流の線は到る處速度ポテンシャルの準面に垂直である。

§48.11 壓力方程式

速度ポテンシャルが成立し外力が保存系の力ならば，Euler の運動方程式はいつも積分できる。

速度ポテンシャルが存在するから，運動方程式の形は

$$-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi+\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{v}^2=-\nabla(\Omega+E)\quad\cdots\cdots(210.2)$$

となる，これを積分すれば

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2=-(\Omega+E)+F(t)$$

$F(t)$ は只 t だけの任意の函數で，流體全體について同じ値をとる。

$$E=\int\frac{dp}{\rho}$$

であるから，この式を移項すれば

$$\int\frac{dp}{\rho}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\Omega-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2+F(t)\quad\cdots\cdots(210.3)$$

これは壓力の關係を示すもので**壓力方程式**といふ。

§48.12 Bernoulli の定理

定常の流ならば，t について變らないから

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0,$$

$$F(t)=\text{const.}=C,$$

となり

$$\int\frac{dp}{\rho}=-\Omega-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2+C_1\quad\cdots\cdots(211.1)$$

これは速度ポテンシャルが成立つときの式で，C_1 は流體全部に亙つて一定な常數である。

しかし初めの運動の式にもどつて，定常の流の時

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=0$$

であるから

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}=-\nabla(\Omega+E)$$

を積分すれば

$$\int\frac{dp}{\rho}=-\Omega-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2+C_2\quad\cdots\cdots(211.2)$$

となる。これは前の式と形は全く同じであるが，式の意味は違ふ。この式は速度ポテンシャルが成立するかどうかに拘らず，定常の流の時に得られるもので，C_2 は或る流の路について一定な常數であつて，流の路ごとに變つた値をとるパラメターである。

この二つの式はともに **Bernoulli の定理**といはれる。

[註] Bernoulli 一家數人は數學者として有名で，この定理は Daniel Bernoulli が 1738 年 Hydrodynamica に發表したものである。

§48.2 源と排け口

流體が四方に一樣に流れ出してゐると考へられる點を**源**(涌き口，涌點)といひ，それと反對に流體が四方から集つてたえず流れ込むと考へられる點を**排け口**(流れ口)といふ。

源か排け口が只一つある場合には，流體はその點に對して對稱

的に流れてゐる。

任意の面を過り,單位時間に流れる流體の容積を**流の强さ**と名づける.流の强さは

$$\int \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\,dS \quad \cdots\cdots(212.1)$$

源の强さを考へるために,任意の閉表面で源をとり圍むと想像し,その面を過つて流れる流の强さが$4\pi m$ならば,**源の强さ**はmであるとする。

卽ち

$$4\pi m=\oint \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\,dS \quad \cdots\cdots(212.2)$$

mは正もくしは負とすれば,mが負の時は排け口と見做すことにする。

§48.21　源が只一つあつて,四方に一樣に流體が流れ出ると,源から$\boldsymbol{r}$の點に於ける流體の速度は

$$f(r)\boldsymbol{r}$$

と書くことができやう,$f(r)$はrのスカラー點函數であるから,

$$2\boldsymbol{w}=\nabla\times\boldsymbol{v}=\nabla f(r)\times\boldsymbol{r}+f(r)\nabla\times\boldsymbol{r}$$

然るに(§41.44)により

$$\nabla f(r)=\frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{r}_1$$

であるから

$$\nabla f(r)\times\boldsymbol{r}=0$$

又(113.4)式により一般に

$$\nabla\times\boldsymbol{r}=0$$

從つて

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=0$$

卽ち渦の速度は到る處零であるから渦なしの運動で,$\boldsymbol{v}$は速度ポテンシャルをもつ,卽ち

$$\boldsymbol{v}=-\nabla\varphi$$

とおけるから

$$4\pi m=-\oint \boldsymbol{n}\cdot\nabla\varphi\,dS \quad \cdots\cdots(212.21)$$

源を圍む閉表面を半徑rの球面にとれば,$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\varphi$は球面上到る處で同じ値であるから積分の外に出して

$$4\pi m=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\oint dS=-4\pi r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial\varphi}{\partial r}=-\frac{m}{r^2}$$

$$\therefore\quad \varphi=\frac{m}{r} \quad \cdots\cdots(212.3)$$

この値を連續の方程式に入れれば

$$\nabla^2\varphi=0$$

となつてφは Laplace の式を滿足する。

然し源又は排け口では,φ竝びにその誘導函數は無限大になるから,數學上特異點として扱はなければならない。

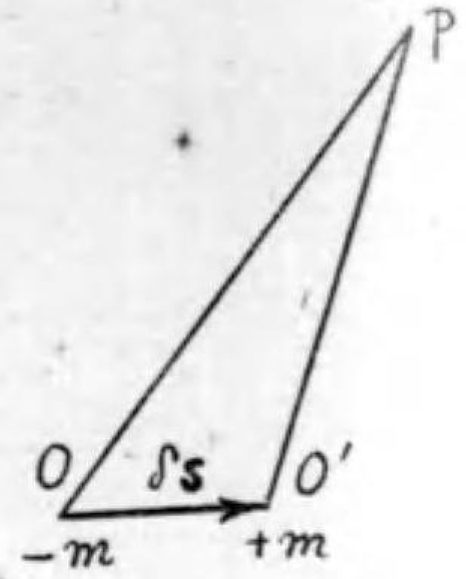
§48.22　二重の源(複涌點)

極めて接近してゐる二點O'とOに夫々强さmの源と,$-m$ の排け口があるとする,

$$\overrightarrow{OO'}=\delta\mathbf{s}$$

である時,O'が限りなくOに近接した極限に於いて

$$\lim_{\delta s\to 0} m\,\delta s=\mu\ \ldots\ldots\ldots\ldots(213.1)$$



第八十九圖

が有限な値をとるときは,源と排け口とが同じ一點に一緒に在るものと見られるので,强さμの**二重の源**と名づける。

排け口を坐標の原點にとれば,點Pに於ける速度ポテンシャルψは

$$\psi=-\frac{m}{r}$$

O'にある源による,同じ點に於ける速度ポテンシャルは

$$-(\psi+\delta\mathbf{s}\cdot\nabla\psi)=\frac{m}{r}+\delta\mathbf{s}\cdot\nabla\left(\frac{m}{r}\right)$$

であるから,この二つを合せた結果は

$$\varphi=m\delta\mathbf{s}\cdot\nabla\frac{1}{r}=\mu\,\mathbf{s}_1\cdot\nabla\frac{1}{r}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(213.2)$$

のポテンシャルがあるとのと同等である。 $\mathbf{s}_1$は二重の源の軸に平行な單位ベクトルで,向きは排け口から源に向ふやうにきめる。

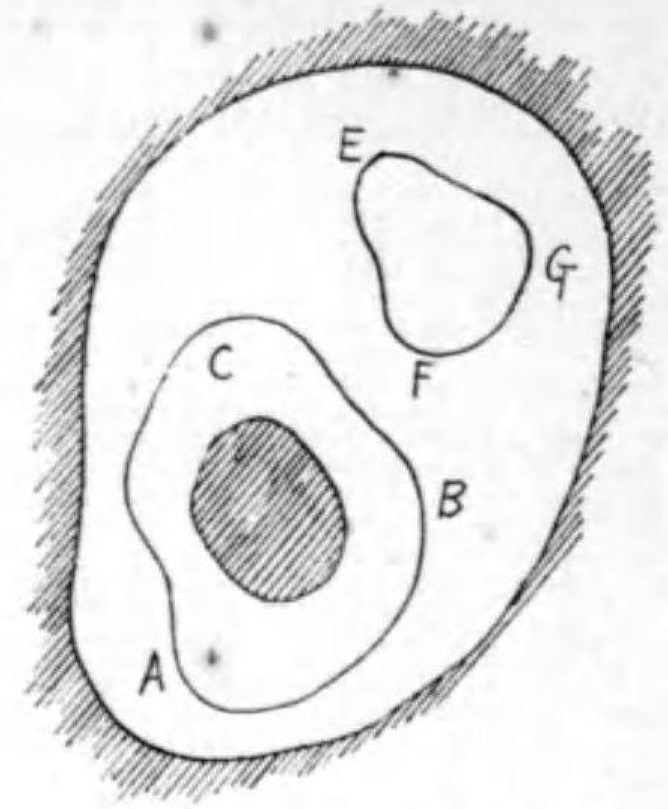
§48.3　環流量

或る區域内にとつた任意の閉曲線をいくらでも縮めることが

できて,限りなく小さくすれば遂に一點に縮少することができるものと,區域の形によつてはできないものとある。

第90圖に於いて,EFGのやうな曲線はいくらでも縮められるが,ABCはもしも圍んでゐるものが無限に長い圓筒などならば,それに防げられて縮少することができない。

第九十圖

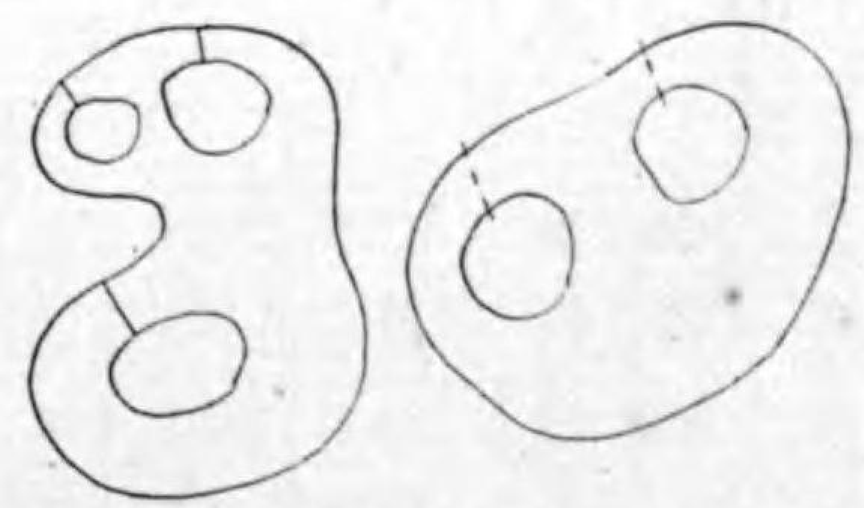


如何なる閉曲線を考へても,どれも悉く縮少できるやうな區域を**單つ結びの區域**といふ。

例へば何物も存在しない空間,或は球が存在する空間のやうな區域である。

ある閉曲線が縮少するのを防げるやうな區域を**聯結した區域**といふ。

第九十一圖



しかし聯結した區域でも,第91圖のやうにいくつかの仕切りを想像して,閉曲線が障礙物を取りぬけないやうにすれば,單つ結びの區域と考へることができる。

一つ仕切りを設けて單結びの區域になる區域を,二つ結びの區域といふ。聯結した區域を,單結びの區域と考へるために設ける仕切りの數に1を加へた數をその區域の**結びつき**といふ。

§48.31 單結びの區域に於ける渦なしの運動について流出量をとれば

$$I(AB)=\int_{(A)}^{(B)}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_{(A)}^{(B)}\nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$=\varphi_A-\varphi_B \quad\cdots\cdots\cdots(214.1)$$

これは路筋に拘らず同じ値をとる,丁度保存系の力の場に於ける仕事と同樣で,只初めのと終の點に於ける値で定まる。

従つて任意の閉曲線に沿つて一と廻り流出量をとれば

$$I(ABCA)=\oint\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$=\int\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}\,dS=0 \quad\cdots\cdots\cdots(214.2)$$

渦なしの運動では,任意の曲線についての環流量は零になる。

§48.32 この結果と Kelvin の定理 §(47.92) とを併せると

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}I(ABCA)&=0\\ I(ABCA)&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(215)$$

であるから閉曲線は流體と一緒に動くにも拘らず,恒に環流量は零である,從つて初めに流體内の一つの閉曲線についてとつた環流量が零ならば,流體の運動は恒に渦なしの運動をつゞけて,渦ができることがない。

§48.33 (例)

剛體の殻の中の單つ結びの區域を滿たしてゐる壓縮するこ

のできない流體が渦なしの運動をしてゐる時は,殻に對して相對速度をもつことはできない。

今假りに殻に對して相對速度$\boldsymbol{v}$をもつものとして,速度ポテンシャルを φ とする流體を圍む剛體の殻 S の內部についてGreenの定理を應用すれば

$$\int\boldsymbol{v}^2\,d\tau=\int(-\nabla\varphi)^2\,d\tau=\oint\varphi\,\boldsymbol{n}\cdot\nabla\varphi\,dS-\int\varphi\nabla^2\varphi\,d\tau$$

然るに連續方程式により

$$\nabla^2\varphi=0$$

であるし境界面は剛體であるから(§47.4)により

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\varphi=0$$

積分の右邊は恒に零であるから

$$\int\boldsymbol{v}^2\,d\tau=0$$

この定積分は正の項の和であるから,零になるためには被積分の項が恒に零でなければならない。即ち

$$\boldsymbol{v}=0$$

相對速度は零となる,卽ち殻の際での流體の速度は零である。

48.4 渦の運動

渦の線の方程式は(206.2)により

$$d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{w}_1\,ds$$

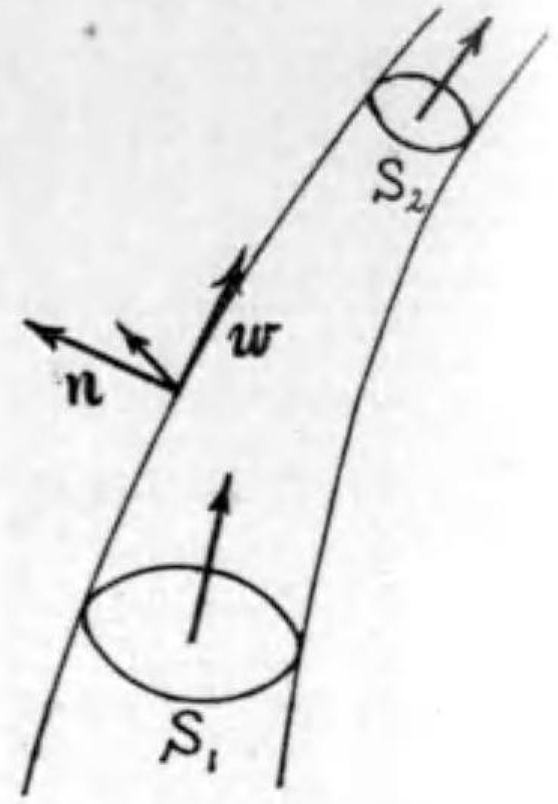
である。

流體の中にとつた面の縁を過るすべての渦の線によつて,一つの管ができる,これを**渦の管**といひ,切口が極めて小さい面積のときは**渦の絲**といふ。

流體内の任意の閉曲線に沿つてとつた環流量は, Stokes 定理を用ゐれば

$$I=\oint \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}=2\int \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \qquad (216.1)$$

となる。



第九十二圖

渦の管と,任意の二つの面との交りの切り口をS_1, S_2とする。

今 S_1, S_2 の面と渦の管によつて圍まれる區域について,Gauss の發散の定理を應用すれば

$$\oint \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\oint \boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}\,dS=\int \nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}\,d\tau=0$$

この面積分はS_1, S_2の面と渦の管についてとるので渦の管についてとつたものは,渦の管の側面が$\boldsymbol{w}$に平行であるから恒に

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}=0$$

であつて關係しない。

S_1及びS_2 の面の法線は共に外側に向けてとるやうに規約してあつたが,もし同じ向きに(一方では外側に,他方では内側に)とるものとすれば,上の結果は

$$\int_{S_1}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{w}\,dS=\int_{S_2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{w}\,dS \qquad (216.2)$$

となる。

つまり一つの渦の管に沿つて,切り口がどこにあつても上の關係が成り立つ,この積分は環流量の半分であるから,結局如何なる切口についても環流量は變らないことになる。

§**48.41** 渦の絲に垂直な切口の面積σが極めて小さいならば,その面上では$|\boldsymbol{w}|=w$が一定であると見做してよいから

$$I=2w\sigma \qquad (216.3)$$

とおく。

この値は渦の絲について到る處一定してゐるから,これを渦の絲の特徴を表はす量にとることができる。 この環流量の値の半分$w\sigma$を通常**渦の强さ**と云ふ。

§**48.42** 渦の管の表面上に閉曲線Cをとる。

Cは渦の管を一周しないものとすれば,その曲線に沿つて

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{w}=0$$

であるから,環流量は零である。

故に Kelvin の定理により,もしこの表面が流體とともに動くならば恒にその路筋についてとつた積分は零であつて,その表面はいつも同じ渦の線をつくるから,渦の管は流體と一緒に動かなければならない,これは極めて小さい切口の渦の管について正しい考である。

§**48.43** 閉曲線が渦の管をとり卷くとき,それについてとつた環流量は渦の强さの二倍に等しい。

そして閉曲線が流體と一緒に動くとき,環流量は Kelvin の定理

によつて變らないから,渦の强さは時が經つても變らない。

§48.5 速度ベクトルポテンシヤル

流體の占める空間は無限に擴がつてゐると考へ,無限大の點では靜止してゐるとする。任意の點Pに於ける速度$\boldsymbol{v}$はHelmholtzの定理(§37.7)により一般に

$$\boldsymbol{v}=-\nabla\varphi+\nabla\times\boldsymbol{H}$$

とわけることができる。但し

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$$

でなければならない,P點に於けるφ及び$\boldsymbol{H}$の値は

$$\varphi=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{v}}{r}\,d\tau \quad\cdots\cdots\cdots(217)$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla\times\boldsymbol{v}}{r}\,d\tau$$

で定めらる。この式でrは作用點Pと流通點Qとの距離,$d\tau$はQに於ける容積要素であつて,Qに於ける$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$及び$\nabla\times\boldsymbol{v}$を求めて容積積分をとれば,$P$に於ける$\varphi$及び$\boldsymbol{H}$が唯一に定まる。

もし流體が壓縮できないものならば,到る處$\boldsymbol{v}$の發散は零であるから,φは上の式によつて恒に零である。

$$\varphi\equiv0.$$

$\boldsymbol{v}$の轉囘を渦の速度$\boldsymbol{w}$で置き換へれば

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\boldsymbol{w}}{r}\,d\tau \quad\cdots\cdots\cdots(217.1)$$

となり,積分は$\boldsymbol{w}$が零でない區域全體に亘つて求める。

この積分の値は明かに

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$$

の條件を具へてゐる。

$\boldsymbol{H}$の發散は零になる條件も滿たすから,$\boldsymbol{v}$は必ず

$$\boldsymbol{v}=-\nabla\varphi+\nabla\times\boldsymbol{H}$$

とすることができる。

從つて

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=-\nabla^2\varphi$$

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=-\nabla^2\boldsymbol{H} \quad\cdots\cdots\cdots(217.2)$$

となる。

§48.51 壓縮できない流體では,連續の方程式は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$$

であるから

$$\nabla^2\varphi=0$$

となり,φはLaplaceの方程式の解で調和函數である。

更に渦なしの運動ならば,到る處で

$$\boldsymbol{w}=0$$

であるから,$\boldsymbol{v}$は單に

$$\boldsymbol{v}=-\nabla\varphi$$

となる。φはさきに速度ポテンシヤルと名付けたスカラー量である。

もし渦の運動だけによつて起る運動ならば,

$$\varphi=0$$

であるから

$$\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{H}\quad\cdots\cdots(217.3)$$

となるから,$\boldsymbol{v}$は次の式で定まる

$$\boldsymbol{v}=\frac{1}{2\pi}\nabla\times\int\frac{\boldsymbol{w}}{r}d\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\nabla_P\times\left(\frac{\boldsymbol{w}}{r}\right)d\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\left(\nabla_P\frac{1}{r}\right)\times\boldsymbol{w}\,d\tau$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int\frac{\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{w}}{r^2}d\tau$$

$\boldsymbol{H}$は速度の**ベクトルポテンシャル**と名付けるものである。これに對してφを速度の**スカラーポテンシャル**といふことは(§46.5)に於いて電磁ポテンシャルに名付けたのと同じである。

§48.52 渦の糸

點Qに於ける渦の絲,切口の面積をσ,線要素をδs,容積$\delta\tau$のものを考へれば

$$\boldsymbol{w}\delta\tau=\boldsymbol{w}\sigma\,\delta s=w\,\sigma\,\delta\boldsymbol{s}=\mu\,\delta\boldsymbol{s}$$

こゝに$\delta\boldsymbol{s}$は$\boldsymbol{w}$と同じ向きにとつた長さのベクトル線要素である。

μは或る一つの渦の絲については一定の値をもつてゐるから,渦の絲の外にあるP點に於ける速度を求める積分の記號の外に出せる。

$$\boldsymbol{v}=-\frac{1}{2\pi}\mu\int\frac{\boldsymbol{r}_1\times d\boldsymbol{s}}{r^2}$$

この積分は一つの渦の絲全體についてとるので,澤山の渦の絲によつて生じるP點に於ける流體の速度は,その合成作用で

$$\boldsymbol{v}=-\frac{1}{2\pi}\sum\mu\int\frac{\boldsymbol{r}_1\times d\boldsymbol{s}}{r^2}$$

渦の絲の上にとつた任意の極めて小さい部分$\delta\boldsymbol{s}$がP點に於ける速度に寄與する部分は

$$\delta\boldsymbol{v}=-\frac{\mu}{2\pi}\frac{\boldsymbol{r}_1\times\delta\boldsymbol{s}}{r^2}\quad\cdots\cdots(218.1)$$

でこの式は全く電流の作用に關する Biot-Savart の法則と一致するものである(§45.12參照)。渦の絲を電流に,速度を磁場の强さと見做せば,輪道の極めて小さい部分に强さ2μ(有理單位,$C.G.S.$單位ならば$\frac{\mu}{2\pi}$)の電流が流れる時のPに於ける磁力を示す。

§48.6 Helmholtz の定理

流體の單位質量に作用する質量力が保存力ならば,(202.4)式により

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+2\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}=-\nabla\left(\Omega+E+\frac{v^2}{2}\right)$$

兩邊の轉回をとれば,右邊は零になつて

$$\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+2\nabla\times(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v})=0$$

$$\therefore\ \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{v})+2(\boldsymbol{w}\nabla\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}\nabla\cdot\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}\cdot\nabla\boldsymbol{v})=0$$

然るに

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{w},\quad\nabla\cdot\boldsymbol{w}=0$$

且つ

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{w}$$

であるから

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}+\boldsymbol{w}\nabla\cdot\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\cdot\nabla\boldsymbol{v}=0 \quad\cdots\cdots\cdots(219.1)$$

となる。

然るに連續の方程式により

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

よつて

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}+\boldsymbol{w}\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}-\frac{\boldsymbol{w}}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$
$$=\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{w}}{\rho}\right)$$

故に(219.1)式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{w}}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{w}\cdot\nabla\boldsymbol{v} \quad\cdots\cdots\cdots(219.2)$$

となる,これを t について微分すれば

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\boldsymbol{w}}{\rho}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{w}}{\rho}\right)\cdot\nabla\boldsymbol{v}+\frac{\boldsymbol{w}}{\rho}\cdot\frac{d}{dt}\nabla\boldsymbol{v}\quad\cdots\cdots(219.3)$$

であるから,もし $\boldsymbol{w}$ がいつか一度零になることがあれば,(219.2)並びに(219.3)は共に零になり,更に $\dfrac{\boldsymbol{w}}{\rho}$ の高次の誘導函數も悉く零になる。

故に $\dfrac{\boldsymbol{w}}{\rho}$ を Taylor の定理でその誘導函數の級數に展開したと考へれば,もし $\boldsymbol{w}$ が零のことがありさへすれば,恆に零にならなければならない。

この定理は Helmholts が述べたもので,壓縮できない,摩擦のない完全な流體の中に,渦がないならば,保存力によつてはどうしても渦をつくることができないで,いつまでも渦なしの運動の狀態を續ける。

[註]　Kelvin の物質の渦原子說 (Vortex Atom Theory) はこの考と,前に述べた(§48.43)の環流量に關する定理に基づくものである。

一朝宇宙の大變動に際し,エーテルが粘さのある狀態にでもなつた時に生じた渦は,エーテルが完全な流體に戻つてみると,二度と壞すこともできず更に造ることもできないと考へると,原子はかゝるエーテルの中に生じた渦動であらうといふ作業假說をゆるすことができる。

§48.7　渦の組合の運動のエネルギー

無限に擴がる空間の中,渦の存在するのは只有限の空間にだけ限られ,流體は無限大の距離に於いては靜止するとして,壓縮できない流動の運動のエネルギーを求めよう

運動のエネルギーは

$$T=\frac{1}{2}\rho\int \boldsymbol{v}^2\,d\tau$$

渦の運動では

$$\varphi=0$$

よつて

$$\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{H}$$

即ち

$$T=\frac{1}{2}\rho\int \boldsymbol{v}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}\,d\tau$$
$$=\frac{1}{2}\rho\int[\nabla\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{v})+\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}]\,d\tau$$
$$=\frac{1}{2}\rho\oint \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{v})\,dS+\rho\int \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{w}\,d\tau$$

右邊の面積分は渦の存在する處から無限に遠く隔つた大きな球面についてとれば零になる,$\boldsymbol{H}$は渦のある點からの距離に逆比例するから$O\left(\frac{1}{r}\right)$の量,$\boldsymbol{v}$は$O\left(\frac{1}{r^2}\right)$の程度,$dS$は$O(r^2)$の量であるから,面積分は$O\left(\frac{1}{r}\right)$の量となつて,$r$が無限大になる極限に於いては

$$\lim_{r\to\infty}\oint \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{v})\,dS=\lim_{r\to\infty}O\left(\frac{1}{r}\right)\to 0$$

故に

$$T=\rho\int \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{w}\,d\tau$$

然るに$\boldsymbol{H}$は

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\boldsymbol{w}}{r}\,d\tau$$

であるから

$$T=\frac{\rho}{2\pi}\iint\frac{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}'}{r}\,d\tau\,d\tau'\quad\text{..................(220.1)}$$

rは二つの小さい渦$\boldsymbol{w}\,d\tau$と$\boldsymbol{w}'\,d\tau'$の間隔であつて,積分は渦の存在する空間についてとる。

前と同樣にして

$$\boldsymbol{w}\,d\tau=\mu\,d\boldsymbol{s},\quad \boldsymbol{w}'\,d\tau'=\mu'\,d\boldsymbol{s}'$$

とし,渦の糸について積分すれば

$$T=\sum\rho\frac{\mu\mu'}{2\pi}\iint\frac{d\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{s}'}{r}\quad\text{............(220.2)}$$

積分は渦の糸全體の長さに亘つてとり,Σは渦の糸一對づゝについて加へ合せればよい,この式はNeumannの相互感應の積分と一致する。

第三編

ベクトル一次函數

第一章　Dyad と Dyadic

§49.1　一次ベクトル函數

電媒質に於ける電氣變位を$\boldsymbol{D}$,電場の强さを$\boldsymbol{E}$とすれば,等方質にては

$$\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}$$

であるが,異方質ならば,方向によつて電媒恆數の値が變るから

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{i}\epsilon_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\epsilon_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{k}\epsilon_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}$$

となる。しかし何れの場合にしても$\boldsymbol{D}$は$\boldsymbol{E}$の一次函數として表はすことができる。

ベクトルの一次函數の研究は,剛體の廻轉運動,彈性體の力學,流體の力學,電磁氣學,光學或は進んで相對性原理等のすべての部門に亘り,又數學としても坐標の一次變換,二次曲面,積分方程式等に就いて欠くことのできない重要な問題である。

§49.11

定義　ベクトル$\boldsymbol{r}'$が他のベクトル$\boldsymbol{r}$の一次函數といふのは,三つの共面でないベクトルの方向にとつた$\boldsymbol{r}'$の成分が同じ三つのベクトルの方向に對する$\boldsymbol{r}$の成分の直線狀(一次)函數であることを意味する。

任意の共面でない三つのベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, 共面でないから

$$[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]\neq 0$$

とすれば

$$\mathbf{r}=\xi\,\mathbf{a}+\eta\,\mathbf{b}+\zeta\,\mathbf{c}$$
$$\mathbf{r}'=\xi'\,\mathbf{a}+\eta'\,\mathbf{b}+\zeta'\,\mathbf{c}$$

として表すことができる。

$\mathbf{r}'$ が $\mathbf{r}$ の一次函數ならば,定義により $\mathbf{r}'$ の成分は $\mathbf{r}$ の成分の一次函數であるから

$\mathbf{r}'=f(\mathbf{r})$

$$\left.\begin{aligned}\xi'&=a_{11}\xi+a_{12}\eta+a_{13}\zeta\\ \eta'&=a_{21}\xi+a_{22}\eta+a_{23}\zeta\\ \zeta'&=a_{31}\xi+a_{32}\eta+a_{33}\zeta\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(221.1)$$

九つの係數 $a_{\mu\nu}$ は適當なスカラー量である。

§49.12 これよりも一般的に言へば

定義 ベクトルの連續函數が一次ベクトル函數であるといふことは,任意の二つのベクトルの和の函數が,各のベクトルの同じ函數の和に等しいことである。

卽ち $f(\mathbf{r})$ が $\mathbf{r}$ の一次函數ならば

$$f(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)=f(\mathbf{r}_1)+f(\mathbf{r}_2)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(221.2)$$

この定義から直に, a が實數ならば

$$f(a\,\mathbf{r})=a\,f(\mathbf{r})\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(221.21)$$

であることは明かである。

§49.13* 基本單位ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ と任意の共面でないベクトル

* この節はさしあたつて讀まなくてもよい。

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ とのつくる角の方向餘弦が次の表で示されるとき

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{a}$	λ_1	λ_2	λ_3
$\mathbf{b}$	μ_1	μ_2	μ_3
$\mathbf{c}$	ν_1	ν_2	ν_3

$$\mathbf{r}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}'=x'\,\mathbf{i}+y'\,\mathbf{j}+z'\,\mathbf{k}$$

ならば,

$$\begin{aligned}x'&=\lambda_1\xi'+\mu_1\eta'+\nu_1\zeta'\\ &=\lambda(a_{11}\xi+a_{12}\eta+a_{13}\zeta)\\ &\quad+\mu_1(a_{21}\xi+a_{22}\eta+a_{23}\zeta)\\ &\quad+\nu_1(a_{31}\xi+a_{32}\eta+a_{33}\zeta)\\ y',\,z'&=\text{etc.}\end{aligned}$$

である。

然るに

$$x=\lambda_1\xi+\mu_1\eta+\nu_1\zeta$$
$$y=\lambda_2\xi+\mu_2\eta+\nu_2\zeta$$
$$z=\lambda_3\xi+\mu_3\eta+\nu_3\zeta$$

であるから, x', y', z' の式から ξ, η, ζ を追ひ出せば

$$x'=l_1x+l_2y+l_3z$$
$$y'=m_1x+m_2y+m_3z$$
$$z'=n_1x+n_2y+n_3z$$

といふ形になる。

今 (l_1, l_2, l_3), (m_1, m_2, m_3), (n_1, n_2, n_3) を成分とするベクトルを夫々 $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ とすれば,容易く

$$x'=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{l}$$
$$y'=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{m}$$
$$z'=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}$$

であることがわかる。

從つて

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{l}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{m}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\boldsymbol{k}$$

であるから,これを略して

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{l}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{m}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{n}\boldsymbol{k})$$

と書いて括弧の中を一つの量を見れば,ベクトルでもなくスカラーでもない。果してこれは一つの量として意味を持つものだらうか研究してみる必要が起る。

§49.14 Dyad

定義 二つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を並べて書いた $\boldsymbol{ab}$ を dyad[1] と名付ける(§49.4 參照)いくつかの dyad の形式的の和を dyadic[2] といふ。

Dyad $\boldsymbol{ab}$ の第一項 $\boldsymbol{a}$ をその**前項**, $\boldsymbol{b}$ をその**後項**と呼ぶ。

Dyad は Gibbs が考へたもので,ドイツの學者には 𝔄;𝔅 又は 𝔄.𝔅 で表はす人もあるが,矢張り Gibbs の用ゐた記號が次第に廣く用ゐられ一番よいものと思はれる。

§49.2 Dyadic

Dyad の和 dyadic を表はす記號としては,一般にギリシア文字の

1) Dyad, dyade, Dyade, diado.
2) Dyadic, dyadique, Dyaden, diadaro (diadiko).

