

QA

33

D43

1683

V.2

General

000 15320946

4/20/2006

RENATI

DESCARTES

GEOMETRIÆ

PARS SECUNDA.

Cujus contenta sequens pagina exhibebit.

C A T A L O G V S

eorum,

Quæ in hac secundâ parte continentur.

FRANCISCI à SCHOOTEN Principia Matheseos
Vniuersalis, seu Introductio ad CARTESIANÆ GEO-
METRIÆ Methodum. Conscripta ab ERASMO BAR-
THOLINO.

FLORIMONDI DE BEAUNE duo tractatus posthu-
mi. Alter de Natura & Constitutione, alter de Limitibus
Æquationum.

IOHANNIS DE WITT de Elementis Curvarum li-
nearum libri duo.

FRANCISCI à SCHOOTEN Tractatus de con-
cinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Alge-
braïco.

LECTORI BENEVOLO

I. HUDDE S. P.

IN Galliis eram cum epistolæ meæ imprimerentur, ideoque domum redux, onus in me suscepti omnia de integro revidendi & ad calculum revocandi, ut probe mihi constaret, num quædam nimis obscurè expressa essent, vel etiam errata irrepsissent; Quæcunque inveni, illa sunt quæ sequuntur.

Ad clariorem sensum.

p. 424 l. 15. *Excepto* &c. Cum $x = a \infty o$, multiplicatur per $b = c$, resultat $b x = c x = a b + a c \infty o$, seu $x \infty \frac{ab - ac}{b - c}$; si ponas jam $b = c \infty o$, non sequitur valorem x per hanc æquationem non posse inveniri, quandoquidem Nominator $a b = a c$ per $b = c$, dividi potest, sed tum sequitur cum Nominator per Denominator non dividi potest, vel cum ambo per eandem quantitatem indivisibiles sunt: Notandum ergo est Denominator hic considerari sine relatione ad Nominator, veluti patet ex sequentibus, 1^o. *Observandum venit num ejusmodi quantitates in æquatione reperiuntur* &c. 2^o. *si reperiuntur, num utramque æquationem dividant*. Sed hæc omnia fortassis clarius sic intelligentur. Excepto tantum si æquationis primus terminus non affectus quantitate cognita sit ab una parte, reliqui, qui ab altera sunt, faciant fractionem, cujus Denominator, vel Denominatoris divisor aliquis, Nominator dividat, quod si contingat, videndum est, priusquam concludatur non dari duarum æquationum communem aliquem divisorem, num etiam altera æquatio per hunc Denominator, vel Denominatoris divisorem aliquem, divisibilis sit. p. 459. l. 10. vel sic lege, æquatio illa semper indivisibilis erit per x, x^3, x^5 , &c., 8, vel per $x x, x^3, x^5$, &c., — quantitate quavis cognita atque rationali. p. 462, l. 29. *pro omnes quantitates pone omnia membra*. p. 492, l. 13. *pro Regula, scribe Methodo*. p. 451 & 456, l. 1. lege, nullus terminus est ∞o . p. 500, in medio, *pro Quoniam tunc* \sqrt{C} . ex $\frac{1}{2} r + \sqrt{\frac{1}{4} r r - \frac{1}{27} q^3}$ extrahi poterit; scribe, extrahendo \sqrt{C} . ex $\frac{1}{2} r + \sqrt{\frac{1}{4} r r - \frac{1}{27} q^3}$. & pro, *sed cum* \sqrt{C} &c., usque ad, *liceat* &c.; pone, sed cum \sqrt{C} . ex binomio numerali ope Regula p. 389, vel perfectè extrahi queat, vel vulgari modo præterpropter, quod sufficit, poterit etiam ejusdem beneficio radix ex æquatione Proposita sive numerali, sive literali sit, inveniri, cum pro literis numeros, vel ∞ , ad arbitrium assumere liceat. p. 502, l. 31. & p. 505, l. 17. *reduci* hic sumitur pro redigi ad duas alias, ex quarum multiplicatione Proposita æquatio produci potest. Errata, quæ irrepsērunt, inveniuntur inter errata primæ partis.

Nec tacere fas est me, non sine admiratione, in Epistolis meis, quæ tam sedulam typhetarum operam requirebant, tam paucos errores ostendisse, nisi cogitarem D. Elzevirios & Clarissimum Schotenium totis viribus huic operæ incubuisse, quapropter nullus dubito quin reliquum totum opus accuratius impressum sit, quam quis fortassis expectasset.

C A R M E N

IN LAVDEM

FR. à S C H O O T E N,

Mathematicorum ocelli.

S CotenI cum scripta legis , se promit ubique
*I*ngenii mira dexteritate vigor.
*C*um vitam ac mores spectas , se præbet ubique
*S*pectandam integritas , ac sine fraude manus.
*S*ic quæ perrarò concurrunt corpore in uno,
*H*ic jungi ingenium cum probitate vides.
*A*dde quod , ingenium cum sit superabile paucis,
*V*ix tamen invenies in probitate parem.

Π Ε Ρ Γ

Φ Ρ Α Γ Κ Ι Σ Κ Ο Υ Σ Κ Ω Τ Η Ν Ο Υ ,

τῷ μακαρίτῃ,

Διάλογῳ Μαθησῆας, Εὐσεβίας, καὶ Οἰδιπόδου.

