

Analysis II

Vorlesung 38

Die Mittelwertabschätzung für differenzierbare Kurven

SATZ 38.1. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum und*

$$f: [a, b] \longrightarrow V, t \longmapsto f(t),$$

eine differenzierbare Kurve. Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ mit

$$\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a) \cdot \|f'(c)\|.$$

Beweis. Wenn $f(a) = f(b)$ ist, so ist die Aussage trivialerweise richtig. Sei also $f(a) \neq f(b)$. Dann ist $u_1 = \frac{f(b) - f(a)}{\|f(b) - f(a)\|}$ nach dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren Teil einer Orthonormalbasis von V . Es seien f_1, \dots, f_n die Komponentenfunktionen von f bezüglich dieser Basis. Wir wenden den Mittelwertsatz für eine Variable auf die erste Komponentenfunktion f_1 an. Es gibt also ein $c \in]a, b[$ mit der Eigenschaft

$$f_1(b) - f_1(a) = (b - a) \cdot f_1'(c)$$

und damit auch

$$|f_1(b) - f_1(a)| = |b - a| \cdot |f_1'(c)|.$$

Da man die Längenmessung mit jeder Orthonormalbasis durchführen kann, gilt

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\| &= \|(f_1(b) - f_1(a))u_1\| \\ &= |f_1(b) - f_1(a)| \\ &= |b - a| \cdot |f_1'(c)| \\ &\leq |b - a| \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i'(c))^2} \\ &= |b - a| \cdot \|f'(c)\|. \end{aligned}$$

□

BEISPIEL 38.2. Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung* des *Einheitskreises*, also die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos t, \sin t).$$

Diese Abbildung ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Die Norm dieser Ableitung ist zu jedem Zeitpunkt gleich

$$\|f'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1.$$

Wählen wir das Intervall $[0, 2\pi]$, so ist

$$f(0) = (1, 0) = f(2\pi).$$

Dies bedeutet, dass in der Mittelwertabschätzung nicht Gleichheit gelten kann.

Länge von Kurven

Wir arbeiten im \mathbb{R}^n , versehen mit der euklidischen Metrik. Zu einer Kurve

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto f(t),$$

die wir uns als einen von der Zeit abhängigen Bewegungsvorgang im Raum vorstellen, wollen wir die Länge der Kurve definieren. Die Länge soll dabei den insgesamt zurückgelegten Weg beschreiben, nicht die Länge der zurückgelassenen Spur oder den Abstand von Start- und Zielpunkt.

DEFINITION 38.3. Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Zu einer Unterteilung

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_k = b$$

nennt man

$$[P_0, P_1, \dots, P_k] = [f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_k)]$$

den zugehörigen *Streckenzug*.

Dabei sollte man sich die Unterteilung als eine Zeiteinteilung vorstellen und die Punkte $P_i = f(t_i)$ als die zugehörigen Ortspunkte der durch f beschriebenen Bewegung im \mathbb{R}^n . Strenggenommen ist der Streckenzug einfach die geordnete Folge der Punkte, es ist aber suggestiver, sich darunter die stückweise lineare Verbindung dieser Punkte vorzustellen.

DEFINITION 38.4. Zu einer Punktfolge

$$P_0, P_1, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$$

nennt man

$$\sum_{i=1}^k d(P_i, P_{i-1})$$

die *Gesamtlänge* des *Streckenzugs* $[P_0, P_1, \dots, P_k]$.

DEFINITION 38.5. Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Dann nennt man

$$L(f) = \sup (L(f(t_0), \dots, f(t_k)), a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_k = b) \\ \text{Unterteilung, } k \in \mathbb{N}$$

die *Kurvenlänge* von f . Wenn $L(f)$ endlich ist, so heißt die Kurve f *rektifizierbar*.

