

此右側ノ三分數式ノ分子ノ總和ハ次ノ如シ

$$\begin{aligned} & -(b-c)(x+b)(x+c)(a+p)(a+q) - (c-a)(x+c)(x+a)(b+p)(b+q) \\ & - (a-b)(x+a)(x+b)(c+p)(c+q) \\ = & -(b-c)\{x^2+(b+c)x+bc\}(a+p)(a+q) - (c-a)\{x^2+(c+a)x+ca\}(b+p)(b+q) \\ & - (a-b)\{x^2+(a+b)x+ab\}(c+p)(c+q) \\ = & -\{(b-c)(a+p)(a+q) + (c-a)(b+p)(b+q) + (a-b)(c+p)(c+q)\}x^2 \\ & - \{(b^2-c^2)(a+p)(a+q) + (c^2-a^2)(b+p)(b+q) + (a^2-b^2)(c+p)(c+q)\}x \\ & - \{bc(b-c)(a+p)(a+q) + ca(c-a)(b+p)(b+q) + ab(a-b)(c+p)(c+q)\} \end{aligned}$$

然ルニ

$$\begin{aligned} & (b-c)(a+p)(a+q) + (c-a)(b+p)(b+q) + (a-b)(c+p)(c+q) \\ = & (b-c)\{a^2+(p+q)a+pq\} + (c-a)\{b^2+(p+q)b+pq\} \\ & + (a-b)\{c^2+(p+q)c+pq\} \\ = & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \\ & + \{a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)\}(p+q) \\ & + \{(b-c) + (c-a) + (a-b)\}pq \\ = & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \\ = & a^2(b-c) + b^2c - ab^2 + ac^2 - bc^2 \\ = & a^2(b-c) - a(b^2-c^2) + bc(b-c) \\ = & (b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\} \\ = & (b-c)(a-b)(a-c) \\ = & -(a-b)(b-c)(c-a). \\ & (b^2-c^2)(a+p)(a+q) + (c^2-a^2)(b+p)(b+q) + (a^2-b^2)(c+p)(c+q) \\ = & a^2(b^2-c^2) + b^2(c^2-a^2) + c^2(a^2-b^2) \\ & + \{a(b^2-c^2) + b(c^2-a^2) + c(a^2-b^2)\}(p+q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \{b^2-c^2 + (c^2-a^2) + (a^2-b^2)\}pq \\ = & \{a(b^2-c^2) + b(c^2-a^2) + c(a^2-b^2)\}(p+q) \\ = & \{a(b^2-c^2) + bc^2 - a^2b + ca^2 - b^2c\}(p+q) \\ = & \{a(b^2-c^2) - a^2(b-c) - bc(b-c)\}(p+q) \\ = & (b-c)\{a(b+c) - a^2 - bc\}(p+q) \\ = & (b-c)(c-a)(a-b)(p+q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & bc(b-c)(a+p)(a+q) + ca(c-a)(b+p)(b+q) + ab(a-b)(c+p)(c+q) \\ = & bc(b-c)\{a^2+(p+q)a+pq\} + ca(c-a)\{b^2+(p+q)b+pq\} \\ & + ab(a-b)\{c^2+(p+q)c+pq\} \\ = & abc\{a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)\} \\ & + abc\{(b-c) + (c-a) + (a-b)\}(p+q) \\ & + \{bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)\}pq \\ = & \{bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)\}pq \\ = & \{bc(b-c) + c^2a - ca^2 + a^2b - ab^2\}pq \\ = & \{bc(b-c) - a(b^2-c^2) + a^2(b-c)\}pq \\ = & (b-c)\{bc-a(b+c) + a^2\}pq \\ = & (b-c)(c-a)(b-a)pq \\ = & -(b-c)(c-a)(a-b)pq \end{aligned}$$

是ニ由テ分子ノ總和ハ

$$(a-b)(b-c)(c-a)\{x^2-(p+q)x+pq\}$$

即チ

$$(a-b)(b-c)(c-a)(x-p)(x-q)$$

ナリ故ニ

$$\frac{(a+p)(a+q)}{(a-b)(a-c)(x+a)} + \frac{b+p)(b+q)}{(b-c)(b-a)(x+b)} + \frac{(c+p)(c+q)}{(c-a)(c-b)(x+c)}$$



$$= \frac{(a-b)(b-c)(c-a)(x-p)(x-q)}{(a-b)(b-c)(c-a)(x+a)(x+b)(x+c)}$$

$$= \frac{(x-p)(x-q)}{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

乃テ所要ノ答式ハ  $\frac{(x-p)(x-q)}{(x+a)(x+b)(x+c)}$  ナリ。

(20) 式ノ左側ノ三分數式ノ分母ノ最低公倍式ハ明カニ  
(1+bc)(1+ca)(1+ab)

ナリ而シテ

$$(1+bc)(1+ca)(1+ab) \div (1+bc) = (1+ca)(1+ab),$$

$$(1+bc)(1+ca)(1+ab) \div (1+ca) = (1+bc)(1+ab),$$

$$(1+bc)(1+ca)(1+ab) \div (1+ab) = (1+bc)(1+ca)$$

故ニ

$$\frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} + \frac{a-b}{1+ab}$$

$$= \frac{(b-c)(1+ca)(1+ab)}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)} + \frac{(c-a)(1+bc)(1+ab)}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)} + \frac{(a-b)(1+bc)(1+ca)}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)}$$

此式ノ右側ノ分數式ノ分子ノ總和ハ

$$(b-c)(1+ca)(1+ab) + (c-a)(1+bc)(1+ab) + (a-b)(1+bc)(1+ca)$$

$$= (b-c)\{1+c(b+c)+a^2bc\} + (c-a)\{1+b(c+a)+ab^2c\}$$

$$+ (a-b)\{1+c(a+b)+c^2ab\}$$

$$= (b-c) + (c-a) + (a-b) + a(b^2-c^2) + b(c^2-a^2) + c(a^2-b^2)$$

$$+ abc\{a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)\}$$

$$= a(b^2-c^2) + b(c^2-a^2) + c(a^2-b^2)$$

$$= (b-c)(c-a)(a-b)$$

仍テ

$$\frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} + \frac{a-b}{1+ab} = \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)}$$

是ヲ証トス。

(21) 初メノ貳項ヲ加フルルニ次ノ如シ

$$1 + \frac{a_1}{x-a_1} = \frac{x-a_1+a_1}{x-a_1} = \frac{x}{x-a_1}$$

是ニ於テ此和ニ第三項ヲ加フルルニ

$$\frac{x}{x-a_1} + \frac{a_2x}{(x-a_1)(x-a_2)} = \frac{x}{x-a_1} \left\{ 1 + \frac{a_2}{x-a_2} \right\}$$

$$= \frac{x^2}{(x-a_1)(x-a_2)}$$

復テ此和ニ第四項ヲ加フルルニ

$$\frac{x^2}{(x-a_1)(x-a_2)} + \frac{a_3x^2}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)} = \frac{x^2}{(x-a_1)(x-a_2)} \left\{ 1 + \frac{a_3}{x-a_3} \right\}$$

$$= \frac{x^3}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}$$

次ニ此和ニ第五項ヲ加フルルニ

$$\frac{x^3}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)} + \frac{a_4x^3}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}$$

$$= \frac{x^3}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)} \left\{ 1 + \frac{a_4}{x-a_4} \right\}$$

$$= \frac{x^4}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}$$

是ヲ此ノ如クナルニヨリ壹般ニ

$$1 + \frac{a_1}{x-a_1} + \frac{a_2x}{(x-a_1)(x-a_2)} + \frac{a_3x^2}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)} + \dots$$

$$\dots + \frac{a_n x^{n-1}}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)} = \frac{x^n}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}$$

ナリ。



## 分數式乗除法

84. 分數式ノ乘法 貳ツノ代數式  $\frac{a}{b}$  及  $\frac{c}{d}$  ナ相乘スルキハ其積ハ如何ナルカヲ知ラント欲シ假リニ其積ヲ  $x$  ト命スルキハ

$$x = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$$

ナリ今此式ノ左右兩側ニ  $b$  及  $d$  ナ乘スルキハ

$$\begin{aligned} x \times b \times d &= \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times b \times d \\ &= \frac{a}{b} \times b \times \frac{c}{d} \times d \end{aligned} \quad (1)$$

トナルベシ然ルニ分數式ノ性質ニヨリ (78)

$$\frac{a}{b} \times b = a, \quad \frac{c}{d} \times d = c$$

ナリ故ニ(1)式ノ次ノ如クナルベシ

$$x \times b \times d = a \times c$$

是ニ於テ此式ノ兩側ヲ  $b \times d$  ニテ除スルキハ

$$x = \frac{a \times c}{b \times d}$$

ヲ得ベシ故ニ

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

ナリ

次ニ  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$  三式ノ積ヲ算セシニハ先ツ其貳式ノ積ヲ算出シ然ル後チ其積ニ第三式ヲ乘スルベ可ナリ今第壹第貳分數式ノ積ヲ算出スルキハ

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

トナル是ニ於テ第三分數式ヲ乘スルキハ

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{a \times c}{b \times d} \times \frac{e}{f}$$

然ルニ此式ノ右側ノ貳分數式ノ積ハ上陳ノ理ニヨリテ

$$\frac{(a \times c) \times e}{(b \times d) \times f} \text{ 即チ } \frac{a \times c \times e}{b \times d \times f}$$

ニ等シ仍テ

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{a \times c \times e}{b \times d \times f}$$

同理ニヨリ多クノ分數式ノ積ヲ算出シ得ベシ是ニ由テ次ノ算法アリ

算法 諸分數式ノ積ハ其諸分數式ノ分子ノ積ヲ分子トシ分母ノ積ヲ分母トセル壹分數式ナリ

注意 此算法ニ從ヒ算出セル分子分母ノ間ニ公因子アルキハ其公因子ヲ省キ去リテ分數式ヲ最低項分數式ニ化スベシ

(85) 分數式ノ除法 貳ツノ分數式ヲ  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  トシ前式ヲ後式ニテ除セル商ヲ  $x$  ト命スルキハ

$$x = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$$

倍テ商式ニ法式ヲ乘スルキハ實式ニ等シキガ故ニ

$$x \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

是ニ於テ左右兩側ニ  $b \times d$  ナ乘スルキハ

$$x \times \frac{c}{d} \times b \times d = \frac{a}{b} \times b \times d$$



$$\text{即チ } x \times b \times \frac{c}{d} \times d = \frac{a}{b} \times b \times d \quad 1)$$

然ルニ分數式ノ性質ニヨリテ (78)

$$\frac{c}{d} \times d = c, \quad \frac{a}{b} \times b = a$$

ナリ故ニ(1)式ハ

$$x \times b \times c = a \times d$$

トナル是ニ於テ此式ノ左右兩側ヲ  $b \times c$  ニテ除スルキハ

$$x = \frac{a \times d}{b \times c}$$

$$\text{故ニ } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

是ニ由テ分數式除算ノ法次ノ如シ

算法 壹分數式ヲ他ノ壹分數式ニテ除セル兩ハ實式ノ分子ト  
法式ノ分母トノ積ヲ分子トシ實式ノ分母ト法式ノ分子トノ積ヲ  
分母トセル壹分數式ナリ

注意壹 商式トシテ上ノ如ク算出セル分數式ノ分子分母間ニ  
公因子アルキハ其公因子ハ固ヨリ省キ去ルベキナリ。

注意貳 商式ハ實式ニ法式ノ分子分母ヲ互換シテ生セル壹分  
數式ヲ乘セルモノニ等シ

例ヘキ  $\frac{a}{b}$  ナ  $\frac{c}{d}$  ニテ除スルニハ  $\frac{c}{d}$  ノ分子分母ヲ互換シテ  
 $\frac{d}{c}$  トナルヲ  $\frac{a}{b}$  ニ乘セハ可ナリ其故ハ  $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$  ナ乘スルトキハ  
 $\frac{a \times d}{b \times c}$  トナリテ恰モ  $\frac{a}{b}$  ナ  $\frac{c}{d}$  ニテ除セル結果ノ式ト同シケルベ  
ナリ。

86. 分數式ノ乘算及ビ除算ノ例ヲ下ニ掲ク

$$\text{例壹 } \frac{x^3+a^3}{x^2-a^2} = \frac{x-a}{(x+a)^2} \text{ 乘セヨ。}$$

$$\begin{aligned} \text{算式 } \frac{x^3+a^3}{x^2-a^2} \times \frac{x-a}{(x+a)^2} &= \frac{(x^3+a^3)(x-a)}{(x^2-a^2)(x+a)^2} \\ &= \frac{(x^2-ax+a^2)(x+a)(x-a)}{(x-a)(x+a)^3} \\ &= \frac{x^2-ax+a^2}{(x+a)^2} \end{aligned}$$

$$\text{故ニ所要ノ答式ハ } \frac{x^2-ax+a^2}{(x+a)^2} \text{ ナリ。}$$

$$\text{例貳 } x+5+\frac{6}{x} \text{ ナ } 1+\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2} \text{ ニテ除スベシ。}$$

$$\text{算式 } x+5+\frac{6}{x} = \frac{x^2+5x+6}{x^1},$$

$$1+\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2} = \frac{x^2+6x+8}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{故ニ } \left(x+5+\frac{6}{x}\right) \div \left(1+\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}\right) &= \frac{x^2+5x+6}{x} \div \frac{x^2+6x+8}{x^2} \\ &= \frac{x^2+5x+6}{x} \times \frac{x^2}{x^2+6x+8} \\ &= \frac{(x+2)(x+3)}{x} \times \frac{x^2}{(x+2)(x+4)} \\ &= \frac{x(x+3)}{x+4} \end{aligned}$$

$$\text{仍テ所要ノ答式ハ } \frac{x(x+3)}{x+4} \text{ ナリ。}$$



例三  $\frac{\frac{a}{x^2} + \frac{x}{a^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{ax} + \frac{1}{x^2}}$  を最簡式に化スベシ。

算式  $\frac{a}{x^2} + \frac{x}{a^2} = \frac{a^3 + x^3}{a^2x^2}$

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{ax} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - ax + a^2}{a^2x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{故に} \frac{\frac{a}{x^2} + \frac{x}{a^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{ax} + \frac{1}{x^2}} &= \frac{a^3 + x^3}{a^2x^2} \div \frac{x^2 - ax + a^2}{a^2x^2} \\ &= \frac{(a+x)(a^2 - ax + a^2)}{a^2x^2} \times \frac{a^2x^2}{a^2 - ax + a^2} \\ &= a+x \end{aligned}$$

仍テ所要ノ答式ハ  $a+x$  ナリ。

運算ノ解  $\frac{\frac{a}{x^2} + \frac{x}{a^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{ax} + \frac{1}{x^2}} \rightarrow \frac{a}{x^2} + \frac{x}{a^2}$  ナ  $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{ax} + \frac{1}{x^2}$  ニテ

除セルニ等シ故ニ此両式ヲ別々ニ單項式ニ化シ然ル後チ除算ヲ施シ答式ヲ得ル上ノ如シ

注意 複雑セル分數式ヲ最簡式ニ化スルニ當リ其分子及ビ分母ハ上ノ運算ニ示セルガ如ク別々ニ算出シ然ル後チ式ノ如ク除算ヲ施スラ善シトス。

## 問 題

次ノ諸式ヲ最簡ニスベシ

(1)  $\left(\frac{x}{x-2} + \frac{5}{x-8}\right) \times \left(\frac{x-3}{3x-8} - \frac{2}{x+2}\right)$  (2)  $\frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$

(3)  $\frac{2}{1-x^2} + \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)$  (4)  $\left\{1 + \frac{2b^2}{a(a-3b)}\right\} \left\{1 + \frac{b}{2b-a}\right\}$

(5)  $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) \div \left(1 - \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\right)$  (6)  $\frac{1}{1 - \frac{1+x}{x - \frac{1}{x}}}$

(7)  $\frac{\frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x}}{\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x}}$  (8)  $\frac{\frac{a^3-b^3}{a-b} - \frac{a^3+b^3}{a+b}}{4ab}$

(9)  $\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \div \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right)$  (10)  $\frac{\frac{m^2+n^2}{n} - m}{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}} \times \frac{m^2-n^2}{m^3+n^3}$

(11)  $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \left\{1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right\}$

(12)  $\frac{3abc}{bc+ca+ab} - \frac{\frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-1}{c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$



## 問題解答

(1) 兩括弧内ノ式ヲ別々ニ單項式ニ化シ然ル後ヲ乘算ヲ施ス  
 其ノ次ノ如シ

$$\frac{x}{x-2} + \frac{5}{x-8} = \frac{x(x-8)+5(x-2)}{(x-2)(x-8)} = \frac{x^2-3x-10}{(x-2)(x-8)}$$

$$\frac{x-3}{3x-8} - \frac{2}{x+2} = \frac{(x-3)(x+2)-2(3x-8)}{(3x-8)(x+2)} = \frac{x^2-7x+10}{(3x-8)(x+2)}$$

$$\begin{aligned} \text{故ニ} & \left( \frac{x}{x-2} + \frac{5}{x-8} \right) \times \left( \frac{x-3}{3x-8} - \frac{2}{x+2} \right) = \frac{x^2-3x-10}{(x-2)(x-8)} \times \frac{x^2-7x+10}{(3x-8)(x+2)} \\ & = \frac{(x+2)(x-5)}{(x-2)(x-8)} \times \frac{(x-2)(x-5)}{(3x-8)(x+2)} \\ & = \frac{(x-5)^2}{(x-8)(3x-8)} \end{aligned}$$

仍テ所要ノ答式ハ  $\frac{(x-5)^2}{(x-8)(3x-8)}$  ナリ。

$$(2) \quad x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}, \quad 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x^2-1}{x} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x} \times \frac{x}{x+1}$$

仍テ所要ノ答式ハ  $x-1$  ナリ。

$$(3) \quad \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)-(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{2}{1-x^2} \div \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right) = \frac{2}{1-x^2} \div \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^2} \times \frac{1-x^2}{2x} = \frac{1}{x}$$

仍テ所要ノ答式ハ  $\frac{1}{x}$  ナリ。

$$(4) \quad 1 + \frac{2b^2}{a(a-3b)} = \frac{a(a-3b) + 2b^2}{a(a-3b)} = \frac{a^2-3ab+b^2}{a(a-3b)} = \frac{(a-b)(a-2b)}{a(a-3b)}$$

$$1 + \frac{b}{2b-a} = \frac{2b-a+b}{2b-a} = \frac{3b-a}{2b-a} = \frac{a-3b}{a-2b}$$

$$\begin{aligned} \text{故ニ} & \left\{ 1 + \frac{2b^2}{a(a-3b)} \right\} \left\{ 1 + \frac{b}{2b-a} \right\} = \frac{(a-b)(a-2b)}{a(a-3b)} \times \frac{a-3b}{a-2b} \\ & = \frac{a-b}{a} \end{aligned}$$

仍テ所要ノ答式ハ  $\frac{a-b}{a}$  ナリ。

運算ノ解  $\frac{3b-a}{2b-a}$  ナル分數式ノ分子分母ノ記號ヲ悉ク變シ以テ  
 $\frac{a-3b}{a-2b}$  トナセヨ他ノ運算ハ輕易ナルヲ以テ別ニ贅言ヲ要セザル  
 ベシ

$$\begin{aligned} (5) \quad \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} &= \frac{(a+b)^2}{(a-b)(a+b)} - \frac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)} \\ &= \frac{(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)}{(a-b)(a+b)} \\ &= \frac{4ab}{(a-b)(a+b)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} &= \frac{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}{(a+b)^2} = \frac{a^2+2ab+b^2-a^2-b^2}{(a+b)^2} \\ &= \frac{2ab}{(a+b)^2} \end{aligned}$$

$$\text{故ニ} \quad \left( \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right) \div \left( 1 - \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} \right) = \frac{4ab}{(a-b)(a+b)} \div \frac{2ab}{(a+b)^2}$$



$$= \frac{4ab}{(a-b)(a+b)} \times \frac{(a+b)^2}{2ab}$$

$$= \frac{2(a+b)}{a-b}$$

仍テ所要ノ答式ハ  $\frac{2(a+b)}{a-b}$  ナリ。

$$x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}$$

$$\text{故} = \frac{1+x}{x - \frac{1}{x}} = \frac{1+x}{\frac{x^2-1}{x}} = (1+x) \div \frac{x^2-1}{x} = (1+x) \times \frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{x-1}$$

$$\text{由テ} \quad 1 - \frac{1+x}{x - \frac{1}{x}} = 1 - \frac{x}{x-1} = \frac{x-1-x}{x-1} = \frac{-1}{x-1}$$

$$\text{故} = \frac{1}{1 - \frac{1+x}{x - \frac{1}{x}}} = \frac{1}{-\frac{1}{x-1}} = 1 \div \frac{-1}{x-1} = -(x-1)$$

仍テ所要ノ答式ハ  $-(x-1)$  ナリ。

$$(7) \quad \frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x} = \frac{(a+x)^2}{(a-x)(a+x)} - \frac{(a-x)^2}{(a-x)(a+x)}$$

$$= \frac{(a^2+2ax+x^2) - (a^2-2ax+x^2)}{(a-x)(a+x)}$$

$$= \frac{4ax}{(a-x)(a+x)}$$

$$\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x} = \frac{(a+x)^2}{(a-x)(a+x)} + \frac{(a-x)^2}{(a-x)(a+x)}$$

$$= \frac{a^2+2ax+x^2+a^2-2ax+x^2}{(a-x)(a+x)}$$

$$= \frac{2(a^2+x^2)}{(a-x)(a+x)}$$

$$\text{故} = \frac{\frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x}}{\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x}} = \frac{4ax}{(a-x)(a+x)} \div \frac{2(a^2+x^2)}{(a-x)(a+x)}$$

$$= \frac{4ax}{(a-x)(a+x)} \times \frac{(a-x)(a+x)}{2(a^2+x^2)}$$

$$= \frac{2ax}{a^2+x^2}$$

仍テ所要ノ答式ハ  $\frac{2ax}{a^2+x^2}$  ナリ。

$$(8) \quad \frac{a^3-b^3}{a-b} - \frac{a^3+b^3}{a+b} = (a^2+ab+b^2) - (a^2-ab+b^2) = 2ab,$$

$$\text{故} = \frac{\frac{a^3-b^3}{a-b} - \frac{a^3+b^3}{a+b}}{\frac{a^3-b^3}{a-b} + \frac{a^3+b^3}{a+b}} = \frac{2ab}{4ab} = 2ab \times \frac{a^2-b^2}{4ab} = \frac{a^2-b^2}{2}$$

