施蓋倪

解析幾何學

繆玉源譯

下冊

北新書局印行

高　中　適　用

施　蓋　倪

解　析　幾　何　學

下　冊

編譯者　繆　玉　源

上海北新書局印行

顧　序

繆君韞輝前畢業於北京大學,成績冠同儕.時北大數系課程繁重,解析代數幾何三類同時並進,各成統系,非精力過人者不能兼習.繆君天才卓越,盡讀各課,無不應付裕如,且常獨具見解,有所發見.從余研究實變數函數論,如集合論之類,常人於其過於抽象之處視為難解者,繆君皆能分析毫芒,知其要旨.畢業後復在北大為助教,藉以研究.嗣有所成,出任山東省立濟南高級中學教師,別時頗戀戀,不相晤者已四年矣;近以所譯立體解析幾何見示,文筆曉暢,自非學有根底見理明而不為原文所拘者不能如此.現在中學課程,以數學鐘點太少,且立體幾何最難教,往往不甚重視;甚或以為立體幾何與高等數學無關,中學於此儘可從略.此乃但知高等數學之初步,而非眞知高等數學者所言.即以高等解析初若無關於幾何學者論,懸想二變數函數之變化其需助於立體解析幾何,正與懸

想一變數函數之變化需助於平面解析幾何相同凡關於多變數函數之微分積分,偏微分方程式,多重積分之變分法之類,其應用皆在於空間.苟無立體幾何之智識與之息息相應,不惟其重要理法不易了解,且將盡陷於空論,而不能有利於人事.須知人類生活於三度空間,無時不需立體幾何之應用.吾人研究數學,正欲擴充知識於直覺所不及.故窮原則析理於毫芒,竟委則推及於無際.人方百計進探四度空間之影像,而吾乃反并立體幾何而輕視之,豈非將使生活三度空間之人類自貶爲二度空間之動物?況自飛機潛艇發明以來,吾人上天入海,環境日異;一切研究,有賴於數學之應用於空間者正多;若再不知注重,何以應付將來之事變?繆君掌教高中,必有見及此.先令學生注重初等立體幾何,再譯此爲教本以厚其基而擴其用;且將以矯現在高中之誤,而導之於正.否則以繆君之不能譯程度較深之書以沽名,而必以此出版乎?不佞學,豈於酬應文字,摒絕已久;今嘉其意之深,故特爲之序.

無錫顧 澄

自　序

曩在北大服務,於譯述饒有興趣,惟以冗務羈身,往往執筆而無成.自來濟南高中後,課務較在大學時益見繁重,雖三四年來鑒於高中數學原文教本之未能盡善,頗有從事編譯之志;亦因時間所限,未克如願.今夏教部通令中學教本除外國語外須一律改用中文,坊間譯本之應運而生者幾如雨後春筍,然其內容之可供採用者,不啻鳳毛麟角,第以事實所限,在萬分無可奈何之際又不得不勉強採用.旣用之,而又不得不在講授之時加以校正,徒費精力,虛擲韶光,遺誤青年,莫此爲甚!

高中解析幾何之中文教本,頗少適用之著作;Smith-Gale-Neeley所著之 New Analytic Geometry 一書,材料簡要,文字清晰,譯作教本,極爲適宜.此間所採譯本,僅爲其平面部,且略有删減,而立體部則闕如.譯者爲適應需要起見,遂先將立體部譯出付刊,作爲下册,以供應

用;至於上册譯稿,他日當繼續出版也.

本書爲謀教學雙方之便利起見,於原文之隱晦處則加以註釋,於答案之謬誤處則加以糾正;不尙詞藻,只求達意;不增不減,以存其眞.遇有問題之重複者,教者可任意挑選;分量之多寡,亦可隨時伸縮.所用譯名,大都根據科學名詞審查會所頒布之標準,亦間採用北平師大附中影印本所附者,一以普遍恰當爲原則.譯者學識淺薄,文字惡劣,本擬暫作講義,不敢問世;惟以濟南印刷不良,不得不付梓滬濱.倘海內名家,不吝指教,則幸甚矣.

本書原稿承顧養吾師撥冗校閱,又承張友松君介紹付印,特此一併申謝!

譯者序於山東省立濟南高級中學.

二十三年十一月

目　　錄

第十三章　空間之狄卡兒坐標

第十四章 空間之平面與直線

第十五章 特殊曲面

第十六章 空間幾何補編

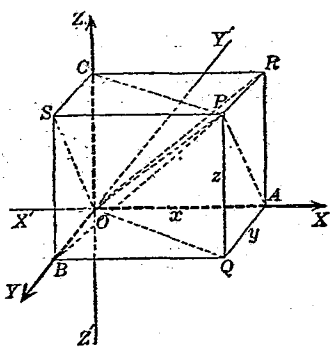
第十七章 坐標之變換 各種坐標系

第十三章

空間之狄卡兒坐標

§112. 狄卡兒坐標. 以三實數x,y,及z爲一組而定空間一點之位置,爲研究立體解析幾何學之基礎.

設取彼此互爲垂直之三平面相交於XX′,YY′,及ZZ′三直線.此三直線亦彼此互爲垂直.此三平面稱爲**坐標平面**,可以XY一平面,YZ一平面,及ZX一平面區別之.其三交線爲**坐標軸**,稱爲x一軸,y一軸,及z一軸.此三軸上之正方向均以箭頭表之.坐標平面之交點稱爲**原點**.



XX′及ZZ′均假定在紙面上,在XX′上向右爲正,在ZZ′上向上爲正. YY′係假定垂直於紙面,其正方向在紙

前,卽從紙面向讀者之方向爲正.

設P爲空間之任意點,過P作三平面平行於坐標平面,而截x,y,z三軸於A,B,C三點.如圖所示,此三平面與三坐標平面適包圍成一長方體,P與原點O爲對頂.此三邊OA=x,OB=y,及OC=z稱爲P之直角坐標.顯見OA=SP,OB=RP,OC=QP.卽P點直角坐標之絕對值,等於從坐標平面至P點之垂直距離.P點之坐標寫爲(x,y,z).

坐標平面分全體空間爲八部,稱爲卦限,以O-XYZ,O-X'YZ等等區別之.在任意卦限內之一點,其坐標之符號,可以下述符號規則定之.

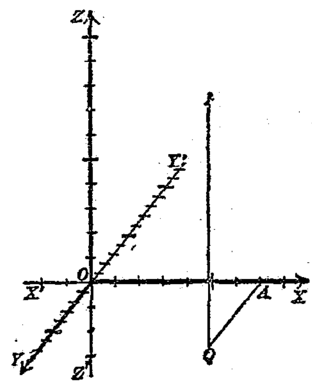
符號規則:

x之正負,視P在YZ-平面之右或左而定.

y之正負,視P在ZX-平面之前後而定.

z之正負,視P在XY-平面之上下而定.

設以相等之尺寸劃分XX'與ZZ',以較小之尺寸劃分YY',則空間之點頗易作出.例如畫OY而使∠X'OY$=45^0$,並以OX上單位長度之半劃分OY.設欲作任意點(7,6,10),可在OX上取OA=7,畫AQ平行於OY且等於OY上6單位長度之長,再畫QP平行於OZ且等於



OZ上10單位長度之長.最宜注意者:XY一平面中之Q點,係用§7所述關於斜坐標之規則作成.在YZ一平面中之諸點亦應用此法作之.

§113. 重要關係.

在前節之第一圖中可得

$$\overline{OP}^2=\overline{OQ}^2+\overline{QP}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2$$

故設 $OP=\rho$, 則

(1) $$\rho^2=x^2+y^2+z^2$$

設OP與OX,OY及OZ所成之角依次爲 α,β, 及 γ. 因OA垂直於AP,三角形OAP爲一直角三角形,且 $\angle XOP=\alpha$; 故 $OA=OP\cos\alpha$, 或 $x=\rho\cos\alpha$. 從直角三角形OBP及OCP可得 y 及 z 之類似值.故

(2) $$x=\rho\cos\alpha,\quad y=\rho\cos\beta,\quad z=\rho\cos\gamma$$

將此三方程之平方相加,用(1),並以 ρ^2 除之,則得重要關係式

(3) $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

(2)之諸方程又可寫作一組等比,卽

$$\frac{\cos\alpha}{x}=\frac{\cos\beta}{y}=\frac{\cos\gamma}{z}=\frac{1}{\rho}. \tag{4}$$

將(2)對於$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$解之,並用(1)式$\rho$之值,則得

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \tag{5}$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

在前節之第一圖中,從$x-$軸至P之垂直距離為AP.在直角三角形OAP中,$\overline{AP}^2=\overline{OP}^2-\overline{OA}^2$.將$OA=x$代入此式,並用(1),則得從$x-$軸至$P(x,y,z)$之垂直距離為$\sqrt{y^2+z^2}$.依同理,從$y-$軸及$z-$軸至$P(x,y,z)$之垂直距離依次為$\sqrt{z^2+x^2}$及$\sqrt{x^2+y^2}$.

問 題

1. 試作下列諸點並計算從坐標軸至各點之垂直距離及從原點至各點之距離:

(a) $(0,0,4),(0,-2,0),(-4,0,0),(3,$[illegible]$),(7,3,0),(0,-4,3)$.

(b) $(1,3,5),(1,6,1),(-2,-1,4),(3,4,-2),(-$[illegible]$,-4,-6)$, $(-4,5,7)$.

(c) $(4,5,8),(3,-4,8),(6,4,-2),(3,-2,6),(-2,3,1)$, $(-3,-6,-7)$.

2. 試證下列諸點均在以z—軸爲軸之圓柱面上:

(3,4,7),(5,0,4),$(2\sqrt{5},\sqrt{5},-3)$,$(2\sqrt{6},-1,-4)$.

3. 試求P(x,y,z)之軌跡,設

(a) $x=0$;　(d) $x=y=0$;　(g) $x=y=z$;

(b) $y=0$;　(e) $x=z=0$;　(h) $x=y,z=0$;

(c) $z=0$;　(f) $y=z=0$;　(i) $x=z$.

4. 設(0,0,0)與(3,6,7)爲長方體一對角線之兩端,試作此長方體,但其稜須或在坐標平面內,或平行於坐標平面.

5. 試求從原點至下列各點之距離,及從諸軸至下列各點之垂直距離:

(a,b,c),(a,b,−c),(a,−b,c),(−a,−b,c),(−a,b,−c,),

(a,−b,−c),(−a,b,c),(−a,−b,−c).

在上列諸點中,那幾對點對於一坐標平面爲對稱?那幾對點對於一坐標軸爲對稱?那幾對點對於原點爲點稱?

6. 試求各軸與直線之交角,此直線係從原點連至

(a) (1,−1,−1);　答 $\alpha=54^\circ44'$, $\beta=\gamma=125^\circ16'$.

(b) (1,−2,−2);

(c) (4, 3, 12);　答 $\alpha=72^\circ5'$, $\beta=76^\circ40'$, $\gamma=22^\circ37'$.

(d) $(4,-4,\ 7)$;

(e) $(-6,2,\ 3)$; 答 $\alpha=149^0$, $\beta=73^0 24'$, $\gamma=64^0 37'$.

(f) $(4,-2,-3)$.

7. 一直線通過一點 $(-6,5,2)$ 且平行於 $y-$ 軸.設從原點至此直線上若干點之距離爲 9 單位長度,求此若干點之坐標.

8. 在問題 7 中,設直線平行於 $x-$ 軸,或 $z-$ 軸,試解之.

9. 試描寫一點移動之軌跡,設

(a) 從 $y-$ 軸至此點之垂直距離恆爲 [illegible];

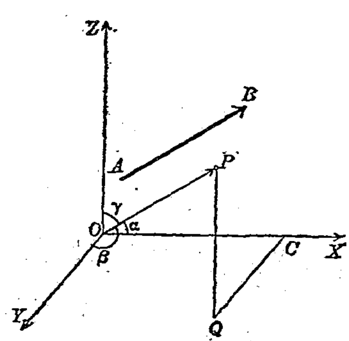
(b) 從原點至此點之距離恆爲 6;

(c) 從兩坐標平面 XY 與 YZ 至此點之垂直距離恆相等;

(d) 從平面 ZX 至此點之垂直距離恆爲 -5.

§114. 直線之方向餘弦.

§114. 直線之方向餘弦. 一有向線 OP 與諸坐標軸之交角 α, β, 及 γ, 稱爲此線之**方向角**.若此線不通過 O, 則其方向角 α,β 及 γ 爲諸軸與另一直線之三交角,此另



一直線係通過原點平行於已知線而作,且其正向*亦相同.

一直線之方向角之餘弦,稱爲此線之**方向餘弦**.

若倒轉一直線之正向,則其方向餘弦之符號亦變;蓋一直線之方向倒轉後,則 α,β,γ 一變而爲 $\pi-\alpha,\pi-\beta,\pi-\gamma$;而 $\cos(\pi-x)=-\cos x$(§1之8).

從§113之(3),得下之定理.

定理. 一直線方向餘弦平方之和爲單一;卽

(I) $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

§115. 直線之方向數.

吾人常用與方向餘弦成比例之三數代替方向餘弦,此三數稱爲直線之**方向數**.

定理. 設 a, b, c 爲一直線之方向數,其方向餘弦可以下列諸式表之:

(II) $$\cos\alpha=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \cos\beta=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

*譯者註: 有向線之本身有正負兩向,其與三軸所成之 α,β,γ 三方向角,乃其正向與諸軸之正向間之夾角也.

〔證〕依定義,

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{c}.$$

設 r 表此諸比之公共值,則

(1) $\cos\alpha=ar,\quad \cos\beta=br,\quad \cos\gamma=cr.$

將此三式平方相加,並應用§114之(I),得

$$1=r^2(a^2+b^2+c^2),\qquad 及\ r=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

代入(1),卽得(II)之諸式. 【證完】

上得之重要結論,可再述之如下(將(II)與§113之(5)比較):

任意三數a, b, c可以決定空間一直線之方向.設將原點與點(a,b,c)連接一線,在(II)式中根號取正時,則此直線之方向與此連接線相同;反之,則與之相反.

設一直線之一方向數爲零,則此直線垂直於相當之坐標軸.設兩方向數爲零,則此直線平行於其餘之坐標軸.

設一直線截XY平面,則此直線之向上,向下,視 $\cos\gamma$ 爲正,爲負而定.

設一直線平行於XY一平面,則 $\cos\gamma=0$,且此直線向

ZX－平面之前或後,視$\cos\beta$為正,為負而定.

設一直線平行於 x－軸,則 $\cos\beta=\cos\gamma=0$, 且此直線之正方向與 x－軸之正方向相同或相反,視 $\cos\alpha=1$ 或 -1 而定.

上述諸端,可使吾人按照直線之正方向而選擇定理中根式之符號.

問　　題

1. 下列各組數均為直線之方向數.試對於同一之直線,寫出另一組方向數,並計算其方向餘弦.

(a) $2,-3,4$　(b) $3,0,-1$.　(c) $\frac{1}{5},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3}$.　(d) $0,-\frac{1}{2},\ \frac{4}{5}$.

用上列各組方向數各作一直線.

2. 求一向上直線之方向餘弦及方向角,設其方向數為

(a) $-6,\ 2,\ 3$;　　答 $\alpha=149^\circ$, $\beta=73^\circ24'$, $\gamma=64^\circ37'$.

(b) $1,\ 2,\ 3$;

(c) $4,\ 1,\ 0$;

(d) $-2,-3,\ 1$;

(e) $1,-1,-1$;　　答 $\alpha=125^\circ16'$, $\beta=\gamma=54^\circ44'$.

(f) $5,-4,\ 7$;

(g)　5,　0, -6.

用上列方向數各作一直線.

3. 試述一直線之方向,設

(a) $\cos\alpha=0$;　　(d) $\cos\alpha=\cos\beta=0$;

(b) $\cos\gamma=0$;　　(e) $\cos\alpha=\cos\gamma=0$;

(c) $\cos\beta=0$;　　(f) $\cos\beta=\cos\gamma=0$;

4. 一直線對於三坐標軸均成等角,求此角.

5. 一直線與 x－軸成 45^0 角,與 y－軸成 60° 角,與 z－軸成幾度角?

6. 設一直線與 z 軸成 30^0 角,與 x－及 y－軸成等角,求此直線之方向餘弦.　答 $\pm\frac{1}{4}\sqrt{2}, \pm\frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

7. 下列各組數中,何者可為一直線之方向餘弦?

(a) $\left(\frac{1}{15}, 1, -\frac{2}{15}\right)$,　(b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$,

(c) $\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.　(d) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{7}\right)$.

8. 設一直線之兩方向角為 60^0 與 30^0,求第三方向角.

9. 設一直線之兩方向餘弦為 $\frac{1}{3}$ 與 $-\frac{2}{3}$,求第三方向餘弦.

10. 設　(a) $\cos\alpha>0$,　$\cos\beta>0$,　$\cos\gamma>0$;

(b) $\cos\alpha>0,\quad \cos\beta>0,\quad \cos\gamma<0;$

(c) $\cos\alpha>0,\quad \cos\beta<0,\quad \cos\gamma<0;$

(d) $\cos\alpha>0,\quad \cos\beta<0,\quad \cos\gamma>0;$

(e) $\cos\alpha<0,\quad \cos\beta>0,\quad \cos\gamma>0;$

(f) $\cos\alpha<0,\quad \cos\beta<0,\quad \cos\gamma>0;$

(g) $\cos\alpha<0,\quad \cos\beta<0,\quad \cos\gamma<0;$

(h) $\cos\alpha<0,\quad \cos\beta>0,\quad \cos\gamma<0;$

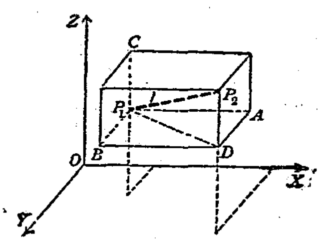
則過 O 之線,其正部在何卦限 ($O-XYZ$,$O-X'YZ$,等等)?

§116. 長

定理. 連 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 與 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 兩點之直線,其長爲 l,則 l 可以下式表之:

(III) $$l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

〔證〕過 P_1,P_2 作平面平行於諸坐標平面而成一長方體.其稜平行於諸軸,且依次等於 x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1. P_1P_2 爲此長方體之對角線,故 l^2 等於其三稜平方之和.



【證完】

設 α,β,γ 爲 P_1P_2 之方向角,則由圖,$\angle AP_1P_2=\alpha$, $P_1A=l\cos\alpha$. 依同理,$P_1B=l\cos\beta$, $P_1C=l\cos\gamma$.

故得諸方程

(1)　$x_2-x_1=l\cos\alpha,\quad y_2-y_1=l\cos\beta,\quad z_2-z_1=l\cos\gamma.$

由此可知$x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1$,或與此成比例之諸數,均可作為$P_1P_2$之方向數.

§117. 兩有向線間之角.

定理. 設α,β,γ與α',β',γ'為兩有向線之方向角,則此兩線間之角θ可以下式求之:

(IV)　$\cos\theta=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'.$

〔證〕作OP與OP'平行於已知二線,則以

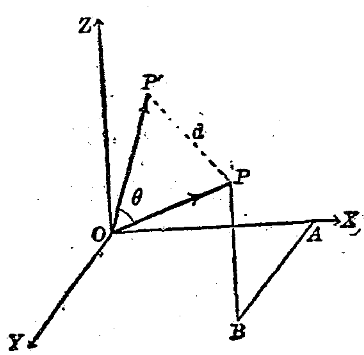
$$\angle POP'=\theta$$

定已知二線間之角.

設$OP=\rho, OP'=\rho', PP'=d$(右圖).

則用餘弦定律(§1之11),得

(1)　$\cos\theta=\dfrac{\rho^2+\rho'^2-d^2}{2\rho\rho'}$



設$(x,y,z),(x',y',z')$依次為P, P'之坐標,則

$\rho^2=x^2+y^2+z^2,$

$\rho'^2=x'^2+y'^2+z'^2,$

$d^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2$

$+(z'-z)^2.$

故　$\rho^2+\rho'^2-d^2=2(x'x+y'y+z'z)$.

應用§113之(2),得$x'=\rho'\cos\alpha'$等等,$x=\rho\cos\alpha$等等.將此諸值代入(1)式,即可得(IV).　【證完】

§118. 平行線及垂直線之證驗法.

定理 1. 設有二直線,祇要其方向角相等,則平行而同方向;祇要其方向餘弦之積之和爲零,則垂直.

〔證〕平行之條件,係根據下列事實而來:祇要二直線之方向角相等,則此二直線必與過原點之同一直線平行而同方向.

垂直之條件,係根據(IV)式而來;蓋$\theta=90°$則$\cos\theta=0$;其逆亦眞.　【證完】

祇要二直線之方向角相補,則此二直線必平行而反方向.設空間二直線間之角爲90°,則此二線爲垂直,但不必相交.

設用空間之狄卡兒坐標作兩平行線,則此兩線在圖上顯見其爲平行.設仍用此坐標作兩垂直線,則此兩線未必顯見其爲垂直.(參閱§112第一圖)

在應用時,所給者常爲方向數而非方向餘弦;故下之定理,極關重要:

定理 2. 設二直線之方向數各爲a, b, c及a', b', c',

則平行與垂直之條件依次爲

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}, \quad aa'+bb'+cc'=0.$$

用上述之定理1及§115之(III)可證此定理。

§119. 定比分點

定理. 連$P_1(x_1,y_1,z_1)$及$P_2(x_2,y_2,z_2)$兩點之線,被一點P分爲二段,而

$$\frac{P_1P}{PP_2}=r,$$

則P點之坐標(x,y,z)可以下列諸式表之:

$$\text{(V)} \qquad x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}, \quad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}, \quad z=\frac{z_1+rz_2}{1+r}.$$

此可如§10證之.

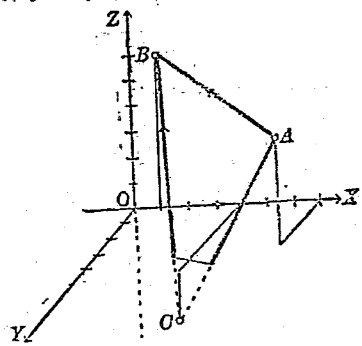
推論. $P_1(x_1y_1z_1)$及$P_2(x_2y_2z_2)$之中點坐標(x,y,z)爲

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2), \quad y=\frac{1}{2}(y_1+y_2), \quad z=\frac{1}{2}(z_1+x_2).$$

例 題

1. 以A(7,3,4), B(1,0,6), C(4,5,−2)爲頂點之三角形爲一直角三角形,試證之.

