現代初中教科書

代數學

下·册

編輯者 吳在淵

校訂者 胡敦復 胡明復

上海商務印書館出版

下冊目錄

现代初中教科書

代數學下冊

第八章　二次函數及其圖形

二次方程式

§ 86. **二次函數之圖形.** x之二次式可名爲x之二次函數.在解析幾何學中可證明二次函數之圖形,普徧者爲曲線.

描寫二次函數圖形之法,可任設x之值以求函數之值,得各對數值,照§69中之法立坐標軸而以點表此各對之值,乃過陸續諸點描一平滑曲線,此曲線卽爲函數之圖形.

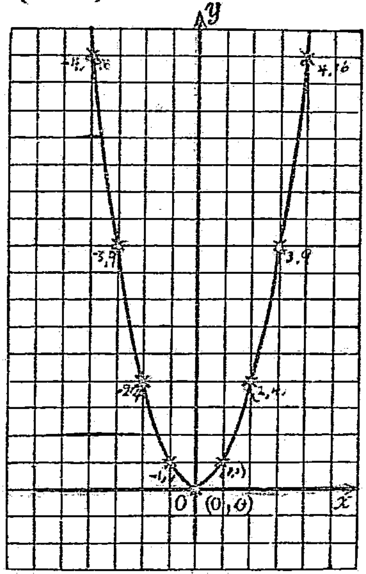
〔第一〕 $y=x^2$之圖形.

所設x之諸值及求得之y諸值列表如下:

x	0	±1	±2	±3	± 4	…
y	0	1	4	9	16	…

在縱橫軸上,各取方格之一格作單位.表

(第一)



中各對x,y之值爲圖中曲線上各點之坐標，此各點均以(×)標出之。

如此曲線曰拋物線(Parabola)，O爲拋物線之頂點，oy爲拋物線之軸。

〔第二〕$y=-2x^2+\frac{9}{2}$之圖形。

$y=-2x^2+\frac{9}{2}$

$y-\frac{9}{2}=-2x^2$　以Y代$y-\frac{9}{2}$　則得

從原式兩節減$\frac{9}{2}$，則得　$Y=-2x^2$

$$y-\frac{9}{2}=-2x^2, \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

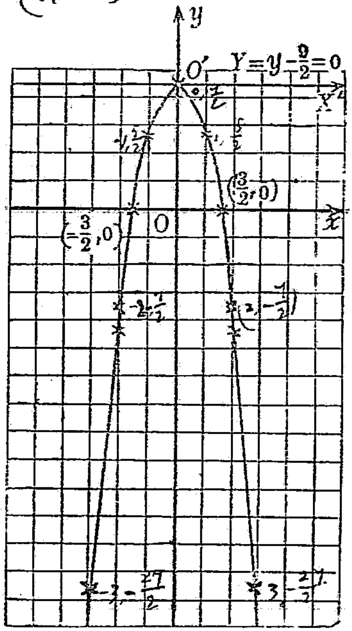
以Y代$y-\frac{9}{2}$，得

$$Y=-2x^2, \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(2)與前一例之形式相同，故知其圖形亦爲一拋物線。圖形上點之坐標如下：

x	0	±1	$\pm\frac{3}{2}$	±2	$\pm\ 3$	$\cdots$
Y	0	-2	$-\frac{9}{2}$	-8	-18	$\cdots$
y	$\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{27}{2}$	$\cdots$

(第二)



在縱橫軸上皆以一格爲一單位。圖中曲線，以 Ox,Oy 爲橫縱軸，則其方程式爲 (1)，以 $O'x'$,$O'y$ 爲橫縱軸，則其方程式爲 (2)。$O'y$ 爲此拋物線之軸，O 爲其項點。$O'x'$ 之方程式爲 $y-\dfrac{9}{2}=0$。

注意. 二次函數中 x^2 之係數爲正，則其曲線向上，爲負則曲線向下.

〔第三〕　$y=(x-\frac{1}{2})^2$ 之圖形.

以 X 代原式中之 $x-\frac{1}{2}$，則得

$$y=X^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

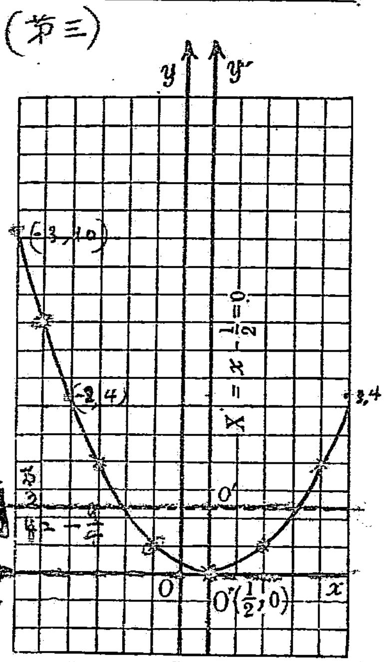
由是作方程式 $x-\frac{1}{2}=0$ 之圖形 $O'y$，則所設方

y	0	1	4	9

程式關於二軸 $x-\frac{1}{2}=0$, (第三)

$y=0$ 卽 $X=0$, $y=0$ 之圖形與第一之圖形全同.

如右圖，橫軸上以二格作一單位，縱軸上以一格作一單位.



〔第四〕 $y=-2x^2+3x$ 之圖形.

化原式為 $y=-2(x^2-\frac{3}{2}x)$,

兩邊加 $\quad -\frac{9}{8}=-2\times\frac{9}{16}$,*

得 $\quad y-\frac{9}{8}=-2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}\right)$,

卽 $\quad y-\frac{9}{8}=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$, $\quad X=x-\frac{3}{4}$

以 X 代 $x-\frac{3}{4}$, Y 代 $y-\frac{9}{8}$, 得 $\quad Y=y-\frac{9}{8}$

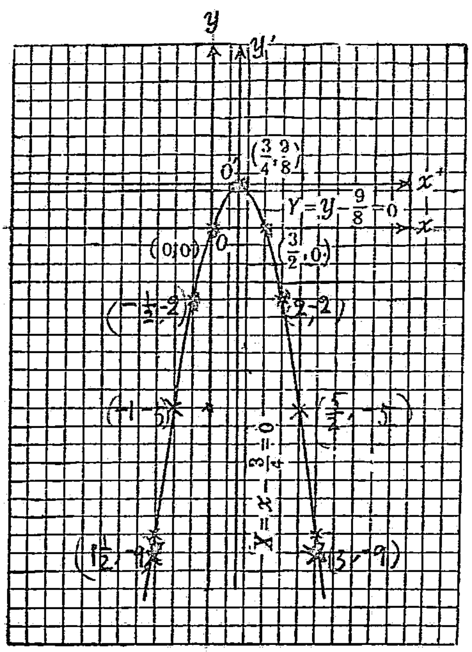
$$Y=-2X^2,$$

*所以加此式者為欲括號中之式成一完全平方也，視 § 85 可知.

X	$-\frac{3}{4}$	0	±5/4	9/4
x	0, 3/2	3/4	-1/2, 2	3, -1½
Y	$-\frac{9}{8}$	0	-25/8	-81/8

此式與〔第二〕例中(2)式全相同,故作$X=x-\frac{3}{4}=0$之圖形$O'y'$,及$Y=y-\frac{9}{8}=0$之圖形$O'x'$,而以$O'x'$,$O'y'$爲新軸描圖,則與〔第二〕中之圖同。

（第四）



圖中縱橫軸上皆以二格作一單位。

〔第五〕　$y=x^2-x-2$之圖形。

右節中一二兩項若加$\frac{1}{4}$則可成一完全平方,故

$$y=(x^2-x+\frac{1}{4})-\frac{1}{4}-2,$$

即
$$y=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4},$$

移項,　$y+\frac{9}{4}=(x-\frac{1}{2})^2$。

X					
x	1/2	2, -1	3, -2	4, -3	5, -4
Y	0	9/4	25/4	49/4	81/4

以 Y 代 $y+\frac{9}{4}$, 則得 $Y=(x-\frac{1}{2})^2$, 此與〔第三〕中所設之式全同,故可以〔第三〕中之圖形作此題之圖形;所異者,〔第三〕中之橫軸爲此題中新橫軸 $Y=y+\frac{9}{4}=0$, 而此題之原橫軸則爲彼圖中過 O' 點之線耳。

§ 87. **一元二次方程式之圖解.** 一元二次方程式以各項悉移於等號之左而整列之,其普徧形式恆爲

$$ax^2+bx+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

此中 b, c 表任何數, a 表不爲 0 之任何數,其值皆爲已知者.

二次方程式亦如一次方程式可用圖形解之,其解法有二,舉之如下.

〔第一法〕 x 之值能使函數

$$y=ax^2+bx+c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

之值爲 0 者,則此 x 之值必能適合於(1)而爲(1)之根;故(1)之根必爲函數(2)之圖形與 $y=0$, 即

橫軸,交點之橫坐標.

例一. 在前款〔第三〕中,曲線$y=(x-\frac{1}{2})^2$與橫軸之交點爲$(\frac{1}{2},0)$,故方程式

$$(x-\frac{1}{2})^2=0$$

之根爲$x=\frac{1}{2}$。

例二. 在前款〔第四〕中,曲線$y=-2x^2+3x$與橫軸之交點爲$(0,0)$及$(\frac{3}{2},0)$,故方程式

$$-2x^2+3x=0$$

之根爲$x=0$及$x=\frac{3}{2}$。

例三. 用圖解求方程式$x^2-x+3=0$之根.

如前先描函數

$$y=x^2-x+3 \qquad\qquad (1)$$

之圖形:因

$$y=(x^2-x+\frac{1}{4})-\frac{1}{4}+3$$

$$=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4},$$

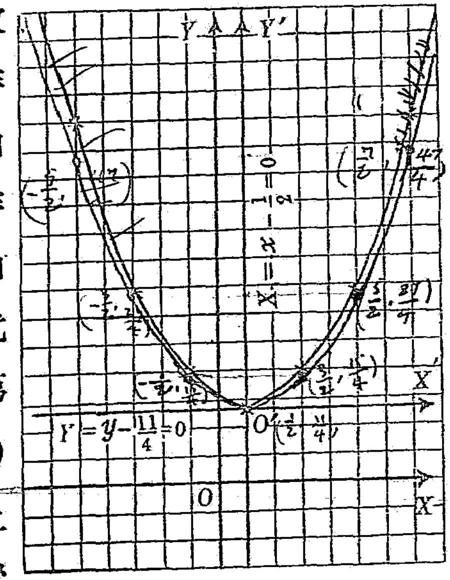
卽

$$y-\frac{11}{4}=(x-\frac{1}{2})^2,$$

以 X,Y 各代此中 $x-\frac{1}{2}$ 及 $y-\frac{11}{4}$,

得 $$Y=X^2, \qquad\cdots\cdots(2)$$

此與前款〔第一〕函數之形式全同，由是作線 $X=x-\frac{1}{2}=0$，如 $O'y'$，用作新縱軸；作線 $Y=y-\frac{11}{4}=0$，如 $O'x'$，用作新橫軸．就新縱橫軸依前款〔第一〕之法描寫函數(2)之圖形．圖中橫軸上取二格作一單位，縱軸上取一格作一單位．圖中標出諸點對於舊二軸及新二軸之坐標如下表：



X	0	-1	$+1$	-2	$+2$	-3	$+3$	……
x	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	……
Y	0	1		4		9		……
y	$\frac{11}{4}$	$\frac{15}{4}$		$\frac{27}{4}$		$\frac{47}{4}$		……

曲線之最低點 O' 在橫軸之上，則曲線與橫軸

無交點可知,故不能得所設方程式之根。

如例一,橫軸與曲線會於一點,是謂橫軸切曲線;例二中橫軸與曲線會於二點,是謂橫軸割曲線。

橫軸割曲線 $y=ax^2+bx+c$,則可得方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根,切曲線則可得一根(可視作相等之二根),不會曲線則不能得根。

注意。圖解不能得根之方程式,不可遂謂方程式無根。此類當俟以後再論之。

[第二法] 函數 $y=ax^2$ ……………………………(1)

及 $y=-bx-c$ ……………………(2)

二圖形交點之坐標必能適合於

$$x^2=-bx-c,\quad 即\quad x^2+bx+c=0,\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

故(1),(2)二圖形交點之橫坐標爲方程式(3)之根。

例一。用圖解求方程式

$$3x^2-2x-1=0$$

之根。

從題得　　$3x^2=2x+1$

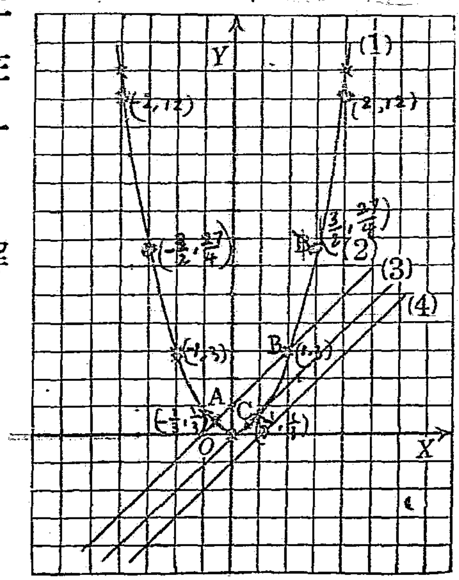
(1)

x	0	$\pm\frac{1}{3}$	± 1	$\pm\frac{3}{2}$	± 2
y	0	$\frac{1}{3}$	3	$\frac{27}{4}$	12

作　　$y=3x^2$……………………(1)

及　　$y=2x+1$……………………(2)

之圖形,得其交點為$A\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, $B(1,3)$, 故所設方程式之根為　$x=-\frac{1}{3}$, 及 $x=1$。



圖中在橫軸上以二格作一單位,在縱軸上以一格作一單位.

例二. 用圖解求方程式

$$3x^2-2x+\frac{1}{3}=0$$

之根.

作函數 $y=3x^2$ ……………………(1)

及　　$y=2x-\frac{1}{3}$ ……………………(2)

$A\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$,　$B(1,3)$,

$C\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

之圖形,二圖形切於$C\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$,

故所求之二根為

$$x=\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{3}.$$

例三. 用圖解求 $3x^2-2x+1=0$ 之根.

作函數 $y=3x^2$ ……………………(1)

及 $y=2x-1$ ……………………(4)

之圖形, 此二圖形不相會, 故不能得所設方程式之根.

習題四十四

描寫以下諸函數之圖形:

1. $y=2x^2$.
2. $y=-3x^2$.
3. $y=4x^2$.
4. $y=-4x^2$.
5. $y=-2x^2+3$.
6. $y=2x^2-3$.
7. $y=2x^2+3$.
8. $y=-2x^2-3$.
9. $y=(x-1)^2$.
10. $y=-(x-1)^2$.
11. $y=(x+1)^2$.
12. $y=-(x+1)^2$. $y=-(x+1)^2$
13. $y=x^2+2x+3$.
14. $y=x^2+2x-3$.
15. $y=x^2-2x+3$.
16. $y=x^2-2x-3$.
17. $y=-x^2-2x+3$.
18. $y=-x^2-2x-3$.
19. $y=-x^2+2x+3$.
20. $y=-x^2+2x-2$.

用圖解求以下各方程式之根[第一法].

21. $x^2=4.$

22. $4x^2=9.$

23. $x^2=-4$

24. $4x^2=-9.$

25. $x^2-2x=0.$

26. $x^2+7x=0.$

27. $x^2-6x+5=0.$

28. $x^2+4x-5=0.$

29. $x^2-7x+12=0.$

30. $x^2+4x-45=0.$

用圖解第二法求以下各方程式之根:

31. $x^2=9.$

32. $x^2-3x=0.$

33. $x^2+3x=0.$

34. $x^2-11x+30=0.$

35. $x^2-6x+8=0.$

36. $x^2-10x+21=0.$

§ 88. 一元二次方程式之解法[配方法].

例一. 解方程式 $x^2=4.$

此式之意,卽求4之平方根.以所設方程式兩邊開平方得 $\pm x=\pm 2$ (§81注意)

此式同於下之四個方程式:

$+x=+2$ (1), $+x=-2$ (2), $-x=+2$ (3), $-x=-2$ (4).

然(3)及(4)若以-1乘之可得(1)及(2),故此四式中自主者僅有二式,卽 $x=+2,\quad x=-2,$

為便利起見,慣例以此二式合寫為一式,如

$$x=\pm 2,$$

其意即 x 之值或爲 $+2$ 或爲 -2 也.

以一方程式兩節開平方，其一節之平方根前應附以複號 ($\pm$)。

例二. 解方程式 $x^2=7$.

因 $\sqrt{7}=2.64\cdots$, 故 $x=\pm 2.64\cdots$.

$\cdots$表示不盡之意. 爲便利起見，上之解答往往即記爲 $x=\pm\sqrt{7}$.

凡開方不盡之數,如$\sqrt{7}$,曰不盡根數(Surd),或略曰根數(Radical).

例三. 解方程式 $(2x-7)^2=9$.

兩節開平方,得

$$2x-7=3 \text{ 及 } 2x-7=-3.$$

由是, $x=5$ 及 $x=2$.

例四. 解方程式 $x^2+2x-35=0$.

移項, $x^2+2x=35$,

兩節加 1, $x^2+2x+1=36$,

即 $(x+1)^2=36$,

兩節開平方, $x+1=\pm 6$.

故　　$x=5$　或　$x=-7$.

例五. 解$(3x-1)(2-x)=1-3(x-1)$.

去括號,移項,整列,得

$$3x^2-10x=-6,$$

以3乘各項，$(3x)^2-10(3x)=-18$,

兩節各加$\frac{10}{2}$之平方25,得

$$(3x-5)^2=7,$$

兩節開平方，　　$3x-5=\pm\sqrt{7}$,

從此　　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{3}$,

詳言之,則　$x=\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}$　或　$x=\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}$.

解一元二次方程式之法，先以含未知數諸項集於左節中,以已知項集於右節中,整列之.次以適當之數乘各項,使式中含x^2項之係數成一完全平方.再兩節加同數使左節全式爲一完全平方.於是兩節開方,得二個一元一次方程式而解之.

習 題 四 十 五

解以下各題中之方程式:

1. $4x^2=81.$

2. $9x^2=144.$

3. $5(x^2+5)=6x^2.$

4. $3x^2=4(x^2-4).$

5. $x^2+22x=75.$

6. $x^2+24x=25.$

7. $3(x-7)^2=243.$

8. $\frac{2}{3}(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}.$

9. x^2+ [illegible] $x+9=16.$

10. $x^2-8x=0.$

11. $x^2=10x-21.$

12. $(9+x)(9-x)=17.$

13. $x^2+3x=18.$

14. $x^2+5x=14.$

15. $x^2=x+72.$

16. $x^2-341=20x.$

17. $9x-x^2+220=0.$

18. $187=x^2+6x.$

19. $23x=120+x^2.$

20. $42+x^2=13x.$

21. $x^2-\frac{2}{3}x=32.$

22. $x^2+\frac{4}{15}x=\frac{1}{5}.$

23. $\frac{19x}{5}=\frac{4}{5}-x^2.$

24. $(x-2)(x-3)=20.$

25. $x^2-(x-4)^2=2(x-5)^2.$

26. $3x^2-10x+7=0.$

27. $15x^2+4x=3.$

28. $6x^2-7x-3=0.$

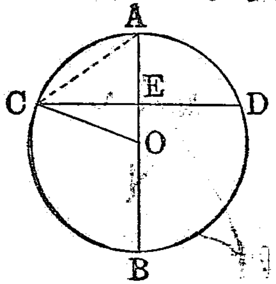
29. $\frac{2+x^2}{3}-\frac{x-x^2}{2}=1-x+x^2.$

30. $\frac{3}{5}(x+6)(x-2)=\frac{2}{3}\left(6x\frac{1}{10}+\frac{18x}{5}\right).$

§ 89. 應用問題(五)

(XX) 幾何題(四)

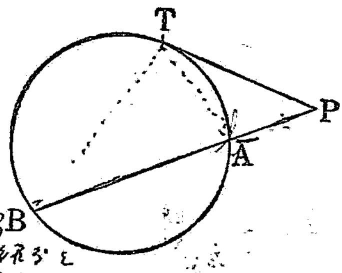
幾何圖形之性質:



(a) CD爲圓O內之弦, AB爲垂直於CD之一直徑,二線交於E,若圓半徑OA, OB, OC各長r尺, CE卽CD之半長a尺, AE長h尺,則從幾何學定理有性質如下:

$$a^2=(2r-h)h.$$

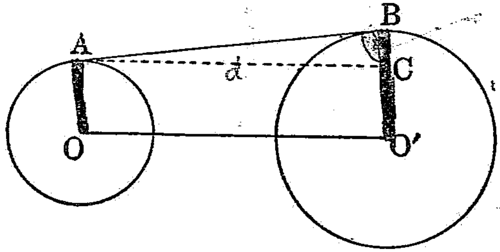
又AC長s尺,則 $s^2=2r\times h=h^2+a^2$.



(b) 從圓外一點P引圓之割線PAB及切線PT,若PA, PB, PT之長各長a尺, b尺, t尺,則有關係式:

$$t^2=ab.$$

(c) AB爲二圓O,O′之外公切線,則OA,O′B皆垂直於AB,從A引OO′之平行線,遇O′B於C,則



AC等於OO′, BC爲二圓半徑之差, ABC爲一直角三角形而B爲直角, 由是設OO′長d尺, 而AC=d, OA, O′B各長r_1, r_2尺, AB長t尺, 則BC長r_2-r_1尺, 而有關係。

$AB^2+(O'B-OA)^2=AC^2$

$$t^2+(r_2-r_1)^2=d^2.$$

例一。 一圓穹, 已知其圓半徑長10尺, 穹底寬16尺, 求此穹之高.

如上第一圖, CAD或CBD爲圓穹, 已知$r=10$, $2a=16$。今設穹高尺數$h=x$, 則從第一公式, 得

$a^2=(2r-h)h$

$\because r=10,\ 2a=16$ 即 $a=8,\ h=x,$

$\therefore 8\times 8=(2\times 10-x)x$

即 $$64=(20-x)x,$$ 即 $64=20x-x^2$

$x^2-20x+64=0$

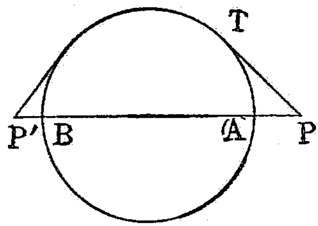
$(x-4)(x-16)=0$

解之,得　　$x=4$　及　$x=16$,

故AE長4尺, EB長16尺.

例二. 在一圓直徑之延長線上求一點P,

令從P至圓所引切線長3尺. 設圓半徑長4尺, 求此P點之位置.



如圖BA為圓之直徑,PT為切線,而P在BA之延長線上. 設AP長x尺, 從題知BA長8尺, 故BP長$8+x$尺. 因PT長3尺,故得方程式　　$3^2=x(8+x)$,

即　　$x^2+8x=9$,

解之,得　　$x=1$　或　$x=-9$.

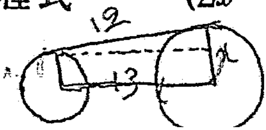
從$x=1$, 知P在BA延長綫上離A 1尺之處; 從$x=-9$, 知P亦可在AB延長線上離A 9尺之處, 如P′

例三. 二圓半徑之和為9尺, 其外公切線長12尺,中心距離為13尺. 求此二圓半徑之長.

設一圓半徑長x尺, 則又一圓之半徑長$9-x$尺,而二圓半徑之差為$2x-9$尺,從上(c),可

$x-(9-x)$

得方程式　　$(2x-9)^2+12^2=13^2$,



$4x^2-36x+81+144=169$

$4x^2-36x=-56$

$x^2-9x=-14$

卽 $4x^2-36x=-56$, $(x-2)(x-7)=0$

解之,得 $x=7$, 及 $x=2$. $\therefore x=2$ # $x=7$ #

故二圓之半徑各長7尺及2尺.

(XXI)拋物題

[物理學上之規則]

吾人以每秒v_0呎之速度向上擲一物,至t秒鐘後此物之高爲d呎,則有關係式.

$$d=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \quad (g=32) \quad \cdots\cdots (1)$$

若在t秒末之速度爲每秒v_t呎,則

$$v_t=v_0-gt \quad \cdots\cdots (2)$$

次,吾人在高處以每秒v_0呎之速度向下擲物,則上之二公式化成

$$d=v_0t+\frac{1}{2}gt^2 \quad (g=32) \quad \cdots\cdots (3)$$

及 $$v_t=v_0+gt \quad \cdots\cdots (4)$$

例四. 一人以每秒46呎之速度向上擲一球,至幾秒鐘後此球離地恰爲30呎?

從上公式(1),因$v_0=46$, $d=30$,得方程式

$$30=46t-16t^2$$

解之,得 $t=\frac{15}{8}$ 及 $t=1$,

故擲後經1秒鐘,此球離地30呎;至擲後$1\frac{7}{8}$秒鐘時,此球復在下降,途中離地30呎.

習題四十六

1. 一圓穹,已知其圓半徑長5尺,穹底寬8尺.求

$a^2=(2r-h)h=(10-h)h,\quad (\frac{8}{2})^2=(10-h)h$

圓心與穹底之距離.

2. 一圓穹,已知其圓半徑長六尺半,穹底寬一尺

$36=(2\times6.5-x)x \quad 36=100(13.0-x)x$

二寸.求此穹之高.

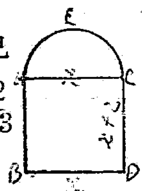
3. 一圓穹,已知其圓半徑長10尺,穹高6尺,求此穹底之寬.

$a^2=(2r-h)h \quad a^2=84 \quad 2a=\pm4\sqrt{21}$

$=(20-6)6 \quad a^2=4\times21 \quad a$

$=14\times6 \quad a=\pm2\sqrt{21}$

4. 諾曼式之窗爲一矩形上加一半圓.已知矩形之高比底長2尺,窗之全面積爲$30\frac{32}{113}$平方尺,求此窗之寬.



5. 一圓半徑長5尺,在其一直徑之延長線上求一點P,令從P所引切線之長爲12尺.求此P點之位置.

6. AB爲一圓之弦,長8尺,在BA之延長線上求一點P,令從P所引圓之切線長8尺.求PB之長.

7. 線分PT切一圓於T.從P引圓之割線PAB,令PB之長爲PA之2倍.設PT長4尺,則PA當長幾尺.

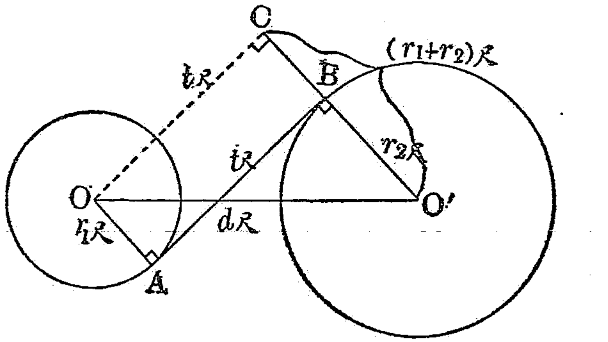
8. PT爲一圓之切線,而PAB爲此圓之割線.設

PT 長 6 尺而 PA, PB 共長13尺, 求 PA 之長.

9. 一打米廠中用一皮帶聯屬二輪, 量得二輪間皮帶長15尺, 二輪中心相去17尺, 而二輪半徑之和為12尺. 求各輪半徑長幾尺.

10. 互相外切二圓, 其中心之距離為1.3寸, 外公切線之長為1.2寸. 求此二圓半徑之長.

11. 如圖, 相離二圓 O, O' 中心距離 d 尺, 內公切線長 t 尺, 二圓半徑各長 r_1, r_2 尺, 則有關係式:



$$d^2=t^2+(r_1+r_2)^2.$$

今設 $d=1.3$, $t=1.2$, 而二圓半徑之差為0.1寸. 求此二圓半徑之長.

12. 相離二圓中心距離17寸, 外公切線長15寸, 內公切線長 8 寸. 求二圓半徑和及差之寸數.

13. 求前題中各圓半徑之長.

14. 例四中之球在擲出幾秒鐘後可落於地?

[illegible] $d-30$ [illegible]

15. 前題中之球在擲出幾秒鐘後其速度爲0?

16. 前題中之球擲至最高時之高爲幾尺?

17. 前題中之球在空氣中完全之時刻爲其達至最高點時時刻之幾倍?

18. 前題中之球在第二秒末時高爲幾呎?

19. 吾人從高處以每秒50呎之速度將一物擲下,當其落下400呎時需時幾秒鐘?

20. 一物體從靜止而落下,當其已落2秒半鐘之末時,此物之速度若何?

§ 90. 雜例,根之解釋. 一次方程式僅有一組根,故用以解應用問題,除所得方程式不
82頁
定及不能聯立外(一元一次方程式則除不定及不能成立之種類),僅在遇其解答爲負數或分數時,當視問題之性質而判定其可用不可用,或加以適當之解釋;二次方程式則不止一根,故如前考驗之事,宜就各根一一行之,恆遇有一根合用,他根不合用者,亦間有無一合用之根者,此其故在方程式之範圍較問題爲普徧,一方程式不止統馭問題外表之一方面且兼及

他方面，亦兼及同種類之一切問題，其解答亦然，故就狹小之範圍觀之，往往覺其答非所問，其實代數可貴之處，正在是也。

例一。　一人有銀若干圓，從其所有圓數之平方內減去1000則為所有數之30倍。求此人所有圓數。

設此人有銀x圓，則從題意得方程式：

$$x^2-1000=30x。$$

解之，得　　$x=50$　或　$\cancel{x=-20}$，

故此人有銀50圓，其-20圓不合理，棄之。

注意。如以本題改作如下之問題：

（一人負債若干圓，從其所負圓數之平方內減去1000，則為所負數之30倍。求此人所負圓數。）

則-20圓卽為合理矣。

例二。　某家所有童子數之十一倍，比此數平方之二倍大5。求童子之數。

設童子有x人，則從題意可得方程式：

$$11x=2x^2+5,$$

解之,得　　$x=5$　或　$x=\frac{1}{2}$.

因童子人數不能爲$\frac{1}{2}$,故童子之數爲5人。

注意。以本題改作下題:

一棒長尺數之十一倍比此數平方之二倍大5,求棒長尺數。

則$\frac{1}{2}$卽爲合理之解答.

例三。父子二人歲數之和爲100,而二數相乘積之$\frac{1}{10}$比父之歲數多180。求此父子各自之歲數。

設父爲x歲,則子爲$100-x$歲.從題意得:

$$\frac{1}{10}x(100-x)=x+180,$$

去分數,去括號,移項,整列,得

$$x^2-90x=-1800,$$

解之,得　　$x=60$　或　$x=30$.

從$x=60$得$100-x=40$;從$x=30$得$100-x=70$.

第二組解答爲父30歲子70歲,不合理,棄之,僅

能用第一組解答父60歲子40歲.