仍テ所要ノ答式ハ  $\frac{a^2-b^2}{2}$  ナリ。

$$(9) \quad \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} - \frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{(x^4+2x^2y^2+y^4) - (x^4-2x^2y^2+y^4)}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{4x^2y^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}$$

$$\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x+y)^2}{(x-y)(x+y)} - \frac{(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}$$



$$= \frac{(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2)}{(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{4xy}{(x-y)(x+y)}$$

$$\text{故} = \left( \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right) \div \left( \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right)$$

$$= \frac{4x^2y^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} \div \frac{4xy}{(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{4x^2y^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} \times \frac{(x-y)(x+y)}{4xy}$$

$$= \frac{xy}{x^2+y^2}$$

仍ヲ所要ノ答式ハ  $\frac{xy}{x^2+y^2}$  ナリ。

$$(10) \quad \frac{m^2+n^2}{n} - m = \frac{m^2-mn+n^2}{n}, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{m-n}{mn}$$

$$\text{故} = \frac{\frac{m^2+n^2}{n} - m}{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}} = \frac{m^2-mn+n^2}{n} \div \frac{m-n}{mn} = \frac{m^2-mn+n^2}{n} \times \frac{mn}{m-n}$$

$$= \frac{m(m^2-mn+n^2)}{m-n}$$

$$\text{是ニ由テ} \quad \frac{\frac{m^2+n^2}{n} - m}{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}} \times \frac{m^2+n^2}{m^2+n^2} = \frac{m(m^2-mn+n^2)}{m-n} \times \frac{(m-n)(m+n)}{(m+n)(m^2-mn+n^2)}$$

=m

仍ヲ所要ノ答式ハ m ナリ。

$$(11) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b+c} = \frac{b+c}{a(b+c)} + \frac{a}{a(b+c)}$$

$$= \frac{b+c+a}{a(b+c)}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c} = \frac{b+c}{a(b+c)} - \frac{a}{a(b+c)}$$

$$= \frac{b+c-a}{a(b+c)}$$

$$1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$\text{故} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \left\{ 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \right\}$$

$$= \frac{b+c+a}{a(b+c)} \times \frac{a(b+c)}{b+c-a} \times \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{2bc}$$

仍ヲ所要ノ答式ハ  $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$  ナリ。

$$(12) \quad \frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-1}{c} = \frac{bc(a-1)}{abc} + \frac{ca(b-1)}{abc} + \frac{ab(c-1)}{abc}$$

$$= \frac{bc(a-1) + ca(b-1) + ab(c-1)}{abc}$$



$$= \frac{(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2)}{(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{4xy}{(x-y)(x+y)}$$

$$\text{故} = \left( \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right) \div \left( \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right)$$

$$= \frac{4x^2y^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} \div \frac{4xy}{(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{4x^2y^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} \times \frac{(x-y)(x+y)}{4xy}$$

$$= \frac{xy}{x^2+y^2}$$

仍テ所要ノ答式ハ  $\frac{xy}{x^2+y^2}$  ナリ。

$$(10) \quad \frac{m^2+n^2}{n} - m = \frac{m^2-mn+n^2}{n}, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{m-n}{mn}$$

$$\begin{aligned} \text{故} = \frac{\frac{m^2+n^2}{n} - m}{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}} &= \frac{m^2-mn+n^2}{n} \div \frac{m-n}{mn} = \frac{m^2-mn+n^2}{n} \times \frac{mn}{m-n} \\ &= \frac{n(m^2-mn+n^2)}{m-n} \end{aligned}$$

$$\text{是ニ由テ} \quad \frac{\frac{m^2+n^2}{n} - m}{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}} \times \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} = \frac{m(m^2-mn+n^2)}{m-n} \times \frac{(m-n)(m+n)}{(m+n)(m^2-mn+n^2)}$$

= m

仍テ所要ノ答式ハ m ナリ。

$$(11) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b+c} = \frac{b+c}{a(b+c)} + \frac{a}{a(b+c)}$$

$$= \frac{b+c+a}{a(b+c)}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c} = \frac{b+c}{a(b+c)} - \frac{a}{a(b+c)}$$

$$= \frac{b+c-a}{a(b+c)}$$

$$1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$\text{故} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \left\{ 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \right\}$$

$$= \frac{b+c+a}{a(b+c)} \times \frac{a(b+c)}{b+c-a} \times \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{2bc}$$

仍テ所要ノ答式ハ  $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$  ナリ。

$$(12) \quad \frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-1}{c} = \frac{bc(a-1)}{abc} + \frac{ca(b-1)}{abc} + \frac{ab(c-1)}{abc}$$

$$= \frac{bc(a-1) + ca(b-1) + ab(c-1)}{abc}$$



$$\begin{aligned} &= \frac{3abc - (bc + ca + ab)}{abc} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{bc}{abc} + \frac{ca}{abc} + \frac{ab}{abc} \\ &= \frac{bc + ca + ab}{abc} \\ \text{故ニ} \quad \frac{\frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-1}{c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} &= \frac{3abc - (bc + ca + ab)}{abc} \times \frac{abc}{bc + ca + ab} \\ &= \frac{3abc - (bc + ca + ab)}{abc} \times \frac{abc}{bc + ca + ab} \\ &= \frac{3abc - (bc + ca + ab)}{bc + ca + ab} \\ &= \frac{3abc}{bc + ca + ab} - 1 \end{aligned}$$

是ニ由テ

$$\begin{aligned} \frac{3abc}{bc + ca + ab} - \frac{\frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-1}{c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} &= \frac{3abc}{bc + ca + ab} - \left( \frac{3abc}{bc + ca + ab} - 1 \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

仍テ所要ノ答式ハ1ナリ。

## 第五編

### 壹次方程式

87. 方程式 貳ツノ代數式ノ相ヒ等シキヲ表示セル式ヲ方程式ト稱ス而シテ其貳ツノ代數式ヲ何レモ方程式ノ側又ハ節ト稱シ相等號ノ左ニアルモノヲ方程式ノ左側又ハ左節トイヒ右ニアルモノヲ右側又ハ右節トイフ

例ハズ

$$3x + 4 = 19 - 2x$$

ハ貳ツノ代數式  $3x + 4$ ,  $19 - 2x$  ノ相ヒ等シキヲ表示セル式ナルガ故ニ方程式ナリ而シテ  $3x + 4$  ハ其左節ニシテ  $19 - 2x$  ハ其右節ナリ。

88. 恒同式 貳ツノ代數式全ク相ヒ同シク從テ其兩式ノ含メル各字母ニ代フルニ如何ナル數ヲ以テスルモ其兩式ノ價全ク同シキモノヲ恒同式トイフ

例ハズ

$$a + 2a = 3a,$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2,$$

$$(2a+3b-4c)b = 2ab + 3b^2 - 4bc$$

ノ諸式ニ於テハ其相等號ノ左右兩側ニアル式ハ其形ヲ見ルハ相異ナリト雖ハ凡單ニ同壹式ヲ書キ代ヘタルモノニ過ラズ故ニ  $a, b, c$  諸字母ニ代フルニ如何ナル數價ヲ以テスルモ左右兩側ノ數價ハ恒ニ相ヒ同シカラザルヲ得ズ故ニ此等ノ諸式ハ何



レモ恒同式ナリ

恒同式モ亦々貳ツノ代數式ノ相ヒ等シキコトヲ表示セル式ナルガ故ニ固ヨリ方程式ニ相違ナシト雖ヘモ

$$5x+3=13$$

ノ如キ方程式トハ自ラ大ニ異ナル所アリ蓋シ恒同式ニ於テハ其式ノ含メル字母ニ代フルニ如何ナル數ヲ以テスルモ其式ノ兩節ハ恒ニ等シクナリテ貳式相等ノ性質ヲ失ハザルモノナレモ上ニ掲ケタル方程式ニ於テハ然ラズ $x$ ニ代フルニ2ヲ以テスルモ兩節ノ數ハ共ニ18トナリテ相ヒ等シト雖ヘモ $x$ ニ代フルニ其他ノ數ヲ以テスルモ左右兩節ノ數相等シカラザルベシ此編ハ專ラ此種ノ方程式ノミヲ論ズ

89. 方程式ノ含メル未知量ヲ表ハスニハ西洋字母ノ終リノ $x, y, z$ 等ヲ以テシ已知量ヲ表ハスニハ始メノ $a, b, c, d$ 等ヲ以テス

方程式ガ未知量ト未知量トノ乘積ヲ有セザルモ是ヲ壹次方程式ト稱ス而シテ壹次方程式ガ唯壹個ノ未知量ノミヲ有スルモ是ヲ壹元壹次方程式トイヒ未知量貳個又ハ三個ヲ有スルモ是ヲ夫々貳元壹次方程式又ハ三元壹次方程式トイフ逐テ此ノ如ク未知量ノ數ニ從ヒ方程式ヲ名稱ス

例ヘバ

$$3x+4=19-2x,$$

$$(a+b)x-c=3ax+2c$$

ハ何レモ唯壹個ノ未知量ノミヲ有シ且ツ未知量ト未知量トノ乘積 $x^2, x^3$ 等ヲ有セザルニヨリ壹元壹次方程式ナリ

$$5x^2+6x-32=0,$$

$$3x^2+9=20x-23$$

ノ兩方程式ハ何レモ未知量ト未知量トノ積 $x^2$ ヲ有スルニヨリ壹次方程式ニアラズ

90. 與ヘラレタル方程式ヨリ未知量ヲ算出スルヲ其方程式ヲ解クト稱ス方程式ヲ解クニハ次ノ自ラ明カナル定則ヲ用ユ.

第壹 相ヒ等シキ量ニ同シ量又ハ相ヒ等シキ量ヲ加フルモ其和ハ相ヒ等シ

例ヘバ左ニ5アリ右ニモ5アルモ左右ノ兩數ハ相等シカルベシ今此左右ノ兩數ニ同壹數2ヲ加フルモ左右兩數何レモ7トナリテ其和ハ相ヒ等シカルベシ同理ニヨリ壹般ニ $a$ ガ $b$ ニ等シク $c$ ガ $d$ ニ等シキモ $a, c$ ノ和ハ $b, d$ ノ和ニ等シカルベシ今此事實ヲ式ニテ示スルハ次ノ如シ

$$a=b,$$

$$c=d$$

$$\text{ナルモ} \quad a+c=b+d$$

ナリ

第貳 相ヒ等シキ量ヨリ同シ量又ハ相ヒ等シキ量ヲ減スルモ其差ハ相ヒ等シ

例ヘバ左ニ6アリ右ニモ6アルモ此左右ノ兩數ヨリ何レモ2ヲ減スルモ其差ハ兩ツナガラ4トナリテ相ヒ等シカルベシ同理ニヨリ壹般ニ $a$ ガ $b$ ニ等シク $c$ ガ $d$ ニ等シキモ $a, c$ ノ差ハ $b, d$ ノ差ニ等シカルベシ今此事實ヲ式ニテ示スルハ次ノ如シ

$$a=b,$$



$$c=d$$

ナルキハ  $a-c=b-d$

ナリ

第三 相ヒ等シキ量ニ同シ量又ハ相ヒ等シキ量ヲ乗スルキハ其積ハ相ヒ等シ

例ハ左ニ6アリ右ニ6アルキ此左右両數ニ何レモ2ヲ乗スルキハ其積ハ何レモ12トナリテ互ニ等シカルベシ同理ニヨリ壹般ニ $a$ ガ $b$ ニ等シク $c$ ガ $d$ ニ等シキキハ $a, c$ ノ乘積ハ $b, d$ ノ乘積ニ等シ之ヲ式ニテ示スキハ次ノ如シ

$$a=b,$$

$$c=d$$

ナルキハ  $ac=bd$

ナリ

第四 相ヒ等シキ量ヲ同シ量又ハ相ヒ等シキ量ニテ除スルキハ其商ハ相ヒ等シ

例ハ左ニ6アリ右ニ6アルキ此左右両數ヲ何レモ2ニテ除スルキハ其商ハ何レモ3トナリテ互ニ等シカルベシ同理ニヨリ壹般ニ

$$a=b,$$

$$c=d$$

ナルキハ  $a \div c = b \div d$

ナリ

注意 上ノ四定則ヲ說明スルニ正量ノ數ヲ以テ例示セリ然レモ上ノ諸定則ハ正量質量ニ拘ハラズ壹般ニ通ズルヲ明ラカナリ。

第四定則ニ於テ法トスベキ數ハ0ニアラザルモノト知ルベシ蓋シ $5 \times 0 = 12 \times 0$ ハ正當ノ式ナレモ此式ノ兩節ヲ0ニテ除セルモノト假定シ其兩節ヨリ0ヲ省キ去ルキハ $5=12$ トナリテ其結果ノ不合理タルヲ壹目瞭然ナレバナリ。

91. 是ヨリ貳三ノ例ニ就キ壹元壹次方程式ノ解キ方ヲ詳カニ示スベシ

例壹  $2x+4=10$  ヨリ $x$ ヲ算出スベシ。

題セル方程式ノ兩節ヨリ4ヲ減スルキハ第貳定則ニヨリ

$$2x+4-4=10-4$$

即チ  $2x=10-4$

故ニ  $2x=6$

是ニ於テ兩節ヲ2ニテ除スルキハ第四定則ニヨリ

$$x=3$$

トナル仍テ所要ノ答式ハ8ナリ。

例貳  $3x+4=19-2x$  ヲ解ケ。

左右兩節ニ $2x$ ヲ加フルキハ第壹定則ニヨリ

$$3x+2x+4=19-2x+2x$$

即チ  $3x+2x+4=19$

是ニ於テ左右兩節ヨリ4ヲ減スルキハ第貳定則ニヨリ

$$3x+2x+4-4=19-4$$

即チ  $3x+2x=19-4$

故ニ  $5x=15$

此式ノ左右兩節ヲ5ニテ除スルキハ第四定則ニヨリ

$$x=3$$



トナル仍テ所要ノ答數ハ3ナリ。

例三  $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} = 16 - \frac{x+3}{4}$  ナ解ケ。

左右兩節ニ分母2, 3, 4ノ最低公倍數12ヲ乘スルルキハ第三定則ニヨリ

$$12 \times \frac{x+1}{2} + 12 \times \frac{x+2}{3} = 12 \times 16 - 12 \times \frac{x+3}{4}$$

即チ  $6(x+1) + 4(x+2) = 192 - 3(x+3)$

括弧内ノ式ニ其各係數ヲ乘シテ括弧ヲ去ルルキハ

$$6x+6+4x+8=192-3x-9$$

兩節ニ於テ同類項ヲ集ムルルキハ

$$10x+14=183-3x$$

是ニ於テ3xヲ兩節ニ加フルルキハ第一定則ニヨリ

$$10x+3x+14=183-3x+3x$$

即チ  $10x+3x+14=183$

此兩節ヨリ14ヲ減スルルキハ第二定則ニヨリ

$$10x+3x+14-14=183-14$$

即チ  $10x+3x=183-14$

故ニ  $13x=169$

是ニ於テ兩節ヲ13ニテ除スルルキハ第四定則ニヨリ

$$x=13$$

仍テ所要ノ答式ハ13ナリ。

92. 前款ノ三例ノ運算ヲ觀察スルルキハ次ノ如キ結果アルヲ發見スベシ

第壹 相等號ノ壹方ニアル壹量ヲ他ノ壹方ニ移スルルキハ其記號ヲ變ズ

例ハバ第一例ノ方程式

$$2x+4=10$$

ニ於テ左節ニアル+4ヲ右節ニ移シテ

$$2x=10-4$$

ヲ得タリ即チ左節ノ+4ハ右節ニ移リテ-4トナレリ。

第二例ノ方程式

$$3x+4=19-2x$$

ニ於テハ右節ノ-2xヲ左節ニ移シテ

$$3x+2x+4=19$$

トナリ次ニ左節ノ+4ヲ右節ニ送リテ

$$3x+2x=19-4$$

トナレリ即チ右節ノ-2xハ左節ニ移リテ+2xトナリ左節ノ+4ハ右節ニ移リテ-4トナレリ。

第貳 方程式ガ分數式ヲ含ムルルキハ其分數式ノ分母ノ最低公倍數又ハ最低公倍式ヲ其方程式ノ兩節ニ乘スルルキハ兩節共ニ整數式ナル方程式ヲ得ベシ

例ハバ第三例ニ於テ其方程式ノ有セル諸分數式ノ分母ノ最低公倍數12ヲ之ニ乘シ以テ兩節ガ整數式ヲナセル方程式

$$6(x+1) + 4(x+2) = 192 - 3(x+3)$$

ヲ得タリ

方程式ガ分數式ヲ有スルルキハ其諸分數式ノ分母ノ最低公倍數又ハ最低公倍式ヲ之ニ乘スルルキハ其方程式ハ整數式ノミヲ有ス



ル方程式トナルトハ最低公倍式ノ性質ニヨリ極メテ明カナルベシ。

93. 上ノ貳定則ニヨリ容易ニ壹元壹次方程式ヲ解クヲ得  
ベシ其法次ノ如シ

算法 方程式ガ分數式ヲ有セルハ其諸分數式ノ分母ノ最低  
公倍數又ハ最低公倍式ヲ全式ニ乘シ以テ分數式ヲ有セザル方程  
式ヲ作り然ル後其方程式ノ項ヲ移シ未知量ヲ左節ニ集メ已知  
量ヲ右節ニ集メ是ニ於テ其兩節ヲ未知量ノ係數ニテ除シ以テ所  
要ノ未知量ヲ算出スベシ

例壹  $7x-5=13-2x$  ヲ解ケ。

算式 題セル方程式ハ分數式ヲ有セザルニヨリ直チニ項ヲ移  
シ右節ニアル $-2x$ ヲ左節ニ送り左節ノ $-5$ ヲ右節ニ送ルルハ

$$7x+2x=13+5$$

即チ  $9x=18$

是ニ於テ未知量ノ係數9ヲ以テ式ノ兩節ヲ除スルルハ

$$x=18 \div 9=2$$

仍テ所要ノ答數ハ2ナリ。

例貳  $\frac{3x-4}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5x+2}{7} - \frac{16-x}{4}$  ヲ算出スベシ。

算式 本例ニ於テハ先ツ分母6, 3, 7, 4ノ最低公倍數84ヲ全式  
ニ乘シテ其分母ヲ去ルベシ即チ次ノ如シ

$$84 \times \frac{3x-4}{6} + 84 \times \frac{2}{3} = 84 \times \frac{5x+2}{7} - 84 \times \frac{16-x}{4}$$

即チ  $14(3x-4)+56=12(5x+2)-21(16-x)$

即チ  $42x-56+56=60x+24-336+21x$

是ニ於テ未知量ヲ左ニ集メ已知量ヲ右ニ集ムルルハ

$$42x-60x-21x=24-336+56-56$$

即チ  $-39x=-312$

此式ノ兩節ヲ $-39$ ニテ除スルルハ

$$x=8$$

仍テ所要ノ答數ハ8ナリ。

例三  $a^2(x-a)+b^2(x-b)=abx$  ヲ算出セヨ。

算式 本例ニ於テハ $a, b$ ヲ何レモ已知量トシ以テ $x$ ヲ算出セ  
ンヲ要スルルハ左節ヲ式ノ如ク算スルルハ

$$a^2x-a^3+b^2x-b^3=abx$$

トナル是ニ於テ項ヲ移スルハ

$$a^2x-abx+b^2x=a^3+b^3$$

即チ  $(a^2-ab+b^2)x=a^3+b^3$

是ニ於テ兩節ヲ $a^2-ab+b^2$ ニテ除スルルハ

$$=a+b$$

仍テ所要ノ答式ハ $a+b$ ナリ。

例四  $\frac{ax}{a+x} + \frac{bx}{b+x} = a+b$  ヲ算出セヨ。

算式 分母ノ最低公倍式 $(a+x)(b+x)$ ヲ全式ニ乘シ以テ分母ヲ  
去ルルハ次ノ如シ

$$ax(b+x)+bx(a+x)=(a+b)(a+x)(b+x)$$

即チ  $abx+ax^2+abx+bx^2=(a+b)\{ab+(a+b)x+x^2\}$

即チ  $2abx+(a+b)x^2=ab(a+b)+(a^2+2ab+b^2)x+(a+b)x^2$

是ニ於テ項ヲ移スルハ



$$2abx - (a^2 + 2ab + b^2)x + (a + b)x^2 - (a + b)x^2 = ab(a + b)$$

$$\text{故} = \quad -(a^2 + b^2)x = ab(a + b)$$

是ニ於テ兩節ヲ $-(a^2 + b^2)$ ニテ除スルキハ

$$x = -\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$$

仍テ所要ノ答式ハ $-\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$ ナリ。

### 問 題

次ノ諸方程式ニ $x$ ヲ算出スル

- (1)  $7x + 19 = 5x + 7$ . (2)  $5(x + 2) = 3(x + 3) + 1$ .  
 (3)  $2(x - 3) = 5(x + 1) + 2x - 1$ . (4)  $(x - 1)(x - 2) = (x - 3)(x - 4)$ .  
 (5)  $3x^2 = (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^2$ .  
 (6)  $(x - 2)(x - 5) + (x - 3)(x - 4) = 2(x - 4)(x - 5)$ .  
 (7)  $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4x}{6} + 7$ .  
 (8)  $\frac{3x + 6}{5} + 2x = \frac{17 - 3x}{2} - \frac{2x - 31}{5}$ .  
 (9)  $\frac{2}{3}(x + 8) - \frac{3}{4}(2x + 7) = \frac{1}{2}(3x - 5)$ .  
 (10)  $8\frac{3}{4} + \frac{3x}{7} - \frac{5}{6} + 2x - \frac{12x}{5} + 13 + \frac{x}{4} = 0$ .  
 (11)  $\frac{14(x + 2)}{x} - 2x + 1 = 7 + 4\left(3 - \frac{1}{2}x\right)$ .  
 (12)  $-6\frac{1}{3}x + 158\frac{1}{2} - 10x = -\frac{37x}{6} + 19 + \frac{3x}{8}$ .

