Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 26

Wir fragen uns, ob es auf einem endlichen topologischen Raum, also einem Raum mit nur endlich vielen Punkten, nichttriviale Kohomomologie geben kann. Wenn der Raum diskret ist, also jeder Punkt offen und abgeschlossen ist, so kann es das nicht geben, da dann jede Garbe welk ist. Auch auf dem Spektrum eines diskreten Bewertungsringes (generell auf einem lokalen Raum, wie dem Spektrum eines lokalen Ringes) kann es keine nichttriviale Kohomologie geben. Aber schon in einem dreielementigen Raum tritt Kohomologie auf, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 26.1. Wir betrachten den topologischen Raum $X = \{a, b, c\}$ mit den offenen Mengen $\emptyset, X, U = \{a, c\}, V = \{b, c\}, U \cap V = \{c\}$. Dieser Raum besitzt die beiden abgeschlossenen Punkte a und b, er ist irreduzibel und c ist der generische Punkt. Abgesehen von der leeren Menge bilden die offenen Mengen das Inklusionsdiagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & U \\ \uparrow & & \uparrow \\ V & \longleftarrow & U \cap V \,. \end{array}$$

Eine Garbe von kommutativen Gruppen auf X ist gegeben, wenn man diesen Teilmengen Gruppen und Restriktionshomomorphismen zuweist (und die Verträglichkeitsbedingung überprüft). Wir betrachten die Garbe $\mathcal{F}$, die durch

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array}$$

gegeben ist. Diese kann man in die konstante Garbe $\mathcal{F}$ (mit Identitäten)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array}$$

einbetten. Die Quotientengarbe $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ ist durch

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \xrightarrow{p_2} & \mathbb{Z} \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

gegeben. Die Werte für $U \cap V, U, V$ ergeben sich direkt durch Restklassenbildung, die Vergarbung hat keinen Effekt, und für X ergibt sich das Produkt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, da die Schnitte über U und V automatisch verträglich sind. Somit ist die globale Abbildung

$$\Gamma(X, \mathcal{G}) = \mathbb{Z} \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}/\mathcal{F}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

nicht surjektiv, die lange exakte Kohomologiesequenz ist vielmehr

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \stackrel{\delta}{\longrightarrow} H^1(X, \mathcal{F}) = \mathbb{Z} \longrightarrow 0\,.$$

Hierbei geht vorne $n \mapsto (n,n)$ und hinten $(r,s) \mapsto (r-s)$ (das folgt aus der Exaktheit).

Eine wichtige Frage ist umgekeht, ob man die Kohomologie eines komplizierten topologischen Raumes durch endliche Daten erfassen und berechnen kann. In der Tat ist dies in vielen Situationen über die ?ech-Kohomologie möglich, die Bezug nimmt auf eine endliche offene Überdeckung einschließlich der zugehörigen Durchschnitte.

Beispiel 26.2. Wir knüpfen an Bemerkung 20.2 an, es sei also $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und wir interessieren uns für die invertierbaren Garben auf X, und zwar für solche, die bezüglich einer fixierten offenen Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ Trivialisierungen besitzen. Diese invertierbaren Garben entsprechen den Datensätzen

$$\left(U_i,\, r_{ij} \in \Gamma\big(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^\times\big) \text{ mit } r_{kj} \cdot r_{ki}^{-1} \cdot r_{ji} = 1 \text{ in } \Gamma\big(U_i \cap U_j \cap U_k, \mathcal{O}_X^\times\big)\right),$$

wobei allerdings ein solcher Datensatz als trivial anzusehen ist, wenn es Elemente $s_i \in \Gamma\big(U_i, \mathcal{O}_X^\times\big)$ mit $s_i \cdot s_j^{-1} = r_{ij}$ für alle i,j gibt. Diese Situation kann man insgesamt durch den Komplex