注意. 以本題改作下題:

父子二人歲數之和爲100, 而二數相乘積之$\frac{1}{10}$比子之歲數多180. 求此父子各自之歲數.

而設子爲x歲,則$x=30$爲合理之解答,而$x=60$反爲不合理之解答矣; 卽所立之方程式同時統馭二題,而二解答則各合一題也.

習題四十七

1. 有兩數,一數爲他數之三倍;其積爲363. 求各數.

2. 有兩數,其差爲8,而其第二冪之和爲610. 求此二數.

3. 分25爲二份,令此二份之積爲156. 求其各份.

4. 有二分數,其和爲$\frac{5}{6}$,而其差等於其積. 求各分數.

5. 紙二十張之價以釐爲單位計之,則其釐數等於以銀一角二分五釐所買得之張數. 求此二十張紙價.

6. 有二樽,一入酒,一入水,酒量得水之半,今從二

x　$2x$　$\frac{x-6}{6}=\frac{6}{2x-6}$　$2x^2-18x+36=36$　$2x^2-18x$　$2x=18$

樽中各出 6 升,交易而入之,則各樽中酒水之比相等.求各樽所容之升數.

7. 有連續二整數,其平方和為 221. 求此二數.

8. 有連續二整數,其積為 132. 求此二數.

9. 有連續三整數,其平方和為 245. 求此三數.

10. 一矩形之地面,高比底短 12 尺.其面積為 984 平方尺.求其底及高.

11. 一矩形之地面,底比高短 3 尺,若底增 5 尺,高減 8 尺 則其面積比原有平方尺數之半多 250 平方尺.求其底及高之尺數.

12. 一直角三角形,其三邊之尺數為連續三整數.求此三數.

13. 一矩形之公園,長 60 步,廣 40 步,園外圍一等廣之馬路,其面積為 1344 平方步.求此馬路之長.

14. 一人貸出銀 3000 圓,一年後,收回本利,用去其 $\frac{1}{3}$,餘銀仍[illegible]原利率貸出,又一年後,得本利和 2405 圓.求利率.

15. 兵士一隊,初排一方陣,尚餘 100 人;次改排一方陣,其每邊人數比前之一半多 13 人,乃不足 29 人.求兵數.

16. 一立方體,若縱,橫,高各增 3 寸,則積體增 4167

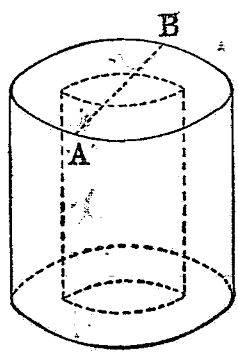
立方寸.求其每邊之長.

17. 一直角三角形之地面,周圍長30丈,斜邊長13丈.求其直角二邊之長.

18. 甲乙丙三人分銀65圓,甲所得數比乙所得數多5圓,丙所得數等於他二人所得數之相乘積.求各人所得之圓數.

19. 平地上一樹折而下垂,樹頂着地之點離樹根50尺,而樹之下段比全樹長之$\frac{2}{5}$多20尺.求全樹之長.

20. 有一中空圓壔形,其外徑AB等於其高,其厚為6寸,而其外壁及內壁間之體積等於以其厚之$\frac{2}{3}$為半徑所作球之體積.求其高之寸數.



習題四十八

1. 何謂二次函數?

2. 描寫二次函數圖形之方法若何?

3. 二次函數之圖形為何種曲線?

4. 何種二次函數,其圖形向上?何種則向下?

5. 何種二次函數圖形與橫軸相交?何種則相切?何種則不相會?

6. 用言語述一元二次方程式圖解之法.二法分述之.

7. 一元二次方程式有二根,一根,及不得根,從其圖解如何決定之?

8. 述一元二次方程式之解法.

9. 配方法所根據之公式能述之歟?

10 代數用方程式解應用問題仍以所得之方程式根有不合題理之事?此事爲代數學之長處抑短處?

第九章　代數式之再續

§ 91. 單項因數。

從分配律，　$m(a+b)=ma+mb$，

反之，　$ma+mb=m(a+b)$。

一式中諸項有一公共之因數，則可以此因數置於括號之外，而以此除原式所得之商置於括號之內。

例一. $3x^3-6x^2+12x=3x(x^2-2x+4)$。

例二. $-a^2x^2+b^2x-cx^3=-x(a^2x-b^2+cx^2)$。

注意. 凡式之首項有負號者恆以此負號置於括號外。

例三. $3a^3+6a^2b+3ab^2=3a(a^2+2ab+b^2)$

$$=3a(a+b)^2$$。〔用§86之法〕

例四. $(a+b)^2+2(a+b)^3=(a+b)^2\{1+2(a+b)\}$。

例五. $(a+b)(x+y-z)-(a-b)(z-y-x)$

$$=(a+b)(x+y-z)+(a-b)(x+y-z)$$

$$=(x+y-z)\{(a+b)+(a-b)\}$$

$$=2a(x+y-z)$$。

§ 92. 分羣分解法.

例一. 分解 $a^2bx-a^2c-b^2cx+bc^2$ 之因數.

就 x 分羣, 原式 $=(a^2bx-b^2cx)-(a^2c-bc^2)$

$$=bx(a^2-bc)-c(a^2-bc)$$

$$=(a^2-bc)(bx-c).$$

例二. $a^3y-a^2x(1+y)+ax^2(1+xy)-x^4$

去括號, $=a^3y-a^2x-a^2xy+ax^2+ax^3y-x^4$

就 y 分羣, $=(a^3y-a^2xy+ax^3y)-(a^2x-ax^2+x^4)$

分解單項因數, $=ay(a^2-ax+x^3)-x(a^2-ax+x^3)$

$$=(a^2-ax+x^3)(ay-x).$$

習題四十九

分解以下各式之因數:

1. $3a^3+6a^2b$. 2. $-4x^7+64x^5$. 3. $5x^3-10x^2+5x$.

4. $27a^3b^5+54a^5b^3-81a^2b^5$. 5. $4^{n+2}-16$.

6. $x(x+a)+b(x+a)$. 7. $2a(a+b)-c(a+b)$.

8. $(x+y)^2(b+c)-(x+y)(b+c)^2$.

9. $(a-b)c+(a-b)c^2$.

10. $(a+b-c)(x-y-z)+(c-b-a)(y+z-x)$.

11. ax^3+x^2+ax+1. 12. $a^2cx-abdx-abcy+b^2dy$.

13. $abxy+acx+bcy+b^2y^2$.　　14. $x^3-a^2x^2-b^2x+a^2b^2$.

15. $2a^3-a^2b+4abx-2b^2x$.

16. $ax^3+(a+b)x^2+(a+b)x+b$.

17 $a^3+a^2b+ab^2+b^3$.　　18. $a^3-2a^2b+ab^2-2b^3$.

19. $3x^4+2x^3-21x-14$.　　20. $2x^3-x^2-4x+2$.

§ 93 乘法之公式(三)。和及差之積。

式(III)　$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

二數和及差之積等於此二數平方之差。

例一。 $22\times18=(20+2)(20-2)=20^2-2^2=396$。

例二。 $(-a+b)(-a-b)=(-a)^2-b^2=a^2-b^2$。

例三。

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a-b+c)&=\{(a+c)+b\}\{(a+c)-b\}\\&=(a+c)^2-b^2\\&=a^2+2ac+c^2-b^2.\end{aligned}$$

例四。

$$\begin{aligned}(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)&=(x^2+y^2)^2-(xy)^2\\&=x^4+x^2y^2+y^4.\end{aligned}$$

習題五十

用公式求以下各題式之積:

1. 88×92.　　2. $(3a+2b)(3a-2b)$.

3. $(x-2y)(x+2y)$.　　4. $(\frac{1}{3}m+\frac{1}{2}n)(\frac{1}{3}m-\frac{1}{2}n)$.

5. $(a+b-c)(a-b+c)$.　　6. $(x^2+2x+3)(x^2+2x-3)$.

7. $(x+y)^2(x-y)^2$.　　8. $(a^2x+b^2y)(a^2x-b^2y)$.

9. $(9a^2+6ab+4b^2)(9a^2-6ab+4b^2)$.

10. $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$。

§ 94. 公式(III)之應用。

公式(III): $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。

例一。 $999^2-998^2=(999+998)(999-998)$

$$=1997\times 1=1997.$$

例二。 $9a^2x^2-64b^2y^2=(3ax+8by)(3ax-8by)$.

例三。 $x^4+x^2y^2+y^4=(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2$

$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$

$$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

例四。 $a^2-2ab-3b^2+4bc-c^2$

$$=(a^2-2ab+b^2)-(4b^2-4bc+c^2)$$

$$=(a-b)^2-(2b-c)^2$$

$$=\{(a-b)+(2b-c)\}\{(a-b)-(2b-c)\}$$

$$=(a+b-c)(a-3b+c)$$

習題五十一

分解以下各式之因數:

1. x^2-64.　2. $4x^2-9$.　3. $9x^2-25y^2$

4. $49-4m^2$.　5. $\frac{1}{4}x^2-y^2z^2$.　6. m^5n-mn^5.

7. $3-12x^2$.　8. $8-50a^2b^2$.　9. $25(a+b)^2-4(a-b)^2$.

10. a^4-b^4.　11. $(3x-2)^2-(2x-3)^2$.

12. $(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$.　13. $x^2-y^2+2yz-z^2$.

14. $a^2+b^2-c^2-d^2+2ab-2cd$.

15. $x^4-18x^2y^2+y^4$.　16. x^4+12x^2+64.

17. x^4+4.　18. $x^4+(2-a^2)x^2y^2+y^4$.

19. $x^2+4y^2-9z^2-4xy$.　20. $x^8-82x^4y^4+81y^8$.

§ 95. 乘法之公式(四)。兩二項式之積。

公式(IV): $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$.

積之首項爲兩首項之積,積之末項爲兩末項之積,積之中項係數爲兩末項之代數和。

例一。 $(x+5)(x+3)=x^2+(5+3)x+3\times 5$

$$=x^2+8x+15$$

例二。 $(x-5)(x-3)=x^2+(-5-3)x+(-5)(-3)$

$$=x^2-8x+15$$

例三. $(x+5)(x-3)=x^2+(5-3)x+5(-3)$

$$=x^2+2x-15.$$

例四. $(x-5)(x+3)=x^2+(-5+3)x+(-5)3$

$$=x^2-2x-15.$$

(1)原二式末項同號:則積中末項為正;中項係數之號與原二末項之號同,而絕對值為兩末項絕對值之和.

(2)原二式末項異號:則積中末項為負;中項係數之號與原二末項中絕對值大者之號同,其絕對值為兩末項絕對值之差.

習題五十二

用公式求以下各題之積:

1. $(x+5)(x+10)$.
2. $(x+7)(x-10)$.
3. $(x+5)(x-5)$.
4. $(x-7)(x-10)$.
5. $(x-7)(x+10)$.
6. $(x+6)(x+6)$.
7. $(x+8)(x-4)$.
8. $(x-12)(x-1)$.
9. $(x+12)(x-3)$.
10. $(x-15)(x-15)$.
11. $(x-15)(x+3)$.
12. $(x-13)(x+14)$.

§ 96. 公式(IV)之應用.

公式(IV)：　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$。

例一。　$x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$;

$$12=3\times4=1\times12,\quad 7=3+4.$$

例二。

$$a^2x^2-12abxy+35b^2y^2=(ax-5by)(ax-7by);$$

$$35b^2y^2=by\times35by=5by\times7by, 5by+7by=12by.$$

例三。　$x^2+5x-84=(x+12)(x-7)$;

$$84=1\times84=2\times42=3\times28=4\times21=$$

$$6\times14=7\times12,\quad 12-7=5.$$

例四。　$x^2y^2-3xyz-28z^2=(xy-7z)(xy+4z)$;

$$28z^2=z\times28z=2z\times14z=4z\times7z, 7z-4z=3z.$$

一式以一數乘之，再以此數除之，得數仍為原式(§ 56)；

例五。　$2x^2+11x+15=\dfrac{(2x^2+11x+15)\times2}{2}$

$$=\frac{(2x)^2+11(2x)+30}{2}$$

$$=\frac{(2x+5)(2x+6)}{2}$$

$$=(2x+5)(x+3).$$

例六. $12x^2-x-63=\dfrac{(12x^2-x-63)\times 12}{12}$

$$=\frac{(12x)^2-(12x)-63\times 12}{12}$$

$$(63\times 12=\underbrace{7\times\overbrace{9\times 3}\times 4})$$

$$=\frac{(12x)^2-(12x)-27\times 28}{12}$$

$$=\frac{(12x-28)(12x+27)}{12}$$

$$=\frac{4(3x-7)\times 3(4x+9)}{4\times 3}$$

$$=(3x-7)(4x+9).$$

習　題　五　十　三

分解以下各式之因數:

1. $x^2+9x+14$.
2. $x^2-7x+10$.
3. $a^2+11a-12$.
4. $x^2-5x-14$.
5. $m^2-13m+36$.
6. $y^2-11y-42$.
7. $y^2+21y+110$.
8. x^8+3x^4-4.
9. $x^2+13mx+36m^2$.
10. $x^2-9xy-36y^2$.
11. x^6-7x^3+12.
12. $x^2y^2+3xy-154$.
13. $b^2+13b-300$.
14. $p^2-28p+75$.
15. $x^2y^2z^2-13xyz+22$.
16. $m^4+6m^2n^2-72n^2$.

17. $x^2+17xy+60y^2$.　　18. $z^2+29pz+100p^2$.

19. $y^2-7y-18$.　　20. $m^2-12m+36$.

21. $m^4p^2-m^2p-132$.　　22. $x^4+x^2y-20y^2$.

23. x^4-22x^2+21.　　24. $a^2b^2-27ab+26$.

25. $2x^2+7x+6$.　　26. $3x^2+14x+8$.

27. $2x^2-x-6$.　　28. $6x^2+13x+6$.

29. $9x^2-6x+8$.　　30. $14x^2-11x-15$.

31. $15x^2+8x-12$.　　32. $33m^2-7m-10$.

§ 97. 乘法之公式(五).

公式(V):　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$,

公式(VI):　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$。

例一。 $(1+2z)(1-2z+4z^2)=1+(2z)^3=1+8z^3$。

例二。 $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$

$$=(3a-2b)\{(3a)^2+(3a)(2b)+(2b)^2\}$$

$$=(3a)^3-(2b)^3$$

$$=27a^3-8b^3.$$

除法爲乘法之反法,故上二式亦可用作除法公式。

例三。 $\dfrac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1$,

例四. $\frac{(m+n)^3+r^3}{m+n+r}=(m+n)^2-(m+n)r+r^2$

$=m^2+n^2+r^2+2mn-mr-nr.$

習題五十四

用公式求以下各式之積:

1. $(1+3a)(1-3a+9a^2)$.　2. $(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$.

3. $(4a-3b)(16a^2+12ab+9b^2)$.

4. $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$.

5. $(xy+z)(x^2y^2-xyz+z^2)$.

6. $(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2)$.

用公式求以下各式之商:

7. $\frac{x^3-y^3}{x-y}$.　8. $\frac{8x^3+27y^3}{2x+3y}$.　9. $\frac{8a^3-1}{2a-1}$.

10. $\frac{a^6-b^6}{a^2-b^2}$.　11. $\frac{8x^3-y^3}{2x-y}$.　12. $\frac{27m^3n^3+1}{3mn+1}$.

13. $\frac{a^3+27b^3}{a+3b}$.　14. $\frac{a^3x^3-64b^3y^3}{ax-4by}$.　15. $\frac{x^6+125y^3}{x^2+5y}$.

16. $\frac{\frac{1}{8}a^3x^3+1}{\frac{1}{2}ax+1}$.　17. $\frac{1+\frac{1}{27}m^6n^3}{1+\frac{1}{3}m^2n}$.　18. $\frac{(x+y)^3-8z^3}{x+y-2z}$.

19. $\frac{(2m+n)^3+(3m-5n)^3}{5m-4n}$.　20. $\frac{(a+b)^3+(a-b)^3}{2a}$.

§ 98. 公式(V),(VI)之應用.

公式(V):　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$,

公式(VI):　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

例一.

$$27a^3+m^3=(3a)^3+m^3=(3a+m)(9a^2-3am+m^2).$$

例二.

$$1-\frac{1}{64}x^3=1^3-(\frac{1}{4}x)^3=(1-\frac{1}{4}x)(1+\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}x^2).$$

例三.

$$(a+b)^3-b^3=\{(a+b)-b\}\{(a+b)^2+(a+b)b+b^2\}$$

$a^2+2ab+b^2+ab+b^2+b^2$

$$=a(a^2+3ab+3b^2).$$

習題五十五

用公式分解以下各式之因數:

1. $8x^3+y^3$.　2. x^3+8y^3.　3. $a^3b^3-c^3$.

4. $1-343x^3$.　5. $216-x^3$.　6. a^3b^3+512.

7. $27a^3-64y^3$.　8. $8a^3b^3+125x^3$.　9. $64x^3-125y^3$.

10. $216x^6-b^6$.　11. $8x^3-729y^3$.　12. $(a-b)^3+b^3$.

§ 99. 因數分解之雜例.

例一. $x^6-y^6=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

例二。

$$28x^4y+64x^3y^2-60x^2y^3=4x^2y(7x^2+16xy-15y^2)$$
$$=4x^2y(7x-5y)(x+3y)$$

例三。 $x^3p^2-8y^3p^2-4x^3q^2+32y^3q^2$

$$=(x^3p^2-8y^3p^2)-(4x^3q^2-32y^3q^2)$$
$$=p^2(x^3-8y^3)-4q^2(x^3-8y^3)$$
$$=(x^3-8y^3)(p^2-4q^2)$$
$$=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)(p-2q)(p+2q)。$$

例四。

$$4x^2-25y^2+2x+5y=(4x^2-25y^2)+(2x+5y)$$
$$=(2x-5y)(2x+5y)+(2x+5y)$$
$$=(2x+5y)(2x-5y+1)。$$

習題五十六

分解以下各式之因數:

1. $x^8-1.$
2. $729x^6-64x^6.$
3. $2mn+2xy+m^2+n^2-x^2-y^2.$
4. $m^3x+m^3y-n^3x-n^3y.$
5. $c^5d^3-c^2-a^2c^3d^3+a^2.$
6. $14a^2x^3-35a^3x^2+14a^4x.$
7. $x^2-4y^2+x-2y.$
8. $a^3+b^3+a+b.$

§ 100　**最大公約數**. 整式A以整式B除之恰盡無餘,則B爲A之**約數**.

例如 $4a^3b^2c$ 之約數爲 $2,4,a,a^2,a^3 4a^3 4ab,$ 等.

諸式A,B,等公有之約數爲此諸式之**公約數**(Common Measures).

例如 $4a^2b^2c, 6a^2b^3c^2d, 2a^2b^2cx$ 之公約數爲 $2,a,b,c,2a,2b,2c,2a^2,2ab,2ac,2a^2b,2b^2c,2a^2b^2c$ 等.

公約數中次數最大者爲**最大公約數**(Greatest Common Measures). 慣例,以G.C.M爲最大公約數之簡號.

例如前所舉諸公約數中 $2a^2b^2c$ 之次數最大,卽爲最大公約數.

§ 101　**求最大公約數法(一)**. 從前款之定義即可得方法如下:

(I)單式求最大公約數法:

取諸式中公有文字之最小冪乘之,用諸係數之最大公約數作係數.

例一. $4x^2yz, 8xy^2z^2, 16xyz$ 之最大公約數

爲$4xyz$。

例二。 $3a^2b^2c, 4a^2bc^2d, 6a^3b^3cd$之最大公約數爲$a^2bc$。

(II) 易於分解因數之複式求最大公約數法:

前法中之文字易爲因數做照前法求之.

例三。 $x(a-x)^2$, $a(a-x)^3$, $2ax(a-x)^5$ 之最大公約數爲$(a-x)^2$。

例四。 求$3a^2+9ab, a^3-9ab^2$之最大公約數.

因 $3a^2+9ab=3a(a+3b)$,

$a^3-9ab^2=a(a+3b)(a-3b)$,

故 $\text{G.C.M}=a(a+3b)$。

例五。 求$ax^2+2a^2x+a^3, 2ax^2-4a^2x-6a^3$, 及$3(ax+a^2)^2$之最大公約數.

因 $ax^2+2a^2x+a^3=a(x+a)^2$,

$2ax^2-4a^2x-6a^3=2a(x^2-2ax-3a^2)=2a(x+a)(x-3a$

$3(ax+a^2)^2 \quad =3\{a(x+a)\}^2 \qquad =3a^2(x+a)^2$,

故 $\text{G.C.H}=a(x+a)$。

習題五十七

求以下各題中諸式之最大公約數:

1. $ab^3c^2d,\ a^2bcd^2.$　　2. $24a^3b^3x^4,\ 60a^2b^4x^6.$

3. $ab^3\ a^2bc,\ abc^2,$　　4. $12m^5n^4,\ 16m^3n^5p^2.$

5. $15x^2y^2z^2,\ 20y^2z^2,\ 35x^3y^4.$

6. $17pq^2,\ 34p^2q,\ 51p^3q^3.$　　7. $a^3b^2(m^2-n^2),\ a^2b^3(m-n).$

8. $8x^3y(a+b)^2,\ 14x^2y^3(a^2-b^2).$

9. $a^2+ab,\ a^2-b^2.$　　10. $2x^2-2xy,\ x^3-x^2y.$

11. $x^3+x^2y,\ x^3+y^3.$　　12. $a^3b-ab^3,\ a^5b^2-a^2b^5.$

13. $a^3-a^2x,\ a^3-ax^2,\ a^4-ax^3.$

14. $a^2bx+ab^2x,\ a^2b-b^3.$

15. $a^2-x^2,\ a^2-ax,\ a^2x-ax^2$

16. $2(x-4),\ 50x^2-2.$　　17. $x^2+x,\ (x+1)^2,\ x^3+1.$

18. $x^2-2xy+y^2, (x-y)^2.$　　19. $x^3+8y^3,\ x^2+xy-2y^2.$

20. $x^2+3x+2,\ x^2-4.$　　21. $x^2-18x+45,\ x^2-9.$

22. $12x^2+x-1,\ 15x^2+8x+1.$

23. $2x^2+9x+4,\ 2x^2+11x+5,\ 2x^2-3x-2.$

24. $3x^4+8x^3+4x^2,\ 3x^4+11x^3+6x^2,\ 3x^4-16x^3-12x^2.$

§ 102. 求最大公約數法(二). 學者在算術中已習過求二數之最大公約數法,今在代數

中遇複式之不易分解因數者亦可做照其法求之。

例如有二整式A及B,欲求其最大公約數,以算術中轉輾除法求之可如下:

$B)A(Q_1$ 假定B之次數比A之次數小,

$\underline{BQ_1}($— 以B除A得商為Q_1賸餘為R_1,

$R_1)B(Q_2$ 再以R_1除B得商Q_2賸餘R_2,

207)1840(8

1656

184)207(1

184

G.C.M=23)184(8

184

0

$\underline{R_1Q_2}($— 再以R_2除R_1,以下依同法進行.

$R_2)R_1(Q_3$ 設除至n回後恰盡無餘,

$\underline{R_2Q_3}($— 此時之除數為Rn。

$R_1 = A - BQ_1 \cdots (1)$

$184 = 1840 - 207\times8$

$1840 = 184 + 207\times8$

R_3

$R_n)R_{n-1}(Q_{n+1}$

$$\frac{R_nQ_{n+1}}{0}($$—

今觀 $R_1=A-BQ_1\cdots(1)$, 卽 $A=R_1+BQ_1\cdots(2)$.

從(1),知所有A及B之公約數皆為R_1之約數.——因此約數旣能除盡(1)中右節之全式,則必能除盡(1)之左節也.——故A,B之公約數皆為

R_1 及 B 之公約數.

從(2),知 R_1,B 所有之公約數皆爲 A 之約數.

故 A,B 之最大公約數卽 R_1,B 之最大公約數.

同理,R_1,B 之最大公約數亦卽 R_1,R_2 之最大公約數. $R_2 = B - R_1Q_2$　$B = R_2 + R_1Q_2$

∵R_1是B除A的餘數 ∴B及R_1之最大公約數即

故 A,B 之最大公約數卽爲 R_1,R_2 之最大公約數.

A,B之最大公約數 亦即 R_2的最大公約數 故R_1,R_2的最

照此遞推而下,可知 R_{n-1},R_n 之最大公約數卽

大公約數即A,B的最大公約數

爲 A,B 之最大公約數.

今 R_{n-1} 爲 R_n 除盡,則 R_n 爲 R_{n-1} 之約數;同時 R_n 又爲本身最大之約數;故 R_{n-1},R_n 之最大公約數卽爲 R_n。

故 R_n 爲 A,B 之最大公約數.

由是卽得求二整式 A,B 之最大公約數法如下:

有整式 A,B,B 之次數不比 A 大。以 B 除 A,得賸餘 R_1,次以 R_1 除 B 得賸餘 R_2,再以 R_2 除 R_1 得賸餘 R_3,如此轉輾行除法至適盡無餘而止,末次之除數爲 A,B 之最大公約數.

例一. 求x^2+2x+1, x^3+2x^2+2x+1之G.C.M.

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
x+1 & x^2+2x+1 & x^3+2x^2+2x+1 & x \\
 & \underline{x^2+x} & \underline{x^3+2x^2+x} \;(- & \\
 & x+1 & x+1 & \\
 & \underline{x+1} & & \\
 & 0 & &
\end{array}
$$

以左式除右式，得商x，賸餘$x+1$。以$x+1$除左式，得商$x+1$，無餘。

$$\text{G.C.M.}=x+1$$

例二. 求$2x^2-5x+2$及$x^3+4x^2-4x-16$之最大公約數。

4　2　2為大公约而之
　　5
4　10　之為大公约仍為2

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
2x-1 & 2x^2-5x+2 & x^3+4x^2-4x-16 & \\
 & \underline{2x^2-4x} \;(- & \underline{\quad 2 \quad} \;(\times & \\
 & -x+2 & 2x^3+8x^2-8x-32 & x \\
 & \underline{-x+2} \;(- & \underline{2x^3-5x^2+2x} \;(- & \\
 & 0 & 13x^2-10x-32 & \\
 & & \underline{\quad 2 \quad} \;(\times & \\
 & & 26x^2-20x-64 & 13 \\
 & & \underline{26x^2-65x+26} \;(- & \\
 & 45 & \underline{45x-90} & \\
 & & x-2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
2x-1 \\
(x-2)\overline{)2x^2-5x+2} \\
\underline{2x^2-4x} \\
-x+2 \\
\underline{-x+2} \\
0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
\tfrac{1}{2}x+\tfrac{13}{4} \\
2x^2-5x+2\overline{)x^3+4x^2-4x-16} \\
\underline{x^3-\tfrac{5}{2}x^2+x} \\
\tfrac{13}{2}x^2-5x-16 \\
\underline{\tfrac{13}{2}x^2-\tfrac{65}{4}x+\tfrac{26}{4}} \\
\tfrac{45}{4}x-\tfrac{90}{4} \\
45x-90 \\
x-2
\end{array}
$$

$$\text{G.C.M}=x-2.$$

$2x^2-5x+2$　　　$x^3+4x^2-4x-16$

$2x(x-2)-(x-2)$　　　$x^2(x-2)+6x(x-2)+8(x-2)$

以第一式除第二式當得商$\frac{1}{2}x$,欲避去此分數商,以2乘第二式而後行除法.乘後第二式固多一約數2,然因2非第一式之約數,故於最大公約數不受影響也.求次商時亦然.$45x-90$有一約數45,此數顯然非$2x^2-5x+2$之約數,故除去之與公約數無關.

習題五十八*

求以下各題中諸式之最大公約數:

1. $x^3+2x^2-13x+10,\ x^3+x^2-10x+8.$
2. $x^3+2x^2-8x-16,\ x^3+3x^2-8x-24.$
3. $x^3-x^2-5x-3,\ x^3-4x^2-11x-6.$
4. $a^3-5a^2x+7ax^2-3x^3,\ a^3-30x^2+2x^3.$
5. $2x^3-5x^2+11x+7,\ 4x^3-11x^2+25x+7.$
6. $3x^4-3x^3-2x^2-x-1,\ 9x^4-3x^3-x-1.$
7. $3x^3-3ax^2+2a^2x-2a^3,\ 3x^3+12ax^2+2a^2x+8a^3.$
8. $10x^3+25ax^2-5a^3,\ 4x^3+9ax^2-2a^2x-a^3.$

注意. 教授於此,可令學者返觀§18,比較此法,如倘有未了解者,可再講演一通,宜無扞

* 此習題集不妨省去.

格矣.如此求最大公約數之法,即從§18之方法而來,故其名日歐几里得法 (Euclides' Method).

§ 103. 分數式之基本性質. 整式A除以整式B之代數式$\frac{A}{B}$為分數式(已見§57,A日分子(Numerator),B日分母(Denominator),總言之日分數之項(Terms).

今設名分數$\frac{A}{B}$之值為x,即　$\frac{A}{B}=x,$

以B乘此式兩節,得　$A=Bx,$

再以不為0之m乘兩節,　$Am=Bx\times m$

$$=Bmx,$$

〔交易律〕

此中Bm不為0,故可以除兩節,　$x=\frac{Am}{Bm},$

即　$\frac{A}{B}=\frac{Am}{Bm}.$

〔倍分之性質〕 分數兩項以不為0之同數乘之,其值不變.

次,因m可表任何數,故可設$m=\frac{1}{n}$, 則上

一式變成

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times\frac{1}{n}}{B\times\frac{1}{n}}$$

從§52,得
$$=\frac{A\div n}{B\div n}.$$

〔約分之性質〕 分數兩項以不爲0同數除之,其值不變.

§ 104. 約分. 分數之兩項有公約數者,可各以其最大公約數除之,是曰約分 (Reduce to Lowest Terms). 約分後分數之兩項決無公約數,如是分數曰既約分數,或曰最簡分數.

凡分數非最簡者,必須約之成最簡.

例一. $\dfrac{10a^3b^2c^4}{12a^2b^3c^2}=\dfrac{10a^3b^2c^4\div 2a^2b^2c^2}{12a^2b^3c^2\div 2a^2b^2c^2}=\dfrac{5ac^2}{6b}.$

例二. $\dfrac{3a^2c}{12a^3c^2}=\dfrac{3a^2c\div 3a^2c}{12a^3c^2\div 3a^2c}=\dfrac{1}{4ac}.$

注意一. 凡約分數而分子中諸因數悉約去,則其既約分數之分子爲1,不可省.

例三. $\dfrac{12a^3c^2}{3a^2c}=\dfrac{12a^3c^2\div 3a^2c}{3a^2c\div 3a^2c}=\dfrac{4ac}{1}=4ac.$

注意二. 凡約分而分母中諸因數悉約去.

