'_t\, dt.$$

È evidente l'analogia di questi ragionamenti e di queste definizioni con le corrispondenti proposizioni relative alle funzioni di una sola variabile. Nel caso attuale si è dovuto soltanto ammettere in più la continuità delle derivate prime della f.

§ 83. — Derivate delle funzioni di funzioni. (Funzioni composte).

α) Sia z una funzione $f(x, y)$ di due variabili x, y, le quali sieno funzioni di una variabile t. Quando t varia in un certo intervallo γ, il punto (x, y) varii nel campo ove è definita la z, cosicchè la z sia funzione della t nell'intervallo γ.

Siano f'_x, f'_y finite e continue, x'_t e y'_t finite. Quando la t riceve un incremento Δt, siano Δx, Δy i corrispondenti incre-

(*) Si potrebbero definire dei differenziali parziali $\partial_x f = f'_x\, dx$; $\partial_y f = f'_y\, dy$, e interpretare allora $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ come quozienti, i cui numeratori fossero $\partial_x f$, $\partial_y f$, e i denominatori dx, dy. Ma ciò porterebbe soltanto complicazioni.

menti delle x, y: e sia Δz il corrispondente incremento della z, Sarà per il teorema della media:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) =$$
$$= \Delta x f'_x (x + \theta \Delta x, y) + \Delta y f'_y (x + \Delta x, y + \theta' \Delta y)$$
$$(0 < \theta < 1) \qquad (0 < \theta' < 1).$$

Donde

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x (x + \theta \Delta x, y) \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y (x + \Delta x, y + \theta' \Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t = 0} f'_x (x + \theta \Delta x, y) \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} +$$
$$+ \lim_{\Delta t = 0} f'_y (x + \Delta x, y + \theta' \Delta y) \lim \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Poichè per ipotesi x'_t e y'_t esistono e sono finite, è $\lim\limits_{\Delta t = 0} \Delta x = \lim\limits_{\Delta t = 0} \Delta y = 0$.

Ricordando che f'_x e f'_y sono finite e continue, se ne deduce che $z'_t = \lim \dfrac{\Delta z}{\Delta t}$ esiste, ed è dato dalla:

$$z'_t = z'_x x'_t + z'_y y'_t = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \qquad (1)$$

Se t si considera come variabile indipendente (§ 53, pag. 177), è:

$$dz = z'_t \, dt$$
$$dx = x'_t \, dt$$
$$dy = y'_t \, dt$$

Cosicchè per (1) $dz = z'_t dt = \dfrac{\partial z}{\partial x} dx + \dfrac{\partial z}{\partial y} dy$ come al precedente § 82.

Riconosciamo dunque anche in questo caso più generale (cfr. § 59, pag. 187) che il *differenziale primo di una funzione è dato sempre dalla stessa formola, qualunque sia la variabile indipendente*.

E si osservi che, se si scrivessero le derivate parziali coi d latini, tale formola assumerebbe l'aspetto

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dt}, \qquad (\alpha)$$

che taluno potrebbe essere tentato di semplificare, ottenendo l'assurdo $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dz}{dt} + \dfrac{dz}{dt}$. Le notazioni usate in (α) possono perciò portare a gravi errori di calcolo.

Si ha pure similmente, ricordando che z'_x, z'_y sono funzioni di x, y, entrambe funzioni della t, che:

$$\frac{dz'_x}{dt} = \frac{\partial z'_x}{\partial x} x'_t + \frac{\partial z'_y}{\partial y} y'_t = z''_{xx} x'_t + z''_{xy} y'_t,$$

$$\frac{dz'_y}{dt} = z''_{xy} x'_t + z''_{yy} y'_t,$$

se le derivate seconde di z sono finite e continue.

In tale ipotesi si deduce, derivando (1), che:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2 z}{dy^2}\left(\frac{dy}{\partial t}\right)^2 + $$
$$+ \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}. \qquad (2)$$

β) Analogamente, se f è funzione delle n variabili $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, tutte funzioni della t, e se la f stessa si può considerare come funzione della t in un certo campo, sarà con ipotesi analoghe:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

γ) Sia ora f una funzione, p. es., di tre variabili x, y, z; e siano y, z funzioni della x. Posto $\xi = x$, la f diventa funzione di ξ, y, z, tutte e tre funzioni della x. Si ha quindi (poichè $\xi = x$ e quindi $\frac{d\xi}{dx} = 1$):

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'_x + \frac{\partial f}{\partial z} z'_x.$$

Si noti anche qui quale differenza passa tra $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{df}{dx}$. Per ottenere la prima, si deriva considerando y e z come costanti: per ottenere la seconda, si deriva considerando y e z come funzioni di x. Per esempio, se $f = x + y + z$, $y = \text{sen}\, x$, $z = \cos x$, è $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$, $\frac{df}{dx} = 1 + \cos x - \text{sen}\, x$.

δ) Supponiamo f funzione delle due variabili x, y definite dalle:

$$x = a + ht, \; y = b + kt \qquad (a, b, h, k = \text{costanti}).$$

Si trovino le derivate di f rispetto alla variabile indipendente t. Si ha:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dy}{dt} = h\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y};$$

e analoga per $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$;

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right) = h\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + k\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= h\left(h\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + k\left(h\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) =$$

$$= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Una regola *mnemonica* per ricordare queste formole è di porre

$$\frac{d}{dt}f = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \left(\frac{d}{dt}\right)^2 f = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f$$

e sviluppando poi con le regole dell'algebra elementare, proprio come se $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ fossero frazioni vere e proprie aventi per numeratore ∂ e per denominatore le quantità ∂x, ∂y (*), con l'avvertenza che alla fine del calcolo i simboli $\frac{\partial}{\partial x}f$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f$, ecc., non si debbono più considerare come prodotti (ciò che non avrebbe senso), ma come uguali rispettivamente alle derivate $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$, ecc. E con le medesime *convenzioni* si trova:

$$\frac{d^3 f}{dt^3} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f; \;\ldots\ldots,\; \frac{d^n f}{dt^n} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f.$$

Esempio.

Sia $f(x, y) = x^y,\; x = \varphi(t),\; y = \psi(t)$,

cosicchè $f = \varphi(t)^{\psi(t)}$; si trova:

$$\frac{d\left[\varphi(t)^{\psi(t)}\right]}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{d(x^y)}{dt} = (x^y)'_x\frac{dx}{dt} + (x^y)'_y\frac{dy}{dt} =$$

$$= yx^{y-1}\varphi'(t) + x^y \log_e x\,\psi'(t) = \varphi(t)^{\psi(t)}\left\{\psi'(t)\log\varphi(t) + \psi(t)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right\},$$

come ci è già noto dal § 60, es. 3°, pag. 189.

(*) In tale calcolo, ∂x e ∂y si debbono considerare ciascuno come un unico simbolo di una quantità, e non già come prodotto di ∂ per x o per y. Così, p. es., si scriverà ∂x^2 e non $\partial^2 x^2$.

§ 84. — Funzioni implicite.

α) Si abbia l'equazione:

$$f(x, y) = 0. \qquad (1)$$

Se si può trovare una funzione $y = \varphi(x)$ della x, che, sostituita in (1) al posto della y, le soddisfi identicamente, noi diciamo che essa è una funzione della x definita in modo implicito, o più brevemente una *funzione implicita* della x. Se si riesce a risolvere la (1) rispetto alla y, si ottiene così la y come funzione esplicita della x.

Così, p. es., l'equazione (di un cerchio riferito a due diametri ortogonali scelti come assi) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ definisce in forma implicita due funzioni y della x $(-1 \leqq x \leqq 1)$, le quali sotto forma esplicita si scrivono: $y = +\sqrt{1 - x^2}$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$. La teoria della funzione $y = f(x)$ che soddisfa alla $x - \varphi(y) = 0$, cioè la teoria della funzione *inversa* (§ 58, pag. 183) della $x = \varphi(y)$ è *un caso particolare* dello studio attuale.

La definizione testè posta si può estendere a casi più generali. Così, se, p. es., esiste una funzione $y = \varphi(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ che sostituita al posto della y nella

$$f(x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n, y) = 0$$
$$[f = \text{funzione di } x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n, y]:$$

vi soddisfi identicamente, noi diciamo che la $y = \varphi$ è una funzione definita in modo *implicito* dalla precedente equazione.

Se, p. es., esistono due funzioni $y = \varphi(x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n)$ e $z = \psi(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ che, sostituite nelle

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, y, z) = 0, \qquad F(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, y, z) = 0,$$

vi soddisfano identicamente, noi diciamo che le y, z sono funzioni delle $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ definite in modo implicito dal precedente sistema di equazioni. E si potrebbero in modo simile studiare sistemi formati da più che due equazioni.

β) Sia data l'equazione

$$f(x\, y) = 0. \qquad (1)$$

Supponiamo:

1° L'equazione è soddisfatta ponendo, $x = x_0, y = y_0$ ($x_0, y_0 = \text{cost.}$).

2° Per $|x - x_0| \leqq h$ ed $|y - y_0| \leqq k$ (h, k costanti) la $f(x, y)$ esiste e possiede derivate prime finite continue.

3° La $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ ha un valore b differente da zero nel punto $x = x_0, y = y_0$.

E ci proponiamo dapprima il problema:

Esiste una funzione continua della x *in un intorno abbastanza piccolo del punto* x_0, *la quale abbia il valore* y_0 *quando* $x = x_0$ *e soddisfi all'equazione* (1)? *E come si può calcolare tale funzione in modo esplicito, risolvendo così la* (1)?

Noi risponderemo a tali domande con un metodo di approssimazione successiva (detto anche *di falsa posizione*). E trattiamo questo problema appunto per dare un esempio concreto di tale metodo, che nei casi pratici costituisce il più usato ed il più potente strumento per risolvere equazioni complicate o per problemi di analoga natura.

Sia $\dfrac{\partial f}{\partial x} = a$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = b$ nel punto (x_0, y_0). È $b \neq 0$ per ipotesi.

Poniamo $f(x, y) - [a(x - x_0) + b(y - y_0)] = \varphi(x, y)$.

Ricordando che è $f(x_0, y_0) = 0$, troviamo che:

Per $x = x_0$, $y = y_0$ è $\varphi(x, y) = 0$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$.

La nostra equazione diventa: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + \varphi(x, y) = 0$, donde (poichè $(b \neq 0)$ si trae:

$$y - y_0 = -\frac{a}{b}(x - x_0) - \frac{1}{b}\varphi(x, y) \text{ che scriveremo:}$$

$$(2) \qquad y = y_0 + c(x - x_0) + \psi(x, y) \qquad \left(-\frac{a}{b} = c, -\frac{\varphi}{b} = \psi\right).$$

Dalle nostre ipotesi segue:

1° Per $x = x_0$, $y = y_0$ sono nulle la ψ e le sue derivate prime.

2° Per $|x - x_0| \leqq h$, $|y - y_0| \leqq k$ la ψ esiste, possiede derivate prime finite e continue.

Noi sappiamo che $y = y_0$ per $x = x_0$. Un primo valore approssimato della funzione y cercata ci è dato dall'ipotesi che sia $y = y_0$ anche quando $x \neq x_0$. Questo valore $y = y_0$ sarebbe proprio la funzione cercata, soltanto se, sostituendo y_0 al posto di y in (2), la (2) risultasse verificata; cioè se, sostituendo y_0 al posto di y nel secondo membro di (2), si ottenesse come risultato proprio y_0. Ciò non avverrà certamente in generale. E il risultato, che indicheremo con y_1, ottenuto sostituendo y_0 al posto di y nel secondo membro di (2), sarà considerato come un secondo valore approssimato della funzione cercata y. E y_1 sarà proprio il valore della funzione cercata y soltanto se, sostituendo y_1 al posto di y nella (2), la (2) risulta soddisfatta, ossia se, sostituendo y_1 al posto di y nel secondo membro di (2) si ottiene come risultato proprio y_1. Ma questo non avverrà generalmente; e noi assumeremo come terzo valore approssimato della funzione y che si cerca precisamente il risultato y_2, che si ottiene sostituendo y_1 al posto di y nel secondo membro di (2). Così continuando, troviamo i successivi approssimati;

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{ll} y_0 & = y_0 \\ y_1 & = y_0 + c\,(x - x_0) + \psi(x, y_0) \\ y_2 & = y_0 + c\,(x - x_0) + \psi(x, y_1) \\ \dots & \dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1} & = y_0 + c\,(x - x_0) + \psi(x, y_{n-2}) \\ y_n & = y_0 + c\,(x - x_0) + \psi(x, y_{n-1}) \end{array}\right. \qquad (n \text{ intero positivo}).$$

Ora ci domandiamo: *Quando* n *è abbastanza grande, rappresenta effettivamente la* y_n *così definita il valore approssimato di una soluzione dell'equazione* (1) *almeno in un certo intorno del punto* $x = x_0$? In altre parole ci chiediamo: *Esiste, almeno in un intorno del punto* $x = x_0$, *il* $\lim_{n=\infty} y_n$? *E questo limite è una funzione* y *della* x *che soddisfi alle imposte condizioni e in particolare risolva la* (1)?

Noi risponderemo affermativamente a queste domande: ciò che basta per la parte teorica di simile studio. Nei casi pratici bisognerà di più, se si vogliono evitare troppo lunghi calcoli numerici, che $|y_n - y|$ sia già piccolo, quando n non è molto grande, ossia che le y_n tendano abbastanza rapidamente al loro limite y.

E cominciano anzitutto ad osservare che, affinchè sia lecito scrivere le (3), bisogna che $\psi(x, y_1)$ $\psi(x, y_2), \ldots, \psi(x, y_n), \ldots$ siano espressioni non prive di significato, ossia che i punti (x, y_1) $(x, y_2), \ldots, (x, y_n), \ldots$ appartengano al campo ove è definita la ψ, che sia cioè:

$$|x - x_0| \leq h, |y_1 - y_0| \leq k, |y_2 - y_0| \leq k, \ldots, |y_n - y_0| \leq k.$$

Osserviamo, che essendo $\psi(x, y) = 0, \psi'_y(x, y) = 0$ per $x = x_0, y = y_0$, noi potremo, per la supposta continuità di queste funzioni, scegliere due numeri $h_1 \leq h$, $k_1 \leq k$ così piccoli che per $|x - x_0| \leq h_1$, $|y - y_0| \leq k_1$ il massimo H di $|\psi'_y(x, y)|$ sia minore di 1, e impicciolire poi il numero h_1 in guisa che il massimo M di $|y_1 - y_0| = |c(x - x_0) + \psi(x, y_0)|$ soddisfi alla $M \frac{1}{1 - H} \leq k_1$.
Sarà cioè, riassumendo:

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} (\text{per } |x - x_0| \leq h_1 \leq h; |y - y_0| \leq k_1 \leq k), \\ \text{massimo di } |\psi'_y(x, y)| = H, \text{ massimo di } |y_1 - y_0| = M \\ H < 1 \quad , M \frac{1}{1 - H} \leq k_1 \text{ e quindi } a\ fortiori\ M \leq k_1 \end{array} \right.$$

Indicheremo con δ il campo definito dalle $|x - x_0| \leq h_1$, $|y - y_0| \leq k_1$. Dimostreremo che, se $|x - x_0| \leq h_1$ tutti i punti $(x, y_1), (x, y_2), \ldots, (x, y_n), \ldots$ appartengono a δ. Intanto dalle (4) segue $|y_1 - y_0| \leq M \leq k_1$; cosicchè il punto (x, y_1) appartiene certo a δ; dimostriamo che altrettanto avviene del punto (x, y_n). Usando il metodo di induzione completa, basterà dimostrare che (x, y_n) appartiene a δ, supponendo già dimostrato che i precedenti punti (x, y_m) per $1 \leq m \leq n - 1$ appartengono a δ.

In tal caso dalle (3) segue:

$$|y_m - y_{m-1}| = |\psi(x, y_{m-1}) - \psi(x, y_{m-2}| \qquad (2 \leq m \leq n)$$

che per il teorema della media è il valore assoluto del prodotto di $(y_{m-1} - y_{m-2})$ per un valore intermedio di $\psi'_y(x, y)$. Questo valore intermedio, per le (4), non supera H, cosicchè $|y_m - y_{m-1}| \leq H |y_{m-1} - y_{m-2}|$.

Ed essendo $|y_1 - y_0| \leq M$, se ne deduce successivamente $|y_2 - y_1| \leq HM$, $y_3 - y_2| \leq H |y_2 - y_1| \leq H^2 M$, ed in generale

$$(5) \qquad |y_m - y_{m-1}| \leq H^{m-1} M \qquad (1 \leq m \leq n).$$

Ora:

$$(6) \qquad y_n = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1})$$

donde:

$$(7) \ |y_n - y_0| \leq M + HM + H^2 M + \ldots + H^{n-1} M = M(1 + H + \ldots + H^{n-1}) = \\ = M \frac{1 - H^n}{1 - H} < \frac{M}{1 - H} \leq k_1.$$

Da cui segue tosto che anche (x, y_n) appartiene a δ. Per dimostrare che esiste ed è finito $y = \lim_{n=\infty} y_n$, basterà per la (6) provare che esiste ed è finita la somma y della serie

$$(8) \qquad y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots$$

Ciò che è evidente, perchè questa serie è *totalmente convergente* per $|x - x_0| \leq h_1$, poichè da (5) segue che i valori *assoluti* dei suoi termini sono (a partire dal secondo) ordinatamente minori dei termini della serie

$$M + MH + MH^2 + \ldots$$

che è una progressione geometrica decrescente (si ricordi che $H < 1$) a termini costanti.

Anzi, poichè y è la somma di (8), ne segue che:

$$|y - y_0| < M + MH + MH^2 + \dots = \frac{M}{1-H} \leqq k_1,$$

cosicchè anche *il punto* (x, y) *appartiene a* δ. E, poichè la (8) ha termini che per $|x - x_0| \leqq h_1$ sono funzioni continue, anche *la* y, *che ne è la somma, è una funzione continua della* x *per* $|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0| \leqq \mathrm{h}_1$.

Ricordando che ψ è funzione continua di x, y, si ha poi, passando al limite per $n = \infty$ nell'ultima delle (3):

$$\lim_{n=\infty} y_n = y_0 + c(x - x_0) + \psi(x, \lim_{n=\infty} y_{n-1}), \text{ ossia}$$

$$y = y_0 + c(x - x_0) + \psi(x, y), \text{ ossia}$$

$$f(x, y) = 0, \qquad \text{c. d. d.}$$

Alle domande da noi poste in principio del capoverso β *si deve dunque rispondere affermativamente*. È bene evidente che $y = y_0$ per $x = x_0$. Dalle (3) si deduce subito infatti (ricordando che $\psi(x_0, y_0) = 0$): $y_1 = y_0, y_2 = y_0, \dots, y_n = y_0$ per $x = x_0$. Quindi anche $y = \lim\limits_{n=\infty} y_n = y_0$ per $x = x_0$ (*).

Ora dimostreremo che *in un intorno abbastanza piccolo di* $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$ *non esiste altra funzione continua* y *della* x, *che per* $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$ *si riduca ad* y_0, *la quale soddisfi alla* $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$. Se infatti vi fosse un'altra tale funzione, e noi la indicassimo con z, sarebbe

$$z = y_0 + c(x - x_0) + \psi(x, z)$$

$$z - y_n = \psi(x, z) - \psi(x, y_{n-1})$$

che è uguale a $z - y_{n-1}$ moltiplicato per un valore intermedio di ψ'_y.

Ora in un intorno abbastanza piccolo di $x = x_0$, la y_{n-1} e la z differiscono da y_0 per meno di k_1; e un tale valore intermedio non supera quindi H; cosicchè $|z - y_n| \leqq H|z - y_{n-1}|$. Sarà pure $|z - y_{n-1}| \leqq H|z - y_{n-2}|$, ecc.; e se ne deduce $|z - y_n| \leqq H^{n-1}|z - y_1|$. Poichè $\lim\limits_{n=\infty} H^{n-1} = 0$, se ne deduce, passando al limite per $n = \infty$, che $\lim\limits_{n=\infty}(z - y_n) = 0$, ossia che $z = y$ c. d. d. (**)

Vogliamo provare l'esistenza di $\frac{dy}{dx}$ per $x = x_0$, e calcolare tale derivata. È $f(x_0, y_0) = 0$. E sia Δy l'incremento che riceve la y, quando la x riceve l'incremento Δx. Sarà $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0$; e quindi anche, sottraendo,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = 0,$$

(*) Se si volesse soltanto dimostrare l'esistenza della funzione y della x, senza insegnare a calcolarla, si potrebbe procedere così. Essendo $f'_y \neq 0$ per $x = x_0$ $y = y_0$, la curva $Y = f(x_0, X)$ tracciata nel piano (X, Y), che incontra l'asse delle X nel punto $X = y_0$, attraversa in tale punto tale asse, cosicchè $f(x_0, y_0 + k)$ e $f(x_0, y_0 - k)$ sono di segno contrario, se k è abbastanza piccolo. Quindi, se x è abbastanza prossimo ad x_0, anche $f(x, y_0 + k)$ e $f(x, y_0 - k)$ sono di segno opposto; ed esiste perciò un punto y compreso tra $y_0 + k$ e $y_0 - k$ tale che $f(x, y) = 0$. Esiste perciò un tale valore di y per ogni valore di x abbastanza prossimo ad x_0.

(**) Si potrebbe dimostrare questa asserzione anche così. Se $f(x, y) - f(x, z) = 0$, per il teorema della media è $\overline{f'_y}\,[y - z] = 0$, dove con $\overline{f'_y}$ indico un valore intermedio di f'_y. Se $y \neq z$ se ne deduce che questo valore intermedio $\overline{f'_y}$ *è nullo*. Ciò che è assurdo, perchè per x abbastanza prossimo a x_0, le y e z sono prossime ad y_0, e (poichè $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, ed f'_y è continua) la f'_y è differente da zero in tutto un intorno del punto (x_0, y_0).

ossia, per il teorema della media:

$$\Delta y\, f'_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta\Delta y)+\Delta x\, f'_x(x_0+\theta'\Delta x, y_0)=0$$
$$(0<\theta<1),\ (0<\theta'<1) \quad (*).$$

Poichè y è funzione continua della x, è $\lim\limits_{\Delta x=0}\Delta y=0$. Dividendo la precedente formola per $\Delta x f'_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$, e passando al limite per $\Delta x=0$, ossia $\Delta x = \Delta y=0$, si trova:

$$\lim_{\Delta x=0,\ \Delta y=0}\left\{\frac{f'_x(x_0+\theta'\Delta x, y_0)}{f'_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta\Delta y)}+\frac{\Delta y}{\Delta x}\right\}=0.$$

Poichè il limite del primo addendo esiste ed è finito (è uguale a $\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}$, il cui denominatore è per ipotesi differente da zero), sarà

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_x=\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)},$$

formola che ora ritroveremo per altra via, ammettendo *a priori* l'esistenza di y e di y'.

Oss. Tutti questi risultati potrebbero essere falsi, se $f'_y(x_0,y_0)=0$.

Così, p. es. si osservi che l'equazione $f=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$, pure essendo soddisfatta per $x=x_0$, $y=y_0$, non ammette soluzioni reali per $x-x_0\neq 0$. E si noti che è appunto $\frac{\partial f}{\partial y}=2(y-y_0)=0$ per $y=y_0$. Così pure l'equazione $f=x^2-y^2=0$ è soddisfatta per $x=y=0$; ed esistono *due* (non *una*) funzioni $y=x, y=-x$ continue e nulle per $x=0$ che ad essa soddisfano. E di nuovo si verifica che $f'_y=2y=0$ per $y=0$.

Infine si noti che l'ultima formola si scrive di solito

$$(9)\qquad y'_x=\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$$

perchè essa ci dà il valore di $\frac{dy}{dx}$ non nel solo punto x_0, y_0, ma in tutti i punti (x,y) di un suo intorno, che soddisfano alla $f(x,y)=0$.

γ) Se noi ammettiamo l'*esistenza* e la *derivabilità* della funzione $y=\varphi(x)$ delle x che soddisfa alla $f(x,y)=0$, possiamo in altro modo più semplice determinare la derivata y'_x.

Ponendo $y=\varphi(x)$ in $f(x,y)$, si ottiene una funzione $f[x,\varphi(x)]$ *identicamente nulla* della sola x (cioè nulla per ogni valore della x).

[Si noti che invece la $f(x,y)$ non è *identicamente* nulla per tutti i valori delle x, y. Altrimenti sarebbe, contro l'ipotesi fatta, non solo $f'_x=0$, ma anche $f'_y=0$].

(*) Da questa formola si potrebbe dedurre in altro modo che la y è funzione continua della x, p. es. nel punto (x_0,y_0) ossia che $\lim\limits_{\Delta x=0}\Delta y=0$. Infatti, essendo f'_x continuo e quindi inferiore in valore assoluto ad una costante finita, è

$$\lim_{\Delta x=0}\Delta x f'_x(x_0+\theta'\Delta x, y_0)=0.$$

Dalla formola precedente segue che anche $\lim\limits_{\Delta x=0}\Delta y f'_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta\Delta y)=0$. Poichè il limite del secondo fattore è differente da zero, sarà $\lim\limits_{\Delta x=0}\Delta y=0$. c. d. d.

Quindi sarà pure identicamente nulla la derivata prima della $f[x, \varphi(x)]$.

Sarà cioè per il teorema del § 83, α:

$$\frac{df[x, \varphi(x)]}{dx} = \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} y'_x\right]_{y=\varphi(x)} = 0.$$

Se ne deduce $y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}$ (supposto $f'_y \neq 0$).

Questa formola non è che la (9) scritta più sopra: essa (se $f' \neq 0$) permette di esprimere y'_x per mezzo delle x, y, senza che vi sia bisogno di dare y proprio sotto forma di funzione *esplicita* della x.

Analogamente la y''_x si calcolerebbe dalla (cfr. la (2) del § 83, α, pag. 277, ove si ponga $x = t$)

$$\frac{d^2 f(x, \varphi(x))}{dx^2} = f''_{xx} + 2 f''_{xy} y' + f''_{yy} y'^2 + f'_y y'' = 0$$

se le derivate seconde di f sono finite e continue. (È facile verificare che in tal caso y'' esiste, e che quindi si può scrivere la formola precedente).

δ) Sia, p. es., da trovare l'equazione della tangente nel punto (x_0, y_0) della ellisse o iperbole $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$. Questa equazione sarà:

$$(y - y_0) - (y'_x)_0 (x - x_0) = 0,$$

dove con $(y'_x)_0$ indico il valore di y'_x nel punto (x_0, y_0). Si voglia calcolare tale valore della derivata senza risolvere l'equazione della curva; dalla (9) si ottiene tosto:

$$(y'_x)_0 = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1\right) : \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\right]_0 = \mp \frac{x_0}{y_0} \frac{b^2}{a^2}.$$

Cosicchè l'equazione della tangente è:

$$\pm (y - y_0) + \frac{x_0 b^2}{y_0 a^2} (x - x_0) = 0, \text{ ossia:}$$

$$\frac{x x_0}{a^2} \pm \frac{y y_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} \pm \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

perchè il punto (x_0, y_0) appartiene alla nostra curva.

In generale l'**equazione della tangente alla curva** $f(x, y) = 0$ nel suo punto (x_0, y_0) è nelle nostre ipotesi:

$$(y - y_0) - (y'_x)_0 \, (x - x_0) - 0,$$

ossia per la (9)

$$(y - y_0) \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 + (x - x_0) \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0, \qquad (10)$$

dove con $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ indico i valori delle $\frac{\partial f}{dx}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ nel punto $x = x_0$, $y = y_0$.

Così, p. es., per la conica C di equazione

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0$$

l'equazione della tangente nel punto (x_0, y_0) vale

$$(a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13}) (x - x_0) + (a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23}) (y - y_0) = 0.$$

Ricordando che (x_0, y_0) appartiene a C, e che perciò

$$(a_{11} x_0 + a_{21} y_0 + a_{13}) x_0 + (a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23}) y_0 +$$
$$+ (a_{31} x_0 + a_{32} y_0 + a_{33}) = 0,$$

si trova che l'equazione di tale retta tangente può assumere la forma classica

$$(a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13}) x + (a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23}) y +$$
$$+ (a_{31} x_0 + a_{32} y_0 + a_{33}) = 0.$$

Il primo membro evidentemente è una funzione simmetrica nelle (x, y) ed (x_0, y_0), cioè non muta scambiando (x, y) con (x_0, y_0). È questa l'osservazione più semplice, da cui possa dedursi il principio delle polari reciproche.

§ 85. — **Generalizzazioni.**

α) Si abbia ora l'equazione

$$f(x, y, z) = 0. \qquad (1)$$

Supponiamo che esista una funzione *continua* $z = \varphi(x, y)$ che soddisfi identicamente alla (1), ossia che, sostituita in (1), dia origine a una funzione nulla per tutti i valori delle x, y, che noi consideriamo.

Dal § 84, β, segue facilmente che esiste una tale funzione (e che noi la sappiamo anzi dare sotto forma di serie) se la (1) è soddisfatta per

$$x = x_0, \ y = y_0, \ z = z_0 \ (x_0, y_0, z_0 = \text{cost.})$$

e se in un intorno di tale punto le derivate prime di f sono finite e continue, e $\frac{\partial f}{\partial z}$ è differente da zero.

La $z = \varphi(x, y)$ è una funzione definita da (1) in modo *implicito*; e noi ci proponiamo di calcolarne le derivate, senza scriverla sotto forma esplicita (senza risolvere la (1)).

Per trovare la derivata *parziale* $\frac{\partial z}{\partial x}$, bisogna considerare la y come una costante, per cui la z si potrà considerare come una funzione della sola x, e la $f = 0$ come un'equazione tra le sole variabili x, z. Applicando i risultati precedenti si troverà quindi senz'altro $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_z}$.

Analogamente $z'_y = -\frac{f'_y}{f'_z}$.

β) Si abbiano ora due equazioni in tre variabili

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$F(x, y, z) = 0.$$

Supponiamo che f, F abbiano derivate prime finite e continue, che le equazioni siano soddisfatte per

$$x = x_0, \ y = y_0, \ z = z_0,$$

e che nel punto (x_0, y_0, z_0) sia

$$\begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ F'_y & F'_z \end{vmatrix} \neq 0.$$

Almeno uno degli elementi di questo determinante sarà differente da zero. Se, p. es., $f'_y \neq 0$ in (x_0, y_0, z_0), dalla $f = 0$ potrò ottenere, risolvendo, $y = \psi(x, z)$, dove la ψ è una funzione derivabile che diventa uguale a y_0 per $x = x_0$, $z = z_0$. Sostituendo nella $F = 0$ si trova:

$$F[x, \psi(x, z), z] = 0. \tag{2}$$

La derivata del primo membro rispetto a z è:

$$F'_y \psi'_z + F'_z = -F'_y \frac{f'_z}{f'_y} + F'_z = \frac{1}{f'_y} \begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ F'_y & F'_z \end{vmatrix},$$

che è differente da zero per $x = x_0$, $y = y_0$. Se ne ricaverà che dalla (2) si potrà dedurre, risolvendo, z come funzione $\Phi(x)$ della x derivabile ed uguale a z_0 per $x = x_0$.

Sostituendo questo valore in $\psi(x, z)$ se ne deduce il valore di y come funzione derivabile $\varphi(x)$ della x, che per $x = x_0$ si riduce ad y.

Esistono cioè due funzioni $y = \varphi(x)$, $z = \Phi(x)$ *derivabili, soddisfacenti alle equazioni date e che, per* $x = x_0$, *diventano rispettivamente uguali ad* y_0 *e* z_0.

Ciò che si poteva del resto dimostrare, estendendo ai sistemi di equazioni il metodo con cui abbiamo studiato il caso di una equazione sola. E vale anche il teorema di unicità, che cioè in un intorno di $x = x_0$ *non esistono* altre funzioni soddisfacenti alle proprietà enunciate. Il calcolo di φ'_x, Φ'_x si effettua nel modo più rapido osservando che, se nelle f, F sostituiamo al posto di z ed y i loro valori $\Phi(x)$, $\varphi(x)$ in funzione della x, otteniamo due funzioni $f(x, \varphi, \Phi)$ e $F(x, \varphi, \Phi)$ della sola x identicamente nulle, le cui derivate (*totali*) rispetto alla x saranno quindi anch'esse *nulle*. Quindi, derivando

$$f(x, y, z) \text{ e } F(x, y, z)$$

rispetto alla x, quando vi si considerino y e z come funzioni della x ed applicando quindi il teorema del § 84, β, si ottiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'_x + \frac{\partial f}{\partial z} z'_x = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'_x + \frac{\partial F}{\partial z} z'_x = 0.$$

Queste due uguaglianze si possono considerare come due equazioni di primo grado nelle y'_x, z'_x, che saranno risolubili con la regola di Kramer, se, come abbiamo appunto supposto,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{dy} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0\,;$$

e ci determineranno in tal caso le derivate cercate.

γ) Si abbia ora il sistema delle due equazioni

$$f(x, y, z, t) = 0,$$
$$F(x, y, z, t) = 0.$$

E supponiamo senz'altro che esistano due funzioni derivabili $z = \varphi(x, y)$, $t = \Phi(x, y)$ che soddisfino a tali equazioni.
Vogliamo determinarne le derivate. Se noi sostituiamo nelle due equazioni precedenti al posto delle z, t rispettivamente le funzioni $z = \varphi(x, y)$, $t = \Phi(x, y)$ si ottengono due funzioni di x e di y: $f(x, y, \varphi, \Phi)$ e $F(x, y, \varphi, \Phi)$ identicamente nulle. Le loro derivate *parziali* tanto rapporto a x quanto rapporto a y saranno quindi nulle. Se allora deriviamo la $f(x, y, z, t)$ rapporto a x considerandola come funzione delle x, z, t, tutte e tre funzioni della x, questa derivata, che, per non creare equivoci, dovremo indicare col simbolo (*)

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{y = \text{cost.}, \\ z = \varphi \\ t = \Phi}}$$

per il teorema di derivazione delle funzioni di funzioni (funzioni composte) è:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{y = \text{cost.}, \\ z = \varphi \\ t = \Phi}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{y, z, t = \text{cost.}} x'_x + \left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]_{x, y, t = \text{cost.}} z'_x + \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{x, y, z = \text{cost.}} t'_x$$

Ma questa derivata, per quanto abbiamo osservato, è nulla. Sarà quindi (poichè $x'_x = 1$):

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{y, z, t = \text{cost.}} + \left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]_{x, y, t = \text{cost.}} z'_x + \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{x, y, z = \text{cost.}} t'_x = 0.$$

Ragionando sulla funzione $F(x, y, z, t)$ si otterrebbe analogamente:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{y, z, t = \text{cost.}} + \left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{x, y, t = \text{cost.}} z'_x + \left[\frac{\partial F}{\partial t}\right]_{x, y, z = \text{cost.}} t'_x = 0.$$

Quest'ultima equazione con la precedente costituisce un sistema di due equazioni lineari nelle due incognite z'_x e t'_x, che sono appunto (essendosi considerato y costante) rispettivamente le derivate parziali rispetto a x di $\varphi(x, y)$ e $\Phi(x, y)$.

(*) Questa derivata è una derivata parziale, perchè y si considera costante; ma non si può indicare con $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Con tal simbolo si indica $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y, z, t = \text{cost.}}$; si indica cioè la derivata che si ottiene considerando costante non solo la y, ma anche le z, t.

Il sistema è risolubile con la regola di Kramer e quindi ammetterà una sola soluzione se:

$$\begin{vmatrix} \left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]_{x,\,y,\,t\,=\,\text{cost.}} & \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_{x,\,y,\,z\,=\,\text{cost.}} \\ \left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{x,\,y,\,t\,=\,\text{cost.}} & \left[\frac{\partial F}{\partial t}\right]_{x,\,y,\,z\,=\,\text{cost.}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ragionamenti e risultati analoghi valgono per z'_y, t'_y. Questo esempio di derivazione è interessante, perchè abbiamo avuto occasione di osservare quale complicazione di notazioni s'abbia quando, per non creare equivoci che potrebbero condurre a gravi errori, si vuole un simbolo di derivazione parziale che dica esplicitamente tutto e non possa prestarsi a varie interpretazioni.

L'allievo farà un'utile esercitazione, cercando di calcolare le derivate seconde.

δ) Siano $f(x, y)$ e $F(x, y)$ due funzioni continue con le loro prime derivate in un campo C, nel quale esista una curva Γ luogo dei punti per cui

$$F(x, y) = k \quad (k = \text{cost.}). \tag{3}$$

Voglio trovare qualche condizione *necessaria* affinchè il valore assunto dalla f in un punto A di Γ sia massimo o minimo rispetto agli altri valori assunti dalla f in Γ (in un intorno di A). Più brevemente cerco i massimi ed i minimi di $f(x, y)$, quando le x, y sono legate dalla (3). Lungo Γ si può considerare la y come una funzione della x soddisfacente alla $y'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$ (se $F'_y \neq 0$); e la f si potrà perciò anche considerare come una funzione della sola x.

In uno dei punti A cercati dovrà dunque esser nulla la *derivata totale* della f rispetto alla x

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Dovrà dunque essere in A

$$f'_x F'_y - f'_y F'_x = 0,$$

ossia dovranno essere in A compatibili le equazioni nell'incognita λ (che supponiamo essere una costante)

$$f'_x + \lambda F'_x = 0,$$
$$f'_y + \lambda F'_y = 0.$$

Ad identico risultato si giunge se $F'_x \neq 0$. Se dunque in Γ non è mai contemporaneamente $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, allora per trovare i cercati punti A si cercano i punti ove sono nulle le derivate prime di $f + \lambda F$ rispetto a x, y: si procede cioè come se si cercassero i massimi e i minimi di $f + \lambda F$. Le tre equazioni

$$\begin{aligned} (f + \lambda F)'_x &= 0 \\ (f + \lambda F)'_y &= 0 \\ F(x, y) &= k. \end{aligned}$$

sono tre equazioni nelle tre incognite (la costante λ, e le due coordinate di A), che servono a determinarci quei punti A di C, tra i quali soltanto si dovranno poi cercare i nostri punti di massimo o minimo.

Questo metodo del moltiplicatore indeterminato λ è suscettibile di molte e svariate generalizzazioni e applicazioni.

§ 86. — **Formola di Taylor-Lagrange per le funzioni di due variabili.**

Ricordiamo le formole di Taylor-Lagrange per le funzioni di una sola variabile

$$\varphi(\alpha + h) = \varphi(\alpha) + h\,\varphi'(\alpha + \theta h) = \varphi(\alpha) + h\,\varphi'(\alpha) + \\ + \frac{h^2}{\underline{|2}}\,\varphi''(\alpha + \theta h),$$

dove $0 < \theta < 1$, e θ può variare dal secondo al terzo membro. Vogliamo estendere queste formole al caso di una funzione $f(x, y)$ di due variabili. Consideriamo a tale oggetto la $f(a + ht, b + kt)$; la quale, se a e b, h e k si considerano come costanti, è una funzione $\varphi(t)$ della sola t. Potremo quindi scrivere

$$\varphi(t) = f(a + ht, b + kt). \qquad (1)$$

Posto successivamente $t = 0$ e $t = 1$, si trae

$$\varphi(0) = f(a, b) \qquad \varphi(1) = f(a + h, b + k). \qquad (1)^{\text{bis}}$$

Applicheremo alla $\varphi(t)$ la precedente formola di Taylor, la quale, posto (*) $\alpha = 0$, $h = 1$, diventa:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(\theta) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\,\varphi''(\theta). \quad (2)$$

(*) È necessario supporre a tal fine che i punti di coordinate $x = a + ht$ e $y = b + kt$ siano, per $0 \leqq t \leqq 1$, tutti interni al campo ove sono definite la f e le sue derivate. Tali punti non sono che i punti del *segmento rettilineo* congiungente il punto (a, b) al punto $(a + h, b + k)$.

Vogliamo ora trasformare queste formole in altre, in cui compaiano esclusivamente la $f(x, y)$ e le sue derivate. A tal fine si osservi che le successive derivate della $\varphi(t)$ si calcolano coi metodi del § 83, δ, pag. 278, dove è posto $x = a + ht$, $y = b + kt$. Ricordando poi che il porre $t = 0$ equivale a porre $x = a$, $y = b$ e che il porre $t = \theta$ equivale a scrivere $a + h\theta$ e $b + k\theta$ al posto di x, y, si ottiene da (2) in virtù delle (1), (1)$^{\text{bis}}$:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \left[h \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + k \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]_{\substack{x=a+h\theta \\ y=b+k\theta}} =$$

$$= f(a, b) + [h f'_x(a, b) + k f'_y(a, b)] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[h^2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=a+h\theta \\ y=b+k\theta}}$$

$(0 < \theta < 1)$ θ varia generalmente dal secondo al terzo membro.

La prima di queste uguaglianze è un'altra forma del teorema della media. Ma mentre la formola del § 81 è ottenuta passando dal punto (x, y) al punto $(x + h, y + k)$ mediante una spezzata coi lati paralleli agli assi (e senza supporre la continuità delle f'_x, f'_y), questa è ottenuta eseguendo tale passaggio con un segmento rettilineo (e supponendo f'_x, f'_y continue).

Utile esercizio sarà di generalizzare in modo analogo le precedenti formole sia a funzioni di più che due variabili, sia alla formola e alla serie di Taylor, quando non ci si fermi già ai termini contenenti derivate seconde.

§ 87. — **Massimi e minimi delle funzioni di due o più variabili.**

α) Lemma. *Un trinomio omogeneo di 2° grado in due variabili* h, k, **mai** *contemporaneamente nulle*

$$\mathrm{a\,h^2 + 2\,b\,h\,k + c\,k^2}$$

è sempre differente da zero ed ha costantemente il segno di a, *o, ciò che è lo stesso, quello di* c, *se* $\mathrm{a\,c - b^2 > 0}$.

Può invece assumere valori di segno arbitrario se $\mathrm{a\,c - b^2 < 0}$; *ed infine, se il trinomio non è identicamente nullo, esso ha costantemente il segno di* a, *o di* c, *ma può annullarsi, quando* $\mathrm{a\,c - b^2 = 0}$.

Infatti se $a = c = 0$ e $b \neq 0$ allora $ac - b^2 < 0$ e al trinomio, che vale $2bhk$ può farsi assumere un segno qualunque, scegliendo per h, k valori di segno opportuno.

Se invece p. es. $a \neq 0$, allora, se α, β sono le radici di $a z^2 + 2 b z + c = 0$, il nostro trinomio vale identicamente $a (h - \alpha k)(h - \beta k)$. Se $a c - b^2 = 0$, allora $\alpha = \beta$ e quindi il trinomio vale il prodotto di a per un quadrato perfetto, ha quindi il segno di a, a meno che $h = \alpha k$, nel qual caso il trinomio si annulla. Se $ac - b^2 < 0$, e quindi α, β sono numeri reali distinti (p. es. $\alpha < \beta$), allora $(h - \alpha k)(h - \beta k)$ è positivo se $\frac{h}{k}$ è minore di α o maggiore di β, ed è negativo se $\frac{h}{k}$ è compreso tra α e β. Il trinomio può dunque assumere un valore di segno arbitrario.

Infine se $a c - b^2 > 0$ [e perciò $a c > b^2 \geqq 0$ e quindi a e c differenti da zero e dello stesso segno] le radici α, β della $a z^2 + 2 b z + c = 0$ sono numeri complessi coniugati $\mu \pm i \nu$ con $\nu \neq 0$. Ora il nostro trinomio $a h^2 + 2 b h k + c k^2$ è uguale identicamente al prodotto di a per

$$(h - \alpha k)(h - \beta k) = (h - \lambda k^2) + \nu^2 k^2,$$

che è sempre positivo (e che potrebbe essere nullo soltanto se $\nu k = h - \lambda k = 0$; ossia, essendo $\nu \neq 0$, soltanto se $k = 0$, $h = 0$: valori che abbiamo escluso). Quindi il nostro trinomio ha il segno di a. Ciò che si può verificare osservando anche che:

$$a h^2 + 2 b h k + c k^2 = \frac{1}{a} \left[(a h + b k)^2 + (a c - b^2) k^2 \right].$$

β) Si suol dire che una funzione $f(x, y)$ di due variabili ha in un punto A, *interno* al campo ove $f(x, y)$ è definita, un *massimo* od un *minimo* (relativo) se esiste un intorno di A, nei punti del quale la funzione assume rispettivamente valori tutti *non maggiori*, o tutti *non minori* che nel punto A (cfr. la defin. analoga di pag. 223). Se (x_0, y_0) sono le coordinate di A, dovrà cioè esistere un numero positivo l, tale che per $|h| < l$, $|k| < l$ sia rispettivamente

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \leqq 0 \qquad \text{(se } A \text{ è un massimo)},$$
$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \geqq 0 \qquad \text{(se } A \text{ è un minimo)}.$$

In tal caso la funzione $f(x_0, y)$ che si ottiene ponendo $x = x_0$ ha un massimo od un minimo per $y = y_0$, e quindi, se possiede derivata prima f'_y finita e determinata, questa derivata è nulla (§ 70, pag. 226) nel punto A. Risultato analogo si prova per f'_y.

Condizioni necessarie (ma non sufficienti) *affinchè* f (x, y) *abbia nel punto* A *interno al campo ove la* f *ha derivate prime determinate e finite, abbia un massimo o un minimo è che ivi queste derivate* f'_x *ed* f'_y *siano nulle.*

Le condizioni necessarie si possono meglio studiare così: Su ogni retta

$$x = x_0 + mt \qquad y = y_0 + nt \qquad (m, n = \text{cost.})$$

uscente dal punto (x_0, y_0) cioè dal punto A, la funzione $f(x, y)$ ha nelle nostre ipotesi un massimo o un minimo per $t = 0$.

[Viceversa non si può dire che, se A è punto di massimo o di minimo su ogni retta uscente da A, esso sia un punto di massimo o minimo, come si vede con metodo analogo a quello svolto al § 80, *a*, pag. 268].

Cioè $f(x_0 + mt, y_0 + nt)$ ha un massimo o minimo per $t = 0$. Se dunque f ha derivate prime e seconde finite e continue, sarà per $t = 0$ e per valori *qualsiasi* (non nulli contemporaneamente) di m, n:

$$\frac{df}{dt} = m f'_x(x_0, y_0) + n f'_y(x_0, y_0) = 0$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = m^2 f''_{xx}(x_0, y_0) + 2mn\, f''_{xy}(x_0, y_0) + n^2 f''_{yy}(x_0, y_0)$$

$$\begin{cases} \leqq 0 \text{ (se si tratta di punto di massimo)} \\ \geqq 0 \text{ (se si tratta di punto di minimo).} \end{cases}$$

Ora, affinchè $\frac{df}{dt} = 0$, qualunque siano m, n, non contemporaneamente nulle *dovrà essere* $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$. Affinchè $\frac{d^2 f}{dt^2}$ abbia segno costante, qualunque siano m, n, *dovrà essere* $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} \geqq 0$ *nel punto* (x_0, y_0). Queste sono dunque altre condizioni *necessarie*, affinchè la $f(x, y)$ abbia nel punto (x_0, y_0) un massimo o minimo, almeno se le derivate prime e seconde di f sono continue. Noi proveremo che:

Condizioni sufficienti sono le:

$f'_x = f'_y = 0$; $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} > 0$; f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy} finite e continue (*nel punto* x_0, y_0). (Si noti che $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} \geqq 0$ è condiz. *necessaria*, mentre $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} > 0$ è condizione *sufficiente*).

E, se tali condizioni sufficienti sono soddisfatte, il punto (x_0, y_0) *è punto di massimo se* f''_{xx}, f''_{yy} *sono nel punto considerato negative; esso è un punto di minimo, se* f''_{xx}, f''_{yy} *sono positive.* (Dalla $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} > 0$ segue che f''_{xx}, f''_{yy} hanno lo stesso segno). Infatti, supposto che in $A \equiv (x_0, y_0)$ sia $f'_x = f'_y = 0$, la formola di Taylor-Lagrange dà

$$(1)\; f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \left\{ h^2 \overline{f''_{xx}} + 2hk\, \overline{f''_{xy}} + k^2 \overline{f''_{yy}} \right\}$$

ove il soprassegno indica che le derivate seconde sono calcolate in un punto $x_0 + \theta h$, $y_0 + \theta k$ con $0 < \theta < 1$.

Ora, essendo tali derivate seconde continue, basterà scegliere $|h|$, $|k|$ abbastanza piccolo perchè $\overline{f''_{xx}}$ abbia il segno di f''_{xx} e $\overline{f''_{xx}}\, \overline{f''_{yy}} - \overline{f''^2_{xy}}$ abbia il segno di $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy}$, cioè sia positivo. Il trinomio posto al 2° membro di (1), e quindi anche il primo membro di (1), avranno pertanto (cfr. il lemma) il segno di $\overline{f''_{xx}}$, cioè di f''_{xx}, *c. d. d.*

Se $f'_x = f'_y = 0$, *ma* $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} < 0$, *il punto considerato non è di massimo, nè di minimo.*

Nulla si può affermare senza studii più minuti per un punto, in cui $f'_x = f'_y = f''_{xx} f''_{yy} - f'^2_{xy} = 0$.

Il teorema relativo alle condizioni sufficienti si dimostra anche osservando che (1) si può scrivere nella forma

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \left\{ f''_{xx}(x_0, y_0) h^2 + 2 f''_{xy} h k + f''_{yy} k^2 \right\} + \\ + \varepsilon h^2 + 2 \gamma h k + \delta k^2,$$

ove $\varepsilon, \gamma, \delta$ tendono a zero per $h = k = 0$. Posto $h = \rho \cos\theta$, $k = \rho \operatorname{sen}\theta$, il secondo membro diventa la somma di

$$\frac{1}{2} \rho^2 \left\{ \cos^2\theta f''_{xx} + 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta f''_{xy} \operatorname{sen}^2\theta f''_{yy} \right\} + \\ + \rho^2 \left\{ \varepsilon \cos^2\theta + 2\gamma \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \delta \operatorname{sen}^2\theta \right\}. \tag{2}$$

Il coefficiente di ρ^2 nel primo addendo ha il segno di f''_{xx} e il suo minimo valore assoluto è *maggiore* di zero. Il coefficiente di ρ^2 nel secondo membro è invece infinitesimo (per $h = k = 0$). Dunque per $|h|$, $|k|$ abbastanza piccoli la (2) ha il segno del primo addendo, cioè ha il segno di f''_{xx}.

CAPITOLO XIV.

PRIMA ESTENSIONE DEL CALCOLO INTEGRALE ALLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

§ 88. — Considerazioni preliminari.

Sia $f(x, y)$ una funzione continua nei punti di un campo, che, per fissar le idee, supponiamo essere un rettangolo R coi lati paralleli agli assi coordinati. Tale rettangolo R contenga all'interno il segmento (parallelo all'asse delle y) che è definito dalle formole:

$$y = k = \text{cost.} \qquad \alpha \leq x \leq \beta. \qquad (\alpha, \beta = \text{cost.}).$$

I valori che $f(x, y)$ assume nei punti di tale segmento (lungo cui $y = \text{cost.}$) dipendono dalla sola x; e costituiscono appunto una funzione della sola x. Io dico che *l'integrale*

$$\int_\alpha^\beta f(x, y)\, dx \tag{1}$$

di tale funzione è una funzione continua della y (per quei valori di $y = k$ corrispondenti a punti interni ad R).

Il lettore noti l'analogia tra la definizione degli integrali (1) di $f(x, y)$ e quella delle derivate parziali della $f(x, y)$; come per calcolare f'_x si considera la y come una costante, così (1) si calcola appunto, considerando la y come costante, cioè la $f(x, y)$ come funzione della sola x (*).

Si tratta di provare che $\lim_{h=0} B = 0$, ove è posto

$$B = \left[\int_\alpha^\beta f(x, y + h)\, dx - \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dx \right]. \tag{2}$$

Il lettore troverà più avanti una dimostrazione completa. Qui ci accontentiamo di provare tale formola nell'ipotesi che

(*) In altre parole, se $F(x, y)$ è una funzione delle x, y tale che $F'_x = f$, sarà

$$\int_\alpha^\beta f(x, y)\, dx = F(\beta, y) - F(\alpha, y).$$

$|f'_y|$ sia in R sempre minore di una costante H. Questo supposto, si ha per il teorema della media:

$$|B| = \left|\int_\alpha^\beta f(x, y+h)\,dx - \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx\right| = \left|\int_\alpha^\beta h f'_y(x, y+\theta h)\,dx\right| \leqq$$

$$\leqq \left| h\int_\alpha^\beta H\,dx \right| = |H(\beta-\alpha)\,h|\,.$$

Quindi, per $h=0$, è lim $B=0$ come dovevasi provare.

Se noi conserviamo l'ipotesi che i punti del segmento $y=$ cost. lungo il quale si fa l'integrazione appartengano al campo ove $f(x,y)$ è finita e continua, si potrebbe dimostrare che *lo* $\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$ *è una funzione continua di* y, *anche se* α, β, anzichè costanti, sono *funzioni continue* di y.

Per dimostrare tali teoremi nella *sola ipotesi della continuità della* f (x, y), basta, esteso il teor. della continuità uniforme alle funzioni di due variabili, ricordare che $|f(x,y+h) - f(x,y)|$ si può rendere minore di ε per tutti i punti (x, y), prendendo h abbastanza piccolo.

§ 89. — **Derivazione sotto il segno d'integrale.**

Supponiamo che α e β *siano costanti, e che siano continue tanto la* f (x, y) *quanto la* f'_y (x, y). Noi diciamo che in tal caso *la derivata di* $\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$ *rispetto ad* y *vale* $\int^\beta f'_y(x,y)$; che cioè la derivata del nostro integrale è uguale all'integrale della derivata e si ottiene per ciò derivando la funzione che compare sotto il segno di integrale.

Oss. Per la dim. completa basta ricordare che, essendo f'_y continua, essa è anche uniformemente continua.

Qui consideriamo il solo caso che $|f''_{yy}|$ sia nel campo considerato sempre minore di una costante H.