$$\prod_{i \in I} \Gamma\big(U_i, \mathcal{O}_X^\times\big) \longrightarrow \prod_{i<j} \Gamma\big(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^\times\big) \longrightarrow \prod_{i<j<k} \Gamma\big(U_i \cap U_j \cap U_k, \mathcal{O}_X^\times\big)$$

ausdrücken, wozu man auf I eine totale Ordnung einführt und die vordere Abbildung durch

$$(s_i) \longmapsto (s_j s_i^{-1})_{i<j}$$

und die hintere Abbildung durch

$$(r_{ij}) \longmapsto (r_{jk} r_{ik}^{-1} r_{ij})$$

gegeben ist. Ein Element in der Mitte gehört genau dann zum Kern der hinteren Abbildung, wenn es die Kozykelbedingung erfüllt, und es gehört genau dann zum Bild der vorderen Abbildung, wenn es die triviale invertierbare Garbe repräsentiert.

?ech-Kohomologie

Es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes X. Für eine Teilmenge $J \subseteq I$ setzen wir $U_J := \bigcap_{i \in J} U_i$. Für $J \subseteq L \subseteq I$ ist $U_L \subseteq U_J$. Für eine Garbe $\mathcal{G}$ von kommutativen Gruppen auf X betrachtet man die Auswertungen $\mathcal{G}(U_J)$ zu den verschiedenen J, und zu $J \subseteq L$ gehören die Restriktionen $\mathcal{G}(U_J) \to \mathcal{G}(U_L)$. Für ein Element $s \in \mathcal{G}(U_J)$ schreiben wir dann abkürzend

$$s|_L = s|_{U_L}$$

und oft häufig einfach s. Wir fixieren eine Wohlordnung auf I (man braucht hauptsächlich den Fall für endliches I). Damit können wir nun den ?ech-Komplex und die ?ech-Kohomologie definieren, die ein wichtiges Werkzeug zur Berechnung von Garbenkohomologien ist.

Definition 26.3. Es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes X und $\mathcal{G}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf X. Zu $k \in \mathbb{N}$ setzt man

$$\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \prod_{\{J \mid \#(J) = k+1\}} \mathcal{G}(U_J)$$

und definiert Gruppenhomomorphismen

$$\delta_k \colon \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \longrightarrow \check{C}^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}),\ s = (s_J)_J \longmapsto \delta_k(s) = (\delta_k(s)_L)_L,$$

durch

$$(\delta_k(s))_L = \sum_{\ell=0}^{k+1} (-1)^\ell s|_{L \setminus \{i_\ell\}},$$

wobei man $L = \{i_0, i_1, \ldots, i_{k+1}\}$ gemäß der Ordnung auf I schreibt. Der Komplex

$$\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \left(\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G}), k \geq 0,\ \delta_k\right)$$

heißt *?ech-Komplex* (zur Garbe $\mathcal{G}$ und zur Überdeckung).

Bei $k = 0$ ist

$$\check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \prod_{i \in I} \mathcal{G}(U_i)$$

und bei $k = \#(I)$ ist

$$\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \mathcal{G}\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right).$$

Wenn $k > \#(I)$ ist, so ist die Indexmenge zu $\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ leer und dieser Term ist einfach 0. Ebenso setzt man für negatives k den Komplex gleich 0. Bei einer Überdeckung aus zwei offenen Mengen U und V ist der Komplex gleich

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{G}) \times \Gamma(V, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U \cap V, \mathcal{G}) \longrightarrow 0$$

und bei einer Überdeckung aus drei offenen Mengen U, V und W ist der Komplex gleich

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{G}) \times \Gamma(V, \mathcal{G}) \times \Gamma(W, \mathcal{G}) \longrightarrow \\ \Gamma(V \cap W, \mathcal{G}) \times \Gamma(U \cap W, \mathcal{G}) \times \Gamma(U \cap V, \mathcal{G}) \longrightarrow \\ \Gamma(U \cap V \cap W, \mathcal{G}) \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Zum Verständnis der Homomorphismen ist es schon in diesen Fällen sinnvoll, mit den durchnummerierten Bezeichnungen U_1, U_2, U_3 zu arbeiten.

