

大學叢書

投資數學

褚鳳儀著

商務印書館發行

大學叢書

投資數學

大學叢書委員會 委 員

丁燮林君	王世杰君	王雲五君
任鴻雋君	朱經農君	朱家驊君
李四光君	李建勛君	李書華君
李書田君	李聖五君	李權時君
余青松君	何炳松君	辛樹幟君
吳澤霖君	吳經熊君	周 仁君
周昌壽君	秉 志君	竺可楨君
胡 適君	胡庶華君	姜立夫君
翁之龍君	翁文灝君	馬君武君
馬寅初君	孫貴定君	徐誦明君
唐 鈺君	郭任遠君	陶孟和君
陳裕光君	曹惠羣君	張伯苓君
梅貽琦君	程天放君	程演生君
馮友蘭君	傅斯年君	傅運森君
鄒 魯君	鄭貞文君	鄭振鐸君
劉秉麟君	劉湛恩君	黎照寰君
蔡元培君	蔣夢麟君	歐元懷君
顏任光君	顏福慶君	羅家倫君
	顧頡剛君	

MB
F830.59

大學叢書
投資數學

褚鳳儀著



3 1798 3628 7

商務印書館發行

中央幹部學校圖書館藏書

序

儲蓄為積聚資金之母，然僅知儲蓄而未諳運用之道，則死藏現金不能利用者有之，用於不健全之企業，因而喪失其資金者有之，不能充分利用複利之作用，以加速其資金之積聚者，更比比皆是，故不知儲蓄，無以積聚資金，不知運用儲蓄，亦無以加速資金之積聚，而投資之道尚焉。

近世經濟組織，漸形複雜，投資之範圍，亦迥非昔比。或存款於銀行，或購買債券以生息，或投資於工商業，以圖股利之收益，或投保人壽保險，以防生命之不測。存款於銀行，則須明利息與年金之計算。購買債券，則債券市價之高下，影響於利息之多寡。投資於工商業，則償債方式與折舊方法，俱與公司之理財有關。投保人壽保險，則保險費隨投保者之死亡機率而異。凡此均有賴數理之研究，研究投資之數理，名曰投資數學。

投資數學之名稱甚多，若財政數學，政治數學，會計數學，高等商業數學，均先後為各國學者所採用。投資數學研究之範圍，若利息，若年金，若債券，若折舊，若人壽保險無一不與利率有關，而利率為投資之要素，故本書採用投資數學之名。

投資數學為我國商學院必修科目，而坊間猶無完備之

書，故各校多採用美國教本，以爲之代。夫一國教育，常須借重他國教本，此種方策，是否合理，姑置不論，然即就坊間得購之外版投資數學而一探其內容，亦尙未見一完備之書。本書之編，未敢謂已盡完備之事，然拋磚引玉，願於短時期內，因此而得更完備之中國投資數學。

本書於重要投資數理，均有論列，而於利息確實年金與債券三編，討論尤詳。貼現與價值方程式二章，他書論者甚略，學者每多未能深切了解，故本書於第二編（利息）中，將此二章詳加擴充，以求數理之透穿。他書於確實年金一編，均未論及變額年金，然變額年金對於償債之方式與債券之發行，均有密切之關係，而於儲蓄銀行之零存整付儲蓄存款，尤可有極大之應用。蓋儲蓄當適應存款者之儲蓄能力，而我國銀行，海關，郵政，鹽務等處職員之儲蓄能力，均隨每年加薪而增大，故變額存款更適宜於彼等之儲蓄，此本書之所以詳論變額年金也。他書於債券之發行，或略而不論，或論而不詳，然債券發行之方式影響於政府或公司之理財甚大，而於市價與投資利率之推算，亦有密切之關係，故本書論列較詳。

本書於年金與債券論列較詳，故應用計算表，亦較他書爲多，附錄中之倒數表，累積倒數表，等差變額年金終值表與等差變額年金現值表，皆爲他書所無者也。

本書之編，參考美德法日四國出版之投資數學十餘種，其書名與著作者，詳列於目次之末，以備學者之參考。書中數

理證明，均甚簡易，其稍複雜者，另置附錄甲，以便教學。

本書蒙同學周君頌康，湯君芝第，蔣君家森，盛君克中，潘君光潤，陶君嫩珠，與吾妹明馨，或助編計算表或代任抄寫之勞，均使編者心感，特誌數語，以示謝忱。

中華民國二十四年四月八日

褚鳳儀

目 次

第一編 對數	1
第一章 對數之意義及其性質	1
第二章 對數之種類	5
第三章 對數表之編製及其應用	8
第一節 對數表之編製	8
第二節 指標與假數	10
第三節 由對數表檢查對數	12
第四節 由對數表檢查反對數	15
第五節 對數表之應用	17
第二編 利息	27
第一章 單利	27
第一節 普通利息	32
第二節 準確利息	41
第二章 複利	52
第三章 貼現	72
第一節 單貼現	75
第二節 複貼現	82
第四章 價值方程式	95
第一節 單貼現法	96

第二節 複貼現法	115
第三編 級數	131
第一章 等差級數	132
第二章 等比級數	141
第三章 無盡級數	145
第四編 確實年金	159
第一章 年金之意義及其種類	159
第二章 定額年金	161
第一節 簡單年金	161
第二節 複雜年金	185
第三章 變額年金	212
第五編 年賦償還	235
第一章 年賦償還之意義及其種類	235
第二章 均等分償	237
第一節 本金均等分償	237
第二節 全均等分償	242
第三節 償本基金	246
第三章 變額年金分償	252
第六編 插補	259
第一章 插補之意義及其種類	259
第二章 因變量之插補	261

第三章 自變量之插補	275
第七編 債券	283
第一章 債券之發行	283
第一節 債券之意義及其種類	283
第二節 無獎債券	285
第三節 有獎債券	306
第二章 債券市價之推算	323
第三章 投資利率之推算	353
第八編 折舊	365
第一章 折舊之意義	365
第二章 計算折舊之方法	367
第三章 資產之壽命與資產之換新	378
第四章 資產估價	387
第九編 序列組合與機率	393
第一章 序列與組合	393
第二章 機率	397
第三章 生死機率	406
第十編 生命年金與人壽保險	413
第一章 生命年金	413
第二章 人壽保險	430
第一節 人壽保險之意義及其種類	430

第二節 純保費之計算	433
第三節 預備金之計算	442
答案	455
附錄甲 數學原理.....	471
附錄乙 計算應用表	491
表一 對數表.....	491
表二 倒數表.....	513
表三 累積倒數表	514
表四 複利終值表(期數為整數)	515
表五 複利現值表	525
表六 年金終值表	535
表七 年金現值表	545
表八 年賦金表	555
表九 複利終值表(期數不滿一期).....	565
表十 實利率化虛利率表	566
表十一 複雜年金至第一期末終值表.....	567
表十二 等差變額年金終值表.....	568
表十三 等差變額年金現值表	573
表十四 死亡生殘表	579
表十五 人壽保險與生命年金計算表.....	580
表十六 人壽保險預備金計算表	582

本書重要參考書：

W. L. Hart—Mathematics of Investment

E. B. Skinner—The Mathematical Theory of Investment

-
- H. L. Rietz—Mathematics of Finance
- Lovitt and Holtzclaw—The Mathematics of Business
- G. Wentworth—Commercial Algebra
- A. Barriol—Théorie et Pratique des Opérations Financières
- H. Fuzet et Le'Reclus—Précis de Mathématiques Commerciales et
Financières
- A. Arnaudeau—Tables des Valeurs Intrinsèques
- A. P. Violeine—Tables Pour Faciliter les Calculs des Probabilités Sur la
Vie Humaine
- A. Schlimbach—Politische Arithmetik
- M. Cantor—Politische Arithmetik
- 和田喜八—商工實務計算
- 小林行昌—高等商業數學
- 朱 幼 庵—最新國庫券還本付息表

投資數學

第一編 對數

第一章 對數之意義及其性質

同數自乘數次者，在代數學中用指數 (Exponent) 表之，例如 5^3 為三個 5 連乘之數， a^6 為六個 a 連乘之數，右上角之 3 與 6 即指數是也。 5^3 既為三個 5 連乘之數，故其數值即為 125，以算式表之則得：

$$5^3 = 125$$

上式中共有三數，已知此三數中之任何二數，即可求第三數，故設 x 為所求之第三數，則可得下列三式：

$$5^3 = x$$

$$x^3 = 125$$

$$5^x = 125$$

第一式中之 x ，可將三個 5 連乘而得，故此係一乘方 (Involution) 問題。第二式可化為下式：

$$x = \sqrt[3]{125}$$

之 x ，可將 125 開立方而得，故此係一開方 (Evolution) 問題。第三式中之 x ，則與前兩式均異，既非乘方問題，亦



非開方問題，故式中之 x ，須應用他法求得，蓋數(Logarithm)法者，即欲探求此未知之指數而創設之方法也。此未知之指數，在對數法中即名曰對數，而第三式中之5即名曰底(Base)，其右邊之125則名曰真數(Number)或反對數(Anti-logarithm)，對數之符號為log，即英文對數一字中前三個字母也。以此符號表示，則第三式可改作下式：

$$\log_5 125 = x$$

上式中之 x ，即以5為底125之對數，或即3，蓋5之3方等於125故也。同理：

$$\log_2 16 = 4 \quad \because 16 = 2^4$$

$$\log_3 27 = 3 \quad \because 27 = 3^3$$

$$\log_6 36 = 2 \quad \because 36 = 6^2$$

$$\log_{10} 1000 = 3 \quad \because 1000 = 10^3$$

$$\log_a a^5 = 5 \quad \because a^5 = a^5$$

對數之意義既明，今請進而討論對數之性質。對數能化乘除為加減，又能化乘方開方為乘除，此則對數之特有性質，亦即對數之效用也。茲將對數之性質分述證明於下：

(一) 對數化乘法為加法。

兩數相乘積之對數，等於兩數對數之和，即：

$$\log_a AB = \log_a A + \log_a B \dots\dots\dots(1)$$

(證) 設 $x = \log_a A$

$$y = \log_a B$$

則依對數之定義，得：

$$A = a^x$$

$$B = a^y$$

$$AB = a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$\therefore \log_a AB = \log_a a^{x+y} = x+y$$

即

$$\log_a AB = \log_a A + \log_a B$$

若乘積由三數四數或 n 個數連乘而得，則其對數亦等於三數四數或 n 個數對數之和，其證明與兩數之乘積相似。

(二) 對數化除法為減法。

兩數相除，其商數之對數，等於被除數之對數減去除數之對數所餘之數，即：

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B \dots\dots\dots(2)$$

(證) 設 $x = \log_a A$

$$y = \log_a B$$

則依對數之定義，得：

$$A = a^x$$

$$B = a^y$$

$$\frac{A}{B} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\therefore \log_a \frac{A}{B} = \log_a a^{x-y} = x-y$$

即

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

(三) 對數化乘方爲乘法,化開方爲除法

某數 n 方之對數,等於某數對數之 n 倍,即:

$$\log_a A^n = n \log_a A \dots\dots\dots(3)$$

(證) 設 $x = \log_a A$

則依對數之定義,得:

$$A = a^x$$

$$A^n = (a^x)^n = a^{xn}$$

$$\therefore \log_a A^n = \log_a a^{xn} = xn$$

即 $\log_a A^n = n \log_a A$

n 得爲整數或分數,正數或負數.

第二章 對數之種類

一數之對數隨其底而異。例如以2爲底，則16之對數爲4；以4爲底，則16之對數爲2；以16爲底，則16之對數爲1，故須先決定對數之底，然後能求對數之值。任何數均可爲對數之底，然爲便於計算起見，數學上通用對數之底，祇有兩種，一爲10，一爲 e 。 e 之數值爲2.71828強，參看附錄甲2)前者名曰常用對數(Common logarithm)，後者名曰自然對數(Natural logarithm)或納氏對數(Napierian logarithm)應用數學中通用常用對數，但在高深純正數學中，則以自然對數爲主，本書係應用數學之一種，故除有特別說明外，均指常用對數而言，而常用對數之底，苟無誤解之危險，亦將略而不書，故：

$$\log 10000 = 4$$

$$\log 1000 = 3$$

$$\log 100 = 2$$

$$\log 10 = 1$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log 0.1 = -1$$

$$\log 0.01 = -2$$

$$\log 0.001 = -3$$

$$\log 0.0001 = -4$$

常用對數與自然對數可互相換算，即由前者可化爲後者，亦可由後者化爲前者。兩者之關係及其換算之公式，分述於下：

(一) 10 之自然對數與 e 之常用對數互爲倒數，即：

$$\log_{10} e = \frac{1}{\log_e 10} \dots\dots\dots(4)$$

(證) 設 $x = \log_{10} e$

則依對數之定義，得：

$$e = 10^x$$

$$\log_e 10^x = x \log_e 10 = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{\log_e 10}$$

即

$$\log_{10} e = \frac{1}{\log_e 10}$$

(二) 由常用對數化爲自然對數。

以 10 之自然對數，乘某數之常用對數，即得某數之自然對數，即：

$$\log_e A = \log_e 10 \log_{10} A \dots\dots\dots(5)$$

(證) 設 $x = \log_e A$

則依對數之定義，得：

$$A = e^x$$

$$\log_{10} A = \log_{10} e^x = x \log_{10} e$$

$$\therefore x = \frac{1}{\log_{10} e} \log_{10} A$$

即 $\log_e A = \log_e 10 \log_{10} A$

(三) 由自然對數化爲常用對數.

以 e 之常用對數, 乘某數之自然對數, 即得某數之常用對數, 即:

$$\log_{10} A = \log_{10} e \log_e A \dots\dots\dots(6)$$

(證) 由公式(5)得:

$$\log_{10} A = \frac{1}{\log_e 10} \log_e A$$

即 $\log_{10} A = \log_{10} e \log_e A$

第三章 對數表之編製及其應用

第一節 對數表之編製

對數表者，根據某數為底，用以計算各數之對數而編製之計算表也。對數有常用對數與自然對數之分，故對數表亦有常用對數表與自然對數表之別。常用對數與自然對數既有一定之關係，故由常用對數表即可編製自然對數表，由自然對數表即可編製常用對數表，而自然對數表之編製，即可根據下列之關係：

$$\log_e(n+1) = \log_e n + 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right] \dots (7)$$

證明參看附錄甲 6)

令 $n=1$

$$\begin{aligned} \text{則 } \log_e 2 &= \log_e 1 + 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 3^3} + \frac{1}{5 \times 3^5} + \dots \right) \\ &= 0 + 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 3^3} + \frac{1}{5 \times 3^5} + \dots \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 3^3} + \frac{1}{5 \times 3^5} + \dots \right) \\ &= 0.693147 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 0.33333333 \\
 0.01234568 \\
 0.10082305 \\
 0.00006532 \\
 0.00000565 \\
 0.00000051 \\
 0.00000005 \\
 \hline
 0.34657359 \\
 \times 2 \\
 \hline
 0.69314718
 \end{array}$$

令 $n=2$

$$\text{則 } \log_e 3 = \log_e 2 + 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \times 5^3} + \frac{1}{5 \times 5^5} + \dots \right) = 1.098612$$

$$\begin{array}{r}
 0.2 \\
 0.00266667 \\
 0.00006400 \\
 0.00000183 \\
 0.00000006 \\
 \hline
 0.20273256 \\
 \times 2 \\
 \hline
 0.40546512 \\
 0.69314718 \\
 \hline
 1.09861230
 \end{array}$$

令 $n=9$

$$\text{則 } \log_e 10 = \log_e 9 + 2 \left(\frac{1}{19} + \frac{1}{3 \times 19^3} + \frac{1}{5 \times 19^5} + \dots \right)$$

$$= \log_e 9 + 0.10536052$$

$$\text{但 } \log_e 9 = 2 \log_e 3 = 2.1972246$$

$$\therefore \log_e 10 = 2.302585$$

$$\begin{array}{r}
 0.05263158 \\
 0.00004860 \\
 0.00000008 \\
 \hline
 0.05268026 \\
 \times 2 \\
 \hline
 0.10536052 \\
 2.19722460 \\
 \hline
 2.30258512
 \end{array}$$

10 之自然對數，即為 e 之常用對數之倒數，故 e 之常用對數，即可自 10 之自然對數求得如下：

$$\log_{10} e = \frac{1}{2.302585} = 0.4342945$$

故以 2.302585 乘某數之常用對數，即得某數之自然對數。以 0.4342945 乘某數之自然對數，即得某數之常用對數。即：

$$\log_e A = 2.302585 \log_{10} A \dots\dots\dots(8)$$

$$\log_{10} A = 0.4342945 \log_e A \dots\dots\dots(9)$$

應用公式 (9) 吾人即可進而編製常用對數表。試就 2 與 3 兩數，計算其常用對數於下：

$$\begin{aligned} \log_{10} 2 &= 0.4342945 \times \log_e 2 \\ &= 0.4342945 \times 0.693147 \\ &= 0.301030 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{10} 3 &= 0.4342945 \times \log_e 3 \\ &= 0.4342945 \times 1.098612 \\ &= 0.477121 \end{aligned}$$

上所述者，為整數之常用對數。已知整數之常用對數，即可計算小數之常用對數。蓋任何有限小數，以 10 之乘方乘之，即得整數，而 10 之乘方之常用對數，以其底為 10，故甚易求得也。

第二節 指標與假數

任取一數，例如 5846，試將小數點逐漸向左移動，而計算

各數之常用對數，並應用公式 (1)，則得：

$$\begin{aligned} \log 5846 &= \log(1000 \times 5.846) = \log 1000 + \log 5.846 = 3 + \log 5.846 \\ \log 584.6 &= \log(100 \times 5.846) = \log 100 + \log 5.846 = 2 + \log 5.846 \\ \log 58.46 &= \log(10 \times 5.846) = \log 10 + \log 5.846 = 1 + \log 5.846 \\ \log 5.846 &= \log(1 \times 5.846) = \log 1 + \log 5.846 = 0 + \log 5.846 \\ \log 0.5846 &= \log(0.1 \times 5.846) = \log 0.1 + \log 5.846 = -1 + \log 5.846 \\ \log 0.05846 &= \log(0.01 \times 5.846) = \log 0.01 + \log 5.846 = -2 + \log 5.846 \\ \log 0.005846 &= \log(0.001 \times 5.846) = \log 0.001 + \log 5.846 = -3 + \log 5.846 \end{aligned}$$

詳察上列諸式，可見各數之對數，有一部完全相同，均為 $\log 5.846$ ，其所不同者，祇有前面之整數，而此整數之變化，亦甚整齊，即小數點向左移上一位，則此整數遞降一單位而成一等差級數

$$3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3$$

5.846 介於 1 與 10 之間，查 $\log 1 = 0$ ，而 $\log 10 = 1$ ，故 $\log 5.846$ 亦介於 0 與 1 之間。介於 0 與 1 之間之數，即為小數，故一數之對數由二部組成：一部為整數，一部為小數，前者名曰指標，(Characteristic) 後者名曰假數。(Mantissa) 指標有正負之分，而假數則常為正數。

指標之計算有一定規則可循。某數之指標，若為正數，則其數較某數之整數位數少一，故六位整數之指標為 5，三位整數之指標為 2，一位整數之指標為 0，某數之指標若為負數，則其數即為第一個有效數字前所有‘零’之數，例如 0.3485

中第一個有效數字為3,其前祇有一個零,故其指標為-1,又如0.004865中第一個有效數字為4,其前共有三個零,故其指標為-3.

至於對數中之假數,則不能一視即得,須查常用對數表,其求法詳述於下節:

第三節 由對數表檢查對數

常用對數表(以後簡稱對數表,本書中若單稱對數表,均指常用對數表而言)中所載對數,限於1與10間之對數,換言之,對數表中祇有假數而無指標,後者須依前節中所述之規則求得.

設欲求 $\log 458.3$. 真數共有三位整數,故對數之指標為2,其假數須查對數表.先在表之左端查458,再在表之上方查3,前者所在之橫行與後者所在之縱行相交處之數字,即為所求之假數,惟其前面二數字,因係許多假數之公共數字,故對數表中常另列左端,檢查時須一併抄錄.查對數表得0.661150,此即 $\log 458.3$ 之假數,故:

$$\log 458.3 = 2.661150$$

又設欲求 $\log 0.005624$. 真數第一有效數字前共有三個零,故對數之指標為-3.至其假數,則可先查562,次查4,前者所在之橫行與後者所在之縱行相交處為0045,惟角上有一“*”號,須加注意,此“*”號表示假數前面二數字在下方而不

在上方故所求之假數係 0.750045 而非 0.740045.

指標有正負之分，而假數常為正數，故負指標中之負號不能置於對數之前，但須置於指標之上以示區別，即：

$$\log 0.005624 = \bar{3}.750045$$

對數表中之真數，有一定位數，或四位，或五位，或六位，必有限制。試就四位真數對數表而言，四位以上真數之假數，不能一查即得，須用比例計算，方能得其近似值。

(例一) 求 $\log 5456.4$

整數四位，故指標為 3.

次求 $\log 5.4564$.

對數表中無 5.4564 之對數，然吾人可先求略小於此數之對數與略大於此數之對數，即 $\log 5.456$ 與 $\log 5.457$ 。查對數表，得：

$$\log 5.457 = 0.736954$$

$$\log 5.456 = 0.736874$$

假定真數之差額與對數之差額成比例，(實際上略有差異，例如 8.537 與 8.535 相差 0.002，而 8.536 與 8.535 相差 0.001，前者適為後者之倍，但其對數之差額，前者為 0.000101，而後者為 0.000050，前者較大於後者之倍。吾人作此假定者，所以便計算而求其近似值也。) 則：

$$(5.457 - 5.456) : (5.4564 - 5.456) = (\log 5.457 - \log 5.456)$$

$$: (\log 5.4564 - \log 5.456)$$

設 $x = \log 5.4564 - \log 5.456$

則 $0.001 : 0.0004 = 0.000080 : x$

$$x = 0.000032$$

然實際演算時， x 之數值不必如此求得，檢查對數表中之比例部份可也。 $\log 5.457$ 與 $\log 5.456$ 相差 0.000080 ，故查比例部分 80 ，又 5.4564 與 5.456 相差 0.0004 ，故再查 80 一欄中左端之 4 ，得 32.0 對數表中之假數共有六位小數，故 3 字已在第五位小數，故：

$$x = 0.000032$$

$$\begin{aligned} \log 5.4564 &= \log 5.456 + x \\ &= 0.736874 + 0.000032 \\ &= 0.736906 \end{aligned}$$

$$\therefore \log 5.4564 = 3.736906$$

(例二) 求 $\log 45.706$ ：

查對數表，得： $\log 4.571 = 0.660011$

$$\log 4.570 = \frac{0.659916}{95}$$

查比例部分，得： 57.0

$$\begin{array}{r} 0.659916 \\ \quad 57 \\ \hline 0.659973 \end{array}$$

$$\therefore \log 45.706 = 1.659973$$

(例三) 求 $\log 0.008854912$ ：

查對數表，得： $\log 3.855 = 0.586024$

$$\log 3.854 = \frac{0.585912}{112}$$

3.854912 與 3.854 相差之數，共有三位數，即 912，而比例部分祇有一位數，若欲檢查比例部分，則可捨去其後二位，(四捨五入)故可查比例部分左端之 9。若欲詳細計算，則可列成比例求得。

$$\begin{aligned} \text{設} \quad x &= \log 3.854912 - \log 3.854 \\ 1000 : 912 &= 0.000112 : x \\ x &= 0.000102144 \\ \log 3.854912 &= 0.585912 + 0.000102144 \\ &= 0.586014144 \\ \therefore \log 3.854912 &= \bar{3}.586014144 \end{aligned}$$

第四節 由對數表檢查反對數

有時已知某數之對數而欲求某數，即求反對數。反對數之符號為 Antilog。設欲求 0.562531 之反對數，先在對數表之內部求得此數，然後檢查與此同一橫行左端之數字及同一縱行上端之數字，得 365 與 2，兩者併合為一，即得 3652，即：

$$\text{antilog } 0.562531 = 3.652$$

通常計算反對數之真數，不載於表中，故求其反對數時，須檢查略小於此數之反對數與略大於此數之反對數，然後用比例計算。

(例一) 求 $\text{antilog } 2.552042$ ：

指標爲2,故求得之反對數共有三位整數。

查對數表,得: $\text{antilog } 0.552060 = 3.565$

$$\text{antilog } 0.551938 = 3.564$$

$$(0.552060 - 0.551938) : (0.552042 - 0.551938) = (\text{antilog } 0.552060$$

$$- \text{antilog } 0.551938) : (\text{antilog } 0.552042 - \text{antilog } 0.551938)$$

設 $x = \text{antilog } 0.552042 - \text{antilog } 0.551938$

即 $0.000122 : 0.000104 = 0.001 : x$

$$x = 0.000852$$

$$\text{antilog } 0.552042 = 3.564 + 0.000852$$

$$= 3.564852$$

$$\therefore \text{antilog } 2.552042 = 356.4852$$

此題仍亦可應用比例部分。

查對數表,得: $\log 3.565 = 0.552060$

$$\log 3.564 = \frac{0.551938}{122}$$

$$\frac{0.552042}{0.551938} \\ \frac{104}{104}$$

查比例部分 122 一欄中,與 104 相近之數,得 109.8 其左端爲 9,此 9 字添於 3.564 之後而成 3.5649。

$$\therefore \text{antilog } 2.552042 = 356.49$$

(例二) 求 $\text{antilog } \bar{3}.8594689$

查對數表，得： $\log 7.236 = 0.859499$

$$\begin{array}{r} \log 7.235 = 0.859439 \\ \hline 60 \\ 0.8594689 \\ 0.8594590 \\ \hline 299 \end{array}$$

查比例部分，得5.

$$\therefore \text{antilog } \overline{3}.8594689 = 0.0072355$$

第五節 對數表之應用

對數能化乘除爲加減，化乘方開方爲乘除。例如 1.045^{100} 須將 1.045 連乘一百次，演算之繁，可以想見。若應用對數表，則此問題即變爲一極簡易之乘法。又如 $\sqrt[5]{13}$ 非用極複雜之方法，不能求得其根，若應用對數表，則此問題又變爲一極簡易之除法，故對數表實爲一不可缺少之計算工具。茲舉數例於下，以示對數表之應用。

(例一) 求 $x = 3.485 \times 46.28$

應用公式(1)，得：

$$\begin{aligned} \log x &= \log 3.485 + \log 46.28 \\ &= 0.542203 + 1.665393 \\ &= 2.207596 \end{aligned}$$

查反對數，得： $\log 1.613 = 0.207634$

$$\begin{array}{r} \log 1.612 = 0.207665 \\ \hline 269 \\ 0.207596 \\ 0.207365 \\ \hline 231 \end{array}$$

查比例部分,得9.

$$\therefore x = 161.29$$

(例二) 求 $x = \frac{4.583}{0.049328}$

應用公式(2)得:

$$\begin{aligned} \log x &= \log 4.583 - \log 0.049328 \\ &= 0.661150 - \bar{2}.693093 \\ &= 1.968057 \end{aligned}$$

查反對數,得:

$$\begin{array}{r} \log 9.291 = 0.968062 \\ \log 9.290 = \frac{0.968016}{46} \\ \qquad \qquad \qquad 0.968057 \\ \qquad \qquad \qquad \underline{0.968016} \\ \qquad \qquad \qquad 41 \end{array}$$

$$0.001 \times \frac{41}{46} = 0.00089$$

$$\therefore x = 92.9089$$

(例三) 求 $x = \frac{48.56 \times 7.3925 \times 0.04853}{3.164 \times 0.859 \times 432.6}$

應用公式(2),得:

$$\begin{aligned} \log x &= \log (48.56 \times 7.3925 \times 0.04853) \\ &\quad - \log (3.164 \times 0.859 \times 432.6) \end{aligned}$$

應用公式(1),得:

$$\begin{aligned} \log x &= (\log 48.56 + \log 7.3925 + \log 0.04853) \\ &\quad - (\log 3.164 + \log 0.859 + \log 432.6) \end{aligned}$$

$$\log 4.56 = 1.686279$$

$$\log 7.3925 = 0.868792$$

$$\log 0.04853 = \frac{2.686010}{1.241081}$$

$$\log 3.164 = 0.500236$$

$$\log 0.859 = \bar{1}.933993$$

$$\log 432.6 = \frac{2.636087}{3.070316}$$

$$1.241081$$

$$\frac{3.070316}{2.170765}$$

查反對數, 得: $\log 1.482 = 0.170848$

$$\log 1.481 = \frac{0.170555}{293}$$

$$\frac{0.170765}{0.170555}$$

$$210$$

查比例部分, 得7.

$$\therefore x = 0.0148.7$$

(例四) 求 $x = 1.035^{100}$!

應用公式 3) 得:

$$\begin{aligned} \log x &= 100 \log 1.035 \\ &= 100 \times 0.014940 \\ &= 1.4940 \end{aligned}$$

查反對數, 得: $\log 3.119 = 0.494015$

$$\log 3.118 = \frac{0.493876}{139}$$

$$\begin{array}{r} 0.494000 \\ 0.493876 \\ \hline 124 \end{array}$$

查比例部分, 得9.

$$\therefore x = 31.189$$

(例五) 求 $x = \sqrt[10]{75.894}$

應用公式(3), 得:

$$\begin{aligned} \log x &= \log 75.894^{\frac{1}{10}} = \frac{1}{10} \log 75.894 \\ &= \frac{1}{10} \times 1.880208 \\ &= 0.1880208 \end{aligned}$$

查反對數, 得:

$$\log 1.542 = 0.1880840$$

$$\log 1.541 = \frac{0.1878030}{2810}$$

$$\begin{array}{r} 0.1880208 \\ 0.1878030 \\ \hline 2178 \end{array}$$

$$0.001 \times \frac{2178}{2810} = 0.000775$$

$$\therefore x = 1.541775$$

(例六) 求 $x = \sqrt[4]{3.869}$

$$x = \sqrt[4]{3.869^3} = 3.869^{\frac{3}{4}}$$

應用公式(3), 得:

$$\begin{aligned} \log x &= \frac{3}{4} \log 3.869 \\ &= \frac{3}{4} \times 0.587599 \\ &= 0.4406925 \end{aligned}$$

查反對數, 得:

$$\begin{aligned} \log 2.759 &= 0.440752 \\ \log 2.758 &= \frac{0.440594}{158} \\ &\quad \frac{0.4406925}{0.440594} \\ &\quad \hline &\quad 10525 \end{aligned}$$

查比例部分, 得 7.

$$\therefore x = 2.7587$$

例七) 求 $G = \sqrt[5]{65 \times 59 \times 58 \times 62 \times 57}$

應用公式(3), 得:

$$\log G = \frac{1}{5} \log (65 \times 59 \times 58 \times 62 \times 57)$$

應用公式(1), 得:

$$\log G = \frac{1}{5} (\log 65 + \log 59 + \log 58 + \log 62 + \log 57)$$

$$\log 65 = 1.812913$$

$$\log 59 = 1.770852$$

$$\log 58 = 1.763428$$

$$\log 62 = 1.792392$$

$$\log 57 = \frac{1.755875}{5)8.895460} \\ \underline{1.779092}$$

查反對數，得：

$$G = 60.13$$

(例八) 解下之方程式：

$$25^{x+3} = 65 \times 6^x$$

上式中之指數，係未知數，與普通方程式異，故此方程式名曰指數方程式 (Exponential equation)。指數方程式，亦須應用對數，蓋若上式之兩邊求其對數，則得：

$$(x+3) \log 25 = \log 65 + x \log 6$$

即 $1.397940(x+3) = 1.812913 + 0.778151 x$

移項得 $0.619789x = -2.380907$

令 $x = -y$

則 $y = \frac{2.380907}{0.619789}$

$$\log y = \log 2.380907 - \log 0.619789$$

$$= 0.376741 - \bar{1}.792245$$

$$= 0.584496$$

求反對數，得： $y = 3.8415$

$$\therefore x = -3.8415$$

(例九 解下之方程式：

$$\log(x-1) - \log(x^2 - 5x + 4) + 1 = 0$$

上式中之對數，係包含未知數各項之對數，與普通方程式異，故此方程式名曰對數方程式 (Logarithmic Equation)。解對數方程式，與解指數方程式相反。後者須求兩邊之對數，而前者則須求兩邊之反對數。

$$\log \frac{x-1}{x^2-5x+4} = -1$$

求兩邊之反對數，得：

$$\frac{x-1}{x^2-5x+4} = 10^{-1}$$

$$\frac{1}{x-4} = \frac{1}{10}$$

$$x-4 = 10$$

$$\therefore x = 14$$

習 題 一

1. 已知 $\log 2 = 0.301030$ $\log 3 = 0.477121$ $\log 7 = 0.845098$

求下列各數之對數：

- | | | |
|----------------------|--------------------|--------|
| a) 42 | b) 35 | c) 343 |
| d) $\sqrt[3]{43218}$ | e) $\sqrt[3]{294}$ | f) 625 |

2. 應用公式(7)求下列各數之自然對數：

- | | | |
|--------|--------|---------|
| a) 5 | b) 7 | c) 11 |
| d) 388 | e) 344 | f) 1332 |

3. 應用公式(9)與上題所得之結果求下列各數之常用對數！

- | | | |
|--------|--------|---------|
| a) 5 | b) 7 | c) 11 |
| d) 38% | e) 341 | f) 1332 |

4. 求下列各數之對數!

- | | | |
|------------|----------------|--------------|
| a) 43.89 | b) 0.003895 | c) 0.63453 |
| d) 8693000 | e) 0.000738649 | f) 0.0342864 |

5. 求下列各數之反對數!

- | | | |
|--------------------|--------------------|----------------------|
| a) 0.60119 | b) $\bar{3}.52022$ | c) 4.59017 |
| d) $\bar{2}.38548$ | e) 1.6493568 | f) $\bar{2}.4835102$ |

6. 應用對數表求:

- a) $x = 63.45 \times 0.05496$
- b) $x = \frac{385.26}{53.689}$
- c) $x = \frac{38.54 \times 8.3945 \times 0.0063984}{1854 \times 0.6354 \times 38.95}$
- d) $x = \frac{1.854 \times 0.045938 \times 0.0038652}{39.84 \times 4.3652 \times 0.038754}$
- e) $x = 1.035^{25}$
- f) $x = 1.0375^{30}$
- g) $x = \sqrt[3]{3.594}$
- h) $x = \sqrt[10]{3.6534^3}$
- i) $G = \sqrt[4]{58 \times 62 \times 64 \times 67 \times 54 \times 49}$
- j) $G = \sqrt[3]{325 \times 400 \times 385 \times 320 \times 331 \times 401 \times 375}$
- k) $x = \frac{1.0375^{30} - 1}{0.0375}$
- l) $x = \frac{1 - 1.0375^{-30}}{0.0375}$

7. 解下之指數方程式!

$$356^{x+3} = 512 \times 284^x$$

8. 解下之對數方程式:

$$\log \sqrt{3x+4} + \frac{1}{2} \log(5x+1) = 1 + \log 3$$

本編用公式：

$$\log_a AB = \log_a A + \log_a B \dots\dots\dots 1.$$

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B \dots\dots\dots 2)$$

$$\log_a A^n = n \log_a A \dots\dots\dots (3)$$

$$\log_1 e = \frac{1}{\log_e 10} \dots\dots\dots 4)$$

$$\log_e A = \log_e 10 \log_{10} A \dots\dots\dots 5)$$

$$\log_{10} A = \log_{10e} \log_e A \dots\dots\dots 6)$$

$$\log_e (n+1) = \log_e n + 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right] \dots\dots\dots (7)$$

$$\log_e A = 2.302585 \log_{10} A \dots\dots\dots (8)$$

$$\log_{10} A = 0.4342945 \log_e A \dots\dots\dots (9)$$

第二編 利息

運用他人之資金，而支付之報酬，名曰利息 (Interest)。銀行以媒介資金與信用 (Credit) 爲其主要之業務，關於利息之計算，幾無時無之。即其他一般商業，亦靡不與他人有金錢來往，故咸須計算利息。經營商業者日常所需之流動資本，常借自他人，故每年須支出鉅額之利息，我國各紗廠每年支出之利息，普通大於工人所得工資之總額，故利息實爲計算成本中之重要一項。經營商業者以一時不需之款存入銀行，以備需要時之支用，或於顧客之延期付款者，徵收相當金額，以資補償，故利息之收入，亦幾無日無之。

向人借用之金額，名曰本金 (Principal)。計算利息所用之百分率，名曰利率 (Rate of Interest)。使用本金之期間，名曰時期 (Time or Term)。本金與利息之和，名曰本利合計 (Amount)。

第一章 單利

計算利息所根據之本金，若在投資期內，假定不變，換言之，即每期收入之利息，假定不再投資，則投資時期內收入利息之總額，名曰單利息 (Simple Interest)，而計算單利息之方法，即名曰單利法。投資期內之本金，既假定不變，則期內收入

利息之總額，與投資時期成正比例，投資時期愈長，收入之單利息亦愈多，兩者之關係可用下式表示：

$$I = Pin \dots\dots\dots(1)$$

I 單利息

P 本金

n 時期

i 利率

上式不特表示單利息與投資時期之關係，且亦表示單利息與本金及利率之關係，蓋單利息亦與本金及利率成正比例也。上式中共有四數，已知其中三數，即可求得第四數，故公式(1)實表示四數中任何一數與其他三數之關係。

本利合計為本金與單利息之和，故本利合計與本金，利率，時期亦有一定之關係，其公式如下：

$$S = P(1 + in) \dots\dots\dots(2)$$

S 本利合計

P 本金

i 利率

n 時期

本金，單利息，利率，時期，本利合計，為單利法中之五數，已知此五數中之三數，(但此三數中至少有一數須為 i 或 n)，即可求其他二數，學者可根據公式(1)與公式(2)，化出各有關公式。

(例一) 本金 400 元, 利率 5%, 求五年後之單利息!

應用公式 (1) 得:

$$I = 400 \times 0.05 \times 5 = 100 \text{ 元}$$

(例二) 本金 350 元, 利率 $3\frac{1}{2}\%$, 求八月後之本利合計!

應用公式 (2) 得:

$$S = 350 \left(1 + 0.035 \times \frac{8}{12} \right) = 350 \times 1.023333 = 358.17 \text{ 元}$$

(例三) 本金 425 元, 四年後得單利息 102 元, 求利率!

應用公式 (1) 得:

$$102 = 425 \times 4 \times i$$

$$i = \frac{102}{425 \times 4} = \frac{102}{1700} = \frac{6}{100} = 6\%$$

(例四) 本金 500 元, 利率 7%, 問若干年後可得本利合計洋 710 元?

應用公式 (2) 得:

$$710 = 500(1 + 0.07n)$$

$$1 + 0.07n = 1.42$$

$$0.07n = 0.42$$

$$n = \frac{0.42}{0.07} = \frac{42}{7} = 6 \text{ 年}$$

P, I, i, n, A , 爲單利法中之五數, 已如上述, 此外尙有一數, 有時亦爲問題中之一要件, 吾人有時欲知本利合計爲本金之二倍, 三倍, 四倍, ……或 p 倍時所必須經過之時期, 此表示倍數

之 p 即為單利法中之第六數。 p 與 n 之關係可應用公式 (2), 依次求得如下:

$$S = P(1 + in)$$

$$S = pP$$

即 $pP = P(1 + in)$

$$p = 1 + in$$

$$n = \frac{p-1}{i} \dots\dots\dots (3)$$

n 時期

i 利率

p 倍數

若

$$p = 1$$

則

$$n = 0$$

此即謂本利合計等於本金時, 未經過任何時期, 換言之, 即為方投資之時。

(例五) 利率 5%, 求本利合計為本金三倍時所必須經過之時期!

應用公式 (3) 得:

$$n = \frac{3-1}{0.05} = \frac{2}{0.05} = \frac{200}{5} = 40 \text{ 年}$$

利率有年利率, 月利率與日利率之別。以一年為單位時期而計算利息時所用之利率, 名曰年利率。以一月為單位時期而計算利息時所用之利率, 名曰月利率。以一日為單位時

期而計算利息時所用之利率，名曰日利率。年利率通常用幾分幾釐幾毫表之，年利率一分二釐意即謂12%，年利率七釐五毫意即謂 $7\frac{1}{2}\%$ 。月利率通常亦用幾分幾釐幾毫表示，但此之所謂分釐毫，與前迥異，月利率一分二釐，意謂1.2%而非12%，學者不可不詳察也。日利率通常用幾毫幾絲表示，所謂幾毫即指萬分之幾而言，故日利率三毫為0.03%，日利率二毫五絲為0.025%。

利率若用年利率，則公式中之 n 為年數；若用月利率，則 n 為月數；若用日利率，則 n 為日數。

(例六) 本金300元，日利率三毫五絲，求45日後之單利息！
應用公式(1)得：

$$I = 300 \times 0.00035 \times 45 = 4.73 \text{ 元}$$

若時期為日數而利率用年利率，則一年有作為360日者，有作為365日或366日(閏年)者。根據360日為一年而計算之利息，名曰普通利息(Ordinary Interest)。根據365日或366日為一年而計算之利息，名曰準確利息(Exact Interest)。德法美等國商業上通用普通利息法，而我國與英日等國則採用準確利息法。

習 題 二

填寫下列各題中空白之處！

本金	年利率	時期	單利息	本利合計
1. \$645	$4\frac{1}{2}\%$	4年		

2.	5%	2年3月	\$ 112.50
3.	\$ 400	2年6月	\$ 60
4.	\$ 550	3½%	\$ 77
5.	8%	3年3月	\$ 2520
6.	\$ 800	2½%	\$ 1200

求下列各題中之單利息!

	本 金	利 率	時 期
7.	\$ 548	年利率1分2釐	5年
8.	\$ 356	年利率8釐5毫	3年6月
9.	\$ 495	月利率1分	9月
10.	\$ 100	月利率8釐	12月
11.	\$ 100	日利率3毫	360日
12.	\$ 100	日利率3毫	365日

求下列各題中之時期!

	本 金	本利合計	年 利 率
13.	\$ 1000	\$ 2500	5%
14.	\$ 1000	\$ 3000	6%
15.	\$ 1000	\$ 5000	7%

第一節 普通利息

計算日數時，通常以借款日與計息日作為一日計算，本書中除有特別說明外，均以僅計一日為標準

普通利息之日數，可自計算年月日，減去借款年月日即得不論月之大小，一月均以三十日計算。例自民國二十三年九月十一日至民國二十四年十一月二十五日之日數為434日。其求法如下：

民國 24年11月25日

$\frac{2 \text{ 年 } 9 \text{ 月 } 11 \text{ 日}}{1 \text{ 年 } 2 \text{ 月 } 11 \text{ 日}}$

$$1 \times 360 + 2 \times 30 + 14 = 434 \text{ 日}$$

普通利息可用下之公式求得：

$$I = Pi \times \frac{d}{360} \dots\dots\dots(4)$$

I 單利息

P 本金

i 年利率

d 日數

(例一) 本金450元,年利率四釐五毫,求95日之普通利息!

應用公式(4)得：

$$I = 450 \times 0.045 \times \frac{95}{360} = 5.34 \text{ 元}$$

計算普通利息,有整除法 (Method of Aliquotation) 與定除數法 (Method of Constant Divisor) 等簡捷法。而整除法又有本金整除法,利率整除法與時期整除法之別。

整除法者,將本金,利率或時期分成數部,使後一部能整除前一部,先求各部利息,然後求其總和之法也。被分之部若為本金,則為本金整除法;若為利率,則為利率整除法;若為時期,則為時期整除法。

令 $P = P_1 + P_2 + \dots\dots\dots + P_m$

則代入公式(1),得:

$$I = Pin = P_1in + P_2in + \dots + P_m in$$

(例二) 本金 13500 元, 年利率六釐, 求 120 日之普通利息!

令 $13500 = 10000 + 2500 + 1000$

2500 與 1000 均能整除 10.00

$$10000 \times 0.06 \times \frac{120}{360} = 200$$

$$10000 \text{ 元} \quad 200 \text{ 元}$$

$$2500 \text{ 元} \quad 50 \text{ 元}$$

$$\frac{1000 \text{ 元}}{13500 \text{ 元}} \quad \frac{20 \text{ 元}}{270 \text{ 元}}$$

令 $i = i_1 + i_2 + \dots + i_m$

則代入公式(1),得:

$$I = Pin = P_i_1n + P_i_2n + \dots + P_i_m n$$

(例三) 本金 4500 元, 年利率五釐七毫半, 求 100 日之普通利息!

令 $5.75\% = 5\% + 0.5\% + 0.25\%$

0.5% 能整除 5%, 而 0.25% 亦能整除 0.5%

$$4500 \times 0.05 \times \frac{100}{360} = 6250$$

$$5\% \quad 62.50 \text{ 元}$$

$$0.5\% \quad 6.25 \text{ 元}$$

$$\frac{0.25\%}{5.75\%} \quad \frac{3.125 \text{ 元}}{71.875 \text{ 元}}$$

$$\text{令 } n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$$

則代入公式(1),得:

$$I = Pin = Pin_1 + Pin_2 + \dots + Pin_m$$

時期整除法又有年法(Year Rule)與一釐法(One Per Cent Method)之別。年法者,先求一年之標準利息,然後依次計算各部利息之法也。一釐法者,先求相當於一釐標準日數之利息,然後依次計算各部利息之法也。

(例四) 本金 2750 元, 年利率四釐, 求 3 年 4 月 10 日之普通利息!

$$2750 \times 0.04 = 110$$

$$3 \text{ 年之利息 } \quad \$ 330$$

$$4 \text{ 月之利息 } \quad 36.6667$$

$$\begin{array}{r} 10 \text{ 日之利息} \\ \hline 3 \text{ 年 4 月 10 日之利息} \end{array} \quad \begin{array}{r} 3.0556 \\ \hline \$ 369.7223 \end{array}$$

普通利息既以一年作為 360 日計算,故年利率若為六釐,則 60 日之利息,適為本金之 1%。年利率若為五釐,則 72 日之利息,適為本金之 1%。餘可類推。一釐法者,即應用此原理以求普通利息之一種時期整除法也。其法先製成利息一釐應得之日數表如下:

年利率	利息一釐應得之日數	年利率	利息一釐應得之日數
1½%	240	3%	120
2%	180	4%	90

日數	投	實	數	學
4½%	08		10%	36
5%	72		12%	30
6%	60		15%	24
8%	45		18%	20
9%	40		20%	18

應用一釐法時，以題中日數，分成數部，其中一部，須為上表中應得日數，或其倍數。若為表中應得日數，則將本金之小數點，移上二位，即得此部之利息。若為應得日數之十倍，則將本金之小數點，移上一位，即得此部之利息。若為應得日數十分之一，則將本金之小數點，移上三位，即得此部之利息。其他各部之日數，須為標準日數之分數。其利息即依標準部利息比例計算，將各部之利息相加，即得所求之利息。

例五) 本金 45863 元，年利率四釐五毫，求 124 日之普通利息！

查表得 80 日

$$124 = 80 + 40 + 4$$

80 日之利息	\$ 458.63
40 日之利息	229.315
<u>4 日之利息</u>	<u>22.9315</u>
124 日之利息	\$ 710.8765

若題中之利率，為表中所無，則可兼用利率整除法與時期整除法。例若年利率為七釐，則可應用一釐法先求六釐之利息，再以其六分之一加之即得。

(例六) 本金 45869 元, 年利率七釐, 求 66 日之普通利息!

	60 日之利息	\$ 458.69
年利率六釐	$\frac{6 \text{ 日之利息}}{66 \text{ 日之利息}}$	$\frac{45 \ 869}{\$ 504.559}$
	+	84 0932
年利率七釐	$\frac{66 \text{ 日之利息}}{66 \text{ 日之利息}}$	\$ 588.6522

上題亦可先求年利率八釐之利息, 再減去八分之一。

	45 日之利息	\$ 458.69
	$\frac{15 \text{ 日之利息}}{60 \text{ 日之利息}}$	$\frac{152 \ 8967}{\$ 611.5.67}$
年利率八釐	$\frac{6 \text{ 日之利息}}{66 \text{ 日之利息}}$	$\frac{61.1587}{\$ 672.7454}$
	-	84.0932
年利率七釐	$\frac{66 \text{ 日之利息}}{66 \text{ 日之利息}}$	\$ 588.6522

上述三種整除法中, 本金整除法最少應用, 蓋本金常不易分成整除各部也。利率較為複雜時, 應用利率整除法較為便利。至於時期整除法, 則應用甚廣, 學者不可不熟諳者也。

若依同一年利率, 計算各個本金所生利息之總和, 則以應用定除數法計算利息, 較為便利。定除數法者, 先就各本金, 分別計算其積數, (Interest Figures), 而求其總積數, 然後由總積數化為利息之法也。所謂積數, 即本金 (以一元為單位) 與日數相乘之積也。設本金為 100 元, 日數為 45 日, 則積數為 4500; 本金為 250.25 元, 日數為 40 日, 則積數為 10010; 餘可類推。以一定除數除總積數, 即得所求之利息, 此一定除數名曰定

除數 (Fixed or Constant Divisor). 定除數之數值, 隨年利率而異, 年利率愈高, 則定除數之值愈小, 年利率愈低, 則定除數之值愈大.

設 P_1, P_2, \dots, P_n 為各個本金, d_1, d_2, \dots, d_n 為各個本金投資日數, I_1, I_2, \dots, I_n 為各個本金所生之利息, I 為各個利息之總和, i 為公共年利率, 則應用公式 (4), 得:

$$I_1 = P_1 i \frac{d_1}{360}$$

$$I_2 = P_2 i \frac{d_2}{360}$$

.....

$$I_n = P_n i \frac{d_n}{360}$$

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

$$= P_1 i \frac{d_1}{360} + P_2 i \frac{d_2}{360} + \dots + P_n i \frac{d_n}{360}$$

$$= \frac{i}{360} (P_1 d_1 + P_2 d_2 + \dots + P_n d_n)$$

$$= (P_1 d_1 + P_2 d_2 + \dots + P_n d_n) \div \frac{360}{i}$$

上式中 $P_1 d_1, P_2 d_2, \dots, P_n d_n$ 即為各個本金之積數, $\frac{360}{i}$ 則為年利率 i 之定除數, i 為分數中之分母, 分數之數值與分母之數值成反比例, 故定除數之數值亦與年利率成反比例, 茲將主要年利率之定除數, 列表如下:

年 利 率	定除數	年 利 率	定除數
二 釐	18000	七釐五毫	4800
二釐五毫	14400	八 釐	4500
三 釐	12000	八釐五毫	4235
三釐五毫	10286	九 釐	4000
四 釐	9000	九釐五毫	3789
四釐五毫	8000	一 分	3600
五 釐	7200	一分一釐	3273
五釐五毫	6545	一分二釐	3000
六 釐	6000	一分三釐	2769
六釐五毫	5538	一分四釐	2571
七 釐	5143	一分五釐	2400

定除數法尤便於活期存款(參看拙著商業算術 99 頁第四編活期存款)之計息,蓋活期存款中之餘額常有變動,計息日數頗不一致,而計算各餘額利息所用之年利率則均相同故也。

(例七)某銀行活期存款規定年利率三釐,茲據某甲之活期存款賬,得存款餘額與存款日數如下:

存款餘額	存款日數
550 元	48 日
375 元	45 日
525 元	28 日

490 元 36 日

565 元 18 日

問某甲應得利息若干元？(一年以 360 日計算)

$$550 \times 48 = 26400$$

$$375 \times 45 = 16875$$

$$525 \times 28 = 14700$$

$$490 \times 36 = 17640$$

$$\frac{565 \times 18}{\text{總積數}} = \frac{10170}{85785}$$

查定除數表之三釐得 12000

$$\frac{85785}{12000} = 7.15 \text{ 元}$$

習 題 三

1. 本金 3500 元，年利率三釐五毫，求民國十九年三月六日至民國二十一年二月四日間之普通利息！
2. 本金 27500 元，年利率五釐，應用本金整除法求 72 日之普通利息！
3. 應用定除數法，求下表中普通利息之總和(年利率四釐)！

本 金	日 數
1250 元	35
4855 元	45
6945 元	123
7856 元	64
9450 元	32
345.50 元	16

287.75 元	44
5895 元	4
1005 元	32
2586 元	5

4. 應用利率整除法,求下表中之普通利息!

	本 金	年 利 率	日 數
(a)	3000 元	12½%	56 日
(b)	2500 元	5.2775%	48 日

5. 本金 2500 元 年利率六釐,應用年法,求民國二十年三月四日至民國二十二年六月十六日間之普通利息!

6. 應用一釐法,求下表中之普通利息!

	本 金	年 利 率	日 數
(a)	4586 元	6%	156 日
(b)	3869 元	7%	80 日
(c)	4857 元	6½%	75 日
(d)	8694 元	8%	84 日
(e)	12350 元	9%	123 日

第二節 準確利息

準確利息,以一年作為 365 日或 366 日.故計算準確利息須以兩時期間,實在經過之日數為日數.例欲計算五月二十六日至八月十八日之準確利息,須自五月二十六日數至八月十八日,方得準確日數.但為計算便利起見可先製成日數推算表(參看拙著商業算術70頁第二節準確利息);計算時,即可由表檢出兩時期之日數,然後相減,而得所求之日數.

(例一) 求自四月十五日至八月五日之準確日數!

15 四月份未經過日數

31 五月

30 六月

31 七月

 $\frac{5}{112}$ 八月

準確利息，可依下之公式求得：

$$I_1 = Pi \times \frac{d_1}{365} \dots\dots\dots(5)$$

$$I_2 = Pi \times \frac{d_2}{366} \dots\dots\dots(6)$$

$$I = I_1 + I_2 = Pi \left(\frac{d_1}{365} + \frac{d_2}{366} \right) \dots\dots\dots(7)$$

 I_1 平年之準確利息 I_2 閏年之準確利息 I 一部平年，一部閏年之準確利息 P 本金 i 年利率 d_1 平年內之日數 d_2 閏年內之日數

(註) 由西歷確定閏年與平年，有一定規則可循。不能以 4 整除各年，均為平年，例如西歷 1933, 1934, 1935 均為平年。能以 4 整除而不能以 100 整除各年，均為閏年，例如西歷 1932, 1936 均為閏年。能以 100 整除而不能以

400 整除各年，均為平年，例如西歷 1700, 1800, 1900 均為平年。能以 400 整除各年，均為閏年，例如西歷 1600, 2000 均為閏年。

(例二) 本金 25000 元，年利率五釐，求自 1933 年十一月五日至 1934 年三月八日之準確利息！

$$d_1 = 25 + 31 + 31 + 28 + 8 = 123$$

應用公式 (5)，得：

$$I_1 = 25000 \times 0.05 \times \frac{123}{365} = 421.23 \text{ 元}$$

(例三) 本金 3000 元，年利率六釐，求自 1932 年三月五日至同年五月二十日之準確利息！

$$d_2 = 26 + 30 + 20 = 76$$

應用公式 (6)，得：

$$I_2 = 3000 \times 0.06 \times \frac{76}{366} = 37.38 \text{ 元}$$

(例四) 本金 5000 元，年利率八釐，求自 1931 年八月十八日至 1932 年四月十二日之準確利息！

(解) 此題計息期間，一部在平年，(1931 年八月十八日至同年十二月三十一日) 一部在閏年，(1931 年十二月三十一日至 1932 年四月十二日) 故計算準確利息，須應用公式 (7)。

$$d_1 = 13 + 30 + 31 + 30 + 31 = 135$$

$$d_2 = 31 + 29 + 31 + 12 = 103$$

$$\begin{aligned}
 I &= 5000 \times 0.08 \times \left(\frac{135}{365} + \frac{103}{366} \right) \\
 &= 400 \times \left(\frac{135}{365} + \frac{103}{366} \right) \\
 &= \frac{54000}{365} + \frac{41200}{366} = 260.51 \text{ 元}
 \end{aligned}$$

平年計算準確利息，可用除三遞退法 (The Third. Tenth and Tenth Rule, 日人小林行昌譯為七三法，和田喜八譯為三分二重一割法) 較為簡捷。其求法分述如下：

- A. $\frac{\text{本金} \times \text{年利率} \times \text{日數} \times 2}{1000}$
- B. $A \div 3$
- C. $B \div 10$ (即 $A \div 30$)
- D. $C \div 10$ (即 $A \div 300$)
- E. $A + B + C + D$
- F. $E - \frac{E}{10000}$

(證) $I = Pi \frac{d}{365} = \frac{2Pid}{730}$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{730} &= \frac{1370}{730 \times 1370} = \frac{137}{100} \times \frac{10}{13001} = \left(1 + \frac{37}{100} \right) \times \frac{10}{13001} \\
 &= \left(1 + \frac{111}{300} \right) \times \frac{10}{13001} = \left(1 + \frac{100}{300} + \frac{10}{300} + \frac{1}{300} \right) \\
 &\times \frac{10}{13001} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300} \right) \times \frac{10}{13001}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{但 } \frac{10}{10001} &= \frac{10 \times 9999 \times 10000000}{10001 \times 9999 \times 10000000} = \frac{9999}{10000000} \times \frac{100000000}{99999999} \\
 &= \frac{10000-1}{10000000} \times 1.00000001 \\
 &= \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{10000000} \right) \times 1.00000001 \\
 \therefore I &= 2Pid \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300} \right) \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{10000000} \right) \\
 &\quad \times 1.00000001 = \frac{2Pid}{1000} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300} \right) \\
 &\quad \left(1 - \frac{1}{10000} \right) \times 1.00000001
 \end{aligned}$$

上式中 1.00000001 幾與 1 相等，故求 I 之近似值時，可略而不計，而 I 之數值即可自下式求得：

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{2Pid}{1000} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300} \right) \left(1 - \frac{1}{10000} \right) \\
 &= A \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300} \right) \left(1 - \frac{1}{10000} \right) \\
 &= \left(A + \frac{A}{3} + \frac{A}{30} + \frac{A}{300} \right) \left(1 - \frac{1}{10000} \right) \\
 &= (A + B + C + D) \left(1 - \frac{1}{10000} \right) \\
 &= E \left(1 - \frac{1}{10000} \right) \\
 &= E - \frac{E}{10000}
 \end{aligned}$$

(例五) 本金 12500 元，年利率四釐，求 38 日之準確利息！

	$12500 \times 0.04 \times 38 \times 2 = 38000$
<i>A</i>	38
<i>B</i>	12.6667
<i>C</i>	1.2667
<i>D</i>	<u>0.1267</u>
<i>E</i>	52.0601
	<u>-0.0052</u>
<i>F</i>	52.0549

閏年計算準確利息，年利率若為六釐，則依法國人壽保險公司會計糜阿蘭(M. Mialin)之經驗，可用下之簡捷法求得：

$$A = \frac{\text{本金} \times \text{日數}}{10000}$$

$$B = A \div 2$$

$$C = A \div 10$$

$$D = A \div 30$$

$$E = A \times 0.006$$

$$F = A + B + C + D + E$$

(證)
$$I = Pd \times \frac{0.06}{366} = 0.00016398 \frac{27}{61} Pd$$

$$F = A + B + C + D + E$$

$$= A + \frac{A}{2} + \frac{A}{10} + \frac{A}{30} + 0.006 A$$

$$= \frac{49}{30} A + 0.006 A = \frac{4918}{3000} A$$

$$= \frac{4918}{3000} \times \frac{Pd}{10000} = 0.00016393 \frac{1}{3} Pd$$

$0.00016393 \frac{27}{61}$ 與 $0.00016393 \frac{1}{3}$ 相差不及 0.0000000011 ，故以

F 代 I ，錯誤小於 Fd 之 0.0000000011 ，若 Fd 小於 9000000 ，則錯誤小於 0.0099 ，或即小於百分之一。

(例六) 本金 35000 元，年利率六釐，求自 1932 年三月十八日至同年六月一日之準確利息！

1932 年為閏年

$$13 + 30 + 31 + 1 = 75 \text{ 日}$$

$$35000 \times 75 = 2625000$$

A	262.5
B	131.25
C	26.25
D	8.75
E	<u>1.575</u>
F	430.325

定除數法亦能應用於準確利息之計算，惟定除數既以年利率除一年內日數而得，故準確利息之定除數，與普通利息之定除數互異，茲就平年準確利息，將主要年利率之定除數，列表如下：

年 利 率	定除數	年 利 率	定除數
二 釐	18250	七釐五毫	4867
二釐五毫	14600	八 釐	4563
三 釐	12167	八釐五毫	4291
三釐五毫	10429	九 釐	4056
四 釐	9125	九釐五毫	3842
四釐五毫	8111	一 分	3650
五 釐	7300	一分一釐	3318
五釐五毫	6636	一分二釐	3042
六 釐	6083	一分三釐	2808
六釐五毫	5615	一分四釐	2607
七 釐	5214	一分五釐	2433

(例七) 某銀行活期存款規定年利率三釐，茲據某甲之活期存款帳，得存款餘額與存款日數如下：

存款餘額	存款日數
550 元	48 日
375 元	45 日
525 元	28 日
490 元	36 日
565 元	18 日

問某甲應得利息若干元？(一年以 365 日計算)

$$550 \times 48 = 26400$$

$$375 \times 45 = 16875$$

$$525 \times 28 = 14700$$

$$490 \times 36 = 17640$$

$$565 \times 18 = 10170$$

$$\text{總積數 } 85785$$

查定除數表之三釐得 12167

$$\frac{85785}{12167} = 7.05 \text{ 元}$$

按此題即第一節中之例七，兩者之答數互異，普通利息為 7.15 元，準確利息為 7.05 元。計算普通利息與平年準確利息之日數若相等，則兩者之間有一定關係，用公式表之如下：

$$I'' = I - \frac{I}{73} \dots\dots\dots(3)$$

$$I' = I + \frac{I}{72} \dots\dots\dots(9)$$

I 普通利息

I' 平年準確利息

(證) 設 P 為本金， i 為年利率， d 為日數，則

$$I' = P i \frac{d}{360}$$

$$I'' = P i \frac{d}{365}$$

由第一式得： $P i d = 360 I'$

由第二式得： $P i d = 365 I''$

$$\therefore 360 I' = 365 I''$$

$$I' = \frac{365}{360} I'' = \left(1 + \frac{1}{72}\right) I'' = I'' + \frac{I''}{72}$$

$$I'' = \frac{360}{365} I' = \left(1 - \frac{1}{73}\right) I' = I' - \frac{I'}{73}$$

試以上題，則得：

$$I' = 7.05 + \frac{7.05}{72} = 7.15$$

$$I'' = 7.15 - \frac{7.15}{73} = 7.05$$

整除數法有時雖亦應用於準確利息之計算，然因不能應用最通行之一釐法，故計算準確利息，鮮有應用整除數法者。

普通利息與準確利息，既有一定關係，故凡普通利息之簡捷法均可間接應用於準確利息，而準確利息之簡捷法，亦均可間接應用於普通利息。

習 題 四

1. 求下列各題中之準確利息！

	本 金	年 利 率	起 期 年 月 日	止 期 年 月 日	準 確 利 息
(a)	\$ 10000	5%	1931 3 18	1931 8 5	
(b)	4500	6%	1932 1 19	1932 6 8	
(c)	3525	7%	1930 10 9	1931 4 8	
(d)	1875	6½%	1931 10 9	1932 4 8	
(e)	1325	5%	1933 5 6	1933 9 4	

2. 應用除三遞退法,求下列各題中之準確利息!

	本 金	年 利 率	日 數	準 確 利 息
(a)	\$ 25000	6%	123	
(b)	35000	7%	58	
(c)	12500	4%	112	
(d)	38500	5%	64	
(e)	18500	8%	58	

3. 應用定除數法,求下表中利息之總和(年利率五厘)!

(a) 普通利息

(b) 半年準確利息

本 金	日 數
\$ 385	45
258	65
450	13
7850	12
395	21
685	23
1400	31

4. 計算普通利息與周年準確利息之日數若相等,則兩者之間有何關係? 試求其換算之公式!

5. 本金1000元,年利率6%,求135日之半年準確利息!

(a) 應用除三遞退法.

(b) 應用一釐法先求普通利息,然後化為準確利息.

6. 本金1000元,年利率5%,求86日之普通利息!

(a) 應用一釐法.

(b) 應用除三遞退法先求準確利息,然後化為普通利息.

第二章 複利

複利 (Compound Interest) 者, 每期利息, 於每期之末, 加入舊本金, 而成新本金; 再由新本金, 計算下期利息之法也, 即所謂利上生利是也。債券持票人, 盡以其所得利息, 購買新債券, 以生新利息, 此複利法也。銀行存款人, 以其應得利息, 重行存入, 以生新利息, 此亦一複利法也。複利法為投資數學之基礎, 蓋一切長期投資, 若年金, 若債券, 若人壽保險, 均須應用複利計算故也。

複利法中之本利合計, 名曰複利終值 (Compound Amount), 複利終值與本金之差額, 即為複利息 (Compound Interest)。單利法中之本金不變, 故單利息與本金, 利率時期成正比例, 複利法則不然, 每期之複利息隨本金而漸增, 故複利息不能由本金, 利率, 與時期三者連乘而得。複利終值與複利息, 可應用下列二公式求得:

$$S = Pw^n \dots\dots\dots (10)$$

$$I = S - P = P(w^n - 1) \dots\dots\dots (11)$$

S 複利終值.

P 本金

i 年利率 n 年數 I 複利息 $u=1+i$

(證) 年初本金	年內利息	年末終值
第一年 P	Pi	$P+Pi=P(1+i)$
第二年 $P(1+i)$	$Pi(1+i)$	$P(1+i)+Pi(1+i)=P(1+i)^2$
第三年 $P(1+i)^2$	$Pi(1+i)^2$	$P(1+i)^2+Pi(1+i)^2=P(1+i)^3$

第 n 年 $P(1+i)^{n-1}$ $Pi(1+i)^{n-1}$ $P(1+i)^{n-1}+Pi(1+i)^{n-1}=P(1+i)^n$

$$\therefore S=P(1+i)^n=Pw^n$$

(例一) 本金一千元, 年利率七厘, 求三年後之複利終值與複利息!

代入公式 (10) 得:

$$S=1000 \times 1.07^3 = 1225.043 \text{ 元}$$

$$I=1225.043 - 1000 = 225.043 \text{ 元}$$

上題中僅有三年, 故尚易計算. 若年數增至數十年, 則應用公式, 須以數十個 1.07 連乘, 非特浪費時間, 且一有錯誤, 即連累及最後之結果, 計算與覆核之煩, 實為事實所不許. 複利終值表 (表四) 者, 即所以應此需要而作. 表上之數, 係本金一元, 依利率 i , 至 n 期末之終值也. i 與 n 均詳載表上. 試就

上題而論，則可查三期，七釐，而得 1.225043，即本金一元，三年後可得終值 1.225043 元也。

$$1000 \times 1.225043 = 1225.043 \text{ 元}$$

有時題中之利率與時期，為複利終值表中所無，則複利終值之計算，須應用對數表。

(例二) 本金 325 元，年利率二釐，求二百年後之複利終值！

代入公式(10)，得：

$$S = 325 \times 1.02^{200}$$

$$\log S = \log 325 + 200 \log 1.02$$

$$= 2.511883 + 200 \times 0.008600$$

$$= 4.231883$$

$$\therefore S = 17056.24 \text{ 元}$$

每年複利次數隨問題而異，若每年一次，則利息至一年末，始加入本金，以成新本金。若每年二次，則利息至半年末，即加入本金，以成新本金。債券利息若每年支付一次，則持票人祇能於每年末以其應得利息，購買新債券以生新利息也。反之，若每年支付二次或四次，則持票人於每半年末或每三月末，已能以其應得利息，購買新債券，以生新利息也。前者持票人運用其資金每年祇能複利一次，而後者則能複利至二次或四次，一年內複利之次數愈多，投資者所得之利息愈大。試以本金 100 元，年利率八釐為例，若一年複利一次，則投資者於一年末得複利息洋 8 元，若一年複利二次，則投資者，於六月末得利息 4 元，加入舊本金而成新本金 104 元，更以新

本金按年息八釐生息。於一年末復得利息 4.16 元，故投資者共得複利息 8.16 元。若一年複利四次，則投資者於三月末得利息 2 元，加入舊本金而成新本金 102 元，更以新本金按年息八釐生息，於六月末得利息 2.04 元，更以新本金 104.04 元按年息八釐生息，於九月末得利息 2.0808 元，更以新本金 106.1208 元按年息八釐生息，於一年末得利息 2.122416 元，故投資者共得複利息 8.243216 元。以上三例雖均名為年利率八釐，然投資者在一年內實際收入之利息，則各各不同。同一本金，同一時期，而實際收入之利息不等，則計算利息之實際利率，亦不一致，故利率有虛利率 (Nominal Rate of Interest) 與實利率 (Effective Rate of Interest) 之別。若每年複利一次，則虛利率與實利率相等；若每年複利不止一次，則實利率大於虛利率，每年複利之次數愈多，兩者之差亦愈甚，其關係可用公式列之如下：

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 \dots\dots\dots (12)$$

$$j = m[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1] \dots\dots\dots (13)$$

i 實利率

j 虛利率

m 每年複利次數

(證) 設 S 為本金一元一年末之複利終值，則應用公式 (10)，得：

$$S = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$$

但

$$S = 1 + i$$

$$\therefore i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$$

$$1 + i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$$

$$1 + \frac{j}{m} = (1 + i)^{\frac{1}{m}}$$

$$\frac{j}{m} = (1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

$$\therefore j = m[(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1]$$

(例三) 年利率六釐, 每年複利四次, 求實利率!

代入公式 (12), 得:

$$i = 1.015^4 - 1 = 0.06136355$$

(例四) 某銀行規定每年複利二次, 存款者欲得年利率六釐之實利率, 求虛利率!

代入公式 (13), 得:

$$j = 2(1.06^{\frac{1}{2}} - 1)$$

$1.06^{\frac{1}{2}}$ 可查期數不滿一期之複利終值表 (表九), 得:

$$1.06^{\frac{1}{2}} = 1.0295602$$

$$j = 2 \times 0.02956302 = 0.05912604$$

由實利率求虛利率, 可查實利率化虛利率表 (表十) 公式 (13) 中之 m 若代以 p , 則得 $j = p[(1 + i)^{\frac{1}{p}} - 1]$, j 之數值隨 p 而異, 故可於 j 字之下附以 p 字以區別之, 即:

$$j_p = p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]$$

實利率化虛利率表即根據此式而作，上題中之 $i=6\%$
 $p=2$ ，查表得：

$$j_2 = 0.05912603$$

每年複利次數愈多，實利率亦愈大，然實利率之增加非漫無限制，即使複利次數連續增加不絕，實利率之數值亦有一定限制，其極大值用公式列之如下：

$$i = e^i - 1 \quad (14) \text{ (證明參看附錄甲7)}$$

i 實利率

j 虛利率

m 複利次數

e 自然對數之底

(例五) 虛利率六釐，連續複利求實利率！

代入公式(14)，得：

$$i = e^{0.06} - 1$$

令

$$x = e^{0.06}$$

$$\log_{10} x = 0.06 \log_{10} e$$

$$= 0.06 \times 0.4342945$$

$$= 0.02605767$$

$$x = 1.0618$$

$$\therefore i = 0.0618$$

連續複利之利息，名曰連續複利息，(Continuously Conver-

tible Interest), 而其虛利率, 名曰息力 (Force of Interest), 息力通常用 δ (讀如 Delta) 表示, 其數值可自下之公式求得:

$$\delta = 2.302585 \log_{10} (1+i) \dots\dots\dots (15)$$

δ 息力

i 實利率

(證) 應用公式 (11), 得:

$$e^{\delta} = 1+i$$

$$\delta \log_{10} e = \log_{10} (1+i)$$

$$\delta = \log_e 10 \log_{10} (1+i)$$

$$= 2.302585 \log_{10} (1+i)$$

(例六) 實利率六釐, 求息力!

代入公式 (15), 得:

$$\delta = 2.302585 \log_{10} 1.06$$

$$= 2.302585 \times 0.025306$$

$$0.362216$$

$$\underline{\underline{2.403224}}$$

$$\underline{\underline{2.765440}}$$

$$\delta = \text{Anti log } \bar{2}.76544 = 0.05827$$

息力與實利率亦可自下列二公式求得:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \dots\dots\dots (16) \\ i &= \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \dots\dots\dots (17) \end{aligned} \right\} \text{(證明參看附錄甲8)}$$

應用公式(16)以解例六,則得:

$$\begin{array}{r} 0.06 \\ +0.000072 \\ \hline 0.060072 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0.0018 \\ +0.0000324 \\ \hline 0.00180324 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0.060072 \\ -0.00180324 \\ \hline 0.05826876 \end{array}$$

應用公式(17)以解例五,則得:

$$\begin{array}{r} 0.06 \\ 0.0018 \\ +0.000036 \\ \hline 0.061836 \end{array}$$

若每年複利不止一次,則公式(10)中之 u ,可以 $\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$ 代入,故複利終值可自下式求得:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} \dots\dots\dots (18)$$

S 複利終值

P 本金

n 年數

m 每年複利次數

j 虛利率

若每年連續複利,則自公式(10)與(14),可化得公式如下:

$$S = P e^{n\delta} \dots\dots\dots (19)$$

S 複利終值

P 本金

e 自然對數之底

n 年數

δ 息力

(例七) 本金 500 元, 年利率七釐, 求十年末之複利終價值!

a) 每年複利一次

b) 每年複利四次

c) 連續複利

a) 代入公式 (10), 得:

$$\begin{aligned} S &= 500 \times 1.07^{10} = 500 \times 1.96715136 \\ &= 983.58 \text{ 元} \end{aligned}$$

b) 代入公式 (18), 得:

$$\begin{aligned} S &= 500 \times 1.0175^{40} = 500 \times 2.00159734 \\ &= 1000.80 \text{ 元} \end{aligned}$$

c) 代入公式 (19) 得:

$$\begin{aligned} S &= 500 \times e^{0.7} \\ \log_{10} S &= \log_{10} 500 + 0.7 \log_{10} e \\ &= 2.698970 + 0.7 \times 0.4342945 \\ &= 3.00297615 \\ \therefore S &= 1006.88 \text{ 元} \end{aligned}$$

有時複利終值, 爲投資者預定若干年後收到之金額, 則此終值爲已知之數, 而現當投資之額反猶未知, 例如存款者欲於十年後自銀行取得一萬元, 則現當存入之額, 須經計算求得, 由是求得之數, 名曰十年後一萬元之現值 (Present Value). 十年後收到之一萬元, 與五年後收到之一萬元, 雖同爲一萬元, 然其現在之價值則迥然不同, 蓋五年後收到之一

萬元再經五年之投資，至十年末之金額，遠在一萬元以上，故同一金額，收到之時期愈早，其現值亦愈大。複利現值公式，可自複利終值公式化得如下：

$$P = Sv^n \dots \dots \dots (20)$$

$$P = S \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm} \dots \dots \dots (21)$$

$$P = Se^{-n\delta} \dots \dots \dots (22)$$

P 複利現值

S 複利終值

n 年數

i 實利率

$$v = (1+i)^{-1}$$

j 虛利率

δ 息力

m 每年複利次數

公式 (21) 中，若 $m=1$ ，則：

$$j = i$$

$$P = S(1+i)^{-n} = Sv^n$$

即得公式 (20)。

公式 (20) 中，若 $S=1$ ，則 $P=v^n$ ，複利現值表 (表五) 即根據此式而作，故複利現值表中所載之現值，乃依年利率 i 投資，在 n 年後收到一元之現值也。

(例八) 某甲欲於十年後積洋一萬元,問現須以若干元存入銀行?

a 年利率八釐,每年複利一次。

b 年利率七釐七毫半,每年複利一次。

c 年利率八釐,每年複利二次。

d 年利率八釐,連續複利。

a) 查複利現值表中十年八釐得:

$$v^{10} = 0.46319349$$

此為十年後一元之現值,故十年後一萬元之現值,當為:

$$P = 10000 \times 0.46319349 = 4631.93 \text{ 元}$$

b) 複利現值表中無年利率 $7\frac{3}{4}\%$, 故須代入公式 (20),

然後應用對數表,計算存入金額

$$P = 10000 \times 1.0775^{-10}$$

$$\log P = 4 - 10 \log 1.0775$$

$$= 4 - 0.324180$$

$$= 3.675820$$

$$\therefore P = 4740.46 \text{ 元}$$

c) 每年複利不止一次,故須代入公式 (21)。

$$P = 10000 \times 1.04^{-20}$$

$$= 10000 \times 0.45638695$$

$$= 4563.87 \text{ 元}$$

d) 應用公式 22, 得:

$$\begin{aligned} P &= 10000 e^{-0.8} \\ \log_{10} P &= 4 - 0.8 \log_{10} e \\ &= 4 - 0.8 \times 0.4342945 \\ &= 3.6525644 \end{aligned}$$

查反對數, 得:

$$P = 4493.29 \text{ 元}$$

上所述者, 爲複利終值與複利現值之計算. 若欲求複利時期, 則可應用下列三式之一:

$$n = \frac{\log S - \log P}{\log(1+i)} \dots\dots\dots(23)$$

$$n = \frac{\log S - \log P}{m \log \left(1 + \frac{j}{m}\right)} \dots\dots\dots(24)$$

$$n = \frac{2.302585}{\delta} (\log_{10} S - \log_{10} P) \dots\dots\dots(25)$$

n 年數

S 複利終值

P 複利現值

i 實利率

j 虛利率

δ 息力

m 每年複利次數

(證)

$$S = P(1+i)^n$$

(公式 10)

$$\log S = \log P + n \log(1+i)$$

$$\log S - \log P = n \log(1+i)$$

$$\therefore n = \frac{\log S - \log P}{\log(1+i)}$$

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} \quad (\text{公式 18})$$

$$\log S = \log P + nm \log \left(1 + \frac{j}{m}\right)$$

$$\log S - \log P = nm \log \left(1 + \frac{j}{m}\right)$$

$$\therefore n = \frac{\log S - \log P}{m \log \left(1 + \frac{j}{m}\right)}$$

$$S = P e^{n\delta} \quad (\text{公式 19})$$

$$\log_{10} S = \log_{10} P + n \delta \log_{10} e$$

$$\log_{10} S - \log_{10} P = n \delta \log_{10} e$$

$$n = \frac{\log_e 10}{\delta} (\log_{10} S - \log_{10} P)$$

$$\therefore n = \frac{2.302585}{\delta} (\log_{10} S - \log_{10} P)$$

公式(24)中,若 $m=1$,則:

$$j = i$$

$$n = \frac{\log S - \log P}{\log(1+i)}$$

即得公式(23).

若

$$S = pP$$

則 $\log p = \log S - \log P$

以之代入公式 (23), (24) 與 (25), 則得下列三式:

$$n = \frac{\log p}{\log(1+i)} \dots\dots\dots(26)$$

$$n = \frac{\log p}{m \log\left(1 + \frac{j}{m}\right)} \dots\dots\dots(27)$$

$$n = \frac{2.302585}{\delta} \log p \dots\dots\dots(28)$$

n 年數

p 複利終值與複利現值之比

i 實利率

j 虛利率

δ 息力

m 每年複利次數

$p=2$ 時, 即複利終值為複利現值之二倍時, 公式 (26) 中之複利時期, 可自下式求得其近似值:

$$n = \frac{0.693}{i} + 0.35 \dots\dots\dots(29) \text{ (證明參看附錄甲 9)}$$

n 年數

i 實利率

(例九) 本金三千元, 依年利率七釐投資, 問若干年後可得終值六千元?

a) 每年複利一次

b) 每年複利二次

$$a) p = \frac{6000}{3000} = 2$$

(第一法) 代入公式 (26), 得:

$$n = \frac{\log 2}{\log 1.07} = \frac{0.301030}{0.029384} = 10.245 \text{ 年}$$

(第二法) 代入公式 (29), 得:

$$n = \frac{0.693}{0.07} + 0.35 = 10.25 \text{ 年}$$

b) (第一法) 代入公式 (27), 得:

$$n = \frac{\log 2}{2 \log 1.035} = \frac{0.301030}{0.029880} = 10.075 \text{ 年}$$

(第二法) 化虛利率為實利率

$$i = 1.035^2 - 1 = 0.071225$$

代入公式 (29), 得:

$$n = \frac{0.693}{0.071225} + 0.35 = 10.08 \text{ 年}$$

實利率與虛利率, 可自下列三公式求得:

$$i = \text{antilog} \frac{\log S - \log P}{n} - 1 \dots\dots\dots (30)$$

$$j = m \left[\text{antilog} \frac{\log S - \log P}{n m} - 1 \right] \dots\dots\dots (31)$$

$$\delta = \frac{2.302585}{n} (\log_{10} S - \log_{10} P) \dots\dots\dots (32)$$

i 實利率

j 虛利率 δ 息力 S 複利終值 P 複利現值 n 年數 m 每年複利次數

$$(證) \quad S = P(1+i)^n \quad (公式 10)$$

$$\log S = \log P + n \log(1+i)$$

$$\log(1+i) = \frac{\log S - \log P}{n}$$

$$1+i = \text{antilog} \frac{\log S - \log P}{n}$$

$$\therefore i = \text{antilog} \frac{\log S - \log P}{n} - 1$$

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} \quad (公式 18)$$

$$\log S = \log P + n m \log \left(1 + \frac{j}{m}\right)$$

$$\log \left(1 + \frac{j}{m}\right) = \frac{\log S - \log P}{n m}$$

$$1 + \frac{j}{m} = \text{antilog} \frac{\log S - \log P}{n m}$$

$$\frac{j}{m} = \text{antilog} \frac{\log S - \log P}{n m} - 1$$

$$\therefore j = m \left[\text{antilog} \frac{\log S - \log P}{n m} - 1 \right]$$

$$S = Pe^{n\delta} \quad (\text{公式 19})$$

$$\log_{10} S = \log_{10} P + n \delta \log_{10} e$$

$$\log_{10} S - \log_{10} P = n \delta \log_{10} e$$

$$\delta = \frac{\log e^{10}}{n} (\log_{10} S - \log_{10} P)$$

$$\therefore \delta = \frac{2.302585}{n} (\log_{10} S - \log_{10} P)$$

公式 (31) 中, 若 $m=1$, 則:

$$j = i = \text{antilog} \frac{\log S - \log P}{n} - 1$$

即公得式 (30).

(例十) 本金一千元, 十年後可得本利合計二千五百元, 求
年利率!

a) 每年複利一次;

b) 每年複利四次;

c) 連續複利.

a) 代入公式 (30), 得:

$$\begin{aligned} i &= \text{antilog} \frac{\log 2500 - \log 1000}{10} - 1 \\ &= \text{antilog} 0.039794 - 1 \\ &= 0.096 \end{aligned}$$

b) 代入公式 (31), 得:

$$j = 4 \left[\text{antilog} \frac{\log 2500 - \log 1000}{40} - 1 \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= 4(\text{antilog } .0099485 - 1) \\
 &= 4 \times 0.0232 \\
 &= 0.0928
 \end{aligned}$$

c) 代入公式 (32), 得:

$$\begin{aligned}
 \delta &= \frac{2.302585}{10} (\log_{10} 2500 - \log_{10} 1000) \\
 &= 0.2302585 \times 0.597940 \\
 &= 0.0916
 \end{aligned}$$

習 題 五

1. 求下列各題中之複利終值與複利息!

	本 金	年 利 率	年 數	每 年 複 利 次 數
a)	\$ 450	6%	10	1
b)	500	5%	5	2
c)	550	3%	15	12
d)	600	4%	20	連續複利
e)	650	8%	25	4
f)	700	7%	18	4
g)	750	8%	100	連續複利
h)	800	4½%	10	4
i)	850	4½%	10	2
j)	900	4½%	10	連續複利

2. 化下列各題中之虛利率為實利率!

	虛 利 率	每 年 複 利 次 數
a)	6%	2
b)	6%	4

e)	6%	12
d)	6%	365
e)	6%	連續複利

3. 求下列各題中之現值!

	複利終值	年利率	年數	每年複利次數
a)	\$ 1000	6%	10	1
b)	1500	6%	15	2
c)	2000	6%	20	連續複利
d)	2500	6½%	12	1
e)	3000	5½%	25	2
f)	3500	7%	30	4
g)	4000	8%	15	1
h)	4500	9%	10	連續複利
i)	5000	10%	5	4
j)	5500	12%	12	1

4. 求下列各題中之時期或利率!

	複利終值	複利現值	每年複利次數	年數	年利率
a)	\$ 4000	\$ 2000	1		8%
b)	4000	2000	2		8%
c)	1500	725	連續複利		7%
d)	2500	1525	4		6%
e)	1000	200	1		8%
f)	3000	2000	1	5	
g)	2000	1500	2	6	
h)	1500	1000	連續複利	7	
i)	4000	3500	4	8	
j)	3500	2500	1	10	

5. 化下列各題中之實利率為虛利率!

	實利率	每年複利次數
a)	6%	4
b)	6%	連續複利
c)	6%	$\frac{1}{2}$
d)	10%	4
e)	7%	365

6. 上題中(c)求得之虛利率,何以大於實利率?試言其故!
7. 同一本金,一用單利 5% 投資,一用複利 $3\frac{1}{2}\%$ 投資,問若干年後後者之本利合計,超過前者之本利合計?(檢查複利終值表)!
8. 本金 1000 元,投資三十年,前十年年利率六厘,其後十年年利率五厘,最後十年年利率四厘,求三十年末之複利終值!
9. 同一本金,一用複利 5% 投資,一用複利 3% 投資,問若干年後,前者之終值,超過後者終值之二倍?
10. 同一本金,一用單利 3% 投資,一用複利 3% 投資,十年後兩者之本利合計,相差 1097.91 元,求最初本金!
11. 某甲以一百萬元,捐於某校,言定此項捐款須依年利率四厘投資,每年收入利息,某校祇能動用半數,其餘一半撥入基金,但基金超過五百萬元時,某校祇須以每年利息四分之一撥入基金,基金超過一千萬元時某校得動用每年全部利息,問此時距捐款時若干年?
12. 問虛利率六厘,每年複利四次,若改用連續複利,當得息力若干?

第三章 貼現

貼現 (Discount) 者，定期支付票據之執票人，在未到期前以票據上所載權利，移讓於人，藉以換取現金之謂也。貼現在商業上之效用甚大，直接能使資金之流轉迅速，間接即所以促進工商業之發展。例如製造商以其出品售於批發商，約定三月後付款，在未到期前，製造商須添購原料，支付工資，均需充分之現金，以資週轉；若製造商得以其對於批發商之權利，轉讓於人，則三月後到期之付款，隨時可變為現金，以維持其繼續不絕之生產，故貼現已成為工商業發展國家流動資金最重要來源之一。美國商業百分之八十五，賴貼現而得流動之資金。

票據貼現既為發展工商業之工具，則欲促進票據之流行，對於票據之執票人，不可不有迅速確實之保障，故各國靡不制定票據法，以利票據之流行。我國票據法，於民國十八年十月三十日公佈施行，而票據法施行法，則於民國十九年七月一日公佈施行。票據法上所載關於票據之種類，各國立法未能一致，德法等國僅以匯票 (Bill of Exchange) 與本票 (Promissory Note) 為票據，而我國與英、美、日等國，則以支票 (Check) 與

匯票，本票同包含在票據之內，惟支票爲見票即付票據，故不適於貼現之用。

本票爲債務人約期支付之票據，而匯票則爲債權人命令債務人，於規定時期，付款若干於某人之票據也。故匯票有發票人，受款人與付款人三當事人，而本票祇有發票人與受款人二當事人，蓋本票之發票人即自爲付款人也。匯票之發票人雖命令付款人定期付款，然付款人苟無承認付款之表示，則匯票到期時付款人無付款之義務，而執票人亦不能強其付款也。故欲使付款人有到期付款之義務，須先使其有承認付款之表示，而此承認付款之表示，即票據法上所謂承兌 (Acceptance) 是也，付款人承兌時，以承認到期付款之意，表示於匯票之上，承兌後付款人始負票面金額支付之義務，故爲確定支付義務計，匯票執票人須向付款人提示承兌。

本票或匯票之執票人，以其債權轉讓於人時，除執票人票據 (認票不認人) 祇須交付即可流行外，均須簽字於票據之背面，以爲移讓債權之憑證，是謂背書 (Indorsement)。背書之人，名曰背書人 (Indorser)，而受讓債權之人，則名曰被背書人 (Indorsee)。付款人不能支付票據時，背書人亦負支付之責，蓋依票據法之規定，執票人得行使追索權 (Right of Recourse) 也。所謂追索權，即匯票遇拒絕付款或拒絕承兌，與本票遇不能付款時，執票人得向發票人，背書人，或票上其他債務人，請求償還票面金額之權也。

票面上所載之金額，名曰面值 (Face Value)。貼現票據，既未到期，則未到期前之利息，應由貼現人貼補，是謂貼現息 (Discount) 面值一元在單位時期內支付之貼現息，名曰貼現率 (Rate of Discount)。自面值內，扣去貼現息，所餘之金額，名曰淨收額 (Proceeds，日人譯為手收金)。

發行票據之日，名曰出票日 (Date of the Note)。到期付款之日，名曰到期日 (Date of Maturity)。貼現票據之日，名曰貼現日 (Date of Discount)。自貼現日至到期日之日數，名曰貼現時期 (Discount Period)。

票據有帶息票據 (Interest-Bearing Note) 與不帶息票據 (Non-Interest-Bearing Note) 之別，前者到期時付款人除照付面值外，尚須依票面上規定利率，支付出票日與到期日間之利息，而後者到期時付款人僅照面值付款，而無支付利息之義務也。票據到期時付款人應付之總額，名曰到期值 (Maturity Value)。帶息票據之到期值大於其面值，而不帶息票據之到期值，則與其面值相等也。貼現票據若為帶息票據，則貼現率即為到期值一元在單位時期內支付之貼現息，而淨收額即為到期值與貼現息相差之額。本書中所稱票據，除有特別說明外，均指不帶息票據而言。

請求貼現之票據，通常為數月期之短期票據，但間亦有數年期之長期票據者。短期票據之貼現，通常應用單利法，而長期票據之貼現，則非應用複利法不可，故貼現又有單貼現

與複貼現之別。

第一節 單貼現

單貼現 (Simple Discount) 者，依單利法計算貼現息之法也。貼現率為到期值一元在單位時期內支付之貼現息，而淨收額為到期值與貼現息之差，故單貼現息與淨收額可自下列兩式求得：

$$I = Sdn \dots\dots\dots (33)$$

$$P = S - I = S(1 - dn) \dots\dots\dots (34)$$

I 單貼現息

S 到期值

P 淨收額

d 貼現率

n 年數

貼現人借用之資金，為淨收額，而非到期值，故貼現人對於借用資金支付之利率，實大於貼現率。利率與貼現率，似同而實異，前者為計算淨收額 P 在 n 年內之利息所用之百分率，而後者則為計算到期值 S 在 n 年內之貼現息所用之百分率。 I 為對於到期值 S 之貼現息，亦即為對於淨收額 P 之利息，故若 i 為利率，則：

$$I = P_i n$$

$$Sdn = Sin(1 - dn)$$

$$\therefore i = \frac{d}{1-dn} \dots\dots\dots(35)$$

$$d = \frac{i}{1+in} \dots\dots\dots(36)$$

上列二式，所以示單利率與單貼現率之關係，據此二式，可作單利率與單貼現率比較對照表如下：

單利率	折合單貼現率			單貼現率	折合單利率		
	一年	六月	三月		一年	六月	三月
%	%	%	%	%	%	%	%
3	2.9126	2.9557	2.9777	3	3.0928	3.0457	3.0227
4	3.8462	3.9216	3.9604	4	4.1607	4.0816	4.0404
5	4.7619	4.8780	4.9383	5	5.2632	5.1282	5.0633
6	5.6604	5.8252	5.9113	6	6.3830	6.1856	6.0914
7	6.5421	6.7633	6.8796	7	7.5269	7.2539	7.1247
8	7.4074	7.6923	7.8431	8	8.6957	8.3333	8.1633
10	9.0909	9.5238	9.7561	10	11.1111	10.5263	10.2564

若依單利率貼現票據，則可應用公式(2)先求淨收額，然後計算貼現息，蓋淨收額即為公式(2)中之本金，而到期值即為其本利合計也。若依單貼現率貼現票據，則可應用公式(33)先求貼現息，然後計算淨收額。銀行貼現票據，多依單貼現率計算貼現息，蓋以其計算較簡，且於銀行有利也。故後法名曰銀行貼現法，而前法則俗稱確實貼現法。凡計算銀行預收利息之利率，均指貼現率而言。

(例一) 某甲以面值一萬元三月後到期之匯票請求貼現，求貼現息與淨收額！

a) 依單貼現率6%貼現；

b) 依單利率 6.0914% 貼現。

a) 先求貼現息

應用公式 (33), 得:

$$I = 10000 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = 150 \text{ 元}$$

$$P = 10000 - 150 = 9850 \text{ 元}$$

b) 先求淨收額

應用公式 (2) 得:

$$10000 = P \left(1 + \frac{6.0914}{100} \times \frac{1}{4} \right)$$

$$P = 10000 \div \frac{406.0914}{400} = 9850 \text{ 元}$$

$$I = 10000 - 9850 = 150 \text{ 元}$$

兩者之答數相同, 蓋三月期之單貼現率 6% 與單利率 6.0914% 相等故也。

(例二) 某甲向某乙購貨, 共值洋二萬元, 除付現金五千元外, 餘由某甲開發六月後到期之本票, 由乙持向銀行請求貼現, 其淨收額應與貸款餘額相等, 求面值!

a) 依單利率 7% 貼現;

b) 依單貼現率 6.7633% 貼現。

a) 應用公式 (2) 得:

$$S = 15000 \left(1 + \frac{7}{100} \times \frac{1}{2} \right) = 15525 \text{ 元}$$

b) 應用公式(34)得:

$$15000 = S \left(1 - \frac{6.7633}{100} \times \frac{1}{2} \right)$$

$$S = 15000 \div \frac{193.2367}{200} = 15525 \text{ 元}$$

兩者之答數相同，蓋六月期之單利率 7% 與單貼現率 6.7633% 相等故也。

觀此二例，可知淨收額之計算，以根據單貼現率為較便，而面值之計算，則以根據單利率為較便。

(例三) 某甲以三月後到期之六釐匯票請求貼現，面值一萬二千元，單貼現率七釐，求貼現息與淨收額！

$$\text{到期值} = 12000 + 12000 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = 12180 \text{ 元}$$

應用公式(33)，得：

$$I = 12180 \times \frac{7}{100} \times \frac{1}{4} = 213.15 \text{ 元}$$

$$P = 12180 - 213.15 = 11966.85 \text{ 元}$$

銀行貼現票據，有以貼現日與到期日，均算入貼現時期之內者，有僅算一日者，本書各題，除有特別說明外，均以後法為標準。

(例四) 某甲以六月十二日出票三月後到期之匯票，於六月十八日持向銀行請求貼現，面值二萬二千五百元，貼現率六釐，求貼現息與淨收額！（一年作為 365 日）

出票日後三月到期，故到期日為九月十二日

自貼現日至到期日共有 86 日。

應用公式 (33), 得:

$$I = 22500 \times \frac{6}{100} \times \frac{86}{365} = 318.08 \text{ 元}$$

$$P = 22500 - 318.08 = 22181.92 \text{ 元}$$

英國票據法上, 有所謂恩惠日 (Days of Grace 或譯猶豫日) 者, 即票據到期後, 得猶豫三日, 至到期後第三日, 始為法定期日 (Legal Due Date), 故貼現英國票據時, 日數須多算三日

(例五) 七月四日出票, 三月後到期之本票, 於八月五日在英國貼現, 面值 £458.10 *S. 6 d.*, 貼現率 $2\frac{7}{8}\%$, 求貼現息與淨收額! (一年作為 365 日)

出票後三月到期, 故到期日為十月四日, 而法定期日則為十月七日. 自八月五日至十月七日共有 63 日.

應用公式 (33), 得:

$$I = £458\frac{10}{6} \times \frac{2\frac{7}{8}}{100} \times \frac{63}{365} = £2\frac{5}{6}$$

$$P = £458\frac{10}{6} - £2\frac{5}{6} = £456\frac{5}{6}$$

定理: 依單貼現率 d 貼現之貼現息, 與依單利率 i 貼現之貼現息相差之數, 當 $d=i$ 時, 即為後者在貼現時期依單利率 i 所生之利息.

(證) 設 S 為到期值, P 為淨收額 n 為貼現時期, I_1 為依單

貼現率 d 貼現之貼現息, I_2 為依單利率 i 貼現之貼現息, 則:

$$I_1 = Sdn$$

$$I_2 = Pin = Sin - I_2 in$$

$$I_1 - I_2 = Sn(d-i) + I_2 in$$

若 $d = i$

則 $Sn(d-i) = 0$

$$\therefore I_1 - I_2 = I_2 in \dots\dots\dots(37)$$

(例六) 六月後到期之票據, 依單貼現率六釐貼現之貼現息, 與依單利率六釐貼現之貼現息相差 8.73786 元, 求面值.

應用公式 (37), 得:

$$8.73786 = I_2 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore I_2 = 8.73786 \times \frac{100}{3} = 291.262$$

但 $I_2 = Pin = P \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{2}$

$$\therefore P = 291.262 \times \frac{100}{3} = 9708.733$$

$$S = P + I_2 = 9708.733 + 291.262 = 10000 \text{ 元}$$

習 題 六

1. 求下列各題中之到期值, 貼現息與淨收額! (一年作 365 日)

	面值	出票日	到期日	貼現日	票據種類	到期值	貼現方法	貼現息	淨收額
a) \$ 5000		三月十四日	出票後三月	四月十二日	六厘帶息票據		依單貼現率 四厘貼現		

b)	5500	四月十八日	出票後六十日	四月廿五日	不帶息票據	依單利率五厘貼現
c)	6000	五月三日	八月十四日	六月七日	不帶息票據	依單貼現率六厘貼現
d)	6500	六月四日	九月十八日	七月八日	五厘帶息票據	依單貼現率七厘貼現
e)	7000	七月十二日	十月十五日	八月一日	不帶息票據	依單利率三厘貼現
f)	8000	七月四日	十月十五日	八月十八日	不帶息票據	依單貼現率四厘貼現

2. 製下列單利率與單貼現率比較對照表!

單利率	折合單貼現率			單貼現率	折合單利率		
	一月	二月	三月		一月	二月	三月
%				%			
3				3			
4				4			
5				5			
6				6			
7				7			
8				8			
9				9			
10				10			

3. 某甲以面值一萬二千五百元六月後到期之匯票請求貼現，求貼現息與淨收額!

- 依單貼現率6%貼現;
- 依單利率6.1856%貼現;
- 依單利率6%貼現;
- 依單貼現率5.8252%貼現。

4. 某甲向某乙購貨，共值洋二萬五千元，除付現金七千五百元外，餘由某甲開發三月後到期之本票，由乙持向銀行請求貼現，其淨收額應與貸款餘額相等，求面值!

- a) 依單利率5%貼現;
 b) 依單貼現率4.9383%貼現;
 c) 依單貼現率5%貼現;
 d) 依單利率5.0633%貼現.

5. 六月十五日出票,三月後到期之本票,於七月十二日在英國貼現,面值£396 $\frac{12}{4}$,貼現率3 $\frac{1}{8}$ %求貼現息與淨收額!(一年作為365日)

6. 某甲向某乙購貨,值洋二萬元,約定三月後付款,設甲欲於半月後付清貨款問乙可允其減少貨價若干元?(假定某乙能依年利率七厘投資)

7. 某甲向某乙購貨,約定若付現款,僅需洋三萬元,若於六月後付款,則需洋三萬二千元,設甲選擇第一種付款方法,並向銀行借款三萬元,俾得付清貨款,問某甲依最高利率若干付息,方不致受損?

8. 三月後到期之票據,依單貼現率八厘貼現之貼現息,與依單利率八厘貼現之貼現息,相差784314元,求面值!

9. 某甲向銀行借款二千五百元,預付半年利息一百五十元,求利率!

10. 某甲向銀行借款一千元,預付半年利息二十五元,設某甲商請銀行到期時付息,借款額仍為一千元,則到期時某甲須共付本息若干元,銀行方不致受損?

第二節 複貼現

複貼現(Compound Discount)者,依複利法計算貼現息之法也。單貼現之貼淨收額,吾人已知自下式求得:

$$P = S(1 - dn)$$

但上式中之 n ,若等於 $\frac{1}{d}$ 或大於 $\frac{1}{d}$,則淨收額為零或為負數,兩者均非合理,故長期票據之貼現,不能應用單貼現法。

單貼現中,有依單利率貼現者,亦有依單貼現率貼現者,

複貼現亦然。其依複利率貼現者，貼現票據之淨收額，即為到期值之現值，故可自複利現值公式求得。其依複貼現率貼現者，則淨收額與貼現息，可自下列二式求得：

$$P = S(1-d)^n \dots\dots\dots (38)$$

$$I = S - P = S[1 - (1-d)^n] \dots\dots\dots (39)$$

P 淨收額

S 到期值

d 貼現率

n 年數

(證) 年末到期值	貼現息	年初淨收額
到期前一年 S	Sd	$S - Sd = S(1-d)$
到期前二年 $S(1-d)$	$S(1-d)d$	$S(1-d) - S(1-d)d = S(1-d)^2$
到期前三年 $S(1-d)^2$	$S(1-d)^2d$	$S(1-d)^2 - S(1-d)^2d = S(1-d)^3$
.....		
到期前 n 年 $S(1-d)^{n-1}$	$S(1-d)^{n-1}d$	$S(1-d)^{n-1} - S(1-d)^{n-1}d = S(1-d)^n$

$$\therefore P = S(1-d)^n$$

$$I = S - S(1-d)^n = S[1 - (1-d)^n]$$

利率有實利率與虛利率之分，貼現率亦有實貼現率 (Effective Rate of Discount) 與虛貼現率 (Nominal Rate of Discount) 之別。設銀行以一萬元連續投資於半年期票據之貼現；另以一萬元連續投資於三月期票據之貼現，則雖依據同一貼現率貼現，銀行對一年後到期值一元實際取得之貼現息則

迥異，換言之，即其實際計算貼現息之貼現率，二者互異。何則？設二者均依貼現率6%貼現，則前者現可貼現到期值10309.28元 $\left(\frac{100J_0}{1-\frac{3}{100}}=10309.28\right)$ 之票據，至六月後即以收到之

10309.28元貼現到期值10628.12元 $\left(\frac{10309.28}{1-\frac{3}{100}}=10628.12\right)$ 之票

據若是則對於一年後到期值一元，銀行僅得貼現息 $\frac{10628.12-10000}{10628.12}$ 即0.05910元，故名義上貼現率為6%，實際上

貼現率為5.910%，前者名曰虛貼現率，後者名曰實貼現率。若銀行以一萬元連續投資於三月期票據之貼現，則於投資之初，可貼現到期值10152.28元 $\left(\frac{10000}{1-\frac{1.5}{100}}=10152.28\right)$ 之票據，至三

月後即以收到之10152.28元貼現到期值10306.88元 $\left(\frac{10152.28}{1-\frac{1.5}{100}}\right)$

=10306.88)之票據，至六月後即以收到之10306.88元貼現到期值10463.84元 $\left(\frac{10306.88}{1-\frac{1.5}{100}}=10463.84\right)$ 之票據，至九月後即以收

到之10463.84元貼現到期值10623.19元 $\left(\frac{10463.84}{1-\frac{1.5}{100}}=10623.19\right)$

之票據，若是則對於一年後到期值一元，銀行僅得貼現息 $\frac{10623.19-100J_0}{10623.19}$ 即0.05836元，故虛貼現率為6%，而實貼現率

僅有5.866%。連續投資於半年期票據之貼現，則資金每年運轉二次；連續投資於三月期票據之貼現，則資金每年運轉四次。資金之運轉，若每年一次，則實貼現率與虛貼現率相等；

若每年不止一次，則實貼現率小於虛貼現率，運轉之次數愈多，其相差亦愈甚。實貼現率與虛貼現率之關係如下：

$$d = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m \dots\dots\dots (40)$$

$$f = m \left[1 - (1 - d)^{\frac{1}{m}}\right] \dots\dots\dots (41)$$

d 實貼現率

f 虛貼現率

m 每年運轉次數

(例一) 化虛貼現率 8% 為實貼現率！

a) 每年運轉二次；

b) 每年運轉四次。

代入公式 (40)，得：

$$a) d = 1 - \left(1 - \frac{4}{100}\right)^2 = 1 - \frac{96^2}{10000} = 1 - \frac{9216}{10000} = 7.84\%$$

$$b) d = 1 - \left(1 - \frac{2}{100}\right)^4 = 1 - \frac{98}{100^4} = 1 - \frac{92236816}{100000000} = 7.763184\%$$

(例二) 化實貼現率 5% 為虛貼現率！

a) 每年運轉二次；

b) 每年運轉四次。

代入公式 (41)，得：

$$a) f = 2 \left[1 - (1 - 0.05)^{\frac{1}{2}}\right] = 2(1 - 0.97463) = 5.064\%$$

$$b) f = 4 \left[1 - (1 - 0.05)^{\frac{1}{4}}\right] = 4(1 - 0.987259) = 5.0964\%$$

每年運轉次數愈多，實貼現率愈小，但亦非漫無限制，連續運轉之實貼現率，可自下之公式求得：

$$d = 1 - e^{-f} \dots \dots \dots (42) \text{ (證明參看附錄甲 10)}$$

d 實貼現率

f 虛貼現率

m 每年運轉次數

e 自然對數之底

運轉不停之虛貼現率，名曰貼現力 (Force of Discount)，通常以 δ' 表之。

應用公式 (42)，得：

$$d = 1 - e^{-\delta'}$$

$$e^{-\delta'} = 1 - d$$

$$-\delta' = \log_e(1 - d)$$

$$\delta' = -\log_e 10 \log_{10}(1 - d)$$

$$\therefore \delta' = -2.302585 \log_{10}(1 - d) \dots \dots \dots (43)$$

貼現力與實貼現率亦可自下列二式求得：

$$\delta' = d + \frac{d^2}{2} + \frac{d^3}{3} + \frac{d^4}{4} + \dots \dots \dots (44) \text{ (證明參看附錄甲 11)}$$

$$d = \delta' - \frac{\delta'^2}{2!} + \frac{\delta'^3}{3!} - \frac{\delta'^4}{4!} + \dots \dots \dots (45) \text{ (證明參看附錄甲 11)}$$

δ' 貼現力

d 實貼現率

以上兩式中，若僅欲求其近似數，則可截取前二項。

(例三) 實貼現率 5%，求貼現力！

(第一法) 應用公式 (43), 得:

$$\begin{aligned} \delta' &= -2.302585 \log_{10} 0.95 = -2.302585 \times \bar{1}.977724 \\ &= 2.302585 \times 0.02276 = 0.05129238346 \end{aligned}$$

(第二法) 應用公式 (44), 得:

$$\begin{aligned} \delta' &= 0.05 + \frac{0.05^2}{2} + \frac{0.05^3}{3} + \frac{0.05^4}{4} + \dots \\ &0.05 \\ &0.00125 \\ &0.000041667 \\ &0.0000015625 \\ &\frac{0.0000000625}{0.0512932920} \end{aligned}$$

若僅求其近似數, 則得:

$$0.05 + 0.00125 = 0.05125$$

(例四) 貼現力 5%, 求實貼現率!

(第一法) 應用公式 (42), 得:

$$d = 1 - e^{-0.05}$$

令

$$x = e^{-0.05}$$

$$\log_{10} x = -0.05 \times 0.4342945$$

$$\log_{10} x = \bar{1}.978285275$$

$$x = 0.9512295$$

$$\therefore d = 1 - 0.9512295 = 0.0487705$$

(第二法) 應用公式 (45), 得:

$$\begin{array}{r}
 d = 0.05 - \frac{0.05^2}{2!} + \frac{0.05^3}{3!} - \frac{0.05^4}{4!} + \dots \\
 \qquad \qquad \qquad + \qquad \qquad \qquad - \\
 \qquad \qquad \qquad 0.5 \qquad \qquad \qquad 0.00125 \\
 \qquad \qquad \qquad \frac{0.000020833}{0.050020833} \qquad \qquad \frac{0.000000260}{0.001250260} \\
 \qquad \qquad \qquad \frac{-0.001250260}{0.048770573}
 \end{array}$$

若僅求其近似數，則得：

$$0.05 - 0.00125 = 0.04875$$

若每年運轉不止一次，則公式(38)中之 $(1-d)$ ，可以 $(1-\frac{f}{m})^m$ 或 $e^{-\delta'}$ 代入，故複貼現淨收額可自下式求得：

$$P = S \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{nm} \dots\dots\dots (46)$$

$$P = S e^{-n\delta'} \dots\dots\dots (47)$$

P 淨收額

S 到期值

n 年數

m 每年運轉次數

f 虛貼現率

δ' 貼現力

e 自然對數之底

單利率與單貼現率有一定之關係，複利率與複貼現率亦然，其關係用公式表之如下：

$$\delta = \delta' \dots\dots\dots (48)$$

$$j = \frac{mf}{m-f} \dots\dots\dots (49)$$

$$f = \frac{mj}{m+j} \dots\dots\dots (50)$$

$$i = \frac{d}{1-d} \dots\dots\dots (51)$$

$$d = \frac{i}{1+i} \dots\dots\dots (52)$$

S 息力

δ' 貼現力

i 虛利率

j 實利率

f 虛貼現率

d 實貼現率

m 每年複利次數或轉運次數

$$(證) \quad Se^{-n\delta} = Se^{-n\delta'} \quad (公式 22 與 47)$$

$$-n\delta = -n\delta'$$

$$\therefore \delta = \delta'$$

$$S\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm} = S\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{nm} \quad (公式 21 與 46)$$

$$\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm} = \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{nm}$$

$$\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-1} = 1 - \frac{f}{m}$$

$$\left(1 + \frac{j}{m}\right) \left(1 - \frac{f}{m}\right) = 1$$

$$1 + \frac{j}{m} - \frac{f}{m} - \frac{jf}{m^2} = 1$$

$$mj - mf - jf = 0$$

$$\therefore j = \frac{mf}{m-f}$$

$$f = \frac{mj}{m+j}$$

若

$$m = 1$$

則

$$j = i$$

$$f = d$$

$$i = \frac{d}{1-d}$$

$$d = \frac{i}{1+i}$$

(例五) 某甲以票面值一千元三年後到期之票據請求貼現, 求淨收額與貼現息!

a) 依複貼現率 6% 貼現;

b) 依複利率 6.383% 貼現.

a) 應用公式 (38), 得:

$$P = 1000 \times 0.94^3 = 830.58 \text{ 元}$$

$$I = 1000 - 830.58 = 169.42 \text{ 元}$$

b) 應用公式 (20), 得:

$$P = 1000 \times 1.06383^{-3}$$

$$\log P = 3 - 3 \times 0.02687247 = 2.91938259$$

$$P = 830.58 \text{ 元}$$

$$I = 1000 - 830.58 = 169.42 \text{ 元}$$

兩者之結果相同，蓋複貼現率 6% 與複利率 6.383% 相等故也。

(例六) 某甲以面值一千五百元五年後到期之票據請求貼現，求淨收額與貼現息！

a) 依複貼現率 8% 貼現，每年運轉四次；

b) 依複利率 8.1633% 貼現，每年複利四次。

a) 應用公式 (46)，得：

$$P = 1500 \times 0.98^{20}$$

$$\log P = 3.176091 + 20 \times \bar{1}.991226 = 3.000611$$

$$\therefore P = 1001.41 \text{ 元}$$

$$I = 1500 - 1001.41 = 498.59 \text{ 元}$$

b) 應用公式 (18)，得：

$$P = 1500 \times 1.02040825^{-20}$$

$$\log P = 3.176091 - 20 \times 0.0087739145 = 3.00061271$$

$$P = 1001.41 \text{ 元}$$

$$I = 1500 - 1001.41 = 498.59 \text{ 元}$$

兩者之結果相同，蓋複貼現率 8% 與複利率 8.1633% 相等故也。

(例七) 某甲以面值五百元三年後到期之票據請求貼現，求淨收額與貼現息！

a) 依貼現力 6% 貼現；

b) 依息力 6% 貼現。

- a) 應用公式 (47) } 得:
 b) 應用公式 (22) }

$$P = 500 e^{-0.18}$$

$$\begin{aligned} \log_{10} P &= 2.698970 - 0.18 \times 0.4342945 \\ &= 2.62079699 \end{aligned}$$

$$\therefore P = 417.64 \text{ 元}$$

$$I = 500 - 417.64 = 82.36 \text{ 元}$$

習 題 七

1. 化下列各題中之虛貼現率為實貼現率!

	虛貼現率	每年運轉次數	實貼現率
a)	6%	二次	
b)	6%	四次	
c)	6%	連續運轉	
d)	5%	二次	
e)	4%	十二次	

2. 化下列各題中之實貼現率為虛貼現率!

	實貼現率	每年運轉次數	虛貼現率
a)	6%	二次	
b)	6%	四次	
c)	6%	連續運轉	
d)	5%	二次	
e)	4%	十二次	

3. 化下列各題中之複利率為複貼現率!

	複利率	每年複利次數或運轉次數	複貼現率
a)	6%	二次	

- | | | |
|----|----|-----|
| b) | 6% | 四次 |
| c) | 6% | 一次 |
| d) | 5% | 二次 |
| e) | 4% | 十二次 |

4. 化下列各題中之複貼現率為複利率!

複貼現率 每年複利次數或運轉次數複利率

- | | | |
|----|----|-----|
| a) | 6% | 二次 |
| b) | 6% | 四次 |
| c) | 6% | 一次 |
| d) | 5% | 二次 |
| e) | 4% | 十二次 |

5. 某甲以面值七百五十元三年後到期之票據請求貼現,求淨收額與貼現息!

- a) 依複貼現率7%貼現;
- b) 依複利率7.5269%貼現;
- c) 依複利率7%貼現;
- d) 依複貼現率6.5421%貼現.

6. 某甲以面值六百五十元四年後到期之票據請求貼現,求淨收額與貼現息!

- a) 依複貼現率6%貼現,每年運轉二次;
- b) 依複利率6.1856%貼現,每年運轉二次;
- c) 依複利率6%貼現,每年運轉二次;
- d) 依複貼現率5.8252%貼現,每年運轉二次.

7. 某甲以面值八百五十元五年後到期之票據請求貼現,求淨收額與貼現息;

- a) 依單貼現率8%貼現;
- b) 依複貼現率8%貼現;
- c) 依複貼現率8%貼現,每年運轉二次;

- d) 依複貼現率8%貼現, 每年運轉二次;
 - e) 依複貼現率8%貼現, 每年連續運轉.
8. 實貼現率6%, 求貼現力
- a) 應用公式(43);
 - b) 應用公式(44).

第四章 價值方程式

兩票據在同一時日，依同一利率或同一貼現率貼現，若得同一淨收額，則在此時日，此兩票據名曰等值票據 (Equivalent Notes)，而此時日，名曰兩票據等值日 (Date of Equivalence of two Notes)。到期值 S_1 在 n_1 年後到期之票據，若與到期值 S_2 在 n_2 年後到期之票據等值，則在貼現時兩者之淨收額相等，以方程式表之，即得：

$$S_1(1-dn_1) = S_2(1-dn_2) \text{ (若依單貼現率 } d \text{ 貼現)}$$

$$\frac{S_1}{1+in_1} = \frac{S_2}{1+in_2} \text{ (若依單利率 } i \text{ 貼現)}$$

$$S_1(1-d)^{n_1} = S_2(1-d)^{n_2} \text{ (若依複貼現率 } d \text{ 貼現)}$$

$$S_1(1+i)^{-n_1} = S_2(1+i)^{-n_2} \text{ (若依複利率 } i \text{ 貼現)}$$

以上諸方程式，均所以表示兩票據等值之關係，故此方程式，名曰價值方程式 (Equation of Value)。價值方程式不以表示兩票據之等值為限，方程式所表示等值之票據，可多至數張或數十張者，若 l 張票據之總淨收額與 k 張票據之總淨收額相等，則價值方程式即可用以表示 l 張票據與 k 張票據之等值。欲以 l 張票據掉換 k 張票據，祇須使其在貼現時之淨收額相等，換言之，祇須將兩者之淨收額列成價值方程式，

由此方程式即可求票據掉換中之未知一項。貼現有單貼現與複貼現之分，故列成價值方程式，亦有單貼現法與複貼現法之別。

第一節 單貼現法

定理二：到期值不等且未到期之兩票據，在同一時日，依兩種不同之單貼現法貼現，（一依單貼現率 r 貼現，一依單利率 r 貼現）不能均為等值。

（證）設 S_1 為 n_1 年後到期票據之到期值， S_2 為 n_2 年後到期票據之到期值。

$$\begin{aligned} S_1 &\neq S_2 \\ n_1 &> 0 \\ n_2 &> 0 \end{aligned}$$

若依單貼現率 r 貼現而其淨收額相等，則得價值方程式如下：

$$S_1(1 - rn_1) = S_2(1 - rn_2)$$

即
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1 - rn_2}{1 - rn_1}$$

若依單利率 r 貼現而其淨收額亦等，則得價值方程式如下：

$$\frac{S_1}{1 + rn_1} = \frac{S_2}{1 + rn_2}$$

即
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1 + rn_1}{1 + rn_2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1-rn_2}{1-rn_1} &= \frac{1+rn_1}{1+rn_2} \\ 1-r^2n_2^2 &= 1-r^2n_1^2 \\ n_2^2 &= n_1^2 \\ n_2 &= \pm n_1 \end{aligned}$$

若 $n_2 = n_1$
則 $S_1 = S_2$

但 $S_1 \neq S_2$, 故此結果為不合理。

若 $n_2 = -n_1$

則兩者之一為負數, 故與未到期之假定亦抵觸, 故兩票據不能依兩種不同之單貼現法貼現而均為等值。

例如到期值 7900 元在六月後到期之票據, 與到期值 7800 元在三月後到期之票據, 若依單貼現率 5% 貼現則為等值, 但若依單利率 5% 貼現則為不等值。又如到期值 4100 元在六月後到期之票據, 與到期值 4050 元在三月後到期之票據, 若依單利率 5% 貼現則為等值, 但若依單貼現率 5% 貼現則為不等值。

定理三: 到期值不等之兩票據, 若現依單貼現法貼現而為等值, 則在等值日前後不能更為等值。

(證) 設 S_1 為 n_1 年後到期票據之到期值, S_2 為 n_2 年後到期票據之到期值。

$$S_1 \neq S_2$$

a) 若現依單貼現率 d 貼現而其淨收額相等, 則得價值方

程式如下：

$$S_1(1-dn_1) = S_2(1-dn_2)$$

即

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1-dn_2}{1-dn_1}$$

若在 p (p 或正或負) 年後依單貼現率 d 貼現而其淨收額亦相等, 則得價值方程式如下:

$$S_1[1-d(n_1-p)] = S_2[1-d(n_2-p)]$$

即

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1-d(n_2-p)}{1-d(n_1-p)}$$

$$\therefore \frac{1-dn_2}{1-dn_1} = \frac{1-d(n_2-p)}{1-d(n_1-p)}$$

$$(1-dn_2)(1-dn_1+dp) = (1-dn_1)(1-dn_2+dp)$$

$$1-dn_1+dp-dn_2+d^2n_1n_2-d^2n_2p$$

$$= 1-dn_2+dp-dn_1+d^2n_1n_2-d^2n_1p$$

$$d^2n_2p = d^2n_1p$$

即

$$n_2 = n_1$$

以之代入價值方程式, 則得:

$$S_1 = S_2$$

但

$$S_1 \neq S_2$$

故此結果為不合理, 即兩票據在等值日前後不能更為等值。

例如到期值 7900 元在六月後到期之票據, 與到期值 7800 元在三月後到期之票據, 若現依單貼現率 5% 貼現則為等

值，但若在一月後或一月前依單貼現率 5% 貼現則為不等值。

b) 若現依單利率 i 貼現而其淨收額相等，則得價值方程式如下：

$$\frac{S_1}{1+in_1} = \frac{S_2}{1+in_2}$$

即
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1+in_1}{1+in_2}$$

若在 p (p 或正或負) 年後依單利率 i 貼現而其淨收額亦相等，則得價值方程式如下：

$$\frac{S_1}{1+i(n_1-p)} = \frac{S_2}{1+i(n_2-p)}$$

即
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1+i(n_1-p)}{1+i(n_2-p)}$$

$$\therefore \frac{1+in_1}{1+in_2} = \frac{1+i(n_1-p)}{1+i(n_2-p)}$$

$$(1+in_1)(1+in_2-ip) = (1+in_2)(1+in_1-ip)$$

$$1+in_2-ip+in_1+i^2n_1n_2-i^2n_1p$$

$$= 1+in_1-ip+in_2+i^2n_1n_2-i^2n_2p$$

$$i^2n_1p = i^2n_2p$$

$$n_1 = n_2$$

以之代入價值方程式，則得：

$$S_1 = S_2$$

但

$$S_1 \neq S_2$$

故此結果為不合理，即兩票據在等值日前後不能更為等值。

例如到期值4100元在六月後到期之票據，與到期值4050元在三月後到期之票據，若現依單利率5%貼現則為等值，但若在一月後或一月前依單利率5%貼現則為不等值。

關於兩票據之等值，吾人可設下列三問：

1. 以甲票掉換乙票，甲票之到期值當為幾何？
2. 以甲票掉換乙票，甲票應在何時到期？
3. 甲乙兩票應在何日等值？

吾人將應用價值方程式，依次求其公式於下。

1. 求新票之到期值

a) 依單貼現率貼現：

$$S' = \frac{S(1-dn)}{1-dn'} \dots\dots\dots (53)$$

b) 依單利率貼現：

$$S' = \frac{S(1+in')}{1+in} \dots\dots\dots (54)$$

- S' 新票之到期值
 S 舊票之到期值
 n' 新票之貼現時期
 n 舊票之貼現時期
 d 單貼現率
 i 單利率

上列兩式自價值方程式化出，學者可自證之。

(例一) 到期值 5800 元於六十日後到期之票據, 其付款人欲更換一張七十日後到期之票據, 求新票之到期值! (一年作為 360 日)

a) 依單貼現率 4% 貼現;

b) 依單利率 4% 貼現.

a) 代入公式 (53), 得:

$$S' = \frac{5800 \left(1 - \frac{4}{100} \times \frac{60}{360} \right)}{1 - \frac{4}{100} \times \frac{70}{360}} = \frac{5800(9000 - 60)}{9000 - 70}$$

$$= \frac{5800 \times 8940}{8930} = 5806.49 \text{ 元}$$

b) 應用公式 (54), 得:

$$S' = \frac{5800 \left(1 + \frac{4}{100} \times \frac{70}{360} \right)}{1 + \frac{4}{100} \times \frac{60}{360}} = \frac{5800(9000 + 70)}{9000 + 60}$$

$$= \frac{5800 \times 9070}{9060} = 5806.40 \text{ 元}$$

2. 求新票之貼現時期

a) 依單貼現率貼現:

$$n' = \frac{S' - S(1 - dn)}{dS} \dots\dots\dots(55)$$

b) 依單利率貼現:

$$n' = \frac{S(1 + in) - S'}{iS} \dots\dots\dots(56)$$

n' 新票之貼現時期

n 舊票之貼現時期

S' 新票之到期值

S 舊票之到期值

d 單貼現率

i 單利率

$$\text{(證) a) } S'(1-dn') = S(1-dn)$$

$$1-dn' = \frac{S(1-dn)}{S'}$$

$$dn' = \frac{S' - S(1-dn)}{S'}$$

$$\therefore n' = \frac{S' - S(1-dn)}{dS'}$$

$$\text{b) } \frac{S'}{1+in'} = \frac{S}{1+in}$$

$$1+in' = \frac{S'(1+in)}{S}$$

$$in' = \frac{S'(1+in) - S}{S}$$

$$\therefore n' = \frac{S'(1+in) - S}{iS}$$

(例二) 到期值 1060 元於八十五日後到期之票據, 其付款人欲更換一張到期值 1050 元之票據, 問新票應在若干日後到期? (一年作為 360 日)

a) 依單貼現率 6% 貼現;

b) 依單利率 6% 貼現

a) 應用公式 (55), 得:

$$\begin{aligned} n' &= \frac{1050 - 1060 \left(1 - \frac{6}{100} \times \frac{85}{360} \right)}{\frac{6}{100} \times 1050} = \frac{1050 \times 6000 - 1060(6000 - 85)}{360 \times 1050} \\ &= \frac{6300000 - 1060 \times 5915}{360 \times 1050} = \frac{30100}{360 \times 1050} \text{年} = \frac{30100}{1050} \text{日} \\ &= 28 \frac{2}{3} \text{日} \end{aligned}$$

b) 應用公式 (56), 得:

$$\begin{aligned} n' &= \frac{1050 \left(1 + \frac{6}{100} \times \frac{85}{360} \right) - 1060}{\frac{6}{100} \times 1060} = \frac{1050(6000 + 85) - 1060 \times 6000}{360 \times 1060} \\ &= \frac{1050 \times 6085 - 6360000}{360 \times 1060} = \frac{29250}{360 \times 1060} \text{年} = \frac{29250}{1060} \text{日} \\ &= 27 \frac{63}{106} \text{日} \end{aligned}$$

3. 求甲乙兩票之等值時期

a) 依單貼現率貼現:

$$x = \frac{S_1 n_1 - S_2 n_2}{S_1 - S_2} - \frac{1}{d} \dots \dots \dots (57)$$

b) 依單利率貼現:

$$x = \frac{S_1 n_2 - S_2 n_1}{S_1 - S_2} + \frac{1}{i} \dots \dots \dots (58)$$

z 甲乙兩票等值時距今之年數

S_1 甲票之到期值

S_2 乙票之到期值

n_1 甲票到期時距今之年數

n_2 乙票到期時距今之年數

d 單貼現率

i 單利率

$$\text{(證. a) } S_1[1-d(n_1-x)] = S_2[1-d(n_2-x)]$$

$$S_1 - S_1d(n_1-x) = S_2 - S_2d(n_2-x)$$

$$S_1 - S_1dn_1 + S_1dx = S_2 - S_2dn_2 + S_2dx$$

$$(S_1 - S_2)dx = d(S_1n_1 - S_2n_2) + S_2 - S_1$$

$$\therefore x = \frac{S_1n_1 - S_2n_2}{S_1 - S_2} - \frac{1}{d}$$

$$\text{b) } \frac{S_1}{1+i(n_1-x)} = \frac{S_2}{1+i(n_2-x)}$$

$$S_1 + S_1i(n_2-x) = S_2 + S_2i(n_1-x)$$

$$S_1 + S_1in_2 - S_1ix = S_2 + S_2in_1 - S_2ix$$

$$(S_2 - S_1)ix = i(S_2n_1 - S_1n_2) + S_2 - S_1$$

$$\therefore x = \frac{S_1n_2 - S_2n_1}{S_1 - S_2} + \frac{1}{i}$$

(例三) 到期值 7900 元於七月後到期之票據, 與到期值 7800 元於四月後到期之票據, 在何時等值?

a) 依單貼現率 5% 貼現:

b) 依單利率 5% 貼現.

a) 應用公式 (57), 得:

$$x = \frac{7900 \times \frac{7}{12} - 7800 \times \frac{4}{12}}{7900 - 7800} - \frac{1}{0.05}$$

$$= \frac{5530 - 31200}{1200} - 20 = \frac{1}{12} \text{年} = 1 \text{月}$$

即甲乙兩票在一月後等值。

b) 應用公式(58), 得:

$$\begin{aligned} x &= \frac{7900 \times \frac{4}{12} - 7800 \times \frac{7}{12}}{7900 - 7800} + \frac{1}{0.05} \\ &= \frac{31600 - 54600}{1200} + 20 = \frac{10}{12} \text{年} = 10 \text{月} \end{aligned}$$

即甲乙兩票在十月後等值, 但甲乙兩票至十月後均已過期, 故此問題為不可能。

(例四) 到期值 4100 元於五月後到期之票據, 與到期值 4050 元於二月後到期之票據, 在何時等值?

a. 依單利率 5% 貼現;

b) 依單貼現率 5% 貼現。

a) 應用公式(58), 得:

$$\begin{aligned} x &= \frac{4100 \times \frac{2}{12} - 4050 \times \frac{5}{12}}{4100 - 4050} + \frac{1}{0.05} \\ &= \frac{8200 - 20250}{600} + 20 = -\frac{1}{12} \text{年} = -1 \text{月} \end{aligned}$$

即甲乙兩票在一月前等值。

b) 應用公式(57), 得:

$$x = \frac{4100 \times \frac{5}{12} - 4050 \times \frac{2}{12}}{4100 - 4050} - \frac{1}{0.05}$$

$$= \frac{20500 - 8100}{600} - 20 = \frac{8}{12} \text{年} = 8 \text{月}$$

即甲乙兩票在八月後等值，但甲乙兩票至八月後均已過期，故此問題為不可能。

若以一新票更換無數舊票，則此新票之到期值或其到期日，須應用價值方程式求得新票之到期值，或與各舊票到期值之總額相等，或不相等。新票之到期日，名曰共同期日 (Common Due Date)。若新票之到期值與各舊票到期值之總額相等，則此共同期日名曰平均期日 (Average Due Date)，故平均期日為共同期日之特別情形。

新票之到期值，可自下列公式求得：

a. 依單貼現率貼現：

$$S' = \frac{\sum S_1 - d \sum (S_1 n_1)}{1 - dn'} \dots\dots\dots (59)$$

b) 依單利率貼現：

$$S' = (1 + in') \sum \frac{S_1}{1 + in_1} \dots\dots\dots (60)$$

S' 新票之到期值

S_1 舊票之到期值

n' 新票之貼現時期

n_1 舊票之貼現時期

d 單貼現率

i 單利率

Σ (讀如 sigma) 總和之記號 (ΣS_1 表示各舊票到期值之總額)

(證) 設 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_p$ 為 p 張舊票之到期值, $n_1, n_2, n_3, \dots, n_p$ 為其貼現時期。

$$\begin{aligned} a) \quad S'(1-dn') &= S_1(1-dn_1) + S_2(1-dn_2) + S_3(1-dn_3) \\ &\quad + \dots + S_p(1-dn_p) \\ &= (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_p) \\ &\quad - d(S_1n_1 + S_2n_2 + S_3n_3 + \dots + S_pn_p) \end{aligned}$$

$$= \sum S_i - d \sum (S_i n_i)$$

$$\therefore S' = \frac{\sum S_i - d \sum (S_i n_i)}{1 - dn'}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \frac{S'}{1+in'} &= \frac{S_1}{1+in_1} + \frac{S_2}{1+in_2} + \frac{S_3}{1+in_3} + \dots + \frac{S_p}{1+in_p} \\ &= \sum \frac{S_i}{1+in_i} \end{aligned}$$

$$\therefore S' = (1+in') \sum \frac{S_i}{1+in_i}$$

(例五) 某甲欲以五十日後到期之本票更換下列三票：

甲票二十日後到期, 到期值 900 元；

乙票三十日後到期, 到期值 870 元；

丙票四十二日後到期, 到期值 1200 元；

求新票之到期值! (一年作為 360 日)

a) 依單貼現率 4% 貼現；

b) 依單利率 4% 貼現。

a) 應用公式 (59), 得：

$$S' = \frac{(900 + 870 + 1200) - \frac{4}{100} \left(900 \times \frac{20}{360} + 870 \times \frac{30}{360} + 1200 \times \frac{42}{360} \right)}{1 - \frac{4}{100} \times \frac{50}{360}}$$

$$= \frac{2970 \times 360 - \frac{4}{100} (18000 + 26100 + 50400)}{360 - 2} = \frac{1065420}{358}$$

$$= 2976.03 \text{ 元}$$

b) 應用公式 (60), 得:

$$S' = \left(1 + \frac{4}{100} \times \frac{50}{360} \right) \left(\frac{900}{1 + \frac{4}{100} \times \frac{20}{360}} + \frac{870}{1 + \frac{4}{100} \times \frac{30}{360}} + \frac{1200}{1 + \frac{4}{100} \times \frac{42}{360}} \right)$$

$$= \frac{18180000}{180} \left(\frac{902}{902} + \frac{26100}{301} + \frac{3600000}{3014} \right)$$

$$= \frac{1629000}{1804} + \frac{524900}{602} + \frac{3620000}{3014}$$

$$= 902.993 + 871.927 + 1201.062 = 2975.98 \text{ 元}$$

新票之共同期日與平均期日可自下列諸公式求得:

a) 依單貼現率貼現:

$$n_e = \frac{d \sum (S_1 n_1) - \sum S_1}{d S'} + \frac{1}{d} \dots \dots \dots (61)$$

$$n_a = \frac{\sum (S_1 n_1)}{\sum S_1} \dots \dots \dots (62)$$

b) 依單利率貼現:

$$n_e = \frac{S'}{i \sum \frac{S_1}{1 + i n_1}} - \frac{1}{i} \dots \dots \dots (63)$$

$$n_a = \frac{\sum \frac{S_1 n_1}{1 + i n_1}}{\sum \frac{S_1}{1 + i n_1}} \dots \dots \dots (64)$$

- n_e 共同期日距今之年數
 n_a 平均期日距今之年數
 S' 新票之到期值
 S 舊票之到期值
 n 舊票到期日距今之年數
 d 單貼現率
 i 單利率
 Σ 總和之記號

$$(證) a) S'(1 - d n_e) = \sum [S_1(1 - d n_1)] = \sum (S_1 - S_1 d n_1)$$

$$= \sum S_1 - d \sum (S_1 n_1)$$

$$1 - d n_e = \frac{\sum S_1 - d \sum (S_1 n_1)}{S'}$$

$$d n_e = \frac{d \sum (S_1 n_1) - \sum S_1}{S'} + 1$$

$$\therefore n_e = \frac{d \sum (S_1 n_1) - \sum S_1}{d S'} + \frac{1}{d}$$

若 $S' = \sum S_1$

則

$$n_e = n_a = \frac{d \sum (S_1 n_1) - \sum S_1}{d \sum S_1} + \frac{1}{d}$$

$$= \frac{\sum (S_1 n_1)}{\sum S_1} - \frac{1}{d} + \frac{1}{d}$$

$$\therefore n_a = \frac{\sum (S_1 n_1)}{\sum S_1}$$

上式中無 d , 故 n_a 之數值與單貼現率無關。題中貼現時期若為日數, 則不必化為年數, 即以之代入公式中之 n 可也。由是求得之 n_a 亦為日數。

若 $S_1 = S_2 = S_3 = \dots = S_p$

則 $\sum S_1 = p S_1$

$$\sum (S_1 n_1) = S_1 \sum n_1$$

$$n_a = \frac{\sum n_1}{p}$$

b) $\frac{S'}{1 + i n_c} = \sum \frac{S_1}{1 + i n_1}$

$$\frac{1 + i n_c}{S'} = \frac{1}{\sum \frac{S_1}{1 + i n_1}}$$

$$i n_c = \frac{S'}{\sum \frac{S_1}{1 + i n_1}} - 1$$

$$\therefore n_c = \frac{S'}{i \sum \frac{S_1}{1 + i n_1}} - \frac{1}{i}$$

若 $S' = \sum S_1$

則

$$n_c = n_a = \frac{\sum S_1 - \sum \frac{S_1}{1 + i n_1}}{i \sum \frac{S_1}{1 + i n_1}}$$

$$= \frac{\sum \left(S_1 - \frac{S_1}{1+in_1} \right)}{i \sum \frac{S_1}{1+in_1}} = \frac{\sum \frac{S_1 in_1}{1+in_1}}{i \sum \frac{S_1}{1+in_1}}$$

$$\therefore n_a = \frac{\sum \frac{S_1 n_1}{1+in_1}}{\sum \frac{S_1}{1+in_1}}$$

若 $S_1 = S_2 = S_3 = \dots = S_p$

則
$$n_a = \frac{S_1 \sum \frac{n_1}{1+in_1}}{S_1 \sum \frac{1}{1+in_1}} = \frac{\sum \frac{n_1}{1+in_1}}{\sum \frac{1}{1+in_1}}$$

(例六) 某甲欲以到期值 2920 元之本票更換下列三票：

甲票八十日後到期，到期值 1500 元；

乙票九十日後到期，到期值 600 元；

丙票七十日後到期，到期值 840 元；

求新票之到期日！(一年作為 360 日)

a) 依單貼現率 6% 貼現；

b) 依單利率 6% 貼現。

a) 應用公式 (61)，得：

$$\begin{aligned} n_a &= \frac{\frac{6}{100} \left(1500 \times \frac{80}{360} + 600 \times \frac{90}{360} + 840 \times \frac{70}{360} \right) - (1500 + 600 + 840)}{\frac{6}{100} \times 2920} + \frac{100}{6} \\ &= \frac{20 + 9 + 9.8 - 2940}{175.2} + \frac{100}{6} = \frac{18.8}{175.2} \text{ 年} \\ &= 38 \frac{46}{73} \text{ 日} \end{aligned}$$

b) 應用公式 (63), 得:

$$\begin{aligned}
 n_s &= \frac{2920}{\frac{6}{100} \left(\frac{1500}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{80}{360}} + \frac{600}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{90}{360}} + \frac{840}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{70}{360}} \right)} - \frac{100}{6} \\
 &= \frac{2920}{\frac{6}{100} \left(\frac{1500 \times 600}{600 + 8} + \frac{600 \times 600}{600 + 9} + \frac{840 \times 600}{600 + 7} \right)} - \frac{100}{6} \\
 &= \frac{2920}{6 \left(\frac{9000}{608} + \frac{3600}{609} + \frac{5040}{607} \right)} - \frac{100}{6} \\
 &= \frac{2920}{6(14.803 + 5.911 + 8.303)} - \frac{100}{6} \\
 &= \frac{2920 - 2901.7}{6 \times 29.017} = \frac{18.3}{6 \times 29.017} \text{年} = \frac{18.3 \times 60}{29.017} \text{日} \\
 &= 37.8 \text{日}
 \end{aligned}$$

(例七) 上題中新票之到期值若改為 2940 元, 則新票應在何日到期?

$$1500 + 600 + 840 = 2940$$

新票之到期值, 與各舊票到期值之總額相等, 故可應用公式 (62) 與 (64).

a) 應用公式 (62), 得:

$$1500 \times 80 = 120000$$

$$600 \times 90 = 54000$$

$$840 \times 70 = 58800$$

$$\hline 232800$$

$$n_a = \frac{232800}{2940} = 79 \frac{9}{49} \text{ 日}$$

b) 應用公式(64), 得:

$$\begin{aligned} n_a &= \frac{\frac{1500 \times \frac{80}{360}}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{80}{360}} + \frac{600 \times \frac{90}{360}}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{90}{360}} + \frac{840 \times \frac{70}{360}}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{70}{360}}}{\frac{1500}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{80}{360}} + \frac{600}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{90}{360}} + \frac{840}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{70}{360}}} \\ &= \frac{\frac{1500 \times 800}{3648} + \frac{600 \times 900}{3654} + \frac{840 \times 700}{3642}}{\frac{1500 \times 3600}{3648} + \frac{600 \times 3600}{3654} + \frac{840 \times 3600}{3642}} \\ &= \frac{328.947 + 147.783 + 161.450}{1480.263 + 591.133 + 830.313} = \frac{638.180}{2901.709} \text{ 年} = 79.2 \text{ 日} \end{aligned}$$

習 題 八

1. 求下列各題中新票之到期值或其到期日!(一年作為360日)

	舊票之到期值	舊票之到期日	貼現方法	新票之到期值	新票之到期日
a)	\$ 4500	九十日後	單貼現率6%		八十日後
b)	3600	七十日後	單利率3%	\$ 3650	
c)	5500	五十日後	單利率5%		六十日後
d)	4200	四十日後	單貼現率4%	4190	
e)	6000	九十日後	單貼現率5%	6020	
f)	6000	九十日後	單利率5%	6020	
g)	5000	六十日後	單貼現率4%		八十日後
h)	5000	六十日後	單利率4%		八十日後

2. 某甲欲以一張新票更換下列三張舊票:

甲票三十日後到期,到期值 1200 元;

乙票五十日後到期,到期值 800 元;

丙票七十日後到期,到期值 1400 元;

求下列各種更換方法中之到期值或其到期日(一年作為 360 日)

	新票之到期值	新票之到期日	貼現方法
a)		八十日後	單貼現率 4%
b)		八十日後	單利率 4%
c)		二十日後	單貼現率 4%
d)		二十日後	單利率 4%
e)		六十日後	單貼現率 4%
f)		六十日後	單利率 4%
g)	\$ 3420		單貼現率 5%
h)	3420		單利率 5%
i)	3380		單貼現率 5%
j)	3380		單利率 5%
k)	3400		單貼現率 5%
l)	3400		單利率 5%

3. 八月後到期,到期值 3850 元之票據,與十一月後到期,到期值 3900 元之票據,在何時等值?

a) 依單貼現率 5% 貼現;

b) 依單利率 5% 貼現.