Noi dobbiamo calcolare:

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx\right)'_y = \lim_{h=0}\frac{\int_\alpha^\beta f(x,y+h)\,dx - \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx}{h} =$$

$$= \lim_{h=0}\int_\alpha^\beta \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\,dx.$$

Per la formola di Taylor è

$$f(x,y+h) - f(x,y) = h\,f'_y(x,y) + \frac{h^2}{2} f''_{yy}(x, y+\theta h)$$

$$(0<\theta<1).$$

Quindi

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx\right)'_y = \lim_{h=0}\left[\int_\alpha^\beta \left\{ f'_y(x,y) + \frac{h}{2} f''_{yy}(x, y+\theta h) \right\} dx\right]$$

$$= \int_\alpha^\beta f'_y(x,y)\,dx + \lim_{h=0} \frac{h}{2}\int_\alpha^\beta f''_{yy}(x, y+\theta h)\,dx.$$

Poichè

$$|f''_{yy}| < H \text{ e quindi } \left|\int_\alpha^\beta f''_{yy}(x, y+\theta h)\,dx\right| < \left|H\int_\alpha^\beta dx\right| = |H(\beta-\alpha)|,$$

sarà:

$$\lim_{h=0}\left|\frac{h}{2}\int_\alpha^\beta f''_{yy}(x, y+\theta h)\,dx\right| = 0.$$

E la nostra formola diventa appunto:

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx\right)'_y = \int_\alpha^\beta f'_y(x,y)\,dx \qquad (\alpha, \beta = \text{cost.}).$$

Generalizzazione.

Si può estendere la formola precedente al caso che α e β siano funzioni della y, purchè α'_y e β'_y esistano e siano finite.

Premetteremo alcune osservazioni.

Si voglia derivare rispetto al limite superiore x l'integrale

$$\int_\alpha^x \varphi(z)\,dz \qquad (\alpha = \text{cost.}).$$

Ricordando che un integrale definito è indipendente dal nome della variabile di integrazione avremo:

$$\left[\int_\alpha^x \varphi(z)\,dz\right]'_x = \left[\int_\alpha^x \varphi(x)\,dx\right]'_x = \varphi(x);$$

cioè la derivata rispetto al limite superiore di un integrale di una funzione di una variabile è uguale alla funzione che è sotto il segno di integrale, dove al posto della variabile di integrazione si scriva il limite superiore.

Analogamente, dovendosi calcolare la

$$\left[\int_x^\alpha \varphi(z)\,dz\right]'_x,$$

potremo scrivere:

$$\left[\int_x^\alpha \varphi(z)\,dz\right]'_x = -\left[\int_\alpha^x \varphi(x)\,dx\right]'_x = -\varphi(x);$$

cioè la derivata rispetto al limite inferiore di un integrale di una funzione di una variabile è uguale alla funzione che è sotto il segno di integrale cambiata di segno, dove al posto della variabile di integrazione si scriva il limite inferiore.

Ci varremo di questi risultati per eseguire il calcolo della

$$\left[\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx\right]'_y.$$

Nello

$$\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$$

abbiamo supposto α e β dipendenti da y; indicheremo questo fatto sostituendo z e t (supposte funzioni di y) ai limiti di integrazione. Otterremo lo

$$\int_z^t f(x,y)\,dx$$

che indicheremo con F. Il nostro integrale allora che è funzione delle y, z, t, tutte funzioni di y, sarà funzione composta di y. Avremo dunque (§ 84, α)

$$\frac{dF}{dy} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{z,\,t\,=\,\text{cost.}} y'_y + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{y,\,t\,=\,\text{cost.}} z'_y + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{y,\,z\,=\,\text{cost.}} t'_y$$

Se però le z, t fossero funzioni anche della x, questa formola si scriverebbe più correttamente nel modo seguente:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x\,=\,\text{cost.}} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x,\,z,\,t\,=\,\text{cost.}} y'_y + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{x,\,y,\,t\,=\,\text{cost.}} z'_y + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x,\,y,\,z\,=\,\text{cost.}} t'_y$$

Ora per trovare $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x,\,z,\,t\,=\,\text{cost.}}$ si devono considerare z, t come costanti, ossia come indipendenti dalla y. Questa derivata si calcola dunque col metodo svolto più sopra. Si ha cioè

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x,\,z,\,t\,=\,\text{cost.}} = \int_z^t f'_y(x,y)\,dx.$$

Così sappiamo che, essendo z il limite inferiore dell'integrale, è $\frac{\partial F}{\partial z} = -f(z,y)$; e che, essendo t il limite superiore, $\frac{\partial F}{\partial t} = f(t,y)$. Essendo poi $y'_y = 1$, dalle precedenti formole dedurremo infine, posto di nuovo $z = \alpha$, $t = \beta$,

$$\left[\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx\right]'_y = \int_\alpha^\beta f'_y(x,y)\,dx + f(\beta,y)\,\beta'_y - f(\alpha,y)\,\alpha'_y.$$

Anche qui è ammesso, p. es., che le f, f'_y, f''_{yy} sieno finite e continue.

Questa formola si riduce a quella trovata più sopra, se $\alpha'_y = \beta'_y = 0$, ossia se le α, β sono indipendenti dalla y; ciò che era prevedibile *a priori*.

§ 90. — **Differenziali esatti in due variabili.**

α) Il problema fondamentale del calcolo integrale per le funzioni di una sola variabile consiste nel determinare una funzione, di cui è data la derivata $F(x)$, o, ciò che è lo stesso, il differenziale $F(x)\,dx$.

Il problema analogo per le funzioni di due variabili consiste nel determinare una funzione $f(x, y)$ di due variabili x, y, di cui sono date le due derivate parziali del primo ordine, ossia di trovare una funzione $f(x, y)$ soddisfacente alle:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y), \tag{1}$$

o, ciò che è lo stesso, una funzione il cui differenziale df è uguale a

$$Mdx + Ndy, \tag{2}$$

dove M, N sono funzioni prefissate. Abbiamo visto che il problema citato per le funzioni di una sola variabile è sempre risolubile se $F(x)$ è continua, p. es., nell'intervallo $x_0 \leq x \leq b$; e che la f è determinata a meno di una costante additiva k. Si può, p. es., porre

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} F(x)\, dx + k,$$

dove k è il valore (scelto ad arbitrio) di $f(x)$ per $x = x_0$.

Nel caso delle funzioni di due variabili noi proveremo invece che non sempre esiste una funzione $f(x, y)$ soddisfacente alle (1) (anche supposto che le M, N siano continue insieme alle loro derivate), ossia che non sempre (2) è il differenziale di una funzione $f(x, y)$, o, come si suol dire più brevemente, che non sempre (2) è un *differenziale esatto*.

Se infatti le derivate prime delle M, N sono continue, dalle (1) si deduce, derivando la prima rispetto ad y e la seconda rispetto ad x, che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Essendo, per ipotesi, i secondi membri funzioni continue, per il teorema (§ 80, pag. 271) dell'invertibilità dell'ordine delle derivazioni, essi sono uguali; cioè è

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{3}$$

La (3) *è dunque una condizione necessaria affinchè il sistema delle* (1) *sia risolubile, ossia affinchè* (2) *sia un differenziale esatto* [sia il differenziale di una funzione $f(x, y)$], (naturalmente se M, N, M'_y, N'_x sono continue).

Dimostreremo viceversa che *in casi generalissimi tale condizione è anche sufficiente*. Se la (3) è soddisfatta, anche nel caso attuale di funzioni $f(x, y)$ di due variabili, la $f(x, y)$ è determinata a meno di una costante additiva k: p. es., il valore della $f(x, y)$ in un punto $A = (x_0, y_0)$ prefissato.

β) Comincieremo da un caso particolare: il caso cioè che le variabili *sieno separate*. Con questa frase si indica il caso che nella (2) la M sia funzione della sola x, la N funzione della sola y; in tal caso la (3) è evidentemente soddisfatta, perchè

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Supponiamo $M(x)$ continua per $x_0 \leq x \leq b$, ed $N(y)$ continua per $y_0 \leq y \leq \beta$.

Sarà evidentemente:

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(y)\, dy + k.$$

Il primo addendo $\int_{x_0}^{x} M(x)\, dx$ è una funzione della sola x, la cui derivata rispetto ad x vale $M(x)$ e la cui derivata rispetto ad y è nulla. Il secondo addendo similmente è una funzione della sola y, la cui derivata rispetto ad x è nulla, la cui derivata rispetto ad y è $N(y)$. Il terzo addendo k è una costante effettiva, le cui derivate sono entrambe nulle. Esso è il valore della $f(x, y)$ nel punto di ascissa x_0 e di ordinata y_0.

γ) Passiamo ora al caso generale. Vogliamo calcolare $f(x, y)$ nel punto (x, y) supponendo che M, N ed $M'_y = N'_x$ *siano finite e continue nei punti la cui ascissa è compresa tra* x_0 *ed* x, *e la cui ordinata è compresa tra* y_0 *ed* y. Ciò naturalmente *limita* il campo ove facciamo variare il punto (x, y) cioè *il campo* R, *ove dimostriamo il nostro teorema.* Supporremo, p. es., senz'altro R *essere un rettangolo coi lati paralleli agli assi*, e dentro di esso supporremo cadere entrambi i punti (x_0, y_0) ed (x, y).

Poichè $f'_y = N$, sarà

$$f = \int_{y_0}^{y} N(x, y)\, dy + \varphi, \tag{4}$$

dove nell'eseguire l'integrazione la x si considera come costante, e la φ (la costante additiva) potrà quindi essere funzione della sola x (com'è evidente, perchè φ deve essere la funzione a cui si riduce la f per $y = y_0$, cioè la $f(x, y_0)$).

Dovremo poi determinare la $\varphi = \varphi(x)$ in guisa che la derivata rispetto ad x della $f(x, y)$ definita da (4) valga M; che cioè

$$M(x, y) = \left[\int_{y_0}^{y} N(x, y)\, dy + \varphi(x)\right]'_x = \varphi'(x) + \int_{y_0}^{y} N'_x(x, y)\, dy$$

ossia che:

$$\varphi'(x) = M(x, y) - \int_{y_0}^{y} N'_x(x, y)\, dy. \tag{5}$$

Il secondo membro è finito e continuo. Sarà dunque necessario e sufficiente che esso sia funzione della sola x; in tal caso, con una integrazione si ricaverà il valore di $\varphi(x)$. La condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità del nostro problema è che la derivata $M'_y - N'_x$ del secondo membro di (5) rispetto ad y sia nulla; cioè la condizione, già trovata necessaria, è anche sufficiente. In tal caso la (5) dà

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} \left\{ M(x, y) - \int_{y_0}^{y} N'_x(x, y)\, dy \right\} dx + \varphi(x_0)$$

dove $\varphi(x_0)$ è il valore di $\varphi(x)$ per $x = x_0$, cioè il valore di f per $x = x_0$, ed $y = y_0$, cioè il valore $f(x_0, y_0)$ prefissato ad arbitrio. E la (4) dà pertanto:

$$f(x,y) = \int_{y_0}^{y} N(x, y)\, dy + \int_{x_0}^{x} \left\{ M(x, y) - \int_{y_0}^{y} N'_x(x, y) \right\} dx + f(x_0, y_0).$$

Ricordando che nelle attuali ipotesi il secondo addendo, come già abbiamo osservato, è indipendente dalla y, possiamo per calcolarlo, supporvi $y = y_0$. Cosicchè tale formola diventa più semplicemente

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)\, dy + f(x_0, y_0) \tag{6}$$

la quale *dimostra il nostro teorema che nelle nostre ipotesi esiste una funzione* f, *il cui differenziale è* Mdx + Ndy, e *ci insegna a calcolare tale funzione* f *nel campo* R *sopra definito.*

La (6) si può ottenere direttamente nel seguente modo, *se si ammette già provata la esistenza della* f; basta osservare che:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= [f(x, y) - f(x, y_0)] + [f(x, y_0) - f(x_0, y_0)] \\ &= \int_{y_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y = y_0} dx = \\ &= \int_{y_0}^{y} N(x, y)\, dy + \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\, dx, \end{aligned}$$

che coincide appunto con (6).

Indichiamo con A, C, B i punti (x_0, y_0), (x, y_0) ed (x, y). La somma dei primi due addendi del secondo membro di (6) si chiamerà l'integrale di $Mdx + Ndy$ esteso alla spezzata ACB, od anche la somma dell'integrale di $Mdx + Ndy$ esteso ad AC, e dell'integrale analogo esteso a CB. Naturalmente bisogna definire il significato di queste nuove frasi: integrale di $Mdx + Ndy$ esteso ad AC od a CB. Noi intendiamo con integrale di $Mdx + Ndy$ esteso, p. es., ad AC l'integrale *dell'espressione che si deduce da* $\mathrm{Mdx} + \mathrm{Ndy}$ *ponendo al posto della* y *e della* dy *i valori che si deducono dalla equazione* $\mathrm{y} = \mathrm{y}_0 = \mathrm{cost.}$ *di* AC, cioè $y = y_0$, $dy = 0$, ed estendendo l'integrazione dall'ascissa x_0 di A all'ascissa x di C. Cioè l'integrale di $Mdx + Ndy$ esteso ad AC vale il primo addendo del secondo membro di (6); mentre invece il secondo addendo si trova, con definizione analoga, uguale all'integrale di $Mdx + Ndy$ esteso a CB.

La (6) si può dunque interpretare così:

La differenza tra il valore f *nel punto* (x, y) *ed il valore della* f *nel punto* $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ *vale l'integrale di* df *esteso ad una spezzata di due lati paralleli agli assi coordinati congiungente il punto* $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ *al punto* (x, y) (se f'_x, f'_y sono continue).

Questo teorema è *la generalizzazione della formola*

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x} d\varphi = \int_{x_0}^{x} \varphi'(x)\, dx$$

valida per le funzioni $\varphi(\mathrm{x})$ *di una sola variabile* (a derivata continua).

§ 91. — **Integrali curvilinei** (*).

I precedenti risultati appaiono incompleti. Infatti:

1° Perchè dare tanta importanza alla spezzata ACB unente i punti A, B piuttosto che a un'altra curva congiungente i punti stessi? Già, scambiando nelle precedenti considerazioni le x, y, giungeremmo a teoremi analoghi, in cui alla ACB è sostituita un'altra spezzata ADB, il cui primo lato AD è parallelo all'asse delle y, il secondo lato DB all'asse delle x.

2° Il secondo membro di (6) ha un significato, anche se non è soddisfatta la $M'_y = N'_x$. Quale ne è il senso in tali casi più generali?

Il modo migliore di dare un'esauriente risposta a tali domande è di porre la seguente definizione. Sia AB un arco Γ di curva pensato descritto nel verso da A a B e rappresentato dalle equazioni

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad \text{per } \lambda \leq t \leq \mu, \tag{1}$$

(*) Il lettore può rinviare la lettura di questo § al momento in cui studierà la teoria generale delle funzioni additive e degli integrali multipli.

dove λ, μ sono i valori della t corrispondenti ai punti A, B di Γ, e dove $x(t)$, $y(t)$ sono finite e continue nell'intervallo (λ, μ), e le $x'(t)$, $y'(t)$ sono continue od hanno un numero finito di punti di discontinuità (§ 78, pag. 261).

Noi chiameremo integrale di $Mdx + Ndy$ esteso a tale arco di curva lo:

$$\int_\lambda^\mu \{ M[x(t), y(t)]\, x'(t) + N[x(t), y(t)]\, y'(t) \} \, dt, \qquad (2)$$

il cui integrando si deduce da $Mdx + Ndy$, sostituendovi alle x, y, dx, dy i valori che si deducono da (1). È così generalizzata nel modo più semplice la definizione sopra data di integrali estesi a segmenti.

È appena necessario avvertire che, essendo dx, dy indipendenti dalla scelta della variabile indipendente, *il valore di* (2) *non cambia se cambiamo il parametro* t *scelto per individuare i punti di* Γ; e ciò in virtù del teorema di integrazione per sostituzione (cfr. anche il penultimo capitolo del libro). *Tale integrale dipende dunque soltanto dal differenziale* Mdx + Ndy *e dall'arco* Γ *dato a priori* (e cambia di *segno*, invertendo il verso in cui Γ si immagina percorso, cioè scambiando i punti A, B).

Ci poniamo ora la seguente domanda fondamentale:

Che valore ha il nostro integrale, se esiste una funzione f (x, y), *il cui differenziale* df *è* M (x, y) dx + N (x, y) dy ?

Evidentemente lungo Γ la f è funzione di x, y, entrambe funzioni della t, e perciò la f è una funzione di t, la cui derivata vale

$$M[x(t), y(t)]\, x'(t) + N[x(t), y(t)]\, y'(t), \qquad (*)$$

perchè dalle

$$f = f(x, y)\,;\quad x = x(t),\quad y = y(t)$$

si deduce

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} x'_t + \frac{\partial f}{\partial y} y'_t = Mx'_t + Ny'_t.$$

Quindi il nostro integrale (2) diventa

$$\int_\lambda^\mu \frac{df}{dt}\, dt,$$

(*) Le $M[x(t), y(t)]$ ed $N[x, (t), y(t)]$ sono i valori assunti dalle M, N nei punti del nostro arco Γ. Ammetto qui la continuità delle $x'(t)$, $y'(t)$. Il lettore potrà facilmente studiare le lievi modificazioni da apportarsi alla seguente dimostrazione nel caso che $x'(t)$, $y'(t)$ abbiano qualche punto di discontinuità.

ed è perciò uguale *alla differenza dei valori che la* f(x, y) *assume negli estremi* B, A *dell'arco* Γ *di curva* considerato.

Vale a dire *tale integrale ha in tale ipotesi un valore che dipende soltanto dagli estremi* A, B *del nostro arco,* e non varia quindi, se cambiamo l'arco (1) che congiunge i punti A, B, e gli sostituiamo p. es., come al § 90, la spezzata ACB. Viceversa si può dimostrare (cfr. anche il penultimo cap. del libro):

Se questo integrale non dipende dalla particolare scelta dell'arco AB, *ma soltanto dai suoi estremi* A, B, *esso definisce* proprio *il valore che nel punto* B *assume la funzione* f(x, y) *che è nulla nel punto* A, *e il cui differenziale vale* Mdx + Ndy.

Infatti tenuto fisso il punto A, e considerato il punto B come variabile, tale integrale sarà una funzione f delle coordinate (x, y) di B. Vogliamo provare che $f'_x = M$ e che $f'_y = N$. Proviamo p. es. che $f'_x = M$. Sia B' il punto $(x + h, y)$. Sarà:

$$f'_x(x, y) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} =$$

$$= \lim_{h=0} \frac{\int_A^{B'} (Mdx + Ndy) - \int_A^{B} (Mdx + Ndy)}{h}. \qquad (3)$$

Poichè tali integrali non dipendono dalla scelta delle linee AB, AB', potremo supporre che la linea AB' risulti dalla linea AB e dal segmento BB', lungo cui $dy = 0$.

La (3) diventerà

$$f'_x(x, y) = \lim_{h=0} \frac{\int_B^{B'} (Mdx + Ndy)}{h} = \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} M(x, y)\, dx.$$

Ricordando che per il teorema della media

$$\int_x^{x+h} M(x, y)\, dx = h\, M(x + \theta h, y), \qquad (0 < \theta < 1)$$

e che M è continua, avremo:

$$f'_x = \lim_{h=0} M(x + \theta h, y) = M(x, y). \qquad \text{c. d. d.}$$

Cosicchè il problema di riconoscere quando esiste una funzione $f(x, y)$ che abbia un dato differenziale $Mdx + Ndy$, e quello di calcolare tale funzione, si riducono al problema di riconoscere quando l'integrale curvilineo di $Mdx + Ndy$ dipende *soltanto* dagli estremi della curva, a cui è estesa l'integrazione e non dalla curva scelta. Nel capitolo citato dimostreremo che ciò avviene in ogni campo R ad un solo contorno (p. es. un campo circolare, o ellittico, e p. es. *non* una corona circolare), in cui M, N, M'_y, N'_x sieno finite e continue, e $M'_y = N'_x$. Resterà così dimostrata *non solo per i campi* R *del* § 90, *ma anche per questi campi più generali che nelle nostre ipotesi esiste una funzione* f (x, y) *tale che* df = Mdx + Ndy. Nel capitolo citato troveremo anche gli stretti rapporti che passano tra le attuali proposizioni e le definizioni di potenziale e di lavoro di una forza.

§ 92. — **Differenziali in tre variabili.**

Il problema analogo per funzioni di tre variabili x, y, z è quello di determinare una funzione $f(x, y, z)$, di cui sono prefissate le tre derivate prime $M = f'_x$, $N = f'_y$, $P = f'_z$, o in altre parole è prefissato il differenziale

$$df = Mdx + Ndy + Pdz,$$
$$(M, N, P \text{ funzioni di } x, y, z).$$

Questo problema non è sempre risolubile; se supponiamo infatti che le derivate parziali del primo ordine delle M, N, P esistano, siano finite e continue, esisteranno e saranno finite e continue le

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial M}{\partial z}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial N}{\partial z}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Donde, per il teorema sull'invertibilità dell'ordine delle derivazioni, si trova che condizioni necessarie affinchè il nostro problema sia risolubile, o, come si suol dire, affinchè

$$Mdx + Ndy + Pdz$$

sia *un differenziale esatto*, sono le:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}; \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}; \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Come nel problema precedente si dimostra che queste condizioni sono sufficienti almeno per il caso che il campo di variabilità per le M, N, P sia un parallelopipedo con gli spigoli paralleli agli assi coordinati, ed anche in casi assai più generali.

§ 93. — Cenno di un problema analogo ai precedenti.

Un problema analogo è quello di determinare una funzione $z(x, y)$ che soddisfi alla $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = P(x, y)$, dove $P(x, y)$ è una funzione data *a priori* finita e continua in un rettangolo, avente i lati paralleli agli assi coordinati; e siano a, b, p. es., le coordinate di quel vertice, che ha la minima ascissa e la minima ordinata.

La nostra equazione si può scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = P(x, y)$$

donde

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \int_a^x P(x, y)\, dx + \gamma,$$

dove γ è una costante rispetto alla x, ed è quindi una qualsiasi funzione della y (*continua*, perchè in questi studi ci occupiamo solamente di funzioni continue).

Sarà perciò:

$$z = \int_b^y \left[\int_a^x P(x, y)\, dx\right] dy + \varphi(y) + f(x) \qquad (1)$$

dove $\varphi(y)$ è l'integrale di γ; cioè, essendo γ una funzione arbitraria, $\varphi(y)$ è una funzione arbitraria della y (a derivata continua). Nella (1) compare anche $f(x)$, funzione arbitraria di x, perchè si è integrato rispetto a y, e quindi l'integrale resta determinato a meno d'una costante (rispetto ad y) che può essere una funzione affatto qualunque di x, ma che supporremo derivabile, volendo che esista z'_x.

Se nella (1) poniamo ora l'ipotesi che $P(x, y)$ sia costantemente zero, e quindi

$$\int_b^y dy \left[\int_a^x P(x, y)\, dx\right] = 0,$$

troviamo che la funzione più generale $z(x, y)$, che ha la derivata mista di secondo ordine uguale a zero, è somma di due funzioni, l'una di x e l'altra di y affatto arbitrarie (ma derivabili), e cioè:

$$z = \varphi(y) + f(x). \qquad (2)$$

Si può verificare facilmente il nostro risultato derivando la $z = \varphi(y) + f(x)$ prima rispetto a x e poi rispetto a y. Si avrebbe:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x);$$

e derivando quindi la $f'(x)$ rispetto a y si ottiene lo zero.

Facciamo un cambiamento di variabili; poniamo cioè:

$$u = x + y, \qquad v = x - y;$$

da cui

$$x = \frac{u+v}{2} \quad , \quad y = \frac{u-v}{2}.$$

La z funzione di x e y può dunque considerarsi come funzione di u e di v, a loro volta funzioni di x e y.

Derivando allora la z rispetto alla x tenendo y costante, e applicando il teorema di derivazione di funzione di funzione, si ottiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} u'_x + \frac{\partial z}{\partial v} v'_x;$$

ossia, essendo $u'_x = +1$ e $v'_x = +1$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Derivando rispetto alla y, si trova

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} u'_y + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} v'_y\right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} v'_y + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} u'_y\right).$$

Poichè $u'_y = 1$, $v'_y = -1$, si trova

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Cosicchè la (2), ove si ponga $z = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$, dà tutte le funzioni che soddisfano alla:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0:$$

risultato importante, perchè riceve applicazioni in molte questioni di fisica.

Oss. Scambiando gli assi delle x e delle y si trova che la (1) si può scrivere nella forma

$$z(x, y) = \int_a^x \left[\int_b^y P(x, y)\, dy\right] dx + f(x) + \varphi(y).$$

E se ne potrebbe dedurre che:

$$\int_a^x \left[\int_b^y P(x, y)\, dy\right] dx = \int_b^y \left[\int_a^x P(x, y)\, dx\right] dy.$$

Questa formola sarà ritrovata in forma assai più generale in altro capitolo.

CAPITOLO XV.

GLI INTEGRALI DEFINITI E LE FUNZIONI ADDITIVE DI INTERVALLO

§ 94. — Funzioni additive d'intervallo e loro derivate.

α) Sia $\varphi(x)$ una funzione prefissata della x in un intervallo I. Siano a, b due punti di I; la differenza (incremento) $\varphi(b) - \varphi(a)$ è un numero determinato, quando siano dati i punti a, b, o, ciò che è lo stesso, l'intervallo (a, b). Prefissata dunque la funzione $\varphi(x)$, noi potremo dire che tale differenza, che indicheremo con $S(a, b)$ **è una funzione** dell'intervallo (a, b) (*). Essa gode di una proprietà molto notevole; cioè che, se l'intervallo (a, c) è somma degli intervalli (a, b) e (b, c), allora il valore $S(a, c)$ relativo a tutto l'intervallo, cioè $\varphi(c) - \varphi(a)$, è uguale alla somma dei valori $S(a, b) = \varphi(b) - \varphi(a)$ e $S(b, c) = \varphi(c) - \varphi(b)$, che essa assume nei due intervalli parziali (a, b) e (b, c). Noi enuncieremo questa proprietà dicendo che $S(a, b)$ *è funzione additiva dell'intervallo* (a, b).

Viceversa sia $S(a, b)$ una funzione dell'intervallo (a, b); sia essa cioè un numero, che ha un valore determinato, appena sia dato l'intervallo (a, b) di I.

Essa goda della proprietà additiva: sia cioè identicamente $S(a, b) + S(b, c) = S(a, c)$. Ne seguirà supponendo $c = b$, che $S(b, b) = 0$, cioè che *una funzione additiva d'intervallo si annulla, se l'intervallo è nullo.* E quindi, ponendo poi $c = a$, e osservando che $S(a, a) = 0$, ne seguirà:

$$S(a, b) = - S(b, a).$$

Sia C una costante arbitraria; e sia c un punto fisso qualsiasi (di I), sia x un punto variabile in I. Si ponga:

$$C + S(c, x) = \varphi(x).$$

(*) Diciamo così per analogia col linguaggio abituale: Si dice che y è funzione di x, se y è determinato, appena sia nota la x.

Poichè l'intervallo (c, b) è somma degli intervalli (c, a) ed (a, b), sarà:

$$S(c, b) = S(c, a) + S(a, b)$$

ossia:

$$S(a, b) = S(c, b) - S(c, a) = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Ogni funzione S (a, b) *additiva di intervallo* (a, b) *coincide con l'incremento* φ (b) — φ (a) *di una funzione* φ (x) *della variabile* x.

Data $S(a, b)$, la $\varphi(x)$ ha chiaramente soltanto l'indeterminazione dovuta all'arbitrarietà con cui si può scegliere la costante C. Infatti due funzioni $\varphi(x)$, $\psi(x)$ che abbiano uguali incrementi nello stesso intervallo, soddisfano per ogni valore di x alla:

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \psi(x) - \psi(a), \text{ ossia: }$$
$$\varphi(x) - \psi(x) = \varphi(a) - \psi(a).$$

Esse hanno cioè una differenza costante.

In molti problemi si presenta più spontaneo lo studio di una funzione S additiva d'intervallo piuttosto che lo studio di una funzione φ, di cui la S rappresenti gli incrementi. Così p. es., se un punto si muove su una retta e la sua velocità $F(x)$ è nota in funzione del tempo, si presenta più spontanea la domanda: Che spazio $S(a, b)$ ha percorso il punto dalle ore a alle ore b? piuttosto che l'altra domanda: A che distanza $\varphi(x)$ si trova il punto all'ora x dall'origine? Infatti questa seconda domanda presuppone la scelta di un elemento sovente estraneo alla questione: l'*origine*.

Di funzioni additive di intervallo possiamo dare numerosi esempi.

Data una sbarra materiale posta sull'asse delle x, il peso di quella sua parte che ha per estremi i punti di ascissa a, b è una *funzione additiva* di tale parte di sbarra, cioè dell'intervallo (a, b). E ciò perchè il peso di un tratto (a, c) di sbarra somma dei tratti (a, b) e (b, c) è evidentemente la somma dei pesi dei tratti parziali (a, b) e (b, c): proprietà che vale, qualunque sia la posizione dei punti a, b, c, se si conviene di considerare come uguali, e di segno opposto i pesi dei tratti (a, b) e (b, a).

Se un punto materiale si muove in un dato campo di forze percorrendo un segmento (a, b) dell'asse delle x, il lavoro compiuto è una funzione additiva di (a, b).

β) Consideriamo ora il caso particolare (che basta ai nostri studii elementari) di una funzione $\varphi(x)$ a derivata $F(x)$ *continua. Il teorema della media dice che:*

$$\frac{\mathrm{S}(\mathrm{a}, \mathrm{b})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}=\frac{\varphi(\mathrm{b})-\varphi(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}=\mathrm{F}(\mathrm{c}), \tag{1}$$

ove c *è un punto* **opportunamente** *scelto interno all' intervallo* (a, b).

Se dunque a, b tendono ad uno stesso punto α, sarà anche $\lim c=\alpha$, ed, essendo $F(x)$ continua, anche $\lim F(c)=F(\alpha)$. Cioè:

Se l'intervallo (a, b) *tende ad un unico punto* α, *allora il limite di*

$$\frac{\mathrm{S}(\mathrm{a}, \mathrm{b})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}$$

vale F(x). Perciò:

Se $\mathrm{F}(\mathrm{x})=\lim\limits_{a, b=x} \dfrac{\mathrm{S}(\mathrm{a}, \mathrm{b})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}$ *è funzione continua, noi la chiameremo derivata della funzione additiva* S (a, b) *rispetto all'intervallo* (a, b). Tale derivata è *funzione della sola variabile* x, e non è più funzione di un intervallo. Evidentemente poi

$$S(a, b)=\varphi(b)-\varphi(a)=\int_a^b F(x)\, dx.$$

Cioè *una funzione additiva* S (a, b) *con derivata* F (x) (continua) *coincide con l'integrale definito* $\int_a^b \mathrm{F}(\mathrm{x})\, \mathrm{dx}$ *di tale derivata.*

Il teorema della media, che abbiamo scritto nella forma (1), si può anche scrivere così:

$$S(a, b)=(b-a) F(c).$$

Se ne deduce:

Siano M *ed* m *il massimo ed il minimo valore nell'intervallo* (a, b) *della derivata (continua)* F (x) *della funzione* S (a, b) *additiva d'intervallo; allora* S (a, b) *è compreso tra i prodotti di* (b — a) *per* M *o per* m.

Viceversa, se il valore della funzione additiva S (a, b) *è compreso tra* (b — a) M *e* (b — a) m, *dove* M, m *sono il massimo e il minimo della funzione continua* F (x), *allora* F (x) *è la derivata di* S (a, b).

Infatti $\frac{S(a, b)}{b - a}$ è in tal caso compreso tra M ed m; cioè vale $F(c)$, ove c è un conveniente punto dell'intervallo (a, b). Perciò, se a, b tendono ad x, allora $\frac{S(a, b)}{b - a}$ tende ad $F(x)$.

§ 95. — **Illustrazioni varie.**

Abbiamo riconosciuto che la funzione additiva $S(a, b)$, che ha la derivata continua $F(x)$, coincide con $\int_a^b F(x)\, dx$. Questo teorema si può illustrare in molti modi:

α) Se p. es. $F(x) \geqq 0$, l'area $S(a, b)$ del rettangoloide definito dall'asse delle x, dalla curva $y = F(x)$ e dalle rette $x = a$, $x = b$ è evidentemente funzione additiva dell'intervallo (a, b) (almeno se l'area si considera positiva se $a < b$ e negativa se $a > b$). Tale rettangoloide è contenuto nel rettangolo che ha per base l'intervallo (a, b) dell'asse delle x e per altezza il massimo valore M di $F(x)$ in tale intervallo, e contiene il rettangolo di ugual base, avente per altezza il minimo valore m di $F(x)$. Perciò $S(a, b)$ è compreso tra $(b - a) M$ e $(b - a) m$, ed ha quindi $F(x)$ per derivata. Esso vale pertanto $\int_a^b F(x)\, dx$. Questo ragionamento è, in altre parole, la ripetizione di considerazioni svolte da noi altrove (pag. 165).

β) Se $F(x)$ indica la velocità che un punto mobile N su una retta r ha all'istante x, e $\varphi(x)$ indica lo spazio percorso da N, o anche la distanza ON, che N ha all'istante x da un'origine fissa O, si riconosce immediatamente che $\varphi(x) = \int F(x)\, dx$ e che quindi $\varphi(b) - \varphi(a)$ (spazio percorso dall'istante a all'istante b) è la funzione additiva, che ha $F(x)$ per derivata, e perciò vale precisamente l'integrale definito di $F(x)$ esteso all'intervallo (a, b). Basta osservare che lo spazio percorso $\varphi(b) - \varphi(a)$ gode delle due seguenti proprietà:

1) Se α è un intervallo di tempo, somma di due intervallini α_1, α_2, lo spazio percorso in α è uguale alla somma degli spazi percorsi in α_1 e in α_2; cioè lo spazio percorso è funzione additiva degli intervalli di tempo.

2) Lo spazio $\varphi(b) - \varphi(a)$ percorso da N nell'intervallo di tempo (a, b) è compreso tra gli spazi, che sarebbero percorsi

da N, quando esso fosse in tale intervallo dotato sempre della velocità minima m o massima M, che raggiunge in tale intervallo, ossia è compreso tra $(b-a)\,m$ e $(b-a)\,M$.

γ) Se $F(x)$ indica il valore della forza agente su un punto N mobile su una retta r, quando N dista x dall'origine, e se $F(x)$ è diretto secondo r, il lavoro corrispondente al passaggio di N dal punto $x=a$ al punto $x=b$ è l'integrale definito di $F(x)$ esteso all'intervallo (a, b). Infatti esso gode delle due seguenti proprietà:

1) Se un intervallo α è somma di due intervallini α_1, α_2, il lavoro corrispondente all'intervallo α è somma dei lavori corrispondenti agli intervalli α_1, α_2, cioè tale lavoro è funzione additiva degli intervalli α.

2) Tale lavoro è compreso tra i valori $(b-a)\,m$ e $(b-a)\,M$ corrispondenti al caso che la forza $F(x)$ nell'intervallo (a, b) conservasse costantemente il valore minimo m o massimo M, che raggiunge in tale intervallo.

δ) Indichiamo con ρ, θ coordinate polari; si voglia calcolare l'area A della figura racchiusa tra i raggi $\theta=a$, $\theta=b$ $(0 \leqq a < b \leqq 2\pi)$ e una curva $\rho=F(\theta)$. È evidente che A è funzione additiva dell'intervallo (a, b). Si osservi che, se M, m sono il massimo e il minimo di $F(\theta)$ nell'intervallo (a, b), la nostra figura comprende all'interno il settore circolare che ha per raggio m, che è limitato dalle semirette $\theta=a$ e $\theta=b$, e che quindi ha per area $\pi m^2 \dfrac{(b-a)}{2\pi} = \dfrac{1}{2}(b-a)\,m^2$. E la nostra figura è compresa nel settore limitato dalle stesse semirette, che ha per raggio M, ed ha quindi per area $\dfrac{1}{2}(b-a)\,M^2$.

L'area cercata è dunque compresa tra $\dfrac{1}{2}m^2\,\Delta\theta$ e $\dfrac{1}{2}M^2\,\Delta\theta$, quando si indichi con $\Delta\theta = b-a$ l'incremento ricevuto da θ nell'intervallo (a, b). E se ne deduce facilmente che l'area A in discorso ha per derivata $\dfrac{1}{2}\rho^2$, ossia che essa è data dalla:

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b \rho^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_a^b [F(\theta)]^2\,d\theta.$$

Il lettore dimostri direttamente che $\dfrac{dA}{d\theta} = \dfrac{1}{2}[F(\theta)]^2$.

Si può dedurne poi, p. es., che: *se un punto* N *si muove in un piano in modo che il raggio* ON *descriva un'area* A *proporzionale al tempo* t *impiegato, allora la forza agente su* N *è diretta verso* O. (Teorema importante, p. es., per dedurre dalle leggi di Keplero la legge di gravitazione universale di Newton).

Infatti in tal caso è $\frac{dA}{dt} = k$ ($k =$ cost.), ossia $\frac{dA}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = k$, ossia $\frac{1}{2}\rho^2\frac{d\theta}{dt} = k$.

Poichè $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, questa equazione diventa:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = 2k,$$

donde, derivando:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \text{ ossia } \frac{d^2x}{dt^2} : \frac{d^2y}{dt^2} = x : y;$$

che prova il nostro teorema, perchè (come insegna la Meccanica) le componenti della forza agente su N sono proporzionali alle

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}.$$

§ 96. — **Alcune somme fondamentali.**

α) Abbiamo dunque riconosciuto l'identità del concetto *di funzione* S (a, b) *additiva avente per derivata la funzione continua* F (x) *e di* $\int_a^b$ F (x) dx.

Cosicchè se, p. es., $F(x) \geqq 0$, ed $a < b$, la $S(a, b)$ si può pensare identica all'area del rettangoloide limitato dall'arco di curva $y = F(x)$ per $a \leqq x \leqq b$, dalle rette che ne proiettano gli estremi sull'asse delle x, e dallo stesso asse delle x.

Ci serviremo tosto di questo fatto per illustrare geometricamente alcune considerazioni.

Diviso l'intervallo (a, b) in n intervallini parziali $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$, allora il valore $S(a, b)$ della nostra funzione additiva vale la somma dei valori di S corrispondenti ai nostri intervallini δ_i: ciascuno dei quali è, per il teorema della media, compreso tra $\delta_i M_i$ e $\delta_i m_i$, se M_i, m_i sono il massimo e il minimo di $F(x)$ in δ_i, e vale $\delta_i \overline{F_i}$ ove $\overline{F_i}$ è un *conveniente* valore della $F(x)$ in δ_i. Perciò:

La $S(a, b) = \int_a^b F(x)\,dx$ è compresa tra $\Sigma M_i \delta_i = M_1 \delta_1 + M_2 \delta_2 + \ldots.. + M_n \delta_n$ e $\Sigma m_i \delta_i$. Esistono dunque dei convenienti numeri $\overline{F_i}$ compresi tra m_i ed M_i tali che $\int_a^b F(x)\,dx = \Sigma \overline{F_i}\,\delta_i$.

Perciò: *La* S (a, b) *è compresa tra il limite inferiore delle* Σ M δ, *e il limite superiore delle* $\Sigma\, m\, \delta$.

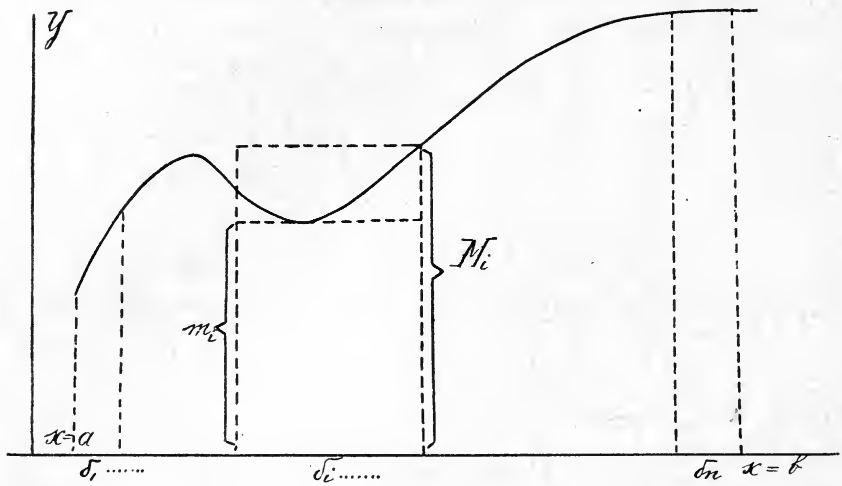


Fig. 33.

β) Sarà bene illustrare questo procedimento per le funzioni $F(x) \geqq 0$ ricorrendo all'interpretazione citata di $\int_a^b F(x)\, dx$ come area della figura piana (rettangoloide) compresa tra l'asse delle x, la curva $y = F(x)$, e le parallele all'asse delle y, i cui punti hanno per ascissa rispettivamente a oppure b.

Nella fig. 33 sono disegnati per l'intervallino parziale δ_i il minimo m_i e il massimo M_i di $F(x)$.

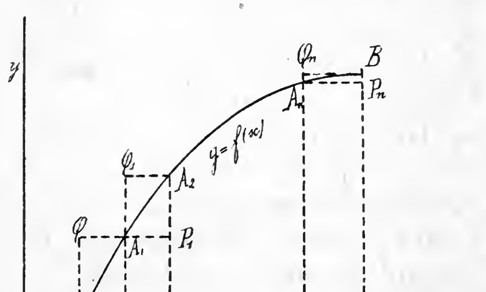


Fig. 34.

Nella successiva fig. 34 (in cui per chiarezza si è disegnata una curva $y = F(x)$ di più semplice andamento) è reso ben evidente che un prodotto $\delta_i\, m_i$ è l'area di un rettangolo avente per base δ_i e tutto interno alla nostra figura (i rettangoli APA'_1A', $A_1P_1A'_2A'_1$, ecc.); cosicchè $\Sigma\, m_i\, \delta_i$ misura l'area di un poligono che è tutto contenuto nel nostro rettangoloide ed ha perciò un'area non maggiore di quella del nostro rettangoloide.

Invece i numeri $M_1 \delta_1$, $M_2 \delta_2$, ecc. sono l'area dei rettangoli $QA_1A'_1A'$, $Q_1A_2A'_2A'_1$, ecc., la cui somma è un poligono, che contiene il nostro rettangoloide, e la cui area è perciò non minore dell'area del rettangolo stesso.

Riesce così resa intuitiva la nostra affermazione.

Del resto tutti gli altri esempi del paragrafo precedente potrebbero servire altrettanto bene ad illustrare la nostra affermazione.

γ) Ricordiamo la precedente formola: $\int_a^b F(x)\, dx = \Sigma \overline{F_i}\, \delta_i$.

La lunghezza δ_i di un intervallo parziale non è che l'incremento dx subìto dalla x nel passare da un estremo all'altro. Se noi scriviamo dx al posto di δ_i, e sostituiamo al Σ greco un S maiuscolo latino, che la scrittura corrente può aver deformato nel segno $\int$, intendiamo il perchè della notazione usata per indicare gli integrali definiti.

§ 96 *bis*. — **Il metodo dei rettangoli per il calcolo approssimato degli integrali definiti.**

α) Abbiamo riconosciuto al § 96 che, diviso l'intervallo (a, b) in un numero finito di intervallini parziali δ_i, si ha:

$$\int_a^b F(x)\, dx = \Sigma \overline{F_i}\, \delta_i$$

ove $\overline{F_i}$ è uno dei valori assunti da $F(x)$ in δ_i, *scelto in modo conveniente*. Cosicchè, se noi, data $F(x)$, e scelti i δ_i, sapessimo scegliere tali valori $\overline{F_i}$, il calcolo dell'integrale sarebbe ridotto a operazioni elementari (somma di prodotti). Ma poichè invece in generale non sappiamo scegliere tali $\overline{F_i}$, sostituiamo ad $\overline{F_i}$ uno *qualsiasi* F_i dei valori che $F(x)$ assume in δ_i, assumendo poi la somma $\Sigma F_i \delta_i$, come valore *approssimato* del nostro integrale. È questo un procedimento molto usato; la teoria, d'accordo con l'intuizione, lo giustifica, come vedremo in β), provando che l'approssimazione raggiunta si potrà render grande a piacere, cioè che la differenza $\int_a^b F(x)\, dx - \Sigma F_i \delta_i$ si può rendere piccola a piacere in valore assoluto, prendendo tutti i δ_i abbastanza piccoli (e ciò *indipendentemente* dal modo con cui si è scelto il valore F_i di $F(x)$ in δ_i).

Ciò, che con una facile estensione del concetto di limite si scrive $\int_a^b F(x)\,dx = \lim_{\delta_i = 0} \Sigma F_i \delta_i$. L'errore commesso sostituendo F_i ad $\overline{F_i}$ viene cioè eliminato passando al limite per $\delta_i = 0$.

Tale metodo di calcolo approssimato si può chiamare *metodo dei rettangoli.*

Infatti il calcolo del nostro integrale equivale a quello dell'area del rettangoloide definito dalla curva $y = F(x)$, che ha per base il segmento (a, b). Diviso (a, b) in segmentini δ_i, il rettangoloide resta diviso in rettangoloidi parziali; all'area di uno di questi noi sostituiamo il prodotto $\delta_i F_i$, cioè l'area di un rettangolo che ha ancora δ_i per base, e che ha per altezza F_i, essendo F_i uno qualsiasi dei valori che $F(x)$ ha in δ_i.

Per F_i possiamo assumere p. es. il valore di $F(x)$ ad uno degli estremi di δ_i, oppure il massimo valore M_i od il minimo valore m_i di $F(x)$ in δ_i, oppure un numero qualsiasi compreso tra M_i ed m_i.

β) Con gli stessi metodi con cui si è provato che l'area esterna di un rettangoloide è uguale all'interna, si può dimostrare intanto che *il limite inferiore di* $\Sigma M \delta$ *è uguale al limite superiore di* $\Sigma m \delta$; *e che quindi entrambi sono uguali al numero* $S(a, b) = \int_a^b F(x)\,dx$, *che è compreso tra le due somme citate. Resta così provato che questo integrale si può perciò definire come il numero che separa le classi contigue descritte rispettivamente dalle* $\Sigma M \delta$, $\Sigma m \delta$.

È intuitivo poi (come il lettore può riconoscere pensando all'area di un rettangoloide, e ricordando la trattazione elementare per l'area del cerchio) e si può facilmente provare (*) che

(*) Ciò si può dedurre dal teorema di Heine (§ 40 e § 63, pagina 197), perchè, in virtù di questo teorema, si possono scegliere i δ_i così piccoli che tutte le corrispondenti oscillazioni $M_i - m_i$ risultino minori di $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Allora sarà $|\Sigma M \delta_i - \Sigma m_i \delta_i| < \frac{\varepsilon}{b-a} \Sigma \delta_i = \varepsilon$, come volevasi provare.

Allo stesso risultato si giunge direttamente così: *Dato un sistema di intervallini* δ *e un altro sistema di intervallini* δ', *ottenuto dal precedente intercalando nuovi punti di divisione, le somme corrispondenti soddisfano alle* $\Sigma M \delta \geqq \Sigma M' \delta'$ e $\Sigma m \delta \leqq \Sigma m' \delta'$. E ciò, perchè il massimo M (il minimo m) di $F(x)$ in un δ non è inferiore ad alcuno dei massimi M' (non supera alcuno dei minimi m') che $F(x)$ ha negli intervallini δ', in cui è stato suddiviso l'intervallo δ considerato, mentre la lunghezza δ vale la somma delle lunghezze di questi δ'.

Sia $\varepsilon > 0$ un numero piccolo a piacere; e consideriamo, p. es., le $\Sigma m \delta$. Esisi *può rendere piccola a piacere* (minore di un $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere) *la differenza* $\Sigma M\delta - \Sigma m\delta$, *considerando degli intervallini* δ *abbastanza piccoli* [che tale differenza (con *conveniente* scelta dei δ) si possa rendere piccola, segue dal precedente teorema; la presente osservazione precisa che i δ saranno scelti convenientemente, se saranno scelti abbastanza piccoli]. *A fortiori*, se indichiamo con F uno qualunque dei valori assunti da $F(x)$

---

sterà un sistema di intervallini parziali $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ tali che, se μ è il minimo di $F(x)$ in θ, sia

$$\int_a^b F(x)\,dx \geqq \Sigma\mu\theta \geqq \int_a^b F(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

E ciò perchè $\int_a^b F(x)\,dx$ è proprio il limite superiore delle $\Sigma m\delta$ (o delle $\Sigma\mu\theta$).

Consideriamo un altro qualsiasi sistema di intervalli δ, ciascuno dei quali sia più piccolo del minimo tra gli intervalli θ e sia più piccolo anche di $\frac{\varepsilon}{2nH}$, se H è il massimo di $|f(x)|$ in (a, b). Sia δ' quel sistema di intervallini che si ottiene dividendo (a, b) in parti sia coi punti estremi dei θ, sia coi punti estremi dei δ. Poichè i δ' sono ottenuti sia dai δ che dai θ, intercalando nuovi punti di divisione, sarà: $\Sigma m'\delta' \geqq \Sigma\mu\theta$; $\Sigma m'\delta' \geqq \Sigma m\delta$, mentre è $\int_a^b F(x)\,dx \geqq \Sigma m'\delta'$.

Ora nel passare dai δ agli intervallini δ', al più n degli intervalli δ sono stati divisi in (due) parti (perchè un δ non può contenere tutto un θ per l'ipotesi fatta) e gli intervallini δ', che si ottengono dividendo in due parti al più n intervalli δ hanno *complessivamente* una lunghezza che non può superare $n\frac{\varepsilon}{2nH}$ $\left(\text{perchè ogni } \delta \text{ non supera } \frac{\varepsilon}{2nH}\right)$. Il contributo che essi dànno nella somma $\Sigma m'\delta'$ non può superare $nH\frac{\varepsilon}{2nH} = \frac{\varepsilon}{2}$.

Poichè gli altri intervalli δ sono contemporaneamente intervalli δ', la somma $\Sigma m'\delta'$ supererà $\Sigma m\delta$ al più di $\frac{\varepsilon}{2}$; cosicchè $\Sigma m\delta \geqq \Sigma m'\delta' - \frac{\varepsilon}{2}$.

Poichè $\Sigma m'\delta' \geqq \Sigma\mu\theta \geqq \int_a^b F(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}$, sarà $\Sigma m\delta \geqq \int_a^b F(x)\,dx - \varepsilon$. È già noto che $\int_a^b F(x)\,dx \geqq \Sigma m\delta$. Cosicchè, se i δ sono scelti abbastanza piccoli (nel modo sopra precisato), la $\Sigma m\delta$ differisce da $\int_a^b F(x)\,dx$ per meno di ε.

In modo analogo si prova che, se i δ sono abbastanza piccoli, $\Sigma M\delta$ differisce da $\int_a^b F(x)\,dx$ per meno di ε. Quindi, preso un numero $2\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, possiamo scegliere un numero σ tale che, se tutti i δ sono minori di σ, allora $[\Sigma M\delta - \Sigma m\delta]$ sia minore di 2ε. c. d. d.

in δ, cosicchè $m \leqq F \leqq M$, allora, poichè $\int_a^b F(x)\,dx$ e $\Sigma F\delta$ sono entrambi compresi tra $\Sigma m\delta$ e $\Sigma M\delta$, avremo che:

Dato un numero ε *piccolo a piacere, posso scegliere i* δ *così piccoli che*

$$|\,\Sigma F\delta - \int_a^b F(x)\,dx\,| < \varepsilon.$$

Cosicchè con facile estensione della definizione di limite, possiamo enunciare il seguente teorema:

Lo $\int_a^b \mathrm{F}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$ *non solo è il numero che separa le classi contigue descritte dalle* $\Sigma\,\mathrm{m}\,\delta$, $\Sigma\,\mathrm{M}\,\delta$, *ma è anche il limite di* $\Sigma\,\mathrm{F}\,\delta$ *quando tutti i* δ *tendono a zero, se* F *è un qualsiasi numero compreso tra* M *ed* m (od eventualmente uguale anche ad *M* od a *m*).

Se noi confrontiamo quest'ultimo teorema $\int_a^b F(x)\,dx = \lim_{\delta=0} \Sigma F\delta$ col teorema dato in (α), pag. 315, cioè $\int_a^b F(x)\,dx = \Sigma \overline{F}\delta$, vediamo che tanto F che $\overline{F}$ rappresentano una quantità compresa tra m ed M. Ma mentre F è una quantità *arbitrariamente* scelta tra m e M, la $\overline{F}$ è un numero *convenientemente* scelto tra m ed M. Cosicchè nella

$$\int_a^b F(x)\,dx = \lim_{\delta=0} (F_1\delta_1 + F_2\delta_2 + \ldots\ldots + F_n\delta_n)$$

si potrebbe quasi dire che *il passaggio al limite* (quando tutti i δ tendono a zero) *corregge l'errore commesso scegliendo i valori intermedi* F_i in modo arbitrario tra m_i *ed* M_i.

γ) Un caso particolare della nostra formola si ottiene nel modo seguente:

Si divida l'intervallo (a, b) in n intervallini parziali δ_i, i cui estremi $a_1, = a, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_{n+1} = b$ formino una progressione aritmetica; tutti questi intervallini saranno uguali tra di loro ed avranno $\dfrac{b-a}{n}$ come lunghezza comune.

Se come F_r scegliamo il valore di $F(x)$, p. es., nell'estremo destro $a + r\dfrac{b-a}{n}$ del corrispondente intervallo δ_r, otterremo che:

$$\text{(I)}\qquad \int_a^b F(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \frac{b-a}{n}\left\{F\left(a+\frac{b-a}{n}\right) + \right.$$

$$\left. + F\left(a+2\frac{b-a}{n}\right) + F\left(a+3\frac{b-a}{n}\right) + \ldots\ldots + F\left(a+n\frac{b-a}{n}\right)\right\}.$$

Similmente, supposto $b > a$, e posto $k = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, i punti a $ak, ak^2, \ldots.., ak^{n-1}, ak^n = b$ formano una progressione geometrica e dividono l'intervallo (a, b) in intervallini che tendono a zero per $n = \infty$, ossia per $k = 1$.

Si ritrova (ricordando che $k = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$):

$$(\mathrm{II}) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim a\,(k-1) \left\{ f(a) + kf(ak) + \right.$$

$$\left. + k^2 f(ak^2) + \ldots.. + k^{n-1} f(ak^{n-1}) \right\}.$$

Questa è in fondo la formola applicata a pag. 128, es. 3°, quando si è calcolata un'area, il cui valore è, come ora sappiamo, l'integrale definito di $\frac{1}{x}$ tra a e b.

ESEMPIO.

1° Si calcoli $\int_a^b x\,dx$ col metodo precedente della (I).

Si trova:

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{n=\infty} \frac{b-a}{n} \sum_1^n \left[a + r\,\frac{b-a}{n} \right] =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{b-a}{n} \left\{ na + \frac{n(n+1)}{2}\,\frac{b-a}{n} \right\} = \lim_{n=\infty} \left\{ a(b-a) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)(b-a)^2 \right\} = a(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

§ 97. — Generalizzazioni del concetto di integrale. L'integrale di Riemann.

