中學各科要覽

幾何學

（上）

桂叔超 金品編

$\frac{513}{4424}$

幾　何　學

（上）

例　　言

1. 本書由幾何學要覽改編而成；並依照最近教育部所頒佈之課程標準加入新材料，務使程度適合至高中學業爲止

2. 本書編著之主要目的在適應中學學生參考之需要，能使讀者以最短之時間，及最少之精力，完成應付考試或升學之準備.

3. 本書對於各科教科書之項目，網羅無遺，篇幅雖稍簡短，內容則甚豐富而有興趣.

4. 本書搜集最近全國高初中會考試題，及大學或高初中入學試題，不下數百餘個，一一詳加解答，以求喚起讀者之注意，而爲準備之幫助.

5. 本書將問題及解答，本列左右二頁，使讀者互相對照，有左右逢源之便.

6. 本書力求格式統一，以便讀者.

幾何學上册

目次

幾何學上册目次

幾 何 學 緒 論

定　義	問　題
[幾何學] 僅就物之形狀,大小,位置而研究其眞理之學科也. [立體] 物體僅就其形狀,大小,位置而考之者,此物體曰立體. [面] 僅有長,寬而無厚者曰面.立體之界亦爲面. [線] 僅有長而無寬與厚者曰線.面之界及二面之交亦爲線. [點] 僅有位置而無大小者曰點.線之界及二線之交亦爲點. [圖形] 立體,面,線,點及此等所集合者曰圖形. [直線] 任取線之一份置諸他份上,若處處重合者,則此線曰直線. [平面] 連結面上任二點作成直線若全在其面上者,則此面曰平面. [公理] 不待證明而自知之眞理,可爲推理之基礎者,曰公理. [定理] 以定義及公理爲基礎,由是依推理導出之眞理,稱爲定理.	(1) 試述幾何學所用主要之普通公理. (2) 試列舉幾何公理. (3) 試述定理之形狀.

[幾何學之符號] 幾何學所用之符號有下列各種:

1.	∴	故	2.	∵	因	3.	∠	角
4.	⊥	垂直	5.	∠R	直角	6.	∥	平行
7.	△	三角形	8.	=	相等	9.	≡	全等
10.	≠	不等	11.	>	大於	12.	<	小於

幾何學緒論之解答

解答

(1) 公理有普通公理及幾何學公理二種:

普通公理關於一般之量.

幾何學公理僅關於幾何學.

幾何學所用主要之普通公理如下:

1. 等於同量之量互相等.
2. 全量大於其一部分,而等於其各部分之和.
3. 等量加等量,其和相等.
4. 等量減等量,其差相等.
5. 不等之量加等量,其和仍不等,原大者仍大.
6. 不等之量減等量,其差仍不等,原大者仍大.
7. 等量之同倍數之量相等.
8. 等量之同分數之量相等.
9. 第一量大於第二量,第二量又大於第三量,則第一量必大於第三量.
10. 等量減不等量,其差仍不等,原大者反小.

(2) 幾何學公理如次:

1. 通過二定點之直線唯一.
2. 連結二點之線分,爲二點間所引諸線中之最短者.
3. 圖形可不變其形狀與大小,而變其位置.
4. 線分可依其二方向無限延長.
5. 過一直線外一點僅可作一直線,與其直線平行.
6. 全相合之圖形,其大小相等.

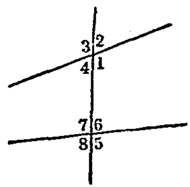
(3) 凡一定理由二部分而成;第一爲其始所定之條件,是謂假設;第二爲由此假設所生必然之結果,是謂終決.例如

如 A 爲 B, 則 C 爲 D.

[如 A 爲 B] 名曰假設或已知,[則 C 爲 D] 名曰終決或求證.

關於角之定義

定義	問題
[角] 從同一點引二直線，此二直線間之圖形曰角，其點曰頂點，其二直線曰邊.	(1) 30° 之餘角若干?
[鄰角] 從一點引三直線中間一線，與外側二線作成二角，是謂鄰角. 其和等於外側二線之角.	(2) 120° 之補角若干?
[平角] 角之二邊於頂點之兩側,在同一直線上者曰平角.	(3) $\frac{3}{4}\angle R$ 之餘角及補角各為若干?
[直角] 一直線交於他之一直線上,其兩側為相等之鄰角,則其各角曰直角.	(4) 某角為其補角之三分之一. 問此角為若干度?
[垂線] 二直線相交成直角，則曰互為垂直;其線曰垂線，其交點曰垂線之足.	(5) 某角為其餘角之二倍. 求此角之度數.
[銳角] 小於一直角之角曰銳角.	(6) 某角之補角為其餘角之四倍. 求此角.
[鈍角] 大於一直角,而小於二直角之角曰鈍角.	(7) 有二鄰角各為 30° 及 120°,則其各二等分角線之間之角若干?
[餘角] 二角之和等於一直角之時，則曰互為餘角.	(8) 時鐘之長針回轉十分時，成角若干度.但回轉一周為 360°.
[補角] 二角之和等於二直角之時，則曰互為補角.	(9) 2 時 25 分之兩針，夾成若干度之角?
[對頂角] 二直線相交,其所成相對之二角,曰對頂角.	
[內錯角,同位角,同傍內角] 4 與 6, 1 與 7 曰內錯角; 2 與 6, 3 與 7, 1 與 5, 4 與 8 曰同位角; 4 與 7, 1 與 6 曰同傍內角.	



關於角之定義之解答

解　　答

(1) 二角之和爲一直角,則曰互爲餘角.

因　$90^\circ-30^\circ=60^\circ$.

故知 30° 之餘角爲 60°.

(2) 二角之和爲二直角卽 180°, 則曰互爲補角.

因　$180^\circ-120^\circ=60^\circ$.

故知 120° 之補角爲 60°.

(3) $\frac{3}{4}\angle R=\frac{3}{4}\times 90^\circ=67^\circ 30'$.

故其餘角爲 $22^\circ 30'$, 其補角爲 $112^\circ 30'$.

(4) 設所求之角爲 x 度,則其補角爲 $180^\circ-x$. 故得方程式　$3x=180^\circ-x$.

解之,得　$x=45^\circ$.　　答　某角爲 45 度.

(5) 設所求之角爲 x 度,則其餘角爲 $90^\circ-x$. 依題意,得下之方程式

$$x=2(90^\circ-x).$$

解此方程式,得　$x=60^\circ$.

答　某角爲 60 度.

(6) 設某角爲 x 度,則其餘角爲 $90^\circ-x$, 其補角爲 $180^\circ-x$. 依題意,得下之方程式

$$180^\circ-x=4(90^\circ-x).$$

解之,得　$x=60^\circ$.　　答　某角爲 60 度.

(7) 所求之角爲 $\frac{30^\circ}{2}+\frac{120^\circ}{2}=15^\circ+60^\circ=75^\circ$.

答　此角爲 75 度.

(8) 所求之角爲 $360^\circ\times\frac{10}{60}=60^\circ$.

答　此角爲 60 度.

(9) 長針回轉 25 分所成之角度爲

$$6^\circ\times 25=150^\circ.$$

此時短針必回轉 $150^\circ\times\frac{1}{12}=12.5^\circ$.

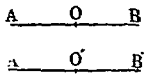
又短針自 12 時回轉至 2 時所成之角度必爲

$$6^\circ\times 10=60^\circ.$$

$\therefore$ 所求之角$=150^\circ-(60^\circ+12.5^\circ)=77.5^\circ$.

證明

(定理 1)　凡平角皆相等.



[已知]　$\angle AOB$ 及 $\angle A'O'B'$ 均爲平角.

[求證]　$\angle AOB=\angle A'O'B'$.

[證明]　$\angle AOB$ 及 $\angle A'O'B'$ 之二邊各爲一直線.　(定義)

故　O' 重合於 O, $O'B'$ 重合於 OB, 則 $O'A'$ 重合於 OA.　(公理)

$\therefore$　$\angle AOB=\angle A'O'B'$.　(公理)

(定理 2)　一直線交於他一直線上,則其二鄰角之和等於二直角.

[已知]　AB 與 CD 相交於 C 點.

[求證]　$\angle ACD+\angle DCB=180°$.

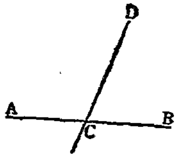
[證明]　$\angle ACD+\angle DCB=\angle ACB$.

然　ACB 爲一直線.

$\therefore$　$\angle ACB$ 爲平角.

$\therefore$　$\angle ACD+\angle DCB=2\angle R$

或　$=180°$.



問題

(1)　直角皆相等.

(2)　相等之角之餘角亦相等.

(3)　相等之角之補角亦相等.

(4)　有二直線 AB, CD 相交於一點 O, 若 $\angle AOC$ 爲一直角,則他之三角亦爲直角.

(5)　從集於一點之任意直線所成若干鄰角之和,等於四直角.

(6)　四直線 OA, OB, OC, OD 集於一點,若 $\angle AOB=\angle COD$ 及 $\angle BOC=\angle AOD$, 則

$\angle AOB+\angle BOC=180°$,

或 $\angle AOB+\angle AOD=180°$.

解　　答

(1) [證明]　直角爲平角之半，而相等之角之半皆相等．故平角之半卽直角皆相等．

(2) [已知]　$\angle A=\angle B$，$\angle C$，$\angle D$ 各爲 $\angle A$，$\angle B$ 之餘角．

[求證]　$\angle C=\angle D$.

[證明]　$\angle A+\angle C=90^\circ$ 及 $\angle B+\angle D=90^\circ$.　(定義)

$\therefore\quad \angle A+\angle C=\angle B+\angle D$.　(公理)

$\because\quad \angle A=\angle B$. $\therefore \angle C=\angle D$.　(等量減法公理)

(3) [已知]　$\angle A=\angle B$，$\angle C$，$\angle D$ 各爲 $\angle A$，$\angle B$ 之補角．

[求證]　$\angle C=\angle D$.

[證明]　$\angle A+\angle C=180^\circ$ 及

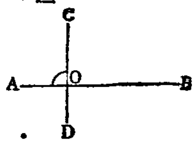
$\angle B+\angle D=180^\circ$.　(定義)

$\therefore\quad \angle A+\angle C=\angle B+\angle D$.

因　$\angle A=\angle B$.

$\therefore\quad \angle C=\angle D$.

(等量減法公理)



(4) [已知]　$\angle AOC=90^\circ$.

[求證]　$\angle BOC=\angle COD$

$=\angle DOA=90^\circ$.

[證明]　因 AB 爲一直線，CD 爲他直線．

故　$\angle AOC+\angle BOC=180^\circ$.

$\because\quad \angle AOC=90^\circ$.

$\therefore\quad \angle BOC=180^\circ-90^\circ=90^\circ$.

同理，可證　$\angle BOD=\angle DOA=90^\circ$.

(5) [已知]　AO，BO，CO，DO 順次交於 O.

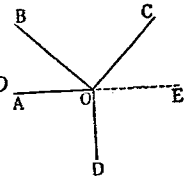
[求證]　$\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOA=360^\circ$.

[證明]　延長 OA 至 OE，則

$\angle AOB+\angle BOC+\angle COE=180^\circ$,

$\angle AOD+\angle DOE=180^\circ$

相加，得 $\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOA=360^\circ$.



(6) [已知]　$\angle AOB=\angle COD$,

$\angle BOC=\angle AOD$.

[求證]　$\angle AOB+\angle BOC=180^\circ$，或 $\angle AOB+\angle AOD=180^\circ$.

[證明]　自前題，知

$\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOA=360^\circ$.

但　$\angle AOB=\angle COD$ 及 $\angle BOC=\angle DOA$.

$\therefore\quad 2(\angle AOB+\angle BOC)=360^\circ$,

卽　$\angle AOB+\angle BOC=180^\circ$.

證　　明	問　　題

(定理 3)　一直線交於他之二直線上,其鄰角之和等於二直角時;則其他之二直線必爲一直線(此定理曰定理 2 之逆定理).

[已知]　$\angle ABC+\angle CBD=180°$.

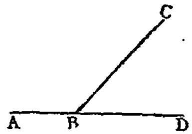
[求證]　AB, BD 在一直線上.

[證明]　$\angle ABC+\angle CBD=\angle ABD$.

然　$\angle ABC+\angle CBD=180°$.

$\therefore$　$\angle ABD=180°$. $\therefore$ $\angle ABD$ 爲平角.

$\therefore$　AB, BD 在一直線上.



(定理 4)　凡二直線相交,其所成之對項角相等.

[已知]　$\angle AOC$, $\angle BOD$ 爲對項角.

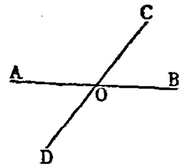
[求證]　$\angle AOC=\angle BOD$.

[證明]　$\angle AOC+\angle COB=180°$,

$\angle COB+\angle BOD=180°$.

$\therefore$ $\angle AOC+\angle COB=\angle COB+\angle BOD$.

兩邊各減 $\angle COB$, 則 $\angle AOC=\angle BOD$.



(1)　二直線交成之鄰角,其各角之二等分角線互相垂直.

(2)　二直線 OB, OD 與一直線 AC 同在點 O 相會,而在其反對之側;若 $\angle AOB=\angle COD$, 則 BO, OD 成一直線.

(3)　角之二等分線必二等分其對項角.

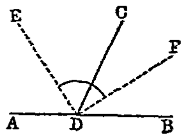
(4)　直線垂直於角之分角線,則必與角之二邊成等角.

(5)　設 $\angle ADB$, $\angle BDC$ 爲二鄰角,而 DE 及 DF 爲其分角線,若 $DE\perp DF$,求證 ADC 爲一直線.

解　　答

(1) [已知] DE, DF 各爲 AB, CD 交成二鄰角 ADC, CDB 之分角線.

[求證] $ED \perp DF$.



[證明] $\angle ADC = 2\angle EDC$,

$\angle CDB = 2\angle CDF$.

然 $\angle ADC + \angle CDB = 180°$.

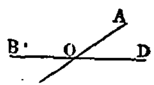
$\therefore$ $2\angle EDC + 2\angle CDF = 180°$.

$\therefore$ $\angle EDC + \angle CDF = 90°$, 卽 $\angle EDF = 90°$.

$\therefore$ $ED \perp DF$.

(2) [證明] $\angle BOC + \angle AOB = 180°$.

然 $\angle AOB = \angle COD$.

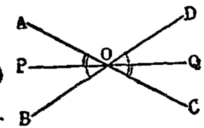


$\therefore$ $\angle COB + \angle COD = 180°$.

故 OB, OD 爲一直線.

(3) [已知] PQ 爲 $\angle AOB$ 之分角線.

[求證] $\angle COQ = \angle DOQ$.



[證明] 從定理 4, 知

$\angle AOP = \angle COQ$

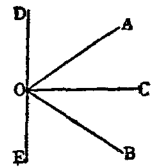
及 $\angle POB = \angle DOQ$.

但 $\angle AOP = \angle POQ$. (已知)

$\therefore$ $\angle COQ = \angle DOQ$.

(4) [已知] OC 爲 $\angle AOB$ 之分角線,且 $DOE \perp OC$.

[求證] $\angle AOD = \angle BOE$.



[證明] $\angle DOC = \angle COE = 90°$,

又 $\angle AOC = \angle BOC$. (已知)

$\therefore$ $\angle DOC - \angle AOC$

$= \angle COE - \angle BOC$,

卽 $\angle AOD = \angle BOE$.

(5) [已知] $\angle CDF = \frac{1}{2}\angle BDC$,

$\angle CDE = \frac{1}{2}\angle ADC$, 且

$DE \perp DF$.

[求證] ADC 爲一直線.

[證明] $\because$ $DE \perp DF$.

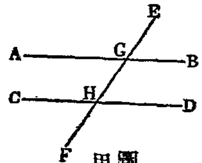
$\therefore$ $\angle CDF + \angle CDE = 90°$.

2 倍之,得 $\angle ADC + \angle BDC = 180°$. 故如題云云.

證明	問題

證明

(定理 5) 一直線交於他之二直線,若其內錯角相等,則此二直線互相平行.

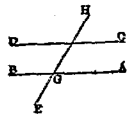


甲圖

[已知] PQ 直線交 AB, CD 二直線於 E, F 及 $\angle AEF=\angle EFD$.

[求證] $AB \parallel CD$.

[證明] 將甲圖迴轉如乙圖,即置乙圖於甲圖上,使乙圖之 GH 重合於甲圖之 GH 上;則乙之 G 落於甲之 H,乙之 H 落於甲之 G,而於甲圖因 $\angle AGH=\angle DHG$,即乙圖之 $\angle AGH$,等於甲圖之 $\angle DHG$;故乙圖之 GA,重合於甲圖之 HD 上.同樣,乙圖之 HD,重合於甲圖之 GA,故乙圖之各直線部分皆重合於甲圖之各直線部分,即乙圖之全部與甲圖一致.故如設甲圖之 AB, CD 在任何一方相交,則與其重合之乙圖二直線,必在其反對之方向相交,而因乙圖與甲圖重合,故其結果即二直線 AB, CD 在 EF 之兩側各有交點,此與平行線之公理相反,故 AB, CD 不相交.



乙圖

問題

(1) 一直線與他之二直線相交,若其同位角相等,或同傍內角相補,則此二直線必平行.

(2) 二直線因垂直於一直線上,則此二直線互爲平行.

(3) 一直線垂直於二平行線之一,則亦垂直於其他.

(4) 同直線之垂線與斜線相交.

(5) 平行於同一直線之二直線,必互爲平行.

平行線之定理及問題(其一)之解答

解答

(1) (前圖) [已知] $\angle PEB=\angle EFD$.

[求證] $AB \parallel CD$.

[證明] $\angle PEB=\angle AEF$. (定理 4)

$\therefore$ $\angle AEF=\angle EFD$.

$\therefore$ $AB \parallel CD$. (定理 5)

又 $\angle BEF+\angle EFD=2R\angle$, (已知)

則 $AB \parallel CD$. (求證)

[證明] $\angle AEF+\angle BEF=2R\angle$. (定理 1)

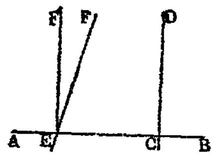
$\therefore$ $\angle AEF=\angle EFD$.

$\therefore$ $AB \parallel CD$. (定理 5)

(2) [證明] 二直線爲同一直線之垂線,則其所成之角皆爲直角,從而內錯角相等,故二直線互爲平行.

(3) [證明] 平行線與一直線之內錯角相等,今其一爲直角,則他角亦然,卽他之直線亦爲垂線.

(4) [已知] CD 爲 AB 之垂線,EF 爲其斜線.



[求證] CD 與 EF 相交.

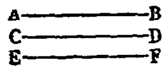
[證明] 過 E 作 AB 之垂線 EF',則

$\angle DCA+\angle F'EB=2R\angle$.

$\therefore$ $CD \parallel EF'$.

然 EF' 爲 AB 之垂線,而 EF 爲其斜線,故 EF 與 EF' 不一致.然過 E 作 CD 之平行線只 EF' 一直線,是 EF 與 CD 不平行,卽相交.

(5) [已知] $AB \parallel EF$, $CD \parallel EF$.



[求證] $AB \parallel CD$.

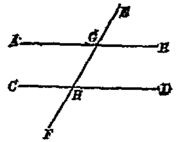
[證明] 試令 AB, CD 不平行而相交,則過其交點得作平行於 EF 之二直線,是與公理 4 不合,故 AB, CD 不相交,卽平行.

證明	問題

(定理 6) 一直線交於二平行線上,則其內錯角必相等.

[已知] EF 與平行線 AB, CD 交於 G, H.

[求證] $\angle AGH=\angle GHD$ 或 $\angle BGH=\angle GHC$.



[證明] 過 G 作線使與 EF 成一等於 $\angle GHD$ 之角,則此線必與 CD 平行(定理 5). 然 $AB \parallel CD$ 而過 G 平行於 CD 之直線只有一.(公理)是過 G 作等於 $\angle GHD$ 之線僅有 AB.

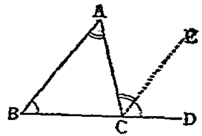
$\therefore$ $\angle AGH=\angle GHD$, 其他可同樣證之.

系 一直線與二平行線相交,則其同位角相等,同傍內角相補.

(定理 7) 三角形內角之和等於二直角. (之江大學)

[已知] 延長 BC 至 D.

[求證] $\angle A+\angle B+\angle C=180°$.



[證明] 作 $CE \parallel AB$, 則

$\angle ACE=\angle BAC$, $\angle ECD=\angle ABC$.

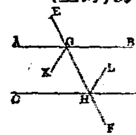
$\therefore$ $\angle A+\angle B+\angle C$

$=\angle ACB+\angle ACE+\angle ECD=\angle BCD=180°$.

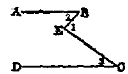
系 三角形之外角等於其內對角之和. (江西八中)

(1) 若兩直線被一截線所截, 其同旁內角之分角線互相垂直, 則此兩直線平行. (上海,初會)

(2) 直線 EF 與平行線 AB, CD 交於 G 及 H, 則內錯角 $\angle AGH$, $\angle DHG$ 之分角線 GK, HL 必平行.



(3) 如圖,設 $AB \parallel CD$, 求證 $\angle 1=\angle 2+\angle 3$.



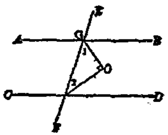
(4) 兩三角形之二角兩兩相等,則第三角亦相等.

(5) O 為 $\triangle ABC$ 內之一點,則 $\angle BOC=\angle BAC+\angle ABO+\angle ACO$.

(幾何學上12)　平行線之定理及問題(其二)之解答

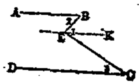
解　答

(1) [證明]　由假設,知 $\angle O=90°$. 但
$\angle 1+\angle 2+\angle O=180°$.
$\therefore\ \angle 1+\angle 2=90°$.
$2\angle 1+2\angle 2=180°$.
因 OG 等為分角線,故
$\angle BGH=2\angle 1$ 等.
$\therefore\ \angle BGH+\angle GHD=180°$.
$\therefore\ AB\parallel CD$.



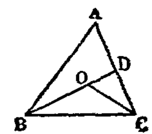
(2) [證明]　由假設,知 $\angle AGH=2\angle GKH$,
$\angle GHD=2\angle GHL$.
$\because\ AB\parallel CD$.　$\therefore\ \angle AGH=\angle GHD$,
即　$2\angle GKH=2\angle GHL$.
$\therefore\ \angle GKH=\angle GHL$.　(等量之半相等)
故　$GK\parallel HL$.　(定理 5)

(3) [證明]　作 $EK\parallel AB$,則因 $AB\parallel CD$,故 EK 必與 CD 平行(見第 9 頁之 5 題).
$\therefore\ \angle BEK=\angle 2,\ \angle CEK=\angle 3$.
但　$\angle BEK+\angle CEK=\angle BEC$.
$\therefore\ \angle 2+\angle 3=\angle BEC=\angle 1$.



(4) [已知]　設 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 中,
$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B'$.
[求證]　$\angle C=\angle C'$.
[證明]　$\angle A+\angle B+\angle C=180°$
及　$\angle A'+\angle B'+\angle C'=180°$.
$\therefore\ \angle A+\angle B+\angle C=\angle A'+\angle B'+\angle C'$.
$\therefore\ \angle C=\angle C'$.　(等量減法公理)

(5) [證明]　延長 BO 與 AC 相交於 D,則
$\angle BOC=\angle ODC+\angle OCA$,
又　$\angle ODC=\angle BAC+\angle OBA$.
$\therefore\ \angle BOC=\angle BAC+\angle OBA+\angle OCA$.



定義

[平面形及直線形] 平面形者以線包圍平面之一部分也;其以直線圍成者,曰直線平面形,或單稱直線形.

[多角形] 直線形一名多角形,亦稱多邊形.

[三角形] 以三直線包圍之平面形,曰三角形.

[邊] 多角形之邊,即所包圍部分之直線限界也.

[內角] 多角形之內角,即二邊所夾形內之角,凡單稱直線形之角者,均指內角而言.

[外角及內對角] 多角形之一邊,與其鄰邊之延長線所成之角曰外角;其不與外角相接之內角,曰其外角之內對角.

[對角線] 多角形之角頂,就其不相鄰者連結之直線,曰對角線.

[正多角形] 凡邊及角皆相等之多角形,曰正多角形.

[凸多角形及凹多角形] 多角形之內角均小於二直角者,曰凸多角形;若其內角有一大於二直角者,則曰凹多角形.

[周] 多角形各邊之和曰周.

[面積] 以平面形之周為界,則其界限內之量為面積.

[多角形之種類] 有四邊之多角形,曰四邊形;有五邊之多角形,則曰五邊形;六邊以上依此類推,又就角之數而言,則稱為四角形,五角形等.

[底邊] 三角形之邊可任以一邊曰底邊.

[頂點] 對於三角形底邊之角頂,曰頂點.

[二等邊三角形] 三角形有二邊相等,則曰等腰三角形,其二等邊所夾之角曰頂角,其餘之第三邊曰底邊.

[正三角形] 即三邊相等之三角形.

[直角三角形] 即內有一角為直角之三角形,而對於直角之邊曰斜邊.

關於直線形之定義(其二)

定義

[鈍角三角形] 其內角有一爲鈍角之三角形.

[銳角三角形] 其內角均爲銳角之三角形.

[距離] 點與直線之距離,即從其點至直線之垂線之長也.

[中線] 三角形之中線,即頂點與對邊中點相連結之直線.

[平行四邊形] 即兩雙對邊平行之四邊形.

[梯形] 一雙相對之邊互爲平行之四邊形.

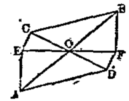
[矩形] 平行四邊形之各角爲直角者,曰矩形.

[菱形] 平行四形邊之各邊相等者,曰菱形.

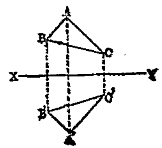
[正方形] 即各邊相等之矩形.

[二平行線之距離] 此即垂直之直線,在平行線間部分之長.

[點對稱] 從一直線上之一點,在反對之側有等距離之二點在其直線上;則此二點曰關於其點爲對稱.又兩平面形之各點一一爲對稱之點,則兩圖形曰關於其點爲對稱,而其點曰對稱中心.



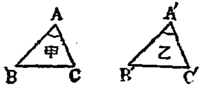
[線對稱] 依一直線返折,而此一圖形全重合在他圖形之上,則此圖形曰對於其直線爲對稱.其直線曰對稱軸.



證　　明

(定理 8)　兩三角形有一角與其夾邊相等,即對於等邊之角及對於等角之邊亦相等.

[已知]　$AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle A=\angle A'$.



[求證]　$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$.

[證明]　以乙置於甲之上,即 A 在 A' 之上, $A'B'$ 在 AB 之上. $\because$ $AB=A'B'$, $\angle A=\angle A'$,故 B' 與 B 重合, $A'C'$ 與 AC 重合. $\because$ $AC=A'C'$,故 C' 重合在 C 之上, $B'C'$ 全與 BC 重合. $\therefore$ $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$.

(定理 9)　兩三角形有二角及其夾邊相等,則爲全等形,即等角之對邊及等邊之對角亦等.

[已知]　(圖見定理 8) $BC=B'C'$, $\angle B=\angle B'$ 及 $\angle C=\angle C'$.

[求證]　$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$.

[證明]　與定理 8 同樣,置乙於甲之上, $B'C'$ 全與 BC 重合;則 $A'B'$, $A'C'$ 全與 AB, AC 重合.

$\therefore$　$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$.

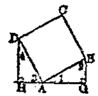
因此　$AC=A'C'$, $AB=A'B'$ 及 $\angle A=\angle A'$.

問　　題

(1)　AM 爲 $\triangle ABC$ 之中線,延長 AM 使等於 MN,連結 CN,求證 $AB=NC$.

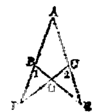
(2)　AB 線之中垂線上之任意一點 P 與 A, B 等距,即 $AP=BP$.

(3)　$ABCD$ 爲一正方形.過 A 任作直線 GH, 又 $BG\perp GH$, $DH\perp GH$, 則 $AG=DH$.



(4)　AB, CD 交於 O 而 $OA=OD$, $OB=OC$,過 O 作線 EF 與 AB 及 CD 交於 E 及 F, 求證 $OE=OF$.

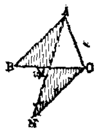
(5)　如圖若 $AB=AC$, $AD=AE$, 則必 $OD=OE$.



(幾何學上16)　三角形之定理及問題(其一)之解答

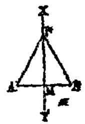
解　　答

(1) [證明]　因 AM 爲中線,故 $BM=MC$。
由假設,知　$AM=MN$,
又　$\angle AMB=\angle CMN$.



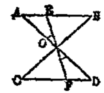
(對頂角相等)
$\therefore$　$\triangle AMB\equiv\triangle CMN$.
$\therefore$　$AB=CN$.

(2) [證明]　因 XY 爲 AB 之中垂線,
故知　$AM=MB$, $XY\perp AB$.
$\therefore$　$\angle AMP=\angle BMP$,
又　　$MP=MP$.
$\therefore$　$\triangle AMP\equiv\triangle BMP$,
而　　$AP=BP$.



(3) [證明]　因 $\angle BAD$ 爲直角,故
$\angle 1+\angle 3=90°$.
又因　$\angle AGB$ 爲直角,故
$\angle 1+\angle 2=90°$.
故　$\angle 2$, $\angle 3$ 悉爲 $\angle 1$ 之餘角而
$\angle 2=\angle 3$.
同理,可證　　$\angle 1=\angle 4$.
又　$AB=AD$.　　　　(正方形之各邊相等)
$\therefore$　$\triangle ABG\equiv\triangle ADH$.　$\therefore$　$AG=DH$.

(4) [證明]　$OA=OD$, $OB=OC$,

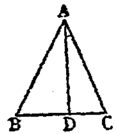


且　$\angle AOB=\angle COD$. (對頂角)
$\triangle AOB\equiv\triangle COD$.
$\therefore$　$\angle A=\angle D$. (對等邊之角相等)
又　$OA=OD$, $\angle AOE=\angle DOF$. (對頂角)
$\therefore$　$\triangle AOE\equiv\triangle DOF$.　$\therefore$　$OE=OF$.

(5) [證明]　$\because$　$AB=AC$, $AD=AE$,
$\angle BAE=\angle CAD$. (公共角相等)
$\therefore$　$\triangle BAE\equiv\triangle CAD$, $\angle D=\angle E$.
又　$\angle ABE=\angle ACD$.　$\therefore$　$\angle 1=\angle 2$.
(等角之補角相等)
$AD-AB=AE-AC$, 卽 $BD=CE$.
$\therefore$　$\triangle OBD\equiv\triangle COE$.　$\therefore$　$OD=OE$.

證明	問題

(定理 10)　等腰三角形之兩底角相等.　(江西,高會)



[已知]　$AB=AC$.　[求證]　$\angle B=\angle C$.

[證明]　引 $\angle A$ 之分角線 AD.

∵　$AB=AC$, $AD=AD$,　(公共邊)

又　$\angle BAD=\angle CAD$.

∴　$\triangle ABD\equiv\triangle ACD$.　∴　$\angle B=\angle C$.

系一　等腰三角形頂角之分角線必為底邊之中垂線.

系二　等邊三角形之三角亦等.

(定理 11)　三角形之二角相等,則其對邊亦等.

[已知]　$\angle B=\angle C$.(見前圖)　[求證]　$AC=AB$.

