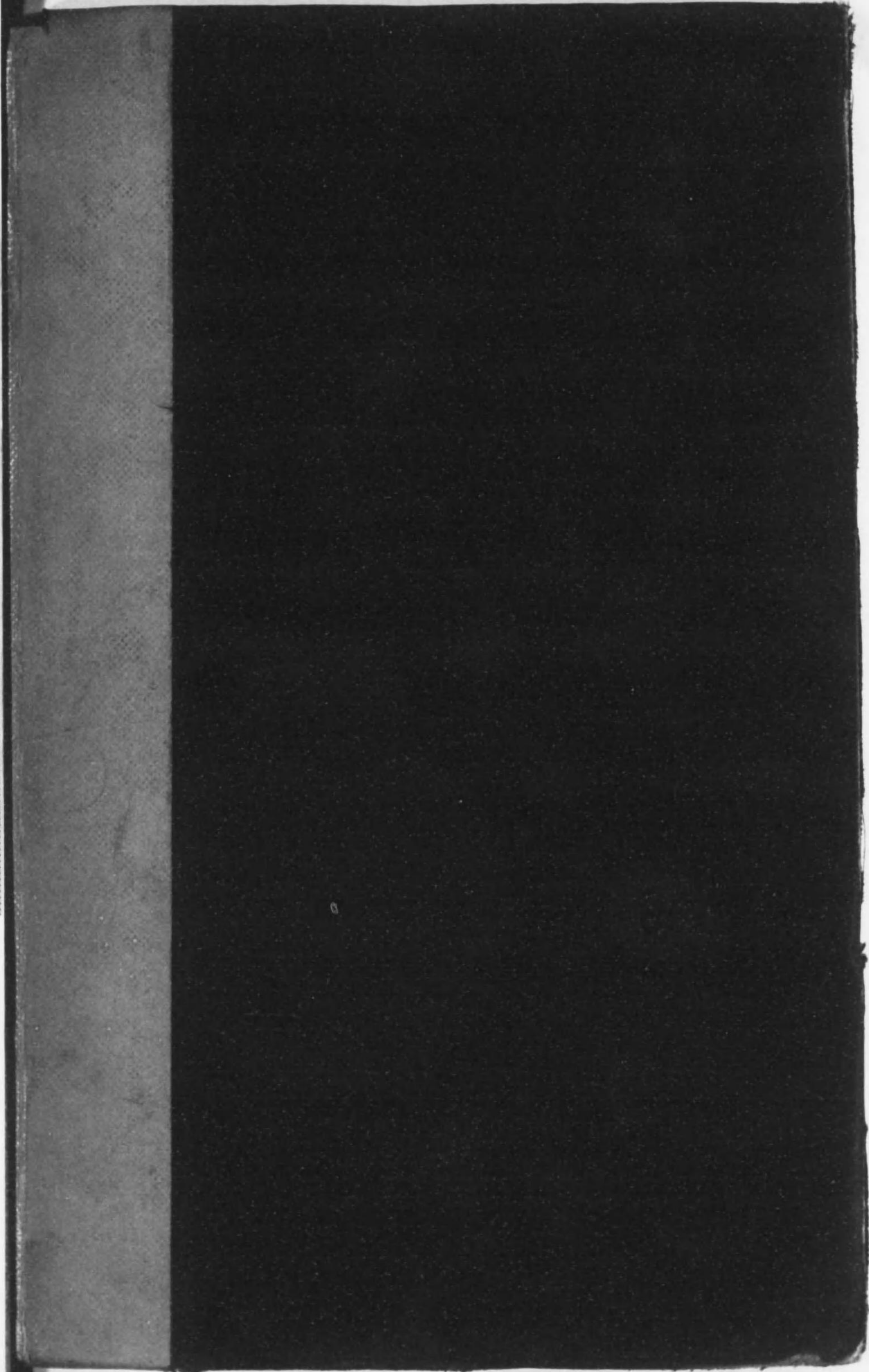




始



46
329

7/2

理學博士

本多光太郎監修

物理學叢書

第一

電子論





論

理學博士

三枝彦雄著



內田老鶴圃刊行

小 序

本書は、本多光太郎先生の監修の下に、先生の教を受けた人々に依つて書てられた、物理学叢書の一つである。現在我國に於ては物理学全般に亘つて統一された大學程度の書籍の刊行されたことを知らない。本叢書は、大學程度の學生の参考用として、又一般好學者の爲めに、上の如き意味の書を提供する目的で作られたものである。従つて本書に於ては、あまりに膨大となるを恐れて、割愛した部分が多々ある。特に實驗の方面に於て著しい。従つて電子論を十分に修めんとする人々には、本書緒言に於て引用してある書籍並に、最近獨逸伯林に於て發刊された Handbuch der Physik, Bd. 22, Elektronen und Atome Moleküle を参照されんことを希望する。又最近に於ける電子論の新しき發展の傾向、例へば、電子に磁氣能率を附加して種々の現象の考察に資する等に就ても、他日の機會に譲つたことを附記して置く。

本書は、著者が東北帝國大學理學部物理学教室の學生の爲めに講じた、原稿に依るものにして、殆んど講義の原稿その儘と言ふ可きも、少しく取捨を加へし個所

もある。従つて、読者は既に一般物理学及び電磁場論及びベクトル算法の一般を理解せるものとして、書いてある。されば少くとも、電磁場論及びベクトルの算法を一通り理解した上で、本書を読むことを勧める。

本書出版に際しては、内容の批判に、校正に、中村貴義君を煩はしたことが頗る多い。茲に特記して感謝の意を表するものである。又幾多の訂正を遺憾なくなし得たことを、内田老鶴圃の小熊元三君に感謝する。

昭和二年中秋 仙臺にて

著 者 識

目 次

緒 言

第一編 一個の電子の運動論

第一章	基礎の式	1
第二章	電磁氣的ポテンシャル	11
第三章	電子の力學	15
第四章	電子の等速直行運動	26
第五章	電磁氣的質量	49
第六章	ローレンツの電子とフツフェレルの電子	55
第七章	陰極線の振れ	67
第八章	加速度運動に於ける電子の電磁氣的ポテンシャル	81
第九章	電子の振動	103
第十章	光電効果	113

第二編 集合電子の運動論

第一章	物質内に於ける電子の分類	127
第二章	電導論	134
第三章	電導電子に依る諸現象	149

第四章	熱電子現象	161
第五章	電子に依る輻射エネルギーの吸収及び び發散	174
第六章	ゼーマン効果	187
第七章	シュタルク効果	202
第八章	分極電子の運動	210
第九章	光の分散	220
第十章	逆ゼーマン効果	228
第十一章	フアラデー効果	237
第三編 原子の構成論		
第一章	α 線の散亂とラザーホードの模型	243
第二章	ボアの模型	258
<hr/>		
索引		I

電 子 論

緒 言

電子論はラーマー¹、アブラハム²を経て、ローレンツ³に依つて完成されたものである。特にローレンツの功績大にして、1895年に發表された彼の論文は、自由電子と拘束電子とに依つて、總ての電磁氣現象を説明することを得て、電子論の基礎を堅く築いた。電子の存在は、ゼーゼートムソン⁴、カウフマン⁵、レナード⁶、ウキルソン⁷等に依つて、真空管放電の研究から、實驗的に確證された。

電子論は、ファラデーの實驗的研究から、マックスウェル並にヘルツの理論及び實驗的研究に依つて、作られた電磁氣論よりも、更に一層實際の問題に深く立ち入つて、これを構造的に、又模型的に論ずることが出来る點に於て、物理學進展の上に偉大なる貢獻をなした。されど近來原子模型に關する研究が旺盛となり、特に

1. J. Larmor, Aether and Matter, Cambridge, 1900.
2. M. Abraham, Theorie der Elektrizität und Magnetismus, Bd. 2.
3. H. A. Lorentz, The Theory of Electrons, Leipzig, 1909.
4. J. J. Thomson, Philo. Mag. vol. 46, 1898.
5. W. Kaufmann, Ann. d. Phys. Bd. 61, 1897; Bd 65, 1898.
6. P. Lenard, Ann. d. Phys. Bd. 65, 1898.
7. C. T. R. Wilson, Proc. Roy. Soc. London (A), vol. 61, 1897.

多線スペクトルの構造及びこれに関する諸現象の實驗的結果が相次いで現はれるに及んで、ローレンツの電子論には、著しく不備の點が現はれて來た。然し、電磁氣現象をマクロスコピックに又は現象論理的に考察する點に於て、決して無用の長物視す可きものではなく、電磁氣現象を理解する上に於て、相當に有力のものであることは、疑へないことである。

古くは、物質が現はす種々の現象を説明する爲めに、分子の假定を前提とした。そして原子論に及んで、物質の構造への曙光を見るに至つた。と同様に、電磁氣現象を説明する爲めに、電子を假定することは、豫想され得べきことであつて、かくして、遂に原子模型へと導いたことは、電子論の偉大なる功績と見るべきであらう。

電子の假定は、その根據を遠くファラデーの電氣分解の研究に置かれて居る。總ての物質の一化學當量を析出するに要する電氣量は一定にして、96540 クーロンである。一化學當量とは、一瓦中に含まれる原子數とその原子價との比である。されば、一價原子の物質がイオン化すれば、その一化學當量毎に上の値の電氣量を保有することとなる。そして、二價原子のものは、その二倍である。一價原子イオン一個が有する

電氣量を、電氣素量と名付けて居る。電子は負號の電氣素量を有する、極めて小なる粒子にして、其の電氣量は1919年ミリカンに依つて測定されたるものが、現在最も精密なるものとされ、 4.774×10^{-10} 靜電單位である。電子の質量は、1897年ゼーベートムソンの、陰極線の電場並に磁場に於ける振れの實驗から、電子の電氣量とその質量との比即ち $\frac{e}{m_0}$ の値を求めたものを最初として、その後多くの學者に依つて、放射能物質から放出されるβ線光電子及び熱電子等に依る實驗から、見出されて、現在最も精密なる値は $\frac{e}{m_0} = 5.304 \times 10^{17}$ 瓦靜電單位である。従つて、電子の質量は $m_0 = 9.0 \times 10^{-28}$ 瓦にして、水素原子の質量の $\frac{1}{1833}$ である。

1881年ゼーベートムソンに依り、1889年ヘビーサイドに依つて、帶電粒子の運動に関する理論的考察が行はれ、帶電粒子は通常の力學に従ふ重力的質量と電氣を有する爲めに慣性的質量を持つものであることが、結論された。後者は見掛けの質量又は電磁氣的質量と名付けられたものである。電子の存在が實證されるに及んで、その質量が如何なるものであるかに就ては、多くの人々の興味を喚起した。この問題は、先づ1902年アブラハムに依つて、電子の質量は、電子の運動の速度に依つて變化するのみならず、運動の方向に

依つて、電子はその慣性を異にすることから、縦質量と横質量が存在することが見出された。又1904年ローレンツに依つて、電子の質量は電磁氣的のものにして、運動の速度に關係すること、その縦質量及び横質量の値が、アブラハムのものとは、少しく異なるものであることが發表された。之等の質量に於ける諸性質は、カウフマン¹ (1901—1906)、ベステルマイヤー² (1907)、ブッフエレル³ (1909)、フブカ⁴ (1910)、ノイマン⁵等に依つて、實驗的に證明された。

電子は電氣素量を有し、上の如き電磁氣的質量を有するのみならず、これは原子を構成する所の物質の究極的構成要素であることが確認された。そして物質から發生される一般的輻射エネルギー、例へば光とか熱線の如きものは、總て電子の振動に依るものなることが知られた。現時量子論の考察に依つて、輻射エネルギーは電子の振動に依るものではなくして、電子の軌道の變化に依ると確證されたるも、兎に角に、電子に起因することは疑へない事實である。

1. W. Kaufmann, Ann. d. Phys. Bd. 19, 1906.
2. A. Bestermeyer, Ann. d. Phys. Bd. 22, 1907; Bd. 35, 1911.
3. A. H. Bucherer, Ann. d. Phys. Bd. 28, 1909.
4. E. Hupka, Ann. d. Phys. 31, 1910.
5. G. Neumann, Ann. d. Phys. Bd. 45, 1914

電子の名は、1891年ジョンストンストーン¹に依つて、命名されたのである。

1 J. Stoney, Proc. Dublin Soc. Vol. 4, 1891.



基礎の式

今電子一個が存在すると假定すれば、その周囲の空間には、一種の物理的性質が附與される。そして、その空間内に於て起る電磁氣現象に對して、マックスウエルの電磁氣現象に於ける基礎の式が成立すると、假定することが出来るであらう。この假定の可否は、本質的には不明なるも、一つの指導假説として見れば、差支へはない。そして、その假定の許に作られた、電磁氣的基礎の式が、その空間に於ける種々の電磁氣現象を、説明することが出来れば充分である。

今真空の空間に於て、電子に依つて作られる、電磁氣場に對して、マックスウエルの基礎の式を適用すれば、次の如き電子論に於ける基礎の式を得る。本論に於て使用する單位は、繁雜を避くる爲めに、ヘルツ、ヘビーサイドの單位を採用する。従つて、靜電單位に對して、

$\sqrt{4\pi}$ だけ小さいものである。

電子の作る磁場の強さを表はすベクトルを \mathbf{H} とし、電流の強さを \mathbf{k} とし、 c を光速とすれば、

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\mathbf{k}}{c}$$

が成立する。電流の強さは、これを二種に分つことが出来る、即ち變位電流と電導電流とである。今電子の作る電場の強さのベクトルを \mathbf{E} とし、電子の運動の速度のベクトルを \mathbf{v} とすれば、前者は $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ であり、後者は $\rho \mathbf{v}$ である。但し、 ρ は電子に於ける電荷の密度を表はす。従つて上式は次の如くなる。

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\rho \mathbf{v}}{c} \quad \text{I}$$

同様にして、

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad \text{II}$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho \quad \text{III}$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0 \quad \text{IV}$$

の基礎の式が成立することが知れる。

次に、電子の有する電荷の總量を、 e とすれば

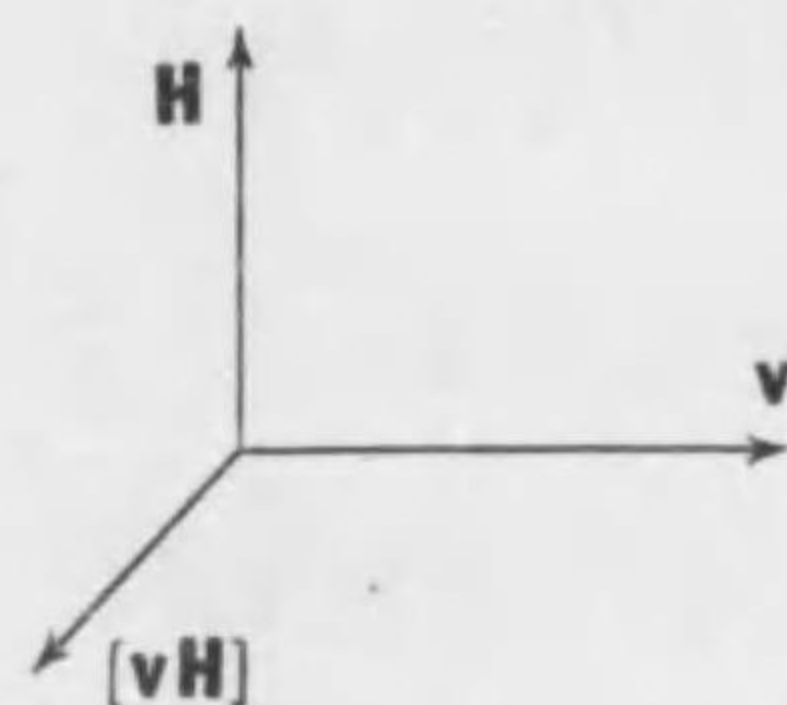
$$e = \int \rho dv$$

を以て表はされ、この値は一定である。

今電子に働く電磁氣場からの力も、亦普通の電荷に

働くものと同様であると假定すれば、電子が電磁氣場にある爲に、電場からの力と、電子が運動する爲めに、磁場からの力とを受ける。前者は電子の電荷の密度を ρ とすれば、 $\rho \mathbf{E}$ であり、後者は $\frac{\rho}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}]$ にして、 \mathbf{v}, \mathbf{H} のベクトル積と、電荷の密度 ρ との相乗積を、光速 c を以て除したものである。即ち第一圖に示す如き方向をとる。

第一圖



されば、電磁氣場に於て、單位電荷が \mathbf{v} の速度を以て運動するとき、これに働く力を \mathbf{f} とすれば、

$$\mathbf{f} = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \quad \text{V}$$

である。上の力の関係式は、

ローレンツガ電子論に於て、新しく意味付けたものである。

以上の I-V の五つの式は、電子論に於ける基礎の式と名付けるものにして、I-IV 迄の四式はマックスウェルの式を適用したるものであるが、V 式は電子論に於ける新しき意味の基礎の式である。

次に、上の基礎の式を用ひて、電子の作る電磁氣場に於ける諸量を求める。

ρ の電荷に働く力を \mathbf{F} とすれば、V 式から、

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\rho \mathbf{v}, \mathbf{H}]$$

$$= \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + \left[\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \mathbf{H} \right]$$

となる。又 II 式及 IV 式を用ひて、

$$0 = \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{H} + \left[\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \mathbf{E} \right]$$

を得る。

今上の二式を加へれば、

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + [\operatorname{rot} \mathbf{E}, \mathbf{E}] - \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \mathbf{H} \right] \\ + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{H} + [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}] + \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \mathbf{E} \right]$$

となり、この x 分をとれば、

$$\mathbf{E}_x \operatorname{div} \mathbf{E} + [\operatorname{rot} \mathbf{E}, \mathbf{E}]_x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{E}_x^2 - \mathbf{E}_y^2 - \mathbf{E}_z^2) \\ + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{E}_x \mathbf{E}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{E}_x \mathbf{E}_z), \\ \mathbf{H}_x \operatorname{div} \mathbf{H} + [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}]_x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{H}_x^2 - \mathbf{H}_y^2 - \mathbf{H}_z^2) \\ + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{H}_x \mathbf{H}_z)$$

となる。従つて、力の x 分は、

$$\mathbf{F}_x = \frac{\partial \mathbf{T}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{T}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{T}_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{g}_x}{\partial t} \quad 1$$

となる。但し、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_{xx} &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}_x^2 - \mathbf{E}_y^2 - \mathbf{E}_z^2) + \frac{1}{2} (\mathbf{H}_x^2 - \mathbf{H}_y^2 - \mathbf{H}_z^2) \\ \mathbf{T}_{xy} &= \mathbf{E}_x \mathbf{E}_y + \mathbf{H}_x \mathbf{H}_y \\ \mathbf{T}_{xz} &= \mathbf{E}_x \mathbf{E}_z + \mathbf{H}_x \mathbf{H}_z \\ \mathbf{g}_x &= \frac{1}{c} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]_x \end{aligned} \right\} 2$$

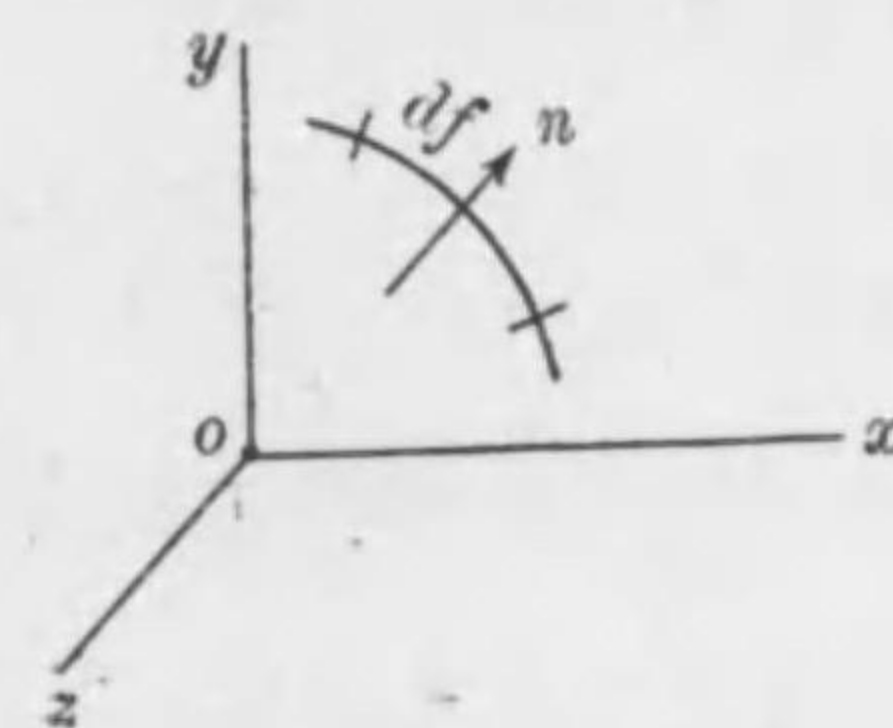
である。

されば、電子全部として、これに働く力の x 分は、v 式の x 分に電荷の密度 ρ を乗じて、電子全部に積分したるものにして、従つて、上の \mathbf{F}_x の式から、

$$\int \rho \mathbf{f}_x dv = \int \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{T}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{T}_{xz}}{\partial z} \right) dx dy dz - \int \frac{\partial \mathbf{g}_x}{\partial t} dv$$

となる。

第二圖



第二圖に示す如く、電子の微小表面 df をとり、其の表面に引いた、外に向ふ法線を n とすれば、

$$dy dz = df \cos (nx)$$

$$dz dx = df \cos (ny)$$

$$dx dy = df \cos (nz)$$

なる故、この関係を適用して、

$$\int \rho \mathbf{f}_x dv = \int \mathbf{T}_x df - \int \frac{\partial \mathbf{g}_x}{\partial t} dv$$

を得る。 y, z 分に對しても同様である。従つて、合成力に對して一般的に、

$$\int \rho \mathbf{f} dv = \int \mathbf{T} df - \int \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} dv \quad 3$$

のベクトル式を得る。即ち、電子に働く電磁氣場からの力は、表面積分に依るものと、體積積分に依るものと、二種類の分から作られて居る。

3式の右邊の第一項の表面積分内の \mathbf{T} は、表面張力を表はすものにして、次の如き九個の分を持つ。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_{xx} &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}_x^2 - \mathbf{E}_y^2 - \mathbf{E}_z^2 + \mathbf{H}_x^2 - \mathbf{H}_y^2 - \mathbf{H}_z^2) \\ \mathbf{T}_{xy} &= \mathbf{E}_x \mathbf{E}_y + \mathbf{H}_x \mathbf{H}_y = \mathbf{T}_{yx} \\ \mathbf{T}_{xz} &= \mathbf{E}_x \mathbf{E}_z + \mathbf{H}_x \mathbf{H}_z = \mathbf{T}_{zx} \\ \mathbf{T}_{yy} &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}_y^2 - \mathbf{E}_x^2 - \mathbf{E}_z^2 + \mathbf{H}_y^2 - \mathbf{H}_x^2 - \mathbf{H}_z^2) \\ \mathbf{T}_{yz} &= \mathbf{E}_y \mathbf{E}_z + \mathbf{H}_y \mathbf{H}_z = \mathbf{T}_{zy} \\ \mathbf{T}_{zz} &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}_z^2 - \mathbf{E}_x^2 - \mathbf{E}_y^2 + \mathbf{H}_z^2 - \mathbf{H}_x^2 - \mathbf{H}_y^2) \end{aligned} \right\} 4$$

この値は、電磁氣場に於けるマックスウエルの張力と同じものである。

3式の右邊の第二項は、マックスウエルの電磁氣論に於ては、力の関係式内に現はれざるものにして、

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \quad 5$$

の値を持つ一つのベクトルの、時間に對する偏微分係数の體積積分である。今、

$$\int \mathbf{g} dv = \mathbf{G}$$

と置き、3式に於て電子の體積が速度に無關係であるとするれば、 $\frac{\partial}{\partial t}$ は $\frac{d}{dt}$ に變へることが出来る。従つて、3式は、

$$\int \rho \mathbf{f} dv = \int \mathbf{T} df - \frac{d\mathbf{G}}{dt} \quad 6$$

となる。電子一個のみのときは、上の積分の體積を如

何程にも大きくとることが出来る。従つて、その表面を如何程にも大きくとれば、其の表面に於ける電磁氣場のベクトル、 \mathbf{E}, \mathbf{H} を、零にすることが出来る。夫故に、上式の右邊の第一項は零となり。

$$\int \rho \mathbf{f} dv = - \frac{d\mathbf{G}}{dt}$$

となる。即ち、無限に擴き空間に於て、電子に働く力は、 \mathbf{G} のベクトルの時間的減少の割合に等しくなる。今、電子を一つの物體として、それが上の如き運動をなすとするれば、その機械的運動量の時間的變化の割合は、それに働く力に等しきが故に、上式は、

$$\frac{d\mathbf{G}^{(m)}}{dt} = - \frac{d\mathbf{G}}{dt}$$

となる。 $\mathbf{G}^{(m)}$ は機械的運動量のベクトルである。従つて、上式は、

$$\mathbf{G}^{(m)} + \mathbf{G} = \text{const.} \quad 7$$

となる。上の關係を、物體の運動に於ける運動量保存の法則を表はすものとするれば、上式の \mathbf{G} は、電磁氣的運動量を表はすこととなる。

既に述べたる如く、電子が \mathbf{v} なる速度を以て運動すれば、これに働く力は、 $\int \rho \mathbf{f} dv$ である。従つて、この力に依つて、單位時間になされる仕事の量は、

$$\int \rho \mathbf{f} \mathbf{v} dv = \int \rho \left(\mathbf{E} \mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) dv$$

を以て表はされる。上式の右邊の第二項, $\mathbf{v}[\mathbf{v}\mathbf{H}]$ は常に零となるが故に, I式を用ひて,

$$\int \rho \mathbf{f}\mathbf{v} dv = \int c \left(\mathbf{E}, \text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) dv$$

となる。又, II式を用ひて,

$$0 = - \int c \left(\mathbf{H}, \text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) dv$$

を得る。されば, 上の二式を相加へて,

$$\begin{aligned} \int \rho (\mathbf{f}\mathbf{v}) dv &= c \int (\mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E}) dv - \int \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) dv, \\ &= -c \int [\mathbf{E}, \mathbf{H}]_n df - \frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) dv \end{aligned}$$

を得る。上式に於て, df は電子を圍む表面の微小面積を表はし, n を附したるは, その外方に向く法線の方角の分を表はす。今, 單位時間になす仕事の量を, $\frac{dA}{dt}$ と置けば,

$$\frac{dA}{dt} = -c \int [\mathbf{E}, \mathbf{H}]_n df - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) dv$$

となる。

次に,

$$\mathbf{S} = c[\mathbf{E}, \mathbf{H}] \quad 8$$

$$W = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) dv \quad 9$$

と置けば, 上式は,

$$\frac{dA}{dt} = - \int \mathbf{S}_n df - \frac{\partial W}{\partial t}$$

となる。

W は電磁氣的エネルギーを表はし, A は機械的エネルギーを表はす。上式に於て, $-\mathbf{S}_n$ はベクトル \mathbf{S} の n 分に等しく, その方向反對にして, 電子の表面の單位面積を通じて, 電子内に入るエネルギーの流れである。従つて, \mathbf{S} のベクトルは, ポインティングベクトルを表はす。

第三圖



今, 電子を圍む積分の表面を, 無限に擴大するものとするれば, その表面上に於ける, \mathbf{E}, \mathbf{H} のベクトルを零にすることが出来る。従つて, 上式の右邊の第一項の積分は零となり,

$$\frac{dA}{dt} = - \frac{dW}{dt} \quad 10$$

を得る。即ち,

$$A + W = \text{const.} \quad 10'$$

の關係を得る。上式はエネルギー保存の法則を表はす。

5, 8式から,

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}$$

の關係を得る。今, 真空内を光が進行する場合を考へ, その電磁氣場に於て, $|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|$ であるとするれば,

$$|\mathbf{S}| = c|\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{H}| \sin(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = c\mathbf{E}^2 = c\mathbf{H}^2$$

となり、従つて

$$|\mathbf{g}| = \frac{1}{c} \mathbf{E}^2 = \frac{1}{c} \mathbf{H}^2$$

となる。夫故に、単位體積のエネルギーは、

$$W = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) = \mathbf{E}^2 = \mathbf{H}^2 \\ = c |\mathbf{g}|$$

となる。又、単位時間に持來される光の運動量は、光速 c を軸の長さとし、單位の面積を底とする圓筒内に含まれる部分である。即ち光は、單位面積に、單位時間に、 $c|\mathbf{g}|$ なる運動量を與へることとなる。されば、單位時間に、單位面積毎に、光が與へる電磁氣的運動量は、單位體積内に於ける電磁氣的エネルギーに等しい。此の運動量は光の壓力として、現はれるものである。

今、光の進行を、質點が進行し來るものと同當であると、假定すれば、その運動量は、その速度と質量との積に等しき故、光の質量を相當的に μ を以て表はすものとすれば、

$$|\mathbf{g}| = \mu c = \frac{\mathbf{E}^2}{c}$$

と置くことが出来る。即ち、

$$\mu = \frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2 = \frac{W}{c^2}$$

となる。 μ を、光の電磁氣的質量と名付けて居る。

第二章

電磁氣的ポテンシャル

電子の運動を考ふる最初の時間に於て、その空間に於ける電磁氣場が與へられ、其後時間の経過と共に、電子の位置とその速度とが與へられれば、電子の周圍の空間に於ける電磁氣場の有様は、基礎の式 I-IV の積分として見出される筈である。

電子の周圍の電磁氣場が、時間に對して定常的であるとすれば、電磁氣場のベクトルは定常値を保ち、電場は磁場に無關係に、靜電場として求められる。されど、電磁氣場が時間の経過と共に變化する場合であれば、電場と磁場とは、無關係ではなくして、その間に相互作用を持つものである。

電流が存在するときは、それに依つて、その周圍に磁場が作られる。電場が靜電的ポテンシャルから求められることに相當せしめて、磁場は或る補助のベクトルから求められるものと、假定すれば、磁場のベクトルは、磁源を持たざる爲めに、

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$$

11

と置くことが出来る。 \mathbf{A} はベクトルポテンシャルに

して、電流から求められる筈のものである。

上式を基礎の式 II に代入すれば、

$$\text{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$

となる。即ち、

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\phi$$

と置くことが出来る。φ は後に定められる、スケーラ-量である。上式を書き換へれば、

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad 12$$

となる。従つて、電磁氣場が定常的であるとすれば、上式の右邊の第二項は零となり、

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

となる。φ は静電氣的ポテンシャルを表はす。上の φ, **A** を電磁氣的ポテンシャルと名付けて居る。

次に φ, **A** の間の關係を求める。

基礎の式 I に 11, 12 式を代入すれば、I 式は次の如くなる。

$$\text{rot rot } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla\phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho \mathbf{v}}{c}$$

上式の x 分をとれば、

$$\text{rot}_x(\text{rot } \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial y} (\text{rot } \mathbf{A})_z - \frac{\partial}{\partial z} (\text{rot } \mathbf{A})_y$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial z} \right) \\ &\quad - \frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial x} \right) \\ &= -\nabla^2 \mathbf{A}_x + \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \mathbf{A}) \end{aligned}$$

となる。従つて、一般的に、

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\text{div } \mathbf{A})$$

となる。夫故に、

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} \right) = \frac{\rho \mathbf{v}}{c} \quad 13$$

を得る。

次に、基礎の式 III に、12 式を代入すれば、

$$-\text{div} \left(\nabla\phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \rho$$

となり、 $\text{div}(\nabla\phi) = \nabla^2\phi$ の關係を用ひて、上式は、

$$-\nabla^2\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{A}) = \rho \quad 14$$

となる。

13, 14 式は、ρ, **A** を決定する關係式である。即ち、13 式に於て、

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} = 0 \quad 15$$

と置けば、13 式は、

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\rho \mathbf{v}}{c} \quad 16$$

となり、従つて、14 式は、

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = \rho \quad 17$$

となる。この三式から、電磁氣的スケーラーポテンシャル φ 、及び、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} を決定し、併せて、その間の関係を、求むることが出来る。上式が示す如く、電子の周囲の空間に於ける電磁氣場が、時間に對して定常的であるとすれば、 φ, \mathbf{A} の時間に對する偏微分係数は總て零となり、従つて、上の三つの式から、

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{\rho \mathbf{v}}{c}, \quad \nabla^2 \varphi = -\rho$$

を得る。最初の式は、ベクトルポテンシャルが満足する條件にして、第二式は、定常電磁氣場に於ては、 \mathbf{A} は電導電流から求められることを示し、第三式は、靜電場に於けるポテンシャルが満足すべき關係式である。

第三章

電子の力學

運動にある電子は、電磁氣的運動量を有し、従つて、電磁氣的質量を有することは、既に述べた。されど、運動にある電子の質量が、總て電磁氣的のもののみであるか、又はその外に、機械的質量をも共有して居るかは、不詳である。されど、普通の力學に於て取扱ふ所の機械的質量は、その質點の運動には無關係である筈である。然るに、電子の運動に關する實驗、例へば、陰極線、放射能物質からの β 線等に依る實驗結果¹に依れば、電子の質量は、その速度に依つて變化することを示して居る。然も、その結果は理論的に求めたものと、よく一致することから見れば、電子の質量は總て電磁氣的のものと、考へられる。

夫故に、本論に於ては、電子の質量は總て電磁氣的のもののみであるとして、電子の運動を考究することにする。

電子が運動するとき、之れに働く力は、二つの部分か

1. 緒言第一頁に於ける著書及び論文、又は第四頁の脚註にある論文を参照すべし。

ら成るものと考へることが出来る。

其の第一は、電子以外の電磁氣場からの力にして、これを外力と呼び、 f^a を以て表はす。

其の第二は、電子自身を作る電磁氣場からの力にして、これを内力と呼び、 f を以て表はす。

力に對する重合の法則が成立するものと假定すれば、電子に働く全力は、上に述べたる外力と内力との和を以て表はすことが出来る。今、外力 f^a を生ずる電磁氣場のベクトルを、 E^a, H^a とし、内力 f を生ずる電磁氣場のベクトルを、 E, H とする。又、電磁氣場のベクトルに對しても、重合の法則が成立するものと考へ得るが故に、全電場のベクトルは、 $E^a + E$ となり、全磁場のベクトルは、 $H^a + H$ となる。又、外力及び内力は、基礎の式 v に依つて、單位電荷に對して、

$$f^a = E^a + \frac{1}{c} [v, H^a] \quad 18$$

$$f = E + \frac{1}{c} [v, H] \quad 19$$

として表はされる。但し、 v は電子の速度を表はす。

電子の力學を純粹に電磁氣的に考察する爲めには、電子に働く力は、上に述べた力以外には、他に何等の力も働くことを許されない。従つて、上の二力は、如何なる場合に於ても、常に釣合にある必要がある。今、電子

の電荷の密度を ρ とすれば、

$$\int dv \rho (f + f^a) = 0 \quad \text{VI}$$

なる關係が成立することを必要とする。又上の全力の能率も、零なることを必要とする。即ち、

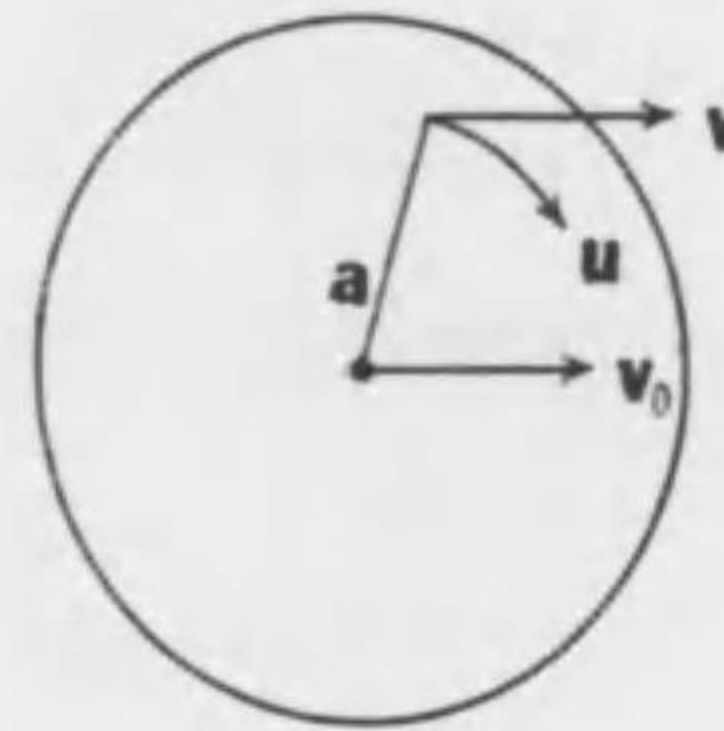
$$\int dv \rho [r, f + f^a] = 0 \quad \text{VII}$$

である。上式に於て、 r は合力の作用點から、電荷の中心點迄の距離を表はす。

電子は靜止状態に於て、一定の形狀を有する筈である。これを如何にとる可きかは、不明にして、假想された形狀に依る理論的結果が、實驗結果と一致すれば、宜しい。最も簡単に考へられるのは、球形である。されば、本論に於ては、電子が靜止状態に於ける形を、球状と假定して、考究することにする。

電子の靜止形を球とすれば、その一般的運動に於ては、進行運動と廻轉運動とが、共存する筈である。

第四圖



第四圖に示す如く、電子の中心の進行運動の速度を v_0 とし、これから a の距離にある點の、中心と同方向の進行運動の速度を v とし、この點の中心に對する廻轉運動の速度を u とすれば、次の關係を得る。

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\mathbf{u}, \mathbf{a}] \quad \text{VIII}$$

VI—VIII は, V 式と共に, 電子の力學に於ける運動的基礎の式にして, 電子の力學は, 以上の基礎の式と, 既に述べたる, I—V の基礎の式を適用することに依つて, 満足に攻究することが出来る。

アブラハムに依れば, 電子を球狀の剛體と假定するとき, 上の基礎の式を満足する力學は, 普通の力學に於ける剛體の力學と, 同様の結果に到達するのである。勿論電子は, その表面に又は體積内に, 電荷が一様に分布された, 均等的球狀荷電體と考ふるのである。本章に於ては, アブラハムの電子に就て, その力學を述べる。

今, 電子に働く全外力を \mathbf{K}^a とすれば,

$$\mathbf{K}^a = \int \rho \mathbf{f}^a dv = \int \rho \left\{ \mathbf{E}^a + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}^a] \right\} dv \quad 20$$

を以て表はされる。此の力は, 中心の進行運動を起す力であるとするれば, この外に廻轉運動を起す力 \mathbf{R}^a がある筈である。即ち,

$$\mathbf{R}^a = \int \rho [\mathbf{a}, \mathbf{f}^a] dv = \int \rho \left[\mathbf{a}, \mathbf{E}^a + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}^a] \right] dv \quad 21$$

を以て表はれる。

今, 電子の電荷の分布は, 中心に對して對稱的であると假定すれば,

$$\int \rho \mathbf{a} dv = 0 \quad 22$$

の關係が成立する。

電子の運動が進行運動のみであるとすれば, 廻轉運動の速度 \mathbf{u} は零となり, VIII 式を用ひて, 20 式は次の如くなる。

$$\mathbf{K}_1^a = \int \rho \mathbf{E}^a dv + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0, \int \rho \mathbf{H}^a dv]$$

電子の内部に於ける, 外部電磁氣場の部分は, 一定と考へられるが故に, 上式は次の如くなる。

$$\mathbf{K}_1^a = e \left\{ \mathbf{E}^a + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0, \mathbf{H}^a] \right\} \quad 23$$

そして, 廻轉運動を起す力, \mathbf{R}_1^a は零となることは勿論である。

次に, 電子の運動が, その中心に對する廻轉運動のみであるとすれば, 力の式に入るものは, 磁場のベクトルのみにして, 従つて, 21 式は,

$$\mathbf{R}_2^a = \frac{1}{c} \int \rho [\mathbf{u}, \mathbf{a}] (\mathbf{a}, \mathbf{H}^a) dv = \frac{1}{c} \left[\mathbf{u}, \int \rho \mathbf{a} (\mathbf{a}, \mathbf{H}^a) dv \right]$$

となる。今この値を一般に,

$$\mathbf{R}_2^a = \alpha [\mathbf{u}, \mathbf{H}^a] \quad 24$$

と置けば, α は常數にして, 次の如き値を持つ,

$$\text{體積荷電電子に對して} \quad \alpha = \frac{ea^2}{5c}$$

$$\text{表面荷電電子に對して} \quad \alpha = \frac{ea^2}{3c}$$

但し, a は球狀電子の半徑を表はし, c は光速である。

20, 21 式を適用すれば, 基礎の式, VI, VII は次の如くなる。

$$\mathbf{K}^a + \int \rho \mathbf{f} dv = 0 \quad 25$$

$$\mathbf{R}^a + \int \rho [\mathbf{r}, \mathbf{f}] dv = 0 \quad 26$$

上の二式は、電子の力學に於ける、運動の式を表はし、 \mathbf{f} は電子自身を作る電磁氣場からの力である。

次に電子の准定常運動に於ける、運動の式を求める。電子の全運動量は、

$$\mathbf{G} = \int \mathbf{g} dv$$

であり、廻轉運動量は、

$$\eta = \int [\mathbf{r}, \mathbf{g}] dv$$

を以て與へられる。又全内力は、運動量の時間的減少の割合に等しきが故に、次の關係式が成立する。

$$\mathbf{K} = \int \rho \mathbf{f} dv = - \frac{d\mathbf{G}}{dt}$$

今、 η の時間に對する微係數を作れば、

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{d}{dt} \int [\mathbf{r}, \mathbf{g}] dv = - [\mathbf{v}_0, \mathbf{G}] + \int \left[\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right] dv$$