Negli ultimi venti anni si è generalizzata la definizione di integrale. Noi non possiamo dare neanche un'idea di questi studi recenti e teoricamente importantissimi. Vogliamo soltanto dare un brevissimo cenno della definizione di integrali di Riemann, che è più generale di quella da noi posta e che, dopo aver occupato un posto perspicuo nell'analisi, ha ora, più che altro, un valore storico.

Sia F una funzione definita in un campo I. Non supporremo F continua, ma la supporremo soltanto limitata (supporremo cioè *finito* non soltanto ogni valore di F, ma anche *finito* il limite superiore dei valori assoluti di F). Diviso I in un numero finito r di pezzi $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r$, non potremo più dire che in uno di questi la F ha un massimo o un minimo, ma soltanto che essa in ogni δ_s (per $s = 1, 2, \ldots, r$) ha un limite superiore L_s e un limite inferiore l_s finiti. Indicando con δ_s anche la misura di δ_s, costruiamo le somme:

$$\Sigma\, L_s\,\delta_s \quad (1) \qquad\qquad \Sigma\, l_s\,\delta_s. \quad (2)$$

Si può dimostrare, che, se, p. es., $\delta > 0$, ogni somma (1) supera ogni somma (2). Se le classi descritte da queste due somme sono contigue, il numero di separazione delle due classi riceve il nome di integrale secondo Riemann della F esteso al campo I.

§ 98. — Il metodo dei trapezi per il calcolo approssimato degli integrali definiti.

α) Tra le tante formole approssimate per il calcolo degli integrali definiti, ricorderemo ancora la seguente, specialmente semplice.

Supponiamo di voler calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$ (con $a < b$).

Supponiamo dapprima $f(x) \geqq 0$.

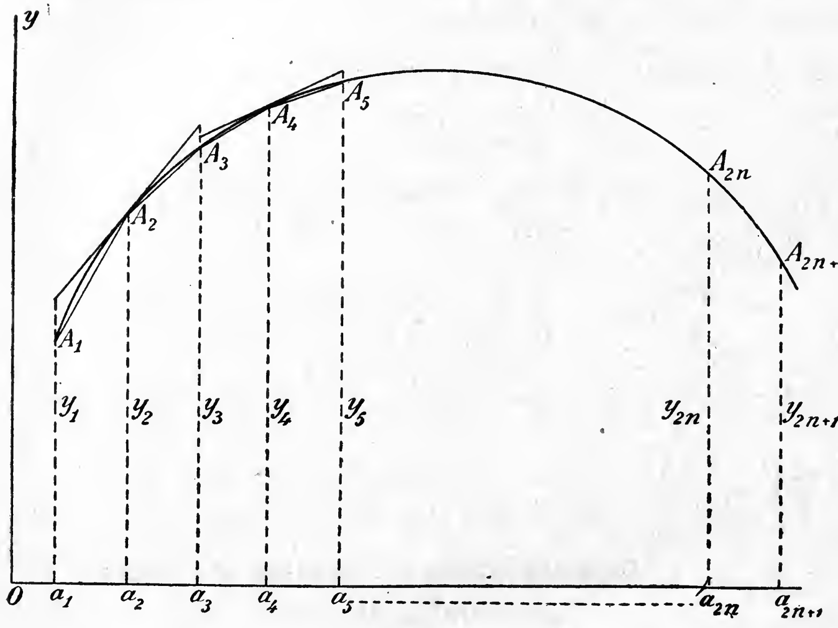


Fig. 35.

Rappresentiamo questo integrale con l'area del rettangoloide compreso tra l'asse delle x, la curva $y = f(x)$ e le ordinate

$$x = a \; ; \; x = b.$$

Supponiamo che la curva $y = f(x)$ presenti la concavità (*) verso l'asse delle x; nella fig. 35 è indicato con

$$A_1 \, A_{2n+1} \, a_1 \, a_{2n+1}$$

(*) Supponiamo così che esistano le tangenti alla curva, che esse siano esterne al rettangoloide di cui si calcola l'area; in una parola che sia $f''(x) < 0$.

il rettangoloide, di cui vogliamo calcolare l'area. Dividiamo la base del rettangoloide in $2\,n$ parti uguali; indichiamo i punti di divisione con $a_1 = a, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_{2n+1} = b$ e conduciamo per tali punti le ordinate $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_{2n+1}$. Se traccio i segmenti

$$A_1\,A_2,\ A_2\,A_3,\ \ldots\ldots,\ A_{2n}\,A_{2n+1},$$

ottengo tanti trapezi $A_1\,A_2\,a_1\,a_2$, $A_2\,A_3\,a_2\,a_3\,\ldots\ldots$, la cui somma ci dà un poligono tutto interno al rettangoloide $A_1\,A_{2n+1}\,a_1\,a_{2n+1}$; quindi la somma delle aree di detti trapezi ci darà un valore approssimato per difetto dell'area del rettangoloide e quindi un valore approssimato per difetto di $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ora, se con B indico il segmento $ab = a_1\,a_{2n+1}$, sarà $\frac{B}{2\,n}$ il valore di ognuna delle $2\,n$ parti uguali in cui esso è stato diviso, ossia l'altezza di ognuno dei trapezi ottenuti; le basi di questi essendo poi rispettivamente le ordinate $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_{2n+1}$, sarà:

$$\text{area } A_1\,A_2\,a_1\,a_2 = \frac{B}{2\,n}\,\frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\text{area } A_2\,A_3\,a_2\,a_3 = \frac{B}{2\,n}\,\frac{y_2 + y_3}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{area } A_{2n}\,A_{2n+1}\,a_{2n}\,a_{2n+1} = \frac{B}{2\,n}\,\frac{y_{2n} + y_{2n+1}}{2}\,.$$

E l'area totale del poligono interno al rettangoloide sarà la somma delle aree precedenti

$$\frac{B}{2\,n}\left\{\frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \ldots\ldots + \frac{y_{2n} + y_{2n+1}}{2}\right\}.$$

Osservando che tutte le ordinate y compaiono ciascuna due volte nella formula precedente tranne y_1 e y_{2n+1}, potremo anche scrivere:

$$\frac{B}{2\,n}\left\{\frac{y_1 + y_{2n+1}}{2} + y_2 + y_3 + \ldots\ldots y_{2n}\right\} \tag{1}$$

come un valore approssimato per difetto di $\int_a^b f(x)$.

Cerchiamo analogamente un valore approssimato per eccesso dell'area della nostra figura; cerchiamo cioè un poligono che comprenda all'interno tutta la figura data. A tale scopo per i punti

$$(a_2, y_2),\ (a_4, y_4), \ldots\ldots (a_{2n}, y_{2n})$$

tracciamo le tangenti alla curva (nella figura sono disegnate soltanto le prime due). Consideriamo poi il trapezio limitato dalla tangente nel punto (a_2, y_2) dalle ordinate di ascissa a_1, a_3 e dall'asse delle x. Consideriamo il trapezio limitato dalla tangente nel punto (a_4, y_4), dalle ordinate di ascissa a_3 e a_5 e dall'asse delle x; e così via fino all'ultimo trapezio limitato dalla tangente nel punto (a_{2n}, y_{2n}), dalle ordinate di ascissa a_{2n-1}, a_{2n+1} e dall'asse delle x. La somma di tutti questi trapezi costituisce appunto un poligono che comprende all'interno il nostro rettangoloide.

Cerchiamone l'area: essa è la somma delle aree di tutti i trapezi citati. Nel primo di essi l'ordinata y_2 è la parallela alle basi condotta dal punto di mezzo dell'altezza $a_1\, a_3$, ed è uguale perciò alla semisomma delle basi. Poichè l'altezza $a_1\, a_3$ vale $2\dfrac{B}{2\,n} = \dfrac{B}{n}$, l'area di detto trapezio sarà $\dfrac{B}{n}\, y_2$. In modo simile le aree degli altri trapezi valgono ordinatamente

$$\frac{B}{n}\, y_4,\ \frac{B}{n}\, y_6, \ldots\ldots, \frac{B}{n}\, y_{2n};$$

e l'area totale del nostro poligono varrà

$$\frac{B}{n}\,(y_2 + y_4 + y_6 + \ldots\ldots y_{2n}), \tag{2}$$

che è quindi un valore approssimato *per eccesso* di $\int_a^b f(x)\, dx$.

Al crescere di n, cresce generalmente l'approssimazione che le formole (1), (2) dànno per il valore di questo integrale; la differenza tra (1) e (2) tende anzi a zero per $n = \infty$ (Cfr. questo § 98, ζ, pag. 324).

β) Se la curva $y = f(x)$ volgesse la convessità verso l'asse delle x, e quindi la tangente in ogni suo punto penetrasse nel rettangoloide, il ragionamento si invertirebbe, in quanto che il poligono avente per lati il segmento $a_1\, a_{2n+1}$ dell'asse delle x, le ordinate y_1, y_{2n+1} degli estremi a, b e le corde $A_1\, A_2$, $A_2\, A_3$, ..., che nel primo caso era contenuto nel rettangoloide, contiene ora invece il rettangoloide all'interno; e il suo valore (1) rappresenta quindi un valore approssimato *in eccesso* del nostro integrale.

Laddove invece il poligono avente per lati il segmento $a_1\, a_{2n+1}$, le ordinate degli estremi, a_1, a_{2n+1}, e le tangenti nei punti

$$A_2,\ A_4,\ .....\ ,\ A_{2n}$$

è tutto interno al nostro rettangoloide, e la sua area (2) rappresenta un valore approssimato *in difetto* del nostro integrale.

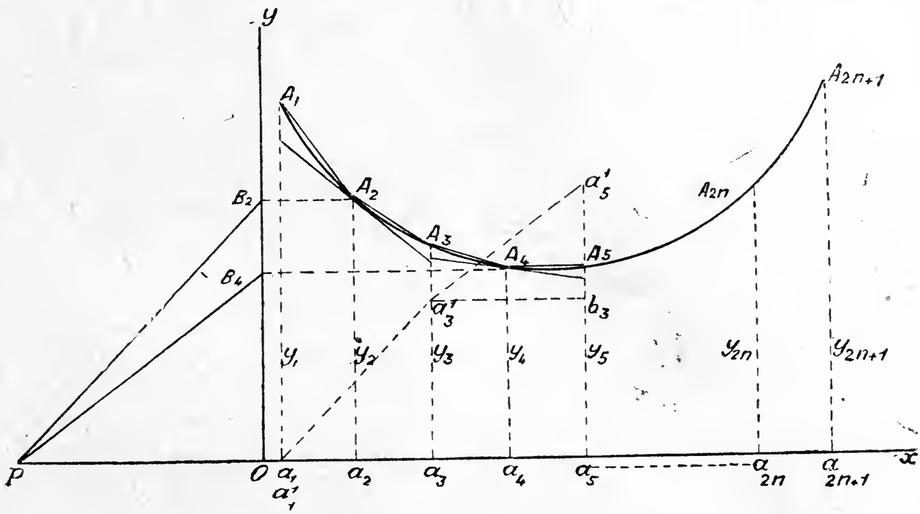


Fig. 36.

γ) Se la $f(x)$ fosse negativa nell'intervallo che si considera, si possono ripetere le considerazioni precedenti con poche modificazioni, purchè si considerino negative le aree dei poligoni considerati. In altre parole, il nostro integrale è negativo; e per il suo valore assoluto si possono ripetere le precedenti considerazioni.

δ) Se l'intervallo, a cui è esteso $\int f(x)\, dx$, fosse un intervallo, in parte del quale la $f(x)$ è positiva, e in parte del quale la $f(x)$ è negativa, o anche se in una parte dell'intervallo la $y = f(x)$ volge la concavità all'asse delle x, mentre nell'altra parte volge la convessità, allora supporremo (come avviene sempre nei casi comuni) che l'intervallo si possa dividere in un numero *finito* di intervalli parziali, in ciascuno dei quali la $f(x)$ ha un segno costante, e la $y = f(x)$ volge la concavità sempre da una stessa parte, cioè p. es., anche $f''(x)$ ha segno costante (potendo esser nulla agli estremi dell'intervallo parziale considerato). Si applicano a ciascuno di questi intervalli parziali i metodi precedenti. La somma dei valori approssimati in difetto così ottenuti, e la somma dei valori approssimati per eccesso costituiranno un valore approssimato in difetto, e un valore approssimato per eccesso del nostro integrale.

ε) Il metodo precedente si può generalizzare, dividendo (a, b) in $2n$ parti $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{2n-1}, d_{2n}$ non tutte uguali tra di loro, ma soltanto tali che $d_1 = d_2, d_3 = d_4, \ldots, d_{2n-1} = d_{2n}$. Detti ancora $a_2, a_3, \ldots, a_{2n}$ i punti di divisione, si possono ripetere le precedenti considerazioni, purchè alle (1), (2) si sostituiscano le:

$$d_1\left(\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_2+y_3}{2}\right)+d_3\left(\frac{y_3+y_4}{2}+\frac{y_4+y_5}{2}\right)+\ldots$$

$$\ldots+d_{2n-1}\left(\frac{y_{2n-1}+y_{2n}}{2}+\frac{y_{2n}+y_{2n+1}}{2}\right); \qquad (1)_{\text{bis}}$$

$$2\,(d_1\,y_2+d_3\,y_4+\ldots\, d_{2n-1}\,y_{2n}). \qquad (2)_{\text{bis}}$$

Queste formole, più incomode al calcolo numerico delle (1), (2), dànno però approssimazioni migliori, quando si abbia cura di disegnare molti intervallini parziali in corrispondenza ai tratti, ove la nostra curva si allontana rapidamente dalla sua tangente.

ζ) Si può usare anche una sola di queste formole, quando però si sappia apprezzare l'*errore* commesso. Indicati ancora con a_s i punti di divisione (cosicchè $a_{2i\pm1} = a_{2i} \pm d_{2i}$), posto $y_s = f(a_s)$ e $y'_s = f'(a_s)$, sarà per la formola di Taylor-Lagrange $y_{2i\pm1} = f(a_{2i} \pm d_{2i}) = y_{2i} \pm d_{2i}\, y'_{2i} + \frac{1}{2} d_{2i}^2\, \beta_{2i\pm1}$ dove le β sono valori intermedii di y''. Poichè $d_{2i} = d_{2i-1}$, il valore assoluto della differenza tra $(1)_{\text{bis}}$ e $(2)_{\text{bis}}$ (a cui tale *errore* non può essere superiore) non supera (supposto finito il limite superiore H di $|y''|$) $\frac{1}{2} H(d_2^2 + d_4^2 + \ldots + d_{2n}^2)$. Se, p. es., i d sono tutti uguali tra loro, e quindi a $\frac{B}{2n}$, tale *errore* non supera $\frac{HB^2}{8n}$, che *tende a zero per* $n = \infty$ (cfr. questo § 98, α, pag. 322).

η) Le (1), (2) si prestano bene ad un calcolo meccanico; le $(1)_{\text{bis}}$, $(2)_{\text{bis}}$, oltre alle più semplici (1), (2) si prestano anche a un calcolo grafico.

Si giunge a un procedimento meccanico, osservando che le somme $y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_{2n}$ e $y_2 + y_4 + y_6 + \ldots\ldots + y_{2n}$, che compaiono nelle (1), (2) si calcolano facilmente così: Una rotella R munita di un contagiri sia fatta rotare senza strisciare sul foglio F del disegno in guisa che il punto di contatto descriva successivamente uno o più segmenti (p. es., $y_2, y_3, \ldots\ldots, y_{2n}$). Il numero N dei giri compiuti da R (che si legge sul contagiri) sarà uguale ad una certa costante k (dipendente dalla data rotella; è $k = \dfrac{1}{2\pi r}$, se r è il raggio di R ed è $k = 1$ se $r = \dfrac{1}{2\pi}$) moltiplicata per la somma delle lunghezze dei segmenti descritti; cosicchè questa somma (p. es. nel caso citato la $y_2 + y_3 + \ldots + y_{2n}$) varrà $\dfrac{1}{k} N$; e si otterrà con una semplice lettura di N (anzi una opportuna graduazione può permettere di leggere sullo strumento addirittura il numero $\dfrac{1}{k} N$). E il calcolo dei valori approssimati del nostro integrale si compie allora con la massima rapidità.

Si giunge a un metodo grafico, osservando che il prodotto c dei numeri a, b (che siano misura di certi segmenti, che indicheremo pure con a, b) è la misura di quel segmento c tale che $c : a = b : 1$, dove con 1 indico anche il segmento scelto come unità di misura. La teoria dei triangoli simili insegna subito a disegnare il segmento c. Ora, p. es., la $(2)_{\text{bis}}$ è somma di più termini, ciascuno dei quali è prodotto delle misure di due segmenti, e per cui è quindi applicabile il metodo precedente (*).

(*) Riferendoci alla fig. 36 di questo § 98, β, pag. 323, si indicheranno con P il punto dell'asse delle x, che ha per ascissa -1, con $B_2, B_4, \ldots\ldots$ le proiezioni di $A_2, A_4, \ldots\ldots$ sull'asse delle y, con $d_1, d_2, d_3, \ldots\ldots$ i segmenti $a_1\, a_2$, $a_2\, a_3$, $a_3\, a_4, \ldots\ldots$ E si supponga soltanto $d_1 = d_2$, $d_3 = d_4$, ecc. (anche se $d_1, d_3, \ldots\ldots$ sono differenti tra loro). Indichiamo con a'_3 il punto ove la parallela tirata da a_1 a PB_2 incontra $a_3\, A_3$; con a'_5 il punto ove la parallela tirata da a'_3 a PB_4 incontra $a_5\, A_5, \ldots\ldots$; con a'_{2n+1} il punto ove la parallela tirata da a'_{2n-1} alla PB_{2n} incontra $a_{2n+1}\, A_{2n+1}$. Dico che *il segmento* $a_{2n+1}\, a'_{2n+1}$ *vale la somma* $(2)_{\text{bis}}$.

Infatti, posto $a'_1 = a_1$, si tirino da a'_{2i-1} una parallela all'asse delle x, da a'_{2i+1} la parallela all'asse delle y (nella figura è $i = 2$). Queste rette insieme alla $a'_{2i-1}\, a'_{2i+1}$ formano un triangolo simile al triangolo POB_{2i} (per $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$). E se ne deduce che la differenza tra le ordinate di a'_{2i+1} e a'_{2i-1} sta a $d_{2i-1} + d_{2i}$ come $OB_{2i} = y_{2i}$ sta a $PO = 1$, ossia che tale differenza vale $2 y_{2i}\, d_{2i-1}$, che è un termine di $(2)_{\text{bis}}$.

La somma di tutte queste differenze, cioè

$$(a_{2n+1}\, a'_{2n+1} - a_{2n-1}\, a'_{2n-1}) + (a_{2n-1}\, a'_{2n-1} - a_{2n-3}\, a'_{2n-3}) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (a_5\, a'_5 - a_3\, a'_3) + (a_3\, a'_3 - a_1\, a'_1),$$

cioè $a_{2n+1}\, a'_{2n+1}$ (il lettore ricordi che $a_1\, a'_1 = 0$) vale dunque la somma $(2)_{\text{bis}}$, come dovevasi provare.

δ) Esistono altri metodi di calcolo approssimato di tipo analogo: uno di essi consiste nel sostituire alla funzione $y = f(x)$ la funzione $y = p(x)$, dove $p(x)$ è un polinomio di grado $m - 1$, che in m punti dell'intervallo (a, b) assume lo stesso valore che $f(x)$, (per il calcolo di tale polinomio cfr. § 27, pag. 90 e pag. 48) e dove m è un intero abbastanza grande.

Oppure si può dividere l'intervallo totale (a, b) in r intervallini parziali $l_1, l_2, \ldots. l_r$, applicare a ciascuno di questi intervallini il nostro metodo, sostituendo in l_i alla $f(x)$ un conveniente polinomio $p_i(x)$ di grado $m_i - 1$, che in m_i punti di l_i coincida con $f(x)$, e infine calcolare l'integrale di $p_i(x)$ esteso ad l, e sommare gli integrali così trovati.

Il metodo dei rettangoli coincide con questo, quando si supponga $m_i = 1$.

Il metodo dei trapezi si ottiene supponendo $m_i = 2$.

Il metodo dei trapezi inscritti, da noi svolto più sopra, coincide con questo, quando suppongo $r = 2n, m_i = 2$, e ogni polinomio (di primo grado) $p_i(x)$ sia supposto uguale ad $f(x)$ agli estremi del corrispondente intervallino. Il metodo dei trapezi circoscritti si deduce dall'attuale, supponendo $r = n, m_i = 2$, e facendo tendere al punto di mezzo di $l_i = 2d_{2i} = 2d_{2i-1}$ i due punti di l_i, ove si suppone $f(x) = p_i(x)$. In entrambi i casi le linee $y = p_i(x)$ sono rette (corde o tangenti). Se invece $m_i = 3$, le $y = p_i(x)$ sono parabole. Supposti, p. es., gli l_i tutti uguali a $\frac{B}{r}$, posto $r = n$, supposto $f(x) = p_i(x)$ agli estremi a_{2i-1}, a_{2i+1} di l_i ed al punto di mezzo a_{2i} di l_i posto $y_s = f(a_s)$, il contributo portato da l_i (cioè l'integrale di $p_i(x)$ tra i limiti a_{2i-1}, a_{2i+1}) si calcola facilmente uguale a $\frac{B}{6n}[y_{2i-1} + y_{2i+1} + 4y_{2i}]$. La somma di questi contributi per $i = 1, 2, \ldots, n$ è un nuovo valore approssimato del nostro integrale. Anche questo metodo si può variare nei modi più molteplici.

Il lettore applichi quanto precede a qualche esempio numerico. Per altri metodi meccanici cfr. gli ultimi §§ di questo libro.

§ 99. — **Metodi e locuzioni abbreviate.**

α) Di locuzioni non precise, ma comode, e che si possono intendere soltanto come modi abbreviati di enunciare considerazioni precise ma più lunghe, abbiamo già discorso altrove (§ 54, pag. 177). Tali modi di esposizione si applicano pure nel calcolo integrale.

Per i teoremi dei paragrafi 96 e 96bis si può definire $\int_a^b F(x)\,dx$ nel modo seguente:

Si divida l'intervallo (a, b) in più intervallini parziali δ_i (la cui misura si prenderebbe negativa se $a > b$) e la cui ampiezza faremo poi tendere a zero (*).

In uno di questi intervallini la $F(x)$ avrà generalmente infiniti valori. Moltiplichiamo δ_i per uno di questi valori F_i scelto ad arbitrio.

Il $\lim\limits_{\delta=0} \Sigma\, \delta_i F_i$ è integrale cercato.

Ecco invece come confronto le locuzioni a cui si è accennato più sopra.

Dividiamo l'intervallo (a, b) in infiniti intervallini parziali infinitesimi δ_i (la cui misura si prenderà positiva, se, come supponiamo, $b > a$). In ciascuno di questi intervallini infinitesimi la $F(x)$ si potrà considerare come costante. La somma $\Sigma_i\, \delta_i F_i$ degli infiniti prodotti ottenuti moltiplicando l'ampiezza di uno di questi intervalli per il corrispondente valore di F è l'integrale di $F(x)$ da a a b.

Per dedurne che, se si considera b come variabile, la derivata di questo integrale rispetto alla b è proprio uguale a $F(b)$, si procede nel seguente modo, che noi considereremo al solito soltanto come una esposizione abbreviata. Si dia alla b un incremento infinitesimo db, che, per fissar le idee, supporremo positivo (come supponiamo positiva la differenza $b - a$). L'intervallo

$$(a, b + db) = (a, b) + (b, b + db)$$

è uguale alla somma degli intervallini δ_i e di db; perciò l'integrale relativo ad esso è uguale a $\Sigma\, \delta_i F_i + F(b)\, db$ [poichè in $(b, b + db)$ la $F(x)$ si può pensare conservi il valore costante $F(b)$]. L'incremento ricevuto dal nostro integrale è così $F(b)\, db$, e la sua derivata è quindi $F(b)$. c. d. d.

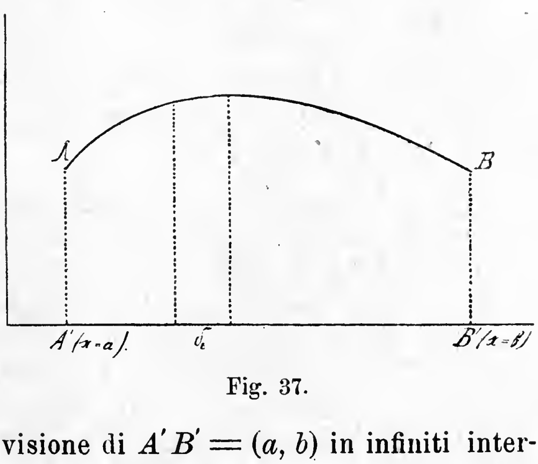


Fig. 37.

Per dimostrare poi, p. es., che l'area del rettangoloide $ABB'A'$ (fig. 37) è uguale al solito integrale definito, si osservi che la divisione di $A'B' = (a, b)$ in infiniti intervallini infinitesimi δ definisce la divisione del nostro rettangoloide

(*) Con ciò s'intende che il più lungo degli intervallini parziali abbia una misura, che facciamo tendere a zero, variando il sistema di divisioni.

in infiniti rettangoloidi parziali infinitesimi. In ciascuno di essi la y si può considerare come costante; cosicchè il lato opposto all'asse delle x si può considerare come un segmento parallelo all'asse delle x. L'area di tale rettangoloide parziale è perciò $\delta_i F_i$; e il rettangoloide totale ha quindi per area $\Sigma_i \delta_i F_i$. c. d. d.

β) Ma osserviamo un po' più precisamente le locuzioni sopra esposte. La frase *Dividiamo* (a, b) *in infiniti intervallini infinitesimi* traduce proprio la stessa idea che noi enunciamo dicendo: Dividiamo (a, b) in intervallini δ_i, che facciamo tendere a zero ossia che rendiamo infinitesimi (facendone contemporaneamente crescere il numero all'infinito).

Più istruttivo è invece l'esame della seconda parte delle precedenti definizioni e dimostrazioni. Vi si dice: *In ciascuno degli intervalli infinitesimi* δ_i la F (x) *si può considerare come costante.* Da un punto di vista empirico questa asserzione si potrebbe giustificare così (fig. 38). Se, p. es., i segmentini δ_i sono i più piccoli segmenti che noi riusciamo a disegnare, e se noi al pezzo CD della curva $y = F(x)$, che si proietta in uno di tali segmentini $\delta_i = C'D'$, sostituiamo il segmento CP parallelo all'asse delle x tirato da C, e che è rappresentato da un'equazione

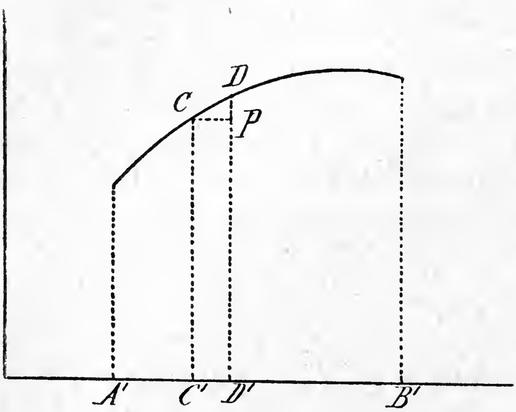


Fig. 38.

$$y = \text{cost.},$$

seguìto, se vogliamo, dal segmentino PD, la spezzata così ottenuta coincide quasi con la nostra curva, in quanto che il nostro occhio può forse appena distinguere la curva dalla spezzata.

Ma d'altra parte, quando si considera in δ_i la y come costante, si sostituisce, il rettangolo, che ha per base δ_i e per lato opposto il segmento CP, al rettangoloide parziale che ha per base δ_i; e si trascura così il triangoletto curvilineo DPC. Vediamo come si può prevedere in modo diretto che il trascurare tali triangolini non conduce ad errori. Supponiamo per semplicità che la $F(x)$ abbia nell'intervallo (a, b) un minimo $m \neq 0$. Il triangolino DPC è evidentemente interno al rettangolo, che ha per base CP e per altezza la differenza $M_i - m_i$ tra il massimo e il minimo di $F(x)$ in δ_i; ed ha quindi un'area a_i inferiore a $(M_i - m_i)\,\delta_i$. Il rettangolo che ha per base δ_i e per lato opposto CP ha un'area A_i non inferiore a $m\,\delta_i$. Il rapporto $\frac{a_i}{A_i}$ dell'area di uno dei nostri triangolini al corrispondente rettangolo non supera quindi $\frac{M_i - m_i}{m}$.

Ora, scegliendo i δ_i abbastanza piccoli, noi sappiamo (§ 40, pag. 135, e § 63, pag. 197) che si possono rendere *tutte* le $M_i - m_i$ e perciò anche *tutti* questi rapporti minori di un numero ε prefissato ad arbitrio. Dunque *non solo le* a_i *sono infinitesimi di ordine superiore rispetto alle* A_i, *ma anzi si possono rendere i rapporti* $\frac{\mathrm{a}_i}{\mathrm{A}_i}$ **contemporaneamente** *minori di un numero* ε *prefissato ad arbitrio.*

È facile dimostrare in tale ipotesi che

$$\lim\left[\Sigma A_i - \Sigma (A_i + a_i)\right] = 0.$$

Infatti, scelti i δ_i così piccoli che $\left|\frac{a_i}{A_i}\right| < \varepsilon$, sarà anche

$$\left|\frac{\Sigma a_i}{\Sigma A_i}\right| < \varepsilon\,;\ |\Sigma a_i| < \varepsilon\,|\Sigma A_i|\,;\ |\Sigma (A_i + a_i) - \Sigma A_i| < \varepsilon\,|\Sigma A_i|\,;$$ e

quindi, *supposto*, come nel caso nostro, *che le* $\Sigma\,\mathrm{A}_i$ *siano numeri limitati*, inferiori cioè ad una costante finita, $\lim\left[\Sigma (A_i + a_i) - \Sigma A_i\right] = 0$ come dovevasi dimostrare.

È trovato così un nuovo caso (§ 52, pag. 172), in cui è lecito trascurare gli infinitesimi di ordine superiore.

CAPITOLO XVI.

FUNZIONI ADDITIVE GENERALI E INTEGRALI MULTIPLI

§ 100. — Funzioni additive e loro derivate.

α) Se I è un intervallo, o una figura piana (*), o un solido, noi diremo che $S(\tau)$ è una *funzione additiva dei pezzi* τ (**) *di* I, *se per ogni pezzo* τ *di* I *esiste uno e un solo valore di* S; *e se in più, quando* τ *è somma di due punti* τ', τ'', *è* $S(\tau) = S(\tau') + S(\tau'')$.

Così, se I è una sbarra, o una lamina piana, o un solido pesante, il peso m di un pezzo τ di I è funzione additiva di τ.

Così, se I è una lamina, o un corpo elettrizzato, la componente, p. es., sull'asse delle x, dell'attrazione che un pezzo τ di I esercita su un punto elettrizzato M è una funzione additiva di τ.

Dall'esame della figura composta di due soli punti materiali, la Meccanica induce il seguente teorema: *Se* I *è una lamina o un corpo pesante, il peso* m *di un suo pezzo* τ *moltiplicato per una coordinata, p. es. l'ascissa* x, *del centro di gravità di* τ *è una funzione additiva* $X(\tau)$ *della* τ. Cosicchè *l'ascissa* x *del centro di gravità appare come quoziente delle* X, m: entrambe funzioni additive di τ.

Più avanti vedremo che la ricerca della lunghezza di una curva e dell'area di una superficie sghemba si riducono al calcolo di speciali funzioni additive. Bastino questi esempi ad illustrare l'importanza di tali funzioni!

(*) Si potrebbero anche considerare degli I che fossero un pezzo di una linea, o di una superficie qualsiasi, p. es., un arco I di cerchio, o un poligono sferico I.

(**) Ci limiteremo a considerare quei pezzi τ di I, che posseggono una misura (p. es., lunghezza, area, volume). Per il significato delle parole: figura piana, suo contorno, ecc., cfr. l'osservazione a pag. 25. Noi ci limiteremo sempre a figure piane o solide, il cui contorno è formato da un numero finito di linee o superficie, rappresentabili con equazioni, i cui membri sono finiti e continui con le loro derivate.

β) Il seguente esempio ha per noi una specialissima importanza. Sia $z = F(x, y)$ l'equazione di un pezzo K di superficie; sia $F \geqq 0$; sia I la proiezione di K sul piano $x\,y$.

Sia $F(x, y)$ continua. Chiamiamo *cilindroide* la figura solida limitata da K, da I (base del cilindroide) e dal cilindro proiettante il contorno di K sul contorno di I.

Ogni pezzo τ di I sarà base di un cilindroide parziale: luogo di quei punti del cilindroide iniziale, che si proiettano sul piano $x\,y$ in punti di τ. Il *volume* $S(\tau)$ *di tale cilindroide parziale* (o, se tal volume non fosse definito, il volume interno oppure il volume esterno di tale cilindroide) *è una funzione additiva di* τ.

Infatti se τ è somma dei due pezzi τ_1, τ_2, allora il cilindroide parziale di base τ è somma di cilindroidi aventi per base τ_1, oppure τ_2. (Per i volumi interni od esterni cfr. quanto si disse per l'area esterna od interna di un rettangoloide a pag. 25).

γ) Se $S(\tau)$ è una funzione additiva dei pezzi τ di I, e se τ è la misura (*) (p. es., lunghezza, area, volume, ecc.) del pezzo τ, allora può darsi che il rapporto $\dfrac{S(\tau)}{\tau}$ tenda ad un limite finito, quando tutti i punti di τ si avvicinano a un punto A di I. Se tale limite *esiste per tutti i punti* A di I, esso è una *funzione* F *delle coordinate del punto* A. (Cioè esso non è più, come $S(\tau)$, una funzione del campo τ, ma soltanto una funzione delle una, due o tre coordinate del punto A). Se questa funzione F è continua, noi la chiameremo *derivata* di S (rispetto a τ) e scriveremo $S'_\tau = F$. Se, p. es., I è una figura pesante, e se $S(\tau)$ è il peso del pezzo τ, allora F è la *densità* nel punto A.

Es. I. Se $S(\tau)$ è il volume del precedente cilindroide parziale, si dimostra (analogamente a quanto si è fatto a pag. 311 per i rettangoloidi) che la sua derivata in un punto A vale precisamente il valore in questo punto di $z = F(x, y)$.

Es. II. Così sia I una lamina o un corpo pesante; assumiamo come misura τ di un suo pezzo τ non già l'area o il volume di τ, ma precisamente il peso τ di τ (**). Sia $X(\tau)$ quella funzione additiva di τ, che è uguale al prodotto del peso τ di τ per l'ascissa x_g del suo centro di gravità. La $X(\tau) = \tau\,x_g$ è

(*) Indicheremo quasi sempre con la stessa lettera un campo, e la sua misura.

(**) Anche comunemente è molteplice il modo di definire la misura di un corpo (p. es., il volume, il peso, il prezzo di esso). In generale si può assumere come misura di τ ogni funzione additiva e positiva di τ.

una funzione additiva di τ. Notiamo che $\frac{X(\tau)}{\tau} = x_g$ è compresa tra il massimo e il minimo valore che ha l'ascissa x di un punto di τ. Quindi, se tutti i punti di τ tendono ad uno stesso punto A di τ, il $\lim \frac{X(\tau)}{\tau}$ vale precisamente l'ascissa x del punto A. Cioè x è la derivata della nostra funzione $X(\tau)$.

Es. III. Sia I una parete piana verticale di una vasca piena di acqua (un bacino di carenaggio, p. es.). La pressione che tale acqua esercita su un pezzo τ di I è quella funzione additiva di τ, la cui derivata in un punto A di I vale la distanza da A al pelo libero dell'acqua stessa.

Es. IV. Sia I una curva del piano xy; supponiamo che i punti di I siano in corrispondenza biunivoca con la loro proiezione sull'asse delle x. Assumiamo come misura τ di un pezzo τ di I la lunghezza della sua proiezione sull'asse delle x. Se $M(x, y)$ è una funzione continua delle x, y in tutta una regione contenente I all'interno, allora lo $\int M(x, y)\, dx$ esteso a un pezzo τ di I è quella funzione additiva di τ, che nei punti di I ha $M(x, y)$ per derivata.

Oss. È perfettamente lecito definire nel modo qui enunciato la misura τ di un pezzo τ di I, perchè vengono rispettate le proprietà essenziali di una *misura* (che un pezzo τ di I somma di due pezzi τ', τ'' ha per misura la somma delle misure di τ', τ'', ecc.). (Cfr. la precedente nota a piè di pagina).

§ 101. — **Estensione dei principali teoremi del calcolo differenziale.**

α) Per queste derivate si possono estendere molti teoremi di calcolo. Bisognerebbe, per restare nel campo più generale, limitare un po' il tipo di campi τ, per i quali si costruiscono i rapporti $\frac{S(\tau)}{\tau}$, che compaiono nella definizione di derivata. Questa generalità è però inutile a noi che *supponiamo la derivata* F *continua*. Noi estenderemo il teorema della media.

Se S (τ) *possiede derivata* F *continua in ogni punto di* I (inclusi i punti del contorno di I), *allora* $\frac{\mathrm{S}(\tau)}{\tau}$ *è compreso tra* *il limite superiore* L *e l'inferiore* I *dei valori della derivata* F *nei punti di* τ (*).

Se, p. es., $S(\tau)$ è il peso del pezzo τ, allora $\dfrac{S(\tau)}{\tau}$ è la *densità media* di τ; e tale teorema ci dice (precisamente come nel caso delle sbarre) che la *densità media* di un pezzo τ non può superare il massimo (o il limite superiore), nè essere inferiore al minimo (o limite inferiore) della densità nei varii punti del pezzo considerato.

Dimostriamo, p. es., che non può essere $\dfrac{S(\tau)}{\tau} = L + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$. Diviso infatti τ in due campi parziali τ_1 e τ'_1, sarebbe $S(\tau) = S(\tau_1) + S(\tau'_1)$; cosicchè

$$\frac{S(\tau)}{\tau} = \frac{S(\tau_1) + S(\tau'_1)}{\tau_1 + \tau'_1} = L + \varepsilon.$$

Poichè $\dfrac{S(\tau_1) + S(\tau'_1)}{\tau_1 + \tau'_1}$ non può superare la più grande delle $\dfrac{S(\tau_1)}{\tau_1}$, $\dfrac{S(\tau'_1)}{\tau'_1}$, una di queste frazioni, p. es. la $\dfrac{S(\tau_1)}{\tau_1}$, sarà non minore di $L + \varepsilon$. In τ_1 esisterà, come si dimostra in modo analogo, un campo τ_2 tale che $\dfrac{S(\tau_2)}{\tau_2} \geqq L + \varepsilon$. E così via.

È facile dare una legge di divisione dei successivi campi τ, τ_1, τ_2, ecc., in campi parziali così che esista uno e un solo punto A interno a tutti i campi τ, τ_1, τ_2, ecc. La derivata di $S(\tau)$ in A, cioè $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{S(\tau_n)}{\tau_n}$ non potrà dunque essere inferiore ad $L + \varepsilon$; ciò che è assurdo, perchè L è il limite superiore dei valori di tale derivata in tutto τ.

β) Possiamo anche estendere la nozione di differenziale. Se F è la derivata di S, il $\lim \dfrac{S(\tau)}{\tau}$, quando tutti i punti di τ tendono a un punto A, o, come diremo, per $\tau = A$, vale il valore $F(A)$ della F nel punto A. Cosicchè $\lim\limits_{\tau=A} \left[\dfrac{S(\tau)}{\tau} - F(A)\right] = 0$. Potremo dunque scrivere:

$$\frac{S(\tau)}{\tau} = F(A) + \varepsilon,$$

dove ε tende a zero per $\tau = A$, ossia

$$S(\tau) = F(A)\,\tau + \varepsilon\tau.$$

(*) Si potrebbe provare che $\dfrac{S(\tau)}{\tau}$ è proprio uguale al valore di F in un punto A di τ, se il valore di S corrispondente a uno strato (pezzo limitato da due rette o piani paralleli) di I tendesse a zero col tendere a zero dello spessore dello strato. Ma queste considerazioni hanno importanza soltanto per quegli studii più generali, a cui abbiamo accennato, che riguardano funzioni F non continue.

Il primo addendo $F(A)\tau$ si dirà il *differenziale* della S, e si indicherà con dS. Noi porremo perciò *per definizione*

$$dS = F(A)\,\tau.$$

Se $S = \tau$, se cioè S coincide addirittura con la misura di τ, la sua derivata sarà sempre uguale ad 1. Cosicchè il suo differenziale sarà dato dalla:

$$d\tau = \tau.$$

E la precedente equazione diventa:

$$dS = F(A)\,d\tau \quad , \quad \text{ossia} \quad F(A) = \frac{dS}{d\tau} \cdot$$

Anche in questo caso *la derivata si può considerare come un quoziente di differenziali.*

γ) È appena necessario avvertire che alle derivate delle funzioni additive si possono generalizzare i teoremi relativi alla derivazione di una somma, di una differenza (*). Noi ci limiteremo qui a dare un cenno della generalizzazione del teorema di derivazione di una funzione di funzione.

Siano I ed H due campi, i cui punti sono in corrispondenza biunivoca; con τ indichiamo sia i pezzi di I, che la loro misura; con k sia i pezzi di H che la loro misura. Sia $S(\tau)$ una *funzione additiva dei pezzi* τ *di* I; poichè ad ogni pezzo k di H corrisponde un pezzo τ di I, ad ogni pezzo di k di H corrisponde un valore di $S(\tau)$. *Cioè* S *si potrà considerare anche come funzione additiva dei pezzi* k *di* H.

La misura τ di quel pezzo τ di I, che corrisponde ad un pezzo k di H è anch'essa una funzione additiva di k. Supporremo che esista la sua derivata $\frac{d\tau}{dk}\cdot$

Che relazione passa *tra le derivate* $\frac{dS}{d\tau}$, $\frac{dS}{dk}$ della S, *pensata come funzione dei* τ *o dei* k?

Come per le funzioni di una sola variabile, *si dimostra che:* $\frac{dS}{dk} = \frac{dS}{d\tau}\frac{d\tau}{dk}$, o (come si può scrivere in altro modo) $S'_k = \tau'_k\, S'_\tau$, ossia che anche nel caso attuale i calcoli coi differenziali $d\tau$, dS, ecc. si effettuano con le stesse regole usate pei differenziali di una variabile, e si possono ripetere considerazioni analoghe a quelle del § 59, pag. 187.

(*) È appena da avvertire che prodotto o quoziente di due funzioni additive può non essere una funzione additiva.

δ) Diamo un'applicazione specialmente importante dell'ultima formola. I campi I ed H sieno addirittura sovrapposti; e noi conveniamo di considerarli distinti, perchè conveniamo di definire in modo differente la misura di un loro pezzo, secondo che questo pezzo è considerato come parte di τ di I, o come parte k di H. Se, p. es., $I=H$ è un corpo o una lamina pesante, come misura τ di un suo pezzo potremo assumere la sua misura geometrica (area o volume), come misura k il suo peso.

Se, p. es., $X(k)$ è quella funzione additiva di un suo pezzo k, che è uguale al prodotto del peso k del pezzo considerato per l'ascissa x del suo centro di gravità, la derivata X'_k in un punto A vale precisamente l'ascissa x di tale punto (pag. 332). D'altra parte la derivata $\frac{dk}{d\tau}$ in A è uguale alla densità ρ in questo punto. Quindi, se noi consideriamo X come funzione di τ, si ha:

$$k'_\tau = \rho\,;\quad X'_\tau = k'_\tau\, X'_k = \rho x.$$

Quindi: *L'ascissa* x *del centro di gravità di un pezzo* τ *di I vale il quoziente di* $\frac{\mathrm{X}(\tau)}{\mathrm{k}(\tau)}$, *cioè di due funzioni additive la cui derivata vale rispettivamente* $\rho\mathrm{x}$ *e* ρ (se ρ è la densità).

ESEMPIO.

Sia I una massa attraente con la legge di Newton. Il potenziale dovuto a un suo pezzo τ in un punto esterno M è quella funzione additiva di τ, la cui derivata in un punto A di I vale $\frac{\rho}{r}$, se ρ è la densità, r la distanza AM.

§ 102. — **Generalizzazione dei teoremi fondamentali del calcolo integrale.**

Sia I un campo ad una o più dimensioni. Sia F una funzione continua delle coordinate di un suo punto. Con considerazioni analoghe a quelle dei §§ 96 e 96*bis* (in cui si sostituisca alla considerazione dell'area di un rettangoloide quella del volume di un cilindroide, oppure quella del peso di un corpo o di una lamina pesante o un altro esempio di tipo analogo) si dimostra che:

I. *Esiste una e una sola funzione additiva* $\mathrm{S}(\tau)$ *dei pezzi* τ *di I, che ha per derivata la data funzione continua* F.

II. *Il valore* $S(\tau)$ *di tale funzione corrispondente a un pezzo* τ *di* I *si può definire nel seguente modo. Scomposto il campo* τ *in campi parziali* $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots\ldots, \tau_n$, *detti* M_r *ed* m_r *il valor massimo e il valor minimo della* F *nel campo* τ_r *e detto* F_r *un qualsiasi numero compreso tra* m_r *ed* M_r, *il numero* $S(\tau)$

α) *è il numero che separa le classi contigue generate dalle due somme* $\Sigma M\tau = M_1\tau_1 + M_2\tau_2 + \ldots\ldots + M_r\tau_r$ *e* $\Sigma m\tau = m_1\tau_1 + m_2\tau_2 + \ldots\ldots m_r\tau_r$, ($\tau_r$ *è la misura del campo parziale* τ_r *nelle convenzioni addottate*);

β) *è il limite di* $\Sigma F_r\tau_r = F_1\tau_1 + F_2\tau_2 + \ldots\ldots + F_r\tau_r$, *quando tende a zero la massima corda di ciascun pezzo* τ_r;

γ) *è proprio uguale a* $\Sigma \overline{F}_r\tau_r$, *se* $\overline{F}_r$ *è un numero* OPPORTUNAMENTE *scelto tra* m_r *ed* M_r.

Si può anche nel caso attuale estendere la definizione di integrale di Riemann per funzioni limitate.

III. *Se* I *è una regione del piano* xy *ed* $F(x, y) \geqq 0$, *allora* $S(\tau)$ *è il volume del cilindroide di base* τ, *luogo dei punti* (x, y, z) *per cui* $0 \leqq z \leqq F$, *e la cui proiezione sul piano* xy *appartiene a* τ.

Questa funzione additiva $S(\tau)$ si chiama l'integrale di F esteso al campo τ; il suo valore relativo al campo I o al campo τ si indica con $\int_I F d\tau$ o con $\int_\tau F d\tau$, estendendo così la definizione e la notazione usate per gli integrali definiti.

Se il campo I è a due sole dimensioni si suole usare la lettera σ oppure la s (iniziale della parola *superficie*) al posto della τ, se si assume come misura di un campo la sua area.

OSSERVAZIONE.

Per calcolare un integrale si può sempre ridurci al caso, che come misura di questo si addotti la misura geometrica (lunghezza, area o superficie). Se k fosse la misura adottata, e τ la misura geometrica, si osservi che $\int F dk = \int \theta \, d\tau$ se è posto $\theta = F\left(\frac{dk}{d\tau}\right)$ cioè uguale al prodotto di F per $\frac{dk}{d\tau}$, c. d. d.

Se k fosse il peso, questo fattore $\frac{dk}{d\tau}$ sarebbe la *densità*.

Cominceremo dal caso di campi τ a due dimensioni.

ESEMPIO.

Così, come abbiamo già osservato a pag. 335, se I è una lamina o un corpo pesante, τ è l'area o il volume di un suo pezzo, ρ ne è la densità in un punto, allora l'ascissa del suo centro di gravità vale $\dfrac{\int_I x\rho\,d\tau}{\int_I \rho\,d\tau}$.

§ 103. — **Calcolo di un integrale superficiale.**

Se F (x, y) *è una funzione continua in una regione* σ *del piano* xy, *come si calcola lo* $\int_\sigma$ F (x, y) d σ? o meglio: *Come se ne può ridurre il calcolo a quello di integrali definiti?* Per vederlo cominceremo ad usare metodi poco rigorosi salvo a verificare poi i risultati ottenuti nel modo più preciso.

Se noi dividiamo l'area σ in pezzetti con rette parallele agli assi delle x e delle y, l'area σ verrà scomposta in rettangoli, e in altri pezzetti, il cui contorno contiene dei pezzi del contorno di σ. Se noi *supponiamo* (cfr. § 99, pag. 328) che questi ultimi pezzetti siano trascurabili (che diano cioè un contributo infinitesimo), basterà che consideriamo i rettangolini tutti interni a σ, la cui area è $\Delta x\,\Delta y$, se Δx e Δy sono rispettivamente le distanze di due delle rette da noi tirate parallelamente all'asse delle x, o all'asse delle y. Considerando dapprima i rettangoli posti p. es. in una stessa striscia parallela all'asse delle x, e poi le varie striscie, la somma $\Sigma F_i \delta_i$ dell'ultimo paragrafo diventa:

$$\sum F \Delta x \Delta y = \sum \Delta y \sum F \Delta x,$$

dove la $\Sigma F \Delta x$ è relativa ai rettangoli di una stessa striscia, mentre l'altro simbolo Σ di somma si riferisce alle varie striscie. Possiamo scegliere gli estremi di una retta (*) $y = \text{cost.}$ nel contorno di γ, e poi i valori F (**) intermedii in guisa tale che

(*) Suppongo gli estremi di una retta $y = \text{cost.}$ sul contorno di γ: ciò che è un errore perchè avendo trascurato i pezzetti posti sul contorno di γ, potrebbe darsi che gli estremi da considerare fossero interni a γ. Un'osservazione analoga si può ripetere più sotto. Noi ammettiamo *provvisoriamente* che l'errore commesso tenda a zero e sia quindi trascurabile.

(**) Suppongo che F sia il valore assunto da $F(x, y)$ su uno dei lati del nostro rettangolo paralleli all'asse delle x.

$\Sigma F \Delta x = \int F dx$. L'integrale così ottenuto dipende dal valore dato alla y; è cioè una funzione $\varphi(y)$ della y. Se essa è continua, allora $\lim_{\Delta y = 0} \Sigma \varphi(y) \Delta y = \int \varphi(y) dy$, cosicchè si avrà finalmente:

$$\int_\sigma F(x, y) d\sigma = \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y = 0}} \sum F \Delta x \Delta y = \int \left[\int F(x, y) dx \right] dy,$$

o come si suol scrivere:

$$\int_\sigma F(x, y) d\sigma = \int dy \int F(x, y) dx = \iint F(x, y) dx\, dy.$$

Nel cambiamento di variabili coordinate *non si può però* (come nel caso di funzioni di una sola variabile) applicare ai simboli dx, dy la regola per il calcolo dei differenziali (cfr. l'oss. 1ª del seg. § 108 a pag. 352).

Prima di dimostrare con rigore questa formola, dobbiamo intendere con precisione il suo significato. Quando noi abbiamo scritto

$$\int F(x, y) dx = \lim_{\Delta x = 0} \sum F \Delta x,$$

noi tenendo costante la y, cioè muovendoci su una retta AB parallela all'asse delle x (cfr. fig. 39) abbiamo trovato (a meno del fattore Δy) la somma dei contributi portati dai rettangolini contenuti nella striscia compresa tra la retta AB e la retta parallela consecutiva, su cui l'ordinata ha il valore $y + \Delta y$. Perciò la nostra integrazione è eseguita rispetto alla x (quando si considera la y come costante) in un intervallo che, al limite, coincide con AB (fig. 39). Cosicchè i limiti inferiore e superiore, tra cui si deve calcolare l'integrale $\int F(x, y) dx$, sono le ascisse di A e di B. Chè se invece avessimo dato alla y il valore corrispondente alla retta $A'B'$ (cfr. fig. 39), il simbolo

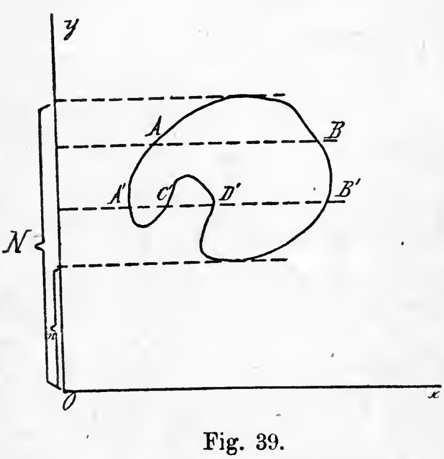


Fig. 39.

$\int F(x, y)\, dx$ significherebbe la somma degli integrali (eseguiti considerando y come costante) estesi ai due intervalli $A'C'$, $D'B'$ che la retta $A'B'$ possiede interni all'area σ.

Il valore di $\int F(x, y)\, dx$ dipende perciò dal valore dato alla y; e cioè una funzione $\varphi(y)$ della y. E la nostra formola ci dice che noi dobbiamo integrare questa funzione rapporto ad y. Tra quali limiti si deve fare questa seconda integrazione? Poichè si deve tener conto di tutto il campo σ, essa dovrà quindi essere eseguita nell'intervallo (n, N), se n ed N sono i valori minimo e massimo della y in σ.

Se noi per fissare le idee supponiamo che il contorno di σ sia incontrato in due punti al più da una parallela a uno degli assi coordinati, le ascisse dei punti A, B dei punti ove una retta $y =$ cost. incontra il contorno di σ saranno due funzioni $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ della y. E le ordinate dei punti C, D, ove una retta $x =$ cost. incontra il contorno di σ, saranno due funzioni $\gamma(x)$ e $\delta(x)$ della x.

Se dunque diciamo n, N ed l, L i valori minimi e massimi rispettivamente della y e della x in σ, troveremo:

$$(1) \qquad \int_\sigma F d\sigma = \int_n^N dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} F(x, y)\, dx \quad (*).$$

E, scambiando i due assi, coordinati, troveremo per simmetria:

$$(2) \qquad \int_\sigma F d\sigma = \int_l^L dx \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} F(x, y)\, dy.$$

Come si vede, confrontando queste formole è lecito cambiare l'ordine delle integrazioni, purchè si cambino convenientemente i *limiti dei corrispondenti integrali.* È evidente che i limiti non dovrebbero essere cambiati nel caso che σ fosse un rettangolo coi lati paralleli agli assi coordinati (**), come il lettore può facilmente verificare facendo la figura.

(*) Si ricordi (§ 88) che se $F(x, y)$, $\alpha(y)$, $\beta(y)$ sono funzioni continue, anche $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} F(x, y)\, dx$ è funzione continna della y e si può quindi integrare rispetto alla y.