〔解〕由§116知AB之方向數爲6,3,−2;BC之方向數爲−3,−5,8;CA之方向數爲−3,2,−6.



對於AB與CA之方向數,$a'a+b'b+c'c=0$之條件可以應用,故∠A爲90^0. 答.

2. 求例1三角形中之∠B.

〔解〕如圖所示,取AB及CB之正方向(§115).設α,β,γ及α',β',γ'爲此兩線之方向角,則γ及γ'均爲銳角.由§115之(II),得

$$\cos\alpha=-\frac{6}{7},\qquad \cos\beta=-\frac{3}{7},\qquad \cos\gamma=\frac{2}{7};$$

$$\cos\alpha'=-\frac{3\sqrt{2}}{14},\quad \cos\beta'=-\frac{5\sqrt{2}}{14},\quad \cos\gamma'=\frac{8\sqrt{2}}{14}$$

故由(IV)得

$$\cos B=\frac{(18+15+16)\sqrt{2}}{98}=\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad B=45^\circ.\ 答.$$

問　題

1. 以(7,?,4),(1,0,6)及(4,5,−2)爲頂點之三角形爲

二等邊直角三角形,試以長之公式證明之(參閱例1).

2. 下列各組坐標,均爲三角形之頂點,試作其圖,並求在第一頂點之角.至於所求之角,是否爲兩邊均向上(§115)時之交角,或爲其補角,亦須分別決定之.

(a) (2, 1, 4), (3, −1, 2), (5, 0, 6). 答 $84°53'$.

(b) (2, −4, 7), (3, −2, 0), (4, −5, 4).

(c) (4, 3, −4), (−2, 9, −4), (−2, 3, 2).

(d) (4, 3, −2), (7, −1, 4), (−2, 1, −4).

(e) (3, 2, 2), (1, 2, 1), (2, 4, −1).

3. 試用長之公式決定問題 2 中各三角形之性質.

4. 以 (5,5,2), (7,5,−3), (3,2,−1), (1,2,4) 爲頂點之四邊形爲何種四邊形?試作其圖.

5. 連下列各組點成直線,試求諸直線之中點及三分點:

(a) (3, 2, −1) 與 (4, −2, 6);

答 $\left(3\frac{1}{2}, 0, 2\frac{1}{2}\right), \left(3\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}\right), \left(3\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 3\frac{2}{3}\right)$.

(b) (4, −7, 3) 與 (−6, 3, −5);

(c) (4, 3, −2) 與 (−2, 1, −5);

(d) (4, 7, −2) 與 (3, 5, −4);

(e) (3, −8, 6) 與 (6, −4, 6).

6. 以下列各組點爲頂點各依其次序連成諸多邊形,試比較各邊之方向及長度而分別決定其種類:

(a) $(7,\ 3,-4),(1,\ 0,-6),(4,\ 5,\ 2)$.

(b) $(2,-1,\ 5),(3,\ 4,-2),(6,\ 2,\ 2),(5,-3,\ 9)$.

(c) $(6,\ 7,\ 3),(3,\ 11,\ 1),(-3,\ 7,\ 2),(0,\ 3,\ 4)$.

(d) $(-6,\ 3,\ 2),(3,-2,\ 4),(5,\ 7,\ 3),(-13,17,-1)$.

(e) $(2,\ 3,\ 0),(4,\ 5,-1),(3,\ 7,\ 1),(1,\ 5,\ 2)$.

(f) $(6,-6,\ 0),(3,-4,\ 4),(2,-9,\ 2),(-1,-7,6)$.

(g) $(3,\ 2,\ 2),(1,\ 2,\ 1),(2,\ 4,-1),(4,\ 4,\ 0)$.

(h) $(2,\ 1,\ 4),(0,\ 0,\ 0),(3,-1,\ 2),(5,\ 0,\ 6)$.

7. 考察下列各組點而一一決定其是否各在一直線上,並作其圖:

(a) $(3,\ 2,\ 7),(1,\ 4,\ 6),(7,-2,\ 9)$.

(b) $(13,\ 4,\ 9),(1,\ 7,\ 13),(7,5.5,\ 11).(5,6,11\frac{2}{3})$.

(c) $(3,\ 6,-2),(7,-4,\ 3),(-1,16,-7),(-5,25,-12)$.

(d) $(2,-15,-4),(-3,-5,-9),(3,-17,-3),(4,-19,-2)$.

8. 求以下列各組點爲頂點之三角形之面積:

(a) $(1,\ 3,\ 3),(0,\ 1,\ 0),(4,-1,\ 0)$.　答 $\sqrt{70}$*.

(b) $(3,\ 1,\ 2),(2,-1,\ 5),(1,\ 0,-1)$.　答 $\frac{3}{2}\sqrt{19}$.

*譯者註: 原書作「$2\sqrt{70}$」,誤.

(c) $(4,-4,\ 2)$, $(9,-1,\ 10)$, $(6,-7,\ 8)$.

(d) $(3,-4,\ 4)$, $(2,-9,\ 2)$, $(-1,-7,6)$.

9. 設兩直線L_1及L_2依次有方向數$(0,-1,1)$及$(-1,-1,0)$,又設一直線L_3垂直於L_1,且與L_2成30°之角,試求L_3之方向餘弦.

10. 一直線之一端爲$(2,-3,5)$,其中點爲$(4,2,3)$,求他一端之坐標.

11. 試證$(0,0,0)$,$(0,-1,-1)$,$(-1,0,-1)$,及$(-1,-1,0)$爲有法四面體之四頂.

12. 一直線之一端爲$(6,-1,-7)$,在此線上距此端之距離當線長之五分之三處有一點;其坐標爲$(3,2,-1)$,求他一端之坐標.

13. 設三直線之方向數各爲$(12,-3,-4)$,$(4,12,3)$,及$(3,-4,12)$,試證此三線互爲垂直.

14. 連$(2,-3,4)$與$(8,0,10)$二點成一直線;此線上一點之x-坐標爲4,求此點之他兩坐標.

自修或挑選之問題

1. 設兩直線L_1及L_2之方向數依次爲$(2,-3,\ 4)$及$(-1,\ 2,-3)$,求垂直於L_1及L_2之一直線之方向數.

2. 三角形ABC以A(2,1,4), B(3,−1,2), C(5,0,6)三點爲頂,試用面積$=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A$之公式求其面積.

3. 試證連(2,3,4), (−1,2,6)之直線與連(1,2,−5), (6,3,−18)之直線相交,並求其交點.

4. 求任意三角形重心之坐標.

答. $\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3), \frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$.

5. 試證在任意四邊形(不必爲平面的)內,每兩對邊中點之連接線必彼此平分.

6. 連四面體每兩對稜之中點成三直線,此三線必彼此平分.

7. 在任意四面體內,從諸頂至其諸對面之重心所連之直線均相遇於一點,此點分各直線之比爲r=3.(四面體之重心.)

8. 任意四邊形內兩對角線平方之和,等於連兩對邊中點二直線平方之和之二倍.

9. 一四面體有三組對稜,其中兩組平方之和,等於第三組之平方加連此組兩中點之直線平方之四倍.

§120. 空間中之軌跡 在立體幾何中須研究兩種軌跡:

1. 設空間一點滿足一種已知條件,其軌跡通常爲

一面.

例如距一定點爲已知距離之點之軌跡爲一球面距兩定點等距離之點之軌跡爲一平面,此平面在連此兩定點之線之中點垂直於此線.

2. 設空間一點滿足兩種已知條件,其軌跡通常爲一曲線.蓋一點滿足兩條件之一,其軌跡皆爲一面;故同時滿足此兩條件之諸點,必同在此兩面上,卽在此兩面相交之曲線上.

例如有一點,(1)距一定點P_1之距離恆爲r,(2)距兩定點P_2,P_3之距離恆相等,則此點之軌跡爲一圓.蓋滿足(1)之點之軌跡,爲以P_1爲心,r爲半徑之球面;滿足(2)之點之軌跡,爲垂直於P_2P_3中點之平面;此圓卽球面與平面相交之曲線也.

條件之個數,須愼加統計.例如一點與三定點P_1,P_2,P_3爲等距離,此點僅滿足兩條件,卽(1)與P_1,P_2爲等距離,(2)與P_2,P_3爲等距離.

上述之二種軌跡,須愼加區別.

§121. 面之方程. 設在一面上任意之一點P,其坐標爲(x,y,z),則自定此面爲一軌跡之條件,可導出一含有變數x,y,z之方程.此方程稱爲**面之方程**,

且在多種情形下可用類似於 §16 之規則求得之,以下可見其例。

面之方程爲含 x,y,z 之方程,可被此面上各點之坐標所滿足,而無面外點之坐標能滿足之.

平面爲最簡單之面,下章將取而論之.在此處可顯見下之定理爲眞:

定理. 平行於 XY－面之平面,其方程之形式爲 $z=$ 常數;

平行於 YZ－面之平面,其方程之形式爲 $x=$ 常數;

平行於 ZX－面之平面,其方程之形式爲 $y=$ 常數.

§122. 曲線之方程. 設一曲線上之任意點 P,其坐標爲 (x,y,z),則自定此曲線爲一軌跡之兩條件,可導出兩個含變數 x,y,z 之方程.用每一條件所定之面之方程,在多種情形下可用類似於 §16 之規則分別求之.若將此兩面之方程聯立,則成**曲線之方程**,此曲線爲此兩面之交線.

曲線之方程爲含 x,y,z 之兩聯立方程,可被此曲線上各點之坐標所滿足,而無線外點之坐標能滿足之.

此後可知同一曲線之方程,其形式可有無限種.

兩平面相交而成直線,此可爲空間"曲線"最簡單之一例(見下章).下述易明之定理,可作爲一簡單之例:

定理. 平行於 x-軸之直線,其方程之形式爲 $y=$ 常數, $z=$ 常數;

平行於 y-軸之直線,其方程之形式爲 $z=$ 常數, $x=$ 常數;

平行於 z-軸之直線,其方程之形式爲 $x=$ 常數, $y=$ 常數.

§123. **方程之軌跡.** 含三變數(代表空間坐標,一個或兩個可不含)之方程之軌跡,爲通過坐標能滿足此方程之諸點不再通過他點之面.

方程之討論及面之作法,後章將詳論之.

聯立二方程之軌跡,爲兩面相交之曲線,此兩面係以此兩方程分別定之.

問　　題

1. 試求諸坐標平面及坐標軸之方程.

2. 試求一動點軌跡之方程,此點恆

(a) 在 XY− 平面下 4 單位長度;

(b) 在 YZ− 平面左 5 單位長度;

(c) 在 XZ− 平面前 3 單位長度;

(d) 在 YZ− 平面右 4 單位長度;

(e) 在 XY− 平面上 10 單位長度;

(f) 在 XZ− 平面後 6 單位長度.

3. 試求一動點軌跡之方程,此點

(a) 與 $(1, -1, -3)$ 之距離恆為 6;

(b) 與 $(3, 0, 4)$ 之距離恆為 5;

答　球面 $x^2+y^2+z^2-6x-8z=0$.

(c) 與 $(2, -2, 1)$, $(4, 5, 6)$ 兩點之距離恆相等.

(d) 與 $(4, -6, -8)$, $(-2, 7, 9)$ 兩點之距離恆相等.

答　平面 $6x-13y-17z+9=0$.

4. 求平面之方程,此平面垂直平分連一對已知點之直線:

(a) $(6, 3, 2)$ 及 $(4, 2, 0)$.　答. $4x+2y+4z-29=0$.

(b) $(7, -6, 0)$ 及 $(-5, -2,$ [illegible]$)$.

(c) $(4, -3, 6)$ 及 $(2, -4, 3)$.　答. $4x+2y+8z-37=0$.

(d) $(4, -5, -12)$ 及 $(-2, 4, 6)$.

5. 試求球面之方程,此球

(a)之半徑為 4,球心為 $(3,-4,-5)$;

(b)以連 $(-3,4,2)$ 及 $(7,-2,6)$ 之線為直徑;

答 $x^2+y^2+z^2-4x-2y-8z-17=0$.

(c)之球心為 $(2,1,4)$,且與 YZ－平面相切;

(d)之球心為 $(3,2,7)$,且通過 $(5,-3,8)$;

答 $x^2+y^2+z^2-6x-4y-14z+32=0$.

(e)之半徑為 3,且與三坐標平面均相切(八解);

(f)之面通過 $(2,0,0)$, $(0,-4,0)$, $(0,0,4)$, $(8,0,0)$,四點.

6. 試求一動點軌跡之方程,此點

(a)與 $(5,4,0)$ 之距離為與 $(-4,3,4)$ 距離之二倍;

(b)與 $(5,0,0)$,及 $(-5,0,0)$ 距離之和為 20;

答 $3x^2+4y^2+4z^2=300$.

(c)與 $(7,-5,9)$ 及 $(5,-3,8)$ 距離之平方之和為 6;

(d)距 $(-4,3,4)$ 之距離與其距 XY－平面之距離相等;

(e)與 x－軸之距離為與 $(4,-2,4)$ 距離之四倍;

(f)與三坐標平面距離之和等於此點與原點之距離.

答 $xy+yz+zx=0$.

7. 設有一四面體,以 $(4,8,0)$, $(2,5,-2)$, $(3,2,2)$, $(5,1,2)$

四點爲頂,試求垂直平分其六稜之平面之方程.此六平面是否相遇於一點?

8. 試求圓柱面之方程,此圓柱體之半徑爲

(a) 5,而以z－軸爲其軸;

(b) 4,而以y－軸爲其軸;

(c) 3,而以x－軸爲其軸.

9. 求與 (1,3,8), (−6,−4,2), (3,2,1) 三點等距離點之軌跡之方程.

10. 求一動點軌跡之方程,此點

(a)與 (1,3,2), (0,0,1) 爲等距離,且與 (3,0,3), (0,−2,0) 亦爲等距離;

(b)與 (1,2,1) 之距離爲 3,與 (2,0,1) 之距離爲 2.

(c)與x－軸及y－軸之距離均爲 2;

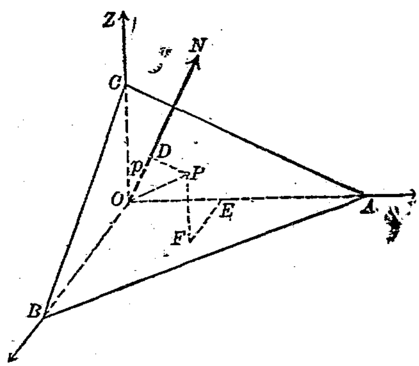
(d)與y－軸,XZ平面,及 (3,3,2) 點爲等距離;

(e)爲一等腰三角形之頂,此三角形之底係連 (4,5,6) (−2,−1,2)而成.

第十四章

空間之平面與直線

§124. 平面方程之法線式 設ABC爲任意平面,且從原點作ON垂直ABC於D點.設從O至N即從原點至平面之方向爲ON之正方向,且以p表有向長度OD,以α,β,γ表ON之方向角.則由已知p,α,β及γ之正值即可決定任意平面之位置.故平面ABC可以一點P之軌跡爲其定義,此點P常在垂直ON於D點之直線上.



茲證下之定理:

定理. 法線式 平面之方程爲

(I) $$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

其中 p 爲從原點至此平面之垂直距離,而 α,β,γ 爲此垂線之方向角*.

〔證〕設 $P(x,y,z)$ 爲已知平面 ABC 上之任一點,α',β',γ',爲 OP 之方向角,且 $\theta=\angle PON$. 則由 §117 之 (IV),得

(1) $$\cos\theta=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'.$$

在直角三角形 DOP 中,$OD=p=OP\cos\theta$.又由 §113 之(2),$x=OP\cos\alpha',y=OP\cos\beta',z=OP\cos\gamma'$.將 $\cos\theta,\cos\alpha'$ 等等之值代入 (1) 而化簡之,則可得 (I) 之結果.　【證完】

推論. 任意平面之方程爲 x, y, 及 z 之一次方程.

當 $p=0$ 時,上述之證明必略有變更,但亦不爲難;因此時 $\theta=90^0$,而 (1) 中之 $\cos\theta$ 則等於零.

特例. 若 $p=0$,則須假定 ON 向上,因而 $\gamma<\frac{1}{2}\pi$,故 $\cos\gamma>0$.若平面通過 OZ,則 ON 在 XY－平面上,而 $\cos\gamma=0$;在此時須假定 ON 向前,因而 $\beta<\frac{1}{2}\pi$ 故 $\cos\beta>0$.最後,若平面與 YZ－平面重合,則 ON 上之正方向須與 OX 之正方向相同.

§125. 一次方程之軌跡. 法線式之化成.

譯者註: 原書作 'direction cosines',誤.

定理. 方程

(II)　$$Ax+By+Cz+D=0$$

之軌跡爲一平面.

〔證〕茲用下法證此定理,卽證明可用一適宜常數乘 (II) 而將 (II) 化成法線式 (I). (與§30比較.)欲決定此常數,須以 k 乘 (II) 而得

(1)　$$kAx+kBy+kCz+kD=0$$

使 (1) 與 (I) 中之相當係數相等,得

(2)　$$kA=\cos\alpha,\quad kB=\cos\beta,\quad kC=\cos\gamma,\quad kD=-p$$

將(2)之前三式平方相而加,得

$$k^2(A^2+B^2+C^2)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

(3)　$$\therefore k=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

從(2)之末式觀察,因p恆須爲正,故可知根式必須與 D 異號.

代(3)入(2),則得

(4)　$$\begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, & \cos\beta=\dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\gamma=\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, & p=\dfrac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \end{cases}$$

故可決定 α,β,γ, 及 p 之值而使 (I) 與 (II) 有相同之

軌跡.因知 (II) 之軌跡必為一平面.　【證完】

方程 (II) 稱為 x, y, z 之普通一次方程.總上所論,則得

變平面方程為法線式之規則:

以 $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ 除已知方程,此根式須取與 D 相反之符號.

若 $D=0$,則 $p=0$,而根式必須與 C 同號.若 $C=D=0$,則根式必須與 B 同號.若 $B=C=D=0$,則根式又須與 A 同號.(參閱 §124)

從 (4) 得一重要定理:

定理. 平面方程中 x,y,z 之係數,與垂直於此平面之直線之方向餘弦成比例,或為此垂線之方向數.

由此定理與 §118, 頗易證明下之推論:

推論 1. 設有兩平面,其方程為

$$Ax+By+Cz+D=0,\quad A'x+B'y+C'z+D'=0,$$

則此兩平面僅在其 x,y,z 之各相當係數成比例時,卽

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$$

時,互為平行.

推論 2. 兩平面僅在其 x,y,z 各相當係數之積之

和爲零時,即

$$AA'+BB'+CC'=0$$

時,互爲垂直.

§126. 特殊平面.

定理. 設有一平面,其方程爲

$Ax+By+D=0$ 之形式,則垂直於 XY—平面;

$By+Cz+D=0$ 之形式,則垂直於 YZ—平面;

$Ax+Cz+D=0$ 之形式,則垂直於 ZX—平面.

易言之,設缺一變數,則此平面卽垂直於相當其餘兩變數之坐標平面.

〔證〕 垂直於 $Ax+By+D=0$ 之直線之方向數爲 $A, B, 0$; 而垂直於 $z=0$ 之直線之方向數則爲 $0, 0, 1$; 故其兩兩相乘之積之和爲零.其餘二種之證法亦同.

【證完】

推論 設有一平面,其方程爲

$Ax+D=0$ 之形式,則垂直於 x 一軸;

$By+D=0$ 之形式,則垂直於 y 一軸;

$Cz+D=0$ 之形式,則垂直於 z 一軸.

易言之,設缺二變數,則此平面卽垂直於相當其餘一變數之坐標軸.

例如,平面 $Ax+D=0$ 既垂直於 XY－平面,又垂直於 ZX－平面,故亦必垂直於此兩平面之交線.

§127. 平面之截部及交跡 類似於§18之規則,**求一平面(或任意面)在坐標軸上之截部之規則**可述之如下:

依次命 x, y, z 中一對變數爲零,而求其餘一變數之實數值.

一平面與諸坐標平面相交之諸直線,稱爲此平面之交跡.在 XY－平面上,以 OX 與 OY 爲軸時,其交跡之方程,可在平面方程中令 $z=0$ 而得之.其他兩交跡之方程亦可以同法求之.

作平面法. 從平面之方程而作其圖,首先求其截部,然後將此等截部畫於軸上而以直線連接之,卽可得矣.此等直線,卽其交跡.

若截部爲零,作一個或幾個交跡,然後再如下法求之.

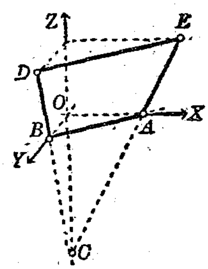
例　題

1. 求平面

(1)　　$2x+2y-z-6=0$

之截部與交跡,並作其圖.

〔解〕根據規則並就圖形言之,得此平面之截部為



$OA=3$, $OB=3$, $OC=-6$. 答.

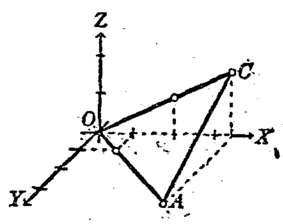
交跡為

AB: $x+y-3=0$; BC: $2y-z-6=0$;

CA: $2x-z-6=0$. 答.

為表明此平面在第一卦限內之一部分起見,遂作DE線平行於BA而顯之.

2. 求平面



(2)　$x-y-2z=0$

之交跡,並作其圖.

〔解〕交跡為

OA: $x-y=0$; OB: $y+2z=0$; OC: $x-2z=0$. 答.

作OA,OC及CA三線以顯示此平面在第一卦限內之一部.

問　　題

1. 試求下列各平面在坐標軸上之截部與在坐標平面上之交跡,並作其圖:

(a) $6x-2y+3z-20=0$.　　(e) $3x+2y-6z-10=0$.

(b) $x+2y+3z+12=0$.　　(f) $3x-y+z-14=0$.

(c) $6x-4y+z-12=0$.　　(g) $4y+3z+36=0$.

(d) $2x+y-z=0$.　　(h) $5x+3z+45=0$.