[證明]　作 $AD\perp BC$, 則 $\angle ADB=\angle ADC=90°$.

又　$\angle B=\angle C$, 則其餘角 $\angle BAD=\angle CAD$.

又　$AD=AD$. ∴ $\triangle ABD\equiv\triangle ACD$ ∴ $AB=AC$.

系　三角形之三角相等,則其三邊亦相等.

---

(1)　等腰三角形底邊之兩端至兩腰之中線必等.　(青島,初會)

(2)　等腰三角形中, 兩底角之平分線必相等.　(青島女中)

(3)　證自等腰三角形之底邊之中點作二垂線於二等邊上,則此二垂線相等.　(上海,高會)

(4)　從等腰三角形 ABC 之底邊 BC 兩端引二直線 BD, CE 至對邊, 此二線相交於 O, 設 $\angle DBC=\angle ECB$, 求證 AO 為 $\angle BAC$ 之分角線,且 $BD=OE$　(上海,高會)

(5)　已知等腰三角形之底角, 等於頂角之二倍,則引一底角之分角線必分原形為兩個等腰三角形.　(廣西,高會)

(幾何學上18) 三角形之定理及問題(其二)之解答

解答

(1) [已知] $AC=AB$, D, E 各為 AC, AB 之中點.

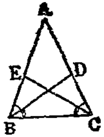
[求證] $BD=CE$.

[證明] 因 $AB=AC$, $AD=AE$, (等量之半相等)

$\angle A=\angle A$.

∴ $\triangle ABD\equiv\triangle ACE$.

∴ $BD=CE$.



(2) [已知] $AB=AC$, BD, CE 為 $\angle B$, $\angle C$ 之分角線.

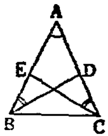
[求證] $BD=CF$.

[證明] $\angle DCB=\angle EBC$, $BC=BC$,

$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}\angle C=\angle ECB$.

∴ $\triangle BDC\equiv\triangle CEB$.

從而 $BD=CE$.



(3) [已知] $AB=AC$, $DE\perp AB$, $DF\perp AC$, 又 $BD=DC$.

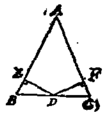
[求證] $DE=DF$.

[證明] ∵ $AB=AC$.

∴ $\angle B=\angle C$.

其餘角 $\angle BDE=\angle CDF$, 又 $BD=DC$.

∴ $\triangle BDE\equiv\triangle CDF$. ∴ $DE=CF$.



(4) [已知] $AB=AC$, $\angle DBC=\angle ECB$.

[求證] $BD=CE$,

$\angle BAO=\angle CAO$.

[證明] $AB=AC$,

$\angle ABC=\angle ACB$.

但 $\angle OBC=\angle ECB$. 相減,得

$\angle ABC=\angle ACE$.

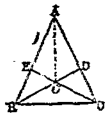
又 $\angle OBC=\angle OCB$. ∴ $OB=OC$.

∴ $\triangle ABO\equiv\triangle ACO$. ∴ $\angle BAO=\angle CAO$.

又 $BC=BC$, $\angle ABC=\angle ACB$,

$\angle DBC=\angle ECB$.

∴ $\triangle DBC\equiv\triangle BCE$. ∴ $BD=CE$.



(5) [已知] $\angle B=\angle C=2\angle A$, BD 為分角線.

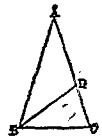
[求證] $\triangle ABD$, $\triangle BCD$ 為等腰.

[證明] $\angle BDC=\angle A+\angle DBA$

$=\angle A+\frac{1}{2}\angle B$

$=2\angle A=\angle C$.

又 $\angle ABD=\frac{1}{2}\angle B=\angle A$. 故如題云云.



證明問題

(定理 12)　三邊彼此相等之兩三角形爲全等形.

[已知]　$AB=A'B'$, $BC=B'C'$ 及 $AC=A'C'$.

[求證]　$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

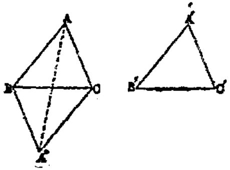
[證明]　將 $\triangle A'B'C'$ 移至 $\triangle ABC$, 使 BC 與 $B'C'$ 相合且使 A' 與 A 關於 BC 互在反對之側, A'所落之點爲 A''.連結 AA'', 則 $\triangle ABA''$, $\triangle ACA''$ 各爲等腰.

$\therefore\quad \angle BAA''=\angle BA''A,$

$\angle CAA''=\angle CA''A.$

相加,得　$\angle A=\angle A'$. 但 $AB=A'B'$, $AC=A'C'$.

$\therefore\quad \triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

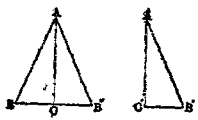


(定理 13)　二直角三角形有一邊相等,斜邊亦相等,則爲全等形.

[證明]　將$\triangle A'B'C'$ 移動,使 $A'C'$重合於 AC 之上,B與B'落在 AC 之反對側如$\triangle ACB''$. 因 B, C, B'' 在一直線上,故 $\triangle ABB''$爲等腰而 $AB=AB''$.

$\therefore\quad \angle B=\angle B''=\angle B'$. 由是 $\angle A=\angle A'$.

$\therefore\quad \triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.



(1)　菱形之對角線必互相垂直.

(廣東四中)

(2)　於正 $\triangle ABC$ 之三邊上順次取 D,E,F三點,使$AD=BE=CF$, 則 D, E, F 與對頂點之連結線交成一三角形必爲正三角形.

(揚州中學)

(3)　C爲 AB 上之任一點,以AC,CB爲底在 AB 之同側作正三角形 ACP, BCQ; 連結 A, Q; P, B, 求證 $AQ=PB$.

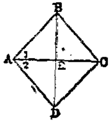
(4)　由 $\angle AOB$ 內一點 P 向 OA, OB 作垂線 PH 及 PK, 若 $PH=PK$; 則 O在 $\angle AOB$ 之分角線上.

(5)　由三角形底邊兩端向對邊所作垂線相等,則此三角形必爲等腰.

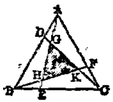
(幾何學上20)　三角形之定理及問題(其三)之解答

解　　　答

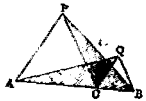
(1) [證明]　由假設,知 $AB=BC=AD=CD$,
又　$AC=AC$.
∴　$\triangle ABC\equiv\triangle ACD$.
∴　$\angle 1=\angle 2$, 又 $AB=AD$,
　$AE=AE$.
∴　$\triangle ABE\equiv\triangle ADE$.
∴　$\angle AEB=\angle AED$.
但　$\angle ABE+\angle AED=180°$.
∴　$\angle AEB=90°$, 卽 $AC\perp BD$.



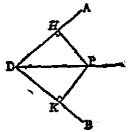
(2) [證明]　$AD=BE=CF$, $AB=BC=CA$,
$\angle A=\angle B=\angle C$,
∴　$\triangle ABE\equiv\triangle ACD\equiv\triangle BCF$.
∴　$\angle CBF=\angle ACD=\angle BAE$,
又　$\angle AEB=\angle BFC=\angle ADC$,
　$AD=BE=CF$
∴　$\triangle BHE\equiv\triangle CKF\equiv\triangle ADG$.
∴　$\angle AGD=\angle BHE=\angle CKF$.
因對頂角相等,故
　$\angle HGK=\angle HKG=\angle KGH$.
∴　$GH=HK=GK$.
故知　$\triangle GHK$ 爲等邊三角形.



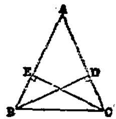
(3) [證明]　$AC=CP$, $CQ=BC$,
$\angle PCA=\angle BCQ=60°$.
∴　$\angle ACP+\angle PCQ$
　$=\angle PCQ+\angle BCQ$,
卽　$\angle ACQ=\angle BCP$.
∴　$\triangle ACQ\equiv\triangle BCP$.　∴　$AQ=BP$.

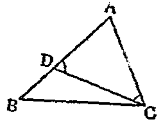


(4) [證明]　$PH=PK$, $OP=OP$.
∴　rt $\triangle OPH=$ rt $\triangle OPK$.
∴　$\angle AOP=\angle BOP$,
卽　OP 爲 $\angle AOB$ 之分角線.



(5) [證明]　由假設,知 $BD=CE$,
又　$BC=BC$.
∴　$\triangle BCE\equiv\triangle BCD$.
∴　$\angle B=\angle C$.
∴　$AB=AC$.
故知 $\triangle ABC$ 爲等腰三角形.



證　明	問　題
（定理 14）三角形之二邊不等，則其對大邊之角大於其對小邊之角。 ［已知］ $AB>AC$. ［求證］ $\angle ACB>\angle ABC$. ［證明］ 過 C 作直線交 AB 於 D，令 $AD=AC$，則 $\angle ACD=\angle ADC=\angle ABC+\angle BCD$. $\therefore$ $\angle ACD>\angle ABC$，從而 $\angle ACB>\angle ABC$.  	(1) 設 ABC 為一任意三角形，$AB>AC$，B 角之分角線與 C 角之分角線會於 P，求證 $BP>CP$. （上海，高會） (2) 已知 BM 為 $\triangle ABC$ 之一中線，求證 $BM<\frac{1}{2}(AB+BC)$. （江蘇女師）
（定理 15）三角形之二角不等，則對大角之邊大於對小角之邊. ［已知］（圖見前）$\angle C>\angle B$.　［求證］ $AB>AC$. ［證明］ $AC>AB$，則 $\angle B>\angle C$，$AC=AB$；則 $\angle B=\angle C$；皆與假設不合，故不得不 $AC<AB$.	(3) 三角形之中線與大邊所夾之角恆較其小邊所夾之角為小，試證之. （江蘇，高會）
（定理 16）三角形二邊之和大於他之一邊，又任二邊之差小於他之一邊. ［證明］ 因兩點 B，C 間以直線為最短，而折線 $AB+AC$ 較直線為長. $\therefore$ $AB+AC>BC$. 以等量減不等量，得 $AB>BC-AC$.  	(4) 三角形 ABC 之 $\angle A$ 之分角線為 AD，若 $AB>AC$，則 $BD>CD$. (5) 等腰三角形底之中點為 M，AC 上之一點為 M，則 $IB\sim IM<AB-AM$.

(幾何學上22)　三角形之定理及問題(其四)之解答

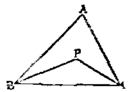
解　答

(1) [證明] $\because\ AB>AC.\quad \therefore\ \angle B<\angle C.$

故 $\frac{1}{2}\angle B<\frac{1}{2}\angle C,$

即 $\angle PBC<\angle PCB.$

$\therefore\ BP>CP.$



(2) [證明] 延 BM 至 N，使

$MN=BM$，又 $AM=MC$，

$\angle AMB=\angle CMN.$

$\therefore\ \triangle AMB\equiv\triangle CMN,$

而 $AB=CN.$

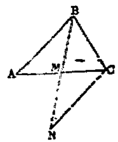
但 $BC+CN>BN,$

$BC+CN=BC+AB,$

又 $BN=BM+MN=2BM.$

$\therefore\ 2BM<AB+BC.$

$\therefore\ BM<\frac{1}{2}(AB+BC).$



(3) [證明] (圖見前題) 因 $AB>BC$ 而 $AB=CN.$

$\therefore\ CN>BC.\quad \therefore\ \angle CBM>\angle CNM.$

但 $\angle CNM=\angle ABM.\ \therefore\ \angle CBM>\angle ABM.$

(4) [證明] 於 AB 上取 AE，令等於 AC；連結 DE，

則 $\triangle ADC\equiv\triangle ADE.$

因 $AC=AE,\quad AD=AD$

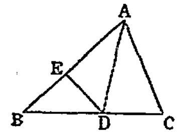
及 $\angle CAD=\angle EAD$ 故也.

$\therefore\ \angle ADE=\angle ADC,$

又 $\angle ADC>\angle ABC,$

$\angle ADE<\angle BED.\quad \therefore\ \angle BED>\angle ABC,$

即 $\angle BED>\angle EBD.\quad \therefore\ BD>DE=CD.$

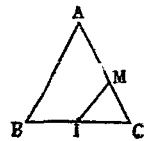


(5) [證明] 於 $\triangle IMC$，知

$IC-IM<MC=AC-AM.$

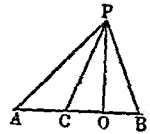
但 $IB=IC$ 及 $AC=AB.$

$\therefore\ IB\sim IM<AB-AM.$



證明問題

(定理 17)　從一直線外一點,至此直線上所引線分之中,以 (i) 垂線爲最短, (ii) 與垂線成等角之斜線相等, (iii) 與垂線成大角之斜線大於成小角之斜線.



[已知]　$PO\perp AB$, $\angle BPO=\angle CPO$,

$\angle APO>\angle CPO$.

[求證]　$PO<PB$, $PB=AC$, $AP>PC$.

[證明]　於 $\triangle BPO$, 其 $\angle PBO<\angle POB$.

$\therefore\quad PO<PB$.

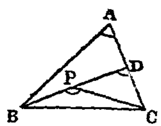
又　$\triangle POB$, $\triangle POC$ 中, $\angle POB=\angle POC$, $\angle BPO=\angle CPO$,

$PO=PO$.

故兩形全等而 $PB=PC$,　又　$\angle APO>\angle BOP$.

雙方從 90° 減之,得 $\angle PAO<\angle PBO$, 從而 $PA>PB=PC$.

(例題)　從三角形一邊之兩端,至形內一點所作直線之和,比他二邊之和小而其所夾之角較大.



[證明]　試延長 BP 交 AC 於 D, 則

$PC<PD+DC$.

雙方加 BP, 則　$BP+PC<PB+PD+DC$.

卽　$BP+PC<BD+DC<BA+AD+DC$

$=BA+AC$.

又　$\angle BPC>\angle BDC>\angle BAC$.

(1)　自等腰三角形之頂點,至對邊所作直線必於小於此二邊.

(2)　三角形三中線之和,小於三邊之和而大於其和之半,試證明之.

(清華大學)

(3)　四邊形 $ABCD$ 之對角線之交點爲 O, 又 P 爲形外之另一點, 則

$$AP+BP+CP+DP$$
$$>AO+BO+CO+DO.$$

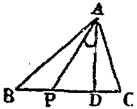
(4)　從三角形 ABC 外角 A 之分角線上任意一點,與 B, C 連結,其所成三角形之周大於 $\triangle ABC$ 之周,試證明之.

(幾何學上24)　三角形之定理及問題(其五)之解答

解　　答

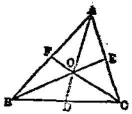
(1) [已知]　P 爲 $\triangle ABC$ 之底 BC 上之點.

[求證]　$AP<AB$ 或 AC.



[證明]　從 A 作 BC 之垂線 AD, 則 D 在 BD 或 CD 上,故 $\angle PAD$ 小於 $\angle CAD$ 或 $\angle BAD$, 從而 PA 小於 AB 或 AC.

(2) [證明]　從前二頁之 2 題,知



$$AB+AO>2AD.$$

同理　$BC+AC>2CF,$

$$AB+BC>2BE.$$

相加且除 2, 得

$$AB+BC+AC>AD+BE+CF.$$

又　$\because$　$OB+OD>BD,\ OC+OD>DC.$

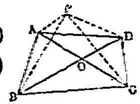
$\therefore$　$OB+OC+2OD>BC.$

同理　$OA+OB+2OF>AB,$

$$OA+OC+2OE>AC.$$

相加除 2, 得 $AD+BE+CF>\frac{1}{2}(AB+BC+AC)$.

(3) [證明]　於 $\triangle PAC$, 知



$$AP+PC>AC \cdots\cdots\cdots(1)$$

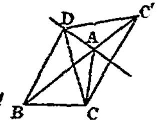
同理　$BP+DP>BD \cdots\cdots\cdots(2)$

(1)+(2), 得

$$AP+BP+CP+PD>AC+BD,$$

即　$AP+BP+CP+PD>AO+OB+OC+OD.$

(4) [已知]　$\triangle ABC$ 外角 A 之分角線爲 AD, D 爲其上任意之一點.



[求證]　$BA+AC+BC$

$$<BD+DC+BC.$$

[證明]　延長 BA 至 C', 令 $AC=AC'$, 連結 DC' ,則因 $AD=AD$, $AC=AC'$,

且　$\angle DAC=\angle DAC'$, 故 $\triangle CDA\equiv\triangle C'DA.$

$\therefore$　$DC'=DC$. 又於 $\triangle DBC'$,

$BC'<BD+DC'$,

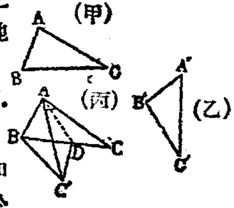
即　$BA+AC<BD+DC.$

故　$AB+AC+BC<BD+DC+BC.$

證明	問題

證明

(定理 18) 此三角形之二邊，各與他三角形之二邊相等，惟夾角異，則其大角之對邊大於他之對邊。



[已知] $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle A>\angle A'$.

[求證] $BC>B'C'$.

[證明] 移乙重合於甲，則 $A'B'$ 與 AB 重合如丙；作 $\angle CAC'$ 之二等分線 AD，交 BC 於 D，則 $\triangle ADC\equiv\triangle ADC'$，從而 $DC=DC'$.

$$\therefore\quad BC=BD+DC'>BC'=B'C'.$$

(定理 19) 此三角形之二邊，各與他三角形之二邊相等，惟第三邊異，則其大邊之對角大於他之對角。

[已知] (前圖) 有 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $BC>B'C'$.

[求證] $\angle A>\angle A'$.

[證明] 若 $\angle A\leqq\angle A'$，則 $BC\leqq B'C'$，是與假設不合。

$$\therefore\quad \angle A>\angle A'.$$

問題

(1) 過 A, B 之中點 M 作 MC 斜交於 AB，求證 $CA\neq CB$.

(稅務專門)

(2) 於 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，AM 為中線，P 為 AM 上之任意一點，求證：

(a) $\angle PBC<\angle PCB$.

(b) $AB-AC>BP-CP$.

(3) 於 $\triangle ABC$ 中，$AC=2AB$，求證 $\angle B>2\angle C$.

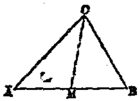
(4) 四邊形 $ABCD$ 內，$AD=BC$，$\angle D<\angle C$，試證 $\angle B<\angle A$.

(5) 三角形之一外角，大於其任一內對角。

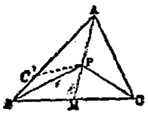
三角形之定理及問題(其六)之解答

解　　　　答

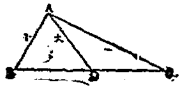
(1) [證明]　因 MC 斜交於 AB，故 $\angle AMC \neq \angle BMC$.
但 $AM = MB$, $MC = MC$.
故於 $\triangle AMC$, $\triangle BMC$ 中，必
$CA \neq CB$.



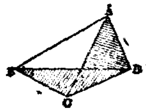
(2) [證明]　於 $\triangle AMB$, $\triangle AMC$ 中，$AB > AC$, $AM = AM$, $BM = MC$.
$\therefore\ \angle AMB > \angle AMC$.
次於 $\triangle BPM$, $\triangle PCM$ 中，
$\angle PMB > \angle PMC$,
$PM = PM$, $BM = MC$. $\therefore\ BP > PC$.
$\because\ BP > PC$. $\therefore \angle PBC < \angle PCB$.
再於 AB 上取 C'，使 $AC' = AC$. 因 $AB > AC$，故 C' 在 A, B 之間. 由前 4 頁之例 3，知
$\angle BAP < \angle CAP$.
但　$AC = AC'$,　$AP = AP$,　故　$PC' < PC$.
$\therefore\ BP - PC > BP - PC'$.
$\therefore\ BC' > BP - PC'$,　而　$BC' = AB - AC$.
$\therefore\ AB - AC > BP - PC$.



(3) [證明]　於 $\triangle ABC$ 內，知 $AC = 2AB$.
$BC > AC - AB = 2AB - AB = AB$.
$\therefore\ BC > AB$.
$\therefore\ \angle BAC > \angle C$.
故若作 $\angle CAD = \angle C$，則 AD 線在三角形內，而
$AD = DC$.
但　$AD + DC > AC$,　即　$2AD > AC = 2AB$.
$\therefore\ AD > AB$.　$\therefore\ \angle B > \angle ADB = 2\angle C$.
$\therefore\ \angle B > 2\angle C$.



(4) [證明]　連結 AC 及 BD，則因
$BC = AD$ (已知). $CD = CD$,
$\angle BCD > \angle ADC$.
$\therefore\ BD > AC$.
又因　$AB = AB$,　$AD = BC$.
故　$\angle ABC < \angle BAD$.
(定理 19)



(5)　因三角形之一外角等於內對角之和，故依全量大於其部分量，故如題云云.

證　　　明	問　　　題

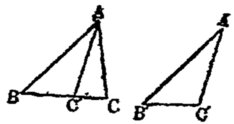
(定理 21)　此三角形之二邊,各與他三角形之二邊,兩兩相等,又對於一雙等邊之角亦等,則他之對於等邊之角必相等或互爲補角.

[已知]　有 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, 其 $AB=A'B'$,

$$AC=A'C',\ \angle B=\angle B'.$$

[求證]　$\angle C=\angle C'$ 或 $\angle C+\angle C'=2R\angle$.

[證明]　令 $\triangle A'B'C'$ 重合於 $\triangle ABC$, A' 重合於 A, $A'B'$ 重合於 AB, 以 $A'B'=AB$ 而 B' 重合於 B.



又以 $\angle B'=\angle B$ 而 $B'C'$ 重合於 BC.

令 C' 與 C 爲一致, 則兩形全等.

$$\therefore\quad \angle C=\angle C'.$$

又 C' 與 C 不一致, 則以 $AC=AC'$ 而 $\angle AC'C=\angle ACC'$,

$$\angle C+\angle C'=\angle AC'C+\angle AC'B=2R\angle.$$

$\therefore$　$\angle C$ 與 $\angle C'$ 相等或互爲補角.

[注意]　本例題極爲重要,故讀者須十分當心,即兩三角形有二邊及一角相等時,不必爲全等形也.

(1)　兩三角形有二邊及其一邊所對之角, 彼此相等如合於下列各條件, 則爲全等:

甲.　相等之二角爲直角或鈍角時.

乙.　對於他之一雙等邊之角於兩三角形均爲銳角或鈍角, 又於一三角形爲直角之時.

丙.　各三角形對於等角之邊, 不小於他之等邊時.

(2)　試列舉兩三角形全等之條件.

 三角形之定理及問題(其七)之解答

解　　答

(1) [證明] $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 內, $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle B=\angle B'$.

(甲) 由前定理, 知 $\angle C+\angle C'=180°$ 或 $\angle C=\angle C'$; 如 $\angle B$, $\angle B'$ 皆爲直角, 則 $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$; 如 $\angle B$, $\angle B'$ 皆爲鈍角, 則不能得 $\angle C+\angle C'=180°$, 而祇能 $\angle C=\angle C'$. $\therefore$ $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$. 故相等之二角爲直角或鈍角, 則兩三角形全等.

(乙) 由前定理, $\angle C+\angle C'=180°$ 或 $\angle C=\angle C'$; 如 $\angle C$, $\angle C'$ 皆爲銳角或鈍角, 則 $\angle C+\angle C'$ 不等於二直角, 而 $\angle C=\angle C'$. 又若 $\angle C=90°$, 則 $\angle C=\angle C'=90°$. $\therefore$ $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$. 故他一組等邊所對之角皆爲銳角或鈍角或有一爲直角時, 兩三角形爲全等形.

(丙) 假設 $\angle B$, $\angle B'$ 之對邊 AC, $A'C'$ 不小於他一等邊 AB, $A'B'$; 即 $AC\geqq AB$, $A'C'\geqq A'B'$.

$\therefore$ $\angle B\geqq\angle C$, $\angle B'\geqq\angle C'$.

故 $\angle C$, $\angle C'$ 皆爲銳角. 由(乙)知此時兩三角形必爲全等.

(2) 兩三角形合於次之條件, 則爲全等形:

I. 二邊與其夾角相等.

II. 二角與其一邊各各相等.

III. 三邊各相等.

IV. 二邊與其一對角各相等時.

(a) 等角爲直角或鈍角.

(b) 他一雙等邊之對角均爲銳角或鈍角或有一爲直角.

(c) 等角之對邊不小於他之等邊.

證　　明

(定理 22)　凸多角形內角之和,加四直角,等於其邊數二倍直角.

[已知]　$ABC\cdots\cdots$爲 n 邊之凸多角形.

[求證]　內角之和 $+4R\angle=2nR\angle$.

[證明]　任取多角形內之一點 O,與各角頂連結,作成 n 個三角形,其內角之總和爲 $2nR\angle$; 但 O 之周圍之角之和爲 $4R\angle$, 其他 $A, B, C, \cdots\cdots$諸角之和爲多角形內角之和.

$\therefore$　內角之和 $+4R\angle=2nR\angle$, 即內角之和 $=(n-2)\times180°$.

(定理 23)　凸多角形之外角合爲四直角.

[已知]　$ABCD\cdots\cdots$爲 n 邊之凸多角形

[求證]　外角之和 $=4R\angle$.

[證明]　令 $AB, BC, CD, \cdots\cdots$等各延長至 B', C', D'; 則

$\angle ABC+\angle CBB'=2R\angle$, $\angle BCD+\angle DCC'=2R\angle$,

$\angle CDE+\angle EDD'=2R\angle$.

$\therefore$　內角之和 $+$ 外角之和 $=2nR\angle$.

但內角之和 $+4R\angle=2nR\angle$.　$\therefore$　外角之和 $=4R\angle$.

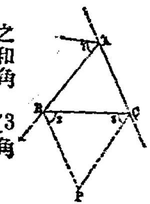
問　　題

(1)　正五角形,正六角形,正八角形,正十角形內,一角之大各如何?

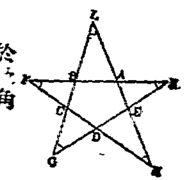
(2)　凸多角形之內角,不能有多於三個銳角,試證之.

(3)　凸多角形內角之和,等於外角之和三倍時,求此多角形之邊數.

(4)　如圖 $\angle1, \angle2, \angle3$ 各爲 $\triangle ABC$ 外角之半,求證 $\angle P=\angle1$.



(5)　延長五角形 $ABCDE$ 之各邊,使交於 F, G, H, K, L, 其所得五角之和爲 $180°$.



多角形內角外角之定理及問題之解答

解	答

(1) [解] 正五角形內角之和 $=(5-2)\times180^\circ$
$=540^\circ$.

故一內角$=\frac{1}{5}\times540^\circ=108^\circ$.

同樣,正六角形內角之和 $=(6-2)\times180^\circ=720^\circ$.

故一內角$=\frac{1}{6}\times720^\circ=120^\circ$.

同理,得正八角形之一角$=\frac{8-2}{8}\times180^\circ=135^\circ$,

正十角形之一角 $=\frac{10-2}{10}\times180^\circ=144^\circ$.

(2) 若有多於三個之銳角,例如有四個,則此等項角之外角皆爲鈍角,卽此凸多角形外角之和大於 360° 是不合理,故不得有多於三個之銳角.

(3) 設所求之邊數爲 n,則依題意得

$$(n-2)\times180^\circ=360^\circ\times3.$$

解之, $n-2=6$. $\therefore\ n=8$

故此多角形爲八邊形.

(4) [證明] $\triangle ABC$ 之外角之和爲 360°,而 $\angle1$, $\angle2$, $\angle3$ 各爲外角之二分之一.故

$$\angle1+\angle2+\angle3=360^\circ\div2=180^\circ.$$

但於 $\triangle BCP$ 內,

$$\angle P+\angle2+\angle3=\text{內角之和}=180^\circ.$$

$$\therefore\ \angle1+\angle2+\angle3=\angle P+\angle2+\angle3.$$

等量減等量,得 $\angle P=\angle1$.

(5) 於 $\triangle KBG$ 內,

$$\angle G+\angle K=\angle KBL \cdots\cdots(1)$$

又於 $\triangle AFH$ 內,

$$\angle F+\angle H=\angle LAF \cdots\cdots(2)$$

又 $\angle L=\angle L \cdots\cdots(3)$

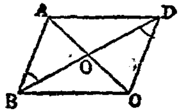
(1)+(2)+(3),得

$$\angle F+\angle G+\angle H+\angle K+\angle L$$
$$=\angle KBL+\angle LAF+\angle L$$
$$=\triangle ABC\text{ 之內角之和}=180^\circ.$$

答 所求之和爲 180°.

證　明	問　題

(定理 24) 一平行四邊形之(甲)對邊相等,(乙)對角相等及(丙)對角線互為二等分.



[證明] 於 $\triangle ABD$, $\triangle CBD$ 中, ∵ $AB \parallel CD$,

$\angle ABD = \angle CDB$; 又因 $AD \parallel BC$.

∴ $\angle ADB = \angle DBC$. 但 $BD = BD$.

∴ $\triangle ABD \cong \triangle BCD$. 從而 $AD = BC$, $AB = CD$.

又 $\angle A = \angle C$, 其補角 $\angle B = \angle D$.

又因 $\triangle OAD \cong \triangle OBC$. ∴ $OA = OC$, $OB = OD$.

(定理 25) 四邊形合於下列各條件時為平行四邊形:(甲)對邊相等,(乙)一雙對邊相等且平行,(丙)對角線互為平分.

[證明] (甲) ∵ $AB = CD$, $AD = BC$ (以上已知).

且 $BD = BD$ (公共邊). ∴ $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.

從而 $\angle ABO = \angle ODC$. ∴ $AB \parallel CD$.

同理, $AD \parallel BC$, 而 $ABCD$ 為平行四邊形也明矣.

(乙) $AB = CD$, 且 $AB \parallel CD$, 則 $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.

∴ $\angle ADB = \angle DBC$. ∴ $AD \parallel BC$. (丙) 可倣此證之.

問題

(1) 求證平行四邊形內,對角之分角線必平行.　(察哈爾,高會)

(2) 設由平行四邊形 $ABCD$ 之 A, C 二角頂作垂線 AE, CF 至對角線 BD, 求證 $AE = CF$.　(河北,初會)

(3) 已知 $ABCD$ 為平行四邊形, BD 為對角線, $BE = DF$; 求證 $AE = CF$, $AE \parallel CF$.　(安徽,高會)

(4) 過平行四邊形對角線之交點,作二直線與其邊相交,連結此交點之四邊形亦為平行四邊形.

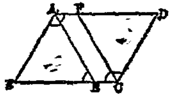
(5) 平行四邊形 $ABCD$ 從其對邊 AD, BC 之中點至對邊兩端作四直線,必圍成一平行四邊形.

(幾何學上32) 平行四邊形之定理及問題(其一)之解答

解答

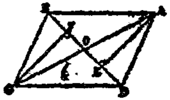
(1) [證明] $\angle A=\angle C$, (平行四邊形之對角)

$\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\angle C$,



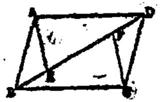
即 $\angle DAE=\angle ECF$.
又 $AD \parallel BC$,
故 $\angle DAE=\angle AEB$.
$\therefore$ $\angle ECF=\angle AEB$. $\therefore$ $AF \parallel EC$.

(2) [證明] $\because$ $ABCD$ 為平行四邊形. $\therefore$ $OA=OC$.