となる。但し $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{v}_0$ である。上式の右邊の第二項は、瞬間的に空間に固定する點に對する、廻轉運動の運動量の時間的變化を表はす。今、これを、

$$\mathbf{R} = - \int \left[\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right] dv$$

と置けば、 $\frac{d\eta}{dt}$ の式から、

$$\mathbf{R} = \int \rho [\mathbf{r}, \mathbf{f}] dv = - [\mathbf{v}_0, \mathbf{G}] - \frac{d\eta}{dt}$$

を得。従つて、25, 26 式から、

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{K}^a \quad 27$$

$$\frac{d\eta}{dt} + [\mathbf{v}_0, \mathbf{G}] = \mathbf{R}^a \quad 28$$

の關係式を得る。上の二式は、電子を剛體として取扱つた場合の、運動の式である。

次にエネルギーの關係を求める。

電子自身の作る電磁氣場に依る、エネルギーは、

$$W = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) dv$$

にして、既に述べたる結果に依つて、上のエネルギーの時間的變化は、單位時間になされる仕事に等しく、

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{dA}{dt}$$

の關係が成立する。今、 $\frac{dA}{dt}$ を變形すれば、

$$\frac{dA}{dt} = \int \rho (\mathbf{v}, \mathbf{f}) dv = (\mathbf{v}_0, \int \rho \mathbf{f} dv) + (\mathbf{u}, \int \rho [\mathbf{r}, \mathbf{f}] dv)$$

となる。従つて、25, 26 式に依つて、次の如く書くことが出来る。

$$\frac{dA}{dt} = - (\mathbf{v}_0, \mathbf{K}^a) - (\mathbf{u}, \mathbf{R}^a)$$

即ち、

$$\frac{dW}{dt} = (\mathbf{v}_0, \mathbf{K}^a) + (\mathbf{u}, \mathbf{R}^a) \quad 29$$

となる。又 27, 28 式に依つて, 上式は次の如くなる。

$$\frac{dW}{dt} = \left(\mathbf{v}_0, \frac{d\mathbf{G}}{dt} \right) + \left(\mathbf{u}, \frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} \right) + (\mathbf{G}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}_0]) \quad 30$$

上の関係は, 外力に依る仕事は, 内力に依る仕事に等しきことを示すものにして, 29, 30 式はエネルギー保存の法則を表はす。

次に, ラグランジュの函数を求める。

今, 普通の力學に於けると同様に, ラグランジュの函数を L とし, 次の如く置く,

$$L = T - U$$

T は運動のエネルギーにして, U はポテンシャルエネルギーである。電子力學に於ては, 前者に磁氣のエネルギーを, 後者に電氣のエネルギーを, 相當せしめる。

即ち,

$$T = \frac{1}{2} \int \mathbf{H}^2 dv = \frac{1}{2} \int (\mathbf{H}, \text{rot } \mathbf{A}) dv$$

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{E}^2 dv = -\frac{1}{2} \int \left(\mathbf{E}, \nabla \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dv$$

となる。上の関係を, ベクトルの計算に依つて, 變形すれば,

$$T = \frac{1}{2c} \int (\rho \mathbf{v}, \mathbf{A}) dv + \frac{1}{2c} \int \left(\mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) dv$$

となり,

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dv - \frac{1}{2c} \int \left(\mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dv$$

となる。

次に,

$$\psi = \varphi - \frac{1}{c} (\mathbf{v}, \mathbf{A}) \quad 31$$

と置き, ψ なるスケーラーを導入し,

$$V = \frac{1}{2} \int \rho \psi dv$$

を作れば, V は力學に於ける力の函数を表はし,

$$V = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dv - \frac{1}{2c} \int (\rho \mathbf{v}, \mathbf{A}) dv$$

となる。従つて, ラグランジュの函数は,

$$L = -V + \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2c} (\mathbf{E}, \mathbf{A}) dv \quad 32$$

となる。

次に, ラグランジュの函数に變化を與へれば,

$$\delta L = \delta T - \delta U$$

となり, 従つて, 次の如くなる。

$$\delta T = \delta \int \frac{1}{2} \mathbf{H}^2 dv = \int \mathbf{H} \text{rot} (\delta \mathbf{A}) dv$$

$$\delta U = \delta \int \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 dv = \int \mathbf{E} \delta \mathbf{E} dv$$

基礎の式, I, II を用ひて, 上式は,

$$\delta T = \frac{1}{c} \int \left(\rho \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \delta \mathbf{A} dv$$

$$\delta U = - \int \mathbf{E} \left(\nabla \delta \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{A} \right) dv$$

となる。又, δU を變形すれば, 次の如くなる。但し,

$\int \operatorname{div}(\mathbf{E}\varphi) dv = 0$ を適用して居る。

$$\delta U = \int (\operatorname{div} \mathbf{E} \delta \varphi) dv - \frac{1}{c} \int \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{A} dv$$

基礎の式, III を用ひて, 變化すれば,

$$\delta T - \delta U = - \int \rho \left(\delta \varphi - \frac{(\mathbf{v}, \delta \mathbf{A})}{c} \right) dv + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int (\mathbf{E}, \delta \mathbf{A}) dv$$

となる。上式を時間に對して, t_0 から t 迄積分して,

$$\int_{t_0}^t \delta(T - U) dt = - \int_{t_0}^t dt \int \rho \left(\delta \varphi - \frac{(\mathbf{v}, \delta \mathbf{A})}{c} \right) dv + \left[\frac{1}{c} \int (\mathbf{E}, \delta \mathbf{A}) dv \right]_{t_0}^t$$

t_0, t に於て, $\delta \mathbf{A} = 0$ とし, 電荷の密度 ρ 及び速度 \mathbf{v} は, 時間に對して一定であるとすれば, 上の關係は次の如くなる,

$$\int_{t_0}^t \delta(T - U) dt = - \delta \int_{t_0}^t dt \int \left(\rho \varphi - \frac{\rho(\mathbf{v}, \mathbf{A})}{c} \right) dv$$

今, 上の關係がハミルトンの定常作用の法則を満足するものと假定すれば, 上式は次の如くなる。

$$- \delta \int_{t_0}^t dt \int \left(\rho \varphi - \frac{\rho(\mathbf{v}, \mathbf{A})}{c} \right) dv = 0$$

従つて, ラグランジュの動ポテンシャルは,

$$L = - \rho \varphi + \frac{\rho(\mathbf{v}, \mathbf{A})}{c} \quad 33$$

となる。

L の値が正しき意義を持つことを示す爲めに, 今, ラグランジュの運動の式から, 電子に働く力を求める。ラグランジュの運動の式に於て, その x 分をとれば,

$$\mathbf{K}_x = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_x} \right)$$

となる。33式のLの値を用ひて,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\rho}{c} \mathbf{v}_x \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial x} + \frac{\rho}{c} \mathbf{v}_y \frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial x} + \frac{\rho}{c} \mathbf{v}_z \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_x} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho}{c} \mathbf{A}_x \right)$$

$$= \frac{\rho}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial t} + \mathbf{v}_x \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial x} + \mathbf{v}_y \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial y} + \mathbf{v}_z \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial z} \right)$$

を得る。上の値を \mathbf{K}_x の右邊に代入して, 變形すれば,

$$\mathbf{K}_x = \rho \mathbf{E}_x + \frac{\rho}{c} (\mathbf{v}_y \operatorname{rot}_z \mathbf{A} - \mathbf{v}_z \operatorname{rot}_y \mathbf{A})$$

$$= \rho \mathbf{E}_x + \frac{\rho}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}]_x$$

を得る。

上の \mathbf{K}_x は, 電磁氣的内力の x 分を表はす。従つて, 普通の力學に於けるラグランジュの函數に相當する函數が, 普通の力學に於けると同様に, ハミルトンの原理から求められ, 更にその函數は, ラグランジュの運動の式を満足して, 電子に働く力として電磁氣的力を與へることを示す。この關係は, 最初にシュワルツシルドに依つて求められたものである。そして, 上のLの値を電磁氣的動ポテンシャル¹と名付けた。

1. Kinetic Potential, Kinetische Potentiale.

第四章

電子の等速直行運動

電子が等速直行運動にあるとし、その周囲の全電磁氣場は、定常状態にあると假定する。これは、電子が既に長時間等速直行運動を繼續して居たものとすれば、それ以前に於ける運動の變化に伴ふ、周囲の電磁氣場の變化は、現在の周囲の空間には何等の影響をも残さない。従つて、電子の周囲の電磁氣場は、完全に定常状態にあると考へることが出来る。

電磁氣場が定常状態にあるために、

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0 \quad 34$$

の關係が、電磁氣的ポテンシャルの間に存在する。

今、電子は x の方向に \mathbf{v} の速度を以て、等速直行運動を行つて居るとする。周囲の電磁氣場が、電子と共に運動して居るときは、電磁氣的ポテンシャル、 φ 、 \mathbf{A} は時間に無關係となる。又、電子の速度 \mathbf{v} は、光速 c よりも小なるものであるとする。若し、電子の速度が光速 c に等しきときは、電子の周囲の電磁氣場は、定常状態に到達し得られざることが首肯される。

上の定常状態の關係式を變形すれば、次の如くなる。

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{v}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{v}_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{v}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v}_x \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} + \mathbf{v}_y \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} + \mathbf{v}_z \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z} = 0$$

電子の速度 \mathbf{v} は、次の如く置くことが出来る。

$$\mathbf{v}_x = |\mathbf{v}| = c\beta, \quad \beta = \frac{\mathbf{v}_x}{c} = \frac{|\mathbf{v}|}{c}$$

$$\mathbf{v}_y = \mathbf{v}_z = 0$$

但し、 c は光速である。又、 $\mathbf{v}_y = \mathbf{v}_z = 0$ なる故、 $\mathbf{A}_y = \mathbf{A}_z = 0$ 、にして、 $\mathbf{A}_x = |\mathbf{A}|$ 、となる。従つて、上の定常状態の關係式は次の如くなる。

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{v}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial\mathbf{A}_x}{\partial t} + \mathbf{v}_x \frac{\partial\mathbf{A}_x}{\partial x} = 0$$

次に、上式を變形して、

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -c\beta \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\mathbf{A}_x}{\partial t} = -c\beta \frac{\partial\mathbf{A}_x}{\partial x}$$

を得る。されば、 φ 、 \mathbf{A} の時間に對する二次の微係数は

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -c\beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) = c^2\beta^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}_x}{\partial t^2} = -c\beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\mathbf{A}_x}{\partial t} \right) = c^2\beta^2 \frac{\partial^2\mathbf{A}_x}{\partial x^2}$$

となる。上の値を、第二章の 16, 17 式に代入すれば、16, 17 式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} (1-\beta^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= -\rho \\ (1-\beta^2) \frac{\partial^2 \mathbf{A}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}_z}{\partial z^2} &= -\rho\beta \end{aligned} \right\} 35$$

従つて,

$$\mathbf{A}_x = \beta\varphi \quad 36$$

の關係を得る。

今、第二章の 11, 12 式を用ひて、電子の周圍に於ける電磁氣場のベクトルの x, y, z 分を求むれば、

$$\mathbf{E}_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} (1-\beta^2)$$

$$\mathbf{E}_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\mathbf{E}_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\mathbf{H}_x = \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial z} = 0$$

$$\mathbf{H}_y = \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial x} = \beta \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\beta \mathbf{E}_z$$

$$\mathbf{H}_z = \frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial y} = -\beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \beta \mathbf{E}_y$$

を得る。従つて、一般的に、

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{E}] \quad 37$$

となる。即ち、磁場のベクトルは、電子の速度と電場のベクトルとの、ベクトル積を、光速を以て除したものと、與へられる。

次に、電子に働く力を求める。

基礎の式 v に於て、 x, y, z 分を求むれば、

$$\mathbf{f}_x = \mathbf{E}_x + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_y \mathbf{H}_z - \mathbf{v}_z \mathbf{H}_y) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} (1-\beta^2)$$

$$\mathbf{f}_y = \mathbf{E}_y + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_z \mathbf{H}_x - \mathbf{v}_x \mathbf{H}_z) = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} (1-\beta^2)$$

$$\mathbf{f}_z = \mathbf{E}_z + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_x \mathbf{H}_y - \mathbf{v}_y \mathbf{H}_x) = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} (1-\beta^2)$$

となる。今、次の如く置けば、

$$\varphi (1-\beta^2) = \psi \quad 38$$

力の式を参照して、

$$\mathbf{f} = -\nabla \psi \quad 39$$

の關係を得る。この ψ を、コンベクションポテンシャルと名付けて居る。上の置換から知られる如く、 ψ は電磁氣的スケーラーポテンシャル φ と同様の關係式を満足するものである。

今、35 の第一式に、38 の關係を代入すれば、

$$(1-\beta^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -(1-\beta^2) \rho$$

を得る。次に、座標軸の變換を行ひ、又電荷の密度を次の如く置けば、

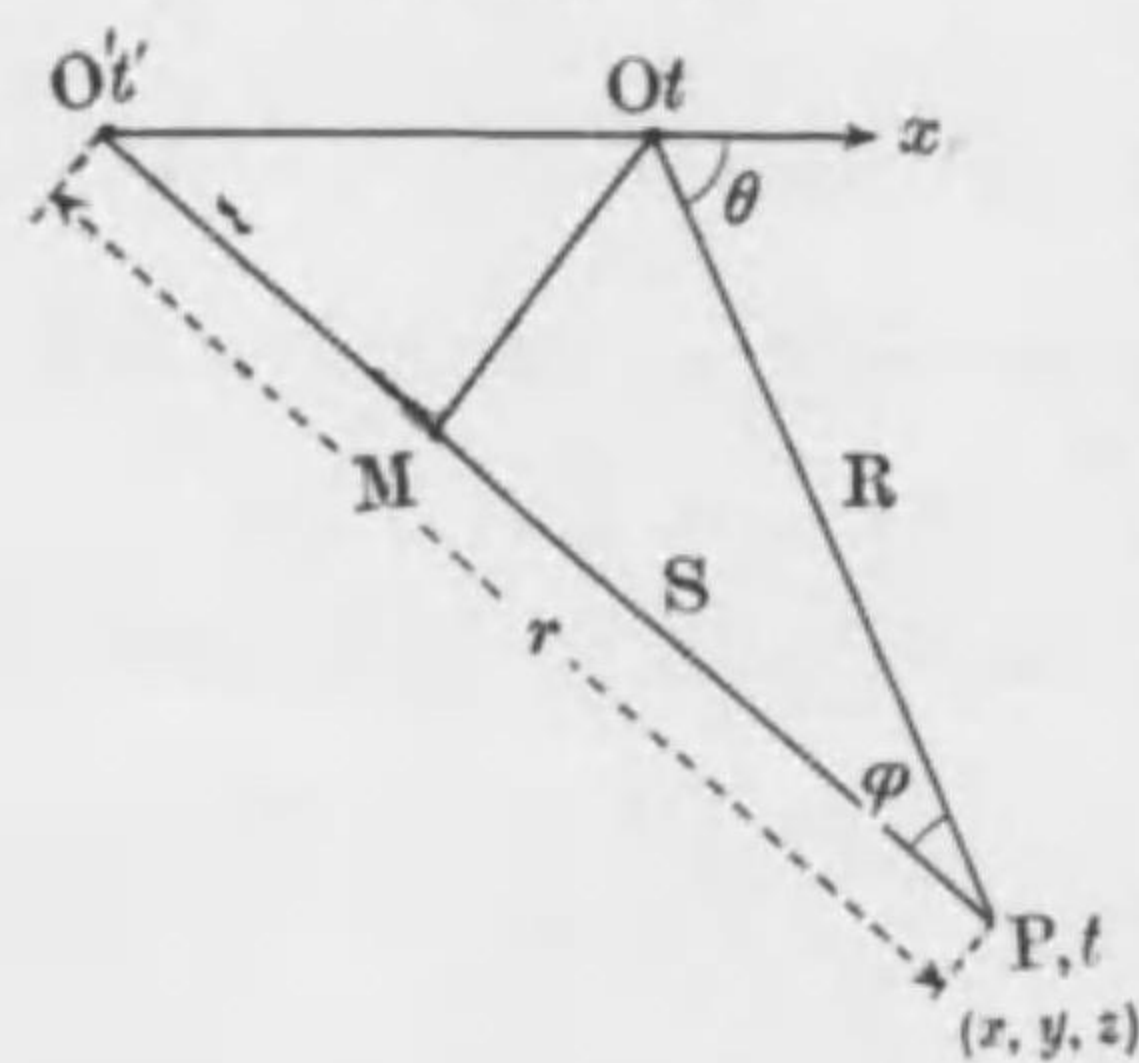
$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{1-\beta^2} x', \quad y = y', \quad z = z' \\ \rho &= \frac{\rho'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned} \right\} 40$$

上式は、次の如くなる。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\rho' \sqrt{1-\beta^2} \quad 41$$

上式は、静電場に於けるポアソンの式に相當するものにして、電荷密度 ρ の代りに、 $\rho' \sqrt{1-\beta^2}$ を代用するものである。上式が示す如く、電子が等速直行運動をなすときは、スケーラーポテンシャル ϕ の代りに、 ψ をとり、40の關係の如き座標軸の變換を行へば、静電場に於けると同様の關係式が求められる。

第五圖



40,41式の意義を理解し易くする爲めに、運動にある電子からの電磁氣擾亂が、如何に空間を進み行くかを考究する。

今、時刻 t' に於て、 O' にある電子が、 x の方向に v の等速度を以て進み、時刻 t に於て、 O にあるとする。そして、空間に於ける一點 P に於て、電子からの電磁氣擾亂を受けるものとする。即ち、 t' に於て O' より發したる電磁氣擾亂が、光速 c を以て進み、 t に於て、 P に到達したとする。 P 點は、電子と共に運動して居るとする。即ち、 P 點は電子に對して、相對的に靜止して居るとすれば、

$$O'O = |v|(t-t')$$

$$O'P = c(t-t') = r$$

なる故、

$$O'O = |v| \frac{r}{c} = \beta r$$

となる。又、第五圖に於て O を原點とすれば、 P 點の座標の間に、次の關係が成立することが知れる。

$$x = R \cos \theta, \quad y^2 + z^2 = R^2 \sin^2 \theta$$

即ち、

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad 42$$

となる。 P 點は、電子と相對的に靜止状態にある爲めに、 P に於ける觀測者は、時刻 t に於て、 P に到達したる電磁氣擾亂を、恰も O より進行し來りし如く見るのである。即ち、上の座標軸が示す球の表面に沿ふ波面を有する如く觀測する。されど、上の電磁氣擾亂は、時刻 t' に於て、 O' から出て、 $O'P$ に沿ふて、進行して來たものである。夫故に、時刻 t に於ける擾亂の波面と、電子との距離は、 O 點から、 $O'P$ に下した垂線の足 M と P との距離である。圖の如く、 MP を S とすれば、 S は、

$$S = R \cos \varphi = R \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$$

となる。三角形 $O'OP$ に於て、

$$\frac{O'O}{O'P} = \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}$$

の関係がある。従つて、上に求めたる値を代入して、

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} = \beta$$

を得る。従つて、

$$S^2 = R^2(1 - \beta^2 \sin^2 \theta) = x^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)$$

となる。上式を書換へれば、

$$\frac{x^2}{1 - \beta^2} + y^2 + z^2 = \frac{S^2}{1 - \beta^2} \quad 43$$

を得る。上式は O' より發したる攪亂の、 O を原點として表されたる波面を表はす。若しも、 S が一定であるとすれば、上式は楕圓體を表はす。そして、 x 軸と y, z 軸との長さの比は、 $\sqrt{1 - \beta^2} : 1$ である。即ち、 β が大なる程、言換へれば、電子の速度が大である程、 x 軸の長さは、他の軸に比して短くなる。43式は、40式の關係に従つて、座標軸の變換を行へば、 x', y', z' 軸に對しては、42式の如く球となる。従つて、 x', y', z' 軸は、電子に對して、相對速度 v を有する座標系である。即ち、電子が靜止状態にあるときは、それから發する電磁氣攪亂の波面は球面なるも、運動にあるときは、43式の如き楕圓體面となる。43の關係を、ヘビースイド楕圓體と名付けて居る。

又、40の關係から知られる如く、運動系に於ける座標

1 Heaviside-Ellipsoid.

は、運動の方向に、 $1 : \sqrt{1 - \beta^2}$ の比を以て伸び、その系にある電荷の密度は、 $\sqrt{1 - \beta^2} : 1$ の割合を以て減少する、されど、

$$\rho dx dy dz = \rho' dx' dy' dz'$$

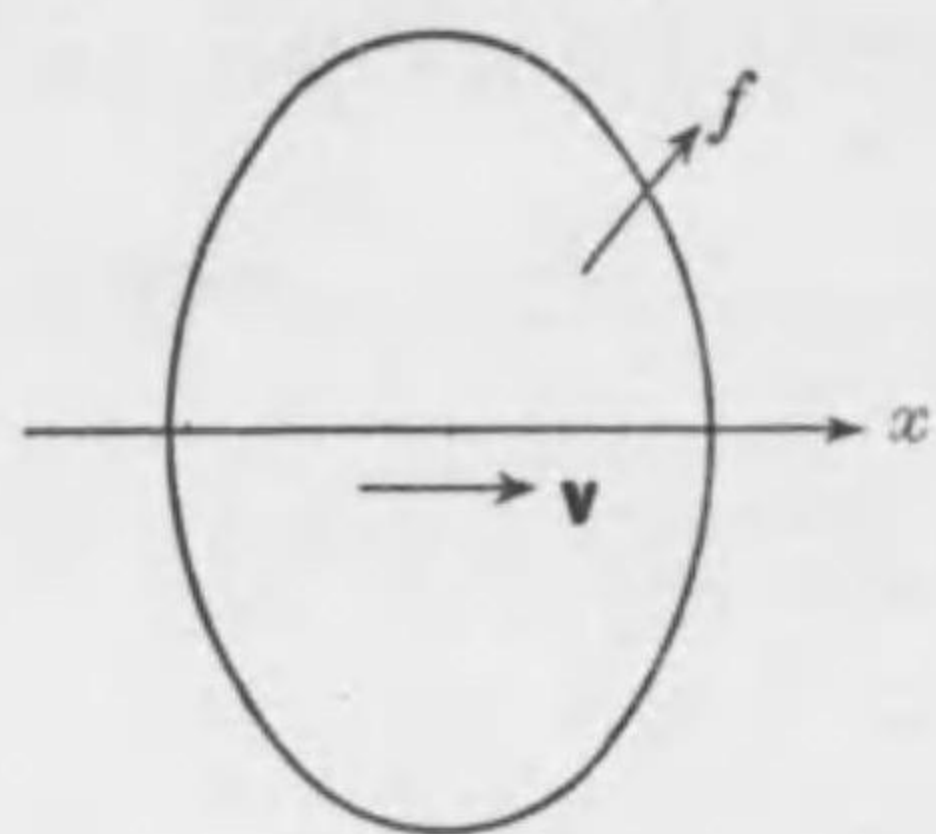
にして、全體としての電荷は不變である筈である。即ち若し運動に依つて、球狀電子が楕圓體に變つたとしても、その全電荷は不變であることを示して居る。即ち、電子が靜止して居る場合に、そのスケーラーポテンシャルは φ であつたものが、等速直行運動にあるときは、 φ の代りにコンベクションポテンシャル ψ をとれば、靜止状態に於ける φ と同様に、電場の状態を求めることが出来るのである。

今簡單の場合をとり、電子が荷電點であると假定すれば、41式の解答から、

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{4\pi} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{r'} \int \rho' dv' = \frac{1}{4\pi} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{1 - \beta^2} + y^2 + z^2}} \int \rho dv \\ &= \frac{(1 - \beta^2)e}{4\pi S} \quad 44 \end{aligned}$$

を得る。 e は電子の全電荷である。若しも、 S が一定であれば、 ψ は一定である。夫故に、 S が一定の表面に於ては、又 ψ が一定である。即ち、ヘビースイド楕圓體の表面に於ては、コンベクションポテンシャル ψ が一

第六圖



定であることを示して居る。

又, 44式の ψ を39式に代入すれば, 電子に働く力 \mathbf{f} を求めることが出来る。 \mathbf{f} は楕圓體の表面に垂直に, 外方に向く力にして, この力から電子の周囲の電磁氣場のベクトル, \mathbf{E} , \mathbf{H} を求めることが出来る。

$$E_x = -(1 - \beta^2) \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{(1 - \beta^2) ex}{4\pi S^3}$$

$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{1}{1 - \beta^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{(1 - \beta^2) ey}{4\pi S^3}$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{1 - \beta^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{(1 - \beta^2) ez}{4\pi S^3}$$

従つて, 電場のベクトルは42式を用ひて, 一般に, 次の如く表すことが出来る。

$$\mathbf{E} = \frac{(1 - \beta^2) e}{4\pi S^3} \mathbf{r}$$

又磁場のベクトルは,

$$H_x = 0, \quad H_y = -\beta E_z, \quad H_z = \beta E_y$$

なる故, 39, 40式から,

$$f_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi'}{\partial x'} = E'_x$$

$$f_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\sqrt{1 - \beta^2} \frac{\partial \phi'}{\partial y'} = \sqrt{1 - \beta^2} E'_y$$

$$f_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\sqrt{1 - \beta^2} \frac{\partial \phi'}{\partial z'} = \sqrt{1 - \beta^2} E'_z$$

を得る。但し,

$$\psi = \sqrt{1 - \beta^2} \phi', \quad x = \sqrt{1 - \beta^2} x'$$

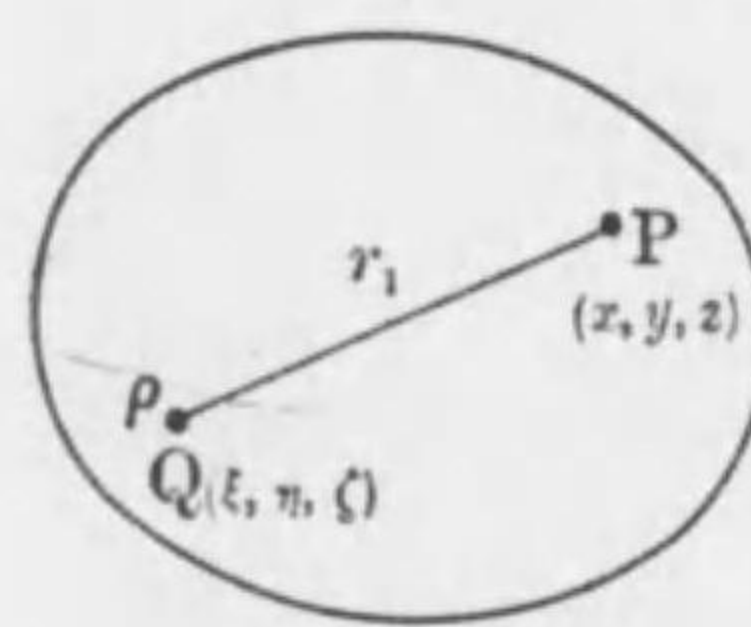
である。

次に, 電子が既に述べたる如く, 球形をなすものとし, その電荷が, 表面に一様に分布されて居る場合と, 體積に一様に分布されて居る場合に就て, 運動電子の周囲の電磁氣場に於ける諸量を求める。

先づ, 楕圓體に電荷が一様に分布されて居る時に, それを作るポテンシャルを計算する。

今, 電荷は楕圓體の體積に一様に分布されて居る場合とする。電荷の密度を ρ とし, 第七圖の如く, Q點に ρ なる電荷があるとき, P點に於けるポテンシャルを求める。

第七圖



Q點の座標を, (ξ, η, ζ) とし, その微小體積を, $d\xi d\eta d\zeta$ とし, P點の座標を, (x, y, z) とし, PQの距離を r_1 とする。P點に於けるポテンシャルは, 靜電單位で,

$$V = \rho \iiint \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}}$$

を以て表はされる。

極座標に変換すれば,

$$\xi - x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$\eta - y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$\zeta - z = r \cos \theta$$

となり、微少體積は,

$$d\xi d\eta d\zeta = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

となる。従つて、ポテンシャルは,

$$\begin{aligned} V &= \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{r_1} r dr \\ &= \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi r_1^2 \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

となる。楕圓體の各半徑の長さを、 a, b, c とすれば楕圓體は,

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\eta_1^2}{b^2} + \frac{\zeta_1^2}{c^2} = 1$$

を以て表はされる。上式の ξ_1, η_1, ζ_1 の代りに、 $x, y, z, r_1, \theta, \varphi$ を以て表はせば,

$$\frac{(x + r_1 \sin \theta \cos \varphi)^2}{a^2} + \frac{(y + r_1 \sin \theta \sin \varphi)^2}{b^2} + \frac{(z + r_1 \cos \theta)^2}{c^2} = 1$$

となる。上式を書換へて,

$$Lr_1^2 + 2Mr_1 - N = 0$$

とすれば,

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \\ M &= \frac{x \sin \theta \cos \varphi}{a^2} + \frac{y \sin \theta \sin \varphi}{b^2} + \frac{z \cos \theta}{c^2} \\ N &= 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \end{aligned} \right\} 45$$

となる。上式を解き、 r_1 の正號の根をとれば,

$$r_1 = \frac{-M + \sqrt{M^2 + LN}}{L}$$

を得る。従つて、ポテンシャルの式は,

$$V = \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left\{ \frac{2M^2}{L^2} + \frac{N}{L} - \frac{2M\sqrt{M^2 + LN}}{L^2} \right\} \sin \theta d\theta$$

となる。上式に於て、第三項の積分及び第一項の M^2 の内、 xy, yz, zx 等を含む項、即ち M の各項の積を含む項は積分の結果零となり、残るものは、第一項の M^2 の内、 M の各項の二乗の項及び第二項にして、次の如くなる。

$$\begin{aligned} V &= \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left[\frac{2}{L^2} \left\{ \frac{x^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^4} + \frac{y^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^4} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{z^2 \cos^2 \theta}{c^4} \right\} + \frac{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}{L} \right] \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

今、次の如く置く。

$$V = V_0 - V_1 x^2 - V_2 y^2 - V_3 z^2 \quad 46$$

但し,

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{L} \\ V_1 &= \frac{V_0}{a^2} - \frac{\rho}{a^4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin^2\theta \cos^2\varphi}{L^2} \sin\theta d\theta \\ V_2 &= \frac{V_0}{b^2} - \frac{\rho}{b^4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin^2\theta \sin^2\varphi}{L^2} \sin\theta d\theta \\ V_3 &= \frac{V_0}{c^2} - \frac{\rho}{c^4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\cos^2\theta}{L^2} \sin\theta d\theta \end{aligned} \right\} 47$$

である。

計算を簡単にする爲めに、 V_0 を a に就いて偏微分すれば、

$$\frac{\partial V_0}{\partial a} = \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{L^2} \frac{2\sin^2\theta \cos^2\varphi}{a^3}$$

を得る。従つて、 V_1 は次の如くなる。

$$V_1 = \frac{V_0}{a^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial V_0}{\partial a} = -\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{V_0}{a} \right) \quad 48$$

同様に、 V_0 の b, c に対する偏微係数を作れば、上と同様にして、 V_2, V_3 は次の如く表はされる。

$$V_2 = -\frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{V_0}{b} \right) \quad 49$$

$$V_3 = -\frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{V_0}{c} \right) \quad 50$$

されは、 V の値を見出す爲めには、 V_0 の積分のみを見出せば充分である。 V_0 の積分に於て知られる如く、 V_0 内の L は45式が示す如く、總て二乗の項のみを含む。従つて、 V_0 の積分に於て其の極限值を總て $\frac{\pi}{2}$ とし、全

體を八倍すれば、相等しき結果を得る。即ち、

$$\begin{aligned} V_0 &= 4\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta d\theta}{\frac{\sin^2\theta \cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta \sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} \\ &= 4\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{\left(\frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}\right) \cos^2\varphi + \left(\frac{\sin^2\theta}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}\right) \sin^2\varphi} \end{aligned}$$

となる。 φ に関する積分を行へば、次の如くなる。

$$V_0 = 2\pi\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c^2 \sin\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{\sqrt{\left(\frac{c^2}{a^2} \tan^2\theta + 1\right) \left(\frac{c^2}{b^2} \tan^2\theta + 1\right)}}$$

今、次の如く變數の變換を行ひ、

$$c \tan\theta = \sqrt{s}$$

θ の代りに、 s を以て表はせば、 V_0 は次の如くなる。

$$V_0 = \pi\rho abc \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}$$

又電子の全電荷を e とすれば、

$$\frac{4}{3} \pi abc\rho = e$$

の関係が成立する故、 V_0 は次の如くなる。

$$V_0 = \frac{3}{4} e \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}} \quad 51$$

次に、 V_1, V_2, V_3 を、48-50と51式とから s を以て表はし、これを46式に代入すれば、

$$V = \frac{3}{4} e \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}} \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s} \right\} \quad 52$$

を得る。

次に、電子の電荷が、其の表面に一様に分布されて居る場合に於ける、ポテンシャルの値を求める。

今、電荷は厚さ δ なる楕圓殻に、一様に分布されて居るとする。楕圓殻の内側の半徑の長さを、 a, b, c とし、外側の半徑を、 a_1, b_1, c_1 とすれば、楕圓殻の厚さ δ が小なるときは、

$$a_1^2 = a^2(1 + \delta), \quad b_1^2 = b^2(1 + \delta), \quad c_1^2 = c^2(1 + \delta) \quad 53$$

の関係が成立する。

今、楕圓殻の内側の楕圓體の部分に、體積的に、電荷が一様に分布されて居るときの、ポテンシャルを V とし、外側を表面とする楕圓體に、體積的に、一様に分布されて居るときの、ポテンシャルを V_1 とすれば、厚さ δ なる楕圓殻の部分の電荷に依るポテンシャルは、兩者の差を以て表はされる。既ち、

$$V_s = V_1 - V$$

となる。 V_1, V は 52, 53 式を用ひて、次の如く表はされる。但し、52 式の積分の係数 $\frac{3}{4}e$ の代りに、 $\pi\rho abc$ を以て表はす。

$$V_1 = \pi\rho abc(1 + \delta)^{\frac{3}{2}} \times \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\{a^2(1 + \delta) + s\}; \{b^2(1 + \delta) + s\}; \{c^2(1 + \delta) + s\}}} \times \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2(1 + \delta) + s} - \frac{y^2}{b^2(1 + \delta) + s} - \frac{z^2}{c^2(1 + \delta) + s} \right\}$$

今 s の代りに s_1 を以て表はし、

$$s = s_1(1 + \delta)$$

と置けば、上式は次の如く表はされる。

$$V_1 = \pi\rho abc \int_0^\infty \frac{ds_1}{\sqrt{(a^2 + s_1)(b^2 + s_1)(c^2 + s_1)}} \times \left\{ (1 + \delta) - \frac{x^2}{a^2 + s_1} - \frac{y^2}{b^2 + s_1} - \frac{z^2}{c^2 + s_1} \right\}$$

V の値は、52 式と全く同様にして、然も上式の s_1 は s を以て表はしても、其の値を變ぜざるが故に、今 s を以て表はせば、 V_s は上式と 52 式との差として、次の如くなる。但し、52 式の積分の係数 $\frac{3}{4}e$ の代りに、 $\pi\rho abc$ を以て表はす。

$$V_s = \pi\rho abc\delta \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}}$$

上式に於て、體積電荷密度 ρ の代りに、電子の全電荷を以て表はせば、

$$2\pi\rho\delta abc = e$$

なる故、 V_s は、

$$V_s = \frac{e}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}} \quad 54$$

となる。

上に述べた楕圓體が、ヘビースайд楕圓體であるとするれば、積分は簡單になる。今楕圓體が静止状態にあるときの、球體の半徑を a とし、ヘビースайд楕圓體の

半徑を, a_1, b_1, c_1 とすれば,

$$a_1 = \frac{a}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad b_1 = c_1 = a$$

なる関係が成立する。従つて, 今, 楕圓體のポテンシャルを φ' を以て表はし, 電荷が表面分布の場合をとれば, 54式から, a, b, c に a_1, b_1, c_1 を代入して,

$$\varphi' = \frac{e}{8\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s) \sqrt{\frac{a^2}{1-\beta^2} + s}}$$

となる。今, s の代りに s' を用ひ,

$$a^2 + s = s'$$

と置けば,

$$\varphi' = \frac{e}{8\pi} \int_0^\infty \frac{ds'}{s' \sqrt{s' + \frac{a^2\beta^2}{1-\beta^2}}} = \frac{e}{8\pi} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{a\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} \quad 55$$

となる。

次に, 静電的エネルギーを求める。今, 體積電荷分布の楕圓體をとれば, 静電的エネルギーは, 52式のポテンシャルを 4π を以て除したものを, φ' と置けば,

$$U' = \frac{1}{2} \int \rho' \varphi' dv' \\ = \frac{3}{32\pi} e \int_0^\infty \frac{ds}{D} \int dv' \rho' \left(1 - \frac{x'^2}{a^2+s} - \frac{y'^2}{b^2+s} - \frac{z'^2}{c^2+s} \right)$$

となる。上式に於て, ρ', dv' は x', y', z' の座標系に依る, 電荷の密度及び微小體積を表はす。そして,

$$D = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}$$

である。先づ, dv' に依る積分を求めれば,

$$\int dv' \left(1 - \frac{x'^2}{a^2+s} - \frac{y'^2}{b^2+s} - \frac{z'^2}{c^2+s} \right) \\ = 8 \int_0^a dx' \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}}} dy' \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}}} dz' \left(1 - \frac{x'^2}{a^2+s} - \frac{y'^2}{b^2+s} - \frac{z'^2}{c^2+s} \right) \\ = \frac{4}{3} \pi abc \left\{ 1 - \frac{1}{5} \left(\frac{a^2}{a^2+s} + \frac{b^2}{b^2+s} + \frac{c^2}{c^2+s} \right) \right\}$$

となる。従つて,

$$U' = \frac{3}{32\pi} e^2 \int_0^\infty \frac{ds}{D} \left\{ 1 - \frac{1}{5} \left(\frac{a^2}{a^2+s} + \frac{b^2}{b^2+s} + \frac{c^2}{c^2+s} \right) \right\} \quad 56$$

となる。電荷が表面分布の場合の静電的エネルギーは, 54式から, 上と同様にして,

$$U_s' = \frac{e^2}{16\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{D}$$

を得る。今, U_s' の, a^2, b^2, c^2 に對する偏微係数を作り, その各と a^2, b^2, c^2 の積の和を作れば,

$$a^2 \frac{\partial U_s'}{\partial a^2} + b^2 \frac{\partial U_s'}{\partial b^2} + c^2 \frac{\partial U_s'}{\partial c^2} \\ = - \frac{e^2}{32\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{D} \left(\frac{a^2}{a^2+s} + \frac{b^2}{b^2+s} + \frac{c^2}{c^2+s} \right) \quad 56'$$

となる。この関係は, U_s' が, a^2, b^2, c^2 の函數であるとき, U_s' は之等の $-\frac{1}{2}$ 乗の均等的函數であることを示すものである。従つて, 次の關係を得る。

$$a^2 \frac{\partial U_s'}{\partial a^2} + b^2 \frac{\partial U_s'}{\partial b^2} + c^2 \frac{\partial U_s'}{\partial c^2} = - \frac{1}{2} U_s' \quad 56''$$

従つて, 56, 56', 56'' 式を比較して, 次の關係を得る。

$$U' = \frac{3}{2} U_i' - \frac{3}{10} U_i'' = \frac{6}{5} U_i' \quad 57$$

即ち, 表面分布の場合のエネルギーを求むれば, 體積分布のものは, $\frac{6}{5}$ を乗ずることに依つて求められる。この關係は, ポテンシャルの場合に於ても, 同様である。

次に, 等速直行運動にある電子の周圍に於ける, 電磁氣的諸量を求める。

38, 55 式からコンベクションポテンシャルは, 表面分布の電荷の電子に對して, 次の如く求められる。

$$\psi = \frac{e}{8\pi a} \frac{1-\beta^2}{\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} \quad 58$$

次に電磁氣的動ポテンシャルは, 第三章32式に於て, 等速運動にある爲めに, 第二項は零となり, 従つて,

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2} \int \rho \psi dv = -\frac{1}{2} \sqrt{1-\beta^2} \int \rho \psi' dv \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{1-\beta^2} \int \rho' \psi' dv \\ &= -\sqrt{1-\beta^2} U' \end{aligned}$$

となる。即ち, 靜電氣的エネルギーに, $-\sqrt{1-\beta^2}$ を乗じたものに等しくなる。又, Lは32式から知られる如く, この場合は, 力の函数Vに負號を附したものに等しくなる。又, 電磁氣的動ポテンシャルは, 普通の力學に於けるラグランジュの函数を表はすものにして, 従

つて, 次の如き關係を得る。

$$L = T - U = -\sqrt{1-\beta^2} U' \quad 59$$

T-U は磁氣的エネルギーと電氣的エネルギーの差を表はし,

$$T - U = \frac{1}{2} \int (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) dv$$

を以て與へられる。H, E のベクトルをその x, y, z 分を以て表はせば, 37式に依り,

$$T - U = -\frac{1}{2} \int \{ \mathbf{E}_x^2 + (1-\beta^2)(\mathbf{E}_y^2 + \mathbf{E}_z^2) \} dv \quad 60$$

を得る。今, 電子が球形の剛體であるとするれば, 微小體積 dv は, 電子の速度に無關係になる。従つて, 59, 60 式を参照して,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \beta} &= \beta \int (\mathbf{E}_y^2 + \mathbf{E}_z^2) dv - \\ &\int \left\{ \mathbf{E}_x \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial \beta} + (1-\beta^2) \left(\mathbf{E}_y \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial \beta} + \mathbf{E}_z \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial \beta} \right) \right\} dv \end{aligned}$$