- (13)  $ax + c = bx + d$ . (14)  $a(x - a) = b(x - b)$ .  
 (15)  $(a + b)x + (b - a)x = b^2$ . (16)  $(a + bx)(b + ax) = ab(x^2 - 1)$ .  
 (17)  $(x + a + b)^2 + (x + a - b)^2 = 2x^2$ .  
 (18)  $2a^2b^2c + ab^2x - 2ab^2c - abc^2d - 3a^2x = (b^3 - 3a^2b)x - b^2c^2d$ .  
 (19)  $\frac{x+c}{x-b} + \frac{x+b}{x-a} = 2$ . (20)  $\frac{x-b}{x-a} - \frac{x-a}{x-b} = \frac{2(a-b)}{x-a-b}$ .  
 (21)  $\frac{a+c}{x+2b} + \frac{b+c}{x+2a} = \frac{a+b+2c}{x+a+b}$ . (22)  $\frac{ab}{x} = bc + d + \frac{1}{x}$ .  
 (23)  $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-6} = \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-8}$ .  
 (24)  $\frac{16x-13}{4x-3} + \frac{40x-43}{8x-9} = \frac{32x-30}{8x-7} + \frac{20x-24}{4x-5}$ .  
 (25)  $\frac{2-5x}{5x+1} + \frac{7+x}{3-2x} = \frac{148-5x^2}{3+13x-10x^2} - 2$ .  
 (26)  $3 \cdot 25x - 5 \cdot 007 - x = 2 \cdot 34x$ .  
 (27)  $13 \cdot 2x - \frac{3x}{4} + 7.6953 = \frac{x}{5} + 7834 \cdot 5$ .  
 (28)  $\frac{x}{x-2} + \frac{x-9}{x-7} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-8}{x-6}$ .  
 (29)  $\frac{3}{5}(x-5) - \frac{x-2}{2x-9} = \frac{3}{5}x - \frac{41}{2x-9}$ .  
 (30)  $\frac{bx}{2b-a} - \frac{(3bc+ad)x}{2ab(a+b)} = \frac{5ab}{3c-d}$   
 $= \frac{(3bc-ad)}{2ab(a-b)}x - \frac{5a(2b-a)}{a^2-b^2}$



## 問題解答

(1) 項ヲ移スルハ

$$7x-5x=7-19$$

$$\text{即チ} \quad 2x=-12$$

此式ノ兩節ヲ2ニテ除スルハ

$$x=-6$$

仍テ所要ノ答數ハ-6ナリ。

(2) 先ヅ括弧ヲ去ルハ

$$5x+10=3x+9+1$$

項ヲ移スルハ

$$5x-3x=9+1-10$$

$$\text{即チ} \quad 2x=0$$

此式ノ兩節ヲ2ニテ除シテ

$$x=0$$

仍テ所要ノ答數ハ0ナリ。

(3) 先ヅ括弧ヲ去ルハ

$$2x-6=5x+5+2x-1$$

$$\text{項ヲ移シテ} \quad 2x-5x-2x=6+5-1$$

$$\text{即チ} \quad -5x=10$$

$$-5 \text{ニテ兩節ヲ除シ} \quad x=-2$$

仍テ所要ノ答數ハ-2ナリ。

(4) 乗算ヲ施シ括弧ヲ去ルハ

$$x^2-3x+2=x^2-7x+12$$

$$\text{項ヲ移シテ} \quad x^2-x^2-3x+7x=12-2$$

$$\text{即チ} \quad 4x=10$$

$$4 \text{ニテ兩節ヲ除シテ} \quad x=2\frac{1}{2}$$

仍テ所要ノ答數ハ $2\frac{1}{2}$ ナリ。

(5) 乗算ヲ施シ括弧ヲ去ルハ

$$3x^2=x^2+2x+1+x^2+4x+4+x^2+6x+9$$

$$\text{項ヲ移シテ} \quad 3x^2-x^2-x^2-x^2-2x-4x-6x=1+4+9$$

$$\text{即チ} \quad -12x=14$$

$$\text{兩節ヲ}-12 \text{ニテ除シテ} \quad x=-1\frac{1}{6}$$

仍テ所要ノ答數ハ $-1\frac{1}{6}$ ナリ。

(6) 乗算ヲ施シ括弧ヲ去ルハ

$$x^2-7x+10+x^2-7x+12=2x^2-18x+40$$

$$\text{項ヲ移シテ} \quad x^2+x^2-2x^2-7x-7x+18x=40-10-12$$

$$4x=18$$

$$\text{兩節ヲ}4 \text{ニテ除シテ} \quad x=4\frac{1}{2}$$

仍テ所要ノ答數ハ $4\frac{1}{2}$ ナリ。

(7) 分母ノ最低公倍數60ヲ全式ニ乗シテ分母ヲ去ルハ

$$30x+20x+50=48x+420$$

$$\text{項ヲ移シテ} \quad 30x+20x-48x=420-50$$



即チ  $2x=370$

兩節ヲ 2 ニテ除シテ  $x=185$ .

仍テ所要ノ答數ハ 185 ナリ.

(8) 分母ノ最低公倍式數 10 ヲ全式ニ乘シテ分母ヲ去ルルキハ

$$6x+12+20x=85-15x-4x+62$$

項ヲ移シテ  $6x+20x+15x+4x=85+62-12$

即チ  $45x=135$

兩節ヲ 45 ニテ除シテ  $x=3$

仍テ所要ノ答數ハ 3 ナリ.

(9) 分母ノ最低公倍數 12 ヲ全式ニ乘シテ分母ヲ去ルルキハ

$$8x+64-18x-63=18x-30$$

項ヲ移シテ  $8x-18x-18x=-64+63-30$

即チ  $-28x=-31$

兩節ヲ  $-28$  ニテ除シテ  $x=1\frac{3}{28}$

仍テ所要ノ答數ハ  $1\frac{3}{28}$  ナリ.

(10) 分母ノ最低公倍數 420 ヲ全式ニ乘シテ分母ヲ去ルルキハ

$$3675+180x-350+840x-1008x+5460+105x=0$$

項ヲ移シテ  $180+840x-1008x+105x=-3675+350-5460$

即チ  $117x=-8785$

兩節ヲ 117 ニテ除シテ  $x=-75\frac{10}{117}$

仍テ所要ノ答數ハ  $-75\frac{10}{117}$  ナリ.

(11)  $x$  ヲ全式ニ乘スルルキハ

$$14(x+2)-2x^2+x=7x+4x\left(3-\frac{1}{2}x\right)$$

即チ  $14x+28-2x^2+x=7x+12x-2x^2$

項ヲ移シテ  $14x+x-7x-12x-2x^2+2x^2=-28$

即チ  $-4x=-28$

兩節ヲ  $-4$  ニテ除シテ  $x=7$

仍テ所要ノ答數ハ 7 ナリ.

(12) 分母ノ最低公倍數 24 ヲ全式ニ乘シテ分母ヲ去ルルキハ

$$-152x+3804-240x=-148x+456+9x$$

項ヲ移シテ  $-152x-240x+148x-9x=456-3804$

即チ  $-253x=-3348$

兩節ヲ  $-253$  ニテ除シテ  $x=13\frac{59}{253}$

仍テ所要ノ答數ハ  $13\frac{59}{253}$  ナリ.

(13) 項ヲ轉スルルキハ次ノ如クナルベシ

$$ax-bx=d-c$$

即チ  $(a-b)x=d-c$

$a-b$  ニテ兩節ヲ除スルルキハ

$$x=\frac{d-c}{a-b}$$

仍テ所要ノ答式ハ  $\frac{d-c}{a-b}$  ナリ.

(14) 括弧ヲ去ルルキハ次ノ如シ



$$ax - a^2 = bx - b^2$$

項ヲ移シテ  $ax - bx = a^2 - b^2$

即チ  $(a-b)x = (a-b)(a+b)$

兩節チ  $a-b$  ニテ除シテ  $x = a+b$

仍テ所要ノ答式ハ  $a+b$  ナリ。

(15) 左節ヲ括ルルキハ

$$\{(a+b) + (b-a)\}x = b^2$$

即チ  $2bx = b^2$

兩節チ  $2b$  ニテ除シテ  $x = \frac{b}{2}$

(16) 乗算ヲ施シ兩節ノ括弧ヲ去ルルキハ

$$ab + (a^2 + b^2)x + abx^2 = abx^2 - ab$$

項ヲ移シテ  $(a^2 + b^2)x + abx^2 - abx^2 = -ab - ab$

即チ  $(a^2 + b^2)x = -2ab$

兩節チ  $a^2 + b^2$  ニテ除シテ  $x = -\frac{2ab}{a^2 + b^2}$

仍テ所要ノ答式ハ  $-\frac{2ab}{a^2 + b^2}$  ナリ。

(17) 乗算ヲ施シテ左節ヲ展開スルルキハ次ノ如シ

$$x^2 + 2(a+b)x + a^2 + 2ab + b^2 + x^2 + 2(a-b)x + a^2 - 2ab + b^2 = 2x^2$$

即チ  $2x^2 + 4ax + 2a^2 + 2b^2 = 2x^2$

項ヲ移シテ  $2x^2 - 2x^2 + 4ax = -2(a^2 + b^2)$

即チ  $4ax = -2(a^2 + b^2)$

兩節チ  $4a$  ニテ除シテ  $x = -\frac{a^2 + b^2}{2a}$

仍テ所要ノ答式ハ  $-\frac{a^2 + b^2}{2a}$  ナリ。

(18) 項ヲ移シ然ル後チ之ヲ括ルルキハ下ノ如シ

$$(ab^2 - b - 3a^2 + 3a^2b)x = -2a^2b^2c + 2ab^2c + abc^2d - b^2c^2d$$

再ビ之ヲ括ルルキハ

$$(a-b)(b^2 - 3a^2)x = -(a-b)(2ab - cd)bc$$

兩節チ  $(a-b)(b^2 - 3a^2)$  ニテ除シテ

$$x = -\frac{(2ab - cd)bc}{b^2 - 3a^2}$$

仍テ所要ノ答式ハ  $-\frac{(2ab - cd)bc}{b^2 - 3a^2}$  ナリ。

(19)  $(x-a)(x-b)$  チ全式ニ乗シテ分母ヲ去ルルキハ

$$(x+a)(x-a) + (x+b)(x-b) = 2(x-a)(x-b)$$

即チ  $x^2 - a^2 + x^2 - b^2 = 2x^2 - 2(a+b)x + 2ab$

項ヲ移シテ  $x^2 + x^2 - 2x^2 + 2(a+b)x = a^2 + 2ab + b^2$

即チ  $2(a+b)x = (a+b)^2$

兩節チ  $2(a+b)$  ニテ除シテ  $x = \frac{a+b}{2}$

仍テ所要ノ答式ハ  $\frac{a+b}{2}$  ナリ。

(20) 分母ノ最低公倍式  $(x-a)(x-b)(x-a-b)$  チ全式ニ乗シテ

$$(x-b)^2(x-a-b) - (x-a)^2(x-a-b) = 2(a-b)(x-a)(x-b)$$

即チ  $\{(x-b)^2 - (x-a)^2\}(x-a-b) = 2(a-b)(x-a)(x-b)$

即チ  $\{2(a-b)x - (a^2 - b^2)\}(x-a-b) = 2(a-b)(x-a)(x-b)$

兩節チ  $a-b$  ニテ除シテ



$$(2x-a-b)(x-a-b)=2(x-a)(x-b)$$

乗算ヲ施シテ  $2x^2-3(a+b)x+(a+b)^2=2x^2-2(a+b)x+2ab$

項ヲ移シテ  $2x^2-2x^2-3(a+b)x+2(a+b)x=-(a+b)^2+2ab$

即チ  $-(a+b)x=-(a^2+b^2)$

両節ヲ  $-(a+b)$  ニテ除シテ  $x=\frac{a^2+b^2}{a+b}$

仍テ所要ノ答式ハ  $\frac{a^2+b^2}{a+b}$  ナリ。

(21) 右節ヲ書き換ヘテ次式ノ如クス

$$\frac{a+c}{x+2b} + \frac{b+c}{x+2a} = \frac{a+c}{x+a+b} + \frac{b+c}{x+a+b}$$

項ヲ移シテ  $\frac{a+c}{x+2b} - \frac{a+c}{x+a+b} = \frac{b+c}{x+a+b} - \frac{b+c}{x+2a}$

是ニ於テ左右両節ニ減算ヲ施スルニ

$$\frac{(a+c)(x+a+b-x-2b)}{(x+2b)(x+a+b)} = \frac{(b+c)(x+2a-x-a-b)}{(x+2a)(x+a+b)}$$

即チ  $\frac{(a+c)(a-b)}{(x+2b)(x+a+b)} = \frac{(b+c)(a-b)}{(x+2a)(x+a+b)}$

$(x+2a)(x+2b)(x+a+b)$  ナ全式ニ乗シテ分母ヲ去ルルニ

$$(a+c)(a-b)(x+2a) = (b+c)(a-b)(x+2b)$$

両節ヲ  $a-b$  ニテ除シテ

$$(a+c)(x+2a) = (b+c)(x+2b)$$

即チ  $(a+c)x+2a^2+2ac = (b+c)x+2b^2+2bc$

項ヲ移シテ  $\{(a+c)-(b+c)\}x = -2(a^2-b^2) - 2(ac-bc)$

即チ  $(a-b)x = -2(a-b)(a+b) - 2c(a-b)$

両節ヲ  $a-b$  ニテ除シテ  $x = -2(a+b+c)$

仍テ所要ノ答式ハ  $-2(a+b+c)$  ナリ。

(22)  $x$  ナ全式ニ乗シテ分母ヲ去ルルニ次ノ如シ

$$ab = (bc+d)x+1$$

項ヲ移シテ  $-(bc+d)x = -ab+1$

両節ヲ  $-(bc+d)$  ニテ除シテ

$$x = \frac{ab-1}{bc+d}$$

仍テ所要ノ答式ハ  $\frac{ab-1}{bc+d}$  ナリ。

(23) 項ヲ移シテ次ノ如クス

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-8}$$

即チ  $\frac{x-4-(x-2)}{(x-2)(x-4)} = \frac{x-8-(x-6)}{(x-6)(x-8)}$

即チ  $\frac{-2}{(x-2)(x-4)} = \frac{-2}{(x-6)(x-8)}$

分母ヲ去リ  $-2$  ニテ全式ヲ除スルニ

$$(x-6)(x-8) = (x-2)(x-4)$$

即チ  $x^2-14x+48 = x^2-6x+8$

項ヲ移シテ  $x^2-x^2-14x+6x = 8-48$

即チ  $-8x = -40$

両節ヲ  $-8$  ニテ除シテ  $x = 5$

仍テ所要ノ答數ハ 5 ナリ。

(24) 項ヲ移シテ次ノ如クス



$$\frac{16x-13}{4x-3} - \frac{32x-30}{8x-7} = \frac{20x-24}{4x-5} - \frac{40x-43}{8x-9}$$

$$\begin{aligned} \text{即チ} \quad & \frac{(16x-13)(8x-7) - (32x-30)(4x-3)}{(4x-3)(8x-7)} \\ & = \frac{(20x-24)(8x-9) - (40x-43)(4x-5)}{(4x-5)(8x-9)} \end{aligned}$$

$$\text{即チ} \quad \frac{1}{32x^2-52x+21} = \frac{1}{32x^2-76x+45}$$

$$\text{分母ヲ去リテ} \quad 32x^2-76x+45 = 32x^2-52x+21$$

$$\text{項ヲ移シテ} \quad 32x^2-32x^2-76x+52x=21-45$$

$$\text{即チ} \quad -24x = -24$$

$$\text{両節ヲ} -24 \text{ニテ除シテ} \quad x=1.$$

仍テ所要ノ答數ハ 1 ナリ.

(25) 左右兩節ヲ式ノ如ク運算スルキハ下ノ如シ

$$\frac{(2-5x)(3-2x) + (7+x)(5x+1)}{(5x+1)(3-2x)} = \frac{148-5x^2-23+13x-10x^2}{3+13x-10x^2}$$

$$\text{即チ} \quad \frac{13+17x+15x^2}{3+13x-10x^2} = \frac{142-26x+15x^2}{3+13x-10x^2}$$

此式ノ兩節ノ分母ハ相ヒ等シ故ニ其分子ハ相等シカラザルヲ得ズ是ニ由テ

$$13+17x+15x^2 = 142-26x+15x^2$$

$$\text{項ヲ移シテ} \quad 15x^2-15x^2+17x+26x=142-13$$

$$\text{即チ} \quad 43x=129$$

$$\text{両節ヲ} 43 \text{ニテ除シテ} \quad x=3.$$

仍テ所要ノ答數ハ 3 ナリ.

(26) 項ヲ移シテ左節ヲ  $x$  ニテ括ルキハ

$$3 \cdot 25 - 1 + 34x = 5 \cdot 007 + 2$$

$$\text{即チ} \quad 259x = 5 \cdot 307$$

$$\text{両節ヲ} 259 \text{ニテ除シテ} \quad x = 2 \cdot 0104247 +$$

仍テ所要ノ答數ハ 2.0104247 餘ナリ.

(27) 分數ヲ小數ニ化スルキハ下ノ如クナルベシ

$$13 \cdot 2x - 75x + 7 \cdot 6953 = 2x + 78345$$

$$\text{項ヲ移シテ} \quad (13 \cdot 2 - 75 - 2)x = 78345 - 7 \cdot 6953$$

$$\text{即チ} \quad 12 \cdot 25x = 7826 \cdot 8047$$

$$\text{両節ヲ} 12 \cdot 25 \text{ニテ除シテ} \quad x = 638 \cdot 92283 +$$

仍テ所要ノ答數ハ 638.92283 餘ナリ.

(28) 項ヲ移シテ次ノ如クス

$$\frac{x}{x-2} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-8}{x-6} - \frac{x-9}{x-7}$$

$$\text{即チ} \quad \frac{x(x-1) - (x+1)(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{(x-8)(x-7) - (x-6)(x-9)}{(x-6)(x-7)}$$

$$\text{即チ} \quad \frac{2}{x^2-3x+2} = \frac{2}{x^2-13x+42}$$

$$\text{是ニ由テ} \quad x^2-3x+2 = x^2-13x+42$$

$$\text{項ヲ移シテ} \quad x^2-x^2-3x+13x=42-2$$

$$\text{即チ} \quad 10x=40$$

$$\text{両節ヲ} 10 \text{ニテ除シテ} \quad x=4.$$

仍テ所要ノ答數ハ 4 ナリ.

(29) 項ヲ移シテ次ノ如クス

$$\frac{3(x-5)}{5} - \frac{3x}{5} = \frac{x-2}{2x-9} - \frac{41}{2x-9}$$



$$\text{即チ} \quad \frac{3x-15-3x}{5} = \frac{x-2-41}{2x-9}$$

$$\text{即チ} \quad -3 = \frac{x-43}{2x-9}$$

$$\text{分母ヲ去リテ} \quad -6x+27=x-43$$

$$\text{項ヲ移シテ} \quad -6x-x=-43-27$$

$$\text{即チ} \quad -7x=-70$$

$$\text{兩節ヲ}-7\text{ニテ除シテ} \quad x=10$$

仍テ所要ノ答數ハ10ナリ。

(30) 分母ノ最低公倍式  $2ab(2b-a)(3c-d)(a-b)(a+b)$  ナ全式ニ乘シテ分母ヲ去ルルキハ下ノ如シ

$$\begin{aligned} & 2ab^2(3c-d)(a^2-b^2)x-(2b-a)(3c-d)(a-b)(3bc+ad)x-10a^2b^2(2b-a)(a^2-b^2) \\ & = (2b-a)(3c-d)(a+b)(3bc-ad)x-10a^2b(2b-a)^2(3c-d) \end{aligned}$$

項ヲ移シテ

$$\begin{aligned} & 2ab^2(3c-d)(a^2-b^2)x-(2b-a)(3c-d)(a-b)(3bc+ad)x-(2b-a)(3c-d)(a+b) \\ & \times (3bc-ad)x=10a^2b^2(2b-a)(a^2-b^2)-10a^2b(2b-a)^2(3c-d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{即チ} \quad & (3c-d)\{2ab^2(a^2-b^2)-(2b-a)(a-b)(3bc+ad)-(2b-a)(a+b)(3bc-ad)\}x \\ & = 10a^2b(2b-a)\{b(a^2-b^2)-(2b-a)(3c-d)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{即チ} \quad & 2ab(3c-d)(a^2b-b^3-6bc+3ac+2bd-ad)x \\ & = 10a^2b(2b-a)(a^2b-b^3-6bc+3ac+2bd-ad) \end{aligned}$$

$x$ ノ係數ヲ以テ兩節ヲ除シテ

$$x = \frac{5a(2b-a)}{3c-d}$$

仍テ所要ノ答式ハ  $\frac{5a(2b-a)}{3c-d}$  ナリ。

## 多元壹次方程式

94. 貳少ノ未知量ヲ有セル壹方程式ハ以テ其貳未知量ヲ定ムルニ足ラザルベシ例ヘズ

$$x+y=10$$

ナル壹式アリ  $x, y$ ハ未知ノ量ナルキハ此方程式ニ適合スル  $x, y$ ノ値ハ限リナクアルベシ即チ

$$x=1, y=9; \quad x=2, y=8; \quad x=3, y=7; \quad x=4, y=6;$$

$$x=5, y=5; \quad x=6, y=4; \quad x=7, y=3; \quad x=8, y=2;$$

$$x=9, y=1; \quad x=10, y=0; \quad x=-1, y=11; \quad x=-3, y=13;$$

$$x=13, y=-3; \quad x=16, y=-6; \quad x=5, y=9.5; \quad x=-1.2, y=11.2$$

等  $x$ ニ任意ノ値ヲ附シ其數ヲ10ヨリ減セル差ヲ  $y$ ノ値トセルモノハ總テ上ノ方程式ニ適合スベシ。

壹般ニ  $x, y$  貳未知量ヲ有セル方程式ニ於テ  $x$ ニ任意ノ値ヲ附シ之ヲ其方程式ノ  $x$ ニ代ヘテ  $y$ ヲ算出シ以テ前ノ  $x$ ノ値ニ組ミ合スルルキハ其  $x, y$ ノ兩値ハ方程式ニ適合スベシ例ヘズ

$$2x-3y=11$$

ナル方程式ニ於テ  $x=1$ トシ之ヲ此方程式ノ  $x$ ニ入レ代フルルキハ

$$2-3y=11$$

トナル項ヲ移シテ

$$-3y=11-2$$

即チ

$$-3y=9$$

兩節ヲ  $-3$ ニテ除シテ  $y=-3$ トナル故ニ  $x=1, y=-3$ トセバ上ノ方程式ニ適合スベシ次ニ  $x=13$ トシ之ヲ上ノ方程式ノ  $x$ ニ入レ