4. 五月後到期,到期值 2020 元之票據,與八月後到期,到期值 2030 元之票據,在何時等值?

a) 依單貼現率 2% 貼現;

b) 依單利率 2% 貼現.

5. 某商欠貨款 1250 元,十二月十五日期,於八月五日付現款 800 元,同日發出不帶息本票二張,其面值相等,一張於十月十五日期到期,一張於十一月二十日期到期,單貼現率 6%,一年作為 365 日,求面值 1

第二節 複貼現法

定理四：到期值不等之兩票據，在同一時日，依兩種不同之複貼現法貼現，（一依複貼現率 r 貼現，一依複利率 r 貼現）不能均為等值。（與定理二相似）

（證）設 S_1 為 n_1 年後到期票據之到期值， S_2 為 n_2 年後到期票據之到期值。

$$S_1 \neq S_2$$

若依複貼現率 r 貼現而其淨收額相等，則得價值方程式如下：

$$S_1(1-r)^{n_1} = S_2(1-r)^{n_2}$$

即
$$\frac{S_1}{S_2} = (1-r)^{n_2-n_1}$$

若依複利率 r 貼現而其淨收額相等，則得價值方程式如下：

$$S_1(1+r)^{-n_1} = S_2(1+r)^{-n_2}$$

即
$$\frac{S_1}{S_2} = (1+r)^{n_1-n_2}$$

$$\therefore (1-r)^{n_2-n_1} = (1+r)^{n_1-n_2}$$

$$1-r = (1+r)^{-1}$$

$$(1-r)(1+r) = 1$$

$$1-r^2 = 1$$

$$r = 0$$

以之代入價值方程式，則得：

$$S_1 = S_2$$

但 $S_1 \neq S_2$, 故此結果為不合理。

例如三年後到期, 到期值 1000 元之票據, 與二年後到期, 到期值 950 元之票據, 若依複貼現率 5% 貼現則為等值, 但若依複利率 5% 貼現則為不等值, 又如三年後到期, 到期值 1050 元之票據與二年後到期, 到期值 1000 元之票據, 若依複利率 5% 貼現則為等值, 但若依複貼現率 5% 貼現, 則為不等值。

定理五: 若兩票據現依複貼現法貼現而為等值, 則在等值日前後無論何時, 亦均為等值。(適與定理三相反)

(證) 設 S_1 為 n_1 年後到期票據之到期值, S_2 為 n_2 年後到期票據之到期值。

a) 若現依複貼現率 d 貼現而其淨收額相等, 則得價值方程式如下:

$$S_1(1-d)^{n_1} = S_2(1-d)^{n_2}$$

若在 p (p 或正或負) 年後依複貼現率 d 貼現而其淨收額不相等, 設兩者之差為 k , 則得價值方程式如下:

$$S_1(1-d)^{n_1-p} = S_2(1-d)^{n_2-p} + k$$

$$S_1(1-d)^{n_1} = S_2(1-d)^{n_2} + k(1-d)^p$$

但 $S_1(1-d)^{n_1} = S_2(1-d)^{n_2}$

$$\therefore k(1-d)^p = 0$$

$$\because 1-d \neq 0$$

$$\therefore k = 0$$

即兩票在 p 年後亦為等值。

例如三年後到期，到期值 1000 元之票據，與二年後到期，到期值 950 元之票據，若依複貼現率 5% 貼現，無論何時均為等值。

b) 若現依複利率 i 貼現而其淨收額相等，則得價值方程式如下：

$$S_1(1+i)^{-n_1} = S_2(1+i)^{-n_2}$$

若在 p (p 或正或負) 年後依複利率 i 貼現而其淨收額不相等，設兩者之差為 k ，則得價值方程式如下：

$$S_1(1+i)^{-(n_1-p)} = S_2(1+i)^{-(n_2-p)} + k$$

$$S_1(1+i)^{-n_1} = S_2(1+i)^{-n_2} + k(1+i)^{-p}$$

但 $S_1(1+i)^{-n_1} = S_2(1+i)^{-n_2}$

$$\therefore k(1+i)^{-p} = 0$$

$$\therefore (1+i)^{-p} \neq 0$$

$$\therefore k = 0$$

即兩票在 p 年後亦為等值。

例如三年後到期，到期值 1050 元之票據，與二年後到期，到期值 1000 元之票據，若依複利率 5% 貼現，無論何時均為等值。

甲乙兩票依複貼現法貼現，在等值日前後亦為等值，故在單貼現法中，吾人有時欲知兩票應在何日等值，而在複貼現法中則否。在複貼現法中，吾人所欲知者，以新票掉換舊

票,新票之到期值當爲幾何?或新票之到期日應爲何時?新票之到期值或其到期日,可應用價值方程式求得如下:

a) 依複貼現率 d 貼現:

$$S' = S(1-d)^{n-n'} \dots\dots\dots (65)$$

$$n' = n + \frac{\log S' - \log S}{\log(1-d)} \dots\dots\dots (66)$$

b) 依複利率 i 貼現:

$$S' = S(1+i)^{n'-n} \dots\dots\dots (67)$$

$$n' = n + \frac{\log S' - \log S}{\log(1+i)} \dots\dots\dots (68)$$

S' 新票之到期值

S 舊票之到期值

n' 新票之貼現時期

n 舊票之貼現時期

d 複貼現率

i 複利率

(證) a) $S'(1-d)^{n'} = S(1-d)^n$

$$S' = \frac{S(1-d)^n}{(1-d)^{n'}}$$

$$\therefore S' = S(1-d)^{n-n'}$$

$$\log S' = \log S + (n-n') \log(1-d)$$

$$\frac{\log S' - \log S}{\log(1-d)} = n - n'$$

$$\therefore n' = n + \frac{\log S - \log S'}{\log(1-d)}$$

$$b) S'(1+i)^{-n'} = S(1+i)^{-n}$$

$$S' = \frac{S(1+i)^{-n}}{(1+i)^{-n'}}$$

$$\therefore S' = S(1+i)^{n'-n}$$

$$\log S' = \log S + (n' - n) \log (1+i)$$

$$\frac{\log S' - \log S}{\log (1+i)} = n' - n$$

$$\therefore n' = n + \frac{\log S' - \log S}{\log (1+i)}$$

(例一) 三年後到期, 到期值 4500 元之付款人, 欲更換一張二年後到期之票據, 求新票之到期值!

a) 依複貼現率 6% 貼現;

b) 依複利率 6% 貼現.

a) 應用公式 (65) 得:

$$S' = 4500 \times \left(1 - \frac{6}{100}\right)^{3-2} = 4500 \times \frac{94}{100} = 4230 \text{ 元}$$

b) 應用公式 (67), 得:

$$S' = 4500 \times 1.06^{2-3} = 4500 \times 1.06^{-1} = 4500 \\ \times 0.91339623 = 4245.28 \text{ 元}$$

(例二) 三年後到期, 到期值 4500 元之付款人, 欲更換一張到期值 5000 元之票據, 求新票之到期日!

a) 依複貼現率 6% 貼現;

b) 依複利率 6% 貼現.

a) 應用公式 (66), 得:

$$n' = 3 + \frac{\log 4500 - \log 5000}{\log 0.94} = 3 + \frac{-0.045757}{-0.026872}$$

$$= 4.70 \text{ 年}$$

b) 應用公式 (68), 得:

$$n' = 3 + \frac{\log 5000 - \log 4500}{\log 1.06} = 3 + \frac{0.045757}{0.025306}$$

$$= 4.81 \text{ 年}$$

舊票若不止一張, 則新票之到期值及其到期日, 可自下列諸公式求得。

a) 依複貼現率 d 貼現:

$$S' = \sum [S_1(1-d)^{n_1-n'}] \dots\dots\dots (69)$$

$$n' = \frac{\log \sum [S_1(1-d)^{n_1}] - \log S'}{\log(1-d)} \dots\dots\dots (70)$$

b) 依複利率 i 貼現:

$$S' = \sum (S_1 v^{n_1-n'}) \dots\dots\dots (71)$$

$$n' = \frac{\log S' - \log \sum (S_1 v^{n_1})}{\log(1+i)} \dots\dots\dots (72)$$

S' 新票之到期值

S' 舊票之到期值

n' 新票之貼現時期

n_1 舊票之貼現時期

d 複貼現率

i 複利率

$$v = \frac{1}{1+i}$$

Σ 總和之記號

(證) 設 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_p$ 爲 p 張舊票之到期值, n_1, n_2, n_3, \dots n_p 爲其貼現時期.

$$a) S'(1-d)^{n'} = S_1(1-d)^{n_1} + S_2(1-d)^{n_2} + S_3(1-d)^{n_3} + \dots + S_p(1-d)^{n_p}$$

$$S' = S_1(1-d)^{n_1-n'} + S_2(1-d)^{n_2-n'} + S_3(1-d)^{n_3-n'} + \dots + S_p(1-d)^{n_p-n'}$$

$$\therefore S' = \sum [S_i(1-d)^{n_i-n'}]$$

$$S'(1-d)^{n'} = \sum [S_i(1-d)^{n_i}]$$

$$\log S' + n' \log(1-d) = \log \sum [S_i(1-d)^{n_i}]$$

$$\therefore n' = \frac{\log \sum [S_i(1-d)^{n_i}] - \log S'}{\log(1-d)}$$

$$b) S'v^{n'} = S_1 v^{n_1} + S_2 v^{n_2} + S_3 v^{n_3} + \dots + S_p v^{n_p}$$

$$S' = S_1 v^{n_1-n'} + S_2 v^{n_2-n'} + S_3 v^{n_3-n'} + \dots + S_p v^{n_p-n'}$$

$$\therefore S' = \sum (S_i v^{n_i-n'})$$

$$S'v^{n'} = \sum (S_i v^{n_i})$$

$$\log S' + n' \log v = \log \sum (S_i v^{n_i})$$

$$n' = \frac{\log \sum (S_i v^{n_i}) - \log S'}{\log v}$$

但

$$\log v = -\log(1+i)$$

$$\therefore n' = \frac{\log S' - \log \sum S_1 v^{t_1}}{\log(1+i)}$$

(例三) 某甲欲以四年後到期之本票更換下列三票：

甲票二年後到期，到期值 1000 元；

乙票三年後到期，到期值 1200 元；

丙票五年後到期，到期值 1400 元；

求新票之到期值！

a) 依複貼現率 5% 貼現；

b) 依複利率 5% 貼現。

a) 應用公式 (69)，得：

$$\begin{aligned} S' &= 1000 \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{-2} + 1200 \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{-1} + 1400 \left(1 - \frac{5}{100}\right)^1 \\ &= \frac{1000}{\left(\frac{95}{100}\right)^2} + \frac{1200}{\frac{95}{100}} + 1400 \times \frac{95}{100} = \frac{10000000}{9025} + \frac{120000}{95} \\ &\quad + 1330 = 3701.19 \text{ 元} \end{aligned}$$

b) 應用公式 (71)，得：

$$S' = 1000 v^{-2} + 1200 v^{-1} + 1400 v^1$$

$$v^{-2} = (1+i)^2 = 1.1025$$

$$v^{-1} = 1+i = 1.05$$

$$v^1 = 0.95238095$$

$$S' = 1102.5 + 1260 + 1333.33 = 3695.83 \text{ 元}$$

(例四) 某甲欲發一新票，更換下列三舊票：

甲票二年後到期，到期值 1000 元；

乙票三年後到期, 到期值 1200 元;

丙票五年後到期, 到期值 1400 元;

求新票之到期日!

a) 新票之到期值 3701.19 元, 依複貼現率 5% 貼現;

b) 新票之到期值 3695.83 元, 依複利率 5% 貼現.

a) 應用公式 (70), 得:

$$\begin{aligned} n' &= \frac{\log(1000 \times 0.95^2 + 1200 \times 0.95^3 + 1400 \times 0.95^5) - \log 3701.19}{\log 0.95} \\ &= \frac{\log 0.95^2 + \log(1000 + 1200 \times 0.95 + 1400 \times 0.95^3) - \log 3701.19}{\log 0.95} \\ &= 2 + \frac{\log 3340.325 - \log 3701.19}{1.977724} = 2 + \frac{3.523788 - 3.568311}{-0.022276} \\ &= 2 + \frac{0.044553}{0.022276} = 4 \text{ 年} \end{aligned}$$

b) 應用公式 (72), 得:

$$\begin{aligned} n' &= \frac{\log 3695.83 - \log(1000 v^2 + 1200 v^3 + 1400 v^5)}{\log 1.05} \\ &= \frac{\log 3695.83 - \log v^5 - \log[1000(1+i)^2 + 1200(1+i)^3 + 1400]}{\log 1.05} \\ &= \frac{\log 3695.83 + 5 \log 1.05 - \log(1157.625 + 1323 + 1400)}{\log 1.05} \\ &= 5 + \frac{\log 3695.83 - \log 3880.625}{\log 1.05} = 5 + \frac{3.567712 - 3.588902}{0.021189} \\ &= 5 - \frac{0.021190}{0.021189} = 4 \text{ 年} \end{aligned}$$

習 題 九

1. 求下列各題中新票之到期值！

	舊票之到期值	舊票之到期日	新票之到期日	貼現方法	新票之到期值
a)	\$ 4500	三年後	二年後	複貼現率4%	
b)	4530	三年後	二年後	複利率4%	
c)	4500	三年後	二年後	單貼現率4%	
d)	4500	三年後	二年後	單利率4%	
e)	5000	五年後	六年後	複利率5%	
f)	5000	五年後	四年後	複利率5%	
g)	5530	二年後	一年後	複貼現率6%	
h)	5500	二年後	三年後	複貼現率6%	

2. 求下列各題中新票之到期日！

	舊票之到期值	舊票之到期日	新票之到期值	貼現方法	新票之到期日
a)	\$ 5200	四年後	\$ 5300	複利率4%	
b)	5200	四年後	5300	複貼現率4%	
c)	5200	四年後	5300	單貼現率4%	
d)	5200	四年後	5300	單利率4%	
e)	6800	五年後	6900	複利率5%	
f)	6900	五年後	6700	複利率5%	
g)	3500	二年後	3600	複貼現率5%	
h)	3500	二年後	3400	複貼現率5%	

3. 某甲欲以一張新票更換下列三張舊票：

甲票三年後到期，到期值 2500 元；

乙票五年後到期，到期值 3000 元；

丙票六年後到期，到期值 3500 元。

求下列各種更換方法中之到期值或其到期日！

新票之到期值	新票之到期日	貼現方法
a)	二年後	複貼現率4%
b)	四年後	複貼現率4%
c)	七年後	複貼現率4%
d)	二年後	複利率4%
e)	四年後	複利率1%
f)	七年後	複利率4%
g)	\$ 8500	複貼現率5%
h)	9090	複貼現率5%
i)	9500	複貼現率5%
j)	8500	複利率5%
k)	9000	複利率5%
l)	9500	複利率5%

4. 某甲新購一屋,約定於下列兩種付款方法中,某甲得任選一種:

第一種: 付款一千元,以後四年內每年付一千元;

第二種: 付現款六百五十元,以後四年內每年付一千一百元;

問何種付款方法利於某甲?(複利率5%)

5. 某甲於民國二十年底負債二千元,二年後到期,又負債一千元,三年半後到期,二十一年底某甲以現款一千五百元支付於其債權者,並約定於二十二年六月底與二十三年底支付相等金額,以清償其債,求此相等金額!(複利率5%,每年複利二次)

本編應用公式

$$I = Pin \dots\dots\dots(1)$$

$$S = P(1+in) \dots\dots\dots(2)$$

$$n = \frac{p-1}{i} \dots\dots\dots(3)$$

$$I = Pi \times \frac{d}{360} \dots\dots\dots(4)$$

$$I_1 = Pi \times \frac{d_1}{365} \dots\dots\dots(5)$$

$$I_2 = Pi \times \frac{d_2}{366} \dots\dots\dots(6)$$

$$I = I_1 + I_2 = Pi \left(\frac{d_1}{365} + \frac{d_2}{366} \right) \dots\dots\dots(7)$$

$$I'' = I' - \frac{I'}{73} \dots\dots\dots(8)$$

$$I' = I'' + \frac{I''}{72} \dots\dots\dots(9)$$

$$S = Pu^n \dots\dots\dots(10)$$

$$I = S - P = P(u^n - 1) \dots\dots\dots(11)$$

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 \dots\dots\dots(12)$$

$$j = m[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1] \dots\dots\dots(13)$$

$$i = e^j - 1 \dots\dots\dots(14)$$

$$\delta = 2.302585 \log_{10} (1+i) \dots\dots\dots(15)$$

$$\delta = \left(i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \dots\right) \dots\dots\dots(16)$$

$$i = \left(\delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \dots\right) \dots\dots\dots(17)$$

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} \dots\dots\dots(18)$$

$$S = Pe^{n\delta} \dots\dots\dots(19)$$

$$P = Se^{-n\delta} \dots\dots\dots(20)$$

$$P = S \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm} \dots\dots\dots(21)$$

$$P = S e^{-n\delta} \dots\dots\dots(22)$$

$$n = \frac{\log S - \log P}{\log(1+i)} \dots\dots\dots(23)$$

$$n = \frac{\log S - \log P}{\frac{j}{m} \log \left(1 + \frac{j}{m}\right)} \dots\dots\dots(24)$$

$$n = \frac{2.302585}{\delta} (\log_{10} S - \log_{10} P) \dots\dots\dots(25)$$

$$n = \frac{\log p}{\log(1+i)} \dots\dots\dots (26)$$

$$n = \frac{\log p}{m \log\left(1 + \frac{j}{m}\right)} \dots\dots\dots (27)$$

$$n = \frac{2.302585}{\delta} \log p \dots\dots\dots (28)$$

$$n = \frac{0.693}{i} + 0.35 \dots\dots\dots (29)$$

$$i = \text{antilog} \frac{\log S - \log P}{n} - 1 \dots\dots\dots (30)$$

$$j = m[\text{antilog} \frac{\log S - \log P}{nm} - 1] \dots\dots\dots (31)$$

$$\delta = \frac{2.302585}{n} (\log_{10} S - \log_{10} P) \dots\dots\dots (32)$$

$$I = Sdn \dots\dots\dots (33)$$

$$P = S - I = S(1 - dn) \dots\dots\dots (34)$$

$$i = \frac{d}{1 - dn} \dots\dots\dots (35)$$

$$d = \frac{i}{1 + in} \dots\dots\dots (36)$$

$$I_1 - I_2 = I_2 in \dots\dots\dots (37)$$

$$P = S(1 - d)^n \dots\dots\dots (38)$$

$$I = S - P = S[1 - (1 - d)^n] \dots\dots\dots (39)$$

$$d = 1 - \left(1 - \frac{I}{S}\right)^{\frac{1}{n}} \dots\dots\dots (40)$$

$$f = m[1 - (1 - d)^{\frac{1}{m}}] \dots\dots\dots (41)$$

$$d = \frac{1 - e^{-f}}{m} \dots\dots\dots (42)$$

$$\delta' = -2.302585 \log_{10} (1 - d) \dots\dots\dots (43)$$

$$\delta' = \left(d + \frac{d^2}{2} + \frac{d^3}{3} + \frac{d^4}{4} + \dots\right) \dots\dots\dots (44)$$

$$d = \left(\delta' - \frac{\delta'^2}{2!} + \frac{\delta'^3}{3!} - \frac{\delta'^4}{4!} + \dots\right) \dots\dots\dots (45)$$

$$P = S \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{nm} \dots\dots\dots (46)$$

$$P = S e^{-n\delta'} \dots\dots\dots (47)$$

$$\delta = \delta' \dots\dots\dots (48)$$

$$j = \frac{mf}{m-f} \dots\dots\dots (49)$$

$$f = \frac{mj}{m+j} \dots\dots\dots (50)$$

$$i = \frac{d}{1-d} \dots\dots\dots (51)$$

$$d = \frac{i}{1+i} \dots\dots\dots (52)$$

$$S' = \frac{S(1-dn)}{1-dn'} \dots\dots\dots (53)$$

$$S' = \frac{S(1+in')}{1+in} \dots\dots\dots (54)$$

$$n' = \frac{S - S'(1-dn)}{dS'} \dots\dots\dots (55)$$

$$n' = \frac{S'(1+in) - S}{iS} \dots\dots\dots (56)$$

$$x = \frac{S_1 n_1 - S_2 n_1}{S_1 - S_2} - \frac{1}{d} \dots\dots\dots (57)$$

$$x = \frac{S_1 n_2 - S_2 n_1}{S_1 - S_2} + \frac{1}{i} \dots\dots\dots (58)$$

$$S' = \frac{\sum S_1 - d \sum S_1 n_1}{1-dn'} \dots\dots\dots (59)$$

$$S' = (1+in') \sum \frac{S_1}{1+in_1} \dots\dots\dots (60)$$

$$n_0 = \frac{d \sum (S_1 n_1) - \sum S_1}{dS'} + \frac{1}{d} \dots\dots\dots (61)$$

$$n_a = \frac{\sum (S_1 n_1)}{\sum S_1} \dots\dots\dots (62)$$

$$n_c = \frac{S'}{i \sum \frac{S_1}{1+in_1}} - \frac{1}{i} \dots\dots\dots (63)$$

$$n_a = \frac{\sum \frac{S_t n_t}{1+i n_t}}{\sum \frac{S_t}{1+i n_t}} \dots\dots\dots (64)$$

$$S' = S(1-d)^{n-n'} \dots\dots\dots (65)$$

$$n' = n + \frac{\log S - \log S'}{\log(1-d)} \dots\dots\dots (66)$$

$$S' = S(1+i)^{n'-n} \dots\dots\dots (67)$$

$$n' = n + \frac{\log S' - \log S}{\log(1+i)} \dots\dots\dots (68)$$

$$S' = \sum (S_t (1-d)^{n_1 - n'}) \dots\dots\dots (69)$$

$$n' = \frac{\log \sum (S_t (1-d)^{n_1}) - \log S'}{\log(1-d)} \dots\dots\dots (70)$$

$$S' = \sum (S_t v^{n_1 - n'}) \dots\dots\dots (71)$$

$$n' = \frac{\log S' - \log \sum (S_t v^{n_1})}{\log(1+i)} \dots\dots\dots (72)$$

第三編 級數

凡有若干項數字連續，而其前後項有一定之關係，得以一公式表示其各項之數值者，均名曰級數。(Progression or Series)

例如：

4	7	10	13	16	19
3	6	12	24	48	96
1	4	9	16	25	36
1	8	27	64	125	216
10	33	92	205	390	665

均級數也；第一級數中，前後兩項相差之數均相等。第二級數中，以前項除後項，其商均相等。至於第三級數，第一項爲一之平方，第二項爲二之平方，第三項爲三之平方，第四項爲四之平方，第五項爲五之平方，第六項爲六之平方。第四級數則第一項爲一之立方，第二項爲二之立方，第三項爲三之立方，第四項爲四之立方，第五項爲五之立方，第六項爲六之立方。第五級數則以一，二，三，四，五，六，依次代入下式

$$3x^3 + 2x + 5$$

即得第一，二，三，四，五，六項。

級數之種類甚多，茲舉其較重要者，分別詳述於下列各章。

第一章 等差級數

第一級數前後項之差相等，故曰等差級數，或算術級數 (Arithmetic Progression)。其相等之差，名曰公差 (Common Difference)。公差得為正數或負數，前者名曰昇級數 (Increasing Progression) 後者名曰降級數 (Decreasing Progression)。第一級數為昇級數，其公差為3，下列級數則為降級數，其公差為-2

$$11 \quad 9 \quad 7 \quad 5 \quad 3 \quad 1 \quad -1 \quad -3$$

設首項為 a ，末項為 l ，公差為 d ，項數為 n ，則：

$$\text{第一項} = a$$

$$\text{第二項} = a + d = a + (2-1)d$$

$$\text{第三項} = a + 2d = a + (3-1)d$$

$$\text{第四項} = a + 3d = a + (4-1)d$$

故第 n 項即末項 l ，當為：

$$l = a + (n-1)d \dots \dots \dots (1)$$

已知等差級數之首項，項數，與公差，即可應用上式，以求其末項。

求首項，公差，或項數之公式，可自公式(1)化出，學者可自化之。

又設 S 為等差級數之和，則：

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (l-2d) + (l-d) + l$$

若以等式之右邊，前後倒置，則得：

$$S = l + (l-d) + (l-2d) + \dots + (a+2d) + (a+d) + a$$

若將以上兩式之左右兩邊，各自相加，則左邊為 $2S$ ，右邊之第一項，為

$$a+l,$$

其第二項為

$$(a+d) + (l-d) = a+l,$$

其第三項為

$$(a+2d) + (l-2d) = a+l,$$

故右邊之各項，均為 $a+l$ ，即：

$$2S = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \dots + (a+l)$$

但右邊共有 n 項，故：

$$2S = n(a+l)$$

$$\text{即} \quad S = \frac{n(a+l)}{2} \quad (2)$$

已知等差級數之首項，項數，與末項，可應用公式(2)，以求其和。

(例一) 已知等差級數之首項為3，公差為2，項數為10，求末項與級數之和！

應用公式(1)，得：

$$l = 3 + (10-1) \times 2 = 21$$

應用公式(2)，得：

$$S = \frac{10(3+21)}{2} = \frac{10 \times 24}{2} = 120$$

a, l, n, d, S 爲等差級數中之五數, 已知其中三數, 即可求其他二數.

(例二) 已知: $S=80$

$$a=3$$

$$d=2$$

求 l 與 n !

應用公式 (1), 得:

$$l = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$$

應用公式 (2), 得:

$$80 = \frac{n}{2} (3+l)$$

以 l 之值代入上式, 得:

$$160 = n(2n+4)$$

$$n^2 + 2n - 80 = 0$$

$$(n+10)(n-8) = 0$$

$$n+10 \neq 0$$

$$\therefore n=8$$

$$l = 16 + 1 = 17$$

(例三) 已知: $S=80$

$$l=17$$

$$d=2$$

求 a 與 n !

應用公式 (1), 得:

$$17 = a + 2(n-1)$$

$$a = 19 - 2n$$

應用公式 (2), 得:

$$80 = \frac{n}{2}(a+17)$$

以 a 之值代入上式, 得:

$$160 = n(36 - 2n)$$

$$n^2 - 18n + 80 = 0$$

$$(n-8)(n-10) = 0$$

若 $n-8=0$

則 $n=8$

$$a = 19 - 16 = 3$$

即 3 5 7 9 11 13 15 17

若 $n-10=0$

則 $n=10$

$$a = 19 - 20 = -1$$

即 -1 1 3 5 7 9 11 13 15 17

(例四) 已知: $n=8$

$$d=2$$

$$S=80$$

求 a 與 l

應用公式(1),得:

$$l = a + 14$$

應用公式(2),得:

$$80 = 4(a + l)$$

以 l 之值代入上式,得:

$$20 = a + a + 14$$

$$2a = 6$$

$$\therefore a = 3$$

$$l = 3 + 14 = 17$$

上述之五級數中,第三,第四與第五級數,其前後項之差雖不相等,然若將前後項相減而成一新級數,再將此新級數之前後項相減而又成一級數,如此依次相減,均能化爲各項相等之新級數.

第三級數:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \\ 2 & 2 & 2 & 2 & & \end{array}$$

第四級數:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 8 & 27 & 64 & 125 & 216 \\ 7 & 19 & 37 & 61 & 91 & \\ 12 & 18 & 24 & 30 & & \\ 6 & 6 & 6 & & & \end{array}$$

第三級數:

10	33	92	205	390	665
	23	59	113	185	275
		36	54	72	90
			18	18	18

以上三級數中,至最後一列,各項均相等.第二列各項爲第一列中前後項之差,而第三列各項爲第二列中前後項之差,故第二列爲第一列之一次差(First Order of Differences),第三列爲第一列之二次差(Second Order of Differences).第三級數之二次差,其各項均相等,至於第四與第五級數,則其三次差之各項均相等,此種級數名曰高次等差級數(Arithmetic Progression of Higher Order).第三級數爲二次等差級數,而第四與第五級數則爲三次等差級數.至於普通等差級數,其一次差之各項均相等,故可名曰一次等差級數.

高次等差級數之末項及其總和,可自下列二公式求得:

$$l = a_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} d_2 + \dots + \frac{(n-1) \dots (n-r)}{1 \cdot 2 \dots r} d_r \quad (3) \text{ (證明參看附錄甲 12)}$$

$$S = n a_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d_2 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-r)}{1 \cdot 2 \dots (r+1)} d_r, \dots (4) \text{ (證明參看附錄甲 13)}$$

l 末項

s 總和

n 項數

a_1 首項

d_1 一次差之首項

d_2 二次差之首項

.....

d_r r 次差之首項

(例五) 求下列高次等差級數之第十項及其前十項之和!

1 32 243 1024 3125 7776 16807.....第十項

(解) 1 32 243 1024 3125 7776 16807

31 211 781 2101 4651 9031

180 570 1320 2550 4380

390 750 1230 1830

360 480 600

120 120

此為五次等差級數.

$$n = 10$$

$$a_1 = 1$$

$$d_1 = 31$$

$$d_2 = 180$$

$$d_3 = 390$$

$$d_4 = 360$$

$$d_5 = 120$$

代入公式(3),得:

$$\begin{aligned}
 l &= 1 + 9 \times 31 + \frac{9 \times 8}{1 \times 2} \times 180 + \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} \times 390 + \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times 360 \\
 &\quad + \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \times 120 = 1 + 279 + 6480 + 32760 \\
 &\quad + 45360 + 15120 = 100000
 \end{aligned}$$

代入公式(4),得:

$$\begin{aligned}
 S &= 10 \times 1 + \frac{10 \times 9}{1 \times 2} \times 31 + \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} \times 180 + \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times 390 \\
 &\quad + \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \times 360 + \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} \times 120 \\
 &= 10 + 1395 + 21600 + 81900 + 97720 + 25200 = 220825
 \end{aligned}$$

習 題 十

1. 填寫下表中空白之處!

	首項	公差	項數	末項	等差級數之和
a)	5	4	14		
b)	35		10	17	
c)	1	3		31	
d)		2	15	35	
e)	19	-2	20		

2. 等差級數之第一項為3,第二項為5,第三項為7,其和為48,求項數!

3. 求證:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

4. 已知: $S = 69$

$$l = 19$$

$$d = 3$$

求 a 與 n !

5. 已知: $S=126$
 $d=5$
 $n=7$

求 a 與 n !

6. 求下列各級數前二十項之和!

a) $1 \cdot 2$ $2 \cdot 3$ $3 \cdot 4$ $4 \cdot 5$ $5 \cdot 6 \cdots$ 第二十項

b) $1 \cdot 2 \cdot 3$ $2 \cdot 3 \cdot 4$ $3 \cdot 4 \cdot 5$ $4 \cdot 5 \cdot 6$ $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdots$ 第二十項

7. 求下列各級數之第二十項及前二十項之和!

a) 1 16 81 256 625 $1296 \cdots$ 第二十項

b) 5 11 19 29 41 $55 \cdots$ 第二十項

c) 4 11 22 37 56 $79 \cdots$ 第二十項

第二章 等比級數

上述五級數中之第二級數，其前後項之比相等，故曰等比級數，或幾何級數 (Geometric Progression)。其相等之比名曰公比 (Common Ratio)。

設首項爲 a ，末項爲 l ，公比爲 r ，項數爲 n ，則：

$$\text{第一項} = a$$

$$\text{第二項} = ar = ar^{2-1}$$

$$\text{第三項} = ar^2 = ar^{3-1}$$

$$\text{第四項} = ar^3 = ar^{4-1}$$

故第 n 項即末項 l ，當爲：

$$l = ar^{n-1} \dots\dots\dots(5)$$

已知等比級數之首項，公比與項數，可應用公式 (5)，以求末項。

求首項，公比，或項數之公式，可自公式 (5) 化出，學者可自化之。

又設 S 爲等比級數之和，則：

$$S = a + ar + ar^2 + \dots\dots\dots + ar^{n-1}$$

若以 r 乘上式之兩邊，則得：

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$$

第一式之右邊，除首項外，俱與第二式之右邊（末項除外）相等，故自上式減去下式，則得：

$$S - rS = a - ar^n$$

即 $(1-r)S = a(1-r^n)$

$$\therefore S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \dots\dots\dots(6)$$

以 l 代 ar^{n-1} ，則得：

$$S = \frac{a-rl}{1-r} \dots\dots\dots(7)$$

已知等比級數之首項，公比，與項數（或末項），可應用公式 (6)（或公式 7），以求其和。

（例一）已知等比級數之首項為 4，公比為 3，求第十項與前十項之和！

應用公式 (5)，得：

$$l = 4 \times 3^{10-1} = 4 \times 3^9 = 4 \times 19683 = 78732$$

應用公式 (6)，得：

$$S = \frac{4(1-3^{10})}{1-3} = 2 \times 59048 = 118096$$

a, l, n, r, S ，為等比級數中之五數，已知其中三數，即可求其他二數。

（例二）已知： $S = 189$

$$l = 96$$

$$r = 2$$

求 n 與 a !

應用公式 (5), 得:

$$189 = 192 - a$$

$$\therefore a = 3$$

應用公式 (3), 得:

$$96 = 3 \times 2^{n-1}$$

$$32 = 2^{n-1}$$

$$\log 32 = (n-1) \log 2$$

$$1.50515 = 0.301030(n-1)$$

$$n-1 = \frac{1.50515}{0.30103} = 5$$

$$\therefore n = 6$$

(例三) 已知:

$$S = 189$$

$$a = 3$$

$$n = 6$$

求 l 與 r !

應用公式 (3), 得:

$$l = 3r^5$$

應用公式 (5), 得:

$$189 = \frac{3-r^6}{1-r}$$

以 l 之值代入, 得:

$$189 = 3 \times \frac{1-r^6}{1-r}$$

$$63 = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5$$

上式係一高次方程式，通常不易解答，惟本題中之 r ，用代入測驗法，即可求得

$$r = 2$$

$$I = 3 \times 2^5 = 96$$

習 題 十 一

1. 填寫下表中空白之處！

	首項	公比	項數	末項	等比級數之和
a)	2		5	162	
b)	2	3		486	
c)	2			162	242
d)	2	3	7		
e)	2		6		728
f)	2	3			242
g)		3	6	486	
h)			4	54	80
i)		3		162	242
j)		3	7		2188

2. 求下列各級數之和！

a) $S = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \dots + (1+i) + 1$

b) $S = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i)^2 + (1+i)$

c) $S = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{1-n} + (1+i)^{-n}$

d) $S = 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{2-n} + (1+i)^{1-n}$

3. 設上題中 $n=10$, $i=6\%$, 求各級數之和！

a) 應用上題中求得之公式；

b) 應用複利終值表與複利現值表。

第三章 無盡級數

級數之項數多至無窮盡者曰無盡級數 (Infinite Series) 表示級數變化規律之項，名曰一般項 (General Term)。自然數組成一等差級數，但其項數無窮盡，故此等差級數為一無盡級數，而其一般項為 n 。

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \dots\dots$$

任取一竹竿，就其中端折而為二，取此二竿之一更就其中端折而為二，復取此二小竿之一更就其中端折而為二，如是依次折斷，永無止境，未折各竿組成一等比級數，但是項數無窮盡，故此等比級數為一無盡級數，而其一般項為 $\frac{1}{2^n}$ 。

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \dots\dots$$

上述二級數，雖均為無盡級數，然一則其和無限，一則有限。蓋第一級數之和為：

$$S = \frac{n(1+n)}{2}$$

若 n 大至無窮大，則 S 亦大至無窮大，故無一定限制。第二級數之和則不然，應用公式 (6)，得：

$$S = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

若 n 大至無窮大, 則 $\frac{1}{2^n}$ 小至無窮小, 故 S 之極限為 1.

無盡級數之和若有一定限制, 則名曰收斂級數 (Convergent Series), 反之則名曰發散級數 (Divergent Series). 故第一級數為發散級數, 而第二級數為收斂級數, 有時無盡級數之和, 雖不至大至無窮大, 然變化不定, 無確定之極限, 例如下之無盡級數:

$$1+1-1-1+1+1-1-1+\dots\dots$$

其和游移於 1, 2, 1, 0, 之間, 無一定之限制, 是曰不定級數 (Oscillating Series).

通常吾人祇能應用收斂級數, 故無盡級數之能收斂與否, 吾人須知鑒別之. 惟無一鑒別方法能適用於一切級數, 其最有用者, 為直接比較法 (Direct-Comparison Test) 與比例測驗法 (Test-Ratio Test).

(一) 直接比較法: 若第一級數之各項, 自某項起, 常小於或至多等於第二級數之相當各項, 若已知第二級數為收斂級數, 則第一級數亦為收斂級數. 若第一級數之各項, 自某項起, 常等於或大於第二級數之相當各項, 若已知第二級數為發散級數, 則第一級數亦為發散級數. 用作比較收斂級數, 通常取公比之絕對值小於 1 之等比級數與級數 e , 用作比較發散級數, 則取倒數級數 (Harmonic Series). 蓋等比級數之和為:

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

若 r 之絕對值小於 1, 則 n 大至無窮大時, $\frac{ar^n}{1-r}$ 小至無窮小, 故 S 之極限為 $\frac{a}{1-r}$, 而此等比級數為一收斂級數. 級數

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

之極限為 e , 故級數 e 亦為一收斂級數. 至於倒數級數

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

吾人可書作如下:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ & \qquad \qquad \qquad \text{二項} \qquad \qquad \qquad \text{四項} \\ & + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots\right) \\ & \qquad \qquad \qquad \text{八項} \\ & \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \\ & > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

若再將十六項相加, 三十二項相加, ……其和靡不大於 $\frac{1}{2}$, 故此級數之和增加無限, 換言之, 倒數級數為一發散級數

(例一) 鑒別下列無盡級數之性質!

$$a) \quad \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \dots$$

$$b) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$a) \quad \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \dots$$

此級數之各項，小於下列等比級數之相當各項，

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

但吾人已知公比絕對值小於一之等比級數為收斂級數，故此級數亦為一收斂級數。

$$b) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$$

此級數之各項，以 $\frac{1}{3}$ 除之，即與倒數級數之相當各項相等，但吾人已知倒數級數為發散級數，故此級數亦為發散級數。

(二) 比例測驗法：設

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

為一無盡級數，又設

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = t$$

若 $|t| < 1$ ，則此級數為收斂級數；

若 $|t| > 1$ ，則此級數為發散級數；

若 $|t|=1$, 則此級數之性質尚不能確定.

* \lim 爲極限之記號, ∞ 爲無窮大之記號.

(例二) 鑒別下列無盡級數之性質!

$$a) \quad \frac{1}{1} + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

$$b) \quad \frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

$$a) \quad u_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}$$

$$u_{n+1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(n+1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n+1)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} < 1$, 故此級數爲收斂級數.

$$b) \quad u_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}$$

$$u_{n+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)(3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n+1)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+2}{2n+1} = \frac{3 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{2}$$

$\frac{3}{2} > 1$, 故此級數爲發散級數.

級數之各項若正負相間而互相更迭者曰更迭級數 (Alternating Series)。更迭級數各項之絕對值若均小於其前一項，而其一般項又以零為極限，則為收斂級數。例如下之更迭級數。

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots$$

為收斂級數，蓋各項之絕對值小於其前一項，而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

應用數學中最重要之級數為包含一未知數之級數，而尤以冪級數 (Power series) 為更重要，其形式如下：

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

上式中 $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ 為已知數，而未知數之指數為一正整數

冪級數之性質，隨未知數之數值而異，未知數之數值在一定界限之內者為收斂級數，其在界限之外者則為發散級數。故吾人須確定冪級數為收斂級數時未知數之界限，確定界限之方法，以比例測驗法為最有效。

冪級數便於函數(註)數值之計算，故應用至廣，在投資數學中最有用之冪級數，有二項級數 (Binomial Series)，指數級數 (Exponential Series) 與對數級數 (Logarithmic Series) 三種，茲分別述之於後。

二項式 $(a+x)^n$ 展開，若 n 為一正整數，則得：

(註) 若甲變量隨乙變量而變，則甲變量為乙變量之函數 (Function)。

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} x^2 + \dots + x^n \quad (\text{參看附錄甲1})$$

此爲一幂級數，其項數有盡，各項之係數爲

$$a^n \quad \frac{n}{1} a^{n-1} \quad \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} \quad \dots \dots 1$$

其一般項則爲

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots\dots(r-1)r} a^{n-r} x^r$$

若 n 爲負數或分數，則級數之項數多至無窮盡，故爲一無盡級數。

$$(a+x)^n = a^n + n a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} x^2 + \dots \dots \quad (8)$$

若 n 爲一正整數，則上式右邊第 $(n+1)$ 項以後各項之係數均等於零，換言之，即其項數有窮盡之時，故 n 爲正整數時，公式(8)亦能成立。公式(8)右邊由二項式展開而得，故此級數名曰二項級數。

$$\frac{\frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots\dots(r-1)r} a^{n-r} x^r}{\frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots\dots(r-1)} a^{n-r+1} x^{r-1}} = \frac{n-r+1}{r} \frac{x}{a}$$

$$t = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n-r+1}{r} \frac{x}{a} = \frac{x}{a} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n-r+1}{r}$$

$$= \frac{x}{a} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{r} - 1}{1} = -\frac{x}{a}$$

二項級數若為收斂級數，則須滿足下列條件：

$$\left| -\frac{x}{a} \right| < 1$$

$$|x| < |a|$$

公式 (8) 右邊之級數若為一收斂級數，則求 $(a+x)^n$ ，即可先展開成級數而後求其和。

(例三) 求 $\sqrt{99}$! (至小數七位為止)

$$\sqrt{99} = (100-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$|-1| < |100|$$

$$\therefore \sqrt{99} = 100^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \times 100^{-\frac{1}{2}} (-1) + \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 \cdot 2} 100^{-\frac{3}{2}} (-1)^2$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 100^{-\frac{5}{2}} (-1)^3 + \dots$$

$$= 10 - \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} - \frac{1}{1600000} - \dots$$

截取前四項，得：

$$\sqrt{99} = 10 - \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} - \frac{1}{1600000}$$

$$= 10 - 0.05 - 0.000125 - 0.000000625$$

$$= 10 - 0.050125625 = 9.949874375 = 9.9498744$$

(例四) 求 $1.05^{\frac{1}{12}}$! (至小數七位為止)

$$1.05^{\frac{1}{12}} = (1+0.05)^{\frac{1}{12}}$$

$$0.05 < 1$$

$$\begin{aligned}
\therefore 1.05^{\frac{1}{12}} &= 1 + \frac{1}{12} \times 0.05 + \frac{1}{12} \left(-\frac{11}{12} \right) \times 0.05^2 \\
&+ \frac{1}{12} \left(-\frac{11}{12} \right) \left(-\frac{23}{12} \right) \times 0.05^3 + \frac{1}{12} \left(-\frac{11}{12} \right) \left(-\frac{23}{12} \right) \left(-\frac{35}{12} \right) \\
&\times 0.05^4 + \dots \\
&= 1 + \frac{5}{1200} - \frac{11 \times 5^2}{12^2 \times 20000} + \frac{11 \times 23 \times 5^3}{12^3 \times 600000} \\
&- \frac{11 \times 23 \times 35 \times 5^4}{12^4 \times 240000000} + \dots
\end{aligned}$$

截取前五項，得：

$$\begin{aligned}
1.05^{\frac{1}{12}} &= 1 + \frac{5}{1200} - \frac{11 \times 5^2}{12^2 \times 20000} + \frac{11 \times 23 \times 5^3}{12^3 \times 600000} \\
&- \frac{11 \times 23 \times 35 \times 5^4}{12^4 \times 240000000} = 1 + 0.004166667 \\
&- 0.000095486 + 0.000003050 - 0.000000111 \\
&= 1.00407412 = 1.0040741
\end{aligned}$$

指數級數亦為投資數學中常見之冪級數，其形式如下：

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

其一般項為

$$\begin{aligned}
&\frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \\
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{x^n} = \frac{x}{n+1}
\end{aligned}$$

$$t = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{n+1} = x \cdot 0$$

若 x 為有限數，則 t 等於零，故 x 為有限數時，指數級數為一收斂級數，其和之極限為 e^x (參看附錄甲 3)。

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (9)$$

若 $x=1$ ，則得：

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (10)$$

(例五) 求 e^{-1} ! (至小數四位為止)

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$$

截取前八項，得：

$$\begin{aligned} e^{-1} &= 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} \\ &= 1 - 1 + 0.5 - 0.166667 + 0.041667 \\ &\quad - 0.008333 + 0.001389 - 0.000198 \\ &= 0.367858 = 0.3679 \end{aligned}$$

第三種幕級數為對數級數，其形式如下：

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

其一般項為

$$-(-1)^n \frac{x^n}{n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{n}{x^n} = -\frac{n}{n+1} x$$

$$\begin{aligned}
 t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{n}{n+1} x \\
 &= -x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = -x
 \end{aligned}$$

若 $|x|$ 小於1,則此級數為收斂級數;若 $x=1$,則此級數為一更迭級數,吾人已知其為收斂級數; x 為 -1 或其絕對值大於1時,此級數為發散級數.對數級數為收斂級數時,其和之極限為 $\log_e(1+x)$, (參看附錄甲6)對數級數之名即以此故.

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (11)$$

(例六) 求 $\log_e 1.1$ (至小數四位為止)

$$\begin{aligned}
 \log 1.1 &= \log_e(1+0.1) = 0.1 - \frac{0.01}{2} + \frac{0.001}{3} \\
 &\quad - \frac{0.0001}{4} + \frac{0.00001}{5} - \dots
 \end{aligned}$$

截取前四項得:

$$\begin{aligned}
 \log_e 1.1 &= 0.1 - 0.005 + 0.000333 - 0.000025 \\
 &= 0.095308 = 0.0953
 \end{aligned}$$

習 題 十 二

1. 確定下列各級數之性質.

a) $0.06 + \frac{0.06^2}{2} + \frac{0.06^3}{3} + \frac{0.06^4}{4} + \dots$

b) $0.05 - \frac{0.05^2}{2!} + \frac{0.05^3}{3!} - \frac{0.05^4}{4!} + \dots$

$$c) 0.04 + \frac{0.04^2}{2^2} + \frac{0.04^3}{2^3} + \frac{0.04^4}{2^4} + \dots$$

$$d) 2 + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.5} + \dots$$

2. 確定下列各等級數為收斂級數時 x 之數值。

$$a) \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^3} + \dots$$

$$b) 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots$$

$$c) \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots$$

$$d) 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

3. 求下列各數! (至小數七位為止)

$$a) \sqrt{101}$$

$$b) \sqrt[3]{999}$$

$$c) 1.05^{\frac{1}{2}}$$

$$d) 1.05^{\frac{1}{3}}$$

$$e) 1.05^{\frac{1}{4}}$$

$$f) 1.05^{\frac{1}{5}}$$

4. 求下列各數! (至小數四位為止)

$$a) e^{\frac{1}{2}}$$

$$b) e^{-\frac{1}{2}}$$

$$c) e^2$$

5. 求 $\log_e 1.2!$ (至小數四位為止)

a) 應用公式 (11)

b) 應用第一編公式 (7)

本編應用公式

$$l = a + (n-1)d \dots\dots\dots(1)$$

$$S = \frac{n(a+l)}{2} \dots\dots\dots(2)$$

$$l = a_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} d_2 + \dots + \frac{(n-1) \dots (n-r)}{1 \cdot 2 \dots r} d_r \dots\dots\dots(3)$$

$$S = n a_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d_2 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-r)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r+1)} d_r \dots\dots\dots(4)$$

$$l = ar^{n-1} \dots\dots\dots(5)$$

$$S = \frac{a(1-r)^n}{1-r} \dots\dots\dots(6)$$

$$S = \frac{a-rl}{1-r} \dots\dots\dots(7)$$

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots\dots\dots 8)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots\dots\dots (9)$$

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots\dots\dots (10)$$

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\dots\dots(11)$$

第四編 確實年金

第一章 年金之意義及其種類

依一定契約，按期收受或支付一定之金額，是曰年金 (Annuity)。每月初支付之房金，每季或每年初支付之保險費，每月末收受之養老金，每半年或每年末收受之債券利息，是皆年金也。年金之收支，在每期之末者，曰期末付年金；(或稱普通年金 Ordinary Annuity)，其在每期之初者，曰期初付年金 (或稱到期年金 Annuity Due) 本書中所稱年金，除有特別說明外，均指期末付年金而言。

年金又可分為確實年金與生命年金二種。年金之收支，在規定期限間，不受任何事故之影響者，曰確實年金 (Annuity Certain)。年金之收支，因一人或數人之死亡而終止者，曰生命年金 (Life Annuity)。生命年金與人之壽命有關，故須先明機率 (第九編) 之原理，然後能計算生命年金 (第十編)，本編請先論確實年金。

確實年金有定額年金與變額年金之別。每期收支之年金在規定期限間，其定額永無變動者，曰定額年金 (Constant Annuity)；其在規定期限間，任意變動或依一定規律而變動

者，曰變額年金 (Varying Annuity)。通常年金均屬定額年金，本書中所稱年金，除有特別規定外，均指定額年金而言。

確實年金又可分為有限年金，延期有限年金，永續年金，與延期永續年金四種。約定年金之支付，以若干期為限者，曰有限年金 (Temporary Annuity)。約定最初若干期不付年金，以後若干期繼續支付年金者，曰延期有限年金 (Deferred Annuity)。約定年金之支付，永遠繼續而無終止之期者，曰永續年金 (Perpetuity)。約定最初若干期不付年金，以後永遠繼續支付者，曰延期永續年金 (Deferred Perpetuity)。

每期支付之年金，在規定期限末之總值，名曰年金終值 (Final Value or Amount of the Annuity)；其在訂約時之總值，名曰年金現值 (Present Value of the Annuity)。前後兩支付年金時日間之時期，名曰支付期間 (Payment Interval)。自最初支付期間之始，至最後支付期間之末，中間相隔之時期，名曰年金時期 (Term of the Annuity)。每一支付期間支付之金額，名曰每期年金額 (Annuity)。每年支付年金總額，名曰每年年金總額 (Annual Rent)。例如每月末支付年金一百元，約定繼續支付六十期，則支付期間為一月，年金時期為五年，每期年金額為一百元，每年年金總額為一千二百元。又如每兩年末支付年金一千元，約定繼續支付十期，則支付期間為二年，年金時期為二十年，每期年金額為一千元，每年年金總額為五百元。

第二章 定額年金

年金之支付，有一年一次者，亦有一年數次或數年一次者，前者計算較簡，而後者稍繁，故前者可名曰簡單年金，而後者可名曰複雜年金，茲分別論之於以下兩節。

第一節 簡單年金

簡單年金一元繼續支付 n 年之終值，通常以 $S_{\overline{n}|}$ 表之，其數值可自下之公式來得：

$$S_{\overline{n}|} = \frac{w^n - 1}{i} \dots\dots\dots (1)$$

$S_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之終值。

i 實利率

n 年金時期

$w = 1+i$

(證) 年金支付期	與最後支付期間 之末相隔之年數	年金一元在最後支 付期間末之終值
第一年末	$n-1$	$(1+i)^{n-1}$
第二年末	$n-2$	$(1+i)^{n-2}$
第三年末	$n-3$	$(1+i)^{n-3}$
.....
第 $(n-2)$ 年末	2	$(1+i)^2$

第 $(n-1)$ 年末	1	$1+i$
第 n 年末	0	1

年金終值即為每期年金額終值之總和，故

$$S_{\overline{n}|i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}$$

上式之右邊為一等比級數，其首項為1，公比為 $1+i$ ，項數為 n ，應用第三編公式(6)，得：

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{u^n - 1}{i}$$

$S_{\overline{n}|i}$ 為年金一元之終值，若年金額為 R 元，則以 R 乘 $S_{\overline{n}|i}$ ，即得年金 R 元之年金終值。

$$K = R S_{\overline{n}|i} \dots \dots \dots (2)$$

R 年金額。

K 年金額 R 元之終值。

$S_{\overline{n}|i}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之終值。

若每年複利不止一次，則公式(1)中之實利率，可易以虛利率，而得公式如下：

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1} \dots \dots \dots (3)$$

$S_{\overline{n}|i}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之終值。

n 年金時期。

j 虛利率。

m 每年複利次數。

$$\text{但 } S_{nm}^- @ \frac{j}{m} = \frac{(1 + \frac{j}{m})^m - 1}{\frac{j}{m}}$$

$$S_m^- @ \frac{j}{m} = \frac{(1 + \frac{j}{m})^m - 1}{\frac{j}{m}}$$

故 S_n^- 亦可自下式求得：

$$S_n^- @ j = \frac{S_{nm}^- @ \frac{j}{m}}{S_m^- @ \frac{j}{m}} \dots \dots \dots (4)$$

$S_n^- @ j$ 簡單年金一元繼續支付 n 年依虛利率 j 投資之終值。

$S_{nm}^- @ \frac{j}{m}$ 簡單年金一元繼續支付 nm 年依實利率 $\frac{j}{m}$ 投資之終值。

$S_m^- @ \frac{j}{m}$ 簡單年金一元繼續支付 m 年依實利率 $\frac{j}{m}$ 投資之終值。

依公式(1)可製年金終值表(表六),故實利率若為普通利率,則可應用年金終值表,檢查年金一元之終值。

(例一) 年金 300 元, 求十年末之年金終值!

- a) 實利率六釐;
 - b) 虛利率六釐; 每年複利二次;
 - c) 實利率五釐二毫半。
- d) 應用年金終值表, 得:

$$S_{10}^- @ 6\% = 13.18079494$$

$$K = 300 S_{10}^- = 3954.24 \text{ 元}$$

b) 應用公式(3), 得:

$$S_{\overline{10}|} = \frac{1.03^{20} - 1}{1.03^2 - 1}$$

查複利終值表, 得:

$$1.03^{20} = 1.80611123$$

$$1.03^2 = 1.0609$$

代入上式, 得:

$$S_{\overline{10}|} = \frac{0.80611123}{0.0609}$$

$$K = 300 S_{\overline{10}|} = \frac{241833.69}{609} = 3970.99 \text{ 元}$$

此題亦可應用公式(4)求得

$$S_{\overline{10}|} @ 6\% = \frac{S_{\overline{20}|} @ 3\%}{S_{\overline{2}|} @ 3\%} = \frac{26.87037449}{2.03}$$

$$K = 300 S_{\overline{10}|} = \frac{8061.112347}{2.03} = 3970.99 \text{ 元}$$

c) 應用公式(1), 得:

$$S_{\overline{10}|} = \frac{1.0525^{10} - 1}{0.0525}$$

令

$$x = 1.0525^{10}$$

$$\log x = 10 \log 1.0525$$

$$= 0.222220$$

$$x = 1.6680923$$

$$S_{\overline{10}|} = \frac{0.6680923}{0.0525}$$

$$K = 300 S_{\overline{10}|} = \frac{2004276.9}{525} = 3817.67 \text{ 元}$$

簡單年金一元繼續支付 n 年之現值，通常以 $a_{\overline{n}|}$ 表之。年金現值為各期年金在年金時期初之總值，而年金終值乃其在年金時期末之總值，故設年金時期為 n 年，投資利率為 i ，則以 $(1+i)^{-n}$ 乘年金終值，即得年金現值，即：

$$a_{\overline{n}|} = (1+i)^{-n} S_{\overline{n}|} = (1+i)^{-n} \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$\therefore a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i} \dots\dots\dots (5)$$

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之現值。

i 實利率。

n 年金時期。

$$v = \frac{1}{1+i}$$

$a_{\overline{n}|}$ 為年金一元之現值，若年金額為 R 元，則以 R 乘 $a_{\overline{n}|}$ ，即得年金 R 元之年金現值

$$A = R a_{\overline{n}|} \dots\dots\dots (6)$$

R 年金額。

A 年金額 R 元之年金現值。

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之現值。

若每年複利不止一次，則公式 (5) 中之實利率，可易以虛利率，而得公式如下：

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1} \dots\dots\dots (7)$$

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之現值。

n 年金時期。

j 虛利率。

m 每年複利次數。

$$\text{但 } a_{\overline{nm}|} @ \frac{j}{m} = \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm}}{\frac{j}{m}}$$

$$S_{\overline{m}|} @ \frac{j}{m} = \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}{\frac{j}{m}}$$

故 $a_{\overline{n}|}$ 亦可自下式求得：

$$a_{\overline{n}|} @ j = \frac{a_{\overline{nm}|} @ \frac{j}{m}}{S_{\overline{m}|} @ \frac{j}{m}} \dots \dots \dots (8)$$

$a_{\overline{n}|} @ j$ 簡單年金一元繼續支付 n 年依虛利率 j 投資之現值。

$a_{\overline{nm}|} @ \frac{j}{m}$ 簡單年金一元繼續支付 nm 年依實利率 $\frac{j}{m}$ 投資之現值。

$S_{\overline{m}|} @ \frac{j}{m}$ 簡單年金一元繼續支付 m 年依實利率 $\frac{j}{m}$ 投資之終值。

依公式(5)可製年金現值表(表七),故實利率若為普通利率,則可應用年金現值表,檢查年金一元之現值

(例二) 年金五百元, 年金時期十年, 求年金現值!

a) 實利率五釐;

b) 虛利率五釐, 每年複利四次;

c) 實利率五釐二毫

a) 查年金現值表, 得:

$$a_{\overline{10}|} @ 5\% = 7.72173493$$

$$A = 500 a_{\overline{10}|} = 3860.87 \text{ 元}$$

b) 應用公式 (7), 得:

$$a_{\overline{10}|} = \frac{1 - 1.0125^{-40}}{1.0125^4 - 1}$$

查複利現值表與複利終值表, 得:

$$1.0125^{-40} = 0.60841334$$

$$1.0125^4 = 1.05094534$$

代入上式, 得:

$$a_{\overline{10}|} = \frac{0.39158666}{0.05094534}$$

$$A = 500 a_{\overline{10}|} = \frac{19579333000}{5094534} = 3843.20 \text{ 元}$$

此題亦可應用公式 (8) 求得。

$$a_{10} @ 5\% = \frac{a_{\overline{40}|} @ 1\frac{1}{4}\%}{s_{\overline{4}|} @ 1\frac{1}{4}\%} = \frac{31.32693316}{4.07562695}$$

$$A = 500 a_{\overline{10}|} = \frac{15663.46658}{4.07562695} = 3843.20 \text{ 元}$$

c) 應用公式 (5), 得:

$$a_{\overline{10}|} = \frac{1 - 1.052^{-10}}{0.052}$$

令

$$x = 1.052^{-10}$$

$$\log x = -10 \log 1.052 = -10 \times 0.022016$$

$$= \bar{1}.77984$$

$$x = 0.6023375$$

$$a_{\bar{10}} = \frac{0.3976625}{0.052}$$

$$A = 500 a_{\bar{10}} = \frac{198831.25}{52} = 3823.68 \text{ 元}$$

若年金之支付,不在每年之末而在每年之初,則每年初支付之年金一元,至年末已為 $(1+i)$ 元 (i 為實利率),故期初付年金一元,實與期末付年金 $(1+i)$ 元相等. 期初付年金之終值與現值,可自下列各公式求得:

(甲) 每年複利一次

$$S'_{\bar{n}} = S_{\bar{n+1}} - 1 \dots\dots\dots (9)$$

$$a'_{\bar{n}} = a_{\bar{n-1}} + 1 \dots\dots\dots (10)$$

(乙) 每年複利 m 次

$$S'_{\bar{n}} @ j = \frac{S_{\overline{m(n+1)}} @ \frac{j}{m}}{S_m @ \frac{j}{m}} - 1 \dots\dots\dots (11)$$

$$a'_{\bar{n}} @ j = \frac{a_{\overline{m(n-1)}} @ \frac{j}{m}}{S_{\overline{m}} @ \frac{j}{m}} + 1 \dots\dots\dots (12)$$

$S'_{\bar{n}}$ 期初付簡單年金一元繼續支付 n 年之終值.

$S_{\bar{n+1}}$ 期末付簡單年金一元繼續支付 $n+1$ 年之終值.

- $a'_{\overline{n}|}$ 期初付簡單年金一元繼續支付 n 年之終值。
- $a_{\overline{n-1}|}$ 期末付簡單年金一元繼續支付 $n-1$ 年之現值。
- $S'_{\overline{n}|} @ j$ 期初付簡單年金一元繼續支付 n 年依虛利率 j 投資之終值。
- $S_{\overline{m(n+1)}|} @ \frac{j}{m}$ 期末付簡單年金一元繼續支付 $m(n+1)$ 年依實利率 $\frac{j}{m}$ 投資之終值。
- $S_{\overline{m}|} @ \frac{j}{m}$ 期末付簡單年金一元繼續支付 m 年依實利率 $\frac{j}{m}$ 投資之終值。
- $a'_{\overline{n}|} @ j$ 期初付簡單年金一元繼續支付 n 年依虛利率 j 投資之現值。
- $a_{\overline{m(n-1)}|} @ \frac{j}{m}$ 期末付簡單年金一元繼續支付 $m(n-1)$ 年依實利率 $\frac{j}{m}$ 投資之現值。

$$(\text{證}) \quad S'_{\overline{n}|} = (1+i) S_{\overline{n}|} = (1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - \frac{i}{i}$$

$$\therefore S'_{\overline{n}|} = S_{\overline{n+1}|} - 1$$

$$a'_{\overline{n}|} = (1+i) a_{\overline{n}|} = (1+i) \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{1 - (1+i)^{-(n+1)}}{i} + \frac{i}{i}$$

$$\therefore a'_{\overline{n}|} = a_{\overline{n+1}|} + 1$$

若每年複利不止一次，則：

$$S'_{\overline{n}|} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m \cdot S_{\overline{n}|} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m(n+1)} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1} - \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}$$

$$\therefore S'_n @ j = \frac{S_{m(n+1)} @ \frac{j}{m}}{S_m @ \frac{j}{m}} - 1$$

$$a'_{\overline{n}|} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m a_n = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}$$

$$= \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m(n-1)}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1} + \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1}$$

$$\therefore a'_{\overline{n}|} @ j = \frac{a_{\overline{m(n-1)}|} @ \frac{j}{m}}{S_m @ \frac{j}{m}} + 1$$

(例三) 期初付年金一百元, 年金時期十五年, 求年金終值與年金現值!

a) 實利率四釐;

b) 虛利率四釐 每年複利二次。

a) 應用公式(9), 得:

$$S'_{\overline{15}|} = S_{\overline{16}|} - 1 = 21.8453114 - 1 = 20.82453114$$

$$K = 100 S'_{\overline{15}|} = 2082.45 \text{ 元}$$

應用公式(10), 得:

$$a'_{\overline{15}|} = a_{\overline{14}|} + 1 = 10.56312293 + 1 = 11.56312293$$

$$A = 100 a'_{\overline{15}|} = 1156.31 \text{ 元}$$

b) 應用公式(11), 得:

$$S'_{15} @ 4\% = \frac{S'_{32} @ 2\%}{S'_2 @ 2\%} - 1 = \frac{44.22702961}{2.02} - 1$$

$$= \frac{42.20702961}{2.02}$$

$$K = 100 S'_{15} = \frac{4220.702961}{2.02} = 2089.46 \text{ 元}$$

應用公式 (12), 得:

$$a'_{15} @ 4\% = \frac{a_{28} @ 2\%}{S'_2 @ 2\%} + 1$$

$$= \frac{21.28127236}{2.02} + 1 = \frac{23.30127236}{2.02}$$

$$A = 100 a'_{15} = \frac{2330.127236}{2.02} = 1153.53 \text{ 元}$$

簡單年金一元, 延期 m 年, 以後繼續支付 n 年之終值與現值, 通常以 $m | S_{\overline{n}|}$ 與 $m | a_{\overline{n}|}$ 表之, 延期有限年金之終值, 與延期無關, 故與普通有限年金之終值相同, 至其現值則不然, 其數值之大小, 隨延期之久暫而異, 延期年數愈長, 則年金現值愈小, 延期年數愈短, 則年金現值愈大, 設在延期內亦按期支付年金, 則在此延期內所支付年金之現值, 與延期有限年金之現值相加, 即得普通有限年金 $(m+n)$ 年之現值, 故

$$m | a_{\overline{n}|} + a_{\overline{m}|} = a_{\overline{m+n}|}$$

$$\therefore m | a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|} \dots \dots \dots (13)$$

$m | a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元延期 m 年以後繼續支付 n 年之現值.

$a_{\overline{m+n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 $m+n$ 年之現值.

$a_{\overline{m}|}$ 簡單年金一元繼續支付 m 年之現值.

永續年金之支付，無終止之期，故不能計算終值，至其現值則可求得其極限。永續年金一元之現值通常以 a_{∞} 表之，其數值可自下式求得：

$$a_{\infty} = \frac{1}{i} \dots\dots\dots(14)$$

a_{∞} 永續年金一元之現值。

i 實利率。

$$\begin{aligned} \text{(證)} \quad a_{\infty} &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-v^n}{i} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = \frac{1}{i} \end{aligned}$$

延期 m 年，永續年金一元之現值，通常以 $m|a_{\infty}$ 表之，其數值可自下式求得：

$$m|a_{\infty} = \frac{v^m}{i} \dots\dots\dots(15)$$

$m|a_{\infty}$ 延期 m 年永續年金一元之現值。

m 延期年數。

i 實利率

$$v = \frac{1}{1+i}$$

$$\text{(證)} \quad m|a_{\infty} = v^m a_{\infty}$$

$$\text{但} \quad a_{\infty} = \frac{1}{i}$$

$$\therefore m|a_{\infty} = \frac{v^m}{i}$$

(例四) 年金二百元, 實利率五釐, 求年金現值!

a) 延期十年, 以後繼續支付二十年;

b) 延期十年, 以後永遠繼續支付;

c) 永遠繼續支付.

a) 應用公式 (13), 得:

$$10 | a_{20} = a_{30} - a_{10} = 15.37245103$$

$$- 7.72173493 = 7.6507161$$

$$A = 200 \cdot 10 | a_{20} = 200 \times 7.6507161$$

$$= 1530.14 \text{ 元}$$

b) 應用公式 (15), 得:

$$10 | a_{\infty} = \frac{v^{10}}{0.05} = 20 \times 0.61391325 = 12.278265$$

$$A = 200 \times 10 | a_{\infty} = 200 \times 12.278265 = 2455.65 \text{ 元}$$

c) 應用公式 (14), 得:

$$a_{\infty} = \frac{1}{0.05} = 20$$

$$A = 200 \times a_{\infty} = 200 \times 20 = 4000 \text{ 元}$$

若已知年金額, 年金終值, 與利率, 則年金時期可自下列公式之一求得:

$$n = \frac{\log(Ki + R) - \log R}{\log(1+i)} \dots\dots\dots (16)$$

$$n = \frac{\log \left[K \left(1 + \frac{j}{m} \right)^m - K + R \right] - \log R}{m \log \left(1 + \frac{j}{m} \right)} \dots\dots\dots (17)$$

n 年金時期。

K 年金終值。

R 年金額。

i 實利率。

j 虛利率。

m 每年複利次數。

$$(證) \quad K = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{Ki}{R} = (1+i)^n - 1$$

$$\frac{Ki+R}{R} = (1+i)^n$$

$$\log(Ki+R) - \log R = n \log(1+i)$$

$$\therefore n = \frac{\log(Ki+R) - \log R}{\log(1+i)}$$

以虛利率代實利率，則得：

$$n = \frac{\log \left[K \left(1 + \frac{j}{m} \right)^m - K + R \right] - \log R}{m \log \left(1 + \frac{j}{m} \right)}$$

(例五) 年金五百元，問至少若干年後，方可得一萬元以上之終值？

a) 實利率七釐；

b) 虛利率七釐，每年複利二次。

a) 應用公式(16)，得：

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{\log(700+500) - \log 500}{\log 1.07} = \frac{3.079181 - 2.698970}{0.029384} \\
 &= \frac{0.380211}{0.029384} = 12.94 \text{ 年}
 \end{aligned}$$

b) 應用公式 (17), 得:

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{\log(10000 \times 1.035^2 - 10000 + 500) - \log 500}{2 \log 1.035} \\
 &= \frac{\log 1212.25 - \log 500}{2 \log 1.035} = \frac{\log 2.4245}{2 \log 1.035} \\
 &= \frac{0.3846225}{0.029880} = 12.87 \text{ 年}
 \end{aligned}$$

若已知年金額, 年金現值, 與利率, 則年金時期可自下列公式之一求得:

$$n = \frac{\log R - \log(R - A i)}{\log(1 + i)} \dots\dots\dots (18)$$

$$n = \frac{\log R - \log \left[R + A - A \left(1 + \frac{j}{m} \right)^m \right]}{m \log \left(1 + \frac{j}{m} \right)} \dots\dots\dots (19)$$

n 年金時期.

R 年金額.

A 年金現值.

i 實利率.

j 虛利率.

m 每年複利次數.

$$(\text{證}) \quad A = R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$\begin{aligned} \frac{A i}{R} &= 1 - (1+i)^{-n} \\ (1+i)^{-n} &= \frac{R - A i}{R} = -n \log(1+i) \\ &= \log(R - A i) - \log R \\ \therefore n &= \frac{\log R - \log(R - A i)}{\log(1+i)} \end{aligned}$$

以虛利率代實利率，則得：

$$n = \frac{\log R - \log \left[R + A - A \left(1 + \frac{j}{m} \right)^m \right]}{m \log \left(1 + \frac{j}{m} \right)}$$

(例六) 年金額一千元，年金現值一萬元求年金時期！

a) 實利率六釐，

b) 虛利率六釐，每年複利二次。

a) 應用公式 (18)，得：

$$\begin{aligned} n &= \frac{\log 1000 - \log 1000 - 600}{\log 1.06} = \frac{3 - 2.60206}{0.025306} \\ &= \frac{0.39794}{0.025306} = 15.73 \text{ 年} \end{aligned}$$

b) 應用公式 (19)，得：

$$\begin{aligned} n &= \frac{\log 1000 - \log(1000 + 10000 - 10000 \times 1.03^2)}{2 \log 1.03} \\ &= \frac{3 - \log 391}{2 \log 1.03} = \frac{3 - 2.592177}{2 \times 0.012837} \\ &= \frac{0.407823}{0.025674} = 15.88 \text{ 年} \end{aligned}$$

若欲求年金額，則可應用公式(2)或公式(6)。

(例七) 某甲欲於十年末積洋一萬元，問每年末須存洋若干元於銀行？(銀行規定年利率七釐，每年複利一次)

應用公式(2)，得：

$$10000 = RS_{10}$$

$$R = \frac{10000}{S_{10}} = \frac{10000}{13.81644796} = 723.78 \text{ 元}$$

(例八) 某甲以洋一萬元存入銀行，欲於以後十年間每年末自銀行取得年金，求此年金額！(銀行規定年利率七釐，每年複利一次)

應用公式(6)，得：

$$10000 = Ra_{10}$$

$$R = \frac{10000}{a_{10}} = \frac{10000}{7.02358154} = 1423.78 \text{ 元}$$

以上兩題中 S_n 與 a_n 均在分母，故計算稍繁，欲便計算可先製就 $\frac{1}{a_n}$ 表與 $\frac{1}{S_n}$ 表，則除法可變為乘法，前者名曰年賦金表(表七)(其名稱之來源參看第五編)，後者則亦可自年賦金表化出，不必另製一表，蓋 $\frac{1}{a_n}$ 與 $\frac{1}{S_n}$ 有下列之關係：

$$\frac{1}{S_n} = \frac{1}{a_n} - i \dots \dots \dots (20)$$

a_n 簡單年金一元繼續支付 n 年之現值。

S_n 簡單年金一元繼續支付 n 年之終值。

i 實利率。

$$\begin{aligned}
 \text{(證)} \quad \frac{1}{a_n} - \frac{1}{S_n} &= \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} - \frac{i}{(1+i)^n - 1} \\
 &= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \frac{i}{(1+i)^n - 1} = i \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n - 1}
 \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \frac{1}{a_n} - \frac{1}{S_n} = i$$

$$\therefore \frac{1}{S_n} = \frac{1}{a_n} - i$$

若應用年賦金表，則以上兩題可解答如下：

$$\begin{aligned}
 \text{(例七)} \quad R &= 10000 \frac{1}{S_{10}^i} = 10000 \left(\frac{1}{a_{10}^i} - 0.07 \right) \\
 &= 10000 \times (0.14237750 - 0.07) = 723.78 \text{ 元}
 \end{aligned}$$

$$\text{(例八)} \quad R = 10000 \frac{1}{a_{10}^i} = 10000 \times 0.1423775 = 1423.78 \text{ 元}$$

若以一定現值，依一定投資利率，購買一定年金額，則由公式計算而得之年金時期不能適為整數，故通常有一次年金額，須小於其他各次之年金額，此較小之年金額，或於最後一期支付，或於最初一期支付，其數值可自下列二公式求得：

$$L = A u^n - R(S_n^i - 1) \dots\dots\dots (21)$$

$$F = A u - R a_{n-1}^i \dots\dots\dots (22)$$

L 最後一年支付之零星年金額。

F 最初一年支付之零星年金額。

R 每年年金額。

A 年金現值。

S_n 簡單年金一元繼續支付 n 年之終值。

$a_{\overline{n-1}|}$ 簡單年金一元繼續支付 $n-1$ 年之現值。

n 年金時期。

i 實利率。

$$u=1+i$$

(證)

$$Aw^n = Ru S_{\overline{n-1}|} + L$$

$$Aw^n = R(S_{\overline{n}|} - 1) + L$$

$$\therefore L = Aw^n - R(S_{\overline{n}|} - 1)$$

$$A = F \frac{1}{u} + Ra_{\overline{n-1}|} \frac{1}{u}$$

$$Au = F + Ra_{\overline{n-1}|}$$

$$\therefore F = Au - Ra_{\overline{n-1}|}$$

(例九) 某甲以洋一萬元, 購買年金若干年, 年金額 1000 元, 投資利率六釐, 求零星年金額!

a) 零星年金額於最初一年收受;

b) 零星年金額於最後一年收受。

$$A = Ra_{\overline{n}|}$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{A}{R} \frac{10000}{1000} = 10$$

查年金現值表得:

$$n=16$$

a) 應用公式 (22), 得:

$$\begin{aligned} F &= 10000 \times 1.06 - 1000 a_{\overline{15}|} \\ &= 10600 - 9712.25 = 887.75 \text{ 元} \end{aligned}$$

b) 應用公式(21), 得:

$$\begin{aligned} L &= 10000 \times 1.06^{16} - 1000(S_{\overline{16}|} - 1) \\ &= 25403.5168 - 24672.5281 \\ &= 730.99 \text{ 元} \end{aligned}$$

F 與 L 有一定之關係, 故其演算可用下式稽核之:

$$R - L = u^{n-1}(R - F)$$

代以本題中數字, 則得:

$$\begin{aligned} R - L &= 1000 - 730.99 = 269.01 \\ u^{n-1}(R - F) &= 1.06^{15} \times 112.25 \\ &= 2.39655819 \times 112.25 = 269.01 \end{aligned}$$

年金問題中關於利率之計算, 通常須應用插補法, 將詳述於第六編; 但若已知年金終值, 年金現值與年金額, 則應用公式(20), 即可計算利率。

(例十) 已知年金終值為 12577.89 元, 年金現值為 7721.73 元, 年金額 1000 元, 求實利率:

$$\begin{aligned} 12577.89 &= 1000 S_{\overline{n}|} \\ \frac{1}{S_{\overline{n}|}} &= \frac{1000}{12577.89} = 0.0795047 \\ 7721.73 &= 1000 a_{\overline{n}|} \\ \frac{1}{a_{\overline{n}|}} &= \frac{1000}{7721.73} = 0.1295047 \end{aligned}$$

代入公式(20), 則得

$$i = 0.1295047 - 0.0795047 = 0.05$$

習 題 十 三

1. 求下列各題中之年金終值!

年金額	期 初 付 或 期 末 付	年金時期	年 利 率	每年複利次數	年金終值
a) \$ 200	期 末 付	10 年	6 %	1 次	
b) 200	期 末 付	10 年	6 %	2 次	
c) 200	期 末 付	10 年	6 %	12 次	
d) 200	期 末 付	10 年	5.4%	1 次	
e) 400	期 初 付	1 年	5 %	1 次	
f) 400	期 初 付	15 年	5 %	2 次	
g) 380	期 末 付	20 年	3 %	2 次	
h) 450	期 末 付	25 年	4½%	1 次	
i) 560	期 末 付	30 年	5 %	4 次	
j) 640	期 末 付	35 年	12 %	1 次	

2. 求下列各題中之年金現值!

年金額	期 初 付 或 期 末 付	延 期 年 數	年 金 時 期	年 利 率	每 年 複 利 次 數	年 金 現 值
a) \$ 300	期 末 付	0 年	15 年	5 %	1 次	
b) 300	期 末 付	0 年	15 年	5.4%	1 次	
c) 300	期 末 付	0 年	15 年	5 %	4 次	
d) 300	期 末 付	0 年	15 年	5 %	12 次	
e) 500	期 初 付	0 年	20 年	7 %	1 次	
f) 500	期 初 付	0 年	20 年	7 %	4 次	
g) 600	期 末 付	5 年	25 年	8 %	1 次	
h) 600	期 末 付	5 年	25 年	8 %	2 次	
i) 1000	期 末 付	0 年	永 續	4 %	1 次	
j) 1000	期 末 付	10 年	永 續	4 %	1 次	

3. 填寫下表中空白之處!

	年金額	年金時期	年利率	每年複利次數	年金終值	年金現值
a)		10年	5%	1次	\$ 10000	
b)		20年	6%	2次		\$ 5000
c)		30年	8%	2次	40000	
d)		15年	4%	2次	15000	
e)		10年	5%	1次		8000
f)		25年	7%	1次		7500
g)		18年	3%	1次	20000	

4. 求證:

$$a'_{\infty} = \frac{1}{d}$$

a'_{∞} 期初付永續年金一元之現值.

d 貼現率.

5. 某甲新購一屋,言定先付現洋五千元,以後十年間,每年末付洋一千元,求此屋之購價!

a) 實利率七釐;

b) 虛利率七釐,每年複利二次.

6. 某甲預計其子滿二十三歲時,將赴外國留學,出國川資及服裝費共需洋一千元,返國川資需洋五百元,留學期限四年,每年學費三千元,於每年初匯出,問某甲於其子生後,每年末須存洋若干元於銀行,以爲其子留學外國之準備?(某甲存款至第二十三次終止,以後祇支不存,銀行規定年利率七釐,每年複利一次)

7. 某甲新購一地,價值25000元,約定先付現洋5000元,以後每年末付洋3000元,不及3000元之數,於最後一期付清,故某甲最後一期付款額,較以前各期爲少,求此最後一期付款額!

a) 實利率七釐;

b) 虛利率七釐,每年複利二次.

8. 某礦估計開掘五年後始能生產,以後二十年間每年可得純益二

萬五千元，設吾人不許五年內開辦費用與生產停止後廢辦之價值，則此礦現當共值幾何？(投資利率六釐)

9. 某城一畝田每年田主可得純益七元五角，問某城一畝田當值幾何？

a) 實利率八釐；

b) 實利率一分；

c) 虛利率一分，每年複利二次

10. 某屋售價原定 10000 元，若售主允許購主先付現洋 4000 元，以後六年間，每年末付洋 1000 元，不必另付利息，問售主共讓去售價若干元？

a) 投資利率 6%；

b) 投資利率 8%。

11. 甲乙兩人每年末各以 500 元存入儲蓄銀行，甲之銀行規定年利率七釐，每年複利一次，乙之銀行規定年利率七釐，每年複利二次，問二十年後兩人在兩銀行存款額相差若干元？

12. 某甲以年金額 500 元，二十年有限年金，遺給其子，設其子欲改年金時期為十五年，則每年末可支取年金額若干元？(投資利率六釐)

13. 以年金額 500 元之永續年金，改換繼續支付二十年之期初付年金，求新年金額(投資利率六釐)！

14. 某富翁以年金額 2000 元之永續年金，平分贈給甲乙二醫院，規定甲醫院得先支用年金額之全部，俟甲醫院支盡其應得之部後，乙醫院始得支用永續年金，問乙醫院得獨自支用年金額 2000 元時，距某富翁給與遺產時若干年？(投資利率六釐)

15. 甲乙二人各以 100 元投資，甲於十五年間，每年得純益 6 元，以後盡喪其本金，乙則於最初十五年間，一無盈餘，但於其後五年間，每年得純益 6 元，並於第二十年末，以其投資事業轉讓於人，得洋 110 元，問甲乙兩人投資之結果孰優？(市場利率六釐)

16. 求證：

$$m \cdot a_n = i^m a_{\bar{n}|}$$

$m \cdot a_n$ 簡單年金一元延期 m 年以後繼續支付 n 年之現值。

a_n 簡單年金一元繼續支付 n 年之現值。

i 實利率

$$v = \frac{1}{1+i}$$

17. 求簡單年金一元繼續支付 n 年在 $n+m$ 年末之終值!
18. 第一年至第十年每年年金額為 300 元, 第十一年至第二十年每年年金額為 350 元, 第二十一年至第三十年每年年金額為 400 元, 求第一年初之年金現值與第三十年末之年金終值! (投資利率六釐)
19. 第一年至第十年每年年金額為 300 元, 第十一年至第十五年不付年金, 第十六年至第二十五年每年年金額為 350 元, 第二十六年至第三十年不付年金, 第三十一年至第四十年每年年金額為 400 元, 求第一年初之年金現值與第四十年末之年金終值! (投資利率六釐)
20. 某甲以洋三萬元, 購買年金若干年, 年金額 2000 元, 投資利率五釐, 求零星年金額!
- a) 零星年金額於最初一年收受;
- b) 零星年金額於最後一年收受。
21. 已知年金現值為 1359.03 元, 年金終值為 2977.81 元, 年金額為 100 元, 求實利率!
22. 某甲以洋一萬元, 購買年金十五年, 後十年每年年金額較前五年每年年金額少 100 元, 投資利率六釐, 求前五年每年年金額!
23. 某甲以洋 11862.62 元, 購買年金三十年, 第二期(第十一年至第二十年)每年年金額為第一期(第一年至第十年)每年年金額四分之三, 第三期(第二十一年至第三十年)每年年金額為第一期每年年金額二分之一, 投資利率 $3\frac{1}{2}\%$, 求第一期每年年金額!
24. 某森林之收益估計如下:
- 第十六年至第二十年每年可得淨利 1700 元。
- 第三十一年至第三十五年每年可得淨利 47.0 元。
- 第四十六年至第五十年每年可得淨利 4700 元。
- 第六十一年至第六十五年每年可得淨利 4700 元。

第七十六年至第八十年每年可得淨利 4700 元。

設投資者欲得實利率四釐之收益，則須以若干元購買此森林？

25. 前題中若森林之收益估計改作如下：

第十六年至第二十年每年可得淨利 4700 元。

第三十一年至第三十五年每年可得淨利 4800 元。

第四十六年至第五十年每年可得淨利 4900 元。

第六十一年至第六十五年每年可得淨利 5000 元。

第七十六年至第八十年每年可得淨利 5100 元。

則森林之購價當為幾何？

第二節 複雜年金

每年年金總額一元，分 p 次支付，繼續支付 n 年之終值，通常以 $S_{\ddot{n}}^{(p)}$ 表之，其數值可自下之公式求得：

$$S_{\ddot{n}}^{(p)} = \frac{u^n - 1}{p(u^{\frac{1}{p}} - 1)} \dots\dots\dots (23)$$

$S_{\ddot{n}}^{(p)}$ 每年年金總額一元分 p 次支付繼續支付 n 年之終值。

n 年金時期。

p 每年支付年金次數。

$u = 1 + i$

i 實利率。

(證) 每年年金總額一元，分 p 次支付，則每次僅付 $\frac{1}{p}$ 元。

年金支付期 與最後支付期間 每年年金額 $\frac{1}{p}$ 元至最
之末相隔之年數 後支付期間末之終值

第 $\frac{1}{p}$ 年末 $n - \frac{1}{p}$ $\frac{1}{p} (1+i)^{n-\frac{1}{p}}$

第 $\frac{2}{p}$ 年末 $n - \frac{2}{p}$ $\frac{1}{p} (1+i)^{n-\frac{2}{p}}$

第 $\frac{3}{p}$ 年末	$n - \frac{3}{p}$	$\frac{1}{p} (1+i)^{n-\frac{3}{p}}$
.....
第 $(n - \frac{2}{p})$ 年末	$\frac{2}{p}$	$\frac{1}{p} (1+i)^{\frac{2}{p}}$
第 $(n - \frac{1}{p})$ 年末	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p} (1+i)^{\frac{1}{p}}$
第 n 年末	0	$\frac{1}{p}$

年金終值即為每期年金額終值之總和，故

$$S_{\frac{n}{p}}^{(p)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} (1+i)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p} (1+i)^{\frac{2}{p}} + \dots + \frac{1}{p} (1+i)^{n-\frac{3}{p}} \\ + \frac{1}{p} (1+i)^{n-\frac{2}{p}} + \frac{1}{p} (1+i)^{n-\frac{1}{p}}$$

上式之右邊為一等比級數，其首項為 $\frac{1}{p}$ ，公比為 $(1+i)^{\frac{1}{p}}$ ，

項數為 np ，應用第三編公式(6)，得：

$$S_{\frac{n}{p}}^{(p)} = \frac{\frac{1}{p} [(1+i)^n - 1]}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}$$

$$\therefore S_{\frac{n}{p}}^{(p)} = \frac{w^n - 1}{p(w^{\frac{1}{p}} - 1)}$$

令 $j_{(p)} = p(w^{\frac{1}{p}} - 1)$

則 $S_{\frac{n}{p}}^{(p)} = \frac{w^n - 1}{j_{(p)}} = \frac{i}{j_{(p)}} \frac{w^n - 1}{i}$

$$\therefore S_{\frac{n}{p}}^{(p)} = \frac{i}{j_{(p)}} S_{\frac{n}{p}} \dots \dots \dots (24)$$

$S_n^{(p)}$ 每年年金總額一元分 p 次支付繼續支付 n 年之終值。

S_n 簡單年金一元繼續支付 n 年之終值。

i 實利率。

$$j_{(p)} = p \left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 \right]$$

p 每年支付年金次數。

$S_n^{(p)}$ 可查年金終值表， $\frac{i}{j_{(p)}}$ 亦可專製一表(表十一)，以備檢查之用。

在公式(23)中，若 $n=1$ ，則

$$S_1^{(p)} = \frac{1+i-1}{j_{(p)}} = \frac{i}{j_{(p)}}$$

故 $\frac{i}{j_{(p)}}$ 即為每年年金總額一元，分 p 次支付，在一年末之終值。

$S_n^{(p)}$ 為每年年金總額一元之終值，若每年年金總額為 R 元，則以 R 乘 $S_n^{(p)}$ ，即得每年年金總額 R 元之年金終值。即

$$K = R S_n^{(p)} \dots\dots\dots(25)$$

R 每年年金總額。

K 每年年金總額 R 元之年金終值。

$S_n^{(p)}$ 每年年金總額一元分 p 次支付繼續支付 n 年之終值。

若每年複利不止一次，則公式(23)中之實利率，可易以虛利率，而得公式如下：

$$S_n^{(p)} = \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{p \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{n}{p}} - 1 \right]} \dots\dots\dots(26)$$

$S_n^{(p)}$ 每年年金總額一元分 p 次支付繼續支付 n 年之終值。

p 每年支付年金次數。

j 虛利率。

m 每年複利次數。

$$\begin{aligned} \text{但 } S_{n,m} @ \frac{j}{m} &= \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{\frac{j}{m}} \\ &= \frac{\frac{j}{m}}{j_{\left(\frac{p}{m}\right)} @ \frac{j}{m}} = \frac{\frac{j}{m}}{\frac{p}{m} \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right]} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{p \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right]} = \frac{1}{m} \frac{\frac{j}{m}}{\frac{p}{m} \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right]} \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{\frac{j}{m}} \\ \therefore S_n^{(p)} @ j &= \frac{1}{m} \frac{\frac{j}{m}}{j_{\left(\frac{p}{m}\right)} @ \frac{j}{m}} \left(S_{n,m} @ \frac{j}{m} \right) \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

$S_n^{(p)} @ j$ 每年年金總額一元分 p 次支付繼續支付 n 年依虛利率 j 投資之終值。

$S_{nm} @ \frac{j}{m}$ 簡單年金一元繼續支付 nm 年依實利率 $\frac{j}{m}$ 投資之終值。

j 虛利率。

m 每年複利次數。

$$j_{\left(\frac{p}{m}\right)} @ \frac{j}{m} = \frac{p}{m} \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right]$$

p 每年支付年金次數。

若 $m = p$, 則

$$S_n^{(p)} @ j = \frac{S_{nm} @ \frac{j}{m}}{\frac{j}{m}} = \frac{S_{nm} @ \frac{j}{m}}{p \frac{j}{m} (j+1) @ \frac{j}{m}}$$

$$\therefore S_n^{(p)} @ j = \frac{1}{p} S_{nm} @ \frac{j}{m} \dots\dots\dots(28)$$

$S_n^{(p)} @ j$ 每年年金總額一元分 p 次支付繼續支付 n 年依虛利率 j 投資之終值。

p 每年支付年金次數。

$S_{nm} @ \frac{j}{m}$ 簡單年金一元繼續支付 nm 年依實利率 $\frac{j}{m}$ 投資之終值。

故若每年支付年金次數與複利次數相等，則複雜年金可化為簡單年金。

(例一) 每年年金總額 500 元，求十年末之年金終值！

- 實利率四釐，每年支付年金二次；
 - 實利率四釐，每年支付年金二十四次；
 - 虛利率四釐，每年支付年金四次，複利四次；
 - 虛利率四釐，每年支付年金二次，複利四次；
 - 虛利率四釐，每年支付年金四次，複利二次。
- α) 應用公式 (24)，得：

$$S_{10}^{(2)} = \frac{0.04}{j^{(2)}} S_{10} = 1.00990195 \times 12.00610712$$

$$\begin{aligned} K &= 500 S_{10}^{(2)} = 500 \times 1.00990195 \times 12.00610712 \\ &= 504.950975 \times 12.00610712 = 6062.50 \text{ 元} \end{aligned}$$

b) 應用公式 (23), 得:

$$S_{10}^{(2)} = \frac{1.04^{10} - 1}{24(1.04^{10} - 1)}$$

查複利終值表, 得:

$$1.04^{10} = 1.48024428$$

令

$$x = 1.04^{10}$$

$$\log x = \frac{1}{24} \log 1.04 = \frac{1}{24} \times 0.017033 = 0.000709708$$

$$x = 1.0016353$$

$$K = 500 S_{10}^{(2)} = 500 \times \frac{0.48024428}{24 \times 0.0016353} = \frac{240.12214}{0.0392472}$$

$$= 6118.20 \text{ 元}$$

c) 應用公式 (28), 得:

$$S_{10}^{(4)} @ 4\% = \frac{1}{4} S_{40} @ 1\%$$

查年金終值表, 得:

$$S_{40} @ 1\% = 48.88637336$$

$$K = 500 S_{10}^{(4)} = \frac{500}{4} \times 48.88637336$$

$$= 6110.80 \text{ 元}$$

d) 應用公式 (27), 得:

$$S_{10}^{(2)} @ 4\% = \frac{1}{4} \cdot \frac{0.01}{j^{(4)} @ 1\%} (S_{40} @ 1\%)$$

$$= \frac{1}{4} \times 0.99502488 \times 48.88637336$$

$$\begin{aligned}
 K &= 500 S_{10}^{(2)} = \frac{500}{4} \times 0.99502488 \times 48.88637336 \\
 &= 0.99502488 \times 6110.79667 = 6080.39 \text{ 元}
 \end{aligned}$$

ε) 應用公式 (27), 得:

$$\begin{aligned}
 S_{10}^{(4)} @ 4\% &= \frac{1}{2} \cdot \frac{0.02}{j_{(4)} @ 2\%} (S_{20} @ 2\%) \\
 &= \frac{1}{2} \times 1.00497525 \times 24.2973698
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K &= 500 S_{10}^{(4)} = \frac{500}{2} \times 1.00497525 \times 24.2973698 \\
 &= 1.00497525 \times 6074.34245 = 6104.56 \text{ 元}
 \end{aligned}$$

每年年金總額一元, 分 p 次支付, 繼續支付 n 年之現值. 通常以 $a_n^{(p)}$ 表之. 年金現值為各期年金在年金時期初之總值而年金終值乃其在年金時期末之總值, 故設年金時期為 n 年, 投資利率為 i , 則以 $(1+i)^{-n}$ 乘年金終值, 即得年金現值, 即:

$$\begin{aligned}
 a_n^{(p)} &= (1+i)^{-n} S_n^{(p)} = (1+i)^{-n} \frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]} \\
 \therefore a_n^{(p)} &= \frac{1 - v^n}{p(w^{\frac{1}{p}} - 1)} \dots\dots\dots(29)
 \end{aligned}$$

或即
$$a_n^{(p)} = \frac{i}{j^{(p)}} a_n \dots\dots\dots(30)$$

$a_n^{(p)}$ 每年年金總額一元, 分 p 次支付, 繼續支付 n 年之現值.

a_n 簡單年金一元, 繼續支付 n 年之現值.

n 年金時期.

p 每年支付年金次數.

$$u = 1 + i$$

$$v = \frac{1}{1+i}$$

i 實利率.

$$i^{(p)} = p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]$$

$a_{\overline{n}|}^{(p)}$ 爲每年年金總額一元之現值, 若每年年金總額爲 R 元, 則以 R 乘 $a_{\overline{n}|}^{(p)}$, 即得每年年金總額 R 元之年金現值, 即

$$A = R a_{\overline{n}|}^{(p)} \dots\dots\dots (31)$$

R 每年年金總額.

A 每年年金總額 R 元之年金現值.

$a_{\overline{n}|}^{(p)}$ 每年年金總額一元, 分 p 次支付, 繼續支付 n 年之現值.

若每年複利不止一次, 則公式 (29) 中之實利率, 可易以虛利率, 而得公式如下:

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm}}{p \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^p - 1 \right]} \dots\dots\dots (32)$$

$a_{\overline{n}|}^{(p)}$ 每年年金總額一元, 分 p 次支付, 繼續支付 n 年之現值.

n 年金時期.

j 虛利率.

m 每年複利次數.

p 每年支付年金次數.

但

$$a_{\overline{n}|} @ \frac{j}{m} = \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm}}{\frac{j}{m}}$$

$$\frac{\frac{j}{m}}{j_{\left(\frac{p}{m}\right)} @ \frac{j}{m}} = \frac{\frac{j}{m}}{\frac{p}{m} \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right]}$$

$$\frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm}}{p \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right]} = \frac{1}{m} \frac{\frac{j}{m}}{\frac{p}{m} \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right]} \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm}}{\frac{j}{m}}$$

$$\therefore a_{\overline{n}|}^{(p)} @ j = \frac{1}{m} \cdot \frac{\frac{j}{m}}{j_{\left(\frac{p}{m}\right)} @ \frac{j}{m}} \left(a_{\overline{nm}|} @ \frac{j}{m} \right) \dots \dots \dots (33)$$

$a_{\overline{n}|}^{(p)} @ j$ 每年年金總額一元，分 p 次支付，繼續支付 n 年，依虛利率 j 投資之現值。

$a_{\overline{nm}|} @ \frac{j}{m}$ 簡單年金一元，繼續支付 nm 年，依實利率 $\frac{j}{m}$ 投資之現值。

j 虛利率。

m 每年複利次數。

p 每年支付年金次數。

$$j_{\left(\frac{p}{m}\right)} @ \frac{j}{m} = \frac{p}{m} \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1 \right]$$

若 $m = p$ ，則：

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} @ j = \frac{1}{p} \frac{\frac{j}{m}}{j_{\left(\frac{p}{m}\right)} @ \frac{j}{m}} \left(a_{\overline{nm}|} @ \frac{j}{m} \right) = \frac{1}{p} \frac{\frac{j}{m}}{\frac{j}{m}} \left(a_{\overline{nm}|} @ \frac{j}{m} \right)$$

$$\therefore a_{\overline{n}|}^{(p)} @ j = \frac{1}{p} a_{\overline{nm}|} @ \frac{j}{m} \dots \dots \dots (34)$$

$a_{\overline{n}|}^{(p)} @ j$ 每年年金總額一元，分 p 次支付，繼續支付 n 年，依虛利率 j 投資之現值。

p 每年支付年金次數.

$a_{nm} @ \frac{j}{m}$ 簡單年金一元,繼續支付 n 年,依實利率 $\frac{j}{m}$ 投資之現值.

故若每年支付年金次數與複利次數相等,則複雜年金可化為簡單年金.

(例二) 每年年金總額 600 元,年金時期十五年,求年金現值.

- a) 實利率五釐,每年支付年金四次;
 b) 實利率五釐,每年支付年金二十四次;
 c) 虛利率五釐,每年支付年金四次,複利四次;
 d) 虛利率五釐,每年支付年金二次,複利四次;
 e) 虛利率五釐,每年支付年金四次,複利二次.
 a) 應用公式 (30), 得:

$$a_{15}^{(4)} = \frac{0.05}{j^{(4)}} a_{15} = 1.01855942 \times 10.37965804$$

$$\begin{aligned} A &= 600 a_{15}^{(4)} = 600 \times 1.01855942 \times 10.37965804 \\ &= 611.135652 \times 10.37965804 = 6343.38 \text{ 元} \end{aligned}$$

b) 應用公式 (29), 得:

$$a_{15}^{(24)} = \frac{1 - 1.05^{-15}}{24(1.05^{\frac{1}{24}} - 1)}$$

查複利現值表, 得:

$$1.05^{-15} = 0.4810171$$

令

$$x = 1.05^{\frac{1}{24}}$$

$$\log x = \frac{1}{24} \log 1.05 = \frac{1}{24} \times 0.021189 = 0.000882875$$

$$x = 1.00203435$$

$$\begin{aligned} A &= 600 a_{15}^{(4)} = \frac{600}{24} \times \frac{0.5189829}{0.00203435} = \frac{12.9745725}{0.00203435} \\ &= 6377.75 \text{ 元} \end{aligned}$$

c) 應用公式(34), 得:

$$a_{15}^{(4)} @ 5\% = \frac{1}{4} a_{60} @ 1\frac{1}{4}\% = \frac{1}{4} \times 42.03459179$$

$$A = 600 a_{15}^{(4)} = \frac{600}{4} \times 42.03459179 = 6305.19 \text{ 元}$$

d) 應用公式(33), 得:

$$a_{15}^{(2)} @ 5\% = \frac{1}{4} \frac{0.0125}{j^{(4)} @ 1\frac{1}{4}\%} \left(a_{60} @ 1\frac{1}{4}\% \right)$$

$$= \frac{1}{4} \times 0.99378882 \times 42.03459179$$

$$\begin{aligned} A &= 600 a_{15}^{(2)} = \frac{600}{4} \times 0.99378882 \times 42.03459179 \\ &= 149.068323 \times 42.03459179 = 6266.03 \text{ 元} \end{aligned}$$

e) 應用公式(33), 得:

$$a_{15}^{(4)} @ 5\% = \frac{1}{2} \frac{0.025}{j^{(2)} @ 2\frac{1}{2}\%} \left(a_{30} @ 2\frac{1}{2}\% \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 1.00621142 \times 20.93029259$$

$$\begin{aligned} A &= 600 a_{15}^{(4)} = \frac{600}{2} \times 1.00621142 \times 20.93029259 \\ &= 100621142 \times 6279.087777 = 6318.09 \text{ 元} \end{aligned}$$

期末付年金每年支付之次數愈多，其終值與現值亦愈大，然年金終值與年金現值之增加非漫無限制，即使每年支付年金次數連續增加不絕，年金終值與年金現值亦有限制。連續支付之年金，名曰連續年金 (Continuous Annuity)。每年年金總額一元繼續支付 n 年，連續年金之終值與現值，通常以 $\bar{S}_{\overline{n}|}$ 與 $\bar{a}_{\overline{n}|}$ 表之，其數值可自下列公式求得：

$$\bar{S}_{\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} S_{\overline{n}|} \dots\dots\dots (35) \text{ (證明參看附錄甲 14)}$$

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n}|} \dots\dots\dots (36) \text{ (證明參看附錄甲 14)}$$

$\bar{S}_{\overline{n}|}$ 每年年金總額一元繼續支付 n 年連續年金之終值。

$\bar{a}_{\overline{n}|}$ 每年年金總額一元繼續支付 n 年連續年金之現值。

$S_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之終值。

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之現值。

i 實利率。

δ 息力。

事實上雖無連續年金之例，然若每年支付年金次數稍多，則欲求年金終值與年金現值之近似值，可應用公式 (35) 與 (36)，蓋公式中之 $\frac{i}{\delta}$ 可預製一表，故計算較便，茲就通用利率製 $\frac{i}{\delta}$ 表於下，以便連續年金之計算。

i	δ	$\frac{i}{\delta}$
0.025	0.0246926	1.01245
0.03	0.0295588	1.01493

0.035	0.0344014	1.01740
0.04	0.0392207	1.01987
0.045	0.0440169	1.02233
0.05	0.0487902	1.02480
0.06	0.0582689	1.02971
0.07	0.0676587	1.03460
0.08	0.0769611	1.03949

(例三) 每年年金總額 1000 元, 年金時期五年, 實利率四釐, 求連續年金之現值!

應用公式 (36), 得:

$$\bar{a}_{\overline{5}|} = 1.01987 \times 4.45182233$$

$$A = 1000 \bar{a}_{\overline{5}|} = 1019.87 \times 4.45182233 = 4540.28 \text{ 元}$$

若年金之支付, 不在每期之末而在每期之初, 則每期初支付之年金 $\frac{1}{p}$ 元, 至期末已為 $\frac{1}{p} (1+i)^{\frac{1}{p}}$ 元 (i 為實利率), 故每年年金總額, 若改為期末付, 當為 $(1+i)^{\frac{1}{p}}$ 元, 換言之, 期初付每年年金總額一元, 當與期末付每年年金總額 $(1+i)^{\frac{1}{p}}$ 元相等。期初付年金終值與現值, 可自下列各公式求得:

$$S_{\overline{n}|}^{(p)'} = S_{\overline{n+\frac{1}{p}}|}^{(p)} - \frac{1}{p} \dots \dots \dots (37)$$

$$a_{\overline{n}|}^{(p)'} = a_{\overline{n-\frac{1}{p}}|}^{(p)} + \frac{1}{p} \dots \dots \dots (38)$$

$$S_{\overline{n}|}^{(p)'} = (1+i)^{\frac{1}{p}} S_{\overline{n}|} \frac{i}{j_{(p)}} \dots\dots\dots (39)$$

$$a_{\overline{n}|}^{(p)'} = (1+i)^{\frac{1}{p}} a_{\overline{n}|} \frac{i}{j_{(p)}} \dots\dots\dots (40)$$

$S_{\overline{n}|}^{(p)'}$ 期初付年金每年總額一元分 p 次支付繼續支付 n 年之終值。

$a_{\overline{n}|}^{(p)'}$ 期初付年金每年總額一元分 p 次支付繼續支付 n 年之現值。

$S_{\overline{n+\frac{1}{p}}|}^{(p)}$ 期末付年金每年總額一元分 p 次支付繼續支付 $(n+\frac{1}{p})$ 年之終值。

$a_{\overline{n-\frac{1}{p}}|}^{(p)}$ 期末付年金每年總額一元分 p 次支付繼續支付 $(n-\frac{1}{p})$ 年之現值。

$S_{\overline{n}|}$ 期末付簡單年金一元繼續支付 n 年之終值。

$a_{\overline{n}|}$ 期末付簡單年金一元繼續支付 n 年之現值。

p 每年支付年金次數。

i 實利率。

$$j_{(p)} = p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]$$

$$(證) \quad S_{\overline{n}|}^{(p)'} = (1+i)^{\frac{1}{p}} S_{\overline{n}|}^{(p)} = (1+i)^{\frac{1}{p}} \frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]}$$

$$= \frac{(1+i)^{n+\frac{1}{p}} - 1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]} - \frac{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]}$$

$$\therefore S_{\overline{n}|}^{(p)'} = S_{\overline{n+\frac{1}{p}}|}^{(p)} - \frac{1}{p}$$

$$a_{\overline{n}|}^{(p)'} = (1+i)^{\frac{1}{p}} a_{\overline{n}|}^{(p)} = (1+i)^{\frac{1}{p}} \frac{1 - (1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]}$$

$$= \frac{1 - (1+i)^{-(n-\frac{1}{p})}}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]} + \frac{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]}$$

$$\therefore a_{\overline{n}|}^{(p)} = a_{\overline{n-\frac{1}{p}}|} + \frac{1}{p}$$

$$S_{\overline{n}|}^{(p)} = (1+i)^{\frac{1}{p}} S_{\overline{n}|} = (1+i)^{\frac{1}{p}} S_{\overline{n}|} \frac{i}{j_{(p)}}$$

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = (1+i)^{\frac{1}{p}} a_{\overline{n}|} = (1+i)^{\frac{1}{p}} a_{\overline{n}|} \frac{i}{j_{(p)}}$$

若每年複利不止一次，則以上各公式中之實利率，依 $1+i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$ 之關係，可易以虛利率。

(例四) 每月初支付年金 100 元，年金時期五年，投資利率 4%，求年金終值與年金現值！

$$R = 100 \times 12 = 1200$$

應用公式 (39)，得：

$$S_{\overline{5}|}^{(12)} = 1.04^{\frac{1}{12}} \times S_{\overline{5}|} \times \frac{0.04}{j_{(12)}} = 1.00327374$$

$$\times 5.41632256 \times 1.01820351$$

$$K = 1200 S_{\overline{5}|}^{(12)} = 1200 \times 1.00327374 \times 5.41632256 \\ \times 1.01820351 = 6639.57 \text{ 元}$$

應用公式 (40)，得：

$$a_{\overline{5}|}^{(12)} = 1.04^{\frac{1}{12}} \times a_{\overline{5}|} \times \frac{0.04}{j_{(12)}} = 1.00327374 \times 4.45182233 \\ \times 1.01820351$$

$$A = 1200 a_{\overline{5}|}^{(12)} = 1200 \times 1.00327374 \times 4.45182233 \\ \times 1.01820351 = 5457.24 \text{ 元}$$

每年年金總額一元，分 p 次支付，最初延期 m 年，以後繼續支付 n 年之現值，通常以 $m|a_{\overline{n}|}^{(p)}$ 表之，其數值可自下之公式求得：

$$m|a_{\overline{n}|}^{(p)} = (a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|}) \frac{i}{j^{(p)}} \dots\dots\dots (41)$$

$m|a_{\overline{n}|}^{(p)}$ 每年年金總額一元，分 p 次支付，最初延期 m 年，以後繼續支付 n 年之現值。

$a_{\overline{m+n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 $m+n$ 年之現值。

$a_{\overline{m}|}$ 簡單年金一元繼續支付 m 年之現值。

i 實利率。

p 每年支付年金次數。

$$j^{(p)} = p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]$$

$$\begin{aligned} \text{(證)} \quad m|a_{\overline{n}|}^{(p)} &= a_{\overline{n+m}|}^{(p)} - a_{\overline{m}|}^{(p)} = a_{\overline{n+m}|} \frac{i}{j^{(p)}} - a_{\overline{m}|} \frac{i}{j^{(p)}} \\ &= (a_{\overline{n+m}|} - a_{\overline{m}|}) \frac{i}{j^{(p)}} \end{aligned}$$

(例五) 某甲現年三十五歲，欲於五十歲至七十歲間，每月末自銀行取得年金一百元，問現須以若干元存入銀行？(銀行規定實利率七釐)

應用公式(41)，得：

$$15|a_{\overline{20}|}^{(12)} = (a_{\overline{35}|} - a_{\overline{15}|}) \frac{0.07}{j_{(12)}} = (12.94767230 \\ - 9.10791401) \times 1.03169143$$

$$A = 1200 \left(15 \mid a_{\overline{20}|}^{(12)} \right) = 1200 \times 3.83975829 \times 1.03169143 \\ = 4753.73 \text{ 元}$$

若已知每年年金總額，每年支付年金次數，年金終值，與利率，則年金時期可自下列公式之一求得：

$$n = \frac{\log \left[\frac{K}{R} j_{(p)} + 1 \right]}{\log(1+i)} \dots \dots \dots (42)$$

$$n = \frac{\log \left[R + Kp \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{\frac{m}{p}} - Kp \right] - \log R}{m \log \left(1 + \frac{j}{m} \right)} \dots \dots \dots (43)$$

- n 年金時期。
 R 每年年金總額。
 K 年金終值。
 i 實利率。
 j 虛利率。
 m 每年複利次數。
 p 每年支付年金次數。
 $j_{(p)} = p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]$

(證)
$$K = R \frac{(1+i)^n - 1}{j_{(p)}}$$

$$\frac{K}{R} j_{(p)} = (1+i)^n - 1$$

$$(1+i)^n = \frac{K}{R} j_{(p)} + 1$$

$$n \log(1+i) = \log \left[\frac{K}{R} j_{(p)} + 1 \right]$$

$$\therefore n = \frac{\log \left[\frac{K}{R} i_{(n)} + 1 \right]}{\log(1+i)}$$

以虛利率易實利率，則得：

$$n = \frac{\log \frac{K j_{(n)} + R}{R}}{\log(1+i)} = \frac{\log \left[R + K p \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{\frac{n}{p}} - K p \right] - \log R}{m \log \left(1 + \frac{j}{m} \right)}$$

(例六) 每年年金總額 500 元，分四次支付，問至少若干年後，方得一萬元以上之終值？

a) 實利率七釐；

b) 虛利率七釐；每年複利二次。

a) 應用公式(42)，得：

$$\begin{aligned} n &= \frac{\log \left[\frac{10000}{500} j_{(n)} + 1 \right]}{\log 1.07} = \frac{\log(20 \times 0.0682341 + 1)}{\log 1.07} \\ &= \frac{\log 2.364682}{\log 1.07} = \frac{0.373772}{0.029384} = 12.72 \text{ 年} \end{aligned}$$

b) 應用公式(43) 得：

$$\begin{aligned} n &= \frac{\log(500 + 40000 \times 1.035^{\frac{1}{2}} - 40000) - \log 500}{2 \log 1.035} \\ &= \frac{\log(500 + 40000 \times 0.017349) - \log 500}{2 \log 1.035} \\ &= \frac{\log 1193.98 - \log 500}{2 \log 1.035} = \frac{3.076997 - 2.698970}{2 \times 0.014940} \\ &= \frac{0.378027}{0.02988} = 12.65 \text{ 年} \end{aligned}$$

若已知每年年金總額，每年支付年金次數，年金現值，與利率，則年金時期可自下列公式之一求得：

$$n = \frac{\log R - \log [R - A j_{(p)}]}{\log (1+i)} \dots \dots \dots (44)$$

$$n = \frac{\log R - \log \left[R - A p \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{\frac{1}{m}} + A p \right]}{m \log \left(1 + \frac{j}{m} \right)} \dots \dots \dots (45)$$

- n 年金時期。
 R 每年年金總額。
 A 年金現值。
 i 實利率。
 j 虛利率。
 m 每年複利次數。
 p 每年支付年金次數。
 $j_{(p)} = p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]$

(證)

$$A = R \frac{1-v^n}{j_{(p)}}$$

$$\frac{A}{R} j_{(p)} = 1 - v^n$$

$$v^n = \frac{R - A j_{(p)}}{R}$$

$$(1+i)^n = \frac{R}{R - A j_{(p)}}$$

$$n \log (1+i) = \log R - \log [R - A j_{(p)}]$$

$$\therefore n = \frac{\log R - \log [R - A j_{(p)}]}{\log (1+i)}$$

以虛利率易實利率，則得：

$$n = \frac{\log R - \log \left[R - A p \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{\frac{m}{p}} + A p \right]}{m \log \left(1 + \frac{j}{m} \right)}$$

(例七) 每年年金總額 1000 元，分四次支付，年金現值 10000 元，求年金時期！

a) 實利率六釐；

b) 虛利率六釐；每年複利二次。

a) 應用公式 (44)，得：

$$\begin{aligned} n &= \frac{\log 1000 - \log [1000 - 10000 j_{(6)}]}{\log 1.06} \\ &= \frac{3 - \log(1000 - 10000 \times 0.05869538)}{0.025306} \\ &= \frac{3 - \log 413.0462}{0.025306} = \frac{3 - 2.6159985}{0.025306} = \frac{0.3840015}{0.025306} \\ &= 15.17 \text{ 年} \end{aligned}$$

b) 應用公式 (45)，得：

$$\begin{aligned} n &= \frac{\log 1000 - \log (1000 - 40000 \times 1.03^{\frac{1}{2}} + 40000)}{2 \log 1.03} \\ &= \frac{3 - \log (1000 - 40000 \times 0.01488916)}{2 \times 0.012837} \\ &= \frac{3 - \log 404.4336}{0.025674} = \frac{3 - 2.606847}{0.025674} \\ &= \frac{0.393153}{0.025674} = 15.31 \text{ 年} \end{aligned}$$

$\frac{1}{a_{\overline{n}|}^{(p)}}$ 與 $\frac{1}{S_{\overline{n}|}^{(p)}}$ 有一定之關係, 以公式表之如下:

$$\frac{1}{S_{\overline{n}|}^{(p)}} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}^{(p)}} - j_{(p)} \dots\dots\dots (46)$$

$S_{\overline{n}|}^{(p)}$ 每年年金總額一元分 p 次支付繼續支付 n 年之終值.

$a_{\overline{n}|}^{(p)}$ 每年年金總額一元分 p 次支付繼續支付 n 年之現值.

i 實利率.

p 每年支付年金次數.

$$j_{(p)} = p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]$$

$$\begin{aligned} \text{(證)} \quad \frac{1}{a_{\overline{n}|}^{(p)}} - \frac{1}{S_{\overline{n}|}^{(p)}} &= \frac{j_{(p)}}{i} \frac{1}{a_{\overline{n}|}^{(p)}} - \frac{j_{(p)}}{i} \frac{1}{S_{\overline{n}|}^{(p)}} \\ &= \frac{j_{(p)}}{i} \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|}^{(p)}} - \frac{1}{S_{\overline{n}|}^{(p)}} \right) = \frac{j_{(p)}}{i} \times i = j_{(p)} \\ \therefore \frac{1}{S_{\overline{n}|}^{(p)}} &= \frac{1}{a_{\overline{n}|}^{(p)}} - j_{(p)} \end{aligned}$$

若欲求每年年金總額, 則自公式 (24) (25) (30) (31) (39) 與 (40) 即可化得下列四公式.

(甲) 期末付年金

$$R = K \frac{j_{(p)}}{i} \frac{1}{S_{\overline{n}|}^{(p)}} \dots\dots\dots (47)$$

$$R = A \frac{j_{(p)}}{i} \frac{1}{a_{\overline{n}|}^{(p)}} \dots\dots\dots (48)$$

(乙) 期初付年金

$$R' = K(1+i)^{-\frac{1}{p}} \frac{j_{(p)}}{i} \frac{1}{S_{\overline{n}|}^{(p)}} \dots\dots\dots (49)$$

$$R' = A(1+i)^{-\frac{1}{p}} \frac{j_{(p)}}{i} \frac{1}{a_{\overline{n}|}^{(p)}} \dots\dots\dots (50)$$

R 期末付每年年金總額。

R' 期初付每年年金總額。

K 年金終值。

A 年金現值。

$S_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之終值。

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之現值。

i 實利率

p 每年支付年金次數。

$$j_{(p)} = p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]$$

(例八) 某銀行欲創辦零存整付與整存零付兩種儲蓄存款，均規定年限十年，實利率七釐，零存整付存款人，須於每月初存入一定金額，至十年末得支取一萬元，整存零付存款人，現須一次存入洋一萬元，以後每月末得支取一定金額，求每月零存額與每月零付額！

(甲) 零存整付儲蓄存款 此為期初付年金，整付額一萬元乃年金終值，故須應用公式 (49)。

$$\begin{aligned} R' &= 10000 \times 1.07^{-\frac{1}{12} \times 10} \times \frac{j_{(12)}}{0.07} \times \frac{1}{S_{\overline{10}|}} \\ &= \frac{10000}{1.00565415} \times \frac{0.06784974}{0.07} \times 0.0723775 = 697.598 \end{aligned}$$

$697.598 \div 12 = 58.13$ 元 每月零存額

(乙) 整存零付儲蓄存款 此為期末付年金，整存額一萬元乃年金現值，故須應用公式 (48)。

$$R = 10000 \times \frac{j_{(12)}}{0.07} \times \frac{1}{a_{\overline{10}|}}$$

$$= 10000 \times \frac{0.06784974}{0.07} \times 0.1423775 = 1380.039$$

1380.039 ÷ 12 = 115.00 元 每月零付額

有時年金之支付，非一年數次而為數年一次者，例如造一新橋，估計每二十年須重建一新橋，則此新橋之建築費，每二十年支付一次，是即數年一次年金之例也。關於數年一次年金，吾人所欲知者，乃其年金現值，蓋苟能預置重建新橋之基金，則以後重建新橋之費即可無虞。每 k 年支付年金一元，繼續支付 nk 年之現值，通常以 $a_{\overline{nk}|i}$ 表之，若年金之支付永遠繼續，則以 $a_{\infty|k}$ 表示其現值。 $a_{\overline{nk}|i}$ 與 $a_{\infty|k}$ 可自下列二公式求得：

$$a_{\overline{nk}|i} = \frac{a_{\overline{nk}|i}}{S_{\overline{k}|i}} \dots\dots\dots (51)$$

$$a_{\infty|k} = \frac{1}{i} \frac{1}{S_{\overline{k}|i}} \dots\dots\dots (52)$$

$a_{\overline{nk}|i}$ 每 i 年支付年金一元繼續支付 nk 年之現值。

$a_{\infty|k}$ 每 k 年支付年金一元永遠繼續支付之現值。

$S_{\overline{k}|i}$ 簡單年金一元繼續支付 k 年之終值。

$a_{\overline{nk}|i}$ 簡單年金一元繼續支付 nk 年之現值。

i 實利率。

(證) 令
$$v = \frac{1}{1+i}$$

年金支付期	與最初支付期間之始相隔之年數	年金一元在最初支付期間之始之現值
第 k 年末	k	v^k
第 $2k$ 年末	$2k$	v^{2k}

第 $3k$ 年末	$3k$	v^{3k}
.....
第 $(n-2)k$ 年末	$(n-2)k$	$v^{(n-2)k}$
第 $(n-1)k$ 年末	$(n-1)k$	$v^{(n-1)k}$
第 nk 年末	nk	v^{nk}

年金現值即為每期年金額現值之總和，故：

$$a_{n:k} = v^k + v^{3k} + v^{5k} + \dots + v^{(n-2)k} + v^{(n-1)k} + v^{nk}$$

上式之右邊為一等比級數，其首項為 v^k ，公比為 v^k ，項數為 n ，應用第三編公式 (6)，得：

$$\begin{aligned} a_{n:k} &= \frac{v^k(1-v^{nk})}{1-v^k} = \frac{1-v^{nk}}{(1+i)^k - 1} \\ &= \frac{\frac{1-v^{nk}}{i}}{\frac{(1+i)^k - 1}{i}} \\ \therefore a_{n:k} &= \frac{a_{\overline{nk}|i}}{S_{\overline{k}|i}} \end{aligned}$$

$$a_{\infty:k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n:k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-v^{nk}}{S_{\overline{k}|i}}$$

但 $\lim_{n \rightarrow \infty} v^{nk} = 0$

$$\therefore a_{\infty:k} = \frac{1}{i} \frac{1}{S_{\overline{k}|i}}$$

(別證) 每 k 年末支付之年金額一元，若改於每年末支付，則為 $\frac{1}{S_{\overline{k}|i}}$ 元，故

$$a_{n\overline{k}|i} = \frac{1}{S_{\overline{k}|i}} a_{n\overline{i}|}$$

$$a_{\infty\overline{k}|i} = \frac{1}{S_{\overline{k}|i}} a_{\infty} = \frac{1}{S_{\overline{k}|i}} \frac{1}{i}$$

(例九) 某城建築一橋, 建築費三萬元, 估計每三十年須重建一次, 假定每次建築費均為三萬元, 設某城欲於第一次新橋建築以後, 預留一項重建新橋基金, 以備重建時建築費之需, 問某城須預留基金若干元? (投資利率六釐)

應用公式(52), 得:

$$a_{\infty\overline{30}|0.06} = \frac{1}{0.06 S_{\overline{30}|0.06}} = \frac{0.01264891}{0.06}$$

$$30000 \times \frac{0.01264891}{0.06} = 6324.46 \text{ 元}$$

習 題 十 四

1. 每年年金總額 500 元, 年金時期二十年, 虛利率六釐, 填寫下表空白之處!

終值與現值 每年複利次數 每年支付年金次數	年 金 終 值			年 金 現 值		
	每年複利一次	每年複利二次	每年複利四次	每年複利一次	每年複利二次	每年複利四次
每年支付年金一次						
每年支付年金二次						
每年支付年金四次						

2. 某銀行創辦零存整付儲蓄存款, 分五年期, 十年期與二十年期三種, 支付方法分按月支付與按季支付兩種, 實利率八釐, 到期整付額均以一千元為標準, 填寫下表空白之處!

年金時期 \ 支付方法	每月零存額	每季零存額
五 年 期		
十 年 期		
二 十 年 期		

3. 某銀行創辦整存零付儲蓄存款，分五年期，十年期與二十年期三種，付款方法分按月與按季兩種，實利率八釐，整存額均以一千元為標準，填寫下表中空白之處！

年金時期 \ 付款方法	每月零付額	每季零付額
五 年 期		
十 年 期		
二 十 年 期		

4. 某甲購得某種債券票面金額十萬元，債券利息年利率七釐，每年付息二次，某甲以債券收入利息存入銀行，問十年後某甲在銀行共有存款若干元？（銀行規定年利率六釐，每年複利二次）

5. 某甲新購一汽車，言定先付現洋二百元，以後三年間，每月末付洋三十元，求此汽車之購價！

a) 實利率六釐；

b) 虛利率六釐，每年複利二次。

6. 某城建築一積穀倉，建築費五千元，估計每五十年須重建一次，假定每次建築費均為五千元，設某城欲於第一次積穀倉建築以後，預留一項重建新倉基金，以備重建時建築費之需，問某城須預留基金若干元？（投資利率六釐）

7. 每年初或每年末支付之 100 元，若改為每月末支付，當為幾何？（投資利率六釐）

8. 甲乙兩人每年各以500元存入儲蓄銀行(銀行規定實利率七釐,甲於每年之末存入500元,乙則於每半年末存入250元,問二十年後兩人在銀行存款額相差若干元?

9. 某甲現年三十五歲,欲於四十五歲至六十五歲間,每月末自銀行得洋一百元,問自三十五歲至四十五歲間,某甲須於每月末存洋若干元於銀行?(銀行規定實利率八釐)

10. 某甲現年三十五歲,欲於五十歲至七十歲間,每月末自銀行得洋一百元,問現須一次存入若干元於銀行?(銀行規定實利率八釐)

11. 某校於十週紀念時,籌設百週紀念基金一千萬元,設某校常有學生四百人,則每月末每生須捐助若干元於學校,俾於百週紀念時得積存基金一千萬元?(基金依實利率六釐投資)

12. 每年年金總額500元,年金時期十年,實利率七釐,求年金現值!

- a) 每年支付一次
- b) 每年支付四次
- c) 每年支付十二次
- d) 每年支付五十二次
- e) 每年連續支付

13. 每年年金總額300元,分十二次支付,問至少若干年後,方得5000元以上之終值!

- a) 實利率六釐;
- b) 虛利率六釐,每年複利四次。

14. 每年年金總額300元,分四次支付,年金現值5000元,求年金時期!

