

## Analysis II

### Vorlesung 34

#### Stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen

Ein metrischer Raum ist dadurch ausgezeichnet, dass es in ihm eine Abstandsfunktion gibt, und dass dadurch zwei Punkte „näher“ zueinander liegen können als zwei andere Punkte. Bei einer Abbildung

$$f: L \longrightarrow M$$

zwischen zwei metrischen Räumen kann man sich fragen, inwiefern der Abstand im Werteraum  $M$  durch den Abstand im Definitionsraum  $L$  kontrollierbar ist. Sei  $x \in L$  und  $y = f(x)$  der Bildpunkt. Man möchte, dass für Punkte  $x' \in L$ , die „nahe“ an  $x$  sind, auch die Bildpunkte  $f(x')$  nahe an  $f(x)$  sind. Um diese intuitive Vorstellung zu präzisieren, sei ein  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Dieses  $\epsilon$  repräsentiert eine „gewünschte Zielgenauigkeit“. Die Frage ist dann, ob man ein  $\delta > 0$  finden kann (eine „Startgenauigkeit“) mit der Eigenschaft, dass für alle  $x'$  mit  $d(x, x') \leq \delta$  die Beziehung  $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$  gilt. Dies führt zum Begriff der stetigen Abbildung.

DEFINITION 34.1. Seien  $(L, d_1)$  und  $(M, d_2)$  metrische Räume,

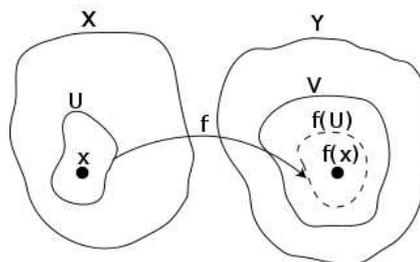
$$f: L \longrightarrow M$$

eine Abbildung und  $x \in L$ . Die Abbildung  $f$  heißt *stetig in  $x$* , wenn für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert derart, dass

$$f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon)$$

gilt. Die Abbildung  $f$  heißt *stetig*, wenn sie stetig in  $x$  für jedes  $x \in L$  ist.

Statt mit den abgeschlossenen Ballumgebungen könnte man hier genauso gut mit den offenen Ballumgebungen arbeiten. Die einfachsten Beispiele für stetige Abbildungen sind konstante Abbildungen, die Identität eines metrischen Raumes und die Inklusion  $T \subseteq M$  einer mit der induzierten Metrik versehenen Teilmenge eines metrischen Raumes. Siehe dazu die Aufgaben.



LEMMA 34.2. *Es sei*

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen  $L$  und  $M$  und sei  $x \in L$  ein Punkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1)  $f$  ist stetig im Punkt  $x$ .
- (2) Für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit der Eigenschaft, dass aus  $d(x, x') \leq \delta$  folgt, dass  $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$  ist.
- (3) Für jede konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ist auch die Bildfolge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent mit dem Grenzwert  $f(x)$ .

*Beweis.* Die Äquivalenz von (1) und (2) ist klar. Sei nun (2) erfüllt und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $L$ , die gegen  $x$  konvergiert. Wir müssen zeigen, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$  ist. Dazu sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Wegen (2) gibt es ein  $\delta$  mit der angegebenen Eigenschaft und wegen der Konvergenz von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$  gibt es eine natürliche Zahl  $n_0$  derart, dass für alle  $n \geq n_0$  gilt

$$d(x_n, x) \leq \delta.$$

Nach der Wahl von  $\delta$  ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0,$$

so dass die Bildfolge gegen  $f(x)$  konvergiert. Sei (3) erfüllt und  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Wir nehmen an, dass es für alle  $\delta > 0$  Elemente  $z \in L$  gibt, deren Abstand zu  $x$  maximal gleich  $\delta$  ist, deren Wert  $f(z)$  unter der Abbildung aber zu  $f(x)$  einen Abstand größer als  $\epsilon$  besitzt. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche  $\delta = 1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . D.h. für jede natürliche Zahl gibt es ein  $x_n \in L$  mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon.$$

Diese so konstruierte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $x$ , aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen  $f(x)$ , da der Abstand der Bildfolgenwerte zumindest  $\epsilon$  ist. Dies ist ein Widerspruch zu (3).  $\square$

SATZ 34.3. *Es sei*

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen  $L$  und  $M$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1)  $f$  ist stetig in jedem Punkt  $x \in L$ .
- (2) Für jeden Punkt  $x \in L$  und jedes  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit der Eigenschaft, dass aus  $d(x, x') \leq \delta$  folgt, dass  $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$  ist.
- (3) Für jeden Punkt  $x \in L$  und jede konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ist auch die Bildfolge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent mit dem Grenzwert  $f(x)$ .