代ニルキハ

$$26-3y=11$$

項ヲ移シテ

$$-3y=-26+11=-15$$

両節ヲ-3ニテ除シテ  $y=5$  トナル故ニ  $x=13, y=5$  ハ亦タ

$$2x-3y=11$$

ナル方程式ニ適合スベシノ如ク  $x$  ニ任意ノ値ヲ附スルキハ惟  
ニ之ニ相當スル  $y$  ノ値ヲ算出シ得ベシ故ニ貳未知量間ニ唯壹個  
ノ方程式アルキハ其方程式ニ適合スベキ貳未知量ノ値ハ數ゾ限  
リモナク多カルベシ仍テ未知量ノ値ハ確定セズ。

貳未知量ヲ有スル方程式貳件アリテ其方程式ガ同時ニ成立ス  
ルモノナルキハ其貳未知量ノ値ハ確定スベシ例ヘバ

$$x+y=10,$$

$$x=y$$

ナル兩式ニ於テ兩式ノ何レニモ適合スベキ  $x, y$  ノ値ヲ要ムルモ  
ノトス然ルキハ第貳式ヨリ  $y$  ハ  $x$  ニ等シカラザルヲ得ザルガ故  
ニ第壹式ノ左節ハ  $x$  ノ貳個集マレルモノニ等シカルベシ仍テ  
ハ10ノ半即チ5ニ等シカラザルヲ得ズ而シテ第貳式ヨリ  $y$  ノ値モ  
亦タ5ナルヲ知ルベシ。

上ト同理ニヨリ三個ノ未知量アルキハ三個ノ方程式アルニテ  
ラザレバ其未知量ハ確定セズ又タ四個ノ未知量アルキハ四個ノ  
方程式アルニテラザレバ其未知量ハ確定セズ逐テ此ノ如シ。

95. 是ヨリ貳元壹次方程式解法ヲ例示スベシ

例壹  $3x+5y=19, 5x-4y=7$  ヨリ  $x, y$  ナ算出セヨ。

算式 第壹式ニ4ヲ乘シ第貳式ニ5ヲ乘スルキハ

$$12x+20y=76,$$

$$25x-20y=35$$

トナルベシ是ニ於テ兩式ノ左節ヲ相加ヘ又タ右節ヲ相加フルキハ

$$37x=111$$

此兩節ヲ37ニテ除スルキハ  $x=3$

$x$  ノ此値ヲ第壹式ノニ入レ代フルキハ

$$3 \times 3 + 5y = 19$$

項ヲ移シテ  $5y = 19 - 3 \times 3 = 10$

兩節ヲ5ニテ除シテ  $y=2$

是ニ由テ  $x=3, y=2$  ナ所要ノ答數トス。

例貳  $34x+15y=132, 13x+20y=79$  ヨリ  $x, y$  ナ算出セヨ。

算式 第壹式ニ4ヲ乘シ第貳式ニ3ヲ乘スルキハ

$$136x+60y=528$$

$$39x+60y=237$$

此兩式相減シテ  $97x=291$

兩節ヲ97ニテ除シテ  $x=3$

$x$  ノ此値ヲ第壹式ニ入レ代ヘテ

$$34 \times 3 + 15y = 132$$

項ヲ移シテ  $15y = 132 - 34 \times 3 = 30$

兩節ヲ15ニテ除シテ  $y=2$

是ニ由テ所要ノ答數ハ  $x=3, y=2$  ナリ。

96. 上ノ貳例ニヨリテ貳元壹次方程式ノ解法ハ次ノ如クナ  
ルヲ知ルベシ



**算法** 二元一次方程式ヲ解クニハ先ツ未知量ヲ含メル項ヲ左節ニ集メ已知量ヲ右節ニ集ムベシ次ニ両方程式ニ適當ノ數ヲ乘シ以テ其兩方程式ニ於テ未知量ノ壹ノ係數ヲ相等シカラシメ其記號相同シキハ兩式相減シ記號異ナルキハ兩式相加ヘ以テ其未知量ノ壹ヲ消滅セシメ他ノ未知量ノ係數ヲ以テ全式ヲ除シ其未知量ヲ算出スベシ是ニ於テ算出シ得タル壹未知量ノ價ヲ題セル兩方程式ノ壹ニ入レ代ヘ以テ他ノ未知量ヲ算出スベシ

**注意** 兩式ニ於テ消滅セシメント欲スル未知量ノ係數カ、又ハ其係數間ニ公因子アルキハ其公因子ヲ省キ去リタルモノヲ互換シテ夫々兩式ニ乘スルキハ消滅セシメント欲スル未知量ノ係數ハ相ヒ等シクナルベシ

例壹  $17x+23y=86$ ,  $23x+17y=74$  ヨリ  $x, y$  ヲ算出スベシ

算式 第貳式ノ  $y$  ノ係數ニ等シキ  $17$  ヲ第壹式ニ乘シ第壹式ノ  $y$  ノ係數ナル  $23$  ヲ第貳式ニ乘スルキハ  $y$  ノ係數ハ相ヒ等シクナル  $1$  次ノ如シ

$$239x+391y=1462,$$

$$529x+391y=1702$$

此兩式相減シテ  $-240x=-240$

兩節ヲ  $-240$  ニテ除シテ  $x=1$

$x$  ノ此値ヲ第壹式ノ  $x$  ニ入レ代ユルキハ

$$17+23y=86$$

項ヲ移シテ  $23y=86-17=69$

兩節ヲ  $23$  ニテ除シテ  $y=3$

是ニ由テ所要ノ答數ハ  $x=1, y=3$  ナリ。

例貳

$$12x+3y=5y+36,$$

$$\frac{4}{5}x-\frac{2y-3}{7}=4y-\frac{8x+15}{5}-36$$

ナル兩式ヨリ  $x, y$  ヲ算セヨ。

算式 第壹式ノ項ヲ移シテ未知量ヲ左節ニ集ムルキハ

$$12x+3y-5y=36$$

即チ  $12x-2y=36$  (I)

第貳式ノ分母ヲ去ルキハ

$$28x-10y+15=140y-56x-105-1260$$

項ヲ移シテ  $28x+56x-10y-140y=-15-105-1260$

即チ  $84x-150y=-1380$  (II)

是ニ於テ (I), (II) 兩式ノ  $y$  ノ係數  $2, 150$  ヨリ公因子  $2$  ヲ省キ去リ  $1, 75$  トナルヲ互換シテ  $75$  ヲ (I) 式ニ乘シ  $1$  ヲ (II) 式ニ乘スルキハ

$$900x-150y=2700,$$

$$84x-150y=-1380$$

兩式相減シテ  $816x=4080$

兩節ヲ  $816$  ニテ除シテ  $x=5$

$x$  ノ此値ヲ (I) 式ニ入レ代ヘテ

$$60-2y=36$$

項ヲ移シテ  $-2y=36-60=-24$

兩節ヲ  $-2$  ニテ除シテ  $y=12$

是ニ由テ所要ノ答數ハ  $x=5, y=12$  ナリ。

97. 三個ノ未知量ヲ有スル壹次方程式三個ヨリ其未知量ヲ算出スルニハ先ヅ三式ノ壹ヲ他ノ貳式ノ各ト組ミ合セ未知量ノ壹ヲ消去シ以テ貳個ノ未知量ヲ有スル貳個ノ方程式ヲ求メ是ニ



於テ此貳個ノ方程式ヨリ貳個ノ未知量ヲ算出シ然ル後チ此算出  
シ得タル未知量ノ値ヲ原式ノ壹ニ入レ代ヘ以テ他ノ未知量ヲ算  
出スベシ。

例

$$\begin{aligned} 7x + 5y + 2z &= 79, \\ 8x + 7y + 9z &= 122, \\ 3x + 4y + 5z &= 63 \end{aligned}$$

ナル壹組ノ方程式ヨリ  $x, y, z$  ヲ算出スベシ。

算式 第壹式ニ 9 ヲ乘シ、第貳式ニ 2 ヲ乘シテ相減スルキハ

$$\begin{aligned} 63x + 45y + 18z &= 711 \\ \underline{16x + 14y + 18z} &= 244 \\ 47x + 31y &= 467 \end{aligned}$$

(甲)

トナル次ニ第壹式ニ 5 ヲ乘シ、第三式ニ 2 ヲ乘シテ相減スルキハ

$$\begin{aligned} 35x + 25y + 10z &= 395 \\ \underline{6x + 8y + 10z} &= 126 \\ 29x + 17y &= 269 \end{aligned}$$

(乙)

トナル是ニ於テ(甲)式ニ 17 ヲ乘シ(乙)式ニ 31 ヲ乘シ相減スルキハ

$$\begin{aligned} 799x + 527y &= 7939 \\ \underline{899x + 527y} &= 8339 \\ -100x &= -400 \end{aligned}$$

トナル此兩節ヲ  $-100$  ニテ除スルキハ

$$x = 4$$

$x$  ノ此値ヲ(乙)式ニ入レ代ヘテ

$$116 + 17y = 269$$

是ヨリ

$$17y = 269 - 116 = 153$$

故ニ

$$y = 153 \div 17 = 9$$

是ニ於テ  $x=4, y=9$  ヲ第壹式ニ入レ代ユルキハ次ノ如シ

$$28 + 45 + 2z = 79$$

項ヲ移シテ  $2z = 79 - 28 - 45 = 6$

$$\text{故ニ } z = 6 \div 2 = 3$$

仍テ所要ノ答數ハ  $x=4, y=9, z=3$  ナリ。

## 98. 次ノ貳式

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c'$$

ヨリ  $x, y$  ヲ算出センタメ第壹式ニ  $b'$  ヲ乘シ第貳式ニ  $b$  ヲ乘シテ  
相減スルキハ

$$ab'x + bb'y = b'c$$

$$\begin{aligned} a'bx + b'b'y &= bc' \\ \underline{(ab' - a'b)x} &= b'c - bc' \end{aligned}$$

$$\text{トナル故ニ } x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}$$

ヲ得、次ニ第貳式ニ  $a$  ヲ乘シ第壹式ニ  $a'$  ヲ乘シテ相減スルキハ

$$aa'x + ab'y = ac'$$

$$\begin{aligned} aa'x + a'by &= a'c \\ \underline{(ab' - a'b)y} &= ac' - a'c \end{aligned}$$

$$\text{トナル故ニ } y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

今貳元壹次方程式ニ於テ  $a, a', b, b', c, c'$  ノ價ヲ知ルキハ其値チ  
上ニ算出シタル  $x, y$  ノ式ニ入レ代ヘ以テ容易ニ  $x, y$  ヲ算シ得ベ  
シ例ヘバ 96 款例壹ノ場合ニ於テハ

$$a = 17, b = 23, c = 86, a' = 23, b' = 17, c' = 74$$



$$\begin{aligned} \text{ナリ故ニ} \quad x &= \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} = \frac{17 \times 86 - 23 \times 74}{17 \times 17 - 23 \times 23} = \frac{-240}{-240} = 1, \\ y &= \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} = \frac{17 \times 74 - 23 \times 86}{17 \times 17 - 23 \times 23} = \frac{-720}{-240} = 3 \end{aligned}$$

即チ前ノ如ク  $x=1, y=3$  ナ得タリ。

次ニ

$$ax + by + cz = d$$

$$a'x + b'y + c'z = d'$$

$$a''x + b''y + c''z = d''$$

ナル壹組ノ方程式ヨリ  $x$  ナ算出センタメ第一式ニ  $l$ , 第三式ニ  $m$  ナ乗シ其兩式ヲ第一式ニ加フルルナ

$$\begin{aligned} (a+la'+ma'')x + (b+lb'+mb'')y + (c+lc'+mc'')z \\ = d+ld'+md'' \end{aligned} \quad (\text{甲})$$

今  $l, m$  ナシテ

$$b+lb'+mb''=0, \quad c+lc'+mc''=0$$

ナル貳式ニ適合セシメント欲セバ此兩式ノ項ヲ移シテ得タル

$$lb'+mb''=-b, \quad lc'+mc''=-c$$

兩式ニモ適合セシメザルベカラズ今此兩式ヨリ前例ノ如ク  $l, m$  ナ算スルルナ

$$l = \frac{b'c - bc''}{b'c'' - b''c'}, \quad m = \frac{bc' - b'c}{b'c'' - b''c'}$$

借テ  $l, m$  ノ此値ヲ上ノ(甲)式ニ入レ代ユルルナ  $y, z$  ノ係數ハ 0 トナルガ故ニ

$$\begin{aligned} \left\{ a + \frac{a'b'c - bc''}{b'c'' - b''c'} + \frac{a''(bc' - b'c)}{b'c'' - b''c'} \right\} x \\ = d + \frac{d'(b'c - bc'')}{b'c'' - b''c'} + \frac{d''(bc' - b'c)}{b'c'' - b''c'} \end{aligned}$$

此方程式ニ  $b'c'' - b''c'$  ナ通乘シテ分母ヲ去ルルナ

$$\begin{aligned} \{ a(b'c'' - b''c') + a'(b'c - bc'') + a''(bc' - b'c) \} x \\ = d(b'c'' - b''c') + d'(b'c - bc'') + d''(bc' - b'c) \end{aligned}$$

$$\text{仍テ} \quad x = \frac{d(b'c'' - b''c') + d'(b'c - bc'') + d''(bc' - b'c)}{a(b'c'' - b''c') + a'(b'c - bc'') + a''(bc' - b'c)}$$

$$\text{同理ニヨリ} \quad y = \frac{d(c'a'' - c'a') + d'(c'a - ca'') + d''(ca' - c'a)}{a(b'c'' - b''c') + a'(b'c - bc'') + a''(bc' - b'c)} \quad \left. \vphantom{\frac{d(c'a'' - c'a') + d'(c'a - ca'') + d''(ca' - c'a)}{a(b'c'' - b''c') + a'(b'c - bc'') + a''(bc' - b'c)}} \right\} (\text{乙})$$

$$z = \frac{d(a'b'' - a''b') + d'(a'b - ab'') + d''(ab' - a'b)}{a(b'c'' - b''c') + a'(b'c - bc'') + a''(bc' - b'c)}$$

ナ得三元壹次方程式ニ於テ  $a, b, c, d; a', b', c', d'; a'', b'', c'', d''$  ノ値ヲ夫々此式ニ入レ代ユルルナ容易ニ  $x, y, z$  ナ算出シ得ベシ例ヘバ 97 款ノ例ニ於テ

$$\begin{aligned} a=7, b=5, c=2, d=79; \quad a'=8, b'=7, c'=9, d'=122; \\ a''=3, b''=4, c''=5, d''=63 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ナリ故ニ} \quad y &= \frac{d(b'c'' - b''c') + d'(b'c - bc'') + d''(bc' - b'c)}{a(b'c'' - b''c') + a'(b'c - bc'') + a''(bc' - b'c)} \\ &= \frac{79(7 \times 5 - 4 \times 9) + 122(4 \times 2 - 5 \times 5) + 63(5 \times 9 - 7 \times 2)}{7(7 \times 5 - 4 \times 9) + 8(4 \times 2 - 5 \times 5) + 3(5 \times 9 - 7 \times 2)} \\ &= \frac{-200}{-50} = 4 \end{aligned}$$

即チ前ノ如ク  $x=4$  ナ得タリ同様ニシテ  $y, z$  ナ算シ得ベシ

題セル方程式ノ形狀ニヨリ時トシテハ壹般ノ場合ニ適用スベ



キ方法ニヨラズ簡易ノ運算ニ由リテ未知量ヲ算出シ得ルヲア  
斯ノ如キ場合ハ問題解中ニ詳カニスベシ.

## 問 題

次ノ諸方程式ヨリ未知量ヲ算出スベシ

- (1)  $x+y=15, \quad x-y=7.$
- (2)  $3x-5y=13, \quad 2x+7y=81.$
- (3)  $5x+7y=43, \quad 11x+9y=69.$
- (4)  $11x-10y=14, \quad 5x+7y=41.$
- (5)  $16x+17y=500, \quad 17x-3y=110.$
- (6)  $10x-17=14y-88, \quad 14x=7y+5.$
- (7)  $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 9, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 7.$
- (8)  $\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 8, \quad \frac{x+y}{3} + \frac{x-y}{4} = 11,$
- (9)  $x + \frac{1}{2}(3x-y-1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(y-1), \quad \frac{1}{5}(4x+3y) = \frac{7y}{10} + 2.$
- (10)  $\frac{5}{4+y} = \frac{9}{20-x}, \quad 9y-5x=26.$
- (11)  $\frac{7+x}{3} = \frac{9+y}{5} = \frac{11+x+y}{7}.$
- (12)  $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 3, \quad \frac{6}{x} - \frac{2}{y} = 1.$
- (13)  $(x+5)(y+7) = (x+1)(y-9) + 112, \quad 2x+10=3y+1.$
- (14)  $x+y=18 \cdot 73, \quad 56x+13 \cdot 421y=763 \cdot 4.$
- (15)  $ax+by=a^2+b^2, \quad bx+ay=2ab.$

- (16)  $a^2x+by=c^2, \quad a^2x+b^2y=c^2.$
- (17)  $(a+b)x+(a+c)y=a+b, \quad (a+c)x+(a+b)y=a+c.$
- (18)  $x+y=10, \quad x+z=19, \quad y+z=23.$
- (19)  $x+y+z=a, \quad x+y-z=b, \quad x-y+z=c.$
- (20)  $x+y+z=30, \quad 8x+4y+2z=50, \quad 27x+9y+3z=64.$
- (21)  $18x-7y-5z=11, \quad 66y-10x+15z=1620, \quad 14z+8y+3x=320.$
- (22)  $\frac{2}{x} - \frac{5}{3y} + \frac{1}{z} = 3\frac{4}{27}, \quad \frac{1}{4x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 6\frac{11}{72},$   
 $\frac{5}{6x} - \frac{1}{y} + \frac{4}{z} = 12\frac{1}{36}.$
- (23)  $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} + 1 = 0, \quad \frac{x}{6} + \frac{y}{9} + \frac{z}{12} + 1 = 0,$   
 $\frac{x}{9} + \frac{y}{12} + \frac{z}{15} + 1 = 0.$
- (24)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c,$
- (25)  $ax+by+cz=d, \quad a^2x+b^2y+c^2z=d^2, \quad a^3x+b^3y+c^3z=d^3.$
- (26)  $x+y+z=a+b+c, \quad bx+cy+az=bc+ca+ab, \quad cx+ay+bz=bc+ca+ab.$
- (27)  $x+y+z=a+b+c, \quad bx+cy+az=a^2+b^2+c^2, \quad cx+ay+bz=a^2+b^2+c^2.$
- (28)  $\frac{x}{a+\alpha} + \frac{y}{a+\beta} + \frac{z}{a+\gamma} = 1, \quad \frac{x}{b+\alpha} + \frac{y}{b+\beta} + \frac{z}{b+\gamma} = 1,$   
 $\frac{x}{c+\alpha} + \frac{y}{c+\beta} + \frac{z}{c+\gamma} = 1.$
- (29)  $x+y+z+u=1, \quad 16x+8y+4z+2u=9, \quad 81x+27y+9z+3u=36,$   
 $256x+64y+16z+4u=100.$



## 問題解答

(1) 貳式相加フルルルルル

$$x + y = 15,$$

$$\frac{x - y = 7}{2x = 22}$$

$$\text{故に } x = 22 \div 2 = 11$$

是ヲ第壹式ニ入レ代ヘテ項ヲ移スルルルル

$$y = 15 - 11 = 4$$

仍テ所要ノ答數ハ  $x = 11, y = 4$  ナリ。(2)  $y$ ノ係數ヲ互換シテ第壹式ニ7ヲ乘シ第貳式ニ5ヲ乘シ  
兩式相加フルルルルル次ノ如シ

$$21x - 35y = 91,$$

$$\frac{10x + 35y = 405}{31x = 496}$$

$$\text{故に } x = 496 \div 31 = 16$$

 $x$ ノ此値ヲ第貳式ニ入レ代ヘ其項ヲ移スルルルル

$$7y = 81 - 32 = 49$$

$$\text{故に } y = 49 \div 7 = 7$$

仍テ所要ノ答數ハ  $x = 16, y = 7$  ナリ。

(3) 第壹式ニ9, 第貳式ニ7ヲ乘シ相減スルルルル

$$(45 - 77)x = 387 - 483$$

$$\text{即チ } -32x = -96$$

$$\text{故に } x = -96 \div -32 = 3$$

此値ヲ第壹式ニ入レ代ヘ項ヲ移スルルルル

$$7y = 43 - 15 = 28$$

$$\text{故に } y = 28 \div 7 = 4.$$

仍テ所要ノ答數ハ  $x = 3, y = 4$  ナリ。

(4) 第壹式ニ7, 第貳式ニ10ヲ乘シテ相ヒ加フルルルルル

$$(7 \times 11 + 10 \times 5)x = 7 \times 14 + 10 \times 41$$

$$\text{即チ } 127x = 508$$

$$\text{故に } x = 4$$

是ヲ第貳式ニ入レ代ヘ項ヲ移スルルルル

$$7y = 41 - 20 = 21$$

$$\text{故に } y = 3$$

仍テ所要ノ答數ハ  $x = 4, y = 3$  ナリ。

(5) 第壹式ニ3ヲ乘シ第貳式ニ17ヲ乘シ相加フルルルルル

$$(16 \times 3 + 17 \times 17)x = 500 \times 3 + 110 \times 17$$

$$\text{即チ } 337x = 3370$$

$$\text{故に } x = 10$$

是ヲ第壹式ニ入レ代ヘ項ヲ移シテ

$$17y = 500 - 160 = 340$$

$$\text{故に } y = 20$$

仍テ所要ノ答數ハ  $x = 10, y = 20$  ナリ。(6) 第壹式ノ項ヲ移スルルルル  $10x - 14y = -71$ ヲ得, 第貳式ニ於テ項ヲ移スルルルル  $14x - 7y = 5$ ヲ得, 是ニ於テ第貳式ニ2ヲ乘シ之ヨリ第壹式ヲ減スルルルルル  $18x = 81$ トナル故ニ  $x = 81 \div 18 = 4\frac{1}{2}$ ナ