則其既約分數中分母爲1,可省去.以無論何數以1除之仍得本數故也.

注意三. 凡整式皆可視作以1爲分母之分數式.

例四. $\frac{x^2-5x+4}{x^2-7x+12}=\frac{(x-1)(x-4)}{(x-3)(x-4)}=\frac{x-1}{x-3}.$

例五. $\frac{x^2-ax}{x^2-a^2}=\frac{x(x-a)}{(x+a)(x-a)}=\frac{x}{x+a}.$

*例六. 以$\frac{x^2-4x+3}{4x^3-9x^2-15x+18}$約分.

用§102之法求此分數兩項之最大公約數,得$x-3$,以除兩項,得 $\frac{x-1}{4x^2+3x-6}.$

習 題 五 十 九

簡約以下各題之分數:

1. $\frac{8x^3}{36x^2}.$ 2. $\frac{8p^2q^3r}{20p^4}.$ 3. $\frac{10a^2b^6}{16ab^7}.$

4. $\frac{12l^3mn^2}{25x^3yz^2}.$ 5. $\frac{4x^2y}{6xy^2}.$ 6. $\frac{7a^5b^7c^8}{21a^3b^7c^5}.$

7. $\frac{8x^3y^2z^3}{6x^5y^8z^3}.$ 8. $\frac{a^2-7a+12}{a^2+4a+3}.$ 9. $\frac{2\pi r(r+h)}{2\pi r(r+H)}.$

* 例六及習題五十九中25題以下不妨省去.

10. $\dfrac{a^3-b^3}{2a^2-3ab+b^2}$.　　11. $\dfrac{3x^2-12y^2}{3x^2+9xy+6y^2}$.

12. $\dfrac{r^2-25}{r^2-r+30}$.　　13. $\dfrac{a^2-ab-3a+3b}{(a^2-b^2)(a-3)}$.

14. $\dfrac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$.　　15. $\dfrac{x^3+y^3}{(x+y)^3}$.　　16. $\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$.

17. $\dfrac{r^3+R^3}{R^2+8Rr+7r^2}$.　　18. $\dfrac{a^4-b^4}{a^6-b^6}$.

19. $\dfrac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2+(c-a)x-ac}$.　　20. $\dfrac{(a^3-x^3)(a+x)}{(a^3+x^3)(a-x)}$.

21. $\dfrac{a^4-b^4}{(a^3-b^3)(a+b)}$.　　22. $\dfrac{(a+b)^2-(x-y)^2}{(a+b+x)^2-y^2}$.

23. $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^6-y^6}$.　　24. $\dfrac{x^4+x^3-x-1}{x^6-1}$.

*25. $\dfrac{b^{3n}-x^{3n}}{b^{2n}-x^{2n}}$.　　*26. $\dfrac{x^{3m}+1}{x^{2m}-x^m+1}$.

*27. $\dfrac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-3x+2}$.　　*28. $\dfrac{3x^3-13x^2+23x-21}{15x^3-38x^2-2x+21}$.

*29. $\dfrac{2x^3+5x^2y-30xy^2+27y^3}{4x^3+5xy^2-21y^3}$.

*30. $\dfrac{4x^3-10x^2+4x+2}{3x^4-2x^3-3x+2}$.

§ 105. 分數乘除法.

設二分數$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$之值各爲x, y,卽

$$\frac{a}{b}=x,\qquad \frac{c}{d}=y,$$

$\frac{a}{b}=x$　　　$\frac{c}{d}=y$

去分數，　　$a=bx,\cdots\cdots(1)$　　$c=dy。\cdots\cdots(2)$

以(1),(2)左右兩節分别乘之，得

$$ac=bdxy,$$

以 bd 除此式兩節，$\frac{ac}{bd}=xy=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$. 故

〔分數之乘法〕　二分數之積爲一新分數，以原分母之積作分母，原分子之積作分子。

次，以(1)，(2)左右兩節交互乘之，得

$$ady=bcx,$$

以 bcy 除此兩節，得 $\frac{ad}{bc}=\frac{x}{y}=x\div y=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$,

然從上，知　　$\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$,

合此二式得　　$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$. 故

〔分數之除法〕　交換除數中分母分子以乘被除數。

例一。　$\frac{2x}{3a^2}\times 3a=\frac{2x\times 3a}{3a^2}=\frac{2x}{a}$.〔前款注意三〕

例二。　$\frac{3x}{2b}\div 3a=\frac{3x}{2b}\times\frac{1}{3a}=\frac{x}{2ab}$.

例三。　$\frac{x^2-4x}{x^3+7x^2}\times\frac{x^2+7x}{x-4}=\frac{x(x-4)x(x+7)}{x^2(x+7)(x-4)}=\frac{1}{1}=1$

例四. $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}\div\dfrac{4(a^2-ab)}{a^2+ab}=\dfrac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2}$

$$\times\frac{a(a+b)}{4a(a-b)}=\frac{1}{4}.$$

例五. $\dfrac{6x^2-ax-2a^2}{ax-a^2}\times\dfrac{x-a}{9x^2-4a^2}\div\dfrac{2x+a}{3ax+2a^2}$

$$=\frac{(3x-2a)(2x+a)}{a(x-a)}\times\frac{x-a}{(3x-2a)(3x+2a)}$$

$$\times\frac{a(3x+2a)}{2x+a}=\frac{1}{1}=1.$$

習題六十

簡約以下各式:

1. $\dfrac{3ab^2c}{3a^2bc^2}\times\dfrac{4a^2bc^3}{5ab^2c^4}\times\dfrac{2abc}{2a^2bc^3}.$　　2. $\dfrac{3ab}{2cx}\times\dfrac{5by}{ax}\times\dfrac{3cz}{2bz}.$

3. $\dfrac{3ab^2}{4bc^2}\times\dfrac{2b^2c}{7ac}\div\dfrac{3a^2b^2}{4bc}.$　　4. $\dfrac{3ab}{2cx}\times\dfrac{5by}{4ax}\div\dfrac{3cz}{2bx}.$

5. $\dfrac{a(x-b)}{bx+ab}\times\dfrac{b^2x+ab^2}{a^2x+a^3}\times\dfrac{x^2-a^2}{x^2-b^2}.$

6. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-16}\times\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-8x+15}\times\dfrac{x^2+x-20}{x^2+x-6}.$

7. $\dfrac{x^2-(y-z)^2}{y^2-(z-x)^2}\div\dfrac{(y+z)^2-x^2}{z^2-(x-y)^2}.$

8. $\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-4x+3}\times\dfrac{2x^2-5x+3}{6x^2+x-2}\times\dfrac{3x^2+7x-6}{2x^2-7x+6}.$

9. $\dfrac{a^2b^2+3ab}{4a^2-1}\div\dfrac{ab+3}{2a+1}.$

10. $\dfrac{(x-y)^2-z^2}{xy-y^2-yz}\times\dfrac{z}{x^2+xy-xz}\div\dfrac{xz-yz+z^2}{x^2-(y-z)^2}$.

11. $\dfrac{16x^2-9a^2}{x^2-4}\times\dfrac{x-2}{4x-3a}$.

12. $\dfrac{64p^2q^2-z^4}{x^2-4}\times\dfrac{(x-2)^2}{8pq+z^2}\div\dfrac{x^2-4}{(x+2)^2}$.

13. $\dfrac{2x^2+5x+2}{x^2-4}\times\dfrac{x^2+4x}{2x^2+9x+4}$.

14. $\dfrac{x^2-x-20}{x^2-25}\times\dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x-8}\div\dfrac{x+1}{x^2+5x}$.

15. $\dfrac{2x^2+13x+15}{4x^2-9}\div\dfrac{2x^2+11x+5}{4x^2-1}$.

16. $\dfrac{x^2-8x-9}{x^2-17x+72}\div\dfrac{x^2-25}{x^2-1}\div\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-9x+8}$.

17. $\dfrac{x^2-14x-15}{x^2-4x-45}\div\dfrac{x^2-12x-45}{x^2-6x-27}$.

18. $\dfrac{x^4-8x}{x^2-4x-5}\times\dfrac{x^2+2x+1}{x^3-x^2-2x}\div\dfrac{x^2+2x+4}{x-5}$.

19. $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-20}\times\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-x}\div\left(\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x-15}\times\dfrac{x+3}{x^2}\right)$

20. $\dfrac{4x^2+x-14}{6xy-14y}\times\dfrac{4x^3}{x^2-4}\times\dfrac{x-2}{7x-4}\div\dfrac{2x^2+4x}{3x^2-x-14}$.

§ 106. 最小公倍數。 整式B爲整式A之約數,則A爲B之倍數。

例如 $12a^3b^2c$ 爲 $2a^2b$ 之倍數。

諸式公有之倍數爲諸式之公倍數(Common Multiples).

例如$12a^3b^2c^2$,$24a^4b^4c^2$,$36a^3b^3c^3$皆爲$2a^2b$,$3ab^2c$,$4a^3bc^2$之公倍數。

公倍數之次數最小者爲最小公倍數(Least Common Multiples).慣例,以L.C.M爲最小公倍數之簡號.

例如在上所舉之例中$12a^3b^2c^2$爲最小公倍數.

§ 107. 求最小公倍數法(一). 從前節定義可得方法如下:

(I)單式求最小公倍數法:

取諸式中各文字之最大冪乘之,而用諸係數之最小公倍數作係數.

例一. $3xyz$, $2x^2yz^2$, xy^2z之最小公倍數爲$6x^2y^2z^2$.

例二. $3ax^2yz^3$,$15x^3y^2z$,$10bxy^3z^2$之最小公倍數爲$30abx^3y^3z^3$.

(II)易於分解因數之複式求最小公倍數法:

前法中之文字易爲因數,倣照前法求之.

例三. $a(a+b)^2(a-b)$, $a^2b(a+b)(a-b)^2$ 之最小公倍數爲 $a^2b(a+b)^2(a-b)^2$。

例四. 求 $3a^2+9ab$, $2a^3-18ab^2$, $a^3+6a^2b+9ab^2$ 之小公倍。

因 $$3a^2+9ab=3a(a+3b),$$
$$2a^3-18ab^2=2a(a+3b)(a-3b),$$
$$a^3+6a^2b+9ab^2=a(a+3b)^2,$$

故 $$\text{L.C.M.}=6a(a+3b)^2(a-3b)。$$

習題六十一

求以下各題中諸式之最小公倍數:

1. x, x^2+x.
2. $3x^2$, $4x^2+8x$.
3. $51a^2x^2$, $34ax^3$, ax^4.
4. $2ab^2c^3x^4$, $4a^2bc^2x$, $3abc$.
5. $2a^2b$, $4ab^2c$, $6a^3bc^2d$.
6. x^2-1, x^2+x.
7. $y(4x^2-1)$, $x(2x+1)$.
8. x^2+2x, x^2+3x+2.
9. x^2+4x+4, x^2+5x+6.
10. x^2-5x+4. x^2-6x+8.
11. x^2+x-20, $x^2-10x+24$, x^2-x-30.

12. $2x^2+3x+1,\ 3x^2+5x+2,\ x^2+3x+2.$

13. $3x^2+11x+6,\ 3x^2+8x+4,\ x^2+5x+6.$

14. $2x^2+3x-2,\ 2x^2+15x-8,\ x^2+10x+16.$

15. $12x^2+3x-42,\ 12x^3+30x^2+12x,\ 32x^2-40x-28.$

16. $3x^4+26x^3+35x^2,\ 6x^2+38x-28,\ 27x^3+27x^2-30x.$

17. $60x^4+5x^3-5x^2,\ 60x^2y+32xy+4y,\ 40x^3y-2x^2y-2xy.$

18. $3x^2-38xy+35y^2,\ 4x^2-xy-5y^2,\ 2x^2-5xy-7y^2.$

19. $12x^2-23xy+10y^2,\ 4x^2-9xy+5y^2,\ 3x^2-5xy+2y^2.$

20. $4ax^2y^2+11axy^2-3ay^2,\ 3x^3y^3+7x^2y^3-6xy^3,$

$24ax^2-22ax+4a.$

§ 108. 求最小公倍數法(二). 設二整式A,B,其最大公約數爲G,最小公倍數爲L.因G爲A,B之最大公約數,故以除A可得整商a,以除B可得整商b,而

$$A=aG, \qquad B=bG,$$

因A,B之公約數皆在G中,故a及b間已無公約數,由是從前節方法,可得　$L=abG,$…………(1)

即

$$L=a(bG)=b(aG)$$

$$=aB \quad =bA,$$

$G \quad \therefore \frac{G}{a} \quad \therefore \frac{G}{b}$

$\therefore L=abG$

故以二整式A,B之最大公約數G除一式,得商,以乘第二式,其積卽爲A,B之最小公倍數.

例. 求 $2x^2+4x-1$, $6x^3+26x^2+25x-7$ 之最小公倍數.

$3x(2x^2+4x-1)+7(2x^2+4x-1)$

$\therefore (2x^2+4x-1)(3x+7)$

用 §102 之法,求得此二式之最大公約數爲 $2x^2+4x-1$,以此除第一式,得1,故

$$\text{L.C.M.}=6x^3+26x^2+25x-7.$$

注意. (1)之兩節以G乘之,可得

$$G\cdot L=(aG)(bG)=A\cdot B,$$

故二式之積等於其最大公約數及最小公倍數之積.(學者可以習題五十八中各題求最小公倍數.)

§ 109. 通分 以分母不同之諸分數化作同分母之諸分數而不變其數值,是曰通分(Reduce to a Common Denominator).

通分諸分數式最簡者以所設各分母之最小公倍數作公分母.故

通分之法,以各分母之最小公倍數作新

分母,以原分母除之,得商,乘其分子,作新分子。從倍分之性質 (§ 103),可知如此所得諸新分數各與原分數同值。

例一。　以 $\frac{3a^2}{4x^3}$, $\frac{5b^2}{12y^2}$, $\frac{2ab}{9x^2y^4}$ 通分。

$4x^3, 12y^2, 9x^2y^4$ 之最小公倍數爲 $36x^3y^4$.

$$\left.\begin{array}{ll} 36x^3y^4 \div 4x^3 = 9y^4, & \dfrac{3a^2}{4x^3} = \dfrac{3a^2 \times 9y^4}{4x^3 \times 9y^4} = \dfrac{27a^2y^4}{36x^3y^4}; \\ 36x^3y^4 \div 12y^2 = 3x^3y^2, & \dfrac{5b^2}{12y^2} = \dfrac{5b^2 \times 3x^3y^2}{12y^2 \times 3x^3y^2} = \dfrac{15b^2x^3y^2}{36x^3y^4}; \\ 36x^3x^4 \div 9x^2y^4 = 4x, & \dfrac{2ab}{9x^2y^4} = \dfrac{2ab \times 4x}{9x^2y^4 \times 4x} = \dfrac{8abx}{36x^3y^4}. \end{array}\right\} \text{答}$$

例二。　通分 $\frac{1}{(a-b)(a-c)}$, $\frac{1}{(b-c)(b-a)}$, $\frac{1}{(c-a)(c-b)}$.

注意。　$a-c=-(c-a)$, $b-a=-(a-b)$, $c-b=-(b-c)$, 爰得公分母爲 $(a-b)(b-c)(c-a)$.

故得

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} = \frac{-(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

−(c−a)

$$\frac{1}{(b-c)(b-a)} = \frac{-(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

−(b−a)

$$\frac{1}{(c-a)(c-b)} = \frac{-(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

−(c−b)

例三. 通分$\dfrac{x+3}{x^2-3x+2}$, $\dfrac{x+2}{x^2-4x+3}$, $\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$.

(x-1)(x-2), (x-1)(x-3), (x-2)(x-3)

因各分母爲 $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x-3)$, $(x-2)(x-3)$,故公分母當爲$(x-1)(x-2)(x-3)$,而通分所得之新分數爲

$$\frac{x^2-9}{(x-1)(x-2)(x-3)},\ \frac{x^2-4}{(x-1)(x-2)(x-3)},\ \frac{x^2-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

習題六十二

通以下各題中之諸分數:

1. $a, \dfrac{c}{ab^3}, \dfrac{d}{a^2b^2}$.

2. $\dfrac{c}{15a^2b}, \dfrac{b^2}{10c^2a}, \dfrac{a^2}{6b^2c}$.

3. $\dfrac{5ab}{4x^2yz}, \dfrac{3ab^2}{6xy^2z}, \dfrac{2a^2b}{9xyz^2}$.

4. $\dfrac{3a+5b}{6m^2}, \dfrac{2a-3b}{9m}$.

5. $\dfrac{2x}{x+y}, \dfrac{3x}{x^2-y^2}$.

6. $\dfrac{5}{3a-3}, \dfrac{7}{4a+4}, \dfrac{8}{1-a^2}$.

7. $m+4, \dfrac{1+4m}{m-4}$.

8. $\dfrac{a^2}{(a-b)^n}, \dfrac{a}{(a-b)^{n-1}}, \dfrac{1}{(a-b)^{n-2}}$.

9. $\dfrac{x^8-1}{x^4-1}, \dfrac{x-1}{x^2-1}$.

10. $\dfrac{a}{1-a}, \dfrac{1}{a^2-a}, \dfrac{3a+1}{a^2-a}$.

11. $\dfrac{a-3b}{a^2+3ab+2b^2}, \dfrac{a-b}{a^2+5ab+6b^2}$.

12. $\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}, \dfrac{x-2}{x^2-4x+3}, \dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$.

13. $\frac{a}{x-a},\ \frac{a+x}{x^2+ax+a^2},\ \frac{ax}{x^3-a^3}.$

14. $\frac{a}{p^2-7p+10},\ \frac{b}{p^2-12p+35},\ \frac{c}{p^2-9p+14}.$

15. $\frac{1}{x^2-(a+b)x+ab},\ \frac{1}{x^2-(a+c)x+ac},\ \frac{1}{x^2-(b+c)x+bc}.$

16. $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)(x+a)},\ \frac{b^3}{(b-c)(b-a)(x+b)},$

$\frac{c^3}{(c-a)(c-b)(x+c)}.$

§ 110. **分數加減法.** 設二分數$\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, 各以x,y表其值, 卽

$$\frac{A}{B}=x, \qquad \frac{C}{D}=y,$$

去分數,　　$A=Bx, \cdots (1)$,　$C=Dy \cdots (2)$,

D乘(1),　$AD=BDx$;　B乘(2),　$BC=BDy$;

$\pm BC = BDy$

加減之,得　$AD\pm BC=BDx\pm BDy$

$$=BD(x\pm y),$$

以BD除之, 得　$\frac{AD\pm BC}{BD}=x\pm y=\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}$; 由是可知加減分數, 可通分而加減其分子.

例一. 簡約 $m-\frac{m^2+n^2}{m+n}$.

原式 $=\frac{m}{1}-\frac{m^2+n^2}{m+n}=\frac{m^2+mn}{m+n}-\frac{m^2+n^2}{m+n}=\frac{mn-n^2}{m+n}$.

例二. $\frac{2x-3a}{x-2a}-\frac{2x-a}{x-a}$

$$=\frac{(2x-3a)(x-a)-(2x-a)(x-2a)}{(x-2a)(x-a)}$$

$$=\frac{2x^2-5ax+3a^2-(2x^2-5ax+2a^2)}{(x-2a)(x-a)}$$

$$=\frac{a^2}{(x-2a)(x-a)}.$$

例三. $\frac{2}{(a-b)(b-c)}+\frac{2}{(b-c)(c-a)}+\frac{2}{(c-a)(a-b)}$

$$=\frac{2(c-a)+2(a-b)+2(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0.$$

例四. $\frac{x^2+5xy-4y^2}{x^2-16y^2}-\frac{2xy}{2x^2+8xy}$

$$=\frac{x^2+5xy-4y^2}{(x+4y)(x-4y)}-\frac{2xy}{2x(x+4y)}$$

$$=\frac{x^2+5xy-4y^2-y(x-4y)}{(x+4y)(x-4y)}$$

$$=\frac{x(x+4y)}{(x+4y)(x-4y)}=\frac{x}{x-4y}.$$

例五. 簡約$\frac{a+3}{a-4}-\frac{a+4}{a-3}-\frac{8}{a^2-16}$.

先減前二項,既得,再減第三項:

$$原式=\frac{a^2-9-(a^2-16)}{(a-4)(a-3)}-\frac{8}{(a-4)(a+4)}$$

$$=\frac{7}{(a-4)(a-3)}-\frac{8}{(a-4)(a+4)}$$

$$\frac{7(a+4)-8(a-3)}{(a+4)(a-4)(a-3)}=\frac{52-a}{(a+4)(a-4)(a-3)}.$$

習題六十三

簡約以下各分數:

1. $1+\frac{a+b}{a-b}$.
2. $a+b-\frac{a^2+b^2}{a+b}$.
3. $m^2+m+1-\frac{2}{m-1}$.
4. $\frac{3}{x-6}-\frac{1}{x+2}$.
5. $\frac{3}{a-3}+\frac{4}{a+3}$.
6. $\frac{3}{a^3}-\frac{2}{3a^2}+\frac{1}{a}$.
7. $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}$.
8. $\frac{x}{x^2-y^2}+\frac{y^2}{x^3-y^3}$.
9. $\frac{a-b}{(a+b)^2}+\frac{a+b}{(a-b)^2}$.
10. $\frac{x+3}{x+4}-\frac{x+1}{x+2}$.
11. $\frac{x+7}{x-3}+\frac{x+3}{x-7}$.
12. $\frac{(a+b)^2}{a-b}+\frac{(a-b)^2}{a+b}$.
13. $\frac{1}{(x-5)(x-6)}+\frac{1}{(x-5)(x-7)}$.

14. $\dfrac{1}{2x^2+x-1}+\dfrac{1}{3x^2+4x+1}$.

15. $\dfrac{1}{x^2-9x+20}-\dfrac{1}{x^2-11x+30}$.

16. $\dfrac{1}{2x-3y}-\dfrac{x+y}{4x^2-9y^2}$. 17. $\dfrac{x^2-4a^2}{x^2-2ax}-\dfrac{x+4a}{x+2a}$.

18. $\dfrac{3}{x^2-1}+\dfrac{4x+2}{2x^2+3x+1}$. 19. $\dfrac{x-3}{x-4}-\dfrac{x+4}{x+3}-\dfrac{5}{x^2-16}$.

20. $\dfrac{1}{2a+3}+\dfrac{1}{2a-3}-\dfrac{4a}{4a^2+9}$.

21. $\dfrac{1}{2(a-b)}-\dfrac{1}{2(a+b)}-\dfrac{b}{a^2-b^2}$.

22. $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-x-2}-\dfrac{1}{x^2-1}$.

23. $\dfrac{1}{4(1+x)}+\dfrac{1}{4(1-x)}+\dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

24. $\dfrac{x-2a}{x+a}+\dfrac{2(a^2-4ax)}{a^2-x^2}-\dfrac{3a}{x-a}$.

25. $\dfrac{2x}{4+x^2}+\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{1}{2+x}$. 26. $\dfrac{x-a}{x+a}+\dfrac{a^2+3ax}{a^2-x^2}+\dfrac{x+a}{x-a}$.

27. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

28. $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}-\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$.

29. $\dfrac{a}{b}-\left(\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{a}{b-a}\right)$.

30. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$.

§111. 分數雜例.

例一。 $\left\{\dfrac{x+2a}{a-2x}-\dfrac{a+2x}{x-2a}\right\}\left\{\dfrac{3}{2a-x}-\dfrac{1}{a-x}\right\}$

$$=\frac{x^2-4a^2-(a^2-4x^2)}{(a-2x)(x-2a)}\times\frac{3a-3x-(2a-x)}{(2a-x)(a-x)}$$

$$=\frac{5(\cancel{x-a})(x+a)}{(\cancel{a-2x})(x-2a)}\times\frac{\cancel{a-2x}}{(x-2a)(\cancel{x-a})}=\frac{5(x+a)}{(x-2a)^2}.$$

例二。

$$\frac{\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}=\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\div\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)$$

$$=\frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}\div\frac{4ab}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}\times\frac{a^2-b^2}{4ab}=\frac{ab}{a^2+b^2}.$$

例三。

$$\frac{9x^2-64}{x-1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{4+x}}}=\frac{9x^2-64}{x-1-\dfrac{1}{\dfrac{4}{4+x}}}=\frac{9x^2-64}{x-1-\dfrac{4+x}{4}}$$

$$=\frac{9x^2-64}{\dfrac{3x-8}{4}}=\frac{4(9x^2-64)}{3x-8}$$

$$=4(3x+8).$$

*習題六十四

---

* §111及習題六十四不妨省去.

簡約以下各式:

1. $\left(\frac{a^2-ax+x^2}{a-x}-\frac{a^2+ax+x^2}{a+x}\right)\div\frac{x^3}{a^2-x^2}$.

2. $\left(y+\frac{xy}{y-x}\right)\left(y-\frac{xy}{y+x}\right)\left(\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}\right)$.

3. $\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}+\frac{y}{b}-\frac{b}{y}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}-\frac{y}{b}+\frac{b}{y}\right)$.

4. $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{\frac{9}{x}-x}$.　　5. $\dfrac{\frac{1+x}{1+x^2}-\frac{1+x^2}{1+x^3}}{\frac{1+x^2}{1+x^3}-\frac{1+x^3}{1+x^4}}$.

6. $\dfrac{\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}}{1-\frac{(a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)}}$.　　7. $\dfrac{1}{a-\dfrac{a^2-1}{a+\frac{1}{a-1}}}$.

8. $\left\{\frac{b^3}{a^3}+\frac{a^3}{b^3}-2\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{a^2}{b^2}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\right\}\div\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$.

9. $\dfrac{x-2}{x-2-\dfrac{x}{x-\frac{x-1}{x-2}}}$.　　10. $\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}}-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x-\frac{1}{x}}}$.

°§ 112. 分數式之數值.

例一. 有函數 $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}$, 設 x 之值爲下列各數,求此函數之對應值:

° 本節旨在稍引極限之觀念,教師講此,宜反覆指陳,而不必責學者以記憶或應用。

(a) $x=-5$;　(b) $x=-4$;　(c) $x=-3$;

(d) $x=0$;　(e) $x=1$;　(f) $x=2$;

(g) $x=3$.

以所設各數一一替代所設式中x而計算之:

(a) $f(-5)=\frac{(-5)^2+(-5)-6}{(-5)^2+2(-5)-8}=\frac{14}{7}=2$.

(b) $f(-4)=\frac{(-4)^2+(-4)-6}{(-4)^2+2(-4)-8}=\frac{6}{0}$, 無意義;

〔視§§36,51〕

(c) $f(-3)=\frac{(-3)^2+(-3)-6}{(-3)^2+2(-3)-8}=\frac{0}{-5}=0$;

(d) $f(0)=\frac{0^2+0-6}{0^2+2\times0-8}=\frac{-6}{-8}=\frac{3}{4}$;

(e) $f(1)=\frac{1^2+1-6}{1^2+2\times1-8}=\frac{-4}{-5}=\frac{4}{5}$;

(f) $f(2)=\frac{2^2+2-6}{2^2+2\times2-8}=\frac{0}{0}$, 不定; 〔視§36〕

(g) $f(3)=\frac{3^2+3-6}{3^2+2\times3-8}=\frac{6}{7}$.

分數中分母之值爲0而分子之值不爲0, 則此分數無意義;分母分子之值皆爲0,則此分

數之值不定

凡分數分子之值爲 0 而分母之值不爲 0，則此分數之值爲 0，逆言之，欲使一分數之值爲 0，則當使其分子之值爲 0，而分母之值不爲 0.

$f(x)=\frac{4}{x}$
$x=0$
$f(x)=\frac{4}{0}$ 無意義
$x=\cdot 1$
$f(\cdot 1)=\frac{4}{\cdot 1}=40$
$x=\cdot 01$
$f(\cdot 01)=400$

例二. 有函數 $f(x)=\frac{4}{x}$，此中 x 之值爲 0，則此函數無意義，從前例已知之；然若 x 爲變數，陸續變小，小至比吾人所能想像而得之任何極小之值尚小，且決不達於 0，則此函數之值若何？

$x=\epsilon$
$f(\epsilon)=\frac{4}{\epsilon}$
Epsilon

設吾人意想所能得之極小之值爲 ϵ，則以此 ϵ 代替函數中之 x 時，可得 $f(\epsilon)=\frac{4}{\epsilon}$，

$\epsilon=(0.1)^{10}$
$f(\epsilon)=4(10)^{10}$

今使 ϵ 爲任何小之數，如 $(0.1)^{10}=0.0000000001$，則

$4\times(10)^{10}$

$$f(\epsilon)=\frac{4}{0.0000000001}=40000000000;$$

$\epsilon=(\cdot 1)^{100}$
$f(\epsilon)=4\times(10)^{10}$

次，使 ϵ 之值再行縮小在小數點後更退後 90 位而爲 $(0.1)^{100}$，

$f(\epsilon)=$ 增至101位

則
$$f(\epsilon)=\frac{4}{(0.1)^{100}}=4\times(10)^{100},$$

ϵ 之值愈小 則 $f(\epsilon)$ 之值愈大

$\epsilon=(\cdot 1)^{n}$

即 $f(\epsilon)$ 之值更加增大而至爲 101 位之大數；故

$f(\epsilon)=4\times(\cdot 1)^{n}$

可見ϵ之值愈小,則$f(\epsilon)$之值愈大。

今使 $\epsilon=(0.1)^n$,　則$f(\epsilon)=4\times(10)^n$,

吾人試盡力思索指一最大之數給n,則ϵ之值將為盡吾人思索之力所僅能得之小數,而此時$f(\epsilon)$之值則比以n中所含1之個數化作位數之數尚大一位;而從題中所言,x之值尚當遠比ϵ小,因之而$f(x)$之值尚能遠比$f(\epsilon)$之值大,故此時$f(x)$之值已大至窮,吾人之力不能形容之,吾人不得已姑名之曰無限大(Infinity),而以記號$\propto$表之。至x之值,雖決不達於0,然其小已小至無法形容之,吾人為稱述便利起見,亦姑謂之曰x無限接近於0。"x無限接近於0時$f(x)$化成無限大",此語以記號表之為:

$$\underset{x\to 0}{f(x)}\to\propto$$

例三。 有函數$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$,　$x=1$時$f(x)=\frac{0}{0}$,

此為不定,從例一已知之;然若x為變數,其值無限接近於1而決不達於1,則$f(x)$之值若何?

x之值無限接近於1須從二方面觀察之.其一,x從比1大之值連續減少而接近於1;其二,x從比1小之值連續增加而接近於1:總之,設$x=1\pm\epsilon$而ϵ取無限接近於0之值,則可兼包此二方面在內.