| | |
|---|--|
| <p>Μαθ. Τὶ κλαίεις; σφετέρως τί νέον φρένας ἵκετο πένθῳ; (Ἐξάβδα, καὶ μὴ κεύθειν, Εὐσεβίην) Ἥ δ' ἐσθῆτα μέλαιναν ἐέσασ; χάμα- πτότω Ἥ ματα καὶ πάσας νύκτας ἐφεζομένη; Εὐσ. Θυμῆς μοι ὕς ἀπόλετο, φέγγαλῳ ἀνδρῶν, Ὅς Σοφίη δέλω μίξε ταπεινοσώλω. Τὸν Βαλαδῶν Δύχθενον ἐγείναλο, τὴν τε μαθηλω Δῶνά σοι ἐξ ἀπαλῆ ἀσχίνοον βρέφεῳ Μ. Σκώτλω; Ε. κείνῳ. Μ. Σκώτλω; Οἰδιπ. ὦ θεῶν, λέει φανερὸν ἀνδρῶν Χρυσὸν εἶς ἤλεις, λείφανον ἡμιθέων; Σκώτλω; ἢ ἐμοῖσιν ἴσων φάεσσι φίλησσι, Ἥ δέ μ' ἄσπερ πασῶν ἀντερήλησε Θεῶν Ὅς πόρον ἄρ' ἄπτωσαν, αἰεὶ φῶπασε σκο- τεῖνον Σὺ μμύσαις, Ἐσπερῶ κείτω ἐνὶ σκότει; Εὐσ. Εἰνὶ σκότῳ κείτω, πᾶσιν μερῶ πρῶσι φαινας;</p> | <p>Οἶ τε καὶ Εὐσεβίω, καὶ σε, φίλη, ἔριλον. Μαθ. Οὐκ ἀλόγως ἀκρίτως τε, θεῶν, κατὰ δέ- κτω λείβεις, Καὶ σέρονι πλῆτεις αἰὲν ὀδυρομένη. Δὸς τόπον, ἐχέσπασ (τὸ πάλαι τὰ χα- ποινοσάμω Ὅτ' ἴαν ἔλω πάντων περὶ μάκαρ μα- κάρων) Γαλλω κινήσαιμι, ἀκίνητόν περ ἔεστω, Αὐτὰρ ὅπως, φροσῖν σέο ποροσσεμένη, Αὐτὴ ἀκίνητῳ μίμνω, νεαρός τε λυπηρόν Μνήμα πέλω Νιδέως πᾶσιν ἐφημερίοις Οἰδιπ. ὦ θεῶν, ἐκίστην δακρυῶν ἄλις; ἔπετε νεκρός Δάκρυσι καὶ σοναχῆς εἰς φῶτ' αὐτίς ἔβη. Ἄλλ' ἴτε, κ' ὀδμοισι βῆδεις καλαπείσ- σατε γαίλω, Λείψα μὲ ἀκίβη καὶ κυναυγὸς ἴον. Εὐξάδ', ἄσπερ ἔλω μεσῶσαν βαρὺς ἄδ- νί ζωός, Οὐτῶ καὶ κέ φη γαῖα νεκρῶ τελέθη.</p> |
|---|--|

M. Σ Λ Κ Δ Ο Σ,
 i arge's A'meta.

PRINCIPIA
MATHESIOS
VNIVERSALIS,

SEV

INTRODVCTIO
AD
GEOMETRIÆ METHODVM
RENATI DES CARTES,

Conscripta ab

ER. BARTHOLINO, CASP. FIL.

Editio tertia, priore correctior.



AMSTELODAMI,

Ex Typographia BLAVIANA, MDC LXXXIII.

Sumptibus Societatis.

THE
20 YEARS

OF THE
...
...
...
...
...
...
...
...
...



...
...
...
...

*Generis & virtutum Nobilitate Perillustri
& Generoso Heroi,*

D. CHRISTIANO THOMÆ,
TOPARCHÆ IN STAVGARD,
Equiti Aurato, Serenissimæ Regiæ Majestatis
Cancellario Magno, Regni Daniæ Senatori
primario, Regiæ Academiæ Hafniensis Con-
servatori summo, Patrono incomparabili.



Non minùs verè quam ele-
ganter Cicero lib. 1. Tusc.
quæst. *Magni, inquit, est
ingenii revocare mentem à sen-
sibus, & cogitationem à consue-
tudine abducere.* Cùm enim mens nostra,
quam in nobis conclusam circumferi-
mus, divina quædam particula habea-
tur, nihil fanè illi gratius accidere po-
test, quàm, cùm contemplando à cor-
poreis rebus laxatur, originique suæ
quàm simillima redditur. Sensuum
* 2 quippe

E P I S T O L A

quippe ufurâ non minus fruuntur brutâ animantia, quàm homines, imò, quædam longè nobis præstant; mente verò quia non gaudent, univerfam hanc mundi machinam, quasi tabulam pictam aspiciunt, nec cogitant quâ de causâ quòve modo tot varietates rerum sint ordinatæ. Quicumque igitur hominum non cupiunt semetipfos privare bono, quo reliqua animantia excedunt, non temerè permittent sese sensuum iudicio ita mancipari, ut ea sufficere putent, quæ manibus quasi palpare possunt, ac pauca velint si non oculis omnium obvia, pauciora credant quæ sensus non approbant, & paucissima eligant, nisi ab experientia firmentur. Non equidem diffiteri possumus, hoc propositum utile esse atque necessarium, ut initio juvetur cogitatio nostra & intel-

DEDICATORIA.

intellectus ; unde factum est , quòd Geometræ figuras , Arithmetici numerorum characteres , aliique alia subsidia invenerint ; Sed experimentis ejusmodi vix acquiescere debent magna ingenia , nec potest is , qui sapientiæ famam affectat. Communis enim experientia docet , multa facile mereri mentis assensum , & esse verissima , etiamsi sensuum judicio pro veris non agnoscantur : & vice versa , sensus quædam approbare ; quæ , quia falsa , ratio nullo modo admittere potest. Atque hæc licet omnibus in confesso sint , non desunt tamen , qui nihil nisi Praxin amantes , Theoriam & speculationes omnes odio prosequuntur , atque ut inutilia eliminant : quos pertinaciæ suæ serò nimis poenitebit , cùm aliorum imperio ita subjecti esse coguntur , ut ne

E P I S T O L A

in Praxi quidem solita obstacula removere sciant, nec unquam novicquam addiscant, nisi quod vel casus ipsis, vel aliorum humanitas supeditaverit. At alii, quorum animus longiùs exspatiatur, & demonstrationes causasque inquirunt, utilia multa inveniunt, quæ ab aliis ignorantur; adeoque in Praxi multa excogitantes compendia, allaborant ut tædia & impedimenta obvia tollantur; quorum tamen inventa non essent repudianda, etiamsi humani ingenii imbecillitas, aut usus raritas, ea statim ad praxin revocare prohiberet. Hinc non contenti doctiores iis, quæ à Geometris aut Arithmetiis demonstrata atque inventa sunt, quæque usus dudum confirmavit, nisi vel ipsas demonstrationes penetrare, easdemque invenire possint; adeoque
super-

DEDICATORIA.