を得る。又, 既に求めたる如く, 電子に働く力は, $\mathbf{f}_x = \mathbf{E}_x$, $\mathbf{f}_y = (1-\beta^2)\mathbf{E}_y$, $\mathbf{f}_z = (1-\beta^2)\mathbf{E}_z$ なるを以て, 上式の右邊の第二項は, 39式を用ひて, 次の如く表はされる。

$$\begin{aligned} I &= \int \left\{ \mathbf{f}_x \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial \beta} + \mathbf{f}_y \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial \beta} + \mathbf{f}_z \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial \beta} \right\} dv \\ &= - \int (\nabla \psi, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \beta}) dv \end{aligned}$$

又,

$$\operatorname{div}\left(\psi, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \beta}\right) = \psi \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \beta} + \left(\nabla \psi, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \beta}\right)$$

の関係と、ガウスの定理とを用ひて,

$$I = \int \psi \frac{\partial}{\partial \beta} (\operatorname{div} \mathbf{E}) dv - \int \left(\psi, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \beta}\right)_n df$$

を得る。上式に於て、 df は積分範囲の微小表面積を表はし、 n を附したるは、上の表面の、外方に向ふ法線方向の分を表はす。今、積分の表面を無限に大きく擴張すれば、其の表面上に於ては、電磁氣のベクトルは零となる。従つて、上式の第二項は零となる。又、第一項に於て、 $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho$ なる故、電荷の密度は、剛體の電子に對しては、その速度に無關係となる爲めに、第一項も亦零となる。従つて、

$$I = 0$$

にして、従つて、 $\frac{\partial L}{\partial \beta}$ は、

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \beta \int (\mathbf{E}_y^2 + \mathbf{E}_z^2) dv$$

を以て表はされる。又、 \mathbf{E}, \mathbf{H} の分の關係を用ひて、

$$\frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{1}{c} \int (\mathbf{E}_y \mathbf{H}_z - \mathbf{E}_z \mathbf{H}_y) dv = \frac{1}{c} \int [\mathbf{E}, \mathbf{H}]_x dv$$

となる。第一章5式を用ひ、電子の運動が x 軸の方向であることから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial \beta} &= \int \mathbf{g}_x dv = \mathbf{G}_x \\ &= |\mathbf{G}| \end{aligned}$$

を得る。又、 $c\beta = |\mathbf{v}|$ なる故、

$$\frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{\partial L}{\partial |\mathbf{v}|} = |\mathbf{G}| \quad 61$$

となる。この關係は、普通の力學に於けるものと、同様のものである。

次に、電子の全エネルギーは、

$$W = T + U = 2T - L$$

にして、

$$\begin{aligned} 2T &= \int (\mathbf{H}_y^2 + \mathbf{H}_z^2) dv \\ &= \beta \int (\mathbf{E}_y \mathbf{H}_z - \mathbf{E}_z \mathbf{H}_y) dv \\ &= |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{G}| \end{aligned}$$

なる故、

$$\begin{aligned} W &= |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{G}| - L = |\mathbf{v}| \frac{\partial L}{\partial |\mathbf{v}|} - L \\ &= \beta \frac{\partial L}{\partial \beta} - L \quad 62 \end{aligned}$$

を得る。

55, 58, 59式に依り、表面分布の電子に對して、

$$L = -\frac{e^2}{8\pi a} \frac{1-\beta^2}{2\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} \quad 63$$

を得る。力の函數は、

$$V = -L = \frac{e^2}{8\pi a} \frac{1-\beta^2}{2\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} \quad 64$$

となる。電磁氣的運動量は、

$$|\mathbf{G}| = \frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{e^2}{8\pi a c \beta} \left\{ \frac{1+\beta^2}{2\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} - 1 \right\} \quad 65$$

となる。全エネルギーは、62式から、

$$W = \beta \frac{\partial L}{\partial \beta} - L = \frac{e^2}{8\pi a} \left\{ \frac{1}{\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} - 1 \right\} \quad 66$$

となる。電氣的エネルギーは、

$$U = \frac{1}{2} (W - L) = \frac{e^2}{16\pi a} \left\{ \frac{3-\beta^2}{2\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} - 1 \right\} \quad 67$$

となる。磁氣的エネルギーは、

$$T = \frac{1}{2} (W + L) = \frac{e^2}{16\pi a} \left\{ \frac{1+\beta^2}{2\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} - 1 \right\} \quad 68$$

となる。

電子の速度 \mathbf{v} が小である時は、上式を β に關する級數に展開して、 β^2 の項迄をとれば、

$$|\mathbf{G}| = \frac{2e^2\beta}{12\pi a c}, \quad W = \frac{e^2}{4\pi a} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\beta^2 \right)$$

$$U = \frac{e^2}{8\pi a}, \quad T = \frac{e^2}{12\pi a} \beta^2$$

を得る。即ち、磁氣的エネルギーは β^2 に比例する。即ち、電子の速度の二乗に比例することは、普通の力學に於ける運動のエネルギーに相當することを表はして居る。電子の電荷が體積分布をなす場合に於ては、上の諸量に $\frac{6}{5}$ を乗ずれば、各々相當量を求めることが出来る。

第五章

電磁氣的質量

電子に電磁氣的外力が働けば、電子も亦加速度を得ることは、陰極線に關する實驗結果に依つて、知られたる事實である。又、電子の速度が相當に大きく、光速の十分の一程度に於ては、これに働く外力と加速度とは相比例せざることも、實驗上の事實として知られて居る。即ち、電子の加速運動に於ては、普通の力學の如く、外力と加速度との比は一定ではない。即ち、電子の質量は速度に依つて、異なることが知られて居る。

電子が電磁氣的質量を持つことは、電子が電磁氣的力に依る運動の慣性を持つと、考ふべきものにして、恰も、電流に自己感應の存在することと同様である。電流が流れると、この電流の増減に反對する起電力を生ずる。これ、自己感應に依る起電力である。自己感應に依る起電力は、電流の時間的變化に比例する。今、電流を電子の運動を以て置き換へれば、電流は、 $\frac{i}{c} = e\beta$ にして、従つて、自己感應に依る起電力は、 $\frac{di}{dt} = e \frac{d\beta}{dt}$ である。即ち、電子の加速度に比例する。即ち、電子の運動の慣性は、その加速度に比例することとなる。こ

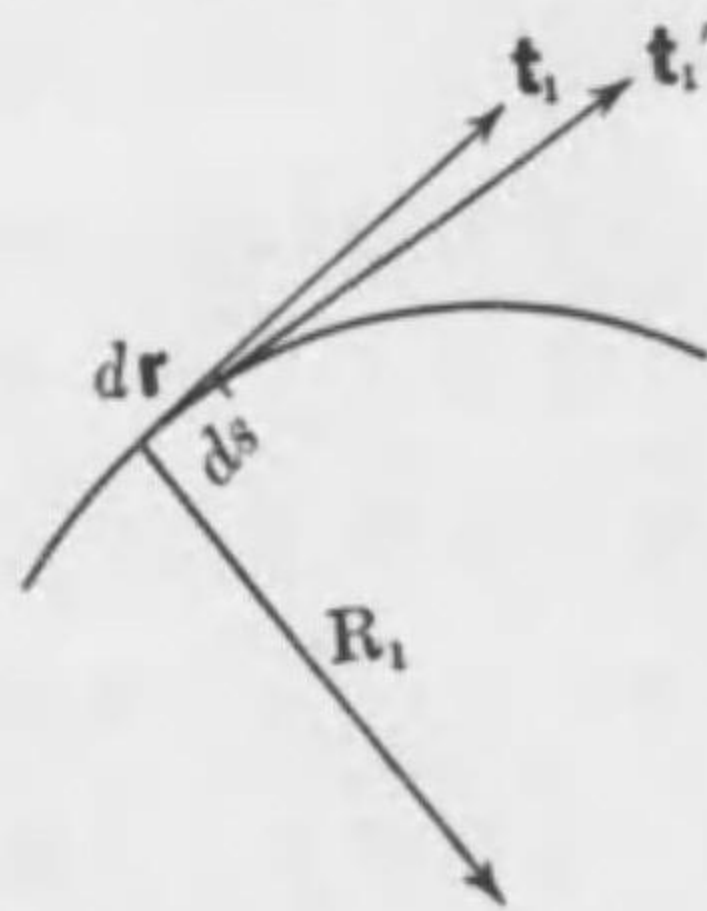
これは電子の速度が割合に小なる場合であるが、電子の速度が大であつても、大體に於て同様の現象が起ることを豫想することが出来る。電子の運動に於ては、自身を作る電磁氣場に依る力と、電子以外の外的原因に依つて作られた電磁氣場に依る力、即ち外力とを受けるのである。

今、外力 \mathbf{K}^e が電子に働くとすれば、第三章27式が成立することは、既に述べた通りである。

$$\mathbf{K}^e = \frac{d\mathbf{G}}{dt}$$

\mathbf{G} は運動量を表はし、電子の速度の函數にして、その方向は、速度の方向である。

第八圖



電子の運動の経路の微小部分 ds に切線を引き、この上の単位ベクトルを \mathbf{t}_1 とする。第八圖に於て、 \mathbf{R}_1 は ds に垂直に、経路の主法線の方角に向くベクトルである。 $d\mathbf{r}$ は、ベクトル \mathbf{t}_1 上にあつて、 ds の大

さを持つベクトルとする。従つて、電子の速度は、

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{t}_1 \frac{ds}{dt}$$

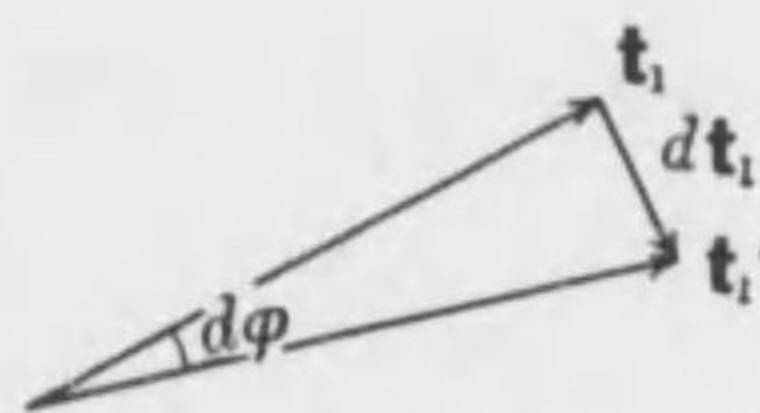
である。従つて、加速度は、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d\mathbf{t}_1}{dt} \frac{ds}{dt} + \mathbf{t}_1 \frac{d^2s}{dt^2} \\ &= \frac{d\mathbf{t}_1}{ds} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathbf{t}_1 \frac{d^2s}{dt^2} \end{aligned}$$

となる。

第八圖に於て、ベクトル $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_1'$ は、各 ds の兩端に於ける切線の方角の単位ベクトルとし、その間の角を $d\varphi$ とすれば、第九圖に示すが如く、

第九圖



$$d\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_1' - \mathbf{t}_1$$

の関係が成立する。そして、 $d\mathbf{t}_1$ は主法線 \mathbf{R}_1 の方向をとる。又、第九圖から、 $d\mathbf{t}_1$ の絶対値は、

$$|d\mathbf{t}_1| = |\mathbf{t}_1| d\varphi = d\varphi$$

である。又、

$$d\mathbf{t}_1 = \mathbf{R}_1 |d\mathbf{t}_1| = \mathbf{R}_1 d\varphi$$

の関係がある。従つて、

$$\frac{d\mathbf{t}_1}{ds} = \mathbf{R}_1 \frac{d\varphi}{ds} = \mathbf{R}_1 \frac{1}{R}$$

の関係を得る。 R は ds に於ける曲率半徑を表はす。

従つて、加速度の式は次の如く表はされる。

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{R}_1 \frac{v^2}{R} + \mathbf{t}_1 \frac{d|v|}{dt} \quad 69$$

上式の右邊の第一項は、加速度の主法線の方角の分を

表はし、第二項は経路の切線方向の分を表はす。次に、運動量 \mathbf{G} を同様に分解する。

$$\mathbf{G} = \mathbf{t}_1 |\mathbf{G}|$$

なる故、

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \frac{\mathbf{R}_1}{R} |\mathbf{v}| |\mathbf{G}| + \mathbf{t}_1 \frac{d|\mathbf{G}|}{d|\mathbf{v}|} \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} \quad 70$$

を得る。普通の力学に於ける、ニュートンの第二法則が成立するものとし、第三章の27式を参照して、69, 70式の、同方向の分の比をとれば、その方向に於ける電子の質量を求むることが出来る。即ち、 \mathbf{R}_1 の方向のものは、兩式の右邊の第一項から、

$$\frac{\mathbf{K}_{R_1}^a}{\dot{\mathbf{v}}_{R_1}} = \frac{|\mathbf{G}|}{|\mathbf{v}|} = m_r \quad 71$$

を得る。又、第二項から、

$$\frac{\mathbf{K}_{t_1}^a}{\dot{\mathbf{v}}_{t_1}} = \frac{d|\mathbf{G}|}{d|\mathbf{v}|} = m_t \quad 72$$

を得る。斯く求めたる、 m_r を横質量と名付け、 m_t を縦質量と名付けて居る。

第四章65式を用ひて、 m_r, m_t の値を求むれば、

$$\left. \begin{aligned} m_r &= \frac{e^2}{8\pi ac^2 \beta^2} \left\{ \frac{1+\beta^2}{2\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} - 1 \right\} \\ m_t &= \frac{e^2}{8\pi ac^2 \beta^2} \left\{ \frac{2}{1-\beta^2} - \frac{1}{\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} \right\} \end{aligned} \right\} \quad 73$$

となる。今、電子の速度は光速に對して小なるものと

し、上式を β の級數に展開すれば、次式となる。

$$m_r = \frac{e^2}{6\pi ac^2} \left\{ 1 + \frac{2}{5} \beta^2 + \frac{9}{35} \beta^4 + \dots \right\}$$

$$m_t = \frac{e^2}{6\pi ac^2} \left\{ 1 + \frac{6}{5} \beta^2 + \frac{9}{7} \beta^4 + \dots \right\}$$

上式に於て、 β^2 以上の項を消略するか、又は電子が静止して居る場合に於ては、

$$m_r = m_t = \frac{e^2}{6\pi ac^2} = m_0 \quad 74$$

となり、 m_0 は一定の常數にして、これを静止質量と名付けて居る。以上の計算は、電子の電荷が表面に一樣に分布されて居る場合であるが、若しも、電荷が電子の體積内に一樣に分布されて居る場合に於ては、既に述べたる如く、74式の値に $\frac{6}{5}$ を乗じて、次の如くなる。

$$m_0 = \frac{e^2}{5\pi ac^2} \quad 75$$

73式、又は β に對する展開式から知られる如く、縦質量 m_t は一般に横質量 m_r よりも大である。即ち、電子の質量は、電子が運動状態にあるとき、方向に依つて、質量の値を異にする。従つて、電子の質量は純粹のスカラー量ではなくして、テンソルの性質を持つて居る。即ち、普通の力学に於ける慣性能率の如き、性質を持つものである。

今、實驗から求めた電子の比電荷、 $\frac{e}{m_0 c}$ の値を用ひて、

74, 75 から球形剛體としての電子の半徑 a の値を求め。即ち,

$$\frac{e}{c} = \sqrt{4\pi} \cdot 1.59 \times 10^{-29}$$

を用ひ、電子が静止状態にあるときの比電荷の値として,

$$\eta_0 = \frac{e}{m_0 c} = \sqrt{4\pi} \cdot 1.77 \times 10^7$$

を用ひ、又

$$\eta_0 = \frac{e}{m_0 c} = \frac{6\pi c a}{e}$$

の関係から a を求むれば,

$$a = \frac{e}{6\pi c} \eta_0$$

となり、上の実験の値を代入して,

$$a = 1.88 \times 10^{-13} \text{ 糎}$$

を得る。又電荷が體積に一樣に分布して居るときは,

$$a = 2.26 \times 10^{-13} \text{ 糎}$$

となる。瓦斯運動論に依つて見出されたる、水素分子の直徑は

$$2 \times 10^{-8} \text{ 糎}$$

にして、電子の直徑は極めて小なるものであることが知られる。

第六章

ローレンツの電子とブツフェレルの電子

以上述べたる、電子の力學、及びその等速直行運動の章に於ては、アブラハムの電子即ち球形剛體の電子に就て、普通の力學に於ける關係を、電磁氣的量を以て相當的に満足することを述べた。されど、種々の電磁氣的現象に於ては、電子を剛體として取扱ふことに、多くの不便を見出すことは、實驗的結果が、明かに示して居る。そして、電子が運動状態にあるとき、其の形狀を變へることに依つて、上述の不便が取り除かれることを見るのである。この意味に於て、ローレンツ及びブツフェレルは、別々に、運動状態に於ては、電子が形を變へることを導き入れて、實驗的事實を説明するに、便利ならしめた。

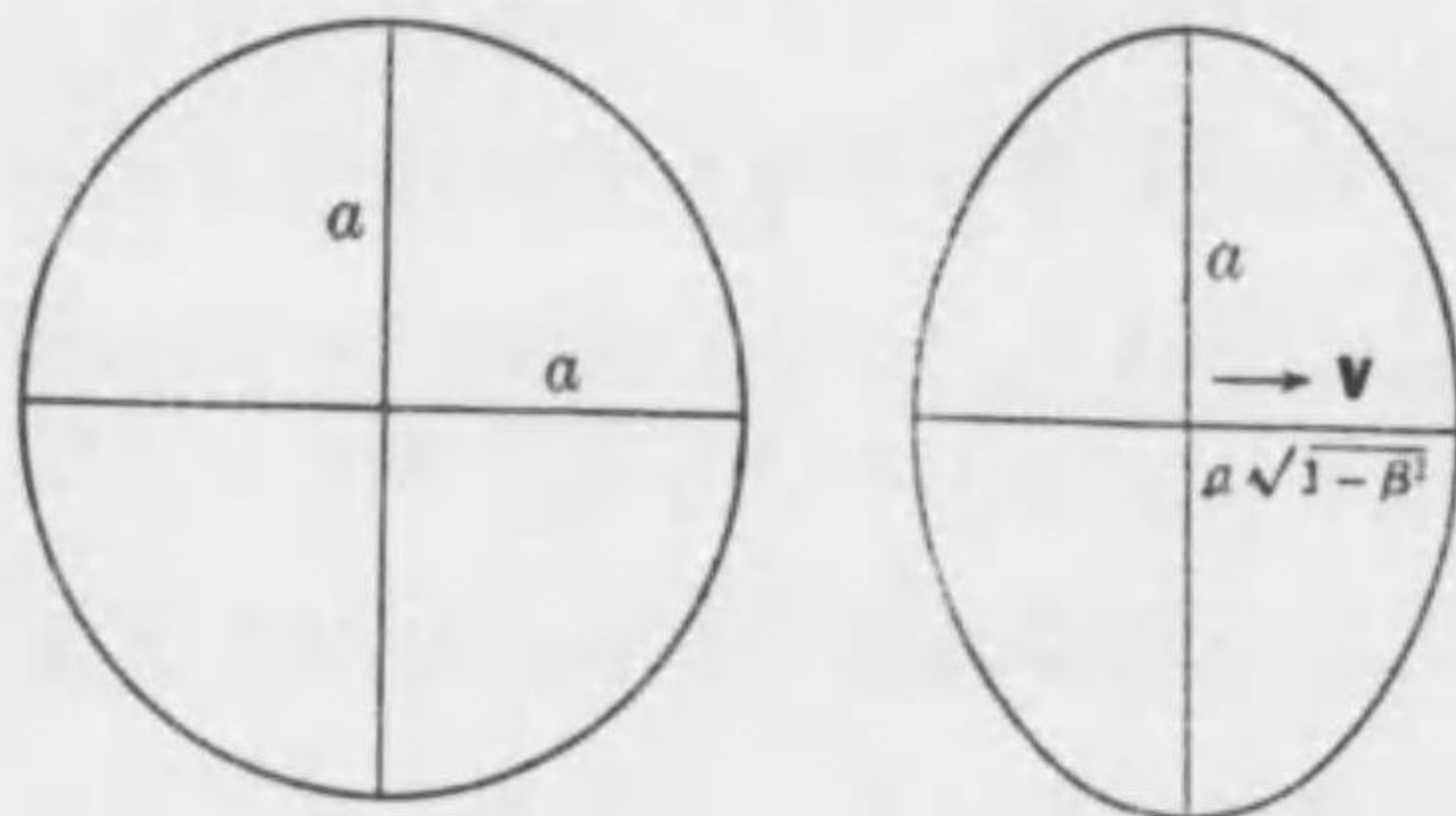
先づ、ローレンツの電子に就て述べる。

電子は静止状態に於ては、一定の半徑を有する球形であるが、それが v なる速度を以て運動状態にあるときは、その運動の方向に於ける半徑が $\sqrt{1-\beta^2}:1$ の割合を以て縮少する。即ち運動の方向の半徑は、

$a\sqrt{1-\beta^2}$ となり、運動の方向に直角の方向の半徑は、何

等の變化をも受けざる爲に、その方向の半径は a である。即ち、電子は静止状態に於ては、 a なる半径の球形であるが、運動状態に於ては、へびーサイド楕圓體となるのである。

第十圖



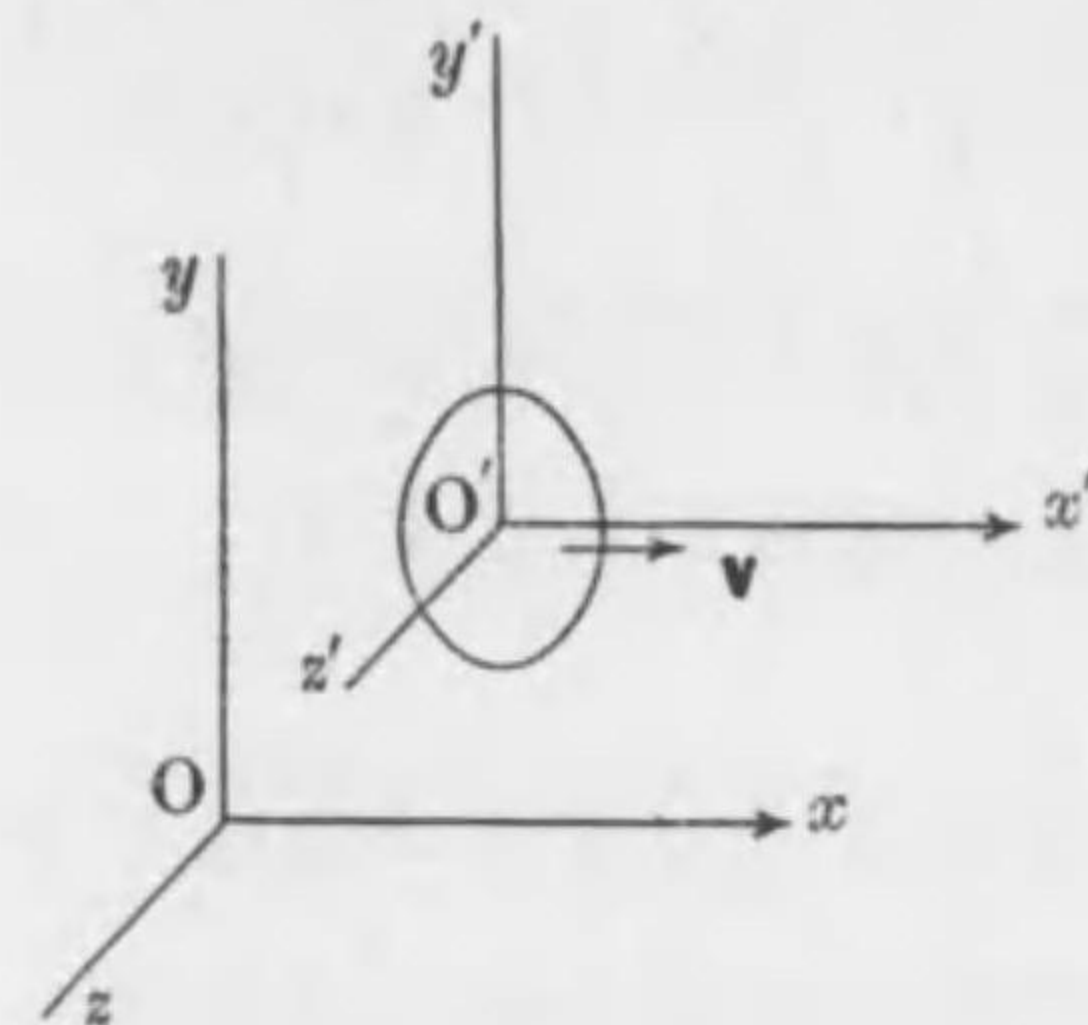
アブラハムの理論に於ては、電子は球形剛體である爲めに、それが運動にあるときも、依然として、

球形を保つて居る。そして、その電子が周囲の空間に作る、コンベクションポテンシャルの等位面は、へびーサイド楕圓體の表面として表はされた。然るに、ローレンツの電子は運動状態にあるとき、電子自身が變形して、へびーサイド楕圓體となるのである。

今、電子は、 v の速度を以て x の方向に運動すると、考へる。空間に固定する座標軸を、 x, y, z とし、電子に固定する動座標軸を、 x', y', z' を以て表はし、兩者はその相當軸が常に相並行するものとする。

x', y', z' 軸に對しては、電子は静止状態にある爲めに、

第十一圖



電子は球形であり、 x, y, z 軸に對しては、へびーサイド楕圓體となる。即ち、兩座標の間には次の關係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{1-\beta^2} x' \\ y &= y', \quad z = z' \end{aligned} \right\} 76$$

電子が静止状態にあるとき、即ち、 x', y', z' 座標軸に對する電子のエネルギーを W' を以て表はし、 x, y, z 座標軸に對するものを W とする。静止状態に於ける電子のエネルギーは、靜電的エネルギーのみである。従つて、

$$W' = U' = \frac{1}{2} \int \mathbf{E}^2 dv' = \frac{e^2}{8\pi a} \quad 77$$

となる。又、電磁的動ポテンシャルは、第四章59式に依つて、

$$L = -\sqrt{1-\beta^2} U' = -\sqrt{1-\beta^2} \frac{e^2}{8\pi a} \quad 78$$

となる。そして、電子の作る電磁氣場のベクトルの、 x, y, z 座標軸及び x', y', z' 座標軸に對するもの間には、第四章に於て求めたる如く、次の關係がある。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_x &= \mathbf{E}_x' & \mathbf{H}_x &= 0 \\ \mathbf{E}_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \mathbf{E}_y' & \mathbf{H}_y &= -\beta \mathbf{E}_z \\ \mathbf{E}_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \mathbf{E}_z' & \mathbf{H}_z &= \beta \mathbf{E}_y \end{aligned} \right\} 79$$

又、運動量も同様にして、

$$\mathbf{G}_x = \frac{\beta}{c} \int (\mathbf{E}_y^2 + \mathbf{E}_z^2) dv$$

となる。76の座標軸の関係から知られた如く、電子の微小体積、 dv, dv' の間には、次の関係が成立する。

$$dv = dv' \sqrt{1 - \beta^2}$$

従つて運動量は、上の電磁気場のベクトルの関係を用ひて、電子に固定する座標に関する量を以て表はせば、

$$\mathbf{G}_x = \frac{\beta}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \int (\mathbf{E}_y'^2 + \mathbf{E}_z'^2) dv'$$

となる。電子は静止状態に於ては、球形であるために、 x', y', z' 座標軸から見れば、電子は總ての方向に對稱的である。従つて、電場のベクトルも、亦總ての方向に對稱的である。即ち、

$$\mathbf{E}_x'^2 = \mathbf{E}_y'^2 = \mathbf{E}_z'^2 = \frac{1}{3} \mathbf{E}'^2$$

の関係が成立する。従つて、運動量は次の如くなる。

$$\mathbf{G}_x = \frac{e^2}{6\pi ac^2} \frac{|\mathbf{v}|}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad 80$$

電子は x 軸の方向に運動するを以て、 \mathbf{G}_x は運動量の全量に等しい。即ち、

$$\mathbf{G}_x = |\mathbf{G}|$$

である。

電子の横質量 m_r 及び縦質量 m_t は、第五章 71, 72 式と 80 式から求められる。即ち、

$$m_r = \frac{e^2}{6\pi ac^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad 81$$

$$m_t = \frac{e^2}{6\pi ac^2} \frac{1}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \quad 82$$

となり、静止状態に於ける質量は、

$$m_0 = \frac{e^2}{6\pi ac^2}$$

となる。第五章 74 式から知られる如く、静止状態に於ける質量は、アブラハムの電子と相等しきも、運動状態に於ける m_r, m_t は、アブラハムのそれと異なることを知る。

次に、上の静止質量を用ひて、動ポテンシャル及エネルギー等を表はせば、次の如くなる。

78 式から、

$$L = -\frac{3}{4} m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$$

となり、磁氣のエネルギーは、

$$2T = (\mathbf{v}, \mathbf{G}) = m_0 \frac{v^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

となる。従つて全エネルギーは、

$$W = 2T - L = \frac{3}{4} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(1 + \frac{1}{3} \beta^2\right)$$

となる。

アブラハムの理論に於て述べた

$$\frac{dL}{d|\mathbf{v}|} = |\mathbf{G}|$$

の関係は、ローレンツの電子に対しては成立しない。

即ち、上のLの値から $\frac{dL}{d|\mathbf{v}|}$ を求むれば、

$$\frac{dL}{d|\mathbf{v}|} = \frac{3}{4} m_0 \frac{|\mathbf{v}|}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

となり、従つて、

$$\frac{dL}{d|\mathbf{v}|} - |\mathbf{G}| = -\frac{1}{4} m_0 \frac{|\mathbf{v}|}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{1}{4} m_r |\mathbf{v}|$$

となり、上式は零ならず。又、アブラハムの理論に於ては、 \mathbf{K}^a を外力とすれば、

$$\frac{dW}{dt} = (\mathbf{K}^a, \mathbf{v}) \quad 83$$

となり、従つて、

$$\frac{dW}{d|\mathbf{v}|} \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} = \mathbf{K}_t^a |\mathbf{v}|$$

となる。 \mathbf{K}_t^a は外力の、電子の経路の切線方向の分である。されば、第五章72式から、

$$\frac{1}{|\mathbf{v}|} \frac{dW}{d|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{K}_t^a}{\frac{d|\mathbf{v}|}{dt}} = m_t$$

が成立する。されどローレンツの電子に於ては、上に得たる、 W, L, \mathbf{G} の値を用ひて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{v}|} \frac{dW}{d|\mathbf{v}|} &= \frac{d|\mathbf{G}|}{d|\mathbf{v}|} + \frac{1}{|\mathbf{v}|} \left\{ |\mathbf{G}| - \frac{dL}{d|\mathbf{v}|} \right\} \\ &= m_t + \frac{1}{4} m_r \end{aligned}$$

を得る。即ち、アブラハムの場合の関係は、其のまゝ成立しない。アブラハムの場合に於ては、83式が成立する。即ち、ラグランジュの運動の式が其の儘成立するが、ローレンツの場合に於ては然らず。従つて、ローレンツの場合に於ては、83式を少しく変更する必要がある。今、

$$\frac{dW}{dt} + \frac{dE}{dt} = (\mathbf{K}^a, \mathbf{v}) \quad 84$$

と置き、Eを電子の内部エネルギーを表はすものとすれば、上式の右邊を書換へて、

$$\frac{dW}{dt} + \frac{dE}{dt} = \left(\mathbf{v}, \frac{d\mathbf{G}}{dt} \right) \quad 84'$$

と置く。従つて、

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v}, \mathbf{G}) = |\mathbf{G}| \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} + \frac{d}{dt} (W + E)$$

となる。又、第四章に於て述べたる如く、 $W = (\mathbf{v}, \mathbf{G}) - L$ なる故、この関係から、 $\frac{dW}{dt}$ を求めれば、

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v}, \mathbf{G}) = \frac{d}{dt} (W + L)$$

となる。以上の二式から、

$$\frac{d}{dt}(L - E) = |\mathbf{G}| \frac{d|\mathbf{v}|}{dt}$$

を得る。上式を變形すれば、

$$\frac{d}{d|\mathbf{v}|}(L - E) \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} = |\mathbf{G}| \frac{d|\mathbf{v}|}{dt}$$

となり、従つて、

$$|\mathbf{G}| = \frac{d}{d|\mathbf{v}|}(L - E)$$

となる。従つて、79式を用ひて、

$$\frac{dE}{d|\mathbf{v}|} = \frac{dL}{d|\mathbf{v}|} - |\mathbf{G}| = -\frac{1}{4} m_0 \frac{|\mathbf{v}|}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

を得る。これを、 $|\mathbf{v}|$ に就て積分すれば、

$$E = \frac{1}{4} m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} + E_0 \quad 85$$

を得る。但し E_0 は積分常数にして、零にすることが出来る。

ローレンツは、 E の内部エネルギーは、周囲の電磁氣場の爲めに、電子が電磁氣的張力を受けて、變形する爲めに、外からなされる仕事に依るものと考へた。今、電磁氣的張力を p とすれば、これに依つて、單位時間になされる仕事は、

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int p dv$$

で表はされる。上の張力は、既に述べたる、マックスウェルの張力を表はすものにして、これを x', y', z' 座標軸に對して表はせば、

$$p = -\mathbf{T}_{x'x'}$$

となる。又、電子はこの座標軸に對しては、球形である爲めに、張力は對稱的である。従つて、 $x'y', y'z', z'x'$ 等の分は、電子全體に積分するとき、零となり、 $x'x', y'y', z'z'$ 分は、第一章 4 式に 79 式の關係を代入して、 x', y', z' に對する値として表はせば、次の如くなる。

$$\mathbf{T}_{x'x'} = -\frac{1}{2} \mathbf{E}_x'^2, \quad \mathbf{T}_{y'y'} = -\frac{1}{2} \mathbf{E}_y'^2, \quad \mathbf{T}_{z'z'} = -\frac{1}{2} \mathbf{E}_z'^2$$

又、 x', y', z' に對しては、

$$\mathbf{H}' = 0, \quad \mathbf{E}_x'^2 = \mathbf{E}_y'^2 = \mathbf{E}_z'^2 = \frac{1}{3} \mathbf{E}'^2$$

なる故、張力は、

$$p = \frac{1}{6} \mathbf{E}'^2$$

となる。従つて、その仕事は、

$$\begin{aligned} \int p dv &= \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{6} \int \mathbf{E}'^2 dv' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{6} \frac{c^2}{a} \\ &= \frac{1}{4} m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} \end{aligned}$$

となる。されば、張力に依る仕事即ち内部エネルギー E は、85 式の値と相等しきこととなる。他の電磁氣的量に就ては、總て前章に於て述べたる、アブラハムの關係が、そのまま適用される。

次に、ブッフエレルの電子に就て述べる。

ブッフエレルに依れば、電子が運動にあるとき、必ず

しもへびーサイド楕圓體になることを必要としない。今、任意の形に變形するとして、然もアブラハムの電子に於ける、

$$\frac{dL}{d|\mathbf{v}|} = |\mathbf{G}|$$

の關係が、そのまま成立する如くする爲めには、如何に變形することを必要とするかを見出すのである。そして、ローレンツの内部エネルギーを表はす、電磁氣的張力に依る仕事は零であるとする。これは、

$$\int p dv = 0$$

の關係に依つて、 $dv=0$ 即ち、電子は變形しても、その體積が不變であることを示して居る。即ち、電子は静止状態に於て、半徑 a の球形にして、それが運動状態にあるとき、體積が一定なるへびーサイド楕圓體であれば、ローレンツの電子の如く内部エネルギーを考慮せずして、アブラハムと同様の關係、即ちラグランジュの運動の式が成立することとなる。

電子は運動状態に於て、へびーサイド楕圓體である爲めには、其の半徑の比は、

$$a\sqrt{1-\beta^2} : a : a$$

であることが必要である。體積が一定であることから、

$$\frac{4}{3}\pi a_0^3 = \frac{4}{3}\pi a^3 \sqrt{1-\beta^2}$$

の關係を得る。従つて、

$$a = a_0(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

となる。即ち、運動状態にある電子の半徑は、各、

$$a_0(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}, a_0(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}, a_0(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \quad 86$$

となる。従つて、動ポテンシャルは、78式の a に、上の値を代入して、

$$L = -\frac{e^2}{8\pi a_0} (1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}$$

を得る。従つて、

$$\frac{dL}{d\beta} = \frac{e^2}{6\pi a_0} \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

となり、又80から、

$$|\mathbf{G}| = \frac{e^2}{6\pi a_0 c} \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

となり、従つて、

$$\frac{dL}{d|\mathbf{v}|} = |\mathbf{G}|$$

が、成立することを知る。

次に、上に得たる運動量から、電子の横質量及び縦質量を求むれば、

$$m_r = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$m_t = m_0 \frac{1 - \frac{1}{3}\beta^2}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

を得る。静止質量 m_0 は、既に求めたるものと、相等しきものである。

又電子の全エネルギーは、

$$W = (\mathbf{v}, \mathbf{G}) - L = \frac{e^2 \left(1 + \frac{1}{3}\beta^2\right)}{8\pi a_0 (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

となる。

剛體電子と、本章に於て述べたる、ローレンツ及びブッフエレルの變形電子の内、何れが正しきものであるかは、一に、實驗的結果を俟つて、始めて、斷定さる可きものである。

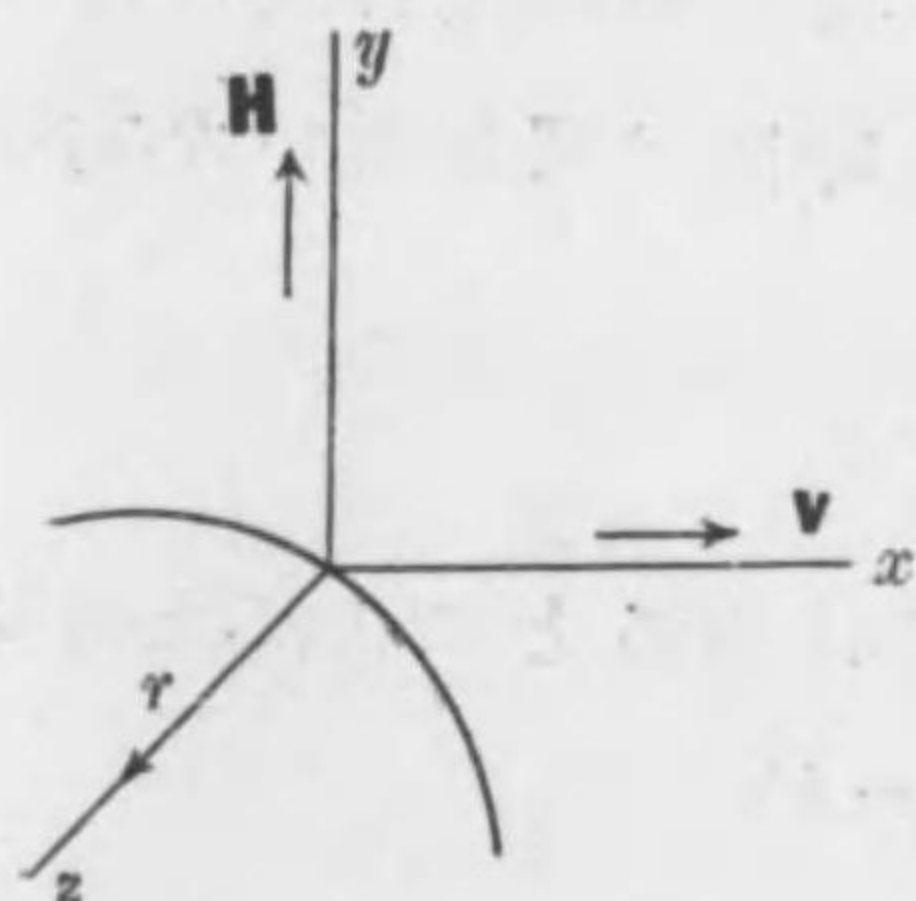
第七章

陰極線の振れ

陰極線の電場及び磁場に於ける、運動の経路を論究すれば、既に述べたる三種の電子の内、何れの横質量及び縦質量が實驗結果に一致するかを、知ることが出来る。

最初に、磁場のみの空間に於て、陰極線が運動する場合を述べる。

第十二圖



陰極線は、 \mathbf{v} の速度を以て x の方向に運動し、磁場の方向は、 y 軸の方向とする。従つて、陰極線は、 z 軸の方向に曲げられる。そして、その曲り方は、 \mathbf{v}, \mathbf{H} に對して右廻りの方向である。

陰極線の運動の式の、 z 軸の方向の分は、

$$m_r \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \mathbf{K}_r^a = \frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}]_r$$

である。又、 $\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{e}{c} |\mathbf{v}| \mathbf{H}$

$$\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{\mathbf{v}^2}{R}$$

の関係がある。Rは、陰極線の経路の曲率半径である。従つて、運動の式から、

$$\frac{1}{R} = \frac{e}{cm_r} \frac{|\mathbf{H}|}{|\mathbf{v}|} \quad 87$$

を得る。

次に、電場のみの場合に於ける、陰極線の振れを求め

る。電場に於ける陰極線の運動は極めて複雑にして、電場の方向が陰極線の運動の方向に直角であつても、陰極線は電場の影響を受けて、その速度を變ずる。今、時間が t_0 から t 迄の間に於ける、陰極線の運動量の増加を、 $\mathbf{G} - \mathbf{G}_0$ とすれば、これはその時間の間に働いた、電場からの力積に等しい。即ち、

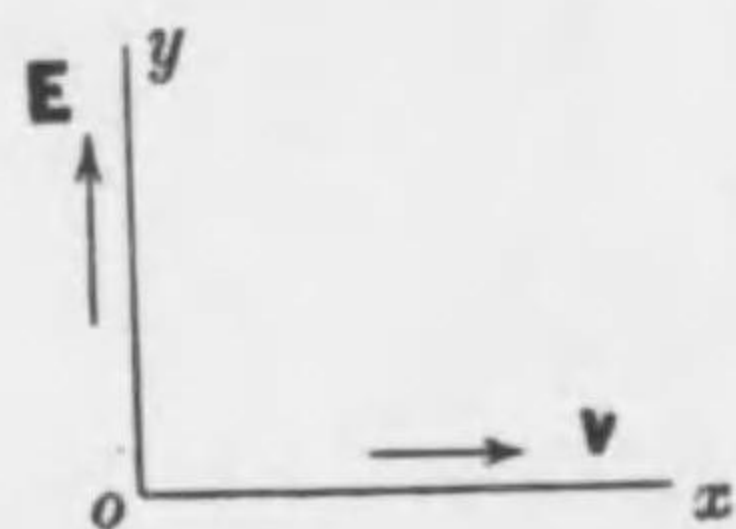
$$\mathbf{G} - \mathbf{G}_0 = e \int_{t_0}^t \mathbf{E} dt$$

にして、若しも、電場が定常状態にあるとすれば、上式は

$$\mathbf{G} - \mathbf{G}_0 = e\mathbf{E}(t - t_0)$$

第十三圖

となる。



今、電場の方向は、陰極線の最初の時の運動の方向、即ち、 x の方向に對して、直角であるとすれば、陰極線の経路の曲げられ

る方向、即ち y 軸の方向の分運動量は、

$$\mathbf{G}_y = m_r \mathbf{v}_y = e |\mathbf{E}| (t - t_0)$$

である。従つて、

$$\mathbf{v}_y = \frac{dy}{dt} = \frac{e}{m_r} |\mathbf{E}| (t - t_0)$$

を得る。上式の積分に於て、最初の時に於ては、運動は x 軸の方向なる故、 $t = t_0$ に於て、 $y = 0$ である。従つて、

$$y = \frac{e}{m_r} |\mathbf{E}| \frac{(t - t_0)^2}{2}$$

となる。次に、 x 軸の方向の、 $t - t_0$ 時間に於ける、平均速度を、

$$|\mathbf{v}| = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

とすれば、 y の値は、

$$y = \frac{e}{m_r} |\mathbf{E}| \frac{(x - x_0)^2}{2\mathbf{v}^2} \quad 88$$

となる。されば、磁場に於ける陰極線の振れに依る、曲率半径 R と、電場に於ける振れの量 y とを、實驗的に求めれば、電場及び磁場の強さは、已知なる故、87, 88 式に依つて、陰極線の速度及び、 $\frac{e}{m_r}$ の値を求めることが出来る。

電場及び磁場に於ける、陰極線の振れの實驗は、1901年から1906年に亘つて、カウフマン¹⁾に依つて繰り返さ

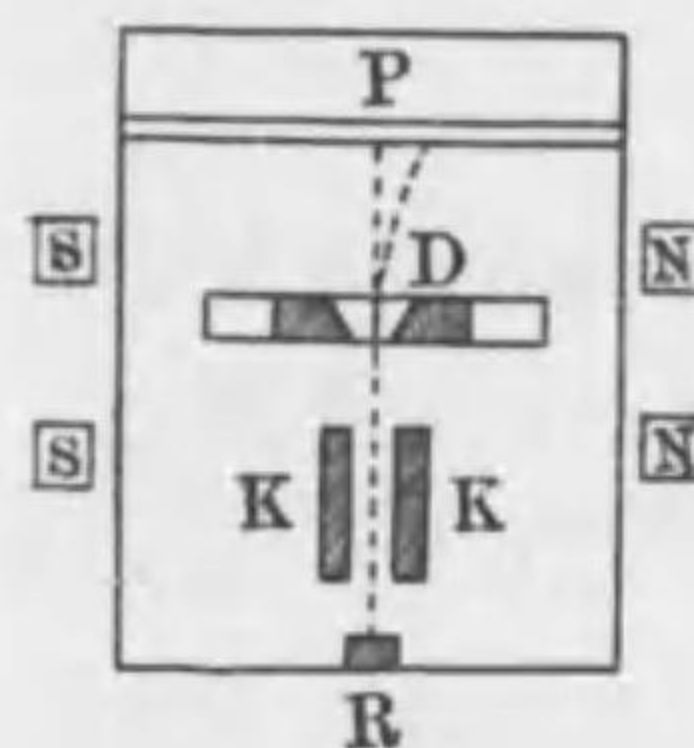
1. W. Kaufmann, Ann. d. Phys. Bd. 19. (1906), S. 487.