Lemma 26.4. *Der Čech-Komplex ist in der Tat ein Komplex.*

Beweis. Es sei $(s_J)_J \in \check{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{G})$ ein Tupel. Dann ist für die fixierte Indexmenge $L = \{i_0, i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, i_{k+2}\}$

$$\begin{aligned}
(\delta(\delta s))_L &= \sum_{p=0}^{k+2} (-1)^p (\delta s)|_{L\setminus\{i_p\}} \\
&= \sum_{p=0}^{k+2} (-1)^p \left(\sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q s|_{(L\setminus\{i_p\})\setminus\{i_q\}} + \sum_{q=p+1}^{k+1} (-1)^{q+1} s|_{(L\setminus\{i_p\})\setminus\{i_q\}} \right) \\
&= \sum_{\{i_p,i_q\}\subseteq J} (-1)^{p+q} \big(s|_{L\setminus\{i_p,i_q\}} - s|_{L\setminus\{i_p,i_q\}} \big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass das Vorzeichen in der Klammer von der Position von i_q in $L \setminus \{i_p\}$ abhängt. $\square$

Definition 26.5. Es sei $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes X und $\mathcal{G}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf X. Zu $k \in \mathbb{N}$ definiert man die k-te *Čech-Kohomologie* $\check{H}^k(\mathcal{U},\mathcal{G})$ als die k-te Homologie des Čech-Komplexes $\check{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{G})$.

Wie bei jeder Homologie zu einem Komplex geht es also um die Restklassengruppe aus dem Kern modulo dem Bild an einer jeden Stelle des Komplexes. Die Elemente des k-ten Kernes nennt man auch *Čech-Kozykel*, die Elemente des k-ten Bildes auch *Čech-Koränder*. Das zu einem Čech-Kozykel gehörige Element in der k-ten Čech-Kohomologie nennt man auch *Čech-Kohomologieklasse*. Die nullte Čech-Kohomologiegruppe ist einfach gleich $\mathcal{G}(X)$, wie direkt aus der Garbeneigenschaft folgt, siehe Aufgabe 26.2.

Beispiel 26.6. Wir betrachten auf dem Kreis die Überdeckung mit zwei offenen (zu reellen Intervallen homöomorphen) Kreissegmenten

$$S^1 = U \cup V,$$

deren Durchschnitt

$$U \cap V = S \cup T$$

die Vereinigung von zwei Intervallen ist. Wir betrachten verschiedene Garben von kommutativen Gruppen, die wir multiplikativ schreiben. Es sei h die auf $U \cap V$ definierte Funktion, die durch den konstanten Wert 1 auf S und den Wert -1 auf T gegeben ist. Dies ist ein nichttrivialer Čech-Kozykel für die Garbe der lokal konstanten Funktionen mit Werten in der Einheitengruppe $K^\times$ zu einem Körper K und ebenso in der Garbe der stetigen Funktionen mit Werten in $\mathbb{K}^\times$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist. Ob dieser Kozykel eine nichttriviale Čech-Kohomologieklasse in $\check{H}^1(\{U,V\},\mathcal{G})$ definiert ist äquivalent dazu, ob es (lokal konstante, stetige) Funktionen $f\colon U \to K^\times$und $g\colon V \to K^\times$ mit $h = fg^{-1}$ gibt. Im lokal konstanten Fall ist dies nicht möglich, da lokal konstante Funktionen auf den zusammenhängenden Segmenten U bzw. V konstant sind und daher auch fg^{-1} konstant ist, also $\neq h$. Bei der Garbe der stetigen reellwertigen nullstellenfreien Funktionen ist es ebenfalls nicht möglich. In diesem Fall haben f und g konstantes Vorzeichen und somit stimmt fg^{-1} nur auf genau einem Intervall des Durchschnittes mit h überein. Die zugehörige nichttriviale erste Čech-Kohomologieklasse