大文字を用ゐる。即ち

$$\phi=\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3+\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots(222)$$

ϕ とベクトルとの積, $\phi\cdot\boldsymbol{r}$ 及び $\boldsymbol{r}\cdot\phi$ を dyadic の**內積**といふ。

ϕ をベクトルの前に用ゐると

$$\phi\cdot\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2+\dots\dots)\cdot\boldsymbol{r}$$
$$=\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2\cdot\boldsymbol{r}+\dots\dots$$

であつて,各の dyad の後項と $\boldsymbol{r}$ とのスカラー積を係數とするベクトル量である。ϕ をこの積の**前因子**と名付ける。

ϕ を**後因子**とした內積では

$$\boldsymbol{r}\cdot\phi=\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2+\dots\dots)$$
$$=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2+\dots\dots$$

であつて,一般に $\phi\cdot\boldsymbol{r}$ とは等しくない。

注意すべきは ϕ 位置であるが,何れにしても dyadic とベクトルとの內積はベクトル一次函數となる。

§49.21 共軛な dyadic

ϕ を前因子として用ゐた時と,後因子として用ゐた時とでは一般に違ふベクトル函數を得る,この二つを互に共軛な一次函數と呼ぶ。

即ち

$$\phi\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{r})+\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{b}_2\cdot\boldsymbol{r})+\dots\dots$$
$$\boldsymbol{r}\cdot\phi=(\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}_1+(\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}_2+\dots\dots$$

とは互に共軛な $\boldsymbol{r}$ の一次函數である。

二つの dyadic

$$\phi=\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1+\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2+\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(223)$$

$$\psi=\mathbf{b}_1\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_2\mathbf{a}_2+\ldots\ldots$$

とは,各 dyad の前項と後項とを入れ換へた形のもので,これを互に**共軛な dyadic**といふ。

ϕ の共軛な dyadic を, ϕ に添字 c をつけて ϕ_c として表はせば

$$\phi_c=\psi,$$

$$\psi_c=\phi,$$

である。

明かに

$$\mathbf{r}\cdot\phi=\psi\cdot\mathbf{r}$$

であるから

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{r}\cdot\phi=\phi_c\cdot\mathbf{r}\\ &\text{又}\\ &\phi\cdot\mathbf{r}=\mathbf{r}\cdot\phi_c\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(224)$$

Dyadic を前因子として用ゐることは,その共軛な dyadic を後因子として用ゐることと同等である。

§ 49.22 Dyadic とベクトルとの内積が**配分の法則**に従ふことは,上の式から明かである。

$$\phi\cdot(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)=\phi\cdot\mathbf{r}_1+\phi\cdot\mathbf{r}_2\ldots\ldots\ldots\ldots(225)^{(1}$$

又

$$(\phi+\psi)\cdot\mathbf{r}=\phi\cdot\mathbf{r}+\psi\cdot\mathbf{r}$$

s をスカラー量とすれば

$$\phi\cdot(s\,\mathbf{r})=s\,\phi\cdot\mathbf{r}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(225.1)$$

1) ϕ この變換の性質を主として考へると, Affinetransformation を表はすので,ドイツの學者は ϕ を Affinor と呼ぶことがある。

§49.23 等しい dyadic

定義 任意の二つの dyadic ϕ と ψ が等しいときは, $\mathbf{r}$ の總ての値について

(i) $\phi\cdot\mathbf{r}=\psi\cdot\mathbf{r}$

或は

(ii) $\mathbf{r}\cdot\phi=\mathbf{r}\cdot\psi$

若しくは $\mathbf{r}$ と $\mathbf{s}$ との總ての値に對して

(iii) $\overset{s}{\mathbf{r}}\cdot\phi\cdot\mathbf{r}=\mathbf{s}\cdot\psi\cdot\mathbf{r}$

である。

(iii) と (i) とは全く同じことを意味してゐる。 $\phi\cdot\mathbf{r}$ 及び $\psi\cdot\mathbf{r}$ はともにベクトルであるから,もし $\mathbf{r}$ の値に拘らず等しければ,他の任意のベクトル $\mathbf{s}$ とのスカラー積は當然等しくなければならない。又その逆も成り立つ。

この三つの命題は全く同じ内容をもつてゐる。

この定義と前の定義とを合せて考へると,共面でない任意の三つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ と ϕ との内積を知つてゐれば, ϕ は全く唯一に定まる。

§49.3 積の法則

定義 Dyad $\mathbf{ab}$ にスカラー量 $c\,(=c'c'')$ を乘ずることは,その前項もしくは,後項に c を乘ずるか,又は前項と後項に c を任意にわけて乘ずることである。

$$c\,(\mathbf{ab})=(c\,\mathbf{a})\,\mathbf{b}=\mathbf{a}(c\,\mathbf{b})=(c'\,\mathbf{a})(c''\,\mathbf{b})$$

c を -1 とすれば

$$-(\boldsymbol{ab})=(-\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}(-\boldsymbol{b})$$

$$(-\boldsymbol{a})(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{ab}$$

である。

從つて dyadic ϕ に c を乘じることは,その各項に c を乘ずればよい。

$$c\phi=c\sum\boldsymbol{ab}=\sum c\,\boldsymbol{ab}$$

よつて

$$(c\phi)\cdot\boldsymbol{a}=c(\phi\cdot\boldsymbol{a})$$

Dyad の一つの項が,二つのベクトルの和であれば配分の法則に從ふ。

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac} \quad\text{.............................(226.1)}$$

又代數式とちがひ,各項は交換の法則に從はない。前後の項を入れ換へると

$$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}=\boldsymbol{ba}+\boldsymbol{ca} \quad\text{.............................(226.2)}$$

で共軛な dyadic を得る。

Dyad といふ新しく考へた量がこれらの法則に從ふ性質をもつものとして, dyad の定義としてとつてもよいが,既に dyadic が等しいことの定義から導くことができる。

卽ち任意のベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすれば

$$[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})$$

$$=(\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac})\cdot\boldsymbol{r}$$

よつて

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}$$

この結果は直にいくつかのベクトルの合ベクトルを項とする dyad に擴張できる。前項と後項の順序さへ變へなければ,配分の法則に從つて展開すればよい。

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\ldots\ldots)(\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})$$

$$\left.\begin{aligned}&=\boldsymbol{al}+\boldsymbol{am}+\boldsymbol{an}+\ldots\ldots\\&\quad+\boldsymbol{bl}+\boldsymbol{bm}+\ldots\ldots+\boldsymbol{cl}+\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\text{..............(226)}$$

卽ち Dyad はベクトルの一種の積と見られるから,不定積と名付ける(§ 49.5)。

例 三つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ のベクトル立方積は

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{bc}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{cb}\cdot\boldsymbol{a}$$

$$=(\boldsymbol{bc}-\boldsymbol{cb})\cdot\boldsymbol{a}$$

であるから

$$\phi\equiv\boldsymbol{bc}-\boldsymbol{cb}$$

とおけば

$$\phi_c\equiv\boldsymbol{cb}-\boldsymbol{bc}$$

よつて

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\phi\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\phi_c$$

§ 49.4 Dyadic の標準形

基本單位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ の三つから二つ宛とつた順列を作る

と,九つの獨立した dyad

$$\begin{matrix} \boldsymbol{ii} & \boldsymbol{ij} & \boldsymbol{ik} \\ \boldsymbol{ji} & \boldsymbol{jj} & \boldsymbol{jk} \\ \boldsymbol{ki} & \boldsymbol{kj} & \boldsymbol{kk} \end{matrix}$$

ができる。

今 dyadic ϕ の前項及び後項のベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ の成分に分解して表はし,形式的に前章の展開式で展開し,類似の項を集めれば,九つの dyad の和として

$$\left.\begin{aligned} \phi = \ & \varphi_{11}\boldsymbol{ii}+\varphi_{12}\boldsymbol{ij}+\varphi_{13}\boldsymbol{ik} \\ & +\varphi_{21}\boldsymbol{ji}+\varphi_{22}\boldsymbol{jj}+\varphi_{23}\boldsymbol{jk} \\ & +\varphi_{31}\boldsymbol{ki}+\varphi_{32}\boldsymbol{kj}+\varphi_{33}\boldsymbol{kk} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(227)$$

といふ形に分けることができる。

九つの基本的の獨立した dyad を項とする dyadic の形を**標準形**又は**分解した形**といふ。

§ 49.41 Dyadic を標準形にしたとき,九つの dyad の係數の一組を, dyadic ϕ の**マトリツクス**といつて

$$(\phi) \quad 又は \quad \|\phi\|$$

で表はす。卽ち

$$\|\phi\| = \begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{Vmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots(227.1)$$

$\varphi_{\mu\nu}$ をマトリツクスの**要素**といふ。

§ 49.42

定理 二つの dyadic ϕ と ψ は,そのマトリツクスの要素が等しければ等しい。

マトリツクスの相當する要素が等しければ

$$\varphi_{\mu\nu}=\psi_{\mu\nu}$$

であるから,明かに任意のベクトル $\boldsymbol{r}$ について

$$\phi\cdot\boldsymbol{r}=\psi\cdot\boldsymbol{r}$$

となり,

$$\phi=\psi$$

であることがわかる。

この逆も明かである。ϕ と ψ が等しければ,任意のベクトル $\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{r}$ とのすべての値に對して

$$\boldsymbol{s}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{s}\cdot\psi\cdot\boldsymbol{r}$$

である。然るに $\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{r}$ は全く任意であるから, $\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{i}$ とすれば

$$\varphi_{11}=\boldsymbol{i}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\psi\cdot\boldsymbol{i}=\psi_{11}$$

順々に $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を入れかへてゆけば,九つの關係式が求まる。卽ち

$$\varphi_{\mu\nu}=\psi_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu=1, 2, 3)$$

であるから

$$\|\phi\|=\|\psi\|$$

となる。

§ 49.43

定理 Dyadic ϕ は,任意の共面でない三つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を

前項とし,任意の共面でない三つのベクトル $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ を後項とする九つの dyad の和として表はすことができる。

$$\left.\begin{aligned}\phi&=a_{11}\boldsymbol{al}+a_{12}\boldsymbol{am}+a_{13}\boldsymbol{an}\\&+a_{21}\boldsymbol{bl}+a_{22}\boldsymbol{bm}+a_{23}\boldsymbol{bn}\\&+a_{31}\boldsymbol{cl}+a_{32}\boldsymbol{cm}+a_{33}\boldsymbol{cn}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(228)$$

ベクトルは一般に三つの共面でないベクトルから誘導できることによつてこの定理は明かである。この形は(227)式よりは一般の形であつて,前項及び後項がともに基本ベクトルのときに標準形になる。

この定理から,一層重要な次の定理が導かれる。

定理　Dyad の前項もしくは後項の何れか一方を共面でない三つの任意のベクトルにとつて, dyadic を三つの dyad の和として表はすことができる。

ϕ を形くる三つの dyad の前項を共面でないベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ とする。$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ は任意の共面でないベクトルとして, dyad の後項を $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ から導いた形におけば

$$\phi=\boldsymbol{a}(a_{11}\boldsymbol{l}+a_{12}\boldsymbol{m}+a_{13}\boldsymbol{n})+\boldsymbol{b}(a_{21}\boldsymbol{l}+a_{22}\boldsymbol{m}+a_{23}\boldsymbol{n})+\boldsymbol{c}(a_{31}\boldsymbol{l}+a_{32}\boldsymbol{m}+a_{33}\boldsymbol{n})$$

と書けることはわけで,これは

$$\phi=\boldsymbol{a}\boldsymbol{L}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{c}\boldsymbol{N}$$

といふ形をとる。

又同樣にして $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を後項にとつて

$$\phi=\boldsymbol{L}'\boldsymbol{a}+\boldsymbol{M}'\boldsymbol{b}+\boldsymbol{N}'\boldsymbol{c}$$

の形にもできる。

この式で $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は共面でないことが必要であるが, $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ にも $\boldsymbol{L}', \boldsymbol{M}', \boldsymbol{N}'$ にも何の制限はない。しかも是等の分解した形は唯一にきまることも疑ない。

§49.5 不定積

定義　二つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とを只並べて書いた形式的の積 $\boldsymbol{ab}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**不定積**と云ふ。

不定積 $\boldsymbol{ab}$ の前項と後項の大さは唯一に定めることはできない。スカラー量の乘數は,この積について配分の法則が成り立つから,隨意に前項と後項にふりわけて掛けることができるので,不定積 $\boldsymbol{ab}$ は $\boldsymbol{a}$ に平行なベクトルと $\boldsymbol{b}$ に平行なベクトルの不定積として適宜に表はすことができるけれども $\boldsymbol{a}$ 及び $\boldsymbol{b}$ の大さを別々に唯一に定めることができない。

定理　二つの不定積 $\boldsymbol{ab}$ と $\boldsymbol{cd}$ が等しいときは, $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{c}$ に, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{d}$ に平行(共線)のベクトルで, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の絶對値の積が $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{d}$ の絶對値の積に等しい。

卽ち

$$\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{cd}$$

といふことは,任意のベクトル $\boldsymbol{r}$ のすべての値に對して

$$\boldsymbol{ab}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{cd}\cdot\boldsymbol{r}$$

である。もし $\boldsymbol{r}$ が $\boldsymbol{b}$ に垂直なときは,左邊は零になるから,

$$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}=0$$

で $\boldsymbol{d}$ も $\boldsymbol{r}$ に垂直でなければならない。

この事は,$\boldsymbol{r}$ が $\boldsymbol{b}$ に垂直な面内にある任意のベクトルであれば成立するから,$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{d}$ とは共にその面に垂直である。即ち $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{d}$ とは平行でなければならないから

$$\boldsymbol{b}=b\boldsymbol{d}$$

とおくことができる。

同様にして任意のベクトル $\boldsymbol{r}$ に對して恆に

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{cd}$$

であることから,$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ とは平行で

$$\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{c}$$

といふ結果になる。

更に

$$\boldsymbol{ab}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{cd}\cdot\boldsymbol{b}$$

であるから

$$|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|\,|\boldsymbol{d}|$$

になることがわかる。

§49.51 ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とのスカラー積はスカラー量であるから,大さだけで定まるので,只一つの條件が附與されるだけである。

ベクトル積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ はベクトルであるから,三つの條件が必要である(25頁注意參照)。

然し不定積 $\boldsymbol{ab}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の方向向き,その積の大さの五つの條件が附隨する。

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及び $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は,$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の方向向きと $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の積の大さで定まるものであるから,不定積 $\boldsymbol{ab}$ が與へられれば唯一に定められる。

然しこの逆は言へない。$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及び $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の双方が與へられても附帶條件は四つしかないから不定積 $\boldsymbol{ab}$ を定めるには條件が一つ不足である。

§49.52 Dyadic のスカラーとベクトル

定義 ϕ のスカラーは,ϕ のすべての dyad の前項と後項とのスカラー積の和で,スカラー量である。

ϕ のスカラーを ϕ_s で表はせば

$$\phi_s=\sum \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_2+\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots(229)$$

同様にして

定義 ϕ のベクトルは dyadic のすべての dyad の前項と後項とのベクトル積を和とするベクトル量である。

ϕ_v 又は ϕ_x で表はせば

$$\phi_v=\sum \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b}_2+\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots(230)$$

§49.521 ϕ を標準形で表はしたものについては,明かに

$$\phi_s=a_{11}+a_{22}+a_{33} \ldots\ldots(229.1)$$

であつて,**膨脹率**又は**收縮率**とも云はれる。その物理的の意味は後に彈性體についてよくわかるであらう。

又 ϕ のベクトルは

$$\phi_v=(a_{23}-a_{32})\boldsymbol{i}+(a_{31}-a_{13})\boldsymbol{j}+(a_{12}-a_{21})\boldsymbol{k}\quad\cdots\cdots(230.1)$$

となる。

或は

$$\phi_s=\boldsymbol{i}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{k}\quad\cdots\cdots(229.2)$$

$$\phi_v=\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{i}\cdot\phi)+\boldsymbol{j}\times(\boldsymbol{j}\cdot\phi)+\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\cdot\phi)\quad\cdots\cdots(230.2)$$

と書ける。

もし ϕ と ψ が等しい dyadic ならば

$$\phi_s=\psi_s$$

$$\phi_v=\psi_v$$

になり，ϕ が與へられればそのスカラー及びベクトルはともに唯一に定まる。

§49.6 Dyadic の內積

二つの dyad $\boldsymbol{ab}$ と $\boldsymbol{cd}$ の內積を

$$(\boldsymbol{ab})\cdot(\boldsymbol{cd})$$

と書けば,定義により

$$(\boldsymbol{ab})\cdot(\boldsymbol{cd})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{ad}$$

であつて,括弧がなくても紛らはしいこともないから

$$\boldsymbol{ab}\cdot\boldsymbol{cd}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{cad}$$

と書いてもよい。卽ち第一の dyad の前項を前項とし,第二の dyad の後項を後項とする dyad で,第一の dyad の後項と第二の前項とのスカラー積を係數としてゐる。

二つの dyadic ϕ 及び ψ の內積 $\phi\cdot\psi$ は,配分の法則によつて形式的に展開して得られる, dyad の內積の和である。

$$\phi=\sum \boldsymbol{a}_\mu \boldsymbol{b}_\mu$$

$$\psi=\sum \boldsymbol{c}_\nu \boldsymbol{d}_\nu$$

とすれば

$$\phi\cdot\psi=\left(\sum \boldsymbol{ab}\right)\cdot\left(\sum \boldsymbol{cd}\right)$$

$$=\sum_\mu\sum_\nu \boldsymbol{a}_\mu \boldsymbol{b}_\mu\cdot\boldsymbol{c}_\nu \boldsymbol{d}_\nu$$

$$=\sum_\mu\sum_\nu \boldsymbol{b}_\mu\cdot\boldsymbol{c}_\nu\, \boldsymbol{a}_\mu \boldsymbol{d}_\nu$$

§49.61 內積に關する法則

Dyadic の內積は配分の法則に從ふことは,上の展開式から直に知れる。

$$\phi\cdot(\psi_1+\psi_2)=\phi\cdot\psi_1+\phi\cdot\psi_2\quad\cdots\cdots(231)$$

又

$$(\psi_1+\psi_2)\cdot\phi=\psi_1\cdot\phi+\psi_2\cdot\phi$$

一般に

$$\phi\cdot\sum\psi=\sum(\phi\cdot\psi)$$

$$\left(\sum\psi\right)\cdot\phi=\sum(\psi\cdot\phi)$$

次に dyadic の內積は結合の法則に從ふことがわかる。

卽ち

$$\phi\cdot(\Psi\cdot\Omega)=(\phi\cdot\Psi)\cdot\Omega \qquad\qquad (232)$$

であつて括弧を省いて單に

$$\phi\cdot\Psi\cdot\Omega$$

と書いて差支ない。

この證明は各の dyadic から一つの項をとり出してスカラー積をつくつてみればすぐ知れる

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\,\mathbf{b})\cdot[(\mathbf{c}\,\mathbf{d})\cdot(\mathbf{e}\,\mathbf{f})]&=(\mathbf{d}\cdot\mathbf{e})(\mathbf{a}\,\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\,\mathbf{f})\\&=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{a}\,\mathbf{f}\\ [(\mathbf{a}\,\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\,\mathbf{d})]\cdot(\mathbf{e}\,\mathbf{f})&=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\,\mathbf{d})\cdot(\mathbf{e}\,\mathbf{f})\\&=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{a}\,\mathbf{f}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \phi\cdot(\Psi\cdot\Omega)=(\phi\cdot\Psi)\cdot\Omega$$

同樣にして澤山の dyadic の內積についても,前後の順序さへ變へなければ結合の法則が成りたつ。

次に dyadic の內積を前因子もしくは後因子としてベクトルとの積をつくれば結合の法則がなりたつ。 卽ち

$$(\phi\cdot\Omega)\cdot\mathbf{r}=\phi\cdot(\Omega\cdot\mathbf{r}) \qquad\qquad (233.1)$$

或は

$$\mathbf{r}\cdot(\phi\cdot\Omega)=(\mathbf{r}\cdot\phi)\cdot\Omega \qquad\qquad (233.2)$$

ϕ の一項をの $\mathbf{ab}$, Ω の一項を $\mathbf{cd}$ として計算すれば

$$\begin{aligned}(\mathbf{ab}\cdot\mathbf{cd})\cdot\mathbf{r}&=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\,\mathbf{a}\,\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}\\&=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{a}\\&=\mathbf{ab}\cdot\mathbf{cd}\cdot\mathbf{r}\\&=\mathbf{ab}\cdot(\mathbf{cd}\cdot\mathbf{r})\end{aligned}$$

$$\therefore\quad (\phi\cdot\Omega)\cdot\mathbf{r}=\phi\cdot(\Omega\cdot\mathbf{r})$$

注意すべきは dyadic の間にベクトルが挾まつてゐる時には結合の法則が成立しないので(後段參照),ベクトルは必ず端になければならない。

多くの dyadic の內積についても,前因子もしくは後因子として用ゐた時には結合の法則がなりたつ。

$$\begin{aligned}\phi\cdot\Psi\cdot\Omega\cdot\mathbf{r}&=(\phi\cdot\Psi)\cdot(\Omega\cdot\mathbf{r})\\&=\phi\cdot\{(\Psi\cdot\Omega)\cdot\mathbf{r}\}=\{(\phi\cdot\Psi)\cdot\Omega\}\cdot\mathbf{r}\\&=\{\phi\cdot(\Psi\cdot\Omega)\}\cdot\mathbf{r}\end{aligned}$$

Dyadic の順序を變へないこととベクトルの位置が前端か後端にあれば結合の法則が成りたつ。

上に往意したやうに,ベクトルが dyadic の中間に挾まれるときは結合の法則に從はない。 例へば

$$(\phi\cdot\mathbf{r})\cdot\Psi\neq\phi\cdot(\mathbf{r}\cdot\Psi)$$

この證明も前と同樣に dyadic の一項をとり出してみれば

$$\{(\mathbf{a}\,\mathbf{b})\cdot\mathbf{r}\}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{d}$$

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b}\cdot\{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{c}\,\mathbf{d})\}=(\mathbf{r}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{a}$$

よつて

$$\{(\mathbf{a}\,\mathbf{b})\cdot\mathbf{r}\}\cdot\mathbf{c}\,\mathbf{d}\neq\mathbf{a}\,\mathbf{b}\cdot\{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{c}\,\mathbf{d})\}$$

卽ち

$$(\phi\cdot\mathbf{r})\cdot\Psi\neq\phi\cdot(\mathbf{r}\cdot\Psi)$$

つまり前の場合とちがつて,ベクトルが dyadic の間に來るときは,結合の法則に從はないから括弧を省くわけにはゆかない。 然し後に調べるやうに,共軛な dyadic を用ゐれば,中間にあるベクトル

を一端に移すことができて,さうした形にすれば結合の法則が行はれる。

§49.7 Dyadic の外積

定義 Dyad $\boldsymbol{ab}$ とベクトル $\boldsymbol{c}$ との**外積**は

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\quad\cdots\cdots(234)$$

で表はせる dyad である。

この考は直に dyadic とベクトルの外積に擴張できる。

$$\phi\times\boldsymbol{r}=\left(\sum\boldsymbol{ab}\right)\times\boldsymbol{r}$$

$$=\sum\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r})$$

又

$$\boldsymbol{r}\times\phi=\boldsymbol{r}\times\sum\boldsymbol{ab}$$

$$=\sum(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$$

即ち dyadic とベクトルの外積は dyadic である。

§49.71 Dyadic もしくはベクトルが二つ以上ある時には注意しなければならない。

定理 Dyadic 數個の内積とベクトルとの積(内積でも外積でもよい,ベクトルは端にだけある場合)は結合の法則に從ふ。

ベクトルとの内積は既に證明がすんでゐる。こゝでは只外積の場合を調べればよい。即ち

$$\boldsymbol{r}\times(\phi\cdot\psi)=(\boldsymbol{r}\times)\phi\cdot\psi$$

$$(\phi\cdot\psi)\times\boldsymbol{r}=\phi\cdot(\psi\times\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{r}\cdot(\phi\times\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{r}\cdot\phi)\times\boldsymbol{s}$$

$$\boldsymbol{r}\times(\phi\times\boldsymbol{s})=(\boldsymbol{r}\times\phi)\times\boldsymbol{s}$$

でいがれも結合の法則に從ふが,ベクトルが dyadic の中間にあるか,或は dyadic と他のベクトルとに挾まれると

$$(\phi\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{s}\neq\phi\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})$$

となつて結合の法則が成りたたない。

§49.72

定理 三つのベクトルのスカラー立方積と同様に, dyadic とベクトルとの内積と外積の交つたものでは,記號・と × とを自由に入れ換へられる。

然し注意すべきは結合のしかたで,外積を先づ結合したものについて内積をとるやうにすればいつも間違はない。記號・と × とを入れ換へたらば,矢張り入れ換へた後の形で外積を一つに結合すればよい。即ち

$$\left.\begin{aligned}&\phi\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})=(\phi\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{s}\ \text{然し}\ \neq(\phi\cdot\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{s}\\&(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r})\cdot\phi=\boldsymbol{s}\cdot(\boldsymbol{r}\times\phi)\\&\phi\cdot(\boldsymbol{r}\times\psi)=(\phi\times\boldsymbol{r})\cdot\psi\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(235)$$

勿論第一の形のやうなものは $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}$ がスカラー量であるから,それと dyadic との外積と解する憂はないが間違を防ぐためには括弧のある方がよからう。ベクトルが dyadic の一端にあるか

$$\phi\cdot\psi\times r$$

或は兩端に一つ宛ある時

$$r\cdot\phi\times s$$

の時は,記號の入れかへも結合のしかたも自由であるが,ベクトルが二つの dyadic の中間或は dyadic とベクトルの間に來る時には,外積を先にとることさへ忘れなければ決して誤る虞はない。

これらの事は容易く證明できる。例へば

$$\begin{aligned} ab\cdot(r\times cd) &= a(b\cdot r\times c)d \\ &= ab\times r\cdot cd \\ &= (ab\times r)\cdot cd \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \phi\cdot(r\times\psi)=(\phi\times r)\cdot\psi$$

然し

$$\begin{aligned} ab\times(r\cdot cd) &= (r\cdot c)\,ab\times d \\ &\neq [b\,r\,c]ad \end{aligned}$$

$$\phi\times(r\cdot\psi)\neq(\phi\times r)\cdot\psi$$

であつて他の關係も容易く求まる。

§ 501* 還元因子

定義 任意のベクトルとの內積が恒に同じベクトルになるやうな dyadic を**還元因子****(又は**等因子**)といふ。

即ち r の總ての値に對し

$$I\cdot r=r$$

或は

* 以下數章では完全な dyadic (§ 50.5) についてのみ考へる。
** Idemfactor, idemfacteur, Idemfaktor, idemfaktoro.

$$r\cdot I=r$$

になるので,前因子にして用ゐても後因子として用ゐても變りない。還元因子は普通ギリシア文字 I (iota) で表はす。

§ 50.11 還元因子を標準形で表はせば

$$I=ii+jj+kk \qquad (236)$$

となり,還元因子は一つしかない。

この形になることは,I を分解した形にとつて,その要素は $a_{\mu\nu}$ で表はせるから

$$I\cdot i=a_{11}i+a_{21}j+a_{31}k$$

となる。

然るに還元因子の定義により

$$I\cdot i=i$$

であるから

$$a_{11}=1,\quad a_{21}=0,\quad a_{31}=0$$

同樣にして

$$a_{21}=0,\quad a_{22}=1,\quad a_{21}=0$$

$$a_{31}=0,\quad a_{32}=0,\quad a_{31}=0$$

故に

$$I=ii+jj+kk$$

となり大切な形である。

I のマトリックスは即ち

$$\|\mathrm{I}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(236.1)$$

である。

§50.12 還元因子はベクトルに作用して,同じベクトルを與へる許りでなく, dyadic との內積は同じ dyadic になる。

$$\mathrm{I}\cdot\phi = \phi\cdot\mathrm{I} = \phi$$

この證明は, $\boldsymbol{r}$ を任意のベクトルとすれば

$$(\phi\cdot\mathrm{I})\cdot\boldsymbol{r} = \phi\cdot(\mathrm{I}\cdot\boldsymbol{r}) = \phi\cdot\boldsymbol{r}$$

然るに $\boldsymbol{r}$ の値如何に拘らずこの關係が成り立つから,

$$\phi\cdot\mathrm{I} = \phi$$

同樣にして

$$\mathrm{I}\cdot\phi = \phi$$

§50.13 共面でないベクトルの一組 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の相逆系のベクトルを $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*$ とすれば

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^* + \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^* + \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^* \\ \boldsymbol{a}^*\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}^*\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}^*\boldsymbol{c} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(236.2)$$

はともに還元因子である。

證明　任意のベクトル $\boldsymbol{r}$ をこの相逆系のベクトルに分解すれば

$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}^* + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}^* + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{c}^*$$

$$= \boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^* + \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^* + \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^*)$$

又は

$$= (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}^*)\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}^*)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}^*)\boldsymbol{c}$$

$$= \boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}^*\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}^*\boldsymbol{c})$$

卽ち定義により

$$\mathrm{I} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^* + \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^* + \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{a}^*\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}^*\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}^*\boldsymbol{c}$$

である。

基本ベクトルの一組は,自己相反系であるから,還元因子はこの特別な場合になる。

この逆の定理も言へる。もし

$$\phi = \boldsymbol{a}\boldsymbol{l} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{m} + \boldsymbol{c}\boldsymbol{n}$$

が還元因子ならば $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ とは相反系のベクトルである。

次のやうにして證明ができる。もし $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が共面でなければ,任意のベクトル $\boldsymbol{r}$ は, $\boldsymbol{abc}$ の相反系のベクトルによつて

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}^* + y\boldsymbol{b}^* + z\boldsymbol{c}^*$$

といふ形における。

假定により

$$\boldsymbol{r}\cdot\phi = \boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{a}\boldsymbol{l} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{m} + \boldsymbol{c}\boldsymbol{n})$$

$$= x\boldsymbol{l} + y\boldsymbol{m} + z\boldsymbol{n}$$

然るに

$$\boldsymbol{r}\cdot\phi = \boldsymbol{r}$$

$$= x\boldsymbol{a}^* + y\boldsymbol{b}^* + z\boldsymbol{c}^*$$

$\boldsymbol{r}$ の値如何に拘らず,卽ち x, y, z のあらゆる値に對してこの二式が等しいためには

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a}^*, \quad \boldsymbol{m} = \boldsymbol{b}^*, \quad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{c}^*$$

でなければならないから,定理は證明される。

§ **50.14** 還元因子とベクトルとの外積について,後に役に立つ定理がある。

定理 還元因子とベクトル $\boldsymbol{r}$ との外積が I と $\boldsymbol{s}$ との外積に等しければ $\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{s}$ に等しい。

命題により

$$\mathrm{I}\times\boldsymbol{r}=\mathrm{I}\times\boldsymbol{s}$$

任意のベクトル $\boldsymbol{t}$ を乘ずれば

$$\boldsymbol{t}\cdot\mathrm{I}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{t}\cdot\mathrm{I}\times\boldsymbol{s}$$

左邊は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}\cdot\mathrm{I}\times\boldsymbol{r}&=(\boldsymbol{t}\cdot\mathrm{I})\times\boldsymbol{r}\\&=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

であるから,右邊も同樣に結合できるから

$$\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{s}$$

となる。

$\boldsymbol{t}$ が如何なるベクトルであつても恒に此の關係が導かれるから

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{s}$$

でなければならない。

§ 50.2 逆の dyadic

定理 任意の二つの dyadic ϕ と ψ の內積 $\phi\cdot\psi$ が還元因子に等しければ,その順序を逆にした內積 $\psi\cdot\phi$ も亦還元因子に等しい。

今

$$\phi\cdot\psi=\mathrm{I}$$

とすれば,任意のベクトル $\boldsymbol{r}$ について

$$\boldsymbol{r}\cdot(\phi\cdot\psi)=\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{I}=\boldsymbol{r}$$

故に

$$\boldsymbol{r}\cdot(\phi\cdot\psi)\cdot\phi=\boldsymbol{r}\cdot\phi$$

然るに

$$\boldsymbol{r}\cdot(\phi\cdot\psi)\cdot\phi=(\boldsymbol{r}\cdot\phi)\cdot(\psi\cdot\phi)$$

$$\therefore\ \psi\cdot\phi=\mathrm{I}$$

即ち二つの dyadic の內積が還元因子ならば,その順序を互に代へることができる。

§ **50.21** 二つの dyadic の積が還元因子に等しい ϕ と ψ とは互に逆の dyadic である。

逆の dyadic を表はすには,普通の數と同じやうな記號で

$$\phi=\psi^{-1}=\frac{\mathrm{I}}{\psi}\quad 即ち\quad \phi\cdot\phi^{-1}=\mathrm{I}$$

$$\psi=\phi^{-1}=\frac{\mathrm{I}}{\phi}\quad 即ち\quad \psi\cdot\psi^{-1}=\mathrm{I}$$

で表はす。

定理 等しい dyadic の逆の dyadic は互に等しい。

ϕ と ψ とを等しい dyadic とすれば

$$\phi=\psi$$

然るに

$$\phi\cdot\phi^{-1}=I$$

又

$$\psi\cdot\psi^{-1}=I$$

であるから

$$\phi\cdot\phi^{-1}=I=\psi\cdot\psi^{-1}$$
$$=\phi\cdot\psi^{-1}$$

故に

$$\phi^{-1}\cdot\phi\cdot\phi^{-1}=\phi^{-1}\cdot\phi\cdot\psi^{-1}$$

卽ち

$$I\cdot\phi^{-1}=I\cdot\psi^{-1}$$

よつて

$$\phi^{-1}=\psi^{-1}$$

§ **50.22** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 及び $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ を共面でないベクトルとすれば

$$\phi=\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{l}+\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{m}+\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{n} \quad\text{.............................(237.1)}$$

であるから,その逆のベクトルは

$$\phi^{-1}=\boldsymbol{l}^*\,\boldsymbol{a}^*+\boldsymbol{m}^*\,\boldsymbol{b}^*+\boldsymbol{n}^*\,\boldsymbol{c}^* \quad\text{.......................(237.2)}$$

となる。

何故ならば

$$\phi\cdot\phi^{-1}=(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{l}+\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{m}+\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{l}^*\,\boldsymbol{a}^*+\boldsymbol{m}^*\,\boldsymbol{b}^*+\boldsymbol{n}^*\,\boldsymbol{c}^*)$$
$$=I$$

となるから。

§ **50.23** 逆の dyadic を用ゐると,新に等しい dyadic に關する定理と,二つのベクトルが等しいための定理をつくることができる。

定理 完全な[1] dyadic ϕ と dyadic ψ との積が, ϕ と Ω との積に等しければ, ψ は Ω に等しい。

命題により

$$\phi\cdot\psi=\phi\cdot\Omega$$

兩邊に ϕ^{-1} を前因子として內積をとれば

$$\phi^{-1}\cdot\phi\cdot\psi=\phi^{-1}\cdot\phi\cdot\Omega$$

はじめの二つの項を結合すれば還元因子になるから,

$$\psi=\Omega$$

となつて定理は證明される。

§ **50.24** 次に等しいベクトルに關する定理ができる。

定理 完全な dyadic ϕ とベクトル $\boldsymbol{r}$ との積が, ϕ と $\boldsymbol{s}$ との積に等しければ, $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{s}$ とは等しい。

卽ち

$$\phi\cdot\boldsymbol{r}=\phi\cdot\boldsymbol{s}$$

もしくは

$$\phi\times\boldsymbol{r}=\phi\times\boldsymbol{s}$$

ならば

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{s}$$

といふことを證明すればよい。

この前の命題は證明する迄もない。第二の方は

1) 完全な dyadic とは三つより少い dyad の和として表はすことのできないものである。悉しくは(§50.5)で調べる。

$$\phi\times\boldsymbol{r}=\phi\times\boldsymbol{s}$$

の兩邊に ϕ^{-1} を内積としてとれば

$$\phi^{-1}\cdot\phi\times\boldsymbol{r}=\phi^{-1}\cdot\phi\times\boldsymbol{s}$$