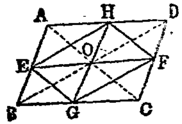
又 $\angle COF=\angle AOE$, 其餘角亦相等,即
$\angle OCF=\angle OAE$.
$\therefore$ $\triangle COF\equiv\triangle AOE$.
$\therefore$ $CF=AE$.

(3) [證明] 因 $ABCD$ 為平行四邊形.



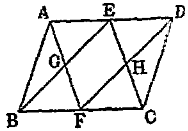
故 $AB=CD$, 又 $BE=DF$.
且 $\angle ABE=\angle CDF$.
($\because$ $AB \parallel CD$)
$\therefore$ $\triangle ABE\equiv\triangle DCF$.
$\therefore$ $AE=CF$, 且 $\angle AEB=\angle CFD$.
其補角 $\angle AEF=\angle EFC$. $\therefore$ $AE \parallel CF$.

(4) [已知] 平行四邊形 $ABCD$, 過其對角線之交點 O 作 EF 及 GH.
[求證] $EGFH$ 為平行四邊形.



[證明] 因 $ABCD$ 為平行四邊形.
$\angle OBG=\angle ODH$, $OB=OD$,
又對頂角相等.
故 $\triangle BOG\equiv\triangle DOH$. $\therefore$ $OG=OH$.
同理,得 $OE=OF$; 故四邊形 $EGFH$ 之對角線互相平分而為平行四邊形.

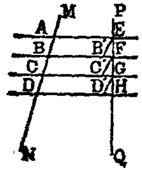
(5) [證明] E,F 為平行四邊形對邊之中點,故 AE, FC 平行且皆為等邊之半而相等.



$\therefore$ $AECF$ 為平行四邊形,
而 $AF \parallel EC$.
同樣,$DEBF$ 亦為平行四邊形, 而 $BE \parallel DF$.
即 $EHFG$ 之對邊 EH, GF 及 EG, FH 平行. 故 $EHFG$ 為平行四邊形.

證　明	問　題

(定理 26)　多數平行線與一直線相交,若截此直線為相等之部分,則任與他直線相交亦截成相等之部分.



[已知]　$AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$……而 MN 與此等直線相交,$AB=BC=CD=$…….

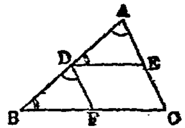
[求證]　其與他直線 PQ 相交於 E, F, G, H, $EF=FG=GH=$…….

[證明]　從 E, F, G 引 MN 之平行線 EB', FC', GD' 交 BF, CG, DH……於 B', C', D',…,則 $AB=EB'$, $BC=FC'$, $CD=GD'$,從而 $EB'=FC'=GD'=$……;$\triangle EB'F$, $\triangle FC'G$, $\triangle GD'H$……等有二角與一邊等則為全等形.

$\therefore\quad EF=FG=GH=$…….

系一　過三角形一邊之中點作平行於他邊之直線,則必過第三邊之中點.

系二　三角形二邊中點之聯線必平行於第三邊,且等於其半.　(南開大學)



[系 2 之證]　過 AB 之中點 D,引 BC 之平行線,則必過 AC 之中點 E (系 1),卽 DE 為 BC 之平行線.

又作 $DF \parallel AC$,則 $DFCE$ 為 ▱ 而 $DE=FC=\frac{1}{2}BC$.

(1)　試證直角三角形斜邊之中線等於斜邊之半.

(廈門大學),(山西,高會)

(2)　平行四邊形之對邊 AD, BC 之中點為 F, E;則二直線 BF, DE 分 AC 為三等分.

(廈門大學),(安徽七中)

(3)　梯形之中線必過其二對角線之中點 (南京女中),且此中線等於二底之和之半 (南京,高會);又連結其對角線中點之線等於二底之半差 (松江中學).

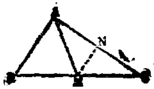
(4)　四邊形對邊中點及對角線中點聯線必彼此平分(無錫師範),且會於一點.又兩雙對邊中點或對邊中點及對角線中點為一平行四邊形之頂點 (務本,上中,常中).

(5)　梯形下底二倍於上底,則對角線交於三分之二處.　(山東,高會)

(幾何學上34)　平行四邊形之定理及問題(其二)之解答

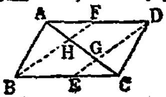
解　答

(1) [已知]　$BM=MC$, $\angle A=90°$.
[求證]　$AM=BM=MC$.
[證明]　連 AC 之中點 N 與 M, 則 $MN \parallel AB$.
故 $MN \perp AC$ 而 MN 爲 AC 之中垂線.



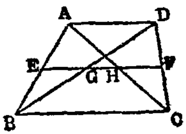
故　$AM=MC$.　但　$MC=BM$.
∴　$AM=BM=MC$.

(2) [證明]　四邊形 $BFDE$ 之對邊 BE, FD 平行而於原四邊形對邊之半.



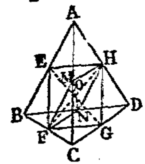
∴　$BFDE$ 爲平行四邊形.
∴　$BF \parallel DE$.
於 $\triangle AGD$ 中, 已知
$AF=FD$, $FH \parallel GD$.　∴　$AH=HG$.
同樣於 $\triangle CHB$ 中, $CG=HG$.
∴　$AH=HG=CG$.

(3) [證明]　設 E, F, G, H 各爲 AB, CD, BD 及 AC 之中點, 則 $EH \parallel BC$,
$FH \parallel AD \parallel BC$.



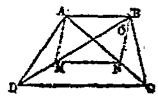
故 EH, FH 成一直線, 即中線 EF 過對角線 BD 之中點 G. 同理可證中線亦過他對角線之中點.
又　$EH=\frac{1}{2}BC$,　$FH=\frac{1}{2}AD$.
∴　$EF=EH+HF=\frac{1}{2}(BC+AD)$.
又　$EG=\frac{1}{2}AD$.
∴　$GH=EH-EG=\frac{1}{2}(BC-AD)$.

(4) [證明]　$EF \parallel AC \parallel HG$ 且 $EF=\frac{1}{2}AC=GH$.
故 $EFGH$ 爲平行四邊形.
同理, $FMHN$　亦爲平行四邊形.



因此　EG, FH　互相平分, 又 FH, MN 互相平分.
故 EG, FH 及 MN 會於同一點 O 而 O 點爲各線之中點.

(5) [證明]　設對角線 AC, BD 交於 O, 取 OC, OD 之中點 M, N; 且連 AM, MN 及 BN.

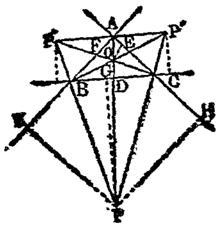


因　$MN \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}CD$.
故　$MN \mathrel{\underline{\parallel}} AB$.
∴　$AMNB$ 爲平行四邊形.
故　$OA=ON$.
即　$OC=2OA=\frac{2}{3}(3OA)=\frac{2}{3}AC$.
同理,　$OD=\frac{2}{3}BD$.

證明	問題

(定理 27) 三角形內角之二等分線必會於一點 (此點曰三角形之內心).

[證明] $\angle A, \angle B$ 之二等分線為 AO, BO; 則此二直線會於一點(因$\angle OAB+\angle OBA \neq 2R\angle$). 今自交點 O 至 C 作 OC 線,又作三邊之垂線 OD, OE, OF; 則 $\triangle AOF$, $\triangle AOE$, 其 AO 共有, $\angle OAF=\angle OAE$, $\angle F=\angle E=R\angle$. $\therefore$ $\triangle AOF \equiv \triangle AOE$.



$\therefore$ $OF=OE$. 同樣,證 $FO=OD$.

$\therefore$ $EO=DO$, 是則直角三角形 OCE, OCD 有斜邊與他之一邊等,即為全等. $\therefore$ $\angle ECO=\angle DCO$, $\angle C$ 之二等分線與 CO 一致,即會於 O 點.

(定理 28) 三角形一角之二等分線及他二外角之二等分線,必會於一點 (此點曰三角形之傍心).

[證明] 證傍心亦與內心同樣.

例如 $\angle B, \angle C$ 之外角之二等分線會於 P, 其 P 與三邊等距離而在 $\angle A$ 之二等分線上,即過 P. 同樣,對應於 B, C 之傍心為 P', P''.

問題

(1) 自等邊三角形之內心, 引平行於二邊之二直線, 必分底邊為三等分. (東海師範)

(2) 自任意三角形內心,引底邊BC之平行線與 AB, AC 交於 D, E; 求證 $DE=BD+CE$.

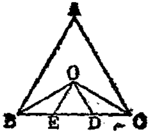
(3) $\triangle ABC$ 中, $\angle B, \angle C$ 之分角線交於 P; 求證

$$\angle BPC=90^\circ+\tfrac{1}{2}\angle A.$$

(4) 四邊形 $ABCD$ 中, $\angle A, \angle D$ 之分角線交於 F, $\angle B, \angle C$ 之分角線交於 H; 試證 FH 過 AB, CD 之交點.

解　答

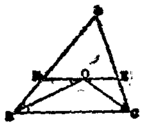
(1) [已知] 等邊三角形 ABC 兩底角 B, C 之分角線交於 O. 而
$OD \parallel AC,\ OE \parallel AB$.



[求證] $BE=ED=DC$.

[證明]
$\angle OCD=\angle OCA=\angle COD$.
$\therefore\ OD=DC$.
同理, $OE=EB$.
又 $\angle ODE=\angle ACB=\angle ABC$
$=\angle OED=60^\circ$.
$\therefore\ \angle DOE=180^\circ-60^\circ-60=60^\circ$.
故 $\triangle ODE$ 爲等邊三角形, 卽 $OD=DE=OE$.
由是 $BE=DE=DC$.

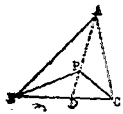
(2) [已知] OB, OC 平分 $\angle B, \angle C$, $DE \parallel BC$.



[求證] $DE=BD+CE$.

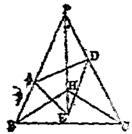
[證明]
$\angle OBC=\angle OBD=\angle BOD$.
故 $\triangle BOD$ 爲等腰三角形而
$BD=DO$.
同理,可證 $OE=CE$.
$\therefore\ DE=DO+OE=BD+CE$.

(3) [證明] 連結 AP 且延長之,使交 BC 於 D; 則 AP 必爲 $\angle A$ 之分角線 (因三分角線必交於一點).



$\angle BPD=\angle PBA+\angle PAB$
$=\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle A$.
又 $\angle CPD=\frac{1}{2}\angle C+\frac{1}{2}\angle A$.
$\therefore\ \angle BPC=\angle BPD+\angle CPD$
$=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C+\frac{1}{2}\angle A$
$=\frac{180^\circ}{2}+\frac{1}{2}\angle A=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$.

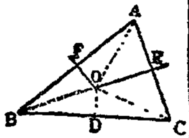
(4) [證明] 延長 AB, CD 使交於 P 點,則於 $\triangle PAD$ 中, F 爲其外角 DAB, ADC 之分角線之交點, 故爲其傍心 從定理 (28), 知 PF 爲 $\angle P$ 之分角線.



又於 $\triangle PBC$, H 爲二內角之分角線之交點,故爲其內心, 從而 PH 爲 $\angle P$ 之分角線.
$\therefore\ P, H, F$ 三點在一直線上或 HF 必過 AB, CD 之交點.

證明	問題

(定理 29) 三角形各邊中點，所立之垂線必會於一點(此點曰三角形之外心)。 (河南，高會)

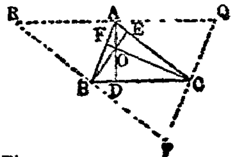


[已知] D, E, F 為 $\triangle ABC$ 各邊之中點.

[求證] 立於 D, E, F 之垂線必會於一點.

[證明] AB, AC 相交，故 E, F 之垂線可會於一點 O，連結 O 與各頂點，則 $\triangle AEO$, $\triangle CEO$ 之二邊及夾角(直角)相等，即為全等形. $\therefore OA=OC$. 同樣，$OA=OB$. $\therefore$ $\triangle OBD$, $\triangle OCD$ 之三邊各相等而為全等. 由是 $\angle BDO=\angle ODC=R\angle$，即 OD 垂直於 BC. $\therefore$ 立於 D, E, F 之垂線會於一點 O.

(定理 30) 自三角形之各頂點至對邊作垂線，則此三垂線會於一點(此點曰三角形之垂心)。



[證明] 過 A, B, C 作對邊之平行線成三角形 PQR，則 $ABCQ$ 及 $ACBR$ 為平行四邊形. $\therefore AQ=BC=AR$. 同樣，$RB=BP$, $PC=CQ$；故 AD, BE, CF 為 $\triangle PQR$ 各邊中點之垂線而會於一點.

---

(1) 三角形之內心與外心相合，則此三角形為等邊三角形. (江西，初會)

(2) $\triangle ABC$ 之傍心為 O_1, O_2, O_3；求證 $\triangle O_1O_2O_3$ 之垂心為 $\triangle ABC$ 之內心.

(3) 自三角形之各角頂至垂心之距離，等於自外心至對邊之距離之二倍，試證之. (武漢大學)

(4) $\triangle ABC$ 中 BC 之中點為 L, P 為 AC 上之點，而 AP 為 AC 之三分之一，AL 與 BP 交於 O；求證：

(a) O 為 AL 之中點.

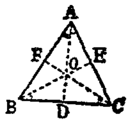
(b) $OB=3.OP$.

三角形之五心(其二)之解答

解答

(1) [證明] 令 O 爲 $\triangle ABC$ 之內心及外心,則因 O 爲內心,故

$$\angle BAO=\angle CAO=\tfrac{1}{2}\angle A.$$



同理, $\angle OBA=\angle OBC=\tfrac{1}{2}\angle B.$

又因 O 爲外心. $\therefore\ OA=OB,$

即 $\angle BAO=\angle OBA,$

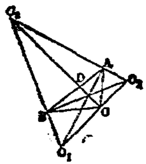
即 $\tfrac{1}{2}\angle A=\tfrac{1}{2}\angle B.$ $\therefore\ \angle A=\angle B.$

同理, $\angle B=\angle C.$

$\therefore\ \angle A=\angle B=\angle C,$ 故如題云云.

(2) [證明 從定理 28, 29, 30, 知 AO, AO_1 同爲$\angle A$之分角線,故 A, O, O_1 在一直線上,且

$$\angle O_1AO_2=\angle OAC+\angle CAO_2=\frac{1}{2}\angle A+\frac{180^\circ-\angle A}{2}=90^\circ.$$



$\therefore\ AO_1\perp O_2O_3.$

同理,可證

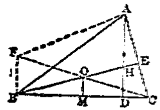
$BO_2\perp O_1O_3,\quad CO_3\perp O_1O_2.$

故 O 爲 $\triangle O_1O_2O_3$ 之垂心而爲 $\triangle ABC$ 之內心.

(3) [證明] 設 H 爲垂心, O 爲外心,連結 CO 且延長之,使 $CO=OF$, 則 $FB\parallel OM$. $\therefore\ FB\perp BC.$

$\therefore\ FB\parallel AD.$

且 $FB=2OM$. 次因 O 爲外心,而 $OA=OB=OC.$



$\therefore\ \angle A=90^\circ.$ $\therefore\ FA\parallel BE.$

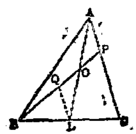
由是 $AFBH$ 爲平行四邊形.

$\therefore\ AH=FB,$

即 $AH=2OM.$

(4) [證明] 過 L 作 AC 之平行線,與 BP 交於 Q 點; 於 $\triangle BCP$ 中, L 爲 BC 之中點,故 Q 爲 BP 之中點,即 $BQ=QP$, 又 $QL=\tfrac{1}{2}PC.$

但由假設,知 $AP=\tfrac{1}{2}PC.$



$\therefore\ QL=AP$, 且 $QL\parallel AP.$

故 $AQLP$ 爲平行四邊形,而 $AO=OL$, 即 O 爲 AL 之中點.

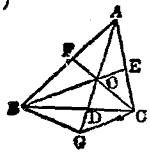
又 $PO=OQ,\quad BQ=QP.$

$\therefore\ BQ=2OP.$

$\therefore\ BO=BQ+QO=2OP+OP=3\cdot OP.$

證　明	問　題

(定理 31)　三角形之三中線必會於一點，其交點與角頂之距離，常得其中線三分之二（此點曰三角形之重心）.（河南，高會）



[已知]　$\triangle ABC$ 之三中線爲 AD, BE, CF.

[求證]　AD, BE, CF 會於一點 O，而 AO, BO, CO 各爲中線三分之二.

[證明]　$\angle EBC+\angle FCB<2R\angle$.

$\therefore$　BE, CF 可交於一點 O，引 AO 且延長，令 $OG=OA$；自 G 連結 B 及 C，則 $\triangle AGC$，$\triangle AGB$ 內，$OE \parallel GC$，$OF \parallel GB$.

$\therefore$　$BOCG$ 爲平行四邊形，OG，BC 互爲二等分，卽 AO 過中點 D，故三中線會於一點 O.

又 $AO=OG=2OL$　從而 AO 爲 AD 之 $\frac{2}{3}$.

同理，可證　$OB=\frac{2}{3}BE$，　$OC=\frac{2}{3}CF$.

(注意)　重心爲三角形重力之中心；在物理學上爲極緊要之點，在數學上應用極廣.

(1)　三角形之各頂點與其形外一直線距離之和，等於其重心與此直線距離之 3 倍，試證明之.

(2)　在直線 XY 之一側有二點 A，B，他側有一點 C；若從 A, B 至 XY 所作垂線 AA'，BB' 之和，等於從 C 至 XY 所作之垂線 CC'，則 XY 必過 $\triangle ABC$ 之重心；試證三角形之重心，垂心及外心共三點在一直線上.

(3)　試證三角形重心與垂心之距離，等於重心與外心之距離之二倍.

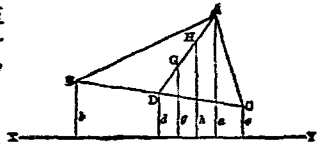
(武漢大學)

垂心，重心，外心所共之線名曰 Euler 線.

三角形之五心(其三)之解答

解　　答

(1) [證明] $\triangle ABC$ 之重心為 G，而 AG，BC 之中點各為 H, D.
如圖從各點至 XY 之距離各為 a, b, c, d, g, h；則



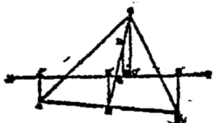
$b+c=2d$,
$a+g=2h$.
(33 頁之 3 題)

$\therefore\quad a+b+c+g=2(a+$

又　$d+h=2g$.　　$\therefore\quad a+b+c+g=4g$.

$\therefore\quad a+b+c=3g$.

(2) [證明] 將 AB 之中點 M 與 C 連結，MC 與 XY 之交點為 G，過 M 及 CG 之中點 H 各作垂線 MM'，HH'；則



$AA'+BB'=2MM'$.　　(33 頁例 3)

由假設，　$AA'+BB'=CC'$.

$\therefore\quad 2MM'=CC'$ ………………… (1)

又作 $HH' \parallel CC'$，則 $2HH'=CC'$…………(2)

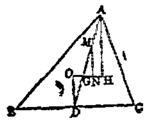
由 (1)，(2)，知　　$HH'=MM'$.

$\therefore\quad \triangle GMM' \equiv \triangle HH'G$.　$\therefore\quad GH=GM$.

故 CG 為中線 CM 之 $\frac{2}{3}$，由是 G 為 $\triangle ABC$ 之重心，即 XY 過重心.

(3) [證明] 因 $\triangle ABC$ 之垂心為 H，外心為 O，AD 為中線，故從 38 頁例 3 知 $2OD=AH$，且 $OD \parallel AH$.

次設 AD 交 OH 於 G，又過 AG 之中點 M，引 OD 之平行線交 OH 於 N；則



$MN=\frac{1}{2}AH=OD$.

又　$OD \parallel AH \parallel MN$.

$\therefore\quad \angle ODG=\angle GMN$ 及對頂角相等.

$\therefore\quad \triangle GOD \equiv \triangle GMN$.

$\therefore\quad MG=GD$.　　$\therefore\quad AG=2GD$.

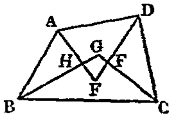
故 G 為其重心，即重心 G，垂心 H，外心 O 在一直線上.

故　$GN=NH=\frac{1}{2}GH$，但 $GN=OG$.

$\therefore\quad OG=\frac{1}{2}GH$ 或 $GH=2\cdot OG$.

證　　明	問　　題

(問題 1)　四邊形各角之分角線,圍成對角互為補角之四邊形.



[證明]　$\angle BGC = 180^\circ - \angle GBC - \angle GCB$

$= 180^\circ - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C.$

($\because$ BG 等為分角線.)

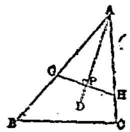
但　$180^\circ = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D.$

兩式相加, 得　$\angle BGC = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$.

同理,　$\angle AED = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle D).$

$\therefore$ $\angle BGC + \angle AED = 180^\circ$, 即對角互為補角.

(問題 2)　自三角形分角線上任意點所引之垂線,與夾此角二邊所成之角,等於他二角之和之半.　(湖北一中)



[已知]　AP 為 $\angle A$ 之分角線, $GH \perp AP$.

[求證]　$\angle AGH = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$.

[證明]　$\triangle AGP \cong \triangle APH$.　$\therefore$ $\angle AGH = \angle AHG$.

$\therefore$ $2\angle AGH = \angle AGH + \angle AHG = 180^\circ - \angle A.$

但　$\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A.$

$\therefore$ $2\angle AGH = \angle B + \angle C$, 即 $\angle AGH = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$.

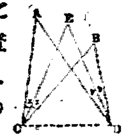
問題

(1)　$\triangle ABC$ 之 $\angle A$ 分角線,與從 A 至對邊之垂線 AD 所成之角,等於 $\angle B$ 及 $\angle C$ 之差之半,試證之.

(徐州女中)

(2)　從三角形 ABC 之大邊 AC 上, 取 AD 使等於小邊 AB, 連結 BD, 則 $\angle CBD = \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$.

(3)　AD, BC 為相交二直線,連 AC, BD 作 $\angle C$, $\angle D$ 之分角線交於 E, 求證 $\angle E = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$.



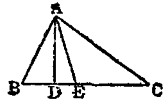
(4)　平行四邊形 $ABCD$ 中, $AD = 2AB$, 雙方延長 CD 至 E, F 使 $CE = CD = DF$, 求證 $AE \perp BF$.

解　　　答

(1) [證明] 令 AE, AD 各為 $\angle A$ 之分角線及垂線,則

$\angle B+\angle BAD=90^\circ$

$=\angle C+\angle CAD.$



$\therefore\quad \angle B-\angle C$

$=\angle CAD-\angle BAD.$

但　$\angle CAD=\frac{1}{2}\angle A+\angle DAE$

及　$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle A-\angle DAE.$

兩式相減,得

$\angle CAD-\angle BAD=2\angle DAE.$

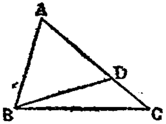
$\therefore\quad 2\angle DAE=\angle B-\angle C,$

即　$\angle DAE=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C).$

(2) [證明] $\because\ AB=AD.\quad \therefore\ \angle ABD=\angle ADB.$

$\angle ABD+\angle ADB$

$=\angle ABD+\angle ABD,$



即　$2\angle ABD=180^\circ-\angle A.$

又　$\angle B+\angle C=180^\circ-\angle A.$

$\therefore\quad 2\angle ABD=\angle B+\angle C.$

$\therefore\quad \angle ABD=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C).$

$\therefore\quad \angle CBD=\angle B-\angle ABD$

$=\angle B-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$

$=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C).$

(3) [證明] 因 O 為三角形 CED 形內一點,從 11 頁第五題,知

$\angle COD=\angle E+\angle x+\angle y$ ……………(1)

其中 $\angle x$, $\angle y$ 各為 $\angle ACB$, $\angle BDA$ 之半.

又於 $\triangle AOC$, $\triangle BOD$ 中,

$\angle A+2\angle x=\angle COD=\angle B+2\angle y$ ………(2)

(1), (2) 相加,得 $2\angle E=\angle A+\angle B.$

$\therefore\quad \angle E=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B).$

(4) [證明] $\because\quad AB=DC=DF=CE.$

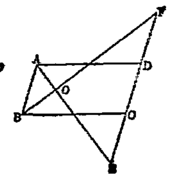
$\therefore\quad DE=2AB=AD$, 即 $\triangle DAE$ 為等腰三角形.

$\therefore\quad \angle E=\angle DAE.$

但　$\because\ AB\parallel CD.$

$\therefore\quad \angle E=\angle BAE=\angle DAE,$

即 AE 為 $\angle A$ 之分角線.



同理, BF 為 $\angle B$ 之分角線.

$\therefore\quad \angle OAB+\angle ABO$

$=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B).$

但　$\angle A+\angle B=180^\circ.$

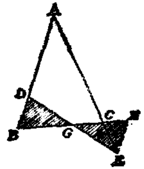
$\therefore\quad \angle OAB+\angle ABO=90^\circ.$

$\therefore\quad \angle O=90^\circ,$

即　$AE\perp BF.$

證　　明

(問題 3)　設自等腰三角形 ABC 之端點，截取一邊上及他邊之延長線上二等段 BD 及 CE，試證 DE 爲底邊所平分.　(廈門大學)



[已知]　$AB=AC,\ BD=CE.$

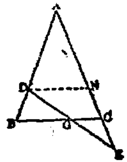
[求證]　$DG=GE.$

[證法一]　自 E 作 AB 之平行線 EH，則

$$\angle EHC=\angle ABC=\angle ACB=\angle ECH.$$

故　$HE=CE=BD$，且 $\angle HEG=\angle BDG.$

$\therefore\ \triangle BDG\equiv\triangle GEH$，而 $DG=GE.$



[證法二]　作 $DN\parallel BC$，則

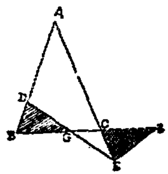
$$\angle D=\angle B=\angle C=\angle N.$$

$\therefore\ AD=AN.$　但　$AB=AC.$

$\therefore\ CN=BD=CE.$

故於 $\triangle DEN$ 中，BC 爲過一邊中點，而平行於第二邊之線，故必平分第三邊，即

$$DG=GE.$$



[證法三]　作 $ES=GE$，則

$$\angle ESC=\angle EGC=\angle DGB,$$

$$\angle B=\angle C=\angle ECS，且\ BD=CE.$$

$\therefore\ \triangle BDG\equiv\triangle ECS.$

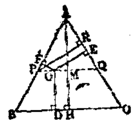
$\therefore\ DG=ES.$

但　$ES=GE.$　　$\therefore\ DG=GE.$

問　　題

(1)　自等腰三角形之底上，任取一點至二等邊各作垂線，則其爲一定長，且此定長爲自底之一端向對邊所作之垂線.(浙江大學)，(暨南大學)，(太倉師範)，(廣州，高會)，(南菁中學)

(2)　若從等邊三角形任一點，作三邊之垂線，則其和爲定長，且等於此三角形之高.　(太倉師範)



解　　　　答

(1) [已知] $AB=AC,\ PM\perp AB,\ PN\perp AC.$

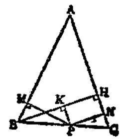
[求證] $PM+PN=BH.$

[證法一] 作 $KH=PN.$

$\because\ KH\parallel PN.$

故 $PKHN$ 爲平行四邊形,而

$PK\parallel AC.$



卽 $\angle BKP=90^\circ=\angle BPM.$

又 $\angle BPK=\angle ACB=\angle ABC$

$=\angle MBP.$

且 $BP=BP.\quad \therefore\ \triangle PBM\equiv\triangle PBK.$

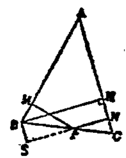
$\therefore\ BK=PM.$

$\therefore\ BH=BK+KH=PM+PN.$

[證法二] 延長 PN, 作 $PS=PM$,

然後證 $SN=BH$, $\angle B=\angle C$; 故

其餘角 $\angle BPM=\angle NPC.$



$\therefore\ \angle BPS=\angle BPM,\ BP=BP.$

$\therefore\ \triangle BPS\equiv\triangle BPM.$

$\therefore\ \angle PBS=\angle MBP=\angle ABC$

$=\angle ACB.$

$\therefore\ BS\parallel HN.$

但 $NS\parallel BH.\ \therefore\ BSNH$ 爲平行四邊形,而

$NS=BH.$

卽 $BH=NP+SP$

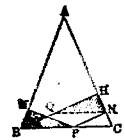
$=PN+PM.$

[證法三] 作 $BQ=PN.$

但 $BH\parallel PN.$

$\therefore$ $BPNQ$ 爲平行四邊形.

$\therefore\ NQ\parallel PB.$



$\therefore\ \angle HNQ=\angle ACB=\angle PBM,$

又 $BP=NQ$, 故兩直角三角形 $PBM,\ NQH$

全等,故 $QH=PM$, 而

$BH=BQ+QH=PM+PN.$

(2) [已知] $AB=BC=CA,\ OD\perp BC,\ OE\perp AC,$

$OF\perp AB,\ AH\perp BC.$

[求證] $OD+OE+OF=AH.$

[證明] 過 O 作 BC 之　線,交 $AB,\ AC,$ AH 於 $P,\ Q$ 及 M, 又作 $PR\perp AC$, 則因 $ODHM$ 爲平行四邊形,而 $OD=MH$. 又從前題,知 $OE+OF=PR$, 因 $PQ\parallel BC$, 故 $AM\perp PQ.$

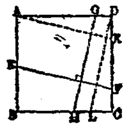
$\therefore\ PR=AM$ (正三角形之高).

$\therefore\ OD+OE+OF=MH+PR=MH+AM$

$=AH.$

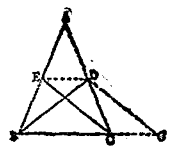
證明

(問題 4) 互相垂直之二直線 EF, GH 爲正方形 $ABCD$ 所截,則截成之二線分 EF, GH 相等.



[證明] 先施平行移動,將 EF 移於 AK, GH 移於 LD, 作成兩直角三角形 ADK, DCL; 則 $AD=CD$. 又由假設, $EF\perp GH$. 然 $AK\parallel EF$, $DL\parallel GH$. $\therefore$ $AK\perp DL$. $\therefore$ $\angle KAD=\angle LDC$. $\therefore$ $\triangle ADK\equiv\triangle DCL$. $\therefore$ $AK=DL$. 然 $AEFK$, $DGHL$ 皆爲平行四邊形, 故 $AK=EF$, $DL=GH$, 故 $EF=GH$.

(問題 5) 設三角形有二中線相等, 則此形爲等腰三角形. (浦東中學)

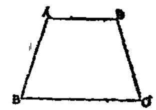


[證明] 連 D, E 且將 CE 移至 DG, 由假設, D, E 爲 AB, AC 之中點. $\therefore$ $DE\parallel BC\parallel CG$, 且 $CE\parallel DG$, 故 $DECG$ 爲平行四邊形, 而 $DG=CE$. 但由假設,知 $BD=CE$. $\therefore$ $BD=DG$, 故 $\triangle BDG$ 爲等腰,而 $\angle DBC=\angle BGD=\angle BCE$, $BC=BC$; 又 $BD=CE$. $\therefore$ $\triangle BCD\equiv\triangle BCE$. $\therefore$ $\angle B=\angle C$, 故爲等腰

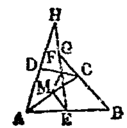
問題

(1) 對角線相等之梯形, 爲等腰梯形. (光華附中),(廈門大學)

(2) 於四邊形 $ABCD$ 中,若 $AB=CD$, $\angle B=\angle C$; 則必 $\angle A=\angle D$, 試證之.