$$[h] \in \check{H}^1(\{U, V\}, C^0(-, \mathbb{R}^\times))$$

repräsentiert das Möbiusband über dem Einheitskreis. Im komplexen Fall ist es hingegen möglich, h als einen Quotienten von zwei nullstellenfreien komplexwertigen stetigen Funktionen zu schreiben, man kann $g = 1$ und für f eine Funktion nehmen, die auf S die konstante 1-Funktion und auf T die konstante -1-Funktion und dazwischen, also auf $U \setminus \{S \cup T\}$, die Werte stetig entlang des komplexen Einheitskreises wählt.

Beispiel 26.7. Für einen kommutativen Ring und Elemente $f_1, \ldots, f_n \in R$, die das Ideal $\mathfrak{a}$ erzeugen, hat man eine offene Überdeckung $D(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$ des quasiaffinen Schemas $D(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spek}(R)$. Zu einem R-Modul M kann man den Čech-Komplex zur Modulgarbe $\widetilde{M}$ auf $D(\mathfrak{a})$ direkt hinschreiben, ohne dass man den Vergarbungsprozess beachten muss. Für die relevanten offenen Mengen ist ja

$$\Gamma\left(D(\prod_{i \in J} f_i), \widetilde{M})\right) = M_{\prod_{i \in J} f_i}$$

wegen Lemma 14.5. Der Čech-Komplex ist somit gleich

$$0 \longrightarrow \prod_{1 \leq i \leq n} M_{f_i} \longrightarrow \prod_{1 \leq i < j \leq n} M_{f_i f_j} \longrightarrow \prod_{1 \leq i < j < k \leq n} M_{f_i f_j f_k} \longrightarrow \ldots .$$

Die Berechnung der Homologien dieses Komplexes ist im Allgemeinen immer noch schwierig, aber allein ein Problem der kommutativen Algebra.

Čech-Kohomologie und Garbenkohomologie

Wir besprechen nun Situationen, in denen die Čech-Kohomologie für gewisse Überdeckungen mit der „richtigen" über injektive Auflösungen definierten Garbenkohomologie übereinstimmt.

Lemma 26.8. *Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum X und es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung mit $H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$ und $H^1(U_i \cap U_j, \mathcal{F}) = 0$ für alle i, j. Dann ist*

$$\check{H}^1(U_i, \mathcal{F}) = H^1(X, \mathcal{F}).$$

Beweis. Es sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ eine Einbettung in eine injektive Garbe und

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

die zugehörige kurze exakte Garbensequenz. Aufgrund der langen exakten Kohomologiesequenz (siehe Korollar 25.2 (3)) und wegen Satz 24.8 ist

$$H^1(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{H}) / \operatorname{bild}(\Gamma(X, \mathcal{I}) \to \Gamma(X, \mathcal{H})).$$

Wir definieren zuerst einen Homomorphismus

$$\Gamma(X, \mathcal{H}) \longrightarrow \check{H}^1(U_i, \mathcal{F}).$$

Ein Schnitt $t \in \Gamma(X, \mathcal{H})$ legt Restriktionen $t_i = t|_{U_i}$ fest. Da $\mathcal{F}$ auf den U_i keine Kohomologie besitzt, gibt es

$$s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{I}),$$

die auf die t_i abbilden. Die Elemente (zu $i < j$)

$$r_{ij} := s_i - s_j$$

werden auf 0 in $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{H})$ abgebildet, daher ist