れた。カウフマンの實驗に於ては、陰極線の代りに、ラヂウムブロマイドから出る β 線を用ひ、 β 線の経路及び其の位置を、寫真に撮影した。電場のみが作用する場合に於ては、 β 線は、電場内に於て、拋物線の経路を通つて電場外に出る。電場外に於ては、第十四圖の如く、電場の端に於て、拋物線に切線方向に進み、寫真板に當つてKの並行板の間隙中心と、Dの間隙とを結付けた直線の、寫真板上に於ける足の點から、振れた點に、點として現はれる。この振れの大きさは、88式に示す通り、 β 線の速度の二乗に逆比例する故、種々の速度のものを含むときは、寫真板上には、線として現はれる。次に磁場のみの場合に於ては、紙面に垂直なる平面内に於て圓形を畫きつつ進行するを以て、圓形螺線を畫く。然もこの圓の半径は、87式が示す通り、 β 線の速度に比例し、磁場の強さに逆比例する。従つて、種々の速度の β 線を含むときは、種々の半径の圓を畫きつつ進む。従つて、寫真板上には、紙面に垂直なる面内に於て、一つの線として現はれる。されば、電場と磁場とが同時に作用すれば、寫真板上に於ては、一つの曲線として現はれる。そして、その曲線上の各點は、或る速度に於ける、電磁氣場に依る振れの位置を示すものである。

第十四圖に示すものは、電場と磁場とを相並行せし

めて、然も β 線の運動の方向に直角に、同時に作用せしめた場合の、實驗装置の概要にして、Kは電場を與へる並行金屬板で、その間隙は二耗で、電場は紙面に並行に與へられる。N, Sは磁場を與へるコイルの断面を示し、Dは、直径0.2耗の間隙にして、電場及び磁場に依つて曲げられたる β 線は、これを通過して、Pの寫真板に達する。Rは β 線を放出する、ラヂウムブロマイドである。又磁場を除く他のものは、總て真空管内に装置してある。

第十四圖



實驗に於ては、電場の強さは、2500—3000ボルトにして、磁場の強さは、144ガウスを與へた。今實驗に於て、電場に依る振れを y' とすれば、 y' は88式の y に比例するものにして、磁場に依る振れを z' とすれば、 z' は87式の $\frac{1}{R}$ に比例するものである。従つて、

$$\frac{m_r^4}{m_0} = k_1 \frac{y'}{z'^2}$$

を得る。 k_1 は實驗の條件に依つて、一定にして、

$$k_1 = \frac{12\pi a_0 H^2}{|E|(x-x_0)^2 e}$$

の値を持つ。上式の m_0 は、静止状態に於ける電子の質量である。又87, 88式を用ひて、

$$\beta = \frac{|\mathbf{v}|}{c} = k_2 \frac{z'}{y'}$$

を得る。 k_2 も亦一定のものにして、

$$k_2 = \frac{|\mathbf{E}|(x-x_0)^2}{2|\mathbf{H}|}$$

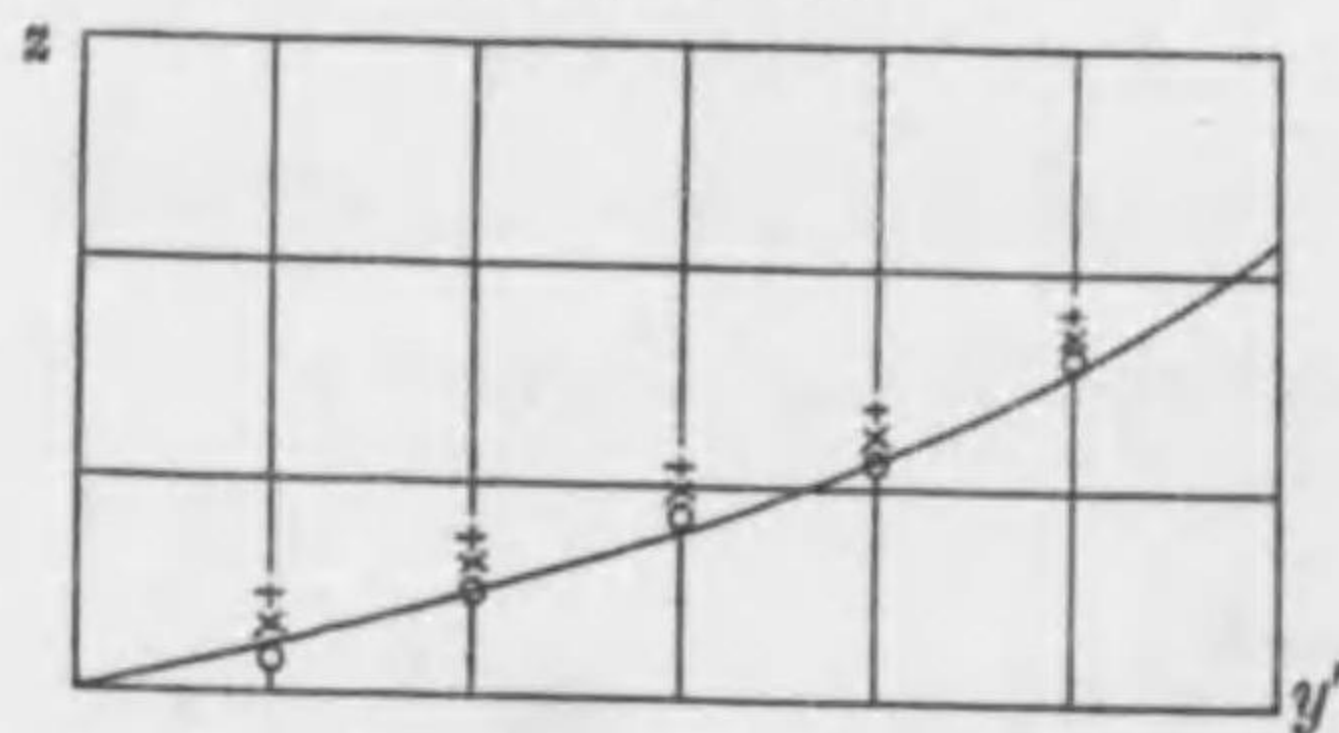
の値を持つ。上式に於て、 $x-x_0$ は、並行板Kの長さである。

次に、アブラハム、ローレンツ及びブツフェレルの電子に就て、 $\frac{m_r}{m_0}$ の値を求め、其の関係式内に、実験的に求めたる値からの、上式の β を入れて、 y' 及び z' の関係を求むれば、第十五圖に示すが如き、曲線を得る。但し、

$$\eta_0 = \frac{e}{m_0 c} = \sqrt{4\pi} 1.884 \times 10^7$$

の値を用ひた。第十五圖に依つて知られる如く、この結果に於ては、ブツフェレルの電子が最も実験に一致

第十五圖



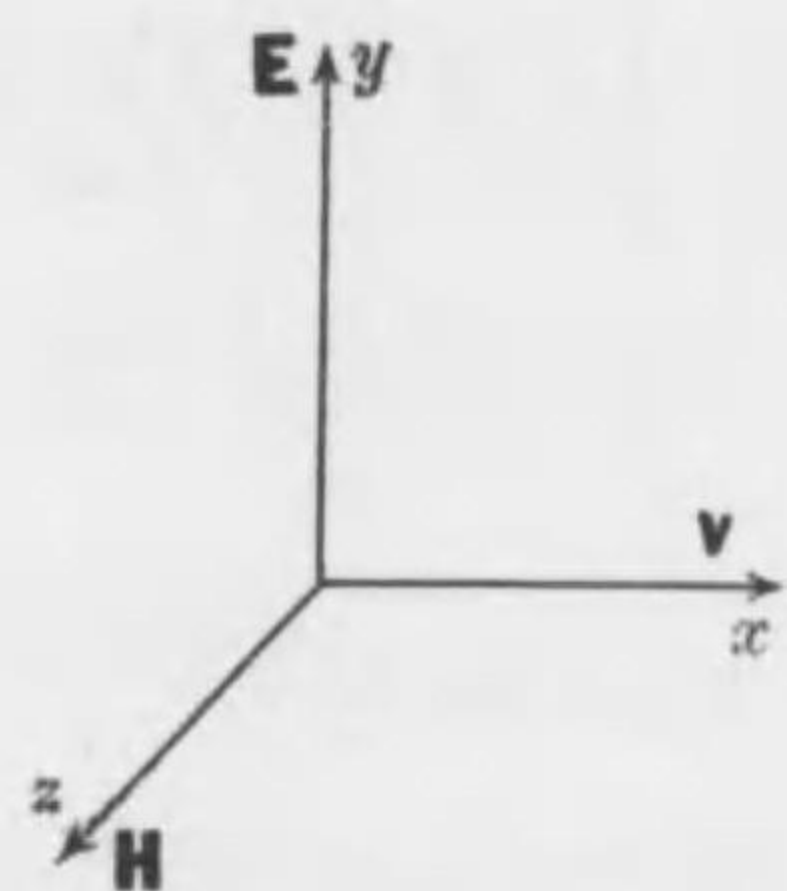
+ ローレンツ
x アブラハム
o ブツフェレル

し、ローレンツの電子が最も一致せざることを示して居る。されど、 β 線は、その経路に於ける残留空気を電離する爲めに、並行板Kの間に電位差を作る。従つて、電場の強さは、均等的にならない。この電位差を考慮すれば、却つてローレンツの電子が、最もよく実験と一致することを示すもの

である。

次に、電場と磁場とを各直角に、又 β 線の運動の方向にも直角に與へた場合に就いて述べる。第十六圖は、電磁氣場と、 β 線の運動の方向 x との關係を示す。

第十六圖



電子に働く電磁氣的外力は、

$$e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}]\right)$$

である。従つて、電場の方向の分力は、

$$K_y = e\left(|\mathbf{E}| - \frac{|\mathbf{v}|}{c}|\mathbf{H}|\right)$$

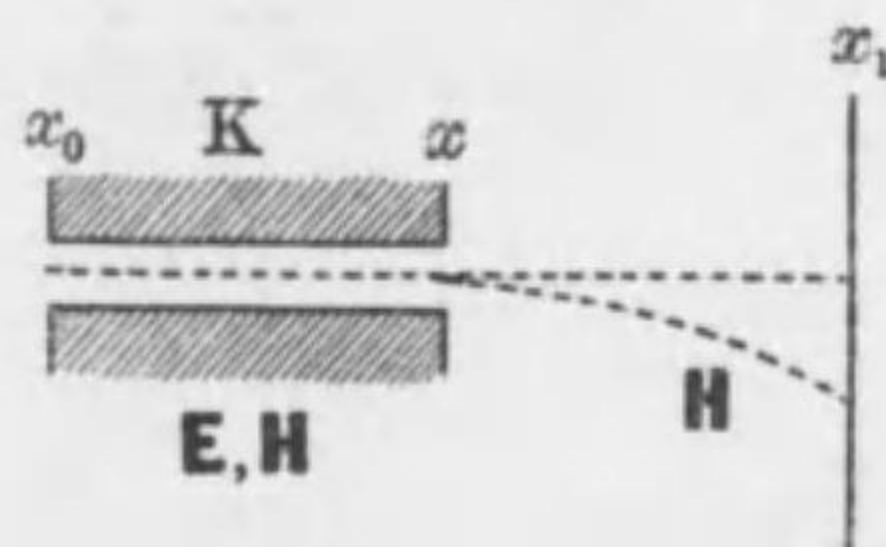
である。

今電子(β 線)の速度を、

$$\beta = \frac{|\mathbf{v}|}{c} = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|}$$

の關係を満足する如きものにとれば、 K_y の値は零となり、電子に働く力の電場の方向の分力は零となる。従つて、斯様な速度の電子は、電磁氣場の影響を受けず、直行運動をなす。されば、電子は、電場を通過した後、第十七圖の如く、外の磁場の爲めに曲げられるだけである。この曲げられた経路の、曲率半徑Rは、87式を満足

第十七圖



七圖の如く、外の磁場の爲めに曲げられるだけである。この曲げられた経路の、曲率半徑Rは、87式を満足

するものにして、従つて、上の $|\mathbf{v}|$ の値を87式に代入して、

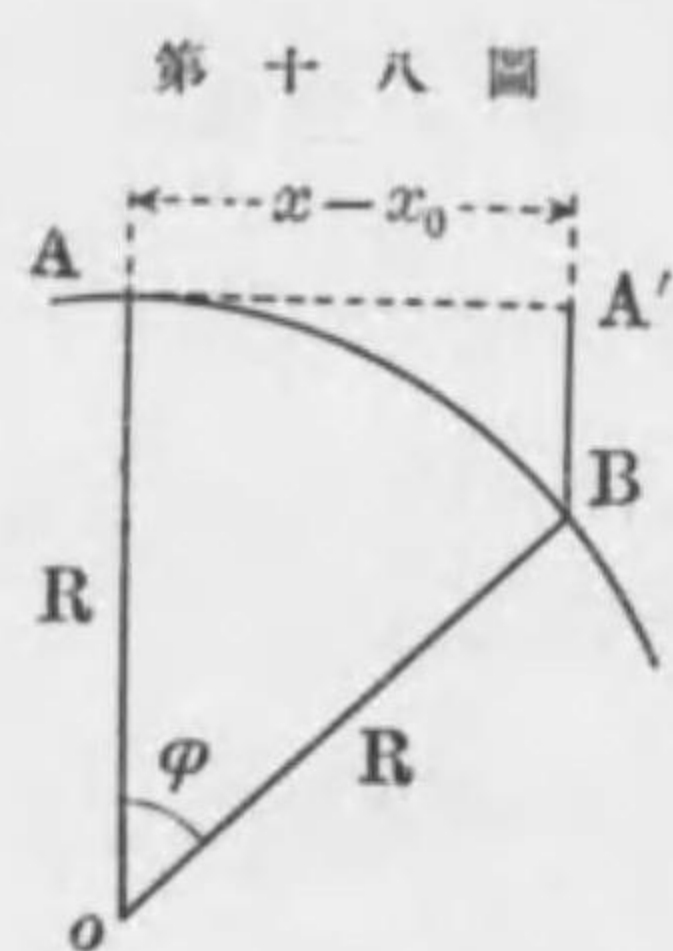
$$\frac{1}{R} = \frac{e}{m_r c^2} \frac{H^2}{|\mathbf{E}|} \quad 89$$

となる。

電子の速度が、上の如き関係を満足せざるものは、電場の部分に於ても、曲げられることは勿論である。今第十七圖に於て、 x_0, x の間に於ける、振れの量を y_1 とすれば、

$$y_1 = y_{(E)} + y_{(H)}$$

となる。即ち、電場と磁場に依る振れの代数的和である。



電場に依るもの $y_{(E)}$ は、88式から與へられる。今、 x_0, x の間の電磁氣場に依つて、電子は第十八圖の、AB の如き経路に曲げられるものとするれば、A'B は磁場に依る振れ $y_{(H)}$ を示し、R は曲率半徑を示す。従つて、

$$-y_{(H)} = R(1 - \cos \varphi) = R \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(x - x_0)^2}{R^2}} \right) \\ \doteq \frac{(x - x_0)^2}{2R}$$

となる。従つて、87式から、

$$-y_{(H)} = \frac{e}{2m_r c} \frac{|\mathbf{H}|}{|\mathbf{v}|} (x - x_0)^2$$

となる。従つて、上式及び88式から、

$$y_1 = \frac{e}{m_r} \frac{(x - x_0)^2}{2v^2} \left(|\mathbf{E}| - \frac{|\mathbf{v}|}{c} |\mathbf{H}| \right)$$

を得る。 y_1 は並行板内に於ける、電磁氣場に依る、振れを示すものにして、この他に、並行板外にも、内部と同じ強さの、均等的磁場が存在するときは、その影響を受けて、更に曲げられる筈である。今、外の磁場に依る振れを y_2 とすれば、 y_2 は上記の $y_{(H)}$ に於て、 $(x - x_0)$ の代りに、 $(x_1 - x)$ を代入して求められる。従つて、全體の振れは、

$$y = y_1 + y_2 = \frac{e}{m_r} \frac{(x - x_0)^2}{2v^2} \left(|\mathbf{E}| - \frac{|\mathbf{v}|}{c} |\mathbf{H}| \right) \\ - \frac{e}{2m_r c} \frac{(x_1 - x)^2}{v^2} |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{H}|$$

となる。今、若しも、

$$x - x_0 = x_1 - x$$

の如く、寫真板の位置 x_1 を撰めば、

$$y = \frac{e}{2m_r} \frac{(x_1 - x)^2}{v^2} \left(|\mathbf{E}| - \frac{2|\mathbf{v}|}{c} |\mathbf{H}| \right)$$

となる。次に、並行板 K の端を出る時の β 線の速度を、近似的に、 $|\mathbf{v}| = c \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|}$ 、であるとすれば、上式は、

$$y = - \frac{e}{2m_r} \frac{(x_1 - x)^2}{c^2} \frac{H^2}{|\mathbf{E}|}$$

となり、磁場のみが作用する場合と、相等しき振れを與

へる。上式は、 β 線の速度に無関係なる故、 β 線は x_1 の位置に於ける、寫真板上の一點に集中して、振れの長さ y を求むるに便利である。この方法に依る實驗結果と、上式の y を用ひて、種々の速度の β 線に対する、 $\frac{e}{m_r c}$ を求めれば、次の如くである。

β	$\frac{e}{m_r c} \times 10^{-7}$
0.2469	1.678
0.3270	1.644
0.1951	1.697
0.3222	1.743
0 ($v=0$)	1.72

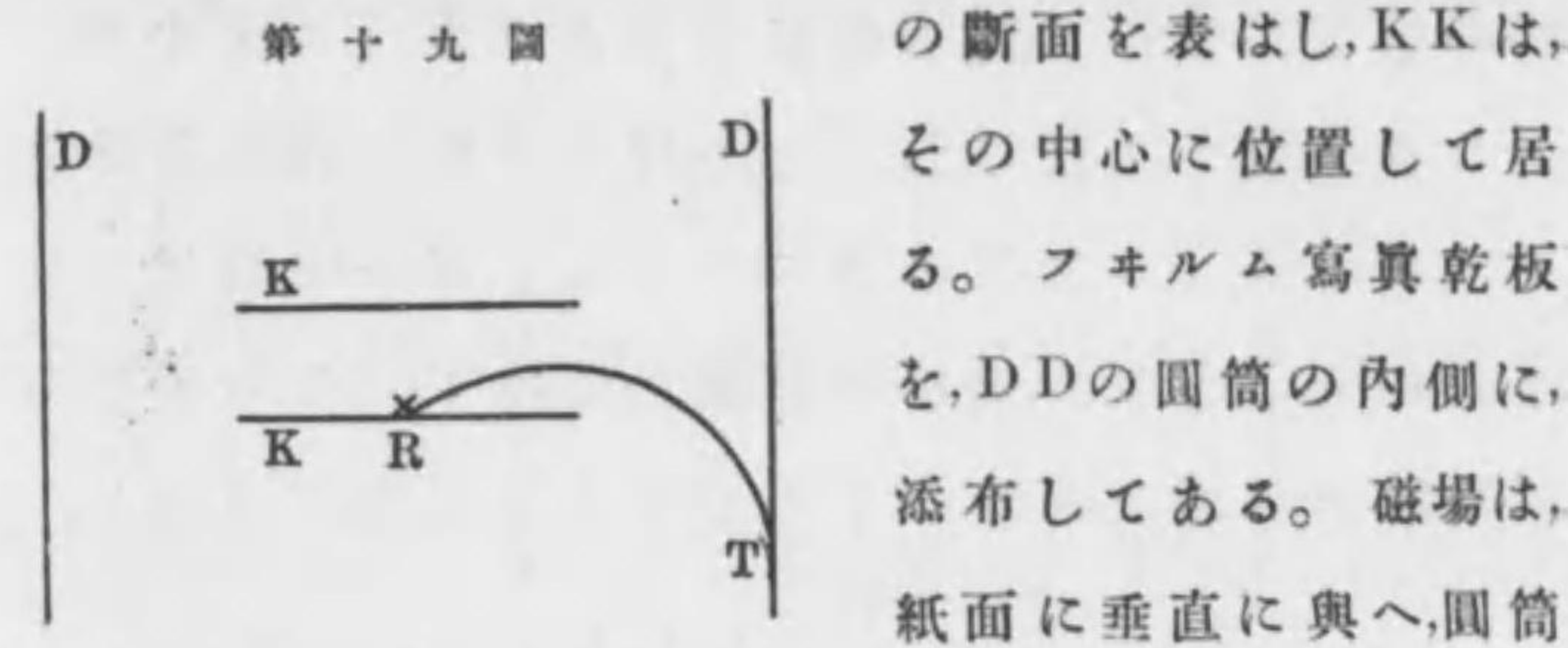
この結果は、アブラハムとローレンツの理論からの値の、中間のものである。

次に、1909年ブッフエレル¹は、電子として、ラヂウムフリオライトから出る β 線を用ひ、電磁氣場をこれに斜に働かして、 β 線の振れの大きさ及び、その速度を精密に測定して、 $\frac{e}{m_0 c}$ を定めた。この結果に於ては、ローレンツの理論が、アブラハムの理論よりも、よく實驗結果に一致することを示した。

第十九圖は、その實驗装置の大要である。KKは金

1. A. H. Bucherer, Ann. d. Phys. Bd. 28, 1909,

屬製並行圓板にして、電場を與へる。DDは、圓筒の壁



の断面を表はし、KKは、その中心に位置して居る。フィルム寫真乾板を、DDの圓筒の内側に、添布してある。磁場は、紙面に垂直に與へ、圓筒内は真空にしてある。KKの距離が、極めて小なる場合に於てはRから出た β 線の内、並行板の右端に於て、恰度電場に依る振れと、磁場に依る振れとが殆んど相等しく打消されて、殆んど並行板の中心に近く直線的に、進行し來りしもののみが、外に出で、寫真のフィルムに達し得るのである。

今、 β 線は v の速度を以て、磁場に對して φ の角度を以て出發したとすれば、並行板から飛び出ることの出来るものは、

$$e|\mathbf{E}| = \frac{e|\mathbf{H}||\mathbf{v}|\sin\varphi}{c}$$

の條件を、満足するもののみである。 \mathbf{E} は電場の強さを表はし、 \mathbf{H} は磁場の強さである。従つて、並行板から外に出る β 線の速度は、

$$\beta = \frac{|\mathbf{v}|}{c} = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|\sin\varphi}$$

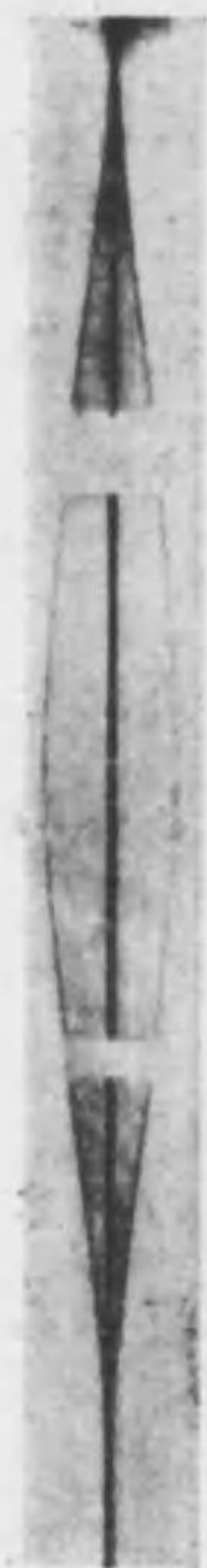
である。上の速度を以て、並行板を出たものは、外の磁場の影響に依つて、圓形螺線を書きつつ、Tに達する。上の β の値が、1に等しきとき、即ち β 線の速度が、光速 c に等しきときは、既に述べたる如く、電子の質量は無限大の大きさとなり、磁場の影響を受けず。この場合の寫真板上の跡は、次の如くにして、見ることが出来る。

第二十圖 即ち $\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \frac{1}{2}$ の如くとすれば、

$$\sin \varphi = \frac{1}{2\beta}$$

となり、 $\sin \varphi = \frac{1}{2}$ の時即ち、 φ が 30° 又は 150° の場合に就て、振れを起さざるときの跡を見ることが出来る。

又、最大の振れを起す場合は、 φ が $\frac{\pi}{2}$ か、 β が $\frac{1}{2}$ の時にして、この時の寫真は、第二十圖に示す通りである。濃い線は振れの起らざる場合のものにして、寫真から知られることは、 φ が $30^\circ - 150^\circ$ の間以外の角度のものは、並行板を出ることが出来ない。最大の振れを起すもの、即ち、磁場に直角に飛び出すものは、並行板から出た後は、圓形經路を通つて、寫真板に達する。この經路の半徑をRとし、圓筒DDの半徑と、並行板の半



徑との差を r とし、 y を最大の振れとすれば、第二十一

第二十一圖

圖から容易に知られる如く、

$$R = \frac{1}{2y}(r^2 + y^2)$$

の關係を得る。又、前に求めた磁場のみの振れに依る、曲率半徑Rの値から、 β 線の横質量 m_r を求め、これに、上に得たるRを代入すれば、

$$m_r = \frac{eR|\mathbf{H}|}{c|\mathbf{v}|} = \frac{e|\mathbf{H}|}{2c|\mathbf{v}|} \left(y + \frac{r^2}{y} \right) \quad 90$$

を得る。次に、ロ-レンツの結果から、

$$\frac{e}{m_0 c} = \frac{e}{m_r c} (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

を得る。上式の m_r に、90式の値を代入すれば、

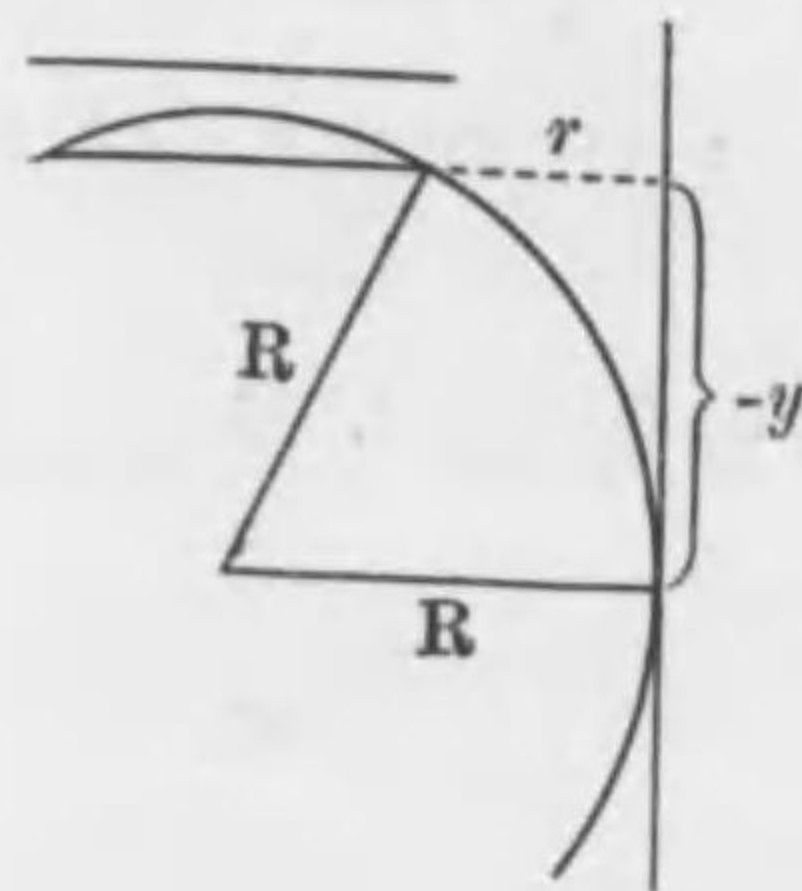
$$\begin{aligned} \frac{e}{m_0 c} &= \frac{2cy}{|\mathbf{H}|(y^2 + r^2)} \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{2cy}{|\mathbf{H}|(y^2 + r^2)} \tan(\sin^{-1} \beta) \end{aligned} \quad 91$$

となる。又、アブラハムの理論からも、同様にして、

$$\frac{e}{m_0 c} = \frac{2cy}{|\mathbf{H}|(y^2 + r^2)} \left\{ \frac{3}{4\beta} \frac{2\delta - \tanh 2\delta}{\tanh 2\delta} \right\} \quad 91'$$

を得る。但し $\beta = \tanh \delta$ である。

實驗から y の振れを求め、磁場の強さ $|\mathbf{H}|$ 及び r の値を代入すれば、種々の β に對して、91, 91'式は、一定で



ある可きである。次表は其の結果である。

β	H	y(耗)	$\frac{e}{m_0 c} \times 10^{-7}$	
			(ローレンツ)	(アブラハム)
0.3173	104.55	16.37	1.752	1.726
0.3787	115.78	14.48	1.761	1.733
0.4281	127.37	13.50	1.760	1.723
0.5154	127.55	10.18	1.763	1.706
0.6870	127.55	6.23	1.767	1.642

上の結果に依れば、ローレンツの電子の方、 $\frac{e}{m_0 c}$ の値が一定にして、よく実験結果に一致することが知れる。又、1910年フブカは、光電子を用ひて、精密に実験した結果、ローレンツの電子の方、よく実験結果に一致することを見出した。

E. Hupka, Ann. d. Phys. Bd. 31, 1910.

第八章

加速度運動に於ける電子の 電磁氣的ポテンシャル

電子が加速度運動にあるとき、その周囲の空間に於ける、電子に依る電磁氣場を定める、スカラー及びベクトルポテンシャルは、如何に表はされるか。

今次の如き函數を假定する。

$$\psi = \frac{1}{r} F\left(t \pm \frac{r}{c}\right) \quad 92$$

但し、 t は時間を表はし、 r は距離を表はし、 c は光速である。函數 ψ は波動の式、

$$\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial t^2}$$

を満足することは、容易に知ることが出来る。即ち、

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2}$$

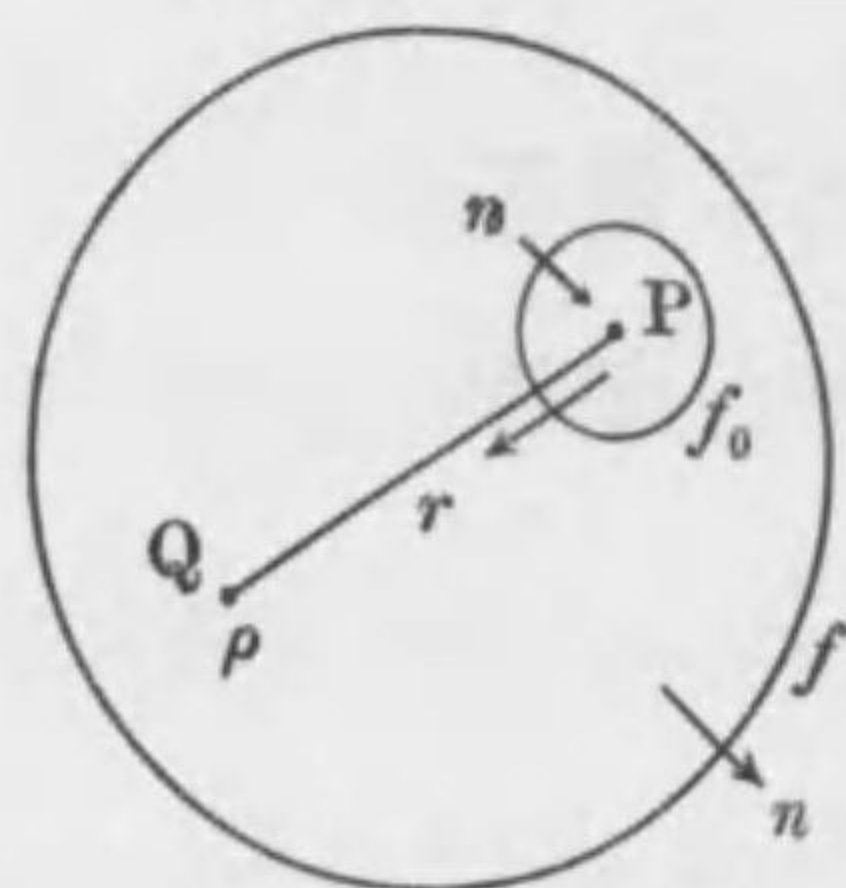
にして、従つて、

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r c^2} \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

となる。されば、函數 ψ は或る擾亂が、光速 c を以て進み行くことを示すものである。

次に、 ψ, φ の二つの函数をとり、 φ は第二十二圖に於

第二十二圖



て、Qに電荷 ρ が存在するとき、これに依る、Pに於けるスケラーポテンシャルを表はすものとする。又、P、Qを包む f の空間に於ては、何れの點に於ても、連続函数であるとする。圖に示す如く、P、Q

の距離を表はすベクトルは、PからQに向ふ様にとれば、ポテンシャルは、P點に於て、 $r=0$ となり、PとQが一致する故、無限大となる。夫故に、P點を圍む極めて小なる球面 f_0 を考へ、其の内部を除外すれば、 f と f_0 との間の空間に於ては、何れに於ても、 ψ, φ は連続的函数であると考へられる。されば、ガウスの定理に依つて、

$$\int (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dv = \int_r \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df + \int_{n_0} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df \quad 93$$

の関係が成立する。上式に於て、左邊は體積積分を表はし、右邊は表面積分を表はす。又、 n は f 及び f_0 の表面に於て、外に向ふ法線の方角を表はす。93式の左邊は、第二章17式、及び上に得たる関係を用ひて、書き換へれば、

$$\int (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dv = \frac{1}{c^2} \int \left(\varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) dv + \int \psi \rho dv$$

となる。次に、これを93式に代入して、時間に對して、 t_1 から t_2 迄積分すれば、

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df + \int_{t_1}^{t_2} dt \int \psi \rho dv + \frac{1}{c^2} \left| \int \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dv \right|_{t_1}^{t_2} \quad 94$$

となる。

次に ψ の函数を適當に定める。今、非常に小なる値 δ をとり、これと零との間にある所の量、 ε に對して、 ψ の函数Fは、

$$F(\varepsilon) \neq 0, \quad 0 < \varepsilon < \delta$$

の關係を満足するものとし、そして、 ε が上の範圍以外の値に對しては、常にF(ε)は零であるとする。されば92式に於て知られる如く、上の如き、 ε に等しき時間の間に於ては、これに關係する總ての量が一定であると、考へ得るものとし、然も、

$$\int_0^\delta F(\varepsilon) d\varepsilon = 1$$

の關係が満足されるものとする。従つて、

$$t + \frac{r}{c} = \varepsilon$$

と置き、94式の時間に對する積分の極限值、 t_1, t_2 を、

$$t_1 + \frac{r}{c} < 0, \quad t_2 + \frac{r}{c} > \delta$$

の如く選めば,

$$\int_{t_1}^{t_2} F\left(t + \frac{r}{c}\right) dt = \int_{t_1 + \frac{r}{c}}^{t_2 + \frac{r}{c}} F(\varepsilon) d\varepsilon$$

となり、函数 $F(\varepsilon)$ に対する上の假定に依つて、上式は、

$$\int_{t_1 + \frac{r}{c}}^{t_2 + \frac{r}{c}} F(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^\delta F(\varepsilon) d\varepsilon = 1$$

となる。従つて、94式の右邊の第二項の時間に對する積分は、

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho F\left(t + \frac{r}{c}\right) dt = \rho \int_0^\delta F(\varepsilon) d\varepsilon = \rho$$

となる。 ρ の値は、時間が 0 と δ との間にあるときの値である。又、上に述べたる假定に依れば、この ρ は、 $\varepsilon = 0$ に於けるもの、即ち、 $t = -\frac{r}{c}$ の時刻に於ける値と、見ることが出来る。又函数 ψ に於て、 $t_1 + \frac{r}{c} < 0$ なるが故に、

$$F\left(t_1 + \frac{r}{c}\right) = 0, \quad \psi_{t=t_1} = 0$$

となり、 $t_2 + \frac{r}{c} > \delta$ なるが故に、

$$F\left(t_2 + \frac{r}{c}\right) = 0, \quad \psi_{t=t_2} = 0$$

となる。又、

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} F\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

に於て、 t に、 t_1, t_2 を代入すれば、上と同様にして、

$$\frac{\partial}{\partial t} F\left(t_1 + \frac{r}{c}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=t_1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} F\left(t_2 + \frac{r}{c}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=t_2} = 0$$

となる。従つて、94式の右邊の第三項は零となる。次に同式の右邊の第一項は、

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_f \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} df &= \int_f df \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} F\left(t + \frac{r}{c}\right) dt \\ &= \int_f \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{t=-\frac{r}{c}} df \end{aligned}$$

となり、又、

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) F\left(t + \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{rc} \frac{\partial r}{\partial n} F'\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

を用ひて、

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_f \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} df &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_f \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) \varphi F\left(t + \frac{r}{c}\right) df \\ &\quad + \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_f \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \varphi F'\left(t + \frac{r}{c}\right) df \end{aligned}$$