superflua rescindere, defectus supplere, & deperdita restituere queant. Neque enim existimandum est, majores nostros omnem posteris præripuisse materiem, quâ excolatur ingenium; cùm contra fœcordiæ meritò nos incusarent, si plus temporis in scriptis suis etiamnum intelligendis impendi, quàm ipsi in incognitis inveniendis posuère, viderent. Ad quæ invenienda cùm non aliâ viâ, (quantum constat) quàm quæ per compositionem & resolutionem procedit, uterentur, quæque naturalis potiùs ingenii facultas aut industria, usû & exercitatione potita, quàm ars certis legibus & præceptis contenta, dici meretur; Recentiores artem quandam excogitarunt, quam vocant Analyticam, cujus principia tradit hoc opusculum. quæ postquam innotuit,
lon-

E P I S T O L A

longè plura & majora, quàm ab Antiquitate nobis relicta sunt, in lucem prodière. Non patitur tempus & lex scribendi; ut commemorem, quanta ex hac arte, non tantùm ad Arithmeticam, Geometriam, Mechanicam, sed etiam Opticam aliasque scientias manaverint emolumenta. Nihil enim sani antehac de visu novimus, cum omnia hïc, sicut in aliis artibus, quæ materiæ immerfæ, non abstrahuntur à sensibus, ad directionem mentis, disputationibus huc illic trahebantur; jam omnia determinata, omnia demonstrationibus munita. Qui enim in Opticis non planè hospites sunt, fat sciunt, quàm incerta, quamque defectuosa fuerint ea, quæ de Refractionum legibus antea novimus, & quàm falsa illa determinatio figuræ vitrorum, (de quibus
Dio-

D E D I C A T O R I A.

Dioptrica agit) quâ nihil jam nobis optari potest perfectius , nihil certius. sed de his forsan aliàs. Id mihi in præfens sufficit , hanc artem sibi proprio jure vendicare non solùm ea , quæ de Mathefeos utilitate , deque Arithmeticæ , Geometriæ , Astronomiæ , & Musicæ præstantia , tot rationibus , tot voluminibus , totque seculis dicta sunt , sed & multò plura ; quod facilè demonstrare possèm , nisi plurimis , qui hæc penitiùs introspicere dignantur , notum id fore scirem. Nec opus mihi est , multa coram Te , Heros Perillustris , de hujus artis totiusque Mathefeos utilitate dicere : quoniam , dum animus tuus magna semper & excelsa meditatur , Mathematicas etiam scientias coluisti & amplexus es , nihilque Tibi ad sapientiæ complementum deesse voluisti. Sed malo de

* *

He-

E P I S T O L A

Heroicis & eximiis tuis virtutibus tacendo, publicum omnium testimonium implorare, quàm in præfens pauca dicere. Ars sanè Analytica perfectum habet, cujus viri præsidium expectat, cum implorat tuum: nec enim Daniæ unquam, quamdiu Mathesis aliæque artes liberales tales invenerint Patronos, vel virtus vel sapientia deficiet. Patere igitur, Heros Perillustris, nomini tuo Principia hæc inscribi, & fructum inceptæ peregrinationis serenâ fronte accipe. Tui enim nominis clypeo munita, frontem audent obvertere hostibus, quibus seculum hoc abundat, quique varia tela in obvios effundere non verentur, prout affectus malevoli ipsis dictaverint. Solent plerique, qui rodere amant, objicere, pervulgata omnia esse & ex aliis desumpta; quâ censura quam-

D E D I C A T O R I A.

quamquam sciam hoc scriptum non posse notari; tamen præfagit animus, fore, ut hæc tanquam inutilia & nimis curiosa rejiciant. Si enim intellexerint, hoc ambitu, etiam Algebram complecti, fastidio commoti, subtilitates ejus cane pejus & angue fugient. Sed vix metuet sibi Ars Analytica à talibus hostibus, nam, cum doctissimis quibusque Mathematicis, quibus seculum hoc quasi superbit, probetur, de reliquis ipsi minus est laborandum: nec ulla alia hujus Methodi defensio requiritur, nisi quam experientia, & ipsius rei intellectæ usus attulerit. Et, ut verba in pauca conferam, si tuo exactissimo limatissimoque judicio probentur, nullius in posterum censuram aut notam pertimescent. Neque ego exilitate operis deterritus, sed contra utilitate po-

EPISTOLA DEDICATORIA.

tius instigatus, Tibi hæc consecrare sum veritus: & quidem tantâ majore fiducia, & spe certiore, quantò certius mihi constat Te omnibus iis, qui inter bonas artes etiam Mathematicis incumbunt, favere; quem favorem quotidie familia nostra sentit, & grato animo semper recolit. Vale regni Daniæ decus, & æqui bonique consule hoc grati animi monumentum, quod humillimè offert


PERILLVSTRIS GENEROSITATIS
TVÆ

*Scribebam Leide,
Anno cdo 16c L.
Calend. Jun.*

Devotissimus & obsequen-
tissimus cliens

ERASMIUS BARTHOLINUS.

LECTORI S.


Vm omnes sapientes audire velint, & nihil tam temerarium tamque indignum sapientis gravitate atque constantia sit, quàm aut falsum sentire, aut quod non satis exploratum sit, sine ulla dubitatione defendere: nescio quo fato fiat, quoddam non operam dent ejusmodi studiorum viam ingredi, quàm mens ad sue sciat verum à falsis & dubiis distinguere. Quandoquidem enim à teneris ad sue scere multum est, egregiè sibi consulere, si ad Mathesin excolendam ab ineunte ætate animum appellerent. Mathematicas autem disciplinas hanc præ aliis habere prærogativam, vix dubitari potest, modò consideretur, quicquid in iis concluditur & determinatur, id omne ex præmissis necessitate quadam sequi, vel verum, vel dubium, vel falsum, prout præmissæ variis modis sese habuerint: Aded ut, et si non aliis usibus inserviret Mathesis, tamen vel hoc nomine, ad sui cognitionem trahere deberet etiam eos, quibus nullum aliud ex ea speraretur emolumentum. Quod cum abundè observatum & usu comprobatum sit à Veteribus, quos plerique nostra ætate ita suspiciunt & venerantur, ut majus quoddam animo complexi, plus multo etiam vidisse videantur, quàm quantum nostrorum ingeniorum acies intueri potest; inter alia mirari subit, omnes ferè, exemplum illorum hac in re deseruisse. Quippe comperitum est, antiquos Philosophos non permisisse, ἀγαμέμνωνος scholas suas ingredi, ut ad Sapientiæ studium admitterentur, quique ante non haberent λατὴς τῆς Φιλοσοφίας. Quod sanè propositum, non ratione prudentius, quàm eventu feliciter fuit: cum hanc fuisse causam, quòd ad illam pertigerint scientiam, quam posteritas tantopere miratur, & quòd virtute sua nonnulli eniti se posse desperant, conjiciam. Frustra enim spectatur fructus disciplinarum, ab eo, què earum altitudinem non metitur; nec in cacumen evadere potest,