- a) 實利率五釐;
- b) 虛利率五釐,每年複利二次。

第三章 變額年金

每期支付之年金額，通常相等，然亦有例外者，年金額不相等之年金，名曰變額年金。每期年金額之變更，若不依據一定規律，則須分別計算各期年金之終值及其現值，然後計算其總和，故不能求得一般公式。若每期年金額之變更，有一定規律可循，則年金終值與年金現值之計算，仍可應用一定公式。

(例一) 第一年末付 160 元，第二年末付 210 元，第三年末付 130 元，第四年末付 180 元，第五年末付 220 元，求年金終值與年金現值！(實利率六釐)

$$\begin{array}{r} 160 \times 1.06^4 = 160 \times 1.26247696 = 201.9963 \\ 210 \times 1.06^3 = 210 \times 1.191016 = 250.1134 \\ 130 \times 1.06^2 = 130 \times 1.1236 = 146.0680 \\ 180 \times 1.06 = 190.8000 \\ 220 = 220.0000 \\ \hline 1008.9777 \end{array}$$

即求得年金終值為 1008.98 元

$$160v = 160 \times 0.94339623 = 150.9434$$

$$210v^2 = 210 \times 0.88999644 = 186.8993$$

$$130v^3 = 130 \times 0.83961928 = 109.1505$$

$$180v^4 = 180 \times 0.79209366 = 142.5769$$

$$220v^5 = 220 \times 0.74725817 = 164.3968$$

$$\hline 753.9669$$

即求得年金現值為 753.97 元。

若每年末支付之年金額，成一等差級數，則年金終值與年金現值，可自下列二公式求得：

$$(A_s)_{\overline{n}|} = S_{\overline{n}|} + \frac{d}{i}(S_{\overline{n}|} - n) \dots\dots\dots(53)$$

$$(A_a)_{\overline{n}|} = fa_{\overline{n}|} + \frac{d}{i}(a_{\overline{n}|} - nv^n) \dots\dots\dots(54)$$

$(A_s)_{\overline{n}|}$ n 年等差變額年金之終值

$(A_a)_{\overline{n}|}$ n 年等差變額年金之現值

$S_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之終值

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之現值

f 第一期年金額

d 每期增加年金額

n 年金時期

i 實利率

$$v = \frac{1}{1+i}$$

$$\begin{aligned} (\text{證}) (A_s)_{\overline{n}|} &= f(1+i)^{n-1} + (f+d)(1+i)^{n-2} + (f+2d)(1+i)^{n-3} \\ &+ \dots\dots + (f+n-2d)(1+i) + (f+n-1)d \end{aligned}$$

以 $(1+i)$ 乘上式之兩邊，得：

$$(1+i)(A_s)_{\overline{n}|} = f(1+i)^n + (f+d)(1+i)^{n-1} + (f+2d)(1+i)^{n-2} \\ + \dots + (f+n-2d)(1+i)^2 + (f+n-1d)(1+i)$$

自第二式減第一式，得：

$$i(A_s)_{\overline{n}|} = f(1+i)^n + d(1+i)^{n-1} + d(1+i)^{n-2} + d(1+i)^{n-3} \\ + \dots + d(1+i)^2 + d(1+i) - (f+n-1d)$$

$$\text{即 } (A_s)_{\overline{n}|} = \frac{f}{i}(1+i)^n + \frac{d}{i}[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3}$$

$$+ \dots + (1+i)] - \frac{f}{i} - \frac{nd}{i} + \frac{d}{i}$$

$$= \frac{f}{i}[(1+i)^n - 1] + \frac{d}{i}[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2}$$

$$+ (1+i)^{n-3} + \dots + (1+i) + 1] - \frac{nd}{i}$$

$$= fS_{\overline{n}|} + \frac{d}{i}S_{\overline{n}|} - \frac{nd}{i}$$

$$\therefore (A_s)_{\overline{n}|} = fS_{\overline{n}|} + \frac{d}{i}(S_{\overline{n}|} - n)$$

$$(A_a)_{\overline{n}|} = v^n(A_s)_{\overline{n}|} = f v^n S_{\overline{n}|} + \frac{d}{i}(v^n S_{\overline{n}|} - n v^n)$$

$$\therefore (A_a)_{\overline{n}|} = f a_{\overline{n}|} + \frac{d}{i}(a_{\overline{n}|} - n v^n)$$

(例二) 第一年年金額 500 元，以後每年減少 10 元，年金時期為十年，投資利率為六釐，求年金終值與年金現值！

a) 求年金終值：

應用公式 (53)，得：

$$\begin{aligned}
 (A_s)_{\overline{10}|} &= 500 S_{\overline{10}|} + \frac{-10}{0.06} (S_{\overline{10}|} - 10) \\
 &= 500 \times 13.18079494 - \frac{10}{0.06} \times 3.18079494 \\
 &= 6590.39747 - 530.13249 = 6060.26 \text{ 元}
 \end{aligned}$$

b) 求年金現值:

$$\begin{aligned}
 (A_a)_{\overline{n}|} &= 500 a_{\overline{10}|} + \frac{-10}{0.06} (a_{\overline{10}|} - 10 v^{10}) \\
 &= 500 \times 7.36008705 - \frac{10}{0.06} (7.36008705 - 5.5839478) \\
 &= 3680.043525 - \frac{1000}{6} \times 1.77613925 = 3680.043525 \\
 &\quad - 296.023208 = 3384.02 \text{ 元}
 \end{aligned}$$

若第一期年金額與每期增加年金額相等,則年金終值可自下列公式求得:

$$(A_s)_{\overline{n}|} = f \sum S_{\overline{n}|} \dots \dots \dots (55)$$

$(A_s)_{\overline{n}|}$ n 年等差變額年金之終值

$S_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之終值

f 第一期年金額

Σ 總和之記號

$$\begin{aligned}
 (\text{證}) \quad \sum S_{\overline{n}|} &= S_{\overline{1}|} + S_{\overline{2}|} + S_{\overline{3}|} + \dots + S_{\overline{n}|} \\
 &= \frac{(1+i)-1}{i} + \frac{(1+i)^2-1}{i} + \frac{(1+i)^3-1}{i} + \dots + \frac{(1+i)^n-1}{i} \\
 &= \frac{1}{i} \left[\sum (1+i)^n - n \right]
 \end{aligned}$$

但 $\sum (1+i)^n$ 爲期初付年金額一元在 n 年末之終值，故：

$$\sum S_{\overline{n}|i} = \frac{1}{i} [(1+i) S_{\overline{n}|i} - n]$$

應用公式 (53)，得：

$$\begin{aligned} (A_1)_{\overline{n}|i} &= f S_{\overline{n}|i} + \frac{f}{i} (S_{\overline{n}|i} - n) \\ &= \frac{f}{i} [(1+i) S_{\overline{n}|i} - n] \end{aligned}$$

$$\therefore (A_1)_{\overline{n}|i} = f \sum S_{\overline{n}|i}$$

$\sum S_{\overline{n}|i}$ 爲 $S_{\overline{n}|i}$ 之累積，故可將年金終值表中各期數字依次相加，而成一表，此表名曰等差變額年金終值表（表十二）

（例三）第一年年金額 100 元，以後每年增加 100 元，年金時期爲五年，投資利率爲六釐，求年金終值！

（第一法）應用公式 (53)，得：

$$\begin{aligned} (A_1)_{\overline{5}|0.06} &= 100 S_{\overline{5}|0.06} + \frac{100}{0.06} (S_{\overline{5}|0.06} - 5) \\ &= 563.709 + \frac{10000}{6} \times 0.63709296 \\ &= 563.709 + 1061.822 = 1625.53 \text{ 元} \end{aligned}$$

（第二法）查等差變額年金終值表，得：

$$\sum S_{\overline{5}|0.06} = 16.25531$$

$$\therefore (A_1)_{\overline{5}|0.06} = 100 \sum S_{\overline{5}|0.06} = 1625.53 \text{ 元}$$

兩法之結果相等，但後法較前法更爲簡捷。

若第一期年金額與每期增加年金額不相等，則不能應用公式(55)以求年金終值，但仍能應用等差變額年金終值表，其公式如下：

$$(A_s)_{\overline{n}|} = d \sum S_{\overline{n}|} + (f-d) S_{\overline{n}|} \dots\dots\dots(56)$$

- $(A_s)_{\overline{n}|}$ n 年等差變額年金之終值
 $S_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之終值
 f 第一期年金額
 d 每期增加年金額
 Σ 總和之記號

(證) 應用公式(53)，得：

$$\begin{aligned} (A_s)_{\overline{n}|} &= f S_{\overline{n}|} + \frac{d}{i} (S_{\overline{n}|} - n) \\ &= f S_{\overline{n}|} - d S_{\overline{n}|} + d S_{\overline{n}|} + \frac{d}{i} (S_{\overline{n}|} - n) \\ &= (f-d) S_{\overline{n}|} + \frac{d}{i} [(1+i) S_{\overline{n}|} - n] \end{aligned}$$

$$\text{但 } \sum S_{\overline{n}|} = \frac{1}{i} [(1+i) S_{\overline{n}|} - n]$$

$$\therefore (A_s)_{\overline{n}|} = d \sum S_{\overline{n}|} + (f-d) S_{\overline{n}|}$$

(例四) 第一年年金額500元，以後每年減少10元，年金時期十年，投資利率為六釐，求年金終值！

代入公式(56)，得：

$$\begin{aligned} (A_s)_{\overline{10}|} &= -10 \sum S_{\overline{10}|} + 510 S_{\overline{10}|} \\ &= -10 \times 66.194044 + 510 \times 13.18079494 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -661.94044 + 6722.2054194 \\
 &= 6060.26 \text{ 元}
 \end{aligned}$$

與例二求得之結果相同。

若最後一期年金額與每期減少年金額相等，則年金現值可自下列公式求得：

$$(A_a)_{\overline{n}|} = l \sum a_{\overline{n}|} \dots\dots\dots (57)$$

$(A_a)_{\overline{n}|}$ n 年等差變額年金之現值

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之現值

l 最後一期年金額

Σ 總和之記號

$$\begin{aligned}
 (\text{證}) \quad \sum a_{\overline{n}|} &= a_{\overline{1}|} + a_{\overline{2}|} + a_{\overline{3}|} + \dots\dots + a_{\overline{n}|} \\
 &= \frac{1-v}{i} + \frac{1-v^2}{i} + \frac{1-v^3}{i} + \dots\dots + \frac{1-v^n}{i} \\
 &= \frac{1}{i} (n - \sum v^n)
 \end{aligned}$$

但 $\sum v^n$ 為期末付年金額一元之現值，故：

$$\sum a_{\overline{n}|} = \frac{1}{i} (n - a_{\overline{n}|})$$

應用公式(54)，得：

$$(A_a)_{\overline{n}|} = fa_{\overline{n}|} + \frac{d}{i} (a_{\overline{n}|} - nv^n)$$

但 $d = -i$

$$f = nl$$

以之代入上式，則得：

$$\begin{aligned}
 (A_a)_{n|} &= v l a_{\overline{n}|} - \frac{l}{i} (a_{\overline{n}|} - nv^n) \\
 &= \frac{l}{i} (nia_{\overline{n}|} - a_{\overline{n}|} + nv^n) \\
 &= \frac{l}{i} (n - nv^n - a_{\overline{n}|} + nv^n) \\
 &= \frac{l}{i} (n - a_{\overline{n}|}) \\
 \therefore (A_a)_{\overline{n}|} &= l \sum a_{\overline{t}|}
 \end{aligned}$$

$\sum a_{\overline{t}|}$ 為 $a_{\overline{n}|}$ 之累積，故可將年金現值表中各期數字依次相加而成一表，此表名曰等差變額年金現值表（表十三）。

（例五）第一年年金額 500 元，以後每年減少 100 元，年金時期為五年，投資利率為六釐，求年金現值！

（第一法）應用公式（54），得：

$$\begin{aligned}
 (A_a)_{\overline{5}|} &= 500 a_{\overline{5}|} - \frac{100}{0.06} (a_{\overline{5}|} - 5v^5) \\
 &= 500 \times 4.21236379 - \frac{10000}{6} (4.21236379 \\
 &\quad - 5 \times 0.74725817) \\
 &= 2106.181895 - \frac{4760.7294}{6} \\
 &= 2106.181895 - 793.4549 \\
 &= 1312.73 \text{ 元}
 \end{aligned}$$

（第二法） $l = 500 - 4 \times 100 = 100$

查等差變額年金現值表，得：

$$\sum a_{\overline{5}} = 13.12727$$

$$\therefore (A_{\overline{5}}) = 100 \sum a_{\overline{5}} = 1312.73 \text{ 元}$$

兩法求得之結果相同，但後法較前法更為簡捷

若最後一期年金額與每期減少年金額不相等，則不能應用公式(57)以求年金現值，但仍能應用等差變額年金現值表，其公式如下：

$$(A_{\overline{n}}) = (l+d) a_{\overline{n}} - d \sum a_{\overline{n}} \dots \dots \dots (58)$$

- $(A_{\overline{n}})$ n 年等差變額年金之現值
 $a_{\overline{n}}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之現值
 l 最後一期年金額
 d 等差變額年金之公差
 Σ 總和之記號

(證) 應用公式(54)，得

$$(A_{\overline{n}}) = f a_{\overline{n}} + \frac{d}{i} (a_{\overline{n}} - n v^n)$$

但 $f = l - (n-1)d = l + d - n d$

以之代入上式 則得：

$$\begin{aligned} (A_{\overline{n}}) &= (l+d)a_{\overline{n}} - n d a_{\overline{n}} + \frac{d}{i} (a_{\overline{n}} - n v^n) \\ &= (l+d)a_{\overline{n}} + \frac{d}{i} (-n i a_{\overline{n}} + a_{\overline{n}} - n v^n) \\ &= (l+d)a_{\overline{n}} + \frac{d}{i} (n v^n - n + a_{\overline{n}} - n v^n) \\ &= (l+d)a_{\overline{n}} - \frac{d}{i} (n - a_{\overline{n}}) \end{aligned}$$

$$\text{但} \quad \sum a_n = \frac{1}{i} (n - a_n)$$

$$\therefore (A_a)_n = (1+d)a_n - d \sum a_n$$

(例六) 第一年年金額 500 元, 以後每年減少 10 元, 年金時期為十年, 投資利率為六釐, 求年金現值!

$$d = -10$$

$$l = 500 - 10 \times 9 = 410$$

代入公式 (58), 得:

$$\begin{aligned} (A_a)_{i|n} &= 400 a_{\overline{10}|} + 10 \sum a_{\overline{10}|} \\ &= 400 \times 7.36008705 + 10 \times 43.998549 \\ &= 2944.03482 + 439.98549 \\ &= 3384.02 \text{ 元} \end{aligned}$$

與例二求得之結果相同。

等差變額年金在債券上之應用甚大, 但債券之償本付息, 未必每年一次, 故等差變額年金之支付, 亦有每年數次者, 是曰複雜等差變額年金。關於複雜等差變額年金, 吾人所欲知者, 通常為其年金現值, 故本書祇舉其年金現值公式。複雜等差變額年金現值, 可以 $(A_a)_n^{(p)}$ 表之, 其公式如下:

$$(A_a)_n^{(p)} = p \frac{i}{j^{(p)}} \left[a_n \left(f + \frac{dp}{j^{(p)}} \right) - \frac{npdv^n}{i} \right] \dots \dots \dots (59)$$

$(A_a)_n^{(p)}$ 每年支付 p 次繼續支付 n 年複雜等差變額年金之現值

a_n 簡單年金一元繼續支付 n 年之現值

f 第一次年年金額

- d 每次年金增加額
 p 每年支付年金次數
 n 年金時期
 i 實利率

$$v = \frac{1}{1+i}$$

$$j^{(p)} = p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]$$

(證) 支付年金時日 每次年金額 在第一年初之現值

第 $\frac{1}{p}$ 年末	f	$fv^{\frac{1}{p}}$
第 $\frac{2}{p}$ 年末	$f+d$	$(f+d)v^{\frac{2}{p}}$
第 $\frac{3}{p}$ 年末	$f+2d$	$(f+2d)v^{\frac{3}{p}}$
.....
第 $n - \frac{2}{p}$ 年末	$f+(np-3)d$	$[f+(np-3)d]v^{n-\frac{2}{p}}$
第 $n - \frac{1}{p}$ 年末	$f+(np-2)d$	$[f+(np-2)d]v^{n-\frac{1}{p}}$
第 n 年末	$f+(np-1)d$	$[f+(np-1)d]v^n$

$$(A_n)^{(p)} = fv^{\frac{1}{p}} + (f+d)v^{\frac{2}{p}} + (f+2d)v^{\frac{3}{p}} + \dots + [f+(np-3)d]v^{n-\frac{2}{p}} \\ + [f+(np-2)d]v^{n-\frac{1}{p}} + [f+(np-1)d]v^n$$

以 $v^{\frac{1}{p}}$ 乘上式之兩邊，則得：

$$v^{\frac{1}{p}} (A_n)^{(p)} = fv^{\frac{2}{p}} + (f+d)v^{\frac{3}{p}} + (f+2d)v^{\frac{4}{p}} + \dots + [f+(np-3)d]v^{n-\frac{1}{p}} \\ + [f+(np-2)d]v^n + [f+(np-1)d]v^{n+\frac{1}{p}}$$

自第一式減第二式，得：

$$(1-v^{\frac{1}{p}})(A_a)_n^{(p)} = fv^{\frac{1}{p}} + d(v^{\frac{2}{p}} + v^{\frac{3}{p}} + v^{\frac{4}{p}} + \dots + v^{n-\frac{2}{p}} + v^{n-\frac{1}{p}} + v^n) \\ - [f + (np-1)d]v^{n+\frac{1}{p}}$$

以 $(1+i)^{\frac{1}{p}}$ 乘上式之兩邊，得：

$$[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1] (A_a)_n^{(p)} = d(v^{\frac{1}{p}} + v^{\frac{2}{p}} + v^{\frac{3}{p}} + \dots + v^{n-\frac{3}{p}} + v^{n-\frac{2}{p}} + v^{n-\frac{1}{p}}) \\ + dv^n + f - fv^n - npdv^n$$

但 $(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 = \frac{j^{(p)}}{p}$

$$d(v^{\frac{1}{p}} + v^{\frac{2}{p}} + v^{\frac{3}{p}} + \dots + v^{n-\frac{3}{p}} + v^{n-\frac{2}{p}} + v^{n-\frac{1}{p}}) + dv^n$$

$$= dp a_n^{(p)} = dp a_n \frac{i}{j^{(p)}}$$

$$f - fv^n = f(1-v^n) = f i a_n$$

$$\therefore (A_a)_n^{(p)} = \frac{p}{j^{(p)}} [dp a_n \frac{i}{j^{(p)}} + f i a_n - npdv^n]$$

$$= p \frac{i}{j^{(p)}} \left[a_n \left(f + \frac{dp}{j^{(p)}} \right) - \frac{npdv^n}{i} \right]$$

(例七) 第一次年金額三元，以後每次增加三元，每年支付二次，繼續支付4年，求年金現值！(實利率六釐)

$$n=4$$

$$p=2$$

$$f=3$$

$$d=3$$

$$i=6\%$$

代入公式 (59)，得：

$$\begin{aligned}
 (A_n)_{\frac{1}{4}}^{(2)} &= 2 \times 1.01478151 \left[3.46510561 \left(3 + \frac{6}{0.06} \times 1.01478151 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{24}{0.06} \times 0.79209366 \right] \\
 &= 2.02956302 (3.46510561 \times 104.478151 - 316.837464) \\
 &= 2.02956302 (362.02782715 - 316.837464) \\
 &= 2.02956302 \times 45.19036315 \\
 &= 91.72 \text{ 元}
 \end{aligned}$$

若等差變額年金之支付，永續不絕，則年金現值可自下列公式求得：

$$(A_n)_\infty = \frac{f}{i} + \frac{d}{i^2} \dots \dots \dots (60)$$

$(A_n)_\infty$ 等差變額永續年金之現值

· 第一期年金額

d 每期增加年金額

i 實利率

$$\begin{aligned}
 (\text{證}) (A_n)_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n)_{\bar{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f a_{\bar{n}} + \frac{d}{i} (a_{\bar{n}} - n v^n) \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f a_{\bar{n}}) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d a_{\bar{n}}}{i} - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{d n v^n}{i} \right)
 \end{aligned}$$

但 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\bar{n}} = \frac{1}{i}$ (參看公式 14)

$\lim_{n \rightarrow \infty} (n v^n) = 0$ (證明參看附錄甲 15)

$$\therefore (A_n)_\infty = \frac{f}{i} + \frac{d}{i^2}$$

(例八) 第一年年金額 500 元, 以後每年增加 100 元, 投資利率為五釐, 求等差變額永續年金之現值

應用公式 (60), 得:

$$(A_a)_{\infty} = \frac{500}{0.05} + \frac{100}{0.05^2} = 10000 + 40000 = 50000 \text{ 元}$$

若每年末支付之年金額, 成一等比級數, 則年金終值與年金現值, 可自下列公式求得:

(甲) r 不等於 $1+i$ 時

$$(G_s)_{\overline{n}|} = f \frac{(1+i)^n - r^n}{1+i-r} \dots\dots\dots (61)$$

$$(G_a)_{\overline{n}|} = f \frac{1-r^n v^n}{1+i-r} \dots\dots\dots (62)$$

(乙) r 等於 $1+i$ 時

$$(G_s)_{\overline{n}|} = n f r^{n-1} \dots\dots\dots (63)$$

$$(G_a)_{\overline{n}|} = \frac{n f}{r} \dots\dots\dots (64)$$

$(G_s)_{\overline{n}|}$ n 年等比變額年金之終值

$(G_a)_{\overline{n}|}$ n 年等比變額年金之現值

f 第一期年金額

r 公比

n 年金時期

i 實利率

$$v = \frac{1}{1+i}$$

(證) (甲) $r \neq 1+i$

$$(G_s)_{\overline{n}|} = f(1+i)^{n-1} + f r (1+i)^{n-2} + f r^2 (1+i)^{n-3}$$

$$\begin{aligned}
 & + \dots + f r^{n-3}(1+i)^2 + f r^{n-2}(1+i) + f r^{n-1} \\
 & = f(1+i)^{n-1} \frac{1-r^n v^1}{1-rv}
 \end{aligned}$$

$$\therefore (G_s)_n = f \frac{(1+i)^n - r^n}{1+i-r}$$

$$(G_a)_n = v^n (G_s)_n = v^n f \frac{(1+i)^n - r^n}{1+i-r}$$

$$\therefore (G_a)_n = f \frac{1-r^n v^1}{1+i-r}$$

(乙) $r = 1+i$

$$(G_s)_n = f(1+i)^{n-1} + f r(1+i)^{n-2} + f r^2(1+i)^{n-3}$$

$$+ \dots + f r^{n-3}(1+i)^2 + f r^{n-2}(1+i) + f r^{n-1}$$

$$= f r^{n-1} + f r^{n-1} + f r^{n-1} + \dots + f r^{n-1} + f r^{n-1} + f r^{n-1}$$

$$\therefore (G_s)_n = n f r^{n-1}$$

$$(G_a)_n = v^n (G_s)_n = v^n n f r^{n-1} = \frac{n f r^{n-1}}{r^n}$$

$$\therefore (G_a)_n = \frac{n f}{r}$$

(例九) 第一年年金額 100 元, 以後每年年年金額較上年增加百分之八, 年金時期為十年, 投資利率為五釐, 求年金終值與年金現值!

a) 求年金終值:

應用公式 (61), 得:

$$\begin{aligned}
 (G_s)_{10} & \approx 100 \cdot \frac{1.05^{10} - 1.08^{10}}{1.05 - 1.08} = 100 \cdot \frac{2.15892500 - 1.62889463}{0.03} \\
 & = \frac{53.003037}{0.03} = 1766.77 \text{ 元}
 \end{aligned}$$

b) 求年金現值:

應用公式(62), 得:

$$\begin{aligned}(G_a)_{10} &= 100 \cdot \frac{1 - 1.08^{10} \cdot 1.05^{-10}}{1.05 - 1.08} = \frac{100}{0.03} \\ &= (2.158925 \times 0.61391325 - 1) = \frac{32.53927}{0.03} \\ &= 1084.64 \text{ 元}\end{aligned}$$

(例十) 第一年年金額 100 元, 以後每年年年金額較上年增加百分之五, 年金時期為十年, 投資利率為五釐, 求年金終值與年金現值!

a) 求年金終值:

應用公式(63), 得:

$$(G_s)_{10} = 10 \times 100 \times 1.05^9 = 1551.33 \text{ 元}$$

b) 求年金現值:

應用公式(64), 得:

$$(G_a)_{10} = \frac{10 \times 100}{1.05} = 1000 \times 0.95238095 = 952.38 \text{ 元}$$

若等比變額年金之支付, 永續不絕, 則年金現值之有無極限, 須視 r 與 $1+i$ 之關係而定。若 $1+i$ 小於 r 或等於 r , 則年金現值將大至無窮大; 反之, 若 $1+i$ 大於 r , 則年金現值之極限, 可自下列公式求得。

$$(G_a)_{\infty} = \frac{f}{1+i-r} \dots\dots\dots(65)$$

$(G_a)_{\infty}$ 等比變額永續年金之現值

- f 第一期年金額
 r 公比
 i 實利率

$$\text{(證)} (G_a)_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f \frac{1 - \left(\frac{r}{1+i} \right)^n}{1+i-r} \right]$$

若 $1+i > r$

則 $\frac{r}{1+i} < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{1+i} \right)^n = 0$$

$$\therefore (G_a)_\infty = \frac{f}{1+i-r}$$

(例十一) 第一年年金額 100 元, 以後每年年金額較上年增加百分之四, 投資利率為五釐, 求永續年金之現值!

應用公式 (65), 得:

$$(G_a)_\infty = \frac{100}{1.05 - 1.04} = \frac{100}{0.01} = 10000 \text{ 元}$$

習 題 十 五

- 年金時期十五年, 投資利率五釐, 求年金終值與年金現值!
 - 每年年金額均為 300 元;
 - 第一年年金額 300 元, 以後每年增加 10 元;
 - 第一年年金額 300 元, 以後每年減少 10 元;
 - 第一年年金額 300 元, 以後每年增加百分之六;
 - 第一年年金額 300 元, 以後每年增加百分之五。
- 第一年年金額 1000 元, 以後每年增加 100 元, 投資利率六釐, 求等差

變額永續年金之現值!

3. 第一年年金額 200 元, 以後每年年金額較上年增加百分之四, 求永續年金之現值!

- a) 投資利率三釐;
- b) 投資利率四釐;
- c) 投資利率五釐;
- d) 投資利率八釐;
- e) 投資利率一分.

4. 第一年年金額 1000 元, 以後每年增加 100 元, 投資利率五釐, 年金時期十五年, 求年金終值!

- a) 應用公式 (53);
- b) 應用公式 (56).

5. 第一年年金額 1000 元, 以後每年減少 100 元, 投資利率五釐, 年金時期十年, 求年金終值!

- a) 應用公式 (53);
- b) 應用公式 (56).

6. 第一年年金額 100 元以後每年增加 100 元, 投資利率五釐, 年金時期十年, 求年金終值!

- a) 應用公式 (53);
- b) 應用公式 (55).

7. 第一年年金額 1000 元, 以後每年減少 50 元, 投資利率五釐, 年金時期二十年, 求年金現值!

- a) 應用公式 (54);
- b) 應用公式 (57).

8. 第一年年金額 1000 元, 以後每年減少 50 元, 投資利率五釐, 年金時期十五年, 求年金現值!

- a) 應用公式 (54);
- b) 應用公式 (53).

9. 第一年年金額100元,以後每年增加20元,投資利率五釐,年金時期十年,求年金現值!

a) 應用公式(54);

b) 應用公式(58).

10. 第一次年年金額100元,以後每次減少5元,每年支付4次,繼續支付5年,實利率5%,求年金現值!

本編應用公式

$$S_{\bar{n}} = \frac{u^n - 1}{i} \dots\dots\dots (1)$$

$$K = RS_{\bar{n}} \dots\dots\dots (2)$$

$$S_{\bar{n}} = \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1} \dots\dots\dots (3)$$

$$S_{\bar{n}} @ j = \frac{S_{\bar{n}/m} @ \frac{j}{m}}{S_{\bar{m}} @ \frac{j}{m}} \dots\dots\dots (4)$$

$$a_{\bar{n}} = \frac{1 - v^n}{i} \dots\dots\dots (5)$$

$$A = Ra_{\bar{n}} \dots\dots\dots (6)$$

$$a_{\bar{n}} = \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m^n}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1} \dots\dots\dots (7)$$

$$a_{\bar{n}} @ j = \frac{a_{\bar{n}/m} @ \frac{j}{m}}{S_{\bar{m}} @ \frac{j}{m}} \dots\dots\dots (8)$$

$$S'_{\bar{n}} = S_{\bar{n}+1} - 1 \dots\dots\dots (9)$$

$$a'_{\bar{n}} = a_{\bar{n}-1} + 1 \dots\dots\dots (10)$$

$$S'_{\bar{n}} @ j = \frac{S_{\bar{m}(\bar{n}+1)} @ \frac{j}{m}}{S_{\bar{m}} @ \frac{j}{m}} - 1 \dots\dots\dots (11)$$

$$a_n^{\prime} @ j = \frac{a_{\overline{n}|(i-j)}}{S_m @ \frac{j}{m}} + 1 \dots\dots\dots (12)$$

$$m \cdot a_n^{\prime} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{n}|} \dots\dots\dots (13)$$

$$a_{\infty} = \frac{1}{i} \dots\dots\dots (14)$$

$$m \cdot a_{\infty} = \frac{x^m}{i} \dots\dots\dots (15)$$

$$n = \frac{\log (K i + R) - \log R}{\log (1+i)} \dots\dots\dots (16)$$

$$n = \frac{\log [K \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - K + R] - \log R}{m \log \left(1 + \frac{j}{m}\right)} \dots\dots\dots (17)$$

$$n = \frac{\log R - \log (R - A i)}{\log (1+i)} \dots\dots\dots (18)$$

$$n = \frac{\log R - \log \left[R + A - A \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m \right]}{m \log \left(1 + \frac{j}{m}\right)} \dots\dots\dots (19)$$

$$\frac{1}{S_n} = \frac{1}{a_n} - i \dots\dots\dots (20)$$

$$L = A u^n - R (S_n - 1) \dots\dots\dots (21)$$

$$F = A u - R a_{\overline{n-1}|} \dots\dots\dots (22)$$

$$S_n^{(p)} = \frac{u^n - 1}{p(u^p - 1)} \dots\dots\dots (23)$$

$$S_n^{(p)} = \frac{i}{j^{(p)}} S_n \dots\dots\dots (24)$$

$$K = R S_n^{(p)} \dots\dots\dots (25)$$

$$S_n^{(p)} = \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{p \left[\left(1 + \frac{j}{mi}\right)^p - 1\right]} \dots\dots\dots (26)$$

$$S_n^{(p)} @ j = \frac{1}{m} \frac{j}{j \binom{p}{m} @ \frac{j}{m}} \left(S_{nm} @ \frac{j}{m} \right) \dots \dots \dots (27)$$

$$S_n^{(p)} @ j = \frac{1}{p} S_{nm} @ \frac{j}{m} \dots \dots \dots (28)$$

$$a_n^{(p)} = \frac{1-v^n}{p(uv-1)} \dots \dots \dots (29)$$

$$a_n^{(p)} = \frac{i}{j(p)} a_n \dots \dots \dots (30)$$

$$A = Ra_n^{(p)} \dots \dots \dots (31)$$

$$a_n^{(p)} = \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm}}{p \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^p - 1 \right]} \dots \dots \dots (32)$$

$$a_n^{(p)} @ j = \frac{1}{m} \cdot \frac{j}{j \binom{p}{m} @ \frac{j}{m}} \left(a_{nm} @ \frac{j}{m} \right) \dots \dots \dots (33)$$

$$a_n^{(p)} @ j = \frac{1}{p} a_{nm} @ \frac{j}{m} \dots \dots \dots (34)$$

$$\bar{S}_n = \frac{i}{\delta} S_n \dots \dots \dots (35)$$

$$\bar{a}_n = \frac{i}{\delta} a_n \dots \dots \dots (36)$$

$$S_n^{(p)'} = S_n \frac{(p)}{n + \frac{1}{p}} - \frac{1}{p} \dots \dots \dots (37)$$

$$a_n^{(p)'} = a_n \frac{(p)}{n - \frac{1}{p}} + \frac{1}{p} \dots \dots \dots (38)$$

$$S_n^{(p)'} = (1+i)^{\frac{1}{p}} S_n \frac{i}{j(p)} \dots \dots \dots (39)$$

$$a_n^{(p)'} = (1+i)^{\frac{1}{p}} a_n \frac{i}{j(p)} \dots \dots \dots (40)$$

$$m! a_n^{(p)} = (a_{m+n} - a_m) \frac{i}{j(p)} \dots \dots \dots (41)$$

$$n = \frac{\log \left[\frac{K}{R} j(p+1) \right]}{\log(1+i)} \dots\dots\dots (42)$$

$$n = \frac{\log (R + Kp \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - Kp) - \log R}{m \log \left(1 + \frac{j}{m}\right)} \dots\dots\dots (43)$$

$$n = \frac{\log R - \log [R - Aj(p)]}{\log(1+i)} \dots\dots\dots (44)$$

$$n = \frac{\log R - \log [R - Ap \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m + Ap]}{m \log \left(1 + \frac{j}{m}\right)} \dots\dots\dots (45)$$

$$\frac{1}{S_n^{(p)}} = \frac{1}{a_n^{(p)}} - j(p) \dots\dots\dots (46)$$

$$R = K \frac{j(p)}{i} \frac{1}{S_n} \dots\dots\dots (47)$$

$$R = A \frac{j(p)}{i} \frac{1}{a_n} \dots\dots\dots (48)$$

$$R' = K(1+i)^{-\frac{1}{p}} \frac{j(p)}{i} \frac{1}{S_n} \dots\dots\dots (49)$$

$$R' = A(1+i)^{-\frac{1}{p}} \frac{j(p)}{i} \frac{1}{a_n} \dots\dots\dots (50)$$

$$a_{nk} \cdot k = \frac{a_{nk}!}{S_{\bar{k}}^i} \dots\dots\dots (51)$$

$$a_{\infty} \cdot k = \frac{1}{i} \frac{1}{S_{\bar{k}}^i} \dots\dots\dots (52)$$

$$(A_s)_{\overline{n}|} = fS_{\overline{n}|} + \frac{d}{i} (S_{\overline{n}|} - n) \dots\dots\dots (53)$$

$$(A_a)_{\overline{n}|} = fa_{\overline{n}|} + \frac{d}{i} (a_{\overline{n}|} - nv^n) \dots\dots\dots (54)$$

$$(A_s)_{\overline{n}|} = f \Sigma S_{\overline{n}|} \dots\dots\dots (55)$$

$$(A_s)_{\overline{n}|} = d \Sigma S_{\overline{n}|} + (f-d) S_{\overline{n}|} \dots\dots\dots (56)$$

$$(A_a)_n = l \sum a_n \dots\dots\dots (57)$$

$$(A_a)_n = (l+d)a_n - d \sum a_n \dots\dots\dots (58)$$

$$(A_a)_n^{(p)} = p \frac{i}{j(p)} \left[a_n \left(f + \frac{d}{j(p)} \right) - \frac{npdv^n}{i} \right] \dots\dots\dots (59)$$

$$(A_a)_\infty = \frac{f}{i} + \frac{d}{i^2} \dots\dots\dots (60)$$

$$(G_s)_n = f \frac{(1+i)^n - r^n}{1+i-r} \dots\dots\dots (61) (r \neq 1+i)$$

$$(G_a)_n = f \frac{1 - r^n v^n}{1+i-r} \dots\dots\dots (62) (r \neq 1+i)$$

$$(G_s)_n = n f r^{n-1} \dots\dots\dots (63) (r = 1+i)$$

$$(G_a)_i = \frac{n f}{r} \dots\dots\dots (64) (r = 1+i)$$

$$(G_a)_\infty = \frac{f}{1+i-r} \dots\dots\dots (65)$$

第五編 年賦償還

第一章 年賦償還之意義及其種類

償還方法有一次償還與分期償還之別，前者債務人於一定時日清償負債之全部，後者債務人每年，或每半年，或按其他任何預定期間，支付一定金額，漸次清償其債務，故此法名曰年賦償還(Annual Instalment)。年賦償還對於債務人甚為便利，蓋債務人所借資金，常不能於短期內與其所經營之事業脫離，若借款期限僅有一二年，則借款到期時，債務人仍無償還之能力；反之，若借款期限延長至一二十年，則債務人得直接或間接利用年賦償還法，漸次清償其借款，而此年賦償還額即可取之於其所經營事業之每年純益。

年賦償還有均等分償與變額年金分償之別，前者債務人於一定時期內，按一定期間，支付均等金額，漸次清償其債務，後者則債務人以變額年金，為其年賦償還之額也。

均等分償又可分為全均等分償與本金均等分償二種。每期支付均等金額，以漸次清償本利之前部，是曰全均等分償；若每期支付之均等金額，僅為清償全部本金之用，則名曰本金均等分償。有時本金之全部，雖規定一次償還，然債務人

仍得間接應用年賦償還法，每期提出一定金額運用於極穩健之投資，以積成與本金相等之金額，是曰償本基金。

變額年金分償亦可分為等差變額年金分償與等比變額年金分償兩種。年賦償還之額若可列成等差級數，則為等差變額年金分償，若可列成等比級數，則為等比變額年金分償。

年賦償還中每期支付之額名曰每期年賦金額 (Periodic Instalment)，每年中支付年賦金額之總數，名曰年賦金總額 (Annual Installment)。

第二章 均等分償

第一節 本金均等分償

本金均等分償,細別之,又可分爲下列三法:

(甲) 全部利息於最後一期支付,此一次支付之利息可自下列公式求得:

$$I = P(u^n - \frac{1}{n} S_{\overline{n}|i}) \dots\dots\dots(1)$$

I = 一次支付之利息

P = 負債額

i = 實利率

n = 償債時期

$u = 1+i$

(乙) 每期支付未償債額之利息,第 m 年末支付之年賦金額,可自下列公式求得:

$$R_m = \frac{P}{n} [1 + (n - m + 1)i] \dots\dots\dots(2)$$

R_m = 第 m 年末支付之年賦金額

P = 負債額

n = 償債時期

i = 實利率

(丙) 每期累積利息,按未經過各期平均分償,第 m 年末支

付之年賦金額,可自下列公式求得:

$$R_m = \frac{P}{n} u^n \dots\dots\dots (3)$$

R_m = 第 m 年未支付之年賦金額

P = 負債額

n = 償債時期

i = 實利率

$u = 1+i$

(證) (甲) 每年末償還負債額之 $\frac{1}{n}$, 即 $\frac{P}{n}$, 故每年初之負債餘額當為 $P, \frac{n-1}{n}P, \frac{n-2}{n}P, \dots, \frac{3}{n}P, \frac{2}{n}P, \frac{1}{n}P$, 而每年末應償利息, 當為 $Pi, \frac{n-1}{n}Pi, \frac{n-2}{n}Pi, \dots, \frac{3}{n}Pi, \frac{2}{n}Pi, \frac{1}{n}Pi$, 若每年末祇償本金而不付利息, 則此遲延不付之利息, 至 n 年末之終值, 當為 $Pi(1+i)^{n-1}, \frac{n-1}{n}Pi(1+i)^{n-2}, \frac{n-2}{n}Pi(1+i)^{n-3}, \dots, \frac{3}{n}Pi(1+i)^2, \frac{2}{n}Pi(1+i), \frac{1}{n}Pi$, 故得:

$$\begin{aligned} I &= Pi(1+i)^{n-1} + \frac{n-1}{n}Pi(1+i)^{n-2} + \frac{n-2}{n}Pi(1+i)^{n-3} \\ &+ \dots + \frac{3}{n}Pi(1+i)^2 + \frac{2}{n}Pi(1+i) + \frac{1}{n}Pi \\ I &= \frac{Pi}{n} [n(1+i)^{n-1} + (n-1)(1+i)^{n-2} + (n-2)(1+i)^{n-3} \\ &+ \dots + 3(1+i)^2 + 2(1+i) + 1] \end{aligned}$$

上式之兩邊,若以 $(1+i)-1$ 乘之,則右邊大括弧內之數,將依次乘得如下:

$$\frac{n(1+i)^n + (n-1)(1+i)^{n-1} + (n-2)(1+i)^{n-2} \dots + 3(1+i)^3 + 2(1+i)^2 + (1+i) - n(1+i)^{n-1} - (n-1)(1+i)^{n-2} \dots - 4(1+i)^3 - 3(1+i)^2 - 2(1+i) - 1}{n(1+i)^n - (1+i)^{n-1} - (1+i)^{n-2} \dots - (1+i)^3 - (1+i)^2 - (1+i) - 1}$$

即
$$Ii = \frac{Pi}{n} n(1+i)^n - \frac{Pi}{n} [(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i)^3 + (1+i)^2 + (1+i) + 1]$$

$$Ii = Pi(1+i)^n - \frac{Pi}{n} S_{\overline{n}|i}$$

$$\therefore I = P(u^n - \frac{1}{n} S_{\overline{n}|i})$$

(別證) 若於 n 年間本息均未支付, 則負債額 P 至 n 年末積成終值 Pu^n , 但債務人於每年末償還本金 $\frac{P}{n}$, 而此年賦金額 $\frac{P}{n}$ 至 n 年末之終值為 $\frac{P}{n} S_{\overline{n}|i}$, 故至第 n 年末債務人尚須支付

$$I = Pu^n - \frac{P}{n} S_{\overline{n}|i} = P(u^n - \frac{1}{n} S_{\overline{n}|i})$$

(乙) 每年末償還負債額之 $\frac{1}{n}$, 即 $\frac{P}{n}$, 故第 m 年初之負債餘額, 當為 $\frac{n-m+1}{n} P$, 而第 m 年末應付之利息當為 $\frac{n-m+1}{n} Pi$, 故得:

$$R_m = \frac{P}{n} + \frac{n-m+1}{n} Pi = \frac{P}{n} [1 + (n-m+1)i]$$

(丙) 每期累積利息, 按未經過各期平均分償, 而每期償本之額相等, 故每期末年賦金額, 即將每期累積利息與負債餘額之總數按未經過各期平均分配而得; 即:

$$R_1 = \frac{P(1+i)}{n}$$

$$R_2 = \frac{P(1+i)\left(1 - \frac{1}{n}\right)(1+i)}{n-1} = \frac{P}{n}(1+i)^2$$

$$R_3 = \frac{P(1+i)\left(1 - \frac{1}{n}\right)(1+i)\left(1 - \frac{1}{n-1}\right)(1+i)}{n-2} = \frac{P}{n}(1+i)^3$$

同理

$$R_m = \frac{P}{n}(1+i)^m$$

$$\therefore R_m = \frac{P}{n}w^m$$

第二法中每年末支付之年賦金額，成一等差級數，其公差為 $-\frac{Pi}{n}$ ，故債務人前期之負擔較重於後期；第三法中每年末支付之年賦金額，成一等比級數，其公比為 $1+i$ ，故債務人後期之負擔較重於前期；至於第一法中之利息，則盡歸最後一期負擔，故最後一期之負擔獨重。

(例一) 某甲負債一萬元，言定本金分五年均等償還，全部利息於五年末一次支付，實利率六釐，問某甲於五年末應共付本息若干元？

應用公式 (1)，得：

$$I = 10000(1.06^5 - \frac{1}{5}S_{\overline{5}|0.06}) = 10000(1.33822558$$

$$- \frac{1}{5} \times 5.63709296) = 10000(1.33822558$$

$$- 1.12741859) = 2108.07 \text{ 元}$$

$$\frac{10000}{5} + 2108.07 = 4108.07 \text{ 元}$$

(例二) 某甲負債一萬元,言定本金分十年均等償還,實利率六釐,求第五年末之年賦金額!

- a) 每年支付未償債額之利息;
 b) 每年累積利息按未經過各年平均分償。
 a) 應用公式(2),得:

$$R_5 = \frac{10000}{10} (1 + (10 - 5 + 1) \times 0.06) = 1000 \times 1.36 = 1360 \text{ 元}$$

- b) 應用公式(3),得:

$$R_5 = \frac{10000}{10} \times 1.06^5 = 1338.23 \text{ 元}$$

某甲可預製一年賦償還表,以明每年負債餘額與償本付息之狀況。

年 賦 償 還 表
(每年支付未償債額之利息)

年 次	年初負債額	償 本 額	付 息 額	年賦金額
第 一 年	\$ 10,000	\$ 1,000	\$ 600	\$ 1,600
第 二 年	9,000	1,000	540	1,540
第 三 年	8,000	1,000	480	1,480
第 四 年	7,000	1,000	420	1,420
第 五 年	6,000	1,000	360	1,360
第 六 年	5,000	1,000	300	1,300
第 七 年	4,000	1,000	240	1,240
第 八 年	3,000	1,000	180	1,180
第 九 年	2,000	1,000	120	1,120
第 十 年	1,000	1,000	60	1,060
合 計	55,000	10,000	3,300	13,300

年 賦 償 還 表

(每年累積利息按未經過各年平均分償)

年 次	年初本金餘額	年末償本額	年末累積利息	年末支付利息	年賦金額
第一年	\$ 10,000	\$ 1,000	\$ 600.00	\$ 60.00	\$ 1,060.00
第二年	9 000	1,000	1,112.40	123.60	1,123.60
第三年	8,000	1,000	1,528.13	191.02	1,191.02
第四年	7,000	1,000	1,837.34	262.43	1,262.48
第五年	6,000	1,000	2,029.35	338.23	1,338.23
第六年	5,000	1,000	2,092.59	418.52	1,418.52
第七年	4,000	1,000	2,014.51	503.63	1,503.63
第八年	3,000	1,000	1,781.53	593.84	1,593.84
第九年	2,000	1,000	1,378.95	689.48	1,689.48
第十年	1,000	1,000	790.84	790.84	1,790.84
合 計		10,000		3,971.64	13,971.64

第二節 全均等分償

全均等分償中每期支付均等金額，而此均等金額即組成一定額年金，故年賦償還中之年賦金額即為年金中之年金額，而最初之負債額即與年金現值相等，故年賦金額可自下之公式求得：

$$R = P \frac{1}{a_n} \dots \dots \dots (4)$$

R 年賦金額

P 負債額

a_n 簡單年金一元繼續支付 n 年之現值

$\frac{1}{a_n}$ 為負債額一元分 n 年均等償還之年賦金額，故 $\frac{1}{a_n}$ 表名

日年賦金表。

每期支付之年賦金額可分為二部，一部為對於負債餘額應付之利息，一部所以償債，每年付息額隨負債餘額而漸次減少，故每年償債額得漸次增加，第 m 年末負債餘額與年賦金額 R 之 L_m 包含付息與償債之部，可自下列三公式求得：

$$L_m = Ra \frac{1-v^{n-m}}{1-v} \dots\dots\dots (5)$$

$$P_m = Rv^{n-m+1} \dots\dots\dots (6)$$

$$I_m = R(1-v^{n-m+1}) \dots\dots\dots (7)$$

R 年賦金額

L_m 第 m 年末負債餘額

P_m 第 m 年末償本額

I_m 第 m 年末付息額

$a_{\overline{n-m}}$ 簡單年金一元繼續支付 $(n-m)$ 年之現值

i 實利率

$$v = \frac{1}{1+i}$$

(證) 第 m 年末尚有 $n-m$ 次年賦金未付，故第 m 年末負債餘額，即為 $n-m$ 次年賦金額 R 元之現值，即：

$$L_m = Ra \frac{1-v^{n-m}}{1-v}$$

而第 $m-1$ 年末之負債餘額當為：

$$L_{m-1} = Ra \frac{1-v^{n-m+1}}{1-v}$$

故第 m 年末應支付利息

$$I_m = iRa \frac{1-v^{n-m+1}}{1-v} = Ri \frac{1-v^{n-m+1}}{i}$$

$$= R(1-v^{n-m+1})$$

但第 m 年末債務人共付年賦金額 R 元, 除去應付利息之外, 即為償還本金之部, 故得:

$$P_m = R - R(1 - v^{n-m+1}) = Rv^{n-m+1}$$

(例三) 某甲負債一萬元, 實利率六釐, 約定於十年間全均等分償, 求:

a) 年賦金額;

b) 第四年末負債餘額;

c) 第六年末償本額;

d) 第八年末付息額.

a) 應用公式 (4) 得:

$$R = 10000 \frac{1}{a_{\overline{10}|0.06}} = 1358.68 \text{ 元}$$

b) 應用公式 (5), 得:

$$\begin{aligned} L_4 &= 1358.68 a_{\overline{6}|0.06} = 1358.68 \times 4.91732433 \\ &= 6681.07 \text{ 元} \end{aligned}$$

c) 應用公式 (6), 得:

$$\begin{aligned} P_6 &= 1358.68 v^6 = 1358.68 \times 0.74725817 \\ &= 1015.28 \text{ 元} \end{aligned}$$

d) 應用公式 (7), 得:

$$\begin{aligned} I_8 &= 1358.68(1 - v^3) = 1358.68 \times 0.16038072 \\ &= 217.91 \text{ 元} \end{aligned}$$

茲據各年負債餘額, 償本額, 與付息額, 製年賦償還表於下.

年賦償還表
(年賦金額 1,358.68 元)

年次	年初負債額	年末付息額	年末償本額
第一 年	\$ 10,000.00	\$ 600.00	\$ 758.68
第二 年	9,241.32	554.41	804.20
第三 年	8,437.12	506.23	852.45
第四 年	7,584.87	455.03	903.60
第五 年	6,681.07	400.86	957.82
第六 年	5,723.25	343.40	1,015.28
第七 年	4,707.97	282.48	1,076.20
第八 年	3,631.77	217.91	1,140.77
第九 年	2,491.00	149.46	1,209.22
第十 年	1,281.78	76.91	1,281.77
	59,779.95	3,586.81	9,999.99

若年賦金延期 m 年始支付，即最初 m 年不付年賦金，至第 $m+1$ 年末開始支付年賦金，則年賦金額之計算，隨延期中每年利息是否照付而異。若延期中每年照付利息，則年賦金額之計算，與前無異。若延期中併此利息而亦延期，則最初負債額 P 至第 m 年末將變為 $P(1+i)^m$ ，故在應用公式(4)以前，須以 $F(1+i)^m$ 代公式中之 P 。

(例四) 某甲負債一萬元，實利率六釐，約定於第六年至第十五年全均等分償，延期中利息亦延遲支付，求年賦金額，並製年賦償還表！

$$R = 10,000 \times 1.06^5 \times \frac{1}{a_{\overline{10}|0.06}} = 13382.2553$$

$$\times 0.13586796 = 1,818.22 \text{ 元}$$

年 賦 償 還 表

(第六年至第十五年年賦金額 1,818.22 元)

年 次	年 初 負 債 額	年 末 應 付 利 息 額	年 末 償 本 額
第 一 年	\$ 10,000.00	\$ 600.00	0
第 二 年	10,600.00	636.00	0
第 三 年	11,236.00	674.16	0
第 四 年	11,910.16	714.61	0
第 五 年	12,624.77	757.49	0
第 六 年	13,382.26	802.94	\$ 1,015.28
第 七 年	13,366.98	742.02	1,076.20
第 八 年	11,230.78	677.45	1,140.77
第 九 年	10,150.01	609.00	1,209.22
第 十 年	8,940.79	536.45	1,281.77
第 十 一 年	7,659.62	459.54	1,358.68
第 十 二 年	6,300.34	378.02	1,440.20
第 十 三 年	4,860.14	291.61	1,526.61
第 十 四 年	3,333.53	200.01	1,618.21
第 十 五 年	1,715.32	102.92	1,715.30
	136,370.10	8,182.22	13,382.24

第 三 節 償 本 基 金

償本基金(Sinking Fund)者,債務人於每期提出一定金額,運用於極穩健之投資,以積成與最初負債額相等之金額,以備借款到期時償本之需,故債務人除按期付息外,並須支出一定金額,提撥償本基金,而此每期支出之一定金額,通常相等,故組成一種定額年金。基金投資利率未必等於借款利率,兩者相等時,債務人每期支出總額,即為全均等分償中之年賦金額,若投資利率小於借款利率,則債務人每期支出總額,

大於全均等分償中之年賦金額，反之，則小於全均等分償中之年賦金額。凡按期支付一定金額，欲於若干年後積成相當金額者，均可適用償本基金法。償本基金法簡稱曰基金法。

到期償本之額，即為每期提撥基金額之年金終值。故若於每年末提出相等金額 R ，撥充償本基金，而能依實利率 i' 投資，以備於 n 年末清償全部本金 P ，則 R 即等於 $(RS_n @ i')$ ，故得：

$$R = P \left(\frac{1}{S_n} @ i' \right) \dots\dots\dots (8)$$

P 負債額

R 每年末提撥基金額

S_n 簡單年金額一元繼續支付 n 年之終值

i' 基金投資利率

設 T 為債務人每年支出總額， i 為借款利率，則：

$$T = Pi + P \left(\frac{1}{S_n} @ i' \right)$$

但 $\frac{1}{S_n} @ i' = \left(\frac{1}{a_n} @ i' \right) - i'$

$$\therefore T = P(i - i') + P \left(\frac{1}{a_n} @ i' \right) \dots\dots\dots (9)$$

P 負債額

T 每年末債務人支出總額

i 借款利率

i' 基金投資利率

a_n 簡單年金額一元繼續支付 n 年之現值

試以公式(9)與公式(4)比較:

若 $i=i'$, 則 $T=P\left(\frac{1}{s_n} @ i\right)$, 與公式(4)中之 R 相等;

若 $i>i'$, 則 $\frac{1}{s_{n|}} @ i' > \frac{1}{s_{n|}} @ i$,

$$Pi + P\left(\frac{1}{s_{n|}} @ i'\right) > Pi + P\left(\frac{1}{s_{n|}} @ i\right),$$

故 T 大於公式(4)中之 R ;

若 $i<i'$, 則 $\frac{1}{s_{n|}} @ i' < \frac{1}{s_{n|}} @ i$,

$$Pi + P\left(\frac{1}{s_{n|}} @ i'\right) < Pi + P\left(\frac{1}{s_{n|}} @ i\right),$$

故 T 小於公式(4)中之 R .

第 m 年末基金總額, 為 m 年間年金 R 元之終值, 故得:

$$S_m = P \frac{s_{m|}}{s_{n|}} \dots\dots\dots (10)$$

P 負債額

S_m 第 m 年末基金總額

s_m 簡單年金額一元繼續支付 m 年之終值

s_n 簡單年金額一元繼續支付 n 年之終值

(例五) 某甲負債一萬元, 實利率六釐, 期限十年, 問每年末某甲須共支付若干元?

a) 全均等分償

b) 償本基金法, 基金投資利率六釐;

c) 償本基金法,基金投資利率五釐;

d) 償本基金法,基金投資利率七釐.

a) 應用公式(4),得:

$$R = 10,000 \frac{1}{a_{\overline{10}|}} = 1358.68 \text{ 元}$$

b) 應用公式(8),得:

$$R = 10,000 \frac{1}{S_{\overline{10}|}} = 10,000 \times 0.075868 = 758.68 \text{ 元}$$

$$T = 10,000 \times 0.06 + 758.68 = 1358.68 \text{ 元}$$

c) 應用公式(9),得:

$$T = 10,000 \times 0.01 + 10,000 \left(\frac{1}{a_{\overline{10}|}} @ 5\% \right) = 1395.05 \text{ 元}$$

d) 應用公式(9),得:

$$T = 10,000(-0.01) + 10,000 \left(\frac{1}{a_{\overline{10}|}} @ 7\% \right) = 1323.78 \text{ 元}$$

(例六) 某甲負債一萬元,實利率六釐,期限二十年,用基金法預備償本,基金投資利率五釐,問第五年末共有基金若干元?

應用公式(10),得:

$$S_5 = 10,000 \frac{S_{\overline{5}|}}{S_{\overline{20}|}} = 55,256.3125 \times 0.03024259 = 1671.09 \text{ 元}$$

習 題 十 六

1. 某甲負債二萬元,訂定本金分十五年均等償還,實利率五釐,求第十年末之年賦金額,並製年賦償還表!

a) 每年支付未償債額之利息;

- b) 每年累積利息按未經過各年平均分償。
2. 某乙負債二萬五千元,言定本金分五年均等償還,全部利息於五年末一次支付,實利率七釐,問某乙於五年末應共付本息若干元?
3. 某丙負債三萬元,實利率六釐,約定於二十年間全均等分償,求:
- 年賦金額;
 - 第五年末負債餘額;
 - 第十年末償本額;
 - 第十五年末付息額。
4. 某丁負債二萬元,實利率五釐,約定於十年間全均等分償,求年賦金額,並製年賦償還表。
5. 某戊負債一萬元,實利率六釐,約定於第六年至第十年全均等分償,延期中利息亦延遲支付,求年賦金額,並製年賦償還表!
6. 某己負債一萬元,實利率五釐,期限十五年,問每年末某己須共支付若干元?
- 全均等分償;
 - 償本基金法,基金投資利率五釐;
 - 償本基金法,基金投資利率四釐;
 - 償本基金法,基金投資利率六釐。
7. 某庚負債二萬元,期限十年,用基金法預備償本,基金投資利率六釐,問第八年末共有基金若干元。
8. 負債額一萬元,實利率六釐,約定於二十年間全均等分償,設債務人於最初三年未能履行契約,問第四年末債務人須共支付若干元,方與契約規定相合?
9. 某屋價值五萬元,購主與售主約定,得先付現洋一萬元,餘額於以後十年間每三月末支付相等金額,虛利率六釐,每年複利二次,設債務人於第十次支付年賦金後,欲以現洋付清餘額,問尚共須付洋若干元?
10. 某屋價值二萬元,購主與售主約定分期付款,實利率六釐,購主先付現洋五千元,於三年末再付洋三千元,自第四年至第八年每年末付洋 R 元,求 R !

11. 負債額十萬元,約定於十年間全均等分償,前五年實利率五釐,後五年實利率六釐,求年賦金額,並製年賦償還表!

12. 負債額二萬元,每年付息一次,本金於八年末一次償還,債務人於每年末提存基金,依實利率五釐投資,設每年末支付利息與提存基金之總額為四千三百五十元,求借款利率!

13. 某城負債五十萬元,擬於下列兩法選擇一種:

- a) 用全均等分償法,實利率6½%,分二十年償清;
- b) 每年依實利率六釐付息,本金於二十年末一次償還,另設償本基金,以備到期,償本之需,基金依4%投資;

問何者有利於某城?

14. 求證:

$$L_m = P(1+i)^m - RS_m$$

P 負債額

L_m 第 m 年末負債餘額

R 全均等分償中之年賦金額

i 借款利率

S_m 簡單年金額一元繼續支付 m 年之終值

15. 某公司規定每年末提出相等金額,依實利率六釐投資,欲於十年末積成基金五萬元,試作一表,以示各年基金之累積!

第三章 變額年金分償

變額年金分償有等差變額年金分償與等比變額年金分償之別，吾人在第四編中已論及等差變額年金與等比變額年金之演算，借款本金為各變額年金之現值，故計算第一年年賦金之公式，可自第四編中之年金現值公式化出。

應用第四編公式(54)，得：

$$(A_a)_{\overline{n}|} = fa_{\overline{n}|} + \frac{d}{i}(a_{\overline{n}|} - nv^n)$$

$$fa_{\overline{n}|} = (A_a)_{\overline{n}|} - \frac{d}{i}(a_{\overline{n}|} - nv^n)$$

$$f = \frac{(A_a)_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}} - \frac{d}{i} + \frac{d nv^n}{i a_{\overline{n}|}}$$

但

$$(A_a)_{\overline{n}|} = P$$

$$\frac{v^n}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{(1+i)^n a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{S_{\overline{n}|}}$$

$$\therefore f = \frac{P}{a_{\overline{n}|}} - \frac{d}{i} \left(1 - \frac{n}{S_{\overline{n}|}}\right) \dots\dots\dots(11)$$

P 負債額

f 第一年年賦金額

d 公差

i 實利率

n 借款時期

a_n 簡單年金額一元繼續支付 n 年之現值

S_n 簡單年金額一元繼續支付 n 年之終值

(例一) 負債額一萬元,實利率五釐,約定於十年間用等差變額年金分償法償還,每年年賦金額遞減二十元,求第一年年賦金額,並製年賦償還表!

應用公式(11),得:

$$\begin{aligned} f &= \frac{10,000}{a_{\overline{10}|}} + \frac{20}{0.05} \left(1 - \frac{10}{S_{\overline{10}|}} \right) \\ &= 10,000 \times 0.12950458 + 400(1 - 10 \times 0.07950458) \\ &= 1295.0458 + 400 \times 0.2049542 = 1,377.03 \text{ 元} \end{aligned}$$

年 賦 償 還 表

(每年遞減二十元)

年 次	年初負債餘額	年末年賦金額	年末付息額	年末償本額
第一 年	\$ 10,000.00	\$ 1,377.03	\$ 500.00	\$ 877.03
第二 年	9,122.97	1,357.03	456.15	900.83
第三 年	8,222.09	1,337.03	411.10	925.93
第四 年	7,296.16	1,317.03	364.81	952.22
第五 年	6,343.94	1,297.03	317.20	979.83
第六 年	5,364.11	1,277.03	268.21	1,008.82
第七 年	4,355.29	1,257.03	217.76	1,039.27
第八 年	3,316.02	1,237.03	165.80	1,071.23
第九 年	2,244.79	1,217.03	112.24	1,104.79
第十 年	1,140.00	1,197.03	57.00	1,140.03
	57,405.37	12,870.30	2,870.27	10,000.03

(例二) 前題中每年年賦金額,若改為遞增二十元,求第一

年年賦金額並製年賦償還表！

應用公式(11), 得:

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{10000}{a_{\overline{10}|}} - \frac{20}{0.05} \left(1 - \frac{10}{s_{\overline{10}|}}\right) \\
 &= 1295.0458 - 400 \times 0.2049542 \\
 &= 1,213.06 \text{ 元}
 \end{aligned}$$

年 賦 償 還 表

(每年遞增二十元)

年 次	年 初 負 債 額	年 末 年 賦 金 額	年 末 付 息 額	年 末 償 本 額
第 一 年	\$ 10 000.00	\$ 1,213.06	\$ 500.00	\$ 713.06
第 二 年	9,286.94	1,233.06	464.35	768.71
第 三 年	8,518.23	1,253.06	425.91	827.15
第 四 年	7,691.08	1,273.06	384.55	888.51
第 五 年	6,802.57	1,293.06	340.13	952.93
第 六 年	5,849.61	1,313.06	292.48	1,020.58
第 七 年	4,829.03	1,333.06	241.45	1,091.61
第 八 年	3,737.45	1,353.06	186.87	1,166.19
第 九 年	2,571.26	1,373.06	128.56	1,244.50
第 十 年	1,326.76	1,393.06	66.34	1,323.72
	60,612.99	13,030.60	3,030.64	9,999.96

應用第四編公式(62)與(64), 而以 P 代 $(G_a)_{\overline{n}|}$, 得:

$$f = \frac{Pu^n(1+i-r)}{u^n - r^n} \dots\dots\dots (12) (r \neq 1+i)$$

$$f = \frac{lr}{n} \dots\dots\dots (13) (r = 1+i)$$

P 負債額

f 第一年年賦金額

n 借款時期

r 公比

i 實利率

$u=1+i$

(例三) 負債額一萬元,約定於五年間用等比變額年金分償法償還,公比1.05,求第一年年賦金額,並製年賦償還表!

a) 實利率四釐;

b) 實利率五釐.

a) 應用公式(12),得:

$$f = \frac{10,000 \times 1.04^5 (1.04 - 1.05)}{1.04^5 - 1.05^5} = \frac{100 \times 1.2166529}{1.27628156 - 1.2166529}$$

$$= \frac{121.66529}{0.05962866} = 2,040.38 \text{ 元}$$

b) 應用公式(13),得:

$$f = \frac{10,000 \times 1.05}{5} = 2,100 \text{ 元}$$

年賦償還表

(實利率四釐)

年次	年初負債餘額	年末年賦金額	年末付息額	年末償本額
第一年	\$ 10,000.00	\$ 2,040.38	\$ 400.00	\$ 1,642.38
第二年	8,359.62	2,142.40	334.28	1,808.02
第三年	6,551.60	2,249.52	262.06	1,987.46
第四年	4,564.14	2,362.00	182.57	2,179.43
第五年	2,384.71	2,480.10	95.89	2,384.71
	31,860.07	11,274.40	1,274.40	10,000.00

年 賦 償 還 表

(實利率五釐)

年 次	年初負債餘額	年末年賦金額	年末付息額	年末償本額
第 一 年	\$ 10,000.00	\$ 2,100.00	\$ 500.00	\$ 1,600.00
第 二 年	8,400.00	2,205.00	420.00	1,785.00
第 三 年	6,615.00	2,315.25	330.75	1,984.50
第 四 年	4,630.50	2,431.01	231.53	2,199.48
第 五 年	2,481.02	2,552.56	121.55	2,431.01
	32,073.52	11,603.82	1,603.83	9,999.99

習 題 十 七

1. 負債額二萬元,實利率六釐,約定於五年間用等差變額年金分償法償還,每年年賦金額遞增一百元,求第一年年賦金額,並製年賦償還表!

2. 負債額五千元,實利率七釐,約定於十年間用等差變額年金分償法償還,每年年賦金額遞減三十元,求第一年年賦金額,並製年賦償還表!

3. 負債額二萬五千元,約定於五年間用等比變額年金分償法償還,公比 1.04, 求第一年年賦金額,並製年賦償還表!

a) 實利率四釐;

b) 實利率五釐.

4. 求證:
$$L_m = P \left(u^m - \frac{S_{\overline{m}|i}}{a_{\overline{m}|i}} \right) + \frac{d}{i} \left(m - \frac{nS_{\overline{m}|i}}{S_{\overline{n}|i}} \right)$$

P 最初負債額

L_m 第 m 年末支付年賦金後之負債餘額

i 實利率

d 等差變額年金分償中之公差

$S_{n|i}$ 簡單年金額一元繼續支付 n 年之終值

$S_{\overline{n}|}$ 簡單年金額一元繼續支付 n 年之終值

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金額一元繼續支付 n 年之現值

$$u=1+i$$

5. 負債額一萬元，實利率六釐，約定於十年間用等差變額年金分償法償還，每年年賦金額遞增二十元，求第一年年賦金額與第六年初之負債餘額！

本編應用公式

$$I = P(n^2 - \frac{1}{n} S_{\overline{n}|}) \dots\dots\dots (1)$$

$$R_m = \frac{P}{n} [1 + (n-m+1)i] \dots\dots\dots (2)$$

$$R_m = \frac{P}{n} u^m \dots\dots\dots (3)$$

$$R = P \frac{1}{a_{\overline{n}|}} \dots\dots\dots (4)$$

$$L_m = R a_{\overline{n-m}|} \dots\dots\dots (5)$$

$$P_m = R v^{n-m+1} \dots\dots\dots (6)$$

$$I_m = R(1 - v^{n-m+1}) \dots\dots\dots (7)$$

$$R = P \left(\frac{1}{S_{\overline{n}|}} @ i' \right) \dots\dots\dots (8)$$

$$T = P(i - i') + P \left(\frac{1}{a_{\overline{n}|}} @ i' \right) \dots\dots\dots (9)$$

$$S_m = P \frac{S_{\overline{m}|}}{S_{\overline{n}|}} \dots\dots\dots (10)$$

$$f = \frac{P}{a_{\overline{n}|}} - \frac{d}{i} \left(1 - \frac{n}{S_{\overline{n}|}} \right) \dots\dots\dots (11)$$

$$f = \frac{P u^n (1+i-r)}{u^n - r^n} \dots\dots\dots (12) (r \neq 1+i)$$

$$f = \frac{P r}{n} \dots\dots\dots (13) (r = 1+i)$$

第六編 插補

第一章 插補之意義及其種類

若甲變量隨乙變量而變，則甲變量為乙變量之函數，乙變量為自變量，甲變量為因變量，例如 $y = \log x$ ， y 為 x 之函數， x 為自變量， y 為因變量。有時一因變量隨若干自變量而變，例如本金一元 n 年末之複利終值 S ，隨實利率 i 與複利時期 n 而變，則 S 為 i 與 n 之函數， i 與 n 為自變量， S 為因變量。計算表之用以表示一因變量與一自變量之關係者，名曰單項表 (Table of Single Entry)，其用以表示一因變量與二自變量之關係者，則名曰雙項表 (Table of Double Entry)，例如對數表為單項表，而複利終值表與年金終值表等則為雙項表。

有時表示甲乙兩變量間關係之函數，猶未確定，或雖已確定，而計算甚繁，則須應用甲乙兩變量間已知之關係，由一自變量之數值，計算因變量之數值，或由一因變量之數值，計算自變量之數值，是曰插補 (Interpolation)。

由一自變量之數值，應用自變量與因變量間已知之關係，計算因變量之數值，名曰因變量之插補；由一因變量之數值，應用自變量與因變量間已知之關係，計算自變量之數值，

名曰自變量之插補.

單項表與雙項表中所載自變量與因變量之數值,有一定限制,有時題中之自變量或因變量,為表中所無,而其鄰近數值,詳載於表上,則可應用插補法,計算其近似之數值.

第二章 因變量之插補

(例一) 已知: $x=3$ 時, $y=116$;

$x=4$ 時, $y=245$;

$x=5$ 時, $y=450$;

$x=6$ 時, $y=749$;

問 $x=4\frac{1}{2}$ 時, y 之數值幾何?

(解) 令 $y=ax^3+bx^2+cx+d$

以 x 與 y 間已知之相對數值, 依次代入, 則得方程式四, 而此四方程式中各有 a, b, c, d 四係數, 此四係數之數值猶未確定, 故在此四方程式中, a, b, c, d 為四未知數, 此為四元聯立方程式, 故可計算 a, b, c, d 之數值, 而 x 與 y 間之函數亦可確定, 故以 $4\frac{1}{2}$ 代入函數中之 x , 即得 y 之數值. x 與 y 間假定函數中之係數, 初未確定, 故此法名曰不定係數法 (Method of Undetermined Coefficients).

以 x 與 y 已知之相對數值, 代入

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

得下列四方程式:

$$27a + .9b + 3c + d = 116$$

$$64a + 16b + 4c + d = 245$$

$$125a + 25b + 5c + d = 450$$

$$216a + 36b + 6c + d = 749$$

應用消去法或行列式法以解上之聯立方程式，則得：

$$a = 3$$

$$b = 2$$

$$c = 4$$

$$d = 5$$

$$\therefore y = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 5$$

以 $\frac{9}{2}$ 代入上式中之 x ，得：

$$\begin{aligned} y &= 3 \times \frac{9^3}{2^3} + 2 \times \frac{9^2}{2^2} + 4 \times \frac{9}{2} + 5 \\ &= \frac{1}{8}(2187 + 324 + 144 + 40) = \frac{1}{8} \times 2695 \\ &= 336\frac{7}{8} \end{aligned}$$

若各自變量組成公差為一之一次等差級數，則由函數

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

求得之因變量，組成三次等差級數，蓋若以 x_1 ， x_1+1 （即 x_2 ）， x_1+2 （即 x_3 ）， x_1+3 （即 x_4 ）， x_1+4 （即 x_5 ）等代入上式中之 x ，則得：

$$y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d$$

$$y_2 = a(x_1+1)^3 + b(x_1+1)^2 + c(x_1+1) + d$$

$$y_3 = a(x_1+2)^3 + b(x_1+2)^2 + c(x_1+2) + d$$

$$y_4 = a(x_1+3)^3 + b(x_1+3)^2 + c(x_1+3) + d$$

$$y_5 = a(x_1+4)^3 + b(x_1+4)^2 + c(x_1+4) + d$$

依次求 y 之一次差,二次差,三次差,則得:

$$\begin{array}{l} ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d \\ (x_1+1)^3 + b(x_1+1)^2 + c(x_1+1) + d \\ a(x_1+2)^3 + b(x_1+2)^2 + c(x_1+2) + d \\ a(x_1+3)^3 + b(x_1+3)^2 + c(x_1+3) + d \\ a(x_1+4)^3 + b(x_1+4)^2 + c(x_1+4) + d \end{array} \left. \begin{array}{l} a(3x_1^2 + 3x_1 + 1) + b(2x_1 + 1) + c \\ a(3x_1^2 + 9x_1 + 7) + b(2x_1 + 3) + c \\ a(3x_1^2 + 15x_1 + 19) + b(2x_1 + 5) + c \\ a(3x_1^2 + 21x_1 + 37) + b(2x_1 + 7) + c \end{array} \right\} \begin{array}{l} a(6x_1 + 6) + 2b \\ a(6x_1 + 12) + 2b \\ a(6x_1 + 18) + 2b \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 6a$$

故表示 x 與 y 間關係之函數,可應用第三編公式 (3) 求得,惟第三編公式 (3) 中之 n ,須以 1, 2, 3, 4. 等依次代入,而此處之 x ,則須以 x_1, x_2, x_3, x_4 依次代入,故得:

$$y = y_1 + (x - x_1)d_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{1 \cdot 2}d_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}d_3$$

若表示 x 與 y 間關係之函數,爲 r 次函數,則得 y 之插補公式如下:

$$\begin{aligned} y = & y_1 + (x - x_1)d_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{1 \cdot 2}d_2 + \dots \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_r)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r}d_r \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

x 自變量

y 因變量

d_1 因變量一次差之首項

d_2 因變量二次差之首項

d_r 因變量 r 次差之首項

表示 x 與 y 間關係之函數，由各次差額求得，故此法名曰差額法 (Method of Differences)。

應用差額法計算 (例一) 中之 y ，則得：

$$\begin{array}{r} 116 \\ 245 \left. \begin{array}{l} 129 \\ 205 \end{array} \right\} 76 \\ 450 \left. \begin{array}{l} 299 \\ 375 \end{array} \right\} 94 \\ 749 \end{array} \left. \right\} 18$$

$$\begin{aligned} y &= 116 + \frac{3}{2} \times 129 + \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}}{2} \times 76 + \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)}{6} \times 18 \\ &= \frac{1}{8} (928 + 12 \times 129 + 3 \times 76 - 9) \\ &= \frac{1}{8} \times 2695 = 336 \frac{7}{8} \end{aligned}$$

此外 Lagrange 發明一插補公式，亦可用以計算因變量之數值。此插補公式名曰拉氏公式 (Lagrange's Formula)。

$$\begin{aligned} y &= y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{r+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_{r+1})} \\ &+ y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{r+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_{r+1})} \\ &+ \cdots + y_{r+1} \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_r)}{(x_{r+1}-x_1)(x_{r+1}-x_2)\cdots(x_{r+1}-x_r)} \cdots (2) \end{aligned}$$

x 自變量

y 因變量

公式 (2) 中若 $x = x_1$ ，則右邊第二項起均化為 0，而第一項

即化爲 y_1 , 故得 $y = y_1$. 若 $x = x_2$, 則右邊除第二項外均化爲零, 而第二項即化爲 y_2 , 故得 $y = y_2$, 餘類推.

應用拉氏公式計算(例一)中之 y , 則得:

$$\begin{aligned}
 y &= 116 \cdot \frac{\left(\frac{9}{2}-4\right)\left(\frac{9}{2}-5\right)\left(\frac{9}{2}-6\right)}{(3-4)(3-5)(3-6)} + 245 \cdot \frac{\left(\frac{9}{2}-3\right)\left(\frac{9}{2}-5\right)\left(\frac{9}{2}-6\right)}{(4-3)(4-5)(4-6)} \\
 &+ 450 \cdot \frac{\left(\frac{9}{2}-3\right)\left(\frac{9}{2}-4\right)\left(\frac{9}{2}-6\right)}{(5-3)(5-4)(5-6)} + 749 \cdot \frac{\left(\frac{9}{2}-3\right)\left(\frac{9}{2}-4\right)\left(\frac{9}{2}-5\right)}{(6-3)(6-4)(6-5)} \\
 &= \frac{1}{8} \left(116 \times \frac{3}{-6} + 245 \times \frac{9}{2} + 450 \times \frac{-9}{-2} + 749 \times \frac{-3}{6} \right) \\
 &= \frac{1}{8} \times 2695 = 336 \frac{7}{8}
 \end{aligned}$$

(例二) 已知: $\sqrt{33} = 5.7446$;

$$\sqrt{34} = 5.8310;$$

$$\sqrt{35} = 5.9161;$$

$$\sqrt{36} = 6.0000;$$

求 $\sqrt{34.6}$;

應用差類法, 得:

$$\begin{array}{r}
 5.7446 \\
 5.8310 \\
 5.9161 \\
 6.0000
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0.0864 \\ 0.0851 \\ 0.0839 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0.0013 \\ -0.0012 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 0.0001$$

令 $y = \sqrt{34.6}$

代入公式 (1), 得:

$$y = 5.7446 + 1.6 \times 0.0864 + \frac{1.6 \times 0.6}{1.2} (-0.0013) + \frac{1.6 \times 0.6 (-0.4)}{1.2 \cdot 3} \\ \times 0.0001 = 5.7446 + 0.13824 - 0.000624 \\ - 0.0000064 = 5.8822 +$$

(例三) 求 $\log 1853.4$

吾人在第一編中, 已論及 $\log 1853.4$ 之計算, 即先查 $\log 1854$ 與 $\log 1853$, 然後用比例計算, 此即插補法之一種, 蓋若以之代入公式 (1), 則得:

$$\log 1853.4 = \log 1853 + (1853.4 - 1853)(\log 1854 - \log 1853)$$

$$\text{即 } \log 1853.4 = \log 1853 + \frac{4}{10} (\log 1854 - \log 1853)$$

此即第一編中所用之比例計算法, 此法僅用二數插補, 故名曰二數插補法, 換言之, 即假定對數表中之對數, 組成一次等差級數, 但各對數之一次差, 並不相等, 故由是求得之對數, 僅為其近似值, 若欲求得之數值, 更與其實際數值近似, 則可用三數插補法或四數插補法, 前者假定其二次差相等, 而後者則假定其三次差相等, 茲應用三數插補法計算 $\log 1853.4$ 於下.

$$\left. \begin{array}{l} \log 1853 = 3.267875 \\ \log 1854 = 3.268110 \\ \log 1855 = 3.268344 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0.000235 \\ 0.000234 \end{array} \right) - 0.000001$$

令 $y = \log 1853.4$

代入公式 (1), 得:

$$y = 3.267875 + 0.4 \times 0.000235 + \frac{0.4(-0.6)}{1.2} (-0.000001) \\ = 3.267875 + 0.000094 + 0.00000012 = 3.26796912$$

若各自變量組成公差為 h 之一次等差級數, 例如 $x_1, x_1+h, x_1+2h, x_1+3h$, 等, 則將自變量之單位化為 h , 即得 $\frac{x_1}{h}, \frac{x_1}{h}+1, \frac{x_1}{h}+2, \frac{x_1}{h}+3$, 等, 其公差為一, 故可應用公式 (1) 而得:

$$y = y_1 + \frac{x-x_1}{h}d_1 + \frac{\frac{x-x_1}{h} \frac{x-x_2}{h}}{1.2}d_2 + \dots + \frac{\frac{x-x_1}{h} \frac{x-x_2}{h} \dots \frac{x-x_r}{h}}{1.2 \dots r}d_r$$

$$\text{令 } p = \frac{x-x_1}{h}$$

$$\text{則 } \frac{x-x_2}{h} = \frac{x-x_1-h}{h} = p-1$$

$$\frac{x-x_3}{h} = \frac{x-x_1-2h}{h} = p-2$$

.....

$$\frac{x-x_r}{h} = \frac{x-x_1-(r-1)h}{h} = p-r+1$$

$$\therefore y = y_1 + pd_1 + \frac{p(p-1)}{1.2}d_2 + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-r+1)}{1.2 \dots r}d_r \dots (3)$$

x 自變量

y 因變量

h 自變量之公差

d_1 因變量一次差之首項

d_2 因變量二次差之首項

.....

d_r 因變量 r 次差之首項

$$p = \frac{x - x_1}{h}$$

檢查雙項表時，若自變量之一為表上所有，則其因變量之插補，與單項表同。

(例四) 求 1.0375^{30} !

a) 應用三數插補法：

b) 應用四數插補法。

$$a) \quad \begin{array}{l} 3\frac{1}{2}\% \quad 2.80679370 \\ 4\% \quad 3.24339751 \\ 4\frac{1}{2}\% \quad 3.74531813 \end{array} \left. \begin{array}{l} 0.43660381 \\ 0.50192062 \end{array} \right\} 0.06531681$$

$$p = \frac{3\frac{3}{4}\% - 3\frac{1}{2}\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{\frac{1}{4}\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{1}{2}$$

代入公式(3)，得：

$$\begin{aligned} y &= 2.80679370 + \frac{1}{2} \times 0.43660381 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \times 0.06531681 \\ &= 2.80679370 + 0.218301905 - 0.008164601 \\ &= 3.01693100 \end{aligned}$$

$$b) \quad \begin{array}{l} 3\% \quad 2.42726247 \\ 3\frac{1}{2}\% \quad 2.80679370 \\ 4\% \quad 3.24339751 \\ 4\frac{1}{2}\% \quad 3.74531813 \end{array} \left. \begin{array}{l} 0.37953123 \\ 0.43660381 \\ 0.50192062 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0.05707258 \\ 0.06531681 \end{array} \left. \right\} 0.00824423$$

$$p = \frac{3\frac{3}{4}\% - 3\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{\frac{3}{4}\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{3}{2}$$

$$y = 2.42726247 + \frac{3}{2} \times 0.37953123 + \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}}{2}$$

代入公式(3), 得:

$$\begin{aligned} & \times 0.05707258 + \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)}{2 \times 3} \times 0.00824423 \\ & = 2.42726247 + 0.569296845 + 0.0214022175 \\ & \quad - 0.000515264375 = 3.01744627 \end{aligned}$$

(例五) 求 $a_{\overline{30}|}$ @ $3\frac{3}{4}\%$!

a) 應用三數插補法;

b) 應用四數插補法.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 3\% \quad 19.60044135 \\ 3\frac{1}{2}\% \quad 18.39204541 \\ 4\% \quad 17.29203330 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1.20839594 \\ -1.10001211 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 3\% \\ 3\frac{1}{2}\% \\ 4\% \end{array}} \right\} 0.10838383 \end{array}$$

$$p = \frac{3\frac{3}{4}\% - 3\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{\frac{3}{4}\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{3}{2}$$

代入公式(3), 得:

$$\begin{aligned} y &= 19.60044135 + \frac{3}{2}(-1.20839594) + \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}}{2} \times 0.10838383 \\ &= 19.60044135 - 1.81259391 + 0.04064393625 \\ &= 17.82849133 \end{aligned}$$

$$b) \begin{array}{l} 3\% \quad 19.60044135 \\ 3\frac{1}{2}\% \quad 18.39204541 \\ 4\% \quad 17.29203330 \\ 4\frac{1}{2}\% \quad 16.28888551 \end{array} \left. \begin{array}{l} -1.20839594 \\ -1.10001211 \\ -1.00314476 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0.10838383 \\ 0.09686735 \end{array} \left. \right) -0.01151648$$

$$p = \frac{\frac{3\frac{3}{4}\% - 3\%}{\frac{1}{2}\%}}{\frac{\frac{3}{4}\%}{\frac{1}{2}\%}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

代入公式(3), 得:

$$\begin{aligned} y &= 19.60044135 + \frac{3}{2}(-1.20839594) + \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{2}{2}} \times 0.10838383 \\ &\quad + \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{2 \times 3}{2}} (-0.01151648) \\ &= 19.60044135 - 1.81259391 + 0.04064393625 \\ &\quad + 0.00071978 = 17.82921116 \end{aligned}$$

檢查雙項表時, 若二自變量俱為表上所無, 則須依次插補故計算較繁.

(例六) 求 $\frac{1}{1.0375^{30\frac{1}{2}}}$

a) 應用二數插補法;

b) 應用三數插補法.

a) 先求 $\frac{1}{1.0375^{30}}$ 與 $\frac{1}{1.0375^{31}}$

$$\begin{array}{l} 1.035^{-30} = 0.35627841 \\ 1.04^{-30} = 0.30831867 \end{array} \left. \right) -0.04795974$$

$$p = \frac{3\frac{3}{4}\% - 3\frac{1}{2}\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{\frac{1}{4}\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore 1.0375^{-30} &= 0.35627841 - \frac{1}{2} \times 0.04795974 \\ &= 0.35627841 - 0.02397987 \\ &= 0.33229854 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} 1.035^{-31} = 0.34423035 \\ 1.04^{-31} = 0.29646026 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1.035^{-31} \\ 1.04^{-31} \end{array}} \right) - 0.04777009$$

$$\begin{aligned} \therefore 1.0375^{-31} &= 0.34423035 - \frac{1}{2} \times 0.04777009 \\ &= 0.34423035 - 0.023885045 \\ &= 0.320345305 \end{aligned}$$

次由 1.0375^{-30} 與 1.0375^{-31} , 應用插補法,

$$\begin{array}{l} \text{求 } 1.0375^{-30\frac{1}{2}} \\ 1.0375^{-30} = 0.332298540 \\ 1.0375^{-31} = 0.320345305 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1.0375^{-30} \\ 1.0375^{-31} \end{array}} \right) - 0.011953235$$

$$p = \frac{30\frac{1}{2} - 30}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore 1.0375^{-30\frac{1}{2}} &= 0.33229854 - \frac{1}{2} \times 0.011953235 \\ &= 0.33229854 - 0.0059766175 \\ &= 0.32632192 \end{aligned}$$

b) 先求 1.0375^{-30} , 1.0375^{-31} 與 1.0375^{-32} .

$$\left. \begin{aligned} 1.035^{-30} &= 0.35627841 \\ 1.04^{-30} &= 0.30831867 \\ 1.045^{-30} &= 0.26700002 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &-0.04795974 \\ &-0.04131865 \end{aligned} \right) 0.00664109$$

$$p = \frac{3\frac{3}{4}\% - 3\frac{1}{2}\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{\frac{1}{4}\%}{\frac{1}{2}\%} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 1.0375^{-30} = 0.35627841 + \frac{1}{2}(-0.04795974)$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} \times 0.00664109 = 0.35627841$$

$$- 0.02397987 - 0.00083014 = 0.33146840$$

$$\left. \begin{aligned} 1.035^{-31} &= 0.34423035 \\ 1.04^{-31} &= 0.29646026 \\ 1.045^{-31} &= 0.25550241 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &-0.04777009 \\ &-0.04095785 \end{aligned} \right) 0.00681224$$

$$\therefore 1.0375^{-31} = 0.34423035 + \frac{1}{2}(-0.04777009) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} \times 0.00681224$$

$$= 0.34423035 - 0.023885045 - 0.00085153 = 0.31949378$$

$$\left. \begin{aligned} 1.035^{-32} &= 0.33258971 \\ 1.04^{-32} &= 0.28505794 \\ 1.045^{-32} &= 0.24449991 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &-0.04753177 \\ &-0.04055803 \end{aligned} \right) 0.00697374$$

$$\therefore 1.0375^{-32} = 0.33258971 + \frac{1}{2}(-0.04753177) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} \times 0.00697374$$

$$= 0.33258971 - 0.023765885 - 0.000871718 = 0.30795211$$

次由 1.0375^{-30} , 1.0375^{-31} 與 1.0375^{-32} , 應用插補法,

求 $1.0375^{-30\frac{1}{2}}$

$$\left. \begin{array}{l} 1.0375^{-30} = 0.33146840 \\ 1.0375^{-31} = 0.31949378 \\ 1.0375^{-32} = 0.30795211 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0.01197462 \\ -0.01154167 \end{array} \right) 0.00043295$$

$$p = \frac{30\frac{1}{2} - 30}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore 1.0375^{-30\frac{1}{2}} &= 0.33146840 + \frac{1}{2}(-0.0119462) + \frac{\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})}{2} \times 0.00043295 \\ &= 0.33146840 - 0.00598731 - 0.000054119 = 0.32542697 \end{aligned}$$

較二數插補法求得之近似數, 更為近似。

習 題 十 八

1. 已知:
- $x=4$ 時, $y=245$;
 - $x=5$ 時, $y=450$;
 - $x=6$ 時, $y=749$;
 - $x=7$ 時, $y=1160$;

問 $x=5.3$ 時, y 之數值幾何?

- a) 應用不定係數法;
- b) 應用差額法;
- c) 應用拉氏公式。

2. 已知:
- $\sqrt{51}=7.14143$,
 - $\sqrt{52}=7.21110$,
 - $\sqrt{53}=7.28711$,
 - $\sqrt{54}=7.34847$,

應用差額法 $\sqrt[3]{52.1}$

3. 求 $\log 2354.6!$

a) 應用二數插補法;

b) 應用三數插補法。

4. 應用三數插補法與四數插補法求下列各數之近似值:

a. 1.0325^{20}

b. 1.0475^{-15}

c. $\frac{1.0425^{18} - 1}{0.0425}$

d. $\frac{1 - 1.0325^{-10}}{0.0325}$

5. 求 $103^{20\frac{1}{2}}$

a) 應用 $(1+i)^n$ 表與 $(1+i)^{\frac{1}{p}}$ 表;

b) 應用對數表;

c) 由 1.03^{20} , 1.03^{21} , 1.03^{22} 與 1.03^{23} 插補。

6. 求 $1.02125^{1\frac{1}{2}}$

a) 應用二項級數展開法;

b) 應用對數表;

c) 應用三數插補法;

d) 應用四數插補法。

7. 求 $\frac{0.0525}{1 - 1.0525^{-20}}$

a) 應用對數表;

b) 應用二數插補法;

c) 應用三數插補法。

8. 應用五數插補法, 求 $1.03^{22\frac{1}{2}}$

第三章 自變量之插補

若截取公式(3)右邊之前二項,則得:

$$y = y_1 + p d_1$$

即

$$p = \frac{y - y_1}{d_1} \dots \dots \dots (4)$$

x 自變量

y 因變量

h 自變量之公差

d_1 因變量一次差之首項

$$p = \frac{x - x_1}{h}$$

上式為自變量之二數插補公式,蓋 p 之數值求得後,即可計算 x 之數值故也。

(例一) 由

$$(1+i)^{\frac{1}{i^2}} = 1.00091208,$$

應用二數插補法,求 i !

$$\left. \begin{array}{l} 1.01^{\frac{1}{i^2}} = 1.00082954 \\ 1.01125^{\frac{1}{i^2}} = 1.00093270 \end{array} \right\} 0.00010316$$

$$y = 1.00091208$$

$$y_1 = 1.00082954$$

$$d_1 = 0.00010316$$

$$\text{代入公式(1), 得: } p = \frac{0.00008254}{0.00010316} = 0.8001$$

$$h = 0.00125$$

$$x_1 = 0.01$$

$$\therefore x = x_1 + ph = 0.01 + 0.8001 \times 0.00125 = 0.011000125$$

$$\text{即 } i = 0.011000125$$

若截取公式(3)右邊之前三項,則得:

$$y = y_1 + pd_1 + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} d_2$$

$$\text{即 } p = \frac{y - y_1}{d_1 + \frac{p-1}{2} d_2}$$

若以公式(4)求得之近似值,代入上式中右邊之 p ,則可求得 p 之第二近似值.第二近似值通常較準確於第一近似值.然亦有例外者(參看例三)茲列自變量之三數插補公式於下:

$$p = \frac{y - y_1}{d_1 + \frac{p_1 - 1}{2} d_2} \dots\dots\dots 5)$$

x 自變量

y 因變量

h 自變量之公差

d_1 因變量一次差之首項

d_2 因變量二次差之首項

p_1 公式(4)求得之結果

$$p = \frac{x - x_1}{h}$$

(例二) 由

$$(1+i)^{\frac{1}{2}} = 1.00091208,$$

應用三數插補法, 求 i

$$\left. \begin{array}{l} 1.01^{\frac{1}{2}} = 1.00082954 \\ 1.01125^{\frac{1}{2}} = 1.00093270 \\ 1.0125^{\frac{1}{2}} = 1.00103575 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0.00010316 \\ 0.00010305 \end{array} \right) - 0.00000011$$

$$y = 1.00091208$$

$$y_1 = 1.00082954$$

$$d_1 = 0.00010316$$

$$d_2 = -0.00000011$$

$$p_1 = 0.8001$$

代入公式(5), 得:

$$p = \frac{0.00008254}{0.00010316 + \frac{0.1999}{2} \times 0.00000011} = \frac{8254}{10317.09945} = 0.80003$$

$$h = 0.00125$$

$$x_1 = 0.01$$

$$\therefore x = x_1 + ph = 0.01 + 0.80003 \times 0.00125 = 0.0110000375$$

即 $i = 0.0110000375$

此題準確答數為 0.011, 故第二近似值較第一近似值為更準確.

若欲用四數或五數插補, 則可截取公式(3)右邊之前四項或前五項, 其理與三數插補相同.

(例三) 求 $\text{antilog } 0.0169916$

a) 應用二數插補法;

b) 應用三數插補法.

$$\begin{array}{l} \log 1.039 = 0.0166160 \\ \log 1.040 = 0.0170330 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \log 1.039 \\ \log 1.040 \end{array}} \right\} 0.0004170$$

$$y = 0.0169916$$

$$y_1 = 0.0166160$$

$$d_1 = 0.0004170$$

代入公式(4), 得:

$$p = \frac{0.0003756}{0.0004170} = 0.9007$$

$$x_1 = 1.039$$

$$h = 0.001$$

$$\therefore x = x_1 + ph = 1.039 + 0.9007 \times 0.001 = 1.0399007$$

即 $\text{antilog } 0.0169916 = 1.0399007$

$$\begin{array}{l} \log 1.039 = 0.0166160 \\ \log 1.040 = 0.0170330 \\ \log 1.041 = 0.0174510 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \log 1.039 \\ \log 1.040 \\ \log 1.041 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 0.0004170 \\ 0.0004180 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 0.0004170 \\ 0.0004180 \end{array}} \right\} 0.0000010$$

$$y = 0.0169916$$

$$y_1 = 0.0166160$$

$$d_1 = 0.0004170$$

$$d_2 = 0.0000010$$

$$p_1 = 0.9007$$

代入公式(5), 得:

$$p = \frac{0.0003756}{0.0004170 - \frac{0.0993}{2} \times 0.000001}$$

$$= \frac{3756}{4169.5035} = 0.90083$$

$$x_1 = 1.039$$

$$h = 0.001$$

$$\therefore x = x_1 + ph = 1.039 + 0.90083 \times 0.001 = 1.03990083$$

即 $\text{antilog } 0.0169916 = 1.03990083$

此題準確答數為 1.0399, 故第一近似值較第二近似值為更準確, 此由於對數表中小數四捨五入之故。若由七位對數表中檢查對數, 則 d_2 為負數而非正數, p 之值亦將小於 0.9007, 而 x 之值亦將小於 1.0399007, 換言之, 即與其準確數值更為接近。

$$\left. \begin{array}{l} 0.0166155 \\ 0.0170333 \\ 0.0174507 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0.0004178 \\ 0.0004174 \end{array} \right) - 0.0000004$$

由公式(4)求得第一近似值後, 尚可用他法求其第二近似值。

(例四) 每年年金額 100 元, 五年末之年金終值為 533 元, 求實利率!

$$533 = 100 S_{\overline{5}|i}$$

$$S_{\overline{5}|} = 5.33$$

$$\left. \begin{aligned} i &= 3\% 5.3091 \\ i &= 3\frac{1}{2}\% 5.3625 \end{aligned} \right\} 0.0534$$

$$y = 5.33$$

$$y_1 = 5.3091$$

$$d_1 = 0.0534$$

代入公式(4), 得:

$$p = \frac{0.0209}{0.0534} = 0.391$$

$$x_1 = 0.03$$

$$h = 0.005$$

$$\therefore x = x_1 + ph = 0.03 + 0.005 \times 0.391 = 0.03196$$

但 $S_{\overline{5}|i} = \frac{(1+i)^5 - 1}{i}$

即 $5.33 i = (1+i)^5 - 1$

令 $i = 0.03196 + l$

以之代入上式, 則得:

$$(1.03196 + l)^5 - 5.33(0.03196 + l) - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} & 1.03196^5 + \frac{5}{1} \times 1.03196^4 l + \left(\frac{5 \times 4}{1 \times 2} \times 1.03196^3 l^2 + \right. \\ & \left. + l^5 \right) - 0.1703468 - 5.33 l - 1 = 0 \end{aligned}$$

0.03196 爲 i 之近似值, 故 l 之數值甚小, 其二次方以上各項之數值更爲微小, 故可略而不計, 則得:

$$1.03196^5 + 5 \times 1.03196^4 l - 1.1703468 - 5.33 l = 0$$

$$1.170346119 + 5.67050137l - 1.1703468 - 5.33 l = 0$$

$$0.34050137 l = 0.000000661$$

$$l = \frac{0.00000661}{340.50137} = 0.000002$$

即得 i 之第二近似值爲 0.031962, 若欲求更準確之近似值, 則令

$$i = 0.031962 + l$$

而依前法求得 i 之第三近似值.

習題十九

1. 本金一千元, 十年後可得本利合計洋二千五百元, 求實利率!
2. 本金五百元, 五年後可得本利合計洋七百五十元, 求虛利率! (每年複利二次)
3. 每年年金額 300 元, 六年末之年金終值爲 2055 元, 求實利率!
4. 某甲以一萬元存入銀行, 得於以後十年間每年末自銀行支取年金一千三百元, 求銀行計算年金時所用之實利率!
5. 求 $\text{antilog } 0.3875491$
6. 本金一千元, 十年後可得本利合計洋二千元, 求實利率!
 - a) 由複利終值表, 應用二數插補法;
 - b) 由複利現值表, 應用二數插補法;
 - c) 由 (a) 與 (b) 求得之結果, 求其平均數;
 - d) 應用假數七位之對數表;
 - e) 應用第二編公式 (29).

本編應用公式：

$$y = y_1 + (x - x_1)d_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{1 \cdot 2} d_2 + \dots + \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_r)}{1 \cdot 2 \dots r} d_r \dots \dots \dots (1)$$

$$y = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{r+1})}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_{r+1})} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_{r+1})}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_{r+1})} + \dots \dots \dots$$

$$+ y_{r+1} \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_r)}{(x_{r+1} - x_1)(x_{r+1} - x_2) \dots (x_{r+1} - x_r)} \dots \dots \dots (2)$$

$$y = y_1 + p d_1 + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} d_2 + \dots + \frac{p(p-1) \dots (p-r+1)}{1 \cdot 2 \dots r} d_r \dots \dots \dots (3)$$

$$p = \frac{y - y_1}{d_1} \dots \dots \dots (4)$$

$$p = \frac{y - y_1}{d_1 + \frac{p-1}{2} d_2} \dots \dots \dots (5)$$

第七編 債券

第一章 債券之發行

第一節 債券之意義及其種類

債券(Bonds)者，政府或公司向公眾借款而發行之債務證券也。政府發行之債券，名曰公債或庫券，而公司發行之債券則名曰公司債。我國各大公司之發行公司債者迄今猶未多見，然公債或庫券之發行以渡財政難關者，則幾無歲無之。庫券本為國庫於青黃不接之時，向公眾融通資金之短期債券，故外國庫券之期限，通常均在一年以內，然我國財政部所發行之庫券，其期限均在八九年以上。財政部所發行之按月償本付息之債券，均定名曰庫券，至其發行之公債，則指每半年抽籤償本之債券而言。

債券得分為有擔保債券與無擔保債券二種，公司之發行公司債，均以其財產作擔保，故公司債均屬於有擔保債券，政府發行之公債與庫券則不然，政府有強迫人民購買債券之權，故無提供擔保之必要，然政府有時不欲行使強迫權力，故有以一定稅收作為債券之擔保者，我國財政部所發行之

關稅庫券，鹽稅庫券與統稅庫券，乃以關稅，鹽稅，統稅作為擔保之庫券也。

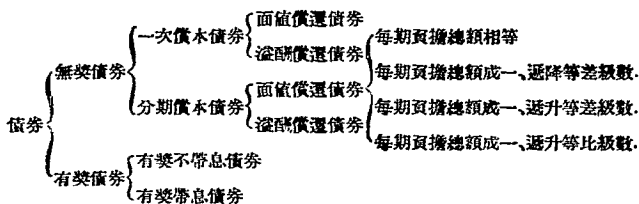
債券又有記名債券與不記名債券之別，記名債券之上面，及發行機關之債券分戶帳上，均載明債券持票人之姓名，故移讓之手續較繁，不記名債券，憑券不憑人，故移讓時祇須交出債券可也。

債券又得就其償債之方式而分類，債券償債之方式甚多，大別之得分為有獎債券與無獎債券二種，前者於中籤之債券，給以大小不等之獎額，而後者無之。

有獎債券又得分為有獎帶息債券與有獎不帶息債券二種，前者於獎額以外，另給相當利息，而後者無之。

無獎債券亦有一次償本債券與分期償本債券，面值償本債券與溢酬償本債券之別，債券之本金規定一次償還者名曰一次償本債券，其規定分期償還者，則名曰分期償本債券。債券償本時，有按債券本金償還者，有於償還本金外，另加若干金額以為酬報者，前者名曰面值償還債券，後者名曰溢酬償還債券。

分期面值償還之債券，又得就債券發行機關每期負擔總額之差異，而有種種償債之方式，債券發行機關每期負擔總額，有相等者，有依等差級數或等比級數而變動者，茲就主要償債公式，列表示之如下：



第二節 無獎債券

債券上書明之金額，名曰票面金額 (Par) 或面值 (Par Value or Face Value)，債券到期時償還之金額，名曰償還值 (Redemption Value)。償還值通常與面值相等，然有時發行債券機關欲引誘投資者之投資，將償還值略略提高，是曰溢酬償還 (Redemption at a Premium)，償還值超過面值之數，名曰溢酬 (Premium)，即為發行債券之機關對於投資者所增加之酬報；其依面值償還之方法，則名曰面值償還 (Redemption at Par)，故面值償還債券之償還值與面值相等。溢酬與面值之比，名曰溢酬率 (Rate of Premium)。本書債券問題中，除有特別說明外，均指面值償還債券而言。

債券上規定計算利息之利率，名曰債券利率 (Bond Rate)，債券利息依據面值計算，故與償還值無關。

債券本金若規定一次償還，則發行債券機關每期僅須支付利息，然若事前於償本一無準備，則借款到期時不得不另舉新債，以償舊債，故善理財者均於債券發行之始，按期籌

撥基金,以備借款到期時償本之需,此即第五編中所述之基金法是也。

(例一) 債券票面總額一百萬元,規定十年後一次償本,問每年須提撥基金若干元,以備償本之需?(基金依實利率五釐投資)

- a) 面值償還,基金於每年末提撥;
 b) 面值償還,基金於每年初提撥;
 c) 溢酬率5%,基金於每年末提撥.

設 R 為每年提撥基金額

$$a) \quad 1000000 = R S_{\overline{10}}$$

$$R = 1000000 \frac{1}{S_{\overline{10}}} = 79504.58 \text{ 元}$$

$$b) \quad 1000000 = R S'_{\overline{10}}$$

$$1000000 = R S_{\overline{10}} \times 1.05$$

$$\begin{aligned} \therefore R &= 1000000 \times \frac{1}{1.05} \times \frac{1}{S_{\overline{10}}} \\ &= 952380.95 \times 0.07950458 \\ &= 75718.65 \text{ 元} \end{aligned}$$

- c) 溢酬率為5%,故償還總額為1050000元.

$$1050000 = R S_{\overline{10}}$$

$$R = 1050000 \frac{1}{S_{\overline{10}}} = 1050000 \times 0.07950458$$

$$= 83479.81 \text{ 元}$$

若債券本金分期償還，而每期償本額相等，則每期應付利息隨負債額而遞減，故發行債券機關每期負擔總額，成一遞減等差級數。

(例二) 票面總額一百萬元，債券利率七釐，於五年內平均償還，作償本付息表！

償 本 付 息 表

年 別	貸 債 餘 額	利 息	償 本 額	負 擔 總 額
第 一 年	\$ 100000	\$ 7000	\$ 20000	\$ 27000
第 二 年	80000	5600	20000	25600
第 三 年	60000	4200	20000	24200
第 四 年	40000	2800	20000	22800
第 五 年	20000	1400	20000	21400

若債券本金分期償還，而每期負擔總額相等，則利息漸減而償本額漸增。

(例三) 債券一萬張，每張票面金額一百元，債券利率七釐，分五年償還，每年負擔總額相等，求年賦金額，並作償本付息表！

設 R 為年賦金額

應用第五編公式(4)，得：

$$R = 100000 \frac{1}{a_{\overline{5}|0.07}} = 248890.69 \text{ 元}$$

第 一 年	248890.69	負 擔 總 額
	<u>-70000.00</u>	利 息
	178890.69	償 本 額

但每張票面金額爲一百元，故第一年祇能償還本金
173800元，即收回債券1738張。

第二年	243890.69	負擔總額
	<u>+ 97.04</u>	上年餘額及其利息
	243987.73	
	<u>- 57834.00</u>	債券8262張之利息
	186153.73	償本額

收回1861張

第三年	243890.69	負擔總額
	<u>+ 57.49</u>	上年餘額及其利息
	243948.18	
	<u>- 44807.00</u>	債券6401張之利息
	199141.18	償本額

收回1991張

第四年	243890.69	負擔總額
	<u>+ 44.06</u>	上年餘額及其利息
	243934.75	
	<u>- 30870.00</u>	債券4410張之利息
	213064.75	償本額

收回2130張

第五年	243890.69	負擔總額
	<u>+ 69.28</u>	上年餘額及其利息
	243959.97	

— 15960.00 債券 2280 張之利息

227999.97 償本額

收回 2280 張

相差 0.03 元，此乃第三位小數四捨五入之故。

償本付息表

(1) 年別	(2) 償債餘額	(3) 償本付息 總額	(4) 利息	(5) 償本額	(6) 收回張數	(7) 收回債券 之票面總 額	(8) 餘額	(9) 餘額所生 之利息
第一年	\$1000000	\$243890.69	\$70000	\$173890.69	1738	\$173800	\$90.69	\$6.35
第二年	826200	243987.73	57834	186153.73	1861	186100	53.73	3.76
第三年	640100	243948.18	44807	199141.18	1991	199100	41.18	2.88
第四年	441000	243934.75	30870	213064.75	2130	213000	64.75	4.53
第五年	228000	243959.97 0.03	15960	227999.97 0.03	2280	228000	—	—
合計	3135300	1219721.35	219471	1000253.35	10300	1000000	250.35	17.52

上表之計算，可就各行合計，依照下列各式稽核之。

$$(2) \times \frac{7}{100} = (4)$$

$$(3) = 5 \times 243890.69 + 0.03 + (8) + (9)$$

$$(3) - (4) = (5)$$

$$(5) - (7) = (8)$$

$$(8) \times \frac{7}{100} = (9)$$

上法計算太繁，不適實際應用，故須另籌更簡捷之法以代之。吾人苟能求得每期收回債券張數，則償本付息表即不難製作。欲求每期收回債券張數，則以債券張數為單位，較為簡捷。設第一期收回債券 B 張，則負債額減少 B 張，故第二期付息額減少 $B i$ 張，換言之，第二期收回債券張數即增加 $B i$ 張而成 $B(1+i)$ 張。同理，第三期收回債券張數為 $B(1+i)^2$ ，第四期收回債券張數為 $B(1+i)^3$ ，簡言之，第 n 期收回債券張數為 $B(1+i)^{n-1}$ ，故各期收回債券張數可依次求得如下：

收回債券張數 償本額

年賦金額	2438.91		
- 第一期付息額	<u>700.00</u>		
	1738.91	1738	0.91
+7%	<u>121.72</u>		<u>1860.63</u>
	1860.63	1861	0.54
+7%	<u>130.24</u>		<u>1990.87</u>
	1990.87	1991	0.41
+7%	<u>139.36</u>		<u>2130.23</u>
	2130.23	2130	0.64
+7%	<u>149.12</u>		<u>2279.35</u>
	2279.35	2280	

各期收回債券張數計算表

年賦金額	2438.91		
- 第一期付息額	<u>700.00</u>		
	1738.91	0.91 *	收回債券 1738 張
+ 7%	<u>121.72</u>		
	1860.63	<u>1860.63</u>	
		0.54	收回債券 1861 張
+ 7%	<u>130.24</u>		
	1990.87	<u>1990.87</u>	
		0.41	收回債券 1991 張
+ 7%	<u>139.36</u>		
	2130.23	<u>2130.23</u>	
		0.64	收回債券 2130 張
+ 7%	<u>149.12</u>		
	2279.35	<u>2279.35</u>	
		0.01	
		<u>0.00</u>	收回債券 2280 張

上表中計算，可用下列二式稽核之。

$$2279.35 \times 1.07 = \text{年賦金額}$$

$$1738 + 1861 + 1991 + 2130 + 2280 = \text{發行債券張數}$$

各期收回債券張數求得後，償本付息表即可改作如下：

償 本 付 息 表

(1) 年 別	(2) 收回張數	(3) 償 本 額	(4) 年初負債餘額	(5) 付 息 額	(6) 償本付息總額
第 一 年	1738	\$ 173800	\$ 1000000	\$ 70000	\$ 243800
第 二 年	1861	186100	826200	5783	243934
第 三 年	1991	199100	640100	44807	243907
第 四 年	2130	213000	441000	30870	243870
第 五 年	2280	228000	228000	15960	243960
合 計	10000	1000000	3135300	219471	1219471

上表之計算，可就各行合計，依照下列各式稽核之。

*第一期實際償本額為 1738 張，而左方利息乃根據 1738.91 張計算，多算 0.91 張之利息，故餘額 0.91 張之利息，不再計算，以免重複。

$$(2) \times 100 = (3)$$

$$(3) + (5) = (6)$$

$$(4) \times \frac{7}{100} = (5)$$

有時債券票面金額分成數種，則計算每期收回債券張數，較為複雜，茲舉例說明之於下。

(例四) 債券總額一百萬元，各種債券票面金額及其張數，規定如下：

票面金額	張數
1000 元	200
500 元	600
100 元	4000
50 元	2000

債券利率七釐，分五年償還，每年負擔總額相等，試作償本付息表！

先求各種債券每年應收回張數。

a) 票面金額 1000 元

$$200 \frac{1}{0.07} = 48.78 \text{ 年賦金額}$$

票面1000元債券每年應收回張數計算表

年賦金額	48.78		
- 第一年付息額	<u>14.00</u>		
	34.78	0.78	收回債券34張
+ 7%	<u>2.43</u>		
	37.21	<u>37.21</u>	
+ 7%	<u>2.60</u>	0.99	收回債券37張
	39.81	<u>39.81</u>	
+ 7%	<u>2.79</u>	0.80	收回債券40張
	42.60	<u>42.60</u>	
+ 7%	<u>2.98</u>	0.40	收回債券43張
	45.58	45.58	
		<u>0.02</u>	
		0.00	收回債券46張

b) 票面金額 500 元 $600 \frac{1}{a_5} = 146.33$ 年賦金額

票面500元債券每年應收回張數計算表

年賦金額	146.33		
- 第一年付息額	<u>42.00</u>		
	104.33	0.53	收回債券104張
+ 7%	<u>7.30</u>		
	111.63	<u>111.63</u>	
+ 7%	<u>7.81</u>	0.96	收回債券111張
	119.44	<u>119.44</u>	
+ 7%	<u>8.36</u>	0.40	收回債券120張
	127.80	<u>127.80</u>	
+ 7%	<u>8.95</u>	0.20	收回債券128張
	136.75	136.75	
		<u>0.05</u>	
		0.00	收回債券137張

c) 票面金額 100 元 $4000 \frac{1}{a_{51}} = 975.56$ 年賦金額

票面100元債券每年應收回張數計算表

年賦金額	975.56		
- 第一年付息額	<u>280.00</u>		
	695.56	0.56	收回債券 695 張
+ 7%	<u>48.69</u>		
	744.25	<u>744.25</u>	
+ 7%	<u>52.10</u>	0.81	收回債券 744 張
	796.35	<u>796.35</u>	
+ 7%	<u>55.74</u>	0.16	收回債券 797 張
	852.09	<u>852.09</u>	
+ 7%	<u>59.65</u>	0.25	收回債券 852 張
	911.74	<u>911.74</u>	
		<u>0.01</u>	
		0.00	收回債券 912 張

$$d) \text{票面金額 } 50 \text{ 元} \quad 2000 \frac{1}{a_{\overline{5}|}} = 487.78 \text{ 年賦金額}$$

票面50元債券每年應收回張數計算表

年賦金額	487.78		
- 第一年付息額	<u>140.00</u>		
	347.78	0.78	收回債券 347 張
+ 7%	<u>24.34</u>		
	372.12	<u>372.12</u>	
+ 7%	<u>26.05</u>	0.90	收回債券 372 張
	398.17	<u>398.17</u>	
+ 7%	<u>27.87</u>	0.07	收回債券 399 張
	426.04	<u>426.04</u>	
+ 7%	<u>29.82</u>	0.11	收回債券 426 張
	455.86	<u>455.86</u>	
		<u>0.03</u>	
		0.00	收回債券 456 張

各種債券每年應收回張數求得後,再求全部債券每年

應收回張數，以最小票面金額之債券張數為單位，則債券張數總額當為：

$$1000000 \div 50 = 20000$$

$$20000 \times \frac{1}{a_{\overline{5}|}} = 4877.81 \text{ 年賦金額}$$

全部債券每年應收回張數計算表
(以票面金額50元為標準)

年賦金額	4877.81		
- 第一年付息額	<u>1400.00</u>		
	3477.81	0.81	收回債券3477張
+ 7%	<u>243.45</u>		
	3721.26	3721.26	
+ 7%	<u>260.49</u>	0.07	收回債券3722張
	3981.75	3981.75	
+ 7%	<u>278.72</u>	0.82	收回債券3981張
	4260.47	4260.47	
+ 7%	<u>298.23</u>	0.29	收回債券4261張
	4558.70	4558.70	
		0.01	
		0.00	收回債券4559張

全部債券總計算與各種債券分別計算求得每年償本總額，略有差異，故各種債券每年應收回張數，當設法校正之，以求符合。

各年收回債券張數校正表

年別	各種債券應收回張數				償本總額		校正金額	校正張數			
	1000元	500元	100元	50元	分別計算	全部計算		1000元	500元	100元	50元
第一年	31	104	695	347	\$172850	\$173850	+1000	+1			
第二年	37	111	744	372	185500	186100	+600		+1	+1	
第三年	40	120	797	399	199650	199050	-600		-1	-1	
第四年	43	128	852	426	213500	213050	-450	-1	+1		+1
第五年	46	137	912	456	228500	227950	-550		-1		-1
合計	200	600	4000	2000	1000000	1000000	0	0	0	0	0

各年收回債券張數校正後，即可作償本付息表。

償 本 付 息 表

年 別	各種債券收回張數				償本總額	年初買債餘額	利 息	償本付息總額
	1000元	500元	100元	50元				
第一年	35	104	695	347	\$ 173850	\$ 1000000	\$ 70000.00	\$ 243850.00
第二年	37	112	745	372	186100	826150	57830.50	243930.50
第三年	40	119	796	399	199050	640050	44803.50	243853.50
第四年	42	129	852	427	213050	441000	30870.00	243920.00
第五年	46	136	912	455	227950	227950	15956.50	243906.50
合計	200	600	4000	2000	1000000	3135150	219460.50	1219460.50

若發行債券機關每年負擔總額，預先規定，例如負債總額十分之一與全部債券利息之和，則有一年之負擔總額，與其他各年相異，而清償年限，須先求得。

(例五) 債券一萬張，每張票面金額一百元，債券利率七釐，每年負擔總額規定為票面總額十分之一與全部債券利息之和，試作償本付息表！

a) 零數於最後一年支付；

b) 零數於最初一年支付。

$$10000 \times \frac{1}{10} + 10000 \times \frac{7}{100} = 1700 \text{ 張 年賦金額}$$

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = 0.17$$

查年賦金表，得：

$$7 < n < 8$$

a) 應用第四編公式(21)，得：

$$L = A w^n - R(S_{\overline{n}|} - 1) = A w^n - R u S_{\overline{n-1}|} = 10000 w^8 - 1700 u S_{\overline{7}|}$$

L 為最後一年年賦金額，此數包含未收回債券張數與一年間所生之利息，故最後一年收回債券張數，當為：

$$\begin{aligned} \frac{L}{u} &= 10000 w^7 - 1700 S_{\overline{7}|} = 16057.8148 - 1700 \times 8.65402109 \\ &= 16057.8148 - 14711.8359 = 1345.98 \text{ 張} \end{aligned}$$

每年收回債券張數計算表

		1000.00	0	收回債券 1000 張
+	7%	<u>70.00</u>		
		1070.00	0	收回債券 1070 張
+	7%	<u>74.90</u>		
		1144.90	0.90	收回債券 1144 張
+	7%	<u>80.14</u>		
		1225.04	<u>1225.04</u>	
			0.94	收回債券 1225 張
+	7%	<u>85.76</u>		
		1310.79	<u>1310.79</u>	
+	7%	<u>91.76</u>		
		1402.55	0.73	收回債券 1311 張
			<u>1402.55</u>	
+	7%	<u>98.18</u>		
		1500.73	0.28	收回債券 1403 張
			<u>1500.73</u>	
			0.01	收回債券 1501 張
$\frac{L}{u}$			1345.98	
			<u>0.01</u>	
			0.00	收回債券 1346 張

償本付息表

年 別	收回張數	償 本 額	年初負債餘額	利 息	償本付息總額
第 一 年	1000	\$ 100000	\$ 1000000	\$ 70300	\$ 170000
第 二 年	1070	107030	900000	63000	170500
第 三 年	1144	114400	793000	55510	169910
第 四 年	1225	122500	678600	47502	170002
第 五 年	1311	131100	556100	38927	170027
第 六 年	1403	140300	425000	29750	170050
第 七 年	1501	150100	284700	19929	170029
第 八 年	1346	134600	134600	9422	144022
合 計	10000	1000000	4772000	334040	1334040

b) 應用第四編公式(22), 得:

$$\begin{aligned}
 F &= Au - R a_{n-1}| \\
 &= 10700 - 1700 a_{7}| \\
 &= 10700 - 1700 \times 5.3892894 \\
 &= 10700 - 9161.79198 \\
 &= 1538.21 \text{ 張}
 \end{aligned}$$

每年收回債券張數計算表

第一年年賦金額	1538.21		
- 第一年付息額	<u>700.00</u>		
	838.21	0.21	收回債券 838 張
+ 7%	<u>58.67</u>		
	<u>161.79*</u>		
	1058.67	<u>1058.67</u>	
+ 7%	<u>74.11</u>	0.88	收回債券 1058 張
	<u>1132.78</u>	<u>1132.78</u>	
+ 7%	<u>79.29</u>	0.66	收回債券 1133 張
	<u>1212.07</u>	<u>1212.07</u>	
+ 7%	<u>84.84</u>	0.73	收回債券 1212 張
	<u>1296.91</u>	<u>1296.91</u>	
+ 7%	<u>90.78</u>	0.64	收回債券 1297 張
	<u>1387.69</u>	<u>1387.69</u>	
+ 7%	<u>97.14</u>	0.33	收回債券 1388 張
	<u>1484.83</u>	<u>1484.83</u>	
+ 7%	<u>103.94</u>	0.16	收回債券 1485 張
	<u>1588.77</u>	<u>1588.77</u>	
		<u>0.07</u>	
		0.00	收回債券 1589 張

* 第一年年賦金額僅有 1538.21 張, 較其他各年少 161.79 張, 故第二年起增加 161.79 張。

償本付息表

年 別	收回張數	價 本 額	年初實債餘額	利 息	償本付息總額
第 一 年	838	\$ 83800	\$ 1000000	\$ 70000	\$ 153800
第 二 年	1053	105800	916200	64134	169934
第 三 年	1133	113300	810400	56728	170028
第 四 年	1212	121200	697100	48797	169997
第 五 年	1297	129700	575900	40313	170013
第 六 年	1388	138800	446200	31234	170034
第 七 年	1485	148500	307400	21518	170018
第 八 年	1589	158900	158900	11123	170023
合 計	109000	1000000	4912100	343847	1343847

以上三例(例三至例五)均規定每年負擔總額相等,有時發行債券機關欲使負擔加重於後幾年,則可預先規定每年負擔總額成一遞升等差級數或遞升等比級數。

(例六)債券一萬張,每張票面金額一百元,債券利率七釐,分五年償還,試作償本付息表!

- a) 每年負擔總額成一等差級數,公差為10000元;
 b) 每年負擔總額成一等比級數,公比為1.1.
 a) 設 f 為第一年年賦金額(以票面金額為單位).
 應用第四編公式(58),得:

$$\begin{aligned}
 10000 &= (f + 5 \times 100) a_{\overline{5}|} - 100 \sum a_{\overline{5}|} \\
 &= f a_{\overline{5}|} + 500 a_{\overline{5}|} - 100 \sum a_{\overline{5}|} \\
 \therefore f &= \frac{1}{a_{\overline{5}|}} (10000 - 500 a_{\overline{5}|} + 100 \sum a_{\overline{5}|}) \\
 &= 0.24389069(10000 - 2050.0987 + 1285.4322) \\
 &= 0.24389069 \times 9235.3335 = 2252.41 \text{ 張}
 \end{aligned}$$

各年收回債券張數計算表

第一年年賦金額	2252.41		
- 第一年付息額	<u>700.00</u>		
	1552.41	0.41	收回債券 1552 張
+ 7%	108.67		
+	<u>100.00</u>		
	1761.08	<u>1761.08</u>	
		0.49	收回債券 1761 張
+ 7%	123.28		
+	<u>100.00</u>		
	1984.36	<u>1984.36</u>	
		0.85	收回債券 1984 張
+ 7%	138.91		
+	<u>100.00</u>		
	2223.27	<u>2223.27</u>	
		0.12	收回債券 2224 張
+ 7%	155.63		
+	<u>100.00</u>		
	2478.90	2478.90	
		<u>-0.02</u>	
		0.00	收回債券 2479 張

償 本 付 息 表

年 別	收回張數	償 本 額	年初負債餘額	利 息	償本付息總額
第 一 年	1552	\$ 155200	\$ 1000000	\$ 70000	\$ 225200
第 二 年	1761	176100	844800	59136	235236
第 三 年	1984	198400	668700	46809	245209
第 四 年	2224	222400	470300	32921	253321
第 五 年	2479	247900	247900	17353	265253
合 計	10000	1000000	3231700	226219	1226219

b) 本題須先求每年年賦金額,然後計算每年收回債券張數.

設 f 為第一年年賦金額(單位元).

應用第四編公式 (62), 得:

$$1000000 = f \frac{1 - 1.1^5 \times 1.07^{-5}}{-0.03}$$

$$\therefore f = \frac{30000}{1.61051 \times 0.71298618 - 1} = \frac{30000}{0.1482713728}$$

= 202331.71 元

202331.71 元 第一年年賦金額

+ 10%

20233.17

222564.88 元 第二年年賦金額

+ 10%

22256.49

244821.37 元 第三年年賦金額

+ 10%

24482.14

269303.51 元 第四年年賦金額

+ 10%

26930.35

296233.86 元 第五年年賦金額

償本付息表

(1) 年別	(2) 負債餘額	(3) 年賦金額	(4) 償本付息總額	(5) 利息	(6) 償本額	(7) 收回張數	(8) 收回債券之票面總額	(9) 餘額	(10) 餘額所生之利息
第一年	\$1000000	\$202331.71	\$202331.71	\$70000	\$132331.71	1323	\$132300	\$31.71	\$2.22
第二年	867700	222564.88	222598.81	60739	161859.81	1618	161800	59.81	4.19
第三年	705900	244821.37	244885.37	4941	195472.37	1954	195400	72.37	5.07
第四年	510500	269303.51	269380.95	35735	235645.95	2336	233600	45.95	3.22
第五年	276900	296233.86	296233.03	19385	276900.03	2769	276900	—	—
合計	3361000	1235255.30	1235479.84	235270	1000209.84	10000	1000000	209.84	14.70

上表之計算, 可就各行合計, 依照下列各式稽核之。

$$(2) \times \frac{7}{100} = (5)$$

$$(4) = (3) + (9) + (10)$$

$$(4) - (5) = (6)$$

$$(6) - (8) = (9)$$

$$(9) \times \frac{7}{100} = (10)$$

上述諸例，債券收回時，均照票面金額償還，但有時發行債券機關，欲吸引公衆之購券，規定於票面金額之外，另給溢酬，以資鼓勵。若每年償本付息之總額相等，則每年支付之溢酬總額，隨償本額之增加而漸增，故發行債券機關負擔總額，亦與年俱增。

(例七) 債券一萬張，每張票面金額一百元，債券利率七釐，分五年償還，每年償本付息之總額相等，溢酬率10%，試作償本付息表！

本題除溢酬外，均與例三相同，故例三中求得之每年收回債券張數，亦可適用。

償 本 付 息 表

年 別	收回張數	償 本 額	溢酬額 10%	年初實償餘額	付 息 額	負擔總額
第一 年	1738	\$ 173800	\$ 17380	\$ 1000000	\$ 70000	\$ 261180
第二 年	1861	186100	18610	826200	57834	262544
第三 年	1991	199100	19910	640100	44807	263817
第四 年	2130	213000	21300	441000	30870	265170
第五 年	2280	228000	22800	228000	15960	266760
合 計	10000	1000000	100000	3135300	219471	1319471

上表中每年負擔總額不相等，計算債券價值時甚感不便，故通常採用下法。

(例八) 債券一萬張，每張票面金額一百元，溢酬率10%，債券利率七釐，分五年償還，每年償本付息與支付溢酬之總額相等，試作償本付息表！

票面金額一百元，債券利率七釐，故每年支付利息七元。票面一百元之債券，須償還一百十元，依據此償還額而計算之利息，則所用之利率不及七釐，此利率名曰等值利率 (Equivalent Rate)。

$$\frac{7}{110} = 6.3636\% \quad \text{等值利率}$$

設 R 為每年年賦金額 (單位每張債券償還額)。

$$R = 10000 \frac{1}{a_{\overline{5}|}} @ 6.3636\%$$

查年賦金表，得：

$\frac{1}{a_{\overline{5} }} @ 6\frac{1}{2}\%$	0.24063454
$\frac{1}{a_{\overline{5} }} @ 6\%$	<u>0.23739640</u>
	0.00323814

$$0.00323814 \times \frac{0.3636\%}{\frac{1}{2}\%} = 0.00323814 \times 0.7272 = 0.00235478$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{\overline{5}|}} @ 6.3636\% &= 0.23739640 + 0.00235478 \\ &= 0.23975118 \end{aligned}$$

$$\therefore R = 2397.51 \text{ 張}$$

每年收回債券張數計算表

年賦金額	2397.51			
- 第一年利息	<u>636.36*</u>			
	1761.15	0.15	收回債券 1761 張	
+ $\frac{7}{110}$	<u>112.07</u>			
	1873.22	<u>1873.22</u>		
		0.37	收回債券 1873 張	
+ $\frac{7}{110}$	<u>119.20</u>			
	1992.42	<u>1992.42</u>		
		0.79	收回債券 1992 張	
+ $\frac{7}{110}$	<u>126.79</u>			
	2119.21	<u>2119.21</u>		
		0.00	收回債券 2120 張	
+ $\frac{7}{110}$	<u>134.86</u>			
	2254.07	2254.07		
		-0.07		
		0.00	收回債券 2254 張	

償 本 付 息 表

(1) 年 別	(2) 收回張數	(3) 償 本 額	(4) 溢 酬 10%	(5) 年初未收回債 券票面總額	(6) 利息@7%	(7) 負擔總額
第 一 年	1761	\$ 176100	\$ 17610	\$ 1000000	\$ 70000	\$ 263710
第 二 年	1873	187300	18730	823900	57673	263703
第 三 年	1992	199200	19920	636600	44562	263682
第 四 年	2120	212000	21200	437400	30618	263318
第 五 年	2254	225400	22540	225400	15778	263718
合 計	10090	1000000	100000	3123300	218631	1318631

上表中計算，可就各行合計，依照下列各式稽核之。

$$(2) \times 100 = (3)$$

$$(3) \times \frac{10}{100} = (4)$$

$$(5) \times \frac{7}{100} = (6)$$

$$(3) + (4) + (6) = (7)$$

* 第一年應付利息 70000 元，化為償還額單位，則得 $\frac{70000}{110}$ 即 636.36。

習 題 二 十

1. 債券票面總額一百萬元，規定二十年後一次償本，問每年須提撥基金若干元，以備償本之需？(基金依實利率七釐投資)

- a) 面值償還，基金於每年末提撥；
- b) 面值償還，基金於每年初提撥；
- c) 溢酬率10%，基金於每年末提撥。

2. 債券總額一百萬元，債券利率八釐，於五年內平均償還，作償本付息表！

3. 債券二千張，每張票面金額五百元，債券利率八釐，分五年償還，每年負擔總額相等，求年賦金額，並作償本付息表！

4. 債券總額一百萬元，各種債券票面金額及其張數，規定如下：

票面金額	張數
1000 元	100
500 元	400
100 元	3000
50 元	8000

債券利率八釐，分五年償還，每年負擔總額相等，試作償本付息表！

5. 債券二千張，每張票面金額五百元，債券利率八釐，每年負擔總額規定為債券總額八分之一與全部債券利息之和，試作償本付息表！

- a) 零數於最後一年支付；
- b) 零數於最初一年支付。

6. 債券二千張，每張票面金額五百元，債券利率八釐，分五年償還，試作償本付息表！

- a) 每年負擔總額成一等差級數，公差為20000元；
- b) 每年負擔總額成一等比級數，公比為1.1。

7. 債券二千張，每張票面金額五百元，債券利率八釐，分五年償還，每年償本付息之總額相等，溢酬率5%，試作償本付息表！

8. 債券二千張，每張票面金額五百元，溢酬率5%，債券利率八釐，分五年償還，每年償本付息與支付溢酬之總額相等，試作償本付息表！

第三節 有獎債券

有時發行債券機關，規定債券不給利息，而代以大小不等之獎額，按期分給中籤之債券；或於票面規定較低利率，而以預定負擔利息與實際支出之利息相差之額，用獎額形式，按期分給中籤之債券。例如發行債券機關預定負擔利率七釐之利息，或規定債券不給利息，而以所省利息，全部撥充獎金，或規定票面利息四釐，而以所省之三釐利息，撥充獎金，前者名曰不帶息有獎債券，後者名曰帶息有獎債券。

由每期中籤債券所省之利息，即撥充該期中籤債券之獎額，則中籤遲早之債券，無優劣之別，此種給獎方法最為公平，故可名曰模範給獎法。

(例一) 債券一萬張，票面金額一百元，分五年償還，發行債券機關所負擔之利息，規定為七釐，每年負擔總額相等，但債券不給利息，由每年中籤債券所生之利息，即撥充大小不等之獎額，分給中籤各債券，試作償本給獎表！

$$R = 10000 \frac{1}{a_5} = 2438.9069 \text{ 張 年賦金額 (單位票面金額)}$$

第一年年賦金額為第一年償本額及其利息之和，故第一年年償本額為 Rv ；第二年年賦金額為第二年償本額及其在前二年所省利息之和，故第二年年償本額為 Rv^2 ；簡言之，第 n 年年賦金額為第 n 年償本額及其在前 n 年所省利息之和，故第 n 年年償本額為 Rv^n 。即：

第一年償本額 = Rv

第二年償本額 = Rv^2

第三年償本額 = Rv^3

第四年償本額 = Rv^4

第五年償本額 = Rv^5

由前一年之償本額，計算後一年之償本額，祇須以 v 乘之；反之，由後一年之償本額，計算前一年之償本額，祇須以 u 乘之。 v 為 $\frac{1}{1+i}$ ，而 u 為 $1+i$ ，後者便於計算，而前者則否，故以先求最後一年之償本額為較便。

$$Rv^5 = 2438.9069 \times 0.71298618 = 1738.9069 \text{ 張}$$

每年收回債券張數計算表

第五年		1738.9069	第一年	0.35	收回債券 2279 張
	+7%	<u>121.7235</u>		<u>2130.24</u>	
第四年		1860.6304	第二年	0.59	收回債券 2130 張
	+7%	<u>130.2441</u>		<u>1990.87</u>	
第三年		1990.8745	第三年	0.46	收回債券 1991 張
	+7%	<u>139.3612</u>		<u>1860.63</u>	
第二年		2130.2357	第四年	0.09	收回債券 1861 張
	+7%	<u>149.1165</u>		<u>1738.91</u>	
第一年		2279.3522	第五年	0.00	收回債券 1739 張

償本給獎表

年 別	收回張數	票面百元之償還值	償 本 額	獎 額	頁摺總額
第 一 年	2279	\$ 107.00	\$ 227900	\$ 15953.00	\$ 243853.00
第 二 年	2130	114.49	213000	30863.70	243863.70
第 三 年	1991	122.50	199100	44797.50	243897.50
第 四 年	1861	131.03	186100	57839.88	243939.88
第 五 年	1739	140.26	173900	70012.14	243912.14
合 計	10000		1000000	219466.22	1219466.22

至於獎額之分配，則可分為大小不等之獎額，例如每年中籤債券中，可給以二十大獎，其餘均為小獎，每年小獎額可漸次增加，假定第一年為3元，第二年為6元，第三年為9元，第四年為12元，第五年為15元，其二十大獎亦可假定分配如下：

第一年

頭獎	1個 @	5000元	5000元
二獎	1個 @	1000元	1000元
三獎	2個 @	500元	1000元
四獎	5個 @	200元	1000元
五獎	10個 @	110元	1100元
未獎	1個 @	76元	76元
	<u>20個</u>		<u>9176元</u>
	+2259個小獎 @ 3元		6777
			<u>15953元</u>

第二年

頭獎	1個 @	10000元	10000元
二獎	1個 @	2000元	2000元
三獎	2個 @	1000元	2000元
四獎	5個 @	400元	2000元
五獎	10個 @	210元	2100元
未獎	1個 @	103.70元	103.70元
	<u>20個</u>		<u>18203.70元</u>
	+2110個小獎 @ 6元		12660.00
			<u>30863.70元</u>

第三年

頭獎	1個 @ 15000 元	15000 元
二獎	1個 @ 5000 元	5000 元
三獎	2個 @ 1000 元	2000 元
四獎	5個 @ 500 元	2500 元
五獎	10個 @ 240 元	2400 元
末獎	1個 @ 158.50 元	<u>158.50 元</u>
	20 個	27058.50 元
	+1971 個小獎 @ 9 元	<u>17739.00</u>
		44797.50 元

第四年

頭獎	1個 @ 20000 元	20000 元
二獎	1個 @ 6000 元	6000 元
三獎	2個 @ 1500 元	3000 元
四獎	5個 @ 700 元	3500 元
五獎	10個 @ 300 元	3000 元
末獎	1個 @ 247.88 元	<u>247 88 元</u>
	20 個	35747.88 元
	+1841 個小獎 @ 12 元	<u>22092.00</u>
		57839.88 元

第五年

頭獎	1個 @ 25000 元	25000 元
----	--------------	---------

二獎 1個 @ 7500 元	7500 元
三獎 2個 @ 2000 元	4000 元
四獎 5個 @ 800 元	4000 元
五獎 10個 @ 350 元	3500 元
未獎 1個 @ 227.14 元	227.14 元
20 個	44227.14 元
+ 1719 個小獎 @ 15 元	25785.00 元
	70012.14 元

若以每年所省利息，全部撥充本年中籤債券之獎金，則每年獎金總額漸減，而中籤債券之張數漸增，故中籤較早之債券，所得之利益較厚。

(例二) 債券一萬張，票面金額一百元，分五年償還，發行債券機關所負擔之利息，規定為七釐，但債券不給利息，每年所省利息，全部撥充本年中籤債券之獎金，每年償本給獎之總額相等，試作償本給獎表！

每年應付獎金，即為無獎債券每年應付之利息，故每年收回債券張數，與第二節例三相同。

償 本 給 獎 表

年 別	收回張數	年初未收回張數	償 本 額	獎 額	負擔總額	平均每券償還值
第 一 年	1738	10000	\$ 173800	\$ 70000	\$ 243800	\$ 140.28
第 二 年	1861	8262	186100	57834	243 84	131.08
第 三 年	1991	6101	199100	44807	243907	122.50
第 四 年	2130	4410	213000	30870	243870	114.49
第 五 年	2280	2280	228000	15960	243960	107.00
合 計	10000	31353	1000000	219471	1219471	

每年獎金額漸減，而每年中籤債券之張數漸增，欲使每年仍能具有相當額之大獎，則不能再給小獎，故不中大獎之債券，通常僅按票面金額收回。

以上二例中，每張債券平均償還值，前者(例一)遞增而後者(例二)遞減，此即可證前者之給獎方法，較後者為公平，蓋中籤較遲之債券，因利息關係，當得較大之償還值故也。發行債券機關有鑒於此，故有預先規定每年中籤債券之平均償還值，成一遞升等差級數者，下題即其例也。

(例三) 債券一萬張，票面金額一百元，分五年償還，每年負擔總額相等，債券不給利息，但給獎金，每年中籤債券之平均償還值，規定第一年為 108 元，以後每年遞增 6 元，求每年負擔總額，並作償本給獎表！

設 R 為每年負擔總額，則得：

$$10000 = \frac{R}{108} + \frac{R}{114} + \frac{R}{120} + \frac{R}{126} + \frac{R}{132}$$

$$10000 = \frac{R}{6} \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad 60000 &= R \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{22} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{17} \right) \right] \end{aligned}$$

上式中小括弧內為連續倒數之和，故可查累積倒數表(表三)。

$$60000 = R(3.69081325 - 3.43955252)$$

$$\therefore R = \frac{60000}{0.25126073} = 238795.77 \text{ 元}$$

每年收回債券張數計算表

第一年 $\frac{R}{108} = 2211.07$	0.07	收回債券 2211 張
第二年 $\frac{R}{114} = 2094.70$	<u>2094.70</u>	
	0.77	收回債券 2094 張
第三年 $\frac{R}{120} = 1989.96$	<u>1989.96</u>	
	0.73	收回債券 1990 張
第四年 $\frac{R}{126} = 1895.20$	<u>1895.20</u>	
	0.93	收回債券 1895 張
第五年 $\frac{R}{132} = 1809.03$	1809.06	
	<u>0.01</u>	
	0.00	收回債券 1810 張

償 本 給 獎 表

年 別	收回張數	平均每券償還值	償 本 額	獎 額	負擔總額
第一 年	2211	\$ 108	\$ 221100	\$ 17688	\$ 238788
第二 年	2094	114	209400	29316	238716
第三 年	1990	120	199000	39800	238800
第四 年	1895	126	189500	49270	238770
第五 年	1810	132	181000	57920	238920
合 計	10090		1000000	193994	1193994

發行債券機關每年所支付之獎金，即為其對於借款所負擔之利息，惟計算此利息所用之利率，猶未知悉，故須另行求得。

$$1000000 = 238795.77 a_{\overline{5}|i}$$

$$\frac{1}{a_{\overline{5}|i}} = 0.23879577$$

查年賦金表,得:

$\frac{1}{a_{\overline{5} }} @ 6 \frac{1}{2} \%$	0.24063454
$\frac{1}{a_{\overline{5} }} @ 6\%$	0.23739640
	0.00323814
$\frac{1}{a_{\overline{5} }} @ i$	0.23879577
$\frac{1}{a_{\overline{5} }} @ 6\%$	0.23739640
	0.00139937

$$i = 0.06 + 0.005 \times \frac{139937}{323814} = 0.06216$$

若獎金分爲大小獎額,而抽中小獎之債券每年平均償還值,組成遞升等差級數,則可預定利率,以爲計算之標準。

(例四) 債券一萬張,票面金額一百元,分五年償還發行債券機關所負擔之利息,規定爲七釐,但債券不給利息而代以獎金,獎金除二十大獎外,其餘均爲獎額相等之小獎,第一年抽中小獎之債券,以 108 元收回,以後每年遞增 6 元,收回小獎債券所支出之金額與收回大獎債券所支出之金額每年均各相等,故每年負擔總額亦相等,試作償本給獎表!

$$R = 1000000 \frac{1}{a_{\overline{5}|}} = 243890.69 \text{ 元 年賦金額}$$

每年抽中大獎之債券凡二十張,五年中共有一百張,故抽中小獎之債券,計共九千九百張。

設 R' 爲每年收回小獎債券所支出之總額,則得:

$$9900 = \frac{R'}{108} + \frac{R'}{114} + \frac{R'}{120} + \frac{R'}{126} + \frac{R'}{132}$$

$$9900 = \frac{R'}{6} \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{即 } 59400 &= R' \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{22} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{17} \right) \right] \end{aligned}$$

查累積倒數表，得：

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{22} = 3.69081825$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{17} = 3.43955252$$

$$\therefore R' = \frac{59400}{0.25126073} = 236407.81 \text{ 元}$$

$243890.69 - 236407.81 = 7482.88$ 元 每年收回大獎所支出之

總額

每年收回小獎債券張數計算表

第一年 $\frac{R'}{108} = 2188.93$	0.96	收回小獎債券 2188 張
第二年 $\frac{R'}{114} = 2073.75$	<u>2073.75</u>	
	0.71	收回小獎債券 2074 張
第三年 $\frac{R'}{120} = 1970.07$	<u>1970.07</u>	
	0.78	收回小獎債券 1970 張
第四年 $\frac{R'}{126} = 1876.25$	<u>1876.25</u>	
	0.03	收回小獎債券 1877 張
第五年 $\frac{R'}{132} = 1790.97$	<u>1790.97</u>	
	0.00	收回小獎債券 1791 張

償本給獎表

年別	小 獎		大 獎			合 計		
	張數	每張償還值	支出總額	張數	償本額	獎 額	張數	負擔總額
第一年	2188	\$ 108	\$ 236304	20	\$ 0.00	5482.88	2208	\$ 243787.88
第二年	2074	114	236436	20	2.00	5482.88	2094	243918.88
第三年	1970	120	236400	20	2000	5482.88	1990	243832.88
第四年	1877	126	236602	20	2000	5482.88	1897	243984.88
第五年	1791	132	236412	20	1000	5482.88	1811	243894.88
合計	9900		1182054	100	10000	27114.40	10000	1209468.40

上例中每年大獎總額相等，然因債券漸次收回，每年抽中大獎之機率（參看第九編）漸次增加，故有規定每年大獎總額組成遞降等差級數者，每年負擔總額既相等，則每年收回小獎債券所支出之總額，即成一遞升等差級數，下題即其例也。

（例五）債券一萬張，票面金額一百元，分五年償還，發行債券機關所負擔之利息，規定為七釐，但債券不給利息而代以獎金，獎金除二十大獎外，其餘均為獎額相等之小獎，第一年抽中小獎之債券，以 108 元收回，以後每年遞增 6 元，收回大債券獎所支出之金額，每年遞減 1000 元，反之，收回小獎債券所支出之金額，每年遞增 1000 元，故每年負擔總額相等，試作償本給獎表！

$$R = 1000000 \frac{1}{a_{\overline{5}|i}} = 243890.69 \text{ 元 年賦金額}$$

每年抽中大獎之債券凡二十張,五年中共有一百張,故抽中小獎之債券,計共九千九百張。

設 R' 為第一年收回小獎債券所支出之金額,則得:

$$9900 = \frac{R'}{108} + \frac{R' + 1000}{114} + \frac{R' + 2000}{120} + \frac{R' + 3000}{126} + \frac{R' + 4000}{132}$$

$$\text{即 } 9900 = \frac{R'}{6} \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} \right) + \frac{1000}{6} \left(\frac{1}{19} + \frac{2}{20} + \frac{3}{21} + \frac{4}{22} \right)$$

$$\text{但 } \frac{1}{19} + \frac{2}{20} + \frac{3}{21} + \frac{4}{22} = \left(1 - \frac{18}{19} \right) + \left(1 - \frac{18}{20} \right) + \left(1 - \frac{18}{21} \right) + \left(1 - \frac{18}{22} \right)$$

$$= 4 - 18 \left(\frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} \right) = 4 - 18 \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{22} \right) \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{18} \right) \right] = 4 - 18(3.69081325 - 3.49510808)$$

$$= 4 - 18 \times 0.19570517 = 0.47730694$$

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} = 3.69081325 - 3.43955252 = 0.25126073$$

以之代入上式,則得:

$$59400 = 0.25126073 R' + 477.30694$$

$$\therefore R' = \frac{58922.69306}{0.25126073} = 234508.17 \text{ 元}$$

$243890.69 - 234508.17 = 9382.52$ 元 第一年收回大獎債券所

支出之金額

每年收回小獎債券張數計算表

第一年	$\frac{234508.17}{108} = 2171.37$	0.37	收回小獎債券 2171 張
第二年	$\frac{235508.17}{114} = 2065.86$	<u>2065.86</u>	收回小獎債券 2066 張
第三年	$\frac{236508.17}{120} = 1970.90$	<u>1970.90</u>	收回小獎債券 1971 張
第四年	$\frac{237508.17}{126} = 1884.99$	<u>1884.99</u>	收回小獎債券 1885 張
第五年	$\frac{238508.17}{132} = 1806.88$	<u>1806.88</u>	收回小獎債券 1807 張
		0.00	

償本給獎表

年別	小 獎			大 獎			合 計	
	張數	每張償還值	支出總額	張數	償本額	獎 額	張數	負擔總額
第一年	2171	\$ 108	\$ 234468	20	\$ 2000	\$ 7382.52	2191	\$ 243850.52
第二年	2066	114	235524	20	2000	6382.52	2086	24306.52
第三年	1971	120	236520	20	2000	5382.52	1991	243902.52
第四年	1835	126	237510	20	2000	4382.52	1905	243892.52
第五年	1807	132	238524	20	2000	3382.52	1827	243906.52
合計	9900		1182546	100	10000	2 6912.63	10000	1219458.60

上述諸題，均為不帶息有獎債券之例，今請一述帶息有獎債券之演算。帶息有獎債券之給獎方法，亦有種種，其中仍以模範給獎法為最公平，即由每期中籤債券所生之利息，即撥充該期中籤債券之獎金之法也。

(例六) 債券一萬張，票面金額一百元，債券利率三釐，分五年償還，但發行債券機關實際負擔之利息，規定為七釐，每年由中籤債券所省之利息，即撥充本年中籤債券之獎金，每年負擔總額相等，試作償本付息給獎表！

$$R = 1000000 \cdot \frac{1}{a_{\overline{5}|i}} = 243890.69 \text{ 元 年賦金額}$$

每張債券每年節省利息 4 元

第一年中籤債券節省利息一年，故所省利息之終值，為：

$$4 S_{\overline{1}|i} = 4 \text{ 元}$$

第二年中籤債券節省利息二年，故所省利息之終值，為：

$$4 S_{\overline{2}|i} = 8.28 \text{ 元}$$

第三年中籤債券節省利息三年，故所省利息之終值，為：

$$4 S_{\overline{3}|i} = 12.86 \text{ 元}$$

第四年中籤債券節省利息四年，故所省利息之終值，為：

$$4 S_{\overline{4}|i} = 17.76 \text{ 元}$$

第五年中籤債券節省利息五年，故所省利息之終值，為：

$$4 S_{\overline{5}|i} = 23.00 \text{ 元}$$

每年收回債券張數，可依次求得如下：

第一年

年賦金額 243890.69

— 債券 10000 張之利息 30000.00
213890.69

$$\frac{213890.69}{100 + 4} = \frac{213890.69}{104} = 2056 \text{ 張}$$

$$213890.69 - 205600 \times 104 = 66.69 \text{ 元}$$

第二年

年賦金額 243890.69

+ 第一年餘額及其利息 71.36
243962.05

- 債券7944張之利息 23832.00
220130.05

$$\frac{220130.05}{100+8.28} = \frac{220130.05}{108.28} = 2032 \text{ 張}$$

$$220130.05 - 2032 \times 108.28 = 105.09 \text{ 元}$$

第三年

年賦金額 243890.69

+ 第二年餘額及其利息 112.45
244003.14

- 債券5912張之利息 17736.00
226267.14

$$\frac{226267.14}{100+12.86} = \frac{226267.14}{112.86} = 2004 \text{ 張}$$

$$226267.14 - 2004 \times 112.86 = 95.70 \text{ 元}$$

第四年

年賦金額 243890.69

+ 第三年餘額及其利息 102.40
243993.09

- 債券3908張之利息 11724.00
232269.09

$$\frac{232269.09}{100+17.76} = \frac{232269.09}{117.76} = 1972 \text{ 張}$$

$$232269.09 - 1972 \times 117.76 = 46.37 \text{ 元}$$

第五年

年賦金額	243890.69
+ 第四年餘額及其利息	<u>49.62</u>
	243940.31
- 債券1936張之利息	<u>5808.00</u>
	238132.31

$$\frac{238132.31}{100+23} = \frac{238132.31}{123} = 1936 \text{ 張}$$

償本付息給獎表

年 別	收回張數	平均每張 償還值	償本額	獎 額	年初未收回債 券之票面總額	利 息	負擔總額
第一年	256	\$ 104.00	205600	\$ 8224.00	\$ 1000000	\$ 80000	\$ 243824.00
第二年	2032	108.20	203200	16824.96	794400	23832	243856.93
第三年	2004	112.80	200400	25771.44	591200	17786	243907.44
第四年	1972	117.76	157200	35022.72	390800	11724	243946.72
第五年	1936	123.00	103600	44523.00	193600	5808	243936.00
合 計	10000		10,0000	130371.12	2970000	89100	1219471.12

上表中每年獎金總額漸次增加，但發行債券機關亦有規定每年獎金總額相等者，下題即其例也。

(例七) 債券一萬張，票面金額一百元，債券利率三釐，分五年償還，但發行債券機關實際負擔之利息，規定為七釐，所省利息代以獎金，每年支付獎金之總額與負擔總額各相等，試作償本付息給獎表！

$$R = 1000000 \left(\frac{1}{s_{\overline{5}|0.03}} @ 7\% \right) = 243890.69 \text{ 元 年賦金額}$$

若每年僅付利息而不給獎金，則年賦金額不必若是之巨，其數值可依實利率三釐求得如下：

$$R = 1000000 \left(\frac{1}{a_{\overline{5}|j}} @ 3\% \right) = 218354.57 \text{ 元}$$

兩者相差 25536.12 元，即為每年獎金總額。

每年收回債券張數計算表

債本付息總額(單位票面金額)	2183.55		
- 第一年利息	<u>300.00</u>		
	1383.55	0.55	收回債券 1883 張
+ 3%	<u>56.51</u>		
	1940.06	<u>1940.06</u>	
+ 3%	<u>58.20</u>	0.61	收回債券 1940 張
	1998.26	<u>1998.26</u>	
+ 3%	<u>59.95</u>	0.87	收回債券 1998 張
	2058.21	<u>2058.21</u>	
+ 3%	<u>61.75</u>	0.08	收回債券 2059 張
	2119.96	<u>2119.96</u>	
		<u>-0.01</u>	
		0.00	收回債券 2120 張

債本付息給獎表

年 別	收回張數	債本額	獎 額	年初未收回債券票面之總額	利 息	負擔總額
第 一 年	1883	\$ 188300	\$ 25536.12	\$ 1000000	\$ 30000	\$ 243836.12
第 二 年	1940	194000	25536.12	811700	24351	243887.12
第 三 年	1998	199800	25536.12	617700	18531	243867.12
第 四 年	2059	205900	25536.12	417900	12537	243973.12
年 五 第	2120	212000	25536.12	210000	6360	243896.12
合 計	10000	1000000	127680.60	3059300	91779	1219459.60

習 題 二 十 一

1. 債券二千張，票面金額五百元，分五年償還，發行債券機關所負擔之利息，規定為八釐，每年負擔總額相等，但債券不給利息，由每年中籤債券所生之利息，即撥充大小不等之獎額，分給中籤各債券，試作償本給獎表！

2. 債券二千張，票面金額五百元，分五年償還，發行債券機關所負擔之利息，規定為八釐，但債券不給利息，每年所省利息全部撥充本年中籤債券之獎金，每年償本給獎之總額相等，試作償本給獎表！

3. 債券二千張，票面金額五百元，分五年償還，每年負擔總額相等，債券不給利息，但給獎金，每年中籤債券之平均償還值，規定第一年為525元，以後每年遞增35元，求每年負擔總額，並作償本給獎表！

4. 債券二千張，票面金額五百元，分五年償還，發行債券機關所負擔之利息，規定為八釐，但債券不給利息，而代以獎金，獎金除二十大獎外，其餘均為獎額相等之小獎，第一年抽中小獎之債券，以525元收回，以後每年遞增35元，收回小獎債券所支出之金額與收回大獎債券所支出之金額每年均各相等，故每年負擔總額亦相等，試作償本給獎表！

5. 債券二千張，票面金額五百元，分五年償還，發行債券機關所負擔之利息，規定為八釐，但債券不給利息而代以獎金，獎金除二十大獎外，其餘均為獎額相等之小獎，第一年抽中小獎之債券，以525元收回，以後每年遞增35元，收回大獎債券所支出之金額，每年遞減500元，反之，收回小獎債券所支出之金額，每年遞增500元，故每年負擔總額相等，試作償本給獎表！

6. 上題中若收回大獎債券所支出之金額，改為每年遞增500元，收回小獎債券所支出之金額，改為每年遞減500元，則償本給獎表當為何者？

7. 債券二千張，票面金額五百元，債券利率四釐，分五年償還，但發行債券機關實際負擔之利息，規定為八釐，每年由中籤債券所省之利息，即撥充本年中籤債券之獎金，每年負擔總額相等，試作償本付息給獎表！

8. 債券二千張，票面金額五百元，債券利率四釐，分五年償還，但發行債券機關實際負擔之利息，規定為八釐，所省利息代以獎金，每年支着獎金之總額與負擔總額，均各相等，試作償本付息給獎表！

第二章 債券市價之推算

債券利息不論用何種方式支出，發行債券機關每期均有支付利息之負擔，計算此利息所依據之利率，可名曰面值利率 (Par Rate)，若債券收回時不必支付溢酬或獎金，則面值利率即為債券利率；但若債券收回時須支付溢酬或獎金，則面值利率高於債券利率。債券之發行，有按面值發行者，有稍低於面值發行者，若面值百元之債券，以九八發行（即購券者僅須付九十八元），則發行債券機關實際負擔之利率與投資者實際收益之利率，又在面值利率之上，此種利率名曰投資利率 (Rate of Investment) 或曰收益利率 (Rate of Income)。若債券依面值發行，則發行時投資者所得之投資利率，與面值利率相等，故面值利率者，依面值發行之債券，發行債券機關實際負擔之利率或發行時投資者實際收益之利率也。

債券發行後在市場上流通，因供需之變動而高下其價格，債券在市場上之價格，名曰債券市價 (Market Price of the Bond)。債券市價可等於面值 (at Par)，亦可高於面值 (above Par) 或低於面值 (below Par)。債券市價若等於面值，則投資利率等於面值利率；反之，投資者預定之投資利率，若等於面

值利率，則債券市價須與面值相等，若高於面值利率，則債券市價須低於面值，若低於面值利率，則債券市價須高於面值。依預定投資利率計算債券之市價，是曰債券市價之推算。

債券市價通常以面值百元為標準，例如裁兵公債之市價為 71.05 意即謂裁兵公債面值百元之市價為 71.05 元，二十三年關稅庫券之市價為 71.00，意即謂二十三年關稅庫券面值百元之市價為 71.00 元也。

資本有虛資本 (Nominal Capital) 與實資本 (Real Capital) 之別，例如某甲以十萬元貸於某乙，言定每年支付 13586.80 元，十年後清償，合實利率六釐，設某甲忽因一時急需，將其債權移讓於某丙，而某丙欲得投資利率七釐，則某甲此時不能收回十萬元之資本，其能收回之資本，祇十次年賦金依投資利率七釐計算之現值即：

$$13586.80 (a_{\overline{10}} @ 7\%) = 13586.80 \times 7.02358154 = 95428.00 \text{ 元}$$

此即十次年賦金之實資本，至其虛資本，則即十次年賦金依甲乙間所訂之借款利率計算之現值，或即最初之資本十萬元也。就債券而論，未收回債券之虛資本，乃發行債券機關以後各年負擔總額依面值利率計算之現值，而其實資本，乃依投資利率計算之現值也。投資利率若等於面值利率，則實資本等於虛資本，若高於面值利率，則實資本小於虛資本，若低於面值利率，則實資本大於虛資本。

實資本與虛資本求得後，債券之市價即可自下式求得。

$$A = \frac{C_r}{C_n} \times 100 \dots\dots\dots(1)$$

A 債券市價

C_r 實資本

C_n 虛資本

若 $C_r = C_n$ 則 $A = 100$

若 $C_r > C_n$ 則 $A > 100$

若 $C_r < C_n$ 則 $A < 100$

未收回債券之虛資本，即為未收回債券之票面總額，故若已知未收回債券之票面總額，則不必另行計算。

(例一) 票面總額一千萬元，規定本金於二十年末一次償還溢酬率10%，債券利率六釐，設投資者欲得投資利率七釐，求債券市價！

- a) 每年末付息一次，債券於發行時購入；
- b) 每年末付息一次，債券於第三次付息日之翌日購入；
- c) 每半年末付息一次，債券於發行時購入。

$$C_n = 10000000 \text{ 元}$$

$$10000000 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 11000000 \text{ 元 債券收回時償還總值}$$

$$10000000 \times \frac{6}{100} = 600000 \text{ 元 每年付息總額}$$

$$a) C_r = 11000000 (v^{20} @ 7\%) + 600000 (a_{\overline{20}|} @ 7\%)$$

$$= 11000000 \times 0.258419 + 600000 \cdot 10.59401425$$

$$= 9199018 \text{ 元}$$

應用公式(1)得:

$$A = \frac{9199018}{10000000} \times 100 = 91.99 \text{ 元}$$

b) 債券流行之時期, 尚有十七年

$$\begin{aligned} C_r &= 11000000 (v^{17} @ 7\%) + 600000 (a_{\overline{17}|} @ 7\%) \\ &= 11000000 \times 0.31657439 + 600000 \times 9.76322299 \\ &= 9340252 \text{ 元} \end{aligned}$$

應用公式(1), 得:

$$A = \frac{9340252}{10000000} \times 100 = 93.40 \text{ 元}$$

$$\begin{aligned} c) C_r &= 11000000 (v^{20} @ 7\%) + 600000 (a_{\overline{20}|} @ 7\%) \\ &= 11000000 \times 0.258419 + 600000 \times 10.59401425 \times 1.01720402 \\ &= 9308373 \text{ 元} \end{aligned}$$

應用公式(1), 得:

$$A = \frac{9308373}{10000000} \times 100 = 93.08 \text{ 元}$$

(例二) 票面總額一千萬元, 規定本金於二十年末一次償還, 債券利率六釐, 每年末支付利息一次, 設投資者於第十五次付息日之翌日, 購入票面金額一千元, 問須付洋若干元?

a) 投資利率七釐;

b) 投資利率五釐.

