中學校用　卷下

共和國教科書

代數學

商務印書館出版

中學校用

卷下

共和國
教科書

代數學

商務印書館出版

編輯大意

一本書備中學校代數學教科之用。

一按中學校課程標準。代數之教科。始於第一學年。至第三學年而畢。每年與算術幾何。同時並授。是三年內代數所佔之時間。適得數學全科之半。本書之分量。即依此標準以定之。庶教材與時間。適相應而便於誦習。

一本書分爲上下兩卷。上卷至二次方程而止。應用最廣。下卷自高次方程以上。理論稍深。惟中學程度。應以普通代數爲範圍。故闡發處無不力求簡易。其繁賾深奧之理論。應屬於高等代數者。仍不預爲侵越。

一代數學來自歐西。各種譯名。證以西文。可免歧誤。然若另編中西對照表。未免多費翻檢之時刻。今於名詞初見之處。即用西文原名。附注於後。舉目可得。似於學者更爲便利。

一文字排列之位置。與編輯宏恉本屬無涉。然適宜與否。於閱者之感覺。亦非毫無關係。設以一貫之算式。而分列於左右兩葉。以一氣之文字。而跨排於前後兩面。則披閱之時。必有感其不便者。本書仍照算術教科書之例。凡單數各面。篇幅終止之處。亦爲文字終止之處。無非爲閱者圖其便利而已。

共和國教科書

中學代數學下卷目次

共和國教科書

中學代數學下卷

第七篇　乘冪乘根及指數

第一章　乘冪

118. 正整數之乘冪　設 $m, n, p,$ 皆爲正整數。

由§4　　$a\times a\times a\times$ 至 n 因數 $=a^n$,

由§33　　$a^m\times a^n\times a^p\times\cdots\cdots=a^{m+n+p+\cdots\cdots}$

以 $(a^m)^n$ 表 a^m 之 n 乘冪。則 $(a^m)^n$ 者爲 a^m 自乘至 n 次。故其指數 m 須累加至 n 次。即可以 n 乘 m 爲其指數。

故　　$(a^m)^n=a^{mn}$

故某數之乘冪自乘若干次。等於此數之乘冪。而以二指數之積爲指數。

119. 積之乘冪　設 n, p, q, r 皆爲正整數。

則 $(ab)^n=ab\times ab\times ab\times$ 至 n 因數

$=(a\times a\times a\times$ 至 n 因數$)(b\times b\times b\times$ 至 n 因數$)$

$=a^nb^n$.

倣此。$(abcd\cdots)^n=a^nb^nc^nd^n\cdots\cdots$.

$(a^pb^qc^r\cdots)^n=a^{np}b^{nq}c^{nr}\cdots\cdots$.

故積之乘冪。等於其各因數同乘冪之積。

120. 分數之乘冪　設 n, p, q, r, s 皆爲正整數,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2},\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^3}{b^3}.$$

仿此。$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, $\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^n=\frac{a^{np}}{b^{nq}}$,

$$\left(\frac{a^pb^q}{c^rd^s}\right)^n=\frac{a^{np}b^{nq}}{c^{nr}d^{ns}}.$$

故分數之若干乘冪等於一分數以原分母之同乘冪爲分母原分子之同乘冪爲分子。

121. 負數之乘冪　由乘法之指數定則。

$$(-a)^2=(-a)(-a)=a^2,$$

$$(-a)^3=(-a)^2(-a)=a^2(-a)=-a^3,$$

$$(-a)^4=(-a)^3(-a)=(-a^3)(-a)=a^4,$$

$$(-a)^5=(-a)^4(-a)=a^4(-a)=-a^5.$$

故負數之偶數冪爲正數奇數冪爲負數。

又設 n 爲任何正整數則 $2n$ 可表偶數一切之形。$2n+1$ 可表奇數一切之形因得下式。

$$(+a)^{2n}=a^{2n},\qquad (-a)^{2n}=a^{2n}.$$

$$(+a)^{2n+1}=a^{2n+1},\qquad (-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}.$$

故就正數負數總括言之凡偶數冪爲正數奇數冪與原數同其符號。

122. 多項式之乘冪　可依乘法之公式求之茲再記其公式於下。

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2.$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$$

$$(a\pm b)^4=a^4\pm 4a^3b+6a^2b^2\pm 4ab^3+b^4.$$

$$(a\pm b)^5=a^5\pm 5a^4b+10a^3b^2\pm 10a^2b^3+5ab^4\pm b^5.$$

$$(a\pm b\pm c)^2=a^2+b^2+c^2\pm 2ab\pm 2ac+2bc.$$

$$(a\pm b\mp c)^2=a^2+b^2+c^2\pm 2ab\mp 2ac-2bc.$$

$$(a\pm b\pm c)^3=a^3\pm b^3\pm c^3\pm 3a^2b\pm 3a^2c\pm 3b^2c+3b^2a$$
$$+3c^2a\pm 3c^2b+6abc.$$

$$(a\pm b\mp c)^3=a^3\pm b^3\mp c^3\pm 3a^2b\mp 3a^2c\mp 3b^2c+3b^2a$$
$$+3c^2a\pm 3c^2b-6abc.$$

此種公式。去左邊之括號而得右邊之式。謂之展開*Expand*。其條段次序。有一定之法則。容後第十二篇中詳述其理。此處但默記之可耳。

問題三十二

去下列各式之括號。

1. $(2a^2)^3$.　　2. $(-3a^2b^3)^2$.　　3. $(-xy^2z^3)^{2n}$.

4. $(-xy^mz^{2m})^{2n+1}$.　　5. $\left(\dfrac{5ab^2}{3x^2y^3}\right)^3$.　　6. $\left(\dfrac{-2x^2y^3z}{3a^2b^3}\right)^2$

展開下列各式。

7. $(2a+b)^2$.　　8. $(3a-2b)^2$.　　9. $(a^2+2c^2)^3$

10. $(5x^2-2y^3)^3$.　　11. $(2x-3y^2)^4$.　　12. $(3a+4b)^4$.

13. $(2+3a^2x^2-4a^4x^4)^2$.　　14. $(2-3x+x^2)^2$.

15. $(2x-y+3z)^3$.　　16. $(2+x^2-x)^3$.

第二章　乘根

123. 乘根之性質　一數之平方根恆有二。其一爲正數。他一爲負數。如 a 之平方根爲 $\sqrt{a}$ 及 $-\sqrt{a}$。惟通常以正數之方根表之。故僅以 $\sqrt{a}$ 表 a 之平方根。

一數之立方根恆有三。

由前§112例4。如1之立方根有三。卽 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$。若以希臘字 ω(讀爲亞美加)代其任一虛數。

如　$\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.　　則　$\omega^2=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

如　$\omega=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.　　則　$\omega^2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

故1之立方根爲 $1, \omega, \omega^2$。

又如求 a^3 之立方根。則 $x^3=a^3$。卽 $\frac{x^3}{a^3}=1$。卽 $\left(\frac{x}{a}\right)^3=1$。而適合於此方程式中 $\frac{x}{a}$ 之値。有 $1, \omega, \omega^2$ 之三種。故此方程式之根。卽 a 之立方根。爲 a, $a\omega$, $a\omega^2$。

由是一有理數之立方根恆有三。其中一爲實數。他二爲含虛數之數。惟通常以實數之方根表之。故僅以 $\sqrt[3]{a}$ 表 a 之立方根。

同理。任何數之 n 乘根有 n 個。此定理之證明。在初等代數學範圍之外。故本書不載。以後凡如 $\sqrt[n]{a}$ 者。皆表 a 之 n 乘根之實數。若實數有正負二種。則皆表其正數。

由是凡正數之偶數乘根，其實根必有正負二個。

凡有理數之奇數乘根，其實根僅有一個。

凡負數之偶數乘根，皆含虛數。

124. 整數之乘根　由§118之理，某數之 n 乘冪，即以 n 乘其指數，反之，則某數之 n 乘根，即以 n 除其指數。

故　$(\sqrt[n]{a})^n=\sqrt[n]{a^n}=a.$

則　$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn}=\{(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m\}^n=\{\sqrt[n]{a}\}^n=a.$

即　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$

故某數若干乘根之若干乘根，等於此數之乘根，而以二個根指數之積爲根指數。

125. 積之乘根　由§119，積之乘冪，等於其各因數同乘根之積。

故　$(\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}\times\cdots\cdots)^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n(\sqrt[n]{c})^n\cdots\cdots$
$=abc\cdots\cdots$

即　$\sqrt[n]{abc\cdots}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}\cdots\cdots$

故積之乘根，等於其各因數同乘根之積。

126. 分數之乘根　由§120。

則　$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})}=\frac{a}{b}.$$

即　$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

故分數之若干乘根，等於一分數，以原分母之同乘根爲分母，原分子之同乘根爲分子。

127. 開平方法 *Extraction of square root* 求多項式之平方根。其簡單者。可應用§122中$(a\pm b)^2$及$(a\pm b\pm c)^2$等之公式。由視察而知之。其複雜者。則用開平方之普通法則。茲先述用公式求平方根之法。

例1. 求$4x^4-12x^2y^2+9y^4$之平方根。

$$4x^4-12x^2y^2+9y^4=(2x)^2-2(2x^2)(3y^2)+(3y^2)^2$$
$$=(2x^2-3y^2)^2\text{〔由}(a-b)^2\text{之公式〕}.$$

故所求之平方根為$2x^2-3y^2$。

〔注意〕平方根有正負二種。茲用其正者。如用其負。則變其符號即得。

例2. 求$9a^2+4b^2+c^2+12ab+6ac+4bc$之平方根。

原式$=(3a)^2+(2b)^2+c^2+2(3a)(2b)+2(3a)c+2(2b)c$
$=(3a+2b+c)^2$〔由$(a+b+c)^2$之公式〕.

故所求之平方根為$3a+2b+c$。

或原式$=9a^2+12ab+4b^2+6ac+4bc+c^2$
$=(3a)^2+2(3a)(2b)+(2b)^2+2(3a+2b)c+c^2$
$=(3a+2b)^2+2(3a+2b)c+c^2$〔由$(a+b)^2$之公式〕
$=(3a+2b+c)^2$〔由$(a+b)^2$之公式〕.

128. 茲述開平方之普通法則。先就$a^2+2ab+b^2$之平方根為$a+b$考之。

先將原式之各項。順某文字之降冪列之。但於此例。以順a之降冪排列為便。

首項 a^2 之平方根爲 a。以此爲所求平方根之首項。將 a 之平方卽 a^2 從原式減之。得餘式 $2ab+b^2$。次以平方根首項之二倍卽 $2a$。除此餘式之首項。得 b。以此爲所求平方根之第二項。將根之首項之二倍與其第二項相加卽 $2a+b$。以根之第二項卽 b 乘之。得 $2ab+b^2$。從上之餘式減之。其差爲 0。故演算至此完畢。

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2+2ab+b^2\,(a+b \\
 & a^2 \\
\hline
2a+b) & 2ab+b^2 \\
 & 2ab+b^2 \\
\hline
\end{array}
$$

上例若第二餘式不爲 0。則以 $a+b$ 之二倍除第二餘式其得商之首項。爲所求平方根之第三項。於此項加 $a+b$ 之二倍。其和再以此項乘之。而由第二餘式減去。如是次第求之。至無餘式而止。

例1.　求 $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$ 之平方根。

先依 a, b, c 之次序。順其降冪列之。後用上法開方。

$$
\begin{array}{l}
\quad a^2+2ab+2ac+2ad+b^2+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2\,(a+b+c+d \\
\quad a^2 \\
\hline
2a+b)\,2ab+2ac+2ad+b^2+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2 \\
\qquad 2ab \qquad\qquad\qquad +b^2 \\
\hline
2a+2b+c)\;2ac+2ad \qquad +2bc+2bd+c^2+2cd+d^2 \\
\qquad\qquad 2ac \qquad\qquad +2bc \qquad +c^2 \\
\hline
2a+2b+2c+d)\;2ad \qquad\qquad +2bd \qquad +2cd+d^2 \\
\qquad\qquad\qquad 2ad \qquad\qquad +2bd \qquad +2cd+d^2 \\
\hline
\end{array}
$$

故所求之平方根爲 $a+b+c+d$。

例 2.　求 $4x^6+80x^4-8x+60x^3+32x^5+1$ 之平方根。

先順 x 之降冪列之。後用上法開方。

$$
\begin{array}{rl}
 & 4x^6+32x^5+80x^4+60x^3 \qquad -8x+1\,(2x^3+8x^2+4x-1 \\
 & 4x^6 \\
\hline
4x^3+8x^2) & 32x^5+80x^4+60x^3 \qquad -8x+1 \\
 & 32x^5+64x^4 \\
\hline
4x^3+16x^2+4x) & 16x^4+60x^3 \qquad -8x+1 \\
 & 16x^4+64x^3+16x^2 \\
\hline
4x^3+16x^2+8x-1) & -4x^3-16x^2-8x+1 \\
 & -4x^3-16x^2-8x+1 \\
\hline
\end{array}
$$

故所求之平方根為 $2x^3+8x^2+4x-1$。

例 3.　求 $x^6+4x^5-10x^3+4x+1$ 之平方根。

$$
\begin{array}{rl}
 & x^6+4x^5 \quad -10x^3 \quad +4x+1\,(x^3+2x^2-2x-1 \\
 & x^6 \\
\hline
2x^3+2x^2) & 4x^5 \quad -10x^3 \quad +4x+1 \\
 & 4x^5+4x^4 \\
\hline
2x^3+4x^2-2x) & -4x^4-10x^3 \quad +4x+1 \\
 & -4x^4-8x^3+4x^2 \\
\hline
2x^3+4x^2-4x-1) & -2x^3-4x^2+4x+1 \\
 & -2x^3-4x^2+4x+1 \\
\hline
\end{array}
$$

故所求之平方根為 x^3+2x^2-2x-1。

〔注意〕　算術中開一數之平方．有能開盡者．有不能開盡者．而代數學中開一式之平方亦然．故凡用上法無論開至何處．其餘式終不為 0 者．即可知原式不能開盡．但用根號加於原式以表示之可也．例如 b^2-4ac 之平方根．可以 $\sqrt{b^2-4ac}$ 表之．

129. 數目開平方　由前節之法。可知算術中開平方法之理由。茲示一例於下。

例. 求576081之平方根。

$$
\begin{array}{rl}
 & 57\,|\,60\,|\,81(\underset{a}{700}+\underset{b}{50}+\underset{c}{9} \\
a^2= & \underline{49\ 00\ 00} \\
2a+b=1450) & 8\ 60\ 81 \\
(2a+b)b= & \underline{7\ 25\ 00} \\
2a+2b+c=1509) & 1\ 35\ 81 \\
(2a+2b+c)c= & \underline{1\ 35\ 81}
\end{array}
$$

故所求之平方根為759。

130. 開立方法 *Extraction of cube root*　求多項式之立方根。其簡單者。可應用§122中$(a\pm b)^3$之公式。由視察而知之。其複雜者。則須用開立方之普通法則。茲先述用公式求立方根之法。

例1. 求 $x^3-6x^2+12x-8$ 之立方根。

原式 $=(x)^3-3(x)^2(2)+3(x)(2)^2-(2)^3$

$=(x-2)^3$〔由$(a-b)^3$之公式〕.

故所求之立方根為 $x-2$。

例2. 求 $27x^6+54x^5y+36x^4y^2+8x^3y^3$ 之立方根。

原式 $=(3x^2)^3+3(3x^2)^2(2xy)+3(3x^2)(2xy)^2+(2xy)^3$

$=(3x^2+2xy)^3$〔由$(a+b)^3$之公式〕.

故所求之立方根為 $x(3x+2y)$。

131　玆述開立方之普通法則。先就 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 之立方根爲 $a+b$ 考之。

先將原式順某文字(例如 a)之降冪列之。

$$
\begin{array}{ll|l}
 & & \multicolumn{1}{l}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\,(a+b} \\
 & & \multicolumn{1}{l}{\underline{a^3\qquad\qquad\qquad\qquad}} \\
 & 3a^2 & 3a^2b+3ab^2+b^3 \\
3a+b & & \\
 & \underline{(3a+b)b} & \\
 & 3a^2+3ab+b^2 & \underline{3a^2b+3ab^2+b^3}
\end{array}
$$

首項 a^3 之立方根爲 a。以此爲所求立方根之首項。將 a 之立方卽 a^3 從原式減之。得餘式 $3a^2b+3ab^2+b^3$。次以立方根首項 a 之平方之三倍卽 $3a^2$。除此餘式之首項 $3a^2b$。得 b。爲所求立方根之第二項。次於根之首項之三倍卽 $3a$。加此項卽 b。其和再以此項乘之。得 $(3a+b)b$。將此式加於 $3a^2$。得 $3a^2+(3a+b)b$。乃以根之第二項 b 乘之。得積從餘式減去。其差爲 0。故演算至此完畢。

上例若第二餘式不爲 0。則將根之首次二項和之平方而三倍之卽 $3(a+b)^2$。以其首項除第二餘式之首項。得商爲根之第三項。次於根之首次二項和之三倍卽 $3(a+b)$。加根之第三項。其和再以根之第三項乘之。得積加於 $3(a+b)^2$。乃將其和以根之第三項乘之。得積從第二餘式減去。若猶有餘式。則仍如前求之。直至無餘而止。

例 1. 求 $a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+6abc+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$ 之立方根。

$$
\begin{array}{l|l}
 & \underline{a+b+c} \\
 & a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+6abc+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3 \\
 & \underline{a^3} \\
3a^2 & 3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+6abc+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3 \\
\underline{\quad (3a+b)b} & \\
3a^2+3ab+b^2 & \underline{3a^2b \qquad +3ab^2 \qquad\qquad +b^3} \\
\underline{\qquad\qquad b^2} & 3a^2c \quad +3ac^2+6abc \quad +3b^2c+3bc^2+c^3 \\
3(a+b)^2 & \\
\underline{\quad \{3(a+b)+c\}c} & \\
3a^2+6ab+3b^2 & \\
\quad +3ac+3bc+c^2 & \underline{3a^2c \quad +3ac^2+6abc \quad +3b^2c+3bc^2+c^3}
\end{array}
$$

故所求之立方根爲 $a+b+c$。

〔注意〕 $(3a+b)b$, $3a^2+3ab+b^2$, 與 b^2 之和. 等於 $3(a+b)^2$.

例 2. 求 $x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8$ 之立方根。

$$
\begin{array}{l|l}
 & x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8(x^2-x+2 \\
 & \underline{x^6} \\
3x^4 & -3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8 \\
\underline{\quad -x(3x^2-x)} & \\
3x^4-3x^3+x^2 & \underline{-3x^5+3x^4-\quad x^3} \\
\underline{\qquad\qquad x^2} & 6x^4-12x^3+18x^2-12x+8 \\
3(x^2-x)^2 & \\
\underline{\qquad 2(3x^2-3x+2)} & \\
3x^4-6x^3+9x^2-6x+4 & \underline{6x^4-12x^3+18x^2-12x+8}
\end{array}
$$

故所求之立方根爲 x^2-x+2。

〔注意〕 凡開一式之立方.無論開至何處.其餘式終不爲0者.即可知原式不能開盡.

132. 數目開立方 由前節之法。可知算術中開立方法之理由。茲示一例於下。

例. 求 100544625 之立方根。

$$
\begin{array}{lrr|rrr}
 & & & a & b & c \\
 & & & 400+60 & + & 5 \\
\hline
 & & & 100 & 544 & 625 \\
 & a^3= & & 64 & 000 & 000 \\
\hline
 & 3a^2 & =480000 & 36 & 544 & 625 \\
3a+b=1260 & (3a+b)b= & 75600 & & & \\
\cline{2-3}
 & 3a^2+3ab+b^2= & 555600 & 33 & 336 & 000 \\
\hline
2b=120 & b^2= & 3600 & & & \\
\cline{2-3}
c=5 & 3(a+b)^2 & =634800 & 3 & 208 & 625 \\
\cline{1-1}
3(a+b)+c=1385 & \{3(a+b)+c\}c= & 6925 & & & \\
\hline
 & 3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2= & 641725 & 3 & 208 & 625 \\
\hline
\end{array}
$$

故所求之立方根爲 465。

〔注意〕 本例可與前節之例1參照.

問題三十三

試由視察去下列各式之根號。

1. $\sqrt{49a^2x^4y^8}$.　2. $\sqrt[3]{a^3x^6}$.　3. $\sqrt[4]{16x^4y^8}$.

4. $\sqrt[3]{-27b^6x^9}$.　5. $\sqrt[5]{32x^5y^5z^{10}}$.　6. $\sqrt[4]{4x^4y^4z^8}$.

7. $\sqrt{9x^2-6ax+a^2}$.　8. $\sqrt{4x^4+16x^2+16}$.

9. $\sqrt{a^2x^2-10abx+25b^2}$.　10. $\sqrt[3]{8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3}$.

試證下列各式。

11. $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^{n}b}$.　　12. $\sqrt[m]{x}\sqrt[n]{x}=\sqrt[mn]{x^{m+n}}$.

13. $\sqrt[m]{x}\div\sqrt[n]{x}=\sqrt[mn]{x^{n-m}}$.　　14. $\dfrac{\sqrt[m]{x}\sqrt[n]{x}}{\sqrt[m]{y}\sqrt[n]{y}}=\sqrt[mn]{\left(\dfrac{x}{y}\right)^{m+n}}$.

15. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$.

求下各數及各式之平方根。

16. 1071225.　　17. 19154.56.　　18. 414.9369.

19. 73229.7721.　　20. 0.12334144.　　21. 29376400.

22. $x^4-2ax^3+5a^2x^2-4a^3x+4a^4$.

23. $4x^6-12x^5+5x^4+26x^3-29x^2-10x+25$.

24. $x^6-2bx^5+7b^2x^4-14b^3x^3+17b^4x^2-24b^5x+16b^6$.

25. $\dfrac{4x^4-4x^3y-3x^2y^2+2xy^3+y^4}{x^4+2x^3y-x^2y^2-2xy^3+y^4}$.

求下各數及各式之立方根。

26. 60236.288.　　27. 3385135128375.

28. $125a^3x^3+75a^2x^2y+15axy^2+y^3$.

29. $27x^6-27x^5-99x^4+71x^3+132x^2-48x-64$.

30. $8x^6+48ax^5+60a^2x^4-80a^3x^3-90a^4x^2+108a^5x-27a^6$.

31. $1-9x+39x^2-99x^3+156x^4-144x^5+64x^6$.

先開平方。後開立方。求下各式之六乘根。

32. $64x^6+192x^5+240x^4+160x^3+60x^2+12x+1$.

33. $729x^6-1458x^5+1215x^4-540x^3+135x^2-18x+1$.

第三章　指數

133. 以前所論之指數。皆以正整數爲限。則如a^{-3},$a^{\frac{4}{5}}$式之以負數或分數爲指數者。全無意義之可言。然於此種亦不妨加以適當之解釋。此適當之解釋維何。卽就指數爲正整數時之一切定理公式。而解釋指數爲負數或分數時之意義是也。茲詳示於下。

134. **分指數** *Fractional index.*

I. $a^{\frac{1}{n}}$之意義

因 $$(a^m)^n=a^{mn}\ [\S 118].$$

以$\frac{1}{n}$代其m。則得$(a^{\frac{1}{n}})^n=a^{\frac{n}{n}}=a^1=a.$

卽$a^{\frac{1}{n}}$之n乘冪爲a。但a之n乘根爲$\sqrt[n]{a}$。

故$a^{\frac{1}{n}}$表a之n乘根。卽$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$。

例如　$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a},\quad a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a},\quad a^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{a}.$

II. $a^{\frac{m}{n}}$之意義

從$(a^m)^n=a^{mn}$。以$\frac{m}{n}$代其m。則得

$$(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}\times n}=a^m.$$

卽$a^{\frac{m}{n}}$之n乘冪爲a^m。但a^m之n乘根爲$\sqrt[n]{a^m}$。

故$a^{\frac{m}{n}}$表a之m乘冪之n乘根。亦卽表a之n乘根之m乘冪也。

例如　$8^{\frac{2}{3}}=(\sqrt[3]{8})^2=2^2=4,\quad 7^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{7^2}=\sqrt[5]{49},$

$4^{\frac{3}{2}}=\sqrt{4^3}=\sqrt{64}=8.$

135. 負指數 *Negative index*

I. a^0之意義

因 $a^m\times a^n=a^{m+n}$ [§33].

若$m=0$,則得 $a^0\times a^n=a^{0+n}=a^n$.

即 $a^0=\dfrac{a^n}{a^n}=1.$

故凡指數爲0之數皆等於1。

例如 $3^0=1,\ 4^0=1,\ 5^0=1.$

II. a^{-n}之意義

因 $a^n\times a^{-n}=a^{n-n}=a^0=1$. 即 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$.

故a^{-n}等於a^n之倒數。且由是可知凡一分數,其分子中之因數,可移於分母。又其分母之因數,可移於分子。但此因數之指數,須變其符號。

例如 $3^{-2}=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$, $\dfrac{a}{b}=ab^{-1}=\dfrac{1}{a^{-1}b}$,

$$\frac{a^2x^3}{by^2}=a^2b^{-1}x^3y^{-2}=\frac{1}{a^{-2}bx^{-3}y^2}.$$

136. 前§§33, 44之指數定則$a^m\times a^n=a^{m+n}$及$a^m\div a^n=a^{m-n}$. 其m及n無論爲分數或負數皆能相合,茲證之於下。

I. 設$m=\dfrac{q}{p}$, $n=\dfrac{s}{r}$, 則

$$a^{\frac{q}{p}}\times a^{\frac{s}{r}}=a^{\frac{qr}{pr}}\times a^{\frac{ps}{pr}}=\sqrt[pr]{a^{qr}}\times\sqrt[pr]{a^{ps}}$$

$$=\sqrt[pr]{a^{qr}\times a^{ps}}=\sqrt[pr]{a^{qr+ps}}=a^{\frac{qr+ps}{pr}}=a^{\frac{q}{p}+\frac{s}{r}}$$

同理, $a^{\frac{q}{p}}\div a^{\frac{s}{r}}=a^{\frac{q}{p}-\frac{s}{r}}$.

II. 設 $m=-p,\ n=-q$. 則

$$a^{-p}\times a^{-q}=\frac{1}{a^p}\times\frac{1}{a^q}=\frac{1}{a^p\times a^q}=\frac{1}{a^{p+q}}$$

$$=a^{-(p+q)}=a^{-p+(-q)}.$$

又 $$a^{-p}\div a^{-q}=\frac{1}{a^p}\div\frac{1}{a^q}=\frac{a^q}{a^p}=a^{q-p}=a^{-p-(-q)}.$$

如上所示。可知指數為正整數時之一切公式。其在指數為負數或分數時。亦為真確。故凡以負數或分數為指數之式。皆可如指數為正整數之式同法處理之。

137. 茲示指數之演算法如下。

例 1. 求 $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{3}{4}}\times x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}$ 之簡式。

因 $$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4},\ \frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6},\ \frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{13}{12}.$$

故 $$x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{3}{4}}\times x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{4}}y^{\frac{7}{6}}z^{\frac{13}{12}}.$$

例 2. 求 $a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{2}{3}}\div a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}}$ 之簡式。

因 $$\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6},\ \frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}.$$

故 $$a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{2}{3}}\div a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{12}}.$$

例 3. 求 $\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\sqrt{b^{-1}}}{b\sqrt[3]{a^{-2}}}\div\sqrt{\dfrac{a\sqrt{b^{-4}}}{b\sqrt{a^{-2}}}}\right)^6$ 之簡式。

$$\text{原式}=\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}}{ba^{-\frac{2}{3}}}\div\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{-1}}{b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}}\right)^6=\left(a^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}-1}\div a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}b^{-1-\frac{1}{2}}\right)^6$$

$$=\left(a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{3}{2}}\div ab^{-\frac{3}{2}}\right)^6=\left(a^{\frac{4}{3}-1}b^{-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}\right)^6=\left(a^{\frac{1}{3}}b^0\right)^6=a^2$$

例 4.　求以 $x^{\frac{1}{3}}-2$ 乘 $3x^{-\frac{1}{3}}+x+2x^{\frac{2}{3}}$ 之積。

先順 x 之降冪排列。後如常法乘之。

$$
\begin{array}{l}
x+2x^{\frac{2}{3}}+3x^{-\frac{1}{3}} \\
x^{\frac{1}{3}}-2 \\
\hline
x^{\frac{4}{3}}+2x+3 \\
\qquad -2x-4x^{\frac{2}{3}}-6x^{-\frac{1}{3}} \\
\hline
x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{2}{3}}-6x^{-\frac{1}{3}}+3
\end{array}
$$

例 5.　求以 $1+2a^{-1}$ 除 $16a^{-3}-6a^{-2}+5a^{-1}+6$ 之商。

先順 a 之昇冪排列。後如常法除之。

$$
\begin{array}{l}
2a^{-1}+1)\,16a^{-3}-6a^{-2}+5a^{-1}+6\,(8a^{-2}-7a^{-1}+6 \\
\qquad\quad 16a^{-3}+8a^{-2} \\
\hline
\qquad\qquad -14a^{-2}+5a^{-1} \\
\qquad\qquad -14a^{-2}-7a^{-1} \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 12a^{-1}+6 \\
\qquad\qquad\qquad 12a^{-1}+6 \\
\hline
\end{array}
$$

例 6.　求 $\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}-4$ 之平方根。

先去根號。次順 x 之降冪排列。後開平方。

$$
\begin{array}{l}
\qquad x^{\frac{1}{2}}-4+4x^{-\frac{1}{2}}\,(x^{\frac{1}{4}}-2x^{-\frac{1}{4}} \\
\qquad x^{\frac{1}{2}} \\
\hline
2x^{\frac{1}{4}}-2x^{-\frac{1}{4}}\,\big|\,-4+4x^{-\frac{1}{2}} \\
\qquad\qquad\quad -4+4x^{-\frac{1}{2}} \\
\hline
\end{array}
$$

〔注意〕 4 卽 $4x^0$，故其指數高於 $4x^{-\frac{1}{2}}$。

問題三十四

求下列各式之值。

1. $4^{\frac{1}{2}}$.　　2. $8^{\frac{2}{3}}$.　　3. $16^{-\frac{1}{4}}$.　　4. $\left(\frac{1}{100}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

5. $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$　　6. $(125)^{\frac{2}{3}}$.　　7. $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$　　8. 32^{-2}.

試簡約下列各式。

9. $a^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{3}{2}}$.　　10. $x^{\frac{2}{3}}\times x^{\frac{1}{6}}$.　　11. $a^2b^{\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}$.

12. $(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})\div(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$.　　13. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\div\sqrt{y^{\frac{2}{5}}}}{\sqrt{x^3\div y^{\frac{1}{2}}}}\div\dfrac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

下列各題。試求其二式之積。

14. $x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{4}},\ x^{\frac{3}{4}}-y^{\frac{3}{4}}$.　　15. $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}},\ a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$.