令$x=1\pm\epsilon$時, $f(x)=\frac{(1\pm\epsilon)^2-1}{(1\pm\epsilon)-1}=\frac{\pm2\epsilon+\epsilon^2}{\pm\epsilon}$,

因ϵ雖無限接近於0而決不達於0,故可以此右節中之分母除分子而得

$$f(x)=2\pm\epsilon,$$

此中之ϵ無限接近於0時,其值已小至無可計算之境,由是$f(x)$之值與2之差,——卽ϵ,

$f(x)\sim2=\epsilon$, 〔$\sim$讀曰差,謂從其左右二數中之大者減小者.〕

小至比吾人所能想像而得之任何極小之值尚小,且從x尙變而向1接近,此差尙繼續減少而永不復大,推極其至$f(x)$之值殆等於2.如此之事,吾人謂之曰"x接近於1時$f(x)$之極限(Limit)爲2",以記號表之,則爲

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2.$$

注意. 無限大∞乃形容一羣甚大數值狂增不返之一種記號不可以爲一數.

§ 113. 分數函數之圖形

〔第一〕 $f(x)=\dfrac{4}{x}$ 之圖形.

先,注意 $\quad f(x)\underset{x\to\pm 0}{\to}\pm\infty,$ ……………………(1)

次,以原方程式移乘作除移除作乘得 $x=\dfrac{4}{f(x)}$, 如前 $\quad \underset{f(x)\to\pm 0}{x\to\pm\infty},$ ……………………(2)

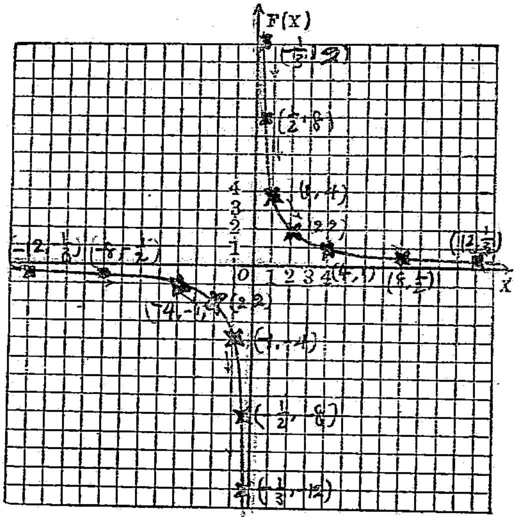
復次以種種數值與 x 而求 $f(x)$ 之數值,列表於下:

x	$\pm\frac{1}{3}$	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	± 2	± 4	± 8	± 12	…
$f(x)$	± 12	± 8	± 4	± 2	± 1	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{3}$	…

立坐標軸描寫諸點代表表中所列各對數值,過此諸點引平滑之曲線.

(1)表圖中曲線當無限接近於 $f(x)$ 之軸時在離 x 軸無限遠之地位;(2)表曲線離 $f(x)$ 軸無限

遠時無限接近於x軸.以是名二軸為曲線之漸近線(Asymptote).如此曲線名曰雙曲線(Hyperbola).



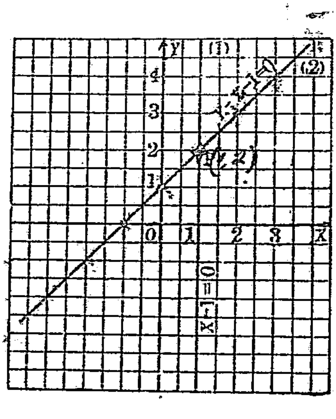
雙曲線由不相連續之二分支所成,$x=0$適當其不連續之處.

〔第二〕 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 之圖形.

先,以所設方程式去分數,得 $y(x-1)=x^2-1$,

移項,分解因數,得

$$(x-1)(y-x-1)=0$$



此式之圖形乃合二方程式 $x-1=0 \cdots\cdots (1)$

及 $y-x-1=0 \cdots\cdots (2)$

之圖形而成，如圖所示二直線，其交點P之坐標爲(1,2)。圖中縱橫軸上皆取二格作一單位.

在前節例三中，已知$x=1$時$y=\frac{x^2-1}{x-1}$之數值不定，$x\neq 1$時，y之數值可定，x之值無限接近於1時，y之數值無限接近於2.今就圖觀察之：直線(1)中點，點之橫坐標皆爲1而其縱坐標不定，橫坐標不爲1之點當得之於直線(2)中，其點之縱坐標皆一定，卽使甚近於(1)時尙然，與前節例三中所研究之事吻合.

所最宜注意者，不特x之值無限接近1時，y之值可無限接近於2，卽使x之值徑爲1，吾人不妨徑定y之值爲2；此擧與前所言y之值不定一語初無矛盾，蓋不定云者，可爲其值之數能有無限多個，2當然亦爲此中之一個，2之外雖亦可取他值，然定y之值爲2，則可與x無限接近1時所得y之值相連續，於實用方面最爲便利，外此則不能也.由是

有分數式欲求其數值，可先行約分而後

以相當之數代文字，即約分以後分數式之數值，恒可視作與原分數之數值相同。

習題六十五

1. 述分解單項因數之方法。

2. 就§92之例以言語述分羣分解法。

3. 以已知之乘法公式列出一表。

4. 二平方之差若何分解因數？

5. 就§96以言語述x二次三項式分解因數之方法。

6. 二立方和或二立方差，其因數之形式若何？以言語述之。

7. 何謂約數？何謂公約數？何謂最大公約數？

8. 何謂倍數？何謂公倍數？何謂最大公倍數？

9. 述最大公約數之求法。

10. 述最小公倍數之求法。

11. 述倍分及約分之性質。

12. 述約分之方法。

13. 何謂約分？何謂通分？

14. 述通分之方法。

15. 述分數加減法。

16. 述分數乘除法。

17. 設分數之兩項皆爲常數,述何種分數之數值可定?何種則不定?何種分數爲無意義?

18. 分數之兩項皆爲變數,則前題中之三事若何?

19. 何謂無限大?何謂極限?

20. 何種方程式之圖形爲雙曲線?何謂雙曲線之漸近綫?

第十章　一次方程式之再續

§ 114. **分數方程式及其解法.** 方程式中含有分數式者曰分數方程式(Fractional Equations)以前已見之方程式對於分數方程式而言曰整方程式(Integral Equations).

注意. 分數方程式無次數可言,本章特就化成整方程式以後可歸於一次方程式者言之.

就上款末尾所言可得分數方程式之一種解法如下:

〔第一法〕移全式各項於左節中,合成一項,約爲最簡分數,令分子等於0而解之.

例一. 解方程式$\frac{x-2}{x-1}+1=\frac{1}{x-1}$.

移項, $\frac{x-2}{x-1}+1-\frac{1}{x-1}=0$,

合左節爲一項, $\frac{2x-4}{x-1}=0$

$\frac{2x-4}{x-1}$已爲最簡分數從上例一末尾所言,知$\frac{2x-4}{x-1}$欲等於0,必須其分母不爲0而分子爲0;故得

$$2x-4=0,\quad 而\quad x=2.$$

驗。$\begin{cases} \dfrac{x-2}{x-1}+1=\dfrac{2-2}{2-1}+1=0+1=1, \\ \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{2-1} = 1. \end{cases}$

例二。解方程式$\dfrac{x+3}{2+3x}+\dfrac{1-4x}{4x+1}=\dfrac{1-2x}{2+3x}$。

移項，$\dfrac{x+3}{2+3x}+\dfrac{1-4x}{4x+1}-\dfrac{1-2x}{2+3x}=0$,

合左節爲一項，$\dfrac{2(2+3x)}{(2+3x)(4x+1)}=0$,

約成最簡分數，$\dfrac{2}{4x+1}=0$,

於此應令 $2=0$，然此爲不合理之事，故知上式不能成立，即原方程式無根。

次，從§35中去分數法，可得分數方程式之又一種解法：

〔第二法〕以各分母之最小公倍數乘各項，約分，去其分母而解之。但所得之根必須代入各分母之最小公倍數中求其值，値非0則所得根爲原方程式之根；爲0則否。

例三。解方程式$\dfrac{x+12}{x+4}=\dfrac{x+3}{x-1}$。

二分母之最小公倍數爲 $(x+4)(x-1)\cdots$(A)。

以此乘兩節而約分,得

$$(x+12)(x-1)=(x+3)(x+4),$$

解之,得 $x=6,$

以 $x=6$ 代入(A)中,得 $50\neq 0$,故6爲所求之根.

驗. $\begin{cases} \dfrac{x+12}{x+4}=\dfrac{6+12}{6+4}=\dfrac{18}{10}=\dfrac{9}{5}, \\ \dfrac{x+3}{x-1}=\dfrac{6+3}{6-1}=\dfrac{9}{5}. \end{cases}$

例四. 解方程式 $\dfrac{2x-5}{x-3}+\dfrac{2(1-x)}{2x+1}=\dfrac{x-2}{x-3}.$ ···· (1)

分母之最小公倍數爲 $(x-3)(2x+1)$····(A)

以乘各項而約分,得

$$(2x-5)(2x+1)+2(1-x)(x-3)=(x-2)(2x+1),\cdots\text{(2)}$$

解之,得 $x=3,$

以此代入(A)中,得0,故此非原方程式之根.

$x=3$ 使(1)中首末兩分數爲 $\frac{1}{0}$ 而無意義,卽使(1)不能成立,故其非(1)之根可一望而知之.

今更考察此 $x=3$ 之一根何自而來:

(1)及(2)移項可得

$$\frac{2x-5}{x-3}+\frac{2(1-x)}{2x+1}-\frac{x-2}{x-3}=0\cdots\text{(1')}$$

$$\frac{(2x-5)(2x+1)+(x-3)(2-2x)-(x-2)(2x+1)}{(x-3)(2x+1)}=0$$

生方程之根

及　$(2x-5)(2x+1)+2(1-x)(x-3)-(x-2)(2x+1)$
$=0\cdots(2')$

$(2')$ 又從　$\left\{\frac{2x-5}{x-3}+\frac{2(1-x)}{2x+1}-\frac{x-2}{x-3}\right\}(x-3)(2x+1)$
$=0\cdots(2'')$

得來，此$(2'')$中若能第一因數爲 0 而第二第三因數皆不爲 0，則其根——亦卽(2)之根——當與(1)同；若第一因數爲0，同時第二第三因數中或一個或二個亦爲0，則(2)之根比(1)之根多而於真根外倘可得假根；若第一因數不爲 0，而第二第三因數或一個或二個爲0，則(1)無根而(2)有根，然其根無一爲所求之根，——卽皆爲假根。由是可知

分數方程式之假根皆由去含有未知數之分母而生．故行去分母之解法，至得根後必須驗之．

例五．解聯立方程式$\begin{cases}\dfrac{x+3}{y+7}=\dfrac{x-2}{y-3},\\ \dfrac{x+3y-4}{x+y}=2.\end{cases}$

去分數，得 $\begin{cases}(x+3)(y-3)=(x-2)(y+7),\\ x+3y-4\ \ =2(x+y),\end{cases}$

移項整列，得 $\begin{cases}5y-10x=-5,\\ y-x\ \ =4,\end{cases}$

解之，得　　$x=5,\quad y=9,$

驗。 $\begin{cases}\dfrac{5+3}{9+7}=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5-2}{9-3}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2};\\ \dfrac{5+3\times 9-4}{5+9}=\dfrac{28}{14}=2.\end{cases}$

〔特例〕有一二種特別形式之方程式可用特別簡法解之：

例六. 解方程式 $\dfrac{4x+5}{x+1}+\dfrac{x+5}{x+4}=\dfrac{2x+5}{x+2}-\dfrac{x^2-10}{x+3}+x.$

各項各以分母除分子化成帶分數，得

$$4+\frac{1}{x+1}+1+\frac{1}{x+4}=2+\frac{1}{x+2}-\left(x-3-\frac{1}{x+3}\right)+x,$$

去括號，兩節皆減5，得

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3},$$

移項，　$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4},$$

兩節各自合成一分數，得

$$\frac{2}{(x+1)(x+3)}=\frac{2}{(x+2)(x+4)},$$

去分數，去括號而解之，得 $x=-\frac{5}{2}$.

式中各分母對於 $x=-\frac{5}{2}$ 皆不爲 0，故 $-\frac{5}{2}$ 爲原方程式之根。

例七。解聯立方程式 $\begin{cases}\dfrac{xy}{y+2x}=\dfrac{1}{10},\\[2ex]\dfrac{xy}{4y+3x}=\dfrac{1}{20}.\end{cases}$

以二式兩節各自除 1，得 $\begin{cases}\dfrac{y+2x}{xy}=10,\\[2ex]\dfrac{4y+3x}{xy}=20,\end{cases}$

$\frac{y}{xy}+\frac{2x}{xy}=10$

卽 $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=10,\\[2ex]\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=20,\end{cases}$

$\frac{3}{x}+\frac{6}{y}=30$

$\frac{8}{x}+\frac{6}{y}=40$

以 $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ 視作未知數而解之，得

$-\frac{5}{x}=-10$

$\frac{1}{x}=2$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{x}&=2,\\ \frac{1}{y}&=4,\end{aligned}\right\}\quad 卽\quad \begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\[2ex] y=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

習題六十六

用第一法解以下各題中之方程式且驗之:

1. $\dfrac{3x-1}{2x-1}-\dfrac{4x-2}{3x-1}=\dfrac{1}{6}$.

2. $\dfrac{1}{(1-x)(x-2)}+\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{1}{(3-x)(x-1)}=0$.

3. $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}+\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=2x$.

4. $\dfrac{1}{x^2-7x+12}+\dfrac{2}{x^2-4x+3}=\dfrac{3}{x^2-5x+4}$.

5. $\dfrac{x-1+\dfrac{6}{x-6}}{x-2+\dfrac{3}{x-6}}=3$.

6. $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{4}{x^2-4}+5$.

用第二法解以下各題之方程式且驗之:

7. $\dfrac{42}{x-2}=\dfrac{35}{x-3}$.

8. $\dfrac{1-3x}{2}+\dfrac{3x-1}{2}=\dfrac{2}{1-3x}$.

9. $\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{x-5}{x-2}$.

10. $\dfrac{3+4x}{1+x}+\dfrac{3+2x}{1-x}=\dfrac{2x+1}{1+x}$.

11. $\begin{cases}\dfrac{3x+1}{1-2x}=\dfrac{4}{3},\\ x+y=1.\end{cases}$

12. $\begin{cases}\dfrac{13}{x+2y+3}+\dfrac{3}{4x-5y+6}=0,\\ \dfrac{3}{6x-5y+4}=\dfrac{19}{3x+2y+1}.\end{cases}$

13. $\begin{cases}\dfrac{1}{3x+1}=\dfrac{1}{5y+4},\\ \dfrac{1}{4x-3}=\dfrac{1}{7y-6}.\end{cases}$

14. $\begin{cases}\dfrac{12}{x-3}+\dfrac{8}{y-1}=8,\\ \dfrac{27}{x-3}-\dfrac{12}{y-1}=3.\end{cases}$

用特別解法解以下各題之方程式,且驗之:

15. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+7}=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+5}.$

16. $\dfrac{x-8}{x-10}+\dfrac{x-4}{x-6}=\dfrac{x-5}{x-7}+\dfrac{x-7}{x-9}.$

17. $\dfrac{x-4}{x-5}-\dfrac{x-5}{x-6}=\dfrac{x-7}{x-8}-\dfrac{x-8}{x-9}.$

18. $\dfrac{7}{x-9}-\dfrac{11}{x-4}=\dfrac{7}{x+2}-\dfrac{11}{x+3}.$

19. $5\dfrac{x-2}{x+2}-2\dfrac{x-3}{x+3}=3.$

20. $\dfrac{16x-13}{4x-3}+\dfrac{40x-43}{8x-9}=\dfrac{32x-30}{8x-7}+\dfrac{20x-24}{4x-5}.$

21. $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}+\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=2x.$

22. $\dfrac{xy}{y+2x}=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{xy}{3y-2x}=\dfrac{1}{4}.$

§ 115.　**文字方程式.**　方式程中未知數之係數用文字 a, b, c, 等表之者曰文字方程式(Leteral Equations).

以前所論方程式對於文字方程式而言曰**數字方程式**(Numeral Equations).

今舉文字方程式之解法於下.

§ 116. 以方程式作公式.

例. 有甲乙二人,甲今年 a 歲,乙今年 b 歲. 求距今幾年甲之歲數爲乙之 n 倍.

設 x 年後甲之歲數爲乙之 n 倍,則因彼時甲爲 $a+x$ 歲,乙爲 $b+x$ 歲,故依題得方程式

$$a+x=n(b+x),$$

去括號移項整列之,得

$$(n-1)x=a-nb$$

若 $n-1\neq 0$, 則可以 $n-1$ 除方程式之兩節而得

$$x=\frac{a-nb}{n-1}. \qquad \text{(A)}$$

*[討論] 從問題之性質 n 不能爲負數而可爲分數.

≠0, 子在20, n=2,

(I) $n>1$ 時; $a-nb$ $\neq 0$ >0 <0

(a) $a-nb>0$, 則所求者爲在自今 $\frac{a-nb}{n-1}$ 年之後;

---

* 因討論爲解析之精神故於此略及之,教師宜詳細演講,務使學者明了,而不必責其記憶及運用.

(b) $\overset{n>1}{a-nb}<0$, 則所求者爲在距今 $\frac{nb-a}{n-1}$ 年之前;

(II) $n<1$,即 n 爲一眞分數時: $a-nb \gtreqless 0$

(a) $a-nb>0$, 則所求者爲在距今 $\dfrac{a-nb}{\cancel{1-n}\ n-1}$ 年之前;

(b) $a-nb<0$, 則所求者爲在自今 $\dfrac{\cancel{nb-a}\ a-nb}{\cancel{1-n}\ n-1}$ 年之後;

(III) $n=1$, 卽求甲之歲數~~而~~爲乙之1倍時:

(a) $a-b=0$, 卽 $a=b$, 則解答不定,卽無論何時皆可。 $x=\frac{a-1b}{1-1}=\frac{0}{0}$

(b) $a-b\neq 0$, 卽 $a\neq b$, 則解答無意義,卽無論何時皆不可。 $x=\frac{a-b}{1-1}=\frac{k}{0}$

注意. x 不能爲分數。

(A) 爲此類問題解答之公式. 今設例示其應用.

如下設 a,b,n 諸數, 倣照上例作題, 並示其解答.

(1) $a=50, b=18, n=2$; I, a、

(2) $a=50, b=29, n=4$; I、b、

(3) $a=50, b=58, n=\frac{2}{3}$; II、a、

(4) $a=18, b=30, n=\frac{3}{4}$; II、b、

(5) $a=30, b=30, n=1$; III. a、

(6) $a=50, b=30, n=1$。III、b、

今先倣照上例作題如下:

(1)甲今年50歲,乙今年18歲.求距今幾年甲之歲數爲乙之2倍.

(2)甲今年50歲,乙今年29歲.求距今幾年甲之歲數爲乙之4倍.

(3)甲今年50歲,乙今年58歲.求距今幾年甲之歲數爲乙之三分之二.

(4)甲今年18歲,乙今年30歲.求距今幾年甲之歲數爲乙之四分之三.

(5)甲乙今年皆爲30歲.求距今幾年甲之歲數爲乙之1倍.

(6)甲今年50歲,乙今年30歲。求距今幾年甲之歲數為乙之1倍。

次,以所設各數代入(A)中以求此諸題之解答: $n>1$时, $a-nb>0$

(1) $\frac{a-nb}{n-1}=\frac{50-2\times18}{2-1}=\frac{14}{1}=14$。答.14年後,彼時甲64歲,乙32歲,64為32之2倍。

本題為討論中之(I)(a)。 $n>1$时 $a-nb<0$

(2) $\frac{a-nb}{n-1}=\frac{50-4\times29}{4-1}=-\frac{66}{3}=-22$。 答.22年前,彼時甲28歲,乙7歲,28為7之4倍。

本題為討論中之(I)(b).

(3) $\frac{a-nb}{n-1}=\frac{50-\frac{2}{3}\times58}{\frac{2}{3}-1}=\frac{3\times50-2\times58}{2-3}=\frac{34}{-1}=-34$. 答.34年前,彼時甲16歲乙24歲,16為24之三分之二。

$n<1$ $a-nb>0$

本題為討論中之(II)(a)。

(4) $\frac{a-nb}{n-1}=\frac{18-\frac{3}{4}\times30}{\frac{3}{4}-1}=\frac{4\times18-3\times30}{3-4}=\frac{-18}{-1}=18$。 答.18年後,彼時甲36歲,乙48歲,36為48之四分之三。

$n<1$ $a-nb<0$

本題爲討論中之(II) (b)。

(5) $\dfrac{a-nb}{n-1}=\dfrac{30-1\times30}{1-1}=\dfrac{0}{0}$.　答。不定，卽無論何時甲與乙之歲數必相等。

$n=1$ 時 $a-b=0$

本題爲討論中之(III) (a)。

(6) $\dfrac{a-nb}{n-1}=\dfrac{50-1\times30}{1-1}=\dfrac{20}{0}$.　答。無意義，卽甲乙歲數決無相等之時。

$n=1$　$a-b\neq0$

本題爲討論中之(III) (b)。

§ 117. **聯立一次方程式根之公式.** 聯立一次方程式中有分數者去分數，有括號者去括號，移項，整列以後，則恆可歸於如下之普徧形式:

$$a_1x+b_1y=c_1\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2$

$$a_2x+b_2y=c_2\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$a_2b_1x+b_1b_2y=c_2b_1$

$$(1)\times b_2-(2)\times b_1,\quad (a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1\cdots\cdots(3)$$

$$(2)\times a_1-(1)\times a_2,\quad (a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1\cdots\cdots(4)$$

若 $a_1b_2-a_2b_1\neq0$，則可以 $a_1b_2-a_2b_1$ 除(3)及(4)之兩

$y=\frac{1\times3-4\times12}{1\times1-4\times2}=\frac{-45}{-9}=5$

節而得

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\\ y&=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$x+y=5$
$x-y=7$

此爲二元一次聯立方程式根之公式。 $x=\frac{5\times1-7\times1}{1\times1-1\times1}=\frac{-2}{0}$

*〔討論〕(I) $a_1b_2-a_2b_1=0$ 而 $c_1b_2-c_2b_1\neq0$, 及 $a_1c_2-a_2c_1\neq0$ 時:

$y=\frac{1\times7-1\times5}{1\times1-1\times1}=\frac{2}{0}$

從 $a_1b_2-a_2b_1=0$,

移項, $a_1b_2=a_2b_1$,

以 a_1b_1 除兩節, $\frac{b_2}{b_1}=\frac{a_2}{a_1}$, ……………………(6)

倣此,從 $c_1b_2-c_2b_1\neq0$ 及 $a_1c_2-a_2c_1\neq0$, 可得

$$\frac{b_2}{b_1}\neq\frac{c_2}{c_1} \quad 及 \quad \frac{a_2}{a_1}\neq\frac{c_2}{c_1}; \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

今令 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=k$,

則 $a_2=ka_1$, $b_2=kb_1$,

代入(2)中得 $k(a_1x+b_1y)=c_2$ ……………………(8)

從(7),可知 $\frac{c_2}{c_1}\neq k$, 卽 $c_2\neq kc_1$,

* 教授宜講此討論至學生了解而不必責學者之記憶.

以此與(8)合之，可得

$$k(a_1x+b_1y)\neq kc_1,$$

以 k 除之，得 $$a_1x+b_1y\neq c_1 \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

此從(2)化得之(9)表示 a_1x+b_1y 不等於 c_1，然(1)表示 a_1x+b_1y 等於 c_1，顯然自相矛盾；故在(I)之條件之下，所設二方程式爲矛盾方程式(視§78)。

從別一方面觀之；以(I)之條件代入(5)，則 x 及 y 之解答皆爲分母等於0分子不等於0之分數，卽皆不能成立(觀§36)。卽表示矛盾方程式不能聯立也。

(II) $a_1b_2-a_2b_1=0$，$c_1b_2-c_2b_1=0$ 及 $a_1c_2-a_2c_1=0$ 時：

如(I)，從此三式可化得

$$\frac{b_2}{b_1}=\frac{a_2}{a_1},\quad \frac{b_2}{b_1}=\frac{c_2}{c_1},\quad 及\quad \frac{a_2}{a_1}=\frac{c_2}{c_1},$$

合之爲 $$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\frac{c_2}{c_1}, \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

令此等分數之值爲 k，則得

$$a_2=ka_1\quad b_2=kb_1\quad c_2=kc_1,$$

以此代入(2)，可得　$k(a_1x+b_1y)=kc_1$,

以 k 除之，得　$a_1x+b_1y=c_1$,

此與(1)全同；故在(II)之條件之下，(2)為附庸方程式而(1)，(2)之解答(5)當不定(視§78)。

從別一方面觀察之；以(II)之條件代入(5)，則 x 及 y 之值皆為 $\frac{0}{0}$，即皆不定(視§36)。

(III) $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 時：

聯立方程式(1)，(2)之解答此時必有一組而僅有一組如(5)。

今略示應用根之公式(5)以解二元一次聯立方程式之法：

(1) 解 $\begin{cases}171x-213y=-642,\\114x-326y=-244.\end{cases}$

以此二式與前之(1)，(2)二標準形式比較，

得　$a_1=171,\ b_1=-213,\ c_1=-642,$

$a_2=114,\ b_2=-326,\ c_2=-244.$

以此代入根之公式(5)中，得

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{-642\times(-326)-(-244)\times(-213)}{171\times(-326)-114\times(-213)}$$

$x-y=3 \quad a_2=4,\ b_2=-1 \quad c_2=3$

$$\frac{b_2-c_2b_1}{b_2-a_2b_1}=x=\frac{-642\times(-326)-(-244)\times(-213)}{171\times(-326)-114\times(-213)}=\frac{157320}{-31464}=-5,$$

$$\frac{c_2-a_2c_1}{b_2-a_2b_1}=y=\frac{171\times(-244)-114\times(-642)}{171\times(-326)-114\times(-213)}=\frac{31464}{-31464}=-1。$$

(2)解 $\begin{cases}ax+by=c+d,\\bx+ay=c-d。\end{cases}$

以此與標準形式(1),(2)比較,得

$$a_1=a,\quad b_1=b,\quad c_1=c+d,$$

$$a_2=b,\quad b_2=a,\quad c_2=c-d,$$

代入根之公式(5)中,即得

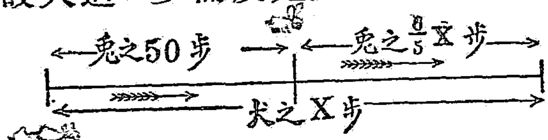
$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{a(c+d)-b(c-d)}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)c+(a+b)d}{(a-b)(a+b)},\\y&=\frac{a(c-d)-b(c+d)}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)c-(a+b)d}{(a-b)(a+b)}.\end{aligned}\right\}$$

§118 **應用問題(雜題)** 以前至此,每講應用問題,必分類而多舉其例;蓋以此一部分,較之代數式方程式等稍多活變,內容尤豐;一時淆然雜呈,學者茫無頭緒,每有無從下手之歎;故特分類以免其雜,多舉例以抽其緒也。至於今,則學者於分類之例已見數十,演習之題已歷百餘,前所言之困難當已消滅;嗣後當會

貫其通,以求能力增進而可訊應確當,不宜再爲分類以限制之矣。

例一。 兔在犬前50步(兔步),犬追之.兔行六步時犬可行五步，而兔九步之長等於犬七步之長.求犬追幾步(犬步)而及兔。

設犬追x步而及兔。



因犬行5步時兔行6步,故犬行 x 步時兔可行$\frac{6}{5}x$步,合之在犬前之50步,共行 $\frac{6}{5}x+50$步而被犬追及。

次,兔9步之長等於犬7步之長,卽兔1步之長等於犬$\frac{7}{9}$步之長,故兔$\frac{6}{5}x+50$步之長等於犬$\frac{7}{9}(\frac{6}{5}x+50)$步之長。

由是可得方程式

$$\frac{7}{9}(\frac{6}{5}x+50)=x,$$

解之,得 $x=583\frac{1}{3}$.　　答.犬追$583\frac{1}{3}$步而及兔。

例二. 一火車以定速度進行,行1時因路途阻窒,停車二十四分鐘,復以定速$\frac{6}{5}$之速度進行,及至目的地,乃比規定時刻遲到15分鐘;若阻路處比前在前五里之地,則更當遲到2分鐘.求此路之長.

設火車每時原速度爲x里,路長y里,則自阻處至目的地當長$y-x$里,以原速度行之須行$\frac{y-x}{x}$時,以增速後$\frac{6}{5}x$里之速度行之須行$\frac{y-x}{\frac{6}{5}x}$時;途中停車24分鐘而後僅遲到15分鐘,則在

24−15=9

途中之時刻實比以原速行者少9分鐘,即少$\frac{9}{60}$時;故可得方程式

$$\frac{y-x}{x}=\frac{y-x}{\frac{6}{5}x}+\frac{9}{60};\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

若阻路處再前五里,則餘路$y-x-5$里,以後速

24−15−2=7

行之比前更遲到2分鐘,即比以原速行者少7分鐘;故得方程式

$$\frac{y-x-5}{x}=\frac{y-x-5}{\frac{6}{5}x}+\frac{7}{60}\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) − (2),
$$\frac{5}{x}=\frac{5}{\frac{6}{5}x}+\frac{2}{60}=\frac{25}{6x}+\frac{1}{30};$$

解之，得　$x=25$;

代入(1)，得　$\frac{y-25}{25}=\frac{y-25}{30}+\frac{9}{60}$,

解之，得　$y=47\frac{1}{2}$.　答. 路長四十七里半.

例三. 甲乙二人競走400米突之地，甲讓乙先走25米突，則尚比乙早到15秒鐘；若讓乙先行36秒鐘，則落後40米突，求各人走此路之時刻.

設甲須行x秒鐘，乙須行y秒鐘. 甲以x秒鐘走路400米突，則每秒鐘走$\frac{400}{x}$米突；乙以$x+15$秒鐘走路$400-25$米突，則每秒鐘走$\frac{400-25}{x+15}$米突. 從別一方面觀察；乙以y秒鐘走路400米突，則每秒鐘走$\frac{400}{y}$米突；甲以$y-36$鐘走路$400-40=360$米突，則每秒鐘走$\frac{360}{y-36}$米突：合上二者，得方程式

$$\frac{375}{x+15}=\frac{400}{y},$$

及

$$\frac{360}{y-36}=\frac{400}{x};$$

解之,得 $\left.\begin{aligned} x&=120, \\ y&=144. \end{aligned}\right\}$ 答。$\left\{\begin{aligned} &\text{甲走120秒,} \\ &\text{乙走144秒.} \end{aligned}\right.$

習題六十七

以下各題,先解(1)之方程式,次用其解答;求(2)以下方程式之根〔(1)－(6)〕:

1. (1) $a(x-a)=b(x-b)$,

   (2) $2(x-2)=5(x-5)$,

   (3) $\frac{1}{3}(x-\frac{1}{3})=\frac{3}{5}(x-\frac{3}{5})$.

2. (1) $ax+b=cx+d$,

   (2) $3x+7=x+13$,

   (3) $\frac{x}{2}-3=\frac{2x}{3}-9$.