2.試求下列各平面之方程,並作其圖:

(a) $p=5,\ \alpha=120^0,\ \beta=45^0,\ \gamma=120^0$.

答.$x-\sqrt{2}\,y+z+10=0$.

(b) $p=7,\ \alpha=45^0,\ \beta=60^0,\ \gamma=60^0$.

(c) $p=4,\ \alpha=90^0,\ \beta=135^0,\ \gamma=45^0$.

答.$y-z+4\sqrt{2}=0$.

(d) $p=2,\ \alpha=60^0,\ \beta=45^0,\ \gamma=120^0$.

(e) $p=4,\ \dfrac{\cos\alpha}{6}=\dfrac{\cos\beta}{-2}=\dfrac{\cos\gamma}{3}$.

答.$6x-2y+3z\pm28=0$.

(f) $p=6,\ \dfrac{\cos\alpha}{-2}=\dfrac{\cos\beta}{-1}=\dfrac{\cos\gamma}{-2}$.

(g) $p=3,\ \dfrac{\cos\alpha}{6}=\dfrac{\cos\beta}{-3}=\dfrac{\cos\gamma}{2}$.

(h) $p=0,\ \dfrac{\cos\alpha}{-3}=\dfrac{\cos\beta}{4}=\dfrac{\cos\gamma}{12}$.

答.$3x-4y-12z=0$.

3.求平面之方程,只知從原點至此平面之垂線足

爲

(a) $(-2,-2,\ 1)$;　　　　(c) $(-4,\ 3,-12)$;

答. $2x+2y-z+9=0$.　　(d) $(\ 2,-1,\ 3)$;

(b) $(\ 1,\ 4,\ 2)$;　　　　(e) $(-1,\ 6,\ 3)$;

答. $x+4y+2z-21=0$.　　(f) $(\ 1,\ 0,\ 2)$.

4. 將問題 1 中之平面方程化成法線式並在每問中決定從原點至該平面之垂線之方向餘弦及從原點至該平面之垂直距離.

答. (a) $\cos\alpha=\frac{6}{7}, \cos\beta=-\frac{2}{7}, \cos\gamma=\frac{3}{7}, p=2\frac{6}{7}$.

5. 求作平面之方程,此平面垂直於從原點

(a) 至 $(4,\ 5,\ 3)$ 之直線且通過 $(1,\ 3,\ 2)$.

(b) 至 $(2,-4,\ 3)$ 之直線且通過 $(3,-4,-5)$.

6. 一平面通過 $(1,-3,\ 2)$ 且垂直於連 $(0,\ 0,\ 3)$ 與 $(1,-3,-4)$ 之直線,試求其方程.

7. 設一直角三角形之直角頂爲 $(4,-2,-2)$,而另一頂點爲 $(3,\ 1,\ 1)$,試求第三頂點之軌跡.

8. 在下列各問中,試證明每兩平面互爲平行,並求其間之垂直距離:

(a) $x-y-z+5=0$,　　$2x-2y-2z-7=0$.

(b) $3x-y+2z+10=0$,　　$3x-y+2z-7=0$.

(c) $6x+2y-3z-63=0$,　$6x+2y-3z+49=0$. 答.16.

(d) $x+2y+2z-7=0$,　$3x+6y+6z-1=0$.

9.在下列各問中,試取每兩平面考查之,何者爲平行?何者爲垂直?

(a) $2x+3y-z=0$, $3x-y+3z+2=0$, $4x+6y-2z+8=0$.

(b) $2x-5y+4=0$, $5x+2y-8=0$,　$x-2y=0$.

10.試求平面之方程,此平面

(a) 垂直於XY−平面,且通過$(2,-1,\ 0)$與$(3,\ 0,\ 5)$二點;　答.$x-y-3=0$.

(b) 垂直於YZ−平面,且在y−軸上之截部爲5,在z−軸上之截部爲−2;

(c) 平行於平面$x-2y-2z-15=0$,且較此平面距原點近2單位長度.

11.試求下列各問中諸平面之交點:

(a) $x+2y+z=0$,　$x-2y-8=0$,　$x+y+z-3=0$.

答.$(2-3\ \ 4)$.

(b) $3x-5y-4z+7=0$,　$6x+2y+2z-7=0$,　$x+y=5$.

12.試證四平面$4x+y+z+4=0$, $y-5z+14=0$, $x+2y-z+3=0$, $x+y+z-2=0$有一公共點.

13.坐標平面截下列各平面而成諸三角形,試求此

等三角形之面積:

(a) $2x+2y+z-12=0$.　　答.54.

提示. 用諸截部,且用兩種方法表明此平面與坐標平面所包圍而成之四面體之體積.

(b) $7x-7y+2z-6=0$.　　(d) $x+5y+7z-3=0$.

(c) $2x-y-3z+12=0$.　　答.$\frac{9}{14}\sqrt{3}$.

§128. 二平面間之角.

兩相交平面所成之一對二面角之平面角顯然等於從原點作至此兩平面之垂線正方向間之角.此角稱為**二平面間之角**.

定理. 二平面

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ 與 } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

間之角 θ,可以下式求之:

$$\text{(III)}\qquad \cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\times\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

其中根式之符號可依§125之規則取之.

〔證〕從原點作至此兩平面之垂線之方向餘弦為

$$\cos\alpha_1=\frac{A_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},\quad \cos\alpha_2=\frac{A_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

$$\cos\beta_1=\frac{B_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},\quad \cos\beta_2=\frac{B_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

$$\cos\gamma_1=\frac{C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},\quad \cos\gamma_2=\frac{C_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

因 θ 角等於此兩直線間之角,故由 §117之(IV)得

$$\cos\theta=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2.$$

將上列方向餘弦之諸值代入此式,即可得(III)

【證完】

§129. **三條件決定之平面.** 吾人已知方程

(1) $$Ax+By+Cz+D=0.$$

可代表一切平面.欲求某平面方程之問題,即根據已知條件寫出關於係數A,B,C,D之三個齊次方程,從此三式可解出其三個係數均爲第四係數之項.設將此諸值代入(1)中,等式兩端同以第四係數除之,即可得所求之方程矣.

例題

1. 一平面通過一點 $P_1(2,-7,\ \frac{3}{2})$, 且平行於另一平面 $21x-12y+28z-84=0$, 試求其方程.

〔解〕設所求之平面方程爲

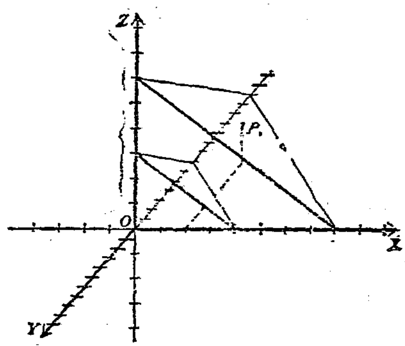
(2) $$Ax+By+Cz+D=0.$$

因 P_1 在(2)上,故可代 $x=2, y=-7, z=\frac{3}{2}$,得

(3) $$2A-7B+\frac{3}{2}C+D=0.$$

又因(2)平行於已知平面(§125.推論1),故

(4) $$\frac{A}{21}=\frac{B}{-12}=\frac{C}{28}.$$



方程(3)與(4)爲 A, B, C, D 之三個齊次方程.

解(3)與(4),使 A, B, D 均爲 C 之項,得

$$A=\frac{3}{4}C,\quad B=-\frac{3}{7}C,$$

$$D=-6C.$$

代入(2), $$\frac{3}{4}Cx-\frac{3}{7}Cy+Cz-6C=0.$$

去分母,且除以 C,得 $21x-12y+28z-168=0.$ 答.

2.欲求通過三點之平面之方程,即可將三點中每點之坐標代(1)中之 x, y, z. 由此可得含 A,B,C,D 之三方程.且可就此三式解其三係數爲第四係數之項.

將通過三已知點 $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)$ 之平面方程寫成行列式之形狀,常覺便利.即

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

實際將（5）按第一行之諸元展開,即可得x, y, z之一次方程.故（5）爲一平面方程.復次,將三已知點中任一點之坐標代（5）中之x, y, z,均能滿足;因此時均有兩行全等,而行列式之値爲零.故平面（5）通過諸已知點.

方程（5）又可用以決定四已知點是否同在一平面內.

設將（5）展開而寫成下式

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

則其係數均爲三級之行列式:

$$A = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},\quad B = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},\quad C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},\quad D = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

§130. 平面方程之截部式.

定理. 設a, b, c依次爲一平面在x, y, z軸上之截部,則此平面之方程爲

(IV) $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

〔證〕設所求之平面方程爲

(1) $$Ax+By+Cz+D=0.$$

今已知此平面上之三點,卽

$$(a,\ 0,\ 0),\quad (0,\ b,\ 0),\quad (0,\ 0,\ c).$$

此等坐標必可滿足(1).故

$$Aa+D=0,\quad Bb+D=0,\quad Cc+D=0.$$

而 $$A=-\frac{D}{a},\quad B=-\frac{D}{b},\quad C=-\frac{D}{c}.$$

代入(1),以 $-D$ 除之,並移項,卽可得(IV).【證完】

問　題

1. 試求通過下列各已知點之平面方程,並驗證其答案:

(a) $(0,\ 0,\ 3)$, $(4,\ 0,\ 0)$, $(8,\ 0,\ 0)$.

(b) $(2,\ 3,\ 0)$, $(-2,-3,\ 4)$, $(0,\ 6,\ 0)$.

答. $3x+2y+6z-12=0$.

(c) $(-4,\ 0,\ 6)$, $(8,\ 2,-1)$, $(2,\ 4,\ 6)$.

(d) $(4,\ 2,\ 1)$, $(-1,-2,\ 2)$, $(0,\ 4,-5)$.

答. $11x-17y-13z+3=0$.

(e) $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(5, 4, 3)$.

(f) $(1, 1, -1)$, $(-2, -2, 2)$, $(1, -1, 2)$.

答. $x-3y-2z=0$.

2. 求平面之方程,此平面

(a) 通過 $(2, 1, -1)$,且平行於平面 $7x+4y-4z=0$,

(b) 通過 $(3, -4, 5)$,且平行於平面 $3x-y+z+6=0$.

答. (b) $3x-y+z=18$.

3. 寫出以下列各組數爲截部之平面方程,並作此平面之圖形:

(a) $3, 4, 5$. (c) $2, 4, -7$. (e) $a, -b, -c$.

(b) $1, 3, 5$. (d) $7, 0, -4$. (f) $2a, -a, 3a$.

4. 寫出平面之方程,此平面

(a) 通過 $(2, 1, -1)$ 與 $(1, 1, 2)$,且垂直於平面 $7x+4y-4z+30=0$; 答. $12x-17y+4z-3=0$.

(b) 通過 $(6, 4, -1)$ 與 $(2, 4, 1)$,且垂直於平面 $4x+6y-3z-7=0$.

5. 寫出平面之方程,此平面

(a) 通過 $(7, 0, 3)$,且與兩平面 $2x-4y+3z=0$ 及 $7x+2y+z=14$ 均爲垂直; 答. $10x-19y-32z+26=0$.

(b) 通過(3, 4, 5),且與兩平面 $2x+3y-7=0$ 及 $4x-3z=7$ 均為垂直.

6. 試證下列各問中四點均同在一平面內:

(a) $(-1, 0, 0)$, $(0, 2, -3)$, $(2, 10, -5)$, $(1, 0, -10)$.

(b) $(1, 0, -1)$, $(3, 4, -3)$, $(8, -2, 6)$, $(2, 2, -2)$.

7. 試求下列各問中每對平面間之角:

(a) $4x-3y+5z=8$, $2x+3y-z=4$.

(b) $2x-y+z=7$, $x+y+2z=11$. 答. 60^0.

(c) $4x-3y+z=6$, $2x+3y-5z=4$.

(d) $x+2y-z=12$, $x-2y-2z=7$. 答. $97^049'$.

(e) $3x-z+12=0$, $x+3y+17=0$.

(f) $x+5y-3z=10$, $2x-3y+z=10$.

8. 試證§128 (III) 所給之角等於不含原點之二面角之平面角.

9. 以三平面 $x+y+z=2$, $x-y-2z-4=0$. 及 $2x+y-z=2$ 組成一三面角,試求其頂點及諸二面角.

答. 頂點 $(4,-4, 2)$,一個二面角為 120^0.

10. 求下列各平面之方程:

(a) 通過 $(0,-1, 0)$ 與 $(0, 0, 1)$ 二點,且與 XY-平面成 60^0 角. 答. $\sqrt{2}x-y+z-1=0$.

(b) 通過 $(0,-1,\ 0)$ 與 $(0,\ 0,\ 1)$ 二點,且與平面 $y-z-2=0$ 成 120^0 角.

自修或挑選之問題

11. 一平行六面體三面之方程爲 $x-4y=3$, $2x-y+z=3$ 及 $3x+y-2z=0$, 一頂點爲 $(3,\ 7,-2)$. 其餘三面之方程爲何? 其餘各頂點之坐標爲何?

12. 一平面通過一點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, 且平行於平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, 試求其方程.

答. $A_1(x-x_1)+B_1(y-y_1)+C_1(z-z_1)=0$.

13. 一平面通過原點與 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, 且垂直於平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, 試求其方程.

答. $(B_1z_1-C_1y_1)x+(C_1x_1-A_1z_1)y+(A_1y_1-B_1x_1)z=0$.

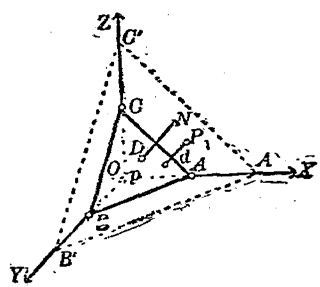
14. 一平面通過 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 與 $P_2(x_2,y_2,z_2)$, 且垂直於平面 $Ax+By+Cz+D=0$, 試求其方程.

§131. 從平面至一點之距離. 垂直於一平面之任意直線上之正方向,均假定與過原點所作垂直於此平面之直線上之正方向相同 (§124). 故從一平面至 P_1 之垂直距離之爲正爲負,視 P_1 與原點在此平面之異側或同側而定.

設平面通過原點,則從此平面至P_1之距離之符號,須根據§124之特例中所下之假定而決定之.

今試解下之問題:設已知一平面之方程及一點之坐標,試求從此平面至此點之垂直距離.(與§31比較).

〔解〕設此點爲 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, 並假定已知平面之方程爲法線式



(1)　$x\cos\alpha+y\cos\beta$

$$+z\cos\gamma-p=0.$$

設 d 等於所求之距離.

過P_1作一平面 $A'B'C'$ 平行於已知平面 ABC, 則此平面之方程爲

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-(p+d)=0.$$

$\because P_1$之坐標滿足此方程,故以$x=x_1$,等等代入此方程,並就 d 解之,則得

$$d=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p.$$　　答.

故以已知點之坐標代(1)左端之x,y,及z,其結果即垂直距離 d 也.

求從一已知平面至一已知點之垂直距離 d 之規則:

先化平面方程爲法線式,然後令 d 等於此方程之左端.

將已知點之坐標代 x,y, 及 z, 其結果卽所求之距離.

例 題

試求從平面 $2x+y-2z+8=0$ 至點 $(-1,2,3)$ 之垂直距離.

〔解〕以 -3 除此方程並用上述規則,得

$$d=\frac{2x+y-2z+8}{-3}=\frac{2(-1)+2-2(3)+8}{-3}=-\frac{2}{3}.\quad \text{答.}$$

故所求之距離爲 $\frac{2}{3}$,且此點與原點在此平面之同側.

由上規則可知從平面

$$Ax+By+Cz+D=0$$

至一點 (x_1, y_1, z_1) 之垂直距離爲

$$(2)\qquad d=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

其中根式之符號仍依前述之法 (§125) 定之.

問 題

1. 試求下列從一平面至一點之垂直距離,並解釋

其結果中符號之意義:

(a) $6x-3y+2z-10=0$ 至 $(4,\ 2,\ 10)$;　　答. 4.

(b) $x+2y-2z-12=0$ 至 $(1,-2,\ 3)$;　　答. -7.

(c) $4x+3y+12z+6=0$ 至 $(9,-1,\ 0)$;

(d) $2x-5y+3z+4=0$ 至 $(-2,\ 1,\ 7)$;

(e) $3x-4y+12z+26=0$ 至 $(1,\ 5,\ 9)$;

(f) $3x+4y-12z+10=0$ 至 $(1,\ 6,\ 5)$.

2. 設 $(0,3,1),(2,-7,1),(0,5,-4)$,及 $(2,0,1)$ 爲四面體之四頂,試求其四高之長.　　答. $\frac{10}{29}\sqrt{29}$,等等.

3. 設平面 $3x+4y+2z+12=0$ 與坐標軸相交於三點,卽以此三點與 $(1,2,1)$ 爲四面體之頂,試求其體積.

4. 已知下列各組點爲諸四面體之頂,試分別求其體積:

(a) $(3,\ 4,\ 0),(4,-1,\ 0),(1,\ 2,\ 0),(6,-1,\ 4)$. 答. 8.

(b) $(0,\ 0,\ 4),(3,\ 0,\ 0),(0,\ 2,\ 0),(7,\ 7,\ 3)$.

(c) $(4,\ 0,\ 0),(0,\ 4,\ 0),(0,\ 0,\ 4),(7,\ 3,\ 2)$.

(d) $(3,\ 0,\ 0),(0,-2,\ 0),(0,\ 0,-1),(3,-1,-1)$. 答. $\frac{3}{2}$.

(e) $(1,\ 0,\ 0),(0,\ 1,\ 0),(0,\ 0,-2),(4,-1,\ 3)$.

(f) $(3,\ 0,\ 0),(0,\ 5,\ 0),(0,\ 0,-1),(3,-4,\ 0)$.

5. 從兩平面 $2x-y-2z-3=0$ 及 $6x+3y+2z+4=0$ 至

一點之垂直距離之絕對值相等,試求此點軌跡之方程. 答.兩平面;其一爲 $32x+2y-8z-9=0$.

6. 從平面 $3x-6y-2z=0$ 至一點之距離等於從平面 $2x+y+2z=9$ 至此點之距離之三倍,試求此點軌跡之方程.

7. 從平面 $x+y+z+12=0$ 至一點之距離等於從原點至此點之距離,試求此點軌跡之方程.

8. 從平面 $x+y=1$ 至一點之距離等於從z-軸至此點之距離,試求此點軌跡之方程.

答.$(x-y)^2+2(x+y)-1=0$.

9. 從兩平面 $x+y-z-1=0$ 及 $x+y+z+1=0$ 至一點之距離之平方和等於 1,試求此點軌跡之方程.

答.$2(x+y)^2+2z(z+2)-1=0$.

10. 設一平面對於三坐標平面之傾斜角相等,且從原點至此平面之垂直距離爲 p,試寫出此平面之方程.

11. 設一平面之截部爲 a, b, c,且從原點至此平面之垂直距離爲 p,試求 p 與 a, b, c,之關係.

§132. 平面系. 因三條件可決定一平面,設一平面已滿足兩條件,則其方程通常必含一任意常

數;故此種方程可表一平面系.

平面系常用以求滿足三條件之平面方程,猶如直線系常用以求一直線之方程也(§32).

平面系之重要者有三,茲述如下:

平行於一已知平面

$$Ax+By+Cz+D=0$$

之平面系可以

$$Ax+By+Cz+k=0 \tag{V}$$

表之;其中 k 爲一任意常數.

平面(V)顯然平行於已知平面(§125推論1.).

過兩已知平面

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

之交線之平面系可以

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{VI}$$

表之;其中 k 爲一任意常數.

在兩已知平面交線上任意一點之坐標可滿足兩已知平面之方程,故顯然亦可滿足(VI).

平面系之僅滿足一單獨條件者,其方程必含兩個任意常數.茲舉此類平面系最要之一種如下:

過一已知點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 之平面系可以下式表之:

(VII) $$\underline{A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.}$$

因P_1之坐標顯然滿足此方程,故(VII)爲通過P_1之平面方程.又設有任意平面,其方程爲

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

若此平面通過P_1,則

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0.$$

將此二式相減,即可得(VII). 故(VII)可表一切通過P_1之平面.

方程(VII)實際僅含兩個任意常數,即任意二係數與第三係數之比.

在下列諸問題中,先寫出適宜平面系之方程,然後再根據其餘已知事實決定未知裏變數之價值.

問　題

1. 試決定平面 $x+ky-2z-9=0$ 中 k 之價值,設此平面

(a) 通過點$(5,-4,-6)$; 答. 2.

(b) 平行於平面 $6x+2y-12z=7$;

(c) 垂直於平面 $2x+4y+3z=3$; 答 1.

(d) 與原點之距離爲 5 單位長度;

(e) 與平面 $2x-3y+z=10$ 成 45° 角. 答. $-\frac{1}{2}\sqrt{70}$.

2. 設一平面通過點 $(3,-2,-1)$ 且平行於平面 $7x-y-z=14$,試求其方程.

3. 試求一平面之方程,此平面通過兩平面 $2x+y-4=0$ 及 $y+2z=0$ 之交線,且

(a) 通過點 $(2,-1,-1)$; 答. $3x+y-z=6$.

(b) 垂直於平面 $3x+2y+3z=6$.

4. 設三平面均通過兩平面 $2x+y-z=4$ 與 $x-y+2z=0$ 之交線,但各垂直於一坐標平面,試分別求其方程.

答. $5x+y=8$, $3x+z=4$, $3y-5z=4$.

5. 設一平面平行於 $6x+3y+2z+21=0$,且與以原點為心以 1 為半徑之球相切,試求其方程.

6. 設一平面平行於 $6x-2y+3z+15=0$,且一點 $(0-2,-1)$ 適位於此兩平面之中央,試求此平面之方程.

7. 設一平面通過點 $(2,-3,\ 0)$,且與 $x-3y+7z+12=0$ 在XZ平面上有相同之交跡,試求其方程.

8. 設一平面平行於 $2x+y+2z+5=0$,且與三坐標平面成一單位體積之四面體,試求其方程.

9. 設一平面平行於 $5x+3y+2z+7=0$,且其截部之和為23,試求此平面之方程.

自修或挑選之問題

10.設一平面平行於 $2x+6y+3z-8=0$,且此平面被三坐標平面截於第一卦限之面積爲 $\frac{7}{8}$,試求其方程.