16. $x+x^{\frac{1}{2}}+2,\ x+x^{\frac{1}{2}}-2$.　　17. $x^4+x^2+1,\ x^{-4}-x^{-2}+1$.

18. $a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}+1,\ a^{-\frac{1}{3}}-1$.　　19. $a^{\frac{4}{3}}-2+a^{-\frac{4}{3}},\ a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}$.

20. $a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}},\ a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

下列各題。試以第二式除第一式。

21. $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}},\ x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}$.　　22. $a-b,\ a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$.

23. $64x^{-1}+27y^{-2},\ 4x^{-\frac{1}{3}}+3y^{-\frac{2}{3}}$.

24. $x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}},\ x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$.

25. $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}},\ a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}$.

試開下列各式之平方。

26. $(x+x^{-1})^2-4(x-x^{-1})$.　　27. $x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}$.

第八篇　不盡根,虛數

第一章　不盡根

138. 定義　開不盡之根數,謂之不盡根或無理數。例如 $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 皆爲不盡根。又如代數式 $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt{a^2+b^2}$ 等。雖由其 a 及 a^2+b^2 之值,或可開盡。然終不能以代數學之開方法開盡者,亦稱不盡根。

表示不盡根爲何乘根之數,曰此不盡根之次數。例如 $\sqrt{2}$, $\sqrt{a}$ 皆爲二次不盡根。$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{a}$ 皆爲三次不盡根。

139. 不盡根之變化　有理數皆可表以不盡根之形。

例如　$5=\sqrt{25}=\sqrt[3]{125}=\sqrt[n]{5^n}$.

$$a=\sqrt{a^2}=\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[n]{a^n}.$$

異次諸不盡根可化爲同次諸不盡根。其法卽求諸不盡根次數之最小公倍數,爲同次不盡根之次數。

例. 化 $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[3]{b^2}$ 爲同次不盡根。

先求各次數 2, 4, 3 之最小公倍數爲 12。

則　$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{6}{12}}=\sqrt[12]{a^6}$.

$$\sqrt[4]{a^3}=a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{9}{12}}=\sqrt[12]{a^9}.$$

$$\sqrt[3]{b^2}=b^{\frac{2}{3}}=b^{\frac{8}{12}}=\sqrt[12]{b^8}.$$

異次諸不盡根之大小,可各化爲同次不盡根而定之。

例. 問 $\sqrt{5}$ 與 $\sqrt[3]{11}$ 孰大。

因 $\sqrt{5}=\sqrt[6]{125}$, $\sqrt[3]{11}=\sqrt[6]{121}$. 故 $\sqrt{5}$ 大於 $\sqrt[3]{11}$。

140. 由§125得$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$。故凡不盡根可化爲有理數與無理數之積。

例如　$\sqrt{75}=\sqrt{25\times3}=\sqrt{25}\sqrt{3}=5\sqrt{3}$.

如此例$\sqrt{75}$化爲$5\sqrt{3}$。謂之化不盡根爲最簡之形。

反之。有理數與無理數之積。可將其有理數化爲不盡根之形。而入於根號之內。

例如　$5\sqrt{3}=\sqrt{25}\sqrt{3}=\sqrt{25\times3}=\sqrt{75}$.

一不盡根以有理數與無理數之積表之。則其無理數之因數曰無理因數。有理數之因數曰係數。

〔注意〕如無有理數之因數。則此不盡根之係數爲1.

141. 同類不盡根 *Similar surd*　諸不盡根有同一無理因數。或化之而有同一無理因數者。曰同類不盡根。

例如$4\sqrt{3}$與$5\sqrt{3}$爲同類不盡根。又$\sqrt[3]{24}$與$\sqrt[3]{3}$亦爲同類不盡根。何則。因$\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8\times3}=2\sqrt[3]{3}$故也。

142. 不盡根之加減法　同類不盡根之加減法。但以公共無理因數乘其係數之和或差卽得。

例1.　$2\sqrt{7}+3\sqrt{7}=(2+3)\sqrt{7}=5\sqrt{7}$.

例2.　$\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{48}=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-4\sqrt{3}$

$$=(2+5-4)\sqrt{3}=3\sqrt{3}.$$

非同類不盡根之加減法。但將不盡根依其加減之符號而列記之可也。

143. 不盡根之乘除法　同次不盡根之乘法除法。即先各化為最簡。次分別求其係數及無理因數之積或商。即得。但通例乘法之結果。須化為最簡。除法之結果。以分數表之者。則其分母之無理因數須化為有理數。

例 1.　$2\sqrt[3]{4}\times3\sqrt[3]{2}=(2\times3)(\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{2})=6\sqrt[3]{4\times2}$ (§125)

$$=6\sqrt[3]{8}=6\times2=12.$$

例 2.　$3\sqrt{2}\div4\sqrt{3}=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{\sqrt{2\times3}}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}.$

異次不盡根之乘法除法。可先化為同次(§139)。然後如上法乘除之。

例 3.　$7\sqrt{2}\times3\sqrt[3]{5}=7\sqrt[6]{8}\times3\sqrt[6]{25}=21\sqrt[6]{200}.$

例 4.　$2\sqrt{5}\div7\sqrt[3]{3}=2\sqrt[6]{125}\div7\sqrt[6]{9}$

$$=\frac{2}{7}\sqrt[6]{\frac{125}{9}}=\frac{2}{7}\times\frac{\sqrt[6]{125}\times\sqrt[6]{3^4}}{\sqrt[6]{9}\times\sqrt[6]{3^4}}$$

$$=\frac{2}{7}\times\frac{\sqrt[6]{125\times81}}{3}=\frac{2\sqrt[6]{10125}}{21}.$$

144. 複雜不盡根之乘法　與有理多項式之乘法同。

例.　$(6\sqrt{3}-5\sqrt{2})\times(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$

$$=36-10\sqrt{6}+18\sqrt{6}-30=6+8\sqrt{6}.$$

145. 有理補因數 *Rationalizing factor*　有一不盡根。另設一不盡根與之相乘。使其積為有理數者。謂之**有理化** *Rationalise*。而此另設之不盡根。曰原不盡根之**有理補因數**。

獨項式之有理補因數易於求得。

例如 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. 而 $2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2\times2=4$.

故 $\sqrt{8}$ 之有理補因數爲 $\sqrt{2}$。

二項式及多項式之有理補因數不能一一求得。茲僅就用公式可求者。示例於下。

例 1. $a+\sqrt{b}$ 之有理補因數爲 $a-\sqrt{b}$。

何則。因 $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b$ 〔§67 C〕.

例 2. $\sqrt[3]{5}-1$ 之有理補因數爲 $\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1$。

何則。因 $(\sqrt[3]{5}-1)(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}+1)=5-1$ 〔§67 E〕 $=4$.

例 3. $\sqrt[3]{6}+2$ 之有理補因數爲 $\sqrt[3]{36}-2\sqrt[3]{6}+4$.

何則。因 $(\sqrt[3]{6}+2)(\sqrt[3]{6^2}-2\sqrt[3]{6}+4)=6+8$ 〔§67 D〕 $=14$.

146. 複雜不盡根之除法　可先以分數之形表之。後用上節之法。用一式乘其分母分子。化其分母爲有理數。

例 1. 試以 $5-3\sqrt{2}$ 除 $4+3\sqrt{2}$。

$$\frac{4+3\sqrt{2}}{5-3\sqrt{2}}=\frac{(4+3\sqrt{2})(5+3\sqrt{2})}{(5-3\sqrt{2})(5+3\sqrt{2})}$$

$$=\frac{20+18+12\sqrt{2}+15\sqrt{2}}{25-18}$$

$$=\frac{38+27\sqrt{2}}{7}.$$

例 2. 試以 $2\sqrt{ab}-b$ 除 $2a-\sqrt{ab}$.

$$\frac{2a-\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}-b}=\frac{(2a-\sqrt{ab})(2\sqrt{ab}+b)}{(2\sqrt{ab}-b)(2\sqrt{ab}+b)}=\frac{4\sqrt{a^3b}-\sqrt{ab^3}}{4ab-b^2}.$$

147. 定理　設$a\pm\sqrt{x}=b\pm\sqrt{y}$。其$a, b, x, y$,皆爲有理數。則$a=b, x=y$。

何則。既　$a\pm\sqrt{x}=b\pm\sqrt{y}$.

則　$a-b\pm\sqrt{x}=\pm\sqrt{y}$.

兩邊各自乘。$(a-b)^2\pm2(a-b)\sqrt{x}+x=y$.

即　$\pm2(a-b)\sqrt{x}=y-x-(a-b)^2$.

此式若a不等於b。則左邊之無理數。等於右邊之有理數。不合於理。故a不得不等於b。既$a=b$。則從原式可知$\sqrt{x}=\sqrt{y}$。故$x=y$。

〔注意〕 上之定理.其不盡根確係開不盡之無理數.若外表爲不盡根.其實能開盡者.則此定理不能成立.例如$6+\sqrt{9}=5+\sqrt{16}$.不特6不等於5,而$\sqrt{9}$亦不等於$\sqrt{16}$.

148. $a\pm\sqrt{b}$之平方根　在特別之例。可化爲簡單之形。

設　$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$.

兩邊各自乘。$a\pm\sqrt{b}=x+y\pm2\sqrt{xy}$.

由前節定理。　$a=x+y$, $\sqrt{b}=2\sqrt{xy}$.

故　$(x+y)^2-4xy=a^2-b$, 或 $x-y=\sqrt{a^2-b}$.

即　$x=\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})$, $y=\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})$.

故　$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

此式若a^2-b非完全平方數。則右邊反比左邊爲複雜。故此法須$\sqrt{a^2-b}$爲有理數。方可得單簡之形。

例1. 求 $11+2\sqrt{30}$ 之平方根。

設 $$\sqrt{11+2\sqrt{30}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

兩邊各自乘。 $$11+2\sqrt{30}=x+y+2\sqrt{xy}.$$

故得 $$x+y=11,\ xy=30.$$

解之。 $$x=5,\ y=6.$$

故 $$\sqrt{11+2\sqrt{30}}=\sqrt{5}+\sqrt{6}.$$

例2. 求 $4-\sqrt{15}$ 之平方根。

設 $$\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

兩邊各自乘。 $$4-\sqrt{15}=x+y-2\sqrt{xy}.$$

故得 $$x+y=4,\ xy=\frac{15}{4}.$$

解之。 $$x=\frac{5}{2},\ y=\frac{3}{2}.$$

故 $$\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}.$$

問題三十五

下列各不盡根。試化其有理因數於根號之內。

1. $3\sqrt{5}$. *2.* $3\sqrt[3]{21}$. *3.* $2\sqrt[4]{7}$. *4.* $a^2bc\sqrt{bc}$.

試化下列各不盡根爲最簡之形。

5. $\sqrt{50}$. *6.* $\sqrt[3]{108}$. *7.* $\sqrt[3]{2^4\times3^3\times5^6}$.

8. $\sqrt{\frac{7}{12}}$. *9.* $\sqrt{\frac{5}{9}}$. *10.* $\sqrt{1\frac{11}{16}}$. *11.* $\sqrt{3\frac{1}{8}}$.

試化下列各題之不盡根爲同次。

12. $\sqrt{a},\ \sqrt[3]{a^5}$. *13.* $\sqrt[3]{a^2},\ \sqrt[4]{a^7}$. *14.* $\sqrt[7]{x^3},\ \sqrt{x^5y^3}$.

15. $\sqrt[12]{x^7},\ \sqrt[4]{xy^3},\ \sqrt[6]{x^5}$. *16.* $\sqrt{5},\ \sqrt[3]{11},\ \sqrt[6]{13}$.

17. 問$\sqrt{14}$與$\sqrt[3]{5^2}$孰大。

18. 有$2\sqrt[6]{5}$, $3\sqrt[3]{2}$, $4\sqrt{2}$三數試順其大小排列之。

19. 有$\sqrt{7}$, $2\sqrt[3]{3}$, $5\sqrt[4]{4}$三數試順其大小排列之。

求下列各式之結果。

20. $\sqrt{50}+\sqrt{98}$.　　21. $2\sqrt{28}-\sqrt{63}$.

22. $3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{625}$.　　23. $3\sqrt[3]{72}-2\sqrt[3]{243}$.

24. $\sqrt{512}-\sqrt{50}-\sqrt{98}$.　　25. $3\sqrt{2}+4\sqrt{8}-\sqrt{32}$.

26. $2\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{108}$.　　27. $2\sqrt{3}+\sqrt{1\frac{1}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}$.

28. $4\sqrt{5}\times 7\sqrt{6}$.　　29. $\sqrt{12}\times\sqrt{24}$.

30. $\sqrt[3]{7}\times\sqrt[3]{49}$.　　31. $4\sqrt{5}\times\sqrt[3]{11}$.

32. $\sqrt{10}\times\sqrt[3]{100}$.　　33. $\sqrt{18}\div\sqrt{50}$.

34. $\sqrt[3]{7}\div\sqrt{2}$.　　35. $2\sqrt[3]{2}\div\sqrt{6}$.

36. $(\sqrt{20}\times\sqrt{96})\div\sqrt{30}$.　　37. $(\sqrt[3]{147}\div\sqrt[3]{35})\times\sqrt[3]{735}$.

試化下列各分數式之分母爲有理數。

38. $\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$.　　39. $\dfrac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}-1}$.　　40. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2-3\sqrt{2}}$.

41. $\dfrac{13-\sqrt{3}}{12-3\sqrt{3}}$.　　42. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}$.　　43. $\dfrac{2\sqrt{a}-3\sqrt{x}}{\sqrt{a}+5\sqrt{x}}$.

44. $\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2-y^2}}$.　　45. $\dfrac{2\sqrt{a+b}+3\sqrt{a-b}}{2\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$.

求下列各數之平方根。

46. $3+2\sqrt{2}$.　　47. $5-\sqrt{24}$.　　48. $21-2\sqrt{38}$.

49. $2a-2\sqrt{a^2-x^2}$.　　50. $2x+3-2\sqrt{x^2+3x+2}$.

第二章　虛數

149. 定義　虛數 *Imaginary number* 之定義及形式。已詳於前 §103。即如 $\sqrt{-a}$。但視為其平方等於 $-a$ 之數可也。惟 $\sqrt{-a}=\sqrt{-1\times a}=\sqrt{-1}\sqrt{a}$。此 $\sqrt{-1}$ 為虛數單位 *Imaginary unit*。通常以 i 字表之。即 $\sqrt{-a}=i\sqrt{a}$。

茲示虛數之乘冪如下。

$(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1}$, 即 $i^1=i$.　　$(\sqrt{-1})^2=-1$, 即 $i^2=-1$.

$(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}$, 即 $i^3=-i$.　　$(\sqrt{-1})^4=1$, 即 $i^4=1$.

由是　$i^5=i^4\times i^1=1\times i^1=i$,　$i^6=i^4\times i^2=1\times i^2=-1$,

$i^7=i^4\times i^3=1\times i^3=-i$,　$i^8=i^4\times i^4=1\times i^4=1$.

同理。設 n 為正整數。m 為 4 除 n 之餘數。則

$$i^{4n+m}=1\times i^m=i^m.$$

150. 複虛數 *Complex quantity*　設 a 與 b 為實數。則凡如 $a+bi$ 之形者。曰複虛數。其加減乘除之法。與實數同。

例 1.　$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$

例 2.　$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$

例 3.　$(a+bi)\times(c+di)=(ac+bci+adi+bdi^2$

$$=(ac-bd)+(bc+ad)i.$$

例 4.　$(a+bi)\div(c+di)=\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$

$$=\frac{ac+bci-adi-bdi^2}{c^2-d^2i^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

151. 共軛複虛式 *Conjugate complex expression*　凡如 $a+bi$ 與 $a-bi$ 之二式,曰共軛複虛式。其和及積皆爲實數。

即　　$(a+bi)+(a-bi)=2a.$

$$(a+bi)\times(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2.$$

152. 定理　I.　凡虛數不能等於實數。

假設　　$a+bi=c.$

則　　$bi=c-a.$

兩邊各自乘。　$-b^2=(c-a)^2$

但 b^2 與 $(c-a)^2$ 皆當爲正數。則負數等於正數。於理不合。故 $a+bi$ 不能等於 c。即虛數不能等於實數。

II.　如 $a+bi=c+di$。則 $a=c,\ b=d$。

既　　$a+bi=c+di.$

則　　$(b-d)i=c-a.$

兩邊各自乘　$-(b-d)^2=(c-a)^2$

此式若非 $b=d,\ a=c$。則負數等於正數。於理不合。

III.　如 $a+bi=0$。則 $a=0,\ b=0$。

既　　$a+bi=0.$

則　　$a=-bi.$

兩邊各自乘。　$a^2=(-b)^2i^2=-b^2.$

即　　$a^2+b^2=0.$

此式之 $a^2,\ b^2$ 皆當爲正。其和爲 0。則必各爲 0 而後可。故 $a=0,\ b=0.$

153. a+bi 之平方根 在特別之例。可化爲簡單之形。

設 $$\sqrt{a+bi}=x+yi.$$

兩邊各自乘。 $$a+bi=x^2-y^2+2xyi.$$

由 §152 定理 II。得 $x^2-y^2=a,\ 2xy=b.$

故 $$(x^2-y^2)^2+(2xy)^2=a^2+b^2,\ 或\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}.$$

即 $$x=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}},\qquad y=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

故 $$\sqrt{a+bi}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)i.$$

例. 求 $8+6i$ 之平方根。

以 $a=8,\ b=6$ 代入上式，則

$$\sqrt{8+6i}=\sqrt{\frac{\sqrt{8^2+6^2}+8}{2}}+\left(\sqrt{\frac{\sqrt{8^2+6^2}-8}{2}}\right)i=\sqrt{9}+\sqrt{1}i=3+i$$

(注意) 如此節所示，凡開得之方根，皆取其正數.

問題三十六

1. $a^2-3b+a\sqrt{-2}$。以 $a^2-3b-a\sqrt{-2}$ 乘之。

2. $2\sqrt{-3}+5\sqrt{-2}$。以 $2\sqrt{-3}-5\sqrt{-2}$ 乘之。

3. 化 $\dfrac{3\sqrt{-2}-2\sqrt{-5}}{2\sqrt{-5}+3\sqrt{-2}}$ 之分母爲有理式。

4. 求 $\dfrac{a}{1-2\sqrt{-1}}+\dfrac{a}{1+2\sqrt{-1}}$ 之簡式。

5. 求 $\dfrac{5+2\sqrt{-1}}{5-2\sqrt{-1}}-\dfrac{5-2\sqrt{-1}}{5+2\sqrt{-1}}$ 之簡式。

6. 求 $5+12\sqrt{-1}$ 之平方根。

第九篇　比,比例,變數

第一章　比

154. 定義　a 對於 b 之**比** *Ratio*。即 a 含 b 幾倍之關係也。常以 $a:b$ 表之，此 a 與 b 曰比之項 *Terms*。而 a 曰前項 *Antecedent*。b 曰後項 *Consequent*。

比之值者。即為後項除前項之商。亦即同於分數之值。如 $a:b$ 同於 $\frac{a}{b}$。故凡第五篇之分數各定理。皆可通用於此。

比之值大於 1 者曰**優比** *Ratio of greater inequality*。小於 1 者曰**劣比** *Ratio of less inequality*。等於 1 者曰**等比** *Ratio of equality*。

155. 比之大小　比較二比之大小。但各以分數表其值。再通分而比較其分子可也。

例如 a, b, c, d 皆為正數。而比較 $a:b$ 與 $c:d$ 之大小。則 $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}, \frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$。故若 ad 大於 bc。則前比大於後比。若 ad 等於 bc。則二比相等。若 ad 小於 bc。則前比小於後比。

156. 定理　I.　比之兩項。同以一數加之。在優比其值減少。在劣比其值增加。

設 a, b, x 皆為正數。而於 $\frac{a}{b}$ 之兩項各加 x。得 $\frac{a+x}{b+x}$。比較 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{a+x}{b+x}$ 之大小。由前節但比較 $a(b+x)$ 與 $b(a+x)$ 可矣。

而 $a>b$. 則 $ab+ax>ab+bx$. 故 $\frac{a}{b}>\frac{a+x}{b+x}$.

$a<b$. 則 $ab+ax<ab+bx$. 故 $\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}$.

II. 比之兩項。同減較小於各項之一數。在優比其值增加。在劣比其值減少。

如前設 x 小於 a 或 b。而於 $\frac{a}{b}$ 之兩項各減 x。得 $\frac{a-x}{b-x}$。欲比較 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{a-x}{b-x}$ 之大小。但比較 $a(b-x)$ 與 $b(a-x)$ 可矣。

而 $a>b$. 則 $ab-ax<ab-bx$. 故 $\frac{a}{b}<\frac{a-x}{b-x}$.

$a<b$. 則 $ab-ax>ab-bx$. 故 $\frac{a}{b}>\frac{a-x}{b-x}$.

157. **複比** *Compound ratio*。 有諸比。以其諸前項之積爲前項。諸後項之積爲後項。此所成之比曰**複比**。

例如 $a:b$ 及 $c:d$ 之複比爲 $ac:bd$。

又如 $a^2:b^2$ 爲 $a:b$ 之**二乘比** *Duplicate ratio*。

$a^3:b^3$ 爲 $a:b$ 之**三乘比** *Triplicate ratio*。

$\sqrt{a}:\sqrt{b}$ 爲 $a:b$ 之**平方根比** *Sub-duplicate ratio*。

158. 比之二項。可以精密之整數表之者爲**可通約** *Commensurable*。如 $7\frac{1}{2}:3\frac{1}{3}$ 卽 $\frac{15}{2}:\frac{10}{3}$。如各以 $\frac{5}{6}$ 除之。則爲 $9:4$。故 $7\frac{1}{2}:3\frac{1}{3}=9:4$ (§84)。非然者則爲**不可通約** *Incommensurable*。如正方形之對角線與其一邊之比若 $\sqrt{2}:1$。此 $\sqrt{2}$ 不能求其相等之整數或分數。僅可求其近似値而已。

問題三十七

1. 設$x+1:x-3$等於$3:2$。求x之值。

2. 有二數。其比若$7:5$。其差爲34。求此二數。

3. 問以何數加於$3:11$之兩項。則等於$3:4$。

4. 有二數。其和與差之比若$5:4$。求此二數之比。

5. 問$2:3$之三乘比。與$5:9$之二乘比孰大。

6. 有二數。其比若$5:8$。如小數加8。大數減5。則其比若$28:27$。求二數各幾何。

7. 有二數。其比若$3:4$。其差與其平方差之比若$1:21$。求二數各幾何.

8. 有二數。其比若$5:6$。其和與其平方差之比若$1:7$。求二數各幾何。

9. 設$x:1$爲$8:x$之二乘比。求x之值。

10. 問$3:4$與$5:6$與$8:9$之複比若何。

11. 問$\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$與$\frac{3}{2}:\frac{1}{3}$之複比若何。

12. 由$2:3$之三乘比與$3:4$之二乘比所成之複比。必爲$1:6$。試證之。

13. 父子年齡之比若$2:1$。而在十年前。其年齡之比若$8:3$。問今年父子各幾歲。

14. 有甲乙二村。甲村男女數之比若$14:15$。乙村男女數之比若$10:9$。而兩村合併。其男女數相等。求甲乙二村人口之比若何。

第二章　比例

159. 定義　設 a, b, c, d 四數。其 a 與 b 之比。等於 c 與 d 之比。則此四數成比例 *Proportion*。常以 $a:b=c:d$ 表之。而 a, b, c, d 曰**比例數** *Proportional*。其 a 與 d 曰**外項** *Extremes*。b 與 c 曰**中項** *Means*。

160. 定理　a, b, c, d 成比例。則 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。故 $ad=bc$。卽外項之積等於中項之積。反之。若 $ad=bc$。則以 a 與 d 爲外項(或中項)。b 與 c 爲中項(或外項)。亦能成比例明矣。

由是凡知比例數中之三數。可以求得其餘一數。

卽 $a=\frac{bc}{d}$, $b=\frac{ad}{c}$, $c=\frac{ad}{b}$, $d=\frac{bc}{a}$.

161. 推論　設 a, b, c, d 成比例。則因 $ad=bc$。故

I. $b:a=d:c$。是謂**反轉之理** *Invertendo*。

II. $a:c=b:d$。是謂**更迭之理** *Alternando*。

又因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。兩邊各加 1。得 $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$。卽 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$。

又若兩邊各減 1。則得 $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$。卽 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$。故

III. $a+b:b=c+d:d$. 是謂**合比之理** *Componendo*。

IV. $a-b:b=c-d:d$. 是謂**分比之理** *Dividendo*。

又以 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ 之左邊及右邊。各除 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ 之左邊及右邊。則得 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$. 故

V. $a+b:a-b=c+d:c-d$. 是謂**分比合比之理**。

〔注意〕 §92 及 §93 各定理。皆可通用於比例。

162. 連比例 *Continued proportion* 第一數與第二數之比。第二數與第三數之比。第三數與第四數之比。順是以下。各比俱相等者。則此諸數成連比例。

例如 $a:b=b:c=c:d=\cdots$。則 a, b, c, d 等成連比例。

三數成連比例。如 $a:b=b:c$。其 b 爲 a 與 c 之**比例中項** *Mean proportional*，而 c 爲 a 與 b 之**第三比例項** *Third proportional*。

163. 定理　a, b, c 成連比例。則 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$.

卽　$b^2=ac$　或 $b=\sqrt{ac}$.

故二數之比例中項。等於其積之平方根。

又　$\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{b}{c}\times\frac{b}{c}=\frac{b^2}{c^2}$.

卽　$a:c=a^2:b^2=b^2:c^2$.

故三數爲連比例。其第一數與第三數之比。等於第一數與第二數之二乘比。又等於第二數與第三數之二乘比。

164. 例解　例 1.　設 $a:b=c:d$。試證下式。

$$ab+cd:ab-cd=a^2+c^2:a^2-c^2.$$

令　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=x$. 則 $a=bx$. $c=dx$.

由是　$ab+cd=bx\cdot b+dx\cdot d=(b^2+d^2)x$.

$ab-cd=bx\cdot b-dx\cdot d=(b^2-d^2)x$.

$a^2+c^2=b^2x^2+d^2x^2=(b^2+d^2)x^2$.

$a^2-c^2=b^2x^2-d^2x^2=(b^2-d^2)x^2$.

故 $$\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{(b^2+d^2)x}{(b^2-d^2)x}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}.$$

又 $$\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\frac{(b^2+d^2)x^2}{(b^2-d^2)x^2}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}.$$

故 $$\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}.$$

卽 $$ab+cd : ab-cd :: a^2+c^2 : a^2-c^2.$$

例2. 若 $(3a+6b+c+2d)(3a-6b-c+2d)$

$=(3a-6b+c-2d)(3a+6b-c-2d)$. 試證 $a:b::c:d$.

從原式得 $$\frac{3a+6b+c+2d}{3a-6b+c-2d}=\frac{3a+6b-c-2d}{3a-6b-c+2d}.$$

令 $$\begin{cases}A=3a+6b+c+2d, & B=3a-6b+c-2d,\\ C=3a+6b-c-2d, & D=3a-6b-c+2d.\end{cases}$$

則 $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$. 故 $\frac{A+B}{A-B}=\frac{C+D}{C-D}$ (§ 161 V).

而 $A+B=2(3a+c)$, $A-B=2(6b+2d)$.

$C+D=2(3a-c)$, $C-D=2(6b-2d)$.

故 $$\frac{2(3a+c)}{2(6b+2d)}=\frac{2(3a-c)}{2(6b-2d)}.$$

卽 $\frac{3a+c}{6b+2d}=\frac{3a-c}{6b-2d}$. 卽 $\frac{3a+c}{3a-c}=\frac{6b+2d}{6b-2d}$.

又 $$\frac{(3a+c)+(3a-c)}{(3a+c)-(3a-c)}=\frac{(6b+2d)+(6b-2d)}{(6b+2d)-(6b-2d)} \text{ (§ 161 V).}$$

卽 $\frac{6a}{2c}=\frac{12b}{4d}$. 卽 $\frac{6a}{12b}=\frac{2c}{4d}$.

卽 $\frac{a}{2b}=\frac{c}{2d}$. 卽 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

故 $$a:b::c:d.$$

例3.　設 $a:b=c:d$. 試證其各比之值。等於

$$\frac{\sqrt{(la^2+mac+nc^2)}}{\sqrt{(lb^2+mbd+nd^2)}}.$$

令　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=x$. 則 $a=bx$. $c=dx$.

因　$a^2=b^2x^2$, $c^2=d^2x^2$, $ac=bdx^2$.

故　$\frac{\sqrt{(la^2+mac+nc^2)}}{\sqrt{(lb^2+mbd+nd^2)}}=\frac{\sqrt{(lb^2x^2+mbdx^2+nd^2x^2)}}{\sqrt{(lb^2\quad+mbd\quad+nd^2\quad)}}=\sqrt{x^2}=x$.

例4.　設 a, b, c 為連比例。試證

$$(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2.$$

$$(a+b+c)(a-b+c)=(a+c)^2-b^2=a^2+2ac+c^2-b^2.$$

〔因 $ac=b^2$〕　　$=a^2+2b^2+c^2-b^2=a^2+b^2+c^2$.

問題三十八

試求下列各比例式中 x 之值。

1. $x-1:x-2::x-3:x+4$.
2. $6+x:3+2x::10-x:13-3x$.
3. 有二數。其和為116。其比例中項為40。求此二數。
4. 三數為連比例。其和14。其各平方之和84。求此三數。

設 $a:b=c:d$。試證下列各式。

5. $a^2c+ac^2:b^2d+bd^2=(a+c)^3:(b+d)^3$.
6. $a^2+b^2:ab=c^2+d^2:cd$.

設 a, b, c 為連比例。試證下列各式。

7. $a:c=a^2+b^2:b^2+c^2$.
8. $a+b+c:a-b+c=(a+b+c)^2:a^2+b^2+c^2$.