(3) 四邊形之相對兩邊相等,則連結他二邊中點之直線與此等邊成等角.



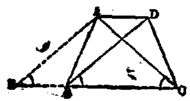
直線形應用問題(其三)之解答

解　答

(1) [已知] $AD \parallel BC,\ AC=BD$.

[求證] $AB=CD$.

[證明] 作 $AE \parallel BD$, 與 BC 之延長線交於 E.



因 $AD \parallel BC \parallel EB$.

$\therefore$ $ADBE$ 爲平行四邊形.

而 $AE=BD$. 但 $BD=AC$. $\therefore$ $AE=AC$.

故 $\triangle AEC$ 爲等腰, 而 $\angle ACB=\angle AEB=\angle DBC$. 又 $AC=BD,\ BC=BC$. $\therefore$ $\triangle ABC \equiv \triangle BCD$. $\therefore$ $AB=CD$, 故此梯形爲等腰梯形.

本題又可證之如下:

作 $AE, DF \perp BC$, 則 $AE \parallel DF$, 故 $ADFE$ 爲平行四邊形,而 $AE=BF$. $\therefore$ $\triangle AEC \equiv \triangle BDF$.

$\therefore$ $\angle DBC=\angle ACB$.

但 $BC=BC,\ BD=AC$. $\therefore$ $\triangle DBC \equiv \triangle ABC$.

$\therefore$ $AB=CD$.

(2) [證明] 自 A 作 CD 之平行線,交 BC 於 E, 則 $\angle B=\angle C=\angle AEB$, 故 $\triangle AEB$ 爲等腰三角形,而 $AE=AB=CD$,

且 $AE \parallel CD$. $\because$ $AECD$ 爲平行四邊形, 即 $AD \parallel BC$, 故 $\angle A, \angle D$ 各爲 $\angle B, \angle C$ 之補角, 故相等.

(3) [已知] $AD=BC$, E, F 各爲 AB, CD 之中點.

[求證] $\angle AHE=\angle BGE$.

[證明] 作對角線 AC, 取其中點 M 與 E, F 相連,則於 $\triangle ACD$ 中,知 $MF \parallel AD \parallel AH$, 且 $MF=\frac{1}{2}AD$.

(一三角形二邊中點聯線必平行於第三邊)

同理,可知 $ME \parallel BC \parallel BG$, 且 $ME=\frac{1}{2}BC$.

$\therefore$ $\angle MFE=\angle AHE$, $\angle MEF=\angle BGE$.

但 $AD=BC$. $\therefore$ $MF=ME$.

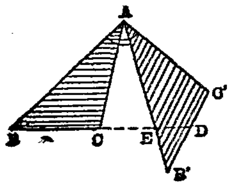
$\therefore$ $\angle MFE=\angle MEF$.

故知 $\angle AHE=\angle BGE$, 而問題證明矣.

證明

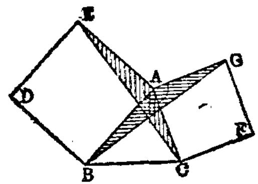
(問題6) 將$\triangle ABC$以A為中心迴轉$\angle\alpha$,而得$\triangle A'B'C'$,則AC與AC'之交角及BC與$B'C'$之交角,AB與AB'之交角皆等於$\angle\alpha$.

[證明] 由$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$,得$\angle BAC=\angle B'AC'$. ∴ $\angle BAB'=\angle CAC'$.
次設BC與$B'C'$之交點為D,AB'與BD之交點為E,則於$\triangle ABE$與$\triangle B'ED$內,$\angle B=\angle B'$,$\angle AEB=\angle B'ED$.
∴ $\angle BAB'=\angle BDB'$,即AB與AB',AC與AC',BC與$B'C'$之交角之角α.



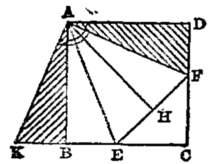
(問題7) 在$\triangle ABC$之邊AB,AC上向其外側作正方形$ABDE$,$ACFG$,則DG,CE相等且互相垂直.

[證明] 於$\triangle EAC$與$\triangle BAG$內,$AE=AB$,$AC=AG$,又$\angle EAC=\angle R+\angle BAC=\angle BAG$. ∴ $\triangle EAC\equiv\triangle BAG$,而$\triangle ABG$可視作由$\triangle AEC$以$A$為心迴轉$90^\circ$而得,故由前題,知對應邊$BG$與$CE$之交角為$90^\circ$.



問題

(1) 從正方形$ABCD$之頂點A,引二直線AE,AF使成角45°,與BC,CD交於E,F;再從A引EF之垂線AH;則AH等於正方形之一邊.



(2) 在$\triangle ABC$之邊AB,AC之外側各作正方形$ABDE$、$ACHK$.由A作BC之垂線AP,求證AP通過EK之中點Q.

(3) 正方形$ABCD$之頂點A與BC上任意點P連結成$\angle PAD$,此角之分角線,交CD於Q;試證
$$DQ=AP-BP.$$

直線形應用問題(其四)之解答

解　答

(1) [證明] 將 $\triangle AFD$ 以 A 爲中心迴轉 $90°$, 則 AD 重合於 AB, D 落在 BC 之延長線上一點 K. 因 $\angle EAF=45°$, 故 $\angle KAE=45°$.

$$\therefore \quad \triangle AKE \equiv \triangle AEF.$$

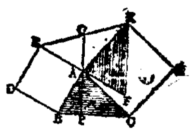
故 $\angle AKE=\angle AFE$, 又 $AK=AF$.

$\therefore \quad \triangle AKE \equiv \triangle AFH. \qquad \therefore \quad AB=AH.$

(2) [已知] $ABDE$, $ACHK$ 爲正方形, $AP\perp BC$.

[求證] $EQ=QK$.

[證明] 以 A 爲中心,將 $\triangle ABC$ 迴轉 $90°$, 則 AC 與 AK 重合,設 B 點落在 P 點,則



$$\angle EAF+\angle BAF=90°+90°=180°.$$

故 EAF 在一直線上.

又從問題 6, 知 $KF\perp BC$, 但 $AP\perp BC$.

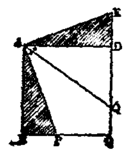
$$\therefore \quad KF \parallel AP \parallel AQ.$$

又 $\triangle ABC \equiv \triangle AFK$. (兩邊一夾角相等)

$\therefore \quad AF=AB$. 但 $AB=AE$. $\therefore \quad AE=AF$.

而 A 爲 EF 之中點,故於 $\triangle EFK$ 中,知 AP 必過第三邊 EK 之中點,即 $EQ=QK$.

(3) [證明] 以 A 爲中心,將 $\triangle APB$ 迴轉 $90°$ 使成 $\triangle ADE$, 則因 $\angle ADE=90°$, 故 E, D, C 三點在一直線上, 然 $AP=AE$, AQ 又爲分角線, 故 $\angle EAQ=\angle BAQ$, 又 $AB \parallel EQ$.



$\therefore \quad \angle AQE=\angle BAQ. \quad \therefore \quad \angle EAQ=\angle AQE.$

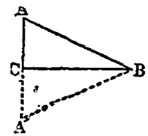
$$\therefore \quad EA=EQ.$$

$$\therefore \quad AP=AE=EQ=DE+DQ$$
$$=BP+DQ.$$

$$\therefore \quad DQ=AP-BP.$$

證明

(問題 8)　直角三角形之一銳角爲他銳角之二倍，則其最小邊等於斜邊之半.　(齊魯大學)



[已知]　$\angle A=2\angle B$.　[求證]　$AC=\frac{1}{2}AB$.

[證法一]　延長 AC 至二倍之長,然後證其等於 AB.

$\angle A=2\angle B$ 及 $\angle A+\angle B=90°$.

$\therefore\ \angle A=60°,\ \angle B=30°$.

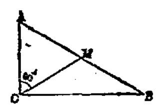
若延長 AC 至 A' 使 $AC=A'C$, 則 $\triangle ACB\equiv\triangle A'CB$.

$\therefore\ \angle A=60°,\ \angle A'BC=\angle ABC=30°.\quad\therefore\ \angle ABA'=60°.$

故 $\triangle ABA'$ 爲等邊三角形.　$\therefore\ AB=A'B=AA'=AC+A'C$.

$\therefore\ AB=2AC$, 卽 $AC=\frac{1}{2}AB$.

[證法二]　將 AB 平分爲二等分,然後證其每一份等於最小邊.如 M 爲 AB 之中點,則必



$AM=MB=MC.\quad\therefore\ \angle A=\angle ACM.$

因 $\angle A=60°.\quad\therefore\ \angle ACM=60°.$

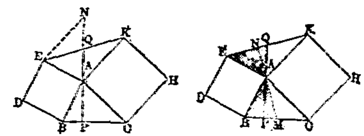
而 $\triangle ACM$ 爲等邊三角形.　$\therefore\ AC=AM=\dfrac{AM+MB}{2}$.

$\therefore\ AC=\frac{1}{2}AB$.

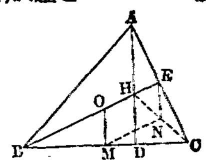
問題

(1)　等腰三角形一腰上之高與底邊所成之角等於頂角之半.

(2)　47 頁中之第二問,試證 $BC=2AQ$.



(3)　自三角形之各角頂至垂心之距離等於自外心至對邊之距離之二倍,試證之.　(武漢大學)



直線形應用問題(其五)之解答

解　答

(1) [證法一] 作 $\angle A$ 之分角線 AE, 則

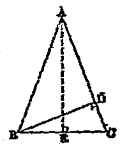
$AE \perp BC$, 而 $\angle CAE = \frac{1}{2}\angle A$.

於 $\triangle BDC, \triangle ACE$ 中, $\angle C = \angle C$,

$\angle BDC = \angle AEC = 90^\circ$.

由是第三角相等,即

$\angle CBD = \angle CAE = \frac{1}{2}\angle A$.

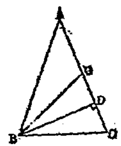


[證法二] 作 BG, 使 $\angle GBD = \angle CBD$.

其餘角 $\angle G = \angle C$, 又 $\angle C = \angle B$.

故 $\triangle ACB, \triangle CBG$ 之第三角相等, 卽

$\angle CBG = \angle A$, 卽 $\angle CBD = \frac{1}{2}\angle A$.



(2) [證法一] 延長 AQ, 使 $AQ = QN$, 連 EN, 則 $EA = AB$, $EN = AK = AC$,

(∵ $AENK$ 爲平行四邊形)

且 $\angle AEN = \angle AEK + \angle AKE$

$= 180^\circ - \angle EAK$.

但 $\angle BAC = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle EAK$

$= 180^\circ - \angle EAK$.

∴ $\angle AEN = \angle BAC$. ∴ $\triangle BAC \equiv \triangle AEN$.

∴ $BC = AN = AQ + QN = 2AQ$.

[證法二] 連 BC 之中點 M 與 A 得 $\triangle ABM$ 及 $\triangle AEQ$, 其中 $AB = AE$,

$\angle EAQ = 180^\circ - \angle BAE - \angle BAP$

$= 180^\circ - 90^\circ - \angle BAP$

$= 90^\circ - \angle BAP = \angle ABM$.

與 47 頁例 2 同樣證法, AM 卽 $AN \perp EK$.

∴ $\angle BAM = 90^\circ - \angle EAN = \angle AEQ$.

∴ $\triangle ABM \equiv \triangle AEQ$. ∴ $AQ = BM = \dfrac{BC}{2}$.

(3) [證明] 連 CH 取其中點 N, 連 EN 及 MN;

於 $\triangle ACH$ 中,知 $EN = \frac{1}{2}AH$, 且 $EN \parallel AH$.

但 $OM \perp BC$, $AD \perp BC$. ∴ $OM \parallel EN$.

同理,可證中垂線 OE 與 MN 平行,故 $OMNE$ 爲平行四邊形,而 $EN = OM$.

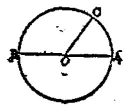
但 $EN = \frac{1}{2}AH$. ∴ $OM = \frac{1}{2}AH$,

卽 $AH = 2OM$, 故如題云云.

定　義

[圓]　以一線包圍平面形,從其內部一點至其線上之任何點之距離皆相等,則此線曰圓周(或單稱圓),其內部之一點曰圓之中心(或單稱圓心).

[直徑]　卽過圓之中心以圓周爲界之直線.



[半徑]　等於直徑之半,卽自圓心至圓周之直線.

[半圓]　以直徑分圓爲二部分是曰半圓.

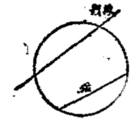
[同心圓]　卽同有中心之圓.

[弧]　圓周之一部分曰弧,如 $\widehat{AC}$ 合成全圓周之二弧曰共軛弧,其大者曰優弦,小者曰劣弧.

[優角劣角]　二個半徑,於圓心所成共軛角之中,立於優弧之上者曰優角,立於劣弧之上者曰劣角.

[扇形]　卽弧與過其兩端之半徑所成之平面形,而對於其弧之中心之角曰扇形角.

[弦]　卽連結圓周上二點之直線.

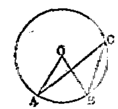


[割線]　卽與圓周交於二點之直線.

[弓形]　圓之弓形,卽弦與對於此弦之共軛弧中任一弧所包圍之平面形.

[弓形之角]　自弓形之弧之一點,至其弧之兩端引二直線,其所夾之角曰弓形之角.

[圓周角]　自圓周上之一點引二弦,其所夾之角曰圓周角,如 $\angle ACB$ 是.

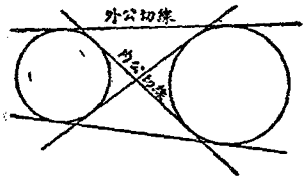


[切線及切點]　與圓祇會於一點,而不再相會之直線曰切線,其點曰切點.

[公切線]　二圓在一直線之同側,而與其相切者,此直線稱外公切線,在反對側而與其相切者,此直線稱內公切線.

關於圓之定義（其二）

定　義



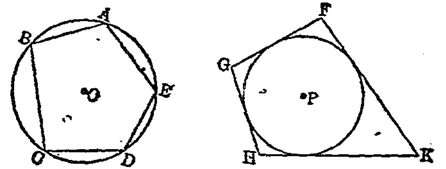
[二圓之關係]　二圓僅於一點相會，則此二圓曰互相切，其一圓全在他圓之內，則曰內切，若全在其外，則曰外切，又一圓之一部分在他圓內，其餘之部分在他圓外，則此二圓曰相交．

[內接形及外切形]　一個多角形之頂點皆在一圓周上，此多角形曰內接於圓，而圓曰外接於多角形，

三角形外接圓之中心曰外心．

多角形之各邊均切於一圓，則其多角形曰外切於圓，而圓曰內切於多角形．

三角形內切圓之中心曰內心．



[傍切圓]　切於三角形一邊，與他二邊延長線上之圓曰傍切圓，其中心曰傍心．

[注意]　三角形之外心，爲各邊之垂直二等分線之交點，其內心爲各內角之二等分線之交點，其傍心爲一內角與他二外角之二等分線之交點．

證明	問題

(定理 1)　從圓心至一點之距離，因其點在圓周內或圓周上或圓周外，從而比半徑小或等或大.其逆定理亦眞.

(定理 2)　任何圓之直徑爲其半徑之二倍.

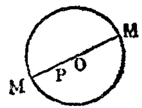
(定理 3)　半徑相等,則圓全相等.

系　相合之二圓其半徑相等.

(定理 4)　圓之直徑分圓爲二等分.

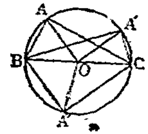
(定理 5)　同圓之諸半徑均相等,其直徑亦相等.

以上各定理悉爲易於證明者,故除定理 1 補證於後外,餘皆從略.



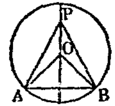
[證明]　連結 O 與 P 令與圓內相交之點爲 M, M', 則 OP 不再交圓周於他點 (因 OP 上與 O 點有距離等於半徑之點僅有二個故也).若 P 在圓內,則在 OM 或 OM' 之上,故 $OP<OM$ 或 OM', 即 OP 小於半徑. P 在圓周上,則 P 點必與 M 　M' 之一相合，故此時 OP 等於半徑,又若 P 在圓外,則 P 點必在 MM' 之外，故 OP 大於 OM 或 OM'，從而 OP 大於半徑.其逆定理可倣此證之.

(1)　共有斜邊之直角三角形之角頂同在一圓周上.



(2)　菱形四邊之中點同在一圓周上.

(3)　過正方形對角線上任意一點，與相鄰二邊平行作二直線，則此二直線與四邊相交之四點，同在一圓周上.



(4)　中心 O 以外之點 P 距圓周上 A, B 兩點相等，則過 P 之直徑分 $\angle AOB$, $\angle APB$ 及 AB 爲二等分,且垂直於 AB.

圓之簡易定理之解答

解　　答

(1) [證明] 設共有斜邊之諸直角三角形爲 ABC, $A'BC$, $A''BC$ 等,其斜邊中點爲 O,連結 O 與各直角項 A, A', A'' 等,作 AO, $A'O$, $A''O$ 等而皆得斜邊之半,即 $AO=A'O=A''O=\cdots\cdots$.

故 A, A', A'' 等在以斜邊中點 O 爲圓心,斜邊之半爲半徑之圓周上.

(2) [證明] 因 $ABCD$ 爲菱形,故 $AD=CD=BC=AB$, 且 AC, BD 之交點 O 爲 AC, BD 之中點,於 $\triangle ABC$ 內其 OL 爲連結二邊中點之直線. $\therefore OL=\frac{1}{2}BC$.

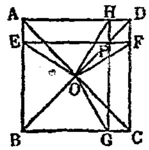
同理, $OM=\frac{1}{2}AB$, $ON=\frac{1}{2}AD$, $OK=\frac{1}{2}CD$.

已證 $AB=BC=CD=DA$.

$\therefore OL=OM=ON=OK$, 即 L, M, N, K 同在以 O 爲中心之同一圓周上.

(3) [已知] P爲對角線上任意一點,

$EF \parallel BC$, $GH \parallel AB$.



[求證] E, F, G, H 在一圓周上.

[證明] 對角線 AC, BD 之交點爲 O, 則於 $\triangle AEO$, $\triangle DHO$ 中,

$\angle OAE=\angle ODH=45°$,

又 $OA=OD$, $AE=PH=DH$.

$\therefore \triangle AEO\equiv\triangle DHO$. 由是, $OE=OH$.

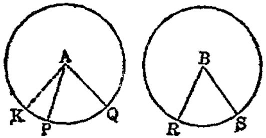
同理, $OH=OG=OF$. $\therefore OE=OF=OG=OH$,

故 E, F, G, H 同在以 O 爲中心之同一圓周上.

(4) [證明] 由假設,知 $PA=PB$, 又 $OA=OB$, 故 $\triangle PAB$, $\triangle OAB$ 立於 AB 之上爲二個等腰三角形,故連結二項點之直線,即直徑 OP 分項角 $\angle AOB$, $\angle APB$ 爲二等分,且垂直於底邊 AB 而二等分之.

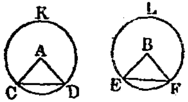
證明

(定理 6) 同圓或等圓中,等圓心角必立於等弧之上,又圓心角不等,則大角立於大弧之上,其逆定理亦眞.



[證明] 以一圓置他圓上,使 A 與 B 重合,則二圓重合,回轉其一使 S 重合於 Q 上.因 $\angle SBR=\angle QAP$, 則 BR 重合於 AP 之上,且 R 重合於 P 之上,故弧 $PQ=$ 弧 RS, 若 $\angle KAQ>\angle RBS$, 則 BR 在 $\angle KAQ$ 之內,而位於 AP 之上,故 $\angle KAQ>\angle PAQ$. 由是, P 在 K 與 Q 之間,即弧 $KQ>PQ=RS$.

(定理 7) 同圓或等圓中,對於等弧之弦必相等,對於不等之劣弧,則大劣弧之弦大於他弦,其逆定理亦眞.



[證明] 因 $\overparen{CD}=\overparen{EF}$, 故 $\angle CAD=\angle EBF$.

於 $\triangle ACD$, $\triangle BEF$ 中,

$$AC=BE,\ AD=BF,$$

又 $$\angle CAD=\angle EBF.\quad \therefore\ \triangle ACD\equiv\triangle BEF.$$

$$\therefore\ CD=EF.$$

又 $\overparen{CD}>\overparen{EF}$ (就劣弧論), 則 $\angle CAD>\angle EBF$, 而 $\triangle CAD$, $\triangle EBF$ 之二邊相等夾角不等, 則大角之對邊 CD 大於小角之對邊 EF.

問題

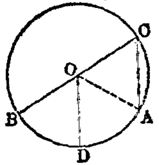
(1) 等圓中, 第一圓之圓心角爲第二圓圓心角之二倍, 則其角所對之弧亦爲二倍.

(2) 同圓上有二弧之和等於他弧, 則立於二弧上圓心角之和, 與立於他弧上之中心角相等.

(3) 在圓周上一點 C 作一弦 CA 與一直徑 CB, 求證平行 CA 之半徑平分弧 AB.

(上海,初會)

又 (暨南大學)



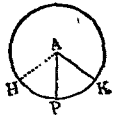
(4) P 爲與圓周上二點 A, B 等距離, 則 OP 平分 $\overparen{AB}$, 而 O 爲圓心.

(5) 二半徑分弦爲三等分, 不能三等分其弧.

解　　　　答

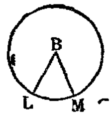
(1) [已知] $\angle HAK = 2\angle LBM$.

[求證] 弧 $HK = 2$ 弧 LM.



[證明] 引半徑等分 $\angle HAK$ 交 HK 弧於 P, 則

$\angle HAP = \angle PAK = \frac{1}{2}\angle HAK$
$= \angle LBM$.

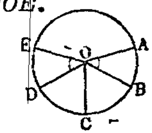


依定理 7, 知 $\overset{\frown}{HP} = \overset{\frown}{PK} = \overset{\frown}{LM}$, 卽

$\overset{\frown}{HK} = 2\overset{\frown}{HP} = 2\overset{\frown}{LM}$.

(2) [已知] $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}$.

[求證] $\angle AOB + \angle COD = \angle COE$.



[證明] 作弧 DE 等於 $\overset{\frown}{AB}$, 則

$\overset{\frown}{CDE} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AB}$.

因　$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DE}$.

$\therefore \angle AOB = \angle DOE$.

故　$\angle COE = \angle DOE + \angle DOC$
$= \angle AOB + \angle DOC$.

(3) [已知] $OD \parallel CA$, BC 為直徑.

[求證] $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$.

[證明] 連 OA, 則 $OA = OC$, 故

$\angle OCA = \angle OAC$.

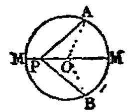
$\because OD \parallel CA$. $\therefore \angle OAC = \angle AOD$,

又　$\angle BOD = \angle OCA$.

故　$\angle BOD = \angle AOD$. $\therefore \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$.

(4) [已知] $PA = PB$, O 為圓心.

[求證] $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$.



[證明] 連結 OA 及 OB, 則從定理 5, 知 $OA = OB$. 但

$PA = PB$, $OP = OP$.

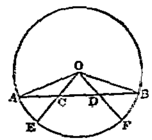
$\therefore \triangle POA \cong \triangle POB$.

$\therefore \angle AOP = \angle BOP$, 其補角

$\angle AOM = \angle BOM$. $\therefore \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}$.

(5) [已知] $AC = CD = DB$.

[求證] E, F 不能三等分 $\overset{\frown}{AB}$.



[證明] OC 為 $\triangle OAD$ 之中線,

而　$OA = OF$, $OF > OD$.

$\therefore OA > OD$.

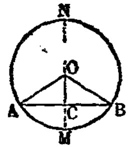
$\therefore \angle AOC < \angle COD$.　(21 頁第 3 問)

$\therefore$ 弧 $AE <$ 弧 EF, 故 E, F 不能三等分其弧 AB.

證明	問題

(定理 8) 垂直於弦之直徑必平分其弦,又平分其弦所對之弧.

[已知] $MN\perp AB$. [求證] $AC=BC$ 及 $\widehat{AM}=\widehat{MB}$.



[證明] 因 $MN\perp AB$, 故 $\triangle AOC$, $\triangle BOC$ 爲直角三角形,而 $OA=OB$, 且因 $\triangle AOB$ 爲等腰,從而

$\angle OAC=\angle OBC$. $\therefore$ $\triangle AOC\equiv\triangle BOC$.

$\therefore$ $AC=BC$, 又 $\angle AOC=\angle BOC$, 卽 $\widehat{AM}=\widehat{MB}$.

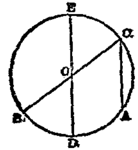
系 直線 MN 備次列五條件.

1. 過圓之中心 O.
2. 垂直於弦 AB.
3. 過弦 AB 之中點.
4. 過對於弦 AB 之劣弧中點 M.
5. 過對於弦 AB 之優弧中點 N.

設有一直線,已知其含有其中二種性質,則必含有其餘三種性質.

(1) 平行之弦，必於圓周上截相等之弧.

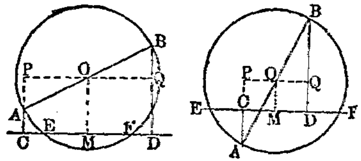
(2) 在圓周上一點 C, 作一弦 CA 與一直徑 CB, 求證平行於 CA 之半徑平分弧.



(上海,初會),(暨南大學)

(3) 一直線與二個同心圓相交，則在二周間所夾之二部分相等.

(4) 由直徑之兩端向任意一弦 (或延長線),作垂線,此兩垂足與弦之兩端等距離.

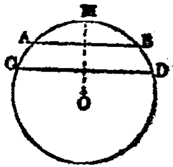


(5) 不過圓心之相交二弦不能互爲二等分.

圓之定理及問題(其二)之解答

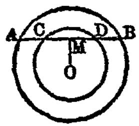
解　　　　　　答

(1) [證明] 作 $OM \perp AB$, 則已知 $AB \parallel CD$.
$\therefore OM \perp CD$.
從定理,知 $\overset{\frown}{CM}=\overset{\frown}{MD}$.
同理,知 $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}$.
$\therefore \overset{\frown}{CM}-\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MD}-\overset{\frown}{MB}$,
即 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.



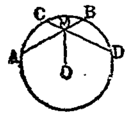
(2) [證明] 延長 OD 與圓周再交於 E. 由假設,知 $CA \parallel OD \parallel DE$. 從題 1, 得 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CE}$.
又 $\angle COE=\angle BOD$. (對頂角) $\therefore \overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{BD}$.
$\therefore \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$, 即 D 爲 $\overset{\frown}{AB}$ 之中點.
(注意) 參考 56 頁之第三題.

(3) [已知] 一直線與大圓小圓交於 A, B, C, D.
[求證] $AC=BD$.
[證明] 由 O 作垂線 $OM \perp AB$,
則 $AM=MB$, 又 $CM=DM$,
$AM-CM=MB-DM$,
即 $AC=BD$.



(4) [已知] AB 爲直徑, AC, BD 皆爲 CD 之垂線.
[求證] $CE=DF$.
[證明] 作 $OM \perp CD$, 又自 O 作 CD 之平行線, 與 BD, AC (或其延長線) 相交於 P 及 Q, 則
$\angle OPA=\angle ACD=90°$,
$\angle OQB=\angle BDM=90°$;
又 $OA=OB$, $\angle AOP=\angle BOQ$.
$\therefore \triangle AOP=\triangle BOQ$. $\therefore OP=OQ$.
$\therefore CM=OP=OQ=MD$.
因 $OM \perp EF$. $\therefore ME=MF$.
$\therefore MC-ME=MD-MF$,
即 $CE=DF$.

(5) [證明] 設二弦 AB, CD 於點 M 互爲二等分, 則由定理 8 系,知 $OM \perp AB$ 及 $OM \perp CD$, 即 OM 垂直於二直線 AB 及 CD, 是爲不可能之事,故知 AB, CD 之交點除在圓心外無互爲二等分者.

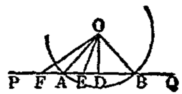


證　　明	問　　題

(定理 9)　凡圓之弦上之點必在圓周之內,而其雙方延長線上之點,則在圓周之外.

[已知]　E 點在 AB 上, F 點在其延長線上.

[求證]　E 在圓內, F 在圓外.

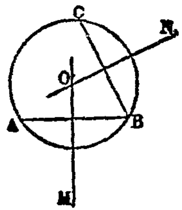


[證明]　作 $OD\perp AB$, 且連 OE 及 OF. 從 23 頁第一題,知 OE 為從等腰三角形頂點至對邊所作直線,故 $OE<OA$, 故 E 在圓內.

又 $\angle FOD>\angle AOD$.　$\therefore$ $FO>AO$, 故 F 在圓外.

(定理 10)　過不在同一直線上之三點,可作一圓而僅限於一圓.

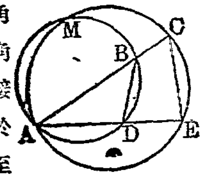
[求證]　過三點 A, B, C 之圓之中心必與三點等距離,故所求圓之圓心必為 AB, BC, CA 之中垂線之交點. 今三點不在一直線上而組成一三角形.一三角形之三個中垂線,祇交於一點 O, 而此點即為與三點等距離惟一之點.故以 O 為圓心, OA 為半徑之圓乃過 A, B, C 三點惟一之圓.



(1)　一直線與一圓相交, 至多不能過二點.

(2)　二圓相交,至多不能過二點.

(3)　有一公共角 A 之兩三角形, 其外接圓除相交於 A 點外, 至多祇能再有一個交點.



(4)　凡過二點之圓之中心必在其二點連結線之垂直二等分線上.

(5)　過一直線上之三點不能作一圓,試證明之.

圓之定理及問題(其三)之解答

解　　答

(1) [證明] (圖見定理8) 直線 PQ 上各點其與中心之距離, AB 間之點比半徑小, AB 之延長線上之點比半徑大,僅 A, B 二點與中心之距離等於半徑,即 A, B 在圓上,故直線 PQ 與圓僅交於 A, B 二點.

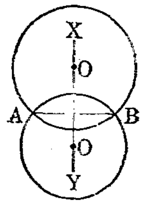
(2) [證明] 若兩圓有三個交點,如 A, B, C, 則此兩圓皆過 A, B, C 三點,而與定理 (10) 相背,故不可.

(3) [證明] $\triangle ABD$, $\triangle ACE$ 之外接圓, 當然相交於 A. 但除去交點 A 外,至多祇能再有一個交點. 何以言之,若云除 A 外尚有二個交點 M 及 N, 則 $\triangle ABD$, $\triangle ACE$ 之外接圓悉過 A, M, N 三點,而過三點可作二個不同之圓矣,是與定理10相背,故不可.

(4) [已知] 二點 A, B.

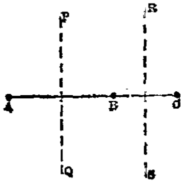
[求證] 凡過此二點之圓之中心, 必在直線 AB 之中垂線 XY 上.

[證明] 設兩圓 O 及 O' 為過 A, B 二點之圓,則此兩圓皆以 AB 為弦, 故每一圓之中心皆在 AB 之中垂線 XY 上.



同理, 可證凡過 A, B 之圓均在 XY 之上.