P R Æ F A T I O

potest, qui non solerter rimatur viam, & aditus, qui eò ferunt, negligit. Mathesis autem, cum ex notionibus simplicissimis, cognitumque facillimis, ad difficiliora, atque remotissima quæque cognoscenda perducatur juniores, qui præconceptis opinionibus vacui non impediuntur varietate rerum, quæ animis provectorum inhaerent; non dubito, quin si ea à teneris imbuatur mens, ad aliarum quoque rerum, maximè compositarum atque obscuriorum, cognitionem sit penetratura. Et quoniam Mathesis variis partibus constat, quæ omnes circa quantitatem versantur; res à nostri seculi Luminibus eò redacta est, ut generaliter illæ omnes tractari, & quantitas hæc in universali & abstracto per literas Alphabeti concipi possit. Ita enim, factâ ad omnes quantitatis species applicatione, intellectus ratiocinando ad varias res inveniendas distinctè progredi potest. Postquam autem Methodus illa diu latuit, tecta verborum involucris, cum quibus prius luctandum erat quàm fructus ullus sperari poterat; opportunè nobis Nobilissimus D. Des-cartes, insuperabilis ingenii Vir (qui, reclusâ à se, hæcenus incognitâ, ad veram sapientiam viâ, post tot seculorum fœdissimam servitutem, omnibus imitando exemplo, ita naturæ mysteria pandit, ut veræ sapientiæ studium, humanarumque scientiarum encyclopædia & perfectio, immaturâ ejus ac deplorabili morte, majorem nunquam jacturam facere potuerit) eam ad hanc facilitatem perduxit, ut, quod difficultatis reliquum est, non aliâ ratione quàm studio & diligentia evinci possit. Taceo hîc perfectionem, ad quam res Mathematicas hujus Methodi subsidio redegit: cum ipsarum testimonia non tantùm invitos laudumque suarum detractores in illis palmam ei dare cogant, sed etiam quousque, humanum ingenium in iisdem progredi quidve præstare valeat determinent. Verùm enimvero cum omnium magnarum rerum sicut arborum altitudo nos delectet, & ra-

dices

A D L E C T O R E M.

dices stirpesque non item : sic multi ad summa pervenire optarent , nisi in elementis hærere opus haberent. atqui , quemadmodum illa altitudo sine radicibus , stirpibusque esse non potest ; ita illi frustra se in id fastigium recipi sperant , quibus cordi non est fundamenta fideliter jacere. Et cum antehac non edita sint ulla principia , quæ ad adita hujus Methodi ducerent ; quid mirum ? si multi in ipso limine hæsitaverint , pluresque , quos , re inexpertâ , desperatio in fugam averterit. Etenim nec hujus Methodi Auctor , nec Doctissimi ejus Commentatores à semetipsis impetrare potuerunt , ut bonas horas , quas subtilioribus inventis dicaverant , in edendis , quæ viam ad hanc Methodum sternerent , impenderent. Cum itaque nihil hac in re , omnibus votis , tam à me ipso olim , quàm à multis hodie expetita , præstitum esse repererim : diu multumque inter spem & metum hærrens , dolui , tamdiu inter tot Mathematicorum monumenta ea desiderari , quæ ad scientiarum incrementa eminentioris naris homines necessariò requiri jam pridem censuerunt. Ego sanè opportunitate mira , ante aliquot annos voti campos factus , postquam ad hæc oras Academiam Illustrem , quæ Leidæ est , accessi. Vir Celeberrimus atque Doctissimus Franciscus à Schooten , Matheseos ibidem Professor publicus , me Artem Analyticam , bancque Methodum , tam eximia fide docuit , ut ad perfectionem nihil mihi præter ingenium & propriam industriam defuisse crediderim. Quocirca sepositâ privati commodi æstimatione ut plures felicitatis hujus participes facerem , & quæ propriis usibus destinaveram , publici juris redderem , de elementis hisce , quibus inter alia imbutus eram , evulgandis , cogitare cæpi. Et licet vererer ne amicitie jura , quæ inter nos cum fido semper servari optabam , hac ratione violarem ; tamen facilem mihi veniam sperabam , si non nisi officiosa fraude fallerem , quæ gloriæ ejus , qui se bono
publico

P R Æ F A T I O

publico uni devovit, cedere, nec aliàs magis animum meum gratum testari posset. Ac ne primas quidem spes fortuna destituit: quippe ab ipso, qui nullum erga me benevolentiae pignus atque indicium omittit, non modo veniam hujus zeli impetravi, sed & eam humanitatem, ut omnia perlegere & examinare haud gravatus fuerit, lucemque ingenii & consilii sui porrigere. Operis brevitatem quod attinet, non est, quam displicere cuiquam putem: siquidem copiam exemplorum, quibus ad discendum nihil aptius, nullus (ut opinor) híc desiderabit; in quibus afferendis ejusmodi delectus est observatus, ut, quoad fieri potuit, in medium adducerentur ea, quæ vel in ipso Auctore, vel in ejus Commentatoribus reperiuntur: quæ ideo sparsim ita sunt disposita, ut, meo judicio, non alio loco melius intelligi, simulque prædictis locis illustrandis inservire potuerint, in quem finem, in margine paginarum citationem additam esse apparebit. Aded ut, quicumque tantùm Arithmeticæ Species, cum in integris, tum in fractis perdidicerit, levique numerorum irrationalium notitiã instructus, in allatis exemplis accuratè examinandis sese exercuerit, se non inutiliter tempus, ubi ad Geometriam Dⁿⁱ. Des-Cartes accesserit, consumpsisse experturus sit. Quin imò videbit januam reseatam omni ei, quod ab Algebra & Analyfi Geometrica exspectari potest: ideoque se Matheseos Vniversalis constitutionem animo comprehendisse. neque enim existimo, hisce intellectis, operæ pretium fore, Algebrae vulgaris cognitionem ampliùs exoptare, licèt leviozem ejus notitiã; vel ipse D. Des-Cartes, antebac, ad suæ Geometriæ Methodum intelligendam, requisiverit. Vale.