卽ち

$$\mathrm{I}\times\boldsymbol{r}=\mathrm{I}\times\boldsymbol{s}$$

(§ 50.14) により

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{s}$$

である。

§ 50.25

定理 數個の dyadic の内積の逆は,その各 dyadic の逆を順序を反對にしてとつた内積に等しい。

この定理は二つの dyadic について證明すれば,數個のものには數學的歸納法によつて擴張できる。卽ち

$$(\phi\cdot\psi)^{-1}=\psi^{-1}\cdot\phi^{-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(238)$$

であることを證明すればよい。

右邊に ψ を前因子として内積をつくれば

$$\psi\cdot\psi^{-1}\cdot\phi^{-1}=\mathrm{I}\cdot\phi^{-1}=\phi^{-1}$$

であるから,明かに

$$\phi\cdot(\psi\cdot\psi^{-1}\cdot\phi^{-1})=\phi\cdot\phi^{-1}=\mathrm{I}$$

卽ち

$$(\phi\cdot\psi)\cdot(\psi^{-1}\cdot\phi^{-1})=\mathrm{I}$$

$$(\phi\cdot\psi)^{-1}=\psi^{-1}\cdot\phi^{-1}$$

數個のものには歸納法で證明すれば,一般は

$$(\phi_1\cdot\phi_2\ldots\phi_n)^{-1}=\phi_n^{-1}\cdot\ldots\phi_2^{-1}\cdot\phi_1^{-1}\quad\ldots.(238.1)$$

となる。

§ 50.26 ϕ の冪

同じ dyadic ϕ を n 回とつた内積を,ϕ の n 乘といひ,普通の數のやうに ϕ^n で表はす。

$$\phi\cdot\phi\cdot\ldots\ldots(n\text{ 個})=\phi^n\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(239)$$

前節の定理を用ゐれば,ϕ^{-1} の冪は ϕ の冪の逆に等しいから

$$(\phi^{-1})^n=(\phi^n)^{-1}=\phi^{-n}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(239.1)$$

となるので,dyadic の冪は普通の代數的の數の冪と同じ記號で表はすことができる。

ϕ を作用することは坐標の變換と解釋できるから,ϕ の冪は數回その變換を繰り返すことであつて,ϕ の逆 dyadic は變換をもとに引き戻すことになる。

n が分數又は無理數の場合は殆ど用がない上に,函數が一價でなくなるから,この書物では論じないことにする。

例へば I の平方根の如きは, +I と −I のほかに

$$-\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj}+\boldsymbol{kk}$$

$$\boldsymbol{ii}-\boldsymbol{jj}-\boldsymbol{kk}$$

の形のものがある。しかもこれで盡きてゐない他の形のもの迄存在する。

§ 50.3 共軛 dyadic の性質

共軛 dyadic について二三の大事な性質を調べることにする。

ϕ の共軛 dyadic を ϕ_c とすれば

$$\phi=\sum\boldsymbol{ab}$$

$$\Phi_c=\sum \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}$$

であるから，Φ_c の共軛 dyadic は Φ である。

$$(\Phi_c)_c=\sum \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=\Phi \quad\cdots\cdots(240.1)$$

Φ と Φ_c は互に共軛である。

§50.31

定理 數個の dyadic の和もしくは差の共軛 dyadic は,各の dyadic の共軛 dyadic の和若しくは差である。

$$(\Phi\pm\Psi\pm\Omega\ldots\ldots)_c=\Phi_c\pm\Psi_c\pm\Omega_c\pm \quad\cdots\cdots(240.2)$$

これは證明する迄もなく明かである。

§50.32

定理 二つの dyadic の内積の共軛 dyadic は,各の dyadic の共軛 dyadic の順序を逆にしてとつた内積に等しい。

$$(\Phi\cdot\Psi)_c=\Psi_c\cdot\Phi_c \quad\cdots\cdots(240.3)$$

$\boldsymbol{r}$ を任意のベクトルとすれば

$$\begin{aligned}(\Phi\cdot\Psi)_c\cdot\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}\cdot(\Phi\cdot\Psi)\\&=(\boldsymbol{r}\cdot\Phi)\cdot\Psi\\&=(\Phi_c\cdot\boldsymbol{r})\cdot\Psi\\&=\Psi\cdot(\Phi_c\cdot\boldsymbol{r})\\&=(\Psi_c\cdot\Phi_c)\cdot\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{r}$ が如何なるベクトルでもこの關係が成り立つから

$$(\Phi\cdot\Psi)_c=\Psi_c\cdot\Phi_c$$

この定理は直に數個の dyadic の內積に擴張できる。卽ち

$$(\Phi\cdot\Psi\cdot\ldots\ldots\cdot\Omega)_c=\Omega_c\cdot\ldots\ldots\cdot\Psi_c\cdot\Phi_c \quad\cdots\cdots(240.31)$$

もし dyadic が悉く等しい時

$$\Phi=\Psi=\ldots\ldots=\Omega$$

ならば

$$(\Phi^n)_c=(\Phi_c)^n \quad\cdots\cdots(240.32)$$

§50.33

定理 逆の dyadic の共軛 dyadic は,共軛 dyadic の逆である。

$$(\Phi^{-1})_c=(\Phi_c)^{-1} \quad\cdots\cdots(240.4)$$

何故ならば,上の定理により

$$(\Phi^{-1})_c\cdot\Phi_c=(\Phi\cdot\Phi^{-1})_c=\mathrm{I}_c=\mathrm{I}$$

であるから定理は正しい。

よつて $(\Phi_c)^{-1}$ とか $(\Phi^{-1})_c$ を區別する必要はなく,いづれも單に

$$\Phi_c^{-1}$$

と書くことができる。

§50.34 テンソル

定義 Dyadic Φ が Φ_c に等しいとき自己共軛であるといふ。

Φ が $-\Phi_c$ に等しければ反自己共軛であるといふ。

自己共軛の dyadic は**テンソル**[1] と名付ける量であつて,理論物理學上重要な量である。

§50.341 次の定理は重要な定理である。

1) Tensor ; tenseur ; Tensor ; tensoro.

定理　任意の dyadic は自己共軛と反自己共軛との二つの dyadic の和として表はすことができる。しかもその分け方は一通りしかない。

今 ϕ をわけて

$$\phi=\frac{1}{2}(\phi+\phi_c)+\frac{1}{2}(\phi-\phi_c)$$

とすれば

$$(\phi+\phi_c)_c=\phi_c+(\phi_c)_c=\phi_c+\phi$$

$$(\phi-\phi_c)_c=\phi_c+(\phi_c)_c=\phi_c-\phi$$

であるから,前の部分は自己共軛,後の部分は符號が變るから反自己共軛である。

即ち

$$\left.\begin{aligned}\phi&=\phi'+\phi''\\ \phi'&=\frac{1}{2}(\phi+\phi_c)\\ \phi''&=\frac{1}{2}(\phi-\phi_c)\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots\dots(241)$$

ϕ' は自己共軛, ϕ'' は反自己共軛の dyadic であつて,ドイツの學者には ϕ' を Affinor ϕ の Tensor として $ts\,\phi$, ϕ'' を Affinor ϕ の Axiator といつて $ax\,\phi$ で表はし

$$\phi=ts\,\phi+ax\,\phi$$

と書くことがある。後に (§56.31) で調べるやうに Tensor は對稱的, Axiator は反對稱的である。

§50.342　このわけ方が唯一通りしかないことを證明する必要

がある。

ϕ を自己共軛と反自己共軛の部分にわけた時假りに

$$\phi=(\phi'+\Omega)+(\phi''-\Omega)$$

の形になつたとする。

前の部分は自己共軛だとすれば

$$(\phi'+\Omega)=(\phi'+\Omega)_c=\phi_c'+\Omega_c=\phi'+\Omega_c$$

であるから, Ω は自己共軛でなければならない。

後の部分は反自己共軛だとすれば

$$\phi''-\Omega=-(\phi''-\Omega)_c=-\phi_c''+\Omega_c=\phi''+\Omega_c$$

であるから Ω は反自己共軛である。

然るに

$$\Omega=\Omega_c=-\Omega_c$$

これは明かに不合理で, Ω は零でなければならない。從つて ϕ を分ける方法は唯一である。

テンソル量は自己共軛であるから恆にその Axiator は零になる。卽ち dyadic の ϕ'' が恆に零ならば, ϕ はテンソル量である。

§50.35

$$\phi=\boldsymbol{a}\boldsymbol{l}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{m}+\boldsymbol{c}\boldsymbol{n}$$

とすれば,

$$\phi-\phi_c=\boldsymbol{a}\boldsymbol{l}-\boldsymbol{l}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}\boldsymbol{c}$$

よつて

$$\begin{aligned}2\phi''\cdot\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{a}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}-\boldsymbol{m}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{c}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}-\boldsymbol{n}\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}\\ &=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{l})\times\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{m})\times\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

卽ち

$$\boldsymbol{\Phi}''\cdot\boldsymbol{r}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{l}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{m}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{r}$$

$$=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi}_v\times\boldsymbol{r}$$

同樣にして

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Phi}''=-\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Phi}_v$$

これによつて反自己共軛の dyadic に關する定理を得る。

定理　反自己共軛な dyadic とベクトルとの内積は, dyadic のベクトルとベクトルとの外積の半分の符號を變へたものに等しい。

Φ'' を置きかへれば次の等式になる。

$$\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\Phi}'\cdot\boldsymbol{r}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi}_v\times\boldsymbol{r} \quad\text{.......................}(241.1)$$

§50.35　こゝに注意しておくことは,自己共軛の dyadic のベクトルは恆に零になることである。

Dyadic Φ_c の共軛 dyadic は,前項と後項とが入れ代つたものであるから, Φ のベクトルと Φ_c のベクトルとは,必ず符號が逆になる。

$$\Phi_v=-(\Phi_c)_v$$

然るに自己共軛の dyadic では Φ は Φ_c に恆に等しいから,そのベクトルも等しい。

$$\Phi_v=(\Phi_c)_v$$

よつて Φ が自己共軛ならば,恆に

$$\Phi_v\equiv 0$$

となる。

この逆も眞で, dyadic のベクトルが恆に零ならば,その dyadic は自己共軛であつてテンソルである。

§50.4 Dyadic とベクトル積の關係

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と他のベクトルとのベクトル積をつくれば

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{s}$$

ベクトル一次函數になるから, $\boldsymbol{a}\times$ は dyadic で表はすことができるわけで,その dyadic の形は次のやうにして求まる。

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}=\mathrm{I}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}=(\mathrm{I}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{r}$$

然るに

$$\mathrm{I}\cdot(\boldsymbol{a}\times\mathrm{I})=(\mathrm{I}\times\boldsymbol{a})\cdot\mathrm{I}$$

よつて

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{r}&=\{(\mathrm{I}\times\boldsymbol{a})\cdot\mathrm{I}\}\cdot\boldsymbol{r}\\&=\{\mathrm{I}\cdot(\boldsymbol{a}\times\mathrm{I})\}\cdot\boldsymbol{r}\\&=\mathrm{I}\cdot(\boldsymbol{a}\times\mathrm{I})\cdot\boldsymbol{r}\\&=(\boldsymbol{a}\times\mathrm{I})\cdot\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

つまり

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}&=(\mathrm{I}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{a}\times\mathrm{I})\cdot\boldsymbol{r}\\\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}&=\boldsymbol{r}\cdot(\mathrm{I}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{a}\times\mathrm{I})\end{aligned}\right\} \quad\text{....................}(242)$$

定理　ベクトル $\boldsymbol{a}$ を他のベクトル $\boldsymbol{r}$ にベクトル的に乘ずることは, dyadic $\mathrm{I}\times\boldsymbol{a}$ もしくは $\boldsymbol{a}\times\mathrm{I}$ と $\boldsymbol{r}$ との内積をとることと同等である。

もし $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{r}$ の前にある時は $\mathrm{I}\times\boldsymbol{a}$ を前因子とし, $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{r}$ の後にある時は後因子として用ゐる。

Dyadic $\mathbf{I}\times\boldsymbol{a}$ 及び $\boldsymbol{a}\times\mathbf{I}$ はともに反自己共軛であつてテンソルではない。

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{I}=\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}$$

とすれば

$$\boldsymbol{a}\times\mathbf{I}=a_1(\boldsymbol{k}\boldsymbol{j}-\boldsymbol{j}\boldsymbol{k})+a_2(\boldsymbol{i}\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}\boldsymbol{i})+a_3(\boldsymbol{j}\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}\boldsymbol{j})$$

で反自己共軛である。

§50.5　完全 dyadic と不完全 dyadic

前に dyadic を一般に三つの dyad の和として表はすことができた。その三つの dyad の前項若しくは後項の何れかを共面でない任意の三つのベクトルに擇べば,その分解のしかたは唯一通りしかない。

然し特別な場合には, dyadic が二つの dyad の和,もしくは一つの dyad, 更に零となることがある。

§50.51　例へば $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ が共面ならば

$$\phi=\boldsymbol{a}\boldsymbol{l}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{m}+\boldsymbol{c}\boldsymbol{n}$$

の後項の三つのベクトルの中,一つは他の二つの共面なベクトルで表はせるから,

$$\boldsymbol{l}=x\boldsymbol{m}+y\boldsymbol{n}$$

とおけば

$$\phi=(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{m}+(y\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{n}$$

となつて, ϕ は二つの dyad の和の形にできる。

更にもし $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ が共線ならば,二つのベクトルは他の一つで表はせるから, dyadic は只一つの dyad となり,特に $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ が零ベクトルならば, ϕ は恆に零になる。

§50.52　もし ϕ が三つの dyad の和として

$$\phi=\boldsymbol{a}\boldsymbol{l}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{m}+\boldsymbol{c}\boldsymbol{n}$$

といふ形をとり,各 dyad の前項 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が共面でないことがわかつてゐるならば, ϕ は $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ が共面な場合にだけ二つの dyad の和とすることができる。

この $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ が共面ならば二つの dyad の和となることは前節でわかつてゐるから,こゝではその逆の

$$\phi=\boldsymbol{e}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{f}\boldsymbol{q}$$

の形になつたときに $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ が共面でないとしたらば矛盾することを證明すればよい。

$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ が共面でなければ,その相逆系のベクトル $\boldsymbol{l}^*, \boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{n}^*$ が求まるから,それに對して任意のベクトル $\boldsymbol{r}$ は

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{l}^*+y\boldsymbol{m}^*+z\boldsymbol{n}^*$$

といふ形に書けるから

$$\phi\cdot\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{l}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{m}+\boldsymbol{c}\boldsymbol{n})\cdot(x\boldsymbol{l}^*+y\boldsymbol{m}^*+z\boldsymbol{n}^*)$$
$$=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$$

$\boldsymbol{r}$ を適當に擇べば, $\phi\cdot\boldsymbol{r}$ は任意のベクトルに等しくすることができる。

然るに

$$\phi\cdot\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{e}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{f}\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}$$
$$=\boldsymbol{e}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r})$$

であつて, $\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{r}$ を如何に擇んでも恆に $\boldsymbol{e}$ 及び $\boldsymbol{f}$ と共面でなければならないので,上の結果と矛盾する。

即ち $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ が共面でないと考へたことが誤であつて,是非とも $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ は共面でなければならない。

この推理と同樣にして,もし $\boldsymbol{\phi}$ が三つの dyad の和として表はされ,その前項が共面なベクトルでないならば, $\boldsymbol{\phi}$ は只その後項が共線ベクトルである時にのみ一つの dyad に纒めることができる。

勿論この二つの定理は,後項が共面でない場合には,直に前項が共面か共線かによつて定める時にあてはまる。

§50.53 三つの dyad の和よりも少くすることのできない dyadic を**完全な** dyadic といふ。

二つの dyad の和にできて,それ以上簡單にならない dyadic を**面狀** dyadic 又は planar といふ。もし前項の平面と後項の平面と一致すれば特に**單面狀** dyadic といふこともある。

一つの dyad に歸せられる dyadic を**線狀** dyadic 又は linear といひ,更に前項と後項とが平行ならば**單線狀** dyadic と名付ける。

§50.54 さて

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\phi}$$

になるとする。

もし dyadic $\boldsymbol{\phi}$ が完全ならば, $\boldsymbol{r}$ を適當に擇べば, $\boldsymbol{s}$ も $\boldsymbol{t}$ も如何なる値でも等しくとることができて, $\boldsymbol{r}$ が零でない限り零にはならない。

然し $\boldsymbol{\phi}$ が面狀ならば, $\boldsymbol{s}$ は $\boldsymbol{\phi}$ の前項と同じ平面内に於いてのみ任意の値に等しくなり, $\boldsymbol{t}$ は $\boldsymbol{\phi}$ の後項の平面内のあらゆる値をとることができるが,その平面以外に出ることはない。だからもし $\boldsymbol{r}$ が後項のつくる平面に垂直になつたときは $\boldsymbol{s}$ は零になり,前項の平面に垂直ならば $\boldsymbol{t}$ は零になる。

$\boldsymbol{\phi}$ が單面狀の時も同樣である。

もし $\boldsymbol{\phi}$ が線狀ならば, $\boldsymbol{s}$ は $\boldsymbol{\phi}$ の前項と共線な任意ベクトルになることができるが,その線以外に出ることはできないし, $\boldsymbol{t}$ は $\boldsymbol{\phi}$ の後項と共線な任意のベクトルとなる。從つて $\boldsymbol{r}$ が $\boldsymbol{\phi}$ の後項に垂直ならば $\boldsymbol{s}$ は零になり,前項に垂直ならば $\boldsymbol{t}$ は零になる。

$\boldsymbol{\phi}$ の dyad の前項もしくは後項が悉く零ベクトルならば, $\boldsymbol{r}$ の値に拘らず恆に $\boldsymbol{s}$ 及び $\boldsymbol{t}$ は零である。

§50.55 このことを**消失度**といふ言葉で表はすことにする。即ち

完全 dyadic は零次の消失度

面狀 dyadic は一次の消失度

線狀 dyadic は二次の消失度

零(點狀) dyadic は三次の消失度

をもつといふことにする。

§50.551 次にこの異つた消失度をもつ dyadic の積の消失度を

調べてみよう。

消失度を $N(a)$ で表はすとすれば,完全 dyadic では $a=0$,面狀は $a=1$, 線狀 $a=2$, $N(3)$ は零 dyadic の消失度である。

消失度 $N(a)$ と $N(b)$ の二つの dyadic の積の消失度を $N(c)$ とすれば, c と a 及び b との關係は次のやうになる。

b \ a	0	1	2
0	$c=0$	1	2
1	1	1 又は 2	2 又は 3
2	2	2 又は 3	2 又は 3

表により例へば $N(1)$ と $N(2)$ との積は $N(2)$ 又は $N(3)$ となる。卽ち面狀 dyadic と線狀 dyadic との積は,線狀 dyadic が零 dyadic になる。

§50.6 範式

定理 完全な dyadic ϕ は恒に

$$\phi=a\,\mathbf{i}'\mathbf{i}+b\,\mathbf{j}'\mathbf{j}+c\,\mathbf{k}'\mathbf{k} \qquad (243)$$

の形にできる。但し $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 及び $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ はともに,互に垂直な一組の單位ベクトルである。

この形を ϕ の範式といふ。

§50.611 この定理を證明するためには $\mathbf{r}$ が單位動徑で ϕ が完全 dyadic のとき, $\mathbf{r}$ の一次函數

$$\mathbf{s}=\phi\cdot\mathbf{r}$$

が,あらゆる方向に $\mathbf{r}$ が變るとき,卽ち $\mathbf{r}$ の尖端が單位半徑の球面を劃くときに,如何なる曲面を劃くか調べておく必要がある。

上の關係から

$$\mathbf{r}=\phi^{-1}\cdot\mathbf{s}=\mathbf{s}\cdot\phi_c^{-1}$$

然るに $\mathbf{r}$ は單位ベクトルだから

$$1=\mathbf{r}^2=\mathbf{s}\cdot\phi_c^{-1}\cdot\phi\cdot\mathbf{s}$$
$$=\mathbf{s}\cdot\Psi\cdot\mathbf{s}$$

といふ形になる。 Ψ を標準形にしてみればこの式は $\mathbf{s}$ の二次式であるから $\mathbf{s}$ の尖端の軌跡は二次曲面で,しかも $\mathbf{r}$ が球面を劃くから, $\mathbf{s}$ は閉ぢた二次曲面卽ち楕圓面を劃くことになる。

§50.612 ϕ が完全な dyadic, $\mathbf{r}$ が單位動徑ならば $\mathbf{s}$ の尖端の軌跡は楕圓面であるから, $\mathbf{r}$ の或る方向に對して $\mathbf{s}$ が極大になるか,少くも $\mathbf{s}$ のとることの出來る最大値になる處があらう。

$\mathbf{r}$ のその方向の値を $\mathbf{i}$ とし

$$\mathbf{a}=\phi\cdot\mathbf{i}$$

と定め,次に $\mathbf{i}$ に垂直な平面內の $\mathbf{r}$ のすべての變化を考へる。

$\phi\cdot\mathbf{r}$ は $\mathbf{r}$ の一次函數であるから, $\mathbf{s}$ は一つの平面內にあつて,種々の値をとる中少くも一つは他の如何なる値よりも大きくなるであらう,その方向を $\mathbf{b}$ とし,それに相當する $\mathbf{r}$ の値を $\mathbf{j}$ とする。

$$\mathbf{b}=\phi\cdot\mathbf{j}$$

最後に $\mathbf{k}$ を $\mathbf{i}$ と $\mathbf{j}$ に垂直に

$$\mathbf{k}=\mathbf{i}\times\mathbf{j}$$

にとり

$$\mathbf{c}=\phi\cdot\mathbf{k}$$

ときめれば,明かに

$$\phi=\mathbf{a}\mathbf{i}+\mathbf{b}\mathbf{j}+\mathbf{c}\mathbf{k}$$

といふ形になる。

i, j, k は互に垂直に定めたが,a, b, c も亦互に垂直になることを證明する必要がある。

さて

$$s=\phi\cdot r$$

ϕは一定であるから,微分すれば

$$ds=\phi\cdot dr$$

よつて

$$s\cdot ds=s\cdot\phi\cdot dr$$

$$=s\cdot a i\cdot dr+s\cdot b j\cdot dr+s\cdot c k\cdot dr$$

r が i の方向をとるときは,s が極大値をとり,ds はその時 s に垂直であるから

$$s\cdot ds=0$$

然るに r は單位ベクトルだから恒に

$$r\cdot dr=0$$

故に

$$s\cdot b j\cdot dr+s\cdot c k\cdot dr=0$$

次に dr が j に垂直になる時は,$s\cdot c$ は零となり,dr が k に垂直の時は $s\cdot b$ は零になる。

故に r が i の方向をとれば,s は b と c とに垂直にならなければならない。ところが r が i の方向をとる時は, s が a に平行になると定めたから,a は b と c に垂直になる。

同樣にして次に r を j—k 面の中に限つて變化させて考へれば, b は c に垂直になるといふ結論を得る。

つまり a, b, c は互に垂直である。

この結果により

$$a=a i',\ b=b j',\ c=c k'$$

こゝに i', j', k' は互に垂直な單位ベクトルの一組で,完全な dyadic ϕ は

$$\phi=a i' j+b i' j+c k' k$$

といふ形になる。a, b, c は正又は負のスカラー量である。

§50.62 次の定理も容易く證明できる。

定理　完全な dyadic は恒に

$$\phi=\pm(a i' i+b j' j+c k' k) \quad\text{.....................(243.1)}$$

の形にできる。但し a, b, c は皆正の數で, i', j', k' 及び i, j, k は右旋系の單位ベクトルである。

§50.63 殊に次の定理は利用する途が多い。

定理　自己共軛な dyadic は恒に

$$\phi=a i i+b j j+c k k \quad\text{..............................(244)}$$

の形にできる。但し a, b, c は正又は負のスカラー量で i, j, k は基本ベクトルである。

(§50.6)の定理により,今

$$\phi=a i' i+b j' j+c k' k$$

とおけば

$$\phi_c=a i i'+b j j'+c k k'$$

であるから

$$\phi\cdot\phi_c=a^2\mathbf{i}'\mathbf{i}'+b^2\mathbf{j}'\mathbf{j}'+c^2\mathbf{k}'\mathbf{k}'$$

$$\phi_c\cdot\phi=a^2\mathbf{i}\mathbf{i}+b^2\mathbf{j}\mathbf{j}+c^2\mathbf{k}\mathbf{k}$$

然るに ϕ は自己共軛だから

$$\phi=\phi_c$$

故に

$$\phi\cdot\phi_c=\phi_c\cdot\phi=\phi^2$$

又

$$\mathrm{I}=\mathbf{i}\mathbf{i}+\mathbf{j}\mathbf{j}+\mathbf{k}\mathbf{k}=\mathbf{i}'\mathbf{i}'+\mathbf{j}'\mathbf{j}'+\mathbf{k}'\mathbf{k}'$$

であるから

$$\phi^2-a^2\mathrm{I}=(b^2-a^2)\mathbf{j}'\mathbf{j}'+(c^2-a^2)\mathbf{k}'\mathbf{k}'$$
$$=(b^2-a^2)\mathbf{j}\mathbf{j}+(c^2-a^2)\mathbf{k}\mathbf{k}$$

故に

$$(\phi^2-a^2\mathrm{I})\cdot\mathbf{i}=0$$

$$(\phi^2-a^2\mathrm{I})\cdot\mathbf{i}'=0$$

従つて,もし $\mathbf{i}$ と $\mathbf{i}'$ が平行でなければ, $\phi^2-a^2\mathrm{I}$ は $\mathbf{i}$ 及び $\mathbf{i}'$ とその二つの平面内のすべてのベクトルを消失させるから,二次の消失度をもつ線狀 dyadic である。ところが a, b, c が互に等しくない限,線狀になることはできない。面狀でなければならないので, $\mathbf{i}$ と $\mathbf{i}'$ とは平行である。

同樣にして $\mathbf{j}$ と $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}$ と $\mathbf{k}'$ とは平行になることが知れるから,自己共軛の dyadic は恆に

$$\phi=a\mathbf{i}\mathbf{i}+b\mathbf{j}\mathbf{j}+c\mathbf{k}\mathbf{k}$$

といふ形になる。

§50.7 問題

(1) 自己共軛の dyadic 及び反自己共軛の dyadic の標準形及びマトリツクスの形はどうなるか。

(2) 任意のベクトル $\mathbf{a}$ について

$$(\mathrm{I}\times\mathbf{a})\cdot\phi=(\mathbf{a}\times\ )\cdot\phi=\mathbf{a}\times\phi$$

$$(\phi\times\mathbf{a})_c=-\mathbf{a}\times\phi_c$$

を證明なさい,

(3) 次の關係が成りたつことを證明なさい。

$$\mathbf{a}\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$
$$=\mathbf{b}\times\mathbf{c}\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}\mathbf{c}=[\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}]\mathrm{I}$$

(4.1) **Lorentz-Einstein の變換**

$$\phi=\mathrm{I}+\frac{\beta-1}{v^2}\mathbf{v}\mathbf{v}$$

$$\frac{1}{\beta}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

とおき

$$\phi^2=\mathrm{I}+\frac{\beta^2}{c^2}\mathbf{v}\mathbf{v}$$

$$\phi^{-1}=\phi-\frac{\beta}{c^2}\mathbf{v}\mathbf{v}$$

を導き, ϕ は $\mathbf{v}$ に平行なベクトルを方向を換へないで只 $\beta:1$ の比に引き伸ばすこと,又 $\mathbf{v}$ に垂直なベクトルには影響ないことを證明なさい。

(4.2) 坐標系 S に對して一樣な速度 $\mathbf{v}$ で運動してゐる坐標系を S' とすれば, S と S' とが一致した瞬間から測つた時刻を t,任意の點の動徑を二つの坐標系に對し夫々 $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ とすれば

$$\mathbf{r}'=\phi\cdot\mathbf{r}-\beta t\mathbf{v}$$

$$t'=\beta\left(t-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{c^2}\right)$$

となることを Lorentz の變換式から導き,從つて

$$\boldsymbol{r}=\phi\cdot\boldsymbol{r}'+\beta t'\boldsymbol{v}$$

$$t=\beta\left(t'+\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}'}{c^2}\right)$$

になることを證明なさい。

第二章 幾何光學

ベクトル解析を幾何光學に應用すれば,非常に簡明に問題をとくことができる。實用的の問題に應用したものでは

Silberstein : Simplified Method of Tracing Rays

といふ本がある。たゞ惜しいことに,二三ベクトルの扱ひ方に間違があつて正しくない個所がある。それについては長岡博士祝賀論文集に正しておいたから,參考されれば都合よいことと思ふ。

基礎方面の研究には Runge と Sommerfeld の論文が Annalen der Physik (1911)にあるから,これも參考にならう。

こゝでは Fermat の原理に基礎をおいて,光線の反射屈折の法則を種々の形で求めてみよう。光線の經路の微分方程式は既に(§33.64)で研究した。

§51.1 Fermat の原理

μ を光の媒質の眞空に對する屈折率, r を光が通過した距離とすれば, Fermat の原理は

$$\delta\int\mu dr=0$$

で表はせる。δ は光の徑路についてとつた變分である。

もし等方等質の媒質がいくつかの面で境されてゐるならば

$$\delta\sum\mu r=0 \quad\quad (245)$$

といふ形になる。Σは光の過るすべての媒質について加へる意味を表はしてゐる。

§51.11

光が屈折率 μ_1 の媒質中の一點 A から出て,境界面上の點 P で屈折し,屈折率 μ_2 の媒質に入り B點に到るものとする。

任意の原點Oに關するA點の位置ベクトルを $\boldsymbol{q}_1$, B點の位置ベクトルを $\boldsymbol{q}_2$ とする。

入射點Pへの動徑を $\boldsymbol{q}$ として

$$r_1^2=(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_1)^2 \quad\quad (245.21)$$

$$r_2^2=(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q})^2 \quad\quad (245.22)$$

とおけば,r_1, r_2 は夫々 A, B から P 迄の距離である。

第一第二の媒質に於いて,光の經路に沿つてとつた單位切線ベクトルを夫々 $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ とすれば

$$\left.\begin{aligned} r_1\boldsymbol{r}_1&=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_1\\ r_2\boldsymbol{r}_2&=\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{q}\end{aligned}\right\} \quad\quad (245.3)$$

記載を簡單にするために

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{s}_1&=\mu\boldsymbol{r}_1\\ \boldsymbol{s}_2&=\mu_2\boldsymbol{r}_1\end{aligned}\right\} \quad\quad (245.31)$$

とおく,これは光の**光學的徑路**といふ。

§51.12 先づ光の經路APBが隣接する徑路$AP'B$に變つたときの變分を求めよう。

P'は境界面上にあつてPに極めて接近してゐる點ならばどの點をとつて考へてもよい。

この場合 Fermat の原理は

$$\mu_1\delta r_1+\mu_2\delta r_2=0 \qquad \cdots\cdots (245.1)$$

といふ形になる。

光の發射點Aと,到着點Bとは動かさずに變へるから,變分は只入射點PをP'に移したと考へるだけですむ。卽ち變分に對しては $\mathbf{q}_1$ $\mathbf{q}_2$ はともに不變で $\mathbf{q}$ だけ $\delta\mathbf{q}$ 變る。

(245.2)の式の變分をとれば

$$r_1\delta r_1=(\mathbf{q}-\mathbf{q}_1)\cdot\delta\mathbf{q}$$

$$r_2\delta r_2=-(\mathbf{q}_2-\mathbf{q})\cdot\delta\mathbf{q}$$

(245.3)の式により

$$\left.\begin{aligned}\delta r_1&=\mathbf{r}_1\cdot\delta\mathbf{q}\\ \delta r_2&=-\mathbf{r}_2\cdot\delta\mathbf{q}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (245.4)$$

となる,よつて(245.1)の式は

$$\mu_1\mathbf{r}_1\cdot\delta\mathbf{q}-\mu_1\mathbf{r}_2\cdot\delta\mathbf{q}=0,$$

卽ち

$$(\mu_1\mathbf{r}_1-\mu_2\mathbf{r}_2)\cdot\delta\mathbf{q}=0$$

(245.31)により

$$\varDelta\mathbf{s}\cdot\delta\mathbf{q}=0 \qquad \cdots\cdots (245.5)$$

こゝに

$$\varDelta\mathbf{s}=\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2=\mu_1\mathbf{r}_1-\mu_2\mathbf{r}_2 \qquad \cdots\cdots (245.51)$$

である。$\varDelta$は第一第二の媒質に於ける値の差を示す記號として用ゐる。

§51.13 P點に於いて境界面にたてた單位法線ベクトルを$\mathbf{n}$とする。$\mathbf{n}$は第一の媒質でも第二の媒質に向つてゐても差支ないことは後にわかる。

P'は境界面上にあるから,$\mathbf{q}$の變分は$\mathbf{n}$に垂直でなければならない。卽ち

$$\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{q}=0 \qquad \cdots\cdots (245.6)$$

(245.5)式に於ける$\delta\mathbf{q}$は,(245.6)の條件を滿足しなければならないから,この條件をいれるために未定係數λを乘じて(245.5)式から減じれば

$$(\varDelta\mathbf{s}-\lambda\mathbf{n})\cdot\delta\mathbf{q}=0$$

この式の中では,$\delta\mathbf{q}$は旣に境界面上にあるといふ條件を充してゐるから,全く勝手にとることができる。$\delta\mathbf{q}$ の値がどうでもこの式が成り立つためには,括弧の中の量が恆に零でなければならない。

$$\varDelta\mathbf{s}-\lambda\mathbf{n}=0$$

$\mathbf{n}$をスカラー的に乘ずれば,λの値が定まる。

$$\begin{aligned}\lambda&=\mathbf{n}\cdot\varDelta\mathbf{s}\\ &=\pm|\varDelta\mathbf{s}|\end{aligned}$$

§51.2 屈折の法則

このλの値をいれれば

$$\Delta\mathbf{s}=\Delta\mathbf{s}\cdot\mathbf{n}\mathbf{n} \quad \ldots\ldots(245.71)$$