Man nimmt hier also das Supremum über alle möglichen Unterteilungen des Definitionsintervalls. Ohne zusätzliche Eigenschaften der Kurve kann man nicht erwarten, dass man die Kurvenlänge effektiv bestimmen kann. Wenn die Kurve aber stetig differenzierbar ist, so lässt sich die Länge über ein Integral berechnen, wie die folgende Aussage zeigt. Inhaltlich gesprochen bedeutet sie, dass wenn sich beispielsweise ein Fahrzeug in der Ebene \mathbb{R}^2 bewegt, man die Gesamtlänge der zurückgelegten Strecke kennt, sobald man nur zu jedem Zeitpunkt die momentane Geschwindigkeit (und zwar lediglich ihre Norm, die Richtung muss man nicht kennen) kennt. Die Länge ist dann das Integral über die Norm der Geschwindigkeit.

SATZ 38.6. *Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und*

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann ist f rektifizierbar und für die Kurvenlänge gilt

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Beweis. Da die Norm stetig ist, existiert nach Satz 24.3 das rechte Integral, und zwar ist es gleich dem Infimum über alle Treppenfunktionen der Funktion $t \mapsto \|f'(t)\|$. Diese Treppenfunktionen werden zu einer Unterteilung $a = t_0 \leq \dots \leq t_k = b$ durch $\sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1})w_i$ mit $w_i = \sup(\|f'(t)\|, t_{i-1} \leq t \leq t_i)$ gegeben. Andererseits steht nach der Definition der Kurvenlänge links das Supremum über die zu einer solchen Unterteilung gehörigen Summen

$$\sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|.$$

Aufgrund der Mittelwertabschätzung gilt

$$\|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \leq (t_i - t_{i-1}) \cdot \sup(\|f'(t)\|, t_{i-1} \leq t \leq t_i).$$

Durch Aufsummieren ergibt sich daher die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) \cdot \sup(\|f'(t)\|, t_{i-1} \leq t \leq t_i).$$

Hierbei müssen wir links das Supremum und rechts das Infimum über alle Unterteilungen nehmen. Nehmen wir an, dass das Supremum u der linken Seite größer als das Infimum v der rechten Seite ist. Dann gibt es eine Unterteilung derart, dass die Längensumme links zu dieser Unterteilung mindestens gleich $u - \frac{1}{3}(u - v)$, und eine Unterteilung derart, dass das Treppenintegral rechts höchstens gleich $v + \frac{1}{3}(u - v)$ ist. Wir können zur gemeinsamen Verfeinerung übergehen und annehmen, dass es sich um die gleiche Unterteilung handelt, und erhalten einen Widerspruch. Das Supremum der linken Seite ist also durch das Infimum der rechten Seite beschränkt. D.h. die Kurve ist rektifizierbar und es gilt

$$L(f) \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt \leq (b - a) \cdot \sup(\|f'(t)\|, t \in [a, b]).$$

Diese Beziehung gilt auch für jedes beliebige Teilintervall $[s, s'] \subseteq [a, b]$. Es sei $L_a^s(f)$ die Länge der auf $[a, s]$ definierten Kurve. Es genügt dann zu zeigen, dass diese Funktion (ableitbar und) eine Stammfunktion zu $t \mapsto \|f'(t)\|$ ist. Für den zugehörigen Differenzenquotienten $\frac{L_a^{s'}(f) - L_a^s(f)}{s' - s} = \frac{L_s^{s'}(f)}{s' - s}$ in einem Punkt $s \in [a, b]$ gelten die Abschätzungen ($s' > s$)

$$\begin{aligned} \frac{\|f(s') - f(s)\|}{s' - s} &\leq \frac{L_s^{s'}(f)}{s' - s} \\ &\leq \frac{(s' - s) \cdot \sup(\|f'(t)\|, t \in [s, s'])}{s' - s} \\ &= \sup(\|f'(t)\|, t \in [s, s']). \end{aligned}$$

Für $s' \rightarrow s$ konvergieren die beiden äußeren Seiten gegen $\|f'(s)\|$, so dass auch der Differenzenquotient dagegen konvergieren muss. \square

Die Rektifizierbarkeit ist schon in einer Variablen ein interessanter Begriff. Es lässt sich sogar die Rektifizierbarkeit darauf zurückführen. Dies bedeutet aber nicht, dass man die Berechnung der Kurvenlänge auf die Berechnung der Kurvenlängen der einzelnen Komponenten zurückführen könnte.