(4) Für jede offene Menge  $V \subseteq M$  ist auch das Urbild  $f^{-1}(V)$  offen.

*Beweis.* Die Äquivalenz der ersten drei Formulierungen folgt direkt aus Lemma 34.2. Sei (1) erfüllt und eine offene Menge  $V \subseteq M$  gegeben mit dem Urbild  $U := f^{-1}(V)$ . Sei  $x \in U$  ein Punkt mit dem Bildpunkt  $y = f(x) \in V$ . Da  $V$  offen ist, gibt es nach Definition ein  $\epsilon > 0$  mit  $U(y, \epsilon) \subseteq V$ . Nach (2) gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $f(U(x, \delta)) \subseteq U(y, \epsilon)$ . Daher ist

$$x \in U(x, \delta) \subseteq U$$

und wir haben eine offene Ballumgebung von  $x$  innerhalb des Urbilds gefunden. Sei (4) erfüllt und  $x \in L$  mit  $y = f(x)$  und  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Da der offene Ball  $U(y, \epsilon)$  offen ist, ist wegen (4) auch das Urbild  $f^{-1}(U(y, \epsilon))$  offen. Da  $x$  zu dieser Menge gehört, gibt es ein  $\delta > 0$  mit

$$U(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U(y, \epsilon)),$$

so dass (1) erfüllt ist. □

LEMMA 34.4. Seien  $L, M, N$  metrische Räume und seien

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

stetige Abbildungen. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N, x \longmapsto g(f(x)),$$

stetig.

*Beweis.* Dies folgt am einfachsten aus der Charakterisierung von stetig mit offenen Mengen, siehe Satz 34.3. □

Bei einer bijektiven stetigen Abbildung zwischen metrischen Räumen ist die Umkehrfunktion nicht automatisch stetig, siehe Aufgabe 34.14 und Aufgabe 34.15.

DEFINITION 34.5. Zwei metrische Räume  $L$  und  $M$  heißen *homöomorph*, wenn es eine bijektive stetige Abbildung

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

gibt, deren Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$  ebenfalls stetig ist.

Eine solche Abbildung  $\varphi$  heißt *Homöomorphismus*.

## Verknüpfungen und stetige Abbildungen

LEMMA 34.6. Die Negation

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto -x,$$

und die Inversenbildung

$$\mathbb{K} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\}, x \longmapsto x^{-1},$$

sind stetig.

*Beweis.* Die erste Aussage folgt direkt aus

$$|-x - (-y)| = |-x + y|.$$

Zur zweiten Aussage sei  $x \neq 0$  und  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Sei  $b = |x| > 0$ . Wir setzen  $\delta = \min\left(\frac{b^2\epsilon}{2}, \frac{b}{2}\right)$ . Dann gilt für jedes  $y$  mit  $|x - y| \leq \delta$  die Abschätzung (wegen  $|y| \geq b/2$ )

$$|x^{-1} - y^{-1}| = \left| \frac{y - x}{xy} \right| \leq \frac{b^2\epsilon/2}{b^2/2} = \epsilon.$$

□

LEMMA 34.7. *Die Addition*

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und die Multiplikation

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

sind stetig.

*Beweis.* Siehe Aufgabe 34.6. □

LEMMA 34.8. *Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und seien Funktionen*

$$f_i: M \longrightarrow \mathbb{K}$$

(für  $i = 1, \dots, m$ ) gegeben mit der zusammengesetzten Abbildung

$$f: M \longrightarrow \mathbb{K}^m, x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

Dann ist  $f$  genau dann stetig, wenn alle Komponentenfunktionen  $f_i$  stetig sind.