卽ち $\Delta\mathbf{s}$ は $\mathbf{n}$ に平行なベクトルであつて,この式は Snellius の法則をベクトルで表はした一つの形である。

$\mathbf{n}$ は dyad として入つてくるから,境界面に於いて何れの媒質に向けてとつても變りない。

§51.21 $\Delta\mathbf{s}$ が $\mathbf{n}$ に平行だから

$$\Delta\mathbf{s}\times\mathbf{n}=0$$

卽ち

$$\mathbf{s}_1\times\mathbf{n}=\mathbf{s}_2\times\mathbf{n} \quad \ldots\ldots(245.71)$$

これも屈折の法則の一つの形としてとることができる。

$\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ 及び $\mathbf{n}$ はこの式により共面であるから

$$[\mathbf{n}\,\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2]=0 \quad \ldots\ldots(245.721)$$

§51.22 (245.71)の式を書き換へれば

$$\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{n}\,\mathbf{n}=\mathbf{s}_2-\mathbf{s}_2\cdot\mathbf{n}\,\mathbf{n}$$

今

$$\boldsymbol{\phi}=\mathbf{I}-\mathbf{n}\mathbf{n}$$

とおけば

$$\boldsymbol{\phi}\cdot\mathbf{s}_1=\boldsymbol{\phi}\cdot\mathbf{s}_2 \quad \ldots\ldots(245.73)$$

となる。これは dyadic を用ゐて表はした屈折の法則である。

§51.23 (245.72)の式の兩邊に $\mathbf{s}_1$ をベクトル的に乘じて展開すれば

$$\mathbf{s}_1\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{n}-\mathbf{n}\,\mathbf{s}_1^2=\mathbf{s}_2\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{n}-\mathbf{n}\,\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_2$$

別に $\mathbf{s}_2$ をベクトル的に乘じれば

$$\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\cdot\mathbf{n}-\mathbf{n}\,\mathbf{s}_2\cdot\mathbf{s}_1=\mathbf{s}_2\,\mathbf{s}_2\cdot\mathbf{n}-\mathbf{n}\,\mathbf{s}_2^2$$

この二式を加へ合せると,(245.31)により

$$\mathbf{s}_1^2=\mu_1^2$$

$$\mathbf{s}_2^2=\mu_2^2$$

であるから

$$(\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2)(\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{n}+\mathbf{s}_2\cdot\mathbf{n})=\mathbf{n}(\mu_1^2-\mu_2^2)$$

§51.231 この最後の式に $\mu_1=\mu_2$ とおけば

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2=0\\ \mathbf{s}_1\cdot\mathbf{n}+\mathbf{s}_2\cdot\mathbf{n}=0\end{aligned}\right\}$$

となる。前者は第一第二の媒質の屈折率が等しい時には,入射光線と屈折光線とが方向を變へないことを意味し,後者は反射の法則を導くことになる。

§51.24 (245.73)或は(245.71)の式を書き換へれば

$$\mathbf{s}_2=\mathbf{s}_1+p\,\mathbf{n} \quad \ldots\ldots(254.75)$$

こゝに

$$p=-\Delta(\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}) \quad \ldots\ldots(25.751)$$

となり,これは入射光線,境界線の法線によつて屈折光線の路を示す方程式で Silberstein が得た形である。

p の値は(245.74)から

$$p=\frac{\mu_2^2-\mu_1^2}{\mathbf{s}_2\cdot\mathbf{n}+\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{n}}$$

となる。

§**51.25**　$\boldsymbol{n}$と$\boldsymbol{s}_1$との面,卽ち入射面に於いて$\boldsymbol{n}$に垂直な單位ベクトルを$\boldsymbol{t}_1$,屈折面($\boldsymbol{n}$-$\boldsymbol{s}_2$面)に於いて$\boldsymbol{n}$に垂直な單位ベクトルを$\boldsymbol{t}_2$として,$\boldsymbol{s}_1$を$\boldsymbol{n}$と$\boldsymbol{t}_1$により,$\boldsymbol{s}_2$を$\boldsymbol{n}$と$\boldsymbol{t}_2$で表はせば

$$\boldsymbol{s}_1=\boldsymbol{s}_1\cdot(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{t}_1)$$

$$\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{s}_2\cdot(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{t}_2\boldsymbol{t}_2)$$

明かに

$$\phi\cdot\boldsymbol{s}_1=\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{t}_1$$

$$\phi\cdot\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{t}_2\boldsymbol{t}_2$$

故に(59.83)により

$$\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{t}_1=\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{t}_2\boldsymbol{t}_2$$

兩邊を自乘すれば

$$(\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{t}_1)^2=(\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{t}_2)^2$$

よつて

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{t}_1&=\pm\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{t}_2\\ \boldsymbol{t}_1&=\pm\boldsymbol{t}_2\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(245.76)$$

これも屈折の法則の一つの形で,直角成分で表はしたものはよく用ゐられる。

§51.3　反射の法則

反射の法則は上に得た結果に$\mu_1=\mu_2$とおけば求まる。

(245.72)に$\mu_1=\mu_2$とおけば

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{n}\quad\cdots\cdots\cdots(245.81)$$

この式は既に(§9.3)の例として求めてある。

(245.74)の式により

$$(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)(\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{n})=0$$

卽ち

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{n}=0$$

或は

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{n}\quad\cdots\cdots\cdots(245.82)$$

で右邊の負號は必要である。Silberstein の著書には缺いてゐるのは注意しなければならない。

(245.82)式を(245.75)に代入すれば,反射に關する實際問題をとくときに土臺となる,最も大切な公式を得る。

媒質を區別する必要はないから,入射光線を$\boldsymbol{r}$,反射光線を$\boldsymbol{r}'$とすれば

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}-2\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}$$

よつて

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}'&=\Omega\cdot\boldsymbol{r}\\ \Omega&=\mathrm{I}-2\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(245.83)$$

Ωは反射に際する方向の變化を示す dyadic で自己共軛である。

§51.31　反射面が多數ある場合

反射面が多數にある時,第i番目の反射面にたてた單位法線を$\boldsymbol{n}_i$とし

$$\Omega_i=\mathrm{I}-2\boldsymbol{n}_i\boldsymbol{n}_i\quad\cdots\cdots\cdots(245.9)$$

とおけば,その面で反射された後の光線の逕路$\boldsymbol{r}_{i+1}$は,

$$\boldsymbol{r}_{i+1}=\Omega_i\cdot\boldsymbol{r}_i$$

で表はせる。

n回反射された後の光線の方向$\boldsymbol{r}'$は

$$\boldsymbol{r}'=\Omega_n\cdot\Omega_{n-1}\cdot\ldots\Omega\cdot\boldsymbol{r} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(245.91)$$

である。

Ω_i は自己共軛であるから

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}\cdot\Omega_1\cdot\Omega_2\cdot\ldots\cdot\Omega_n \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(245.92)$$

ともなる。

第三章　二次曲面

§52.1 二次曲面の方程式

ϕは不變な完全 dyadic, $\boldsymbol{r}$が動徑ならば

$$\boldsymbol{r}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{r}=\text{const.} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(246)$$

は一般に二次曲面を表はす。

ϕを自己共軛と反自己共軛との部分に分けてみれば,反自己共軛の部分については

$$\phi''\cdot\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{r}\cdot\phi''$$

$$\boldsymbol{r}\cdot\phi''\cdot\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{r}\cdot\phi''\cdot\boldsymbol{r}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{r}\cdot\phi''\cdot\boldsymbol{r}=0$$

であるから,ϕは自己共軛な dyadic である。

ϕは自己共軛であるから(§50.63)の定理によつて

$$\phi=\pm\frac{\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}}{a^2}\pm\frac{\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}}{b^2}\pm\frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}}{c^2}$$

といふ形におくことができる。

故に

$$\boldsymbol{r}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{r}=\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=\text{const.}$$

は一般な二次曲面である。

複號±の組合せと常數の値によつて五つの場合が起る。

(1) 符號が悉く正ならば楕圓面

(2) 一つが負ならば一葉双曲線面

(3) 二つが負ならば二葉双曲線面

(4) 三つとも負ならば虚の二次曲面

(5) 常數が零の時は圓錐面

になる。

物理的に一番多く調べる必要のあるのは楕圓面で,それに對する dyadic は

$$\phi=\frac{\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}}{a^2}+\frac{\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}}{b^2}+\frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}}{c^2} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(246.1)$$

である。常數は1とおいても一般性を失はない。

§52.2 切平面

二次曲面

$$\boldsymbol{r}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{r}=1$$

の切平面の方程式を求めよう。

この方程式を微分すれば,ϕは不變であるから

$$d\boldsymbol{r}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\cdot\phi\cdot d\boldsymbol{r}=0$$

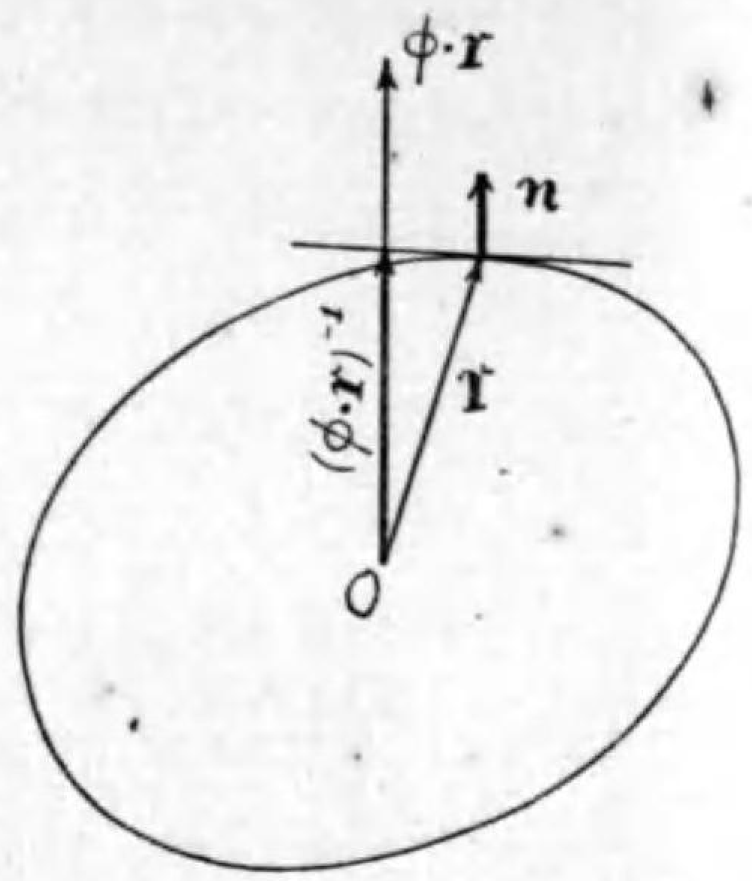
ϕは自己共軛だから上の式は

$$d\boldsymbol{r}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{r}=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(247)$$

でこれは切平面の微分方程式である。

この式は $d\boldsymbol{r}$ が $\phi\cdot\boldsymbol{r}$ に垂直であることを意味してゐる。$d\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{r}$ の尖端に於いて,曲面上或はその切平面上にとつた變りであつて,$\phi\cdot\boldsymbol{r}$ はそれに垂直だから,つまり曲面の法線 $\boldsymbol{n}$ の方向にあるベクトルである。

第九十三圖



よつて

$$\phi\cdot\boldsymbol{r}=N\boldsymbol{n}$$

とおけば

$$N=|\phi\cdot\boldsymbol{r}|$$

故に $\boldsymbol{r}$ に於ける二次曲面の單位法線は

$$\boldsymbol{n}=\frac{\phi\cdot\boldsymbol{r}}{|\phi\cdot\boldsymbol{r}|}\quad\cdots\cdots\cdots(247.1)$$

中心から切平面にひいた垂線を $\boldsymbol{p}$ とすれば

$$\boldsymbol{p}=p\boldsymbol{n}$$

$$\therefore\quad p^2=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}$$

$$=p\frac{\boldsymbol{r}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{r}}{\sqrt{(\phi\cdot\boldsymbol{r})^2}}=\frac{p}{\sqrt{(\phi\cdot\boldsymbol{r})^2}}$$

$$\therefore\quad p=\frac{1}{\sqrt{(\phi\cdot\boldsymbol{r})^2}}$$

故に

$$p=\frac{\phi\cdot\boldsymbol{r}}{(\phi\cdot\boldsymbol{r})^2}=\frac{1}{\phi\cdot\boldsymbol{r}}\quad\cdots\cdots\cdots(247.2)$$

扨て切平面の微分方程式に $\boldsymbol{r}$ の代りに $\boldsymbol{a}$, $d\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}$ として,$\boldsymbol{r}$ を切平面上の點の動徑とみれば

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\cdot\phi\cdot\boldsymbol{a}=0$$

は $\boldsymbol{a}$ を過り ϕ に垂直な平面卽ち切平面の方程式である。

然るに $\boldsymbol{a}$ は二次曲面上の點であるから

$$\boldsymbol{a}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{a}=1$$

よつて $\boldsymbol{a}$ に於いて二次曲面に切する切平面の方程式は

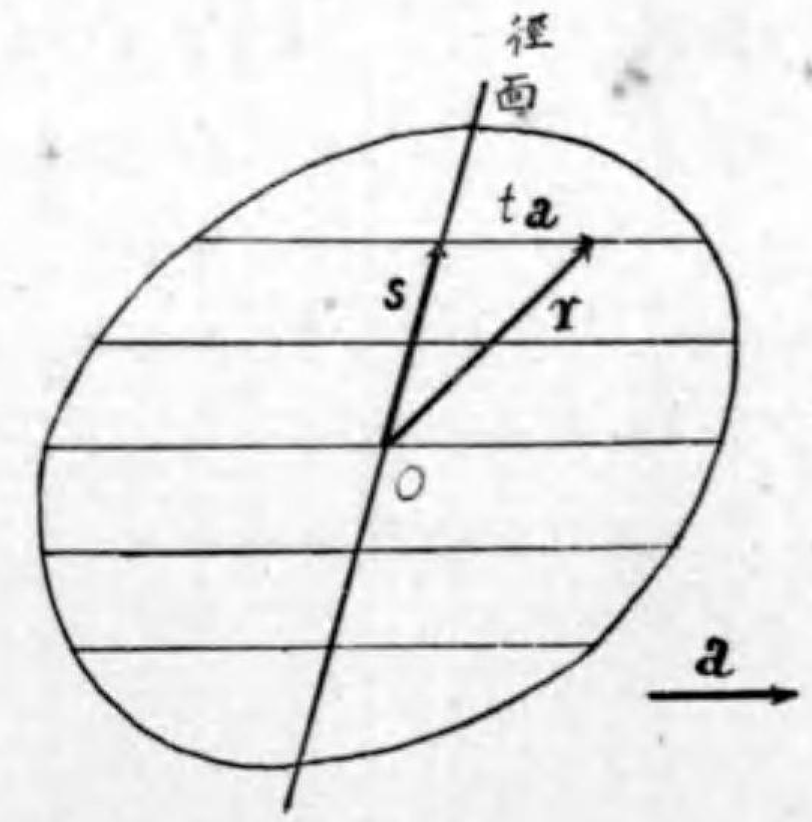
$$\boldsymbol{r}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{a}=1\quad\cdots\cdots\cdots(247.3)$$

である。

§52.3 徑面

楕圓面の平行な弦の中點の軌跡をつくると一つの平面になる。これをその弦に共軛な徑面と名付ける。

第九十四圖



ベクトル $\boldsymbol{a}$ に平行な一つの弦の中點の位置ベクトルを $\boldsymbol{s}$ とすれば,その弦の上の任意の點の動徑 $\boldsymbol{r}$ は

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{s}+t\boldsymbol{a}$$

である。t は正又は負の數で,パラメターである。

$\boldsymbol{r}$ が楕圓面と弦との交りの點の時は

$$\boldsymbol{r}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{s}+t\boldsymbol{a})\cdot\phi\cdot(\boldsymbol{s}+t\boldsymbol{a})=1$$

卽ち

$$\boldsymbol{s}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{s}+2t\boldsymbol{s}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{a}+t^2\boldsymbol{a}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{a}=1$$

この t についての二次方程式の根を t_1, t_2 とすれば,それは弦の兩端の點に對するパラメターの値であるが,$\boldsymbol{s}$ が弦の中點を示す

から,t_1 と t_2 とは符號が反對で大さが等しい。

$$t_1=-t_2$$

であるから,二次方程式の t の係數は恒に零でなければならない。

$$\boldsymbol{s}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{a}=0 \qquad (248)$$

$\boldsymbol{s}$ は $\phi\cdot\boldsymbol{a}$ に垂直なベクトルである。

よつて $\boldsymbol{s}$ の軌跡は楕圓の中心を過つて,$\phi\cdot\boldsymbol{a}$ に垂直,即ち $\boldsymbol{a}$ の尖端に於ける切平面に平行な平面となる。

$\boldsymbol{a}$ に共軛な徑面內の任意の點の動徑を $\boldsymbol{b}$ とすれば

$$\boldsymbol{b}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{a}=0$$

ϕ は自己共軛であつて,この式ば同時に $\boldsymbol{b}$ に共軛な徑面內の點の動徑は $\boldsymbol{a}$ になることを示してゐる。

この二つの徑面の交線上の點を $\boldsymbol{c}$ とすれば

$$\boldsymbol{b}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{c}=0$$

$$\boldsymbol{c}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{a}=0$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{b}=0$$

この對稱的の關係でわかるやうに,三つの共軛な徑面がある,その二つ宛の交線に相當する三つの弦 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は互に共徑な弦である。

§52.4 極平面

位置ベクトル $\boldsymbol{a}$ の尖端に於ける切平面は

$$\boldsymbol{r}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{a}=1$$

であるから,もし $\boldsymbol{b}$ が切平面上の點ならば

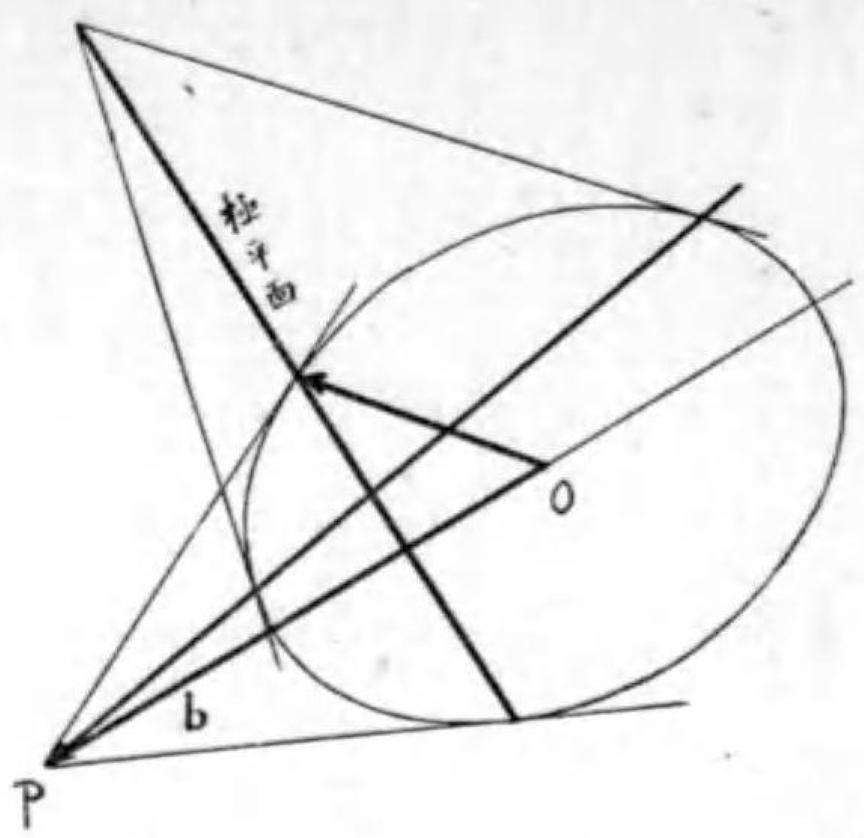
$$\boldsymbol{b}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{a}=1$$

この式は $\boldsymbol{a}$ に於ける切平面が $\boldsymbol{b}$ を過ることを示してゐるから,いま $\boldsymbol{b}$ を固定して $\boldsymbol{a}$ を流通點と考へてこの式を滿足するやうに動かしてみれば,切平面が恒に $\boldsymbol{b}$ を過るやうな位置に在る點は

$$\boldsymbol{b}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{r}=1 \qquad (249)$$

の平面上にあることがわかる。

第九十五圖



この平面を點 P(位置ベクトル $\boldsymbol{b}$)の**極平面**と名付ける。

P の極平面は恒にベクトル $\boldsymbol{b}\cdot\phi$ に垂直である。

極平面と二次曲面との交線は,その線上の點に於ける切平面が P を過るやうな點の軌跡を示し,その軌跡と P とを結ぶ直線は切圓錐體を形づくる。

$\boldsymbol{b}$ の極平面上に $\boldsymbol{a}$ が橫たはれば

$$\boldsymbol{b}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{a}=1$$

であるが,ϕ は自己共軛だから同時に $\boldsymbol{a}$ の極平面上に $\boldsymbol{b}$ のあることが知れる。

(問題)　$\boldsymbol{a}$ の方向の無限大の點の極平面は,$\boldsymbol{a}$ に共軛な徑面になることを證明なさい。

§52.5 楕圓面の主軸

楕圓面の主軸は,動徑の大さが極大もしくは極小になる方向に

ある。

問題は動徑 $\boldsymbol{r}$ の自乘 $\boldsymbol{r}^2$ の極大か極小を

$$\boldsymbol{r}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{r}=1$$

の條件のもとに求めることであるから，$\boldsymbol{r}^2$ にスカラー未定係數 λ をかけて，楕圓面の式から減じ

$$\boldsymbol{r}\cdot(\phi\cdot\boldsymbol{r}-\lambda\boldsymbol{r})=1,$$

これを微分して零とおけばよい。

$$d\boldsymbol{r}\cdot(\phi\cdot\boldsymbol{r}-\lambda\boldsymbol{r})+\boldsymbol{r}\cdot(\phi\cdot d\boldsymbol{r}-\lambda d\boldsymbol{r})=0$$

ϕ は自己共軛だからこの式は

$$d\boldsymbol{r}\cdot(\phi\cdot\boldsymbol{r}-\lambda\boldsymbol{r})=0$$

となる。

極大もしくは極小の點では，$d\boldsymbol{r}$ が何れの方向にあつてもこの式が恆に成りたつから

$$\phi\cdot\boldsymbol{r}-\lambda\boldsymbol{r}=0$$

ところが $\phi\cdot\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{r}$ に於ける切平面に垂直だから，この結果は $\boldsymbol{r}$ も亦切平面に垂直になることを示す。つまり主軸の方向は，楕圓面に動徑が垂直になる方向にある。

未定係數 λ の値は三つある。

$$\lambda\boldsymbol{r}=\phi\cdot\boldsymbol{r}$$

の式の中に

$$\phi=\frac{\boldsymbol{ii}}{a^2}+\frac{\boldsymbol{jj}}{b^2}+\frac{\boldsymbol{kk}}{c^2}$$

とおけば，λ は三つ定まる。卽ち

$$\lambda_1=\frac{1}{a^2},\quad \lambda_2=\frac{1}{b^2},\quad \lambda_3=\frac{1}{c^2}$$

そして a, b, c は楕圓面の主半徑を表はすことがわかる。

ベクトル解析による二次曲面の研究は興味ある問題であるが，さしあたつて必要な部分だけに留めておく。

第四章　剛體の廻轉運動

剛體の廻轉運動は，旣に第二編に於いて調べてあるが，更に dyadic を用ゐる方法を窺つてみよう。

§53.1　慣性 dyadic

剛體が廻轉速度 $\boldsymbol{w}$ で廻轉してゐる時の運動のエネルギーは

$$T=\frac{1}{2}J\boldsymbol{w}^2$$

J はその廻轉の軸に關する慣性能率で

$$\begin{aligned}J&=\sum m(\boldsymbol{w}_1\times\boldsymbol{r})^2\\&=\sum m[\boldsymbol{r}^2-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{w}_1)^2]\\&=\boldsymbol{w}_1\cdot\left[\sum m(\boldsymbol{r}^2\mathrm{I}-\boldsymbol{r}\boldsymbol{r})\right]\cdot\boldsymbol{w}_1\\&=\boldsymbol{w}_1\cdot\phi\cdot\boldsymbol{w}_1\end{aligned}$$

こゝに

$$\phi=\sum m(\boldsymbol{r}^2\mathrm{I}-\boldsymbol{r}\boldsymbol{r})\text{..............................}(250)$$

は廻轉軸には關係なく，剛體の質量の分布の狀態で定まる量で，慣

性の dyadic といふ自己共軛の dyadic である。

§ 53.11 慣性乘積

慣性 dyadic を用ゐれば，$\boldsymbol{a}$ 及び $\boldsymbol{b}$ の方向に關する慣性乘積は

$$-\boldsymbol{a}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{b}$$

で表はせる。今その慣性乘積を

$$P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{b}\quad\cdots\cdots(250.1)$$

とおけば，$\boldsymbol{a}$ の方向に關する慣性能率は，明かに $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ に一致した場合と見做せるから

$$J(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{a}=-P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\quad\cdots\cdots(250.2)$$

である。

§ 53.12

ϕ を分解した形に書けば，自己共軛であるから

$$\phi=A\,\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}+B\,\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}+\ldots\ldots-D(\boldsymbol{j}\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}\boldsymbol{j})-\ldots\ldots$$

と書ける。その dyad の項の係數は

$$\left.\begin{aligned}A&=\boldsymbol{i}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{i}=J(\boldsymbol{i}),\\ D&=-\boldsymbol{j}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{k}=P(\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}),\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(250.3)$$

で坐標軸に關する慣性能率と慣性乘積である。

ϕ は自己共軛であるから，直交する $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ を適當に撰べば

$$\phi=\mathrm{A}\,\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}+\mathrm{B}\,\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}+\Gamma\,\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\quad\cdots\cdots(250.4)$$

となる。この $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ の方法は慣性の主軸であつて，それに對しては慣性乘積は零になる。

§ 53.13

二つの平行な軸について，その各に關する慣性能率の關

係を調べよう。

それには剛體の重心 G を過る軸と，原點 O を過りそれに平行な軸とについて調べればよい。

剛體の中の任意の一點の位置は，ベクトル

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}'$$

で表はせる。こゝに

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OG},\quad \boldsymbol{r}'=\overrightarrow{GP}$$

である。

慣性 dyadic にこの値をいれて，重心に關する性質を使つて計算する。$\boldsymbol{r}'$ は重心に對する位置ベクトルであるから

$$\sum m\,\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}\sum m\,\boldsymbol{r}'=0$$

$$\sum m\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}=\left(\sum m\boldsymbol{r}'\right)\boldsymbol{r}=0$$

これによつて

$$\phi=\sum m\,(\boldsymbol{r}^2\,\mathrm{I}-\boldsymbol{r}\boldsymbol{r})$$

$$=\sum m(\boldsymbol{r}^2\,\mathrm{I}-\boldsymbol{r}\boldsymbol{r})+\sum m(\boldsymbol{r}'^2\,\mathrm{I}-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}')$$

$$=\bar{\phi}+\phi'$$

よつて

$$\boldsymbol{a}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\bar{\phi}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\phi'\cdot\boldsymbol{a}$$

卽ち

$$J=J'+Mh^2$$

J' は重心を過る $\boldsymbol{a}$ の方向の軸に關する慣性能率，h は重心と原點

との距離,Mは全部の質量である。

§53.13　慣性 dyadic を用ゐれば,角運動量$\boldsymbol{H}$は

$$\boldsymbol{H}=\sum \boldsymbol{r}\times m\,\boldsymbol{v}=\sum m\,\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r})$$

$$=\sum m\,(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{w}-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{w}\,\boldsymbol{r})$$

$$=\Big[\sum m\,(\boldsymbol{r}^2\,\mathrm{I}-\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r})\Big]\cdot\boldsymbol{w}$$

$$=\phi\cdot\boldsymbol{w} \quad\text{.........(250.5)}$$

又運動のエネルギーは

$$T=\frac{1}{2}\,\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}\,\boldsymbol{w}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{w} \quad\text{.........(250.6)}$$

になる。

§53.2　外力の作用しない運動

剛體の廻轉運動に外力が作用しなければ

$$\frac{d\boldsymbol{H}}{dt}=0$$

卽ち

$$\boldsymbol{H}=\mathrm{const.}=\phi\cdot\boldsymbol{w}$$

であつて,$\boldsymbol{H}$の大さ方向が變らず,恒に或る一つの平面に垂直である。その面を不變面といひ,$\boldsymbol{H}$の方向を不變軸といふ。

不變面の方程式は

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{H}=\mathrm{const.}$$

である。

運動のエネルギーも一定であるから

$$\boldsymbol{w}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{w}=\mathrm{const.}$$

卽ち

$$\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{H}=2T=w^2J=\mathrm{const.}$$

從つて

$$J=\frac{2\,T}{w^2}=\frac{\mathrm{const.}}{w^2}$$

になり,$\boldsymbol{w}$の方向の慣性能率は楕圓體

$$\boldsymbol{w}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{w}=\mathrm{const.}$$

の$\boldsymbol{w}$の方向の動徑の自乘に逆比例する。

この楕圓體は, Poinsot の**楕圓體**と名付けられ,その主軸は慣性の主軸を示す。

§53.3　剛體の廻轉運動

角運動量$\boldsymbol{H}$と外力の能率$\boldsymbol{N}$との關係は

$$\boldsymbol{N}=\frac{d\boldsymbol{H}}{dt}$$

である。

空間に固定した坐標系S_1とそれに對して廻轉速度$\boldsymbol{w}$で廻轉してゐる坐標系S_2について表はしたものの關係は,既に(§31.1)で調べたことで運動の方程式は

$$\left(\frac{d\boldsymbol{H}}{dt}\right)_1=\left(\frac{d\boldsymbol{H}}{dt}\right)_2+\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{H}$$

で表はせる。

S_2系は剛體に固定して,剛體とともに廻轉すると考へよう。慣性 dyadic ϕは定點Oに對する剛體の物質の配置で定まるから,S_2

系に對しては一定の値をもつてゐる。

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_2=0$$

よつて運動の式は

$$\boldsymbol{N}=\phi\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}\right)_2+\boldsymbol{w}\times(\phi\cdot\boldsymbol{w})$$

然し$\boldsymbol{w}$の變る割合はS_1系に對してもS_2系に對しても等しいから，この式は單に

$$\boldsymbol{N}=\phi\cdot\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}+\boldsymbol{w}\times(\phi\cdot\boldsymbol{w})\quad\cdots\cdots(251)$$

となる。

これは定點Oの廻りの廻轉運動の方程式で，Euler の方程式である。

§53.31 外力がもし作用しなければ，$\boldsymbol{N}$が零となり，運動方程式は

$$\phi\cdot\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}=(\phi\cdot\boldsymbol{w})\times\boldsymbol{w}\quad\cdots\cdots(251.1)$$

兩邊に$\boldsymbol{w}$をスカラー的にかければ

$$\boldsymbol{w}\cdot\phi\cdot\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}=0$$

この微分方程式の解を求めよう。

ϕは不變な自己共軛なdyadicであるから，先づ

$$\boldsymbol{w}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{w}=\text{const.}$$

をtについて微分してみれば

$$\boldsymbol{w}\cdot\frac{d}{dt}(\phi\cdot\boldsymbol{w})+\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{w}=0.$$

$$\boldsymbol{w}\cdot\phi\cdot\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}=0$$

で求める微分方程式で，その積分は

$$\boldsymbol{w}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{w}=\text{const.}=2T\quad\cdots\cdots(251.2)$$

である。Tは積分常數で，エネルギーTが不變なことを示しこの式はPoinsotの楕圓體を表はす。

§53.32 次に(251.1)の式に$\phi\cdot\boldsymbol{w}$をスカラー的にかければ

$$(\phi\cdot\boldsymbol{w})\cdot\frac{d}{dt}(\phi\cdot\boldsymbol{w})=(\phi\cdot\boldsymbol{w})\cdot(\phi\cdot\boldsymbol{w})\times\boldsymbol{w}=0$$

卽ち

$$\frac{d}{dt}(\phi\cdot\boldsymbol{w})^2=0$$

この積分は

$$(\phi\cdot\boldsymbol{w})^2=\boldsymbol{H}^2\quad\cdots\cdots(251.3)$$

$\boldsymbol{H}^2$は積分常數であるが，この式は角運動量の大さだけが一定なことを示してゐる，そして$\boldsymbol{H}$の大さが一定であるから，恆にその變化は$\boldsymbol{H}$に垂直に起ることがわかる。

(§53.2)で外力の作用しない時に$\boldsymbol{H}$が一定であることを知つたが，これは空間に固定した坐標S_1に對して$\boldsymbol{H}$は不變であつてS_2に對しては

$$\left(\frac{d\boldsymbol{H}}{dt}\right)_2=\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{w}$$

で恆に$\boldsymbol{H}$の變化は$\boldsymbol{H}$に垂直であることがわかる。$\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{w}$は**遠心偶力**と云はれ，剛體の中では角運動量の變る割合は遠心偶力に等し

い。

§53.33　(251.1)の方程式から更に第三の積分が求まる。

ϕの逆 dyadic ϕ^{-1}と$\boldsymbol{w}$との外積をスカラー的にかければ

$$(\phi^{-1}\cdot\boldsymbol{w})\cdot\phi\cdot\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}=(\phi^{-1}\cdot\boldsymbol{w})\cdot(\phi\cdot\boldsymbol{w})\times\boldsymbol{w}$$

ϕは自己共軛だから左邊は

$$\boldsymbol{w}\cdot\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}=(\phi^{-1}\cdot\boldsymbol{w})\cdot(\phi\cdot\boldsymbol{w})\times\boldsymbol{w}\quad\cdots\cdots(251.4)$$

上に求めた三つの積分式によつて運動が定まる。

(251.2), (251.3) の積分から

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{w}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{w}&=2T=\mathrm{A}\,w_1^2+\mathrm{B}\,w_2^2+\Gamma\,w_3^2\\(\phi\cdot\boldsymbol{w})^2&=\boldsymbol{H}^2=\mathrm{A}^2w_1^2+\mathrm{B}^2w_2^2+\Gamma^2w_3^2\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(251.5)$$