答.$2x+6y+3z-3=0$.

11.設一平面平行於 $12x+y+2z+5=0$,且此平面與三坐標平面成一四面體,其全面積爲 1,試求此平面之方程.

12.設一平面有一交跡 $x+3y-2=0$,且與三坐標平面成一四面體,其體積爲 $\frac{8}{3}$,試求此平面之方程.

13.設一平面通過兩平面 $6x+2y+3z-6=0$ 與 $-x+y+z+1=0$ 之交線,且與三坐標平面成一體積爲 $\frac{1}{6}$ 之四面體,試求此平面之方程.

14.試證明三平面 $x+2y-3z+1=0$,$3x+4y-19z+5=0$ 及 $y+5z=1$ 有一公共交線.

15.設一平面通過兩平面 $3x+y-z+5=0$ 與 $x-y+z-2=0$ 之交線,且與平面 $y-z=0$ 成 45^0 角,試求其方程.

16.設一平面通過兩平面

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{與} A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

之交線,且通過原點,試求其方程.

答.$(A_1D_2-A_2D_1)x+(B_1D_2-B_2D_1)y+(C_1D_2-C_2D_1)z=0.$

17.設三平面均通過兩平面

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{與} A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

之交線,且各垂直於一坐標平面,試分別求其方程.

答.$(A_1B_2-A_2B_1)y-(C_1A_2-C_2A_1)z+A_1D_2-A_2D_1=0,$

等等.

18.設一平面通過原點與 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,且垂直於 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,試求此平面之方程.

答.$(B_1z_1-C_1y_1)x+(C_1x_1-A_1z_1)y+(A_1y_1-B_1x_1)z=0.$

§133. 直線方程之通式. 設有諸平面通過一直線,則此直線可視爲此諸平面中任意兩平面之交線.將兩平面之方程聯立,卽其相交直線之方程也.

設有兩個一次聯立方程,若此兩方程之軌跡非平行平面,則此聯立方程之軌跡必爲一直線.故得下之定理:

定理. 在兩個一次聯立方程

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

中,若非 x,y,z 之係數互成比例,則其軌跡爲一直線.

設一直線之方向數爲已知,則其方向自亦可定.今舉例說明求方向數之法.

例題

1. 設一直線之方程爲

(1) $$3x+2y-z-1=0,\quad 2x-y+2z-3=0.$$

試求其方向數.

〔解〕設 a, b, c 爲所求之方向數.

(1)中第一平面方程之係數 3, 2, −1, 與該平面之一垂線之方向餘弦成比例.因已知線在此平面上,故由§118 之定理 2,得

(2) $$3a+2b-c=0.$$

依同理,用(1)中之第二平面

(3) $$2a-b+2c=0.$$

解(2)與(3)使 a, b,各爲 c 之諸項,其結果爲

$$7b=8c,\quad 7a=-3c,$$

(4) $$\therefore \frac{a}{3}=\frac{b}{-8}=\frac{c}{-7}.$$

即 3, −8, −7 爲方向數. 答.

2. 試求直線

(5) $$2x+y+3z+2=0,\quad 3x+y+3z-5=0$$

之方向數 a, b, c.

〔解〕如例 1 法,即須解方程

(6) $$2a+b+3c=0,\quad 3a+b+3c=0.$$

解之,則得 $a=0, b=-3c$.

故 $0, -3, 1$ 爲所求之方向數. 答.

此直線平行於 YZ—平面.

求作一直線,僅須知此線上之一點及其方向數.設欲求一直線截一坐標平面之點(此點稱爲此直線在該平面上之交跡.),其法甚易.例如在 XY—平面上之交跡,其 x, y 之值可令直線方程中 $z=0$ 而對於 x, y 解之.

3. 試說明例 1 中直線(1)之圖如何作法.

〔解〕令(1)中 $z=0$,得 $3x+2y-1=0, 2x-y-3=0$. 解之,得 $x=1, y=-1$. 因知此直線在 XY—平面上之交跡爲 $A(1, -1, 0)$,且由例 1 知其方向數爲 $3, -8, -7$. 故先連原點與 $(3, -8, -7)$ 成一直線,然後過 A 作一線與之平行,即爲所求之線.或先作一點 $B(4, -9, -7)$,然後連 AB 線亦爲所求之線,蓋 AB 之方向數爲 $3, -8, -7$ 也(§116).

4. 試求直線 (VIII) 之方向餘弦.

〔解〕根據例1之理由,此直線之方向餘弦$\cos\alpha,\cos\beta$, $\cos\gamma$ 必能滿足兩方程 $A_1\cos\alpha+B_1\cos\beta+C_1\cos\gamma=0, A_2\cos\alpha+B_2\cos\beta+C_2\cos\gamma=0$.

解此方程而求其比例數,則得下之定理:

定理. 設α,β,及γ為直線(VIII)之方向角,則

$$\frac{\cos\alpha}{B_1C_2-B_2C_1}=\frac{\cos\beta}{C_1A_2-C_2A_1}=\frac{\cos\gamma}{A_1B_2-A_2B_1}$$

此諸分母,甚易記憶.蓋可視為由(VIII)中x,y,z之係數所作成之三個二級行列式也:

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

問　題

1. 試求出下列各直線交跡之一及其方向數,並作其圖:

(a) $x+5y+7z-3=0, x-2y+3z-6=0.$

答. $\frac{\cos\alpha}{29}=\frac{\cos\beta}{4}=\frac{\cos\gamma}{-7}$

(b) $3x-5y-4z+12=0, 6x+2y+2z-12=0.$

(c) $6x-3y+6z-7=0, 3x+2y+3z+28=0.$

(d) $5x-7y+3z-10=0, 3x+5y-8z+4=0.$

(e) $x+2y=8,\ 2x-4y=7.$　　答.方向數為0,0,1.

(f) $y+z=4,\ x+y-2z=12.$

2. 試求下列每兩直線間之角,並假定此等直線均係向上(設$\cos\gamma=0$,則假定其向ZX一平面之前(§115),設$\cos\beta=\cos\gamma=0$,則假定其向右):

(a) $x+y-z=0,\ y+z=0$,與$x-y=1,\ x-3y+z=0.$

答.60°.

(b) $2x+y-z=2,\ x-y+2z=4$,與

$4x+3y-6z=0,\ 4x-3y=2.$

(c) $x+y+z=5,\ x-y+z=3$,與$x+3z=4,\ 3y-5z=1.$

答.45°.

(d) $2x-y+2z=5,\ x+2y-2z=4$,與

$3x-2y-6z+49=0,\ 2x+2y-z=9.$

(e) $x-2y+z=2, 2y-z=1$,與

$x-2y+z=2,\ x-2y+2z=4.$　　答.$78^\circ28'$.

(f) $x+y-3z=6,\ 2x-y+3z=3$,與$x+y=6,\ 2x-3z=5.$

(g) $3x+2y-z=4,\ x-2y-2z=5$,與

$5x-14z=7,\ 2x+7z=19.$　　答.$63^\circ19'$.

(h) $6x-3y-2z-7=0,\ 2x-2y-z+12-0$,與

$2x+2y-z=9,\ 6x+4y-z+12=0.$

3. 試證以下列各對方程所定之直線兩兩平行,並作其圖:

(a) $2y+z=0,\ 3y-4z=7$, 與 $5y-2z=8,\ 4y+z=44$.

(b) $x+2y-z=7,\ y+z-2x=6$, 與 $3x+6y-3z=8$,

$2x-y-z=0$.

(c) $3x+z=4,\ y+2z=9$, 與 $6x-y=7,\ 3y+6z=1$.

4. 於下列各問中,試證一對平面之交線與他一對平面之交線相遇於一點,且彼此垂直:

(a) $x+2y=1, 2y-z=1$, 與 $x-y=1,\ x-2z=3$.

(b) $4x+y-3z+24=0,\ z=5$, 與 $x+y+3=0,\ x+2=0$

(c) $3x+y-z=1,\ 2x-z=2$, 與

$2x-y+2z=4,\ x-y+2z=3$.

5. 試證兩平面 $x+2y+3z=3,\ 3x+6y+9z=20$ 與第三平面 $4x-y+z=0$ 之交線爲平行線.

6. 求兩直線 $3x-y-3z-8=0,\ x-y+z+2=0$, 與 $x+y-z=0,\ 6x-6y-3z-15=0$ 之交點.　答. $(-1,-2,-3)$

7. 試用解析方法證明兩平行平面與任意第三平面之交線必平行.

8. 試用解析方法證明一平面 $y-z=0$ 與其他兩平面 $3x-y-z+5=0,\ x-y+z-2=0$ 相交於平行直線.

§134. 直線方程之各種特式

定理 1. 裹變式. 一直線通過一已知點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 且方向角為 α,β,γ, 則此直線上任意點 $P(x,y,z)$ 之坐標可以下列諸式表之:

(IX) $x=x_1+t\cos\alpha,\ y=y_1+t\cos\beta,\ z=z_1+t\cos\gamma.$

其中 t 為裹變數,表變動的有向長度 P_1P 之値.

此可直接從§116 之(1) 令 $l=t$ 而證之.

定理 2. 對稱式. 通過 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 且方向角為 α,β,γ 之直線,其方程有下之形式:

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma} \tag{X}$$

將(IX)中各式對 t 解之而令其結果相等,則可得(X).

推論. 設 a, b, c 為方向數,則直線方程之對稱式又可寫為下形:

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}. \tag{XI}$$

定理 3. 兩點式. 通過 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 與 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 之直線方程為

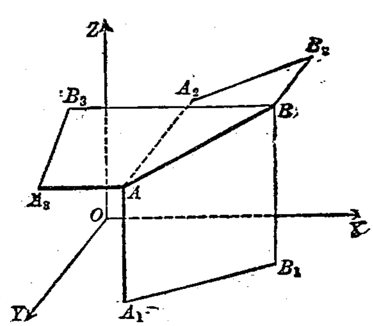
(XII) $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

〔證〕由§116知(XII)之諸分母為此直線之方向數,故從(XI)可得(XII). 【證完】

(X)–(XII)三式,各為三等比所成.此三等比相當於兩獨立方程,而各方程均表通過此直線之一平面(參閱下節).設一方向角為90^0,則(X)之證明失敗,且在此情形下,(XI)與(XII)之證明亦不能成立(參閱§.35之問題2,3).

§135. **直線之影壁.** 設一平面通過一已知直線而垂直於坐標平面之一,則此平面稱為影壁.

設一直線垂直於坐標平面之一,則含有此直線之任意平面均垂直於此坐標平面.在此時,吾人僅論過此直線垂直於其餘兩坐標平面之兩影壁.



設一直線平行於坐標平面之一,則有兩個影壁相重合.

從§132之(VI),可知通過直線

(1) $$3x+2y-z-1=0,\ 2x-y+2z-3=0$$

之任意平面之方程均有下之形式:

$$3x+2y-z-1+k(2x-y+2z-3)=0.$$

乘出並集項,得

(2) $$(3+2k)x+(2-k)y+(-1+2k)z-1-3k=0.$$

設 z 之係數等於零,即設 $k=\frac{1}{2}$,則此平面將垂直於XY－平面(§126).將此 k 之值代入(2)並整理之,得

(3) $$4x+\frac{3}{2}y-\frac{5}{2}=0,\ \text{或}\ 8x+3y-5=0.$$

故此卽直線(1)在 XY 上之影壁之方程,亦卽圖中平面 ABB_1A_1 之方程也.

實則方程(3)不過係從方程(1)中消去 z 後所得之結果;卽以2乘方程(1)之第一式而加於其第二式.故得下之結果:

欲求一直線諸影壁之方程,從已知方程中依次消去 x, y 及 z, 卽可得矣.

故欲完成上之例題,再從(1)中消去 y, 卽可得在XZ上之影壁為 $7x+3z-7=0$;消去 x, 卽可得在YZ上之影壁為 $7y-8z+7=0$.

§134 之 (X)－(XII),立卽給出影壁之方程.例如,在 (XI) 中,

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}, \tag{4}$$

或 $b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$ 爲在 XY 上之影壁.

射影式. 聯立方程

$$x=mz+p,\ y=nz+q \tag{XIII}$$

定一直線爲其在 XZ 與 YZ 上影壁之交線.將各方程均對 z 解之,並令其結果相等,則得對稱方程

$$\frac{x-p}{m}=\frac{y-q}{n}=\frac{z}{1}. \tag{5}$$

與 §134 之 (XI) 比較,則得下之定理:

定理. 在射影式 (XIII) 中,該直線通過 (p, q, 0),且 m, n, 1 爲其方向數.

(XIII) 式常甚有用.此式可用於任何不平行於 XY－平面之直線.至於其餘兩種射影式顯然亦可用之.

例 題

試化下之直線方程爲對稱式 (XI):

$$x-2y+z=8,\ 2x-3y=13.$$

〔解〕先求兩個影壁之方程.此第二平面已爲此直線在XY上之影壁.在此兩方程中消去 x,則得 $y-2z=-3$. 故兩影壁之方程爲

$$2x-3y=13,\ 與\ y-2z=-3. \tag{6}$$

將第一式對 x 解之,第二式對 z 解之,則得射影式

$$x=\frac{3}{2}y+\frac{13}{2},\quad z=\frac{1}{2}y+\frac{3}{2} \tag{7}$$

將每式均對 y 解之,並令其結果相等,則又得

$$\frac{x-\frac{13}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{y}{1}=\frac{z-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

以 2 乘諸分母,其結果爲

$$\frac{x-\frac{13}{2}}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-\frac{3}{2}}{1}.\qquad 答.$$

與 (XI) 比較,得 $x_1=\frac{13}{2}, y_1=0, z_1=\frac{3}{2}, a=3, b=2, c=1.$

故此直線通過 $\left(\frac{13}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$,且其方向餘弦與 3,2,1 成比例.因此又得求一直線方向數之第二法.(參閱§133之例.)

此處須注意者,即在(XI)中,x_1, y_1 及 z_1 爲在此直線

上任意一點之坐標.故對於一已知直線設爲(XI)式,則其分子儘可寫爲各種不同之形狀.例如在(6)中令 $z=0$,則得 $x=2\ y=-3$. 故方程 $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ 亦可表此已知直線.尤有須注意者,即方程(XI)中 x, y, 及 z 之係數必須爲 1.此可解釋(8)之形式.

問　題

1. 試求下列各直線影壁之方程,並將各直線方程寫爲射影式:

(a) $2x+y-z=0,\ x-y+2z=3.$

答. $5x+y=3,\ 3x+z=3,\ 3y-5z+6=0;$

$y=-5x+3$ 與 $z=-3x+3.$

(b) $2x+y+z=6,\ x+3y-2z=2.$

(c) $2x+y-z=1,\ x-y+z=2.$

答.此直線平行於 YZ. $x=1, y=z-1.$

(d) $3x+y-4z=10,\ 2x+2y+3z=10.$

(e) $2y+3z=6,\ 2y-3z=18.$

答.此直線平行於 OX. $y=6,\ z=-2.$

(f) $12x+y+z=0,\ 4x+3y+2z=16.$

(g) $x+z=1,\ x-z=3.$

2. 試證下列諸公式,此等公式為補充 (X)－(XII) 之特例.卽在下所示之特種情形之下可以之代(X)－(XII) 之用.試由 (IX) 推出之.

(a) 當 $\gamma=90^0$ 時, $\dfrac{x-x_1}{\cos\alpha}=\dfrac{y-y_1}{\cos\beta},\ z=z_1.$

(b) 當 $c=0$ 時, $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b},\ z=z_1.$

(c) 當 $z_1=z_2$ 時, $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1},\ z=z_1.$

3. 試證下列諸公式,以補充(X)－(XII)之不足 (參閱問題 2).

(a) 當 $\beta=\gamma=90^0$ 時, $y=y_1,\ z=z_1.$

(b) 當 $b=c=0$ 時, $y=y_1,\ z=z_1.$

(c) 當 $y_1=y_2, z_1=z_2$ 時, $y=y_1,\ z=z_1.$

4. 試求下列各直線之方程在特例中用問題 2 與 3 之結果.

(a) 通過(3, 4,－4),且方向角為 $60^0, 45^0, 120^0.$

(b) 通過(1,－2, 3),且方向角為 $45^0, 90^0, 135^0.$

答. $y=-2,\ x+z-4=0.$

(c) 通過(3,－2, 1),(2, 3, 4).

答. $5x+y-13=0, 3x+z-10=0$.

(d) 過通$(3,-2,\ 1),(3,-4,\ 5)$.

(e) 通過$(3,\ 2,-1)$,且方向數爲 0, 1, 0.

(f) 通過$(1,\ 4,\ 6),(-1,\ 4,\ 6)$.

(g) 通過$(0,-3,\ 2)$,且平行於連$(3,4,-7),(2,7,-6)$之直線.　　答. $x=-z+2, y=3z-9$.

5. 試證明三點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, 及 $P_3(x_3,y_3,z_3)$ 同在一直線上之條件爲

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}.$$

6. 試化下列諸直線方程爲對稱式(XI)(參閱上之問題 2, 3),並解釋其結果之意義.

(a) $4x+5y+3z=3, 4x-5y+z+9=0$.

(b) $2x+y+5=0, x+3z-5=0$.

(c) $x+2y+6z=5, 3x-2y-10z=7$.

答. $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-7}=\frac{z}{2}$.

(d) $3x+y-2z=0, 6x-3y+4z+9=0$.

(e) $2x+y+2z=7, x+3y+6z=11$.

答. $\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-1}, x=2$.

(f) $3x-3y+z=4, 4x-6y-z=5$.

7. 一直線通過$(-2, 4, 0)$且平行於另一直線$\frac{x}{4}=\frac{x+2}{-3}=\frac{z-4}{-1}$，試求其方程.

答. $x=-4z-2, y=3z+4$.

8. 試證明兩直線$\frac{x+2}{-6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-11}{2}$與$\frac{x+3}{-2}=\frac{y}{6}=\frac{z+3}{3}$互爲垂直.

9. 設兩直線$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-1}$與$\frac{x+2}{1}=\frac{y-7}{2}=\frac{z}{1}$均係向上,試求此兩線間之角.　答. 120^0.

10. 試求下列各直線之方程:

(a) 通過$(-1, 2, 6)$且平行於另一直線$x=2z-3$, $y=-3z-5$.

(b) 通過$(-1, 2, 6)$且與$x-$軸垂直相交.

(c) 通過原點且與二直線$x=2z-4, y=-z+2$及$y=x+5, z=2x-8$皆爲垂直.

(d) 通過$(0, 2, 0)$且與直線$x=z, y=2z$, 及$y-$軸均成直角.

(e) 在兩直線$y=-x+6, z=2x-11$及$x=2z+10$, $y=2z+8$之交點上與此兩直線垂直.

11. 一直線通過$(2, 3, 4)$,其方向餘弦與$1, -4, 2$

成比例,試求其方程.

12.試作下之直線,其裏變方程為

(a) $x=2+\frac{2}{3}t,\ y=4+\frac{1}{3}t,\ z=6+\frac{2}{3}t;$

(b) $x=-3+\frac{2}{7}t,\ y=6-\frac{6}{7}t,\ z=4+\frac{3}{7}t.$

13.設一直線 $x=2-\frac{3}{13}t,\ y=4+\frac{12}{13}t,\ z=-3+\frac{4}{13}t$ 與平面 $4x+y-2z=16$ 相交於一點,試求從此直線上之一點$(2,\ 4,-3)$至此交點之距離.　　答. $3\frac{1}{4}$.

§136. 直線與平面相關之位置 設一直線 L 之方程為射影式,§135之(XIII),則可用下法決定此直線 L 是否在一已知平面內:將 x 與 y 之值代入平面方程內,若其結果對於 z 之一切值均為眞,則此直線在此平面內.

其次,又易於證明下之定理:

定理. 一直線 L(其方向數為 a, b, 及 c)與平面 $Ax+By+Cz+D=0$.

(a) 僅在

$$Aa+Bb+Cc=0 \tag{1}$$

時為平行;

(b) 僅在

(2) $$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$$

時爲垂直.

〔證〕設一直線L_2垂直於已知平面,則其方向數爲A, B, 及C.

僅在L與L_2垂直時,即僅在(1)成立時,直線L與平面爲平行.

僅在L與L_2平行時,即僅在(2)成立時,直線L與平面爲垂直.

設L在此平面內,方程(1)當然亦能成立.

問　題

1. 試證一直線$\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$平行於平面$4x-2y+7z=8$.

2. 試證一直線$\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$垂直於平面$3x-2y+7z=8$

3. 試證

(a) 一直線 $x=z+4, y=2z+3$ 在平面$2x+3y-8z$

$-17=0$ 內;

(b) 一直線 $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$ 在平面 $2x+2y+2z-6=0$ 內.

4. 試求下列各直線之方程:

(a) 通過 $(2,-3,\ 4)$ 且垂直於平面 $3x-y+2z=4$.

答. $x=-3y-7,\ z=-2y-2$.

(b) 通過 $(-1,\ 3,\ 2)$ 且垂直於平面 $x-3z=4$.

(c) 通過 $(0,\ 2,\ 4)$ 且平行於兩平面 $x+2z=1$, $y-3z=2$.

(d) 通過 $(1,-2,\ 3)$ 且平行於兩平面 $2x-y=4$, $x+y-z=4$.

5. 試求下列各平面之方程:

(a) 通過 $(1,\ 2,-3)$ 且垂直於一直線 $3x-y=4$, $y+2z=5$.

答. $2x+6y-3z-23=0$.

(b) 通過 $(-4,\ 0,\ 1)$ 且垂直於一直線 $x+y-4z=0$, $y-z=2$.

(c) 通過 $(3,\ 6,-12)$ 且平行於兩直線 $x+3y-1=0$, $3y+z-2=0$ 與 $z=2x+1,\ y=3$.

答. $2x+3y-z-36=0$.

(d) 以兩相交直線 $x=2z+1,\ y=3z+2$, 與 $2x=2-z$,

$3y=z+6$ 而決定.

(e) 通過一直線 $x+2z-4=0, 3y-z+8=0$ 且平行於另一直線 $x=y+4, z=y-6$.　　答. $2x-9y+7z-32=0$.

(f) 以一點 $(2,\ 3,-4)$ 與一直線

$$\frac{x+2}{-2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{1}$$

而決定.

(g) 以兩平行線

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{1} \text{ 與 } \frac{x+3}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z+1}{1}$$

而決定.