リ之ヲ第貳式ニ入レ代ヘ項ヲ移スルルルル



$$-7y = 5 - 63 = -58$$

$$\text{故} = y = -58 \div -7 = 8\frac{2}{7}$$

仍テ所要ノ答數ハ  $x = 4\frac{1}{2}$ ,  $y = 8\frac{2}{7}$  ナリ。

(7) 第壹式ニ 4 ナ乗シ第貳式ニ 5 ナ乗シ相減スルルキハ

$$\left(\frac{4}{3} - \frac{5}{4}\right)x = 36 - 35 = 1$$

$$\text{即チ} \quad \frac{1}{12}x = 1$$

$$\text{トナル故} = x = 12$$

是ヲ第壹式ニ入レ代ヘテ項ヲ移スルルキハ

$$\frac{y}{4} = 9 - 4 = 5$$

$$\text{故} = y = 20$$

仍テ所要ノ答數ハ  $x = 12$ ,  $y = 20$  ナリ。

(8) 第壹式ニ 6 ナ通乘シ分母ヲ去ルルキハ

$$3x + 3y - 2x + 2y = 48$$

$$\text{即チ} \quad x + 5y = 48$$

トナル次ニ第貳式ニ 12 ナ通乘シ分母ヲ去ルルキハ

$$4x + 4y + 3x - 3y = 132$$

$$\text{即チ} \quad 7x + y = 132$$

トナル是ニ於テ第貳式ニ 5 ナ乗シ夫ヨリ第壹式ヲ減スルルキハ

$$34x = 612$$

$$\text{トナル故} = x = 612 \div 34 = 18$$

是ヲ第貳式ニ入レ代ヘテ項ヲ移スルルキハ  $y = 132 - 126 = 6$  トナル

仍テ所要ノ答數ハ  $x = 18$ ,  $y = 6$  ナリ。

(9) 第壹式ニ 4 ナ通乘シテ其分母ヲ去ルルキハ次ノ如シ

$$4x + 6x - 2y - 2 = 1 + 3y - 3$$

項ヲ移シテ算ヲ施スルルキハ  $10x - 5y = 0$

次ニ第貳式ニ 10 ナ通乘シテ其分母ヲ去ルルキハ次ノ如シ

$$8x + 6y = 7y + 20$$

$$\text{項ヲ移シテ} \quad 8x - y = 20$$

是ニ於テ第壹式ヲ 5 ニテ除シ之ヲ第貳式ヨリ減スルルキハ

$$6x = 20,$$

$$\text{故} = x = \frac{10}{3}$$

是ヲ第壹式ニ入レ代ヘテ項ヲ移シテ  $y$  ノ係數ヲ以テ全式ヲ除スルルキハ

$$y = \frac{20}{3}$$

仍テ所要ノ答數ハ  $x = \frac{10}{3}$ ,  $y = \frac{20}{3}$  ナリ。

(10) 第壹式ノ分母ヲ去ルルキハ  $100 - 5x = 36 + 9y$  トナル其項ヲ移スルルキハ

$$-5x - 9y = -64$$

$$\text{之ニ第貳式} \quad -5x + 9y = 26$$

$$\text{ヲ加フルルキハ} \quad -10x = -38$$

$$\text{故} = x = 3\frac{4}{5}$$

之ヲ第貳式ニ入レ代ヘテ其項ヲ移スルルキハ

$$9y = 26 + 19 = 45$$

$$\text{故} = y = 5$$

仍テ所要ノ答數ハ  $x = 3\frac{4}{5}$ ,  $y = 5$  ナリ。

(11)  $\frac{7+x}{3} = \frac{9+y}{5}$  ノ分母ヲ去リ項ヲ移スルルキハ

$$5x - 3y = -8$$

(甲)



トナル

$$\text{次ニ} \cdot \frac{7+x}{8} = \frac{11+x+y}{7} \text{ヨリ分母ヲ去リ項ヲ移スルハ}$$

$$4x-3y = -16 \quad (\text{乙})$$

是ニ於テ(甲)式ヨリ乙式ヲ減スルハ

$$x = 8$$

ヲ得、是ヲ(甲)式ニ入レ代ヘ項ヲ移スルハ

$$-3y = -8-40 = -48$$

$$\text{故ニ} \quad y = 16$$

仍テ所要ノ答數ハ  $x = 8, y = 16$  ナリ。

(12) 第貳式ニ2ヲ乘シ第壹式ニ加フルハ

$$\frac{15}{x} = 5$$

$$\text{故ニ} \quad x = 3$$

是ヲ第壹式ニ入レ代ヘテ項ヲ施スルハ

$$\frac{4}{y} = 2$$

$$\text{故ニ} \quad y = 2$$

仍テ所要ノ答數ハ  $x = 3, y = 2$  ナリ。

(13) 第壹式ノ乘算ヲ施スルハ

$$xy+7x+5y+35 = xy-9x+y-9+112$$

$$\text{項ヲ移スルハ} \quad 16x+4y = 68$$

$$\text{又第貳式ヨリ} \quad 2x-3y = -9$$

是ニ於テ第壹式ニ3、第貳式ニ4ヲ乘シ相ヒ加フルハ

$$56x = 168$$

$$\text{故ニ} \quad x = 3$$

是ヲ第壹式ニ入レ代ヘ項ヲ移スルハ

$$4y = 68-48 = 20$$

$$\text{故ニ} \quad y = 5$$

仍テ所要ノ答數ハ  $x = 3, y = 5$  ナリ。

(14) 第壹式ニ13.421ヲ乘シ之ヨリ第貳式ヲ減スルハ

$$12.861x = -512.02467$$

$$\text{故ニ} \quad x = -39.812\text{.....}$$

是ヲ第壹式ニ入レ代ヘテ項ヲ移スルハ

$$y = 58.542\text{.....}$$

仍テ所要ノ答數ハ  $x = -39.812\text{.....}, y = 58.542\text{.....}$  ナリ(15) 第壹式ニ $a$ 、第貳式ニ $b$ ヲ乘シテ相減スルハ

$$(a^2-b^2)x = a(a^2-b^2)$$

$$\text{故ニ} \quad x = a$$

是ヲ第貳式ニ入レ代ヘテ項ヲ移スルハ

$$ay = ab$$

$$\text{故ニ} \quad y = b$$

仍テ所要ノ答數ハ  $x = a, y = b$  ナリ。(16) 第壹式ニ $b$ ヲ乘シ之ヲ第貳式ヨリ減スルハ

$$a^2(a-b)x = c^2(c-b)$$

$$\text{故ニ} \quad x = \frac{c^2(c-b)}{a^2(a-b)}$$

次ニ第壹式ニ $a$ ヲ乘シ之ヲ第貳式ヨリ減スルハ



$$b^2(b-a)y = c^2(c-a)$$

$$\text{故} = y = \frac{c^2(c-a)}{b^2(b-a)}$$

$$\text{仍テ所要ノ答式ハ } x = \frac{c^2(c-b)}{a^2(a-b)}, \quad y = \frac{c^2(c-a)}{b^2(b-a)} \quad \text{ナリ}$$

(17) 第壹式第貳式相ヒ加フルルルル

$$(2a+b+c)x + (2a+b+c)y = 2a+b+c$$

トナル是ヲ  $2a+b+c$  ニテ除スルルル

$$x+y=1 \quad \text{(甲)}$$

テ得ル次ニ第壹式ヨリ第貳式ヲ減スルルル

$$(b-c)x - (b-c)y = b-c$$

トナル此全式ヲ  $b-c$  ニテ除スルルル

$$x-y=1 \quad \text{(乙)}$$

是ニ於テ(甲),(乙)兩式相ヒ加フルルル

$$2x=2$$

$$\text{故} = x=1$$

之ヲ(甲)式ニ入レ代エルルルハ  $y=0$  テ得ルル

仍テ所要ノ答式ハ  $x=1, y=0$  ナリ.

(18) 三式相加フルルル

$$2x+2y+2z=52$$

トナル之ヲ 2 ニテ除スルルル

$$x+y+z=26$$

トナル是ヨリ第三式, 第貳式及ビ第壹式ヲ減スルルル

$$x=3, y=7, z=16$$

仍テ所要ノ答數ハ  $x=3, y=7, z=16$  ナリ.

(19) 第壹式ヨリ第貳式ヲ減スルルル

$$2z = a-b$$

$$\text{トナル故} = z = \frac{1}{2}(a-b)$$

第壹式ヨリ第三式ヲ減スルルル

$$2y = a-c$$

$$\text{トナル故} = y = \frac{1}{2}(a-c)$$

第貳式, 第三式相ヒ加フルルル

$$2x = b+c$$

$$\text{故} = x = \frac{1}{2}(b+c)$$

仍テ所要ノ答式ハ  $x = \frac{1}{2}(b+c), y = \frac{1}{2}(a-c), z = \frac{1}{2}(a-b)$  ナリ.

(20) 第壹式ニ 2 ヲ乘シ第貳式ヨリ減スルルル

$$6x+2y = -10, \quad \text{(甲)}$$

第壹式ニ 3 ヲ乘シ第三式ヨリ減スルルル

$$24x+6y = -26 \quad \text{(乙)}$$

トナル是ニ於テ(甲)式ニ 3 ヲ乘シ(乙)式ヨリ減スルルル

$$6x = 4$$

$$\text{故} = x = \frac{2}{3}$$

是ヲ(甲)式ニ入レ代ヘテ項ヲ移スルルル

$$2y = -10 - 4 = -14$$

$$\text{故} = y = -7$$

之ノ値ヲ第壹式ニ入レ代ヘテ項ヲ移スルルル

$$z = 30 + 7 - \frac{2}{3} = 36\frac{1}{3}$$

仍テ所要ノ答數ハ  $x = \frac{2}{3}, y = -7, z = 36\frac{1}{3}$  ナリ.



(21) 第一式 = 3 を乗シ以テ第二式 = 加フルルルル

$$44x + 45y = 1653 \quad (\text{甲})$$

トナル次 = 第一式 = 14 を乗シ第三式 = 5 を乗シ相加フルルルル

$$287x - 58y = 1754 \quad (\text{乙})$$

トナル是ニ於テ(甲)式 = 58 を乗シ(乙)式 = 45 を乗シ相加フルルル

$$\begin{array}{r} 2552x + 2610y = 95874 \\ 12015x - 2610y = 78930 \\ \hline 14567x = 174804 \end{array}$$

$$\text{故ニ} \quad x = 174804 \div 14567 = 12$$

是ヲ(甲)式ニ入レ代ヘ其項ヲ移スルル

$$45y = 1653 - 44 \times 12 = 1125$$

$$\text{故ニ} \quad y = 1125 \div 45 = 25$$

又、yノ値ヲ第一式ニ入レ代ヘ項ヲ移スルル

$$-5z = 11 - 18 \times 12 + 7 \times 25 = -30$$

$$\text{故ニ} \quad z = 6$$

仍テ所要ノ答數ハ  $x = 12, y = 25, z = 6$  ナリ。

(22) 第一式 = 2 を乗シ之ヨリ第二式ヲ減スルルル

$$\frac{4}{x} - \frac{10}{3y} + \frac{2}{z} = 3 \frac{4}{27} \times 2$$

$$\frac{1}{4x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 6 \frac{11}{72}$$

$$\left(4 - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{x} - \left(\frac{10}{3} + 1\right) \frac{1}{y} = 3 \frac{4}{27} \times 2 - 6 \frac{11}{72}$$

$$\frac{15}{4} \frac{1}{x} - \frac{13}{3} \frac{1}{y} = \frac{31}{216} \quad (\text{甲})$$

次 = 第二式 = 2 を乗シ之ヨリ第三式ヲ減スルルルル次ノ如シ

$$\frac{1}{2x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = 6 \frac{11}{72} \times 2$$

$$\frac{5}{6x} - \frac{1}{y} + \frac{4}{z} = 12 \frac{1}{36}$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right) \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 6 \frac{11}{72} \times 2 - 12 \frac{1}{36}$$

$$\text{即チ} \quad -\frac{1}{3} \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{5}{18} \quad (\text{乙})$$

是ニ於テ(甲)式 =  $\frac{3}{18}$ , (乙)式 =  $\frac{1}{3}$  を乗シテ相加フルルルル次ノ

如シ

$$\frac{45}{52} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{31}{936}$$

$$-\frac{1}{9} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{54}$$

$$\left(\frac{45}{52} - \frac{1}{9}\right) \frac{1}{x} = \frac{31}{936} + \frac{5}{54}$$

$$\text{即チ} \quad \frac{353}{468} \frac{1}{x} = \frac{353}{2808}$$

$$\text{故ニ} \quad x = \frac{353}{468} \div \frac{353}{2808} = 6$$

是ヲ(乙)式ニ入レ代ヘ其項ヲ移スルルル

$$\frac{3}{y} = \frac{5}{18} + \frac{1}{18} = \frac{6}{18}$$

$$\text{故ニ} \quad y = 3 \div \frac{6}{18} = 9$$

又、yノ値ヲ第一式ニ入レ代ヘ項ヲ移スルルル



$$\frac{1}{z} = 3 \frac{4}{27} - \frac{1}{3} + \frac{5}{27} = 3$$

故 =  $z = \frac{1}{3}$

仍テ所要ノ答數ハ  $x=6, y=9, z=\frac{1}{3}$  ナリ.

(23) 三式ノ分母ヲ去ルルハ次ノ如シ

$$6x+3y+2z+18=0, \quad 6x+4y+3z+36=0,$$

$$20x+15y+12z+180=0,$$

是ニ於テ第壹式ニ3ヲ乘シ第貳式ニ2ヲ乘シ相減スルルハ

$$6x+y-18=0 \quad (\text{甲})$$

次ニ第壹式ニ6ヲ乘シ之ヨリ第三式ヲ減スルルハ

$$16x+3y-72=0 \quad (\text{乙})$$

(甲)式ニ3ヲ乘シ之ヨリ(乙)式ヲ減スルルハ

$$2x+18=0$$

是ヨリ  $x=-9$

是ヲ(甲)式ニ入レ代ヘ其項ヲ移スルハ

$$y=18+54=72$$

$x, y$ ノ値ヲ第壹式ニ入レ代ヘ項ヲ移スルハ

$$2z=54-216-18=-180$$

故 =  $z=-90$

仍テ所要ノ答數ハ  $x=-9, y=72, z=-90$  ナリ.

(24) 第壹式, 第貳式相加ヘ其和ヨリ第三式ヲ減スルルハ

$$\frac{2}{x} = a+b-c$$

故 =  $x = \frac{2}{a+b-c}$

次ニ第壹式, 第三式ノ和ヨリ第貳式ヲ減スルルハ

$$\frac{2}{y} = c+a-b$$

故 =  $y = \frac{2}{c+a-b}$

又第貳式, 第三式ノ和ヨリ第壹式ヲ減スルルハ

$$\frac{2}{z} = b+c-a$$

故 =  $z = \frac{2}{b+c-a}$

仍テ所要ノ答數ハ  $x = \frac{2}{a+b-c}, y = \frac{2}{c+a-b}, z = \frac{2}{b+c-a}$  ナリ.

(25) 第壹式ニcヲ乘シ第貳式ヨリ減スルルハ

$$a(a-c)x+b(b-c)y=d(d-c) \quad (\text{甲})$$

第貳式ニcヲ乘シ第三式ヨリ減スルルハ

$$a^2(a-c)x+b^2(b-c)y=d^2(d-c) \quad (\text{乙})$$

是ニ於テ(甲)式ニbヲ乘シ(乙)式ト相減スルルハ

$$a(a-b)(a-c)x=d(d-b)(d-c)$$

故 =  $x = \frac{d(d-b)(d-c)}{a(a-b)(a-c)}$

同式ハ  $a, b, c; x, y, z$ ニ關シテ同形ヲ有スルモノナルニヨリ單ニ

$a, b, c$ ナル三文字ノ交換ニヨリテ  $y, z$ ヲ得ベシ即チ其值ハ下ノ

如シ

$$y = \frac{d(d-c)(d-a)}{b(b-c)(b-a)}$$

$$z = \frac{d(d-a)(d-b)}{c(c-a)(c-b)}$$



仍テ所要ノ答式ハ  $x = \frac{d(d-b)(d-c)}{a(a-b)(a-c)}, y = \frac{d(d-c)(d-a)}{b(b-c)(b-a)},$   
 $z = \frac{d(d-a)(d-b)}{c(c-a)(c-b)}$  ナリ。

(26) 第一式 =  $a$  ナ乗シ之ヨリ第二式ヲ減スルニ

$$(a-b)x + (a-c)y = a^2 - bc \quad \text{(甲)}$$

第一式 =  $b$  ナ乗シ第三式ト相減シテ

$$(b-c)x - (a-b)y = b^2 - ca \quad \text{(乙)}$$

是ニ於テ(甲)式 =  $a-b$  ナ乗シ(乙)式 =  $a-c$  ナ乗シテ相加フルニ

$$\{(a-b)^2 + (a-c)(b-c)\}x = (a^2 - bc)(a-b) + (b^2 - ca)(a-c)$$

$$\text{即チ } (a^2 + b^2 + c^2 - ca - ab - bc)x = a(a^2 + b^2 + c^2 - ca - ab - bc)$$

$$\text{故ニ } x = a$$

是ヲ(甲)式ニ入レ代ヘ項ヲ移スルニ

$$(a-c)y = a^2 - bc - a(a-b) = b(a-c)$$

$$\text{故ニ } y = b$$

$x, y$  ノ値ヲ第一式ニ入レ代ヘ項ヲ移スルニ

$$z = a + b + c - a - b = c$$

仍テ所要ノ答式ハ  $x = a, y = b, z = c$  ナリ。

(27) 第一式 =  $a$  ナ乗シ第二式ト相減スルニ

$$(a-b)x + (a-c)y = b(a-b) + c(a-c) \quad \text{(甲)}$$

第一式 =  $b$  ナ乗シ第三式ト相減スルニ

$$(b-c)x - (a-b)y = a(b-a) + c(b-c) \quad \text{(乙)}$$

(甲)式 =  $a-b$  ナ乗シ(乙)式 =  $a-c$  ナ乗シ相ヒ加フルニ

$$\{(a-b)^2 + (a-c)(b-c)\}x = b(a-b)^2 - a(a-b)(a-c) + c(a-c)^2$$

$$\text{故ニ } x = b + c - a$$

是ヲ(甲)式ニ入レ代ヘ項ヲ移スルニ

$$(a-c)y = b(a-b) + c(a-c) - b(a-b) + (a-b)(a-c) \\ = (a-c)(c+a-b)$$

$$\text{故ニ } y = c + a - b$$

$x, y$  ノ値ヲ第一式ニ入レ代ヘ項ヲ移スルニ

$$z = a + b - c$$

仍テ所要ノ答式ハ  $x = b + c - a, y = c + a - b, z = a + b - c$  ナリ。

(28) 第一式 =  $a+\gamma$ , 第二式 =  $b+\gamma$  ナ乗シ相減スルニ

$$\left(\frac{a+\gamma}{a+\alpha} - \frac{b+\gamma}{b+\alpha}\right)x + \left(\frac{a+\gamma}{a+\beta} - \frac{b+\gamma}{b+\beta}\right)y = a-b$$

$$\text{即チ } \frac{(a-b)(a-\gamma)}{(a+\alpha)(b+\alpha)}x + \frac{(a-b)(\beta-\gamma)}{(a+\beta)(b+\beta)}y = a-b$$

全式ヲ  $a-b$  ニテ除スルニ

$$\frac{a-\gamma}{(a+\alpha)(b+\alpha)}x + \frac{\beta-\gamma}{(a+\beta)(b+\beta)}y = 1 \quad \text{(甲)}$$

次ニ第二式 =  $b+\gamma$ , 第三式 =  $c+\gamma$  ナ乗シ相減スルニ

$$\left(\frac{b+\gamma}{b+\alpha} - \frac{c+\gamma}{c+\alpha}\right)x + \left(\frac{b+\gamma}{b+\beta} - \frac{c+\gamma}{c+\beta}\right)y = b-c$$

$$\text{即チ } \frac{(b-c)(a-\gamma)}{(b+\alpha)(c+\alpha)}x + \frac{(b-c)(\beta-\gamma)}{(b+\beta)(c+\beta)}y = b-c$$

全式ヲ  $b-c$  ニテ除スルニ

$$\frac{a-\gamma}{(b+\alpha)(c+\alpha)}x + \frac{\beta-\gamma}{(b+\beta)(c+\beta)}y = 1 \quad \text{(乙)}$$

是ニ於テ(甲)式 =  $a+\beta$ , (乙)式 =  $c+\beta$  ナ乗シ相減スルニ



$$\frac{\alpha-\gamma}{b+\alpha} \left( \frac{a+\beta}{a+\alpha} - \frac{c+\beta}{c+\alpha} \right) x = a-e$$

即ち 
$$\frac{(\alpha-c)(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)}{(a+\alpha)(b+\alpha)(c+\alpha)} x = a-e$$

故に 
$$x = \frac{(a+\alpha)(b+\alpha)(c+\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

原式ヲ見ルニ  $a, b, c; \alpha, \beta, \gamma$  = 關シテ其形ヲ同ク依テ此等ノ文字ノ交換ニヨリテ  $y, z$  ノ値ヲ得ル下ノ如シ

$$y = \frac{(a+\beta)(b+\beta)(c+\beta)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}$$

$$z = \frac{(a+\gamma)(b+\gamma)(c+\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

仍テ所要ノ答式ハ  $x = \frac{(a+\alpha)(b+\alpha)(c+\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}, y = \frac{(a+\beta)(b+\beta)(c+\beta)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}$

$$z = \frac{(a+\gamma)(b+\gamma)(c+\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \text{ ナリ.}$$

(29) 第一式 = 2ヲ乘シ第二式ヨリ減スルキハ

$$14x+6y+2z = 7 \quad \text{(甲)}$$

第一式 = 3ヲ乘シ第三式ヨリ減スルキハ

$$78x+24y+6z = 33 \quad \text{(乙)}$$

第一式 = 4ヲ乘シ第四式ヨリ減スルキハ

$$252x+60y+12z = 96 \quad \text{(丙)}$$

(乙)式ヲ3除シ之ヨリ(甲)式ヲ減スルキハ

$$12x+2y = 4 \quad \text{(丁)}$$

(丙)式ヲ6除シ之ヨリ(甲)式ヲ減スルキハ

$$28x+4y = 9 \quad \text{(戊)}$$

(丁)式 = 2ヲ乘シ(戊)式ヨリ減スルキハ

$$4x = 1$$

故に 
$$x = \frac{1}{4}$$

之ヲ(丁)式ニ入レ代ヘテ其項ヲ移スルキハ

$$2y = 4 - 3 = 1$$

故に 
$$y = \frac{1}{2}$$

$x, y$  ノ値ヲ(甲)式ニ入レ代ヘテ其項ヲ移スルキハ

$$2z = 7 - 3 \frac{1}{2} - 8 = \frac{1}{2}$$

故に 
$$z = \frac{1}{4}$$

是ニ於テ  $x, y, z$  ノ値ヲ第一式ニ入レ代ヘテ其項ヲ移スルキハ

$$u = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$$

仍テ所要ノ答數ハ  $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{4}, u = 0$  ナリ.