(251.4)の式は稍複雜であるが,

$$\phi\cdot\boldsymbol{w}=\mathrm{A}\,w_1\boldsymbol{i}+\mathrm{B}\,w_2\boldsymbol{j}+\Gamma\,w_3\boldsymbol{k}$$

$$\phi^{-1}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}=\frac{1}{\mathrm{A}}\mathrm{A}w_1\boldsymbol{i}+\frac{1}{\mathrm{B}}\mathrm{B}w_2\boldsymbol{j}+\frac{1}{\Gamma}\Gamma\,w_3\boldsymbol{k}$$

$$\phi^{-1}\cdot\boldsymbol{w}=\frac{w_1}{\mathrm{A}}\boldsymbol{i}+\frac{w_2}{\mathrm{B}}\boldsymbol{j}+\frac{w_3}{\Gamma}\boldsymbol{k}$$

故に

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}\cdot\frac{d\boldsymbol{w}}{dt}&=(\phi^{-1}\cdot\boldsymbol{w})\cdot(\phi\cdot\boldsymbol{w})\times\boldsymbol{w}\\&=\left(\frac{w_1}{\mathrm{A}}\boldsymbol{i}+\frac{w_2}{\mathrm{B}}\boldsymbol{j}+\frac{w_3}{\Gamma}\boldsymbol{k}\right)\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\mathrm{A}w_1&\mathrm{B}w_2&\Gamma w_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}\\&=\left(\frac{\mathrm{B}-\Gamma}{\mathrm{A}}+\frac{\Gamma-\mathrm{A}}{\mathrm{B}}+\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\Gamma}\right)w_1w_2w_3\end{aligned}$$

これと(251.2), (251.3)式及び

$$w^2=w_1^2+w_2^2+w_3^2$$

の關係式により,

$$w\frac{dw}{dt}=\sqrt{(\lambda_1-w^2)(\lambda_2-w^2)(\lambda_3-w^2)}$$

と書き換へられる。λは A, B, Γ, T 及びHの函數である。

これを積分すれば

$$t=\int^{w^2}\frac{d\,w^2}{\sqrt{(\lambda_1-w^2)(\lambda_2-w^2)(\lambda_3-w^2)}}$$

が求まり楕圓函數で表はせる。

第五章　不　　變　　量

§54.1　二重乘積

二重乘積といふのは別に新しこ概念ではない,只その記號を用ゐれば彈性體粘性流體電磁場のエネルギーの問題などには纒まつた形に書くことができて便利である。

Dyad の**二重乘積**を Gibbs は次のやうに定義した。

$$\left.\begin{array}{lll}\boldsymbol{ab}:\boldsymbol{cd}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\;\;\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d} & & (\text{スカラー})\\ \boldsymbol{ab}\overset{\cdot}{\underset{\times}{}}\boldsymbol{cd}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\;\;\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d} & & (\text{ベクトル})\\ \boldsymbol{ab}\overset{\times}{\underset{\cdot}{}}\boldsymbol{cd}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\;\;\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d} & & (\text{ベクトル})\\ \boldsymbol{ab}\overset{\times}{\underset{\times}{}}\boldsymbol{cd}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\;\;\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d} & & (\text{dyad})\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(252)$$

卽ち二重記號の上の記號は二つの dyadの前項に,下の記號に後項

同志に作用すると規約する。

Dyadic については,只形式的に展開するばよい,例へば

$$\boldsymbol{\phi}:\boldsymbol{\psi}=\left(\sum \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\right):\left(\sum \boldsymbol{c}\boldsymbol{d}\right)$$

$$=\sum\sum(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}):(\boldsymbol{c}\boldsymbol{d})$$

$$=\sum\sum\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}$$

であつて,他の記號も別に變つたことはない。

§**54.11** 上の定義から直に導かれることは

$$\boldsymbol{ij}:\boldsymbol{ij}=1$$

$$\boldsymbol{ij}:\boldsymbol{ki}=0$$

又

$$\boldsymbol{ij}\overset{\times}{\times}\boldsymbol{ik}=0$$

$$\boldsymbol{ij}\overset{\times}{\times}\boldsymbol{ki}=\boldsymbol{jk}$$

別に記憶しないでもすぐわかる關係で,計算には用ゐられる。

例へば,二重乘積を三つの dyad についてとれば

$$\boldsymbol{ab}\overset{\times}{\times}\boldsymbol{cd}:\boldsymbol{ef}=[\boldsymbol{ace}]\ [\boldsymbol{bdf}]$$

はスカラー量であるから

$$\boldsymbol{\phi}\overset{\times}{\times}\boldsymbol{\psi}:\boldsymbol{\Omega}$$

はスカラー量であつて,$\phi\psi\Omega$ の順序を變へたり,・と × を入れかへても變らない。

$$\boldsymbol{\phi}\overset{\cdot}{\times}\boldsymbol{\psi}\overset{\times}{\cdot}\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\phi}\overset{\times}{\cdot}\boldsymbol{\psi}\overset{\cdot}{\times}\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\phi}:\boldsymbol{\psi}\overset{\times}{\times}\boldsymbol{\Omega}$$

§**54.2** **Dyadic の函數**

ϕ_2, ϕ_3 を次やうに定義する

$$\phi_2=\frac{\phi\overset{\times}{\times}\phi}{2}\quad\cdots\cdots(253.1)$$

$$\phi_3=\frac{\phi\overset{\times}{\times}\phi:\phi}{6}\quad\cdots\cdots(253.2)$$

これを夫々 ϕ の**第二次** ϕ の**第三次**といふ。

ϕ の第二次は dyadic で,ϕ の第三次はスカラー量である。いま

$$\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{al}+\boldsymbol{bm}+\boldsymbol{cn}$$

とおけば

$$\phi_2=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{l}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})$$

$$=\boldsymbol{bm}\overset{\times}{\times}\boldsymbol{cn}+\boldsymbol{cn}\overset{\times}{\times}\boldsymbol{al}+\boldsymbol{al}\overset{\times}{\times}\boldsymbol{bm}$$

$$\phi_3=\frac{\phi_2:\phi}{3}=[\boldsymbol{abc}]\ [\boldsymbol{lmn}]\quad\cdots\cdots(253.21)$$

同様にして容易に

$$\left.\begin{aligned}(\phi_2)_c&=(\phi_c)_2\\(\phi_3)_c&=(\phi_c)_2\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(253.3)$$

も證明される。

§**54.21** ϕ の共軛 dyadic は

$$\phi_c=\boldsymbol{la}+\boldsymbol{mb}+\boldsymbol{nc}$$

よつて

$$\phi_2 \cdot \phi_c = [l\,m\,n]\,(b\times c\,a + c\times a\,b + a\times b\,c)$$

a, b, c が共面でなければ

$$[a\,b\,c] \neq 0$$

であるから

$$b\times c\,a + c\times a\,b + a\times b\,c = [a\,b\,c]\,(a^*a + b^*b + c^*c)$$
$$= [a\,b\,c]\,\mathrm{I}.$$

故に

$$\phi_3\,\mathrm{I} = \phi_2 \cdot \phi_c \quad \cdots\cdots(253.4)$$

或は

$$\left.\begin{aligned} \phi_c^{-1} &= \frac{\phi_2}{\phi_3} \\ \phi^{-1} &= \frac{(\phi_2)_c}{\phi_3} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(253.5)$$

§54.3 不變量とマトリックス

ϕ のマトリックスを

$$\|\phi\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \quad \cdots\cdots(254)$$

で表はせば,ϕ の共軛 dyadic は,同じマトリックスの要素で,只主對角線に對して對稱的に入れ代へた形をとる。

$$\|\phi_c\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{Vmatrix} \quad \cdots\cdots(254.1)$$

ϕ を自己共軛の部分 ϕ' と反自己共軛の部分 ϕ'' とに分ければ

$$\phi' = \frac{1}{2}(\phi + \phi_c), \qquad \phi'' = \frac{1}{2}(\phi - \phi_c)$$

であるから

$$\|\phi'\| = \frac{1}{2}\{\|\phi + \phi_c\|\},$$

になつて

$$\|\phi'\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & \frac{a_{13}+a_{31}}{2} \\ \frac{a_{21}+a_{12}}{2} & a_{22} & \frac{a_{23}+a_{32}}{2} \\ \frac{a_{31}+a_{13}}{2} & \frac{a_{32}+a_{23}}{2} & a_{33} \end{Vmatrix} \quad \cdots\cdots(254.21)$$

で對稱的マトリックスである。

同樣にして

$$\|\phi''\| = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{a_{12}-a_{21}}{2} & \frac{a_{13}-a_{31}}{2} \\ \frac{a_{21}-a_{12}}{2} & 0 & \frac{a_{23}-a_{32}}{2} \\ \frac{a_{31}-a_{13}}{2} & \frac{a_{32}-a_{23}}{2} & 0 \end{Vmatrix} \quad \cdots\cdots(254.22)$$

で反對稱的なマトリックスである。

§54.31 次の ϕ の第二次のマトリックスを求めよう。それには ϕ_2 のマトリックスの要素を一つとり出して調べれば他は推察することができる。例へば分解した形で ij の項の係數になるものには,二つの dyad の前項のベクトル積が i となり,後項のベクトル積が j となるものをとり出してみる。

即ち

$$j\,i \overset{\times}{\times} k\,k = -i\,j$$

$$\boldsymbol{k i \overset{\times}{\times} j k = i j}$$

の二つがこれにあたるから,ϕ_2を分解した形で $\boldsymbol{ij}$ の係數をA_{12}とすれば

$$A_{12}=a_{31}\,a_{23}-a_{12}\,a_{33}$$

であつて,即ち ϕ の行列式

$$|\phi|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

に於けるa_{12}の cofactor である。

同様にして一般にϕの行列式の$a_{\mu\nu}$の cofactor は,ϕ_2のマトリックスの要素$A_{\mu\nu}$になるから,ϕ_2のマトリックスは

$$\|\phi_2\|=\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{Vmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots(254.3)$$

となる。例へば

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

である。

§54.32 これによつてϕ_3も容易く求まる。

$$\phi_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=|\phi|$$

ϕの第三次は,ϕの行列式に他ならない。

§54.33 この定理により dyadic ϕ_2の第三次はϕ_2の行列式であるから直に

$$(\phi_2)_3=|\phi_2|=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

行列式の法則により, cofactor で作つた行列式はもとの行列式の自乗に等しい(或は dyadic の法則から計算してもよい)から

$$|\phi_2|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^2=\phi_3^2$$

である。

§54.34 ϕ の逆 dyadic のマトリックスは(§ 54.21)により

$$\phi^{-1}=\frac{(\phi_2)_c}{\phi_3}$$

であるから

$$\|\phi^{-1}\|=\begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{\phi_3} & \frac{A_{21}}{\phi_3} & \frac{A_{31}}{\phi_3} \\ \frac{A_{12}}{\phi_3} & \frac{A_{22}}{\phi_3} & \frac{A_{32}}{\phi_3} \\ \frac{A_{13}}{\phi_3} & \frac{A_{23}}{\phi_3} & \frac{A_{33}}{\phi_3} \end{Vmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots(254.4)$$

となる。

§54.35 スカラー不變量

Dyadic ϕ には,ϕ を表はす形に無關係な三つの不變量がある。

$$\phi_s\,,\ (\phi_2)_s\,,\ \phi_3$$

はその不變量で,標準形の項を用ゐれば

$$\left.\begin{aligned}\phi_s &= a_{11} + a_{22} + a_{33}\\(\phi_2)_s &= A_{11} + A_{22} + A_{33}\\\phi_3 &= |\,\phi\,|\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(255)$$

この三つの量は,如何なる右旋系の直交坐標系によつて ϕ を表はしても同じ値をとる,ϕ_s は ϕ の行列式の主對角線上の要素の和,$(\phi_2)_s$ は主對角線上の要素の小行列式或は cofactor の和, ϕ_3 はその行列式である,これは dyadic ϕ のもつ大切な性質である。

第六章 Dyadic の微分

§55.1 微分

今迄用ゐた dyadic は不變な dyadic で,標準形の各項の係數卽ちマトリックスの要素は皆常數であつたが,その要素が變數の場合を調べる必要がある。

ベクトル點函數 $\mathbf{w}$ は,原點から任意の點にひいた動徑 $\mathbf{r}$ の函數であるから,

$$d\mathbf{r}=dx\,\mathbf{i}+dy\,\mathbf{j}+dz\,\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{w}=dx\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial x}+dy\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial y}+dz\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial z}$$

とおけば

$$d\mathbf{w}=d\mathbf{r}\cdot\left(\mathbf{i}\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial z}\right)$$

と書ける.括弧の中は基本ベクトルを前項とし,$\mathbf{w}$ の第一階微係數を後項とする dyadic である。これをスカラー點函數の勾配と同じやうに

$$\nabla\mathbf{w}=\mathbf{i}\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial z}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(255.1)$$

とおいても差支ない。卽ち

$$d\mathbf{w}=d\mathbf{r}\cdot\nabla\mathbf{w}$$

となる。

前に吾々は

$$d\mathbf{w}=(d\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{w}$$

として,强ひて $d\mathbf{r}\cdot\nabla$ を一つのスカラー微分記號と見做したが,dyadic の概念をとりいれれば,自由に解釋をすることができる。

次に只注意がいる點は,$\nabla\mathbf{w}$ の共軛な dyadic で,これは

$$\mathbf{w}\nabla=\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial z}\mathbf{k}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(255.2)$$

と解釋することにすれば,式の取り扱ひの上に非常に便利なことが多い。

$\nabla\mathbf{w}$ は形からみると坐標軸に關する偏微分係數があるけれども,坐標軸の擇び方に關係しない量である,$\nabla\mathbf{w}$ の定義を上のやうにきめてもよいが,或は小さい容積 V について, dyad $\mathbf{n}\mathbf{w}$ の面積分をとり,

$$\nabla \boldsymbol{w} = \lim_{V\to 0} \frac{\oint \boldsymbol{n}\boldsymbol{w}\,dS}{V} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(255.11)$$

と定義すれば上の結果になる。この積分は坐標軸の擇び方に少しも關係ないから $\nabla \boldsymbol{w}$ は坐標軸に關係しないことがわかる。然し未だ dyad の積分を研究してないから他の方法で考へてみよう。

それには任意の方向を示す單位ベクトル $\boldsymbol{a}$ との內積をとれば

$$\boldsymbol{a}\cdot(\nabla \boldsymbol{w}) = \sum \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x} = \left(\sum \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\boldsymbol{w}$$

$$=(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{w}$$

でこれは旣に知つてゐる $\boldsymbol{a}$ の方向にとつた $\boldsymbol{w}$ の方向微係數で坐標軸には無關係に定まる量である。

然し前には $\boldsymbol{a}\cdot\nabla$ を方向微係數を得るための一つの微分記號と考へたが, dyad によればあながち一つのものとして取り扱ふ必要もなくなる。

$\nabla \boldsymbol{w}$ を前因子として用ゐれば

$$(\nabla \boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{a} = \left(\sum \boldsymbol{i}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x}\right)\cdot\boldsymbol{a} = \left(\sum \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{a}$$

$$=\nabla(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{a})$$

括弧の中はスカラー量であつて,これは $\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{a}$ の勾配である.

§55.11 $\boldsymbol{w}$ を直角成分にわけて, $\nabla \boldsymbol{w}$ の標準形をつくつてみる。

$$\boldsymbol{w} = w_1\boldsymbol{i} + w_2\boldsymbol{j} + w_3\boldsymbol{k}$$

とおけば

$$\left.\begin{aligned}\nabla \boldsymbol{w} = &\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}\frac{\partial w_1}{\partial x} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{j}\frac{\partial w_2}{\partial x} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{k}\frac{\partial w_3}{\partial x}\\ &+\boldsymbol{j}\boldsymbol{i}\frac{\partial w_1}{\partial y} + \boldsymbol{j}\boldsymbol{j}\frac{\partial w_2}{\partial y} + \boldsymbol{j}\boldsymbol{k}\frac{\partial w_3}{\partial y}\\ &+\boldsymbol{k}\boldsymbol{i}\frac{\partial w_1}{\partial z} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{j}\frac{\partial w_2}{\partial z} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\frac{\partial w_3}{\partial z}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(255.3)$$

となる。

§55.12 解析的の見方からは, dyad を考へれば,發散や轉回は獨立して取り扱ふことがいらなくなる。發散はつまり dyadic $\nabla \boldsymbol{w}$ のスカラーで,轉回はそのベクトルである。

$$\left.\begin{aligned}(\nabla \boldsymbol{w})_s &= \nabla\cdot\boldsymbol{w} = \operatorname{div}\boldsymbol{w}\\ (\nabla \boldsymbol{w})_v &= \nabla\times\boldsymbol{w} = \operatorname{rot}\boldsymbol{w}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(255.4)$$

然し發散や轉回は dyad を離れて物理學的に獨立した大切な意味をもつものであるが, dyad によつて個々のものが一つに統一される點は大切なことで,更に積分に於いてその點が明かにならう。

§55.13

∇ と $\nabla \boldsymbol{w}$ との內積をとれば

$$\nabla\cdot(\nabla \boldsymbol{w}) = (\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{w} = \nabla^2 \boldsymbol{w}$$

$$= \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial z^2} \quad \cdots\cdots\cdots(255.5)$$

になる。

もしベクトル點函數 $\boldsymbol{w}$ がスカラー點函數 V の勾配ならば

$$d\boldsymbol{w} = d(\nabla V) = d\boldsymbol{r}\cdot\nabla(\nabla V)$$

dyadic $\nabla\nabla V$ を標準形で表はせば

$$\left.\begin{aligned}\nabla\nabla V=&\boldsymbol{ii}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\boldsymbol{ij}\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}+\boldsymbol{ik}\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}\\&+\boldsymbol{ji}\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x}+\boldsymbol{jj}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\boldsymbol{jk}\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}\\&+\boldsymbol{ki}\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial x}+\boldsymbol{kj}\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial y}+\boldsymbol{kk}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(255.6)$$

然るに

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x},\ \text{etc.}$$

であるから $\nabla\nabla V$ は自己共軛な dyadic である。

よつてそのベクトルは零となる

$$(\nabla\nabla V)_v=\nabla\times\nabla V\equiv 0$$

又そのスカラーは Laplacian になる。

$$(\nabla\nabla V)_s=\nabla\cdot\nabla V=\nabla^2 V$$

§55.14 ベクトル函數が動徑ベクトルの時は

$$\nabla\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(256)$$

$$=\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj}+\boldsymbol{kk}$$

で還元因子になる。

そして明かに

$$(\nabla\boldsymbol{r})_s=\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3=(\mathrm{I})_s$$

$$(\nabla\boldsymbol{r})_v=\nabla\times\boldsymbol{r}=0=(\mathrm{I})_v$$

である。

§55.15 Dyad $\boldsymbol{uw}$ の微分は,項の順序さへ變へなければ,普通の微分と變りはなくできることは,普通の方法で容易く證明できる,卽ち

$$\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{uw})=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial x}$$

になる。

ϕ の誘導函數は,この法則を應用すれば求まる。

∇ と ϕ の內積及び外積をつくれば,夫々ベクトルと dyadic になる。

$$\nabla\cdot\phi=\boldsymbol{i}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial z}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(257.1)$$

これは Traktor といつてベクトルの發散に對應する量である。

$$\nabla\times\phi=\boldsymbol{i}\times\frac{\partial\phi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\times\frac{\partial\phi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\times\frac{\partial\phi}{\partial z}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(257.2)$$

ϕ を前因子として用ゐれば夫々

$$\phi\cdot\nabla=\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\cdot\boldsymbol{k}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(257.11)$$

$$\phi\times\nabla\equiv(\nabla\times\phi)_c=\frac{\partial\phi}{\partial x}\times\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\times\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\times\boldsymbol{k}\quad\cdots(257.21)$$

§55.16 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ はベクトル點函數で

$$\phi=\boldsymbol{ui}+\boldsymbol{vj}+\boldsymbol{wk}$$

とおけるならば

$$\phi_c=\boldsymbol{iu}+\boldsymbol{jv}+\boldsymbol{kw}$$

となる。

$$\nabla\cdot\phi=\nabla\cdot\boldsymbol{ui}+\nabla\cdot\boldsymbol{vj}+\nabla\cdot\boldsymbol{wk}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(258.1)$$

$$\nabla\times\phi=\nabla\times\boldsymbol{ui}+\nabla\times\boldsymbol{vj}+\nabla\times\boldsymbol{wk}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(258.2)$$

であつて

$$\nabla\cdot\phi_c=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}+\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial z}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(258.3)$$

台東区上野

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}_c=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\quad\cdots\cdots(258.4)$$

となる。

又同様にして

$$\boldsymbol{a}\cdot\nabla\,\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\quad\cdots\cdots(258.5)$$

$$(\nabla\cdot\nabla)\phi\equiv\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\quad\cdots\cdots(258.6)$$

を得る。

§55.2 微分の公式

ベクトルの微分と同じやうにして,次の公式が求まる。

$$\nabla(u\boldsymbol{v})=\nabla u\,\boldsymbol{v}+u\,\nabla\boldsymbol{v}\quad\cdots\cdots(259.1)$$

$$\nabla\cdot(u\boldsymbol{\phi})=\nabla u\cdot\boldsymbol{\phi}+u\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}\quad\cdots\cdots(259.2)$$

$$\nabla\times(u\boldsymbol{\phi})=\nabla u\times\boldsymbol{\phi}+u\nabla\times\boldsymbol{\phi}\quad\cdots\cdots(259.3)$$

$$\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})=\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\quad\cdots\cdots(259.4)$$

$$\nabla(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\nabla\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}-\nabla\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}\quad\cdots\cdots(259.5)$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v})=\nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\quad\cdots\cdots(259.6)$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{uv})=\nabla\times\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}-\nabla\times\boldsymbol{vu}\quad\cdots\cdots(259.7)$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\phi})=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}-\nabla^2\boldsymbol{\phi}\quad\cdots\cdots(259.8)$$

§55.21 この公式は∇を直角成分にわけて計算すれば,容易く證明できる。

例へば

$$\nabla(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\left(\sum\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\sum\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{u}\times\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right)$$

$$=\left(\sum\boldsymbol{i}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}\right)\times\boldsymbol{v}-\left(\sum\boldsymbol{i}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right)\times\boldsymbol{u}$$

$$=\nabla\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}-\nabla\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$$

然し∇を形式上普通のベクトルのやうに扱へば,成分にわけないで容易く求まる。

$$\nabla(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=[\nabla(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})]_u+[\nabla(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})]_v$$

括弧の下につけた添字は,それに相當する量について微分することを意味してゐる。

然るに

$$[\nabla(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})]_u=\nabla\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$$

$$[\nabla(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})]_v=-[\nabla(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})]_v=-\nabla\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$$

故に

$$\nabla(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\nabla\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}-\nabla\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$$

$\nabla\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$ は dyadic であるから $-\boldsymbol{u}\times\nabla\boldsymbol{v}$ とはならないことに注意することを忘れてはならない。

§55.22 ϕが還元因子の時には

$$\nabla\cdot(u\mathbf{I})=\nabla u\quad\cdots\cdots(259.21)$$

$$\nabla\times(u\mathbf{I})=\nabla u\times\mathbf{I}\quad\cdots\cdots(259.31)$$

でこれも式の變化に用ゐられることが多い。

§55.23 次に

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{v})=\sum\boldsymbol{i}\cdot\left[\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\phi}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right]$$

$$=\left(\sum\boldsymbol{i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial x}\right)\cdot\boldsymbol{v}+\sum\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{\phi}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}$$

$$=(\nabla\cdot\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\phi}:\nabla\boldsymbol{v}\qquad\text{(260.1)}$$

同様に

$$\nabla\times(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{v})=(\nabla\times\boldsymbol{\phi})\cdot\boldsymbol{v}+\nabla\boldsymbol{v}\overset{\times}{\cdot}\boldsymbol{\phi}\qquad\text{(260.2)}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{v})=(\nabla\cdot\boldsymbol{\phi})\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\phi}\overset{\cdot}{\times}\nabla\boldsymbol{v}\qquad\text{(260.3)}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{v})=(\nabla\times\boldsymbol{\phi})\times\boldsymbol{v}-\nabla\boldsymbol{v}\overset{\times}{\times}\boldsymbol{\phi}\qquad\text{(260.4)}$$

然しこの公式は餘り必要ではない,たゞ$\boldsymbol{\phi}$が還元因子の時か,$\boldsymbol{v}$が動徑の時は極めて大切である。

$\boldsymbol{v}$が$\boldsymbol{r}$の時は,右邊の$\nabla\boldsymbol{v}$を還元因子に置きかへればよい。$\boldsymbol{\phi}$が還元因子の時は

$$\nabla\cdot(\mathbf{I}\times\boldsymbol{v})=\nabla\times\boldsymbol{v}\qquad\text{(260.21)}$$

$$\nabla\times(\mathbf{I}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\nabla-\mathbf{I}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\qquad\text{(260.41)}$$

§55.3 自變數の變換

動徑$\boldsymbol{r}(x,\ y,\ z)$が他の點の位置ベクトル$\boldsymbol{a}\ (a,\ b,\ c)$函數とみられる時は

$$\nabla'=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial a}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial b}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial c}\qquad\text{(261)}$$

とおけば

$$d\boldsymbol{r}=d\boldsymbol{a}\cdot\nabla'\boldsymbol{r}\qquad\text{(261.1)}$$

となる。

スカラー點函數Vの,$\boldsymbol{r}$と$\boldsymbol{a}$について微分したものの關係を調

べよう。

$$dV=d\boldsymbol{r}\cdot\nabla V$$

$$=(d\boldsymbol{a}\cdot\nabla'\boldsymbol{r})\cdot\nabla V$$

$$=d\boldsymbol{a}\cdot\nabla'\boldsymbol{r}\cdot\nabla V$$

然るに

$$dV=d\boldsymbol{a}\cdot\nabla' V$$

であるから

$$\nabla' V=\nabla'\boldsymbol{r}\cdot\nabla V\qquad\text{(261.2)}$$

となる.これは自變數を變へるときに役に立つ式である。

Vの代りにベクトル點函數$\mathbf{F}$についても同様によつて

$$\nabla'\mathbf{F}=\nabla'\boldsymbol{r}\cdot\nabla\mathbf{F}\qquad\text{(261.3)}$$

となる,

§55.31 Lagrange の方程式

流體の運動考へるときに,個々の粒子に着目して,その流れゆく有様を知るには,或る瞬間(例へば$t=0$)に於いて$\boldsymbol{a}$の位置にゐるものが,tの時に$\boldsymbol{r}$にゐるとして,$\boldsymbol{r}$を$\boldsymbol{a}$とtとの函數としてもとめれば,個々の粒子の運動する有様がわかる。この關係式は **Lagrange の運動の方程式**といはれ, Euler の方程式から自變數の變換で求めることができる。

Euler の方程式

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\mathbf{K}-\frac{1}{\rho}\nabla p$$

の兩邊に$\nabla'\boldsymbol{r}$を前因子として內積をつくれば Lagrange の方程式を得る。

$$\nabla'\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\nabla'\mathbf{r}\cdot(\mathbf{K}-\frac{1}{\rho}\nabla p)\quad\cdots\cdots(262)$$

この方程式を積分するには左邊を書きかへ

$$\frac{d}{dt}(\nabla'\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})-\nabla'\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\nabla'\mathbf{r}\cdot(\mathbf{K}-\frac{1}{\rho}\nabla p)$$

然るに

$$\nabla'\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\frac{1}{2}\nabla'\mathbf{v}^2=\frac{1}{2}\nabla'\mathbf{r}\cdot\nabla\mathbf{v}^2$$

故に

$$\frac{d}{dt}(\nabla'\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})=\nabla'\mathbf{r}\cdot(\mathbf{K}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{1}{2}\nabla\mathbf{v}^2)$$

もし外力にポテンシヤルが成りたち,ρがpだけの函數ならば

$$\mathbf{K}=-\nabla V$$

$$\int\frac{dp}{\rho}=U$$

とおけば

$$\frac{d}{dt}(\nabla'\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})=\nabla'\mathbf{r}\cdot(-\nabla V-\nabla U+\frac{1}{2}\nabla\mathbf{v}^2)$$

$$=-\nabla'(V+U-\frac{1}{2}\mathbf{v}^2)$$

よつて

$$W=\int^t(V+U+\frac{\mathbf{v}^2}{2})dt$$

とすれば,

$$\nabla'\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}_0-\nabla'W$$

となる,こゝに$\mathbf{v}_0$は$t=0$の時の速度を表はす。

第七章 Dyadic の積分とベクトル積分方程式

§56.1 線積分

曲線Cに沿つてスカラー點函數Vの勾配の切線の方向の成分を積分すれば

$$\int d\mathbf{r}\cdot\nabla V=V(\mathbf{r})-V(\mathbf{r}_0)$$

$\mathbf{r}_0$は初の點,$\mathbf{r}$は終の點の動徑で,積分はその二つの點に於けるVの値で定まる。

これと同樣なことをベクトル點函數$\mathbf{F}$について考へ

$$d\mathbf{r}\cdot\nabla\mathbf{F}=d\mathbf{F}$$

の線積分をつくれば

$$\int d\mathbf{r}\cdot\nabla\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{r})-\mathbf{F}(\mathbf{r}_0)\quad\cdots\cdots(263)$$

もし曲線Cが閉ぢた曲線で,$\mathbf{F}(\mathbf{r})$が一價連續有限な函數ならば

$$\oint d\mathbf{r}\cdot\nabla\mathbf{F}=0$$

たゞ注意しなければならないことは,$\nabla\mathbf{F}$はdyadicであるから,

$$\int d\mathbf{r}\cdot\nabla\mathbf{F}\quad と\quad\int\nabla\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

とは同じものではない。$\nabla\mathbf{F}$を前因子としておきかへるときは,その共軛なdyadic $\mathbf{F}\nabla$としなければならない。その紛らはしさを避けるために,

$$d\boldsymbol{F}=d\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{F} \quad\cdots\cdots(263.1)$$

として,微分 $d\boldsymbol{r}$ を $\nabla\boldsymbol{F}$ よりも前におき, $\nabla\boldsymbol{F}$ を後因子として用ゐるのを基本の形にすることに規約しよう。

§56.2 線積分と面積分との關係

積分道 C が曲面 S を圍む閉曲線ならば, Stokes の定理をもとにして種々の積分の變換式が導かれる。

すべてが同じやうな形式に統一されて,互の關係をはつきりさせるために,前に得たものも加へておく,いづれも同一の種類の變換であることが知れる。

面積もベクトルで表はし,又線積分のときの規約と同樣に, dyadic $\nabla\boldsymbol{F}$ は後因子とするのを基本の形にしておく。

$$\boldsymbol{n}\,dS=d\boldsymbol{S}$$

とすれば

$$\int d\boldsymbol{S}\times\nabla V=\oint d\boldsymbol{r}\,V \quad\cdots\cdots(264.1)$$

$$\int d\boldsymbol{S}\times\nabla\boldsymbol{F}=\oint d\boldsymbol{r}\boldsymbol{F} \quad\cdots\cdots(264.2)$$

$$\int d\boldsymbol{S}\cdot\nabla\times\boldsymbol{F}=\oint d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F} \quad \text{(Stokes の定理)}\cdots\cdots(264)$$

$$\int d\boldsymbol{S}\cdot\nabla\times\phi=\oint d\boldsymbol{r}\cdot\phi \quad\cdots\cdots(264.3)$$

§56.3 面積分と容積分との關係

Dyadic を用ゐると容積分も Gauss の定理と同じ變換の形式に

統一される。

$$\int d\tau\,\nabla V=\oint d\boldsymbol{S}\,V \quad\cdots\cdots(265.1)$$

$$\int d\tau\,\nabla\boldsymbol{F}=\oint d\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{F} \quad\cdots\cdots(265.2)$$

$$\int d\tau\,\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\oint d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{F} \quad \text{(Gauss の定理)}\cdots\cdots(265)$$

$$\int d\tau\,\nabla\times\boldsymbol{F}=\oint d\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{F} \quad\cdots\cdots(265.3)$$

$$\int d\tau\,\nabla\cdot\phi=\oint d\boldsymbol{S}\cdot\phi \quad\cdots\cdots(265.4)$$

$$\int d\tau\,\nabla\times\phi=\oint d\boldsymbol{S}\times\phi \quad\cdots\cdots(265.5)$$

§56.31 是等の積分の式は Gauss の定理を用ゐれば證明できる。

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\phi=\boldsymbol{i}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{k}\boldsymbol{w}$$

とすれば

$$\int d\tau\,\nabla\cdot\phi=\int d\tau\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}+\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial z}\right)$$

$$=\oint d\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{i}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{j}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{k}\boldsymbol{w})$$

$$=\oint d\boldsymbol{S}\cdot\phi$$

或は $\boldsymbol{a}$ を任意の不變ベクトルとして,容積分を前因子にして內積

を求めれば求まる。例へば

$$\left(\int d\tau\nabla\times\phi\right)\cdot\boldsymbol{a}=\int d\tau(\nabla\times\phi)\cdot\boldsymbol{a}$$

$$=\int d\tau\,\nabla\cdot(\phi\times\boldsymbol{a})$$

$$=\oint d\mathbf{S}\cdot(\phi\times\boldsymbol{a})$$

$$=\oint d\mathbf{S}\times\phi\cdot\boldsymbol{a}$$

$$=\left(\oint d\mathbf{S}\times\phi\right)\cdot\boldsymbol{a}$$

$\boldsymbol{a}$ は全く任意であるから

$$\int d\tau\nabla\times\phi=\oint d\mathbf{S}\times\phi$$

其他のものも同様にして求まる。

§56.4 (例) 電磁歪力

速度 $\boldsymbol{v}$ の單位帶電體に作用する力は

$$\mathbf{K}=\mathbf{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\mathbf{B}$$

$\mathbf{E}$ は電場の强さ, $\mathbf{B}$ は磁氣感應度である。

閉曲面 S 内について積分する; ρ を電氣密度とすれば,その積分は荷電のうける合力で

$$\int d\tau\left(\rho\mathbf{E}+\frac{1}{c}\rho\boldsymbol{v}\times\mathbf{B}\right)$$

然るに

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$$

$$\frac{1}{c}\rho\boldsymbol{v}=\nabla\times\mathbf{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

$\mathbf{D}$ は電氣變位, $\mathbf{H}$ は磁場の强さである.