を得る。上式の右邊の第一項を I_1 とし、第二項を I_2 とすれば、

$$I_1 = \int_f \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) df \int_{t_1}^{t_2} \varphi F\left(t + \frac{r}{c}\right) dt = \int_f \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) (\varphi)_{t=-\frac{r}{c}} df$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_f \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} df \left[\varphi F\left(t + \frac{r}{c}\right) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} df \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} F\left(t + \frac{r}{c}\right) dt \right] \\ &= - \int_f \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=-\frac{r}{c}} df \end{aligned}$$

となる。従つて、94式は、右邊に上に得たる結果を代入して、次の如くなる。

$$\int_{f_0}^{t_0} dt \int_{f_0} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df = \int_{f_0} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{t_0 - \frac{r}{c}} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) (\varphi)_{t_0 - \frac{r}{c}} + \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{t_0 - \frac{r}{c}} \right\} df + \int \frac{1}{r} (\rho)_{t_0 - \frac{r}{c}} dv \quad 95$$

又上式の左邊を、上と同様に變形して、

$$\int_{f_0}^{t_0} dt \int_{f_0} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df = - \int_{f_0} \left\{ \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{t_0 - \frac{R}{c}} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) (\varphi)_{t_0 - \frac{R}{c}} + \frac{1}{cR} \frac{\partial R}{\partial n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{t_0 - \frac{R}{c}} \right\} df$$

を得る。但RはPを圍む小球面、 f_0 の半徑である。

然るに、

$$\int_{f_0} df = 4\pi R^2, \quad \frac{\partial R}{\partial n} = -1$$

となるを以て、

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \right) \frac{\partial R}{\partial n} = \frac{1}{R^2}$$

の關係に於て、球面の半徑を次第に縮少すれば、 $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right)$ の値は急速に増大する。従つて、上の積分式に於て、右邊の第二項は、球面 f_0 を次第に縮少することに依つて、第一項及び第三項よりも、著しく大となる。されば、今

f_0 の球面として、極めて小なる球をとれば、第一及び第三項は、第二項に對して消略することが出来る。夫故に、

$$\int_{f_0}^{t_0} dt \int_{f_0} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df = \frac{1}{R^2} \int_{f_0} (\varphi)_{t_0 - \frac{R}{c}} df$$

となり、Rを如何程にも小さくとれば、 φ は f_0 の球面の中心に於ける値に如何程にも近づく。今 φ を f_0 の球面の中心に於ける値をとれば、上式の右邊の値は、

$$\frac{1}{R^2} (\varphi)_{t_0} \int_{f_0} df = 4\pi (\varphi)_{t_0(P)}$$

となる。従つて、95式は、上に得たる關係を用ひて、

$$4\pi (\varphi)_{t_0(P)} = \int \frac{1}{r} (\rho)_{t_0 - \frac{r}{c}} dv + \int_{f_0} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{t_0 - \frac{r}{c}} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) (\varphi)_{t_0 - \frac{r}{c}} + \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{t_0 - \frac{r}{c}} \right\} df \quad 96$$

となる。次に、 f の球面を、Pを中心として、何程にも大きく擴大すれば、96式の右邊の表面積分の値は次第に零に近づく。斯様に擴大された球面 f の上に於ては、この球面内の、Qに於ける電荷 ρ から放射された電磁氣擾亂は、既に述べたる如く、光速 c を以て傳播し行くが故に、或る時刻 t_0 よりも以前に於ては、表面に到達せざる如き時刻 t_0 を考へることが出来る。即ち、この時刻に於ては f の表面上に於ける φ は零である。又PとQとの距離 r を、

$$t - \frac{r}{c} < t_0$$

の如くとすることも可能である。斯様な時刻 t をとれば、 f の表面上に於ける、 φ は零にして、従つて、96式の表面上の積分内の値は、總て零となる。即ち、斯様な時刻 t に於ける、 P 點に於けるポテンシャル φ を、 φ_t とすれば、96式から

$$\varphi_t = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\rho)_{t-\frac{r}{c}}}{r} dv \quad 97$$

となる。即ち時刻 t に於ける、電荷の位置から r の距離に於ける、スケーラーポテンシャル φ は、夫れ以前の時刻 $t - \frac{r}{c}$ に於ける ρ の値から求められる。

ベクトルポテンシャル \mathbf{A} も亦、 φ と同様の関係を満足することは、既に屢々述べた。されば、同様にして、

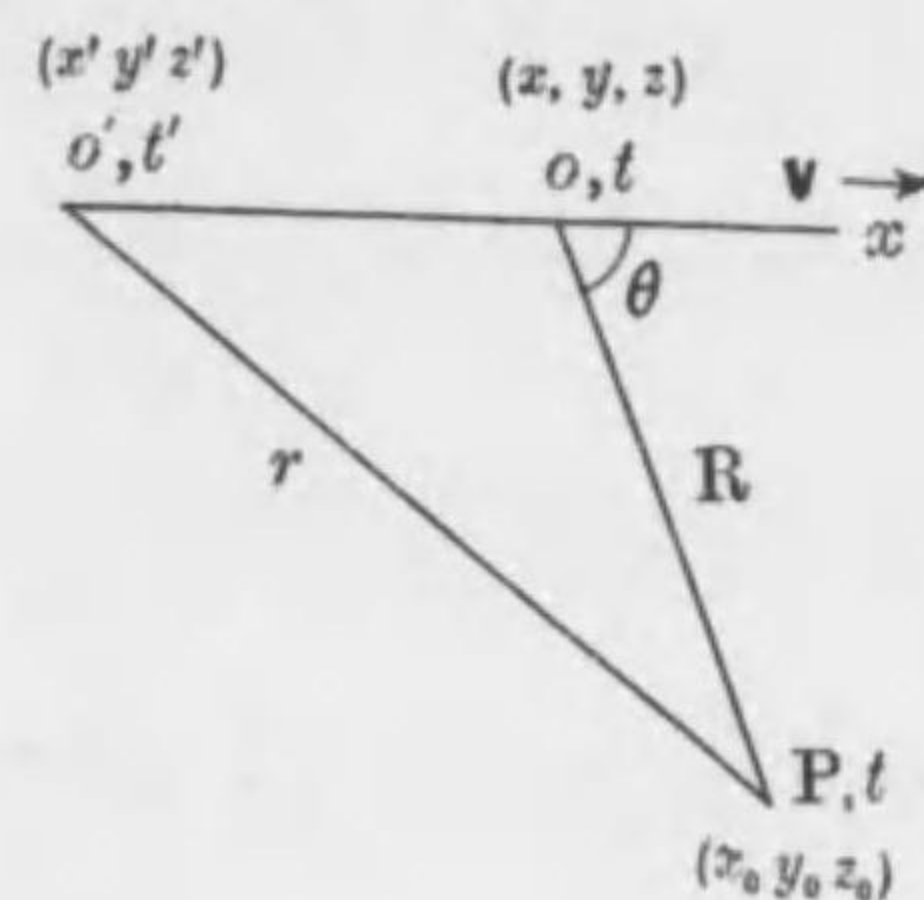
$$\mathbf{A}_t = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\rho\mathbf{v})_{t-\frac{r}{c}}}{rc} dv \quad 98$$

を得る。電磁氣擾亂が光速 c の速度を以て傳播する場合の、電磁氣的ポテンシャルは、97, 98式に依つて求められる。これを、遅刻ポテンシャル¹⁾と名付けて居る。

次に、遅刻ポテンシャルを用ひて、加速運動にある電子の作る電磁氣場のベクトル、及び、電磁氣的諸量を求める。

1. Retarded Potential, Retardierte Potentiale.

第二十三圖



今電子は加速運動にあるとし、時刻 t に於て點 O にあり。その時の速度を \mathbf{v} 、加速度を $\dot{\mathbf{v}}$ とし、その方向は x 軸の方向とする。同じ時刻 t に於て、點 P にある観測者が、電子からの電磁氣的

擾亂を受けたとする。従つて、この電磁氣的擾亂は時刻 t よりも以前、即ち時刻 t' に、電子から出たものである。今、電子は時刻 t' に於て點 O' にあつたとする。従つて、 $O'O$ の距離は次の如く表はすことが出来る。

$$O'O = x - x' = |\mathbf{v}|(t - t') - \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{v}}| (t - t')^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} |\ddot{\mathbf{v}}| (t - t')^3 - \dots$$

又電磁氣擾亂は、光速 c を以て進むものとすれば、

$$O'P = r = c(t - t')$$

である。従つて、 $t - t'$ を上式に代入して、

$$x - x' = \frac{|\mathbf{v}|}{c} r - \frac{1}{2} \frac{|\dot{\mathbf{v}}|}{c^2} r^2 + \frac{1}{6} \frac{|\ddot{\mathbf{v}}|}{c^3} r^3 - \dots$$

を得る。又、第二十三圖から、

$$r^2 = R^2 + (x - x')^2 + 2R(x - x') \cos \theta$$

なる関係が成立する。そして、電子の速度及びその微係数は、光速に比して相當に小なるものとすれば、 $\frac{|\mathbf{v}|}{c}$, $\frac{|\dot{\mathbf{v}}|}{c^2}$, $\frac{|\ddot{\mathbf{v}}|}{c^3}$ 等は第一次の小なる量と考へ得るが故に、今之等の二乗及相乗積及び、夫れ以上のものを消略すれば、 r^2 の右邊に $x-x'$ の値を代入して、

$$r^2 = R^2 + 2R \left(\frac{|\mathbf{v}|}{c} r - \frac{1}{2} \frac{|\dot{\mathbf{v}}|}{c^2} r^2 + \frac{1}{6} \frac{|\ddot{\mathbf{v}}|}{c^3} r^3 - \dots \right) \cos \theta$$

を得る。 $\frac{v^2}{c^2}$ 以上を、1に對して消略すれば、上式の右邊の r の代りに R を以て置き換へ得るが故に、上式の平方根を求むれば、

$$r \doteq R \left\{ 1 + \left(\frac{|\mathbf{v}|}{c} - \frac{1}{2} \frac{|\dot{\mathbf{v}}|}{c^2} R + \frac{1}{6} \frac{|\ddot{\mathbf{v}}|}{c^3} R^2 - \dots \right) \cos \theta \right\}$$

となる。

點 P に於けるポテンシャルを求むるとき、點 O' に於ける電荷の密度 ρ の代りに、點 O 即ち、點 P と同時刻に於ける電荷の密度 ρ をとり、積分の微小體積として、點 O に於けるものの代りに、點 O' に於けるものをとれば、その結果が相等しいことは、既に屢々述べたる通りである。 O' 及び O に於ける微小體積間の關係を求め、爲めに、 O' 及び O に於ける微小線分間の關係を求め、先づ、上に述べたる近似値をとり、 $x-x'$ の右邊の r の代りに R を以て置き換へ、その微係數を求め、第二

十三圖から知られる如く、 $\frac{\partial R}{\partial x} = -\cos \theta$ の關係を代入すれば、

$$dx' = dx \left\{ 1 + \left(\frac{|\mathbf{v}|}{c} - \frac{|\dot{\mathbf{v}}|}{c^2} R + \frac{|\ddot{\mathbf{v}}|}{2c^3} R^2 \right) \cos \theta \right\}$$

を得る。運動の方向が、 x 軸の方向なる故、

$$dy' = dy, \quad dz' = dz$$

である。従つて、時刻 t に於て、點 P に於けるスケーラーポテンシャルは、97式から、

$$\varphi_t = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\rho dx' dy' dz'}{r}$$

となる。上に求めたる、 r , dx' , dy' , dz' の値を代入して、 $dx dy dz = dv$ として、 $\frac{|\mathbf{v}|}{c}$, $\frac{|\dot{\mathbf{v}}|}{c^2}$, $\frac{|\ddot{\mathbf{v}}|}{c^3}$ の二乗及び相乗積を消略すれば、

$$\varphi_t = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho dv}{R} \left\{ 1 - \frac{|\dot{\mathbf{v}}|}{2c^2} R \cos \theta + \frac{|\ddot{\mathbf{v}}|}{3c^3} R^2 \cos \theta \right\}$$

を得る。又第二十三圖から知られる如く、

$$R \cos \theta = x_0 - x$$

の關係を、上式に代入すれば、

$$\varphi_t = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho dv}{R} \left\{ 1 - \frac{|\dot{\mathbf{v}}|}{2c^2} (x_0 - x) + \frac{|\ddot{\mathbf{v}}|}{3c^3} R (x_0 - x) \right\} \quad 99$$

となる。

次に、ベクトルポテンシャル \mathbf{A}_t を求める爲めに、 $x-x'$ を時刻 t' に就て微分すれば、

$$\frac{dx'}{dt'} = |\mathbf{v}| - |\dot{\mathbf{v}}|(t-t') + \frac{1}{2}|\ddot{\mathbf{v}}|(t-t')^2 - , + , \dots$$

を得る。又近似的に、 $t-t' = \frac{R}{c}$ を代入すれば、上式は、

$$\frac{dx'}{dt'} = |\mathbf{v}| - \frac{|\dot{\mathbf{v}}|}{c}R + \frac{|\ddot{\mathbf{v}}|}{2c^2}R^2 - , + , \dots$$

となる。98式に於て、点O'即ち、時刻 t' に於ける $|\mathbf{v}|$ の代りに、 $\frac{dx'}{dt'}$ を入れ、又 t' に於ける ρ' の代りに、時刻 t に於ける ρ をとり、 dv は $dx'dy'dz'$ をとり、上に求めたるの値を入れ、前と同様の近似的消略を行へば、

$$|\mathbf{A}|_t = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho dv}{R} \left(\frac{|\mathbf{v}|}{c} - \frac{|\dot{\mathbf{v}}|}{c^2}R + \frac{|\ddot{\mathbf{v}}|}{2c^3}R^2 \right) \quad 100$$

を得る。

次に、点Pに於ける、電磁氣場のベクトルを求める。電場のベクトルは、第二章12式に依り、

$$|\mathbf{E}|_t = -\nabla\phi_t - \frac{1}{c} \frac{\partial |\mathbf{A}|_t}{\partial t}$$

から求められる。即ち99式から、

$$\begin{aligned} (\nabla\phi)_x &= \frac{\partial\phi_t}{\partial x_0} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho dv}{R} \left\{ -\frac{|\dot{\mathbf{v}}|}{2c^2} + \frac{|\ddot{\mathbf{v}}|}{3c^3}R \right\} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho dv}{R^2} \frac{\partial R}{\partial x_0} \left\{ 1 - \frac{|\dot{\mathbf{v}}|}{2c^2}(x_0 - x) \right\} \end{aligned}$$

を得る。又、

$$R^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2$$

の関係から、

$$\frac{\partial R}{\partial x_0} = \frac{x_0 - x}{R}$$

を得る。上式を、 $(\nabla\phi)_x$ に代入して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi_t}{\partial x_0} &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho dv}{R^2} (x - x_0) + \frac{|\dot{\mathbf{v}}|}{8\pi c^2} \int \rho \left\{ -\frac{1}{R} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x_0 - x)^2}{R^3} \right\} dv + \frac{|\ddot{\mathbf{v}}|}{12\pi c^3} \int \rho dv \end{aligned}$$

を得る。又100式から、

$$\frac{1}{c} \frac{\partial |\mathbf{A}|_t}{\partial t} = \frac{|\dot{\mathbf{v}}|}{4\pi c^2} \int \frac{\rho}{R} dv - \frac{|\ddot{\mathbf{v}}|}{4\pi c^3} \int \rho dv$$

を得る。従つて、電場のベクトルの x 分は、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho dv}{R^2} (x - x_0) - \frac{|\dot{\mathbf{v}}|}{8\pi c^2} \int \rho \left\{ \frac{1}{R} + \frac{(x_0 - x)^2}{R^3} \right\} dv \\ &\quad + \frac{|\ddot{\mathbf{v}}|}{6\pi c^3} \int \rho dv \end{aligned}$$

となる。

次に、点Pも電子内の一点と考へ、これに働く、電磁氣的力を求める。今、点Pに於ける電荷の密度を ρ_0 とし、その微小體積を dv_0 とすれば、これに働く力は、

$$\mathbf{f} \rho_0 dv_0 = \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) \rho_0 dv_0$$

である。これを電子全體の體積に積分すれば、この力は、電子自身が作る電磁氣場に依つて、作用される力である。磁場のベクトル \mathbf{H} は、 $\text{rot } \mathbf{A}_t$ から求められ、これを、 $\frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}]$ に代入すれば、 \mathbf{H} に依る力は最初の項から、 $\frac{|\dot{\mathbf{v}}|}{c}$

の二乗である。従つて、電場のベクトルの計算に於けると、同様の近似値を求むることに依つて、 $\frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}]$ の項は零となる。されば、電子に働く電磁氣的力は、電場に依る力のみとなり、これを電子全體に積分すれば、全力を得る。即ち、

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{f} \rho_0 dv_0 = \int \mathbf{E}_t \rho_0 dv_0$$

となる。今 x 分を求める爲めに、上式に既に求めたる \mathbf{E}_x を代入して、

$$\mathbf{K}_x = \frac{1}{4\pi} \int \rho_0 dv_0 \int \frac{\rho dv}{R^3} (x_0 - x) - \frac{\dot{\mathbf{v}}}{8\pi c^2} \int \rho_0 dv_0 \int \rho \left\{ \frac{1}{R} + \frac{(x_0 - x)^2}{R^3} \right\} dv + \frac{\ddot{\mathbf{v}}}{6\pi c^3} \int \rho_0 dv_0 \int \rho dv$$

を得る。上式の第一項は、第二項及第三項に比して小なる故、これを消略し、

$$\int \rho dv = \int \rho_0 dv_0 = e$$

の積分は電子の全電荷に等しく、電荷は表面分布の場合をとれば、

$$(x_0 - x)^2 = (y_0 - y)^2 = (z_0 - z)^2 = \frac{1}{3} R^2 = \frac{1}{3} a^2$$

なるを以て、これ等の値を \mathbf{K}_x に代入して、

$$\mathbf{K}_x = -\frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}}{6\pi c^2 a} + \frac{e^2 \ddot{\mathbf{v}}}{6\pi c^3} \quad 101$$

を得る。 a は電子の半径である。又、電子の静止状態

に於ける電磁氣的質量 m_0 を以て表はせば、電子に働く力の x 分は、

$$\mathbf{K}_x = -m_0 \dot{\mathbf{v}} + \frac{am_0}{c} \ddot{\mathbf{v}}$$

となる。上式の第一項は慣性的力にして、第二項は高次加速度 $\ddot{\mathbf{v}}$ に比例する所の力である。後者は、電子が加速運動にあるとき、電子が輻射エネルギーを放射する爲めの反作用である。されば、この力は、電子が等速運動にあるときは、現はれざるものである。従つて、電子が週期運動をなし、輻射エネルギーを放射する場合に於て、其の一週期間になされる仕事を求めれば、その意味を明らかにすることが出来る。

今、電子の運動は、 x 軸に並行して起るものとし、力 \mathbf{K}_x に依る一週期間に於ける仕事は、週期を T とし、上に得たる \mathbf{K}_x を用ひて、次の如く求められる。即ち、

$$\int_0^T \mathbf{K}_x \cdot \mathbf{v} dt = -m_0 \int_0^T \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt + \frac{am_0}{c} \int_0^T \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt$$

となる。上の計算に於て、

$$\frac{1}{2} \left| m_0 \mathbf{v}^2 \right|_0^T = 0 \quad \left| \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \right|_0^T = 0$$

を考慮すれば、

$$\int_0^T \mathbf{K}_x \cdot \mathbf{v} dt = -\frac{am_0}{c} \int_0^T \dot{\mathbf{v}}^2 dt$$

となる。即ち、仕事は負號を有し、従つて、力は運動に對

する抵抗力を表はす。されば、電子の週期的運動に於て、エネルギーを放射することを意味する。今運動は単一弦運動であると假定すれば、その速度は、

$$|\mathbf{v}| = A \cos vt$$

を以て表はすことが出来る。 ν は振動数を表はし、 A は電子の速度 $|\mathbf{v}|$ の最大値を表はす。されば、振動を減衰せしめる力、即ち \mathbf{K}_x の第二項は、上の $|\mathbf{v}|$ を用ひて、

$$-\frac{am_0\nu^2}{c}|\mathbf{v}|$$

となる。従つて、この力が一週期間になす仕事は、

$$\begin{aligned} -\frac{am_0\nu^2}{c}\int_0^T \mathbf{v}^2 dt &= -\frac{am_0\nu^2 A^2}{c}\int_0^T \cos^2 vt dt \\ &= -\frac{am_0\nu^2 A^2}{2c}T \end{aligned}$$

となる。又、 $T = \frac{2\pi}{\nu}$ の関係を代入すれば、仕事は次の如くなる。

$$-\frac{\pi am_0 A^2}{c}\nu$$

即ち、仕事は、振動数に比例することを示す。

次に、電子が輻射エネルギーを放射するときの有様に就て述べる。

第二十三圖に於て、電子が x 軸に並行に、 $O'O$ の線上に於て、振動運動を行ひ、輻射エネルギーを放射するものとし、點 P に於て、そのエネルギーを受けたとする。

單位面積を通じて、放射するエネルギーは、エネルギーの流れの量に等しく、 $c[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ を以て表はされる。されば、點 P に於ける輻射エネルギーを求むる爲めには、 P に於ける、振動電子に依る、電磁氣場のベクトルを、計算することが必要である。今 $O'P$ の距離 r は、電子の半徑に比して、極めて大であるとする。従つて、この計算に於ては、電子は點と假定しても差支へはない。

既に求めたる dx' の、 $|\mathbf{v}|$ 、 $|\dot{\mathbf{v}}|$ 、 $|\ddot{\mathbf{v}}|$ 等を含む項を、 $\frac{dx'}{dt} = |\mathbf{v}'|$ を以て表はせば、

$$dx' = \left(1 + \frac{|\mathbf{v}'|}{c} \cos \theta\right) dx \doteq \left(1 + \frac{\mathbf{v}_r'}{c}\right) dx$$

となる。但し、 θ と θ' との差は、 $\frac{1}{r^2}$ を含む爲めに、これを消略して、 $\theta \doteq \theta'$ とした。點 P に於けるスケーラーポテンシャルは、既に求めたる如く、

$$\varphi_t = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho dv'}{r}$$

となる。上の dx' を用ひて、

$$dv' = dx' dy' dz' = \left(1 + \frac{\mathbf{v}_r'}{c}\right) dx dy dz$$

となる。又電子を點と考ふることから、 dv は \mathbf{v}_r' 、 r 等に對して無關係となり、ポテンシャルは、

$$\varphi_t = \frac{e}{4\pi r} \left(1 + \frac{\mathbf{v}_r'}{c}\right)$$

となる。同様にして、點Pに於けるベクトルポテンシャルは、

$$\mathbf{A}_t = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho dv}{rc} \mathbf{v} = \frac{e\mathbf{v}'}{4\pi cr} \left(1 + \frac{\mathbf{v}_r'}{c}\right)$$

となる。點Pに於ける、電磁氣場のベクトルを求める。

$$r = c(t - t')$$

なるを以て、

$$dr = -\mathbf{v}_r' dt' = c(dt - dt')$$

を得、従つて、

$$dt' = \frac{c}{c - \mathbf{v}_r'} dt$$

を得る。従つて、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{e}{4\pi r} \frac{1}{c - \mathbf{v}_r'} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial t}\right)_v$$

を得る。又、

$$\mathbf{v}_r' = |\mathbf{v}'| \cos(r, \mathbf{v}')$$

の関係が成立するを以て、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial t}\right)_v &= |\dot{\mathbf{v}}'| \cos(r, \mathbf{v}') + |\mathbf{v}'| \frac{\partial}{\partial t'} \cos(r, \mathbf{v}') \\ &= \dot{\mathbf{v}}_r' \end{aligned}$$

となる。従つて、

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial t} = \frac{e}{4\pi cr} \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v}_r'}{c}} \dot{\mathbf{v}}_r' = \frac{e}{4\pi cr} \dot{\mathbf{v}}_r'$$

を得る。又、同様にして、

$$\frac{\partial \mathbf{A}_t}{\partial t} = \frac{e}{4\pi cr} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = \frac{e}{4\pi cr} \dot{\mathbf{v}}$$

を得る。

次に、座標軸に對するポテンシャルの微係數を求める。第二十三圖に於て、 r に垂直の方向の變化は、殆んど消略し得る程度のもので、主として考慮に入るものは、 r の方向の變化のみである。又時刻 t' は、その間一定と考へられる故、 $dt' = 0$ である。即ち、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t'} dt' = \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = 0$$

の關係を得る。又 r の關係式から、

$$dr = c dt$$

を得る故、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

である。ベクトルポテンシャルに就ても、亦同様にして、

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

を得る。されば、第二章12式に依つて、電場のベクトルの x 分は、

$$\mathbf{E}_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial t}$$

となる。従つて、上に得たる關係を用ひて、

$$\mathbf{E}_x = \frac{e}{4\pi c^2 r} \left(\frac{x_0 - x'}{r} \dot{\mathbf{v}}_x' - \dot{\mathbf{v}}_x' \right)$$

となる。同様にして、 \mathbf{E} の y, z 分は、

$$\mathbf{E}_y = \frac{e}{4\pi c^2 r} \left(\frac{y_0 - y'}{r} \dot{\mathbf{v}}_y' - \dot{\mathbf{v}}_y' \right)$$

$$\mathbf{E}_z = \frac{e}{4\pi c^2 r} \left(\frac{z_0 - z'}{r} \dot{\mathbf{v}}_z' - \dot{\mathbf{v}}_z' \right)$$

となる。されば、電場のベクトルは一般に、

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi c^2 r} (\mathbf{r}_1 \dot{\mathbf{v}}' - \dot{\mathbf{v}}') \quad 102$$

を以て表はされる。 \mathbf{r}_1 は r の方向の単位ベクトルを示す。

次に磁場のベクトル \mathbf{H} は第二章11式から、その x 分は、上に得たる関係を用ひて、

$$\mathbf{H}_x = \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial z}$$

となる。従つて、

$$\mathbf{H}_x = \frac{e}{4\pi c^2 r} \left(\frac{z_0 - z'}{r} \dot{\mathbf{v}}_y' - \frac{y_0 - y'}{r} \dot{\mathbf{v}}_z' \right)$$

を得る。電場のベクトルの場合と同様にして、 y, z 分を求むれば、磁場のベクトルは一般に、

$$\mathbf{H} = \frac{e}{4\pi c^2 r} [\dot{\mathbf{v}}', \mathbf{r}_1] \quad 103$$

を以て表はされる。

102式から知られる如く、電場のベクトルの、 r の方

向の分即ち \mathbf{E}_r は零にして、従つて、 r に垂直の方向の分を \mathbf{E}_\perp とせば、

$$\mathbf{E}_\perp = -\frac{e}{4\pi c^2 r} \dot{\mathbf{v}}_\perp'$$

となり、電場のベクトルの合成の方向は、 r に垂直の方向である。又磁場のベクトルも、 r の方向の分は零にして、 r に垂直の方向のみである。従つて、103式から、

$$|\mathbf{H}| = \frac{e}{4\pi c^2 r} |\dot{\mathbf{v}}'| \cdot |\mathbf{r}_1| \sin(\dot{\mathbf{v}}' \mathbf{r}_1) = \frac{e}{4\pi c^2 r} \dot{\mathbf{v}}_\perp'$$

となる。 $\dot{\mathbf{v}}_\perp'$ は、 $\dot{\mathbf{v}}'$ の r に垂直の方向の分を表はす。従つて、電磁場のベクトルは、その絶対値が相等しい。されど、磁場のベクトルは、電場のベクトル \mathbf{E} 、及び \mathbf{r}_1 の何れにも垂直の方向である。

エネルギーの流れは、

$$\mathbf{S} = c[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$$

を以て表はされ、従つて、102, 103を用ひて、

$$\mathbf{S} = \frac{e^2}{16\pi^2 c^3 r^2} \{ \mathbf{r}_1, [\dot{\mathbf{v}}', \mathbf{r}_1] \dot{\mathbf{v}}_\perp' - [\dot{\mathbf{v}}', [\dot{\mathbf{v}}', \mathbf{r}_1]] \}$$

$$= \frac{e^2}{16\pi^2 c^3 r^2} \{ -\mathbf{r}_1 \dot{\mathbf{v}}_\perp'^2 + \mathbf{r}_1 \dot{\mathbf{v}}'^2 \}$$

となる。従つて、

$$|\mathbf{S}| = \mathbf{S}_r = \frac{e^2}{16\pi^2 c^3 r^2} (\dot{\mathbf{v}}'^2 - \dot{\mathbf{v}}_\perp'^2)$$

$$= \frac{e^2}{16\pi^2 c^3 r^2} \dot{\mathbf{v}}_r'^2$$

となる。 \mathbf{S} を、點Pを包む表面に就て積分すれば、單位時間に、Pに到着する輻射エネルギーを得る。即ち、今Pを包む表面を、半徑 r の球面とすれば、

$$\int_r |\mathbf{S}| df = \int_0^\pi |\mathbf{S}| \sin\theta 2\pi r^2 d\theta$$

となる。又、

$$\dot{v}_r = |\dot{\mathbf{v}}| \sin\theta$$

を用ひて、

$$\int_r |\mathbf{S}| df = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{16\pi^2 c^3 r^2} \int_0^\pi 2\pi r^2 \sin^3\theta d\theta = \frac{e^2}{6\pi c^3} \dot{\mathbf{v}}^2$$

を得る。この値は、既に述べたる所に依り、電子の運動に於て、その抵抗力が、單位時間に行ふ仕事の値に等しく、然もこのエネルギーは、單位時間に、點Pに到達する輻射エネルギーである。

されば、若し電子が $O'O$ 間に於て、單弦的振動運動をなすとすれば、電子から放射される輻射波は、 $O'P$ 即ち r に垂直に偏した平面波として、點Pに到達することを示して居る。この關係は、振動體が電子であるに限らず、ヘルツの振動子¹を以て置き換へても、全く同様の結果となるものである。

1. Hertz's Oscillator, Hertz'sche Erreger.

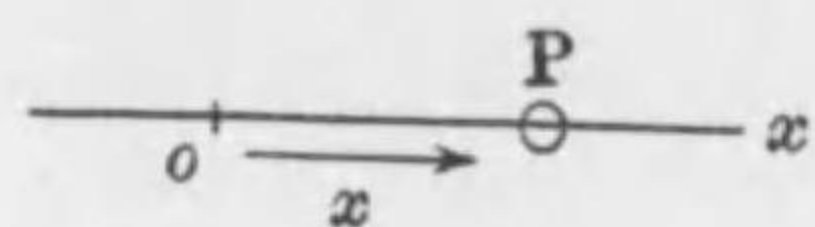
第九章

電子の振動

最初に、准彈性力¹のみが作用する場合に於ける、電子の振動運動、即ち自由振動に就て述べる。電子の運動は、 x 軸の方向のみに限られ、直線的振動であるとする。今電子は、時刻 t に於て、その釣合の位置 O から、 x の變位をなしたとすれば、電子の運動の式は、

第二十四圖

$$m_0 \ddot{x} = -fx + \frac{e^2}{6\pi c^3} \ddot{x}$$



を以て表はされる。電子の速度は、割合に小なるものと

して、その質量として靜止状態に於けるものをとる。又上式の、右邊の第二項は、電子が振動をなすときに、輻射エネルギーを放射する爲めの抵抗力である。上式の x に對して、

$$x = A e^{\alpha t}$$

と置けば、運動の式は、

$$m_0 \alpha^2 = -f + \frac{e^2 \alpha^2}{6\pi c^3}$$

となる。上式から α を求める。上式の右邊の第二項

1. Quasi-elastic force, Quasielastische Kraft.

は、輻射エネルギーに依る抵抗からの項にして、一般に、他の項に比して、著しく小である。依つて、近似的にこれを消略して、

$$m_0 \alpha^2 = -f$$

から α を求め、

$$\alpha = \pm i \sqrt{\frac{f}{m_0}} = \pm i \nu_0$$

とし、この α の値を抵抗の項の α に代入して、近似的に再び α を求むれば、

$$\alpha = i \nu_0 - \frac{e^2 \nu_0^2}{12\pi c^3 m_0}$$

を得る。上式中の ν_0 は、電子が准弾性力のみによる振動の振動数にして、これを固有振動数と名付けてゐる。上の値を x の α に代入して、書き換へれば、

$$x = \varepsilon^{-\frac{e^2 \nu_0^2}{12\pi c^3 m_0} t} \cos(\nu_0 t + \delta)$$

となる。 δ は常數にして、前の Λ を含む。上式は減衰振動を表し、その對數減比は、 m_0 に既に求めたる値を代入すれば、

$$\sigma = \frac{\pi \nu_0 a}{2c} = \frac{\pi^2 a}{\lambda}$$

を以て表はされる。 λ は波長を表はし、 a は電子の半径である。上式から知られる如く、對數減比は極めて

1. Logarithmic decrement. Logarithmisches Dekrement.

小にして、上の如き振動電子に依つて放射される輻射は、極めて等質である。例へば、今、輻射がスペクトルの黄の部分であるとすれば、その波長は、

$$\lambda = 6 \times 10^{-5} \text{ 糎}$$

の程度であり、電子の半径を $a = 1.8 \times 10^{-13}$ 糎とすれば、對數減比は、

$$\sigma = 3.0 \times 10^{-8}$$

となる。即ち、その振動の減衰は極めて小である。

次に、電子の強制振動を述べる。

今電子に外部から、平面電磁波が作用して、電子に振動運動を起さしめるものとする。電子の振動運動は、 x 軸の方向に限られて居るものとするれば、電子に強制振動をなさしめるものは、平面電磁波を構成して居る電氣力、即ち電磁波に依つて作られる電場のベクトルの x 分である。即ち、

$$E_x = C \cos(\nu t - \theta)$$

を以て表はされるものである。 C は電氣力の最大値にして、一定の値を持ち、 ν は電磁波の振動数を表はし、 θ は位相を表はす常數である。

従つて、電子の運動の式は、

$$m_0 \ddot{x} = -fx + \frac{e^2}{6\pi c^3} \ddot{x} + eC \cos(\nu t - \theta)$$

を以て表はされる。上式の右邊の最後の強制力を除

く外は、既に述べたる自由振動の場合と全く同様のものである。 e は電子の全電荷を表はす。

今 x に對して、

$$x = A \cos(\nu t - \theta - \gamma)$$

と置き、運動の式に代入して、 $\cos(\nu t - \theta)$ 、 $\sin(\nu t - \theta)$ の項を、各別々に比較すれば、

$$\cot \gamma = \frac{f - m_0 \nu^2}{\frac{e^2}{6\pi c^3} \nu^3} = \frac{6\pi c^3 m_0 (\nu_0^2 - \nu^2)}{e^2 \nu^3}$$

$$A = \frac{eC}{(f - m_0 \nu^2) \cos \gamma + \frac{e^2}{6\pi c^3} \nu^3 \sin \gamma} = \frac{6\pi c^3 C \sin \gamma}{e \nu^3}$$

を得る。 γ は、強制力と、それに依つて起される電子の強制振動との位相の差を表はすものにして、この値が0と π の間であれば、 A は常に正の値である。上の値を x に代入すれば、

$$x = \frac{6\pi c^3 C \sin \gamma}{e \nu^3} \cos(\nu t - \theta - \gamma)$$

となる。即ち、電子の振動数は、強制力の振動数と相等しきものとなる。

強制振動と、電子の自由振動とが共鳴を起す場合は、兩振動数が相等しき場合である。即ち、

$$\nu = \nu_0$$

の時にして、この時、 $\cot \gamma = 0$ となり、 γ は $\frac{\pi}{2}$ の寄數倍の

値を持つ筈である。今、

$$\gamma = \frac{\pi}{2}$$

をとれば、

$$\sin \gamma = 1, \quad x = \frac{6\pi c^3 C}{e \nu^3} \sin(\nu t - \theta)$$

となり、従つて、 x の値は最大値をとる。そして、位相の差は $\frac{\pi}{2}$ である爲めに、強制力が最大値をとるとき、電子の振動の振幅は零となり、又前者が零のとき、後者は最大値をとる。従つて、電子の振動は強制力に對して、その位相が $\frac{\pi}{2}$ だけ後れることを示す。

次に、強制力に依つて、單位時間になされる仕事を求める。

強制力に依る、 dx の變位に對する仕事は、

$$e \mathbf{E}_x dx = e \mathbf{E}_x \frac{dx}{dt} dt$$

にして、これは又、 dt 時間に於て、電子が吸収するエネルギーである。今、この仕事の、電子の振動の一週期 T の間に於ける、平均値を求むれば、

$$\frac{e}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{E}_x \dot{x} dt = e \overline{\mathbf{E}_x \dot{x}}$$

となる。 $\overline{\mathbf{E}_x \dot{x}}$ は、 $\mathbf{E}_x \dot{x}$ の、 T の間に於ける平均値である。既に求めたる x を用ひて、

$$\dot{x} = -\frac{6\pi c^3 C \sin \gamma}{e \nu^3} \sin(\nu t - \theta - \gamma)$$

を得る。この値と、 $\mathbf{E}_x = C \cos(\nu t - \theta)$ の相乗積の平均

値を求むるとき,

$$\overline{\sin(\nu t - \theta)} = \overline{\cos(\nu t - \theta)} = 0$$

$$\overline{\sin^2(\nu t - \theta)} = \overline{\cos^2(\nu t - \theta)} = \frac{1}{2}$$

の値を代入すれば,

$$e \overline{\mathbf{E}_x \dot{x}} = \frac{3\pi c^3 C^2 \sin^2 \gamma}{\nu^2}$$

として、求められる。この値は、強制力に依つて、単位時間になされる仕事の、平均値にして、又、電子が単位時間に吸収する平均のエネルギーである。これは又、電子が振動運動に於て、単位時間に放射する輻射エネルギーの量に等しきものである。

第八章に於て述べたる如く、振動電子が単位時間に放射する輻射エネルギーは、 $\frac{e^2}{6\pi c^3} \dot{\mathbf{v}}^2$ である。上に得たる x の値から、

$$|\dot{\mathbf{v}}| = \dot{x} = -\frac{6\pi c^3 C \sin \gamma}{e\nu} \cos(\nu t - \theta - \gamma)$$

を得る。輻射エネルギーの、一週期、 T の間に於ける平均値は、

$$\frac{e^2}{6\pi c^3 T} \int_t^{t+T} \dot{\mathbf{v}}^2 dt = \frac{e^2}{6\pi c^3} \bar{\dot{x}}^2$$

となる。従つて、上に得たる \dot{x} の値、及び正弦及び餘弦に對する平均値を用ひれば、輻射エネルギーの平均値は、

$$\frac{3\pi c^3 C^2 \sin^2 \gamma}{\nu^2}$$

となり、振動電子が単位時間に吸収するエネルギーに相等しい。

又、振動電子の全エネルギーは、その運動のエネルギーと、位置のエネルギーとの和にして、従つて、

$$W = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} f x^2$$

を以て表はされる。 \dot{x}^2 , x^2 は \dot{x} , x の一週間に於ける平均値である。されば、上に求めたる値を用ひて、

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4} m_0 \left(\frac{6\pi c^3 C \sin \gamma}{e\nu^2} \right)^2 + \frac{1}{4} f \left(\frac{6\pi c^3 C \sin \gamma}{e\nu^2} \right)^2 \\ &= \frac{3\pi^2 c^3 \nu_0 (\nu_0^2 + \nu^2)}{4e\nu^4} C^2 \sin^2 \gamma \end{aligned}$$

を得る。

次に、強制振動に於て、その一般的解は、強制振動の部分と、電子の自由振動との和として表はされる筈である。従つて、今強制力を、

$$\mathbf{E}_x = C \cos \nu t$$

を以て表はせば、

$$x = \frac{6\pi c^3 C \sin \gamma}{e\nu^2} \cos(\nu t - \gamma) + \varepsilon^{-\frac{e^2 \nu_0^2}{12\pi c^3 m_0}} t (A \cos \nu_0 t + B \sin \nu_0 t)$$

を得ることは、容易に首肯される。次に、常數 A, B を定めるために、振動運動の最初の条件を入れる。即ち、

$$t = 0, \quad x = \dot{x} = 0$$

の条件を代入すれば、

$$A = -\frac{6\pi c^3 C}{e v^3} \sin \gamma \cos \gamma$$

$$B = -\frac{6\pi c^3 C \sin^2 \gamma}{e v^2 v_0} \left(\frac{v}{v_0} + \frac{(v_0^2 - v^2)}{2v^3} v_0 \right) \doteq -\frac{6\pi c^3}{e v^3} C \sin^2 \gamma$$

となる。但し、 $v \doteq v_0$ とした。従つて、

$$x = \frac{6\pi c^3 C \sin \gamma}{e v^3} \{ \cos(vt - \gamma) - \varepsilon^{-\frac{\sigma v_0 t}{\pi}} \cos(v_0 t - \gamma) \}$$

となる。上式の第二項は、自由振動に依る部分にして、時間に對し減衰することは、既に述べた通りである。

上の結果は、種々の現象の説明に適用される。

されど、振動電子から放散する輻射が、上に述べたる如き、唯一つの振動数 ν のみの電磁波に依ることは極めて理想的の場合にして、一般には、多くの振動を含んだ、一群の電磁波を受けて、強制振動を起すものである。従つて、外に放射する輻射エネルギーも、亦それ等と相等しき多くの振動数を含むものである。今強制振動を起さしめる電磁波は、各振動数に依つて、フーリエ級の級数を以て表はし得るものとし、その強制力は、次の如く表はされるものとする。

$$\mathbf{E}_x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{nt}{T_n} - \theta_n\right)$$

n は正の整数を表はし、振動電子の固有振動数を ν_0 とし、

$$\nu_0 T_0 \gg 1$$

なる条件が存在すると假定する。電子が強制振動を起して、相當の時間の後、即ち自由振動が殆んど減衰し盡した時、即ち振動が定常状態になつた場合を考へれば、この時の解答としての x の値は、

$$x = \frac{6\pi c^3}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n \sin \gamma_n}{\nu_n^3} \cos(\nu_n t - \theta_n - \gamma_n)$$

$$\nu_n = \frac{n}{T_n}$$

となる。即ち各振動数に相當する、 x の値の和として表はされる。 γ_n は、 n が 0 から無限大に、正の整数値に依つて變化するとき、其の各振動の位相が、それに相當する強制力の位相からの後れを表はし、

$$\cot \gamma_n = \frac{6\pi c^3 m_0 (\nu_0^2 - \nu_n^2)}{e^2 \nu_n^3} = \frac{\pi \nu_0 (\nu_0^2 - \nu_n^2)}{2\sigma \nu_n^3}$$

