中等算學月刊

第四卷　第四期

要　目

中華民國二十五年四月出版

中等算學月刊社發行

中華民國郵政局特准掛號認爲新聞紙類

中華民國內政部登記證警字伍壹肆貳號

本社代表人	本刊編輯主任	本刊發行人
陸子芬	劉正經	余介石
江蘇省立南京中學	武昌國立武漢大學	四川省立重慶大學

編輯：
- 張伯康　江蘇省立南京中學
- 夏伯初　武昌省立武昌中學
- 龍季和　北平國立北京大學

經理：
- 李修睦　南京市立第一中學
- 管公度　英國倫敦倫敦大學
- 詹大庸　四川省立重慶大學

特約發行

南京太平路中 248 號　中央書局　(電話：23638)

投稿規約

1. 本刊以供給中學師生補充算學教材，引起研究興趣爲宗旨，如蒙賜稿，至所歡迎.

2. 來稿以簡明淺易，能合中等算學程度爲宜. 如屬譯作，務請註明原文出處.

3. 來稿務宜謄正，萬勿過於潦草. 格式每頁二十五行，每行三十五字. 繪圖請用黑色墨水，精確作好，以便製版.

4. 來稿內容，本刊有修正之權，其不願修改者，請於寄稿時聲明.

5. 來稿除寄稿時特別聲明並附足郵費外，概不退還.

6. 來稿登載後，酌贈本刊若干期，以答雅意，非敢言酬也.

7. 來稿請寄南京南捕廳鍾英中學本社，或武昌珞珈山武漢大學本社.

預定辦法

1. 定閱者請參閱本刊封面後幅內定價表，註明起訖期數將款項惠寄南京太平路中央書局，收到後卽發正式收據爲憑. 本刊每期出版後，儘先發送不誤.

2. 定閱者須將通信處詳細註明；如中途改變地址，請卽來函通知該局，否則如有遺失，恕不負責.

武漢社址
武昌珞珈山
國立武漢大學

中等算學月刊

第四卷　第四期

南京社址
南京南捕廳
鍾英中學

要　　目

中華民國二十五年四月號

423.1-25:3

中華書局出版

補習算學「應備之參考書」

增訂 數學辭典

布面精裝一冊
普及本二元五角

倪德基 酈祿琦編 陳潤泉增訂

本書內容：㈠辭典，㈡英漢名詞對照，㈢數學用略字及符號，㈣定理及公式，㈤數學用諸表，㈥度量衡及貨幣表，㈦外國數學家事略，㈧本國數學家事略。辭典之部，原約二十五萬言，復經重加增訂，材料加多，約三十萬言。舉凡算術、代數、幾何、解析幾何、微積分諸科之定義、定理、術語、公式及表，已搜羅殆盡。較之他書之東鱗西爪，缺而不全者，便利良多，洵爲數學書中之寶鑑。

數學公式 王永樹 胡昊楷編

精裝並二冊各一 一元 二元五角

算學通論（中等算學研究會叢書） 余介石編著 五角
四位算學用表（附初等算學公式及法則） 余介石編 四角
五位算學用表（附中等算學基本公式） 余介石編 六角

▼算　術

算術應用問題解法 許立紀編 六角五分
算術問題解法指導 匡文濤編 四角
中等英文商業算術（英文本） 英國蔡博徽編 一元六角
Middle School Arithmetic
中等英文商業算術答案（英文本） 英國蔡博徽編 二角五分
Answers for Middle School Arithmetic

▼代　數

代數學問題解法指導 匡文濤編 四角
方程式論（算學叢書） Florian Cajori著 倪德基譯 一元二角

▼幾　何

幾何作圖題解法及其原理（中等算學研究會叢書） Julius Petersen著 余介石譯 五角五分
平面幾何學問題解法指導 匡文濤編 四角
三S平面幾何學 仲光然 嚴幼芝 徐任吾譯 一元七角
Schultze-Sevenoak-Schuyler: Plane Geometry
三S平面幾何學習題詳解 朱文熊著二冊 ㈠一元六角 ㈡二元二角
三S立體幾何學 仲光然 嚴幼芝 徐任吾譯 九角
Schultze-Sevenoak-Schuyler: Solid Geometry
立體幾何學問題解法指導 匡文濤編 二角五分

▼三　角

平面三角法問題解法指導 匡文濤編 二角

▼分　析

微分學 段子燮 何魯編著 一元

〔各級算學教科書詳見圖書目錄〕

我對於初等算號的意見

張　鵬　飛

算學論形量數，範圍非常廣闊，因有算號替代，纔能化繁爲簡；又論形量數的演變和牠們的關係，意義更多曲折，因用算號表示，纔能使隱藏者顯明。簡明的算號，能將算學理法以及關於算學的一切事實，用短式子圓滿寫出，不獨令人一見了然，而且使見者永遠不忘。

我國現行算號，大都倣自歐美，有囫圇吞棗而無適當意義的，有依樣葫蘆而無標準形狀的，有須特別留意而仍忽略的，有應整理修改而仍敷衍者，都予初學以大不利；對於我國算學的教學和前途的發達，影響異常重大。深望算學界教育界諸君子，作精密的研究，圖切實的補救；以下略舉所見，以備研究時的參考。

第一　形號

一。形號的基本是：

• (代點)，　——(代線)，　⌒(代圓弧)；

牠們可說是原形的縮圖。

二。我們可以

拿 $\dot{A}$ 代點 A，或省做 A；

拿 $\overline{AB}$ 代直線 AB，或省做 AB；

拿 $\overparen{ABC}$ 代圓弧 ABC，或省做 $\overparen{AC}$，專代劣弧。

牠們都可分爲縮圖和字母兩部份。

三。形號裏的縮圖，祇代空洞的種名，字母可以增減變換，或在肩部加記，或者改用一種數碼，以能確實指出某形爲準。

四。代表有界平面的周，應用和直線圓弧一樣的號，如：

$\overline{ABCA}$ 或 ABCA 代表三角形 ABC 的周，

$\widehat{ABC}A$ 代表圓 ABC 的周。

五。 平面角號作∠，容易和<相混；作∢，又不是一般的角。 最好作 ∧，寫於字母左方或上方，如 ∧ABC 或 $A\hat{B}C$，後式較前式爲美觀。

六。 面號一律縮圖在左，字母在右。

七。 體號不能作縮圖，即用原名，字母仍放右方。

八。 英文略字的形號，如：

$rt\angle$代直角，　$st\angle$代平角，　$pr_{AB}ON$ 代 ON 在 AB 上的射影，

因易引人誤會或並不如華名簡單，不是眞可用時可以不用。

略字宜用小寫，各字母須靠緊，前後都不要和其他字緊接。

九。 用括號的形號，如

P(x,y)代位標面內的一點，

(A,B)代含 A,B 的直線，

(AB,CD)代 AB,CD 的交角，

曲折要多一點，初學不易明白，非到必須用時不宜用。

十。 代一般三角形的⊿，不宜寫成正三角形。∟容易寫成<，不宜拿牠代直角。

十一。 //s，$\triangle$s等，都可省掉 S.

十二。 //，⊿等可做字用，如：

//AB，CD 代平行線 AB，CD；

直∧代直角，

等腰⊿代等腰三角形。

第二　量號

十三。 凡是有量的形，形號都可以做量號。

第三　數號

十四。 數號雖以英文字母爲基本，並且多是英文略字，但開始時不妨多用華名爲導。如面積裏，先長，闊而後 l, w；利息裏，先本，利，率，期而後 p, i, r, t。

十五。 祇用一個字母的數號，宜用草體小寫，並須力避重複，一號幾用。

十六。 不祇用一個字母的數號，宜以一個字母居中代種名，並在肩脚加記，切實指出這數，如：

$${}_nP_r, \quad {}_nC_r, \quad S_{\overline{n|}}, \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots;$$

居中字母宜用正體大字，旁加的用草體小寫。

十七。 用特別點線或希臘字母的數號，如：

$$p!, \quad \underline{|p}, \quad \overset{3}{\Sigma}\, ab, \quad \overset{3}{\Pi}\,(x+y), \quad \cdots \quad \cdots,$$

和用括號的數號，如：

M(p)代 p 的倍數，

F(x)代 x 的函數，

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 代 $a_1b_2-a_2b_1$，

等等，都難明白而易誤會，初學書裏，愈少愈好。

十八。 H.C.F.和 L.C.M.最好不用，用最高公約和最低公倍，並不覺緊。

十九。 寫正負數，最好像 $\overset{+}{3}$，$\overline{5}$，……。

二十。 表強弱的略數，最好像 $\underset{+}{3}$(代大於 3 的數)；$\underset{-}{5}$(代小於 5 的數)等等。

廿一。 寫絕對數，也可以寫 $\overset{(+)}{3}$，$\overset{(-)}{5}$，$\overset{(-)}{a}$，…。 這個 () 和括號 ( ) 的地位不同，就不至於相混。

廿二。 超越函數的號，大都是幾個字母的略字，如 Log x，Antilog x，Sin x，Csc x，$\text{Sin}^{-1}x$ 等，第一字母宜用大寫，各字母須靠緊，前後都不和其他字緊接。

廿三。 Log x，Antilog x，Sin x，Csc x，$\text{Sin}^{-1}x$ 等可以改做 L_x，${}_lN_x$，${}_\wedge S_x$，${}_\wedge S^{-1}_x$，${}_s\wedge_x$ 等，又如 Log Sin x 可改爲 $L({}_\wedge S_x)$，等等，但仍不甚方便；最好另造一組新號。

廿四。 括號可當數號看待，算術裏大抵這樣。

廿五。 σ和0， I和1， l和1， q和2， z和2， b和6， B和13等，都易混淆，最好不拿這些字母代數。

第四 關係號

廿六。 關係號都出於形。 除 //， ⊥外，＝是借線段相等表示數量相等或演變相等；＞和＜是借兩線段各端距離大小表示數量的大小，或演變怎樣。

廿七。 ＝不要寫成二字，兩線要同長同粗。 ＞和＜不要寫成⦣，∠，兩線交點要居中，不能偏上或偏下。

廿八。 從＝引伸，便得到≡，≑。

廿九。 ∽是橫S，從 similar 來； ∝近於∞並含0，可說從∞和0而來。

三十。 表否定關係的，都加有消號＼，如∦，⊥̸，≠，≯，≮；≑也可說是將消號省作兩點。

三一。 ≠，≯，≮不要寫成≠，≯，≮或丰，≯，≮，以致意思模糊。

三二。 有人主張用 N 表點對稱，∧表線對稱，也可採用；但採用時，角號∧不能寫在字母左方。

三三。 複號≌表相似且相等，就是全等，和≡一樣，不要寫成≌。

三四。 ≚是等號加角，表兩多角形互為等角；⊥̲是等號加線，表兩多角形互為等邊。 但是和⫲表平行且相等一樣，⊥̲容易被誤認為表垂直且相等，所以最好不用。

三五。 複號 ≧，⋝，≦，⋜，≷，≶，⋛，⋚可省作≥，⩾，≤，⩽，≷，≶，⋛，⋚。

三六。 在一組關係式裏，複號≥，⩾等要限同取上號或下號；⋛，⋚要限定同取上號，中號或下號。

第五 演變號

三七。 演變號的基本是：

$+$ ……………………………………………………表加。

乘是累加，轉斜就成 $\times$，……………………………表乘。

減是加的逆算，去｜就成 $-$，…………………………表減。

除是累減，把｜省作兩點，就成 $\div$，…………表除。

三八。 $+$ 不要寫成十字，縱橫線要同長同粗；$-$ 不要寫成一字，要長而粗；$\times$ 不要寫成乂或 X，要長而狹；$\div$ 的兩點要和橫線離開，不要連上。

三九。 $-$ 變做 $\sim$ 表差，$\div$ 省作 $:$ 表比，和原意有分別，不可看做一樣。

四十。 括號 ( )，[ ]，{ } 順次從簡而繁，應先用簡的，後用繁的。 兩個 ( ) 靠在一起，不要寫成 ( )( )，中間要空一點。

四一。 除號也可以變做—或 /，—或 / 也可做總括或劃分用。

四二。 開方是累除，根的英文是 root，所以 $\surd$ 可以說是從 / 和 r 出來。

四三。 $\times$ 可省作 $\cdot$ 或全省去，如

abc ……………………………同 $a\times b\times c$，

$a\div bc$ …………………………同 $a\div(b\times c)$，

$a\cdot bc$ …………………………同 $a\times(b\times c)$，

$(a+b)\,(a-b)$ ………同 $(a+b)\times(a-b)$，

用途各有不同。 但第二，第三兩例，宜加括號，成 $a\div(bc)$，$a\cdot(bc)$ 才能使人沒有誤會。

四四。 表除的—，/，:，用途也不相同，如:

$\dfrac{a+b}{c}$ ………………………同 $(a+b)\div c$，

$c/a+b$ ………………… 同 $c\div(a+b)$，

$l:a/b+c/d$ …………… 同 $l\div\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)$，

都含括號的意思。 但要令人沒有誤會，後二例也宜加括號成

$c/(a+b)$ 　　和　　 $l:(a/b+c/d)$。

四五。 在疊除裏，可祇用——而分長短，或一，/ 交錯並用，如：

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}, \quad \frac{a/b}{c}, \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots$$

四六。 算術裏加號有時可省而乘號不可省，代數裏乘號可省而加號不可省。

四七。 $\sqrt{\ }$ 是一，$\sqrt{}$ 兩者合成，% 似是 /100 所變成，寫時不要分裂成 $\sqrt{}$ ‾ 和 o|o，致感不便。

四八。 $\sqrt[n]{}$ 最好祇代主根，而以傅，程二人創的 [illegible] 代全根。

四九。 $(\sqrt{a})^2$ 雖等於 a，但須在 a 代正數時，才有 $(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}$，不能含糊不辨而有 $[\sqrt{(-1)}]^2=\sqrt{(-1)^2}$ 的誤會。

五十。 演變式都可當一個數看待。

五一。 消號不宜亂用，如 $\frac{\cancel{1}\ \cancel{2}\ 1}{\cancel{3}\ \cancel{6}\ 3}$，把一個號分做兩個，使人誤為要消二次。