債券流行之時期, 尚有五年.

$$C_s = 10000000 \text{ 元}$$

$$10000000 \times \frac{6}{100} = 600000 \text{ 元} \quad \text{每年利息總額}$$

$$\begin{aligned}
 a) C_r &= 10000000 (v^5 @ 7\%) + 600000 (a_{\overline{5}|} @ 7\%) \\
 &= 10000000 \times 0.71298618 + 600000 \times 4.10019744 \\
 &= 9589980 \text{ 元}
 \end{aligned}$$

應用公式(1), 得:

$$A = \frac{9589980}{10000000} \times 100 = 95.90 \text{ 元}$$

$$1000 \times \frac{95.90}{100} = 959.00 \text{ 元} \quad \text{面值千元之購價}$$

$$\begin{aligned}
 b) C_r &= 10000000 (v^5 @ 5\%) + 600000 (a_{\overline{5}|} @ 5\%) \\
 &= 10000000 \times 0.78352617 + 600000 \times 4.32947667 \\
 &= 10432948 \text{ 元}
 \end{aligned}$$

應用公式(1), 得:

$$A = \frac{10432948}{10000000} \times 100 = 104.33 \text{ 元}$$

$$1000 \times \frac{104.33}{100} = 1043.30 \text{ 元} \quad \text{面值千元之購價}$$

投資者購進債券後, 每年可得利息 60 元, 至五年末可收回本金 1000 元, 然若債券以 1043.30 元之價購入, 則收回本金 1000 元時, 即感覺短少 43.30 元, 所以有此意外之損失者, 因每年收入之利息, 較預算稍多故也。設投資者為一商店, 則每年收入之利息, 不當全部轉入本年損益, 否則, 第五年會計年度將因債券之到期而受損失也。

債券購入時, 投資者即將債券之購價, 登記於帳簿, 記在帳簿上之價值, 名曰帳面價值 (Book Value)。債券之購價, 若高

於其償還值，則債券之帳面價值，須逐漸減低，使於債券收回時，適與債券之償還值相等，故每年收入利息後，須經一次轉賬手續，將多收利息轉入債券之會計科目，以減低債券之帳面價值。

反之，若商店以 959.00 元之價購入債券，則收回本金 1000 元時，即感覺增多 41 元，所以有此意外之利益者，因每年收入之利息，較預算稍少故也。欲使每年損益計算得表示商店之確實營業狀況，則增多之 41 元不當全部作為第五年會計年度之利益。善理財者，須將債券之帳面價值，逐漸提高，使於債券收回時，適與債券之償還值相等，故每年收入利息後，亦須經一次轉賬手續，將少收利息之部，自債券之會計科目轉出，以提高債券之帳面價值。茲就前例，作帳面價值計算表於下。

帳面價值計算表 (a)

年 別	收入利息	應得利息	少 收	年末帳面價值
第一 年	\$ 60.00	\$ 67.13	\$ 7.13	\$ 966.13
第二 年	60.00	67.63	7.63	973.76
第三 年	60.00	68.16	8.16	981.92
第四 年	60.00	68.73	8.73	990.65
第五 年	60.00	69.35	9.35	1000.00

帳面價值計算表 (b)

年 別	收入利息	應得利息	多 收	年末帳面價值
第一 年	\$ 60.00	\$ 52.17	\$ 7.83	\$ 1035.47
第二 年	60.00	51.77	8.23	1027.24
第三 年	60.00	51.36	8.64	1018.60
第四 年	60.00	50.93	9.07	1009.53
第五 年	60.00	50.48	9.52	1000.01

(例三) 票面總額一千萬元,債券利率六釐,於十年內平均償還,利息於每年末支付,設投資者欲得投資利率七釐,求債券市價!

a) 債券於發行時購入;

b) 債券於第三次償本付息日之翌日購入。

$$(a) C_n = 10000000$$

本金每年減少十分之一,即一百萬元,故利息每年亦減少六萬元,最後一年未償本金僅有一百萬元,故利息僅須支付六萬元,每年利息,組成遞減等差變額年金,故其現值可應用第四編公式(57)求得如下:

$$\begin{aligned} (A_n)_{\overline{10}|} &= 60000 \left(\sum a_{10} @ 7\% \right) = 60000 \times 42.5202637 \\ &= 2551215.822 \end{aligned}$$

每年償還本金,組成定額年金,其現值如下:

$$1000000 (a_{\overline{10}|} @ 7\% = 7023581.54$$

$$C_r = 2551215.822 + 7023581.54 = 9574797 \text{ 元}$$

應用公式(1),得:

$$A = \frac{9574797}{10000000} \times 100 = 95.75 \text{ 元}$$

$$(b) C_n = 10000000 \times \frac{7}{10} = 7000000$$

$$\begin{aligned} C_r &= 60000 \left(\sum a_{\overline{7}|} @ 7\% \right) + 1000000 (a_{\overline{7}|} @ 7\%) \\ &= 60000 \times 23.0101514 + 1000000 \times 5.3892894 \\ &= 6769398 \text{ 元} \end{aligned}$$

應用公式(1),得:

$$A = \frac{6769898}{7000000} \times 100 = 96.71 \text{ 元}$$

設發行債券機關每年負擔總額相等,則債券市價可自下列公式求得:

$$A = \frac{a_{\overline{n}|} @ i}{a_{\overline{n}|} @ r} \times 100 \dots \dots \dots (2)$$

A 債券市價

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之現值

i 投資利率

r 面值利率

n 債券尙在市場流行年數

(證) 設 R 為發行債券機關每年負擔總額,虛資本 C_n 為 n 次年賦金額 R 依面值利率 r 計算之現值,即:

$$C_n = B (a_{\overline{n}|} @ r)$$

實資本 C_r 為 n 次年賦金額 R 依投資利率 i 計算之現值,即:

$$C_r = R (a_{\overline{n}|} @ i)$$

應用公式(1),得:

$$A = \frac{C_r}{C_n} \times 100 = \frac{R (a_{\overline{n}|} @ i)}{R a_{\overline{n}|} @ r} \times 100 = \frac{a_{\overline{n}|} @ i}{a_{\overline{n}|} @ r} \times 100$$

(例四) 票面總額一千萬元,債券利率六釐,分三十年償還,每年支付本息總額相等,設投資者於第二十五次償本息日之翌日購入,求債券市價!

a) 投資利率七釐;

b) 投資利率五釐.

$$n = 30 - 25 = 5$$

$$r = 6\%$$

a) $i = 7\%$

代入公式 (2), 得:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a_{\bar{5}} @ 7\%}{a_{\bar{5}} @ 6\%} \times 100 = 410.019744 \times 0.2373964 \\ &= 97.34 \text{ 元} \end{aligned}$$

b) $i = 5\%$

代入公式 (2), 得:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a_{\bar{5}} @ 5\%}{a_{\bar{5}} @ 6\%} \times 100 = 432.947667 \times 0.2373964 \\ &= 102.78 \text{ 元} \end{aligned}$$

(例五) 票面總額一千萬元債券利率六釐, 每年負擔總額規定為債券總額百分之一與全部債券利息之和, 設投資者於第三十次償本付息日之翌日購買, 投資利率七釐, 求債券市價!

a) 零數於最後一年支付;

b) 零數於最初一年支付.

$$\begin{aligned} 10000000 \times \frac{1}{100} + 10000000 \times \frac{6}{100} &= 700000 \\ \frac{1}{a_{n1}} @ 6\% &= 0.07 \end{aligned}$$

查年賦金表,得:

$$33 < n < 34$$

a) 應用第四編公式 (21), 得:

$$\begin{aligned} L &= A u^n - R(S_{\overline{n}|i} - 1) \\ &= 10000000 u^{34} - 700000 (S_{\overline{34}|6\%} - 1) \\ &= 72510252.8 - 72228628.22 \\ &= 281624.58 \text{ 元} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n &= 281624.58 (v^4 @ 6\%) + 700000 (a_3 @ 6\%) \\ &= 281624.58 \times 0.79209366 + 700000 \times 2.67301195 \\ &= 2094181 \text{ 元} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_r &= 281624.58 (v^4 @ 7\%) + 700000 (a_3 @ 7\%) \\ &= 281624.58 \times 0.76289521 + 700000 \times 2.62431604 \\ &= 2051871 \text{ 元} \end{aligned}$$

應用公式 (1), 得:

$$A = \frac{2051871}{2094181} \times 100 = 97.98 \text{ 元}$$

b) 以後四年發行債券機關每年負擔總額相等, 故可應用公式 (2).

$$i = 7\%$$

$$r = 6\%$$

$$n = 4$$

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{a_2 @ 7\%}{a_4 @ 6\%} \times 100 = 338.721126 \times 0.28859149 \\ &= 97.75 \text{ 元} \end{aligned}$$

(例六) 票面總額一千萬元，債券利率六釐，分四十年償還，設投資者於第三十五次償本付息日之翌日購買，投資利率七釐，求債券市價！

a) 每年負擔總額成一遞升等差級數，公差為10000元；

b) 每年負擔總額成一等比級數，公比為1.1。

a) 設 l 為第四十年年賦金額。

應用第四編公式 (53)，得：

$$10000000 = (l + 10000) a_{\overline{40}|} - 10000 \sum a_{\overline{40}|}$$

$$(l + 10000) a_{\overline{40}|} = 10000000 + 4158950.521$$

$$\therefore l = 14158950.521 \frac{1}{a_{\overline{40}|}} - 10000$$

$$= 14158950.521 \times 0.06646154 - 10000$$

$$= 931025.66 \text{ 元}$$

虛資本 C_n 為以後五年年賦金額依面值利率計算之現值，即：

$$C_n = (931025.66 + 10000) (a_{\overline{5}|} @ 6\%) - 10000 \left(\sum a_{\overline{5}|} @ 6\% \right)$$

$$= 941025.66 \times 4.21236379 - 10000 \times 13.1272703$$

$$= 3832670 \text{ 元}$$

實資本 C_r 為以後五年年賦金額依投資利率計算之現值，即：

$$C_r = (931025.66 + 10000) (a_{\overline{5}|} @ 7\%) - 10000 \left(\sum a_{\overline{5}|} @ 7\% \right)$$

$$= 941025.66 \times 4.10019744 - 10000 \times 12.8543224$$

$$= 3729848 \text{ 元}$$

應用公式(1),得:

$$A = \frac{3729548}{3832670} \times 100 = 97.32 \text{ 元}$$

b) 設 f 為第三十六年年賦金額。

虛資本 C_n 為以後五年年賦金額依面值利率六釐計算之現值,應用第四編公式(62),得:

$$C_n = f \frac{1.1^5 \times 1.06^{-5} - 1}{0.04}$$

實資本 C_r 為以後五年年賦金額依投資利率七釐計算之現值,應用第四編公式(62),得:

$$C_r = f \frac{1.1^5 \times 1.07^{-5} - 1}{0.03}$$

應用公式(1),得:

$$\begin{aligned} A &= \frac{C_r}{C_n} \times 100 = \frac{1.1^5 \times 1.07^{-5} - 1}{0.03} \times \frac{0.04}{1.1^5 \times 1.06^{-5} - 1} \times 100 \\ &= \frac{400}{3} \times \frac{1.1^5 \times 1.07^{-5} - 1}{1.1^5 \times 1.06^{-5} - 1} = \frac{400}{3} \times \frac{1.07^{-5} - 1.1^{-5}}{1.06^{-5} - 1.1^{-5}} \\ &= \frac{400}{3} \times \frac{0.71298618 - 0.62092132}{0.74725817 - 0.62092132} = \frac{36.825944}{0.37901055} \\ &= 97.16 \text{ 元} \end{aligned}$$

若債券收回時,於票面金額之外,另給溢酬,則發行債券機關每年支付之年金,可有虛年金(Nominal Annuity)與實年金(Effective Annuity)之別。前者僅指每年償本付息之總額,而後者則指發行債券機關之每年負擔總額。若每年償本付息之總額規定相等,則每年支付之溢酬總額,隨償本額之增加

而漸增，故虛年金爲一定額年金，而實年金則爲一變額年金。虛年金可用以計算虛資本，而實年金則可用以計算實資本。

此類溢酬償還債券之市價，可用下列公式求得：

$$A = \frac{100}{a_{\overline{n}|} @ r} \left[a_{\overline{n}|} @ i + \frac{p}{i-r} \{ (1+r)^{-n} - (1+i)^{-n} \} \right] \dots \dots \dots (3)$$

(證明參看附錄甲16)

A 債券市價

p 溢酬率

i 投資利率

r 債券利率

n 債券尙在市場流行時期

$a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之現值

(例七) 票面總額一千萬元，債券利率六釐，分四十年償還，每年償本付息之總額相等，溢酬率10%，設投資者於第五次償本付息日之翌日購入，投資利率七釐，求債券市價！

$$n = 35$$

$$p = 10\%$$

$$i = 7\%$$

$$r = 6\%$$

$$\frac{1}{a_{\overline{35}|}} @ 6\% = 0.06397386$$

$$a_{\overline{35}|} @ 7\% = 12.9476723$$

$$1.06^{-35} = 0.13010522$$

$$1.07^{-35} = 0.09366294$$

代入公式(3),得:

$$\begin{aligned} A &= 6.897386 (12.9476723 + \frac{0.1}{0.01} \times 0.03644228) \\ &= 6.897386 \times 13.3120951 = 91.82 \text{ 元} \end{aligned}$$

若發行債券機關每年負擔之總額相等,則溢酬償還債券之市價,可自下列公式求得:

$$A = 100(1+p) \frac{a_n @ i}{a_n @ i'} \dots\dots(4) \quad (\text{證明參看附錄甲17})$$

A 債券市價

p 溢酬率

i 投資利率

i' 等值利率

n 債券尙在市場流行時期

a_n 簡單年金一元繼續支付 n 年之現值

(例八) 票面總額一千萬元,溢酬率20%,債券利率六釐,分四十年償還,每年償本付息與支付溢酬之總額相等,設投資者於第十次償本付息日之翌日購入,投資利率七釐,求債券市價!

$$n = 30$$

$$p = 20\%$$

$$i = 7\%$$

$$i' = \frac{100 \times \frac{6}{100}}{100 \times 1.2} = \frac{6}{120} = 5\%$$

代入公式(4),得:

$$A = 120 \times 12.40904118 \times 0.06505144 = 96.87 \text{ 元}$$

(例九)二十三年關稅庫券於民國二十三年一月發行,總額爲一萬萬元,利率月息五釐,自二十三年一月份起,每月末償本付息一次,分八十四個月償還,利隨本減,第一個月至第六十八個月,每月償本 $\frac{1}{100}$,第六十九個月至第八十四個月,每月償本 $\frac{2}{100}$,設投資者於二十四年一月一日購入,投資利率年息八釐五毫,求庫券市價!

(第一法)二十四年一月一日以前,已償本付息十二期,故償本 $\frac{1}{100}$ 者尙有五十六期,償本 $\frac{2}{100}$ 者尙有十六期。

本題可分爲前後二期,償本 $\frac{1}{100}$ 之五十六期爲前期,償本 $\frac{2}{100}$ 之十六期爲後期。前期中每期償還本金 $\frac{1}{100}$,設以票面金額百元爲標準,則爲一元,應付利息每期遞減五釐,故各期償本付息總額成一等差變額年金。後期中每期償還本金 $\frac{2}{100}$,設以票面金額百元爲標準,則爲二元,應付利息每期遞減一分,故各期償本付息總額亦成一等差變額年金。

設 A_1 爲票面金額百元在前期中每期償本付息總額之現值, A_2 爲票面金額百元在後期中每期償本付息總額之現值, A 爲庫券市價,則:

$$A = A_1 + A_2$$

應用第四編公式(59).

先求 A_1 .

$$f = 1 + (100 - 12) \times \frac{5}{1000} = 1.44 \text{ 元}$$

$$d = -0.005 \text{ 元}$$

$$p = 12$$

$$n = \frac{56}{12} = 4\frac{2}{3} \text{ 年}$$

代入公式 (59), 得:

$$A_1 = (A_0) \frac{(12)}{4\frac{2}{3}} = 12 \times 1.03838455 \left[a_{\overline{4\frac{2}{3}}|} (1.44 - \frac{0.06}{0.085} \times 1.03838455) + \frac{0.28 v^{4\frac{2}{3}}}{0.085} \right] = 12.4606146 (0.7070227 a_{\overline{4\frac{2}{3}}|} + 3.2941176 v^{4\frac{2}{3}})$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{\overline{4}|} \quad 3.27559666 \\ a_{\overline{5}|} \quad 3.94064208 \\ a_{\overline{6}|} \quad 4.55358717 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0.66504542 \\ 0.61294509 \end{array} \right) - 0.05210033$$

應用第六編公式 (3), 得:

$$a_{\overline{4\frac{2}{3}}|} = 3.27559666 + \frac{2}{3} \times 0.66504542 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 0.05210033 = 3.72474920$$

$$\left. \begin{array}{l} v^4 \quad 0.72157428 \\ v^5 \quad 0.66504542 \\ v^6 \quad 0.61294509 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0.05652886 \\ -0.05210033 \end{array} \right) + 0.00442853$$

應用第六編公式 (3), 得:

$$v^{4\frac{2}{3}} = 0.72157428 - \frac{2}{3} \times 0.05652886 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 0.00442853 = 0.63339631$$

以之代入上式，則得：

$$\begin{aligned} A_1 &= 12.4606146(0.7070227 \times 3.72474920 + 3.2941176 \\ &\quad \times 0.68339631) = 12.4606146(2.6334822 + 2.2511878) \\ &= 12.4606146 \times 4.88467 - 60.8660 \end{aligned}$$

次求 A_2 。

令 $(A_2)_{\frac{1}{14}}^{(12)}$ 爲票面金額百元在後期中每期償本付息總額在購券後五十六月之現值。

$$f = 2 + (100 - 68) \times \frac{5}{1000} = 2.16 \text{ 元}$$

$$d = -0.01 \text{ 元}$$

$$p = 12$$

$$n = \frac{16}{12} = 1 \frac{1}{3}$$

代入公式 (59)，得：

$$\begin{aligned} (A_2)_{\frac{1}{14}}^{(12)} &= 12 \times 1.08838455 \left[a_{\frac{1}{14}} \left(2.16 - \frac{0.12}{0.085} \times 1.08838455 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{0.16}{0.085} v^{\frac{1}{3}} \right] = 12.4606146(0.6940453 a_{\frac{1}{14}} \\ &\quad + 1.8823529 v^{\frac{1}{3}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= v^{4\frac{2}{3}} (A_2)_{\frac{1}{14}}^{(12)} = 12.4606146(0.6940453 a_{\frac{1}{14}} v^{4\frac{2}{3}} \\ &\quad + 1.8823529 v^6) \end{aligned}$$

$$v^{4\frac{2}{3}} = 0.68339631$$

$$v^6 = 0.61294509$$

$$a_{\overline{11}|i} v^{4i} = \frac{1-v^{11}}{i} v^{4i} = \frac{1}{i} (v^{4i} - v^{15}) = \frac{1}{0.085} (0.68339631$$

$$- 0.61294509) = \frac{1}{0.085} \times 0.07045122 = 0.8288379$$

以之代入上式，則得：

$$A_2 = 12.4606146(0.6940453 \times 0.8288379 + 1.8823529$$

$$\times 0.61294509) = 12.4606146(0.5752510 + 1.1537790)$$

$$= 12.4606146 \times 1.72903 = 21.5448$$

$$A = A_1 + A_2 = 60.8660 + 21.5448 = 82.41 \text{ 元}$$

(第二法) 設每年複利十二次，則每年複利次數與支付年金次數相等。查實利率化虛利率表得：

$$j = 0.08185792$$

$$\frac{j}{m} = \frac{8.185792}{12} \%$$

先求 $A @ \frac{5}{12} \%$ ， $A @ \frac{7}{12} \%$ ， $A @ \frac{3}{4} \%$ ，然後應用三數插補法，

求 $A @ \frac{8.185792}{12} \%$

$$A = A_1 + A_2$$

應用第四編公式 (58)，得：

$$A_1 = (A_a)_{\overline{58}|} = 1.16 a_{\overline{58}|} + 0.005 \sum a_{\overline{58}|}$$

$$A_2 = v^{58} (A_a)_{\overline{16}|} = v^{58} (2 a_{\overline{16}|} + 0.01 \sum a_{\overline{16}|})$$

a) 求 $A @ \frac{5}{12} \%$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 1.16 a_{\overline{56}} + 0.005 \sum a_{\overline{56}}^* \\
 &= 1.16 \times 49.85435003 + 0.005 \times 1474.95588096 \\
 &= 65.20582544
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= v^{56}(2a_{\overline{16}} + 0.01 \sum a_{\overline{16}}) \\
 &= 0.79227353(2 \times 15.44722418 + 1.32666186) \\
 &= 0.79227353 \times 32.22111022 = 25.52793273
 \end{aligned}$$

$$A = A_1 + A_2 = 65.20582544 + 25.52793273 = 90.73375817$$

b) 求 $A @ \frac{7}{12} \%$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 1.16 a_{\overline{6}} + 0.005 \sum a_{\overline{6}} \\
 &= 1.16 \times 47.65553841 + 0.005 \times 1430.470633 \\
 &= 62.43283572
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= v^{56}(2a_{\overline{16}} + 0.01 \sum a_{\overline{16}}) \\
 &= 0.72200908(2 \times 15.23368160 + 0.01 \times 131.3638751) \\
 &= 0.72200908 \times 31.781051961 = 22.94620809
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= A_1 + A_2 = 62.43283572 + 22.94620809 \\
 &= 85.37904381
 \end{aligned}$$

c) 求 $A @ \frac{3}{4} \%$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 1.16 a_{\overline{60}} + 0.005 \sum a_{\overline{60}} \\
 &= 1.16 \times 45.58968926 + 0.005 \times 1388.041432 \\
 &= 59.82424670
 \end{aligned}$$

* $\sum a_{\overline{60}} = \sum a_{\overline{50}} + a_{\overline{51}} + a_{\overline{52}} + a_{\overline{53}} + a_{\overline{54}} + a_{\overline{55}} + a_{\overline{56}}$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= v^6(2a_{16} + 0.01 \sum a_{16}) \\
 &= 0.65807733(2 \times 15.02481261 + 0.01 \times 130.091652) \\
 &= 0.65807733 \times 31.34954174 \\
 &= 20.63042272 \\
 A &= A_1 + A_2 = 59.82424670 + 20.63042272 \\
 &= 80.45466942
 \end{aligned}$$

$$d) \text{ 求 } A @ \frac{3.185792}{12} \%$$

$$\begin{array}{l}
 A @ \frac{5}{12} \% \quad 90.73375817 \\
 A @ \frac{7}{12} \% \quad 85.37904381 \\
 A @ \frac{3}{4} \% \quad 80.45466942
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} -5.35471436 \\ -4.92437439 \end{array} \Bigg) + 0.43033997$$

$$p = \frac{\frac{3.185792}{12} \%}{\frac{2}{12} \%} = \frac{3.185792}{2} = 1.592896$$

應用第六編公式(3),得:

$$\begin{aligned}
 A &= 90.73375817 - 1.592896 \times 5.35471436 + \frac{1.592896 \times 0.592896}{2} \\
 &\quad \times 0.43033997 = 90.7338 - 8.5295 + 0.2032 - 82.41 \text{ 元}
 \end{aligned}$$

兩法求得之結果相同。

(例十) 民國二十三年關稅公債定額為國幣一萬萬元,於民國二十四年六月三十日發行,利率定為年息六釐,每年三月六月九月十二月之末日,各付息一次,債期定為十年,每年三月六月九月十二月之末日,各還本一次,第一年還總額百

分之四,第二年第三年各還百分之六,第四年還百分之八,第五年至第八年各還百分之十二,第九年第十年各還百分之十四,至民國三十四年六月三十日本息全數清償。試就下列各種財政部實際負擔利率,推算關稅公債實際銷售價格,(公債條例第三條雖規定按票面九八發行,然財政部以前發行之公債庫券,其實際銷售價格,均遠在規定發行價格之下)並以虛利率一分二釐為準,作帳面價值計算表。

- a) 虛利率七釐,每年複利四次;
- b) 虛利率八釐,每年複利四次;
- c) 虛利率九釐,每年複利四次;
- d) 虛利率一分,每年複利四次;
- e) 虛利率一分一釐,每年複利四次;
- f) 虛利率一分二釐,每年複利四次;
- g) 虛利率一分四釐,每年複利四次。

(解) 依照償本付息辦法,票面一千元公債之持票人,於公債發行後四十期內,每期收受之本息總額,可列表表示之如下。

票面一千元公債之持票人各期收受之本息總額

期 別	第一種	第二種	第三種	第四種	第五種
第一 期	\$ 25.0000				
第二 期	24.8500				
第三 期	24.7000				
第四 期	24.5500				
第五 期		\$ 29.4000			
第六 期		29.1750			
第七 期		28.9500			

第 八 期	23.7750		
第 九 期	28.5000		
第 十 期	23.2750		
第 十 一 期	23.0500		
第 十 二 期	27.8250		
第 十 三 期		\$ 32.6000	
第 十 四 期		32.3000	
第 十 五 期		32.0000	
第 十 六 期		31.7000	
第 十 七 期			\$ 41.4000
第 十 八 期			40.9500
第 十 九 期			40.5000
第 二 十 期			40.0500
第 二 十 一 期			39.6000
第 二 十 二 期			39.1500
第 二 十 三 期			38.7 00
第 二 十 四 期			38.2500
第 二 十 五 期			37.8000
第 二 十 六 期		\$ 37.3500	
第 二 十 七 期		33.9000	
第 二 十 八 期		36.4500	
第 二 十 九 期		36.0000	
第 三 十 期		35.5500	
第 三 十 一 期		35.1000	
第 三 十 二 期		34.6500	
第 三 十 三 期			\$ 39.2000
第 三 十 四 期			38.6750
第 三 十 五 期			38.1500
第 三 十 六 期			37.6250
第 三 十 七 期			37 1000
第 三 十 八 期			36.5750
第 三 十 九 期			36.0500
第 四 十 期			35.5250

利隨本減，故持票人收受之本息總額，各期不等，此四十期本息總額，組成變額年金，各期償本額先少而後多，故此四

十期本息總額，不能組成一種等差變額年金，惟仍能如上表所示，分成五種等差變額年金，故可應用第四編公式(54)：

$$\begin{aligned}(A_a)_n &= f a_n + \frac{d}{i} (a_n - n v^n) \\ &= \frac{1}{i^2} [f i + d - v^n (f i + d n i + \bar{a})]\end{aligned}$$

上述五種等差變額年金，除第一種外，均為延期等差變額年金，第二種延期四期，第三種延期十二期，第四種延期十六期，第五種延期三十二期，故須以 $v^4, v^{12}, v^{16}, v^{32}$ 分別乘 $(A_a)_n$ 方可得其年金現值。設 A 為票面一千元公債之實際銷售價格， A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 為上表中五種等差變額年金之現值，則

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

$$A_1 = \frac{1}{i^2} [25 i - 0.15 - v^4 (25 i - 0.6 i - 0.15)]$$

$$A_2 = \frac{1}{i^2} [v^4 (29.4 i - 0.225) - v^{12} (29.4 i - 1.8 i - 0.225)]$$

$$A_3 = \frac{1}{i^2} [v^{12} (32.6 i - 0.3) - v^{16} (32.6 i - 1.2 i - 0.3)]$$

$$A_4 = \frac{1}{i^2} [v^{16} (41.4 i - 0.45) - v^{32} (41.4 i - 7.2 i - 0.45)]$$

$$A_5 = \frac{1}{i^2} [v^{32} (39.2 i - 0.525) - v^{40} (39.2 i - 4.2 i - 0.525)]$$

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{i^2} [25 i - 0.15 + v^4 (5 i - 0.075) + v^{12} (5 i - 0.075) \\ &\quad + v^{16} (10 i - 0.15) + v^{32} (5 i - 0.075) - v^{40} (35 i - 0.525)]\end{aligned}$$

$$\therefore A = \frac{15}{i} + \frac{1}{i^2} (5 i - 0.075) (2 + v^4 + v^{12} + 2 v^{16} + v^{32} - 7 v^{40})$$

應用上式可推算二十三年關稅公債實際銷售價格。

a) 虛利率七釐，每年複利四次。

$$i = 1 \frac{3}{4} \%$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{60}{0.07} + \frac{16}{0.0049} \times 0.0125 \cdot (2 + 0.93295351 + 0.81205788 \\ &\quad + 2 \times 0.75761631 + 0.57398247 - 7 \times 0.49960098) \\ &= 857.142857 + \frac{2000}{49} \times 2.33702462 \\ &= 857.142857 + 95.33876 = 952.5316 \text{ 元} \end{aligned}$$

b) 虛利率八釐，每年複利四次。

$$i = 2 \%$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{15}{0.02} + \frac{1}{0.0004} \times 0.025(2 + 0.92334543 + 0.78849318 \\ &\quad + 2 \times 0.72344731 + 0.53063330 - 7 \times 0.45289042) \\ &= 750 + 62.5 \times 2.52963059 = 750 + 158.1019 = 908.1019 \text{ 元} \end{aligned}$$

c) 虛利率九釐，每年複利四次。

$$i = 2 \frac{1}{4} \%$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{60}{0.09} + \frac{16}{0.0081} \times 0.0375(2 + 0.91484335 + 0.76566748 \\ &\quad + 2 \times 0.70046580 + 0.49065233 - 7 \times 0.41064575) \\ &= 666.666667 + \frac{6000}{81} \times 2.69757451 = 666.666667 \\ &\quad + \frac{16185.44706}{81} = 666.666667 + 199.820334 = 866.4870 \text{ 元} \end{aligned}$$

d) 虛利率一分, 每年複利四次。

$$i = 2\frac{1}{2} \%$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{30}{0.05} + \frac{4}{0.0025} \times 0.05(2 + 0.90595064 + 0.74355589 \\ &\quad + 2 \times 0.67362498 + 0.45377055 - 7 \times 0.37243062) \\ &= 600 + 80 \times 2.84351260 = 600 + 227.4810 \\ &= 827.4810 \text{ 元} \end{aligned}$$

e) 虛利率一分一釐, 每年複利四次。

$$i = 2\frac{3}{4} \%$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{60}{0.11} + \frac{16}{0.0121} \times 0.0625(2 + 0.89716573 + 0.72213440 \\ &\quad + 2 \times 0.64787424 + 0.41974103 - 7 \times 0.33785222) \\ &= 545.454545 + \frac{10000}{121} \times 2.9698241 = 545.454545 \\ &\quad - 245.440008 = 790.8946 \text{ 元} \end{aligned}$$

f) 虛利率一分二釐, 每年複利四次。

$$i = 3 \%$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{15}{0.03} + \frac{1}{0.0009} \times 0.075(2 + 0.88848705 + 0.70137988 \\ &\quad + 2 \times 0.62316694 + 0.38833703 - 7 \times 0.30655684) \\ &= 500 + \frac{750}{9} \times 3.07863996 = 500 + \frac{2308.97997}{9} \\ &= 500 + 256.5533 = 756.5533 \text{ 元} \end{aligned}$$

g 虛利率一分四釐，每年複利四次。

$$i = 3\frac{1}{2} \%$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{30}{0.07} + \frac{4}{0.0049} \times 0.1(2 + 0.87144223 + 0.66178330 \\ &\quad + 2 \times 0.57670591 + 0.33258971 - 7 \times 0.25257247) \\ &= 428.571429 + \frac{4000}{49} \times 3.25121977 = 428.571429 \\ &\quad + \frac{13004.87908}{49} = 428.571429 + 265.405696 = 693.9771 \text{ 元} \end{aligned}$$

茲就以上結果，列表比較之如下。

票面一千元公債之實際銷售價格

財政部實際負擔利率		二十三年關稅公債 實際銷售價格
虛利率(每年複利四次)	實利率	
7 %	7.185903 %	\$ 952.5316
8 %	8.243216 %	908.1019
9 %	9.303332 %	866.4870
10 %	10.381289 %	827.4810
11 %	11.462126 %	790.3946
12 %	12.550881 %	756.5533
14 %	14.752300 %	693.9771

觀上表，可知利率漸次增加，實際銷售價格漸次減少，故若按 756.5533 元銷售，財政部實際負擔之實利率，已在一分二釐五毫半以上，茲即以此為標準，作帳面價值計算表於下。

二十三年關稅公債票面一千元之帳面價值計算表

期 別	期 初 帳 面 價 值	期 末 應 付 利 息 額	期 初 票 面 餘 額	期 末 實 際 支 付 利 息 額	期 末 償 本 額	期 末 帳 面 價 值 減 少 額
第 一 期	\$ 756.5533	\$ 22.6966	\$1000.0000	\$ 15.0000	\$ 10.0000	\$ 2.3034
第 二 期	754.2499	22.6275	990.0000	14.8500	10.0000	2.2225
第 三 期	752.0274	22.5608	980.0000	14.7000	10.0000	2.1392
第 四 期	749.8882	22.4966	970.0000	14.5500	10.0000	2.0534
第 五 期	747.8348	22.4350	960.0000	14.4000	15.0000	6.9650
第 六 期	740.8698	22.2261	945.0000	14.1750	15.0000	6.9489
第 七 期	738.9209	22.0176	930.0000	13.9500	15.0000	6.9324
第 八 期	726.9885	21.8097	915.0000	13.7250	15.0000	6.9153
第 九 期	720.0732	21.6022	900.0000	13.5000	15.0000	6.8978
第 十 期	713.1754	21.3953	885.0000	13.2750	15.0000	6.8797
第 十 一 期	706.2957	21.1889	870.0000	13.0500	15.0000	6.8611
第 十 二 期	699.4346	20.9830	855.0000	12.8250	15.0000	6.8420
第 十 三 期	692.5926	20.7778	840.0000	12.6000	20.0000	11.8222
第 十 四 期	680.7704	20.4231	820.0000	12.3000	20.0000	11.8769
第 十 五 期	668.8935	20.0668	800.0000	12.0000	20.0000	11.9332
第 十 六 期	656.9608	19.7083	780.0000	11.7000	20.0000	11.9912
第 十 七 期	644.9691	19.3491	760.0000	11.4000	30.0000	22.0509
第 十 八 期	622.9182	18.9875	730.0000	10.9500	30.0000	22.2625
第 十 九 期	600.6557	18.0197	700.0000	10.5000	30.0000	22.4803
第 二 十 期	578.1754	17.3453	670.0000	10.0500	30.0000	22.7047
第 二 十 一 期	555.4707	16.6641	640.0000	9.6000	30.0000	22.9359
第 二 十 二 期	532.5348	15.9760	610.0000	9.1500	30.0000	23.1740
第 二 十 三 期	509.3608	15.2808	580.0000	8.7000	30.0000	23.4192
第 二 十 四 期	485.9416	14.5782	550.0000	8.2500	30.0000	23.6718
第 二 十 五 期	\$ 462.2698	\$ 13.8681	\$ 520.0000	\$ 7.8000	\$ 30.0000	\$ 23.9319
第 二 十 六 期	438.3379	13.1501	490.0000	7.3500	30.0000	24.1999
第 二 十 七 期	414.1380	12.4241	460.0000	6.9000	30.0000	24.4759
第 二 十 八 期	389.6621	11.6899	430.0000	6.4500	30.0000	24.7601
第 二 十 九 期	364.9020	10.9471	400.0000	6.0000	30.0000	25.0529
第 三 十 期	339.8491	10.1955	370.0000	5.5500	30.0000	25.3545
第 三 十 一 期	314.4946	9.4348	340.0000	5.1000	30.0000	25.6652
第 三 十 二 期	288.8294	8.6649	310.0000	4.6500	30.0000	25.9851
第 三 十 三 期	262.8443	7.8853	280.0000	4.2000	35.0000	31.3147

第三十四期	231.5293	6.9459	245.0000	3.6750	35.0000	31.7271
第三十五期	199.8005	5.9940	210.0000	3.1500	35.0000	32.1560
第三十六期	167.6445	5.0293	175.0000	2.6250	35.0000	32.5957
第三十七期	135.0485	4.0515	140.0000	2.1000	35.0000	33.0485
第三十八期	102.0003	3.0600	105.0000	1.5750	35.0000	33.5150
第三十九期	68.4855	2.0546	70.0000	1.0500	35.0000	33.9954
第四十期	34.4809	1.0347	35.0000	0.5250	35.0000	34.4903
合 計	20244.8809	607.3463	24.60.0000	363.9000	1000.0000	756.5537

習 題 二 十 二

1. 票面總額一千萬元，規定本金於三十年末一次償還，溢酬率5%，債券利率六釐，設投資者欲得投資利率五釐，求債券市價！

- 每年末付息一次，債券於發行時購入；
- 每年末付息一次，債券於第十次付息日之翌日購入；
- 年半年末付息一次，債券於發行時購入。

2. 票面總額一千萬元，規定本金於三十年末一次償還，債券利率六釐，每年末支付利息一次，設投資者於第二十四次付息日之翌日，購入票面金額一千元，求債券市價，並作帳面價值計算表！

- 投資利率五釐；
- 投資利率七釐。

3. 票面總額一千萬元，債券利率六釐，於二十年內平均償還，利息於每年末支付，設投資者欲得投資利率五釐，求債券市價！

- 債券於發行時購入；
- 債券於第五次償本付息日之翌日購入；

4. 票面總額一千萬元，債券利率六釐，每年償還百分之四分四次支付，利息每年亦支付四次，設投資者於第六年初購入，投資利率五釐，求債券市價！

5. 票面總額一千萬元，債券利率六釐，分二十年償還，每年支付本息總額相等，設投資者於第十五次償本付息日之翌日購入，求債券市價！

a) 投資利率七釐;

b) 投資利率五釐.

6. 票面總額一千萬元,債券利率六釐,每年負擔總額規定為債券總額百分之二與全部債券利息之和,設投資者於第十次償本付息日之翌日購買,投資利率五釐,求債券市價!

a) 零數於最後一年支付;

b) 零數於最初一年支付.

7. 票面總額一千萬元,債券利率六釐,分三十年償還.設投資者於第二十五次償本付息日之翌日購買,投資利率五釐,求債券市價!

a) 每年負擔總額成一等差級數,公差為10000元;

b) 每年負擔總額成一等差級數,公差為-10000元;

c) 每年負擔總額成一等比級數,公比為1.2

8. 票面總額一千萬元,債券利率六釐,分三十年償還,每年償本付息之總額相等,溢酬率5%,設投資者於第十次償本付息日之翌日購入,投資利率五釐,求債券市價!

9. 票面總額一千萬元,溢酬率10% 債券利率六釐,分三十年償還,每年償本付息與支付溢酬之總額相等,設投資者於第十五次償本付息日之翌日購入,投資利率五釐,求債券市價!

10. 投資者於民國二十五年六月一日購買二十三年關稅庫券,設彼欲得年息八釐之投資利率,求庫券市價!

a) 應用第四編公式(59);

b) 應用第四編公式(58).

11. 填寫下表中空白之處!

投資利率

二十三年關稅庫券在

民國二十六年一月一日市價

月息 折合年息

$\frac{5}{12}$ %

$$\frac{1}{2} \%$$

$$\frac{7}{12} \%$$

$$\frac{3}{4} \%$$

$$1 \%$$

$$1 \frac{1}{8} \%$$

$$1 \frac{1}{4} \%$$

$$1 \frac{1}{2} \%$$

$$1 \frac{3}{4} \%$$

$$2 \%$$

第三章 投資利率之推算

預定投資利率，以推算債券之市價，前章論之詳矣，然債券在市場上之價格，未必能與投資者所推算之市價適合。投資者所推算之市價，乃其預定之最高價格，債券市價若等於或低於此最高價格，則投資者購入債券，否則不願投資。投資者購入債券之價格，若低於其所推算之最高價格，則其實際取得之投資利率較高於其所預定之投資利率，故已知債券之市價，有時須求其投資利率，此則本章所欲討論者也。

(例一) 票面總額一千萬元，規定本金於二十年末一次償還，債券利率六釐，設投資者於第五次付息日之翌日購入，債券市價 85.35 元，求投資利率！

債券市價低於票面金額，故投資利率高於債券利率。先試以投資利率八釐，而求債券市價。

債券流行之時期，尚有十五年。

$$C_n = 10000000 \text{ 元}$$

$$10000000 \times \frac{6}{100} = 600000 \text{ 元} \quad \text{每年付息總額}$$

$$C_r = 10000000 v^{15} + 600000 a_{\overline{15}|} = 8288104 \text{ 元}$$

應用公式(1)，得：

$$A = \frac{8288104}{10000000} \times 100 = 82.88104 \text{ 元}$$

$$82.88104 < 85.35, \quad \text{故知 } i < 8\%$$

再試以投資利率七釐五毫，而求債券市價。

$$C_r = 10000000 v^{15} + 600000 a_{\overline{15}|i} = 8675932 \text{ 元}$$

應用公式 (1)，得：

$$A = \frac{8675932}{10000000} \times 100 = 86.75932 \text{ 元}$$

$$86.75932 > 85.35, \quad \text{故知 } i > 7\frac{1}{2}\%$$

$$i_1 = 7\frac{1}{2}\% \quad A_1 = 86.75932$$

$$i_2 = 8\% \quad \frac{A_2 = 82.88104}{3.87828}$$

$$A_1 = 86.75932$$

$$\frac{A = 85.35}{1.40932}$$

$$i = 7\frac{1}{2}\% + \frac{1}{2}\% \times \frac{1.40932}{3.87828} = 0.075 + 0.00182 = 0.07682$$

$$= 7.682\%$$

若欲應用三數插補法，則可再求投資利率七釐或八釐五毫之債券市價。

(例二) 前題中之債券市價若改為 54.45 元，則其投資利率當為幾何？

本書附錄中之複利現值表與年金現值表，至八釐五毫為止，而本題中之投資利率，遠在八釐五毫以上，故不能直接

應用計算表。本題中之投資利率，可用下列兩法之一求得。

(第一法)

$$C_n = 10000000 \text{ 元}$$

$$10000000 \times \frac{6}{100} = 600000 \text{ 元} \quad \text{每年付息總額}$$

$$C_r = 10000000 v^{15} + 600000 a_{\overline{15}|i}$$

應用公式 (1)，得：

$$\begin{aligned} A &= \frac{10000000 v^{15} + 600000 a_{\overline{15}|i}}{10000000} \times 100 = 100 v^{15} + 6 a_{\overline{15}|i} \\ &= 100 v^{15} + \frac{6 \cdot 6 v^{15}}{i} \end{aligned}$$

先試以投資利率一分二釐，而求債券市價。

$$v^{15} = 1.12^{-15}$$

$$\log v^{15} = -15 \log 1.12 = -15 \times 0.0492180 = \bar{1}.2617300$$

$$v^{15} = 0.182696$$

$$A = 18.2696 + \frac{6 \times 0.817304}{0.12} = 59.1348 \text{ 元}$$

$$59.1348 > 54.45, \quad \text{故知 } i > 12\%$$

再試以投資利率一分三釐，而求債券市價。

$$v^{15} = 1.13^{-15}$$

$$\log v^{15} = -15 \log 1.13 = -15 \times 0.0530784 = \bar{1}.2038240$$

$$v^{15} = 0.159891$$

$$A = 15.9891 + \frac{6 \times 0.840109}{0.13} = 54.7634 \text{ 元}$$

$$54.7634 > 54.45, \quad \text{故知 } i > 13\%$$

再試以投資利率一分三釐二毫,而求債券市價.

$$v^{15} = 1.132^{-15}$$

$$\log v^{15} = -15 \log 1.132 = -15 \times 0.0538464 = -1.1923040$$

$$v^{15} = 0.155706$$

$$A = 15.5706 + \frac{6 \times 0.844294}{0.132} = 53.9476 \text{ 元}$$

$$53.9476 \text{ 元} < 54.45, \quad \text{故知 } i < 13.2\%$$

$$13.2\% > i > 13\%$$

$$i_1 = 13\% \quad A_1 = 54.7634$$

$$i_2 = 13.2\% \quad \frac{A_2 = 53.9476}{0.8158}$$

$$A_1 = 54.7634$$

$$\frac{A = 54.45}{0.3134}$$

$$0.3134$$

$$i = 0.13 + 0.002 \times \frac{3134}{8158} = 0.131 = 13.1\%$$

(第二法) 先試以投資利率一分三釐,每年複利二次.

$$\frac{j}{m} = 6 \frac{1}{2}\%$$

$$C_n = 10000000 \text{ 元}$$

$$10000000 \times \frac{6}{100} = 600000 \text{ 元} \quad \text{每年付息總額}$$

到期本金之現值為 $10000000v^{30}$, 至按年支付利息之現值,

則可應用第四編公式(51)求得如下:

$$600000 \frac{a_{\overline{30}|}}{S_{\overline{2}|}}$$

$$\begin{aligned} C_r &= 10000000 v^{30} + 600000 \frac{a_{\overline{30}|}}{S_{\overline{2}|}} \\ &= 1511860.7 + 7835205.546 \times 0.4842615 = 5306149 \text{ 元} \end{aligned}$$

$$A = \frac{5306149}{10000000} \times 100 = 53.06149 \text{ 元}$$

$$53.06149 < 54.45, \quad \text{故知 } j < 13\%$$

再試以投資利率一分二釐, 每年複利二次。

$$\frac{j}{m} = 6\%$$

$$\begin{aligned} C_r &= 10000000 v^{30} + 600000 \frac{a_{\overline{30}|}}{S_{\overline{2}|}} \\ &= 1741101.3 + 8258898.69 \times 0.48543689 \\ &= 5750275 \text{ 元} \end{aligned}$$

$$A = \frac{5750275}{10000000} \times 100 = 57.50275 \text{ 元}$$

$$57.50275 > 54.45, \quad \text{故知 } j < 12\%$$

$$j_1 = 12\% \quad i_1 = 12.36\%$$

$$j = 13\% \quad i = 13.4225\%$$

$$\therefore 12.36\% < i < 13.4225\%$$

$$i_1 = 12.36\% \quad A_1 = 57.50275$$

$$i_2 = 13.4225\% \quad A_2 = \frac{53.06149}{4.44126}$$

$$A_1 = 57.50275$$

$$A = \frac{54.45}{3.05275}$$

$$i = 0.1236 + 0.010625 \times \frac{305275}{444126} = 0.131 = 13.1\%$$

兩法求得之結果相同。

(例三) 票面總額一千萬元, 債券利率六釐, 每年償還百分之四分四次支付, 利息每年亦支付四次, 設投資者於第五次償本付息日之翌日購入, 債券市價 75.85 元, 求投資利率!

設以償本付息時期為複利時期, 即每年複利四次, 債券流行之時期尚有五十期。

$$C_n = 10000000 \times \frac{50}{100} = 5000000$$

本金每期減少百分之一, 即十萬元, 故利息每期亦減少一千五百元。最後一期未償本金僅有十萬元, 故利息僅須支付一千五百元。每期利息, 組成遞減等差變額年金, 故其現值可應用第四編公式 (57), 求得如下:

$$(A_n)_{\overline{50}|} = 1500 \sum a_{\overline{50}|}$$

每期償還本金, 組成定額年金, 其現值如下:

$$100000 a_{\overline{50}|}$$

$$C_r = 100000 a_{\overline{50}|} + 1500 \sum a_{\overline{50}|}$$

應用公式 (1), 得:

$$A = \frac{100000 a_{\overline{50}|} + 1500 \sum a_{\overline{50}|}}{5000000} \times 100 = 2 a_{\overline{50}|} + 0.03 \sum a_{\overline{50}|}$$

先試以虛利率一分。

$$\frac{j}{m} = 2\frac{1}{2}\%$$

$$\begin{aligned} A &= 2a_{\overline{50}|} + 0.03 \sum a_{\overline{50}|} = 2 \times 28.36231163 + 0.03 \times 865.50753280 \\ &= 56.72462336 + 25.965225984 = 82.689849344 \end{aligned}$$

82.69 > 75.85, 故知 $j > 10\%$

再試以虛利率一分二釐。

$$\frac{j}{m} = 3\%$$

$$\begin{aligned} A &= 2a_{\overline{50}|} + 0.03 \sum a_{\overline{50}|} = 2 \times 25.72976401 + 0.03 \times \\ &809.0078664 = 51.45952802 + 24.270235992 \\ &= 75.729764012 \end{aligned}$$

75.73 < 75.85, 故知 $j < 12\%$

虛利率 j 介於 10% 與 12% 之間，但由求得債券市價相差之大小，可知 j 亦大於 11%，故可再試以虛利率一分一釐。

$$\frac{j}{m} = 2\frac{3}{4}\%$$

$$\begin{aligned} A &= 2a_{\overline{50}|} + 0.03 \sum a_{\overline{50}|} = 2 \times 26.99716998 + 0.03 \times 836.4665462 \\ &= 53.99433996 + 25.093996386 = 79.088336346 \end{aligned}$$

$$j_1 = 12\% \quad i_1 = 12.550881\%$$

$$j_2 = 11\% \quad i_2 = 11.462126\%$$

$$\therefore 11.462126\% < i < 12.550881\%$$

$$i_1 = 0.12550881 \quad A_1 = 75.72976$$

$$i_2 = \frac{0.11462126}{0.01088755} \quad A_2 = \frac{79.08884}{3.35858}$$

$$A = 75.85$$

$$A_2 = \frac{79.08884}{3.23834}$$

$$i = 0.11462126 + 0.01088755 \times \frac{323834}{335858} = 0.1251 = 12.51\%$$

(例四) 票面總額一千萬元債券利率六釐分四十年償還，每年償本付息之總額相等，溢酬率10%，設投資者於債券發行時按票面金額九四折購入，則投資利率當為幾何？

應用公式(3)，得：

$$A = 100 \frac{1}{a_{40}} @ 6\% [a_{40} @ i + \frac{0.1}{i - 0.06} \{1.06^{40} - (1+i)^{40}\}]$$

$$A = 6.646154 [a_{40} @ i + \frac{0.1}{i - 0.06} \{0.09722219 - (1+i)^{40}\}]$$

若償本時不給溢酬，而債券按票面金額購入，則投資利率即與債券利率相等，今既另給溢酬，且市價低於票面金額，則投資利率必高於債券利率，可無容疑。

先試以投資利率七釐。

$$A = 6.646154 [a_{40} @ i + \frac{0.1}{i - 0.06} \{0.09722219 - (1+i)^{40}\}]$$

$$= 6.646154 [13.33170884 + 10(0.09722219 - 0.06678033)]$$

$$= 6.646154 (13.33170884 + 0.3044181) = 6.646154$$

$$\times 13.63612694 = 90.62780$$

$$90.62780 < 94,$$

故知 $i < 7\%$

再試以投資利率六釐五毫。

$$\begin{aligned} A &= 6.646154 [a_{\overline{40}|} @ i + \frac{0.1}{i - 0.06} \{0.09722219 - (1+i)^{-40}\}] \\ &= 6.646154 [14.14552687 + 20(0.09722219 - 0.08054075)] \\ &= 6.646154(14.14552687 + 0.3336288) = 6.646154 \\ &\quad \times 14.47915567 = 96.23070 \end{aligned}$$

$$96.23070 > 94, \quad \text{故知 } i > 6\frac{1}{2}\%$$

應用二數插補法，得： $i = 6.7\%$

(例五) 庫券票面總額八千萬元，月息五釐，每月償本付息一次，每月償還本金百分之二，利隨本減，設財政部按票面九折發行，求投資利率。

設以票面金額百元為標準，令償本付息時期與複利時期一致，即假定每年複利十二次，每月償還本金二元，故利息每月遞減一分，前者為一定額年金，而後者為一遞減等差變額年金。

應用第四編公式(6)與公式(57)，得：

$$A = 2 a_{\overline{50}|} + 0.01 \sum a_{\overline{50}|}$$

先試以虛利率九釐。

$$\frac{j}{m} = \frac{3}{4}\%$$

$$\begin{aligned} A &= 2 a_{\overline{50}|} + 0.01 \sum a_{\overline{50}|} = 2 \times 41.56644707 + 0.01 \times \\ &1124.4737244 = 83.13289414 + 11.244737244 \\ &= 94.37763 \end{aligned}$$

$$94.37763 < 96, \quad \text{故知 } j < 9\%$$

再試以虛利率七釐。

$$\frac{j}{m} = \frac{7}{12}\%$$

$$\begin{aligned} A &= 2 a_{\overline{50}|} + 0.01 \sum a_{\overline{50}|} = 2 \times 43.25986460 + 0.01 \times \\ &1155.4518427 = 86.5197292 + 11.554518427 \\ &= 98.07425 \end{aligned}$$

$$98.07425 > 96, \quad \text{故知 } j > 7\%$$

$$\therefore 7\% < j < 9\%$$

$$j_1 = 7\% \quad i_1 = 7.229008\%$$

$$j_2 = 9\% \quad i_2 = 9.380690\%$$

$$\therefore 7.229008\% < i < 9.380690\%$$

$$i_1 = 7.229008\% \quad A_1 = 98.07425$$

$$i_2 = \frac{9.380690\%}{2.151682\%} \quad A_2 = \frac{94.37763}{3.69662}$$

$$A_1 = 98.07425$$

$$A = \frac{96}{2.07425}$$

$$i = 0.07229008 + 0.02151682 \times \frac{207425}{369662} = 0.084 = 8.4\%$$

習 題 二 十 三

1. 票面總額一千萬元，規定本金於三十年末一次償還，債券利率六釐，設投資者於第十次付息日之翌日購入，債券市價 92.45 元，求投資利率。

2. 票面總額一千萬元,債券利率六釐,每年償還百分之四,分二次支付,利息每年亦支付二次,設投資者於第三十次償本付息日之翌日購入,債券市價 85.95 元,求投資利率!

3. 票面總額八千萬元,債券利率六釐,分四十年償還,每年償本付息之總額相等,溢酬率 5%,設投資者於債券發行時按票面金額八九折購入,則投資利率當為幾何?

4. 設二十三年關稅庫券於民國二十四年七月一日之市價為 70 元,求投資利率!

5. 設二十三年關稅庫券於民國二十八年十一月一日之市價為 25 元,求投資利率!

6. 票面總額一千萬元,溢酬率 20%,債券利率六釐,分四十年償還,每年償本付息與支付溢酬之總額相等,設投資者於債券發行時按票面金額購入,求投資利率!

本編應用公式

$$A = \frac{Cr}{Cn} \times 100 \dots\dots\dots (1)$$

$$A = \frac{\frac{a_n}{a_n} @ i}{\frac{a_n}{a_n} @ r} \times 100 \dots\dots\dots (2)$$

$$A = \frac{100}{a_n @ r} \left[a_n @ i + \frac{p}{i-r} \{ (1+r)^{-n} - (1+i)^{-n} \} \right] \dots\dots\dots (3)$$

$$A = 100(1+p) \frac{\frac{a_n}{a_n} @ i}{a_n @ \bar{i}} \dots\dots\dots (4)$$

第八編 折舊

第一章 折舊之意義

實物資產，若房屋，機器與其他工場設備，因使用而漸耗損，一部耗損得因修理而回復其使用價值，而一部耗損則否，故無論何種實物資產，即使慎於使用，勤於修理，必有完全不能使用之一日。實物資產至完全不能使用之時，其所留存之價值，祇一部殘餘價值 (Scrap Value)，若舊房屋之屋料與舊機器之廢鐵耳。實物資產既有變成殘餘價值之一日，則在使用時苟不預為之地，一至完全不能使用之時，勢必無力重置新產，或雖力能置產，然歷年耗損盡歸一年負擔，亦非理財之道也。實物資產既因使用而漸耗損，因耗損而漸減少其使用價值，則資產在帳面上之價值，即其帳面價值，亦須隨使用而漸減少，即所謂折舊 (Depreciation) 是也。

每年提供折舊之金額，名曰折舊費 (Depreciation Charges)。每年提出之折舊費，為公司每年應負之損失，故須自毛利中除去。我國各大公司每有結出淨利後再提折舊費者，是因未諳會計原理，或雖明知其不可，而欲略施手法，以欺公司之股東與公衆故也。折舊費既因資產之耗損而提出，則不論營業

之結果，資產之耗損則一，故不能藉口營業結果之不利，而少提或不提折舊之費也。

最初資產之價值，除去歷年所提折舊費後所餘之價值，名曰折餘價值(Depreciated Value)。資產至完全不能使用時所存之折餘價值，應與殘餘價值相等。最初資產之價值與殘餘價值相差之額，名曰耗損價值(Wearing Value)

第二章 計算折舊之方法

計算折舊之方法甚多，其最重要者，有直線折舊法 (Straight Line Method)，定率折舊法 (Constant Percentage Method) 基金折舊法 (Sinking Fund Method)，年金折舊法 (Annuity Method) 與單位成本折舊法 (Unit Cost Method)。

無論採用何種折舊方法，均須先知最初資產之價值，殘餘價值與資產使用時期。最初資產之價值為確定已知之價值，殘餘價值與資產使用時期，則購置資產時猶未知悉，故須由工程師或建築師精密估計。前二種折舊方法與利率無關，後三種折舊方法則與利率有關，故須由會計主任預先假定一種計算標準之利率。我國各大公司向銀錢業借款所納利息，有高至一分二三釐者，故計算折舊之標準，亦有假定為年息一分二三釐者。

直線折舊法計算最簡，即以資產之耗損價值，由資產使用時期內各年平均負擔，例如資產之耗損價值為八千元，資產之使用時期為十年，則每年應折舊八百元，以公式列之如下：

$$D = \frac{W}{n} \dots\dots\dots (1)$$

D 每年折舊費

W 耗損價值

n 資產使用年數

上式中之耗損價值,可自下式求得:

$$W = C - S \dots\dots\dots (2)$$

W 耗損價值

C 原本價值

S 殘餘價值

(例一) 機器之原本價值為 5,000 元,其殘餘價值估計為 500 元,機器之使用時期估計為十年,求直線折舊法中之每年折舊費!

$$W = 5000 - 500 = 4500$$

$$D = \frac{4500}{10} = 450$$

機器歷年之帳面價值及其累積折舊費,可列表示之如下

折舊明細表(直線折舊法)

年 別	年末帳面價值	年 末 折 舊 費	年末累積折舊費
第 一 年	\$ 4550	\$ 450	\$ 450
第 二 年	4100	450	900
第 三 年	3650	450	1350
第 四 年	3200	450	1800
第 五 年	2750	450	2250
第 六 年	2300	450	2700
第 七 年	1850	450	3150
第 八 年	1400	450	3600
第 九 年	950	450	4050
第 十 年	500	450	4500

以歷年帳面價值與累積折舊費繪之於圖，則成兩直線，直線折舊法之名以此。

上法中每年折舊費相等，但因資產之帳面價值逐年遞減，故年末折舊費與年初帳面價值之比逐年遞增，定率折舊法者即欲使此種比率年年相等之折舊方法也。所謂定率者，指對帳面價值而言，故此法之完全名稱爲帳面價值之定率折舊法。定率折舊法中之定率與帳面價值，可自下列兩式求得：

$$P = 1 - \text{antilog} \frac{\log S - \log C}{n} \dots\dots\dots (3)$$

$$B_r = \text{antilog} [\log C + r \log (1-p)] \dots\dots\dots (4)$$

- C 原本價值
 S 殘餘價值
 B_r 第 r 年末帳面價值
 n 資產使用年數
 p 定率

(證) $C(1-p)^n = S$

$$\log C + n \log (1-p) = \log S$$

$$\log (1-p) = \frac{\log S - \log C}{n}$$

$$1-p = \text{antilog} \frac{\log S - \log C}{n}$$

$$\therefore p = 1 - \text{antilog} \frac{\log S - \log C}{n}$$

$$B_r = C(1-p)^r$$

$$\log B_r = \log C + r \log(1-p)$$

$$\therefore B_r = \text{antilog} [\log C + r \log(1-p)]$$

公式(3)中之 S 不能等於零,故無殘餘價值之資產,不能採用定率折舊法。

(例二 機器之原本價值為5000元,其殘餘價值估計為500元,機器之使用時期估計為十年,求定率折舊法中之定率與第六年末之帳面價值!)

應用公式(3),得:

$$p = 1 - \text{antilog} \frac{\log 500 - \log 5000}{10}$$

$$= 1 - \text{antilog} \frac{-1}{10} = 1 - \text{antilog} \bar{1}.9 = 1 - 0.79433$$

$$= 0.20567 = 20.567\%$$

應用公式(4),得

$$B_6 = \text{antilog} (\log 5000 + 6 \log 0.79433)$$

$$= \text{antilog} (3.698970 + 6 \times 1.9) = \text{antilog} 3.098970 = 1255.94 \text{ 元}$$

機器歷年之帳面價值,折舊費與累積折舊費,可列表表示之如下。

折舊明細表(定率折舊法)

年 別	年末帳面價值	年末折舊費	年末累積折舊費
第一 年	\$ 3071.05	\$ 1028.35	\$ 1028.35
第二 年	3154.80	816.85	1845.20
第三 年	2505.05	648.85	2494.05
第四 年	1997.65	515.40	3009.45
第五 年	1581.15	409.40	3418.85
第六 年	1255.95*	325.20	3744.05
第七 年	967.64	258.31	4002.36
第八 年	792.46	205.18	4207.54
第九 年	629.47	162.99	4370.53
第十 年	500.00	129.47**	4500.00

上表中每年折舊費漸次減少，故公司負擔，前期較重於後期，與直線折舊法相異。

每年提出之折舊費，若依假定投資利率生息，使資產至完全不能使用時，所積基金適與資產之耗損價值相等，則此折舊方法名曰基金折舊法，其每年折舊費，折舊基金總額與帳面價值，可自下列三公式求得：

$$D = \frac{W}{S_n} \dots\dots\dots (5)$$

$$D_r = \frac{WS_r}{S_n} \dots\dots\dots (6)$$

$$B_r = C - \frac{WS_r}{S_n} \dots\dots\dots (7)$$

D 每年折舊費

D_r 第 r 年末折舊基金總額

B_r 第 r 年末帳面價值

* 與以上求得之數相差一分，此係小數取舍之故。

** 以定率乘帳面價值，本為 129.46，尚差一分，故改作 129.47。

C 原本價值

W 耗損價值

n 資產使用年數

$S_{\bar{n}}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之終值

$S_{\bar{r}|}$ 簡單年金一元繼續支付 r 年之終值

(例三) 機器之原本價值為 5000 元, 其殘餘價值估計為 500 元, 機器之使用時期估計為十年, 折舊方法採用基金折舊法, 假定投資利率八釐, 求每年折舊費, 第六年末折舊基金總額與第六年末帳面價值!

$$W = 5000 - 500 = 4500$$

應用公式 (5), 得:

$$D = 4500 \times 0.06902949 = 310.632705 \text{ 元}$$

應用公式 (6), 得:

$$D_6 = 4500 \times 0.06902949 \times 7.33592904 = 2278.7795 \text{ 元}$$

應用公式 (7), 得:

$$B_6 = 5000 - 2278.7795 = 2721.2205 \text{ 元}$$

折舊明細表(基金折舊法)

年 別	年末帳面價值	年末折舊費	折舊費所生之利息	折舊基金總額
第一 年	\$ 4689.37	\$ 310.63	\$ 0	\$ 310.63
第二 年	4353.89	310.63	24.85	646.11
第三 年	3991.57	310.63	51.69	1008.43
第四 年	3600.27	310.63	80.67	1399.78
第五 年	3177.66	310.63	111.98	1822.34
第六 年	2721.24*	310.63	145.79	2278.78*
第七 年	2228.31	310.63	182.30	2771.69
第八 年	1695.91	310.63	221.74	3304.06
第九 年	1120.99	310.63	264.32	3879.01
第十 年	500.00	310.67*	310.32	4500.00

* 因小數祇取二位, 故略有差異。

基金折舊法對於折舊費與以相當利息，但於最初投資額未計任何利息，年金折舊法則不然，對於投資額亦計算利息，故此法又名曰投資額生息折舊法 (Interest-on-Investment Method)，其每年折舊費與第 r 年末帳面價值，可自下列二式求得：

$$D = Ci + W \frac{1}{S_{\overline{n}|i}} \dots\dots\dots (8)$$

- D 每年折舊費
- C 原本價值
- W 耗損價值
- i 假定投資利率
- n 資產使用年數
- $S_{\overline{n}|i}$ 簡單年金一年繼續支付 n 年之終值

(證) 設投資額不計利息，則由公式(6)，每年折舊費當為 $\frac{W}{S_{\overline{n}|i}}$ 依年金折舊法之定義，投資額亦須計算利息，故每年折舊費須再加 Ci ，即得：

$$D = Ci + \frac{W}{S_{\overline{n}|i}}$$

第 r 年末帳面價值，可自公式(7)求得，與基金折舊法相同。

(例四) 機器之原本價值為 5000 元，其殘餘價值估計為 500 元，機器之使用時期估計為十年，折舊方法採用年金折舊法，假定投資利率八釐，求每年折舊費與第六年末帳面價值！

$$W = 5000 - 500 = 4500$$

應用公式(8)，得：

$$D = 5000 \times \frac{8}{100} + 4500 \times 0.06902949 = 710.632705 \text{ 元}$$

應用公式(7),得

$$B_8 = 5000 - 4500 \times 0.06902949 \times 7.33592904 = 2721.2205 \text{ 元}$$

若每年提出之折舊費,除去年初帳面價值之利息後,盡以之減少帳面價值,則得折舊明細表如下:

折舊明細表(年金折舊法)

年 別	年末帳面價值	上年末帳面價值之利息	年末折舊費	減除帳面價值之額
第 一 年	\$ 4689.37	\$ 400.00	\$ 710.63	\$ 310.63
第 二 年	4353.89	375.15	710.63	335.48
第 三 年	3991.57	348.31	710.63	362.32
第 四 年	3600.27	319.33	710.63	391.30
第 五 年	3177.65	288.02	710.63	422.61
第 六 年	2721.24*	254.21	710.63	456.42
第 七 年	2228.31	217.70	710.63	492.93
第 八 年	1695.94	178.26	710.63	532.37
第 九 年	1120.99	135.68	710.63	574.95
第 十 年	503.00	89.68	710.67*	620.99

基金折舊法與年金折舊法求得之帳面價值相等,故此兩法名異而實同。

若計算折舊之資產,為一種可以生產之資產,例若機器,則舊機器之生產量,運轉費與修理費,俱與新機器不同,欲使舊機器之產品,能與新機器之產品競爭,非使舊機器之單位成本,降至新機器之單位成本不可。上述各種折舊方法,均未計及單位成本,而單位成本折舊法則反是,故單位成本折舊

*因小數祇取二位,故略有差異。

法者，根據資產之單位成本而計算折舊之法也。計算折舊時舊機器之價值，可用下列公式求得：

$$c = y a_n \left(\frac{O + R + \frac{C}{a_N}}{Y} - \frac{o + r}{y} \right) \dots\dots\dots (9)$$

c 計算折舊時舊機器之價值

C 新機器之原本價值

o 舊機器每年運轉費

O 新機器每年運轉費

r 舊機器每年修理費

R 新機器每年修理費

y 舊機器之每年產量

Y 新機器之每年產量

n 舊機器尚能使用年數

N 新機器使用年數

a_n 簡單年金一元繼續支付 *n* 年之現值

a_N 簡單年金一元繼續支付 *N* 年之現值

(證) 若不計機器之殘餘價值，即假定其殘餘價值為零，則舊機器之每年折舊費當為 $\frac{C}{a_n}$ ，新機器之每年折舊費當為

$\frac{C}{a_N}$ (投資額之利息計入在內)，加以每年運轉費與修理費，則

每年成本總額為 $\frac{C}{a_n} + o + r$ 與 $\frac{C}{a_N} + O + R$ 。設舊機器之每年產量為 *y* 單位，新機器之每年產量為 *Y* 單位，則依單位成本相等之原理，可得下列等式。

$$\frac{\frac{c}{a_n} + o + r}{y} = \frac{\frac{C}{a_N} + O + R}{Y}$$

$$\frac{c}{a_n} = \frac{\frac{C}{a_N} + O + R}{Y} - \frac{o + r}{y}$$

$$\therefore c = y a_n \left(\frac{\frac{C}{a_N} + O + R}{Y} - \frac{o + r}{y} \right)$$

(例五) 舊機器每年生產二十單位,尚能使用五年,每年運轉費250元,修理費200元,新機器每年生產二十五單位,價值1200元,估計使用時期為十二年,每年運轉費300元,修理費200元,假定投資利率為八釐,求舊機器之價值!

應用公式(9),得:

$$\begin{aligned} c &= 20 \times 3.99271004 \left(\frac{300 + 200 + 1200 \times 0.13269502}{25} - \frac{250 + 200}{20} \right) \\ &= 79.8542008 \left(\frac{659.234024}{25} - \frac{450}{20} \right) = 79.8542008 \times 3.86936096 \\ &= 308.98 \text{ 元} \end{aligned}$$

習 題 二 十 四

1. 機器之原本價值為10000元,其殘餘價值估計為800元,機器之使用時期估計為十年,求作折舊明細表!

a) 應用直線折舊法,

b) 應用定率折舊法.

2. 機器之原本價值為8000元,其殘餘價值估計為1000元,機器之使用時期估計為十年,假定投資利率八釐五毫,求作折舊明細表!

a) 應用基金折舊法;

b) 應用年金折舊法。

3. 某建築物價值50000元,估計可使用80年,無殘餘價值,折舊方法採用基金折舊法,假定投資利率五釐,求第十年末之帳面價值!

4. 機器之原本價值為50000元,其殘餘價值為1000元,估計使用時期為二十年,折舊方法採用年金折舊法,假定投資利率六釐,求每年折舊費!

5. 舊機器每年生產100單位,尚能使用十年,每年運轉費500元,修理費300元。新機器價值2000元,估計可使用二十年,每年生產100單位,運轉費400元,修理費300元。假定投資利率七釐,求舊機器之價值!

6. 機器之原本價值為10000元,其殘餘價值為1000元,機器之使用時期,最初估計為二十年,但至第十年末發覺機器祇尚能使用五年,設公司欲改正舊時估計之錯誤,將折舊過少之部一次除盡,問是年須提出折舊費若干元!

a) 計算折舊採用直線折舊法;

b) 計算折舊採用定率折舊法;

c) 計算折舊採用基金折舊法,假定投資利率八釐;

d) 計算折舊採用年金折舊法,假定投資利率八釐。

第三章 資產之壽命與資產之換新

資產之使用時期名曰資產之壽命 (Life). 同一工場內之資產,其壽命有長短,各部資產之平均壽命,名曰一工場之平均壽命 (Composite Life of a plant). 若以工場作為公司債之擔保,則公司債之償本期限,不能超過工場之平均壽命,為安全計,須較短於平均壽命數年,以防各部資產壽命之錯誤估計,故平均壽命之計算,甚為重要. 所謂平均壽命,非謂各部資產壽命之算術平均數,乃謂每年對各部資產採用基金折舊法提出之折舊費總額,依假定投資利率,積成與各部資產之耗損價值總額相等之基金,所需之年數也. 平均壽命可自下列二式之一求得:

$$S_{\bar{n}|} = \frac{W}{D} \dots\dots\dots(10)$$

$$n = \frac{\log\left(1 + \frac{W}{D}\right)}{\log(1+i)} \dots\dots\dots(11)$$

- n 平均壽命
- W 各部資產之耗損價值總額
- D 各部資產之每年折舊費總額
- i 假定投資利率
- $S_{\bar{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之終值

上兩式之證明甚易，學者可自證之。

(例一) 一工場共有甲乙丙三部資產。甲部之原本價值為 10000 元，其殘餘價值為 600 元，估計可使用二十五年。乙部之原本價值為 5000 元，其殘餘價值為 200 元，估計可使用二十年。丙部之原本價值為 2000 元，其殘餘價值為 100 元，估計可使用十五年。假定投資利率八釐。求平均壽命！

$$W_1 = 10000 - 600 = 9400$$

$$W_2 = 5000 - 200 = 4800$$

$$W_3 = 2000 - 100 = 1900$$

$$\therefore W = 9400 + 4800 + 1900 = 16100 \text{ 元}$$

$$D_1 = \frac{9400}{S_{\overline{25}|}} = 9400 \times 0.01367878 = 128.58 \text{ 元}$$

$$D_2 = \frac{4800}{S_{\overline{20}|}} = 4800 \times 0.02185221 = 104.89 \text{ 元}$$

$$D_3 = \frac{1900}{S_{\overline{15}|}} = 1900 \times 0.03682954 = 69.97 \text{ 元}$$

$$\therefore D = 128.58 + 104.89 + 69.97 = 303.44 \text{ 元}$$

若代入公式(10)，則得：

$$S_{\overline{n}|} = \frac{16100}{303.44}$$

$$\frac{1}{S_{\overline{n}|}} = \frac{3.0344}{161} = 0.01884720$$

查表得 $\frac{1}{S_{\overline{21}|}} = 0.01983225$

$$\frac{1}{S_{22|}} = \frac{0.01803207}{0.00180018}$$

$$\frac{1}{S_{21|}} = 0.01983225$$

$$\frac{1}{S_{n|}} = \frac{0.01884720}{0.00098505}$$

$$n = 21 + \frac{98505}{180018} = 21.55 \text{ 年}$$

若應用公式(11),則得:

$$n = \frac{\log\left(1 + \frac{16100 \times 0.08}{303.44}\right)}{\log 1.08} = \frac{\log \frac{1591.44}{303.44}}{\log 1.08} = \frac{\log 1591.44 - \log 303.44}{\log 1.08}$$

$$= \frac{3.201790 - 2.482073}{0.033424} = \frac{0.719717}{0.033424} = 21.53 \text{ 年}$$

前所述折舊中之資產,均假定資產在折舊時已能全部使用,但有時資產須經若干年後方能完成,而每年祇能完成其一小部分,例如一工場每年祇能完成 $\frac{1}{n}$ 部,故完工時期須經 n 年,若在未完工以前即欲提出折舊費,則其計算方法自與前稍異.若以每年提出之折舊費積成基金,而完工後每年換新 $\frac{1}{n}$ 部,則第 m 年末與第 n 年末基金總額可自下列二式求得:

$$K_m = \frac{R}{S_{i|}} \sum S_{m|} \dots\dots\dots(12)$$

$$K_n = \frac{R}{S_{i|}} \sum S_{n|} - R \dots\dots\dots(13)$$

R 每年投資額

K_m 第 m 年末基金總額

K_n 第 n 年末起每年除去換新費用後所餘基金總額

n 全部資產完成年數

$m < n$

i 假定投資利率

$S_{\cdot 1}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之終值

$S_{\cdot m}$ 簡單年金一元繼續支付 m 年之終值

(證) 設每年投資額為 R 元, 則欲使 n 年後得將此投資部換新, 則須自此部完工起, 每年折舊 $\frac{R}{S_{\cdot 1}}$ 元。第一年末祇有一部完成, 故祇須折舊 $\frac{R}{S_{\cdot 1}}$ 元。第二年末已有二部完成, 故須折舊 $\frac{R}{S_{\cdot 1}} + \frac{R}{S_{\cdot 1}}$ 元。第 m 年末已有 m 部完成, 故須折舊 m 倍 $\frac{R}{S_{\cdot 1}}$ 元。換言之, 第 m 年末基金總額為一等差變額年金之終值, 故應用第四編公式 (55), 得:

$$K_m = \frac{R}{S_{\cdot 1}} \sum S_{\cdot m}$$

至全部資產完工時, 則 $m = n$, 而是年一部換新費用 R 元須除去, 故得:

$$K_n = \frac{R}{S_{\cdot 1}} \sum S_{\cdot n} - R$$

至第 $n+1$ 年末加入折舊費 $\frac{nR}{S_{\cdot 1}}$ 元與基金所生之利息, 除去一部換新費用 R 元, 故得:

$$K_{n+1} = K_n + \frac{iR}{S_{\cdot 1}} \sum S_{\cdot n} - iR + \frac{nR}{S_{\cdot 1}} - R$$

但 $\sum S_{n|} = \frac{1}{i} [(1+i)S_{n|} - n]$ (參看第四編公式 55 之證明)

$$\begin{aligned} \therefore K_{n+1} &= K_n + \frac{R}{S_{n|}} [(1+i)S_{n|} - n] - R \left[1 + i - \frac{n}{S_{n|}} \right] \\ &= K_n + R \left[1 + i - \frac{n}{S_{n|}} \right] - R \left[1 + i - \frac{n}{S_{n|}} \right] \\ &= K_n \end{aligned}$$

故 K_n 為第 n 年未基金總額，亦為以後各年每年末基金總額。

(例二) 一工場建築期十年，每年須投資一萬元於機器，建築完成後每年須換新十分之一，折舊用基金折舊法，假定投資利率五釐，求基金總額！

a) 第五年末：

b) 第十年末：

c) 第十五年末。

a) $R=10000$

$$n = 10$$

$$m = 5$$

代入公式 (12)，得：

$$K_5 = 10000 \frac{1}{S_{10|}} \sum S_{5|} = 795.0458 \times 16.0882563 = 12751.15 \text{ 元}$$

b) c.

$$R = 10000$$

$$n = 10$$

代入公式(13),得:

$$K_{10} = 10000 \cdot \frac{1}{S_{10}^i} \sum S_{10}^i - 10000 = 795.0458 \times 64.1357433 - 10000 \\ = 40990.85 \text{ 元}$$

資產之價值隨其收益而異,收益愈大,資產之價值亦愈大,以各年之收益,依假定投資利率,化成資本,是曰資本化(Capitalization).若資產之收益,每年為十元,而此收益永久繼續,則依假定投資利率一分計算,化成資本當為百元.若資產之換新,永久繼續,則將各期換新費用,化成資本,而於購置資產時預為準備,以後各期換新費用,即可告無虞.由各期換新費用化成之資本,再加原本價值,所得之數名曰資本化成本(Capitalized Cost).資本化成本在工業會計上之應用甚大,而於公共理財亦甚重要.資本化成本可自下式求得:

$$C' = \frac{C}{i} + \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} \dots\dots\dots(14)$$

C' 資本化成本

C 原本價值

n 前後兩次換新相隔之年數

$a_{\overline{n}|i}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之現值

i 假定投資利率

(證) 每次換新時資產之代價,假定與原本價值相等應用

第四編公式(52),得:

$$C' = C + \frac{C}{i} \cdot \frac{1}{S_{\overline{n}|i}} = \frac{C}{i} \left(i + \frac{1}{S_{\overline{n}|i}} \right) = \frac{C}{i} \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

(例三) 某橋之建築費為五萬元, 假定每五十年須重建一橋, 其建築費亦為五萬元, 假定投資利率八釐, 求此橋之資本化成本!

應用公式 (14), 得:

$$C' = \frac{50000}{0.08} \times 0.08174286 = 51089.29 \text{ 元}$$

與原本價值相較, 僅差 1089.29 元, 即多費 1089.29 元, 此橋即能永久存在, 而無需另籌換新費用, 健全之公共理財, 當有此種遠大完密之計劃, 資本化成本之重要, 於此可見。

同一性質之資產, 其壽命有長短, 例如電竿木, 甲種電竿木能使用十年, 而乙種電竿木祇能使用八年, 但甲種電竿木之購價高於乙種電竿木, 然則為電話公司利益計, 究以購買何種電竿木為經濟? 欲解決此問題, 須比較其資本化成本, 資本化成本較輕之電竿木, 有利於電話公司。設甲乙兩資產在經濟上無優劣之分, 甲資產之壽命為 n_1 年, 乙資產之壽命為 n_2 年, 甲資產之原本價值為 C_1 元, 則乙資產之原本價值, 可自下式求得:

$$C_2 = C_1 \frac{a_{\overline{n_2}|}}{a_{\overline{n_1}|}} \dots \dots \dots (15)$$

C_1 甲資產之原本價值

C_2 乙資產之原本價值

$a_{\overline{n_1}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n_1 年之現值

$a_{\overline{n_2}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n_2 年之現值

n_1 壽命較短資產之使用年數

n_2 壽命較長資產之使用年數

(證) 依資本化成本相等之假定, 得:

$$\frac{C_1}{i} \cdot \frac{1}{a_{n_1|i}} = \frac{C_2}{i} \cdot \frac{1}{a_{n_2|i}}$$

$$\therefore C_2 = C_1 \frac{a_{n_2|i}}{a_{n_1|i}}$$

(例四) 電話公司欲於電竿木至完全不能使用時另易他種電竿木, 舊電竿木之壽命為八年, 新電竿木之壽命為十五年, 舊電竿木之原本價值為一萬元, 假定投資利率八釐, 問新電竿木之原本價值在何種價格之下, 此種更換, 方合於經濟原理?

$$C_1 = 10000$$

$$n_1 = 8$$

$$n_2 = 15$$

代入公式 (15), 得:

$$C_2 = 10000 \frac{a_{15|i}}{a_{8|i}} = 85594.7869 \times 0.17401476 = 14894.76 \text{ 元}$$

習 題 二 十 五

1. 某工場之資產由下列數部組成:

甲部之原本價值為 10000 元, 其殘餘價值為 500 元, 使用時期為十五年;

乙部之原本價值為 5000 元, 其殘餘價值為 800 元, 使用時期為十年;

丙部之原本價值為 3000 元, 無殘餘價值, 使用時期為八年;

求平均壽命!

u) 假定投資利率六釐,

- b) 假定投資利率七釐，
- c) 假定投資利率八釐。
2. 一工場建築期十五年，每年須投資五萬元於機器，建築完成後，每年須換新十五分之一，計算折舊採用基金折舊法，假定投資利率八釐，求基金總額！
- a) 第五年末
- b) 第十年末
- c) 第二十年末
3. 資產至完全不能使用時，若尚有殘餘價值，求作資本化成本之公式！
4. 某橋之建築費為十萬元，假定每四十年須重建一橋，其建築費亦為十萬元，假定投資利率八釐，求此橋之資本化成本！
- a) 殘餘價值為零
- b) 殘餘價值為五千元
5. 求下表中新資產之原本價值！(假定新舊資產在經濟上無優劣之分，投資利率八釐)

	舊 資 產		新 資 產	
	使用年數	原本價值	使用年數	原本價值
a	5年	\$ 10000	10年	
b	10年	15000	20年	
c	15年	20000	25年	
d	20年	25000	40年	
e	25年	30000	50年	

第四章 鑛產估價

普通投資，除按年收入利息外，並於一定時期收還本金，例如一萬元貸於他人，若言定年息七釐，五年後償本，則除按年收入七百元利息外，並於五年後收還本金一萬元；又如以一萬元投資於二十年期之六釐債券，則除按年收入六百元利息外，並於二十年後收還本金一萬元；惟投資於鑛產則不然，至鑛產開盡時，所得收還者僅鑛產之殘餘價值，而非最初之投資額，故須自每年鑛產收益中，提出一部，積成基金，以備補償投資額之損失，是曰償本基金 (Redemption Fund)。

鑛產之多少與開掘運銷等費用，事前須由工程師精密估計，每年收益淨額即可據此估計而確定，鑛產之估價，即爲此種年金之現值與殘餘價值之現值之和，鑛產之價值，全憑工程師之估計，而此種估計，不免含有錯誤之危險，故投資於鑛產者，常要求較高之投資利率，投資於鑛產者預定之利率，名曰規定利率 (Stipulated Rate)，至於市場通行之利率，則名曰通行利率 (Practicable Rate)。

已知每年收益淨額，鑛產之估價，可自下列公式之一求得：

$$i \neq i' \text{ 時 } A = \frac{R + S \left(\frac{1}{S_n} @ i \right)}{\left(\frac{1}{a_n} @ i \right) + (i' - i)} \dots \dots \dots (16)$$

$$i = i' \text{ 時 } A = R a_n + S v^n \dots \dots \dots (17)$$

A 贖產估計

R 每年收益淨額

n 生產年數

S 殘餘價值

S_n 簡單年金一元繼續支付 n 年之終值

a_n 簡單年金一元繼續支付 n 年之現值

i 通行利率

i' 規定利率

$$v = \frac{1}{1+i}$$

(證 每年投資者規定收入之利息為 Ai' , 每年收益淨額為 R , 故每年撥入償本基金之類當為 $R - Ai'$, 而此基金依通行利率 i 投資, 至 n 年末當為

$$(R - Ai')(S_n @ i)$$

以此與殘餘價值 S 相加, 當為最初之投資額 A , 故得:

$$A = R - Ai' (S_n @ i) + S$$

$$A \left(\frac{1}{S_n} @ i \right) = R - Ai' + S \left(\frac{1}{S_n} @ i \right)$$

$$A \left(\frac{1}{a_n} @ i - i + i' \right) = R + S \left(\frac{1}{S_n} @ i \right)$$

$$\therefore A = \frac{R + S \left(\frac{1}{S_{\overline{n}|i}} @ i \right)}{\left(\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} @ i \right) + (i' - i)}$$

若 $i' = i$

$$\begin{aligned} \text{則 } A &= \frac{R + S \frac{1}{S_{\overline{n}|i}}}{\frac{1}{a_{\overline{n}|i}}} = Ra_{\overline{n}|i} + S \frac{a_{\overline{n}|i}}{S_{\overline{n}|i}} \\ &= Ra_{\overline{n}|i} + S \frac{v^n S_{\overline{n}|i}}{S_{\overline{n}|i}} = Ra_{\overline{n}|i} + Sv^n \end{aligned}$$

(例一) 鑛主於購鑛後五十年間，每年末可得收益淨額五萬元，至五十年後僅有殘餘價值一萬元，規定利率八釐，求此鑛之估價！

a) 通行利率六釐；

b) 通行利率八釐。

a) $i' = 8\%$

$i = 6\%$

$\therefore i \neq i'$

應用公式(16)，得：

$$\begin{aligned} A &= \frac{50000 + 10000 \left(\frac{1}{S_{\overline{50}|6\%}} @ 6\% \right)}{\left(\frac{1}{a_{\overline{50}|6\%}} @ 6\% \right) + (0.08 - 0.06)} = \frac{50000 + 34.4429}{0.08344429} \\ &= \frac{50034.4429}{0.08344429} = 599614.91 \text{ 元} \end{aligned}$$

$$b) \quad i = i' = 8\%$$

應用公式(17), 得:

$$\begin{aligned} A &= 50000 a_{\overline{50}|} + 10000v^{50} = 50000 \times 12.23348464 + 213.2123 \\ &= 611887.44 \text{ 元} \end{aligned}$$

(例二) 某鑛購價二十一萬元, 估計可繼續開採二十年, 二十年末尚餘殘餘價值一萬元, 假定每年末收益淨額相等, 規定利率六釐, 通行利率四釐, 求每年收益淨額!

$$A = 210000$$

$$S = 10000$$

$$n = 20$$

$$i' = 6\%$$

$$i = 4\%$$

代入公式(16), 得:

$$210000 = \frac{R + 335.8175}{0.09358175}$$

$$R + 335.8175 = 19652.1675$$

$$\therefore R = 19316.35 \text{ 元}$$

習 題 二 十 六

1. 某油井於以後十年間每半年末可得收益淨額五萬元, 十年末之殘餘價值為零, 規定利率一分, 每年複利二次, 通行利率七釐, 每年亦複利二次, 求此油井之估價!

2. 前題中之通行利率若改為一分, 每年複利二次, 則油井之估價當為幾何?

3. 第一題中之規定利率若改為七釐，每年複利二次，則油井之估價當為幾何？

4. 某煤礦購價十萬元，估計可繼續開採二十五年，二十五年末尚餘殘餘價值五千元，假定每年末收益淨額相等，規定利率八釐，求每年收益淨額！

a) 通行利率四釐

b) 通行利率八釐

本編應用公式

$$D = \frac{W}{n} \dots\dots\dots (1)$$

$$W = C - S \dots\dots\dots (2)$$

$$p = 1 - \text{antilog} \frac{\log S - \log C}{n} \dots\dots\dots (3)$$

$$B_r = \text{antilog} [\log C + r \log (1 - p)] \dots\dots\dots (4)$$

$$D = \frac{W}{S_{\overline{n}|i}} \dots\dots\dots (5)$$

$$D_r = \frac{W S_{\overline{n}|i}}{S_{\overline{n}|i}} \dots\dots\dots (6)$$

$$B_r = C - \frac{W S_{\overline{n}|i}}{S_{\overline{n}|i}} \dots\dots\dots (7)$$

$$D = Ci + W \frac{1}{S_{\overline{n}|i}} \dots\dots\dots (8)$$

$$c = y^n \left(\frac{O+R+\frac{C}{a^{\overline{n}|i}}}{Y} - \frac{o+r}{y} \right) \dots\dots\dots (9)$$

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{W}{D} \dots\dots\dots (10)$$

$$n = \frac{\log \left(1 + \frac{Wi}{D} \right)}{\log (1+i)} \dots\dots\dots (11)$$

$$K_{/n} = \frac{R}{S_{\overline{n}|i}} \sum S_{\overline{m}|i} \dots\dots\dots (12)$$

$$K_n = \frac{R}{S_n} \sum S_n - R \dots\dots\dots (13)$$

$$O' = \frac{C}{i} \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} \dots\dots\dots (14)$$

$$C_2 = O_1 \frac{a_{\overline{n}|i}}{a_{\overline{n}|i}} \dots\dots\dots (15)$$

$$A = \frac{R + S \left(\frac{1}{S_n} @ i \right)}{\left(\frac{1}{a} @ i \right) + (i' - i)} \dots\dots\dots (16)$$

$$A = Ra_{\overline{n}|i} + Sv^n \dots\dots\dots (17)$$

第九編 序列組合與機率

第一章 序列與組合

設有 A, B, C, D 四個字母，吾人若任取其中兩個字母排列，則有下列十二種排列方法：

$AB \quad AC \quad AD \quad BC \quad BD \quad CD$

$BA \quad CA \quad DA \quad CB \quad DB \quad DC$

以上十二種排列方法中，上六種與下六種，所差異者，祇字母先後之次序，故若區別次序，則有十二種，若不分次序，則有六種，前者名曰序列(Permutation)，後者名曰組合(Combination)。故自四個字母中，每兩個字母排列，則有十二種序列，以符號表之，則為：

$$P_2^4 = 12$$

自四個字母中，每兩個字母組合，則有六種組合，以符號表之，則為：

$$C_2^4 = 6$$

若每次選取三個字母排列，則有下列二十四種序列：

$ABC \quad ABD \quad ACD \quad BCD$

$ACB \quad ADB \quad ADC \quad BDC$

<i>BAC</i>	<i>BAD</i>	<i>CAD</i>	<i>CBD</i>
<i>BCA</i>	<i>BDA</i>	<i>CDA</i>	<i>CDB</i>
<i>CAB</i>	<i>DAB</i>	<i>DAC</i>	<i>DBC</i>
<i>CBA</i>	<i>DBA</i>	<i>DCA</i>	<i>DCB</i>

以上二十四種序列中,若不區別次序,祇有四種組合,即:

ABC *ABD* *ACD* *BCD*

故

$$P_3^4 = 24$$

$$C_3^4 = 4$$

若每次選取四個字母排列,則有下列二十四種序列:

<i>ABCD</i>	<i>BACD</i>	<i>CABD</i>	<i>DABC</i>
<i>ABDC</i>	<i>BADC</i>	<i>CADB</i>	<i>DACB</i>
<i>ACBD</i>	<i>BCAD</i>	<i>CBAD</i>	<i>DBAC</i>
<i>ACDB</i>	<i>BCDA</i>	<i>CBDA</i>	<i>DBC A</i>
<i>ADBC</i>	<i>BDAC</i>	<i>CDAB</i>	<i>DCAB</i>
<i>ADCB</i>	<i>BDCA</i>	<i>CDBA</i>	<i>DCBA</i>

以上二十四種序列中,若不區別次序,祇有一種組合,蓋各組均由 *A, B, C, D* 四個字母組成故也。

$$\therefore P_4^4 = 24$$

$$C_4^4 = 1$$

自 n 個不同物品中每次選取 r 個,或 n 個,則有 P_r^n 種或 P_n^n 種序列與 C_r^n 種或 C_n^n 種組合,其數值可自下列四公式求得:

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \cdots \cdots \cdots (1)$$

$$P_n^n = n! \dots\dots\dots (2)$$

$$C_r^n = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \dots\dots\dots (3)$$

$$C_n^n = 1 \dots\dots\dots (4)$$

(證) 自 n 個不同物品中每次選取 n 個排列, 則 r 個物品須佔 r 個地位, 吾人姑名之曰第一位, 第二位……第 r 位。

各個物品均可佔據第一位, 故確定第一位時, 已有 n 種不同方法, 第一位確定後尚餘 $(n-1)$ 個物品, 而此 $n-1$ 個物品均可佔據第二位, 故上述 n 種不同方法中, 每種又有 $(n-1)$ 種方法, 當確定第一位與第二位時, 已有 $n(n-1)$ 種不同方法, 第二位確定後, 尚餘 $n-2$ 個物品, 而此 $n-2$ 個物品均可佔據第三位, 故上述 $n(n-1)$ 種不同方法中, 每種又有 $(n-2)$ 種方法, 當確定前三位時, 已有 $n(n-1)(n-2)$ 種不同方法, 循此以往, 每次遞減一種, 至最後一位時, 已有 $r-1$ 位確定, 尚餘 $n-(r-1)$ 個即 $n-r+1$ 個物品, 而此 $n-r+1$ 個物品均可佔據末位, 故每種又有 $n-r+1$ 種方法, 當各位俱已確定時, 已共有 $n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$ 種不同方法, 故得:

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

若 $r = n$

則 $P_n^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1) = n!$

C_r^n 種組合中, 每種各有 r 種序列, 而此各種序列之數即為 P_r^n , 故

* $n!$ 讀曰 n 階乘 (Factorial n), 其數值與 $n(n-1)(n-2)\dots\dots 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 相等。

$$({}_r^n \times P_r = P_r^n)$$

$$\text{即 } C_r^n = \frac{P_r^n}{P_r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

若以 $(n-r)!$ 乘分子分母，則得：

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

若 $r=n$

$$\text{則 } C_n^n = \frac{n!}{n!} = 1^*$$

以上例試之，則得：

$$P_2^4 = 4 \times 3 = 12$$

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{24}{2 \times 2} = 6$$

$$P_3^4 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$C_3^4 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4 \times 3!}{3!} = 4$$

$$P_4^4 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$C_4^4 = 1$$

(例一) 1, 2, 3, 4, 5, 6 六個數字中，每取三個數字，組成一個三位數，問可共有若干種？

$$P_3^6 = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

(例二) 學生十人，每六人合成一組，問可共有若干組？

$$C_6^{10} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = 210$$

(例三) 五冊不同書籍排列在書架上，問可共有若干種排法？

$$P_5^5 = 5! = 120$$

* $0! = 1$

第二章 機率

取骰一粒擲之，或得一點，或得二點，或得三點，四點，五點，六點，若骰之構造勻稱無偏，則各點出現之機會相等，故擲一骰，可共有六種不同結果，此種不同結果，名曰可能件數 (Possible Cases)。此六種可能件數中，祇有一種利於某點 (例如四點) 之出現，利於某點出現之結果，名曰有利件數 (Favorable Cases)。不利於某點出現之結果，則名曰不利件數 (Unfavorable Cases)。在數種機會均等之事項中，某事項出現之機率 (Probability) 者，有利件數對可能件數之比率也。故擲得四點之機率為六分之一，擲得其他各點之機率亦為六分之一，蓋可能件數為六，而有利件數為一故也。

又如一袋中有紅球四個與白球三個，伸手任取一個，若各球之大小相等，則各球取出之機會相等，故可能件數為七。若求拾得紅球之機率，則紅球之出現為有利件數，故其機率為 $\frac{4}{7}$ ；反之，若求拾得白球之機率，則白球之出現為有利件數，故其機率為 $\frac{3}{7}$ 。

以上兩例中，出現機會相等之假定甚為重要，例若求吾人在一年內死亡之機率，則不死即生，故共有二種可能件數

與一種有利件數，但其機率非為 $\frac{1}{2}$ ，何則？吾人在一年內死亡之機會，與在一年內尚得生存之機會，並非相等故也。

所謂擲得四點之機率為六分之一，非謂連擲六次，必有一次四點出現，但謂擲骰之次數愈多，則擲得四點之次數，對擲骰總次數之比，與擲得四點之機率，愈為近似也。

若於某事之出現，有利件數為 a ，不利件數為 b ，則可能件數為 $a+b$ ，故某事出現之機率與某事不出現之機率，可自下式求得：

$$p = \frac{a}{a+b} \dots\dots\dots(5)$$

$$q = \frac{b}{a+b} \dots\dots\dots(6)$$

p 某事出現之機率

q 某事不出現之機率

a 有利件數

b 不利件數

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1$$

$$\therefore p+q=1 \dots\dots\dots(7)$$

若 $b=0$ ，則

$$p = \frac{a}{a+0} = 1$$

故 1 為某事必然出現之數學符號。

若 $a=0$ ，則

$$p = \frac{0}{0+b} = 0$$

故 0 爲某事必不出現之數學符號

簡單機率問題之解答，或依據機率之定義，或應用序列組合公式

若某事之實現可有種種不同方法，而此種種方法能互相排斥，則此事實現之機率名曰總機率 (Total Probability)，而由各種方法實現之機率，名曰偏機率 (Partial Probability)。例如一袋內盛有紅球八個與白球七個，其中三個紅球與四個白球，球上有字，其他各球則否。試以紅球爲例，紅球之出現，或爲有字紅球，或爲無字紅球，紅球出現之機率爲總機率，而有字紅球出現之機率，與無字紅球出現之機率，則各爲偏機率。

定理一 某事之總機率等於其偏機率之和。

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n \cdots \cdots \cdots (8)$$

p 總機率

p_1, p_2, \cdots, p_n 偏機率

(證) 設有 n 事項，共有可能件數 m ，又設由各種方法使某事實現之有利件數爲 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ ，則依機率之定義，得：

$$p_1 = \frac{a_1}{m}; \quad p_2 = \frac{a_2}{m}; \quad p_3 = \frac{a_3}{m} \cdots \cdots p_n = \frac{a_n}{m}$$

但某事實現之總機率爲

$$p = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{m} = \frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m} + \frac{a_3}{m} + \cdots + \frac{a_n}{m}$$

$$\therefore p = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n$$

(例一) 兄弟二人,同時參加賽跑,兄跑得第一之機率為 $\frac{1}{3}$,弟跑得第一之機率為 $\frac{1}{4}$,求兄或弟跑得第一之機率!

兄弟不能同時跑得第一,故此二事項為互相排斥事項.

$$p_1 = \frac{1}{3}$$

$$p_2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore p = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

若各部事項不能互相排斥,則不能應用公式(8),例如兄弟二人,同解一題,兄解出之機率為 $\frac{1}{3}$,弟解出之機率為 $\frac{1}{4}$,則兄或弟解出之機率不能為 $\frac{7}{12}$ (參看例三),何則? 兄解出時弟未必不能解出,弟解出時兄亦未必不能解出,故此二事項不能互相排斥.

若一事項之實現與否,不影響他一事項實現之難易,則此二事項名曰獨立事項.例如擲骰二粒,一骰能否擲得某點,不影響於他一骰擲得某點之機率,故此二事項為獨立事項;但若袋內有紅球四個與白球三個,伸手入袋,連取二球,若拾出之球,不復投入袋內,則第一球之為白為紅,影響於第二球之機率,故此二事項非為獨立事項.若干獨立事項同時或連續實現之機率,名曰複機率(Compound Probability).

定理二 若干獨立事項之複機率,等於各單獨事項之機率相乘之積.

$$p = p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \dots \dots \dots (9)$$

n 種機率

p_1, p_2, \dots, p_n 各單獨事項之機率

(證) 設 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ 為各單獨事項之機率, $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ 為關於各單獨事項之可能件數, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 為使各單獨事項實現之有利件數, 則依機率之定義, 得:

$$p_1 = \frac{a_1}{m_1}; \quad p_2 = \frac{a_2}{m_2}; \quad p_3 = \frac{a_3}{m_3}; \quad \dots \dots p_n = \frac{a_n}{m_n}$$

若此 n 事項同時或連續, 則可有可能件數 $m_1 m_2 m_3 \dots m_n$ 與有利件數 $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$, 故其機率為:

$$p = \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}{m_1 m_2 m_3 \dots m_n} = \frac{a_1}{m_1} \frac{a_2}{m_2} \frac{a_3}{m_3} \dots \frac{a_n}{m_n}$$

$$\therefore p = p_1 p_2 p_3 \dots p_n$$

同理下列二公式:

$$p = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) \dots (1-p_n) \dots \dots \dots (10)$$

p n 獨立事項俱不實現之機率

$p_1 p_2 \dots p_n$ 各單獨事項實現之機率

$$p = p_1 p_2 \dots p_r (1-p_{r+1})(1-p_{r+2}) \dots (1-p_n) \dots \dots \dots (11)$$

p n 獨立事項中, 前 r 事項俱實現而其他事項俱不實現之機率

$p_1 p_2 \dots p_n$ 各單獨事項實現之機率

(例二) 擲骰三粒, 求擲得十八點之機率!

每骰至多六點, 故欲共擲十, 點, 各骰均須擲六點, 各骰擲得之結果, 不影響於他骰之機率, 故為獨立事項。

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{6}$$

$$\therefore p = p_1 p_2 p_3 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

(例三) 兄弟二人,同解一題,兄解出之機率為 $\frac{1}{3}$,弟解出之機率為 $\frac{1}{4}$,求兄或弟解出之機率!

所謂兄或弟解出,實際上包含下列三種事項:

兄弟均能解出;

兄能解而弟不能解;

弟能解而兄不能解。

以上三種事項能互相排斥,故總機率等於三偏機率之和。設 p 為總機率, p_1 為兄弟均能解出之機率, p_2 為兄能解而弟不能解之機率, p_3 為弟能解而兄不能解之機率,則:

$$p = p_1 + p_2 + p_3$$

兄弟能否解出之事項,為二獨立事項,故

$$p_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$p_2 = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$p_3 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore p = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

但此題亦可用他法解答。

設 p 為兄或弟解出之機率,則 $1-p$ 為兄弟均不能解之機

率,依複機率定理,得:

$$1-p = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore p = \frac{1}{2}$$

較上法更為簡捷.

(例四) 袋內有紅球四個與白球五個,求同時取得兩個紅球之機率!

第一個紅球之機率為 $\frac{4}{9}$, 但第一個紅球取出後, 袋內祇有紅球三個與白球五個, 故第二個紅球之機率, 非 $\frac{4}{9}$ 而為 $\frac{3}{8}$, 以第一個紅球之機率, 與第二個紅球之機率相乘, 即得同時取得兩個紅球之機率.

$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$$

n 次試驗中, 某事項實現 r 次之機率, 可自下列公式求得:

$$P = C_r^n p^r q^{n-r} \dots \dots \dots (12)$$

P n 次試驗中, 某事項實現 r 次之機率

p 單獨一次試驗中, 某事項實現之機率

q 單獨一次試驗中, 某事項不實現之機率

C_r^n 自 n 個不同物品中, 每 r 個物品之組合

(證) 前 r 次實現而以後各次俱不實現之機率, 依公式(11) 當為 $p^r q^{n-r}$, 但 p 為任何 r 次實現而其他各次俱不實現之機率, 此 r 次可任意組合, 依組合原理, 當有 C_r^n 種組合. P 為 C_r^n 種組合方法中, 各種偏機率之和, 而每種偏機率各等於 $p^r q^{n-r}$,

故得：

$$P = C_r^n p^r q^{n-r}$$

(例五) 擲骰一粒，連擲十次，求擲得四次六點之機率！

$$n = 10 \quad r = 4$$

$$p = \frac{1}{6} \quad q = \frac{5}{6}$$

代入公式(12)，得：

$$P = C_4^{10} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} \times \frac{5^6}{6^{10}} = \frac{546875}{10077696}$$

n 次試驗中，某事項實現至少 r 次之機率，可自下列公式求得：

$$P = p^n + C_1^n p^{n-1} q + C_2^n p^{n-2} q^2 + \dots + C_r^n p^r q^{n-r} \dots \dots \dots (13)$$

P n 次試驗中，某事項實現至少 r 次之機率

p 單獨一次試驗中某事項實現之機率

q 單獨一次試驗中某事項不實現之機率

C_r^n 自 n 個不同物品中，每 r 個物品之組合

(證) 所謂至少 r 次，則 r 次， $(r+1)$ 次， $\dots \dots (n-1)$ 次， n 次均無不可，故 P 為某事項實現 r 次， $(r+1)$ 次 $\dots \dots (n-1)$ 次， n 次各機率之和。應用公式(12)，得：

$$P = p^n + C_1^n p^{n-1} q + C_2^n p^{n-2} q^2 + \dots \dots + C_r^n p^r q^{n-r}$$

(例六) 擲骰一粒，連擲五次，求至少擲得二次六點之機率！

$$n = 5 \quad r = 2$$

$$p = \frac{1}{6} \quad q = \frac{5}{6}$$

代入公式 (13), 得:

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{1}{6}\right)^5 + C_3^5 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right) + C_2^5 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 + C_1^5 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \\
 &= \frac{1}{6^5} + 5 \times \frac{5}{6^5} + \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{5^2}{6^5} + \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} \times \frac{5^3}{6^5} \\
 &= \frac{1}{6^5} (1 + 25 + 250 + 1250) = \frac{1526}{7776}
 \end{aligned}$$

此題亦可用他法解答.

P 為至少擲得二次六點之機率, 則 $1-P$ 為擲得一次六點與擲得零次六點之機率之和, 即:

$$\begin{aligned}
 1-P &= C_1^5 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{1}{6^5} (5^4 + 5^5) = \frac{6250}{7776} \\
 \therefore P &= 1 - \frac{6250}{7776} = \frac{1526}{7776}
 \end{aligned}$$

第三章 生死機率

第二章中機率之定義，受機會均等之限制，故機會不均等之事項，不能適用此定義，以求此事項實現之機率。吾人在一年內死亡之機會，與在一年內尚得生存之機會，不能相等，故生死機率不能用前章所述方法求得。欲求生死機率，吾人可用觀察方法，就過去之統計，推測未來之生死，觀察之範圍愈廣，求得之機率愈為近似，即統計學中所謂大量惰性是也。若觀察 n 次，而某事之實現有 m 次，則某事實現之機率，吾人即可估計之為 $\frac{m}{n}$ 。譬如年三十歲者 85441 人中，在一年內，若有 720 人死亡，則三十歲者在一年內死亡之機率，即可求得如下：

$$p = \frac{720}{85441} = 0.0084$$

而一年內猶得生存之機率，亦可求得為 0.9916。生命年金與人壽保險所根據之死亡生殘表 (Mortality Table)，即依此原理編製。

最簡單之死亡生殘表，祇分年齡與生殘人數二行，根據此二行中數字，即可計算生殘與死亡機率，然為計算便利計，保險公司所用之死亡生殘表，均附添三行，一行為死亡人數，

即在一年內死亡人數，一行爲死亡機率，即在一年內死亡機率，一行爲生存機率，即在一年內尚得生存之機率。

死亡生殘表係根據觀察而編製，然所謂觀察，不必取十萬或百萬生日相同之幼孩，而詳察其壽命，直至死盡爲止，此種觀察方法，事實上不可能，而數理上亦非必要。吾人之所需要死亡生殘表者，乃各組年齡之死亡機率與生存機率，若觀察之範圍甚廣，則此種機率，即可自分子不盡相同之各組計算而得，再化爲最初人數十萬人，或百萬人，即成死亡生殘表。

我國人壽保險尚甚幼稚，故死亡生殘表尙未有人編製。美國最通行之死亡生殘表，爲1868年根據紐約互助人壽保險公司(Mutual Life Insurance Company of New York)之紀錄而編製之美國實驗表(American Experience Table)。本書中關於生死機率之計算，即以此表爲標準。

關於生死機率，通常採用下列符號，本書亦從之。

x 年齡

(x) 年齡 x 歲之人

(y) 年齡 y 歲之人

l_x 活至年齡 x 之人數

d_x 在 x 歲與 $x+1$ 歲間之一年內死亡之人數

p_x (x) 至少尚活一年之機率

q_x (x) 在一年內死亡之機率

${}_n p_x$ (x) 至少尚活 n 年之機率

${}_1q_x$ (x) 在 n 年內死亡之機率

n/q_x (x) 在 $x+n$ 歲與 $x+n+1$ 歲之間一年內死亡之機率

${}_np_{xy}$ (x) 與 (y) 兩人至少尚活 n 年之機率

${}_np_{x/y}$ (x) 與 (y) 至少一人尚活 n 年 (至少 n 年) 之機率

d_x 為活至年齡 $x+1$ 歲之人數, 與活至年齡 x 歲之人數相差之數, 故:

$$d_x = l_x - l_{x+1} \dots\dots\dots (14)$$

依觀察機率計算之方法, 得:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \dots\dots\dots (15)$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \dots\dots\dots (16)$$

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \dots\dots\dots (17)$$

$${}_1nq_x = 1 - {}_np_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \dots\dots\dots (18)$$

$$n/q_x = \frac{d_{x+n}}{l_x} \dots\dots\dots (19)$$

(x) 與 (y) 之壽命無關, 為獨立事項, 應用公式 (9), 得:

$${}_np_{xy} = {}_np_x \cdot {}_np_y \dots\dots\dots (20)$$

${}_np_{x/y}$ 為 (x) 與 (y) 至少一人尚活 n 年之機率, 所謂至少一人尚活 n 年, 實際上包含下列三種互相排斥事項:

(x) 與 (y) 兩人至少尚活 n 年;

(x) 至少尚活 n 年, (y) 於 n 年內死亡;

(y) 至少尚活 n 年, (x) 於 n 年內死亡。

應用公式 (8), 得:

$${}_n p_{x/y} = {}_n p_{xy} + {}_n p_x \cdot (1 - {}_n p_y) + {}_n p_y (1 - {}_n p_x)$$

但

$${}_n p_{xy} = {}_n p_x \cdot {}_n p_y$$

$$\therefore {}_n p_{x/y} = {}_n p_x + {}_n p_y - {}_n p_x \cdot {}_n p_y \dots\dots\dots (21)$$

(例一) 某甲年四十歲, 求至少尚活五年之機率!

應用公式 (17), 得:

$${}_5 p_{40} = \frac{l_{45}}{l_{40}} = \frac{74173}{78106} = 0.9496$$

(例二) 某乙年四十五歲, 求未滿五十歲死亡之機率!

應用公式 (18), 得:

$${}_5 q_{45} = \frac{l_{45} - l_{50}}{l_{45}} = \frac{74173 - 69804}{74173} = \frac{4369}{74173} = 0.0589$$

(例三) 父子二人, 父年四十歲, 子年十五歲, 子定於二十五歲時結婚, 求子結婚時父尚未死之機率!

$$x = 40 \quad y = 15$$

$$n = 25 - 15 = 10$$

代入公式 (20), 得:

$${}_{10} p_{40-15} = {}_{10} p_{40} \cdot {}_{10} p_{15} = \frac{l_{50}}{l_{40}} \frac{l_{25}}{l_{15}} = \frac{69804}{78106} \times \frac{89032}{96285} = 0.8264$$

(例四) 某丙有子二人, 長子年十八歲, 次子年十六歲, 均定於十年後結婚, 求某丙家中舉行婚禮之機率!

$$x = 18 \quad y = 16 \quad n = 10$$

代入公式 (21), 得:

$$\begin{aligned}
 {}_{10}p_{18/18} &= {}_{10}p_{18} + {}_{10}p_{18} - {}_{10}p_{18} \cdot {}_{10}p_{18} = \frac{l_{28}}{l_{18}} + \frac{l_{26}}{l_6} - \frac{l_{28}}{l_{13}} \cdot \frac{l_{26}}{l_{16}} \\
 &= \frac{86878}{94089} + \frac{88314}{95550} - \frac{86878}{94089} \cdot \frac{88314}{95550} = 0.92336 + 0.92427 - 0.85343 \\
 &= 0.9942
 \end{aligned}$$

(例五) 某丁年四十歲, 求某丁在四十五歲與四十六歲之間一年內死亡之機率!

應用公式(19), 得:

$$s\dot{q}_{40} = \frac{d_{45}}{l_{40}} = \frac{828}{78106} = 0.0106$$

習 題 二 十 七

1. 求下列各數:

$$\begin{array}{llll}
 a. P_3^{10} & b. P_5^{10} & c. C_4^{10} & d. C_4^5 \\
 e. P_5^5 & f. C_{10}^{10} & g. P_4^4 & h. C_3^5
 \end{array}$$

2. 求證:

$$C_r^n = C_{n-r}^n$$

3. 求 C_{30}^{100} !

4. 自古今名人二十人中, 推選五人, 按次序排列, 問共有若干種可能結果?

5. 十冊不同書籍排列在書架上, 問共有若干種排法?

6. 一國有十政黨, 欲組成五黨聯合內閣, 問可共有若干種內閣?

7. 袋中有紅球六個, 黑球七個, 白球八個, 其中三紅球三黑球三白球之面上有字, 其餘均為無字球, 伸手入袋, 任取一球, 求:

a) 拾得紅球之機率;

b) 拾得黑球之機率;

- c) 拾得白球之機率;
 d) 拾得有字球之機率;
 e) 拾得無字球之機率.
8. 擲骰二粒,求擲得各點之機率!
9. 袋內有紅球八個,黑球十個,白球十二個,伸手入袋拾取三球,求拾得二紅一白之機率!
10. 甲乙丙三人同解一題,甲解出之機率為 $\frac{1}{3}$,乙解出之機率為 $\frac{1}{4}$,丙解出之機率為 $\frac{1}{5}$,求甲或乙或丙解出之機率!

11. 甲乙丙三人同時參加國文會考,甲考得第一之機率為 $\frac{1}{3}$,乙考得第一之機率為 $\frac{1}{4}$,丙考得第一之機率為 $\frac{1}{5}$,求甲或乙或丙考得第一之機率!

12. 擲骰一粒,連擲八次,求至少擲得二次四點之機率!

13. 求下表中之機率:

x	(x)至少尚得生存之年數	機率
a. 十五歲	一年	
b. 二十歲	五年	
c. 二十五歲	十年	
d. 三十歲	二十年	
e. 三十五歲	三十年	

14. 求下表中之機率

x	(x)在下列時期內死亡	機率
a. 二十歲	一年內	
b. 二十五歲	三十五歲與三十六歲之間	一年內
c. 三十歲	十年內	
d. 三十五歲	五十五歲與五十六歲之間	一年內
e. 四十歲	三十年內	

15. 某甲年四十五歲,有子二人,長子年二十歲,次子年十八歲,均定於五年後結婚,求:

a) 某甲家中舉行婚禮之機率;

b) 某甲參加家中舉行婚禮之機率.

16. 某乙有子三人,長子年二十歲,次子年十八歲,幼子年十六歲,約定於十年後同時結婚,求某乙家中得有三子同時結婚之機率!

本編應用公式

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \cdots (1)$$

$$P_n^n = n! \cdots (2)$$

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdots (3)$$

$$C_n^n = 1 \cdots (4)$$

$$p = \frac{a}{a+b} \cdots (5)$$

$$q = \frac{b}{a+b} \cdots (6)$$

$$p+q=1 \cdots (7)$$

$$P = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n \cdots (8)$$

$$P = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n \cdots (9)$$

$$p = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)\cdots(1-p_n) \cdots (10)$$

$$p = p_1 p_2 \cdots p_r (1-p_{r+1})(1-p_{r+2})\cdots(1-p_n) \cdots (11)$$

$$P = C_r^n p^r q^{n-r} \cdots (12)$$

$$P' = p^n + C_1^n p^{n-1} q + C_2^n p^{n-2} q^2 + \cdots + C_r^n p^r q^{n-r} \cdots (13)$$

$$d_x = l_x - l_{x+1} \cdots (14)$$

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdots (15)$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdots (16)$$

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdots (17)$$

$$1 - {}_n p_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdots (18)$$

$${}_n q_x = \frac{d_{x+n}}{l_x} \cdots (19)$$

$${}_n p_{xy} = {}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdots (20)$$

$${}_n q_{xy} = {}_n p_x + {}_n p_y - {}_n p_x p_y \cdots (21)$$

第十編 生命年金與人壽保險

第一章 生命年金

因一人或數人之死亡而終止之年金，名曰生命年金(Life Annuity)。生命年金與人之壽命有關，故生命年金之現值，隨接受年金者之生存機率而異。年齡七十歲者每年收受之養老金五百元，與年齡五十歲者每年收受之養老金五百元，雖同一金額，然其現值，迥然不同何則？前者死亡之機率，大於後者，故前者終止接受年金之機率，亦大於後者，年齡相差愈大，兩者之現值相差亦愈甚。

未來一定金額之收受，若受某種條件之限制，則此金額之價值，與無條件收受此金額之價值不同。例如擲骰一粒，擲得四點者可得洋六元，擲骰者能否得洋六元，須視其能否擲得四點而異，故能否取得，猶在不可知之中，限制之條件愈嚴，則取得此金額愈難，而此金額之價值亦愈小。設有甲乙二人，以擲骰一粒為賭博，甲擲得四點時，自乙得洋六元，則甲當以若干元下注，方為一種公平之賭博？夫擲得四點之機率，吾人已知其為 $\frac{1}{6}$ ，則若連擲 n 次，甲有擲得 $\frac{n}{6}$ 次之希望，即有取得 n 元之希望。甲既有取得 n 元之希望，則乙於 n 次中，每次亦當

取得一元，方為一種公平之賭博。觀此可知擲得四點時取得之洋六元，其確實價值祇有一元，而此確實價值即自機率與金額相乘而得，即所謂數學希望額 (Mathematical Expectation) 是也。

上海遊戲場有以擲骰三粒為賭博者，若賭客以洋一元，下注於十八點，則十八點出現時，賭客可得洋一百五十元，此種賭博，頗能吸引無知賭客之投機，然若以數學希望額解釋，則此種賭博之不利於賭客，顯而易見。何則？十八點出現之機率為 $\frac{1}{216}$ ，以此機率與一百五十元相乘，得數學希望額 $\frac{150}{216}$ 元，即六角九分，與下注金額相差三角一分，是即賭客之損失。

又設吾人約於五年後，贈洋一百元於現年三十五歲之某甲，並以屆時某甲生存在世，為領受贈金之限制，則某甲能否收受此一百元，須視其能否活至四十歲而異。某甲活至四十歲之機率為 $\frac{78106}{81822}$ ，故此一百元之數學希望額為 $\frac{7810600}{81822}$ 元。以領受者生存在世為領受條件之贈金，名曰生贈金 (Pure Endowment)，蓋取其生贈死不贈之意也。生贈金一百元之數學希望額雖為 $\frac{7810600}{81822}$ 元，然此為五年後之價值，故其現值，尚須以 v^5 乘之， n 年後付給 (x) 生贈金一元之現值，通常以 ${}_nE_x$ 表之，其數值可自下列公式求得：

$${}_nE_x = v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} \dots\dots\dots (1)$$

${}_nE_x$ n 年後付給 (x) 生贈金一元之現值

i 實利率

$$v = \frac{1}{1+i}$$

(證) 應用第十編公式 (17), 得:

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

但

$${}_n E_x = v^n \cdot {}_n p_x$$

$$\therefore {}_n E_x = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

(例一) 某甲遺囑其子年二十一歲時, 得接受其遺產五萬元, 某甲臨死時, 其子年十二歲, 求某甲臨死時, 其子所得遺產之現值 (實利率五釐)!

$$x = 12$$

$$n = 21 - 12 = 9$$

代入公式 (1), 得:

$${}_9 E_{12} = v^9 \frac{l_{21}}{l_{12}}$$

$$v^9 = 0.64460892$$

$$l_{21} = 91914$$

$$l_{12} = 98505$$

以五萬元乘 $v^9 \frac{l_{21}}{l_{12}}$, 則得:

$$50000 \times 0.64460892 \times \frac{91914}{98505} = \frac{32230.446 \times 91914}{98505} = 30073.90 \text{ 元}$$

生命年金有終身年金 (Whole Life Annuity), 延期生命年

金(Deferred Life Annuity),與有限生命年金(Temporary Life Annuity)之別,生命年金之支付,若至接受年金者死亡而終止之年金,名曰終身年金. n 年內不付年金,以後繼續支付,直至接受年金者死亡而終止之年金,名曰延期生命年金. 生命年金之支付,若至約定時期之末而終止,或至接受年金者死亡而終止之年金,名曰有限生命年金.

終身年金一元之現值,通常以 a_x 表之,其數值可自下列公式求得:

$$a_x = \frac{v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \dots \text{至表之極限為止}}{l_x} \dots \dots \dots (2)$$

(證) 各年之生命年金,可視為若干生贈金,其現值如下:

$${}_1E_x, \quad {}_2E_x, \quad {}_3E_x, \dots \dots \dots \text{至表之極限為止}$$

故終身年金之現值為:

$$a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \dots \dots \dots \text{至表之極限為止}$$

$$= \frac{v l_{x+1}}{l_x} + \frac{v^2 l_{x+2}}{l_x} + \frac{v^3 l_{x+3}}{l_x} + \dots \dots \dots \text{至表之極限為止}$$

$$\therefore a_x = \frac{v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + v^3 l_{x+3} + \dots \dots \dots \text{至表之極限為止}}{l_x}$$

(例二) 每年養老金一千元,於每年末支付,給與年九十一歲之老翁,求此養老金之現值 ($i = 3\frac{1}{2}\%$)!

應用公式(2),得:

$$a_{91} = \frac{v l_{92} + v^2 l_{93} + v^3 l_{94} + v^4 l_{95}}{l_{91}}$$

$$\text{但 } v l_{92} = 0.96618357 \times 216 = 208.69565112$$

$$v^2 l_{93} = 0.93351070 \times 79 = 73.74734530$$

$$v^3 l_{94} = 0.90194271 \times 21 = 18.94079691$$

$$v^4 l_{95} = 0.87144223 \times 3 = \frac{2.61432669}{303.99812002}$$

$$\therefore a_{91} = \frac{303.99812002}{l_{91}} = \frac{303.99812002}{462}$$

以一千元乘之，則得：

$$1000 a_{91} = \frac{303998.12002}{462} = 658.00 \text{ 元}$$

領取終身年金者之年齡愈小，公式(2)中分子之項數愈多，而 a_x 之計算愈繁，故公式(2)不適實際應用，須更求簡捷公式，以便計算。

$$\text{令 } D_x = v^x l_x \dots \dots \dots (3)$$

以 v^x 乘公式(2)中之分子分母，則得：

$$a_x = \frac{v^{x+1} l_{x+1} + v^{x+2} l_{x+2} + v^{x+3} l_{x+3} + \dots \text{至表之極限為止}}{v^x l_x}$$

$$\therefore a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots \text{至表之極限為止}}{D_x} \dots \dots (4)$$

$$\text{又令 } N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots \text{至表之極限為止} \dots \dots (5)$$

$$\text{則 } a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \dots \dots \dots (6)$$

D_x 與 N_x 可預先製成一表，以備應用時之檢査，故 a_x 之計算已化爲一種簡易之除法。 D_x 與 N_x 中均包含 v ，故其數值隨

實利率 i 而異，美國保險公司均以實利率 $3\frac{1}{2}\%$ 為標準，附錄中之人壽保險與生命年金計算表(表十五)，為美國最通行之表。最簡單之表中共分四行，一行為年齡，一行為 D_x ，一行為 N_x ，一行為 M_x ，茲再添列三行，以便計算，一行為 C_x ，一行為 $1+a_x$ ，一行為 A_x (M_x , C_x 與 A_x 之意義將詳於人壽保險一章)，故 a_x 之計算，即此極簡易之除法，亦可免除。

應用公式 (6) 以解例二，則得：

$$a_{91} = \frac{N_{92}}{D_{91}} = \frac{13.28309}{20.1869}$$

$$1000 a_{91} = \frac{13283.09}{20.1869} = 658.01^* \text{ 元}$$

直接查表十五中之 $1+a_x$ ，則得：

$$1000 a_{91} = 1000(1.6580 - 1) = 658.00 \text{ 元}$$

而生贈金之現值，亦可依次化得如下：

$${}_n E_x = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x}$$

$$\therefore {}_n E_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \dots \dots \dots (7)$$

延期 n 年生命年金一元之現值，通常以 ${}_n/a_x$ 表之，其數值可自下列公式求得：

$${}_n/a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x} \dots \dots \dots (8)$$

(證) 依延期生命年金之定義，第一次年金之支付，在 $n+1$

* 因小數關係相差一分

年之末，以後繼續支付，直至接受年金者死亡為止，故延期 n 年生命年金，亦由若干生贈金組成，惟其開始，在 $n+1$ 年之末，故其現值為此若干生贈金現值之和，即：

$$\begin{aligned} {}_n/a_x &= {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + {}_{n+3}E_x + \dots \text{至表之極限為止} \\ &= \frac{D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + D_{x+n+3} + \dots \text{至表之極限為止}}{D_x} \\ \therefore {}_n/a_x &= \frac{N_{x+n+1}}{D_x} \end{aligned}$$

(例三) 某甲以延期生命年金一千元，遺給其子，約定延期十年，某甲臨死時，其子年三十歲，求當某甲臨死時，此年金之現值！(實利率 $3\frac{1}{2}\%$)

$$x = 30$$

$$n = 10$$

代入公式 (8)，得：

$${}_{10}/a_{30} = \frac{N_{41}}{D_{30}} = \frac{324440.0}{30440.8}$$

$$1000 \times {}_{10}/a_{30} = \frac{324440000}{304408} = 10658.06 \text{ 元}$$

n 年有限生命年金一元之現值，通常以 $a_{x:\overline{n}|}$ 表之，其數值可自下列二公式之一求得：

$$a_{x:\overline{n}|} = a_x - {}_n/a_x \dots \dots \dots (9)$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \dots \dots \dots (10)$$

(證) 於 n 年有限生命年金之後，繼以延期 n 年生命年金，

即成終身年金,故三者現值之關係如下:

$$a_x = {}_n/a_x + a_{x:n|}$$

$$\therefore a_{x:n|} = a_x - {}_n/a_x$$

但

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$${}_n/a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$\therefore a_{x:n|} = \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+n+1}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

(例四) 十年有限生命年金一千元,給與年二十五歲之人,
求年金現值(實利率 $3\frac{1}{2}\%$)!

$$x = 25$$

$$n = 10$$

代入公式 (10), 得:

$$a_{25:10|} = \frac{N_{26} - N_{36}}{D_{25}} = \frac{732440 - 432326}{37673.6} = \frac{300114}{37673.6}$$

$$1000a_{25:10|} = \frac{3001140000}{376736} = 7966.16 \text{ 元}$$

上述各種生命年金,均指期末付生命年金 (Ordinary Life Annuity) 而言,若年金之支付,在期初而不在期末,則為期初付生命年金 (Life Annuity Due).