6. 試求以下列各法所定諸直線之方程:

(a) 在平面 $x+3y-z+4=0$ 內,且在一直線 $x=2z+3$, $y=2z$ 與此平面相交之點垂直於此直線.

答. $3x+5y+7=0$, $4x+5z+1=0$.

(b) 通過 $(4,\ 2,-3)$,平行於一平面 $x+y+z-10=0$, 且垂直於另一直線 $x+2y-z=5$, $z=10$.

*(c) 在一直線 $3x+2y-z=8$, $x-3y+1=0$ 與平面 $2x-y+z-3=0$ 之交點上垂直於此直線.

(d) 通過 $(2,\ 5,-3)$,垂直於連原點與此點之直線,

*譯者註: 此題條件不夠.

且平行於一平面 $2x-3y+16=0$.

自修或挑選之問題

1. 試求從一點 $(3,\ 4,\ -6)$ 至一直線 $3x-2y+7=0$, $2y+z-3=0$ 之垂直距離.

2. 過 $A(3,-7,\ 5)$ 且方向數爲 $4,\ 1,\ 8$ 之直線與平面 $2x+3y-z+7=0$ 相交於 B. 試求 AB 之長.

3. 下列各直線均通過 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, 試分別求其方程:

(a) 平行於直線 $x=mz+a,\ y=nz+b$.

(b) 垂直於兩直線 $x=m_1z+a_1,\ y=n_1z+b_1$, 與 $x=m_2z+a_2,\ y=n_2z+b_2$.

(c) 垂直於平面 $Ax+By+Cz+D=0$.

(d) 平行於兩平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 與 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

4. 設一平面通過 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 且垂直於一直線 $x=mz+p,\ y=nz+q$, 試求其方程.

5. 試證問題 3(b) 中之兩直線在同一平面內時,

$$(a_1-a_2)(n_1-n_2)=(b_1-b_2)(m_1-m_2).$$

6. 試求直線 $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$ 與平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 間之角 θ.

$$^{*}\text{答}.\ \sin\theta=\pm\frac{Aa+Bb+Cc}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

*提示．一直線與一平面間之角,為此直線與其在此平面上之直角射影所成之銳角.此角等於$\frac{1}{2}\pi$減此直線與此平面上之法線所成之角,或等於此直線與此平面上之法線所成之角減$\frac{1}{2}\pi$.

7. 設一平面通過$P_3(x_3,y_3,z_3)$且平行於兩平面

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}\ \text{與}\ \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

試求其方程.　答. $(b_1c_2-b_2c_1)(x-x_3)+(c_1a_2-c_2a_1)^{*}(y-y_3)+(a_1b_2-a_2b_1)(z-z_3)=0.$

8. 試求一平面$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$平行於一直線$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$之條件.

答. $A_1(B_2C_3-B_3C_2)+B_1(C_2A_3-C_3A_2)+C_1(A_2B_3-A_3B_2)=0.$

9. 設一平面為一點$P_1(x_1,y_1,z_1)$與一直線$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$所定,試求其方程.

---

*譯者註：原書無±號誤.因θ既表銳角,則$\sin\theta$必為正,而$Aa+Bb+Cc$或為正,或為負,不可必也.

*譯者註：原書提示內容謂'……此角等於$\frac{1}{2}\pi$加或減此直線與此平面上之法線所成之角',不妥.

*譯者註：原書作'$-a_2c_1$',誤.

答. $(A_2x_1+B_2y_1+C_2z_1+D_2)(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)$

$=(A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1)(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)$.

10.設一平面爲兩相交直線$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$

與$\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$所定,試求其方程.

答. $(b_1c_2-b_2c_1)(x-x_1)+(c_1a_2-c_2a_1)(y-y_1)$

$+(a_1b_2-a_2b_1)(z-z_1)=0$.

11.設一平面爲兩平行直線$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$

與$\frac{x-x_2}{a}=\frac{y-y_2}{b}=\frac{z-z_2}{c}$所定,試求其方程.

答. $[(y_1-y_2)c-(z_1-z_2)b]x+[(z_1-z_2)a-(x_1-x_2)c]y$

$+[(x_1-x_2)b-(y_1-y_2)a]z+(y_1z_2-y_2z_1)a$

$+(z_1x_2-z_2x_1)b+(x_1y_2-x_2y_1)c=0$.

12.試求直線$x=mz+a, y=nz+b$在平面$Ax+By+Cz+D=0$內之條件.　答. $Aa+Bb+D=0, Am+Bn+C=0$.

13.設一平面通過一直線$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$且

平行於另一直線$\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$,試求其方程.

答. $(b_1c_2-b_2c_1)(x-x_1)+(c_1a_2-c_2a_1)(y-y_1)$

$$+(a_1b_2-a_2b_1)(z-z_1)=0.$$

14. 設一平面爲一點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 與過 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 且方向數爲 a,b,c 之一直線所定,試求其方程.

第十五章

特殊曲面

§137. **球面.** 本章將討論球面,柱面,錐面(皆初等幾何中所討論之面),及二次曲面.

解析幾何中所謂'球','柱',及'錐'常用以表初等幾何之球面,柱面,及錐面,並非指此等面所包圍之實體之全體或部分而言.

定理. 球心爲(h,k,l)及半徑爲 r 之球面之方程爲

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2. \tag{I}$$

〔證〕設$P(x,y,z)$爲球面上之任意點,且以C表球心,則由定義$PC=r$. 以長之公式表PC之值代入此式,且平方之,則可得(I). 【證完】

試將(I)乘出,則爲

$$x^2+y^2+z^2-2hx-2ky-2lz+h^2+k^2+l^2-r^2=0;$$

卽呈下之形式

$$(1)\qquad x^2+y^2+z^2+Gx+Hy+Iz+K=0$$

今發生一問題,卽具有此種形式之方程其軌跡爲何?(與§35比較).

欲解答此問題,首先集項:

$$(x^2+Gx)+(y^2+Hy)+(z^2+Iz)=-K.$$

完成諸括弧內之平方,則得

$$(x+\frac{1}{2}G)^2+(y+\frac{1}{2}H)^2+(z+\frac{1}{2}I)^2$$

$$=\frac{1}{4}(G^2+H^2+I^2-4K).$$

此式之右端可爲正,零,或負,故與(I)比較可知其軌跡爲球面,點球 $(r=0)$,或無軌跡.

(1)中有四常數 G, H, I, K,表明一球面須有四條件方可決定(與§36 比較).欲求滿足已知條件之球面方程,可於(I)與(1)中擇其較便者而用之.

設採用(I)式,則須求 h, k, l 及 r 之值.設採用(1)式,則需含 G, H, I, K 之四方程,解之卽可得此諸常數之值矣.

例 題

方程 $x^2+y^2+z^2-2x+3y+1=0$ 之軌跡爲何?

〔解〕集項,

$$(x^2-2x)+(y^2+3y)+z^2=-1.$$

完成諸平方,

$$(x^2-2x+1)+(y^2+3y+\frac{9}{4})+z^2=-1+1+\frac{9}{4}$$

或

$$(x-1)^2+(y+\frac{3}{2})^2+z^2=\frac{9}{4},$$

故此方程之軌跡爲以 $(1,-\frac{3}{2},0)$ 爲球心,$\frac{3}{2}$ 爲半徑之一球面. 答.

問 題

1. 試定下列各方程軌跡之性質.設軌跡爲一球面,試求其球心與半徑;設軌跡爲一點球,試求其球心之坐標.

(a) $x^2+y^2+z^2+4x-6z=0.$

(b) $x^2+y^2+z^2-4x+2y-5=0$

(c) $x^2+y^2+z^2-x+4y+10=0.$

(d) $x^2+y^2+z^2-12y+6z=5.$

(e) $x^2+y^2+z^2-4x+6y+8z+29=0.$

(f) $x^2+y^2+z^2+2x+2y+4z=0,$

2. 試求一動點之軌跡,此點

(a) 與$(0, \frac{1}{2}, -2)$之距離恆為$\frac{1}{2}$;

(b) 與$(-2, \frac{1}{3}, 0)$之距離恆為$\sqrt{5}$;

(c) 與$(-3, 2, 1)$之距離恆為4;

答. $x^2+y^2+z^2+6x-4y-2z-2=0$.

(d) 與$(-1, 3, \frac{2}{3})$之距離恆為$\sqrt{3}$.

3. 試求球面之方程,此球

(a) 以連$(3, 0, 4)$與$(4, 6, 0)$之線為半徑,且以第一點為球心;

(b) 以連$(3, 0, 7)$與$(-2, 1, 1)$之線為直徑;

答. $x^2+y^2+z^2-x-y-8z+1=0$

(c) 球心為$(2, -2, 1)$且與 XZ-平面相切.

答. $x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z+5=0$.

(d) 通過四點$(2, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 0, -4)$,及$(-8, 0, 0)$.

4. 試證滿足下列各已知條件之動點軌跡均為球面,並分別求其半徑及球心.

(a) 與$(7, 1, -3)$之距離恆為與$(-\frac{5}{4}, -2, \frac{3}{2})$之距離之二倍.

答. $h=-4, k=-3, l=1, r=\frac{1}{2}\sqrt{141}$.

(b) 與 $(-3, 4, 5)$ 之距離恆爲與原點之距離之四倍.

(c) 與 $(4,-5, 1)$ 及 $(0, 2,-4)$ 之距離之平方和恆爲64.

(d) 與三平面 $x+y+z=5, 2x-3y-2z-1=0, 3x-2y+3z=6$ 之垂直距離之平方和恆爲5.

5. 試求球面之方程,此球

(a) 與 $x^2+y^2+z^2-6x+4z-36=0$ 爲同心且通過 $(2, 5,-7)$;　　答. $x^2+y^2+z^2-6x+4z=38$.

(b) 球心爲 $(4,-4, 3)$,且切於一平面其方程爲 $3x+2y-z=7$;

(c) 球心在XZ—平面內,且通過三點 $(1, 0, 2)$, $(1, 3, 1)$, $(-3, 0, 0)$;

答. $x^2+y^2+z^2-2x+6z=15$.

(d) 球心在z—軸上,且通過 $(3, 4, 0)$ 與 $(-2, 3, 5)$;

答. $5x^2+5y^2+5z^2-13z=125$.

(e) 通過 $(1, 5,-3)$ 與 $(-3, 0, 0)$,且球心在直線 $3x+y+z=0, x+2y+1=0$ 上;

答. $9x^2+9y^2+9z^2-34x+26y+76z-183=0$.

(f) 通過(2, 2, 0),(0, 2, 2),與(2, 0, 2),且半徑為 5.

6. 試求在下列各球面之已知點上之切面方程:

(a) $x^2+y^2+z^2-14=0$, 在(3,−2, 1)上.

(b) $x^2+y^2+z^2-6x+4z-36=0$, 在(1, 6,−5)上.

答. $2x-6y+3z+49=0$.

(c) $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z=0$, 在(0, 0,−6)上.

(d) $x^2+y^2+z^2-2x+6y=15$, 在(1, 5,−3).

7. 已知兩球面 A: $x^2+y^2+z^2-6x+8y-10z+41=0$ 與 B: $x^2+y^2+z^2+6x+2y-6z+10=0$. 試求第三球面之方程,設此球

(a) 以 A 與 B 之連心線為直徑;

(b) 與 A 同心而切於 B (二解);

(c) 球心在 A 與 B 之連心線上,且與 A, B 均相切(四解);

(d) 球心為 A, B 之連心線與 B 球之交點,且切於 A (四解).

8. 設諸平面切球面 $x^2+y^2+z^2-10x+5y-2z-24=0$ 於其與各坐標軸相交之點,試分別求此等切面之方程.

9.試求四面體內切球之方程,此四面體係由下列諸平面中任意四平面所組成:

$$14x+5y-2z-168=0,\quad 10x+11y+2z+88=0,$$

$$14x-5y+2z+28=0,\quad 2x-y-2z+12=0,$$

$$10x-11y+2z+33=0,\quad 2x-y+2z+8=0.$$

10.試求一最小球面之方程,此球面與下列二球面相切:

$$x^2+y^2+z^2-2x-6y+1=0,$$

$$x^2+y^2+z^2+6x+2y-4z+5=0.$$

答. $x^2+y^2+z^2+2x-2y-2z+3=0.$

§138. **柱面** 一直線平行於其本身而運動且恆與一已知曲線相交,則發生一面,此面稱為**柱面**.此已知曲線稱為**準線**.茲討論軌跡為柱面之方程.

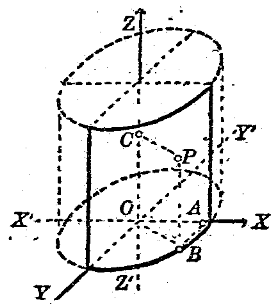
例　題

1.設一圓柱體,半徑為 r,且以 z−軸為其軸,試求此柱面之方程.

〔解〕設 P(x,y,z) 為此柱面上之任意點,則在圖中,OA=x, AB=y, BP=z.若 CP 垂直於 OZ,則 P 在此柱面上之條件為

(1) $CP=OB=r$

但 $OB=\sqrt{x^2+y^2}$ 故所求之方程爲

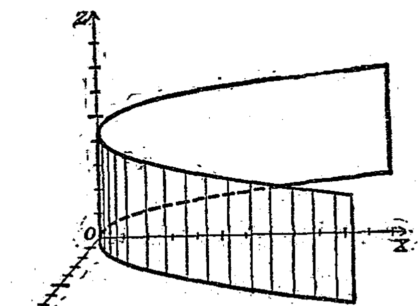


(2) $x^2+y^2=r^2$. 答.

須注意者,在XY－平面內之圓 $x^2+y^2=r^2$ 爲此柱面之準線.

2. 設一面之方程爲 $y^2-4x=0$, 試定此面之性質.

〔解〕設 $M(a,b)$ 爲XY－平面內拋物線 $y^2-4x=0$ 上之任意點,過M作一直線平行於 OZ, 則凡在此直線上之點必均在此已知面上.因M在拋物線上,$b^2-4a=0$, 故坐標 (a,b,z),(其中 z 可爲任意數.)必滿足此面之方程.因知此方程之軌跡爲一柱面,以XY－平面內之拋物線 $y^2-4x=0$爲其準線,且其基線均平行於OZ. 答.



由此等例題即可引出下之定理:

定理. 缺一變數之方程之軌跡爲一柱面,其基線均平行於一坐標軸,此軸卽所缺之變數賴以度量者.將已知方程視作相當坐標平面內之平面軌跡,則表此面之準線.

§139. 錐面. 一直線圍繞其一點而轉動且恆與一已知曲線相交,則發生一面,此面稱爲錐面.

例　題

試定一面之性質,其方程爲

$$16x^2+y^2-z^2=0$$

〔解〕以平面 $z=k$ 截此面,則得一曲線,設 $P(x_1,y_1,z_1)$,爲此曲線上之一點,則

(1) $$16x_1^2+y_1^2-z_1^2=0,\ z_1=k.$$

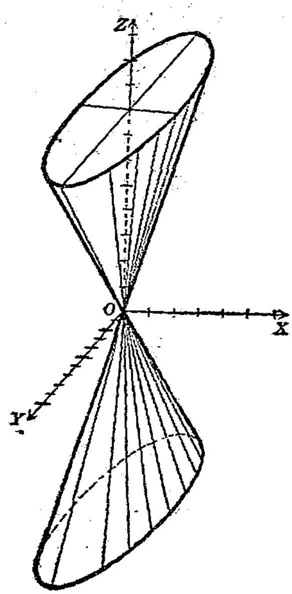
今原點O在此面上,故可進而證明直線 OP_1 全在此面上因而此面爲一錐面.設 $\rho_1=OP_1$,則 OP_1 之方向餘弦爲 $\frac{x_1}{\rho_1}$, $\frac{y_1}{\rho_1}$,及 $\frac{z_1}{\rho_1}$.故由§134之(IX)可知 OP_1 上任意點之坐標爲

(2) $$x=\frac{x_1}{\rho_1}t,\quad y=\frac{y_1}{\rho_1}t,\quad z=\frac{z_1}{\rho_1}t.$$

將此x,y及z之值代入已知方程之左端,則得

$$(3)\qquad \frac{t^2}{\rho_1^2}=(16x_1^2+y_1^2-z_1^2).$$

但由方程(1)之第一式知(3)括弧內之式等於零.故對於t之任意值(3)之乘積亦皆等於零.此卽直線(2)上之各點(x, y, z)均在此面上之意,亦卽此全直線在此面上之意也.故此面爲一錐面其頂爲原點. 答.



對於含x, y, z之任何方程,設其中之所有項均爲同次,則均可應用此相同之證明.此種方稱爲x, y, z**之齊次方程**.故得定理如下:

定理. 含x, y, z之齊次方程之軌跡爲一錐面,其頂爲原點.

上例之圖中,錐面係被平面z=8所截.故錐面$16x^2+y^2-z^2=0$與此平面相交之曲線之方程顯然爲

$$z=8,\ 16x^2+y^2-64=0.$$

此曲線爲一橢圓,且以斜坐標法繪於平面z=8之內.

設欲作錐面方程之軌跡,先選適宜之平面平行於一坐標平面且與此錐面相截.求出其相交曲線之方程,並作出此平面曲線之圖;然後從此曲線上之諸點作基線至其頂,則此錐面成矣.

問 題

1. 試定下列諸面之性質並作其圖.

(a) $x^2+z^2=16.$　　(f) $xz-6=0.$

(b) $x^2+y^2=4x.$　　(g) $y^2+z^2-2xz=0.$

(c) $y^2+4x^2=16.$　　(h) $y^2-2z^3=0.$

(d) $x^2-y^2-z^2=0.$　　(i) $x^2-4y^2+6z^2=0.$

(e) $y^2+xz+yz=0.$　　(j) $x^2-z^2=25.$

2. 試求滿足下列已知條件之動點軌跡之方程.定此軌跡之性質,並作其圖.

(a) 與z一軸距離之平方恆等於與YZ一平面距離之二倍.　　答. $x^2+y^2-2x=0.$

(b) 與z一軸之距離恆爲與XY一平面距離之三倍.

(c) 與點(4, 0, 0)及XY一平面有等距離.

答. $x^2+y^2-8x+16=0.$

(d) 與XY一平面及z一軸有等距離.

答. $x^2+y^2-z^2=0$.

(e) 與y－軸之距離恆為與z－軸距離之四倍.

(f) 與三坐標平面距離之和恆等於與原點之距離.

(g) 與點 (0, 0, 5) 及x－軸有等距離.

答. $x^2-10z+25=0$.

(h) 與XY－及XZ－平面兩距離和差之積恆為與YZ－平面距離之平方之四倍.

3. 設一錐面,其頂為原點,且其基線截一圓$y^2+z^2=4$, $x=1$;試求其方程.

4. 設一錐面以原點為其頂,且其基線截一橢圓 $2x^2+3z^2=6$, $y=1$.

答. $2x^2+3z^2-6y^2=0$.

自修或挑選之問題

5. 一動點與兩直交線之距離之平方差為一常數,其軌跡為何?

6. 一動點與一平面及垂直於此平面之一直線恆有等距離,其軌跡為何?

7. 一動點與兩直交線之距離之比為一常數,其軌跡為何?

8. 一動點與一定點及一定直線之距離恆相等,其軌跡爲何?

9. 一動點與彼此互爲直交之三平面距離之和恆爲與此三平面公共交點之距離之半,其軌跡爲何?

§140. 曲面方程之討論. 一曲面之性質中,有幾種能用類似於 §18 之法而決定之.

1. 坐標軸上之截部.

求曲面截部之規則如下:

依次命兩對變數等於零而求第三變數之實數值.

2. 坐標平面上之交跡.

曲面與坐標平面相交之曲線稱爲此曲面之交跡.

求交跡之規則如下:

依次命曲面方程中 $x=0$, $y=0$, 及 $z=0$, 則可得諸交跡之方程.

3. 對稱.

定理. 將方程內一變數之符號改變,若此方程不變,則其軌跡依一坐標平面而對稱,此變數即從此坐標平面而起始度量也.

將方程內兩變數之符號改變,若此方程不變,則其軌跡依一坐標軸而對稱,此坐標軸即第三變數所趨

以度量者也.

將方程內所有三變數之符號完全改變,若此方程不變,則其軌跡依原點而對稱.

對稱之定義及證明均類似於 §18 所述者.

4. 平行於坐標平面之平面與曲面相截之曲線.

設一曲面被平行於一坐標平面之平面系所截而得諸曲線,則研究此等曲線恆可定此曲面之普通形狀,用此法亦可決定一曲面爲閉曲面或可展至無限遠.

下例卽說明此種方法.

討論一曲面之方程,須求(1)截部與(2)交跡,並須考查(3)對稱問題及(4)平行於一坐標平面之平面與此曲面相截之曲線之性質.

例 題

設平面 $z=4$ 與曲面 $y^2+z^2=4x$ 相交於一曲線,試定此曲線之性質.

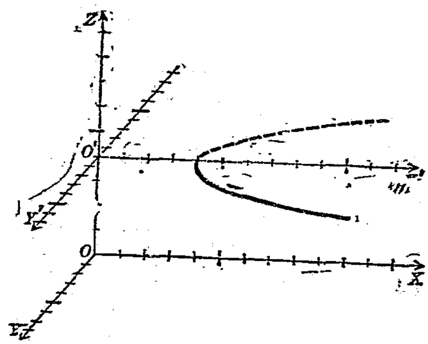
〔解〕由定義(§122)此曲線之方程爲

(1) $$y^2+z^2=4x,\ z=4.$$

代第二式入第一式而消去 z,得

(2) $$y^2-4x+16=0,\ z=4.$$

方程(2)亦爲此曲線之方程,且定此曲線爲抛物柱面 $y^2-4x+16=0$ 與平面 $z=4$ 相交之曲線.



此因 (x, y, z) 之每組値,其可滿足(1)之兩方程者必顯然亦可滿足(2)之兩方程也.反之亦然.

設平面 $z=4$ 與 ZX—平面相交於 $O'X'$,與 YZ—平面相交於 $O'Y'$.若在平面 $z=4$ 內卽取 $O'X'$ 與 $O'Y'$ 爲軸,則對於此兩軸而論,此曲線之方程卽(2)之第一方程,

(3) $$y^2-4x+16=0.$$

(3)之軌跡爲一抛物線.在平面 $z=4$ 內,其頂點爲 $(4,0)$;且 $p=2$. 答.