3. (1) $\frac{x-a}{x-b}=\frac{a}{b}$,

   (2) $\frac{x-5}{x-7}=\frac{5}{7}$,

   (3) $\frac{x-3}{x-8}=\frac{3}{8}$.

4. (1) $\frac{a}{b}(x-a)+\frac{b}{a}(x-b)=x$,

   (2) $2(x-2)+\frac{1}{2}(x-1)=x$,

   (3) $m(x-m)+\frac{x-1}{m}=x$.

5. (1) $\dfrac{mx-a}{x-c}=\dfrac{mx-b}{x-d}$,

(2) $\dfrac{2x-5}{x-6}=\dfrac{2x-15}{x-7}$,

(3) $\dfrac{x-4}{7x-7}=\dfrac{x-26}{7x-21}$.

6. (1) $\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{b}{x-b}=\dfrac{a-b}{x}$,

(2) $\dfrac{1}{mx-1}-\dfrac{1}{nx-1}=\dfrac{1}{mx}-\dfrac{1}{nx}$.

以下先解原題,次就下列諸數比照原題自造題目,復次,用原題之解答求所造各題之解答〔(7)－(10)〕:

7. 鹿鶴在園,數其頭得a,數其足得b,求鹿鶴之數.

(1) $a=10, b=30$;　(2) $a=9, b=26$ 20;　(3) $a=13, b=31$.

8. 在n點鐘及$n+1$點鐘之間,求計時鐘中長短兩針相合之時刻.

(1) $n=3$,　(2) $n=6$,　(3) $n=11$.

9. 一人以h時之餘暇出而游散,已知其步行1時可行a里,若乘人力車則一時可行b里.此人豫定往時步行歸時乘人力車.求其所能行之最遠里數及往復之時間.

(1) $a=20, b=40, h=3$;　(2) $a=30, b=50, h=4$.

10. 有甲乙二水桶,甲桶所容水量之數爲 u, 乙桶所容水量之數爲 v,二桶之底各有活栓,啟甲之栓,則每分時流出水量之數爲 a; 啓乙之栓,則每分時流出水量之數爲 b. 今同時開去二桶之栓,求幾時後此二桶中所餘水量相等,且求此所餘之等量.

設以升爲容量之單位:

(1) $u=100,\quad v=80,\quad a=12,\quad b=4;$

(2) $u=100,\quad v=80,\quad a=4,\quad b=12,$

(3) $u=100,\quad v=80,\quad a=b=10;$

(4) $u=v=100,\quad a=b=8;$

(5) 甲乙二桶底之活栓以頂上之管代之,其每分時流出之水量變作每分時注入之水量則何如.

用二元一次方程式根之公式解以下各題:

11. $\begin{cases} 3x-5y=-34, \\ 2x+8y=34. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 7x-3y=27, \\ 4x+5y=2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x+y=8. \\ x+y=1. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 9x-2y=-34, \\ 3x+11y=82. \end{cases}$

以下各題先解(1)之聯立方程式,再用其解答解(2)以下之聯立方程式:

15. (1) $\begin{cases} ax+by=l, \\ bx+ay=m; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 3x+5y=21, \\ 5x+3y=19; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x-y=17, \\ x-4y=-7. \end{cases}$

16. (1) $\begin{cases} ax+by=a^2, \\ bx+ay=b^2; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x+3y=4, \\ 3x+2y=9. \end{cases}$

17. (1) $ax+by=bx+ay=c$;

(2) $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=\dfrac{x}{n}+\dfrac{y}{m}=1$;

(3) $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=\dfrac{b}{x}+\dfrac{a}{y}=1$;

(4) $a(x+y)+b(x-y)=b(x+y)+a(x-y)=1$.

18. (1) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ ax+by+cz=d, \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1, \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{9}+\dfrac{z}{16}=1. \end{cases}$

解以下各題中之方程式:

19. $(x+a)(x+b)-c(a+c)=(x-c)(x+c)+ab$.

20. $\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{b}{x-b}=\dfrac{a-b}{x-c}$.　21. $(x-a)(x+b)=(x-a+b)^2$.

22. $(a+b)x^2-a(bx+a^2)=bx(x-a)+ax(x-b)$.

23. $x(x-a)+x(x-b)=2(x-a)(x-b)$.

24. $\dfrac{x-a}{b-x}=\dfrac{x-b}{a-x}$.

解以下各題中之聯立方程式:

25. $\begin{cases}(a+b)x+(a-b)y=a^2+b^2,\\(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2.\end{cases}$

26. $\begin{cases}\dfrac{x-a}{c-a}+\dfrac{y-b}{c-b}=1,\\\dfrac{x+a}{c}+\dfrac{y-a}{a-b}=\dfrac{a}{c}.\end{cases}$

27. $\begin{cases}\dfrac{x-1}{a}=\dfrac{1-y}{b},\\\dfrac{x+y}{a^2+b^2}=\dfrac{x-y}{a^2-b^2}.\end{cases}$ 28. $\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0,\\bx+ay=4ab.\end{cases}$

解以下各應用題:

29. 有橙實一籠,第一人取其半分又一個,第二人取其餘數之半分又一個,第三人取第二次餘數之半分又六個,適盡無餘;求此橙實之原數.

30. 有二位之一數,以其數字和除之,得商6,餘3;又以數字和除其倒位數,得商4,餘9.求此數.

31. 有酒水混合液二種,甲種中酒爲水之3倍,乙種中水爲酒之5倍.今欲取此二者作成酒水各半之混合液九升,求二者須各取幾何.

32. 求七點鐘與八點鐘之間長短兩針成$\frac{1}{3}$直角之時刻.

33. 有甲乙二舟人,甲使楫九度時乙能使楫八度

而乙79度與甲90度之效力相等.今二人各操一舟同在一河中同向前行,已知甲在乙前四楫(甲楫)之處,求乙追幾楫(乙楫)而及甲.

34. 有上中下三等米,以銀一元買之,中等米比下等米少買一升五合;上等米比中等米少買六合;以上等米九升下等米五升之比混合之,則可得中等米之價.求各種每升之價.

35. 一人以銀若干圓買得米麥共55石,已知米之總價比麥之總價多433圓;其每石之價米比麥貴十分之五;若此人以買米之銀買麥,買麥之銀買米,則可共買得70石,求米麥各一石之價.

36. 有二輪車,行一丈二尺之道路,後輪比前輪多轉六次;若後輪之周圍增其$\frac{1}{4}$,前輪之周圍增其$\frac{1}{3}$,則後輪比前輪多轉四次.求兩輪周圍之尺數.

37. 甲乙二人競走880碼之地,前後走二次,第一次甲讓乙在前10碼尚比乙早到15秒鐘;第二次甲讓乙先走16秒鐘,尚勝乙$4\frac{8}{11}$碼.求甲每秒鐘之速度.

38. 兵士若干人,等分為二列:一以列作三重之中空方陣,一以列作五重之中空方陣,令五重之陣適可重入三重陣內之空處.求兵士總數.

39. 一舟往復於河流上下兩地之間共費10時，兩地距離爲20里。已知此舟順流行三里之時刻與逆流行三里之時刻相等，求其往與復各需之時刻。

40. 甲乙兩村沿一河相距12里。一人自甲至乙，前半路步行，後半路舟行，經七時而至乙村；及歸亦半步行而半舟行，其步行之速度祇原步行速度$\frac{3}{4}$，舟行之速度爲前舟行速度之2倍，六時而至甲村。求步行及舟行之原速度。

習題六十八

1. 何謂分數方程式？
2. 何謂文字方程式？
3. 述分數方程式二種之解法？
4. 分數方程式之假根從何而來？用何法知之？
5. 述文字方程式與數字方程式之關係。

令x爲步行之速度，y爲舟行之速度

$$\frac{\frac{12}{2}}{x}+\frac{\frac{12}{2}}{y}=7,\quad \frac{\frac{12}{2}}{\frac{3}{4}x}+\frac{\frac{12}{2}}{2y}=6$$

第十一章　代數數之續

§ 119　**無理數**。例如欲求 2 之平方根，可用§81之法求之：

$$\sqrt{2}=1.4142\cdots\cdots$$

$$
\begin{array}{rr|r l}
 & & 1 & \\
\cline{2-3}
 & 24 & 100 & (- \\
 & 4 & 96 & \\
\cline{2-3}
+) & 281 & 400 & (- \\
 & 1 & 281 & \\
\cline{2-3}
+) & 2824 & 11900 & (- \\
 & 4 & 11296 & \\
\cline{2-3}
+) & 28282 & 60400 & (- \\
 & 2 & 56564 & \\
\cline{2-3}
 & & 3836 & (-
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
\text{積數恆不盡;} \\
\text{積數後每添二個0, 則} \\
\text{可多開一位方根;} \\
\text{方根之位數無限.}
\end{array}
\right.
$$

(…表示不盡之意)。

學者宜注意如此開方所得小數永遠不盡，亦決不循環，故決不能化作分數。

凡非整數又非分數之數曰無理數 (Irrational Numbers)。對於無理數而言，名尋常之整數或分數曰有理數(Rational Numbers)。

例如 $\sqrt{2}=1.4142\cdots\cdots$ 及 $\pi=3.14159\cdots\cdots$ 皆爲無理數。

開方不盡之數爲無理數之一種，可特名之曰根數(Surd)。

例如 $\sqrt{2}$ 爲第二根數 (Surd of 2nd Order). 推之, $\sqrt[3]{2}$ 爲第三根數 $\sqrt[4]{5}$ 爲第四根數等.

無理數不能以爲有理數表之而夾於二羣有理數之間.

例如

$$1<\sqrt{2}<2,$$

$$1.4<\sqrt{2}<1.5,$$

$$1.41<\sqrt{2}<1.42,$$

$$1.414<\sqrt{2}<1.415, \text{等}.$$

此二羣有理數爲無理數之近似纚數.

一數 a 之第 n 不盡根數因不能以精密之值表之, 故慣例即表作 $\sqrt[n]{a}$. 在本章中之根數限於正根數.

代數學之目的在普徧，故根數仍當遵守形式不易律(視§25).

§ 120. 根數之性質. 因根與羃互相爲反法 (視 § 28), 故從根數之定義可徑得以下之公式:

$\sqrt{2})^2=\sqrt{2}\sqrt{2}=2$.　$(\sqrt[3]{5})^3=\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5}=5$ 以第1而言之

公式(I)：
$$\begin{cases}(\sqrt[m]{a})^m=a,\\ \sqrt[m]{a^m}=a,\end{cases}$$
$(\sqrt[3]{5})^3=\sqrt[3]{5^3}=5$

次，因　$(\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b})^m=(\sqrt[m]{a})^m(\sqrt[m]{b})^m$〔§49指數律〕

$\because (abc)^3=a^3b^3c^3$

$$=ab,$$ 〔本款公式(I)〕

及　$(\sqrt[m]{ab})^m=ab$，故

公式(II)：
$$\begin{cases}\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab},\\ \sqrt[m]{ab}=\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}.\end{cases}$$
$\sqrt{4}\sqrt{25}=2\times5$
$=\sqrt{100}$

復次，因　$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m=\frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m}$〔§54指數律〕

$$=\frac{a}{b},$$ 〔本款公式(I)〕

及　$\left(\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\right)^m=\frac{a}{b}$，故得

公式(III)：
$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\dfrac{a}{b}},\\ \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.\end{cases}$$

再，因　$(\sqrt[mn]{a^n})^m=a^n$,

及　$(\sqrt[m]{a})^{mn}=[(\sqrt[m]{a})^m]^n=a^n$，故

公式(IV)：　$\sqrt[mn]{a^n}=\sqrt[m]{a}$，
　　　　　$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}$.

又，因　$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}=\left\{\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right\}^n=\left\{\sqrt[n]{a}\right\}^n=a$，

及　　$\left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn}=a$，故得

公式(V)：　$\begin{cases}\sqrt[mn]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}, \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.\end{cases}$

凡根數一切化法皆從此五種公式而得，學者宜熟識之。

§ 121　**根數之化法。**

〔第一〕以根號內之因數取出根號外〔公式(I)，(II)之應用〕。

例一．　$\sqrt{48}=\sqrt{16\times3}=\sqrt{16}\sqrt{3}=4\sqrt{3}$。

例二．　$\sqrt{9a^2b^2}=\sqrt{9}\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=3ab$。

例三．　$\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=a\sqrt{b}$。

例四．　$\sqrt[3]{48}=\sqrt[3]{8\times6}=\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{6}=2\sqrt[3]{6}$。

〔第二〕以根號中分母取出根號外〔公式(I)，

(III)之應用〕.

例五. $\sqrt{\dfrac{7}{16}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

例六. $\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}=\sqrt{\dfrac{p^2-4q}{4}}=\dfrac{\sqrt{p^2-4q}}{\sqrt{4}}=\dfrac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

例七. $\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{4c}{a}}=\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{a^2}}=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$.

〔第三〕化低根指數〔公式(I),(V)之應用〕

例八. $\sqrt[6]{27}=\sqrt[2\times3]{3^3}=\sqrt{\sqrt[3]{3^3}}=\sqrt{3}$.

以上三法爲簡約根式之法.

注意一. 凡運算所得之結果爲根數者必簡約之.

與上三法相反之化法亦有重要者三種,舉之於下:

〔第四〕化高根指數〔公式(I),(V)之應用〕.

例九. $a=\sqrt{a^2}=\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[4]{a^4}=\cdots\cdots$.

例十. $\sqrt{3}=\sqrt{\sqrt[3]{3^3}}=\sqrt[2\times3]{3^3}=\sqrt[6]{27}$.

例十一. $\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{\sqrt[2]{7^2}}=\sqrt[3\times2]{7^2}=\sqrt[6]{49}$.

〔第五〕 化不同次根爲同次根〔第四之應用一〕

例十二. 化$\sqrt{3}$及$\sqrt[3]{7}$爲同次根數.

根指數一爲2,一爲3,其最小公倍數爲6由是

$$\sqrt{3}=\sqrt[2\times3]{3^3}=\sqrt[6]{27},$$

$$\sqrt[3]{7}=\sqrt[3\times2]{7^2}=\sqrt[6]{49}.$$

〔第六〕 以根號外之因數置於根號內〔第四及公式(I),(II)之應用〕.

例十三. $3\sqrt{5}=\sqrt{9}\sqrt{5}=\sqrt{9\times5}=\sqrt{45}.$

例十四. $2\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8\times4}=\sqrt[3]{32}.$

注意二. 第六之化法卽爲以有理數乘無理數法.

習題六十九

簡約以下各根數:

1. $\sqrt{50}$. 2. $\sqrt{125}$. 3. $\sqrt{25a^4b^2}$.

4. $\sqrt[3]{-8a^6b^2}$. 5. $\sqrt[3]{56}$. 6. $\sqrt[3]{320}$.

7. $\sqrt{98}$.　　8. $\sqrt{24}$.　　9. $\sqrt[3]{125}$.

10. $\sqrt{36a^3b^2}$.　　11. $\sqrt{\dfrac{c}{ab}}$.　　12. $\sqrt{\dfrac{7}{12}}$.

13. $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.　　14. $\sqrt[3]{\dfrac{51}{75}}$.

15. $\sqrt{\dfrac{2}{32}}$.　　16. $\dfrac{4\sqrt{7}}{5\sqrt{2}}$.

以下各題以其根號外之係數置之於根號內:

17. $12\sqrt{5}$.　　18. $3\sqrt[3]{10}$.

19. $4\sqrt{3}$.　　20. $6\sqrt{4}$.

以下各題以其不同次之根數化作同次之根數:

21. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$.　　22. $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{5}$.　　23. $\sqrt{9}$, $\sqrt[3]{12}$.

§ 122. 同次根數及其乘除法. 諸根數中根指數相同者曰同次根數 (Surds of the same order). 依前款〔第五〕, 凡不同次根數皆可化作同次根數.

從 § 120 公式 (II) 及 (III), 知二同次根數之積及商可求根號內數之積及商而不變其根指數. II $\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}$　III $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$

例一. $3\sqrt{2}\times 2\sqrt{6}=3\times 2\sqrt{2}\sqrt{6}=6\sqrt{2\times 6}$

$=6\sqrt{4\times 3}=6\times 2\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.

注意一. 以同次根數乘除,可以係數及底數各自乘除之.

例二. $2\sqrt{6}\div 3\sqrt{2}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{6}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

例三. $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{8}\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{8\times 4}=\sqrt[6]{32}$.

注意二. 多個根數之乘除可以依上法類推之.

例四. $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{2}\div\sqrt[3]{6}=\sqrt[6]{\frac{3^3\times 2^2}{6^2}}=\sqrt[6]{3}$.

§ 123. 同類根數及其加減法. 諸根數中有根號之部分完全相同者曰同類根數(Similar surds).

例如 $2\sqrt{3}$ 與 $4\sqrt{3}$ 爲同類根數.

又如 $\sqrt{54}=3\sqrt{6}$, $2\sqrt{24}=4\sqrt{6}$, 故 $\sqrt{54}$ 及 $2\sqrt{24}$ 亦爲同類根數.

諸同類根數可加減其係數而整列之.

例一。 $\sqrt{32}+\sqrt{50}=4\sqrt{2}+5\sqrt{2}=9\sqrt{2}$。

例二。 $8\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{135}-2\sqrt[3]{625}=8\sqrt[3]{8\times 5}$

$$+\sqrt[3]{27\times 5}-2\sqrt[3]{125\times 5}$$

$$=16\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{5}-10\sqrt[3]{5}$$

$$=9\sqrt[3]{5}.$$

§ 124. **共軛根數,消根因數。** 一數與一根數之和及差互爲共軛根數(Conjugate Surds).

例如 $a+\sqrt{b}$ 與 $a-\sqrt{b}$,或 $\sqrt{a}+b$ 與 $\sqrt{a}-b$,或 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 與 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 皆互相爲共軛數。

互相共軛二數之積爲有理數。

從乘法公式(III) (§ 93).

$$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-(\sqrt{b})^2=a^2-b,$$

$$(\sqrt{a}+b)(\sqrt{a}-b)=(\sqrt{a})^2-b^2=a-b^2,$$

及 $$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b,$$

故此語之真確可知。

二因數之積爲一有理數，則一因數爲他

一因數之消根因數.

例如 $a-\sqrt{b}$ 爲 $a+\sqrt{b}$ 之消根因數.

又 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 爲 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 之消根因數,等.

習題七十

以下各題簡約之:

1. $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$.
2. $\sqrt{5}\times\sqrt{10}$.
3. $\sqrt{20}\times\sqrt{30}$.
4. $(5\sqrt{6})^2$.
5. $\sqrt{6^7}\times\sqrt{6^5}$.
6. $\sqrt{9^{n+1}}\div\sqrt{9^{n-1}}$.
7. $\sqrt[3]{9x^2}\div\sqrt[3]{9x}$.
8. $2\sqrt{14}\times\sqrt{21}\times5\sqrt{6}$.
9. $\sqrt{a}\times\sqrt{\frac{x}{a}}$
10. $\sqrt{3}\div\sqrt[3]{2}$.
11. $\sqrt{7}\times\sqrt[3]{2}$.
12. $\sqrt{\frac{24}{35}}\times\sqrt{\frac{10}{21}}$.
13. $13\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{98}$.
14. $3\sqrt{45}-\sqrt{20}-7\sqrt{5}$.
15. $4\sqrt{63}+2\sqrt{7}-3\sqrt{28}$.
16. $\sqrt{44}-\sqrt{176}+2\sqrt{99}$.
17. $\sqrt{490}+4\sqrt{40}-4\sqrt{90}$.

18. $3\sqrt{5}+\sqrt{\frac{5}{4}}-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

以下各式求其消根因數:

19. $\sqrt{7}$.

20. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

21. $3\sqrt[3]{5}$.

22. $8+\sqrt{3}$.

23. $3\sqrt{5}-5\sqrt{2}$.

24. $3\sqrt{3}+5\sqrt{5}$.

25. $7\sqrt{2}+3$.

26. $3\sqrt{5}-7$.

27. $9-2\sqrt{14}$.

28. $5+2\sqrt{5}$.

§ 125. 複無理式之算法。

例一。 $\sqrt{5}(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})=\sqrt{10}-\sqrt{15}+5$。

例二。 $(1+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$。

$=3-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\cdot 2=\sqrt{2}-1$

例三。 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}-\sqrt{d})=\sqrt{ac}+\sqrt{bc}-\sqrt{ad}-\sqrt{bd}$.

例四。 $\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{8}}=\frac{2\sqrt{15}\sqrt{8}}{(\sqrt{8})^2}=\frac{4\sqrt{30}}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{30}$。

注意。 凡一分數之分母爲根數者，必以

分母之消根因數乘此分數之兩項，化成以有理數作分母之分數。

例五. $$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{c}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$

$$=\frac{\sqrt{ac}-\sqrt{bc}}{a-b}。$$

例六. $$\sqrt{3}\div(\sqrt{2}-1)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2-1}=\sqrt{6}+\sqrt{3}.$$

習　題　七　十　一

計算以下各題:

1. $(3\sqrt{5}+\sqrt{\frac{5}{4}}-\frac{2}{\sqrt{5}})\times\sqrt{10}.$

2. $(\sqrt{11}+\sqrt{3})(\sqrt{11}-\sqrt{3}).$

3. $(2+\sqrt{3})(5-\sqrt{3}).$

4. $(2\sqrt{13}+5\sqrt{2})(\sqrt{13}-\sqrt{2}).$

5. $(8+\sqrt{5})(2\sqrt{5}-3).$

6. $2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+5\sqrt{6})$

7. $(7\sqrt{2}-3\sqrt{3})^2$.

8. $(1+\sqrt{7}+\sqrt{8})(1-\sqrt{7}+\sqrt{8})$.

9. $(\sqrt{3x+5}+\sqrt{2x-8})^2$.

10. $(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})$.

11. $5\div(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

12. $11\div(3\sqrt{11}-5)$.

13. $\dfrac{20}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

14. $\dfrac{7}{3-\sqrt{2}}$.

15. $\dfrac{2\sqrt{7}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

16. $\dfrac{\sqrt{7}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}$.

17. $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$.

18. $\dfrac{5\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{7\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$.

19. 設 $x=2\pm\sqrt{2}$，求 x^2-4x+2 之值.

20. 設 $x=\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{5})$，求 x^2+3x+1 之值.

§ 126 虛數. 不論數之正負，其第二冪 -2 $(+2)$ 恆爲正數，故負數之平方根非正數亦非負數，$\sqrt{-2}$ 名之曰虛數(Imaginary Numbers).

例如 $\sqrt{-4}$ 爲虛數。因 $\sqrt{-4}=\sqrt{4(-1)}=2\sqrt{-1}$，故亦可記爲~~$3\sqrt{-1}$.~~

$2\sqrt{-1}$

慣例,慣用 i 表 $\sqrt{-1}$.

$= \sqrt{3}\sqrt{-1}$

例如 $\sqrt{-4}=2i$, $\sqrt{-3}=\sqrt{3}\,i$, 等.

以前所有之有理無理等數對於虛數而曰實數(Real Numbers).實數與虛數之和曰複(Complex Numbers).

為便利起見,可定 i 為虛單位,則任意虛 bi 可為虛單位 i 之實倍數。

注意。 $i^2=(\sqrt{-1})^2=-1$

§ 127 虛數之特性。

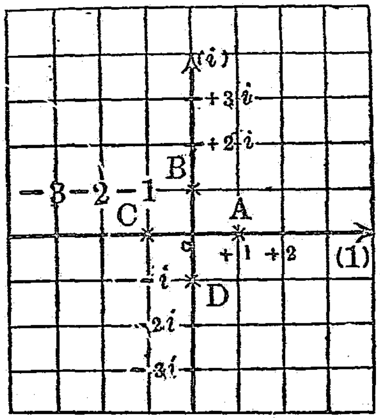
上已知 $i^2=-1$,

次, $i^3=i^2\times i=(-1)i=-i$,

又, $i^4=i^3\times i=(-i)i=-i^2=-(-1)$

$=+1$, 故得

公式: $\begin{cases} i=\sqrt{-1}=i, \\ i^2=(\sqrt{-1})^2=-1, \\ i^3=(\sqrt{-1})^3=-i, \\ i^4=(\sqrt{-1})^4=+1, \end{cases}$



如右圖,立互相垂直於0之縱橫二軸,定一線分單位量之,從0起,沿橫軸向右量得之數爲正,向左量得之數爲負,沿縱軸向上量得之數爲正,向下量得之數爲負。今定橫軸上之單位爲1,縱軸上之單位爲i,則B,C,D,A各點所表之數各爲i, $-1=i^2$, $-i=i^3$, $+1=i^4$.由是從圖觀察,可見B點所表之數i以i乘之得C點所表之數,即以B點繞0轉過一直角;由C至D亦然,由D至A亦然;以後更循環不已。此奇特之性爲虛數所獨具.

§ 128. **關於虛數之運算.** 虛數亦爲代數學中之數,故亦宜遵守形式不易律,亦當能以前所已有運算之法運算之。所宜注意者,在運算前宜先以各虛數記成i之倍數;在運算後宜用前款之公式代結果中i之冪數.

例一。 $\sqrt{-4}+\sqrt{-9}=2i+3i=5i.$

例二. $\sqrt{-4}-\sqrt{-9}=2i-3i=-i.$

例三。 $\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}=2i\times 3i=6i^2$

$=6\times(-1)=-6.$

例四。 $\sqrt{-4}\div\sqrt{-9}=2i\div 3i=\frac{2}{3}.$

注意。 例三之乘法若用無理數之乘法,如

$$\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}=\sqrt{(-4)\times(-9)}=\sqrt{36}=6,$$

卽得錯誤之結果。

習題七十二

簡約以下各式:

1. $\sqrt{-36}-\sqrt{-1}+2\sqrt{-4}.$
2. $(4+\sqrt{-3})(4-\sqrt{-3}).$
3. $(5+2\sqrt{-2})(5-2\sqrt{-2}).$
4. $\{3-5\sqrt{-1}\}^2.$
5. $(\sqrt{-m}+\sqrt{-n})(\sqrt{-m}-\sqrt{-n}).$
6. $\sqrt{-8}\times\sqrt{-2}.$

7. $1\div\sqrt{-1}$.

8. $\sqrt{-15}\div\sqrt{-3}$.

9. $\sqrt{15}\div\sqrt{-3}$.

10. $(2\sqrt{3}-4\sqrt{-5})(3\sqrt{3}-2\sqrt{-5})$.

11. 設 $x=\sqrt{-3}$,求 x^2+9 之值。

12. 設 $x=3+2\sqrt{-1}$,求 $x^2-6x+14$ 之值。

習題七十三

1. 何謂無理數?何謂有理數?何謂根數?

2. 不盡根數夾於二羣有理之間,試求夾$\sqrt{3}$之二羣有理數。

3. 試列舉關於根數之公式。

4. 根數之化法共有幾種?試分條列舉之。

5. 何謂同次根數?何謂同類根數?

6. 述根數之加減法。

7. 述根數之乘除法。

8. 述無理多項式之四則。

9. 何謂共軛根數?何謂消根因數?

10. 分數之分母爲無理式者,用何法化之可使分母爲有理?

11. 何謂虛數?何謂實數?何謂複數?

12. 試舉關於虛數之公式及特性。

13. 述虛數之四則.

第十二章　二次方程式之續

§129. 一元二次方程式之解法(二)：分解因數法.

例一. 解方程式 $x^2-6x=0$.

以左節分解因數，得 $x(x-6)=0$,

二因數 x 及 $x-6$ 之積為 0，則二因數中至少有一因數為 0，故 $x=0$, 或 $x-6=0$,

由是所求之根為 $x=0$, 及 $x=6$, (學者當自行驗之).

例二. 解方程式 $2x^2+5x-3=0$.

左節分解因數，得 $(2x-1)(x+3)=0$,

由是 $2x-1=0$, 或 $x+3=0$,

即 $x=\frac{1}{2}$, 及 $x=-3$. (學者自驗之).

例三. 解 $3(x-1)^2=2(x^2-1)$.

移項， $3(x-1)^2-2(x^2-1)=0$,

左節分解因數， $(x-1)\{3(x-1)-2(x+1)\}=0$,

即 $(x-1)(x-5)=0$.

故得 $x=1$, 及 $x=5$. (學者自驗之).

習題七十四

用因數分解法解下之方程式:

1. $x^2+7x=0$.
2. $2x^2=5x$.
3. $x^2-25=0$.
4. $x^2-12x+35=0$.
5. $x^2+6x-16=0$.
6. $2x^2-5x+2=0$.
7. $x^2+(m+n)x+mn=0$.
8. $x^2-4=x+2$.
9. $x^2-a^2=m(x-a)$.
10. $m(x^2-1)=nx(x+1)$.

§ 130. 一元二次方程式根之公式. 凡一元二次方程式移項整列以後可歸於普偏形式.

$$ax^2+bx+c=0,\ (a\neq0)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

以 x^2 係數之4倍 $4a$ 乘之,得

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0,$$

移項, $$(2ax)^2+2(2ax)b=-4ac,$$

兩節加 b^2,得 $$(2ax)^2+2(2ax)b+b^2=b^2-4ac,$$

即 $$(2ax+b)^2=b^2-4ac,$$

兩節開平方,得 $$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac},$$

故 $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

是爲方程式(1)根之公式.設(1)之二根爲α,β,則(2)

可分爲　$\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$ (2′)

注意. 以 a 除(1),可得 $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$,

設 $\dfrac{b}{a}=p,\ \dfrac{c}{a}=q$ 則(1)爲 $x^2+px+q=0$,............(3)

$x^2+px+\frac{p^2}{2}=\frac{p^2}{4}-q$

由是(2)可爲　$x=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}$,............(4)

卽　$\alpha=-\dfrac{p}{2}+\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}$ 及 $\beta=-\dfrac{p}{2}-\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}$, (4′)

所設方程式之形式若如(3),則用(4)或(4′)作根之公式。

次畧示應用此公式之解法:

例一. 解方程式 $3x^2-4x-32=0$。

以此與公式(1)比較,得　$a=3,\ b=-4,\ c=-32$,由是從公式(2),得

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times3\times(-32)}}{2\times3}=\frac{4\pm\sqrt{400}}{6}=\frac{4\pm20}{6},$$

故二根爲　$\alpha=\dfrac{4+20}{6}=4,\quad \beta=\dfrac{4-20}{6}=-\dfrac{8}{3}.$

(學者自驗之)。

例二. 解方程式 $5x^2-15x+11=0$。

與公式(1)比較，得 a,b,c 各爲 $5,-15,11$，故

$$x=\frac{-(-15)\pm\sqrt{(-15)^2-4\times5\times11}}{2\times5}=\frac{15\pm\sqrt{5}}{10}.$$

驗。 $5x^2-15x+11=5\left(\frac{15\pm\sqrt{5}}{10}\right)^2$

$$-15\left(\frac{15\pm\sqrt{5}}{10}\right)+11$$

$$=\frac{1}{20}[225\pm30\sqrt{5}+5-30(15\pm\sqrt{5})+220]$$

$$=\frac{1}{20}[0]=0。$$

例三。 解方程式 $5x^2-6x+5=0$。

與公式(1)比較，得 a,b,c 各爲 $5,-6,5$，故

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times5\times5}}{2\times5}=\frac{6\pm\sqrt{-64}}{10}=\frac{6\pm8i}{10}=\frac{3\pm4i}{5}$$

驗。 $5x^2-6x+5=5\left(\frac{3\pm4i}{5}\right)^2-6\left(\frac{3\pm4i}{5}\right)+5$

$$=\frac{1}{5}[9\pm24i-16-6(3\pm4i)+25]=0。$$

例四。 解方程式 $2x^2-(a-2b)x-ab=0$。

公式(1)中之 a,b,c 在本題中各爲 $2,-(a-2b),-ab$，

故從公式(2)，得 $x=\frac{a-2b\pm\sqrt{(a-2b)^2-4\times2\times(-ab)}}{2\times2}$

$$=\frac{a-2b\pm(a+2b)}{4},$$

即 $x=\frac{a-2b+(a+2b)}{4}=\frac{a}{2}$, 及 $x=\frac{a-2b-(a+2b)}{4}=-b$.