期初付終身年金一元之現值可以 a'_x 表之,其數值可自下列公式求得:

$$a'_x = 1 + a_x = \frac{N_x}{D_x} \dots \dots \dots (11)$$

(證) 期初付終身年金一元之現值,較期末付終身年金一元之現值,僅多第一期初支付之一元,故:

$$a'_x = 1 + a_x = 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots \text{至表之極限為止}}{D_x}$$

$$\therefore a'_x = \frac{N_x}{D_x}$$

期初付 n 年有限生命年金一元之現值,可以 $a'_{x:\overline{n}|}$ 表之,其數值可自下列公式求得:

$$a'_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \dots\dots\dots (12)$$

(證) 期初付 n 年有限生命年金一元之現值,較期末付 $n-1$ 年有限生命年金一元之現值,多第一期初支付之一元,故:

$$a'_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|} = 1 + \frac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x} = \frac{(D_x + N_{x+1}) - N_{x+n}}{D_x}$$

$$\therefore a'_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

延期 n 年期初付生命年金一元之現值,即為延期 $n-1$ 年期末付生命年金一元之現值,故不必另求公式。

(例五) 每年養老金一千元,於每年初支付,給與年九十一歲之老翁,求此養老金之現值!(實利率 $3\frac{1}{2}\%$)

$$x = 91$$

代入公式 (11), 得:

$$a'_{91} = 1 + a_{91} = 1.6580$$

$$1000 a'_{91} = 1658.00 \text{ 元}$$

(例六) 期初付十一年有限生命年金一千元, 給與年二十五歲之人, 求年金現值! (實利率 $3\frac{1}{2}\%$)

$$x = 25$$

$$n = 11$$

代入公式 (12), 得:

$$a'_{25:\overline{11}|} = \frac{N_{25} - N_{36}}{D_{25}} = \frac{770113 - 432326}{37673.6} = \frac{337787}{37673.6}$$

$$1000 a'_{25:\overline{11}|} = \frac{3377870000}{376736} = 8966.15 \text{ 元}$$

生命年金之支付, 亦有每年數次者, 例如養老金, 有規定按月支付者, 每年支付數次之生命年金, 其現值與每年僅付一次者迥異, 故不能應用上述公式求得。終身年金一元分 p 次支付之現值, 可以 $a_x^{(p)}$ 表之, 其數值可自下列公式求得:

$$a_x^{(p)} = a_x + \frac{p-1}{2p} \dots \dots \dots (13)$$

$a_x^{(p)}$ 終身年金一元分 p 次支付之現值

a_x 終身年金一元之現值

p 每年支付年金次數

(證) 設 $\frac{1}{p}/a'_x, \frac{2}{p}/a'_x, \frac{3}{p}/a'_x, \dots, \frac{1}{p}/a'_x$ 為延期 $\frac{1}{p}$ 年, $\frac{2}{p}$ 年, $\frac{3}{p}$ 年, $\dots, 1$ 年, 期初付生命年金一元之現值,

則 $\frac{1}{p}/a'_x + \frac{2}{p}/a'_x + \frac{3}{p}/a'_x + \dots + \frac{1}{p}/a'_x$ 為期末付終身年金 p 元分 p 次支付之現值, 故:

$$a_x^{(p)} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p}/a'_x + \frac{2}{p}/a'_x + \frac{3}{p}/a'_x + \dots + \frac{1}{p}/a'_x \right)$$

$$\text{但 } {}_0/a'_x = (1+a_x) - 0$$

$${}_1/a'_x = (1+a_x) - 1$$

應用插補法，得：

$$\frac{1}{p}/a'_x = (1+a_x) - \frac{1}{p}$$

$$\frac{2}{p}/a'_x = (1+a_x) - \frac{2}{p}$$

$$\frac{3}{p}/a'_x = (1+a_x) - \frac{3}{p}$$

$$\therefore a_z^{(p)} = \frac{1}{p} \left[p(1+a_x) - \left(\frac{1}{p} + \frac{2}{p} + \frac{3}{p} + \dots + 1 \right) \right]$$

$$= (1+a_x) - \frac{1}{p} \frac{p \left(1 + \frac{1}{p} \right)}{2}$$

$$= 1+a_x - \frac{p+1}{2p}$$

$$\therefore a_p^{(p)} = a_x + \frac{p-1}{2p}$$

若年金之支付，改期末為期初，則：

$$\begin{aligned} a_p^{(p)'} &= \frac{1}{p} + a_p^{(p)} \\ &= \frac{1}{p} + a_x + \frac{p-1}{2p} = a_x + \frac{p+1}{2p} \end{aligned}$$

$$\therefore a_p^{(p)'} = a_x + \frac{p+1}{2p} \dots \dots \dots (14)$$

$a_x^{(p)'}$ 期初付終身年金一元分 p 次支付之現值

a_x 期末付終身年金一元之現值

p 每年支付年金之次數

若在最初 n 年不付年金，則年金現值可自下列二公式求得：

$${}_n/a_x^{(p)} = \frac{1}{D_x} (N_{x+n+1} + \frac{p-1}{2} D_{x+n}) \dots \dots \dots (15)$$

$${}_n/a_x^{(p)'} = \frac{1}{D_x} (N_{x+n+1} + \frac{p+1}{2} D_{x+n}) \dots \dots \dots (16)$$

${}_n/a_x^{(p)}$ 延期 n 年期末付生命年金一元分 p 次支付之現值

${}_n/a_x^{(p)'}$ 延期 n 年期初付生命年金一元分 p 次支付之現值

p 每年支付年金次數

n 延期年數

$$\begin{aligned} (\text{證}) \quad {}_n/a_x^{(p)} &= v^n \cdot {}_n p_x \cdot a_{x+n}^{(p)} = \frac{v^n \cdot l_{x+n} a_{x+n}^{(p)}}{l_x} = \frac{v^{n+x} l_{x+n} a_{x+n}^{(p)}}{v^x l_x} \\ &= \frac{D_{x+n}}{D_x} \left(a_{x+n} + \frac{p-1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{但 } a_{x+n} = \frac{N_{x+n+1}}{D_{x+n}}$$

$$\therefore {}_n/a_x^{(p)} = \frac{1}{D_x} \left(N_{x+n+1} + \frac{p-1}{2} D_{x+n} \right)$$

公式(16)之證明，與此相似。

若年金之支付，以最初 n 年為限，則年金現值可自下列二公式求得：

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{1}{D_x} [N_{x+1} - N_{x+n+1} + \frac{p-1}{2} (D_x - D_{x+n})] \dots \dots \dots (17)$$

$$a_{\overline{n}|}^{(p)'} = \frac{1}{D_x} [N_{x+1} - N_{x+n+1} + \frac{p+1}{2} (D_x - D_{x+n})] \dots \dots \dots (18)$$

$a_{\overline{n}|}^{(p)}$ 期末付 n 年有限生命年金一元，分 p 次支付之現值

$a_{\overline{n}|}^{(p)}$ 期初付 n 年有限生命年金一元分 p 次支付之現值

* 每年支付年金次數

$$\begin{aligned} \text{(證)} \quad a_{\overline{n}|}^{(p)} &= a_x^{(p)} - n/a_x^{(p)} = \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{p-1}{2p} - \frac{1}{D_x} (N_{x+n+1} + \frac{p-1}{2p} D_{x+n}) \\ &= \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{p-1}{2p} \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore a_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{1}{D_x} [N_{x+1} - N_{x+n+1} + \frac{p-1}{2p} (D_x - D_{x+n})]$$

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|}^{(p)'} &= a_x^{(p)'} - n/a_x^{(p)'} = \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{p+1}{2p} - \frac{1}{D_x} (N_{x+n+1} + \frac{p+1}{2p} D_{x+n}) \\ &= \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{p+1}{2p} \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore a_{\overline{n}|}^{(p)'} = \frac{1}{D_x} [N_{x+1} - N_{x+n+1} + \frac{p+1}{2p} (D_x - D_{x+n})]$$

(例七) 生命年金一百二十元，給與現年三十五歲之人，年金於每月末支付，求此年金之現值（實利率 $3\frac{1}{2}\%$ ）

a) 終身年金

b) 延期十五年

c) 十五年有限生命年金

a) $x=35$

$p=12$

代入公式 (13)，得

$$a_{35}^{(12)} = a_{35} + \frac{11}{24} = 17.6138 + \frac{11}{24}$$

$$120 a_{35}^{(12)} = 120 \times 17.6138 + 55 = 2168.66 \text{ 元}$$

$$b) D_x = D_{95} = 24544.7$$

$$N_{x+n+1} = N_{51} = 169165$$

$$D_{x+n} = D_{59} = 12498.6$$

$$p = 12$$

代入公式(15), 得:

$${}_{15}v/a_{\overline{33}|i}^{(12)} = \frac{1}{24544.7} (169165 + \frac{11}{24} \times 12498.6)$$

$$120 \times {}_{15}v/a_{\overline{33}|i}^{(12)} = \frac{1}{24544.7} (120 \times 169165 + 55 \times 12498.6)$$

$$= \frac{1}{24544.7} (20299800 + 687423)$$

$$= \frac{20987223}{24544.7} = 855.06 \text{ 元}$$

$$c) D_x = D_{85} = 24544.7$$

$$N_{x+1} = N_{36} = 432326$$

$$N_{x+n+1} = N_{51} = 169165$$

$$D_{x+n} = D_{59} = 12498.6$$

$$N_{x+1} - N_{x+n+1} = 263161$$

$$D_x - D_{x+n} = 12046.1$$

$$p = 12$$

代入公式(17), 得:

$$a_{\overline{33}|i}^{(12)} = \frac{1}{24544.7} (263161 + \frac{11}{24} \times 12046.1)$$

$$120 a_{\overline{33}|i}^{(12)} = \frac{1}{24544.7} (120 \times 263161 + 55 \times 12046.1)$$

$$= \frac{1}{24544.7} (31579320 + 662535.5)$$

$$= \frac{32241855.5}{24544.7} = 1313.60 \text{ 元}$$

(例八) 生命年金二百四十元，給與現年三十歲之人，年金於每月初支付，求此年金之現值(實利率 $3\frac{1}{2}\%$)!

a) 終身年金

b) 延期十年

c) 十年有限生命年金

a) $x = 30$

$p = 12$

代入公式(14)，得：

$$a_{30}^{(12)} = a_{30} + \frac{p-1}{2p} = 18.6054 + \frac{13}{24}$$

$$240 a_{30}^{(12)} = 240 \times 18.6054 + 130 = 4595.30 \text{ 元}$$

b) $D_x = D_{30} = 30440.8$

$$N_{x+1} = N_{41} = 324440$$

$$D_{x+1} = D_{40} = 19727.4$$

$p = 12$

代入公式(16)得：

$${}_{10}/a_{30}^{(12)} = \frac{1}{30440.8} (324440 + \frac{13}{24} \times 19727.4)$$

$$240 \times {}_{10}/a_{30}^{(12)} = \frac{1}{30440.8} (240 \times 324440 + 130 \times 19727.4)$$

$$= \frac{1}{30440.8} (77865600 + 2564562)$$

$$= \frac{80430162}{30440.8} = 2642.18 \text{ 元}$$

$$c) D_x = D_{30} = 30440.8$$

$$N_{x+1} = N_{31} = 566363$$

$$N_{x+n+1} = N_{41} = 324440$$

$$D_{x+n} = D_{40} = 19727.4$$

$$N_{x+1} - N_{x+n+1} = 241923$$

$$D_x - D_{x+n} = 10713.4$$

$$p = 12$$

代入公式(18), 得:

$$a_{\overline{30}|10}^{(12)} = \frac{1}{30440.8} (241923 + \frac{13}{24} \times 10713.4)$$

$$240 a_{\overline{30}|10}^{(12)} = \frac{1}{30440.8} (240 \times 241923 + 130 \times 10713.4)$$

$$= \frac{1}{30440.8} (58061520 + 1392742)$$

$$= \frac{59454262}{30440.8} = 1953.11 \text{ 元}$$

習 題 二 十 八

(以下各題中之實利率均假定為3%)

1. 某甲遺囑其子二十五歲時,得接受其遺產十萬元,某甲臨死時,其子年十五歲,求某甲臨死時,其子所得遺產之現值!

2. 每年養老金三千元,於每年末支付,給與年八十五歲之老翁,求此養老金之現值!

3. 某甲以延期生命年金三千元,遺給其子,約定延期十年,某甲臨死時,其子年三十五歲,求當某甲臨死時,此年金之現值!

- a) 年金於每年末支付;
- b) 年金於每年初支付;
- c) 年金於每月末支付;
- d) 年金於每月初支付。

4. 二十年有限生命年金一千二百元,給與現年二十歲之人,求年金現值!

- a) 年金於每年末支付;
- b) 年金於每年初支付;
- c) 年金於每月末支付;
- d) 年金於每月初支付。

5. 生命年金二百四十元,給與現年四十歲之人,年金於每月末支付,求此年金之現值!

- a) 終身年金;
- b) 延期十年;
- c) 十年有限生命年金。

6. 求下列各題中之年金現值!

接受年金者之年齡	支付年 金時期	年金總額	延期 年數	年 金 確 買 年 金	時 期 生 命 年 金	年 金 確 買 年 金	現 值 生 命 年 金
a) 三十歲	每年末	\$ 1,200	0年	10年	10年		
b) 三十五歲	每年初	\$ 1,800	5年	永攢	終身		
c) 三十四歲	每月末	\$ 2,400	0年	15年	15年		
d) 四十二歲	每年末	\$ 1,000	0年	永攢	終身		
e) 四十五歲	每月末	\$ 600	3年	20年	20		

第二章 人壽保險

第一節 人壽保險之意義及其種類

人不能無死，且人之壽命不定，每日均有死亡之可能，故若家無恆產，則一旦死亡，家中恃其爲生者即有凍餒之虞，而子女教育之費，更無由籌集，其危險爲何如？！或曰，此種危險，由於家主生時未能按期儲蓄之故，然即使家主生時能按期儲蓄，而人之壽命不定，安望其能必先積成巨額儲蓄而後死乎？使家主於儲蓄猶未積成充分金額之時，忽與世長離，則家中恃其爲生者仍有凍餒之虞，而子女教育之費，仍無充分之準備，故儲蓄雖能稍減家主一旦死亡之危險，然能否有效，猶與儲蓄者之壽命有關也。人壽保險則不然，使家主生時預保人壽保險，則無論何時死亡，家中恃其爲生者均不必再有凍餒之虞，而子女之教育費，亦有確實充分之準備，就家庭經濟而言，家主之死固無絲毫損失也。故人壽保險 (Life Insurance) 者：將少數人因死亡而受之經濟損失，轉嫁於多數人之一種經濟制度也。家主向人壽保險公司訂約保險後，按期支付相當金額於保險公司，以爲酬報，而家主死亡時，保險公司即給予其家屬一定金額，以爲賠償，此種賠款，即取自保險公司按

期收入之酬報，故因個人死亡而受之經濟損失，轉嫁於已保壽險之未死者，向人壽保險公司訂約保險之人愈多，則保險公司所冒之危險愈小，而其每年希冀之利益，亦愈確實可靠。

受人報酬而負賠償死亡損失之責者，名曰保險人 (Insurer)，即人壽保險公司是也。向人壽保險公司訂約保險之人，名曰投保人 (Insured)。享受領取賠款之權利者，名曰領款人或受益人 (Beneficiary)。投保人與保險人所訂之契約，名曰保險單 (Insurance Policy)。投保人付給保險人之酬報，名曰保險費 (Insurance Premium)。受益人應得之額，名曰保險額 (Benefit)。保險單上書明之訂約日，名曰保單日 (Policy Date)。保單日後經歷各年，名曰保單年 (Policy Year)。

保險費有純保費 (Net Premium)。與總保費 (Gross Premium) 之別。保險公司經營人壽保險，除支付保險額外，尚須支付職薪、佣金、租稅，與其他各種營業費，欲使營業不失敗，則不得不向投保人徵收相當金額，以資挹注，故投保人所支付之保險費，已包含各種營業費，包含營業費之保險費，名曰總保費。投保人所計較者，乃總保費之多寡，但保險計算家所欲事先決定者，則為保險公司因投保人死亡而當支出之費，至於各種營業費則未計入在內，不包含營業費之保險費，名曰純保費。

保險費得一次繳納，亦得分期繳納，前者名曰躉繳保費 (Single Premium)，後者則名曰日期繳保費 (Periodic Premium)。

人壽保險之種類甚多，其最通行者，有終身保險，定期保險與

生贈保險三種終身保險(Whole Life Insurance)者,投保人無論何時死亡,保險公司均給以賠款之保險也。定期保險(Term Insurance)者,投保人於約定期限內死亡時,保險公司付給賠款,而投保人於約定期限外死亡時,保險公司不給賠款之保險也。生贈保險(Endowment Insurance)者,投保人於約定期限內死亡時,保險公司付給賠款,投保人於約定期限末尙能生存時,保險公司付給生贈金之保險也。

第二節 純保費之計算

本書計算各種純保費,乃以下列各條件爲計算之根據:

一. 投保人之死亡率與死亡生殘表中之死亡率適相符合;

二. 投資利率爲年利率三釐五毫;

三. 賠款於投保人死亡之一年(保單年)末支付。

投保人之年齡若爲 x ,則在一年內,二年內,三年內,……死亡之機率,爲 $\frac{d_x}{l_x}$, $\frac{d_{x+1}}{l_{x+1}}$, $\frac{d_{x+2}}{l_{x+2}}$,……。若保險額爲一元,則投保人應得之數學希望額,即爲 $\frac{d_x}{l_x}$, $\frac{d_{x+1}}{l_{x+1}}$, $\frac{d_{x+2}}{l_{x+2}}$,……。而此各種金額於不同時期支付,化爲現值,則得 $\frac{d_x}{l_x}$, $v^2 \frac{d_{x+1}}{l_{x+1}}$, $v^3 \frac{d_{x+2}}{l_{x+2}}$,……。使此交易爲一公平交易,則投保人應支付與此等值之保險費,故終身保險額一元之應繳保費,可自下式求得:

$$A_x = \frac{v d_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \dots}{l_x} \text{至表之極限為止} \dots (19)$$

A_x 終身保險額一元之躉繳保費

x 投保人之年齡

(例一) 投保人之年齡為九十歲, 保險額為一千元, 求終身保險之躉繳保費!

$$l_{90} = 847$$

$$d_{90} = 385$$

$$d_{91} = 246$$

$$d_{92} = 137$$

$$d_{93} = 58$$

$$d_{94} = 18$$

$$d_{95} = 3$$

代入公式 (19), 得:

$$\begin{aligned} A_{90} &= \frac{385v + 246v^2 + 137v^3 + 58v^4 + 18v^5 + 3v^6}{847} \\ &= \frac{385 \times 0.96618857 + 246 \times 0.9395107 + 137 \times 0.90194271 + 58 \times 0.87144223 + 18 \times 0.84197317 + 3 \times 0.81350064}{847} \\ &= \frac{371.98067445 + 229.6436322 + 123.56615127 + 50.54364934 + 15.15551706 + 2.44050192}{847} \\ &= \frac{793.33012624}{847} \\ 1000 A_{90} &= \frac{793330.12624}{847} = 936.64 \text{ 元} \end{aligned}$$

投保人之年齡愈小，公式(19)中分子之項數愈多，而 A_x 之計算愈繁，故公式(19)不適實際應用，須另求簡捷公式，以便計算。

令

$$C_x = v^{x+1}d_x \dots\dots\dots(20)$$

以 v^x 乘公式(19)中之分子分母，則得：

$$A_x = \frac{v^{x+1}d_x + v^{x+2}d_{x+1} + v^{x+3}d_{x+2} + \dots\dots\dots \text{至表之極限為止}}{v^x l_x}$$

$$= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots\dots\dots \text{至表之極限為止}}{D_x}$$

又令

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots\dots\dots \text{至表之極限為止} \dots\dots\dots(21)$$

則

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \dots\dots\dots(22)$$

人壽保險與生命年金計算表中有 C_x 、 M_x 與 A_x 等 $\dot{\cdot}$ ，故若應用公式(22)， A_x 之計算，已化爲一極簡易之除法，而檢查表中之 A_x 一行，則併此極簡易之除法，亦可避免。

應用公式(22)以解例一，則得：

$$A_{90} = \frac{M_{90}}{D_{90}} = \frac{35.87752}{38.3047}$$

$$1000 A_{90} = \frac{35877.52}{38.3047} = 936.63 \text{ 元}^*$$

* 因小數關係，相差一分。

直接檢查 A_x 一行，則得：

$$1000A_{90} = 936.64 \text{ 元}$$

A_x 與 a_x 有下列之關係：

$$A_x = v(1 + a_x) - a_x \dots\dots\dots(23)$$

$$\text{(證)} \quad A_x = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \dots\dots\dots \text{至表之極限爲止}}{l_x}$$

$$= \frac{v(l_x - l_{x+1}) + v^2(l_{x+1} - l_{x+2}) + v^3(l_{x+2} - l_{x+3}) + \dots\dots\dots}{l_x}$$

至表之極限爲止

$$= \frac{vl_x + v^2 l_{x+1} + v^3 l_{x+2} + \dots\dots\dots \text{至表之極限爲止}}{l_x}$$

$$- \frac{vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + v^3 l_{x+3} + \dots\dots\dots \text{至表之極限爲止}}{l_x}$$

$$= v \left(1 + \frac{vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \dots\dots\dots \text{至表之極限爲止}}{l_x} \right) - a_x$$

$$\therefore A_x = v(1 + a_x) - a_x$$

終身保險之保險費，通常按年支付，但亦有按季，按月，或竟按週支付者，每期支付之保險費，通常相等。終身保險之期繳保費，有規定終身繼續支付者，有限定若干年內支付者，前者名曰普通終身保單 (Ordinary Life Policy)，後者名曰限期繳費保單 (n-Payment Life Policy)。限期繳費保單，亦能適用於其他保險，但運用於終身保險，最爲通行。

若終身保險之保險費，於各保單年之初支付，則各年保險費現值之和，當與總繳純保費相等。普通終身保單之年繳

保費，組成期初付終身年金，其現值應與 A_x 相等，故若以 P_x 表示普通終身保險額一元之年繳保費，則應用公式 (11)，得：

$$P_x(1+a_x) = A_x$$

$$\therefore P_x = \frac{A_x}{1+a_x} \dots\dots\dots(24)$$

$$\therefore 1+a_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

$$\therefore P_x = \frac{M_x}{N_x} \dots\dots\dots(25)$$

限期 n 年繳費保單之年繳保費，組成期初付 n 年有限生命年金，其現值亦應與 A_x 相等，故若以 ${}_n P_x$ 表示限期 n 年繳費保險額一元之年繳保費，則應用公式 (12)，得：

$${}_n P_x \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = A_x$$

而 $A_x = \frac{M_x}{D_x}$

$$\therefore {}_n P_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+n}} \dots\dots\dots(26)$$

(例二) 投保人之年齡為三十歲，保險額為一千元，求終身保險之保險費！

- a) 總繳保費；
- b) 普通終身保單；
- c) 限期十年繳費保單。

a) 查表十五, 得:

$$A_{30} = 0.33702$$

$$1000 A_{30} = 337.02 \text{ 元}$$

b) 應用公式 (25), 得:

$$P_{30} = \frac{M_{30}}{N_{30}} = \frac{10259}{596804}$$

$$1000 P_{30} = \frac{10259000}{596804} = 17.19 \text{ 元}$$

c) 應用公式 (26), 得:

$${}_{10}P_{30} = \frac{M_{30}}{N_{30} - N_{40}} = \frac{10259}{596804 - 344167} = \frac{10259}{252637}$$

$$1000 \times {}_{10}P_{30} = \frac{10259000}{252637} = 40.61 \text{ 元}$$

n 年定期保險之投保人, 若於一年內, 二年內, 三年內, ………, n 年內死亡, 則得領受保險公司之賠款, 而年齡 x 之投保人, 在一年內, 二年內, 三年內, ………, n 年內死亡之機率為 $\frac{d_x}{l_x}$, $\frac{d_{x+1}}{l_x}$, $\frac{d_{x+2}}{l_x}$, ………, $\frac{d_{x+n-1}}{l_x}$. 若保險額為一元, 則投保人應得之數學希望額, 即為 $\frac{d_x}{l_x}$, $\frac{d_{x+1}}{l_x}$, $\frac{d_{x+2}}{l_x}$, ………, $\frac{d_{x+n-1}}{l_x}$, 而此各種金額於不同時期支付, 化為現值, 則得 $v \frac{d_x}{l_x}$, $v^2 \frac{d_{x+1}}{l_x}$, $v^3 \frac{d_{x+2}}{l_x}$, ………, $v^n \frac{d_{x+n-1}}{l_x}$, 使此交易為一公平交易, 則投保人應支付與此等值之保險費, 故若以 $A_{x:n}^1$ 表示 n 年定期保險額一元之躉繳保費, 則:

$$A_{x:n}^1 = \frac{v d_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \dots + v^n d_{x+n-1}}{l_x}$$

以 v^x 乘上式之分子分母，則得：

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{v^{x+1} d_x + v^{x+2} d_{x+1} + v^{x+3} d_{x+2} + \cdots + v^{x+n} d_{x+n-1}}{v^x l_x}$$

$$= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{x+n-1}}{l_x}$$

但 $C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{x+n-1} = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{x+n-1}$
 $+ (C_{x+n} + C_{x+n+1} + \cdots \text{至表之極限為止})$
 $- (C_{x+n} + C_{x+n+1} + \cdots \text{至表之極限為止})$
 $= M_x - M_{x+n}$

$$\therefore A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \dots \dots \dots (27)$$

定期保險之期限若為一年，則其純保費名曰自然保費 (Natural Premium)，其數值可自下列公式求得：

$$A^1_{x:\overline{1}|} = \frac{M_x - M_{x+1}}{D_x} = \frac{C_x}{D_x} \dots \dots \dots (28)$$

定期保險之保險費，若於每年初支付，則組成期初付 n 年有限生命年金，其現值應與 $A^1_{x:\overline{n}|}$ 相等，故若以 $P^1_{x:\overline{n}|}$ 表示 n 年定期保險額一元之年繳保費，則應用公式 (12)，得：

$$P^1_{x:\overline{n}|} \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = A^1_{x:\overline{n}|}$$

而 $A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$

$$\therefore P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \dots \dots \dots (29)$$

(例三) 投保人之年齡為四十歲，保險額為一千元，求二十

年定期保險之保險費！

a) 保險費一次支付：

b) 保險費於每年初支付。

a) 應用公式 (27), 得：

$$A^1_{40:\overline{20}|} = \frac{M_{40} - M_{60}}{D_{40}} = \frac{8088.92 - 4608.93}{19727.4} = \frac{3479.99}{19727.4}$$

$$1000 A^1_{40:\overline{20}|} = \frac{34799900}{197274} = 176.40 \text{ 元}$$

b) 應用公式 (29), 得：

$$P^1_{40:\overline{20}|} = \frac{M_{40} - M_{60}}{N_{40} - N_{60}} = \frac{8088.92 - 4608.93}{344167 - 81106.4} = \frac{3479.99}{263060.6}$$

$$1000 P^1_{40:\overline{20}|} = \frac{34799900}{2630606} = 13.23 \text{ 元}$$

n 年生贈保險乃聯合 n 年定期保險與 n 年末生贈金而成，故其應繳純保費當為二者現值之和，若以 $A_{x:\overline{n}|}$ 表示 n 年生贈保險額一元之應繳保費，則：

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x$$

但
$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$${}_nE_x = \frac{v^{x+n}}{D_x} \text{ (公式 7)}$$

$$\therefore A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \dots\dots\dots (30)$$

n 年生贈保險之保險費，若於每年初支付，則組成期初付 n 年有限生命年金，其現值應與 $A_{x:\overline{n}|}$ 相等，故若以 $P_{x:\overline{n}|}$ 表示 n

年生贈保險額一元之年繳保費，則應用公式(12)，得：

$$P_{x:n} \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = A_{x:n}$$

$$\text{而 } A_{x:n} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$\therefore P_{x:n} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \dots \dots \dots (31)$$

(例四) 投保人現年三十五歲，欲保二十年生贈保險一千元，求純保費！

a) 保險費一次支付；

b) 保險費於每年初支付。

a) 應用公式(30)，得：

$$\begin{aligned} A_{35:20} &= \frac{M_{35} - M_{55} + D_{55}}{D_{35}} = \frac{9094.96 - 5510.54 + 9733.40}{24544.7} \\ &= \frac{13317.82}{24544.7} \end{aligned}$$

$$1000 A_{35:20} = \frac{133178200}{245447} = 542.59 \text{ 元}$$

b) 應用公式(31)，得：

$$\begin{aligned} P_{35:20} &= \frac{M_{35} - M_{55} + D_{55}}{N_{35} - N_{55}} = \frac{9094.96 - 5510.54 + 9733.40}{456871 - 124876} \\ &= \frac{13317.82}{331995} \end{aligned}$$

$$1000 P_{35:20} = \frac{13317820}{331995} = 40.11 \text{ 元}$$

習題二十九

1. 求下表中終身保險之純保費!

投保人之年齡	保險額	躉繳保費	年 繳 保 費	
			普通終身保單	限期十年繳費保單 限期二十年繳費保單
a) 五十歲	\$ 1000			
b) 四十五歲	1500			
c) 四十歲	2000			
d) 三十五歲	2500			
e) 三十歲	3000			

2. 求下表中定期保險之純保費!

投保人之年齡	保險期限	保險額	躉繳保費	年繳保費
a) 四十五歲	五 年	\$ 2000		
b) 四十歲	十 年	3000		
c) 三十五歲	十 五 年	4000		
d) 三十歲	二 十 年	5000		
e) 二十五歲	二 十 五 年	6000		

3. 求下表中生贈保險之純保費!

投保人之年齡	保險期限	保險額	躉繳保費	年繳保費
a) 三十歲	二十 年	\$ 1000		
b) 三十一歲	十 年	1500		
c) 三十二歲	二十 年	1800		
d) 三十三歲	十 五 年	2000		
e) 三十四歲	二十 年	2500		

4. 某甲現年三十歲,投保終身保險額一千元,約定第一年為定期保險,以後為普通終身保單,求第一年純保費與以後各年每年純保費!

5. 某甲現年三十歲,投保終身保險額一千元,約定第一年為定期保險,以後為限期十九年繳費保單,求第一年純保費與以後十九年間每年純保費!

第三節 預備金之計算

人死機率，與年齡而俱增（嬰孩之死亡率甚高，此係例外），詳察死亡生殘表其向上變動顯然可見，故若投保人投保一年定期保險而每年更換一保險單，則每年應繳之保險費，隨死亡機率之增加而漸增，此種每年遞增之保險費，即前章所謂自然保費是也，然保險公司徵收保險費，通常規定每年相等，此種定額年繳保費，名曰年繳平衡保費（Annual Level Premium）。年繳平衡保費既規定每年相等，而自然保費又當隨死亡機率之增加而漸增，則投保人早年所繳之平衡保費，較大於其應繳之自然保費，而其晚年所繳之平衡保費，較小於其應繳之自然保費，故投保人早年多繳之保險費，保險公司應妥為投資，以備投保人晚年少繳保險費之挹注，此即預備金（Reserve）之所由興也。

人壽保險公司之預備金，既集自投保人早年多繳之保險費，則與普通公司預防損失而設置之公積金迥異，公積金可視為公司對股東之負債，而預備金則為公司對投保人之負債，故各國立法均強迫人壽保險公司設置預備金，以保護投保人之利益。

人壽保險公司之預備金，與銀行之存款相似，惟存款得任意提取，而預備金則否，此其異點也。預備金為投保人對保險公司之債權，而保險單為此債權之憑證，故人壽保險單可

用作借款之抵押品。投保人若可任意退保，則退保時投保人可向保險公司收回保險單上規定之退保價值 (Surrender Value)。退保價值通常小於投保人應得之預備金，蓋新保險單之簽訂，保險公司負擔巨額支出，故略收退保費 (Surrender Charge)，以示限制。

計算預備金之多寡，名曰保險單之估值 (Valuation of Policies)。保險單之估值，有未繳保費推算法 (Prospective Method) 與已繳保費推算法 (Retrospective Method) 之別，前者根據以後應繳之保險費，後者則根據過去已繳之保險費。

投保人若於 x 歲時投保普通終身保險額一元，則每年初應繳保費 P_x 元。此種保險單至 n 年末之估值，名曰第 n 年之年末預備金 (Terminal Reserve)。投保人 (x) 至第 n 年末之年齡為 $x+n$ ，故若於斯時投保終身保險額一元，其應繳保費當為 A_{x+n} 元。投保人 (x) 於 $x+n$ 歲以後各年所繳之 P_x 元，組成期初付終身年金，故其現值當為 $P_x(1+a_{x+n})$ 元。預備金為投保人晚年少繳保費之準備，故 $P_x(1+a_{x+n})$ 較 A_{x+n} 所少之數，即為年末預備金。設 ${}_nV_x$ 為普通終身保險額一元第 n 年之年末預備金。則得：

$${}_nV_x = A_{x+n} - P_x(1+a_{x+n}) \dots\dots\dots(32)$$

第 n 年之年末預備金，由以後各年應繳之保險費推算而得，故此法名曰未繳保費推算法。依此方法，無論何種保單，第 n 年之年末預備金，乃 $x+n$ 歲時新訂保單之應繳保費，與 $x+n$

歲後各年根據舊保單所繳保險費之現值,相差之數也。

(例一) 投保人年三十五歲,投保普通終身保險額一千元,求第十年之年末預備金!

應用公式 (32), 得:

$${}_{10}V_{35} = A_{45} - P_{35}(1 + a_{45})$$

$$A_{45} = 0.45600$$

$$1 + a_{45} = 16.0867$$

$$P_{35} = \frac{A_{35}}{1 + a_{35}} = \frac{0.37055}{18.6138}$$

$${}_{10}V_{35} = 0.45600 - \frac{0.37055}{18.6138} \times 16.0867$$

$$1000 \times {}_{10}V_{35} = 456 - \frac{5960.926685}{18.6138} = 135.76 \text{ 元}$$

${}_nV_x$ 亦可自下列二式求得:

$${}_nV_x = (P_{x+n} - P_x)(1 + a_{x+n}) \dots\dots\dots (33)$$

$${}_nV_x = 1 - \frac{1 + a_{x+n}}{1 + a_x} \dots\dots\dots (34)$$

(證) ${}_nV_x = A_{x+n} - P_x(1 + a_{x+n})$

$$A_{x+n} = P_{x+n}(1 + a_{x+n})$$

$${}_nV_x = P_{x+n}(1 + a_{x+n}) - P_x(1 + a_{x+n})$$

$$\therefore {}_nV_x = (P_{x+n} - P_x)(1 + a_{x+n})$$

依公式 (23), 得:

$$A_x = v(1 + a_x) - a_x$$

$$\begin{aligned}
 {}_nV_x &= A_{x+n} - \frac{A_x}{1+a_x}(1+a_{x+n}) \\
 &= v(1+a_{x+n}) - a_{x+n} - \frac{v(1+a_x) - a_x}{1+a_x}(1+a_{x+n}) \\
 &= v(1+a_{x+n}) - a_{x+n} - v(1+a_x) + \frac{a_x(1+a_{x+n})}{1+a_x} \\
 &= \frac{a_x(1+a_{x+n}) - a_{x+n}(1+a_x)}{1+a_x} = \frac{a_x - a_{x+n}}{1+a_x} \\
 &= \frac{a_{x+1} - 1 - a_{x+n}}{1+a_x}
 \end{aligned}$$

$$\therefore {}_nV_x = 1 - \frac{1+a_{x+n}}{1+a_x}$$

公式(34)便於計算,而公式(33)較易解釋,蓋 P_x 為 (x) 投保普通終身保險額一元之年繳保費, P_{x+n} 為 $(x+n)$ 投保普通終身保險額一元之年繳保費,而 ${}_nV_x$ 為期初付終身年金額 $P_{x+n} - P_x$ 元之現值也。應用公式(34)以解例一,則得:

$$\begin{aligned}
 {}_{10}V_{35} &= 1 - \frac{1+a_{45}}{1+a_{35}} = 1 - \frac{16.0867}{18.6138} \\
 1000 \times {}_0V_{35} &= 1000 - \frac{16086.7}{18.6138} = 135.76 \text{ 元}
 \end{aligned}$$

設 ${}_{n:m}V_x$ 為 m 年限期繳費保險額一元第 n 年之年末預備金,若 n 等於 m 或大於 m ,則保險費已全部繳清,未繳保費之現值為零,故 ${}_{n:m}V_x$ 即等於 A_{x+n} 。若 n 小於 m ,則尚有 $m-n$ 年未繳保險費,故得:

$${}_{n:m}V_x = A_{x+n} - {}_mP_x(1+a_{x+n} \overline{m-n-1}|) \dots \dots \dots (35)$$

但 $A_{x+n} = \overline{m-n}P_{x+n}(1+a_{x+n} \overline{m-n-1}|)$

$$\therefore {}_{n:m}V_x = (\overline{m-n}P_{x+n} - {}_mP_x)(1 + a_{x+n \overline{m-n}|}) \dots \dots \dots (36)$$

公式 (36) 之意義, 與公式 (34) 相似。

(例二) 投保人年三十歲, 投保十五年限期繳費保險額三千元, 求第六年之年末預備金!

a) 應用公式 (35), 得:

$${}_{6:15}V_{30} = A_{36} - {}_{15}P_{30}(1 + a_{36 \overline{6}|})$$

$$A_{36} = 0.37795$$

$${}_{15}P_{30} = \frac{M_{30}}{N_{30} - N_{45}} = \frac{10259}{596804 - 253745} = \frac{10259}{343059}$$

$$a_{36 \overline{6}|} = \frac{N_{37} - N_{45}}{D_{36}} = \frac{408824 - 253745}{23502.5} = \frac{155079}{23502.5}$$

$${}_{6:15}V_{30} = 0.37795 - \frac{10259}{343059} \times \frac{178581.5}{23502.5}$$

$$3000 \times {}_{6:15}V_{30} = 1133.85 - 3000 \times \frac{1832067608.5}{8062744147.5}$$

$$= 1133.85 - 681.68 = 452.17 \text{ 元}$$

b) 應用公式 (36), 得:

$${}_{6:15}V_{30} = ({}_9P_{36} - {}_{15}P_{30})(1 + a_{36 \overline{6}|})$$

$${}_9P_{36} = \frac{M_{36}}{N_{36} - N_{45}} = \frac{8882.80}{432326 - 253745} = \frac{8882.80}{178581}$$

$${}_{15}P_{30} = \frac{10259}{343059}$$

$$a_{36 \overline{6}|} = \frac{155079}{23502.5}$$

$$3000 \times {}_{6:15}V_{30} = 3000 \left(\frac{8882.80}{178581} - \frac{10259}{343059} \right) \frac{178581.5}{23502.5}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5357445000}{235025} \left(\frac{88828}{1785810} - \frac{10259}{343059} \right) \\
&= \frac{475891124460000}{419709995250} - \frac{54062028255000}{80627441475} \\
&= 1133\ 857 - 681.679 = 452.18 \text{ 元}^*
\end{aligned}$$

設 ${}_nV_{x:m}$ 為 m 年生贈保險額第 n 年之年末預備金，則依未繳保費推算法，得：

$${}_nV_{x:m} = A_{x+n \over m-n} - P_{x:m} (1 + a_{x+n \over m-n-1}) \dots\dots\dots (37)$$

但 $A_{x+n \over m-n} = P_{x+n \over m-n} (1 + a_{x+n \over m-n-1})$

$$\therefore {}_nV_{x:m} = (P_{x+n \over m-n} - P_{x:m}) (1 + a_{x+n \over m-n-1}) \dots\dots\dots (38)$$

公式 (38) 之意義，與公式 (34) 相似

(例三) 投保人年二十五歲，投保二十年生贈保險額一千元，求第十年之年末預備金！

應用公式 (37)，得：

$$\begin{aligned}
{}_{10}V_{25:\overline{20}} &= A_{35:10} - P_{25:\overline{20}} (1 + a_{35:9}) \\
A_{35:10} &= \frac{M_{35} - M_{45} + D_{45}}{D_{35}} = \frac{9094.96 - 7192.81 + 15773.6}{24544.7} \\
&= \frac{17675.75}{24544.7} \\
P_{25:\overline{20}} &= \frac{M_{25} - M_{45} + D_{45}}{N_{25} - N_{45}} = \frac{11631.1 - 7192.81 + 15773.6}{770113 - 253745} \\
&= \frac{20211.89}{516368}
\end{aligned}$$

* 因小數關係，相差一分。

$$a_{35} \overline{v}^{\overline{91}} = \frac{N_{36} N_{15}}{D_{35}} = \frac{432326 - 253745}{24544.7} = \frac{178581}{24544.7}$$

$$1000 \times {}_{10}V_{25:20} = \frac{176757500}{245447} - \frac{20211890}{516368} \times \frac{2031257}{245447}$$

$$= 720.145 - 323.933 = 396.21 \text{ 元}$$

設 ${}_nV_x$ 為普通終身保險額一元第 n 年之年末預備金，則 ${}_nV_x + P_x$ 為第 $n+1$ 年初之預備金，是日第 $n+1$ 年之年初預備金 (Initial Reserve)。若死亡生殘表中之 l_{x+n} 人均投保終身保險額一元，則至第 $n+1$ 年初尚有 l_{x+n} 人，共有集合預備金 $l_{x+n}({}_nV_x + P_x)$ 此集合預備金投資一年後，至第 $n+1$ 年末積成

$$l_{x+n}({}_nV_x + P_x)(1+i)$$

在第 $n+1$ 年中共有 d_{x+n} 人死亡，保險公司須支付賠款 d_{x+n} 元，故此集合預備金至第 $n+1$ 年末尚有

$$l_{x+n}({}_nV_x + P_x)(1+i) - d_{x+n}$$

而此集合預備金屬於 l_{x+n+1} 人，即：

$$l_{x+n+1} \cdot {}_{n+1}V_x = l_{x+n}({}_nV_x + P_x)(1+i) - d_{x+n}$$

$${}_{n+1}V_x = \frac{l_{x+n}({}_nV_x + P_x)(1+i) - d_{x+n}}{l_{x+n+1}}$$

$$= \frac{l_{x+n}({}_nV_x + P_x)}{v l_{x+n+1}} - \frac{d_{x+n}}{l_{x+n+1}}$$

$$= \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^{x+n+1} l_{x+n+1}} ({}_nV_x + P_x) - \frac{v^{x+n+1} d_{x+n}}{v^{x+n+1} l_{x+n+1}}$$

$$= \frac{D_{x+n}}{D_{x+n+1}} ({}_nV_x + P_x) - \frac{C_{x+n}}{D_{x+n+1}}$$

$$\text{令} \quad u_x = \frac{D_x}{D_{x+1}} \dots\dots\dots (39)$$

$$k_x = \frac{C_x}{D_{x+1}} \dots\dots\dots 40)$$

則得：

$${}_{n+1}V_x = u_{x+n}({}_nV_x + P_x) - k_{x+n} \dots\dots\dots (41)$$

公式(41)名曰法克勒氏累積公式(Fackler's Accumulation Formula),人壽保險公司均採用此公式,以計算預備金,蓋可依次計算各年預備金故也。 u_{x+n} 與 k_{x+n} 與保險之種類無關,其數值可檢查表十六。

(例四) 投保人年三十五歲,投保普通終身保險額一千元,求前十年之年末預備金!

$$P_{35} = \frac{0.37055}{18.6138} = 0.0199073$$

$${}_0V_{35} = 0$$

$$\begin{aligned} {}_1V_{35} &= u_{35}({}_0V_{35} + 0.0199073) - k_{35} \\ &= 1.044343 \times 0.0199073 - 0.009027 = 0.0117630 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_2V_{35} &= u_{36}({}_1V_{35} + 0.0199073) - k_{36} \\ &= 1.044493 \times 0.0316703 - 0.009172 = 0.0239074 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_3V_{35} &= u_{37}({}_2V_{35} + 0.0199073) - k_{37} \\ &= 1.044647 \times 0.0438147 - 0.009320 = 0.0364509 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_4V_{35} &= u_{38}({}_3V_{35} + 0.0199073) - k_{38} \\ &= 1.044830 \times 0.0563582 - 0.009498 = 0.0493867 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_5V_{35} &= u_{39}({}_4V_{35} + 0.0199073) - k_{39} \\
 &= 1.045018 \times 0.0692940 - 0.009679 = 0.0627345
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_6V_{35} &= u_{40}({}_5V_{35} + 0.0199073) - k_{40} \\
 &= 1.045238 \times 0.0826418 - 0.009891 = 0.0764893
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_7V_{35} &= u_{41}({}_6V_{35} + 0.0199073) - k_{41} \\
 &= 1.045463 \times 0.0963966 - 0.010109 = 0.0906701
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_8V_{35} &= u_{42}({}_7V_{35} + 0.0199073) - k_{42} \\
 &= 1.045721 \times 0.1105774 - 0.010359 = 0.1052741
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_9V_{35} &= u_{43}({}_8V_{35} + 0.0199073) - k_{43} \\
 &= 1.046001 \times 0.1251814 - 0.010629 = 0.1203109
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_{10}V_{35} &= u_{44}({}_9V_{35} + 0.0199073) - k_{44} \\
 &= 1.046331 \times 0.1402182 - 0.010947 = 0.1357676
 \end{aligned}$$

以保險額一千元乘以上各數，即得各年末之預備金，試以第十年為例，則得：

$$1000 \times {}_{10}V_{35} = 135.77 \text{ 元,}$$

與例一求得之結果相差一分，蓋由表十六中之 u_x 與 k_x 求得之小數較由表十五中之 C_x 與 D_x 求得之小數更為準確故也。

習 題 三 十

1. 求下表中普通終身保險之預備金！

	投保人之年齡	保險額	年末預備金
a)	四十歲	\$ 1000	第二十年
b)	四十五歲	1500	第十五年

c)	五十歲	2000	第十年
d)	五十五歲	3000	第八年
e)	六十歲	4000	第六年

2. 求下表中限期繳費保險之預備金!

	投保人之年齡	保險額	繳費期限	年末預備金
a)	三十歲	\$ 1000	二十年	第十年
b)	三十五歲	2000	二十五年	第十五年
c)	四十歲	3000	十年	第九年
d)	四十歲	3000	十年	第十年
e)	四十歲	3000	十年	第十一年

3. 求下表中生贈保險之預備金!

	投保人之年齡	保險期限	保險額	年末預備金
a)	三十歲	二十年	\$ 2000	第五年
b)	三十五歲	十五年	3000	第十年
c)	四十歲	二十年	4000	第十年
d)	四十歲	二十年	4000	第十五年
e)	四十歲	二十年	4000	第十九年

4. 投保人年六十歲,投保普通終身保險額四千元,求前六年之年末預備金!

5. 投保人年三十五歲,投保十年限期繳費保險額一千元,求前十年之年末預備金!

本編應用公式

$${}_nE_x = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} \dots \dots \dots (1)$$

$$a_x = \frac{vl_{x+1} + v^2l_{x+2} + \dots \dots \dots \text{至表之極限為止}}{l_x} \dots \dots \dots (2)$$

$$D_x = v^x l_x \dots \dots \dots (3)$$

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots \dots \dots \text{至表之極限為止}}{D_x} \dots \dots \dots (4)$$

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots \text{至表之極限爲止} \dots\dots\dots (5)$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \dots\dots\dots (6)$$

$${}_n E_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \dots\dots\dots (7)$$

$$n/a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x} \dots\dots\dots (8)$$

$$a_{x_n} = a_x - n/a_x \dots\dots\dots (9)$$

$$a_{x_n} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \dots\dots\dots (10)$$

$$a'_x = 1 + a_x = \frac{N_x}{D_x} \dots\dots\dots (11)$$

$$a'_{x_n} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \dots\dots\dots (12)$$

$$a_x^{(p)} = a_x + \frac{p-1}{2p} \dots\dots\dots (13)$$

$$a_x^{(p)'} = a_x + \frac{p+1}{2p} \dots\dots\dots (14)$$

$$n/a_x^{(p)} = \frac{1}{D_x} (N_{x+n+1} + \frac{p-1}{2p} D_{x+n}) \dots\dots\dots (15)$$

$$n/a_x^{(p)'} = \frac{1}{D_x} (N_{x+n+1} + \frac{p+1}{2p} D_{x+n}) \dots\dots\dots (16)$$

$$a_n^{(p)} = \frac{1}{D_x} (N_{x+1} - N_{x+n+1} + \frac{p-1}{2p} (D_x - D_{x+n})) \dots\dots\dots (17)$$

$$a_n^{(p)'} = \frac{1}{D_x} (N_{x+1} - N_{x+n+1} + \frac{p+1}{2p} (D_x - D_{x+n})) \dots\dots\dots (18)$$

$$A_x = \frac{v d_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \dots \text{至表之極限爲止}}{i_x} \dots\dots\dots (19)$$

$$G_x = v^{x+1} d_x \dots\dots\dots (20)$$

$$M_x = G_x + G_{x+1} + G_{x+2} + \dots \text{至表之極限爲止} \dots\dots\dots (21)$$

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \dots\dots\dots (22)$$

$$A_x = v(1 + a_x) - a_x \dots\dots\dots (23)$$

$$P_x = \frac{A_x}{1 + a_x} \dots\dots\dots (24)$$

$$P_x = \frac{M_x}{N_x} \dots\dots\dots (25)$$

$${}_n P_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+n}} \dots\dots\dots (26)$$

$$A^1_{x:n} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \dots\dots\dots (27)$$

$$A^1_{x:1} = \frac{M_x - M_{x+1}}{D_x} = \frac{C_x}{D_x} \dots\dots\dots (28)$$

$$P^1_{x:n} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \dots\dots\dots (29)$$

$$A_{x:n} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \dots\dots\dots (30)$$

$$P_{x:n} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \dots\dots\dots (31)$$

$${}_n V_x = A_{x+n} - P_x(1 + a_{x+n}) \dots\dots\dots (32)$$

$${}_n V_x = (P_{x+n} - P_x)(1 + a_{x+n}) \dots\dots\dots (33)$$

$${}_n V_x = 1 - \frac{1 + a_{x+n}}{1 + a_x} \dots\dots\dots (34)$$

$${}_{n:m} V_x = A_{x+n} - m P_x(1 + a_{x+n} \overline{m-n-1}) \dots\dots\dots (35)$$

$${}_{n:m} V_x = (\overline{m-n} P_{x+n} - m P_x)(1 + a_{x+n} \overline{m-n-1}) \dots\dots\dots (36)$$

$${}_n V_{x:\overline{m}|} = A_{x+n} \overline{m-n} - P_{x:\overline{m}|} (1 + a_{x+n} \overline{m-n-1}) \dots\dots\dots (37)$$

$${}_n V_{x:\overline{m}|} = (P_{x+n} \overline{m-n} - P_{x:\overline{m}|}) (1 + a_{x+n} \overline{m-n-1}) \dots\dots\dots (38)$$

$$u_x = \frac{D_x}{D_{x+1}} \dots\dots\dots (39)$$

$$k_x = \frac{C_x}{D_{x+1}} \dots\dots\dots (40)$$

$${}_{n+1} V_x = u_{x+n}({}_n V_x + P_x) - k_{x+n} \dots\dots\dots (41)$$

答 案

習 題 一

- | | | |
|----------------|----------------|---------------|
| 1. a) 1.623249 | b) 1.544068 | c) 2.535294 |
| d) 0.772611 | e) 0.822782 | f) 2.795880 |
| 2. a) 1.609438 | b) 1.945910 | c) 2.397895 |
| d) 5.955837 | e) 5.840642 | f) 7.194437 |
| 3. a) 0.698970 | b) 0.845098 | c) 1.041393 |
| d) 2.586587 | e) 2.536559 | f) 3.124504 |
| 4. a) 1.642366 | b) 2.590507 | c) 1.8024524 |
| d) 6.939170 | e) 1.86843791 | f) 2.53512164 |
| 5. a) 3.991991 | b) 0.002312092 | c) 38919.73 |
| d) 0.02429292 | e) 44.60225 | f) 0.0304467 |
| 6. a) 3.4872 | b) 7.1758 | c) 0.00004482 |
| d) 0.00048844 | e) 2.3632 | f) 3.9175 |
| g) 1.1734 | h) 1.1751 | i) 58.47 |
| j) 369.67 | k) 53.799 | l) 17.829 |
| 7. -50.39 | | |
| 8. 7 | | |

習 題 二

- | | |
|------------------|-----------------|
| 1. 單利息 \$ 116.10 | 本利合計 \$ 761.10 |
| 2. 本金 \$ 1000 | 本利合計 \$ 1112.50 |
| 3. 年利率 6 % | 本利合計 \$ 460 |
| 4. 時期 4 年 | 本利合計 \$ 627 |
| 5. 本金 \$ 1000 | 單利息 \$ 520 |
| 6. 時期 20 年 | 單利息 \$ 400 |

- | | | |
|--------------|------------------------|------------------------|
| 7. \$ 328.80 | 8. \$ 105.91 | 9. \$ 44.55 |
| 10. \$ 9.60 | 11. \$ 10.80 | 12. \$ 10.95 |
| 13. 30年 | 14. 33 $\frac{1}{3}$ 年 | 15. 57 $\frac{1}{7}$ 年 |

習 題 三

- | | | |
|-----------------|--------------|-------------|
| 1. \$ 284.11 | | |
| 2. \$ 275 | | |
| 3. \$ 227.41 | | |
| 4. a) \$ 58.33 | b) \$ 17.50 | |
| 5. \$ 342.50 | | |
| 6. a) \$ 119.24 | b) \$ 66.96 | c) \$ 65.77 |
| d) \$ 162.29 | e) \$ 379.76 | |

習 題 四

- | | | |
|----------------------------------|--------------|--------------|
| 1. a) \$ 191.78 | b) \$ 104.02 | c) \$ 122.36 |
| d) \$ 60.68 | e) \$ 25.28 | |
| 2. a) \$ 505.48 | b) \$ 389.32 | c) \$ 153.42 |
| d) \$ 337.53 | e) \$ 235.18 | |
| 3. a) \$ 28.00 | b) \$ 27.62 | |
| 4. $I' = I''' + \frac{I'''}{60}$ | | |
| $I'' = I' - \frac{I'}{61}$ | | |

(I' 普通利息 I''' 四年準確利息)

- | | |
|-------------|-------------|
| 5. \$ 22.19 | 6. \$ 11.94 |
|-------------|-------------|

習 題 五

- | | | |
|----|-----------|-----------|
| 1. | 複利終值 | 複利息 |
| a) | \$ 805.88 | \$ 355.88 |
| b) | 640.04 | 140.04 |
| c) | 861.95 | 311.95 |

- | | | | |
|-------|------------|---------------|---------------|
| d) | 1335.32 | | 735.32 |
| e) | 4709.02 | | 4059.02 |
| f) | 2441.05 | | 1741.05 |
| g) | 2235716.49 | | 2234966.49 |
| h) | 1251.56 | | 451.56 |
| i) | 1326.43 | | 476.43 |
| j) | 1411.48 | | 511.48 |
| 2. a) | 6.09% | b) 6.136355% | c) 6.167781% |
| d) | 6.1844% | e) 6.1836% | |
| 3. a) | \$ 558.39 | b) \$ 617.98 | c) \$ 607.78 |
| d) | \$ 1141.63 | e) \$ 772.73 | f) \$ 436.45 |
| g) | \$ 1260.97 | h) \$ 1895.89 | i) \$ 3051.35 |
| j) | \$ 1411.71 | | |
| 4. a) | 9.0064 年 | b) 8.3367 年 | c) 10.7457 年 |
| d) | 8.3 年 | e) 20.9122 年 | f) 8.44718% |
| g) | 4.85264% | h) 5.96338% | i) 1.67244% |
| j) | 3.4219% | | |
| 5. a) | 5.86954% | b) 5.8269% | c) 6.18% |
| d) | 9.6456% | e) 6.765% | |
| 7. | 21 年 | | |
| 8. | \$ 4318.02 | | |
| 9. | 37 年 | | |
| 10. | \$ 25000 | | |
| 11. | 151 年 | | |
| 12. | 5.9554% | | |

習 題 六

1.	到期金額	貼現息	淨收額
a)	\$ 5075.00	\$ 35.04	\$ 5039.96
b)	5500.00	39.64	5460.36
c)	6000.00	67.07	5932.93
d)	6594.38	91.06	6503.32
e)	7000.00	37.20	6962.80
f)	8000.00	41.86	7958.14

2.

單 利 率	折 合 單 貼 現 率			單 貼 現 率	折 合 單 利 率		
	一 月	二 月	三 月		一 月	二 月	三 月
%	%	%	%	%	%	%	%
3	2.9925	2.9851	2.9777	3	3.0075	3.0151	3.0227
4	3.9867	3.9735	3.9604	4	4.0134	4.0268	4.0404
5	4.9793	4.9587	4.9383	5	5.0209	5.0420	5.0633
6	5.9701	5.9406	5.9113	6	6.0302	6.0606	6.0914
7	6.9594	6.9193	6.8796	7	7.0411	7.0826	7.1247
8	7.9470	7.8947	7.8431	8	8.0537	8.1081	8.1633
9	8.9330	8.8670	8.8020	9	9.0680	9.1371	9.2072
10	9.9174	9.8361	9.7561	10	10.0840	10.1695	10.2564

3. 貼 現 息 淨 收 額
- a) \$ 375.00 \$ 12125.00
- b) 375.00 12125.00
- c) 364.08 12135.92
- d) 364.08 12135.92
4. a) \$ 17718.75 b) \$ 17718.75
- c) \$ 17721.52 d) \$ 17721.52
5. 貼 現 息 £ 2⁶/₁₁ 淨 收 額 £ 394⁶/₁₁
6. \$ 287.47
7. 13.33 %
8. \$ 20000
9. 12.77 %
10. \$ 975

習 題 七

1. a) 5.91 % b) 5.8663 % c) 5.8236 %
- d) 4.9375 % e) 3.1273 %
2. a) 6.0929 % b) 6.14 % c) 6.1875 %
- d) 5.0641 % e) 4.0755 %
3. a) 5.8252 % b) 5.9113 % c) 5.6604 %
- d) 4.8780 % e) 3.9867 %

- | | | |
|----------------|-------------|-------------|
| 4. a) 6.1856 % | b) 6.0914 % | e) 6.3880 % |
| d) 5.1282 % | e) 4.0184 % | |
| 5. 淨收額 | 貼現息 | |
| a) \$ 603.27 | \$ 146.73 | |
| b) 603.27 | 146.73 | |
| c) 612.22 | 137.78 | |
| d) 612.22 | 137.78 | |
| 6. 淨收額 | 貼現息 | |
| a) \$ 509.43 | \$ 140.57 | |
| b) 509.43 | 140.57 | |
| c) 513.12 | 136.88 | |
| d) 513.12 | 136.88 | |
| 7. 淨收額 | 貼現息 | |
| a) \$ 510.00 | \$ 340.00 | |
| b) 560.22 | 289.78 | |
| c) 565.11 | 234.89 | |
| d) 569.01 | 289.99 | |
| e) 569.77 | 280.23 | |
| 8. 6.1875 % | | |

習 題 八

- | | | |
|------------------|---------------|---------------|
| 1. a) \$ 4492.40 | b) 233 日後 | c) \$ 5507.59 |
| d) 19 日後 | c) 114 日後 | f) 114 日後 |
| g) \$ 5011.21 | h) \$ 5011.04 | |
| 2. a) \$ 3410.09 | b) \$ 3410.84 | e) \$ 3388.20 |
| d) \$ 3388.30 | e) \$ 3403.36 | f) \$ 3403.33 |
| g) 93 日後 | h) 94 日後 | i) 9 日後 |
| j) 8 日後 | k) 51 日後 | l) 51 日後 |
| 3. a) 二月後 | b) 不可能 | |
| 4. a) 不可能 | b) 一月前 | |
| 5. \$ 214.58 | | |

習 題 九

- | | | |
|------------------|---------------|---------------|
| 1. a) \$ 4320.06 | b) \$ 4326.92 | c) \$ 4304.35 |
|------------------|---------------|---------------|

- d) \$ 4339.29 e) \$ 5250.00 f) \$ 4761.90
 g) \$ 5170.00 h) \$ 5851.06
 2. a) 4.49 年 b) 4.67 年 c) 4.40 年
 d) 4.56 年 e) 5.30 年 f) 4.70 年
 g) 2.55 年 h) 1.43 年
 3. a) \$ 8026.92 b) \$ 8709.77 c) \$ 9844.48
 d) \$ 8062.65 e) \$ 8720.56 f) \$ 9809.45
 g) 3.68 年 h) 4.80 年 i) 5.83 年
 j) 3.63 年 k) 4.80 年 l) 5.91 年
 4. 第一種
 5. \$ 684.26

習 題 十

1. a) $l=57$ $S=434$ b) $d=-2$ $S=260$ c) $n=11$ $S=176$
 d) $a=7$ $S=315$ e) $l=-19$ $S=0$
 2. 6
 4. $a=4$ $n=6$
 5. $a=3$ $l=33$
 6.

l	S
a) 420	3080
b) 9240	53130
c) 160000	722666
d) 461	3520
e) 821	5970

習 題 十 一

1. a) $r=3$ $S=242$ b) $n=6$ $S=723$ c) $r=3$ $n=5$
 d) $l=1458$ $S=2186$ e) $r=3$ $l=486$ f) $n=5$ $l=162$
 g) $a=2$ $S=728$ h) $a=2$ $r=3$ i) $a=2$ $n=5$
 j) $a=2$ $l=1458$
 2. a) $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ b) $\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}$
 c) $\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$ d) $\frac{(1+i) - (1+i)^{1-n}}{i}$

9. a) \$ 88.75 b) \$ 75.00 c) \$ 73.17
10. a) \$ 1082.68 b) \$ 1377.12
11. \$ 276.28
12. \$ 590.49
13. \$ 635.41
14. $11 < n < 12$
15. 甲較優
17. ${}_m S_n = (1+i)^m S_{n+1} - S_m$ (${}_m S_n$ 為簡單年金一元繼續支付 n 年在 $n+m$ 年末之終值)
18. $A = \$ 4564.43$ $K = \$ 26215.78$
19. $A = \$ 3795.50$ $K = \$ 39039.44$
20. a) \$ 1703.75 b) \$ 883.64
21. 4%
22. \$ 1086.26
23. \$ 800
24. \$ 24744.74
25. \$ 25255.38

習 題 十 四

1.

終值與現值 每年支付年金次數 每年複利次數	年 金 終 值			年 金 現 值		
	每年複利一次	每年複利二次	每年複利四次	每年複利一次	每年複利二次	每年複利四次
每年支付年金一次	\$ 18392.80	\$ 18571.74	\$ 18564.69	\$ 5734.96	\$ 5693.29	\$ 5672.01
每年支付年金二次	18664.67	18850.31	18946.76	5819.73	5778.69	5757.73
每年支付年金四次	18801.61	18990.65	19088.86	5862.43	5821.71	5800.92

2.

年金時期	支付方法	每月零存額	每季零存額
五 年 期		\$ 13.6214	\$ 40.6035
十 年 期		5.5162	16.4431
二 十 年 期		1.7462	5.2053

年金時期	支付方法	每月零付額	每季零付額
五 年 期		\$ 20.1431	\$ 60.8188
十 年 期		11.9858	36.1891
二 十 年 期		8.1915	24.7330

4. \$ 94046.31
5. a) \$ 1188.47 b) \$ 1187.21
6. \$ 287.02
7. a) \$ 8.60 b) \$ 8.11
8. \$ 352.64
9. \$ 67.77
10. \$ 3848.40
11. \$ 0.6457
12. a) \$ 3511.79 b) \$ 3602.68 c) \$ 3623.08
 d) \$ 3630.95 e) \$ 3633.30
13. a) 11.6688 年 b) 11.5973 年
14. a) 34.9372 年 b) 35.665 年

習 題 十 五

1. 年金終值 年金現值
- a) \$ 6473.57 \$ 3113.90
- b) 7789.28 3746.78
- c) 5157.86 2481.02
- d) 9528.90 4583.56
- e) 8909.09 4285.71
2. \$ 44444.44
3. a) 無窮大 b) 無窮大 c) \$ 20000
 d) \$ 5000 e) \$ 3333.33
4. \$ 34735.69
5. \$ 7422.11
6. \$ 6413.57
7. \$ 7537.79

8. \$ 7215.26
 9. \$ 1405.21
 10. \$ 961.80

習 題 十 六

- | | | |
|-----|----------------|-------------------------|
| 1. | a) \$ 1733.33 | b) \$ 2171.86 |
| 2. | \$ 11310.10 | |
| 3. | a) \$ 2615.54 | b) \$ 25402.78 |
| | c) \$ 1377.83 | d) \$ 771.69 |
| 4. | \$ 2590.09 | |
| 5. | \$ 3176.90 | |
| 6. | a) \$ 963.42 | b) \$ 963.42 |
| | c) \$ 999.41 | d) \$ 929.63 |
| 7. | \$ 15018.01 | |
| 8. | \$ 3814.01 | |
| 9. | \$ 32006.67 | |
| 10. | \$ 3528.95 | |
| 11. | \$ 13106.20 | |
| 12. | 11.28% | |
| 13. | a) \$ 44481.08 | b) \$ 46790.88 第一種較利於某城 |
| 15. | \$ 3793.40 | |

習 題 十 七

- | | | |
|----|------------------|--------------------|
| 1. | \$ 4559.56 | |
| 2. | \$ 830.27 | |
| 3. | a) \$ 5200 | b) \$ 5350.96 |
| 5. | $f = \$ 1278.24$ | $L_5 = \$ 5964.34$ |

習 題 十 八

- | | | |
|----|-------------|---------------|
| 1. | 529.011 | |
| 2. | 7.23878 | |
| 3. | a) 3.371917 | b) 3.37191712 |

- | | | | |
|----|---------------|---------------|---------------|
| 4. | 三數插補法 | 四數插補法 | |
| a) | 1.89574296 | 1.89584296 | |
| b) | 0.49854136 | 0.49852866 | |
| c) | 26.24179452 | 26.24203759 | |
| d) | 18.98269540 | 18.98197562 | |
| 5. | a) 1.81950728 | b) 1.819488 | c) 1.81950201 |
| 6. | a) 1.00175382 | b) 1.00175346 | |
| | c) 1.00175382 | d) 1.00175382 | |
| 7. | a) 0.06645610 | b) 0.06647641 | c) 0.03645668 |
| 8. | 0.54953930 | | |

習 題 十 九

1. 9.5957 %
2. 8.27594 %
3. 5.27994 %
4. 5.0787 %
5. 2.44089326
6. a) 7.17495 % b) 7.18029 % c) 7.1776 %
 d) 7.1773 % e) 7.181 %

習 題 二 十

1. a) \$ 24392.93 b) \$ 22797.13 c) \$ 26832.22

3—8 收回債券張數

	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年	第六年	第七年
3.	340	369	397	430	464		
4.	\$ 170450	\$ 184050	\$ 198850	\$ 214700	\$ 231950		
5.	a) 250	270	291	315	340	367	167
	b) 104	258	280	301	325	352	330
6.	a) 267	323	395	466	544		
	b) 256	318	390	471	565		
7.	340	369	397	430	464		
8.	342	370	398	428	461		

習 題 二 十 一

1—8 收回債券張數

	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
1.	463	430	397	369	341
2.	340	369	397	430	464
3.	450	422	397	375	356
4.	447		397	377	358
5.	445	421	397	377	360
6.	449	422	397	375	357
7.	404	404	401	398	393
8.	369	384	399	416	432

習 題 二 十 二

- | | | | |
|-----|------------------|--------------|--------------|
| 1. | a) \$ 116.53 | b) \$ 114.72 | c) \$ 117.67 |
| 2. | a) \$ 105.076 | b) \$ 95.233 | |
| 3. | a) \$ 107.54 | b) \$ 103.16 | |
| 4. | \$ 103.12 | | |
| 5. | a) \$ 97.34 | b) \$ 102.78 | |
| 6. | a) \$ 106.42 | b) \$ 106.43 | |
| 7. | a) \$ 102.80 | b) \$ 102.75 | c) \$ 103.12 |
| 8. | \$ 111.49 | | |
| 9. | \$ 113.41 | | |
| 10. | \$ 68.10 | | |
| 11. | $\frac{5}{12}$ % | \$ 65.4109 | |
| | $\frac{1}{2}$ % | 64.0000 | |
| | $\frac{7}{12}$ % | 62.6295 | |
| | $\frac{3}{4}$ % | 59.9046 | |
| | 1 % | 56.3392 | |
| | $1\frac{1}{8}$ % | 54.6205 | |

$1\frac{1}{4}\%$	52.9730
$1\frac{1}{2}\%$	49.8786
$1\frac{3}{4}\%$	47.0312
2%	44.4084

習 題 二 十 三

- | | | |
|-----------|------------|-------------|
| 1. 6.701% | 2. 9.9361% | 3. 7.062% |
| 4. 12.43% | 5. 28.22% | 6. 6.41129% |

習 題 二 十 四

- | | |
|-----------------------|---------------------|
| 1. a) $D = \$ 920$ | b) $p = 22.32\%$ |
| 2. a) $D = \$ 471.85$ | b) $D = \$ 1151.85$ |
| 3. $\$ 40534.23$ | |
| 4. $\$ 4332.04$ | |
| 5. $\$ 623.59$ | |
| 6. a) $\$ 1950$ | b) $\$ 1293.70$ |
| c) $\$ 2149.40$ | d) $\$ 2949.40$ |

習 題 二 十 五

- | | | |
|---|-------------------|-------------------|
| 1. a) 11.60 年 | b) 11.59 年 | c) 11.58 年 |
| 2. a) $\$ 30751.03$ | b) $\$ 129950.44$ | c) $\$ 279722.97$ |
| 3. $C' = \frac{C}{i} \frac{1}{a_{\overline{n} i}} - \frac{S}{i} \frac{1}{s_{\overline{n} i}}$ | | |
| 4. $\$ 104825.20$ | | |
| 5. a) $\$ 16805.83$ | b) $\$ 21947.30$ | c) $\$ 24942.58$ |
| d) $\$ 30363.71$ | e) $\$ 34380.54$ | |

習 題 二 十 六

- | |
|-------------------|
| 1. $\$ 585747.04$ |
| 2. $\$ 623110.52$ |

3. \$ 710820.17

4. a) \$ 10281.14

b) \$ 9290.48

習 題 二 十 七

1. a) 720

b) 30240

c) 210

d) 5

e) 120

f) 1

g) 24

h) 20

3. 495

4. 1860480

5. 3628800

6. 252

7 a) $\frac{6}{21}$ b) $\frac{7}{21}$ c) $\frac{8}{21}$ d) $\frac{9}{21}$ e) $\frac{12}{21}$

8.

擲得點數

機 率

2

 $\frac{1}{36}$

3

 $\frac{2}{36}$

4

 $\frac{3}{36}$

5

 $\frac{4}{36}$

6

 $\frac{5}{36}$

7

 $\frac{6}{36}$

8

 $\frac{5}{36}$

9

 $\frac{4}{36}$

10

 $\frac{3}{36}$

11

 $\frac{2}{36}$

12

 $\frac{1}{36}$

- | | | | |
|-----|----------------------------|----------------------------|--------------------------|
| 9. | $\frac{12}{145}$ | 10. | $\frac{3}{5}$ |
| 11. | $\frac{47}{60}$ | 12. | $\frac{663991}{1679616}$ |
| 13. | a) 0.992366
d) 0.816985 | b) 0.961085
e) 0.603029 | c) 0.919018 |
| 14. | a) 0.007805
d) 0.014654 | b) 0.008222
e) 0.506197 | c) 0.085849 |
| 15. | a) 0.998504 | b) 0.941037 | |
| 16. | 0.787139 | | |

習 題 二 十 八

- | | | | |
|----|----------------------------------|----------------------------------|---------------|
| 1. | \$ 65551.68 | | |
| 2. | \$ 6245.70 | | |
| 3. | a) \$ 29086.38
c) \$ 29997.00 | b) \$ 31014.23
d) \$ 30130.66 | |
| 4. | a) \$ 15810.65
c) \$ 16127.59 | b) \$ 16502.20
d) \$ 16185.22 | |
| 5. | a) \$ 4057.06 | b) \$ 2127.72 | c) \$ 1929.35 |
| 6. | 確實年金 | 生命年金 | |
| a) | \$ 9979.93 | \$ 9536.79 | |
| b) | 44817.03 | 25239.69 | |
| c) | 28082.45 | 26476.43 | |
| d) | 28571.43 | 15926.20 | |
| e) | 7813.83 | 6443.15 | |

習 題 二 十 九

- | | | | | |
|----|-----------|----------|----------|----------|
| 1. | 臺灣保費 | 普通終年 | 限期十年繳費 | 限期二十年繳費 |
| a) | \$ 508.49 | \$ 34.98 | \$ 63.20 | \$ 40.82 |
| b) | 684.00 | 42.52 | 83.72 | 52.60 |
| c) | 820.06 | 47.01 | 99.55 | 61.50 |
| d) | 926.38 | 49.77 | 111.94 | 65.49 |
| e) | 1011.06 | 51.57 | 121.82 | 74.14 |

- | | | |
|----|------------|-------------|
| 2. | 躉繳保費 | 年繳保費 |
| a) | \$ 106.17 | \$ 23.23 |
| b) | 263.62 | 32.00 |
| c) | 446.45 | 39.82 |
| d) | 641.17 | 47.01 |
| e) | 840.22 | 53.79 |
| 3. | 躉繳保費 | 年繳保費 |
| a) | \$ 538.82 | \$ 39.51 |
| b) | 1079.22 | 130.10 |
| c) | 972.19 | 71.49 |
| d) | 1239.89 | 110.32 |
| e) | 1854.10 | 99.92 |
| 4. | a) \$ 8.14 | b) \$ 17.68 |
| 5. | a) \$ 8.14 | b) \$ 26.02 |

習 題 三 十

- | | | | |
|----|---------------|---------------|---------------|
| 1. | a) \$ 327.63 | b) \$ 471.29 | c) \$ 481.91 |
| | d) \$ 675.45 | e) \$ 786.70 | |
| 2. | a) \$ 206.46 | b) \$ 627.52 | c) \$ 1344.64 |
| | d) \$ 1525.47 | e) \$ 1559.01 | |
| 3. | a) \$ 355.65 | b) \$ 1777.30 | c) \$ 1586.64 |
| | d) \$ 2651.09 | e) \$ 3700.03 | |
| 4. | 第一年 \$ 132.01 | 第二年 \$ 263.99 | |
| | 第三年 \$ 395.70 | 第四年 \$ 526.92 | |
| | 第五年 \$ 657.37 | 第六年 \$ 786.69 | |
| 5. | 第一年 \$ 37.73 | 第二年 \$ 77.01 | |
| | 第三年 \$ 117.90 | 第四年 \$ 160.47 | |
| | 第五年 \$ 204.80 | 第六年 \$ 250.98 | |
| | 第七年 \$ 299.09 | 第八年 \$ 349.23 | |
| | 第九年 \$ 401.50 | 第十年 \$ 456.00 | |

附 錄 甲

數 學 原 理

1. 二項式展開

二項式 $(a+b)^n$ 即為 n 個 $a+b$ 連乘之積, 求此連乘之積, 名曰二項式展開(Binomial Expansion). 二項式展開之公式如下:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ & a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4}b^4 + \dots \dots \dots (1)\end{aligned}$$

(證明參看 Fine 所著之 College Algebra 256 頁)

例如:

$$(a+b)^2 = a^2 + \frac{2}{1} a b + \frac{2 \times 1}{1 \times 2} b^2 = a^2 + 2 ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + \frac{3}{1} a^2b + \frac{3 \times 2}{1 \times 2} ab^2 + b^3 = a^3 + 3 a^2b + 3 ab^2 + b^3$$

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= a^4 + \frac{4}{1} a^3b + \frac{4 \times 3}{1 \times 2} a^2b^2 + \frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3} ab^3 \\ & + \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} b^4 = a^4 + 4 a^3b + 6 a^2b^2 + 4 ab^3 + b^4\end{aligned}$$

$$(a+b)^5 = a^5 + \frac{5}{1} a^4b + \frac{5 \times 4}{1 \times 2} a^3b^2 + \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} a^2b^3$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4} a b^4 + \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} b^5 = a^5 + 5 a^4 b \\
 & + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5
 \end{aligned}$$

2. e 之數值

二項式 $(a+b)^n$ 展開時，若 n 為有限整數，則展開式中之項數有限，反之，若 n 為無窮大，則展開式中之項數亦為無窮多。例如 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 之展開式，若 n 為無窮大，則其項數為無窮多，此無窮多項數總和之極限 (Limit)，即作為自然對數之底。故自然對數之底 e ，乃二項式 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 之極限，以公式表之如下：

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \dots\dots\dots (2)$$

(證) \lim 為極限之記號， ∞ 為無窮大之記號。

應用公式 (1)，得：

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \\
 &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{1}{n}\right)^4 \\
 &+ \dots\dots = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 \cdot 2} + \frac{1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\
 &+ \frac{1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots\dots
 \end{aligned}$$

若 n 為無窮大，則 $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, $\frac{4}{n}$, $\dots\dots$ 之極限均為零。

$$\therefore e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots \dots \dots (3)$$

即 $e = 2.718281828459045 \dots \dots$

(註)! 爲階乘 (Factorial) 之記號, $3! = 3 \times 2 \times 1$, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$, 餘類推.

e 之數值, 若祇欲求至小數五位, 則可演算如下:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ 0.5 \\ 0.1666667 \\ 0.0416667 \\ 0.0083333 \\ 0.0013889 \\ 0.0001984 \\ 0.0000248 \\ 0.0000028 \\ \hline 0.0000003 \\ 2.7182819 \\ e = 2.71828 \end{array}$$

3. e^x 之數值

$$e^x = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{nx}$$

應用公式(1)得:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{nx} &= 1 + \frac{nx}{1} \frac{1}{n} + \frac{nx(nx-1)}{2!} \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3!} \left(\frac{1}{n} \right)^3 \\ &+ \frac{nx(nx-1)(nx-2)(nx-3)}{4!} \left(\frac{1}{n} \right)^4 + \dots \dots \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x(x-\frac{1}{n})}{2!} + \frac{x(x-\frac{1}{n})(x-\frac{2}{n})}{3!} \\ + \frac{x(x-\frac{1}{n})(x-\frac{2}{n})(x-\frac{3}{n})}{4!} + \dots$$

若 n 為無窮大, 則 $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}$, 之極限均為零。

$$\therefore e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \dots \dots (4)$$

4. a^x 之數值

令 $a = e^c$

$$\log_e a = c$$

應用公式 (4), 得:

$$a^x = e^{cx} = 1 + \frac{cx}{1} + \frac{c^2x^2}{2!} + \frac{c^3x^3}{3!} + \frac{c^4x^4}{4!} + \dots$$

以 $\log_e a$ 代入上式中之 c , 得:

$$a^x = 1 + \frac{x}{1} \log_e a + \frac{x^2}{2!} (\log_e a)^2 + \frac{x^3}{3!} (\log_e a)^3 \\ + \frac{x^4}{4!} (\log_e a)^4 + \dots \dots \dots (5)$$

5. 兩個 x 之多項式若為恆等式, 則兩邊 x 同幕之係數均相等, 即

$$\text{若 } a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} \\ + b_2 x^{n-2} + \dots + b_n \dots \dots \dots \left. \right\} (6)$$

則 $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n \dots \dots \dots$

(註)! 若等式之兩邊, 不論 x 之數值而常相等, 則此等式名曰恆等式。≡ 爲恆等式之記號。

$$(證) (a_0 - b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + (a_2 - b_2)x^{n-2} + \dots + (a_{n-2} - b_{n-2})x^2 + (a_{n-1} - b_{n-1})x + (a_n - b_n) \equiv 0$$

$$\text{令} \quad x = 0$$

$$\text{則} \quad a_n - b_n = 0$$

$$a_n = b_n$$

$$(a_0 - b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + (a_2 - b_2)x^{n-2} + \dots + (a_{n-2} - b_{n-2})x^2 + (a_{n-1} - b_{n-1})x = 0$$

以 x 除上式之兩邊, 得:

$$(a_0 - b_0)x^{n-1} + (a_1 - b_1)x^{n-2} + (a_2 - b_2)x^{n-3} + \dots + (a_{n-2} - b_{n-2})x + (a_{n-1} - b_{n-1}) = 0$$

$$\text{令} \quad x = 0$$

$$\text{則} \quad a_{n-1} - b_{n-1} = 0$$

$$a_{n-1} = b_{n-1}$$

$$\text{同理可證} \quad a_{n-2} = b_{n-2}$$

.....

$$a_2 = b_2$$

$$a_1 = b_1$$

$$a_0 = b_0$$

6. $\log_e(1+y)$ 之值

$$\text{令} \quad a = 1 + y$$

$$\log_e a = \log_e(1 + y)$$

應用公式(5), 得:

$$(1+y)^x = 1 + \frac{x}{1} \log_e (1+y) + \frac{x^2}{2!} [\log_e (1+y)]^2 + \dots$$

應用公式(1), 得:

$$(1+y)^x = 1 + \frac{x}{1} y + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} y^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} \therefore 1 + \frac{x}{1} \log_e (1+y) + \frac{x^2}{2!} [\log_e (1+y)]^2 + \dots &\equiv 1 + \frac{x}{1} y \\ &+ \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} y^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3 + \dots \end{aligned}$$

應用公式(6), 得:

$$\begin{aligned} \therefore \log_e (1+y) &= y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots \text{(恆等式兩邊 } x \text{ 之} \\ &\text{係數相等)} \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

令 $y = 1$

則 $\log_e 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

令 $y = \frac{1}{2}$

則 $\log_e \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^4} + \dots$

即 $\log_e 3 = \log_e 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^4} + \dots$

令 $y = \frac{1}{3}$

則 $\log_e \frac{4}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{3^4} + \dots$

即 $\log_e 4 = \log_e 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{3^4} + \dots$

同理吾人可依次計算 $\log_e 5, \log_e 6, \log_e 7, \dots$, 惟此式不便計算, 蓋各項之絕對值雖漸次減少, 然甚為遲緩, 故計算時須截取項數甚多。

以 $-y$ 代入公式 (7) 中之 y , 則得:

$$\log_e(1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \dots$$

令
$$\frac{1+z}{z} = \frac{1+y}{1-y}$$

則
$$y = \frac{1}{2z+1}$$

$$\log_e(1+z) - \log_e z = \log_e(1+y) - \log_e(1-y)$$

但
$$\log_e(1+y) - \log_e(1-y) = 2 \left(y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \dots \right)$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3(2z+1)^3} + \frac{1}{5(2z+1)^5} + \dots \right]$$

$$\therefore \log_e(1+z) = \log_e z + 2 \left[\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3(2z+1)^3} + \frac{1}{5(2z+1)^5} + \dots \right] \dots \dots \dots (8)$$

公式 (8) 中之各項遞降甚速, 故較便於計算。

7. 每年複利次數若連續增加不絕, 則實利率可自下列公式求得:

$$i = e^j - 1 \dots \dots \dots (9)$$

$m \rightarrow \infty$

i 實利率

j 虛利率

m 複利次數

e 自然對數之底

$$(證) \quad 1+i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{m}{j}}\right)^{\frac{m}{j}}\right]^j$$

$$令 \quad \frac{m}{j} = n$$

則

$$1+i = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^j$$

m 大至無窮大時, n 亦大至無窮大, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+i) = \lim_{n \rightarrow \infty}$

$$\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^j = \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^j$$

但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \dots \dots \dots$ (附錄甲公式 2)

$$\therefore \lim_{m \rightarrow \infty} (1+i) = e^j$$

即

$$\lim_{m \rightarrow \infty} i = e^j - 1$$

8. 息力與實利率可自下列二公式求得:

$$\delta = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \dots \dots \dots (10)$$

$$i = \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \dots \dots \dots (11)$$

(證)

$$1+i = e^\delta$$

$$\delta = \log_e (1+i)$$

但 $\log_e (1+i) = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \dots \dots \dots$ (附錄甲公式 7)

$$\therefore \delta = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \dots \dots \dots$$

$$i = e^\delta - 1$$

$$\text{但 } e\delta = 1 + \frac{\delta}{1} + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \dots \quad (\text{附錄甲公式4})$$

$$\therefore i = \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \dots$$

9. 複利終值若為複利現值之二倍，則複利時期可自下式求得其近似值：

$$n = \frac{0.693}{i} + 0.35 \dots \quad (12)$$

n 年數

i 實利率

(證) 應用第二編公式(26), 得:

$$\begin{aligned} n &= \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} (1+i)} = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} e \log_e (1+i)} = \frac{0.301030 \times 2.302585}{\log_e (1+i)} \\ &= \frac{0.693147}{\log_e (1+i)} \end{aligned}$$

$$\text{但 } \log_e (1+i) = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \dots \quad (\text{附錄甲公式7})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_e (1+i)} &= \frac{1}{i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \dots} = \frac{1}{i} \frac{1}{1 - \frac{i}{2} + \frac{i^2}{3} - \frac{i^3}{4} + \dots} \\ &= \frac{1}{i} \left(1 + \frac{i}{2} + \frac{i^2}{12} + \dots \right) \\ \therefore n &= \frac{0.693147}{i} \left(1 + \frac{i}{2} + \frac{i^2}{12} + \dots \right) \end{aligned}$$

i 小於一，故 i^2, i^3, i^4, \dots 之數值甚小，若均略而不計，則得：

$$n = \frac{0.693147}{i} + \frac{0.693147}{2}$$

$$\therefore n = \frac{0.693}{i} + 0.35$$

10. 每年運轉次數若連續增加不絕，則實貼現率可自下列公式求得：

$$d = 1 - e^{-f} \dots\dots\dots (13)$$

d 實貼現率

f 虛貼現率

m 每年運轉次數

e 自然對數之底

$$(證) \quad 1 - d = \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{m}{-f}}\right)^{\frac{m}{-f}}\right]^{-f}$$

$$令 \quad -\frac{m}{f} = n$$

則

$$1 - d = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-f}$$

m 大至無窮大時， n 之絕對值亦大至無窮大，故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - d) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-f} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-f} = e^{-f}$$

$$\therefore d = 1 - e^{-f}$$

11. 貼現力與實貼現率可自下列二式求得：

$$\delta = d + \frac{d^2}{2} + \frac{d^3}{3} + \frac{d^4}{4} + \dots\dots\dots (14)$$

$$d = \delta - \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} - \frac{\delta^4}{4!} + \dots\dots\dots (15)$$

δ' 貼現力 d 實貼現率

$$\begin{aligned} \text{(證)} \quad & 1-d=e^{-\delta'} \\ & \log_e(1-d)=-\delta' \end{aligned}$$

$$\text{但} \quad \log_e(1-d)=-d-\frac{d^2}{2}-\frac{d^3}{3}-\frac{d^4}{4}-\dots \text{(附錄甲公式7)}$$

$$\therefore \delta'=d+\frac{d^2}{2}+\frac{d^3}{3}+\frac{d^4}{4}+\dots$$

$$d=1-e^{-\delta'}$$

$$\text{但} \quad e^{-\delta'}=1-\frac{\delta'}{1}+\frac{\delta'^2}{2!}-\frac{\delta'^3}{3!}+\frac{\delta'^4}{4!}-\dots \text{(附錄甲公式4)}$$

$$\therefore d=\delta'-\frac{\delta'^2}{2!}+\frac{\delta'^3}{3!}-\frac{\delta'^4}{4!}+\dots$$

12. 高次等差級數之末項,可自下列公式求得:

$$\begin{aligned} l &= a_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}d_2 + \dots \\ &+ \frac{(n-1)\dots(n-r)}{1 \cdot 2 \dots r}d_r \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

 l 末項 n 項數 a_1 首項 d_1 一次差之首項 d_2 二次差之首項

.....

 d_r r 次差之首項

(證) 設

$$a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ \dots \ a_n \ \dots \dots \dots (1)$$

爲 r 次等差級數, n 爲其項數. 又設 $d_1, d_2, d_3, \dots, d_r$ 爲一次差, 二次差, 三次差, \dots, r 次差之首項.

將 (I) 式之前後項相減而得二次差如下:

$$a_2 - a_1 \quad a_3 - a_2 \quad a_4 - a_3 \quad \dots \quad a_n - a_{n-1} \quad \dots \quad \text{(II)}$$

(II) 式之首項爲 d_1 , 而其一次差, 二次差, 三次差, $\dots, r-1$ 次差, 則爲 $d_2, d_3, d_4, \dots, d_r$. 故由 (I) 式中某項化出 (II) 式中與某項項次相等之一項, 例如由 (I) 式中第六項化出 (II) 式中第六項, 祇須將 d_1 代 a_1 , d_2 代 d_1 , d_3 代 d_2, \dots, d_r 代 d_{r-1} .

$$\therefore d_1 = a_2 - a_1$$

$$\therefore a_2 = a_1 + d_1$$

a_2 爲 (I) 式中之第二項, 故 (II) 式中之第二項爲 $d_1 + d_2$, 而 (II) 式中之第二項爲 $a_3 - a_2$, 故得

$$a_3 - a_2 = d_1 + d_2$$

以 a_2 之值代入, 則得

$$a_3 = a_1 + 2d_1 + d_2$$

同理, 吾人可依次求得 a_4, a_5, \dots 如下:

$$a_3 = a_1 + 2d_1 + d_2 \quad \text{(I) 式中之第三項}$$

$$+ a_4 - a_3 = \quad d_1 + 2d_2 + d_3 \quad \text{(II) 式中之第三項}$$

$$\underline{a_4} = a_1 + 3d_1 + 3d_2 + d_3 \quad \text{(I) 式中之第四項}$$

$$+ a_5 - a_4 = \quad d_1 + 3d_2 + 3d_3 + d_4 \quad \text{(II) 式中之第四項}$$

$$\underline{a_5} = a_1 + 4d_1 + 6d_2 + 4d_3 + d_4 \quad \text{(I) 式中之第五項}$$

試就以上結果與 $(a+b)^{n-1}$ 展開式並列比較，則見各項之係數完全相同。

$$a_2 = a_1 + d_1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$a_3 = a_1 + 2d_1 + d_2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^4 = a_1 + 3d_1 + 3d_2 + d_3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a_5 = a_1 + 4d_1 + 6d_2 + 4d_3 + d_4$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

應用附錄甲公式(1)，得：

$$l = a_n = a_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} d_2 + \dots$$

$$+ \frac{(n-1) \dots (n-r)}{1 \cdot 2 \dots r} d_r$$

(I) 式為 r 次等差級數，自 d_{r+1} 起各項均等於零，故上式至 d_r 為止。

13. 高次等差級數之和，可自下列公式求得：

$$S = na_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d_2 + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1) \dots (n-r)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r+1)} d_r \dots \dots \dots (17)$$

S 總和

n 項數

d_1 首項

d_2 一次差之首項

d_3 二次差之首項

.....

d_r r 次差之首項

(證)

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

S 亦為下列級數之末項

$$0 a_1 a_1 + a_2 a_1 + a_2 + a_3 \cdots a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \cdots \cdots \cdots (I)$$

將(I)式中之前後項相減而得其一次差如下:

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots \cdots \cdots (II)$$

故若(II)式為 r 次等差級數,則(I)式為 $r+1$ 次等差級數。若 d_1, d_2, \cdots, d_r 為(II)式中一次差,二次差,…… r 次差之首項,則(I)式中一次差,二次差,…… $r+1$ 次差之首項,當為 a_1, d_1, \cdots, d_r 。以之代入附錄甲公式(16),則得:

$$\begin{aligned} l &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 0 + na_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d_1 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d_2 + \cdots + \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r} d_{r-1} \\ &\quad + \frac{n(n-1) \cdots (n-r)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r (r+1)} d_r \\ \therefore S &= na_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d_2 + \cdots \\ &\quad + \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r} d_{r-1} + \frac{n(n-1) \cdots (n-r)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r (r+1)} d_r \end{aligned}$$

14. 連續年金之終值與現值,可自下列二公式求得:

$$\bar{S}_{\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} S_{\overline{n}|} \cdots \cdots \cdots (18)$$

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n}|} \cdots \cdots \cdots (19)$$

$\bar{S}_{\overline{n}|}$ 每年年金總額一元繼續支付 n 年連續年金之終值

$\bar{a}_{\overline{n}|}$ 每年年金總額一元繼續支付 n 年連續年金之現值

S_n 簡單年金一元繼續支付 n 年之終值

a_n 簡單年金一元繼續支付 n 年之現值

i 實利率

δ 息力

$$\begin{aligned} (\text{證}) \quad \bar{S}_n &= \lim_{p \rightarrow \infty} S_n^{(p)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{i}{j^{(p)}} S_n \right] = i S_n \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{j^{(p)}} \right) \\ &= i S_n \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]} \right) \end{aligned}$$

但吾人在複利一章中, 已知:

$$1+i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$$

$$j = m[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1]$$

$$\delta = \lim_{m \rightarrow \infty} j = \lim_{m \rightarrow \infty} \{m[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1]\}$$

$m[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1]$ 中之 m 若易以 p , 即得 $p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]$

$$\therefore \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]} = \frac{1}{\delta}$$

$$\text{即} \quad \bar{S}_n = \frac{i}{\delta} S_n$$

$$\begin{aligned} a_n &= \lim_{p \rightarrow \infty} a_n^{(p)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{i}{j^{(p)}} a_n \right] \\ &= i a_n \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{j^{(p)}} \right) = i a_n \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]} \right) \\ &= i a_n \frac{1}{\delta} \end{aligned}$$

$$\therefore \bar{a}_n = \frac{i}{\delta} a_n$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} (nv^n) = 0 \dots \dots \dots (20)$$

$$v = \frac{1}{1+i}$$

$$\begin{aligned} \text{(證)} \quad nv^n &= \frac{n}{(1+i)^n} = \frac{n}{1 + ni + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} i^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} i^3 + \dots} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{n} + i + \frac{n-1}{1 \cdot 2} i^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} i^3 + \dots} \end{aligned}$$

若 n 大至無窮大，則上式中之分母大至無窮大，故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (nv^n) = 0$$

16 溢酬償還債券(每年償本付息之總額相等)之市價，可用下列公式求得：

$$A = \frac{100}{a_n @ r} [a_n @ i + \frac{p}{i-r} \{ (1+r)^{-n} - (1+i)^{-n} \}] \dots \dots \dots (21)$$

- A 債券市價
 p 溢酬率
 i 投資利率
 r 債券利率
 n 債券尚在市場流行時期
 a_n 簡單年金一元繼續支付 n 年之現值

(證) 發行債券機關對面值百元之債券，每年償本付息總額為 $\frac{100}{a_n @ r}$ ，其中償本之額，第一年為

$$\frac{100}{a_n @ r} - 100r = \frac{100}{S_n @ r}$$

而第一年之溢酬為 $\frac{100 p}{S_{\overline{n}|} @ r}$

第一年之價本額與溢酬求得後，則其他各年之價本額與溢酬，可依次計算如下：

年 次	價本額	溢酬
第一年	$\frac{100}{S_{\overline{n} } @ r}$	$\frac{100 p}{S_{\overline{n} } @ r}$
第二年	$\frac{100}{S_{\overline{n} } @ r} (1+r)$	$\frac{100 p}{S_{\overline{n} } @ r} (1+r)$
第三年	$\frac{100}{S_{\overline{n} } @ r} (1+r)^2$	$\frac{100 p}{S_{\overline{n} } @ r} (1+r)^2$
.....		
第 n 年	$\frac{100}{S_{\overline{n} } @ r} (1+r)^{n-1}$	$\frac{100 p}{S_{\overline{n} } @ r} (1+r)^{n-1}$

債券市價為各年價本付息總額之現值與溢酬之現值之和，故得：

$$A = \frac{100}{a_{\overline{n}|} @ r} (a_{\overline{n}|} @ i) + \left[\frac{100 p}{S_{\overline{n}|} @ r} (1+i)^{-1} + \frac{100 p}{S_{\overline{n}|} @ r} (1+r)(1+i)^{-2} \right. \\ \left. + \frac{100 p}{S_{\overline{n}|} @ r} (1+r)^2 (1+i)^{-3} + \dots + \frac{100 p}{S_{\overline{n}|} @ r} (1+r)^{n-1} (1+i)^{-n} \right]$$

大括弧內之數為一等比級數，其首項為

$$\frac{100 p}{S_{\overline{n}|} @ r} (1+i)^{-1} \text{ 公比為 } (1+r)(1+i)^{-1}$$

項數為 n ，故

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{100}{a_{\overline{n}|@r}} (a_{\overline{n}|@i}) + \frac{100 p(1+i)^{-1}}{S_{\overline{n}|@r}} \frac{1 - (1+r)^n(1+i)^{-n}}{1 - \frac{1+r}{1+i}} \\
 &= \frac{100}{a_{\overline{n}|@r}} (a_{\overline{n}|@i}) + \frac{100 p(1+i)^{-1}(1+r)^{-n}}{a_{\overline{n}|@r}} \frac{1 - (1+r)^n(1+i)^{-n}}{1 - \frac{1+r}{1+i}} \\
 &= \frac{100}{a_{\overline{n}|@r}} (a_{\overline{n}|@i}) + \frac{100 p}{a_{\overline{n}|@r}} \frac{(1+r)^{-n} - (1+i)^{-n}}{i-r} \\
 \therefore A &= \frac{100}{a_{\overline{n}|@r}} [a_{\overline{n}|@i} + \frac{p}{i-r} \{ (1+r)^{-n} - (1+i)^{-n} \}]
 \end{aligned}$$

17. 溢酬償還債券之市價(發行債券機關每年負擔之總額相等),可用下列公式求得:

$$A = 100(1+p) \frac{a_{\overline{n}|@i}}{a_{\overline{n}|@i'}} \dots\dots\dots(22)$$

- A 債券市價
- p 溢酬率
- i 投資利率
- i' 等值利率
- n 債券尚在市場流行時期
- $a_{\overline{n}|}$ 簡單年金一元繼續支付 n 年之現值

(證) 等值利率為利息對償還值之比率,故設債券之面值為 100 元,債券利率為 r,溢酬率為 p,等值利率為 i,則

$$i = \frac{100 r}{100(1+p)} = \frac{r}{1+p}$$

故溢酬率為 p,債券利率為 r 之溢酬償還債券 100 元,與債券利率為 i' 之面值償還債券 100(1+p) 元完全相等。蓋兩者之償還值均為 100(1+p) 元,而其利息均為 100r 元故也。

債券利率為 i 之面值償還債券 $100(1+p)$ 元，發行債券機關每年須共支付本息總額。

$$100(1+p) \frac{1}{a_n @ i}$$

換言之，投資者每年可得 $100(1+p) \frac{1}{a_n @ i}$ 元，故若投資利率為 i ，則債券之市價當為

$$A = 100(1+p) \frac{a_n @ i}{a_n @ i'}$$

附錄甲公式

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4 + \dots \dots \dots (1)$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \dots \dots \dots (2)$$

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots \dots \dots (3)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \dots \dots (4)$$

$$a^x = 1 + \frac{x}{1} \log_e a + \frac{x^2}{2!} (\log_e a)^2 + \frac{x^3}{3!} (\log_e a)^3 + \frac{x^4}{4!} (\log_e a)^4 + \dots \dots \dots (5)$$

若 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_n \left\{ \dots (6) \right.$
 則 $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$

$$\log_e(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots \dots \dots (7)$$

$$\log_e(1+Z) = \log_e Z + 2 \left[\frac{1}{2Z+1} + \frac{1}{3(2Z+1)^3} + \frac{1}{5(2Z+1)^5} + \dots \right] \dots \dots \dots (8)$$

$$i = e^j - 1 \dots \dots \dots (9)$$

換 $n \rightarrow \infty$

$$\delta = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \dots \dots \dots (10)$$

$$i = \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \dots \quad (11)$$

$$n = \frac{0.693}{i} + 0.35 \dots \quad (12)$$

$$d = 1 - e^{-i} \quad (13)$$

$n \rightarrow \infty$

$$S' = d + \frac{d^2}{2} + \frac{d^3}{3} + \frac{d^4}{4} + \dots \quad (14)$$

$$d = \delta' - \frac{\delta'^2}{2!} + \frac{\delta'^3}{3!} - \frac{\delta'^4}{4!} + \dots \quad (15)$$

$$I = a_1 + (n-1)a_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} a_2 + \dots + \frac{(n-1) \dots (n-r)}{1 \cdot 2 \dots r} \bar{a}_r \dots \quad (16)$$

$$S = n a_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_2 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-r)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r+1)} \bar{a}_r \dots \quad (17)$$

$$S_n = \frac{\delta}{i} S_n \quad (18)$$

$$\bar{a}_n = \frac{i}{\delta} a_n \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n v^n) = 0 \quad (20)$$

$$A = \frac{100}{a_{\overline{n}|} @ r} [a_{\overline{n}|} @ i + \frac{p}{i-r} \{ (1+r)^{-n} - (1+i)^n \}] \quad (21)$$

$$A = 100(1+p) \frac{a_n^- @ i}{a_n^- @ i'} \quad (22)$$

附錄乙 計算應用表

100—115

表一 對數表

比例部分			比例部分			比例部分			比例部分						
434	433	432	431	430	429	428	27	426	425	424	423				
1	43.4	43.3	43.2	1	43.1	43.0	42.9	1	42.8	42.7	42.6	1	42.5	42.4	42.3
2	36.8	36.6	36.4	2	86.2	86.0	85.8	2	85.6	85.4	85.2	2	85.0	84.8	84.6
3	130.2	129.9	129.6	3	129.3	129.0	128.7	3	128.4	128.1	127.8	3	127.5	127.2	126.9
4	173.6	173.2	172.8	4	172.4	172.0	171.6	4	171.2	170.8	170.4	4	170.0	169.6	169.2
5	217.0	216.5	216.0	5	215.5	215.0	214.5	5	214.0	213.5	213.0	5	212.5	212.0	211.5
6	260.4	259.8	259.2	6	258.6	258.0	257.4	6	256.8	256.2	255.6	6	255.0	254.4	253.8
7	303.8	303.1	302.4	7	301.7	301.0	300.3	7	299.6	298.9	298.2	7	297.5	296.8	296.1
8	347.2	346.4	345.6	8	344.8	344.0	343.2	8	342.4	341.6	340.8	8	340.0	339.2	338.4
9	390.6	389.7	388.8	9	387.9	387.0	386.1	9	385.2	384.3	383.4	9	382.5	381.6	380.7
422	421	420	419	418	417	416	415	414	413	412	411				
1	42.2	42.1	42.0	1	4.9	41.8	41.7	1	41.6	41.5	41.4	1	41.3	41.2	41.1
2	84.4	84.2	84.0	2	83.8	83.6	83.4	2	83.2	83.0	82.8	2	82.6	82.4	82.2
3	126.6	126.3	126.0	3	125.7	125.4	125.1	3	124.8	124.5	124.2	3	123.9	123.6	123.3
4	168.8	168.4	168.0	4	167.6	167.2	166.8	4	166.4	166.0	165.6	4	165.2	164.8	164.4
5	211.0	210.5	210.0	5	209.5	209.0	208.5	5	208.0	207.5	207.0	5	206.5	206.0	205.5
6	253.2	252.6	252.0	6	251.4	250.8	250.2	6	249.6	249.0	248.4	6	247.8	247.2	246.6
7	295.4	294.7	294.0	7	293.3	292.6	291.9	7	291.2	290.5	289.8	7	289.1	288.4	287.7
8	337.6	336.8	336.0	8	335.2	334.4	333.6	8	332.8	332.0	331.2	8	330.4	329.6	328.8
9	379.8	378.9	378.0	9	377.1	376.2	375.3	9	374.4	373.5	372.6	9	371.7	370.8	369.9
410	4.9	408	407	406	405	4.4	403	402	401	400	399				
1	41.0	40.9	40.8	1	40.7	40.6	40.5	1	40.4	40.3	40.2	1	40.1	40.0	39.9
2	82.0	81.8	81.6	2	81.4	81.2	81.0	2	80.8	80.6	80.4	2	80.2	80.0	79.8
3	123.0	122.7	122.4	3	122.1	121.8	121.5	3	121.2	120.9	120.6	3	120.3	120.0	119.7
4	164.0	163.6	163.2	4	162.8	162.4	162.0	4	161.6	161.2	160.8	4	160.4	160.0	159.6
5	205.0	204.5	204.0	5	203.5	203.0	202.5	5	202.0	201.5	201.0	5	200.5	200.0	199.5
6	246.0	245.4	244.8	6	244.2	243.6	243.0	6	242.4	241.8	241.2	6	240.6	240.0	239.4
7	287.0	286.3	285.6	7	284.9	284.2	283.5	7	282.8	282.1	281.4	7	280.7	280.0	279.3
8	328.0	327.2	326.4	8	325.6	324.8	324.0	8	323.2	322.4	321.6	8	320.8	320.0	319.2
9	369.0	368.1	367.2	9	366.3	365.4	364.5	9	363.6	362.7	361.8	9	360.9	360.0	359.1
398	397	396	395	394	393	392	391	390	389	388	387				
1	39.8	39.7	39.6	1	39.5	39.4	39.3	1	39.2	39.1	39.0	1	38.9	38.8	38.7
2	79.6	79.4	79.2	2	79.0	78.8	78.6	2	78.4	78.2	78.0	2	77.8	77.6	77.4
3	119.4	119.1	118.8	3	118.5	118.2	117.9	3	117.6	117.3	117.0	3	116.7	116.4	116.1
4	159.2	158.8	158.4	4	158.0	157.6	157.2	4	156.8	156.4	156.0	4	155.6	155.2	154.8
5	199.0	198.5	198.0	5	197.5	197.0	196.5	5	196.0	195.5	195.0	5	194.5	194.0	193.5
6	238.8	238.2	237.6	6	237.0	236.4	235.8	6	235.2	234.6	234.0	6	233.4	232.8	232.2
7	278.6	277.9	277.2	7	276.5	275.8	275.1	7	274.4	273.7	273.0	7	272.3	271.6	270.9
8	318.4	317.6	316.8	8	316.0	315.2	314.4	8	313.6	312.8	312.0	8	311.2	310.4	309.6
9	358.2	357.3	356.4	9	355.5	354.6	353.7	9	352.8	351.9	351.0	9	350.1	349.2	348.3
對數											386	385	384		
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3		
100	00	0000	0434	0868	1301	1734	2166	2598	3029	3461	3891	1	38.6	38.5	38.4
01		4321	4751	5181	5609	6038	6466	6894	7321	7748	8174	2	77.2	77.9	76.8
02		8600	9026	9451	9876	*0300	*0724	*1147	*1570	*1993	*2415	3	115.8	115.4	115.2
03	01	2837	3259	3680	4100	4521	4940	5360	5779	6197	6616	4	154.4	154.0	153.6
04		7033	7451	7868	8284	8700	9116	9532	9947	*0361	*0775	5	193.0	192.5	192.0
05	02	1189	1603	2016	2428	2841	3252	3664	4075	4486	4896	6	231.6	231.0	230.4
06		5306	5715	6125	6533	6942	7350	7757	8164	8571	8978	7	270.2	269.5	268.8
07		9384	9789	*0195	*0600	*1004	*1408	*1812	*2216	*2619	*3021	8	308.8	308.0	307.2
08	03	3424	3826	4227	4628	5029	5430	5830	6230	6629	7028	9	347.4	346.5	345.6
09		7426	7825	8223	8620	9017	9414	9811	*0207	*0602	*0998	1	383	382	381
110	04	1393	1787	2182	2576	2969	3362	3755	4148	4540	4932	1	38.8	38.2	38.1
11		5323	5714	6105	6495	6885	7275	7664	8053	8442	8830	2	76.6	76.4	76.2
12		9218	9606	9993	*0380	*0766	*1153	*1538	*1924	*2309	*2694	3	114.9	114.6	114.3
13	05	3078	3463	3846	4230	4613	4996	5378	5760	6142	6524	4	153.2	152.8	1 2.4
14		6905	7286	7666	8046	8426	8806	9185	9563	9942	*0320	5	191.5	191.0	190.5
115	06	0698	1075	1452	1829	2206	2582	2958	3333	3709	4083	6	229.8	229.2	228.6
												7	268.1	267.4	266.7
												8	306.4	305.6	304.8
												9	344.7	343.8	342.9

比例部分			比例部分			比例部分			比例部分						
331	330	329	328	327	326	325	324	323	322	321	320				
1	33.1	33.0	32.9	1	32.8	32.7	32.6	1	32.5	32.4	32.3	1	32.2	32.1	32.0
2	66.2	66.0	65.8	2	65.6	65.4	65.2	2	65.0	64.8	64.6	2	64.4	64.2	64.0
3	99.3	99.0	98.7	3	98.4	98.1	97.8	3	97.5	97.2	96.9	3	96.6	96.3	96.0
4	132.4	132.0	131.6	4	131.2	130.8	130.4	4	130.0	129.6	129.2	4	128.8	128.4	128.0
5	165.5	165.0	164.5	5	164.0	163.5	163.0	5	162.5	162.0	161.5	5	161.0	160.5	160.0
6	198.6	198.0	197.4	6	196.8	196.2	195.6	6	195.0	194.4	193.8	6	193.2	192.6	192.0
7	231.7	231.0	230.3	7	229.6	228.9	228.2	7	227.5	226.8	226.2	7	225.4	224.7	224.0
8	264.8	264.0	263.2	8	262.4	261.6	260.8	8	260.0	259.2	258.4	8	257.6	256.8	256.0
9	297.9	297.0	296.1	9	295.2	294.3	293.4	9	292.5	291.6	290.7	9	289.8	288.9	288.0
319	318	317	316	315	314	313	312	311	310	309	308				
1	31.9	31.8	31.7	1	31.6	31.5	31.4	1	31.3	31.2	31.1	1	31.0	30.9	30.8
2	63.8	63.6	63.4	2	63.2	63.0	62.8	2	62.6	62.4	62.2	2	62.0	61.8	61.6
3	95.7	95.4	95.1	3	94.8	94.5	94.2	3	93.9	93.6	93.3	3	93.0	92.7	92.4
4	127.6	127.2	126.8	4	126.4	126.0	125.6	4	125.2	124.8	124.4	4	124.0	123.6	123.2
5	159.5	159.0	158.5	5	158.0	157.5	157.0	5	156.5	156.0	155.5	5	155.0	154.5	154.0
6	191.4	190.8	190.2	6	189.6	189.0	188.4	6	187.8	187.2	186.6	6	186.0	185.4	184.8
7	223.3	222.6	221.9	7	221.2	220.5	219.8	7	219.1	218.4	217.7	7	217.0	216.3	215.6
8	255.2	254.4	253.6	8	252.8	252.0	251.2	8	250.4	249.6	248.8	8	248.0	247.2	246.4
9	287.1	286.2	285.3	9	284.4	283.5	282.6	9	281.7	280.8	279.9	9	279.0	278.1	277.2
307	306	305	304	303	302	301	300	299	298	297	296				
1	30.7	30.6	30.5	1	30.4	30.3	30.2	1	30.1	30.0	29.9	1	29.8	29.7	29.6
2	61.4	61.2	61.0	2	60.8	60.6	60.4	2	60.2	60.0	59.8	2	59.6	59.4	59.2
3	92.1	91.8	91.5	3	91.2	90.9	90.6	3	90.3	90.0	89.7	3	89.4	89.1	88.8
4	122.8	122.4	122.0	4	121.6	121.2	120.8	4	120.4	120.0	119.6	4	119.2	118.8	118.4
5	153.5	153.0	152.5	5	152.0	151.5	151.0	5	150.5	150.0	149.5	5	149.0	148.5	148.0
6	184.2	183.6	183.0	6	182.4	181.8	181.2	6	180.6	180.0	179.4	6	178.8	178.2	177.6
7	214.9	214.2	213.5	7	212.8	212.1	211.4	7	210.7	210.0	209.3	7	208.6	207.9	207.2
8	245.6	244.8	244.0	8	243.2	242.4	241.6	8	240.8	240.0	239.2	8	238.4	237.6	236.8
9	276.3	275.4	274.5	9	273.6	272.7	271.8	9	270.9	270.0	269.1	9	268.2	267.3	266.4
對 數															
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9					
130	11	3943	4277	4611	4944	5278	5611	5943	6276	6608	6940				
31		7271	7603	7934	8265	8595	8926	9256	9585	9915	*0245				
32	12	0574	0903	1231	1560	1888	2216	2544	2871	3198	3525				
33		3852	4178	4504	4830	5156	5481	5806	6131	6456	6781				
34		7105	7429	7753	8076	8399	8722	9045	9368	9690	*0012				
35	13	0334	0655	0977	1298	1619	1939	2260	2580	2900	3219				
36		3539	3858	4177	4496	4814	5133	5451	5769	6086	6403				
37		6721	7037	7354	7671	7987	8303	8618	8934	9249	9564				
38		9879	*0194	*0508	*0822	*1133	*1450	*1763	*2076	*2389	*2702				
39	14	3015	3327	3639	3951	4263	4574	4885	5196	5507	5818				
40		6128	6438	6748	7058	7367	7676	7985	8294	8603	8911				
41		9219	9527	9835	*0142	*0449	*0756	*1063	*1370	*1676	*1982				
42	15	2288	2594	2900	3205	3510	3815	4120	4424	4728	5032				
43		5336	5640	5943	6246	6549	6852	7154	7457	7759	8061				
44		8362	8664	8965	9266	9567	9868	*0168	*0469	*0769	*1068				
45	16	1368	1687	1987	2286	2584	2883	3181	3480	3778	4075				
46		4353	4650	4947	5244	5541	5838	6134	6430	6726	7022				
47		7317	7613	7908	8203	8497	8792	9086	9380	9674	9968				
48	17	0262	0555	0848	1141	1434	1728	2019	2311	2603	2895				
49		3186	3478	3769	4060	4351	4641	4932	5222	5512	5802				
150		6091	6381	6670	6959	7248	7536	7825	8113	8401	8689				
295	294	293													
1	29.5	29.4	29.3												
2	59.0	58.8	58.6												
3	88.5	88.2	87.9												
4	118.0	117.6	117.2												
5	147.5	147.0	146.5												
6	177.0	176.4	175.8												
7	206.5	205.8	205.1												
8	236.0	235.2	234.4												
9	265.5	264.6	263.7												
292	291	290													
1	29.2	29.1	29.0												
2	58.4	58.2	58.0												
3	87.6	87.3	87.0												
4	116.8	116.4	116.0												
5	146.0	145.5	145.0												
6	175.2	174.6	174.0												
7	204.4	203.7	203.0												
8	233.6	232.8	232.0												
9	262.8	261.9	261.0												
289	288	287													
1	28.9	28.8	28.7												
2	57.8	57.6	57.4												
3	86.7	86.4	86.1												
4	115.6	115.2	114.8												
5	144.5	144.0	143.5												
6	173.4	172.8	172.2												
7	202.3	201.6	200.9												
8	231.2	230.4	229.6												
9	260.1	259.2	258.3												

表一 對 數 表

比例部分			比例部分			比例部分			比例部分						
255	254	253	252	251	250	249	248	247	246	245	244				
1	25.5	25.4	25.3	1	25.2	25.1	25.0	1	24.9	24.8	24.7	1	24.6	24.5	24.4
2	51.0	50.8	50.6	2	50.4	50.2	50.0	2	49.8	49.6	49.4	2	49.2	49.0	48.8
3	76.5	76.2	75.9	3	75.6	75.3	75.0	3	74.7	74.4	74.1	3	73.8	73.5	73.2
4	102.0	101.6	101.2	4	100.8	100.4	100.0	4	99.6	99.2	98.8	4	98.4	98.0	97.6
5	127.5	127.0	126.5	5	126.0	125.5	125.0	5	124.5	124.0	123.5	5	123.0	122.5	122.0
6	153.0	152.4	151.8	6	151.2	150.6	150.0	6	149.4	148.8	148.2	6	147.6	147.0	146.4
7	178.5	177.8	177.1	7	176.4	175.7	175.0	7	174.3	173.6	172.9	7	172.2	171.5	170.8
8	204.0	203.2	202.4	8	201.6	200.8	200.0	8	199.2	198.4	197.6	8	196.8	196.0	195.2
9	229.5	228.6	227.7	9	228.8	227.9	227.0	9	224.1	223.2	222.3	9	221.4	220.5	219.6
1	243	2.2	241	1	240	239	238	1	237	236	235	1	234	233	232
2	24.3	24.2	24.1	1	24.0	23.9	23.8	1	23.7	23.6	23.5	1	23.4	23.3	23.2
1	48.6	48.4	48.2	2	48.0	47.8	47.6	2	47.4	47.2	47.0	2	46.8	46.6	46.4
3	7.9	72.6	72.3	3	72.0	71.7	71.4	3	71.1	70.8	70.5	3	7.2	69.9	69.6
4	97.2	96.8	96.4	4	96.0	95.6	95.2	4	94.8	94.4	94.0	4	93.6	93.2	92.8
5	121.5	121.0	120.5	5	120.0	119.5	119.0	5	118.5	118.0	117.5	5	117.0	116.5	116.0
6	145.8	145.2	144.6	6	144.0	143.4	142.8	6	142.2	141.6	141.0	6	140.4	139.8	139.2
7	170.1	169.4	168.7	7	168.0	167.3	166.6	7	165.9	165.2	164.5	7	163.8	163.1	162.4
8	194.4	193.6	192.8	8	192.0	191.2	190.4	8	189.6	188.8	188.0	8	187.2	186.4	185.6
9	218.7	217.8	216.9	9	216.0	215.1	214.2	9	213.3	212.4	211.5	9	210.6	209.7	208.8
對 數												1	231	230	229
												1	23.1	23.0	22.9
												2	46.2	46.0	45.8
												3	69.3	69.0	68.7
												4	92.4	92.0	91.6
												5	115.5	115.0	114.5
												6	138.6	138.0	137.4
												7	161.7	161.0	160.3
												8	184.8	184.0	183.2
												9	207.9	207.0	206.1
												1	228	227	226
												2	22.8	22.7	22.6
												3	45.6	45.4	45.2
												4	68.4	68.1	67.8
												5	91.2	90.8	90.4
												6	114.0	113.5	113.0
												7	136.8	136.2	135.6
												8	159.6	158.9	158.2
												9	182.4	181.6	180.8
												1	205.2	204.3	203.4
												2	225	224	223
												1	22.5	22.4	22.3
												2	45.0	44.8	44.6
												3	67.5	67.2	66.9
												4	90.0	89.6	89.2
												5	112.5	112.0	111.5
												6	135.0	134.4	133.8
												7	157.5	156.8	156.1
												8	180.0	179.2	178.4
												9	202.5	201.6	200.7
												1	222	221	220
												1	22.2	22.1	22.0
												2	44.4	44.2	44.0
												3	66.6	66.3	66.0
												4	88.8	88.4	88.0
												5	111.0	110.5	110.0
												6	133.2	132.6	132.0
												7	155.4	154.7	154.0
												8	177.6	176.8	176.0
												9	199.8	198.9	198.0
200	30	1030	1247	1464	1681	1898	2114	2331	2547	2764	2980	3	199.8	198.9	198.0

表一 對 數 表

比例部分			比例部分			比例部分			比例部分			
	219	218	217	216	215	214	213	212	211	210	209	208
1	21.9	21.8	21.7	21.6	21.5	21.4	21.3	21.2	21.1	21.0	20.9	20.8
2	43.8	43.6	43.4	43.2	43.0	42.8	42.6	42.4	42.2	42.0	41.8	41.6
3	65.7	65.4	65.1	64.8	64.5	64.2	63.9	63.6	63.3	63.0	62.7	62.4
4	87.6	87.2	86.8	86.4	86.0	85.6	85.2	84.8	84.4	84.0	83.6	83.2
5	109.5	109.0	108.5	108.0	107.5	107.0	106.5	106.0	105.5	105.0	104.5	104.0
6	131.4	130.8	130.2	129.6	129.0	128.4	127.8	127.2	126.6	126.0	125.4	124.8
7	153.3	152.6	151.9	151.2	150.5	149.8	149.1	148.4	147.7	147.0	146.3	145.6
8	175.2	174.4	173.6	172.8	172.0	171.2	170.4	169.6	168.8	168.0	167.2	166.4
9	197.1	196.2	195.3	194.4	193.5	192.6	191.7	190.8	189.9	189.0	188.1	187.2
	207	206	205	204	203	202	201	200	199	198	197	196
1	20.7	20.6	20.5	20.4	20.3	20.2	20.1	20.0	19.9	19.8	19.7	19.6
2	41.4	41.2	41.0	40.8	40.6	40.4	40.2	40.0	39.8	39.6	39.4	39.2
3	62.1	61.8	61.5	61.2	60.9	60.6	60.3	60.0	59.7	59.4	59.1	58.8
4	82.8	82.4	82.0	81.6	81.2	80.8	80.4	80.0	79.6	79.2	78.8	78.4
5	103.5	103.0	102.5	102.0	101.5	101.0	100.5	100.0	99.5	99.0	98.5	98.0
6	124.2	123.6	123.0	122.4	121.8	121.2	120.6	120.0	119.4	118.8	118.2	117.6
7	144.9	144.2	143.5	142.8	142.1	141.4	140.7	140.0	139.3	138.6	137.9	137.2
8	165.6	164.8	164.0	163.2	162.4	161.6	160.8	160.0	159.2	158.4	157.6	156.8
9	186.3	185.4	184.5	183.6	182.7	181.8	180.9	180.0	179.1	178.2	177.3	176.4
對 數												
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
200	30	1030	1247	1464	1681	1898	2114	2331	2547	2764	2980	
01		3196	3412	3623	3844	4059	4275	4491	4706	4921	5136	
02		5551	5566	5781	5996	6211	6425	6639	6854	7068	7282	
03		7496	7710	7924	8137	8351	8564	8778	8991	9204	9417	
04		9630	9843	*0056	*0263	*0481	*0693	*0903	*1118	*1330	*1542	
05	31	1754	1966	2177	2389	2603	2812	3 23	3234	3445	3656	
06		3867	4078	4289	4499	4710	4921	5130	5340	5551	5760	
07		5970	6180	6390	6599	6809	7018	7227	7436	7646	7854	
08		8063	8273	8481	8689	8898	9106	9314	9522	9730	9938	
09	32	0146	0354	0562	0769	0977	1184	1391	1598	1805	2012	
210		2219	2426	2633	2839	3046	3252	3458	3665	3871	4077	
11		4282	4488	4694	4899	5105	5310	5516	5721	5926	6131	
12		6336	6541	6745	6950	7155	7359	7563	7767	7972	8176	
13		8380	8583	8787	8991	9194	9398	9601	9805	*0008	*0211	
14	33	0414	0617	0819	1021	1225	1427	1630	1832	2034	2236	
15		2438	2640	2842	3044	3246	3447	3649	3850	4051	4253	
16		4454	4655	4856	5057	5257	5458	5658	5859	6059	6260	
17		6460	6660	6860	7060	7260	7459	7659	7858	8058	8257	
18		8456	8656	8855	9054	9253	9451	9650	9849	*0047	*0246	
19	34	0444	0642	0841	1039	1237	1435	1632	1830	2028	2225	
220		2423	2620	2817	3014	3212	3409	3606	3802	3999	4196	
21		4392	4589	4785	4981	5178	5374	5570	5766	5962	6157	
22		6333	6549	6744	6939	7135	7330	7525	7720	7915	8110	
23		8305	8500	8694	8889	9083	9278	9472	9666	9860	*0054	
24	35	0248	0442	0636	0829	1023	1216	1410	1603	1796	1989	
25		2183	2375	2568	2761	2954	3147	3339	3532	3724	3916	
26		4103	4301	4493	4385	4876	5038	5260	5482	5643	5834	
27		6026	6217	6408	6599	6790	6981	7172	7363	7554	7744	
28		7933	8125	8316	8506	8696	8886	9076	9266	9456	9646	
29		9835	*0025	*0215	*0404	*0593	*0783	*0972	*1161	*1350	*1539	
230	36	1728	1917	2105	2294	2482	2671	2859	3048	3236	3424	
										195	194	193
1										19.5	19.4	19.3
2										39.0	38.8	38.6
3										58.5	58.2	57.9
4										78.0	77.6	77.2
5										97.5	97.0	96.5
6										117.0	116.4	115.8
7										136.5	135.8	135.1
8										156.0	155.2	154.4
9										175.5	174.6	173.7
										192	191	190
1										19.2	19.1	19.0
2										38.4	38.2	38.0
3										57.6	57.3	57.0
4										76.8	76.4	76.0
5										96.0	95.5	95.0
6										115.2	114.6	114.0
7										134.4	133.7	133.0
8										153.6	152.8	152.0
9										172.8	171.9	171.0
										189		
1										18.9		
2										37.8		
3										56.7		
4										75.6		
5										94.5		
6										113.4		
7										132.3		
8										151.2		
9										170.1		
										188		
1										18.8		
2										37.6		
3										56.4		
4										75.2		
5										94.0		
6										112.8		
7										131.6		
8										150.4		
9										169.2		

表一 對 數 表

比例部分			比例部分			比例部分			比例部分						
	189	188	187	186	185	1.4	183	182	181	180	179	178			
1	18.9	18.8	18.7	1	18.6	18.5	18.4	1	18.3	18.2	18.1	1	18.0	17.9	17.8
2	37.8	37.6	37.4	2	37.2	37.0	36.8	2	36.6	36.4	36.2	2	36.0	35.8	35.6
3	56.7	56.4	56.1	3	55.8	55.5	55.2	3	54.9	54.6	54.3	3	54.0	53.7	53.4
4	75.6	75.2	74.8	4	74.4	74.0	73.6	4	73.2	72.8	72.4	4	72.0	71.6	71.2
5	94.5	94.0	93.5	5	93.0	92.5	92.0	5	91.5	91.0	90.5	5	90.0	89.5	89.0
6	113.4	112.8	112.2	6	111.6	111.0	110.4	6	109.8	109.2	108.6	6	108.0	107.4	106.8
7	132.3	131.6	130.9	7	130.2	129.5	128.8	7	128.1	127.4	126.7	7	126.0	125.3	124.6
8	151.2	150.4	149.6	8	148.8	148.0	147.2	8	146.4	145.6	144.8	8	144.0	143.2	142.4
9	170.1	169.2	168.3	9	167.4	166.5	165.6	9	164.7	163.8	162.9	9	162.0	161.1	160.2
對 數															
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	177	176	175	
230	36	1728	1917	2105	2294	2482	2671	2859	3048	3236	3424	1	17.7	17.6	17.5
31		3612	3800	3988	4176	4363	4551	4739	4926	5113	5301	2	35.4	35.2	35.0
32		5488	5675	5862	6049	6236	6423	6610	6796	6983	7169	3	53.1	52.8	52.5
33		7366	7542	7729	7915	8101	8287	8473	8659	8845	9030	4	70.3	70.4	70.0
34		9216	9401	9587	9772	9958	*0143	*0328	*0513	*0698	*0883	5	88.5	88.0	87.5
35	37	1068	1253	1437	1622	1806	1991	2175	2360	2544	2728	6	106.2	105.6	105.0
36		2912	3096	3280	3464	3647	3831	4015	4193	4382	4565	7	123.9	123.2	122.5
37		4748	4932	5115	5298	5481	5664	5846	6029	6212	6394	8	141.6	140.8	140.0
38		6577	6759	6942	7124	7306	7488	7670	7852	8034	8216	9	159.3	158.4	157.5
39		8398	8580	8761	8943	9124	9306	9487	9668	9849	*0030	1	174	173	172
240	38	0211	0392	0573	0754	0934	1115	1296	1476	1656	1837	2	17.4	17.3	17.2
41		2017	2197	2377	2557	2737	2917	3097	3277	3456	3636	3	34.8	34.6	34.4
42		3815	3995	4174	4353	4533	4712	4891	5070	5249	5428	4	52.2	51.9	51.6
43		5606	5785	5964	6142	6321	6499	6677	6856	7034	7212	5	69.6	69.2	68.8
44		7390	7568	7746	7923	8101	8279	8456	8634	8811	8989	6	87.0	86.5	85.0
45		9166	9343	9520	9698	9875	*0051	*0228	*0405	*0582	*0759	7	104.4	103.8	103.2
46	39	0935	1112	1288	1464	1641	1817	1993	2169	2345	2521	8	121.8	121.1	120.4
47		2697	2873	3048	3224	3400	3575	3751	3926	4101	4277	9	139.2	138.4	137.6
48		4452	4627	4802	4977	5152	5326	5501	5676	5850	6025	1	156.6	155.7	154.8
49		6199	6374	6548	6722	6896	7071	7245	7419	7592	7766	2	177	170	169
250		7940	8114	8287	8461	8634	8803	8981	9154	9328	9501	3	17.1	17.0	16.9
51		9674	9847	*0020	*0192	*0365	*0538	*0711	*0883	*1056	*1228	4	34.2	34.0	33.8
52	40	1401	1573	1745	1917	2089	2261	2433	2605	2777	2949	5	51.8	51.0	50.7
53		3121	3292	3464	3635	3807	3978	4149	4320	4492	4663	6	68.4	68.0	67.6
54		4834	5005	5176	5346	5517	5688	5858	6029	6199	6370	7	85.5	85.0	84.5
55		6540	6710	6881	7051	7221	7391	7561	7731	7901	8070	8	102.6	102.	101.4
56		8240	8410	8579	8749	8918	9087	9257	9426	9595	9764	9	119.7	119.0	118.3
57		9933	*0102	*0271	*0440	*0609	*0777	*0946	*1114	*1283	*1451	1	136.8	136.0	135.2
58	41	1620	1788	1956	2124	2293	2461	2629	2796	2964	3132	2	153.9	153.0	152.1
59		3300	3467	3635	3803	3970	4137	4305	4472	4639	4806	3	168	167	166
260		4973	5140	5307	5474	5641	5808	5974	6141	6308	6474	4	16.8	16.7	16.6
61		6641	6807	6973	7139	7306	7472	7638	7804	7970	8135	5	33.6	33.4	33.2
62		8301	8467	8633	87.8	8964	9129	9295	9460	9625	9791	6	50.4	50.1	49.8
63		9956	*0121	*0286	*0451	*0616	*0781	*0945	*1110	*1275	*1439	7	67.2	66.8	66.4
64	42	1604	1768	1933	2097	2261	2426	2590	2754	2918	3082	8	84.0	83.5	83.0
65		3246	3410	3574	3737	3901	4065	4228	4392	4555	4718	9	100.8	100.2	99.6
66		4882	5045	5208	5371	5534	5697	5860	6023	6186	6349	1	117.6	116.9	116.2
67		6511	6674	6836	6999	7161	7324	7486	7648	78.1	7973	2	134.4	133.6	132.8
68		8135	8297	8459	8621	8783	8944	9106	9268	9429	9591	3	151.2	150.3	149.4
69		9752	*9914	*0075	*0236	*0398	*0559	*0720	*0881	*1042	*1203	4	165	164	163
270	43	1364	1525	1685	1846	2007	2167	2328	2488	2649	2809	5	16.5	16.4	16.3
												6	33.0	32.8	32.6
												7	49.5	49.2	48.9
												8	66.0	65.6	65.2
												9	82.5	82.0	81.5
												1	99.0	98.4	97.8
												2	115.5	114.8	114.1
												3	132.0	131.2	130.4
												4	148.5	147.6	146.7

表一 對 數 表

比例部分				比例部分				比例部分				比例部分			
	162	161	160	159	158	157	1	1.6	155	154	1	153	152	151	
1	16.2	16.1	16.0	1	15.9	15.8	15.7	1	15.6	15.5	15.4	1	15.3	15.2	15.1
2	32.4	32.2	32.0	2	31.8	31.6	31.4	2	31.2	31.0	30.8	2	30.6	30.4	30.2
3	48.6	48.3	48.0	3	47.7	47.4	47.1	3	46.8	46.5	46.2	3	45.9	45.6	45.3
4	64.8	64.4	64.0	4	63.6	63.2	62.8	4	62.4	62.0	61.6	4	61.2	60.8	60.4
5	81.0	80.5	80.0	5	79.5	79.0	78.5	5	78.0	77.5	77.0	5	76.5	76.0	75.5
6	97.2	96.6	96.0	6	95.4	94.8	94.2	6	93.6	93.0	92.4	6	91.8	91.2	90.6
7	113.4	112.7	112.0	7	111.3	110.6	109.9	7	109.2	108.5	107.8	7	107.1	106.4	105.7
8	129.6	128.8	128.0	8	127.2	126.4	125.6	8	124.8	124.0	123.2	8	122.4	121.6	120.8
9	145.8	144.9	144.0	9	143.1	142.2	141.3	9	140.4	139.5	138.6	9	137.7	136.8	135.9
對 數															
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9					
273	43	13.4	1525	1635	1846	2007	2167	2328	2488	2649	2809	1	150	149	148
71		2969	3130	3290	3450	3610	3770	3930	4090	4249	4409	2	15.0	14.9	14.8
72		4569	4729	4888	5048	5207	5367	5526	5685	5844	6004	3	30.0	29.8	29.6
73		6163	6322	6481	6640	6799	6957	7116	7275	7433	7592	4	45.0	44.7	44.4
74		7751	7909	8067	8226	8384	8542	8701	8859	9017	9175	5	60.0	59.6	59.2
75		9333	9491	9648	9806	9964	*0122	*0279	*0437	*0594	*0752	6	75.0	74.5	74.0
76	44	0909	1036	12.4	13.31	1538	1695	1852	2009	2166	2323	7	90.0	89.4	88.8
77		2480	2637	2793	2950	3106	3263	3419	3576	3732	3889	8	105.0	104.3	103.6
78		4045	4201	4357	4513	4669	4825	4981	5137	5293	5449	9	120.0	119.2	118.4
79		5604	5760	5915	6071	6226	6382	6537	6692	6848	7003	1	135.0	134.1	133.2
280		7158	7313	7468	7623	7778	7933	8088	8242	8397	8552	2	147	146	145
81		8706	8861	9015	9170	9324	9478	9633	9787	9941	*0095	3	14.7	14.6	14.5
82	45	0249	0403	0557	0711	0865	1018	1172	1326	1479	1633	4	29.4	29.2	29.0
83		1786	1940	2093	2247	2400	2553	2706	2859	3012	3165	5	44.1	43.8	43.5
84		3318	3471	3624	3777	3930	4082	4235	4387	4540	4692	6	58.8	58.4	58.0
85		4845	4997	5150	5302	5454	5606	5758	5910	6062	6214	7	73.5	73.0	72.5
86		6366	6518	6670	6821	6973	7125	7276	7428	7579	7731	8	88.2	87.6	87.0
87		7882	8033	8184	8336	8487	8638	8789	8940	9091	9242	9	102.9	102.2	101.5
88		9392	9543	9694	9845	9995	*0146	*0296	*0447	*0597	*0748	1	117.6	116.8	116.0
89	46	0898	1043	1198	1348	1499	1649	1799	1948	2093	2238	2	132.3	131.4	130.5
290		2398	2548	2697	2847	2997	3145	3296	3445	3594	3744	144		143	
91		3893	4042	4191	4340	4490	4639	4788	4936	5085	5234	1	14.4		14.3
92		5333	5532	5630	5829	5977	6126	6274	6423	6571	6719	2	28.8		28.6
93		6868	7016	7164	7312	7460	7608	7756	7904	8052	8200	3	43.2		42.9
94		8347	8495	8643	8790	8938	9085	9233	9380	9527	9675	4	57.6		57.2
95		9822	9939	*0116	*0263	*0410	*0557	*0704	*0851	*0998	*1145	5	72.0		71.5
96	47	1292	1438	1585	1732	1878	2025	2171	2318	2464	*1610	6	86.4		85.8
97		2756	2903	3049	3195	3341	3487	3633	3779	3925	4071	7	100.8		100.1
98		4216	4362	4508	4653	4799	4944	5090	5235	5381	5526	8	115.2		114.4
99		5671	5816	5962	6107	6252	6397	6542	6687	6832	6976	9	129.6		128.7
300		7121	7266	7411	7555	7700	7844	7989	8133	8278	8422	142		141	
01		8566	8711	8855	8999	9143	9287	9431	9575	9719	9863	1	14.2		14.1
02	48	0007	0151	0294	0438	0582	0725	0869	1012	1156	1299	2	28.4		28.2
03		1443	1583	1729	1872	2016	2159	2302	2445	2588	2731	3	42.6		42.3
04		2874	3016	3159	3302	3445	3587	3730	3872	4015	4157	4	56.8		56.4
05		4300	4442	4585	4727	4869	5011	5153	5295	5437	5579	5	71.0		70.5
06		5721	5863	6005	6147	6289	6430	6572	6714	6855	6997	6	85.2		84.6
07		7138	7280	7421	7563	7704	7845	7986	8127	8269	8410	7	99.4		98.7
08		8551	8692	8833	8974	9114	9255	9396	9537	9677	9818	8	113.6		112.8
09		9958	*0099	*0239	*0380	*0520	*0661	*0801	*0941	*1081	*1222	9	127.8		126.9
310	49	1362	1502	1642	1782	1922	2062	2201	2341	2481	2621	140		139	
												1	14.0		13.9
												2	28.0		27.9
												3	42.0		41.9
												4	56.0		55.9
												5	70.0		69.9
												6	84.0		83.9
												7	98.0		97.9
												8	112.0		111.9
												9	126.0		125.9