の關係を以て表はされる。強制振動の最も旺盛なる強制力の振動数は、

$$\sin \gamma_n = 1, \quad \frac{n}{T_n} = \nu_0$$

の關係を満足する、 n に相當する振動数にして、電子の自由振動と共鳴を起す場合のものである。

單位時間に、振動電子が吸収する平均のエネルギーは、

$$W' = e \overline{\mathbf{E}_x \dot{x}} = 3\pi c^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^2 \sin^2 \gamma_n}{\nu_n^3}, \quad \nu_n = \frac{n}{T_n}$$

である。又、振動電子の有する全エネルギーは、前と同様にして、

$$W = \frac{3\pi^2 c^3 \nu_0}{4\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu_0^2 + \nu_n^2}{\nu_n^6} C_n^2 \sin^2 \gamma_n$$

である。今共鳴の場合を考へれば、 W は近似的に、

$$W \doteq \frac{3\pi^2 c^3}{2\sigma \nu_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^2 \sin^2 \gamma_n}{\nu_n^2}$$

となり、従つて、上に得たる振動電子が吸収するエネルギーと比較すれば、

$$W = \frac{\pi}{2\sigma \nu_0} W'$$

となる。即ち、振動電子の全エネルギーと振動を起す爲めに吸収するエネルギーとの比は、一定である。

第十章

光電効果

金属の表面に白光を当てれば、その表面から電子を放出して、次第に正に帯電するに至る。この現象を光電効果¹と名付けて居る。この現象を最初に見出したのは、フオルワックス²にして、最初、フオルワックス効果とも呼ばれた。エルステル、ガイテル³及びレナード⁴その他の學者に依つて、研究され、1905年アインシュタイン⁵に依つて、量子論からの理論が發表され、その實驗的研究は、量子論を支持する有力なる現象として、多くの研究が行はれた。そして、現在種々の應用に迄進んで來た。

1913年デバイ及びゾンマーヘエルト⁶は、光電効果に就て光電子放出の機構的理論を、量子論を適用して、發表した。この理論に依れば、光電子放出の機構が多少

1. Photo-electric effect. Photo-elektrische Effekt.

2. Hallwachs, Marx, Handbuch der Radiologie, Lichtelektrizität. Leiptig, 参照

3. Elster und Geitel, Ann. d. Phys. Bd. 48, (1893).

4. Lenard, Ann. d. Phys. Bd. 8, (1902).

5. A. Einstein, Ann. d. Phys. Bd. 17, (1905), s. 146.

6. P. Debye und A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. Bd. 41, (1913) s. 873.

でも窺ひ得るが故に、本章に於て、簡単に述べることにする。

光が金属に當れば、これにエネルギーを與へて、金属の原子内に於ける電子を活動的ならしめる。されば、電子は次第にその振動の振幅を増大して、その大きさが或る程度以上に達すれば、電子は原子的束縛を脱して、外部に光電子として飛び出るのである。多くの實驗の結果に依れば、光電子の速度又は、その運動のエネルギーは、これに當てる光の強さには無關係にして、その振動数のみに關係する。従つて、或る振動数以下の光に對しては、光電効果は現はれない。即ち、光の振動数には、一定の極限のあることが知られて居る。そして、光電子のエネルギーは、 $\frac{h\nu}{2\pi}$ に比例することが知られて居る。 h はプランクの常數にして、 $h = 6.55 \times 10^{-27}$ エルグ秒の値であり、 ν は光電子を出した光の振動数である。

プランクの常數 h は、作用²の次元³を有するが故に、電子が光のエネルギーを吸収して、次第にそのエネルギーを増大し、その作用が $\frac{h}{2\pi}$ の値に達すれ

1. M. Planck.

2. Action, Wirkung.

3. Dimension.

ば、電子は光電子として、原子から飛び出るのである。即ち、作用を W を以て表せば、上の假定に依つて、

$$W = \int_0^{\tau} (T - U) dt = \frac{h}{2\pi}$$

を満足する時間 τ に於て、電子は光電子として、飛び出し得る筈である。これを、作用蓄積の時間と名付けて居る。 T, U は電子の運動及び位置のエネルギーを表はす。

金属原子内の電子は、光のエネルギーを吸収して、不減衰振動をなすものとすれば、その運動及び位置のエネルギーは、第九章に於て述べたる如く、

$$T = \frac{m_0}{2} \dot{x}^2, \quad U = \frac{f}{2} x^2$$

を以て表はされる。但し、 m_0 は電子の静止質量であり、 x, \dot{x} は電子の變位と、その速度を表はし、 f は准弾性力の係數である。従つて、作用の積分は、

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\tau} \left(\frac{m_0}{2} \dot{x}^2 - \frac{f}{2} x^2 \right) dt \\ &= \left. \frac{m_0}{2} \dot{x} x \right|_0^{\tau} - \frac{1}{2} \int_0^{\tau} x (m_0 \ddot{x} + f x) dt \end{aligned}$$

となる。電子の振動は、その初時刻に於て、静止状態及び座標の原点から出發したとすれば、上式の右邊の第一項に於て、 $t=0$ の極限值を代入したものは零となり、従つて、振動の式を用ひて、

$$W = \frac{m_0}{2} (\dot{x}x)_\tau - \frac{e}{2} \int_0^\tau x \mathbf{E}_x dt$$

と書くことが出来る。\$e\$ は電子の電荷を表はし、\$\mathbf{E}_x\$ は、光の電場のベクトルの \$x\$ 分である。\$\mathbf{E}_x\$ は週期的に変化する爲めに、\$W\$ も亦週期的に変化する。されば、作用 \$W\$ が次第に増大して、その値が \$\frac{h}{2\pi}\$ に達する時刻は、常に、\$W\$ が最大値に達する近傍の時刻であるべきことは、容易に豫想し得られる。即ち、この二つの時刻は殆んど相等しと、見做すことが出来る。\$W\$ が最大値に達する時刻は、

$$\frac{dW}{dt} = 0 \quad \text{即ち} \quad T = U$$

の時刻である。従つて、上の \$T, U\$ の式から、

$$\dot{x}^2 = \frac{f}{m_0} x^2 = \nu_0^2 x^2$$

を得る。\$\nu_0\$ は電子の固有振動数である。されば、

$$\frac{m_0}{2} (\dot{x}x) = \frac{1}{\nu_0} \frac{m_0}{2} \dot{x}^2 = \frac{T}{\nu_0}$$

となる。従つて、作用に対する条件式は、

$$\frac{h}{2\pi} = \frac{T}{\nu_0} - \frac{e}{2} \int_0^\tau x \mathbf{E}_x dt \quad 104$$

となる。

第九章に於ける如く、外力 \$\mathbf{E}_x\$ が作用する場合に於て、電子の強制振動の部分のみをとれば \$\mathbf{E} = C \cos \nu t\$ のとき、

$$x = - \frac{eC}{m_0(\nu^2 - \nu_0^2)} (\cos \nu t - \cos \nu_0 t)$$

として、時刻 \$t\$ に於ける電子の變位 \$x\$ が與へられる。

従つて、104式の右邊の積分を、\$I\$ と置けば、

$$I = \frac{e}{2} \int_0^\tau x \mathbf{E}_x dt = - \frac{(eC)^2}{2m_0(\nu^2 - \nu_0^2)} \left\{ \int_0^\tau \cos^2 \nu t dt - \int_0^\tau \cos \nu t \cos \nu_0 t dt \right\}$$

となる。外力の振動数 \$\nu\$ は、非常に大なるものとすれば、

$$\nu\tau \gg 1, \quad \nu_0\tau \gg 1$$

となり、上の積分の結果に於ける、\$\sin 2\nu\tau\$ と \$2\nu\tau\$ の比及び、\$\sin(\nu + \nu_0)\tau\$ と \$2(\nu + \nu_0)\tau\$ との比は、1に對して消略し得るが故に、

$$(\nu - \nu_0)\tau = \varepsilon$$

と置けば、

$$I = - \left(\frac{eC}{\nu^2 - \nu_0^2} \right)^2 \frac{\nu + \nu_0}{4m_0} (\varepsilon - \sin \varepsilon)$$

となる。

次に、\$t = \tau\$ に於ては、\$T = U\$ なるを以て、この時刻に於ける運動のエネルギーは、位置のエネルギーの、\$\tau\$ の間に於ける平均値に等しと見做し得られる。従つて、

$$T_\tau = \frac{1}{2} (\overline{T + U}) = \bar{U} = \frac{f}{2} \bar{x}^2 = \frac{m_0}{2} \nu_0^2 \bar{x}^2$$

を以て表はされる。従つて、上に得たる \$x\$ の値を代入

して,

$$T_r = \frac{v_0^2}{2m_0} \left(\frac{eC}{v^2 - v_0^2} \right)^2 \left\{ \overline{\cos^2 vt} + \overline{\cos^2 v_0 t} - 2 \overline{\cos vt \cos v_0 t} \right\}$$

となる。上式の平均値に於て,

$$\overline{\cos^2 vt} = \overline{\cos^2 v_0 t} = \frac{1}{2}$$

$$2 \overline{\cos vt \cos v_0 t} = \overline{\cos(\nu + \nu_0)t} + \overline{\cos(\nu - \nu_0)t}$$

$$\overline{\cos(\nu + \nu_0)t} = 0$$

$$\overline{\cos(\nu - \nu_0)t} \doteq \overline{\cos(\nu - \nu_0)\tau} = \cos \varepsilon$$

を用ひれば,

$$T_r = \frac{v_0^2}{2m_0} \left(\frac{eC}{v^2 - v_0^2} \right)^2 (1 - \cos \varepsilon)$$

を得る。従つて, 104式は, T_r, I の値を用ひ, 又,

$$\frac{\nu + \nu_0}{2\nu_0} = 1 + \frac{\nu - \nu_0}{2\nu_0} \doteq 1$$

の近似値を用ひて,

$$1 - \cos \varepsilon + \varepsilon - \sin \varepsilon = \frac{m_0 h \nu_0}{\pi} \left(\frac{v^2 - v_0^2}{v_0 e C} \right)^2 \quad 105$$

を以て表はすことが出来る。従つて, 時刻 τ に於ける運動のエネルギーは,

$$T_r = \frac{h \nu_0}{2\pi} \left(1 + \frac{\varepsilon - \sin \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} \right)^{-1} \quad 106$$

となる。

105式に於て, ε と, その右邊の値との関係を知る爲めに,

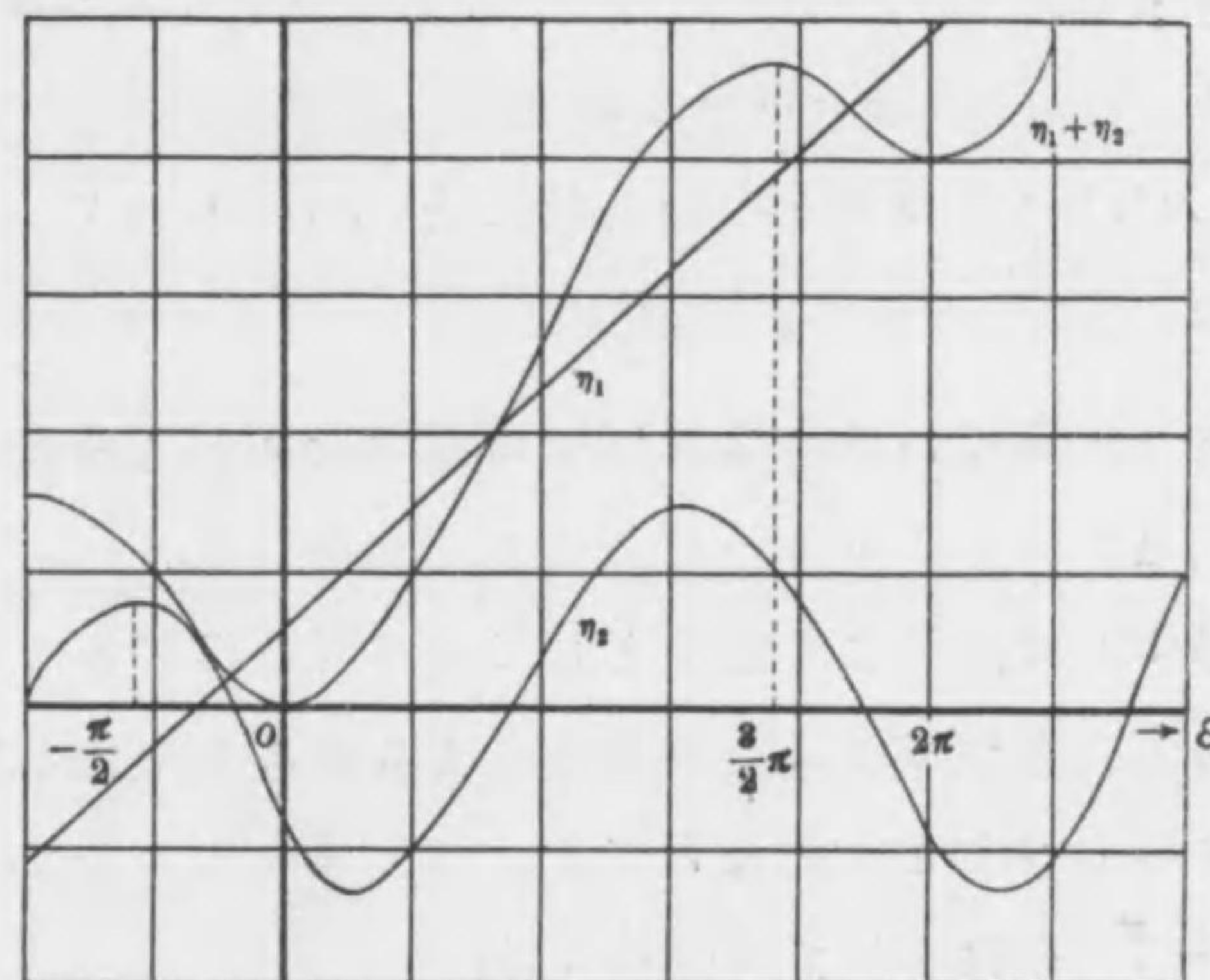
$$\eta_1 = 1 + \varepsilon, \quad \eta_2 = -\cos \varepsilon - \sin \varepsilon$$

と置けば, 105式は,

$$\eta_1 + \eta_2 = \frac{m_0 h \nu_0}{\pi} \left(\frac{v^2 - v_0^2}{v_0 e C} \right)^2$$

となる。今 ε に對して, $\eta_1 + \eta_2$ の関係を圖示すれば, 第二十五圖に示す如く, $\eta_1 + \eta_2$ の極大値は,

第二十五圖



$$\varepsilon = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

に相當し, その極小値は,

$$\varepsilon = 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

のときである。 $\eta_1 + \eta_2$ を極大ならしむる ε の値は, 作用 W を極大ならしめるものにして, その時の時刻 τ は,

$$\varepsilon = (\nu - \nu_0)\tau$$

から求められる。この時刻に於て、電子は光電子として、原子から飛び出し得る状態にある筈である。

今、金属原子に當る光の振動数 ν が、電子の固有振動数 ν_0 よりも、小なる場合をとれば、即ち、

$$\nu < \nu_0$$

のときは、

$$\varepsilon = (\nu - \nu_0)\tau < 0$$

にして、上に得たる ε の極大値に於て、 $n=0$ 、即ち、

$$\varepsilon = -\frac{\pi}{2}$$

のときのみである。されば、光の振動数 ν が、この関係を満足する値よりも小なるときは、作用 W は、 $\frac{h}{2\pi}$ に達し得ずして、電子は光電子として、飛び出し得ざるものである。従つて、 ν は上の関係よりも常に大であるか、又は等しきことを必要とする。即ち、105式に於て、 $\varepsilon = -\frac{\pi}{2}$ を代入して書換へた時、

$$\nu_0^2 - \nu^2 \leq eC \sqrt{\frac{(4-\pi)\pi\nu_0}{2hm_0}}$$

の関係が成立することが必要である。今、この極限として、上式の兩邊が相等しき場合に於ける、 ν の値を求める。

今、太陽から地球に達する、光のエネルギーから、單色

光のエネルギーを求める。太陽から、地球に到達する白光のエネルギーは、單位時間に、一平方糎の面積に對して、 2×10^6 エルグである。この内、單色光のエネルギー即ち、その強さは、その 10^{-6} 倍即ち 2 エルグである。されば、單色光のエネルギーの密度は、一立方糎毎に、 $\frac{2}{3 \times 10^{10}}$ エルグである。又、電子を振動せしめる光のエネルギーの密度は、

$$\overline{E_x^2} = (C \cos \nu t)^2 = \frac{C^2}{2}$$

にして、これは、上の單色光のエネルギーの密度に、等しきものと、見做すことが出来る。従つて、

$$C^2 = \frac{4}{3} \times 10^{-10} \text{ エルグ}$$

となり、電場のベクトル E_x の、常數 C の値を得る。又

$$e = \sqrt{4\pi} \times 4.7 \times 10^{-10}, \quad m_0 = 6.9 \times 10^{-27},$$

$$h = 6.55 \times 10^{-27}$$

の値を用ひ、電子の固有振動数 ν_0 を、

$$2\pi\nu_0 = 10^{15}$$

とする。即ち、電子の固有振動の波長を、

$$\lambda_0 = 0.3\mu$$

とすれば、

$$\nu_0^2 - \nu^2 = 7 \times 10^{20}$$

となり、波長を以て表はせば、

$$\lambda - \lambda_0 = 3 \times 10^{-12} \mu$$

となる。即ち、この波長の差は、殆んど零と見ることが出来る。即ち、光の波長が、電子の固有振動の波長に、等しきときに於ては、電子は、光電子として飛び出るが、 λ が λ_0 より大なるとき、即ち ν が ν_0 よりも小なるときは、殆んど、作用は $\frac{h}{2\pi}$ に達せずして、従つて、光電効果の現象は起り得ない。されば、電子が光電子として、飛び出し得る爲めには、常に光の振動数は、電子の固有振動数よりも大なることを必要とする。この結果は、螢光の現象に於ける、ストークスの法則と、相一致するものである。

次に、光の振動数が、電子の固有振動数より大なる場合、即ち、

$$\nu > \nu_0$$

の場合に於て、作用が $\frac{h}{2\pi}$ に蓄積する時間、 τ を求める。今、光の振動数及び電子の固有振動数を、夫々、

$$\nu = 10^{15}, \quad \nu_0 = \frac{1}{2} 10^{15}$$

と假定する。されば、105式を近似的に、

$$\begin{aligned} \frac{m_0 h \nu_0}{\pi} \left(\frac{\nu^2 - \nu_0^2}{\nu_0 e C} \right)^2 &\doteq \varepsilon = (\nu - \nu_0) \tau \\ &= \frac{1}{2} \nu \tau \end{aligned}$$

と置くことが出来る。上に得たるCの値を用ひて、 ν

ν_0 の値及び其の他の値を代入すれば、上式から、

$$\tau = 2.8 \times 10^6 \text{ 秒}$$

を得る。即ち、光の振動数と電子の固有振動数との差が、 $\frac{1}{2} 10^{15}$ の場合は、光電子を放出するには、非常に長時間を要することとなる。

次に、共鳴の場合、即ち、

$$\nu = \nu_0, \quad \varepsilon = 0$$

の場合を考察する。105式を書き換へれば、

$$\frac{m_0 h \nu_0}{\pi} \left(\frac{\nu + \nu_0}{\nu_0 e C} \right)^2 = \left(\frac{1 - \cos \varepsilon + \varepsilon - \sin \varepsilon}{\frac{\varepsilon^2}{\tau^2}} \right)_{\varepsilon=0}$$

となる。今、右邊の極限值を求むば、

$$\text{Lim}_{\varepsilon=0} \left(\frac{1 - \cos \varepsilon + \varepsilon - \sin \varepsilon}{\varepsilon^2} \right) \tau^2 = \frac{\tau^2}{2}$$

となる。従つて、作用蓄積の時間 τ は、

$$\tau = \frac{2}{e C} \sqrt{\frac{2 m_0 h \nu_0}{\pi}}$$

として求められる。上式に、 $\nu_0 = 10^{15}$ の値を入れ、前に出した諸量の値を代入すれば、

$$\tau = 10^{-5} \text{ 秒}$$

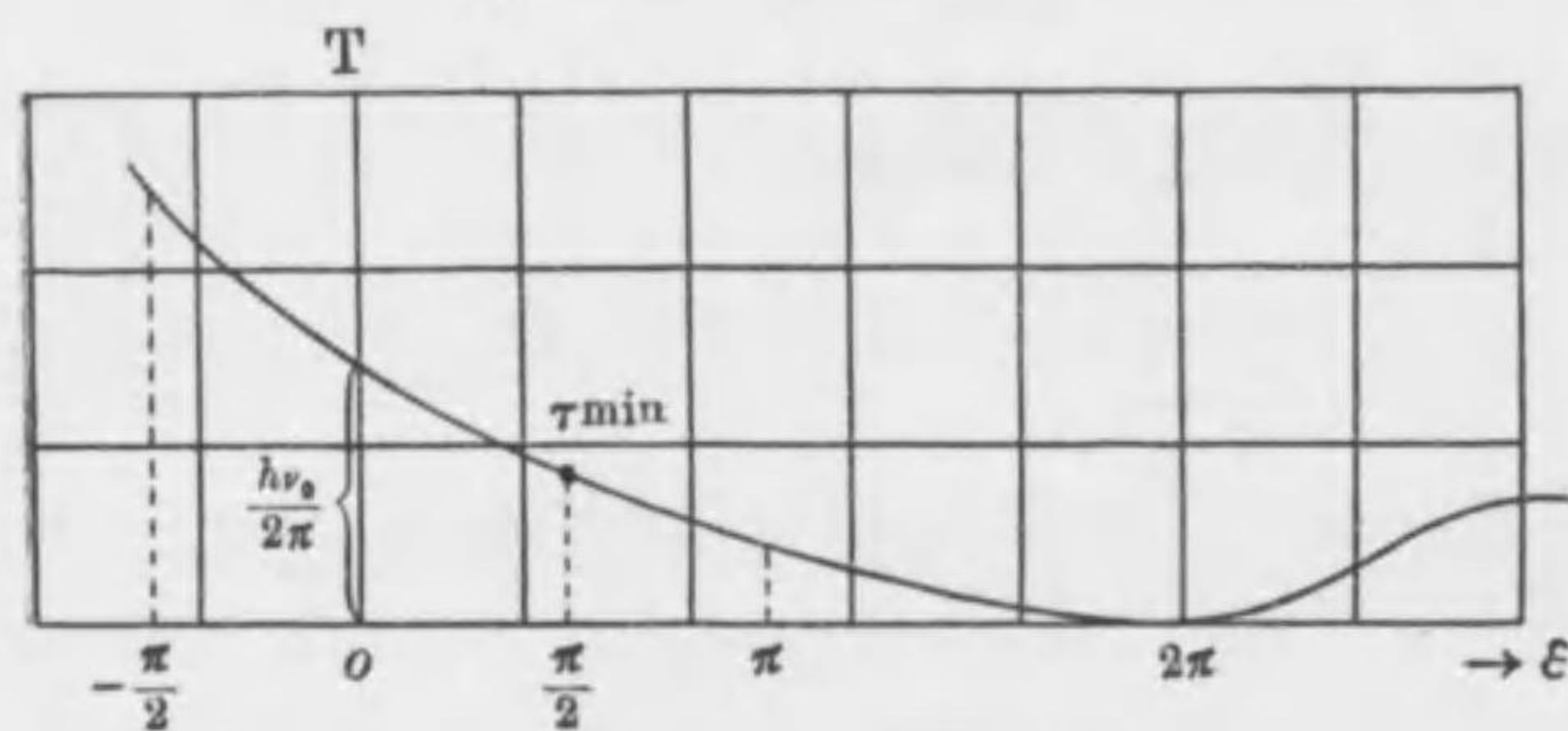
を得る。即ち、極めて短時間の間に、電子は光電子として、飛び出すこととなる。次に、光電子の運動のエネルギーは、106式に於て、 $\varepsilon = 0$ を代入すれば、

$$T_r = \frac{h\nu_0}{2\pi}$$

を得る。これは光電子が保持して居るエネルギーにして、アインシュタインが、その量子論的考察に於て、假定したるものに等しい。

次に、一般的に光の振動数 ν と、金属原子内の電子の固有振動数 ν_0 とが、相等しからざる場合に於て、その電子の運動のエネルギーの、 ϵ 即ち $(\nu - \nu_0)\tau$ に對する變化を求むれば、第二十六圖に示す通りである。又この

第二十六圖



關係を表示すれば、次の如き結果となる。

$$\epsilon : -\frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi \quad \frac{3}{2}\pi \quad 2\pi, \dots$$

$$T_r : \frac{h\nu_0}{2\pi} \left(\frac{2}{4-\pi} \quad 1 \quad \frac{2}{\pi} \quad \frac{2}{2-\pi} \quad \frac{2}{4+3\pi} \quad 0, \dots \right)$$

金属原子内の電子が、光のエネルギーを吸収して振動をなすとき、若しも、その振動が減衰的のものである

とすれば、それは、作用が $\frac{h}{2\pi}$ に達し得る程度に、小なるものであることが必要である。金属原子内に於て、電子の振動の減衰が、極めて小である爲めには、電子は原子内に於て、特別の配列をなすことが必要である。電子の特別の配列に對しては、茲には述べない。又、共鳴の場合に於ては、作用が $\frac{h}{2\pi}$ に達する時間は 10^{-8} 秒の程度にして、極めて短時間ではあるが、この時間内に光が通過する距離は、相當に長い。即ち、 $c\tau = 3 \times 10^9$ 極の程度である。この長距離の間に、光の電磁氣的波動としての振動が、不變であることは困難なることにして、一般に金属表面内に進入した光は、干渉を起す筈である。従つて電子の強制振動も、亦變化する筈である。金属表面に當る光は、嚴密に言へば、單色光に非らず。一般に、種々の振動数のものを含む、群であることが普通である。この内の、或る振動数のものだけが、電子に強制振動を起さしめて、その作用が $\frac{h}{2\pi}$ に達したものは、光電子として飛び出し得るのである。この説明は、所謂選擇的光電効果を示し、一般光電効果に於ては、金属面に當る光に含まれて居る總ての振動数の内、或る極限值以上の、振動数のものに相等しき、固有振動数を有する電子が存在すれば充分である。

1916年ミリカンは、精巧なる装置を用ひ、光電子を發生する物質としては、ソヂューム、リチュームをとり、對極に種々の電壓を與へて、種々の波長の單色光を當て、加速電壓と、光電効果に依る電流との關係を測定した結果、光電効果を起さしめた光の振動數と、光電子に依る飽和電流に對する加速電壓との比を求め、次の如き關係式から、プランクの常數、 h の精密なる値を求めた。

光電子の物質外に於ける運動のエネルギーを、 V_e と置けば、ゾンマーヘエルトの理論に於ける共鳴の場合、又は1905年に於ける、アインシュタインの理論と、光電子が物質外に出るときの、表面を破る仕事を考慮して、

$$V_e = \frac{h\nu}{2\pi} - P$$

を得る。 P は、光電子が物質の表面から出るときの、仕事である。上式を、光の振動數 ν に就て微分して、

$$\frac{dV}{d\nu} = \frac{h}{2\pi e}$$

を得る。 e は電子の電荷である。實驗から $\frac{dV}{d\nu}$ を求めて、 h を定めた。即ち、ソヂュームの實驗からは、 $h = 6.569 \times 10^{-27}$ を出し、リチュームからは、 $h = 6.584 \times 10^{-27}$ を出した。

R. E. Millikan, Phys. Rev. (2) 7, (1916), p. 355.

第二編

集合電子の運動論

第一章

物質内に於ける電子の分類

エツチ、エー、ローレンツ¹⁾に従へば、物質内に存在する電子は、これを三種に分類することが出来る。

(一) 電導電子

電導電子は又、自由電子と稱するものにして、原子的抗束力を受けずして、電導を行ふものである。電解質内に於けるイオンも、亦電導電子として、取扱はるるものである。

今、物質内に、一般に n 種の電導電子群が存在するものとし、その電荷を夫々、

$$e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$$

とし、この各が單位體積内に含まれる數を夫々、

$$N_1, N_2, N_3, \dots, N_n$$

とし、又之等の各群の速度を夫々、

1. H. A. Lorentz, The Theory of electrons, Leiptig. 参照。

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$$

とすれば、単位体積内の電子に依る全電荷の量は、

$$\sum_{s=1}^{s=n} e_s N_s = \bar{\rho}$$

を以て表はされ、従つて、之等の電子の移動に依る電流は、

$$I = \bar{\rho} \bar{v} = \sum_{s=1}^{s=n} e_s N_s v_s$$

を以て表はされる。

(二) 分極電子

原子に束縛されて居る電子の一種にして、電媒的分極を起すものである。即ち、原子核との間に働く准弾性力に依つて、結び付けられ、電気力の作用の許に、分極を起すものである。

分極電子も、亦電導電子の如く、物質内に n 種のものが存在すると考へ、その各の電荷を夫々、

$$e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$$

とし、この各が夫々、

$$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$$

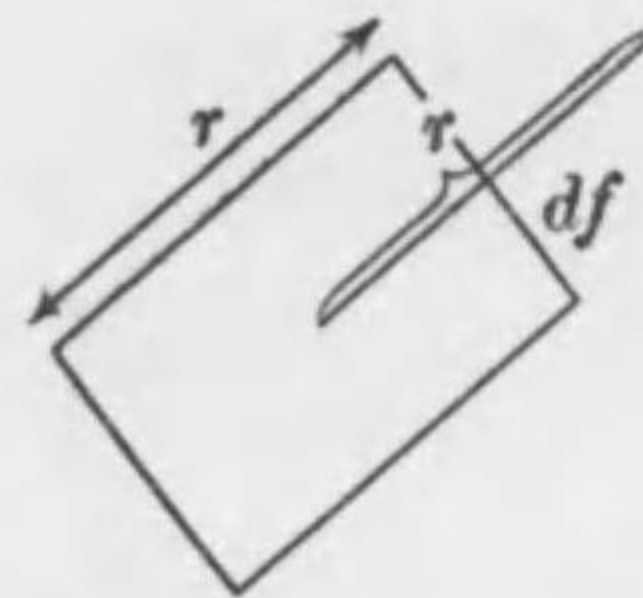
の變位を起したとすれば、これに依つて作る分極は、

$$P = \sum_{s=1}^{s=n} e_s r_s$$

で表はされる。

第二十七圖に示す如く、物質内に於て、物理的に微小なる表面 df を考へ、電子が分極を作るとき、この表面を通過する電子の数を求める。

第二十七圖



表面 df を通過する電子の数は、變位 r を側稜とし、 df を底面とした、體積内に存在する

總ての電子の数である。されば、単位體積内にある分極電子の数を N とすれば、 $|r|df$ の體積内にある分極電子の總数は $N|r|df$ である。従つて、表面 df を通過する電荷の量は、

$$eN|r|df$$

である。但し、變位 r は表面 df に對して、垂直の方向をとるものである。分極電子は n 種の群よりなるを以て、全分極電子に對しては、

$$\sum_{s=1}^{s=n} e_s N_s r_s df = \sum_{s=1}^{s=n} N_s P_{sn} df = P_n df$$

を以て表はされる。 P_{sn} は s 種の分極電子に依る分極の表面 df に對する垂直の分であり、 P_n は全電子に依る分極の、表面 df に對する垂直分である。従つて、

$$P = \sum_{s=1}^{s=n} e_s N_s r_s$$

の關係を得る。今、上式を時間 t に對して微分すれば、

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \sum_{s=1}^{s=n} e_s N_s \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial t} = \sum_{s=1}^{s=n} e_s N_s \mathbf{v}_s = (\overline{\rho \mathbf{v}})_p$$

となる。

今物質内に、微小表面 df を含む、表面 f を考えれば、この全表面を通して、外に出る、分極電子に依る全電荷の量は、

$$\int_f \mathbf{P}_n df = \int \text{div } \mathbf{P} dv$$

を以て表はされる。 dv は、表面 f 内の微小体積を表はす。物質全体として考察すれば、分極電子に依つては、電荷は現はれざるを以て、 f の表面の内部には、

$$-\int \text{div } \mathbf{P} dv$$

の電荷がある筈である。即ち表面 f 内に於ては、その単位体積毎に、 $-\text{div } \mathbf{P}$ の電荷が、現はれることとなる。従つて、分極に依る電荷は、

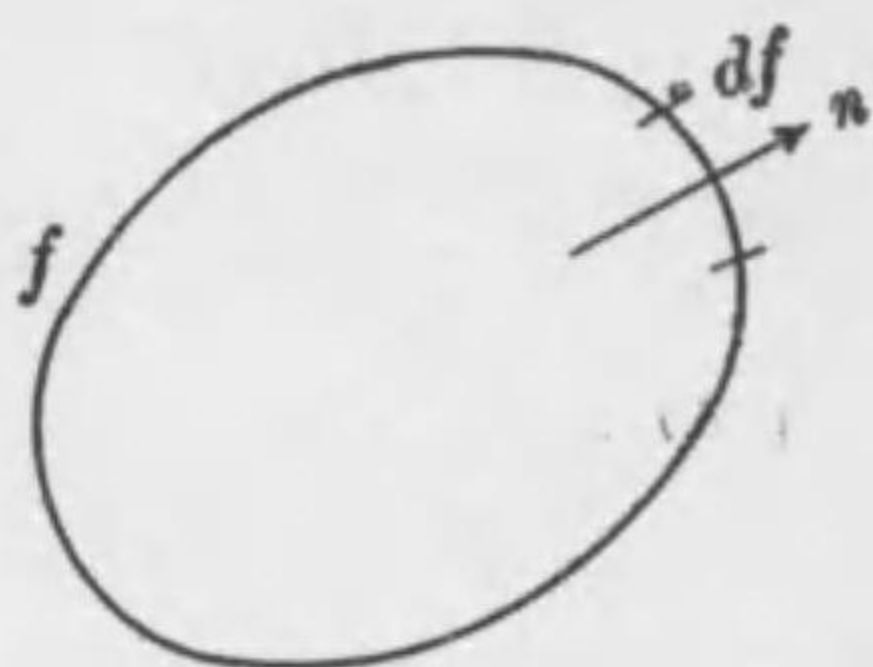
$$(\overline{\rho})_p = -\text{div } \mathbf{P}$$

として、表はされる。

(三) 磁化電子

磁化電子は、原子核の外圍に束縛され、一定の軌道に依つて、運動にある電子にして、物質の磁気現象を起す役目をなすものである。自由電子も、亦磁場内に於て

第二十八圖



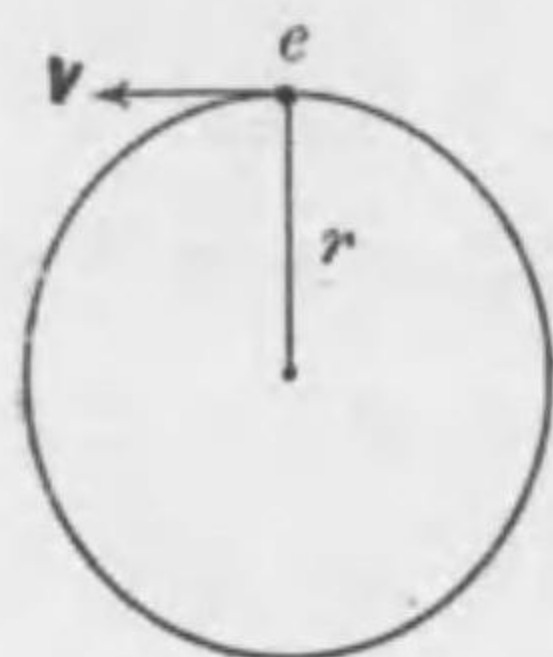
は、曲線的経路を通る運動をなし、物質の磁気現象に與るも、その効果は磁化電子に比して、一般に小である。

今、磁化電子が原子核を中心として、圓運動をなすとすれば、その磁気能率は、

$$|\mathbf{M}| = \frac{\pi r^2}{c} i$$

を以て表はされる。 r は電子の軌道の半径であり、 c

第二十九圖



は光速を表はし、 i は電子の運動に依る、相當電流の強さである。電子が \mathbf{v} の速度を以て運動するとき、これを、次の如き相當電流を以て置換へることが出来る。

$$i = \frac{e|\mathbf{v}|}{2\pi r}$$

従つて、磁気能率は、

$$|\mathbf{M}| = \frac{e}{2c} r |\mathbf{v}|$$

となる。電流に依つて作られる磁場の方向は、第二十九圖に於て、 \mathbf{v} 、 r のベクトルの何れにも垂直である爲めに、上式はベクトルの式として、

$$\mathbf{M} = \frac{e}{2c} [\mathbf{r}, \mathbf{v}]$$

を以て表はされる。一般に物質内に於ては、種々の磁化電子を含む故、物質全体としては、

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{e_i}{2c} [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i]$$

を以て表はされる。

されば、原子の束縛を受けて、圓形軌道に依る運動にある電子は、上の如き磁氣能率を有する爲めに、外的刺戟に依つて、種々の磁氣現象を表すのである。

以上述べたる三種の電子群が、物質内に存在して、原子及び分子を構成して居るのみならず、之等は又、夫々電磁氣場を有する爲めに、種々の電磁氣的現象を起すのである。されど、この電磁氣場は、物質全體を通じて必ずしも均等的ではない。従つて、之等の電子群に依る、電磁氣的現象の考察に於ては、夫等の電磁氣場の物質全體に對する平均値を用ひる必要がある。そして、この平均值的電磁氣場に對して、マックスウエル及びヘルツの電磁氣場の基礎の式が、成立すると假定することは、恰も、一個の電子に於けると同様である。

今、平均值的電磁氣場のベクトルを、夫々、 \mathbf{E}, \mathbf{H} とし、電荷の密度を $\bar{\rho}$ とし、電子が運動にあるときの、平均速度を $\bar{\mathbf{v}}$ とすれば、次の如き基礎の式が成立すると考へることが出来る。

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \bar{\rho} \mathbf{v}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \bar{\rho}$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0$$

之等の基礎の式は、第一編第一章に於て述べた、一個の電子に對する基礎の式と、全く同様である。されば、以下述べる所の、電子群に依る諸現象の考察に於ては、平均値の代りに、一個の電子の場合の記號を用ひ、それが平均値であることを認めることにする。

第二章

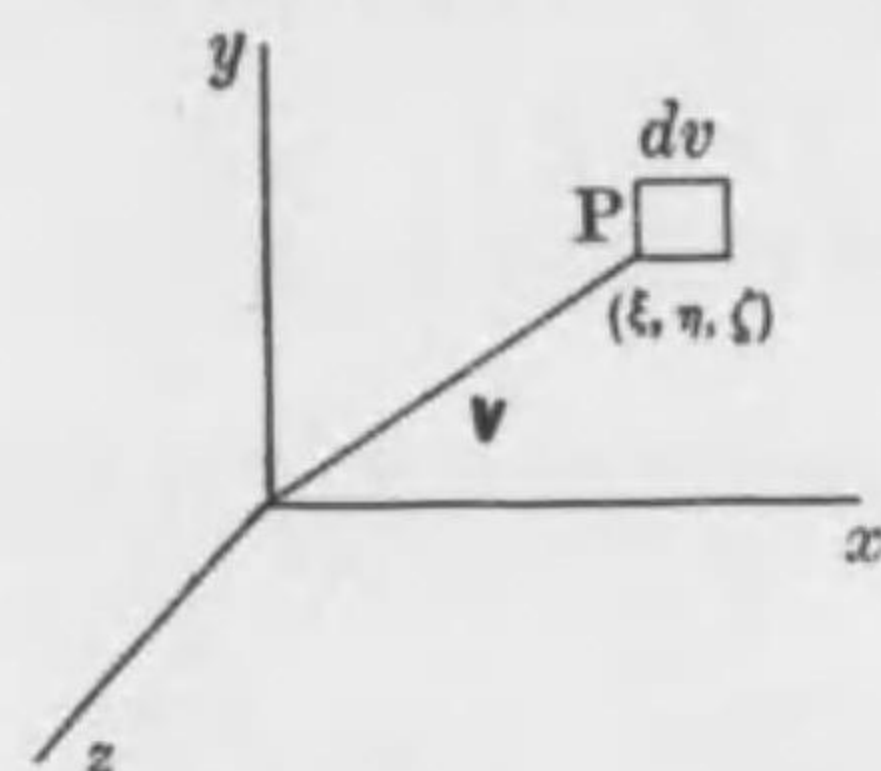
電導論

電導論は、多くの學者に依つて研究されたが、未だ完全なる理論を見るに至らない。本章に於て述べる理論は、氣體運動論的に、統計的方法に依るものにして、これとても、甚だ不満足なる幾多の論點を持つて居る。されど、電導に關する現象を、幾分でも知ることが出來得る爲めに、本章に於て述べることにする。