第三章 變數

165. 常數 *Constant* **變數** *Variable* 數之一定不易者曰常數。隨時消長者曰變數。常數恆如已知數以 a, b, c 等字表之。變數恆如未知數以 x, y, z 等字表之。

166. 正變 *Vary directly* 設 x 及 y 爲變數。其比爲常數，則 y 謂從 x 而正變。常以 $y \propto x$ 表之。

由是若其比爲 k。則

$$y : x = k. \quad 即\ \frac{y}{x} = k. \quad 故\ y = kx.$$

例如論斤買物。斤數加倍。則其價亦加倍。斤數減半。則其價亦減半。卽其價從斤數而正變也。其斤價則爲常數。

167. 反變 *Vary inversely* 設 x 及 y 爲變數。而 y 與 $\frac{1}{x}$ 之比爲常數。則 y 謂從 x 而反變。常以 $y \propto \frac{1}{x}$ 表之。

$$由是\quad y : \frac{1}{x} = k. \quad 故\ y = \frac{k}{x}.\ 及\ xy = k.$$

例如數人成就一事。人數愈多則日數愈少。人數愈少則日數愈多。卽日數從人數而反變也。

168. 定理 有 x, y, z 三數。若 z 爲常數。則 $y \propto x$。又 x 爲常數。則 $y \propto z$。若 x, z 俱變。則 $y \propto xz$.

z 不變。假設 y 變爲 y' 時。x 變爲 x'。又 x' 不變。假設 y' 變爲 y'' 時。z 變爲 z'。則得其三組對應之值如下。

$$x, y, z. \qquad x', y', z. \qquad x', y'', z'.$$

而　$\frac{y}{y'}=\frac{x}{x'}$……(1)　　$\frac{y'}{y''}=\frac{z}{z'}$……(2)

由(1)(2)二式。$\frac{y}{y''}=\frac{xz}{x'z'}$.　即 $\frac{y}{xz}=\frac{y''}{x'z'}$.

故 $y\propto xz$。

例如三角形之面積。若其高為常數。則從其底邊而變。若其底邊為常數。則從其高而變。若其高與底邊俱變。則從二者之積而變。

169. 例解　**例 1.**　若 $y\propto x$ 及 $x\propto z$。則 $y\propto z$。求證。

由 §166。　$y=kx$ 及 $x=k'z$.

則　$y=kk'z$.

但 k, k' 為常數。故　$y\propto z$.

例 2.　y 從 x 而反變。且 $y=2$ 時。$x=36$。問 $y=9$ 時。x 之值如何。

由 §167。　$k=xy$.　即 $k=2\times 36=72=xy$.

然　$y=9$.　故 $x=\frac{72}{9}=8$.

例 3.　若 $(x+y)\propto(x-y)$。則 $(x^2+y^2)\propto xy$。試證之。

由 §166.　$x+y=k(x-y)$.

兩邊平方之。$(x+y)^2=k^2(x-y)^2$.

即　$(x^2+y^2)(k^2-1)=2xy(k^2+1)$.

即　$x^2+y^2=\frac{2(k^2+1)}{k^2-1}xy$.

但 k 為常數。故 $\frac{2(k^2+1)}{k^2-1}$ 亦為常數。故 $x^2+y^2\propto xy$。

例4.　錐體之體積。從其高與底面積之積而變。今有錐體。其底面積60方尺。高14尺。體積280立方尺。問體積390立方尺,高26尺之錐體。其底面積如何。

設V為體積。A為底面積。h為高。則由題意得

$$V=kAh.$$

以V, A, h之值代入之。

$$280=k\times60\times14.\quad 即\quad k=\frac{280}{60\times14}=\frac{1}{3}.$$

故　$V=\frac{1}{3}Ah.$

今第二之錐體　$V=390, h=26.$

則　$390=\frac{1}{3}A\times26.$

故　$A=45.$　即底面積45方尺.

例5.　氣體之體積。從其絕對溫度而正變。從其壓力而反變。今壓力15。溫度260。體積200立方吋。問壓力18。溫度390。則體變如何。

設V為體積。P為壓力。T為絕對溫度。由§168得

$$V=kT\times\frac{1}{P}.$$

以V, T, P之值代入之。

$$200=k\times260\times\frac{1}{15}.\quad 即\quad k=\frac{150}{13}.$$

今$T=390, P=18.$

則　$$V=\frac{150}{13}\times390\times\frac{1}{18}=250.$$

即所求之體積為250立方吋。

問題三十九

1. $x^2 \propto y$。其 $x=2$. 則 $y=3$。若 $x=6$。則 y 如何。

2. A 從 B 而正變。從 C 而反變。今 $B=15$, $C=6$ 時。$A=10$。問 $B=8$, $C=2$ 時。A 之值如何。

3. $x^2 \propto y^3z$。設以 1, 2, 3 爲 x, y, z 一對之值。問連此三變數作方程式如何。

4. $x \propto \frac{y}{z}$。而 $y \propto z$。則 x 爲常數。試證之。

5. 圓之面積。從其半徑之平方而正變。今半徑10尺之圓面積爲 314.159 平方尺。問半徑 7 尺之圓面積如何。

6. 球之體積。從其半徑之立方而正變。今半徑 1 尺之球體積爲4.188立方尺。問半徑 3 尺之球體積如何。

7. 物體墜下之距離。從其時間之平方而正變。今於 2 秒鐘墜下之距離爲64尺。問於 6 秒鐘墜下之距離如何。

8. 海岸遠眺。目力所及之距離。從其目高之平方根而正變。今目高 6 呎。能望見 3 哩。問目高 216 呎。能望見幾哩。

9. 地心吸力。從兩物質質量之積而正變。從其距離之平方而反變。今質量 8 與 3 之物體。距離 2。其吸力 2。問質量24與40之物體。距離 8。其吸力幾何。

10. 汽車行某距離之時間。從其距離而正變。從其速度而反變。又速度從其每哩需煤噸數之平方根而正變。從其列車之數而反變。今連結18列車。每半時行25哩。需煤10噸。問連結16列車。欲於28分鐘行21哩。需煤幾噸。

第十篇 級數

第一章 等差級數

170. 定義 若干之數。依一定之順序排列。其中任一數與其前一數之差俱相等。則此諸數曰等差級數或算術級數 *Arithmetical progression*。恆以 *A.P.* 表之。此相等之差曰公差 *Common difference*。而各數皆曰項 *Term*。第一數曰初項 *First term*。最後數曰末項 *Last term*。

例如 3, 5, 7, 9, 11 與 9, 5, 1, −3, −7, −11 與 a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$ 皆為 *A.P.* 而第一之公差為 2。初項為 3。末項為 11。第二之公差為 −4。初項為 9。末項為 −11。第三之公差為 d。初項為 a。末項為 $a+3d$。

171. 第n項 設等差級數之初項為 a。公差為 d。末項為 l。項數為 n。則

初項	二項	三項	四項	末項
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+(n-1)d$

即 $$l=a+(n-1)d\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(I)}$$

172. n項之和 承上。設以 s 表 n 項之和。則

$$s=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-d)+l$$

又 $$s=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+d)+a$$

相加 $$2s=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)+(a+l)$$
$$=n(a+l).$$

故 $$s=\frac{n}{2}(a+l)\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(II)}$$

又以(I)式代入(II)式。則得

$$s=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}\cdots\cdots\cdots(III)$$

173. 由上(I)(II)(III)三公式。凡等差級數。若已知 a, d, l, n, s 中之三數。即可求得其餘二數。

例 1. 有等差級數 4, 7, 10, 13 等。問其第八項如何。

$a=4$, $d=7-4=3$, $n=8$. 由(I)式。

$$l=4+(8-1)3=25.$$

例 2. 有等差級數。首項 5。末項 37。項數 9。求總和。

$a=5$, $l=37$, $n=9$. 由(II)式。

$$s=\frac{9}{2}(5+37)=189$$

例 3. 有等差級數。首項 4。公差 3。項數 10。求總和。

$a=4$, $d=3$, $n=10$. 由(III)式。

$$s=\frac{10}{2}\left\{2\times4+(10-1)3\right\}=175.$$

例 4. 由 d, l, s 求 a。

由(I)。 $n=\frac{l-a+d}{d}\cdots\cdots(1)$ 　由(II)。 $n=\frac{2s}{a+l}\cdots\cdots(2)$

由(1)(2)。 $\frac{l-a+d}{d}=\frac{2s}{a+l}.$

簡之 　$a^2-ad=l^2+ld-2ds.$

解之。 　$a=\frac{1}{2}\left\{d\pm\sqrt{(2l+d)^2-8ds}\right\}.$

174. 公式表 設等差級數之初項爲 a。公差爲 d。末項爲 l。項數爲 n。總和爲 s。則如前節例 4 類推。可得公式如下表。凡等差級數所能有之問題。皆可依此表求之。

	由	求	公 式
1	$a\ d\ n$	l	$l=a+(n-1)d$
2	$a\ d\ s$		$l=\frac{1}{2}[-d\pm\sqrt{8ds+(2a-d)^2}]$
3	$a\ n\ s$		$l=\frac{2s}{n}-a$
4	$d\ n\ s$		$l=\frac{s}{n}+\frac{(n-1)d}{2}$
5	$a\ d\ n$	s	$s=\frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$
6	$a\ d\ l$		$s=\frac{l+a}{2}+\frac{l^2-a^2}{2d}$
7	$a\ n\ l$		$s=\frac{n}{2}(a+l)$
8	$d\ n\ l$		$s=\frac{1}{2}n[2l-(n-1)d]$
9	$d\ n\ l$	a	$a=l-(n-1)d$
10	$d\ n\ s$		$a=\frac{s}{n}-\frac{(n-1)d}{2}$
11	$d\ l\ s$		$a=\frac{1}{2}[d\pm\sqrt{(2l+d)^2-8ds}]$
12	$n\ l\ s$		$a=\frac{2s}{n}-l$
13	$a\ n\ l$	d	$d=\frac{l-a}{n-1}$
14	$a\ n\ s$		$d=\frac{2(s-an)}{n(n-1)}$
15	$a\ l\ s$		$d=\frac{l^2-a^2}{2s-l-a}$
16	$n\ l\ s$		$d=\frac{2(nl-s)}{n(n-1)}$
17	$a\ d\ l$	n	$n=\frac{l-a}{d}+1$
18	$a\ d\ s$		$n=\frac{d-2a\pm\sqrt{(2a-d)^2+8ds}}{2d}$
19	$a\ l\ s$		$n=\frac{2s}{l+a}$
20	$d\ l\ s$		$n=\frac{2l+d\pm\sqrt{(2l+d)^2-8ds}}{2d}$

〔注意〕 項數n必爲正整數.如有分數值或負數值者.宜棄去之.

175. 已知$A.P.$之任二項。即可求得其初項及公差。

設第k項爲α。第m項爲β。其k, m, α, β爲已知數。則以a代初項。d代公差。而得

$$a+(k-1)d=\alpha, \qquad a+(m-1)d=\beta.$$

依聯立一次方程式解之。可得a, d之值。

例. $A.P.$之第三項爲7。第五項爲13。求其初項及公差。

以a爲初項。d爲公差。則得

$$a+2d=7, \qquad a+4d=13.$$

解之。$a=1$, $d=3$. 即初項爲1。公差爲3

176. 等差中項 *Arithmetical mean*　三數成$A.P.$。則第二項稱爲其餘二項之等差中項。

例如a, A, b成$A.P.$。則A爲a, b之等差中項。

由定義$A-a=b-A$. 故　$A=\frac{a+b}{2}$.

多數成$A.P.$。則其初項末項間之諸項。稱爲此二項之等差諸中項。

已知二數之間。可以插入多數之等差中項。

例如於a, b之間。插入n個等差中項。此即與以a爲初項。b爲末項。項數爲$n+2$。作等差級數無異。今以d爲公差。則由§174公式13。得

$$d=\frac{b-a}{n+1}.$$

故此級數爲a, $a+\frac{b-a}{n+1}$, $a+\frac{2(b-a)}{n+1}$, ..., $a+\frac{n(b-a)}{n+1}$, b.

問題四十

求下列 $A.P.$ 之末項及總和。

1. $-7, -2, 3$ 至第10項。 *2.* $1, 2, 3$ 至第100項。

3. $4, 5\frac{1}{4}, 6\frac{1}{2}$ 至第17項。 *4.* $30, 27, 23$ 至第21項。

求下列 $A.P.$ 之項數。

5. $5, 2, -1, \cdots\cdots -55.$ *6.* $13, 17, 21, \cdots 57.$

7. $A.P.$ 之初項 4。末項 34。項數 11。求公差與總和。

8. $A.P.$ 之初項 120。項數 16。總和 960。求公差與末項。

9. $A.P.$ 之初項 -12。公差 4。末項 40。求項數與總和。

10. $A.P.$ 之初項 7。末項 49。總和 812。求項數與公差。

11. $A.P.$ 之公差 $\frac{2}{3}$。項數 24。總和 56。求初項與末項。

12. $A.P.$ 之第三項爲 41。第十一項爲 97。求初項及公差。

13. 試於 2 與 12 之間。插入七個等差中項。

14. 問 2 與何數間。可插入和數爲 68 之八個等差中項。

15. 有四數爲 $A.P.$。其和爲 6。其各平方和爲 54。求各數。

16. 有旅人至相距 140 里之處。第一日行若干里。其後每日減 2 里。行 7 日而到。問第一日所行之里數。

17. 甲乙二人於同時同處順向而行。甲每日行 10 里。乙初日行 8 里。以後每日遞增半里。問經幾日後。兩人仍在一處。

18. 甲乙二人在相隔 343 里之處。同時起身。相向而行。甲逐日增 2 里。乙逐日減 5 里。至相遇之一日。每人各行 20 里。求旅行之日數。

第二章　等比級數

177. 定義　若干之數。依一定之順序排列。其中任一數與其前一數之比俱相等。則此諸數曰等比級數或幾何級數 *Geometrical progression*。恆以 *G.P.* 表之。此相等之比曰公比 *Common ratio*。而各數皆曰項。第一數曰初項。最後數曰末項。

例如 $3, 6, 12, \cdots, 384$ 與 $6, -2, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{2}{243}$ 與 $a, ar, ar^2, \cdots, ar^{n-1}$ 皆為 *G.P.*。而第一之初項為 3。公比為 2。末項為 384。第二之初項為 6。公比為 $-\frac{1}{3}$。末項為 $\frac{2}{243}$。第三之初項為 a。公比為 r。末項為 ar^{n-1}。

178. 第 n 項　設等比級數之初項為 a。公比為 r。末項為 l。項數為 n。則

初項	二項	三項	四項	末項
a	ar	ar^2	ar^3	ar^{n-1}

即　　$$l = ar^{n-1} \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{I})$$

179. n 項之和　承上設以 s 表 n 項之和。則

$$s = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} \cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

兩邊各以 r 乘之。得

$$rs = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + ar^n \cdots\cdots (b)$$

從 (b) 減 (a)。得 $rs - s = ar^n - a$.　即 $s(r-1) = a(r^n - 1)$。

故　　$$s = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{II})$$

又以 l 爲末項。則 $l=ar^{n-1}$。故 (II) 式可變之如下。

$$s=\frac{lr-a}{r-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(III)}$$

180. 由上 (I) (II) (III) 三公式。凡等比級數。若已知 a, r, l, n, s 中之三數。即可求得其餘二數。

例 1. 有 $G.P.$ 如 3, 6, 12, …。試求其第八項及八項之和。

$a=3,\ r=\frac{6}{3}=2,\ n=8.$

由(I)。 $l=3\times 2^{8-1}=384.$

由(II)。 $s=\dfrac{3(2^8-1)}{2-1}=765.$

或由(III)。 $s=\dfrac{384\times 2-3}{2-1}=765.$

例 2. 由 r, n, s 求 l。

由(I)。 $a=\dfrac{l}{r^{n-1}}.$

代入(III)。 $s=\dfrac{lr-\dfrac{l}{r^{n-1}}}{r-1}.$

即 $(r-1)s=\dfrac{(r^n-1)}{r^{n-1}}l.$

故 $l=\dfrac{(r-1)r^{n-1}s}{r^n-1}.$

181. 公式表　設等比級數之初項爲 a。公比爲 r。末項爲 l。項數爲 n。總和爲 s。則如前節例 2 類推。可得公式如下表。凡等比級數所能有之問題。皆可依此表求之。惟求 n 不在其列。因須用對數演算。此時學者難以領悟焉。

	由	求	公　　式
1	$a\ r\ n$	l	$l=ar^{n-1}$
2	$a\ r\ s$		$l=\frac{a+(r-1)s}{r}$
3	$a\ n\ s$		$l(s-l)^{n-1}-a(s-a)^{n-1}=0$
4	$r\ n\ s$		$l=\frac{(r-1)sr^{n-1}}{r^n-1}$
5	$a\ r\ n$	s	$s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$
6	$a\ r\ l$		$s=\frac{lr-a}{r-1}$
7	$a\ n\ l$		$s=\frac{\sqrt[n-1]{l^n}-\sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l}-\sqrt[n-1]{a}}$
8	$r\ n\ l$		$s=\frac{lr^n-l}{r^n-r^{n-1}}$
9	$r\ n\ l$	a	$a=\frac{l}{r^{n-1}}$
10	$r\ n\ s$		$a=\frac{(r-1)s}{r^n-1}$
11	$r\ l\ s$		$a=lr-(r-1)s$
12	$n\ l\ s$		$a(s-a)^{n-1}-l(s-l)^{n-1}=0$
13	$a\ n\ l$	r	$r=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$
14	$a\ n\ s$		$r^n-\frac{s}{a}r+\frac{s-a}{a}=0$
15	$a\ l\ s$		$r=\frac{s-a}{s-l}$
16	$n\ l\ s$		$r^n-\frac{s}{s-l}r^{n-1}+\frac{l}{s-l}=0$

〔注意〕依公式13求r.若$n-1$為偶數.則有正負二值.皆能合理.

182. 已知 $G.P.$ 之任二項。卽可求得其初項及公比。

設第 k 項爲 α。第 m 項爲 β。其 k, m, α, β 爲已知數。則以 a 代初項。r 代公比。而得

$$ar^{n-1}=\alpha, \qquad ar^{m-1}=\beta.$$

依聯立方程式解之。可得 a, r 之値。

例. $G.P.$ 之第四項爲 189。第六項爲 1701。求其初項及公比。

以 a 爲初項。r 爲公比。則得

$$ar^3=189, \qquad ar^5=1701.$$

由除法。 $r^2=9.$　卽　$r=3$ 或 $-3.$

由是　　$a=189\div(3)^3$ 或 $189\div(-3)^3=7$ 或 $-7.$

卽初項 7。公比 3。或初項 -7。公比 -3。

183. **等比中項** *Geometrical mean*　三數成 $G.P.$。則第二項稱爲其餘二項之等比中項。

例如 a, G, b 成 $G.P.$。則 G 爲 a, b 之等比中項。

由定義。$\dfrac{G}{a}=\dfrac{b}{G}$. 故 $G^2=ab$. 卽 $G=\sqrt{ab}.$

多數成 $G.P.$。則其初項末項間之諸項。稱爲此二項之等比諸中項。

己知二數之間。可以插入多數之等比中項。

例如於 a, b 之間。插入 n 個等比中項。此卽與以 a 爲初項。b 爲末項。項數爲 $n+2$。作等比級數無異。今以 r 爲公比。

則由§181公式13。得　$r=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$.

故此級數爲 $a,\ a\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}},\ a\left(\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}\right)^2, \cdots\cdots,\ a\left(\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}\right)^n,\ b$.

184. 等比級數無窮項之和　由179之(II)。

$$s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

此式若 r 之絕對值小於1。則 r^n 之絕對值。因 n 愈增大而愈減小。設 n 爲非常大。則 r^n 之絕對值爲非常小。遂可漸近於0。即 $\frac{ar^n}{1-r}$ 可視作爲0。故公比 r 之絕對值小於1。則

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots\text{至無窮項}=\frac{a}{1-r}.$$

〔注意〕 若 r 之絕對值大於1. 則 r^n 之絕對值.因 n 愈大亦隨之而大.即 s 亦隨之而大.故其和可至無限大即不能用此式求之.

例1.　有 $G.P.$ 如 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$。試求其無窮項之和。

$$a=1,\ r=\frac{1}{2}.\quad \text{故}\ s=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

例2.　有 $G.P.$ 如 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$。試求其無窮項之和。

$$a=1,\ r=-\frac{1}{2}.\quad \text{故}\ s=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

例3.　試求循環小數 0.12135135⋯ 之值。

此循環小數 $=\frac{12}{100}+\frac{135}{100000}+\frac{135}{100000000}+\cdots\cdots$.

其 $\frac{12}{100}$ 之後爲 $G.P.$。而 $a=\frac{135}{100000},\ r=\frac{1}{1000}$. 即其無窮項之和爲 $\dfrac{\frac{135}{100000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{1}{740}$. 故此循環小數爲 $\frac{12}{100}+\frac{1}{740}=\frac{449}{3700}$.

問題四十一

求下列 G.P. 之末項及總和。

1. 3, 12, 48, … 至第八項。　*2.* 9, −3, 1, … 至第八項。

3. 6, −18, 54, … 至第六項。*4.* 7, −21, 63, … 至第十項。

5. $a=4,\ r=2,\ n=7.$ 求 l 及 s。

6. $a=1,\ n=4,\ l=64.$ 求 r 及 s。

7. $l=128,\ r=2,\ n=7.$ 求 a 及 s.

8. $a=9,\ l=2304,\ r=2.$ 求 s 及 n。

9. $a=2,\ l=1458,\ s=2186.$ 求 r 及 n。

10. G.P. 之第四項爲 2。第七項爲 $-\frac{1}{4}$。求首項及公比。

11. 試於 $5\frac{1}{3}$ 與 $40\frac{1}{2}$ 之間。插入四個等比中項。

12. 有三數成 G.P.。其和爲 13。其積爲 27。求此三數。

求下列 G.P. 無窮項之和。

13. $8,\ 2,\ \frac{1}{2}, \cdots\cdots.$　　*14.* $2,\ \frac{2}{7},\ \frac{2}{49}, \cdots\cdots.$

15. $3,\ -2,\ \frac{4}{3}, \cdots\cdots.$　　*16.* $6,\ -2,\ \frac{2}{3}, \cdots\cdots.$

求下列循環小數之值。

17. $0.1\dot{6}.$　　*18.* $0.03\dot{7}\dot{8}.$　　*19.* $0.\dot{8}\dot{6}.$

20. $0.5\dot{4}.$　　*21.* $0.7\dot{3}\dot{6}.$　　*22.* $0.3\dot{6}\dot{3}.$

23. 某甲積銀。逐年增多。其次年所積。皆爲上年之 $1\frac{1}{2}$ 倍。如是凡歷 7 年。共積存 1029.5 元。問其第一年積銀幾何。

24. 有皮球從距地 6 尺之高處落下。第一次之反躍力高 2 尺。如是任其旋起旋落。以至於靜止。問共經路幾何.

第三章　調和級數

185. 定義　若干之數。依一定之順序排列。其各數之倒數成等差級數。則此諸數曰調和級數 *Harmonical progression*。恆以 $H.P$ 表之。

假設 a, b, c 成 $H.P$。則 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 成 $A.P$。

故 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$. 卽 $\frac{a-b}{ab}=\frac{b-c}{bc}$. 卽 $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$.

由是　$\mathrm{a-b : b-c = a : c}$.

故凡一列之數。若任取其相連之三數。皆有如上之關係者。卽爲調和級數。

調和級數之解法。可從第一章等差級數求之。

186. 調和中項 *Harmonical mean*　三數成 $H.P$。則第二項稱爲其餘二項之調和中項。

例如 a, H, b 成 $H.P$。則 H 爲 a, b 之調和中項。

由定義　$\frac{1}{H}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{H}$. 卽 $\frac{2}{H}=\frac{a+b}{ab}$. 故 $\mathbf{H}=\frac{\mathbf{2ab}}{\mathbf{a+b}}$.

多數成 $H.P$。則其初項末項間之諸項。稱爲此二項之調和諸中項。

已知二數之間。可以插入多數之調和中項。

例如欲於 a, b 之間。插入 n 個調和中項。則可如前等差級數之解法。於 $\frac{1}{a}$ 與 $\frac{1}{b}$ 之間。插入 n 個等差中項而取其倒數卽得。

197. 三級數中項之關係 設A, G, H順次爲a及b之等差中項,等比中項,調和中項。則由§176, §183, §186。

$$A=\frac{a+b}{2},\qquad G=\sqrt{ab},\qquad H=\frac{2ab}{a+b}.$$

故 $$\mathbf{AH}=\frac{a+b}{2}\times\frac{2ab}{a+b}=ab=\mathbf{G}^2.$$

問題四十二

1. $H.P$之第一項爲6。第二項爲$\frac{2}{9}$。試列記其級數至第五項止。

2. 求於6與2之間。插入調和中項。

3. 二數之等差中項爲9。調和中項爲8。求此二數。

4. 二數之等比中項爲12。調和中項爲$11\frac{1}{13}$求二數。

5. 二數之等差中項與調和中項之積爲12。而等差中項比調和中項大1。求此二數。

6. 試於1與$\frac{1}{7}$之間。插入五個調和中項。

7. 設a, b, c成$A.P$。b, c, d成$H.P$。試證$a:b=c:d$。

8. 設a, b, c, d成$H.P$。試證$3(b-a)(d-c)=(c-b)(d-a)$。

9. 設$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$ 成$H.P$。試證下式。

$$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots\cdots+a_{n-1}a_n=(n-1)a_1a_n.$$

10. 設a, b, c成$H.P$。試證$\frac{2}{b}=\frac{1}{b-a}+\frac{1}{a-c}$。

11. 設a, b, c成$H.P$。試證$a, a-c, a-b$亦成$H.P$。

12. 設a, b, c成$H.P$。試證 $a-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, c-\frac{b}{2}$成$G.P$。

第四章　雜級數

188. 級數 *Series*　若干之數。依一定之順序排列。然不能如上之三種顯有公差公比者。總稱曰級數。級數之種類無限故解法不能一律。茲擇其簡易者述之於下。

189. 自然數 *Natural number*　凡如 1, 2, 3, 4……等順次排列之數曰自然數。求自然數若干方乘之和。其法如下。

一　**自然數之和**　設 $S_n=1+2+3+4+\cdots\cdots+n$。則由§172。

$$S_n=\frac{1}{2}n(n+1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

二　**自然數平方之和**　設 $S'_n=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+n^2$.

因 $r^3-(r-1)^3=3r^2-3r+1$ 爲恆等式。故以 $1, 2, 3, 4\cdots\cdots n$ 順次代此式之 r。則得

$$1^3-0^3=3\cdot1^2-3\cdot1+1.$$

$$2^3-1^3=3\cdot2^2-3\cdot2+1.$$

$$3^3-2^3=3\cdot3^2-3\cdot3+1.$$

$$4^3-3^3=3\cdot4^2-3\cdot4+1.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$n^3-(n-1)^3=3\cdot n^2-3\cdot n+1.$$

各式相加。　$n^3=3\cdot S'_n-3\cdot S_n+n.$

由(I)式。　$n^3=3\cdot S'_n-\dfrac{3}{2}n(n+1)+n.$

即　$3S'_n=n^3+\dfrac{3}{2}n(n+1)-n.$

故　$S'_n=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\cdots\cdots\cdots(\mathrm{II})$

III. 自然數立方之和　設$S''_n=1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots\cdots+n^3$.

因$r^4-(r-1)^4=4r^3-6r^2+4r-1$為恆等式。如上代入。則

$$1^4-0^4=4\cdot1^3-6\cdot1^2+4\cdot1-1.$$

$$2^4-1^4=4\cdot2^3-6\cdot2^2+4\cdot2-1.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$n^4-(n-1)^4=4\cdot n^3-6\cdot n^2+4\cdot n-1.$$

各式相加。　$n^4=4\cdot S''_n-6\cdot S'_n+4\cdot S_n-n.$

由(I) (II)式。　$n^4=4\cdot S''_n-n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)-n.$

即　$4S''_n=n^4+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)-n.$

故　$$S''_n=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(III)}$$

又由(I)。因　$S_n=\frac{1}{2}n(n+1)$.　即　$S'_n=S^2_n$

故自然數立方之和。等於其和之平方。

他如求自然數四方乘五方乘之和。可以準此類推。

190. 有多種級數。可先求其第r項之公式如何。然後由上節之法。求得其和。茲示其例於下。

例1.　求$1^2, 3^2, 5^2,\cdots\cdots$等$n$個奇數平方之和。

設V^2_r為第r項之數。Σ_n為其總和。則

$$V^2_r=(2r-1)^2=4r^2-4r+1.$$

故　$$\Sigma_n=4(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2)-4(1+2+3+\cdots+n)$$
$$+(1+1+1+\cdots\text{至 } n \text{ 項}).$$

由§189之(I) (II)

$$\Sigma_n=\frac{4}{6}n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n=\frac{1}{3}n(4n^2-1).$$

例 2.　求 $1\cdot1\cdot1+2\cdot3\cdot4+3\cdot5\cdot7+4\cdot7\cdot10+\cdots\cdots$ 至 n 項之和。

如上則　$V_r=r(2r-1)(3r-2)=6r^3-7r^2+2r.$

故　$$\Sigma_n=6(1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3)-7(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+2(1+2+3+\cdots\cdots+n).$$

由 §189 之 (I), (II), (III)。

$$\Sigma_n=\tfrac{6}{4}n^2(n+1)^2-\tfrac{7}{6}n(n+1)(2n+1)+n(n+1)$$
$$=\tfrac{1}{6}n(n+1)(9n^2-5n-1).$$

例 3.　求 $4\cdot7\cdot10+7\cdot10\cdot13+10\cdot13\cdot16+\cdots\cdots$ 至 n 項之和。

如上則

$$V_r=(3r+1)(3r+4)(3r+7)=27r^3+108r^2+117r+28.$$

故 $$\Sigma_n=\tfrac{27}{4}n^2(n+1)^2+18n(n+1)(2n+1)+\tfrac{117}{2}n(n+1)+28n$$
$$=\tfrac{1}{4}n(3n+11)(9n^2+33n+38).$$

191. 由前節例 3。可得下之法則。

因　$(3r+1)(3r+4)(3r+7)$

$$=\tfrac{1}{12}[(3r+1)(3r+4)(3r+7)(3r+10)-(3r-2)(3r+1)(3r+4)(3r+7)].$$

故　$$4\cdot7\cdot10=\tfrac{1}{12}(4\cdot7\cdot10\cdot13-1\cdot4\cdot7\cdot10).$$

$$7\cdot10\cdot13=\tfrac{1}{12}(7\cdot10\cdot13\cdot16-4\cdot7\cdot10\cdot13).$$

$$10\cdot13\cdot16=\tfrac{1}{12}(10\cdot13\cdot16\cdot19-7\cdot10\cdot13\cdot16).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(3n+1)(3n+4)(3n+7)=\tfrac{1}{12}[(3n+1)(3n+4)(3n+7)(3n+10)-(5n-2)(3n+1)(3n+4)(3n+7)].$$

加之　$$\Sigma_n=\tfrac{1}{12}[(3n+1)(3n+4)(3n+7)(3n+10)-1\cdot4\cdot7\cdot10].$$

由是推之。凡級數之各項有 p 個因數。而各因數爲 $A.P.$ a 爲 $A.P$ 之初項，d 爲 $A.P$ 之公差。如

$$a(a+d)(a+2d)\cdots\cdots(a+\overline{p-1}d),\ (a+d)(a+2d)(a+3d)\cdots\cdots(a+pd),$$

$$(a+2d)(a+3d)(a+4d)\cdots\cdots(a+\overline{p+1}d),\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{則}$$

$$V_r=(a+\overline{r-1}d)(a+rd)\cdots\cdots(a+\overline{r+p+2}d)$$

$$=\frac{1}{(p+1)d}[(a+\overline{r-1}d)(a+rd)\cdots\cdots(a+\overline{r+p-1}d)$$

$$-(a+\overline{r-2}d)(a+\overline{r-1}d)\cdots\cdots(a+\overline{r+p-2}d)].$$

故 $$\Sigma_n=\frac{1}{(p+1)d}[(a+\overline{n-1}d)(a+nd)\cdots\cdots(a+\overline{n+p-1}d)$$

$$-(a-d)a(a+d)\cdots\cdots(a+\overline{p-1}d)].$$

例. 求 $2\cdot4\cdot6\cdot8+4\cdot6\cdot8\cdot10+\cdots\cdots$ 至 n 項之和。

因 $p=4$, $a=2$, $d=2$。代入上式。得

$$\Sigma_n=\frac{1}{(4+1)2}[(2+\overline{n-1}\times2)(2+2n)(2+\overline{n+1}\times2)(2+\overline{n+2}\times2)$$

$$(2+\overline{n+4-1}\times2)-0\cdot2\cdot4\cdot6\cdot8].$$

$$=\tfrac{1}{10}[2n(2+2n)(4+2n)(6+2n)(8+2n)]$$

$$=\tfrac{1}{10}[2^5n(1+n)(2+n)(3+n)(4+n)]$$

$$=\tfrac{16}{5}n(1+n)(2+n)(3+n)(4+n).$$

192. 堆垜 *Piles* 物體如彈丸等壘成錐體。謂之堆垜。其底面之形狀分三種。一爲等邊三角形者。曰**三角堆**。二爲正方形者。曰**正方垜**。三爲矩形者。曰**矩形垜**。求此三種堆垜中物體之總數。其法如下。

一. 三角垛　其最下一層為每邊 n 個之等邊三角形。以上各層。順次為每邊 $n-1$, $n-2$,……個之等邊三角形。至最上一層祇一個。而每層皆為自然數之和。故其最下一層之個數為 $\frac{1}{2}n(n+1)$。而總數則為

$$\frac{1}{2}[1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)]$$

$$=\frac{1}{2}[\tfrac{1}{3}\{n(n+1)(n+2)-0\cdot1\cdot2\}]\quad(\text{由 §191})$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

二. 正方垛　其最下一層為每邊 n 個之正方形。以上各層。順次為每邊 $n-1$, $n-2$ 個之正方形。至最上一層祇一個。故其總數為自然數平方之和。由 §189 之(II)為

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

三. 矩形垛　其最下一層為長邊 m 個短邊 n 個之矩形。以上各層。順次為各邊遞少一個之矩形。至最上一層。其短邊祇一個。長邊有 $m-n+1$ 個。故各層之個數如下。

第一層 $=(m-n+1)1$ 個。

第二層 $=(m-n+2)2$ 個。

第三層 $=(m-n+3)3$ 個。

………………………………

最下層 $=(m-n+n)n$ 個。

$$\text{故總數}=(m-n)(1+2+3+\cdots\cdots+n)+(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)$$

$$=\frac{1}{2}(m-n)n(n+1)+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\quad[\text{由 §189}]$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(3m-n+1).$$

193. 分數級數 *Fractional series* 級數之各項爲前述級數各項之倒數者。曰分數級數。求其總和之法如下。

如求 $\dfrac{1}{a(a+d)}+\dfrac{1}{(a+d)(a+2d)}+\dfrac{1}{(a+d)(a+3d)}+\cdots$ 至 n 項之和

設 V_r 爲第 r 項之數。Σ_n 爲其總和。則 $V_r=\dfrac{1}{(a+\overline{r-1}d)(a+rd)}$.