表一 對 數 表

比例部分				比例部分				比例部分				比例部分							
140		139	138	137		136	135		134	13	132	131		130	129				
1	14.0	13.9	13.8	1	13.7	13.6	13.5	1	13.4	13.3	13.2	1	13.1	13.0	12.9				
2	28.0	2.8	27.6	2	27.4	27.2	27.0	2	26.8	26.6	26.4	2	26.2	26.0	25.8				
3	42.0	41.7	41.4	3	41.1	40.8	40.5	3	40.2	39.9	39.6	3	39.3	39.0	38.7				
4	56.0	55.6	55.2	4	54.8	54.4	54.0	4	53.6	53.2	52.8	4	52.4	52.0	51.6				
5	70.0	69.5	69.0	5	68.5	68.0	67.5	5	67.0	66.5	66.0	5	65.5	65.0	64.5				
6	84.0	83.4	82.8	6	82.2	81.6	81.0	6	80.4	79.8	79.2	6	78.6	78.0	77.4				
7	98.0	97.3	96.6	7	95.9	95.2	94.5	7	93.8	93.1	92.4	7	91.7	91.0	90.3				
8	112.0	111.2	110.4	8	109.6	108.8	108.0	8	107.2	103.4	105.6	8	104.8	104.0	103.2				
9	126.0	125.1	124.2	9	123.3	122.4	121.5	9	120.6	119.7	118.8	9	117.9	117.0	116.1				
對 數																			
N	0									1									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
310	49	1362	1602	1642	1732	1922	20	12	2341	2481	2621	1	128		127				
11		2760	2900	3040	3179	3319	3458	3597	3737	3876	4015	2	12.8		12.7				
12		4155	4294	4433	4572	4711	4850	4989	5128	5267	5406	3	15.6		15.4				
13		5544	5683	5822	5960	6099	6238	6376	6515	6653	6791	4	38.4		38.1				
14		6930	7068	7206	7344	7483	7621	7759	7897	8035	8173	5	51.2		50.8				
15		8311	8448	8585	8724	8862	8999	9137	9275	9412	9550	6	64.0		63.5				
16		9687	9824	9962	0099	0236	0374	0511	0648	0785	0922	7	76.8		76.2				
17	50	1059	1196	1333	1470	1607	1744	1880	2017	2154	2291	8	89.6		88.9				
18		2427	2564	2700	2837	2973	3109	3246	3382	3518	3655	9	102.4		101.6				
19		3791	3927	4063	4199	4335	4471	4607	4743	4878	5014	1	115.2		114.3				
320		5150	5286	5421	5557	5693	5828	5964	6099	6234	6370	2	126		125				
21		6505	6640	6776	6911	7046	7181	7316	7451	7586	7721	3	12.6		12.5				
22		7856	7991	8126	826	0	8395	8530	8664	8799	8934	4	25.2		25.0				
23		9203	9337	9471	9606	9740	9874	0009	0143	0277	0411	5	37.8		37.5				
24	51	0545	0679	0813	0947	1081	1215	1349	1482	1616	1750	6	50.4		50.0				
25		1883	2017	2151	2284	2418	2551	2684	2818	2951	3084	7	63.0		62.5				
26		3218	3351	3484	3617	3750	3883	4016	4149	4282	4415	8	75.6		75.0				
27		4548	4681	4813	4946	5079	5211	5344	5476	5609	5741	9	88.2		87.5				
28		5874	6006	6139	6271	6403	6535	6668	6800	6932	7064	1	100.8		100.0				
29		7196	7328	7460	7592	7724	7855	7987	8119	8251	8382	2	113.4		112.5				
330		8514	8646	8777	8909	9040	9171	9303	9434	9566	9697	3	124		123				
31		9328	9459	0090	0221	0353	0484	0615	0745	0876	1007	4	12.4		12.3				
32	52	1138	1269	1400	1530	1661	1792	1922	2053	2183	2314	5	24.8		24.8				
33		2444	2575	2705	2835	2966	3096	3226	3356	3486	3616	6	37.2		37.2				
34		3746	3876	4005	4136	4266	4396	4526	4656	4785	4915	7	49.6		49.6				
35		5045	5174	5304	5434	5563	5693	5822	5951	6081	6210	8	62.0		62.0				
36		6339	6469	6598	6727	6856	6985	7114	7243	7372	7501	9	74.4		74.4				
37		7630	7759	7888	8016	8145	8274	8402	8531	8660	8788	1	86.8		86.8				
38		8917	9045	9174	9302	9430	9559	9687	9815	9943	0072	2	99.2		99.2				
39	53	0200	0328	0456	0584	0712	0840	0968	1096	1223	1351	3	111.6		111.6				
340		1479	1607	1734	1862	1990	2117	2245	2372	2500	2627	4	123		123				
41		2754	2882	3009	3136	3264	3391	3518	3645	3772	3899	5	12.3		12.3				
42		4026	4153	4280	4407	4534	4661	4787	4914	5041	5167	6	24.6		24.6				
43		5294	5421	5547	5674	5800	5927	6053	6180	6306	6432	7	37.2		37.2				
44		6553	6685	6811	6937	7063	7189	7315	7441	7567	7693	8	49.6		49.6				
45		7819	7945	8071	8197	8322	8448	8574	8699	8825	8951	9	56.9		56.9				
46		9076	9202	9327	9452	9578	9703	9829	9954	0079	0204	1	62.0		62.0				
47	54	0329	0455	0580	0705	0830	0955	1030	1205	1330	1454	2	74.4		74.4				
48		1579	1703	1829	1953	2078	2203	2327	2452	2576	2701	3	86.1		86.1				
49		2825	2950	3074	3199	3323	3447	3571	3696	3820	3944	4	98.4		98.4				
350		4068	4192	4316	4440	4564	4688	4812	4936	5060	5183	5	110.7		110.7				

表一 對 數 表

N	對 數									比例部分				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	124	123	122	
350	54	4068	4192	4316	4440	4564	4688	4812	4936	5060	5183	12.4	12.3	12.2
51		5307	5431	5555	5678	5802	5925	6049	6172	6296	6419	24.8	24.6	24.4
52		6543	6666	6789	6913	7036	7159	7282	7405	7529	7652	37.2	36.9	36.6
53		7775	7898	8021	8144	8267	8389	8512	8635	8758	8881	49.6	49.2	48.8
54		9003	9126	9249	9371	9494	9616	9739	9861	9984	*0106	62.0	61.5	61.0
55	55	0228	0351	0473	0595	0717	0840	0962	1084	1206	1328	74.4	73.8	73.2
56		1450	1572	1694	1816	1938	2060	2181	2303	2425	2547	86.8	86.1	85.4
57		2668	2790	2911	3033	3155	3276	3398	3519	3640	3762	99.2	98.4	97.6
58		3883	4004	4126	4247	4368	4489	4610	4731	4852	4973	111.6	110.7	109.8
59		5094	5215	5336	5457	5578	5699	5820	5940	6061	6182	121	120	119
360		6303	6423	6544	6664	6785	6905	7026	7146	7267	7387	12.1	12.0	11.9
61		7507	7627	7748	7868	7988	8108	8228	8349	8469	8589	24.2	24.0	23.8
62		8709	8829	8948	9068	9188	9308	9428	9548	9667	9787	36.3	36.0	35.7
63		9907	*0026	*0146	*0265	*0385	*0504	*0624	*0743	*0863	*0982	48.4	48.0	47.6
64	56	1101	1221	1340	1459	1578	1698	1817	1936	2055	2174	60.5	60.0	59.5
65		2298	2412	2531	2650	2769	2887	3003	3125	3244	3362	72.6	72.0	71.4
66		3481	3600	3718	3837	3955	4074	4192	4311	4429	4548	84.7	84.0	83.3
67		4666	4784	4903	5021	5139	5257	5376	5494	5612	5730	96.8	96.0	95.2
68		5848	5966	6084	6202	6320	6437	6555	6673	6791	6909	108.9	108.0	107.1
69		7026	7144	7262	7379	7497	7614	7732	7849	7967	8084	118	117	116
370		8202	8319	8436	8554	8671	8788	8905	9023	9140	9257	11.8	11.7	11.6
71		9374	9491	9608	9725	9842	9959	*0076	*0193	*0309	*0426	23.6	23.4	23.2
72	57	0543	0660	0776	0893	1010	1126	1243	1359	1476	1592	35.4	35.1	34.8
73		1709	1825	1942	2058	2174	2291	2407	2523	2639	2755	47.2	46.8	46.4
74		2872	2988	3104	3220	3336	3452	3568	3684	3800	3915	59.0	58.5	58.0
75		4031	4147	4263	4379	4494	4610	4726	4841	4957	5072	70.8	70.2	69.6
76		5188	5303	5419	5534	5650	5765	5880	5996	6111	6226	82.6	81.9	81.2
77		6341	6457	6572	6687	6802	6917	7032	7147	7262	7377	94.4	93.6	92.8
78		7492	7607	7722	7836	7951	8066	8181	8295	8410	8525	106.2	105.3	104.4
79		8639	8754	8868	8983	9097	9212	9326	9441	9555	9669	115	114	113
380		9784	9898	*0012	*0126	*0241	*0355	*0469	*0583	*0697	*0811	11.5	11.4	11.3
81	58	0925	1039	1153	1267	1381	1495	1603	1722	1836	1950	23.0	22.8	22.6
82		2063	2177	2291	2404	2518	2631	2745	2858	2972	3085	34.5	34.2	33.9
83		3199	3312	3426	3539	3652	3765	3879	3992	4105	4218	46.0	45.6	45.2
84		4331	4444	4557	4670	4783	4896	5009	5122	5235	5348	57.5	57.0	56.5
85		5481	5574	5686	5799	5912	6024	6137	6250	6362	6475	69.0	68.4	67.8
86		6587	6700	6812	6925	7037	7149	7262	7374	7486	7599	80.5	79.8	79.1
87		7711	7823	7935	8047	8160	8272	8384	8496	8608	8720	92.0	91.2	90.4
88		8832	8944	9056	9167	9279	9391	9503	9615	9726	9838	103.5	102.6	101.7
89		9950	*0061	*0173	*0284	*0396	*0507	*0619	*0730	*0842	*0953	112	111	110
390	59	1065	1176	1287	1399	1510	1621	1732	1843	1955	2066	11.2	11.1	11.0
91		2177	2288	2399	2510	2621	2732	2843	2954	3064	3175	22.4	22.2	22.0
92		3286	3397	3508	3618	3729	3840	3950	4061	4171	4282	33.6	33.3	33.0
93		4393	4503	4614	4724	4834	4945	5055	5165	5276	5386	44.8	44.4	44.0
94		5496	5606	5717	5827	5937	6047	6157	6267	6377	6487	56.0	55.5	55.0
95		6597	6707	6817	6927	7037	7146	7256	7366	7476	7586	67.2	66.6	66.0
96		7695	7805	7914	8024	8134	8243	8353	8462	8572	8681	78.4	77.7	77.0
97		8791	8900	9009	9119	9228	9337	9446	9556	9665	9774	89.6	88.8	88.0
98		9883	9992	*0101	*0210	*0319	*0428	*0537	*0646	*0755	*0864	100.8	99.9	99.0
99	60	0973	1082	1191	1299	1408	1517	1625	1734	1843	1951	109	108	107
400		2060	2169	2277	2386	2494	2603	2711	2819	2928	3036	11.9	11.8	11.7
												21.8	21.6	21.4
												32.7	32.4	32.1
												43.6	43.2	42.8
												54.5	54.0	53.5
												65.4	64.8	64.2
												76.2	75.6	75.0
												87.3	86.4	85.4
												98.1	97.2	96.2

對 數		對 數									比 例 部 分				
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	109	108	107	
400	60	2050	2169	2277	2386	2494	2603	2711	2819	2928	3036	10.9	10.8	10.7	
		01	3144	3253	3361	3469	3577	3686	3794	3902	4010	4118	21.8	21.6	21.4
		02	4226	4334	4442	4550	4658	4766	4874	4932	5039	5197	32.7	32.4	32.1
		03	5305	5413	5521	5628	5736	5844	5951	6059	6166	6274	43.6	43.2	42.8
		04	6381	6489	6596	6704	6811	6919	7026	7133	7241	7348	54.5	54.0	53.5
		05	7455	7562	7669	7777	7884	7991	8098	8205	8312	8419	65.4	64.8	64.2
		06	8526	8633	8740	8847	8954	9061	9167	9274	9381	9488	76.3	75.6	74.9
		07	9594	9701	9808	9914	*0021	*0128	*0234	*0341	*0447	*0554	87.2	86.4	85.6
		08	0660	0767	0873	0979	1086	1192	1298	1405	1511	1617	98.1	97.2	96.3
09	1723	1829	1936	2042	2148	2254	2360	2466	2572	2678	108	105	104		
410	11	2784	2890	2996	3102	3207	3313	3419	3525	3630	3736	10.6	10.5	10.4	
		12	3842	3947	4053	4159	4264	4370	4475	4581	4686	21.2	21.0	20.8	
		13	4997	5003	5108	5213	5319	5424	5529	5634	5740	5845	31.8	31.5	31.2
		14	5950	6055	6160	6265	6370	6476	6581	6686	6790	6895	42.4	42.0	41.6
		15	7000	7105	7210	7315	7420	7525	7629	7734	7839	7943	53.0	52.5	52.0
		16	8048	8153	8257	8362	8466	8571	8676	8780	8884	8989	63.6	63.0	62.4
		17	9093	9198	9302	9406	9511	9615	9719	9824	9928	*0032	74.2	73.5	72.8
		18	0136	0240	0344	0448	0552	0656	0760	0864	0968	1072	84.3	84.0	83.2
		19	1176	1280	1384	1488	1592	1695	1799	1903	2007	2110	95.4	94.5	93.6
420	21	2214	2318	2421	2525	2628	2732	2835	2939	3042	3146	103	102	101	
		22	3249	3353	3456	3559	3663	3766	3869	3973	4076	4179	10.3	10.2	10.1
		23	4282	4385	4488	4591	4695	4798	4901	5004	5107	5210	20.6	20.4	20.2
		24	5312	5415	5518	5621	5724	5827	5929	6032	6135	6238	30.9	30.6	30.3
		25	6340	6443	6546	6648	6751	6853	6956	7058	7161	7263	41.2	40.8	40.4
		26	7366	7468	7571	7673	7775	7878	7980	8082	8185	8287	51.5	51.0	50.5
		27	8389	8491	8593	8695	8797	8900	9002	9104	9 06	9308	61.8	61.2	60.6
		28	9410	9512	9613	9715	9817	9919	*0021	*0123	*0224	*0326	72.1	71.4	70.7
		29	0428	0530	0631	0733	0835	0936	1038	1139	1241	1342	82.4	81.6	80.8
430	31	1444	1545	1647	1748	1849	1951	2052	2153	2255	2356	92.7	91.8	90.9	
		2457	2559	2660	2761	2862	2963	3064	3165	3266	3367	10	9	9	
		3468	3569	3670	3771	3872	3973	4074	4175	4276	4376	10.0	9.9	9.9	
		4477	4578	4679	4779	4880	4981	5081	5182	5283	5383	20.0	19.8	19.8	
		5484	5584	5685	5785	5886	5986	6087	6187	6287	6388	30.0	29.7	29.7	
		6488	6588	6688	6789	6889	6989	7089	7189	7290	7390	40.0	39.6	39.6	
		7490	7590	7690	7790	78 0	7990	8090	8190	8290	8389	50.0	49.5	49.5	
		8489	8589	8689	8789	8888	8988	9088	9188	9287	9387	60.0	59.4	59.4	
		9486	9586	9686	9785	9885	9984	*0084	*0183	*0283	*0382	70.0	69.3	69.3	
440	33	0481	0581	0680	0779	0879	0978	1077	1177	1276	1375	80.0	79.2	79.2	
		1474	1573	1672	1771	1871	1970	2069	2168	2267	2366	90.0	89.1	89.1	
		2465	2563	2662	2761	2830	2959	3058	3156	3255	3354	98	98	98	
		3453	3551	3650	3749	3847	3946	4044	4143	4242	4340	1	9.8	9.8	
		4439	4537	4636	4734	4832	4931	5029	5127	5226	5324	2	19.6	19.6	
		5422	5521	5619	5717	5815	5913	6011	6110	6208	6306	3	29.4	29.4	
		6404	6502	6600	6698	6796	6894	6992	7089	7187	7285	4	39.2	39.2	
		7383	7481	7579	7676	7774	7872	7969	8067	8165	8262	5	49.0	49.0	
		8360	8458	8555	8653	8750	8848	8945	9043	9140	9237	6	58.8	58.8	
450	35	9335	9432	9530	9627	9724	9821	9919	*0016	*0113	*0210	7	68.6	68.6	
		0308	0405	0502	0599	0696	0793	0890	0987	1084	1181	8	78.4	78.4	
		1278	1375	14 2	1569	1666	1762	1859	195 5	2053	2150	9	88.2	88.2	
		2246	2343	2440	2536	2633	2730	2826	2923	3019	3116	1	9.7	9.7	
		3213	3309	3405	3502	3598	3695	3791	3888	3984	4080	2	19.4	19.4	
													3	29.1	29.1
													4	38.8	38.8
													5	48.5	48.5
													6	58.2	58.2
											7	67.9	67.9		
											8	77.6	77.6		
											9	87.3	87.3		

表一 對 數 表

		對 數									比 例 部 分				
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	96	95	94	
	N											1	9.6	9.5	9.4
450	65	3213	3309	3405	3502	3598	3695	3791	3888	3984	4080	2	19.2	19.0	18.8
51		4177	4273	4369	4465	4562	4658	4754	4850	4946	5042	3	28.8	28.5	28.2
52		5138	5235	5331	5427	5523	5619	5715	5810	5906	6002	4	38.4	38.0	37.6
53		6098	6194	6290	6386	6482	6577	6673	6769	6864	6960	5	48.0	47.5	47.0
54		7056	7152	7247	7343	7438	7534	7629	7725	7820	7916	6	57.6	57.0	56.4
55		8011	8107	8202	8298	8393	8488	8584	8679	8774	8870	7	67.2	66.5	65.8
56		8965	9060	9155	9250	9346	9441	9536	9631	9726	9821	8	76.8	76.0	75.2
57		9916	*0011	*0106	*0201	*0296	*0391	*0486	*0581	*0676	*0771	9	86.4	85.5	84.6
58	66	0835	0969	1055	1150	1245	1339	1434	1529	1623	1718		93		92
59		1813	1907	2002	2096	2191	2286	2380	2475	2569	2663	1	9.3		9.2
460		2758	2832	2947	3041	3135	3230	3324	3418	3512	3607	2	18.6		18.4
61		3701	3795	3889	3983	4078	4172	4266	4360	4454	4548	3	27.9		27.6
62		4642	4736	4830	4924	5018	5112	5206	5299	5393	5487	4	37.2		36.8
63		5581	5675	5769	5862	5956	6050	6143	6237	6331	6424	5	46.5		46.0
64		6518	6612	6705	6799	6892	6986	7079	7172	7266	7360	6	55.8		55.2
65		7453	7546	7640	7733	7826	7920	8013	8106	8199	8293	7	65.1		64.4
66		8386	8479	8572	8665	8759	8852	8945	9038	9131	9224	8	74.4		73.6
67		9317	9410	9503	9596	9689	9782	9875	9967	*0060	*0153	9	83.7		82.8
68	67	0246	0339	0431	0524	0617	0710	0802	0895	0988	1080		91		90
69		1173	1265	1358	1451	1543	1636	1728	1821	1913	2005	1	9.1		9.0
470		2098	2190	2283	2375	2467	2560	2652	2744	2836	2929	2	18.2		18.0
71		3021	3113	3205	3297	3390	3482	3574	3666	3758	3850	3	27.3		27.0
72		3912	4034	4126	4218	4310	4402	4494	4586	4677	4769	4	36.4		36.0
73		4831	4953	5045	5137	5228	5320	5412	5503	5595	5687	5	45.5		45.0
74		5778	5870	5962	6053	6145	6233	6328	6419	6511	6602	6	54.6		54.0
75		6694	6785	6876	6968	7059	7151	7242	7333	7424	7516	7	63.7		63.0
76		7607	7698	7789	7881	7972	8063	8154	8245	8336	8427	8	72.8		72.0
77		8518	8609	8700	8791	8882	8973	9064	9155	9246	9337	9	81.9		81.0
78		9428	9519	9610	9701	9791	9882	9973	*0063	*0154	*0245		89		
79	68	0333	0426	0517	0607	0698	0789	0879	0970	1060	1151	1	8.9		8.8
480		1241	1332	1422	1513	1603	1693	1784	1874	1964	2055	2	17.8		17.8
81		2145	2235	2326	2416	2506	2596	2686	2777	2867	2957	3	26.7		26.7
82		3047	3137	3227	3317	3407	3497	3587	3677	3767	3857	4	35.6		35.6
83		3947	4037	4127	4217	4307	4396	4486	4576	4666	4756	5	44.5		44.5
84		4845	4935	5025	5114	5204	5294	5383	5473	5563	5652	6	53.4		53.4
85		5742	5831	5921	6010	6100	6189	6279	6368	6458	6547	7	62.3		62.3
86		6636	6726	6815	6904	6994	7083	7172	7261	7351	7440	8	71.2		71.2
87		7529	7618	7707	7796	7886	7975	8064	8153	8242	8331	9	80.1		80.1
88		8420	8509	8598	8687	8776	8865	8954	9042	9131	9220		88		
89		9309	9398	9486	9575	9664	9753	9841	9930	*0019	*0107	1	8.7		8.7
490	69	0196	0285	0373	0462	0550	0639	0728	0816	0905	0993	2	17.4		17.4
91		1081	1170	1258	1347	1435	1524	1612	1700	1789	1877	3	26.1		26.1
92		1965	2053	2142	2230	2318	2406	2494	2583	2671	2759	4	34.8		34.8
93		2847	2935	3023	3111	3199	3287	3375	3463	3551	3639	5	43.5		43.5
94		3727	3815	3903	3991	4078	4166	4254	4342	4430	4517	6	52.2		52.2
95		4605	4693	4781	4868	4956	5044	5131	5219	5307	5394	7	60.9		60.9
96		5482	5569	5657	5744	5832	5919	6007	6094	6182	6269	8	69.6		69.6
97		6356	6444	6531	6618	6706	6793	6880	6968	7055	7142	9	78.3		78.3
98		7229	7317	7404	7491	7578	7665	7752	7839	7926	8014				
99		8101	8188	8275	8362	8449	8535	8622	8709	8796	8883				
500		8970	9057	9144	9231	9317	9404	9491	9578	9664	9751				

表一 對 數 表

		對 數									比例部分			
											87	88	89	
N		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3
500	69	8970	9037	9144	9291	9317	9404	9491	9578	9664	9751	8.7	8.6	8.5
01		9838	9924	*0011	*0098	*0184	*0271	*0358	*0444	*0531	*0617	17.2	17.2	17.0
02	70	0704	0790	0877	0963	1050	1136	1222	1309	1395	1482	26.1	25.8	25.5
03		1569	1654	1741	1827	1913	1999	2086	2172	2258	2344	34.8	34.4	34.0
04		2431	2517	2603	2689	2775	2861	2947	3033	3119	3205	43.5	43.0	42.5
05		3251	3377	3463	3549	3635	3721	3807	3893	3979	4065	52.2	51.6	51.0
06		4151	4256	4322	4418	4494	4579	4665	4751	4837	4922	60.9	60.2	59.5
07		5008	5094	5179	5265	5350	5436	5522	5607	5693	5778	69.6	68.8	68.0
08		5864	5949	6035	6120	6206	6291	6376	6462	6547	6632	78.3	77.4	76.5
09		6718	6803	6888	6974	7059	7144	7229	7315	7400	7485	84		83
510		7570	7655	7740	7826	7911	7996	8081	8166	8251	8336	8.4	8.3	
11		8421	8506	8591	8676	8761	8846	8931	9015	9100	9185	16.8	16.6	
12		9270	9355	9440	9524	9609	9694	9779	9863	9948	*0033	25.2	24.9	
13	71	0117	0202	0287	0371	0456	0540	0625	0710	0794	0879	33.6	33.2	
14		0963	1048	1132	1217	1301	1385	1470	1554	1639	1723	42.0	41.5	
15		1807	1892	1976	2060	2144	2229	2313	2397	2481	2566	50.4	49.8	
16		2650	2734	2818	2902	2986	3070	3154	3238	3323	3407	58.8	58.1	
17		3491	3575	3659	3742	3826	3910	3994	4078	4162	4246	67.2	66.4	
18		4330	4414	4497	4581	4665	4749	4833	4916	5000	5084	75.6	74.7	
19		5167	5251	5335	5418	5502	5586	5669	5753	5836	5920	82		
520		6003	6087	6170	6254	6337	6421	6504	6588	6671	6754	8.2	8.1	
21		6838	6921	7004	7088	7171	7254	7338	7421	7504	7587	16.4	16.2	
22		7671	7754	7837	7920	8003	8086	8169	8253	8336	8419	24.6	24.3	
23		8502	8585	8668	8751	8834	8917	9000	9083	9165	9248	32.8	32.4	
24		9331	9414	9497	9580	9663	9745	9828	9911	9994	*0077	41.0	40.2	
25	72	0159	0242	0325	0407	0490	0573	0655	0738	0821	0903	49.2	47.4	
26		0986	1068	1151	1233	1316	1398	1481	1563	1646	1728	57.4	56.7	
27		1811	1893	1975	2058	2140	2222	2305	2387	2469	2552	65.6	64.8	
28		2634	2716	2798	2881	2963	3045	3127	3209	3291	3374	73.8	72.9	
29		3456	3538	3620	3702	3784	3866	3948	4030	4112	4194	81		
530		4276	4358	4440	4522	4604	4685	4767	4849	4931	5013	8.1	8.0	
31		5095	5176	5258	5340	5422	5503	5585	5667	5748	5830	16.2	16.0	
32		5913	5993	6075	6156	6238	6320	6401	6483	6564	6646	24.3	24.0	
33		6727	6809	6890	6972	7053	7134	7216	7297	7379	7460	32.4	32.0	
34		7541	7623	7704	7785	7866	7948	8029	8110	8191	8273	40.5	40.0	
35		8354	8435	8516	8597	8678	8759	8841	8922	9003	9084	48.6	48.0	
36		9165	9246	9327	9408	9489	9570	9651	9732	9813	9893	56.7	56.0	
37		9974	*0055	*0136	*0217	*0298	*0378	*0459	*0540	*0621	*0702	64.8	64.8	
38	73	0782	0863	0944	1024	1105	1186	1266	1347	1428	1508	72.9	72.9	
39		1589	1669	1750	1830	1911	1991	2072	2152	2233	2313	80		
540		2394	2474	2555	2635	2715	2796	2876	2956	3037	3117	8.0	8.0	
41		3197	3278	3358	3438	3518	3598	3679	3759	3839	3919	16.0	16.0	
42		3999	4079	4160	4240	4320	4400	4480	4560	4640	4720	24.0	24.0	
43		4800	4880	4960	5040	5120	5200	5279	5359	5439	5519	32.0	32.0	
44		5599	5679	5759	5838	5918	5998	6078	6157	6237	6317	40.0	40.0	
45		6397	6476	6556	6635	6715	6795	6874	6954	7034	7113	48.0	48.0	
46		7193	7272	7352	7431	7511	7590	7670	7749	7829	7908	56.0	56.0	
47		7987	8067	8146	8225	8305	8384	8463	8543	8622	8701	64.0	64.0	
48		8781	8860	8939	9018	9097	9177	9256	9335	9414	9493	72.0	72.0	
49		9572	9651	9731	9810	9889	9968	*0047	*0126	*0205	*0284	79		
550	74	0363	0442	0521	0600	0678	0757	0836	0915	0994	1073	7.9	7.9	
												15.8	15.8	
												23.7	23.7	
												31.6	31.6	
												39.5	39.5	
												47.4	47.4	
												55.3	55.3	
												63.2	63.2	
												71.1	71.1	

		對 數										比例部分	
												79	78
N		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2
550	74	0363	0442	0521	0600	0678	0757	0836	0915	0994	1073	7.9	7.8
51		1162	1230	1309	1388	1467	1546	1624	1703	1782	1860	15.8	15.6
52		1939	2018	2096	2175	2254	2332	2411	2489	2568	2647	23.7	23.4
53		2725	2804	2882	2961	3039	3118	3196	3275	3353	3431	31.6	31.2
54		3510	3583	3667	3745	3823	3902	3980	4058	4136	4215	39.5	39.0
55		4293	4371	4449	4528	4606	4684	4762	4840	4919	4997	47.4	46.8
56		5075	5153	5231	5309	5387	5465	5543	5621	5699	5777	55.3	54.6
57		5855	5933	6011	6089	6167	6245	6323	6401	6479	6556	63.2	62.4
58		6634	6712	6790	6868	6945	7023	7101	7179	7256	7334	71.1	70.2
59		7412	7489	7567	7645	7722	7800	7878	7955	8033	8110	77	76
560		8188	8266	8343	8421	8498	8576	8653	8731	8808	8885	7.7	7.6
61		8963	9040	9118	9195	9272	9350	9427	9504	9582	9659	15.4	15.2
62		9736	9814	9891	9968	*0045	*0123	*0200	*0277	*0354	*0431	23.1	22.8
63	75	0503	0586	0663	0740	0817	0894	0971	1048	1125	1202	30.8	30.4
64		1279	1356	1433	1510	1587	1664	1741	1818	1895	1972	38.5	38.0
65		2048	2125	2202	2279	2356	2433	2509	2586	2663	2740	46.2	45.6
66		2816	2893	2970	3047	3123	3200	3277	3353	3430	3506	53.9	53.2
67		3583	3660	3736	3813	3889	3966	4042	4119	4195	4272	61.6	60.8
68		4348	4425	4501	4578	4654	4730	4807	4883	4960	5036	69.3	68.4
69		5112	5189	5265	5341	5417	5494	5570	5646	5722	5799	75	
570		5875	5951	6027	6103	6180	6256	6332	6408	6484	6560	7.5	7.4
71		6636	6712	6788	6864	6940	7016	7092	7168	7244	7320	15.0	14.8
72		7396	7472	7548	7624	7700	7775	7851	7927	8003	8079	22.5	22.2
73		8155	8230	8306	8382	8458	8533	8609	8685	8761	8836	30.0	29.6
74		8912	8988	9063	9139	9214	9290	9366	9441	9517	9592	37.0	37.0
75		9668	9743	9819	9894	9970	*0045	*0121	*0196	*0272	*0347	44.4	44.4
76	76	0122	0498	0573	0649	0724	0799	0875	0950	1025	1101	51.8	51.8
77		1176	1251	1326	1402	1477	1552	1627	1702	1778	1853	59.2	59.2
78		1928	2003	2078	2153	2228	2303	2378	2453	2529	2604	66.6	66.6
79		2679	2754	2829	2904	2978	3053	3128	3203	3278	3353	73	
580		3428	3503	3578	3653	3727	3802	3877	3952	4027	4101	7.3	7.3
81		4176	4251	4326	4400	4475	4550	4624	4699	4774	4848	14.6	14.6
82		4923	4998	5072	5147	5221	5296	5370	5445	5520	5594	21.9	21.9
83		5669	5743	5818	5892	5966	6041	6115	6190	6264	6338	29.2	29.2
84		6413	6487	6562	6636	6710	6785	6859	6933	7007	7082	36.5	36.5
85		7156	7230	7304	7379	7453	7527	7601	7675	7749	7823	43.8	43.8
86		7898	7972	8046	8120	8194	8268	8342	8416	8490	8564	51.1	51.1
87		8638	8712	8786	8860	8934	9008	9082	9156	9230	9304	58.4	58.4
88		9377	9451	9525	9599	9673	9746	9820	9894	9968	*0042	65.7	65.7
89	77	0115	0189	0263	0336	0410	0484	0557	0631	0705	0778	72	
590		0852	0926	0999	1073	1146	1220	1293	1367	1440	1514	7.2	7.2
91		1587	1661	1734	1808	1881	1955	2028	2102	2175	2248	14.4	14.4
92		2322	2395	2468	2542	2615	2688	2762	2835	2908	2981	21.6	21.6
93		3055	3128	3201	3274	3348	3421	3494	3567	3640	3713	28.8	28.8
94		3786	3860	3933	4006	4079	4152	4225	4298	4371	4444	36.0	36.0
95		4517	4590	4663	4736	4809	4882	4955	5028	5100	5173	43.2	43.2
96		5246	5319	5392	5465	5538	5610	5683	5756	5829	5902	50.4	50.4
97		5974	6047	6120	6193	6265	6338	6411	6483	6556	6629	57.6	57.6
98		6701	6774	6846	6919	6992	7064	7137	7209	7282	7354	64.8	64.8
99		7427	7499	7572	7644	7717	7789	7862	7934	8006	8079	72	
600		8151	8224	8296	8368	8441	8513	8585	8658	8730	8802	7.2	7.2
												14.4	14.4
												21.6	21.6
												28.8	28.8
												36.0	36.0
												43.2	43.2
												50.4	50.4
												57.6	57.6
												64.8	64.8

表一 對 數 表

		對 數										比 例 部 分		
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	3	72	
600												1	7.8	7.2
												2	14.6	14.4
												3	21.9	21.6
												4	29.2	28.8
												5	36.5	36.0
												6	43.8	43.2
												7	51.1	50.4
												8	58.4	57.6
												9	65.7	64.8
													71	70
												1	7.1	7.0
												2	14.2	14.0
												3	21.3	21.0
												4	28.4	28.0
												5	35.5	35.0
												6	42.6	42.0
												7	49.7	49.0
												8	56.8	56.0
												9	63.9	63.0
													69	
												1	6.9	
												2	13.8	
												3	20.7	
												4	27.6	
												5	34.5	
												6	41.4	
												7	48.3	
												8	55.2	
												9	62.1	
													68	
												1	6.8	
												2	13.6	
												3	20.4	
												4	27.2	
												5	34.0	
												6	40.8	
												7	47.6	
												8	54.4	
												9	61.2	
													67	
												1	6.7	
												2	13.4	
												3	20.1	
												4	26.8	
												5	33.5	
												6	40.2	
												7	46.9	
												8	53.6	
												9	60.3	
													66	
												1	6.6	
												2	13.2	
												3	19.8	
												4	26.4	
												5	33.0	
												6	39.6	
												7	46.2	
												8	52.8	
												9	59.4	
600	77	8151	8224	8296	8368	8441	8513	8585	8658	8730	8802			
01		8874	8947	9019	9091	9163	9236	9308	9380	9452	9524			
02		9596	9669	9741	9813	9885	9957	*0029	*0101	*0173	*0245			
03	78	0317	0389	0461	0533	0605	0677	0749	0821	0893	0965			
04		1037	1109	1181	1253	1324	1396	1468	1540	1612	1684			
05		1755	1827	1899	1971	2042	2114	2186	2258	2329	2401			
06		2473	2544	2616	2688	2759	2831	2902	2974	3046	3117			
07		3189	3260	3332	3403	3475	3546	3618	3689	3761	3832			
08		3904	3975	4046	4118	4189	4261	4332	4403	4475	4546			
09		4617	4689	4760	4831	4902	4974	5045	5116	5187	5259			
610		5330	5401	5472	5543	5615	5686	5757	5828	5899	5970			
11		6041	6112	6183	6254	6325	6397	6467	6538	6609	6680			
12		6751	6822	6893	6964	7035	7106	7177	7248	7319	7390			
13		7460	7531	7602	7673	7744	7815	7885	7956	8027	8098			
14		8168	8239	8310	8381	8451	8522	8593	8663	8734	8804			
15		8875	8946	9016	9087	9157	9228	9299	9369	9440	9510			
16		9581	9651	9722	9792	9863	9933	*0004	*0074	*0144	*0215			
17	79	0285	0356	0426	0.96	0567	0637	0707	0778	0848	0918			
18		0988	1059	1129	1199	1269	1340	1410	1480	1550	1620			
19		1691	1761	1831	1901	1971	2041	2111	2181	2252	2322			
620		2392	2462	2532	2602	2672	2742	2812	2882	2952	3022			
21		3092	3162	3231	3301	3371	3441	3511	3581	3651	3721			
22		3790	3860	3930	4000	4070	4139	4209	4279	4349	4418			
23		4488	4558	4627	4697	4767	4836	4906	4976	5045	5115			
24		5185	5254	5324	5393	5463	5532	5602	5672	5741	5811			
25		5880	5949	6019	6088	6158	6227	6297	6366	6436	6505			
26		6574	6644	6713	6782	6852	6921	6990	7060	7129	7198			
27		728	7357	7426	7495	7565	7634	7703	7772	7841	7910			
28		7960	8029	8098	8167	8236	8305	8374	8443	8513	8582			
29		8651	8720	8789	8858	8927	8996	9065	9134	9203	9272			
630		9341	9409	9478	9547	9616	9685	9754	9823	9892	9961			
31	80	0029	0098	0167	0236	0305	0373	0442	0511	0580	0648			
32		0717	0786	0854	0923	0992	1061	1129	1198	1266	1335			
33		1404	1472	1541	1609	1678	1747	1815	1884	1952	2021			
34		2089	2158	2226	2295	2363	2432	2500	2568	2637	2705			
35		2774	2842	2910	2979	3047	3116	3184	3252	3321	3389			
36		3457	3525	3594	3662	3730	3798	3867	3935	4003	4071			
37		4139	4208	4276	4344	4412	4480	4548	4616	4685	4753			
38		4821	4889	4957	5025	5093	5161	5229	5297	5365	5433			
39		5501	5569	5637	5705	5773	5841	5908	5976	6044	6112			
640		6180	6248	6316	6384	6451	6519	6587	6655	6723	6790			
41		6858	6926	6994	7061	7129	7197	7264	7332	7400	7467			
42		7535	7603	7670	7738	7806	7873	7941	8008	8076	8143			
43		8 11	8279	8346	8414	8481	8549	8616	8684	8751	8818			
44		8886	8953	9021	9088	9156	9223	9290	9358	9425	9492			
45		9560	9627	9694	9762	9829	9896	9964	*0031	*0098	*0165			
46	81	0233	0300	0367	0434	0501	0569	0636	0703	0770	0837			
47		0904	0971	1039	1106	1173	1240	1307	1374	1441	1508			
48		1575	1642	1709	1776	1843	1910	1977	2044	2111	2178			
49		2245	2312	2379	2445	2512	2579	2646	2713	2780	2847			
650		2913	2980	3047	3114	3181	3247	3314	3381	3448	3514			

		對 數									比 例 部 分		
N		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2
												67	
												6.7	
												13.4	
												20.1	
												26.8	
												33.5	
												40.2	
												46.9	
												53.6	
												60.3	
												66	
												6.6	
												13.2	
												19.8	
												26.4	
												33.0	
												39.6	
												46.2	
												52.8	
												59.4	
												65	
												6.5	
												13.0	
												19.5	
												26.0	
												32.5	
												39.0	
												45.5	
												52.0	
												58.5	
												64	
												6.4	
												12.8	
												19.2	
												25.6	
												32.0	
												38.4	
												44.8	
												51.2	
												57.6	
												63	
												6.3	
												12.6	
												18.9	
												25.2	
												31.5	
												37.8	
												44.1	
												50.4	
												56.7	
												62	
												6.2	
												12.4	
												18.6	
												24.8	
												31.0	
												37.2	
												43.4	
												49.6	
												55.8	
650	81	2913	2980	3047	3114	3181	3247	3314	3381	3448	3514		
51		3581	3648	3714	3781	3848	3914	3981	4048	4114	4181		
52		4248	4314	4381	4447	4514	4581	4647	4714	4780	4847		
53		4913	4980	5046	5113	5179	5246	5312	5378	5445	5511		
54		5578	5644	5711	5777	5843	5910	5976	6042	6109	6175		
55		6241	6308	6374	6440	6506	6573	6639	6705	6771	6838		
56		6904	6970	7036	7102	7169	7235	7301	7367	7433	7499		
57		7565	7631	7698	7764	7830	7896	7962	8028	8094	8160		
58		8226	8292	8358	8424	8490	8556	8622	8688	8754	8820		
59		8885	8951	9017	9083	9149	9215	9281	9346	9412	9478		
660		9544	9610	9676	9741	9807	9873	9939	*0004	*0070	*0136		
61	82	0201	0267	0333	0399	0464	0530	0595	0661	0727	0792		
62		0858	0924	0989	1055	1120	1186	1251	1317	1382	1448		
63		1514	1579	1645	1710	1775	1841	1906	1972	2037	2103		
64		2168	2233	2299	2364	2430	2495	2560	2626	2691	2756		
65		2822	2887	2952	3018	3083	3148	3213	3279	3344	3409		
66		3474	3539	3605	3670	3735	3800	3865	3930	3996	4061		
67		4126	4191	4256	4321	4386	4451	4516	4581	4646	4711		
68		4776	4841	4906	4971	5036	5101	5166	5231	5296	5361		
69		5426	5491	5556	5621	5686	5751	5815	5880	5945	6010		
670		6075	6140	6204	6269	6334	6399	6464	6528	6593	6658		
71		6723	6787	6852	6917	6981	7046	7111	7175	7240	7305		
72		7369	7434	7499	7563	7628	7692	7757	7821	7886	7951		
73		8015	8080	8144	8209	8273	8338	8402	8467	8531	8595		
74		8660	8724	8789	8853	8918	8982	9046	9111	9175	9239		
75		9304	9368	9432	9497	9561	9625	9690	9754	9818	9882		
76		9947	*0011	*0075	*0139	*0204	*0268	*0332	*0396	*0460	*0525		
77	83	0589	0653	0717	0781	0845	0909	0973	1037	1102	1166		
78		1230	1294	1358	1422	1486	1550	1614	1678	1742	1806		
79		1870	1934	1998	2062	2126	2189	2253	2317	2381	2445		
690		2509	2573	2637	2700	2764	2828	2892	2956	3020	3083		
81		3147	3211	3275	3338	3402	3466	3530	3593	3657	3721		
82		3784	3848	3912	3975	4039	4103	4166	4230	4294	4357		
83		4421	4484	4548	4611	4675	4739	4802	4866	4929	4993		
84		5056	5120	5183	5247	5310	5373	5437	5500	5564	5627		
85		5691	5754	5817	5881	5944	6007	6071	6134	6197	6261		
86		6324	6387	6451	6514	6577	6641	6704	6767	6830	6894		
87		6957	7020	7083	7146	7210	7273	7336	7399	7462	7525		
88		7588	7652	7715	7778	7841	7904	7967	8030	8093	8156		
89		8219	8282	8345	8408	8471	8534	8597	8660	8723	8786		
690		8849	8912	8975	9038	9101	9164	9227	9289	9352	9415		
91		9478	9541	9604	9667	9729	9792	9855	9918	9981	*0043		
92		0106	0169	0232	0294	0357	0420	0482	0545	0608	0671		
93	84	0733	0796	0859	0 21	0984	1046	1109	1172	1234	1297		
94		1359	1422	1485	1547	1610	1672	1735	1797	1860	1922		
95		1985	2047	2110	2172	2235	2297	2360	2422	2484	2547		
96		2609	2672	2734	2796	2859	2921	2983	3046	3108	3170		
97		3233	3295	3357	3420	3482	3544	3606	3669	3731	3793		
98		3855	3918	3980	4042	4104	4166	4229	4291	4353	4415		
99		4477	4539	4601	4664	4726	4788	4850	4912	4974	5036		
700		5098	5160	5222	5284	5346	5408	5470	5532	5594	5656		

N	對 數									1 2 3 4 5 6 7 8 9	比 例 部 分		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8		9	62	
700	84	5098	5110	5222	5284	5346	5408	5470	5532	5594	5656	1	6.2
01		5718	5780	5842	5904	5966	6028	6090	6151	6213	6275	2	12.4
02		6 37	6399	6461	6523	6585	6646	6708	6770	6832	6894	3	18.6
03		6955	7017	7079	7141	7202	7264	7326	7388	7449	7511	4	24.8
04		7573	7634	7696	7758	7819	7881	7943	8004	8066	8128	5	31.0
05		8189	8251	8312	8374	8435	8497	8559	8620	8682	8743	6	37.2
06		8805	8866	8928	8989	9051	9112	9174	9235	9297	9358	7	43.4
07		9419	9481	9542	9604	9665	9726	9788	9849	9911	9972	8	49.6
08		85	0033	0095	0155	0217	0279	0340	0401	0462	0524	9	55.8
09		0646	0707	0769	0830	0891	0952	1014	1075	1136	1197		61
710		1258	13.0	1381	1442	1503	1564	1625	1686	1747	1809	1	6.1
11		1870	1931	1992	2053	2114	2175	2236	2297	2358	2419	2	12.2
12		2480	2541	2602	2663	2724	2785	2846	2907	2968	3029	3	18.3
13		3090	3150	3211	3272	3333	3394	3455	3516	3577	3637	4	24.4
14		3698	3759	3820	3881	3941	4002	4063	4124	4185	4245	5	30.5
15		4306	4367	4428	4488	4549	4610	4670	4731	4792	4852	6	36.6
16		4913	4974	5034	5095	5156	5216	5277	5337	5398	5459	7	42.7
17		5519	5580	5640	5701	5761	5822	5882	5943	6003	6064	8	48.8
18		6124	6185	6245	6306	6366	6427	6487	6548	6608	6668	9	54.9
19		6729	6789	6850	6910	6970	7031	7091	7152	7212	7272		60
720		7332	7393	7453	7513	7574	7634	7694	7755	7815	7875	1	6.0
21		7935	7995	8056	8116	8176	8236	8297	8357	8417	8477	2	12.0
22		8537	8597	8657	8718	8778	8838	8898	8958	9018	9078	3	18.0
23		9138	9198	9258	9318	9379	9439	9499	9559	9619	9679	4	24.0
24		9739	9799	9859	9918	9978	*0038	*0098	*0158	*0218	*0278	5	30.0
25	86	0338	0398	04 8	0518	0578	0637	0697	0757	0817	0877	6	36.0
26		0937	0996	1056	1116	1176	1236	1295	1355	1415	1475	7	42.0
27		1534	1594	1654	1714	1773	1833	1893	1952	2012	2072	8	48.0
28		2131	2191	2251	2310	2370	2430	2489	2549	2608	2668	9	54.0
29		2728	2787	2847	2906	2966	3025	3085	3144	3204	3263		59
730		3323	3382	3442	3501	3561	3620	3680	3739	3799	3858	1	5.9
31		3917	3977	4036	4096	4155	4214	4274	4333	4392	4452	2	11.8
32		4511	4570	4630	4689	4748	4808	4867	4926	4985	5045	3	17.7
33		5104	5163	5222	5282	5341	5400	5459	5519	5578	5637	4	23.6
34		5696	5755	5814	5874	5933	5992	6051	6110	6169	6228	5	29.5
35		6287	6346	6405	6465	6524	6583	6642	6701	6760	6819	6	35.4
36		6878	6937	6996	7055	7114	7173	7232	7291	7350	7409	7	41.3
37		7467	7526	7585	7644	7703	7762	7821	7880	7939	7998	8	47.2
38		8056	8115	8174	8233	8292	8350	8409	8468	8527	8586	9	53.1
39		8644	8703	8762	8821	8879	8938	8997	9056	9114	9173		58
740		9232	9290	9349	9408	9466	9525	9584	9642	9701	9760	1	5.8
41		9818	9877	9935	9994	*0053	*0111	*0170	*0228	*0287	*0345	2	11.6
42	87	0404	0462	0521	0579	0638	0696	0755	0813	0872	0930	3	17.4
43		0989	1047	1106	1164	1223	1281	1339	1397	1456	1515	4	23.2
44		1573	1631	1690	1748	1806	1865	1923	1981	2040	2098	5	29.0
45		2156	2215	2273	2331	2390	2448	2506	2564	2622	2681	6	34.8
46		2739	2797	2855	2913	2972	3030	3088	3146	3204	3262	7	40.6
47		3321	3379	3437	3495	3553	3611	3669	3727	3785	3844	8	46.4
48		3902	3960	4018	4076	4134	4192	4250	4308	4366	4424	9	52.2
49		4482	4540	4598	4656	4714	4772	4830	4888	4945	5003		57
750		5061	5119	5177	5235	5293	5351	5409	5466	5524	5582	1	5.7
												2	11.4
												3	17.1
												4	22.8
												5	28.5
												6	34.2
												7	39.9
												8	45.6
												9	51.3

表一 對 數 表

N	對 數										比例部分		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	58		
750	87	5061	5119	5177	5235	5293	5351	5409	5466	5524	5582	1	5.8
51		5640	5698	5756	5813	5871	5929	5987	6045	6102	6160	2	11.6
52		6218	6276	6333	6391	6449	6507	6564	6622	6680	6737	3	17.4
53		6795	6853	6910	6968	7026	7083	7141	7199	7256	7314	4	23.2
54		7371	7429	7487	7544	7602	7659	7717	7774	7832	7889	5	29.0
55		7947	8004	8062	8119	8177	8234	8292	8349	8407	8464	6	34.8
56		8522	8579	8637	8694	8752	8809	8866	8924	8981	9039	7	40.6
57		9096	9153	9211	9268	9325	9383	9440	9497	9555	9612	8	46.4
58		9669	9726	9784	9841	9898	9956	*0013	*0070	*0127	*0185	9	52.2
59		0242	0299	0356	0413	0471	0528	0585	0642	0699	0756	57	
760	88	0814	0871	0928	0985	1042	1099	1156	1213	1271	1328	1	5.7
61		1385	1442	1499	1556	1613	1670	1727	1784	1841	1898	2	11.4
62		1955	2012	2069	2126	2183	2240	2297	2354	2411	2468	3	17.1
63		2525	2581	2638	2695	2752	2809	2866	2923	2980	3037	4	22.8
64		3093	3150	3207	3264	3321	3377	3434	3491	3548	3605	5	28.5
65		3661	3718	3775	3832	3888	3945	4002	4059	4115	4172	6	34.2
66		4229	4285	4342	4399	4455	4512	4569	4625	4682	4739	7	39.9
67		4795	4852	4909	4965	5022	5078	5135	5192	5 48	5'05	8	45.6
68		5361	5418	5474	5531	5587	5644	5700	5757	5813	5870	9	51.3
69		5926	5983	6039	6096	6152	6209	6265	6321	6378	6434	56	
770		6491	6547	6604	6660	6716	6773	6829	6885	6942	6998	1	5.6
71		7054	7111	7167	7223	7280	7336	7392	7449	7505	7561	2	11.2
72		7617	7674	7730	7786	7842	7898	7955	8011	8067	8123	3	16.8
73		8179	8236	8292	8348	8404	8460	8516	8573	8629	8685	4	22.4
74		8741	8797	8853	8909	8965	9021	9077	9134	9190	9246	5	28.0
75		9302	9358	9414	9470	9526	9582	9638	9694	9750	9806	6	33.6
76		9862	9918	9974	*0030	*0086	*0141	*0197	*0253	*0309	*0365	7	39.2
77	89	0421	0477	0533	0589	0645	0700	0756	0812	0868	0924	8	44.8
78		0980	1035	1091	1147	1203	1259	1314	1370	1426	1482	9	50.4
79		1537	1593	1649	1705	1760	1816	1872	1928	1983	2039	55	
780		2095	2150	2206	2262	2317	2373	2429	2484	2540	2595	1	5.5
81		2651	2707	2762	2818	2873	2929	2985	3040	3096	3151	2	11.0
82		3207	3262	3318	3373	3429	3484	3540	3595	3651	3706	3	16.5
83		3762	3817	3873	3928	3984	4039	4094	4150	4 05	4'261	4	22.0
84		4316	4371	4427	4482	4538	4593	4648	4704	4759	4814	5	27.5
85		4870	4925	4980	5036	5091	5146	5201	5257	5312	5367	6	33.0
86		5423	5478	5533	5588	5644	5699	5754	5809	5864	5920	7	38.5
87		5975	6030	6085	6140	6195	6251	6306	6361	6416	6471	8	44.0
88		6526	6581	6636	6692	6747	6802	6857	6912	6967	7022	9	49.5
89		7077	7132	7187	7242	7297	7352	7407	7462	7517	7572	55	
790		7627	7682	7737	7792	7847	7902	7957	8012	8067	8122	1	5.5
91		8176	8231	8286	8341	8396	8451	8506	8561	8615	8670	2	11.0
92		8725	8780	8835	8890	8944	8999	9054	9109	9164	9218	3	16.5
93		9273	9328	9383	9437	9492	9547	9602	9656	9711	9766	4	22.0
94		9821	9875	9930	9985	*0039	*0094	*0149	*0203	*0258	*0312	5	27.5
95	90	0367	0422	0476	0531	0586	0640	0695	0749	0804	0859	6	33.0
96		0913	0968	1022	1077	1131	1186	1240	1295	1349	1404	7	38.5
97		1458	1513	1567	1622	1676	1731	1785	1840	1894	1948	8	44.0
98		2003	2057	2112	2166	2221	2275	2329	2384	2438	2492	9	49.5
99		2547	2601	2655	2710	2764	2818	2873	2927	2981	3036	55	
800		3090	3144	3199	3253	3307	3361	3416	3470	3524	3578	55	

表一 對 數 表

N	對 數									比 例 部 分			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	54		
800	90	3090	3144	3199	3253	3307	3361	3416	3470	3524	3578	1	5.4
01		3633	3687	3741	3795	3849	3904	3958	4012	4066	4120	2	10.2
02		4174	4229	4283	4337	4391	4445	4499	4553	4607	4661	3	16.8
03		4716	4770	4824	4878	4932	4986	5040	5094	5148	5202	4	21.6
04		5256	5310	5364	5418	5472	5526	5580	5634	5688	5742	5	27.0
05		5796	5850	5904	5958	6012	6066	6119	6173	6227	6281	6	32.4
06		6335	6389	6443	6497	6551	6604	6658	6712	6766	6820	7	37.8
07		6874	6927	6981	7035	7089	7143	7196	7250	7304	7358	8	43.2
08		7411	7465	7519	7573	7626	7680	7734	7787	7841	7895	9	48.6
09		7949	8002	8056	8110	8163	8217	8270	8324	8378	8431		
810		8485	8539	8592	8646	8699	8753	8807	8860	8914	8967		
11		9021	9074	9128	9181	9235	9289	9342	9396	9449	9503	1	5.3
12		9556	9610	9663	9716	9770	9823	9877	9930	9984	*0037	2	10.6
13	91	0091	0144	0197	0251	0304	0358	0411	0464	0518	0571	3	15.9
14		0624	0678	0731	0784	0838	0891	0944	0998	1051	1104	4	21.2
15		1158	1211	1264	1317	1371	1424	1477	1530	1584	1637	5	26.5
16		1690	1743	1797	1850	1903	1956	2009	2063	2116	2169	6	31.8
17		2222	2275	2328	2381	2435	2488	2541	2594	2647	2700	7	37.1
18		2753	2806	2859	2913	2966	3019	3072	3125	3178	3231	8	42.4
19		3284	3337	3390	3443	3496	3549	3602	3655	3708	3761	9	47.7
820		3814	3867	3920	3973	4026	4079	4132	4184	4237	4290		
21		4343	4396	4449	4502	4555	4608	4660	4713	4766	4819		
22		4872	4925	4977	5030	5083	5136	5189	5241	5294	5347	1	5.2
23		5400	5453	5505	5558	5611	5664	5716	5769	5822	5875	2	10.4
24		5927	5980	6033	6085	6138	6191	6243	6296	6349	6401	3	15.6
25		6454	6507	6559	6612	6664	6717	6770	6822	6875	6927	4	20.8
26		6980	7033	7085	7138	7190	7243	7295	7348	7400	7453	5	26.0
27		7506	7558	7611	7663	7716	7768	7820	7873	7925	7978	6	31.2
28		8030	8083	8135	8188	8240	8293	8345	8397	8450	8502	7	36.4
29		8555	8607	8659	8712	8764	8816	8869	8921	8973	9026	8	41.6
830		9078	9130	9183	9235	9287	9340	9392	9444	9496	9549		
31		9601	9653	9706	9758	9810	9862	9914	9967	*0019	*0071		
32	92	0123	0176	0228	0280	0332	0384	0436	0489	0541	0593		
33		0645	0697	0749	0801	0853	0906	0958	1010	1062	1114	1	5.1
34		1166	1218	1270	1322	1374	1426	1478	1530	1582	1634	2	10.2
35		1686	1738	1790	1842	1894	1946	1998	2050	2102	2154	3	15.3
36		2206	2258	2310	2362	2414	2466	2518	2570	2622	2674	4	20.4
37		2725	2777	2829	2881	2933	2985	3037	3089	3140	3192	5	25.5
38		3244	3296	3348	3399	3451	3503	3555	3607	3658	3710	6	30.6
39		3762	3814	3865	3917	3969	4021	4072	4124	4176	4228	7	35.7
840		4279	4331	4383	4434	4486	4538	4589	4641	4693	4744	8	40.8
41		4796	4848	4899	4951	5003	5054	5106	5157	5209	5261	9	45.9
42		5312	5364	5415	547	5518	5570	5621	5673	5725	5776		
43		5828	5879	5931	5982	6034	6085	6137	6188	6240	6291		
44		6342	6394	6445	6497	6548	6600	6651	6702	6754	6805		
45		6857	6908	6959	7011	7062	7114	7165	7216	7268	7319		
46		7370	7422	7473	7524	7576	7627	7678	7730	7781	7832		
47		7883	7935	7986	8037	8088	8140	8191	8242	8293	8345		
48		8396	8447	8498	8549	8601	8652	8703	8754	8805	8857		
49		8908	8959	9010	9061	9112	9163	9215	9266	9317	9368		
850		9419	9470	9521	9572	9623	9674	9725	9776	9827	9879		

表一 對 數 表

N	對 數									比 例 部 分			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8		9	51	
850	92	9419	9470	9521	9572	9623	9674	9725	9776	9827	9879	1	5.1
51		9950	9981	*0032	*0083	*0134	*0185	*0236	*0287	*0338	*0389	2	10.2
52	93	0440	0491	0542	0592	0643	0694	0745	0796	0847	0898	3	15.3
53		0949	1000	1051	1102	1153	1204	1254	1305	1356	1407	4	20.4
54		1458	1509	1560	1610	1661	1712	1763	1814	1865	1915	5	25.5
55		1966	2017	2068	2118	2169	2220	2271	2322	2372	2423	6	30.6
56		2474	2524	2575	2626	2677	2727	2778	2829	2879	2930	7	35.7
57		2981	3031	3082	3133	3183	3234	3285	3335	3386	3437	8	40.8
58		3487	3538	3589	3639	3690	3740	3791	3841	3892	3943	9	45.9
59		3993	4044	4094	4145	4195	4246	4296	4347	4397	4448		50
860		4498	4549	4599	4650	4700	4751	4801	4852	4902	4953		
61		5003	5054	5104	5154	5205	5255	5306	5356	5406	5457	1	5.0
62		5507	5558	5608	5658	5709	5759	5809	5860	5910	5960	2	10.0
63		6011	6061	6111	6162	6212	6262	6313	6363	6413	6463	3	15.0
64		6514	6564	6614	6665	6715	6765	6815	6865	6916	6966	4	20.0
65		7016	7066	7117	7167	7217	7267	7317	7367	7418	7468	5	25.0
66		7518	7568	7618	7668	7718	7769	7819	7869	7919	7969	6	30.0
67		8019	8069	8119	8169	8219	8269	8320	8370	8420	8470	7	35.0
68		8520	8570	8620	8670	8720	8770	8820	8870	8920	8970	8	40.0
69		9020	9070	9120	9170	9220	9270	9320	9369	9419	9469	9	45.0
870		9519	9569	9619	9669	9719	9769	9819	9869	9919	9968		49
71	94	0018	0068	0118	0168	0218	0267	0317	0367	0417	0467	1	4.9
72		0516	0566	0616	0666	0716	0765	0815	0865	0915	0964	2	9.8
73		1014	1064	1114	1163	1213	1263	1313	1362	1412	1462	1	14.7
74		1511	1561	1611	1660	1710	1760	1809	1859	1909	1958	3	19.6
75		2008	2058	2107	2157	2207	2256	2306	2355	2405	2455	4	24.5
76		2504	2554	2603	2653	2702	2752	2801	2851	2901	2950	5	29.4
77		3000	3049	3099	3148	3198	3247	3297	3346	3396	3445	6	34.3
78		3495	3544	3593	3643	3692	3742	3791	3841	3890	3939	7	39.2
79		3989	4038	4088	4137	4186	4236	4285	4335	4384	4433	8	44.1
880		4483	4532	4581	4631	4680	4729	4779	4828	4877	4927		48
81		4976	5025	5074	5124	5173	5222	5272	5321	5370	5419		
82		5469	5518	5567	5616	5665	5715	5764	5813	5862	5912		
83		5961	6010	6059	6108	6157	6207	6256	6305	6354	6403	1	4.8
84		6452	6501	6551	6600	6649	6698	6747	6796	6845	6894	2	9.6
85		6943	6992	7041	7090	7140	7189	7238	7287	7336	7385	3	14.4
86		7434	7483	7532	7581	7630	7679	7728	7777	7826	7875	4	19.2
87		7924	7973	8022	8070	8119	8168	8217	8266	8315	8364	5	24.0
88		8413	8462	8511	8560	8609	8657	8706	8755	8804	8853	6	28.8
89		8902	8951	8999	9048	9097	9146	9195	9244	9292	9341	7	33.6
890		9390	9439	9488	9536	9585	9634	9683	9731	9780	9829	8	38.4
91		9878	9926	9975	*0024	*0073	*0121	*0170	*0219	*0267	*0316	9	43.2
92		0365	0414	0462	0511	0560	0608	0657	0705	0754	0803		
93	95	0851	0900	0949	0997	1046	1095	1143	1192	1240	1289		
94		1338	1386	1435	1483	1532	1580	1629	1677	1726	1775		
95		1823	1872	1920	1969	2017	2066	2114	2163	2211	2260		
96		2308	2356	2405	2453	2502	2550	2599	2647	2696	2744		
97		2792	2841	2889	2938	2986	3034	3083	3131	3180	3228		
98		3276	3325	3373	3421	3470	3518	3566	3615	3663	3711		
99		3760	3808	3856	3905	3953	4001	4049	4098	4146	4194		
900		4243	4291	4339	4387	4435	4484	4532	4580	4628	4677		

表一 對 數 表

		對 數										比 例 部 分	
N		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		48
900	95	4243	4291	4339	4387	4435	4484	4532	4580	4628	4677	1	4.8
01		4725	4773	4821	4869	4918	4966	5014	5062	5110	5158	2	9.6
02		5207	5255	5303	5351	5399	5447	5495	5543	5592	5640	3	14.4
03		5688	5736	5784	5832	5880	5928	5976	6024	6072	6120	4	19.2
04		6168	6216	6265	6313	6361	6409	6457	6505	6553	6601	5	24.0
05		6649	6697	6745	6793	6840	6888	6936	6984	7032	7080	6	28.8
06		7128	7176	7224	7272	7320	7368	7416	7464	7512	7559	7	33.6
07		7607	7655	7703	7751	7799	7847	7894	7942	7990	8038	8	38.4
08		8086	8134	8181	8229	8277	8325	8373	8421	8468	8516	9	43.2
09		8564	8612	8659	8707	8755	8803	8850	8898	8946	8994		47
910		9041	9089	9137	9185	9232	9280	9328	9375	9423	9471		
11		9518	9566	9614	9661	9709	9757	9804	9852	9900	9947	1	4.7
12		9995	*0042	*0090	*0138	*0185	*0233	*0280	*0328	*0376	*0423	2	9.4
13	16	0471	0518	0566	0613	0661	0709	0756	0804	0851	0899	3	14.1
14		0946	0994	1041	1089	1136	1184	1231	1279	1326	1374	4	18.8
15		1421	1469	1516	1563	1611	1658	1706	1753	1801	1848	5	23.5
16		1895	1943	1990	2038	2085	2132	2180	2227	2275	2322	6	28.2
17		2369	2417	2464	2511	2559	2606	2653	2701	2748	2795	7	32.9
18		2843	2890	2937	2985	3032	3079	3126	3174	3221	3268	8	37.6
19		3316	3363	3410	3457	3504	3552	3599	3646	3693	3741	9	42.3
920		3788	3835	3882	3929	3977	4024	4071	4118	4165	4212		46
21		4260	4307	4354	4401	4448	4495	4542	4590	4637	4684		
22		4731	4778	4825	4872	4919	4966	5013	5061	5108	5155	1	4.6
23		5202	5249	5296	5343	5390	5437	5484	5531	5578	5625	2	9.2
24		5672	5719	5766	5813	5860	5907	5954	6001	6048	6095	3	13.8
25		6142	6189	6236	6283	6329	6376	6423	6470	6517	6564	4	18.4
26		6611	6658	6705	6752	6799	6845	6892	6939	6986	7033	5	23.0
27		7080	7127	7173	7220	7267	7314	7361	7408	7454	7501	6	27.6
28		7548	7594	7642	7688	7735	7782	7829	7875	7922	7969	7	32.2
29		8016	8062	8109	8156	8203	8249	8296	8343	8390	8436	8	36.8
930		8483	8530	8576	8623	8670	8716	8763	8810	8856	8903		41.4
31		8950	8996	9043	9090	9136	9183	9229	9276	9323	9369	1	
32		9416	9463	9509	9556	9602	9649	9695	9742	9789	9835	2	
33		9882	9928	99.5*	00:1*	00:3*	*0114	*0161	*0207	*0254	*0300	3	
34	97	0347	0393	0440	0485	0533	0579	0626	0672	0719	0765	4	
35		0812	0858	0904	0951	0997	1044	1090	1137	1183	1229	5	
36		1276	1322	1369	1415	1461	1508	1554	1601	1647	1693	6	
37		1740	1786	1832	1879	1925	1971	2018	2064	2110	2157	7	
38		2203	2249	2295	2342	2388	2434	2481	2527	2573	2619	8	
39		2666	2712	2758	2804	2851	2897	2943	2989	3035	3082	9	
940		3128	3174	3220	3266	3313	3359	3405	3451	3497	3543		
41		3590	3636	3682	3728	3774	3820	3866	3913	3959	4005		
42		4051	4097	4143	4189	4235	4281	4327	4374	4420	4466		
43		4512	4558	4604	4650	4696	4742	4788	4834	4880	4926		
44		4972	5018	5064	5110	5156	5202	5248	5294	5340	5386		
45		5432	5478	5524	5570	5616	5662	5707	5753	5799	5845		
46		5891	5937	5983	6029	6075	6121	6167	6212	6258	6304		
47		6350	6396	6442	6488	6533	6579	6625	6671	6717	6763		
48		6803	6854	6900	6946	6992	7037	7083	7129	7175	7220		
49		7266	7312	7358	7403	7449	7495	7541	7586	7632	7678		
950		7724	7769	7815	7861	7906	7952	7998	8043	8089	8135		

N	對 數										比 例 部 分		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	45		
950	97	7724	7769	7815	7861	7906	7952	7998	8043	8089	8135	1	4.5
51		8181	8226	8272	8317	8363	8409	8454	8500	8546	8591	2	9.0
52		8637	8683	8728	8774	8819	8865	8911	8956	9002	9047	3	13.5
53		9093	9138	9184	9230	9275	9321	9366	9412	9457	9501	4	18.0
54		9548	9594	9639	9685	9730	9776	9821	9867	9912	9958	5	22.5
55	98	0003	0049	0094	0140	0185	0231	0276	0322	0367	0412	6	27.0
56		0458	0503	0549	0594	0640	0685	0730	0776	0821	0867	7	31.5
57		0912	0957	1003	1048	1093	1139	1184	1229	1275	1320	8	36.0
58		1366	1411	1456	1501	1547	1592	1637	1683	1728	1773	9	40.5
59		1819	1864	1909	1954	2000	2045	2090	2135	2181	2226	44	
960		2271	2316	2362	2407	2452	2497	2543	2588	2633	2678	1	4.4
61		2723	2769	2814	2859	2904	2949	2994	3040	3085	3130	2	8.8
62		3175	3220	3265	3310	3356	3401	3446	3491	3536	3581	3	13.2
63		3626	3671	3716	3762	3807	3852	3897	3942	3987	4032	4	17.6
64		4077	4122	4167	4212	4257	4302	4347	4392	4437	4482	5	22.0
65		4527	4572	4617	4662	4707	4752	4797	4842	4887	4932	6	26.4
66		4977	5022	5067	5112	5157	5202	5247	5292	5337	5382	7	30.8
67		5426	5471	5516	5561	5606	5651	5696	5741	5786	5831	8	35.2
68		5875	5920	5965	6010	6055	6100	6144	6189	6234	6279	9	39.6
69		6324	6369	6413	6458	6503	6548	6593	6637	6682	6727	43	
970		6772	6817	6861	6906	6951	6996	7040	7085	7130	7175	1	4.3
71		7219	7264	7309	7353	7398	7443	7488	7532	7577	7622	2	8.6
72		7666	7711	7756	7800	7845	7890	7934	7979	8024	8068	3	12.9
73		8113	8157	8202	8247	8291	8336	8381	8425	8470	8514	4	17.2
74		8559	8604	8648	8693	8737	8782	8826	8871	8916	8960	5	21.5
75		9005	9049	9094	9138	9183	9227	9272	9316	9361	9405	6	25.8
76		9450	9494	9539	9583	9628	9672	9717	9761	9806	9850	7	30.1
77		9895	9939	9983	*0028	*0072	*0117	*0161	*0205	*0250	*0294	8	34.4
78	99	0339	0383	0428	0472	0516	0561	0605	0650	0694	0738	9	38.7
79		0783	0827	0871	0916	0960	1004	1049	1093	1137	1182		
980		1226	1270	1315	1359	1403	1448	1492	1536	1580	1625	1	4.3
81		1669	1713	1758	1802	1846	1890	1935	1979	2023	2067	2	8.6
82		2111	2156	2200	2244	2288	2333	2377	2421	2465	2509	3	12.9
83		2554	2598	2642	2686	2730	2774	2819	2863	2907	2951	4	17.2
84		2995	3039	3083	3127	3172	3216	3260	3304	3348	3392	5	21.5
85		3436	3480	3524	3568	3613	3657	3701	3745	3789	3833	6	25.8
86		3877	3921	3965	4009	4053	4097	4141	4185	4229	4273	7	30.1
87		4317	4361	4405	4449	4493	4537	4581	4625	4669	4713	8	34.4
88		4757	4801	4845	4889	4933	4977	5021	5065	5109	5152	9	38.7
89		5196	5240	5284	5328	5372	5416	5460	5504	5547	5591		
990		5635	5679	5723	5767	5811	5854	5898	5942	5986	6030	1	4.3
91		6074	6117	6161	6205	6249	6293	6337	6380	6424	6468	2	8.6
92		6512	6555	6599	6643	6687	6731	6774	6818	6862	6906	3	12.9
93		6949	6993	7037	7080	7124	7168	7211	7255	7299	7343	4	17.2
94		7386	7430	7474	7517	7561	7605	7648	7692	7736	7779	5	21.5
95		7823	7867	7910	7954	7998	8041	8085	8129	8172	8216	6	25.8
96		8259	8303	8347	8390	8434	8477	8521	8564	8608	8652	7	30.1
97		8695	8739	8782	8826	8869	8913	8956	9000	9043	9087	8	34.4
98		9131	9174	9218	9261	9305	9348	9392	9435	9479	9522	9	38.7
99		9565	9609	9652	9696	9739	9783	9826	9870	9913	9957		
1000													

表二 倒數表

$$\frac{1}{n}$$

n	$\frac{1}{n}$	n	$\frac{1}{n}$
1	1.0000 0000	26	0.0384 6154
2	0.5000 0000	27	0.0370 3704
3	0.3333 3333	28	0.0357 1429
4	0.2500 0000	29	0.0344 8276
5	0.2000 0000	30	0.0333 3333
6	0.1666 6667	31	0.0322 5806
7	0.1428 5714	32	0.0312 5000
8	0.1250 0000	33	0.0303 0303
9	0.1111 1111	34	0.0294 1176
10	0.1000 0000	35	0.0285 7143
11	0.0909 0909	36	0.0277 7778
12	0.0833 3333	37	0.0270 2703
13	0.0769 2308	38	0.0263 1579
14	0.0714 2857	39	0.0256 4103
15	0.0666 6667	40	0.0250 0000
16	0.0625 0000	41	0.0243 9024
17	0.0588 2353	42	0.0238 0952
18	0.0555 5556	43	0.0232 5381
19	0.0526 3158	44	0.0227 2727
20	0.0500 0000	45	0.0222 2222
21	0.0476 1905	46	0.0217 3913
22	0.0454 5455	47	0.0212 7660
23	0.0434 7826	48	0.0208 3333
24	0.0416 6667	49	0.0204 0816
25	0.0400 0000	50	0.0200 0000

表三 累積倒數表

$$\Sigma \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

n	$\Sigma \frac{1}{n}$	n	$\Sigma \frac{1}{n}$
1	1.0000 0000	26	3.8544 1972
2	1.5000 0000	27	3.8914 5675
3	1.8333 3333	28	3.9271 7104
4	2.0833 3333	29	3.9616 5380
5	2.2833 3333	30	3.9949 8713
6	2.4500 0000	31	4.0272 4520
7	2.5928 5714	32	4.0584 9520
8	2.7178 5714	33	4.0887 9823
9	2.8289 6825	34	4.1182 0999
10	2.9289 6825	35	4.1467 8142
11	3.0198 7734	36	4.1745 5920
12	3.1032 1068	37	4.2015 8622
13	3.1801 3376	38	4.2279 0201
14	3.2515 6233	39	4.2535 4304
15	3.3182 2899	40	4.2785 4304
16	3.3807 2899	41	4.3029 3328
17	3.4395 5252	42	4.3267 4281
18	3.4951 0803	43	4.3499 9862
19	3.5477 3966	44	4.3727 2589
20	3.5977 3966	45	4.3949 4812
21	3.6453 5870	46	4.4166 8725
22	3.6908 1325	47	4.4379 6384
23	3.7342 9151	48	4.4587 9718
24	3.7759 5818	49	4.4792 0534
25	3.8159 5818	50	4.4992 0534

表四 複利終值表(期數爲整數)

$$u^n = (1 + i)^n$$

n	5% 1.2%	1%	7% 1.2%	3%	1%
1	1.0041 6667	1.0050 0000	1.0058 3333	1.0075 0000	1.0100 0000
2	1.0783 5069	1.0100 2500	1.0117 0069	1.0150 5625	1.0201 0030
3	1.0125 5216	1.0150 7513	1.0176 0228	1.0226 6917	1.0303 0100
4	1.0167 7112	1.0201 5050	1.0235 3 30	1.0303 3919	1.0406 0101
5	1.0210 0707	1.0252 5.25	1.0295 0894	1.0380 6673	1.0510 1035
6	1.0252 6187	1.0303 7751	1.0355 1440	1.0458 5224	1.0615 2015
7	1.0294 3379	1.0354 2940	1.0415 5190	1.0536 9613	1.0721 3795
8	1.0338 2352	1.0407 0704	1.0476 3064	1.0615 9885	1.0828 5671
9	1.0381 31 1	1.0459 1058	1.0537 4182	1.0695 6084	1.0933 8527
10	1.0424 5666	1.0511 4013	1.0598 8865	1.0775 8255	1.1046 2213
11	1.0468 0023	1.0563 9583	1.0660 7133	1.0856 6441	1.1160 6895
12	1.0511 6190	1.0616 7781	1.0722 4008	1.0938 0690	1.1283 2503
13	1.0555 4174	1.0669 8620	1.0783 4511	1.1020 1045	1.1380 9328
14	1.0599 3983	1.0723 2113	1.0848 3692	1.1102 7 53	1.1494 7421
15	1.0643 56 5	1.0776 8274	1.09 1 6483	1.1186 0259	1.1609 6893
16	1.0687 9106	1.0830 7115	1.0975 2996	1.1269 9211	1.1725 7764
17	1.0732 4486	1.0884 8651	1.1039 3222	1.1354 4455	1.1843 0443
18	1.0777 1621	1.0939 2894	1.1103 7182	1.1439 6039	1.1961 4748
19	1.0822 0670	1.0993 9858	1.1168 4899	1.1525 4009	1.2081 0895
20	1.0867 1589	1.1048 9558	1.1233 6395	1.1611 8414	1.2201 9034
21	1.0912 4387	1.1104 2006	1.1299 1600	1.1698 9302	1.2323 9194
22	1.0957 9072	1.1159 7216	1.1365 0808	1.1786 6722	1.2447 1576
23	1.1003 5652	1.1215 5202	1.1431 3771	1.1875 0723	1.2571 6302
24	1.1049 4134	1.1271 5978	1.1498 0362	1.1964 1353	1.2697 3465
25	1.1095 4526	1.1327 9558	1.1565 1322	1.2053 8663	1.2824 32.0
26	1.1141 6836	1.1384 7955	1.1632 5955	1.2144 2703	1.2952 5631
27	1.1188 1073	1.1441 5185	1.1700 4523	1.2235 3523	1.3082 0888
28	1.1234 7244	1.1498 7261	1.1768 7049	1.2327 1 75	1.3212 9097
29	1.1281 5358	1.1556 2197	1.1837 3557	1.2419 5701	1.3345 0 82
30	1.1328 5422	1.1614 0008	1.1906 4069	1.2512 7176	1.3478 4892
31	1.1375 7444	1.1672 0708	1.1975 8310	1.2606 5630	1.3613 2740
32	1.1423 1414	1.1730 4312	1.2045 7202	1.2701 1122	1.3749 4068
33	1.1470 7398	1.1789 0833	1.2115 9369	1.2796 3706	1.3886 3099
34	1.1518 5346	1.1848 0288	1.2186 6631	1.2892 3424	1.4025 7799
35	1.1566 5284	1.1907 2639	1.2257 7523	1.2989 0359	1.4166 0276
36	1.1614 7223	1.1967 8052	1.2329 2559	1.3087 4537	1.4307 6878
37	1.1663 1170	1.2026 6393	1.2401 1765	1.3184 6031	1.4450 7647
38	1.1711 7133	1.2086 7725	1.2473 5167	1.3283 4866	1.4595 2724
39	1.1760 5121	1.2147 2033	1.2546 2789	1.3383 1128	1.4741 2251
40	1.1809 5142	1.2207 9424	1.2619 4655	1.3483 4861	1.4888 6873
41	1.1858 7206	1.2268 9821	1.2693 0791	1.3574 6123	1.5037 5237
42	1.1903 1319	1.2330 3270	1.2767 1220	1.3666 4969	1.5187 3089
43	1.1957 7491	1.2391 9786	1.2841 5969	1.3789 1456	1.5339 7779
44	1.2007 5731	1.2453 9585	1.2916 5062	1.3892 5642	1.5493 1757
45	1.2057 6046	1.2516 2082	1.2991 8525	1.3996 7584	1.5649 1075
46	1.2107 8446	1.2578 7892	1.3067 6883	1.4101 7341	1.5804 5885
47	1.2158 2940	1.2641 6832	1.3143 8662	1.4207 4971	1.5962 6344
48	1.2208 9536	1.2704 8916	1.3220 5388	1.4314 0533	1.6122 2 08
49	1.2259 8242	1.2768 4161	1.3297 6586	1.4421 4087	1.6283 4834
50	1.2310 9068	1.2832 2581	1.3375 2283	1.4529 5693	1.6446 3182

表四 複利終值表(期數爲整數)

$$u^n = (1 + i)^n$$

n	$\frac{1}{10}\%$	$\frac{1}{8}\%$	$\frac{1}{6}\%$	$\frac{1}{4}\%$	1%
51	1.2362 2002	1.2896 4194	1.3453 2504	1.4638 5411	1.6610 7814
52	1.2413 7114	1.2960 9015	1.3531 7277	1.4748 3301	1.6776 8892
53	1.2465 4352	1.3025 7060	1.3610 6628	1.4858 9426	1.6944 6581
54	1.2517 3745	1.3080 8846	1.3690 6583	1.4970 3847	1.7114 1047
55	1.2559 5802	1.3156 2887	1.3769 9170	1.5082 6626	1.7285 2457
56	1.2621 9033	1.3222 0702	1.3850 2415	1.5195 7825	1.7458 0982
57	1.2674 4946	1.3238 1805	1.3931 0346	1.5309 7509	1.7632 6792
58	1.2727 3050	1.3354 6214	1.4012 2990	1.5424 5749	1.7809 0060
59	1.2780 3334	1.3421 3946	1.4094 0374	1.5540 2583	1.7987 0960
60	1.2833 5868	1.3488 5015	1.4176 2.26	1.5656 8103	1.8166 9670
61	1.2887 0601	1.3555 9440	1.4258 9474	1.5774 2363	1.8348 6367
62	1.2940 7641	1.3623 7238	1.4342 1246	1.5892 5431	1.8532 1230
63	1.2994 6760	1.3691 8424	1.4425 7870	1.6011 7372	1.8717 4443
64	1.3048 8204	1.3760 3016	1.4509 9374	1.6131 8252	1.8904 6187
65	1.3103 1905	1.3829 .031	1.4594 5787	1.6252 8139	1.9093 6649
66	1.3157 7872	1.3898 2486	1.4679 7138	1.6374 7100	1.9284 6015
67	1.3212 6113	1.3967 7399	1.4765 3454	1.6497 5203	1.9477 4475
68	1.3267 6638	1.4037 5785	1.4851 4766	1.6621 2517	1.9672 2220
69	1.3322 9458	1.4107 7664	1.4938 1102	1.6745 9111	1.9868 9442
70	1.3378 4580	1.4178 3053	1.5025 2492	1.6871 5055	2.0067 4337
71	1.3434 2016	1.4249 1968	1.5112 8965	1.6998 6418	2.0268 3100
72	1.3490 1774	1.4320 4428	1.5201 0550	1.7125 5271	2.0470 9931
73	1.3546 3865	1.4392 0450	1.5289 7279	1.7253 9685	2.0675 7031
74	1.3602 8298	1.4464 0052	1.5378 9179	1.7383 3733	2.0882 4601
75	1.3659 5082	1.4536 3252	1.5468 6283	1.7513 7486	2.1091 2847
76	1.3716 4229	1.4609 0699	1.5558 8620	1.7645 1017	2.1302 1975
77	1.3773 5746	1.4682 0519	1.5649 6220	1.7777 4400	2.1515 2195
78	1.3830 9645	1.4755 4622	1.5740 9115	1.7910 7703	2.1730 3717
79	1.3888 5935	1.4829 2395	1.5832 7334	1.8045 1015	2.1947 6754
80	1.3946 4627	1.4903 3857	1.5925 0910	1.8183 4398	2.2167 1522
81	1.4004 5729	1.4977 9026	1.6017 9874	1.8316 7931	2.2388 8237
82	1.4062 9253	1.5052 7921	1.6111 4257	1.8454 1691	2.2612 7119
83	1.4121 5209	1.5128 0561	1.6205 4090	1.8592 5753	2.2838 8390
84	1.4180 3605	1.5203 6964	1.6299 9405	1.8732 0196	2.3067 2274
85	1.4239 4454	1.5279 7143	1.6395 0235	1.8872 5098	2.3297 8997
86	1.4298 7764	1.5356 1131	1.6490 6612	1.9014 0536	2.3530 8787
87	1.4358 3546	1.5432 8140	1.6586 8567	1.9156 6590	2.3766 1875
88	1.4418 1811	1.5510 0585	1.6683 6154	1.9300 3339	2.4003 8494
89	1.4478 2568	1.5587 6087	1.6780 9344	1.9445 0895	2.4243 8879
90	1.4538 5829	1.5665 5468	1.6878 8232	1.9590 9246	2.4486 3267
91	1.4599 1603	1.5743 8745	1.6977 2830	1.9737 8565	2.4731 3403
92	1.4659 9932	1.5822 5.39	1.7076 3172	1.9885 8905	2.4978 5019
93	1.4721 0735	1.5901 7069	1.7175 9290	2.0035 0346	2.5228 2369
94	1.4782 4113	1.5981 2154	1.7276 1219	2.0185 2974	2.5480 5698
95	1.4844 0047	1.6061 1215	1.7376 8993	2.0336 6871	2.5735 3755
96	1.4905 8547	1.6141 4271	1.7478 2646	2.0489 2123	2.5992 7293
97	1.4967 9624	1.6222 1.42	1.7581 2211	2.0642 8814	2.6252 6565
98	1.5031 3289	1.6303 2449	1.7682 7724	2.0797 7030	2.6515 1831
99	1.5092 8553	1.6384 7611	1.7785 4219	2.0953 6858	2.6781 3349
100	1.5155 8426	1.6466 6849	1.7889 6731	2.1110 8384	2.7048 1881

表四 複利終值表(期數爲整數)

$$w^n = (1 + i)^n$$

n	5%	6%	7%	8%	10%
101	1.5218 9919	1.6549 7183	1.7994 0295	2.1269 1697	2.7318 6197
102	1.5382 4044	1.6631 7634	1.8098 9947	2.1428 6885	2.7591 8059
103	1.5546 0811	1.6714 9223	1.8204 5722	2.1589 4036	2.7867 7239
104	1.5710 0231	1.6798 4969	1.8310 7655	2.1751 3242	2.8146 4012
105	1.5874 2315	1.6882 894	1.8417 5783	2.1914 4591	2.8427 8652
106	1.5538 775	1.6966 9718	1.8525 0142	2.2078 875	2.8712 1438
107	1.563 4521	1.7051 7363	1.8633 0768	2.2244 .087	2.8999 2653
108	1.5668 4565	1.7126 9 50	1.8741 7697	2.2411 2417	2.9289 2679
109	1.573 7318	1.7222 6800	1.8851 0967	2.2579 3260	2.9582 1 05
110	1.5799 3031	1.7318 7934	1.8961 0614	2.2748 6710	2.9877 9720
111	1.5875 1395	1.7395 3373	1.9071 6676	2.2919 2860	3.0176 7517
112	1.591 2443	1.7482 3140	1.9182 8190	2.3091 1807	3.0478 192
113	1.5 97 6245	1.7569 7256	1.9311 8191	2.3264 3645	3.0783 3041
114	1.6064 2812	1.7657 5742	1.9437 3725	2.3438 8472	3.109 1375
115	1.6131 2157	1.7745 8321	1.9520 5822	2.3614 6386	3.1402 0489
116	1.6198 5231	1.7834 5914	1.9634 522	2.3791 7481	3.1716 0693
117	1.6265 9276	1.7923 7644	1.9748 9865	2.3970 1865	3.2033 2300
118	1.63 3 6973	1.8013 3832	1.9864 1890	2.4149 9629	3.2353 5623
119	1.6401 7543	1.8103 4501	1.9987 0634	2.4331 0876	3.2677 0931
120	1.6470 0950	1.8193 9673	2.0096 6188	2.4513 5708	3.3003 8689
121	1.6538 7204	1.8284 9372	2.021 3 8440	2.4697 4226	3.3333 9076
122	1.6607 6317	1.8376 5619	2.0331 7581	2.4882 6532	3.3667 2467
123	1.6676 8302	1.8468 2437	2.0450 3600	2.5069 2731	3.4003 9192
124	1.6746 3170	1.8560 5849	2.0569 6538	2.5257 2927	3.4341 9584
125	1.6816 0933	1.8653 3878	2.0689 6434	2.5446 7224	3.4687 3980
126	1.6886 1693	1.8746 6548	2.0810 3330	2.5637 5728	3.5034 2719
127	1.6956 5193	1.884 3580	2.0931 7266	2.5829 85 6	3.5384 6147
128	1.7027 1715	1.8934 5903	2.1053 8284	2.6023 5785	3.5733 4603
129	1.7098 1181	1.9029 6229	2.1176 6424	2.6218 7553	3.6095 8454
130	1.7169 3602	1.9124 4092	2.1300 1728	2.6415 3930	3.6456 8039
131	1.7240 8932	1.9220 0313	2.1424 4238	2.6613 5115	3.6821 5719
132	1.7312 7363	1.9316 1314	2.1549 3996	2.6813 1123	3.7189 5856
133	1.7384 8727	1.9412 7121	2.1675 1044	2.7014 2112	3.7561 4315
134	1.7457 5097	1.9509 7757	2.1801 5425	2.7216 8177	3.7937 0963
135	1.753 0485	1.9607 3245	2.1928 7182	2.7421 9439	3.8316 4673
136	1.7603 9723	1.9705 3612	2.2056 6357	2.7626 6009	3.8699 6319
137	1.7676 4365	1.9803 8883	2.2185 2994	2.7833 3 05	3.9086 6782
138	1.7749 6884	1.9902 9074	2.2314 7137	2.8042 5 0	3.9477 4943
139	1.7821 0471	2.0002 4219	2.2444 8828	2.8252 7731	3.9872 2695
140	1.7893 3 39	2.0102 4349	2.2575 8113	2.8464 7697	4.0270 9922
141	1.7972 8992	2.0203 9162	2.2707 7036	2.8678 2574	4.0673 7021
142	1.8047 7773	2.0303 9609	2.2839 9340	2.8893 3 24	4.1 80 391
143	1.8122 9763	2.0405 4808	2.2973 1971	2.9110 0424	4.1491 2435
144	1.8198 4887	2.0507 5082	2.3107 2774	2.9328 3677	4 1906 1559
145	1.8274 3158	2.0610 0457	2.3241 9995	2.9548 3305	4.2325 2175
146	1.8350 4533	2.0713 0959	2.3377 5778	2.9769 9430	4 2743 4697
147	1.8426 9190	2.0816 6314	2.3513 9470	2.9993 2175	4.3175 9544
148	1.8503 6978	2.0920 7447	2.3651 1117	3.0218 1667	4 3607 7 39
149	1.8580 7966	2.1025 3484	2.3789 0765	3.0444 8029	4 4 43 79 0
150	1.8658 1166	2.1130 4752	2.3927 8451	3.0673 1389	4 4484 2290

表四 複利終值表(期數爲整數)

$$w^n = (1 + i)^n$$

n	1½%	1¾%	1½%	1¾%	2%
1	1.0112 5900	1.0125 0000	1.0150 0000	1.0175 0000	1.0200 0000
2	1.0226 2656	1.0251 5625	1.0302 2500	1.0353 0625	1.0404 0000
3	1.0341 3111	1.0379 7070	1.0456 7838	1.0534 2411	1.0612 0800
4	1.0457 6509	1.0509 4534	1.0613 6355	1.0718 5903	1.0824 3216
5	1.0575 2994	1.0640 8215	1.0772 8400	1.0906 1656	1.1040 8080
6	1.0694 2716	1.0773 8318	1.0934 4326	1.1097 0235	1.1261 6242
7	1.0814 5821	1.0908 5047	1.1098 4491	1.1291 2315	1.1486 8567
8	1.0936 2462	1.1044 8610	1.1264 9259	1.1488 8178	1.1716 5938
9	1.1059 2789	1.1182 9218	1.1433 8998	1.1639 8721	1.1950 9257
10	1.1183 6958	1.1322 7083	1.1605 4083	1.1894 4449	1.2189 9442
11	1.1309 5124	1.1464 2422	1.1779 4894	1.2102 5977	1.2433 7431
12	1.1436 7444	1.1607 5452	1.1956 18 7	1.2314 3931	1.2682 4179
13	1.1565 4078	1.1752 6395	1.2155 5244	1.2529 8930	1.2936 0663
14	1.1695 5186	1.1899 5475	1.2317 5573	1.2749 1632	1.3194 7876
15	1.1827 0932	1.2048 2918	1.2502 3207	1.2972 2786	1.3458 6834
16	1.1960 1480	1.2198 8955	1.2689 8555	1.3199 2935	1.3727 8571
17	1.2094 6997	1.2351 3817	1.2880 2033	1.3430 2811	1.4002 4142
18	1.2230 7650	1.2505 7739	1.3073 4064	1.3665 3111	1.4282 4625
19	1.2368 3611	1.2662 0961	1.3239 5075	1.3904 4540	1.4568 117
20	1.2507 5052	1.2820 3723	1.3468 5501	1.4147 7820	1.4859 4740
21	1.2648 2146	1.2980 6270	1.3670 5783	1.4395 2681	1.5156 6634
22	1.2790 5071	1.3142 8848	1.3875 6370	1.4647 2871	1.5459 7967
23	1.2934 4033	1.3307 1709	1.4083 7715	1.4903 6146	1.5768 9926
24	1.3079 9123	1.3473 5105	1.4295 0281	1.5164 4279	1.6084 3725
25	1.3227 0623	1.3641 9294	1.4509 4535	1.5429 8054	1.640 0599
26	1.3375 8657	1.3812 4535	1.4727 0953	1.5699 8290	1.6734 1811
27	1.3526 3442	1.3985 1092	1.4948 0018	1.5974 5739	1.7068 8648
28	1.3678 5156	1.4159 9230	1.5172 2218	1.6254 1290	1.7410 2421
29	1.3832 3989	1.4336 9221	1.5399 8051	1.6538 5762	1.7758 4469
30	1.3988 0134	1.4516 1336	1.5630 8022	1.6828 0013	1.8113 6158
31	1.4145 3785	1.4697 5853	1.5865 2642	1.7122 4913	1.8475 8882
32	1.4304 5140	1.4881 3051	1.6103 2432	1.7422 1349	1.8845 4059
33	1.4465 4398	1.5067 3214	1.6344 7918	1.7727 0223	1.9222 3140
34	1.4628 1760	1.5255 6629	1.6589 9637	1.8037 2452	1.9606 7603
35	1.4792 7430	1.5446 3587	1.6838 8132	1.8352 8970	1.9998 8955
36	1.4959 1613	1.5639 4882	1.7091 3954	1.8674 0727	2.0398 8734
37	1.5127 4519	1.5834 9312	1.7347 7663	1.9000 8689	2.0806 8509
38	1.5297 6357	1.6032 8778	1.7607 9328	1.9335 3841	2.1222 9879
39	1.5469 7341	1.6233 2787	1.7872 1025	1.9671 7184	2.1647 4477
40	1.5643 7687	1.6436 1946	1.8140 1841	2.0015 9734	2.2080 3966
41	1.5819 7611	1.6641 6471	1.8412 2868	2.0366 2530	2.2522 0046
42	1.5997 7334	1.6849 6677	1.8688 4712	2.0722 6624	2.2972 4447
43	1.6177 7079	1.7060 2885	1.8968 7982	2.1085 3090	2.3431 8933
44	1.6359 7071	1.7273 5421	1.9253 3302	2.1454 3019	2.3900 5314
45	1.6543 7538	1.7489 4614	1.9542 1301	2.1829 7522	2.4378 5421
46	1.6729 8710	1.7708 0797	1.9835 2621	2.2211 7728	2.4866 1129
47	1.6918 0321	1.7929 4306	2.0132 7910	2.2600 4789	2.5363 4351
48	1.7108 4105	1.8153 5485	2.0434 7829	2.2995 987	2.5870 7039
49	1.7300 8801	1.8380 4679	2.0741 3046	2.3398 170	2.6388 1179
50	1.7495 5150	1.8610 2237	2.1052 4242	2.3807 8893	2.6916 8803

表四 複利終值表(期數爲整數)

$$u^n = (1 + i)^n$$

n	1½%	1¼%	1½%	1¼%	2%
51	1.7692 3395	1.8842 8515	2.1368 2106	2.4224 5274	2.7454 1979
52	1.7891 3784	1.9073 3872	2.1688 7337	2.4648 4566	2.8003 2819
53	1.809. 6564	1.9316 8670	2.2014 0647	2.5079 8046	2.8563 3475
54	1.8296 1988	1.9558 3279	2.2344 2757	2.5518 7012	2.9134 6144
55	1.8502 0310	1.9802 8070	2.2679 4398	2.5965 2785	2.9717 3067
56	1.8710 1788	2.0050 3420	2.3019 6314	2.6419 6708	3.0311 6529
57	1.8920 6 84	2.0300 9713	2.3364 9259	2.6882 0151	3.0917 8559
58	1.9133 5259	2.0554 7335	2.3715 3998	2.7352 4503	3.1536 2436
59	1.9348 7780	2.0811 6676	2.4071 1303	2.7831 1182	3.2166 9685
60	1.9566 4518	2.1071 8135	2.4432 1978	2.8318 1628	3.2810 3079
61	1.9783 5744	2.1335 2111	2.4798 6807	2.8813 7306	3.3466 5140
62	2.0009 17 3	2.1601 9013	2.5170 6609	2.9317 9709	3.4135 8443
63	2.0234 2765	2.1871 9250	2.5548 2 08	2.9831 0354	3.4818 5612
64	2.0461 91 1	2.2145 3241	2.5931 4442	3.0343 6785	3.5514 9324
65	2.0692 1087	2.2422 1407	2.6320 4158	3.0864 2574	3.6225 2311
66	2.0924 8949	2.2702 4174	2.6715 2221	3.1424 7819	3.6949 7357
67	2.1160 2999	2.2986 1976	2.7115 9504	3.1974 6647	3.768 8 7304
68	2.1398 3533	2.3273 5251	2.7522 6396	3.2534 2213	3.8442 5050
69	2.1639 0848	2.3564 4442	2.7935 5300	3.3103 8702	3.9211 3551
70	2.1882 5245	2.3858 9997	2.8354 5629	3.3682 8827	3.9995 5822
71	2.2128 7029	2.4157 2372	2.8779 8814	3.4272 3331	4.0795 4939
72	2.2377 6508	2.4459 2027	2.9211 5796	3.4872 0990	4.1611 4038
73	2.2629 3994	2.4764 947	2.9649 7533	3.5482 3607	4.2443 6318
74	2.2883 8601	2.5074 5045	3.0094 4998	3.6103 8020	4.3292 5045
75	2.3141 4249	2.5387 9358	3.0545 9171	3.6735 1098	4.415 8 3546
76	2.3401 7659	2.5705 2850	3.1004 1059	3.7377 9742	4.5041 5216
77	2.3665 0358	2.6026 6011	3.1469 1674	3.8032 0888	4.5942 3521
78	2.3931 2675	2.6351 9339	3.1941 2050	3.8697 6503	4.6861 1991
79	2.4200 4942	2.6681 3327	3.2420 3230	3.9374 8592	4.7798 4231
80	2.4472 7498	2.7014 8494	3.2906 6 79	4.0063 9192	4.8754 3916
81	2.4748 0682	2.7352 3350	3.3400 273	4.0765 0378	4.9729 4794
82	2.5026 4840	2.7694 4417	3.3901 2307	4.1478 4280	5.0724 0690
83	2.5308 03 9	2.8040 62 2	3.4409 7492	4.2204 2984	5.1738 5504
84	2.5592 7473	2.8391 1300	3.4925 8954	4.2942 8737	5.2773 3214
85	2.5880 6657	2.8746 0191	3.5449 7838	4.3694 3740	5.3828 7878
86	2.6171 8232	2.9105 3444	3.5981 5306	4.4459 0255	5.4905 3636
87	2.6466 2562	2.9469 1612	3.6521 2535	4.5237 0581	5.6003 4708
88	2.6764 0016	2.9837 5257	3.7069 0723	4.6028 7070	5.7123 5402
89	2.7065 0966	3.0210 4948	3.7625 1034	4.6834 2393	5.8266 0110
90	2.7369 5789	3.0588 1260	3.8189 4851	4.7653 8080	5.9431 3313
91	2.7677 4867	3.0979 4775	3.8762 3273	4.8487 7496	6.0619 9379
92	2.7988 8584	3.1357 6085	3.9343 7622	4.9336 2853	6.1832 3570
93	2.8303 7331	3.1749 5786	3.9933 9187	5.0199 6703	6.3069 0042
94	2.8622 1501	3.2146 4483	4.0532 9275	5.1078 1645	6.4330 3343
95	2.8944 1492	3.2548 2789	4.1140 9214	5.1972 0324	6.5616 9920
96	2.9269 7709	3.2955 324	4.1758 0352	5.2881 5429	6.6929 3318
97	2.9599 0559	3.3367 0716	4.2384 4057	5.3806 9699	6.8267 9184
98	2.9932 0452	3.3784 1600	4.3020 1718	5.4748 5919	6.963 2768
99	3.0268 7807	3.4203 4620	4.3665 4744	5.5703 6923	7.1025 9423
100	3.0609 3045	3.4634 0427	4.4320 4565	5.6681 5594	7.2446 4612

表四 複利終值表(期數爲整數)

$$u^n = (1 + i)^n$$

n	2¼%	2½%	2¾%	3%	3½%
1	1.0225 0000	1.0250 0000	1.0 75 0000	1.0300 0000	1.0350 0000
2	1.0455 0825	1.0506 2500	1.0557 5625	1.0609 0000	1.0712 2500
3	1.0690 3014	1.0768 9063	1.0847 8955	1.0927 2700	1.1037 1788
4	1.0930 8332	1.1038 1289	1.1146 2126	1.1255 0881	1.1475 2300
5	1.1176 7769	1.1314 0 21	1.1462 7334	1.1592 7407	1.1876 8631
6	1.1428 2544	1.1596 9342	1.1767 6836	1.1940 5230	1.2292 5533
7	1.1685 3901	1.1886 8575	1.2091 2949	1.2298 7337	1.2722 7926
8	1.1948 3114	1.2184 0290	1.2243 8055	1.2607 7008	1.3168 0904
9	1. 217 1484	1.2488 6297	1.2765 4602	1.3047 7318	1.3623 9735
10	1.2492 0343	1.2800 8454	1.3116 5103	1.3489 1638	1.4105 9876
11	1.2773 1050	1.3120 8666	1.3477 2144	1.3842 3387	1.4599 6972
12	1.3060 4999	1.3448 8832	1.3847 8378	1.4257 6089	1.5110 6366
13	1.3354 3611	1.3785 1104	1.4228 6533	1.4685 3371	1.5639 5606
14	1.36 4 8343	1.4129 7382	1.4619 9413	1.5125 8972	1.6186 9452
15	1.3962 0380	1.4482 9817	1.501 9896	1.5579 6742	1.6753 4883
16	1.4276 2146	1.4845 6562	1.5475 0944	1.6047 0644	1.7339 8604
17	1.4597 4294	1.5216 18 6	1.5859 5595	1.6528 4763	1.7946 7555
18	1.4925 8716	1.5596 5872	1.6 95 6973	1.7024 3306	1.8 74 8920
19	1. 261 7037	1.5 86 5019	1.6743 8290	1.7535 0605	1.9225 0132
20	1.5605 0920	1.638 1644	1.7204 2343	1.8061 1123	1.9897 8883
21	1.5956 2066	1.6795 8185	1.7677 4021	1.8602 9457	2.0594 3147
22	1.6315 2312	1.7215 7140	1.8163 5307	1.9161 0311	2.1315 1153
23	1.6 82 31 7	1.7646 1068	1.8663 0278	1.9735 8651	2.2061 1448
24	1.7057 5658	1.8087 2595	1.9176 2610	2.0327 9411	2.2835 2349
25	1.7441 4632	1.85 9 4410	1.9703 6082	2.0937 7793	2.3632 4498
26	1.7833 8962	1.9002 9270	2.0245 4575	2.1565 9127	2.4459 5856
27	1.8235 1538	1.9478 0002	2.0802 2075	2.2212 8901	2.5315 6711
28	1.8645 4499	1.9 64 9502	2.1374 2682	2.2879 2768	2.6201 7193
29	1.9034 9725	2.0464 0739	2.1962 0606	2.3565 6551	2.7118 7793
30	1.9493 9344	2.0975 6758	2.2566 0173	2.4272 6247	2.8067 9370
31	1.9932 5479	2.1500 0677	2.3186 5828	2.5000 8035	2.9050 3148
32	2.0381 0303	2.2037 5694	2.3824 2133	2.5750 8276	3.0067 0759
33	2.0839 6934	2.2588 5086	2.4479 3797	2.6523 3524	3.1119 4235
34	2.1308 4945	2.3153 2213	2.5152 5626	2.7319 0530	3.2203 6033
35	2.1787 9356	2.3732 0519	2.5844 2581	2.8138 6245	3.3335 9045
36	2.2278 1642	2.4325 3532	2.6554 9752	2.8982 7833	3.4 02 6611
37	2.2779 4229	2.4933 4870	2.7285 2970	2.9852 2668	3.5710 2543
38	2.3291 9599	2.5556 8242	2.8035 5810	3.0747 8343	3.6960 1132
39	2.3818 0290	2.6195 7448	2.8806 5595	3.1670 2698	3.8253 7171
40	2.4351 8397	2.6850 6384	2.9598 7399	3.2620 3779	3.9592 5972
41	2.48 9 8072	2.75 1 9043	3.0412 7052	3.3598 9893	4.0978 3381
42	2.5460 0528	2.8209 9520	3.1249 0546	3.4506 9589	4.24 2 5799
43	2.6032 9040	2.8915 2008	3.2108 4036	3.5645 1677	4.3897 0202
44	2.6618 6444	2.9638 0308	3.2991 3847	3.6714 5227	4.5335 4160
45	2.7217 5639	3.0379 03 8	3.3898 6478	3.7815 9584	4.7023 5855
46	2.78 9 9590	3.1138 5086	3.4830 8606	3.8950 4372	4.8669 4110
47	2.8456 1331	3.1916 9713	3.5788 7093	4.0118 9501	5.0372 3404
48	2.9096 3961	3.2714 8956	3.6772 8933	4.132 518	5.21 5 8898
49	2.9751 0650	3. 532 7680	3.7784 1535	4.2562 1944	5.3963 6459
50	3.0420 4640	3.4371 0872	3.8823 2177	4.3839 0602	5.5849 2886

表四 複利終值表(期數爲整數)

$$u^n = (1 + i)^n$$

n	2½%	2½%	2½%	3%	3½%
61	3.1104 9244	3.5230 3644	3.9890 8562	4.5154 2320	5.7803 9930
52	3.1804 7852	3.6111 1235	4.0987 8547	4.6508 8590	5.98:7 1827
53	3.2520 3929	3.7013 9016	4.2115 0208	4.7904 1217	6.1921 0824
54	3.3252 1017	3.7939 2491	4.3273 1838	4.9341 2485	6.4088 3202
55	3.4000 2740	3.8887 7303	4.4463 1964	5.0821 4859	6.6331 4114
56	3.4765 2802	3.9859 9236	4.5635 0343	5.2346 1305	6.8653 0108
57	3.5547 4990	4.0856 4217	4.6942 2975	5.3916 5144	7.1055 8662
58	3.6347 3177	4.1877 8322	4.8233 2107	5.5534 0098	7.3542 8215
59	3.7165 1324	4.2924 7780	4.9559 6239	5.7200 0301	7.6116 8203
60	3.8001 3479	4.3997 8975	5.0922 5136	5.8916 0310	7.8780 9090
61	3.8856 3782	4.5097 8449	5.2322 8827	6.0683 5120	8.1538 2408
62	3.9730 6467	4.6225 2910	5.3761 7620	6.2514 0173	8.4392 0793
63	4.0624 5862	4.7380 9233	5.5240 2105	6.4379 1579	8.7345 8020
64	4.1533 6394	4.8565 4464	5.6759 3162	6.6310 5120	9.0402 9031
65	4.2473 2588	4.9779 5826	5.8320 1974	6.8299 8273	9.3571 0068
66	4.3428 9071	5.1024 0721	5.9924 0029	7.0348 8222	9.6841 8520
67	4.4406 0576	5.2299 6739	6.1571 9130	7.2459 2868	10.0231 3168
68	4.5405 1939	5.3607 1658	6.3275 1406	7.4633 0654	10.3739 4129
69	4.6426 8107	5.4947 3449	6.5004 9319	7.6872 0574	10.7370 2924
70	4.7471 4140	5.6321 0286	6.6792 5676	7.9178 2191	11.1118 2526
71	4.8539 5208	5.7729 0543	6.8629 3632	8.1553 5657	11.5017 7414
72	4.9631 6600	5.9172 2806	7.0516 6706	8.4000 1727	11.9043 3624
73	5.0748 3723	6.0651 5876	7.2455 8791	8.6520 1778	12.3209 8391
74	5.1890 2107	6.2167 8773	7.4448 4158	8.9115 7832	12.7522 2259
75	5.3057 7405	6.3722 0743	7.6495 7472	9.1789 2567	13.1985 5038
76	5.4251 5396	6.5315 1261	7.8599 3802	9.4542 9344	13.6604 9964
77	5.5472 1993	6.6943 0043	8.0760 8632	9.7379 2224	14.1386 1713
78	5.6720 3237	6.8621 7044	8.2981 7869	10.0309 5991	14.6334 6873
79	5.7996 5310	7.0337 2470	8.5263 7861	10.3309 6171	15.1456 4013
80	5.9301 4530	7.2095 6782	8.7608 5402	10.6408 9056	15.6757 3754
81	6.0635 7357	7.3898 0701	9.0017 7751	10.9601 1727	16.2243 8835
82	6.2000 0397	7.5745 5219	9.2493 2639	11.2839 2079	16.7922 4195
83	6.3395 0106	7.7639 1599	9.5036 8286	11.6275 8842	17.3799 7041
84	6.4821 4290	7.9580 1389	9.7650 3414	11.9764 1607	17.9832 6938
85	6.6279 9112	8.1569 6424	10.0335 7258	12.3357 0855	18.6178 5681
86	6.7771 2092	8.3608 8834	10.3094 9583	12.7057 7981	19.2694 8357
87	6.9296 6114	8.5699 1055	10.5930 0696	13.0869 5321	19.9439 1530
88	7.0855 2228	8.7841 5832	10.8843 1465	13.4795 6189	20.6419 5285
89	7.2449 4653	9.0037 6228	11.1836 3331	13.8839 4865	21.3644 2120
90	7.4079 5782	9.2288 5633	11.4911 8322	14.3004 6711	22.1121 7595
91	7.5746 3688	9.4595 7774	11.8071 9076	14.7294 8112	22.8861 0211
92	7.7450 6621	9.6960 6718	12.1318 8851	15.1713 6556	23.6871 1568
93	7.9193 3020	9.9384 6386	12.4655 1544	15.6265 0652	24.5161 6473
94	8.0975 1512	10.1869 3058	12.8083 1711	16.0958 0172	25.3742 3049
95	8.2797 0921	10.4416 0385	13.1605 4584	16.5781 6077	26.2623 2856
96	8.4660 0267	10.7026 4395	13.5224 6085	17.0755 0559	27.1815 1006
97	8.6564 8773	10.9702 1001	13.8943 2352	17.5877 7076	28.1328 6291
98	8.8512 5871	11.2444 6330	14.2764 2255	18.1154 0388	29.1175 1311
99	9.0504 1203	11.5255 7693	14.6690 2417	18.6588 6600	30.1366 2677
100	9.2510 4630	11.8137 1635	15.0724 2234	19.2186 3198	31.1914 0798

表四 複利終值表(期數爲整數)

$$u^n = (1 + i)^n$$

n	4%	4½%	5%	5½%	6%
1	1.0400 0000	1.0450 0000	1.0500 0000	1.0550 0000	1.0600 0000
2	1.0816 0000	1.0920 2500	1.1025 0000	1.1130 2500	1.1235 0000
3	1.1218 6400	1.1411 6613	1.1576 2500	1.1742 4138	1.1910 1600
4	1.1618 58 6	1.1925 1860	1.2155 0625	1.2338 2465	1.2624 7696
5	1.2166 5290	1.2411 8194	1.2762 8156	1.3069 6001	1.3382 2558
6	.2653 1902	1.3022 6912	1.3400 9564	1.3788 4281	1.4185 1911
7	1.3159 3178	1.3603 6183	1.4071 0042	1.4546 7916	1.5036 3026
8	1.3685 6905	1.4221 0361	1.4774 5544	1.5346 8651	1.5938 4307
9	1.4243 1181	1.4860 9514	1.5513 2822	1.6190 9427	1.6894 7896
10	1.4802 4428	1.5524 0912	1.6288 9463	1.7081 4446	1.7908 4770
11	1.5394 5406	1.6228 5305	1.7103 3936	1.8020 9240	1.8982 9856
12	1.6010 3222	1.6968 8143	1.7958 5.33	1.9012 0749	2.0121 9647
13	1.6650 7351	1.7721 9610	1.8856 4914	2.0057 7390	2.1320 2826
14	1.7316 7645	1.8519 449.2	1.9799 3160	2.1160 9146	2.2609 0396
15	1.8009 4351	1.9352 8244	2.0789 2818	2.2324 7649	2.3965 5819
16	1.8729 8125	2.0223 7015	2.1928 7459	2.3552 6277	2.5403 5168
17	1.9479 0950	2.1133 7681	2.2920 1832	2.4843 0215	2.6927 7279
18	2.0258 1652	2.2084 7877	2.4036 1923	2.6214 6627	2.843 3915
19	2.1068 4913	2.3078 6031	2.5269 020	2.7656 4691	3.02.5 9950
20	2.1911 2314	2.4117 1402	2.6532 9771	2.9177 5749	3.2071 3547
21	2.2787 6807	2.5202 4116	2.7859 6259	3.0782 3415	3.3995 6360
22	2.3699 1879	2.6333 5201	2.9.52 6072	3.24.5 3703	3.6035 3742
23	2.4647 1564	2.7521 6635	3.0715 2376	3.4261 5157	3.8197 4966
24	2.5633 0416	2.8760 1383	3.2250 9994	3.6145 8990	4.0489 3464
25	2.6658 3533	3.0054 3416	3.3863 6494	3.8133 9235	4.2918 7072
26	2.7724 6978	3.1406 7901	3.5556 7269	4.0231 2893	4.5493 8296
27	2.8833 6358	3.2820 0956	3.7334 5632	4.2444 0102	4.8223 4594
28	2.9983 0332	3.4296 9999	3.9201 2914	4.4778 4307	5.1116 8670
29	3.1186 5145	3.5810 3649	4.1161 3560	4.7241 2444	5.4183 8790
30	3.2433 9751	3.7453 1813	4.3219 4238	4.9831 5123	5.7434 9117
31	3.3731 3341	3.9198 5745	4.5380 3949	5.2580 6861	6.0881 0064
32	3.5089 5875	4.0899 804	4.7649 4147	5.5472 6238	6.4533 8668
33	3.6443 8110	4.2740 3018	5.0031 3854	5.8423 6181	6.8405 3933
34	3.7943 1634	4.4663 6154	5.2533 4797	6.1742 4171	7.2 10 2528
35	3.9460 8899	4.6673 4781	5.5160 1537	6.5138 2501	7.6860 8679
36	4.1039 3255	4.8773 7846	5.7918 1614	6.8720 8338	8.1472 5200
37	4.238 8986	5.0938 6049	6.0814 0694	7.2570 5008	8.6360 8712
38	4.4388 1345	5.3262 1921	6.38 4 7729	7.6488 0283	9.1542 5235
39	4.6163 6599	5.5658 9903	6.7047 5115	8.0694 8699	9.7035 0749
40	4.8010 2063	5.8103 6454	7.0399 8.71	8.5133 0377	10.2837 1794
41	4.9930 6145	6.0781 0094	7.39 9 8815	8.9815 4076	10.9028 6101
42	5.1927 8391	6.3516 1548	7.7615 8756	9.4755 2550	11.5.70 3267
43	5.4034 5227	6.6374 318	8.1496 6693	9.9966 7940	12.2504 5463
44	5.6165 1508	6.9381 2290	8.5.71 5023	10.5464 9677	12.9854 8191
45	5.8411 7568	7.2482 4843	8.9350 0779	11.1265 5409	13.7646 1083
46	6.0748 2271	7.5744 1961	9.4342 5818	11.7385 1456	14.5904 8748
47	6.3178 1562	7.9152 6849	9.9059 7109	12.3841 3287	15.4659 1673
48	6.5705 2324	8.2714 5557	10.4012 6965	13.0652 6017	16.3938 7173
49	6.8333 4937	8.6433 7107	10.9213 3313	13.7838 4943	17.377.0 0403
50	7.1036 8335	9.0326 3627	11.4673 9979	14.5419 6120	18.4201 5427

表四 複利終值表(期數爲整數)

$$w^n = (1 + i)^n$$

n	4%	4½%	5%	5½%	6%
51	7.3909 5068	9.4391 0490	12.0407 6978	15.3417 6907	19.5253 6353
52	7.6865 8871	9.8638 6463	12.6428 0826	16.1855 6637	20.6963 2534
53	7.9940 5226	10.3077 3853	13.2749 4868	17.0757 7252	21.9386 9846
54	8.3138 1435	10.7715 8677	13.9386 9611	18.0149 4001	23.2550 2037
55	8.6463 6692	11.2563 0817	14.6356 3092	19.0037 6171	24.6503 2159
56	8.9922 2160	11.7628 4204	15.3674 1246	20.0510 7860	26.1293 4089
57	9.3519 1046	12.2921 6993	16.1357 8309	21.1538 8793	27.6971 0134
58	9.7259 8688	12.8453 1758	16.9425 7224	22.3173 5176	29.3539 2742
59	10.1150 2655	13.4233 5687	17.7897 0035	23.5448 0611	31.1204 6307
60	10.5196 2741	14.0274 0793	18.6791 8539	24.8397 7045	32.9876 9035
61	10.9404 1250	14.6586 4129	19.6131 4519	26.2059 5782	34.9669 5230
62	11.3780 2900	15.3182 8014	20.5938 0245	27.6472 8550	37.0349 6944
63	11.8331 5016	16.0076 0275	21.6234 9257	29.1678 8620	39.2383 6761
64	12.3051 7617	16.7279 4487	22.7046 6720	30.7721 1994	41.6461 9967
65	12.7937 3522	17.4807 0239	23.8399 0056	32.4645 8654	44.1449 7165
66	13.3106 8463	18.2673 3490	25.0318 9559	34.2501 3880	46.7936 6994
67	13.8431 1201	19.0893 6403	26.2834 9037	36.1338 9643	49.6012 9014
68	14.3938 3649	19.9433 8541	27.5976 6488	38.1212 6074	52.5773 6755
69	14.9727 0995	20.8460 0276	28.9775 4813	40.2179 3008	55.7320 0960
70	15.5716 1835	21.7841 3558	30.4264 2554	42.4299 1623	59.0759 3018
71	16.1944 8308	22.7644 2168	31.9477 4681	44.7635 6163	62.6204 8599
72	16.8422 6241	23.7888 2066	33.5451 3415	47.2255 5751	66.3777 1515
73	17.5159 5290	24.8593 1759	35.2223 9086	49.8229 6318	70.3603 7806
74	18.2165 9102	25.9779 8633	36.9835 1040	52.5632 2615	74.5320 0074
75	18.9452 5466	27.1469 9629	38.8326 8592	55.4542 0359	79.0069 2079
76	19.7030 6485	28.3686 1112	40.7743 2022	58.5041 8479	83.8003 3603
77	20.4911 8744	29.6451 9862	42.8130 3623	61.7219 1495	88.8233 5620
78	21.3108 3494	30.9792 3256	44.9536 8804	65.1166 2027	94.1580 6757
79	22.1632 6894	32.3732 9802	47.2013 7244	68.6980 8439	99.8075 4102
80	23.0497 9907	33.8300 9643	49.5614 4107	72.4764 2623	105.7959 9348
81	23.9717 9103	35.3524 5077	52.0395 1312	76.4626 2973	112.1437 5309
82	24.9306 6267	36.9433 1106	54.6414 8878	80.6680 7436	118.8723 7823
83	25.9278 8918	38.6037 6006	57.3735 6322	85.1048 1845	126.0047 2097
84	26.9650 0475	40.3430 1926	60.2422 4138	89.7855 8347	133.5650 0423
85	28.0436 0494	42.1584 5513	63.2543 5344	94.7237 9056	141.5739 0449
86	29.1653 4914	44.0555 8561	66.4170 7112	99.9335 9904	150.0736 3875
87	30.3319 6310	46.0380 8696	69.7379 2467	105.4299 4698	159.0780 5703
88	31.5452 4163	48.1098 0087	73.2243 2091	111.2286 9407	168.6227 4050
89	32.8070 5129	50.2747 4191	76.8860 6195	117.3461 6674	178.7401 0493
90	34.1193 3334	52.5371 0530	80.7303 6505	123.8002 0591	189.4645 1123
91	35.4841 0668	54.9012 7503	84.7668 8330	130.6092 1724	200.8323 8190
92	36.9034 7094	57.3718 3241	89.0052 2747	137.7927 2419	212.8323 2482
93	38.3796 0978	59.9535 6487	93.4554 8834	145.3713 2402	225.6552 6431
94	39.9147 9417	62.6514 7529	98.1282 6328	153.3667 4684	239.1945 8017
95	41.5113 8594	65.4707 9168	103.0346 7645	161.8019 1791	253.5462 5498
96	43.1718 4138	68.4169 7730	108.1864 1027	170.7010 2340	268.7590 3028
97	44.8987 1503	71.4957 4128	113.5957 3078	180.0895 7969	284.8845 7209
98	46.6946 6363	74.7130 4964	119.2755 1732	189.9945 0657	301.9776 4642
99	48.5624 5018	78.0751 3687	125.2392 9319	200.4442 0443	320.0963 0520
100	50.5049 4818	81.5835 1803	131.5012 5785	211.4686 3567	339.3020 8351

表四 複利終值表(期數爲整數)

$$w^n = (1 + i)^n$$

n	6½%	7%	7½%	8%	8½%
1	1.0650 0000	1.0700 0000	1.0750 0000	1.0800 0000	1.0850 0000
2	1.1342 2500	1.1449 0000	1.1556 2500	1.1664 0000	1.1772 2500
3	1.2079 4963	1.2250 4300	1.2422 9688	1.2597 1200	1.2772 8913
4	1.2864 6635	1.3107 9601	1.3354 6914	1.3604 8896	1.3858 5870
5	1.3700 8666	1.4025 5173	1.4356 2933	1.4693 2808	1.5036 5669
6	1.4591 4230	1.5007 3035	1.5433 0153	1.5868 7432	1.6314 6751
7	1.5539 3655	1.6057 8148	1.6590 4914	1.7138 2427	1.7701 4225
8	1.6549 9567	1.7181 8618	1.7834 7783	1.8509 3021	1.9206 0434
9	1.7625 7039	1.8384 5921	1.9172 3866	1.9990 0463	2.0838 5571
10	1.8771 3747	1.9671 5136	2.0610 3156	2.1589 2500	2.2609 8344
11	1.9991 5140	2.1048 5195	2.2156 0893	2.3316 3900	2.4531 6703
12	2.1290 9624	2.2521 9159	2.3817 7960	2.5181 7012	2.6616 8623
13	2.2674 8750	2.4098 4500	2.5604 1307	2.7196 2373	2.8879 2956
14	2.4148 7418	2.5785 3415	2.7524 4405	2.9371 9362	3.1334 0357
15	2.5718 4101	2.7590 3154	2.9588 7735	3.1721 6911	3.3997 4288
16	2.7390 1067	2.9521 6375	3.1807 9315	3.4259 4264	3.6887 2102
17	2.9170 4637	3.1588 1521	3.4193 6264	3.7000 1805	4.0022 6231
18	3.1066 5433	3.3799 3228	3.6758 0409	3.9960 1950	4.3424 5461
19	3.3085 8691	3.6165 2754	3.9514 8940	4.3157 0106	4.7115 6325
20	3.5236 4506	3.8696 3446	4.2478 5110	4.6609 5714	5.1120 4612
21	3.7526 3199	4.1405 6237	4.5664 3993	5.0338 3372	5.5465 7005
22	3.9966 0632	4.4304 0174	4.9089 2293	5.4365 4041	6.0180 2850
23	4.2563 3575	4.7405 2986	5.2770 9215	5.8714 6365	6.5295 6092
24	4.5330 5081	5.0723 6695	5.6723 7406	6.3411 8074	7.0845 7360
25	4.8276 9911	5.4274 3264	6.0983 3961	6.8484 7520	7.6867 6232
26	5.1414 9955	5.8073 5292	6.5557 1508	7.3963 5321	8.3401 3716
27	5.4756 9702	6.2138 6763	7.0473 9371	7.9880 6147	9.0490 4881
28	5.8316 1733	6.6488 3836	7.5759 4824	8.6271 0639	9.8182 1796
29	6.2106 7245	7.1142 5705	8.1441 4436	9.3172 7490	10.6527 6649
30	6.6143 6616	7.6122 5504	8.7549 5519	10.0626 5689	11.5582 5164
31	7.0442 9996	8.1451 1290	9.4115 7683	10.8676 6944	12.5407 0303
32	7.5021 7946	8.7152 7080	10.1174 4509	11.7370 8300	13.6066 6279
33	7.9898 2113	9.3253 3975	10.8762 5847	12.6760 4964	14.7632 3213
34	8.5091 5950	9.9781 1554	11.6919 7248	13.6901 3361	16.0181 0360
35	9.0622 5437	10.6765 8148	12.5688 7042	14.7853 4429	17.3796 4241
36	9.6513 0143	11.4239 4219	13.5115 3570	15.9681 7184	18.8569 1201
37	10.2786 3603	12.2236 1814	14.5249 0038	17.2456 2558	20.4597 4953
38	10.9467 4737	13.0792 7141	15.6142 6844	18.6252 7563	22.1988 2324
39	11.6582 3595	13.9948 2041	16.7853 3853	20.1152 9768	24.0857 2865
40	12.4160 7453	14.9744 5784	18.0442 3897	21.7245 2150	26.1330 1558
41	13.2231 1938	16.0226 9989	19.3975 5689	23.4624 8322	28.3543 2190
42	14.0826 2214	17.1442 5678	20.8523 7366	25.3394 8187	30.7644 3927
43	14.9979 9258	18.3443 5475	22.4163 0168	27.3666 4042	33.3794 1660
44	15.9728 6209	19.6284 5959	24.0975 2431	29.5559 7166	36.2166 6702
45	17.0110 9813	21.0024 5176	25.9043 3863	31.9204 4939	39.2950 8371
46	18.1168 1951	22.4726 2338	27.8477 0153	34.4740 8534	42.6351 6583
47	19.2944 1278	24.0457 0702	29.9362 7915	37.2320 1217	46.2591 5492
48	20.5485 4961	25.7289 0651	32.1815 0008	40.2105 7314	50.1911 8309
49	21.8842 0533	27.5299 2997	34.5951 1259	43.4274 1899	54.4574 3365
50	23.3066 7868	29.4570 2506	37.1897 4903	46.9016 1251	59.0363 1551

表五 複利現值表

$$v^n = (1+i)^{-n}$$

n	$\frac{1}{15}\%$	1%	$\frac{1}{15}\%$	1%	1%
1	0.9958 5092	0.9950 2488	0.9942 0050	0.9925 5583	0.9900 9901
2	0.9917 1846	0.9900 7450	0.9844 3463	0.9851 6708	0.9802 9605
3	0.9876 0345	0.9851 4876	0.9827 0220	0.9778 3333	0.9705 9015
4	0.9835 0551	0.9802 4752	0.9770 0302	0.9705 5417	0.9609 8034
5	0.9794 2457	0.9753 7067	0.9713 3638	0.9633 2920	0.9514 6569
6	0.9753 6057	0.9705 1808	0.9657 0361	0.9561 5802	0.9420 4524
7	0.9713 1343	0.9656 8963	0.9601 0301	0.9490 4022	0.9327 1805
8	0.9672 8308	0.9608 8520	0.9545 3489	0.9419 7540	0.9234 3322
9	0.9632 6946	0.9561 0468	0.9489 9907	0.9349 6318	0.9143 3982
10	0.9592 7249	0.9513 4794	0.9434 9534	0.9280 0315	0.9052 3695
11	0.9552 1211	0.9466 1489	0.9380 2354	0.9210 9494	0.8963 2372
12	0.9513 2824	0.9419 0534	0.9325 8347	0.9142 3815	0.8874 4923
13	0.9473 8032	0.9372 1924	0.9271 7495	0.9074 3241	0.8786 6260
14	0.9434 4978	0.9325 5646	0.9217 9780	0.9008 7733	0.8699 6297
15	0.9395 3505	0.9279 1688	0.9164 5133	0.8939 7254	0.8615 4947
16	0.9356 3656	0.9233 0037	0.9111 3636	0.8873 1766	0.8528 3126
17	0.9317 5425	0.9187 0634	0.9058 5272	0.8807 1231	0.8443 7749
18	0.9278 8805	0.9141 3616	0.9005 9923	0.8741 5614	0.8360 1731
19	0.9240 3739	0.9095 8822	0.8953 7620	0.8676 4878	0.8277 3992
20	0.9202 0371	0.9050 6290	0.8901 8346	0.8611 3985	0.8195 4447
21	0.9163 8544	0.9005 6010	0.8850 2084	0.8547 7901	0.8114 3017
22	0.9125 8301	0.8960 7971	0.8798 3816	0.8484 1589	0.8033 3621
23	0.9087 9636	0.8916 2160	0.8747 3525	0.8421 0014	0.7954 4179
24	0.9050 2542	0.8871 8567	0.8697 1193	0.8358 3140	0.7875 6613
25	0.9012 7012	0.8827 7181	0.8646 6803	0.8296 0933	0.7797 6844
26	0.8975 3041	0.8783 7991	0.8596 5339	0.8234 3358	0.7720 4796
27	0.8938 0622	0.8740 0988	0.8546 6732	0.8173 0380	0.7644 0392
28	0.8900 9748	0.8696 6155	0.8497 1118	0.8112 1966	0.7568 3557
29	0.8864 0413	0.8653 3488	0.8447 3327	0.8051 3080	0.7493 4215
30	0.8827 2610	0.8610 2973	0.8398 3395	0.7991 3690	0.7419 2292
31	0.8790 6334	0.8567 4600	0.8350 1304	0.7932 3762	0.7345 7715
32	0.8754 1577	0.8524 3358	0.8301 7038	0.7873 3262	0.7273 0411
33	0.8717 8334	0.8482 4237	0.8253 5531	0.7814 7158	0.7201 0307
34	0.8681 6599	0.8440 2226	0.8205 6915	0.7756 5418	0.7129 7334
35	0.8645 6364	0.8398 2314	0.8158 1026	0.7698 3008	0.7059 1420
36	0.8609 7624	0.8356 4492	0.8110 7897	0.7641 4896	0.6989 2495
37	0.8574 0372	0.8314 8748	0.8063 7511	0.7584 6051	0.6920 0490
38	0.8538 4803	0.8273 5073	0.8016 9854	0.7528 1440	0.6851 5337
39	0.8503 0310	0.8232 3455	0.7970 4908	0.7472 1032	0.6783 6967
40	0.8467 7437	0.8191 3886	0.7924 2660	0.7416 4796	0.6716 5314
41	0.8432 6128	0.8150 6354	0.7878 3092	0.7361 2701	0.6650 0311
42	0.8397 6227	0.8110 0850	0.7832 6189	0.7306 4716	0.6584 1392
43	0.8362 7778	0.8069 7363	0.7787 1936	0.7252 0309	0.6518 9992
44	0.8328 0775	0.8029 5884	0.7742 0317	0.7198 0952	0.6454 4546
45	0.8293 5211	0.7989 6402	0.7697 1318	0.7144 5114	0.6390 5492
46	0.8259 1032	0.7949 8907	0.7652 4922	0.7091 3264	0.6327 2764
47	0.8224 8380	0.7910 3390	0.7608 1116	0.7038 5374	0.6264 6301
48	0.8190 7100	0.7870 9841	0.7563 9884	0.6986 1414	0.6202 6041
49	0.8156 7237	0.7831 8250	0.7520 1210	0.6934 1353	0.6141 1921
50	0.8122 8784	0.7792 8607	0.7476 5080	0.6882 5165	0.6080 3882

表五 複利現值表

$$v^n = (1 + i)^{-n}$$

n	$\frac{1}{12}\%$	$\frac{1}{10}\%$	$\frac{1}{8}\%$	$\frac{1}{6}\%$	1%
51	0.8089 1735	0.7754 0902	0.7433 1480	0.6831 2819	0.6020 1864
52	0.8055 6084	0.7715 5127	0.7390 0304	0.6780 4286	0.5960 5806
53	0.8022 1827	0.7677 1270	0.7347 1809	0.6729 9540	0.5901 5649
54	0.7988 8956	0.7638 9324	0.7304 5709	0.6679 8551	0.5843 1356
55	0.7955 7467	0.7600 9277	0.7262 2080	0.6630 1291	0.5785 2808
56	0.7922 7353	0.7563 1122	0.7220 0908	0.6580 7733	0.5728 0008
57	0.7889 8608	0.7525 4847	0.7178 2179	0.6531 7849	0.5671 2879
58	0.7857 1228	0.7488 0445	0.7136 5878	0.6483 1612	0.5615 1365
59	0.7824 5207	0.7450 7906	0.7095 1991	0.6434 8995	0.5559 5411
60	0.7792 0538	0.7413 7220	0.7054 0505	0.6386 9970	0.5504 4962
61	0.7759 7216	0.7376 8378	0.7013 1405	0.6339 4511	0.5449 9002
62	0.7727 5236	0.7340 1371	0.6972 4678	0.6292 2592	0.5396 0358
63	0.7695 4591	0.7303 6190	0.6932 0310	0.6245 4185	0.5342 6597
64	0.7663 5278	0.7267 2826	0.6891 8236	0.6198 9286	0.5289 7126
65	0.7631 7289	0.7231 1269	0.6851 8594	0.6152 7307	0.5237 3392
66	0.7600 0620	0.7195 1512	0.6812 1221	0.6106 9784	0.5185 4844
67	0.7568 5265	0.7159 3544	0.6772 6151	0.6061 5170	0.5134 1429
68	0.7537 1218	0.7123 7357	0.6733 3373	0.6016 3940	0.5083 3089
69	0.7505 8474	0.7088 2943	0.6694 2873	0.5971 6070	0.5032 9801
70	0.7474 7028	0.7053 0291	0.6655 4638	0.5927 1533	0.4983 1486
71	0.7443 6374	0.7017 9394	0.6616 8654	0.5883 0306	0.4933 8105
72	0.7412 8008	0.6983 0243	0.6578 4909	0.5839 2363	0.4884 9609
73	0.7382 0423	0.6948 2829	0.6540 3389	0.5795 7681	0.4836 5949
74	0.7351 4114	0.6913 7143	0.6502 4082	0.5752 6234	0.4788 7078
75	0.7320 9076	0.6879 3177	0.6464 6975	0.5709 7999	0.4741 2949
76	0.7290 5904	0.6845 0923	0.6427 2034	0.5667 2952	0.4694 3514
77	0.7260 2792	0.6811 0371	0.6389 9308	0.5625 1069	0.4647 8726
78	0.7230 1536	0.6777 1313	0.6352 8724	0.5583 2326	0.4601 8541
79	0.7200 1529	0.6743 4342	0.6316 0289	0.5541 6701	0.4556 2912
80	0.7170 2768	0.6709 8847	0.6279 3991	0.5500 4170	0.4511 1794
81	0.7140 3246	0.6676 5022	0.6242 9817	0.5459 4710	0.4466 5142
82	0.7110 8959	0.6643 2858	0.6206 7755	0.5418 8297	0.4422 2913
83	0.7081 3901	0.6610 2346	0.6170 7793	0.5378 4911	0.4378 5063
84	0.7052 0067	0.6577 3479	0.6134 9919	0.5338 4527	0.4335 1347
85	0.7022 7453	0.6544 6248	0.6099 4120	0.5298 7123	0.4292 2324
86	0.6993 6052	0.6512 0344	0.6064 0384	0.5259 2678	0.4249 7350
87	0.6964 5861	0.6479 6661	0.6028 8700	0.5220 1169	0.4207 6585
88	0.6935 6874	0.6447 4290	0.5993 9056	0.5181 2575	0.4165 9985
89	0.6906 9086	0.6415 3522	0.5959 1439	0.5142 6873	0.4124 7510
90	0.6878 2493	0.6383 4350	0.5924 5838	0.5104 4043	0.4083 9119
91	0.6849 7088	0.6351 6766	0.5890 2242	0.5066 4063	0.4043 4771
92	0.6821 2868	0.6320 0763	0.5856 0638	0.5028 6911	0.4003 4427
93	0.6792 9327	0.6288 6331	0.5822 1015	0.4991 2567	0.3963 8046
94	0.6764 7960	0.6257 3464	0.5788 3363	0.4954 1009	0.3924 5590
95	0.6736 7263	0.6226 2153	0.5754 7668	0.4917 2217	0.3885 7020
96	0.6708 7731	0.6195 2391	0.5721 3920	0.4880 6171	0.3847 2297
97	0.6680 9359	0.6164 4170	0.5688 2103	0.4844 2350	0.3809 1333
98	0.6653 2141	0.6133 7433	0.5655 2220	0.4808 2233	0.3771 4241
99	0.6625 6074	0.6103 2321	0.5623 4245	0.4772 4301	0.3734 0832
100	0.6598 1153	0.6072 8678	0.5589 8172	0.4736 9033	0.3697 1121