LEMMA 38.7. *Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und*

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Dann ist f genau dann rektifizierbar, wenn sämtliche Komponentenfunktionen rektifizierbar sind.

Beweis. Siehe Aufgabe 38.12. \square

BEISPIEL 38.8. Die Rektifizierbarkeit ist schon für Funktionen

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(t),$$

ein nicht-trivialer Begriff, siehe Beispiel 38.9. Wenn allerdings f wachsend (oder fallend) ist, so lässt sich die Länge einfach ausrechnen. Zu einer beliebigen Unterteilung $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = b$ ist dann nämlich

$$\sum_{i=1}^k |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^k (f(t_i) - f(t_{i-1})) = f(b) - f(a),$$

d.h. die Länge ist einfach die Differenz der Werte an den Randpunkten des Intervalls. Insbesondere existiert die Länge, d.h. monotone Funktionen sind rektifizierbar. Wenn f wachsend ist und stetig differenzierbar, so ergibt sich dies natürlich auch aus Satz 38.6 und aus Korollar 24.7. Wenn f allerdings nicht monoton ist, so müssen bei der Längenberechnung auch die Richtungsänderungen mitberücksichtigt werden. Für das Integral $\int_a^b |f'(t)| dt$ gibt es keine direkte Berechnung, da dann $f'(t)$ das Vorzeichen ändert. Man kann aber das Intervall in (eventuell unendlich viele) Abschnitte unterteilen, wo die Funktion wachsend oder fallend, bzw. wo die Ableitung positiv oder negativ ist, und dann abschnittsweise die Länge berechnen.

BEISPIEL 38.9. Die Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{bei } x > 0, \\ 0 & \text{bei } x = 0, \end{cases}$$

ist stetig, aber nicht rektifizierbar. Für jedes $x_n = \frac{1}{n\pi + \frac{1}{2}\pi}$ ist $f(x_n) = \pm x_n$, wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob n gerade oder ungerade ist. Für jedes n ist daher $|f(x_n) - f(x_{n-1})| \geq 2x_n$. Wählt man dann die Unterteilungspunkte

$$0 < x_k < x_{k-1} < \dots < x_1 < x_0 = \frac{2}{\pi} < 1,$$

so ist die Länge des zugehörigen Streckenzugs mindestens gleich

$$\sum_{n=1}^k 2x_n = 2 \cdot \sum_{n=1}^k \frac{1}{n\pi + \frac{1}{2}\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^k \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \geq \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^k \frac{1}{n + 1}.$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe ist dieser Ausdruck für $k \rightarrow \infty$ nicht beschränkt. Daher kann das Supremum über alle Streckenzüge nicht existieren und die Kurve ist nicht rektifizierbar.

KOROLLAR 38.10. *Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und es sei*

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist die Länge des Graphen von f gleich

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Beweis. Mit der Länge des Graphen ist die Länge der durch $x \mapsto g(x) = (x, f(x))$ definierten Kurve gemeint. Die Ableitung dieser Kurve ist $g'(x) = (1, f'(x))$. Daher ist die Länge dieser Kurve nach Satz 38.6 gleich

$$L = \int_a^b \|g'(x)\| dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dt.$$

□

BEISPIEL 38.11. Wir wollen die Länge der *Standardparabel* berechnen, also die Länge der durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t, t^2)$$

gegebenen Kurve. Nach Korollar 38.10 ist die Länge von 0 nach b gleich

$$\begin{aligned} \int_0^b \sqrt{1 + 4x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2b} \sqrt{1 + u^2} du \\ &= \frac{1}{4} \left(u\sqrt{1 + u^2} + \operatorname{arsinh} u \right) \Big|_0^{2b} \\ &= \frac{1}{2} b\sqrt{1 + 4b^2} + \frac{1}{4} \operatorname{arsinh}(2b). \end{aligned}$$

Wir berechnen nun die Länge des Kreisbogens auf zwei verschiedene Arten.