$$r_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F}).$$

Für Indizes $i < j < k$ ist

$$r_{ij} - r_{ik} + r_{jk} = s_i - s_j - (s_i - s_k) + s_j - s_k = 0,$$

deshalb ist die Kozykelbedingung erfüllt. Somit ist die Familie $(r_{ij})_{i<j}$ ein $\check{C}$ech-Kozykel und definiert ein Element in $\check{H}^1(U_i, \mathcal{F})$. Diese Zuordnung ist unabhängig von den gewählten s_i und ein Gruppenhomomorphismus, siehe Aufgabe 26.5. Sei nun $t \in \Gamma(X, \mathcal{H})$ das Bild eines globalen Elementes $s \in \Gamma(X, \mathcal{I})$. Dann kann man die s_i als $s|_{U_i}$ ansetzen und daher sind die zu t konstruierten r_{ij} alle gleich 0. Ein solches Element t wird also unter der angegebenen Abbildung auf 0 abgebildet. Dies ergibt nach Satz 47.1 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) eine Faktorisierung

$$H^1(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{H}) / \operatorname{bild}(\Gamma(X, \mathcal{I}) \to \Gamma(X, \mathcal{I})) \longrightarrow \check{H}^1(U_i, \mathcal{F}).$$

Sei nun umgekehrt ein erster $\check{C}$ech-Kozykel von $\mathcal{F}$ gegeben, sagen wir

$$(r_{ij})_{i<j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F})$$

mit $r_{ij} - r_{ik} + r_{jk} = 0$ repräsentiert sei. Wir fassen die r_{ij} in $\mathcal{I}$ auf, und zwar als globale Elemente, was aufgrund der Welkheit von injektiven Garben möglich ist. Wir definieren

$$s_i := r_{i1}$$

(mit $s_1 = 0$) und fassen diese als Elemente in $\Gamma(U_i, \mathcal{I})$ auf. Diese Schnitte erfüllen $s_i - s_j = r_{i1} - r_{j1} = r_{ij}$. Diese Elemente s_i definieren Elemente

$$t_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{H}).$$

Da ihre Differenzen von $\mathcal{F}$ herrühren, sind sie verträglich und definieren ein globales Element

$$t \in \Gamma(X, \mathcal{H}).$$

Dies definiert über den verbindenden Homomorphismus δ die Kohomologieklasse

$$\delta(t) \in H^1(X, \mathcal{F}).$$

Wenn der Čech-Kozykel r_{ij} durch andere Elemente $s'_i \in \Gamma(X, \mathcal{I})$ repräsentiert werden, so sind die Elemente $s_i - s'_i$, $i \in I$, wegen

$$(s_i - s'_i) - (s_j - s'_j) = s_i - s_j - (s'_i - s'_j) = r_{ij} - r_{ij} = 0$$

verträglich und definieren ein globales Element in $\Gamma(X, \mathcal{I})$. Daher geht die Differenz der beiden Repräsentierungen in $H^1(X, \mathcal{F})$ auf 0. Insgesamt liegt daher eine wohldefinierte Abbildung

$$\check{C} - \text{Kozykel}^1(U_i, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{H}) / \operatorname{bild}(\Gamma(X, \mathcal{I}) \to \Gamma(X, \mathcal{H}))$$

vor. Es sei nun der Čech-Kozykel so, dass er die Nullklasse in der ersten Čech-Kohomologie definiert. Dann gibt es nach Definition Elemente $r_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$ mit

$$r_i - r_j = r_{ij}.$$

Wir fassen diese Elemente wieder als globale Elemente in $\mathcal{I}$ auf und die r_i können direkt die Rolle der s_i von oben übernehmen. Dann sind die t_i alle gleich 0 und damit ist das Bild in $H^1(X, \mathcal{F})$ ebenfalls gleich 0. Somit hat man eine Abbildung

$$\check{H}^1(U_i, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}).$$

Diese ist ein Gruppenhomomorphismus und invers zu der zuvor konstruierten Abbildung. □