五二。 小數點宜在數碼左肩，乘點在中腰，可以和別的點都不相混。

五三。 複號 ± 表加或減，正或負；∓ 表和或差。 若用指數，而於其前加 ± 號，也能表乘或除，乘方或開方，如：

$$ab^{\pm 1} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{同 } ab \text{ 或 } a/b,$$

$$a^{2^{+1}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{同 } a^2 \text{ 或 } a^{\frac{1}{2}}.$$

但像

$$Sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-Cos\ A}{2}}$$

中的 +，−，要看 A 的度數怎樣，決定去一留一，最好再加記號，使與前面有分別。

五四。 在一個或一組演變式裏，複號 ±，∓ 也要限定同取上號或下號。

總之：

（一） 要本身有意義，成功特形，和他號有關聯，成功系統，使人易懂。同意異形的，可有而不宜多，同形異意的，除絕對不致誤會之外，萬不宜用。意相似或相反處，或彼此有連帶關係處，都要表示出來。像 π，e，μ 等孤立看不出意思的，非萬不

得已時，都宜少用。

（二） 要形狀整齊，構造不繁，使人易記。 牠們都要有一定的形狀，非有特別原因，不能稍加改變而有兩樣三樣的分別。 同意異形的，相差須有限；意相似或相反或有關聯的，也祇能有稍微的不同。

（三） 要主點顯露，各部分明，或祇有極重要的主點，使人易看。 主點所在的地位，最好是左方或中央，不要偏在一隅。

（四） 要筆畫連貫，轉折靈巧，或祇有極簡單的筆畫，使人易寫。 筆畫不連貫的，最好暗中聯絡，一筆可以完全寫好。

能具列上面四條件的，纔是最完善的初等算號，纔能合於初學之用，而使算學容易教學容易發展！

× × × × × ×

一個難證的逆定理

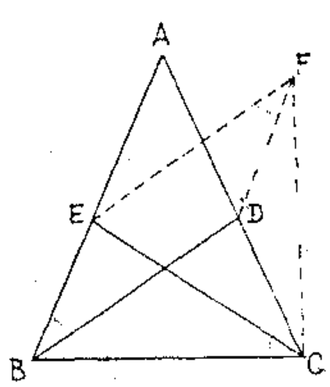
劉正經

本刊第三卷九十期合刊吳在淵先生紀念號中，有與此同題之一文。編者在該文前曾發願再將本定理之他種證法集爲一文，作爲續貂。茲得證法九種，發表於次；以後如再有發見，當陸續披露之。

定理：三角形兩角之等分線相等，則此三角形爲等腰。

設在$\triangle ABC$中，$\angle B$，$\angle C$之等分線各交AC，AB於D，E。若$BD=CE$，求證$AB=AC$。

第一證法*



完成平行四邊形$EBDF$，連結FC，則因$EF=BD=CE$，有$\angle EFC=\angle ECF$。

設$AC>AB$，則$\angle ABC>\angle ACB$而有$\angle EFD=\angle EBD>\angle ECD$，故

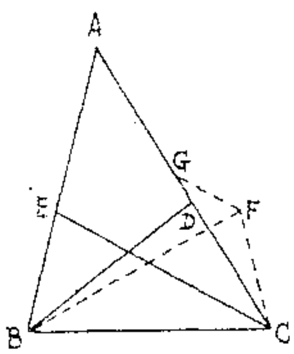
$\angle EFC-\angle EFD<\angle ECF-\angle ECD$，

即$\angle DFC<DCF$。由是$DC<DF$，即$DC<BE$。

但因$\angle ABC>\angle ACB$，有$\angle DBC>\angle ECB$。在$\triangle DBC$與$\triangle ECB$中，BC公共，$BD=CE$，而夾角不等，故$DC>BE$；與頃所得$DC<BE$之結論不合，故$AC>AB$之假設不能成立。同樣可証$AC<AB$亦不成立。$\therefore AB=AC$。

*此爲 Descube之証，見Journal de Mathematique Elementaire(1880)iv,p.158.本刊三卷九十期第一證法後亦略言之，但未詳細書出，故仍錄之。

第二證法*



設$\angle ABC>\angle ACB$. 過 C 作 CF，命$\angle ECB=\angle ABC$；過 B 作 BF 命$\angle FBC=\angle ECB$. 如是所成之$\triangle FBC$必與$\triangle ECB$全等，且 BF 在$\angle DBC$之內。由是 B，E，F，C 共圓，設此圓交 AC 於 G，則

$$\angle GBF=\angle GCF=\angle BCF-\angle BCA=2\angle DBF,$$

而 BD 在$\angle GBF$之內，即 D 在 G，C 之間。因之

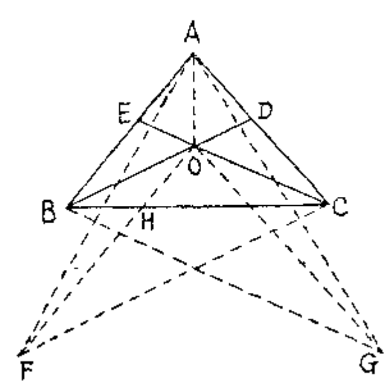
$\angle BFD<\angle BCG$（$\because\angle BFD<\angle BFG$，而 B，C，F，G共圓，故$\angle BFG=\angle BCG$.）

$<\angle BGF$（$\because\angle BCG<\angle B$ 之外角$=\angle BCF$ 之補角$=\angle BGF$.）

$<\angle BDF$，　$\therefore$　$BD<BF$ 而 $BD<CE$，與假設相反。

同樣若$\angle ABC<\angle ACB$，則 $BD>CE$，亦生矛盾。故$\angle ABC=\angle ACB$ 而 $AB=AC$。

第三證法†



設 BD，CE 交於 O. 過 O 作線平行 AB，過 C 作線平行 BD，兩線相交於 F；過 O 作線平行 AC，過 B 作線平行 CE，兩線相交於 G.

設 OF 交 BC 於 H，則因$\triangle HFC$，$\triangle HOB$皆爲等腰（其底角皆等於$\frac{1}{2}\angle B$），故得 $OF=BC$. 同理可證 $OG=BC$，因之 $OF=OG$ 而 F，G 關於 AO 爲對稱。

次設自 A 至 CF 及 BG 之垂直距離各爲 p,q，則 $p\cdot BD=q\cdot CE=2\triangle ABC$。因 $BD=CE$，知 $p=q$. 由直角三角形全等之理易證 $\angle AFC=\angle AGB$。各減去

*† 均見 Mathematical Gazette, No. 228, May, 1934.

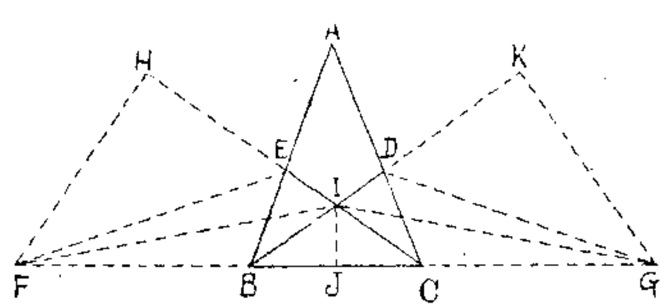
$\angle AFO$，$\angle AGO$ 兩等角，卽得$\angle OFC=\angle OGB$. 由是 $\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}\angle C$，而 $AB=AC$.

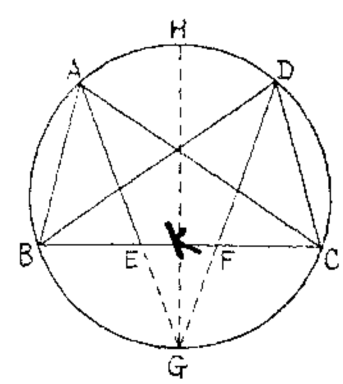
第四證法*

將 BC 兩端延長至 F，G，使 $BF=AC$，$CG=AB$. 自 F 作線垂直於 CE 之延線而交之於 H，自 G 作線垂直於 BD 之延線而交之於 K.

設 BD，CE 交於 I，作 $IJ\perp BC$，則因 I 爲內心，故 $AC+BJ$，$AB+CJ$ 皆爲三角形周長之半而相等。 但 $AC=BF$，$AB=CG$，故 $BF+BJ=CG+CJ$，卽 $JF=JG$，而$\triangle IFG$ 爲等腰。 因之 $IF=IG$；$\angle IFG=\angle IGF$. ……………………(1)

又 $\triangle FBE$ 與 $\triangle AEC$ 等底等高，故面積相等。 各加 $\triangle BEC$，則見 $\triangle FEC$ 與 $\triangle ABC$ 等積。 同理$\triangle GDB$ 亦與$\triangle ABC$ 等積，因之$\triangle FEC$ 與$\triangle GDB$ 等積。 但此兩三角形之底 $BD=CE$，故其高 $FH=GK$. 由是直角三角形 IHF 與 IKG 全等而$\angle FIH=\angle GIK$. 但$\angle FIH=\frac{1}{2}\angle C+\angle IFC$，$\angle GIK=\frac{1}{2}\angle B+\angle IGB$，由(1)卽知 $\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}\angle C$，因而 $AB=AC$.





第五證法

於前圖中吾人如能證$\triangle ABD\equiv\triangle ACE$，則本定理自易證明。 故須証：

若兩三角形之底，頂角及頂角等分線彼此互等，則爲全等。

將兩三角形之底相疊，相等頂角置於同側如上右圖中之 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DBC$。如是則 A，B，C，D 四點共圓，且$\angle A$，$\angle D$ 之等分線同過 BC 劣弧之中點 G.

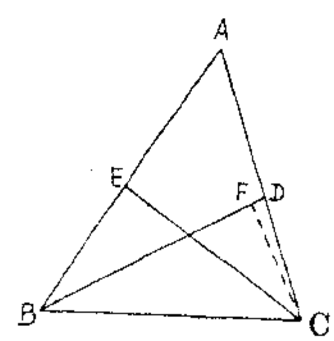
* 四，五，六各証見 Mathematical Gazette XVI, p. 200, Note 1031.

過 G 作直徑 GH 交 BC 於 K，則見 $GH \perp BC$，$\triangle GKF \backsim \triangle GDH$；$\triangle GKE \backsim \triangle GAH$，故 $GE \cdot GA = GK \cdot GH = GF \cdot GD$，而 A，E，F，D 共圓。由假設 $AE = DF$ 為圓之相等二弦，故 A，D 之聯線必與 EF 即 BC 平行。由是 $AB = DC$，而 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DCB$ 全等。

第 六 證 法

吾人應用次之補定理：

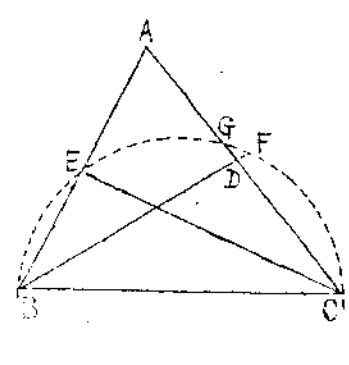
在同圓或等圓內，不相等之兩圓周角所立之弦不等，角大者對弦亦大；但此兩角之和小於二直角。



設 $\angle ABC < \angle ACB$，則 $\angle ECD > \angle EBD$。作 CF 令 $\angle ECF = \angle EBD$，則 B，C，F，E 四點共圓，而 F 在 B，D 之間。如是則在此同圓中，$\angle BCF > \angle CBE$，故其所立之弦 $BF > CE$，由是 $BD > BF > CE$，與假設相反。

同理可證 $\angle ABC > \angle ACB$ 亦不合，故 $\angle ABC = \angle ACB$ 而 $AB = AC$。

第 七 證 法*



作 $\triangle EBC$ 之外接圓，若此圓通過 D 點，則本定理極易證明，毋須多贅。

今設 D 在圓內，延長 BD 交圓於 F。若 AC 交圓於 G，則 G 必在 EF 劣弧上。

因 $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{EG}$，$\overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{EF}$，今既 $\overset{\frown}{EG} < \overset{\frown}{EF}$，則必 $\overset{\frown}{BE} < \overset{\frown}{CF}$。各加 $\overset{\frown}{EF}$，即見 $\overset{\frown}{BF} < \overset{\frown}{CE}$，而 $BF < CE$，由是 BD 更 $< CE$，與題設不合。

* 七，八，九各証見 School Science and Mathematics(1933), PP. 781–783.

故 D 不能在圓內；同樣可證 D 亦不能在圓外。

第八證法

由幾何定理，知 $BD^2=BA\cdot BC-DA\cdot DC$，　$CE^2=CA\cdot CB-EA\cdot EB$.

$$\therefore\quad (BE+EA)\cdot BC-DA\cdot DC=(CD+DA)\cdot CB-EA\cdot EB. \tag{1}$$

但
$$\frac{BE}{EA}=\frac{BC}{CA}=\frac{BC}{CD+DA},\quad \therefore\ EA\cdot BC=BE(CD+DA), \tag{2}$$

$$\frac{CD}{DA}=\frac{CB}{AB}=\frac{BC}{BE+EA},\quad \therefore\ DA\cdot CB=CD(BE+EA). \tag{3}$$

將(2)，(3)中 $EA\cdot BC$ 及 $DA\cdot CB$ 之相當值代入(1)得

$$BE\cdot BC+BE(CD+DA)-DA\cdot DC=CD\cdot CB+CD(BE+EA)-EA\cdot EB.$$

兩邊各減去 $BE\cdot CD$ 後再移項分括之，得

$$BE(BC+DA+EA)=CD(CB+EA+DA)$$

由是得 $BE=CD$，而 $\triangle EBC\cong\triangle DCB$.　$\therefore\ \angle B=\angle C$ 而 $AB=AC$.

第九證法

依常例以 a, b, c 表 $\triangle ABC$ 之三邊，則如上証

$$BD^2=ca-DA\cdot DC,\qquad CE^2=ab-EA\cdot EB.$$

但 $DA:DC=c:a$，由加比知 $DA:b=c:c+a$，而 $DA=bc/(c+a)$，由是 $DC=b-bc/(c+a)=ab/(c+a)$，而 $DA\cdot DC=ab^2c/(c+a)^2$.