よつて

$$\int d\tau\left[\mathbf{E}\nabla\cdot\mathbf{D}+\left(\nabla\times\mathbf{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\times\mathbf{B}\right]$$

$$=\int d\tau\left[\mathbf{E}\nabla\cdot\mathbf{D}-\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{H})-\frac{1}{c}\mathbf{D}\times(c\nabla\times\mathbf{E})-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}\times\mathbf{B})\right]$$

電媒恒數 ε, 磁媒恒數 μ はともに一定だとすれば

$$\nabla(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})=\varepsilon\nabla\mathbf{E}^2$$

$$\nabla(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})=\mu\nabla\mathbf{H}^2$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$$

であるから, t の微分を含まない部分の被積分の項は

$$\mathbf{E}\nabla\cdot\mathbf{D}+\mathbf{D}\nabla\cdot\mathbf{E}+\mathbf{H}\nabla\cdot\mathbf{B}+\mathbf{B}\nabla\cdot\mathbf{H}-\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})$$

$$=\nabla\cdot(\mathbf{ED})+\nabla\cdot(\mathbf{HB})-\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})$$

最後の項は電氣及磁氣のエネルギー密度の和であるから

$$u=\frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})$$

とおけば (259.21) 式により

$$\nabla u=\nabla\cdot(u\mathbf{I})$$

となる。

よつて t に關する微分を含まない部分は

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{ED})+\nabla\cdot(\boldsymbol{HB})-\nabla\cdot(u\mathrm{I})$$

卽ち求める積分は

$$\int d\tau\left[\nabla\cdot(\boldsymbol{ED}+\boldsymbol{HB}-u\mathrm{I})-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}\times\mathbf{B})\right]$$

$$=\oint d\mathbf{S}\cdot(\boldsymbol{ED}+\boldsymbol{HB}-u\mathrm{I})-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int d\tau(\mathbf{D}\times\mathbf{B})$$

面積分の括弧の中は自己共軛な dyadic で

$$\phi=\boldsymbol{ED}+\boldsymbol{HB}-u\mathrm{I}\qquad(266.1)$$

とおけば，ϕ は歪力 dyadic を表はし，單位ベクトル $\boldsymbol{n}$ に垂直な面に作用する歪力卽ち Maxwell の**電磁歪力**は $\boldsymbol{n}\cdot\phi$ である。

いま

$$\mathbf{G}=\frac{1}{c}\mathbf{D}\times\mathbf{B}\qquad(266.2)$$

とおけば，Abraham が**電磁能率**と名づけた量で表はせる。從つて求める積分は

$$\oint d\mathbf{S}\cdot\phi-\frac{\partial}{\partial t}\int d\tau\mathbf{G}$$

である。

§56.5 積分方程式

ベクトルの積分方程式の研究は未だ搖籃の域を離れない。研究といつては Weatherburn の一二の論文があるにすぎないであらう.然しその應用は彈性力學をはじめとして將來廣く用ゐられることと思はれる。

ベクトル一次積分方程式第一種は

$$\boldsymbol{f}(t)=\lambda\int \mathrm{K}(t,s)\cdot\boldsymbol{u}(s)\,ds\qquad(267.1)$$

λ はパラメターで,ベクトル點函數 $\boldsymbol{f}$ と dyadic の**核** K とを知つて未知の函數 $\boldsymbol{u}$ を定めることが問題である。

第二種積分方程式は

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{f}(t)+\lambda\int \mathrm{K}(t,s)\cdot\boldsymbol{u}(s)\,ds\qquad(267.2)$$

である。

$\mathrm{K}(t,s)$ は dyadic であるから後因子として用ゐれば變つたものになる。普通の積分方程式から推して，K を $\boldsymbol{u}$ の前におくのも後におくのも同じであると考へちがひしてはならない。

$\boldsymbol{f}(t)$ が恆に零の時は同次積分方程式である。

$$\boldsymbol{u}(t)=\lambda\int \mathrm{K}(t,s)\cdot\boldsymbol{u}(s)\,ds\qquad(267.3)$$

§56.51 第二種積分方程式

第二種積分方程式

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{f}(t)+\lambda\int \mathrm{K}(t,s)\cdot\boldsymbol{u}(s)\,ds$$

は**逐次置換法**によつて解くことができる。

積分記號の下の $\boldsymbol{u}$ に，方程式で示される値を代入すれば

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{f}(t)+\lambda\int \mathrm{K}(t,r)\cdot\left[\boldsymbol{f}(r)+\lambda\int \mathrm{K}(r,s)\cdot\boldsymbol{u}(s)\,ds\right]dr$$

$$=\boldsymbol{f}(t)+\lambda\int \mathrm{K}(t,r)\cdot\boldsymbol{f}(r)\,dr+$$

$$+\lambda^2\int K(t,r)\cdot\int K(r,s)\cdot\boldsymbol{u}(s)\,ds\,dr$$

いま

$$K_2(t,s)=\int K(t,r)\cdot K(r,s)\,dr$$

とおけば

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{f}(t)+\lambda\int K(t,r)\cdot\boldsymbol{f}(r)\,dr$$
$$+\lambda^2\int K_2(t,s)\cdot\boldsymbol{u}(s)\,ds$$

更に右邊の $\boldsymbol{u}$ にその値をいれ

$$K_3(t,s)=\int K_2(t,r)\cdot K(r,s)\,dr$$

とおけば

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{f}(t)+\lambda\int K(t,r)\cdot\boldsymbol{f}(r)\,dr$$
$$+\lambda^2\int K_2(t,r)\boldsymbol{f}(r)\,dr$$
$$+\lambda^3\int K_3(t,s)\cdot\boldsymbol{u}(s)\,ds$$

となる。以下同樣にしてゆけばいくらでも近い値を得ることができる。一般に

$$\left.\begin{aligned}K_n(t,s)&=\int K_{n-1}(t,r)\cdot K(r,s)\,dr\\&=\int K_{n-m}(t,r)\cdot K_m(r,s)\,dr\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(267.4)$$

$$\phi(t,s)=\sum_{m=1}^{n}\lambda^m K_m(t,s)\cdots\cdots(267.41)$$

とおけば

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{f}(t)+\int\phi(t,s)\cdot\boldsymbol{f}(s)\,ds$$

は方程式の解である。

第八章 彈性體の力學

§57.1 歪

彈性體の力學は複雜な問題で,數學として取扱ふには澤山の假設をつくつて理想的な簡單な場合にしなければならない。それでも相當に面倒な數學になる。こゝでは小さい歪をうけるときの歪と歪力の關係だけを調べることにしよう。

彈性體に外から力を加へると形や容積が變り,內部の質點は互の關係的位置が變つて,初め位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ にあつた點は $\boldsymbol{r}'$ に移る。これを**歪**といふ。

質點の變位は

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$$

外力のために物體全體として起る運動は歪には關係ない。歪は質點相互の相對的の變位であるから,物體內部の任意の一點を原點にして位置ベクトルを測ることにすれば $\boldsymbol{s}$ は歪を表はす。

§57.11 一樣な歪

最も簡單な場合は $\boldsymbol{r}'$ が $\boldsymbol{r}$ の一次函數として

$$\boldsymbol{r}'=\phi\cdot\boldsymbol{r}\quad\cdots\cdots(268)$$

で表はされる場合である。この時物體は**一樣な歪**をうけてゐるといふ。

一樣な歪による變位は

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}=(\phi-\mathrm{I})\cdot\boldsymbol{r}\quad\cdots\cdots(268.1)$$

となる。

$\boldsymbol{r}$ を逆に $\boldsymbol{r}'$ で表はせば

$$\boldsymbol{r}=\phi^{-1}\cdot\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}'\cdot\phi_c^{-1}$$

であるから

$$\boldsymbol{r}^2=\boldsymbol{r}'\cdot\phi_c^{-1}\cdot\phi^{-1}\cdot\boldsymbol{r}',$$

いま

$$\psi=\phi_c^{-1}\cdot\phi^{-1}$$

とおけば,

$$\boldsymbol{r}^2=\boldsymbol{r}'\cdot\psi\cdot\boldsymbol{r}'$$

よつて歪をうけない前に物體内に

$$\boldsymbol{r}^2=1$$

の球を考へると,歪をうけた後には

$$\boldsymbol{r}'\cdot\psi\cdot\boldsymbol{r}'=1\quad\cdots\cdots(268.2)$$

となる。ψ は形から云つて自己共軛な dyadic であるから,これは楕圓體である。

この楕圓體を**歪楕圓體**と稱へる。

歪をうけない前に互に垂直な球の半徑 $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ は

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=0$$

歪をうけた後には

$$\boldsymbol{r}_1'\cdot\psi\cdot\boldsymbol{r}_2'=0$$

となつて,歪楕圓體の共軛な半徑になる。

この歪楕圓體の三つの主軸の方向は,**歪の主軸**であつて,もとの球に於いても互に垂直な方向である。

任意の方向 $\boldsymbol{n}$ に垂直な面の方程式は,面上の點の動徑を $\boldsymbol{r}$, 原點から面におろした垂線の長さを p とすれば

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=p=\text{const.}$$

で表はせる。はじめこの面上にある點は歪をうけると

$$\boldsymbol{n}\cdot(\phi^{-1}\cdot\boldsymbol{r}')=p$$

卽ち

$$(\boldsymbol{n}\cdot\phi^{-1})\cdot\boldsymbol{r}'=p$$

となる。$\boldsymbol{r}'$ は歪をうけた後の動徑であるから,この式は $\boldsymbol{n}\cdot\phi^{-1}$ に垂直な面の方程式を表はし卽ちもと同一の平面上の點は一樣な歪をうけた後も,同一の平面上にあることを示す。

又はじめに $\boldsymbol{b}$ の尖端を過り $\boldsymbol{a}$ の方向に平行な直線

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}+q\boldsymbol{a}$$

の上にあつた點は,

$$\boldsymbol{r}'=\phi\cdot(\boldsymbol{b}+q\boldsymbol{a})$$

$$=\phi\cdot\boldsymbol{b}+q\,\phi\cdot\boldsymbol{a}$$

となつて, $\phi\cdot\boldsymbol{b}$ の尖端を過り $\phi\cdot\boldsymbol{a}$ に平行な直線の上に横たはる。

そして $\boldsymbol{a}$ の方向に於いて 1 の長さのものは,歪をうけると

$$\frac{|\phi\cdot\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}=|\phi\cdot\boldsymbol{a}_1|-1 \quad\cdots\cdots(268.3)$$

だけ引き伸ばされる。もしこれが負ならば縮むことになる。

ϕ が自己共軛ならば (§ 50.6) により

$$\phi=a\,\boldsymbol{ii}+b\,\boldsymbol{jj}+c\,\boldsymbol{kk} \quad\cdots\cdots(268.41)$$

$$\phi^{-1}=\frac{\boldsymbol{ii}}{a}+\frac{\boldsymbol{jj}}{b}+\frac{\boldsymbol{kk}}{c} \quad\cdots\cdots(268.42)$$

であるから,歪楕圓體は

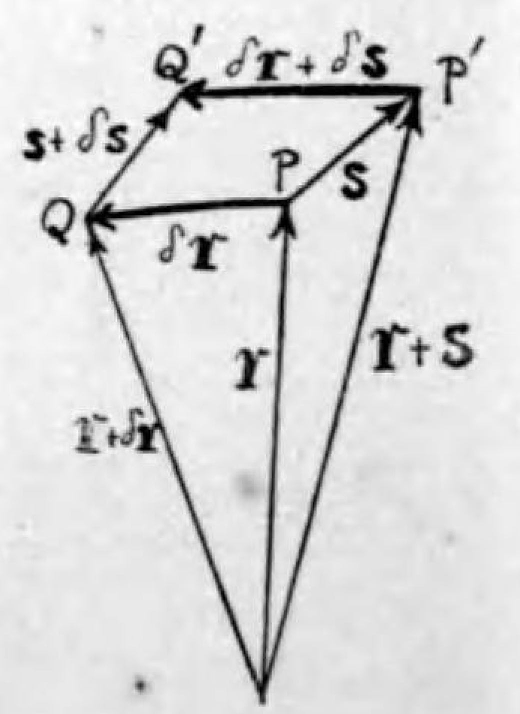
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad\cdots\cdots(268.5)$$

となり, $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ の方向の球の半徑は楕圓體の主軸に變る。そしてその方向では 1 の長さのものは夫々 a, b, c の割合伸びるだけで方向が變らない**純粹な歪**をうける。

§ 57.12 一樣でない歪

もし彈性體のうける歪が一樣でなければ,第 96 圖に於いて極めて接近した二點 P, Q は夫々 P', Q' に變位して, P' の位置は

第九十六圖



$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}$$

となる。

$$\delta\boldsymbol{r}=\overrightarrow{PQ}$$

とおけば, P' に對する Q' の位置は

$$\delta\boldsymbol{r}'=\delta\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{s}$$

然るに

$$\delta\boldsymbol{s}=\delta\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{s}$$

よつて

$$\delta\boldsymbol{r}'=\delta\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{s}$$
$$=\delta\boldsymbol{r}\cdot(\mathrm{I}+\nabla\boldsymbol{s})$$

P と Q とは非常に接近した點と考へる,又歪も小さいとすれば P に極く近い範圍内では $\nabla\boldsymbol{s}$ の値は一定だと考へて差支ない。小さい歪をうけるときは, $\nabla\boldsymbol{s}$ もその共軛な dyadic $\boldsymbol{s}\nabla$ もともに小さいから

$$(\mathrm{I}+\nabla\boldsymbol{s})_c=\mathrm{I}-\nabla\boldsymbol{s}$$
$$(\mathrm{I}+\boldsymbol{s}\nabla)_c=\mathrm{I}-\boldsymbol{s}\nabla$$

として差支ない。

故に

$$\delta\boldsymbol{r}=\delta\boldsymbol{r}'\cdot(\mathrm{I}-\nabla\boldsymbol{s})=(\mathrm{I}-\boldsymbol{s}\nabla)\cdot\delta\boldsymbol{r}' \quad\cdots\cdots(269.1)$$

$$(\delta\boldsymbol{r})^2=\delta\boldsymbol{r}'\cdot(\mathrm{I}-\nabla\boldsymbol{s})\cdot(\mathrm{I}-\boldsymbol{s}\nabla)\cdot\delta\boldsymbol{r}'$$
$$=\delta\boldsymbol{r}'\cdot(\mathrm{I}-\nabla\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}\nabla)\cdot\delta\boldsymbol{r}'$$

$\nabla\boldsymbol{s}$ 及び $\boldsymbol{s}\nabla$ は小さいからその内積は第二階の小さい量で棄てることにする。

この式によれば,初に P を中心とする小さい半徑 a の球は,歪をうけた後に

$$\delta\boldsymbol{r}'\cdot(\mathrm{I}-\nabla\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}\nabla)\cdot\delta\boldsymbol{r}'=a^2 \quad\cdots\cdots(269.2)$$

の楕圓體になるので,これは P 點に於ける歪楕圓體である。

又逆に,

$$\delta\boldsymbol{r}'=\delta\boldsymbol{r}\cdot(\mathrm{I}+\nabla\boldsymbol{s})=(\mathrm{I}+\boldsymbol{s}\nabla)\cdot\delta\boldsymbol{r}$$
$$(\delta\boldsymbol{r}')^2=\delta\boldsymbol{r}\cdot(\mathrm{I}+\nabla\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}\nabla)\cdot\delta\boldsymbol{r}$$

であるから,

$$\delta\boldsymbol{r}\cdot(\mathrm{I}+\nabla\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}\nabla)\cdot\delta\boldsymbol{r}=a^2$$

の楕圓體は,小さい歪をうけた後には

$$(\delta\mathbf{r}')^2=a^2$$

の球になる。

§ **57.13** $\nabla\mathbf{s}$ を自己共軛と反自己共軛の二つの部分にわける,

$$\nabla\mathbf{s}=\phi+\Omega \quad \cdots\cdots (270)$$

とおく。

こゝに

$$2\phi=\nabla\mathbf{s}+\mathbf{s}\nabla \quad \cdots\cdots (270.1)$$

$$2\Omega=\nabla\mathbf{s}-\mathbf{s}\nabla \quad \cdots\cdots (270.21)$$

よつて

$$\delta\mathbf{r}'=\delta\mathbf{r}\cdot(\mathrm{I}+\nabla\mathbf{s})$$

$$=\delta\mathbf{r}\cdot(\mathrm{I}+\phi)+\delta\mathbf{r}\cdot(\mathrm{I}+\Omega)$$

$$=\delta\mathbf{r}\cdot(\mathrm{I}+\phi)-\frac{1}{2}\delta\mathbf{r}\times\Omega_v$$

こゝに

$$\Omega_v=(\nabla\times\mathbf{s})_v \quad \cdots\cdots (270.1)$$

であるから

$$\delta\mathbf{r}'=\delta\mathbf{r}\cdot(\mathrm{I}+\phi)-\delta\mathbf{r}\times(\nabla\times\mathbf{s}) \quad \cdots\cdots (270.3)$$

ϕ は自己共軛だから,この左邊の第一項は純粹の歪を表はしてゐる,第二項は物體が恰も剛體のやうに $\nabla\times\mathbf{s}$ の軸に平行な軸の廻りを $|\nabla\times\mathbf{s}|$ だけ廻轉したために起る相對變位を示してゐる。

§ **57.131** 物體内に任意の閉ぢた面を想像すれば,歪によつて起るその中の容積の變化は,面に垂直な變位を面全體について積分したものだから

$$\oint d\mathbf{S}\cdot\mathbf{s}=\int d\tau\,\nabla\cdot\mathbf{s}$$

この關係はどんな面で圍む容積についても成りたつから,極めて小さい容積 $\delta\tau$ についての容積の變化は

$$\delta\tau\,\nabla\cdot\mathbf{s}$$

である。これを容積 $\delta\tau$ でわれば,**容積膨脹率** θ を示す

$$\theta=\nabla\cdot\mathbf{s}=\phi_s \quad \cdots\cdots (270.4)$$

即ち容積膨脹率は ϕ のスカラーで,不變量である。

もし $\mathbf{s}$ の轉回が零ならば

$$\mathbf{s}=\nabla\varphi \quad \cdots\cdots (270.5)$$

とおける。φ は**歪ポテンシヤル**と名付ける量で,**容積膨脹率**は

$$\theta=\nabla^2\varphi \quad \cdots\cdots (270.41)$$

となる。

§ 57.2 歪力

彈性體の内に任意な面を想像してみれば,面の兩側に力が作用して釣合つてゐる,その力は完全な流體の時とはちがひ,必ずしも面に垂直に働いてはゐないが,面の兩側の力は同じ大さで反對の向きにあつて釣合を保つてゐる。

極めて小さい面 δS を過つて作用する力を $\mathbf{P}\delta S$ とする。$\mathbf{P}$ は面の裏側に作用する力と考へよう,即ち δS の法線を今迄通り外側に向けてひくやうに規約すれば,その力は $\mathbf{n}$ と反對側の裏側で

作用する力と考へよう。

P は**歪力**又は**應力**と呼ばれるもので,その法線の方向の成分は向きによつて張力か壓力になる。

極めて小さい容積 $\delta\tau$ を圍む表面 S_1 について歪力の合力

$$\mathbf{F}_1=\oint_{S_1} dS\mathbf{P}$$

は $\delta\tau$ 内の質量に作用する内力である。

一つの彈性體についての内力は,その全表面について積分し

$$\mathbf{F}=\mathrm{Lim}\sum\mathbf{F}_1=\oint_S dS\mathbf{P}$$

これは彈性體に働く**面力**を表はす。

§57.21 彈性體に作用する力は面力のほかに外力がある。彈性體の中にとつた小容積 $\delta\tau$ 内の質量に作用する内力を $\mathbf{F}'$, 外力を $\mathbf{F}''$ とすれば

$$\mathbf{F}'+\mathbf{F}''$$

の力が作用する。

單位質量に作用する外力卽ち**質量力**を $\mathbf{K}$, 密度を ρ とすれば, $\delta\tau$ 内の質量に作用する力は

$$\mathbf{F}''=\rho\mathbf{K}\,\delta\tau$$

よつて運動の方程式は

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=\rho\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\delta\tau=\mathbf{F}'+\mathbf{F}''$$

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt}=\rho\mathbf{r}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\delta\tau=\mathbf{r}\times\mathbf{F}'+\mathbf{r}\times\mathbf{F}''$$

故に

$$\rho\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\delta\tau=\rho\mathbf{K}\,\delta\tau+\oint_{S_1}\mathbf{P}\,dS$$

$$\rho\mathbf{r}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\delta\tau=\rho(\mathbf{r}\times\mathbf{K})\,\delta\tau+\oint_{S_1}\mathbf{r}\times\mathbf{P}\,dS$$

彈性體全體について積分すれば

$$\int\rho\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}d\tau=\int\rho\mathbf{K}\,d\tau+\oint\mathbf{P}\,dS\quad\cdots\cdots(271.1)$$

$$\int\rho\mathbf{r}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}d\tau=\int\rho\mathbf{r}\times\mathbf{K}\,d\tau+\int\mathbf{r}\times\mathbf{P}\,dS\quad\cdots\cdots(271.2)$$

は彈性體の運動の方程式である。

彈性體が釣合の狀態にあるときは,上式の左邊は零だから,外力と內力との間に次の關係が成りたつ

$$\int\rho\mathbf{K}\,d\tau+\oint\mathbf{P}\,dS=0\quad\cdots\cdots(270.11)$$

$$\int\rho\mathbf{r}\times\mathbf{K}d\tau+\oint\mathbf{r}\times\mathbf{P}\,dS=0\quad\cdots\cdots(270.21)$$

§57.22 一點に於ける面に作用する歪力

釣合の狀態にある彈性體の中の一點 O を過る任意の方向の面に作用する歪力の關係を求めよう卽ち外力と內力とは

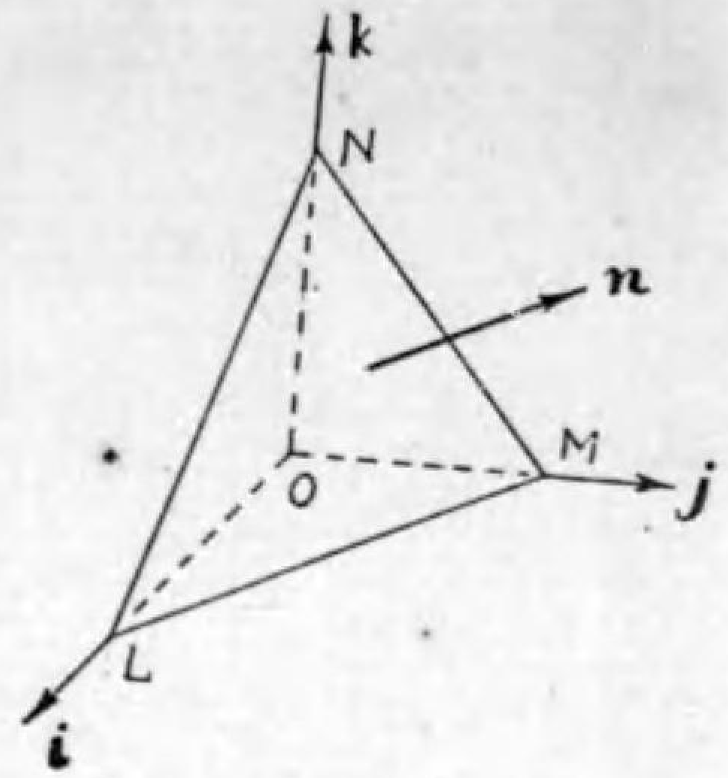
$$\int\rho\mathbf{K}\,d\tau+\oint\mathbf{P}\,dS=0$$

の關係になつてゐる。

この目的には，Oを過る無限に小さい四面𦝫 $OLMN$を想像すると計算が簡單になる。邊 OL, OM, ON を直交坐標軸に平行にとる。

$\mathbf{K}$ が有限な量ならば，面 LMN が限りなく Oに接近した極限に於いては

第九十七圖



$$\lim_{\delta\tau\to0}\int\rho\mathbf{K}\,d\tau=0$$

從つて

$$\oint\mathbf{P}\,dS=0$$

卽ち

$$\int_{LMN}+\int_{OLM}+\int_{OMN}+\int_{ONL}=0$$

面 LMN の單位法線を $\boldsymbol{n}$, 面積を δS とし，單位ベクトル $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ に垂直な面に作用する力を夫々それに相當する添字をつけて表はせば

$$\int_{LMN}\mathbf{P}\,dS=\mathbf{P}_n\,\delta S$$

$$\int_{OMN}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}\,\mathbf{P}_{-i}\,\delta S$$

添字の負號は i の負の方向に向ふ力である。

$$\int_{ONL}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}\,\mathbf{P}_{-j}\,\delta S$$

$$\int_{OLM}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}\,P_{-k}\,\delta S$$

であるから

$$\mathbf{P}_n+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}\,\mathbf{P}_{-i}+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}\,\mathbf{P}_{-j}+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}\,\mathbf{P}_{-k}=0$$

然るに

$$\mathbf{P}_{-i}=-\mathbf{P}_i \text{ etc.}$$

であるから

$$\mathbf{P}_n=\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{i}\,\mathbf{P}_i+\boldsymbol{j}\mathbf{P}_j+\boldsymbol{k}\mathbf{P}_k)$$

よつて

$$\psi\equiv\boldsymbol{i}\,\mathbf{P}_i+\boldsymbol{j}\mathbf{P}_j+\boldsymbol{k}\,\mathbf{P}_k \quad\cdots\cdots(271)$$

とおけば

$$\mathbf{P}_n=\boldsymbol{n}\cdot\psi \quad\cdots\cdots(271.1)$$

となる。ψ は歪力 dyadic である。

§57.221 $\boldsymbol{n}$ に垂直な面に作用する力 $\mathbf{P}_n$ の直角成分を P_{nx}, P_{ny}, P_{nz} とすれば

$$P_{nx}=\boldsymbol{n}\cdot\psi\cdot\boldsymbol{i},\quad P_{ny}=\boldsymbol{n}\cdot\psi\cdot\boldsymbol{j},\quad P_{nz}=\boldsymbol{n}\cdot\psi\cdot\boldsymbol{k} \quad\cdots\cdots(271.2)$$

である。

坐標軸の面に垂直に作用する力 $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{P}_j$, $\mathbf{P}_k$ を直角成分で表はせば

$$P_{xx}=\boldsymbol{i}\cdot\psi\cdot\boldsymbol{i},\quad P_{xy}=\boldsymbol{i}\cdot\psi\cdot\boldsymbol{j}, \text{ etc.}$$

であるから

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{P}_i&\equiv\mathbf{P}_x=\boldsymbol{i}\,P_{xx}+\boldsymbol{i}\,P_{xy}+\boldsymbol{k}\,P_{xz}\\ \mathbf{P}_j&\equiv\mathbf{P}_y=\boldsymbol{i}\,P_{yx}+\boldsymbol{j}\,P_{yy}+\boldsymbol{k}\,P_{yz}\\ \mathbf{P}_k&\equiv\mathbf{P}_z=\boldsymbol{i}\,P_{zx}+\boldsymbol{j}\,P_{zy}+\boldsymbol{k}\,P_{zz}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(271.21)$$

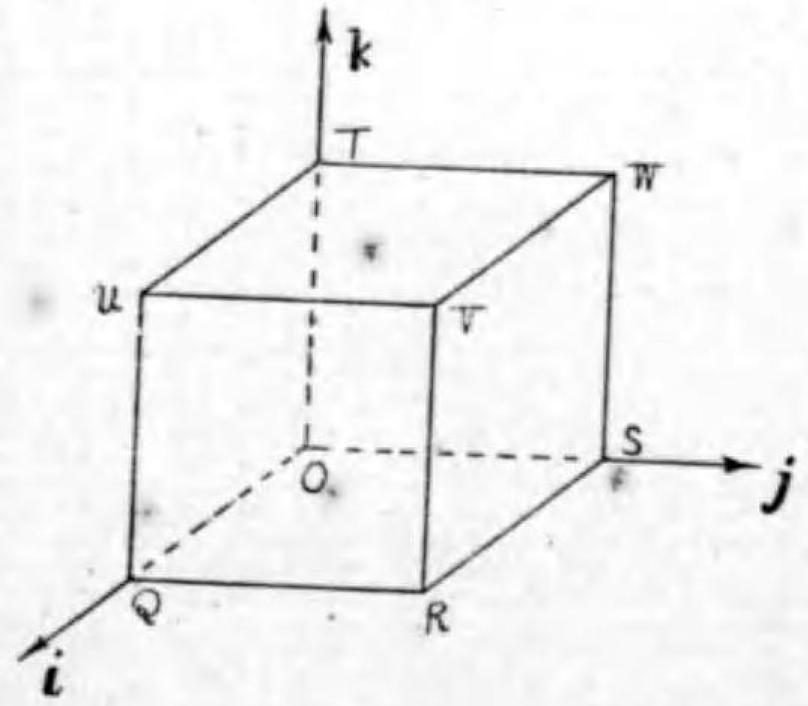
となる。

P_{xx}, P_{yy}, P_{zz} は Voigt が結晶の性質を調べるにあたつて第一種テンソル成分, $P_{xy}, P_{yz}, \ldots\ldots$ 等の六つの量は第二種テンソル成分と名付けた量で,歪力 dyadic は Gibbs の right tensor である。

ψ のマトリックスはこの第一第二種のテンソル九つを要素としもつてるるが,この間には運動方程式の第二のものから定まる三つの關係式があつて,結局 ψ は六つの獨立した量をもつ自己共軛な dyadic 卽ちテンソルであることがしれる。

§57.23 九つのテンソル成分の間の關係式は

第九十八圖



$$\oint \mathbf{r}\times\mathbf{P}\,dS=0$$

から定まる。

これを計算するには,彈性體の中の一點 O (位置ベクトル $\boldsymbol{a}$) を過る小さい直六面體を考へると都合がよい。

第98圖に於いて

$$\int_{QRVU}+\int_{OSWT}+\int_{RSWV}+\int_{OTUR}+\int_{TUVW}+\int_{OQRS}=0$$

然るに

$$\int_{QRVU}+\int_{OSWT}=(\boldsymbol{a}+dx\,\boldsymbol{i})\times P_i\,dy\,dz+\boldsymbol{a}\times P_{-j}\,dy\,dz$$

$$=\boldsymbol{i}\times P_i\,dx\,dy\,dz=\boldsymbol{i}\times P_i\,d\tau$$

$$=(\mathbf{k}P_{xy}-\mathbf{j}P_{xz})\,d\tau$$

其他のものも二つ宛とつて同様に計算すれば結局全體の積分は

$$\oint \mathbf{r}\times\mathbf{P}\,dS=\mathbf{i}(P_{yz}-P_{zy})+\mathbf{j}(P_{zx}-P_{xz})+\mathbf{k}(P_{xy}-P_{yz})=0$$

卽ち

$$\left.\begin{array}{l}P_{yz}=P_{zy}\\ P_{zx}=P_{xz}\\ P_{xy}=P_{yx}\end{array}\right\}\qquad(271.3)$$

よつて ψ は對稱的であるから自己共軛な dyadic である。

§57.24 法線歪力と接面歪力

任意の方向の單位ベクトル $\mathbf{s}$ に垂直な面に作用する歪力は

$$\mathbf{P}_s=\mathbf{s}\cdot\psi \qquad (271.4)$$

であつて,その面に垂直な成分所謂**法線歪力**は

$$P_n=\mathbf{P}_s\cdot\mathbf{s}=\mathbf{s}\cdot\psi\cdot\mathbf{s}$$
$$=\mathbf{s}\cdot(\boldsymbol{i}\mathbf{P}_i+\boldsymbol{j}\mathbf{P}_j+\mathbf{k}\mathbf{P}_k)\cdot\mathbf{s}$$

$\mathbf{s}$ に垂直な單位ベクトルを $\boldsymbol{t}$ とすれば,その面に平行な歪力の成分所謂**接面歪力**は

$$P_t=\mathbf{P}_s\cdot\boldsymbol{t}=\mathbf{s}\cdot\psi\cdot\boldsymbol{t}=(\mathrm{I}-\mathbf{ss})\cdot\mathbf{P}_s$$
$$=\mathbf{s}\cdot(\boldsymbol{i}\mathbf{P}_i+\boldsymbol{j}\mathbf{P}_j+\mathbf{k}\mathbf{P}_k)\cdot\boldsymbol{t}$$

§57.25 Cauchy の歪力二次曲面

歪力 dyadic ψ は自己共軛だから,三つの直交する單位ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を適當に擇べば

$$\psi=\mathbf{P}_1\boldsymbol{a}+\mathbf{P}_2\boldsymbol{b}+\mathbf{P}_3\mathbf{k} \qquad (271.5)$$

といふ形になる。

この單位ベクトルに垂直な面に作用する歪力は,夫々

$$\boldsymbol{P}_1=P_1\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{P}_2=P_2\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{P}_3=P_3\boldsymbol{c}$$