在平面 $X'O'Y'$ 內繪(3)之軌跡時,x, y 之値須如繪斜坐標法(§7)各平行於 $O'X'$ 與 $O'Y'$ 而描繪之.

由上例可述一規則.

欲定平行於一坐標平面之平面與一已知曲面相

截之曲線之性質,其規則如下:

從平面與曲面之方程中消去在平面方程中所見之變數其結果爲以此已知平面與其餘兩坐標平面之交線爲軸時該曲線之方程.再用平面解析幾何之法討論此曲線.

例　題

討論下之方程之軌跡.

(4)　　$y^2+z^2=4x.$

〔解〕 1 在各軸上之截部均爲零.

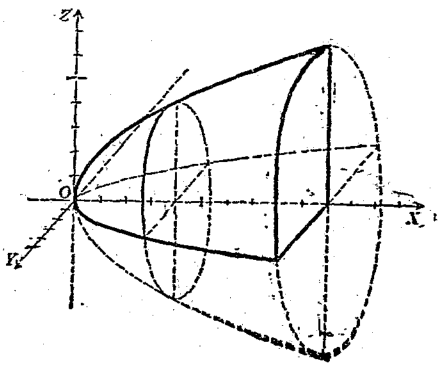
2. 交跡依次爲點圓 $y^2+z^2=0$, 拋物線 $z^2=4x$ 及 $y^2=4x$.

3. 此曲面依 XY－平面, ZX－平面, 及 x－軸而對稱.

4. 在(4)中令 $x=k$, 則得在此平面上相交曲線之方程,即

$$y^2+z^2=4k.$$

設 $k>0$, 則此曲線爲一圓,其圓心在x－軸上,其半徑爲 $2\sqrt{k}$. 設 $k<0$, 則無軌跡.故此曲面



全在 YZ－平面之右.設 k 從零漸增至無限大,則圓之半徑亦從零漸增至無限大,此時 $x=k$ 距 YZ－平面亦漸遠.圖中兩圓係繪在兩平面 $x=4$ 與 $x=10$ 之上.

此曲面與平行於 XY－平面之平面 $z=k$, 或與平行於 ZX－平面之平面 $y=k'$ 相交之曲線均爲拋物線,其方程各爲

$$y^2=4x-k^2 \text{ 或 } z^2=4x-k'^2.$$

此等拋物線 p 均有相同之值,卽 $p=2$. 且設 k 或 k' 之絕對值逐漸增加,則其頂點距 YZ－平面或 ZX－平面亦漸遠.

問　題

1. 試作下列已知曲面與平面相交之曲線:

(a) $4x^2+y^2-8z=0,\quad z=2.$

(b) $x^2+3y^2+4z^2=45,\ z=3.$

(c) $x^2+3y^2+4z^2=45,\ x=3.$

(d) $x^2+3y^2-4z^2=9,\quad z=3.$

(e) $x^2+3y^2-4z^2=16,\ x=2.$

2. 試討論下列各曲面之方程,並作其交跡:

(a) $x^2+4y^2+9z^2=36.$ 　　(e) $x^2-y^2+z^2=25.$

(b) $x^2+4y^2=8z$. (f) $x^2-y^2-4z^2=8$.

(c) $x^2+y^2+z^2=25$. (g) $x^2+9y^2-9z^2=0$.

(d) $z^2+7xy=0$. (h) $xy-4=0$.

3. 試討論下列各方程,並描其軌跡.

(a) $x^2+4y^2=8z$. (f) $y^2+z^2-4z+8=0$.

(b) $x^2+4z^2=8y$. (g) $x^2+4y^2-16x=0$.

(c) $x^2+4y^2+9z^2=100$. (h) $x^2-y^2-z^2-1=0$.

(d) $x^2-9y^2=10z$. (i) $x^2+y^2-2zx=0$.

(e) $x^2+4z^2-z^2=25$. (j) $y^2+z^2-x-4=0$.

§141. 二次曲面. 有一類曲面,其在空間幾何之地位與圓錐截線在平面幾何之地位正同,即所謂二次曲面.球面,§138之柱面,及§139之錐面(二次錐面)皆其特例也.今依次研究此類曲面中之他種曲面,以下將示一般之討論.

此類曲面方程之形式如下:

(1) $$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$$ (有中心二次曲面);

(2) $$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=2cz$$ (無中心二次曲面);

§142. 橢面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 設於§141之

(1) 中各項之符號均爲正,則其軌跡稱爲橢面.討論其方程,則得下之性質:

1. 在坐標軸上之截部依次爲

$$x=\pm a,\quad y=\pm b,\quad z=\pm c.$$

直線 $AA'=2a$, $BB'=2b$, $CC'=2c$ 稱爲橢面之中樞軸(參閱下圖).

2. 在坐標平面*上之交跡爲橢圓 $ABA'B'$, $BCB'C'$ 及 $ACA'C'$; 其方程依次爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

3. 此曲面對於各坐標平面,各坐標軸,及原點均爲對稱.此等對稱平面稱爲橢面之**中樞面**.

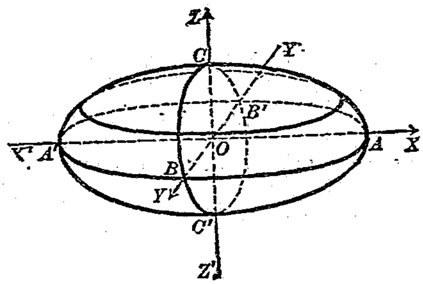
4. 設以平行於 XY-平面之平面, $z=k$, 截此曲面,則所截之曲線方程爲

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2},\ \text{或}\ \frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-k^2)}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-k^2)}=1.$$

此方程之軌跡爲一橢圓.若 k 之值從 0 漸增至 c, 或從 0 漸減至 $-c$, 則此平面距 XY-平面漸遠,而橢

*譯者註: 原書作 'principal planes', 不妥。

圓之長短軸亦從 $2a$, $2b$ 漸減至 0, 當長短軸均為 0 時,則橢圓降格而為一點矣.若 $k>c$, 或 $k<-c$, 則無軌跡.故此橢面全在兩平面 $z=\pm c$ 之間.



依同理,平行於 $YZ-$ 平面及 $ZX-$ 平面之平面與此曲面相截之曲線亦均為橢圓.當此等平面距其所平行之坐標平面漸遠時,則橢圓之軸亦漸減其長度.因知此橢面亦全在平面 $x=\pm a$ 及 $y=\pm b$ 之間.故橢面為一閉曲面(參閱銅板圖 I.)

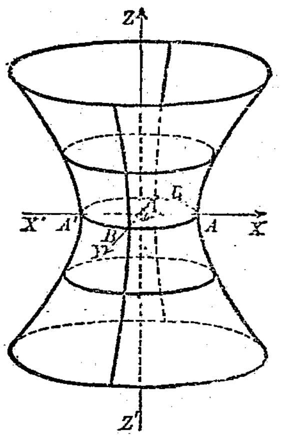
設 $a=b$, 則當 k 之值為 $-c<k<c$ 時,所截之曲線(1)為一圓.故此時該橢面為一'旋轉橢面',其軸為 $z-$ 軸.此曲面係將在 XZ 上之交跡圍繞 OZ 旋轉而成.設 $b=c$, 或 $c=a$, 則曲面亦為一旋轉橢面,其軸為 $x-$ 軸或 $y-$ 軸.

設 $a=b=c$, 則橢面變為一球面,因其方程可寫為 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 之形式也.

§143. 單葉雙曲面. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. 設

於§141之(1)中,兩符號爲正,一符號爲負,則其軌跡稱爲**單葉雙曲面**.先研究下之方程:

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$



討論其方程,則得下之性質:

1. 在x－軸與y－軸上之截部依次爲

$$x=\pm a,\quad y=\pm b,$$

但對於z－軸之截部爲虛數,卽在z－軸上無截部也.

2. 在坐標平面上之交跡爲圓錐截線.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

此中第一式爲橢圓,其軸爲 $AA'=2a$ 及 $BB'=2b$, 第二第三兩式爲雙曲線,其貫軸依次爲BB'及AA'.

3. 此曲面對於各坐標平面,各坐標軸,及原點均爲對稱.

4. 設以平行於XY－平面之平面,$z=k$,截此曲面,則所截之曲線方程爲

(2) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2},\text{ 或 }\frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2+k^2)}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2+k^2)}=1.$$

此方程之軌跡爲一橢圓.若 k 之值從 0 漸增至 ∞,或從 0 漸減至 $-\infty$,則此平面距 XY-平面漸遠,而橢圓之長短軸亦各從 $2a$, $2b$ 無限增加.故此曲面對於 XY-平面與 z-軸逐漸離開乃至於無限遠.

依同理,以諸平面 $x=k'$ 及 $y=k''$ 與此曲面相截,其所得之曲線皆爲雙曲線.當 k' 與 k'' 之絕對值從 0 漸增時,此等雙曲線之軸亦漸短;且當 $k'=\pm a$,或 $k''=\pm b$ 時,則此等雙曲線均降格而各爲相交之直線.當 k' 與 k'' 之絕對值又漸增而超過此界限時,則此等雙曲線貫軸與配軸之方向互相交換,且此等軸之長度亦無限增加.(參閱銅板圖 I.)

雙曲面(1)不與OZ相交稱爲'沿 z -軸而存在'.

方程:

(3) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

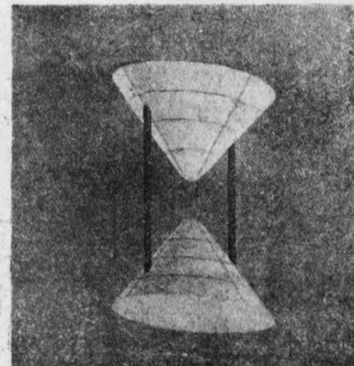
依次爲沿 y-軸及 x-軸而存在之單葉雙曲面之方程.

設 $a=b$,雙曲面(1)爲旋轉曲面,其軸爲 z-軸,蓋曲

銅板圖 1

橢 面

單葉雙曲面



雙葉雙曲面

有中心二次曲面

線（2）變爲一圓也.設 $a=c$ 及 $b=c$, 則（3）之二式各表一旋轉雙曲面.

§144. 雙葉雙曲面. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$

設於§141之（1）中僅有一符號爲正,則其軌跡稱爲雙葉雙曲面.先研究下之方程:

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

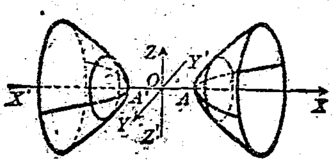
1. 在x－軸上之截部爲 $x=\pm a$, 但在y－軸與z－軸上均無截部.

2. 在XY－平面與XZ－平面上之交跡依次爲雙曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

此等雙曲線具有相同之貫軸 $AA'=2a$, 但在YZ－平面上無交跡.

3. 此曲面對於各坐標平面,各坐標軸,及原點均爲對稱.



4. 設以平行於YZ－平面之平面, $x=k$, 截此曲面,

則所截之曲線方程爲

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{k^2}{a^2}-1,\quad 或\frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(k^2-a^2)}+\frac{z^2}{\frac{c^2}{a^2}(k^2-a^2)}=1.$$

若 $-a<k<a$，則此方程無軌跡.若 $k=\pm a$，其軌跡爲一點橢圓;且當 k 從 a 漸增至 ∞，或從 $-a$ 漸減至 $-\infty$ 時,則軌跡爲一橢圓,而其軸亦無限增長.故此曲面包含兩葉,此兩葉對於 YZ-平面及x-軸逐漸離開乃至於無限遠.

依同理,以平行於XY-平面及ZX-平面之一切平面與此曲面相截,其所得之曲線皆爲雙曲線,此等平面距各該坐標平面漸遠,則所得之雙曲線之軸亦無限增長.(參閱銅板圖 I.)

雙曲面(1)稱爲'沿x-軸而存在'.

方程

$$(2)\qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

依次爲沿y-軸及z-軸而存在之雙葉雙曲面之方程.

設 $b=c$，或 $c=a$，或 $a=b$，則雙曲面(1)與(2)爲旋轉雙曲面,

問　　題

1. 討論下列各方程之軌跡,作其圖並命其名:

(a) $x^2+4y^2+9z^2=36$.　　(h) $9x^2-16y^2+4z^2=64$.

(b) $x^2+4y^2-9z^2=36$.　　(i) $x^2-4y^2+9z^2+36=0$.

(c) $x^2-4y^2-9z^2=36$.　　(j) $4x^2+4y^2+z^2=16$.

(d) $4x^2+9y^2-9z^2=36$.　　(k) $x^2+y^2-9z^2=1$.

(e) $x^2-y^2-z^2=1$.　　(l) $x^2+4y^2-z^2=16$.

(f) $9x^2-4y^2-z^2=36$.　　(m) $4x^2+16y^2-z^2=64$.

(g) $9x^2+y^2-z^2=36$.　　(n) $x^2-8y^2+2z^2=16$.

2. 假定有中心二次曲面之方程為

$$Ax^2+By^2+Cz^2+D=0,$$

且設此二次曲面通過下列諸已知點,試求其方程,並命其名:

(a) $(2,-1,1)$, $(-3,0,0)$, $(1,-1,-2)$.

答. $x^2+4y^2+z^2=9$.

(b) $(-1,5,4)$, $(-7,1,-8)$, $(8,-2,10)$.

(c) $(4,-2,-1)$, $(0,1,-3)$, $(3,5,2)$.

(d) $(-1,-1,\sqrt{5})$, $(2\sqrt{5},-2,4)$, $(0,0,-2)$.

答. $x^2+y^2-2z^2+8=0$.

3. 設一動點與一點(1, 0, 0)之距離恆爲與平面 $x=4$ 之垂直距離之半,試求此動點軌跡之方程.討論之,描其軌跡,並命其名.

答. $3x^2+4y^2+4z^2-12=0$.

4. 設一動點與(0, −4, 0)之距離恆爲與平面 $y+1=0$ 之垂直距離之二倍,試求其軌跡之方程.討論之,描其軌跡,並命其名.

5. 假定二次曲面之方程仍爲問題 2 之形式,且設此曲面通過(2, 1, 3)與下之曲線,試求此曲面之方程.

(a) $z=4,\ 3x^2+y^2-9=0$;　答. $21x^2+7y^2+4z^2-127=0$.

(b) $z=4,\ x^2+y^2-25=0$.

6. 設一動點與空間兩直交線之距離之平方和爲一常數,試證其軌跡爲一旋轉橢面.

§145. 橢圓拋物面. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz$.

設於§141之(2)中,y^2之符號爲正,則其軌跡稱爲橢圓拋物面.討論其方程,則得下之性質:

1. 截部均爲零.

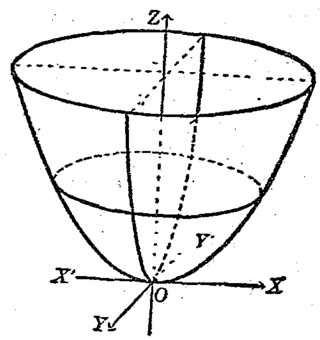
2. 在坐標平面上之交跡依次爲圓錐截線

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0,\quad \frac{x^2}{a^2}=2cz,\quad \frac{y^2}{b^2}=2cz,$$

其中第一式爲點橢圓,餘二式均爲拋物線.

3. 此曲面對於YZ－平面,ZX－平面,及z－軸爲對稱.

4. 設以平行於XY－平面之平面,$z=k$,截此曲面,則所截之曲線方程爲



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2ck,$$

或
$$\frac{x^2}{2a^2ck}+\frac{y^2}{2b^2ck}=1.$$

若c與k有同號,則此曲線爲一橢圓;若c與k有異號,則此方程無軌跡.故若c爲正,則此曲面全在XY－平面之上.若k從0漸增至∞,則此平面距XY－平面漸遠,而橢圓之軸亦無限增長.故此曲面對於XY－平面與z－軸逐漸離開乃至於無限遠.

依同理,以平行於YZ－平面及ZX－平面之平面截此曲面,其所得之曲線皆爲拋物線,此等平面距各該坐標平面漸遠,則所得拋物線之頂點亦距XY－平面漸遠.(參閱銅板圖II.)

此抛物面稱爲沿z一軸而存在.

方程

$$(1)\qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2ax,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=2by,$$

依次爲沿x一軸及y一軸而存在之橢圓抛物面.

設 $a=b$,則本節所研究之第一曲面爲以z一軸爲軸之旋轉抛物面.又設 $b=c$ 及 $a=c$,則(1)之二式依次表以x一軸及y一軸爲軸之旋轉抛物面.

橢圓抛物面沿一軸而存在,此軸與其方程中之一次項相符合,且沿此軸之正方向或負方向而存在亦視該項爲正或負而定.

§146. 雙曲抛物面. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2cz$.

設於§141之(2)中,y^2之符號爲負,則其軌跡稱爲**雙曲抛物面.**

1. 截部均爲零.

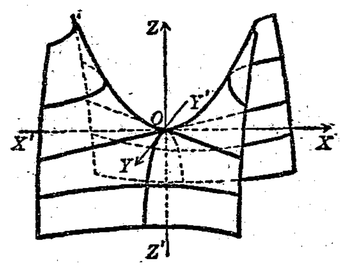
2. 在坐標平面上之交跡依次爲圓錐截線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,\quad \frac{x^2}{a^2}=2cz,\quad -\frac{y^2}{b^2}=2cz,$$

其中第一式爲一對相交直線,餘二式均爲抛物線.

3. 此曲面對於YZ－平面,ZX－平面,及z－軸爲對稱.

4. 設以平行於XY－平面之平面,$z=k$,截此曲面,則所截之曲線方程爲



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2ck,$$

或 $$\frac{x^2}{2a^2ck}-\frac{y^2}{2b^2ck}=1.$$

此軌跡爲一雙曲線若c爲正,則此雙曲線之貫軸平行於x－軸或y－軸視k爲正或負而定.若k從0漸增至∞,或從0漸減至－∞,則此平面距XY－平面漸遠,而雙曲線之軸亦無限增長.故此曲面對於XY－平面與z軸逐漸離開乃至於無限遠.此曲面之形狀頗與馬鞍相似.

依同理,以平行於其餘兩坐標平面之平面截此曲面,其所得之曲線皆爲拋物線,此等平面距各該坐標平面漸遠,則所得拋物線之頂點亦距XY－平面漸遠.(參閱銅板圖II.)

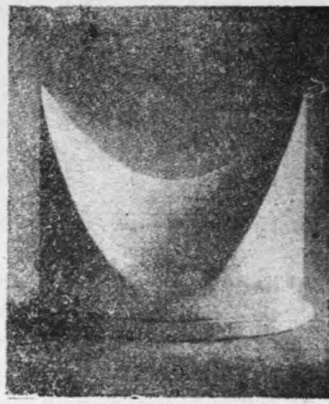
此曲面稱爲'沿z－軸而存在'.

方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=2by,\quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=2ax,$$

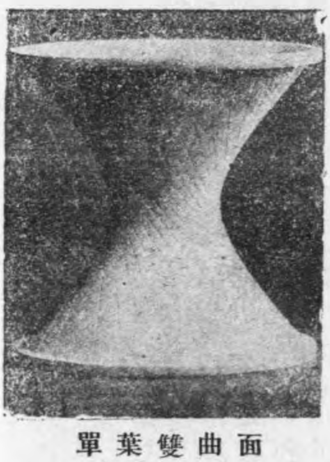
銅板圖 II

橢圓拋物面

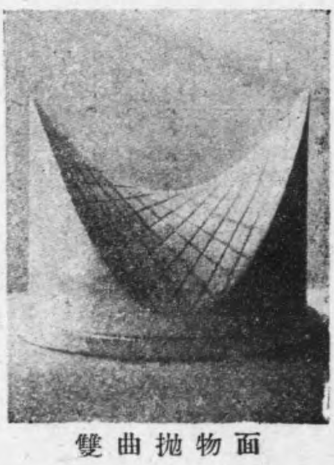


雙曲拋物面

無中心二次曲面



單葉雙曲面



雙曲拋物面

二次直紋面

依次爲沿y－軸及x－軸而存在之雙曲拋物面.雙曲拋物面沿一軸而存在,此軸亦與其方程中之一次項相符合.

二次曲面之對稱平面稱爲**中樞面**.每拋物面有兩中樞面;每有中心二次曲面有三中樞面.對稱軸稱爲**中樞軸**.每拋物面有一中樞軸;每有中心二次曲面有三中樞軸.有中心二次曲面,其對稱中心之存在卽可以解釋其命名之由來.

問　題

1. 討論下列各曲面,作其圖並命其名:

(a) $x^2+y^2=4z$.

(b) $y^2-z^2=6x$.

(c) $y^2-4x^2=16z$.

(d) $x^2+z^2=8x$.

(e) $3x^2+z^2-4y^2=0$.

(f) $y^2-2x^2-4z=0$.

(g) $9y^2-4z^2=288x$.

(h) $x^2-y^2-z=0$.

(i) $2y^2+3z^2+2x=0$.

(j) $y^2-2z^2-4x=0$.

(k) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=6z$.

(l) $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{4}=2y$.

2. 將無中心二次曲面之方程取如下式

$$Ax^2+By^2+Cz=0,$$

設此曲面通過下列諸已知點,試求其方程,並命其名:

(a) $(1,\ 0,\ 1),(0,\ 2,\ 1)$. 答. $4x^2+y^2-4z=0$.

(b) $(1,\ 0,\ 1),(0,\ 2,-1)$.

(c) $(1,\ 2,\ 1),(2,\ 1,\ 1)$.

3. 用問題 2 之式,試求一拋物面之方程,此拋物面通過一曲線,其方程爲 $z=4,\ 2x^2+y^2=4$.

自修或挑選之問題

1. 設以平行於一中樞面之諸平面截(1)一橢圓拋物面或(2)一雙曲拋物面,其所得之諸雙曲線均各爲全等形,試證明之.

2. 方程 $\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}+\frac{z^2}{c^2-k}=1$, $a>b>c$, 表一有中心二次曲面系,其中 k 爲一任意常數. k 之何値應除去?當 k 爲何値時此二次曲面爲一橢面?爲一單葉雙曲面?爲一雙葉雙曲面?

3. 試證問題 2 之二次曲面在各坐標平面上之交跡均各爲共焦點之圓錐截線(參閱 §55 例題).