電導電子即ち自由電子は、他の種類の電子と同様に、其の大き極めて小である。されば、電子が物質内に於て、恰も氣體分子の如き運動状態にあると考へるとき、電子同志の衝突は極めて僅少にして、電子は主として分子又は原子と衝突する。然るに、分子又は原子は電子に比して、其の質量極めて大である爲めに、分子又は原子は衝突後に於ても、静止状態を持続し、電子のみがその運動の経路を曲げられるものと、假定することが出来る。一般に、電子と分子又は原子とが衝突をなす場合、運動學的に如何なる状態に於てなされるものであるかは、不明である。ローレンツは、電子を彈性球體として、それが分子と、彈性的衝突をなすものとし、電子

の運動は、氣體分子の如く、マックスウエルの速度分布の法則を満足するものと假定して、電導論を導いた。

第 三 十 圖



電子の運動を、氣體分子の運動と同様に考へ得るとすれば、時刻 t に於ける電子の状態は、その位置の座標 (x, y, z) 、及びその速度の座標、 $\mathbf{v}(\xi, \eta, \zeta)$ を以て表はされる。 ξ, η, ζ は、

$$v_x = \xi, \quad v_y = \eta, \quad v_z = \zeta$$

である。今時刻 $t + dt$ に於て速度は $\xi + d\xi, \eta + d\eta, \zeta + d\zeta$ に變化するものとせば、

$$d\tau = d\xi d\eta d\zeta$$

は、 dt 時間に於ける速度體積の變化である。されば、時刻 t に於て、その位置が、

$$dv = dx dy dz$$

の微小體積内に存在して、且つ、その速度が、

$$d\tau = d\xi d\eta d\zeta$$

の速度體積内に存在する電子の数は、マックスウエルの速度分布の法則に依つて、

$$f(\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t) d\xi d\eta d\zeta dx dy dz$$

を以て表はされる。 f は速度分布の函数である。今考察する物質の體積を、 V とすれば、上の條件を満足す

る単位体積内の電子の数 N は,

$$N = \frac{1}{V} \int f(\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t) d\tau dv$$

となる。

次に単位面積を通して、 x 軸の方向に、単位時間に移動する電子の数を求める。

電子の速度の x 分は ξ なる故、単位時間に、 x 軸に垂直なる単位面積を通過する電子の数は、 ξ と単位面積とに依つて作る体積内の電子の数である。従つて、 x 軸の正の方向に於ては、

$$\int_{\xi} \xi f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

であり、 x 軸の負の方向に於ては、

$$-\int_{-\xi} \xi f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

である。この電子が x 軸の方向の電流を作るものにして、従つて、電流の x 分は、

$$I_x = e \int \xi f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

を以て表はされる。又、之等の電子は運動のエネルギーを保持する故、運動のエネルギーが x 軸の方向に、電子と共に移動することとなる。即ち、熱のエネルギーが、又電子に依つて運ばれるのである。その x 分は、

$$W_x = \frac{1}{2} m \int \xi v^2 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

である。 m は電子の質量にして、上式は x 軸の方向に於ける熱流を表はす。

今、電子は、

時刻 t に於て、微小体積 dv 内にあり、その座標は、 x, y, z を以て表はされる。

時刻 $t + dt$ に於て、 dv' 内に來り、その位置が $x + \xi dt, y + \eta dt, z + \zeta dt$ を以て表はされるものとする。

x 軸の方向に、電気力 E_x が作用すれば、電子は加速される。従つて、

時刻 t に於て、速度体積 $d\tau$ 内にあり、その座標は、 ξ, η, ζ を以て表はされる。

これが電気力の作用の爲めに、

時刻 $t + dt$ に於ては、速度体積 $d\tau'$ 内に來り、その座標は $\xi + \frac{e}{m} E_x dt, \eta, \zeta$ を以て表はされる。

されば、電子が衝突することなく、自由に運動する場合に於ては、

$$dv d\tau = dv' d\tau'$$

の関係が成立する筈である。又時刻、 t 及び $t + dt$ に於ける、電子の数に對しても、

$$f(\xi, \eta, \zeta) dv d\tau = f'(\xi, \eta, \zeta) dv' d\tau'$$

が成立する。

されど、一般に電子は分子又は原子と衝突する爲めに、上の第二の關係はそのまま満足されない。即ち、時刻 t に於て dv にあつた電子は時刻 $t + dt$ に於て dv' に來るも、その速度に於ては、 $d\tau$ 内のものが、 $d\tau'$ 内に來らず。即ち、 dt 間に於ける衝突に依つて、變化する。即ち、衝突に依つて、 $dv d\tau$ 内にあつたものが、 $dv' d\tau'$ 内に來らざるものと、 $dv d\tau$ 以外から、 $dv' d\tau'$ 内に入り來るものがある。

衝突に依つて失ふ電子の数を、

$$a dv d\tau dt$$

とし、衝突に依つて得る電子の数を、

$$b dv' d\tau' dt$$

とせば、 a, b は比例常數を表はす。されば、衝突に依つて、電子の数は、次の如き關係を以て表はされる。

$$\begin{aligned} f(\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t) dv d\tau - a dv d\tau dt + b dv' d\tau' dt \\ = f\left(\xi + \frac{e}{m} \mathbf{E}_x dt, \eta, \zeta, x + \xi dt, y + \eta dt, z + \zeta dt, \right. \\ \left. t + dt\right) dv' d\tau' \end{aligned}$$

上式の右邊を展開して、

$$dv d\tau = dv' d\tau'$$

を用ひて、書き換へれば、

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{e}{m} \mathbf{E}_x + \frac{\partial f}{\partial x} \xi + \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial z} \zeta + \frac{\partial f}{\partial t} = b - a \quad 107$$

を得る。

次に、衝突の考察から、 $b - a$ を求める。

第三十一圖

に示す如く、點 O に分子が存在し、 \mathbf{v} の速度を以て進行して來た電子が、 P に於て分子と衝突して、 \mathbf{v}'

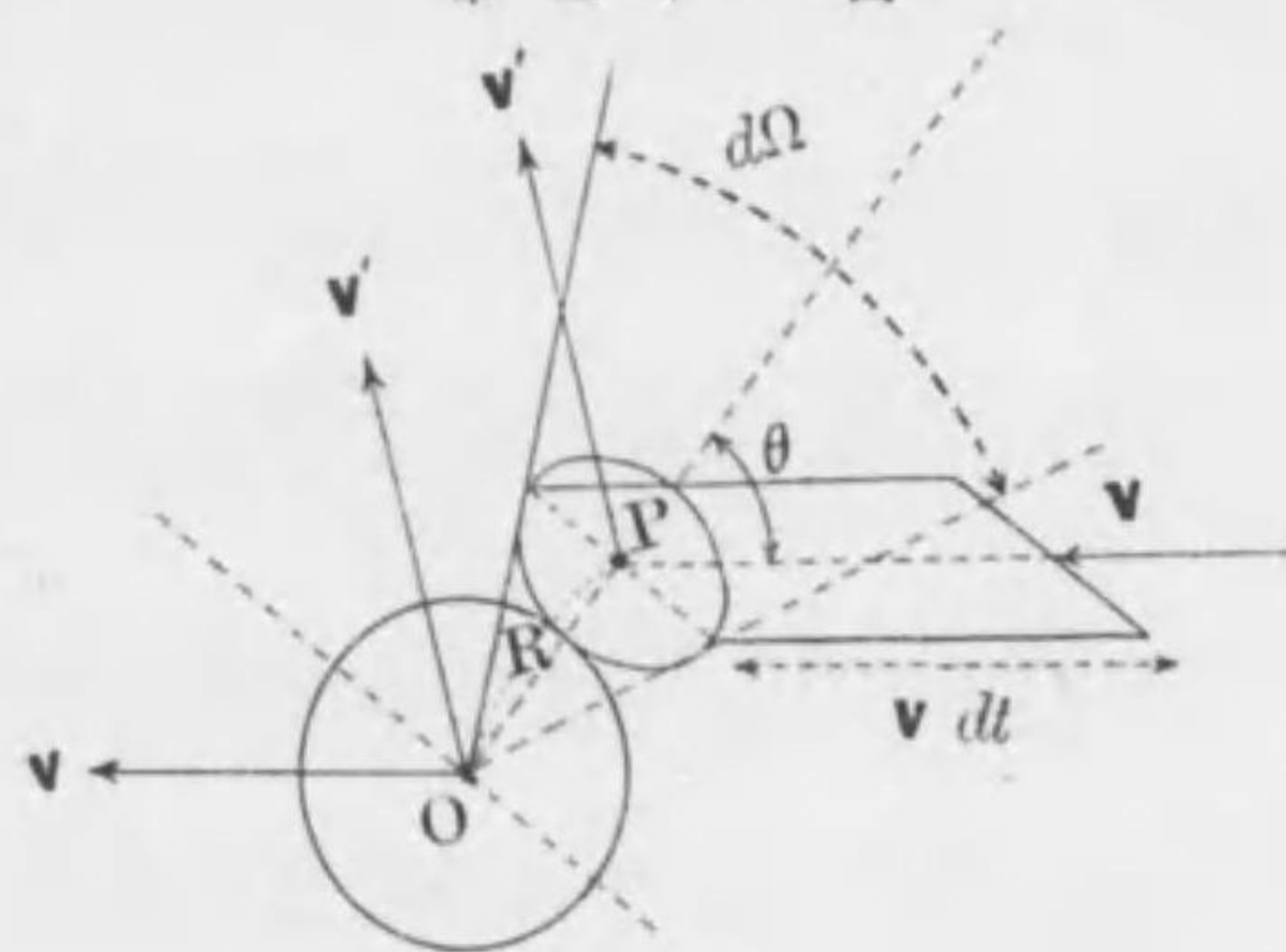
の速度に變つたとする。今、 dt 時間内に、立體角 $d\Omega$ に含まれる衝突の数を求める。 $|\mathbf{v}| dt$ を側稜として、立體角 $d\Omega$ の點 P に於ける垂直斷面を底面とする、圓筒内に含まれる電子は、總て點 O にある分子と衝突する。従つて、 dt 時間に立體角 $d\Omega$ に含まれる衝突の数は、上の圓筒内に含まれる電子の數に、比例することが知れる。點 P に於ける圓筒の斷面積は、 $R^2 d\Omega \cos \theta$ なるを以て、この圓筒の體積は、

$$R^2 d\Omega \cos \theta |\mathbf{v}| dt$$

である。従つて、この圓筒内に含まれる電子の数は、既に求めたる關係と同様にして、

$$f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta R^2 d\Omega \cos \theta |\mathbf{v}| dt$$

第三十一圖



である。これに、単位体積内に含まれる分子の数 N_1 を乗ずれば、衝突の数を得る。即ち、

$$N_1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta R^2 d\Omega \cos\theta |\mathbf{v}| dt$$

である。

衝突した電子は、第三十一圖に示す如く、 \mathbf{v}' の速度を持つ爲めに、衝突前に速度体積 $d\tau$ にあつた電子にして、衝突後 $d\tau'$ に含まれるものは、

$$N_1 f(\xi', \eta', \zeta') d\xi' d\eta' d\zeta' R^2 d\Omega \cos\theta |\mathbf{v}'| dt$$

である。上の二つ数の差は、衝突に依つて、出入の爲めに、變化する電子の数にして、その差を總ての θ の値に對して積分すれば、 $b dv' d\tau' dt - a dv d\tau dt$ に等しきものとなる。従つて、

$$b - a = N_1 R^2 |\mathbf{v}| \int \{f(\xi', \eta', \zeta') - f(\xi, \eta, \zeta)\} \cos\theta d\Omega \quad 108$$

を得る。但し、 $dv d\tau = dv' d\tau'$ とし、 $|\mathbf{v}|$ は $|\mathbf{v}'|$ に近似的に相等しきものとした。

上式に於ける f の函数形は、氣體運動論に於けるものと、同様の方法に依つて求める。

今、電氣力 \mathbf{E}_x は x のみの函数にして、時間に對しては、一定であるとする。されば、函数 f は、 y, z に對しては全く對稱的にして、従つて、 y, z の方向に於ては、電子の数は變化しない。即ち、

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

の關係が成立すると假定する。従つて、107, 108式から

$$N_1 R^2 |\mathbf{v}| \int (f' - f) \cos\theta d\Omega = \frac{e}{m} \mathbf{E}_x \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial x} \xi \quad 109$$

を得る。但し、 f' は ξ', η', ζ' を變數とする函数 f を表はす。

マックスウエルの速度分布の法則に依れば、 f は、

$$f(\xi, \eta, \zeta) = A e^{-h v^2}$$

の形を有し、 A, h は常數である。電子を氣體分子と同様に考へれば、氣體運動論に於けるものと、同様にして、

$$\frac{1}{3} \bar{v}^2 = \frac{1}{2h}, \quad \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{4} \frac{m}{h} = \alpha T$$

となり、

$$h = \frac{3m}{4\alpha T}$$

となる。 m は電子の質量であり、 T は絶對溫度であり、 α は氣體常數に關係する常數である。

x 軸の方向に \mathbf{E}_x が作用する爲めに、速度分布の函数は、少しく變形する必要がある。これを、次の如き形を以て表はす。

$$f(\xi, \eta, \zeta) = A e^{-h v^2} + \phi(\xi, \eta, \zeta) \quad 110$$

第一項は、マックスウエルの形にして、第二項は、電氣力 \mathbf{E}_x が作用する爲めの補正項である。そして函数 ϕ は、

$$\iiint \varphi(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = 0$$

$$\iiint \mathbf{v}^2 \varphi(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = 0$$

の性質を有し、その大きさは、一般に小なるものであるとする。

110式の f を用ひて、

$$f' - f = \Lambda \varepsilon^{-h\nu'^2} + \varphi' - \Lambda \varepsilon^{-h\nu^2} - \varphi \doteq \varphi' - \varphi$$

を得る。又、

$$\begin{aligned} \frac{e}{m} \mathbf{E}_x \frac{\partial f}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} &= -2h\Lambda \frac{e}{m} \mathbf{E}_x \xi \varepsilon^{-h\nu^2} + \xi \frac{d\Lambda}{dx} \varepsilon^{-h\nu^2} \\ &\quad - \xi \Lambda \mathbf{v}^2 \frac{dh}{dx} \varepsilon^{-h\nu^2} \end{aligned}$$

を得る。従つて、109式は、

$$\begin{aligned} N_1 R^2 |\mathbf{v}| \int (\varphi' - \varphi) \cos \theta d\Omega \\ = \left(-2h\Lambda \frac{e}{m} \mathbf{E}_x + \frac{d\Lambda}{dx} - \mathbf{v}^2 \Lambda \frac{dh}{dx} \right) \xi \varepsilon^{-h\nu^2} \end{aligned}$$

となる。上式の積分を簡単に求める爲めに、近似的方法を用ひる。函数 φ は、 ξ, η, ζ の函数なるも、 η, ζ に対しては、全く對稱的であり、然もその値は一般に小なるを以て、近似的に、これを、

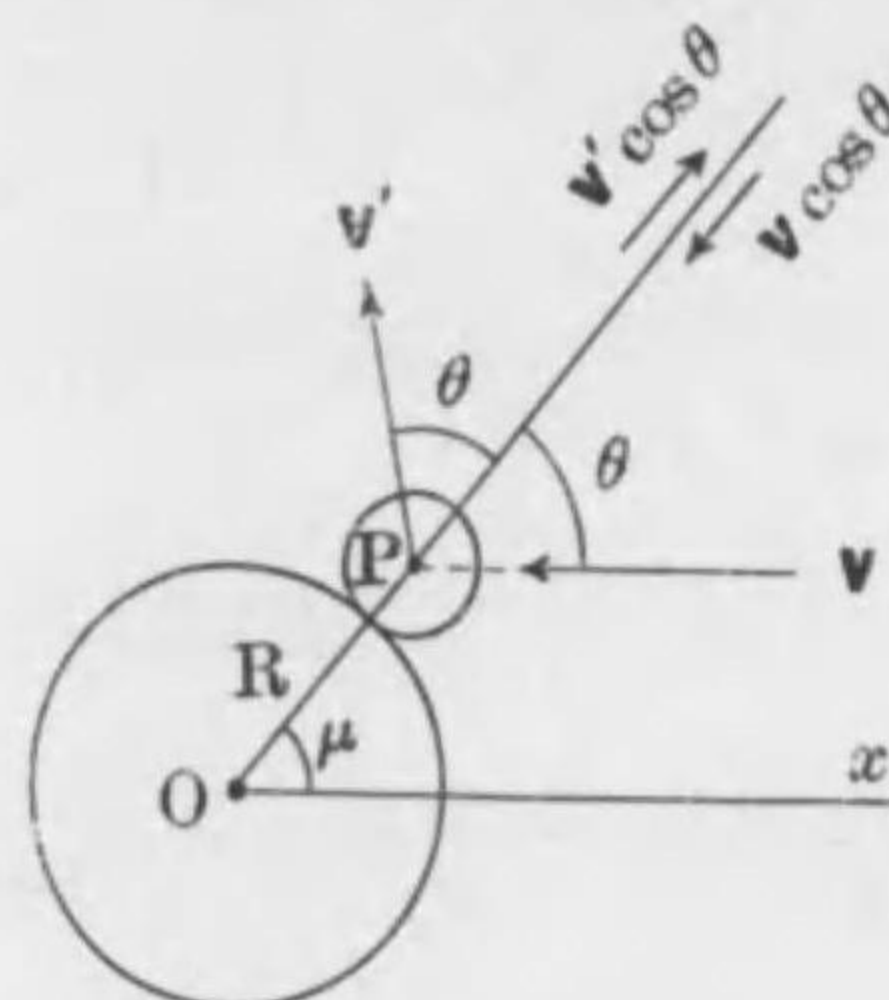
$$\varphi = \xi \chi(|\mathbf{v}|), \quad \varphi' = \xi' \chi(|\mathbf{v}'|)$$

と置く。従つて、上式の積分は、

$$\int (\varphi' - \varphi) \cos \theta d\Omega = \chi(|\mathbf{v}|) \int (\xi' - \xi) \cos \theta d\Omega$$

となる。但し、前と同様に、 $|\mathbf{v}'| \doteq |\mathbf{v}|$ とした。

第三十二圖



第三十二圖に於て、OP即ちRが座標軸 x, y, z とす角を夫々、 μ, ν, ω とすれば、 \mathbf{v}, \mathbf{v}' の x, y, z 分の間には、次の如き関係がある。

$$\xi' = \xi - 2|\mathbf{v}| \cos \theta \cos \mu$$

$$\eta' = \eta - 2|\mathbf{v}| \cos \theta \cos \nu$$

$$\zeta' = \zeta - 2|\mathbf{v}| \cos \theta \cos \omega$$

但し、 $|\mathbf{v}'| \doteq |\mathbf{v}|$ とした。従つて、この関係を用ひて上の積分を表はせば、

$$\int (\varphi' - \varphi) \cos \theta d\Omega = -2|\mathbf{v}| \chi(|\mathbf{v}|) \int \cos^2 \theta \cos \mu d\Omega$$

となる。

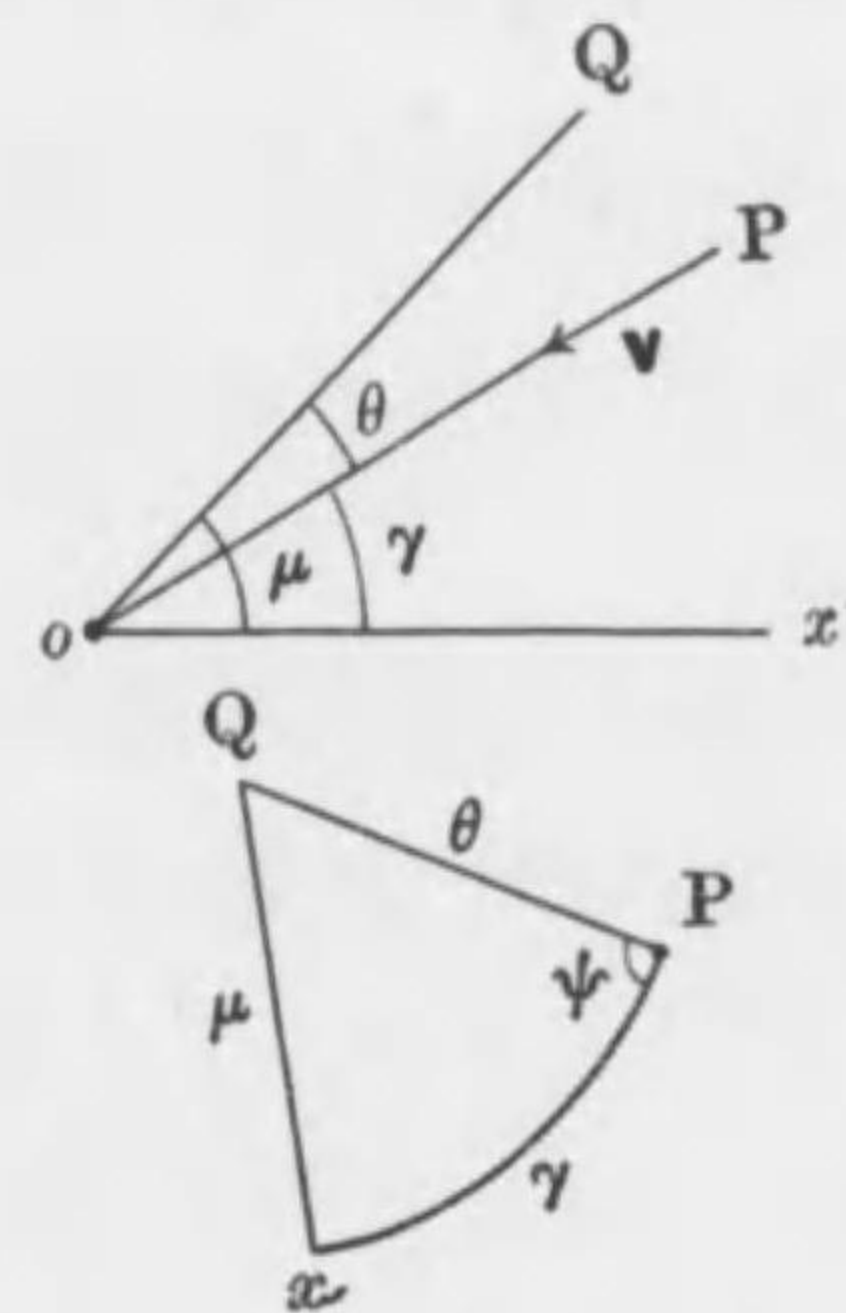
第三十三圖

今、電子の運動の方向と x 軸とがなす角を、 γ とすれば、第三十三圖に示す如く、 μ, θ, γ の角は一般に球面三角形をなす。従つて、

$$\cos \mu = \cos \gamma \cos \theta$$

$$+ \sin \gamma \sin \theta \cos \psi$$

の関係が成立する。従つて、



$$\int \cos^2 \theta \cos \mu \, d\Omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta (\cos \gamma \cos \theta + \sin \gamma \sin \theta \cos \psi) \sin \theta \, d\psi = \frac{\pi}{2} \cos \gamma = \frac{\pi}{2} \frac{\xi}{|\mathbf{v}|}$$

を得る。されば、上に得たる関係を用ひて、

$$\int (\varphi' - \varphi) \cos \theta \, d\theta = -\pi \xi \chi(|\mathbf{v}|)$$

を得、従つて、109式は、

$$-\pi N_1 R^2 \xi |\mathbf{v}| \chi(|\mathbf{v}|) = \left(-2h \frac{e}{m} A \mathbf{E}_x + \frac{dA}{dx} - \mathbf{v}^2 A \frac{dh}{dx} \right) \xi \varepsilon^{-h\mathbf{v}^2}$$

となる。

電子を氣體の分子と同様に見做すことから、電子の平均自由徑路は、

$$l = \frac{1}{\pi N_1 R^2}$$

を以て表はされる。従つて、平均自由徑路 l を用ひて、上式から、函數 $\chi(|\mathbf{v}|)$ を求むれば、

$$\chi(|\mathbf{v}|) = -\frac{l}{|\mathbf{v}|} \left(-2h \frac{e}{m} A \mathbf{E}_x + \frac{dA}{dx} - \mathbf{v}^2 A \frac{dh}{dx} \right) \varepsilon^{-h\mathbf{v}^2}$$

を得る。従つて、速度分布の函數 f を、求めることが出来る。

x 軸の方向の電流及び熱流は、既に求めたる式に於て、速度分布の函數 f の代りに、函數 φ を代入すれば、

$$I_x = e \int \int \int \xi \chi(|\mathbf{v}|) \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

$$W_x = \frac{1}{2} m \int \int \int \xi \mathbf{v}^2 \chi(|\mathbf{v}|) \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

を得る。定常状態を考察して居る爲めに、

$$\xi^2 = \eta^2 = \zeta^2 = \frac{1}{3} \mathbf{v}^2$$

の関係が成立し、速度體積は、

$$d\xi \, d\eta \, d\zeta = 4\pi \mathbf{v}^2 \, d|\mathbf{v}|$$

となる。従つて、上に得たる函數 $\chi(|\mathbf{v}|)$ と、速度の關係

を用ひて、電流及び熱流は、

$$I_x = \frac{4\pi e l}{3} \int_0^\infty \left(2 \frac{he}{m} A \mathbf{E}_x - \frac{dA}{dx} + \mathbf{v}^2 A \frac{dh}{dx} \right) \mathbf{v}^3 \varepsilon^{-h\mathbf{v}^2} \, d|\mathbf{v}|$$

$$W_x = \frac{2\pi m l}{3} \int_0^\infty \left(2 \frac{he}{m} A \mathbf{E}_x - \frac{dA}{dx} + \mathbf{v}^2 A \frac{dh}{dx} \right) \mathbf{v}^5 \varepsilon^{-h\mathbf{v}^2} \, d|\mathbf{v}|$$

となる。次の如き積分の結果を用ひて、

$$\int_0^\infty \mathbf{v}^3 \varepsilon^{-h\mathbf{v}^2} \, d|\mathbf{v}| = \frac{1}{2h^2}, \quad \int_0^\infty \mathbf{v}^5 \varepsilon^{-h\mathbf{v}^2} \, d|\mathbf{v}| = \frac{1}{h^3}$$

$$\int_0^\infty \mathbf{v}^7 \varepsilon^{-h\mathbf{v}^2} \, d|\mathbf{v}| = \frac{3}{h^4}$$

電流及び熱流は、

$$I_x = \frac{2}{3} \pi e l \left\{ \frac{1}{h^2} \left(2 \frac{he}{m} A \mathbf{E}_x - \frac{dA}{dx} \right) + 2 \frac{A}{h^3} \frac{dh}{dx} \right\} \quad 111$$

$$W_x = \frac{2}{3} \pi m l \left\{ \frac{1}{h^3} \left(2 \frac{he}{m} A \mathbf{E}_x - \frac{dA}{dx} \right) + 3 \frac{A}{h^4} \frac{dh}{dx} \right\} \quad 112$$

となる。上式に於て、 A は物質に特有なる常數にして、 h は既に求めたる如く、一般に温度の函數である。

今、温度が一定であるとし、物質は等質等方的のものとするれば、

$$\frac{dh}{dx} = 0, \quad \frac{dA}{dx} = 0$$

なる故, 111式は,

$$I_x = \frac{4}{3} \frac{\pi e^2 l A}{hm} E_x$$

となる。これを,

$$I_x = \sigma E_x$$

と置けば, 上の二式を比較して,

$$\sigma = \frac{4\pi e^2 l}{3hm} A$$

を得る。σは電導率と名付くるものである。既に求めたる h の値, 及び氣體運動論に於て求められる常數,

$$h = \frac{3m}{4\alpha T}, \quad A = \frac{2}{3} N \bar{v}^2 \sqrt{\frac{h^3}{\pi}}$$

$$\bar{v}^2 = \frac{2\alpha T}{m} = v^2$$

を用ひて, 電導率は,

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \frac{e^2 l N v}{\alpha T} \quad 113$$

として表はされる。vは電子の平均速度を表はし, Nは單位體積内に於ける自由電子の數である。他の量は, 既に用ひたるものと同意義のものである。

次に, 電子の運動に依つて, 電流が流れざる場合をとれば, 111式から,

$$I_x = 0, \quad \text{即ち} \quad \frac{2he}{m} A E_x - \frac{dA}{dx} = -\frac{2A}{h} \frac{dh}{dx}$$

を得る。これから E_x を求めて, 112式に代入すれば, 熱流は,

$$W_x = \frac{2}{3} \pi m l \frac{A}{h^3} \frac{dA}{dx}$$

となる。上に出したる A の値を代入して,

$$W_x = -\frac{8\pi l \alpha}{9h^2} \frac{dT}{dx} = -k \frac{dT}{dx}$$

と置けば,

$$k = \frac{8\pi l \alpha}{9h^2} A = \frac{8}{9} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \alpha l N v \quad 114$$

を得る。kは熱傳導率を表はす。

今兩傳導率の比を求めれば,

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{8}{9} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T \quad 115$$

となる。即ち兩傳導率の比は絶對溫度に比例することを示し, ウキデマン及びフランツ¹⁾が實驗的に求めた結果と一致する。これをウキデマン, フランツの法則と名付けて居る。この關係は, 最初にドルーデ²⁾がマックスウエルの電磁氣論に依つて, 求めたものと同様で

1. Wiedeman und Franz, Pogg. Ann. Bd. 83, (1853), p. 493.

Reingunum, Phys. Zeitschr. Bd. 7, (1906), p. 787.

2. P. Drude, Ann. d. Phys. Bd. 1, (1900), p. 566.; Bd. 3, (1900), p. 367.

ある。ドルーデは、電荷の移動を最初から総平均値として、理論を進めた爲めに、115式の $\frac{8}{9}$ の係数の代りに、 $\frac{4}{3}$ として出して居る。上の結果も、又ドルーデの結果も、兩傳導率の比は、絶對溫度に正比例するも、實驗の結果に依れば、溫度が著しく上昇すれば、最早や該比は絶對溫度に正比例せずして、その増大の割合を減少して、次第に飽和状態に達する。従つて、上の結果は溫度が著しく上昇する場合に對しては、正確に適用されない。

第三章

電導電子に依る諸現象

本章に於ては、電導電子に依つて説明される諸々の現象の概要を述べる。

(一) 接觸電氣

異なる金屬を相接觸せしむれば、その接觸面に電位差を生ずる。この現象を接觸電氣の現象と名付けて居る。

一般に金屬内に存在する自由電子は、分子からの力を受ける、されど物質が等質等方的であれば、その分子力は各方向のものが夫々相殺して、何等の影響をも及ぼさない。然し物質が不等質的であれば、分子力は残存して、物質内の自由電子は、その力を受ける。今、上の如き残存する分子力に對するポテンシャルを V とすれば、 x 軸の方向に、電子に働く力は $-e \frac{dV}{dx}$ を以て表はされる、分子力は、溫度及び其の他の物理的條件に依つて變化する筈であるが、今、溫度及び其の他の物理的條件は一定であるとすれば、自由電子は、分子力を受けて加速運動を起す筈である。その加速度は、 $-\frac{e}{m} \frac{dV}{dx}$ を以て表はされる。但し m は電子の質量である。

自由電子は、第二章電導論に於ける場合と同様に運動して、分子と衝突をなし、移動するものとし、其の外に不釣合に依る分子力が作用して、電子に更に、 $-\frac{e}{m} \frac{dV}{dx}$ の加速度を加ふるものとすれば、第二章の衝突前後に於ける電子数の計算に於て、速度分布の函數 f の變數の $\frac{e}{m} \mathbf{E}_x dt$ の代りに、 $\frac{e}{m} \left(\mathbf{E}_x - \frac{dV}{dx} \right) dt$ を代入することが必要である。従つて、111式の電流の式に於て、

$$\frac{2he}{m} \Lambda \mathbf{E}_x \text{ の代りに } \frac{2he}{m} \Lambda \left(\mathbf{E}_x - \frac{dV}{dx} \right)$$

を代入することとなる。111式に上の如き代入を行ひ、 $I_x = 0$ とすれば、

$$\frac{2he}{m} \Lambda \left(\mathbf{E}_x - \frac{dV}{dx} \right) - \frac{d\Lambda}{dx} = -2 \frac{\Lambda}{h} \frac{dh}{dx}$$

となる。従つて、

$$\mathbf{E}_x = \frac{dV}{dx} + \frac{m}{e} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \right) + \frac{m}{2he} \frac{d \log \Lambda}{dx}$$

を得る。今、

$$\mathbf{E}_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

と置き、 x の範圍 a, b の間に於て、 φ を求めれば、

$$\varphi_a - \varphi_b = (V_b - V_a) + \frac{m}{e} \left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_a} \right)$$

$$+ \frac{m}{2he} \int_a^b \frac{d \log \Lambda}{dx} dx \quad 116$$

となる。温度を一定とすれば、 h は場所に依つて、不

變である爲めに、上式の右邊の第二項は零となり。

$$\varphi_a - \varphi_b = (V_b - V_a) + \frac{m}{2he} \log \frac{\Lambda_b}{\Lambda_a}$$

となる。 x の範圍 a, b が異なる金屬を接觸せしめたときの、接觸面の兩側にあるとすれば、上式は、接觸面を境とする電位差を表はす。上式の右邊の第一項は兩金屬に於ける分子力の差に依るものにして、第二項は、兩金屬に於ける特有常數 Λ の相違に依るものである。 Λ の値は第二章に於ける如く、

$$\Lambda = N \sqrt{\frac{h^3}{\pi^2}}$$

の値を有し、温度が一定であるときは、自由電子の數 N に比例するものである。従つて第二項は、兩金屬の單位體積に含まれる自由電子の數の相違に依るものである。以上の分子力と自由電子の數の相違との、何れが果して接觸電氣を起すものであるかは不明なるも、ヘルムホルツ¹は、前者をとり、ドルーデ²は後者をとつた。

(二) 熱電氣

上に述べたる、 a, b の二點が同一金屬内に存在して、その温度を異にするとすれば、 a, b 二點間に於ける電

1. Helmholtz.

2. Drude. Ann. d. Phys. 1, (1900), s. 566.

位差は、温度差に依る電位差にして、これを熱電氣と名付けて居る。

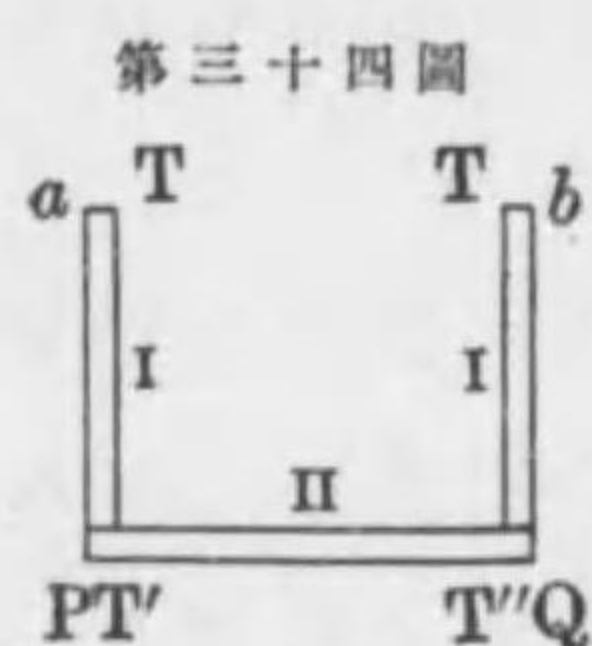
116式に於て h は温度の函数にして、温度は又 x の函数とし、金属は等質等方的であるとすれば、右邊の第一項、分子力に依るものは零となり、

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{m}{e} \left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_a} \right) + \frac{m}{2e} \int_a^b \frac{1}{h} \frac{d \log A}{dx} dx$$

となる。従つて

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{m}{e} \left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_a} \right) + \frac{m}{2e} \left[\frac{1}{h} \log A \right]_a^b - \frac{m}{2e} \int_a^b \log A \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \right) dx$$

を得る。今第三十四圖に示すが如く、 a, b は I の金属



の二點にして、その温度は共に T で

あり、I の金属の他端 P, Q に於て、II

の金属と接觸し、その温度を夫々、

T', T'' とすれば、上式に於て、右邊の

第一第二項は、 a, b 二點に於て温度

一定にして、等質等方的である爲めに零となり、第三項

のみとなる。従つて P, Q 二點の熱電氣に依る電位差

を E とすれば、

$$E = -(\varphi_a - \varphi_b) \\ = \frac{m}{2e} \int_a^b \log A \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \right) dx$$

となる。上式の積分は次の如く表はすことが出来る。

$$\int_a^b \log A \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \right) dx = \left\{ \int_a^P + \int_P^Q + \int_Q^b \right\} \log A \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \right) dx \\ = \left\{ \int_{T'}^{T''} + \int_{T'}^{T'} \right\} \log A_I \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{h} \right) dT \\ + \int_{T'}^{T''} \log A_{II} \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{h} \right) dT$$

従つて、

$$E = \frac{m}{2e} \int_{T'}^{T''} \log \frac{A_{II}}{A_I} \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{h} \right) dT$$

を得る。既に述べたる如く、 h, A の値は

$$\frac{1}{h} = \frac{4\alpha T}{3m}, \quad A = N \sqrt{\frac{h^3}{\pi^3}}$$

なる故、上式に代入して

$$E = \frac{2\alpha}{3e} \int_{T'}^{T''} \log \frac{N_{II}}{N_I} dT$$

を得る。今温度の差が1であるとすれば

$$E_{T=1} = \frac{2\alpha}{3e} \log \frac{N_{II}}{N_I}$$

となる。上式は絶対温度の一度の差に依る熱電氣電

位差を表はすものにして、 N_{II}, N_I は夫々 II 及び I の金属

の単位體積内に含まれる自由電子の數である。即ち

単位温度の差に依る熱電氣電位差は、各金属の単位體

積内に含まれる自由電子の數の比の對數に比例する

ことを示す。されば、兩金属に於ける単位體積内に含

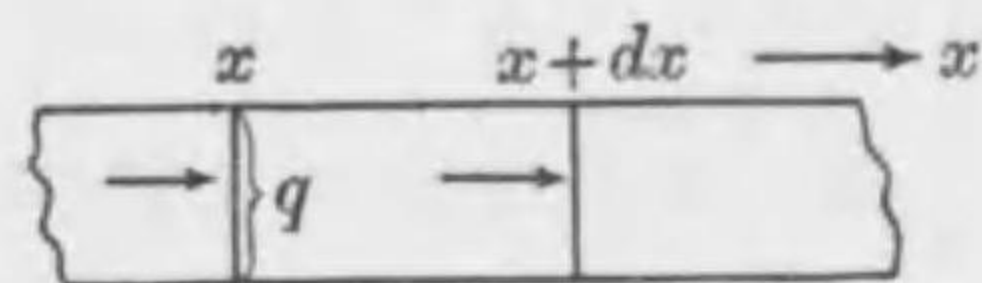
まれる自由電子の数の如何に依つて、熱電位差は正負の間に變化するものである。

(三) ペルチエー及びトムソン効果

異なる金属の接觸面を通して電流を通ずる時、その温度一定の場合に、その接觸面に於て、電流の方向に依り、熱の發生又は吸収を起す現象を、ペルチエー効果と名付けて居る。單一金属に電流を通ずる時、その金属の温度が場所に依りて異なる場合に、電流の方向に依り、熱の發生又は吸収を起す現象をトムソン効果と名付けて居る。

金属に電流を通ずれば、ジュールの熱を發生する筈である。従つて、ペルチエー及びトムソン効果の、温度及び電流間の關係を求むる爲めには、ジュールの熱を吸収せしめて、それに依る温度の上昇を起さしめざる如き装置を用ひる必要がある。今、金属に吸熱器を附屬せしめて、ジュールの熱を悉く吸収せしめ、それに依る金属の温度の上昇をなさしめずして、温度を一定に保持するものとする。

第三十五圖



第三十五圖に示すが如く、 x 軸の方向に長さ、断面積 q なる金属をとり、電流は x 軸

の方向に流れるものとする。 x と $x+dx$ の間に存在する自由電子は、外から電流が通ずる爲めの電氣力を受ける。この力に依つて、自由電子は dt 時間に dx だけ、 x 軸の方向に動くものとするれば、その移動に依る仕事は、 $W dt dx$ である。この仕事のために熱の出入が起る筈である。今自由電子の移動に依る、單位面積に對する熱流を、 W_x とすれば、 x の位置に於ける單位時間の熱流は、 $W_x q$ にして、 $x+dx$ の位置に於ける單位時間の熱流は、 $W_x q + \frac{d}{dx}(W_x q) dx$ である。従つて、 x 及び $x+dx$ の間に流入する熱流は單位時間に、上の二つの熱流の差、即ち、 $-\frac{d}{dx}(W_x q) dx$ である。されば、單位時間に、 dx の範圍内に注入する熱のエネルギーは、外力に依る仕事と、熱流との和である。即ち、

$$U dx = W dx - \frac{d}{dx}(W_x q) dx$$

を以て表はされる。

自由電子に働く外力を K_x とすれば、單位時間に、 K_x が一個の電子に對してなす仕事は、 $K_x \xi dx$ である。 $q dx$ の體積内に存在する自由電子の数は、第二章と同様にして、

$$q dx f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

を以て表はされる。 ξ, η, ζ は自由電子の速度の x, y, z

分である。従つて、 dt 時間に、 dx の範囲内の總ての自由電子に對して、外力がなす仕事は、

$$\begin{aligned} W dt dx &= \mathbf{K}_x dt q dx \int \xi f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \\ &= \mathbf{K}_x dt q dx \frac{I_x}{e} \end{aligned}$$

となる。 I_x は x の方向の電流の密度を表はす。従つて、

$$W = \mathbf{K}_x q \frac{I_x}{e} = \frac{\mathbf{K}_x I}{e}$$

となる。 I は全電流を表はす。

又外力は、(一)に於けると同様の考察と、電流 I が流れて居ることから、

$$\mathbf{K}_x = e \left(\mathbf{E}_x - \frac{dV}{dx} \right) = m \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \right) + \frac{m}{2h} \frac{d \log A}{dx} + \frac{e}{\sigma q} I$$