同樣可證 $EA\cdot EB=abc^2/(a+b)^2$.　因 $BD^2=CE^2$，故

$$ca-\frac{ab^2c}{(c+a)^2}=ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}.$$

由是得
$$(b-c)(a+b+c)[a^3+a^2(b+c)+3abc+bc(b+c)]=0,$$

$$\therefore\qquad b=c，\text{即 } AB=AC.$$

自然數之一種新性質及其應用

T. K. S.

自然數的性質的寶藏，大概都被古人開發殆盡了。留到我們手內還能有新的獲得嗎？誰能不如此懷疑？這篇東西雖然是淺學的我的一個新偶得，又安知不是曾經古人說過的舊東西？我希望博聞的讀者們把牠的第一次發見者說出來，假如牠眞的不是新產物。

定理。 設 n 爲一自然數，則

(1) $$n^3=n+1\cdot 6+(1+2)\cdot 6+(1+2+3)\cdot 6+\cdots+(1+2+\cdots+\overline{n-1})\cdot 6.$$

証。 設本定理於 $n=m$ 時爲眞，卽設

$$m^3=m+1\cdot 6+(1+2)\cdot 6+(1+2+3)\cdot 6+\cdots+(1+2+\cdots+\overline{m-1})\cdot 6,$$

則

$$\begin{aligned}(m+1)^3&=m^3+3m^2+3m+1\\&=m+1\cdot 6+(1+2)\cdot 6+\cdots+(1+2+\cdots+\overline{m-1})\cdot 6+3m^2+3m+1\\&=(m+1)+1\cdot 6+(1+2)\cdot 6+\cdots+(1+2+\cdots+\overline{m-1})\cdot 6+3m(m+1)\\&=(m+1)+1\cdot 6+(1+2)\cdot 6+\cdots+(1+2+\cdots+m)\cdot 6,\end{aligned}$$

因 $(1+2+3+\cdots+m)\cdot 6=\frac{1}{2}m(m+1)\times 6=3m(m+1)$。由是本定理於 $n=m+1$ 時亦眞。但吾人已知

$$\begin{aligned}1^3&=1=1+0\cdot 6=1+(1-1)\cdot 6,\\2^3&=8=2+1\cdot 6=2+(2-1)\cdot 6,\\3^3&=27=3+1\cdot 6+(1+2)\cdot 6=3+1\cdot 6+(1+\overline{3-1})\cdot 6,\end{aligned}$$

故由算學歸納法，本定理成立。

推論一。 設 n 爲一自然數，則

(2) $$n^3=1+(1+6)+(1+6+12)+\cdots+(1+6+12+\cdots+\overline{n-1}\cdot 6).$$

推論二。 設 n,m 爲二自然數,且 $n>m$,則

$$(3)\qquad n^3-m^3=\{1+(1+2+\cdots+m)\cdot 6\}+\{1+(1+2+\cdots+\overline{m+1})\cdot 6\}+\cdots$$
$$+\{1+(1+2+\cdots+\overline{n-1})\cdot 6\}.$$

由此等性質,可得兩個求立方根(或其近似値)的方法:

第一法。 由 (2) 可知從已知數 N 遞減 1, 1+6, 1+6+12, …, $1+6+\cdots+\overline{n-1}\cdot 6$,若其差爲 0,則 n 卽 N 之立方根;若其差小於 $(1+6+12+\cdots+n\cdot 6)$而不爲 0,則其立方根之首位數字爲 n。 例如:

(i) 自 27 中遞減 1, 1+6, 1+6+12 得 0,故 3 爲其立方根。

(ii) 自 9.261 中遞減 1, 1+6,其差爲 1.261<1+6+12,故 2 爲 9.261 之立方根之第一位數字。

第二法。 由(3)可知欲求一數 N 的立方根或其近似值,可先求一小於 N 之立方數 m^3, 然後自 $N-m^3$ 中遞減 $\{1+(1+2+\cdots+m)\cdot 6\}$, ……, $\{1+(1+2+\cdots+\overline{n-1})\cdot 6\}$。 結果若爲 0,則 n 爲 N 之立方根,若不爲 0 而小於 $\{1+(1+2+\cdots+n)\cdot 6\}$,則 n 爲 N 之立方根之首位數字,或其近似値。 例如:

(i) 自 27 減去 2^3 得 19,再減去(1+6+12)卽得 0,故 3 爲 27 之立方根。

(ii) 自 9.261 減去 2^3 得 1.261,再減去 1+6+12 得負數,當然小於 $1+(1+2+3)\cdot 6$,故 2 爲 9.261 之立方根之首位數字.

(iii) 求 250047 之立方根。

解。 $60^3=216000<250047$, $250047-216000=34047$.

$1+(1+2+\cdots+60)\cdot 6=10981$, $34047-10981=23066$.

$1+(1+2+\cdots+61)\cdot 6=11347$, $23066-11347=11719$.

$1+(1+2+\cdots+62)\cdot 6=11719$, $11719-11719=0$.

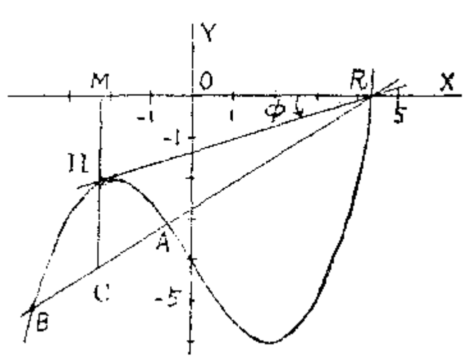
故 63 爲 250047 之立方根。

實係數三次方程式複虛根之圖解*

嚴棟開 譯

我們知道一個實係數代數方程式的複虛根是成對的，所以一個實係數三次方程式若沒有複虛根便能，如其有之，必有一對相配複虛根和一個實根。本文所論的便是這類的三次方程式。

附圖爲 $8y=x^3-12x-32$ 的圖解，與 X 軸祇交於一個實點 R，所以三次方程式 $x^3-12x-32=0$ 的實根 r，很容易從圖上看出。至於其餘一對相配複虛根 $a\pm ib$ 怎麼從圖上看出來呢？這就是本文的中心問題了。求法如下：



（一）自R作這曲線的切綫RH（H爲切點），那麼H點的橫坐標，便是複虛根的實數部；又 $\tan\angle ORH$ 的平方根便是虛數部的絕對值。卽

$$OM=a,\quad \sqrt{\tan\varphi}=b.$$

讀者一定要問："從 R 怎樣作這條切線呢？" 這作法很簡單，祇要

（二） 自 R 任意作一直線交這曲線於 A，B 兩點，再從 AB 的中點 C 向 X 軸作垂線 CM。 這 CM 與曲線的交點，便是自 R 所作切線的切點 H.

現在分別證明上面兩條的理。

（一）之証明。 旣然所論的三次方程式有三根 r 及 $a\pm ib$（a,b 都是實數，$b>o$），所以除掉一常因數外，這方程式可寫爲

* 這篇小文載在 The American Mathematical Monthly vol. XLII, (1935)上面，劉正經教授囑譯者撮述其大意，因其很有趣，所以不管讀者們已知或未知，冒昧的意譯出來.

$$(x-r)[x-(a+ib)][x-(a-ib)]=0,$$

即
$$(x-r)(x^2-2ax+a^2+b^2)=0.$$

所以作出的三次曲線必是

$$y=(x-r)(x^2-2ax+a^2+b^2). \qquad (1)$$

設過 R 所作割線之方程式爲 $y=m(x-r)$，與(1)聯立解之，便可得其與三次曲綫交點之坐標。 除了 $x=r$ 外，其餘兩交點的橫坐標顯然就是

$$x^2-2ax+a^2+b^2-m^2=0 \qquad (2)$$

的兩根 $a\pm\sqrt{m-b^2}$. 若是割線變了切線，這兩交點便重合爲切點 H，這時(2)的兩根相等，所以必須 $m=b^2$. 但此時的 m 即 $\tan\varphi$，故 $\sqrt{\tan\varphi}=b$. 又這時 H 點的橫坐標必然是 a，所以 $OM=a$.

(二)之證明. 剛纔已經算出 A，B 兩點的橫坐標爲 $a\pm\sqrt{m-b^2}$，C 點既然是 AB 的中點，牠的坐標便是

$$\tfrac{1}{2}[(a+\sqrt{m-b^2})+(a-\sqrt{m-b^2})]=a,$$

和 H 的橫坐標一樣，所以上面的作法是對的。

末了還有兩事要說：

1. 若是 RAB 線的斜度是 $\tan\varphi$ 的兩倍，那麼從 A 點(或 B 點)到 CM 綫的距離必是 b. 讀者可試證證看。

2. 若將這三次曲線向上平行移動，等到 H 點與 M 點重合，這時兩個相配複虛根便變爲兩個相等的實根了。 但同時 RH 亦與 X 軸重合而 $\tan\varphi=0$，即 $b=0$；所以這與幾何學中的連續原理(Principle of Continuity)並不衝突.

向 角

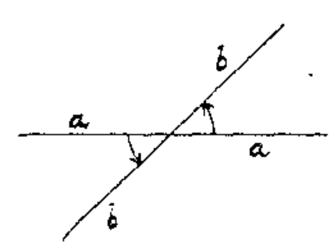
言 心

詹森教授1917年在美國算學月刊上寫了一篇"初級幾何中之向角",以後並在該刊上寫了幾篇關於"向角"及其應用的論文。1929年他的"近世幾何學"出版,在這本書內面他就儘量應用這種"向角"來證明許多定理。這種演算雖不見得完全新異,然而比起普通方法來,有時的確簡便得多。

正負角的解釋,一般都是"一個半射線 OA 繞着 O 點旋轉至 OB,其所經過平面之部分,就 O 點觀之曰角;旋轉方向與時計針行反向時爲正角,同向時爲負角"。依此則$\angle AOB$爲自 OA 旋轉至 OB 所成之角,$\angle BOA$則爲自 OB 旋轉至 OA 所成之角,二者不必同量異向,其和可爲360°。設無肯定之說明,$\angle AOB=-\angle BOA$決不能成立。詹森教授所謂向角,與此微有不同。他用符號$\measuredangle ab$表示自直線a至直線b之向角。

[定義] 自直線a至直線b之向角,爲直線a以其線上一點爲心依正向旋轉,至與直綫b平行或相合所成之角。

此向角以$\measuredangle ab$記之。



依此,向角應不是半射線或線段而是直線旋轉成功的,而且這旋轉祇有一種指定的方向。故$\measuredangle ABC$之意,爲 AB 線繞 B 點依正向旋轉至與 BC 相合所成之角。若 A,B,C 爲三角形依正向順序之三頂點,則$\measuredangle ABC$,$\measuredangle BCA$,$\measuredangle CAB$爲其形外之三角,而其內角却爲$\measuredangle BAC$,$\measuredangle CBA$,$\measuredangle ACB$。

[定義] 向角相加規定如下:

$$\measuredangle ab+\measuredangle bc=\measuredangle ac.$$

$$\measuredangle ab+\measuredangle cd=\measuredangle ac,$$

但直線 c 須適合 $\measuredangle bc=\measuredangle cd$ 之關係。

從此定義即可推得基本定理數則如下:

[定理一] $\measuredangle ab+\measuredangle ba=180^\circ$。

[定理二] 若 $a//a'$, $b//b'$,則 $\measuredangle ab=\measuredangle a'b'$。

由是在平行四邊形 ABCD 中,$\measuredangle BAD=\measuredangle ABC=\measuredangle DCB=\measuredangle CDA$;又 $\measuredangle DAB=\measuredangle CBA=\measuredangle BCD=\measuredangle ADC$。

[定理三] 若 $a\perp a'$, $b\perp b'$,則 $\measuredangle ab=\measuredangle a'b'$。

此較之舊幾何中有相等及相補兩種情形,簡單得多。

[定理四] 若 a,b,c,d 為任意四直線,則 $\measuredangle ab+\measuredangle cd=\measuredangle ad+\measuredangle cb$。

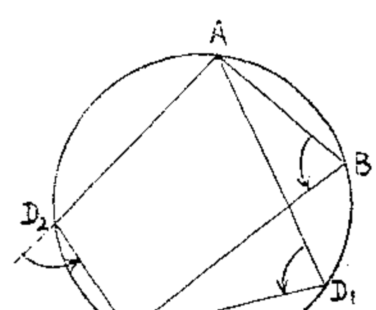
蓋因 $\measuredangle ab=\measuredangle ad+\measuredangle db$,而 $\measuredangle cd+\measuredangle db=\measuredangle cb$。

[定理五] 若 A,B,C 三點共線,則 $\measuredangle ABC=0$;逆定理亦眞。

[推論] $\measuredangle ABC=0$ 為 A,B,C 三點共線之充要條件。

[定理六] 設 AB,AC 為等腰三角形 ABC 之兩等邊,則 $\measuredangle ABC=\measuredangle BCA$;逆定理亦眞。

[定理七] 若 A,B,C,D 為任意四點,但無三點在同一直線上,則 $\measuredangle ABC+\measuredangle CDA=\measuredangle BAD+\measuredangle DCB$。



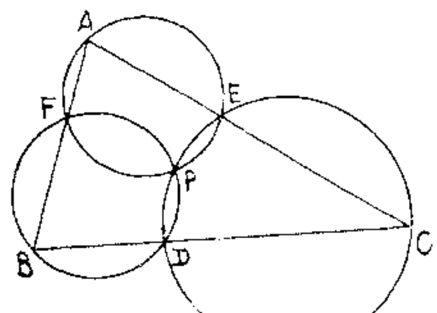
[定理八] 若 A,B,C,D 四點共圓,則 $\measuredangle ABC=\measuredangle ADC$;逆定理亦眞。