驗. $x=\frac{a}{2}$時, 原式左節 $=2\left(\frac{a}{2}\right)^2-(a-2b)\left(\frac{a}{2}\right)-ab=0$,

$x=-b$ 時, 原式左節 $=2(-b)^2-(a-2b)(-b)-ab=0$.

習題七十五

用根之公式解以下各方程式:

1. $x^2-3x=10$.
2. $3x^2-4x=55$.
3. $110x^2-21x+1=0$.
4. $3x^2+5x=22$.
5. $2x^2+5x=18$.
6. $-3x^2+5x=-2$.
7. $x^2+3x+3=0$.
8. $x^2-3=\frac{1}{6}(x-3)$.
9. $x(16x+5)-3=7x^2-(x-45)$.
10. $9x^2-24x+16=0$.
11. $4x^2-11x=42$.
12. $(3x-5)(7x-8)=140$.
13. $4x^2-5=2\sqrt{5}\,x$.
14. $3(13-x)=417-5x^2$.
15. $(2x+1)^2+(3x+1)^2=(2x+3)^2$.
16. $\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}=2(x+2)$.

17. $x^2-2(1+\sqrt{2})x+2\sqrt{2}=0.$

18. $5x(x-3)-2(x^2-6)=(x+3)(x+4).$

19. $(x-2)(x-4)-2(x-1)(x-3)=0.$

20. $\frac{2}{5}(3x^2-x-5)-\frac{1}{3}(x^2-1)=2(x-2)^2.$

21. $bcx^2+(b^2+c^2)x+bc=0.$

22. $(b^2-a^2)(x^2+1)=2(a^2+b^2)x.$

23. $(a-x)(b-x)=2(a-b)^2.$

24. $mx^2-1=\frac{x(m^2-n^2)}{mn}$。

§ 131. 應用問題(雜題)。

例一。 一矩形之地面,面積爲288平方里,底比高長2里.求其底及高.

設此矩形底長 x 里,則高長 $x-2$ 里,而面積爲 $x(x-2)$ 平方里.從題,得

$$x(x-2)=288, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

即 $$x^2-2x-288=0,$$

$(x-18)(x+16)=0$

解之,得 $$x=18 \text{ 及 } x=-16,$$

$x=18$,則 $x-2=16$,卽底長18里,高長16里;

$x=-16$ 不合理棄之.

若解題時設高長 x 里,則底長 $x+2$ 里,而

得方程式　　$x(x+2)=288,$ ………………(2)

$x^2+2x-288=0$　$(x+18)(x-16)=0$

此式之二根爲　$x=-18$, 及 $x=16$,

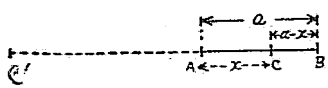
與(1)之二根正負號適相反. 故(1)之負根從立式方面得來可知。

例二。一線分AB長a尺, 分之於C點, 令大分AC上之正方形與小分CB及全線AB所包矩形之面積相等. 求C與A之距離。

注意。C點如此分線分AB之法曰黃金分法, 爲幾何學中著名之一作圖題。

設AC之長爲x尺,

則CB之長當爲$a-x$尺,



由是AC上正方形之面積爲x^2平方尺, CB與AB所包矩形之面積爲$a(a-x)$平方尺; 依題意

$AC^2 = AB \times BC = AB \times (AB - AC)$

可得方程式　　$x^2=a(a-x)$ $= a \times (a-x)$

卽　　$x^2+ax-a^2=0,$

此式之二根爲　$\alpha=\dfrac{-a+\sqrt{5a^2}}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}a,$ (正根)

及　　$\beta=\dfrac{-a-\sqrt{5a^2}}{2}=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a.$ (負根)

此中正根表C爲AB之內分點,負根表C爲AB之外分點,如C′.C與A之距離爲$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}a$尺,C′與A之距離爲$-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}a$尺。

習題七十六

$(15+2x)(20+2x)-15\times20=156$　$x=2$步

1. 一矩形地面,長15步,寬20步,外圍一等寬之路其面積爲156平方步,求此路之寬。

2. 一長方鏡,長33寸,寬22寸,周圍附一等寬之緣,
$(33+2x)(22+2x)-22\times33=33\times22$　$x=5.5$寸
鏡及緣之面積相等,求緣之寬。

3. 一人貸出銀1500圓,一年後收回本利,用去40
$\{1500(1+\frac{x}{100})-40\}(1+\frac{x}{100})=1643$　$x=6$厘
圓,再以前之利率貸出其餘銀,又一年後得本利和1643圓.求年利率。

4. 一人貸出銀3000圓,一年後收回本利,用去其$\frac{1}{3}$
$3000(1+\frac{x}{100})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{x}{100}+\frac{1}{100})=2184$　$x=4$厘
餘銀以比前加高$\frac{1}{100}$之利率貸出,更歷一年,收回本利和2184圓,求初次貸出時之年利率。

5. 一酒桶,容酒2石2斗5升,從此中汲出若干升以水補之,再汲出同量之混合液以水補之,桶中所餘之酒爲原有之64%,求每次汲出酒之升數。
$x=45$升

6. 有酒水混合液一石,此中加酒一石所得酒水

$x=$ 酒升數　$\frac{100+x}{100-x}=2\times\frac{x}{100-x+100}$　$\therefore x=5\pm\sqrt{-27500}$

之比爲加水一石所得酒水比之 2 倍。求原混合液中所有酒及水之升數。

7. 線分 AB 長 3 尺，分之於 P 點，令 AP 上正方形面積之 2 倍等於 AB, BP 所包矩形之面積，求 BP 之長。

$2(3-x)^2=3x$　$\therefore x=6, \frac{3}{2}$

8. 正方形 $BCDE$ 上戴一二等邊三角形 ABE，從 A 至 CD 之距離長 h 尺，其面積爲 s 平方尺。求正方形每邊長之尺數。

$\frac{1}{2}x(h-x)+x^2=s$　$hx-x^2+2x^2=2s$

$x^2+hx=2s$　$x^2+hx+(\frac{h}{2})^2=\frac{h^2}{4}+2s$

$(x+\frac{h}{2})^2=\frac{8s+h^2}{4}$　$x+\frac{h}{2}=\pm\sqrt{\frac{8s+h^2}{4}}$

$x=-\frac{h}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{8s+h^2}$

9. 一直角三角形周圍長60寸，斜邊長20寸。求他二邊之長。

$60-20=40$　$x^2+(40-x)^2=20^2$　$x=20\pm\sqrt{-2}$

10. 兩地相去120里，甲乙二人各從一地同日起程相向而行，甲比乙每日多行4里，而二人從起程至相會所需之日數等於甲每日所行里數之半。求二人每日所行之里數。

x 為乙所行之里數　$x+4$ 為甲所行之里數

$\frac{120}{x+x+4}=(x+4)\times\frac{1}{2}$　$x=8$

11. 以 20 分作二部分，令二分之積爲 150. 求各分之數。

$x(20-x)=150$　$x=10\pm5\sqrt{-2}$

注意。 凡解題而得複數者，題之各方面無一可以合理。

12. 一軍隊進行，其側面比前列多14人，至達於前敵時以軍隊展開，前列增828人而側面爲5人。求此軍隊中之人數。

$x(x+14)=5(x+828)$

$x=60$

$60(60+14)$

§ 132. 根之討論.

方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

此中因根號下之式 b^2-4ac 比 0 大(卽爲正),或等於 0,或比 0 小(卽爲負),而 α,β 之値爲種種之數.今舉之於下:

[I] $b^2-4ac>0$ 時:二根爲實數而不等;

(1) $ac>0$,則 $\sqrt{b^2-4ac}$ 比 b 之絕對值小,故二根有同號;

(2) $c=0$,則 $\sqrt{b^2-4xc}$ 等b於之絕對值,故 $\alpha=0$ 而 $\beta=-\dfrac{b}{a}$;

(3) $ac<0$,則 $\sqrt{b^2-4ac}$ 比 b 之絕對值大,故二根有異號.

[II] $b^2-4ac=0$ 時:二根爲實數而相等,卽 $\alpha=\beta=-\dfrac{b}{2a}$.

[III] $b^2-4ac<0$ 時:二根爲虛數而不等.

此數事極其重要;今再更端述之:

〔第一〕 方程式有實根者: $b^2-4ac \geqq 0$.

〔第二〕 方程式有虛根者: $b^2-4ac<0$.

〔第三〕 方程式二根爲同號之實數者:

$$b^2-4ac>0,\quad ac>0.$$

〔第四〕 方程式二根爲異號之實數者:

$$b^2-4ac>0,\quad ac<0.$$

〔第五〕 方程式有等根者: $b^2-4ac=0$.

方程式根之性質用 b^2-4ac 可判別之, 故 b^2-4ac 名爲方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之判別式 (Discriminant).

例一. 就方程式 $3x^2+6x-13=0$ 判別其根之性質.

此方程式之判別式爲

$$6^2-4\times3\times(-13)=192>0,$$

又首項係數及末項之積爲 $3(-13)=-39<0$,

故方程式之二根爲異號之實數.

例二. 就方程式 $bx^2-(b-c)x-(b+c)=0$ 判

別其根之種類.

判別式爲 $(b-c)^2-4b[-(b+c)]=(b+c)^2+4b^2>0$, 故二根皆爲實數.

例三. 就方程式 $(a^2+ab+b^2)x^2-2(a^2-b^2)x+a^2-ab+b^2=0$ 判別其根之種類.

判別式爲 $(a^2-b^2)^2-(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
$=-3a^2b^2$,

故若 a 與 b 皆不爲 0, 則此式之值爲負而所設方程式之二根均爲虛數. 若 a 或 b 爲 0, 則此方程式有等根.

習題七十七

判別以下各方程式根之種類:

1. $12x^2+7x-10=0$. 2. $7x^2-4x+3=0$.
3. $4x^2-12x+9=0$.
4. $x^2-(4a-2b)x+3a^2-8ab-3b^2=0$.
5. $(a^2-b^2)x^2-2a^2bx+a^2b^2=0$.
6. $(b^2-4ac)x^2+4(a+c)x-4=0$.
7. $a^2x^2+2abx+b^2=0$.
8. $x^2+2(p+q)x+2(p^2+q^2)=0$.

9. 方程式$3x^2-8x+c=0$有等根,則c之值若何?

10. 方程式$x^2+2(1+k)x+2(1+k^2)=0$有等根,則k之數值若何?

§ 133. 一元二次方程式根及係數之關係

從 § 130, 知方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 之二根爲 α,β, 則

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

由是 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$　　$\alpha\beta=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$。

$\alpha=\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\beta=\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\alpha+\beta=2\times\frac{-b}{2a}$

$\alpha\beta=\left(\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b}{2a}-\ldots\right)$

$=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

$=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}$

公式:
$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\\ \alpha\beta=\frac{c}{a}.\end{cases}$$

若α,β爲二次方程式$x^2+px+q=0$之二根,則

公式:
$$\begin{cases}\alpha+\beta=-p,\\ \alpha\beta=q.\end{cases}$$

例一. 以二個已知數m,n爲二根作方程式.

從公式,知所求之方程式爲

$$x^2-(m+n)x+mn=0。$$

例二. 從視察法見出方程式 $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$ 之二根.

因 $x=1$ 時方程式左節之值爲 0, 故知 $x=1$ 爲所求之一根.

$1+\frac{b-c}{a-b}+\frac{c-a}{a-b}=0$　$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$　$\alpha\beta=\frac{c-a}{a-b}$　$\alpha\beta=\frac{c}{a}$　$\therefore \alpha=1$　$\therefore \beta=\frac{c-a}{a-b}$

又因二根之積爲 $\frac{c-a}{a-b}$, 故所求之第二根爲 $\frac{c-a}{a-b}$.

例三. 作一新方程式, 令其二根各爲方程式 $ax^2+bx+c=0$ 二根之平方.

所設方程式之二根爲 α, β, 則

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\ =\frac{c}{a},$$

從題意知新方程式中:

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

二根之和爲　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-\frac{b}{a})^2-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2},$

二根之積爲　$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(\frac{c}{a})^2=\frac{c^2}{a^2},$

故新方程式爲　$x^2-\frac{b^2-2ac}{a^2}x+\frac{c^2}{a^2}=0.$

卽　$a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0.$

習題七十八

不許解下之方程式而求其二根之和及積:

1. $x^2-11=0$.　　　2. $3x^2+5x-1=0$.

作一二次方程式令其二根爲下列各題中之二數:

3. $-5, +3$.　　　4. $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}$.　　　5. $\pm\sqrt{5}$.

6. $3\pm\sqrt{7}$.　　　7. $5\pm 2i$.　　　8. $3n, -2n$.

9. $-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}$.　　　10. $\dfrac{1}{m}, \dfrac{1}{n}$.

11. 設α,β爲方程程$x^2-x+3=0$之二根,求$\alpha^2+\beta^2$及$\alpha^3+\beta^3$之數值.

12. 方程式$ax^2+bx+c=0$之二根爲α,β,證下式:

$$\alpha^3+\beta^3=-\frac{b^3-3abc}{a^3}.$$

用視察法解下諸方程式:

13. $x(x+1)=7\times 8$.

14. $a(x^2+1)-x(a^2+1)=0$.

15. $(x-5)(x-6)=(a-5)(a-6)$.

16. $(x+a)(1-a^2)=2a(1-x^2)$.

17. 作一新方程式令其二根各爲方程式$x^2+px+q=0$二根之平方.

18. 作一新方程式令其二根各爲方程式$ax^2+bx+c=0$二根之逆數.

19. 作一新方程式令其二根各爲方程式$2x^2-5x-7=0$二根之3倍.

20. 方程式 $x^2+px+q=0$ 之一根爲他一根之 $\frac{2}{3}$，則 $6p^2=25q$. 證之.

§134. 解方程式時所宜注意之事. 方程式之解法原於§32之四個普通公理，然在應用公理III,IV時有宜注意者二事:

〔第一〕方程式之兩節若以含未知數之整式除之，宜防減少方程式之根.

例如　$3(x-1)^2=2(x^2-1)$ 兩節以 $x-1$ 除之得 $3(x-1)=2(x+1)$，此新方程式之根爲 $x=5$，然原方程式之根爲 $x=1$ 及 $x=5$ (視§129例三)，卽新方程式比原方程式少去 $x=1$ 之一根矣.

〔第二〕方程式之兩節若以含未知數之整式乘之，宜防增出假根.

例如　$3(x-1)=2(x+1)$ 之根爲 $x=5$，若兩節皆以 $x-1$ 乘之，得 $3(x-1)^2=2(x^2-1)$，其根爲 $x=5$ 及 $x=1$，卽增出 $x=1$ 之一根.

總之，方程式之兩節不宜以0乘或除之.包含未知數之一式未能決定其決不等於0，故以

此乘除方程式之兩節，宜防有增根或減根之事發生，

以包含未知數之一式乘或除方程式之兩節，此事可避自宜避去，如不能避，則已解後宜加審察。

§ 135. **分數方程式.** 分數方程式之解法有二，§114中已詳言之矣；其中第二法較第一法爲便利，故學者皆喜用之，其實第一法爲根本之法，如一題用二法解之，其所得二種解答有矛盾時，當用第一法之解答。

例. 解方程式$\frac{x^2-11x}{x^2-1}+2+\frac{5}{x-1}=0$。

〔第二法〕諸分母之最小公倍數爲x^2-1....(1)

以乘方程式之各項，得

$$x^2-11x+2(x^2-1)+5(x+1)=0,$$

即

$$3x^2-6x+3=0,$$

$$x^2-2x+1=0$$

此式之二個根皆爲　$x=1$,

以此代入(1)中其值爲0，故$x=1$非所設方程式之根。

〔第一法〕原方程式左節

$$=\frac{3x^2-6x+3}{x^2-1}=\frac{3(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{3(x-1)}{x+1},$$

故得 $$\frac{3(x-1)}{x+1}=0,$$

令分子等於 0 而解之，得 $x=1$，此爲原方程式之根.

於此可見用二法可得二種互相矛盾之結果. 所以如此者，以先賢於已有一法後更定他法時思慮疏忽未曾計及能有如此矛盾之事發生而然，今則約定俗成，廢之既不可，更之亦不易矣；學者但信用第一法可也(視前款).

§ 136. 應用問題(雜題).

例一. 銀144圓，若干人等分之，恰盡；若人數少 2 人則各人所得可多 1 圓. 求人數.

設人數爲 x，則各人得 $\frac{144}{x}$ 圓；人數少 2 則爲 $x-2$ 人，此時各人可得 $\frac{144}{x-2}$ 圓；故從題意得

方程式 $$\frac{144}{x-2}=\frac{144}{x}+1, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

144 144 1 − 0

卽
$$\frac{x^2-2x-288}{x(x-2)}=0,$$
從 $x^2-2x-288=0$, 得 $x=18$ 及 $x=-16$,

因人數當爲正整數, 故得 18 人.

注意. 以題中第二事改作"若人數多 2 人則各人所得少 1 圓", 則可得方程式
$$\frac{144}{x}=\frac{144}{x+2}+1,$$
此式之二根爲 $x=-18$ 及 $x=16$, 與(1)二根之號適相反.

例二. 一旅人以每時 1 哩之速度從甲地向遠隔 8 哩之乙地而行, 行 1 時後, 一馬車亦從甲地開向乙地而來, 至馬車追及此人, 此人卽乘馬車而行, 計此人共費 5 時而達乙地. 求馬車每時之速度.

設馬車每時速 x 哩, 馬車起程時此人已先行 1 哩, 故馬車追及此人費 $\frac{1}{x-1}$ 時, 此時旅人已行 $1+\frac{1}{x-1}$ 時, 卽已行 $1+\frac{1}{x-1}$ 哩, 離乙地尚有 $8-\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$ 哩, 卽 $7-\frac{1}{x-1}$ 哩, 馬車行之須 $\frac{7-\frac{1}{x-1}}{x}$ 時,

卽 $\frac{7}{x}-\frac{1}{x(x-1)}$ 時．此人於未上馬車前行 $1+\frac{1}{x-1}$ 時,既上馬車後又行 $\frac{7}{x}-\frac{1}{x(x-1)}$ 時,而前後共費 5 時,故得方程式

$$1+\frac{1}{x-1}+\frac{7}{x}-\frac{1}{x(x-1)}=5, \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

卽
$$\frac{4x(x-1)-x-7(x-1)+1}{x(x-1)}=0,$$

卽
$$\frac{4(x-2)(x-1)}{x(x-1)}=0,$$

約分,
$$\frac{4(x-2)}{x}=0,$$

故得 $x=2$, 卽馬車每時速 2 哩。

注意。以(1)去分母解之,可得 $x=2$, 及 $x=1$, 此 $x=1$ 之一根與問題毫無關係．從算術方法觀之,馬車於 $5-1$ 時卽 4 時中行路 8 哩,則每時行路確爲 2 哩可知．

習題七十九

解以下各方程式:

1. $\frac{x-1}{x-4}-\frac{x-3}{x-2}=\frac{11}{12}$.　　2. $\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+2}=\frac{3}{5}$.

3. $\frac{3}{2(x^2-1)}-\frac{1}{4(x+1)}=\frac{1}{8}$.　　4. $\frac{x}{x^2-1}=\frac{15-7x}{8(1-x)}$.

5. $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{x}=\frac{14}{x+4}$.

6. $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{2x-1}{x-1}$.

7. $\frac{3x}{x+2}+\frac{3}{x}=\frac{14}{x+4}$.

8. $\frac{1}{x^2-3x}+\frac{1}{x^2+4x}=\frac{9}{2x^2}$.

9. $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{5x-11}{x-1}$.

10. $\frac{3x^2+x}{(3x+1)(x+1)}-1+\frac{x}{1+x}=0$.

11. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{x}{b}+\frac{b}{x}$.

12. $\frac{a}{a+x}+\frac{a}{a-x}=4$.

13. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

14. $\frac{a^2}{x-b}+\frac{b^2}{x-a}=a+b$.

15. $\frac{1}{x+a+b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

16. $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{a-c}{x+a-c}+\frac{b+c}{x+b+c}$.

17. 多人聚餐,餐費20圓,一客不出費,衆人等分而代出之,則比人皆出費時每人多出銀一圓,求人數.

18. 一水槽,上有甲乙二水管可注水於其中,若僅用甲管注滿一槽之水,比僅用乙管可少費6時;兩管齊開則四時而槽滿。求獨用一管注水滿槽各需幾時。

19. 一商人出銀150圓買入嗶嘰若干尺,以每尺1圓5角之價賣之,所獲之利等於24尺之原價。求其買入之尺數。

20. 一舟人每時之航力爲4里,航舟於一川中,川長12里,往返共費8時。求此川每時之流速。

21. 一事,甲獨作之,可比乙獨作早成十日,二人合作此事則十二日可成。求各人獨作此事所需之日數。

22. 一人出銀216圓買得米若干袋,若米之市價每袋貴1圓,則此圓數當少買3袋。求此人所買米有幾袋。

23. 白糖七斤之價比赤砂糖7斤之價貴21分,一人買此二種糖各出價銀2圓4角,所買得白糖比赤砂糖少4斤。求赤砂糖七斤之價。

24. 甲乙二行人;每時所行之路共爲5哩,而甲行1哩之時刻比乙行1哩之時刻少10分。求各人每時所行之路。

25. 甲乙二人共作一工,若干日而成;若以此事$\frac{1}{5}$合甲獨作,則所費日數比合力作全事之日數少2日;又若以此事$\frac{1}{5}$合乙獨作,則所費日數比共作全事日數多2日。

求二人合力作成此事之日數.

26. 銀A圓,若干人等分之,恰盡無餘;若人數少n人,則各人可多得a圓.求各人所得之圓數.

27. 一人以銀s圓買某物若干件,留下n件,餘以每件a圓之價賣之,獲利d圓.求其買入之件數.

28. 甲從東地行向西地,同時乙從西地行向東地,至相會時甲比乙多行a里;嗣後甲行c^2時而達西地,乙行d^2時而達東地.求東西兩地相距幾里.

§ 137. **無理方程式.** 方程式中有含未知數之根式者曰**無理方程式**(Irrational Equations).

從有理式所成之方程式,對於無理方程式而言,特名曰**有理方程式**(Rational Equations).

無理方程式之解法由如下之公理而來:

公理V: 等數之平方相等.

注意一. 為便利起見,假定根式僅表正根.

例一. 解方程式 $2x-\sqrt{x^2-3x-3}=9$,

移項, $$2x-9=\sqrt{x^2-3x-3},\cdots\cdots(1)$$

兩節平方之, $$4x^2-36x+81=x^2-3x-3,\cdots\cdots(2)$$

移項,以 3 除之, $x^2-11x+28=0,$

$(x-7)(x-4)=0$

故得 $x=7$, 及 $x=4$。

$$\text{驗.}\begin{cases} x=7,\text{則}\ 2x-\sqrt{x^2-3x-3}=14-\sqrt{49-21-3} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad =14-5=9. \\ x=4,\text{則}\ 2x-\sqrt{x^2-3x-3}=8-\sqrt{16-12-3} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad =8-1=7\neq 9. \end{cases}$$

故 $x=7$ 爲原方程式之根而 $x=4$ 爲增出之假根,

今考察此假根 $x=4$ 從何而來:吾人試以(1)

移項,得 $2x-9-\sqrt{x^2-3x-3}=0,$

此式左節以其消根因數 $2x-9+\sqrt{x^2-3x-3}\cdots(3)$

$(2x-9)^2=x^2-3x-3$

乘之,得 $(2x-9)^2-(x^2-3x-3)=0,$

此方程式卽爲以(2)移項所得之式. 從§134〔第二〕,可知假根 $x=4$ 當從(3)式之值等於 0 而得. 驗之;

$x=4$ 時, $2x-9+\sqrt{x^2-3x-3}$

$$=8-9+\sqrt{16-12-3}=-1+1=0,$$

可知此言不謬. 故:

用普通公理(V)以無理方程式兩節去根號,

同於移方程式各項於一節中而以其消根因數乘之，即於不知不覺間已造一增出假根之機會；故解無理方程式已得解答之後，宜以諸解答各自代入原方程式中視適合與否以驗其真假.

例二. 解方程式 $\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}-2=0$.

移項, $\sqrt{2x+8}=2(\sqrt{x+5}+1)$,

平方之, $2x+8=4x+24+8\sqrt{x+5}$,

再移項,以 2 除之, $-x-8=4\sqrt{x+5}$,

再平方之, $x^2+16x+64=16(x+5)$,

故得 $x^2=16$, 而 $x=4$ 及 $x=-4$.

驗: $\begin{cases} x=4\text{時}, \sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}-2=\sqrt{16}-2\sqrt{9} \\ \qquad -2=4-6-2=-4; \neq 0 \\ x=-4\text{時}, \sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}-2=\sqrt{0}-2\sqrt{1} \\ \qquad -2=-2-2=-4. \neq 0 \end{cases}$

故知 $x=4$ 及 $x=-4$ 皆非真根而原方程式無根.

注意一. $x=4$ 爲方程式 $+\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}+2=0$ 之根, $x=-4$ 爲方程式 $\sqrt{2x+8}+2\sqrt{x+5}$

$-2=0$ 之根；就此二方程式左節合之 $\sqrt{2x+8}+2\sqrt{x+5}+2$ 爲原方程式左節之消根因數。

例三. 解方程式 $x^2+3x+3\sqrt{x^2+3x-2}=6$.

吾人留意此方程式中根號外包含之兩項恰與根號內包含 x 之兩項相同，故可從此方程式兩節減2，得 $\quad x^2+3x-2+3\sqrt{x^2+3x-2}=4,$

令 $$\sqrt{x^2+3x-2}=y \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

則上之方程式可化成 $\quad y^2+3y=4,$

解之，得 $$y=1 \text{ 及 } y=-4,$$

從(1)，即得 $\sqrt{x^2+3x-2}=1$ 及 $\sqrt{x^2+3x-2}=-4,$

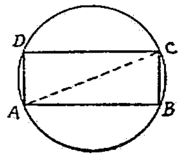
然從注意一，知此第二式不合用，故由第一式用公理(V)，得 $$x^2+3x-2=1,$$

解之，得 $$x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}.$$

驗： $$x^2+3x+3\sqrt{x^2+3x-2}=\frac{30\mp 6\sqrt{21}}{4}$$
$$+\frac{-9\pm 3\sqrt{21}}{2}+3\sqrt{\frac{30\mp 6\sqrt{21}}{4}+\frac{-9\pm 3\sqrt{21}}{2}-2}$$
$$=\frac{12}{4}+3\sqrt{\frac{12}{4}-2}=3+3\times 1=6.$$

§ 138. 應用問題(幾何雜題).

例. 一矩形內接於半徑 a 寸之圓,矩形之面積爲 s 平方寸,求此矩形之底及高.



如右圖,矩形之對角線AC爲圓之直徑,其長爲 $2a$ 寸.三角形ABC爲直角三角形,故其一邊AB之長設爲 x 寸,則其又一邊BC之長當爲 $\sqrt{4a^2-x^2}$ 寸,而矩形之面積爲 $x\sqrt{4a^2-x^2}$ 平方寸,由是從題意可得方程式

$$x\sqrt{4a^2-x^2}=s,$$

平方之, $$x^2(4a^2-x^2)=s^2,$$

就 x^2 解之,得 $$x^2=2a^2\pm\sqrt{4a^4-s^2},\cdots\cdots\cdots(1)$$

$x^2 = 2a^2 \pm \sqrt{4a}$

欲 x^2 之值爲實數,不可不 $4a^4-s^2\geqq 0$, 卽 $4a^4\geqq s^2$, 故必當 $$2a^2\geqq s,\cdots\cdots\cdots(2)$$

否則 x^2 爲虛數而問題不能成立.若(2)成立,則 $\sqrt{4a^4-s^2}$ 顯然比 $2a^2$ 小,而 x^2 之二值均爲比 $4a^2$ 小之正數,故以(1)兩節開平方,卽得

$$x=\pm\sqrt{2a^2\pm\sqrt{4a^4-s^2}},$$

x之負根不可用,棄之,得矩形之底及高爲

$\sqrt{2a^2+\sqrt{4a^4-s^2}}$寸及$\sqrt{2a^2-\sqrt{4a^4-s^2}}$寸.

注意。 s之數值極大,即s^2之數值極大時僅能$s^2=4a^4$,此時$x=\sqrt{2a^2}$,卽矩形之底及高均爲$\sqrt{2a^2}$寸而爲正方形,故內外接於圓而面積極大之矩形爲正方形。

習題八十

解以下各方程式且驗之:

1. $\sqrt{13+x}+\sqrt{13-x}=6.$

2. $\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\dfrac{2}{3}.$

3. $x+\sqrt{x+5}=7.$

4. $2\sqrt{5+2x}-\sqrt{13-6x}=\sqrt{37-6x}.$

5. $2\sqrt{x^2-2x+1}+x^2=23+2x.$

6. $9\sqrt{x^2-9x+28}+9x=x^2+36.$

7. $2x^2+6x=226-\sqrt{x^2+3x-8}.$

8. $\sqrt{x+9}=2\sqrt{x}-3.$

9. $\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x}.$

10. $5\sqrt{1-x^2}+5x=7.$

11. $\sqrt{3x-3}+\sqrt{5x-19}=\sqrt{2x+8}.$

12. $\sqrt{x+20}-\sqrt{x+4}=2\sqrt{x+11}.$

13. $\sqrt{x+7-\sqrt{5(x-2)}}=3.$

14. $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2+x}=a+b.$

15. $\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a-b}.$

16. $\dfrac{x+\sqrt{12a^2-x}}{x-\sqrt{12a^2-x}}=\dfrac{a+1}{a-1}.$

17. $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\dfrac{a}{x}.$

18. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=8\sqrt{x^2-1}.$

19. 在一直角三角形中直角二邊之差爲1尺,周圍長12尺.求此三角形三邊之長.