(**) Si applichi questo risultato all'ultima formola del § 93, pag. 307. In questa formola i limiti d'integrazione sono uguali nei due membri, perchè siamo nel caso particolarissimo di un integrale doppio esteso a quel rettangolo coi lati paralleli agli assi coordinati, di cui l'origine e il punto (x, y) sono vertici opposti.

§ 104. — **Interpretazione geometrica.**

Supposto $F \geqq 0$, consideriamo il cilindroide limitato da quel pezzo della superficie $z = F(x, y)$, di cui σ è la proiezione sul piano xy, dal cilindro che ne proietta il contorno e da σ (base del cilindroide). Le formole precedenti hanno una notevole interpretazione geometrica. Consideriamo, p. es., la (1). Io dico che $\int F(x, y)\, dx$ *misura l'area della sezione fatta nel nostro cilindroide con un piano* $y =$ cost. Infatti, se la retta $y =$ cost. del piano xy interseca il contorno di σ in due soli punti A, B, questa sezione è evidentemente un rettangoloide limitato (fig. 40):

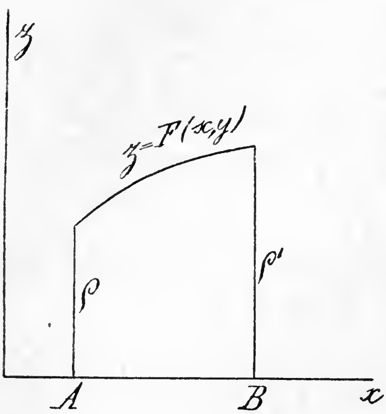


Fig. 40.

1° Dalla retta $r = AB$ parallela all'asse delle x in cui il piano secante interseca il piano xy, su cui giace la base del nostro cilindroide:

2° Dalle due rette ρ, ρ' ortogonali alla precedente, in cui il piano secante interseca il cilindro, superficie laterale del nostro cilindroide: rette che sono evidentemente generatrici di questo cilindro, e parallele all'asse delle z.

3° Dalla curva C in cui il nostro piano interseca la superficie $z = F(x, y)$.

Se noi assumiamo nel piano secante la retta r come asse delle x, e la retta in cui esso interseca il piano yz come asse delle z, la curva C avrà per equazione $z = F(x, y)$, dove alla y si attribuisca il valore costante corrispondente al nostro piano secante; e l'area del nostro rettangoloide sezione sarà perciò appunto $\int_A^B F(x, y)\, dx$, che coincide con l'integrale considerato. E altrettanto si trova se una retta $y =$ cost. del piano xy interseca il contorno di σ in più di due punti, e quindi la sezione del nostro cilindroide col piano $y =$ cost. è la somma di due o più rettangoloidi.

La formola (1) del § 103 ci dà dunque il seguente teorema, che avevamo già dimostrato in casi particolari, usando però del linguaggio del calcolo differenziale (o calcolo delle derivate) (pag. 167):

TEOR. 1°. *Il volume del nostro cilindroide si ottiene integrando rapporto alla* y *l'area della sezione fattavi con un piano* y = cost.

E questo teorema si può estendere a solidi qualunque (decomponibili in cilindroidi).

TEOR. 2°. *Scelta una retta come asse delle* y, *il volume di un tale solido è uguale all'integrale rispetto alla* y *dell'area della sezione fatta con un piano* y = cost.

Il precedente teor. 1° si può considerare come l'enunciato geometrico del teorema contenuto nella (1) del § 103, anche quando $F(x, y)$ non sia sempre positivo, purchè si considerino come negativi i volumi delle porzioni di un solido poste al disotto del piano xy e le aree delle corrispondenti sezioni con un piano $y =$ cost.

§ 105. — **Dimostrazione rigorosa dei risultati precedenti.**

Per dimostrare (*), p. es., che

$$\int_\sigma F d\sigma = \int_\sigma dx \int F(x, y)\, dy,$$

basta provare che il secondo membro è una funzione additiva di σ la cui derivata vale F.

Notiamo che l'integrale $\int F(x, y)\, dy$ del secondo membro è esteso all'intervallo λ, o alla somma λ degli intervalli che su una retta r (luogo dei punti aventi l'ascissa $x =$ cost.) sono determinati da σ. E, se σ è somma di due campi parziali σ_1, σ_2, e indichiamo con λ_1 e λ_2 gli intervalli determinati sulla r da σ_1 e da σ_2, sarà $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ e quindi:

$$(1) \quad \int_{(\lambda)} F(x, y)\, dy = \int_{(\lambda_1)} F(x, y)\, dy + \int_{(\lambda_2)} F(x, y)\, dy.$$

È da avvertire che può darsi benissimo che l'una o l'altra delle λ_1, λ_2 si annulli, cioè che r non abbia intervalli interni

(*) Nel corso di questa dimostrazione faremo, come si vedrà, alcune ipotesi sul campo σ, e sul suo contorno, che sono del resto pochissimo restrittive in pratica. Appunto perciò alcune di esse sono enunciate soltanto a piè di pagina. Questo teorema vale del resto in casi estremamente più generali di quelli qui considerati.

a σ_1 od a σ_2. In tal caso l'integrale corrispondente del secondo membro di (1) si deve naturalmente considerare come nullo.

Se ne deduce facilmente che:

$$\int dx \int_{(\lambda)} F(x, y)\, dy = \int dx \int_{(\lambda_1)} F(x, y)\, dy + \int dx \int_{(\lambda_2)} F(x, y)\, dy,$$

ossia che il valore di

$$(2) \qquad \int dx \int F(x, y)\, dy$$

corrispondente ad un'area σ somma delle aree parziali σ_1, σ_2 è uguale alla somma dei valori di (2) corrispondenti alle aree σ_1, σ_2. Quindi (2) è funzione additiva di σ.

Si noti ora che, se M ed m sono il massimo ed il minimo della $F(x, y)$ nel campo σ, il valore di (2) per il campo σ è compreso tra

$$\int dx \int M dy = M \int dx \int dy,$$

$$\int dx \int m dy = m \int dx \int dy.$$

Dimostriamo ora che:

Il valore di

$$\int dx \int dy \qquad (3)$$

esteso a un campo σ *vale l'area di* σ.

Cominciamo col supporre che σ sia incontrato in due punti al più di ogni parallela all'asse delle y. Lo $\int dy$ deve essere esteso all'intervallo (y_1, y_2) determinato da σ su una retta $x = \text{cost.}$, cioè (se $y_1 < y_2$) deve essere uguale a $y_2 - y_1$ (*). Cosicchè

$$(4) \quad \int dx \int dy = \int_l^L (y_2 - y_1)\, dx = \int_l^L y_2\, dx - \int_l^L y_1\, dx.$$

(*) Si *ammette* che y_1 ed y_2 siano funzioni *continue* della x.

Ora $\int_l^L y_2\, dx$ è l'area del rettangoloide limitato dall'asse delle x, delle due ordinate passanti per A e per B (cfr. fig. 41) e della curva ACB, mentre $\int_l^L y_1\, dx$ è l'area del rettangoloide limitato dalle stesse rette e dalla curva ADB (fig. 41).

La differenza del terzo membro di (4) vale quindi la differenza tra le aree dei due rettangoloidi, cioè l'area di σ. c. d. d.

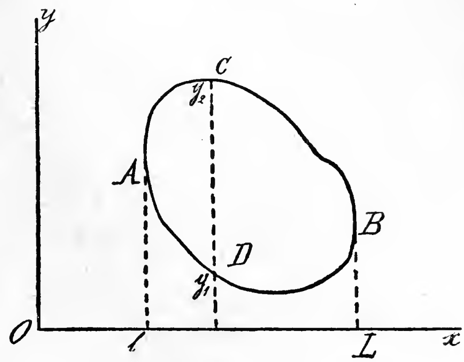


Fig. 41.

Se σ è decomponibile in più campi $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, il contorno di ciascuno dei quali è incontrato al più in due punti da una retta $x = \text{cost.}$ (come avviene nei casi più comuni) l'integrale (3) esteso a σ ha un valore che, come sappiamo, è la somma dei valori corrispondenti ai campi $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ed è quindi ancora uguale all'area di σ, c. d. d. (Per semplicità escludiamo le aree σ, che non si possono decomporre nel modo citato).

Ne segue subito il nostro teorema; infatti il quoziente ottenuto dividendo (2) per l'area σ, cioè per (3), è compreso, per quanto già vedemmo, tra M ed m, ossia è un valore che F assume in un punto di σ. Se dunque tutti i punti di σ tendono a un punto A, tale quoziente tende al valore di F in A. Perciò F è la derivata di (2).

I^a Osservazione.

In modo simile col simbolo $\int dx \int dy \int F(x, y, z)\, dz$ esteso a un solido τ si intende, se $F(x, y, z)$ è continua, quel numero che si ottiene integrando la $F(x, y, z)$ lungo il segmento, o i segmenti che su una retta $y = \text{cost.}$, $x = \text{cost.}$ sono determinati da τ, e integrando poi l'integrale così trovato nell'area proiezione di τ sul piano xy.

Se $F = 1$, tale integrale è il volume di τ. In generale esso è quella funzione additiva di τ, che ha per derivata $F(x, y, z)$.

II^a Osservazione.

La definizione di derivata di una funzione additiva ha profonda analogia con la definizione di derivate di una funzione di una o più variabili. Tale profonda analogia si può rilevare per altra via anche dalle considerazioni seguenti.

Sia I una figura piana; e sia S una funzione additiva dei pezzi τ di I. Consideriamo quei pezzi τ, che sono rettangoli coi lati paralleli agli assi coordinati, di cui un vertice è un punto fisso di I di coordinate (a, b) e il vertice opposto è un punto mobile x, y. Per tali τ si ha, detta $F(x, y)$ la derivata di S, che $S(\tau) = \int_a^x dx \int_b^y F(x, y)\, dy$ è una funzione $\varphi(x, y)$ delle x, y. E la derivata F della *funzione* $S(\tau)$ coincide con la derivata mista $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial x}$ della φ. L'osserv. che chiude il § 80 (pag. 272), corrisponde perciò al teorema della media per le funzioni additive.

Questo risultato si estende subito ai campi a tre dimensioni notando, che posto

$$\varphi(x, y, z) = \int_a^x dx \int_b^y dy \int_c^z F(x, y, z)\, dz, \quad \text{si ha } \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = F(x, y, z).$$

ESEMPI.

I. *Si calcoli il volume* V *dell'ellissoide* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Calcoliamo il volume $\frac{V}{2}$ del semiellissoide posto nella regione $z > 0$. Tale semiellissoide si può considerare come un cilindroide avente per base σ sul piano xy l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, e determinato dalla superficie $z = + c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$.

I valori tra cui varia la y di un punto di σ su una retta $x =$ cost. sono chiaramente $\pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Quindi:

$$\frac{V}{2} = \int_{-a}^{+a} dx \left[\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy \right] =$$

$$= \frac{c}{2} \int_{-a}^{+a} \pi b \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} \frac{\pi abc}{2}.$$

In modo simile si ha

$$\frac{V}{2} = \int_{-b}^{+a} dy \left[\int_{-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}^{+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dx \right] = \frac{4}{3}\,\frac{\pi\, abc}{2}$$

donde $V = \frac{4}{3}\pi\, abc$.

II. Se l'asse delle x è verticale volto in basso, e I è una parete piana verticale di una vasca piena d'acqua, posta nel piano xy, e se l'asse delle y coincide col pelo libero dell'acqua, la spinta idraulica sostenuta da I vale (§ 100, γ, es. III°)

$$\int dy \int x\, dx = \int x\, dx \int dy \qquad \text{esteso ad } I.$$

Si applichi questa formola al caso che I sia un rettangolo o un semicerchio col diametro sull'asse delle y.

§ 106. — **Volume di un solido di rotazione e teorema di Guldino.**

Sia σ un campo del piano xz *non intersecante* l'asse delle z; il quale rotando attorno a tale asse generi un solido di rotazione S. Per trovarne il volume V il procedimento più rapido è quello di integrare rispetto alla z l'area della sezione ottenuta segando S con un piano $z = \text{cost.}$

Se una retta $z = \text{cost.}$ del piano xz incontra il contorno di σ al più in due punti di ascissa x_1, x_2, (porremo $x_1 < x_2$), tale sezione è la corona circolare limitata da due cerchi di raggio x_1, x_2, ed ha per area $\pi(x_2^2 - x_1^2)$, dove x_1 ed x_2 sono funzioni di z. *Il volume* V *di* S *sarà perciò* $\pi \int (x_2^2 - x_1^2)\, dz$.

Poichè $x_2^2 - x_1^2 = 2\int_{x_1}^{x_2} x\, dx$, tale volume si può indicare con

$$V = 2\pi \int dz \int x\, dx = 2\pi \int x\, d\sigma \qquad (*)$$

(*) Questa formola vale anche se il contorno di σ è incontrato in più di due punti da una retta $z = \text{cost.}$ del piano xy. Al lettore la dimostrazione, che si ottiene (nei casi più elementari) scomponendo σ in convenienti sue parti.

dove l'integrale doppio deve essere esteso al campo σ (la cui rotazione genera S). Vedemmo (§§ 101-102) che $\dfrac{\int x\,d\sigma}{\sigma}$ è l'ascissa x_g del centro di gravità di σ considerato come lamina omogenea, il quale centro descrive nella rotazione attorno all'asse delle z un cerchio, la cui periferia vale $2\pi x_g = 2\pi \dfrac{\int x\,d\sigma}{\sigma} = \dfrac{V}{\sigma}$. Dunque (teor. di Guldino):

Il volume V *generato dalla rotazione di un campo piano* σ *attorno a un asse complanare che non l'attraversa vale il prodotto dell'area di* σ *per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo centro di gravità.*

Esempi.

1° Sia, p. es., dato un cerchio C nel piano xz, non intersecante l'asse delle z. Rotando attorno a quest'asse, esso genera un *toro di rivoluzione*, di cui si può facilmente col precedente teorema calcolare il volume V. Se r è il raggio del cerchio C, d la distanza del suo centro dall'asse delle z, si trova

$$V = 2\,\pi^2\, r^2\, d,$$

perchè il centro di gravità di un'area circolare coincide col suo centro.

2° Un semicerchio avente il diametro sull'asse delle z e raggio r ha per area $\frac{1}{2}\pi r^2$, e genera rotando una sfera di volume $\dfrac{4}{3}\pi r^3$; la distanza λ dal centro di gravità del semicerchio dall'asse delle z è dunque data dall'equazione

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2}\pi r^2 .\ 2\pi\lambda \quad \text{cioè } \lambda = \frac{4\,r}{3\,\pi}\cdot$$

3° Lo studioso generalizzi questa formola ad una semi-ellisse, ricordando la formola a noi nota del volume di un ellissoide di rotazione.

CAPITOLO XVII.

CAMBIAMENTO DI VARIABILI NELLE FORMOLE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE

§ 107. — Esempi di cambiamento di variabili in formole di calcolo differenziale.

Noi, piuttosto di dare una teoria generale, diamo alcuni esempi del come sia facile risolvere problemi di questo tipo. E supporremo senz'altro soddisfatte tutte le condizioni, che ci permetteranno di applicare i teoremi che invocheremo (p. es., derivate finite, oppure finite e continue, denominatori differenti da zero).

I. Siano $x = x(t)$, $y = y(t)$ due funzioni di t definite nello stesso intervallo. Dalla prima di esse si possa dedurre t come funzione $t(x)$ della x. Cosicchè, sostituendo nella seconda, si possa pensare y come funzione della x.

Si calcolino y'_x, y''_x, ..., supponendo note x'_t, y'_t, x''_t, y''_t, ...

È:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t\,dt}{x'_t\,dt} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

A questa formola si potrebbe giungere (senza usare i differenziali) ricordando che per la regola di derivazione delle funzioni inverse $t'_x = \frac{1}{x'_t}$ e che $y'_x = y'_t\,t'_x$.

È:

$$y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{dy'_x}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x'_t}\frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{y''_t\,x'_t - y'_t\,x''_t}{x'^3_t},$$

$$y'''_x = \frac{dy''_x}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{dy''_x}{dt} = \frac{1}{x'_t}\frac{d}{dt}\left(\frac{y''_t\,x'_t - y'_t\,x''_t}{x'^3_t}\right) =$$

$$= \frac{x'_t\,(y'''_t\,x'_t - y'_t\,x'''_t) - 3\,x''_t\,(y''_t\,x'_t - x''_t\,y'_t)}{x'^5_t}, \text{ ecc.}$$

II. Con le notazioni precedenti, è ben evidente che non si possono viceversa calcolare le x'_t, y'_t, x''_t, y''_t, ... quando soltanto si conoscano le y'_x, y''_x, ..., perchè tale questione è indeterminata. Il problema resta determinato se aggiungiamo qualche condizione per la variabile t, se, p. es., supponiamo t scelto in guisa che $x'^2_t + y'^2_t = 1$ (*).

Sarà :

$$x'_t = \frac{dx}{dt} \quad , \quad y'_t = \frac{dy}{dt} \text{ , donde (per la } x'^2_t + y'^2_t = 1\text{, ossia}$$

$\sqrt{dx^2 + dx^2} = dt$) si trae :

$$x'_t = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2_x}},$$

$$y'_t = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{y'_x}{\sqrt{1 + y'^2_x}}.$$

È :

$$x''_t = \frac{dx'_t}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dx'_t}{dx} = x'_t \frac{dx'_t}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2_x}} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2_x}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2_x}} \left[-(1 + y'^2_x)^{-\frac{3}{2}} y'_x\, y''_x\right] = -\frac{y'_x\, y''_x}{(1 + y'^2_x)^2}.$$

$$y''_t = \frac{dy'_t}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dy'_t}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \frac{d}{dx}\left(\frac{y'_x}{\sqrt{1 + y'^2_x}}\right) =$$

$$= \frac{y''_x}{1 + y'^2_x} - \frac{y'^2_x\, y''_x}{(1 + y'^2_x)^2} = \frac{y''_x}{(1 + y'^2_x)^2}, \text{ ecc.}$$

III. Sia z una funzione di x, y; le quali siano a loro volta funzioni di due variabili u, v; cosicchè z si possa considerare come funzione di u, v. Conoscendo le

$$z'_x,\ z'_y\ z''_{xx},\ z''_{xy},\ .....,\ x'_u,\ x''_{uu},\ x'_v,\ .....,$$

(*) Ciò equivale, come vedremo, a supporre che (x, y) sia punto generico di una curva, l'arco della quale, misurato a partire da un punto fisso, abbia la lunghezza t.

si calcolino le z'_u, z'_v, z''_{uu} ecc. È per il teor. del § 83:

$$z'_u = \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

$$z'_v = \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Queste formole si possono anche ottenere, notando che:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial x}\left[\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right] + \frac{\partial z}{\partial y}\left[\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right) dv,$$

e confrontando con:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Così con metodo analogo:

$$z''_{uu} = \frac{\partial z'_u}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right] = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} +$$

$$+ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial x}{\partial u}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right] +$$

$$+ \frac{\partial y}{\partial u}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\right], \text{ ecc.}$$

(Si ponga, p. es., $u = \rho$, $v = \theta$, $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$).

Oss. È facile anche calcolare le x'_u, x'_v, y'_u, y'_v quando siano note le u'_x, u'_y, v'_x, v'_y. Infatti, pensate le x, y come funzioni delle u, v funzioni delle x, y, si ha:

$$1 = x'_x = x'_u\,u'_x + x'_v\,v'_x,$$
$$0 = x'_y = x'_u\,u'_y + x'_v\,v'_y;$$

da cui, risolvendo, si ricavano tosto le x'_u, x'_v. In modo simile si calcolano le y'_u, y'_v.

IV. Talvolta si studia una stessa curva, usando in un primo studio certe coordinate x, y, in un altro calcolo altre coordinate u, v [p. es., le coordinate polari $u = \rho$, $v = \theta$, dove

$x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$]. Nel primo caso l'equazione della curva sia $y = f(x)$; nel secondo $u = \varphi(v)$. Si calcolino u'_v, u''_v, ecc., conoscendo le y'_x, y''_x, ecc. Naturalmente devono essere note le formole che permettono di passare dall'uno all'altro sistema di coordinate: $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$.

Sarà:

$$u'_v = \frac{du}{dv} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy}{\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} \partial y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx}}{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dx}}$$

$$u''_v = \frac{du'_v}{dv} = \frac{1}{\frac{dv}{dx}} \frac{du'_v}{dx} = \frac{1}{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} y'_x} \left[\frac{\partial u'_v}{\partial x} + \frac{\partial u'_v}{\partial y} y'_x \right].$$

I valori di $\frac{\partial u'_v}{\partial x}$, $\frac{\partial u'_v}{\partial y}$ si ricavano facilmente dalla precedente equazione, ecc.

Come esempio particolare studiamo le relazioni che passano tra le derivate delle $y = f(x)$, $\rho = \varphi(\theta)$, supposto che queste equazioni rappresentino la stessa curva in coordinate cartesiane e polari. È:

$$f'(x) = y'_x = \frac{\operatorname{sen} \theta \, d\rho + \rho \cos \theta \, d\theta}{\cos \theta \, d\rho - \rho \operatorname{sen} \theta \, d\theta} = \frac{\operatorname{tg} \theta \, \varphi'(\theta) + \rho}{\varphi'(\theta) - \rho \operatorname{tg} \theta};$$

$$f''(x) = y''_x = \frac{1}{\cos \theta \, \varphi'(\theta) - \rho \operatorname{sen} \theta} \left\{ \frac{\partial y'_x}{\partial \rho} \varphi'(\theta) + \frac{\partial y'_x}{\partial \theta} \right\} =$$

$$= \frac{-\rho \varphi'' + 2 \varphi'^2 + \rho^2}{[\cos \theta \, \varphi'(\theta) - \rho \operatorname{sen} \theta]^3}.$$

§ 108. — Cambiamento della variabile d'integrazione negli integrali definiti o multipli. Integrali superficiali in coordinate polari.

Per quanto riguarda gli integrali definiti nulla v'è da aggiungere alla regola di integrazione per sostituzione già esposta al § 75, β, pag. 247.

Si tratta di estendere questa regola agli integrali multipli.

Con metodo affatto analogo a quello dell'ora citato § 75, si dimostra (cfr. il § 101, γ, pag. 334):

Se I, H *sono due campi in corrispondenza biunivoca continua, in modo che le funzioni additive dei pezzi* τ *di I si possano considerare come funzioni additive dei pezzi* k *di* H, *se* F *è una funzione continua dei punti di I, e quindi anche dei punti di* H, *allora:*

$$\int_I F\, d\tau = \int_H \left(F \frac{d\tau}{dk}\right) dk. \tag{1}$$

Ma l'importanza di questo teorema si potrà vedere soltanto dalle applicazioni.

Sia I un campo finito del piano xy; per fissar le idee, l'origine (*) sia esterna al contorno od ai contorni di I; si possono determinare allora le coordinate polari ρ e θ di un punto generico di I, così che ρ e θ siano funzioni continue delle x, y e viceversa. Poniamo $\rho = X$, $\theta = Y$, considerando le X, Y come coordinate cartesiane di un punto posto in un altro piano P. Ad ogni punto di I corrisponderà allora uno e un solo punto di questo piano P. E i punti di P, che corrispondono a punti di I, riempiranno tutta una regione H di P.

(Notiamo che $x = \rho \cos\theta = X \cos Y$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta = X \operatorname{sen} Y$).

Una funzione $F(x, y)$ continua delle x, y diverrà una funzione continua $F(X \cos Y, X \operatorname{sen} Y)$ delle X, Y.

Se τ e k sono due pezzi corrispondenti di I e di H, la derivata $\dfrac{d\tau}{dk}$ si trova, come ora vedremo, uguale ad $X = \rho$. Cosicchè la (1) diventa:

$$\int_I F(x, y)\, d\tau = \int_H F(X \cos Y, X \operatorname{sen} Y)\, X\, dk.$$

Per i risultati dei §§ 103-105 questa formola si può scrivere:

$$\int_I dx \int F(x, y)\, dy = \int_H dX \int F(X \cos Y, X \operatorname{sen} Y)\, X\, dY =$$
$$= \int_H dY \int F(X \cos Y, X \operatorname{sen} Y)\, X\, dX$$

o anche:

$$(2) \quad \int dx \int F(x, y)\, dy = \int d\rho \int F(\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta)\, \rho\, d\theta =$$
$$= \int d\theta \int F(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\, \rho\, d\rho.$$

(*) L'origine è un punto eccezionale per il sistema delle coordinate polari.

Prima di dimostrare che $\frac{d\tau}{dk} = \rho$, vogliamo fare alcune osservazioni:

Oss. I[a]. Si noti che NON si passa dal primo al secondo o terzo membro di questa formola sostituendo a $dx = d(\rho \cos\theta)$ ed a $dy = d(\rho \operatorname{sen}\theta)$ i loro valori $\cos\theta\, d\rho - \rho \operatorname{sen}\theta\, d\theta$ e $\rho\cos\theta\, d\theta + \operatorname{sen}\theta\, d\rho$; come potrebbe sembrare a un lettore inesperto. In questo caso il $d\tau$ che compare sotto il segno di integrazione, e NON i dx, dy si possono trasformare come differenziali veri e proprii (*).

Oss. II[a]. Si possono calcolare il secondo e terzo membro della nostra formola, senza neanche pensare al campo H, in modo analogo a quello seguìto nei §§ 103-105 per calcolare il 1° membro. Per es., $\int d\theta \int F\rho\, d\rho$ si può calcolare così: Si consideri una linea $\theta = \text{cost.}$ (che è una retta uscente dall'origine). Su di essa la F diventa funzione della sola ρ; si calcoli $\int F\rho\, d\rho$ esteso al segmento, o ai segmenti che la nostra figura I determina su tale linea. Tale integrale è una funzione di θ che si integrerà tra il minimo e il massimo valore di θ in I.

(Si noti che le linee $\theta = \text{cost.}$ e $\rho = \text{cost.}$ hanno per immagine in H le rette $Y = \text{cost.}$ ed $X = \text{cost.}$ parallele agli assi coordinati).

Vogliamo ora dimostrare che $\frac{d\tau}{dk} = X = \rho$. Consideriamo un pezzo k di H limitato da due parallele all'asse delle Y, e due parallele all'asse X. Siano $X, X + \Delta X$ e $Y, Y + \Delta Y$ i corrispondenti valori delle X, Y. Tale pezzo è un rettangolo, la cui area $k = \Delta X \Delta Y$.

L'immagine di questo pezzo sul piano xy è un quadrangolo τ limitato da due cerchi col centro nell'origine e raggi $X, X + \Delta X$, e inoltre da due rette uscenti dall'origine formanti con l'asse delle x rispettivamente gli angoli $Y, Y + \Delta Y$ e quindi formanti tra loro l'angolo ΔY. La corona circolare limitata dai citati due cerchi ha per area

$$\pi \{ (X + \Delta X)^2 - X^2 \} = \pi [2 X \Delta X + (\Delta X)^2];$$

l'area τ di τ sarà dunque data dalla proporzione:

$$\tau : \pi [2 X \Delta X + (\Delta X)^2] = \Delta Y : 2\pi$$

(*) Si noti infatti che, se la prima integrazione si esegue, p. es., rispetto alla x, si deve considerare la y come costante; perciò, nel passare alle ρ, θ, si dovrebbe a dx sostituire il suo valore ottenuto nell'ipotesi che $dy = d(\rho \operatorname{sen}\theta) = 0$.

cosicchè:

$$\tau = \left[X \Delta X + \frac{1}{2} (\Delta X)^2 \right] \Delta Y = X \Delta X \Delta Y + \frac{1}{2} (\Delta X)^2 \Delta Y.$$

Dunque

$$\frac{\tau}{k} = X + \frac{1}{2} \Delta X = \rho + \frac{1}{2} \Delta \rho.$$

Per $\Delta \rho = 0$ tale rapporto ha pure per limite ρ.

Si potrebbe dire che τ vale $X \Delta X \Delta Y$, a meno di infinitesimi di ordine superiore.

Bisognerebbe completare questa dimostrazione, considerando campi k di forma qualsiasi; noi ce ne dispensiamo ricordando solo al lettore che gli stessi metodi, con cui nel § 105 abbiamo dimostrato l'esattezza di una formola analoga in coordinate cartesiane ortogonali, potrebbero provare la formola attuale in coordinate polari (cfr. più avanti in questo stesso §).

OSSERVAZIONE.

Si potrebbero anche applicare i metodi del § 103, in cui il campo era diviso in pezzi con rette parallele agli assi, cioè con linee di equazione $x =$ cost., oppure $y =$ cost. Si dovrebbe ora invece dividere il campo in pezzetti con linee $\rho =$ cost. e $\theta =$ cost. (cerchi col centro nell'origine e rette uscenti dall'origine). Prescindendo dai pezzi sul contorno, gli altri sono quadrangoli la cui area vale, come vedemmo più sopra, $\rho\, d\rho\, d\theta + \frac{1}{2} d\rho^2\, d\theta$. Se F è la funzione da integrare, il suo integrale si trova coi metodi del § 103 uguale al limite di

$$\sum F \rho\, d\rho\, d\theta + \frac{1}{2} \sum F\, d\rho^2\, d\theta$$

per $d\rho = d\theta = 0$. (Indico con F un valore assunto da F in un punto di ogni pezzetto). Il primo addendo si prova (§ 105) tendere ad $\iint F \rho\, d\rho\, d\theta$; il secondo addendo tende a zero; perchè, se H è il massimo di $|F|$, ed ε il massimo valore di $d\rho$, allora:

$$\left| \sum F\, d\rho^2\, d\theta \right| < H\varepsilon \sum d\rho\, d\theta = H\varepsilon \sum d\rho \sum d\theta.$$

Ora $\Sigma\, d\rho$ tende alla differenza dei valori massimo e minimo, che ρ assume nel campo considerato; $\Sigma\, d\theta$ non supera 2π. Poichè ε tende a zero, segue tosto che $\Sigma F d\rho^2 d\theta$ tende a zero. c. d. d.

D'altra parte sia questo risultato, sia quello del prossimo paragrafo saranno dimostrati in futuro capitolo con metodi meno diretti, ma di una estrema semplicità.

Si può anche generalizzare il risultato del § 104 interpretando geometricamente la (2) nel seguente modo (per il caso $F \geq 0$):

Il volume di un cilindroide, o di un solido decomponibile in un numero finito di cilindroidi si ottiene integrando rispetto a ρ l'area della sezione eseguita con un cilindro circolare retto di asse invariabile e di raggio variabile ρ.

Sarà un esercizio utilissimo il riconoscere come si possa ottenere facilmente una dimostrazione completa del nostro risultato con l'applicazione dello stesso metodo usato al § 105 in caso analogo.

Infatti, seguendo questa via, si riconosce tosto essere sufficiente provare che l'area di σ è data, p. es., da $\int d\theta \int \rho\, d\rho$ esteso al campo σ. Ora a pag. 342, per dimostrare il teorema analogo che tale area vale $\int dx \int dy$, siamo partiti dalla formola che dà l'area di un rettangoloide, cioè di una figura limitata dalle linee $y = 0$, $x = a$, $x = b$ e da una linea $y = f(x)$.

Per il caso attuale basterà similmente applicare la formola data al § 95 δ, per l'area della figura limitata dal punto $\rho = 0$, dalle linee $\theta = a$, $\theta = b$ e da una curva $\rho = F(\theta)$.

Formole analoghe si dimostrano per gli integrali tripli. Ricordiamo particolarmente i seguenti sistemi notevoli di coordinate nello spazio.

1° *Coordinate cilindriche* ρ, θ, z legate alle coordinate cartesiane ortogonali dalle $x = \rho \cos\theta$; $y = \rho \operatorname{sen}\theta$; $z = z$. Un tale sistema equivale ad addottare coordinate polari ρ, θ nel piano xy, conservando la terza coordinata z. Tali coordinate si chiamano *cilindriche* perchè $\rho =$ cost. è l'equazione di un cilindro circolare retto con generatrici parallele all'asse delle z. Si trova

$$\iiint F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint F(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, z)\ \rho\, d\rho\, d\theta\, dz.$$

2° *Coordinate polari* ρ, θ, φ (*nello spazio*) legate alle coordinate cartesiane ortogonali dalle:

$$x = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \quad ; \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \quad ; \quad z = \rho\cos\theta.$$

Il raggio vettore $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ è la distanza del punto dall'origine. L'angolo θ è la *colatitudine* (complemento della latitudine, quando si assuma il piano xy a piano equatoriale).

L'angolo φ è la longitudine (contata a partire dal piano xz come meridiano iniziale). Si trova:

$$\iiint F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \iiint F(\rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \rho \cos \theta)\, \rho^2 \operatorname{sen} \theta\, d\theta\, d\rho\, d\varphi,$$

come si prova osservando che il volume racchiuso tra due sfere di raggio ρ e $\rho + d\rho$, tra due coni di colatitudine θ e $\theta + d\theta$, e tra due semipiani di longitudine φ e $\varphi + d\varphi$ vale $\rho^2 \operatorname{sen} \theta\, d\theta\, d\rho\, d\varphi$ a meno di infinitesimi d'ordine superiore.

§ 108 *bis*. — **Integrali superficiali in coordinate generali.**

I risultati di questo paragrafo saranno dimostrati più avanti in modo semplice benchè indiretto. Noi qui faremo invece delle ipotesi analoghe a quelle fatte ai §§ 103 e seg., che del resto sarebbe facile giustificare in modo diretto.

I risultati a cui giungeremo, si debbono riguardare come l'estensione del metodo di integrazione in coordinate polari a coordinate qualsiasi. Useremo, p. es., i metodi intuitivi del § 103.

Sia I un'area del piano xy; e siano X, Y due variabili: $X = X(x, y)$, $Y = Y(x, y)$, funzioni delle x, y in I.

Viceversa le x, y si possano considerare come funzioni $x(X, Y)$ ed $y(X, Y)$ delle X, Y, così che un punto di I si possa determinare tanto dando i corrispondenti valori delle x, y, quanto quelli delle X, Y.

Dividiamo I con linee $X =$ cost., $Y =$ cost., indicando con dX, dY gli incrementi che subisce la X o la Y per passare da una tale linea alla successiva; sostituiamo poi a quelli dei quadrangoli curvilinei tutti interni a I limitati da due linee consecutive $X =$ cost., e $Y =$ cost. *il quadrangolo rettilineo Q che ha gli stessi vertici*. L'area I sarà così divisa in

α) quadrangoli Q rettilinei tutti interni a I,

ed in

β) poligoni P curvilinei, parte del contorno dei quali appartiene al contorno di I.

Noi ammetteremo:

1° Il contributo portato alle nostre somme da questi ultimi poligoni P tende a zero, quando i dX, dY tendono contemporaneamente a zero.

2° Per calcolare i limiti che incontreremo (quando i dX, dY tendono contemporaneamente a zero) si possono far tendere a zero prima i dX, poi i dY o viceversa.

Uno dei quadrangoli *rettilinei* Q ha i vertici posti sulle intersezioni di una linea $X =$ cost. e $X + dX =$ cost. con due linee $Y =$ cost. e $Y + dY =$ cost. I suoi vertici A, B, C, D, saranno perciò i punti

$$\begin{aligned}
A &= [x(X, Y), y(X, Y)];\\
B &= [x(X + dX, Y), y(X + dX, Y)];\\
C &= [x(X, Y + dY), y(X, Y + dY)];\\
D &= [x(X + dX, Y + dY), y(X + dX, Y + dY)].
\end{aligned}$$

E la sua area sarà la somma delle aree dei triangoli ABC, BCD (*). L'area del 1° vale (per nota formola di Geometria analitica) il valore assoluto di

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x(X, Y) & y(X, Y) & 1\\ x(X + dX, Y) & y(X, + dX, Y) & 1\\ x(X, Y + dY) & y(X, Y + dY) & 1 \end{vmatrix}$$

(*) Suppongo per semplicità che A e D sieno da bande opposte della retta BC. Come abbiamo già detto, una dimostrazione completa sarà data più tardi.

Supposto che le x, y abbiano derivate prime e seconde finite e continue (*), e ricordando la formola di Taylor

$$x(X+dX, Y) = x(X, Y) + x'_X(X, Y)dX + \frac{1}{2}\, x''_{XX}(X+\theta\, dX, Y)dX^2 \,(0 < \theta < 1).$$

ed analoghe, si trova che tale area vale il valore assoluto di

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x'_X(X, Y) & x'_Y(X, Y) \\ x'_X(X, Y) & y'_Y(X, Y) \end{vmatrix} dX\, dY + \frac{\alpha}{2}\, dX\, dY$$

dove α è una quantità che (se con K indichiamo una costante positiva maggiore in valore assoluto di tutti i valori delle derivate prime e seconde delle x, y) soddisfa alla

$$|\alpha| < K^2(dX + dY + dX\, dY).$$

Altrettanto trovasi per il triangolo BCD. Cosicchè l'area del quadrangolo rettilineo $ABCD$ vale il valore assoluto di

$$\left(\frac{d\,(x, y)}{d\,(X, Y)} + \beta\right) dX\, dY,$$

dove con $\dfrac{d\,(x, y)}{d\,(X, Y)}$ indico il valore in A del cosidetto *Jacobiano*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial X} & \dfrac{\partial y}{\partial X} \\ \dfrac{\partial x}{\partial Y} & \dfrac{\partial y}{\partial Y} \end{vmatrix}$$

e con β indico una quantità soddisfacente alla

$$|\beta| < K^2(dX + dY + dX\, dY). \tag{1}$$

Moltiplicando tale area per un valore F, che la funzione $F(x, y)$ assume in tale quadrangolo, e sommando tutti i prodotti così ottenuti, si trova

$$\Sigma\, F \left|\frac{d\,(x, y)}{d\,(X, Y)}\right| dX\, dY + \Sigma\, \beta\, F\, dX\, dY.$$

In virtù della (1) e con metodi analoghi a quelli dell'osserv. del § 108 si trova che il secondo addendo tende a zero, e che (cfr. § 103):

L'integrale $\int F d\tau$ *è uguale a:*

$$\int dY \int F \left|\frac{d\,(x, y)}{d\,(X, Y)}\right| dX = \int dX \int F \left|\frac{d\,(x, y)}{d\,(X, Y)}\right| dY.$$

Se $X = \rho$, $Y = \theta$, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$, allora

$$\left|\frac{d\,(x, y)}{d\,(X, Y)}\right| = \rho.$$

E si ritorna alla formola del precedente § 108.

Oss. Se noi consideriamo X, Y come coordinate cartesiane ortogonali in un altro piano P, e indichiamo con H la regione di P, che è luogo dei punti corrispondenti ai punti di I, se τ e k indicano al solito le aree di due pezzi corrispondenti di I e di H, allora il valore assoluto del precedente Jacobiano vale naturalmente la derivata $\dfrac{d\tau}{dk}$. Dimostrando direttamente questa proposizione, si avrebbe un'altra dimostrazione dei risultati di questo §.

(*) Queste condizioni si potrebbero rendere meno restrittive.

CAPITOLO XVIII.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

§ 109. — Considerazioni e definizioni fondamentali.

Il calcolo integrale si propone il seguente problema fondamentale: Conosciuta la derivata di una funzione, come si può calcolare questa funzione?

Ora possiamo proporci il seguente problema più generale: Sia y una funzione di una o più variabili indipendenti; consideriamone le derivate di primo, secondo..... ennesimo ordine, e supponiamo che sia nota soltanto qualche relazione fra la y, le variabili indipendenti e queste sue derivate. Ci domandiamo:

In quanto può una tale relazione servire per determinare la funzione incognita y?

Una relazione di questo genere si chiama *una equazione differenziale*, e il problema che vi si riferisce, e che noi abbiamo enunciato, si chiama: *il problema dell'integrazione delle equazioni differenziali.*

Cominciamo a porre una distinzione fondamentale. Può avvenire che le variabili indipendenti si riducano ad una sola e quindi che la relazione data sia una relazione fra la funzione, la variabile e le derivate di ordine 1, 2, ..., n della funzione rispetto all'unica variabile. Oppure può darsi che le variabili indipendenti siano più d'una; e in tal caso le derivate, che figurano nella nostra equazione, saranno derivate parziali.

Nel primo caso l'equazione differenziale si dirà *a derivate ordinarie*, nel secondo si dirà *a derivate parziali.*

Nell'uno e nell'altro caso si chiamerà *ordine n* dell'equazione quello della derivata di più alto ordine che in essa comparisce.

Può darsi che invece di una sola relazione tra le variabili, la funzione e le sue derivate ne siano date più, da considerarsi come simultanee; allora si ha ciò che si chiama *sistema di equazioni differenziali.* Può anche darsi che si abbiano sistemi di equazioni differenziali con più funzioni incognite.

L'analisi offre continui esempi di problemi, la cui risoluzione dipende da equazioni differenziali. Del resto è ben noto che anche la fisica, la meccanica, ecc. offrono innumerevoli esempi di tali problemi, perchè un gran numero di leggi fisiche si enunciano precisamente mediante equazioni differenziali. La legge di gravitazione universale, p. es., ci dà un legame tra le distanze dei centri dei corpi celesti e le rispettive accelerazioni, cioè le derivate seconde rispetto al tempo delle coordinate di tali centri. Già i problemi che abbiamo risolto ai §§ 90, 92, 93 sono altrettante integrazioni di particolari equazioni o sistemi di equazioni differenziali.

Così p. es., il problema di ricercare una funzione z di x e y tale che la sua derivata rispetto a x sia $M(x, y)$, e la sua derivata rispetto a y sia $N(x, y)$, consiste nell'integrazione del sistema di due equazioni differenziali del primo ordine a derivate parziali:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = M(x, y), \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = N(x, y). \end{cases}$$

La ricerca delle funzioni z di x e y, per cui la derivata parziale mista fatta prima rispetto a x e poi rispetto a y sia uguale a $P(x, y)$, non è altro che l'integrazione dell'equazione differenziale del secondo ordine a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = P(x, y).$$

La ricerca delle funzioni che hanno per derivata $f(x)$ si riduce all'integrazione dell'equazione differenziale ordinaria del primo ordine:

$$\frac{dz}{dx} = f(x). \tag{1}$$

È chiaro che la (1) è l'equazione differenziale di tipo più semplice: su di essa ci siamo lungamente trattenuti, formando la sua risoluzione l'oggetto precipuo del calcolo integrale. Ma è pure ben manifesto che, se per l'integrazione della (1) ci trovavamo assai spesso nel caso di non saperla eseguire che per approssimazione, per l'integrazione di equazioni differenziali più complesse avverrà generalmente altrettanto. Noi ci limiteremo esclusivamente allo studio di particolari tipi di equazioni.

Lo studio generale delle equazioni differenziali costituisce da solo uno dei rami più estesi delle matematiche, e riceve continue applicazioni alle scienze fisiche, e in genere a tutte le scienze che hanno per oggetto enti suscettibili di misura.

§ 110. — Equazioni differenziali, la cui integrazione è ridotta a quella di un differenziale esatto.

α) Sia f una funzione delle due variabili x, y; trovare tutte le funzioni y della x che soddisfano a un'equazione del tipo

$$f(x, y) = \text{cost.} \tag{1}$$

equivale a trovare tutte le funzioni y definite implicitamente dalla (1).

È chiaro che per tutte e sole le funzioni definite implicitamente dalla (1) si ha che, sostituendo nel primo membro della (1) in luogo di y il suo valore e derivando la funzione di x che ne risulta, si ottiene lo zero. In altre parole la (*)

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2}$$

vale per tutte e sole le funzioni y *definite implicitamente dalla* (1).

La (2) è un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine: tutte le funzioni y che la risolvono sono tutte e sole quelle che soddisfano alla (1).

Si abbia ora l'equazione differenziale del tipo:

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{3}$$

la quale, moltiplicata per dx, si può scrivere:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{4}$$

Se il primo membro di (4) è un differenziale esatto, se esiste cioè una $f(x, y)$ tale che:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y),$$

(*) Si suppongono qui, e nei seguenti §§, finite e continue tutte le funzioni, e loro derivate, che si presentano nel calcolo.

per le considerazioni precedenti tutte e sole le funzioni y della x che risolvono la (3) o la (4) sono le funzioni rappresentate implicitamente dall'equazione

$$f(x, y) = C,$$

dove C è una costante affatto arbitraria (*).

Esempio.

Si voglia, ad esempio, risolvere l'equazione differenziale ordinaria del primo ordine:

$$2\,y + x^3 + (2\,x + y^2)\,y' = 0\,; \tag{5}$$

si vogliano cioè trovare tutte e sole le funzioni y della x, che la soddisfano. Poichè $y' = \dfrac{dy}{dx}$, la (5) si può scrivere moltiplicata per dx:

$$(2\,y + x^3)\,dx + (2\,x + y^2)\,dy = 0.$$

Il primo membro è un differenziale esatto, poichè:

$$\frac{\partial}{\partial y}(2\,y + x^3) = 2 = \frac{\partial}{\partial x}(2\,x + y^2).$$

Le funzioni f, per cui:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\,y + x^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2\,x + y^2,$$

si ottengono integrando $2\,y + x^3$ rapporto a x e aggiungendo una funzione di y tale che la funzione che ne risulta abbia per derivata rapporto a y la $2\,x + y^2$.

Sarà dunque:

$$f = 2\,x\,y + \frac{x^4}{4} + Y,$$

essendo Y tale che:

$$\left(2\,x\,y + \frac{x^4}{4} + Y\right)'_y = 2\,x + y^2.$$

(*) Più precisamente la C deve soddisfare a questa unica condizione che la $f\,(x, y) = C$ sia risolubile rispetto alla y. Così, p. es., se per $x = a$, $y = b$ le f'_x, f_y sono finite e continue, ed $f'_y \neq 0$, si può porre $C = f\,(a, b)$. (Cfr. § 84, β).

Ma:

$$\left(2\,x\,y + \frac{x^4}{4} + Y\right)'_y = 2\,x + Y'.$$

Dovrà dunque essere:

$$2\,x + y^2 = 2\,x + Y',$$

ossia:

$$Y' = y^2,$$

cioè:

$$Y = \frac{y^3}{3} + \text{cost.}$$

Sarà dunque:

$$f = 2\,x\,y + \frac{x^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \text{cost.}$$

E le funzioni y di x che risolvono la (5) sono le funzioni definite implicitamente dall'equazione:

$$2\,x\,y + \frac{x^4}{4} + \frac{y^3}{3} = C.$$

dove C è una costante arbitraria.

β) Se nella (3) la M e la N sono rispettivamente funzioni della sola x e della sola y, il primo membro della (4) è certamente un differenziale esatto (§ 90, β). Le funzioni f che hanno per differenziale il primo membro della (4) sono espresse da:

$$\int M\,dx + \int N\,dy + \text{cost.}$$

e le funzioni y che soddisfano l'equazione differenziale proposta sono quelle definite implicitamente dall'equazione:

$$\int M\,dx + \int N\,dy = \text{cost.}$$

Simili equazioni differenziali si dicono *a variabili separate* (cfr. § 90, β, pag. 299).

Così, ad esempio, si abbia da integrare l'equazione differenziale ordinaria del primo ordine:

$$-\operatorname{sen} x\,dx + y\,dy = 0.$$

Il primo membro è un differenziale esatto a variabili separate.

Le funzioni y che soddisfano l'equazione differenziale sono date implicitamente dall'equazione:

$$\cos x + \frac{y^2}{2} = C$$

dove C è costante arbitraria.

Risolvendo l'ultima equazione rispetto a y si ha:

$$y = \pm \sqrt{2\,C - 2\cos x}.$$

Talvolta, pur non essendo il primo membro della (4) un differenziale esatto a variabili separate, si può con facili artifici ridurlo tale.

Così, ad esempio, si abbia da risolvere l'equazione differenziale:

$$\sqrt{x\,y}\,dx + \sqrt[3]{x\,y}\,dy = 0,$$

ossia:

$$\sqrt{x}\,\sqrt{y}\,dx + \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y}\,dy = 0.$$

Dividendo ambo i membri dell'equazione per $\sqrt{y}\,\sqrt[3]{x}$ (*) si ha:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt{y}}\,dy = 0. \tag{6}$$

Colla divisione operata abbiamo ricondotto l'equazione differenziale proposta al tipo precedentemente esaminato, onde, integrando la (6), si ha che le funzioni y che la risolvono sono date implicitamente dall'equazione:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \int \frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt{y}}\,dy = C \quad (C = \text{cost.})$$

ossia dalla:

$$\frac{6}{7}\,x^{\frac{7}{6}} + \frac{6}{5}\,y^{\frac{5}{6}} = C.$$

da cui:

$$y = \left(\frac{5}{6}\,C - \frac{5}{7}\,\sqrt[6]{x^7}\right)^{\frac{6}{5}}.$$

(*) Questa divisione è lecita (se x è generico) supposto $y \neq 0$. Bisognerà poi esaminare a parte se la $y = 0$ è (come avviene appunto nel caso nostro) una soluzione della nostra equazione.

Le funzioni y rappresentate dalla formola precedente insieme con la soluzione $y = 0$ sono tutte e sole le funzioni che risolvono l'equazione differenziale che ci eravamo proposti di studiare.

In generale si può dire che, se si ha un'equazione differenziale del tipo:

$$XY\,dx + \xi\eta\,dy = 0, \tag{7}$$

dove X, ξ, Y, η sono funzioni le prime di x e le seconde di y, si può facilmente rendere il primo membro della (7) un differenziale esatto a variabili separate, dividendo ambo i membri della (7) per $\xi\,Y$.

ESEMPIO.

Consideriamo la pila di un ponte; ne sia S_0 la sezione superiore; sia x la distanza di un punto della pila da S_0, e sia $S(x)$ la sezione della pila posta alla distanza x da S_0. Si richiede talvolta nella tecnica che l'incremento $S(x+h) - S(x)$ della sezione sia proporzionale al volume

$$\int_x^{x+h} S(x)\,dx$$

di quella parte di pila, che è racchiusa tra le sezioni poste alle distanze $x, x+h$ da S_0 (*). Sarà perciò

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = k\,\frac{1}{h}\int_x^{x+h} S(x)\,dx$$

dove k è una costante dipendente dal tipo di costruzione adottato.

Passando al limite per $h = 0$ si trova:

$$S'(x) = k\,S(x),$$

cioè:

$$\frac{dS}{S} = k\,dx$$

donde:

$$\log S = k\,x + \text{cost.}$$

Poichè $S = S_0$ per $x = 0$, sarà:

$$\log S = k\,x + \log S_0$$
$$S = S_0\,e^{kx}.$$

(*) E ciò, perchè generalmente l'area di una tale sezione si fa proporzionale al carico complessivo (del ponte e della stessa pila), che gravita su tale sezione. Sulla S_0 gravita, p. es., soltanto parte del ponte.

γ) Altro tipo di equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che si può ridurre al tipo precedente, è quello in cui la $M(x, y)$ e la $N(x, y)$ che figurano nella (4) siano funzioni omogenee dello stesso grado n.

Ricordo che una funzione di x, y si dice funzione omogenea di grado n se è uguale al prodotto di x^n per una *funzione di* $\frac{y}{x}$.

Così, ad esempio: $x^2 + y^2 + xy$ è una funzione omogenea di grado 2, perchè è uguale a

$$x^2\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}\right).$$

È funzione omogenea di grado $\frac{1}{2}$ la

$$\sqrt{x + y}$$

poichè:

$$\sqrt{x + y} = \sqrt{x\left(1 + \frac{y}{x}\right)} = x^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Se nella (4):

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0,$$

la M e N sono funzioni omogenee dello stesso grado n, è facile indicare un metodo generale di integrazione. Infatti introduciamo una nuova variabile z in luogo di y, ponendo:

$$\frac{y}{x} = z. \tag{8}$$

Dividendo la (4) per x^n, i coefficienti di dx e dy risultano funzioni del solo rapporto $\frac{y}{x}$; cioè si ha un'equazione del tipo:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0. \tag{9}$$

Intanto da:

$$\frac{y}{x} = z \quad \text{ovvero} \quad y = zx,$$

differenziando si ottiene:

$$dy = x\,dz + z\,dx. \tag{10}$$

Sostituendo in (9), si ottiene:

$$\varphi(z)\,dx + \psi(z)\,(xdz + zdx) = 0,$$

donde, raccogliendo a fattori comuni dx e dz, si ha:

$$[\varphi(z) + z\psi(z)]\;dx + x\psi(z)\,dz = 0$$

che, separando le variabili, diventa:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(z)\,dz}{\varphi(z) + z\,\psi(z)} = 0, \tag{11}$$

che è a variabili separate, e noi sappiamo quindi integrare.

Sia, p. es., data l'equazione:

$$dx\left\{1 - \frac{x\,y}{x^2 + y^2}\right\} + \frac{x^2}{x^2 + y^2}\,dy = 0.$$

Posto $\frac{y}{x} = z$, essa diventa:

$$\left\{1 - \frac{z}{1 + z^2}\right\}dx + \frac{1}{1 + z^2}\,(xdz + zdx) = 0$$

ossia:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{1 + z^2} = 0.$$

Integrando si ottiene $\log|x| + \operatorname{arctg} z = C\,(C = \text{cost.})$. Donde

$z = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\,[C - \log|x|]$ e quindi $y = x\operatorname{tg}\,[C - \log|x|]$.

δ) Noi abbiamo visto che la

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{12}$$

è risolubile mediante quadrature, se il primo membro è un differenziale esatto, e in particolare se le variabili sono separate (o si possono con qualche artificio separare).

Se il primo membro di (12) non è un differenziale esatto, ci si può chiedere se è possibile trovare una funzione $\rho(x, y)$ delle x, y, che, moltiplicata per esso, lo renda un differenziale esatto. Una tale funzione ρ si dice essere un *moltiplicatore* di $Mdx + Ndy$.

È chiaro che, se in qualche modo si può giungere a trovare un tale moltiplicatore, allora la risoluzione, o, come si suol dire, l'integrazione della (12) è ricondotta a calcolare degli integrali indefiniti, cioè è ridotta alle quadrature.

Affinchè ρ sia un moltiplicatore, ossia affinchè $\rho\, Mdx + \rho\, Ndy$ sia un differenziale esatto, deve essere:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho\, M) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho\, N), \text{ ossia:}$$

$$\rho\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + M\frac{d\rho}{dy} - N\frac{d\rho}{dx} = 0.$$

Questa è un'equazione *alle derivate parziali* per la ρ; e il problema di risolvere le equazioni a derivate parziali è assai più complicato del problema di risolvere le equazioni a derivate ordinarie.

Il metodo di cercare un moltiplicatore riesce perciò utile solo in casi particolari.

1° Esista, p. es., un moltiplicatore ρ funzione della sola x. Essendo in tal caso $\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$, la nostra equazione diventa

$$\frac{d \log |\rho|}{dx} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

E, affinchè si possa risolvere quest'equazione con una funzione ρ della sola x, anche il secondo membro $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ deve essere funzione della sola x.