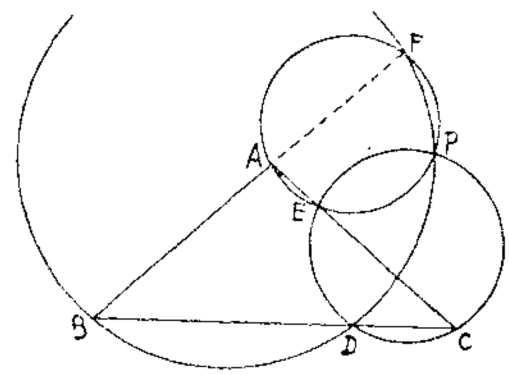
[推論] $\measuredangle ABC=\measuredangle ADC$ 為 A,B,C,D 四點共圓之充要條件(就廣義言之,即 $\measuredangle ABC=\measuredangle ADC=0$,本定理仍成立)。

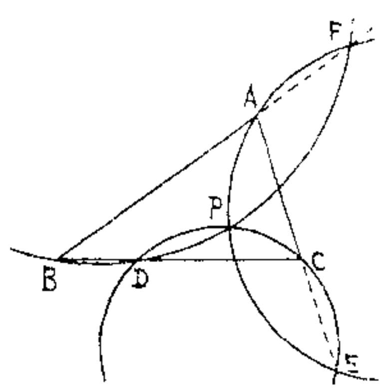
在普通幾何內,同弧之內接角(如$\angle ABC$與$\angle AD_1C$)相等,其逆亦眞;又同圓中共軛弧之內接角(如$\angle ABC$與$\angle AD_2C$)相補,其逆亦眞。現在這兩條定理都包括在[定理八]中了,所以簡便得多。 用這定理去證其他定理,證法也要簡便得多,由下

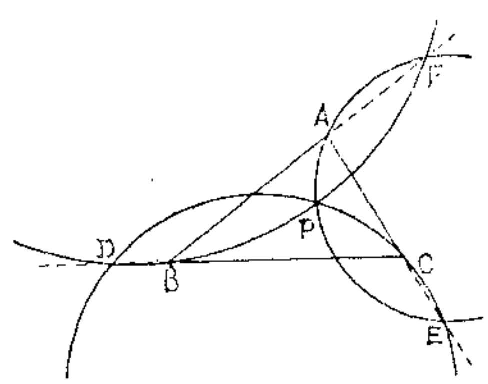
例自明：

［Miquel 氏定理］　在三角形各邊上任取一點；過每一頂點及其二鄰邊上所取之二點作圓，其三圓交於一點。









證．　設 P 爲 (AFE)，(BDF) 二圓之另一交點，則因 P，A，F，E 及 P，B，D，F 皆爲共圓，依上定理應有

$$\measuredangle PEA=\measuredangle PFA,\qquad \measuredangle PFB=\measuredangle PDB.$$

但　$$\measuredangle PFA=\measuredangle PFB,\qquad \therefore\ \measuredangle PEA=\measuredangle PDB.$$

又　$$\measuredangle PEA=\measuredangle PEC,\qquad \measuredangle PDB=\measuredangle PDC,$$

$$\therefore\quad \measuredangle PEC=\measuredangle PDC.$$

所以 P，E，C，D 四點共圓．（證訖）

這種證法很是簡單，且對於以上各圖無一不合，不需分別討論．若將本定理用普通方法去證，和這個證一比，便知其煩雜得多了．

聯立方程式解法要覽(續)

吳韵篁

第十二類：兩方程式呈 $x\pm y=a$，$x^3\pm y^3=b$ 之形狀者。

甲組公式 $\begin{cases} x\pm y=a, & (1) \\ x^3\pm y^3=b. & (2) \end{cases}$（同取上號或下號，以下倣此。）

［解］以(1)式兩端分別除(2)式兩端，得

$$x^2\mp xy+{}^2=b/a. \qquad (3)$$

將(1)，(3)聯立，依第一類解之，可得兩組解答。但本款應有三組解答，其餘一組解答中，x 及 y 均取無窮值，習解析幾何者當知之，然不足為初學道也。

乙組公式 $\begin{cases} x\pm y=a, & (1) \\ x^3\mp y^3=b. & (2) \end{cases}$

［解］由(1)得 $y=\pm(a-x)$，代入(2)式而化簡之，即得

$$2x^3-3ax^2+3a^2x-a^3-b=0. \qquad (3)$$

若(3)式可劈出有理因數，則可解之而得 x 之三值，再求 y 之對應值即得，共有三組解答。

例一。$\begin{cases} 2x+3y=8, \\ 8x^3+27y^3=224. \end{cases}$

例二。$\begin{cases} x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}=16, \\ x-y=1072. \end{cases}$

例三。$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{6}{5}, \\ \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=\dfrac{126}{125}. \end{cases}$

例四。$\begin{cases} 3x-\dfrac{2}{5y}=\dfrac{16}{5}, \\ 27x^3-\dfrac{8}{125y^3}=\dfrac{3376}{125}. \end{cases}$

例五。$\begin{cases} 2x+y=3, \\ 8x^3-y^3=7. \end{cases}$

例六。$\begin{cases} x-y=-1, \\ x^3+y^3=9. \end{cases}$

第十三類：兩方程式呈 $x\pm y=a$，$x^4\pm y^4=b$ 之形狀者。

$$\text{甲組公式}\begin{cases} x \pm y = a; & (1) \\ x^4 + y^4 = b. & (2) \end{cases}$$

［解一］ (2)式可書爲

$$(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=b, \qquad \text{或} \quad [(x\pm y)^2\mp 2xy]^2-2x^2y^2=b,$$

即

$$(x\pm y)^4\mp 4xy(x\pm y)^2+2x^2y^2-b=0. \tag{3}$$

以(1)代入(3)而去 $x\pm y$，卽得

$$2x^2y^2\mp 4a^2xy+a^4-b=0, \tag{4}$$

爲 xy 之二次方程式。解之可得

$$xy=\pm h_1, \quad (5) \qquad xy=\pm h_2. \quad (6)$$

於是將(1)，(5)及(1)，(6)同取上號或下號依第一類解之。

［解二］ 設 $x\mp y=m$，與(1)式相加減後以2除之卽得

$$x=\frac{a+m}{2}, \quad (7) \qquad y=\pm\frac{a-m}{2}. \quad (8)$$

將(7)，(8)兩式代入(2)式而化簡之，得

$$m^4+6a^2m^2+a^4-8b=0 \tag{9}$$

爲 m^2 之二次方程式。解之得 m 之四值，代入(7)，(8)兩式，卽得四組解答矣。

$$\text{乙組公式}\begin{cases} x \pm y = a, & (1) \\ x^4 - y^4 = b. & (2) \end{cases}$$

［解］ 由(1)得 $y=\pm(a-x)$，代入(2)式而化簡之，卽得

$$4ax^3-6a^2x^2+4a^3x-a^4-b=0 \tag{3}$$

由此可得 x 之三值。代入 $y=\pm(a-x)$ 得 y 之相應三值，共得三組解答。

若倣甲組［解二］之法，亦得 m 之三次方程式。故本款中恆得三次方程式，可依第十二類乙組解之。但理論上應有四組解答，其第四組解答中，x,y 均取無窮值。

例一。 $\begin{cases} x+y=3, \\ x^4+y^4=17. \end{cases}$ 例二。 $\begin{cases} x+y=17, \\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1. \end{cases}$

例三。 $\begin{cases} x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}=2, \\ x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}=82. \end{cases}$ 例四。 $\begin{cases} (4x^{\frac{2}{3}}-5)y+2=0, \\ (256x^{\frac{8}{3}}-257)y^4+16=0. \end{cases}$

(注意)例四兩式可各化爲 $x^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2y}=\frac{5}{4}$, $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^4+\left(\frac{1}{2y}\right)^4=\frac{257}{256}$.

例五。 $\begin{cases} y-x=1, \\ x^4-y^4=-15. \end{cases}$ 例六。 $\begin{cases} x+y=3, \\ x^4-y^4=-15. \end{cases}$

第十四類: 兩方程式呈 $x\pm y=a$, $x^5\pm y^5=b$ 之形狀者。

$$\text{甲組公式}\begin{cases} x\pm y=a, & (1) \\ x^5\pm y^5=b. & (2) \end{cases}$$

[解一] 兩式同取正號,以(1)式除(2)式得

$$x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4=b/a;$$

此式可書爲

$$(x^2+y^2)^2-x^2y^2-xy(x^2+y^2)=b/a,$$

或 $$[(x+y)^2-2xy]^2-x^2y^2-xy[(x+y)^2-2xy]=b/a.$$

以 $x+y=a$ 代入而化簡之,得

$$5ax^2y^2-5a^3xy+a^5-b=0, \tag{3}$$

爲 xy 之二次方程式。 解之得

$$xy=h_1, \quad (4) \qquad xy=h_2. \quad (5)$$

於是將(1),(4)及(1),(5)聯立,依第一類解之。兩式同取負號時亦可用同法解之,各得四組解答。

[解二] 設 $x-y=m$,與 $x+y=a$ 合得

$$x=\frac{a+m}{2}, \qquad y=\frac{a-m}{2} \tag{6}$$

代入(2)式而化簡之得一m^2之二次方程式：

$$5am^4+10a^3m^2+a^5-16b=0.$$

由此得m之四値而代入(6)式，卽得四組解答矣。兩式同取負號時法同；尙有一組無窮值之解答，共應得五組解答。

乙組公式 $\begin{cases} x\pm y=a, & (1)\\ x^5\mp y^5=b. & (2)\end{cases}$

［解］本款依第十二類乙組解之，結果得一五次方程式。若此五次方程式有三個有理根，則用因數分解法，五組解答均可求得。否則非初等代數方法所能解。

例一。$\begin{cases} x+y=3,\\ x^5+y^5=33.\end{cases}$ 例二。$\begin{cases} 3x-2y=1,\\ 243x^5-32y^5=211.\end{cases}$

例三。$\begin{cases} 3x+\dfrac{1}{2y}=\dfrac{13}{4},\\ 243x^5+\dfrac{1}{32y^5}=\dfrac{248833}{1024}.\end{cases}$ 例四。$\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{x^5}-\dfrac{1}{y^5}=\dfrac{31}{32}.\end{cases}$

例五。$\begin{cases} x+y=3,\\ x^5-y^5=-31.\end{cases}$ 例六。$\begin{cases} x-y=1,\\ x^5+y^5=275.\end{cases}$

第十五類： 兩式原非齊次式，但以一式代入他式而消去常數項時，結果得一個齊次式者。

本類方程式之形狀，不能以一定之公式包括之，故舉例以資說明：

例一。$\begin{cases} 31x^2y^2-7y^4-112xy+64=0, & (1)\\ x^2-7xy+4y^2+8=0. & (2)\end{cases}$

［解］由(2)式得$-8=x^2-7xy+4y^2$，代入(1)式，使其各項均變爲齊四次，則有

$$31x^2y^2-7y^4+14xy(x^2-7xy+4y^2)+(x^2-7xy+4y^2)^2=0.$$

此式經化簡後變爲

$$x^4-10x^2y^2+9y^4=0, \qquad 卽 \qquad (x^2-y^2)(x^2-9y^2)=0.$$

由是得 $x=\pm y$ 或 $x=\pm 3y$. 代入(2)式解之,共得八組解答爲

$$x=2,\ -2,\ \frac{1}{3}\sqrt{-6},\ -\frac{1}{3}\sqrt{-6},\ 3,\ -3,\ \frac{6}{17}\sqrt{-17},\ -\frac{6}{17}\sqrt{-17},$$

$$y=2,\ -2,\ -\frac{1}{3}\sqrt{-6},\ \frac{1}{3}\sqrt{-6},\ 1,\ -1,\ -\frac{2}{17}\sqrt{-17},\ \frac{2}{17}\sqrt{-17}.$$

例二. $\begin{cases}4y^2(x^2-27)=x(x^3-9y^3),\\ 2x^2+9xy+y^2=108.\end{cases}$

例三. $\begin{cases}6x^4+x^2y^2+16=2x(12x+y^3),\\ x^2+xy-y^2=4.\end{cases}$

第十六類: 兩式均爲二次式,各以適宜之數乘之,經相加或相減後可分解因式者.

$$\text{公式}\begin{cases}Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, & (1)\\ A'x^2+B'xy+C'y^2+D'x+E'y+F'=0. & (2)\end{cases}$$

此種解法涉及高等代數之理論,茲姑不贅述,僅置例以資說明:*

例一. $\begin{cases}2x^2+3xy-5y^2+2x+14y+2=0, & (1)\\ 2x^2-xy-5y^2+3x+6y-5=0. & (2)\end{cases}$

[解] 以 2 乘(2)式各項而加於(1)式得

$$6x^2+xy-15y^2+8x+26y-8=0.$$

分解因式得 $$(3x+5y-2)(2x-3y+4)=0.$$

以後解法詳見第八類.

例二. $\begin{cases}x^2+2xy+2y^2+3x=0,\\ xy+y^2+3y+1=0.\end{cases}$　例三. $\begin{cases}x^2-xy=8x-9,\\ xy-y^2=8y-18.\end{cases}$

例四. $\begin{cases}3x^2+2xy=8x+5y-11,\\ 3y^2+4xy=3x+6y+5.\end{cases}$　例五. $\begin{cases}x^2+y^2=20,\\ xy-x-y=2.\end{cases}$

第十七類: 兩式均爲二次式,用以前各法均不易解,於是消去 x^2 項或 y^2 項,

※ 編者按此項理論載本刊第二卷第七期 23 頁張伯康君"二元二次聯立方程式解法詳論"中.