4. 方程 $\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}=2cz$. 表一無中心二次曲面系,其中 k 爲一任意常數.當 k 爲何値時此二次曲面爲一橢圓拋物面?爲一雙曲拋物面?

5. 如何運動一拋物線而成一拋物面?(參閱問題1.)

6. 在問題 2 中,當 k 漸增而逼近於 c^2 時,則橢面逐漸變扁,試證明之.去此方程之分母後,再證當 $k=c^2$ 時此橢面之極限面爲在 XY-平面上之橢圓之內部.此橢圓之方程爲何?

第十六章

空間幾何補編

本章係選集幾種重要問題加以論述,如時間充裕,讀其一部或全讀均可.

§147. **旋轉面.** 設於一曲線所在之平面內有一直線,若圍繞該直線旋轉此曲線而生一曲面,則此曲面稱爲**旋轉面**

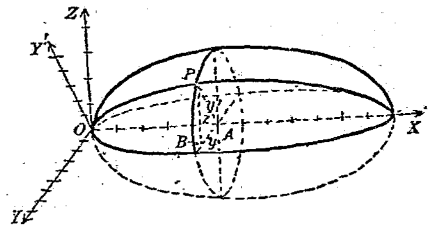
如球面,正圓柱面,及正圓錐面均爲旋轉面常見之例.

例　題

試求圍繞x—軸旋轉橢圓 $x^2+4y^2-12x=0$, $z=0$,所生旋轉面之方程.

〔解〕設 $P(x,y,z)$ 爲此旋轉面上之任意點.通過P與OX作一平面,此平面與旋轉面相截於一橢圓.在此

平面內作 OY′ 垂直於 OX. 設將 OX 與 OY′ 作為坐標軸,則此橢圓之方程顯然為



(1)　　　$x^2+4y'^2-12x=0.$

但由直角三角形 PAB 得

$$y'^2=y^2+z^2.$$

代入(1),得

(2)　　　$x^2+4y^2+4z^2-12x=0.$　　　答.

此方程表在此旋轉面上任意點必可滿足之關係,故為此旋轉面之方程.

由此解法得一規則如下:

設在一坐標平面上有一曲線,則圍繞此平面上一坐標軸旋轉此曲線可生一旋轉面;求此旋轉面方程之規則如下:

取不依旋轉軸度量之其他兩變數平方和之平方根,此兩變數在曲線方程中必見其一,即以此平方根代所見之變數,遂可得矣.

凡曲線圍繞一直線旋轉而生一曲面,此直線稱為

此曲面之軸.設以垂直於其軸之諸平面截此曲面,則所得之曲線顯然均為圓,其圓心均在此軸上.

設以垂直於一坐標軸之諸平面截一曲面,若所得之曲線均為圓心在該軸上之圓,則此曲面顯然為以該坐標軸為軸之旋轉面.此可使吾人決定一已知曲面是否為以一坐標軸為軸之旋轉面.

問 題

1. 試求下列在一坐標平面上之已知曲線圍繞已知軸旋轉所生旋轉面之方程.命其名並作其曲面.

(a) $4x-y=2$, x—軸.

(b) $x^2+4z^2=16$, z—軸. 答. $x^2+y^2+4z^2=16$.

(c) $9x^2+4y^2=36$, y—軸.

(d) $9x^2-4y^2=36$, x—軸; y—軸.

(e) $y^2=8x$, x—軸. 答. $y^2+z^2=8x$.

(f) $2x^2-4z^2=1$, 其貫軸; 其配軸.

(g) $x^2=y^3$, y—軸.

(h) $2x^2=4-y$, y—軸.

(i) $xz=8$, z—軸.

(j) $y=\sin x$, x—軸.

(k) $x^2+4y^2-4x=0$,　x一軸;　y一軸;　$x=2$.

(l) $xy=a$,　其兩漸近線.

答. $y^2(x^2+z^2)=a^2$;　$x^2(y^2+z^2)=a^2$.

2. 試求下列已知曲線圍繞指定軸旋轉所生旋轉面之方程.命其名並作其曲面.

(a) $y^2=2pz$,　z一軸.　答.旋轉拋物面 $x^2+y^2=2pz$.

(b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,　x一軸.　　答. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$.

(c) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, y一軸.

(d) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, x一軸.

3. 設曲線 $z=e^x$ 圍繞(1)x一軸,(2)z一軸旋轉而各生一旋轉面,試分別求其方程並作其曲面.

4. 試用解析方法證明球面係一圓圍繞其直徑旋轉而成.

5. 試求圓 $x^2+y^2-2hx+h^2-r^2=0$ 圍繞y一軸旋轉所生旋轉面之方程.討論此曲面在 $h>r$, $h=r$, 及 $h<r$ 時之情形.　　答. $(x^2+y^2+z^2+h^2-r^2)^2=4h^2(x^2+z^2)$.

當 $h>r$ 時,此曲面稱爲環.

6. 試求以 r 爲半徑,各坐標軸爲軸之旋轉柱面之

諸方程.

7. 設諸旋轉錐面以各坐標軸爲軸,且其基線與旋轉軸成一ϕ角,試求其方程.

答. $y^2+z^2=x^2\tan^2\phi$; $z^2+x^2=y^2\tan^2\phi$; $x^2+y^2=z^2\tan^2\phi$

8 試證下列各式之軌跡均爲旋轉面:

(a) $y^2+z^2=4x$. (e) $xz^2+xy^2=3$.

(b) $x^2-4y^2+z^2=0$. (f) $(x^2+z^2)y=4a^2(2a-y)$.

(c) $4x^2+4y^2-z^2=16$. (g) $x^2+y^2+zx^2+zy^2-z+3=0$.

(d) $x^2-4y^2+z^2-3y=0$. (h) $x^2+y^2+z^3-2y+1=0$.

(i) $y^2+z^2+xy^2+xz^2-8=0$

9. 設一動點與一定平面之垂直距離及一定點之距離之比爲一常數,試證此動點之軌跡爲一旋轉面.

10. 設一動點與一定直線之垂直距離及此直線上一定點之距離之比爲一常數,試以解析方法證明此動點之軌跡爲一旋轉錐面.比之何值應除去?

§148. 直紋面.

由一動直線所生之面稱爲直紋面.設直線方程中含有一任意常數,則此等方程表一直線系;而此直線系即組成一直紋面.設由直線方程消去此任意常數,其結果即成爲直紋面之方程.

因若(x_1,y_1,z_1)在此任意常數爲某值時能滿足已知

方程,則此點亦必能滿足消去此任意常數後之方程;亦卽在此直線系中每一直線上之每一點均能滿足此方程.

柱面與錐面爲最簡單之直紋面.

例　題

1. 設有一直線系其方程爲

$$x+y=kz,\quad x-y=\frac{1}{k}z,$$

試求此直線系所生直紋面之方程.

〔解〕將此兩式相乘卽可消去 k 而得

(1)　$$x^2-y^2=z^2.$$

此爲一錐面(§139)之方程,其頂點爲原點.因以諸平面 $x=k$ 截此錐面,而所得之曲線均爲圓,故此錐面爲以 x-軸爲軸之旋轉錐面.

今可證驗對於 k 之一切値此等已知直線均在曲面(1)上:

解直線方程中 x 與 y 爲 z 之諸項,得

$$x=\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)z,\quad y=\frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{k}\right)z,$$

代入(1),

$$\frac{1}{4}\left(k+\frac{1}{k}\right)^2 z^2-\frac{1}{4}\left(k-\frac{1}{k}\right)^2 z^2=z^2,$$

此方程對於 k 與 z 之一切值均爲眞,去括弧後自可明矣.因此直線系中任一直線上每點之坐標均可滿足(1),故此等點無一不在(1)上.

2. 試決定曲面 $z^3-3zx+8y=0$ 之性質.

〔解〕此曲面與平面 $z=k$ 之交線爲一直線

$$k^3-3kx+8y=0,\quad z=k.$$

故此曲面爲此直線當 k 變化時所生之直紋面.欲作此曲面,先研究其與兩平面 $x=0$ 及 $x=8$ 相截之曲線.此等曲線之方程依次爲

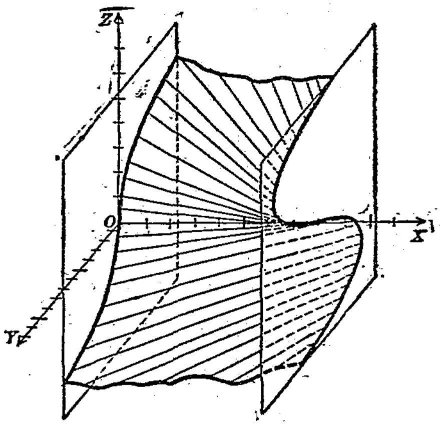
$$x=0,$$

$$8y+z^3=0,$$

及

$$x=8,$$

$$8y-24z+z^3=0.$$



連接此兩曲線上具有 z 之同值之點而得諸直線,此等直線即組成此直紋面.

用例2之法決定直紋面及作圖最爲相宜.考查此等曲面之方程可以想出一平面系,此系中諸平面與此曲面相交爲一直線系;在下節問題1中可見其例.

§149. 二次直紋面. 直母線.

單葉雙曲面(§143)之方程可寫爲下式:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}. \tag{1}$$

因此方程爲由直線系方程

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

消去k後所得之結果,故單葉雙曲面爲一直紋面.又因方程(1)亦爲由直線系方程

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k\left(1-\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

消去k後所得之結果,故單葉雙曲面可以兩種方法視作直紋面也.(參閱銅板圖II.)

依同理,雙曲拋物面(§146)之方程亦包含兩直線系

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2ck,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{z}{k},$$

及

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=kz,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{2c}{k}.$$

此等直線稱爲此等曲面之直母線故得下之定理:

定理. 單葉雙曲面與雙曲拋物面各有兩直母線系;即此兩曲面均可以兩種方法視作直紋面.

此兩母線系均見銅板圖II.

問　　題

1. 試證下列方程均爲直紋面,且各具有平行於一坐標平面之直母線.求出此等直母線之方程,並利用此等方程作下列各曲面之圖.

(a) $xy=z$.　　(e) $xy=y^2-3z$.

(b) $yz=x+z^2$　　(f) $x^2y-x^2+z=0$.

(c) $y^2=x+yz$.　　(g) $xz-z^2+y=0$.

(d) $x^2y+xz=y$.　　(h) $x^2=y^2(z+1)$.

2 試求下列各二次曲面之兩直母線系,並利用一母線系之方程作其曲面.

(a) $x^2-z^2-y^2+1=0$.　　(d) $y^2-4z^2+2x=0$.

(b) $x^2+yz-1=0$.　　(e) $x^2-4y^2=4z$.

(c) $9x^2+4y^2-36z^2=3$.　　(f) $x^2+y^2-yz-1=0$.

3. 下列諸式爲各直紋面之母線,試求此等直紋面之方程,並作其圖.

(a) $x+2z+k(1-y)=0,\ k(x-2z)+1+y=0.$

答. $x^2+y^2-4z^2=1$.

(b) $2x+y-3k=0.\ \ k(2x-y)-z=0.$

(c) $x+2ky+4z=4k,\ \ kx-2y-4kz=4.$

(d) $5-x-ky=0,\ \ k(5+x)-y=0.$

(e) $y-4k=0,\ \ ky-x=0.$

(f) $3x-4y=kz,\ \ k(3x+4y)=z.$

自修或挑選之問題

4. 試證雙曲拋物面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2cz$之各直母線必平行於兩平面$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$之一.

5. 試證(1)單葉雙曲面,(2)雙曲拋物面之直母線在一中樞面上之射影與各曲面在該中樞面上之交跡相切.

6. 通過單葉雙曲面之中心及一母線作一平面,則此平面必與雙曲面相交於第二母線,且此母線與第一母線平行.

7. 試證(1)雙曲拋物面,(2)單葉雙曲面之兩直母線系通過各該曲面上之各點.

8. 設一平面通過二次曲面之一直母線,試證其亦必通過第二母線,且此兩母線不屬同系.

9. 單葉雙曲面之方程又可寫為下式:$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$ 如 §149 之法分解此方程又可得在此曲面上兩直線系之方程.試證如此所得之兩直線系與從前所得者完全相同.

§150. 斜柱面. 學者切勿由 §138 所述而推斷一切柱面之方程均缺一變數.在柱面之基線不平行於一坐標軸時,則三變數將全發現於方程之中.此可以下例明之.

例 題

試定下式軌跡之性質:

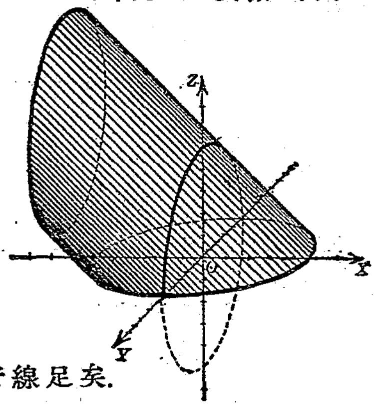
$$x^2+2xz+z^2=1-y^2.$$

〔解〕此曲面顯然為一直紋面,其直母線為

$$y=k,\quad x+z=\pm\sqrt{1-k^2}.$$

因此等直線之方向數均為$-1,0,1$,且與 k 無關,故此兩方程定一平行線系.卽此系內之諸線均平行於連$(-1,0,1)$與原點之直線也.因此可斷定此曲面為一柱面. 答.

欲作此曲面先畫出一個交跡,然後通過此交跡上之點按上述之方向作諸直線,即可得矣.在YZ－平面上之交跡爲圓 $y^2+z^2=1$;在XY－平面上之交跡爲圓 $x^2+y^2=1$.



此兩圓中任一圓均可作爲準線.

由此顯然易知欲證明一曲面爲柱面僅需證明此曲面爲一直紋面,且其母線爲平行線足矣.

§151. 曲線之影壁. 柱面之基線與一已知曲線相交,且平行於一坐標軸者稱爲此曲線之影壁.由曲線方程中依次消去變數 x, y, 及 z, 則可得影壁之方程.例如消去 z, 則由 §138 知其結果爲一柱面方程,此柱面之基線均平行於z－軸.又此柱面必通過此曲線,蓋x,y及 z 之值,其能滿足此曲線之兩方程者,必亦能滿足由此兩方程消去一變數後所得之方程也.

曲線之方程通常可用其相當之任意兩獨立方程替換之,即可用結合已知方程而得之兩獨立方程替換之也.此即謂一曲線可以通過此曲線任意兩曲面

之聯立方程而定之也.

以兩影壁之方程作爲一曲線之方程,常甚便利.故作原曲線之問題,一變而爲作兩柱面相交之曲線之問題,此兩柱面之基線各平行於一坐標軸.此法可以下列諸例明之.

例題

1. 試作下列兩柱面相交之曲線:

$$x^2+y^2-2y=0,\quad y^2+z^2-4=0.$$

〔解〕先將各柱面之交跡畫於其基線所垂直之坐標平面上(圖 1.)然後研究一垂直於坐標軸之平

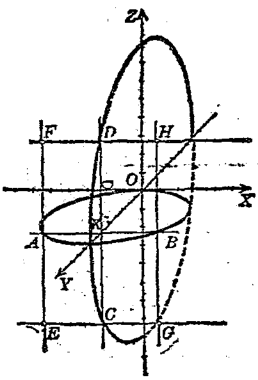


圖 1.

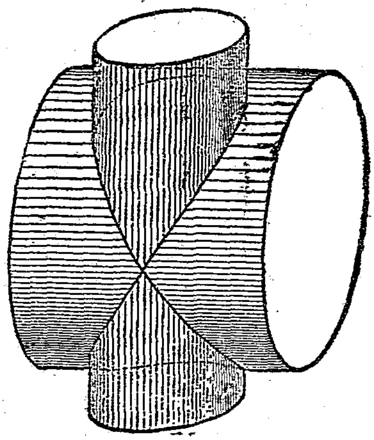


圖 2.

面,此坐標軸無一柱面之基線與之平行.在本題中此種平面爲$y=k$.設此平面與y－軸相交於K點,則必與兩交跡相交於A,B,C,D四點.通過各點作相當柱面之基線,此四基線全在此平面上.此等基線之交點E,F,G,H爲此兩柱面相交曲線上之諸點.設將此種平面$y=k$取於若干不同之位置,則可得多數點而作此全曲線如圖2所示.

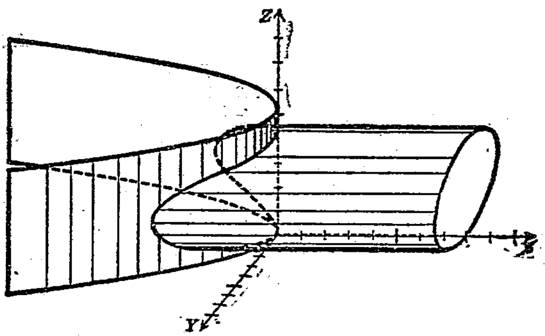
2. 設曲線之方程爲

$$2y^2+z^2+4x=4z,\quad y^2+3z^2-8x=12z,$$

試求其諸影壁之方程,並作此曲線.(參閱§152之末例,該例可作本題之第二解.)

〔解〕依次消去x,y,及z,得諸影壁之方程

$$y^2+z^2=4z,\quad z^2-4x=4z,\quad y^2+4x=0.$$



此圖表第一與第三影壁,相交於原曲線上,即用前

例所述之法作成.

三影壁之方程完全作出常甚便利,因可由其中挑選兩個較爲簡單者以圖作圖之方便.

直線之'影壁'爲射影平面.

問 題

1. 試證下列諸曲面均爲柱面.討論各方程並作其圖.

(a) $x-y^2+z=0.$ (e) $x^2+2xy+y^2=4z.$

(b) $xz+yz-1=0.$ (f) $y^2-2yz+z^2=4-x^2$

(c) $y^2-2x-3z=0.$ (g) $x^2-4xy+4y^2=z-1.$

(d) $y^2-4(x+z)+8=0.$ (h) $x^2+9y^2+4z^2-12yz=4.$

2. 試證下列諸曲面均爲柱面,並作其圖:

(a) $(x+z)(y+z)=4.$ (c) $(x+y)^2+(x-z)^2=a^2.$

(b) $(x+z)^2=y+z.$ (d) $(y+z-a)^2+(x-z)=a^2.$

3. 試作下列各對面相交之曲線:

(a) $x^2+y^2=36,\quad y-z=0.$

(b) $x^2+y^2-4x=0,\quad x^2+z^2-4=0.$

(c) $x^2+4z^2-8z=0,\quad x+y-1=0.$

(d) $y^2-4z=0,\quad x^2-z-4=0.$

4. 試求下列諸曲線影壁之方程,並將各曲線視作其兩影壁之交線而作其圖:

(a) $x^2+y^2+z^2=25,\quad x^2+4y^2-z^2=0.$

(b) $x^2+4y^2-z^2=16,\quad 4x^2+y^2+z^2=4.$

(c) $x^2+y^2=4z,\quad x^2+y^2-4x=0.$

(d) $x^2+2y^2+4z^2=32,\quad x^2+4y^2=4z.$

(e) $x^2-10y-5z-25=0,\quad x^2+2y^2+5z+10y-25=0.$

(f) $x^2+2y^2+4z-4=0,\quad 2x^2+5y^2+12z-8=0.$

(g) $y^2-x^2+2z^2+7y-72=0,\quad a^2-z^2-7y+36=0.$

(h) $2x^2+y^2-9z=0,\quad y^2+9z-72=0.$

(i) $x^2+y^2-z-1=0,\quad x^2-y^2-z+1=0.$

5. 試證問題1(t)之直母線又可表爲$y-z-kx-2k=0$, $k(y-z)-2+x=0$, 並證此兩方程定一平行線系.試以同法研究問題1之(h).

自修或挑選之問題

6. 試證兩平面系 $4x\pm 12z=k$ 均與橢面 $9x^2+25y^2+169z^2=100$ 相交於諸圓.

7. 試證平面 $3x+y=10$ 切於柱面 $x^2+y^2-10=0$, 並寫出平面切柱面之基線之方程.

8. 試作下列各對曲面,並將第一曲面被第二曲面所截之部分用陰影表出:

(a) $x^2+4y^2+9z^2=36,\quad x^2+y^2+z^2=16.$

(b) $x^2+y^2+z^2=64,\quad x^2+y^2-8x=0.$

(c) $4x^2+y^2-4z=0,\quad x^2+4y^2-z^2=0.$

9. 描繪並敍述被下列諸面所包圍之立體:

(a) $x^2+y^2=a^2,\quad z=mx,\quad z=0.$

(b) $x^2+y^2=az,\quad x^2+y^2=2ax,\quad z=0.$

10. 設一動點與一定點及一定直線之距離恆相等,試證其軌跡為一拋物柱面.

11. 設一動點與兩直交線距離之平方差為一常數,試證其軌跡為一雙曲柱面.

12. 設有三平面彼此互為直交,一動點與其中兩平面距離之和等於該點與第三平面距離之平方,試證此動點之軌跡為一柱面.

13. 設有三平面彼此互為直交,一動點與其中兩平面距離之和等於該點與第三平面距離之平方根,試證此動點之軌跡為一拋物柱面.

§152. 空間曲線之參變方程組. 設空間一點 P 之坐標 $x, y,$ 及 z 均為一參變數之函數,則

P 之軌跡為一曲線(與§92比較)

例如,設

$$(1)\qquad x=\frac{1}{4}t^2,\quad y=1-2t,\quad z=3t^3+2,$$

其中 t 為一襄變數,則 (x,y,z) 之軌跡為空間之一曲線.假設 t 為種種值,算出 x, y, 及 z 之相當值,畫出諸點,然後用一連續曲線將此等點依次連結,則此曲線遂作成矣.方程(1)稱為曲線之**襄變方程**

曲線(1)影壁之方程可從(1)中依次取兩方程消去襄變數 t 而得.例如取前兩方程,

$$(2)\qquad x=\frac{1}{4}t^2,\quad y=1-2t,$$

由第二式,$t=\frac{1}{2}(1-y)$,代入第一式,得

$$(3)\qquad 4x=\frac{1}{4}(1-y)^2,\quad \text{或}(y-1)^2-16x=0.$$

曲線(1)在此拋物柱面上.