Se così avviene, il problema è dunque ridotto alle quadrature.

2° Così pure, se $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ è funzione della sola y, esiste un moltiplicatore ρ funzione della sola y; e il problema è ancora ridotto alle quadrature.

Così, per esempio, sia data l'equazione $(x + y)\, dx + dy = 0$. È $x + y = M$, $N = 1$, $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 1$ è costante, non dipende da y; esiste un moltiplicatore ρ funzione della sola x definito dalla $\frac{d \log |\rho|}{dx} = 1$.

Si può dunque porre $\rho = e^x$; l'equazione diventa:

$$e^x (x + y)\, dx + e^x\, dy = 0.$$

Posto $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x (x + y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^x$, si trova $z = y e^x + \varphi(x)$, dove φ è funzione di x, tale che $[y\, e^x + \varphi(x)]'_x = e^x (x + y)$, ossia $\varphi'(x) = x\, e^x$, $\varphi(x) = x\, e^x - e^x + \text{cost}$. Le funzioni y che soddisfano alla nostra equazione differenziale sono dunque quelle date dalla $x\, e^x + y\, e^x - e^x = (x + y - 1)\, e^x = \text{cost}$.

Esempio.

La quantità di calore Q data ad una massa di gas ne fa variare o la pressione p o il volume v, o entrambe le p, v. Se noi, p. es., teniamo v costante, varierà la pressione p; il rapporto $\frac{dQ}{dt}$, ove dQ è la quantità di calore necessaria per far aumentare la temperatura t di dt, è una costante c; il cosidetto calore specifico a volume costante. Sarà dunque $dQ = cdt$; l'incremento dt di temperatura è dato da $\frac{\partial t}{\partial p} dp$; cosicchè infine:

$$dQ = c \frac{\partial t}{\partial p} dp.$$

Così pure, se con C indichiamo il calore specifico a pressione costante, sarà:

$$dQ = C \frac{\partial t}{\partial v} dv$$

l'incremento di calore che si deve dare, affinchè il volume del gas (tenuto a pressione costante) aumenti di dv.

Cosicchè complessivamente

$$dQ = c \frac{\partial t}{\partial p} dp + C \frac{\partial t}{\partial v} dv$$

è la quantità di calore necessaria per aumentare p, v rispettivamente di dp, dv.

Ora noi ci chiediamo: Può Q essere una funzione di p, v: ossia può una massa di gas, ritornando alle stesse condizioni (di temperatura e di pressione) possedere in ogni caso la stessa quantità di calore? Ciò che sembra la conseguenza più semplice dell'antica ipotesi dell'indistruttibilità del calore.

Se così fosse, l'espressione sopra trovata per dQ sarebbe un differenziale esatto. Si avrebbe cioè:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(c \frac{\partial t}{\partial p}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(C \frac{\partial t}{\partial v}\right) \text{ ossia } (C - c) \frac{\partial^2 t}{\partial p \, \partial v} = 0$$

ciò che non è, perchè $C \neq c$, e $t = \frac{1}{R} pv$, dove R è una costante.

Se $c \frac{\partial t}{\partial p} dp + C \frac{dt}{\partial v} dv$ non è esatto, noi possiamo cercare di renderlo esatto moltiplicandolo per un moltiplicatore ρ.

Dovrà essere:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(c\rho\frac{\partial t}{\partial p}\right)=\frac{\partial}{\partial p}\left(C\rho\frac{\partial t}{\partial v}\right)$$

$$\text{ossia } \rho\,(c-C)\frac{\partial^2 t}{\partial p\,\partial v}+c\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial t}{\partial p}-C\frac{\partial\rho}{\partial p}\frac{\partial t}{\partial v}=0$$

ossia
$$c\left\{1+v\frac{\partial\log\rho}{\partial v}\right\}=C\left\{1+p\frac{\partial\log\rho}{\partial p}\right\}.$$

La soluzione più semplice si ottiene, supponendo

$$v\frac{\partial\log\rho}{\partial v}+1=0\,;\qquad p\frac{\partial\log\rho}{\partial p}+1=0\,;$$

ossia supponendo ρ inversamente proporzionale a p e a v, ponendo, p. es., $\rho=\frac{1}{t}$. Si ha così che $\frac{dQ}{t}$ è un differenziale esatto; la funzione, di cui esso è differenziale, dicesi *entropia*. E ne è ben nota l'importanza in termodinamica.

Dicesi abiabatica ogni trasformazione, che non richiede nè assorbimento, nè dispersione di calorico; tali trasformazioni sono quindi definite dalla

$$0=dQ=c\frac{\partial t}{\partial p}dp+C\frac{\partial t}{\partial v}dv \text{ ossia dalla } c\,vdp+C\,pdv=0.$$

Separando le variabili si trova $c\frac{dp}{p}+C\frac{dv}{v}=0$, cioè

$$c\log p+C\log v=\text{cost.}$$

$$pv^{\frac{C}{c}}=\text{cost.}\quad,\quad p=\text{cost.}\,v^{-\frac{C}{c}},$$

che ci dà in termini finiti l'equazione di una adiabatica.

Un'applicazione all'equazione $X(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}+Y(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}=0.$

Abbiamo visto che l'equazione $\frac{dy}{dx}=\frac{Y(x,y)}{X(x,y)}$ si sa risolvere se si conosce una funzione $f(x,y)$, le cui derivate f'_x, f'_y sieno proporzionali alle $-Y(x,y), X(x,y)$; cioè una funzione $f(x,y)$ tale che $Xf'_x+Yf'_y=0$; perchè precisamente (almeno se sono soddisfatte le condizioni sopra enunciate) le funzioni $y(x)$ cercate sono quelle che soddisfano all'equazione $f(x,y)=\text{cost.}$ Viceversa si conoscano le soluzioni dell'equazione $y'=\frac{Y}{X}$, e si sappia che esse sono tutte e sole le funzioni che soddisfano ad una equazione $\varphi(x,y)=\text{cost.}$ Poichè esse sono anche tutte e sole le funzioni che soddisfano alla $f(x,y)=\text{cost.}$ quando $f(x,y)$ è una soluzione di $X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}=0$, *tali funzioni* $f(x,y)$, che soddisfano alla $X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial x}=0$ saranno tutte e sole le funzioni che restano costanti, quando φ è costante, cioè *saranno le funzioni di* φ. (Cfr. l'ultimo esempio del § 117).

Così, p. es., si trovino le soluzioni di

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Le soluzioni della $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$, ossia della $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$ sono quelle tali che $\log y=\log x+\text{cost.}$, ossia tali che $\frac{y}{x}=\text{cost.}$ Le funzioni f cercate sono tutte e sole le funzioni di $\frac{y}{x}$, come è facile verificare.

L'equazione di Eulero $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf$ $(n=\text{cost.})$.

Posto $\varphi=\log|f|-n\log|x|$, tale equazione diventa $x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.$ Perciò $\varphi(x,y)=\log|f(x,y)|-n\log|x|=\log\left|\frac{f(x,y)}{x^n}\right|$ è funzione del rapporto $\frac{x}{y}$. Altrettanto avverrà di $F=e^\varphi=\left|\frac{f(x,y)}{x^n}\right|$. Perciò $f(x,y)=x^nF\left(\frac{x}{y}\right)$. In tal caso si dice che f è *funzione omogenea di grado* n, *perchè, moltiplicando* x *ed* y *per una stessa costante* h, la f (x, y) *resta moltiplicata per* h^n. Più in generale le soluzioni $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ dell'equazione $\Sigma_i x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=nf$ sono tutte e sole le funzioni omogenee di grado n delle x, cioè le funzioni del tipo $x_1^n\varphi\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},\ldots,\frac{x_n}{x_1}\right)$. Infatti se consideriamo f come funzioni delle variabili $\xi_1=x_1$; $\xi_2=\frac{x_2}{x_1}$; $\xi_3=\frac{x_3}{x_1}$; .....; $\xi_n=\frac{x_n}{x_1}$, la nostra equazione diventa $\frac{\partial f}{\partial\xi_1}=\frac{n}{\xi_1}f$, donde $\frac{\partial\log|f|}{\partial\xi_1}=\frac{n}{\xi_1}$; $\log|f|=n\log|\xi_1|+\psi$; $f=\xi_1^n\varphi$, $[\psi=\log|\varphi|]$ dove ψ (e quindi anche φ) sono costanti rispetto alla ξ_1, e cioè sono funzioni delle sole $\xi_2,\xi_3,\ldots\xi_n$. c. d. d.

§ 111. — Tipi particolari di equazioni differenziali.

α) Sia data l'equazione lineare (*) del primo ordine omogenea (**)

$$y'=P(x)\,y, \tag{1}$$

dove $P(x)$ è una funzione continua della x. Dividendo per y (supposto per un momento diverso da zero) se ne deduce

$$\frac{y'}{y}=P(x),\ \text{ossia}\ \frac{d}{dx}\log|y|=P(x).$$

È perciò $\log|y|=\int P(x)\,dx+C'$, e quindi $|y|=e^{C'+\int P(x)\,dx}$ $(C'=\text{cost. arbitraria})$.

(*) *Lineare* perchè di primo grado nella y e derivata y'.
(**) *Omogenea* perchè mancano termini di grado zero nelle y, y'. Vi è invece un tale termine $Q(x)$ nell'equazione che trattiamo in β.

Notando che, essendo C' una costante arbitraria, $e^{C'}$ è una costante arbitraria *positiva*, e, passando dal valore di $|y|$ a quello di y, se ne trae

$$y = C e^{\int P(x) dx} \qquad \text{ossia} \qquad y e^{-\int P(x) dx} = C,$$

dove C è una costante arbitraria che ha il segno di y. E questa formola, come si verifica facilmente, dà proprio *una* soluzione di (1). Per quanto abbiamo detto essa dà anzi *tutte* le soluzioni di (1), perchè per $C = 0$ dà la soluzione (finora esclusa) $y = 0$.

β) Sia data l'equazione lineare del primo ordine

$$y' = P(x) y + Q(x) \qquad (2) \quad (P, Q \text{ funzioni continue della } x).$$

La $y = ze^{\int P(x) dx}$ soddisfa alla (2), ove si supponga $Q(x) = 0$, quando con z si indichi una costante (questo §, α). Cerchiamo se è possibile determinare la z come funzione *non costante* della x in guisa che la $y = ze^{\int P(x) dx}$ soddisfi all'equazione più generale (2) (ciò che in sostanza equivale ad assumere come funzione incognita al posto della y la $z = ye^{-\int P(x) dx}$).

Questo metodo, detto *metodo della variazione delle costanti arbitrarie*, ha spesso applicazioni nell'analisi, e sarà applicato anche da noi in altri problemi. Sostituendo in (2) $ze^{\int P(x) dx}$ al posto di y otteniamo:

$$z' e^{\int P(x) dx} + z P(x) e^{\int P(x) dx} = P(x) ze^{\int P(x) dx} + Q(x),$$

ossia:

$$z' e^{\int P(x) dx} = Q(x), \qquad \text{cioè:} \qquad z' = Q(x) e^{-\int P(x) dx}.$$

Integrando si ha così:

$$z = \int Q(x) e^{-\int P(x) dx} dx + C \quad (C = \text{cost. arbitraria})$$

e quindi:

$$y = e^{\int P(x) dx} \left\{ \int Q(x) e^{-\int P(x) dx} dx + C \right\}.$$

Oss. 1ª. Per $Q(x) = 0$ questa formola si riduce a quella trovata in (α) per risolvere (1).

Oss. 2ª. È naturalmente inutile scrivere $\int P(x) dx + k$ al posto di $\int P(x) dx$ (k = cost. arbitraria) nella nostra formola. Con questo cambiamento esso diventa infatti:

$$e^{\int P(x) dx + k} \left\{ \int Q(x) e^{-\int P(x) dx} e^{-k} dx + C \right\} =$$
$$= e^{\int P(x) dx} \left\{ \int Q(x) e^{-\int P(x) dx} dx + Ce^{k} \right\},$$

che differisce dalla precedente in modo non essenziale solo nel fatto che la costante arbitraria vi è indicata non con C, ma con Ce^k.

γ) Il tipo più generale di un'equazione alle derivate ordinarie del secondo ordine è

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

dove f è funzione delle x, y, y', y''.

Supponiamo che in tale equazione non figuri la y, che cioè l'equazione sia del tipo

$$f(x, y', y'') = 0.$$

Ponendo

$$y' = z,$$

essa si trasforma nell'equazione

$$f(x, z, z') = 0$$

che è un'equazione differenziale del primo ordine. Se noi la sappiamo risolvere, conosceremo la z (con una costante arbitraria) e ne dedurremo:

$$y = \int z dx + \text{cost.}$$

con una seconda costante arbitraria.

δ) Un altro tipo di equazione differenziale del second'ordine, che si può ridurre al primo, si ha quando nell'equazione data non compare la variabile indipendente x; cioè quando si abbia un'equazione del tipo:

$$f(y'', y', y) = 0.$$

Se questa equazione ha una soluzione y non costante (*), prendiamo questa y come variabile indipendente e chiamiamola ξ.

La derivata $y' = \dfrac{dy}{dx}$ si indichi con z. Allora sarà:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\xi}{dx}\frac{dy'}{d\xi} = \frac{dy}{dx}\frac{dy'}{d\xi} = z\frac{dz}{d\xi},$$

(*) Le soluzioni $y = k$ (k = cost.) si trovano immediatamente. Come si vede subito, sostituendo nell'equazione proposta, esse sono le soluzioni *eventuali* dell'equazione (non differenziale) $f(0, 0, k) = 0$. Se poi y non è costante, e quindi non è identicamente $y' = 0$, in un qualche intorno, per la teoria delle funzioni implicite, si potrà considerare x come funzione di y, e quindi anche y' (che è funzione della x) come funzione della y.

e la nostra equazione diventerà:

$$f\left(z\frac{dz}{d\xi}, z, \xi\right) = 0,$$

che è del primo ordine perchè vi compare solo la derivata prima della funzione incognita z. Dedottane la $z = \frac{dy}{dx}$ come funzione $\varphi(y)$ della $\xi = y$, con una costante arbitraria C, si dovrà poi risolvere la $\frac{dy}{dx} = \varphi(y)$, che dà

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} - x = \text{cost.}$$

come una nuova costante arbitraria.

Sia data, per esempio, l'equazione

$$y + y'' = 0.$$

Se $y = \text{cost.}$, è $y = 0$; questo solo caso eccettuato, si potrà porre $y = \xi$, $y' = z$; cosicchè l'equazione data si ridurrà alla

$$\xi\, d\xi + z\, dz = 0$$

e integrando:

$$\frac{\xi^2}{2} + \frac{z^2}{2} = \text{cost.}$$

e cioè:

$$\frac{y^2}{2} + \frac{y'^2}{2} = \frac{C^2}{2}, \qquad (C = \text{cost.})$$

da cui

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C^2 - y^2}.$$

Separando le variabili

$$\frac{dy}{\sqrt{C^2 - y^2}} = dx$$

e integrando:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C^2 - y^2}} = x + d$$

$$\text{arcsen}\,\frac{y}{C} = x + d,\ y = C\,\text{sen}\,(x + d),$$

dove d è una nuova costante arbitraria. Dunque anche nell'integrale generale di quest'equazione del 2° ordine compaiono due costanti arbitrarie. In quest'ultima formola è inclusa anche la soluzione $y = 0$, che avevamo finora escluso; ciò che si riconosce, ponendo $C = 0$.

ESEMPI.

1° Integrare l'equazione $y = xy' + \varphi(y')$ [φ funzione derivabile].

RIS. Derivando entrambi i membri si ottiene:

$$y' = y' + xy'' + \varphi'(y')\, y'' \text{ ossia } y''[x + \varphi'(y')] = 0.$$

Sarà dunque $y'' = 0$ oppure $x = -\varphi'(y')$.

Nel primo caso $y = mx + n$ (m, n costanti); e, sostituendo nella data equazione, si trova $mx + n = mx + \varphi(m)$, ossia $n = \varphi(m)$ e quindi

$$y = mx + \varphi(m) \qquad (m = \text{cost. arbitraria}). \qquad (\alpha)$$

Se invece $x = -\varphi'(y')$, si ponga $y' = t$; ricordando la data equazione si trova:

$$x = -\varphi'(t);\ y = -t\,\varphi'(t) + \varphi(t).$$

L'eliminazione della t tra queste due equazioni darà una nuova soluzione della nostra equazione, se da esse si deduce $y' = \dfrac{dy}{dx} = t$; perchè allora la 2ª si riduce proprio all'equazione data. E infatti se ne deduce (se $\varphi''(t) \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\varphi'(t) - t\,\varphi''(t) + \varphi'(t)}{-\varphi''(t)} = t.$$

Se non eliminiamo la t, le precedenti formole definiscono la soluzione *in forma parametrica;* basta infatti far variare t per dedurne le coppie di valori compatibili delle x, y.

Queste due equazioni si possono considerare come le equazioni parametriche di una curva Γ.

La retta tangente a Γ in quel punto di Γ, che corrisponde al valore m della t, ha per equazione (α). Cioè la curva Γ è la curva, le cui tangenti hanno per equazione (α), cioè è la curva inviluppo delle rette (α).

Si noti che, se si volesse dalla data equazione dedurre y' come funzione delle x, y, la y' sarebbe una funzione *implicita* delle x, y, a cui proprio lungo Γ non sono applicabili i teoremi del § 84, perchè lungo Γ è nullo $\varphi'(y') + x$, che è appunto la derivata *parziale* del primo membro della nostra equazione rispetto ad y'. Perciò Γ si dice la soluzione *singolare*.

2° Integrare l'equazione $y = x\,\psi(y') + \varphi(y')$ (φ, ψ funzioni derivabili).

Ris. Derivando si ottiene:

$$y' = \psi(y') + [x\,\psi'(y') + \varphi'(y')]\,\frac{dy'}{dx}\,.$$

Posto $y' = t$, se ne deduce

$$\frac{dx}{dt} = x\,\frac{\psi'(t)}{t - \psi(t)} + \frac{\varphi'(t)}{t - \psi(t)},$$

escluso il caso $\psi(t) = t$, che abbiamo già trattato all'esempio 1°.

Questa equazione, in cui si considera t come variabile indipendente ed x come funzione incognita, è un'equazione differenziale lineare del primo ordine che già sappiamo risolvere. E si trova

$$x = e^{\int \frac{\psi'(t)}{t - \psi(t)}\,dt} \left\{ \int \frac{\varphi'(t)}{t - \psi(t)}\, e^{-\int \frac{\psi'(t)}{t - \psi(t)}\,dt}\, dt + \text{cost.} \right\}.$$

L'equazione differenziale dà poi

$$y = x\,\psi(t) + \varphi(t).$$

Restano così espressi x, y in funzione di un parametro t; e con un'eliminazione si potrebbe (volendo) dedurne la y espressa in funzione di x. Si verifichi che effettivamente $\dfrac{dy}{dx} = t$.

3° Integrare

$$(ax + by + c)\,dx + (hx + ky + l)\,dy = 0$$
$$(a, b, c, h, k, l = \text{cost.}).$$

Ris. Posto $x = \xi + m$, $y = \eta + n$ (m, n costanti), l'equazione diventa:

$$(a\xi + b\eta + \mu)\,d\xi + (h\xi + k\eta + \lambda)\,d\eta = 0$$

ove:

$$\mu = am + bn + c, \qquad \lambda = hm + hn + l.$$

Se $ak - bh \neq 0$, si possono scegliere le m, n in modo che $\lambda = \mu = 0$.

L'equazione diventa:

$$(a\xi + b\eta)\,d\xi + (h\xi + k\eta)\,d\eta = 0,$$

che è omogenea di primo grado; e quindi le variabili si separano tosto assumendo $\frac{\eta}{\xi} = z$ come nuova variabile al posto di η, ecc.

Sia invece $ak - bh = 0$. Se $a = b = h = k = 0$ l'equazione si risolve immediatamente. Se così non è, almeno una delle due espressioni $ax + by + c$ o $hx + ky + d$, p. es. la prima, non è identicamente costante. Postala uguale a t, la nostra equazione diventa:

$$tdx + (pt + q)\,dy = 0 \qquad (p, q = \text{cost.}).$$

Posto al posto della x o della y i valori che si traggono dalle $ax + by + c = t$, la nostra equazione diventa del tipo:

$$(\alpha t + \beta)\,dx + (\gamma t + \delta)\,dt = 0$$

oppure:

$$(\alpha t + \beta)\,dy + (\gamma t + \delta)\,dt = 0$$
$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta = \text{cost.})$$

che si integra subito, separando le variabili (dividendo per $\alpha t + \beta$).

Altri Esempi.

1° Integrare le equazioni:

$$y'' = P(x)\,y' + Q(x);$$
$$y^{(n)} = P(x)\,y^{(n-1)} + Q(x). \text{ (Si ponga } z = y^{(n-1)}\text{)}.$$

2° Integrare il sistema di equazioni (ove s è la variabile indipendente):

$$x'^2 + y'^2_s = 1 \qquad x''^2_s + y''^2_s = k^2 \qquad (k = \text{cost.}).$$

Si potrà porre per la prima equazione $x' = \cos z$, $y' = \operatorname{sen} z$; e, sostituendo nella seconda, si trova:

$z'^2 = k^2$, donde $z' = \pm k$, $z = \pm ks + h$ (h = cost. arbitraria).

E se ne trae: $x = \int \cos(\pm ks + h)\,ds$, $y = \int \operatorname{sen}(\pm ks + h)\,ds$,

dove è poi da distinguere il caso $k = 0$ da quello $k \neq 0$.

3° Risolvere l'equazione $\dfrac{y''_x}{(1 + y'^2_x)^{\frac{3}{2}}} = k$ (k = cost.).

Si può seguire il metodo dato in questo §, δ, ponendo $y' = z$. Più brevemente si procede ponendo $y'_x = \operatorname{tg} z$, donde $y'' = \frac{z'}{\cos^2 z}$, $1 + y'^2 = \frac{1}{\cos^2 z}$. L'equazione diventa:

$$z' \cos z = k\,;\ (\operatorname{sen} z)' = k\,;\ \operatorname{sen} z = kx + h\ (h = \text{cost.}),$$

donde:

$$y' = \operatorname{tg} z = \frac{kx + h}{\sqrt{1 - (kx + h)^2}} \text{ ed } y = \int \frac{(kx + h)\,dx}{\sqrt{1 - (kx + h)^2}},$$

che si integra tosto, assumendo $1 - (kx + h)^2$ (se $k \neq 0$) come nuova variabile di integrazione. E si trova che le curve $y = y(x)$ cercate sono rette (per $k = 0$), o cerchi di raggio $\frac{1}{k}$ (per $k \neq 0$).

4°. Risolvere l'equazione $y' = P(x)\,y + Q(x)\,y^m$.

Si divida per y^m e si assuma $z = \frac{1}{y^{m-1}}$ come nuova funzione incognita. Saremo ridotti al caso studiato in questo §, β.

§ 112. — **Teorema di Cauchy e integrazione per serie.**

α) Vogliamo ora fermarci un momento a studiare più da vicino il significato delle costanti arbitrarie che figurano nella soluzione di un'equazione differenziale.

Se consideriamo, p. es., l'equazione differenziale più semplice:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

del primo ordine, la funzione:

$$y = \int f(x)\,dx + \text{cost.}$$

che la soddisfa, contiene una costante arbitraria; ed è noto che, se fissiamo il valore b che questa funzione y deve avere per un certo valore a della variabile, allora la costante, e in conseguenza la y, restano completamente determinate. Si ha appunto:

$$y = \int_a^x f(x)\,dx + b.$$

In altre parole: nella risoluzione di questa equazione compare una costante arbitraria ed esiste una ed una sola funzione che le soddisfi e che per $x = a$ assume il valore b.

Negli altri tipi di equazioni del primo ordine da noi considerati, l'integrale generale contiene pure una costante arbitraria; in quelle del secondo ordine l'integrale generale ne contiene due.

Date le equazioni differenziali (del *secondo* ordine), che definiscono i movimenti in un sistema di punti, le traiettorie sono univocamente determinate quando di ogni punto siano date la posizione e la velocità iniziale (cioè sieno dati per un certo istante i valori delle coordinate di ogni punto e delle loro derivate *prime*). Questo teorema è ben famigliare a chi abbia studiati anche i soli primi elementi della Meccanica Razionale.

Queste osservazioni sono caso particolare di un celebre teorema di Cauchy, che si potrebbe dimostrare col metodo delle approssimazioni successive, già da noi usato al § 84, β, pag. 279, e in qualche caso col metodo degli sviluppi in serie di potenze, come accenneremo più avanti.

Se è data l'equazione differenziale

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \ldots\ldots, y^{(n-1)}),$$

dove φ *è (in qualche campo) una funzione continua e finita insieme alle sue derivate del primo ordine rispetto alle* $x, y, y', \ldots\ldots, y^{(n-1)}$:

1° *Esistono infinite funzioni* y *che le soddisfano.*

2° *Esiste (in un intorno abbastanza piccolo di* $x = a$) **una ed una sola** *funzione* y *che le soddisfa e tale che per* $x = a$ *essa e le successive derivate* $y', y'', \ldots\ldots, y^{(n-1)}$ *assumono rispettivamente valori prefissati* $b_0, b_1, b_2, \ldots\ldots, b_{n-1}$ (*), *dove le* a *e le* b *sono arbitrarie e sottoposte all'unica condizione che in un intorno del punto*

$$x = a, \ y = b_0, \ y' = b_1, \ \ldots\ldots, \ y^{(n-1)} = b_{n-1}$$

la φ *e le sue derivate prime sono finite e continue.*

È sottinteso che, se la φ non soddisfacesse a questa ultima condizione, l'affermazione di questo teorema potrebbe benissimo essere falsa (**).

(*) Cioè per $x = a$ è $y = b_0$, $y = b_1$, $y'' = b_2$, ..., $y^{(n-1)} = b_{(n-1)}$.

(**) Così, p. es., per un punto $A = (a, b)$ della curva Γ dell'es. 1° del § 111, pag. 373, escono due curve (la Γ, e la retta tangente a Γ in A) che soddisfano all'equaz. studiata in tale esempio. Ciò esistono *due* funzioni $y(x)$ soddisfacenti a tale equazione, le quali per $x = a$ assumono il valore b.

Dunque nell'intorno di $x = a$, $y = b$ non si può risolvere tale equazione rispetto ad y', deducendone y' come funzione continua con derivate continue delle x, y. Abbiamo verificato infatti che in tale punto non si può applicare il teorema delle funzioni implicite.

Si noti che, nell'enunciato di questo teorema, *l'equazione si suppone risoluta rispetto alla derivata di ordine massimo.*

Questo teorema consta di due parti: una che afferma l'**esistenza**, l'altra che afferma la **unicità** di tale funzione y.

β) Vediamo ora pertanto un metodo abbastanza generale di integrazione delle equazioni differenziali, che può riuscire utilissimo quando non siano applicabili altri metodi.

Si abbia l'equazione differenziale:

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

dove il secondo membro possegga finite e continue tutte le derivate, e sia sviluppabile in serie di potenze di $x - a$, $y - b_0$, $y' - b_1$, ..., $y^{(n-1)} - b_{n-1}$.

Consideriamo allora il punto $x = a$ e *supponiamo sviluppabile* l'integrale ignoto y nell'intorno del punto a mediante la serie di Taylor:

$$y = y_0 + (x - a)\, y'_0 + \ldots\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} y_0^{(n)} + \ldots\ldots \qquad (2)$$

dove y_0, y'_0, ecc. sono i valori di y, y', ecc. nel punto $x = a$.

Intanto della nostra equazione differenziale (1) è facile, derivando successivamente, calcolare $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}$, $y^{(n+2)}$ ..... in funzione di x, y, y' ..... $y^{(n-1)}$.

Infatti, derivando rispetto alla x la (1), si ottengono equazioni del tipo seguente:

$$y^{(n+1)} = \varphi_1(x, y, y', \ldots\ldots, y^{(n)}) \qquad (\alpha)$$

$$y^{(n+2)} = \varphi_2(x, y, y', \ldots\ldots, y^{(n+1)}) \qquad (\beta)$$

. . . .

Ora, se poniamo in φ_1 al posto di $y^{(n)}$ il valore dato dalla (1), in φ_2 al posto di $y^{(n)}$ e $y^{(n+1)}$ i valori dati rispettivamente dalla (1) e dalla (α), nella successiva φ_3 al posto di $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}$ e $y^{(n+2)}$ i valori dati dalle (1), (α), (β) e così di seguito, otteniamo appunto

$$y^{(n)},\ y^{(n+1)},\ y^{(n+2)},\ y^{(n+3)},\ \ldots\ldots$$

espresse solo mediante y, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$. Dati quindi ad arbitrio per $x = x_0$ i valori b_0, b_1, ..., b_{n-1} delle y, y', ..., $y^{(n-1)}$, si potranno calcolare i valori che per $x = a$ assumono $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, $y^{(n+2)}$, ...

Sostituendoli allora nella (2) si ha una funzione y data sotto forma di una serie ordinata secondo le potenze di $x - a$, e nella quale compaiono le n costanti arbitrarie b_0, b_1, ..., b_{n-1}.

Ora questa serie è convergente (come ha provato Cauchy) in un certo intervallo comprendente il punto $x=a$, si può derivare per serie, e rappresenta precisamente quella soluzione y della (1) tale che $y, y', \ldots.., y^{(n-1)}$ per $x=a$ assumano i valori prescritti $b_0, b_1, \ldots.., b_{n-1}$.

Se la φ non fosse sviluppabile in serie di potenze, come abbiamo ammesso, si potrebbero ancora in casi generalissimi dimostrare i teoremi di *esistenza* e di *unicità*, p. es. col metodo delle *successive approssimazioni*, di cui abbiamo già trovato una importante applicazione nella teoria delle funzioni implicite.

Esercizi.

1° Integrare per serie l'equazione $y'=y$.

Ris. Si ha $y'=y$, $y''=y'=y$, $y'''=y''=y'=y$ ecc. in generale $y^{(n)}=y$. Posto che $y=k$ per $x=0$, si trova $y=k\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\ldots..\right)=ke^x$, come già sapevamo.

2° Integrare per serie l'equazione $y''\pm y=0$.

§ 113. — Primi tipi di equazioni lineari alle derivate ordinarie a coefficienti costanti.

Oss. Il lettore, a cui non interessi il caso generale, potrà omettere lo studio dei seguenti tre paragrafi, sostituendo loro questo unico § 113. Paragrafo che invece potrà essere omesso da chi studii senz'altro il caso generale. È in ogni caso raccomandabile la lettura dell'esempio 4° al § 117.

1° Sia data l'equazione del primo ordine

$$y'+py=0 \qquad (p=\text{cost.}). \tag{1}$$

Le sue soluzioni sono date dalla

$$y=Ce^{-px} \qquad (C=\text{cost. arbitraria}). \tag{2}$$

Si noti che nell'esponente $-px$ il coefficiente della x è $-p$, e che $-p$ è la radice dell'equazione *caratteristica*

$$c+p=0 \tag{3}$$

ottenuta da (1) ponendo al posto di y' e di y la $c^1=c$, e la $c^0=1$, essendo c la incognita.

2° Sia data l'equazione

$$y''+py'+qy=0 \qquad (p, q \text{ cost.}). \tag{4}$$

Se α, β sono le radici dell'equazione *caratteristica*

$$c^2+pc+q=0 \tag{5}$$

ottenuta, scrivendo 1, c, c^2 al posto di y, y', y'' (c essendo l'incognita), sarà

$$\alpha+\beta=-p \quad , \quad \alpha\beta=q\ ;$$

$$\alpha=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \quad , \quad \beta=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\ .$$

La (4) si può scrivere:

$$0 = y'' - (\alpha + \beta)\, y' + \alpha\beta y$$
$$= (y' - \alpha y)' - \beta\,(y' - \alpha y).$$

Cioè, posto

$$z = y' - \alpha\, y, \tag{6}$$

la (4) diventa:

$$z' - \beta z = 0. \tag{7}$$

Da (7) si trae:

$$z = k e^{\beta x} \qquad (k = \text{cost. arb.}).$$

Da (6)

$$y' = \alpha y + k e^{\beta x}$$

cosicchè:

$$y = e^{x} \left\{ \int k e^{(\beta - \alpha)\, x}\, dx + h \right\} \qquad (k, h = \text{cost. arb.}).$$

I. Se $\alpha = \beta$, cioè se $\frac{p^2}{4} = q$, se ne deduce

$$y = e^{\alpha x}\,(C_1\, x + C_2) \qquad (C_1 = k;\ C_2 = h \text{ cost. arbitrarie}).$$

II. Se $\alpha \neq \beta$

$$y = e^{\alpha x} \left\{ \frac{k}{\beta - \alpha}\, e^{(\beta - \alpha)\, x} + h \right\}$$

$$y = C_1\, e^{\alpha x} + C_2\, e^{\beta x} \qquad \left(C_1 = h;\ C_2 = \frac{k}{\beta - \alpha} \text{ cost. arbitr.}\right).$$

Questa formola, se α, β sono reali, ci dà tutte le soluzioni reali di (4) quando vi si diano a C_1, C_2 valori reali arbitrarii. Si noti però che (anche se, come supponiamo, p e q sono reali) le α, β possono essere complesse, ciò che avviene se $q - \frac{p^2}{4} > 0$. L'ultima formola continua però a essere valida anche in questo caso, e ci dà, se noi diamo alle C_1, C_2 valori complessi arbitrarii, tutte le soluzioni *reali o complesse* di (4).

Scegliamo quelle di tali soluzioni che sono reali. Bisognerà a tal fine che, mutando i in $-i$, la nostra y resti inalterata. Ma, se noi scambiamo i in $-i$, le α, β $\left(\text{che valgono } -\frac{p}{2} \pm i \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right)$ si scambiano tra loro. La nostra soluzione sarà *reale* allora e allora soltanto che C_1 si ottenga da C_2 scambiando i in $-i$; cioè allora e allora soltanto che C_1, C_2 sono immaginarie coniugate.

Posto dunque $C_2 = \frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} ik_2$, $C_1 = \frac{1}{2} k_1 - \frac{1}{2} ik_2$, dove k_1, k_2 sono costanti reali arbitrarie, la

$$y = \left(\frac{1}{2} k_1 - \frac{1}{2} ik_2\right) e^{-\frac{p}{2}x + ix\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{i}{2} k_2\right) e^{-\frac{p}{2}x - ix\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}$$

$$= \left(\frac{1}{2} k_1 - \frac{1}{2} ik_2\right) e^{-\frac{p}{2}x} \left\{ \cos \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, x + i \operatorname{sen} \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, x \right\}$$

$$+ \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} ik_2\right) e^{-\frac{p}{2}x} \left\{ \cos \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, x - i \operatorname{sen} \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, x \right\}$$

$$= e^{-\frac{p}{2}x} \left[k_1 \cos \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, x + k_2 \operatorname{sen} \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, x \right]$$

dà *tutte e sole le soluzioni reali* della nostra equazione.

§ 114. — Primi teoremi sulle equazioni differenziali lineari (alle derivate ordinarie).

Si dicono equazioni lineari le equazioni del tipo

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots\ldots + \\ + p_n(x)\, y = f(x), \tag{1}$$

(perchè di primo grado nelle $y, y', \ldots\ldots, y^{(n)}$), dove con $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$, f indichiamo funzioni arbitrarie delle x. Se $f(x) = 0$, l'equazione si dice omogenea, perchè in tal caso manca il termine $f(x)$ di grado zero nella y e derivate. Noi abbiamo al § 111, β, studiato la (1) nel caso $n = 1$, cioè nel caso di un'equazione del primo ordine. Supponiamo che y_1, y_2 siano due integrali della (1) non omogenea. Sarà:

$$y_1^{(n)} + p_1\, y_1^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_n\, y_1 = f(x) \tag{2}$$

$$y_2^{(n)} + p_1\, y_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_n\, y_2 = f(x) \tag{3}$$

Sottraendo (3) da (2), si verifica tosto che $z = y_2 - y_1$ soddisfa all'equazione

$$z^{(n)} + p_1\, z^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_{n-1}\, z' + p_n\, z = 0 \tag{4}$$

omogenea, che si deduce da (1) ponendovi $f(x) = 0$. Se dunque y è una particolare soluzione di (1), ogni altra soluzione di (1) è del tipo $y + z$, dove z è una soluzione di (4). E viceversa, se y soddisfa ad (1) e z a (4), anche $y + z$ soddisfa ad (1). Dunque per cercare *tutte e sole le soluzioni della* (1) *non omogenea, basta conoscerne una sola soluzione: tutte le altre si ottengono sommando con essa tutte le soluzioni della* (4) *omogenea.*

Lagrange ha dimostrato, come vedremo meglio in seguito, che, se si sa risolvere la (4) omogenea, è sempre possibile trovare una soluzione della (1) non omogenea: e quindi, per quanto precede, *che si sa risolvere pure la* (1) *sapendo integrare la* (4).

Vediamo quindi di studiare l'equazione omogenea:

$$y^{(n)} + p_1\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_n\, y = 0 \tag{5}$$

Se z_1 è una funzione che la risolve, è facile vedere che pure $k_1 z_1$, dove k_1 è una costante affatto arbitraria, è una soluzione dell'equazione; e infatti:

$$k_1 z_1^{(n)} + p_1 k_1 z_1^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_n k_1 z_1 = \\ = k_1 (z_1^{(n)} + p_1 z_1^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_n z_1) = 0.$$

poichè il secondo fattore compreso tra parentesi è zero (essendo la z_1 una soluzione dell'equazione).

Si ha ancora che, se z_1 e z_2 sono due soluzioni dell'equazione, l'equazione sarà pure soddisfatta da $z_1 + z_2$. E infatti:

$$(z_1 + z_2)^{(n)} + p_1 (z_1 + z_2)^{(n-1)} + \ldots + p_n (z_1 + z_2) =$$
$$= z_1^{(n)} + z_2^{(n)} + p_1 z_1^{(n-1)} + p_1 z_2^{(n-1)} + \ldots + p_n z_1 + p_n z_2 =$$
$$= (z_1^{(n)} + p_1 z_1^{(n-1)} + \ldots + p_n z_1) +$$
$$+ (z_2^{(n)} + p_1 z_2^{(n-1)} + \ldots + p_n z_2) = 0,$$

poichè i due termini fra parentesi dell'ultima somma sono entrambi nulli, essendo z_1 e z_2 soluzioni dell'equazione. Da quanto precede possiamo concludere che, se $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sono costanti tutt'affatto arbitrarie, e $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sono soluzioni dell'equazione, sarà pure:

$$y = k_1 z_1 (x) + k_2 z_2 (x) + \ldots + k_n z_n (x) \qquad (6)$$

una soluzione di (4). Poichè la (6) contiene proprio n costanti arbitrarie, sorge spontanea la domanda se, al variare delle k, la (6) rappresenti ogni integrale della (5), o, in altre parole, se la (6) con le $k =$ cost. *sia l'integrale generale di* (5).

La (6) è *una sola* equazione lineare in n quantità k. Data la y, essa si può risolvere, se $n > 1$, in infiniti modi. Si domanda pertanto: *Se anche* y *è una funzione che soddisfa* a (5), vi è tra queste infinite soluzioni *una soluzione, per cui tutte le* k *siano costanti?* Premettiamo alcune considerazioni di indole generale.

§ 115. — **Un lemma.**

Siano $y, z_1, z_2, \ldots, z_n$ $n + 1$ funzioni della x, per le quali ammettiamo **soltanto** che posseggano le prime n derivate.

Noi vogliamo determinare altre n funzioni $k_1, k_2, \ldots, k_n$ della x tali che valga la:

$$(1) \qquad y = k_1 z_1 + k_2 z_2 + \ldots + k_n z_n$$

e valgano pure le:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{lllll} y' & = k_1 z'_1 & + k_2 z'_2 & + \ldots & + k_n z'_n \\ y'' & = k_1 z''_1 & + k_2 z''_2 & + \ldots & + k_n z''_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y^{(n-1)} & = k_1 z_1^{(n-1)} & + k_2 z_2^{(n-1)} & + \ldots & + k_n z_n^{(n-1)} \end{array} \right.$$

Oss. Le (2) *sarebbero* conseguenza di (1), se le k fossero costanti, cosa che però in generale *non* sarà.

Le (1), (2) formano un sistema di n equazioni lineari nelle n incognite k. La regola di Leibnitz-Cramer ci assicura della loro risolubilità in un modo e in uno solo, se il determinante dei coefficienti delle incognite k

$$W = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \ldots\ldots z_n \\ z'_1 & z'_2 & \ldots\ldots z'_n \\ z''_1 & z''_2 & \ldots\ldots z''_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \ldots\ldots z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

è differente da zero. Tale determinante si chiama il **Wronskiano** delle z. Possiamo dunque determinare le k soddisfacenti ad (1), (2) se il Wronskiano delle z è differente da zero.

Le k così determinate, se y è arbitraria, non saranno generalmente costanti, ma soddisferanno ad alcune equazioni, le quali dicono che la y definita da (1) soddisfa a (2).

Derivando (1) e confrontando con la prima delle (2) si trova che

$$y' = (k_1 z'_1 + k_2 z'_2 + \ldots\ldots + k_n z'_n) + (k'_1 z_1 + k'_2 z_2 + \\ + \ldots\ldots + k'_n z_n) = k_1 z'_1 + k_2 z'_2 + \ldots\ldots + k_n z'_n.$$

Sarà pertanto

$$(3) \qquad k'_1 z_1 + k'_2 z_2 + \ldots\ldots + k'_n z_n = 0.$$

Nello stesso modo, confrontando la derivata di ciascuna delle equazioni (2) (l'ultima esclusa) con la seguente equazione (2), si trova

$$(3)^{\text{bis}} \begin{cases} k'_1 z'_1 + k'_2 z'_2 + \ldots\ldots + k'_n z'_n = 0 \\ k'_1 z''_1 + k'_2 z''_2 + \ldots\ldots + k'_n z''_n = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ k'_1 z_1^{(n-2)} + k'_2 z_2^{(n-2)} + \ldots\ldots + k'_n z_n^{(n-2)} = 0. \end{cases}$$

Viceversa, se le k' soddisfano alle (3) e $(3)_{\text{bis}}$ la y definita da (1) soddisfa alle (2). Derivando l'ultima della (2) si ha:

$$y^{(n)} = k_1 z_1^{(n)} + k_2 z_2^{(n)} + \ldots\ldots + k_n z_n^{(n)} + \\ + k'_1 z_1^{(n-1)} + k'_2 z_2^{(n-1)} \ldots\ldots + k'_n z_n^{(n-1)}.$$

Indicando con $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ funzioni arbitrarie della x, da questa equazione, dalle (1) e (2) si deduce immediatamente che:

$$\left.\begin{array}{l} y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots + p_{n-1} y' + p_n y = \\ = k_1 [z_1^{(n)} + p_1 z_1^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_{n-1} z'_1 + p_n z_1] + \\ + k_2 [z_2^{(n)} + p_1 z_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_{n-1} z_2 + p_n z_2] + \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + k_n [z_n^{(n)} + p_1 z_n^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_{n-1} z_n + p_n z_n] + \\ + k'_1 z_1^{(n-1)} + k'_2 z_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + k'_n z_n^{(n-1)}. \end{array}\right\} (4).$$

Un caso particolare notevole è il seguente: *Se l'equazione:*

$$z^{(n)} + p_1 z^{(n-1)} + p_2 z^{(n-2)} + \ldots\ldots + p_{n-1} z' + p_n z = 0,$$

è soddisfatta dalle n *funzioni* $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ *a Wronskiano diverso da zero, allora per ogni funzione* y *derivabile* n *volte si possono trovare delle funzioni* k *di* x *che soddisfano alle* (1), (2). *Le loro derivate* k' *soddisferanno alle* (3), $(3)_{bis}$ *e alla* (4), *che nella nostra ipotesi diventa semplicemente*

$$\left.\begin{aligned} & y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots + p_{n-1} y' + p_n y = \\ & = k'_1 z_1^{(n-1)} + k'_2 z_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + k'_n z_n^{(n-1)} \end{aligned}\right\} (4)_{bis}.$$

Se le k' *soddisfano alle* (3), $(3)_{bis}$, *la* y *definita da* (1) *soddisfa naturalmente anche alle* (2) *e* (4).

§ 116. — Nuovi teoremi sulle equazioni lineari alle derivate ordinarie.

Applichiamo il lemma precedente alla domanda posta al § 114. Le $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ siano n soluzioni a Wronskiano differente da zero della equazione *omogenea*

$$(1) \left\{\begin{aligned} & z^{(n)} + p_1 z^{(n-1)} + p_2 z^{(n-2)} + \ldots\ldots + p_{n-2} z'' + \\ & \qquad + p_{n-1} z' + p_n z = 0. \end{aligned}\right.$$

Anche y soddisfi a tale equazione; sia cioè

$$(1)_{bis} \quad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots + p^{n-1} y' + p_n y = 0;$$

Si scriva la y nella forma (1) del precedente lemma: sarà per le (3), $(3)_{bis}$ del lemma stesso

$$(2) \left\{\begin{array}{lllll} k'_1 z_1 & + k'_2 z_2 & + \ldots\ldots + k'_n z_n & = 0 \\ k'_1 z'_1 & + k'_2 z'_2 & + \ldots\ldots + k'_n z'_n & = 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k'_1 z_1^{(n-2)} & + k'_2 z_2^{(n-2)} & + \ldots\ldots + k'_n z_n^{(n-2)} & = 0 \end{array}\right.$$

mentre la $(4)_{bis}$ del lemma diventa nel nostro caso in virtù di $(1)_{bis}$

$$(3) \quad k'_1 z_1^{(n-1)} + k'_2 z_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + k'_n z_n^{(n-1)} = 0.$$

Le (2), (3) formano un sistema di n equazioni lineari omogenee nelle k', in cui il determinante dei coefficienti delle incognite è il Wronskiano delle z che per ipotesi è differente da zero. Dunque (§ 27) le k' sono nulle, cioè le k costanti. Possiamo dunque rispondere affermativamente alla domanda che chiude il § 114 affermando che:

Se sono note n *soluzioni* $z_1, z_2 \ldots\ldots z_n$ *della equazione omogenea* (1) *od* $(1)_{bis}$, *a Wronskiano differente da zero, tutte le altre soluzioni* y *sono le loro combinazioni lineari* $k_1 z_1 + + k_2 z_2 + \ldots\ldots + k_n z_n$ *a coefficienti* k *costanti.*

Ma i nostri risultati permettono di affermare di più. Supponiamo che y soddisfi non all'equazione omogenea $(1)_{bis}$, ma all'equazione *non omogenea.*

$$(4) \quad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x),$$

ferme restando le altre ipotesi sulle z. In tal caso, come sopra, si potranno ancora scrivere le (2), mentre la $(4)_{bis}$ del lemma diventa:

$$(3)_{bis} \quad k'_1 z_1^{(n-1)} + k'_2 z_2^{(n-1)} + \ldots\ldots + k'_n z_n^{(n-1)} = f(x).$$

Le (2) e le $(3)_{bis}$ formano un sistema di n equazioni di primo grado nelle k', che si possono risolvere con la regola di Leibnitz-Cramer, perchè il determinante dei coefficienti delle incognite è il Wronskiano delle z, differente da zero. Si possono così determinare le k' e quindi con n integrazioni (una per ognuna delle k') dedurne i valori delle k. Ognuna delle k porta perciò l'indeterminazione di una costante additiva; cioè, se h_r è un integrale indefinito della k'_r testè determinata, si ha:

$$k_r = h_r + c_r \qquad (c_r = \text{costante arbitraria}).$$

Cosicchè sarà:

$$y = k_1 z_1 + k_2 z_2 + \ldots\ldots + k_n z_n =$$
$$= (h_1 z_1 + h_2 z_2 + \ldots\ldots + h_n z_n) + (c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots\ldots + c_r z_r).$$

Il secondo addendo del terzo membro è una combinazione lineare delle z, a cofficienti *costanti* c, da scegliersi in modo qualsiasi, cioè è una soluzione *qualsiasi* della equazione omogenea (1) od $(1)_{bis}$. E ciò è naturale perchè al § 114 abbiamo già visto che da una soluzione di (4) si passa alla soluzione più generale, aggiungendo ad essa la soluzione più generale della equazione omogenea corrispondente. Quindi:

Se le z_r *sono le* n *soluzioni a Wronskiano differente da zero dell'equazione omogenea* (1) *od* $(1)_{bis}$, *la soluzione più generale* y *dell'equazione* (4) *non omogenea si ottiene ponendo* $y = k_1 z_1 + + k_2 z_2 + \ldots\ldots + k_n z_n$, *ove le* k *siano integrali di quelle fun-*

zioni k′, *che si ottengono risolvendo le equazioni* (2) *e* $(3)_{\text{bis}}$, *algebriche lineari nelle* k′.

Si noti, che, se $f(x)=0$, la $(3)_{\text{bis}}$ si riduce alla (3); le (2) e le $(3)_{\text{bis}}$ dicono $k'=0$; cioè $k=\text{cost.}$, come avevamo già osservato.

Il metodo qui svolto di integrare la (trovare le soluzioni della) (4) si chiama metodo della *variazione delle costanti arbitrarie*, in quanto che alle k, costanti arbitrarie nella formola che risolve (1), si sostituiscono convenienti funzioni di x nella formola che risolve (4).

§ 117. — **Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti.**

α) Supposte ora le p_i costanti, cerchiamo se una funzione $y=e^{cx}$ (dove $c=\text{cost.}$) può soddisfare alla:

$$y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+p_2 y^{(n-2)}+\ldots\ldots+p_n y=0. \quad (1)$$

Si osservi che dalla $y=ce^{cx}$ si deduce:

$$y'=ce^{cx};\ y''=c^2 e^{cx};\ \ldots\ldots;\ y^{(n)}=c^n e^{cx}.$$

Sostituendo in (1) si trova che deve essere:

$$e^{cx}(c^n+p_1 c^{n-1}+p_2 c^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}c+p_n)=0,$$

e, poichè e^{cx} non può essere zero, dovrà essere nullo l'altro fattore; dunque, affinchè $y=e^{cx}$ rappresenti una soluzione particolare dell'equazione, è necessario e sufficiente che c sia una delle n radici dell'equazione *algebrica* (detta equazione *caratteristica*):

$$c^n+p_1 c^{n-1}+p_2 c^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}c+p_n=0, \quad (2)$$

la quale si forma dall'equazione differenziale, ponendo in luogo di y e delle sue derivate successive le potenze successive delle incognite c. Si noti che al posto di y' è posto $c^1=c$, ed al posto di y la $c^0=1$.

Se dunque noi risolviamo la (2) e supponiamo che le sue n radici siano tutte reali e disuguali,

$$c_1,\ c_2,\ \ldots\ldots,\ c_n,$$

le funzioni:

$$e^{c_1 x},\ e^{c_2 x},\ \ldots\ldots,\ e^{c_n x}$$

rappresentano altrettante soluzioni particolari distinte dell'equazione differenziale.

E perciò, se dimostriamo che il loro Wronskiano, cioè il determinante formato con queste soluzioni e le loro derivate sino a quelle di ordine $n - 1$, è diverso da zero, potremo affermare, giusta la teoria sviluppata di sopra, che l'integrale generale della (1) è:

$$y = k_1 e^{c_1 x} + \ldots\ldots + k_n e^{c_n x} \qquad (k_i = \text{cost.}).$$

Ora il determinante di cui si parla è effettivamente diverso da zero, perchè esso è:

$$\begin{vmatrix} e^{c_1 x} & e^{c_2 x} & \ldots\ldots\ldots & e^{c_n x} \\ c_1 e^{c_1 x} & c_2 e^{c_2 x} & \ldots\ldots\ldots & c_n e^{c_n x} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_1^{n-1} e^{c_1 x} & c_2^{n-1} e^{c_2 x} & \ldots\ldots & c_n^{n-1} e^{c_n x} \end{vmatrix}$$

che (raccogliendo a fattor comune le $e^{c_1 x}$, ..., $e^{c_n x}$ che compaiono nelle singole colonne) si dimostra uguale a:

$$e^{c_1 x}\, e^{c_2 x} \ldots\ldots e^{c_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots\ldots & 1 \\ c_1 & c_2 & \ldots\ldots\ldots & c_n \\ c_1^2 & c_2^2 & \ldots\ldots\ldots & c_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \ldots\ldots & c_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

di cui il primo fattore è un esponenziale, e il secondo fattore, che è il così detto determinante di Vandermonde o di Cauchy, è uguale (§ 23, pag. 76) al prodotto delle differenze delle c combinate a due a due fra loro in tutti i modi possibili; quindi esso non può essere zero, a meno che due delle c non siano fra loro uguali, ciò che noi abbiamo escluso supponendo le radici della (2) tutte distinte.

Esercizio.

Sia per esempio l'equazione:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Le radici dell'equazione caratteristica

$$c^2 - 3c + 2 = 0$$

sono i numeri 1, 2.

Due integrali particolari sono perciò:

$$e^x, \quad e^{2x}$$

e l'integrale generale dell'equazione è:

$$a\, e^x + b\, e^x,$$

dove a, b sono costanti arbitrarie.

β) Immaginiamo ora che le n radici $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ (che ancora supponiamo reali) non siano tutte distinte. In tal caso, col metodo precedente si ottengono n integrali particolari, che non sono distinti ed hanno quindi un Wronskiano nullo. Non si trova perciò più l'integrale generale per la via precedentemente seguìta.