用代入法得一個四次方程式，而可用因數分解法解之者。

按此爲通法，以前各類(卽凡二元二次聯立方程式)均可用此法解之。但若所得四次方程式無有理根，則因數分解法不能應用，非初學所能解。玆舉例明之：

例一。
$$\begin{cases} 10x^2+5y^2-27x-4y+5=0, & (1) \\ x^2+y^2-3x-y=0. & (2) \end{cases}$$

［解］ 消去 y^2 項；卽以 5 乘(2)式而自(1)減之；得

$$5x^2-12x+y+5=0, \qquad 由是 \quad y=-5x^2+12x-5. \qquad (3)$$

代入(2)式而化簡之，有

$$5x^4-24x^3+40x^2-27x+6=0, \text{ 卽 } (x-1)(x-2)(5x^2-9x+3)=0.$$

於是得 x 之四值爲

$$x=1, \qquad 2, \qquad \frac{1}{10}(9+\sqrt{21}), \qquad \frac{1}{10}(9-\sqrt{21}).$$

將 x 之值代入(3)式，得 y 之相應四值爲

$$y=2, \qquad -1, \qquad -\frac{3}{10}(11-\sqrt{21}), \qquad -\frac{3}{10}(11+\sqrt{21}).$$

若將(3)式代入(1)式，或起首卽消去 x^2 項，均無不可，但應得同樣解答。

例二。
$$\begin{cases} x^2+y=8, \\ y^2+15x=46. \end{cases}$$

第十八類： 雜題。

本類問題，無一定之形狀，亦無一定之解法。其能解與否，全視作者之能否臨機應變。爲便利初學計，特多多舉例，以示其解法之變化多端。

例一。
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=7, & (1) \\ x+\sqrt{xy}+y=3+\sqrt{2}. & (2) \end{cases}$$

［解］ 以(2)式除(1)式，卽得

$$x-\sqrt{xy}+y=7/(3+\sqrt{2}), \text{ 卽 } x-\sqrt{xy}+y=3-\sqrt{2}. \qquad (3)$$

由(2)，(3)卽得 $x+y=3$， $xy=2$，而本例之解答爲

$$x=1, y=2; \qquad x=2, y=1.$$

例二。 $\begin{cases} x+y+\dfrac{y^2}{x}=14, & (1) \\ x^2+y^2+\dfrac{y^4}{x^2}=84. & (2) \end{cases}$

［解］ 題式去分母後變爲

$$x^2+xy+y^2=14x, \qquad (3) \qquad x^4+x^2y^2+y^2=84x^2. \qquad (4)$$

以(3)除(4)，得 $x^2-xy+y^2=6x$，與(3)聯立依第二類解之卽得。

例三。 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12, & (1) \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}. & (2) \end{cases}$

［解］ 題式去分母後變爲

$$x^3+y^3=12xy, \qquad (3) \qquad x+y=\tfrac{1}{3}xy. \qquad (4)$$

以(4)除(3)，得

$$x^2-xy+y^2=36, \quad 卽 \quad (x+y)^2-3xy=36=\tfrac{1}{9}x^2y^2-3xy.$$

$$\therefore \quad x^2y^2-27xy-324=0, \quad 而 \quad xy=36或-9.$$

若 $xy=36$，則 $x+y=12$；而 $x=y=6$。

若 $xy=-9$，則 $x+y=-3$；而 $x=\frac{3}{2}(-1\pm\sqrt{5})$，$y=-\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{5})$。

四例。 $\begin{cases} x+y=3, & (1) \\ (x^2+y^2)(x^3+y^3)=45. & (2) \end{cases}$

［解］ (2)式左端可書爲$[(x+y)^2-2xy][(x+y)^3-3xy(x+y)]$，以 $x+y=3$ 代入，有

$$(9-2xy)(27-9xy)=45, \quad 卽 \quad (2xy-11)(xy-2)=0.$$

由是將 $xy=\frac{11}{2}$及 $xy=2$ 各與(1)聯立如上例解之卽得。

例五。 $\begin{cases} (x^2-x+1)(y^2-y+1)=3, & (1) \\ (x+1)(y+1)=6. & (2) \end{cases}$

［解］ 將(1)式展開整理之爲

$$x^2y^2-(xy+1)(x+y)-xy+(x+y)^2-2=0. \qquad (3)$$

由(2)有 $x+y=5-xy$,代入(3)式以消去 $x+y$,化簡後得

$$x^2y^2-5xy+6=0, \quad 即 \quad xy=2 \text{ 或 } xy=3.$$

各與 $x+y=3$ 及 $x+y=2$ 分別聯立解之卽得。

例六。$\begin{cases} x+xy+y=5, & (1) \\ x^3+x^3y^3+y^3=17. & (2) \end{cases}$

［解］ 由(1),(2)兩式消去 xy 之項,得一$(x+y)$之二次方程式為

$$(x+y)^2-5(x+y)+6=0, \quad 即 \quad x+y=2 \text{ 及 } x+y=3. \qquad (3)$$

代入(1)式得 $xy=3$ 及 $xy=2$。 依次與(3)中兩式聯立解之卽得。

例七。$\begin{cases} x^4+y^4-x^2-y^2=72, & (1) \\ x^2+x^2y^2+y^2=19. & (2) \end{cases}$

［解］ 題式可書為

$$(x^2+y^2)^2-(x^2+y^2)-2x^2y^2=72, \qquad 及 \quad x^2y^2=19-(x^2+y^2).$$

由此二式消去 x^2y^2,得

$$(x^2+y^2)^2+(x^2+y^2)-110=0, \quad 卽 \quad x^2+y^2=10 \text{ 及 } x^2+y^2=-11. \qquad (3)$$

將(3)代入(2)得 $x^2y^2=9$ 及 $x^2y^2=30$。 由是解次之四組方程式卽得:

$$\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=-3; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=-11, \\ xy=\sqrt{30}; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=-11, \\ xy=-\sqrt{30}. \end{cases}$$

例八。$\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=a, & (1) \\ xy-\dfrac{y}{x}=b. & (2) \end{cases}$

［解］ 將題式改書為 $xy-a=x/y$, $xy-b=y/x$,相乘卽得

$$(xy-a)(xy-b)-1=0 \qquad (3)$$

解(3)式得 xy 之兩值,分別與(1)或(2)聯立解之可矣。

(未　完)

算學週遊記

Helen Abbot Merrill 著　范寄萍譯

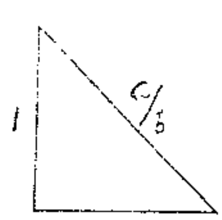
（八）不可公約量及無理數

我們平常量一條直線，意思是說取一個相當一定的長度做單位，從線的一端繼續放下去，每放一次做一個記號，看牠一共含有幾多個這樣的單位。譬如用寸做單位，假若做了 15 次記號後，剛剛達到線的那一端，這條直線的長便是 15 寸．有時還剩不到一寸的線段，我們便把單位改小一半為 $\frac{1}{2}$ 寸去量，假如還剩一段，便用 $\frac{1}{4}$ 寸，$\frac{1}{8}$ 寸去量，如果剛好量完，便知道這條線長是 $15\frac{7}{8}$ 寸。

一條線有量不完的可能嗎？ 用寸量不完，剩下的用 $\frac{1}{2}$ 寸去量，再剩下的用 $\frac{1}{4}$ 寸去量，如此繼續下去，會不會總有量不完的一段剩下來呢？ 憑着人們的目力，這種情形實際上是看不出來的，因為人們的目力，在單位小到 $\frac{1}{32}$ 寸或 $\frac{1}{64}$ 寸以上，便不能分別的緣故。 嚴格說起來，用一定的單位——一寸或一寸的幾分之一——去量一段直線，是可以量不完的。 幾何學上不是已經證明了嗎？

假如用一寸為腰，畫個直角三角形，牠底斜邊是多少呢？ 用寸或一寸的幾分之幾來表示，是可能的嗎？ 讓我們來假設這斜的長，是 a/b 寸，a,b 都是整數，而且互為質數。 那麼依畢哥拉斯定理應有

$$a^2/b^2=2, \qquad \text{或 } a^2=2b^2.$$



a^2 既是偶數，a 亦必是偶數而是 2 的倍數。 設 $a=2c$，則 $4c^2=2b^2$ 而 $b^2=2c^2$，所以 b 也要的偶數。 這樣 a,b 是都偶數，便與假設互質衝突，因此斜邊便不能用寸的幾分之幾去量完。 這是歐几里得的證法。

所以不說你的單位取得如何小，——百萬分之一寸，十萬萬分之一寸——斜邊總是不能量盡的。所以我們說正方形的對角線，是一個不可公約量，這就是說對角

線不可和邊用公同的單位去量，牠們的長度，沒有一個公共的約數。

上面三角形的斜邊之長，可用符號$\sqrt{2}$來表示。求這數的值，浪費了無數的時間，不可止境。像 1.4142…，我們絕不能在某處停止，放下鉛筆而說："好了！這是精確的答案"．

我們既得不到 2 的平方根的精確值，為何又要說$\sqrt{2}=1.4142\cdots$呢？這是因為這數平方起來，得數和 2 很接近。因為 $1^2=1$，$2^2=4$，2 在 1，4 之間，$\sqrt{2}$自然在 1 與 2 之間。將 1.1，1.2，1.3，…的平方都算出來，我們一定可以在這些平方數裏面，找出相鄰兩個，一個小於 2，一個大於 2。1.4^2 和 1.5^2 便是這樣的兩個，所以$\sqrt{2}$便在 1.4 與 1.5 之間。我們再試 1.41，1.42，又可斷定$\sqrt{2}$在牠們中間。這種工作，沒有一定法則，但可繼續進行，工夫越費得多，所得數的平方和 2 越是接近。把這些數完全寫出來，看着牠們逐漸地接近於 2，倒是極有趣的事。

我們把小於 2 的數放在左面，大於 2 的數放在右面：

$1^2=1$	2	$2^2=4$
$1.4^2=1.96$	2	$1.5^2=2.25$
$1.41^2=1.9881$	2	$1.42^2=2.0164$
$1.414^2=1.999396$	2	$1.415^2=2.002225$
$1.4142^2=1.99996164$	2	$1.4143^2=2.00024449$
… … … … …	…	… … … … …

平方是 2 的數，雖然永遠得不出來，然而照此進行，每次可以得到二數，使 2 在牠們的平方數之間，而且每進一步，所得數的平方較前更為接近於 2。這些數叫做$\sqrt{2}$的近似值，不但寫不完，而且是不循環的，這個在第五章裏已經說過了。

立方根也可用這種方法去求，自然比較繁冗得多。

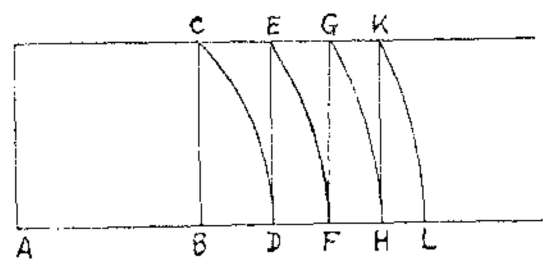
除了方根以外，如對數，角的正弦，餘弦，正切等大部分是不可公約數。牠們不能用分數表示，而且不循環，著名的數如 π 和 e 都是這樣的。

你們知道用幾何方法能夠表示任意整數的平方根嗎？前面已經講過，如果正

方形的每邊是 1，對角線便是$\sqrt{2}$。同理，如果直角三角形一腰是 1，斜邊是 2，另一腰便是$\sqrt{3}$；其餘類推。

下面講的是一種很有趣味的尺度，可用來量任意整數的平方根。

AB 是正方形的一邊，代表單位 1。以 A 為圓心，對角線 $AC=\sqrt{2}$為半徑，畫弧截 AB 之延長線於 D。由 D 豎立一垂直線，截對邊延線於 E；再以 A 為圓心，AE 為半徑，畫弧截 AB 之延長線於 F。如此繼續進行，則 $AB=1$，$AD=\sqrt{2}$，$AF=\sqrt{3}$，$AH=\sqrt{4}$，等等。



用方格紙，不要加任何線，可以量得$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{10}$. 繼續下去，還可以求出其他的無理數嗎?

進一層說，增加補助線，便可以量得$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$。繼續下去，還可以求出其他的無理數嗎?

×　×　×　×　×　×

關於歐几里得的講話

錢子謨

由純粹學術的立場來說，任何學術皆有其本身的價值，不必論及其實際的效用。科學表示宇宙間存在的普遍眞理，牠的方法乃是由客觀認識而來的必然結果，並非以實際效用爲對象的產物。尤其是如算學一類超乎經驗的形式科學，如果斤斤於牠的實用，那就未免太冒瀆的學術的神聖。

於此高舉"爲科學而科學"，"爲算學而算學"的旗幟吭聲急呼的，在近代有普恩加賚*，在古代則有歐几里得。

歐几里得以爲幾何學必須是"幾何學的幾何學"，所以在理論方面，務必要體例謹嚴，絕不憑藉算術和代數，而成一部獨立的科學。他那不朽的著作 Elements (以下稱爲幾何原本)，便是他的理想的結晶。

西曆紀元前330年間在西利亞一個偏僻的村落內，誕生了這萬代算宗的歐几里得。父親名叫 Neoculates，是 Damas 的後裔，爲了兒子求學，早年便遣歐几里得負笈去雅典，跟着柏拉圖派的碩儒，從事哲學及算學的研究。

Ptolemy 王一世創設 Alexanderia 大學的時候，最先聘請的學者之中，就有歐几里得，並且受着最尊崇的待遇。他所担任的主要科目，是幾何學及算術。幾何原本一書，便是這時期的作品。這本書自脫稿後一直經過了二千多年，無時不被尊爲幾何學的聖典。以單獨的一本著作而有如斯永續的權威的書籍，在其他任何學術史上，恐怕都是空前所未有的事吧。

幾何原本中的一切，並不是歐几里得個人發明的。由 Eudemus† 所寫算史的殘篇斷簡中，曾有過這麼的一段：

---

* Henri Psincare 二十世紀初的法國大算學家。

† 是亞里士多德的門弟子，這部算史是最古的一種，惜已失散，只留下許多斷片。

"他的幾何原本，是綜合 Eudoxus 和 Theaetetus* 的發見與研究，並將前輩所不能證明的部分，予以嚴密的証明，成爲完整的命題".