以 $$\frac{1}{a+(r-1)d}-\frac{1}{a+rd}=\frac{d}{(a+\overline{r-1}d)(a+rd)}=dV_r$$

由是 $$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+d}=\frac{d}{a(a+d)}.$$

$$\frac{1}{a+d}-\frac{1}{a+2d}=\frac{d}{(a+d)(a+2d)}.$$

$$\frac{1}{a+2d}-\frac{1}{a+3d}=\frac{d}{(a+2d)(a+3d)}.$$

....

$$\frac{1}{a+\overline{n-1}d}-\frac{1}{a+nd}=\frac{d}{(a+\overline{n-1}d)(a+nd)}.$$

相加。 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+nd}=d\Sigma_n$ 故 $\Sigma_n=\dfrac{n}{a(a+nd)}$.

又設 Σ_∞ 爲無窮項之和。則 n 爲無窮大。而 $\Sigma_\infty=\dfrac{1}{ad}$.

凡級數各項之分母爲 $A.P$ 者。無論有任何因數。皆可仿上法求得其和。

例1. 求 $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots$ 至 n 項之和。

$\dfrac{1}{1\cdot2}-\dfrac{1}{2\cdot3}=\dfrac{2}{1\cdot2\cdot3}.$ $\dfrac{1}{2\cdot3}-\dfrac{1}{3\cdot4}=\dfrac{2}{2\cdot3\cdot4}.$

....

$$\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{2}{n(n+1)(n+2)}.$$

相加。 $\dfrac{1}{1\cdot2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=2\Sigma_n$.

故 $\Sigma_n=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$. 而 $\Sigma_{n\infty}=\dfrac{1}{4}$.

例 2. 求 $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{2}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots$ 至 n 項之和。

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{1\cdot2}.$$

$$\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{1\cdot2\cdot3}=\frac{2}{1\cdot2\cdot3}.$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=\frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots n}-\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots(n+1)}=\frac{n}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots(n+1)}.$$

相加。 $1-\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots(n+1)}=\Sigma_n$. 而 $\Sigma_\infty=1$.

例 3. 求 $\dfrac{2}{1\cdot3\cdot3}+\dfrac{3}{3\cdot5\cdot3^2}+\dfrac{4}{5\cdot7\cdot3^3}+\dfrac{5}{7\cdot9\cdot3^4}+\cdots\cdots$ 至 n 項之和。

$$\frac{2}{1\cdot3\cdot3}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3\cdot3}\right).$$

$$\frac{3}{3\cdot5\cdot3^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3\cdot3}-\frac{1}{5\cdot3^2}\right).$$

$$\frac{4}{5\cdot7\cdot3^3}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5\cdot3^2}-\frac{1}{7\cdot3^3}\right).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{n+1}{(2n-1)(2n+1)3^n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(2n-1)3^{n-1}}-\frac{1}{(2n+1)3^n}\right).$$

相加。 $\Sigma_n=\dfrac{1}{4}\left\{1-\dfrac{1}{(2n+1)3^n}\right\}$. 而 $\Sigma_\infty=\dfrac{1}{4}$.

問題四十三

求下列各級數至n項之和。

1. $2\cdot4+4\cdot6+6\cdot8+\cdots\cdots$。

2. $3\cdot5+5\cdot7+7\cdot9+\cdots\cdots$。

3. $1\cdot4+4\cdot7+7\cdot10+\cdots\cdots$。

4. $1\cdot5+5\cdot9+9\cdot13+\cdots\cdots$。

5. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots\cdots$。

6. $1\cdot3\cdot5+3\cdot5\cdot7+5\cdot7\cdot9+\cdots\cdots$。

7. $1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+3\cdot4\cdot5\cdot6+\cdots\cdots$。

8. $1\cdot3\cdot7+3\cdot5\cdot9+5\cdot7\cdot11+\cdots\cdots$。

9. $1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+4\cdot5^2+\cdots\cdots$。

10. $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+(1^2+2^2+3^2+4^2)+\cdots\cdots$。

11. 疊彈丸爲三角垜。最下一層每邊12個。求總數。

12. 有正方垜之彈丸。最下一層每邊12個。求總數。

13. 有彈丸疊爲矩形垜。其最下一層之長短邊爲25個與20個。問總數幾何。

求下列各級數至n項及無窮項之和。

14. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots$。

15. $\frac{1}{1\cdot5\cdot9}+\frac{1}{5\cdot9\cdot13}+\frac{1}{9\cdot13\cdot17}+\cdots\cdots$。

16. $\frac{3}{1^2\cdot2^2}+\frac{5}{2^2\cdot3^2}+\frac{7}{3^2\cdot4^2}+\cdots\cdots$。

17. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{2}{1\cdot3\cdot5}+\frac{3}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\cdots\cdots$。

第十一篇　錯列及組合

第一章　錯列

194. 定義　從 n 個各異之物。每次取其 r 個。依種種之順序排列之。是謂從 n 個取 r 個之錯列 *Permutation*。

例如從 a, b, c, d 四個文字中。每次取二個之錯列數有十二。如下。

$$ab,\quad ac,\quad ad,\quad bc,\quad bd,\quad cd,$$
$$ba,\quad ca,\quad da,\quad cb,\quad db,\quad dc.$$

此下行各列之文字。雖各與上行相同。然因其順序有異。故是等之錯列仍不相等。

從 n 個各異之物。每次取 r 個之錯列數。恆以 ${}_nP_r$ 表之。

195. 求 ${}_nP_r$ 之法　設有 n 個文字如 $a, b, c, d,\cdots\cdots$ 等。

若每次取其一個。則其錯列爲 $a, b, c, d,\cdots\cdots$。其數有 n 明矣。即

$${}_nP_1=n.$$

若每次取其二個。則置 a 於首。其次置 $b, c, d,\cdots\cdots$ 各文字。其列法有 $n-1$ 個。同理。置 $b, c, d,\cdots\cdots$ 各文字於首。其列法亦各有 $n-1$ 個。故其錯列之總數爲 $n(n-1)$。即

$${}_nP_2=n(n-1).$$

若每次取其三個。則置每次取二個之各錯列於首。後附其餘 $n-2$ 個文字之一。如於 ab 及 ba 之後，各附 $c, d\cdots\cdots$ 各文字之一。bc 及 cb 之後。各附 $a, d\cdots\cdots$ 各文字之一。如是則每次之列法。各有 $n-2$ 個。而每次取二個之錯列爲 $n(n-1)$。故

$${}_nP_3=n(n-1)(n-2).$$

若每次取四個。則置每次取三個之各錯列於首。後附其餘$n-3$個文字之一。卽得。故

$$_nP_4=n(n-1)(n-2)(n-3).$$

循是以推。則　$_n\mathrm{P}_r=\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)(\mathrm{n}-3)\cdots\cdots(\mathrm{n}-\mathrm{r}+1)\cdots\cdots$(I)

若盡取n個物而列之。則(I)式之r等於n。故

$$_n\mathrm{P}_r=\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)(\mathrm{n}-3)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1\cdots\cdots\cdots\text{(II)}$$

凡$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$　卽n個自然數之連乘積。謂之階乘*Factorial*。以$\underline{|n}$或$n!$表之。用此記號。則上之(1)(2)二式。可書之如下。

$$_n\mathrm{P}_r=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}\text{或}\frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-\mathrm{r})!}\cdots\cdots\text{(III)}.\quad {}_n\mathrm{P}_n=\underline{|n}\text{或}\mathrm{n}!\cdots\cdots\cdots\text{(IV)}$$

例1.　用1, 2, 3, 4, 5五個數字作三位數。其法有幾。

此與從五個相異之物。每次取三個。求其錯列之數無異。

故　$_5P_3=5\cdot4\cdot3=60.$

例2.　童子六人。並坐於一列。其坐法有幾。

此與盡取六個相異之物。求其錯列數相同。

故　$_6P_6=\underline{|6}=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720.$

例3.　用0, 1, 2, 3四個數字作四位數。其法有幾。

若此四個皆爲有效數字。則用以作四位數。其法有$\underline{|4}$種。但0無在最左位之理。而0在最左位。則其餘三個數字之錯列爲$\underline{|3}$。故所求之數爲

$$\underline{|4}-\underline{|3}=\underline{|3}(4-1)=18.$$

例 4. 八人環坐於圓桌。變其相隣之位置。其坐法有幾。

若八人並坐於一列。則其錯列之數爲$\underline{|8}$。今環坐於圓桌。其首尾相接如 $a, b, c, d, e, f, g, h,$ 與 $b, c, d, e, f, g, h, a,$ 與 c, d, e, f, g, h, a, b 等各相同。故其錯列之數爲

$$\frac{\underline{|8}}{8}=\underline{|7}=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=7040.$$

196. 從 n 個之物。其中有相同者。求其盡取 n 個之錯列數。其法如下。 設有 n 個文字。其中 a 有 p 個。b 有 q 個。c 有 r 個。……以 P 爲所求之錯列數。

先任取 P 個錯列之一。將其中所有之 p 個 a。悉變爲 p 個各異之新文字。且與其餘各文字亦相異。則變此新文字之順序。可得$\underline{|p}$ 個之錯列。今此變化各行於 P 個錯列之總數。故得 $P\times\underline{|p}$ 個之錯列。

次任取 $P\times\underline{|p}$ 個錯列之一。將其中所有之 q 個 b 悉變爲 q 個各異之新文字。且與其餘各文字亦相異。則變此新文字之順序。可得$\underline{|q}$ 個之錯列。今此變化各行於 $P\times\underline{|p}$ 個錯列之總數。故得 $P\times\underline{|p}\times\underline{|q}$ 個之錯列。

如是次第續施之。至 n 個物全然各異。則其錯列之總數爲

$$P\times\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r}\times\cdots\cdots.$$

然由前節。盡取 n 個各異物之錯列數爲$\underline{|n}$。由是

$$P\times\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r}\times\cdots=\underline{|n}。$$

故

$$\mathbf{P}=\frac{\underline{|\mathbf{n}}}{\underline{|\mathbf{p}}\times\underline{|\mathbf{q}}\times\underline{|\mathbf{r}}\times\cdots\cdots}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{V})$$

例1. 將a, a, b, b, b, c六字相並爲一列。其法有幾。

此六字中a有二個，b有三個。故所求之數爲$\dfrac{\underline{|6}}{\underline{|2}\times\underline{|3}}=60$。

例2. 用1,2,3,4,3,2,1七個數字作七位數。使其奇數占奇位。偶數占偶位。問列法有幾。

奇數1,3,3,1之錯列數爲$\dfrac{\underline{|4}}{\underline{|2}\times\underline{|2}}=6$……………(1)

偶數2,4,2之錯列數爲$\dfrac{\underline{|3}}{\underline{|2}}=3$………………………(2)

(1)(2)相乘得18。卽爲所求之錯列數。

問題四十四

1. 求英文Cambridge一語中各文字之錯列數。

2. 有學生若干人。但知其取六人之錯列數。等於取四人之錯列數之十二倍。求學生之數。

3. 英文a, b, c,……二十六個字母。每次取其三個及四個作一語。問可各得幾種。

4. 有書籍20册。其中一部8册。一部4册。一部3册。餘皆每册爲一部。問取各部置於書架。其列法有幾種。

5. 八人並坐。其中有兄弟三人。弟不能坐於兄之上位。問其坐法有幾。

6. 用1,2,3,4,5作五位之偶數。其法有幾。

7. 男生四人與女生四人。並坐於一列。男與男。女與女，各不相隣。問其坐法有幾種。又若圍坐於圓桌則如何。

8. 有各異之珠8粒。以線穿成環形。問其變化有幾種。

第二章　組合

197. 定義　從 n 個各異之物。每次取其 r 個爲一羣。不論其各羣間諸物之順序如何。但以其諸物至少有一相異爲主。是謂從 n 個取 r 個之組合 *Combination*。

例如從 a, b, c, d 四個文字中。每次取二個之組合數有六。如下。　　$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd.$

如前§194所舉之例。其文字數及所取之個數。皆與此例相同。但彼求錯列數得十二。此求組合數僅得六。蓋文字同而其順序異者。在組合法中僅能作爲一羣。不能作爲二羣也。明乎此可以知錯列與組合之别矣。

從 n 個各異之物每次取 r 個之組合數。恆以 ${}_nC_r$ 表之。

198. 求 ${}_n\mathrm{C}_r$ 之法　設有 n 個文字如 $a, b, c, d, \cdots\cdots$ 等。每次取其 r 個之組合數爲 ${}_nC_r$。今於 ${}_nC_r$ 之組合內任取其一。盡取其中所含 r 個文字而求其錯列數。得 $\underline{|r}$ 個。如是則 ${}_nC_r$ 之各組合內各有 $\underline{|r}$ 個錯列。即 ${}_nC_r$ 之全組合共有 ${}_nC_r\times\underline{|r}$ 個錯列。但此錯列之總數。等於從 n 個文字 $a, b, c, d, \cdots\cdots$ 中每次取 r 個之錯列數。故

$$ {}_nC_r\times\underline{|r}={}_nP_r.\quad 即\quad {}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{\underline{|r}}. $$

由§195 (I)。　$$ {}_n\mathrm{C}_r=\frac{\mathrm{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}}{\underline{|\mathrm{r}}}\cdots\cdots\cdots\text{(I)} $$

又由§195 (III)。　$$ {}_n\mathrm{C}_r=\frac{\underline{|\mathrm{n}}}{\underline{|\mathrm{r}}\,\underline{|\mathrm{n-r}}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(II)} $$

例1. 有學生12名。每次選5名以競走。其選法有幾。

此與從12個中每次取5個。求其組合數無異。則由(II)得

$$_{12}C_5=\frac{\underline{|12}}{\underline{|5}\times\underline{|12-5}}=\frac{\underline{|12}}{\underline{|5}\times\underline{|7}}=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=792.$$

例2. 如上例。若有一人始終在內。則其選法有幾。

以一人始終在內。故但須於11人中每次取4人。求其組合數。則

$$_{11}C_4=\frac{\underline{|11}}{\underline{|4}\times\underline{|11-4}}=\frac{\underline{|11}}{\underline{|4}\times\underline{|7}}=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=330.$$

例3. 紙面上有n點。其中無三點同在一直線內者。今每取二點以直線聯之。問可得幾直線。

從n點中每次取二點聯成直線。則所求直線之數。卽等於其組合之數。故由(I)

$$_nC_2=\frac{n(n-2+1)}{\underline{|2}}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

例4. 從6人中選舉議員4人。每票塡寫4人。或3人。或2人。或1人。問其選舉之法共有幾種。

塡寫4人之選舉法。共有$_6C_4=\frac{\underline{|6}}{\underline{|4}\times\underline{|6-4}}=15.$

〃 〃 3 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 $_6C_3=\frac{\underline{|6}}{\underline{|3}\times\underline{|6-3}}=20.$

〃 〃 2 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 $_6C_2=\frac{\underline{|6}}{\underline{|2}\times\underline{|6-2}}=15.$

〃 〃 1 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 $_6C_1=\frac{\underline{|6}}{\underline{|1}\times\underline{|6-1}}=6.$

故所求選舉法之總數。爲

$$_6C_4+{}_6C_3+{}_6C_2+{}_6C_1=15+20+15+6=56.$$

例5. 有男生8人與女生6人。欲選取男生2人女生2人為一羣。問其選法有幾。

從男生8人中取2人之選法。為 ${}_8C_2=\frac{\lfloor\underline{8}}{\lfloor\underline{2}\times\lfloor\underline{8-2}}=\frac{\lfloor\underline{8}}{2\times\lfloor\underline{6}}=28$。

,, 女 ,, 6 ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, ${}_6C_2=\frac{\lfloor\underline{6}}{\lfloor\underline{2}\times\lfloor\underline{6-2}}=\frac{\lfloor\underline{6}}{2\times\lfloor\underline{4}}=15.$

但 ${}_8C_2$ 中之任一種與 ${}_6C_2$ 中之任一種相配。皆為所求之一羣。故所求選法之總數為

$${}_8C_2\times{}_6C_2=28\times15=420.$$

199. 定理一 從 n 個相異之物。其取 r 個之組合數。等於其取 $n-r$ 個之組合數。

何則。以 $${}_nC_{n-r}=\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}\times\lfloor\underline{n-(n-r)}}\quad[\S198(\mathrm{II})]$$

$$=\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}\times\lfloor\underline{r}}={}_nC_r\quad[\S198(\mathrm{II})]$$

200. 定理二 $\underline{{}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}}$ 此可如下證之。

$${}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}=\frac{\lfloor\underline{n-1}}{\lfloor\underline{r}\times\lfloor\underline{n-r-1}}+\frac{\lfloor\underline{n-1}}{\lfloor\underline{r-1}\times\lfloor\underline{n-r}}\quad[\S198(\mathrm{II})]$$

$$=\frac{\lfloor\underline{n-1}\times(n-r)}{\lfloor\underline{r}\times\lfloor\underline{n-r-1}\times(n-r)}+\frac{r\times\lfloor\underline{n-1}}{r\times\lfloor\underline{r-1}\times\lfloor\underline{n-r}}$$

$$=\frac{\lfloor\underline{n-1}\times(n-r)}{\lfloor\underline{r}\times\lfloor\underline{n-r}}+\frac{r\times\lfloor\underline{n-1}}{\lfloor\underline{r}\times\lfloor\underline{n-r}}$$

$$=\frac{\lfloor\underline{n-1}\times(n-r+r)}{\lfloor\underline{r}\times\lfloor\underline{n-r}}=\frac{\lfloor\underline{n-1}\times n}{\lfloor\underline{r}\times\lfloor\underline{n-r}}$$

$$=\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\times\lfloor\underline{n-r}}={}_nC_r$$

201. ${}_nC_r$**之最大值**　已知 n 之值。求 ${}_nC_r$ 之最大值。

由 §198 (II)。

$$\frac{{}_nC_r}{{}_nC_{r-1}}=\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\times\lfloor\underline{n-r}}\div\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r-1}\times\lfloor\underline{n-r+1}}=\frac{n-r+1}{r}=\frac{n+1}{r}-1.$$

$$\frac{{}_nC_{r+1}}{{}_nC_r}=\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r+1}\times\lfloor\underline{n-r-1}}\div\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\times\lfloor\underline{n-r}}=\frac{n-r}{r+1}=\frac{n+1}{r+1}-1.$$

若設　　${}_nC_{r-1}<{}_nC_r>{}_nC_{r+1}$.

則　　$\dfrac{{}_nC_r}{{}_nC_{r-1}}>1>\dfrac{{}_nC_{r+1}}{{}_nC_r}$.

卽　　$\dfrac{n+1}{r}-1>1>\dfrac{n+1}{r+1}-1$.

故得 $\dfrac{n+1}{r}>2$。卽 $r<\dfrac{1}{2}(n+1)$，又 $\dfrac{n+1}{r+1}<2$。卽 $r>\dfrac{1}{2}(n-1)$。

由是 ${}_nC_r$ 之值爲最大。則 r 之值在 $\frac{1}{2}(n+1)$ 與 $\frac{1}{2}(n-1)$ 之間。若 n 爲偶數。則 $\frac{1}{2}(n+1)$ 與 $\frac{1}{2}(n-1)$ 皆非整數。惟其間之 $\frac{1}{2}n$ 爲整數。故 $r=\frac{1}{2}n$ 時。其 ${}_nC_r$ 之值爲最大。

又若 n 爲奇數。則 $\frac{1}{2}(n+1)$ 與 $\frac{1}{2}(n-1)$ 必爲連續二整數。故 $r=\frac{1}{2}(n+1)$ 或 $r=\frac{1}{2}(n-1)$ 時。其 ${}_nC_r$ 之值爲最大。

例1.　求 ${}_8C_r$ 之最大值。

因 8 爲偶數。故 $r=\dfrac{8}{2}=4$ 時。${}_8C_r$ 爲最大。卽 $\dfrac{8}{\lfloor\underline{4}\times\lfloor\underline{8-4}}=70$.

例2.　求 ${}_{11}C_r$ 之最大值。

因 11 爲奇數。故 $r=\dfrac{11+1}{2}=6$ 或 $r=\dfrac{11-1}{2}=5$ 時。${}_{11}C_r$ 爲最大。

且其值皆爲　　$\dfrac{\lfloor\underline{11}}{\lfloor\underline{6}\times\lfloor\underline{5}}=462$.

題問四十五

1. 求 ${}_9C_3$, ${}_{12}C_9$, ${}_{20}C_{17}$ 之各值。

2. 設 ${}_nC_5={}_nC_4$. 求 n 之值。

3. 設 ${}_nC_6={}_nC_{12}$. 求 ${}_nC_{16}$ 之值。

4. 設 $3\times{}_nC_4=5\times{}_{n-1}C_5$. 求 n 之值。

5. 設 ${}_nP_r=272$, ${}_nC_r=136$. 求 n 及 r 之值。

6. 從男賓六人女賓四人中。選男賓三人女賓二人爲跳舞之戲。問其選法有幾種。

7. 某會有普通會員40人。特別會員10人。今從其中選舉董事 6 人。其 1 人須爲特別會員。問其選法有幾種。

8. 某黨選舉理事 3 人。而合資格者共有 4 人。選舉者得於定額以內適宜投票。問其方法共有幾種。

9. 某兵艦有各色之旗十張。爲傳信之記號。但每次所用。不能多於四張。而各旗之次序有定。問其用法有幾種。

10. 有五元,一元,半圓,一角,五分,一分六種貨幣各一個。問其中可得幾個相異之價值。

11. 從子音 6 字母音 4 字中。選取子音 3 字母音 2 字成一語。問可得幾種不同之語。

12. 平面上有20點。其中 5 點在一直線內。餘各點無 3 點同在一直線內者。問每取 2 點作直線。其數有幾。

13. 有 $2n$ 人圍二圓桌而坐。每桌坐 n 人。則其坐法共有 $\dfrac{\underline{|2n}}{(\underline{|n})^2}$ 種。試證之。

第十二篇 二項式定理

第一章 二項式定理

202. 定義 由乘法之理。可得下列之恆等式。

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=\begin{cases}x^3+(a+b+c)x^2\\+(ab+ac+bc)x+abc.\end{cases}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=\begin{cases}x^4+(a+b+c+d)x^3\\+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2\\+(abc+abd+acd+bcd)x\\+abcd.\end{cases}$$

由是等之結果。可得定則如下。

一. 項數等於二項因數之數多一。

二. 首項 x 之指數。等於因數之數。而任何項 x 之指數。皆比其前項 x 之指數少一。

三. 首項之係數爲一。第二項之係數。爲各因數第二項之和。第三項之係數。爲從各因數第二項中取二以爲積之和。第三項之係數。爲從各因數第二項中取三以爲積之和。以下準此。最後之項。則爲各因數第二項之連乘積。

上法無論二項因數多至如何。皆能相合。茲證之於下。

設 n 爲任何整數。今用以表二項因數之數。則假定

$$(x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots(x+k)$$
$$=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+A_3x^{n-3}+\cdots\cdots+A_n.$$

但　$A_1=a, b, c,\cdots\cdots k$ 等 n 個文字之和。

$A_2=$從此等文字中取二以爲積(卽 ${}_nC_2$ 個積)之和。

$A_3=$從此等文字中取三以爲積(卽 ${}_nC_3$ 個積)之和。

………………………………………………………………

$A_n=a, b, c,\cdots\cdots k$ 等 n 個文字之連乘積。

今於上列等式之兩邊。各以二項式 $x+l$ 乘之。則

$(x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots(x+k)(x+l)$

$$=x^{n+1}+(A_1+l)x^n+(A_2+A_1l)x^{n-1}+(A_3+A_2l)x^{n-2}+\cdots+A_nl.$$

而 $A_1+l=a+b+c+\cdots\cdots k+l$

$=a, b, c,\cdots\cdots k, l$ 等 $n+1$ 個文字之和。

$A_2+A_1l=A_2+l(a+b+c+k)$

$=$從 $n+1$ 個文字中取二以爲積(卽 ${}_{n+1}C_2$ 個積)之和。

$A_3+A_2l=A_3+l(ab+ac+ad+\cdots\cdots)$

$=$從 $n+1$ 個文字中取三以爲積(卽 ${}_{n+1}C_3$ 個積)之和。

………………………………………………………………

$A_nl=a, b, c,\cdots\cdots k, l$ 等 $n+1$ 個文字之連乘積。

故若因數之數爲 n 個。能與上法相合。則因數之數爲 $n+1$ 個。亦能與上法相合。今因數有 4 個。旣可用乘法證其相合。則由是遞次加 1 爲 5 個, 6 個, 7 個以至於 n 個。亦無一不相合明矣。

此所用之證法。謂之數學歸納法 *Mathematical induction*。

如上 n 個二項因數之連乘積。若其 $a=b=c=\cdots\cdots=k$。則變為 $(x+a)$ 之 n 乘冪。而 $A_1=na$, $A_2={}_nC_2a^2$, $A_3={}_nC_3a^3$, $\cdots\cdots\cdots\cdots$ $A_r={}_nC_ra^r$, $\cdots\cdots$, $A_n=a^n$. 故

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+{}_nC_2a^2x^{n-2}+{}_nC_3a^3x^{n-3}+\cdots\cdots$$
$$+{}_nC_ra^rx^{n-r}+\cdots\cdots+a^n$$

或
$$=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^3x^{n-3}$$
$$+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}a^rx^{n-r}+\cdots\cdots+a^n\cdots\text{(I)}$$

此公式謂之二項式定理 *Binomial theorem*。其右邊詳示乘冪之各項。謂之 $(x+a)^n$ 之展開式 *Expansion*。

上之公式若以 $-a$ 代 $+a$。則為

$$(x-a)^n=x^n-nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^2x^{n-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^3x^{n-3}$$
$$+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}(-a)^rx^{n-r}+\cdots+(-a)^n\cdots\text{(II)}$$

故展開 $(x+a)^n$ 與 $(x-a)^n$。其各項之絕對值相等。惟 $(x-a)^n$ 之展開式。其各項正負相間。

例 1. 求 $(x+a)^6$ 之展開式。

因 $n=6$。故從上之公式(I)得

$$(x+a)^6=x^6+6ax^5+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}a^2x^4+\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}a^3x^3$$
$$+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}a^4x^2+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}a^5x+a^6$$
$$=x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6.$$

例2.　求$(x-2y)^7$之展開式。

因 $n=7, a=2y$。故由公式(II)。得

$$(x-2y)^7=x^7-7(2y)x^6+\frac{7\cdot6}{1\cdot2}(2y)^2x^5-\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}(2y)^3x^4$$

$$+\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}(2y)^4x^3-\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}(2y)^5x^2$$

$$+\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}(2y)^6x-1(2y)^7$$

$$=x^7-14x^6y+84x^5y^2-280x^4x^3+560x^3y^4-672x^2y^5+448xy^6-128y^7.$$

203.　公項 *General term*　前節之展開式。其第 $r+1$ 項爲

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}a^rx^{n-r}\text{ 卽 }{}_nC_ra^rx^{n-r}\text{ 卽 }\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\times\underline{|n-r}}a^rx^{n-r}$$

今於此式設$r=1$。則得第二項。$r=2$。則得第三項。如是欲求任何項。但以項數減1代此式之r卽得。故此$r+1$項稱爲$(x+a)^n$展開式之公項。

例。　求$(2x-cy)^{18}$展開式之第十三項。

因$x=2x, a=-cy, n=18, r=13-1=12$。由公項之式得

$$\text{所求之項}=\frac{\underline{|18}}{\underline{|12}\times\underline{|18-12}}(-cy)^{12}(2x)^{18-12}$$

$$=\frac{\underline{|18}}{\underline{|12}\times\underline{|6}}c^{12}y^{12}\times2^6x^6$$

$$=64\times\frac{18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}c^{12}x^6y^{12}$$

$$=1188096c^{12}x^6y^{12}.$$

204. **簡式**　從§202公式(I)。令其 $x=1, a=x$。則爲

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots\cdots+\frac{\lfloor n}{\lfloor r\times\lfloor n-r}x^r+\cdots\cdots+x^n.$$

此爲最簡單且極通用之式。凡任何二項式之展開式。皆可據此求之。

例.　求 $(a+b)^n$ 之展開式。

$$(a+b)^n=\left\{a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right\}^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$$

$$=a^n\left\{1+n\frac{b}{a}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\}$$

$$=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+b^n$$

205. **係數之性質**　前節 $(1+x)^n$ 之展開式。可用組合法書爲　$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_rx^r+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n.$

由此式可得 $(1+x)^n$ 展開式中係數之性質如下。

一.　<u>從首項順計之第 $r+1$ 項。與從末項逆計之第 $r+1$ 項。其係數之絕對值相等。</u>

何則。從首項順計之第 $r+1$ 項爲 ${}_nC_rx^r$。從末項逆計之第 $r+1$ 項。即係從首項順計之第 $n-r+1$ 項。爲 ${}_nC_{n-r}x^{n-r}$。

故由§199。　${}_nC_r={}_nC_{n-r}$

二.　<u>n 爲偶數。則第 $\frac{n}{2}+1$ 項係數之絕對值爲最大。若 n 爲奇數。則第 $\frac{n+1}{2}+1$ 或 $\frac{n-1}{2}+1$ 項係數之絕對值爲最大。</u>

何則。因第 $r+1$ 項即公項之係數爲 ${}_nC_r$ 故由§201得證。

三. 各項係數之和等於2^n。

設　$x=1$。則

$$(1+x)^n=2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_r+\cdots\cdots+{}_nC_n.$$

四. 奇數項係數之和等於偶數項係數之和。

設　$x=-1$。則

$$(1+x)^n=(1-1)^n=0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n$$
$$=({}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots\cdots)-({}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots\cdots)$$

即　$${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots\cdots={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots\cdots.$$

五. 各項係數之平方和等於$\dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n\times\lfloor n}$.