を以て表はされる。従つて、 \mathbf{K}_x の値を W に代入して、

$$W = \frac{mI}{e} \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \right) + \frac{1}{2h} \frac{d \log A}{dx} \right\} + \frac{I^2}{\sigma q} \quad 117$$

を得る。又熱流 W_x は、第二章112式に於て、 $e\mathbf{E}_x$ に、上に得たる、 $e \left(\mathbf{E}_x - \frac{dV}{dx} \right)$ を代入し、第二章の電導率 σ と、電子の平均自由経路 l との比を用ひれば、單位面積に對して、

$$W_x = \frac{m}{eh} \frac{I}{q} + \frac{2\pi mlA}{3h^4} \frac{dh}{dx} \quad 115$$

となる。今これを

$$W_x = W_{x1} + W_{x2}$$

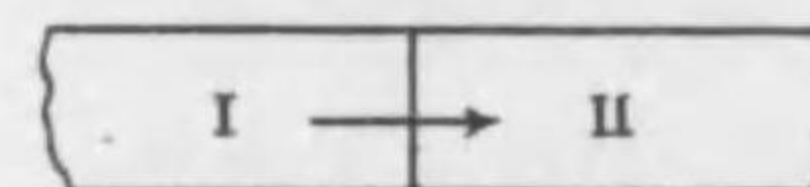
と置けば、上に得たる諸量を代入して、

$$\begin{aligned} U &= \frac{I^2}{\sigma q} + \frac{mI}{e} \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \right) + \frac{1}{2h} \frac{d \log A}{dx} \right\} \\ &\quad - \frac{d}{dx} (W_{x1} q) - \frac{d}{dx} (W_{x2} q) \quad 116 \end{aligned}$$

を得る。上式の右邊の第一項はジュールの熱を表はし、 W_{x2} の項は、115式から知れる如く、電流には無關係にして、熱傳導に依るものである。第二項及び第三項は、電流に比例するものにして、従つて電流の方向の如何に依つて、熱の發生又は吸収を表す項である。されば第二項及び第三項が、ペルチエー及びトムソン効果を表はす筈である。最初に述べたる如く、電流を通ずる金屬に吸熱器を装置して、ジュールの熱を悉く吸収せしむれば、116式の第一項は何等の熱をも與へざる筈である。

第三十六圖に示すが如く、金屬は、二種のものゝ相接觸するものとし、溫度は兩金屬に通じて一定であると

第三十六圖



し、電流も定常的であるとすれば、116式の第二項の h を含む項及び第三項は零となり、従つて、ペルチエー効果を表はす部分は、次の如くする。

$$\int_1^2 U' dx = \frac{mI}{2he} \int_1^2 \frac{d \log A}{dx} dx = \frac{mI}{2he} \log \frac{A_2}{A_1}$$

されば、単位電流に対する吸収熱は、 h, A の値を代入して、

$$\Pi_{I,II} = \frac{2\alpha T}{3e} \log \frac{N_{II}}{N_I} \quad 117$$

を得る。 N_I, N_{II} は I 及び II の金属の単位体積内の自由電子の数を表はす。 α, e は常数であり、 T は絶対温度を表はす。 $\Pi_{I,II}$ はヘルチエ-効果に依る吸収熱を表はし、絶対温度 T に比例することを示す。

次に I, II は同一金属にして、温度が場所に依つて異なるものとすれば、116式の第二、第三項に於て、第二項の括弧内の第一項と、第三項とは相等しく、附號を異にする爲めに、零となり。従つて、 x の代りに絶対温度 T を用ゆれば、

$$U' dT = \frac{2\alpha T}{3e} I \frac{d \log A}{dT} dT$$

として表はすことが出来る。されば單位の電流及び單位の温度の差に對しての熱は、

$$\mu = - \frac{2\alpha T}{3e} \frac{d \log A}{dT} \quad 118$$

を以て表はされる。これはトムソン効果に依る熱の發生を表はし、絶対温度 T に比例することを示す。

今二種の金属が相接觸する場合に於て、トムソン効果の差を求むれば、117, 118式を用ひて、

$$\mu_{II} - \mu_I = \frac{2\alpha T}{3e} \frac{d}{dT} \log \frac{A_I}{A_{II}} = T \frac{d}{dT} \left(\frac{\Pi_{I,II}}{T} \right)$$

を以て表はされる。(二)の熱電氣に於ける電位差は

$$E = \frac{2\alpha}{3e} \int_{T'}^{T''} \log \frac{A_{II}}{A_I} dT = - \int_{T'}^{T''} \frac{\Pi_{I,II}}{T} dT$$

となる。従つて

$$\mu_{II} - \mu_I = - T \frac{dE}{dT} \quad 119$$

の關係を得る。この關係は、熱力學に於て求めたる關係と全く一致するものである。

以上述べたる諸計算の結果は、温度の範圍を著しく擴張したる實驗の結果と、精密には一致せざるものである。以上の理論は、負電荷を有する電子にのみに依る結果なるも、一般に物質内に於ては、自由電子の運動を著しく制限する所の、正電荷を有する比較的自由なる電子の存在することは、考慮され得ることである。然もこの正電子は負電子と共に、以上述べたるが如き、諸現象に間接又は直接に影響するものと考へられる。されば正電子を考慮すれば、これに依る項が、一つの補正項として、結果の關係式に入ることから、その結果は、相當によく實驗の結果と一致することは、既にドルーデに依つて、マックスウエルの電磁氣論から求められたことから、知ることが出来る。電流が流れて居る

導体を磁場に置いたときの諸現象、殊にホール効果¹の如きは、正電荷を有する電子を考慮することが、極めて必要なることである。されど、比較的自由なる正電荷を有する電子が、物質内に於て如何なる位地を占めて居るか、殊に原子構造上、如何に考ふべきかに就ては、未だ充分にこれを定め得られざる状態にある。されば、本論に於ては、正電子の考慮をなさずして、負電子に依つてのみ考察したのである。その意味に於て、又実験結果と著しく相違する、ホール効果の如き現象に就ては、敢へて述べざることにした。

1. Hall effect, Drude, Ann. d. Phys. Bd. 3. (1900), s. 369. 参照。

第四章

熱電子現象

金属を白熱すれば、これに含まれて居る自由電子が金属外に放出される現象、即ち熱電子現象に關しては、1880年から數年に亘つて、エルステル及びガイテル¹に依つて、組織的に研究されて、多くの性質が見出された。其後、1901年以來、オーダブリューリチャードソン²に依つて、實驗的にも、理論的にも、幾多の研究が行はれて、現今工業上の應用に迄進展されて來た。本章に於ては、リチャードソンに依つて發表された、氣體運動論的考察に就て述べることにする。

金属内の自由電子は、既に電導論に於て述べたる如く、氣體分子の如き運動状態にあるとし、従つて、マックスウエルの速度分布の法則が應用されるものと假定するのである。

されば、金属が熱せられるに従つて、自由電子は、その

1. Erster und Geitel, Ann. d. Phys. Bd. 16, (1882), S. 193; Bd. 19, (1883), S. 588; Bd. 22, (1884), S. 123; Bd. 26, (1885), S. 1.; Bd. 31, (1887), S. 109; Bd. 37, (1889), S. 315.

2. O. W. Richardson, The Emission of Electricity from Hot Bodies, London. 参照。

運動のエネルギーを増大する。運動のエネルギーが十分に増大すれば、自由電子は、金属の表面を破つて、外部に飛び出すのである。斯様に金属外に飛び出した電子を熱電子と名付けて居る。熱電子の数は、金属の温度が一定の時は、一定にして、金属の単位表面積を通して、単位時間に飛び出す熱電子の流を、熱電子電流と名付けて居る。

金属内に於て、自由電子の速度が、その、

$$x \text{ 分が, } \xi, \xi + d\xi$$

$$y \text{ 分が, } \eta, \eta + d\eta$$

$$z \text{ 分が, } \zeta, \zeta + d\zeta$$

の間にある数は、マックスウエルの法則に依つて、

$$f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = A e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} d\xi d\eta d\zeta$$

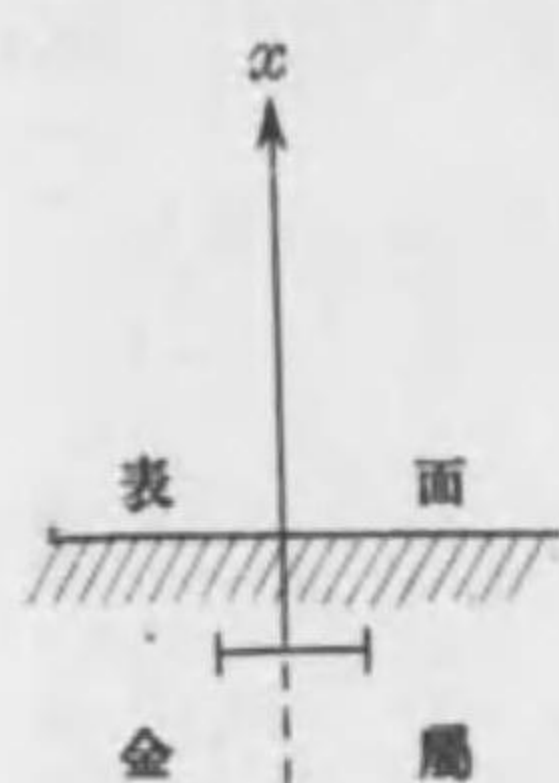
を以て表はされる。A, h は既に述べたる如く、

$$A = N \sqrt{\frac{h^3}{\pi^3}}, \quad \frac{3m}{4h} = \alpha T$$

にして、N は金属の単位体積に含まれる自由電子の数を表はし、m は自由電子の質量を表はし、 α は氣體常數に關係する常數にして、T は絶對温度である。

第三十七圖に示す如く、金属の表面に垂直なる x 軸の方向に、之れに垂直なる単位面積を通して、金属外に飛び出す自由電子の数を求める。

第三十七圖



上に述べたる如き速度を有する自由電子が、x 軸の方向に進んで、金属表面に達する数は、

$$\iint \int \xi f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

を以て表はされる。これ等の自由電子の内、金属表面に於ける、その内外の電位差に打ち勝つて、外に飛び出し得

るものは、それに必要な運動のエネルギーを有するもののみである。

今、一個の自由電子が、金属外に飛び出すに必要な仕事を、W とすれば、

$$W = eV$$

を以て表はし得られる。e は電子の全電荷であり、V は、金属の表面に於ける電位差を示す。

次に金属外に飛び出した電子の速度の、x 軸の方向の分を、 ξ' とすれば、次の如き關係が成立する。

$$\frac{1}{2} m \xi'^2 - \frac{1}{2} m \xi^2 = eV = W$$

従つて、

$$\xi' = \sqrt{\xi^2 - \frac{2eV}{m}} = \sqrt{\xi^2 - \frac{2W}{m}}$$

を得る。又、電子が金属外に飛び出す爲めには、金属外

に於ける電子の速度が

$$\xi' \geq 0$$

なることを必要とする。従つて、金属内に於ける電子の速度は、

$$\xi \geq \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \sqrt{\frac{2W}{m}}$$

なることが必要である。

今、金属表面に於て、その単位面積を通じて、単位時間に飛び出す電子の数を n とすれば、速度の x 分に對する上の關係を考慮して、

$$\begin{aligned} n &= A \int_{\sqrt{\frac{2W}{m}}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} d\xi d\eta d\zeta \\ &= \frac{N}{2\sqrt{h\pi}} e^{-\frac{2hW}{m}} = N \sqrt{\frac{\alpha T}{3\pi m}} e^{-\frac{3W}{2\alpha T}} \end{aligned}$$

となる。従つて熱電子電流は、

$$I_s = ne = Ne \sqrt{\frac{\alpha T}{3\pi m}} e^{-\frac{3W}{2\alpha T}} \quad (120)$$

を以て表はされる。若しも、金属内に於ける自由電子の数が、その温度に無關係であるとするれば、上式は

$$I_s = a \sqrt{T} e^{-\frac{b}{T}} \quad (121)$$

を以て表はされる。 a, b は、物質に特有なる常數にして、

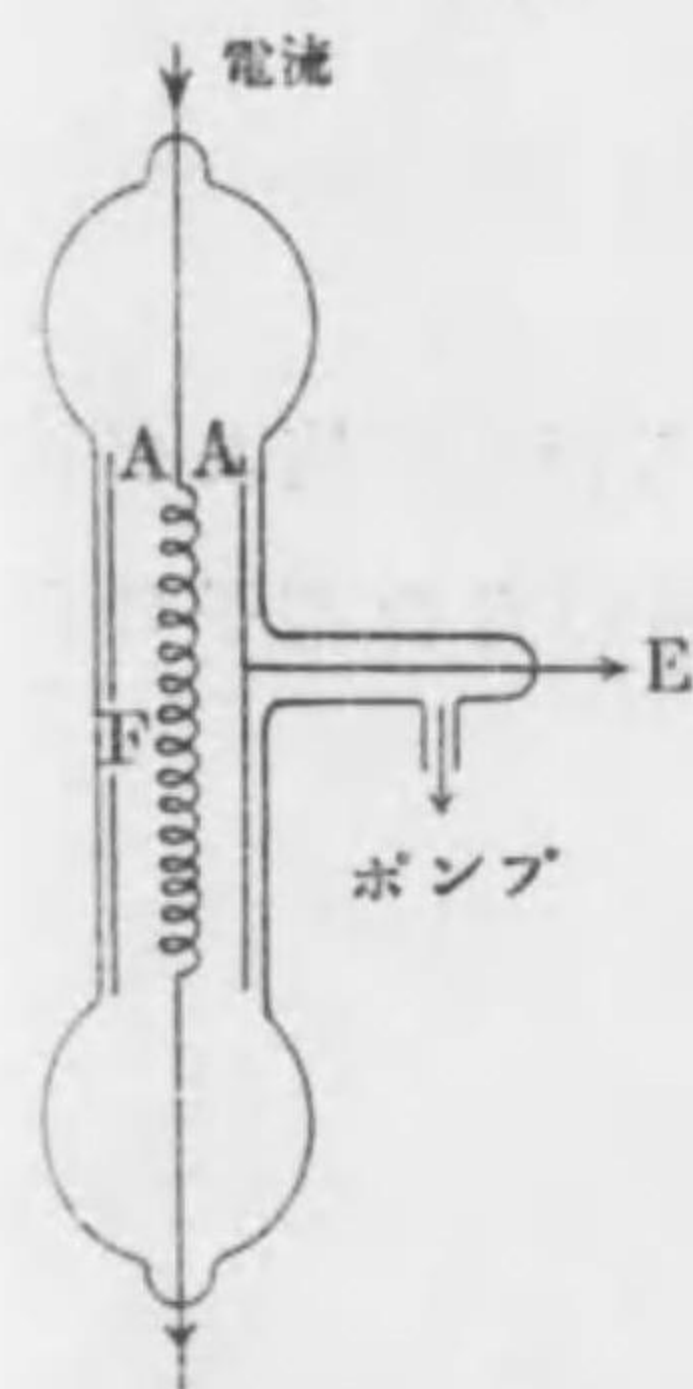
$$a = Ne \sqrt{\frac{\alpha}{3\pi m}} = Ne \sqrt{\frac{k}{2\pi m}}$$

$$b = \frac{3W}{2\alpha} = \frac{W}{k}$$

を以て表はされる。但し $\alpha = \frac{3}{2}k$ にして、 k はボルツマンの常數を表はし、 1.65×10^{-16} 絶對單位の値である。

121 式に依れば、熱電子電流は、低温度に於ては、殆んど零に近きも、温度の上昇と共に著しく増大して、高温度に於ては、約絶對温度の平方根に比例して増大する。この結果は、よく實驗と一致するのである。

第三十八圖



第三十八圖は、ラングムイアの實驗装置を示す。Fは熱電子を發生する金属線にして、電流を通じて、熱するのである。Aはアルミニウム製圓筒形電極にして、Eに依つて電氣計に接觸し、熱電子電流を測定し得る如く装置する。全體の装置は、真空管内に封入してある。實驗結果に依れば、熱電子電流の温度に對する變化は、よく121式と一致し、121式の常數 a, b を數種の物質に就て、實驗結果から求めた値は、次表に示す通りで

1. Langmuir, Trans. Amer. Electrochem. Soc., vol. 29, (1916), 125.

ある。

	a	b	V (ボルト)
白金	9.70×10^{21}	8.0×10^4	6.62
タンタラム	3.58×10^{16}	5.00×10^4	4.04
炭素	7.15×10^{14}	4.87×10^4	3.92
タングスラン	7.44×10^{16}	5.25×10^4	4.25
モリブデン	6.44×10^{16}	5.00×10^4	4.04

上表に於ける V の値は、金属の接觸に依る電位差と同じ程度のものである。

上に求めたる常數 a の關係から、

$$N = \frac{a}{e} \sqrt{\frac{2\pi m}{k}}$$

を求め、上表に掲げたる實驗結果からの a の値及び他の諸量を代入して、金属の單位體積内の自由電子の數を求むれば、

	N
白金	1.3×10^{26}
タンタラム	4.9×10^{20}
タングステン	1.0×10^{19}

となる。又、多くの學者に依つて發表されたる、酸化物に對する結果は、次表に示す如きものである。次表に掲げたる物質は、總て之等の酸化物である。

	$\frac{a}{e}$	b	V (ボルト)	N
Ba	2.94×10^{26}	4.16×10^4	3.58	2.0×10^{22}
Sr	$3.16 \times \text{,,}$	4.49 ,,	3.87	$2.1 \times \text{,,}$
Ca	$2.68 \times \text{,,}$	4.03 ,,	3.48	$1.8 \times \text{,,}$
Mg	2.11×10^{19}	3.95 ,,	3.40	1.4×10^{14}
Be	6.45×10^{18}	2.39 ,,	2.06	4.3×10^{13}
Y	1.17×10^{23}	3.63 ,,	3.13	7.8×10^{17}
La	4.3×10^{21}	3.79 ,,	3.26	2.9×10^{16}
Al	4.0×10^{19}	3.73 ,,	3.21	2.7×10^{14}
Zr	4.1×10^{22}	3.66 ,,	3.15	2.7×10^{17}
Th	2.19×10^{20}	3.56 ,,	3.06	1.5×10^{15}
Ce	1.22×10^{22}	3.71 ,,	3.20	8.2×10^{16}
Zn	1.92×10^{18}	3.51 ,,	3.02	1.3×10^{15}
Fe	2.23×10^{22}	4.69 ,,	4.04	1.5×10^{17}
Ni	1.74×10^{23}	5.12 ,,	4.41	1.2×10^{18}
Co	3.32×10^{22}	4.97 ,,	4.28	2.2×10^{17}
Cd	2.33×10^{18}	3.02 ,,	2.60	1.6×10^{13}
Cu	2.19×10^{16}	2.25 ,,	1.94	1.5×10^{11}

若しも、金属内に於ける單位體積内の自由電子の數が、温度と共に變化して、

$$N \propto T^{\frac{3}{2}}$$

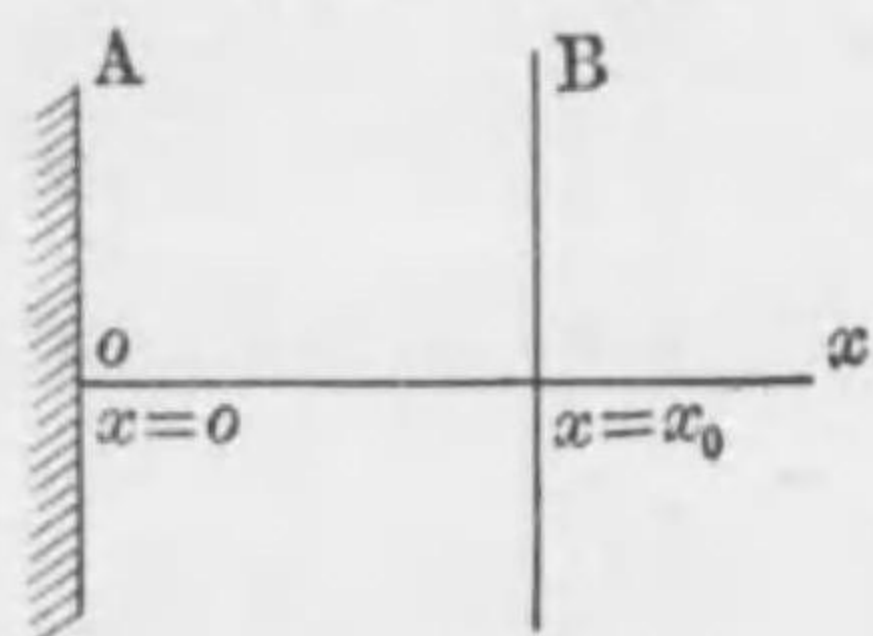
と置き得るならば, 121式は

$$I = AT^2 e^{-\frac{b}{T}}$$

となる。A, bは物質に特有なる常數である。この關係式は, 量子論的考察から求めたものと同様にして, 121式と共に, 同様に, よく實驗結果に一致するものである。

次に, 熱電子電流の時間的變化に就て述べる。

第三十九圖



第三十九圖に示す如く, Aを金属の表面とし, これを熱することに依つて, 熱電子が放出され, Bの電極に達するものとする。依つてBは負に帯電して, A

B間に電位差を生ずる。されば, Aの表面から出る熱電子は, B極の負電荷に依る反排力を受ける。Bに於ける負電荷が次第に増加するに従つて, Aから出た電子は, 最早やBに達し得ずして, Aに逆流することとなる。従つて, 之等二つの電子の流れは, 或る一定時間の後に, 温度が一定の場合に於ては, 相殺して, AB間に於ける熱電子電流は次第に減少して, 遂に零に到達する。かかる状態に達する迄の熱電子電流の變化を考察する

ことにする。自由電子は, 金属の内外に於て, 共にマックスウエルの速度分布の法則を満足するものとする。

今Aに於ける, 熱電子の放出に依る電位差をVとし, Bに於ける熱電子蓄積に依る電位差を V_0 とすれば, AB間に於ける電子の運動は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -e \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = m \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

を以て表はされる。mは電子の質量にして, eはその電荷である。

Aの表面から飛び出した電子がBに達する爲めには, 既に述べたる如く,

$$\frac{1}{2} m \xi^2 \geq eV_0$$

なる條件を満足することが必要である。従つて, Bに達する熱電子電流は, 120式を求めたると, 同様にして,

$$I_s = e \int_{\sqrt{\frac{2eV_0}{m}}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi' f(\xi', \eta', \zeta') d\xi' d\eta' d\zeta'$$

$$= \frac{Ne}{2\sqrt{h\pi}} e^{-\frac{2e}{m} hV_0}$$

となる。未だB極に電子が到達せざる時に於ては,

$$V_0 = 0$$

である。従つて上式から

$$I_x(V_0=0) = I_{x_0} = \frac{Ne}{2\sqrt{h\pi}}$$

を得る。されば、

$$I_x = I_{x_0} e^{-\frac{2e}{m} h V_0} \quad 122$$

を以て表はされる。又、 I_x の電流は、ABを一つのコンデンサーと考へ、その静電容量をCとすれば、

$$I_x = C \frac{dV_0}{dt}$$

を以て表はされる。従つて、上の二式から

$$C \frac{dV_0}{dt} = I_{x_0} e^{-\frac{2e}{m} h V_0}$$

を得る。上式を、 $t=0$ の時、 $V_0=0$ の条件を用ひて積分して、

$$h = \frac{3}{4} \frac{m}{\alpha T} \quad \frac{2}{3} \alpha = \frac{R}{N_1}$$

の値を代入すれば、

$$V_0 = \frac{RT}{N_1 e} \log \left(1 + \frac{N_1 e I_{x_0} t}{RT C} \right) \quad 123$$

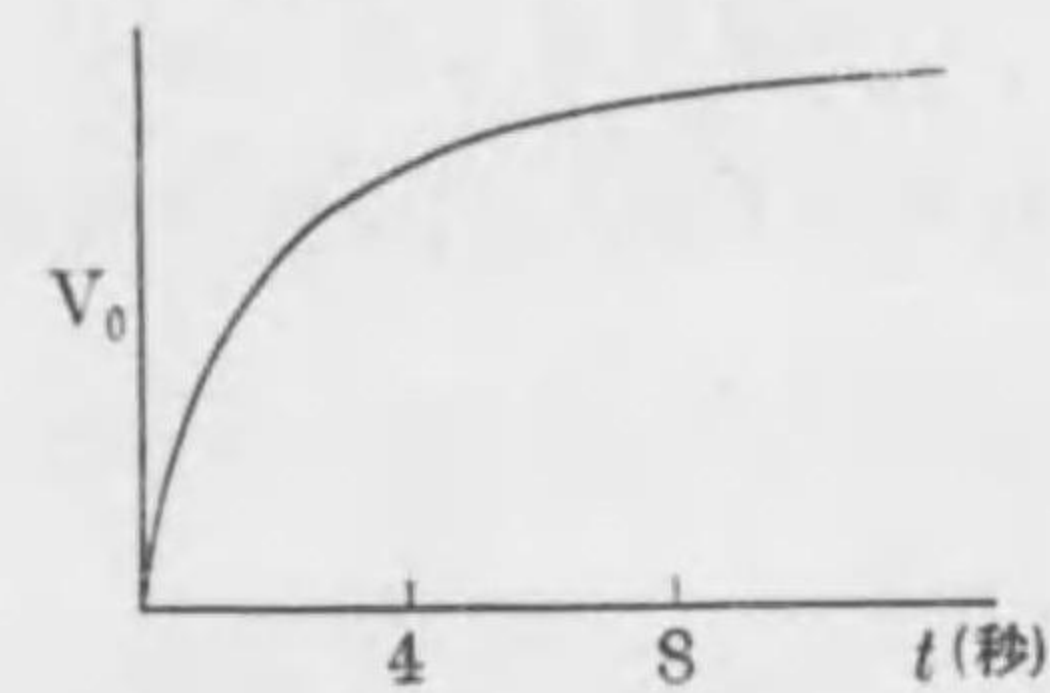
を得る。但しRは氣體常數にして、 N_1 は單位體積内の分子の數を表はす。依つて熱電子電流は、

$$I_x = C \frac{dV_0}{dt} = \frac{I_{x_0}}{1 + \frac{N_1 e I_{x_0} t}{RT C}} \quad 124$$

を以て表はされる。

リチャードソンの實驗に依れば、第四十圖に示す如

第四十圖



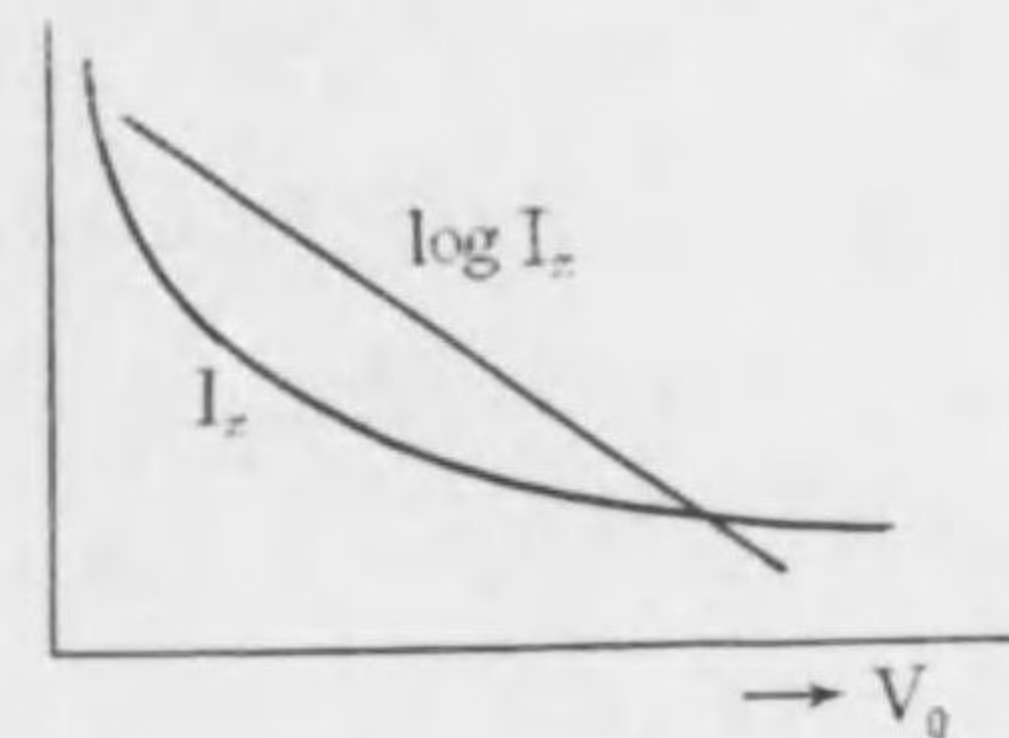
く、Bの電極に於ける熱電子に依る電位差 V_0 は、時間と共に次第に飽和状態に達する。又124式が示す如く、熱電子電流は、時間の経過に従ひ、次第に減少して、遂に零に達する筈である。

122式に、上に掲げたる常數の値を代入して、

$$\log I_{x_0} - \log I_x = \frac{N_1 e}{RT} V_0$$

を作り、熱電子電流 I_x と V_0 との關係を求むれば、第四十一圖の如き變化をなす。又、實驗結果を用ひて、氣體常數Rを求むれば、次の

第四十一圖



如くなる。白金を、氣壓が水銀柱にて0.015耗の真空管内に於て、絶對溫度1506°の許に、十六時間熱して、實驗

を行つた結果、電位差 V_0 の時間に對する變化は、第四十

圖に示すが如き結果を得た。又その熱電子電流の電位 V_0 に對する變化も、第四十一圖に示すが如き結果にして、最大熱電子電流は、 4.7×10^{-11} アンペアである。上に求めた電流と電位差 V_0 の關係に於て、既に知られたる諸量の値を用ひ、實驗結果からの I_s, I_{s_0} の値を代入して、氣體常數 R を求めた結果は、

$$R = 0.97 \times 10^8$$

となり、氣體運動論に於て求めたる値は

$$R = 0.832 \times 10^8$$

にして、大體に於て一致するのである。

實際に、Aの表面から飛び出し、Bの電極に達する熱電子は、總てAの表面に垂直なる x 軸の方向のものに非らず。一般には、Aの表面から飛び出す熱電子は、 x 軸を中心として、大體、公算論的曲線の如き分布状態に於て、B極に達する筈である。依つて、熱電子がA表面に垂直に飛び出すものとしての、上の理論は、少しく嚴密さを缺くものである。この意味に於て、上に掲げた程度の實驗との一致は、充分によき一致と考ふべきである。

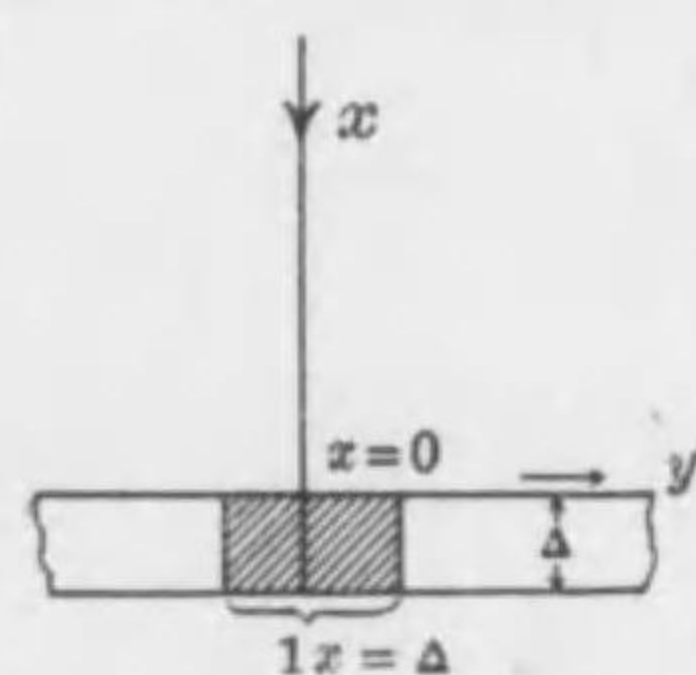
熱電子電流は、Bの如き對極に、外部から、種々の電位

差を與へることに依つて、種々に變化し、更に真空管内に種々の氣體を封入することに依つて、又著しく變化するものである。これ等の事項に就ては省略する。

第 五 章

電子に依る輻射エネルギー の吸収及び発散

第四十二圖



第四十二圖に示す如く、光が金属の表面に垂直なる x 軸の方向に進み来り、これに當るものとする。金属内の自由電子は、光のエネルギーを吸収して、その運動のエネルギーを増大

し、活動旺盛となり、熱を發生する。

今入射光は、その電場のベクトルが、 x 軸に垂直の方向にある如き、偏光であるとすれば、入射光の電場のベクトルは、

$$\mathbf{E}_y^{(i)} = a \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{c} + p \right)$$

を以て表はすことが出来る。

金属板の厚さ Δ が十分に薄きときは、金属内に於ける、入射光に起因する電気力 \mathbf{E}_y は、一定と見做し得られる。金属内に於ける、入射光に依る電気力を \mathbf{E}_y とすれば、自由電子は、これに作用されて、電流を作る筈であ

る。即ち電流は、

$$\mathbf{I}_y = \sigma \mathbf{E}_y$$

を以て表はされる。 σ は電導率である。従つて、 \mathbf{E}_y の力が単位時間になす仕事は、

$$\mathbf{E}_y \mathbf{I}_y = \sigma \mathbf{E}_y^2$$

を以て表はされる。従つて、入射光に依つて、金属の単位表面積の體積内に生ずる熱量は、上の仕事に體積 Δ を掛けたものである。

一般に金属内に於ける \mathbf{E}_y は、

$$\mathbf{E}_y = \mathbf{E}_y^{(i)} + \mathbf{E}_y^{(r)}$$

を以て表はされる。 $\mathbf{E}_y^{(r)}$ は金属内部に於て、入射したる光の反射に依る電気力にして、一般に體積 Δ に比例するものである。されば、 Δ^2 以上を省略すれば、金属内に發生する熱量は

$$\sigma \mathbf{E}_y^2 \Delta \doteq \sigma \mathbf{E}_y^{(i)2} \Delta = \sigma \Delta a^2 \cos^2(2\pi\nu t + p')$$

となる。相當に長い時間に對して、平均値をとれば、

$$\sigma \overline{\mathbf{E}_y^{(i)2}} \Delta = \frac{1}{2} \sigma \Delta a^2$$

となる。

入射光に依つて、金属板の単位面積に、単位時間に入るエネルギーは

$$|\mathbf{S}| = c \mathbf{E}_y^{(i)2} = \frac{1}{2} c a^2$$

を以て表はされる。されば、金属の単位體積に對する

吸収率は、次の如くなる。

$$A = \frac{\frac{1}{2} \sigma a^2}{\frac{1}{2} c a^2} = \frac{\sigma}{c}$$

入射光の波長が、十分に長きものをとれば、それに依つて起る、金属板内の電流は、普通の電導電流と見做し得るが故に、上に掲げたる電導率 σ は、第二章に於ける電導率をとることが出来る。されば、113式を上式に代入して、

$$A = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \frac{e^2 l N v}{c \alpha T} \quad 125$$

を得る。吸収率 A が電導率 σ に比例することは、ルーベンス¹が残光²の實驗に於て求めた結果と、一致することを示すものである。

次に、物質内に於ける自由電子の運動に依る、放射エネルギーの發散の状況を述べる。

物質内に於て電子が等速運動にある時は、一個の電子の運動論に於けると同様に、エネルギーは發散されるものである。されど、電子が分子と衝突を起す時は、そこに運動の攪亂が喚起され、従つて、エネルギーの

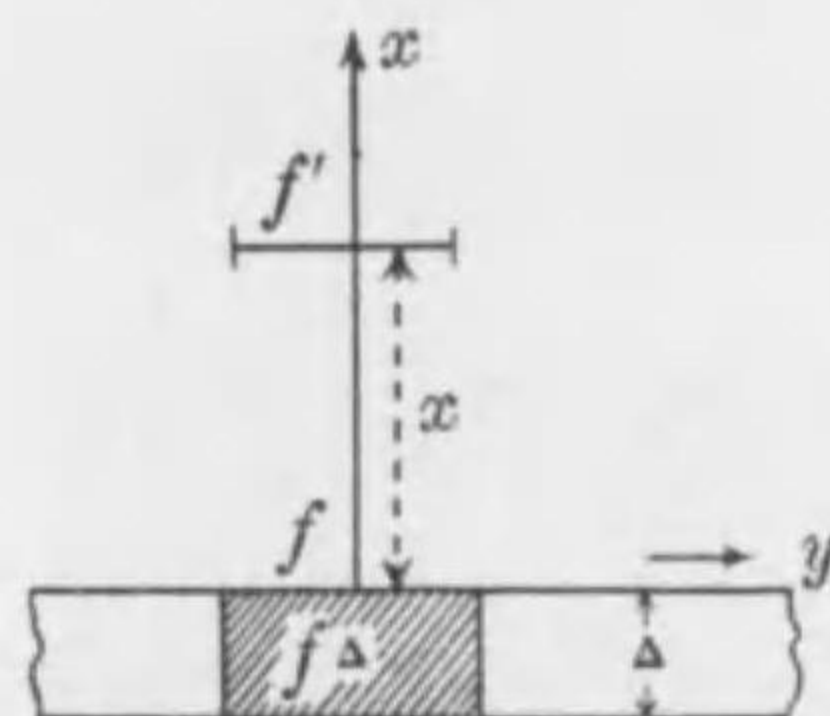
1. Rubens und Nichols, Ann. d. Phys. Bd. 60, (1897); Rubens und Hollnagel, Sitz. Preuss. Akad. Wiss. (1910).

2. Residual Ray, Reststrahlen.

發散が行はれるものと假定する

電子が分子と衝突することに依つて、發散されるエネルギーは、種々の波長の放射エネルギーから成るものとし、これをフーリエの級數に分解して、考察することが出来る。又、電子が分子に衝突して居る時間は、極めて短く、放射エネルギーの振動の週期及び、相隣れる二つの衝突間の時間に比して、極めて短かきものと見做す。されば、本論に依る結果は、當然波長が割合に長き放射エネルギーの發散に對して、適用さる可きものである。

第四十三圖



第四十三圖の如く、金属の表面積 f から、これに垂直の方向即ち x の方向に發散した放射エネルギーの内、 f から x の距離に於て、 x 軸に垂直なる f' の面積に到達する、エネルギーを求めらる。

金属内に於ける電子から、發散した放射の電場のベクトルの、距離 r に於ける値は、第一編第八章に於て求めたるものと同様にして、その y 分は、

$$E_y = \frac{e}{4\pi c^2 r} \left\{ \dot{v}_r \frac{y}{r} - \dot{v}_y \right\}_{t-\frac{r}{c}}$$

として與へられる。 f' の面に於けるものは、上式に於て、

$$r = x, \quad y = 0$$

を代入して、

$$\mathbf{E}_v = -\frac{e}{4\pi c^2 x} (\dot{\mathbf{v}}_v)_{t-\frac{x}{c}}$$

となる。夫故に、 $f\Delta$ の體積内の總ての電子に依るものは、上式を總ての電子に對して加へて、

$$\mathbf{E}_v = -\frac{1}{4\pi c^2 x} (\Sigma e \dot{\mathbf{v}}_v)_{t-\frac{x}{c}}$$

となる。

面 f' を通過するエネルギーは、

$$f' \mathbf{S}_x = c \mathbf{E}_v^2 f'$$

を以て與へられる。物質内に於ける電子の運動は、不規則なる故、上式を相當に長き時間の間に平均すれば、

$$f' \bar{\mathbf{S}}_x = c f' \bar{\mathbf{E}}_v^2 = c f' \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \mathbf{E}_v^2 dt$$

となる。 f から發する輻射エネルギーに依る電場のベクトルを、フーリエの級數を以て表はし、

$$\mathbf{E}_v = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \sin \frac{s\pi}{\theta} t$$

$$a_s = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \mathbf{E}_v \sin \frac{s\pi}{\theta} t dt$$

とする。上式の s に相當する振動數を ν とすれば、

$$2\pi\nu = \frac{s\pi}{\theta}, \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2c\theta}{s}$$

の關係を得る。 λ は、 ν に相當する波長を表はす。又上の關係から、

$$\frac{\nu_{s+1} - \nu_s}{\nu_s} = \frac{s+1-s}{s} = \frac{1}{s}$$

となる。即ち、 s の小なるものは、 ν は小にして、 λ は大となる。波長 λ のあまり大なるものは、輻射エネルギーとして現はれない。又、 s が相當に大であれば、相隣れる振動數の差は、殆んど零となる故、輻射エネルギーに含まれる振動數は、殆んど連續的となることが知れる。

フーリエの級數で表はした、 \mathbf{E}_v の値を用ひれば、 f' 面に到達する單位面積毎のエネルギーは、

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}_x &= \frac{c}{\theta} \int_0^\theta \sum_{s=1}^{\infty} a_s \sin \frac{s\pi}{\theta} t \sum_{s'=1}^{\infty} a_{s'} \sin \frac{s'\pi}{\theta} t dt \\ &= \frac{c}{2} \sum_{s=1}^{\infty} a_s^2 \end{aligned}$$

となる。但し、上の積分に於ては、 $s=s'$ のもののみが残り、 $s \neq s'$ なる項は總て零となる。

今 f' に到達する輻射エネルギーの内、振動數が ν と $\nu+d\nu$ の間にあるものを取り、各振動に相當する輻射エネルギーの強さ、即ち振幅 a_s は總て相等しきものと