Ora si può mostrare che, se $c_1 = c_2$, allora è vero che si perde un integrale particolare perchè $e^{c_2 x}$ diventa uguale a $e^{c_1 x}$, ma se ne acquista un altro, e cioè:

$$y = x\, e^{c_1 x}. \quad (*)$$

Infatti dalla precedente uguaglianza si deduce

$$\begin{aligned}
y' &= e^{c_1 x} + x c_1\, e^{c_1 x} \\
y'' &= 2c_1\, e^{c_1 x} + x c_1^2\, e^{c_1 x} \\
y''' &= 3c_1^2\, e^{c_1 x} + x c_1^3\, e^{c_1 x} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^{(n)} &= n c_1^{\,n-1}\, e^{c_1 x} + x c_1^n\, e^{c_1 x}.
\end{aligned}$$

E, sostituendo nell'equazione differenziale data, si trova:

$$\begin{aligned}
&(x c_1^n\, e^{c_1 x} + \ldots\ldots + p_{n-2}\, c_1^2\, x e^{c_1 x} + p_{n-1}\, c_1\, x e^{c_1 x} + p_n\, x e^{c_1 x}) + \\
&\quad + (n c_1^{\,n-1}\, e^{c_1 x} + \ldots\ldots + 2\, p_{n-2}\, c_1\, e^{c_1 x} + p_{n-1}\, e^{c_1 x}) = \\
&\quad = x e^{c_1 x}\, (c_1^n + \ldots\ldots + p_{n-2}\, c_1^2 + p_{n-1}\, c_1 + p_n) + \\
&\quad + e^{c_1 x}\, (n c_1^{\,n-1} + \ldots\ldots + 2\, p_{n-2}\, c_1 + p_{n-1}) = 0.
\end{aligned}$$

La quale relazione è effettivamente verificata se c_1 è radice doppia, perchè allora per $c = c_1$ si annulla non solo il primo membro dell'equazione caratteristica, ma anche (§ 64) la sua prima derivata rispetto alla c, cosicchè ciascuna delle

$$\begin{gathered}
c_1^{\,n} + p_1\, c_1^{\,n-1} + \ldots\ldots + p_{n-1}\, c_1 + p_n\,, \\
n c_1^{\,n-1} + (n-1)\, p_1\, c_1^{\,n-2} + \ldots\ldots + p_{n-1}
\end{gathered}$$

è nulla.

(*) Si noti che, se $c_2 \neq c_1$, evidentemente alle soluzioni $e^{c_1 x}$, $e^{c_2 x}$ possiamo sostituire la $e^{c_1 x}$ e la $\dfrac{e^{c_2 x} - e^{c_1 x}}{c_2 - c_1}$. La seconda, pensata come funzione di c_2, tende precisamente ad $x\, e^{c_1 x}$ per $c_2 = c_1$.

Così, in generale, si può dimostrare che, se c_1 è radice multipla d'ordine k,

$$e^{c_1 x},\ x e^{c_1 x},\ x^2 e^{c_1 x}, \ldots.., x^{k-1} e^{c_1 x}$$

sono tutti integrali particolari dell'equazione.

Riassumendo: ogni radice d'ordine k dà luogo a k integrali particolari, che, insieme con gli altri integrali derivanti dalle altre radici, sia multiple, sia semplici, costituiscono n integrali particolari dell'equazione.

Di più si potrebbe far vedere che gli integrali così ottenuti hanno il Wronskiano non nullo: con le loro combinazion lineari si ottengono quindi tutti e soli gli integrali dell'equazione (*).

γ) Dobbiamo finalmente considerare il caso che le radici dell'equazione caratteristica non siano tutte reali.

Se ci limitassimo a considerare funzioni reali, la soluzione $y = e^{cx}$, dove $c = a + i b$ è una radice complessa dell'equazione caratteristica, non avrebbe per noi alcun significato.

Ma se teniamo conto anche di funzioni complesse, potremo dimostrare che $e^{(a+ib)x}$ è ancora un integrale (complesso) della nostra equazione. Infatti tutti i nostri ragionamenti hanno usato soltanto delle regole del calcolo algebrico, delle regole di derivazione di una somma, di un prodotto, e dell'esponenziale e^{cx} ($c =$ cost.), che continuano a valere (cfr. §§ 55-60 e particolarmente pag. 188) anche nel campo delle funzioni complesse della x.

Cosicchè, anche nel caso di radici complesse dell'equazione caratteristica (2) vale il teorema: *Se* $c_1, c_2, \ldots.., c_n$ *sono le radici tutte distinte di* (2), *la più generale funzione* (complessa) *che soddisfi alla* (1) *è* $k_1 e^{c_1 x} + k_2 e^{c_2 x} + \ldots.. k_n e^{c_n x}$ *dove le* k *sono costanti arbitrarie* (complesse). *Se invece vi sono radici multiple, e, per es.,* c_1 *è radice di ordine* r, *si debbono assumere a integrali particolari corrispondenti*

$$e^{c_1 x},\ x e^{c_1 x}, \ldots\ x^{r-1} e^{c_1 x}.$$

(*) Riferiamoci all'ultima nota a piè di pagina, in cui si sono supposte due sole radici uguali $c_1 = c_2$. Alle soluzioni $e^{c_1 x}$, $e^{c_2 x}$ si sono (se $c_1 \neq c_2$) sostituite le $e^{c_1 x}$, $\dfrac{e^{c_2 x} - e^{c_1 x}}{c_2 - c_1}$. Il Wronskiano delle nuove soluzioni è uguale al quoziente ottenuto dividendo per $c_2 - c_1$ il Wronskiano delle soluzioni iniziali. Questo valeva il prodotto di $e^{(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)x}$ per il prodotto delle differenze a due a due c_r; esso perciò, *diviso per* $c_2 - c_1$, ha un quoziente, che per $c_2 = c_1$ tende a un limite *diverso da zero*. Questo limite è il Wronskiano delle $e^{c_1 x}$, $x e^{c_1 x}$, ecc. c. d. d.

Dimostrazione analoga vale nel caso generale.

Per questa via abbiamo trovato tutti gli integrali, anche complessi, di (1). Vogliamo trovare quelli di essi che sono reali, supposto naturalmente che le p_i sieno costanti reali. In tal caso, se (2) ha una radice complessa semplice $a + i\,b$, essa ha anche la radice complessa coniugata $a - i\,b$; cosicchè insieme all'integrale $e^{(a+ib)x}$ vi sarà anche l'integrale $e^{(a-ib)x}$. Si debbono ora scegliere le costanti $k_1 = l_1 + i\,m_1$, $k_2 = l_2 + i\,m_2$ (l, m = cost. *reali*) in guisa che $k_1\,e^{(a+ib)x} + k_2\,e^{(a-ib)x}$ sia reale, ossia non muti mutando i in $-i$. Si debbono in altre parole scegliere le costanti l, m in guisa che

$$(l_1 + im_1)\;e^{(a+ib)x} + (l_2 + im_2)\;e^{(a-ib)x} =$$
$$= (l_1 - im_1)\;e^{(a-ib)x} + (l_2 - im_2)\;e^{(a+ib)x}.$$

Ciò avviene allora e allora soltanto che k_1 e k_2 sono immaginarie coniugate, ossia che $l_1 = l_2$, $m_1 = -m_2$; nel qual caso

$$k_1\,e^{(a+ib)x} + k_2\,e^{(a-ib)x} = 2\,e^{ax}\,(l_1 \cos bx - m_1 \operatorname{sen} bx).$$

Posto $2\,l_1 = h_1$, $-2\,m_1 = h_2$, questo integrale diventa

$$h_1\,e^{ax} \cos bx + h_2\,e^{ax} \operatorname{sen} bx \qquad (h_1,\ h_2,\ \text{costanti reali arbitrarie}).$$

In modo analogo si vede che, se $a + i\,b$ fosse radice doppia di (2) e quindi altrettanto avvenisse di $a - i\,b$, si trovano anche gli integrali

$$h_3\,xe^{ax} \cos bx + h_4\,xe^{ax} \operatorname{sen} bx \qquad (h_3,\ h_4\ \text{costanti reali arbitrarie})$$

e così via. In modo simile si trattano le altre coppie di radici complesse coniugate; e si vede facilmente che così si ottengono tutti gli *integrali reali* di (1). In conclusione l'integrale *reale* generale di (1) è una combinazione lineare a coefficienti *costanti reali* arbitrari di integrali particolari del tipo

$$x^r\,e^{cx},\ x^r\,e^{ax} \cos bx,\ x^r\,e^{ax} \operatorname{sen} bx.$$

Esempi.

1°) L'equazione $y'' + 2\,y' + 3\,y = 0$ ha $-1 \pm i\,\sqrt{2}$ per radici dell'equazione caratteristica $c^2 + 2\,c + 3 = 0$. Il suo integrale reale generale è quindi $e^{-x}\,(h_1 \cos \sqrt{2}\,x + h_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}\,x)$, dove h_1, h_2 sono costanti *reali* arbitrarie.

2°) L'equazione $y'' - 2\,y' + y = x$ ha le radici dell'equazione $c^2 - 2\,c + 1 = 0$ caratteristica della corrispondente equazione omogenea

$$y'' - 2\,y' + y = 0$$

uguali entrambe a $+1$, cosicchè $c_1 e^x + c_2 x e^x$ ($c_1, c_2 =$ cost. arbitrarie) è l'integrale generale di tale equazione omogenea, perchè il Wronskiano

$$\begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & e^x + x e^x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

delle soluzioni $x, x e^x$ è differente da zero. Quindi l'integrale generale dell'equazione proposta è

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x,$$

dove le c_1, c_2 sono funzioni della x determinate dalle:

$$c'_1 e^x + c'_2 x e^x = 0$$
$$c'_1 e^x + c'_2 (e^x + x e^x) = x$$

donde si trae:

$$c'_1 = -x^2 e^{-x}, \quad c'_2 = x e^{-x}$$

e quindi:

$$c_1 = -\int x^2 e^{-x} dx = x^2 e^{-x} + 2 x e^{-x} + 2 e^{-x} + k_1;$$
$$c_2 = -x e^{-x} - e^{-x} + k_2 \qquad (k_1, k_2 = \text{cost.}).$$

Sarà perciò:

$$y = (x^2 + 2x + 2) + k_1 e^x + (-x^2 - x) + k_2 x e^x =$$
$$= (x + 2) + k_1 e^x + k_2 x e^x \qquad (k_1, k_2 = \text{cost.})$$

l'integrale più generale dell'equazione proposta. Esso si sarebbe potuto scrivere senz'altro, appena fosse stato noto l'integrale particolare $x + 2$, che si sarebbe potuto ottenere più rapidamente coi metodi dati nel seguente esempio 2°.

Altri Esempi.

1° Formare l'equazione lineare omogenea alle derivate ordinarie di n^{esimo} ordine, che ammette gli integrali particolari $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Ris.
$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & \ldots\ldots & y^{(n)} \\ y_1 & y'_1 & y''_1 & \ldots\ldots & y_1^{(n)} \\ y_2 & y'_2 & y''_2 & \ldots\ldots & y_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ y_n & y'_n & y''_n & \ldots\ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0;$$

la quale *non* si riduce ad una identità, nè ad una equazione di ordine minore di n, se il Wronskiano delle y_i è differente da zero.

Il primo membro di questa equazione è il Wronskiano delle $y, y_1, y_2 \ldots\ldots, y_n$. Dunque:

Se il Wronskiano delle $y, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ *è sempre nullo, ma il Wronskiano delle* $y_1, y_2 \ldots\ldots, y_n$ *è differente da zero, la* y *è una combinazione lineare* $k_1 y_1 + k_2 y_2 + \ldots\ldots + k_n y_n$ *a coefficienti* k *costanti delle* $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$.

2° Integrare l'equazione

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$$
$$(p_i = \text{cost.}\,;\ a_i = \text{cost.}\,;\ n, m \text{ interi positivi}).$$

Ris. Anzichè col metodo generale, si può ottenere più brevemente un integrale particolare ponendo:

$$y = b_0 + b_1 x + \ldots\ldots + b_m x^m \quad (b_i = \text{cost.}).$$

Sostituendo nella nostra equazione, e uguagliando nei due membri i coefficienti di x^m, x^{m-1}, ecc., si trova:

$$p_n b_m = a_0\,;\ p_n b_{m-1} + m b_m p_{n-1} = a_1\,;$$
$$p_n b_{m-2} + (m-1) p_{n-1} b_{m-1} + m(m-1) p_{n-2} b_m = a_2\,;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_n b_0 + p_{n-1} b_1 + 2 p_{n-2} b_2 + \ldots + p_1 \underline{|n-1}\, b_{n-1} + \underline{|n}\, b_n = a_m,$$

dove sono supposte nulle le b_i, il cui indice i supera m.

Queste equazioni permettono di determinare successivamente le $b_m, b_{m-1}, \ldots\ldots, b_0$.

Fa eccezione il solo caso $p_n = 0$; ma noi possiamo sempre supporre $p_n \neq 0$, purchè si assuma una conveniente derivata della y come funzione incognita, ecc., ecc.

3° Integrare l'equazione

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots + p_n y = k e^{hx} \quad (p_i, h, k = \text{cost.})\ (k \neq 0)$$

dove h non è radice dell'equazione caratteristica

$$h^n + p_1 h^{n-1} + \ldots\ldots + p_n = 0.$$

Ris. Anzichè col metodo generale, si può ottenere più brevemente un integrale particolare ponendo

$$y = l e^{hx} \quad (l = \text{cost.}).$$

Sostituendo nella nostra equazione si trova

$$l \{ h^n + p_1 h^{n-1} + \ldots\ldots + p_n \} = k,$$

che determina la l, se h non è radice dell'equazione caratteristica relativa al primo membro della nostra equazione differenziale.

4° Si discuta l'equazione

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (p, q = \text{cost.}).$$

Ris. L'equazione caratteristica è $c^2 + pc + q = 0$, e ha per radici $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Se $\frac{p^2}{4} - q = 0$ queste radici coincidono e l'integrale generale della nostra equazione è

$$\lambda\, e^{-\frac{p}{2}x} + \mu x e^{-\frac{p}{2}x} \qquad (\lambda, \mu = \text{cost.}).$$

Escluso questo caso limite di scarso interesse, trattiamo gli altri.

Se $\frac{p^2}{4} - q > 0$, l'equazione ha due radici reali che potremo indicare con α, β; l'integrale generale è $\lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}$ $(\lambda, \mu = \text{cost.})$ il quale, se α, β sono negativi, tende a zero per $x = +\infty$.

Se invece $\frac{p^2}{4} - q < 0$, si ponga $q - \frac{p^2}{4} = k^2$; le radici dell'equazione carattestica saranno $-\frac{p}{2} \pm ik$; e gli integrali della nostra equazione saranno

$$e^{-\frac{p}{2}x} \left\{ \lambda \cos kx + \mu \operatorname{sen} kx \right\} \qquad (\lambda, \mu = \text{cost.}).$$

Essi si ridurranno a sole funzioni trigonometriche se $p = 0$, e quindi $q = k^2$ (*).

Questi risultati sono stati trovati per via diretta al § 113.

Questo studio ha numerosissime applicazioni fisiche.

In molti problemi (scarica elettrica di un condensatore, vibrazione di un pendolo, ecc.) si presenta una quantità y (intensità di corrente, angolo di un pendolo con la posizione di equilibrio) variabile col tempo x, che la fisica dimostra soddisfare a un'equazione del tipo precedente, dove le costanti p, q sono positive. Allora, se $\frac{p^2}{4} - q > 0$, le α, β sono negative, e quindi $y = \lambda\, e^{\alpha x} + \mu\, e^{\beta x}$ ci definisce una y che per $x = \infty$ tende a zero. Si tratta *in tal caso di un semplice fenomeno*

(*) Si può porre $\lambda = a \cos \varphi$, $\mu = a \operatorname{sen} \varphi$, e, invece di dire che λ, μ sono costanti arbitrarie, dire che a, φ sono costanti arbitrarie; la soluzione della nostra equazione diventa $a\, e^{-\frac{p}{2}x} \cos(hx + \varphi)$, dove φ è la cosidetta *fase*.

smorzato (p. es., un pendolo che torna alla posizione di equilibrio in un mezzo che presenta tale attrito da impedirgli ogni ulteriore oscillazione).

Se $p = 0$, allora $q = k^2$; abbiamo in questo caso un puro fenomeno vibratorio: quando kx è aumentato di 2π, ossia quando il tempo x è aumentato di $\frac{2\pi}{k}$ *il sistema riprende le condizioni iniziali*; *cosicchè* $\frac{2\pi}{k}$ *è la durata di una oscillazione completa.*

Se $p > 0$, e se k è reale, allora abbiamo ancora un fenomeno vibratorio. Però l'esponenziale $e^{-\frac{p}{2}x}$, che tende a zero al crescere di x, ci avverte che *le vibrazioni* vanno diminuendo di ampiezza, o come si suol dire, *si smorzano*. La *durata di una oscillazione è sempre* $\frac{2\pi}{k}$. Per fissare le idee, il lettore può pensare alla scarica di un condensatore di capacità C in un filo di resistenza R il cui coefficiente di autoinduzione sia L. Se y è l'intensità della corrente all'istante x, la fisica insegna che $y'' + py' + q = 0$ dove sia posto:

$$p = \frac{R}{L}\,;\; q = \frac{1}{LC}.$$

Per $p = 0$ si ha $k = \sqrt{\frac{1}{CL}}$.

Dunque in tal caso si ha con Thomson che $2\pi\sqrt{LC}$ è la durata di una vibrazione, e, se c è la velocità di propagazione delle onde elettriche, che $2\pi c\sqrt{LC}$ è la lunghezza d'onda.

Un esempio di equazioni a derivate parziali.

Se abbiamo una equazione alle derivate parziali, cioè se la funzione incognita dipende da più variabili indipendenti, allora, come si può verificare sugli esempi dei §§ 93 e 110, una soluzione di tale equazione non si può più definire, prefissando un numero finito di costanti (le $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ del teorema di Cauchy a pag. 377), perchè la soluzione più generale di tale equazione dipende da funzioni arbitrarie.

Noi qui non ci occupiamo dello studio di tali equazioni che è in generale molto difficile. E ci accontentiamo di osservare il seg. teorema, che si può generalizzare a *tutte* le equazioni alle derivate parziali del *primo* ordine. Sia data l'equazione $X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}=0$, ove X, Y sono funzioni note di x, y, e dove f è la funzione incognita. Sia $X \neq 0$. Consideriamo l'equazione $\frac{dy}{dx}=\frac{Y}{X}$ alle derivate ordinarie; e la $\varphi(x, y)=$ cost. definisca la sua soluzione più generale. Sarà $X\frac{\partial \varphi}{\partial x}+Y\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0$, perchè $\frac{Y}{X}=\frac{dy}{dx}$ deve essere uguale a quel valore di y', che dalla $\varphi=$ cost. si deduce in virtù del teorema delle funzioni implicite. Poniamo $x=x_1$, $\varphi(x, y)=y_1$ e assumiamo x_1, y_1 come nuove variabili indipendenti, come sarà generalmente possibile. Sarà:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y_1}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

La nostra equazione diventa perciò $\frac{\partial f}{\partial x_1}=0$. Cioè le funzioni f cercate sono tutte e sole le funzioni della y_1, cioè della φ. (Cfr. § 110, pag. 368).

Così p. es. le soluzioni di $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=0$ $(X=Y=1)$ sono le funzioni di $x-y$, perchè le soluzioni di $\frac{dy}{dx}=1$ si ottengono risolvendo la $x-y=$ cost.

In modo simile (cfr. il § 110, pag. 369) le soluzioni di

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots\ldots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0,$$

ove le $X, X_1, \ldots, X_n$ sono funzioni di $x, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, sono tutte e sole le funzioni di $\varphi_1, \varphi_2 \ldots\ldots, \varphi_n$, se le soluzioni del sistema

$$\frac{dx}{X}=\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots\ldots=\frac{dx_n}{X_n}$$

si ottengono risolvendo le $\varphi_1=$ cost., $\varphi_2=$ cost., ..., $\varphi_n=$ cost. Ma non è nostro scopo approfondire e precisare simili studii.

CAPITOLO XIX.

ALCUNE APPLICAZIONI GEOMETRICHE DEL CALCOLO INFINITESIMALE

§ 118 — Tangente ad una curva gobba.

Siano

$$x = x(t)\ ;\ y = y(t)\ ;\ z = z(t) \tag{1}$$

funzioni derivabili di un parametro t. Al variare della t il punto (x, y, z) definito da (1) descriva una curva C. Su questa consideriamo un punto $A = (x_0, y_0, z_0)$ corrispondente al valore t_0 della t, e un altro punto B corrispondente al valore $t_0 + h$ della t. Poniamo $x'_0 = x'(t_0)$, $y'_0 = y'(t_0)$, $z'_0 = z'(t_0)$. Per analogia con le curve piane noi chiameremo retta tangente alla C in A la posizione limite della retta AB (per $h = 0$).

Le equazioni della AB sono:

$$\frac{x - x_0}{x(t_0 + h) - x_0} = \frac{y - y_0}{y(t_0 + h) - y_0} = \frac{z - z_0}{z(t_0 + h) - z_0}\ (*).$$

E i suoi coseni direttori sono quindi proporzionali alle

$$x(t_0 + h) - x_0,\ y(t_0 + h) - y_0,\ z(t_0 + h) - z_0$$

ossia alle:

$$\frac{x(t_0 + h) - x_0}{h},\ \frac{y(t_0 + h) - y_0}{h},\ \frac{z(t_0 + h) - z(t_0)}{h}.$$

I limiti x'_0, y'_0, z'_0 di queste frazioni (rapporti incrementali) saranno dunque proporzionali ai coseni direttori della tangente in A della C; la quale avrà dunque per equazione

$$\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0}.$$

(*) Si suppongono i dominatori non contemporaneamente nulli. Questa ipotesi è contenuta (per h abbastanza piccolo) nell'altra, che enunciamo più sotto, che almeno una delle x'_0, y'_0, z'_0 sia differente da zero.

(È necessario supporre che non sia $x'_0 = y'_0 = z'_0 = 0$; si esamini il caso che soltanto alcune di queste derivate siano nulle).

I coseni direttori di tale tangente r saranno dunque $\lambda x'_0$ $\lambda y'_0$, $\lambda z'_0$, dove λ è un fattore di proporzionalità definito dalla

$$(\lambda x'_0)^2 + (\lambda y'_0)^2 + (\lambda z'_0)^2 = 1.$$

E perciò:

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0}},$$

e quindi:

$$\cos(xr) = \pm\frac{x'_0}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0}}; \cos(yr) = \pm\frac{y'_0}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0}};$$

$$\cos(zr) = \pm\frac{z'_0}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0}};$$

dove il segno da scegliersi dipenderà dal verso della tangente r scelto come positivo.

§ 119. — **Piano tangente ad una superficie.**

Sia S una superficie $f(x, y, z) = 0$; e siano $f'_x, f'_y f'_z$ continue nell'intorno di un punto $A = (x_0, y_0, z_0)$ di S. Siano

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t) \qquad (1)$$

(dove i secondi membri sono funzioni derivabili di un parametro t) le equazioni di una curva C posta su S ed uscente da A. La teoria delle funzioni implicite prova che di tali curve C ne esistono infinite, se f'_x, f'_y, f'_z non sono tutte nulle in A. Sostituendo nella $f(x, y, z)$ alle x, y, z i valori dati da (1), si otterrà una funzione della t *identicamente* nulla, perchè tutti i punti di C giacciono sulla S. La derivata di questa funzione della t sarà quindi nulla in tutti i punti di C, e in particolare nel punto A. Sarà cioè:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x'_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y'_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 z'_0 = 0, \qquad (2)$$

dove l'indice 0 è posto per indicare che le derivate sono calcolate nel punto A. La tangente in A alla C ha per equazione

$$\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{z'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0}. \qquad (3)$$

Nel primo membro di (2), che è un polinomio *omogeneo* nelle x'_0, y'_0, z'_0, potrò a queste derivate sostituire le $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, che per le (3) sono ad esse proporzionali.

Ne deduciamo che i punti x, y, z della tangente in A ad una qualsiasi delle nostre curve C soddisfano alla:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0. \quad (4)$$

La (4) non è una identità, perchè già abbiamo escluso che $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 = 0$; e, poichè è di primo grado nelle x, y, z, essa è l'*equazione* di un piano: il cosidetto *piano tangente* alla S nel punto A. Quindi:

Se f(x, y, z) = 0 *è l'equazione di una superficie* S, *e se in un intorno di un punto* A *di* S *le* f'_x, f'_y, f'_z *sono finite e continue, mentre in* A *queste derivate non sono tutte nulle, si possono tirare su* S *infinite curve* (dotate di tangente) *uscenti da* A. *Le tangenti in* A *a tutte queste curve giacciono in uno stesso piano* (4): il piano tangente alla S nel punto A.

Se l'equazione della superficie è data sotto la forma:

$$z = \varphi(x, y),$$

ossia, se $f = \varphi(x, y) - z$, l'equazione del piano tangente diventa:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Adottando la notazione di Monge:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = q,$$

essa si ridurrà a

$$p_0 (x - x_0) + q_0 (y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

che è l'equazione cercata.

Volendo trovare i coseni direttori della normale n al piano, basterà ricordare che tali coefficienti sono proporzionali ai coefficienti di x, y, z, cioè a $p_0, q_0, -1$.

Essi saranno λp_0, λq_0, $-\lambda$, dove il fattore λ di proporzionalità si determina ricordando che deve essere

$$[\lambda p_0]^2 + [\lambda q_0]^2 + \lambda^2 = 1.$$

Otterremo:

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{p_0^2 + q_0^2 + 1}},$$

ed infine:

$$\cos nx = \frac{p_0}{\pm\sqrt{p_0^2 + q_0^2 + 1}}, \quad \cos ny = \frac{q_0}{\pm\sqrt{p_0^2 + q_0^2 + 1}},$$

$$\cos nz = \frac{-1}{\pm\sqrt{p_0^2 + q_0^2 + 1}},$$

ove il doppio segno dipende dall'arbitrarietà con cui si può fissare il verso positivo della normale considerata.

È evidente l'analogia della (4) con l'equazione (10) trovata al § 84, pag. 285, per la retta tangente alla curva piana $f(x, y) = 0$ nel punto (x_0, y_0).

§ 120. — **Lunghezza di un arco di curva sghemba.**

α) Abbiamo già visto in parecchi esempi in cui si doveva cercare una funzione additiva d'intervallo, come fosse assai spesso facilissimo definirne la derivata. Così, per es., mentre la ricerca dell'area racchiusa tra l'asse delle x, la curva $y = F(x)$, e due ordinate richiede una integrazione, la derivata di quest'area è semplicemente l'ordinata stessa $F(x)$.

Così avviene nel problema di misurare la lunghezza di un arco di curva C. Ma qui si presenta un'altra difficoltà. Che cosa vuol dire la frase: lunghezza di un arco di curva C? Noi tutti ne abbiamo un'idea intuitiva, ma il primo problema è appunto quello di tradurre nel modo più semplice questa idea intuitiva in una, diremo così, idea matematica; così da poter dare un mezzo per calcolare tale lunghezza (*).

Cominciamo a limitare l'insieme delle curve C, di cui ci vogliamo occupare. Noi supporremo di limitarci a curve C dotate in ogni punto di tangente variabile con continuità, le quali siano in corrispondenza biunivoca con la loro proiezione su una retta r (in guisa cioè che punti distinti di C abbiano proiezioni distinte). Sia I la proiezione di C su r. Ogni seg-

(*) Questo problema è di natura affatto analoga a quello che si presenta per definire tutte le figure e grandezze geometriche. Se si presume di conoscere già l'ente che si vuol studiare, si ammettono circa tale ente dei *postulati*. Se si suppone di non conoscerlo, si assumono questi postulati come definizione matematica dell'ente stesso.

mento (a, b) interno ad I determina quel pezzo di C, che si proietta in (a, b).

Supponiamo di sapere che cosa è la lunghezza di C ed anche la lunghezza di ogni sua parte. Allora ogni intervallo (a, b) di r individua un pezzo della curva C, e la lunghezza di questo. *Tale lunghezza* S (a, b) *sarà una funzione continua di* (a, b) *che evidentemente è additiva* (*); perchè se (a, b), (b, c) sono due intervalli distinti, evidentemente la lunghezza di quel pezzo di C che si proietta in (a, b) e la lunghezza di quel pezzo di C che si proietta in (b, c) hanno per somma la lunghezza di quel pezzo di C che si proietta in $(a, b) + (b, c) = (a, c)$.

I nostri procedimenti basteranno a calcolarla, se di tale funzione additiva sappiamo dare la derivata. Tale derivata è per definizione il limite

$$\lim_{b=a} \frac{S(a, b)}{b - a} \tag{1}$$

del rapporto ottenuto dividendo la lunghezza del pezzo di curva che si proietta nell'intervallo (a, b) per l'ampiezza $b - a$ di tale intervallo.

La più semplice ipotesi che noi possiamo fare, ispirandoci all'idea intuitiva, che un tale pezzetto di curva, quando la sua proiezione $b - a$ è molto piccola, si confonde quasi con un pezzetto della retta tangente alla curva, è la seguente:

Tale derivata è identica a quella che si otterrebbe sostituendo alla curva la tangente τ *in quel suo punto che si proietta nel punto* x = a.

Questo secondo postulato ci appare come il più semplice anche per la seguente considerazione. Nel cerchio il rapporto di una corda all'arco corrispondente tende ad uno, quando l'arco tende a zero. Appare spontaneo di ammettere questa proprietà per curve qualsiasi. Il precedente postulato ne è conseguenza immediata. Infatti ammettere tale proprietà equivale ad ammettere che, se noi indichiamo con $c(a, b)$ la lunghezza dellà corda congiungente quei punti di C che si proiettano nei punti $x = a$, $x = b$, sia

$$\lim_{b=a} \frac{c(a, b)}{S(a, b)} = 1.$$

Cosicchè il limite (1) si può scrivere anche

$$\lim_{b=a} \frac{S(a, b)}{b - a} \lim_{b=a} \frac{c(a, b)}{S(a, b)} = \lim_{b=a} \frac{c(a, b)}{b - a}. \tag{2}$$

Ora poichè la retta, cui appartiene la corda (a, b) tende, per $b = a$, alla retta tangente τ, il limite (2) coincide col limite (1) calcolato nel modo dato dal precedente postulato.

(*) Naturalmente questa affermazione è un primo postulato.

Si è così in più dimostrato *che i postulati enunciati sono concordi con le definizioni elementari relative alla lunghezza degli archi di cerchio.*
La definizione, data assai spesso che la lunghezza di un arco di una curva C è il limite superiore dei perimetri delle poligonali inscritte è più generale della precedente, ma non contrasta mai con essa. Non la adottiamo per le complicazioni che porterebbe una definizione analoga di area di una superficie sghemba.

È bene evidente che i postulati da noi posti hanno un significato indipendente dalla scelta della particolare retta r su cui si proietta. Se la retta su cui si proietta, è l'asse delle x, la derivata citata sarà $\dfrac{1}{\cos(\tau x)}$, dove τx è l'angolo che la tangente τ forma con l'asse delle x.

L'arco della curva compreso tra i punti di ascissa a e b sarà dunque nelle nostre ipotesi

$$\int_a^b \frac{1}{\cos(\tau x)}\, dx$$

Le nostre ipotesi equivalgono a dire che:

1° Le equazioni di C si possano porre sotto la forma:

$$y = f(x) \quad , \quad z = \varphi(x),$$

perchè in tal caso il valore di x (cioè la proiezione sull'asse delle x) individua il punto della curva.

2° La $\dfrac{1}{\cos \tau x} = \sqrt{1 + f'^2(x) + \varphi'^2(x)}$ (§ 118) esiste ed è una funzione continua di x (le f, φ hanno derivate continue).

In tal caso il nostro arco è dato da:

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x) + \varphi'^2(x)}\, dx.$$

Posto $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, $\varphi'(x) = \dfrac{dz}{dx}$, si ha che il nostro arco vale

$$\int \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}\, dx.$$

formola che, come è noto dalle regole di integrazione per sostituzione, è indipendente dalla variabile scelta come variabile di integrazione, e che si suole scrivere perciò

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Ciò significa che, se $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ sono le equazioni parametriche della curva, quel suo arco corrispondente a valori di t dell'intervallo (α, β) vale:

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt.$$

Questa formola vale anche per curve, che siano in corrispondenza biunivoca con la proiezione sull'asse delle y, o sull'asse delle z; e si estende tosto a curve, che si possano scomporre in un numero finito di pezzi, ognuno dei quali sia in corrispondenza biunivoca con la sua proiezione su uno dei tre assi.

Se noi indichiamo con s l'arco contato da un'origine qualsiasi al punto t, è dunque $s'_t = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}$; cosicchè i coseni direttori della tangente alla curva sono (pag. 397):

$$\frac{x'_t}{s'_t} = \frac{dx}{ds}, \quad \frac{y'_t}{s'_t} = \frac{dy}{ds}, \quad \frac{z'_t}{s'_t} = \frac{dz}{ds}.$$

Affinchè il parametro t coincida con l'arco s misurato nell'uno o nell'altro verso a partire da uno o da un altro punto è dunque necessario e sufficiente che $x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t = 1$.

La nostra formola si può rendere intuitiva anche per altra via: la nostra definizione sarà così giustificata anche con nuovo metodo. Un pezzetto piccolissimo della nostra curva ha per lunghezza l'incremento ds che s subisce passando da un estremo all'altro; se noi lo consideriamo come rettilineo, avremo che ds^2 è uguale alla somma dei quadrati delle sue proiezioni dx, dy, dz sui tre assi coordinati. È perciò $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Esempio.

Si trovi il perimetro dell'ellisse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Le $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$ per $0 \leq t \leq 2\pi$ sono le equazioni parametriche di tale ellisse. Il suo perimetro sarà:

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t}\, dt.$$

Posto $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$ (dove $e < 1$) tale integrale si calcola integrando per serie come l'integrale dell'esempio al § 79, pag. 266.

β) Lunghezza *di una curva piana* in coordinate polari.

Posto $x = r \cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, dalla $dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2$ si deduce che la lunghezza di una curva definita dalle:

$$r = r(t) \qquad \theta = \theta(t)$$
$$a \leqq t \leqq b$$

vale

$$\int_a^b \sqrt{r'^2 + r^2\, \theta'^2}\, dt.$$

Consideriamo, p. es., la curva

$$r = h + k\,\theta \qquad (h, k = \text{cost.}),$$

che si riduce a un cerchio per $k = 0$ e a una spirale di Archimede per $h = 0$. Quel suo arco per cui $a \leqq \theta \leqq b$ ha per lunghezza

$$\int_a^b \sqrt{k^2 + (h + k\,\theta)^2}\, d\,\theta$$

come si riconosce ponendo $\theta = t$. Posto $k = 0$, $a = 0$, $b = 2\,\pi$ se ne deduce che $2\pi h$ è la periferia del cerchio di raggio h. Il lettore studii il caso $k \neq 0$.

§ 121. — Area di una superficie sghemba ed integrali estesi ad una superficie sghemba.

α) Affatto analogo è lo studio dell'area di una superficie R sghemba. Se tale superficie R è in corrispondenza biunivoca con la sua proiezione I sul piano xy, ed è quindi rappresentabile con un'equazione $z = f(x, y)$, *l'area* s *di quel suo pezzo* s, *che si proietta in un pezzo* σ *di* I si definirà nel modo più semplice come *quella funzione additiva di* σ, *la cui derivata in un punto* A *di* I *è identica a quella che si otterrebbe sostituendo alla* R *il suo piano tangente nel punto che si proietta in* A. Tale derivata (che *supporremo finita e continua*) vale dunque $\dfrac{1}{\cos\alpha}$, se α è l'angolo del primo quadrante che tale piano tangente forma col piano xy, cioè è l'angolo $\widehat{nz}$ del primo quadrante che la normale ad R nel punto considerato forma con l'asse delle z (*). Poichè con le notazioni del § 119 si ha $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, l'area s del pezzo s di R sarà:

$$\int \sqrt{1+p^2+q^2}\, d\sigma$$

esteso alla proiezione σ di s sul piano xy.

Si noti che ciò equivale appunto alla

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Ed è facile verificare direttamente che tale integrale ha un significato indipendente dalla posizione degli assi coordinati, ed estendere tale formola a superfici composte di un numero finito di pezzi, ciascuno dei quali sia in corrispondenza biunivoca con la sua proiezione su un qualche piano, p. es., su uno dei tre piani coordinati.

Noi, anzichè occuparci di tali questioni, vogliamo aggiungere una sola importante osservazione.

β) Sia S una funzione additiva dei pezzi s di una tale superficie R. Se, com'è la convenzione più spontanea, adottiamo come misura s di un pezzo s l'area testè definita, la derivata F di S sarà $\frac{dS}{ds}$. Se consideriamo il valore di S corrispondente a un pezzo s di R come funzione della proiezione σ di s sul piano xy, ossia, se adottiamo come misura di s l'area σ di tale proiezione, la derivata di S sarà

$$\frac{dS}{d\sigma} = \frac{dS}{ds}\frac{ds}{d\sigma} = \sqrt{1+p^2+q^2}\, F.$$

Cosicchè:

$$S = \int \sqrt{1+p^2+q^2}\, F d\sigma = \int dx \int \sqrt{1+p^2+q^2}\, F dy.$$

Questa formola riduce il calcolo di funzioni additive dei pezzi di una superficie S a quello di un integrale piano.

(*) Vedremo che tale definizione concorda con la definizione elementare nel caso della sfera; cfr. le osservazioni del precedente § 120. Noto che qui, analogamente a quanto si è fatto in altri paragrafi, si indica con la stessa lettera s un pezzo di R e la sua area.

Esempio.

Sia R una superficie, parte della parete di un recipiente pieno d'acqua (un bacino di carenaggio, p. es.). A pag. 332, es. 3°, abbiamo studiato il caso che R fosse piano e verticale; qui studiamo il caso generale. Ricordando che la pressione subìta da R, se R fosse un piano comunque inclinato, sarebbe normale ad R e avrebbe per intensità il peso della colonna liquida che gravita su R, si induce la seguente proposizione generale.

Se l'asse delle z è verticale, e la z rappresenta proprio la distanza di un punto del recipiente dal pelo libero del liquido, le componenti secondo l'asse delle x o delle y o delle z della pressione subìta da un pezzo s di R sono funzioni additive di s, la cui derivata vale rispettivamente $z \cos(nx)$, o $z \cos(ny)$, o $z \cos(nz)$.

Se R è in corrispondenza biunivoca con la sua proiezione sul piano xy, tali componenti valgono dunque

$$\int z \cos(nx) \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, d\sigma = \iint zp\, dz\, dy,$$

oppure $\iint zq\, dx\, dy$, oppure $\iint z\, dx\, dy$.

La componente $\iint z\, dx\, dy$ verticale della pressione è evidentemente il volume del cilindroide generato dai segmenti proiettanti i punti di R sul piano xy (pelo libero del liquido).

§ 122. — **Area di una superficie di rotazione.**

Se noi poniamo

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \quad (\text{donde } \rho = \sqrt{x^2 + y^2})$$

l'equazione di una superficie si può scrivere nella forma

$$z = f(\rho, \theta). \tag{1}$$

Se essa è di rotazione attorno all'asse delle z, l'aumentare θ di una costante α qualsiasi, cioè il far rotare di un angolo α la nostra superficie attorno all'asse delle z trasforma la superficie in sè stessa, cioè non ne muta l'equazione (1); cosicchè, qualunque sia α, sarà $f(\rho, \theta) = f(\rho, \theta + \alpha)$. Cioè $f(\rho, \theta)$ non varia, qualunque incremento venga dato alla θ, cioè comunque si cambi il valore della θ. Essa è dunque indipendente dalla θ;

cioè è una funzione $\varphi(\rho)$ della sola ρ. E l'equazione della nostra superficie sarà del tipo:

$$z = \varphi(\rho) \quad \text{cioè} \quad z = \varphi(+\sqrt{x^2 + y^2}). \qquad (1)_{\text{bis}}$$

La sua intersezione col *semipiano* (si noti *non* col piano)

$$y = 0 \quad , \quad x > 0$$

è un *profilo meridiano*, la cui equazione (in tale semipiano) sarà:

$$z = \varphi(x) \qquad \text{(dove } x \text{ è positivo).} \qquad (2)$$

L'area della nostra superficie vale l'integrale

$$\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

Questo integrale si deve naturalmente estendere alla proiezione della superficie sul piano xy; questa proiezione è la **corona** circolare ottenuta facendo rotare attorno all'origine e sul piano xy la proiezione sull'asse delle x della curva (2) [o del pezzo di curva (2) considerato].

Ora

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = \varphi'(\rho) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \varphi'(\rho) \cos\theta$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \qquad\qquad\qquad\qquad = \varphi'(\rho) \operatorname{sen}\theta \; .$$

$$1 + p^2 + q^2 = 1 + \varphi'^2(\rho).$$

Perciò l'area A di S è data da:

$$A = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy = \iint \sqrt{1 + \varphi'^2(\rho)}\, dx\, dy =$$

$$= \iint \sqrt{1 + \varphi'^2(\rho)}\, \rho\, d\rho\, d\theta = \int d\theta \int \sqrt{1 + \varphi'^2(\rho)}\, \rho\, d\rho =$$

$$= 2\pi \int \sqrt{1 + \varphi'^2(\rho)}\, \rho\, d\rho, \quad (*)$$

che si può scrivere

$$A = 2\pi \int \sqrt{1 + \varphi'^2(x)}\, x\, dx =$$

$$= 2\pi \int \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, x dx = 2\pi \int x ds \qquad (3)$$

(*) Si noti che $\int \sqrt{1 + \varphi'^2(\rho)}\, \rho\, d\rho$ (i cui limiti sono i raggi della precedente corona circolare) è *indipendente* dalla θ, e che l'integrazione rispetto a θ è fatta nell'intervallo $(0, 2\pi)$.

dove con $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$ indico ora il differenziale dell'arco della curva C, e l'integrale si deve estendere all'intervallo, in cui varia la s, quando si descrive C.

La (3) *costituisce la formola fondamentale per il calcolo dell'area di una superficie di rotazione.*

Essa si può rendere intuitiva, osservando che ogni pezzetto infinitesimo ds della curva C genera rotando un tronco di cono, le cui sezioni circolari sono cerchi di raggio x, e la cui area e quindi $2\pi xds$. Questa osservazione non ha però, così esposta, alcuna pretesa di rigore. Resa rigorosa, essa dimostra che *l'area di una superficie di rotazione è il limite dell'area generata dalla rotazione di un poligono inscritto nel profilo meridiano, quando i lati di esso tendono a zero.* Lo studioso deduca la (3), ammettendo questo teorema.

Esercizio.

Si calcoli l'area della sfera di raggio R.

Se la sfera ha per centro l'origine, essa è generata dalla rotazione attorno all'asse delle z di un semicerchio C di raggio R posto nel solito semipiano xz. Se φ è l'angolo che un raggio generico del semicerchio C forma con l'asse delle x, e assumiamo come origine degli archi s il punto in cui C incontra l'asse delle x, si ha: $s = R\varphi$. D'altra parte $x = R\cos\varphi$; e il semicerchio si descrive facendo variare φ da $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$.

L'area della sfera vale dunque

$$2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R\cos\varphi)\, Rd\varphi = 2\pi R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = 4\pi R^2,$$

che coincide col valore dato dalla geometria elementare.

Teor. di Guldino. La (1) si può interpretare con un teorema analogo a quello del § 106, pag. 346, osservando che, se L è la lunghezza della curva rotante, d la distanza dell'asse delle z (cioè l'ascissa) del suo centro di gravità, allora $Ld = \int x\, ds$.

Se ne deduce: *L'area di una superficie di rotazione vale* 2π Ld, cioè vale *il prodotto della lunghezza* L *di un profilo meridiano per la lunghezza* 2π d *della circonferenza descritta nella rotazione del centro di gravità di tale profilo.*

Esempio.

Centro di gravità di una semicirconferenza. Una semicirconferenza di raggio R e lunghezza πR descrive, rotando attorno al suo diametro, una sfera di area $4\pi R^2$. La distanza d dal centro di gravità della semicirconferenza al diametro soddisfa perciò alla $4\pi R^2 = \pi R . 2\pi d$, e vale dunque $d = \dfrac{2R}{\pi}$.

§ 123. — Piano osculatore ad una curva sghemba.

Sia data una curva C definita dalle equazioni:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t); \tag{1}$$

i cui secondi membri abbiano derivate prime e seconde continue in un intorno di $t = t_0$.

Sia A il punto di C corrispondente al valore t_0 della t; e siano B, D i punti corrispondenti ai valori $t_0 + h$, $t_0 + k$. I punti A, B, D giacciano nel piano π di equazione

$$ax + by + cz + d = 0. \tag{2}$$

I punti comuni a C ed a π soddisferanno all'equazione $ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0$, che si ottiene eliminando tra (1) e (2) le coordinate correnti x, y, z. Ciò avviene in particolare dei punti A, B, D; cosicchè la funzione della t

$$F(t) = ax(t) + by(t) + cz(t) + d \tag{3}$$

sarà nulla per $t = t_0$, $t = t_0 + h$, $t = t_0 + k$. Per il teorema di Rolle nel più grande dei segmenti determinati da questi tre punti esistono almeno due punti t_1, t_2 ove $F'(t)$ è nulla, e quindi almeno un punto t_3, ove è nulla $F''(t)$. Sarà quindi in particolare [posto $x_0 = x(t_0)$; $y_0 = y(t_0)$, ecc.]

$$\begin{aligned} &ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \\ &ax'(t_1) + by'(t_1) + cz'(t_1) = 0 \\ &ax''(t_3) + by''(t_3) + cz''(t_3) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Se le (4) individuano (*) i rapporti $a:b:c:d$ (cioè se nessuna delle (4) è combinazione lineare delle precedenti), i punti A, B, D non sono in linea retta; e il piano ABD è determinato dalle stesse (4). Noi supporremo che così avvenga effettivamente.

(*) Aggiungendo alla (4) la identità $0 . a + 0 . b + 0 . c + 0 . d = 0$ vi ha un sistema di 4 equazioni omogenee nelle 4 incognite a, b, c, d; il quale, se è di caratteristica 3, determina, come si è visto al § 27, pag. 89, le a, b, c, d a meno di un fattore comune λ, o, ciò che è lo stesso, determina i rapporti $a:b:c:d$.

Si osservi ora che, quando h e k tendono a zero,

$$\lim t_1 = \lim t_3 = t_0 .$$

Poichè le derivate prime e seconde delle x, y, z sono finite e continue, sarà $\lim x'(t_1) = x'(t_0)$; $\lim x''(t_3) = x''(t_0)$; ecc.

I rapporti $a : b : c : d$ definiti dalle (4) tenderanno al limite ai rapporti $a : b : c : d$ definiti dalle

$$\left.\begin{aligned} ax_0 + by_0 + cz_0 + d &= 0 \\ ax'_0 + by'_0 + cz'_0 &= 0 \\ ax''_0 + by''_0 + cz''_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(dove si è posto $x'(t_0) = x'_0$, $x''_0(t_0) = x''_0$, ecc.), se nessuna delle (5) è combinazione lineare delle precedenti, ossia se la matrice

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 & 0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 & 0 \end{matrix} \right\| \tag{6}$$

è di caratteristica 3. E, se questo avviene, anche l'ipotesi analoga fatta sopra per le (4) è soddisfatta, se h, k sono abbastanza piccole, perchè le x', x'', ecc. sono continue.

Il piano (2), i cui coefficienti a, b, c, d soddisfano alle (5), si dirà *il piano osculatore* alla curva C in A : ed è facile riconoscere che i coseni direttori della sua normale, e la distanza dall'origine sono i limiti delle quantità analoghe per il piano ABD ; cosicchè tale *piano osculatore* si può dire il piano *limite del piano che passa per* A *e per due punti vicini* B, D *della curva, quando* B, D *si avvicinano indefinitivamente ad* A.

Eliminando le a, b, c, d tra le (2), (5) si ha :

$$(7)\quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 & 0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ossia} \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 1$$

come equazione del piano osculatore in A. Ed è facile riconoscere che, nella nostra ipotesi per la matrice (6), la (7) non può ridursi ad una identità.

Dalla (7) risulta evidente che detto piano osculatore contiene la retta uscente da $A = (x_0, y_0, z_0)$ coi coseni direttori proporzionali ad x'_0, y'_0, z'_0, cioè la retta tangente alla curva nel punto A.

Dimostriamo come esercizio, che il piano osculatore è il piano limite di un piano π' che passa per A, per B, per la tangente in A, quando B si avvicina indefinitamente ad A.

Se $ax+by+cz+d=0$ è l'equazione di π', le a, b, c, d devono soddisfare alle: $ax_0+by_0+cz_0+d=0$, $ax'_0+by'_0+cz'_0=0$ e $ax(t_0+h)+by(t_0+h)+$ $+cz(t_0+h)+d=0$. All'ultima equazione possiamo, in virtù delle prime due, sostituire la:

$$a\,\frac{x(t_0+h)-hx'_0-x_0}{h^2}+b\,\frac{y(t_0+h)-hy'_0-y_0}{h^2}+c\,\frac{z(t_0+h)-hz'_0-z_0}{h^2}=0$$

Passando al limite per $h=0$ e ricordando il risultato del § 63, pag. 199, questa equazione diventa $ax''_0+by''_0+cz''_0=0$. Ritroviamo così precisamente le (5). Se addottassimo la proprietà qui enunciata per definire il piano osculatore, notiamo che *non avremmo dovuto supporre continue le* x'', y'', z'', *ma che sarebbe bastato supporre determinate e finite le derivate seconde nel punto* $t=t_0$.

Si dice *piano normale* in A il piano

$$x'_0(x-x_0)+y'_0(y-y_0)+z'_0(z-z_0)=0,$$

luogo delle normali alla retta tangente in A innalzate dal punto A. La sua intersezione col piano osculatore dicesi *normale principale*.

La normale in A al piano osculatore giace sul piano normale, e dicesi *binormale*.

La ragione di questo nome sta in ciò che, considerato il piano osculatore come il piano di tre punti A, B, D infinitamente vicini, la binormale è normale alle *due* rette infinitamente vicine AB, BD; le quali congiungendo punti consecutivi, si debbono considerare entrambe tangenti alla curva C.

§ 124. — **Cerchio osculatore.**

α) Sia
$$x=x(t) \quad , \quad y=y(t) \tag{1}$$

una curva piana Γ; le $x(t)$, $y(t)$ posseggano derivate prime e seconde finite e continue in un certo intorno γ di $t=a$. Sia A il punto $t=a$; siano B e C due punti $t=a+h$, $t=a+k$ dell'intorno γ. Supposto che i tre punti A, B, C di Γ non siano allineati, per essi passerà un cerchio di equazione

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2-R^2=0, \tag{2}$$

se (ξ, η) ne è il centro, R il raggio. I punti *comuni alla curva e al cerchio* soddisferanno all'equazione dedotta *sostituendo nella equazione* (2) *del cerchio i valori delle* x, y *dati dalle equazioni* (1) di Γ:

$$[x(t)-\xi]^2+[y(t)-\eta]^2-R^2=0.$$

Il primo membro è una funzione $F(t)$ della t, che dovrà esser nulla almeno nei punti $t=a$, $t=a+h$, $t=a+k$

(perchè i punti A, B, C appartengono alla curva e al cerchio). I valori $a, a+h, a+k$ determinano *due* intervalli, ai cui estremi $F(t)$ si annulla; entro *ciascuno* di essi esisterà almeno un punto ove $F'(t)$ è nullo (per il teorema di Rolle); e dentro l'intervallo, di cui questi due punti sono gli estremi, esisterà almeno un punto, ove sarà nulla la derivata $F''(t)$ di $F'(t)$. Sia $t=b$ uno dei punti citati ove si annulla $F(t)$ e sia $t=c$ uno dei punti ove si annulla $F''(t)$ (*). [Questi punti, appartenendo agli intervalli, di cui $a, a+h, a+k$ sono gli estremi, hanno (si ricordi) per limite il punto a, quando h, k tendono a zero].

Sarà:

$$F(a)=[x(a)-\xi]^2+[y(a)-\eta]^2-R^2=0 \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}F'(b)=[x(b)-\xi]\,x'(b)+[y'(b)-\eta]\,y'(b)=0 \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}F''(c)=[x(c)-\xi]\,x''(c)+[y(c)-\eta]\,y''(c)+x'^2(c)+ \\ +y'^2(c)=0. \tag{5}$$

Supponiamo ora:

$$x'y''-x''y' \neq 0 \qquad \text{per } t=a \text{ (nel punto } A). \tag{6}$$

Sarà anche $x'(b)\,y''(c)-y'(b)\,x''(c)\neq 0$, quando b e c sono abbastanza vicini ad a, ossia quando $|h|$, $|k|$ sono abbastanza piccoli (come noi ora supporremo).

Supposte note le b, c, le (4), (5) costituiscono un sistema di due equazioni lineari nelle due incognite ξ, η; che si possono risolvere perchè il determinante $x'(b)\,y''(c)-y'(b)\,x''(c)$ dei coefficienti delle incognite è diverso da zero. Determinate così le ξ, η, la (3) ci permette di dedurne tosto il valore di R. È facile dedurne che da questa ultima ipotesi (6) segue l'ipotesi iniziale che A, B, C non sono in linea retta, che possiamo perciò non enunciare esplicitamente [perchè inclusa nella (6)].

I limiti di ξ, η, R per $h=k=0$ sono evidentemente le quantità ξ, η, R determinate dalle equazioni che si ottengono da (3), (4), (5) passando al limite per $h=k=0$, cioè, per quanto abbiamo già osservato, ponendo in (3), (4), (5) $b=c=a$;

(*) Di tali punti b ce ne sono almeno *due*; di punti c almeno uno.

tali equazioni (*) sono le

$$(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 - R^2 = 0 \qquad (7)$$

$$(x_0 - \xi)\, x'_0 + (y_0 - \eta)\, y'_0 = 0 \qquad (8)$$

$$(x_0 - \xi)\, x''_0 + (y_0 - \eta)\, y''_0 + x'^2_0 + y'^2_0 = 0 \qquad (9)$$

dove, per semplicità, abbiamo indicato con x_0, y_0 le coordinate $x(a)$, $y(a)$ di A, e con x'_0, x''_0...... i valori corrispondenti (per $t = a$) di $x'(t)$, $x''(t)$, ...

Il cerchio che ha il centro (ξ, η) e il raggio R definiti da queste equazioni si considererà come il cerchio *limite* del cerchio ABC e si dirà il *cerchio osculatore* alla nostra curva nel punto A di coordinate x_0, y_0.

Dalle (8), (9) si deducono i valori ξ, η; donde per (7) si trae il valore di R. Sarà pertanto, abolendo per brevità l'indice 0,

$$\xi = x - \frac{x'^2 + y'^2}{x'\, y'' - x''\, y'}\, y' \quad ; \quad \eta = y + \frac{x'^2 + y'^2}{x'\, y'' - x''\, y'}\, x' \qquad (10)$$

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|\, x'\, y'' - x''\, y' \,|} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'\, y'' - x''\, y'}\, \varepsilon, \qquad (11)$$

ove $\varepsilon = +1$, oppure $\varepsilon = -1$ secondo che $x'\, y'' - x''\, y'$ è positivo o negativo.