*Beweis.* Es genügt, diese Aussage für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  zu zeigen. Dafür folgt sie direkt aus Lemma 33.13 unter Verwendung von Lemma 34.2. □

Die folgende Aussage ist eine Verallgemeinerung von Lemma 12.6.

LEMMA 34.9. *Sei  $M$  ein metrischer Raum und seien*

$$f, g: M \longrightarrow \mathbb{K}$$

stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g: M \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f(x) + g(x),$$

$$f - g: M \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f(x) - g(x),$$

$$f \cdot g: M \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f(x) \cdot g(x),$$

stetig. Für eine Teilmenge  $U \subseteq M$ , auf der  $g$  keine Nullstelle besitzt, ist auch die Funktion

$$f/g: U \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f(x)/g(x),$$

stetig.

*Beweis.* Wir betrachten Abbildungsdiagramme der Form

$$M \xrightarrow{f,g} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{+} \mathbb{K}.$$

Die Abbildung links ist stetig aufgrund von Lemma 34.8. Die rechte Abbildung ist stetig aufgrund von Lemma 34.7. Daher ist wegen Lemma 34.4 auch die Gesamtabbildung stetig. Die Gesamtabbildung ist aber die Addition der beiden Funktionen. Für die Multiplikation verläuft der Beweis gleich, für die Negation und die Division muss man zusätzlich Lemma 34.6 heranziehen und (für die Division) das Diagramm

$$U \xrightarrow{f,g^{-1}} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{K}$$

betrachten. □

**SATZ 34.10.** *Es sei  $\mathbb{K}^n$  mit der euklidischen Metrik versehen und sei*

$$\varphi: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

*eine lineare Abbildung. Dann ist  $\varphi$  stetig.*

*Beweis.* Eine komplex-lineare Abbildung ist auch reell-linear, und die euklidische Metrik hängt nur von der reellen Struktur ab. Wir können also  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  annehmen. Aufgrund von Lemma 34.8 können wir  $m = 1$  annehmen. Die Abbildung sei durch

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

mit  $a_i \in \mathbb{R}$  gegeben. Die Nullabbildung ist konstant und daher stetig, also sei  $a = \max(|a_i|, i = 1, \dots, n) > 0$ . Es sei  $x \in \mathbb{R}^n$  und ein  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Für alle  $y \in \mathbb{R}^n$  mit  $d(x, y) \leq \frac{\epsilon}{na}$  ist insbesondere  $|x_i - y_i| \leq \frac{\epsilon}{na}$  für alle  $i$  und daher ist

$$\begin{aligned} d(\varphi(x), \varphi(y)) &= \left| \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^n a_i y_i \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n a_i (x_i - y_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_i (x_i - y_i)| \\ &\leq na |x_i - y_i| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

## Polynomiale Funktionen

Wir haben schon Polynome in ein und in zwei Variablen (beispielsweise bei einfachen Differentialgleichungen) verwendet. Die folgende Definition verwendet Multiindex-Schreibweise, um Polynomfunktionen in beliebig (endlich) vielen Variablen einzuführen. Dabei steht ein Index  $\nu$  für ein Tupel

$$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$$

und für Variablen  $x_1, \dots, x_n$  verwendet man die Schreibweise

$$x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}.$$

DEFINITION 34.11. Eine Funktion

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n),$$

die man als eine Summe der Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n}$$

mit  $a_\nu \in \mathbb{K}$  schreiben kann, wobei nur endlich viele  $a_\nu \neq 0$  sind, heißt *polynomiale Funktion*.

Offenbar sind die Summe und die Produkte von polynomialen Funktionen wieder polynomial. Dies gilt auch, wenn man Polynome in andere Polynome einsetzt.

SATZ 34.12. *Eine polynomiale Funktion*

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

*ist stetig.*

*Beweis.* Die einzelnen Variablen  $x_i$  repräsentieren die  $i$ -te lineare Projektion

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow x_i.$$

Nach Satz 34.10 sind diese stetig. Aufgrund von Lemma 12.6 sind dann auch die monomialen Funktionen

$$x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n}: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

stetig und damit aus dem gleichen Grund überhaupt alle polynomialen Funktionen.  $\square$

## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Continuity topology.svg , Autor = Benutzer Dcoetzee auf Commons, Lizenz = PD

2