注意 本問題解答中解式ノ總テ毎問未知量ヲ次第ニ消去シ以テ終ニ壹未知量ヲ有スル方程式ヲ作りテ其未知量ヲ算出シ然ル後テ其算出シ得タル答數ヲ次第ニ方程式ニ入レ代ヘ以テ順次他ノ未知量ヲ算出セリ然レモ98款(甲),(乙)兩式ニヨルキハ二元壹次方程式及ビ三元壹次方程式ヲ直ニ解クヲ得ベシ例ヘバ問題(26)ニ於テハ98款乙式ニヨリ算スルキハ

$$z = \frac{(a+b+c)(bc-a^2) + (bc+ca+ab)(a-b) + (bc+ca+ab)(a-c)}{bc-a^2+b(a-b)+c(a-c)}$$

$$= \frac{a(bc+ca+ab-a^2-b^2-c^2)}{bc+ca+ab-a^2-b^2-c^2}$$

$$= a$$

ヲ得ベシ同様ニシテ  $y, z$  ヲ算スルキハ  $y=b, z=c$  ヲ得ベシ.



## 第六編

## 貳次方程式

99. 兩因子ノ積が0ニ等シキハ其因子ノ壹ハ必ラズ0ニ等シカラザルヲ得ズ例ヘキ

$$ab=0$$

ニ於テaが若シ0ナラザレバ本式ヲaニテ除シ

$$b=0$$

ヲ得ベシ若シ復タbが0ナラザレバ本式ヲbニテ除シ

$$a=0$$

ヲ得ベシ而シテa, bノ孰レカ0トナルハ他ノ壹數ハ如何ナル數ナルモ其積ハ明カニ0ニ等シカルベシ故ニ兩因子ノ積が0ニ等シキハ其因子ノ壹ハ必ラズ0ニ等シカラザルヲ得ズ

此理ニヨリ

$$(x-4)(x-5)=0$$

ノ如キ方程式ニ適合スベキxノ値ハ容易ニ算出シ得ラルベシ蓋シx-4, x-5ナル兩因子ノ積が0ニ等シキ爲メニハ上ノ理ニヨリ其兩因子ノ壹ハ必ラズ0ニ等シカラザルヲ得ズ然ルニxハ未知數ナルニヨリxニ適當ノ數ヲ與ヘ以テ前ノ因子又ハ後ノ因子ヲ0ニ等シカラシムルヲ得ベシ乃ハ前ノ因子ヲ0ニ等シシ

$$x-4=0$$

トスルハx=4ヲ得ベシ今xヲ4トスルハ前ノ因子ハ0トナリ後ノ因子ハ4-5即チ-1トナリ其積0×-1ハ0トナルハシ故ニx=4ハ明カニ此方程式ニ適合スル數ナリ次ニ後ノ因子ヲ0

ニ等シカラシメ

$$x-5=0$$

トスルハx=5ヲ得ベシ今xヲ5トスルハ前ノ因子ハ5-4即チ1トナレバ後ノ因子ハ0トナルハ故ニ其兩因子ノ積1×0ハ0トナルベシ仍テx=5ハ亦タ原方程式ニ適合スルxノ値ナルヲ明カナリ.

今4及ビ5ヲ除キ其他ノ數ヲxニ代入フルハx-4及ビx-5ハ貳ツナガラ0トナラザルハ故ニ其積ハ亦タ0ニ等シカラザルベシ依テx=4, x=5ハ貳ツナガラ上ノ方程式ニ適合シ其他ノ數ハ如何ナル數ニテモ其方程式ニ適合セザルベシ.

例壹  $(x-a)(x+b)(x-c)=0$ ニ適合スルxノ値ヲ求ム.

第壹因子ヲ0トスルハx=aヲ得、次ニ第貳因子ヲ0ニ等シカラシムルハx=-bヲ得、終リニ第三因子ヲ0ニ等シカラシムルハx=cヲ得、是ニ由テ所要ノxノ値ハ

$$a, -b, c$$

ノ三者ナリ.

例貳  $x^2-2x=15$ ニ適合スルxノ値ヲ求ム.

此方程式ノ右節ノ數ヲ左節ニ移スルハ

$$x^2-2x-15=0$$

トナル今此左節ノ式ヲ因子分解スルハ

$$(x-5)(x+3)=0$$

トナル是ニ於テ其第壹因子ヲ0ニ等シカラシメx-5=0トナスルハx=5ヲ得、次ニ第貳因子ヲ0ニ等シカラシメx+3=0トナスルハx=-3ヲ得、仍テ所要ノ答數ハ5又ハ-3ナリ.



100. 壹未知量  $x$  ヲ有スル貳次方程式ニ於テ其諸項ヲ左節ニ集ムルルキハ常ニ

$$ax^2+bx+c=0 \quad \text{(甲)}$$

ナル形状ノ式ヲ得ベシ今此式ヲ  $a$  ニテ通除スルルキハ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad \text{(乙)}$$

トナル倍テ此式ニ  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$  フ加フルルキ  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$  ハ  $0$ ニ等シキガ故ニ(甲)式ハ夫ガ爲メ毫モ其値ニ於テ變化ヲ生ゼザルベシ故ニ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$

然ルニ  $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ニ等シク、 $-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}$ ハ  $-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}$  即チ  $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ ニ等シ是ニヨリテ上式ハ

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

トナル今此式ノ左節ヲ39款III式ニヨリ因子分解スルルキハ

$$\left\{x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}=0$$

トナルベシ是ニ於テ第壹因子ヲ  $0$ ニ等シカラシムルルキハ

$$x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

又第貳因子ヲ  $0$ ニ等シカラシムルルキハ

$$x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

*Notes*  
*Very interesting*

ヲ得ベシ故ニ  $x$ ノ値ハ

$$-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{又ハ} \quad -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ナリ今便宜ノ爲メ此兩式ヲ壹式ニ結合シ以テ次ノ如ク簡記ス

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{(丙)}$$

$a, b, c$  三數ノ工合ニヨリ  $b^2-4ac$ ハ正量トナルトアリ、 $0$ トナルトアリ又ハ負量トナルトアルベシ。

第壹  $b^2-4ac$ ガ正量ナルルキハ(丙)式ニヨリ  $x$ ノ値トシテ相ヒ異ナレル貳個ノ答數ヲ得ベシ。

第貳  $b^2-4ac$ ガ  $0$ ナルルキハ其平方根ハ明カニ  $0$ ニ等シキガ故ニ(丙)式ヨリ唯壹個ノ答數ヲ得ベシ即チ此場合ニ於テハ貳個ノ答數ガ相ヒ壹致セルナリ。

第三  $b^2-4ac$ ガ負量ナルルキハ  $\sqrt{b^2-4ac}$ ハ成リ立タザルベシ何ントナレバ從來論シ來レル正量及ビ負量ハ其平方ガ常ニ正量トナリ決シテ負量トハナラザレバナリ斯ノ如ク從來論シ來レル量トハ全ク其性質ヲ異ニセル此量ヲ虚量ト稱ス即チ  $b^2-4ac$ ガ負量ナルルキ  $\sqrt{b^2-4ac}$ ハ虚量ナリ故ニ  $b^2-4ac$ ガ負量ナルルキハ(丙)式ニヨリ  $x$ ノ答數ハ二個アリ前ノ貳ツナガラ虚量ヲ含ム。

虚量ニ對シ虚量ナラザル普通ノ量ヲ實量ト稱ス。

101. 壹元貳次方程式解法ノ二三例ヲ下ニ示ス

例壹  $x^2-5x+24=0$ ニヨリ  $x$ ノ値ヲ算出セヨ。

本式ノ項ヲ移スルルキハ

$$x^2-5x-24=0$$



トナル今之ヲ前款ノ(甲)式ニ對照スルルキハ

$$a=1, b=-5, c=-24$$

ナリ故ニ(丙)式ニヨリ

$$\begin{aligned} x &= \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times (-24)}}{2 \times 1} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{2} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{121}}{2} \\ &= \frac{5 \pm 11}{2} \\ &= \frac{5+11}{2} \quad \text{又ハ} \quad \frac{5-11}{2} \\ &= 8 \quad \text{又ハ} \quad -3 \end{aligned}$$

仍テ所要ノ答數ハ 8 又ハ -3 ナリ。

例貳  $5x^2 - 27x + 70 = 36$  ナ解ケ。

項ヲ移シテ  $5x^2 - 27x + 34 = 0$

之ヲ(甲),(丙)兩式ニ對照シテ算スルルキハ

$$\begin{aligned} x &= \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \times 5 \times 34}}{2 \times 5} = \frac{27 \pm \sqrt{729 - 680}}{10} \\ &= \frac{27 \pm \sqrt{49}}{10} = \frac{27+7}{10} \\ &= \frac{34}{10} \quad \text{又ハ} \quad \frac{20}{10} \\ &= 3\frac{2}{5} \quad \text{又ハ} \quad 2 \end{aligned}$$

仍テ所要ノ答數ハ  $3\frac{2}{5}$  又ハ 2 ナリ。

102. 貳個ノ未知量ヲ有スル貳タ組ミノ貳次方程式ハ壹般ニ貳次方程式ノ算法ニヨリテ解クヲ能ハザルモノナリ然レモ貳タ組ミノ方程式中壹式ガ壹次式ナルルキハ容易ニ其兩未知量ヲ算出スルヲ得ベシ又タ貳タ組ミノ式ガ兩ツナガラ貳次ノ同次式ナルルキモ亦タ貳次方程式ノ算法ニヨリテ兩未知量ヲ算出スルヲ得ベシ其他高次ノ方程式ニテモ時ニヨリ貳次方程式ノ算法ノ助ケニ籍リテ容易ニ其未知量ヲ算出シ得ルアリ今二三例ヲ下ニ示スベシ。

例壹  $3x+y=18, x^2+2y^2=43$  ヨリ  $x, y$  ナ算出セヨ。

第壹式ヨリ項ヲ移シテ  $y=18-3x$  ナ得ベシ由テ第貳式ニ於テ  $y$  ニ代フルニ  $18-3x$  ナ以テスルルキハ

$$x^2 + 2(18-3x)^2 = 43$$

即チ  $x^2 + 648 - 216x + 18x^2 = 43$

トナル項ヲ移スルルキハ

$$19x^2 - 216x + 605 = 0$$

是ヨリ 100 款丙式ヲ用ヒ  $x$  ナ算出スルルキハ

$$\begin{aligned} x &= \frac{216 \pm \sqrt{216^2 - 4 \times 19 \times 605}}{2 \times 19} \\ &= \frac{216 \pm 26}{38} \\ &= \frac{216+26}{38} \quad \text{又ハ} \quad \frac{216-26}{38} \\ &= 5 \quad \text{又ハ} \quad \frac{121}{19} \end{aligned}$$

之ヲ第壹式ニ入レ代ヘ  $y=3$  又ハ  $-\frac{21}{19}$  ナ得ベシ。



例貳  $x^2+xy=35, xy+5y^2=30$  より  $x, y$  を算出せよ。

第一式を第二式で除すルルル

$$\frac{x^2+xy}{xy+5y^2} = \frac{35}{30} = \frac{7}{6}$$

トナル今此式の分母を去ルルル

$$6x^2+6xy=7xy+35y^2$$

トナル項を移シテ  $6x^2-xy-35y^2=0$

之ヲ因子分解シテ  $(2x-5y)(3x+7y)=0$

是ニ由リテ  $2x-5y=0$  又ハ  $3x+7y=0$

ナリ今  $2x-5y=0$  トスルルル  $y=\frac{2}{5}x$  トナル是ヲ

$$x^2+xy=35$$

ニ入レ代ユルルル  $x^2+\frac{2}{5}x^2=35$

即チ  $\frac{7}{5}x^2=35$

故ニ  $x^2=25$

項を移シテ因子分解スルルル  $(x-5)(x+5)=0$  トナル

故ニ  $x=5$  又ハ  $-5$

是ヲ  $y=\frac{2}{5}x$  ニ入レ代ユルルル

$$y=2$$
 又ハ  $-2$

次ニ  $3x+7y=0$  より  $y=-\frac{3}{7}x$  を得、是ヲ

$$x^2+xy=35$$

ニ入レ代ユルルル  $x^2-\frac{3}{7}x^2=35$

即チ  $\frac{4}{7}x^2=35$

是ヨリ  $4x^2-245=0$

即チ  $(2x-7\sqrt{5})(2x+7\sqrt{5})=0$

故ニ  $x = \frac{7\sqrt{5}}{2}$  又ハ  $-\frac{7\sqrt{5}}{2}$

是ヲ  $y = -\frac{3}{7}x$  ニ入レ代ユルルル

$$y = -\frac{3\sqrt{5}}{2}$$
 又ハ  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

仍テ所要ノ答數ハ四組アリ即チ  $x=5, y=2; x=-5, y=-2;$

$x = \frac{7\sqrt{5}}{2}, y = -\frac{3\sqrt{5}}{2}; x = -\frac{7\sqrt{5}}{2}, y = \frac{3\sqrt{5}}{2}$  ナリ。

例三  $x-y=2a, x^5-y^5=b^5$  より  $x, y$  を算出せよ。

$x=z+a$  トス但シ  $z$  ハ未知量ナリ然ルルルル第一式ヨリ  $y=z-a$  ヲ得ベシ而シテ

$$x^5 = (z+a)^5 = z^5 + 5az^4 + 10a^2z^3 + 10a^3z^2 + 5a^4z + a^5,$$

$$y^5 = (z-a)^5 = z^5 - 5az^4 + 10a^2z^3 - 10a^3z^2 + 5a^4z - a^5$$

故ニ  $x^5 - y^5 = 10az^4 + 20a^3z^2 + 2a^5 = b^5$

是ニ於テ項を移スルルル

$$10az^4 + 20a^3z^2 + 2a^5 - b^5 = 0$$

$10a$  ヲ以テ全式ヲ除スルルル

$$z^4 + 2a^2z^2 + \frac{2a^5 - b^5}{10a} = 0$$

即チ  $z^4 + 2a^2z^2 + a^4 - a^4 + \frac{2a^5 - b^5}{10a} = 0$

即チ  $(z^2 + a^2)^2 - \frac{8a^5 + b^5}{10a} = 0$

之ヲ因子分解シテ  $\left\{ z^2 + a^2 - \sqrt{\frac{8a^5 + b^5}{10a}} \right\} \left\{ z^2 + a^2 + \sqrt{\frac{8a^5 + b^5}{10a}} \right\} = 0$



$$\text{ヲ得,故ニ} \quad z = \pm \sqrt{-a^2 \pm \sqrt{\frac{8a^5 + b^5}{10a}}}$$

$$\text{依テ} \quad x = a + z = a \pm \sqrt{-a^2 \pm \sqrt{\frac{8a^5 + b^5}{10a}}}$$

$$y = -a + z = -a \pm \sqrt{-a^2 \pm \sqrt{\frac{8a^5 + b^5}{10a}}}$$

是レ所要ノ答式ナリ。

103.  $ax^2 + bx + c = 0$  ヨリ  $x$  ナ算出スルキハ 100 款丙式ニヨリ

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{又ハ} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ナル貳個ノ答數アリ之ヲ孰レモ  $ax^2 + bx + c = 0$  ナル方程式ノ根ト稱ス今壹根ヲ  $x_1$  ニテ表ハシ他ノ壹根ヲ  $x_2$  ニテ表スルハ

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ナリ故ニ

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

トナル仍テ  $ax^2 + bx + c = 0$  ナル貳次方程式ノ貳根ノ和ハ  $x$  ノ係數  $b$  ナ  $x^2$  ノ係數  $a$  ニテ除セルモノト其數相ヒ同シクシテ記號相ヒ

反セルモノナリ又貳根ノ積ハ  $x$  ナ帶ビザル項ナ  $x^2$  ノ係數ニテ除セルモノニ等シ。

### 問題

次ノ諸方程式ヨリ未知量ヲ算出スベシ但シ未知量ハ  $x, y$  等ノ文字ヲ以テ表ハス

$$(1) \quad 5x^2 - 61x = -12,$$

$$(2) \quad 5x^2 - 27 = 20x + 33$$

$$(3) \quad 3x^2 - 2x = 408$$

$$(4) \quad x^2 + 6x = 27$$

$$(5) \quad 20748 - 1616x + 21x^2 = 0$$

$$(6) \quad 622x = 15x^2 + 6384$$

$$(7) \quad \frac{x}{x+60} = \frac{7}{3x-5}$$

$$(8) \quad \frac{8x}{x+2} - 6 = \frac{20}{3x}$$

$$(9) \quad \frac{x}{9-x} + \frac{9-x}{x} = 25$$

$$(10) \quad x^2 + (a+b)x + ab = 0$$

$$(11) \quad ax^2 - 2bx = c$$

$$(12) \quad x^2 + 2(b-c)x + c^2 = 2bc$$

$$(13) \quad \frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

$$(14) \quad \frac{1}{x-a-b} = \frac{1}{x} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

$$(15) \quad x - y = 6$$

$$xy = 91$$

$$(16) \quad x + y = a$$

$$(17) \quad x + y + xy = 34$$

$$x^2 + y^2 = b^2$$

$$x^2 + y^2 = 52$$

$$(18) \quad x^3 + y^3 = 9$$

$$(19) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 3$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}$$

$$(20) \quad x + y = 2b$$

$$(21) \quad yz = a^2, \quad zx = b^2, \quad xy = c^2$$

$$x^4 + y^4 = 2a^4$$



$$(22) \quad \frac{y+z}{a} = \frac{z+x}{b} = \frac{x+y}{c} = 2xyz$$

$$(23) \quad yz=a+y+z, \quad zx=b+z+x, \quad xy=c+x+y.$$

(24)  $2x^2-5x+3=0$  の二根を  $\alpha, \beta$  とスルルル  $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$  を根トシテ有セル二次方程式ハ  $6x^2-13x+6=0$  ナリ其證如何.

(25)  $4x^2+(1+a)x+1=0$  ナル方程式ニ於テ  $a$  何ナル數ナルルル其二根相ヒ等シクナルルナ.

(26)  $x^2+mx+m^2+a=0$  ナル方程式ノ二根ヲ  $x_1, x_2$  トスルルル  $x_1^2+x_1x_2+x_2^2+a=0$  ナリ其理如何.

### 問題解答

(1) 項ヲ移スルルル  $5x^2-61x+12=0$  トナル是ニ於テ 100 款(丙)式ニヨリ  $x$  ヲ算スルルル

$$x = \frac{61 \pm \sqrt{61^2 - 4 \times 5 \times 12}}{2 \times 5} = \frac{61 \pm 59}{10} = 12 \text{ 又ハ } \frac{1}{5}$$

仍テ所要ノ答數ハ 12 又ハ  $\frac{1}{5}$  ナリ.

$$(2) \quad \text{項ヲ移シテ} \quad 5x^2-20x-60=0$$

$$\text{全式ヲ 5 除シテ} \quad x^2-4x-12=0$$

$$\text{是ヨリ 100 款(丙)式ニヨリ} \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \times 1 \times 12}}{1 \times 2}$$

$$= \frac{4 \pm 8}{2} = 6 \text{ 又ハ } -2$$

仍テ所要ノ答數ハ 6 又ハ  $-2$  ナリ.

$$(3) \quad \text{項ヲ移シテ} \quad 3x^2-2x-408=0$$

$$\text{是ヨリ} \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \times 3 \times 408}}{2 \times 3} = \frac{2 \pm 70}{6} = 12 \text{ 又ハ } -11\frac{1}{3}$$

仍テ所要ノ答數ハ 12 又ハ  $-11\frac{1}{3}$  ナリ.

$$(4) \quad \text{項ヲ移シテ} \quad x^2+6x-27=0$$

$$\text{是ヨリ} \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 + 4 \times 1 \times 27}}{2 \times 1} = \frac{-6 \pm 12}{2} = 3 \text{ 又ハ } -9$$

仍テ所要ノ答數ハ 3 又ハ  $-9$  ナリ.

(5) 100 款(丙)式ニヨリ

$$x = \frac{1616 \pm \sqrt{1616^2 - 4 \times 21 \times 20748}}{2 \times 21}$$

$$= \frac{1616 \pm 932}{42} = 60\frac{2}{3} \text{ 又ハ } 16\frac{2}{3}$$

仍テ所要ノ答數ハ  $60\frac{2}{3}$  又ハ  $16\frac{2}{3}$  ナリ.

$$(6) \quad \text{項ヲ移シテ} \quad 15x^2-622x+6384=0$$

$$\text{是ヨリ} \quad x = \frac{622 \pm \sqrt{622^2 - 4 \times 15 \times 6384}}{2 \times 15}$$

$$= \frac{622 \pm 62}{30} = 22\frac{4}{3} \text{ 又ハ } 18\frac{2}{3}$$

仍テ所要ノ答數ハ  $22\frac{4}{3}$  又ハ  $18\frac{2}{3}$  ナリ.

$$(7) \quad \text{分母ヲ去ルルル} \quad x(3x-5)=7(x+60)$$

$$\text{即チ} \quad 3x^2-5x=7x+420$$

$$\text{項ヲ移シテ} \quad 3x^2-12x-420=0$$

$$\text{是ヨリ} \quad x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 + 4 \times 3 \times 420}}{2 \times 3} = \frac{12 \pm 72}{6} = 14 \text{ 又ハ } -10$$

仍テ所要ノ答數ハ 14 又ハ  $-10$  ナリ.