因 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$(§199)。故得下之二式。

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_rx^r+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n.$$

$$(1+x)^n={}_nC_n+{}_nC_{n-1}x+{}_nC_{n-2}x+\cdots\cdots+{}_nC_{n-r}x^r+\cdots\cdots+{}_nC_0x^n.$$

將此二式左邊與左邊相乘。右邊與右邊相乘。則左邊爲$(1+x)^{2n}$。右邊乘積中x^n之係數爲$({}_nC_0^2+{}_nC_1^2+{}_nC_2^2+\cdots+{}_nC_n^2)$。而$(1+x)^{2n}$展開式中$x^n$之係數爲${}_{2n}C_n$即$\dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n\times\lfloor n}$.

故　$${}_nC_0^2+{}_nC_1^2+{}_nC_2^2+\cdots\cdots+{}_nC_n^2=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\times\lfloor n}.$$

206. 最大項 *Greatest term*　於$(1+x)^n$之展開式中。某項有最大絕對值之係數。由前節之法可以求得。即中央之項是也。然係數之絕對值爲最大者。其項之絕對值未必定爲最大。故求最大項之法。不可不別爲論述之。但此所謂最大者。亦指絕對值而言也。

由前節已知第$(r+1)$項爲$\dfrac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}x^r$.

第 r 項爲 $\dfrac{\lfloor n}{\lfloor r-1\,\lfloor n-r+1}x^{r-1}$.

第$(r-1)$項爲 $\dfrac{\lfloor n}{\lfloor r-2\,\lfloor n-r+2}x^{r-2}$.

而
$$\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}x^r\div\frac{\lfloor n}{\lfloor r-1\,\lfloor n-r+1}x^{r-1}=\frac{n-r+1}{r}x.$$
$$\frac{\lfloor n}{\lfloor r-1\,\lfloor n-r+1}x^{r-1}\div\frac{\lfloor n}{\lfloor r-2\,\lfloor n-r+2}x^{r-2}=\frac{n-r+2}{r-1}x.$$

如以第 r 項之値爲最大，則第 r 項大於第$(r+1)$項。又大於第$(r-1)$項。而得
$$\frac{n-r+1}{r}x<1,\qquad \frac{n-r+2}{r-1}x>1.$$

由是得　$r>\dfrac{n+1}{1+x}x,$　及　$r<\dfrac{n+1}{1+x}x+1.$

故知 r 在此二數之間。則第 r 項之値爲最大。

例.　求$(1+\frac{1}{3})^8$展開式中之最大項。

以　$x=\frac{1}{3}$,　$n=8$。代入上之公式。

則　$r>\dfrac{8+1}{1+\frac{1}{3}}\times\dfrac{1}{3},$　　$r<\dfrac{8+1}{1+\frac{1}{3}}\times\dfrac{1}{3}+1.$

卽　$r>2\dfrac{1}{4},$　　$r<3\dfrac{1}{4}$。

惟 r 必爲整數。故知 r 之値爲 3。卽知$(1+\frac{1}{3})^8$之展開式中。其第 3 項之値爲最大。

207. 前§204所示$(1+x)^n$之展開式其n爲正整數。然若n爲負數或分數。亦可準此求之。但n既非正整數。則n, $n-1$, $n-2$,……等無一爲零。故其項數爲無限。玆舉數例於下。

例1. 求$(1+x)^{-2}$之展開式。

$$(1+x)^{-2}=1+(-2)x+\frac{(-2)(-3)}{1\cdot2}x^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots\cdots$$
$$=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots\cdots。$$

將$\dfrac{1}{(1+x)^2}$依除法求之。其結果與此相同。

例2. 求$(1-2x)^{\frac{1}{2}}$之展開式。

$$(1-2x)^{\frac{1}{2}}=1+(\tfrac{1}{2})(-2x)+\frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{1\cdot2}(-2x)^2$$
$$+\frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1\cdot2\cdot3}(-2x)^3+\cdots\cdots$$
$$=1-x-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}x^3-\tfrac{5}{8}x^4-\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

將$\sqrt{1-2x}$依開平方法求之。其結果與此相同。

例3. 依二項式定理。求$\sqrt[5]{30}$至小數五位。

$$\sqrt[5]{30}=(32-2)^{\frac{1}{5}}=2(1-\tfrac{1}{16})^{\frac{1}{5}}$$
$$=2\left\{1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{16}+\frac{(\frac{1}{5})(\frac{1}{5}-1)}{1\cdot2}\times\left(\frac{1}{16}\right)^2-\frac{(\frac{1}{5})(\frac{1}{5}-1)(\frac{1}{5}-2)}{1\cdot2\cdot3}\times\left(\frac{1}{16}\right)^3\right.$$
$$\left.+\frac{(\frac{1}{5})(\frac{1}{5}-1)(\frac{1}{5}-2)(\frac{1}{5}-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\times\left(\frac{1}{16}\right)^4-\cdots\cdots\right\}.$$
$$=2\{1-\frac{1}{5\cdot16}-\frac{4}{5^2\cdot16^2\cdot2}-\frac{4\cdot9}{5^3\cdot16^3\cdot2\cdot3}-\frac{4\cdot9\cdot14}{5^4\cdot16^4\cdot2\cdot3\cdot4}-\cdots\}$$
$$=2(1-\cdot0125-\cdot0003125-\cdot0000117-\cdot0000005-\cdots\cdots)$$
$$=2\times\cdot987175=1\cdot97435.$$

208. 多項式定理　據二項式定理，可展開多項式。

例. 求$(1+2x-x^2)^4$之展開式。

設　$2x-x^2=y$，則由§204，

$$(1+2x-x^2)^4=(1+y)^4=1+4y+6y^2+4y^3+y^4.$$

但　$y=2x-x^2.$

$$y^2=(2x-x^2)^2=4x^2-4x^3+x^4.$$

$$y^3=(2x-x^2)^3=8x^3-12x^4+6x^5-x^6.$$

$$y^4=(2x-x^2)^4=16x^4-32x^5+24x^6-8x^7+x^8.$$

故 $$\begin{aligned}(1+2x-x^2)^4&=1+4(2x-x^2)+6(4x^2-4x^3+x^4)\\&\quad+4(8x^3-12x^4+6x^5-x^6)\\&\quad+16x^4-32x^5+24x^6-8x^7+x^8\\&=1+8x+20x^2+8x^3-26x^4-8x^5\\&\quad+20x^6-8x^7+x^8.\end{aligned}$$

問題四十六

求下列二項式之展開式。

1. $(x+y)^5$.　　2. $(x-a)^7$.　　3. $(2x-3)^4$.

4. $(1+x^2)^6$.　　5. $(a^2-2x^3)^5$.　　6. $(3x-3x^2)^4$.

7. 求$(3-x)^{15}$展開式之第14項。

8. 求$(a^2-2a)^{10}$展開式中a^{18}之係數。

9. 求$(x-3y)^{10}$展開式之第3項。

10. 求$(1+x)^8$展開式之中央項。

11. 求$(x-3a)^{15}$展開式中x^8之係數。

12. 求$\left(2x+\frac{1}{3x}\right)^{25}$展開式中$x^{15}$之係數。

13. 求$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{23}$展開式中$x^7$之係數。

14. 問$(x+1)^{12}$之展開式中。何項之係數爲最大。

15. 設$x=\frac{1}{2}$。求$(1+x)^{20}$展開式之最大項。

16. 設$a=5, b=3$。求$(a+b)^{15}$展開式之最大項。

試展開下列各式至第四項止。

17. $(1+x)^{\frac{2}{5}}$.　　18. $(1-x)^{-1}$.

19. $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$.　　20. $(ax-x^2)^{-\frac{1}{3}}$.

21. 求$(1+x+x^2)^4$之展開式。

22. $(1+x)^{2n}$展開式中x^n之係數。等於$(1+x)^{2n-1}$展開式中x^n之係數之二倍。試證之。

第十三篇　對數

第一章　對數之性質

209.　定義　如 $a^x=n$ 之式。其 x 謂之 n 以 a 為底數 *Base* 之對數 *Logarithm*。設數以明之。則 $2^5=32$。故 5 者即 32 以 2 為底數之對數也。又 $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$。故以 10 為底數。則十之對數為 1。百之對數為 2。千之對數為 3。

n 以 a 為底數之對數。亦可簡稱為 a 底 n 之對數。恆以 $log_a n$ 表之。故 $a^x=n$ 及 $log_a n=x$。其所表相同。

例.　設以 3 為底數。求 $81\sqrt[8]{3^5}$ 之對數。

以 x 為所求之對數。則由定義。得

$$3^x=81\sqrt[8]{3^5}.\quad 但\quad 81\sqrt[8]{3^5}=3^4 3^{\frac{5}{8}}=3^{4+\frac{5}{8}}.$$

故　$3^x=3^{4+\frac{5}{8}}$.　　即　$x=4+\frac{5}{8}=4\cdot625$.

210.　對數之性質　最要者約有六種。如下。

I.　以本身為底之對數等於 1。

此因 $a^1=a$. 故 $log_a a=1$.

II.　1 之對數皆為 0。

此因 a 為任何數。皆 $a^0=1$. 故 $log_a 1=0$.

III.　積之對數。等於其各因數對數之和。

設 $log_a m=x$,　$log_a n=y$. 則 $a^x=m$,　$a^y=n$.

故 $mn=a^x\cdot a^y=a^{x+y}$.　即 $log_a mn=x+y=log_a m+log_a n$.

無論因數多至如何。皆可由同理推得。

例. $log_2(4\times32\times128)=log_24+log_232+log_2128$

$=log_22^2+log_22^5+log_22^7=2+5+7=14.$

IV. 商之對數等於被除數之對數減除數之對數。

設 $log_am=x, log_an=y.$ 則 $a^x=m, a^y=n.$

故 $m\div n=a^x\div a^y=a^{x-y}.$ 即 $log_a(m\div n)=x-y=log_am-log_an.$

例. $log_5(3125\div25)=log_53125-log_525=log_55^5-log_55^2$

$=5-2=3.$

V. 某數乘羃之對數等於其數之對數乘其羃指數。

設 $log_an=x.$ 則 $a^x=n.$

故 $n^p=(a^x)^p=a^{px}.$ 即 $log_an^p=px=p\cdot log_an.$

例. $log_3\sqrt[6]{27}=log_3(27)^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}log_327=\frac{1}{6}log_33^3=\frac{1}{6}\times3=\frac{1}{2}=0\cdot5.$

VI. a 底 n 之對數。等於 b 底 n 之對數與 a 底 b 之對數之積。又 a 底 b 之對數。等於 b 底 a 之對數之倒數。

設 $log_an=x, log_bn=y.$ 則 $n=a^x, n=b^y.$

故 $a^x=b^y.$ 或 $a^{\frac{x}{y}}=b.$

即 $log_ab=\frac{x}{y}.$ 或 $x=y\cdot log_ab.$

故 $log_an=log_bn\times log_ab.$

又由 $a^x=b^y$ 可得 $b^{\frac{y}{x}}=a.$ 即 $log_ba=\frac{y}{x}.$

故 $log_ab\times log_ba=\frac{x}{y}\times\frac{y}{x}=1.$ 即 $log_ab=\frac{1}{log_ba}.$

例. 已知 $log_24096=12.$ 求 $log_84096.$

$log_84096=log_24096\times log_82=12\times\frac{1}{3}=4.$

應用是等性質。能以加法代乘法。減法代除法。乘法代自乘。除法代開方。頗為便捷。茲揭數例於下。

例 1.　試以 a, b, c 之對數表 $log\frac{a^2b\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c^2}}$。

原式 $=log(a^2b^{1+\frac{1}{2}}c^{-\frac{2}{3}})=2log\ a+\frac{3}{2}\ log\ b-\frac{2}{3}\ log\ c.$

例 2.　試化 $log\frac{4}{\sqrt{125}}+log\frac{125}{3\sqrt{8}}-log\frac{\sqrt[5]{2}}{3}$ 為簡式。

原式 $=log\frac{2^2}{5^{\frac{3}{2}}}+log\frac{5^3}{3\cdot 2^{\frac{3}{2}}}-log\frac{5\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{3}$

$=(2log2-\frac{3}{2}\ log5)+(3log5-log3-\frac{3}{2}\ log2)$

$-(log5+\frac{1}{2}\ log2-log3)$

$=\frac{1}{2}\ log5.$

211.　對數之種類　對數分二種。一曰訥白爾對數 *Napierian logarithm*，亦曰自然對數 *Natural logarithm*，簡稱訥對。係蘇格蘭人訥白爾 *Napier* 所創。其底數為自然數之級數如 $1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots\cdots=2\cdot 718281828459$。恆以 e 表此數。如 a 之訥對書為 $log_e a$。一曰常用對數 *Common logarithm*。簡稱常對。係英人蒲理古斯 *Briggs* 所創。即就訥對而改正者也。其底數為 10。恆不記其底數。如 a 之常對書為 $log\ a$。此二種對數中。以常對為最通行。本書凡不明言訥對者。皆係專指常對也。

212.　常用對數　凡一數之常對數。未必定為整數。亦未必定為正數。此可由 §209 定義證之於下。

既知 ……………………………………………

$10^4=10000$	故	$\log 10000=4$
$10^3=1000$	„	$\log 1000=3$
$10^2=100$	„	$\log 100=2$
$10^1=10$	„	$\log 10=1$
$10^0=1$	„	$\log 1=0$
$10^{-1}=0.1$	„	$\log 0.1=-1$
$10^{-2}=0.01$	„	$\log 0.01=-2$
$10^{-3}=0.001$	„	$\log 0.001=-3$

……………………………………………

由是可知就整數而論。四位數自1000至10000之間。其對數大於3而小於4。三位數自100至1000之間。其對數大於2而小於3。二位數自10至100之間。其對數大於1而小於2。一位數自1至10之間。其對數大於0而小於1。就小數而論。數之首位與小數點相隔無0者。即自0.1至1之間。其對數大於−1而小於0。有一個0者。即自0.01至0.1之間。其對數大於−2而小於−1。有二個0者。即自0.001至0.01之間。其對數大於−3而小於−2。餘可準此類推。故

$$\text{整數}\begin{cases}\text{四位數之對數}=3+\text{小數.}\\ \text{三}\ „\ „\ „\ „\ „=2+\text{小數.}\\ \text{二}\ „\ „\ „\ „\ „=1+\text{小數.}\\ \text{一}\ „\ „\ „\ „\ „=0+\text{小數.}\end{cases}$$

小數 $\begin{cases} \text{首位與小數點相隔無 0 者之對數} = \bar{1} + \text{小數}. \\ \text{〃〃〃〃〃〃〃〃有一0〃〃〃〃} = \bar{2} + \text{小數}. \\ \text{〃〃〃〃〃〃〃〃〃二0〃〃〃〃} = \bar{3} + \text{小數}. \end{cases}$

如上等號右邊所記之 $3, 2, 1, 0, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ 等。曰對數之**指標** *Characteristic*。其小數曰對數之假數 *Mantissa*。而 $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ 與 $-1, -2, -3$, 同。

總之整數有 n 位者。其對數之指標爲 $n-1$。小數之首位與小數點相隔有 n 個 0 者。其對數之指標爲 $-(n+1)$。

213. 同數字依同順序排列者。無論其小數點之位置如何。其常對數之假數恆相同。

例. $\quad log(30) = log(10\times 3) = log10 + log3 = 1 + log3.$

$\quad log(300) = log(100\times 3) = log100 + log3 = 2 + log3.$

又 $\quad log(\cdot 003) = log\left(\dfrac{3}{1000}\right) = -log1000 + log3 = \bar{3} + log3.$

故 3 之位置。無論如何。其假數終爲 $log3$.

如已知 $\quad log3 = .47712$.則

$\quad log30 = 1.47712$

$\quad log300 = 2.47712.$

又 $\quad log.003 = \bar{3}.47712.$

〔注意〕 對數之指標有正有負.而其假數則皆爲正數.如上例所示之 $\bar{3}.47712$,惟 3 爲負數. 而 .47712 則爲正數也.故不宜書爲 -3.47712. 亦不宜因其等於 $-3+0.47712$ 而書爲 -2 52288

214. **對數表** *Table of logarithms*　對數表者。載各數之對數。以備演算時檢用者也。由 §213 之理。凡任何數之對數。可從其同數字依同順序排列之整數對數求之。故作對數表者。但計算整數之對數爲已足。又由 §212 之法。對數之指標可由視察而得。故對數表中但載其假數。

凡整數不等於10之乘羃者。其對數爲不盡數。此證法及計算對數之法。俟後章詳之。故計算一數之對數。可任取小數至何位止。以下四舍五入。

對數表所載之小數。有少至四位者。有多至十二位者。惟四位過略。十二位過詳。而在通常之計算。以五位爲已足。茲本書取例。以德人蓋烏斯 *Gauss* 所著之對數表(本館已有譯本名蓋氏對數表)爲準。其書載自 1 至 11000 一切整數之對數。而所取小數爲五位。

215. **對數表之用法**　凡求一數之對數。其原數曰眞數。故眞數者。即對於假數而言也。茲示眞數對數交互之求法如下。

一. 有眞數求對數。

先於表中檢得與其數相當之假數。次依 §212 求得其指標。乃以指標附於假數之前。即得。

若眞數之位數甚多。爲表中所無者。則可先求其首幾位之假數。餘者依**比差分** *Proportional parts* (或簡作 *P. P*)求之。

例. 求134.76之對數。

檢表。得 1347之假數。爲 .12937.

1348之假數。爲 .12969.

因得 $\log 134.7=2.12937$　　134.76

$\underline{\log 134.8=2.12969}$　　$\underline{134.7}$

差 .1　.00032　　.06

故得 .1 : .06 :: .00032 : x. 卽 $x=.00019$. [四捨五入]

故 $\log 134.76 \doteqdot 2.12937+.00019=2.12956.$

〔注意〕 如上之.00032謂之比例差..00019謂之比例分.

二. 有對數求眞數。

先從表中檢得與此對數相當之眞數。視其對數之指標如何。而定其小數點之位置。卽得。

如對數之假數。不能與表中所記密合者。則用略小略大於此之二假數。依比例分求之。

例. 求對數$\overline{1}.26379$之眞數。

依假數.26379檢表。得其略小略大之二假數爲.26364及.26387。而知$\overline{1}.26364$及$\overline{1}.26387$之眞數。爲.1835及1836.其演算法如下。

$\log .1835=\overline{1}.26364$　　$\overline{1}.26379$

$\underline{\log .1836=\overline{1}.26387}$　　$\underline{\overline{1}.26364}$

差 .0001　.00023　　.00015

故得 23 : 15 :: .0001 : x. 卽 $x=.000065+$ [四捨五入]

而 $.1835+.000065=.183565.$

故 $\log .1835\ 5=\overline{1}.26379.$

三. 用對數之演算法。

前§210已述用對數演算之便利。茲再應用對數表。設例於下。

例1. 求$\frac{1627.3\times(.0326)^3}{\sqrt{.005274}}$之結果。

因 $$\log\frac{1627.3\times(.0326)^3}{\sqrt{.005274}}=\log 1627.3+3\log .0326$$
$$-\tfrac{1}{2}\log .005274.$$

如上檢表。求得

$\log 1627.3=3.21147, \log .0326=\bar{2}.51322, \log .005274=\bar{3}.72214.$

故 $$\log\frac{1627.3\times(.0326)^3}{\sqrt{.005274}}=3.21147+3\times\bar{2}.51322-\tfrac{1}{2}\times\bar{3}.72214$$
$$=3.21147+\bar{5}.53966-\bar{2}.86107=-.10994=\bar{1}.89006.$$

如上檢表。求得 $\log .77635=\bar{1}.89006.$

故所求之結果爲 $.77635.$

例2. 求 $3^{x+2}=324$ 方程式中 x 之值。

原式以對數表之。則爲

$$(x+2)\log 3=\log 324=\log(3^4\times 2^2)。$$

即 $x\log 3+2\log 3=4\log 3+2\log 2$。

即 $$x=\frac{2\log 3+2\log 2}{\log 3}.$$

如上檢表。求得 $\log 2=.30103$, $\log 3=.47712.$

故 $$x=\frac{2\times .47712+2\times .30103}{.47712}=\frac{1.55630}{.47712}=3.26.$$

問題四十七

下列諸式。試以 2 爲底數。各求其對數。

1. $\sqrt[4]{8}$.　*2.* $.5$.　*3.* $.125$.　*4.* $.0625$.

5. 已知 $log_3 2187=7$.求 $log_9 \sqrt[5]{2187}$.

下列三式。試各以 a, b, c 之對數表之。

6. $\dfrac{\sqrt{a^3}}{b^5c^2}$.　*7.* $\dfrac{(a^3b^{-3}c^{-1})^4}{\sqrt[4]{a^{-3}b^3x}}$.

8. $\left(\dfrac{x^4y^{-3}}{x^{-1}y^2}\right)^{-3} \div \left(\dfrac{x^{-2}y^3}{xy^{-1}}\right)^5$.

求下列各式中 x 之値。

9. $log_2 x=\dfrac{1}{3}$.　*10.* $log_3 x=-2$.　*11.* $log_{125} x=\dfrac{2}{3}$.

12. 已知 $log7=.84510$. 求 $log343$, $log2401$, $log16807$.

用對數表計算下列各式。

13. 2.364×934.25.　*14.* $(1.3872)^5$.

15. $370.62\times .00064573$.　*16.* $367.21\div 1467.9$.

17. $.0054156\div 25.324$.　*18.* $(346.58)^{\frac{1}{12}}$.

19. $\dfrac{.0032}{638.1\times 3.5692}$.　*20.* $\dfrac{.356\times 723.54}{896.72}$.

21. $(1.23)^{11}$.　*22.* $(2.1346)^8$.

23. $\sqrt{23.587}$.　*24.* $\sqrt[3]{38.275}$.

解下之方程式。

25. $2^{x+1}=2\sqrt{2}$.　*26.* $20^{8x-7}=2^{x+15}$.

27. $5^{x-3}=8$.　*28.* $16^{2x+1}\times 36^{5-x}=1468$.

第二章　指數級數及對數級數

210. 定義　對數表之用法，既如前節所述。然其造法亦不可不知。玆先於本節詳述其原理。

如$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$之式。設其$n$之絕對值大於1。而$x$之值無論如何。則由二項式定理展開之得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+nx\cdot\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{\lfloor 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{\lfloor 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots\cdots$$

$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\cdots \qquad \text{(I)}$$

因(I)式無論x爲何數皆合。故如$x=1$。則(I)式變爲

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\lfloor 2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\cdots.$$

而　$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{x}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}.$$

故　$$\left\{1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\lfloor 2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\cdots\right\}^{x}$$

$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\cdots\cdots \qquad \text{(II)}$$

因(II)式無論n之值任何大皆合。故n如爲極大。則$\frac{1}{n},\frac{2}{n}$等皆爲極小而接近於0。故(II)式可變爲

$$\left(1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right)^{x}=1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots.$$

實計$1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$得2.718281828459。卽訥對之底數。

設以 e 代 2.718281828459。則上式爲

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots \qquad \text{(III)}$$

又以 cy 代(III)式之 x。則爲

$$e^{cy}=1+cy+\frac{(cy)^2}{\lfloor 2}+\frac{(cy)^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots \qquad \text{(IV)}$$

若設 $e^c=a$，則 $log_e a=c$。而(IV)式變爲

$$a^y=1+y\log_e a+\frac{(y\log_e a)^2}{\lfloor 2}+\frac{(y\log_e a)^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots \qquad \text{(V)}$$

如是凡正數之任何乘冪，皆可展開之如上式。而此種級數，謂之指數級數 *Exponential series*。

又以 $1+x$ 代(V)式之 a。則得

$$(1+x)^y=1+ylog_e(1+x)+\frac{y^2\{log_e(1+x)\}^2}{\lfloor 2}$$
$$+\frac{y^3\{log_e(1+x)\}^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots \qquad \text{(VI)}$$

又由二項式定理展開 $(1+x)^y$。得

$$(1+x)^y=1+yx+\frac{y(y-1)}{\lfloor 2}\cdot x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{\lfloor 3}\cdot x^3+\cdots\cdots \qquad \text{(VII)}$$

(VI)與(VII)二式之右邊，皆爲同一二項式之展開式。故其 y 之係數應相等。而(VI)式中 y 之係數爲 $log_e(1+x)$，(VII)式中 y 之係數爲 $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$。即

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots \qquad \text{(VIII)}$$

此(VIII)式謂之對數級數 *Logarithm series*。

由(VIII)式求對數。必取首幾項相加。始能得其略數。然若 x 小於 1。則各項之值。皆逐項減小。故取項愈多。所得與實值愈近。反之。若 x 大於 1。則各項之值。未必逐項減小。故取項雖多。終不能得其略數。是以(VIII)式之用。尚未廣也。

今以 $-x$ 代(VIII)式之 x。則為

$$log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots \qquad \text{(IX)}$$

從(VIII)減(IX)。得

$$log_e(1+x)-log_e(1-x)=log_e\frac{1+x}{1-x}(\S 210\ \text{IV})$$

$$=2\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right\} \qquad \text{(X)}$$

如設 $\frac{1+x}{1-x}=y$. 則 $x=\frac{y-1}{y+1}$. 代入(X)式。得

$$log_e y=2\left\{\frac{y-1}{y+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5+\cdots\cdots\right\} \qquad \text{(XI)}$$

又設 $x=\frac{1}{2n+1}$. 則 $\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$. 代入(X)式。得

$$log_e\frac{n+1}{n}=log_e(n+1)-log_e n$$

$$=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\cdots\right\} \qquad \text{(XII)}$$

此(XI)式之 y 及(XII)式之 n。無論任何大。其各項之值。皆逐項減小。故取其首幾項相加。即可得其略數。而據(XII)式所得之略數。尤近於實值。因其逐項之減小甚驟也。故求 e 底任何正數之對數。以據此二式為最便。

例1. 如求$\log_e 2$。則由(XII)式。設 $n=1$。得

$$\log_e\frac{1+1}{1}=\log_e 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\cdots\cdots\right)=.693147\cdots\cdots$$

例2. 如求$\log_e 3$。則由(XII)式。設 $n=2$。得

$$\log_e\frac{2+1}{2}=\log_e\frac{3}{2}=2\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}+\cdots\cdots\right\}=.405465\cdots$$

即　$\log_e 3-\log_e 2=.405465\cdots\cdots$

故　$\log_e 3=.405465\cdots\cdots+.693147=1.098612\cdots\cdots$

217. 對數表之造法　如前節所述。爲求 e 底任何數對數之法。即求訥對之法。而於常對。固未涉及也。但訥對以 e 爲底。而 e 則奇零不盡。常對以10爲底。於應用時。固較訥對爲便。然於造表時。則仍不能越訥對之範圍。蓋任何數之訥對易求。而常對則非借徑於訥對不可。今已知訥對之求法。乃可與言對數表之造法矣。

如求 n 之常對。則由§209之(VI)。得

$$\log_{10}n=\log_e n\times\log_{10}e.$$

因　$\log_{10}e=\dfrac{1}{\log_e 10}$，　故　$\log_{10}n=\dfrac{1}{\log_e 10}\times\log_e n.$

故求某數之常對。可先求其訥對。而以$\dfrac{1}{\log_e 10}$乘之。即得。此$\dfrac{1}{\log_e 10}$爲常乘數。謂之對數率 *Modulus of logarithm*。實際計算之。得 .434294482 弱。今以 μ 代此數。則得常對之公式如下。

$$\log_e n=\mu\log_e n.$$

例 1.　$log2=\mu log_e 2=.43429\cdots\times .693147\cdots=.30103\cdots.$

例 2.　$log3=\mu log_e 3=.43429\cdots\times 1.098612\cdots=.47712\cdots.$

又由§216之(XII)。得

$$log_e(n+1)-log_e n=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\cdots\cdots\right\}.$$

若爲常對數。則得

$$log(n+1)-log n=2\mu\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\cdots\right\}.$$

如令 $n=10$。則

$$log11-log10=2\mu\left\{\frac{1}{21}+\frac{1}{3(21)^3}+\frac{1}{5(21)^5}+\cdots\cdots\right\}=\cdot 041393.$$

惟　$log10=1.$

故　$log11=1+.041393=1.041393.$

故旣知某數之對數。欲求其相鄰一數之對數。皆可依此法求之。

218. 比例分之理　設有 n 與 x 二數。其 x 對於 n 爲甚小。則以

$$log(n+x)-log n=log\left(1+\frac{x}{n}\right)=\mu log_e\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

由§216之(VIII)　$$=\mu\left\{\frac{x}{n}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^3-\cdots\cdots\right\}.$$

惟 x 爲甚小。則 $\frac{x}{n}$ 之二乘冪三乘冪等。必接近於 0。實際計算時。竟可視作爲 0。卽得

$$log(n+x)-log n=\mu.\frac{x}{n}.$$

此 μ 爲常乘數。故兩數之差甚小者。則其兩數 $n+x$ 與 n 之差。殆與其兩對數之差爲正比。此比例分之法所由來也。

問題四十八

1. 已知 $\log_e 2=.693147$, $\log_e 3=1.098612$。試順次各求4至10之訥對。至小數五位。

2. 已知 $\log 2=.30103$, $\log 3=.47712$。試順次各求4至9之常對。至小數五位。

3. 試證 $\log_e(x+n)=\log_e x+\log_e\left(1+\frac{1}{x}\right)+\log_e\left(1+\frac{1}{x+1}\right)$

$$+\log_e\left(1+\frac{1}{x+2}+\cdots\cdots+\log_e\left(1+\frac{1}{x+n-1}\right)\right.$$

試由(XI)式證下之二式。

4. $\log_e\frac{1}{2}=-2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\cdots\cdots\right\}$.