20. 三角形三邊之長各爲4寸,5寸,及7寸.求對於4寸一邊之高.

21. 三角形三邊之長各爲a寸,b寸,及c寸.求其面積所含平方寸數.

22. 二等邊三角形等邊之長爲a寸，其面積爲s平方寸。求其底邊之長。

23. 一直角三角形之地面，周圍90丈，面積180平方丈。求其三邊之長。

24. 矩形一對角線與長邊之和等於短邊之5倍，而二鄰邊之差爲35尺。求其面積。

25. 直角三角形直角二邊中之長邊比短邊之三倍少1尺，而長邊與斜邊之和等於短邊之六倍。求斜邊之長。

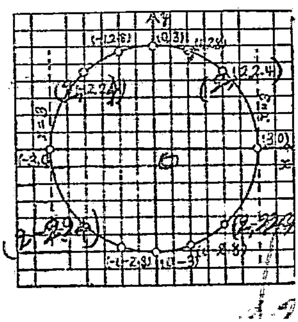
§ 139. 無理函數之圖形. 一變數之無理式爲此變數之無理函數。

無理函數之圖形，或爲環，或爲無限擴張之分枝，或由此二種重複組織而成，今舉其最簡之二三例：

〔第一〕 函數$y=\pm\sqrt{9-x^2}$之圖形。

計算數值得下表：

x	0	±1	±2	±3
y	±3	±2.83	±2.24	0



圖中縱橫軸上皆取二

格作一單位。

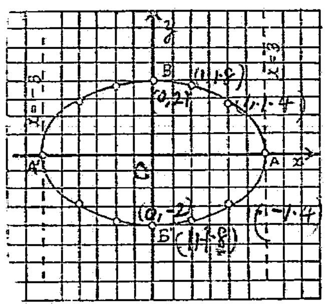
此曲線顯然爲一圓，其中心在原點，半徑之長爲3單位。

注意。欲 y 之數值爲實數，必須 $9-x^2\geqq 0$，卽 $-3<x<3$，故曲線完全在二直線 $x=-3$ 及 $x=3$ 之間。

縱橫二軸皆爲曲線之對稱軸。

〔第二〕函數 $y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ 之圖形。

計算函數之値得下表：



圖中在縱橫軸上皆取二格作一單位。

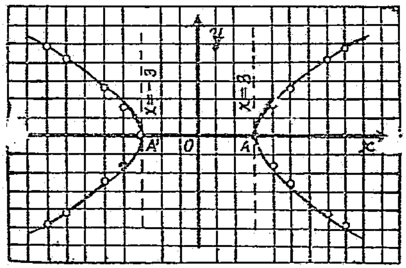
此曲線曰橢圓(Ellipse)。A'A，B'B 皆爲橢圓之對稱軸，A'A 曰長軸，B'B 曰短軸，O 曰中心。

注意。欲 y 之値爲實數，如前，須 $-3<x<3$，故橢圓完全在二直線 $x=-3$ 及 $x=3$ 之間.

〔第三〕函數 $y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$ 之圖形。

計算數值得下表:

x	±3	±4	±5	±7	±8	$\cdots$
y	0	±1.76	±2.66	±4.21	±4.94	$\cdots$



圖中在縱橫軸上皆取一格作一單位。

此曲線卽雙曲線,已見§113〔第一〕,惟在彼以二個漸近線爲坐標軸,此則以二個對稱軸作坐標軸,故函數之形式遂不相同。A′A爲此雙曲線之截軸,O爲中心。

注意. 欲 y 之值爲實數必須 $x^2-9\geqq0$, 卽 $x<-3$ 或 $x>3$, 故此雙曲線無一部分在二直線 $x=-3$ 及 $x=3$ 之間.

§ 140. 簡易之一元高次方程式.

〔第一〕 準二次方程式.

例一. 解方程式 $(x^2-x)^2-8(x^2-x)=-12$.

令 $y=x^2-x$, 則得 $\quad y^2-8y+12=0$,

解之，得　　$y=6$　及　$y=2$;

從 $y=6$ 得　　$x^2-x=6$,

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

故　　$x=3$ 及 $x=-2$;

從 $y=2$ 得　　$x^2-x=2$,

$x^2-x-2=0$　$(x-2)(x+1)=0$

故　　$x=2$ 及 $x=-1$;

由是得原方程式之四個根爲 $3,-2,2,-1$.(學者自行驗算).

例二。 解方程式 $\frac{x^2+4x}{x-1}+\frac{72(x-1)}{x^2+4x}=18$。 $=72\times\frac{1}{y}$

令 $\frac{x^2+4x}{x-1}=y$，則得　$y+\frac{72}{y}=18$,

去分數，得　　$y^2-18y+72=0$,

解之，得　　$y=12$ 及 $y=6$;

從 $y=12$ 得　　$\frac{x^2+4x}{x-1}=12$,

故　　$x=6$　及　$x=2$;

從 $y=6$ 得　　$\frac{x^2+4x}{x-1}=6$,　$x^2+4x=6x-6$

$x^2-2x+6=0$

故　　$x=1\pm i\sqrt{5}$;　$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\times6}}{2}$

由是得原方程式之四個根爲 $6, 2, 1\pm i\sqrt{5}$,

$=\frac{2\pm\sqrt{4-24}}{2}$

〔第二〕 逆數方程式.

$=\frac{2\pm\sqrt{-20}}{2}$

$\frac{2\pm2\sqrt{-5}}{2}=\frac{2(1\pm i\sqrt{5})}{2}$

就 x 整列之一方程式，自左至右各項係數排列之次序及異同與自右至左全然相同者，曰**逆數方程式**。

例三。解四次逆數方程式

$$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0.$$

$x^2 \neq 0$，故可以 x^2 除此方程式之兩節而改記

$6x^4+6-35x^3-35x+62x^2$

之爲　　$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0,$

令 $y=x+\frac{1}{x}$，則 $y^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$ 而 $y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$，

代入上式，

得，　　$6(y^2-2)-35y+62=0,$

$6y^2-12-35y+62=0$　$(2y-5)(3y-10)=0$

解之，得 $6y^2-35y+50=0$　$y=\frac{5}{2}$ 及 $y=\frac{10}{3}$；

從 $y=\frac{5}{2}$ 得　　$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$，卽 $2x^2-5x+2=0$，

$(2x-1)(x-2)=0$

故其根爲　　$x_1=2$，及 $x_2=\frac{1}{2}$；

從 $y=\frac{10}{3}$ 得　　$x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$，卽 $3x^2-10x+3=0$，

$(x-3)(3x-1)=0$

故其根爲　　$x_3=3$ 及 $x_4=\frac{1}{3}$；

因 x_1 及 x_2，x_3 及 x_4 互相爲逆數，故名所設方程式爲逆數方程式。

〔第三〕 1之立方根，卽 $x^3=1$ 之解法.

移項，得 $x^3-1=0$，卽 $(x-1)(x^2+x+1)=0$，

由是所求之根爲一次方程式 $x-1=0$，

及逆數方程式 $x^2+x+1=0$ $x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\times 1}}{2}$

之根；故得根爲 $x_1=1, x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, x_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

注意. $x_2^2=x_3, x_3^2=x_2, x_2^3=x_3^3=1, x_2+x_3=-1$.

習題八十一

$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

解以下各方程式:

1. $x^4-2x^2-8=0$.
2. $x^3+1=0$.
3. $x^6=64$.
4. $x^3=5$.
5. $x^6-7x^3=-10$.
6. $(x^2+x)^2-22(x^2+x)+40=0$.
7. $(x^2+2)^2+8x(x^2+2)=-15x^2$.
8. $(x^2+x)(x^2+x+1)=42$.
9. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$.
10. $x^4-2x^3+x^2=36$.
11. $x^4+1=0$.
12. $x^3-5x^2+5x-1=0$.
13. $\frac{x^2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2}=2$.

14. $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0.$

15. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=12.$

16. $\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1}+\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+2}=\dfrac{5}{2}.$

17. $x^2+x+1=\dfrac{42}{x^2+x}.$

18. $2x^2-3x-21=2x\sqrt{x^2-3x+4}.$

19. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{16}{x^2}=\dfrac{10}{3}\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}\right).$

20. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=5\times6\times7\times8.$

§ 141. 二元二次方程式之圖形. 凡二元 x,y 之二次方程式,就 y 解之,則 y 可表 x 之有理或無理函數,此所得函數之圖形,卽爲所設方程式之圖形。凡二元二次方程式之圖形名之曰二次曲線.

$y=x^2$

〔第一〕方程式 $y=ax^2$ 之圖形爲拋物線,縱軸爲其對稱軸,原點爲其頂點.(視 §86)。

〔第二〕方程式 $x^2+y^2=r^2$ 之圖形爲一圓,半徑爲 r,中心在原點.

$y=\pm\sqrt{4-x^2}$

從所設方程式得 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$, 故從 §139 〔第一〕,知其圖形爲圓。

〔第三〕 方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ 之圖形爲

$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ …… $a^2y^2=a^2b^2-b^2x^2$ …… $y^2=\frac{1}{a^2}(a^2b^2-b^2x^2)$

一橢圓,其長半軸爲 a, 短半軸爲 b, 二軸與二坐標軸合,中心在原點。

$y=\pm\frac{1}{a}\sqrt{a^2b^2-b^2x^2}$
$=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

從所設方程式可得 $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, 故從 § 139 〔第二〕,知其圖形爲一橢圓。

〔第四〕 方程式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 之圖形爲一雙

$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ …… $b^2(x^2-a^2)=a^2y^2$ …… $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

曲線,其半截軸之長爲 a, 而截軸合於橫坐標軸上,中心在原點。

所設方程式可化成 $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, 故從 § 139 〔第三〕可得其圖形。

〔第五〕 方程式 $xy=a$ 之圖形爲一雙曲線,其二個漸近線合於二坐標軸上。

所設方程式可化成 $y=\frac{a}{x}$, 故從§113〔第一〕可得其圖形。

$f(x)=\frac{a}{x}$

習題八十二

描寫以下各方程式之圖形,且述所得曲線之名稱:

1. $x^2=2y$.	2. $x^2+5x+4=y$.
3. $y^2+2x=0$.	4. $x^2+2y=0$.
5. $xy=8$.	6. $xy=-12$.
7. $x^2+y^2=4$.	8. $9x^2+16y^2=144$.
9. $16x^2-9y^2=144$.	10. $x^2-y^2=25$.

§ 142. 聯立二次方程式之圖解. 用圖解聯立二次方程式可倣照用圖解聯立一次方程式之法,先以二方程各繪圖形,得二線之交點,量各交點橫坐標及縱坐標之長,得數即爲 x 及 y 之值.

〔第一〕一次與二次聯立方程式之圖解.

例. 用圖解聯立方程式

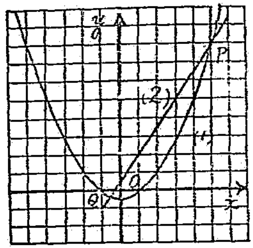
$$\begin{cases} x^2=6y+1, & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 3x-4y+1=0. & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

在橫軸上取一格作一單位,在縱軸上取二格作一單位,各繪方程式(1),(2)之圖形,如圖

$y=\frac{x^2-1}{6}$

x	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
y	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{15}{6}$	4

中之(1),(2),得其交點P及Q,量之,得P之坐標爲(5,4),Q之坐標爲$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$；故所求之根爲$x=5, y=4$,及$x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{8}$。



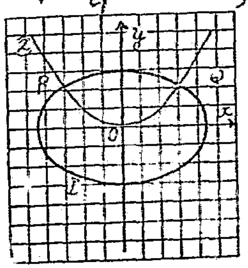
注意. 若直線切於曲線，則二組根相等;若直線與曲線不相會,則二組根皆爲虛數.虛根不顯於圖中.

〔第二〕二次同次聯立方程式之圖解。

例. 解聯立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{8}=1, & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x^2=9y, & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

在縱橫二軸上各取$\frac{18}{9}$格作一單位,繪方程式(1),(2)之圖形,如(1),(2),得其交點P,Q,量之,得P之坐標爲$(-3,2)$,Q之坐標爲$(3,2)$；故所求之根



$2x^2=9y$　　$y=\frac{2}{9}x^2$

爲 $$x=\pm 3,\ y=2.$$

注意. 二個二次曲線可交於四點，二點，或不交，故二元二次聯立方程式可有四對實根，或二對實根及二對虛根，或四對虛根，虛根不能從圖解得之，若二曲線相切，則有二對等根.

習題八十三

用圖解以下各對聯立方程式:

1. $\begin{cases} x^2=4y, \\ x+3y=5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2+y^2=25. \\ x-2y=10. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ x^2+y^2=9. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x+y=8. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x^2-y^2=16. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ x^2-y^2=25. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y^2=4x, \\ x^2+9y^2=9. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y^2+4x=17, \\ 2x+y=9. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x+y^2=17, \\ 2x+y=12. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_{,}=6, \\ x-y=0. \end{cases}$

11 $\begin{cases} xy=24, \\ x+2y=14. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2+5y^2=16, \\ xy=1. \end{cases}$

§ 143. 一次與二次聯立方程式之解法.

解此種聯立方程式，可用替代法消去其一元而解之。

例. 解聯立方程式

$$\begin{cases} 2x-3y=4, & \cdots\cdots(1) \\ x^2+3xy-y^2+5y=61. & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

從(1)，得 $x=\frac{3y+4}{2}$, ……(3)

代入(2)中，得 $\left(\frac{3y+4}{2}\right)^2+3\left(\frac{3y+4}{2}\right)y-y^2+5y=61,$

簡約之，得 $23y^2+68y-228=0,$

解之，得 $y_1=2,$ 及 $y_2=-\frac{114}{23},$

從(3)，得 $x_1=5,$ 及 $x_2=-\frac{125}{23}.$

$y=2$, $y=-\frac{114}{23}$

§ 144. 二次同次聯立方程式之解法.

解此種聯立方程式，可以 $y=mx$ 代去原二式中 y，再消去 x 而解之.

例. 解聯立方程式

$$\begin{cases} 3x^2-5y^2=28, & \cdots\cdots(1) \\ 3xy-4y^2=8. & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

設 $y=mx,$ ……………………(3)

從(1)及(2),得 $x^2(3-5m^2)=28,$ ……………(4)

$x^2(3m-4m^2)=8,$ ……………(5)

(4) ÷ (5), $\dfrac{3-5m^2}{3m-4m^2}=\dfrac{7}{2},$

簡約之,得 $6m^2-7m+2=0,$

故 $m=\dfrac{2}{3}$ 及 $m=\dfrac{1}{2};$

由此二值及(5),得 $x^2=36$ 及 $x^2=16;$

從此及(3),可得

$$\left.\begin{matrix}x_1=6\\y_1=4\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x_2=-6\\y_2=-4\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=4\\y=2\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=-4\\y=-2\end{matrix}\right\}.$$

〔別解〕 $\dfrac{(1)\times2-(2)\times7}{3},\quad 2x^2-7xy+6y^2=0,$

由是可得 $y=\dfrac{2}{3}x,$ 及 $y=\dfrac{1}{2}x.$

以此二式各與(1)聯立解之(用上款之法),即得所求四對之根.

§ 145. 應用問題(雜題)

例一. 一人從山麓登山,行至半路,減其速度,每時減少$\frac{1}{4}$里,計共費 11 時而達山頂;至

下山時其速度比初行時每時加半里,行 $7\frac{1}{2}$ 時而歸山麓. 求從山麓至山頂之里數, 及此人初行時之速度.

設山麓至山頂長 $2x$ 里. 此人初行時每時速 y 里,則登山時前半路當行 $\frac{x}{y}$ 時,後半路行 $\frac{x}{y-\frac{1}{4}}$ 時, 下山行 $\frac{2x}{y+\frac{1}{2}}$ 時, 從題意得方程式

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{y-\frac{1}{4}}=11, \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{2x}{y+\frac{1}{2}}=7\frac{1}{2}; \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

從(1)得 $\qquad x(8y-1)=11y(4y-1),$

從(2)得 $\qquad x=\frac{15}{8}(2y+1),$

消去 x, 得 $\qquad 112y^2-178y+15=0,$

由是可得 $\qquad y_1=\frac{3}{2}$, 及 $y_2=\frac{5}{56}$;

因 y 之值不能比 $\frac{1}{4}$ 小; 故 y_2 不可用, 僅能用 y_1;

從 $y=\frac{3}{2}$ 可得 $2x=15$, 故從山麓至山頂路長 15 里,此人初行時每時速度 $\frac{3}{2}$ 里.

例二. 甲,乙二列車由東站行向西站,同時丙,丁二列車由西站行向東站,甲與丙會於離東站 120 哩之處,甲與丁會於離東站 140 哩之處,乙與丙會於離西站 126 哩之處,乙與丁恰遇於半途.求東西兩站之距離.

設東西兩站相距 x 哩,甲,乙,丙,丁四列車每時之速度各爲 y 哩,z 哩,u 哩,v 哩,則從題意可得方程式

$$\frac{120}{y}=\frac{x-120}{u},$$

$$\frac{x-140}{v}=\frac{140}{y},$$

$$\frac{126}{u}=\frac{x-126}{z},$$

$$\frac{x}{2z}=\frac{x}{2v},$$

以此四式左右兩節各自相乘而約去其公共之因數,得

$$120\times126(x-140)=140(x-120)(x-126),$$

解之,得 $x=144$ 及 $x=210$,

故東西兩站之距離或爲 144 哩,或爲 210 哩.

習題八十四

解以下各題中之聯立方程式且驗之:

1. $\begin{cases} xy=15, \\ 2x+y=13. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-y=2, \\ 3x^2=2xy+5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+2y=7, \\ 2x^2-y^2=14. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=10. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+4y=14, \\ y^2-2y+4x=11. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x+4y=5, \\ 2x^2-xy+y^2=22. \end{cases}$

7. $\begin{cases} xy+x=25, \\ 2xy-3y=28. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+y=6, \\ x^2-y^2=24. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x-y=4, \\ x^2+y^2=40. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2-xy=6, \\ x^2+y^2=61. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x^2+xy=18, \\ 3xy+4y^2=54. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2+xy=70, \\ xy-y^2=12. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21, \\ y^2-2xy+15=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=39, \\ 2x^2+3xy+y^2=63. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2-3xy=0, \\ 5x^2+3y^2=48. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2+y^2=97, \\ xy=36. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x(x+y)=40, \\ y(x-y)=6. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3}, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$

19. 有二數,其和,積,及平方之差皆相等.求此二數.

20. 一直角三角形斜邊之長爲2尺而面積爲96平方寸.求直角二邊之長.

21. 一馬車,走5280尺之路程,前輪比後輪多轉132次;若前後輪之周圍各增2尺,則前輪比後輪多轉88次.求各輪之原長.

22. 有甲乙二個正方形,甲之周圍比乙長100尺,甲面積之3倍比乙面積之20倍大300平方尺.求各邊之長.

23. 貸出銀若干圓一年後得本利和140圓,若本銀增25圓,年利率抬高4分,則可得本利和174圓.求本銀及利率.

24. 甲乙二數皆爲二位之數而乙數中數字之次序適與甲數中數字之次序相反,已知其二數字和之平方等於甲乙二數之和,而小數字平方之5倍等於甲乙二數之差.求此二數.

25. 一矩形內接於一圓中,圓之半徑長5寸,矩形面積爲48平方寸.求此矩形二邊之長.

26. 一人以銀 6500 圓分作甲乙二部分各以一種利率貸出,所得之利息適相等;若甲以乙之利率貸出,則可得利息180圓;乙以甲之利率貸出,則得利息245圓.求二種利率.

27. 甲乙二工程師在同一日數間作一工程,若甲作而不輟,乙輟工六日,則甲得工資19.2圓,乙得工資10.8圓;若乙作而不輟,甲停工六日,則二人所得之工資相等.求此日數及甲乙二人各一日之工資.

28. 甲列車從東地起程行向西地,一時後乙列車從西地起程行向東地而每時速度比甲多10哩,此二列車適會於路之正中點;若乙列車從西地起程一時後甲列車方從東地起程亦欲適會於路之正中點,則甲列車必當每時增速28哩.求東西兩地之距離及甲列車每時之速度.

§ 146. 用特別解法之聯立方程式.

例一. 解聯立方程式

$$\begin{cases} x+y=5, & \cdots\cdots(1) \\ xy=6. & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

$(1)^2-(2)\times 4,\qquad x^2-2xy+y^2=1,$

故得 $\qquad x-y=1,\cdots\cdots(3)$

及 $\qquad x-y=-1;\cdots\cdots(4)$

聯立(1)及(3),得 $\qquad x_1=3,\ y_1=2;$

聯立(1)及(4),得 $\qquad x_2=2,\ y_2=3.$

例二。解聯立方程式

$$\begin{cases} x+y=5, & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^4+y^4=97, & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

$(1)^4-(2)$,　　$4x^3y+6x^2y^2+4xy^3=528$, ⋯⋯(3)

$(1)^2\times 4xy$,　　$4x^3y+8x^2y^2+4xy^3=100xy$; ⋯⋯(4)

$(4)-(3)$,　　$2x^2y^2=100xy-528$,

解之,得　　$xy=6$,　及　$xy=44$。

以此二式各與(1)聯立解之(用例一之法),得

$$\left.\begin{matrix} x=2, \\ y=3 \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} x=3, \\ y=2 \end{matrix}\right\},\quad 及 \quad \left.\begin{matrix} x=\frac{1}{2}(5\pm i\sqrt{151}), \\ y=\frac{1}{2}(5\mp i\sqrt{151}) \end{matrix}\right\}.$$

例三。解聯立方程式

$$\begin{cases} yz+y+z=a^2, & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ zx+z+x=b^2, & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ xy+x+y=c^2, & \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

各式兩節皆加1,得

$(y+1)(z+1)=1+a^2$, ⋯⋯⋯(4)

$(z+1)(x+1)=1+b^2$, ⋯⋯⋯(5)

$(x+1)(y+1)=1+c^2$, ⋯⋯⋯(6)

$$\sqrt{\frac{(5)\times(6)}{(4)}}\quad x+1=\pm\sqrt{\frac{(1+b^2)(1+c^2)}{1+a^2}},$$

故 $$x=-1\pm\sqrt{\frac{(1+b^2)(1+c^2)}{1+a^2}},$$

倣此,可得 $$y=-1\pm\sqrt{\frac{(1+c^2)(1+a^2)}{1+b^2}},$$

$$z=-1\pm\sqrt{\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{1+c^2}}.$$

習題八十五

解以下各題之聯立方程式:

1. $\begin{cases}x+y=7,\\ xy=12.\end{cases}$

2. $\begin{cases}x-y=1,\\ x^3-y^3=37.\end{cases}$

3. $\begin{cases}x+y=4,\\ x^3+y^3=28.\end{cases}$

4. $\begin{cases}x^3+y^3=28,\\ x^2y+xy^2=12.\end{cases}$

5. $\begin{cases}x^3-y^3=26,\\ x^2y-xy^2=6.\end{cases}$

6. $\begin{cases}x+y=3,\\ x^4+y^4=17.\end{cases}$

7. $\begin{cases}x^2+xy=45,\\ y^2+xy=36.\end{cases}$

8. $\begin{cases}2x^2-xy=56,\\ 2xy-y^2=48.\end{cases}$

9. $\begin{cases}(x-y)(x^2+y^2)=13,\\ x^2y-xy^2=6.\end{cases}$

10. $\begin{cases}x^2-xy+y^2=7,\\ x^4+x^2y^2+y^4=133.\end{cases}$

11 $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4},\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{16}.\end{cases}$

12. $\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{y^3}=91,\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1.\end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2+x+y^2=15, \\ 2xy+y=15. \end{cases}$　　14. $\begin{cases} x^2=ax+by, \\ y^2=ay+bx. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}=20. \end{cases}$　　16. $\begin{cases} xy=15, \\ yz=6, \\ zx=10. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x(y+z)=6, \\ y(z+x)=12, \\ z(x+y)=10. \end{cases}$　　18. $\begin{cases} xy+x+y=19, \\ yz+y+z=29, \\ zx+z+x=23. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x(x+y+z)=8, \\ y(x+y+z)=12, \\ z(x+y+z)=5. \end{cases}$　　20. $\begin{cases} (x+y)(x+z)=2, \\ (y+z)(y+x)=3, \\ (z+x)(z+y)=6. \end{cases}$

習題八十六

1. 一元二次方程式之解法共有幾種?試歷舉之.

2. 述一元二次方程式根之公式.

3. 述解應用問題既得方程式之根以後應行解釋之諸點.

4. 判別式所能判別根之種類有幾?試歷舉之.

5. 不解二次方程式而欲知其根之虛實用何法定之?

6. 二次方程式之二根相等,則其係數間有若何之關係?

7. 二次方程式之二根等值而異號,則其係數間有何種情形?

8. 試舉一元二次方程式根及係數間之關係.

9. 一元二次方程式一根爲他根之 n 倍, 則其各項係數間有何種關係?

10. 設二根欲作一二次方程式其法若何?

11. 分數方程式之二種解法有矛盾之點否? 如有則何所適從?

12 試舉無理方程式之解法.

13. 無理方程式之假根從何而來?

14. 何謂逆數方程式?其解法若何?

15. 1之立方根有若何之特性?

16. 二元二次方程式之圖形共有幾種?試歷舉之.

17. 述二次聯立方程式之圖解法.

18. 述一次與二次聯立方程式之代數解法.

19. 述二次同次聯立方程式之代數解法.

20. 二個二次方程式聯立之根共有幾對?

第十三章 比及比例

§ 147. 比(數之比). 一數乘b可得a,則此數曰a對於b之比(Ratio).

a對於b之比以$a:b$或$\frac{a}{b}$表之。a,b曰比之項(Terms),a曰前項(The Antecedent),b曰後項(The Consequent).

注意一. a對於b之比可視作a除以b之商.

注意二。 a,b,及$\frac{a}{b}$可爲任何數;惟不可爲虛數.

交換一比之兩項所得一新比爲原比之反比,或曰逆比(Reverse Ratio or Reciprocal Ratio).

例如 $a:b$及$b:a$互相爲反比。

此一比等於彼諸比之積,則此一比爲彼諸比之複比(Compounded Ratio).

例如 $ace:bdf$爲$a:b$, $c:d$, $e:f$之複比。

相等二比之複比,爲其一比之二乘比(The Duplicate Ratio);相等三比之複比,爲其一比之

三乘比(The Triplicate Ratio).

例如 $a^2 : b^2$ 爲 $a : b$ 之二乘比，$a^3 : b^3$ 爲 $a : b$ 之三乘比。

§ 148. 比之性質及其應用。 $\frac{ma}{mb}=\frac{a}{b}$

〔第一〕 $ma : mb = a : b$。

此從前款注意一及§103卽可知之。

〔第二〕 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$,

則又 $$=\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{\sqrt{a^2+c^2+e^2}}{\sqrt{b^2+d^2+f^2}}.$$

設 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=r,$$

$\frac{a}{b}=r \quad \frac{c}{d}=r \quad \frac{e}{f}=r$

則 $$a=br,\ c=dr,\ e=fr, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

而 $$a^2=b^2r^2,\ c^2=d^2r^2,\ e^2=f^2r^2, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

從(1)， $a+c+e=(b+d+f)r$， 故 $\frac{a+c+e}{b+d+f}=r$;

從(2)， $a^2+c^2+e^2=(b^2+d^2+f^2)r^2$，故 $\frac{\sqrt{a^2+c^2+e^2}}{\sqrt{b^2+d^2+f^2}}=r$。

例一. 甲乙丙三人分銀234圓，其所得圓數之比如2:3:4. 求各人所得圓數.

甲乙丙

$ax=ka(b-c)$, $by=kb(c-a)$, $cz=kc(a-b)$
$ax+by+cz=k[a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)]$

$=k(\cancel{ab-ac+bc-ab+ac-bc})$
$=k(0)$

設甲得 x 圓,乙得 y 圓,丙得 z 圓,則從題意

$\therefore ax+by+cz=0$

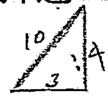
得 $$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$$

從比之性質〔二〕, $$=\frac{x+y+z}{2+3+4}=\frac{234}{9}=26,$$

甲+乙+丙

故 $$\left.\begin{aligned}x&=2\times26=52,\\ y&=3\times26=78,\\ z&=4\times26=104.\end{aligned}\right\}$$ 答. $\begin{cases}\text{甲得52圓,}\\ \text{乙得78圓,}\\ \text{丙得104圓.}\end{cases}$

例二. 一直角三角形斜邊長 10 寸,他二邊之比爲3:4. 求二邊之長.



設二邊一長 x 寸,一長 y 寸,則從題意得

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2,$$

故 $x=2\times3=6$, $y=2\times4=8$. 答. 6寸及8寸.

習題八十七

1. 求 $a:b$, $b:c$, $c:d$ 之複比。

2. a 及 b 均爲正數,則 $a+b:a-b$ 與 $a^2+b^2:a^2-b^2$ 孰大

$\frac{a+b}{a-b}=\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$ $\because (a^2+b^2)<(a+b)^2$ $\therefore \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}<\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}\left(=\frac{a+b}{a-b}\right)$

3. 設 $7(5x-y)=6(2x+3y)$, 求 $x:y$ 之值

4. 設 $\dfrac{b+a}{b-a}=\dfrac{6a-b}{4a-b}$, 求 $a:b$ 之值.

5. 有二數其比爲2:3,若各加 9 則其比爲3:4. 求

此二數。

6. 從 $3x+5y-7z=0,\ 11x-13y+12z=0$ 求 $x:y:z$.

7. $\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}\neq 0$, 則 $ax+by+cz=0$. 證之。

8. $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$ 則 x,y,z 之比若何?

又從所設之式證 $\dfrac{y-z}{a(b-c)}=\dfrac{z-x}{b(c-a)}=\dfrac{x-y}{c(a-b)}$.

9. 一矩形,對角線與長邊之比爲 $5:4$,而短邊爲33尺.求長邊及對角線之長。

$5x=55$

$4x=44$

10. 一矩形,其周圍爲 $2p$ 尺,其相隣二邊之比如二數比 $a:b$.求各邊之長。

11. 甲乙丙三人分銀 a 圓,各人所得數之比如 $l:m:n$.求各人所得之數。

12. 一三角形中三角度數之比如 $2:3:4$.求各角之度數.但三角形三角之和爲 $180°$.