Le (10) si possono scrivere:

$$\xi = x - R\left[\varepsilon \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right], \quad \eta = y + R\left[\varepsilon \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right].$$

Ora la somma dei quadrati di $\varepsilon \dfrac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ ed $\varepsilon \dfrac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ vale 1; esiste perciò un angolo θ tale che:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta = \varepsilon \dfrac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad \operatorname{sen}\theta = \varepsilon \dfrac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \\[2ex] \text{donde } \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{dy}{dx}. \end{array} \right.$$

Questo angolo θ è dunque l'angolo che la direzione positiva dell'asse delle x forma con la retta tangente: angolo che la

(*) Le seguenti equazioni si esprimono per così dire, che $t = a$ sarà una radice almeno tripla dell'equazione $[x(t) - \xi]^2 + [y(t) - \eta]^2 = R^2$; ciò che si suol enunciare dicendo che il cerchio osculatore ad una curva C in un suo punto A è quel cerchio, che ha con la C almeno un contatto *tripunto* nel punto A.

terza delle (12) definisce a meno di multipli di π (com'è naturale, perchè non è data *a priori* la direzione positiva della retta tangente) e che invece con le prime due delle (12) noi abbiamo definito ora completamente (cioè a meno di multipli di 2π, perchè ne abbiamo dato seno e coseno). È così:

$$\xi = x - R \operatorname{sen} \theta \quad ; \quad \eta = y + R \cos \theta. \qquad (13)$$

Notiamo che la

$$ds = \varepsilon \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

definisce l'arco s della curva (a meno di una costante additiva) in grandezza e *verso* (dipendente dal segno di ε); le (12) diventano così $\left(\text{posto } s' = \frac{ds}{dt}\right)$:

$$\cos \theta = \frac{x'}{s'} = \frac{dx}{ds} \quad , \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{y'}{s'} = \frac{dy}{ds} \text{ (*)} \qquad (14)$$

Posto $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$, si ottiene derivando l'ultima delle (12)

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y'}{x'},$$

$$\theta' = \frac{y'' x' - y' x''}{x'^2 + y'^2}.$$

(*) L'aver fissato θ (a meno di multipli di 2π) corrisponde ad aver fissato sulla retta tangente il verso t da considerarsi come positivo. Le (14) provano che il verso fissato come positivo per s concorda al verso t fissato come positivo sulla retta tangente. Si riconosce dalla (13) che il verso t assunto come positivo sulla tangente deve rotare (nel verso positivo) di un angolo retto $\frac{\pi}{2}$ per sovrapporsi a quella semiretta n (normale) che dal punto (x, y) va al centro (ξ, η) del cerchio osculatore; cioè guardando dal punto (x, y) la direzione t scelta come positiva della tangente, si ha a sinistra il centro (ξ, η) del cerchio osculatore (che rimane evidentemente dalla parte, a cui la curva volge la concavità). Infatti i coseni direttori di n sono

$$\frac{\xi - x}{R} = -\operatorname{sen} \theta = \cos\left(xt + \frac{\pi}{2}\right) \text{ e } \frac{\eta - y}{R} = \cos \theta = \cos\left(yt + \frac{\pi}{2}\right)$$

perchè l'angolo $xt = \theta$, e l'angolo $yt = yx + xt = -\frac{\pi}{2} + \theta$.

$\left(\text{Si suppone che, secondo le convenzioni usuali, si abbia: } xy = \frac{\pi}{2} \text{ ed } yx = -\frac{\pi}{2}\right)$.

Quindi

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\theta'}{s} = \varepsilon \frac{y'' s' - y' x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ cioè:}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}. \tag{15}$$

Differenziando (13), ricordando (14) e (15), si ha:

$$d\xi = dx - R \cos\theta d\theta - \text{sen }\theta dR = - \text{sen }\theta dR$$
$$d\eta = \cos\theta dR,$$

donde:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = - \text{cotg }\theta = \frac{y - \eta}{x - \xi} \tag{16}$$

$$d\xi^2 + d\eta^2 = dR^2. \tag{17}$$

Le (15), (16), (17), hanno interpretazioni notevolissime. Si noti che l'incremento $\Delta\theta$ subìto dall'angolo θ, quando si passa da una ad un'altra tangente, vale proprio l'angolo di queste due tangenti. Il rapporto $\frac{1}{R}$ dicesi *curvatura* della linea. Quindi la (15) ci dice:

La curvatura in un punto A *è il limite del rapporto* $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ *ottenuto dividendo l'angolo* $\Delta\theta$ *formato dalle rette tangenti alla curva data nel punto* A *ed in un altro punto* B *della curva, per la lunghezza* Δs *dell'arco* AB, *quando il punto* B *tende al punto* A.

Al variare del punto (x, y) sulla curva data, il punto (ξ, η) descrive un'altra curva: la cosidetta *evoluta* della data curva.

L'evoluta è dunque il luogo dei centri (ξ, η) *dei cerchi osculatori.*

La tangente all'evoluta in un suo punto (ξ, η) *è la retta che congiunge* (ξ, η) *al punto* (x, y) *corrispondente sulla curva iniziale, cioè è la normale alla curva data.*

Infatti il coefficiente angolare di tale tangente $\frac{d\eta}{d\xi}$ è per (16) uguale a $-\frac{1}{tg\,\theta}$ (coefficiente angolare della normale alla curva data) od anche a $\frac{\eta - y}{\xi - x}$ coefficiente angolare della congiungente i punti (x, y) e (ξ, η)). Cioè in altre parole:

Le rette normali a una curva sono le tangenti della evoluta, o, come si suol dire, *inviluppano la evoluta.*

Infine si noti che, se σ è l'arco della evoluta, è per (17)

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 = dR^2.$$

Fissando in modo opportuno il verso di σ, sarà dunque

$$d\sigma = dR, \text{ donde } \sigma = \int dR \quad , \quad \sigma = R + \text{cost.}$$

Cioè *l'arco dell'evoluta è, a meno d'una costante additiva* (*), *uguale al corrispondente raggio* R: in altre parole *l'arco di evoluta compreso tra due punti di questa è uguale alla differenza dei corrispondenti raggi dei cerchi osculatori della curva data.*

Una curva C si dice l'evolvente della propria evoluta C_1. Il precedente teorema dà un metodo assai comodo per costruire le evolventi C di una data curva C_1. Se un filo di lunghezza costante avvolto attorno C_1 si svolge, in modo che la parte svolta rimanga tesa (lungo la tangente in quel punto di C_1 ove il filo si stacca da C_1), l'estremità libera del filo descriverà l'evolvente C; anzi ciò rende intuitivo il teorema che una curva C_1 ha infinite evolventi, le quali si ottengono tutte, variando la lunghezza del filo, o il verso in cui è avvolto su C_1. Ci basti ancora osservare che, se un pendolo M è retto da un filo flessibile OM, il quale, mentre M oscilla, deve avvolgersi su una curva C, allora M descrive durante tale oscillazione una evolvente di C. Su tale principio è fondato il pendolo cicloidale il quale è perfettamente isocrono, e impiega tempi uguali a fare oscillazioni qualsiasi, per quanto ampie.

γ) Per dimostrare effettivamente che una curva C_1 possiede infinite evolventi C, si proceda nel modo seguente. Siano ξ, η le coordinate di un punto di C_1 e ne sia σ l'arco, che è individuato a meno del segno, e a meno di una costante additiva. Per ogni particolare scelta di σ si otterrà una particolare evolvente. Infatti, fissato σ, e posto $R = \sigma$, le $d\xi = -\operatorname{sen}\theta\, dR$ e $d\eta = \cos\theta\, dR$ individuano un angolo θ, e le (13) ci dànno il punto (x, y). Ed è ben evidente che questo punto (x, y) descrive una delle evolventi cercate. Esso soddisfa infatti a (16) e perciò esso si trova sulla retta uscente da (ξ, η) col coefficiente angolare $-\operatorname{cotg}\theta = \frac{d\eta}{d\xi}$, cioè sulla tangente

(*) Che varia, quando si cambia il punto dell'evoluta scelto come origine degli archi σ.

a C_1 nel punto (ξ, η). Ed è pure facile riconoscere che questa tangente a C_1 è normale alla curva C descritta dal punto x, y. Infatti il coefficiente angolare della tangente a C nel punto (x, y) è data da $\frac{dy}{dx}$, che, in virtù delle equazioni citate, si riconosce uguale a $\operatorname{tg}\theta$. Cosicchè si verifica appunto che le tangenti in (x, y) a C ed in (ξ, η) a C_1 sono tra loro normali.

OSSERVAZIONI.

Supposto che la curva sia definita da una equazione $y = f(x)$, cioè dalle equazioni $y = f(t)$, $x = t$, la (11) diventa, ricordando che $x' = 1$, $x'' = 0$:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} \quad (y', y'' \text{ derivate rispetto alla } x).$$

Questa formola è di uso frequente.

Se invece $t = s$, la (11) diventa

$$\frac{1}{R} = |x' y'' - y' x''| \quad (x', x'' \text{ ecc. derivate rispetto ad } s).$$

Come in fine del § 123, avremmo potuto definire il cerchio osculatore in A come la posizione di un cerchio passante per A e B, e tangente in A alla curva Γ, quando B si avvicina ad A.

§ 125. — Inviluppi di una schiera di curve.

È molte volte comodo individuare una curva Γ, dando infinite linee C, tali che per ogni punto A di Γ passi una C tangente in A alla Γ.

Così, p. es., assai spesso si dà una curva Γ definendo le rette C tangenti a Γ (si ricordi, p. es., l'equazione tangenziale di una conica Γ). Così assai spesso nelle scienze applicate a una curva Γ si sostituisce una curva policentrica Γ'; si osserva cioè che Γ è tangente a ciascuno dei suoi cerchi osculatori C, e si sostituisce alla Γ una curva Γ' formata con un numero finito di archetti circolari: ognuno dei quali è un arco di un cerchio osculatore C (*). Infine la evoluta Γ di una curva E si può definire come la linea a cui sono tangenti le rette C normali alla E.

Se, p. es., $y = f(x)$ è l'equazione di E, la retta C normale alla E nel punto di ascissa a è definita dall'equazione:

$$[y - f(a)]\, f'(a) + (x - a) = 0.$$

(*) Basterebbe ricorrere a cerchi soltanto tangenti.

E ci si può proporre il problema di dedurne direttamente le coordinate (ξ, η) del punto ove tale retta tocca l'evoluta.

Per dare un altro esempio più semplice, i cerchi C di equazione

$$(x-a)^2+y^2-1=0$$

(che hanno il centro in quel punto dell'asse delle x, che ha l'ascissa a, e che hanno 1 per raggio) sono tutti (qualunque sia a) tangenti a ciascuna delle due rette $y=1$, $y=-1$. Ci si può porre il problema di dedurre direttamente questo teorema dalla equazione dei cerchi C.

Noi senz'altro esamineremo generalmente un sistema di infinite curve C di equazione

$$f(x, y, a)=0 \tag{1}$$

dove a è un parametro costante lungo una curva del sistema, ma che varia da una all'altra curva.

Nel campo che consideriamo la f e le sue derivate parziali del primo ordine sieno finite e continue.

Ricordo che il coefficiente angolare della retta tangente alla (1) nel punto (x, y) vale $-\dfrac{f'_x}{f'_y}$ se, come supporremo, $f'_y \neq 0$.

Supponiamo che esista una curva

$$y=\varphi(x) \tag{2}$$

tale che per ogni punto A di tale curva passi una e una sola curva (1) e che questa curva (1) sia tangente in A alla curva (2). Cioè per ogni punto A della curva (2) esiste un valore di a tale che la curva (1) corrispondente a tale valore di a passa per A ed è ivi tangente a (2). Questo valore di a varia col punto A: è cioè una funzione $\Psi(x)$, che supporremo derivabile, della sua ascissa x.

Dunque ogni punto A di ascissa x e di ordinata $\varphi(x)$ soddisfa alla (1) ove si ponga $a=\Psi(x)$; cosicchè:

$$f[x, \varphi(x), \Psi(x)]=0$$

è una identità. Perciò derivando troviamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\varphi'(x)+\frac{\partial f}{\partial a}\Psi'(x)=0$$

[se $y=\varphi(x)$; $a=\Psi(x)$]. Ma il coefficiente angolare $\varphi'(x)$ della retta tangente a (2) nel punto A è uguale al coefficiente angolare $-\frac{f'_x}{f'_y}$ della tangente a (1) nello stesso punto (e ciò perchè per ipotesi queste due rette tangenti coincidono). La precedente uguaglianza diventa quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial a} \Psi'(x) = 0. \qquad (\alpha)$$

Se in un punto di (2) la $\frac{\partial f}{\partial a}$ è differente da zero, la $\frac{\partial f}{\partial a}$ (che è per ipotesi continua) sarà differente da zero anche nei punti vicini; e quindi per (α) dovrà ivi essere $\Psi'(x) = 0$, cioè $a =$ costante. Cioè un pezzo almeno della curva (2) sarà addirittura un pezzo di una curva (1): caso che considereremo come banale.

Se così non è, avremo:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

Cioè ogni punto A della curva (2) soddisfa contemporaneamente alle:

$$f = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0 \qquad (3)$$

per un qualche valore di a [che può variare con A, perchè $a = \Psi(x)$]. Viceversa, se per ogni punto di una curva (2) esiste un valore di a così che ne sieno soddisfatte le (3), allora per ogni A di tale curva (2) esce una curva (1) che è tangente in A a tale curva (2).

Una curva (2) in tali condizioni si chiama *inviluppo* delle (1). Quindi nelle nostre ipotesi:

L'inviluppo (o uno degli inviluppi) *delle* (1) *è, se esiste, una curva, per ogni punto della quale esiste un valore di* a *tale che siano contemporaneamente soddisfatte le* (3). *Cosicchè, eliminando* a *tra le* $f = f'_a = 0$, *si può dedurre spesso l'equazione dell'inviluppo.*

Così, p. es., un inviluppo dei cerchi

$$(x - a)^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad (4)$$

soddisfa anche alla $2(x - a) = 0$, cioè alla $x = a$; e quindi (4) si riduce ad $y^2 - 1 = 0$; tali cerchi hanno dunque due inviluppi; la retta $y = 1$ e la retta $y = -1$.

Esempi.

α) Così, p. es., la retta C tangente alla $y = f(x)$ nel punto $[a, f(a)]$ ha per equazione

$$y - f(a) - (x - a) f'(a) = 0. \qquad (5)$$

Questa retta C dipende da un parametro a; l'equazione del suo inviluppo si otterrà eliminando a tra la (5) e l'equazione

$$- f'(a) + f'(a) - (x - a) f''(a) = 0,$$

ossia

$$(x - a) f\ \ (a) = 0,$$

che se ne deduce, derivando (5) rispetto ad a. Supposto che nessun tratto della $y = f(x)$ sia un segmento rettilineo (caso affatto elementare), per un valore generico di a sarà $f''(a) \neq 0$. E dall'ultima equazione si deduce $x - a = 0$, ossia $a = x$. Sostituendo in (5) si trova:

$$y = f(x),$$

che è l'equazione della curva iniziale; il che si poteva prevedere pensando che una curva è l'inviluppo delle sue tangenti.

β) L'inviluppo delle rette normali ad una curva $y = f(x)$ è l'*evoluta* della curva. L'equazione della normale nel punto di coordinate $a, f(a)$ è:

$$[y - f(a)] f'(a) + x - a = 0 \qquad (6)$$

che dipende dal parametro a. Il punto corrispondente dell'evoluta sarà il punto (x, y) che soddisfa insieme alla (6) ed alla:

$$1 + [f'(a)]^2 - [y - f(a)] f''(a) = 0$$

che si deduce da (6) derivandola rispetto ad a.

Se nelle (6), (7) poniamo x_0 ed y_0 al posto di a e $f(a)$, e poniamo ξ, η al posto delle x, y, queste equazioni si riducono alle (8), (9) del § 124 [ove si supponga $x = t$ e quindi $x'_0 = 1$. $x''_0 = 0$, $y'_0 = f'(a)$ ed $y''_0 = f''(a)$]. Resta così di nuovo provato che:

Il punto dove la normale in A *alla curva* y = f (x) *tocca l'evoluta della curva è il centro del cerchio osculatore in* A. *E quindi: L'evoluta si può definire sia come inviluppo delle normali, che come luogo dei centri dei cerchi osculatori.*

§ 126. — Curvatura e torsione di una linea sghemba.

La teoria del cerchio osculatore, e della curvatura di una linea piana si può estendere alle curve sghembe. Noi estenderemo soltanto la definizione di *curvatura*, trattando anche della definizione analoga di *torsione*.

Partiamo dalla formola che dà la curvatura in A come il limite del rapporto dell'angolo di due tangenti all'arco compreso tra i punti di contatto. Noi potremo generalizzare ponendo le seguenti definizioni (Cfr. questo §, γ):

α) Sia C una curva, da ogni punto A della quale esca una retta r. Le coordinate x, y, z di un punto C e i coseni direttori λ, μ, ν della retta corrispondente si potranno considerare come funzioni del relativo arco s della curva, misurato a partire da un qualsiasi punto iniziale.

Sia θ l'angolo delle due rette uscenti da due punti A, B di C; in A l'arco s abbia il valore s_0, in B il valore $s_0 + h$. Ammetteremo che quando B si avvicina ad A, ossia per $h = 0$, sia $\lim \theta = 0$ (che cioè la direzione della retta r varii con continuità al variare di s). Può darsi che $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\theta}{h}$ abbia un valore determinato. Proviamoci a determinarlo.

In tale ricerca possiamo moltiplicare $\dfrac{\theta}{h}$ per $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$, poichè

$$\lim_{\theta=0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1.$$

Il limite cercato diventa così il $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{h}$.

Cerchiamo il limite per $h = 0$ di questa espressione. La retta che esce da A ha per coseni di direzione λ, μ, ν; quella che esce da B avrà per coseni di direzione:

$$\lambda + \Delta\lambda, \quad \mu + \Delta\mu, \quad \nu + \Delta\nu.$$

Una formula di Geometria Analitica dice che (cfr. es. 1° a pag. 79)

$$\operatorname{sen}^2\theta = \left\| \begin{matrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda + \Delta\lambda & \mu + \Delta\mu & \nu + \Delta\nu \end{matrix} \right\|^2.$$

Sottraendo la prima della seconda riga (*) avremo:

$$\operatorname{sen}^2\theta = \begin{Vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \Delta\lambda & \Delta\mu & \Delta\nu \end{Vmatrix}^2,$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda\Delta\lambda + \mu\Delta\mu + \nu\Delta\nu \\ \lambda\Delta\lambda + \mu\Delta\mu + \nu\Delta\nu & \Delta\lambda^2 + \Delta\mu^2 + \Delta\nu^2 \end{vmatrix}$$

ossia:

$$\operatorname{sen}^2\theta = \Delta\lambda^2 + \Delta\mu^2 + \Delta\nu^2 - (\lambda\Delta\lambda + \mu\Delta\mu + \nu\Delta\nu)^2$$

e quindi (poichè $h = \Delta s =$ incremento dell'arco):

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{h}\right)^2 = \frac{\Delta\lambda^2 + \Delta\mu^2 + \Delta\nu^2}{\Delta s^2} - \frac{(\lambda\Delta\lambda + \mu\Delta\mu + \nu\Delta\nu)^2}{\Delta s^2}$$

e

$$\lim\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{h}\right)^2 = \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 - (\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')^2 = \begin{Vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \end{Vmatrix}^2,$$

se λ, μ, ν posseggono derivate finite (rispetto a s).

Ricordando che $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, derivando avremo:

$$2\lambda\lambda' + 2\mu\mu' + 2\nu\nu' = 0,$$

ossia:

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0.$$

Quindi sarà:

$$\lim\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{h}\right)^2 = \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = \begin{Vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \end{Vmatrix}^2$$

$$\lim\frac{\operatorname{sen}\theta}{h} = \pm\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2} = \sqrt{\begin{Vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \end{Vmatrix}^2}.$$

Questa formula misura, per così dire, la rapidità con cui le rette, che studiamo, cambiano di direzione. C'è ambiguità di segno, ma questo è spiegato dal fatto che non si è determinato in segno l'angolo delle due rette.

β) Un'applicazione tra le più importanti è quella di misurare (se così ci è lecito esprimerci) la rapidità con cui una curva sghemba si torce, cioè si allontana dall'essere piana. Se la curva fosse piana, essa avrebbe per piano osculatore sempre lo stesso suo piano, e le binormali sarebbero sempre parallele tra loro.

(*) Basta ricordare il valore del quadrato di tale matrice dato al § 22, pag. 76, per riconoscere che questa sottrazione lo lascia invariato.

Misurare la rapidità con cui una curva si torce è come misurare la rapidità con cui le binormali, anzichè restar parallele tra loro, deviano una dall'altra; rapidità che, secondo le precedenti convenzioni è misurata da $\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}$, in cui per λ, μ, ν si pongano i valori dei coseni di direzione della binormale. Questo numero si assume *per definizione* come valore della *torsione* della curva.

Le curve piane hanno la torsione nulla; quanto più piccola è la torsione, tanto più la curva si avvicina ad essere piana.

γ) La curvatura di una curva in un punto è un numero che, si può dire, serve a misurare quanto rapidamente la curva si allontana dall'essere una retta.

Anche nel linguaggio comune si dice che un arco di cerchio di raggio grande è poco curvo, quello di un cerchio di raggio piccolo è molto curvo.

Per definire la curvatura basta trovare una quantità che sia tanto più piccola quanto più, secondo la nostra intuizione, la curva si avvicina ad essere una retta.

Prendiamo tutte le tangenti a una curva; se questa è retta, tutte le tangenti coincideranno, e quanto più la curva è curvata, tanto maggiore (a parità di arco fra i punti di contatto) sarà 'angolo che le due tangenti formano fra loro.

Dunque si può misurare la curvatura di una curva come la rapidità di cambiamento di direzione delle tangenti alla curva stessa. *Curvatura* di una curva sarà perciò *per definizione* il valore di $\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}$, dove λ, μ, ν sieno i coseni direttori della tangente. È evidente che questa è proprio *la stessa definizione data per le curve piane*, come del resto verificheremo più avanti col calcolo effetttivo.

Se x, y, z sono le coordinate in funzione dell'arco dei punti della curva, i coseni di direzione delle tangenti saranno x', y', z', e quindi:

$$\text{curvatura} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} = \sqrt{\left\| \begin{matrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{matrix} \right\|^2}.$$

Così la curvatura è data *dalla radice quadrata della somma dei quadrati delle derivate seconde delle* x, y, z, *prese rispetto all'arco come parametro* (*).

(*) Si noti che se la curvatura è nulla, allora $x'' = y'' = z'' = 0$, e quindi x, y, z sono funzioni lineari della s. La linea è perciò una retta. Ciò che concorda con l'idea intuitiva di curvatura, da cui siamo partiti.

Si dimostra che i coseni di direzione della normale principale sono proporzionali a x'', y'', z'' (*), ossia sono uguali ad hx'', hy'', hz'', dove h si determinerà in modo che:

$$h^2 \{ x''^2 + y''^2 + z''^2 \} = 1\,;$$

cosicchè:
$$h = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}.$$

Ma il radicale $\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$ non è altro che la curvatura; quindi:

$$h = \frac{1}{\text{curvatura}}\,;$$

e i coseni di direzione della normale principale saranno:

$$\frac{x''}{\text{curvatura}}, \quad \frac{y''}{\text{curvatura}}, \quad \frac{z''}{\text{curvatura}}.$$

L'inverso della torsione si chiama raggio di torsione, l'inverso della curvatura si chiama raggio di curvatura.

δ) Applichiamo le considerazioni fatte alle curve piane. Per una curva posta nel piano $z = 0$ avremo

$$\text{curvatura} = \sqrt{x''^2 + y''^2} =$$
$$= \sqrt{\begin{Vmatrix} x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \end{Vmatrix}^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2} = \pm (x' y'' - y' x''),$$

se, ricordiamolo, *il parametro, rispetto a cui si deriva, è lo stesso arco* s *della curva.* Il lettore noti che questa formola coincide con l'ultima del § 124 (pag. 416).

Osservazione. Se x, y, z sono le coordinate di un punto di una curva date in funzione dell'arco s, abbiamo già visto che

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds},$$

$$\xi = \rho \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \eta = \rho \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \xi = \rho \frac{d^2z}{ds^2} \quad (\rho = \text{raggio curvatura})$$

sono rispettivamente i coseni direttori della tangente e della normale principale. Si considerino ora x, y, z come funzioni di un altro parametro t pure individuante

(*) Infatti, dall'equazione stessa del piano osculatore, risulta che una retta r, i cui coseni di direzione sono proporzionali a x'', y'', z'', è parallela a tale piano. E, poichè dalla $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ si deduce derivando $x' x'' + y' y'' + z' z'' = 0$, la retta r è perpendicolare alla tangente. Quindi r è parallela alla normale principale. S'intende che questo risultato vale soltanto, se si assume l'arco s come variabile indipendente.

i punti della stessa curva. Anche l'arco s sarà funzione della t. E avremo, posto $s'_t = \frac{ds}{dt}$, $s''_t = \frac{d^2s}{dt^2}$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} s'_t = \alpha s'_t, \quad \frac{dy}{dt} = \beta s'_t, \quad \frac{dz}{dt} = \gamma s'_t,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds} s'_t\right) = s''_t \frac{dx}{ds} + s'^2_t \frac{d^2x}{ds^2} = \alpha s''_t + \frac{1}{\rho} s'^2_t \xi;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \beta s_t + \frac{1}{\rho} s'^2_t \eta; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \gamma s''_t + \frac{1}{\rho} s'^2_t \zeta.$$

Le quali formole, fondamentali per la cinematica, ci permettono facilmente di ricavare i valori di $\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta, \zeta$ dai valori delle derivate di x, y, z, s rispetto alla t. Si deduce, per esempio:

$$\frac{1}{\rho} \xi = \frac{s'_t x''_t - x'_t s''_t}{s'^3_t} \quad \text{e analoghe.}$$

Quest'ultima formola si poteva anche ottenere, ricordando che:

$$\frac{1}{\rho} \xi = \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{x'_t}{s'_t}\right) = \frac{1}{s'_t} \frac{d}{dt}\left(\frac{x'_t}{s'_t}\right).$$

Note le $\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{\rho} \xi, \frac{1}{\rho} \eta, \frac{1}{\rho} \zeta$ si ricava tosto ρ ricordando che:

$$\frac{1}{\rho^2} = \left[\frac{1}{\rho} \xi\right]^2 + \left[\frac{1}{\rho} \eta\right]^2 + \left[\frac{1}{\rho} \zeta\right]^2.$$

E i coseni direttori della binormale si hanno tosto, osservando che questa retta è normale alla tangente e alla normale principale.

Esempi.

1° Determinare l'equazione della *catenaria*, la curva cioè che soddisfa alla:

$$\frac{dy}{dx} = hs \quad (h = \text{cost.}; \; s = \text{arco curva}) \; (h \neq 0).$$

Derivando rispetto x si ha, poichè $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$:

$$\frac{d^2y}{d^2x} = h \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Per integrare questa equazione si può seguire il metodo generale. Più brevemente si ponga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \left[\text{ossia } z = \log\left\{\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right\}\right], \quad \text{dove}$$

z è una nuova funzione incognita. L'equazione diverrà

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} \frac{dz}{dx} = h \sqrt{\left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2} \text{ ossia } \frac{dz}{dx} = h, \text{ donde } z = hx + k$$

$$(k = \text{cost.}).$$

È dunque $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{hx+k} + e^{-(hx+k)}}{2}$; e infine, integrando:

$$y = \frac{e^{hx+k} - e^{-(hx+k)}}{2h} + l,$$

dove l è, come k, una costante arbitraria.

Con una traslazione degli assi si può fare $k = l = 0$, e quindi $y = \frac{e^{hx} + e^{-hx}}{2h}$. Con una similitudine (omotetia rispetto all'origine) la curva si trasforma nella $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos \mathrm{h}\, x$.

DEFIN. Si dicono *sottotangente* e *sottonormale* in un punto A di una curva $y = f(x)$ i segmenti compresi tra la proiezione di A sull'asse delle x, e il punto d'intersezione di questo asse con la tangente o la normale in A alla curva considerata.

2° Trovare la sottotangente e la sottonormale per una curva $y = f(x)$ nel punto di ascissa x.

RIS. L'equazione della tangente e della normale (indicando con X, Y le coordinate correnti) è rispettivamente:

$$[f(x) - Y] + f'(x)[X - x] = 0; \; f'(x)[Y - f(x)] + [X - x] = 0.$$

Posto $Y = 0$, se ne rispettivamente deduce per l'ascissa X del punto di intersezione con l'asse delle x:

$$X = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{y}{y'}; \; X = x + f(x) f'(x) = x + yy',$$

donde:

$$\text{sottotangente} = -\frac{y}{y'}; \; \text{sottonormale} = yy'.$$

3° Trovare le curve a sottotangente o sottonormale costante k.

Si ha $-\frac{y}{y'} = k \left(\text{ossia} \frac{y'}{y} = \frac{-1}{k}\right)$ o $yy' = k$.

Se ne deduce integrando

$$y = Ce^{-\frac{x}{k}} \text{ o } y^2 = 2kx + C \, (C = \text{costante})$$

che sono rispettivamente una curva esponenziale, ed una parabola.

CAPITOLO XX.

INTEGRALI CURVILINEI E SUPERFICIALI

§ 127. — Integrali curvilinei e potenziale - Prime definizioni.

Ricordiamo la definizione già posta al § 91, pag. 302, e le osservazioni dell'es. 4° a pag. 332, § 100. Siano:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$
$$\text{per } a \leqq t \leqq b \qquad (a, b = \text{cost}).$$

le equazioni parametriche di un arco C di curva; e siano $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ continue nell'intervallo considerato.

I seguenti risultati si estendono facilmente anche al caso di una curva C con un numero finito di punti *angolari* (in cui le derivate a destra delle x, y, z non coincidano con le derivate a sinistra).

Sia $X(x, y, z)$ una funzione continua delle x, y, z in un campo D contenente all'interno la curva C.

La $X[x(t), y(t), z(t)]$ per $a \leqq t \leqq b$ ci dà i valori assunti da X nei punti di C. Secondo le definizioni poste nei citati paragrafi, con $\int_C X dx$ indichiamo lo:

$$(1) \qquad \int_a^b X[x(t), y(t), z(t)]\, x'(t)\, dt.$$

Questo integrale rappresenta il valore relativo all'arco C di una funzione additiva dei pezzi della curva considerata; e precisamente di quella *funzione additiva, la cui derivata è* X, *quando si assuma come misura di un pezzo di tale curva la lunghezza della sua proiezione sull'asse delle* x (supposto che questa proiezione sia in corrispondenza biunivoca coi punti del pezzo di curva considerato).

Pertanto, se sono dati gli assi coordinati, tale integrale è perfettamente determinato dalla funzione X e dall'arco C; ed esso cambia evidentemente di segno, invertendo gli estremi A, B di tale arco.

Del resto, se $x = \bar{x}(\tau)$, $y = \bar{y}(\tau)$, $z = \bar{z}(\tau)$ sono ($\alpha \leqq \tau \leqq \beta$) altre equazioni parametriche dell'arco stesso, esiste corrispondenza biunivoca tra i valori di t e τ, in guisa che valori corrispondenti delle t, τ individuino lo stesso punto della curva.

Mentre τ varia da α a β, la t varia da a a b. E in tali intervalli t e τ si possono considerare funzioni l'una dell'altra tali che $x(t) = \overline{x}(\tau)$, $x'(t)\,dt = \overline{x}'(\tau)\,d\tau$, e analoghe per y, z. La regola di integrazione per sostituzione dimostra che l'integrale (1) è uguale appunto a $\int_\alpha^\beta f[\overline{x}(\tau), \overline{y}(\tau), \overline{z}(\tau)]\,\overline{x}'(\tau)\,d\tau$, cioè che l'integrale (1) non cambia, se cambiamo la rappresentazione parametrica della curva C.

È pure evidente che, se C è la somma di due archi C', C'', si ha:

$$\int_C X\,dx = \int_{C'} X\,dx + \int_{C''} X\,dx$$

(che corrisponde al fatto che tale integrale è funzione *additiva*).

Si noti che, dato un arco, invece di dire quali dei suoi estremi si deve considerare primo, e quale secondo, si può con una freccia indicare il verso in cui lo si intende percorso (fig. 42).

Mutare il verso della freccia farà cambiare il segno del nostro integrale.

Questa osservazione è specialmente importante per il caso che l'arco AB sia un arco chiuso, ossia che gli estremi A e B coincidano (fig. 43).

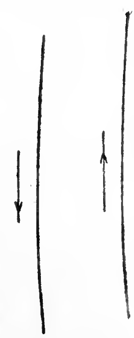


Fig. 42.

In tal caso fissato con una freccia il verso in cui il nostro arco si deve intendere percorso, e, detto (a, b) l'intervallo in cui deve variare t dal valore a al valore b, perchè il punto (x, y, z) descriva (da A in A) l'arco C nel verso prestabilito, si intende con $\int X\,dx$ proprio l'integrale

$$\int_a^b X[x(t), y(t), z(t)]\,x'(t)\,dt.$$

E naturalmente questo integrale non dipende dal punto $A = B$ considerato come iniziale e finale, ma soltanto dall'arco dato e dal verso della freccia. Mutando questo verso, varia il segno dell'integrale.

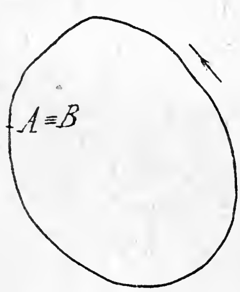


Fig. 43.

β) In modo affatto analogo, se Y e Z sono funzioni continue nel campo D, si possono definire gli integrali $\int Y\,dy$ e $\int Z\,dz$ estesi a un arco di curva; e si può poi definire lo:

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

esteso a un arco di curva come la somma degli integrali $\int X\,dx$, $\int Y\,dy$, $\int Z\,dz$ estesi allo stesso arco.

Se noi anche qui volessimo usare locuzioni abbreviate, potremmo definire il precedente integrale nel seguente modo:

Divisa la curva C in infiniti archetti infinitesimi δ, si moltiplichino i valori di X, Y, Z in uno di questi pezzetti rispettivamente per le sue proiezioni dx, dy, dz sui tre assi coordinati e si sommino i prodotti così ottenuti. Otteniamo così un trinomio $Xdx + Ydy + Zdz$ per ognuno degli archetti δ; la loro somma:

$$\Sigma\,(Xdx + Ydy + Zdz)$$

è il nostro integrale. Queste locuzioni sono però da considerarsi al solito come locuzioni abbreviate e non rigorose. Sarà utile esercizio ridurle ad una forma logica e soddisfacente.

γ) Il valore del nostro integrale è, si ricordi, quello di

$$\int_a^b \{ X[x(t), y(t), z(t)]\, x'(t) + Y[x(t), y(t), z(t)]\, y'(t) + \\ + Z[x(t), y(t), z(t)]\, z'(t) \}\, dt,$$

qualunque sia il parametro t individuante i punti di C. Se, p. es., si pone $t = s =$ arco della curva C contato da un'origine scelta a piacere, e se con $F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ si indica la grandezza del vettore che ha X, Y, Z per componenti, con

$$\alpha = \frac{X}{F}, \quad \beta = \frac{Y}{F}, \quad \gamma = \frac{Z}{F}$$

se ne indicano i coseni direttori, il nostro integrale diventa:

$$\int_{s_0}^{s_1} F\left(\alpha \frac{dx}{ds} + \beta \frac{dy}{ds} + \gamma \frac{dz}{ds}\right) ds,$$

se s_0, s_1 sono i valori di s per $t = a$ e per $t = b$. Poichè $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sono i coseni direttori della tangente a C, indicando con ω l'angolo di F con C in un punto qualsiasi di C, il nostro integrale diventa $\int_{s_0}^{s_1} F \cos\omega\, ds$. Il nostro integrale appare identico a quella funzione additiva dei pezzi della nostra curva, la cui derivata è $F\cos\omega$, se conveniamo di assumere come misura di un pezzo di curva la sua lunghezza.

δ) Se esiste una funzione $V(x, y, z)$ tale che $dV = Xdx + Ydy + Zdz$, si dimostra, come a pag. 303, che *il nostro integrale è uguale alla differenza dei valori che la* V *assume nei punti* A, B *estremi della curva, a cui è esteso il nostro integrale, e che esso perciò dipende soltanto dalla posizione dei punti* A, B *e non dalla forma della curva* C *che li congiunge.*

Tale funzione V esiste, p. es., in un parallelopipedo (§ 92, pag. 306) in cui valgano le

$$X'_y - Y'_x = Y'_z - Z'_y = Z'_x - X'_z = 0.$$

ESEMPIO.

La teoria degli integrali curvilinei riceve un'importante applicazione alla misura del lavoro di una forza, le cui componenti secondo gli assi coordinati sono X, Y, Z, quando il punto di applicazione M descrive la curva

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Ci chiediamo, usando il linguaggio infinitesimale: Qual è il lavoro eseguito quando M descrive un archetto di tale curva, le cui proiezioni sugli assi coordinati sono dx, dy, dz? Se F è la grandezza della forza, ds è la lunghezza di un tale archetto, tale lavoro è $Fds \cos(F, s)$ dove con $\cos(F, s)$ indico il coseno dell'angolo che F forma con la tangente all'elemento di curva considerato. Il lavoro eseguito, quando M descrive un certo pezzo della nostra curva, sarà così:

$$\int F \cos(Fs)\, ds = \int (Xdx + Xdy + Zdz)$$

esteso all'arco di curva considerato (*).

Quando mai un tale lavoro dipende soltanto dalle posizioni estreme assunte dal punto M e non dalla particolar curva che le congiunge? Per il risultato precedente si ha che (almeno se ci muoviamo in parallelopipedo, ecc.), ciò avviene se

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}; \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}.$$

Nel qual caso esiste una funzione V per cui

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X, \frac{\partial V}{\partial y} = Y, \frac{\partial V}{\partial z} = Z;$$

(*) Si noti che $F \cos(Fs)$ è la proiezione di F sulla tangente alla curva oppure che $ds \cos(Fs)$ è la proiezione dell'arco infinitesimo ds sulla direzione della forza.

e il lavoro citato è uguale alla differenza dei valori che V ha nelle posizioni estreme occupate da M.

Una tale funzione V (che è definita a meno di una costante additiva) si dice la *funzione delle forze;* essa, cambiata di segno, è detta anche *il potenziale del nostro campo di forze.*

Esempii di campi di forze che ammettono potenziale sono i seguenti:

1° Il campo delle forze di gravità in una regione abbastanza piccola attorno a un punto A della superficie terrestre.

Assunto come asse delle z la verticale diretta verso il basso e quindi come assi x, y due rette orizzontali, la forza di gravità agente su un punto di massa m ha per componenti

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = mg.$$

Si trova $V = mgz +$ cost., p. es., $V = mgz$. Ed il lavoro compiuto da M nel passare da un punto $(\alpha, \beta, -h)$ ad un punto $(a, b, -k)$ cioè nel cadere da un punto di altezza h a un punto di altezza k è $mg\,(h - k)$ ed è indipendente dalla via seguìta.

2° I campi Newtoniani: quelli cioè, in cui un punto M, di massa 1, è attratto da un punto fisso O con una forza F avente per direzione la direzione della retta OM ed una grandezza $\frac{h}{r^2}$ dove $h =$ cost. ed r è la distanza OM (attrazione universale, attrazione di masse elettriche o magnetiche). La costante h si supporrà positiva o negativa, secondo che F ha la direzione OM o la direzione MO.

Scelti infatti come assi x, y, z tre rette a due a due ortogonali uscenti da O, indicate con x, y, z le coordinate di M, con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ la distanza OM, con (r, x), (r, y), (r, z) l'angolo di OM coi tre assi, le componenti di F sono

$$X = \frac{h}{r^2} \cos (rx) = \frac{hx}{r^3}, \quad Y = \frac{hy}{r^3}, \quad Z = \frac{hz}{r^3}.$$

Poichè $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$, ecc. si trova facilmente potersi porre $V = -\frac{h}{r}$.

Il lavoro eseguito da un punto di massa 1 nel passare da una posizione A ad una posizione B è dato dalla differenza dei corrispondenti valori di V, ed è affatto indipendente dalla via scelta per andare da A in B.

§ 128. — Trasformazione di integrali curvilinei nel piano (*).

Se abbiamo un campo piano γ limitato da un contorno ad uno o più pezzi, si dirà $\int Xdx$ esteso al contorno di γ la somma degli integrali $\int Xdx$ estesi ai singoli pezzi del contorno di γ, percorsi in guisa che un osservatore, camminando sul lato del foglio volto verso il lettore e percorrendo ogni pezzo di detto contorno nel verso indicato dalla freccia, lasci a sinistra l'area γ.

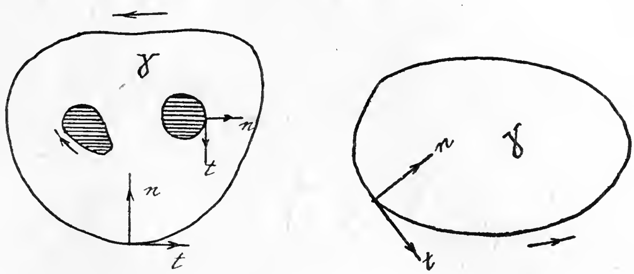


Fig. 44.

E notiamo che un tale osservatore, che volgesse la faccia verso la direzione positiva dell'asse delle x, avrebbe pure alla sinistra la direzione positiva dell'asse delle y. Se noi tiriamo una tangente t a un pezzo del contorno di γ volta in verso concorde a quello in cui si percorre detto pezzo del contorno, e tiriamo quindi la normale n volta verso l'interno di γ, il solito osservatore avrà la direzione n a sinistra, se volge la faccia verso la direzione t (fig. 44) (**).

Conserveremo sempre le convenzioni qui fatte.

Teorema 1° — *Se γ è la somma di due aree γ', γ'', l'integrale $\int$ X dx esteso al contorno di γ è uguale alla somma degli integrali $\int$ X dx estesi ai contorni di γ', γ''.* Infatti siano

(*) I teoremi del § 128 e seg. sono importanti al tecnico specialmente per le applicazioni alla elettrodinamica, ed anche alla idrodinamica teorica.

(**) Al lettore l'enunciato preciso delle condizioni, che si suppongono soddisfatte dal contorno.

Nel primo campo γ della precedente figura, il contorno *esterno* di γ è, si noti, percorso in verso discorde al verso in cui procedono le lancette di un orologio, i contorni ***interni*** sono invece percorsi in verso *concorde*. Qui, si noti, ci riferiamo a campi γ limitati. Al lettore l'esame di campi illimitati.

C, C' C'' i contorni di γ, γ', γ''. Siano C'_1 e C'_2 quei pezzi del contorno C' (fig. 45), i cui punti rispettivamente appartengono e non appartengono al contorno C'' e siano C''_1 e C''_2 quei pezzi di C'' i cui punti rispettivamente appartengono e non appartengono al contorno C'.

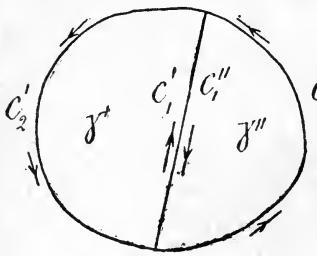


Fig. 45.

Sarà:

$$\int_{C'} X\,dx = \int_{C'_1} X\,dx + \int_{C'_2} X\,dx$$

$$\int_{C''} X\,dx = \int_{C''_1} X\,dx + \int_{C''_2} X\,dx.$$

Evidentemente C'_1 e C''_1 sono archi di curve coincidenti, ma percorsi in verso opposto. Quindi:

$$\int_{C'_1} X\,dx + \int_{C''_1} X\,dx = 0,$$

e perciò dalle precedenti formole si ottiene, sommando:

$$\int_{C'_2} X\,dx + \int_{C''_2} X\,dx = \int_{C} X\,dx + \int_{C''} X\,dx.$$

Ma C'_2 e C''_2 formano complessivamente il contorno C di $\gamma = \gamma' + \gamma''$, e sono percorsi nello stesso verso, sia come appartenenti al contorno di γ' o γ'', sia come appartenenti al contorno di γ. L'ultima equazione dà dunque:

$$\int_{C} X\,dx = \int_{C'_2} X\,dx + \int_{C'_2} X\,dx = \int_{C'} X\,dx + \int_{C''} X\,dx.$$

c. d. d.

Questo teorema si può enunciare dicendo:

Lo integrale $\int$ X dx *esteso al contorno di un campo* γ *è una funzione additiva di* γ.

Ciò rende intuitivo che in molti casi tale integrale *curvilineo* si potrà trasformare in un integrale *superficiale* esteso a γ.

Ciò appunto è approvato dal seguente teorema, da cui risulta precisamente che la derivata di tale funzione additiva vale comunemente $\dfrac{\partial X}{\partial x}$.

Teorema 2°. — *Se* γ *è un'area del piano* xy; *e* X (x, y) *vi è finita e continua insieme alla* $\frac{\partial X}{\partial x}$, *e se* C *è il contorno di* γ, *allora*:

$$\iint_\gamma \frac{\partial X}{\partial x} dx\, dy = \int_C X\, dy \ (*).$$

Supponiamo dapprima che una retta $y = \text{cost.}$ incontri C al più in due punti.

Si ha:

$$\iint_\gamma \frac{\partial X}{\partial x} dx\, dy = \int_m^M dy \int_{A_1}^{A_2} \frac{\partial X}{\partial x} dx,$$

dove m, M sono il minimo e il massimo di y in γ, ed A_1, A_2 sono i punti ove una retta $y = \text{cost.}$ (compresa tra le $y = m$ e $y = M$) incontra C (fig. 46).

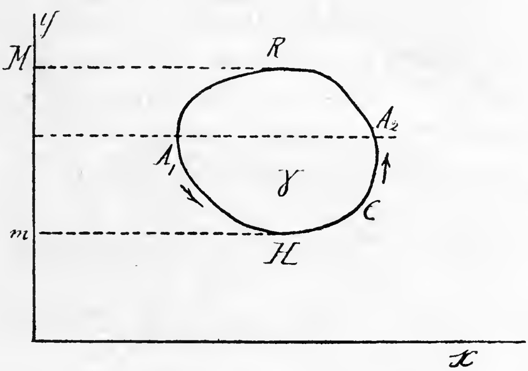


Fig. 46.

Se indichiamo con X_2 e X_1 i valori di X in A_2, A_1, se ne deduce:

$$\iint_\gamma \frac{\partial X}{\partial x} dx\, dy = \int_m^M dy\, (X_2 - X_1) = \int_m^M X_2\, dy - \int_m^M X_1\, dy.$$

Ossia, indicando con C_1 e C_2 gli archi HA_1K e HA_2K,

$$\iint_\gamma \frac{\partial X}{\partial x} dx\, dy = \int_{C_2} X_2\, dy - \int_{C_1} X_1\, dy = \int_{\text{arc } HA_2K} X\, dx + \int_{\text{arc } KA_1H} X\, dx = \int_C X\, dx.$$

(*) È sempre sottinteso che il campo γ e il suo contorno C sieno tali che questi integrali abbiano significato secondo le nostre definizioni.

Se invece C fosse incontrata da qualche parallela all'asse delle x in più di due punti, supponiamo γ scomponibile in un numero finito di parti $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, i cui contorni $C_1, C_2, \ldots, C_n$ siano incontrati da tali parallele al più in due punti. Per il teorema 1° e per quanto abbiamo ora dimostrato si avrà:

$$\iint_\gamma \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\gamma_i} \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\, dy = \sum_1^n \int_{C_i} X\, dy = \int_C X\, dy,$$

c. d. d.

Teorema 3°. — *Se in γ le Y e $\frac{\partial Y}{\partial y}$ sono funzioni finite e continue,*

$$\iint_\gamma \frac{\partial Y}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_C Y\, dx.$$

Questo teorema si dimostra come sopra: il segno —, che qui compare al secondo membro, dipende da ciò che, mentre l'asse positivo delle y è a sinistra dell'asse positivo delle x, l'asse positivo delle x è a destra dell'asse positivo delle y.

L'uguaglianza che si ottiene sommando o sottraendo le formole dei teoremi 2° e 3° si suole scrivere così:

$$\iint_\gamma \left(\frac{\partial X}{\partial x} \pm \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\, dy = \int (X\, dy \mp Y\, dx), \qquad (1)$$

dove i segni superiori (o inferiori) sono da adottarsi contemporaneamente nei due membri.

Osserviamo che $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ sono in valore assoluto e in segno i coseni di direzione della tangente t (volta nel verso sopra definito) quando con s si indichi l'arco del contorno di γ, o di un suo pezzo, crescente nel verso in cui tal pezzo di contorno si deve percorrere. Poichè gli angoli $\widehat{tn}$ e $\widehat{xy}$ (nelle nostre convenzioni) sono uguali a $\frac{\pi}{2}$, sarà:

$$\frac{dx}{ds} = \cos(xt) = \cos(xy + yn + nt) = \cos(yn)$$

$$\frac{dy}{ds} = \cos(yt) = \cos(yx + xn + nt) = \cos(xn - \pi) = -\cos(xn).$$

Ossia i coseni di direzione della normale n sono rispettivamente $-\frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds}$. E le nostre formole si possono anche scrivere:

$$\iint_\gamma \frac{dX}{dx}\,dx\,dy = \int_C X\frac{dy}{ds}\,ds = -\int X\cos nx\,ds$$

$$\iint_\gamma \frac{\partial Y}{\partial y}\,dx\,dy = \int_C Y\frac{dx}{ds}\,ds = -\int Y\cos ny\,ds$$

$$\iint_\gamma \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx\,dy = -\int (X\cos nx + Y\cos ny)\,ds. \qquad (1)_{\text{bis}}$$

Il ds che figura nel secondo membro è positivo, cioè s si intende crescente dal limite inferiore al superiore di detto integrale.

§ 129. — **Integrali superficiali.**

Se σ è una superficie sghemba proiettata biunivocamente sul piano xy (*), definita cioè da un'equazione $z = z(x, y)$, e se X è una funzione di x, y, z si dice integrale di $X\,dx\,dy$ esteso a σ l'integrale

$$\iint X[x, y, z(x, y)]\,dx\,dy,$$

esteso alla proiezione γ di σ sul piano xy. Se poi σ è somma di più superficie $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, ciascuna delle quali è rappresentata da una equazione $z = z(x, y)$, si dirà integrale di $X\,dx\,dy$ esteso a σ la somma degli integrali di $X\,dx\,dy$ estesi alla superficie σ. In altre parole tale integrale è per ogni σ_i il valore di quella funzione additiva dei pezzi di σ_i, la cui derivata è X, se come misura di un pezzo di σ_i si assume l'area della sua proiezione sul piano xy.

Si indicherà (cfr. § 121, pag. 404) poi con $\int X d\sigma$ l'integrale

$$\iint \frac{X}{|\cos(\widehat{nz})|}\,dx\,dy\,;$$

ivi $\widehat{nz}$ indica l'angolo che la normale n a σ forma con l'asse delle z $\left[\text{cosicchè } |\cos(\widehat{nz})| = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right.$, dove $p = z'_x$,

(*) Si suppongono finite e continue tutte le funzioni, che compaiono nei calcoli seguenti, salvo esplicita dichiarazione contraria.

$q = z'_y$]. Questo integrale si può dunque definire come quella funzione additiva dei pezzi di σ, di cui X è la derivata, quando come misura di un pezzo di σ si assume proprio la sua area.

Se τ è un campo a tre dimensioni limitato da una superficie σ formata da uno o più pezzi, sceglieremo come direzione positiva della normale n a σ in un punto di σ quella volta verso l'interno di τ.

Se X, Y, Z sono in τ funzioni finite e continue di x, y, z insieme alle $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial Z}{\partial z}$, si avrà:

$$\int_\tau \frac{\partial X}{\partial x} d\tau = \int\int\int_\tau \frac{\partial X}{\partial x} dx\, dy\, dz = -\int X \cos nx\, d\sigma$$

$$\int_\tau \frac{\partial Y}{\partial y} d\tau = \qquad = -\int Y \cos ny\, d\sigma$$

$$\int_\tau \frac{\partial Z}{\partial z} d\tau = \qquad = -\int Z \cos nz\, d\sigma$$

$$\int_\tau \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) d\tau =$$

$$-\int (X \cos nx + Y \cos ny + Z \cos nz)\, d\sigma.$$

Queste formole si dimostrano in modo simile alle precedenti del § 128.

Se X, Y, Z sono le componenti di un vettore I, allora $X \cos nx + Y \cos ny + Z \cos nz$ è uguale alla sua componente I_n presa secondo la normale n a σ volta verso l'interno di τ; la

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

si chiama la divergenza di I e si indica con div I.

Si ha perciò:

$$\int_\tau \operatorname{div} I\, d\tau = -\int I_n\, d\sigma,$$

che è la celebre formola così detta dellla *divergenza*.

Il secondo membro di questa formola fondamentale nelle applicazioni (per es., all'idro- od elettrodinamica) si chiama il flusso di I attraverso a σ; che, nelle trattazioni comuni, si suol rappresentare col numero delle linee di forza attraversanti σ.

§ 130. — Il teorema di Stokes.

Sia σ una superficie sghemba; e ne sia C il contorno (a uno o più pezzi. Supponiamo che un osservatore posto nel semispazio $z > 0$, coi piedi sul piano xy e la faccia rivolta verso il semiasse positivo delle x, abbia alla propria sinistra il semiasse positivo delle y. Fissiamo ad arbitrio il senso positivo per una normale n a σ, e con la legge di continuità per tutte le altre. Supponiamo che così il verso positivo di ogni normale sia determinato in modo univoco. Percorriamo poi ogni pezzo di C in guisa che il triedro formato dalla tangente t a C (*) in un suo punto qualunque A volta nel verso in cui si percorre C, la normale ν a C in A posta nel piano tangente a σ in A e volta verso l'interno dell'area σ, e la normale n a σ in A formino un triedro tale che un osservatore, coi piedi sul piano $t\,\nu$ e con la testa dalla stessa parte di n volto verso t, abbia alla sua sinistra la direzione ν. Il triedro $t\nu n$ e xyz siano cioè congrui (sovrapponibili). Siano X, Y, Z funzioni finite e continue di x, y, z insieme alle loro derivate in un campo rinchiudente σ all'interno. E supponiamo che σ sia definita da una equazione $z = z(x, y)$. Sia γ la proiezione di σ sul piano xy, e ne sia Γ il contorno. Se la normale n a σ fa con l'asse delle z sempre un angolo nz acuto, mentre un punto A percorre C nel verso sopra definito, la sua proiezione A' sul piano xy descrive Γ in guisa che un osservatore posto nel semispazio $z > 0$, che cammini in avanti con A', lascia γ alla sua sinistra. Evidentemente:

$$\int_C X(x, y, z)\, dx = \int_\Gamma X[x, y, z(x, y)]\, dx =$$

$$= -\iint_\gamma \frac{\partial X[x, y, z(x, y)]}{\partial y}\, dx\, dy = (^{**})$$

$$= -\iint_\gamma \left\{ \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z} z'_y \right\} dx\, dy =$$

$$= -\iint_\sigma \left\{ \frac{\partial X}{\partial y} \left| \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right| + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{q}{\left| \sqrt{1 + p^2 + q^2} \right|} \right\} d\,\sigma.$$

(*) Supponiamo dunque che esistano n, ν, t, che le loro direzioni variino con continuità.