PRINCIPIA
MATHESIOS
UNIVERSALIS,

SEV

INTRODUCTIO

AD

GEOMETRIÆ METHODVM
RENATI DESCARTES.

DE LOGISTICA QUANTITATVM SIMPLICIVM.



VM in omni Scientia, ad difficiliorum re-
rum cognitionem, utile sit à simplicissimis
& cognitu facillimis ordiri; haud inconsul-
tum fuerit, ad generalem atque facilem
comprehensionum Mathematicarum Scien-
tiarum, quæ omnes circa quantitatem ver-
santur, ad ea primùm attendere, quæ non
aliquam ejus speciem excludere, sed eas,

quocunque se habeant modo, sub certis notis cuique ob-
viis repræsentare possint. Vnde cum in universa illarum
Scientiarum constitutione, licèt diversa objecta respiciant, non
nisi relationes sive proportiones quædam, quæ in iis reperiun-
tur, considerentur; consentaneum est rationes atque propor-
tiones illas seorsim spectare, easque literis Alphabeti, utpo-
te notis simplicissimis nobisque cognitissimis, insignire. Ne-
que enim ratio ulla est, quo minùs per a, b, c , &c. concipian-
tur magnitudines a, b, c , &c. quàm pondera aut numeri iis-
dem characteribus designati. Attamen quia tum phantasiæ tum
sensibus ipsis, nihil simplicius nec distinctius exhiberi posse oc-
currit, quàm rectæ lineæ, quæque relationes & proportiones,
quæ inter omnes alias res inveniuntur, exprimere valent: præ-

*Vide dis-
sertationem
de metho-
do, parte
secunda.*

Pars II.

A

stat

stat per prædictas literas solummodo lineas rectas concipere. Hinc si duæ fuerint quantitates designatæ per a & b , intelliguntur per ipsas duæ differentes lineæ rectæ, diversæ scilicet longitudinis: ita ut per a intelligatur longitudo seu quantitas unius, & per b longitudo seu quantitas alterius. Non secus atque per a & a , aut per b & b duæ intelliguntur lineæ æquales; nisi indicaveris supposuerisve a esse æqualem ipsi b , vel a & b ejusdem esse valoris, id quod sic denotatur $a \infty b$. Et sic de aliis.

Cum autem non rarò occurrat, ut linea aliqua sit aliquoties sumenda, oportet tantum numerum convenientem ipsi literæ præfigere: Vt ad designandum, lineam a esse bis sumendam, scribo $2a$. Sic & ad designandum duplum, triplum, quadruplum &c. ipsius b , scribo $2b$, $3b$, $4b$ &c. Nec aliter fit si ad designandum semissem, tertiam aut aliam quamcunque partem lineæ a , scribatur $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, &c. id quod etiam hoc pacto fieri solet $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, &c. sic & duas tertias, tres quartas, &c. ipsius b , ita designaveris $\frac{2}{3}b$, $\frac{3}{4}b$: vel sic, $\frac{2b}{3}$, $\frac{3b}{4}$, atque ita de aliis.

Iam cum in universa Mathesi operationes omnes ad quinque diversas (vulgò Species dictas) reduci possint, quæ sunt Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio, & Radicum extractio; consequens est ut ostendatur, quâ ratione dictæ operationes per literas sint instituendæ.

De Additione quantitatum simplicium.

Igitur ad addendum lineam a ad lineam a , scribo pro summa $2a$: sic & ad addendum $2b$ ad $3b$, scribo $5b$. Lineæ enim eisdem literis si denotantur, oportet tantum numeros præfixos addere, & summam eidem literæ præfigere. Si verò diversæ fuerint, additio fiet interposito signo $+$, quod denotat plus. Vt si ad lineam a sit addenda linea b , scribo $a + b$, hoc est, a plus b , quo indicatur b esse additam ipsi a , vel adhuc esse addendam. Vbi patet dictum signum semper esse referendum ad sequentem literam, seu quæ priori addi debet.

Nec aliter fit, si plures in unam summam sunt colligendæ. Vt ad addendum $2b, b$, & $3b$, scribo $6b$. Sic & ad addendum a, b , & c , scribo $a + b + c$.

Exem^{to}

Exempla additionis simplicium.

$$\begin{array}{r} \text{Add.} \left\{ \begin{array}{l} a. \\ a. \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} 2b. \\ 3b. \end{array} \quad \begin{array}{r} 3d. \\ d. \end{array} \quad \begin{array}{r} 2b. \\ b. \\ 3b. \end{array} \\ \hline \text{Summa } 2a. \quad 5b. \quad 4d. \quad 6b. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Add.} \left\{ \begin{array}{l} a. \\ b. \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} a. \\ 2b. \end{array} \quad \begin{array}{r} 3c. \\ 4d. \end{array} \quad \begin{array}{r} a. \\ b. \\ c. \end{array} \\ \hline \text{Summa } a+b. \quad a+2b. \quad 3c+4d. \quad a+b+c. \end{array}$$

Vbi notandum, in additione literarum d & $3d$, cogitandum esse literam d sibi præfixam habere unitatem: id quod etiam in sequenti exemplo & similibus est observandum: ut &, cum plures adduntur diversæ literæ, perinde esse quo ordine scribantur, ut $a+b$, vel $b+a$.

De Subtractione quantitatum simplicium.

IAm verò ad subtrahendum lineam $2a$ à linea $5a$, scribendum est $3a$: siquidem lineæ, quæ iisdem literis sunt designatæ, subducuntur, subtrahendo tantum à se invicem numeros præfixos. Sic & si $2b$ auferantur à $3b$, reliquum erit $1b$ seu b . Similiter sublato d de $4d$, relinquitur $3d$: At a de a manet 0 seu nihil.