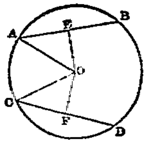
(5) [證明] 設有一圓過 A, B, C 三點,則 AB 必為此圓之一弦,於是圓心必在 AB 之中垂線 PQ.



同理, 此圓之圓心亦必在 BC 之中垂線 RS 上. 今 AB, BC 合成一直線,而同一直線之兩垂線必互相平分,即 $PQ \parallel RS$, 即 PQ 與 RS 不能相交,故此圓之圓心不能求得. 由是, 所求之圓不能求得,而問題證明矣.

證明

(定理 11)　於同圓或相等之圓相等之弦，與中心有相等之距離，其逆亦眞.



[證明]　從中心 O 至相等二弦 AB, CD 所作之垂線,各爲 OE, OF. 因 $OE\perp AB$, $OF\perp CD$, 故

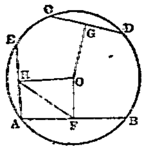
$$AE=EB,\ CF=FD.$$

由假設，$AB=CD$. $\therefore$ $AE=CF$.

故二個直角三角形 OAE, OCF 爲全等.　$\therefore$ $OE=OF$.

又其逆定理從中心 O 至二弦 AB, CD 之距離 OE, OF 旣相等,則由二個直角三角形之全等,得　$AE=CF$. $\therefore$ $AB=CD$.

(定理 12)　在同圓或相等之圓內，不相等二弦之中大弦距中心較近,其逆定理亦眞.



[證明]　$AB>CD$, 從 O 引 AB, CD 之垂線 OF, OG; 今等於 CD 另作弦 AE, 再引其垂線 OH, 則 $OH=OG$, 次連結 FH. 由 $AB>AE$, 故 $AH<AF$. $\therefore$ $\angle AHF>\angle AFH$. 然 $\angle OHA=90^\circ=\angle OFA$.
$\therefore$ $\angle FHO<\angle HFO$. $\therefore$ $OF<OH$. $\therefore$ $OF<OG$.

問題

(1)　直徑爲最大之弦.

(2)　過圓內一定點之最短弦，必垂直於過其點之直徑.　(上海,高會)

(3)　等弦相交，其於交點所分之二部分互相等.

(4)　相等二圓，與其中心連結線平行作直線，則二圓在此直線截取之弦必相等.　(山東,初會)

(5)　設二弦 AB, EF 同交直徑於一點 P, O 爲圓心, $\angle DPO=\angle FPO$, 求證 $AB=EF$.　(廣東四中)

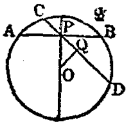
解	答

(1) [證明]　從圓心至直徑之垂直距離爲零，卽比任何弦所作之垂線皆小，故爲最小.

　　∴ 直徑爲圓之最大弦.

(2) [已知]　AB, CD 相交於圓內一點 O, 且 $AB \perp OP$.

[求證]　$AB<CD$.



[證明]　AB 垂直於 OP, 而 CD 與之斜交，故自 O 向 CD 作垂線 OQ, 則就 $\triangle OPQ$ 而論，

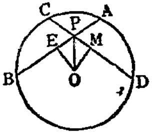
$$\angle OQP>\angle OPQ.$$

$\therefore\ OP>OQ.$　$\therefore\ AB<CD$,

卽 AB 比過 P 之任何弦皆小.

(3) [已知]　$AB=CD$.

[求證]　$AP=PC$ 及 $BP=PD$.



[證明]　從 O 向 AB, CD 作垂線 OE 及 OM, 則

$$\triangle OEP\equiv\triangle OMP.$$

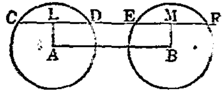
(因 $OE=OM$, $OP=OP$, $\angle OEP=\angle OMP$)

由是，　$PE=PM$.

$\therefore\ AE-PE=CM-PM.$

卽 $AP=CP$. 同理，$PB=PD$.

(4) [已知]　二圓 A, B 爲等圓，$CF \parallel AB$.



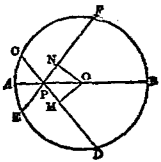
[求證]　$CD=EF$.

[證明]　從 A 及 B 向 CF 作垂線 AL, BM, 則 $AB \parallel LM$, 且 $AL \parallel BM$. ∴ $ALMB$ 爲平行四邊形，而

$AL=BM$.　$\therefore\ CD=EF$.

(5) [已知]　$\angle DPO=\angle FPO$.

[求證]　$CD=EF$.



[證明]　從圓心 O 作 CD, EF 之垂線 OM 及 ON, 則直角三角形 OPM, OPN 中，　$OP=OP$,

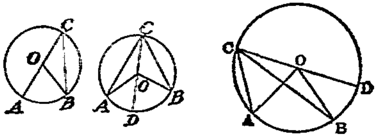
$$\angle OPM=\angle OPN.$$

$\therefore\ \triangle OPM\equiv\triangle OPN.$

$\therefore\ OM=ON.$ $\therefore\ CD=EF.$

證　明	問　題

(定理 13) 圓周角等於同弧上圓心角之半. (浙江,高會)



(甲)　(乙)　(丙)

[已知] $\angle ACB$ 為立於弧 AB 上之圓周角, $\angle AOB$ 為立於同弧上之圓周角.

[求證] $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$.

[證明] I. 角之一邊 AC 過中心 O (甲圖), 則因 $\triangle BOC$ 為等腰三角形. $\therefore\ \angle ACB=\angle OBC$.

$\therefore\ \angle AOB=\angle ACB+\angle OBC=2\angle ACB$.

II. 其邊不過圓心 (乙,丙二圖).

引直徑 CD, 由 I, $\angle AOD=2\angle ACD$

及 $\angle BOD=2\angle BCD$.

$\therefore\ \angle AOD+\angle BOD=2(\angle ACD+\angle BCD)$ (乙圖),

即 $\angle AOB=2\angle ACB$.

或 $\angle BOD-\angle AOD=2(\angle BCD-\angle ACD)$ (丙圖),

即 $\angle AOB=2\angle ACB$.

故如題言, $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$.

問題

(1) 二弦 AB, CD 相交於圓內 E 點, 則其所成之 $\angle AEC$ 與立於弧 AC 及 BD 上圓心角之和之半相等.

(2) 延長二弦 AB, CD 交於圓外一點 E, 則所成之角 $\angle AEB$ 與立於弧 AC, BD 上圓心角之差之半相等.

(3) 同圓內立於等弧上之圓周角必相等. (定理)

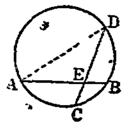
(4) 從三角形 ABC 外接圓之中心 O, 向 BC 邊作垂線 OD, 則 $\angle BOD$ 等於 $\angle A$ 或其補角.

(5) 圓之內接梯形必為等腰梯形. (湖南,高會)

解　答

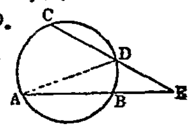
(1) [證明]　連結 A, D 成 $\triangle ADE$, 則 $\angle AEC=\angle ADC+\angle BAD$.

但 $\angle ADC$ 等於 $\overset{\frown}{AC}$ 之圓心角之半, $\angle BAD$ 等於 $\overset{\frown}{BD}$ 之圓心角之半, 故 $\angle AEC$ 等於 $\overset{\frown}{AC}$ 之圓心角與 $\overset{\frown}{BD}$ 之圓心角之和之半.



(2) [證明]　連結 A, D 成 $\triangle ADE$, 則 $\angle AEC=\angle ADC-\angle BAD$.

但 $\angle ADC$ 等於 $\overset{\frown}{AC}$ 之圓心角之半, 又 $\angle BAD$ 等於 $\overset{\frown}{BD}$ 之圓心角之半.



$\therefore$ $\angle AEC$ 等於 $\overset{\frown}{AC}$ 及 $\overset{\frown}{BD}$ 之圓心角之差之半.

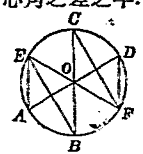
(3) [已知]　於同圓 O 內, $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

[求證]　$\angle AEB=\angle CFD$.

[證明]　由定理 13, 知

$\angle AEB=\frac{1}{2}\angle AOB$,

$\angle CFD=\frac{1}{2}\angle COD$.



但因　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.　$\therefore$ $\angle AOB=\angle COD$.

$\therefore$ $\angle AEB=\angle CFD$.

(4) [證明]　$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$; 如 $\angle BAC$ 爲鈍角, 則　$\angle BAC=\frac{1}{2}(360^\circ-\angle BOC)$;

作 $OD\perp BC$, 則

$\triangle BOD\equiv\triangle COD$.

由是, $\angle BOD=\angle COD$,

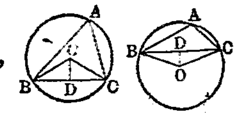
即 OD 二等分 $\angle BOC$.

$\therefore$ $\angle BOC=2\angle BOD$.

$\therefore$ $\angle BAC=\angle BOD$,

或　$\angle BAC=\frac{1}{2}(360^\circ-2\angle BOD)$

$=180^\circ-\angle BOD$.



(5) [已知]　$ABCD$ 內接於圓, 且　$AD\parallel BC$.

[求證]　$AB=CD$.

[證明]　圓周角

$\angle CBD=\frac{1}{2}\angle COD$,

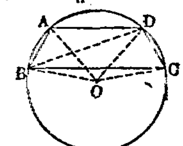
又 $\angle ADB=\frac{1}{2}\angle AOB$.

$\because$ $AD\parallel BC$.

$\therefore$ $\angle ADB=\angle CBD$,

即　$\angle AOB=\angle COD$.

$\therefore$ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.　$\therefore$ $AB=CD$.



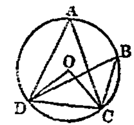
證明

(定理 14)　同弓形之角相等.

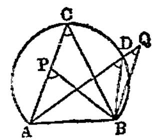
[已知]　$\angle DAC$, $\angle DBC$ 爲同弓形之角.

[求證]　$\angle DAC=\angle DBC$.

[證明]　$\angle DAC$ 及 $\angle DBC$ 悉爲 $\angle DOC$ 之半而相等.



系　弓形之弦對於形內一點之角, 必比弓形之角大, 而對於形外一點與弓形在同側之角, 比弓形之角小; 又其逆亦眞.



[證明]　延長 AP 令交弓形之弧於 C, 則

$$\angle APB=\angle ACB+\angle PBC.$$

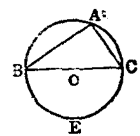
$$\therefore\ \angle APB>\angle ACB.$$

又 $\angle AQB$ 二邊之內,至少必有一邊,如 AQ 者交弓形弧於 D, 則

$$\angle AQB=\angle ADB-\angle DBQ.$$

$\therefore\ \angle AQB<\angle ADB$, 故如系云云.

(定理 15)　半圓內之弓形爲直角.



[證明]　因 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$. 但 $\angle BOC=180^\circ$.

(因 BC 爲直徑,而 B, O, C 三點在一直線上)

$$\therefore\ \angle BAC=90^\circ.$$

問題

(1)　一圓周角之分角線, 交圓周於另一點, 過此點若作一弦與圓周角之一邊平行, 則該弦必與他一邊相等.　(交大管理)

(2)　AB 爲圓 O 之弦,自圓周上一點 D 向 AB 作垂線 DE, 則

$$\angle ADE=\angle BDO.$$

(3)　以三角形之二邊爲直徑畫圓, 則其圓之交點, 必在第三邊或其延長線上.　(廣東四中)

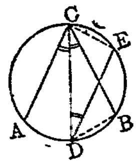
(4)　設 $\triangle ABC$ 中, BC 與 $\angle A$ 爲一定, BD, CE 爲自 B 及 C 向對邊之垂線,則 ED 之長有一定.

(幾何學上66)　圓之定理及問題(其六)之解答

解　答

(1) [已知] $\angle ACD=\angle BCD,\ DE \parallel AC.$

[求證] $DE=BC.$



[證明] $\because\ AC \parallel DE.$

$\therefore\ \angle CDE=\angle ACD,$

$\angle ACD=\angle BCD.$

$\therefore\ \angle CDE=\angle BCD.$

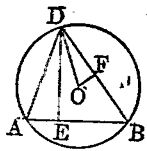
又從定理 14,

$\angle CBD=\angle CED.$

$\therefore\ \angle BDC=\angle ECD$, 且 $CD=CD.$

$\triangle BCD\equiv\triangle CDE.\quad \therefore\ DE=BC.$

(2) [證明] 作 $OF\perp BD$, 則　$\angle DOF=\frac{1}{2}\angle BOD.$



但　$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD.$

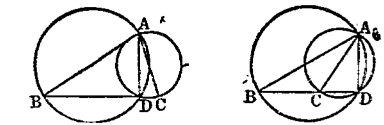
$\therefore\ \angle DOF=\angle BAD.$

又 $\angle ADE, \angle BDO$ 各爲 $\angle DOF$ 及 $\angle BAD$ 之餘角.

$\therefore\ \angle ADE=\angle BDO.$

(3) [已知] AB, AC 各爲二圓之直徑.

[求證] 兩圓會於 BC 上或其延長線上.



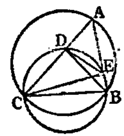
[證明] 以 AB, AC 爲直徑畫圓,設其交點爲 D, 連 BD 及 DC, 則

$\angle ADB=90^\circ,\ \angle ADC=90^\circ.$　(定理 15)

$\therefore\ \angle ADB+\angle ADC=90^\circ+90^\circ=180^\circ,$

故 B, D, C 三點在一直線上.

(4) [證明] 因 $\angle BDC=\angle BEC=90^\circ$, 故 D, E 在以 BC 爲直徑之圓周上, 而

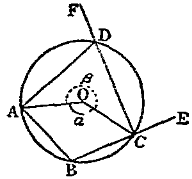


$\angle DBE=90^\circ-\angle BAC=$一定,

故 DE 爲一定大之圓內, 一定大之弧之弦, 其大應相等, 故爲一定.

證明	問題

(定理 16)　內接於圓之四邊形之對角互爲補角.　(貴州,初會)
(清華大學) 及 (上海,初會)



[已知]　$ABCD$ 內接於圓.

[求證]　$\angle B+\angle D=180^\circ$, $\angle A+\angle C=180^\circ$.

[證明]　$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle\beta$, $\angle CDA=\frac{1}{2}\angle\alpha$.

$\therefore\ \angle ABC+\angle CDA=\frac{1}{2}(\angle\alpha+\angle\beta)$

$=\frac{1}{2}\times 360^\circ=180^\circ$.

同理,可證　$\angle BCD+\angle DAB=180^\circ$.

系一　內接於圓之四邊形之外角,等於其內對角.　(山西,初會)

[證明]　前已證　$\angle DAB+\angle BCD=180^\circ$,

又　$\angle DCE+\angle BCD=180^\circ$.　$\therefore\ \angle DCE=\angle DAB$.

同理,可證　$\angle ADF=\angle ABC$.

系二　四邊形之對角若互爲補角,則此形可內接於圓.

[證明]　過三點之圓祇有一個,而第四點若不在圓上,則其點之角與其對角不能相補,故爲補角,則第四點必在圓上,卽四邊形內接於圓.

(1)　求內接八邊形相間四內角之和.
(如皋師範)

(2)　過三角形頂點所作外角之平分線,與此三角形之外接圓相交,則此交點與底邊端點之距離相等.
(湖北一中)

(3)　從弧 AB 之中點 P 作二弦 PQ, PR 與弦之交點爲 C, D, 則四點 C, D, Q, R, 同在一圓周上.
(徐州女中)

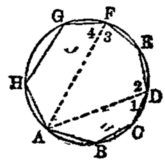
(4)　設 $\triangle ABC$ 之內心爲 K, 其 AK 定圓周之點爲 P, 則

$PB=PK=PC$.
(青島,高會)

圓之定理及問題(其七)之解答

解	答

(1) [解] 因 $ABCD$, $ADEF$, $AFGH$ 均為圓內接四邊形,故從定理 16, 知



$$\angle B+\angle 1=180^\circ,$$
$$\angle 2+\angle 3=180^\circ,$$
$$\angle 4+\angle H=180^\circ.$$

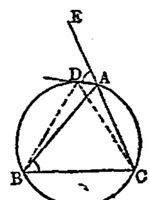
相加, $\angle B+\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle H=540^\circ$.

即 $\angle B+\angle D+\angle F+\angle H=540^\circ$.

(2) [已知] $\triangle ABC$ 內接於圓, AD 平分 $\angle BAE$.

[求證] $BD=CD$.

[證明] 從定理 16 系一,知



$\angle DBC=\angle DAE$,

又 $\angle DAB=\angle DCB$.

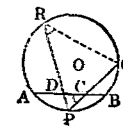
因 $\angle DAE=\angle DAB$,

故 $\angle DBC=\angle DCB$,

而 $BD=CD$.

(3) [已知] $\overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{PB}$.

[求證] C,D,Q,R 在同一圓上.



[證明] $\angle ACP=\overset{\frown}{AP}$ 之圓周角 $+\overset{\frown}{BQ}$ 之圓周角.

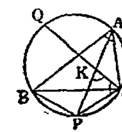
但 $\overset{\frown}{PB}=\overset{\frown}{AP}$.

$\therefore$ $\angle ACP=(\overset{\frown}{PB}+\overset{\frown}{BQ})$ 之圓周角

$=\overset{\frown}{PQ}$ 之圓周角 $=\angle DRQ$.

$\therefore$ $\angle DCQ+\angle DRQ=180^\circ$, 而四點共圓.

(4) [證明] AK, CK 各為 $\angle A$, $\angle C$ 之分角線,故必過 $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{BA}$ 之中點 P, Q, 即



$\overset{\frown}{BP}=\overset{\frown}{PC}$, $\overset{\frown}{AQ}=\overset{\frown}{QB}$,

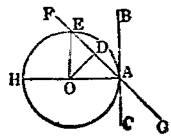
$$\angle PCK=\angle PCB+\angle BCQ$$
$$=\angle PAC+\angle ACQ$$
$$=\angle PKC.$$

$\therefore$ $PC=PK$, 又 $PB=PC$.

$\therefore$ $PB=PK=PC$.

證明	問題

(定理 17)　凡過圓周上一點之若干直線,其中惟垂直於其點之半徑之直線不再與圓相會,其他各直線必再與圓周相交.



[已知]　O 爲中心,A 爲圓周上之點,BAC 垂直於 OA, FG 爲他之任意直線.

[求證]　BAC 祇 A 點與圓相交, FG 又在他一點 E 相交.

[證明]　BAC 上任一點與 O 連結皆大於半徑 OA, 即 OA 以外皆大於半徑而在圓外, 即 A 以外無相交之點. 次從 O 至 AF 上作垂線 OD, 且作 $\angle DOE=\angle DOA$, 則 $\triangle AOD\equiv\triangle EOD$. $\therefore OE=OA$. $\therefore E$ 在圓周上,即 FG 再與圓交於 E.

系 1　從圓周上一點可作其圓之切線,但祇以一爲限.

系 2　自圓心向切線作垂線必過切點.

系 3　圓之中心必在過切點,且垂直於切線之直線上.

系 4　圓心與切點之聯線必垂直於切線.

(系 4 之證)　切點爲圓上之點,而切線上其他各點悉在圓外,故切點與圓心之距離最短,由是切點爲由圓心所作垂線之足.

(1)　設在兩同心圓較大之圓中作兩弦與小圓相切,則此兩弦相等.

(上海,初會)

(2)　從直徑兩端引隨便一切線之垂線,此二垂線之和等於此圓之直徑.　(江西南昌一女中)

(3)　從圓周 ABC 外一點 P,引此圓之二切線 PA, PB, 又引直徑 AC; 求證 $\angle APB=2\angle BAC$.

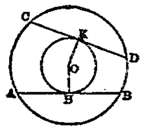
(江西八中)

(4)　O 爲中心, A 爲圓周上一點,自 A 點引切線與任意半徑 OB 之延長線相交於 C, 又作 OB 之垂線 AD, 則 AB 分 $\angle DAC$ 爲二等分.

(幾何學上70)　切線之定理及問題(其一)之解答

解　答

(1) [已知] 大圓之弦 AB, CD 切於小圓,而 H, K 各爲其切點.



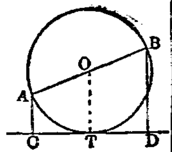
[求證] $AB=CD$.

[證明] 將切點 H, K 與圓心 O 連結,則從本定理系 4, 知

$OH\perp AB$, $OK\perp CD$.

因 $OH=OK$, 故由定理 2, 知 $AB=CD$.

(2) [已知] 切線 CD 切圓於 T, AC, BD 悉垂直於 CD.



[求證] $AC+BD=AB$.

[證明] 從圓心 O 向切線作垂線,則此垂線必過切點 T.

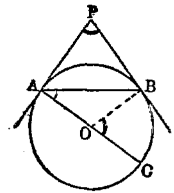
$\therefore$ $OT\perp CD$. 但 $AB\perp CD$ 等.

$\therefore$ $AC\parallel OT\parallel BD$, 且 O 爲 AB 之中點,故 OT 必過梯形 $ABCD$ 之他邊 CD 之中點.而 OT 爲梯形之中線.

$\therefore$ $AC+BD=2OT$.

而 $AB=AO+OB=2OT$. $\therefore$ $AC+BD=AB$.

(3) [已知] PA, PB 爲切線, AC 爲直徑.



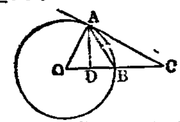
[求證] $\angle APB=2\angle BAC$.

[證明] 連 OB, 則由定理 13, 知 $\angle BOC=2\angle BAC$.

但從定理 19, 知 $OA\perp PA$, $OB\perp PB$.

$\therefore$ $\angle PAO=\angle PBO=90°$. 由定理 16 系二, 知 P, A, B, O 四點在一圓上, 故 $\angle APB=\angle BOC$ (同定理系一)$=2\angle BAC$.

(4) [已知] AC 爲切線, $AD\perp OC$.



[求證] AB 平分 $\angle DAC$.

[證明] 連結 OA, 則

$\angle OAC=90°$.

$\therefore$ $\angle OAD=\angle BCA$. (同角之餘角)

又 $\angle OAB=\angle OBA$,

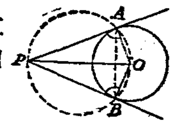
$\angle OBA-\angle BCA=\angle OAB-\angle OAD$.

$\therefore$ $\angle BAC=\angle BAD$, 卽 AD 平分 $\angle CAD$.

證明	問題

(定理 18)　自圓外一點得作二切線,但祇以二爲限.

[證明]　P 爲 O 圓外之一點,連結 PO, 以 PO 爲直徑畫圓,則 P 及 O 爲圓內外之點,而此圓與 O 圓交於 A, B, 則 $\angle PAO=\angle PBO=90°$.



故 PA, PB 切於 O 圓

因兩圓至多祇能有兩交點,故捨A,B兩點外,無他點 F 能使 $\angle PFO=90°$, 故如定理云云.

(定理 19)　自圓外一點所作二切線必相等,且與聯該點及圓心之直線成等角.　(燕京大學)

[已知]　PA, PB 爲切線.

[求證]　$PA=PB$, $\angle APO=\angle BPO$.

[證明]　於 $\triangle PAO$, $\triangle PBO$ 中, $\angle PAO=\angle PBO=90°$.

$OA=OB$, $OP=OP$. $\therefore$ $\triangle APO\equiv\triangle BPO$. 由是, $PA=PB$ 及 $\angle OPA=\angle OPB$, 又 $\angle PAB=\angle PBA$ 故得下之系.

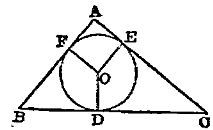
系　自弦之兩端引二切線,此切線與弦成等角.　(安徽,初會)

問題

(1)　外切四邊形之對邊之和相等.

(2)　直角三角形之斜邊等於他二直邊之和減去其內切圓半徑之二倍.

(上海,初會), (安徽,初會), (武漢大學)



(3)　有外切於圓之梯形 $ABCD$, 從圓心 O 引直線與底邊BC平行,而與其他二邊 AB, CD 交於 P, Q, 則 $PQ=\frac{1}{4}$ 梯形之周圍. (上海,高會)

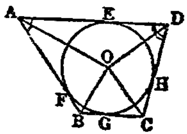
(4)　以直角三角形之腰 AB 爲直徑作圓交斜邊於 D, 由 D 作切線交他腰於 E, 則 E 與圓心之聯線必平行於斜邊.　(揚州中學)

切線之定理及問題(其二)之解答

解　答

(1) [已知] $ABCD$ 為圓外切四邊形.

[求證] $AB+CD$
$=BC+AD.$



[證明] 設各切點為 $E, F,$ $G, H,$ 從定理 19, 知
$AF=AE$、$FB=BG,$
$CH=CG,$ $DH=DE.$

$\therefore AF+FB+CH+HD=AE+ED+BG+GC,$

即 $AB+CD=BC+BD.$

(2) [已知] $\angle A=90°$, $\triangle ABC$ 外切於圓.

[求證] $BC=AB+AC-2OF.$

[證明] 設內切圓之圓心為 O, 其與各邊之切點為 $D, E, F,$ 則 $BD=BF,$ $CD=CE.$

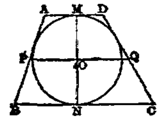
$\therefore BC=AB+AC-(AF+AE)$ ………(1)

然四邊形 $AFOE$ 內,
$\angle OFA=\angle OEA=\angle A=90°,$

而 $OF=OE$, 故為正方形. $\therefore AF+AF=2OF.$

$\therefore BC=AB+AC-2OF.$

(3) [已知] $AD \parallel BC$, 且 $ABCD$ 外切於圓, $PQ \parallel BC.$



[求證] $PQ=\frac{1}{4}$ 梯形之周圍.

[證明] $OM \perp AD.$

因 $AD \parallel BC.$

$\therefore OM \perp BC,$ 又 $ON \perp BC.$

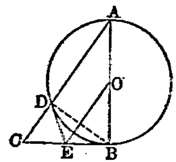
$\therefore OM, ON$ 必合成一直線, 而切點聯線 MN 必過圓心 O, 且 $OM=ON$. 由是, PQ 為梯形之中線　$\therefore PQ=\frac{1}{2}(AD+BC).$

然由 (2) 題, $AD+BC=AB+CD.$

$\therefore 4PQ=AB+BC+CD+AD.$

(4) [證明] 連 BD, 則 $\angle ADB=\angle CDB=90°.$

因 $ED=EB.$ (定理 19)



$\therefore \angle EDB=\angle EBD,$

故其餘角
$\angle ECD=\angle EDC,$

而 $CE=DE.$

$\therefore CE=EB.$ 但 $OA=OB.$

$\therefore OE \parallel AC.$

(三角形兩邊中點聯線必平行第三邊)

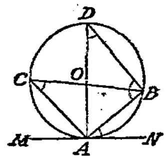
證明	問題

證明

(定理 20) 切線及自切點引弦所夾之角,等於其相鄰之弓形角.

[已知] MN 爲 A 點之切線, AB 爲弦.

[求證] $\angle BAN=\angle ACB$. (相鄰弓形角)



[證明] 過 A 引直徑 AOD, 則

$\angle BAN+\angle BAD=90°$.

又 $\angle ADB+\angle BAD=90°$.

$\therefore$ $\angle BAN=\angle ADB=\angle ACB$.

同理, $\angle BAM$ 亦等於其相鄰之弓形角.

系 過弓形之弦之一端之直線, 與弦所成之角, 若等於相鄰之弓形角,則此直線爲圓之切線.

[已知] $\angle BAN=\angle ACB$ (見上圖).

[求證] AN 爲圓 ABC 之切線.

[證明] 作 $\triangle ABC$ 之外接圓,令 AN' 爲此圓在 A 點之切線,則由上之定理,知 $\angle BAN'=\angle ACB$. 但 $\angle BAN=\angle ACB$.

$\therefore$ $\angle BAN'=\angle BAN$ 由是 AN' 與 AN 合一,即 AN 與圓之切線一致,故 AN 爲圓之切線.

問題

(1) AB, AC 爲圓 ABC 之弦,引 BD 與 A 點之切線平行,交 AC 於 D, 則 AB 切於圓 BCD.

(2) 以直角三角形一邊爲直徑作圓,交斜邊於 D, D 之切線平分他邊. (上海,高會)

(3) 以 AB 爲直徑作圓, 引切線 CD, 從 A 作其垂線 AD, 則 AC 平分 $\angle DAB$. (上海,初會)

(4) 自圓外一點 P, 引切線 PA, PB 及割線 PCD, 自 A 引 CD 之平行線 AE, 則 ER 必平分 CD.

(5) 兩圓相交於 D, E 兩點, AB 爲公切線, A, B 爲切點;求證

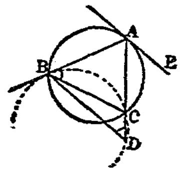
$\angle AEB+\angle ADB=180°$.

(蘇州中學)

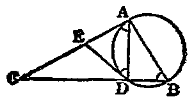
 切線之定理及問題(其三)之解答

解　答

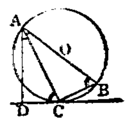
(1) [證明] A 點之切線為 AE,
則 $\angle EAD=\angle ABC$,
$\angle EAD=\angle ADB$.
$\therefore$ $\angle ABC=\angle ADB$.
$\therefore$ AB 切於 BCD 圓.
(定理 20 系)



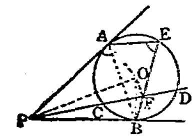
(2) [已知] $\angle A=90^\circ$, AB 為直徑, DE 為切線.
[求證] $AE=EC$.
[證明] AC, DE 共為圓之切線.
$\therefore$ $\angle EAD=\angle ABD$
$=\angle ADE$.
由是 $\angle ECD=\angle EDC$.
$\therefore$ $EA=ED=EC$,即 $EA=EC$.
$\therefore$ DE 過 AC 之中點.



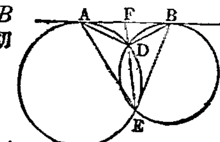
(3) [證明] $\angle ACD=\angle ABC$.
又 $\angle ADC=\angle ACB=R\angle$.
$\therefore$ 直角三角形 ADC, ACB, 其二角相等.
$\therefore$ $\angle BAC=\angle CAD$, 即 AC 分 $\angle BAD$ 為二等分.

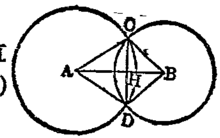


(4) [證明] $AE \parallel CD$. $\therefore$ $\angle AEB=\angle PFB$.
又因 PA 為切線, $\angle PAB=\angle AEB$.
$\therefore$ $\angle PAB=\angle PFB$, 即 P, A, F, B 共圓.
但 $\angle PAO=\angle PBO=R\angle$,
即過 PAB 之圓 O.
由是 $POFB$ 在一圓周上.
又 $\angle OFP=\angle OBP$
$=R\angle$.
$\therefore$ $OF \perp CD$.
$\therefore$ F 為 CD 之中點,
即 EB 過弦 CD 之中點 F.