(8) 分母ヲ去ルルハ  $24x^2 - 18x(x+2) = 20(x+2)$

即チ  $24x^2 - 18x^2 - 36x = 20x + 40$

項ヲ移シテ  $6x^2 - 56x - 40 = 0$

是ヨリ  $x = \frac{56 \pm \sqrt{56^2 + 4 \times 6 \times 40}}{2 \times 6} = \frac{56 \pm 64}{12} = 10 \text{ 又ハ } -\frac{2}{3}$

仍テ所要ノ答數ハ 10 又ハ  $-\frac{2}{3}$  ナリ。

(9) 右節ノ 2・5 ナ 2 $\frac{1}{2}$  トナシ然ル後チ全式ノ分母ヲ去ルルハ

$$2x^2 + 2(9-x)^2 = 5x(9-x)$$

即チ  $2x^2 + 162 - 36x + 2x^2 = 45x - 5x^2$

項ヲ移シテ  $9x^2 - 81x + 162 = 0$

全式ヲ 9 除シテ  $x^2 - 9x + 18 = 0$

之ヲ因子分解スルルハ  $(x-3)(x-6) = 0$

故ニ  $x = 3 \text{ 又ハ } 6$

仍テ所要ノ答數ハ 3 又ハ 6 ナリ。

(10) 本式ノ左節ヲ因子分解スルルハ

$$(x+a)(x+b) = 0$$

トナル故ニ  $x = -a \text{ 又ハ } -b$

仍テ所要ノ答式ハ  $-a \text{ 又ハ } -b$  ナリ。

(11) 項ヲ移シテ  $ax^2 - 2bx - c = 0$

是ヨリ  $x = \frac{2b \pm \sqrt{(2b)^2 + 4ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + ac}}{a}$

仍テ所要ノ答式ハ  $\frac{b \pm \sqrt{b^2 + ac}}{a}$  ナリ。

(12) 項ヲ移シテ  $x^2 + 2(b-c)x + (c^2 - 2bc) = 0$

是ヨリ  $x = \frac{-2(b-c) \pm \sqrt{4(b-c)^2 - 4(c^2 - 2bc)}}{2}$   
 $= \frac{-2(b-c) \pm 2b}{2} = c \text{ 又ハ } c-2b$

仍テ所要ノ答式ハ  $c \text{ 又ハ } c-2b$  ナリ。

(13) 項ヲ移シテ然ル後チ減算ヲ施ス $\Gamma$ 次ノ如クス

$$\frac{a}{x-a} - \frac{a}{b} + \frac{b}{x-b} - \frac{b}{a} = 0$$

即チ  $\frac{a(b+a-x)}{b(x-a)} + \frac{b(a+b-x)}{a(x-b)} = 0$

即チ  $(a+b-x) \left\{ \frac{a}{b(x-a)} + \frac{b}{a(x-b)} \right\} = 0$

是ニ於テ第壹因子ヲ 0 = 等シカラシムルルハ

$$x = a + b$$

ヲ得、次ニ第貳因子ヲ 0 = 等シカラシムルルハ

$$\frac{a}{b(x-a)} + \frac{b}{a(x-b)} = 0$$

此式ノ分母ヲ去ルルハ

$$a^2x - a^2b + b^2x - ab^2 = 0$$

項ヲ移シテ  $(a^2 + b^2)x = a^2b + ab^2 = ab(a+b)$

故ニ  $x = \frac{ab(a+b)}{a^2 + b^2}$

仍テ所要ノ答式ハ  $a+b \text{ 又ハ } \frac{ab(a+b)}{a^2 + b^2}$  ナリ。

(14) 項ヲ移シテ次ノ如クス



$$\frac{1}{x-a-b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{x} = 0$$

即チ  $\frac{x-b}{a(x-a-b)} + \frac{x-b}{bx} = 0$

即チ  $(x-b) \left\{ \frac{1}{a(x-a-b)} + \frac{1}{bx} \right\} = 0$

是ニ於テ第壹因子ヲ0ニ等シカラシムルニ

$$x = b$$

次ニ第貳因子ヲ0ニ等シカラシムルニ

$$\frac{1}{a(x-a-b)} + \frac{1}{bx} = 0$$

是ヨリ分母ヲ去リ項ヲ移スルニ

$$(a+b)x = a(a+b)$$

故ニ  $x = a$

仍テ所要ノ答式ハ  $a$  及ビ  $b$  ナリ。

(5) 第壹式ヨリ  $y = x - 6$  ナリ得、是ヲ第貳式ニ入レ代ヘテ

$$x^2 - 6x = 91$$

項ヲ轉シテ  $x^2 - 6x - 91 = 0$

故ニ  $x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 + 4 \times 1 \times 91}}{2} = \frac{6 \pm 20}{2} = 13$  又ハ  $-7$

$x$ ノ値ヲ第壹式ニ入レ代ヘ

$$y = 7$$
 又ハ  $-13$

ナリ得、仍テ所要ノ答數ハ  $x = 13, y = 7$ ; 又ハ  $x = -7, y = -13$  ナリ。

(10) 第壹式ヨリ  $y = a - x$  ナリ得、之ヲ第貳式ニ入レ代ヘテ

$$x^2 + (a-x)^2 = b^2$$

即チ  $x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = b^2$

項ヲ移シテ  $2x^2 - 2ax + (a^2 - b^2) = 0$

故ニ  $x = \frac{2a \pm \sqrt{(2a)^2 - 4 \times 2 \times (a^2 - b^2)}}{2 \times 2}$

$$= \frac{2a \pm 2\sqrt{2b^2 - a^2}}{4}$$

$$= \frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$$

是ヲ第壹式ニ入レ代フルニ

$$y = a - x = a - \frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2} = \frac{a \mp \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$$

仍テ所要ノ答式ハ  $x = \frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}, y = \frac{a \mp \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$  ナリ。

注意  $x$ ノ答式中ニ $\pm$ ノ記號ヲ用ヒ $y$ ノ答式中ニ $\mp$ ヲ用  
井タルハ $x$ ノ答式ニ於テ上ノ記號 $+$ ヲ用ユルニ $y$ ノ答式中  
ニテモ上ノ記號 $-$ ヲ用井若シ $x$ ノ答式ニ於テ下ノ記號 $-$ ヲ用  
ユルニ $y$ ノ答式ニ於テモ亦々下ノ記號 $+$ ヲ用ユルニ $x$ ヲ表  
ハセルナリ故ニ本問ニハ答數貳々組ミアルナリ。

(17) 第壹式ニ2ヲ乘シ之ニ第貳式ヲ加フルニ

$$2(x+y) + x^2 + 2xy + y^2 = 120$$

即チ  $2(x+y) + (x+y)^2 = 120$  (甲)

トナル是ニ於テ $x+y$ ヲ壹未知量トシテ(甲)式ヲ解クニ

$$x+y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \times 1 \times 120}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 22}{2} = 10$$
 又ハ  $-12$  (乙)



ヲ得、今  $x+y=10$  ヲ用キ  $y=10-x$  ヲ第貳式ニ入レ代フルキハ

$$x^2 + (10-x)^2 = 52$$

即チ  $x^2 + 100 - 20x + x^2 = 52$

トナル項ヲ移シテ 2 除スルキハ

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

故ニ  $x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \times 1 \times 24}}{2}$

$$= \frac{10 \pm 2}{2}$$

$$= 6 \text{ 又ハ } 4$$

$x$  ノ此値ニ對スル  $y$  ノ値ヲ  $y=10-x$  ナル式ニ算スルキハ

$$y = 4 \text{ 又ハ } 6.$$

次ニ(乙)式ニヨリ  $x+y=-12$  トスルキハ  $y=-12-x$  トナル之ヲ第貳式ニ入レ代ユルキハ

$$x^2 + 144 + 24x + x^2 = 52$$

トナル是ヨリ  $x^2 + 12x + 46 = 0$

故ニ  $x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \times 1 \times 46}}{2}$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{-40}}{2} = -6 \pm \sqrt{-10}$$

之ヲ  $y=-12-x$  ニ入レ代ユルキハ

$$y = -6 \mp \sqrt{-10}$$

仍テ本問ニハ四組ノ答數アリ即チ  $x=6, y=4; x=4, y=6;$

$$x = -6 \pm \sqrt{-10}, y = -6 \mp \sqrt{-10} \text{ ナリ.}$$

(18) 第壹式ヲ第貳式ニテ除スルキハ

$$x+y=3$$

トナル是ヨリ  $y=3-x$  ヲ得、之ヲ第貳式ニ入レ代ヘテ

$$x^2 - x(3-x) + (3-x)^2 = 3$$

$$x^2 - 3x + x^2 + 9 - 6x + x^2 = 3$$

項ヲ移シテ 3 除シ  $x^2 - 3x + 2 = 0$

故ニ  $x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 2 \text{ 又ハ } 1$

之ヲ  $y=3-x$  ニ入レ代ヘテ  $y=1$  又ハ  $2$  ヲ得

仍テ所要ノ答數ハ貳々組ミアリ即チ  $x=2, y=1; x=1, y=2$  ナリ.

(19) 第貳式ノ項ヲ移スルキハ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} = 0$$

即チ  $\frac{x^2 - b^2}{a^2} + \frac{y^2 - a^2}{b^2} = 0$

即チ  $\frac{x-b}{a} \cdot \frac{x+b}{a} + \frac{y-a}{b} \cdot \frac{y+a}{b} = 0$  (甲)

又第壹式ノ項ヲ移スルキハ

$$\frac{x-b}{a} = -\frac{y-a}{b}$$
 (乙)

トナル是ニ依テ(甲)式ヲ變スルキハ

$$\frac{x-b}{a} \cdot \frac{x+b}{a} - \frac{x-b}{a} \cdot \frac{y+a}{b} = 0$$

即チ  $\frac{x-b}{a} \left( \frac{x+b}{a} - \frac{y+a}{b} \right) = 0$

是ニ於テ第壹因子ヲ 0 ニ等シカラシムルキハ



$$x = b$$

ヲ得、之ヲ第壹式ニ入レ代ヘテ容易ニ  $y = a$  ヲ得、

次ニ第貳式因テ  $0 =$  等シカラシムルニ

$$\frac{x+b}{a} = \frac{y+a}{b} \quad (19)$$

トナル今(乙)、(丙)兩式相加フルニ

$$\frac{2x}{a} = \frac{2a}{b}$$

トナル故ニ

$$x = \frac{a^2}{b}$$

同様ニ(乙)、(丙)相減シテ  $y = \frac{b^2}{a}$  ヲ得

仍テ所要ノ答式ハ  $x = b, y = a$  又ハ  $x = \frac{a^2}{b}, y = \frac{b^2}{a}$  也。

(20)  $x = b + z$  トナスニ第壹式ヨリ  $y = b - z$  ヲ得、之ヲ面ノ

$$x^4 = (b+z)^4 = b^4 + 4b^3z + 6b^2z^2 + 4bz^3 + z^4$$

$$y^4 = (b-z)^4 = b^4 - 4b^3z + 6b^2z^2 - 4bz^3 + z^4$$

$$\text{故ニ} \quad x^4 + y^4 = 2b^4 + 12b^2z^2 + 2z^4$$

由テ第貳式ヨリ

$$z^4 + 6b^2z^2 + b^4 - a^4 = 0$$

$$\text{即チ} \quad z^4 + 6b^2z^2 + 9b^4 - (a^4 + 8b^4) = 0$$

$$\text{即チ} \quad (z^2 + 3b^2)^2 - (a^4 + 8b^4) = 0$$

之ヲ因子分解シテ  $(z^2 + 3b^2 - \sqrt{a^4 + 8b^4})(z^2 + 3b^2 + \sqrt{a^4 + 8b^4}) = 0$

$$\text{是ヨリ} \quad z = \pm \sqrt{-3b^2 \pm \sqrt{a^4 + 8b^4}}$$

$$\text{故ニ} \quad x = b + z = b \pm \sqrt{-3b^2 \pm \sqrt{a^4 + 8b^4}}$$

$$y = b - z = b \mp \sqrt{-3b^2 \pm \sqrt{a^4 + 8b^4}}$$

仍テ所要ノ答式ハ  $x = b \pm \sqrt{-3b^2 \pm \sqrt{a^4 + 8b^4}}, y = b \mp \sqrt{-3b^2 \pm \sqrt{a^4 + 8b^4}}$  ナリ。

(21) 三式相乘スルニ

$$x^2y^2z^2 = a^2b^2c^2$$

トナル故ニ項ヲ移シ因子分解シ然ル後チ  $xyz = \pm abc$  ヲ得、之ヲ順次第壹式、第貳式、第三式ニテ除フ

$$x = \pm \frac{bc}{a}, \quad y = \pm \frac{ca}{b}, \quad z = \pm \frac{ab}{c}$$

トナル仍テ所要ノ答式ハ  $x = \pm \frac{bc}{a}, y = \pm \frac{ca}{b}, z = \pm \frac{ab}{c}$  ナリ。

(22) 今

$$\frac{y+z}{a} = \frac{z+x}{b} = \frac{x+y}{c} = 2xyz = \lambda$$

トナスニ

$$y+z = \lambda a, \quad z+x = \lambda b, \quad x+y = \lambda c \quad (甲)$$

ヲ得、此三式ノ内チ貳式ノ和ヨリ他ノ壹式ヲ減スルニ

$$x = \frac{1}{2}\lambda(b+c-a), \quad y = \frac{1}{2}\lambda(c+a-b), \quad z = \frac{1}{2}\lambda(a+b-c) \quad (乙)$$

是ヲ

$$2xyz = \lambda$$

ニ入レ代ユルニ  $\frac{\lambda^3}{4}(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = \lambda$

ヲ得、今此式ノ分母ヲ去リ項ヲ移シ然ル後チ因子分解スルニ

$$\lambda \{ \lambda^2 (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) - 4 \} = 0$$

$$\text{故ニ} \quad \lambda = 0 \quad \text{又ハ} \quad \lambda = \pm \frac{2}{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}$$



λノ此値ヲ(乙)式ニ入レ代ヘテ

$$x=0, y=0, z=0$$

又ハ

$$x = \pm \frac{b+c-a}{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}, \quad y = \pm \frac{c+a-b}{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}$$

$$z = \pm \frac{a+b-c}{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}$$

仍テ所要ノ答式ハ

$$x=0, y=0, z=0; \text{ 又ハ } x = \pm \frac{b+c-a}{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}$$

$$y = \pm \frac{c+a-b}{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}, \quad z = \pm \frac{a+b-c}{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}} \text{ ナリ.}$$

(23) 第壹式ノ項ヲ移スルハ

$$yz - y - z = a$$

トナル此両節ニ1ヲ加ヘ左節ヲ因子分解スルハ

$$(y-1)(z-1) = a+1 \quad \text{(甲)}$$

同理ニヨリ第貳式及ヒ第三式ヨリ

$$(z-1)(x-1) = b+1 \quad \text{(乙)}$$

$$(x-1)(y-1) = c+1 \quad \text{(丙)}$$

(甲),(乙),(丙)三式相乗シ然ル後ヲ項ヲ移スルハ

$$(x-1)^2(y-1)^2(z-1)^2 - (a+1)(b+1)(c+1) = 0$$

$$\text{是ヨリ } (x-1)(y-1)(z-1) = \pm \sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

ヲ得、之ヲ順次(甲),(乙),(丙)三式ニテ除スルハ

$$x-1 = \pm \frac{\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}}{a+1}$$

$$y-1 = \pm \frac{\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}}{b+1}$$

$$z-1 = \pm \frac{\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}}{c+1}$$

$$\text{トナル故ニ } x=1 \pm \frac{\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}}{a+1}, \quad y=1 \pm \frac{\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}}{b+1},$$

$$z=1 \pm \frac{\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}}{c+1}.$$

$$\text{仍テ所要ノ答式ハ } x=1 \pm \frac{\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}}{a+1},$$

$$y=1 \pm \frac{\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}}{b+1}, \quad z=1 \pm \frac{\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}}{c+1} \text{ ナリ.}$$

(23) 103款ニヨリ

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{3}{2}$$

$$\text{ナリ故ニ } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{3}{2} = \frac{13}{4}$$

今  $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}$  ナ根トセル貳次方程式ハ

$$\left(x - \frac{\beta}{\alpha}\right)\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right) = 0 \quad \text{(甲)}$$

$$\text{即チ } x^2 - \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right)x + 1 = 0$$

$$\text{ナリ然ルニ } \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{13}{4} \div \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$$

故ニ(甲)式ハ次ノ如クナルニ

$$x^2 - \frac{13}{6}x + 1 = 0$$



此式ノ分母ヲ去ルキハ

$$6x^2 - 13x + 6 = 0$$

是レ  $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}$  ナ根トセル方程式ナリ。

(24) 100 款ニヨリ

$$(1+a)^2 - 4 \times 4 = 0$$

ナルキハ題セル方程式ノ根ハ等シクナルベシ今此方程式ニ適合スル  $a$  ノ値ヲ索メンタメ上式ヲ因子分解スルキハ

$$\{(1+a)-4\}\{(1+a)+4\} = 0$$

故ニ  $a = 3$  又ハ  $-5$

仍テ所要ノ  $a$  ノ値ハ  $3$  又ハ  $-5$  ナリ。

(26) 103 款ニヨリ

$$x_1 + x_2 = -m, \quad x_1 x_2 = m^2 + a$$

故ニ  $(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 = (-m)^2 - (m^2 + a)$

即チ  $x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - x_1 x_2 = -a$

項ヲ移スルキハ

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + a = 0$$

トナル故ニ本問題ヲ證シ得タリ。

## 第七篇

## 方程式ノ應用

104. 本篇ニ於テハ方程式ノ應用トシテ算術的日用問題及ビ輕易ノ幾何問題ヲ解クノ法ヲ例示スベシ蓋シ此等ノ問題ニ於テハ其題中ニ已知量ト未知量トノ間ニ存スル關係ヲ明示又ハ默示シアルベシ故ニ此等ノ關係ヲ方程式ニテ表ハスヲ得バ其方程式ヲ解キ容易ニ未知量ヲ算出スルヲ得ベシ然レモ茲ニ注意スベキアリ開ハ他ニアラズ方程式ヨリ算出シ得タル答數ガ往々題意ニ適合セザルヲアルベシ是ハ問題ノ性質ニヨリ始メヨリ其答數ニハ多少ノ制限アルヲ明カナレモ其制限ヲ方程式中ニ示スヲ能ハザルニヨルナリ尙ホ例ニ就キ細説スベシ。

例壹 25 ナ貳部ニ分チ其壹部ヲ他ノ壹部ヨリ 5 大ナラシメントス如何セバ可ナルカ。

算式 貳部ニ分ナル數ノ小ナル方ヲ  $x$  トスルキハ大ナル方ハ  $x+5$  ナルベシ而シテ此貳數ノ和ハ 25 ニ等シカラザルヲ得ザルカ故ニ次ノ方程式ヲ得

$$x + x + 5 = 25$$

是ヨリ項ヲ移シテ  $2x = 20$

故ニ  $x = 10$

仍テ小ナル方ハ 10 ナルヲ知ル是ニ 5 ヲ加ヘ大ナル方ハ 15 ナルヲ知ルベシ故ニ所要ノ答數ハ 10 及ビ 15 ナリ。

此答數ハ題意ニ適合セルヲ明カナリ何ントナレバ 10 ト 15 ト



ノ和ハ 25 トナリ且ツ 15 ハ 10 ヨリ大ナレバナリ。

例貳 脚夫アリ毎日 15 里宛歩行ス今此脚夫發程ノ後チ 6 日ヲ過キ他ノ脚夫之ヲ追ヒ行クアリ其行程毎日 20 里ナリトイフ幾日ニシテ前脚夫ニ追ヒ付クヤ且ツ其旅行道程如何。

算式 第貳脚夫發程ヨリ追及スルマテノ日數ヲ $x$ トスルトキハ第壹脚夫ガ其發程ノ日ヨリ第貳脚夫ニ追及セラル、日マテハ $x+6$  日アリ而シテ第貳脚夫ハ日行 20 里ナルニヨリ追及スルマテニ 20 $x$  里旅行スベク又々第壹脚夫ハ日行 15 里ナルニヨリ追及セラル、マテニ 15( $x+6$ ) 里歩行スベシ故ニ次ノ方程式ヲ得

$$20x = 15(x+6)$$

即チ  $20x = 15x+90$

項ヲ移シテ  $5x = 90$

故ニ  $x = 18$

仍テ所要ノ日數ハ 18 日ナリ而シテ所要ノ道程ハ 20×18 里即チ 360 里ナリ。

例三 甲乙丙三工アリ一業ヲナスニ甲壹人ナレバ之ヲ 20 日ニ完成スベク乙丙兩人ナレバ之ヲ 12 日ニ完成スベシトイフ而シテ若シ甲乙丙三工共ニ六日間其業ヲ盡シ殘業ヲ丙一人ニテ爲セバ三日ヲ費ナスベシトイフ乙丙各一人ニテ爲スルハ幾日ニシテ完成スベキカ。

算式 乙壹人ニテ完成スベキ日數ヲ $x$ トシ丙一人ニテ完成スベキ日數ヲ $y$ トスルニ乙丙各壹人壹日ノ業ハ夫々全業ノ $\frac{1}{x}$ 、及ビ $\frac{1}{y}$ ナルベシ又甲ハ 20 日ニ全業ヲ完成スルガ故ニ其壹日ノ業ハ $\frac{1}{20}$ ナルベシ故ニ甲乙丙三工 6 日間ノ業ハ

$$\frac{6}{20} + \frac{6}{x} + \frac{6}{y}$$

ナリ又丙三日間ノ業ハ $\frac{3}{y}$ ナリ而シテ甲乙丙六日間ノ業ト丙三日ノ業ハ全業ニ等シキガ故ニ次ノ方程式ヲ得

$$\frac{6}{20} + \frac{6}{x} + \frac{6}{y} + \frac{3}{y} = 1$$

項ヲ移シテ

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{y} = \frac{7}{10} \quad (1)$$

次ニ乙丙兩名ニテ 12 日間ニ全業ヲ完成ストイフニヨリ次ノ方程式ヲ得

$$\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1 \quad (2)$$

是ニ於テ (1) 式ニ 2 ヲ乘シ之ヨリ (2) 式ヲ減スルニ

$$\frac{6}{y} = \frac{2}{5}$$

故ニ

$$y = 15$$

$y$ ノ値ヲ (2) 式ニ代入シテ其項ヲ移スルニ

$$\frac{12}{x} = 1 - \frac{12}{15} = \frac{3}{15}$$

故ニ

$$x = 60$$

仍テ所要ノ日數; 甲ハ 15 日, 丙ハ 60 日ナリ。

例四 甲乙貳人壹牧場ヲ借り甲ハ之ニ馬 4 頭ヲ放チ乙ハ每週借料金 4 圓 50 錢ヲ拂フダケノ馬ヲ放チ置ケリ其後チ乙ハ馬 2 頭ヲ増セシニ其每週拂フ所金 5 圓トナレリト云フ每週牧場ノ借料如何。