依同法,再由(1)之第一與第三兩方程消去 t,

$$x=\frac{1}{4}t^2,\quad z=3t^3+2,$$

則得立方柱面

$$(4)\qquad (z-2)^2=576x^3.$$

故(1)爲柱面(3)與(4)相交之曲線.

有時用一補變數以求空間曲線之方程頗覺便利.

例　題

柱面螺線之方程. 設一點在一直圓柱面上運動,此點移動之距離(平行於柱體之軸)與其繞軸旋轉之角度成正比,試求此動點軌跡之方程.

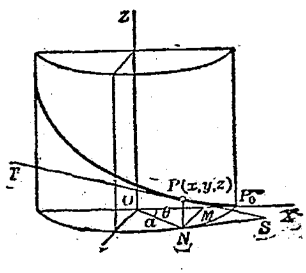
〔解〕如圖所示,選一坐標軸而使已知柱面之方程爲

(5) $$x^2+y^2=a^2.$$

設 OX 上之 P_0 爲動點之一位置,而 P 爲任意之另一位置.則由定義,距離 $NP(=z)$ 與角 $XON(=\theta)$ 成正比;即 $z=b\theta$,其中 b 爲一常數.更由圖得

$$x=OM=ON\cos\theta=a\cos\theta,$$

$$y=MN=ON\sin\theta=a\sin\theta.$$



故此柱面螺線之方程爲

(6) $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=b\theta.$

其中 θ 爲一補變數. 答.

由(6)中前兩方程消去 θ 則可得(5),此固當然

之結果也.

由已知一曲線影壁之方程,求該曲線之褢變方程.
在§94中曾述對於同一之平面曲線可得無限組褢變方程,對於空間之曲線亦然,此可以下例明之.

例 題

1. 試求下曲線之褢變方程:

$$2y^2+z^2+4x=4z, \quad y^2+3z^2-8x=12z.$$

〔解〕此曲線之影壁(參閱§151 例題 2)為

(7) $$y^2+z^2=4z, \quad z^2-4x=4z, \quad y^2+4x=0.$$

假設 $y=2t$, 則由末式得 $x=-t^2$, 更由其餘兩柱面之任一式均可得

$$z=2\pm2\sqrt{1-t^2}.$$

故已知曲線為下式之軌跡:

(8) $$x=-t^2, \quad y=2t, \quad z=2\pm2\sqrt{1-t^2}.$$ 答.

今可由此等方程而作此曲線.

設在(7)中令一坐標等於褢變數之另一函數,則可得另一組褢變方程.如此對於空間一曲線亦可得無限組褢變方程,而吾人之目的當然只求其最簡單之一組而已.至於採取何種假設法最為適宜,必須視

已知問題而隨時决定.

問　題

1. 試求下列每對曲面相交曲線之簡單裏變方程,並由所得之裏變方程而描其曲線:

(a) $y^2-4z=0,\quad 4x+z^2=0$. 答. $x=-\frac{1}{4}t^4,\ y=2t,\ z=t^2$.

(b) $x^2-9z+36=0,\quad x^2+y^2-36=0$.

(c) $x^2+y^2-25=0,\quad 3x-z^2=0$.

(d) $x^2+y^2-2y=0,\quad y^2+z^2-4=0$.

(e) $x^2+y^2-25=0,\quad x^2+z^2-25=0$.

(f) $2y^2+z^2+4x-4z=0,\quad y^2+3z^2-8x-12z=0$.

2. 試求 §151 問題 3 與 4 中各曲線之裏變方程,並由裏變方程描其軌跡,以證驗前次所作之圖有無錯誤.

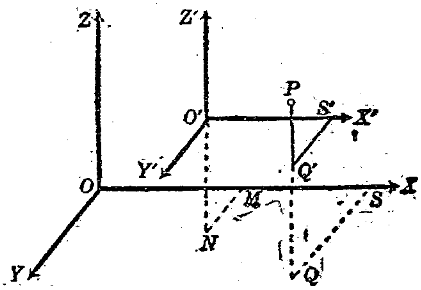
第十七章

坐標之變換　各種坐標系

§153. 軸之平移法. 空間平移軸之公式與第七章對於平面內所述者完全類似,茲解釋如下.

定理. 平移軸至一新原點 O'(h, k, l) 之公式爲

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} x=x'+h, \\ y=y'+k, \\ z=z'+l. \end{cases}$$



〔證〕設任意一點在未移軸前及已移軸後之坐標依次爲 (x,y,z) 及 (x',y',z'). 圖中 OM=h, OS=x, O'S'=x'. 但 OS=OM+MS=OM+O'S'. 故 x=x'+h.其餘二式之證法亦與此相似.　　【證完】

§154. 軸之旋轉法. 設兩軸圍繞第三軸旋轉則發生一簡單旋轉軸公式.例如,設 OX 與 OY

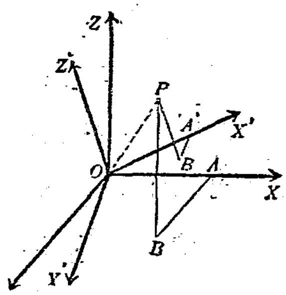
二軸圍繞z-軸旋轉一θ角,則任何一點P之z-坐標不變,其新x-與y-坐標可以§61之公式(II)表之,故得下之定理:

定理　圍繞z-軸轉一θ角之旋轉軸公式爲

(II)　$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\quad y=x'\sin\theta+y'\cos\theta,\quad z=z'.$

設圍繞x-軸或y-軸旋轉亦可得相似之公式.

設圍繞原點旋轉軸至一新位置$O-X'Y'Z'$,且任意一點在未轉軸前及已轉軸後之坐標依次爲(x, y, z)及(x', y', z'),則可得下之定理:



定理　設$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$,及$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$依次爲三互成直交線$OX'$ OY',及OZ'之方向角,則旋轉軸至新位置$O-X'Y'Z'$之公式爲

$$
\text{(III)}\qquad \begin{cases} x=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3, \\ y=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3, \\ z=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3. \end{cases}
$$

〔證〕設$\angle XOP=\theta$. 將OX與OP二線對於新軸OX', OY', OZ'論之,OX之方向角爲$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$;且設$OP$之方向角爲$\alpha', \beta', \gamma'$. 則由§117之(IV),得

$$\cos\theta=\cos\alpha'\cos\alpha_1+\cos\beta'\cos\alpha_2+\cos\gamma'\cos\alpha_3.$$

以 $\rho=OP$ 乘此式之兩端,且記清 $\rho\cos\theta=x$, $\rho\cos\alpha'=x'$, $\rho\cos\beta'=y'$, $\rho\cos\gamma'=z'$,則得(III)之第一式.餘二式可以同法證之.　【證完】

OX', OY' 及 OZ' 之方向餘弦顯然可滿足下列六方程:

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1,$$

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0,$$

$$\cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_2+\cos^2\gamma_2=1,$$

$$\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\beta_2\cos\beta_3+\cos\gamma_2\cos\gamma_3=0,$$

$$\cos^2\alpha_3+\cos^2\beta_3+\cos^2\gamma_3=1,$$

$$\cos\alpha_3\cos\alpha_1+\cos\beta_3\cos\beta_1+\cos\gamma_3\cos\gamma_1=0.$$

故(III)中九常數僅有三個爲獨立者.

定理. 任意移轉坐標軸,方程之次數不變.

此可用§68之理論證之.

問　題

1. 平移軸至所示各點而變換下列各方程,並命各曲面之名:

(a) $x^2+y^2-4x+2y-4z+1=0$;　$(2,-1,-1)$.

答. $x^2+y^2-4z=0$;

(b) $4x^2+9y^2-36z^2-16x-18y+216z-385=0$;$(2, 1, 3)$.

(c) $2x^2-5y^2-3z^2+20x-4z-46=0$; $(-5,\ 0,\ \frac{2}{3})$.

(d) $x^2+y^2-4z^2-4x-y-4z-3=0$; $(2,\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

2. 試推定圍繞(1)x—軸,(2)y—軸轉一θ角之旋轉軸公式.

3. 試證用平移軸法或繞一坐標軸轉之旋轉軸法可將下列各方程變爲其答案之形狀(參閱§§58,64).命此等曲面之名並述其與原坐標軸之關係.

(a) $x^2+y^2-z^2-6x-8y+10z=0$. 答. $x^2+y^2-z^2=0$.

(b) $3x^2-8xy+3y^2-5z^2+5=0$. 答. $x^2-7y^2+5z^2=5$.

(c) $y^2+4z^2-16x-6y+16z+9=0$. 答. $y^2+4z^2=16x$.

(d) $2x^2-5y^2-5z^2-6yz=0$. 答. $x^2-4y^2-z^2=0$.

(e) $9x^2-25y^2+16z^2-24zx-80x-60z=0$.

答. $x^2-y^2=4z$.

4. 試用變換坐標軸法化下列各方程爲§141 所述二次曲面標準式(1)或(2)中之一式:

(a) $x^2+4y^2+6z^2-8x+8y=0$.

(b) $x^2+xy+y^2+z^2-3=0$.

(c) $3y^2-5yz+3z^2-8x=0$.

(d) $x^2+3xy+y^2+z^2-6z=0$.

(e) $x^2+y^2+6y-6z-18=0$.

(f) $x^2+xy+y^2-2z^2+5x=0$.

5. 試旋轉軸至一新位置而變換下之方程,此三新軸之方向餘弦依次爲$\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}$.

$$5x^2+8y^2+5z^2-4yz+8zx+4xy-4x+2y+4z=0.$$

答. $3x^2+3y^2=2z$.

6. 試用繞x—軸旋轉法變換下之方程,並使y′—軸之方向餘弦爲 $(0,\ \frac{1}{2}\sqrt{3},\frac{1}{2})$.

$$5x^2-2y^2+11z^2+12xy+12yz-16=0.$$

7. 試以旋轉軸法變換下之方程,而三新軸之方向餘弦依次爲 $-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}$; $-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}$.

$$5x^2+5y^2+2z^2+2xy-4yz+4zx+6x-6y-12z=0.$$

8. 試旋轉軸至一新位置而變換下之方程,此三新軸之方向數依次爲　2,−1,−1;　0,　1,−1;　1,　1,　1.

$$x^2+2y^2+6z^2-2x-2y+18z+9=0.$$

9. 試證用繞z—軸旋轉法常可將方程 $Ax^2+By^2+Cz^2+Fxy+k=0$ 中之 xy—項消滅.

10.設一點在未轉軸前及已轉軸後之坐標依次爲 (x, y, z) 及 (x', y', z')，試證

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2.$$

11.試用變換坐標軸法化下列各方程爲標準式 (§141)，並決定各式所表之拋物面屬於何類:

(a) $z=xy$.　　(c) $x^2+2y^2-6x+4y+3z+11=0$.

(b) $z=x^2+xy+y^2$.　　(d) $z^2-3y^2-4x+2z-6y+1=0$.

12.設一動點與一定平面及一定點之距離恆相等，試證其軌跡爲一旋轉橢圓拋物面.

13.設一動點與兩不交之垂直線之距離恆相等，試證其軌跡爲一雙曲拋物面.

§155. 二次方程之軌跡. 含 x, y, 及 z 之二次方程最普通之形式爲

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dyz+Ezx+Fxy+Gx+Hy+Iz+K=0. \tag{1}$$

此式之軌跡稱爲**二次曲面**.茲可由此等曲面與平面相截之曲線而研究其性質.先得一定理如下:

定理 1. 二次曲面被任意平面所截而得之曲線爲一圓錐截線或一降格圓錐截線.

〔證〕用變換坐標法可將任意平面變爲 XY－平面，

$z=0$. 由 §154 末一定理可知二次曲面對於任何位置之坐標軸其方程均為(1)之形狀.故對於此截面,$z=0$,上之坐標軸而言,則相交曲線之方程必為下式:

$$Ax^2+Fxy+By^2+Gx+Hy+K=0.$$

且由 §63 知其軌跡為一圓錐截線或一降格圓錐截線.　　【證完】

前在 §54 中曾述拋物線,橢圓,及雙曲線原均作為圓錐截線而研究,即均作為平面與旋轉錐面相截之曲線而研究也.此種旋轉錐面係由一直線圍繞與其相交之軸旋轉而成,含有兩葉(或節).由上述定理及吾人直覺顯然可知下之推論為眞:

推論. 一旋轉錐面被一平面所截,設此平面截其一葉之所有基線則成一橢圓;設此平面平行於一基線,則其一葉上之所有基線除此而外必皆為此平面所截,如此即成一拋物線;設此平面截其兩葉上之基線則成一雙曲線.

關於二次曲面被一平行平面系所截而得之諸曲線下之定理頗為重要:

定理 2. 二次曲面被一平行平面系所截而得之諸曲線為同類之圓錐截線.

〔證〕如證定理 1 之法,僅需研究二次曲面(1)被一平面系 $z=k$ 所截而得之諸曲線.代 $z=k$ 入(1),則在此平面上截得之曲線之方程爲

(2) $$Ax^2+Fxy+By^2+D'x+E'y+G'=0.$$

其中僅 D', E', G' 爲 k 之函數.故其二次項之判別式,F^2-4AB, 與 k 無關.於是由 §63 之理論可知本定理爲眞. 【證完】

本定理之意義如下:一平行平面系截二次曲面所得之諸曲線或全爲橢圓,或全爲雙曲線,或全爲抛物線,且 §63 所述各類之特殊形狀亦在其內.

§156. 三變數二次方程之化簡. 設用旋轉軸法變換方程(1),常可選適宜之新軸而將含 yz, zx,及 xy 之諸項消滅;此法在較深之書中可以論及.故(1)總可化爲下形:

$$A'x^2+B'y^2+C'z^2+G'x+H'y+I'z+K'=0.$$

設再用平移軸法變換此方程,總可選適宜之新軸而將此方程化爲下示二形之一,此事頗易證明.

(1) $$A''x^2+B''y^2+C''z^2+K''=0,$$

(2) $$A''x^2+B''y^2+I''z=0.$$

注意(1)與(2)之異點,在(1)中除常數項外均

爲二次項,在(2)中僅兩二次項,餘爲他一變數之一次項.

設(1)與(2)中之一切係數均不爲零,則變其記號可將此二式分別寫如下形:

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{3}$$

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=2cz. \tag{4}$$

方程(3)與(4)在§§142—146中已加討論,其軌跡爲普通二次曲面.

設在(1)或(2)中有一個或一個以上之係數爲零,則其軌跡稱爲**降格二次曲面**.

根據過去所得之種種結果頗易研究(1)與(2)之特殊形狀.

設 $K''=0$, 在 A'', B'', 及 C'' 非同號時(1)之軌跡爲一**錐面**(§139 定理),設 A'', B'', 及 C'' 同號,則其軌跡爲**一點**,卽原點.

設 A'', B'', 及 C'' 中有一係數爲零,則(1)之軌跡爲**一柱面**,其基線平行於一坐標軸,其準線爲一橢圓類或雙曲線類之圓錐截線.設又有 $K''=0$, 其軌跡或爲**一對相交平面**,或其方程僅可被一坐標軸上之諸點

所滿足.

設 A'', B'', 及 C'' 中有二係數爲零,則(1)之軌跡爲一對平行平面(設 $K''=0$, 此兩平面重合),或竟無軌跡.

設(2)中有一係數爲零,則其軌跡爲以拋物線爲準線之柱面,或一對相交平面,或z一軸.設有二係數爲零,則(2)之軌跡爲一對重合平面.(A''與B''不能同時爲零,若同時爲零,則此方程不能爲二次式矣.)

問 題

1. 試命下列各降格二次曲面之名:

(a) $9x^2-36y^2+4z^2=0$. (e) $4y^2-25=0$.

(b) $16x^2-4y^2-z^2=0$. (f) $3y^2+7z^2=0$.

(c) $4x^2+z^2-16=0$. (g) $8y^2+25z=0$.

(d) $y^2-9z^2+36=0$. (h) $z^2+16=0$.

2. 試用變換坐標法證明下列諸二次曲面均爲降格:

(a) $x^2-y^2+z^2-6z+9=0$.

(b) $x^2+4y^2-z^2-2x+8y+5=0$.

(c) $x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z+6=$

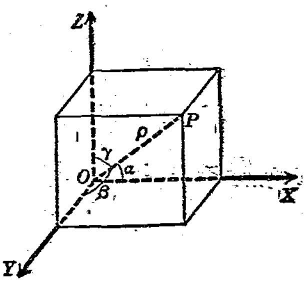
(d) $x^2+y^2-2z^2+2y+4z-1=0.$

(e) $x^2+yz=0.$

(f) $4x^2-y^2+9z^2+16x+6y+18z+16=0.$

(g) $3x^2-6xy+xz-2yz+12x-6y+3z+6=0.$

§157. 極坐標



由原點作至任意點P之直線 OP 稱為P之動徑．動徑 ρ, 與 OP 之方向角 α, β, γ 稱為P之極坐標.

因 α, β, 及 γ 滿足 §114 之(I),故此等數並非完全獨立;若已知其二,則餘一數自可求出.但為保持對稱之形式起見,論極坐標時仍將三者並舉.

定理. 直角坐標與極坐標之關係為

$$\text{(IV)} \qquad x=\rho\cos\alpha,\quad y=\rho\cos\beta,\quad z=\rho\cos\gamma.$$

顯然

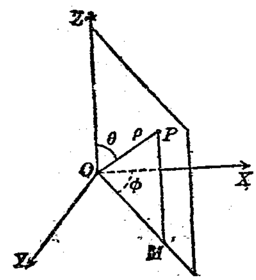
$$\text{(1)} \qquad \rho^2=x^2+y^2+z^2,$$

此係將動徑表為 x, y, z 之諸項.

§158. 球坐標.

設一點P之動徑為 ρ, OP與 z一軸間之角為θ, OP在XY一平面上之射影與x一軸間

之角爲ϕ.則ρ, θ, ϕ稱爲P之球坐標.θ稱爲餘緯度而ϕ稱爲經度.P之球坐標寫爲(ρ, θ, ϕ,).



由圖,

$$z = MP = \rho\cos\theta,$$

$$OM = \rho\sin\theta;$$

又,

$$x = OM\cos\phi,$$

$$y = OM\sin\phi.$$

故得下之定理:

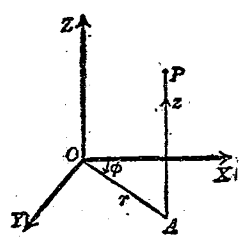
定理. 直角坐標與球坐標之關係爲

(V) $x = \rho\sin\theta\cos\phi,\quad y = \rho\sin\theta\sin\phi,\quad z = \rho\cos\theta.$

將(V)對於ρ, θ, 及ϕ解之,可得其餘之關係式.

§159. 柱坐標.

設一點P(x, y, z)與XY-平面之距離爲z,且該點在XY-平面上射影(x, y, o)之極坐標爲(r, ϕ),則r, ϕ, z,稱爲P之柱坐標.P之柱坐標可寫爲(r, ϕ, z).



定理. 直角坐標與柱坐標之關係爲

(VI) $$x=r\cos\phi,\quad y=r\sin\phi,\quad z=z.$$

將(VI)對於 r 與 ϕ 解之,可得其餘之關係式.

問題

1. 試求下列諸點之極坐標及球坐標:

(a) $(0, 2, 0)$; (b) $(3, 4, 12)$; (c) $(-2, 2, -1)$.

2. 試作下列諸點,其球坐標爲

(a) $(2, 90^0, 60^0)$; (b) $(5, 120^0, 90^0)$; (c) $(9, -135^0, 120^0)$.

3. 試求問題 2 中諸點之直角坐標.

4. 試作一點,其柱坐標爲 $(4, 45^0, 6)$. 問該點之直角坐標爲何?

5. '一方程之軌跡'在極坐標 ρ, α, β 及 γ 中表何意義?在球坐標 ρ, θ, 及 ϕ 中表何意義?在柱坐標 r, ϕ 及 z 中表何意義?

6. 設已知曲面之方程爲極坐標方程,或球坐標方程,或柱坐標方程,則此曲面在直角坐標軸上之截部如何求法?試分別說明之.

7. 試變下列方程爲極坐標方程:

(a) $x^2+y^2+z^2=25$. 答 $\rho=5$.

(b) $x^2+y^2-z^2=0$. 答 $\gamma=\frac{1}{4}\pi$.

(c) $2x^2-y^2-z^2=0$. 答. $\alpha=\cos^{-1}\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

(d) $x^2-y^2+z^2=0$.

8. 試變下列方程爲球坐標方程:

(a) $x^2+y^2+z^2=16$. 答. $\rho=4$.

(b) $2x+3y=0$. 答. $\phi=\tan^{-1}(-\frac{2}{3})$.

(c) $3x^2+3y^2=7z^2$. 答. $\theta=\tan^{-1}\frac{1}{3}\sqrt{21}$.

(d) $x^2-y^2+z^2=0$.

(e) $x^2+y^2-4z^2=0$.

9. 試變下列方程爲柱坐標方程:

(a) $5x-y=0$. 答. $\phi=\tan^{-1}5$.

(b) $x^2+y^2=4$. 答. $r=2$.

(c) $x^2+y^2-z^2=0$.

10. 試述下列各方程之軌跡:

極坐標. (a) $\rho=$常數. (b) $\alpha=$常數.

球坐標. (a) $\rho=$常數. (b) $\theta=$常數. (c) $\phi=$常數

柱坐標. (a) $r=$常數. (b) $\phi=$常數.

11. 點 $P(a,b,c)$ 爲三相互直交平面 $x=a$, $y=b$, $z=c$ 之交點利用上題所得之結果,試舉三曲面,此三曲面

相交於P, 而P之

(a) 球坐標爲 $(\rho_1, \theta_1, \phi_1)$;

(b) 柱坐標爲 (r_1, ϕ_1, z_1).

12.設兩點之極坐標各爲 $(\rho_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ 及 $(\rho_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, 試證其距離 r 之平方爲

$$r^2=\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2)$$

13.求用極坐標表球面之普通方程.

答. $\rho^2+\rho(G\cos\alpha+H\cos\beta+I\cos\gamma)+K=0.$

索　　引

施蓋倪解析幾何學

編譯者	繆玉源
發行人	李志雲
發行者	北新書局

下冊　實售四角

民國二十五年五月付排

民國二十五年八月初版

總發行所　上海四馬路中市
電報掛號一一六三

分售處　北成廣開南重廈武昆貴
平都州封京慶門漢明陽

北新書局