Quòd si verò lineæ diversis literis notatæ fuerint, subductio fiet interposito signo $-$, quod denotat minus. Vt si ab a subtrahenda sit b , scribo $a-b$, hoc est, a minus b , quo indicatur b esse sublatam ex a , vel adhuc esse subducendam. Vbi patet dictum signum semper esse referendum ad sequentem literam, hoc est, quæ ex priori est subtrahenda.

Eodem modo, sublatis $4d$ ex $3c$, reliquum erit $3c-4d$.

Exempla subtractionis simplicium.

$$\begin{array}{r} \text{Ex } 5a. \quad 3b. \quad 4d. \quad a. \quad \text{Ex } a. \quad 3c. \quad a. \quad 2c. \\ \text{subtr. } 2a. \quad 2b. \quad d. \quad a. \quad \text{subtr. } b. \quad 4d. \quad 4b. \quad d. \\ \hline \text{reliq. } 3a. \quad b. \quad 3d. \quad 0. \quad \text{reliq. } a-b. \quad 3c-4d. \quad a-4b. \quad 2c-d. \end{array}$$

Vnde notandum, in ejusmodi quantitatum subtractione, oportere quantitatem illam, quæ ex alia subtrahi debet, esse minorem:

hoc est, ad subtrahendum b ex a , (ut in superiori exemplo) opus esse, ut b sit minor quàm a . Quòd si autem non proponatur aut constet, ultra quantitas sit major aut minor, & tamen subductio fieri debeat; differentia earum denotari poterit hoc modo: $a - b$, hoc est, $a - b$ vel $b - a$.

De Multiplicatione quantitatum simplicium.

Porrò ad multiplicandum lineam a per lineam b , scribo ab vel ba . Sic & ad multiplicandum a per a , hoc est, a in se, scribo aa seu a^2 : & aaa seu a^3 ad prædictum productum aa adhuc semel multiplicandum per a . Adèd ut literæ immediatè sese consequentes, multiplicationem earum per invicem factam, vel adhuc faciendam esse, indicent. Non secus, si multiplicare velim a , b & c per invicem, scribo abc , vel bac , vel cba & c: & abb seu ab^2 vel b^2a , ad multiplicandum a , b , & b . Hic enim, ut in additione, non refert, quo ordine scribantur.

Quemadmodum verò ex ductu alicujus numeri in se, id quod producitur vocatur Quadratum ejusdem numeri, & si productum illud adhuc semel per eundem numerum multiplicetur, productus numerus appellatur ipsius Cubus, atque ita deinceps; ita quoque si a multiplicetur per a , productum aa seu a^2 appellari consuevit *a* quadratum, seu *a* duarum dimensionum; & si aa rursus multiplicetur per a , producet aaa seu a^3 , quod ideo appellari poterit *a* cubus, seu *a* trium dimensionum: atque ita a^4 , a^5 , a^6 , & c. dici poterunt *a* quadrato-quadratum, *a* surdesolidum, *a* quadrato-cubus, & c. seu, *a* habens 4, 5, aut 6, & c. dimensiones.

Sicuti autem numerus aliquis, si in se ducatur, dicitur radix quadrata istius producti seu quadrati: & si adhuc semel per hoc productum multiplicetur, tum radix Cubica hujus posterioris producti appellatur, & c; sic & a dicitur radix Quadrata ex aa seu a^2 , & radix Cubica ex a^3 , & radix Quadrato-Quadrata ex a^4 , & radix Surfolidum ex a^5 , & radix Quadrato-Cubica ex a^6 , atque ita porrò. Idem de reliquis est intelligendum.

Ex quibus constat diligenter esse notandum, quòd magnum sit discrimen inter aliquam quantitatem, cui numerus aliquis præfixus est, & inter eandem quantitatem, ubi idem numerus à tergo est adscriptus. Vt inter $2a$ & a^2 , $3a$ & a^3 , $4a$ & a^4 , & c. siquidem per

per 2 a , 3 a , 4 a , &c. simpliciter intelligitur quantitas a bis, ter, quater, &c. sumpta, hoc est, a sibi ipsi toties addita: at verò per a^2 , a^3 , a^4 , &c. Quadratum, Cubus, Quadrato-Quadratum, &c. ipsius a , hoc est, ipsa quantitas a toties posita & multiplicata.

Exempla multiplicationis simplicium.

| | | | | | | | | |
|-----------|--------|--------|---------|---------|---------|----------|-----------|---------|
| Multipl. | a | a | aa | ab | ab | ab | aa | a^3 . |
| per | b | a | a | c | b | cd | ab | a^3 . |
| productum | ab . | aa . | a^3 . | abc . | abb . | $abcd$. | $a^3 b$. | a^6 . |

Vbi notandum in $a^3 b$, producto multiplicationis quantitarum aa & ab , numerum ternarium quantitatem præcedentem a respicere, non autem sequentem b : quod, cum brevitatis causâ scribatur pro $aaaab$, in omnibus similibus casibus quoque est intelligendum. Eâdem ratione, ad multiplicandum a^3 , hoc est, aaa per a^3 seu aaa , producetur a^6 , hoc est, $aaaaaa$.

Quòd si quantitates occurrant multiplicandæ, quibus numeri, siue integri siue fracti præfiguntur, oportebit dictos numeros in se invicem ducere, ut in vulgari Arithmetica, & eorum productum præfigere producto, quod exsurgit ex multiplicatione quantitarum dictarum. Vt ad multiplicandum 2 a per 3 b ; multiplicatis 2 per 3, provenit 6, quod si præfigatur ipsi ab , productio quantitarum a & b per invicem, erit quæsitum productum 6 ab . Similiter multiplicatis 2 b per c , productum erit 2 bc . nam unitas, quæ hîc ipsi c præfigi subintelligitur, ducta in 2, producit 2.

Nec aliter fit, si ad multiplicandum 3 ab , hoc est, ter ab per 2 cd , hoc est, bis cd , scribatur 6 $abcd$. Sic &, multiplicatis $\frac{1}{2} aa$ per $\frac{1}{3} ab$, hoc est, semisse ipsius aa per tertiam partem ipsius ab , productum fiet $\frac{1}{6} a^3 b$, hoc est, $\frac{1}{6} aaaab$.