Lemma 26.9. *Es sei $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum X und es sei eine azyklische Auflösung $\mathcal{Z}^\bullet$ von $\mathcal{F}$ mit zugehörigen kurzen exakten Sequenzen*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_n \longrightarrow \mathcal{Z}_n \longrightarrow \mathcal{F}_{n+1} \longrightarrow 0$$

gegeben. Es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung mit $H^k(\bigcap_{i \in J} U_i, \mathcal{F}_n) = 0$ für alle nichtleeren Teilmengen $J \subseteq I$ und alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_+$. Dann ist

$$\check{H}^k(U_i, \mathcal{F}) = H^k(X, \mathcal{F}).$$

Beweis. Wir führen Induktion über k (für alle n gleichzeitig), der Fall $k = 1$ wurde in Lemma 26.8 behandelt, die Argumentation orientiert sich an diesem Satz. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{Z}_0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 = \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

und die Isomorphismen

$$H^k(X, \mathcal{F}) = H^{k-1}(X, \mathcal{H}) = \check{H}^{k-1}(U_i, \mathcal{H}),$$

wobei der linke Isomorphismus durch den verbindenden Homomorphismus und die Azyklizität von $\mathcal{Z}_0$ und der rechte Isomorphismus auf der Induktionsvoraussetzung, angewendet auf $\mathcal{H}$, beruht. Wir müssen also noch zeigen, dass es einen Isomorphismus

$$\check{H}^{k-1}(U_i, \mathcal{H}) \,=\, \check{H}^k(U_i, \mathcal{F})$$

gibt. Eine Klasse links wird durch ein Tupel

$$(t_J) \,\in\, \prod_{\#(J)=k} \Gamma(U_J, \mathcal{H})$$

mit der Bedingung

$$\sum_{\ell=0}^{k+1} (-1)^i t_{L\setminus\{i_\ell\}} \,=\, 0$$

für alle $k+1$-elementigen Teilmengen $L \subseteq I$ repräsentiert. Wegen der Azyklizität der Überdeckung für $\mathcal{F}$ gibt es ein Tupel

$$(s_J) \,\in\, \prod_{\#(J)=n} \Gamma(U_J, \mathcal{Z}),$$

das auf (t_J) abbildet. Dieses definiert wiederum ein Differenzentupel (r_L), wobei L die $k+1$-elementigen Teilmengen von I durchläuft, durch

$$r_L \,:=\, \sum_{\ell=0}^{k+1} (-1)^\ell s_{L\setminus\{i_\ell\}}.$$

Da s_J auf t_J abgebildet wird, werden die r_L wegen der obigen Bedingung auf 0 abgebildet und daher ist

$$(r_L)_L \,\in\, \prod_{\#(L)=k+1} \Gamma(U_L, \mathcal{F}).$$

Weitere Überlegungen zeigen, dass es sich um Kozykel handelt, dass die Abbildung wohldefiniert und ein bijektiver Gruppenhomomorphismus ist. □

SATZ 26.10. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein projektives Schema über einem kommutativen Ring R und sei $\mathcal{F}$ ein quasikohärenter Modul auf X. Dann stimmt die Garbenkohomologie von $\mathcal{F}$ mit der Čech-Kohomologie zur affinen Überdeckung durch die $D_+(X_i)$ überein.*

Beweis. Es seien $X_0, X_1, \ldots, X_n$ die Variablen des homogenen Koordinatenringes zum projektiven Schema X, also $X \,=\, \operatorname{Proj}(R[X_0, X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a})$ Sämtliche Durchschnitte

$$\bigcap_{i\in J} D_+(X_i) \,=\, D_+(\prod_{i\in J} X_i)$$

sind affin nach Lemma 12.9. Zu $\mathcal{F}$ gibt es eine welke quasikohärente Garbe $\mathcal{Z}$ mit zugehöriger kurzer exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0\,.$$

Hierbei ist der Quotient nach Aufgabe 14.21 wieder quasikohärent. Nach Satz 25.11 besitzen quasikohärente Garben auf affinen Schemata keine Kohomologie. Daher können wir Lemma 26.9 anwenden. □

Die entsprechende Aussage gilt für quasiaffine Schemata. Entscheidend ist die Eigenschaft, dass der Durchschnitt von affinen Teilmengen wieder affin ist. Das gilt oft, aber nicht für jedes Schema.

Abbildungsverzeichnis