(5) [證明] 連 D, E 交 AB 於 F, 則因 AB 為公切線,故
$\angle DAB=\angle AED$,
$\angle DBA=\angle DEB$.
相加,得 $\angle AEB$
$=\angle DAB+\angle DBA$
$=180^\circ-\angle ADB$.
$\therefore$ $\angle AEB+\angle ADB=180^\circ$



證明	問題
(定理 21) 二圓之周不在連結其中心之直線上一點相會,則必再會於他之一點. 又連結其二交點之直線必爲連結兩中心之直線垂直二等分. (蘇女師) 又中心間之距離小於半徑之和而大於其差.  [已知] 中心 A, B 之二圓不在 AB 上相會而會於 C 點. [求證] 兩圓必再會於他之一點 D. [證明] 從 C 向 AB 作垂線 CH, 且延長之,令 $CH=HD$, 則就直角三角形 ACH, ADH 論, AH 共有 $CH=HD$. ∴ $\triangle ACH\equiv\triangle ADH$. ∴ $AC=AD$. 同樣, $BC=BD$. ∴ D 至 A 及 B 之距離等於半徑,故在 A, B 兩圓周上,即 A, B 二圓相會於 D. 又因 $AC=CD$, $BC=BD$, $AB=AB$. ∴ $\triangle ACB\equiv\triangle ABD$. 由是易知 $\triangle ACH\equiv\triangle ADH$, 而 AB 爲 CD 之中垂線矣.又於 $\triangle ACB$ 中, $AB<AC+BC$ 及 $AB>AC-BC$.	(1) 兩圓直交於 A, B 二點,過 A 點任作一線,交兩圓於 C, D;試證 $\angle CBD$ 爲定角. (湖北,初會) (2) 設二等圓交於 P, Q 兩點,過 P 點作任意割線,交圓於另點 A 及 B;試證 $AQ=BQ$. (安徽,高會) (3) 過二圓交點之一作二直線, 則此二直線限於圓周之部分, 恆對於第二交點成相等之角. (4) 設 A, B 爲二圓之交點,過 A 作直線交二圓於 C, D, 就 C, D 作二圓之切線,其交點爲 P; 則 B, C, P, D 四點同在一圓周上. (太倉師範)

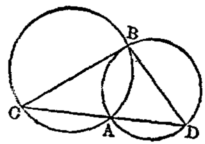
關於二圓之定理及問題(其一)之解答

解　　　　答

(1) [證明] $\angle CBD=180^\circ-\angle ACB-\angle ADB$.

但因兩 AB 弧皆爲定弧，故立於定弧上之圓周角,亦應爲定角.

故 $\angle CBD$ 爲定角.

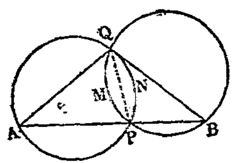


(2) [已知] 兩等圓交於 P, Q, APB 爲一直線.

[求證] $AQ=BQ$.

[證明] 因兩圓爲等圓,而 $PQ=PQ$ 爲一對等弧，故等圓內等弧對等弧,而

$\overset{\frown}{PMQ}=\overset{\frown}{PNQ}$.

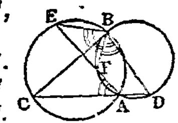


由是 $\angle A=\angle B$ (立於等弧上之圓周角,應爲等於圓心角之半). $\therefore$ $QA=QB$.

(3) [已知] 二圓之交點爲 A, B, 過 A 任作二直線 CD, EF, 其交圓之點爲 C, D, E, F.

[求證] $\angle CBD=\angle EBF$.

[證明] $\angle DBF=\angle CAE$
$=\angle CBE$.



$\therefore$ $\angle DBF+\angle FBC=\angle CBE+\angle CBF$,

即 $\angle DBC=\angle EBF$.

故 CD 及 EF 恆對於 B 成等角.

(4) [證明] 連 B, C; B, D; B, A; 則因 CP 爲切線.

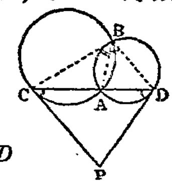
$\therefore$ $\angle PCD=\angle CBA$.

同理, $\angle PDC=\angle DBA$.

$\therefore$ $\angle PCD+\angle PDC$
$=\angle CBA+\angle ABD$
$=\angle CBD$.

於 $\triangle PCD$ 中,

$\angle PCD+\angle PDC+\angle CPD$
$=180^\circ$.



$\therefore$ $\angle CBD+\angle CPD=180^\circ$.

故從定理 16 系二, 知四邊形 $BCPD$ 內接於圓, 卽此四點在同一圓周上.

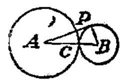
證　明	問　題

(定理 22) 兩圓在聯心線上一點相會,則必不在他點再相會,由是此二圓為外切或內切.若外切,則其聯心線之長,等於兩半徑之和;若內切,則等於兩半徑之差.

[已知] 兩圓 A, B 在 AB 上一點 C 相會.

[求證] 此兩圓不再在他點相會.

(甲)



(乙)

[證明] 於 B 圓上任取一點 P,連 PA, PB;則在(甲圖)中,

$$PA>AB-BP=AB-BC, \text{ 即 } PA>AC.$$

故 P 在 A 圓外而不再相會,即兩圓外切,而 $AB=AC+BC$.

又在(乙圖)中, $AP<BP+AB=BC+AB$, 即 $AP<AC$.

故 P 在 A 圓內而不再相會,即兩圓內切又 $AB=AC-BC$.

系一　二圓有二點相交,則其交點不在聯心線上.

系二　二圓相切,則其聯心線必過切點.　(南開大學)

若聯心線不過切點,則於聯心線外相會之二圓相交矣.

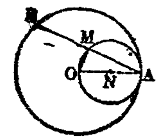
系三　二圓相切,則於切點有同一公共切線.

因 C 之垂線,垂直於 AC, CB 故也.

---

(1) 試述兩圓之位置與聯心線之關係.

(2) 兩圓相內切,小圓直徑為大圓直徑之半,自切點任作大圓之弦,必為小圓平分,試證之.



(江西,初會)

(3) 兩圓互相外切於 C,經 C 作一直線與二圓相遇於 A 及 B. 求證在 AB 二點上之切線互相平行.

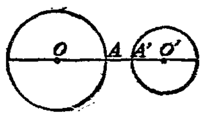
(4) 設 A 為內切二圓之切點, CD 為內圓 B 點之切線,又為外圓之弦,則 AB 分 $\angle CAD$ 為二等分.

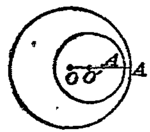
解　　　　答

(1)　(I)　兩圓全在外，則聯心線之長，大於兩圓半徑之和.

(II)　兩圓相切，則聯心線之長，等於半徑之和.

(甲)　　　　(乙)





(III)　兩圓內切，則聯心線之長，等於半徑之差.

(IV)　兩圓爲同心圓，則聯心線之長等於零.

(V)　兩圓相交，則聯心線之長，大於半徑之差，而小於 徑和.

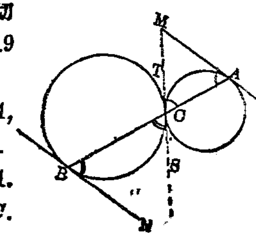
(VI)　一圓全在他圓內，則聯心線小於半徑之差.

(2)　[證明]　作聯心線 ON，則 ON 必過切點 A，且大圓之半徑爲小圓之直徑，故小圓必過大圓之圓心 O. 聯 OM，則因 OA 爲小圓直徑，故

$\angle OMA=90°$，卽 $OM \perp AB$.

故 OM 垂直於大圓之弦 AB.　∴　$AM=MB$.

(3)　[證明]　過 C 作公切線 CT，則由定理 19 系 1，知



$\angle MAC=\angle MCA$,

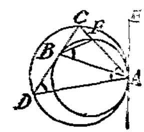
$\angle NBC=\angle SCB$.

但 $\angle SCB=\angle MCA$.

∴　$\angle MAC=\angle NBC$.

∴　$AM \parallel BN$.

(4)　[證明]　於 A 點引二圓之公切線 AE，作 AD，又作 AC，交內圓於 F；則



$\angle FBA=\angle CAE=\angle ADB$,

$\angle DAB=\angle ABC-\angle ADB$

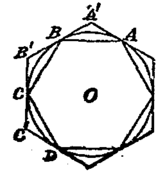
$=\angle ABC-\angle ABF$

$=\angle CBF$.

但 $\angle CBF=\angle BAC$.　∴　$\angle DAB=\angle BAC$.

證明	問題

(定理 23)　分圓周爲若干等分，順其分點結成多角形，必爲正多角形，又於分點作切線所成之多角形，亦爲正多　形.



[已知]　等分 O 圓周於 $A, B, C\cdots\cdots$，其分點結成多角形 $ABC\cdots\cdots$.

又於各分點作切線所圍成一多角形 $A'B'C'\cdots$.

[求證]　$ABC\cdots\cdots$，及 $A'B'C'\cdots\cdots$ 皆爲正多角形.

[證明]　1.　以 $\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}=\cdots\cdots$，而 $AB=BC=CD=\cdots\cdots$，又 $\angle A, \angle B, \angle C\cdots\cdots$ 皆爲圓周角，其所立之弧，皆自一圓周減相等二弧之所餘故相等，由是此等之角相等，故 $ABC\cdots\cdots$ 爲正多角形.

2.　$\triangle A'AB, \triangle B'BC, \cdots\cdots$ 皆爲二等邊三角形，而底邊 AB, $BC\cdots\cdots$ 皆相等，$\angle A'AB=B'BC=\cdots\cdots$ 故此等之三角形皆相等.

$\therefore AA'=A'B=BB'=B'C=CC'=\cdots\cdots$ 由是 $A'B'=B'C'=\cdots\cdots$

又二等邊三角形之頂角亦相等，如 $\angle A'=\angle B'=\angle C'=\cdots\cdots$，故 $A'B'C'\cdots\cdots$ 爲正多角形.

(1)　正多角形得畫外接圓周及內切圓周.

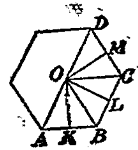
(2)　等角多角形內接於圓，其邊數爲奇數者，則爲正多角形.

(3)　外切於圓之等邊多角形，其邊數爲奇數者，則爲正多角形.

(4)　從圓內接正五邊形一角之頂點作諸對角線，求證諸對角線分此角爲三等分　　(江蘇，高會)

解　　答

(1) [證明] ABCD……爲正多角形,作 A 及 B 角之分角線交於 O,連 OC, OD,……自 O 向各邊作垂線 OK, OL, OM……



由是在 $\triangle OBA$, $\triangle OBC$ 中,

$$AB=BC,\ OB=OB,$$

且 $\angle OBA=\angle OBC$.

∴ $\triangle OAB\equiv\triangle OCB$, 從而 $\angle OAB=\angle OCB$.

但 $\angle OAB=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\angle C$. ∴ $\angle OCB=\frac{1}{2}\angle C$,

即 OC 分 $\angle C$ 爲二等分. 由是可證正多角形諸內角分角線交於一點,因分角線上之點與其二邊等距. 故 $OK=OL=OM\cdots$ 從而以 O 爲圓心,可作一內切圓,因 $\angle A=\angle B=\angle C\cdots\cdots$ 而等量之半相等.

故 $\angle OAB=\angle OBA=\angle OBC=\angle OCB=\cdots\cdots$

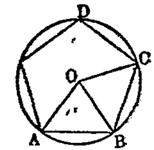
∴ $OA=OB=OC\cdots\cdots$ 即 $ABCD\cdots\cdots$ 內接於圓.

(2) [證明] 因 $\angle A=\angle B=\angle C=\cdots\cdots$

故 $\widehat{ABC}=\widehat{BCD}=\cdots\cdots$.

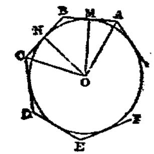
由是 $\widehat{AB}=\widehat{CD}$.

∴ $AB=CD$.



即多角形 $ABCD\cdots\cdots$ 之各邊隔一相等, 若邊數爲奇數, 則 AB 等於最後一邊, 即相鄰二邊必相等,故爲正多角形.

(3) [證明] 如圖將切點 M, N 與 O 連結,則因 $AB=BC$, $BM=BN$. ∴ $NC=MA$.

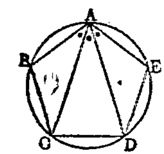


∴ $\triangle OAM\equiv\triangle ONC$.

∴ $\angle OAM=\angle OCN$.

∴ $\angle A=\angle C$, 即此多角形之角隔一相等,由是最後之角,等於最初之角,故各角皆相等.

(4) [證明] 因 $ABCDE$ 爲正五角形.



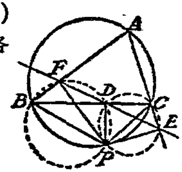
∴ $BC=CD=DE=\cdots\cdots$

∴ $\widehat{BC}=\widehat{CD}=\widehat{DE}=\cdots\cdots$

∴ $\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE$.

證明	問題

(問題 1) 自三角形外接圓周上任意一點，向三邊作垂線，則其足在同一直線上. (務本女中)



[已知] 自 $\triangle ABC$ 外接圓周上任意一點 P，向各邊作垂線，其足為 D, E, F.

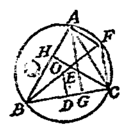
[求證] D, E, F 為在同一直線上.

[證明] $\angle PDB=\angle PFB=R\angle$,

$\angle PDC=\angle PEC=R\angle$.

P, D, F, B 及 P, D, C, E 同在一圓周上，$\angle PDE=\angle PCE=\angle PBF$. 但 $\angle PBF+\angle PDF=2R\angle$. $\therefore$ $\angle PDE+\angle PDF=2R\angle$，卽 DE, DF 成一直線，卽 D, E, F 同在一直線上.

(問題 2) 設 $\triangle ABC$ 之外心為 O，垂心為 E，又 $OD\perp BC$，則 $AE=2OD$.



[證明] 設 $\triangle ABC$ 之外接圓與 BO 延長線之交點為 F，作 $CH\perp AB$，則 $\angle BCF=R\angle$. $\therefore$ $CF=2OD$.

$\angle BAF=\angle CHA=R\angle$. $\therefore$ $AF\parallel CE$.

同理，$CF\parallel AE$. $\therefore$ $AECF$ 為平行四邊形.

而 $AE=CF$. 但已證 $CF=2OD$. $\therefore$ $AE=2OD$.

問題

(1) 自一點至三角形之三邊作垂線，若其足在一直線上，則此點在三角形之外接圓上.

(2) 自圓周上一點 M 作三弦 MA, MB, MC，以此三弦為直徑作圓，則其每二圓之交點在一直線上.

(3) $\triangle ABC$ 外接圓上任意一點 P，向 BC 作垂線，與外接圓交於 Q，則 AQ 平行於 P 之 Simson 線.

(4) 自三角形一頂點至對邊所作垂線之足，必 其延長線交外接圓之點與垂心之中點.

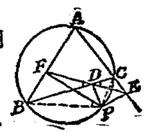
(注意) 問題 1 中所述之直線 DEF 曰 P 點之 Simson 線.

圓之應用問題(其一)之解答

解　　答

(1) [已知] 自一點 P 向 $\triangle ABC$ 三邊作垂線,其足 D, E, F 在一直線上.

[求證] P 在 $\triangle ABC$ 之外接圓周上.



[證明] $\angle PEC=\angle PDC=90°$,

又 $\angle PDB=\angle PFB=90°$.

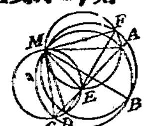
故 P, D, C, E 及 P, D, E, B 均在一圓上.

$\therefore$ $\angle PCE=\angle PDE=\angle PBA$.

由是 $\angle PBA+\angle PCA=\angle PCE+\angle PCA=180°$.

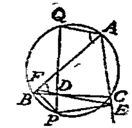
$\therefore$ P, B, A, C 在一圓周上,卽 P 在 $\triangle ABC$ 之外接圓上.

(2) [證明] 設 MB, MC 爲直徑之圓交於 D, 則 $\angle MDB=\angle MDC=90°$.



故 BD, DC 成一直線, 而 $MD\perp BC$. 同理, MC, MB 爲直徑之圓交於 E 及 MA, MB 爲直徑之圓交於 F, 則 ME, MF 各爲直線 CA, AB 之垂線;故 D, E, F 爲自 $\triangle ABC$ 之外接圓上一點 M 所作垂足,故在一直線上.

(3) [證明] 設 P 之 Simson 線爲 EDF, 則 P, D, F, B 在一圓周上.



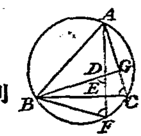
$\therefore$ $\angle DFA=\angle DPB=\angle QAB$,

卽 $\angle EFA=\angle BAQ$.

$\therefore$ $AQ\parallel EF$, 卽 AQ 平行於 P 之 Simson 線 EDF.

(4) [已知] $\triangle ABC$ 之垂心爲 D, AD 交 BC 及外接圓於 E, F.

[求證] $DE=EF$.



[證明] 連結 BD 交 AC 於 G, 則 G, D, E, C 在一圓周上.

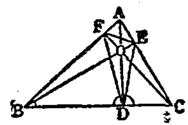
$\therefore$ $\angle BDE=\angle GCB=\angle AFB=\angle BFE$.

故 $\triangle DBF$ 爲等腰,且 $BE\perp DF$.

$\therefore$ $DE=EF$.

證明

(問題 3)　三角形之高分其垂足三角形之角爲二等分 (連結其高之足之三角形,曰垂足三角形).

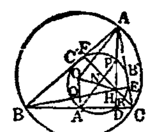


[已知]　DEF 爲 $\triangle ABC$ 之垂足三角形.

[求證]　AD, BE, CF 分 $\angle D, \angle E, \angle F$ 爲二等分.

[證明]　垂心爲 O, 則 O, D, B, F 及 O, D, C, E 在一圓周上.　$\therefore$　$\angle ODF = \angle OBF$,　$\angle ODE = \angle OCA$.　但 $\angle OBA$ 及 $\angle OCA$ 皆爲 $\angle A$ 之餘角而相等.　$\therefore$　$\angle ODE = \angle ODF$. 餘仿此證之.

(問題 4)　$\triangle ABC$ 三邊之中點與三垂線之足及各頂點至垂心距離之中點凡九點,必同在一圓周上.



[證明]　三邊之中點爲 A', B', C', 其高之足爲 D, E, F, 垂心爲 H, AH, BH, CH 之中點爲 P, Q, R (O 爲外心),則 $OA' = \frac{1}{2}AH = AP = PH$, 且 $OA' \parallel AH$.　$\therefore$　$AOA'P$ 及 $POA'H$ 爲平行四邊形,而 PA, OH 互爲二等分於 N, $PA' \parallel OA$.　$\therefore$　P, A', D 在 OH 之中點 N 爲中心,外半徑之半爲半徑之圓周上.

同樣, Q, B', E; 及 R, C', F 亦在此圓周上.

問題

(1)　三角形之外心及重心,爲自各邊中所作三角形之垂心及重心.

(2)　三角形之外接圓,必過三傍心所連三角形各邊之中點及內心與各傍心之中點.

(3)　$\triangle ABC$ 之二頂點 B, C 及內切圓圓心及切於 BC 之傍切圓圓心,必同在一圓周上,又他之二個傍心亦與 B, C 在一圓周上.

(4)　三角形之各頂點與外心結成直線,必垂直於垂足三角形之各邊.

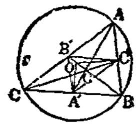
(注意)　問題 4 中所述之圓曰三角形之九點圓.

圓之應用問題(其二)之解答

解　　答

(1) [已知] A', B', C' 爲 $\triangle ABC$ 各邊中點, O 爲外心, G 爲重心.

[求證] O, G 各爲 $\triangle A'B'C'$ 之垂心及重心.



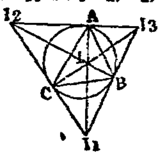
[證明] $OA' \perp BC$. 但 $B'C' \parallel BC$. $\therefore$ $OA' \perp B'C'$.

同理, $OB' \perp C'A'$, $OC' \perp A'B'$.

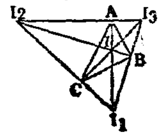
故 O 爲 $\triangle A'B'C'$ 之垂心, 又 $AB'A'C'$ 爲平行四邊形, 而 AA' 平分 $B'C'$, 卽 AA' 過 BC 之中點.

同理, BB', CC' 皆爲 $\triangle A'B'C'$ 之中線, 故其交點 G 爲 $\triangle A'B'C'$ 之重心.

(2) [證明] $\triangle ABC$ 之內心爲 I, 其三傍心爲 I_1, I_2, I_3, 則 $I_1A \perp I_2I_3$, $I_2B \perp I_1I_3$, $CI_3 \perp I_1I_2$, 故 I 爲 $\triangle I_1I_2I_3$ 之垂心, 而 $\triangle ABC$ 爲其垂足三角形, 故 $\triangle ABC$ 之外接圓爲 I_1, I_2, I_3 之九點圓, 而過各弦之中點及垂心距各頂點之中點.

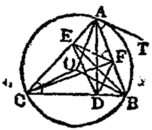


(3) [證明] IC, CI_1 爲 C 角之內外分角線, 故互爲垂直, 卽 $\angle ICI_1 = 90°$. 同理, $\angle IBI_1 = 90°$, 故 I, B, I_1, C 在同一圓周上, 又他之二傍心爲 I_2, I_3; 則 $\angle I_2BI_3 = \angle I_2CI_3 = 90°$. 故 I_2, I_3 亦與 B, C 同在一圓上.



(4) [已知] O 爲外心, DEF 爲垂足三角形.

[求證] OA, OB, OC 垂直於 EF 等.



[證明] 於 A 點作切線 AT, 則 $\angle TAB = \angle ACB$.

但 B, C, E, F 同在一圓周上.

故 $\angle ACB = \angle AFE$. $\therefore$ $\angle TAB = \angle AFE$.

$\therefore$ $AT \parallel EF$. 但 $OA \perp AT$. $\therefore$ $OA \perp EF$.

同理, 可證 $OB \perp DF$, $OC \perp DE$.

證明	問題

(問題 5) 過 $\triangle ABC$ 二項點 B, C 之圓與二邊 AB, AC 相交,則連結其交點 $B'C'$ 之直線常與定直線平行.

[證明] 作 $\triangle ABC$ 之外接圓,並作切線 AT, 則

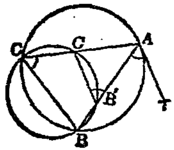
$$\angle TAB=\angle ACB.$$

因 B, B', C', C 在一圓周上,故

$$\angle AB'C'=\angle ACB.$$

$\therefore\ \angle ABC=\angle TAB.\quad \therefore\ B'C'\parallel AT,$

即 $B'C'$ 與定直線 AT 平行.



(問題 6) 兩圓相交於 A, B, 從圓周上一點 P 引直線 PA, PB 與他圓之交點爲 X, Y; 則過 P 垂直於 XY 之直線,爲圓 APB 之直徑.

[證明] $\angle ACP=\angle ABP$, (同弓形弧之角)

又 $\angle ABP=\angle PXD.$

$\therefore\ \angle ACP=\angle PXD.$

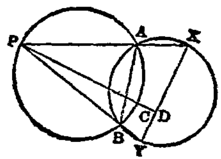
但 $\angle PXD+\angle APC=180^\circ-90^\circ=90^\circ.$

(因 $PD\perp XY$ 而 $\angle PDX=90^\circ$ 故也)

$\therefore\ \angle APC+\angle ACP=90^\circ.$

$\therefore\ \angle PAC=90^\circ,$

故知 PC 爲圓 APC 之直徑.



(1) AB 爲圓之直徑,自 A 引 AP, AQ 二弦交 B 點之切線於 X, Y 二點;則 $\angle XPY=\angle XQY$.

(2) 設二圓內切於 A 點,其外圓之弦 BC 交內圓於 D, E, 則

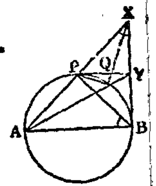
$$\angle BAD=\angle CAE.$$

(3) 有兩兩互相外切之三圓,其切點爲 A, B, C. 弦 AB, AC 之延長線與 BC 圓之交點爲 D, E; 則 DE 爲 BC 圓之直徑.(廣東勷勤大學)

(4) 從圓之內接四邊形 $ABCD$ 之對角線交點 E 至 CD 作垂線 EF, 求證 EF 必過 $\triangle ABE$ 外接圓之中心.

解　　答

(1) [證明] 因 AB 為直徑.



$\therefore\quad \angle APB=90^\circ$, 卽 $BP\perp AX$.

又因 BX 為切線.

$\therefore\quad \angle ABX=90^\circ$.

$\therefore\quad \angle ABP=\angle BXP$.

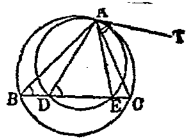
但 $\quad \angle ABP=\angle AQP$.

$\therefore\quad \angle PQA=\angle PXY$.

$\therefore\quad P, X, Y, Q$ 同在一圓周上.

$\therefore\quad \angle XPY=\angle XQY$.

(2) [證明] 於 A 點引二圓之公共切線 AT, 則由定理20,知 $\angle TAE=\angle ADE$.



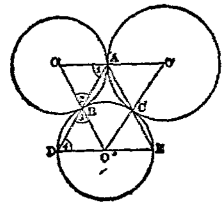
同理, $\quad \angle TAC=\angle ABC$.

相減,得 $\angle TAE-\angle TAC$

$=\angle ADE-\angle ABC$,

卽 $\quad \angle CAE=\angle BAD$.

(3) [證明] 連結D, O'', $O''E$ 則因相切兩圓之聯心線必過切點, 故 O, A, O'; O, B, O''; 及 O'', C, O' 均在一直線上.



$\because\quad OA=OB$,

$\therefore\quad \angle 1=\angle 2$.

$\because\quad O''B=O''D$,

$\quad \angle 3=\angle 4$,

但 $\quad \angle 3=\angle 2$.

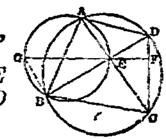
$\therefore\quad \angle 1=\angle 4$.

$\therefore\quad OO'\parallel O''D$.

同理, $OO'\parallel O''E$.

故 DO'', $O''E$ 成一直線而 DE 為圓 BC 之直徑.

(4) [證明] 設 EF 與 $\triangle ABE$ 之外接圓之交點為 G, 則



$\angle ABG=\angle AEG=\angle FEC$,

又 $\quad \angle ABE=\angle ACD$.

$\therefore\quad \angle GBE=\angle ABG+\angle ABE$

$=\angle FEC+\angle ACD$

$=\angle EFD$.

由假設,知 $EF\perp CD$.

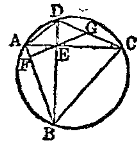
$\therefore\quad \angle EFD=90^\circ$.

$\therefore\quad \angle GBE=90^\circ$,

卽 GE 為 $\triangle ABE$ 之外接圓之直徑.

證　　　明	問　　　題

(問題 7)　圓內接四邊形之對角線交成直角，則自其交點向一邊作垂線延長之,必分其對邊為二等分.　(無錫師範)



[已知]　$AC\perp BD$, $EF\perp AB$, 又 $ABCD$ 為圓內接四邊形.

[求證]　EF 之延長線交 CD 於其中點 G.

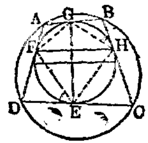
[證明]　於直角三角形 AEB 中, $EF\perp AB$.

$$\therefore\quad \angle AEF=\angle ABE=\angle ACD.$$

$$\therefore\quad \angle GEC=\angle GCE.\quad \therefore\quad GE=GC.$$

但 $\triangle DEC$ 為直角三角形,故 G 為斜邊 DC 之中點.

(問題 8)　設一四邊形含有內切圓及外切圓，則聯結其相對切點所作之二直線,必互相正交,試證明之.　(武漢大學)



[證明]　$\angle FPE=\angle PEH+\angle PHE$

$=\angle BHG+DEF.$　(定理 20)

但 $\angle BHG=\angle BGH=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle B)=\frac{1}{2}\angle D$,

$\angle DEF=\angle DFE=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle D)=\frac{1}{2}\angle B$.

相加,得 $\angle FDE=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)=90^\circ$.　$\therefore$　$FH\perp GE$.

問　　　題

(1)　$\triangle ABC$ 之垂心為 H, 以 AH 為直徑之圓交外接圓於 P, 則 PH 過BC之中點 M.

(2)　相等二圓交於 A, B, 以 A 為圓心,任取半徑作圓,與前各圓交於 C 及 D, 則 B, D, C 在一直線上.

(3)　二圓外切於 E, 其直徑 AB, CD 互相平行,則直線 AD, BC 交於 E.

(4)　兩圓外切於 P, 又有一外公切線切兩圓於 A, B; 試證 $\angle APB$ 為直角.　(北平師範大學)

又以 AB 為直徑畫圓,則此圓必過 P 而切於兩圓之聯心線.

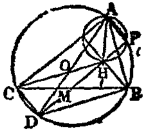
(山東省立高中)

圓之應用問題(其四)之解答

解　　　答

(1) [證明] 延長 PH 交外接圓於 D, 則

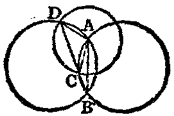
$\angle APD=90^\circ$.



∴ D 爲過 A 之直徑之一端, 而 $BHCD$ 爲平行四邊形,故對角線 BC, HD 互二等分於 M, 卽 PH 過 BC 之中點 M.

(2) [證明] 結結 AC, AD, 則 A 圓半徑相等, 卽 $AC=AD$, 又 $\hat{AC}$, AD 爲等圓中之一對等弦,故其所對弧亦相等,卽 $\widehat{AC}=\widehat{AD}$. 由是此等弧之圓周角亦等,卽

$\angle ABC=\angle ABD$.

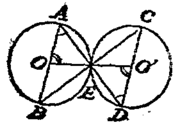


∴ BC, BD 爲一直線, 卽 B, C, D 同在一直線上.

(3) [證明] 連結二圓圓心之線 OO' 必過切點 E, 又連結 AE, ED, 則得等腰三角形 $\triangle AOE$, $\triangle DEO'$.

而 $\angle BOE=2\angle OEA$,

$\angle CO'E=2\angle O'ED$.



∵ $AB \parallel CD$.

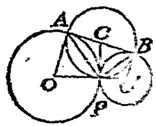
∴ $\angle BOE=\angle CO'E$.

∴ $\angle OEA=\angle O'ED$.

∴ AE, ED 爲一直線,

卽 AD 過 E. 同理 BC 過 E, 故 AD, BC 交於 E.

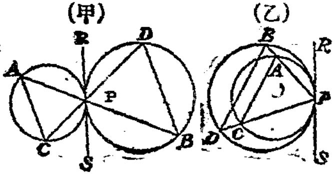
(4) [證明] 於 P 點作公切線, PC 交 AB 於 C, 因 CA, CP; CB, CP 各爲自一點 C 所引二圓之切線,故 $CA=CP=CB$. ∴ AB 爲直徑之圓過 P, 且以 $CP\perp OO'$, 故 OO' 爲 C 圓半徑端之垂線,而爲其切線.



又 $\angle APB$ 爲半圓內之弓形角,故從定理 15, 知 $\angle APB=90^\circ$, 而問題證明矣.

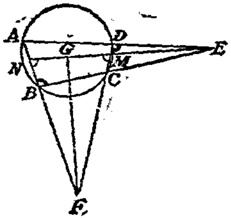
證明	問題

(問題 9)　二圓相切,則過其切點之二直線於二圓截取平行之弦.
(常州中學),(上海,初會)



[已知]　過二圓切點 P 之二直線 AB, CD 於二圓截取弦 AC, BD.
[求證]　$AC \parallel BD$.
[證明]　於 P 點作切線 RS,則 $\angle ACP = \angle APR = \angle BPS$(甲圖) $= \angle PDB$,卽 $\angle ACP = \angle PDB$.　$\therefore$　$AC \parallel DB$.

(問題 10)　內接於圓之四邊形,將其相對之邊各延長成角,則其角之二等分線互相垂直.