5. $\frac{1}{2\mu}=\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\cdots\right\}+\left\{\frac{2}{3}+\frac{2^3}{3\cdot 3^3}+\frac{2^5}{5\cdot 3^5}+\cdots\right\}$.

6. 試由(XII)式證 $\log_e\frac{9}{4}=4\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}+\cdots\cdots\right\}$.

第三章 複利及年金

219. 複利 複利之定義及計算法。已詳於算術。然其平易者。固可依算術之法解之。至若其複雜者。則以用對數之法解之爲便。玆述其公式如下。

設以 P 爲本銀。r 爲年利率。n 爲年數。A 爲 n 年後之本利和。

則第一年末之本利和爲$P(1+r)$.

" 二 " " " " " " " $P(1+r)^2$.

" 三 " " " " " " " $P(1+r)^3$.

………………………………………

" n " " " " " " " $P(1+r)^n$.

即得　　$\mathbf{A=P(1+r)^n}$

由上之公式,凡A, P, n, r四數中已知其三。即可求得其餘之一數。即

$$P=\frac{A}{(1+r)^n},\qquad r=\sqrt[n]{\frac{A}{P}}-1,\qquad n=\frac{logA-logP}{log(1+r)}.$$

〔注意〕 上列之公式.隨計算利息之期而異.如期爲半年即六月.則$A=P\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}$. 期爲 1 月.則$A=P\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n}$. 期爲 3 月.則$A=P\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4n}$ 又依再後之式求n.其所得不可不爲整數.

例. 原本三百圓。年利率七釐。每年用複利計算。問至十五年後。合計本利和幾何。

因 $P=300,\ \ n=15,\ \ r=0.07.$

故　　$A=300(1+0.07)^{15}\doteq300(1.07)^{15}.$

即　　$logA=log300+15log1.07.$

檢表。 $logA=2.47712+15\times.02938=2.47712+.44070$

$=2.91782=log827.6.$

即　　$A=827.6.$

如求利息。則　$A-P=827.6-300=527.6.$

220. **年金** *Annuity* 歷一年之時期。取一定之金額。謂之年金。年金因其年限分爲二種。其定某年爲限者。曰**定期年金** *Terminable annuity*。永無底止者。曰**永續年金** *Perpetual annuity*。年金之算法。亦以用對數爲便。茲述之於下。

I. 年金 S 元。以 n 年爲限。年利率 r 釐。待至 n 年後一次算淸。求其總價 A。

$$第一年=S.$$

$$〃\ 二\ 〃=S+S(1+r)=S+SR.$$

$$〃\ 三\ 〃=S+SR+SR^2.$$

....

$$〃\ n\ 〃=S+SR+SR^2+\cdots\cdots+SR^{n-1}.$$

卽　$$A=S+SR+SR^2+\cdots\cdots+SR^{n-1}.$$

由§179之(II)。　$$\mathbf{A}=\frac{\mathbf{S(R^n-1)}}{\mathbf{R-1}}=\frac{\mathbf{S(R^n-1)}}{\mathbf{r}}.$$

例. 有 6 年之定期年金 1200 元。年利率 6 釐。求其總價幾何。

因　$S=1200,\ r=.06,\ R=1.06,\ n=6.$

故　$$A=\frac{1200\{(1.06)^6-1\}}{.06}=20000\{(1.06)^6-1\}$$

檢表。$\log(1.06)^6=6\log1.06=6\times0.02531$

$$=0.15186=\log1.418.$$

卽　$$A=20000(1.418-1)=8360.$$

II. 年金 S 元。以 n 年爲限。年利率 r 釐。求於第一年一次算清之現價 P。

由§219。P 元於 n 年後之本利和爲 $P(1+r)^n=PR^n$。

而由本節 I。　$A=\dfrac{S(R^n-1)}{r}$.

上二式之右邊。按之於理應相等。

故　$$PR^n=\frac{S(R^n-1)}{r}.$$

卽　$$\mathbf{P}=\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{r}}\times\frac{\mathbf{R}^n-\mathbf{1}}{\mathbf{R}^n}=\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{r}}\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}^n}\right).$$

若 n 愈增大。則 $\dfrac{1}{R^n}$ 愈減小可接近於 0。卽 $1-\dfrac{1}{R^n}$ 接近於 1。故如爲永續年金。則

$$\mathbf{P}=\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{r}}.$$

例 1. 有 5 年之定期年金 105 元。年利 4 釐。求現價。

因　$S=105,\ r=0.04,\ R=1.04,\ n=5.$

故　$$P=\frac{105}{0.04}\left\{1-\frac{1}{(1.04)^5}\right\}=2625\left\{1-\frac{1}{(1.04)^5}\right\}.$$

檢表 $log\dfrac{1}{(1.04)^5}=log1-5log1.04=0-5\times0.01703$

$$=-0.08515=\overline{1}.91485=log0.82196.$$

卽　$$P=2625(1-0.82196)=467.355.$$

例 2. 每年可取 300 元之永續年金。年利 6 釐。求現價。

$$P=\frac{S}{r}=\frac{300}{0.06}=5000.$$

III. 每年可取 S 元之定期年金。年利率 r 釐。取至第 p 年後。將其後 q 年一次算淸。求其現價 P。

由本節II。年金 S 元從第一年至 $p+q$ 年之現價。爲

$$\frac{S}{r}\times\frac{R^{p+q}-1}{R^{p+q}}.$$

又年金 S 元從第一年至 p 年之現價。爲

$$\frac{S}{r}\times\frac{R^{p}-1}{R^{p}}.$$

則 $$P=\left(\frac{S}{r}\times\frac{R^{p+q}-1}{R^{p+q}}\right)-\left(\frac{S}{r}\times\frac{R^{p}-1}{R^{p}}\right).$$

故 $$\mathbf{P}=\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{r}}\left(\frac{\mathbf{R}^{p+q}-\mathbf{1}}{\mathbf{R}^{p+q}}-\frac{\mathbf{R}^{p}-\mathbf{1}}{\mathbf{R}^{p}}\right)=\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{r}}\times\frac{\mathbf{R}^{q}-\mathbf{1}}{\mathbf{R}^{p+q}}.$$

若 p 年之後爲永續年金。則與上同理。得

$$\mathbf{P}=\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{r}}\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{R}^{p}-\mathbf{1}}{\mathbf{R}^{p}}\right)=\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{rR}^{p}}.$$

例1. 有18年之定期年金5000元。年利6釐。求於第6年後將其後一次算結之現價。

因 $S=5000,\ r=.06,\ R=1.06,\ p+q=18,\ q=12.$

故 $$P=\frac{5000}{.06}\times\frac{(1.06)^{12}-1}{(1.06)^{18}}.$$

檢表。 $$\begin{aligned} log(1.06)^{12}&=12log1.06=12\times0.02531\\ &=0.30372=log2.0124.\\ log(1.06)^{18}&=18log1.06=18\times0.02531\\ &=0.45558=log2.8548.\end{aligned}$$

卽 $$P=\frac{5000}{06}\times\frac{2.0124-1}{2.8548}=29551.$$

例2. 有每年可取1000元之永續年金。年利4釐。求於3年後一次算結之現價

因 $S=1000,\ r=.04,\ R=1.04,\ p=3.$ 故 $P=\dfrac{1000}{.04\times(1.04)^3}$.

檢表 $log\dfrac{1000}{.04\times(1.04)^3}=log1000-log.04-3log1.04$

$$=3-\bar{2}.60206-3\times0.01703=4.34685=log22225.$$

即 $P=22225.$

IV. <u>n 年之定期年金。年利率 r 釐。已知其現價 P。求年金 S。</u>

由本節II。 $\mathbf{S}=\dfrac{\mathbf{PrR^n}}{\mathbf{R^n-1}}.$

若為永續年金。則由本節II。 $\mathbf{S=Pr.}$

例1. 有五年之定期年金。年利4釐。已知現價4675元。求年金。

因 $P=4675,\ r=.04,\ R=1.04,\ n=5.$

故 $$S=\frac{4675\times0.04\times(1.04)^5}{(1.04)^5-1}.$$

檢表。$log(1.04)^5=5log1.04=5\times0.01703=0.08515=log1.2166.$

$$log\left\{\frac{4675\times0.04\times(1.04)^5}{(1.04)^5-1}\right\}=log4675+log.04$$

$$+5log1.04-log\{(1.04)^5-1\}$$

$$=3.66978+\bar{2}.60206+0.08515-\bar{1}.33566=3.02133=lg1050.5.$$

即 $S=1050.5.$

例2. 已知永續年金之現價5000元。年利6釐。求年金。

$S=Pr=5000\times .06=300.$

問題四十九

1. 存款百圓。年利率五釐。每年計算複利。問經五十年之後。可得本利和若干。

2. 依年利率五釐之複利。借銀1000元。還時共付本利和1157.625元。求年數。

3. 依年利率五釐之複利。存銀百五十圓。問八年後之本利和若干。

4. 本銀100元。25年後之本利和265.05元。求年利率。

5. 借銀一宗。年利4釐。每半年轉利一次。至十年後。共還本利和749.8元。求本銀。

6. 某甲有以5年爲限之國債票。每年終可取100元。今待至屆限時一次支取。年利率5釐。問可共得幾何。

7. 某甲有四年之定期年金。每年可取50元。今於第一年之初。依年利6釐賣與某乙。問其賣價幾何。

8. 年利5釐。每年1元之永續年金。問其現價幾何。

9. 某店有勤謹之夥友。店主賞以10年之年金。每年可取100元。今此人取至第四年後。依年利5釐。將其後一次支取。問可得若干。

10. 甲國應償乙國賠款五千萬元。欲依年利7釐。均分作八年還淸。問每年應還若干元。

第十四篇　雜算法

第一章　分離係數法

221. 定義　凡任何代數式。以同文字之代數式乘之或除之。可將二代數式。各依同文字之降冪或昇冪排列。僅書其各項之係數。不書其文字。以施乘法或除法。是謂**分離係數法** *Method of detached coefficient*。

用分離係數法乘除。若依某文字之昇冪或降冪排列。而其間有空項者。宜以 0 補其缺。

例 1.　x^2-3x+2。試以 x^2+5x-7 乘之。

$$
\begin{array}{l}
1-3+2\\
\underline{1+5-7}\\
1-3+2\\
\quad +5-15+10\\
\qquad\ -7+21-14\\
\hline
1+2-20+31-14
\end{array}
$$

此係依 x 之降冪排列。而積中 x 之最高冪為 $x^2\times x^2$ 卽 x^4。故所求之積為 $x^4+2x^3-20x^2+31x-14$。

例 2.　x^4+2x^3-2x-3。試以 x^3+4x-6 乘之。

$$
\begin{array}{l}
1+2+0-2-\ 3\\
\underline{1+0+4-6}\\
1+2+0-2-\ 3\\
\qquad +4+8+\ 0-8-12\\
\qquad\qquad -6-12-0+12+18\\
\hline
1+2+4+0-15-8+\ 0+18
\end{array}
$$

此亦係依 x 之降冪排列。而積中 x 之最高冪為 $x^4\times x^3$ 卽 x^7。故所求之積為 $x^7+2x^6+4x^5-15x^3-8x^2+18$。

例 3.　$-6x^7-5x^6+6x^4-7x^3+4x^2+6x-5$。試以 $-3x^2+2x-3$ 除之。

$$
\begin{array}{l}
-3+2-3)\,-6-5+0+6-7+4+6-5\,(2+3+0-5-1+3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-6+4-6} \\
\qquad\qquad\qquad -9+6+6 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-9+6-9} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +15-7+4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+15-10+15} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +3-11+6 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+3-2+3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -9+3-5 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-9+6-9} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -3+4
\end{array}
$$

此係依 x 之降羃排列。而商中 x 之最高羃為 $x^7\div x^2$ 即 x^5。故所求之商為 $2x^5+3x^4-5x^2-x+3+\dfrac{-3x+4}{-3x^2+2x-3}$.

如上例 3 若先列為 x 之昇羃除之。則所得與此異。其理詳 §49。學者可自試之。

問 題 五 十

試用分離係數法求下之結果。

1. $(2x^3-6x^2+7x+5)(4x^2+5+3x^3-7x)$.
2. $(6a^3-3a^2+4a)(2a^3-5a^2-3)$.
3. $(3x^4-2x^3-3x^2-2x+7)(6x^2+4x-7)$.
4. $(x^8+x^4+1)\div(x^4-x^2+1)$.
5. $(x^3-2x^2+x-2)\div(x-2)$.
6. $(x^3-2x^2-4x+3)\div(x-3)$.

第二章　不等式

222. 不等式之定義。已述於前§10。即如$a>b$所以表示$a-b$爲正數之意。$a<b$所以表示$a-b$爲負數之意也。

凡二不等式之符號，皆爲$>$或皆爲$<$者。謂之同向。若一爲$>$一爲$<$者。則謂之異向。

223. **定理一**　不等式之兩邊，各加以或減以相等之數，仍爲同向。

如$a>b$。則$(a\pm m)-(b\pm m)=a-b$.

因$a-b$爲正數。故$(a\pm m)-(b\pm m)$爲正數，即$a\pm m>b\pm m$。

由是凡不等式之各項，皆可變其符號由此邊移於彼邊。

如$a+c>b-d$兩邊各減c。則$a>b-d-c$.

224. **定理二**　不等式之兩邊，各以同一正數乘之或除之。仍爲同向。若各以同一負數乘之或除之。則爲異向。

如$a>b$則$am-bm=m(a-b)$及$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{1}{m}(a-b)$.

因$a-b$爲正數。故若m亦爲正數，則$m(a-b)$及$\frac{1}{m}(a-b)$皆爲正數。即$am>bm$及$\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$。又若m爲負數，則$m(a-b)$及$\frac{1}{m}(a-b)$皆爲負數。即$am<bm$及$\frac{a}{m}<bm$.

由是盡變不等式各項之符號。即爲異向之不等式。

如$a-b>c-d$. 兩邊各以-1除之，則$b-a<d-c$.

225. **定理三**　從一數各減不等式之兩邊，則爲異向之不等式。

如 $a>b$。以其兩邊各由 m 減之。

則　$a-m>b-m$(§223).　即　$m-a<m-b$(§224).

226. **定理四**　同向諸不等式。其相應邊之和。仍爲同向不等式。

如 $a>b, a_1>b_1$, 因 $a-b>0, a_1-b_1>0$.

則　$(a+a_1)-(b+b_1)>0$.　故　$a+a_1>b+b_1$(§223).

227. **定理五**　同向諸不等式。其各邊皆係正數者。則其相應邊之積。仍爲同向不等式。

如 $a>b, a_1>b_1$.　因 a, b, a_1, b_1 皆爲正數。

則 $aa_1>a_1b$(§224) 及 $a_1b>bb_1$. 故 $aa_1>bb_1$.

由是若 $a>b$ 而 a, b, m 皆爲正數。則 $a^m>b^m$.

228. **定理六**　若二正數之和爲一定。則其積以二數相等時爲最大。

如二正數之和爲 $2a$。假定其二數爲 $a+x$ 及 $a-x$。則其積爲 a^2-x^2。如欲其積爲最大。必須令 x^2 爲最小。即 $x=0$。則其積爲 a^2。故此二數皆爲 a。

由此定理。若 a 與 b 爲各不相等之正數。則

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)>ab.\quad \text{即}\quad \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

故二正數之等差中項大於其等比中項。

由是推之。如 a, b, c, d 爲各不相等之正數則

$$\frac{a+b+c+d+\cdots\cdots}{n}>\sqrt[n]{abcd\cdots\cdots}$$

故諸正數之相加平均數大於其相乘平均數。

229. 例解　應用前述定理。示例如下。

例 1.　試求 $4x-3>\frac{3x}{2}-\frac{3}{5}$ 中 x 之最小限值。

以 10 乘原式。得 $40x-30>15x-6$ (§224).

移項。$25x>24$ (§223).　卽　$x>\frac{24}{25}$ (§224).

故 x 之值不能小於 $\frac{24}{25}$。

例 2.　試由下列二式求 x 之限值。

$$x-4>2-3x\cdots\cdots(1)\qquad 3x-2<x+3\cdots\cdots(2)$$

由(1)式。$4x>6$.　卽 $x>\frac{3}{2}$.

由(2)式。$2x<5$.　卽 $x<\frac{5}{2}$.

故 x 之值在 $\frac{3}{2}$ 與 $\frac{5}{2}$ 之間。

例 3.　設 a, b, c 各不相等。試證 $a^4+b^4+c^4>abc(a+b+c)$.

因 $(a^2-b^2)^2>0$.　故 $a^4+b^4>2a^2b^2$ (§223).

同理。$a^4+c^4>2a^2c^2$,　$b^4+c^4>2b^2c^2$.

卽　$2(a^4+b^4+c^4)>2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$ [§226].

又 $(ab-ac)^2>0$.　故 $a^2b^2+a^2c^2>2a^2bc$.

同理。$a^2b^2+b^2c^2>2ab^2c$,　$a^2c^2+b^2c^2>2abc^2$.

卽　$2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)>2abc(a+b+c)$ [§226].

故　$a^4+b^4+c^4>abc(a+b+c)$.

例 4.　設 a, b 俱爲正數各不相等。問 $\frac{a+b}{2}$ 與 $\frac{2ab}{a+b}$ 孰大。

$$\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}.$$

惟 $\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$ 必爲正數。故 $\frac{a+b}{2}>\frac{2ab}{a+b}$.

例 5. 試證 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{a_1}>n$. 但 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$ 皆爲正數或負數而各不相等。

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 無論皆爲正數或負數,而 $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_3}{a_4}, \cdots, \frac{a_n}{a_1}$ 必皆爲正數,故由 §228。

$$\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{a_1}\right)>\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{a_1}}=1.$$

故 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{a_1}>n$.

問題五十一

試證下列各式。但 a, b, c, d 爲各不相等之正數。

1. $a^2+b^2>2ab$.　　2. $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

3. $a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc$.　　4. $a^3+b^3+c^3>3abc$.

5. 凡分數與其倒數之和,必大於 2。試證之。

6. 問 $\frac{a+4b}{a+5b}$ 與 $\frac{a+6b}{a+7b}$ 孰爲大。但 a, b 爲不等之正數。

7. 問 $\frac{2a+3b}{3a+2b}$ 與 $\frac{5a+6b}{9a+8b}$ 孰爲大。但 a, b 爲不等之正數。

試由下列各題中之二式,各求 x 之限值。

8. $4x-6<2x+4$,　$2x+4>16-2x$.

9. $\frac{1}{5}(ax)+bx-ab>\frac{1}{5}a^2$,　$\frac{1}{7}(bx)-ax+ab<\frac{1}{7}b^2$.

10. 試由下列二式求 x 之適宜整數值

$$\frac{1}{4}(x+2)+\frac{1}{3}x<\frac{1}{2}(x-4)+3,\ \frac{1}{4}(x+2)+\frac{1}{3}x>\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{3}$$

第三章　記數法

230. **定義**　通常以數字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 表任何之數。其右端第一位爲一位數。次爲十位數。又次爲百位數。又次爲千位數。卽凡自右端起第 n 位所記之數。等於其數字之自值乘10之 $n-1$ 乘羃也。此種記數法謂之**十進法** *Decimal notation* 或**常用記數法** *Common scale of notation*。其10謂之記數底 *Base*。

例如　$25804=2\times10^4+5\times10^3+8\times10^2+0\times10+4.$

通常記數。固以十進法爲最便。然亦不限於十進也。凡自1以上無論任何整數。無不可取以作底而記數。但以何數爲底。則於記數時所用之數目字。卽以自 0 起至何數爲限。滿限則仍爲 1 而記於左位。如以 8 爲底之記數法。其所用之數目字。不出乎 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 以外。滿 8 則進 1 於左位。

由是如有某數 N。欲以 r 爲底表其數。則可書爲

$$a_na_{n-1}\cdots\cdots a_3a_2a_1a_0$$

之形。此卽謂之 **r 進法**。其 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots$ 皆爲小於 r 之正整數或爲 0。而 a_1 之值爲 $a\times r$。又 a_2 之值爲 $a_2\times r^2$。又 a_3 之值爲 $a_3\times r^3$。餘準此類推。故

$$N=a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+\cdots\cdots+a_3r^3+a_2r^2+a_1r+a_0$$

〔注意〕　本章所用之文字皆表正整數.

231. 定理　凡任何整正數。皆可以 r 進法記之。

如有數13423以七進法記之。

$$\begin{array}{l} 7\,|\underline{13423} \\ \quad 7\,|\underline{1917}\cdots\cdots\text{餘}\ 4 \\ \qquad 7\,|\underline{273}\cdots\cdots\text{餘}\ 6 \\ \qquad\quad 7\,|\underline{39}\cdots\cdots\text{餘}\ 0 \\ \qquad\qquad\ 5\cdots\cdots\text{餘}\ 4 \end{array}$$

逐次以 7 除之。記其各餘數於右。

由上之算法。則原數可書之如下。

$$\{[(5\times7+4)7+0]7+6\}7+4=5\times7^4+4\times7^3+0\times7^2+6\times7+4.$$

故七進法之數爲 54064。此卽由上之算法。將其最後之商與逐次之餘數並列而得也。

例 1.　有數2156。試以五進法記之。

$$\begin{array}{l} 5\,|\underline{2156} \\ \quad 5\,|\underline{431}\cdots\cdots1 \\ \qquad 5\,|\underline{86}\cdots\cdots1 \\ \qquad 5\,|\underline{17}\cdots\cdots1 \\ \qquad\quad 3\cdots\cdots2 \end{array}$$

故所記之數爲 32111.

例 2.　有數34239。試以十一進法記之。

$$\begin{array}{l} 11\,|\underline{34239} \\ \quad 11\,|\underline{3112}\cdots\cdots7 \\ \qquad 11\,|\underline{282}\cdots\cdots t \\ \qquad\quad 11\,|\underline{25}\cdots\cdots7 \\ \qquad\qquad\ 2\cdots\cdots3 \end{array}$$

但 $t=10$.

故所記之數爲 $237t7$.

例 3.　有分數 $\frac{15}{17}$。試以四進法記之。

$$\begin{array}{l} 4\,|\underline{15} \\ \quad 3\cdots\cdots3, \end{array}\qquad \begin{array}{l} 4\,|\underline{17} \\ \quad 4\,|\underline{4}\cdots\cdots1 \\ \qquad 1\cdots\cdots0 \end{array}$$

故所記之數爲 $\frac{33}{101}$.

例4. 有七進法之數54064。試以十進法記之。

因 $54064=5\times7^4+4\times7^3+0\times7^2+6\times7+4=13423.$

故所記之數爲13423.

例5. 有八進法之數31426。試以四進法記之。

先如例4將31426記爲十進法之數。後如例1以四進法記之。此正法也。然通常演算。以下法爲便。

$$
\begin{array}{rl}
4\,\underline{|\,31426} & \\
4\,\underline{|\,6305} & \cdots\cdots 餘2 \\
4\,\underline{|\,1461} & \cdots\cdots 餘1 \\
4\,\underline{|\,314} & \cdots\cdots 餘1 \\
4\,\underline{|\,63} & \cdots\cdots 餘0 \\
4\,\underline{|\,14} & \cdots\cdots 餘3 \\
3 & \cdots\cdots 餘0
\end{array}
$$

先以4除$(3\times8+1)$。得商6餘1。次以4除$(1\times8+4)$。得商3餘0。餘準此類推。

故所記之數爲3030112.

232. 四則 r進法之數。其加減乘除四法。亦爲習算者所不可不知。茲示乘除法之二例。而加減法即寓於其中。

例1. 有五進法之數2304與342。試求其積。

$$
\begin{array}{r}
2304 \\
342 \\
\hline
10113 \\
20231 \\
12422 \\
\hline
2010123
\end{array}
$$

$2\times4=8=1\times5+3=13$。其3爲第一位之數。以1進於第二位。$2\times0+1=1$爲第二位之數。$2\times3=6=1\times5+1=11$。其1爲第三位之數。以1進於第四位。$2\times2+1=5=1\times5+0=10$。其0爲第四位之數。1爲第五位之數。如是得10113爲乘數第一位乘被乘數之積。

次以乘數第二位第三位如法徧乘被乘數。後將各積相加。滿5則進1於上位。即得乘積爲2010123。

例2. 有十二進法之數 $e47200$ 與 $3t9$。試求其小數除大數之商。但 $t=10, e=11$.

$$\begin{array}{l} 3t9)\,e47200\,(2e08 \\ \quad 796 \\ \quad \overline{3712} \\ \quad 36t3 \\ \quad \overline{\quad 2e00} \\ \quad\quad 2720 \\ \quad\quad \overline{\ 3t0} \end{array}$$

由前例求得商之各位。其用減法時。若被減數之某位小於減數者。則從上位減1。加12於本位而減之。如是得其商為 $2e08\frac{3t0}{3t9}$。

233. 記底分數 *Radix fraction* 以任何整數為底所記之數。其中之小數曰記底分數。此卽與常用記數法之小數相當。故凡 r 進法之小數 $.b_1b_2b_3b_4\cdots\cdots$。卽所以表十進法之數 $\frac{b_1}{r}+\frac{b_2}{r^2}+\frac{b_3}{r^3}+\frac{b_4}{r^4}+\cdots$。而 $b_1, b_2, b_3, b_4\cdots$,皆為小於 r 之正整數或為0。如設 F 為十進法之小數。以 r 進法記之為 $.b_1b_2b_3b_4\cdots$。

則 $$F=\frac{b_1}{r}+\frac{b_2}{r^2}+\frac{b_3}{r^3}+\frac{b_4}{r^4}+\cdots\cdots$$

卽 $$Fr=b_1+\frac{b_2}{r}+\frac{b_3}{r^2}+\frac{b_4}{r^3}+\cdots\cdots$$

此 b_1 為整數。其餘 $\frac{b_2}{r}+\frac{b_3}{r^2}+\frac{b_4}{r^3}+\cdots$ 為小數。故知以 r 乘 F。其積之整數。卽為 r 進法小數之第一位。次以 F' 表其小數部。

則 $$F'=\frac{b_2}{r}+\frac{b_3}{r^2}+\frac{b_4}{r^3}+\cdots\cdots$$

卽 $$F'r=b_2+\frac{b_3}{r}+\frac{b_4}{r^2}+\cdots\cdots$$

故知以 r 乘 F'。其積之整數。卽其小數之第二位。

如是再以 r 乘其小數部。可順次知其小數之各位。

例1.　有分數$\frac{1}{27}$。試以六進法之小數記之。

$$\frac{1}{27}\times 6=0+\frac{6}{27},\quad \frac{6}{27}\times 6=1+\frac{9}{27},\quad \frac{9}{27}\times 6=2.$$

順次以 6 乘分數。而取其整數。即得所記之小數爲 .012。

例2.　有分數$\frac{1}{7}$。試以三進法之小數記之。

$$\frac{1}{7}\times 3=0+\frac{3}{7},\quad \frac{3}{7}\times 3=1+\frac{2}{7},\quad \frac{2}{7}\times 3=0+\frac{6}{7}.$$

$$\frac{6}{7}\times 3=2\times\frac{4}{7},\quad \frac{4}{7}\times 3=1+\frac{5}{7},\quad \frac{5}{7}\times 3=2+\frac{1}{7}.$$

此末式之$\frac{1}{7}$與首式同。故所記爲循環小數即 $.\dot{0}1021\dot{2}$。

例3.　有小數 .03125。試記爲六進法之小數。

$$.03125\times 6=0.1875,\qquad .1875\times 6=1.125,$$

$$.125\times 6=0.75,\qquad .75\times 6=4.5,$$

$$.5\times 6=3.$$

順次以 6 乘小數。而取其整數。得所記之小數爲 .01043。

例4.　有數123.45。試以七進法記之。

此須將整數部與小數部分別求之。

$$\begin{array}{l} 7\,\underline{|\,123} \\ \;\;7\,\underline{|\,17}\cdots\cdots 4 \\ \;\;\;\;\;\;2\cdots\cdots 3 \end{array}\qquad \begin{array}{ll} .45\times 7=3.15, & .15\times 7=1.05, \\ .05\times 7=0.35, & .35\times 7=2.45. \end{array}$$

故所記之數爲 $234.\dot{3}10\dot{2}$。

例5.　有七進法之小數 .6。試以三進法記之。

因七進法之 .6。即爲分數$\frac{6}{7}$。如例 1 求之。得所記之小數爲 $.\dot{2}1201\dot{0}$。

問題五十二

1. 有數3166。試以十二進法表之。

2. 有六進法之數13553。試以八進法表之。

3. 有八進法之數4155。試以常用記數法表之。

4. 有十二進法之數 $t347e$。試以十一進法表之。但其 $t=10$, $e=11$。

5. 有分數$\frac{17}{21}$。試以四進法表之

6. 八進法之數2345, 6127及1503。試求其和。以十進法記之。

7. 六進法之數4021及3154。試求其差。以十進法記之。

8. 七進法之數234與456。試求其積。

9. 有數231與452。試各以七進法記之而求其積。復將其積以十進法記之。

10. 九進法之數17832126及4685。試求其後數除前數之商。

11. 有分數$\frac{1}{11}$。試以三進法之小數表之。

12. 有數1845.3125。試以十二進法表之。

13. 有八進法之數324.26。試以六進法記之。

14. 欲以重$1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^n$分之砝碼。衡17兩7錢9分之重物於天秤。問其用法如何。

15. 有二位之數。若加18。則數字之位置顚倒。又此數以七進法記之。其數字亦顚倒。問此數如何。

第四章　不定方程式

234. 定義　凡方程式之數少於未知數之數。則其未知數之值、可以多至無限。此種方程式曰不定方程式。已於§63略述之矣。然若未知數之值必限定用正整數。則有此限制。其值或爲有定。此在應用問題中所常遇者也。

例如$x+y=3$。其x與y之值。若必限定用正整數。則其根僅得$x=1$, $y=2$或$x=2$, $y=1$兩對而止。此外之分數值負數值。皆宜棄去也。又如$2x+y=8$。其y之值爲正整數者。必大於2而小於6。因若y小於2。則x爲分數。y大於6。則x爲分數或0或負數。皆非正整數也。故y之正整數值爲2, 4, 6。而x之相當正整數值爲3, 2, 1。

〔注意〕本章未知數之值皆爲正整數.