BEISPIEL 38.12. Wir betrachten die Funktion

$$f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

die die obere Kreislinie des Einheitskreises beschreibt. Wir wollen die Länge dieses Graphen bestimmen. Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

wobei diese Gleichheit nur im Innern $] - 1, 1[$ Sinn ergibt, in den Randpunkten ist die Funktion nicht differenzierbar. Dennoch kann man hier Satz 38.6 zunächst im Innern anwenden und anschließend einen Grenzübergang durchführen. Es geht somit um das Integral von

$$\sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} = \sqrt{\frac{1 - x^2 + x^2}{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Die Stammfunktion davon ist $\arcsin x$. Daher ist

$$L = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

BEISPIEL 38.13. Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises*, also die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto f(t) = (\cos t, \sin t).$$

Die Ableitung davon ist

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Daher ist die Kurvenlänge eines von a bis b durchlaufenen Teilstückes nach Satz 38.6 gleich

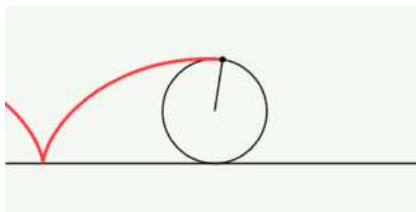
$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_a^b 1 dt = b - a.$$

Aufgrund der Periodizität der trigonometrischen Funktionen wird der Einheitskreis von 0 bis 2π genau einmal durchlaufen. Die Länge des Kreisbogens ist daher 2π .

BEISPIEL 38.14. Es sei ein Punkt V auf der Peripherie eines Kreises mit Radius 1 Einheitskreises fixiert (beispielsweise ein Ventil). Die *Zykloide* ist diejenige Kurve, die der Punkt beschreibt, wenn der Kreis sich gleichmäßig auf einer Geraden (der x -Achse) abrollt, wie wenn ein Rad auf der Straße fährt. Wenn t den Winkel bzw. die abgerollte Strecke repräsentiert, und der Punkt V sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in $(0, 0)$ befindet, so wird die Bewegung des Ventils durch

$$W: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto W(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

beschrieben.



Nach einer Volldrehung befindet sich das Ventil wieder in seiner Ausgangsposition am Rad, aber verschoben um 2π . Die Ableitung dieser Kurve ist

$$W'(t) = (1 - \cos t, \sin t).$$

Die Länge der Zykloide (also die Länge des vom Ventil beschriebenen Weges) ist nach Satz 38.6 im Zeitintervall von 0 nach s gleich

$$\begin{aligned} \int_0^s \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt &= \int_0^s \sqrt{2 - 2 \cos t} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^s \sqrt{1 - \cos t} dt \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{s}{2}} \sqrt{1 - \cos 2u} du \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{s}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 u + \sin^2 u} du \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{s}{2}} \sqrt{2 \sin^2 u} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 4 \int_0^{\frac{s}{2}} \sqrt{\sin^2 u} \, du \\ &= 4 \int_0^{\frac{s}{2}} |\sin u| \, du \\ &= 4 \int_0^{\frac{s}{2}} \sin u \, du, \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Umformung für $s \leq 2\pi$ gilt. Für $s = 2\pi$ ist dies $4 \cdot 2 = 8$.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Cycloid f.gif , Autor = Benutzer Zorgit auf Commons, Lizenz
= CC-by-sa 3.0

7