[證明]　$ABCD$ 爲圓內四邊形,AD, BC 之交點爲 E,AB, CD 之交點爲 F;作 $\angle E$, $\angle F$ 之二等分線交於 G,令 EG 交 AB, CD 之點爲 N, M;則就 $\triangle EDM$, $\triangle EBN$ 論,　$\angle EDM = \angle EBN$.
$\therefore$　$\angle FNM = \angle EMD = \angle FMN$.
$\therefore$　$FG \perp NM$.

(1)　過二圓之交點 A, B 引 PAQ, RBS 交圓周於 P, Q, R, S;則弦 $PR \parallel QS$.　(南菁中學)

(2)　正三角形 ABC 之外接圓劣弧 BC 上一點爲 P,則 $PA = PB + PC$.　(浙江大學)

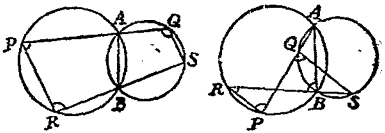
(3)　自圓心 O 至圓外一直線 XY 作垂線 OH,又自 H 引圓之割線 ABH,於 A, B 作切線交 XY,則其交點距 H 相等.

(4)　二圓之交點爲 A, B,過 A 作弦 CAD,於 C, D 點引二圓之切線令交於 P,則 $\angle CPD$ 爲一定.

圓之應用問題(其五)之解答

解　　　　答

(1) [證明] $APRB$, $ABSQ$ 在一圓周上.(甲圖)



∴ $\angle APR=\angle ABS=\angle AQS$ 之補角.

∴ $PR \parallel QS$. 又 $\angle AQS=\angle ABS$, (乙圖)

而 $\angle PQS=\angle ABR=\angle QPR$. ∴ $PR \parallel QS$.

其餘各種情形可用此證之.

(2) [證明] 取 $PD=PB$, 則

$\angle APB=\angle ACB=60°$,

故 $\triangle PBD$ 爲正三角形,

而 $PB=BD$,

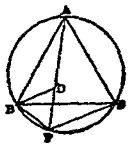
且 $\angle BPC=120°=\angle ADB$,

$\angle BAD=\angle BCP$, $BC=AB$.

∴ $\triangle ABD\equiv\triangle CPB$.

∴ $DA=PC$.

∴ $PA=PD+DA=PB+PC$.



(3) [證明] 連結 OK, OA, OL, OB; 則

$\angle OAK=90°=\angle OHK$,

故 A, O, K, H 在一圓上.

同理, O, H, L, B 亦在一圓上,

∴ $\angle OLB=\angle OHA=\angle OKA$,

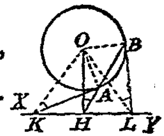
且 $OA=OB$, $\angle OAK=\angle OBL$.

∴ $\triangle OKA\equiv\triangle OLB$.

∴ $OK=OL$.

而 OH 爲自等腰三角形頂點所作垂線.

∴ $HK=HL$.



(4) [證明] $\angle PCA=\angle CBA$,

$\angle PDA=\angle DBA$.

∴ $\angle PCA+\angle PDA$

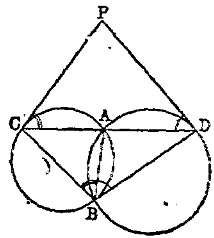
$=\angle CBD$.

∴ $\angle CPD$

$=180°-\angle CBD$

$=\angle BCA+\angle BDA$.

但 $\angle BCA$, $\angle BDA$ 爲定弧 AB 上之圓周角而一定,由是 $\angle CPD$ 亦爲一定.



定　義

1. [作圖題]　應用幾何學之方法,畫適合於所設條件之圖形,應為作圖,求作圖之問題,稱為作圖題.

2. [作圖應用之器具]　解作圖題所使用之器具,在初等幾何學中以直尺及圓規二者為限.

(i)　直尺——用以引直線.

(ii)　圓規——用以畫圓周或圓弧.

3. [作圖公法]　自最初即認為可以為基本之作圖者,稱為作圖公法,今將作圖公法列後.

(i)　連結二點可引直線.

(ii)　直線可任意延長.

(iii)　以任意點為中心,任意長度為半徑,可畫一圓.

作圖題中,此等公法可適用數次.

4. [作圖題解法順序]　作圖題之完全解答,分為次之四部分,但在簡單之作圖題,須强記其作圖與證明可也.

(i)　[解析]　見一所設之作圖題而欲立即知其作圖法,常有困難之處,故先須畫出其所求之圖形,詳查其圖形之性質,引必要之補助線,決定其所設條件及所要作圖形,深究其必要條件之關係,以發見作圖法,是謂解析.

(ii)　[作圖]　從解析所得最後之關係視作基本,以與解析全相反之之順序而進行之,終得所求之圖形為止.

(iii)　[證明]　從作圖所得之圖形,果具備所求之條件與否,須有一詳細之證明,此步手續甚為重要,故除去最簡單之作圖題外,千萬不可省去.

(iv)　[討論]　一問題中,由所設條件之變化,有時作圖不可能,又有時解答或不限於一個,遇有此等情形之一,即須決定其作圖可能之範圍,而

定　義

說明其解答之數,是謂討論.

(注意) (i) 解析爲作圖題上解決有力之武器,學者苟能善用之,則作圖題無難矣.

(ii) 作圖及證明,除最簡單之作圖題外,無論何時,不可省略.

(iii) 視是而非之作圖法,不可視作正式作圖法,惜初學者最易犯此病,欲除此病須賴證明.

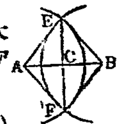
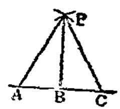
5. [作圖之不定] 因作圖題之已知條件,或已知圖形之位置而所得之圖形有無數個,則此作圖題爲不定問題.

例如　在正三角形內求一點,使此點與三邊距離之和爲定長,且此定長爲三角形之高,則此作圖題卽爲不定問題,因等邊三角形任何點皆有此性質,而任何點卽爲本題之解.

又如求作一圓過 A, B 兩點,亦爲一不定問題,因如此之圓有無限個也.

6. [作圖之不能] 因作圖題已知條件及已知圖形位置之關係,任何求之,無一圖形合於所設條件,則此作圖題曰不能問題.

例如　三角形三邊之長,而其中二邊之和,等於第三邊,卽爲不能問題.

解法	問題
(作圖題 1) 分有限直線爲二等分. [作法] 以 A, B 分別爲圓心, 以同長爲半徑(此半徑須大於 AB 之半), 畫兩弧使交於 E 及 F, 連 EF, 則 EF 分 AB 爲二等分.  [證明] $\triangle AEF \equiv \triangle BEF$.　(三邊各各相等) $\therefore\ \angle AEC = \angle BEC$.　$\therefore\ \triangle AEC \equiv \triangle BEC$. (因 $AE = BE$, $EC = EC$, $\angle AEC = \angle BEC$) $\therefore\ AC = CB$, 卽 C 爲 AB 之中點. (注意) 畫定直線之中垂線之方法與此相同.	(1) 已知一邊畫等邊三角形. (2) 試分所設之圓弧爲二等分. (3) 試不求中心而作一已知圓之直徑. (4) 試利用半圓之弓形角爲直角而解作圖題 2. (5) 已知一邊之長,求作一正方形. (6) 試分一已知直線爲四等分.
(作圖題 2) 從定直線中之一定點 B 引垂線. [作法] 以 B 爲圓心,任何長爲半徑,畫兩弧割定直線於 A 及 C, 次以 A, C 爲圓心大於 AB 之半徑畫圓交於 P, 連 PB 卽得所求之垂線.  [證明] $AB = BC$, $PA = PC$, $PB = PB$. $\therefore\ \triangle PAB \equiv \triangle PBC$.　$\therefore\ \angle PBA = \angle PBC$. 但 $\angle PBA + \angle PBC = 180^\circ$.　$\therefore\ \angle PBA = 90^\circ$, 卽 $PB \perp AC$.	

基礎作圖題(其一)之解答

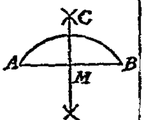
解	答

(1) [作法] 以已知一邊之兩端 A, B 爲中心, AB 爲半徑畫圓,其交點爲 C, 則 ABC 卽爲所求之三角形.

[證明] 於 $\triangle ABC$, 依作圖, $AB=BC=CA$. $\therefore$ ABC 爲正三角形.

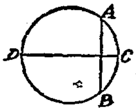
(2) [作法] 連結圓弧兩端之直線,依作圖題 1, 垂直二等分之必過弧 AB 之中點 C.

[證明] 以 MC 垂直二等分弦 AB, 卽過對於弦 AB 之弧之中點 C.



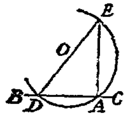
(3) [作法] 連結已知圓 ACB 上任意二點 A, B, 引 AB 之垂直二等分線 CD (作圖題 1), 交圓於 C, D, 則 CD 爲所求之直徑.

[證明] AB 爲弦, CD 垂直於 AB 而二等分之,卽過圓之中心, 故 CD 卽爲圓之直徑,其理甚明.



(4) [作法] 以任意之點 O 爲中心, O 距定點 A 爲半徑畫圓,交 BC 於 D, 引直徑 DOE, 則 EA 爲所求之直線.

[證明] DAE 爲半圓,而 $\angle DAE=R\angle$, 卽 $EA\perp BC$.



(5) [作法] 就已知一邊 AB 之兩端 A, B 作垂線 AD, BC, 且令等於 AB, 連結 C, D; 則 $ABCD$ 爲正方形.

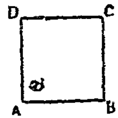
[證明] $BC=AD$, 且 $BC \parallel AD$.

$\therefore$ $ABCD$ 爲平行四邊形,

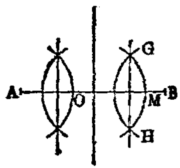
而 $AB=BC=AD$,

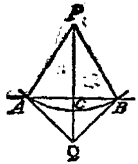
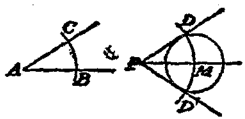
$\angle A=\angle B=R\angle$.

$\therefore$ $ABCD$ 爲正方形.



(6) [作法] 先依作圖題1,等分 AB 於 O, 次以 O, B 爲圓心,同様半徑畫弧交於 G, H, 連 GH 交 OB 於 M, 則 $OM=MB$, 再將 OA 等分,卽可四等分 AB 矣.

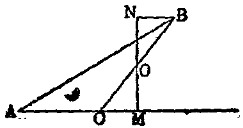


解　　法	問　　題
(作圖題 3)　試從定直線 AB 外之一點 P，向此線作垂線. [作法]　以 P 爲圓心，PA（A 爲直線上任意一點）爲半徑畫圓交 AB 於 B，又以 A, B 爲中心，大於 AB 之半爲半徑畫弧交於 Q，連 PQ；則 PQ 垂直於 AB. 就 $\triangle PAB$, $\triangle QAB$ 論，爲立於同底 AB 上之等腰三角形，故連結二頂點 P, Q 之直線垂直於 AB.  (作圖題 4)　試從直線 PQ 上之定點 P，引直線作角，使等於所設之角 BAC. [作法]　A 爲圓心，以任意半徑畫弧截二邊於 B, C，次以 P 爲圓心，同半徑畫圓交直線於 M，末以 M 爲圓心，BC 之長爲半徑畫圓交前圓於 D 及 D'；則 PD, PD' 卽所求之直線.  [證明]　$\triangle ABC \equiv \triangle PMD \equiv \triangle PMD'$　（因三邊各相等故也） $\therefore\ \angle BAC = \angle MPD = \angle MPD'$, 卽 PD, PD' 爲與 PM 成角，等於 $\angle BAC$ 之直線.	(1)　試過 $\angle BAC$ 內之定點 O，引直線 BOC 使 $BO=OC$. (2)　已知對角線，試作正方形. (3)　已知一邊及對角線，試畫矩形. (4)　已知二個對角線，試作菱形. (5)　試從定點 P，引二直線交 OX, OY 使其夾角爲直角而其長相等.

基礎作圖題(其二)之解答

解　　　　答

(1) [解析] 設 BOC 爲所求之直線,則 $OB=OC$,由是更設 $OM\perp AC$, 且 $OM=ON$; 則 $\triangle COM\equiv\triangle BON$ 而 $\angle ONB=\angle OMA=90°$, 而問題解決矣.



[作法] 自 O 向 $\angle A$ 之一邊作垂線 OM, 反方向延長 OM 至 N, 使 $ON=OM$; 自 N 更作 PN 之垂線,使交 $\angle A$ 之另邊於 B, 連 OB 且延長之交 $\angle A$ 之邊於 C, 則 BOC 卽爲所求.

[證明] $\angle OMC=\angle ONB=90°$, $OM=ON$,

$\angle COM=\angle BON$. (對頂角)

$\therefore$ $\triangle COM\equiv\triangle BON$.

$\therefore$ $OB=OC$, (相當邊相等)

(2) [作法] 以已知之對角線 AB 爲直徑畫圓,過 AB 之中點卽中心,引 AB 之垂線交圓於 C, D, 則 $ADBC$ 爲正方形.

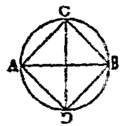
[證明] AB 爲 $ADBC$ 之對角線, C 及 D 爲 AB 弧之中點.

$\therefore$ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$.

$\therefore$ $AC=CB=BD=DA$,

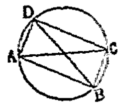
且 $\angle ACB=R\angle$.

$\therefore$ $ABCD$ 爲正方形.



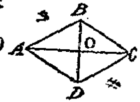
(3) [作法] 以已知對角線 AC 爲直徑畫圓,以又 A, C 爲中心已知一邊爲半徑畫圓弧交圓於 D, B, 則 $ABCD$ 爲矩形.

[證明] 從略.



(4) [作法] 二等分一對角線於 O 點,自 O 引垂線,令 $BO=OD$ 各等於他對角線之½,則 $ABCD$ 爲所求之菱形.

[證明] $AC\perp BD$,且二等分於 O 故也.

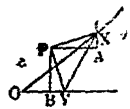


(5) [作法] $PB\perp OY$, $PA\parallel OY$, $PA=PB$, $AX\perp PA$, $PY=PX$, 則 PX, PY 爲所求之直線.

[證明] $\triangle PXA\equiv\triangle PYB$,

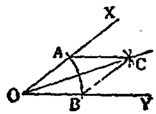
故 $\angle APX=\angle BPY$,

故 $\angle XPY=\angle APB=90°$.



解法

(作圖題 5)　就所設之角 XOY, 試引其二等分線.



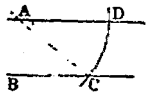
[作法]　以頂點爲中心, 任意取一半徑畫圓交其角之夾邊於 A, B, 次以 A, B 爲中心, 以相等之半徑畫圓相交於 C, 則 OC 卽爲所求之直線.

[證明]　$\triangle AOC$, $\triangle BOC$, 其三邊各各相等.

$\therefore\ \triangle AOC \equiv \triangle BOC$. 由是 $\angle AOC = \angle BOC$.

(注意)　上之方法接續行之, 可分一切之角爲 $\frac{1}{2^n}$ 等分.

[作圖題 6]　試過所設之點, 令引直線, 與所設之直線 BC 平行.



[作法]　從 A 向 BC 任意引一直線 AC, 次引直線 AD, 使與 AC 成角, 等於 $\angle ACB$ 錯角, 則 AD 平行於 BC.

[證明]　$\angle DAC = \angle BCA$, 而 $\angle DAC$, $\angle BCA$ 及 AC 交於 AD, BC 所成之錯角.

$\therefore\ AD \parallel BC$.

問題

(1)　試作 45°, 60°, 30° 之角.　(燕京大學)

(2)　試分直角爲三等分.

(3)　已知高及頂角, 求作等腰三角形.

(4)　試將一直線分爲五等分, 並證明之.　(綏遠,初會)

(5)　已知三角形之底邊及一底角, 求作此三角形.　(浙江,會考)

基礎作圖題(其三)之解答

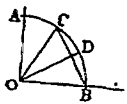
解答

(1) [作法] 因 $45°=\frac{1}{2}\times 90°$,故任意作一直角,依作圖題5,分直角爲二等分,卽得所求之角.

60 爲等邊三角形之一內角,故任作一等邊三角形,卽可得其角.

又 $30°=\frac{1}{2}\times 60°$,故先作一 60° 之角,然後平分此角卽得.

(2) [作法] 以角頂 O 爲圓心,任取一半徑,畫圓截角之二邊於 A, B,次以 A, B 爲中心,以前之半徑截前圓於 C 及 D,連結 OC,卽得所求之直線.



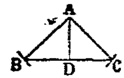
[證明] $\triangle OCB$ 爲等邊三角形.

$\therefore\ \angle COB=60°$, 由是 $\angle AOC=30°$.

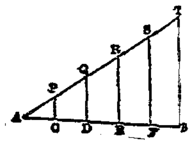
同理,可證 $\angle BOD=30°$.

$\therefore\ \angle AOC=\angle COD=\angle BOD=30°$.

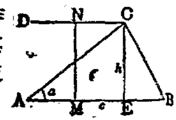
(3) [作法] 先作 A 角之二等分線 AD,令等於高,次過 D 引垂線交 $\angle A$ 之兩邊於 B, C,則 $\triangle ABC$ 爲所求.證明從略.



(4) [作法] 過定直線 AB 之一端 A,作任意直線 AT,作 $AP=PQ=QR=RS=ST$,連結 BT,作 BT 之平行線 FS, ER 等交 AB 於 F, E, D, C 卽得. 證明從略.



(5) [作法] 作 AB 使等於 c,從 A 作 AC,使 $\angle CAB=\angle\alpha$,又在 AB 上任一點作垂線,令等於所設距離.過其端引平行線與 $\angle A$ 之另邊交於 C,連 BC 卽得 $\triangle ABC$.

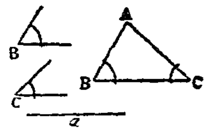


[證明] 作 $CE\perp AB$,則 $\angle NME$ 爲平行四邊形,而 $CE=MN$. 但 $MN=h$. $\therefore\ CE=h$, $\angle CAE=\angle\alpha=$已知角,又 $AB=c=$已知長,故 $\triangle ABC$ 合於所設條件.

解法

(作圖題 7)　已知二角 B, C 及其間之一邊 a, 求作三角形.

[作法]　作等於 a 之 BC, 從其兩端作等於 B, C 角之直線 BA, CA 交於 A, 則 $\triangle ABC$ 為所求之三角形.

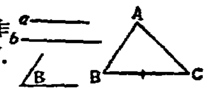


[證明]　$BC=a, \angle CBA=\angle B, \angle BCA=\angle C$.
$\therefore$ ABC 為所求之三角形.

[討論]　$\angle B+\angle C<180^\circ$, 是為必要.

(作圖題 8)　已知二邊與夾角, 求作三角形.

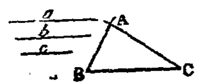
[作法]　作 $BC=b$, 於 B 作 $\angle CBA=\angle B$, 又作 $AB=a$, 連結 A, C, 卽得所求三角形 $\triangle ABC$.



[證明]　證之甚易故略.

(作圖題 9)　已知三邊, 求作三角形.

[作法]　作 $BC=a$, 以 B, C 為圓心, c, b 為半徑畫圓交於 A, 則 ABC 為所求之三角形.



[證明]　$BC=a$, $AB=c$, $AC=b$.

[討論]　B 及 C 為圓心之圓相交必 $b\sim c<a<b+c$.

問題

(1)　已知三角形之兩角及一角之對邊, 求作此三角形之方法.

(北平女子師範學院)

(2)　求作一梯形, 已知其四邊.

(北平交大)

(3)　已知三角形之底邊及過底邊兩端之中線, 求作此三角形.

(四川, 高會)

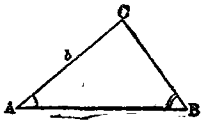
(4)　已知三中線之長, 求作此三角形.

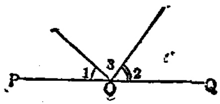
(江西二中)

基礎作圖題(其四)之解答

解　答

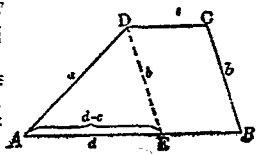
(1) [解析] 如已知 A, B 角之值,則因 $\angle C=180°-\angle A-\angle B$, 故 $\angle C$ 可求得. 再加入題中所設之 $\angle A$ 及 b 便成作圖題 7 矣. 由是得





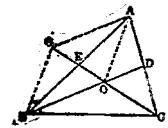
[作法] 先作一平角 $\angle POQ$, 次作 $\angle 1=\angle A$, $\angle 2=\angle B$ 便得 $\angle 3=\angle C$. 由是依作圖題 7 中同樣方法,便得所求三角形.

(2) [解析] 試作 $DE \parallel BC$, 則 $CDEB$ 爲平行四邊形,而 $DE=BC=b$, $AE=AB-BE=AB-CD=d-c$, 故 $\triangle ADE$ 可作 (已知三邊) 而問題解決矣.



[作法] 依作圖題 9, 作 $\triangle ADE$, 使三邊各爲 a, b 及 $d-c$, 然後將 $d-c$ 一邊延長至 B, 使 $AB=d$, 自 D 作 $CD \parallel AB$, 且 $CD=c$, 連 BC 卽得.

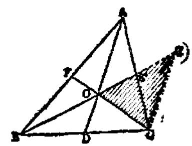
(3) [解析] 因三中線相交於一點, 且被交點三等分, 故 $OB=\frac{2}{3}BD=$ 定長, $OC=\frac{2}{3}CE=$ 定長, 且已知 BC 之長,故 $\triangle BOC$ 可先行作出.



[作法] 將二中線三等分, 而各取其二份,次依作圖題9,作出 $\triangle BOC$, 引長 OC 至 E, 使 CE 爲中線之長, 又延長 EB 至 A, 使 $BE=EA$, 連 AC, 卽得所求 $\triangle ABC$.

[證明] 延長 BO 與 AC 交於 D, 又延長 CE 至 G, 使 $GE=\frac{1}{3}CE$, 則 $GE=OE$, 又 $AE=EB$. $\therefore AGBO$ 爲平行四邊形,而 $AG \parallel BO \parallel OD$, 且 $OG=OC$, 故在 $\triangle AGC$ 中,知 $AD=DC$, 而 BD 爲中線矣, 且 $OD=\frac{1}{2}AG=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{3}$ 中線之長. $\therefore BD=$ 中線之長, 又 CE 爲中線, 且 $CE=$ 中線之長, $BC=$ 定長.

(4) [解析] 引長 OE 至 G, 使 $OE=EG$, 則 $\triangle OCG$ 之三邊,各爲原中線之三分之二,故可以此三角形爲基礎,作出所求三角形.



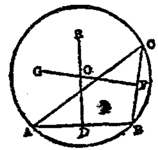
[作法] 先作 $\triangle OCG$, 延長 OG 至 B, 使 $OB=OG$, 作 $\triangle OCG$ 之中線 CE, 且延長之,使 $EC=EA$, 連 AB, BC 卽得.

解　　法

(作圖題 10)　求作 $\triangle ABC$ 之外接圓.（浙江大學）

[作法]　引 AB, BC 之中垂線 DE, FG, 其交點爲 O, 則 O 爲所求之圓心.

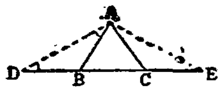
[證明]　因 DE, FG 爲弦, 故其中垂線皆過圓心.



(作圖題 11)　已知三邊之和及二角, 求作三角形.

（徐州女中），（南京女中）

[解析]　設 ABC 爲所求之三角形, $\angle B$, $\angle C$ 爲所設之角, 延長 BC, 令 $BD=BA$, $CE=CA$, 則 $DE=AB+BC+CA$, 連結 AD, AE 成等腰三角形 ADB, ACE, 且 $\angle BDA=\frac{1}{2}\angle B$, $\angle CEA=\frac{1}{2}\angle C$, 故 $\triangle ADE$ 爲已知一邊 DE 與兩底角之三角形.



[作法]　作 DE 等於三邊之和, 使 $\angle EDA=\frac{1}{2}\angle B$, $\angle DEA=\frac{1}{2}\angle C$, 引二直線 DA, EA 交於 A, 又作二直線 AB, AC 使 $\angle DAB=\angle BDA$, $\angle EAC=\angle CEA$, 則 $\triangle ABC$ 卽所求之三角形.

[證明]　$AB=BD$, $AC=CE$, $\angle ABC=\angle BDA+\angle DAB=2\angle BDA$. $\therefore$ $\angle ABC=\angle B$. 同理, $\angle ACB=\angle C$.

問　　題

(1)　試從已知之弧求出其中心.

（南京中學）

(2)　試從已知角 BAC 之一邊 AB 上之一點 P, 向他邊 AC 引垂線 PQ, 令 $AP+PQ$ 等於定長 m.

(3)　求作一等腰三角形, 已知其周界及高.　（鹽城中學）

(4)　已知三角形兩邊之和及夾角, 並其已知邊上之高, 求作此三角形.

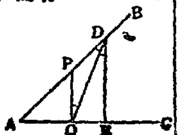
（如臯師範）

基礎作圖題(其五)之解答

解答

(1) [作法] 與作圖題 10 同樣方法,作圓弧之任意二弦,次作其中垂線,此二中垂線之交點,即為圓心.

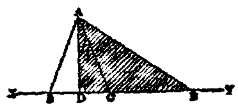
(2) [解析] 設 P 為 AB 上之點,而有 $AP+PQ=m$, 於 AB 上取 D, 使 $PD=PQ$, 則 $AD=AP+PQ=m$, 且 $\angle ADQ=\frac{1}{2}\angle APQ$, 故先求得 D, 後即可作 DQ.



[作法] 於 AB 上取 $AD=m$, 從 D 向 AC 作 $DE\perp AC$, 等分 $\angle ADE$ 交 AC 於 Q, 從 Q 引垂線 QP, 則 P 即所求之點.

[證明] $\angle PDQ=\angle QDE=\angle DQP$. $\therefore$ $PD=PQ$. $\therefore$ $AP+PQ=AP+PD=m$, 故 P 為所求之點.

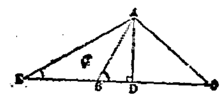
(3) [解析] 引長 BC, 使 $CE=AC$. 設 $AD\perp BC$, 則 $DE=DC+CE$ $=\dfrac{BC}{2}+\dfrac{AB+AC}{2}$ $=$周界之半,且 AD 為已知長之直線,故 $\triangle ADC$ 可作,而問題解決矣.



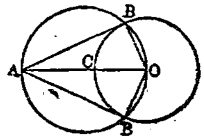
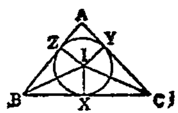
[作法] 先作 XY, 於其上任意一點 D 作垂線,且使其長等於所設之高 (如 AD), 次作 DE 等於周界之半,連 AE, 作其中垂線交 DE 於 C, 連 AC, 作 $DB=DC$, 連 AB 即得所求三角形.

[證明] $AD=$所設長,又 $BD=DC$ 等, $\triangle ABD=\triangle ACD$. $\therefore$ $AB=AC$, 而三角形為等腰,又 $AB+AC+BC=2AC+2DC=2CE+2DC=2DE=$周界,故 $\triangle ABC$ 適合所設條件,而為所求之三角形.

(4) [解析] 引長 BC, 使 $BE=AB$, 則 EC 為兩邊之和,並且 $\angle E=\frac{1}{2}\angle ABC=$所設角之半,又 $AD=$所設高,故 $\triangle AED$ 可作,而問題解決矣.



[作法] 作 $AD=$所設高,等分所設角,作 AE 使 $\angle DAE=$所設角之半之餘角,作 AD, 由 D 之垂線交 $\angle DAE$ 之一邊於 E, 作 $EC=$兩邊之和,連 AC, 又作 $\angle BAE=\angle E$ 即得.

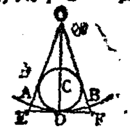
解法	問題
(作圖題 12) 試過一點 A,引已知圓之切線,並證明其作法. (稅務專門),(南開大學)  [作法] (i) A 在圓上,則先連 AO, 後過 A 作 OA 之垂線,即為所求之切線. (ii) A 在圓外,則以 AO 為直徑,畫圓與所設之圓交於 B, B', 則 AB, AB' 即為所求之切線. [證明] B 在 O 圓上,而 $\angle ABO=90°$. $\therefore AB$ 為 O 圓之切線.同理, AB' 亦為圓之切線. [討論] 因 A 在圓外,圓上,圓內,從而有二個,一個,零個切線.	(1) 以三角形三頂點為圓心, 作三圓彼此相切. (江西,初會) (2) 試作扇形之內切圓. (3) 試過所設之點至圓, 作定長之弦. (4) 已知圓 O 及點 A 在 XY 直線之同側, 試從 XY 直線上求一點 M, 令 M 至圓之切線及 MA 皆與 XY 成相等之角. (5) 試不求圓之中心, 而引圓周上定點之切線.
(作圖題 13) 試作三角形之內切圓. (江西 初會),(浙江大學)  [作法] 以 $\triangle ABC$ 二角 B, C 之分角線, 從其交點 I 作 $IX\perp BC$, 以 I 為圓心, IX 為半徑作圓,即為所求. [證明] 從 I 向 AC, AB 作垂線 IY, IZ, 則 $IX=IY=IZ$. $\therefore I$ 為中心, IX 為半徑之圓,必切 ABC 於 X, Y, Z.	

基礎作圖題(其六)之解答

解	答

(1) [作法] 先作出此三角形之內心，從內心各作垂線 IX, IY, IZ，由是以 A, B, C 各爲圓心，AY, BX, CZ 各爲半徑作圓卽得.

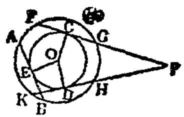
(2) [解析] 設於扇形 OAB 作內切圓，則中心 C 在 $\angle AOB$ 之分角線上，又弧 AB 與內切圓之切點 D 必在 OC 上，而爲 $\widehat{AB}$ 之中點，故於 D 引切線，則所求圓爲 $\triangle OEF$ 之內切圓.



[作法] 作 $\angle AOB$ 之分角線，交 AB 於 D，自 D 引切線 EF 成 $\triangle OEF$，作其內切圓卽爲所求.

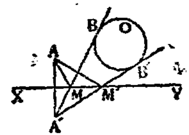
[證明] C, O 兩圓於 D，有公共切線，故互相切，又圓 C 切於 OA, OB，故 C 圓爲扇形之內切圓.

(3) [作法] 於 O 圓作定長之弦 AB，從圓心 O 向 AB 作垂線 OE，以此爲半徑作圓，從 P 引此圓之切線 PC, PD 與原圓交於 F, G, H, K，則 FG, HK 爲所求.



[證明] $OC \perp GF$，$OD \perp HK$. $\therefore$ $OC = OD = OE$，故 $FG = HK = AB =$ 定長.

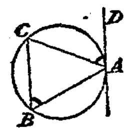
(4) [作法] 求 A 關於 XY 之對稱點 A'，從 A' 向 O 圓引切線 $A'B$，$A'B'$ 交 XY 於 M, M'，則 M, M' 爲所求之點.



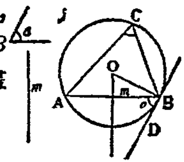
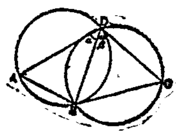
[證明] $\angle AMX = \angle A'MX = \angle BMY$.