自 Thales 將幾何學自埃及傳入希臘以來，歷經畢達哥拉斯，柏拉圖等學派的研討，幾何學已有了相當多數的命題，這是無庸諱言的事實。所以在歐几里得之先，幾何學已具體而微，即關於幾何的著作，亦復不少。然而直到歐几里得做幾何原本，纔算集其大成；而從此一切以前的著作，都被這龐大的智星所掩蔽了。以後被譯爲世界各國的文字，採用爲幾何教科書；牠的版本，僅自 1482 年起至 1900 年止，已有千種以上。

關於幾何原本的內容，今後如有機會，當再詳爲列論†。此外還有以下的幾種：

(1) Porisms. 是幾何學命題的一種特型，例如"試求已知圓的中心"等類，利用作圖來解決目前的疑問。此書已經遺失，後世學者曾謀複製。因 Pappus 曾經討論這書甚詳，1860 年 M. Chasles 刊印一書，似乎個中大體已經完備。

(2) Tallacies. 據說是探索謬誤的練習問題，亦已散失。

(3) Data. 完全爲修完幾何原本的學生從事編著的新問題的解法，由九十五個命題而成，其中含有次諸定理：(a)已知量的比爲已知，(b)已知直線的交點爲已知點，(c)已知圓內的等弦必對等弧，等等。

(4) De Divisionibus. 討論分割已知圖形爲部分，使其各部分之比爲定比的方法，共有三十六個問題。

(5) 圓錐曲線論。共分四卷，爲後來 Apollonius 著"圓錐曲線論"的基本。

(6) 曲面上的軌跡。所論大都僅爲錐的及柱面上的曲線。

*約當紀元前400年間有兩大學派，其一爲Athenians,其二爲Cyzicians,Eudoxus便是後一派的創始者，Theaeteus 屬於前派。幾何原本第十編中關於無理量之研究，據云即係採自 Theaetetus 書中的。歐几里得將 Eudsxus 的定理整理時，曾補充 Theaetetus 的證法，使之完全。

†編者按本刊第一卷第三期歐几里得傳中略述有幾何原本的內容。

(7) 現象論。 即 Phenomena,是球面幾何與天文學的討論。

(8) 光學。 用幾何的方法研究光學,起首假設"光是人目中所發出的,不由所見之物體而來。" 這種學說,不消說是失敗的。

(9) Catoptrica. 討論關於光之反射的書籍,共含三十一個命題。 其中有"置指環於瓶中,由某位置看來,了無形跡;若注水於瓶,則因光之屈折與反射,遂顯然可見." 但是此書究竟是否爲歐几里得所著,曾有過相當的議論。

(10) Sectio Canonis. 討論關於音樂節律的書籍,今亦失去。

從遺留下來的文獻,對於歐几里得的著述,我們尙可以窺其概略。不幸的是他的身世與爲人皆無可考,雖則相傳下來有關於他的逸話一二則,但據謂都是後世好事者所附會的。不過這段逸話,却恰合乎我們理想的歐几里得的身分,我們正自不妨"姑妄聽之。"

地方是 Alexandria 大學博物館內莊嚴華麗的教室,講壇上一位四十餘歲的老人,右手揮着筆,左手拿着三角板,一面在寫,一面在講。 當前擁坐着老少的弟子們,也照樣以三角板和圓規在專心一致的抄寫。 側面稍高處,陳設着寶座,上面坐着熱心聽講的 Ptolemy 王,其傍侍臣,屏聲肅立。

隨了老人的講解的進行,弟子們的面容逐漸現出困惑的顏色。 他們都不約而同的仰視壇上的老人,接着你望着我我望着你,像是非常難解的樣子。 皇帝看來,亦似感到講義意味的艱澀,搔首不已。

壇上的老人依舊的進行講解。 "又來了!"是無聲的心籟在暗示着各人。 突然由寶座中發出命令而帶懇求的聲浪:

"歐几里得先生,請暫待些時。 難道沒有更易於研究的方法麼? 這個幾何原本,在我竟絲毫不解了。"

老人恭敬地回答道:

"Ptolemy 王陛下! 幾何學中是無帝王之道的!"

善哉此言! 不論是帝王也好,庶民也好,要求學問,祇有堅忍的一條道路,卽便

是帝王之尊，也找不出捷徑呵！這句話不是很夠尋思的嗎？迨至後世，竟變爲"學問中無王道"的格言了。

還有一個有趣的故事，據說有一位青年，來學幾何，當讀完了最基本的定理的時候，好樣有點不滿足的神情，因爲這是出乎意外和他的志願相反，於是卒然地問道：

"先生，學習這些東西，究竟有些什麽利益呢？"

歐几里得對於這個質難，竟一言不發，好像沒有聽見一般，祇向他的僕人揮手說：

"喂，去拿幾個錢來給這位先生，因爲他要從學習中得到點東西。"

當然，僕人唯命是從，拿了錢來遞給這位青年。同時歐几里得轉向着他，臉上的表情充滿了誠摯與莊嚴，用一種鄭重的口氣說道：

"請回去吧！你求利的心情，比求知的還切。假使是爲了財帛而來此求學，那就未免鑽向牛角尖中來了。現在趕快收了這個念頭，走回鄉里，倒還是一條捷徑呢。"

目今的社會裏面，懷抱着如青年某同樣的目的而求學的子弟們，是不是就沒有呢？如其有的話，趕快捲起舖蓋回歸鄉里去吧！爲父兄的也該勸令他們回去才是。快覺悟吧！那以獲得財帛爲目的而向學的人們，你們是溜錯了道兒呵！

最後，歐几里得的歿年月日，大約是紀元前二百七十五年。

★ ★ ★ ★ ★ ★

編者謹按錢君此文，似係譯作，唯原文出處未曾言明。承錢君囑爲修改，因以Ball之初等算學史爲根據，略事删節，但極力保存原來科味。語句中有可以引起辯論之處，概行割愛，特此申明，幷向錢君道歉。

問　題　欄

本欄之目的，在徵集關於中等算學範圍內之種種問題，以供讀者之研究，藉收觀摩之效．凡本刊讀者，均可提出問題，及解決本欄內所提出之問題．　無論出題或解題，概依收到之先後，次第編號發表．　數人同解一題，解法同時則擇尤發表，解法異時則分段刊登．　茲將投稿規約列下，幸讀者注意焉：

1. 來函務請書明姓名住址，以便有必要時可通信問答．
2. 提出問題如有出處者，請於題末示知出處所在．
3. 提出人對於所提問題，如已有解答者，請將解答一併惠下．
4. 提出問題如過於簡易，或涉近嬉戲者，本欄恕不發表，當於通訊欄內奉答，必要時或函覆．
5. 解題答案，請照本編樣式書寫，萬勿過於潦草．
6. 所用圖形，請用黑色墨汁精確作好，附帶寄下．
7. 來函請寄武昌珞珈山國立武漢大學劉乙閣教授收．

晚　到　之　解　答

37·4　湖南沅江縣立鄉村師範楊堯農君寄來另一解法如下：

以 A 表原有之栗數，Q_1，Q_2，Q_3，Q_4，依次表長，次，三，四子所取之栗子數，$4n+1$ 表最後所餘之數，依題意有下列諸等式：

$$A-1=4Q_1,\cdots(1)\qquad 3Q_1-1=4Q_2,\cdots(2)\qquad 3Q_2-1=4Q_3,\cdots(3)$$

$$3Q_3-1=4Q_4,\cdots(4)\qquad 3Q_4=4n+1.\cdots(5)$$

但諸 Q 皆係正整數，故由 (5)，$\frac{1}{3}(4n+1)$ 必為整數，而 n 為 $2,5,8,\cdots$ 即 $3m_1-1$ 諸數之一。由是 $Q_4=4m_1-1$。再由(4)，$Q_3=\frac{1}{3}(4Q_4+1)=\frac{1}{3}\times 4^2m_1-1$，故 m_1 必為 3 之倍數。令 $m_1=3m_2$，則 $Q_3=4^2m_2-1$。同理設 $m_2=3m_3$，$m_3=3m_4$，依次有 $Q_2=4^3m_3-1$ 及 $Q_1=4^4m_4-1$．最後由(1)得 $A=4^5m_4-3$.* 又知 $n=3m_1-1=3^2m_2-1=3^3m_3-1=3^4m_4-1$。令 $m_4=1$ 得最初至少栗子數為 $4^5-3=1024-3=1021$ 枚，而最後餘 321 枚。

---

*上期陳棣輝君之解為 4^5-4+1 即 $m_4=1$ 時之特例，大抵即係根據此理。

此題並可推廣如下： 某甲有友 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 等 n 人，幷畜一猴。 某日購栗子一袋，不知多少，但知其個數爲 n 之倍數加 1。 甲出門後，A_1 將一栗給猴而取其餘之 n 分之一，$A_2, A_3, \cdots, A_n$ 亦依次效 A_1 所爲。 迨甲返後計算栗數仍爲 n 之倍數加 1，問最初有栗子若干個？ 答：$n^{n+1}M-(n-1)$，M 爲任意正整數。

37•5 山西太谷銘賢學校李世義君。

問 題 已 解 決 者

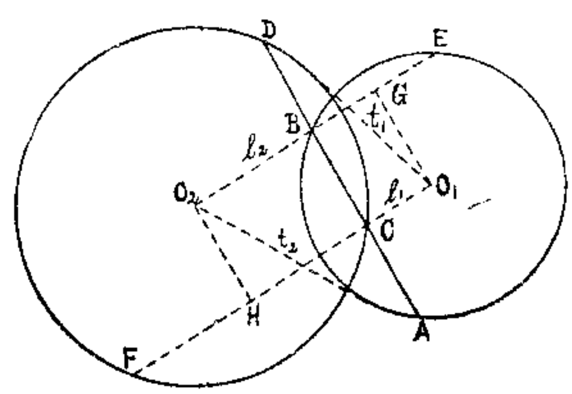
38•1 引一直線，使其爲相交二圓之周所截成之三部分皆相等。

解(武昌博文中學郭煥庭)

本解法僅限於所云三部分中有一部分在兩圓公共區域內，如附圖中所示情形。

［解析］ 設相交二圓爲 O_1 及 O_2.

由 O_1 向 O_2 圓作切線，設其長爲 t_1；由 O_2 向 O_1 圓作切線，設其長爲 t_2，幷設 $t_1 \leqq t_2$.



次設所求之直線與 O_1, O_2 兩圓之交點分別爲 A, B 及 C, D. 連 O_1C 及 O_2B 而延長之，使各再交 O_2 圓及 O_1 圓於 F 及 E。

由假設，C 爲 AB 之中點，故 $O_1C \perp AB$；同理 $O_2B \perp CD$. 若令 $O_1C = l_1$，$O_2B = l_2$，則易見 $BE = 2l_1$，$CF = 2l_2$，而因 $O_1C \cdot O_1F = t_1^2$，$O_2B \cdot O_2E = t_2^2$，得

$$l_1(l_1+2l_2)=t_1^2, \qquad l_2(l_2+2l_1)=t_2^2. \tag{1}$$

消去 l_2 得 $$3l_1^4-2(t_1^2-2t_2^2)l_1^2-t_1^4=0;$$

$$\therefore \quad l_1^2=\frac{t_1^2-2t_2^2\pm 2\sqrt{(t_2^2-t_1^2)^2+t_1^2t_2^2}}{3}. \tag{2}$$

因原設 $t_1 \leqq t_2$，故根號前之負號不能用。 若再作 u, v 兩線段，使合於

$$t_2^2-t_1^2=u^2, \qquad u:t_1=t_2:v; \tag{3}$$

則(2)式變為

$$l_1^2=\frac{t_1^2-2t_2^2+2u\sqrt{u^2+v^2}}{3}. \tag{4}$$

但由(1)中二式相減,得 $l_2^2-l_1^2=t_2^2-t_1^2$,故

$$l_2^2=\frac{t_1^2-2t_2^2+2u\sqrt{u^2+v^2}}{3}+t_2^2-t_1^2=\frac{t_2^2-2t_1^2+2u\sqrt{u^2+v^2}}{3}, \tag{5}$$

而 t_1,t_2 皆為定長。因得作圖法如下:

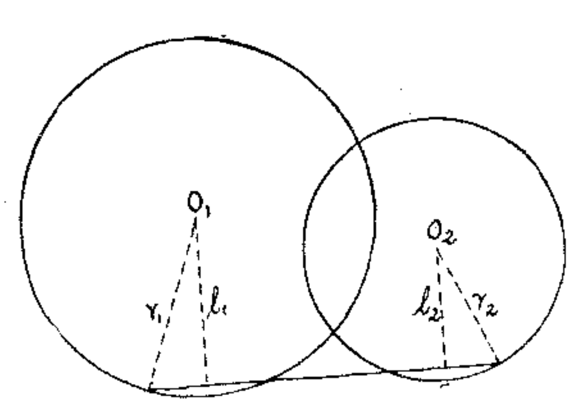
[作圖] 先作 t_1,t_2 如前所設,再依(3),(4),(5)逐次作出 l_1 及 l_2 之長。以 O_1 為心,l_1 為半徑規弧交 O_2 圓於 C;以 O_2 為心 l_2 為半徑規弧交 O_1 圓於 B,B 與 C 分居 O_1O_2 線之兩側。過 B,C 作直線再交 O_1,O_2 兩圓於 A,D 兩點,即為所求之直線。因 C,B 各有兩解,本題亦有兩解,與 O_1O_2 線對稱。

[證] 連結 O_1C 而延長之,再交 O_2 圓於 F,作 $O_2H\perp CF$。連結 O_2B 而延長之再交 O_1 圓於 E,作 $O_1G\perp BE$。由作圖,知

$$t_1^2=O_1C\cdot O_1F=l_1(l_1+2CH), \qquad t_2^2=O_2B\cdot O_2E=l_2(l_2+2BG).$$

與(1)比較即得 $CH=l_2$,$BG=l_1$。由是在直角三角形 O_2GO_1 及 O_1HO_2 中,O_1O_2 為公共邊,$O_2G=l_1+l_2=O_1H$,故$\angle O_1O_2G=\angle O_2O_1H$ 而 $O_2G /\!/ O_1H$。因$BG=O_1C$,而 $BG\perp O_1G$,故 $O_1C\perp BC$ 而 $AC=CB$。同理 $CB=BD$。　(證訖)

編者按此題顯然尚有另一解如附圖所示。設 O_1,O_2 兩圓之半徑各為 r_1 及 r_2,自兩圓心至所求直線之距離各為 l_1 及 l_2,則前後兩圖中均有 $l_2^2-l_1^2=r_2^2-r_1^2$之關係。若再能覓得 l_1 及 l_2 間之另一關係,則此題迎刃而解矣。編者事