で,皆面に垂直であつて,接面歪力はない。このやうな方向の法線歪力を**主歪力**といひ,その面を歪力の**主要面**といふ。

彈性體の中の一點 O に於いて二次曲面

$$\boldsymbol{r}\cdot\psi\cdot\boldsymbol{r}=1$$

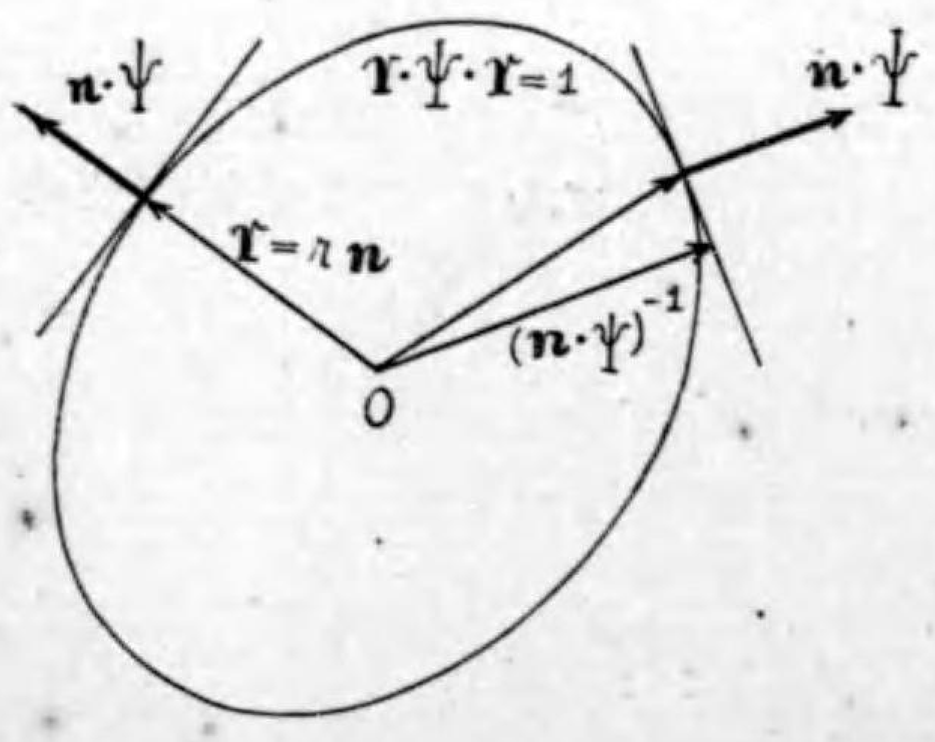
を考へる。

O 點に對する位置ベクトルが $\boldsymbol{r}$ である點に於いてこの二次曲面にたてた單位法線 $\boldsymbol{n}$ は

$$\boldsymbol{n}=\frac{\psi\cdot\boldsymbol{r}}{|\psi\cdot\boldsymbol{r}|}$$

であるから, $\boldsymbol{r}$ が $\boldsymbol{n}$ に平行な

第九十九圖



$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{n}$$

で表はせる點では,歪力 $\boldsymbol{r}\cdot\psi$ が $\boldsymbol{r}$ に平行になる。卽ちその點では歪力は二次曲面

$$\boldsymbol{r}\cdot\psi\cdot\boldsymbol{r}=1$$

に垂直に作用する。

その方向は歪力の**主要軸**で,二次曲面の主軸と一致し,歪力の主要面は二次曲面の主要面と一致するので,任意の歪力はこの曲面の主軸の方向の三つの歪力卽ち主歪力から導くことができる。

この二次曲面を Cauchy の**歪力楕圓體**といひ,主軸の方向を $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とすれば

$$\psi=\boldsymbol{i}\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{j}\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{k}\boldsymbol{P}_3 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(271.6)$$

となる。

§57.3 歪力方程式

單位法線 $\boldsymbol{n}$ に垂直な面に作用する歪力

$$\boldsymbol{P}_n=\boldsymbol{n}\cdot\psi$$

を,閉曲面についてとれば

$$\oint \boldsymbol{P}_n dS=\oint \boldsymbol{n}\cdot\psi\, dS=\oint d\boldsymbol{S}\cdot\psi$$

$$=\int d\tau\,\nabla\cdot\psi \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(272)$$

[註] $\nabla\cdot\psi$ は dyadic ψ の Traktor とも言ひ,ベクトルの發散に相當するものであるが, ψ がテンソルの時は

$$\nabla\cdot\psi=\nabla\cdot(\boldsymbol{i}\boldsymbol{P}_x+\boldsymbol{j}\boldsymbol{P}_y+\boldsymbol{k}\boldsymbol{P}_z)$$

$$=\frac{\partial\boldsymbol{P}_x}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{P}_y}{\partial y}+\frac{\partial\boldsymbol{P}_z}{\partial z}=\psi\cdot\nabla$$

といふ形になつて,スカラー發散に形が似てゐるので,**層ベクトル發散**と言つて

$$\nabla\cdot\psi=\mathfrak{div}\,\boldsymbol{P}$$

と書く人もあるが,却つて複雜になつて面白くない表はし方である。

§57.31 この關係を運動の方程式に入れれば

$$\int\rho\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}d\tau=\int\rho\mathbf{K}d\tau+\int\nabla\cdot\Psi d\tau$$

この關係は彈性體の中にとつた如何に小さい容積についても成立するから

$$\rho\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\rho\mathbf{K}+\nabla\cdot\Psi \quad\text{..........(273.1)}$$

$\mathbf{r}$ の代りに變位 $\mathbf{s}$ に變へ

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v}$$

とおけば

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{s}$$

$\mathbf{v}$ が極めて小さい時には

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial t},\quad \frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2}=\frac{\partial^2\mathbf{s}}{\partial t^2}$$

よつて運動の方程式は

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{s}}{\partial t^2}=\rho\mathbf{K}+\nabla\cdot\Psi \quad\text{..........(273.2)}$$

(273.1) もしくはこの形を**歪力の運動方程式**といふ。

§57.32 運動の第二の方程式からは何の關係も得られない。

$$\int\rho\mathbf{r}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}d\tau=\int\rho\mathbf{r}\times\mathbf{K}d\tau+\int\mathbf{r}\times(\mathbf{n}\cdot\Psi)dS$$

$$=\int\rho\mathbf{r}\times\mathbf{K}d\tau-\int d\mathbf{S}\cdot\Psi\times\mathbf{r}$$

$$=\int[\rho\mathbf{r}\times\mathbf{K}-\nabla\cdot(\Psi\times\mathbf{r})]d\tau$$

然るに

$$\nabla\cdot(\Psi\times\mathbf{r})=(\nabla\cdot\Psi)\times\mathbf{r}+\nabla\mathbf{r}\overset{\times}{\cdot}\Psi$$

$$=(\nabla\cdot\Psi)\times\mathbf{r}+\mathrm{I}\overset{\times}{\cdot}\Psi$$

$$=(\nabla\cdot\Psi)\times\mathbf{r}+\Psi_v$$

Ψ は自己共軛だから

$$\Psi_v=0$$

よつて

$$\int\rho\mathbf{r}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}d\tau=\int[\rho\mathbf{r}\times\mathbf{K}-(\nabla\cdot\Psi)\times\mathbf{r}]d\tau$$

$$=\int\mathbf{r}\times(\rho\mathbf{K}+\nabla\cdot\Psi)d\tau$$

この式は運動の第一の方程式によつて滿足され別に新しい關係を示さない。

よつて彈性體の運動は歪力運動方程式だけで定まる。

§57.4 等方體

$\mathbf{s}$ を直角成分にわければ

$$\mathbf{s}=s_1\mathbf{i}+s_2\mathbf{j}+s_3\mathbf{k}$$

$$\nabla\mathbf{s}=\sum\mathbf{i}\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial x},\quad \mathbf{s}\nabla=\sum\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial x}\mathbf{i}$$

よつて (§57.13) により

$$2\phi=\nabla\mathbf{s}+\mathbf{s}\nabla$$

$$=2(e_{xx}\mathbf{i}\mathbf{i}+e_{yy}\mathbf{j}\mathbf{j}+e_{zz}\mathbf{k}\mathbf{k})+e_{yz}(\mathbf{j}\mathbf{k}+\mathbf{k}\mathbf{j})+ \quad\text{..........(274)}$$

とおけば

$$\left.\begin{aligned}&e_{xx}=\frac{\partial s_1}{\partial x},\quad e_{yy}=\frac{\partial s_2}{\partial y},\quad e_{zz}=\frac{\partial s_3}{\partial z},\\&e_{yz}=\frac{\partial s_3}{\partial y}+\frac{\partial s_2}{\partial z},\quad e_{zx}=\frac{\partial e_1}{\partial z}+\frac{\partial e_3}{\partial x},\quad e_{xy}=\frac{\partial e_2}{\partial x}+\frac{\partial e_1}{\partial y}\end{aligned}\right\}\quad\text{....(274.1)}$$

となる,この六つの量を**歪の成分**といふ。

單位ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を歪の主要軸の方向にとれば

$$\phi=e_1\mathbf{aa}+e_2\mathbf{bb}+e_3\mathbf{cc} \quad \cdots\cdots(274.2)$$

となり,容積膨張率は

$$\begin{aligned}\theta&=\nabla\cdot s=\phi_s\\&=e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}\\&=e_1+e_2+e_3 \quad \cdots\cdots(274.3)\end{aligned}$$

である。

§57.41 歪と歪力

彈性體の歪と歪力の關係は Hooke の法則によつて表はされ,彈性の限界內にては互に比例する。この法則を擴張して完全な彈性體では,その中の一點に於ける歪の六つの成分は,歪力の六成分の一次函數で表はせるものと考へる。卽ち P_1, P_2, P_3 を主歪力,e_1, e_2, e_3 を主な歪とすれば

$$P_1=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3,\ \text{etc.} \quad \cdots\cdots(275.1)$$

といふ形になる。

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は物質による**彈性常數**である。

等方體にては,向きによつて物質の性質がちがはないから

$$\lambda_2=\lambda_3$$

である。これを λ とすれば

$$P_1=\lambda(e_1+e_2+e_3)+2\mu e_1 \quad \cdots\cdots(275.11)$$

こゝに

$$2\mu=\lambda_1-\lambda_2 \quad \cdots\cdots(275.2)$$

λ と μ とは Lamé **の彈性常數**と云はれる。

等方體は二つの彈性常數をもつてゐる。

然るに

$$\theta=e_1+e_2+e_3$$

だから

$$\left.\begin{aligned}P_1&=\lambda\theta+2\mu e_1\\P_2&=\lambda\theta+2\mu e_2\\P_3&=\lambda\theta+2\mu e_3\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(275)$$

となる。

よつて歪力 dyadic は

$$\begin{aligned}\psi&=P_1\mathbf{aa}+P_2\mathbf{bb}+P_3\mathbf{cc}\\&=\lambda\theta\mathrm{I}+2\mu(e_1\mathbf{aa}+e_2\mathbf{bb}+e_3\mathbf{cc})\\&=\lambda\theta\mathrm{I}+2\mu\phi \quad \cdots\cdots(276)\end{aligned}$$

となる。

これは歪と歪力との間の關係を示す dyadic で兩邊とも如何なる右旋系の直交坐標系に對して不變である。

この dyadic によつて任意の歪の成分との力の成分との關係が求まる。例へば

$$\begin{aligned}P_{xx}&=\mathbf{i}\cdot\psi\cdot\mathbf{i}=\mathbf{i}\cdot(\lambda\theta\mathrm{I}+2\mu\phi)\cdot\mathbf{i}\\&=\lambda\theta+2\mu e_{xx}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{yz}&=\mathbf{j}\cdot\psi\cdot\mathbf{k}=\mathbf{j}\cdot(\lambda\theta\mathrm{I}+2\mu\phi)\cdot\mathbf{k}\\&=2\mu\,\mathbf{j}\cdot\phi\cdot\mathbf{k}\\&=2\mu e_{yz}\end{aligned}$$

§57.5 歪エネルギー函數

釣合つてゐる彈性體内の一點の變位を,更に $\delta\mathbf{s}$ だけ小さな變位を增したと想像すれば,力のする仕事は

$$\delta W=\delta W_1+\delta W_2$$

δW_1 は外力のする仕事, δW_2 は内力のする仕事である。

彈性體の中に閉ぢた面を考へ,その中について計算すれば

$$\delta W_1=\int\rho\mathbf{K}\cdot\delta\mathbf{s}\,d\tau \quad\text{.......................(277.1)}$$

$$\delta W_2=\oint d\mathbf{S}\cdot\psi\cdot\delta\mathbf{s}$$

$$=\int\nabla\cdot(\psi\cdot\delta\mathbf{s})\,d\tau \quad\text{.......................(277.2)}$$

力は釣つてゐるから

$$\rho\mathbf{K}+\nabla\cdot\psi=0$$

$$\therefore\ \rho\mathbf{K}\cdot\delta\mathbf{s}=-(\nabla\cdot\psi)\cdot\delta\mathbf{s}$$

然るに

$$\nabla\cdot(\psi\cdot\delta\mathbf{s})=(\nabla\cdot\psi)\cdot\delta\mathbf{s}+\psi:\nabla\delta\mathbf{s}$$

よつて

$$\delta W=\int\psi:\nabla\delta\mathbf{s}\,d\tau \quad\text{.......................(277.3)}$$

となる。

ψ は自巳共軛であつて,物質は等方體とすれば

$$\psi:\nabla\delta\mathbf{s}=\psi:\delta\nabla\mathbf{s}=\psi:\frac{1}{2}\delta(\nabla\mathbf{s}+\mathbf{s}\nabla)$$

$$=\psi:\delta\phi$$

$$=(\lambda\theta\mathbf{I}+2\mu\phi):\delta\phi$$

然るに

$$\theta=\nabla\cdot\mathbf{s}=\phi_s$$

$$\mathbf{I}:\delta\phi=(\delta\phi)_s=\delta\phi_s$$

であるから

$$\psi:\nabla\delta\mathbf{s}=\lambda\phi_s\delta\phi_s+2\mu\phi:\delta\phi$$

$$=\frac{1}{2}\delta(\lambda\phi_s^2+2\mu\phi:\phi)$$

$$=\frac{1}{2}\delta(\psi:\phi)$$

故に

$$\delta W=\frac{1}{2}\int\delta(\psi:\phi)\,d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\delta\int\psi:\phi\,d\tau$$

結局

$$W=\frac{1}{2}\int\psi:\phi\,d\tau \quad\text{.......................(277)}$$

となる。

この被積分の項 $\frac{1}{2}\psi:\phi$ は**歪エネルギー函數**と名付けるもので,歪んだ物體の單位容積についての位置のエネルギーである。

$$\varphi=\frac{1}{2}\psi:\phi$$

とおけば, $-\varphi$ は**彈性ポテンシヤル**といふ。

φ は歪の成分 $e_{xx},\ldots\ e_{xy},\ldots$ の二次同次函數で,歪力の成分はそれに相當する歪の成分に關する φ の微分係數で求まる。卽ち

$$P_{\mu\nu}=\frac{\partial\varphi}{\partial e_{\mu\nu}} \qquad (\mu,\nu=x,y,z)$$

φ の形は

$$\varphi=\frac{1}{2}\lambda\theta^2+\mu(e_{xx}^2+e_{yy}^2+e_{zz}^2)+\frac{1}{2}\mu(e_{yz}^2+e_{zx}^2+e^2_{xy})$$

になることは ψ 及び ϕ を標準形にして二重乘積をとれば求まる。

第九章 粘る流體の力學

§58.1 流體內の壓力

粘る流體の運動は,等方等質の彈性體の特別の場合と考へることができるので,運動の方程式は

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\rho\boldsymbol{K}+\nabla\cdot\psi \quad\text{.........................(278)}$$

といふ形になる。

ψ が粘る流體について,どういふ形になるかを調べればよい。

その外には流體として連續の方程式が成りたつ。連續の方程式は,質量不變の法則を書き表はしたものであるから,完全な流體の場合と變ることはない。即ち

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \quad\text{...........................(278.1)}$$

§58.11 よつて研究すべきことは只 ψ を定めることである。

ψ は彈性體と同樣に

$$\begin{aligned}\psi&=\boldsymbol{i}P_i+\boldsymbol{j}P_j+\boldsymbol{k}P_k\\&=P_1\boldsymbol{aa}+P_2\boldsymbol{bb}+P_3\boldsymbol{cc} \quad\text{..................(278.2)}\end{aligned}$$

となる。

即ち流體內の一點に於いて,單位ベクトル $\boldsymbol{n}$ に垂直な面に作用

する壓力は

$$\boldsymbol{n}\cdot\psi$$

で表はせる。

P_1, P_2, P_3 は流體內の一點に於ける主歪力で,その和は ψ のスカラーで一定の量である。これを

$$\psi_s=P_1+P_2+P_3=-3p \quad\text{.....................(278.31)}$$

とおけば,p は流體內の一點に於いて任意の三つの互に直交する面に作用する壓力の法線分力の平均値を示すもので,流體の內部の壓力に等しい。

§58.12 流體內の一點に於ける速度を

$$\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}$$

として,dyadic $\nabla\boldsymbol{v}$ を自己共軛と反自己共軛の部分にわければ

$$\nabla\boldsymbol{v}=\Theta-\frac{1}{2}\mathrm{I}\times(\nabla\times\boldsymbol{v}) \quad\text{.......................(279.1)}$$

となる。こゝに

$$2\Theta=\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla$$

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{w}$$

$\boldsymbol{w}$ は完全流體と同じく流體の廻轉速度で渦の速度である。

單位ベクトル $\boldsymbol{a}$ の方向の,單位の長さのものが單位時間に長さの變る割合は

$$\boldsymbol{a}\cdot\nabla\boldsymbol{v}$$

で示される。

Θ は自己共軛な dyadic であるから,直交する三つの單位ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を適當に擇べば

$$\Theta=e_1\boldsymbol{aa}+e_2\boldsymbol{bb}+e_3\boldsymbol{cc} \quad\text{.................(279.2)}$$

とおける。

$\boldsymbol{\Theta}$ は §57.4 の $\boldsymbol{\phi}$ の式に $\boldsymbol{s}$ の代りに $\boldsymbol{v}$ をおいたものであるから,この式の e は歪の變る割合を示し, $\boldsymbol{\Theta}$ は歪の變る割合を示す dyadic である。

従つて

$$\Theta_s \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{v} = e_1+e_2+e_3=\theta \quad \cdots\cdots\cdots(279.21)$$

θ は流體内の一點に於ける容積膨脹率が單位時間に變る割合である。

§58.13　流體は等方等質であるから,歪力の主軸は歪の變る割合の主要軸と一致すると考へるのが至當である。そして運動の狀態に於いて,主歪力は平均壓力 p と歪の一次函數であると考へるのが最も簡單で妥當な考であらう。卽ち(§57.51)に倣つて

$$\left.\begin{aligned} P_1&=-p+\lambda\theta+2\mu e_1\\ P_2&=-p+\lambda\theta+2\mu e_2\\ P_3&=-p+\lambda\theta+2\mu e_3\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(279.3)$$

歪の主軸の單位ベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ とすれば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}&=-(p+\lambda\theta)\mathrm{I}+2\mu(e_1\boldsymbol{aa}+e_2\boldsymbol{bb}+e_3\boldsymbol{cc})\\ &=-(p+\lambda\theta)\mathrm{I}+2\mu\boldsymbol{\Theta}.\end{aligned}$$

とおけば,歪の變る割合と歪力との關係をこの dyadic で表はすことができる。

然るに主歪力の和をとれば

$$P_1+P_2+P_3=-3p+3\lambda\theta+2\mu\theta$$

左邊は θ に等しいから $-3p$ である。

よつて

$$\lambda=-\frac{2}{3}\mu$$

となつて粘る流體では,只一つの常數 μ がわかればよい。

μ は**粘さの係數**卽ち内部摩擦の係數である。速度の勾配に比例する摩擦力が働き,その比例の常數が μ になることが簡單に計算できて, μ が粘さの係數になることがわかる。

λ が μ で置き換へられたから

$$\boldsymbol{\psi}=-\left(p+\frac{2}{3}\mu\theta\right)\mathrm{I}+2\mu\boldsymbol{\Theta} \quad \cdots\cdots\cdots(279.4)$$

によつて,任意の方向の面に作用する壓力が出來る。

§58.2 運動方程式

運動方程式の中の dyadic $\boldsymbol{\psi}$ に今得た値をいれれば

$$\rho\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}-\mathbf{K}\right)=\nabla\cdot\left[-\left(p+\frac{2}{3}\mu\theta\right)\mathrm{I}+2\mu\boldsymbol{\Theta}\right]$$

然るに

$$\begin{aligned}2\nabla\cdot\boldsymbol{\Theta}&=\nabla\cdot(\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\nabla)\\ &=\nabla^2\boldsymbol{v}+\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\nabla^2\boldsymbol{v}+\nabla\theta\end{aligned}$$

$$\nabla\cdot(p\,\mathrm{I})=\nabla p, \qquad \nabla\cdot(\theta\,\mathrm{I})=\nabla\theta$$

よつて

$$\rho\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}-\mathbf{K}\right)=-\nabla p+\frac{1}{3}\mu\theta+\mu\nabla^2\boldsymbol{v} \quad \cdots\cdots\cdots(280)$$

は粘る流體の運動の方程式で Navier, Poisson 等がもとめたものである。

もし Maxwell の "kinetic coefficient of viscosity" を

$$\nu\equiv\frac{\mu}{\rho}$$

とおけば

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{K}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{\nu}{3}\nabla\theta+\nu\nabla^2\boldsymbol{v}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(280.1)$$

といふ形になる。

§ **58.21** 式の形は更に少し書き換へると便利なことがある。

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}$$

$$=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$$

であるから

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}-\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{K}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{\nu}{3}\nabla\theta+\nu\nabla^2\boldsymbol{v}-\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{v}^2$$

更に

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{w}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{v}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{v}-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v})=\nabla\theta-2\nabla\times\boldsymbol{w}$$

の關係を用ゐて

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}-2\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}+2\nu\nabla\times\boldsymbol{w}=\boldsymbol{K}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{3}{4}\nu\nabla\theta-\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{v}^2\quad..(280.2)$$

この式は外力にポテンシャルが成りたち，ρ が p だけの函數の時,右邊が悉くスカラー函數の勾配になるから積分するのに都合よい。

$$\boldsymbol{K}=-\nabla V$$

$$\int\frac{dp}{\rho}=E$$

とおけば右邊は

$$W=-\left(V+E-\frac{4}{3}\nu\theta+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right)$$

の勾配として表はせる。

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}-2\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}+2\nu\nabla\times\boldsymbol{w}=\nabla W\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(280.3)$$

第十章 四次元時空のベクトル

相對性原理の發展につれて四次元時空世界に於けるベクトル量の研究は, Minkowskiの時空ベクトルの概念に創まつて,幾多の勝れた學者が研究の歩を進めてゐる。如何なる變遷の途を辿りつつあるかは,序文に簡單に述べたから,こゝには改めて說かない。しかし此の種の問題は,非ユークリッド空間に於けるベクトル量の研究であつて,此の書物の使命を超えるものであるから,興味をもつ讀者は原論文に就いて研究されたい。

§ 59.1 四次元時空のベクトル

四時元時空の世界に於いて,四つの量の一組 (x_1, x_2, x_3, x_4) をベクトルと名付け $\boldsymbol{r}$ で表はす。

基本單位ベクトルは

$$\boldsymbol{i}_1(1,0,0,0),\ \boldsymbol{i}_2(0,1,0,0),\ \boldsymbol{i}_3(0,0,1,0),\ \boldsymbol{i}_4(0,0,0,1)\ldots\ldots\ldots(281)$$

の四つである。

ベクトルの和は,その相當する成分の和を成分とするベクトルである。

二つのベクトルのスカラー積は

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(282)$$

と定めれば,交換結合配分の法則に從ふ。

ベクトル積を除いては,普通のベクトルと少しも變りなく,定理が皆あてはまる。

Dyad も亦 $\boldsymbol{ab}$ で表はせば,外積を除いては少しも變らない。

Dyadic の標準形は

$$\begin{aligned}\phi=&a_{11}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1+a_{12}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2+a_{13}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_3+a_{14}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_4\\&+a_{21}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1+a_{22}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2+a_{23}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3+a_{24}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_4\\&+a_{31}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1+a_{32}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2+a_{33}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3+a_{34}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_4\\&+a_{41}\boldsymbol{i}_4\boldsymbol{i}_1+a_{42}\boldsymbol{i}_4\boldsymbol{i}_2+a_{43}\boldsymbol{i}_4\boldsymbol{i}_3+a_{44}\boldsymbol{i}_4\boldsymbol{i}_4\end{aligned}\quad\cdots\cdots(283)$$

となり,還元因子は

$$\mathrm{I}=\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1+\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2+\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3+\boldsymbol{i}_4\boldsymbol{i}_4\quad\cdots\cdots(284)$$

である。

§59.2 Lorentz の變換

特殊相對性原理に於ける Lorentz の變換は一種の直交變換である。

今ベクル $\boldsymbol{r}$ が $\bar{\boldsymbol{r}}$ になる變換が

$$\bar{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}\cdot\Lambda_c\quad\cdots\cdots(285)$$

で表はせるとき

$$\bar{r}^2=r^2$$

の性質をもつとき**直交變換**といふ。

その時は

$$\bar{\boldsymbol{r}}^2=\boldsymbol{r}\cdot\Lambda_c\cdot\Lambda\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}^2$$

であるから

$$\Lambda_c\cdot\Lambda=\mathrm{I}\quad\cdots\cdots(285.1)$$

即ち

$$\Lambda_c=\Lambda^{-1}\quad\cdots\cdots(285.2)$$

である。

もし

$$\Lambda=\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{i}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{i}_2+\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{i}_3+\boldsymbol{a}_4\boldsymbol{i}_4\quad\cdots\cdots(286.1)$$

の形をとるならば

$$\Lambda_c=\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{i}_4\boldsymbol{a}_4\quad\cdots\cdots(286.2)$$

であるから

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1^2=\boldsymbol{a}_2^2=\boldsymbol{a}_3^2=\boldsymbol{a}_4^2=1\\\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_4=0,\ \text{etc.}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(287)$$

で $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は互に垂直な單位ベクトルでなければならない。

ベクトルの第四の成分が虚數の時,直交變換は **Lorentz の變換**で,その變換によつて $\boldsymbol{r}$ から $\boldsymbol{r}'$ に變るベクトルは特に**四元ベクトル**といふ。

§67.3 四元ベクトルと六元ベクトル

二つの四元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ によつて反自己共軛の dyadic

$$\Gamma=\boldsymbol{ab}-\boldsymbol{ba}\quad\cdots\cdots(288.1)$$

をつくれば,この dyadic の標準形は反對稱的で

$$\left.\begin{aligned}\Gamma=\ &0+g_{12}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2+g_{13}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_3+g_{14}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_4\\&-g_{12}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1+0+g_{23}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3+g_{24}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_4\\&-g_{13}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1-g_{23}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2+0+g_{34}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_4\\&-g_{14}\boldsymbol{i}_4\boldsymbol{i}_1-g_{24}\boldsymbol{i}_4\boldsymbol{i}_2-g_{34}\boldsymbol{i}_4\boldsymbol{i}_3+0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(288.2)$$

となり,六つの獨立した係數をもつ。

この六つの獨立した係數の一組によつて定まる量

$$\mathbf{G}=(g_{23},\ g_{31},\ g_{12},\ g_{14},\ g_{24},\ g_{34})\quad\cdots\cdots(288.3)$$

を**六元ベクトル**といふ。

こゝに

$$g_{23}=a_2b_3-a_3b_2,\ \text{etc.}$$

$$g_{14}=a_1b_4-a_4b_1,\ \text{etc.}$$

一般に反自己共軛の dyadic の六つの獨立したマトリツクス要素により六元ベクトルが定まる。

これによつて二つの四元ベクトルのベクトル積が定義される。

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{G}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(288.4)$$

このベクトル積は,普通のベクトル積と全く同じ法則に從ふ。

四元ベクトルは殆ど普通のベクトルの法則に從ふ。只こゝのやうにそのベクトル積から六元ベクトルのやうな新しい概念をとり入れなければならないこともある。

四元ベクトルの微分では, ∇ の代りに $\Diamond$ を用ゐる。

$$\Diamond=\boldsymbol{i}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\boldsymbol{i}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\boldsymbol{i}_3\frac{\partial}{\partial x_3}+\boldsymbol{i}_4\frac{\partial}{\partial x_4}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(289)$$

で, $x_4=ict$ と考へれば,殆ど ∇ と同じに用ゐられ,只二三著るしい差が起ることがある。

§60.1 共變及び反變ベクトル

一般相對性原理に於いては

$$d\bar{\boldsymbol{r}}=d\boldsymbol{r}\cdot\Lambda_c\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(290)$$

の變換を考へる。

$\boldsymbol{r}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ は四次元空間に於ける點の位置ベクトルで,坐標

の變換により $\bar{\boldsymbol{r}}(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \bar{x}_3,\ \bar{x}_4)$ に變つたものとする。

Λ_c は Λ の共軛 dyadic で

$$\left.\begin{aligned}\Lambda=&\frac{\partial\bar{x}_1}{\partial x_1}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1+\frac{\partial\bar{x}_1}{\partial x_2}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2+\frac{\partial\bar{x}_1}{\partial x_3}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_3+\frac{\partial\bar{x}_1}{\partial x_4}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_4\\&+\frac{\partial\bar{x}_2}{\partial x_1}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1+\frac{\partial\bar{x}_2}{\partial x_2}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2+\frac{\partial\bar{x}_2}{\partial x_3}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3+\frac{\partial\bar{x}_2}{\partial x_4}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_4\\&+\frac{\partial\bar{x}_3}{\partial x_1}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1+\frac{\partial\bar{x}_3}{\partial x_2}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2+\frac{\partial\bar{x}_3}{\partial x_3}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3+\frac{\partial\bar{x}_3}{\partial x_4}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_4\\&+\frac{\partial\bar{x}_4}{\partial x_1}\boldsymbol{i}_4\boldsymbol{i}_1+\frac{\partial\bar{x}_4}{\partial x_2}\boldsymbol{i}_4\boldsymbol{i}_2+\frac{\partial\bar{x}_4}{\partial x_3}\boldsymbol{i}_4\boldsymbol{i}_3+\frac{\partial\bar{x}_4}{\partial x_4}\boldsymbol{i}_4\boldsymbol{i}_4\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(290.1)$$

$d\boldsymbol{r}$ のやうに Λ_c によつて $d\bar{\boldsymbol{r}}$ に變換するものを**反變ベクトル**といふ。

これに對して,スカラー點函數の勾配のやうなものは, $\boldsymbol{a}$ が $\bar{\boldsymbol{a}}$ に

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{a}\cdot\Lambda^{-1}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(291)$$

によつて變るもので,このやうなベクトルを**共變ベクトル**といふ。

Λ^{-1} は次の形になる。

$$\left.\begin{aligned}\Lambda^{-1}=&\frac{\partial x_1}{\partial\bar{x}_1}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1+\frac{\partial x_1}{\partial\bar{x}_2}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2+\frac{\partial x_1}{\partial\bar{x}_3}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_3+\frac{\partial x_1}{\partial\bar{x}_4}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_4\\&+\frac{\partial x_2}{\partial\bar{x}_1}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1+\frac{\partial x_2}{\partial\bar{x}_2}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2+\frac{\partial x_2}{\partial\bar{x}_3}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3+\frac{\partial x_2}{\partial\bar{x}_4}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_4\\&+\frac{\partial x_3}{\partial\bar{x}_1}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1+\frac{\partial x_3}{\partial\bar{x}_2}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2+\frac{\partial x_3}{\partial\bar{x}_3}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3+\frac{\partial x_3}{\partial\bar{x}_4}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_4\\&+\frac{\partial x_4}{\partial\bar{x}_1}\boldsymbol{i}_4\boldsymbol{i}_1+\frac{\partial x_4}{\partial\bar{x}_2}\boldsymbol{i}_4\boldsymbol{i}_2+\frac{\partial x_4}{\partial\bar{x}_3}\boldsymbol{i}_4\boldsymbol{i}_3+\frac{\partial x_4}{\partial\bar{x}_4}\boldsymbol{i}_4\boldsymbol{i}_4\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(291.1)$$

共變ベクトルと反變ベクトルは,普通のテンソル解析では,夫々 A_μ, A^μ で表はし添字の位置で區別するが,こゝでは $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{k}$ 迄を共變ベクトル, $\boldsymbol{l}$ 以下を反變ベクトルとして,新に反變ベクトル

1) contravariant
2) covariant

の單位ベクトルを

$$\boldsymbol{l}_1(1,0,0,0),\quad \boldsymbol{l}_2(0,1,0,0),\quad \boldsymbol{l}_3(0,0,1,0),\quad \boldsymbol{l}_4(0,0,0,1) \quad\cdots\cdots(292)$$

ときめれば

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{i}_1=\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{i}_2=\boldsymbol{l}_3\cdot\boldsymbol{i}_3=\boldsymbol{l}_4\cdot\boldsymbol{i}_4=1 \\ \boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{i}_2=\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{i}_1=\cdots\cdots\cdots=0 \end{array}\right\} \quad\cdots\cdots(292.1)$$

になる。

共變ベクトルと反變ベクトルとのスカラー積は,變換に際して不變である。

$$\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{a}\cdot\Lambda^{-1}\cdot\Lambda\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r} \quad\cdots\cdots(292.2)$$

この逆も亦眞である。

前項及び後項とも共變ベクトルの dyadic を**共變 dyadic** といふ。

$$\Gamma=\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2\cdots\cdots \quad\cdots\cdots(293)$$

その共軛 dyadic も當然共變である。

これに反し前項後項の双方が反變ベクトルの時 dyadic は**反變**で,前後の項がちがつた性質のベクトルからできてゐれば,**混合 dyadic** と云ふ。

§50.2 基本テンソル

四次元時空の世界に於ける點 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$, それに極めて接近した點を P' とすれば

$$\overrightarrow{PP'}=d\boldsymbol{r}$$

$d\boldsymbol{r}$ は反變ベクトルであつて

$$d\boldsymbol{r}\cdot\Gamma\cdot d\boldsymbol{r}=ds^2 \quad\cdots\cdots(294)$$

ds は PP' の線分の線要素の長さで, Γ は共變 dyadic である.