13. 一矩形,相隣二邊尺數之比如 $a:b$,其和與對角線之差爲 d 尺.求此二邊之長。

14. 一騎以每時10哩之速沿一鐵路而行.有一快車從後來追越而過,又有一慢車從前來摩肩而過,已知快車每時速50哩,慢車每時速40哩,而二車經過此騎之旁所費時刻相同.求此二列車長之比。

§ 149. 比例. a對於b之比等於c對於d之比,則曰a,b,c,d成比例,此四數曰比例數(Proportionals),以記號表之,則為

$$a:b=c:d,\ 或\ a:b::c:d,\ 或\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

a與d為比例之外項(Extremes),b與c為比例之內項(Neans),d為a,b,c之第四比例項(Fourth Proportional).

a與c相對應,b與d相對應a,b,c,d又可各名之曰第一項,第二項,第三項,第四項.

有三數a,b,c而$a:b=b:c$,則曰此三數成比例,c為a,b之第三比例項(Third Proportional),b為a,c之比例中項(Mean Proportional).

§ 150. 比例之性質.

〔第一〕 比例中兩外項之積等於兩內項之積.

$$a:b=c:d,\quad 即\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

兩節以bd乘之,即得 $ad=bc.$ ……………(1)

注意一. 此性質於量之比例不能成立.

〔第二〕 四數中兩兩之積相等,則此四數成比例,而成一積之二數爲外項,成他一積之二數爲內項.

因從(1)移乘作除,卽可得　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

及　$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{d}{c}=\frac{b}{a}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

等故也.

〔第三〕 二數之比例中項等於此二數積之平方根.

$$a:b=b:c, \quad 則 \quad b^2=ac,$$

故　$$b=\pm\sqrt{ac}.$$

〔第四〕 交換比例之兩內項或兩外項,比例仍能成立.

此從(1)及(2)可知其眞確.

注意二. 此事在幾何學中名之曰更理(Alternando).

〔第五〕 二比相等則其反比亦相等.

此從(1)及(3)可知其真確.

注意三. 此事在幾何學中名之曰反理(Invertendo).

〔第六〕 等比之複比相等.

因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \frac{e}{f}=\frac{g}{h}$, 乘之可得 $\frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh}$ 故也.

〔第七〕 若 $a:b=c:d$ 及 $b:x=d:y$, 則 $a:x=c:y$.

注意四. 此事在幾何學中名之曰省理(Ex Acquali).

〔第八〕 二比相等,則其各前項與後項之和或差對於後項之比亦相等.

設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $\frac{a}{b}\pm1=\frac{c}{d}\pm1$, 即可得 $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$.

注意五. $a+b:b=c+d:d$ 在幾何學中曰合理(Componendo), $a-b:b=c-d:d$ 在幾何學中曰分理(Dividendo).

〔第九〕 二比相等,則各比中兩項和與差之比亦相等.

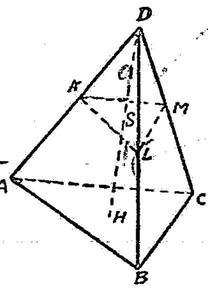
$a:b=c:d,$ 則 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$

以後一式除前一式，卽得 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$

注意六．此事在幾何學中曰合分理。

§ 151．**應用問題(幾何題)**

例．角錐D－ABC中ABC爲底，DH爲高，以一平行於底之平面截之得截口爲KLM，所截之高爲DS．在幾何學中，已知角錐D－ABC體積對於小角錐D－KLM體積之比，如DH對於DS比之三乘比．今設DS，DH各長9寸及18寸，而錐臺KLM－ABC之體積爲28立方寸．求小角錐D－KLM之體積爲幾立方寸．



設D－KLM之體積爲x立方寸，則D－ABC之體積爲$x+28$立方寸．從題中所表之關係，可得方程式．

$$\frac{x+28}{x}=\frac{18^3}{9^3}=\frac{8}{1},$$

用分理，

$$\frac{28}{x}=\frac{7}{1},$$

故 $x=\frac{28}{7}=4$。 答。四立方寸。

習題八十八

1. 從 $8+a:3+x=2:1$ 求 x.

2. 從 $a+x:b+x=c+x:d+x$ 求 x.

3. $5+x:3+x$ 之二乘比等於 $9:4$. 求 x 之值。

4. 從 $x^2-4x+2:x^2-2x-1=x^2-4x:x^2-2x-2$ 求 x 之值。

5. $a:b=b:c$, 則

   (1) $a+b:b+c=a:b$, (2) $a^2:b^2=a:c$,

   (3) $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$. 證之。

6. 三個正數 a,b,c 成比例，則 $a+c>2b$. 證之。

從 $a:b=c:d$ 證以下各式〔(7)—(14)〕:

7. $5a+2b:b=5c+2d:d$.

8. $ma+nb:ma-nb=mc+nd:mc-nd$.

9. $ma^2+nc^2:mb^2+nd^2=a^2:b^2$.

10. $a:a+c=a+b:a+b+c+d$.

11. $a^2(c^2+d^2)=c^2(a^2+b^2)$.

12. $\frac{a+c}{a-c}:\frac{b+d}{b-d}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}:\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$.

13. $\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=\sqrt{ac+\frac{c^3}{a}}:\sqrt{bd+\frac{d^2}{b}}$,

14. $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}:\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{c}=ab:cd$.

15. $a:b=b:c=c:d$, 則$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$. 證之.

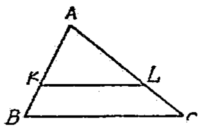
16. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, 則$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$. 證之.

17. 在前例中, 設二角錐D−KLM及D−ABC之體積各爲4立方寸及32立方寸,而高DH之長爲18寸. 求DS之長.

18. 在例之圖中,設DH長12寸而小角錐體積爲大角錐體積之半. 求DS長之寸數至小數二位.

19. 在例之圖中, 若錐臺之體積爲全角錐體積之$\frac{19}{27}$,而DH長36寸. 求DS之長.

20. 若以平行於角錐底面之二個平面分全角錐爲體積相等之三部分,已知角錐之高爲1尺, 求此二平面分角錐高所得三分之寸數.



幾何圖形之性質: 任意三角形ABC以平行於一邊BC之直線KL截之得一小三角形AKL, 則二三角形面積之比如其對應邊上之平方比.

即 $\triangle ABC:\triangle AKL=\overline{AB}^2:\overline{AK}^2=:\overline{BC}^2:\overline{KL}^2=\overline{AC}^2:\overline{AL}^2$.

21. 在上圖中, 設$\triangle ABC$及$\triangle AKL$之面積各爲100平方寸及25平方寸,而AB長10寸. 求AK之長.

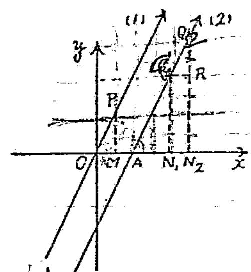
22. 設上圖中AB長12寸，而$\triangle$AKL面積爲$\triangle$ABC面積之半。求BK之長。

23. 在上圖中，梯形KBCL面積爲三角形AKL面積之8倍，而AC長40寸。求LC之長。

24. 三角形ABC一邊AB長a寸，平行於BC引二直線，分三角形之面積爲三等分。求此二線分AB邊所得三分之長。

§ 152. 直線之傾斜及曲線上任意點之傾斜.

吾人今試考察二直線



OP: $y=2x$,……………… (1)

AQ: $y=2x-4$, ……… (2)

此在§78中已知其爲平行直線，即 $\angle x\mathrm{OP}=\angle x\mathrm{AQ}$.

今在(1)中，令

$x_1(=\mathrm{OM})=1$, 則 $y_1(=\mathrm{MP})=2$, 而 $\dfrac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OM}}=\dfrac{2}{1}$;

又在(2)中令 $y=0$, 則得 $x(=\mathrm{OA})=2$,

再令 $x'(=\mathrm{ON}_1)=4$, $x''(=\mathrm{ON}_2)=5$,

則得 $y'(=\mathrm{N_1Q_1})=4$, $y''(=\mathrm{N_2Q_2})=6$,

而 $\mathrm{AN}_1=2$ $\mathrm{AN}_2=3$;

由是可得
$$\frac{N_1Q_1}{AN_1}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}=\frac{6}{3}=\frac{N_2Q_2}{AN_2}$$
$$=\frac{N_2Q_2-N_1Q_1}{AN_2-AN_1}$$
$$=\frac{RQ_2}{Q_1R},\qquad (Q_1R\text{平行於}Ox)$$

故
$$\frac{RQ_2}{Q_1R}=2=\frac{N_1Q_1}{AN_1}=\frac{MP}{OM};$$

因2為直線(1),(2)之傾斜 (Slope) §71, 故得下之重要性質:

一直線上任意二點縱坐標差對於其橫坐標差之比為此直線之傾斜.

平行二直線之傾斜相等，卽直線以其傾斜定其與橫軸所成之角.

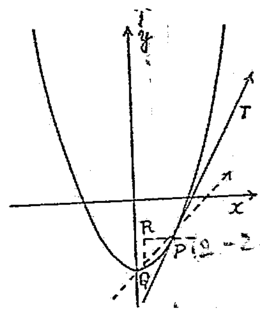
凡一次方程式化成形式 $y=mx+b$, 則 m 卽表其圖形之傾斜.

直線中各點之方向皆一定，故其全線之傾斜一定, 曲線則不然, 當以下法定之:

過一曲線上任意二點之直線為此曲線之割線 (Secant), 此二點中之一點沿曲線運動而無限接近於第二點, 其極限遂至相合, 此時過

此二點之割線取一極限位置，是爲切曲線於第二點之**切線** (Tangent)，此第二點爲**切點** (Point of contact)，切線之傾斜可視作曲線上切點之傾斜。

例．求曲線 $x^2-2y-8=0$ 上點 $(2,-2)$ 之傾斜。



P$(2,-2)$ 之隣近點爲Q (Q不必取在P之下而可任意取之)，假定Q之坐標爲 $(2+h,-2+k)$，(今 h,k 皆表負數，若Q取於P之上即皆表正數)，則Q與P二點縱坐標之差爲 k，橫坐標之差爲 h，而割線PQ之傾斜爲 $\frac{RQ}{PR}=\frac{k}{h}$;

因Q在曲線上，故其坐標適合於曲線之方程式

而得　　$(2+h)^2-2(-2+k)-8=0,$

$4+4h+h^2+4-2k-8=0$

即　　$h^2+4h-2k=0,$　$2k=h^2+\ldots$

故　　$\frac{k}{h}=2+\frac{h}{2};$　$\frac{k}{h}=\frac{h}{2}+2$

今Q沿曲線向P運動而無限接近，則此二點縱

橫坐標之差漸次縮小而無限接近於0，卽$\frac{k}{h}$中k及h(RQ及PR)各自無限接近於0，割線PQ隨之旋轉而無限接近於切線PT之位置；其極Q竟合於P，則割線PQ遂合於切線PT上，h(PR)之值遂爲0，割線PQ傾斜$\frac{k}{h}$之極限，卽

$$\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=\lim_{h\to 0}\left(2+\frac{h}{2}\right)=2,$$

遂爲切線PT之傾斜，故從上，知所設曲線在點(2,−2)之傾斜爲2。

習題八十九

以下各方程式化成$y=mx+b$之形式而定其傾斜.

1. $3(x-2)=2(y+3)$.　　2. $5x-3y+8=0$.

3. $7x=3y-5$.　　4. $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{2}$.

過以下各題中所設二點之直線其傾斜若何?

5. (1,3), (2,5),　　6. (−3,2), (4,−2).

7. (5,−1), (7,−1).　　8. (−4,3), (−4,5).

求以下各題中曲線在記其右旁之點之傾斜:

9. $7x^2+2y+1=0$, (3,32).

10. $y=-3(x-1)^2$, (−1,−12).

11. $x^2+y^2=9$, $(\sqrt{3},\sqrt{6})$.

12. $xy=8$, $(-2,-4)$.

習題九十

1. 何謂比?何謂反比?何謂複比?

2. 何謂比例?

3. 比與比例有何區別?

4. 何謂二乘比?何謂三乘比?

5. 試舉比之性質.

6. 何謂比例中項?

7. 舉例說明更理.

8. 舉例說明反理.

9. 舉例說明省理.

10. 舉例說明合理.

11. 舉例說明分理.

12. 舉例說明合分理.

13. 二直線之傾斜相等,則此二直線互相關係之位置若何?

14. 已知一直線上二點之坐標,如何用以求直線之傾斜?

15. 已知一直線之方程式,如何用以求直線之傾斜?

16. 曲線之切線用何法定之?

17. 何謂曲線上一點之傾斜?

18. 試詳述求曲線上一點傾斜之法.

第十四章　指數及對數

§ 153. **指數律.** 前在§49及§54中所得之指數律今更舉之於下:

公式(I):　　$a^m \times a^n = a^{m+n}$,

公式(II):　　$(ab)^m = a^m b^m$,

公式(III):　　$(a^m)^n = a^{mn}$,

公式(IV):　　$a^m \div a^n = a^{m-n}$.

此中m, n皆爲正整數,因代數學之目的在普徧.故今當以指數擴充至於分數及負數等而考察其意義.

§ 154. **各種指數.** 擴充之旨趣在令所有之公式法則能通行無礙,故上款諸公式中當指數爲任何數時亦必保持其真確.

〔第一〕**分數指數.**

$(a^m)^n = a^{mn}$

在公式(III)中,令　$m=\frac{1}{2}$, $n=2$, 則得

$$(a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{1}{2}\times 2} = a,$$

首末兩節開平方,得　　$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$,

$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$

倣此，可得 $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$。

普徧言之，n 爲正整數，則

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a},$$

次，$(a^{\frac{1}{3}})^2=(\sqrt[3]{a})^2$，

因 $(a^{\frac{1}{3}})^2=a^{\frac{2}{3}}$，

$=a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

及 $(\sqrt[3]{a})^2=\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^2}$，而得 $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$

普徧言之，m, n 皆爲正整數，則

公式(V)： $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}=(\sqrt[m]{a})^n$。

注意一。根數僅取正之實數，否則 $\sqrt[m]{a^n}$ 與 $(\sqrt[m]{a})^n$ 不必相等。

[第二] 零指數。

在公式(IV)中置 $m=2, n=2$，則得

$a^m\div a^n=a^{m-n}$

$$a^2\div a^2=a^{2-2}=a^0,$$

然 $a^2\div a^2=1$ (從除法)，

故 a 無論爲何數恒得

公式(VI)： $a^0=1$。

〔第三〕負指數.

在公式(IV)中置 $m=0$, 則得

$a^{m} \div a^{n} = a^{m-n} = a^{0-m}$

$$a^{0-n}=\frac{a^0}{a^n}=\frac{1}{a^n},$$ 故得

公式(VII): $$a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

注意二. 公式(I)至(VII)不問指數爲正負整分數恆能普徧適用.

次畧舉運算之例:

例一. $$3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}}c^{-3}\times 4^{-1}a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{5}{6}}c^{3}=3\times\frac{1}{4}a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}b^{\frac{3}{2}-\frac{5}{6}}c^{-3+3}$$
$$=\frac{3}{4}a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{2}{3}}.$$

例二. $$a^{\frac{2}{3}}b\div a^{\frac{1}{2}}b^{-3}=a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}b^{1-(-3)}=a^{\frac{1}{6}}b^{4}.$$

例三. $x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}$ 乘以 $x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}$.

$$\begin{array}{llll}
x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} & & & \\
x^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}} & & & \\
\hline
x + a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}} & & & (- \\
\quad - a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}} - a & & & (+ \\
\hline
x \qquad\qquad\qquad\qquad - a. & & & \text{答.}
\end{array}$$

例四. 計算 $(16a^{-3}-6a^{-2}+5a^{-1}+6)\div(2a^{-1}+1)$

$$\begin{array}{r|l} 16a^{-3}-6a^{-2}+5a^{-1}+6 & 2a^{-1}+1 \\ \underline{16a^{-3}+8a^{-2}}\ (- & \overline{8a^{-2}-7a^{-1}+6}\text{。答。} \\ -14a^{-2}+5a^{-1} & \\ \underline{-14a^{-2}-7a^{-1}}\ (- & \\ 12a^{-1}+6 & \\ 12a^{-1}+6 & \end{array}$$

習題九十一

以下各式用正指數表之:

1. $2x^{-\frac{1}{4}}$.　　2. $\dfrac{x^2}{y^{-5}}$。　　3. $\dfrac{1}{4x^{-\frac{1}{2}}}$.

4. $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$。　　5. $\dfrac{3}{\sqrt{y^{-3}}}$.　　6. $\dfrac{a^{-2}x^{-1}}{3x^{-4}}$.

以下各式用根號及正整指數表之:

7. $x^{\frac{3}{5}}$.　　8. $a^{-\frac{1}{3}}$.　　9. $\dfrac{2}{b^{-\frac{3}{4}}}$.

10. $7a^{-\frac{1}{3}}\times 3a^{-1}$.　　11. $\sqrt[3m]{a^3}\div\sqrt[m]{a^2}$.

求以下各式之數值:

12. $16^{\frac{3}{4}}$.　　13. $4^{-\frac{5}{2}}$.　　14. $125^{-\frac{2}{3}}$.

15. $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$.　　16. $\dfrac{1}{(0.5)^{-2}}$.

簡約以下各式:

17. $(a^2)^{-3}$.　　18. $\sqrt[3]{8a^{-12}}$.　　19. $\left\{(a^{-3})^{-\frac{2}{3}}\right\}^2$.

20. $\dfrac{\sqrt{x^3}\times\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[5]{y^{-2}}\times\sqrt[4]{x^6}}$.　　21. $\dfrac{15x^{m+n}\times 2x^{m-n}}{25x^{2m}}$.

22. $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}}\times\dfrac{x^{\frac{1}{6}}}{y^{\frac{1}{6}}}$.

23. $\dfrac{2^n\times(2^{n-1})^n}{2^{n+1}\times 2^{n-1}}\times\dfrac{1}{4^{-n}}$.

24. $\dfrac{1}{1-x^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{1}{1+x^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{2}{1+x^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{4}{1+x}$.

25. $(3x^{\frac{1}{3}}-5+8x^{-\frac{1}{3}})\times(4x^{\frac{1}{3}}+3)$.

26. $\dfrac{4a-b}{2a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$.

27. $\dfrac{a^2+b^2}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

28. $\dfrac{x-7x^{\frac{1}{2}}}{x-5\sqrt{x}-14}\div\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{-1}$.

29. $(e^{-x}+e^{x})(e^{-x}-e^{x})+(e^{x}+e^{-x})^2$.

30. $\dfrac{\left\{\left(a^m\right)^{\frac{1}{r}}\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-\frac{q}{n}}\right\}^{nr}}{\left\{\sqrt[r]{b^n}\left(\sqrt[m]{b}\right)^r\right\}^{mq}}\div\left\{\left(\dfrac{a}{b}\right)^q\right\}^r$.

解以下各方程式:

31. $x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{3}{4}}+1=0$.

32. $x+12=8x^{\frac{1}{2}}$.

33. $x^{\frac{3}{2}}-26x^{\frac{3}{4}}=27$.

34. $4x^{-\frac{1}{3}}-3x^{-\frac{1}{6}}=4$.

35. $4^x+8=9\times 2^x$.

§ 155. 對數.

在 $2^x=32$ 中可知 x 必為5, 在 $10^x=0{\cdot}1$ 中可知 x 必為 -1.

普徧言之，$a^x=M$表示已知a及M而欲求x之值。

a之第x冪之值爲M，則x名曰a爲底(Base)之M之對數(Logarithm)．以記號$x=log_a M$表之．M爲對數之眞數。

注意一。a及M恆取正數。

注意二。$a^x=M$及$x=log_a M$互爲同一事之逆記法，有如$a^n=A$及$a=\sqrt[n]{A}$然。合此二記法可得　$a^{log_a M}=M$。

§ 156.　對數之基本性質。

〔第一〕底之對數爲1。

因　$a^1=a$，故　$log_a a=1$也。

〔第二〕1之對數爲0。

因　$a^0=1$，故　$log_a 1=0$也。

〔第三〕積之對數等於其各因數之對數之和。

設　$x=log_a M$，$y=log_a N$，卽　$M=a^x$，$N=a^y$，

故　$M \cdot N=a^{x+y}$，卽　$log_a(M \cdot N)=x+y=log_a M+log_a N$

〔第四〕 商之對數等於從被除數之對數中減去除數之對數所得之差。

設 $x=log_a M$, $y=log_a N$, 卽 $M=a^x$, $N=a^y$,

故 $\frac{M}{N}=a^{x-y}$, 卽 $log_a\left(\frac{M}{N}\right)=x-y=log_a M-log_a N$.

〔第五〕 一數之冪之對數等於此數之對數乘以其冪指數之積。

設 $x=log_a M$, 卽 $M=a^x$, 由是 $M^n=a^{nx}$,

故 $$log_a M^n=nx=nlog_a M.$$

〔第六〕 一數之根之對數等於此數之對數除以其根指數之商。

設 $x=log_a M$, 卽 $M=a^x$, 由是 $\sqrt[n]{M}=a^{\frac{x}{n}}$,

故 $$log_a\sqrt[n]{M}=\frac{x}{n}=\frac{1}{n}log_a M.$$

例一。 求 $log_2\sqrt{8}=x$.

$\sqrt[n]{2^n}=\sqrt[2]{2^3}=2^{\frac{3}{2}}$

從上款, $2^x=\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}$, 故 $x=\frac{3}{2}$.

例二。 解方程式 $log_a(x+3)+log_a(x-3)=0$.

從本款〔第三〕及〔第二〕, 所設方程式可化作 $$log_a(x^2-9)=log_a 1.$$

故 $$x^2-9=1,$$

而 $$x=\sqrt{10}。$$

習題九十二

求以下各式之值:

1. $log_3 81$.　　2. $log_{10}\sqrt{0.01}$.

3. $log_4 2$.　　4. $log_4(8\sqrt{2})$.

5. $log_9\sqrt{27}$.　　6. $log_{10}(\sqrt[3]{100})$.

下二式以 $log_a m$ 及 $log_a n$ 表之。

7. $log_a(m^3\times n^5)$.　　8. $log_a\left(\dfrac{m^3 n^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{1}{2}}n^3}\right)$.

§ 157. 常用對數及其性質. 10 爲底之對數曰常用對數(Common Logarithms).

應用數學專用此種對數,故此後 log_{10}M 省記爲 logM。本書中僅言對數者必指常用對數.

常用對數有一便於應用之特性如下:

因 $10^1=10,$ 故 $log10=1;$

$10^2=100,$ $log100=2;$

$10^3=1000,$ $log1000=3;$

普徧言之,n 爲任意正整數,則 $log10^n=n;$

由是　$\log(M\times10^n)=\log M+\log10^n=\log M+n,$

$$\log(M\div10^n)=\log M-\log10^n=\log M-n;$$

故設 $M=1.2$, 則

$$\log0.12=\log1.2-1,\ \log12=\log1.2+1.$$

$$\log120=\log1.2+2.$$

故諸數若僅有小數點之位置相異，則其對數僅有整數部分相異.

§ 158. **對數表.** 凡數非 10 之完全冪數者, 其對數普徧爲不盡小數, 昔之疇人乃算出其小數若干位 (以下四捨五入) 列表以供實用. (本書用五位之對數表).

排列整數之對數所作之表曰對數表.*

對數之目的在令算法簡便：即用對數表時, 可以加法減法代乘法除法, 以乘法除法代求冪求根也(觀§156).

* 本書不附對數表, 可購商務印書館出版之蓋氏對數表用之.

從對數表, $\log 2 = 0.30103,$

則從上款,知 $\log 20 = 1.30103,$

及 $\log 200 = 2.30103;$

故對數從整數及小數兩部分所成.

對數之整數部分曰指標 (Characteristic), 小數部分曰假數 (Mantissa).

§ 159. **指標法則.**

今設欲求 $\log 356.72$ 之指標:

因 $1000 > 356.72 > 100$, 而 $3 > \log 356.72 > 2$;

故 $\log 356.72$ 等於2與一小數之和,卽其指標爲2

由是可得如下之法則:

法則一. 數之大於1者,其對數之指標比其整數部分之位數小1.

次,小數比1小,故其對數比0小而爲負數,此殊不便,故改之,單令指標爲負而假數恆爲正.

今因 $0.1=\frac{1}{10}=10^{-1}$，故 $log0.1=-1$,

$0.01=\frac{1}{100}=10^{-2}$， $log0.01=-2$,

$0.001=\frac{1}{1000}=10^{-3}$， $log0.001=-3$, 等;

故 $log0.2=log(0.1\times 2)=log0.1+log2=-1+0.30103$,

記之爲 $log0.2=\overline{1}.30103$.

倣此, $log0.02=\overline{2}.30103$,

$log0.002=\overline{3}.30103$, 等.

由是得法則如下:

法則二. 以小數求對數,則其指標爲負數,而指標之絕對值比在小數點右所有 0 之個數大 1.

依此二法則,對數中之指標定之甚易,故對數表中僅載假數而略其指標.

指標雖有正負而假數則恆爲正.

§ 160. 對數表之用法.

例一. 求 $log\,275.4$.

指標爲 3−1 即 2,假數從對數表得 43996

故得 $\log 275.4 = 2.43996$. 答.

例二. 從 $\log x = \bar{3}.15351$ 求 x.

指標爲$\bar{3}$, 故 x 爲小數而在小數點之右有二個0, 檢對數表得對於 15351 之真數爲 1424,

故得 $x = 0.001424$.

§ 161. **比例差之原理.** 一數中若有五個以上數字，則其對數不能在五位對數表中檢得之.求之之法根據於下之**比例差之原理** (The Principle of Proportional Difference).

二數之微差與其對數之差成正比例.

例一. 求 $\log 1912.6$.

從對數表, $\log 1912 = 3.28149$,

$\log 1913 = 3.28171$;

此二數之差 $= 0.00022$ (是爲表差);

故由 $1:0.6 = 0.00022:x$ 得 $x = 0.00013$,

加入 $\log 1912$ 中,得 $\log 1912.6 = 3.28162$.

例二. 從 $\log x = 1.23108$ 求 x.

指標爲 1,故 x 之整數部分爲 2 位.

在對數表中檢夾此假數 23108 之二假數

取其較小者爲　$\log 17.02=1.23096,$

二者之差卽表差爲 0.00025,

而　$\log x-\log 17.02=0.00012;$

故由 $0.00025:0.00012=0.01:d$ 得 $d=0.0048,$

加入 17.02 中, 得　$x=17.0248.$ 答.

§ 162. **指數方程式.** 在指數中含有未知數之方程式曰**指數方程式.**

欲解指數方程式　$a^x=b,$

可取兩節之對數而得 $x\log a=\log b,$

由是　$x=\dfrac{\log b}{\log a}.$

例. 解方程式 $(0.3)^x=0.02.$

$$x=\frac{\log 0.02}{\log 0.3}=\frac{\bar{2}.30103}{\bar{1}.47712}=\frac{-(2-0.30103)}{-(1-0.47712)}=\frac{1.69897}{0.52288}.$$

故可用除法, 或 $\log x=\log 1.69897-\log 0.52288,$

得　$x=3.2492.$

習題九十三

用 $\log 2=0.30103$. $\log 3=0.47712$, $\log 7=0.84510$ 作出以

下各數之對數:

1. 5. 2. 42. 3. 0.054. 4. 14.4. 5. $\sqrt{27000}$.

6. $\sqrt[3]{392}$. 7. $\sqrt[5]{25^3}$. 8. $2^3\times3^2\times0.05\div7^4$.

9. $\sqrt[3]{0.0105}$. 10. 求 2^{10} 之位數.

11. 設 $log5=0.6990$, 求 5^{39} 之位數.

12. 求 $(0.056)^5$ 在小數點後有幾個0而始逢有效數字.

用對數表計算以下各題:

13. 43.5×0.37. 14. $\sqrt{10.5}$. 15. $\sqrt[3]{1728}$.

16. $\sqrt[5]{0.181}$. 17. $\sqrt[4]{0.00225}$.

18. 二倍立方之體積則幾倍其稜?

19. 圓之面積爲100平方尺.求其半徑之長.但 $\pi=3.1416$.

解以下各方程式:

20. $log(x-1)-log(x^2-5x+4)+1=0$.

21. $5^{2x+1}=1000$.

22. $log\sqrt{3x+4}+\frac{1}{2}log(5x+1)=1+log3$.

23. $\begin{cases}2logx+7logy=20,\\5logx-2logy=11.\end{cases}$ 24. $\begin{cases}x+y=29,\\logx+logy=2.\end{cases}$

25. 簡約 $log\frac{11}{15}+log\frac{490}{297}-2log\frac{7}{9}$.

§ 163. 複利息. 由本生利而以每一期之

利息加入本中用其本利和作下一期之本，如此所生之利息曰複利息(Compound Interest).

為便利起見,假定一期為一年.

今使一人有銀P圓,以年利率 r 貸出,則一年間之利息為 Pr 圓,而第一年之本利和為 $P+Pr$ 圓,卽 $P(1+r)$圓;

以此為第二年之本，則第二年末之本利和當為 $P(1+r)(1+r)$圓,卽 $P(1+r)^2$ 圓;

倣此,可知第三年末之本利和當為 $P(1+r)^3$圓;

依此類推,則在第 n 年末之本利和當為 $P(1+r)^n$圓.

故以年利率 r 由複利法貸出本錢P,則在 n 年間之本利和A為 $A=P(1+r)^n$,

以對數表之,則為 $\log A=\log P+n\log(1+r)$.

注意. 此公式中之年數若為帶分數，則可化作假分數而求之.

習題九十四

1. 本474圓以年利率5分貸出,每年複利,則8年後

當得本利和幾圓?

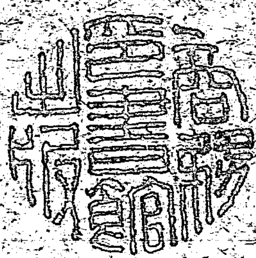
2. 已知年利率r,每年複利.貸出本錢n年後可得本利和A圓,則求其本錢P之公式若何?

3. 由複利法貸出本錢P圓,至n年後可得本利和A圓,則求其年利率之公式若何?

4. 以年利率r由複利法貸出本錢P圓,及收回時共得本利和A圓,則求其貸出年數n之公式若何?

習題九十五

1. 分數指數,零指數,負指數各有若何意義?
2. 試歷舉指數之公式.
3. 何謂對數,指標,假數?
4. 試詳舉對數之基本性質.
5. 何謂常用對數?
6. 常用對數有何特性?
7. 述決定指標之法.
8. 述知眞數而求對數之法.
9. 述知對數而求眞數之法.
10. 何謂指數方程式?
11. 述指數方程式之解法.
12. 述複利息之公式.



Modern Textbook Series
Algebra
For Junior Middle Schools
Commercial Press, Limited

中華民國十三年一月初版

※回(現代初中教科書 代數學二冊)
(下冊定價大洋陸角)
(外埠酌加運費匯費)

編輯者 吳在淵
校訂者 胡敦復 胡明復
發行者 商務印書館
印刷所 商務印書館 上海北河南路北首寶山路
總發行所 商務印書館 上海棋盤街中市
分售處 各省商務印書分館