表五 複利現值表

$$v^n = (1 + i)^{-n}$$

n	$\frac{1}{1+i} \%$	$\frac{1}{1+i} \%$	$\frac{1}{1+i} \%$	$\frac{1}{1+i} \%$	$\frac{1}{1+i} \%$
101	0.6570 7372	0.6042 6545	0.5557 3991	0.4701 6410	0.3860 5071
102	0.6543 4727	0.6012 5015	0.5525 1689	0.4666 6412	0.3824 2044
103	0.6516 3214	0.5982 6781	0.5493 1257	0.4631 9019	0.3588 3806
104	0.6489 2827	0.5952 9136	0.5461 2683	0.4597 4213	0.3552 3521
105	0.6462 3562	0.5923 2971	0.5429 5957	0.4563 1973	0.3517 6753
106	0.6435 5415	0.5893 3279	0.5398 1067	0.4529 2281	0.3482 3469
107	0.6408 3380	0.5864 5054	0.5366 3004	0.4495 5117	0.3448 2632
108	0.6382 2453	0.5835 3238	0.5335 6756	0.4462 0404	0.3414 2210
109	0.6355 7630	0.5806 2973	0.5304 7313	0.4428 8302	0.3380 4168
110	0.6329 3905	0.5777 4102	0.5273 9665	0.4395 3612	0.3346 9474
111	0.6303 1275	0.5748 6689	0.5243 3801	0.4363 1377	0.3213 3093
112	0.6276 9734	0.5720 0666	0.5212 9711	0.4330 6577	0.3280 9693
113	0.6250 9279	0.5691 6085	0.5182 7385	0.4298 4198	0.3248 5141
114	0.6224 9904	0.5663 2021	0.5152 6812	0.4266 4124	0.3216 3506
115	0.6199 1606	0.5635 1165	0.5122 7982	0.4234 6615	0.3184 5056
116	0.6173 4379	0.5607 0811	0.5093 0885	0.4203 1379	0.3152 9758
117	0.6147 8220	0.5579 1852	0.5063 5512	0.4171 8491	0.3121 7582
118	0.6122 3123	0.5551 4230	0.5034 1851	0.4140 7931	0.3090 3497
119	0.6096 9036	0.5523 3090	0.5004 9893	0.4109 6383	0.3060 2473
120	0.6071 6102	0.5496 3273	0.4975 9629	0.4079 3730	0.3029 9478
121	0.6046 4168	0.5468 9824	0.4947 1047	0.4049 0055	0.2999 9483
122	0.6021 3279	0.5441 7736	0.4918 4140	0.4018 3640	0.2970 2459
123	0.5996 3431	0.5414 7001	0.4889 3896	0.3988 9469	0.2940 3375
124	0.5971 4620	0.5387 7612	0.4861 5307	0.3959 2525	0.2911 7203
125	0.5946 6842	0.5360 9565	0.4833 3363	0.3929 7746	0.2882 3914
126	0.5922 0091	0.5334 2850	0.4805 3053	0.3900 5252	0.2854 3479
127	0.5897 4365	0.5307 7463	0.4777 4369	0.3871 4891	0.2826 0870
128	0.5872 9658	0.5281 3396	0.4749 7302	0.3842 6691	0.2798 1060
129	0.5848 5966	0.5255 0643	0.4722 1841	0.3814 0636	0.2770 4019
130	0.5824 3236	0.5228 9197	0.4694 7978	0.3785 6711	0.2742 9722
131	0.5800 1613	0.5202 9052	0.4667 5703	0.3757 4899	0.2715 3141
132	0.5776 0942	0.5177 0201	0.4640 5007	0.3729 5185	0.2688 9248
133	0.5752 1270	0.5151 2637	0.4613 5381	0.3701 7553	0.2662 2018
134	0.5728 2593	0.5125 6356	0.4586 3316	0.3674 1938	0.2635 9424
135	0.5704 4906	0.5100 1349	0.4560 2303	0.3646 8475	0.2609 3439
136	0.5680 8205	0.5074 7611	0.4533 7832	0.3619 6997	0.2584 0939
137	0.5657 2486	0.5049 5135	0.4507 4895	0.3592 7541	0.2558 4197
138	0.5633 7745	0.5024 3916	0.4481 3433	0.3566 0090	0.2533 0388
139	0.5610 3979	0.4999 3946	0.4455 3587	0.3539 4630	0.2508 0037
140	0.5587 1132	0.4974 5220	0.4429 5198	0.3513 1147	0.2483 1770
141	0.5563 9351	0.4949 7731	0.4403 3308	0.3486 9625	0.2458 3911
142	0.5540 3483	0.4925 1474	0.4378 2908	0.3461 0049	0.2434 2436
143	0.5517 3572	0.4900 6442	0.4352 3989	0.3435 2406	0.2410 1471
144	0.5494 9615	0.4876 2628	0.4327 6542	0.3409 6681	0.2386 2843
145	0.5472 1609	0.4852 0028	0.4302 5560	0.3384 2860	0.2362 6577
146	0.5449 4548	0.4827 3635	0.4277 6033	0.3359 0923	0.2339 2650
147	0.5426 3429	0.4803 3443	0.4252 7933	0.3334 0371	0.2316 1040
148	0.5404 3249	0.4779 9446	0.4228 1312	0.3309 2676	0.2293 1723
149	0.5381 9003	0.4756 1637	0.4203 6102	0.3284 6329	0.2270 4676
150	0.5359 5688	0.4732 5012	0.4179 2313	0.3260 1815	0.2247 9877

表五 複利現值表

$$v^n = (1 + i)^{-n}$$

n	1½%	1½%	1½%	1½%	2%
1	0.9838 7515	0.9876 5432	0.9852 2167	0.9828 0098	0.9803 9216
2	0.9778 7407	0.9754 6106	0.9706 6175	0.9658 9777	0.9611 6878
3	0.9669 9537	0.9634 1833	0.9563 1699	0.9492 8528	0.9423 2233
4	0.9562 3770	0.9515 2428	0.9421 8423	0.9329 5851	0.9238 4543
5	0.9455 9970	0.9397 7706	0.9282 6033	0.9169 1254	0.9057 3081
6	0.9350 8005	0.9281 7488	0.9145 4219	0.9011 4254	0.8879 7138
7	0.9246 7743	0.9167 1593	0.9010 2679	0.8856 4378	0.8705 6018
8	0.9143 9054	0.9053 9845	0.8877 1112	0.8704 1157	0.8534 9037
9	0.9042 1808	0.8942 2069	0.8745 9224	0.8554 4135	0.8367 5527
10	0.8941 5831	0.8831 8093	0.8616 6723	0.8407 2860	0.8203 4830
11	0.8842 1142	0.8722 7746	0.8489 3323	0.8262 6889	0.8042 6304
12	0.8743 7470	0.8615 0860	0.8363 8742	0.8120 5783	0.7884 9318
13	0.8646 4742	0.8508 7269	0.8240 2702	0.7980 9128	0.7730 3253
14	0.8550 2835	0.8403 6309	0.8118 4923	0.7843 6490	0.7578 7502
15	0.8455 1629	0.8299 9318	0.7998 5150	0.7708 7459	0.7430 1473
16	0.8361 1005	0.8197 4635	0.7880 3104	0.7576 1631	0.7284 4581
17	0.8268 0846	0.8096 2602	0.7763 8526	0.7445 8605	0.7141 6256
18	0.8176 1034	0.7996 3064	0.7649 1159	0.7317 7990	0.7001 5937
19	0.8085 1455	0.7897 5866	0.7536 0747	0.7191 9401	0.6864 3076
20	0.7995 1995	0.7800 0855	0.7424 7042	0.7068 2458	0.6729 7133
21	0.7906 2542	0.7703 7381	0.7314 9795	0.6946 6739	0.6597 7532
22	0.7818 2933	0.7608 6796	0.7206 8763	0.6827 2023	0.6468 3904
23	0.7731 3210	0.7514 7453	0.7100 3708	0.6709 7817	0.6341 5592
24	0.7645 3112	0.7421 9707	0.6995 4392	0.6594 3800	0.6217 2149
25	0.7560 2533	0.7330 3414	0.6882 0533	0.6480 9632	0.6095 3037
26	0.7476 1516	0.7239 8434	0.6770 2052	0.6369 4970	0.5975 7928
27	0.7392 9806	0.7150 4625	0.6669 8574	0.6259 9479	0.5853 6204
28	0.7310 7348	0.7062 1853	0.6569 9925	0.6152 2829	0.5743 7455
29	0.7229 4040	0.6974 9978	0.6469 5837	0.6046 4697	0.5631 1231
30	0.7148 9730	0.6888 8367	0.6367 6243	0.5942 4764	0.5520 7039
31	0.7069 4467	0.6803 8337	0.6303 0731	0.5840 2716	0.5412 4597
32	0.6990 8002	0.6719 8467	0.6209 9292	0.5739 8247	0.5306 3330
33	0.6913 0237	0.6636 8797	0.6118 1568	0.5641 1053	0.5202 2873
34	0.6836 1223	0.6554 9429	0.6027 7407	0.5544 0839	0.5100 2817
35	0.6760 0715	0.6474 0177	0.5933 6608	0.5448 7311	0.5000 2761
36	0.6684 8667	0.6394 0916	0.5850 8974	0.5355 0133	0.4902 2315
37	0.6610 4936	0.6315 1522	0.5764 4309	0.5262 9172	0.4806 1033
38	0.6536 9578	0.6237 1873	0.5679 2423	0.5172 4002	0.4711 8719
39	0.6464 2352	0.6160 1850	0.5595 3126	0.5083 4400	0.4619 4822
40	0.6392 3216	0.6084 1334	0.5512 6232	0.4996 0098	0.4523 9042
41	0.6321 2080	0.6009 0206	0.5431 1559	0.4910 0834	0.4440 1021
42	0.6250 8855	0.5934 3332	0.5350 3925	0.4825 6348	0.4353 0413
43	0.6181 3454	0.5861 5656	0.5271 8153	0.4742 6386	0.4267 6875
44	0.6112 5739	0.5789 2006	0.5193 9067	0.4661 0699	0.4184 0074
45	0.6044 5774	0.5717 7290	0.5117 1494	0.4580 9040	0.4101 9630
46	0.5977 3324	0.5647 1397	0.5041 5265	0.4502 1170	0.4021 5373
47	0.5910 8355	0.5577 4219	0.4967 0212	0.4424 6850	0.3942 6836
48	0.5845 0731	0.5508 5649	0.4893 6170	0.4348 5843	0.3865 3761
49	0.5780 0528	0.5440 5579	0.4821 2975	0.4273 7934	0.3789 5844
50	0.5715 7506	0.5373 3905	0.4750 0463	0.4200 2883	0.3715 2733

表五 複利現值表

$$v^n = (1 + i)^{-n}$$

n	1½%	1½%	1½%	1½%	2%
51	0.5652 1637	0.5307 0524	0.4679 8491	0.4128 0475	0.3642 4302
52	0.5589 2843	0.5241 5332	0.4610 6887	0.4057 0492	0.3571 0100
53	0.5527 1044	0.5176 8229	0.4542 5505	0.3987 2719	0.3500 9902
54	0.5465 6162	0.5112 9115	0.4475 4192	0.3918 6947	0.3432 3433
55	0.5404 8120	0.5049 7892	0.4409 2800	0.3851 2970	0.3365 0425
56	0.5344 6843	0.4987 4461	0.4344 1182	0.3785 0585	0.3299 0613
57	0.5285 2256	0.4925 8727	0.4279 0194	0.3719 9592	0.3234 3738
58	0.5226 4232	0.4865 0594	0.4216 6694	0.3655 9796	0.3170 9547
59	0.5168 2850	0.4804 9970	0.4154 3541	0.3593 1003	0.3108 7791
60	0.5110 7837	0.4745 6760	0.4092 9597	0.3531 3025	0.3047 8227
61	0.5053 9319	0.4687 0874	0.4032 4726	0.3470 5676	0.2988 0614
62	0.4997 7077	0.4629 2222	0.3972 8794	0.3410 8772	0.2929 4730
63	0.4942 1090	0.4572 0713	0.3914 1689	0.3352 2135	0.2872 0314
64	0.4887 1288	0.4515 6259	0.3856 3221	0.3294 5587	0.2815 7170
65	0.4832 7602	0.4459 8775	0.3799 3321	0.3237 8956	0.2760 5069
66	0.4778 9965	0.4404 8173	0.3743 1843	0.3182 2069	0.2706 3793
67	0.4725 8309	0.4350 4368	0.3687 8663	0.3127 4761	0.2653 3130
68	0.4673 2563	0.4296 7277	0.3633 3658	0.3073 6866	0.2601 2873
69	0.4621 2675	0.4243 6817	0.3579 6708	0.3020 8222	0.2550 2817
70	0.4569 8566	0.4191 2905	0.3526 7692	0.2968 8670	0.2500 2761
71	0.4519 0177	0.4139 5462	0.3474 6495	0.2917 8054	0.2451 2511
72	0.4468 7443	0.4088 4407	0.3423 3000	0.2867 6221	0.2403 1874
73	0.4419 0302	0.4037 9661	0.3372 7093	0.2818 3018	0.2356 0661
74	0.4369 8092	0.3988 1147	0.3322 8663	0.2769 8298	0.2309 8687
75	0.4321 2551	0.3938 8737	0.3273 7599	0.2722 1914	0.2264 5771
76	0.4273 1818	0.3890 2506	0.3225 3793	0.2675 3724	0.2220 1737
77	0.4225 6433	0.3842 2223	0.3177 7136	0.2629 3586	0.2176 6408
78	0.4178 6337	0.3794 7879	0.3130 7523	0.2584 1362	0.2133 9616
79	0.4132 1470	0.3747 9337	0.3084 4850	0.2539 6916	0.2092 1192
80	0.4086 1775	0.3701 6679	0.3038 9015	0.2496 0114	0.2051 0973
81	0.4040 7194	0.3655 9633	0.2993 9916	0.2453 0825	0.2010 3797
82	0.3995 7670	0.3610 8329	0.2949 7454	0.2410 8919	0.1971 4507
83	0.3951 3148	0.3566 2547	0.2906 1531	0.2369 4269	0.1932 7948
84	0.3907 3570	0.3522 2268	0.2863 2050	0.2328 6751	0.1894 8968
85	0.3863 8882	0.3478 7426	0.2820 8917	0.2288 6242	0.1857 7420
86	0.3820 9031	0.3435 7951	0.2779 2036	0.2249 2621	0.1821 3157
87	0.3778 5961	0.3393 3779	0.2738 1316	0.2210 5770	0.1785 6036
88	0.3736 3621	0.3351 4843	0.2697 6666	0.2172 5572	0.1750 5918
89	0.3694 7956	0.3310 1080	0.2657 7997	0.2135 1914	0.1716 2665
90	0.3653 6916	0.3269 2425	0.2618 5218	0.2098 4622	0.1682 6142
91	0.3613 0448	0.3228 3814	0.2579 8245	0.2062 3766	0.1649 6217
92	0.3572 8503	0.3189 0187	0.2541 6990	0.2026 9057	0.1617 2762
93	0.3533 1029	0.3149 6481	0.2504 1369	0.1992 0450	0.1585 5649
94	0.3493 7976	0.3110 7636	0.2467 1300	0.1957 7837	0.1554 4754
95	0.3454 9297	0.3072 3591	0.2430 6699	0.1924 1118	0.1523 9955
96	0.3416 4941	0.3034 4287	0.2394 7437	0.1891 0190	0.1494 1132
97	0.3378 4861	0.2996 9666	0.2359 3583	0.1858 4953	0.1464 8169
98	0.3340 9010	0.2959 9670	0.2324 4909	0.1826 5310	0.1436 0950
99	0.3303 7340	0.2923 4242	0.2290 1389	0.1795 1165	0.1407 9363
100	0.3266 9805	0.2887 3326	0.2256 2944	0.1764 2422	0.1380 3297

表五 複利現值表

$$v^n = (1 + i)^{-n}$$

n	2½%	2½%	2½%	3%	3½%
1	0.9779 9511	0.9756 0976	0.9732 3601	0.9708 7379	0.9661 8357
2	0.9564 7444	0.9518 1440	0.9471 8833	0.9425 9591	0.9335 1070
3	0.9354 2732	0.9285 9941	0.9218 3779	0.9151 4166	0.9019 4271
4	0.9148 4335	0.9059 5064	0.8971 6573	0.8884 8705	0.8714 4223
5	0.8947 1232	0.8838 5429	0.8731 5400	0.8626 0878	0.8419 7317
6	0.8750 2427	0.8622 9687	0.8497 8491	0.8374 8426	0.8135 0064
7	0.8557 6946	0.8412 6524	0.8270 4128	0.8130 9151	0.7859 9096
8	0.8369 3895	0.8207 4657	0.8049 0635	0.7894 0923	0.7504 1156
9	0.8185 2161	0.8007 2836	0.7833 6385	0.7664 1673	0.7337 3097
10	0.8005 1013	0.7811 9840	0.7623 9791	0.7440 9391	0.7089 1831
11	0.7828 9499	0.7621 4478	0.7419 9810	0.7224 2128	0.6849 4571
12	0.7656 6748	0.7435 5589	0.7221 3440	0.7013 7988	0.6617 8330
13	0.7488 1905	0.7254 2038	0.7028 0720	0.6809 5134	0.6394 0415
14	0.7323 4137	0.7077 2720	0.6839 9728	0.6611 1781	0.6177 8179
15	0.7162 2628	0.6904 6556	0.6656 9078	0.6418 6195	0.5998 9032
16	0.7004 6580	0.6736 2493	0.6478 7424	0.6231 6694	0.5767 0591
17	0.6850 5212	0.6571 9506	0.6305 3454	0.6050 1645	0.5572 0378
18	0.6699 7763	0.6411 6591	0.6136 5892	0.5873 9461	0.5393 6114
19	0.6552 3424	0.6255 2772	0.5972 3496	0.5702 8003	0.5201 5569
20	0.6408 1647	0.6102 7094	0.5812 5037	0.5536 7575	0.5025 6588
21	0.6267 1538	0.5953 8629	0.5656 9398	0.5375 4928	0.4855 7090
22	0.6129 2457	0.5808 6467	0.5505 5375	0.5218 9250	0.4691 5063
23	0.5994 3724	0.5666 9724	0.5358 1874	0.5066 9175	0.4532 3563
24	0.5862 4668	0.5528 7535	0.5214 7809	0.4919 3374	0.4379 5713
25	0.5733 4639	0.5393 9059	0.5075 2126	0.4776 0587	0.4231 4699
26	0.5607 2997	0.5262 3472	0.4939 3796	0.4636 9473	0.4088 3767
27	0.5483 9117	0.5133 9973	0.4807 1821	0.4501 8003	0.3950 1224
28	0.5363 2388	0.5008 7778	0.4678 5227	0.4370 7675	0.3816 5434
29	0.5245 2213	0.4886 6125	0.4553 3068	0.4243 4636	0.3687 4815
30	0.5129 8003	0.4767 4269	0.4431 4421	0.4119 8676	0.3562 7841
31	0.5016 9201	0.4651 1431	0.4312 8301	0.3999 3715	0.3442 3035
32	0.4906 5233	0.4537 7055	0.4197 4103	0.3883 3703	0.3325 8971
33	0.4798 5558	0.4427 0298	0.4085 0708	0.3770 2625	0.3213 4271
34	0.4692 9641	0.4319 0534	0.3975 7330	0.3660 4490	0.3104 7605
35	0.4589 6900	0.4213 7107	0.3869 3314	0.3553 3340	0.2999 7686
36	0.4488 7002	0.4110 9372	0.3765 7727	0.3450 3243	0.2898 3272
37	0.4389 9268	0.4010 6705	0.3664 9856	0.3349 8294	0.2800 3161
38	0.4293 3270	0.3912 8492	0.3566 8959	0.3252 2615	0.2705 6194
39	0.4198 8528	0.3817 4139	0.3471 4316	0.3157 5355	0.2614 1250
40	0.4106 4575	0.3724 3062	0.3378 5222	0.3065 5684	0.2525 7247
41	0.4016 0954	0.3633 4695	0.3288 0995	0.2976 2800	0.2440 3137
42	0.3927 7216	0.3544 8483	0.3200 0968	0.2889 5922	0.2357 7910
43	0.3841 2925	0.3458 3836	0.3114 4495	0.2805 4294	0.2278 0590
44	0.3756 7653	0.3374 0376	0.3031 0944	0.2723 7178	0.2201 0231
45	0.3674 0931	0.3291 7440	0.2949 9702	0.2644 3832	0.2126 5924
46	0.3593 2500	0.3211 4576	0.2871 0172	0.2567 3653	0.2054 6787
47	0.3514 1809	0.3133 1294	0.2794 1773	0.2492 5876	0.1985 1963
48	0.3436 8518	0.3056 7116	0.2719 3940	0.2419 9880	0.1918 0645
49	0.3361 2242	0.2982 1576	0.2646 6122	0.2349 5029	0.1853 2024
50	0.3287 2603	0.2909 4221	0.2575 7783	0.2281 0708	0.1790 5337

表五 複利現值表

$$v^n = (1 + i)^{-n}$$

n	2½%	2½%	2½%	3%	3½%
51	0.3214 9250	0.2838 4606	0.2506 8402	0.2214 6318	0.1729 9843
52	0.3144 1810	0.2769 2298	0.2439 7471	0.2150 1280	0.1671 4824
53	0.3074 9936	0.2701 6876	0.2374 4497	0.2087 5029	0.1614 9589
54	0.3007 3287	0.2635 7928	0.2310 9000	0.2026 7019	0.1560 3467
55	0.2941 1528	0.2571 5052	0.2249 0511	0.1967 6717	0.1507 5814
56	0.2876 4930	0.2508 7855	0.2188 8575	0.1910 3609	0.1456 6094
57	0.2813 1374	0.2447 5956	0.2130 2749	0.1854 7193	0.1407 3433
58	0.2751 2347	0.2387 8982	0.2073 2603	0.1800 6984	0.1359 7520
59	0.2690 6940	0.2329 6568	0.2017 7716	0.1748 2508	0.1313 7701
60	0.2631 4856	0.2272 8359	0.1963 7679	0.1697 3309	0.1269 3431
61	0.2573 5801	0.2217 4009	0.1911 2097	0.1647 8941	0.1226 4184
62	0.2516 9487	0.2163 3179	0.1860 0581	0.1599 8972	0.1184 9453
63	0.2461 5695	0.2110 5541	0.1810 2755	0.1553 2982	0.1144 8747
64	0.2407 3971	0.2059 0771	0.1761 8253	0.1508 0565	0.1106 1591
65	0.2354 4226	0.2008 8557	0.1714 6718	0.1464 1325	0.1068 7528
66	0.2302 6138	0.1959 8593	0.1668 7804	0.1421 4879	0.1032 6114
67	0.2251 9450	0.1912 0578	0.1624 1172	0.1380 0853	0.0997 6922
68	0.2202 3912	0.1865 4223	0.1580 6493	0.1339 8887	0.0963 9538
69	0.2153 9278	0.1819 9241	0.1538 3448	0.1300 8623	0.0931 3563
70	0.2106 5309	0.1775 5358	0.1497 1726	0.1262 9736	0.0899 8612
71	0.2060 1769	0.1732 2300	0.1457 1023	0.1226 1880	0.0869 4311
72	0.2014 8429	0.1689 9805	0.1418 1044	0.1190 4737	0.0840 9300
73	0.1970 5065	0.1648 7615	0.1380 1503	0.1155 7998	0.0811 6232
74	0.1927 1458	0.1608 5478	0.1343 2119	0.1122 1357	0.0784 1770
75	0.1884 7391	0.1569 3149	0.1307 2622	0.1089 4521	0.0757 6590
76	0.1843 2657	0.1531 0380	0.1272 2747	0.1057 7205	0.0732 0376
77	0.1802 7048	0.1493 6965	0.1238 2235	0.1026 9131	0.0707 2827
78	0.1763 0365	0.1457 2649	0.1205 0837	0.0997 0030	0.0683 3650
79	0.1724 2411	0.1421 7218	0.1172 8309	0.0967 9641	0.0660 2560
80	0.1686 2993	0.1387 0457	0.1141 4412	0.0939 7710	0.0637 9285
81	0.1649 1925	0.1353 2153	0.1110 8917	0.0912 3990	0.0616 3561
82	0.1612 9022	0.1320 2101	0.1081 1598	0.0885 8243	0.0595 5131
83	0.1577 4105	0.1288 0098	0.1052 2237	0.0860 0236	0.0575 3750
84	0.1542 6997	0.1256 5949	0.1024 0620	0.0834 9743	0.0555 9178
85	0.1508 7528	0.1225 9463	0.0996 6540	0.0810 6547	0.0537 1187
86	0.1475 5528	0.1196 0452	0.0969 9795	0.0787 0424	0.0518 9553
87	0.1443 0835	0.1166 8733	0.0944 0190	0.0764 1198	0.0501 4060
88	0.1411 3286	0.1138 4130	0.0918 7533	0.0741 8639	0.0484 4503
89	0.1380 2724	0.1110 6468	0.0894 1638	0.0720 2562	0.0468 0679
90	0.1349 8997	0.1083 5579	0.0870 2224	0.0699 2779	0.0452 2395
91	0.1320 1953	0.1057 1296	0.0846 9415	0.0678 9105	0.0436 9464
92	0.1291 1445	0.1031 3460	0.0824 2740	0.0659 1364	0.0422 1704
93	0.1262 7331	0.1006 1912	0.0802 2131	0.0639 9383	0.0407 8941
94	0.1234 9468	0.0981 6500	0.0780 7427	0.0621 2993	0.0394 1006
95	0.1207 7719	0.0957 7073	0.0759 8469	0.0603 2032	0.0380 7735
96	0.1181 1950	0.0934 2485	0.0739 5104	0.0585 6342	0.0367 8971
97	0.1155 2029	0.0911 5596	0.0719 7181	0.0568 3769	0.0355 4562
98	0.1129 7828	0.0889 3264	0.0700 4556	0.0552 0164	0.0343 4359
99	0.1104 9221	0.0867 6355	0.0681 7036	0.0535 9383	0.0331 8221
100	0.1080 6084	0.0846 4737	0.0663 4634	0.0520 3284	0.0320 6611

表五 複利現值表

$$v^n = (1+i)^{-n}$$

n	4%	4½%	5%	5½%	6%
1	0.9615 3846	0.9589 3780	0.9523 8095	0.9478 6730	0.9433 9623
2	0.9245 5621	0.9157 2995	0.9070 2948	0.8984 5242	0.8899 9644
3	0.8889 9636	0.8762 9660	0.8638 3760	0.8516 1366	0.8396 1928
4	0.8548 0419	0.8385 6134	0.8227 0247	0.8072 1674	0.7920 9366
5	0.8219 2711	0.8024 5105	0.7835 2617	0.7651 3435	0.7472 5817
6	0.7903 1453	0.7678 9574	0.7462 1540	0.7252 4533	0.7049 6054
7	0.7599 1781	0.7348 2846	0.7106 8133	0.6874 3631	0.6650 5711
8	0.7306 9021	0.7031 8513	0.6768 3936	0.6515 9837	0.6274 1237
9	0.7025 8674	0.6729 0443	0.6446 0892	0.6176 2926	0.5918 9846
10	0.6755 6417	0.6439 2768	0.6139 1325	0.5854 3038	0.5583 9478
11	0.6495 8093	0.6161 9874	0.5846 7929	0.5549 1050	0.5267 8753
12	0.6245 9705	0.5896 6386	0.5568 3742	0.5259 8162	0.4969 6936
13	0.6005 7409	0.5642 7164	0.5303 2135	0.4985 6088	0.4688 3902
14	0.5774 7508	0.5399 7236	0.5050 6795	0.4725 6937	0.4423 0096
15	0.5552 6450	0.5167 2044	0.4810 1710	0.4479 3305	0.4172 6506
16	0.5339 0818	0.4944 6932	0.4581 1152	0.4245 8109	0.3996 4628
17	0.5133 7325	0.4731 7639	0.4362 9669	0.4024 4653	0.3773 6442
18	0.4936 2812	0.4533 0037	0.4155 2065	0.3814 6590	0.3503 4379
19	0.4746 4242	0.4333 0179	0.3957 3396	0.3615 7906	0.3305 1301
20	0.4563 8695	0.4146 4236	0.3768 8948	0.3427 2896	0.3118 0473
21	0.4388 3360	0.3977 8743	0.3589 4236	0.3248 6158	0.2941 5540
22	0.4219 5539	0.3797 0039	0.3418 4937	0.3079 2567	0.2775 0510
23	0.4057 2633	0.3633 5013	0.3255 7131	0.2918 7267	0.2617 9726
24	0.3901 2147	0.3477 0347	0.3100 6791	0.2766 5656	0.2469 7855
25	0.3751 1630	0.3327 3060	0.2953 0277	0.2622 3370	0.2329 9863
26	0.3606 8923	0.3184 0243	0.2812 4073	0.2485 6275	0.2198 1003
27	0.3468 1637	0.3046 9137	0.2678 4332	0.2356 0450	0.2073 6795
28	0.3334 7747	0.2915 7069	0.2550 9364	0.2233 2131	0.1956 3014
29	0.3206 5141	0.2790 1502	0.2429 4632	0.2116 7944	0.1845 5674
30	0.3083 1867	0.2670 0002	0.2313 7745	0.2006 4402	0.1741 1013
31	0.2964 6026	0.2555 0241	0.2203 5947	0.1901 8390	0.1642 5434
32	0.2850 5794	0.2444 9991	0.2098 6617	0.1802 6910	0.1549 5740
33	0.2740 9417	0.2339 7121	0.1998 7254	0.1708 7119	0.1461 8622
34	0.2635 5209	0.2238 9589	0.1903 5430	0.1619 6321	0.1379 1153
35	0.2534 1547	0.2142 5444	0.1812 9029	0.1535 1963	0.1301 0522
36	0.2436 6872	0.2050 2817	0.1726 5741	0.1455 1624	0.1227 4077
37	0.2342 9685	0.1961 9921	0.1644 3563	0.1379 3008	0.1157 9318
38	0.2252 8543	0.1877 5044	0.1566 0536	0.1307 3941	0.1092 3835
39	0.2166 2061	0.1796 6549	0.1491 4797	0.1239 2362	0.1030 5552
40	0.2082 8904	0.1719 2870	0.1420 4568	0.1174 6314	0.0972 2219
41	0.2002 7793	0.1645 2507	0.1352 8160	0.1113 3947	0.0917 1905
42	0.1925 7493	0.1574 4026	0.1288 3962	0.1055 3504	0.0865 2740
43	0.1851 6820	0.1506 6054	0.1227 0440	0.1000 3322	0.0816 2962
44	0.1780 4635	0.1441 7276	0.1168 6133	0.0948 1822	0.0770 9038
45	0.1711 9841	0.1379 6437	0.1112 9651	0.0898 7509	0.0726 5007
46	0.1646 1336	0.1320 2332	0.1059 9668	0.0851 8965	0.0685 3731
47	0.1582 8256	0.1263 3810	0.1009 4921	0.0807 4849	0.0646 5831
48	0.1521 9476	0.1208 9771	0.0961 4211	0.0765 3885	0.0609 9840
49	0.1463 4112	0.1156 9158	0.0915 6391	0.0725 4867	0.0575 4566
50	0.1407 1262	0.1107 0965	0.0872 0373	0.0687 6652	0.0542 8836

表五 複利現值表

$$v^n = (1 + i)^{-n}$$

n	4%	4½%	5%	5½%	6%
51	0.1353 0059	0.1059 4225	0.0830 5117	0.0651 8153	0.0512 1544
52	0.1300 9672	0.1013 8014	0.0790 9635	0.0617 8344	0.0483 1645
53	0.1250 9300	0.0970 1449	0.0753 2936	0.0585 6250	0.0455 8156
54	0.1202 8173	0.0928 3683	0.0717 4272	0.0555 0948	0.0430 0147
55	0.1156 5551	0.0888 3907	0.0683 2640	0.0526 1562	0.0405 6742
56	0.1112 0722	0.0850 1847	0.0650 7276	0.0493 7263	0.0382 7115
57	0.1069 3002	0.0813 5260	0.0619 7406	0.0472 7263	0.0361 0486
58	0.1028 1733	0.0778 4938	0.0590 2291	0.0448 0818	0.0340 6119
59	0.0988 6282	0.0744 9701	0.0562 1230	0.0424 7221	0.0321 3320
60	0.0950 6040	0.0712 3901	0.0535 3552	0.0402 5802	0.0303 1434
61	0.0914 0423	0.0682 1915	0.0509 3621	0.0381 5926	0.0285 9843
62	0.0878 3863	0.0652 3148	0.0485 5830	0.0361 6992	0.0269 7965
63	0.0845 0835	0.0624 7032	0.0462 4600	0.0342 8428	0.0254 5250
64	0.0812 5803	0.0597 3021	0.0440 4381	0.0324 9665	0.0240 1179
65	0.0781 3272	0.0572 0594	0.0419 4648	0.0308 0279	0.0226 5264
66	0.0751 2762	0.0547 4253	0.0399 4903	0.0291 9696	0.0213 7041
67	0.0722 3309	0.0523 8519	0.0380 4670	0.0276 7485	0.0201 6077
68	0.0694 5970	0.0501 2937	0.0362 3495	0.0262 3203	0.0190 1959
69	0.0667 8818	0.0479 7069	0.0345 0948	0.0248 6453	0.0179 4301
70	0.0642 1940	0.0459 0497	0.0328 6617	0.0235 6823	0.0169 2737
71	0.0617 4942	0.0439 2820	0.0313 0111	0.0223 3960	0.0159 6921
72	0.0593 7445	0.0420 3655	0.0298 1058	0.0211 7493	0.0150 6530
73	0.0570 9081	0.0402 2637	0.0283 9103	0.0200 7107	0.0142 1254
74	0.0548 9501	0.0384 9413	0.0270 3908	0.0190 2471	0.0134 0806
75	0.0527 3367	0.0368 3649	0.0257 6150	0.0180 3290	0.0126 4911
76	0.0507 5353	0.0352 5023	0.0245 2524	0.0170 9279	0.0119 3313
77	0.0488 0147	0.0337 3223	0.0233 5737	0.0162 0170	0.0112 5767
78	0.0469 2449	0.0322 7969	0.0222 4512	0.0153 5706	0.0106 2044
79	0.0451 1970	0.0308 8965	0.0211 8582	0.0145 5646	0.0100 1923
80	0.0433 3433	0.0295 5943	0.0201 7693	0.0137 9759	0.0094 5215
81	0.0417 1570	0.0282 8653	0.0192 1617	0.0130 7823	0.0089 1713
82	0.0401 1125	0.0270 6850	0.0183 0111	0.0123 9648	0.0084 1233
83	0.0385 6851	0.0259 0237	0.0174 2963	0.0117 5022	0.0079 3621
84	0.0370 3510	0.0247 3744	0.0165 9965	0.0111 3765	0.0074 3699
85	0.0356 5875	0.0237 2003	0.0158 0919	0.0105 3701	0.0070 6320
86	0.0342 8726	0.0226 9360	0.0150 5637	0.0100 0664	0.0066 6340
87	0.0329 6852	0.0217 2115	0.0143 3940	0.0094 8497	0.0062 3622
88	0.0317 0050	0.0207 3579	0.0136 5657	0.0089 9049	0.0059 3040
89	0.0304 8125	0.0198 9070	0.0130 0626	0.0085 2180	0.0055 9472
90	0.0293 0890	0.0190 3417	0.0123 3691	0.0080 7753	0.0052 7803
91	0.0281 8163	0.0182 1451	0.0117 9706	0.0076 5643	0.0049 7923
92	0.0270 9772	0.0174 3016	0.0112 3530	0.0072 5723	0.0046 3743
93	0.0260 5550	0.0166 7958	0.0107 0023	0.0068 7894	0.0044 3154
94	0.0250 5337	0.0159 6132	0.0101 9074	0.0065 2032	0.0041 8070
95	0.0240 3973	0.0152 7399	0.0097 0547	0.0061 3040	0.0039 4405
96	0.0231 6325	0.0146 1626	0.0092 4331	0.0058 5820	0.0037 2081
97	0.0222 7235	0.0139 3685	0.0088 0315	0.0055 5279	0.0035 1019
98	0.0214 1572	0.0133 3454	0.0083 8395	0.0052 6331	0.0033 1150
99	0.0205 9204	0.0128 0817	0.0079 8471	0.0049 3892	0.0031 2406
100	0.0198 0004	0.0122 5663	0.0076 0449	0.0047 2833	0.0029 4723

表五 複利現值表

$$v^n = (1+i)^{-n}$$

n	6½%	7%	7½%	8%	8½%
1	0.9889 6714	0.9845 7944	0.9802 3256	0.9259 2593	0.9216 5899
2	0.8816 5928	0.8734 3878	0.8653 3261	0.8573 3882	0.8494 5529
3	0.8278 4909	0.8162 9788	0.8049 6057	0.7938 3224	0.7829 0810
4	0.7773 2309	0.7628 9521	0.7488 0053	0.7350 2985	0.7215 7428
5	0.7298 8084	0.7129 8618	0.6965 5863	0.6805 3320	0.6650 4542
6	0.6853 3412	0.6663 4222	0.6479 6152	0.6301 6963	0.6129 4509
7	0.6435 0621	0.6227 4974	0.6027 5490	0.5834 9040	0.5649 2635
8	0.6042 3119	0.5820 0910	0.5607 0223	0.5402 6888	0.5206 6945
9	0.5673 5323	0.5439 3374	0.5215 8347	0.5002 4897	0.4798 7968
10	0.5327 2604	0.5083 4929	0.4851 9393	0.4631 9849	0.4422 8542
11	0.5002 1224	0.4750 9280	0.4513 4319	0.4288 8286	0.4076 3633
12	0.4696 8285	0.4440 1196	0.4198 5413	0.3971 1376	0.3757 0168
13	0.4410 1676	0.4149 6445	0.3905 6198	0.3676 9792	0.3462 6883
14	0.4141 0025	0.3878 1724	0.3633 1347	0.3404 6104	0.3191 4178
15	0.3888 2652	0.3624 4602	0.3379 6602	0.3152 4170	0.2941 3989
16	0.3650 9533	0.3387 3460	0.3143 8699	0.2918 9047	0.2710 9667
17	0.3428 1251	0.3165 7439	0.2924 5302	0.2702 6895	0.2498 5899
18	0.3218 8069	0.2958 6392	0.2720 4932	0.2502 4903	0.2302 3450
19	0.3022 4384	0.2765 0832	0.2530 6913	0.2317 1206	0.2122 4378
20	0.2837 9703	0.2584 1900	0.2354 1315	0.2145 4821	0.1956 1639
21	0.2664 7608	0.2415 1309	0.2189 8897	0.1986 5575	0.1802 9160
22	0.2502 1228	0.2257 1317	0.2037 1067	0.1839 4051	0.1661 6738
23	0.2349 4111	0.2109 4688	0.1894 9830	0.1703 1528	0.1531 4965
24	0.2206 0198	0.1971 4632	0.1762 7749	0.1576 9934	0.1411 5176
25	0.2071 3801	0.1842 4918	0.1639 7906	0.1460 1790	0.1300 9378
26	0.1944 9579	0.1721 9549	0.1525 3866	0.1352 0176	0.1199 0210
27	0.1826 2515	0.1600 3037	0.1418 9643	0.1251 8682	0.1105 0885
28	0.1714 7902	0.1504 0231	0.1319 9668	0.1159 1372	0.1018 5143
29	0.1610 1316	0.1405 6282	0.1227 8761	0.1073 2752	0.0938 7233
30	0.1511 8607	0.1313 6712	0.1142 2103	0.0993 7733	0.0865 1828
31	0.1419 5875	0.1227 7301	0.1062 5212	0.0920 1605	0.0797 4035
32	0.1332 9460	0.1147 4115	0.0988 3918	0.0852 0005	0.0734 9341
33	0.1251 5925	0.1072 3470	0.0919 4343	0.0789 3893	0.0677 3586
34	0.1175 2042	0.1002 1934	0.0855 2877	0.0730 4531	0.0624 2936
35	0.1103 4781	0.0936 6294	0.0795 6164	0.0676 3454	0.0575 3858
36	0.1036 1297	0.0875 3546	0.0740 1033	0.0626 2458	0.0530 3095
37	0.0972 8917	0.0818 0384	0.0688 4729	0.0579 8372	0.0488 7645
38	0.0913 5134	0.0764 5688	0.0640 4399	0.0536 9048	0.0450 4742
39	0.0857 7590	0.0714 5501	0.0595 7580	0.0497 1341	0.0415 1836
40	0.0805 4075	0.0667 8038	0.0554 1935	0.0460 3093	0.0382 6577
41	0.0756 2512	0.0624 1157	0.0515 5288	0.0426 2123	0.0352 6799
42	0.0710 0950	0.0583 2857	0.0479 5617	0.0394 6411	0.0325 0506
43	0.0666 7559	0.0545 1268	0.0446 1039	0.0365 4084	0.0299 5858
44	0.0626 0619	0.0509 4643	0.0414 9804	0.0338 3411	0.0276 1160
45	0.0587 8515	0.0476 1349	0.0386 0283	0.0313 2738	0.0254 4848
46	0.0551 9733	0.0444 9859	0.0359 0961	0.0290 0730	0.0234 5432
47	0.0518 2848	0.0415 8747	0.0334 0428	0.0268 5861	0.0216 1734
48	0.0486 6524	0.0388 6679	0.0310 7375	0.0248 6908	0.0199 2382
49	0.0456 9 06	0.0363 2410	0.0289 0582	0.0230 2693	0.0183 6297
50	0.0429 0616	0.0339 4776	0.0268 8913	0.0213 2123	0.0169 2439

表六年金終值表

$$(s_{\overline{n}|} at i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	1½%	2%	2½%	3%	1%
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000
2	2.0041 6687	2.0050 0000	2.0058 3333	2.0075 0000	2.0100 0000
3	3.0125 1736	3.0150 2500	3.0175 3403	3.0225 5625	3.0301 0000
4	4.0250 6952	4.0301 0013	4.0351 3631	4.0452 2542	4.0604 0100
5	5.0418 4064	5.0502 5063	5.0586 7460	5.0755 6461	5.1010 0501
6	6.0628 4831	6.0755 0188	6.0881 8354	6.1136 8135	6.1520 1506
7	7.0881 1018	7.1058 7939	7.1236 9794	7.1594 8353	7.2135 3521
8	8.1176 4897	8.1414 0879	8.1652 5284	8.2131 7971	8.2856 7056
9	9.1514 6749	9.1821 1583	9.2128 8349	9.2747 7856	9.3685 2727
10	10.1895 9860	10.2280 2641	10.2666 2531	10.3443 3940	10.4622 1254
11	11.2320 5526	11.2791 6654	11.3265 1396	11.4219 2194	11.5668 3467
12	12.2788 5549	12.3355 6237	12.3925 8529	12.5075 8636	12.6825 0301
13	13.3300 1739	13.3972 4018	13.4648 7537	13.6013 9325	13.8093 2804
14	14.3855 5913	14.4642 2639	14.5434 2048	14.7034 0370	14.9474 2132
15	15.4454 9896	15.5365 4752	15.6282 5710	15.8136 7923	16.0963 9554
16	16.5098 5520	16.6142 3023	16.7194 2193	16.9322 8183	17.2578 6449
17	17.5786 4627	17.6973 0141	17.8169 5189	18.0592 7594	18.4304 4314
18	18.6518 9063	18.7857 8791	18.9208 8411	19.1947 1849	19.6147 4757
19	19.7296 0684	19.8797 1685	20.0312 5593	20.3386 7888	20.8108 9504
20	20.8118 1353	20.9791 1544	21.1481 0493	21.4912 1897	22.0190 0399
21	21.8985 2942	22.0840 1101	22.2714 6387	22.6524 0312	23.2391 9403
22	22.9897 7330	23.1944 3107	23.4013 8577	23.8222 9614	24.4715 8398
23	24.0855 6402	24.3104 0322	24.5578 9386	25.0009 6336	25.7163 0183
24	25.1859 2054	25.4319 5524	25.6810 3157	26.1884 7059	26.9734 6485
25	26.2908 6187	26.5591 1502	26.8308 3759	27.3848 8412	28.2431 9950
26	27.4004 0718	27.6919 1059	27.9873 5081	28.5902 7075	29.5256 3150
27	28.5145 7549	28.8308 7015	29.1506 1035	29.8046 9778	30.8203 8781
28	29.6333 8622	29.9745 2300	30.3206 5558	31.0282 3301	32.1290 9669
29	30.7568 5867	31.1243 9461	31.4975 2607	32.2609 4476	33.4503 8766
30	31.8850 1224	32.2800 1658	32.6812 6164	33.5029 0184	34.7848 9153
31	33.0178 6646	33.4414 1666	33.8719 0233	34.7541 7361	36.1327 4045
32	34.1554 4090	34.6036 2375	35.0694 8343	36.0148 2991	37.4940 6785
33	35.2977 5524	35.7816 6086	36.2740 6045	37.2849 4113	38.8900 0853
34	36.4448 2922	36.9605 7520	37.4856 5913	38.5645 7819	40.2576 9862
35	37.5966 8268	38.1453 7807	38.7043 2548	39.8538 1253	41.6602 7360
36	38.7533 3552	39.3361 0496	39.9301 0071	41.1527 1612	43.0768 7336
37	39.9148 0775	40.5327 8549	41.1630 2630	42.4613 6149	44.5076 4714
38	41.0811 1945	41.7354 4942	42.4031 4395	43.7798 2170	45.9527 2361
39	42.2522 9078	42.9441 2666	43.6504 9562	45.1081 7037	47.4122 5085
40	43.4283 4199	44.1588 4730	44.9051 2352	46.4464 8164	48.8863 7326
41	44.6092 9342	45.3796 4153	46.1670 7707	47.7948 3026	50.3752 3709
42	45.7951 6548	46.6065 3974	47.4363 7998	49.1532 9148	51.8789 8946
43	46.9859 7866	47.8395 7244	48.7130 9018	50.5219 4117	53.3977 7936
44	48.1817 5358	49.0787 7030	49.9972 4988	51.9008 5573	54.9317 5715
45	49.3825 1088	50.3241 6415	51.2889 0050	53.2901 1215	56.4810 7472
46	50.5882 7134	51.5757 8497	52.5880 8575	54.6897 8799	58.0458 8547
47	51.7990 5581	52.8336 6390	53.8948 4959	56.0999 6140	59.6263 4432
48	53.0148 8521	54.0978 3222	55.2092 3621	57.5207 1111	61.2226 0777
49	54.2357 8056	55.3683 2133	56.5312 9009	58.9521 1644	62.8343 3335
50	55.4617 6298	56.6451 6299	57.8610 5595	60.3942 5732	64.4631 8218

表六年金終值表

$$(s_n \text{ at } i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	1½%	2%	2½%	3%	4%
51	56.6928 5366	57.9283 8880	59.1985 7877	61.8472 1424	68.1078 1401
52	57.9290 7388	59.2180 3075	60.5439 0381	63.3110 6835	67.7688 9215
53	59.1704 4503	60.5141 2090	61.8970 7659	64.7859 0136	69.4465 8107
54	60.4169 8555	61.8166 9150	63.2581 4287	66.2717 9562	71.1410 4638
55	61.6687 2600	63.1257 7496	64.6271 4870	67.7688 3409	72.8524 5735
56	62.9256 7902	64.4414 0384	66.0041 4040	69.2771 0935	74.5809 8192
57	64.1878 6935	65.7636 1086	67.3891 6455	70.7966 7860	76.3267 9174
58	65.4553 1881	67.0924 2891	68.7822 6801	72.3276 5369	78.0900 5966
59	66.7280 4930	68.4278 9105	70.1834 9791	73.8701 1109	79.8709 6025
60	68.0060 8284	69.7700 3051	71.5929 0165	75.4241 3693	81.6696 6986
61	69.2894 4152	71.1188 8066	73.0105 2691	76.9898 1795	83.4863 6655
62	70.5781 4753	72.4744 7507	74.4364 2165	78.5672 4159	85.3212 3022
63	71.8722 2314	73.8368 4744	75.8706 3411	80.1564 9590	87.1744 4252
64	73.1716 9074	75.2060 3168	77.3132 1281	81.7576 6962	89.0461 8695
65	74.4765 7278	76.5820 6184	78.7642 0655	83.3708 5214	90.9366 4832
66	75.7868 9184	77.9649 7215	80.2236 6442	84.9961 3353	92.8460 1531
67	77.1026 7055	79.3547 9701	81.6916 3379	86.6336 0453	94.7744 7546
68	78.4239 3168	80.7515 7099	83.1681 7034	88.2833 5657	96.7222 2021
69	79.7506 9806	82.1553 2885	84.6533 1800	89.9454 8174	98.6894 4242
70	81.0829 9264	83.5661 0549	86.1471 2902	91.6200 7285	100.6763 3684
71	82.4208 3844	84.9839 3602	87.6496 5394	93.3072 2340	102.6831 0021
72	83.7642 5860	86.4038 5570	89.1609 4359	95.0070 2758	104.7099 3121
73	85.1132 7634	87.8403 9998	90.6810 4909	96.7195 8028	106.7570 3052
74	86.4679 1500	89.2801 0448	92.2100 2188	98.4449 7714	108.8246 0083
75	87.8281 9797	90.7265 0500	93.7479 1367	100.1833 1446	110.9128 4684
76	89.1941 4880	92.1801 3752	95.2947 7650	101.9346 8932	113.0219 7530
77	90.5657 9109	93.6410 3821	96.8506 6270	103.6991 9949	115.1521 9506
78	91.9431 4855	95.1092 4340	98.4156 2490	105.4769 4349	117.3037 1701
79	93.3262 4500	96.5847 8962	99.9897 1604	107.2680 2056	119.4767 5418
80	94.7151 0436	98.0677 1357	101.5729 8938	109.0725 3072	121.6715 2172
81	96.1097 5062	99.5580 5214	103.1654 9849	110.8905 7470	123.8882 3694
82	97.5102 0792	101.0558 4240	104.7672 5723	112.7222 5401	126.1271 1931
83	98.9165 0045	102.5611 2161	106.3784 3980	114.5676 7091	128.3833 9050
84	100.3286 5254	104.0739 2722	107.9989 8070	116.4269 2845	130.6722 7440
85	101.7466 8859	105.5942 9685	109.6289 7475	118.3001 3041	132.9789 9715
86	103.1706 3312	107.1222 6834	111.2684 7710	120.1873 8139	135.3087 8712
87	104.6005 1076	108.6578 7968	112.9175 4322	122.0887 8675	137.6618 7499
88	106.0363 4622	110.2011 6908	114.5762 2889	124.0044 5265	140.0384 9374
89	107.4781 6433	111.7521 7492	116.2445 9022	125.9344 8604	142.4333 7868
90	108.9259 9002	113.3109 3580	117.9226 8367	127.8789 9469	144.8632 6746
91	110.3798 4831	114.8774 9048	119.6105 6599	129.8330 8715	147.3119 0014
92	111.8397 6434	116.4518 7793	121.3032 9429	131.8118 7230	149.7850 1914
93	113.3057 6336	118.0341 3732	123.0159 2601	133.8004 6185	152.2828 6933
94	114.7778 7071	119.6243 0800	124.7335 1891	135.8039 6531	154.8056 9803
95	116.2561 1184	121.2224 2954	126.4611 5110	137.8224 9505	157.3537 5501
96	117.7405 1230	122.8285 4169	128.1988 2103	139.8561 6377	159.9272 9536
97	119.2310 9777	124.4426 8440	129.9466 4749	141.9050 8499	162.5265 6548
98	120.7278 9401	126.0648 9782	131.7046 6680	143.9693 7313	165.1518 3114
99	122.2309 2680	127.6952 2231	133.4729 4684	146.0491 4343	167.8033 4945
100	123.7402 2243	129.3336 9842	135.2515 3903	148.1445 1201	170.4813 8294

表六年金終值表

$$(s_{\overline{n}|}at i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	1%	1%	1%	1%	1%
101	125.2558 0669	130.9803 6692	137.0405 0634	150.2555 9585	173.1861 9677
102	126.7777 0589	132.6852 6875	138.8399 0929	152.3825 1281	175.9180 5874
103	128.3059 4633	134.2984 4509	140.6493 0876	154.5253 8166	178.6772 3933
104	129.8405 5444	135.9699 3732	142.4702 6593	156.6843 2202	181.4640 1172
105	131.3815 5675	137.6497 8701	144.3013 4253	158.8594 5444	184.2786 5184
106	132.9289 7990	139.3380 3594	146.1431 0036	161.0509 0035	187.1214 3386
107	134.4828 5065	141.0347 2612	147.9956 0178	163.2587 8210	189.9926 5274
108	136.0431 9588	142.7398 9975	149.8589 0946	165.4832 2296	192.8925 7927
109	137.6100 4251	144.4535 9925	151.7330 8643	167.7243 4714	195.8215 0506
110	139.1834 1769	146.1758 6725	153.6181 9610	169.9822 7974	198.7797 2011
111	140.7633 4830	147.9067 4653	155.5143 0225	172.2571 4684	201.7675 1731
112	142.3498 6255	149.6462 8032	157.4214 6901	174.5490 7544	204.7851 9248
113	143.9429 8698	151.3945 1172	159.3397 6091	176.8581 9251	207.8330 4441
114	145.5427 4942	153.1514 8423	161.2692 4285	179.1846 2996	210.9113 7485
115	147.1491 7754	154.9172 4170	163.2099 8010	181.5285 1468	214.0204 8360
116	148.7622 9912	156.6918 2791	165.1620 3332	183.8899 7854	217.1606 9349
117	150.3821 4203	158.4752 8704	167.1254 8354	186.2691 5338	220.3323 0042
118	152.0087 3429	160.2676 6348	169.1003 8219	188.6661 7203	223.5356 2343
119	153.6421 0401	162.0690 0180	171.0868 0109	191.0811 6332	226.7709 7966
120	155.2822 7945	163.8793 4681	173.0848 0743	193.5142 7708	230.0386 8946
121	156.9292 3895	165.6987 4354	175.0944 6881	195.9656 2416	233.3390 7635
122	158.5831 6098	167.5272 3726	177.1158 5321	198.4353 7642	236.6724 6712
123	160.2439 2415	169.3648 7344	179.1490 2902	200.9236 4174	240.0391 9179
124	161.9116 0717	171.2116 9781	181.1940 6502	203.4305 6905	243.4395 8370
125	163.5862 3387	173.0677 5630	183.2510 3040	205.9562 9832	246.8739 7954
126	165.2678 4819	174.9330 9508	185.3199 9474	208.5009 7056	250.3427 1934
127	166.9564 6423	176.8077 6056	187.4010 2305	211.0647 2784	253.8461 4653
128	168.6521 1616	178.6917 9936	189.4942 0071	213.6477 1330	257.3846 0800
129	170.3548 3331	180.5852 5336	191.5995 8355	216.2500 7115	260.9584 5408
130	172.0646 4512	182.4881 8465	193.7172 4778	218.8719 4668	264.5680 3362
131	173.7815 8114	184.4003 2557	195.8472 6509	221.5134 8628	268.2137 1900
132	175.5056 7106	186.3226 2870	197.9897 0744	224.1748 3743	271.8958 5619
133	177.2369 4469	188.2542 4184	200.1446 4740	226.8561 4371	275.6148 1475
134	178.9754 3196	190.1955 1305	202.3121 5785	229.5575 6982	279.3709 6290
135	180.7211 6293	192.1464 9032	204.4923 1210	232.2792 5160	283.1646 7253
136	182.4741 6777	194.1072 2307	206.6851 8392	235.0213 4598	286.9963 1926
137	184.2344 7681	196.0777 5919	208.8908 4749	237.7840 0608	290.8662 8245
138	186.0021 2046	198.0581 4738	211.1093 7744	240.5673 8612	294.7749 4527
139	187.7771 2929	200.0484 3872	213.3403 4381	243.3716 4152	298.7226 9473
140	189.5595 3400	202.0486 3092	215.5833 3709	246.1969 2883	302.7099 2167
141	191.3493 6539	204.0589 2432	217.8429 1822	249.0434 0580	306.7370 2089
142	193.1466 5641	206.0792 1894	220.1136 6353	251.9112 3134	310.8043 9110
143	194.9514 3214	208.1096 1504	222.3976 6498	254.8005 6558	314.9124 3501
144	196.7637 2977	210.1501 6311	224.6949 8493	257.7115 6982	319.0615 5936
145	198.5835 7365	212.2009 1393	227.0057 0544	260.6444 0659	323.2521 7495
146	200.4110 1023	214.2619 1850	229.3299 0538	263.5992 3964	327.4846 9670
147	202.2460 5610	216.3332 2809	231.6676 6312	266.5762 3394	331.7585 4367
148	204.0887 4800	218.4148 9423	234.0190 5787	269.5755 5569	336.0771 3911
149	205.9391 1779	220.5069 6370	236.3841 6304	272.5973 7236	340.4379 1050
150	207.7971 9744	222.6095 0354	238.7630 7669	275.6418 5265	344.8422 8960

表六年金終值表

$$(s_{\overline{n}|i}) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	1%	1%	1%	1%	2%
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000
2	2.0112 5000	2.0125 0000	2.0150 0000	2.0175 0000	2.0200 0000
3	3.0338 7656	3.0376 5625	3.0452 2500	3.0528 0625	3.0604 0000
4	4.0680 0767	4.0756 2695	4.0909 0338	4.1062 3038	4.1216 0800
5	5.1137 7276	5.1265 7229	5.1522 6693	5.1780 8938	5.2040 4616
6	6.1713 0270	6.1906 5444	6.2295 5093	6.2687 0596	6.3081 2096
7	7.2407 2986	7.2680 3762	7.3229 9419	7.3784 0831	7.4342 8338
8	8.3221 8807	8.3588 8809	8.4328 3911	8.5075 3045	8.5829 0905
9	9.4158 1269	9.4633 7420	9.5593 3169	9.6564 1224	9.7546 2843
10	10.5217 4058	10.5816 6637	10.7027 2167	10.8253 9945	10.9497 2100
11	11.6401 1016	11.7130 3720	11.8632 6249	12.0148 4394	12.1687 1542
12	12.7710 6140	12.8603 6142	13.0412 1143	13.2251 0371	13.4120 8973
13	13.9147 3584	14.0211 1594	14.2368 2960	14.4565 4303	14.6803 3152
14	15.0712 7662	15.1963 7988	15.4503 8205	15.7095 3253	15.9739 3815
15	16.2408 2848	16.3863 3463	16.6821 3773	16.9844 4935	17.2934 1692
16	17.4235 3780	17.5911 6382	17.9323 6984	18.2816 7721	18.6392 8525
17	18.6195 5260	18.8110 5936	19.2013 5539	19.6016 0656	20.0120 7006
18	19.8290 2557	20.0461 9153	20.4893 7572	20.9446 3468	21.4123 1238
19	21.0520 9607	21.2967 6893	21.7967 1636	22.3111 6578	22.8405 5863
20	22.2889 3519	22.5629 7854	23.1236 6710	23.7016 1119	24.2973 6980
21	23.5396 8571	23.8450 1577	24.4705 2211	25.1163 8938	25.7333 1719
22	24.8045 0717	25.1430 7847	25.8375 7994	26.5559 2620	27.2989 8954
23	26.0835 5788	26.4573 6695	27.2251 4364	28.0206 5490	28.8449 6821
24	27.3769 9790	27.7880 8403	28.6335 2030	29.5110 1637	30.4318 6247
25	28.6849 8913	29.1354 3508	30.0630 2361	31.0274 5915	32.0202 9972
26	30.0076 9526	30.4996 2302	31.5139 6896	32.5704 3969	33.6709 0572
27	31.3452 8188	31.8808 7337	32.9866 7850	34.1404 2238	35.3443 2383
28	32.6979 1625	33.2793 8429	34.4814 7867	35.7378 7977	37.0512 1031
29	34.0657 6781	34.6953 7659	35.9987 0085	37.3632 9267	38.7922 3451
30	35.4490 0769	36.1290 6880	37.5386 8137	39.0171 5029	40.5680 7921
31	36.8478 0903	37.5806 8216	39.1017 6159	40.6909 5042	42.3794 4079
32	38.2623 4688	39.0504 4069	40.6382 8301	42.4121 9955	44.2270 2961
33	39.6927 8829	40.5385 7120	42.2986 1233	44.1544 1305	46.1115 7020
34	41.1393 4227	42.0453 0334	43.9330 9152	45.9271 1527	48.0338 0160
35	42.6021 5987	43.5703 6963	45.5920 8789	47.7308 3979	49.9944 7763
36	44.0814 3417	45.1155 0550	47.2759 6921	49.5661 2949	51.9943 6719
37	45.5773 5030	46.6794 4932	48.9851 0874	51.4335 3675	54.0342 5453
38	47.0900 9549	48.2926 4243	50.7198 8538	53.3336 2365	56.1149 3962
39	48.6193 5906	49.8862 2921	52.4806 8966	55.2669 6206	58.2372 3641
40	50.1668 3248	51.4595 5708	54.2678 9391	57.2341 3390	60.4019 8318
41	51.7312 0934	53.1331 7654	56.0819 1232	59.2357 3124	62.6100 2284
42	53.3131 8545	54.7973 4125	57.9231 4100	61.2723 5654	64.8623 2330
43	54.9129 5879	56.4823 0301	59.7919 8812	63.3446 2278	67.1594 6777
44	56.5307 2957	58.1883 3687	61.6888 6794	65.4531 5367	69.5026 5712
45	58.1667 0023	59.9156 9108	63.6142 0096	67.5985 3386	71.8927 1037
46	59.8210 7566	61.6646 3721	65.5684 1398	69.7815 5908	74.3305 6447
47	61.4940 6276	63.4354 4518	67.5519 4018	72.0027 3637	76.8171 7576
48	63.1858 7097	65.2283 8824	69.5652 1929	74.2627 8425	79.3535 1927
49	64.8967 1201	67.0437 4310	71.6086 9758	76.5623 8298	81.9405 8966
50	66.6268 0002	68.8817 8989	73.6828 2804	78.9022 2468	84.5794 0145

表六年金終值表

$$(s_{\overline{n}|i}) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	1½%	1½%	1½%	1½%	2%
51	68.3763 5152	70.7428 1226	75.7880 7046	81.2830 1361	87.2709 8948
52	70.1455 8548	72.6270 9741	77.9248 9152	83.7054 6635	90.0184 0927
53	71.9347 2332	74.5949 3613	80.0937 6489	86.1703 1201	92.8167 3746
54	73.7439 8895	76.4666 2283	82.2951 7136	88.6782 9247	95.6730 7221
55	75.5736 0883	78.4224 5562	84.5295 9393	91.2301 6259	98.5865 3365
56	77.4238 1193	80.4027 3631	86.7975 4292	93.8266 9043	101.5582 6432
57	79.2948 2981	82.4077 7052	89.0995 0906	96.4686 5752	104.5894 2961
58	81.1868 0665	84.4378 6765	91.4359 9365	99.1668 5902	107.6812 1320
59	83.1002 4923	86.4933 4099	93.8075 3363	101.8921 0405	110.8348 4257
60	85.0351 2704	88.5745 0776	96.2146 5171	104.6752 1588	114.0515 3942
61	86.9917 7222	90.6816 8910	98.6578 7149	107.5070 3215	117.3325 7021
62	88.9704 2966	92.8152 1022	101.1377 3956	110.3884 0322	120.6792 2161
63	90.9713 4699	94.9754 0034	103.6548 0565	113.3202 0231	124.0928 0604
64	91.9947 7464	97.1625 9285	106.2096 2774	116.3033 0585	127.5746 6216
65	95.0409 6286	99.3771 2526	108.8027 7215	119.3386 1370	131.1261 5541
66	97.1101 7672	101.6193 3933	111.4348 1374	122.4270 3944	134.7486 7852
67	99.2026 6621	103.8895 8107	114.1063 3594	125.5695 1263	138.4436 5209
68	101.3186 9621	106.1882 0083	116.8179 3038	128.7669 7910	142.2125 2513
69	103.4585 3154	108.5155 5334	119.5701 9995	132.0204 0124	146.0567 7563
70	105.6224 4002	110.8719 9776	122.3637 5295	135.3307 5826	149.9779 1114
71	107.8106 9247	113.2573 9773	125.1992 0924	138.6990 4653	153.9774 6937
72	110.0235 6276	115.6736 2145	128.0771 9738	142.1262 7984	158.0570 1875
73	112.2613 2784	118.1195 4172	130.9983 5334	145.6134 8974	162.2181 5913
74	114.5242 6778	120.5960 3599	133.9633 3067	149.1617 2581	166.4625 2231
75	116.8126 6579	123.1034 8644	136.9727 8063	152.7720 5601	170.7917 7276
76	119.1263 0823	125.6422 8002	140.0273 7234	156.4455 8699	175.2076 0821
77	121.4669 8487	128.2123 0352	143.1277 8292	160.1833 6441	179.7117 6038
78	123.8334 8845	130.8154 6363	146.2746 9067	163.9865 7329	184.3059 9558
79	126.2266 1520	133.4506 6199	149.4688 2016	167.8563 3332	188.9921 1549
80	128.6466 6462	136.1187 9526	152.7108 5247	171.7938 2424	193.7719 5780
81	131.0939 3030	138.8202 8020	156.0015 1525	175.8002 1617	198.6473 9696
82	133.5687 4642	141.5555 3370	159.3415 3798	179.8767 1995	203.6203 4490
83	136.0718 9481	144.3249 7787	162.7316 6105	184.0245 6255	208.6927 5180
84	138.6021 9801	147.1290 4010	166.1726 3597	188.2449 9239	213.8666 0683
85	141.1614 7273	149.9681 5310	169.6652 2551	192.5392 7976	219.1439 3897
86	143.7495 9930	152.8427 5501	173.2102 0389	196.9087 1716	224.5263 1775
87	146.3667 2162	155.7532 8945	176.8083 5695	201.3546 1971	230.0173 5411
88	149.0133 4724	158.7002 0557	180.4604 3230	205.8783 2555	235.6177 0119
89	151.6897 4739	161.6839 5314	184.1673 3954	210.4811 9625	241.3300 5521
90	154.3962 5705	164.7050 0762	187.9299 0038	215.1646 1718	247.1566 5632
91	157.1332 1494	167.7638 2021	191.7488 4889	219.9299 9798	253.0997 8944
92	159.9009 6361	170.8608 6796	195.6250 8162	224.7787 7295	259.1617 8523
93	162.6998 4945	173.9966 2881	199.5594 5784	229.7124 0148	265.3450 2094
94	165.5302 2276	177.1715 8667	203.5528 4971	234.7323 6850	271.6519 2135
95	168.3924 3776	180.3862 3151	207.6061 4246	239.8401 8495	278.0849 5978
96	171.2868 5269	183.6410 5940	211.7202 3459	245.0373 8319	284.6466 5898
97	174.2138 2978	186.9365 7264	215.8960 3811	250.3255 4248	291.3395 9216
98	177.1737 3537	190.2732 7980	220.1344 7868	255.7062 3947	298.1663 8400
99	180.1669 3989	193.6516 9580	224.4364 9586	261.1810 9366	305.1297 1163
100	183.1938 1796	197.0723 4200	228.8030 4330	266.7517 6789	312.2323 0591

表六年金終值表

$$(s_{\overline{n}|i}) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	2½%	2½%	2½%	3%	3½%
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000
2	2.0225 0000	2.0250 0000	2.0275 0000	2.0300 0000	2.0350 0000
3	3.0680 0625	3.0756 2500	3.0832 5625	3.0909 0000	3.1062 2500
4	4.1370 3639	4.1525 1563	4.1680 4530	4.1836 2700	4.2149 4238
5	5.2301 1971	5.2563 2852	5.2826 6706	5.3091 3531	5.3624 6588
6	6.3477 9740	6.3877 3673	6.4279 4040	6.4684 0988	6.5501 5218
7	7.4906 2284	7.5474 3015	7.6047 0876	7.6624 6218	7.7794 0751
8	8.6591 6186	8.7361 1690	8.8138 3825	8.8923 3605	9.0516 8677
9	9.8539 9300	9.9545 1880	10.0562 1830	10.1591 0613	10.3684 9531
10	11.0757 0784	11.2033 8177	11.3327 6482	11.4638 7931	11.7313 9316
11	12.3249 1127	12.4834 6631	12.6444 1535	12.8077 9569	13.1419 9192
12	13.6022 2177	13.7955 5297	13.9921 3729	14.1920 2956	14.6019 6164
13	14.9082 7176	15.1404 4179	15.3769 2107	15.6177 9045	16.1130 3030
14	16.2437 0788	16.5189 5234	16.7997 8659	17.0863 2416	17.6769 8636
15	17.6091 9130	17.9319 2666	18.2617 8052	18.5939 1339	19.2956 8088
16	19.0053 9811	19.3802 2483	19.7639 7948	20.1568 8130	20.9710 2971
17	20.4330 1957	20.8647 3045	21.3074 8392	21.7615 8774	22.7050 1575
18	21.8927 6251	22.3863 4371	22.8934 4437	23.4144 3537	24.4996 9130
19	23.3853 4966	23.9460 0743	24.5230 1460	25.1168 6344	26.3571 8050
20	24.9115 2003	25.5446 5761	26.1973 9750	26.8703 7449	28.2796 8181
21	26.4720 2923	27.1832 7405	27.9178 2593	28.6764 3572	30.2694 7063
22	28.0676 4989	28.8623 5590	29.6855 6615	30.5367 3030	32.3239 0215
23	29.6991 7201	30.5844 2730	31.5019 1921	32.4523 3370	34.4604 1373
24	31.3674 0338	32.3490 3798	33.3682 2199	34.4284 7022	36.6665 2821
25	33.0731 6996	34.1577 6393	35.2858 4310	36.4592 6432	38.9498 5669
26	34.8173 1623	36.0117 0803	37.2562 0392	38.5530 4225	41.3121 0168
27	36.6007 0590	37.9120 0073	39.2807 5467	40.7096 3352	43.7590 6024
28	38.4242 2178	39.8593 0075	41.3609 7542	42.9309 2252	46.2906 2734
29	40.2887 6677	41.8562 9577	43.4984 0224	45.2188 5020	48.9107 9930
30	42.1952 6402	43.9027 0316	45.6946 0330	47.5754 1371	51.6226 7728
31	44.1446 5746	46.0002 7074	47.9512 1003	50.0026 7318	54.4294 7098
32	46.1379 1226	48.1502 7751	50.2698 6331	52.5027 5352	57.3345 0247
33	48.1760 1528	50.3540 3445	52.6522 3969	55.0778 4123	60.3412 1005
34	50.2599 7563	52.6128 3531	55.1002 2765	57.7301 7652	63.4531 5240
35	52.3908 2508	54.9282 0744	57.6154 3391	60.4620 3181	66.6740 1274
36	54.5696 1864	57.3014 1263	60.1999 0972	63.2759 4427	70.0076 0318
37	56.7974 3506	59.7339 4794	62.8554 0724	66.1742 2259	73.4578 6930
38	59.0753 7735	62.2272 9664	65.5839 3094	69.1594 4927	77.0238 9472
39	61.4045 7334	64.7829 7906	68.3874 3904	72.2342 3275	80.7249 0604
40	63.7861 7624	67.4025 5354	71.2681 4499	75.4012 5973	84.5502 7775
41	66.2213 6521	70.0876 1737	74.2280 1398	78.6632 9753	88.5095 3747
42	68.7113 4592	72.8393 0781	77.2692 8950	82.0231 9645	92.6073 7128
43	71.2573 5121	75.6608 0300	80.3941 9496	85.4838 9234	96.8486 2928
44	73.8606 4161	78.5523 2308	83.6050 3532	89.0484 0911	101.2383 3130
45	76.5225 0605	81.5161 3116	86.9041 7379	92.7198 6139	105.7816 7290
46	79.2442 6243	84.5540 3443	90.2940 3357	96.5014 5723	110.4840 3145
47	82.0272 5334	87.6678 3530	93.7771 2463	100.3965 0095	115.3509 7255
48	84.8728 7165	90.8595 3243	97.3559 9556	104.4033 9598	120.3882 5659
49	87.7825 1126	94.1310 7159	101.0332 8544	108.5406 4785	125.6018 4557
50	90.7576 1776	97.4843 4879	104.8117 0079	112.7968 6729	130.9979 1016

表六年金終值表

$$(s_{\overline{n}|i}) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	2½%	2½%	2½%	3%	3½%
51	98.7996 6416	100.9214 5751	108.6940 2256	117.1807 7331	136.5828 3702
52	96.9101 5661	104.4444 9395	112.6831 0818	121.6961 9651	142.3632 3631
53	100.0906 3513	108.0556 0629	116.7818 9365	126.3470 8240	148.3459 4958
54	103.3426 7442	111.7569 9645	120.9933 9573	131.1374 9438	154.5390 5732
55	106.6678 8460	115.5509 2122	125.3207 1411	136.0716 1972	160.9468 8934
56	110.0679 1200	119.4396 9440	129.7670 3375	141.1537 6831	167.5800 3099
57	113.5444 4002	123.4256 8676	134.3356 2718	146.3883 8136	174.4453 3207
58	117.0991 8992	127.5113 2893	139.0298 5692	151.7800 3230	181.5509 1869
59	120.7339 2169	131.6991 1215	143.8531 7799	157.3334 3379	188.9052 0035
60	124.4504 3493	135.9915 8995	148.8091 4038	163.0534 3630	196.5168 8238
61	128.2505 6972	140.3913 7970	153.9013 9174	168.9450 3991	204.5949 7378
62	132.1362 0754	144.9011 6419	159.1336 8002	175.0133 9110	212.5487 9736
63	136.1092 7221	149.5236 9330	164.5098 5622	181.2637 9234	220.9830 0579
64	140.1717 3033	154.2617 8563	170.0338 7726	187.7017 0632	229.7225 8599
65	144.3255 2466	159.1183 3027	175.7038 0839	194.3327 5782	238.7628 7650
66	148.5729 2066	164.0662 8853	181.5418 2863	201.1627 4055	248.1195 7718
67	152.9153 1137	169.1985 9574	187.5342 2892	208.1976 2277	257.8037 6238
68	157.3564 1713	174.4236 6314	193.6914 2021	215.4435 5145	267.8268 9406
69	161.8969 3651	179.7893 7971	200.0179 3427	222.9068 5800	278.2008 3535
70	166.5396 1758	185.2841 1421	206.5184 2746	230.5940 6374	288.9378 6459
71	171.2867 5898	190.9162 1706	213.1976 8422	238.5118 3565	300.0506 8935
72	176.1407 1106	196.6891 2249	220.0606 2054	246.6672 4222	311.5524 6490
73	181.1038 7705	202.6063 5055	227.1122 8760	255.0672 5949	323.4563 0024
74	186.1787 1429	208.6715 0031	234.3578 7551	263.7192 7727	335.7777 8824
75	191.3677 3536	214.8832 9705	241.8027 1709	272.6308 5589	348.5900 1033
76	196.6735 0941	221.2505 0447	249.4522 9181	281.8097 8126	361.7235 6121
77	202.0936 6337	227.7920 1709	257.3122 2933	291.2640 7469	375.3890 6035
78	207.6453 8329	234.4863 1751	265.3833 1615	301.0019 9693	389.5276 7798
79	213.3179 1567	241.3439 8795	273.6864 9435	311.0320 5634	404.1611 4671
80	219.1175 0377	248.3827 1265	282.2128 7345	321.3630 1855	419.3067 8635
81	225.0477 1407	255.5922 8047	290.9737 2747	332.0039 0910	434.9825 2439
82	231.1112 8763	262.9820 8743	299.9755 0498	342.9640 2638	451.2069 1274
83	237.3112 9160	270.5566 3966	309.2343 3137	354.2529 4717	467.9991 5469
84	243.6507 9567	278.3205 5566	318.7285 1423	365.8305 3558	485.3791 2510
85	250.1329 3857	286.2735 6955	328.4935 4837	377.8569 5165	503.3673 9448
86	256.7609 2969	294.4355 3379	338.5271 2095	390.1926 6020	521.9852 5329
87	263.5380 5060	302.7964 2213	348.8366 1678	402.8934 4001	541.2547 3715
88	270.4676 5674	311.3663 3268	359.4296 2374	415.9853 9321	561.1936 5295
89	277.5531 7902	320.1504 9100	370.3139 3839	429.4649 5500	581.8406 0581
90	284.7981 2555	329.1542 5323	381.4975 7170	443.3439 0365	603.2050 2701
91	292.2060 8337	338.3831 0961	392.9887 5492	457.6493 7076	625.3172 0295
92	299.7807 2025	347.8426 8735	404.7959 4568	472.3788 5139	648.2033 0506
93	307.5257 8645	357.5337 5453	416.9278 3418	487.5502 1744	671.8904 2073
94	315.4451 1665	367.4772 2359	429.3933 4962	503.1767 2337	696.4065 3546
95	323.5426 3177	377.6641 5398	442.2016 6674	519.2720 2569	721.7808 1595
96	331.8223 4099	388.1057 5733	455.3622 1257	535.8501 8645	748.0431 4451
97	340.2883 4966	398.8034 0177	468.8346 7342	552.9256 9205	775.2246 5457
98	348.9448 3139	409.7786 1182	482.7790 0194	570.5134 6281	803.3575 1748
99	357.7960 9010	421.0230 7711	497.0594 2449	588.6238 6669	832.4750 3059
100	366.8465 0213	432.5486 5404	511.7244 4867	607.2877 3270	862.6116 5666

表六年金終值表

$$(s_{\overline{n}|}at\dot{i}) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	4%	4½%	5%	5½%	6%
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000
2	2.0400 0000	2.0450 0000	2.0500 0000	2.0550 0000	2.0600 0000
3	3.1216 0000	3.1370 2500	3.1525 0000	3.1680 2500	3.1836 0000
4	4.2464 6400	4.2781 9113	4.3101 2500	4.3422 6638	4.3746 1600
5	5.4163 2256	5.4707 0973	5.5256 3125	5.5810 9103	5.6370 9296
6	6.6329 7546	6.7168 9166	6.8019 1281	6.8880 5103	6.9753 1854
7	7.8982 9448	8.0191 5179	8.1420 0845	8.2668 9384	8.3938 3765
8	9.2142 2626	9.3800 1362	9.5491 0888	9.7215 7300	9.8974 6791
9	10.5827 9531	10.8021 1423	11.0265 6432	11.2562 5951	11.4913 1598
10	12.0061 0712	12.2882 0937	12.5778 9254	12.8753 5379	13.1807 9494
11	13.4863 5141	13.8411 7379	14.2067 8716	14.5834 9825	14.9716 4264
12	15.0258 0546	15.4650 3184	15.9171 2052	16.3855 9065	16.8699 4120
13	16.6268 3768	17.1559 1327	17.7129 8285	18.2867 9814	18.8821 5767
14	18.2919 1119	18.9321 0937	19.5986 3199	20.2925 7203	21.0150 6593
15	20.0235 8764	20.7840 5429	21.5785 6359	22.4086 6350	23.2759 6988
16	21.8245 3114	22.7193 3673	23.6574 9177	24.6411 3999	25.6725 2808
17	23.6975 1239	24.7417 0689	25.8403 6636	26.9964 0269	28.2128 7976
18	25.6454 1288	26.8550 8370	28.1323 8467	29.4812 0483	30.9056 5255
19	27.6712 2940	29.0635 6246	30.5399 0891	32.1026 7110	33.7599 9170
20	29.7780 7858	31.3714 2377	33.0659 5410	34.8683 1801	36.7855 9120
21	31.9692 0172	33.7831 3680	35.7192 5181	37.7860 7550	39.9927 2668
22	34.2479 6979	36.3033 7795	38.5052 1440	40.8643 0965	43.3922 9028
23	36.6178 8858	38.9370 2996	41.4304 7512	44.1118 4669	46.9958 2769
24	39.0826 0412	41.6891 9631	44.5019 9387	47.5379 9825	50.8155 7735
25	41.6459 0829	44.5652 1015	47.7270 9882	51.1525 8816	54.8645 1200
26	44.3117 4462	47.5706 4460	51.1134 5376	54.9659 8051	59.1663 8272
27	47.0842 1440	50.7113 2361	54.6691 2645	58.9891 0943	63.7057 6568
28	49.9675 8298	53.9938 3317	58.4025 8277	63.2335 1045	68.5281 1162
29	52.9662 8630	57.4230 3316	62.3227 1191	67.7113 5353	73.6397 9832
30	56.0849 3775	61.0070 6966	66.4388 4750	72.4354 7797	79.0581 8622
31	59.3283 3523	64.7523 8779	70.7607 8988	77.4194 2926	84.8016 7739
32	62.7014 6367	68.6662 4324	75.2988 2937	82.6774 9787	90.8897 7803
33	66.2095 2742	72.7562 2628	80.0637 7084	88.2247 6025	97.3431 6471
34	69.8579 0851	77.0302 5643	85.0669 5938	94.0771 2207	104.1837 5460
35	73.6522 2486	81.4966 1800	90.3203 0735	100.2513 6378	111.4347 7987
36	77.5983 1385	86.1639 6581	95.8363 2372	106.7651 8379	119.1208 6666
37	81.7022 4640	91.0413 4427	101.6281 3886	113.6372 7417	127.2681 1866
38	85.9703 3626	96.1382 0476	107.7095 4580	120.8873 2425	135.9042 0578
39	90.4091 4971	101.4644 2398	114.0950 2309	128.5361 2708	145.0584 5313
40	95.0255 1570	107.0303 2306	120.7997 7424	136.6056 1407	154.7619 6562
41	99.8265 3633	112.8466 8760	127.8397 6295	145.1189 2285	165.0476 8356
42	104.8195 9778	118.9247 8354	135.2317 5110	154.1004 6360	176.9505 4457
43	110.0123 8169	125.2764 0402	142.9933 3866	163.5759 8910	189.5075 7724
44	115.4128 7696	131.9138 4220	151.1430 0559	173.5726 6830	199.7580 3183
45	121.0293 9204	138.8499 6510	159.7601 5587	184.1191 6527	212.7435 1379
46	126.8705 6772	146.0982 1353	168.6851 6363	195.2457 1936	226.5081 2462
47	132.9453 9043	153.6726 3314	178.1194 2185	206.9842 3392	241.0386 1210
48	139.2632 0604	161.5879 0163	188.0253 9294	219.3683 6679	256.5645 2382
49	145.8337 3429	169.8593 5720	198.4266 6259	232.4336 2696	272.9584 0055
50	152.6670 8366	178.5030 2328	209.3479 9572	246.2174 7645	290.3369 0458

表六年金終值表

$$(s_m at i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	4%	4½%	5%	5½%	6%
51	159.7757 6700	187.5556 6455	220.8153 9550	260.7594 3765	308.7560 5886
52	167.1647 1768	196.9747 6046	232.8561 6528	276.1012 0672	328.2814 2239
53	174.8513 0639	206.8386 3408	245.4989 7354	292.2807 7309	348.9783 0773
54	182.8453 5865	217.1463 7262	258.7739 2222	309.3625 4561	370.9170 0620
55	191.1591 7299	227.9179 5938	272.7126 1833	327.3774 8562	394.1720 2637
56	199.8035 3991	239.1742 6756	287.3482 4924	346.3832 4733	418.8223 4816
57	208.7977 6151	250.9371 0960	302.7156 6171	366.4343 2593	444.9516 8905
58	218.1496 7197	263.2292 7953	318.8514 4479	387.5882 1386	472.6487 9040
59	227.8756 5885	276.0745 9711	335.7940 1703	409.9055 6562	502.0077 1782
60	237.9906 8520	289.4979 5398	353.5837 1788	433.4503 7173	533.1281 8089
61	248.5103 1261	303.5253 6190	372.2629 0378	458.2901 4217	566.1158 7174
62	259.4507 2511	318.1840 0319	391.8760 4897	484.4960 9999	601.0828 2405
63	270.8287 5412	333.5022 8333	412.4698 5141	512.1433 8549	638.1477 9349
64	282.6619 0428	349.5098 8003	434.0933 4398	541.3112 7170	677.4386 6110
65	294.9683 8045	366.2378 3096	456.7980 1118	572.0833 9164	719.0828 6076
66	307.7671 1567	383.7157 3335	480.6379 1174	604.5479 7818	763.2278 3241
67	321.0778 0390	401.9838 6735	505.6698 0733	638.7981 1698	810.0215 0236
68	334.9209 1231	421.0732 3138	531.9532 9770	674.9320 1341	859.6227 9250
69	349.3177 4880	441.0236 1679	559.5509 6258	713.0532 7415	912.2001 6005
70	364.2904 5876	461.8696 7955	588.5285 1071	753.2712 0423	967.9321 6965
71	379.8620 7711	483.6538 1513	618.9549 3625	795.7011 2046	1027.0030 9983
72	396.0565 6019	506.4132 3681	650.9026 8306	840.4646 8209	1089.6285 8582
73	412.8988 2260	530.2070 5747	684.4478 1731	887.6902 3960	1156.0063 0097
74	430.4147 7550	555.0663 7505	719.6702 0807	937.5192 0278	1226.3666 7903
75	448.6313 6652	581.0448 6193	756.6537 1848	990.0764 2893	1300.9486 7977
76	467.5766 2118	608.1913 5822	795.4864 0440	1045.5306 3232	1380.0056 0055
77	487.2796 8603	636.5599 6934	836.2607 2462	1104.0348 1731	1463.8059 3659
78	507.7708 7347	666.2031 6796	879.0737 6085	1165.7567 3226	1552.6342 9278
79	529.0817 0341	697.1844 0032	924.0274 4889	1230.8733 5254	1646.7923 5035
80	551.2449 7675	729.5576 9854	971.2288 2134	1299.5713 8693	1746.5998 9187
81	574.2947 7582	763.3877 9497	1020.7902 6240	1372.0478 1321	1852.3958 8435
82	598.2665 6685	798.7402 4575	1072.8297 7552	1448.5104 4294	1964.5396 3794
83	623.1972 2952	835.6835 5680	1127.4712 6430	1529.1785 1730	2083.4120 1622
84	649.1251 1870	874.2893 1686	1184.8448 2752	1614.2833 3575	2209.4167 3719
85	676.0901 2345	914.6323 3612	1245.0870 6889	1704.0689 1921	2342.9817 4123
86	704.1337 2839	956.7907 9125	1308.3414 2234	1798.7927 0977	2484.5606 4591
87	733.2990 7753	1000.3463 7685	1374.7584 9345	1898.7263 0881	2634.6342 8466
88	763.6310 4063	1046.8844 6381	1444.4964 1812	2004.1562 5579	2793.7123 4174
89	795.1762 8225	1094.9942 6468	1517.7212 3903	2115.3848 4986	2962.3350 8225
90	827.9823 3354	1145.2690 0659	1594.6073 0098	2232.7310 1660	3141.0751 8718
91	862.1026 6688	1197.8061 1189	1675.3376 6603	2356.5312 2252	3330.5396 9841
92	897.5367 7336	1252.7073 8692	1760.1045 4933	2487.1404 3976	3531.3720 3032
93	934.4902 4450	1310.0792 1933	1849.1097 7680	2624.9331 6394	3744.2544 0514
94	972.8698 5428	1370.0327 8420	1942.5652 6564	2770.3044 8796	3969.9096 6944
95	1012.7846 4845	1432.6842 5949	2040.6935 2892	2923.6712 3480	4209.1042 4961
96	1054.2960 3439	1498.1550 5117	2143.7282 0537	3085.4731 5271	4462.6505 0459
97	1097.4678 7577	1566.5720 2847	2251.9146 1564	3256.1741 7611	4731.4095 3486
98	1142.3665 9080	1638.0577 0976	2365.5103 4642	3436.2637 5580	5018.2941 0696
99	1189.0612 5443	1712.7803 1939	2484.7858 6374	3626.2582 6237	5318.2717 5337
100	1237.6237 0461	1790.8559 5627	2610.0251 5693	3826.7024 6680	5638.3680 5857

表六年金終值表

$$(s_{\overline{n}|i}at i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

n	6½%	7%	7½%	8%	8½%
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000
2	2.0650 0000	2.0700 0000	2.0750 0000	2.0800 0000	2.0850 0000
3	3.1992 2500	3.2149 0000	3.2306 2500	3.2464 0000	3.2622 2500
4	4.4071 7463	4.4399 4300	4.4729 2188	4.5061 1200	4.5395 1413
5	5.6936 4098	5.7507 3901	5.8083 9102	5.8666 0095	5.9253 7283
6	7.0637 2764	7.1532 9074	7.2440 2034	7.3359 2904	7.4290 2952
7	8.5228 6994	8.6540 2109	8.7873 2187	8.9228 0536	9.0604 9702
8	10.0768 5648	10.2598 0257	10.4463 7101	10.6366 2763	10.8306 3927
9	11.7318 5215	11.9779 8875	12.2298 4883	12.4875 5784	12.7512 4361
10	13.4944 2254	13.8164 4796	14.1470 8750	14.4865 6247	14.8350 9932
11	15.3715 6001	15.7835 9932	16.2081 1906	16.6454 8746	17.0960 8276
12	17.3707 1141	17.8884 5127	18.4237 2799	18.9771 2646	19.5492 4979
13	19.4998 0765	20.1406 4286	20.8055 0759	21.4952 9658	22.2109 3603
14	21.7672 9515	22.5504 8786	23.3659 2066	24.2149 2030	25.0988 6559
15	24.1821 6933	25.1290 2201	26.1183 6470	27.1521 1393	28.2322 6916
16	26.7540 1034	27.3889 5355	29.0772 4206	30.3242 8304	31.6320 1204
17	29.4950 2101	30.8402 1730	32.2580 3521	33.7502 2669	35.3207 5806
18	32.4100 6738	33.9990 3251	35.6773 8785	37.4502 4374	39.3229 9538
19	35.5167 2176	37.3789 6479	39.3531 9194	41.4462 6324	43.6654 4998
20	38.8253 0337	40.9954 9232	43.3046 8134	45.7619 6430	48.3770 1323
21	42.3489 5373	44.8951 7678	47.5525 3244	50.4229 2144	53.4890 5936
22	46.1016 3573	49.0057 3916	52.1189 7237	55.4567 5516	59.0356 2940
23	50.0982 4205	53.4361 4090	57.0278 9530	60.8932 9557	65.0536 5790
24	54.3546 2778	58.1766 7076	62.3049 8744	66.7647 5922	71.5832 1882
25	58.8876 7859	63.2490 3772	67.9773 6150	73.1059 3995	78.6677 9242
26	63.7153 7769	68.6764 7036	74.0762 0112	79.9544 1515	86.3545 5478
27	68.8568 7725	74.4838 2328	80.6319 1620	87.3507 6836	94.6946 9193
28	74.3325 7427	80.6976 9091	87.6793 0991	95.3338 2933	103.7437 4075
29	80.1641 9159	87.3465 2927	95.2552 5816	103.9659 3622	113.5619 5871
30	86.3748 6405	94.4607 8632	103.3994 0252	113.2832 1111	124.2147 2520
31	92.9892 3021	102.0730 4137	112.1543 5771	123.3458 6800	135.7729 7684
32	100.0335 3017	110.2181 5426	121.5659 3454	134.2135 3744	148.3136 7987
33	107.5357 0963	118.9334 2506	131.6833 7963	145.9506 2044	161.9203 4266
34	115.5255 3076	128.2587 6481	142.5596 3810	158.6266 7007	176.6835 7179
35	124.0346 9026	138.2368 7835	154.2516 0558	172.3168 0368	192.7016 7539
36	133.0969 4513	148.9134 5984	166.8204 7600	187.1021 4797	210.0813 1780
37	142.7482 4656	160.3374 0202	180.3320 1170	203.0703 1981	228.9382 2981
38	153.0288 8259	172.5610 2017	194.8569 1258	220.3159 4540	249.3979 7935
39	163.9736 2995	185.6402 9158	210.4711 8102	238.9412 2103	271.5968 0759
40	175.6319 1590	199.6351 1199	227.2565 1960	259.0565 1871	295.6825 3624
41	188.0479 9044	214.6095 6983	245.3007 5857	280.7810 4021	321.8155 5182
42	201.2711 0981	230.6322 3972	264.6983 1546	304.2435 2342	350.1698 7372
43	215.3337 3195	247.7704 9650	285.5506 8912	329.5830 0530	380.9343 1299
44	230.3517 2453	266.1203 5125	307.9669 9030	356.9496 4672	414.3137 2959
45	246.3245 8662	285.7493 1084	332.0645 1511	386.5056 1738	450.5303 9661
46	263.3356 8475	306.7517 6260	357.9693 5375	418.4260 6677	489.8254 8032
47	281.4525 0426	329.2243 8598	385.8170 5528	452.9001 5211	532.4606 4615
48	300.7469 1704	353.2700 9800	415.7533 8442	490.1321 6428	578.7198 0107
49	321.2954 6865	378.9989 9951	447.9348 3451	530.3427 3742	628.9109 8416
50	343.1796 7198	406.5289 2947	482.5299 4709	573.7701 5642	683.3684 1782

表七 年金現值表

$$(a_n \text{ at } i) = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

n	½%	¾%	1%	1½%	2%
1	0.9958 5062	0.9950 2488	0.9942 0050	0.9925 5583	0.9900 9901
2	1.9875 6908	1.9850 9938	1.9826 8513	1.9777 2291	1.9708 9506
3	2.9751 7253	2.9702 4814	2.9653 3733	2.9555 5624	2.9409 8521
4	3.9586 7804	3.9504 9566	3.9423 4034	3.9261 1041	3.9019 6555
5	4.9381 0261	4.9258 6633	4.9136 7723	4.8894 3961	4.8534 3124
6	5.9134 6318	5.8963 8441	5.8793 8084	5.8455 9763	5.7954 7647
7	6.8847 7661	6.8620 7404	6.8394 3385	6.7946 3785	6.7281 9453
8	7.8520 5969	7.8229 5924	7.7940 1875	7.7366 1325	7.6516 7775
9	8.8153 2915	8.7790 6392	8.7430 1781	8.6715 7642	8.5660 1758
10	9.7746 0164	9.7304 1186	9.6865 1315	9.5995 7953	9.4713 0453
11	10.7298 9374	10.6770 2673	10.6245 3669	10.5206 7452	10.3678 2825
12	11.6812 2198	11.6189 3207	11.5571 2016	11.4349 1267	11.2550 7747
13	12.6288 0280	12.5561 5131	12.4842 9511	12.3423 4503	12.1337 4007
14	13.5720 5257	13.4887 0777	13.4060 9291	13.2430 2242	13.0037 0304
15	14.5115 8762	14.4166 2465	14.3225 4473	14.1369 9495	13.8650 5252
16	15.4472 2418	15.3399 2502	15.2336 8160	15.0243 1261	14.7178 7378
17	16.3789 7843	16.2536 3186	16.1399 3432	15.9050 2492	15.5622 5127
18	17.3068 6648	17.1727 6802	17.0401 3354	16.7791 8107	16.3982 6858
19	18.2309 0438	18.0823 5624	17.9355 0974	17.6468 2934	17.2260 0850
20	19.1511 0809	18.9874 1915	18.8256 9320	18.5080 1969	18.0455 5297
21	20.0674 9352	19.8879 7925	19.7107 1404	19.3627 9870	18.8569 8313
22	20.9800 7653	20.7840 5896	20.5906 0220	20.2112 1459	19.6603 7934
23	21.8888 7289	21.6756 8055	21.4653 8745	21.0533 1473	20.4558 2118
24	22.7933 9831	22.5623 6622	22.3350 9938	21.8891 4614	21.2433 8726
25	23.6951 6843	23.4456 3803	23.1997 6741	22.7187 5547	22.0231 5570
26	24.5926 9384	24.3240 1794	24.0594 2079	23.5421 8905	22.7952 0366
27	25.4865 0506	25.1980 2780	24.9140 8862	24.3594 9286	23.5596 0759
28	26.3766 0254	26.0676 3936	25.7637 9979	25.1707 1251	24.3164 4316
29	27.2630 0663	26.9330 2423	26.6085 8307	25.9758 9331	25.0657 8332
30	28.1457 3278	27.7940 5397	27.4484 6702	26.7750 8021	25.8077 0820
31	29.0247 9612	28.6507 9997	28.2834 8006	27.5683 1783	26.5422 8537
32	29.9002 1189	29.5032 3355	29.1136 5044	28.3556 5045	27.2695 8947
33	30.7719 9524	30.3515 2592	29.9390 0625	29.1371 2203	27.9896 9255
34	31.6401 6122	31.1955 4818	30.7595 7540	29.9127 7621	28.7026 6589
35	32.5047 2486	32.0353 7132	31.5753 8566	30.6826 5629	29.4085 8009
36	33.3657 0109	32.8710 1624	32.3864 6463	31.4468 0325	30.1075 0504
37	34.2231 0481	33.7025 0372	33.1923 3974	32.2052 6376	30.7995 0994
38	35.0769 5084	34.5293 5445	33.9945 3323	32.9580 8016	31.4846 6330
39	35.9272 5394	35.3530 8900	34.7915 8736	33.7052 9043	32.1630 3298
40	36.7740 2381	36.1722 2786	35.5840 1396	34.4469 3344	32.8346 8611
41	37.6172 9009	36.9872 9141	36.3718 4487	35.1830 6545	33.4996 8922
42	38.4570 5236	37.7982 9991	37.1551 0676	35.9137 1260	34.1581 0314
43	39.2933 3013	38.6052 7334	37.9333 2612	36.6389 2070	34.8100 0306
44	40.1261 3788	39.4082 3238	38.7080 2929	37.3587 3022	35.4554 5352
45	40.9554 8999	40.2071 9640	39.4777 4248	38.0731 8136	36.0945 0344
46	41.7814 0081	41.0021 8547	40.2429 9170	38.7823 1401	36.7272 3608
47	42.6038 8461	41.7932 1937	41.0038 0287	39.4861 6774	37.3536 9909
48	43.4229 5562	42.5803 1773	41.7602 0170	40.1847 3189	37.9739 5949
49	44.2386 2709	43.3633 0023	42.5122 1330	40.8781 9542	38.5880 1731
50	45.0509 1582	44.1427 3635	43.2593 6460	41.5664 4707	39.1961 1753

表七 年金現值表

$$(a_{\overline{n}|i}) = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

n	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{3}{4}\%$	1%	$1\frac{1}{4}\%$	$1\frac{1}{2}\%$	$1\frac{3}{4}\%$	2%
51	45.8598 3317	44.9181 9537	44.0031 7940	42.2495 7525	39.7981 3617		
52	46.6653 9401	45.6897 4664	44.7421 8335	42.9276 1812	40.3941 9423		
53	47.4676 1228	46.4574 5934	45.4769 0144	43.6006 1351	40.9843 5072		
54	48.2665 0184	47.2213 5258	46.2073 5853	44.2685 9902	41.5686 6408		
55	49.0620 7651	47.9814 4535	46.9335 7933	44.9316 1193	42.1471 9216		
56	49.8543 5003	48.7377 5657	47.6555 8841	45.5896 8926	42.7199 9224		
57	50.6433 3612	49.4903 0505	48.3734 1020	46.2423 6776	43.2871 2102		
58	51.4290 4840	50.2391 0950	49.0870 6808	46.8911 8388	43.8486 3468		
59	52.2115 0046	50.9841 8855	49.7965 8839	47.5346 7382	44.4045 3879		
60	52.9907 0584	51.7255 6075	50.5019 9394	48.1733 7352	44.9550 3841		
61	53.7666 7800	52.4632 4453	51.2033 0800	48.8073 1863	45.5000 3803		
62	54.5394 3035	53.1972 5824	51.9005 5478	49.4365 8445	46.0396 4161		
63	55.3089 7627	53.9276 2014	52.5937 5787	50.0610 4650	46.5739 0258		
64	56.0753 2905	54.6543 4839	53.2829 4073	50.6809 7906	47.1028 7385		
65	56.8385 0194	55.3774 6109	53.9681 2668	51.2962 5713	47.6266 0777		
66	57.5985 0814	56.0969 7621	54.6493 3888	51.9069 5497	48.1451 5621		
67	58.3553 6078	56.8129 1165	55.3266 0040	52.5131 0667	48.6585 7030		
68	59.1090 7296	57.5252 8522	55.9999 3413	53.1147 4607	49.1669 0149		
69	59.8596 5770	58.2341 1465	56.6693 6287	53.7119 0677	49.6701 9949		
70	60.6071 2798	58.9394 1756	57.3349 0925	54.3046 2210	50.1685 1435		
71	61.3514 9672	59.6412 1151	57.9965 9579	54.8929 2516	50.6618 9539		
72	62.0927 7680	60.3395 1394	58.6544 4488	55.4768 4380	51.1503 9148		
73	62.8309 8103	61.0343 4222	59.3084 7877	56.0564 2561	51.6340 5097		
74	63.5661 2216	61.7257 1366	59.9587 1959	56.6316 8795	52.1129 2175		
75	64.2982 1292	62.4136 4543	60.6051 8934	57.2026 6794	52.5870 5124		
76	65.0272 6596	63.0981 5406	61.2479 0988	57.7693 9746	53.0564 8637		
77	65.7532 9388	63.7792 5836	61.8869 0297	58.3319 0815	53.5212 7364		
78	66.4763 0924	64.4569 7350	62.5221 9021	58.8902 3141	53.9814 5903		
79	67.1963 2453	65.1313 1691	63.1637 9310	59.4443 9842	54.4370 3817		
80	67.9133 5221	65.8023 0538	63.7817 3301	59.9944 4012	54.8882 0611		
81	68.6274 0467	66.4699 5561	64.4060 3118	60.5403 8722	55.3348 5753		
82	69.3384 9426	67.1342 8419	65.0267 0874	61.0822 7019	55.7770 8666		
83	70.0466 3326	67.7953 0765	65.6437 8667	61.6201 1930	56.2149 3729		
84	70.7518 3393	68.4530 4244	66.2572 8585	62.1539 6456	56.6484 5276		
85	71.4541 0846	69.1075 0491	66.8672 2705	62.6838 3579	57.0776 7000		
86	72.1534 8898	69.7587 1135	67.4736 3089	63.2097 6257	57.5026 4951		
87	72.8499 2759	70.4066 7796	68.0765 1789	63.7317 7427	57.9234 1535		
88	73.5434 9633	71.0514 2086	68.6759 0845	64.2490 0002	58.3400 1520		
89	74.2341 3720	71.6929 5608	69.2718 2238	64.7641 6875	58.7524 9030		
90	74.9220 1212	72.3312 9953	69.8642 8121	65.2746 0918	59.1608 8148		
91	75.6069 3300	72.9684 6725	70.4533 0363	65.7812 4981	59.5652 2919		
92	76.2891 1168	73.5984 7487	71.0389 1001	66.2841 1892	59.9655 7346		
93	76.9684 0995	74.2273 3818	71.6211 2017	66.7832 4458	60.3619 5392		
94	77.6448 8955	74.8530 7282	72.1999 5379	67.2786 5467	60.7544 0982		
95	78.3185 6218	75.4756 9434	72.7754 3047	67.7703 7685	61.1429 8002		
96	78.9894 3950	76.0952 1825	73.3475 6967	68.2584 3856	61.5277 0299		
97	79.6575 3308	76.7116 5995	73.9163 9075	68.7428 6705	61.9086 1682		
98	80.3228 5450	77.3250 3478	74.4819 1294	69.2236 8933	62.2857 5923		
99	80.9854 1524	77.9353 5799	75.0441 5539	69.7009 3239	62.6591 6755		
100	81.6452 2677	78.5426 4477	75.6031 3712	70.1746 2272	63.0288 7877		

表七 年金現值表

$$(a_{\overline{n}|i}) = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

n	$\frac{1}{i}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{3}{4}\%$	1%	$1\frac{1}{2}\%$
101	82.3023 0049	79.1469 1021	76.1588 7702	70.6447 8682	63.3949 2947
102	82.9566 4777	79.7481 6937	76.7113 9392	71.1114 5094	63.7573 6591
103	83.6082 7991	80.3464 3718	77.2607 0648	71.5746 4113	64.1161 9397
104	84.2572 0818	80.9417 2354	77.8068 3331	72.0343 3325	64.4714 7918
105	84.9034 4381	81.5340 5825	78.3497 9288	72.4907 0298	64.8232 4671
106	85.5469 0795	82.1234 4104	78.8896 0355	72.9436 2579	65.1715 3140
107	86.1878 8175	82.7093 9158	79.4262 3359	73.3931 7696	65.5163 6772
108	86.8261 0628	83.2934 2446	79.9598 5115	73.8393 8160	65.8577 8983
109	87.4616 8258	83.8740 5419	80.4903 2423	74.2822 6461	66.1958 3151
110	88.0946 2163	84.4517 9522	81.0177 2093	74.7218 5073	66.5305 2625
111	88.7249 3437	85.0266 6191	81.5420 5695	75.1581 6450	66.8619 0718
112	89.3528 3171	85.5986 6356	82.0633 5606	75.5912 3027	67.1900 0710
113	89.9777 2450	86.1678 2942	82.5816 2991	76.0210 7223	67.5143 5852
114	90.6002 2354	86.7341 5832	83.0968 9803	76.4477 1437	67.8364 9358
115	91.2201 3959	87.2976 7027	83.6091 7785	76.8711 8052	68.1549 4414
116	91.8374 8338	87.8583 7838	84.1184 3671	77.2914 0431	68.4702 4172
117	92.4522 6558	88.4162 9690	84.6248 4182	77.7086 7922	68.7824 1755
118	93.0644 9681	88.9714 3970	85.1282 6033	78.1227 5353	69.0915 0252
119	93.6741 8767	89.5238 2059	85.6287 5926	78.5337 5536	69.3975 2725
120	94.2813 4889	90.0734 5333	86.1263 5554	78.9416 9267	69.7005 2303
121	94.8859 9036	90.6203 5157	86.6210 6602	79.3465 9322	70.0005 1636
122	95.4881 2315	91.1645 2892	87.1129 0742	79.7484 7962	70.2975 4145
123	96.0877 5747	91.7059 9893	87.6018 9638	80.1473 7432	70.5916 2520
124	96.6849 0367	92.2447 7505	88.0880 4946	80.5432 9957	70.8827 9722
125	97.2795 7209	92.7808 7070	88.5713 8308	80.9362 7749	71.1710 8636
126	97.8717 7301	93.3142 9920	89.0519 1361	81.3263 3001	71.4565 2115
127	98.4615 1666	93.8450 7384	89.5296 5731	81.7134 7892	71.7391 2985
128	99.0488 1324	94.3732 0780	90.0046 3032	82.0977 4583	72.0189 4045
129	99.6336 7290	94.8987 1422	90.4768 4873	82.4791 5219	72.2959 3064
130	100.2161 0576	95.4216 0619	90.9463 2351	82.8577 1929	72.5702 7786
131	100.7961 2189	95.9418 9671	91.4130 8554	83.2334 6328	72.8418 5927
132	101.3737 3131	96.4595 9872	91.8771 3561	83.6064 2013	73.1107 5175
133	101.9489 4401	96.9747 2509	92.3384 9442	83.9765 9566	73.3769 8193
134	102.5217 6994	97.4872 3865	92.7971 7758	84.3440 1554	73.6405 7617
135	103.0922 1899	97.9973 0214	93.2532 0060	84.7087 0029	73.9015 6056
136	103.6603 0104	98.5047 7825	93.7065 7892	85.0706 7026	74.1599 6095
137	104.2260 2590	99.0007 2960	94.1573 2787	85.4299 4567	74.4158 0293
138	104.7894 0335	99.5121 6875	94.6054 6270	85.7865 4657	74.6691 1181
139	105.3504 4314	100.0121 0821	95.0509 9857	86.1404 9288	74.9199 1263
140	105.9091 5496	100.5095 6041	95.4939 5056	86.4913 0434	75.1682 3038
141	106.4655 4847	101.0045 3772	95.9343 3364	86.8405 0059	75.4140 8948
142	107.0196 3330	101.4970 5246	96.3721 6272	87.1866 0108	75.6575 1434
143	107.5714 1902	101.9371 1688	96.8074 5261	87.5301 2514	75.8985 2905
144	108.1209 1517	102.4747 4316	97.2402 1804	87.8710 9195	76.1371 5747
145	108.6681 3126	102.9599 4344	97.6704 7364	88.2095 2055	76.3734 2324
146	109.2130 7674	103.4427 2979	98.0982 3397	88.5454 2982	76.6073 4974
147	109.7557 6103	103.9231 1422	98.5235 1350	88.8788 3854	76.8389 6014
148	110.2961 9353	104.4011 0838	98.9463 2863	89.2097 6530	77.0682 7737
149	110.8343 8356	104.8767 2505	99.3666 3765	89.5382 2353	77.2953 2413
150	111.3703 4044	105.3499 7518	99.7846 1073	89.8642 4673	77.5201 2290

表七 年金現值表

$$(a_n at i) = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

n	1½%	1½%	1½%	1½%	2%
1	0.9888 7515	0.9876 5432	0.9852 2167	0.9828 0098	0.9803 9216
2	1.9667 4923	1.9631 1538	1.9558 8342	1.9486 9875	1.9415 6094
3	2.9337 4460	2.9265 3371	2.9122 0042	2.8979 8403	2.8838 8327
4	3.8899 8230	3.8780 5798	3.8543 8465	3.8309 4254	3.8077 2870
5	4.8355 8200	4.8178 3504	4.7826 4497	4.7478 5508	4.7134 5951
6	5.7706 6205	5.7460 0992	5.6971 8717	5.6489 9762	5.6014 3089
7	6.6953 8948	6.6627 2585	6.5982 1396	6.5346 4139	6.4719 9107
8	7.6097 3002	7.5681 2429	7.4859 2508	7.4050 5297	7.3254 8144
9	8.5139 4810	8.4623 4498	8.3605 1732	8.2604 9432	8.1622 3671
10	9.4031 0690	9.3455 2591	9.2221 8455	9.1012 2291	8.9825 3501
11	10.2923 1832	10.2178 0337	10.0711 1779	9.9274 9181	9.7868 4805
12	11.1666 9302	11.0793 1197	10.9075 0521	10.7395 4969	10.5753 4122
13	12.0313 4044	11.9301 8466	11.7315 3222	11.5376 4097	11.3433 7375
14	12.8863 6880	12.7705 5275	12.5433 8150	12.3220 0587	12.1062 4877
15	13.7318 8509	13.6005 4592	13.3432 3301	13.0928 8046	12.8492 6350
16	14.5679 9514	14.4202 9227	14.1312 6405	13.8504 9677	13.5777 0931
17	15.3948 0360	15.2299 1829	14.9076 4931	14.5950 3232	14.2918 7188
18	16.2124 1395	16.0295 4893	15.6725 6089	15.3268 6272	14.9920 8205
19	17.0209 2350	16.8193 0759	16.4261 6837	16.0460 5673	15.6784 6211
20	17.8204 4845	17.5993 1613	17.1686 3879	16.7528 8130	16.3514 3334
21	18.6110 7387	18.3696 9495	17.9001 3673	17.4475 4919	17.0112 0916
22	19.3929 0371	19.1305 6201	18.6208 2437	18.1302 6948	17.6580 4820
23	20.1660 5580	19.8820 3744	19.3308 6145	18.8012 4764	18.2922 0412
24	20.9305 6693	20.6242 3451	20.0304 0537	19.4606 8565	18.9139 2560
25	21.6865 9276	21.3572 6865	20.7196 1120	20.1087 3196	19.5234 5647
26	22.4342 0792	22.0812 5299	21.3986 3172	20.7457 3166	20.1210 3576
27	23.1735 0598	22.7962 9925	22.0676 1746	21.3717 2644	20.7068 9780
28	23.9045 7946	23.5025 1778	22.7267 1671	21.9869 5474	21.2812 7236
29	24.6275 1936	24.2000 1756	23.3760 7558	22.5916 0171	21.8443 8466
30	25.3424 1766	24.8889 0623	24.0158 3801	23.1858 4934	22.3964 5555
31	26.0493 6233	25.5692 9010	24.6461 4582	23.7698 7650	22.9377 0152
32	26.7484 4236	26.2412 7418	25.2671 3874	24.3438 5897	23.4683 3482
33	27.4397 4522	26.9049 6215	25.8789 5442	24.9079 6951	23.9885 6355
34	28.1233 5745	27.5604 5644	26.4817 2849	25.4623 7789	24.4985 9172
35	28.7993 6460	28.2078 5822	27.0755 9458	26.0072 5100	24.9986 1933
36	29.4678 5127	28.8472 6737	27.6606 3431	26.5427 5233	25.4888 4248
37	30.1289 0114	29.4737 8259	28.2371 2740	27.0690 4455	25.9694 5341
38	30.7825 9692	30.1025 0133	28.8050 5163	27.5882 8437	26.4406 4060
39	31.4290 2044	30.7185 1933	29.3645 8238	28.0946 2837	26.9025 3883
40	32.0682 5260	31.3269 3316	29.9158 4520	28.5942 2955	27.3554 7924
41	32.7093 7340	31.9278 3522	30.4589 6079	29.0832 3789	27.7994 8945
42	33.3254 6195	32.5213 1874	30.9940 5004	29.5678 0135	28.2347 9358
43	33.9435 9649	33.1074 7530	31.5212 3157	30.0420 6522	28.6615 6233
44	34.5548 5438	33.6863 9536	32.0406 2223	30.5081 7221	29.0799 6307
45	35.1593 1212	34.2581 6825	32.5523 3718	30.9662 6261	29.4901 5937
46	35.7570 4536	34.8228 8222	33.0564 8933	31.4164 7431	29.8923 1360
47	36.3481 2891	35.3800 2442	33.5531 9195	31.8589 4231	30.2865 3196
48	36.9326 3674	35.9314 8091	34.0425 5365	32.2938 0129	30.6731 1937
49	37.5106 4292	36.4755 3670	34.5246 3339	32.7211 8063	31.0520 7801
50	38.0822 1703	37.0128 7574	34.9996 3807	33.1412 0946	31.4236 0589

表七 年金現值表

$$(a_n \text{ at } i) = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

n	1½%	1½%	1½%	1½%	2%
51	38.6474 3345	37.5435 8099	35.4676 7298	33.5540 1421	31.7878 4892
52	39.2063 6188	38.0677 3431	35.9287 4185	33.9597 1913	32.1449 4992
53	39.7590 7282	38.5854 1860	36.3829 9690	34.3584 4633	32.4950 4894
54	40.3056 3394	39.0967 0776	36.8305 8382	34.7503 1579	32.8382 8327
55	40.8461 1514	39.6016 8637	37.2714 6681	35.1354 4550	33.1747 8752
56	41.3805 8858	40.1004 3128	37.7058 7863	35.5139 5135	33.5046 9365
57	41.9091 0613	40.5930 1855	38.1338 7058	35.8859 4727	33.8281 3103
58	42.4317 4896	41.0795 2449	38.5555 3751	36.2515 4523	34.1452 2650
59	42.9485 7746	41.5600 2419	38.9709 7292	36.6108 5526	34.4501 0441
60	43.4596 5633	42.0345 9179	39.3802 6889	36.9639 8552	34.7608 8668
61	43.9650 4952	42.5033 0054	39.7835 1614	37.3110 4228	35.0596 9282
62	44.4648 2029	42.9662 2275	40.1808 0408	37.6521 3000	35.3526 4002
63	44.9590 3119	43.4234 2988	40.5722 2077	37.9873 5135	35.6398 4316
64	45.4477 4407	43.8749 9247	40.9578 5298	38.3168 0723	35.9214 1486
65	45.9310 2009	44.3209 3022	41.3377 8618	38.6405 9678	36.1974 6555
66	46.4089 1975	44.7614 6195	41.7121 0461	38.9588 1748	36.4681 0948
67	46.8815 0284	45.1965 0563	42.0808 9125	39.2715 6509	36.7334 3478
68	47.3488 2832	45.6261 7840	42.4442 2783	39.5789 3375	36.9935 6351
69	47.8109 5527	46.0505 4656	42.8021 9490	39.8810 1597	37.2485 9168
70	48.2679 4094	46.4696 7562	43.1548 7133	40.1779 0267	37.4986 1929
71	48.7198 4270	46.8836 3024	43.5023 3678	40.4696 8321	37.7437 4441
72	49.1667 1714	47.2924 7431	43.8446 6677	40.7564 4542	37.9840 6314
73	49.6083 2016	47.6962 7093	44.1819 3771	41.0382 7560	38.2196 6975
74	50.0456 0708	48.0950 3240	44.5142 2434	41.3152 5837	38.4506 5662
75	50.4777 3259	48.4889 7027	44.8416 0034	41.5874 7771	38.6771 1433
76	50.9050 5077	48.8779 9533	45.1641 3826	41.8550 1495	38.8991 3170
77	51.3276 1510	49.2622 1761	45.4819 0962	42.1179 5081	39.1167 9378
78	51.7454 7847	49.6416 9640	45.7949 2485	42.3763 6443	39.3301 9194
79	52.1586 9317	50.0164 9027	46.1034 3335	42.6303 3359	39.5394 0386
80	52.5673 1092	50.3866 5706	46.4073 2249	42.8799 3474	39.7445 1359
81	52.9713 3286	50.7522 5389	46.7067 2265	43.1252 4298	39.9456 0156
82	53.3709 5957	51.1133 3717	47.0018 9720	43.3663 3217	40.1427 4663
83	53.7660 9104	51.4699 6204	47.2923 1251	43.6032 7486	40.3360 2611
84	54.1563 2674	51.8221 8532	47.5786 3301	43.8361 4237	40.5255 1579
85	54.5432 1557	52.1700 5958	47.8607 2218	44.0650 0479	40.7112 8999
86	54.9253 0588	52.5136 3909	48.1386 4254	44.2899 3099	40.8934 2156
87	55.3031 4549	52.8529 7688	48.4124 5571	44.5109 8869	41.0719 3192
88	55.6767 8169	53.1881 2531	48.6822 2237	44.7282 4441	41.2470 4110
89	56.0462 6126	53.5191 3611	48.9480 0234	44.9417 6355	41.4186 6774
90	56.4116 3041	53.8460 0035	49.2093 6452	45.1516 1037	41.5869 2916
91	56.7729 3490	54.1689 4850	49.4678 3696	45.3578 4803	41.7518 9133
92	57.1302 1992	54.4878 5037	49.7220 0686	45.5605 3860	41.9133 1895
93	57.4835 3021	54.8028 1518	49.9724 2055	45.7597 4310	42.0721 7545
94	57.8329 0997	55.1138 9154	50.2191 3355	45.9555 2147	42.2276 2299
95	58.1784 0294	55.4211 2744	50.4622 0054	46.1479 3265	42.3800 2254
96	58.5200 5235	55.7245 7031	50.7016 7541	46.3370 3455	42.5294 3386
97	58.8579 0096	56.0242 6698	50.9376 1124	46.5228 8408	42.6759 1555
98	59.1919 9106	56.3202 6368	51.1700 6034	46.7055 3718	42.8195 2505
99	59.5223 6446	56.6126 0610	51.3990 7422	46.8850 4882	42.9603 1367
100	59.8490 6251	56.9013 3936	51.6247 0367	47.0614 7304	43.0983 5164

表七 年金現值表

$$(a_n at i) = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

n	2½%	2½%	2½%	3%	3½%
1	0.9779 9511	0.9756 0976	0.9732 3601	0.9708 7879	0.9661 8557
2	1.9344 6955	1.9274 2415	1.9204 2434	1.9134 6970	1.8996 9428
3	2.8698 9687	2.8560 2356	2.8422 6213	2.8286 1135	2.8016 8698
4	3.7847 4021	3.7619 7421	3.7394 2787	3.7170 9340	3.6730 7921
5	4.6794 6253	4.6458 2350	4.6125 8186	4.5797 0719	4.5150 5238
6	5.5544 7680	5.5081 2536	5.4623 0678	5.4171 9144	5.3285 5302
7	6.4102 4626	6.3493 9030	6.2894 0306	6.2302 8296	6.1145 4398
8	7.2471 8461	7.1701 3717	7.0943 1441	7.0196 9219	6.8739 5554
9	8.0657 0622	7.9708 6553	7.8776 7826	7.7861 0892	7.6076 8651
10	8.8682 1635	8.7520 6393	8.6400 7616	8.5302 0284	8.3166 0532
11	9.6491 1134	9.5142 0871	9.3820 6926	9.2526 2411	9.0015 5104
12	10.4147 7882	10.2577 6460	10.1042 0366	9.9540 0899	9.6633 3433
13	11.1635 9787	10.9831 8497	10.8070 1086	10.6349 5533	10.3027 3849
14	11.8959 3924	11.6909 1217	11.4910 0314	11.2960 7314	10.9205 2028
15	12.6121 6551	12.3813 7773	12.1566 9892	11.9379 3509	11.5174 1090
16	13.3126 3131	13.0550 0266	12.8045 7315	12.5611 0203	12.0941 1681
17	13.9976 8945	13.7121 9772	13.4351 0769	13.1661 1847	12.6513 2059
18	14.6676 6106	14.3533 6363	14.0487 6661	13.7535 1303	13.1896 8173
19	15.3228 9590	14.9783 9134	14.6460 0157	14.3237 9911	13.7098 3742
20	15.9637 1237	15.5891 6229	15.2272 5213	14.8774 7486	14.2124 0330
21	16.5904 2775	16.1845 4857	15.7929 4612	15.4150 2414	14.6979 7420
22	17.2033 5232	16.7654 1324	16.3434 9987	15.9369 1664	15.1671 2434
23	17.8027 8955	17.3321 1048	16.8793 1861	16.4436 0839	15.6204 1647
24	18.3890 3624	17.8849 5583	17.4007 9670	16.9355 4212	16.0583 6760
25	18.9623 8263	18.4243 7642	17.9083 1795	17.4131 4769	16.4815 1459
26	19.5231 1260	18.9506 1114	18.4022 5592	17.8768 4242	16.8903 5226
27	20.0715 0376	19.4640 1037	18.8829 7413	18.3270 3147	17.2853 6451
28	20.6078 2764	19.9648 3866	19.3508 2640	18.7641 0823	17.6670 1885
29	21.1323 4977	20.4535 4991	19.8061 5703	19.1884 5459	18.0357 6700
30	21.6453 2985	20.9302 9259	20.2493 0130	19.6004 4135	18.3920 4541
31	22.1470 2186	21.3954 0741	20.6805 8520	20.0004 2349	18.7362 7576
32	22.6376 7419	21.8491 7796	21.1003 2623	20.3887 6553	19.0688 6547
33	23.1175 2977	22.2918 8094	21.5088 3332	20.7657 9178	19.3902 0318
34	23.5868 2618	22.7237 3623	21.9064 0712	21.1318 3668	19.7006 8423
35	24.0457 9577	23.1451 5734	22.2933 4026	21.4872 2007	20.0006 6110
36	24.4946 6579	23.5562 5107	22.6699 1753	21.8322 5250	20.2904 9381
37	24.9336 5848	23.9573 1812	23.0364 1609	22.1672 3544	20.5705 2542
38	25.3629 9118	24.3486 0304	23.3931 0568	22.4924 6159	20.8410 8736
39	25.7823 7646	24.7303 4443	23.7402 4884	22.8082 1513	21.1024 9987
40	26.1935 2221	25.1027 7505	24.0781 0106	23.1147 7197	21.3550 7234
41	26.5951 3174	25.4661 2200	24.4069 1101	23.4123 9997	21.5991 0371
42	26.9879 0390	25.8206 0683	24.7269 2069	23.7013 5920	21.8348 8281
43	27.3720 3316	26.1664 4569	25.0383 6563	23.9819 0213	22.0626 8870
44	27.7477 0369	26.5038 4945	25.3414 7507	24.2542 7392	22.2827 9102
45	28.1151 1950	26.8330 2386	25.6364 7209	24.5187 1254	22.4954 5026
46	28.4744 4450	27.1541 6962	25.9235 7381	24.7754 4907	22.7009 1813
47	28.8258 6259	27.4674 3255	26.2029 9154	25.0247 0783	22.8994 3780
48	29.1695 4777	27.7731 5371	26.4749 3094	25.2667 0664	23.0912 4425
49	29.5056 7019	28.0713 6947	26.7395 9215	25.5016 5693	23.2765 6450
50	29.8343 9627	28.3623 1168	26.9971 6993	25.7297 6401	23.4556 1757

表七 年金現值表

$$(a_n \text{ at } i) = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

n	2½%	2½%	2½%	3%	3½%
51	30.1558 8877	28.6461 5774	27.2478 5400	25.9512 2719	23.6286 1630
52	30.4703 0687	28.9230 8072	27.4918 2871	26.1662 3999	23.7957 6454
53	30.7778 0623	29.1932 4948	27.7292 7368	26.3749 9028	23.9572 6043
54	31.0785 3910	29.4568 2876	27.9603 6368	26.5776 6047	24.1132 9510
55	31.3726 5438	29.7139 7928	28.1852 6879	26.7744 2764	24.2640 5323
56	31.6602 9768	29.9648 5784	28.4041 5454	26.9654 6373	24.4097 1327
57	31.9416 1142	30.2096 1740	28.6171 8203	27.1509 3566	24.5504 4760
58	32.2167 3489	30.4484 0722	28.8245 0806	27.3310 0549	24.6864 2281
59	32.4858 0429	30.6813 7290	29.0262 8522	27.5058 3058	24.8177 9981
60	32.7489 5285	30.9088 5649	29.2226 6201	27.6755 6367	24.9447 3412
61	33.0063 1036	31.1303 9657	29.4137 8298	27.8403 5307	25.0673 7596
62	33.2580 0573	31.3467 2336	29.5997 3879	28.0003 4279	25.1858 7049
63	33.5041 6208	31.5577 8377	29.7808 1634	28.1556 7261	25.3003 5796
64	33.7449 0179	31.7636 0148	29.9569 9887	28.3064 7826	25.4109 7388
65	33.9803 4405	31.9645 7705	30.1284 6605	28.4528 9152	25.5178 4916
66	34.2106 0543	32.1605 6298	30.2953 4409	28.5950 4031	25.6211 1030
67	34.4357 9993	32.3517 6876	30.4577 5581	28.7330 4884	25.7208 7951
68	34.6560 3905	32.5383 1099	30.6158 2074	28.8670 3771	25.8172 7489
69	34.8714 3183	32.7203 0340	30.7696 5522	28.9971 2399	25.9104 1052
70	35.0820 8492	32.8978 5698	30.9193 7247	29.1234 2135	26.0003 9664
71	35.2881 0261	33.0710 7993	31.0650 8270	29.2460 4015	26.0873 3975
72	35.4895 8691	33.2400 7803	31.2068 9314	29.3650 8752	26.1713 4275
73	35.6866 3756	33.4049 5417	31.3449 0316	29.4806 6750	26.2525 0503
74	35.8793 5214	33.5658 0895	31.4792 2936	29.5928 3106	26.3309 2278
75	36.0678 2305	33.7227 4044	31.6099 5558	29.7018 2628	26.4066 3868
76	36.2521 5262	33.8758 4433	31.7371 3304	29.8075 9333	26.4798 9244
77	36.4324 2310	34.0252 1398	31.8610 0540	29.9102 8964	26.5506 2072
78	36.6087 2675	34.1709 4047	31.9815 1377	30.0099 8994	26.6189 5721
79	36.7811 5085	34.3131 1265	32.0987 9685	30.1067 8635	26.6849 8261
80	36.9497 8079	34.4518 1722	32.2129 4098	30.2007 6345	26.7487 7567
81	37.1147 0004	34.5871 3875	32.3240 3015	30.2920 0335	26.8104 1127
82	37.2759 9026	34.7191 5976	32.4321 4613	30.3805 8577	26.8699 6258
83	37.4337 3130	34.8479 6074	32.5373 6850	30.4665 8813	26.9275 0008
84	37.5880 0127	34.9736 2023	32.6397 7469	30.5500 8556	26.9830 9186
85	37.7388 7655	35.0962 1486	32.7394 4009	30.6311 5103	27.0368 0373
86	37.8864 3183	35.2158 1938	32.8364 3304	30.7098 5537	27.0886 9926
87	38.0307 4018	35.3325 0671	32.9308 3994	30.7862 6735	27.1388 3986
88	38.1718 7304	35.4468 4801	33.0227 1527	30.8604 5374	27.1872 8489
89	38.3099 0023	35.5574 1269	33.1121 3165	30.9324 7936	27.2340 9168
90	38.4448 9025	35.6657 6848	33.1991 5489	31.0024 0714	27.2793 1564
91	38.5769 0978	35.7714 8144	33.2838 4905	31.0702 9820	27.3230 1028
92	38.7060 2423	35.8746 1604	33.3662 7644	31.1362 1184	27.3652 2732
93	38.8322 3754	35.9752 3516	33.4464 9776	31.2002 0567	27.4060 1673
94	38.9557 9221	36.0734 0016	33.5245 7202	31.2623 3560	27.4454 2680
95	39.0765 6940	36.1691 7089	33.6005 5671	31.3226 5592	27.4835 0415
96	39.1946 8390	36.2626 0574	33.6745 0775	31.3812 1934	27.5202 9387
97	39.3102 0920	36.3537 6170	33.7464 7956	31.4380 7708	27.5558 3948
98	39.4231 8748	36.4426 9434	33.8165 2512	31.4932 7367	27.5901 3303
99	39.5336 7568	36.5294 5790	33.8846 9598	31.5468 7250	27.6233 6529
100	39.6417 4052	36.6141 0526	33.9510 4232	31.5989 0534	27.6554 2540

表七 年金現值表

$$(a_{\overline{n}|i}) = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

n	4%	4½%	5%	5½%	6%
1	0.9615 3846	0.9569 3780	0.9523 8095	0.9478 6730	0.9433 9623
2	1.8860 9467	1.8726 6775	1.8594 1043	1.8463 1971	1.8333 9267
3	2.7750 9103	2.7489 6435	2.7232 4303	2.6979 3338	2.6730 1195
4	3.6298 9522	3.5875 2570	3.5459 5050	3.5051 5012	3.4651 0561
5	4.4518 2233	4.3899 7674	4.3294 7667	4.2702 8448	4.2123 6379
6	5.2421 3626	5.1578 7248	5.0756 9206	4.9955 3031	4.9173 2433
7	6.0020 5467	5.8927 0094	5.7863 7340	5.6829 6712	5.5823 8144
8	6.7327 4487	6.5958 8607	6.4632 1276	6.3345 6599	6.2097 9381
9	7.4353 3161	7.2687 9050	7.1078 2168	6.9521 9525	6.8016 9227
10	8.1108 9578	7 9127 1813	7.7217 3493	7 5376 2583	7 3600 8705
11	8.7604 7671	8.5289 1692	8.3034 1422	8.0925 3633	7.8968 7458
12	9.3850 7376	9.1185 8078	8.8632 5164	8.6185 1785	8.3838 4394
13	9.9856 4785	9.6328 5242	9.3935 7299	9.1170 7853	8.8526 8296
14	10.5631 2293	10.2228 2528	9.8986 4094	9.5896 4790	9.2949 8393
15	11.1183 8743	10.7395 4573	10.3796 5804	10.0375 8094	9.7122 4399
16	11.6522 9561	11.2340 1505	10.8377 6956	10.4621 6203	10.1058 9527
17	12.1656 6885	11.7071 9143	11.2740 6625	10.8646 0356	10.4772 5969
18	12.6592 9697	12.1599 9180	11.6895 8390	11.2460 7447	10.8276 0348
19	13.1339 3940	12.5932 9359	12.0853 2086	11.6076 5352	11.1581 1649
20	13.5903 2634	13.0079 3645	12.4622 1034	11.9503 8249	11.4699 2122
21	14.0291 5995	13.4047 2288	12.8211 5271	12.2752 4406	11.7640 7662
22	14.4511 1533	13.7844 2476	13.1630 0258	12.5831 6973	12.0415 8172
23	14.8568 4167	14.1477 7489	13.4885 7338	12.8750 4240	12.3033 7898
24	15.2469 6314	14.4954 7837	13.7986 4179	13.1516 9395	12.5503 5753
25	15.6220 7994	14.8282 0396	14.0939 4457	13.4139 3266	12.7833 5616
26	15.9827 6918	15.1466 1145	14.3751 8530	13.6624 9541	13.0031 6619
27	16.3295 8575	15.4513 0282	14.6430 3362	13.8980 9991	13.2105 3414
28	16.6630 6322	15.7428 7351	14.8981 2726	14.1214 2172	13.4061 6428
29	16.9837 1463	16.0218 8853	15.1410 7503	14.3331 0116	13.5907 2102
30	17.2920 3330	16.2888 8854	15.3724 5188	14.5337 4517	13.7643 3115
31	17.5884 9356	16.5443 9095	15.5928 1050	14.7239 2907	13.9290 8599
32	17.8735 5150	16.7888 9036	15.8023 7637	14.9041 9317	14.0840 4339
33	18.1476 4567	17.0228 6207	16.0025 4921	15.0750 6936	14.2302 2961
34	18.4111 9776	17.2467 5796	16.1929 0401	15.2370 9257	14.3681 4114
35	18.6646 1323	17.4610 1240	16.3741 9429	15.3905 5220	14.4982 4636
36	18.9032 8195	17.6660 4058	16.5468 5171	15.5360 6843	14.6209 8713
37	19.1425 7830	17.8622 3979	16.7112 8.34	15.6739 9851	14.7367 8031
38	19.3678 6423	18.0499 9023	16.8678 9271	15.8047 3793	14.8460 1916
39	19.5844 8484	18.2296 5572	17.0170 4067	15.9286 6154	14.9490 7468
40	19.7927 7388	18.4015 8442	17.1590 8635	16.0461 2469	15.0462 9687
41	19.9930 5181	18.5661 0949	17.2943 6796	16.1574 6416	15.1380 1592
42	20.1856 2674	18.7235 4975	17.4232 0758	16.2629 9920	15.2245 4332
43	20.3707 9494	18.8742 1029	17.5459 1198	16.3630 3242	15.3061 7294
44	20.5488 4129	19.0183 8305	17.6627 7331	16.4578 5063	15.3831 8202
45	20.7200 3970	19.1563 4742	17.7740 6982	16.5477 2572	15.4558 3209
46	20.8846 5356	19.2883 7074	17.8800 6650	16.6329 1537	15.5243 6990
47	21.0429 3612	19.4147 0884	17.9810 1571	16.7136 6386	15.5890 2821
48	21.1951 3088	19.5356 0654	18.0771 5732	16.7902 0271	15.6500 2661
49	21.3414 7200	19.6512 9813	18.1687 2173	16.8627 5139	15.7075 7227
50	21.4821 8462	19.7620 0778	18.2559 2546	16.9315 1790	15.7618 6064

表七 年金現值表

$$(a_n \text{ at } i) = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

n	4%	4½%	5%	5½%	6%
51	21.6174 8521	19.8679 5003	18.3389 7663	16.9966 0948	15.8130 7607
52	21.7475 8193	19.9693 3017	18.4180 7298	17.0584 8287	15.8613 9252
53	21.8726 7493	20.0663 4466	18.4934 0284	17.1170 4538	15.9069 7408
54	21.9929 5667	20.1591 8149	18.5651 4556	17.1725 5486	15.9499 7554
55	22.1086 1218	20.2480 2057	18.6334 7196	17.2251 7048	15.9905 4297
56	22.2189 1940	20.3330 3404	18.6985 4473	17.2750 4311	16.0288 1412
57	22.3267 4948	20.4148 8664	18.7605 1879	17.3223 1575	16.0649 1898
58	22.4295 6676	20.4922 3602	18.8195 4170	17.3671 2393	16.0989 8017
59	22.5284 2957	20.5667 3303	18.8757 6400	17.4095 9614	16.1311 1537
60	22.6234 8997	20.6380 2204	18.9292 8952	17.4498 5416	16.1614 2771
61	22.7148 9421	20.7062 4118	18.9802 7574	17.4880 1343	16.1900 2614
62	22.8027 8289	20.7715 2266	19.0283 3404	17.5241 8334	16.2170 0579
63	22.8872 9124	20.8339 9298	19.0750 8003	17.5584 6762	16.2424 5829
64	22.9685 4927	20.8937 7319	19.1191 2384	17.5909 6457	16.2664 7009
65	23.0466 8199	20.9509 7913	19.1610 7033	17.6217 6737	16.2891 2272
66	23.1218 0961	21.0057 2165	19.2010 1936	17.6509 6433	16.3104 9314
67	23.1940 4770	21.0581 0684	19.2390 6603	17.6786 3917	16.3306 5390
68	23.2635 0740	21.1082 3621	19.2753 0101	17.7048 7125	16.3496 7349
69	23.3302 9558	21.1562 0690	19.3098 1048	17.7297 2379	16.3676 1650
70	23.3945 1498	21.2021 1187	19.3426 7665	17.7533 0406	16.3845 4387
71	23.4562 6440	21.2460 4067	19.3739 7776	17.7756 4366	16.4005 1303
72	23.5156 3885	21.2880 7662	19.4037 8334	17.7968 1864	16.4155 7838
73	23.5727 2966	21.3283 0298	19.4321 7937	17.8168 8970	16.4297 9093
74	23.6276 2463	21.3667 9711	19.4592 1845	17.8359 1441	16.4431 9899
75	23.6804 0834	21.4036 3360	19.4849 6995	17.8539 4731	16.4558 4810
76	23.7311 6187	21.4388 8383	19.5094 9519	17.8710 4010	16.4677 8123
77	23.7799 6333	21.4726 1611	19.5328 5257	17.8872 4180	16.4790 3889
78	23.8268 8782	21.5048 9579	19.5550 9763	17.9025 9887	16.4896 5933
79	23.8720 0752	21.5357 8545	19.5762 8351	17.9171 5532	16.4996 7862
80	23.9153 9185	21.5653 4493	19.5964 6048	17.9309 5291	16.5091 3077
81	23.9571 0754	21.5936 3151	19.6156 7665	17.9440 3120	16.5180 4790
82	23.9972 1879	21.6207 0001	19.6339 7776	17.9564 2768	16.5264 6028
83	24.0357 8730	21.6466 0288	19.6514 0739	17.9681 7789	16.5343 9649
84	24.0723 7240	21.6713 9032	19.6680 0704	17.9793 1554	16.5418 8348
85	24.1085 3116	21.6951 1035	19.6838 1623	17.9898 7255	16.5489 4663
86	24.1428 1842	21.7178 0895	19.6988 7260	17.9998 7919	16.5556 1008
87	24.1757 8694	21.7395 3009	19.7132 1200	18.0093 6416	16.5618 9630
88	24.2074 8745	21.7603 1583	19.7268 6857	18.0183 5466	16.5678 2670
89	24.2379 6870	21.7802 0358	19.7398 7483	18.0268 7045	16.5734 2141
90	24.2672 7759	21.7992 4075	19.7522 6174	18.0349 5899	16.5786 9944
91	24.2954 5923	21.8174 5526	19.7640 5880	18.0426 1041	16.5836 7872
92	24.3225 5695	21.8348 8542	19.7752 9410	18.0498 6769	16.5883 7615
93	24.3486 1245	21.8515 6499	19.7859 9438	18.0567 4662	16.5923 0769
94	24.3736 6582	21.8675 2631	19.7961 8512	18.0632 6694	16.5969 8339
95	24.3977 5559	21.8823 0030	19.8058 9059	18.0694 4734	16.6009 3244
96	24.4209 1884	21.8974 1655	19.8151 3300	18.0753 0553	16.6046 5325
97	24.4431 9119	21.9114 0340	19.8239 3705	18.0803 5333	16.6081 6344
98	24.4646 0692	21.9247 8794	19.8323 2100	18.0861 2164	16.6114 7494
99	24.4851 9896	21.9375 9612	19.8403 0571	18.0911 1055	16.6145 9900
100	24.5049 9900	21.9498 5274	19.8479 1020	18.0958 3939	16.6175 4623