忙，無暇探索，願讀者賜教爲幸。

38·2 已知三角形之九點圓心及內心求作此三角形。

38·3 某數以 L 除之餘 a，以 M 除之餘 b，以 N 除之餘 c，求某數並討論之。

按此二題皆爲湖南沅江鄉師楊堯農君所提，細索其條件皆不夠，若不另添假設，皆爲不可解。

38·4 求切於二相交圓之圓心之軌跡。

解。設二圓心爲 O_1 及 O_2，相交於 A，B 兩點，其半徑各爲 r_1 及 r_2。以 C 表動圓之心，r 表其半徑，則依其與二定圓互切方式之不同，可分數款論之：

(1) C 圓在二定圓公共部分內如 C_1 處時，

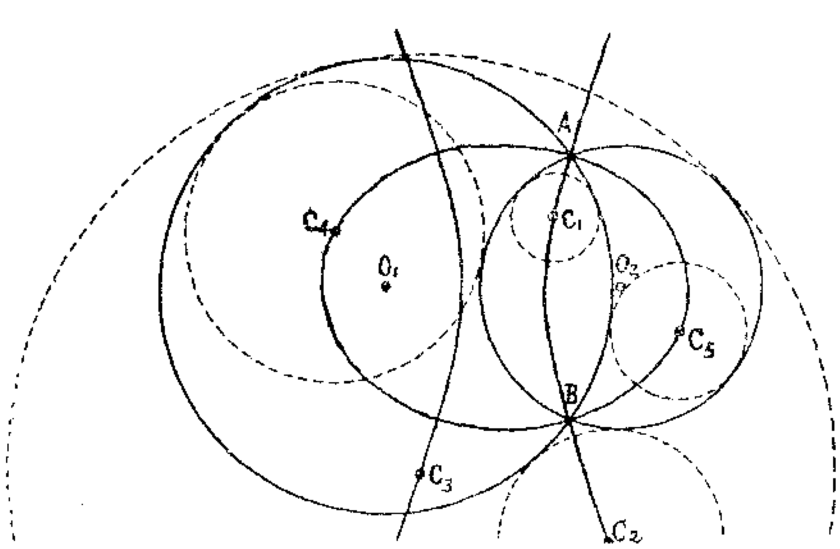
$$CO_1=r_1-r,\qquad CO_2=r_2-r;\qquad \therefore\ CO_1-CO_2=r_1-r_2.$$

(2) C 圓在二圓定圓之外如 C_2 處時，

$$CO_1=r_1+r,\qquad CO_2=r_2+r;\qquad \therefore\ CO_1-CO_2=r_1-r_2.$$

在此兩種情形之下，C 之軌跡爲以 O_1，O_2 爲焦點之雙曲線之一支，卽通過二定圓之交點 A，B 之一支。

(3) C 圓包括二定圓於其中，如 C_3 所在之地位，



$$CO_1=r-r_1,\qquad CO_2=r-r_2;\qquad \therefore\quad CO_1-CO_2=r_2-r_1.$$

此時 C 之軌跡，顯然即上述雙曲線之另一支。

(4) C 圓內切於 O_1 圓而外切於 O_2 圓，如 C_4 所在之地位，

$$CO_1=r_1-r,\qquad CO_2=r_2+r;\qquad \therefore\quad CO_1+CO_2=r_1+r_2.$$

(5) C 圓外切於 O_1 圓而內切於 O_2 圓，如 C_5 在所之地位，

$$CO_1=r_1+r,\qquad CO_2=r_2-r;\qquad \therefore\quad CO_1+CO_2=r_1+r_2.$$

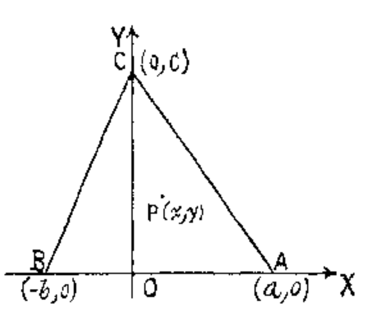
在此兩種情形之下，C 之軌跡爲以 O_1，O_2 爲焦點之一橢圓，亦通過 A，B 兩點。

(以上爲陸子芬先生之解，江蘇南通中學嚴志達君寄來一解，與此同不另錄。)

38•5 動點 P 與已知三角形三邊之距離，其平方之和爲一定；試証若 P 之軌跡爲一圓，則此三角形爲等邊。

証(江蘇南通中學嚴志達)

設三角形頂點 A，B，C 之坐標各爲 (a,o)，$(-b,o)$，(o,c)， a,b,c 皆爲正數，則 AB，BC，CA 之方程式各爲



$$y=0,$$

$$cx-by+bc=0,$$

$$cx+ay-ac=0.$$

設 P 之坐標爲 (x,y)，依題意有

$$y^2+\frac{(cx-by+bc)^2}{b^2+c^2}+\frac{(cx+ay-ac)^2}{a^2+c^2}=\text{常數}.$$

是即 P 之軌跡之方程式。若此軌跡爲圓，則 x^2，y^2 係數相等而 xy 項係數爲零，故

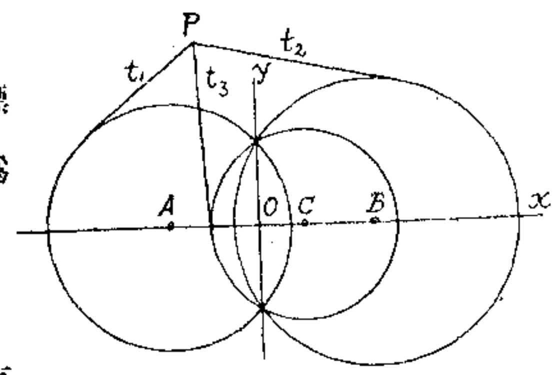
$$1+\frac{b^2}{b^2+c^2}+\frac{a^2}{a^2+c^2}=\frac{c^2}{b^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}\qquad(1)$$

$$\frac{bc}{b^2+c^2}=\frac{ac}{a^2+c^2}\qquad(2)$$

由(2)得 $a=b$ 或 $c^2=ab$. 以 $a=b$ 代入(1)得 $c=\sqrt{3}a$ 而 $\triangle ABC$ 爲等邊。以 $c^2=ab$ 代入(1)得 $a+b=0$ 爲不合理。

38·6 三共軸圓之圓心分別爲 A, B, C. 自一定點至此三圓所引切線之長，各表以 t_1, t_2, t_3，試証 $BC \cdot t_1^2 + CA \cdot t_2^2 + AB \cdot t_3^2 = 0$.

證（前人）



設 OY 爲三圓之根軸，又 A, B, C 之坐標依次爲 (a_1, o), (a_2, o) 及 (a_3, o)，三圓半徑爲 r_1, r_2, r_3，則三圓方程式爲

$$(x-a_i)^2+y^2=r_i^2, \quad (i=1,2,3)$$

因三圓共軸，故於 y 軸任取一點 (k, o)，必有

$$a_i^2+k^2-r_i^2=\text{常數}，\text{即 } a_i^2-r_i^2=\text{常數}，\text{設爲 } f^2.$$

又令定點爲 $P(x_0, y_0)$，則 $t_i^2=(x_0-a_i)^2+y_0^2-r_i^2$，而

$$\Sigma BC \cdot t_1^2 = \Sigma(a_3-a_2)[(x_0-a_1)^2+y_0^2-r_1^2]$$

$$= \Sigma(a_3-a_2)(x_0^2+y_0^2)-2\Sigma a_1(a_3-a_2)x_0+\Sigma(a_3-a_2)(a_1^2-r_1^2)$$

$$= (x_0^2+y_0^2+f^2)\Sigma(a_3-a_2)-2x_0\Sigma a_1(a_3-a_2)=0,$$

因 $\Sigma(a_3-a_2)=0$ 及 $\Sigma a(a_3-a_2)=0$.

又証（山西太谷銘賢學校李世義）

用上圖設 $AC : CB = k : 1$，則 A, B, C 三圓之方程式各爲

$$x^2+y^2+D_1x+F=0, \quad x^2+y^2+D_2x+F=0, \quad x^2+y^2+\frac{D_1+kD_2}{1+k}x+F=0.$$

若 $AB=(k+1)s$，則 $AC=ks$, $CB=s$ 而 $BC=-s$, $CA=-ks$. 又

$$t_1^2=x_0^2+y_0^2+D_1x_0+F, \quad t_2^2=x_0^2+y_0^2+D_2x_0+F, \quad t_3^2=x_0^2+y_0^2+\frac{D_1+kD_2}{1+k}x_0+F.$$

$$\therefore \quad BC \cdot t_1^2+CA \cdot t_2^2+AB \cdot t_3^2=(-s)(x_0^2+y_0^2+D_1x_0+F)+(-ks)(x_0^2+y_0^2+D_2x_0+F)$$

$$+(k+1)s\left(x_0^2+y_0^2+\frac{D_1+kD_2}{1+k}x_0+F\right)=0.$$

提出之問題

44·1 三角形最大邊與最大邊上中線射影之乘積，加上最小邊與最小邊上中

線射影之乘積，等於第三邊與第三邊上中線射影之乘積（湖南省立長沙高中文京周提）。

44•2 設三角形ABC中A角之內外分角線與BC邊及其延線各交於P,Q,試證(i) $AP=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$;(ii) $AQ=\frac{2bc}{b-c}\sin\frac{A}{2}$,式中 $b>c$（蘇州工業學校錢源提）。

44•3 已知三角形各邊之方程式，求其內角或外角平分線時，除了作略圖可看出何者爲內角平分線或外角平分線以外，尙有他法可資辨別否？（河北省立正定師範趙翠英提）。

44•4 解方程式 $x^2+y^2=(x+y+1)^2=x-y+2$（湖南省立長沙高中段桂棠提）

44•5 解聯立方程式（前人提）：

$$\begin{cases} x+y+z=(a+b+c)^2, \\ ay+bz+cx=3(bc^2+ca^2+ab^2), \\ ax+by+cz=a^3+b^3+c^3+6abc. \end{cases}$$

44•6 試解 $\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x=m$，并討論之（前人提）。

× × × × × ×

國立北洋工學院廿四年度入學試驗算學試題解答

大代數

1. 在下列方程式 $mx^2+2x+2m-3mx+9x-10=0$ 中，m 應爲何値 (a) 兩根爲相等，(b) 兩根爲不等實數，(c) 兩根爲虛根？

解. 題式經整理後爲

$$(m+2)x^2-3(m-3)x+2(m-5)=0.$$

其判別式爲

$$\Delta\equiv 9(m-3)^2-8(m+2)(m-5)=m^2-30m+161=(m-7)(m-23).$$

故 (a) $m=7$ 或 23 時，$\Delta=0$，兩根爲相等；(b) $m<7$ 或 >23 時，$\Delta>0$，兩根爲不等實數；(c) $7<m<23$ 時，$\Delta<0$，兩根爲虛根。

2. 某人有洋 5000 元，分甲乙兩部放出，利率不同；但甲部獲利爲乙部獲利之二倍。若甲部按乙部之利率行息，每年可得洋 245 元；若乙部按甲部之利率行息，每年可得洋 90 元。求兩部洋數若干及其利率幾何。

解. 設甲部洋數爲 x 元，則乙部洋數爲 $5000-x$ 元。若 r_1,r_2 分別爲甲乙兩部之利率，則依題意有

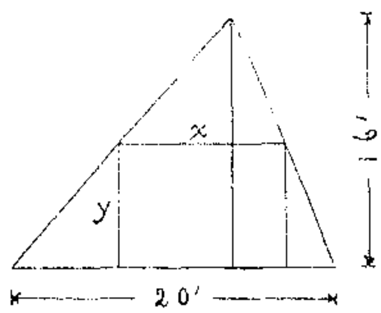
$$r_1x=2r_2(5000-x),\qquad r_2x=245,\qquad r_1(5000-x)=90.$$

消去 r_1,r_2 得

$$\frac{90x}{5000-x}=2\times\frac{245(5000-x)}{x};\quad 即\quad 9x^2=49(5000-x)^2.$$

由是得 $3x=\pm7(5000-x)$，而 $x=3500$ 或 8750 元。但後解不合理；故甲部洋數爲 3500 元，乙部洋數爲 1500 元，利率則依次爲 6% 及 7%。

3. 有銳角三角形，底長爲 20 英尺，高爲 16 英尺：於此三角形內求切一面積最大之矩形。



解。設內切矩形之底及高各爲 x 及 y，面積爲 A，則由圖知

$$\frac{x}{20}=\frac{16-y}{16}=1-\frac{y}{16},$$

$$A=xy=20\left(1-\frac{y}{16}\right)y=20y-\frac{5}{4}y^2=80-\frac{5}{4}(y-8)^2.$$

故知 $y=8$ 英尺時 A 爲最大。此時 x 之値爲 10 英尺，而最大面積爲 80 平方英尺。

4. 知二數之等差中項比等比中項多13，等比中項比調和中項多12，問二數各若干？

解。設 x,y 爲所求之二數，則其等差，等比及調和中項各爲 $\frac{1}{2}(x+y)$，$\sqrt{xy}$ 及 $2xy/(x+y)$。依題意

$$\frac{1}{2}(x+y)-\sqrt{xy}=13,\cdots\cdots(1)\qquad \sqrt{xy}-\frac{2xy}{x+y}=12.\cdots\cdots(2)$$

設 $x+y=2u$，$xy=v^2$，則此二式各變爲

$$u-v=13,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\qquad v-v^2/u=12.\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4)式化簡後變爲 $v(u-v)=12u$，利用(3)式卽得 $13v=12u$，由是

$$v=12(u-v)=12\times13=156 \text{ 而 } u=v+13=169. \text{　因得}$$

$$x+y=338,\cdots\cdots\cdots\cdots(5)\qquad xy=156^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\therefore\quad (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=338^2-4\times156^2=130^2,$$

而 $x-y=\pm130$。與(5)式聯立解之，得 $x=234$，$y=104$；或 $x=104$，$y=234$。故所求二數爲 104，234。

5. 甲袋內有銅元 11 枚，銀圓一枚，乙袋內有銅元 12 枚：今由甲袋取出 11 枚放入乙袋，復由乙袋取出 11 枚，放入甲袋，經此往返取放後，問銀圓在甲袋內之

或然率是多少?