この積は不變量で, Γ のマトリツクス要素は皆 P 點の坐標 $\boldsymbol{r}$ の函數であり, Γ は P の近くの重力の場の性質を示す。この dyadic は Einstein の**基本共變テンソル**と同等のものである。

Γ^{-1} は反變 dyadic で, dyadic Θ が共變の時

$$\Gamma^{-1}\cdot\Theta\cdot\Gamma^{-1} \quad\cdots\cdots(294.1)$$

は反變 dyadic で所謂 Θ の Ergänzung と呼ばれるものに當る。

是等新しい方面の研究は他日稿を改めて,調べることにしよう。興味をもつ讀者は夫々原論文について研究されんことを。

補　　遺

1 記　號

普通の書物に用ゐられる記號を表にして示す。

	ベクトル	スカラー積	ベクトル積	勾配	發散	轉囘	dyad	
Gibbs, Wilson	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$	∇	div, $\nabla\cdot$	$\nabla\times$, curl	$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$	
Heaviside	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{ab}$	$V\boldsymbol{ab}$	∇	div	$V\nabla$, curl	$\boldsymbol{a}.\,\boldsymbol{b}$	
Weatherburn	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$	∇	div, $\nabla\cdot$	$\nabla\times$, curl	$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$	單位ベクトル $\hat{\boldsymbol{a}}$
Coffin	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$	∇	$\nabla\cdot$	$\nabla\times$		單位ベクトル $\boldsymbol{a}_1$
Runge	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}.\,\mathfrak{b}$	$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$	grad	∇	$\nabla\times$	$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$	
Abraham	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$	$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$	grad	div, ∇	rot		
Ignatowski	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$	$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]$	∇	div	rot	$\mathfrak{A}\,;\mathfrak{B}$	
Gans	$\mathfrak{A}$	$(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$	$[\mathfrak{A},\mathfrak{B}]$	grad	div ,	rot		
Lorentz	$\boldsymbol{A}$	$(\boldsymbol{A}.\,\boldsymbol{B})$	$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}]$	grad	div, ∇	rot	. —	
Burali-Forti Marcolongo	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$	grad	div	$\frac{1}{2}$ rot	$H(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$	
Valentiner	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$	$[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$	∇	div	rot	$\mathfrak{a}\,;\mathfrak{b}$	
其　　他	α	$V\alpha\beta$	$S\alpha\beta$	$-S\nabla$	$V\nabla$			ベクトル率 $T(\alpha)$
	a	$[a/b]$	$[a\,b]$	$\frac{d\cdot}{dr}$	$\frac{d\times}{d\,r}$			
	$\bar{a}$				Vort			
本　　書	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$	∇	$\nabla\cdot$,div	$\nabla\times$, rot	$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$	

2 公　　式

1) ベクトル

$$\boldsymbol{a}=a_1\,\boldsymbol{i}+a_2\,\boldsymbol{j}+a_3\,\boldsymbol{k}$$

直角成分

$$a_1,\ a_2,\ a_3$$

單位ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1=\frac{\boldsymbol{a}}{a}=\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\cos\beta+\boldsymbol{k}\cos\gamma$$

ベクトルの率

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

逆ベクトル

$$\boldsymbol{a}^{-1}=\frac{1}{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{a}_1}{a}$$

2) スカラー積

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a\,b\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

$$=a_1\,b_1+a_2\,b_2+a_3\,b_3$$

垂直の條件

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$$

ベクトルの自乘

$$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2=a^2$$

3) ベクトル積

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}\,a\,b\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

平行の條件

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$$

4) 基本(單位)ベクトル

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$$

5) スカラー立方積

$$[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\ldots\ldots$$

$$=-[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b}]=\ldots\ldots$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

共面でない條件

$$[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]\neq 0$$

6) ベクトル立方積

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}$$

$$=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})$$

7)

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d} \end{vmatrix}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}]\boldsymbol{b}-[\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{d}]\boldsymbol{a}$$

$$=[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{d}]\boldsymbol{c}-[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]\boldsymbol{d}$$

8) 相逆系

$$\boldsymbol{a}^*=\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]},\quad \boldsymbol{b}^*=\frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]},\quad \boldsymbol{c}^*=\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}^*=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}^*=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}^*=1$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^*=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}^*=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}^*=\ldots\ldots=0$$

$$[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}][\boldsymbol{a}^*\,\boldsymbol{b}^*\,\boldsymbol{c}^*]=1$$

ベクトルの分解

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}^*\boldsymbol{c})$$

9)

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{i}\frac{dv_1}{dt}+\boldsymbol{j}\frac{dv_2}{dt}+\boldsymbol{k}\frac{dv_3}{dt}$$

$$\frac{d^n\boldsymbol{v}}{dt^n}=\boldsymbol{i}\frac{d^nv_1}{dt^n}+\boldsymbol{j}\frac{d^nv_2}{dt^n}+\boldsymbol{k}\frac{d^nv_3}{dt^n}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\ldots\ldots)=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}+\ldots\ldots$$

$$\frac{d}{dt}(u\,\boldsymbol{v})=\frac{du}{dt}\boldsymbol{v}+u\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}^2)=2\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=2v\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d^n}{dt^n}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})=\sum_{i=o}^{n}\binom{n}{i}\frac{d^i\boldsymbol{u}}{dt^i}\cdot\frac{d^{n-i}\boldsymbol{v}}{dt^{n-i}}$$

$$\frac{d^n}{dt^n}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\sum_{i=o}^{n}\binom{n}{i}\frac{d^i\boldsymbol{u}}{dt^i}\times\frac{d^{n-i}\boldsymbol{v}}{dt^{n-i}}$$

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]=\left[\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\right]+\left[\boldsymbol{a}\,\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\,\boldsymbol{c}\right]+\left[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}\right]$$

10) Nabla 記號

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

勾配

$$\mathrm{grad}\,V=\nabla V=\boldsymbol{i}\frac{\partial V}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial V}{\partial x}+\boldsymbol{k}\frac{\partial V}{\partial z}$$

方向微係數 $\boldsymbol{s}_1$ が單位ベクトルならば

$$\boldsymbol{s}_1\cdot\nabla V=\frac{\partial V}{\partial s}=s_1\frac{\partial V}{\partial x}+s_2\frac{\partial V}{\partial y}+s_3\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{s}_1\cdot\nabla\boldsymbol{v}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial s}$$

發散

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}$$

轉同

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{v}$$

$$=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$$

11)

$$\nabla\cdot(u\boldsymbol{v})=\nabla u\cdot\boldsymbol{v}+u\nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

$$\nabla\times(u\boldsymbol{v})=\nabla u\times\boldsymbol{v}+u\nabla\times\boldsymbol{v}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot\nabla\times\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\nabla\cdot\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\nabla\cdot\boldsymbol{u}$$

$$\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\times\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}$$

11.1)

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}=\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\equiv 0$$

$$\nabla\times\nabla V=\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\ V\equiv 0$$

$$\nabla\cdot\nabla V=\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ V=\nabla^2 V$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{v}-\nabla^2\boldsymbol{v}$$

11.2)

$$\nabla r^n=n r^{n-1}\boldsymbol{r}_1=n r^{n-2}\boldsymbol{r}$$

$$\nabla^2 r^n=\nabla\cdot\nabla r^n=n(n+1)r^{n-2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3$$

$$\nabla\times\boldsymbol{r}\equiv 0$$

u が r のスカラー函數ならば

$$\nabla u=u'\boldsymbol{r}_1$$

$$\nabla^2 u=u''+\frac{2u'}{r}$$

又

$$\nabla\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}''+2\frac{\boldsymbol{v}'}{r}$$

12) 切線線積分

$$\int_C\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{t}\,ds=\int\mathbf{K}\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$\int_{(A)}^{(B)}\nabla V\cdot d\boldsymbol{r}=V_B-V_A$$

$$\oint\nabla V\cdot d\boldsymbol{r}=0$$

(垂直)面積分

$$\int_S d\mathbf{S}\cdot\mathbf{K}=\int\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{K}\,dS$$

12.1) Gauss 發散定理

$$\int\nabla\cdot\mathbf{F}\,d\tau=\oint\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{F}\,dS$$

12.2) Stokes 定理

$$\int\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\mathbf{F}\,dS=\oint\mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

12.3) Green の定理

$$\oint\nabla U\cdot\nabla V\,dS=\oint(\boldsymbol{n}\cdot\nabla V)\,U\,dS-\int U\nabla^2 V\,d\tau$$

$$=\oint(\boldsymbol{n}\cdot\nabla U)\,V\,dS-\int V\nabla^2 U\,d\tau$$

$$V_0=\frac{1}{4\pi}\oint\left(\frac{1}{r}\,\boldsymbol{n}\cdot\nabla V-V\boldsymbol{n}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)dS-\int\frac{1}{r}\nabla^2 V\,d\tau$$

12.4) Gauss 積分

$$-\oint\boldsymbol{n}\cdot\nabla\frac{1}{r}\,dS=4\pi\qquad\text{(點 }P\text{ が面の中にあれば)}$$

$$=0\qquad\text{(面の外にあれば)}$$

12.5) Helmholtz の定理

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V+\nabla\times\boldsymbol{H}$$

$$V=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}}{r}\,d\tau$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}}{r}\,d\tau$$

13) Laplace 方程式

$$\nabla^2 V=0$$

Poisson 方程式

$$\nabla^2 V=-4\pi\rho$$

一般解

$$V=\int\frac{\rho}{r}\,d\tau$$

13.1) Taylor 定理

$$f(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{c})=e^{\boldsymbol{c}\cdot\nabla}f(\boldsymbol{r})=\exp(\boldsymbol{c}\cdot\nabla)f(\boldsymbol{r})$$

13.2) 全微分の條件

$$d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{q}=0$$

が全微分である爲めには

$$\boldsymbol{q}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{q})=0$$

13.3) Euler の定理

$\phi(\boldsymbol{r})$ が $\boldsymbol{r}$ の n 次の同次式ならば

$$(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)^m\phi(\boldsymbol{r})=n(n-1)\ldots\ldots(n-m+1)\phi(\boldsymbol{r})$$

14) Dyad

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$$

Dyadic

$$\phi=\sum\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$$

標準形

$$\begin{aligned}\phi=&a_{11}\,\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}+a_{12}\,\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}+a_{13}\,\boldsymbol{i}\boldsymbol{k}\\&+a_{21}\,\boldsymbol{j}\boldsymbol{i}+a_{22}\,\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}+a_{23}\,\boldsymbol{j}\boldsymbol{k}\\&+a_{31}\,\boldsymbol{k}\boldsymbol{i}+a_{32}\,\boldsymbol{k}\boldsymbol{j}+a_{33}\,\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

マトリツクス

$$\|\phi\|=\begin{Vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{Vmatrix}$$

共軛 dyadic

$$\phi\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\cdot\phi_c$$

Dyadic のスカラー

$$\phi_s=\boldsymbol{i}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\cdot\phi\cdot\boldsymbol{k}$$

$$=\sum\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

Dyadic のベクトル

$$\phi_v=-(\boldsymbol{i}\cdot\phi\times\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\cdot\phi\times\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\cdot\phi\times\boldsymbol{k})$$

$$=\sum\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

還元因子

$$\mathrm{I}=\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}$$

$$=\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}^*\boldsymbol{c}$$

$$\mathrm{I}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{I}=\boldsymbol{r}$$

$$\mathrm{I}\cdot\phi=\phi\cdot\mathrm{I}=\phi$$

逆 dyadic

$$\Phi\cdot\phi^{-1}=\mathrm{I}$$

$$\mathrm{I}_s=3,\qquad \mathrm{I}_v=0$$

14.1) $$(\phi\cdot\psi)_c=\psi_c\cdot\phi_c$$

$$(\phi\cdot\psi)^{-1}=\psi^{-1}\cdot\phi^{-1}$$

Dyadic の分解

$$\phi=\phi'+\phi''$$

$$\left.\begin{aligned}\phi'&=\frac{1}{2}(\phi+\phi_c)\\ \phi''&=\frac{1}{2}(\phi-\phi_c)\end{aligned}\right\}$$

15) $$\nabla\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{v}\nabla=(\nabla\boldsymbol{v})_c=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$\nabla\boldsymbol{r}=\mathrm{I}$$

$$(\nabla\boldsymbol{r})_s=\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3,\qquad(\nabla\boldsymbol{r})_v=\nabla\times\boldsymbol{r}=0,$$

$$\nabla\cdot\phi=\boldsymbol{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$$\nabla\times\phi=\boldsymbol{i}\times\frac{\partial\phi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\times\frac{\partial\phi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\times\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

16.1) $$\nabla\times\nabla\boldsymbol{v}=0$$

$$\nabla\times\nabla\times\phi=0$$

$$\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{v}=\nabla^2\boldsymbol{v}$$

$$\nabla\times\nabla\times\phi==\nabla\nabla\cdot\phi-\nabla^2\phi$$

但し

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\nabla)=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

16.2) $$\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})=\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\nabla\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$$

$$\nabla(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\nabla\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}-\nabla\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$$

$$\nabla(u\boldsymbol{v})=\nabla u\boldsymbol{v}+u\nabla\boldsymbol{v}$$

$$\nabla\cdot(u\phi)=\nabla u\cdot\phi+u\nabla\cdot\phi$$

$$\nabla\times(u\phi)=\nabla u\times\phi+u\nabla\times\phi$$

16.21) $$\nabla(u\mathrm{I})=\nabla u$$

$$\nabla\times(u\mathrm{I})=\nabla u\times\mathrm{I}$$

$$\nabla\cdot(\mathrm{I}\times\boldsymbol{v})=\nabla\times\boldsymbol{v}$$

$$\nabla\times(\mathrm{I}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\nabla-\mathrm{I}\nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

$$\nabla\times u\mathrm{I}\times\nabla=\nabla\nabla u-\nabla^2u\mathrm{I}$$

17.1) $$\int_{(A)}^{(B)}d\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A$$

$$\int d\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{v}=0$$

17.2) $$\oint dr\,V=\int\boldsymbol{n}\times\nabla V\,dS$$

$$\oint d\boldsymbol{r}\,\mathbf{K}=\int\boldsymbol{n}\times\nabla\mathbf{K}\,dS$$

$$\oint d\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{K}=\int\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\mathbf{K}\,dS$$

$$\oint d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\phi}=\int \boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{\phi}\, dS$$

17.3)

$$\oint \boldsymbol{n}\, V dS=\int \nabla V d\tau$$

$$\oint \boldsymbol{n}\boldsymbol{K} dS=\int \nabla \boldsymbol{K} d\tau$$

$$\oint \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{K} dS=\int \nabla\cdot\boldsymbol{K} d\tau$$

$$\oint \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\phi} dS=\int \nabla\cdot\boldsymbol{\phi} d\tau$$

$$\oint \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{K} dS=\int \nabla\times\boldsymbol{K} d\tau$$

$$\oint \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\phi} dS=\int \nabla\times\boldsymbol{\phi} d\tau$$

18)　二重乘積

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}):(\boldsymbol{c}\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}$$

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\overset{\cdot}{\times}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$$

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\overset{\times}{\cdot}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}$$

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\overset{\times}{\times}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$$

18.1)

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{v})=(\nabla\cdot\boldsymbol{\phi})\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\phi}:\nabla\boldsymbol{v}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{v})=(\nabla\cdot\boldsymbol{\phi})\cdot\boldsymbol{v}+\nabla\boldsymbol{v}\overset{\times}{\cdot}\boldsymbol{\phi}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{v})=(\nabla\cdot\boldsymbol{\phi})\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\phi}\overset{\cdot}{\times}\nabla\boldsymbol{v}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{v})=(\nabla\times\boldsymbol{\phi})\times\boldsymbol{v}-\nabla\boldsymbol{v}\overset{\times}{\times}\boldsymbol{\phi}$$

3 時間に關する微分

運動してゐる物體の狀態に依存する函數では,時間についてとつた微分に,その運動に基づく變化が加はることに注意する必要がある。

1) 流體力學並びに電氣力學に於いて研究したやうに,φがベクトル或はスカラー函數の時,速度 $\boldsymbol{v}$ で動いてゐる物體の狀態に關係した函數ならば,その物體の運動につれてどう變るかは(§ 47.22)で求めたやうに

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi$$

となる。卽ち左邊は φ の個々の變化で,右邊の第一項は局所的變化である。

2) 第二に運動體の內部にとつた小容積 $\delta\tau$ について,$\varphi\delta\tau$ が時とともに如何に變るかといふ場合を考へる必要がある。

$\delta\tau$ が dt 時間內に變る割合は(200.3)式により

$$d(\delta\tau)=\delta\tau\,\nabla\cdot\boldsymbol{v}\,dt$$

よつて

$$\frac{d(\varphi\delta\tau)}{dt}=\delta\tau\left(\frac{d\varphi}{dt}+\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)$$

$$=\delta\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{v})\right)$$

今$\dot{\underline{\Phi}}$を

$$\frac{d(\varphi\delta\tau)}{dt}=\underset{=}{\dot{\varphi}}\delta\tau$$

と定義すれば

$$\underset{=}{\dot{\varphi}}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{v})$$

(例)　電氣密度をρとすれば

$$\frac{d(\rho\delta\tau)}{d\tau}=0$$

は電氣量保存を表はすもので

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0$$

流體力學の連續の方程式にあたるものである(参照§47.3)。

3) 最後に表面δSが速度$\boldsymbol{v}$で動いてゐるとする。ベクトル函數$\mathbf{K}$の法線成分をその面についてとり，$\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{K}\delta S$が時とともに變る割合を調べる。

先づ初めには,空間の一點では$\mathbf{K}$は變らないものとして

$$\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial t}=0$$

として$\nabla\cdot\mathbf{K}d\tau$を求めよう。こゝに

$$d\tau=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\,\delta S\,dt$$

はdt時間内にδSがつくる小さい圓筒の容積である。

發散の定理を用ゐれば

$$\nabla\cdot\mathbf{K}d\tau=\int_{S'}\boldsymbol{n}'\cdot\mathbf{K}\,dS'$$

この面積分S'はその小圓筒の側面と底面とについてとる。從つ

て底面に於ける單位法線$\boldsymbol{n}'$は,一端では$\boldsymbol{n}$に等しく,他端では$-\boldsymbol{n}$に等しいから,底面の部分の積分は

$$\frac{d(\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{K}\,\delta S)}{dt}dt$$

である。

側面を一邊がδSの線に平行な線分dsと,vdtの邊から成りたつ小さい平行四邊形の集りと見れば

$$dS'=vds\,\sin(\boldsymbol{v},d\,\mathbf{s})\,dt$$

卽ちベクトルとして

$$\boldsymbol{n}'\,dS'=d\,\mathbf{s}\times\boldsymbol{v}\,dt$$

從つて

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}'\cdot\mathbf{K}\,dS'&=(d\mathbf{s}\times\boldsymbol{v})\cdot\mathbf{K}\,dt\\&=d\,\mathbf{s}\cdot(\boldsymbol{v}\times\mathbf{K})\,dt\end{aligned}$$

Stokes の定理を用ゐれば

$$dt\oint d\,\mathbf{s}\cdot(\boldsymbol{v}\times\mathbf{K})=\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\mathbf{K})\,\delta S dt$$

よつて$\dfrac{\partial\mathbf{K}}{\partial t}=0$の時

$$\frac{d(\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{K}\,\delta S)}{dt}+\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\mathbf{K})\delta S=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\,\nabla\cdot\mathbf{K}\,\delta S$$

面の運動によるものは$\mathbf{K}$の局所的變化とは獨立してゐるから,この式に局所的變化を加へれば,結局

$$\frac{d(\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{K}\delta S)}{dt}=\delta S\left(\frac{\partial(\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{K})}{\partial t}+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\,\nabla\cdot\mathbf{K}+\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times(\mathbf{K}\times\boldsymbol{v})\right)$$

よつて$\mathbf{K}$の法線成分について

$$\frac{d(\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{K}\,\delta S)}{dt}=\underline{\dot{K}_n}\delta S$$

と定義すれば

$$\underline{\dot{\mathbf{K}}}=\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\,\nabla\cdot\mathbf{K}+\nabla\times(\mathbf{K}\times\boldsymbol{v})$$

(例) (§46.12)の法則

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}\,dS$$

からもし物體が速度 $\boldsymbol{v}$ で運動してゐる場合には,右邊は此の章の結果により

$$\int\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\,\nabla\cdot\boldsymbol{B} + \nabla\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v})\right)dS$$

然るに $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ であるから,左邊を Stokes の定理で面積分になほし,被積分の項を等しくおけば,運動體に關する次の方程式を得る。

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \nabla\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v})\right)$$

同樣にして $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$ であるから

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \nabla\times(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{v}) + \rho\,\boldsymbol{v}\right)$$

4 參 考 書

Gibbs, Wilson	Vector Analysis
Coffin	Vector Analysis
Weatherburn	Elementary Vector Analysis
Weatherburn	Advanced Vector Analysis
Spielrein	Lehrbuch der Vektorrechnung
Silberstein	Elements of Vector Algebra
Budde	Tensoren und Dyaden
Gans	Einführung in die Vektoranalysis
Valentiner	Vektoranalysis

Ignatowsky	Die Vektoranalysis
Fehr	Méthode Vectorielle de Grassmann
Bucherer	Elemente der Vektor-analysis
Fischer	Vektordifferentiation und Vektorintegration
Runge	Vektoranalysis
Henrici and Turner	Vektors and Rotors with Applications
Schouten	Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis
Lagally	Vektorrechnung
Marcolongo, Burali-Forti	
,,	Elementi di calcolo vettoriale
,,	Eléments de Calcul Vectoriel
,,	Omografie vettoriali
,,	Analyse Vectorielle Générale
Juvet	Introduction au Calcul Tensoriel
Shaw	Vector Calculus
Joly	Manual of Quaternions
Kelland, Tait	Introduction to Quaternions
McAulay	Utility of Quaternions in Physics

* * *

Silberstein	Vectorial Mechanics
Jaumann	Bewegungslehre
Haas	Einführung in die theoretische Physik
Heaviside	Electrical Papers
Lorentz	Theory of Electron
Föppl	Maxwellsche Theorie der Elektrizität
,,	Vorlesungen über Technische Mechanik

Abraham	Theorie der Elekrizität
Kafka	Die Ebene Vektoranalysis
Schouten	Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie
Silberstein	Theory of Relativiy
Wilson and Lewis	The Space-time Manifold of Relativity
Laue	Das Relativitätsprincip
Silberstein	A Simplified Method of Tracing Rays
Marcolongo	Teoria Matematica dello Equilibrio dei Corpi Elastici
Mehmke	Vorlesungen über Punkt- und Vektorrechnung
Bouligand et Rabaté	Initiation aux Méthodes vectorielles
,,	Leçons de Géométrie vectorielle
Guiot	Calcul Vectoriel

論文は Schouten の上記の書物の卷尾に載つてゐる。最近のものは數學の雜誌に散見する。

人名索引

【數字は節, ( ) は例題を示す】

Abraham	56.4
Ampère	45.1, 46.1
Bernoulli	48.1
Bessel	36.2
Biot-Savart	45.1, 48.5
Bjerknes	33.2

Boyle	47.1
Cauchy	57.2
Coriolis	31.3
Coulomb	43.1, 44.1
D'Alembert	13.9, 26.1, 29.2, 36.4(2), 46.3
Eichenwald	46.6
Einstein	50.7, 60.2
Euler	32.2, 32.3, 35.3, 47.3, 47.5, 47.7, 47.8, 48,1, 53.3, 55.3
Faraday	46.1
Fermat	33.6, 51.1
Fleming	45.1
Fourier	33.4, 37.2
Fresnet	15.9
Galilei	19.2
Gauss	37.2, 37.5, 39,5, 44.2, 45.1, 48.4, 56.3
Gibbs	2.1, 8.1, 9.1, 49.1, 54.1, 57.2
Grassmann	9.1, 11.1
Green	37.4, 37.5, 37.6, 43.1
Hamilton	7.4, 17.4, 33.4, 42.5, 42.6, 42.7, 42.8
Heaviside	11.1, 43.2
Helmholtz	37.3, 37.7, 46.4, 48.5, 48.6
Hooke	44.1, 57.4
Huygens	25.3

Jacobi	32.3
Joule	46.5
Kelvin	19.2, 47.9, 48.3, 48.4, 48.6
Kepler	23.5
Lagrange	40.4, 42.3, 42.4, 42.5, 42.7, 42.8, 55.3
Lamé	33.4, 36.2, 36.4(2), 57.4
Lami	4.3
Laplace	36.2, 36.4, 37.6, 39.3, 43.1, 43.2, 48.2, 48.5
Legendre	32.2, 36.2
Leibniz	29.2
Lenz	46.1
Lorentz	36.4(2), 46.2, 46.4, 50.7, 59.2
Mathieu	36.2
Maxwell	36.4(2), 46.2, 46.3, 56.4, 58.2
McAulay	37.3, 45.1
Navier	58.2
Neumann	45.3, 48.7
Newton	19.1, 19.2, 27.1
Oersted	45.1
Poincaré	33.2
Poinsot	53.2, 53.3
Poisson	37.6, 43.2, 46.4, 58.2
Poynting	46.5

Ptolemeus	17.6
Rankine	20.2
Rowland	46.5, 46.6
Runge	51.1
Sandström	33.2
Silberstein	51.1
Snellius	9.3(5), 51.1
Sommerfeld	51.1
Stokes	37.3, 39.4, 39.5, 44.2, 46.1, 47.9, 48.4, 56.2
Tait	37.3, 45.1
Taylor	14.4, 33.3, 35.1, 35.3, 37.2, 48.6
Voigt	57.2
Weatherburn	56.5
Young	20.2
Zeeman	46.6

索　　引

（配列は日本式ローマ字による；数字は頁を示す）

A

Affinor　394
atled　191
壓力方程式　372
Axiator　422

B

場　184
ベクトル（v の欄をみよ）
Bernoulli の定理　372
Biot-Savart の法則　330
膨脹率　491
Boyle の法則　358
分極　321
分ベクトル　19, 38

C

Coriolis の定理　173
Coulomb の法則　306, 324

D

楕圓函數　183
——面　445
——面の主軸　449
——積分　147
——調和運動　112, 136
D'Alembert 記號　215, 341
——の原理　123, 152, 164
——の方程式　215
彈道學　143
斷熱變化　353
彈性波　214
彈性體の力學　485
Del　191
電媒恆數　307
電位　184, 307
電氣變化　322
電流の磁氣作用　328
電子　349
電磁波　215, 340
電磁歪力　480
電磁能力　482
電磁ポテンシヤル　341
電磁場の方程式　339
電場のエネルギー　325
——の强さ　307
地震波　201
動徑　24
Dyad　392
dyadic　392
——の微分　466
——の第二次　461
——の第三次　461
——のマトリツクス　398
——の積分　477
——のスカラー　403
——のベクトル　403

E

エネルギー　126, 363
（位置，運動，潜狀等をみよ）
エネルギー保存の原理　130, 198, 297
圓運動　110
Euler の方程式（剛體）　175, 178, 456
——（流體）　359, 475
Euler の角　176
——の定理　209

F

Fermat の原理　200, 436
Fleming の法則　330
Fourier の法則　192, 223
——の方程式　224
Fresnet の公式　84

G

Gauss の積分　246
——の定理 (發散の定理)
擊力　124, 287
激衝壓 (擊壓)　362
——質量力　362
——運動　287, 361
元　13
擬似スカラー　57
Glissant　7
合力　10, 11
剛體　163
——の廻轉運動　49
——の運動　174
Grassmann 記號
Green の公式　242, 245
——の函數　251, 253
——の定理　238, 242
外力　155
外積　408
逆 dyadic　414
逆ベクトル　14

H

波動函數　215
配分の法則　37, 45
排け口　373
Hamilton 記號　191
——函數　297
——の原理　300
——の方程式　300
反變　514
反作用の力　154
反射の法則　50, 442
反自己共軛　421
發散　201, 226, 270, 277, 469
——の定理　220, 478
Heaviside の法則　55
Helmholtz の定理　254
變分　228
變位　100
——電流　336, 338
歪　485
歪半徑　83
歪率　82
歪楕圓體　486
歪の中心　83
歪ポテンシャル　491
歪力 dyadic　495
擺線 (サイクロイド) 振子　149
非轉回的　211, 235, 255
等しいベクトル　5
——dyadic　395
單つ結びの區域　238
ホドグラフ　110
法平面　79
方向微係數　189, 197
法線　199
保存系の力　130, 136, 250, 290, 361
負ベクトル　6
不變面　145, 454
不變量　450
——軸　161, 454
副法線　81
輻射エネルギー　348
不連續面　312, 323
不定積
表面抗力　260

I

引力　136
一般坐標　279
位置のエネルギー　129, 292
一様でない歪　488
一様な歪　485
有效擊力　288
——力　123
有理單位　312

J

Joule 熱　348

K

角運動量　52, 130, 454
——保存の法則　160
感應　333
假設變位 (仕事)　151, 259
——の原理　152
加速度　106
徑面　447
Kelvin の定理　368
Kepler の法則　142
結合法則　9, 11, 45
基本テンソル　516
——ベクトル　19
幾何光學　436
勾配　190, 194, 195, 207, 270
後因子　393
個々の變化　353
交換法則　8, 11, 35, 44
獨樂　178
混合 dyadic　516
拘束運動　152, 259, 280, 283
區域　238
空間曲線　76
屈折の法則　50, 439
廻轉半徑　166
——速度　49, 164, 178
——運動　164
——軸　172
還元因子　473
還流量　368
慣性 dyadic　451
——の法則　122
——能率　168, 452
——の主軸　169
慣性力　123
慣性乘積　452
完全 dyadic　433
完全な流體　352
共變　514
境界條件　324, 354
局部的變化　353
極平面　448
曲率　79
——半徑　80
——の中心　80
——圓　80
極性ベクトル　2
曲線坐標　266
共面ベクトル　15
共線ベクトル　15
强制力　124, 260
共軛 dyadic
球曲率　88
球面振子　146
——三角　65
球面調和函數　211

L

Lagrange 函數　296
——の方程式　294
——(流體)　475
Lamé 彈性常數　214
Lami の定理　10

Laplace の方程式　211, 212, 213, 274, 315
Laplace の記號　211
Lenz の法則　338
Lorentz の電磁場の式　339
Lorentz-Einstein 變換　435, 513

M

摩擦係數　144
マトリックス (matrix; matrice; Matrix; matrico)　462
Maxwell の式　340
面力　493
面積　4
面積分　98, 478
面積速度　118, 161
面狀 dyadic　434
源　373
濛氣差　201
向き　1
結びつき　377

N

Nabla 記號　191
流の路　357
流の線　366
內力　155
內積　404
粘る流體　352
熱傳導　225
Newton 第一法則　122
　　第二法則　121
　　第三法則　154
Neumann の積分　335
二次曲面　444
二重の源　376
二重乘積　450
能率　51

O

遅れたポテンシャル　347

P

Poinsot 楕圓體　455, 457
Poisson の方程式　253, 315, 343, 346
ポテンシャル (potential; potentiel; Potential; potencialo)　128, 129, 135, 193, 219, 259, 293, 306, 315, 361
Poynting ベクトル　347

R

Radial　7
螺旋　86
螺旋運動　166
零ベクトル　9
連續方程式　355
力積　124
輪廻順　45
立體角　246
率　14
六元ベクトル　514
流體の釣合　365
流出量　367

S

歲差　181
最小作用の原理　303
作用　302
　——の力　154
　——線 (點)　7
成分　2, 18
靜水壓　46, 352
積分方程式　482
斥力　136
線積分　97, 216, 477
線狀 dyadic　434

潜狀エネルギー　364
切線　77
切平線　199, 445
切觸圓　80
　——平面　82
　——球　88
節減係數　143
四元ベクトル　513
仕事　39, 125
質點　120, 280
　——組合　285
　——振子　145
Snellius の法則　51, 440
相互感應　335
相逆系　66, 195
束縛ベクルト　7
速度　101
　——ポテンシャル　371
相對運動　114
　——變位　114
　——速度　115
　——加速度　115
相對性原理　435, 511
Stokes の定理　228, 274, 278
スカラー (scalar, scalaire; Skalar; skalaro)　1, 12, 14
　——立方積　54
　——積　34
　——積の微分　74
斜交軸　42
小磁石　316
消失度　429
主法線　80
主慣性能率　171
瞬間軸　167
周轉圓運動　116

T

對稱的獨樂　176
Tait 及 McAulay の定理　233, 330
帶磁の强さ　318, 321
單位ベクトル　14, 23
單振動　138
單振子　145
Taylor の定理　76, 206
定常の流　370
轉回 (curl; rotation; Rotation; rotacio)　210, 227, 271- 278, 469
　——的　211, 235, 255
點函數　185
テンソル (tensor; tenseur; Tenor; tensoro)　421
力函數　291
　——の場　128
　——の保存系　130
　——の工率　126
　——の能率　51
　——の三角形　10
力の多邊形　11
　——の釣合　10
等壓面 (線)　186, 366
透過度　308, 321
等向線　186
等溫變化　353
等溫面 (線)　186
特異點　187
特性方程式　352
紡錘狀　211
傳はるホテンシャル　347
中心力　134

U

渦なしの運動　371
渦の糸　380, 384
渦の管　380
渦の組合　387
渦の線　367
渦の强さ　381

渦の運動 367
運動 99
——保存の法則 158, 162
——抗力 123
——の方程式 (剛體) 175
(流體) 360, 509
(彈性體) 500
——のエネルギー 126, 164, 165, 166, 293, 363, 454
——量 120

V

ベクトル (vector; vecteur; Vektor; vektoro) 1
——平行四邊形 8
——の微分 71
——の加減法 7
——の合成 7
——の率 9
——立方積 59
——積 43
——の積分 92
——ポテンシャル 315, 342

W

惑星の運動 116, 139

Y

容積膨脹率 214

Z

Zeeman 效果 352
全微分 194, 198, 207
前因子 393
全勢力 297
全垂直力 311
絕對值 14
磁媒極數 308, 321
磁位 307
磁殼 331
磁氣感應度 321
磁氣係數 321
——能率 316
——ポテンシャル 307
自己感應 336
自己共軛 dyadic 433, 434
自己相逆系 69
軸性ベクトル 2
自由度 280
自由ベクトル 6
磁場のエネルギー 328
——の强さ 307
準面 186
重心 26, 156, 158

昭和四年二月一日印刷
昭和四年二月五日第一刷發行

ベクトル解析

定價五圓

著者 伊藤德之助

東京市神田區南神保町十六番地
發行者 岩波茂雄

東京市本所區番場町四番地
印刷者 守岡功

東京市神田區南神保町
發行所 岩波書店
電話九段(33) 二一〇八番 二一〇九番
振替東京二六二四〇番

凸版印刷株式會社本所分工場

(大森製本)

Erectio

終