235. 二元一次方程式　凡含x, y二未知數之一次方程式。不外$ax+by=c$, $ax+by=-c$, $ax-by=c$, $ax-by=-c$四種。其a, b, c爲正整數。然若$ax+by=-c$。則x, y不得不爲負數。若$ax-by=-c$。則$by-ax=c$。此不過將$ax-by=-c$之x與y互易而已。故未知數之值。如必限定正整數。則二元一次方程式。皆可以$ax+by=c$, $ax-bx=c$二式總括之。

$ax\pm by=c$爲最簡之形。故其中a, b, c無公約數。而a, b亦必無公約數。如謂a, b有公約數。而使$a=mA$, $b=mB$。則原方程式爲$c=m(Ax\pm By)=mM$。即a, b, c有公約數m也。與所言不合。

236. $ax-by=c$ 之解　此種方程式。欲求其 x, y 之正整數值。僅有最小之限而無最大之限。故其答數無限。茲示其例如下。

例. 求 $19x-41y=43$ 中 x 及 y 之正整數值.

變原式爲　$x=\frac{41y+43}{19}=2y+2+\frac{3y+5}{19}$.

惟 x 及 y 皆爲整數。則 $\frac{3y+5}{19}$ 亦必爲整數。設 $\frac{3y+5}{19}=m$.

則　$x=2y+2+m$;　而　$y=\frac{19m-5}{3}=6m-1+\frac{m-2}{3}$.

但 $\frac{m-2}{3}$ 亦必爲整數。再設 $\frac{m-2}{3}=n$.

則　$y=6m-1+n$.　而　$m=3n+2$.

由是 n 可爲任何整數。故得相等之各式如下。

$$m=3n+2.$$
$$y=6m-1+n=19n+11.$$
$$x=2y+2+m=41n+26.$$

因 x, y 限定爲正整數。由其等式。可見 n 不能爲負數。至小僅可爲 0。則 x, y 之值爲最小。故 n 自 0 起而 1 而 2 以至於無窮皆合。故曰。僅有最小之限。而無最大之限也。

n 之值爲	0,	1,	2,	3,	4,	5,	········
x 之值爲	26,	67,	108,	149,	190,	231,	········
y 之值爲	11,	30,	49,	68,	87,	106,	········

237. ax+by=c之解　此種方程式。欲求其 x 與 y 之正整數值。有最小之限。兼有最大之限。故其答數有限。茲示其例如下。

例. 求 $7x+13y=219$ 中 x 與 y 之正整數值。

變原式為　$x=\frac{219-13y}{7}=31-y+\frac{2-6y}{7}$.

設 $\frac{2-6y}{7}=m$。即整數。

則　$x=31-y+m$.　而　$y=\frac{2-7m}{6}=\frac{2-m}{6}-m$.

又設 $\frac{2-m}{6}=n$。即整數。

則　$y=n-m$.　而　$m=2-6n$.

由是 n 可為任何整數。故得相等之各式如下。

$$m=2-6n.$$

$$y=n-m=7n-2.$$

$$x=31-y+m=35-13n.$$

因 x, y 限定為正整數，

由 y 之等式。可知　$7n>2$.　即　$n>\frac{2}{7}$.

由 x 之等式。可知　$13n<35$.　即　$n<2\frac{9}{13}$.

故 y 以 $n=1$ 時為最小。x 以 $n=2$ 時為最大。故只可使 $n=1$ 及 $n=2$。

而 $n=1$. 則 $x=22$, $y=5$. 又 $n=2$. 則 $x=9$, $y=12$.

惟有此兩答合題。故曰有最大最小之限也。

238. 三元一次兩方程式之解法 先從兩方程式消去其一未知數變爲二元一次式。如前二節之法。求得其二未知數之假定等式。代入原二式中之任一式。可得三未知數之限值。玆示其例如下。

例. 求下列二式中x, y, z之正整數值.

$$3x+5y+7z=560\cdots\cdots(1) \qquad 9x+25y+49z=2920\cdots\cdots(2)$$

先依§60從兩方程式消去z。得

$$12x+10y=1000. \text{ 即 } 6x+5y=500\cdots\cdots(3)$$

變(3)式爲 $x=\dfrac{500-5y}{6}=83+\dfrac{2-5y}{6}=83+m.$

即 $2-5y=6m.$ 或 $y=\dfrac{2-6m}{5}=\dfrac{2-m}{5}-m=n-m.$

即 $2-m=5n.$ 或 $m=2-5n.$

故 $y=n-m=6n-2.$

$x=83+m=85-5n.$

以x, y之假定等式代入(1)式。得

$$3(85-5n)+5(6n-2)+7z=560. \text{ 即 } 7z=315-15n.$$

即 $z=\dfrac{315-15n}{7}=45-2n-\dfrac{n}{7}=45-2n-p.$ 即 $n=7p.$

故 $y=6n-2=42p-2.$

$x=85-5n=85-35p.$

$z=45-2n-p=45-15p.$

由 y 之等式。知 $42p>2$. 卽 $p>\frac{1}{21}$. 卽 $p=1$ 爲最小。

由 x 之等式。知 $35p<85$. 卽 $p<2\frac{3}{7}$. 卽 $p=2$ 爲最大。

由 z 之等式。知 $15p<45$. 卽 $p<3$. 卽 $p=3$ 爲最大。

故只可令 $p=1$ 及 $p=2$。僅得二答如下。

$p=1$. 則 $y=40$, $x=50$, $z=30$.

$p=2$. 則 $y=82$, $x=15$, $z=15$.

239. **雜例**

例 **1.** 求 $3x+2y+8z=40$ 中 x, y, z 之正整數值。

因 x, y 不能爲 0。亦不能爲負。故以 $x=1, y=1$ 爲最小。

由是 $3+2+8z=40$. 卽 $z=\dfrac{35}{8}=4\dfrac{3}{8}$.

故 z 不能大於 4。而從原式,

$z=4$. 則 $3x+2y=8$ ……(1)

$z=3$. 則 $3x+2y=16$ ……(2)

$z=2$. 則 $3x+2y=24$ ……(3)

$z=1$. 則 $3x+2y=32$ ……(4)

將此右邊四式依§237解之。

由(1)得 $x=2$, $y=1$.

由(2)得 $x=4$, $y=2$. 及 $x=2$, $y=5$.

由(3)得 $x=6$, $y=3$. 及 $x=4$, $y=6$. 及 $x=2$, $y=9$.

由(4)得 $x=10$, $y=1$. 及 $x=8$, $y=4$. 及 $x=6$, $y=7$. 及 $x=4$, $y=10$. 及 $x=2$, $y=13$.

故此方程式之解答共有11。

例2.　求$6x^2-13xy+6y^2=16$中x及y之正整數值。

分解原式爲$(3x-2y)(2x-3y)=16$.

因x, y爲正整數故$3x-2y$及$2x-3y$亦爲整數。且各等於16中之一因數。今將16分爲二因數。作其等式如下。

$$3x-2y=\pm16,\quad 2x-3y=\pm1\cdots\cdots(1)$$

$$3x-2y=\pm8,\quad 2x-3y=\pm2\cdots\cdots(2)$$

$$3x-2y=\pm4,\quad 2x-3y=\pm4\cdots\cdots(3)$$

$$3x-2y=\pm2,\quad 2x-3y=\pm8\cdots\cdots(4)$$

$$3x-2y=\pm1,\quad 2x-3y=\pm16\cdots\cdots(5)$$

自上列(1),(2),(3),(4),(5)各二式消去y。則$5x$之值順次等於$\pm(48-2)$, $\pm(24-4)$, $\pm(12-8)$, $\pm(6-16)$, $\pm(3-32)$. 此諸數中其x之值爲正整數者。惟

$$5x=+(24-4)=20\text{ 及 }5x=-(6-16)=10.$$

故得$x=4$及2。而與x相應所有y之值爲2及4。

240.　應用問題　玆揭數例。以示解法之一班。

例1.　買牛馬不知其數。但知每馬價31元。每牛價20元。而牛之共價比馬之共價多7元。問其所買牛馬之數。至少各有若干。

設x爲牛數。y爲馬數。由題意得方程式如下。

$$20x-31y=7.$$

將此式變爲　$$x=\frac{31y+7}{20}=y+\frac{11y+7}{20}=y+m.$$

即　$11y+7=20m$.　或　$y=\frac{20m-7}{11}=m+\frac{9m-7}{11}=m+n$.

即　$9m-7=11n$.　或　$m=\frac{11n+7}{9}=n+\frac{2n+7}{9}=n+p$.

即　$2n+7=9p$.　或　$n=\frac{9p-7}{2}=4p-3+\frac{p-1}{2}=4p-3+q$.

即　$p-1=2q$.　或　$p=2q+1$.

故　$n=4p-3+q=9q+1$.

$m=n+p=11q+2$.

$y=m+n=20q+3$.

$x=y+m=31q+5$.

但牛數與馬數必爲正整數。且由題意限定爲最小。

故由 y 之等式。$20q+3>0$. 即 $q>-\frac{3}{20}$. 以 $q=0$ 爲最小。

及由 x 之等式。$31q+5>0$. 即 $q>-\frac{5}{31}$. 以 $q=0$ 爲最小。

而 $q=0$. 則 $y=3$, $x=5$. 故求得牛 5 匹。馬 3 匹。

例2.　某綢莊欠錢莊款1200元。用甲乙兩種綢抵還。甲種每疋值27元。乙種每疋值21元。問宜如何配搭。

設 x 爲甲種疋數。y 爲乙種疋數。由題意得方程式如下。

$$27x+21y=1200.\quad 即\quad 9x+7y=400.$$

如上求得　$y=9p-2$, $x=46-7p$.

故由 y 之等式。$9p>2$. 即 $p>\frac{2}{9}$. 以 $p=1$ 爲最小。

及由 x 之等式。$7p<46$. 即 $p<6\frac{4}{7}$. 以 $p=6$ 爲最大。

順次令 $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$. 得 x, y 之值有六對如下。

$x=39, 32, 25, 18, 11, 4.$　$y=7, 16, 25, 34, 43, 52.$

例3.　公雞一。值銀五角。母雞一。值銀三角。雛雞三。值銀一角。今以銀十元買雞百隻。問公雞母雞雛雞各幾隻。

設 x 爲公雞數，y 爲母雞數。z 爲雛雞數。以角爲單位。則由題意得二方程式如下。

$$x+y+z=100\cdots\cdots(1) \qquad 5x+3y+\frac{z}{3}=100\cdots\cdots(2)$$

由此二式消去 z。得

$$14x+8y=200. \qquad 即 \qquad 7x+4y=100\cdots\cdots(3)$$

由(3)式如上求得　$y=4-7p,$　$x=12+4p.$

以 x, y 之等式代入(1)。得

$$4-7p+12+4p+z=100. \qquad 即 \qquad z=3p+84.$$

由 y 之等式，　$7p<4$　即 $p<\frac{4}{7}.$　以 $p=0$ 爲最大。

由 x 之等式，$12+4p>0$ 即 $p>-3.$ 以 $p=-2$ 爲最小。

由 z 之等式，$3p+84>0$ 即 $p>-28.$ 以 $p=-27$ 爲最小。

故 p 祇可等於 0 或 -1 或 -2。僅得三答如下。

$p=0.$　則　$x=12,$ $y=4,$ $z=84.$

$p=-1.$ 則　$x=8,$ $y=11,$ $z=81.$

$p=-2.$ 則　$x=4,$ $y=18,$ $z=78.$

問題五十三

求下列各方程式 x 與 y 之最小正整數值。

1.　$7x-13y=15.$　　*2.*　$119x-105y=217.$

3.　$5x-14y=11.$　　*4.*　$5x-17y=23.$

下列各方程式。試求其正整數之根。

5. $x+9y=27$.　　6. $3x+8y=25$.

7. $3x+7y=46$.　　8. $7x+9y=100$.

9. $27x+8y=748$.　　10. $31x+90y=3640$.

11. $2x+3y+7z=23$.　　12. $4x+5y+6z=28$.

13. $x^2-y^2=63$.　　14. $2x^2+5xy-12y^2=28$.

試以正整數解下列各題。

15. $\begin{cases} 5x+y+7z=39, \\ 2x+4y+9z=63. \end{cases}$　　16. $\begin{cases} 5x+7y+2z=24, \\ 3x-y-4z=4. \end{cases}$

17. 試將316分為兩數。其一數可以15整除。一數可以11整除。

18. 有一數。以11除之餘3。以19除之餘5。問此數最小為若干。

19. 有一數。以3除之餘2。以5除之餘3。以7除之餘2。問此數最小為若干。

20. 有大中小三物。大物一值錢三。中物三值錢五。小物五值錢一。共百物共值百錢。問物各幾何。

第十五篇　圖解

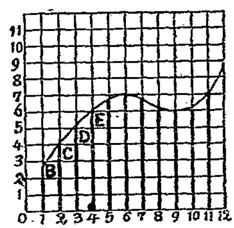
第一章　定義

241. 圖解 *Graph*　凡用圖式表示溫度之變化。戶口之增減。價格之漲落。以及描摹種種事實之形狀者。皆曰圖解。

例如已知某村近十二年內之戶口數如下表。求作圖解表示其增減之狀況。

年數	戶口數	年數	戶口數	年數	戶口數	年數	戶口數
1	27000	4	60000	7	67000	10	63000
2	40000	5	68000	8	62000	11	70000
3	50000	6	70000	9	60000	12	89000

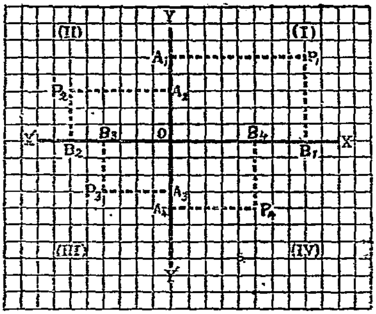
如圖先任作一直線。均分為十二分。於其各分點記 0, 1, 2, 3, 4 等字。以表年數。次於 0 端向上作前直線之垂線。亦分為相等之段。於其各分點記 1, 2, 3, 4 等字。以表10000,20000,30000,40000等數。乃於年數之各分點作垂線如 $B1$, $C2$, $D3$, 等。其長合於其對應之戶口數。末以直線順次聯結



BC 及 CD 及 DE。則此 $BCDE\cdots$ 線表示戶口增減之狀況。即所求之圖解也。

故用圖解表示變化之狀況。可以一目瞭然。比用他法表示者。尤為明悉。

242. 一點之坐標 *Co-ordinate* 欲定平面上一點之位置。可如圖先在此平面上作水平線XX'。次作其垂線YY'。與之正交於O點。則由一點與此二線之距。即可定其點之位置。



任何點與YY'線之距。自O起在XX'線上計之者。曰此點之橫線*Abscissa*。又與XX'線之距。自O起在YY'線上計之者。曰此點之縱線*Ordinate*。如圖從P_1點作XX'之垂線P_1B_1。及YY'之垂線P_1A_1。

則　OB_1為P_1之橫線。OA_1為P_1之縱線。

同理。OB_2為P_2之橫線。OA_2為P_2之縱線。

OB_3為P_3之橫線。OA_3為P_3之縱線。

OB_4為P_4之橫線。OA_4為P_4之縱線。

某點之縱線與橫線。總稱為此點之坐標。而XX'及YY'二線曰坐標軸 *Co-ordinate axes*。分別之。則XX'線曰橫軸 *Axis of abscissa*。或x軸。YY'線曰縱軸 *Axis of ordinate*。或y軸。又O點曰原點 *Origin*。

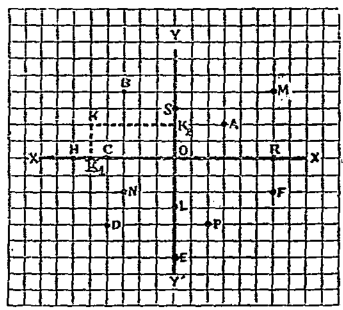
通常恆以x表橫線。y表縱線。而表一點之坐標。恆書橫線於先。縱線次之。記為(x, y)。例如點$(4, 6)$。即謂此點之橫線為4。縱線為6也。

243. 坐標之正負 橫線在YY'之右傍者爲正。左傍者爲負。縱線在XX'之上方者爲正。下方者爲負。

例如前節之圖。P_1點之坐標爲$(8,5)$。P_2點爲$(-6,3)$。P_3點爲$(-4,-3)$。P_4點爲$(5,-4)$。又可簡記之如$P_1=(8,5)$,$P_2=(-6,3)$等。

244. 象限 *Quadrant* 如§242之圖。x軸與y軸分平面爲四分。每分曰象限。以 I, II, III, IV 爲別。凡在象限 I 各點。其x與y俱爲正。象限 II 各點。其x爲負而y爲正。象限 III 各點。其x與y俱爲負。象限 IV 各點。其x爲正而y爲負。故觀一點之x, y符號。即可知其屬於何象限。

245. 測點製圖 由上三節。若已知某點之位置。即可測其對於某軸之坐標。又若已知某點之坐標。即可製圖以定其位置。



如圖。取適宜之長度。測P點之坐標。則知其距YY'右傍爲 2 單位。距XX'下方爲 4 單位。故知其坐標爲$(2,-4)$。

又如已知坐標$(-5,2)$。欲製圖以定其點之位置。則距YY'左傍取 5 單位。自O至K_1。距XX'上方取 2 單位。自O至K_2。從K_1作XX'之垂線。從K_2作YY'之垂線。此兩垂線之交點K。即爲所求之點。

〔注意〕 卷後特附方格紙數頁。以備製圖時之用。

問題五十四

1. 設某日之温度如下表。試以圖解示其變化。

	午前					午後							
鐘點數	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
温　度	71°	72°	73°	77°	82°	85°	86°	88°	90°	89°	88°	86°	82°

2. 如 §**245** 之圖。其 $A, B, C, D, E, F, H, L, M, N, R, S$ 各點之坐標如何。

3. y 軸上各點之橫線如何。又 x 軸上各點之縱線如何。

4. 若某點之橫線爲 0。則此點在何處。又若縱線爲 0。則在何處。又若縱線橫線皆爲 0。則在何處。

5. 設某點之坐標皆爲正。則此點在何象限。又皆爲負。則在何象限。又橫線爲正。縱線爲負。則在何象限。又縱線爲正。橫線爲負。則在何象限。

6. 已知各點之坐標如下。試製總圖各定其位置。

$A=(3, 2)$.　　$E=(5, 5)$.　　$L=(0, 4)$.

$B=(3, -2)$.　　$F=(-5, 5)$.　　$M=(0, -4)$

$C=(4, 3)$.　　$G=(-2, 5)$.　　$N=(3, 0)$.

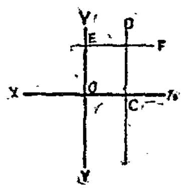
$D=(4, -3)$.　　$H=(-3, -4)$.　　$P=(-6, 0)$.

7. 已知各點之坐標爲 $(-2, -8)$, $(-1, -6)$, $(0, -4)$, $(1, -2)$, $(2, 0)$, $(3, 2)$ $(4, 4)$。問照此製圖。其諸點之位置。是否在一直線上。又以 x 代各橫線。y 代相應各縱線。則 $2x-y=4$ 方程式是否滿足。

第二章　一次方程式之圖解

246. 方程式之圖解　方程式中之未知數。恒以 x 或 y 表之。今若以橫線代其 x 之值。縱線代其 y 之值。如前章製圖。可得若干點。通過此諸點作直線或曲線。則此線卽謂之方程式之圖解。

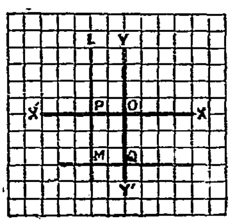
247. 一元一次方程式之圖解　凡含一未知數 x 之一次方程式。皆可化爲 $x=a$ 之形。故如圖在 XX' 軸上。自原點起。若 a 爲正。須取 OX 之方向。若 a 爲負。須取 OX' 之方向。截取 OC。使等於 a 之絕對值。乃於 C 點作 CD 直線。與 YY' 軸平行。則此 CD 線中各點之橫線。皆與 a 相等。卽爲 $x=a$ 方程式之圖解。



同理。若 $y=b$ 方程式。則在 YY' 軸上。自原點起。取 OY 之方向。截取 OE。使等於 b。於 E 點作 EF 直線。與 XX' 軸平行。則 EF 線卽爲 $y=b$ 方程式之圖解。

由是一元一次方程式之圖解。卽爲平行於其軸之直線。

例 1.　試作 $x=-2$ 之圖解。



因 x 爲負。故如圖在橫軸上準 OX' 之方向。自 O 點起。取 2 單位如 OP。於 P 作 PL 直線。與 YY' 軸平行。則此 PL 線卽爲所求之圖解。

例2.　試作 $y=-3$ 之圖解。

因 y 爲負。故如前圖。在縱軸上準 OY' 之方向。自 O 點起。取 3 單位如 OQ。於 Q 作 QM 直線。與 XX' 軸平行。則此 QM 線卽爲所求之圖解。

248. 二元一次方程式之圖解　凡含二未知數 x 及 y 之一次方程式。皆可化爲

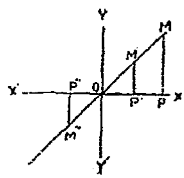
$$Ax+By=C.\quad 卽\quad y=-\frac{A}{B}x+\frac{C}{B}.$$

若設 $a=-\dfrac{A}{B}$, $b=\dfrac{C}{B}$.

則
$$y=ax+b.$$

此 a 及 b 可代任何二已知數。若 a 爲 0。則與前節同。若 b 爲 0。則 $y=ax$。故其圖解可分爲二種如下。

I.　**y=ax**　如圖。過坐標之原點作 MM'' 直線。由此線上 M, M', M'' 諸點作 MP, $M'P'$, $M''P''$ 諸縱線。則依幾何學理。MOP, $M'OP'$, $M''OP''$ 諸三角形均係相似。而



$$\frac{MP}{OP}=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{-M''P''}{-OP''}.$$

此式中之分子爲各點之縱線。其分母爲同點之橫線。故此線上之各點。其縱線與橫線之關係皆相同。今設此關係爲 a。則得　$\dfrac{y}{x}=a.$　卽　$y=ax.$

故 MM'' 線卽爲 $y=ax$ 方程式之圖解。

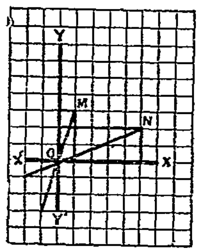
又此線若不在象限I內。而在象限II或IV內。亦可得相同之結果。惟 a 為負耳。蓋在象限II。則得

$$\frac{y}{-x}=a, \quad 即 \quad \frac{y}{x}=-a。$$

及在象限IV。則得 $\frac{-y}{x}=a, \quad 即 \quad \frac{y}{x}=-a。$

由是如欲作 $y=ax$ 方程式之圖解。可取適宜之單位。使縱線與橫線之比為 a。求得 M 點。聯結 O, M 作直線。卽得。

故 $y=ax$ 之圖解。卽為通過坐標原點之直線。



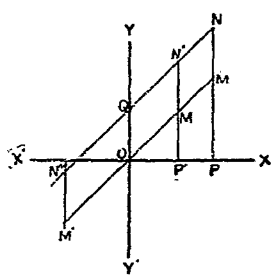
例1.　試作 $y=3x$ 之圖解。

設 $x=1$, 則 $y=3$。如圖依坐標 (1, 3) 定 M 點。作 OM 直線。卽為所求之圖解。

例2.　試作 $y=\frac{2}{5}x$ 之圖解。

設 $x=5$, 則 $y=2$。如圖依坐標 (5, 2) 定 N 點。作 ON 直線。卽為所求之圖解。

II.　y=ax+b.　如取方程式 $y=ax+b$ 與 $y=ax$ 比較。其二縱線對於同一橫線之差。為 b 之數量。故如圖將其縱線依 b 之符號增減 $MN, M'N', M''N''\cdots$。此各段皆等於 b 之絕對值。聯結 N, N', N'' 諸點。可作 NN'' 直線。與 MM'' 平行。而與 y 軸相交於 Q 點。則 QO 一段必等於 b。而 NN'' 直線。卽為 $y=ax+b$ 方程式之圖解。

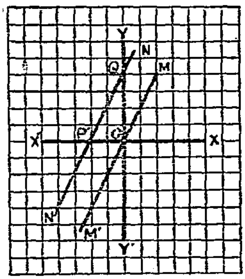


由是如欲作 $y=ax+b$ 方程式之圖解。可先依 I 作 MM''。次令 $b=QO=MN=M'N'=\cdots$。從 O 點起。依 b 之符號。定 QO 等於 b。乃於 b 點作 NN'' 直線。與 MM'' 平行。即得。

故 $y=ax+b$ 方程式之圖解。即爲與 y 軸相交之直線。其交點與原點之距離等於 b。

例 3. 試作 $y=2x+4$ 之圖解。

先依 I 作 $y=2x$ 之圖解爲 MM'' 直線。次因 $b=4$。故自原點 O 起。準 OY 之方向。取 4 單位如 OQ。從 Q 點作 NN'' 直線與 MM'' 平行。則此 NN'' 線即爲所求之圖解。

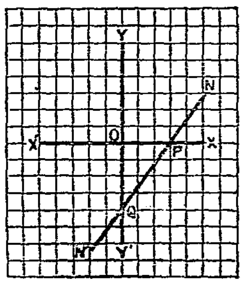


別法　原方程式若 $x=0$。則 $y=4$。因 y 爲正。故自原點起。準 OY 之方向。取 4 單位如 OQ。則 Q 即爲 NN'' 線中之一點。

又若 $y=0$。則 $x=-2$。因 x 爲負。故自原點起。準 OX' 之方向。取 2 單位如 OP'。則 P' 亦爲 NN'' 線中之一點。

由此兩點可定 NN'' 線。

例 4. 試作 $4x-3y=12$ 之圖解。



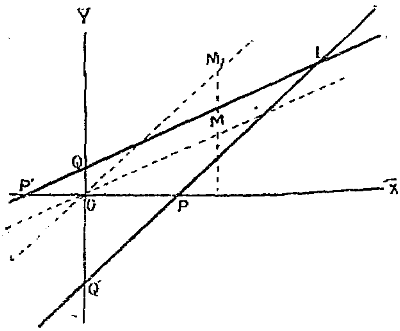
此式若 $x=0$。則 $y=-4$。若 $y=0$。則 $x=3$。因 y 爲負。故自原點起準 OY' 之方向。取 4 單位如 OQ。又因 x 爲正。故自原點起。準 OX 之方向。取 3 單位如 OP。聯結 PQ 作 NN' 直線。即爲所求之圖解。

249. 線方程式 *Linear equation*　以上所述之圖解。皆為直線。故一次方程式亦稱為線方程式。

250. 聯立一次方程式之圖解　前§248已言凡具二未知數如 x, y 之一次方程式。皆可化為 $y=ax+b$ 之形。則由同理。凡具二未知數如 x, y 之聯立一次方程式。皆可表以

$$y=ax+b\cdots\cdots(1)\qquad y=a'x+b'\cdots\cdots(2)$$

今依§248 II之法。如圖。設 $P'Q$ 直線為 $y=ax+b$ 之圖解。PQ' 直線為 $y=a'x+b'$ 之圖解。則此二直線所同具之點即交點如I。為此聯立方程式之圖解。

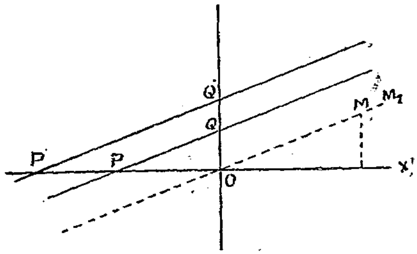


又由§248之I。$y=ax$ 及 $y=a'x$ 二方程式之圖解。為過 O 點之 MO 及 M_1O 二直線。其 MO 與 $P'Q$ 平行。M_1O 與 PQ' 平行。M 之坐標為 $(1, a)$。M_1 之坐標為 $(1, a')$。今更由此申論之。

I. 若 a 不等於 a'。即 a 與 a' 之差不為0。則 M 與 M' 兩點不相重合。即 MO 與 M_1O 判為兩線。故 $P'Q$ 與 PQ' 兩線不能平行。而相交於一點I。且僅有此一交點。於是僅得一解而止。

故二元聯立一次方程式之圖解為一點。由此點之坐標。可得其未知數之值。

II. 若$a=a'$。卽$a-a'=0$。則如圖M與M_1兩點相重合。卽OM與OM'合爲一線。故PQ與$P'Q'$兩線或互相平行。或合而爲一。此可就Q, Q'二點考之。



(a) 因$b=OQ$, $b'=OQ'$。故若b不等於b'。則Q點與Q'點不相重合。卽PQ, $P'Q'$判爲二線而互相平行。故此二線必無同具之點。於是不能得解。

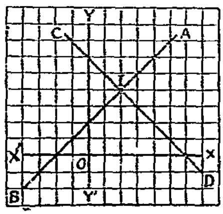
是卽二式爲矛盾方程式(參證§63)者之圖解。

(b) 又若$b=b'$。則Q與Q'兩點相重合。卽PQ與$P'Q'$合爲一線。故此二線所同具之點。可以多至無限。於是可得無限之解。

是卽二式爲引伸方程式(參證§63)者之圖解。

例. 試作下列方程式之圖解。

$x-y=-2$……(1)　　$x+y=6$……(2).



依§248之II。先作(1)之圖解如AB直線。次作(2)之圖解如CD直線。此二直線相交於I。則I點卽所求之圖解。又I點之坐標爲(2, 4)。故其根爲$x=2$, $y=4$.

問題五十五

試作下列各方程式之圖解。

1. $x+y=0$.　2. $x-5y=0$.　3. $5x+4y=0$.

4. $x-y=0$.　5. $2x=6y$.　6. $7x-5y=0$.