$\therefore$ MA, MB 與 XY 成等角. 同樣，$M'A$, $M'B'$ 亦與 XY 成等角.

(5) [作法] 過所設圓周上之點 A，任意引弦 AB 於弓形 ACB，作角 ACB，又於弓形與 AB 反對之側作直線 AD，令 $\angle BAD = \angle ACB$，則 AD 爲所求之切線.



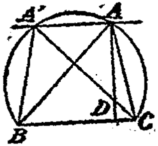
[證明] 因 $\angle BAD$ 等於相鄰弓形之角 ACB 故也.

解法	問題
(作圖題 14) 試就所設之線分 m 上,畫弓形容一既知角 α. [作法] 作 AB 令等於 m 線,從其一端 B 引 BD, 令 $\angle ABD=\alpha$, 又作 AB 之中垂線與 BD 在 B 之垂線相交於 O, 以 O 為中心, OB 為半徑, 畫弧 ACB, 即為所求之弓形.  [證明] OB 為半徑之圓,過 A 且切於 BD. $\therefore\ \angle ACB=\angle ABD=\alpha$. (作圖題 15) 試求對於已知二線分成已知角之點. [作法] 已知二線分為 AB, BC, 於其上作含 α, β 角之弓形,其交點為 D, 則 D 為所求之點.  [證明] 因 D 對於 AB, BC 所成之角為 α, β, 故 D 為所求之點. [討論] 解此題時,必須 $\alpha+\beta+\angle ABC<360°$, 否則無解.	(1) 已知底邊,頂角及高,求作三角形. (2) 試於既知直線上求一點, 令其對於他直線之角等於既知之角. (3) 已知頂角旁之二邊及二底角之差,求作此三角形. (北平大學)

基礎作圖題(其七)之解答

解　　　　答

(1) [作法] 作線分 BC 使與底邊之長相等, 以 BC 爲弦作含 $\angle\alpha$ 之弓形($\angle\alpha$ 爲頂角),在弓形之側作一平行線[參閱基礎作圖題(其三)之第五題],使其距離爲已知高.此平行線與弧之交點爲 A, 則 $\triangle ABC$ 爲所求之三角形.

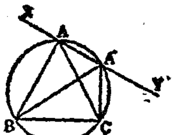


[證明] 從略.

[討論] 平行線不交弓形,則無解法.

(2) [作法] 於 BC 上作含既知角之弓形,與直線交於 A, A', 則 A, A' 卽所求之點.

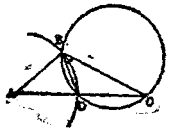
[證明] 依作圖法, 知 $\angle BAC$ 爲弓形角,且等於既知角之大,又 A 點在 XY 上,故 A 爲所求之點.同樣,知 A' 亦爲所求之點.



[討論] 若所作弓形與直線不相交,則無解;若直線與弓形相切,則有一解,否則卽有二解.

(3) [解析] 設已知 $AB=c$, $AC=b$, 且知兩角之差 $\angle B-\angle C$, 則作 $AD=AB$.

$\therefore\ \angle CBD=\angle B-\angle ABD$
$=\angle B-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)$
$=\angle B-\frac{1}{2}\angle B-\frac{1}{2}\angle C$
$=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.



又 $DC=AC-AD=b-c$.

故弓形弧 CBD 可作, 而 B 爲此弓形弧與 A 爲圓心, c 爲半徑之弧之交點.由是得

[作法] 作 $AC=b$, A 爲圓心, c 爲半徑,畫弧交 AC 於 D, 以 CD 爲弦,作一弓形,使含一已知角 $\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$, 此弓形弧與前弧交於 B, 連 AB, AC 卽得.

[證明] $\because$ $AB=c$, 且 $AD=AB$. $\therefore$ $\angle ABD=\angle ADB$, $\angle ADB+\angle ABD=2\angle ABD=180^\circ-\angle A=\angle B+\angle C$.

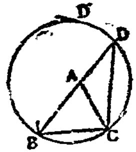
$$\therefore\quad \angle ABD=\frac{\angle B+\angle C}{2}.$$

但
$$\angle CBD=\frac{\angle B-\angle C}{2}.$$

相加相減,得 $\angle ABC=\angle B$, $\angle ACB=\angle C$, 又 $AC=b$.

解法	問題

(問題 1)　已知三角形之一角與其相對之邊及他二邊之和，求作三角形。



[解析]　設所求之三角形爲 ABC，BC 爲所設之邊，$\angle A$ 爲所設頂角，$AB+AC$ 爲所設他二邊之和，試延長 AB，令 $AD=AC$，則 $\triangle ACD$ 爲二等邊三角形，而 $\angle BDC=\frac{1}{2}\angle A$. $\therefore$ $\angle D$ 亦爲既知之角，則 D 在 BC 上含 $\frac{1}{2}\angle A$ 之弓形上，又以 BD 爲二邊之和，故又在以 B 爲中心，BD 爲半徑之圓周上。

[作法]　作 BC 等於已知一邊，於其上作含 $\frac{1}{2}\angle A$ 之弓形，以 B 爲中心，已知二邊之和爲半徑，作圓交於 D，連結 CD，令 $\angle DCA=\angle BDC$，引 CA，則 $\triangle ABC$ 卽爲所求之三角形.

[證明]　$\angle DCA=\angle ADC=\frac{1}{2}\angle A$. $\therefore$ $\angle BAC=2\angle BDC=\angle A$,
$AB+AC=AB+AD=BD$. $\therefore$ $\triangle ABC$ 爲所求.

[討論]　$\angle A$ 比二直角小，二邊之和比 BC 大，而 B 爲中心之圓，與弓形相交，相切或不相交，從而有二解，一解或無解.

問題

(1)　作一三角形，若已知其一角，此角之一邊及他兩邊之差。

(江蘇省高中入學試題)

(2)　已知一底邊 a，一底角 $\angle b$ 及他二邊之和 c，求作三角形。

(河北省立農學院)，(青島，高會)

(3)　已知三角形之底及高及外接圓之半徑。　(務本女中)

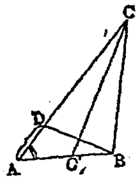
(4)　已知底邊，頂角及內切圓之半徑，求作三角形。

作圖應用問題(其一)之解答

解　　答

(1) 設已知 $\angle A=\alpha$，此角之一邊 c 及他二邊之差 $b-a$.

[解析] 作 $CD=BC$，則 $AD=AC-CD=AC-BC=b-a$，則 $\triangle ABD$ 中，已知二邊一夾角，故爲可作而問題解決矣.



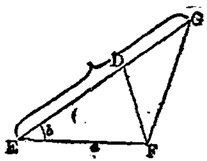
[作法] $\angle A=\alpha$，於上邊上取 $AB=c$，$AD=b-a$，連 BD，作 BD 之中垂線與 AD 之延線，交於 C，連 BC，卽得所求三角形.

[證明] 因 C 爲中垂線上之點，故 $CD=BC$，$AD=AC-CD=AC-BC=b-a$，且

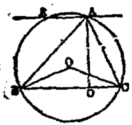
$AB=c$，$\angle BAC=\alpha$.

(2) [解析] 設 $\triangle DEF$ 爲所求之三角形，延長 ED 使 $DG=DF$，則 $EG=ED+DF=c$，由是 $\triangle EGF$ 可先行作出，而問題解決矣.

[作法] 依作圖題 8 之方法，先作出 $\triangle EGF$，次作 FG 之中垂線交 EG 於 D，連 DF，卽得所求三角形 DEF.

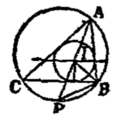


(3) [作法] 作 $BC=$ 底邊之長以 B,C 各爲圓心，外接圓半徑爲半徑，畫弧交於 O. 由是以 O 爲圓心，外接圓半徑爲半徑作圓，更作 BC 之平行線，使平行線間之距離爲所設高，此平行線交圓於 A，連 AB，AC 卽得. 本題一般有二解.



[證明] 從略.

(4) [作法] 作 $BC=a$，於 BC 上所含 $\angle A$ 之弓形，依內切圓半徑 r 之距離作 BC 之平行線. 以 BC 弧之中點 P 爲中心，PB 爲半徑作圓，交於 I，延長 PI 交弓形於 A，則 $\triangle ABC$ 卽所求.



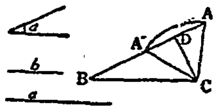
[證明] $BC=a$，$\angle BAC=\angle A$，$PB=PI$.

$\therefore$ $\angle PIB=\angle PBI$，且 $\angle CAP=\angle BAP$ ($\because$ $\widehat{CP}=\widehat{BP}$). 相減，$\angle ABI=\angle CBI$，故 I 爲內心，且半徑爲 r.

解法

(問題 2)　已知兩邊及其一邊所對之角,求作三角形.

[作法]　作 $BC=a$, 令 $\angle CBA=\angle a$, 引直線 BA, 以 C 爲中心, b 爲半徑作圓交於 A, A', 則 $\triangle ABC$, $\triangle A'BC$, 即爲所求之三角形.



[證明]　因　$BC=a$, $\angle ABC=\angle a$, $CA=b=CA'$ 故也.

[討論]　(甲)　$\angle a<R\angle$ 之時:

(1)　$b<CD(CD\perp AB)$, 則 C 爲中心之圓,不交 AB, 故無解.

(2)　$b=CD$, 則 C 圓切於 BA, 故有一解.

(3)　$a>b>CD$, 則圓交於 A, A', 故有二解.

(4)　$b=a$, 則圓交於 B, A, 故祇一解.

(5)　$b>a$, 則於 B 反對之側得 A, A', 故其一不適於要件.

(乙)　$\angle a=R\angle$, $b>a$, 則得二全等形, $b<a$ 則無解.

(丙)　$2R\angle>\angle a>R\angle$, $b>a$ 祇一解, $b<a$ 則無解

問題

(1)　已知三角形之底,高及底上之中線,求作其形.　(松江女中)

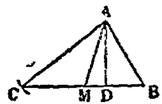
(2)　已知由一頂角所成之中線及二邊,求作此三角形.

(3)　已知頂角及向底邊所引之中線與垂線,求作三角形.

作圖應用問題(其二)之解答

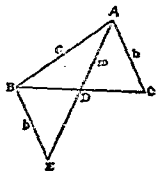
解　答

(1) [作法] 作 AD 等於已知高 h，過其足 D，作垂線 DM，以 A 爲中心，已知中線 m 爲半徑，作圓交於 M，又以 M 爲中心，已知底邊之半爲半徑，作圓交於 C 及 B，連結 AB 及 AC，則 ABC 即爲所求之三角形。



[證明] $AM=m$, $BM=MC=\frac{a}{2}$，且 $BC=BM+MC=a$, $AD=h$, $AD\perp BC$. $\therefore$ AD, AM, BC 各等於 h, m, a 之長，且爲其高，中線及底邊.

(2) [解析] 設已得所求之三角形 ABC, $AD=m$, $CA=b$, $AB=c$. 在 AD 之延長線上取 DE，使等於 AD，則 $AC=BE=b$. 由是，知 $\triangle ABE$ 之三邊，可得次之作圖法.

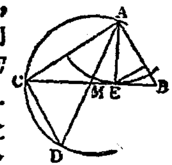


[作法] 作 $\triangle ABE$，使 $AE=2m$, $AB=c$, $BE=b$，將 AE 之中點 D 與 B 連結，在 BD 之延長線上取 DC，使等於 BD，連結 CA，則 $\triangle ABC$ 卽合所求.

[證明] 從略.

[討論] 從略.

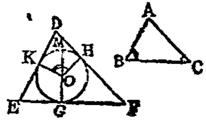
(3) [解析] 設 ABC 爲所求之三角形，AE, AM 各爲垂線，中線，$\angle BAC=\angle A$，延長 AM，令 $MD=AM$，則 $\angle ACD=2R\angle-\angle A$, AE 爲 $\triangle ACD$ 中線 CM 之垂線.



[作法] 作 AD 爲中線 m 之二倍，於其上作含 A 之補角之弓形，以 A 爲中心，h 爲半徑作圓，從 AD 之中點 M 引切線 ME，令 $CM=MB$，則 ABC 爲所求之三角形.

解　法	問　題

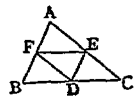
(問題 3) 試作三角形外接於已知之圓,而與已知三角形等角。(清華大學)



[作法] $\triangle ABC$,圓 GHK 爲已知,引直徑 MOG 及二直線 OK, OH, 令 $\angle MOK=\angle B$, $\angle MOH=\angle C$, 且交圓於 K, H, 自 G, K, H 作三切線,得 $\triangle DEF$ 是卽所求之三角形。

[證明] 以 $\angle EKO=OGE=R\angle$, 而 $\angle KEG=\angle MOK=\angle B$. 同樣, $\angle HFG=\angle MOH=\angle C$, 由是 $\angle D=\angle A$. $\therefore$ $\triangle DEF$ 卽外接於圓 O, 而與 $\triangle ABC$ 等角之三角形.

(問題 4) 已知三邊之中點,試作三角形.



[作法] D, E, F 爲已知之三點,以 E, F, D 連成三直線,過 D 作直線令與 EF 平行.同樣,過 E, F 各作對邊平行之直線,則此三直線交於 A, B, C 成 $\triangle ABC$ 卽得.

[證明] $DCEF$ 及 $DEFB$ 爲平行四邊形. $\therefore$ $DC=EF=BD$, 卽 D 爲 BC 之中點.同樣,知 E, F 亦爲 AC, AB 之中點.

問題

(1) 試作外接於定圓,且與定四角形成等角之四角形.

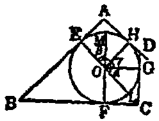
(2) 從圓外一點引割線,令圓外之部分等於圓內之部分,問應如何作法?(武漢大學)

(3) 試於直線上求一點,令自此點圓之切線等於定長.

(4) 已知三角形三垂線之足,求作三角形.

解　　答

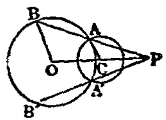
(1) [作法] 於定圓 O 引相交二直徑 MOF, FOL, 令 MOE 等於定四角形之一角 β, 次引二半徑 OG, OH 成 $\angle MOG=\gamma$, $\angle LOH=\alpha$, 就 E, F, G, H 四切點, 作圓之四切線成 $ABCD$ 四角形,是爲所求之四角形.



[證明] 以 $ABCD$ 之各邊切於 E, F, G, H 四點, 而 $\angle B=\angle EOM=\beta$, $\angle C=\angle GOM=\gamma$, $\angle A=\angle LOH=\alpha$, 由是 $\angle D=\delta$.

$\therefore$ $ABCD$ 爲所求之四角形.

(2) [作法] 自圓外一點 P 至圓心 O 之中點 C, 以 C 爲中心, 前圓半徑之半爲半徑,畫圓交 O 圓於 A, A', 則 PAB, $PA'B'$, 卽所求之割線.

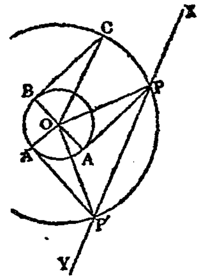


[證明] 作 $OB \parallel CA$, 交 PA 之延長線於 B. 因 $OB=2AC$, 由是 B 在 C 圓周上,而 $PA=AB$.

$\therefore$ PAB 爲所求之割線.

同樣, $PA'B'$ 亦爲所求之割線.

(3) [作法] 引圓 O 任意之切線, BC 等於所設之長,以 O 爲中心, OC 爲半徑,畫圓與直線 XY,交於 P, P', 則 P, P' 乃所求之點.



[證明] $\triangle OAP \equiv \triangle BOC$.

($\because$ $OB=OA$, $OC=OP$)

(PA, $P'A'$ 爲切線)

$\therefore$ $PA=BC=$定長.

同樣, $P'A'=BC$.

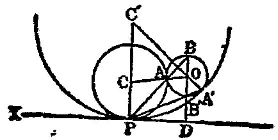
$\therefore$ P, P' 爲所求之點.

(4) [作法] 三垂線之足爲 E, D, F, 作 $\triangle EDF$, 又作其各角之二等分線交於 A, B, C, 則 $\triangle ABC$ 卽爲所求.

解法	問題

(問題 5)　試切於定直線上之一定點,且切於定圓作一圓.

O 爲所設之圓, X 爲所設之直線, C 爲切於 X 上定點 P 及切於 O 圓之圓.

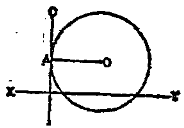


[解析]　從所求圓之中心,向 X 作垂線 PC,連 PA 交 O 圓於 B,則 $\triangle CAP$, $\triangle OAB$ 爲等腰.

$\therefore \angle CPA=\angle ABO$. $\therefore BO \parallel CP$.

[作法]　從所設圓之中心 O,向 X 直線作垂線 OD,交 O 圓於 B, B', 連 PB, PB' 交 O 圓於 A, A', 連結 OA, OA' 交 X 上 P 點之垂線於 C, C', 以 C, C' 爲中心, CP, $C'P$ 爲半徑作圓卽得.

(問題 6)　求作一直線垂直於一已知線與已知圓相切.　(中央大學)



[解析]　設 CD 爲所求之切線,而 A 爲其切點,則 $OA\perp CD$. 但 $CD\perp XY$. $\therefore OA \parallel XY$. 由是 A 點可定,而 CD 亦可定矣.

[作法]　自圓 O 作線平行於 XY, 交圓於 A, 自 A 作 OA 之垂線卽得.

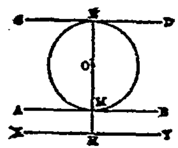
問題

(1)　試作一圓切已知圓於已知點, 又與已知直線或他已知圓相切.

(2)　有二相交直線及其上一點 P, 求作一圓須與此二線相切, 並過 P 點.　(上海,高會)

(3)　求作一直線與已知圓相切, 且與一已知直線平行.　(南洋中學)

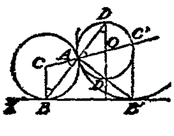
(4)　試作定圓之切線, 而與定直線成定角.



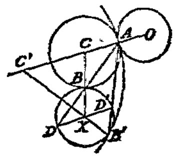
作圖應用問題(其四)之解答

解	答

(1) 設求作圓 C 切已知圓 O 於 A 點，且切於已知直線 X (甲)或 X 圓(乙).



(甲)



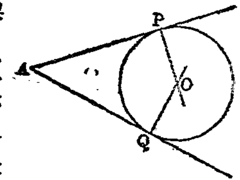
(乙)

[解析] 設所求之圓 C 與 X 之切點為 B，則可知 AB 交 O 圓(甲)或 X 圓(乙)於點 D ($\because OD \perp X$ 或 $XD \parallel OA$)，故從 DA 與 X 之交點得未知之切點 B.

[作法] 連結 OA，過 O 作 X 之垂線(或過 X 作 OA 之平行線交 O 圓或 X 圓於 D, D'，連結 $DA, D'A$ 與 X 交於 B, B'，而 AO 與 X 在 B 之垂線或過 B 之半徑交於 C，以 C 為中心，CA 為半徑作圓，即為所求之圓，從 B' 則得他解 C' 圓.

[證明] $\because \angle CAB=\angle CBA$. $\therefore CA=CB$. 又兩圓在中心線上相會，故所求之圓與已知圓相切.同樣，可證所求圓與 X 相切.

(2) [作法] 作 $AQ=AP$，自 P, Q 各作垂線交於 O，以 O 為中心，OP 為半徑，即得所求之圓.



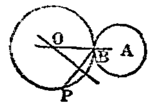
(3) [作法] 從 O 作 XY 之垂線 OH，OH 或其延線與 O 圓交於 M, N 過 M, N 引 OH 之垂線 AB, CD 即得.

(4) [作法] 從定直線 XY 上任意一點 P，作 PE, PF 與 X 成角 α，次引 O 圓之切線 AB, CD，令與 PE, PF 平行(見前題)即得.

[證明] $AB \parallel PE$. $\therefore$ $\angle YAB=\angle YPE=\alpha$，且 AB 切於 O，故 AB 為所求之切線.同樣，CD 亦為所求之切線.

解法

(問題 7)　求作一圓與一已知圓切於一已知點，且通過不在圓上之另一已知點.　(廈門大學)



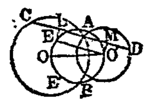
P 為圓 A 外之定點，B 為 A 圓上之定點.

[作法]　連結 AB，又連結 BP，且作其中垂線交 AB 之延線於 O 點，以 OB 為半徑，O 為中心，畫圓卽得.

[證明]　因 O 在 BP 之中垂線上，故 $OA=OB$，卽 O 圓過 P 點，又因 O 圓與 A 圓在中心線上 B 點相會，故切於 B.

[討論]　若 $BP\perp AB$ 則無解.

(問題 8)　試過二圓之交點，引弦令等於所設之長.



[作法]　以二圓中心 OO' 為直徑畫圓，又以 O' 為中心，所設之長之半為半徑，畫圓交於 E, E'，過 A 引 CAD 令與 OE 平行可也，又從 E' 可得他解.

[證明]　$OL\perp CAD\perp O'M$，則 $LM=EO'$. 但

$$LM=\tfrac{1}{2}CAD.$$

$$\therefore\quad CAD=2LM=2EO'=s.$$

問題

(1)　試過圓上二定點引平行線，令其和等於所設之長.

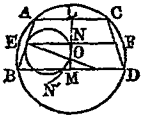
(2)　通過相交兩圓之交點，求作最長之直線，使其兩端連於兩圓周上.　(武漢大學)

(3)　設兩圓相交，求過一交點作一割線，使其所截兩圓內之弦相等.　(無錫師範)

作圖應用問題(其五)之解答

解	答

(1) [解析] A, B 爲二定點, $AC \parallel CD$, $AC+BD=s$. 又 AB, CD 之中點爲 E, F; AC, BD 之中點爲 L, M, $LM \perp BD$, LM 與 EF 之交點爲 N, 則 LM 過圓之中心 O,



$$\angle ENO=90°.$$

又 $EF=\frac{1}{2}(AC+BD)$. $\therefore$ $EN=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{4}(AC+BD)=\frac{1}{4}s$, 故可求得 N.

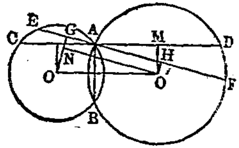
[作法] 以 AB 中點 E, 與圓心 O 之連線爲直徑畫圓, 又以 E 爲中心, $\frac{1}{4}s$ 爲半徑作圓, 其交點爲 N, N', 連結 EN, 從 A 及 B 引 EN 之平行弦 AC, BD, 即得所求之弦.

[證明] EN 與 CD 之交點爲 F, ON 各與 AC 及 BD 之交點爲 L, M. $AC \parallel EF \parallel BD$, 而 $ON \perp EF$, LM 垂直於 AC, BD, 而 L, M 爲其中點. $\therefore$ N 爲 EF 之中點.

$$\therefore \quad AC+BD=2EF=4EN=s.$$

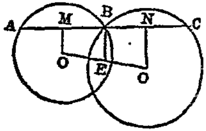
從 N' 亦可得他之一解.

(2) [作法] 連 AB, 從 A 作 AB 之垂線交兩圓於 C, D, 則 CD 卽爲所求之線.

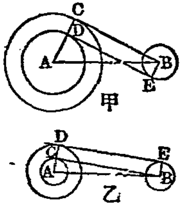
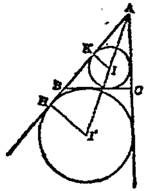


[證明] 設過 A 任作他割線 EF, 則 $CD>EF$. 何以言之, 蓋 $CD=2LM=2OO'$. 同理, $EF=2GA+2AH=2GH=2O'N$. 因 $O'N \perp OG$, 故在 $\triangle ONO'$ 中, $OO'>O'N$, 卽 $CD>EF$.

(3) [作法] 平分 OO' 於 E, 連 B, E, 過 B 引 BE 之垂線與兩圓交於 A, C, 則直線 ABC, 卽合所求.



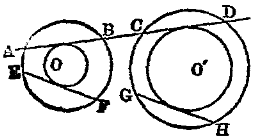
[證明] 從 O, O' 作弦 AB, BC 之垂線 OM, ON, 則因 E 爲 OO' 之中點, 且 $BE \perp AC$. $\therefore$ $OM \parallel BE \parallel O'N$ $\therefore$ $BM=BN$. 二倍之, $AB=BC$.

解　　　法	問　　　題
(問題 9)　試作已知二圓之公共切線.　(四川,初會) [解析]　A, B 爲二圓, DE 爲公共內切線(甲),或外切線(乙),自 B 引 DE 之平行線 BC, 交 AD 於 C, 則 $BCDE$ 爲矩形,而 $CD=BE$. $\therefore AC=AD+BE$ (甲),或 $AD-BE$ (乙),故可歸納於下之問題,從一點 B 作切線於以二圓半徑之和(甲),或差(乙),爲半徑之圓:  [作法]　以 A 爲中心,二圓半徑之和(甲),或差(乙),爲半徑,自 B 引此圓之切線,其切點爲 C, 連結 CA 交圓周於 D, 過 D 引 BC 之平行線可也. [證明]　從略. [討論]　一圓全在他圓之外,或外切,或相交,或內切,從而得四解,三解,二解,一解;若一圓全在他圓之內則無解.	(1)　試從二圓各引定長之弦. (2)　有任意二圓在一直線之同側,求於此線上一點畫二圓之切線,使其與此直線成等角.　(北平四中) (3)　已知周圍 l, 頂角 a, 內接圓之半徑 r, 求作三角形. 

作圖應用問題(其六)之解答

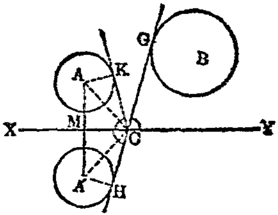
解　　答

(1) [作法] 於二圓 O, O', 引等於定長之弦 EF, GH, 以 O, O' 為中心與弦相切, 畫同心圓. 由是作二新圓之公共切線, 是即所求之直線, 故一般得引四個直線.



[證明] AB, CD 為一切線, 故 AB, EF 與圓心 O 之距離相等. $\therefore AB=EF$. 同樣, $CD=GH$, 故 AD 為所求之直線.

(2) [作法] 從圓心 A, 作 $AM \perp XM$, 延長之, 使 $A'M=AM$, 以 A' 為圓心, A 圓之半徑畫圓, 得 A 圓之對稱圖. 由是作兩圓 A' 及 B 之公共切線與 XY 交於 C, 則 C 即為所求之點.



因兩圓之公共切線一般有四個, 故本題一般有四解.

[證明] $\because AM=A'M, CM=CM$.

$\therefore \text{rt}\triangle ACM \equiv \text{rt}\triangle A'CM$.

$\therefore \angle ACM=\angle A'CM$.

從 C 作 A 圓之切線, 則因 $AC=A'C$, $AK=A'H$, 故直角三角形 ACK, $A'CH$ 全等, 而 $\angle ACK=\angle A'CH$. $\therefore \angle MCK=\angle MCH$. 但 $\angle MCH=\angle GCY$ (對頂角). $\therefore \angle XCK=\angle GCY$, 故 C 點合於所設條件.

(3) [解析] 設 $\triangle ABC$ 為所求之三角形, 其內心為 I, 傍心為 I', 從 I, I' 各作 AB 之垂線 IK, $I'H$, 則 $KI=r$,

$$AH=\tfrac{1}{2}(AB+BC+CA)=\tfrac{1}{2}l=\text{一定}.$$

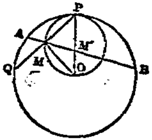
[作法] 作角 BAC, 使與 $\angle a$ 相等. 由前問1, 畫半徑 r 之圓與 AB, AC 相切, 其中心為 I, 在 AB 上取 AH 與 $\frac{1}{2}l$ 相等, 從 H 作 AB 之垂線與 AI 延長之交點為 I', 以 $I'H$ 為半徑畫圓 I', 引二圓 I, I' 之內公切線即得.

解法	問題

解法

(問題 10)　AB 為圓 O 之定弦, P 為 O 圓上之定點,求作一弦,使過 P, 而與 AB 相交於 M, 適被 AB 二等分.

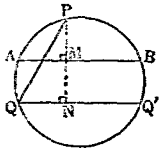
[解析]　設可作所求之弦 PQ, 則 $OM\perp PQ$. 由是知 M 在以 OP 為直徑之定圓周上,故得次之作圖法.



[作法]　連結 OP, 以 OP 為直徑畫圓,與 AB 交於 M, 延長 PM 與圓交於 Q, 則 PQ 為所求之弦.

[證明]　連結 OM, 則 $\angle OMP=90°$. ∴ $MP=MQ$, 故知 PQ 為所求之弦.

[討論]　如 OP 為直徑之圓與 AB 相交,則有二解,相切則有一解,否則無解.

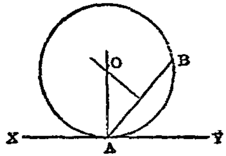


[別解]　自 P 點向定弦 AB 作垂線 PM, 並延長之,使 $MN=PM$, 過 N 作 AB 之平行線,交圓於 Q, 連 PQ 即得.

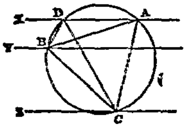
問題

(1)　求作一圓切於定直線上之定點,且過其他一定點.

(2)　已知頂角 a 及頂角之二等分線所分底邊二線分之長 l 及 m, 求作三角形.



(3)　求作一正三角形,使其三頂點,各在所設三平行線 X, Y, Z 上.



作圖應用問題(其七)之解答

解　　　　答

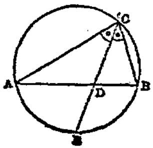
(1) [已知] 定直線 XY 及其上一點.

[求作] 一圓過 A 且與 XY 相切於 A.

[作法] 定直線 XY 上之定點為 A, 其他之定點為 B, 過 A 引 XY 之垂線與 AB 之垂直二等分線相交於 O, 以 O 為中心, OA 為半徑畫圓, 即為所求之圓.

[證明] 從略.

(2) [解析] 設已畫得所求之三角形 ABC, 其 $\angle c=\angle a$, $AD=l$, $DB=m$, 因 $\angle c$ 為一定, 故 c 在以 AB 為弦, 含 $\angle a$ 之弓形弧上. 又 CD 之延長必過共軛弧之中點 E, 故直線 DE 可決定而得作圖法.



[作法] $AB=l+m$ 為弦作一弓形弧, 使含一定角 a. 作 AB 之垂直平分線交劣弧 $\widehat{AB}$ 於中點 E, 連 DE, 且延長之再交圓於 C, 連 AC, BC 即得所求 $\triangle ABC$.

[證明] [討論] 均從略.

(3) [解析] 設可作正三角形 ABC, 畫三角形 ABC 之外接圓與 X 之交點為 D.

$\therefore\ \angle XDB=\angle BDC=\angle ADC=60^\circ$.

由是 DB, DC 為定方向之直線.

[作法] 於 X 上任取一點 D, 作 DB, DC, 使 $\angle XDB=\angle ADC=60^\circ$, 所作二線與 Y 及 Z 交於 B 及 C, 連 BC, 且作 $\triangle BDC$ 之外接圓, 交 X 於 A, 連 AC 即得 $\triangle ABC$.

[證明] 由作圖, 知 $\angle XDB=60^\circ$, $\angle ADC=60^\circ$

$\therefore\ \angle BDC=60^\circ$. 但 $\angle ADC=\angle ABC$.

$\therefore\ \angle ABC=60^\circ$, 又 $\angle BAC=\angle BDC=60^\circ$,

故 $\triangle ABC$ 為等角三角形, 即為等邊.

9