解. 經往返取放後,銀圓仍在甲袋中,此事實祇在兩種情形之下可以發生:

(1) 第一次取出之十一枚盡係銅元,卽銀元自始卽未離開甲袋;

(2) 第一次將銀元取出後,第二次又取回甲袋.

第一種情形之或然率顯爲$\frac{1}{12}$,今再計算第二種情形之或然率.

第一次銀元被取出之或然率爲$\frac{11}{12}$. 放入乙袋後,乙袋中共有23枚,其中22枚爲銅元,一枚爲銀元. 今銀元必須取回,故事實上卽等於由22枚銅元中取出10枚,連同銀元返之甲袋. 因此銀圓於第二次取回之或然率爲${}_{22}C_{10}/{}_{23}C_{11}=\frac{11}{23}$,而第二種情形之或然率爲$\frac{11}{12}\times\frac{11}{23}=\frac{121}{276}$.

此二種情形兩不相干,故所求之或然率爲$\frac{1}{12}+\frac{121}{276}=\frac{12}{23}$.

本題由反面算亦可解決. 欲銀元不在甲袋內,必須(1)第一次取出,(2)第二次不取回. (1)之或然率爲$\frac{11}{12}$, (2)之或然率爲$\frac{12}{23}$, 蓋因銀元不許取回, 卽等於由22枚銅元內取出11枚返之甲袋,故或然率爲${}_{22}C_{11}/{}_{23}C_{11}=\frac{12}{23}$也. 由是(1),(2)繼續見諸事實之或然率, 卽銀元不在甲袋之或然率爲$\frac{11}{12}\times\frac{12}{23}=\frac{11}{23}$,而銀元在甲袋內之或然率乃爲$1-\frac{11}{23}=\frac{12}{23}$矣.

解析幾何

1. 設一三角形之頂點爲$A(-3,4)$, $B(-1,-2)$, $C(4,3)$,試求(甲)經過A頂點之中線方程式,(乙)經過B頂點之高線方程式,(丙)經過C頂點之內分角線方程式及(丁)此三角形之面積.

解.(甲) BC邊中點M之坐標爲$x=\frac{1}{2}(-1+4)=\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{2}(-2+3)=\frac{1}{2}$;故中線AM之方程式爲

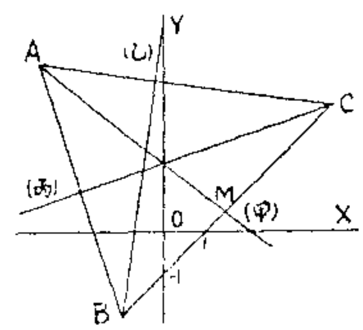
$$\frac{x+3}{-3-\frac{3}{2}}=\frac{y-4}{4-\frac{1}{2}}, \quad 卽 \quad 7x+9y-15=0.$$

(乙) CA邊之斜度爲$\frac{3-4}{4+3}=-\frac{1}{7}$,故過B之高線方程式爲

$y+2=7(x+1)$，　　即　$7x-y+5=0$。

（丙）　CA,CB兩邊之方程式各爲

$x+7y-25=0$，　$x-y-1=0$



因原點在 C 角內，故所求之分角線之方程式爲

$$\frac{x+7y-25}{\sqrt{50}}=\frac{x-y-1}{\sqrt{2}}$$

即　　　$x-3y+5=0$

（丁）　以 A 表此三角形之面積，則

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-3 & 4 & 1\\ -1 & -2 & 1\\ 5 & 3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-3 & 4 & 1\\ 2 & -6 & 0\\ 7 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 7 & -1\end{vmatrix}=20.$$

2。 一圓經過已知點$(0,3)$，並與已知圓 $x^2+y^2=25$ 相內切；設此圓之中心爲一動點，試求其軌跡之方程式。

解。 設(α,β)爲此圓心之坐標，ϱ 爲其半徑，則其方程式爲

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2.$$

因其通過$(0,3)$，故有　　　$\alpha^2+(3-\beta)^2=\varrho^2$.　　　(1)

又因其與 $x^2+y^2=25$ 內切，故兩圓心之距離，等於兩圓半徑之差，然$(0,3)$在所設圓內，因知 $\varrho<5$，而有　　　$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=5-\varrho$　　　(2)

由(1)，(2)兩式消去 ϱ，得

$$\varrho^2=(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-5)^2=\alpha^2+(3-\beta)^2,\ \text{即}\ 25\alpha^2+16\beta^2-48\beta-64=0.$$

由是知所求軌跡方程式爲

$$25x^2+16y^2-48y-64=0,\quad \text{即}\quad \left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{2y-3}{5}\right)^2=1.$$

爲一橢圓，中心在$(0,\frac{3}{2})$，長徑爲 5，與 y 軸合，短徑爲 4。

3. 從定點 $(-2,5)$ 到拋物線 $y^2=6x$ 作兩切線；試求（甲）其切點弦方程式；（乙）平分此弦之徑線方程式。

解。（甲）切點弦即 $(-2,5)$ 點對於 $y^2=6x$ 之極線，故其方程式爲

$$5y=3(x-2),\quad 即\ 3x-5y-6=0. \tag{1}$$

（乙）此拋物綫之徑線，槪與其軸（即 x 軸）平行。故宜求(1)與拋物線兩交點之中點縱坐標。由(1)得 $x=\frac{1}{3}(5y+6)$，代入拋物線方程式即得

$$y^2-10y-12=0.$$

此方程式兩根之和之半爲 5，即所求之縱坐標，因之所求徑綫方程式乃爲 $y=5$，即過所設定點而與拋物綫主軸平行之線。

(4) 設二圓通過橢圓 $2x^2+3y^2=35$ 及拋物線 $3x^2-4y=0$ 之實交點，並以 5 爲直徑，試求其方程式。

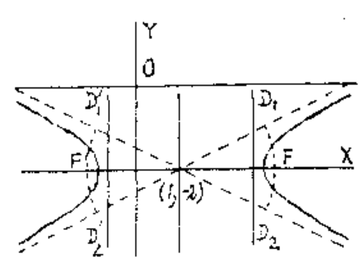
解。將題設方程式聯立解之，得兩曲線之實交點爲 $(2,3)$ 及 $(-2,3)$。由對稱知所求圓之中心必在 y 軸上，故可設其方程式爲 $x^2+(y-b)^2=(\frac{5}{2})^2$。以 $x=\pm2$，$y=3$ 代入，得 $b=\frac{3}{2}$，故所求圓之方程式爲

$$x^2+y^2-3y-4=0.$$

(5) 證明二次方程式 $x^2-4y^2-2x-16y-19=0$ 的軌跡爲一雙曲線，並求其（甲）中心之坐標，（乙）主軸及配軸之長度，（丙）二焦點之坐標，（丁）二準線之方程式。

解。題式可書爲

$$\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{1}=1,$$



故爲一雙曲線，其中心爲 $(1,-2)$，主軸之長爲 4，配軸之長爲 2。由圖易見其二焦點 F, F' 之坐標爲 $(1\pm\sqrt{5}, -2)$，而二準線 D_1D_2，$D_1'D_2'$ 之方程式爲 $x=1\pm4/\sqrt{5}$.

讀 者 通 訊

湖南省立長沙高級中學段杜棠君問：商務書館發行復興高中三角(李蕃編著)87頁17題"山巔一塔，一人在距山麓 a 尺處仰測塔高之仰角爲 θ；其人在距塔脚 b 尺處再測高塔之仰角亦爲 θ；設 h 爲山高，求證 $h=(a\mp b)\tan\theta$." 又111頁31題爲 $\cos\frac{1}{3}x-\sin\frac{1}{2}x=2$，答案爲 $x=(12n-1)\pi$ 或 $(12n+7)\pi$；同頁34題 $\tan(x-\alpha)\cos 2x-\frac{1}{3}=\sin 2x$，答案爲 $n\pi+\tan^{-1}[\frac{1}{2}\tan\alpha]$。此數題是否均有錯誤？如有錯誤，欲使求證及答案不變，題字宜如何更改？又其解法，亦請明示爲荷！

答。此數題果皆有誤，第一題且不易索解。因手頭無此書，無從查考，不解其何以用加減雙號，至保留答案而改題文，不免終有削足適履之嫌。第二題如改爲 $2\cos\frac{1}{3}x-\sin\frac{1}{2}x=2$ 或 $\cos\frac{1}{3}x-\sin\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}$，則答案可用，但尚有其他答案。第三題似係 $\tan(x-\alpha)(\cos 2x-3)=\sin 2x$ 之誤。後二者想係筆誤或錯排，唯第一題恐須編著人自行糾正耳。

二題中令 $\theta=\frac{1}{6}x$，則題式變爲 $2\cos 2\theta-\sin 3\theta=2$ 或 $2(1-2\sin^2\theta)-(3\sin\theta-4\sin^3\theta)=2$，即 $\sin\theta(2\sin\theta+1)(2\sin\theta-3)=0$。由是 $\sin\theta=0$ 或 $-\frac{1}{2}$ 而 $\theta=n\pi$ 或 $n\pi+(-1)^n(-\frac{1}{6}\pi)$。故 $x=6n\pi$ 或 $6n\pi+(-1)^{n+1}\pi$；後式在 n 爲偶數時可書爲 $(12n-1)\pi$，n 爲奇數時可書爲 $(12n+7)\pi$。若右端改爲 $\frac{3}{2}$，則除此答案外尚有 $x=6\sin^{-1}[\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{2})]$ 諸解。

第三題中之 $\tan(x-\alpha)$ 代以 $\sin(x-\alpha)/\cos(x-\alpha)$，去分母移項後，即得 $3\sin(x-\alpha)=\sin(x-\alpha)\cos 2x-\cos(x-\alpha)\sin 2x=\sin[(x-\alpha)-2x]=-\sin(x+\alpha)$. 兩端展開而移項得 $4\sin x\cos\alpha=2\cos x\sin\alpha$，由是 $\tan x=\frac{1}{2}\tan\alpha$ 而 $x=n\pi+\tan^{-1}(\frac{1}{2}\tan\alpha)$ 矣.(正)

*　*　*　*　*　*

重慶汪澤培君問：1. 已知一三角形，求作一圓使此三角形對於該圓爲 self-conjugate，此題共有幾解？2. 試證'屬於一圖形取極值(極大或極小)時，極接近此極值位置之他值與極值之差，得以無視之，但其圖形變化，必須合於所設條件'。

答. 1. 設△ABC為已知,以其垂心 H 為中心,$\sqrt{HA\cdot HD}$ (D 為 BC 上之垂足)為半徑作圓,即為所求之圓. 此題僅有一解,且須 A 角為鈍角,否則 H 在 A,D 之間, HA • HD 為負,其方根取虛值,而圓為虛圓不能作. 2. 題中所言,細究之即極值之定義. 通常極值之定義,略言之如下: 設有一變數 x,依某種所設條件,漸次接近一常值 a,若 x 與 a 之差,隨接近程度之進展而遞減以至於零,則 a 謂之為 x 之極值. 此實為一定義,無所謂證明也. 例如在半徑為 a 之圓內,內接一正 2^n 邊形,則此形之面積為 $2^{n-1}a^2\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$,其與圓面積 πa^2 之差,隨 n 之增大而遞減以至於零(並非'得以無視之'),故其極大值為 πa^2. (正)

*　*　*　*　*　*

南京剪子巷14號潘錫慶君來函,言及四卷二期唐山交大高等代數試題5(a)之解答,略有舛誤,並代擬二解,惜均不合. 茲謹更正如下,以謝潘君,并向讀者道歉!

吾人有三種可能之假設,即囊中原有四球,(1)皆紅,(2)三紅一不紅,(3)二紅二不紅. 偶取其二皆為紅色之機會,各為(1)1,(2) $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$,(3) $\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$,因之此三種假設眞實之比有如 $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{6}=6:3:1$,而第一種假設為眞之機會為 $\frac{6}{10}$,第二種為 $\frac{3}{10}$,第三種為 $\frac{1}{10}$. 次,在第一種情形下,連取三次皆為紅球之機會為1,第二種情形下為 $(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$,第三種情形下為 $(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}$,故得所求機會為 $1\times\frac{6}{10}+\frac{8}{27}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{27}\times\frac{1}{10}=\frac{187}{270}$. (正)

*　*　*　*　*　*

再答河南淮陽師範陳麟閣君. 上期通訊答尊問第一題(即陳建功酈福綿高中幾何十二章習題中第十三題),以匆忙故,將對角線誤認為切點連線,遂謂其互為垂直. 武大招考題中乃係証切點連線互相垂直,對角線雖亦通過切點連線之交點,然不必垂直,誠如尊言. 蓋若以 a,b,c,d 表此形四邊之長,則因其外接於一圓又內切於一圓,其面積等於 $\sqrt{abcd}$;又若 l,m 為對角綫之長,必有 $ac+bd=lm$. 假定兩對角線垂直,則其面積必又為 $\frac{1}{2}lm$,如是則 $\sqrt{abcd}=\frac{1}{2}(ac+bd)$ 而 $(ac-bd)^2=0$,因之必須 $a:b=c:d$,此并非一般情形. 又本刊完全公開為讀者園地,如有佳作,定即刊出,前答謂另闢"讀者園地"一欄,似無必要,合併奉聞. (正)

本 期 正 誤

19頁末行第十七字‘雜’應作‘難’.

20頁(3)式應爲 $x^2 \mp xy + y^2 = b/a$,少 y 字.

20頁 9 行第四字‘及’後少一‘y’字.

28頁15行第十七字‘斜’後少一‘邊’字.

28頁16行‘畢達哥拉斯’少‘達’字.

28頁19行倒數第七字‘的’應作‘是’.

28頁20行首二字顚倒.

28頁倒數第二行第三字‘說’應作‘論’.

29頁 3 行第三字‘可’應作‘得’.

31頁 6 行第十四字‘的’應作‘了’.

31頁底註 Poincare 之 o 誤作 s.

32頁13行 Fallacies 之 F 誤作 T.

32頁末行第十五字‘的’應作‘面’.

32頁底註第三行 Eudoxus 之 o 誤作 s.