Exempla multiplicationis.

| | | | | | | | |
|----------|----------|----------|--------------------|------------|-----------------------|---------------|---------------------|
| Multipl. | 2 a | 2 b | $\frac{3}{2} a$ | 3 ab | $\frac{1}{2} aa$ | a^3 | 6 a^3 . |
| per | 3 b | c | $\frac{1}{2} d$ | 2 cd | $\frac{1}{3} ab$ | 3 b^3 | $\frac{2}{3} a^3$. |
| product. | 6 ab . | 2 bc . | $\frac{3}{4} ad$. | 6 $abcd$. | $\frac{1}{6} a^3 b$. | 3 $a^3 b^3$. | 4 a^6 . |

Vbi tandem sciendum, quòd licet ex multiplicatione producantur quantitates plarium dimensionum seu literarum; earum

tamen additionem atque subtractionem non aliter fieri atque præcedentium. Ut ad addendum $2ab$ ad $3ab$, scribitur $5ab$: & ad addendum $6ab$ ad $2bc$, scribitur $6ab + 2bc$. Non secus, ad subtrahendum $2ab$ de $3ab$, scribitur ab : & ad subtrahendum $2bc$ de $6ab$, scribitur $6ab - 2bc$, Et sic de aliis.

De Divisione quantitatum simplicium.

Q Vonia verò divisio resolvit id, quod multiplicatio componit: facilè apparet, ad dividendam quantitatem ab seu ba per a , opus tantum esse ex quantitate dividenda ab tollere quantitatem a , quæ divisor est, & pro quotiente scribere reliquam quantitatem b . Eodem modo, si dividatur aa per a , oriatur a ; & aaa seu a^3 per a , oriatur aa . Non secus divisâ abc per a , fiet bc : at per b , fiet ac : & per c , fiet ab .

Quòd si verò quantitates dividendæ occurrant, quibus numeri sint præfixi; oportet, factâ divisione quantitatum, ut jam ostensum est, similiter dictos numeros dividere, ut in Arithmetica vulgari, & quod oritur invento quotienti quantitatum præfigere.

Exempla divisionis simplicium.

$$\begin{array}{l} \text{Divid. } ab \left\{ \begin{array}{l} \text{quot. } \frac{aa}{a} \left\{ \frac{a^3}{a} \left\{ \frac{abc}{a} \left\{ \frac{abc}{bc} \left\{ \frac{a^3b}{ab} \left\{ \frac{a^3}{aa} \left\{ \frac{a^3}{aa} \right\} a^3 \right\} \right\} \right\} \right\} \right\} \\ \text{per } a \end{array} \right. \\ \text{Divid. } 6ab \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} b \frac{1}{5} a^3 b \left\{ \frac{1}{2} aa \left\{ \frac{3}{3} a^3 b^3 \left\{ \frac{1}{1} a^3 \text{ seu } a^3 \left\{ \frac{3}{3} a^3 b^3 \left\{ \frac{3}{a^3} b^3 \right\} 3 b^3 \right\} \right\} \right\} \right\} \\ \text{per } 2a \end{array} \right. \end{array}$$

Cùm autem occurrunt quantitates dividendæ, ex quibus literæ divisoris præcedenti modo tolli nequeunt; subscribitur Divisor ipsi Dividendo interjectâ lineolâ, ad modum fractionis Arithmeticæ vulgaris. Ut ad dividendum ab per c , scribo $\frac{a}{c}$, quo indicatur ab esse divisam per c , vel adhuc esse dividendam. Sic & ad dividendum a per b , scribitur $\frac{a}{b}$. similiter divisâ abc per de , quotiens erit $\frac{abc}{de}$. & sic de aliis. Quæ quidem quantitates sic divisæ appellantur Fractiones.

Est verò hîc obiter notandum, divisâ a per a , $2b$ per $2b$, similibusve, quotientem esse 1 : siquidem quævis quantitas se ipsam semel continet, ideoque per seipsam divisâ, unitatem profert.

DE LOGISTICA QUANTITATUM COMPOSITARVM.

Explicatâ simplicium quantitatum operatione, quoniam ex illarum additione & subtractione oriuntur quantitates, per signum + compositzæ, aut per signum — disjunctæ, (quæ communiter generali nomine Compositzæ dicuntur); consequens est, ut harum quoque operationem deinceps ostendamus.

De Additione quantitatum compositarum.

Igitur ad addendum quantitates Compositas, iisdem literis notatas, oportet considerare signa + & —, quibus afficiuntur, & notare, si eadem fuerint, additionem fieri ut in simplicibus, & earum summæ præfigi idem signum. Ut ad addendum $a + 3b$ ad $a + 2b$: additis a ad a , & $3b$ ad $2b$, summa erit $2a + 5b$. Eodem modo $2a - b$ additum ad $3a - 3b$, facit summam $5a - 4b$.

Quòd si verò signa diversa fuerint, subtrahendæ erunt quantitates eisdem literis denotatæ, sicut in subtractione simplicium, & ei quod relinquitur præfigendum est signum, quo major quantitas afficitur. Ut si addendum sit $3b + 5a$ ad $2b - 2a$: additis $3b$ ad $2b$, & subtractis $2a$ ex $5a$, summa erit $5b + 3a$. Similiter si $a + d$ addatur ad $a - 4d$, fiet summa $2a - 3d$. Vbi patet si $2b + a$ addatur ad $3b - a$, summam fore $5b$: quantitates enim $+a$ & $-a$, cum propter diversa signa sint subtrahendæ, se mutuò tollunt.

Iam ad addendum quantitates diversis literis denotatas, oportet tantùm eas suis signis connectere. Ut ad addendum $a + b$ ad $c - d$, scribo $a + b + c - d$: siquidem quantitas c , & omnis alia cui nullum præponitur signum, intelligitur sibi præfixum habere signum +.