表七 年金現值表

$$(a_{\overline{n}|} \text{ at } i) = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

n	6½%	7%	7½%	8%	8½%
1	0.9389 6714	0.9345 7944	0.9302 3256	0.9259 2593	0.9216 5899
2	1.8206 2042	1.8080 1817	1.7955 6517	1.7832 6475	1.7711 1427
3	2.6484 7551	2.6243 1604	2.6005 2574	2.5770 9699	2.5540 2237
4	3.4257 9860	3.3872 1126	3.3493 2627	3.3121 2684	3.2755 9666
5	4.1556 7944	4.1001 9744	4.0458 8490	3.9927 1004	3.9406 4203
6	4.8410 1356	4.7665 3966	4.6938 4642	4.6228 7966	4.5535 8717
7	5.4845 1977	5.3892 8940	5.2966 0132	5.2063 7006	5.1185 1352
8	6.0887 5096	5.9712 9851	5.8573 0355	5.7466 3894	5.6391 8297
9	6.6561 0419	6.5152 3225	6.3788 8703	6.2468 8791	6.1190 6264
10	7.1888 3022	7.0235 8154	6.8640 8096	6.7100 8140	6.5613 4806
11	7.6890 4246	7.4986 7434	7.3154 2415	7.1389 6426	6.9689 8439
12	8.1587 2532	7.9426 8630	7.7352 7827	7.5360 7802	7.3446 8607
13	8.5997 4208	8.3576 5074	8.1258 4026	7.9037 7594	7.6909 5490
14	9.0138 4233	8.7454 6799	8.4891 5373	8.2442 3693	8.0100 9668
15	9.4026 6885	9.1079 1401	8.8271 1974	8.5594 7869	8.3042 3653
16	9.7677 6418	9.4466 4880	9.1415 0674	8.8513 6916	8.5753 3325
17	10.1105 7670	9.7632 2399	9.4339 5676	9.1216 3811	8.8251 9194
18	10.4324 6638	10.0590 8691	9.7060 0903	9.3718 8714	9.0554 7644
19	10.7347 1022	10.3355 9524	9.9590 7821	9.6035 9920	9.2677 2022
20	11.0185 0725	10.5940 1425	10.1944 9136	9.8181 4741	9.4633 2661
21	11.2849 3333	10.8355 2733	10.4134 8033	10.0168 0316	9.6436 2821
22	11.5351 9562	11.0612 4050	10.6171 9101	10.2007 4366	9.8097 9559
23	11.7701 3673	11.2721 8738	10.8066 8931	10.3710 5895	9.9629 4624
24	11.9907 3871	11.4693 3400	10.9829 6680	10.5287 5823	10.1040 9700
25	12.1978 7672	11.6535 8318	11.1469 4586	10.6747 7619	10.2341 9078
26	12.3923 7251	11.8257 7867	11.2994 8452	10.8099 7795	10.3540 9288
27	12.5749 9766	11.9897 0904	11.4413 8095	10.9351 6477	10.4646 0174
28	12.7464 7668	12.1371 1125	11.5733 7763	11.0510 7849	10.5664 5321
29	12.9074 8984	12.2776 7407	11.6961 6524	11.1584 0601	10.6603 2554
30	13.0586 7591	12.4090 4118	11.8103 8627	11.2577 8334	10.7468 4382
31	13.2006 3465	12.5318 1419	11.9166 3839	11.3497 9939	10.8265 8416
32	13.3330 2925	12.6465 5532	12.0154 7757	11.4349 9944	10.9000 7757
33	13.4590 8850	12.7537 9002	12.1074 2099	11.5138 8337	10.9678 1343
34	13.5766 0892	12.8540 0936	12.1929 4976	11.5869 3367	11.0302 4279
35	13.6889 5673	12.9476 7230	12.2725 1141	11.6545 6822	11.0877 8139
36	13.7905 6970	13.0352 0776	12.3465 2324	11.7171 9279	11.1408 1233
37	13.8878 5887	13.1170 1660	12.4153 6953	11.7751 7851	11.1896 8378
38	13.9792 1021	13.1934 7345	12.4794 1351	11.8288 6899	11.2347 3620
39	14.0649 8611	13.2649 2346	12.5389 8931	11.8785 8240	11.2762 5457
40	14.1455 2687	13.3317 0384	12.5944 0866	11.9246 1333	11.3145 2034
41	14.2211 5199	13.3941 2041	12.6459 6155	11.9672 3457	11.3497 8833
42	14.2921 6149	13.4524 4838	12.6939 1772	12.0066 9867	11.3822 9359
43	14.3588 3708	13.5069 6167	12.7385 2811	12.0432 3951	11.4122 5197
44	14.4214 4327	13.5579 0810	12.7800 2615	12.0770 7362	11.4398 6357
45	14.4802 2842	13.6055 2159	12.8186 2308	12.1084 0150	11.4653 1205
46	14.5354 2575	13.6500 2018	12.8545 3358	12.1374 0880	11.4887 6686
47	14.5872 5422	13.6916 0764	12.8879 4287	12.1642 6741	11.5103 8420
48	14.6359 1946	13.7304 7443	12.9190 1662	12.1891 3649	11.5303 0302
49	14.6816 1451	13.7667 9853	12.9479 2244	12.2121 6341	11.5486 7099
50	14.7245 2067	13.8007 4629	12.9743 1157	12.2334 8464	11.5655 9538

表八年賦金表

$$\frac{1}{(s_n \text{ at } i)} = \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} = i + \frac{1}{(s_n \text{ at } i)}$$

n	1% i%	1% i%	1% i%	1% i%	1% i%
1	1.0041 6867	1.0050 0000	1.0058 3333	1.0075 0000	1.0100 0000
2	0.5081 2717	0.5097 5312	0.5043 7924	0.5056 3200	0.5075 1244
3	0.3361 1496	0.3366 7221	0.3372 2976	0.3383 4579	0.3400 2211
4	0.2526 0958	0.2531 3279	0.2536 5644	0.2547 0501	0.2562 8109
5	0.2025 0693	0.2030 0997	0.2035 1357	0.2045 2242	0.2060 3980
6	0.1691 0564	0.1695 9546	0.1700 8594	0.1710 6891	0.1725 4837
7	0.1452 4800	0.1457 2854	0.1462 0936	0.1471 7488	0.1486 2828
8	0.1273 5512	0.1278 2886	0.1283 0351	0.1292 5552	0.1306 9029
9	0.1134 3876	0.1139 0736	0.1143 7698	0.1153 1929	0.1167 4037
10	0.1023 0596	0.1027 7057	0.1032 3632	0.1041 7123	0.1055 8208
11	0.0931 9757	0.0936 5903	0.0941 2175	0.0950 5094	0.0964 5408
12	0.0856 0748	0.0860 6643	0.0865 2675	0.0874 5148	0.0888 4879
13	0.0791 8532	0.0796 4224	0.0801 0064	0.0810 2188	0.0824 1482
14	0.0736 8082	0.0741 3609	0.0745 9295	0.0755 1146	0.0769 0117
15	0.0689 1045	0.0693 6436	0.0698 1999	0.0707 3639	0.0721 2378
16	0.0647 3655	0.0651 8937	0.0656 4401	0.0665 5879	0.0679 4460
17	0.0610 5387	0.0615 0579	0.0619 5466	0.0628 7321	0.0642 5806
18	0.0577 8033	0.0582 3173	0.0586 8499	0.0595 9766	0.0609 8205
19	0.0548 5191	0.0553 0253	0.0557 5532	0.0566 6740	0.0580 5175
20	0.0522 1630	0.0526 6645	0.0531 1839	0.0540 3063	0.0554 1532
21	0.0498 3133	0.0502 8163	0.0507 3333	0.0516 4543	0.0530 3075
22	0.0476 6427	0.0481 1380	0.0485 6585	0.0494 7748	0.0508 6371
23	0.0456 8531	0.0461 2465	0.0465 8663	0.0474 9846	0.0488 8584
24	0.0438 7139	0.0443 2061	0.0447 7258	0.0456 8474	0.0470 7347
25	0.0422 0270	0.0426 5136	0.0431 0383	0.0440 1650	0.0454 0675
26	0.0406 6247	0.0411 1163	0.0415 6376	0.0424 7693	0.0438 6888
27	0.0392 3645	0.0396 8565	0.0401 3793	0.0410 5176	0.0424 4553
28	0.0379 1239	0.0383 6157	0.0388 1415	0.0397 2871	0.0411 2444
29	0.0366 7974	0.0371 2914	0.0375 8186	0.0384 9723	0.0398 9502
30	0.0355 2936	0.0359 7892	0.0364 3191	0.0373 4816	0.0387 4811
31	0.0344 5330	0.0349 0304	0.0353 5633	0.0362 7352	0.0376 7573
32	0.0334 4458	0.0338 9453	0.0343 4815	0.0352 6634	0.0366 7089
33	0.0324 9703	0.0329 4727	0.0334 0124	0.0343 2048	0.0357 2744
34	0.0316 0540	0.0320 5586	0.0325 1020	0.0334 3053	0.0348 3997
35	0.0307 6476	0.0312 1550	0.0316 7024	0.0325 9170	0.0340 0363
36	0.0299 7090	0.0304 2194	0.0308 7710	0.0317 9973	0.0332 1431
37	0.0292 2003	0.0296 7139	0.0301 2698	0.0310 5082	0.0324 6805
38	0.0285 0875	0.0289 6045	0.0294 1649	0.0303 4157	0.0317 6150
39	0.0278 3402	0.0282 3607	0.0287 4258	0.0296 6893	0.0310 9160
40	0.0271 9310	0.0276 4552	0.0281 0251	0.0290 3016	0.0304 5560
41	0.0265 3352	0.0270 3631	0.0274 9379	0.0284 2276	0.0298 5102
42	0.0260 0303	0.0264 5622	0.0269 1420	0.0278 4452	0.0292 7563
43	0.0254 4961	0.0259 0320	0.0263 6170	0.0272 9338	0.0287 2737
44	0.0249 2141	0.0253 7541	0.0258 3443	0.0267 6751	0.0282 0441
45	0.0244 1675	0.0248 7117	0.0253 3073	0.0262 6521	0.0277 0505
46	0.0239 3409	0.0243 8394	0.0248 4905	0.0257 8495	0.0272 2775
47	0.0234 7204	0.0239 2738	0.0243 8798	0.0253 2532	0.0267 7111
48	0.0230 2929	0.0234 8503	0.0239 4624	0.0248 8504	0.0263 3384
49	0.0226 0468	0.0230 6087	0.0235 2265	0.0244 6292	0.0259 1474
50	0.0221 9711	0.0226 5376	0.0231 1611	0.0240 5787	0.0255 1273

表八年賦金表

$$\frac{1}{(a_{\overline{n}|} at i)} = \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} = i + \frac{1}{(s_{\overline{n}|} at i)}$$

n	$\frac{1}{i\%}$	$\frac{1}{i\%}$	$\frac{1}{i\%}$	$\frac{1}{i\%}$	1%
51	0.0218 0557	0.0222 6260	0.0227 2563	0.0236 6888	0.0251 2680
52	0.0214 2916	0.0218 8675	0.0223 5027	0.0232 9503	0.0247 5603
53	0.0210 6700	0.0215 2507	0.0219 8919	0.0229 3546	0.0243 9955
54	0.0207 1830	0.0211 7686	0.0216 4167	0.0225 8938	0.0240 5658
55	0.0203 8234	0.0208 4139	0.0213 0671	0.0222 5605	0.0237 2637
56	0.0200 5843	0.0205 1797	0.0209 8390	0.0219 3478	0.0234 0823
57	0.0197 4593	0.0202 0598	0.0206 7251	0.0216 2496	0.0231 0166
58	0.0194 4428	0.0199 0481	0.0203 7196	0.0213 2597	0.0228 0573
59	0.0191 5237	0.0196 1392	0.0200 8170	0.0210 3727	0.0225 2020
60	0.0188 7123	0.0193 3280	0.0198 0120	0.0207 5836	0.0222 4445
61	0.0185 9883	0.0190 6096	0.0195 2999	0.0204 8873	0.0219 7800
62	0.0183 3536	0.0187 9796	0.0192 6762	0.0202 2795	0.0217 2041
63	0.0180 8025	0.0185 4337	0.0190 1368	0.0199 7560	0.0214 7125
64	0.0178 3315	0.0182 9681	0.0187 6773	0.0197 3127	0.0212 3013
65	0.0175 9371	0.0180 5789	0.0185 2946	0.0194 9460	0.0209 9667
66	0.0173 6156	0.0178 2627	0.0182 9848	0.0192 6524	0.0207 7052
67	0.0171 3639	0.0176 0163	0.0180 7449	0.0190 4286	0.0205 5136
68	0.0169 1738	0.0173 3366	0.0178 5716	0.0188 2716	0.0203 3883
69	0.0167 0574	0.0171 7206	0.0176 4622	0.0186 1785	0.0201 3230
70	0.0164 9971	0.0169 6657	0.0174 4133	0.0184 1464	0.0199 3232
71	0.0162 9952	0.0167 6693	0.0172 4239	0.0182 1728	0.0197 3870
72	0.0161 0493	0.0165 7289	0.0170 4901	0.0180 2554	0.0195 5019
73	0.0169 1572	0.0163 8422	0.0168 6100	0.0178 3917	0.0193 6706
74	0.0167 3165	0.0162 0070	0.0166 7814	0.0176 5796	0.0191 8910
75	0.0165 5233	0.0160 2214	0.0165 0024	0.0174 8170	0.0190 1609
76	0.0163 7816	0.0158 4832	0.0163 2709	0.0173 1020	0.0188 4784
77	0.0162 0836	0.0156 7908	0.0161 5851	0.0171 4323	0.0186 8416
78	0.0160 4295	0.0155 1423	0.0159 9432	0.0169 3074	0.0185 2488
79	0.0148 8177	0.0153 5360	0.0158 3436	0.0168 2244	0.0183 6984
80	0.0147 2464	0.0151 9704	0.0156 7847	0.0166 6821	0.0182 1385
81	0.0145 7144	0.0150 4439	0.0155 2650	0.0165 1790	0.0180 7180
82	0.0144 2200	0.0148 9552	0.0153 7830	0.0163 7136	0.0179 2351
83	0.0142 7620	0.0147 5023	0.0152 3373	0.0162 2347	0.0177 3836
84	0.0141 3391	0.0146 0355	0.0150 9268	0.0160 3903	0.0176 5273
85	0.0139 9500	0.0144 7021	0.0149 5501	0.0159 5308	0.0175 1993
86	0.0138 5935	0.0143 3513	0.0148 2030	0.0158 2034	0.0173 9050
87	0.0137 2385	0.0142 0320	0.0146 8935	0.0156 9076	0.0172 6417
88	0.0135 9740	0.0140 7431	0.0145 6115	0.0155 6423	0.0171 4089
89	0.0134 7033	0.0139 4837	0.0144 3538	0.0154 4064	0.0170 2056
90	0.0133 4721	0.0138 2527	0.0143 1347	0.0153 1989	0.0169 0306
91	0.0132 2629	0.0137 0493	0.0141 9380	0.0152 0190	0.0167 3832
92	0.0131 0803	0.0135 8724	0.0140 7679	0.0150 8657	0.0166 7624
93	0.0129 9234	0.0134 7213	0.0139 6236	0.0149 7332	0.0165 6673
94	0.0128 7915	0.0133 5950	0.0138 5042	0.0148 6356	0.0164 5971
95	0.0127 6837	0.0132 4930	0.0137 4090	0.0147 5571	0.0163 5511
96	0.0126 5992	0.0131 4143	0.0136 3372	0.0146 5020	0.0162 5234
97	0.0125 5374	0.0130 3583	0.0135 2830	0.0145 4696	0.0161 5234
98	0.0124 4976	0.0129 3242	0.0134 2608	0.0144 4592	0.0160 5503
99	0.0123 4790	0.0128 3115	0.0133 2549	0.0143 4701	0.0159 5936
100	0.0122 4811	0.0127 3194	0.0132 2696	0.0142 5017	0.0158 6574

表八年賦金表

$$\frac{1}{(a_{\bar{n}} \text{ at } i)} = \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} = i + \frac{1}{(s_{\bar{n}} \text{ at } i)}$$

n	$\frac{1}{i}\%$	$\frac{1}{i}\%$	$\frac{1}{i}\%$	$\frac{1}{i}\%$	$\frac{1}{i}\%$
101	0.0121 5033	0.0126 3473	0.0131 3045	0.0141 5533	0.0157 7413
102	0.0120 5449	0.0125 3947	0.0130 3587	0.0140 6243	0.0156 8446
103	0.0119 6054	0.0124 4611	0.0129 4319	0.0139 7143	0.0155 9668
104	0.0118 6842	0.0123 5437	0.0128 5234	0.0138 8226	0.0155 1073
105	0.0117 7809	0.0122 6481	0.0127 6238	0.0137 9437	0.0154 2656
106	0.0116 8948	0.0121 7679	0.0126 7594	0.0137 0022	0.0153 4412
107	0.0116 0256	0.0120 9045	0.0125 9029	0.0136 2524	0.0152 6376
108	0.0115 1727	0.0120 0575	0.0125 0628	0.0135 4291	0.0151 8423
109	0.0114 3358	0.0119 2264	0.0124 2385	0.0134 6217	0.0151 0669
110	0.0113 5143	0.0118 4107	0.0123 4298	0.0133 8296	0.0150 3069
111	0.0112 7079	0.0117 6102	0.0122 6361	0.0133 0527	0.0149 5620
112	0.0111 9161	0.0116 8242	0.0121 8571	0.0132 2905	0.0148 8317
113	0.0111 1386	0.0116 0526	0.0121 0923	0.0131 5425	0.0148 1156
114	0.0110 3750	0.0115 2948	0.0120 3414	0.0130 8034	0.0147 4133
115	0.0109 6249	0.0114 5505	0.0119 6041	0.0130 0378	0.0146 7245
116	0.0108 8880	0.0113 8195	0.0118 8799	0.0129 3803	0.0146 0488
117	0.0108 1639	0.0113 1013	0.0118 1686	0.0128 6857	0.0145 3800
118	0.0107 4524	0.0112 3956	0.0117 4698	0.0128 0037	0.0144 7356
119	0.0106 7530	0.0111 7021	0.0116 7832	0.0127 3338	0.0144 0973
120	0.0106 0655	0.0111 0205	0.0116 1035	0.0126 6758	0.0143 4709
121	0.0105 3896	0.0110 3505	0.0115 4454	0.0126 0294	0.0142 8581
122	0.0104 7261	0.0109 6918	0.0114 7936	0.0125 3942	0.0142 2525
123	0.0104 0715	0.0109 0441	0.0114 1528	0.0124 7702	0.0141 6599
124	0.0103 4238	0.0108 4072	0.0113 5223	0.0124 1563	0.0141 0730
125	0.0102 7955	0.0107 7803	0.0112 9033	0.0123 5540	0.0140 5065
126	0.0102 1745	0.0107 1647	0.0112 2940	0.0122 9614	0.0139 9452
127	0.0101 5625	0.0106 5586	0.0111 6948	0.0122 3788	0.0139 3939
128	0.0100 9603	0.0105 9623	0.0111 1054	0.0121 8030	0.0138 8524
129	0.0100 3677	0.0105 3755	0.0110 5255	0.0121 2428	0.0138 3203
130	0.0099 7844	0.0104 7981	0.0109 9550	0.0120 6888	0.0137 7975
131	0.0099 2102	0.0104 2298	0.0109 3935	0.0120 1440	0.0137 2837
132	0.0098 6449	0.0103 6704	0.0108 8410	0.0119 6030	0.0136 7788
133	0.0098 0833	0.0103 1197	0.0108 2972	0.0119 0808	0.0136 2825
134	0.0097 5403	0.0102 5775	0.0107 7619	0.0118 5621	0.0135 7947
135	0.0097 0005	0.0102 0436	0.0107 2349	0.0118 0516	0.0135 3151
136	0.0096 4689	0.0101 5179	0.0106 7161	0.0117 5493	0.0134 8437
137	0.0095 9453	0.0101 0002	0.0106 2052	0.0117 0550	0.0134 3801
138	0.0095 4295	0.0100 4902	0.0105 7021	0.0116 5684	0.0133 9242
139	0.0094 9213	0.0099 9879	0.0105 2087	0.0116 0894	0.0133 4759
140	0.0094 4205	0.0099 4930	0.0104 7187	0.0115 6179	0.0133 0349
141	0.0093 9271	0.0099 0055	0.0104 2380	0.0115 1536	0.0132 6012
142	0.0093 4408	0.0098 5250	0.0103 7644	0.0114 6965	0.0132 1746
143	0.0092 9615	0.0098 0516	0.0103 2973	0.0114 2464	0.0131 7549
144	0.0092 4890	0.0097 5850	0.0102 8381	0.0113 8031	0.0131 3419
145	0.0092 0233	0.0097 1252	0.0102 3851	0.0113 3664	0.0130 9356
146	0.0091 5641	0.0096 6719	0.0101 9386	0.0112 9364	0.0130 5358
147	0.0091 1114	0.0096 2250	0.0101 4986	0.0112 5127	0.0130 1423
148	0.0090 6650	0.0095 7844	0.0101 0649	0.0112 0953	0.0129 7551
149	0.0090 2247	0.0095 3500	0.0100 6373	0.0111 6841	0.0129 3759
150	0.0089 7905	0.0094 9217	0.0100 2159	0.0111 2790	0.0128 9983

表八年賦金表

$$\frac{1}{(a_n at i)} = 1 - \frac{i}{(1+i)^n} = i + \frac{1}{(s_{\overline{n}|at i})}$$

n	1½%	1¼%	1½%	1¼%	2%
1	1.0112 5000	1.0125 0000	1.0150 0000	1.0175 0000	1.0200 0000
2	0.5084 5323	0.5093 9441	0.5112 7792	0.5131 6295	0.5150 4950
3	0.3408 6130	0.3417 0117	0.3433 8296	0.3450 6746	0.3467 5467
4	0.2570 7058	0.2578 6102	0.2594 4478	0.2610 3237	0.2626 2375
5	0.2068 0034	0.2075 6211	0.2090 8932	0.2103 2142	0.2121 5839
6	0.1732 9034	0.1740 3381	0.1755 2521	0.1770 2256	0.1785 2581
7	0.1498 5762	0.1500 8372	0.1515 5616	0.1530 3059	0.1545 1196
8	0.1314 1071	0.1321 3314	0.1335 8402	0.1350 4292	0.1365 0980
9	0.1174 5432	0.1181 7055	0.1196 0932	0.1210 5813	0.1225 1544
10	0.1062 9131	0.1070 0307	0.1084 3418	0.1098 7534	0.1113 2653
11	0.0971 5934	0.0978 6839	0.0992 9384	0.1007 3038	0.1021 7794
12	0.0895 5203	0.0902 5831	0.0916 7999	0.0931 1377	0.0945 5960
13	0.0831 1626	0.0838 2100	0.0852 4036	0.0866 7283	0.0881 1835
14	0.0776 0138	0.0783 0515	0.0797 2332	0.0811 5562	0.0826 0197
15	0.0728 2321	0.0735 2646	0.0749 4436	0.0763 7739	0.0778 2547
16	0.0686 4363	0.0693 4672	0.0707 6503	0.0721 9958	0.0736 5013
17	0.0649 5698	0.0656 6023	0.0670 7966	0.0685 1023	0.0699 6984
18	0.0616 3113	0.0623 3479	0.0638 0578	0.0652 4492	0.0667 0210
19	0.0587 5120	0.0594 5548	0.0608 7847	0.0623 2061	0.0637 8177
20	0.0561 1531	0.0568 2039	0.0582 4574	0.0596 9122	0.0611 5672
21	0.0537 3145	0.0544 3748	0.0558 6550	0.0573 1464	0.0587 8477
22	0.0515 6525	0.0522 7233	0.0537 0331	0.0551 5638	0.0566 3140
23	0.0495 8833	0.0502 9663	0.0517 3075	0.0531 8796	0.0546 6810
24	0.0477 7701	0.0484 8665	0.0499 2410	0.0513 8565	0.0528 7110
25	0.0461 1144	0.0468 2247	0.0482 6345	0.0497 2952	0.0512 2044
26	0.0445 7470	0.0452 8729	0.0467 3196	0.0482 0269	0.0496 9923
27	0.0431 5273	0.0438 6677	0.0453 1527	0.0467 9079	0.0482 3309
28	0.0418 3299	0.0425 4863	0.0440 0108	0.0454 8151	0.0469 8967
29	0.0406 0498	0.0413 2223	0.0427 7878	0.0442 6424	0.0457 7836
30	0.0394 5953	0.0401 7854	0.0416 3919	0.0431 2975	0.0446 4992
31	0.0383 8866	0.0391 0942	0.0405 7430	0.0420 7005	0.0435 9635
32	0.0373 3535	0.0381 0791	0.0395 7710	0.0410 7812	0.0426 1061
33	0.0364 4349	0.0371 6786	0.0386 4144	0.0401 4779	0.0416 3653
34	0.0355 5763	0.0362 3387	0.0377 6189	0.0392 7363	0.0408 1867
35	0.0347 2299	0.0354 5111	0.0369 3363	0.0384 5032	0.0400 0221
36	0.0339 3529	0.0346 6533	0.0361 5240	0.0376 7507	0.0392 3235
37	0.0331 9072	0.0339 2270	0.0354 1437	0.0369 4257	0.0385 0678
38	0.0324 3589	0.0332 1983	0.0347 1613	0.0362 4990	0.0378 2057
39	0.0318 1773	0.0325 5365	0.0340 5463	0.0355 9399	0.0371 7114
40	0.0311 3349	0.0319 2141	0.0334 2710	0.0349 7269	0.0365 5575
41	0.0305 3069	0.0313 2033	0.0328 3106	0.0343 8170	0.0359 7188
42	0.0300 0709	0.0307 4903	0.0322 6426	0.0338 2057	0.0354 1729
43	0.0294 8064	0.0302 0466	0.0317 2465	0.0332 3866	0.0348 3993
44	0.0289 3949	0.0296 8557	0.0312 1038	0.0327 7810	0.0343 8794
45	0.0284 4197	0.0291 9012	0.0307 1976	0.0322 9321	0.0339 0962
46	0.0279 6652	0.0287 1675	0.0302 5125	0.0318 3043	0.0334 5342
47	0.0275 1173	0.0282 6403	0.0298 0342	0.0313 8836	0.0330 1792
48	0.0270 7632	0.0278 3075	0.0293 7500	0.0309 8569	0.0326 0184
49	0.0266 5910	0.0274 1563	0.0289 6478	0.0305 6124	0.0322 0396
50	0.0262 5893	0.0270 1763	0.0285 7168	0.0301 7391	0.0318 2321

表八年賦金表

$$\frac{1}{(a_n \text{ at } i)} = \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} = i + \frac{1}{(s_n \text{ at } i)}$$

n	1½%	1¼%	1½%	1¼%	2%
51	0.0258 7494	0.0266 3571	0.0281 9469	0.0298 0269	0.0314 5856
52	0.0255 0606	0.0262 6897	0.0278 3287	0.0294 4665	0.0311 0909
53	0.0251 5149	0.0259 1653	0.0274 8537	0.0291 0492	0.0307 7392
54	0.0248 1043	0.0255 7760	0.0271 5133	0.0287 7672	0.0304 5226
55	0.0244 8213	0.0252 5145	0.0268 3018	0.0284 6129	0.0301 4337
56	0.0241 6592	0.0249 3739	0.0265 2106	0.0281 5795	0.0298 4656
57	0.0238 6116	0.0246 3478	0.0262 2341	0.0278 6006	0.0295 6120
58	0.0235 6726	0.0243 4303	0.0259 3661	0.0275 8503	0.0292 8667
59	0.0232 8366	0.0240 6158	0.0256 6012	0.0273 1430	0.0290 2243
60	0.0230 0985	0.0237 8993	0.0253 9343	0.0270 5336	0.0287 6797
61	0.0227 4534	0.0235 2758	0.0251 3604	0.0268 0172	0.0285 2278
62	0.0224 8969	0.0232 7410	0.0248 8751	0.0265 5892	0.0282 8643
63	0.0222 4247	0.0230 2904	0.0246 4741	0.0263 2455	0.0280 5848
64	0.0220 0329	0.0227 9203	0.0244 1534	0.0260 9821	0.0278 3855
65	0.0217 7178	0.0225 6268	0.0241 9094	0.0258 7952	0.0276 2624
66	0.0215 4758	0.0223 4065	0.0239 7386	0.0256 6813	0.0274 2122
67	0.0213 3037	0.0221 2560	0.0237 6376	0.0254 6372	0.0272 2316
68	0.0211 1985	0.0219 1724	0.0235 6033	0.0252 6596	0.0270 3173
69	0.0209 1571	0.0217 1527	0.0233 6329	0.0250 7459	0.0268 4665
70	0.0207 1769	0.0215 1941	0.0231 7235	0.0248 8930	0.0266 6765
71	0.0205 2552	0.0213 2941	0.0229 8727	0.0247 0985	0.0264 9446
72	0.0203 3896	0.0211 4501	0.0228 9779	0.0245 3800	0.0263 2683
73	0.0201 5779	0.0209 6600	0.0226 3368	0.0243 6750	0.0261 6454
74	0.0199 8177	0.0207 9215	0.0224 6473	0.0242 0413	0.0260 0736
75	0.0198 1072	0.0206 2325	0.0223 0072	0.0240 4570	0.0258 5508
76	0.0196 4442	0.0204 5910	0.0221 4146	0.0238 9200	0.0257 0751
77	0.0194 8269	0.0202 9953	0.0219 8676	0.0237 4284	0.0255 6447
78	0.0193 2536	0.0201 4435	0.0218 3645	0.0235 9806	0.0254 2576
79	0.0191 7226	0.0199 9341	0.0216 9036	0.0234 5743	0.0252 9123
80	0.0189 2323	0.0198 4652	0.0215 4832	0.0233 2093	0.0251 6071
81	0.0188 7812	0.0197 0356	0.0214 1019	0.0231 8823	0.0250 3405
82	0.0187 3678	0.0195 6437	0.0212 7583	0.0230 5936	0.0249 1110
83	0.0185 9908	0.0194 2381	0.0211 4509	0.0229 3406	0.0247 9173
84	0.0184 6489	0.0192 9675	0.0210 1784	0.0228 1223	0.0246 7551
85	0.0183 3409	0.0191 6808	0.0208 9396	0.0226 9375	0.0245 6321
86	0.0182 0654	0.0190 4267	0.0207 7333	0.0225 7850	0.0244 5381
87	0.0180 8215	0.0189 2041	0.0206 5584	0.0224 6636	0.0243 4750
88	0.0179 6031	0.0188 0119	0.0205 4138	0.0223 5724	0.0242 4416
89	0.0178 4240	0.0186 8490	0.0204 2984	0.0222 5102	0.0241 4370
90	0.0177 2684	0.0185 7146	0.0203 2113	0.0221 4760	0.0240 4602
91	0.0176 1403	0.0184 6076	0.0202 1516	0.0220 4690	0.0239 5101
92	0.0175 0387	0.0183 5271	0.0201 1182	0.0219 4882	0.0238 5859
93	0.0173 9629	0.0182 4724	0.0200 1104	0.0218 5327	0.0237 6863
94	0.0172 9119	0.0181 4425	0.0199 1273	0.0217 6017	0.0236 8118
95	0.0171 8851	0.0180 4366	0.0198 1681	0.0216 6944	0.0235 9602
96	0.0170 8816	0.0179 4540	0.0197 2321	0.0215 8101	0.0235 1313
97	0.0169 9007	0.0178 4941	0.0196 3183	0.0214 9489	0.0234 3242
98	0.0168 9418	0.0177 5560	0.0195 4268	0.0214 1074	0.0233 5733
99	0.0168 0041	0.0176 6391	0.0194 5560	0.0213 2376	0.0232 7729
100	0.0167 0870	0.0175 7428	0.0193 7057	0.0212 4880	0.0232 0274

表八年賦金表

$$\frac{1}{(a_n at i)} = \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} = i + \frac{1}{(s_n at i)}$$

n	2½%	2½%	2½%	3%	3½%
1	1.0225 0000	1.0250 0000	1.0275 0000	1.0300 0000	1.0350 0000
2	0.5169 3758	0.5188 2716	0.5207 1825	0.5226 1084	0.5264 0049
3	0.3484 4458	0.3501 3717	0.3518 3243	0.3535 3036	0.3569 3418
4	0.2642 1893	0.2658 1788	0.2674 2059	0.2690 2705	0.2722 5114
5	0.2137 0021	0.2152 4686	0.2167 9832	0.2183 5457	0.2214 8137
6	0.1800 3496	0.1815 4997	0.1830 7083	0.1845 9750	0.1876 6821
7	0.1560 0025	0.1574 9543	0.1589 9747	0.1605 0655	0.1635 4449
8	0.1379 8462	0.1394 6735	0.1409 5795	0.1424 5639	0.1454 7665
9	0.1239 8170	0.1254 5689	0.1269 4095	0.1284 3386	0.1314 4601
10	0.1127 8768	0.1142 5876	0.1157 3972	0.1172 3051	0.1202 4137
11	0.1036 3649	0.1051 0596	0.1065 8629	0.1080 7745	0.1110 9197
12	0.0960 1740	0.0974 8713	0.0989 6871	0.1004 6209	0.1034 8395
13	0.0895 7686	0.0910 4827	0.0925 3252	0.0940 2954	0.0970 6157
14	0.0840 6230	0.0855 3653	0.0870 2457	0.0885 2634	0.0915 7073
15	0.0792 8352	0.0807 6646	0.0822 5917	0.0837 6658	0.0868 2507
16	0.0751 1663	0.0765 9899	0.0780 9710	0.0796 1085	0.0826 8483
17	0.0714 4039	0.0729 2777	0.0744 3188	0.0759 5253	0.0790 4313
18	0.0681 7720	0.0696 7008	0.0711 8063	0.0727 0870	0.0758 1684
19	0.0652 6132	0.0667 6062	0.0682 7802	0.0698 1388	0.0729 4033
20	0.0626 4207	0.0641 4713	0.0656 7173	0.0672 1571	0.0703 6108
21	0.0602 7572	0.0617 8733	0.0633 1941	0.0648 7178	0.0680 3659
22	0.0581 2821	0.0596 4661	0.0611 8640	0.0627 4739	0.0659 3207
23	0.0561 7097	0.0576 9638	0.0592 4410	0.0608 1390	0.0640 1880
24	0.0543 8023	0.0559 1232	0.0574 8363	0.0590 4742	0.0622 7233
25	0.0527 3599	0.0542 7592	0.0558 3997	0.0574 2787	0.0606 7404
26	0.0512 2134	0.0527 6875	0.0543 4116	0.0559 3329	0.0592 0540
27	0.0498 2133	0.0513 7687	0.0529 5776	0.0545 6421	0.0578 5241
28	0.0485 2525	0.0500 8793	0.0516 7738	0.0532 9323	0.0566 0265
29	0.0473 2081	0.0488 9127	0.0504 8935	0.0521 1467	0.0554 4538
30	0.0461 9934	0.0477 7764	0.0493 8442	0.0510 1926	0.0543 7133
31	0.0451 5280	0.0467 3900	0.0483 5453	0.0499 9893	0.0533 7240
32	0.0441 7415	0.0457 6831	0.0473 9263	0.0490 4662	0.0524 4150
33	0.0432 5722	0.0448 5938	0.0464 9253	0.0481 6612	0.0515 7242
34	0.0423 9655	0.0440 0675	0.0456 4375	0.0473 2196	0.0507 5966
35	0.0415 8731	0.0432 0553	0.0448 5645	0.0465 3929	0.0499 9835
36	0.0408 2522	0.0424 5153	0.0441 1132	0.0458 0379	0.0492 8416
37	0.0401 0643	0.0417 4090	0.0434 0953	0.0451 1162	0.0486 1825
38	0.0394 2753	0.0410 7012	0.0427 4764	0.0444 5934	0.0479 8214
39	0.0387 8543	0.0404 3615	0.0421 2256	0.0438 4385	0.0473 8775
40	0.0381 7738	0.0398 3623	0.0415 3151	0.0432 6238	0.0468 2723
41	0.0376 0087	0.0392 6786	0.0409 7200	0.0427 1241	0.0462 9822
42	0.0370 5364	0.0387 2876	0.0404 4175	0.0421 9167	0.0457 9323
43	0.0365 3364	0.0382 1688	0.0399 3871	0.0416 9811	0.0453 2539
44	0.0360 3901	0.0377 3037	0.0394 6100	0.0412 2985	0.0448 7768
45	0.0355 6805	0.0372 6752	0.0389 0693	0.0407 8518	0.0444 5343
46	0.0351 1921	0.0368 2676	0.0385 7493	0.0403 6254	0.0440 5108
47	0.0346 9107	0.0364 0669	0.0381 6358	0.0399 6051	0.0436 6919
48	0.0342 8233	0.0360 0599	0.0377 7158	0.0395 7777	0.0433 0646
49	0.0338 9179	0.0356 2348	0.0373 9773	0.0392 1314	0.0429 6167
50	0.0335 1836	0.0352 5805	0.0370 4092	0.0388 6550	0.0426 3371

表八年賦金表

$$\frac{1}{(a_n \text{ at } i)} = \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} = i + \frac{1}{(s_n \text{ at } i)}$$

n	2½%	2½%	2½%	3%	3½%
51	0.0331 6102	0.0349 0870	0.0367 0014	0.0385 3382	0.0423 2156
52	0.0328 1884	0.0345 7446	0.0363 7444	0.0382 1718	0.0420 2429
53	0.0324 9094	0.0342 5449	0.0360 6297	0.0379 1471	0.0417 4100
54	0.0321 7654	0.0339 4799	0.0357 6491	0.0376 2558	0.0414 7090
55	0.0318 7489	0.0336 5419	0.0354 7953	0.0373 4907	0.0412 1323
56	0.0315 8530	0.0333 7243	0.0352 0612	0.0370 8447	0.0409 6730
57	0.0313 0712	0.0331 0204	0.0349 4404	0.0368 3114	0.0407 3245
58	0.0310 3977	0.0328 4244	0.0346 9270	0.0365 8848	0.0405 0810
59	0.0307 8268	0.0325 9307	0.0344 5153	0.0363 5593	0.0402 9366
60	0.0305 3533	0.0323 5340	0.0342 2002	0.0361 3296	0.0400 8862
61	0.0302 9724	0.0321 2294	0.0339 9767	0.0359 1908	0.0398 9249
62	0.0300 6795	0.0319 0126	0.0337 8402	0.0357 1385	0.0397 0480
63	0.0298 4704	0.0316 8790	0.0335 7866	0.0355 1682	0.0395 2513
64	0.0296 3411	0.0314 8249	0.0333 8118	0.0353 2760	0.0393 5308
65	0.0294 2378	0.0312 8463	0.0331 9120	0.0351 4581	0.0391 8826
66	0.0292 3070	0.0310 9398	0.0329 0837	0.0349 7110	0.0390 3031
67	0.0290 3955	0.0309 1021	0.0328 3236	0.0348 0313	0.0388 7892
68	0.0288 5500	0.0307 3300	0.0326 6285	0.0346 4159	0.0387 3375
69	0.0286 7677	0.0305 6206	0.0324 9955	0.0344 8618	0.0385 9453
70	0.0285 0458	0.0303 9712	0.0323 4218	0.0343 3663	0.0384 6095
71	0.0283 3816	0.0302 3790	0.0321 9048	0.0341 9266	0.0383 3277
72	0.0281 7728	0.0300 8417	0.0320 4420	0.0340 5404	0.0382 0973
73	0.0280 2169	0.0299 3563	0.0319 0311	0.0339 2053	0.0380 9160
74	0.0278 7118	0.0297 9222	0.0317 6698	0.0337 9191	0.0379 7816
75	0.0277 2554	0.0296 5353	0.0316 3560	0.0336 6796	0.0378 6919
76	0.0275 8457	0.0295 1956	0.0315 0878	0.0335 4849	0.0377 6450
77	0.0274 4808	0.0293 8997	0.0313 8633	0.0334 3331	0.0376 6390
78	0.0273 1589	0.0292 6463	0.0312 6806	0.0333 2224	0.0375 6721
79	0.0271 8784	0.0291 4338	0.0311 5382	0.0332 1510	0.0374 7426
80	0.0270 6376	0.0290 2605	0.0310 4342	0.0331 1175	0.0373 8489
81	0.0269 4350	0.0289 1248	0.0309 3674	0.0330 1201	0.0372 9894
82	0.0268 2692	0.0288 0254	0.0308 3361	0.0329 1576	0.0372 1628
83	0.0267 1387	0.0286 9608	0.0307 3339	0.0328 2284	0.0371 3676
84	0.0266 0423	0.0285 9298	0.0306 3747	0.0327 3313	0.0370 6025
85	0.0264 9787	0.0284 9310	0.0305 4420	0.0326 4650	0.0369 8662
86	0.0263 9467 ⁵⁵	0.0283 9633	0.0304 5397	0.0325 6284	0.0369 1576
87	0.0262 9452	0.0283 0255	0.0303 6667	0.0324 8202	0.0368 4756
88	0.0261 9730	0.0282 1165	0.0302 8219	0.0324 0393	0.0367 8190
89	0.0261 0291	0.0281 2353	0.0302 0041	0.0323 2848	0.0367 1863
90	0.0260 1126	0.0280 3809	0.0301 2125	0.0322 5566	0.0366 6781
91	0.0259 2224	0.0279 5523	0.0300 4460	0.0321 8508	0.0365 9919
92	0.0258 3577	0.0278 7436	0.0299 7038	0.0321 1694	0.0365 4273
93	0.0257 5176	0.0277 9690	0.0298 9850	0.0320 5107	0.0364 8834
94	0.0256 7012	0.0277 2126	0.0298 2887	0.0319 8737	0.0364 3594
95	0.0255 9078	0.0276 4786	0.0297 6141	0.0319 2577	0.0363 8546
96	0.0255 1366	0.0275 7662	0.0296 9605	0.0318 6619	0.0363 3682
97	0.0254 3868	0.0275 0747	0.0296 3272	0.0318 0856	0.0362 8995
98	0.0253 6578	0.0274 4034	0.0295 7134	0.0317 5281	0.0362 4478
99	0.0252 9439	0.0273 7517	0.0295 1185	0.0316 9886	0.0362 0124
100	0.0252 2594	0.0273 1188	0.0294 5418	0.0316 4667	0.0361 5927

表八年賦金表

$$\frac{1}{(a_n at i)} = \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} = i + \frac{1}{(s_n at i)}$$

n	4%	4½%	5%	5½%	6%
1	1.0400 0000	1.0450 0000	1.0500 0000	1.0550 0000	1.0600 0000
2	0.5301 9608	0.5339 9756	0.5378 0438	0.5416 1800	0.5454 3689
3	0.3303 4854	0.3337 7336	0.3372 0856	0.3406 5407	0.3741 0981
4	0.2754 9005	0.2787 4365	0.2820 1133	0.2852 9449	0.2885 9149
5	0.2246 2711	0.2277 9184	0.2309 7480	0.2341 7644	0.2373 9640
6	0.1907 6190	0.1938 7839	0.1970 1747	0.2001 7895	0.2033 6263
7	0.1666 0961	0.1697 0147	0.1728 1932	0.1759 6442	0.1791 3502
8	0.1485 2783	0.1516 0965	0.1547 2181	0.1578 6401	0.1610 3594
9	0.1344 9299	0.1375 7447	0.1406 9008	0.1438 3946	0.1470 2224
10	0.1232 9094	0.1263 7882	0.1295 0458	0.1326 6777	0.1358 6796
11	0.1141 4904	0.1172 4818	0.1203 8889	0.1235 7065	0.1267 9294
12	0.1065 5217	0.1096 6619	0.1128 2541	0.1160 2923	0.1192 7708
13	0.1001 4373	0.1032 7555	0.1064 5577	0.1096 8426	0.1129 6011
14	0.0946 6897	0.0978 2032	0.1010 2397	0.1042 7912	0.1075 8491
15	0.0899 4110	0.0931 1381	0.0963 4229	0.0996 2560	0.1029 6276
16	0.0858 2000	0.0890 1537	0.0922 6991	0.0955 8254	0.0989 5214
17	0.0821 9852	0.0854 1758	0.0886 9914	0.0920 4197	0.0954 4480
18	0.0789 9333	0.0822 3690	0.0855 4622	0.0889 1992	0.0923 2686
19	0.0761 3862	0.0794 0734	0.0827 4501	0.0861 5006	0.0896 2054
20	0.0735 8175	0.0768 7614	0.0802 4259	0.0836 7933	0.0871 8456
21	0.0712 8011	0.0746 0057	0.0779 9611	0.0814 6478	0.0850 0455
22	0.0391 9881	0.0725 4565	0.0759 7051	0.0794 7123	0.0830 4557
23	0.0673 0906	0.0706 8249	0.0741 3682	0.0776 6965	0.0812 7843
24	0.0655 8683	0.0689 8703	0.0724 7090	0.0760 3580	0.0796 7900
25	0.0640 1196	0.0674 3903	0.0709 5246	0.0745 4935	0.0782 2672
26	0.0625 6738	0.0660 2137	0.0695 6432	0.0731 9307	0.0769 0435
27	0.0612 3854	0.0647 1946	0.0682 9186	0.0719 5228	0.0756 9717
28	0.0600 1298	0.0635 2081	0.0671 2253	0.0708 1440	0.0745 9255
29	0.0588 7993	0.0624 1461	0.0660 4551	0.0697 6857	0.0735 7961
30	0.0578 3010	0.0613 9154	0.0650 5144	0.0688 0539	0.0726 4891
31	0.0568 5535	0.0604 4345	0.0641 3212	0.0679 1665	0.0717 9222
32	0.0559 4859	0.0595 6320	0.0632 8042	0.0670 9519	0.0710 0234
33	0.0551 0357	0.0587 4453	0.0624 9004	0.0663 3469	0.0702 7293
34	0.0543 1477	0.0579 8191	0.0617 5545	0.0656 2958	0.0695 9843
35	0.0535 7732	0.0572 7045	0.0610 7171	0.0649 7493	0.0689 7386
36	0.0528 3688	0.0566 0578	0.0604 3446	0.0643 6635	0.0683 9483
37	0.0522 3957	0.0559 8402	0.0598 3979	0.0637 9993	0.0678 5743
38	0.0516 3192	0.0554 0169	0.0592 8423	0.0632 7217	0.0673 5812
39	0.0510 6083	0.0548 5567	0.0587 6462	0.0627 7991	0.0668 9377
40	0.0505 2349	0.0543 4315	0.0582 7816	0.0623 2034	0.0664 6154
41	0.0500 1738	0.0538 6158	0.0578 2229	0.0618 9090	0.0660 5886
42	0.0495 4020	0.0534 0368	0.0573 9471	0.0614 8927	0.0656 8342
43	0.0490 8989	0.0529 8235	0.0569 9333	0.0611 1337	0.0653 3312
44	0.0486 6454	0.0525 8071	0.0566 1625	0.0607 6128	0.0650 0606
45	0.0482 6246	0.0522 0202	0.0562 6173	0.0604 3127	0.0647 0050
46	0.0478 8205	0.0518 4471	0.0559 2820	0.0601 2175	0.0644 1485
47	0.0475 2189	0.0515 0734	0.0556 1421	0.0598 3129	0.0641 4763
48	0.0471 8065	0.0511 8858	0.0553 1843	0.0595 5854	0.0638 9766
49	0.0468 5712	0.0508 8722	0.0550 3965	0.0593 0230	0.0636 6356
50	0.0465 6020	0.0506 0215	0.0547 7674	0.0590 6145	0.0634 4429

表八年賦金表

$$\frac{1}{(a_m at i)^n} = \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} = i + \frac{1}{(s_m at i)}$$

n	4%	4½%	5%	5½%	6%
51	0.0462 5885	0.0503 3232	0.0545 2867	0.0588 2495	0.0632 3880
52	0.0459 8212	0.0500 7679	0.0542 9450	0.0586 2188	0.0630 4617
53	0.0457 1915	0.0498 3469	0.0540 7334	0.0584 2130	0.0628 6551
54	0.0454 6910	0.0496 0519	0.0538 6433	0.0582 3245	0.0626 9602
55	0.0452 3124	0.0493 8754	0.0536 6636	0.0580 5458	0.0625 3666
56	0.0450 0487	0.0491 8105	0.0534 8010	0.0578 8698	0.0623 8765
57	0.0447 8932	0.0489 8506	0.0533 0343	0.0577 2900	0.0622 4744
58	0.0445 8401	0.0487 9897	0.0531 3626	0.0575 8006	0.0621 1574
59	0.0443 8836	0.0486 2221	0.0529 7802	0.0574 3959	0.0619 9200
60	0.0442 0185	0.0484 5426	0.0528 2818	0.0573 0707	0.0618 7572
61	0.0440 2398	0.0482 9482	0.0526 8627	0.0571 8202	0.0617 6642
62	0.0438 5430	0.0481 4284	0.0525 5183	0.0570 6400	0.0616 6366
63	0.0436 9237	0.0479 9848	0.0524 2442	0.0569 5258	0.0615 6704
64	0.0435 3780	0.0478 6115	0.0523 0365	0.0568 4737	0.0614 7615
65	0.0433 9019	0.0477 3047	0.0521 8915	0.0567 4800	0.0613 9066
66	0.0432 4921	0.0476 0608	0.0520 8057	0.0566 5413	0.0613 1022
67	0.0431 1451	0.0474 8765	0.0519 7757	0.0565 6524	0.0612 3454
68	0.0429 8578	0.0473 7487	0.0518 7986	0.0564 8163	0.0611 6330
69	0.0428 6272	0.0472 6745	0.0517 8715	0.0564 0242	0.0610 9625
70	0.0427 4506	0.0471 6511	0.0516 9915	0.0563 2754	0.0610 3313
71	0.0426 3253	0.0470 6759	0.0516 1563	0.0562 5675	0.0609 7370
72	0.0425 2489	0.0469 7465	0.0515 3633	0.0561 8609	0.0609 1774
73	0.0424 2190	0.0468 8606	0.0514 6103	0.0561 2652	0.0608 6505
74	0.0423 2324	0.0468 0159	0.0513 8953	0.0560 6665	0.0608 1542
75	0.0422 2900	0.0467 2104	0.0513 2161	0.0560 1002	0.0607 6867
76	0.0421 3869	0.0466 4422	0.0512 5709	0.0559 5645	0.0607 2463
77	0.0420 5221	0.0465 7094	0.0511 9580	0.0559 0577	0.0606 8315
78	0.0419 6939	0.0465 0104	0.0511 3756	0.0558 5781	0.0606 4407
79	0.0418 9007	0.0464 3434	0.0510 8222	0.0558 1243	0.0606 0724
80	0.0418 1408	0.0463 7069	0.0510 2962	0.0557 6948	0.0605 7254
81	0.0417 4127	0.0463 0995	0.0509 7963	0.0557 2884	0.0605 3984
8	0.0416 7150	0.0462 5197	0.0509 3211	0.0556 9036	0.0605 0903
83	0.0416 0463	0.0461 9683	0.0508 8694	0.0556 5395	0.0604 7998
84	0.0415 4054	0.0461 4379	0.0508 4399	0.0556 1947	0.0604 5261
85	0.0414 7909	0.0460 9334	0.0508 0316	0.0555 8883	0.0604 2681
86	0.0414 2018	0.0460 4516	0.0507 6433	0.0555 5598	0.0604 0249
87	0.0413 6370	0.0459 9915	0.0507 2740	0.0555 2667	0.0603 7956
88	0.0413 0953	0.0459 5522	0.0506 9228	0.0554 9896	0.0603 5795
89	0.0412 5758	0.0459 1325	0.0506 5883	0.0554 7273	0.0603 3757
90	0.0412 0775	0.0458 7316	0.0506 2711	0.0554 4788	0.0603 1836
91	0.0411 5995	0.0458 3486	0.0505 9689	0.0554 2435	0.0603 0025
92	0.0411 1410	0.0457 9827	0.0505 6815	0.0554 0207	0.0602 8318
93	0.0410 7010	0.0457 6331	0.0505 4080	0.0553 8096	0.0602 6708
94	0.0410 2789	0.0457 2991	0.0505 1478	0.0553 6067	0.0602 5190
95	0.0409 8738	0.0456 9799	0.0504 9003	0.0553 4204	0.0602 3758
96	0.0409 4850	0.0456 6749	0.0504 6648	0.0553 2410	0.0602 2408
97	0.0409 1119	0.0456 3834	0.0504 4407	0.0553 0711	0.0602 1125
98	0.0408 7538	0.0456 1048	0.0504 2274	0.0552 9101	0.0601 9935
99	0.0408 4100	0.0455 8385	0.0504 0245	0.0552 7577	0.0601 8803
10.1	0.0408 0800	0.0455 5839	0.0503 8314	0.0552 6132	0.0601 7736

表八年賦金表

$$\frac{1}{(a_{\overline{n}|at\dot{i}})} = \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} = i + \frac{1}{(s_{\overline{n}|at\dot{i}})}$$

n	6½%	7%	7½%	8%	8½%
1	1.0650 0000	1.0700 0000	1.0750 0000	1.0800 0000	1.0850 0000
2	0.5492 6150	0.5530 9179	0.5569 2771	0.5607 6923	0.5646 1631
3	0.3775 7570	0.3810 5166	0.3845 3763	0.3880 3351	0.3915 3925
4	0.2919 0274	0.2952 2812	0.2985 6751	0.3019 2080	0.3052 8739
5	0.2406 3454	0.2438 9069	0.2471 6472	0.2504 5645	0.2537 6576
6	0.2065 6831	0.2097 9580	0.2130 4489	0.2163 1539	0.2196 0708
7	0.1823 3137	0.1855 5322	0.1888 0032	0.1920 7240	0.1953 6922
8	0.1642 3730	0.1674 6776	0.1707 2702	0.1740 1476	0.1773 3065
9	0.1502 3803	0.1534 8647	0.1567 6716	0.1600 7971	0.1634 2372
10	0.1391 0469	0.1423 7750	0.1456 8593	0.1490 2949	0.1524 0771
11	0.1300 5521	0.1333 5690	0.1366 9747	0.1400 7634	0.1434 9293
12	0.1225 6817	0.1259 0199	0.1292 7783	0.1326 9502	0.1361 5286
13	0.1162 8256	0.1196 5085	0.1230 6420	0.1265 2131	0.1300 2287
14	0.1109 4048	0.1143 4494	0.1177 9737	0.1212 9685	0.1248 4244
15	0.1063 5278	0.1097 9462	0.1132 3724	0.1168 2954	0.1204 2046
16	0.1023 7757	0.1058 5765	0.1093 9116	0.1129 7687	0.1166 1354
17	0.0989 0633	0.1024 2519	0.1060 0003	0.1096 2943	0.1133 1198
18	0.0958 5461	0.0994 1260	0.1030 2896	0.1067 0210	0.1104 3041
19	0.0931 5575	0.0967 5301	0.1004 1090	0.1041 2763	0.1079 0140
20	0.0907 5640	0.0943 9293	0.0980 9219	0.1018 5221	0.1056 7097
21	0.0886 1333	0.0922 3500	0.0960 2937	0.0998 3225	0.1036 9541
22	0.0866 9120	0.0904 0577	0.0941 8637	0.0980 3207	0.1019 3392
23	0.0849 6078	0.0887 1393	0.0925 3523	0.0964 2217	0.1003 7193
24	0.0833 9770	0.0871 8902	0.0910 5008	0.0949 7796	0.0989 6975
25	0.0819 8148	0.0858 1052	0.0897 1067	0.0936 7873	0.0977 1163
26	0.0806 9480	0.0845 6103	0.0884 9961	0.0925 0713	0.0965 3016
27	0.0795 2288	0.0834 2573	0.0874 0204	0.0914 4309	0.0955 6025
28	0.0784 5305	0.0823 9193	0.0864 0520	0.0904 8891	0.0946 3914
29	0.0774 7440	0.0814 4865	0.0854 9811	0.0896 1854	0.0938 0577
30	0.0765 7744	0.0805 8640	0.0846 7124	0.0888 2743	0.0930 5053
31	0.0757 5393	0.0797 9691	0.0839 1628	0.0881 0723	0.0923 6524
32	0.0749 9665	0.0790 7292	0.0832 2599	0.0874 5031	0.0917 4247
33	0.0742 9924	0.0784 0807	0.0825 9397	0.0868 5163	0.0911 7588
34	0.0736 5610	0.0777 9674	0.0820 1461	0.0863 0411	0.0906 5984
35	0.0730 6223	0.0772 3396	0.0814 8291	0.0858 0326	0.0901 8937
36	0.0725 1332	0.0767 1531	0.0809 9447	0.0853 4467	0.0897 6006
37	0.0720 0524	0.0762 3685	0.0805 4533	0.0849 2440	0.0893 6799
38	0.0715 3130	0.0757 9505	0.0801 3197	0.0845 3894	0.0890 0968
39	0.0710 9354	0.0753 8676	0.0797 5124	0.0841 3513	0.0886 3193
40	0.0706 9373	0.0750 0914	0.0794 0031	0.0838 6016	0.0883 3201
41	0.0703 1779	0.0746 5962	0.0790 7663	0.0835 6149	0.0881 0737
42	0.0699 6842	0.0743 3591	0.0787 7739	0.0832 3634	0.0878 5576
43	0.0696 4352	0.0740 3590	0.0785 0201	0.0830 3414	0.0876 2512
44	0.0693 4119	0.0737 5769	0.0782 4710	0.0828 0152	0.0874 1363
45	0.0690 5963	0.0734 9937	0.0780 1146	0.0825 8728	0.0872 1961
46	0.0687 9743	0.0732 5996	0.0777 9353	0.0823 3991	0.0870 4154
47	0.0685 5300	0.0730 3744	0.0775 9190	0.0822 0799	0.0868 7807
48	0.0683 2506	0.0728 3070	0.0774 0527	0.0820 4027	0.0867 2795
49	0.0681 1240	0.0726 3853	0.0772 3247	0.0818 3557	0.0865 9005
50	0.0679 1393	0.0724 5985	0.0770 7241	0.0817 4286	0.0864 6334

表九 複利終值表(期數不滿一期)

$$w^{\frac{1}{p}} = (1 + i)^{\frac{1}{p}}$$

<i>p</i>	$\frac{1}{1\%}$	$\frac{1}{2\%}$	$\frac{1}{3\%}$	$\frac{1}{4\%}$	$\frac{1}{5\%}$
2	1.0020 8117	1.0024 9688	1.0029 1243	1.0037 4299	1.0049 8756
3	1.0019 8696	1.0016 6390	1.0019 4068	1.0024 9378	1.0033 2228
4	1.0010 4004	1.0012 4766	1.0014 5515	1.0018 6975	1.0024 9068
6	1.0006 9324	1.0008 3160	1.0009 6987	1.0012 4611	1.0016 5977
12	1.0003 4656	1.0004 1571	1.0004 8482	1.0006 2286	1.0008 2954
13	1.0003 1990	1.0003 8373	1.0004 4751	1.0005 7494	1.0007 6570
26	1.0001 5994	1.0001 9185	1.0002 2373	1.0002 8743	1.0003 8276

<i>p</i>	$1\frac{1}{2}\%$	$1\frac{3}{4}\%$	$1\frac{1}{2}\%$	$1\frac{3}{4}\%$	2%
2	1.0056 0927	1.0063 3059	1.0074 7208	1.0087 1205	1.0099 5050
3	1.0037 3602	1.0041 4943	1.0049 7521	1.0057 9963	1.0066 2271
4	1.0028 0081	1.0031 1046	1.0037 2909	1.0043 4658	1.0049 6293
6	1.0018 6627	1.0020 7257	1.0024 8452	1.0028 9562	1.0033 0589
12	1.0009 3270	1.0010 3575	1.0012 4149	1.0014 4677	1.0016 5158
13	1.0008 6092	1.0009 5604	1.0011 4594	1.0013 3540	1.0015 2444
26	1.0004 3037	1.0004 7790	1.0005 7280	1.0006 6748	1.0007 6193

<i>p</i>	$2\frac{1}{2}\%$	$2\frac{3}{4}\%$	$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$
2	1.0111 8742	1.0124 2284	1.0136 5675	1.0148 8916	1.0173 4950
3	1.0074 4444	1.0082 6484	1.0090 8390	1.0099 0163	1.0115 3314
4	1.0055 7815	1.0061 9225	1.0068 0522	1.0074 1707	1.0086 3745
6	1.0037 1532	1.0041 2392	1.0045 3168	1.0049 3862	1.0057 5004
12	1.0018 5594	1.0020 5984	1.0022 6328	1.0024 6627	1.0028 7090
26	1.0008 5616	1.0009 5017	1.0010 4396	1.0011 3752	1.0013 2401
52	1.0004 2799	1.0004 7497	1.0005 2184	1.0005 6860	1.0006 6179

<i>p</i>	4%	$4\frac{1}{2}\%$	5%	$5\frac{1}{2}\%$	6%
2	1.0198 0390	1.0222 5242	1.0246 9508	1.0271 3193	1.0295 6302
3	1.0131 5941	1.0147 8046	1.0163 9636	1.0180 0713	1.0196 1282
4	1.0098 5341	1.0110 6499	1.0122 7224	1.0134 7518	1.0146 7385
6	1.0065 5820	1.0073 6312	1.0081 6485	1.0089 6340	1.0097 5380
12	1.0032 7374	1.0036 7481	1.0040 7412	1.0044 7170	1.0048 6755
26	1.0015 0963	1.0016 9439	1.0018 7831	1.0020 6138	1.0022 4363
52	1.0007 5453	1.0008 4684	1.0009 3871	1.0010 3016	1.0011 2118

<i>p</i>	$6\frac{1}{2}\%$	7%	$7\frac{1}{2}\%$	8%	$8\frac{1}{2}\%$
2	1.0319 8837	1.0344 0804	1.0368 2207	1.0392 3048	1.0416 3333
3	1.0212 1347	1.0228 0912	1.0243 9981	1.0259 8557	1.0275 6644
4	1.0158 6828	1.0170 5853	1.0182 4460	1.0194 2655	1.0206 0440
6	1.0105 5107	1.0113 4026	1.0121 2638	1.0129 0946	1.0136 8952
12	1.0052 6169	1.0056 5415	1.0060 4492	1.0064 3403	1.0068 2149
26	1.0024 2504	1.0026 0564	1.0027 8544	1.0029 6443	1.0031 4262
52	1.0012 1179	1.0013 0197	1.0013 9175	1.0014 8112	1.0015 7008

表十 實利率化虛利率表

$$j_p = p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]$$

p	i	5, 12%	1/2%	7/12%	3/4%	1%
2		.0041 6234	.0049 9377	.0058 2485	.0074 8599	.0099 7512
3		.0041 6089	.0049 9169	.0058 2203	.0074 8133	.0099 6685
4		.0041 6017	.0049 9065	.0058 2062	.0074 7900	.0099 6272
6		.0041 5945	.0049 8962	.0058 1921	.0074 7667	.0099 5859
13		.0041 5868	.0049 8850	.0058 1769	.0074 7416	.0099 5414
1/2		.0041 7535	.0050 1250	.0058 5035	.0075 2812	.0100 5000
1/3		.0041 8405	.0050 2504	.0058 6743	.0075 5639	.0101 0033
1/4		.0041 9278	.0050 3763	.0058 8457	.0075 8480	.0101 5100
1/6		.0042 1031	.0050 6292	.0059 1907	.0076 4204	.0102 5336
1/12		.0042 6349	.0051 3982	.0060 2417	.0078 1724	.0105 6875

p	i	1 1/2%	1 1/4%	1 1/3%	1 1/4%	2%
2		.0112 1854	.0124 6118	.0149 4417	.0174 2410	.0199 0099
3		.0112 0807	.0124 4828	.0149 2562	.0173 9890	.0198 6813
4		.0112 0285	.0124 4183	.0149 1636	.0173 8631	.0198 5173
6		.0111 9763	.0124 3539	.0149 0710	.0173 7374	.0198 3534
12		.0111 9241	.0124 2895	.0148 9785	.0173 6119	.0198 1898
13		.0111 9200	.0124 2846	.0148 9714	.0173 6022	.0198 1772
26		.0111 8960	.0124 2549	.0148 9288	.0173 5443	.0198 1017
1/2		.0113 1328	.0125 7812	.0151 1250	.0176 5312	.0202 0000
1/4		.0114 4127	.0127 3633	.0153 4039	.0179 6476	.0206 0804

p	i	2 1/2%	2 1/4%	2 1/3%	3%	3 1/2%
2		.0223 7484	.0248 4567	.0273 1349	.0297 7831	.0346 9899
3		.0223 3533	.0247 9451	.0272 5170	.0297 0490	.0345 9943
4		.0223 1261	.0247 6899	.0272 2037	.0296 6829	.0345 4978
6		.0222 9192	.0247 4949	.0271 9009	.0296 3173	.0345 0024
12		.0222 7125	.0247 1804	.0271 5936	.0295 9524	.0344 5078
26		.0222 6013	.0247 0434	.0271 4283	.0295 7561	.0344 2420
52		.0222 5537	.0246 9848	.0271 3575	.0295 6721	.0344 1231
1/2		.0227 5312	.0253 1250	.0278 7812	.0304 5000	.0356 1250
1/4		.0232 7083	.0259 5322	.0286 5531	.0313 7720	.0368 8075

p	i	4%	4 1/2%	5%	5 1/2%	6%
2		.0396 0781	.0445 0483	.0493 9015	.0542 6386	.0591 2603
3		.0394 7821	.0443 4138	.0491 8907	.0540 2139	.0588 3847
4		.0394 1363	.0442 5996	.0490 8894	.0539 0070	.0586 9538
6		.0393 4918	.0441 7874	.0489 8908	.0537 8036	.0585 5277
12		.0392 8488	.0440 9771	.0488 8949	.0536 6039	.0584 1061
26		.0392 5031	.0440 5417	.0488 3597	.0535 9593	.0583 3425
52		.0392 3551	.0440 3552	.0488 1306	.0535 6334	.0583 0157
1/2		.0408 0000	.0460 1250	.0512 5000	.0565 1250	.0618 0000

p	i	6 1/2%	7%	7 1/2%	8%	8 1/2%
2		.0639 7674	.0688 1609	.0736 4414	.0784 6097	.0832 6667
3		.0636 4042	.0684 2737	.0731 9942	.0779 5670	.0826 9933
4		.0634 7314	.0682 3410	.0729 7840	.0777 0619	.0824 1753
6		.0633 0644	.0680 4156	.0727 5827	.0774 5674	.0821 3712
12		.0631 4033	.0678 4974	.0725 3903	.0772 0836	.0818 5792
26		.0630 5113	.0677 4676	.0724 2134	.0770 7506	.0817 0811
52		.0630 1295	.0677 0268	.0723 7093	.0770 1802	.0816 4401
1/2		.0671 1250	.0724 5000	.0778 1250	.0832 0000	.0886 1250

表十一 複雜年金至第一期末終值表

$$\frac{i}{j_p} = \frac{i}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1]} = (s_{\overline{1}|}^{(p)} \text{ at } i)$$

$p \backslash i$	5/12%	1/2%	7/12%	3/4%	1%
2	1.0010 4053	1.0012 4844	1.0014 5621	1.0018 7150	1.0024 9378
3	1.0013 8761	1.0016 6482	1.0019 4193	1.0024 9585	1.0033 2596
4	1.0015 6115	1.0018 7305	1.0021 8485	1.0028 0812	1.0037 4223
6	1.0017 3471	1.0020 8131	1.0024 2781	1.0031 2046	1.0041 5861
13	1.0019 2164	1.0023 0563	1.0026 3950	1.0034 5690	1.0046 0714
1/2	.9979 2100	.9975 0623	.9970 9182	.9962 6401	.9950 2488
1/3	.9958 4438	.9950 1683	.9941 8929	.9925 3786	.9900 6633
1/4	.9937 7166	.9925 3117	.9912 9241	.9888 2005	.9851 2438
1/6	.9896 3386	.9875 7273	.9855 1562	.9814 1344	.9752 9020
1/12	.9772 8978	.9727 9716	.9683 2095	.9594 1772	.9461 8546
$p \backslash i$	1 1/4%	1 1/4%	1 1/4%	1 1/4%	2%
2	1.0028 0463	1.0031 1529	1.0037 3604	1.0043 6176	1.0049 7525
3	1.0037 4068	1.0041 5516	1.0049 8946	1.0058 1084	1.0066 3733
4	1.0042 0892	1.0046 7537	1.0056 0755	1.0065 3878	1.0074 6856
6	1.0046 7730	1.0051 9575	1.0062 3191	1.0072 6707	1.0083 0125
12	1.0051 4583	1.0057 1632	1.0068 5652	1.0079 9571	1.0091 3389
13	1.0051 8188	1.0057 5637	1.0069 0458	1.0080 5177	1.0091 9796
26	1.0053 9818	1.0059 9669	1.0071 9296	1.0083 8820	1.0095 8243
1/2	.9944 0646	.9937 8882	.9925 5588	.9913 2590	.9900 9901
1/4	.9832 8232	.9814 4409	.9777 7914	.9741 2947	.9704 9501
$p \backslash i$	2 1/2%	2 1/2%	2 1/2%	3%	3 1/2%
2	1.0055 9371	1.0062 1142	1.0068 2837	1.0074 4453	1.0088 7475
3	1.0074 6292	1.0082 3761	1.0091 1141	1.0099 3431	1.0115 7748
4	1.0083 9839	1.0093 2677	1.0102 5422	1.0111 8072	1.0130 3094
6	1.0093 3444	1.0103 6665	1.0113 9789	1.0124 2816	1.0144 8578
12	1.0102 7107	1.0114 0725	1.0125 4243	1.0136 7662	1.0159 4203
26	1.0107 7565	1.0119 6786	1.0131 5908	1.0143 4929	1.0167 2674
52	1.0109 9195	1.0122 0819	1.0134 2343	1.0146 3757	1.0170 6316
1/2	.9838 7515	.9876 5432	.9864 3650	.9852 2167	.9828 0098
1/4	.9668 7571	.9632 7151	.9596 8235	.9561 0813	.9490 0456
$p \backslash i$	4%	4 1/2%	5%	5 1/2%	6%
2	1.0099 0195	1.0111 2621	1.0123 4754	1.0135 6596	1.0147 8151
3	1.0132 1713	1.0148 5328	1.0164 8597	1.0181 1522	1.0197 4104
4	1.0148 7744	1.0167 2026	1.0185 5942	1.0203 9495	1.0222 2688
6	1.0165 3957	1.0185 8953	1.0206 3570	1.0226 7810	1.0247 1676
12	1.0182 0351	1.0204 6109	1.0227 1479	1.0249 6465	1.0272 1070
26	1.0191 0023	1.0214 6980	1.0233 3548	1.0261 9729	1.0285 5526
52	1.0194 8470	1.0219 6231	1.0243 1602	1.0267 2586	1.0291 3186
1/2	.9803 9216	.9779 9511	.9756 0976	.9732 3601	.9708 7579
$p \backslash i$	6 1/2%	7%	7 1/2%	8%	8 1/2%
2	1.0159 9419	1.0172 0402	1.0184 1103	1.0196 1524	1.0208 1667
3	1.0213 6348	1.0229 3254	1.0245 9826	1.0262 1065	1.0278 1974
4	1.0240 5523	1.0258 8002	1.0277 0129	1.0295 1904	1.0313 3332
6	1.0267 5172	1.0287 3298	1.0308 1059	1.0328 3456	1.0348 5492
12	1.0294 5294	1.0316 9143	1.0339 2617	1.0361 5721	1.0383 8455
26	1.0309 0941	1.0332 5978	1.0356 0640	1.0379 4927	1.0402 8845
52	1.0315 3404	1.0339 3242	1.0363 2705	1.0387 1794	1.0411 0511
1/2	.9685 2300	.9661 8357	.9638 5542	.9615 3846	.9592 3281

表十二 等差變額年金終值表

$$\sum s_{\overline{n}|i} = s_{\overline{1}|i} + s_{\overline{2}|i} + s_{\overline{3}|i} + \dots + s_{\overline{n}|i}$$

n	1% i	2% i	3% i	4% i	5% i
1	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000
2	3.004 1667	3.005 0000	3.005 8333	3.007 5000	3.010 0000
3	6.016 6840	6.020 0250	6.023 3674	6.030 0563	6.040 1000
4	10.041 7586	10.050 1251	10.058 5037	10.075 2817	10.100 5010
5	15.083 5942	15.100 3758	15.117 1783	15.150 8463	15.201 5060
6	21.146 4425	21.175 8770	21.205 3618	21.264 4776	21.353 5211
7	28.234 5527	28.281 7570	28.329 0598	28.423 9612	28.567 0563
8	36.352 1967	36.423 1658	36.494 3126	36.637 1400	36.852 7268
9	45.503 6641	45.605 2817	45.707 1961	45.911 0195	46.221 2541
10	55.693 2627	55.833 3081	55.973 8214	56.256 2589	56.683 4667
11	66.925 3180	67.112 4746	67.300 3354	67.678 1808	68.250 3013
12	79.204 1735	79.448 0370	79.692 0206	80.185 7672	80.932 8043
13	92.534 1909	92.845 2772	93.157 7960	93.787 1604	94.742 1324
14	106.919 7500	107.309 5035	107.701 2165	108.490 5641	109.689 5537
15	122.365 2490	122.846 0511	123.329 4736	124.304 2484	125.786 4492
16	138.875 1042	139.460 2813	140.048 8955	141.236 5252	143.044 3137
17	156.453 7604	157.157 5827	157.865 8474	159.295 7991	161.474 7669
18	175.105 6411	175.943 3706	176.786 7315	178.490 5176	181.089 5044
19	194.835 2479	195.823 0875	196.817 9875	198.829 1965	201.900 3995
20	215.647 0614	216.802 2029	217.966 0924	220.320 4155	223.919 4035
21	237.545 5909	238.886 2139	240.237 5613	242.972 8186	247.158 5975
22	260.535 3642	262.080 6450	263.638 9470	266.795 1147	271.630 1835
23	284.620 9232	286.391 0482	288.176 8409	291.796 0781	297.346 4353
24	309.806 8487	311.823 0035	313.857 8725	317.984 5482	324.319 9502
25	336.097 7166	338.382 1185	340.688 7100	345.369 4387	352.563 1497
26	363.498 1177	366.074 0291	368.676 0609	373.959 7036	382.088 7812
27	392.012 6932	394.904 3992	397.826 6712	403.764 4013	412.909 6690
28	421.646 0794	424.878 9212	428.147 3268	434.792 6343	445.038 7657
29	452.402 9331	456.003 3158	459.644 8529	467.053 5791	478.489 1533
30	484.287 9503	488.283 3324	492.326 1145	500.556 4809	513.274 0448
31	517.305 8168	521.724 7491	526.198 0168	535.310 6546	549.406 7353
32	551.461 2577	556.333 3728	561.267 5053	571.325 4845	586.900 8531
33	586.759 0129	592.115 0397	597.541 5657	608.610 4256	625.769 8617
34	623.203 8422	629.075 6149	635.027 2248	647.175 0038	666.027 5603
35	660.800 5243	667.220 9930	673.731 5503	687.028 8163	707.687 8359
36	699.553 8604	706.557 0979	713.661 6510	728.181 5324	750.764 7143
37	739.468 6681	747.089 8834	754.824 6773	770.642 8939	795.272 3614
38	780.549 7876	788.825 3328	797.227 8213	814.422 7156	841.225 0850
39	822.802 0783	831.769 4595	840.878 3169	859.530 3860	888.637 3359
40	866.230 4203	875.928 3068	885.783 4404	905.977 3676	937.523 7092
41	910.839 7138	921.307 9483	931.950 5105	953.772 1979	987.898 9463
42	956.634 8792	967.914 4881	979.386 8835	1002.925 4894	1039.777 9358
43	1003.620 8579	1015.754 0605	1028.099 9786	1053.447 4305	1093.175 7151
44	1051.802 6115	1064.832 8308	1078.097 2285	1105.348 2863	1148.107 4723
45	1101.185 1224	1115.156 9950	1129.386 1290	1158.638 3984	1204.588 5470
46	1151.773 3937	1166.732 7799	1181.974 2148	1213.328 1364	1262.634 4325
47	1203.572 4495	1219.566 4438	1235.869 0644	1269.428 1478	1322.260 7768
48	1256.587 3347	1273.664 2760	1291.078 3006	1326.948 8539	1383.483 3346
49	1310.823 1153	1329.032 5974	1347.609 5907	1385.900 9754	1446.318 2184
50	1366.284 8783	1385.677 7604	1405.470 6466	1446.295 2327	1510.781 4003

表十二 等差變類年金終值表

$$\sum_{i=1}^n s_{\overline{n}|} = s_{\overline{1}|} + s_{\overline{2}|} + s_{\overline{3}|} + \dots + s_{\overline{n}|}$$

n	1½%	1¼%	1½%	1¼%	2%
1	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000
2	3.011 2500	3.012 5000	3.015 0000	3.017 5000	3.020 0000
3	6.045 1266	6.050 1563	6.060 2250	6.070 3063	6.080 4000
4	10.113 1342	10.125 7832	10.151 1284	10.176 5366	10.202 0080
5	15.226 9070	15.252 3555	15.293 3953	15.354 6260	15.406 0482
6	21.398 2097	21.443 0090	21.532 0462	21.623 3320	21.714 1691
7	28.638 9396	28.711 0476	28.855 9404	29.001 7403	29.148 4525
8	36.931 1276	37.069 9356	37.288 7795	37.569 2707	37.731 4216
9	46.376 9403	46.533 3098	46.848 1112	47.165 6390	47.486 0500
10	56.898 6309	57.114 9762	57.550 8329	57.991 0824	58.435 7710
11	68.538 7911	68.828 9134	69.414 0954	70.005 9263	70.604 4864
12	81.309 8525	81.689 2748	82.455 3068	83.231 0301	84.016 5761
13	95.224 5883	95.710 3903	96.692 1364	97.687 5731	98.696 9077
14	110.295 8649	110.906 7707	112.142 5185	113.397 1056	114.670 8458
15	126.536 6934	127.293 1053	128.824 6563	130.381 5550	131.964 2627
16	143.960 2312	144.384 2691	146.757 0261	148.663 2322	150.603 5480
17	162.579 7838	163.695 3225	165.958 3815	168.264 8387	170.615 6189
18	182.400 8064	183.741 5140	186.447 7572	189.209 4734	192.027 9313
19	203.460 9054	205.038 2829	208.244 4736	211.520 6392	214.868 4890
20	225.749 8406	227.601 2615	231.368 1407	235.222 2504	239.165 8597
21	249.289 5263	251.446 2772	255.838 6628	260.338 6398	264.949 1769
22	274.094 0335	276.589 3557	281.676 2427	286.894 5606	292.248 1605
23	300.177 5914	303.046 7227	308.901 3864	314.915 2200	321.093 1237
24	327.554 5393	330.334 8067	337.534 9073	344.426 2372	351.514 9862
25	356.239 3784	359.970 2413	367.597 9302	375.453 6964	383.545 2859
26	386.247 2737	390.469 8698	399.111 8997	408.024 1361	417.216 1916
27	417.592 5555	422.350 7432	432.098 5782	442.164 5585	452.560 5154
28	450.290 4718	455.630 1274	466.580 0569	477.902 4382	489.611 7257
29	484.356 2396	490.325 5040	502.573 7377	515.265 7309	528.403 9602
30	519.805 2473	526.454 5728	540.117 4391	554.282 8812	568.972 0395
31	556.653 0563	564.035 2550	579.219 2007	594.982 8316	611.351 4802
32	594.915 4032	603.085 0357	619.907 4887	637.395 0312	655.573 5099
33	634.608 2015	643.624 2669	662.206 1010	681.549 4442	701.690 0301
34	675.747 5437	685.669 5702	708.139 1926	727.476 5595	749.723 8317
35	718.349 7036	729.240 4399	751.731 2305	775.207 3993	799.718 3593
36	762.431 1373	774.355 9454	799.007 2497	824.773 5288	851.712 7265
37	808.008 4381	821.035 3947	847.992 3384	876.207 0655	905.746 9310
38	855.098 5336	869.323 0371	898.712 2438	929.540 6392	961.861 9296
39	903.718 4426	919.214 2663	951.192 9274	984.807 6512	1020.099 1590
40	953.885 2751	970.703 8234	1005.460 3214	1042.041 7351	1080.501 1422
41	1005.616 4844	1023.336 9999	1061.542 7337	1101.277 5164	1143.111 1651
42	1058.929 6799	1078.634 3412	1119.465 8747	1162.549 8729	1207.973 3384
43	1113.842 6287	1135.116 6492	1179.257 8628	1225.894 4957	1275.132 8561
44	1170.373 3582	1193.304 9861	1240.946 7307	1291.347 6493	1344.635 5132
45	1228.540 0585	1253.220 6771	1304.560 9317	1358.946 2332	1416.528 2235
46	1288.361 1342	1314.335 3144	1370.129 3457	1428.727 7923	1490.353 7330
47	1349.855 1969	1378.320 7595	1437.681 2589	1500.730 5237	1567.675 9637
48	1413.041 0679	1444.549 1473	1507.246 5051	1574.993 3129	1647.029 4330
49	1477.937 7799	1510.692 3909	1578.855 2027	1651.555 6939	1728.970 0727
50	1544.564 5799	1579.474 6308	1652.538 0308	1730.457 9206	1813.549 4741

表十二 等差變額年金終值表

$$\sum s_{\overline{n}|} = s_{\overline{1}|} + s_{\overline{2}|} + s_{\overline{3}|} + \dots + s_{\overline{n}|}$$

n	2½%	2½%	2½%	3%	3½%
1	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000
2	3.022 5000	3.025 0000	3.027 5000	3.030 0000	3.035 0000
3	6.090 5063	6.100 6250	6.110 7563	6.120 9000	6.141 2250
4	10.227 5426	10.253 1406	10.278 8021	10.304 5270	10.356 1679
5	15.457 6624	15.509 4692	15.561 4691	15.613 6628	15.718 6338
6	21.805 4598	21.897 2059	21.989 4095	22.082 0727	22.268 7859
7	29.296 0826	29.444 6380	29.594 1183	29.744 5349	30.048 1935
8	37.955 2445	38 180 7519	38.407 9565	38.636 8709	39.099 8802
9	47.809 2375	48.135 2707	48.464 1753	48.795 9771	49.468 3760
10	58.884 9453	59.338 6525	59.796 9401	60.259 8564	61.199 7692
11	71.209 8566	71.822 1188	72.441 3560	73.067 6521	74.341 7611
12	84.812 0783	85.617 6718	86.433 4933	87.259 6316	88.948 7223
13	99.720 3501	100.753 1136	101.810 4144	102.877 4721	105.056 7531
14	115.964 0580	117.277 0664	118.610 2007	119.963 7962	122.733 7394
15	133.573 2493	135.208 9931	136.871 9813	138.562 7101	142.029 4203
16	152.578 6474	154.589 2179	155.635 9607	153.719 5914	163.000 4500
17	173.011 6670	175.453 9484	177.943 4497	180.481 1792	185.705 4658
18	194.904 4295	197.840 2971	200.836 8945	203.895 6145	210.205 1571
19	218.289 7791	221.786 3045	225.359 9091	229.012 4830	236.562 3376
20	243.201 2992	247.330 9621	251.557 3066	255.882 8575	264.842 0194
21	269.673 3284	274.514 2362	279.475 1326	284.559 3432	295.111 4900
22	297.740 9783	303.377 0921	309.160 6987	315.096 1235	327.440 3922
23	327.440 1503	333.961 5194	340.662 6179	347.549 0072	361.900 8059
24	358.807 5537	366.310 5573	374.030 3399	381.975 4774	398.567 3341
25	391.830 7236	400.468 3213	409.316 6880	418.434 7417	437.517 1908
26	426.693 0399	436.480 0293	446.572 8969	456.987 7840	478.830 2925
27	463.293 7458	474.392 0300	485.853 6516	497.697 4175	522.589 3527
28	501.722 9676	514.251 8303	527.214 6270	540.628 3400	568.379 9801
29	542.011 7344	556.103 1265	570.713 0293	585.847 1902	617.790 7794
30	584.206 9934	600.010 3297	616.407 6376	633.422 6059	669.418 4567
31	628.351 6553	646.011 1004	664.353 3476	683.425 2341	723.342 9276
32	674.489 5681	694.161 3780	714.623 7159	735.923 0426	781.177 4301
33	722.665 5334	744.515 4124	767.281 0056	791.005 3839	841.513 6402
34	772.925 5590	797.123 2977	822.381 2332	848.736 0604	904.971 7926
35	825.316 3341	852.056 3052	879.996 7172	909.198 1422	971.645 3053
36	879.886 0027	909.357 9178	940.196 6269	972.474 0865	1041.653 4085
37	936.683 4378	969.091 8657	1003.052 0341	1038.643 3091	1115.111 2778
38	995.758 3151	1031.319 1624	1068.635 9651	1107.807 7584	1192.140 1725
39	1057.163 3885	1096.102 1414	1137.023 4541	1180.041 9911	1272.865 0785
40	1120.949 5647	1163.504 6950	1208.291 5991	1255.443 2503	1357.415 3563
41	1187.170 9299	1233.592 3123	1282.519 6181	1334.106 5484	1445.924 8933
42	1255.882 2758	1306.432 1201	1359.788 9076	1416.129 7448	1538.532 2650
43	1327.139 6271	1382.092 9231	1440.133 1025	1501.613 6372	1635.380 3943
44	1401.000 2637	1460.645 2462	1523.788 1378	1590.662 0463	1736.619 2256
45	1477.522 7747	1542.161 3774	1610.692 3116	1683.331 9077	1842.400 8935
46	1556.767 0371	1626.715 4118	1700.936 3502	1779.833 3649	1952.334 9300
47	1638.794 2955	1714.333 2971	1794.763 4748	1880.279 8658	2068.293 9025
48	1723.667 1671	1805.242 3795	1892.119 4704	1984.683 2618	2188.624 1591
49	1811.449 6734	1899.373 9515	1993.152 7558	2093.223 9097	2314.226 0047
50	1902.207 2962	1996.858 3003	2097.964 4566	2206.025 7770	2445.223 9148

表十二 等差變額年金終值表

$$\sum s_{\overline{n}|} = s_{11} + s_{21} + s_{31} + \dots + s_{n1}$$

n	4%	4½%	5%	5½%	6%
1	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000
2	3.040 0000	3.045 0000	3.050 0000	3.055 0000	3.060 0000
3	6.161 6000	6.182 0250	6.202 5000	6.223 0250	6.243 6000
4	10.408 0640	10.460 2161	10.512 6250	10.565 2914	10.618 2160
5	15.824 9866	15.930 9259	16.038 2563	16.146 3824	16.255 3090
6	22.457 9620	22.647 8175	22.840 1691	23.034 4334	23.230 6275
7	30.355 6565	30.666 9693	30.982 1775	31.301 3273	31.624 4652
8	39.569 8828	40.046 9829	40.631 2864	41.022 9003	41.521 9331
9	50.152 6781	50.849 0972	51.557 8507	52.279 1598	53.013 2490
10	62.158 7852	63.137 3065	64.185 7433	65.154 5136	66.194 0440
11	75.645 1866	76.978 4853	78.342 5304	79.738 0118	81.165 6866
12	90.670 9421	92.443 5172	94.259 6569	96.123 6025	98.035 6278
13	107.297 7797	109.603 4504	111.972 6398	114.410 4006	116.917 7655
14	125.589 6909	128.535 5398	131.571 2718	134.702 9727	137.932 8314
15	145.613 2786	149.319 5941	153.149 8354	157.111 6362	161.208 3013
16	167.437 8097	172.038 9308	176.807 3271	181.752 7761	186.881 3294
17	191.135 3221	196.780 6377	202.647 6935	208.749 1788	215.094 2091
18	216.780 7350	223.635 7214	230.780 0782	233.230 3837	245.999 8617
19	244.451 9644	252.699 2839	261.319 0821	270.333 0548	279.769 8534
20	274.230 0430	284.070 7066	294.385 0362	305.201 3728	316.545 4446
21	306.199 2447	317.853 8434	330.104 2280	342.987 4483	356.538 1713
22	340.447 2145	354.157 2214	368.609 5024	383.851 7579	399.930 4616
23	377.065 1031	393.094 2514	410.039 9775	427.963 6046	446.926 2892
24	416.147 7072	434.783 4477	454.541 9764	475.501 6029	497.241 8766
25	457.793 6155	479.348 6578	502.269 0752	526.654 1910	552.106 3786
26	502.105 3601	526.919 3024	553.382 5290	581.620 1715	611.262 7613
27	549.189 5745	577.630 6260	608.051 6554	640.609 2310	674.968 5270
28	599.157 1575	631.623 9592	666.454 2382	703.342 7914	743.496 6386
29	652.123 4333	689.046 9924	728.776 9501	771.554 1449	817.136 4369
30	708.208 3815	750.054 0620	795.215 976	843.989 6229	896.194 6232
31	767.536 7168	814.806 4498	865.976 5875	921.409 0522	980.996 3005
32	830.238 1854	883.472 0950	941.275 4168	1004.086 5500	1071.826 0786
33	896.447 7129	956.228 9213	1021.339 1877	1092.311 3103	1169.229 2433
34	966.305 6214	1033.259 1778	1106.406 1471	1186.388 4324	1273.412 9979
35	1039.957 8462	1114.755 7953	1196.726 4544	1286.639 7961	1384.847 7778
36	1117.556 1601	1200.919 7616	1292.562 7771	1393.404 9849	1503.968 6444
37	1199.258 4065	1291.961 1059	1394.190 9160	1507.042 2591	1631.236 7631
38	1285.228 7427	1388.099 3106	1501.900 4618	1627.929 5834	1767.140 9689
39	1375.637 8925	1489.563 7346	1615.995 4849	1756.465 7104	1912.199 4270
40	1470.663 4082	1596.594 0577	1736.795 2591	1893.071 3245	2066.961 3926
41	1570.489 9445	1709.440 7453	1864.685 0221	2038.190 2474	2232.009 0762
42	1675.309 5423	1828.365 5338	1999.866 7732	2192.290 7110	2407.959 6207
43	1785.321 9240	1953.641 9378	2142.860 1118	2355.866 7001	2595.467 1980
44	1900.734 8009	2085.555 7800	2294.003 1174	2529.439 3686	2795.225 2299
45	2021.764 1930	2224.405 7451	2453.703 2733	2713.558 5338	3007.968 7436
46	2148.634 7607	2370.503 9587	2622.388 4369	2908.304 2532	3234.476 8683
47	2281.580 1511	2524.176 5918	2800.507 8588	3115.788 4871	3475.575 4304
48	2420.843 3571	2685.764 4934	2988.533 2517	3335.156 8539	3732.140 0092
49	2566.677 0914	2855.623 8506	3186.959 9143	3567.590 4309	4005.098 4097
50	2719.344 1751	3034.126 8789	3396.307 9100	3813.307 9573	4295.434 3143

表十二 等差變額年金終值表

$$\Sigma s_n = s_{11} + s_{21} + s_{31} + \dots + s_{n1}$$

n	6½%	7%	7½%	8%	8½%
1	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000	1.000 0000
2	3.065 0000	3.070 0000	3.075 0000	3.080 0000	3.085 0000
3	6.264 2250	6.284 9000	6.305 6250	6.326 4000	6.347 2250
4	10.671 3996	10.724 8430	10.778 5469	10.832 5120	10.886 7391
5	16.365 0406	16.475 5820	16.586 9379	16.699 1130	16.812 1120
6	23.428 7683	23.628 8728	23.830 0582	24.035 0420	24.241 1415
7	31.951 6382	32.282 8938	32.618 2801	32.957 8454	33.301 6385
8	42.028 4947	42.542 6964	43.064 6511	43.594 4730	44.132 2778
9	53.760 3468	54.620 6852	55.294 5000	56.082 0308	56.883 5214
10	67.254 7694	68.337 1331	69.441 5375	70.568 5933	71.718 6207
11	82.626 3294	84.120 7324	85.649 7065	87.214 0808	88.814 7035
12	99.997 0408	102.009 1337	104.073 4345	106.191 2072	108.363 9533
13	119.496 8484	122.149 8266	124.878 9421	127.686 5038	130.674 8893
14	141.264 1436	144.700 3144	148.244 8628	151.901 4241	155.673 7549
15	165.446 3129	169.829 3364	174.363 2275	179.053 5380	183.906 0240
16	192.200 3233	197.717 3900	203.440 4695	209.377 8211	215.538 0361
17	221.693 3443	228.557 6073	235.698 5047	243.128 0488	250.358 7691
18	254.103 4116	262.556 6398	271.375 8926	280.378 2905	290.181 7645
19	289.620 1334	299.935 6046	310.729 0845	322.024 5337	333.847 2145
20	328.445 4421	340.931 0969	354.033 7659	367.786 5180	382.224 2277
21	370.794 3958	385.796 2737	401.586 2983	418.209 4395	435.713 2871
22	416.896 0315	434.802 0120	453.705 2707	473.666 1946	494.748 9165
23	466.994 2736	488.238 1338	510.733 1630	534.559 4002	559.802 5744
24	521.348 9014	546.414 8245	573.038 1334	601.324 2494	631.385 7932
25	580.236 5300	609.663 8622	641.016 0149	674.430 1894	709.053 5856
26	643.951 9376	678.340 3326	715.092 2160	754.384 6045	796.408 1404
27	712.803 8349	752.324 1559	795.724 1322	841.735 3729	891.102 8323
28	787.141 4092	833.521 8468	883.403 4421	937.074 2027	994.846 5731
29	867.305 6008	920.868 3761	978.658 7003	1041.040 1389	1108.408 5318
30	953.680 4648	1015.329 1624	1082.058 1208	1154.323 3501	1232.623 2570
31	1046.669 6950	1117.402 2037	1194.212 4605	1277.669 2181	1368.396 2338
32	1146.703 2252	1227.620 3580	1315.778 3951	1411.882 7555	1516.700 9137
33	1254.238 9348	1346.553 7831	1447.461 7747	1557.833 3759	1678.630 2564
34	1369.764 4656	1474.812 5479	1590.021 4078	1716.460 0460	1855.313 8232
35	1493.799 1358	1613.049 4262	1744.273 0134	1888.776 8497	2048.015 5035
36	1626.896 1010	1761.962 8861	1911.093 4894	2075.878 9977	2258.096 8213
37	1769.644 3475	1922.300 2381	2091.425 5011	2278.949 3175	2487 035 0512
38	1922.671 2301	2094.861 3083	2286.282 4137	2499.265 2629	2736.433 0305
39	2086.644 8601	2280.501 5998	2496.753 5947	2738.206 4339	3008.029 8381
40	2262.276 7760	2480.136 7118	2724.010 1143	2997.263 0026	3303.712 3743
41	2450.324 7664	2694.746 2317	2969.310 8728	3278.044 0428	3625.527 9262
42	2651.595 8762	2925.378 5214	3234.009 1883	3582.237 5662	3975.697 7999
43	2866.949 6082	3173.155 0179	3519.559 8774	3911.370 5715	4356.632 1129
44	3097.301 3327	3439.275 8691	3827.526 8682	4268.820 2173	4770.945 8425
45	3343.625 0193	3725.025 1800	4159.591 3333	4655.325 8346	5221.476 2391
46	3606.961 6041	4031.776 9426	4517.560 7371	5073.751 9014	5711.301 7194
47	3888.414 1033	4361.001 3285	4903.377 7924	5526.652 0395	6243.762 3655
48	4189.161 0234	4714.271 4215	5319.131 1268	6016.784 2178	6822.482 1666
49	4510.456 4920	5093.270 4211	5767.065 9613	6547.126 9352	7451.393 1503
50	4853.636 1640	5499.799 3505	6249.595 9084	7120.397 1116	8134.761 5686

表十三 等差變額年金現值表

$$\Sigma a_n = a_{\bar{1}|} + a_{\bar{2}|} + a_{\bar{3}|} + \dots + a_{\bar{n}|}$$

n	1%	2%	3%	4%	5%
1	0.995 8506	0.995 0249	0.994 2005	0.992 5558	0.990 0990
2	2.983 4197	2.980 1243	2.976 8356	2.970 2787	2.960 4941
3	5.958 5922	5.950 8724	5.942 1730	5.925 8350	5.901 4703
4	7.917 2703	9.900 8681	9.884 5133	9.851 9454	9.803 4448
5	14.855 3729	14.826 7344	14.798 1905	14.741 3850	14.656 8761
6	20.768 8361	20.723 1188	20.677 5714	20.580 0826	20.452 3525
7	27.653 6127	27.683 1928	27.517 0552	27.381 6205	27.180 5471
8	35.505 6724	35.408 1521	35.311 0740	35.118 2337	34.832 2948
9	44.321 0015	44.187 2160	44.054 0918	43.789 8102	43.398 2424
10	54.095 6032	53.917 6279	53.740 6049	53.389 3897	52.369 5469
11	64.825 4969	64.594 6546	64.365 1416	63.910 0843	63.237 1752
12	76.506 7189	76.213 5867	75.922 2618	75.344 9769	74.492 2527
13	89.135 3217	88.769 7380	88.406 5369	87.687 3220	86.625 9927
14	102.707 3742	102.258 4457	101.812 0498	100.930 3444	99.629 6958
15	117.218 9619	116.675 0704	116.135 1945	115.067 3594	113.494 7483
16	132.666 1860	132.014 9054	131.368 8761	130.091 6520	128.212 6221
17	149.045 1645	148.273 6273	147.508 4105	145.996 6769	143.774 8733
18	166.352 0310	165.446 3053	164.548 5440	162.775 8580	160.173 1419
19	184.582 9353	183.528 7515	182.484 0537	180.422 6878	177.390 1504
20	203.734 0434	202.516 1707	201.309 7469	198.930 7075	195.444 7034
21	223.801 3569	222.404 1499	221.020 4610	218.293 5032	214.301 6365
22	244.781 6135	243.188 2089	241.611 0632	238.504 7208	233.962 0659
23	266.670 4894	264.873 8894	263.076 4506	259.553 0355	254.417 8870
24	289.464 3847	287.426 7557	285.411 5500	281.447 1817	275.681 2742
25	313.159 5831	310.372 3937	308.611 3174	304.165 9371	297.684 4299
26	337.752 2519	335.196 4116	332.670 7382	327.708 1262	320.479 6336
27	363.238 7370	360.394 4394	357.584 8268	352.067 6190	344.039 2412
28	389.615 3595	386.462 1288	383.348 6266	377.238 3316	368.355 6844
29	416.878 3662	413.395 1530	409.957 2097	403.214 2249	393.421 4697
30	445.024 0990	441.189 2070	437.405 6767	429.989 3051	419.229 1779
31	474.048 8951	469.840 0070	465.689 1568	457.557 6229	445.771 4632
32	503.949 1070	499.343 2905	494.802 8072	485.913 2734	473.041 0327
33	534.721 1023	529.694 8164	524.741 8135	515.050 3954	501.030 7453
34	566.361 2635	560.390 3646	555.501 3839	544.963 1716	529.733 4112
35	598.865 9383	592.925 7359	587.076 7745	575.645 8279	559.141 9912
36	632.231 6894	625.796 7522	619.463 2391	607.092 6331	589.249 4963
37	666.454 7942	659.499 2559	652.656 0789	639.297 8989	620.049 0062
38	701.531 7451	694.029 1103	686.650 6172	672.255 9791	651.533 6695
39	737.458 9690	729.382 1993	721.442 2045	705.961 2695	683.696 7025
40	774.233 0278	765.554 4272	757.026 2185	740.408 2080	716.531 3886
41	811.850 3179	802.541 7186	793.398 0634	775.591 2734	750.031 0778
42	850.307 8708	840.340 0185	830.553 1701	811.504 9860	784.189 1860
43	889.600 7004	878.945 2921	868.486 9962	848.143 9067	818.999 1940
44	929.726 8383	918.353 5244	907.195 0255	885.502 6369	854.454 6476
45	970.682 3283	958.560 7208	946.672 7680	923.575 8183	890.549 1526
46	1012.463 7291	999.562 9063	986.915 7597	962.858 1323	927.276 3921
47	1055.067 6137	1041.356 1257	1027.919 5526	1001.544 3001	964.630 0912
48	1098.490 5693	1083.936 4435	1069.679 7643	1042.029 0819	1002.604 0507
49	1142.729 1973	1127.299 9437	1112.191 9781	1082.907 2774	1041.192 1294
50	1187.780 1131	1171.442 7301	1155.451 8427	1124.473 7244	1080.388 2469

表十三 等差變額年金現值表

$$\Sigma a_{\overline{n}|} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

n	1½%	1½%	1½%	1½%	2%
1	0.988 8762	0.987 6543	0.985 2217	0.982 8010	0.980 3922
2	2.955 6244	2.950 7697	2.941 1051	2.931 4997	2.921 9581
3	5.889 3690	5.877 3034	5.853 3055	5.829 4888	5.805 8364
4	9.779 3513	9.755 3614	9.707 6902	9.660 4263	9.613 5651
5	14.614 9333	14.573 1964	14.490 3351	14.408 2814	14.327 0246
6	20.385 5953	20.319 2064	20.187 5223	20.057 2790	19.928 4555
7	27.080 9348	26.981 9322	26.785 7363	26.591 9204	26.400 4465
8	34.690 6648	34.550 0565	34.271 6613	33.996 9734	33.725 9280
9	43.204 6129	43.012 4015	42.632 1787	42.257 4677	41.888 1647
10	52.612 7198	52.387 9274	51.854 3632	51.358 6906	50.870 7497
11	62.905 0382	62.575 7308	61.925 4810	61.286 1824	60.657 5978
12	74.071 7312	73.655 0427	72.832 9862	72.025 7321	71.232 9390
13	86.103 0716	85.585 2374	84.564 5184	83.563 3731	82.581 3127
14	98.989 4404	98.355 7801	97.107 8999	95.885 3789	94.687 5615
15	112.721 3255	111.956 3261	110.451 1329	108.978 2594	107.536 8250
16	127.289 3206	126.376 6183	124.582 3970	122.828 7562	121.114 5943
17	142.684 1242	141.606 5366	139.490 0463	137.423 8390	135.406 4062
18	158.896 5382	157.636 0855	155.162 6072	152.750 7017	150.398 4374
19	175.917 4667	174.455 3931	171.588 7756	168.796 7584	166.076 8994
20	193.737 9151	192.054 7093	188.757 4144	185.549 6397	182.428 3328
21	212.348 9890	210.424 4042	206.657 5511	202.997 1889	199.439 5419
22	231.741 8927	229.554 9671	225.278 3755	221.127 4584	217.097 5901
23	251.907 9285	249.437 0046	244.609 2369	239.928 7060	235.389 7943
24	272.838 4955	270.061 2391	264.639 6423	259.389 3917	254.303 7199
25	294.525 0382	291.418 5077	285.359 2535	279.498 1737	273.827 1763
26	316.959 2961	313.499 7607	306.757 8852	300.243 9053	293.948 2121
27	340.132 8021	336.296 0300	328.825 5027	321.615 6318	314.655 1099
28	364.037 3816	359.798 5777	351.552 2194	343.602 5865	335.936 3823
29	388.664 9014	383.998 5953	374.928 2949	366.194 1382	357.780 7669
30	414.007 3191	408.887 5015	398.944 1330	389.330 0375	380.177 2225
31	440.056 6814	434.456 7916	423.590 2788	413.149 9140	403.114 9240
32	466.805 1238	460.698 0558	448.857 4175	437.493 7730	426.583 2588
33	494.244 8690	487.603 0280	474.736 3719	462.401 7425	450.571 8224
34	522.368 2265	515.163 4844	501.218 1004	487.864 1204	475.070 4141
35	551.167 5911	543.371 3426	528.293 6950	513.871 3714	500.069 0334
36	580.635 4223	572.218 6100	555.954 3793	540.414 1242	525.557 8759
37	610.764 3435	601.697 3926	584.191 5067	567.483 1688	551.527 3293
38	641.546 9404	631.799 8939	612.996 5583	595.069 4534	577.967 9699
39	672.975 9608	662.518 4137	642.361 1412	623.164 0819	604.870 5587
40	705.044 2194	693.845 3469	672.276 9864	651.758 3115	632.226 0380
41	737.834 5888	725.773 1821	702.735 9472	680.843 5494	660.025 5274
42	771.160 0488	758.294 5099	733.729 9973	710.411 3507	688.260 3210
43	805.103 6453	791.401 9762	765.251 2238	740.453 4159	716.921 8463
44	839.658 4996	825.088 3715	797.291 8511	770.961 5382	746.001 8834
45	874.817 8118	859.346 5398	829.844 1832	801.927 8508	775.492 0063
46	910.574 8571	894.169 4220	862.900 6781	833.344 3251	805.384 3199
47	946.922 8660	929.550 0464	896.453 8700	865.203 2679	835.670 9018
48	983.855 6223	965.481 5273	930.496 4237	897.497 0692	866.344 0214
49	1021.366 2648	1001.957 0640	965.021 1071	930.218 2498	897.396 0994
50	1059.448 4819	1038.969 9938	1000.020 7951	963.359 4593	928.819 7053

表十三 等差變額年金現值表

$$\Sigma a_{\overline{n}|} = a_{\overline{1}|} + a_{\overline{2}|} + a_{\overline{3}|} + \dots + a_{\overline{n}|}$$

n	2½%	2½%	2½%	3%	3½%
1	0.977 9951	0.975 6098	0.973 2360	0.970 8738	0.966 1836
2	2.912 4647	2.903 0339	2.893 6604	2.884 3435	2.865 8779
3	5.732 3615	5.759 0575	5.755 9225	5.712 9548	5.667 6148
4	9.507 1017	9.521 0317	9.475 3504	9.430 0532	9.340 5940
5	14.246 5543	14.166 8602	14.087 9322	14.009 7604	13.855 6464
6	19.801 0311	19.674 9855	19.550 2090	19.426 9519	19.184 1994
7	26.211 2773	26.024 3761	25.839 7071	25.657 2348	25.298 7434
8	33.458 4619	33.194 5133	32.934 0215	32.676 9270	32.172 0990
9	41.524 1682	41.165 3788	40.811 6997	40.463 0359	39.780 3855
10	50.390 3845	49.917 4423	49.451 7759	48.993 2388	48.096 9908
11	60.039 4959	59.481 6515	58.833 8451	58.245 8629	57.098 5418
12	70.454 2747	69.689 4161	68.938 0488	68.199 8669	66.761 8762
13	81.617 8725	80.672 6011	79.745 0597	78.834 8222	77.064 6146
14	93.513 8118	92.365 5132	91.236 0678	90.130 8454	87.985 1349
15	106.125 9773	104.744 8910	103.392 7667	102.068 8304	99.502 5458
16	119.438 6086	117.799 8936	116.197 3399	114.629 9325	111.596 6626
17	133.436 2920	131.512 0913	129.632 4476	127.796 0509	124.247 9832
18	148.103 9521	145.865 4560	143.681 2142	141.549 6640	137.437 6649
19	163.426 3490	160.844 3463	158.327 2157	155.873 3631	151.147 6024
20	179.390 5614	176.433 5086	173.554 4679	170.750 8380	165.359 9057
21	195.980 9891	192.618 0572	189.347 4140	186.165 8621	180.057 8799
22	213.184 3414	209.383 4704	205.690 9139	202.102 7788	195.225 0047
23	230.987 1310	226.715 5809	222.570 2325	218.546 3871	210.845 4152
24	249.376 1672	244.600 5667	239.971 0292	235.481 9293	226.908 7828
25	268.338 5499	263.024 9431	257.879 3471	252.895 0770	243.385 2974
26	287.861 6625	281.975 5543	276.281 6030	270.771 9194	260.275 6496
27	307.933 1662	301.439 5651	295.164 5772	289.098 9509	277.561 0141
28	328.540 9939	321.404 4538	314.515 4036	307.863 0591	295.228 0330
29	349.673 3436	341.858 0037	334.321 5607	327.051 5137	313.263 8000
30	371.318 6735	362.788 2963	354.570 8620	346.651 9550	331.655 8454
31	393.465 6953	384.183 7037	375.251 4472	366.652 3835	350.392 1211
32	416.103 3695	406.032 3817	396.351 7734	387.041 1490	369.460 9266
33	439.220 8993	428.324 7626	417.860 6067	407.806 9408	388.851 1948
34	462.807 7255	451.048 5489	439.767 0138	428.938 7775	408.551 8790
35	486.853 5212	474.193 7062	462.060 3541	450.425 9976	428.552 5401
36	511.348 1870	497.749 9573	484.730 2716	472.258 2501	448.843 0839
37	536.281 8455	521.707 2754	507.766 6377	494.425 4855	469.413 5594
38	561.644 3867	546.055 8785	531.159 7934	516.917 9471	490.254 6467
39	587.427 7132	570.786 2229	554.900 0422	539.726 1622	511.357 1466
40	613.621 2354	595.888 9979	578.978 1433	562.840 9342	532.712 2189
41	640.216 3671	621.355 1199	603.385 0543	586.253 3342	554.311 3226
42	667.204 2710	647.175 7268	628.111 9750	609.954 6934	576.146 2055
43	694.576 3042	673.342 1725	653.150 3406	633.936 5955	598.208 8942
44	722.324 0139	699.845 0215	678.491 8157	658.190 8694	620.491 6852
45	750.439 1334	726.679 0458	704.128 2378	682.769 5820	642.987 1354
46	778.918 5779	753.833 2154	730.051 8616	707.485 0310	665.688 0530
47	807.739 4404	781.500 6979	756.254 8531	732.509 7389	688.587 4914
48	836.908 9882	809.073 8517	782.729 7841	757.776 4455	711.673 7356
49	866.414 6584	837.145 2211	809.469 3762	783.278 1024	734.955 3001
50	896.249 0547	865.507 5323	836.466 5462	809.007 8664	758.410 9180

表十三 等差變類年金現值表

$$\Sigma a_n = a_{11} + a_{21} + a_{31} + \dots + a_{n1}$$

n	4%	4½%	5%	5½%	6%
1	0.961 5385	0.956 9378	0.952 3810	0.947 8673	0.943 3962
2	2.847 6331	2.829 6055	2.811 7914	2.794 1870	2.776 7889
3	5.622 7242	5.578 5699	5.535 0394	5.492 1204	5.449 8009
4	9.252 6194	9.166 0956	9.080 9899	8.997 2705	8.914 9065
5	13.704 4417	13.556 0723	13.410 4666	13.267 5550	13.127 2703
6	18.946 5786	18.713 9448	18.486 1587	18.263 0853	18.044 5946
7	24.948 6333	24.606 6458	24.272 5321	23.946 0524	23.626 9760
8	31.681 3781	31.202 5318	30.735 7448	30.280 6184	29.836 7698
9	39.116 7097	38.471 3223	37.843 5665	37.232 8137	36.638 4621
10	47.227 6055	46.384 0405	45.565 3014	44.770 4395	43.998 5492
11	55.988 0822	54.912 9574	53.871 7156	52.862 9758	51.885 4237
12	65.373 1560	64.031 5882	62.794 9673	61.481 4937	60.269 2677
13	75.358 8038	73.074 3906	72.128 5403	70.598 5722	69.121 9506
14	85.921 9268	83.937 2159	82.027 1812	80.188 2201	78.416 9346
15	97.040 3142	94.676 7616	92.406 8392	90.225 8010	88.129 1836
16	108.692 6098	105.910 7767	103.244 6088	100.687 9631	98.235 0788
17	120.858 2737	117.617 9681	114.518 6750	111.552 5716	108.712 3385
18	133.517 5756	129.777 9599	126.208 2619	122.798 6461	119.539 9420
19	146.651 5150	142.371 2535	138.293 5823	134.406 2996	130.698 0585
20	160.241 8414	155.379 1900	150.755 7931	146.356 6821	142.167 9737
21	174.271 0013	168.783 9138	163.576 9459	158.681 9262	153.932 0563
22	188.722 1167	182.568 3386	176.739 9484	171.215 0959	165.973 6380
23	203.578 9583	196.716 1135	190.228 5223	184.090 1383	178.277 0170
24	218.825 9215	211.211 5919	204.027 1641	197.241 8373	190.827 3746
25	234.448 0014	226.039 8008	218.121 1037	210.655 7699	203.610 7307
26	250.430 7706	241.186 4123	232.496 2940	224.318 2658	216.613 8969
27	266.760 3563	256.637 7151	247.139 3276	238.216 3652	229.824 4310
28	283.423 4196	272.330 5886	262.037 4549	252.337 7870	243.230 5933
29	300.407 1342	288.402 4771	277.178 5284	266.670 8881	256.821 3163
30	317.699 1675	304.691 3657	292.550 9795	281.204 6333	270.586 1475
31	335.287 6610	321.235 7566	308.143 7900	295.928 5624	284.515 2335
32	353.161 2125	338.024 6475	323.946 4666	310.832 7605	298.599 2769
33	371.308 8582	355.047 5096	339.949 0158	325.907 8299	312.829 5065
34	389.720 0560	372.294 2675	356.141 9198	341.144 8625	327.197 6476
35	408.384 6692	389.755 2799	372.516 1141	356.535 4147	341.695 8940
36	427.292 9512	407.421 3205	389.062 9658	372.071 4831	356.316 8811
37	446.435 5300	425.233 5603	405.774 2532	387.745 4816	371.053 6614
38	465.803 3942	443.333 5505	422.642 1459	403.550 2195	385.899 6806
39	485.387 8790	461.563 2062	439.659 1866	419.478 8811	400.848 7533
40	505.180 6529	479.964 7907	456.818 2729	435.525 0058	415.895 0521
41	525.173 7047	498.530 9002	474.112 6409	451.632 4699	431.033 0681
42	545.359 3315	517.254 4499	491.535 8485	467.945 4691	446.257 6114
43	565.730 1264	536.128 6602	509.081 7604	484.308 5015	461.563 7843
44	586.278 9677	555.147 0433	526.744 5337	500.766 3522	476.946 9663
45	606.999 0074	574.303 3907	544.518 6036	517.314 0779	492.402 7984
46	627.883 6610	593.591 7614	562.398 6701	533.946 9933	507.927 1633
47	648.926 5971	613.006 4702	580.379 6838	550.660 6571	523.516 1965
48	670.121 7230	632.542 0768	598.456 8436	567.450 8598	539.166 2231
49	691.463 2000	652.193 3749	616.625 5653	584.313 6112	554.873 7954
50	712.945 3846	671.955 3227	634.881 4908	601.245 3291	570.635 6661

表十三 等差變額年金現值表

$$\Sigma a_{\overline{n}|} = a_{\overline{1}|} + a_{\overline{2}|} + a_{\overline{3}|} + \dots + a_{\overline{n}|}$$

n	6½%	7%	7½%	8%
1	0.938 9671	0.934 5794	0.930 2326	0.925 9259
2	2.769 5936	2.742 5976	2.725 7977	2.709 1907
3	5.408 0691	5.366 9137	5.326 3235	5.286 2877
4	8.833 8677	8.754 1249	8.675 6497	8.598 4145
5	12.989 5471	12.854 3224	12.721 5346	12.591 1246
6	17.830 5607	17.620 8620	17.415 3811	17.214 0042
7	23.315 0804	23.010 1514	22.711 9824	22.420 3743
8	29.403 8314	28.981 4499	28.569 2859	28.167 0132
9	36.059 9356	35.496 6822	34.948 1730	34.413 9011
10	43.248 7658	42.520 2637	41.812 2539	41.123 9825
11	50.937 8033	50.018 9381	49.127 6731	48.282 9468
12	59.096 5336	57.961 6244	56.862 9533	55.799 0248
13	67.696 2757	66.319 2751	64.983 7968	63.702 8007
14	76.710 1180	75.064 7431	73.477 9503	71.947 0377
15	86.112 7859	84.172 6571	82.305 0701	80.506 5164
16	95.880 5510	93.619 3057	91.446 5768	89.357 8856
17	105.991 1277	103.382 5287	100.880 5366	98.479 5237
18	116.423 5941	113.441 6156	110.586 5457	107.851 4108
19	127.158 3043	123.777 2108	120.545 6239	117.455 0100
20	138.176 8116	134.371 2251	130.740 1152	127.273 1574
21	149.461 7949	145.206 7524	141.153 5956	137.289 9606
22	160.996 9905	156.267 9929	151.770 7866	147.490 7043
23	172.767 1273	167.540 1803	162.577 4759	157.861 7632
24	184.757 8660	179.009 5143	173.500 4427	168.390 5215
25	196.955 7427	190.663 0975	184.707 3835	179.065 2977
26	209.348 1152	202.488 8761	196.006 8731	189.875 2756
27	221.923 1129	214.475 5852	207.443 2540	200.810 4404
28	234.669 5895	226.612 6964	219.021 6316	211.861 5189
29	247.577 0794	238.890 3705	230.717 7969	223.019 9249
30	260.635 7553	251.299 4117	242.523 1831	234.277 7082
31	273.836 3899	263.831 2259	254.444 3215	245.627 5076
32	287.170 3192	276.477 7312	266.460 2991	257.032 5071
33	300.629 4077	289.231 5712	278.567 7201	268.576 3954
34	314.206 0166	302.085 5806	290.760 6699	280.163 3291
35	327.892 9733	315.033 2529	303.033 1813	291.817 8973
36	341.683 5430	328.068 4606	315.379 7035	303.535 9091
37	355.571 4019	341.185 4772	327.795 0730	315.310 2686
38	369.550 6121	354.378 9507	340.274 4855	327.139 1376
39	383.615 5982	367.643 8791	352.813 4759	339.017 7200
40	397.761 1251	380.975 5880	365.407 3845	350.942 3333
41	411.982 2771	394.369 7084	378.053 8461	362.909 5679
42	426.274 4386	407.822 1574	390.747 7638	374.916 2666
43	440.633 2757	421.329 1190	403.536 2919	386.959 5061
44	455.054 7189	434.887 0271	416.316 3180	399.036 5797
45	469.534 9474	448.492 5487	429.134 9470	411.144 9812
46	484.070 3731	462.142 5689	441.989 4856	423.282 3900
47	498.657 6273	475.834 1766	454.877 4285	435.446 6574
48	513.293 5468	489.564 6510	467.796 4451	447.635 7939
49	527.975 1613	503.331 4495	480.744 3675	459.847 9572
50	542.699 6820	517.132 1958	493.719 1791	472.081 4420

表十三 等差變額年金現值表

$$\Sigma a_n = a_{11} + a_{21} + a_{31} + \dots + a_{n1}$$

n	$\delta_{\frac{1}{2}}\%$	n	$\delta_{\frac{1}{2}}\%$
1	0.921 6590	26	184.069 4955
2	2.692 7733	27	194.534 0973
3	5.246 7956	28	205.100 5505
4	8.522 3923	29	215.760 8760
5	12.463 0344	30	226.507 7198
6	17.016 6215	31	237.534 3040
7	22.135 1351	32	248.234 3816
8	27.774 3180	33	259.202 1950
9	33.893 3807	34	270.232 4978
10	40.454 7237	35	281.320 2191
11	47.423 7131	36	292.461 0315
12	54.768 3992	37	303.650 7203
13	62.459 3541	38	314.885 4565
14	70.469 4508	39	326.161 7110
15	78.773 6374	40	337.476 2314
16	87.349 0206	41	348.826 0197
17	96.174 2125	42	360.208 3131
18	105.229 6890	43	371.620 5651
19	114.497 4032	44	383.060 4236
20	123.960 7453	45	394.525 7407
21	133.604 3740	46	406.014 5075
22	143.414 1696	47	417.524 8917
23	153.377 1149	48	429.055 1998
24	163.481 2119	49	440.603 8707
25	173.715 4023		452.169 4661

表十四 死亡生殘表(美國實驗表)

年 齡 x	生 殘 人 數 l_x	死 亡 人 數 d_x	每 年 死 亡 機 率 q_x	每 年 生 存 機 率 p_x	年 齡 x	生 殘 人 數 l_x	死 亡 人 數 d_x	每 年 死 亡 機 率 q_x	每 年 生 存 機 率 p_x
10	100,000	749	0.007 490	0.992 510	53	66,797	1,001	0.016 333	0.983 667
11	99,251	746	0.007 516	0.992 484	54	65,706	1,143	0.017 396	0.982 604
12	98,505	743	0.007 543	0.992 457	55	64,563	1,199	0.018 571	0.981 429
13	97,762	740	0.007 569	0.992 431	56	63,364	1,260	0.019 885	0.981 115
14	97,022	737	0.007 596	0.992 404	57	62,104	1,325	0.021 335	0.978 665
15	96,285	735	0.007 634	0.992 366	58	60,779	1,394	0.022 938	0.977 064
16	95,550	732	0.007 661	0.992 339	59	59,385	1,468	0.024 720	0.975 280
17	94,818	729	0.007 688	0.992 312	60	57,917	1,546	0.026 693	0.973 307
18	94,089	727	0.007 727	0.992 273	61	56,371	1,628	0.028 880	0.971 120
19	93,362	725	0.007 765	0.992 235	62	54,743	1,713	0.031 292	0.968 708
20	92,637	723	0.007 805	0.992 195	63	53,030	1,800	0.033 943	0.966 057
21	91,914	722	0.007 855	0.992 145	64	51,230	1,889	0.036 873	0.963 127
22	91,192	721	0.007 906	0.992 094	65	49,341	1,980	0.040 129	0.959 871
23	90,471	720	0.007 958	0.992 042	66	47,361	2,070	0.043 707	0.956 293
24	89,751	719	0.008 011	0.991 989	67	45,291	2,158	0.047 647	0.952 353
25	89,032	718	0.008 065	0.991 935	68	43,133	2,243	0.052 002	0.947 998
26	88,314	718	0.008 130	0.991 870	69	40,890	2,321	0.056 762	0.943 238
27	87,596	718	0.008 197	0.991 803	70	38,569	2,391	0.061 993	0.938 007
28	86,878	718	0.008 264	0.991 736	71	36,178	2,448	0.067 665	0.932 335
29	86,160	719	0.008 345	0.991 655	72	33,730	2,487	0.073 733	0.926 267
30	85,441	720	0.008 427	0.991 573	73	31,243	2,505	0.080 178	0.919 822
31	84,721	721	0.008 510	0.991 490	74	28,738	2,501	0.087 023	0.912 972
32	84,000	723	0.008 597	0.991 403	75	26,237	2,476	0.094 371	0.905 629
33	83,277	726	0.008 718	0.991 282	76	23,761	2,431	0.102 311	0.897 689
34	82,551	729	0.008 831	0.991 169	77	21,330	2,369	0.111 064	0.888 936
35	81,822	732	0.008 946	0.991 054	78	18,961	2,291	0.120 827	0.879 173
36	81,090	737	0.009 089	0.990 911	79	16,670	2,196	0.131 734	0.868 266
37	80,353	742	0.009 234	0.990 776	80	14,474	2,091	0.144 486	0.855 534
38	79,611	749	0.009 408	0.990 592	81	12,383	1,964	0.158 605	0.841 395
39	78,862	756	0.009 586	0.990 414	82	10,419	1,816	0.174 297	0.825 703
40	78,106	765	0.009 794	0.990 206	83	8,606	1,648	0.191 561	0.808 439
41	77,341	774	0.010 008	0.989 992	84	6,955	1,470	0.211 359	0.788 641
42	76,567	785	0.010 252	0.989 748	85	5,485	1,292	0.235 552	0.764 448
43	75,782	797	0.010 517	0.989 483	86	4,193	1,114	0.265 681	0.734 319
44	74,985	812	0.010 829	0.989 171	87	3,079	933	0.303 020	0.696 980
45	74,173	828	0.011 163	0.988 837	88	2,146	744	0.346 692	0.653 308
46	73,345	848	0.011 562	0.988 438	89	1,402	555	0.395 863	0.604 137
47	72,497	870	0.012 000	0.988 000	90	847	385	0.454 545	0.545 455
48	71,627	896	0.012 509	0.987 491	91	462	246	0.532 468	0.467 532
49	70,731	927	0.013 106	0.986 894	92	216	137	0.634 259	0.365 741
50	69,804	962	0.013 781	0.986 219	93	79	58	0.734 177	0.265 823
51	68,842	1,001	0.014 541	0.985 459	94	21	18	0.857 143	0.142 857
52	67,841	1,044	0.015 389	0.984 611	95	3	3	1.000 000	0.000 000

表十五 人壽保險與生命年金計算表(根據美國經驗)

以年利三釐五毫爲標準)

$$D_x = v^x l_x \qquad C_x = v^{x+1} d_x$$

$$1 + a_x = \frac{N_x}{D_x} \qquad A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots$ 至表之極限爲止

$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots$ 至表之極限爲止

年齡x	D_x	N_x	C_x	M_x	$1+a_x$	A_x
10	70891.9	1575 535.	513.02	17612.9	22.2245	0.24845
11	67981.5	1504 643.	493.69	17099.9	22.1931	0.25154
12	65189.0	1436 062.	475.08	16606.2	22.0384	0.25474
13	62509.4	1371 473.	457.16	16131.1	21.9403	0.25806
14	59938.4	1308 063.	439.91	15674.0	21.8385	0.26151
15	57471.6	1249 025.	423.88	15234.1	21.7329	0.26508
16	55104.2	1191 553.	407.37	14810.2	21.6236	0.26877
17	52832.9	1136 449.	392.47	14402.3	21.5102	0.27261
18	50653.9	1083 616.	378.15	14009.3	21.3926	0.27659
19	48562.8	1032 962.	364.36	13631.7	21.2707	0.28071
20	46556.2	984 400.	351.07	13267.3	21.1443	0.28497
21	44630.8	937 843.	338.73	12916.3	21.0134	0.28940
22	42782.8	893 213.	326.82	12577.5	20.8779	0.29399
23	41009.2	850 430.	315.35	12250.7	20.7375	0.29873
24	39307.1	809 421.	304.24	11935.4	20.5922	0.30365
25	37673.6	770 113.	293.55	11631.1	20.4417	0.30873
26	36106.1	732 440.	283.62	11337.6	20.2858	0.31401
27	34601.5	696 334.	274.03	11054.0	20.1244	0.31947
28	33157.4	661 732.	264.76	10779.9	19.9573	0.32512
29	31771.3	628 575.	256.16	10515.2	19.7843	0.33097
30	30440.8	596 804.	247.85	10259.0	19.6054	0.33702
31	29163.5	566 363.	239.797	10011.2	19.4202	0.34328
32	27937.5	537 199.	232.331	9771.38	19.2286	0.34976
33	26760.5	509 262.	225.406	9539.04	19.0304	0.35646
34	25630.1	482 501.	218.633	9313.64	18.8256	0.36339
35	24544.7	456 871.	212.157	9094.96	18.6138	0.37055
36	23502.5	432 326.	206.333	8882.80	18.3949	0.37795
37	22501.4	408 824.	200.757	8676.42	18.1688	0.38560
38	21539.7	386 323.	195.798	8475.66	17.9354	0.39349
39	20615.5	364 783.	190.945	8279.86	17.6946	0.40163
40	19727.4	344 167.	186.634	8088.92	17.4461	0.41003
41	18873.6	324 440.	182.493	7902.23	17.1901	0.41869
42	18052.9	305 566.	178.828	7719.74	16.9262	0.42762
43	17263.6	287 513.	175.421	7540.91	16.6543	0.43681
44	16504.4	270 250.	172.630	7365.49	16.3744	0.44628
45	15773.6	253 745.	170.127	7192.81	16.0867	0.45600
46	15070.0	237 972.	168.345	7022.63	15.7911	0.46600
47	14392.1	222 902.	166.372	6854.34	15.4878	0.47626
48	13738.5	208 510.	166.047	6687.47	15.1770	0.48677
49	13107.9	194 771.	165.933	6521.42	14.8591	0.49752
50	12493.6	181 663.	166.424	6355.44	14.5346	0.50849
51	11909.6	169 165.	167.316	6189.01	14.2041	0.51967
52	11339.5	157 252.	168.601	6021.70	13.8679	0.53104

表十五 人壽保險與生命年金計算表(根據美國經驗
以年利三釐五毫為標準)

$$D_x = v^x l_x \quad C_x = v^{x+1} d_0$$

$$1+a_x = \frac{N_x}{D_x} \quad A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots$ 至表之極限為止

$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots$ 至表之極限為止

年齡x	Dx	Nx	Cx	Mx	1+ax	Ax
53	10787.4	145916.	170.234	5853.10	13.5264	0.54258
54	10252.4	135128.	172.317	5682.86	13.1801	0.55430
55	9733.40	124876.	174.646	5510.54	12.8296	0.56615
56	9229.60	115142.	177.325	5335.90	12.4753	0.57813
57	8740.17	105912.8	180.168	5158.57	12.1179	0.59022
58	8264.44	97172.6	183.139	4978.40	11.7579	0.60239
59	7801.82	88903.2	186.340	4795.27	11.3958	0.61463
60	7351.65	81105.4	189.604	4608.93	11.0324	0.62692
61	6913.44	73754.7	192.909	4419.32	10.6683	0.63924
62	6486.75	66841.3	196.117	4226.41	10.3043	0.65155
63	6071.27	60354.5	199.109	4030.30	9.9410	0.66383
64	5666.85	54283.3	201.887	3831.19	9.5791	0.67607
65	5273.33	48616.4	204.457	3629.30	9.2193	0.68824
66	4890.55	43343.1	206.522	3424.84	8.8626	0.70030
67	4518.65	38452.5	208.022	3218.32	8.5097	0.71223
68	4157.82	33933.9	208.903	3010.30	8.1615	0.72401
69	3808.32	29776.1	208.858	2801.40	7.8187	0.73560
70	3470.67	25967.7	207.881	2592.54	7.4820	0.74698
71	3145.43	22497.1	205.639	2384.66	7.1523	0.75813
72	2833.42	19351.6	201.851	2179.02	6.8298	0.76904
73	2535.75	16518.2	196.436	1977.17	6.5141	0.77972
74	2253.57	13982.5	189.491	1780.73	6.2046	0.79018
75	1987.87	11728.9	181.253	1591.24	5.9002	0.80043
76	1739.39	9741.02	171.940	1409.99	5.6002	0.81062
77	1508.63	8001.63	161.889	1233.05	5.3039	0.82064
78	1295.73	6493.00	151.2646	1076.158	5.0111	0.83054
79	1100.647	5197.27	140.0891	924.894	4.7220	0.84032
80	923.338	4096.62	128.8801	784.805	4.4368	0.84997
81	763.234	3173.29	116.9583	655.924	4.1577	0.85940
82	620.465	2410.05	104.4881	538.966	3.8843	0.86865
83	494.995	1789.69	91.6152	434.478	3.6154	0.87774
84	386.641	1294.69	78.9565	342.802	3.3483	0.88677
85	294.610	907.95	67.0490	263.906	3.0819	0.89578
86	217.598	613.34	55.8566	196.877	2.8187	0.90468
87	154.383	395.74	45.1992	141.000	2.5634	0.91332
88	103.363	241.36	34.82426	95.8011	2.3216	0.92149
89	65.6231	137.398	25.0929	60.9763	2.0937	0.92920
90	38.3047	71.775	16.22244	35.8775	1.8738	0.93664
91	20.18692	33.4700	10.385393	19.05509	1.6580	0.94393
92	9.11888	13.2831	5.588150	8.66970	1.4567	0.95074
93	3.22236	4.16420	2.285484	3.08155	1.2923	0.95630
94	0.827611	0.94184	0.685393	0.79576	1.1380	0.96132
95	0.114232	0.114232	0.110369	0.110369	1.0000	0.96618

表十六 人壽保險預備金計算表(根據美國經驗以年利三釐五毫為標準)

$$u_x = \frac{D_x}{D_{x+1}}, \quad k_x = \frac{C_x}{D_{x+1}}$$

年齡 x	u_x	k_x	年齡 x	u_x	k_x
10	1.042 811	0.007 546	53	1.052 185	0.016 804
11	1.042 838	0.007 573	54	1.053 323	0.017 704
12	1.042 866	0.007 600	55	1.054 585	0.018 922
13	1.042 894	0.007 627	56	1.055 999	0.020 289
14	1.042 922	0.007 654	57	1.057 563	0.021 800
15	1.042 962	0.007 692	58	1.059 296	0.023 474
16	1.042 990	0.007 720	59	1.061 234	0.025 347
17	1.043 019	0.007 748	60	1.063 385	0.027 425
18	1.043 059	0.007 787	61	1.065 780	0.029 739
19	1.043 100	0.007 826	62	1.068 433	0.032 303
20	1.043 141	0.007 866	63	1.071 365	0.035 136
21	1.043 195	0.007 917	64	1.074 625	0.038 285
22	1.043 248	0.007 969	65	1.078 270	0.041 807
23	1.043 303	0.008 022	66	1.082 304	0.045 704
24	1.043 358	0.008 076	67	1.086 782	0.050 031
25	1.043 415	0.008 130	68	1.091 774	0.054 855
26	1.043 484	0.008 197	69	1.097 234	0.060 178
27	1.043 554	0.008 264	70	1.103 403	0.066 090
28	1.043 625	0.008 333	71	1.110 117	0.072 576
29	1.043 710	0.008 415	72	1.117 388	0.079 602
30	1.043 796	0.008 498	73	1.125 218	0.087 167
31	1.043 884	0.008 583	74	1.133 660	0.095 323
32	1.043 986	0.008 682	75	1.142 852	0.104 204
33	1.044 102	0.008 795	76	1.152 960	0.113 971
34	1.044 221	0.008 910	77	1.164 314	0.124 941
35	1.044 343	0.009 027	78	1.177 243	0.137 433
36	1.044 493	0.009 172	79	1.192 031	0.151 720
37	1.044 647	0.009 320	80	1.209 771	0.168 361
38	1.044 830	0.009 498	81	1.230 099	0.188 502
39	1.045 018	0.009 679	82	1.253 477	0.211 089
40	1.045 238	0.009 891	83	1.280 245	0.236 952
41	1.045 463	0.010 109	84	1.312 384	0.268 004
42	1.045 721	0.010 359	85	1.353 917	0.308 133
43	1.046 001	0.010 629	86	1.409 469	0.361 806
44	1.046 331	0.010 947	87	1.484 979	0.434 762
45	1.046 684	0.011 289	88	1.584 244	0.530 671
46	1.047 106	0.011 697	89	1.713 188	0.655 254
47	1.047 571	0.012 146	90	1.897 500	0.833 333
48	1.048 111	0.012 663	91	2.213 750	1.138 889
49	1.048 745	0.013 280	92	2.829 373	1.734 177
50	1.049 463	0.013 974	93	3.893 571	2.761 905
51	1.050 272	0.014 755	94	7.245 000	6.000 000
52	1.051 177	0.015 629			

甲寅年 學校圖書館

中華民國二十五年二月初版
中華民國二十六年四月再版

◆(H3323精)

大學叢書
(教本)投資數學一冊

每冊實價國幣肆元

外埠酌加運費匯費

著者 褚鳳儀

發行人 王雲五
上海河南路

印刷所 商務印書館
上海河南路

發行所 商務印書館
上海及各埠

版權所有
翻印必究

◆E3374

周