(**) Supponiamo dunque che un piano $x = \text{cost.}$, o $y = \text{cost.}$, o $z = \text{cost.}$ incontri C in numero finito di punti.

I coseni di direzione della normale n a σ sono:

$$\pm \frac{p}{|\sqrt{1+p^2+q^2}|},\ \pm \frac{q}{|\sqrt{1+p^2+q^2}|},\ \mp \frac{1}{|\sqrt{1+p^2+q^2}|}. \quad (\alpha)$$

Ricordando che per l'ipotesi fatta $(zn) < \frac{\pi}{2}$, e quindi

$$\cos(nz) = \mp \frac{1}{|\sqrt{1+p^2+q^2}|}$$

è positivo, vediamo che nelle (α) si devono assumere i segni inferiori. E quindi la nostra formola diventa:

$$\int_C X\,dx = \int_\sigma \left\{ \frac{\partial X}{\partial z}\cos(ny) - \frac{\partial X}{\partial y}\cos(nz) \right\} d\sigma.$$

Questa formola vale anche se $\widehat{zn} > \frac{\pi}{2}$, perchè questo caso si riduce al precedente cambiando il verso di n. E un tale cambiamento muta il segno dell'integrando del secondo membro, e, mutando il verso in cui si percorre C, cambia anche il segno del primo membro. Se poi σ fosse decomponibile in pezzi, ognuno dei quali è rappresentato dalla formola $z = z(x, y)$, la nostra formola si estende a tal caso coi metodi usuali.

Una formola analoga vale per $\int Y\,dy$, $\int Z\,dz$. Sommando le tre formole così ottenute, si trova:

$$\int_C (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int \left\{ X_1 \cos nx + Y_1 \cos ny + Z_1 \cos nz \right\} d\sigma$$

ove:

$$X_1 = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z};\ Y_1 = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x};\ Z_1 = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Se $Z = 0$, e σ coincide con la sua proiezione γ, cosicchè $d\sigma = dx\,dy$, questa formola, scambiando X con Y, si riduce alla formola (1) già trovata al § 128.

Se X, Y, Z sono le componenti di un vettore I, le X_1, Y_1, Z_1 si considerano come componenti di un altro vettore, che si chiama il *curl* I, o *rot* I. L'integrando del secondo membro della nostra formola si scrive anche $(\text{curl } I)_n$, perchè non è che la componente del curl I secondo la normale n.

La precedente formola ha il nome di *teorema di Stokes*.

In molti trattati tutte queste formole sono scritte con segni differenti: ciò dipende dalle differenti convenzioni adottate per i versi di n, C, ecc.

§ 131. — Differenziali esatti e potenziale.

Siano X, Y, Z tre funzioni finite e continue in un campo a tre dimensioni τ limitato da una superficie σ *e tale che, se* Γ *è una qualsiasi linea chiusa tracciata entro* τ, *esista almeno una* (e quindi infinite) *superficie appartenente a* τ, *avente* Γ *per* **unico** *contorno, e passante per un punto qualsiasi* D *di* τ. Ciò avviene, p. es., se τ è un campo sferico, conico, ecc. Resta escluso invece, p. es., che τ sia un toro di rivoluzione.

Siano A, B due punti qualunque di τ, che congiungiamo con una linea C tracciata entro τ.

Quando avverrà che

$$\int_{AB} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

non dipenda dalla particolare linea C scelta, ma soltanto dalle X, Y, Z e dalla posizione dei punti A, B? Sia C' un'altra linea uscente da A e terminata a B. Dovrà essere, se con C_1 indichiamo la C' percorsa nel verso opposto (da B ad A)

$$\int_C (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int_{C'} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$
$$= - \int_{C_1} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

ossia:

$$\int_{C+C_1} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = 0.$$

Ma $C + C_1$ costituisce in sostanza un'arbitraria linea chiusa appartenente al campo τ. E quindi, se σ è una qualunque superficie posta in τ e terminata a $C = C_1$, dovrà essere, con le notazioni del precedente paragrafo,

$$\int_\sigma (X_1 \cos nx + Y_1 \cos ny + Z_1 \cos nz)\, d\sigma = 0,$$

dove σ è in sostanza una qualunque superficie appartenente al campo τ. Questa uguaglianza è un'identità soltanto se:

$$X_1 = Y_1 = Z_1 = 0,$$

ossia se:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}. \qquad (1)$$

In tal caso e in tal caso soltanto:

$$V = \int_A^B (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

non dipenderà dal cammino C seguìto per andare da A e B. Teniamo fisso il punto A e facciamo variare B in τ. Per ogni posizione di B avremo uno e un solo valore $V(B)$ di V. Perciò V sarà una funzione delle coordinate x, y, z di B nel campo τ. Come al § 91 a pag. 304 possiamo dimostrare che il differenziale di tale funzione vale proprio $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$, cioè che:

Se il campo τ *soddisfa alle condizioni enunciate, e in esso le* X, Y, Z *soddisfano alle* (1), *esiste una funzione* V, *le cui derivate parziali del primo ordine sono* X, Y, Z, *ossia che ha per differenziale* X dx + Y dy + Z dz. *Tale funzione* V *è, a meno del segno, il potenziale del vettore che ha per componenti* X, Y, Z.

Questo teorema ci era già noto (§ 92) in casi particolari.

Nel caso che il campo τ non soddisfacesse alle condizioni enunciate si potrebbe ancora dimostrare l'esistenza di una tale funzione V. Ma una tale funzione uscirebbe dal campo delle funzioni fin qui studiate, perchè in uno stesso punto avrebbe infiniti valori. Un esempio ben noto è quello del potenziale dovuto a una corrente elettrica.

Le precedenti considerazioni si applicano senz'altro anche al caso più semplice dei differenziali $X\,dx + Y\,dy$, dove X, Y soddisfino alla $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ in un'area piana σ *col contorno di un solo pezzo;* restano così estesi a tali aree σ i teoremi della teoria dei differenziali esatti, di cui abbiamo discorso ai §§ 90-91.

§ 132. — **Trasformazione degli integrali doppii.**

(Cfr. §§ 108-108 *bis*).

α) Sia σ un campo del piano xy, ne sia s il contorno (*); e sia $f(x, y)$ una funzione continua in σ. Siano X, Y due funzioni derivabili delle x, y in σ

$$X = X(x, y) \qquad Y = Y(x, y) \tag{1}$$

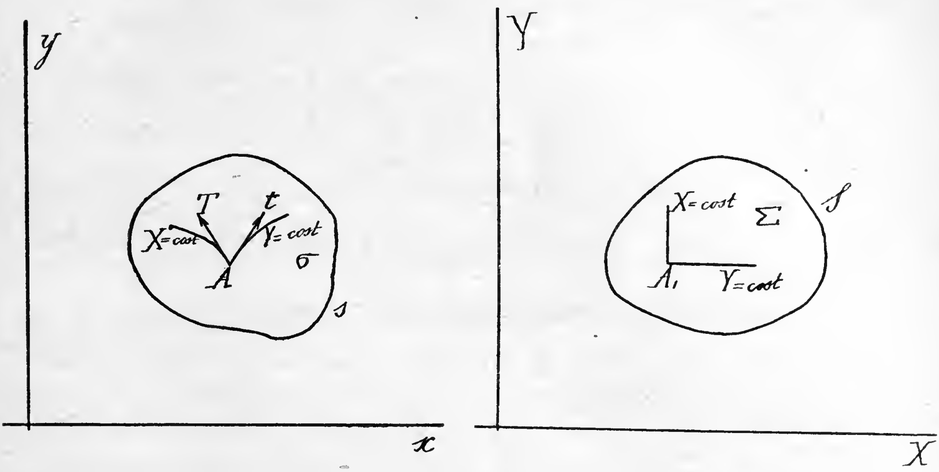
in guisa che per ogni punto A di σ siano completamente determinati i valori delle X, Y. Viceversa, dati questi valori, sia

(*) Si suppone che σ, s soddisfino alle solite condizioni enunciate ai §§ precedenti.

completamente determinato il punto A; in altre parole si possano risolvere le (1) rispetto alle x, y:

$$x = x(X, Y) \qquad y = y(X, Y) \tag{2}$$

Le (2) posseggano derivate prime e seconde finite e continue.



Assumiamo X, Y come coordinate cartesiane ortogonali in un altro piano. Ogni punto A di σ determina i corrispondenti valori delle X, Y, e quindi anche il punto A_1 del piano XY, che ha questi valori come coordinate; al variare di A in σ, varierà anche il punto A_1, riempiendo un'area Σ. Ogni punto A_1 di Σ determinerà a sua volta, per le (2), uno e un solo punto corrispondente di σ. In questa corrispondenza biunivoca tra i punti di σ e di Σ ai punti del contorno s di σ corrisponderanno i punti del contorno S di Σ.

β) Quando avviene che in tale corrispondenza si conservi il *verso* (non la grandezza) degli angoli? Sia $y = \varphi(x)$ una curva γ in σ e sia $\frac{dy}{dx}$ la tangente dell'angolo ω, che la retta tangente a γ in un punto A forma con l'asse delle x. Sia Γ la curva luogo dei punti di Σ, che corrispondono ai punti di γ: e sia A_1 il punto corrispondente di A. La $\frac{dY}{dX}$ sarà la tangente dell'angolo Ω, che la retta tangente a Γ in A_1 fa con l'asse delle X. Il verso degli angoli sarà conservato, allora e allora soltanto che $\operatorname{tg}\Omega$ cresce al crescere di $\operatorname{tg}\omega$.

Ma ora:

$$\operatorname{tg}\Omega=\frac{dY}{dX}=\frac{\frac{\partial Y}{\partial x}dx+\frac{\partial Y}{\partial y}dy}{\frac{\partial X}{\partial x}dx+\frac{\partial X}{\partial y}dy}=\frac{\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{dy}{dx}}{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}}=\frac{\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\operatorname{tg}\omega}{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\operatorname{tg}\omega}\,.$$

Affinchè $\operatorname{tg}\Omega$ cresca con $\operatorname{tg}\omega$, bisogna dunque che $\frac{m+nt}{p+qt}$, ove $m=\frac{\partial Y}{\partial x}$, $n=\frac{\partial Y}{\partial y}$, $p=\frac{\partial X}{\partial x}$, $q=\frac{\partial X}{\partial y}$ si considerino come costanti, sia una funzione crescente della t, ossia che la sua derivata $\frac{-mq+np}{(p+qt)^2}$ sia positiva, ossia che $-mq+np>0$. Se fosse invece $-mq+np<0$, il verso positivo degli angoli non sarebbe conservato.

Noi chiameremo Jacobiano delle x, y rispetto alle X, Y, e indicheremo con $\frac{d(x,y)}{d(X,Y)}$ il binomio $-mq+np$, ossia il de- erminante

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y}\\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y}\end{vmatrix},$$

che noi supporremo avere costantemente uno stesso segno.

Secondo che questo Jacobiano è positivo o negativo, il verso o senso degli angoli è, o non è, conservato, e quindi, mentre si percorre s *in verso positivo (lasciando* σ *a sinistra), il punto corrispondente percorre* S *in verso positivo o negativo.*

γ) Sia ora $F(x, y)$ una funzione tale che $\frac{\partial F}{\partial x}=f$. Sarà:

(3) $$\int_\sigma f d\sigma=\int_\sigma\frac{\partial F}{\partial x}d\sigma=\int F\,dy \quad \text{per il teorema del § 128.}$$

Se indichiamo con F anche la funzione delle X, Y, che si ottiene sostituendo in $F(x, y)$ alle x, y i valori (2), sarà:

$$\int_s F\,dy=\int_{S_1}F\left[\frac{\partial y}{\partial X}dX+\frac{\partial y}{\partial Y}dY\right],$$

dove con S_1 indico il contorno S di Σ percorso nel verso in cui si muove un punto A_1, il cui punto corrispondente A di σ percorre s nel verso positivo. Se dunque poniamo $\varepsilon=\pm 1$ secondo che il precedente Jacobiano è positivo, o negativo, sarà, ricordando i teoremi del § 128, e supponendo S percorso in modo da lasciare Σ a sinistra:

$$\int_s F dy = \varepsilon \int_S \left\{ F \frac{\partial y}{\partial X} dX + F \frac{\partial y}{\partial Y} dY \right\} =$$

$$= \varepsilon \int_\Sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial X}\left(F \frac{\partial y}{\partial Y}\right) - \frac{\partial}{\partial Y}\left(F \frac{\partial y}{\partial X}\right) \right\} dX\, dY =$$

$$= \varepsilon \int_\Sigma \left(\frac{\partial F}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y} - \frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial X} \right) dX\, dY =$$

$$= \int_\Sigma \varepsilon \left\{ \frac{\partial y}{\partial Y}\left[\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X}\right] - \frac{\partial y}{\partial X}\left[\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right] \right\} dX\, dY,$$

dove, nell'ultimo membro, ho di nuovo considerato F funzione delle x, y. Riducendo, e ricordando che $\frac{\partial F}{\partial x} = f$, se ne deduce infine:

$$\int_s F dy = \int_\Sigma \varepsilon f \frac{d(x, y)}{d(X, Y)} dX\, dY = \int_\Sigma f \left| \frac{d(x, y)}{d(X, Y)} \right| dX\, dY. \tag{4}$$

Le (3), (4) dànno:

$$f(x, y)\, dx\, dy = \int_\Sigma f[x(X, Y),\ y(X, Y)] \left| \frac{d(x, y)}{d(X, Y)} \right| dX\, dY, \tag{5}$$

che costituisce la formola fondamentale per il cambiamento di variabili negli integrali doppi. La si confronti con la formola

$$\int_d f(x)\, dx = \int_D f[x(X)] \frac{dx}{dX} dX$$

dell'integrazione per sostituzione per gli integrali di una sola variabile, dove con x, X si indichino due variabili, di cui una funzione dell'altra, e con d, D segmenti corrispondenti sulle rette delle due variabili. L'analogia risulta evidente; alla $\frac{dx}{dX}$ di quest'ultima formola corrisponde nella formola sopra scritta lo Jacobiano $\frac{d(x, y)}{d(X, Y)}$; il quale viene preso in valore assoluto, perchè le aree Σ, σ si considerano sempre positive, mentre il segmento D può essere anche il segno opposto a δ. Se ponessimo $X = \rho$, $Y = \theta$, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$, il nostro Jacobiano si riduce a ρ; e si ritorna così alla formola del § 108. (Cfr. l'oss. a pag. 353).

CAPITOLO XXI.

COMPLEMENTI VARII

§ 133. — Le serie di Fourier.

Sia una funzione $f(x)$ che ammette il periodo 2π, che cioè assume valori uguali in punti che differiscono per un multiplo di 2π. Supponiamo che $f(x)$ sia sviluppabile in una serie (di Fourier):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx), \tag{1}$$

dove n assume i valori 0, 1, 2, 3 ....., e le a_n, b_n sono costanti da determinarsi. Osserviamo che il termine corrispondente ad $n = 0$ si riduce ad a_0; cosicchè la (1) si può scrivere:

$$f(x) = a_0 + \sum_{1}^{n} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx). \tag{1$_{\text{bis}}$}$$

Ricordando che, se α è intero, $\int_0^{2\pi} \cos \alpha x dx$ è nullo, se $\alpha \neq 0$, ed è uguale a 2π se $\alpha = 0$, e osservando che:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos (n+m) x dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos (n-m) x dx,$$

troviamo, se n, m sono interi positivi o nulli:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \begin{cases} 2\pi \text{ se } n = m = 0 \\ \pi \text{ se } n = m \neq 0 \\ 0 \text{ se } n \neq m. \end{cases}$$

In modo simile si prova:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx\, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\, dx = \begin{cases} 0 \quad \text{se } n = m = 0 \\ 0 \quad \text{se } n \neq m \\ \pi \quad \text{se } n = m \neq 0. \end{cases}$$

Integrando la $(1)_{\text{bis}}$ da 0 a 2π, dopo averla moltiplicata per 1 o per $\cos mx$ o per $\operatorname{sen} mx$, *supposto* che le serie così ottenute sieno integrabili termine a termine, si avrà, ricordando le precedenti identità:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} a_0\,dx +$$
$$+ \sum_1^\infty \left\{ a_n \int_0^{2\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx\,dx \right\} = 2\pi a_0 \quad (*)$$

e per $m > 0$.

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx = \sum_1^\infty \left\{ a_n \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\,dx + \right.$$
$$\left. + b_n \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx\,dx + \right\} = \pi a_m \quad (**)$$
$$\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} mx\,dx = \sum_1^\infty \left\{ a_n \int_0^{2\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx\,dx + \right.$$
$$\left. + b_n \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\,dx \right\} = \pi b_m \quad (***)$$

Se ne deduce dunque nelle nostre ipotesi:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \\ (m>0) \qquad a_m &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx \\ b_m &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} mx\,dx \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Noi ci chiediamo:

Quando avviene che sia vera la $(1)_{\text{bis}}$, ove alle a_i, b_i si diano i valori definiti dalla (2)?

Si può dimostrare (Dirichlet, Dini, Lebesgue) che ciò avviene in casi molto generali. Noi lo dimostreremo nel caso particolarissimo che le $f'(x)$, $f''(x)$ esistano e siano continue e quindi limitate

(*) Si riconosce anche direttamente che tutti i membri del secondo membro sono nulli, il primo eccettuato.

(**) In virtù delle identità scritte più sopra, nel secondo membro il coefficiente di b_n è nullo, qualunque sia m; il coefficiente di a_n è differente da zero (ed uguale a π) solo se $n = m$.

(***) Si dimostra con metodo analogo a quello seguito per la formola precedente.

(e necessariamente ammettano anch'esse il periodo 2π). Dimostriamo intanto che in tali ipotesi la $(1)_{bis}$ è totalmente convergente.

Sia M una costante maggiore dei valori assoluti delle $f'(x)$, $f''(x)$. Integrando per parti, si ha per $m \geqq 1$:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} mx}{m} f(x)\,dx\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} mx}{m} f'(x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{m\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx\, f'(x)\,dx = -\frac{1}{\pi m^2}\int_0^{2\pi} \cos mx\, f''(x)\,dx,$$

donde:

$$|a_m| \leqq \frac{1}{\pi m^2}\int_0^{2\pi} |\cos mx\, f''(x)|\,dx \leqq \frac{1}{\pi m^2}\int_0^{2\pi} |f''(x)|\,dx \leqq \frac{M}{\pi m^2}\int_0^{2\pi} dx$$

ossia:
$$|a_m| \leqq 2\,\frac{M}{m^2} \qquad (m > 1).$$

Similmente $|b_m| \leqq 2\,\dfrac{M}{m^2}$; e quindi per $n \geqq 2$

$$|a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx| \leqq \frac{4M}{n^2} < \frac{4M}{n(n-1)} =$$

$$= 4M \left\{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right\}.$$

La serie a termini positivi e costanti $\sum_2^\infty \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$ converge, perchè la somma dei primi suoi k termini vale $1 - \frac{1}{k}$, che tende ad 1 per $k = \infty$; quindi sia la $\sum_2^\infty (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$, che la $(1)_{bis}$ sono totalmente convergenti.

Sia $\varphi(x)$ uguale al secondo membro di $(1)_{bis}$. Gli integrali di $\varphi(x)$, $\varphi(x)\cos mx$, $\varphi(x)\operatorname{sen} mx$ si ottengono dalla $(1)_{bis}$ moltiplicandola rispettivamente per 1, $\operatorname{sen} mx$, $\cos mx$, e integrando poi termine a termine, perchè la $(1)_{bis}$ è convergente totalmente. Tali integrali sono perciò uguali a quelli di

$$f(x),\ f(x)\cos mx,\ f(x)\operatorname{sen} mx.$$

Cosicchè, posto $\psi(x) = f(x) - \varphi(x)$, sarà:

$$\int_0^{2\pi} \psi(x)\,dx = 0;\ \int_0^{2\pi} \psi(x)\cos mx\,dx = 0;\ \int_0^{2\pi} \psi(x)\operatorname{sen} mx\,dx = 0. \qquad (3)$$

Il nostro teorema sarà dimostrato, sa riusciamo a dedurne che la $\psi(x)=0$. Dalle (3) si ha che, qualunque siano le costanti b_i, c_i, è:

$$\int_0^{2\pi} \psi(x) \left\{ b_0 + \sum_{r=1}^{n} b_r \cos rx + \sum_1^n c_r \operatorname{sen} rx \right\} dx = 0 \quad (4)$$

e quindi, per il risultato dell'es. 15°, pag. 58, è:

$$\int_0^{2\pi} \psi(x)\, F(x)\, dx = 0, \quad (5)$$

se $F(x)$ è un qualsiasi polinomio nelle sen x, cos x a coefficienti costanti. Supponiamo ora che la funzione (continua) $\psi(x)$ sia differente da zero in un punto A; essa sarà pure differente da zero in tutto un intorno di A, p. es. nell'intervallo (α, β), dove sarà, p. es., positiva, ossia avrà un minimo m *positivo*. Vogliamo dimostrare che ciò è assurdo. Poniamo:

$$F(x) = \left\{ 1 + \cos\left[x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right] - \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \right\}^n, \quad (6)$$

dove n è un qualsiasi intero positivo. La espressione tra $\{\ \}$ supererà sempre $-\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) > -1$ e sarà maggiore di 1 soltanto quando l'angolo x varia nell'intervallo (α, β).

Indicheremo con N il massimo finito della $\psi(x)$. L'intervallo $(0, 2\pi)$ si può decomporre nei seguenti intervalli parziali:

1° L'intervallo (α, β).

2° Un intorno di α di lunghezza non superiore ad $\varepsilon = \frac{m}{4N} |\beta - \alpha|$ (*).

3° Un intorno di β di lunghezza non superiore ad $\varepsilon = \frac{m}{4N} |\beta - \alpha|$ (*).

4° La parte residua γ di lunghezza

$$\gamma \geqq 2\pi - |\beta - \alpha| - 2\varepsilon.$$

Nell'intervallo (α, β) è $\psi(x) \geqq m > 0$, $F(x) > 1$; quindi l'integrale di $\psi(x)\, F(x)$ esteso a tale intervallo supera $m\,|\beta - \alpha|$.

(*) Si suppongono questi intorni essere uno destro, l'altro sinistro, così, da essere entrambi esterni all'intervallo (α, β).

Nei due intorni ricordati di α e β è $|F(x)| \leqq 1$, $|\psi(x)| < N$. Quindi l'integrale di $\psi(x) F(x)$ esteso a questi due intorni non supera $2 \varepsilon N = \frac{m}{2} |\beta - \alpha|$.

Consideriamo ora la parte residua γ. In γ è sempre $|\psi(x)| \leqq N$. Invece $1 + \cos\left[x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right] - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ è sempre minore di 1 in valore assoluto: cioè il suo massimo valore assoluto è un numero $\sigma < 1$. Quindi la $F(x)$ definita dalla (6) è minore di σ^n. E l'integrale di $\psi(x) F(x)$ esteso a γ non supererà $\gamma N \sigma^n$, e quindi, poichè $\sigma < 1$, diventa piccolo a piacere, p. es. minore di $\frac{m}{4} |\beta - \alpha|$, quando n è abbastanza grande.

L'integrale di $\psi(x) F(x)$ esteso a tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$ è uguale alla somma degli integrali di $\psi(x) F(x)$ estesi ai citati intervalli parziali; ed uguale perciò alla somma:

1° di un numero positivo maggiore di $m |\beta - \alpha|$;

2° di un numero che in valore assoluto non supera $\frac{m}{2} |\beta - \alpha|$;

3° di un numero che in valore assoluto non supera $\frac{m}{4} |\beta - \alpha|$.

Esso è dunque maggiore di $|\beta - \alpha|$ moltiplicato per $m - \frac{m}{2} - \frac{m}{4} = \frac{m}{4}$; ciò che è assurdo, perchè noi sappiamo che esso è nullo. È dunque assurdo ammettere che $\psi(x)$ non sia identicamente nullo.

Più generalmente si dimostra che: *La* $(1)_{\text{bis}}$, *i cui coefficienti siano determinati da* (2) *in un punto* $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ *ove* $\mathrm{f(x)}$ *sia discontinua, ha per somma* $\frac{1}{2}\left[\lim_{\mathrm{x}=\mathrm{a}+} \mathrm{f(x)} + \lim_{\mathrm{x}=\mathrm{a}-} \mathrm{f(x)}\right]$, *se questi due limiti esistono e sono finiti* [purchè esistano e siano finiti anche i $\lim_{x=a\pm} f'(x)$ e $\lim_{x=a\pm} f''(x)$]. Anche questo risultato vale del resto in casi estremamente più generali.

§ 134. — Elementi del calcolo delle variazioni.

α) La teoria dei massimi e minimi si propone di trovare il valore della variabile (o i valori delle variabili) che rendono massima o minima una data funzione. Ma talvolta si presentano problemi di massimo o di minimo di un altro tipo: il problema di cercare la funzione $\varphi(x)$ o la curva $y = \varphi(x)$ che rendono minimo qualche integrale, p. es. la curva $y = \varphi(x)$ che passa per due punti A, B di ascissa a, b e che ha la minima lunghezza, ossia che rende minimo $\int_a^b \sqrt{1 + \varphi'^2(x)}\, dx$, oppure la curva passante per due punti A, B posti ad altezze differenti, tale che sia minimo il tempo impiegato da un grave che cade da A a B lungo la curva, ecc., ecc.

Si voglia trovare la funzione y della x, che rende minimo l'integrale $\int_a^b f(x, y, y')\, dx$, e che assume valori dati *a priori* per $x = a$, $x = b$. Si ammetta che tale funzione possegga derivate prime e seconde finite e continue, che per la f e derivate valgano nel campo che esamineremo, tutte le proprietà (continuità, ecc.) necessarie per la validità dei calcoli seguenti.

Se $y = \varphi(x)$ è la funzione cercata (supposto che esista e possegga derivate prime e seconde finite e continue), e se $z(x)$ è una funzione con derivate prima e seconda finite e continue, nulla per $x = a$ e per $x = b$, allora, qualunque sia il valore della costante t, la funzione $\varphi(x) + tz(x)$ assume per $x = a$ e per $x = b$ i valori prefissati; e il nostro integrale, ove si ponga $\varphi(x) + tz(x)$ al posto di y, ossia

$$\int_a^b f[x, \varphi(x) + tz(x), \varphi'(x) + tz'(x)]\, dx$$

diventa una funzione di t, che ha un minimo per $t = 0$.

Sarà dunque (§ 70, pag. 226):

$$\frac{d}{dt}\int_b^b f[x, \varphi(x) + tz(x), \varphi'(x) + tz'(x)]\, dx = 0 \qquad \text{per } t = 0$$

ossia (§ 89, pag. 296)

$$\int_a^b \frac{d}{dt} f[x, \varphi(x) + tz(x), \varphi'(x) + tz'(x)]\, dx = 0 \qquad \text{per } t = 0$$

che, per il teorema del § 83, si può scrivere:

$$\int_a^b \left\{ z(x) \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} + z'(x) \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} \right\}_{y=\varphi+tz} dx = 0 \qquad \text{per } t = 0.$$

E, osservando che per $t = 0$ la $\varphi + tz$ si riduce alla φ, questa equazione ci dice che la funzione $y = \varphi(x)$ cercata soddisfa alla

$$\int_a^b z(x) \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} dx + \int_a^b z'(x) \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} dx = 0.$$

Integrando per parti il secondo di questi due integrali, esso diventa:

$$\left[z(x) \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} \right]_a^b - \int_a^b z(x) \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} \right] dx.$$

Il primo termine è nullo, perchè $z(x) = 0$ per $x = a$ e per $x = b$. La nostra equazione si riduce così alla:

$$\int_a^b z(x) \left\{ \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} \right] \right\} dx = 0 \qquad (1)$$

che deve valere, qualunque sia la funzione derivabile $z(x)$ nulla per $x = a$ e per $x = b$. Io dico che la quantità tra $\{ \}$ dovrà esser nulla, che cioè

$$\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} \right] = 0. \qquad (2)$$

Se infatti così non fosse, ed essa fosse differente da zero, p. es. positiva in un punto $x = c$, essa sarebbe positiva in tutto un intorno (α, β) di c. Porremo in tal caso

$$z(x) = (x - \alpha)^4 (x - \beta)^4 \text{ nell'intervallo } (\alpha, \beta),$$

$z(x) = 0$ in tutti i punti di (a, b) esterni all'intervallo (α, β).

La funzione $z(x)$ così definita soddisfa alle condizioni citate.

Poichè $z(x)$ è nullo fuori dell'intervallo (α, β), la (1) si riduce alla

$$\int_\alpha^\beta z(x) \left\{ \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} \right) \right\} dx = 0;$$

ciò che è assurdo, perchè nelle attuali ipotesi, tanto $z(x)$ quanto la quantità tra graffe $\{ \}$ sono positive in ogni punto interno all'intervallo (α, β) di integrazione, cosicchè l'integrale è positivo e differente da zero. La nostra ipotesi è quindi assurda; vale cioè identicamente la (2), che si può scrivere esplicitamente (§ 83) così:

$$\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial y'} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' = 0 \qquad (2)_{\text{bis}}$$

ed è quindi un'equazione differenziale del secondo ordine per la funzione cercata y della x. L'integrale della (2) o $(2)_{\text{bis}}$ conterrà due costanti arbitrarie, che si possono di solito determinare imponendo a tale integrale le condizioni di assumere i valori prefissati per $x = a$, o per $x = b$.

Non ci occuperemo delle ulteriori condizioni a cui deve soddisfare la funzione cercata, affinchè renda effettivamente minimo il nostro integrale.

β) Talvolta ci si propone di cercare la funzione y, che rende massimo o minimo l'integrale $\int_a^b \Phi(x, y, y')\, dx$, tra le funzioni y che assumono valori prefissati per $x = a$, e per $x = b$, e che soddisfano a un'equazione $\int_a \varphi(x, y, y')\, dx = k$, dove k è una costante prefissata *a priori*. Noi ci accontenteremo di enunciare che per tali problemi continua a valere il metodo del moltiplicatore indicato al § 85, δ, pag. 289. Che cioè si trova una condizione *necessaria*, a cui deve soddisfare la funzione y cercata nel modo seguente. Si indichi con λ una costante per ora indeterminata: e, posto $f(x\, y\, y') = \Phi + \lambda\varphi$, si scriva la (2), come se si volesse cercare la funzione y che rende minimo $\int_b^a f(x, y, y')\, dx$. L'integrale della (2) conterrà due costanti arbitrarie di integrazione, oltre alla costante λ. Queste tre costanti si determinano di solito, ricordando che la y per $x = a$ o per $x = b$ deve assumere i valori prefissati, e che deve essere $\int_a^b \varphi(x, y, y')\, dx = k$.

Esempi.

1° La teoria delle serie di Fourier si può interpretare fisicamente nel seguente modo. Se x indica il tempo, la $y = f(x)$, che ammette il periodo 2π, può servire a misurare qualche fenomeno periodico (vibrazione di un punto, di una corda, vibrazione luminosa, ecc.). Una equazione $y = a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$ (n intero positivo, a_n, b_n costanti) si ritiene, come è noto dalla fisica, come misurante un fenomeno periodico *elementare*. La y testè definita si riproduce, se l'angolo nx aumenta di 2π, ossia se x aumenta di $\frac{2\pi}{n}$. In altre parole, in un intervallo di ampiezza 2π, tale y si riproduce n volte, misura cioè un fenomeno oscillatorio, che in un intervallo di ampiezza 2π compie n oscillazioni. Il nostro risultato si può dunque enunciare così:

Ogni fenomeno periodico, che si riproduce cioè dopo 2π *unità di tempo si può decomporre nella somma (serie) di infiniti fenomeni periodici elementari, che nello stesso intervallo di tempo compiono rispettivamente* 1, 2, 3, 4, ... *oscillazioni.*

Per questa ragione si decompongono, p. es., i suoni emessi da uno strumento musicale nella cosidetta nota fondamentale e nei suoni armonici.

Oss. 1ª. Ponendo $z = \frac{T}{2\pi} x$, e indicando con z il tempo, si passa allo studio di fenomeni periodici, che ammettono un qualsiasi periodo T (anche distinto da 2π). Lo stesso scopo si potrebbe ottenere variando l'unità di misura per il tempo.

2ª Trovare la minima distanza AB dal punto $A = (a, \alpha)$ a punto (b, β).

Ris. Si deve cercare il minimo di $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$, ossia porre nella (2) del § 134 $f = \sqrt{1 + y'^2}$. La (2) diventa così: $\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$, ossia $\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{cost.}$, o anche $y' = m$, dove m è una costante arbitraria. Quindi $y = mx + n$, dove n è un'altra costante arbitraria; la curva cercata è una retta. Le costanti m, n si determinano scrivendo che essa passa per A per B.

3ª Dati in un piano verticale π due punti A, B, trovare la curva passante per A e per B, tale che un grave, cadendo da A a B lungo questa curva, impieghi il minimo tempo possibile.

Assumiamo in π il punto A come origine, un asse delle x orizzontale, un asse delle y verticale volto verso il basso.

Supponiamo che la curva cercata abbia un'equazione $y = y(x)$. Noi sappiamo che la forza viva $\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ del grave di massa 1 con s indico l'arco percorso dal grave) è uguale al lavoro compiuto dal grave nel cadere dal punto A, cioè è uguale alla proiezione y sulla verticale dello spazio percorso moltiplicata per la solita costante g. Ossia:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g\,y,\ dt = \frac{ds}{\sqrt{2g\,y}} = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g\,y}}\,dx.$$

Cosicchè (se $b \neq 0$ è l'ascissa di B) il tempo impiegato dal nostro grave nella caduta è

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx.$$

Posto dunque nella (2) $f = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$, la (2) diventa:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y\sqrt{y}} + \frac{d}{dx}\left\{\sqrt{\frac{y}{1+y'^2}}\,\frac{y'}{y}\right\} = 0,$$ che si può scrivere

assumendo, com'è lecito, la y a variabile indipendente:

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{y^2}\,\frac{\sqrt{y\,(1+y'^2)}}{y'} + \frac{d}{dy}\left\{\frac{y'}{\sqrt{y\,(1+y'^2)}}\right\} = 0.$$

Posto $\frac{y'}{\sqrt{y\,(1+y'^2)}} = z$, se ne trae $\frac{1}{2\,y^2}\,\frac{1}{z} + \frac{dz}{dy} = 0$,

ossia $2\,z\,dz + \frac{dy}{y^2} = 0$.

Integrando si avrà $z^2 = \frac{1}{y} - m$ ($m =$ cost.), donde:

$$\frac{y'^2}{y(1+y'^2)} = \left(\frac{1}{y} - m\right) \text{ ossia } \frac{1+y'^2}{y'^2} = \frac{1}{1-my},\ x = \int_0^y \sqrt{\frac{my}{1-my}}\,dy.$$

Nelle nostre ipotesi (B più basso di A, asse delle y volto in basso) la y lungo la curva cercata è positiva. Non può dunque essere $m < 0$, perchè altrimenti $1 - my > 0$, e il radicale sarebbe immaginario.

Dunque $m > 0$, e si può porre $m = \frac{1}{2\,h^2}$ ($h =$ cost.).

Di più $1 - my > 0$ ossia $\frac{1}{y} > m = \frac{1}{2h^2}$; e si può porre $\frac{1}{y} = \frac{1}{2h^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{h} tg \frac{\varphi}{2}\right]^2$, dove $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ è una nuova variabile di integrazione. Si ha:

$$y = 2h^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = h^2 (1 + \cos\varphi). \qquad (\alpha)$$

E quindi, sostituendo nel nostro integrale, e osservando che

$$\sqrt{\frac{my}{1 - my}} = \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2},$$

si trova, osservando che $\varphi = \pi$ per $y = 0$,

$$x = h^2 \pi - h^2 (\varphi + \operatorname{sen} \varphi). \qquad (\beta)$$

Le (α), (β) definiscono i punti della curva cercata in funzione del parametro φ. Tale curva è una *cicloide*.

4ª. Tra le curve $y = y(x)$ passanti per i punti di ascissa a e b dell'asse delle x, e di lunghezza prefissata L, trovare quella che con l'asse delle x racchiude l'area massima.

Ris. In § 134, β, si deve porre $\varphi = \sqrt{1 + y'^2}$, $\Phi = y$. La curva cercata deve dunque soddisfare a (2) ove si ponga $f = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}$ ($\lambda =$ cost.), cioè alla

$$1 = \lambda \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right), \text{ donde :}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{\lambda} x + \mu \ (\mu = \text{cost.}).$$

Il primo, e quindi anche il secondo membro, sono minori di 1. Posto perciò

$$\frac{1}{\lambda} x + \mu = \operatorname{sen} \varphi \qquad (\varphi = \text{nuova variabile}),$$

se ne dedurrà $\frac{dy}{dx} = y' = \operatorname{tg} \varphi$.

Quindi $dy = \operatorname{tg}\varphi\, dx = \lambda \operatorname{tg}\varphi \cos\varphi\, d\varphi = \lambda \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi$ ed $y = - \lambda \cos\varphi + \nu$ ($\nu =$ cost). Eliminando φ dalle due equazioni trovate, si trova $(x + \lambda\mu)^2 + (y - \nu)^2 =$ cost. La curva cercata è dunque un cerchio.

§ 135. — Alcune funzioni di variabile complessa.

α) Le funzioni e^z, $\cos z$, $\operatorname{sen} z$ sono definite per tutti i valori della z da una serie di potenze, e si possono considerare perciò funzioni della z, anche se z è complesso.

β) Dimostriamo che anche una frazione razionale, cioè un quoziente di polinomi di una variabile z è pure una funzione della variabile z, cioè è sviluppabile in serie di potenze. Se noi introduciamo nei calcoli *anche numeri complessi*, l'enunciato del teor. a pag. 250-251 si può semplificare provando che ogni frazione $\frac{P(z)}{Q(z)}$ è somma di un polinomio, di frazioni semplici del tipo $\frac{A}{z-a}$, (*) e della derivata di un'altra frazione $\frac{V(z)}{W(z)}$. Applicando a quest'ultima lo stesso teorema, e così continuando, si *prova che ogni frazione* $\frac{P(z)}{Q(z)}$ *è somma di un polinomio, di frazioni semplici del tipo* $\frac{A}{z-a}$, *e di derivate di tali frazioni semplici.*

Basterà dunque provare che $\frac{A}{z-a}$, o, ciò ch'è lo stesso, che $\frac{1}{z-a}$ è sviluppabile in serie di potenze. Se $z_0 \neq a$ è un numero qualsiasi, si ha appunto (per la nota formola delle progressioni geometriche)

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-z_0)-(a-z_0)} = \frac{1}{z_0-a}\,\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{a-z_0}} =$$

$$= \frac{1}{z_0-a}\left\{1+\sum_1^\infty \frac{1}{(a-z_0)^n}(z-z_0)^n\right\}$$

nel cerchio definito dalla: $|z-z_0| < |a-z_0|$, cioè entro il cerchio di centro z_0, la cui periferia passa per il punto a.

(*) La dimostrazione del § 76 continua a valere, se ad una frazione del tipo $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (il cui denom., uguagliato a zero, abbia radici complesse b, c) sostituiamo una espressione del tipo $\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$ (con B, C costanti).

Se ne deduce facilmente che *una frazione razionale* data ad arbitrio *è sviluppabile in serie di potenze della* $z - z_0$ *in ogni cerchio di centro* z_0, *il quale non contenga punti ove la frazione diventa singolare* (in cui quindi il denominatore si annulla). (Cfr. il teorema di Cauchy citato in nota a piè di pag. 209).

§ 136. — Integrazione meccanica.

È noto che il calcolo dell'integrale di una funzione si può eseguire per via grafica (nota a pag. 325); con metodo grafico si possono risolvere le equazioni algebriche. Le scienze applicate dànno numerosi e svariati metodi di calcolo grafico.

Accanto ad essi esistono metodi meccanici per i calcoli più molteplici: ci basti ricordare le macchine così note per eseguire le operazioni fondamentali dell'aritmetica.

Più semplici assai di esse sono gli strumenti che, pure ricorrendo al disegno, servono ad eseguire le integrazioni, e che si dividono in due categorie: gli integrafi, che servono a dare gli integrali indefiniti, ed i planimetri, che calcolano gli integrali definiti, o più generalmente le aree delle figure piane. Di planimetri esistono tipi svariatissimi; e noi ne studieremo, a titolo di esempio, soltanto due. Avverto che *noi studiamo i tipi teoricamente più semplici;* ma non parliamo del semplicissimo planimetro di Prytz, perchè non è troppo preciso.

A) *Integrafo di Abdank-Abakanowicz.*

Al § 73, pag. 238, abbiamo già citato alcune applicazioni di questo integrafo al calcolo numerico delle radici di una equazione algebrica. Tale apparecchio risolve il problema seguente: *Disegnata una curva* $y = f(x)$, *tracciare una qualsiasi delle curve* $y = \int f(x)\, dx$. Esso è fondato sul fatto sperimentale che se una rotella ruota senza strisciare su un foglio di carta ed è sempre contenuta in un piano perpendicolare al foglio stesso, allora il punto di contatto della rotella e del foglio descrive una curva le cui tangenti sono date dall'intersezione del piano del foglio col piano della rotella. Ecco una descrizione soltanto *schematica* di detto integrafo.

Sia $y = f(x)$ una curva C; e sia C' la curva $y = F(x)$ dove $F(x) = f'(x)$, cosicchè $f(x) = \int F(x)\, dx$. Sia $x = a$ un punto A' dell'asse delle x e siano A_1, A_2 i punti corrispondenti delle curve $y = F(x) = f'(x)$ ed $y = f(x)$. Sia B quel punto dell'asse delle x tale che il segmento $BA' = 1$ (*).

Il coefficiente angolare della tangente alla curva $y = f(x)$ per $x = a$, ossia nel punto A_2, vale $f'(a) = F(a)$.

Il coefficiente angolare della retta BA_1 vale:

$$\frac{A'A_1}{BA'} = \frac{F(a)}{1} = F(a).$$

Queste due rette hanno dunque ugual coefficiente angolare, e sono perciò parallele.

Supponiamo di aver disegnata la curva $y = F(x)$ e di voler tracciare la curva $y = f(x)$, mentre una punta scrivente A_1 descrive la $y = F(x)$. L'integrafo porta un parallelogrammo articolato, un lato λ_1 del quale coincide sempre con la retta BA_1, ipotenusa del triangolo rettangolo $BA'A_1$, che ha un cateto BA' posto sull'asse della x ed eguale a 1. Il lato λ_2 opposto del parallelogramma sarà costantemente una retta parallela a BA_1; esso porta una rotella A_2 tenuta sul prolungamento di $A'A_1$, e in un piano passante per λ_2 e normale al piano del foglio. Il punto A_2 di contatto di tale rotella descrive dunque una curva $y = f(x)$ che ha in A_2 per tangente la retta λ_2 parallela a λ_1. Il coefficiente angolare $f'(x)$ di tale tangente è così uguale al coefficiente angolare $F(x)$ di λ_1. È perciò, come si voleva, $f'(x) = F(x)$. La indeterminazione di una costante additiva per la funzione $f(x)$ corrisponde nell'integrafo all'arbitrarietà della posizione iniziale della rotella lungo l'ordinata di A_1.

L'integrafo di Abdank è costruito in modo diverso per assicurarne il buon funzionamento. Il principio fondamentale è però quello da noi esposto.

B)$_1$ *Un primo tipo planimetro.*

Noi descriviamo ora un planimetro con un disco. Esso è poco pratico, e l'ingegnere di solito gli sostituisce il planimetro di Corradi a sfera e cilindro, senza filo. Ma, poichè la teoria di quest'ultimo è affatto analoga a quella che qui esporremo, e che presenta caratteri di speciale semplicità, così resta giustificata la scelta del planimetro, che qui descriviamo.

Tale planimetro consiste essenzialmente in un disco circolare piano D di centro O, il quale può essere dotato di due movimenti; uno di traslazione parallelamente all'asse della y,

(*) Il lettore disegni la figura.

e uno di rotazione intorno al suo asse centrale O. Per poter scorrere parallelamente all'asse y il disco in questione è guidato generalmente da tre piccole rotaie. Attorno all'asse centrale del disco è avvolto un filo l; quando si tende il filo e lo si svolge dall'asse, il disco acquista un movimento di rotazione e l'angolo di rotazione è proporzionale all'allungamento del filo. Questo filo da una speciale disposizione strumentale (un'asta) è tenuto sempre parallelo all'asse delle x.

Quando l'estremità mobile C del filo ha un movimento parallelo all'asse delle y, tutto l'apparecchio ad esso solidale riceve pure un tale movimento; e il disco di asse O *non ruota*.

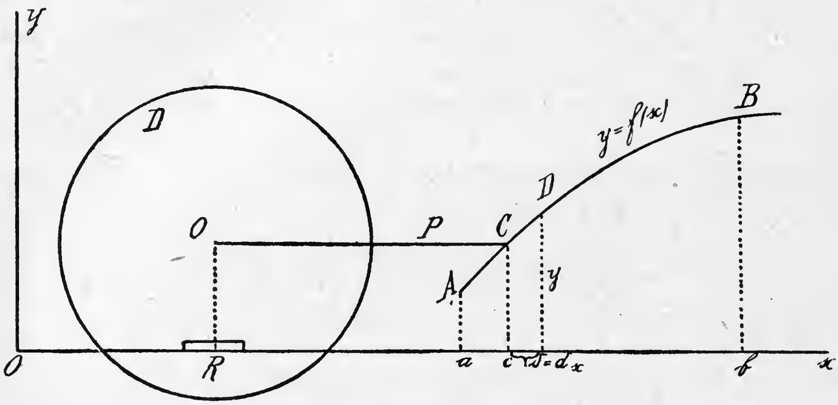


Fig. 47.

Quando invece il punto C riceve un movimento parallelo all'asse delle x, l'asse O del disco rimane fisso, il filo si allunga e si svolge imprimendo un movimento di rotazione al disco di un angolo proporzionale allo spostamento ricevuto da C.

Al piede della perpendicolare calata dal centro O del disco D all'asse delle x vi è una rotellina R tangente a D, posta in quel piano perpendicolare al piano del disco, che passa per l'asse delle x, e tenuta in contatto col disco stesso. Tale rotellina è munita di un contagiri. Col suo moto di rotazione il disco D imprimerà ad R pure un movimento di rotazione; un contagiri misura il numero dei giri e frazioni di giro compiuti da R.

Vediamo che cosa avviene quando l'estremità mobile C del nostro filo (che porta una punta) percorre una curva $y = f(x)$.

Supponiamo, p. es., la $f(x)$ crescente come nel caso della figura. Man mano che la punta C cammina sulla curva, il filo si innalza e si allunga verso destra, così che il disco si innalza e insieme ruota.

Dico che l'*integrale* $\int_a^b$ f (x) dx *è proporzionale al numero di giri, contato dal contagiri, compiuti dalla rotellina* R, *mentre la punta* C *percorre il pezzo di curva* y = f (x) *che si proietta nel segmento* (a, b).

Il coefficiente di proporzionalità varierà poi secondo le dimensioni dell'apparecchio e le unità di misura scelte. Dimostreremo il teorema, usando senz'altro locuzioni abbreviate.

Osserviamo anzitutto che, mentre il disco si innalza o si abbassa parallelamente all'asse delle y, la rotella non *gira*.

Affinchè la rotella R giri bisogna che:

1° Il filo OC si svolga dall'asse O e faccia rotare il disco D.

2° La rotella non si trovi sul centro O del disco, ma sia eccentrica.

Ed è anzi ben evidente che, l'angolo di cui gira la rotella è proporzionale a due quantità:

α) l'allungamento dei fili OC; β) la distanza OR da R al centro O del disco D.

Dividiamo ora l'intervallo (a, b) in infiniti segmentini infinitesimi; e sia δ uno di questi intervallini. In esso la y si può considerare come costante (cfr. § 99); e mentre C percorre il tratto CD di curva corrispondente, la distanza OR sarà appunto uguale alla y di un punto di questo pezzo di curva.

L'allungamento del filo sarà uguale alla lunghezza dx della proiezione δ del nostro pezzo di curva sull'asse della x; e quindi, per quanto dicemmo, l'angolo di cui gira la rotella R (mentre C percorre il tratto CD di curva che si proietta in δ) è proporzionale tanto alla y che a dx, e perciò, a meno di un fattore costante h, che dipende dalle dimensioni dell'apparecchio, è uguale al prodotto ydx (*). Il numero dei giri compiuto da R, mentre l'estremità C del filo descrive tutto il pezzo di curva $y = f(x)$ che si proietta nell'intervallo (a, b), è proporzionale alla somma degli angoli di cui R ruota nei singoli intervallini parziali δ. Tale numero di giri è dunque proporzionale a

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \text{c. d. d.}$$

(*) In modo preciso esso è compreso tra i prodotti di hdx per il massimo o il minimo di y in δ. L'allievo completi questa dimostrazione senza sussidio di locuzioni abbreviate.

Questo planimetro può in modo affatto simile servire al calcolo dell'area non solo di rettangoloidi, ma di figure piane qualsiasi, come il lettore può facilmente dimostrare.

B)$_2$ *Planimetri di Amsler.*

Un'asta rettilinea AB porti a un estremo A una rotella R posta in un piano normale ad AB e girevole intorno al suo centro A. Un punto C della retta AB sia costretto a muoversi su una linea prefissata L, mentre il punto B descrive un cammino chiuso Γ posto nel piano di L, e l'asta ritorna alla posizione iniziale. In tale movimento la rotella R sia appoggiata al foglio F del disegno, e compia un certo numero N di giri. Si vuole, conoscendo N, dedurne l'area racchiusa da Γ.

A seconda della forma di L, cambia il nome dato al planimetro: rettilineo, se L è una retta; polare, se L è un cerchio; curvilineo negli altri casi.

Per semplicità occupiamoci del primo caso, supponendo che:

α) Il cammino Γ non interseca la linea (guida) L;

β) Il punto C sia interno al segmento AB.

Supponiamo dapprima che il cammino Γ sia composto di segmenti δ paralleli alla retta L e di archi γ di cerchi col centro su L, e con raggio uguale al segmento CB. Quando B descrive un δ, la nostra asta non muta di direzione e il segmento CB descrive un parallelogrammo Δ; quando B descrive un γ, la nostra asta gira di un angolo φ, e il segmento CB descrive un settore di area $\frac{1}{2}\overline{CB}^2\varphi$. Ma, poichè alla fine del movimento l'asta è tornata alla posizione iniziale, la somma degli angoli φ percorsi in un senso è uguale alla somma degli angoli φ percorsi nel verso opposto, e i giri eseguiti corrispondentemente dalla R in un verso elidono quelli eseguiti nel verso opposto. E così pure i settori descritti da CB, mentre l'asta ruota in un verso, hanno complessivamente un'area uguale a quella dei settori descritti da CB, mentre l'asta ruota nel verso opposto.

Ricordando questo, è facile riconoscere che l'area racchiusa da Γ vale la differenza tra le aree dei parallelogrammi descritti da CB, quando B descrive un segmento δ, muovendosi, p. es., da sinistra a destra, e quelli descritti da CB, quando B descrive un segmento δ, muovendosi, p. es., da destra a sinistra. Quando B descrive un δ, l'asta ACB si muove parallelamente a sè stessa, e l'esperienza insegna che il numero dei giri compiuti da R vale la distanza d tra la posizione iniziale e finale della sbarra divisa per la periferia $2\pi r$ di R (se r è il raggio di R), cioè vale l'area del parallelogrammo descritto dal segmento CB divisa per la costante $2\pi r . \overline{CB}$.

L'area racchiusa da Γ sarà dunque data dal numero N totale dei giri eseguiti da R (che possiamo leggere col contagiri) diviso per la costante strumentale $2\pi r . \overline{CB}$. Anzi con opportuna graduazione si può leggere senz'altro il numero

$$\frac{1}{2\pi r \,.\, \overline{CB}} N.$$

Se poi Γ_1 è un cammino chiuso di forma arbitraria, lo si può pensare come limite di cammini Γ del tipo precedente. E, poichè l'esperienza insegna che, se dei cammini Γ si avvicinano indefinitamente a un cammino Γ_1, allora il numero corrispondente N tende al numero N_1 di giri corrispondente a Γ_1, e nei casi comuni l'area racchiusa da Γ_1 ha per limite l'area racchiusa da Γ, se ne deduce che *il precedente risultato vale per cammini chiusi* Γ *in generale.*

FINE.

INDICE

dei riassunti e degli esempi più notevoli.

[I numeri si riferiscono alle pagine; i numeri aggiunti talvolta come indici dànno il numero che nel testo ha l'esempio citato]

TABELLA

ESEMPI NOTEVOLI.

INDICE

CAPITOLO I.

NUMERI REALI.

CAPITOLO II.

APPLICAZIONI GEOMETRICHE.

CAPITOLO III.

I NUMERI COMPLESSI.

CAPITOLO IV.

POLINOMII ED EQUAZIONI ALGEBRICHE.

CAPITOLO V.

DETERMINANTI, SISTEMI DI EQUAZIONE DI PRIMO GRADO.

CAPITOLO VI.

FUNZIONI, LIMITI.

CAPITOLO VII.

SERIE.

CAPITOLO VIII.

DERIVATE, DIFFERENZIALI.

CAPITOLO IX.

EOREMI FONDAMENTALI SULLE DERIVATE E LORO PRIME APPLICAZIONI.

CAPITOLO X.

SERIE DI POTENZE.

CAPITOLO XI.

MASSIMI, MINIMI, FLESSI.

CAPITOLO XII.

INTEGRALI.

CAPITOLO XIII.

CALCOLO DIFFERENZIALE PER LE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

CAPITOLO XIV.

PRIMA ESTENSIONE DEL CALCOLO INTEGRALE ALLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI.

CAPITOLO XV.

GLI INTEGRALI DEFINITI E LE FUNZIONI ADDITIVE D'INTERVALLO.

CAPITOLO XVI.

FUNZIONI ADDITIVE GENERALI E INTEGRALI MULTIPLI.

CAPITOLO XVII.

CAMBIAMENTO DI VARIABILI NELLE FORMOLE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE.

CAPITOLO XVIII.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

CAPITOLO XIX.

ALCUNE APPLICAZIONI GEOMETRICHE DEL CALCOLO INFINITESIMALE.

CAPITOLO XX.

INTEGRALI CURVILINEI E SUPERFICIALI.

CAPITOLO XXI.

COMPLEMENTI VARII.