試依下列各方程式製成圖解。

7. $3x-2y=6$.　8. $-x+3y=6$.

9. $5x+2y=10$.　10. $3x+2y=12$.

11. $4x-y+4=0$.　12. $x-5y=5$.

13. $7x+2y-14=0$.　14. $4x+3y+12=0$.

15. $5x-3y-15=0$.　16. $x-8y+8=0$.

17. $3x-4y-24=0$.　18. $5x+4y+30=0$.

19. 問 1-6 諸題與 7-18 諸題。其圖解有何區別。

20. 問一次方程式不含 x 者。其圖解如何。又不含 y 者。其圖解如何。

試作下列各方程式之圖解。並求其 x 與 y 之值。

21. $\begin{cases} 2x-5y=0, \\ 4x+2y=24. \end{cases}$　22. $\begin{cases} 5x+8y=20, \\ 2x-3y=-23. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 5x+4y=30, \\ x-y=-3. \end{cases}$　24. $\begin{cases} 3x+4y=30, \\ 5x-6y=12. \end{cases}$

25. 問 $x=4+y$ 與 $y=3+x$ 爲聯立方程式乎。抑爲矛盾方程式乎。試以圖解明之。

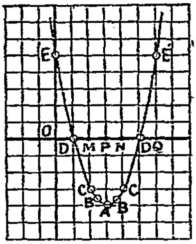
26. 問 $x+y=6$ 與 $2x+2y=12$ 爲聯立方程式乎。抑爲引伸方程式乎。試以圖解明之。

第三章　二次方程式之圖解

251. 一元二次方程式之圖解　如欲作 $x^2-6x+5=0$ 方程式之圖解。可先使 $y=x^2-6x+5$。由此式設 x 爲任意之值。而得 y 之對應值。又由 $y=0$ 時。可得 $x^2-6x+5=0$ 之根。卽如下之左表可作右圖。

$$y=x^2-6x+5.$$

x	y	點
3	-4	A
$2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{4}$	B, B'
2, 4	-3	C, C'
1, 5	0	D, D'
0, 6	5	E, E'



此因 $x=3$。則 $x^2-6x+5=-4$。故作負縱線 PA。又 $x=2$ 及 $x=4$。則 $x^2-6x+5=-3$。故作相等之負縱線 MC 及 NC'。又 $x=0$ 及 $x=6$。則 $x^2-6x+5=5$。故作相等之正縱線 OE 及 QE'。由是曲線上各點之縱線。因過 x 軸而變其符號。

又在 D 點及 D' 點。其縱線爲 0。卽 x^2-6x+5 爲 0。而橫線爲 $x=1$ 及 $x=5$。故此方程式之根爲 1 與 5。

如上表作圖。其 x 之第一值。以取一數等於 x^2 係數之倍除 x 係數之半而變其符號者爲宜。由 §110 卽此數等於二根之半和也。

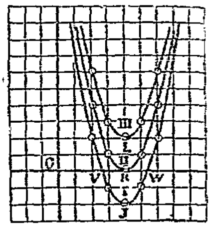
如此圖 $ECBAB'C'E'$ 之形謂之**拋物線** *Parabola*。故一元二次方程式之圖解爲一拋物線。

252. 設有

$x^2-8x+14=0\cdots\cdots(1)$

$x^2-8x+16=0\cdots\cdots(2)$

$x^2-8x+18=0\cdots\cdots(3)$



三方程式。各依上節之法。作其圖解如右圖。順次以 I, II, III 爲別。

圖解 I 與 x 軸交於 V, W 二點。卽 (1) 式之根爲 $OV=2.6$ (畧), $OW=5.4$ (畧)。圖解 II 與 x 軸交於 K 點。卽 (2) 式僅有一根爲 $OK=4$。是卽 (1) 式之二根爲實數而不等。(2) 式之二根爲實數而相等也。然 (2) 式既爲 $x^2-8x+16=0$。卽完全平方式。(1)式可化爲 $x^2-8x+16=2$。而其圖解中 J, K 相距 2 單位。故 (1) 式之根。可由 $OK=4$ 加減 $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{JK}$ 而得。卽

$$OK+\sqrt{JK}=4+\sqrt{2}=5.414\cdots,\ =OW.$$

$$OK-\sqrt{JK}=4-\sqrt{2}=2.586\cdots,\ =OV.$$

又圖解 III 不與 x 軸相交。卽(3)式之根非實數而爲虛數也。然 (3) 式可化爲 $x^2-8x+16=-2$。與 (2) 式相差。僅右邊之 -2 耳。而其圖解中 L, K 相距 2 單位。故 (3) 式之根。可由 $OK=4$ 加減 $\sqrt{-2}$ 或 $\sqrt{LK}$ 而得。卽

$$OK+\sqrt{LK}=4+\sqrt{-2}.$$

$$OK-\sqrt{LK}=4-\sqrt{-2}.$$

由是可知 §104 之理。在圖解中亦爲眞確。

253. 二元聯立二次方程式之圖解

例 1.　試作下列聯立方程式之圖解。

$x^2+y^2=25\cdots\cdots(1)$　　$x-y=-1\cdots\cdots(2)$

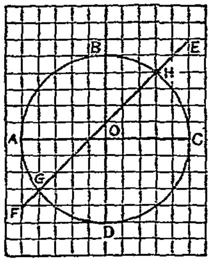
令 y 獨居於一邊。

則由 (1)　$y=\pm\sqrt{25-x^2}$。

由 (2)　$y=x+1$。

如左表得右圖。

x	$\pm\sqrt{25-x^2}$	$x+1$
0	±5	1
±1	±4.9	2, 0
±2	±4.6	3, −1
±3	±4	4, −2
±4	±3	5, −3
±5	0	6, −4



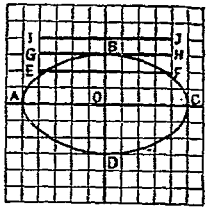
如上表。x 之每一值。各有 $\pm\sqrt{25-x^2}$ 卽 y 之一值與之相配。如 $x=2$ 則 $y=\pm4.6$。又 $x=-2$ 則 $y=\pm4.6$。依此各點作圖。卽得 $x^2+y^2=25$ 之圖解為 $ABCD$ 圓。故凡如 $x^2+y^2=r^2$ 之圖解皆為圓。而 r 卽其半徑。

又由 x 及 $x+1$ 諸點作圖。得 (2) 式之圖解為 EF 直線。而此直線與 $ABCD$ 圓交於 G, H 二點。則此二點卽為聯立方程式之圖解。又由 H 點之坐標 (3, 4)。G 點之坐標 (−4, −3)。得聯立方程二對之值為 $x=3$, $y=4$ 及 $x=-4$, $y=-3$。

例 2.　試作下列聯立方程式之圖解。

$9x^2+25y^2=225\cdots\cdots(1)$

$y=2\cdots\cdots\cdots(2)$



依上法作(1)式之圖解如右圖之 $ABCD$ 形。此形謂之橢圓 *Ellipse*。故凡如 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 之圖解。皆為橢圓。

次作(2)式之圖解為 EF 直線。與 $ABCD$ 橢圓交於 E, F 二點。則此二點為所求之圖解。由其坐標得方程式二對之根為 $x=3.7,\ y=2$ 及 $x=-3.7,\ y=2$。皆為實數而不等。

又若(2)式改為 $y=3$。則作其圖解為 GH 直線。與 $ABCD$ 橢圓相切於 B 點。此卽上述相交之二點合為一點。故仍宜視為二點。由其坐標得方程式二對之根為 $x=0,\ y=3$ 及 $x=0,\ y=3$。係為實數而相等。

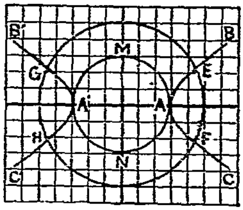
又若(2)式改為 $y=4$。則作其圖解為 IJ 直線。與 $ABCD$ 橢圓不相交。亦不相切。卽不能得 x 與 y 之實數值。故其根為虛數。

由是可知凡含 x 及 y 之聯立方程式中。其一為一次方程式又一為二次方程式者。其根有二對。若二圖解相交。則根為實數而不等。若二圖解相切。則根為實數而相等。若二圖解不相交亦不相切。則根為虛數。

例3. 試作下列聯立方程式之圖解。

$4x^2-9y^2=36\cdots\cdots(1)$

$x^2+\ y^2=25\cdots\cdots(2)$



依上法作(1)式之圖解為 BAC 及 $B'A'C'$ 之兩支曲線。如此兩曲線所成之形。其左右相稱者。謂之雙曲線 *Hyperbola*。故凡如 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 方程式之圖解。皆為雙曲線。

又作(2)式之圖解為 $EFHG$ 圓。與雙曲線相交於 E, F, H, G 四點。則此四點為所求之圖解。由其坐標得方程式四對之值。為 $x=4.5,\ y=2.2;\ x=4.5,\ y=-2.2;\ x=-4.5,\ y=-2.2;\ x=-4.5,\ y=2.2$.

又若(2)式改為 $x^2+y^2=9$。則作其圖解為 $AMA'N$ 圓。與雙曲線相切於 A, A' 二點。由其坐標得方程式之根為 $x=3,\ y=0$ 及 $x=-3,\ y=0$。此亦有四對之根。惟其二對為相等耳。

由是可知凡含 x 及 y 之聯立方程式。其中二方程式皆為二次者。其根有四對。若二圖解相交。則根為實數。若二圖解相切。則根為實數有二對相等。若二圖解不相交亦不相切。則根為虛數。

問題五十六

試作下列各方程式之圖解。

1. $x^2+5x=-4$.　2. $x^2+x=2$.　3. $x^2-7x=-6$.

4. $x^2-5x=-6$.　5. $2x^2-7x=-5$.　6. $3x^2+4x=4$.

試用圖解求下列各二次方程式之根。

7. $x^2-x=6$. 8. $2x^2-9x=-9$.

9. $2x^2-8x=16$. 10. $7x^2+14x=21$.

11. $4x^2-12x=-9$. 12. $25x^2+60x=-36$.

13. 問二次方程式之圖解與x軸相交於二點者。則其二根如何。又若與x軸相切於一點則如何。又若不與x軸相交切則如何。

試作下列聯立二次方程式之圖解。

14. $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x=y-5. \end{cases}$ 15. $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y=x^2-5x+6. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 4x^2-9y^2=36, \\ x-3y=1. \end{cases}$ 17. $\begin{cases} 4x^2-9y^2=36, \\ 4y=x^2-16. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 4x^2-9y^2=36, \\ 4x^2+9y^2=36. \end{cases}$ 19. $\begin{cases} 9x^2+16y^2=144, \\ 3x+4y=12. \end{cases}$

20. 問二元聯立二次方程式。若其二式之圖解相交於二點。則根如何。又若相切於一點。則根如何。又若不相交切。則根如何。

下卷答數

問題三十二（3葉）

1. $8a^6$.　2. $9a^4b^6$.　3. $x^{2n}y^{3n}z^{6n}$.

4. $-x^{2n+1}y^{2mn+m}z^{4mn+2m}$.　5. $\dfrac{125a^3b^6}{27x^6y^9}$.　6. $\dfrac{4x^4y^6z^2}{9a^4b^6}$.

7. $4a^2+4ab+b^2$.　8. $9a^2-12ab+4b^2$.

9. $a^6+6a^4c^2+12a^2c^4+8c^6$.

10. $125x^6-150x^4y^3+60x^2y^6-8y^9$.

11. $16x^4-96x^3y^2+216x^2y^4-216xy^6+81y^8$.

12. $81a^4+432a^3b+864a^2b^2+768ab^3+256b^4$.

13. $4+12a^2x^2-7a^4x^4-24a^6x^6+16a^8x^8$.

14. $4-12x+13x^2-6x^3+x^4$.

15. $8x^3-y^3+27z^3-12x^2y+36x^2z+9y^2z+6xy^2+54xz^2-27yz^2-36xyz$.

16. $x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8$.

問題三十三（12－13葉）

1. $7ax^2y^4$.　2. ax^2.

3. $2xy^2$.　4. $-3b^2x^3$.　5. $2xyz^2$.　6. $\sqrt{2}xyz^2$.

7. $3x-a$.　8. $2x^2+4$.　9. $ax+5b$.　10. $2x-3y$.

16. 1035　17. 138.4.　18. 20.37.　19. 270.61.

20. 0.3512.　21. 5420.　22. $x^2-ax+2a$.

23. $2x^3-3x^2-x+5$.　24. $x^3-bx^2+3b^2x-4b^3$.

25. $\dfrac{2x^2-xy-y^2}{x^2+xy-y^2}$.　26. 39.2.　27. 15015.

28. $5ax+y$.　29. $3x^2-x-4$.　30. $2x^2+4ax-3a^2$.

31. $1-3x+4x^2$.　32. $2x+1$.　33. $3x-1$.

問題三十四(18葉) *1.* 2. *2.* 4. *3.* $\frac{1}{2}$.

4. 10. *5.* 4. *6.* 25. *7.* 27. *8.* $\frac{1}{1024}$.

9. a^{-1}. *10.* $x^{\frac{5}{6}}$. *11.* $a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{3}}$.

12. $a^{1\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$. *13.* $x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{2}{5}}$ *14.* $x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}$. *15.* $a-b$.

16. $x^2+2x^{\frac{3}{2}}+x-4$. *17.* x^4+1+x^{-4} *18.* $a^{-1}-1$.

19. $a^2-3a^{\frac{2}{3}}+3a^{-\frac{2}{3}}-a^{-2}$. *20.* $a^2+2a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}+ab-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}$.

21. $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}+x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{2}}$. *22.* $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$.

23. $16x^{-\frac{2}{3}}-12x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}+9y^{-\frac{4}{3}}$. *24.* $x+y$.

25. $a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}$. *26.* $x-2-x^{-1}$. *27.* $x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}$.

問題三十五(24–25葉) *1.* $\sqrt{45}$. *2.* $\sqrt[3]{567}$.

3. $\sqrt[4]{112}$. *4.* $\sqrt{a^4b^3c^3}$. *5.* $5\sqrt{2}$. *6.* $3\sqrt[3]{4}$.

7. $150\sqrt[3]{2}$. *8.* $\frac{1}{6}\sqrt{21}$. *9.* $\frac{1}{3}\sqrt{5}$.

10. $\frac{3}{4}\sqrt{3}$. *11.* $\frac{5}{4}\sqrt{2}$. *12.* $\sqrt[6]{a^6}$, $\sqrt[6]{a^{10}}$.

13. $\sqrt[12]{a^8}$, $\sqrt[12]{a^{21}}$. *14.* $\sqrt[14]{x^6}$, $\sqrt[14]{x^{35}y^{21}}$.

15. $\sqrt[12]{x^7}$, $\sqrt[12]{x^3y^9}$, $\sqrt[12]{x^{10}}$. *16.* $\sqrt[6]{125}$, $\sqrt[6]{121}$, $\sqrt[6]{13}$.

17. $\sqrt{14}>\sqrt[3]{5^2}$. *18.* $4\sqrt{2}>3\sqrt[3]{2}>2\sqrt[6]{5}$.

19. $5\sqrt[4]{4}>2\sqrt[3]{3}<\sqrt{7}$. *20.* $12\sqrt{2}$. *21.* $\sqrt{7}$.

22. $8\sqrt[3]{5}$. *23.* 0. *24.* $5\sqrt{2}$. *25.* $7\sqrt{2}$.

26. $9\sqrt[3]{4}$. *27.* $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. *28.* $28\sqrt{30}$. *29* $12\sqrt{2}$.

30. 7. *31.* $4\sqrt[6]{15125}$. *32.* $10\sqrt[6]{10}$. *33.* $\frac{3}{5}$.

34. $\frac{\sqrt[6]{392}}{2}$ *35.* $\frac{\sqrt[6]{864}}{3}$. *36.* 8. *37.* $7\sqrt[3]{9}$.

38. $-7+4\sqrt{3}$. *39.* $\frac{13+7\sqrt{5}}{19}$.

40. $\dfrac{-9-3\sqrt{2}}{7}$.　*41.* $\dfrac{49+9\sqrt{3}}{39}$.　*42.* $\dfrac{7-\sqrt{15}}{17}$.

43. $\dfrac{2a+15x-13\sqrt{ax}}{a-25x}$.　*44.* $\dfrac{x^2+x\sqrt{x^2-y^2}}{y^2}$.

45. $\dfrac{7a+b+8\sqrt{a^2-b^2}}{3a+5b}$.　*46.* $\sqrt{2}+1$.

47. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.　*48.* $\sqrt{19}-\sqrt{2}$.

49. $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}$.　*50.* $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$.

問題三十六(28葉)　*1.* $a^4-6a^2b+9b^2+2a^2$.　*2.* 38.
3. $6\sqrt{10}-19$.　*4.* $\dfrac{2a}{5}$.　*5.* $\dfrac{40\sqrt{-1}}{29}$　*6.* $3+2\sqrt{-1}$.

問題三十七(31葉)　*1.* 11.　*2.* 119, 85　*3.* 21.
4. 9: 1.　*5.* 後者大.　*6.* 20, 32.　*7.* 9, 12.
8. 35 : 42.　*9.* 4.　*10.* 5 : 9.　*11.* 9 : 10.
13. 父50歲, 子25歲.　*14.* 29 : 19.

問題三十八(35葉)　*1.* $\dfrac{5}{4}$.　*2.* 2.　*3.* 100, 16.
4. 8, 4, 2.

問題三十九(39葉)　*1.* 27.　*2.* 16.　*3.* $24x^2=y^3z$.
5. 153.93791平方尺.　*6.* 113.076立方尺.　*7.* 576呎.
8. 18哩.　*9.* 5.　*10.* 5.376噸.

問題四十(44葉)　*1.* $l=38$, $s=155$.
2. $l=100$; $s=5050$.　*3.* $l=24$, $s=238$.　*4.* $l=-30$, $s=0$.
5. 21.　*6.* 12.　*7.* $d=3$, $s=209$.　*8.* $d=-8$, $l=0$.
9. $n=14$, $s=119$.　*10.* $n=29$, $d=1\frac{1}{2}$.　*11.* $a=-\dfrac{16}{3}$, $l=10$.
12. $a=27$, $d=7$.　*13.* $3\frac{1}{4}, 4\frac{1}{2}, 5\frac{3}{4}, 7, 8\frac{1}{4}, 9\frac{1}{2}, 10\frac{3}{4}$.　*14.* 15.
15. 6,3,0,−3.　*16.* 26里.　*17.* 9日.　*18.* 7日.

問題四十一(50葉) *1.* $l=49152,\ s=65535.$

2. $l=-\frac{1}{243},\ s=6\frac{182}{243}.$ *3.* $l=-1458,\ s=-1092.$

4. $l=-137781,\ s=-103334.$ *5.* $l=256,\ s=508.$

6. $r=4,\ s=85.$ *7.* $a=2,\ s=254.$ *8.* $s=4599,\ n=9.$

9. $r=3,\ n=7$ *10.* $r=-\frac{1}{2},\ a=-16.$ *11.* 8, 12, 18, 27.

12. 1, 3, 9. *13.* $10\frac{2}{3}$. *14.* $2\frac{1}{3}$. *15.* $1\frac{1}{8}$. *16.* $4\frac{1}{2}$. *17.* $\frac{1}{6}$.

18. $\frac{5}{132}$. *19.* $\frac{86}{99}$. *20.* $\frac{49}{90}$. *21.* $\frac{81}{110}$. *22.* $\frac{4}{11}$.

23. 32元. *24.* 9尺.

問題四十二(52葉) *1.* $6,\ \frac{2}{9},\ \frac{6}{53},\ \frac{6}{79},\ \frac{2}{35}.$ *2.* 3.

3. 12, 6. *4.* 8, 18. *5.* 6, 2. *6.* $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6}.$

問題四十三(60葉) *1.* $\frac{4}{3}n(n+1)(n+2).$

2. $\frac{1}{6}[(2n+1)(2n+3)(2n+5)-15].$

3. $\frac{1}{9}[(3n-2)(3n+1)(3n+4)+8].$

4. $\frac{1}{12}[(4n-3)(4n+1)(4n+5)+15].$

5. $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$

6. $\frac{1}{8}[(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)+15].$

7. $\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$

8. $\frac{1}{3}n(6n^3+32n^2+33n-8).$ *9.* $\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+11n+10).$

10. $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2).$ *11.* 364 個. *12.* 650 個.

13. 3920 個. *14.* $\Sigma_n=1-\frac{1}{(n+1)},\ \Sigma_\infty=1.$

15. $\Sigma_n=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{(n+4)(n+8)}\right),\ \Sigma_\infty=\frac{1}{40}.$

16. $\Sigma_n=1-\frac{1}{(n+1)^2},\ \Sigma_\infty=1.$

17. $\Sigma_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1.3.5.7\cdots(n+1)}\right),\ \Sigma_\infty=\frac{1}{2}.$

問題四十四(64葉) *1.* 362880. *2.* 八人.
3. 15600, 358800. *4.* 40320. *5.* 6720. *6.* 48.
7. 576, 144. *8.* 2520.

問題四十五(69葉) *1.* 84, 220, 1140. *2.* 9.
3. 153. *4.* 10. *5.* $n=17, r=2$. *6.* 120. *7.* 6580080
8. 15. *9.* 385. *10.* 63. *11.* 14400. *12.* 190.

問題四十六(78-79葉)

1. $x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$.
2. $x^7-7ax^6+21a^2x^5-35a^3x^4+35a^4x^3-21a^5x^2+7a^6x-a^7$.
3. $16x^4-96x^3+216x^2-216x+81$.
4. $1+6x^2+15x^4+20x^6+15x^8+6x^{10}+x^{12}$.
5. $a^{10}-10a^8x^3+40a^6x^6-80a^4x^9+80a^2x^{12}-32x^{15}$.
6. $81x^4-324x^5+486x^6-324x^7+81x^8$.
7. $-945x^{13}$. *8.* 180. *9.* $405x^8y^2$. *10.* $70x^4$.
11. $-14073345a^7$. *12.* $17710\times\dfrac{2^{20}}{3^4}$. *13.* -1144066.
14. 第七項爲最大. *15.* 第七第八項爲最大.
16. 第六第七項爲最大. *17.* $1+\dfrac{2}{5}x-\dfrac{3}{25}x^2+\dfrac{8}{125}x^3-\cdots$
18. $1+x+x^2+x^3+\cdots$ *19.* $1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x^3+\cdots$
20. $a^{-\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{3}a^{-\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+\dfrac{2}{9}a^{-\frac{7}{3}}x^{\frac{5}{3}}+\dfrac{14}{81}a^{-\frac{10}{3}}x^{\frac{8}{3}}+\cdots$
21. $1+4x+10x^2+16x^3+19x^4+16x^5+10x^6+4x^7+x^8$.

問題四十七(88葉)、 *1.* .75. *2.* -1. *3.* -3.
4. -4. *5.* .7. *6.* $\frac{3}{2}\log a-5\log b-2\log c$.
7. $12\frac{3}{4}\log a-12\frac{3}{4}\log b-4\frac{1}{4}\log c$. *8.* $-5\log y$. *9.* $\sqrt[3]{2}$.

10. $\frac{1}{9}$.　*11.* 25.　*12.* 2.5353, 3.3804, 4.2255.

13. 2208.6.　*14.* 5.1368.　*15.* 0.23032.　*16.* 0.25016.

17. 0.00021386.　*18.* 1.6280.　*19.* 0.0000014059.

20. 0.28724.　*21.* 9.7502.　*22.* 4.3108.　*23.* 4.8567.

24. 3.3701.　*25.* $\frac{1}{2}$.　*26.* 2.9462.　*27.* 4.2921.

28. -6.83.

問題四十八(94葉)　*1.* $\log_e 4=1.38629$, $\log_e 5=1.60943$, $\log_e 6=1.79176$, $\log_e 7=1.94591$, $\log_e 8=2.07944$, $\log_e 9=2.19722$, $\log_e 10=2.30258$.

2. $\log 4=.60206$, $\log 5=.69897$, $\log 6=.77815$, $\log 7=.84510$, $\log 8=.90309$, $\log 9=.95424$, $\log 10=1$.

問題四十九(100葉)　*1.* 1146.8元　*2.* 3年.

3. 221.62元.　*4.* 約4釐.　*5.* 約500元.　*6.* 552.6元.

7. 173.2元.　*8.* 20元.　*9.* 417.44元.　*10.* 8374000元.

問題五十(102葉)　*1.* $6x^6-10x^5-17x^4+75x^3-59x^2+25$.

2. $12a^6-36a^5+23a^4-38a^3+9a^2-12a$.

3. $18x^6-47x^4-10x^3+55x^2+42x-49$.

4. x^4+x^2+1.　*5.* x^2+1.　*6.* x^2+x-1.

問題五十一(106葉)　*6.* $\frac{a+6b}{a+7b}$爲大.

7. $\frac{2a+3b}{3a+2b}$爲大.　*8.* $3<x<5$.　*9.* $a<x<b$.　*10.* 5.

問題五十二 (112葉) *1.* 19ct. *2.* 4155. *3.* 2157.
4. 136212. 5. $\frac{101}{111}$ *6.* 5247. *7.* 159. *8.* 150663.
9. 104412. *10.* 3483. *11.* $.\dot{0}021\dot{1}$. *12.* 1099.39.
13. 552.20213. *14.* 重 $1, 2, 2^2, 2^4, 2^5, 2^7, 2^9, 2^{10}$ 分者各一個.
15. 46.

問題五十三 (120–121葉) *1.* $x=4, y=1$.
2. $x=8, y=7$. *3.* $x=5, y=1$. *4.* $x=8, y=1$.
5. $x=18, y=1$; $x=9, y=2$; $x=4, y=80$. *6.* $x=3, y=2$.
7. $x=13, y=1$; $x=6, y=4$. *8.* $x=13, y=1$; $x=4, y=8$.
9. $x=20, y=26$; $x=12, y=53$. *10.* $x=100, y=6$; $x=10, y=37$.
11. $x=5, y=2, z=1$; $x=2, y=4, z=1$; $x=3, y=1, z=2$.
12. $x=3, y=2, z=1$.
13. $x=8, y=1$; $x=12, y=9$; $x=32, y=31$.
14. $x=8, y=5$. *15.* $x=2, y=8, z=3$.
16. $x=3, y=1, z=1$. *17.* 195 與 121 或 30 與 286.
18. 157. *19.* 23.
20. 大物27。中物3。小物70。或大物16。中物24。小物60。或大物5。中物45。小物50。

問題五十四 (125葉) *2.* $A=(3, 2)$, $B=(-3, 4)$.
$C=(-4, 0)$, $D=(-4, -4)$, $E=(0, -6)$, $F=(6, -2)$, $H=(-6, 0)$, $L=(0, -3)$, $M=(6, 4)$, $N=(-3, -2)$, $R=(6, 0)$, $S=(0, 3)$.
3. 0, 0. *4.* 在 y 軸上。在 x 軸上。在原點。
5. 象限I。象限III。象限IV。象限II。
7. 在一直線上。滿足。

問題五十五(132葉) *19.* *1*−*6*諸題之圖解皆爲通過原點之直線。*7*−*18* 諸題之圖解皆爲不通過原點之直線。

20. 爲平行於 x 軸之直線。爲平行於 y 軸之直線。

21. $x=5, y=2$. *22.* $x=-4, y=5$. *23.* $x=2, y=5$.

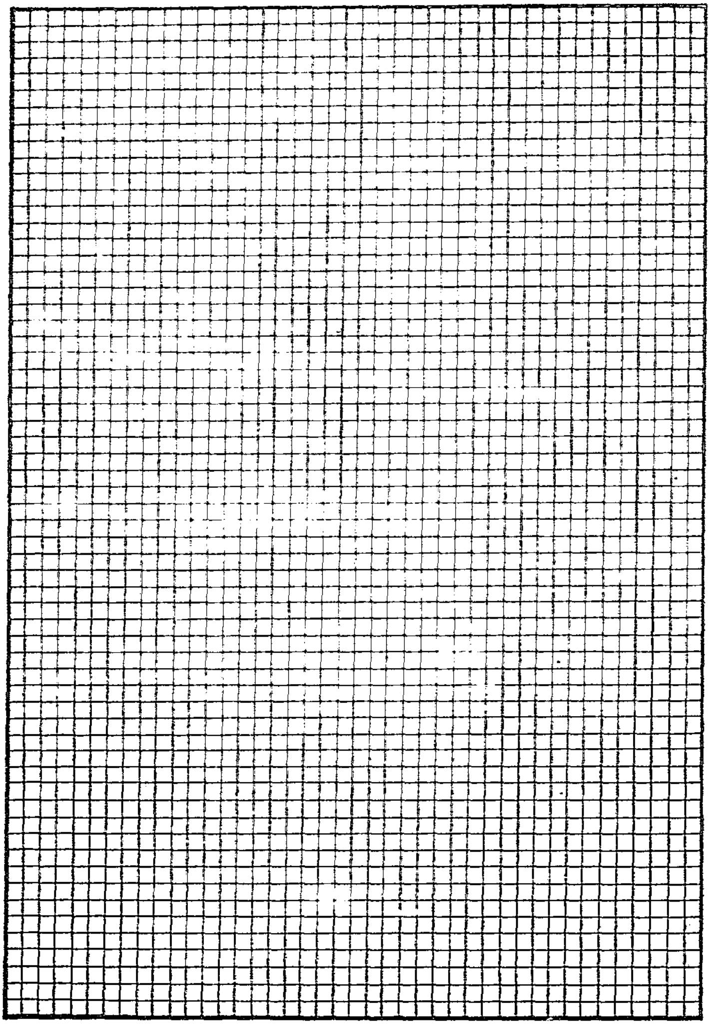
24. $x=6, y=3$. *25.* 矛盾方程式。 *26.* 引伸方程式。

問題五十六(137−138葉) *7.* $3, -2$. *8.* $3, 1\frac{1}{2}$.

9. $4, -2$. *10.* $-3, 1$. *11.* $1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$. *12.* $-1\frac{1}{3}, -1\frac{1}{3}$.

13. 爲實數而不等。爲實數而相等。爲虛數。

20. 爲實數。爲實數每一對相等。爲虛數。



REPUBLICAN SERIES

Algebra

For Middle Schools

COMMERCIAL PRESS, LTD.

中華民國三年七月三版

（共和國教科書代數學二冊）

（卷下軟布面每冊定價大洋柒角 紙面每冊定價大洋陸角）

編纂者 紹興駱師曾

校訂者 紹興壽孝天

發行者 商務印書館

上海北河南路北首寶山路

印刷所 商務印書館

上海棋盤街中市

總發行所 商務印書館

分售處 商務印書分館 北京 保定 奉天 龍江 吉林 天津 濟南 開封 太原 西安 成都 重慶 安慶 長沙 桂林 漢口 南昌 雲南 蕪湖 杭州 福州 廣州 潮州 香港