算式 乙ノ初メ放チ置キシ馬數ヲ $x$ トシ牧場ノ借料ヲ $y$ トス然ルニ毎週馬壹頭ニ付キ拂フ所ノ借地料ハ $\frac{450}{x}$ 錢ナリ故ニ甲



ノ毎週拂フ所ハ  $4 \times \frac{450}{x}$  錢即チ  $\frac{1800}{x}$  錢ナリ之ニ乙ノ毎週拂フ所  
ノ金 4 圓 50 錢ヲ加フルキハ毎週牧場ノ借料ヲ得故ニ

$$y = \frac{1800}{x} + 450 \quad (1)$$

今甲ハ馬 4 頭、乙ハ馬  $x+2$  頭ヲ放ツテ以テ總馬數ハ  $x+6$  ナリ  
以テ  $\frac{1800}{x} + 450$  ナ除スルキハ乙ガ馬 2 頭ヲ増セシ後ノ馬壹頭毎  
週ノ借地料ヲ得ベシ

次ニ乙ハ馬 2 頭ヲ増セル後チ金 5 圓ヲ拂フト云フニヨリ 5 圓  
ヲ  $x+2$  ニテ除スルキハ乙ガ馬 2 頭ヲ増セル後チノ馬壹頭ノ借地  
料ヲ得ベシ是ニヨリテ次ノ方程式ヲ得

$$\frac{\frac{1800}{x} + 450}{x+6} = \frac{500}{x+2}$$

是ヨリ分母ヲ去リテ

$$450x^2 + 2700x + 3600 = 500x^2 + 3000x$$

ヲ得今此式ノ項ヲ移スルハ

$$50x^2 + 300x - 3600 = 0$$

$$\text{是ヨリ} \quad x^2 + 6x - 72 = 0$$

$$\text{故ニ} \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 + 4 \times 1 \times 72}}{2} = \frac{-6 \pm 18}{2}$$

$$= 6 \text{ 又ハ } -12$$

然ルニ馬數ニ負量ヲ得タルハ題意ニ適セズ仍テ  $-12$  ナ捨テ甲ガ  
最初放チタル馬數ハ 6 頭ナルヲ知ル是ニ於テ  $x$  ノ此値ヲ(1)式ニ  
入レ代ユルキハ

$$y = \frac{1800}{6} + 450 = 750$$

仍テ所要ノ答數ハ 7 圓 50 錢 ナリ

例五 直角三角形アリ其貳邊ノ和ハ 17 寸ニシテ斜邊ハ 13 寸  
リト云フ貳邊ノ長サ如何

算式 直角三角形ノ斜邊ノ平方ハ貳邊ノ平方ニ等シ故ニ次ノ  
方程式ヲ得

$$x+y = 17 \quad (1)$$

$$x^2+y^2 = 13^2 \quad (2)$$

(1)ヨリ項ヲ移シテ  $y = 17-x$

是ヲ(2)式ニ入レ代ヘテ  $x^2 + (17-x)^2 = 169$

$$\text{即チ} \quad x^2 + 289 - 34x + x^2 = 169$$

$$\text{項ヲ移シテ} \quad 2x^2 - 34x + 120 = 0$$

$$\text{是ヨリ} \quad x^2 - 17x + 60 = 0$$

$$\text{故ニ} \quad x = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \times 1 \times 60}}{2}$$

$$= \frac{17 \pm 7}{2}$$

$$= 12 \text{ 又ハ } 5$$

之ヲ(1)ニ入レ代ヘテ  $y = 5$  又ハ 12

仍テ所要ノ貳邊ノ長サハ 5 寸及ビ 12 寸ナリ。

### 問題

(1) 75 ナ大小貳部ニ分チ其大數 3 倍チ小數 7 倍ヨリ 15 大ナ  
ラシメントス各數如何。

(2) 父子アリ其年齡父ハ 4) 歳ニシテ子ハ 10 歳ナリ然ラバ幾  
年ノ後チ父ノ年ガ子ノ年ノ 3 倍トナルヤ。



(3) 金 1200 圓ヲ甲乙二人ニ分チ甲ノ所得金ノ 7 倍カ恰モ乙ノ所得金ノ 2 倍ニ等シクナル如クセントス各所得金如何.

(4) 牛 10 頭羊 15 頭ヲ金 215 圓ニテ買ヘリ其後チ又牛 5 頭羊 7 頭ヲ金 107 圓 50 錢ニテ買ヘリ而シテ其每壹頭ノ價ハ前ニ比シ牛ハ金 1 圓高ク羊ハ金 50 錢安シトイフ然ラバ初メ買ヒシ牛及ビ羊每壹頭ノ價如何.

(5) 貳位ノ數アリ其數ハ其數ヲ組成スル數字ノ和ノ 4 倍ニ等シク又其數ニ 18 ヲ加フルキハ其數字ノ順序顛倒スト云フ其數如何.

(6) 時計ノ時針分針ガ 5 時ト 6 時トノ間ニ於テ相重ル時刻ハ如何.

(7) 或人 14 里ノ道ヲ旅行スルニ 2 里行キタル後チ毎時 1 里宛多ク進ミシニ壹時速ク着セリト云フ其時間如何.

(8) 壹業ヲ爲スニ甲乙二人ニテハ 4 日, 甲丙二人ニテハ 6 日, 乙丙二人ニテハ 12 日ニシテ何レモ之ヲ完成スベシト云フ然ラバ各壹人ニテ之ヲ爲スルハ幾日ニシテ完成スベキカ.

(9) 甲乙丙三船東西兩港間ヲ往來ス甲船ハ乙船ヨリ毎時半遅多ク走ルガ故ニ乙船ヨリ  $1\frac{1}{2}$  時速ク先方ニ着スベク又乙船ハ丙船ヨリ毎時  $\frac{3}{4}$  遅多ク走ルガ故ニ丙船ヨリ  $2\frac{1}{2}$  時速ク先方ニ着スベシト云フ然ラバ兩港間ノ距離如何.

(10) 貳輪自轉車アリ 780 尺ヲ行クニ其小輪ハ大輪ヨリ 135 度多ク回轉ス今若シ其兩輪周ヲ何レモ 1 尺宛長クスルキハ 210 尺ヲ行クニ小輪ハ大輪ヨリ 27 度多ク回轉スベシト云フ各輪ノ周長各如何.

(11) 壹線ヲ貳部ニ分チ其壹部ト全長トノ積ヲ他ノ壹部上ノ平方ニ等シカラシメントス其壹部ノ長サ如何.

(12) 壹圓ノ外部ニアル壹點ヨリ其圓ヘ引ケル切線ノ長サ 60 寸ニシテ其點ヨリ圓ノ中心ヲ貫キテ圓周ニ終レル線ノ長サ 150 寸アリト云フ其圓ノ直徑幾寸ナルヤ.

### 問題解答

(1) 大數ヲ  $x$  トスルキハ小數ハ  $75-x$  ナリ故ニ題意ニヨリ次ノ方程式ヲ得

$$3x = 7(75-x) + 15$$

即チ

$$3x = 525 - 7x + 15$$

項ヲ移シテ

$$10x = 540$$

故ニ

$$x = 54,$$

$$75-x = 21$$

仍テ所要ノ答數; 大數ハ 54, 小數ハ 21 ナリ.

(2) 所要ノ年數ヲ  $x$  トスルキハ  $x$  年ノ後チ父ノ年ハ  $40+x$  トナリ子ノ年ハ  $10+x$  トナルベシ故ニ題意ニヨリ

$$40+x = 3(10+x)$$

即チ

$$40+x = 30+3x$$

項ヲ移シテ

$$2x = 10$$

故ニ

$$x = 5$$

仍テ所要ノ答數ハ 5 年 ナリ.

(3) 甲ノ所得金ヲ  $x$  トスルキハ乙ノ所得金ハ  $1200-x$  ナリ故ニ題意ニヨリ



$$7x = 2(1200 - x)$$

即チ

$$7x = 2400 - 2x$$

項ヲ移シテ

$$9x = 2400$$

故ニ

$$x = 266\frac{2}{3},$$

$$1200 - x = 933\frac{1}{3}$$

仍テ所要ノ答數; 甲ノ所得金ハ  $266\frac{2}{3}$  圓, 乙ノ所得金ハ  $933\frac{1}{3}$  圓ナリ.

(4) 初メ買ヒシ牛及ヒ羊每壹頭ノ價ヲ夫々  $x$  錢及ビ  $y$  錢トスルルルル次ニ買ヒシ牛及ヒ羊每壹頭ノ價ハ  $x+100$  錢及ビ  $y-50$  錢ナリ是ニ由テ次ノ方程式ヲ得

$$10x + 15y = 21500 \quad (1)$$

$$5(x+100) + 7(y-50) = 10750$$

第貳式ノ左節ヲ式ノ如ク運算シ然ル後チ項ヲ移スルルル

$$5x + 7y = 10600 \quad (2)$$

(2) 式ニ 2 ヲ乘ジ (1) 式ヨリ減スルルル

$$y = 300$$

ヲ得、之ヲ (1) 式ニ入レ代ヘ項ヲ移スルルル

$$10x = 21500 - 15 \times 300$$

$$= 1700$$

故ニ

$$x = 1700$$

仍テ所要ノ答數, 牛ハ 17圓, 羊ハ 3圓 ナリ.

(5) 拾位ノ數字ヲ  $x$  トシ壹位ノ數字ヲ  $y$  トスルルル所要ノ數ハ  $10x+y$  ナリ故ニ題意ニヨリ

$$10x+y = 4(x+y)$$

ヲ得、今此式ノ右節ヲ左節ニ移スルルル

$$6x - 3y = 0$$

故ニ

$$2x - y = 0 \quad (1)$$

次ニ數字ノ順序顛倒シテ拾位ノ數字ガ壹位ヲ占メ壹位ノ數字ガ拾位ヲ占ムルルル其數ハ  $10y+x$  トナルルル故ニ題意ニヨリ

$$10x+y+18 = 10y+x$$

項ヲ移スルルル

$$9x - 9y = -18$$

故ニ

$$x - y = -2 \quad (2)$$

(1) 式ヨリ (2) 式ヲ減シテ

$$x = 2$$

ヲ得、是ヲ (1) 式ニ入レ代ヘ項ヲ移シテ

$$y = 4$$

ヲ得、仍テ所要ノ答數ハ 24 ナリ.

(6) 時計ノ時針ガ其盤面ヲ壹回轉スル間ニ分針ハ 12 回轉スルルル故ニ時針ノ速度ハ分針ノ速度ノ  $\frac{1}{12}$  ナリ今 5 時過ギ兩針ガ相ヒ重ナル迄ノ時間ヲ  $x$  分トスルルル分針ハ  $x$  分ヲ進ミ時針ハ其  $\frac{1}{12}$  即チ  $\frac{1}{12}x$  分ヲ進ムルルル而シテ 5 時ニ於テハ分針ガ時針ニ後ル、 $7$  25 分ナルルルヨリ  $x$  ト  $\frac{1}{12}x$  トノ差ハ 25 分ニ等シカラザルヲ得ズ仍テ

$$x - \frac{1}{12}x = 25$$

分母ヲ去リテ

$$12x - x = 300$$

即チ

$$11x = 300$$

故ニ

$$x = 27\frac{3}{11} \text{ 分}$$

仍テ所要ノ答數ハ 5時27 $\frac{3}{11}$ 分 ナリ.



(7) 毎時ノ行程ヲ  $x$  里トスルルキハ初メ 2 里ハ  $\frac{2}{x}$  時ニ行キ残り  
 12 里ハ  $\frac{12}{x+1}$  時ニテ行ケリ若シ初メヨリ終リマテ毎時  $x$  里宛ノ  
 速力ニテ進マバ全距離ヲ  $\frac{14}{x}$  時ニ行クベシ仍テ願意ニヨリ次ノ  
 方程式ヲ得

$$\frac{2}{x} + \frac{12}{x+1} = \frac{14}{x} - 1$$

分母ヲ去リテ  $2(x+1) + 12x = 14(x+1) - x(x+1)$

即チ  $2x+2+12x = 14x+14-x^2-x$

項ヲ移シテ  $x^2+x-12 = 0$

是ヨリ  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \times 1 \times 12}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$

$$= 3 \text{ 又ハ } -4$$

故ニ毎時ノ速力ハ 3 里ナリ負量  $-4$  ハ願意ニ適セズ仍テ之ヲ捨  
 ヲ是ニ於テ  $x$  ノ値ヲ  $\frac{14}{x} - 1$  ニ入レ代ヘ所要ノ答數 3 時 40 分 ヲ  
 得。

(8) 甲, 乙, 丙三名各壹人ニテ全業ヲ完成スベキ日數ヲ夫々  $x$ ,  
 $y$ ,  $z$  トスルルキハ甲, 乙, 丙各壹人壹日ノ業ハ夫々  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{y}$ ,  $\frac{1}{z}$  ナリ故  
 ニ願意ニヨリ次ノ三式ヲ得

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12} \quad (3)$$

(1), (2) 兩式相加ヘ之ヨリ (3) 式ヲ減スルルキハ

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

故ニ  $x = 6$

之ヲ (1) 式ニ入レ代ユルルキハ

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

故ニ  $y = 12$

之ヲ (3) 式ニ入レ代ヘ項ヲ移スルキハ

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0$$

トナル故ニ丙ガ毎日爲ス所ノ業ハ 0 ナリ即チ丙ハ少シモ其業務  
 ニ服セザルモノナリ。

仍テ所要ノ答數; 甲ハ 6 日, 乙ハ 12 日ヲ成業日數トス。

(9) 甲船毎時ノ速力ヲ  $x$  哩トスルルキハ乙船ノ速力ハ  $x - \frac{1}{2}$  哩,  
 丙船ノ速力ハ  $x - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$  哩即チ  $x - \frac{5}{4}$  哩ナリ又甲船ガ先方ニ着スル  
 ニ要スル時數ヲ  $y$  トスルルキハ乙船ハ  $y + 1\frac{1}{2}$  時, 丙船ハ  $y + 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}$   
 時即チ  $y + 4$  時ニシテ着スベシ而シテ毎時ノ速力ニ時數ヲ乘スルルキ  
 ハ兩港ノ距離トナルガ故ニ次ノ方程式ヲ得

$$xy = (x - \frac{1}{2})(y + 1\frac{1}{2}) = (x - \frac{5}{4})(y + 4)$$

此式ノ第壹式第貳式ヲ用井次ニ第壹式第三式ヲ用井次ノ貳式ヲ  
 得

$$\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y = \frac{3}{4},$$

$$4x - \frac{5}{4}y = 5$$

此兩式ノ分母ヲ去リテ

$$6x - 2y = 3 \quad (1)$$



$$16x - 5y = 20 \quad (2)$$

(1) 式 = 5 を乘シ (2) 式 = 2 を乘シ相減シテ

$$2x = 25$$

$$\text{故に} \quad x = 12\frac{1}{2}$$

之ヲ (1) 式 = 入レ代ヘ項ヲ移スルハ

$$2y = 75 - 3 = 72$$

$$\text{故に} \quad y = 36$$

仍テ甲船毎時ノ速力ハ  $12\frac{1}{2}$  里、先方へ着スル時間ハ 36 時ナルヲ知ル故ニ  $12\frac{1}{2}$  里ニ時數 36 を乘シ所要ノ兩港間ノ距離 450 里 を得。

(10) 小輪周ヲ  $x$ 、大輪周ヲ  $y$  トスルルハ題意ニヨリ

$$\frac{780}{x} - \frac{780}{y} = 135,$$

$$\frac{210}{x+1} - \frac{210}{y+1} = 27$$

$$\text{前式ヨリ} \quad y = \frac{52x}{52-9x} \quad (\text{甲})$$

ヲ得テ之ヲ後式 = 入レ代ユルルハ

$$\frac{210}{x+1} - \frac{10920-1890x}{48x+52} = 27$$

ナル此式ノ分母ヲ去ルルハ

$$9030x + 10920 - 10920 - 9030x + 1890x^2 = 1161x^2 + 2565x + 1404$$

是ヨリ項ヲ移シテ然ル後チ 27 除シテ

$$27x^2 - 95x - 52 = 0$$

$$\text{故に} \quad x = \frac{95 \pm \sqrt{95^2 + 4 \times 27 \times 52}}{2 \times 27} = \frac{95 \pm 121}{54}$$

$$= 4 \text{ 又ハ } -\frac{13}{27}$$

負數ハ題意ニ適セス仍テ負數ヲ捨テ小輪周 4 尺ヲ得、之ヲ (甲) 式 = 入レ代ヘ  $y$  ヲ算出スルルハ次ノ如シ

$$y = \frac{52 \times 4}{52 - 9 \times 4} = 13$$

仍テ所要ノ答數; 小輪周 4 尺、大輪周 13 尺 ナリ。

(11) 線ノ長サヲ  $2a$  トシ壹部ノ長サヲ  $x$  トスルルハ他ノ壹部ノ長サハ  $2a-x$  トナル故ニ題意ニヨリ

$$(2a-x)^2 = 2a \times x$$

$$\text{即チ} \quad 4a^2 - 4ax + x^2 = 2ax$$

$$\text{項ヲ移シテ} \quad x^2 - 6ax + 4a^2 = 0$$

$$\text{故に} \quad x = \frac{6a \pm \sqrt{(6a)^2 - 4 \times 4a^2}}{2} = (3 \pm \sqrt{5})a$$

仍テ所要ノ壹部ノ長サハ  $(3 \pm \sqrt{5})a$  ナリ。

(12) 所要ノ直徑ヲ  $x$  トス然ルルハ幾何學ニヨリ圓外ノ壹點ヨリ圓周へ引ケル直線ノ兩交點マテノ長サノ積ハ其點ヨリ圓へ引ケル切線ノ平方ニ等シキモナルガ故ニ

$$150(150-x) = 60^2$$

$$\text{即チ} \quad 22500 - 150x = 3600$$

$$\text{項ヲ移シテ} \quad 150x = 22500 - 3600 = 18900$$

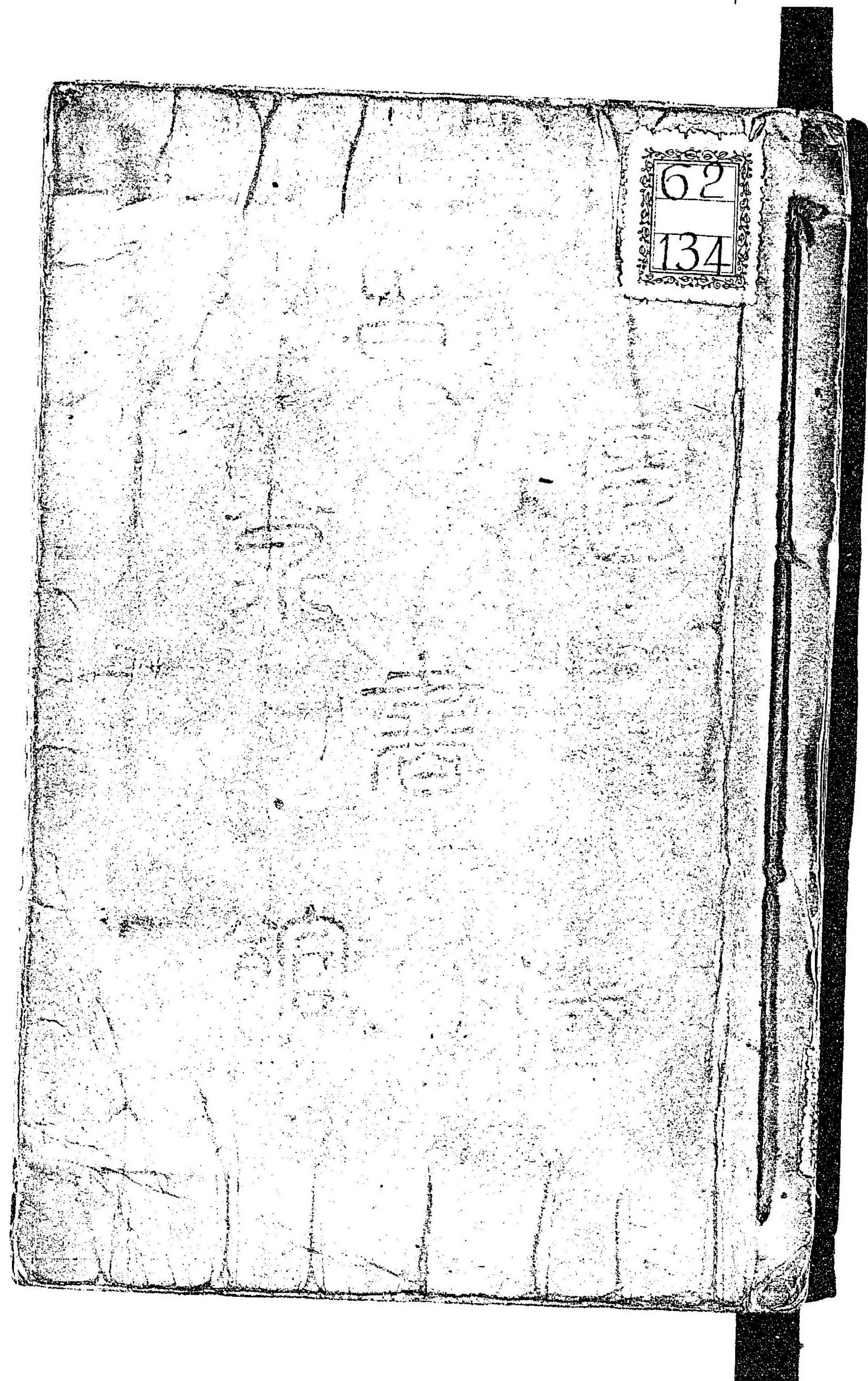
$$\text{故に} \quad x = 126$$

仍テ所要ノ直徑ハ 126 尺ナリ。











203973-000-3

62-134

代数学講義録

遠藤 政之助 / 述

[刊年不明]

EDO-0213