Exempla additionis compositarum.

$$\text{Add. } \left\{ \begin{array}{l} a + 3b \ 2a - b\frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}bb \ a^3 - \frac{5}{4}abc \ aa + 2a - 3. \\ a + 2b \ 3a - 3b\frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}bb\frac{2}{3}a^3 - \frac{3}{4}abc \ aa + a - 6. \end{array} \right.$$

summa $2a + 5b. \ 5a - 4b. \ ab + bb. \ \frac{5}{3}a^3 - 2abc. \ 2aa + 3a - 9.$

$$\text{Add. } \left\{ \begin{array}{l} 3b + 5a \ a + d. \ 2b + a \ aa - 2ab \ 3a^3 - \frac{1}{3}aab \ aa - 5a + 6. \\ 2b - 2a \ a - 4d. \ 3b - a \ aa + ab \ 2a^3 + \frac{1}{4}aab \ aa + a - 6. \end{array} \right.$$

aggr. $5b + 3a. \ 2a - 3d. \ 5b. \ 2aa - ab. \ 5a^3 + \frac{1}{4}aab. \ 2aa - 4a.$

Add.

$$\begin{array}{l} \text{Add. } \left. \begin{array}{l} a+b \\ c-d \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2aa+3ab-bb \\ 3abc \\ a^3+2abb-aab+abc. \end{array} \\ \text{Summa } \left. \begin{array}{l} a+b+c-d \\ 8ab-aa-bb. \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5ab-3aa \\ a^3-abc \\ a^3+aab-3abb-b^3. \end{array} \\ \text{feu aggr. } \begin{array}{l} a+b+c-d \\ 8ab-aa-bb. \end{array} \begin{array}{l} a^3+2abc.2a^3-abb+abc-b^3. \end{array} \end{array}$$

E quibus manifestum fit, (cum ad addendum $3b + 5a$ ad $2b - 2a$, scribi possit $3b + 5a + 2b - 2a$, hoc est, $5b + 3a$: siquidem $+3b$ & $+2b$ faciunt $5b$, & $+5a - 2a$ faciunt $+3a$) quantitates eisdem literis denotatas, quando diversa habent signa, subtrahendas esse, & summæ ascribendum esse signum majoris quantitatis.

De Subtractione quantitatum compositarum.

Porrò ad subtrahendum quantitates compositas, quæ eisdem literis sunt denotatæ, sciendum est: si signa eadem fuerint, & quantitas è qua subtractio fieri debet, major sit quantitate subducendâ; tum subtractionem fieri ut in simplicibus, & ei quod relinquitur præfigendum esse idem signum. Vt si subtrahatur $a+2b$ ex $2a+5b$: (subtractis a ex $2a$, & $2b$ ex $5b$,) remanet $a+3b$. Non secus si subtrahatur $3a-3b$ ex $5a-4b$, reliquum erit $2a-b$.

Si verò signa eadem fuerint, & quantitas à qua subtractio fieri debet quantitate subducendâ minor sit; oportet, subtractâ minore ex majore, residuo signum contrarium præponere. Vt si subtrahendum sit $a+3b$ ab $3a+2b$: subtractis a ex $3a$, & $2b$ ex $3b$, residuum erit $2a-b$. Similiter, sublati $a-3b$ ex $2a-b$, relinquitur $a+2b$.

Quòd si quantitates iisdem literis designatæ, atque ad subtrahendum propositæ, diversa signa habeant; erunt ipsæ addendæ, ut in simplicibus, & summæ præfigendum signum quantitatis, à qua subductio fieri debet. Vt si velimus subtrahere $a-b$ ex $2a+b$: subtractis a ex $2a$, additisque b ad b , residuum erit $a+2b$. Eodem modo, $2a+5d$ subductum à $3a-2d$, relinquet $a-7d$.

Cæterùm ad subtrahendum quantitates diversis literis denotatas, oportet quantitates subducendas, variatis signis connectere cum iis, à quibus subductio fieri debet. Vt si subtrahi debeat $c-d$ ab $a+b$; erit differentia seu residuum $a+b-c+d$: variatis nempe signis quantitatum c & d .

Exem-

Exempla subtractionis compositarum.

Ex $2a+5b$ $5a-4b$ $\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}bb$ $a^3-\frac{5}{4}abc+abb-b^3$ $2aa+3a-9.$
 Subtr. $a+2b$ $3a-3b$ $\frac{1}{4}ab+\frac{1}{3}bb$ $\frac{2}{3}a^3-\frac{3}{4}abc+abb-b^3$ $aa+2a-3.$
 Reliq. $a+3b$ $2a-b.$ $\frac{1}{4}ab+\frac{1}{3}bb.$ $\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}abc.$ $aa+a-b.$

Ex $3a+2b$ $2a-b$ $2aa-ab$ $5a^3+\frac{1}{2}aab-\frac{2}{3}abb$ $3aa-2a+6.$
 Subtr. $a+3b$ $a-3b$ $aa-2ab$ $2a^3+\frac{1}{2}aab-abb$ $2aa-3a+9.$
 Resid. $2a-b.$ $a+2b.$ $aa+ab.$ $3a^3-\frac{1}{2}aab+\frac{1}{3}abb.$ $aa+a-3.$

Ex $2a+b$ $3a-2d$ $8ab-aa$ $3a^3-\frac{1}{2}aab+\frac{2}{3}abb-b^3$ $3aa-2a+6.$
 Subtr. $a-b$ $2a+5d$ $2aa-3ab$ $-2a^3+\frac{2}{3}aab$ $aa+a-3.$
 Diff. $a+2b.$ $a-7d.$ $11ab-3aa.$ $5a^3-aab+\frac{2}{3}abb-b^3.$ $2aa-3a+9.$

Ex $a+b$ $2aa-4a$ $3abc$ $a^3+aab-abb-b^3.$
 Subtr. $c-d$ $aa+a-b$ a^3-abc $aab-2a^3+c^3-abb.$
 Rel.refid.feu diff. $a+b-c+d.$ $aa-5a+6.$ $4abc-a^3.$ $3a^3-b^3-c^3.$

E quibus perspicuum fit (cum ad subtrahendum $a+3b$ ex $3a+2b$ scribi possit $3a+2b-a-3b$, hoc est, $2a-b$, subtractis nempe a ex $3a$ & $2b$ ex $3b$): quantitates eisdem literis denotatas, quando eadem habent signa, sed quantitates subducendæ aliis sunt majores, subtrahendas esse, & relicto præponendum esse signum contrarium.

Similiter quoniam ad subtrahendum $a-b$ ex $2a+b$, scribere possum $2a+b-a+b$, hoc est, $a+2b$, (subtrahendo videlicet a à $2a$, & addendo b ad b) patet, quâ ratione, quantitates eisdem literis designatæ, cum diversa habuerint signa, sint addendæ, & summæ præfigendum sit signum ejus, à quâ subtractio fieri debet. Quòd autem subtrahendo $a-b$ ex $2a+b$, scribendum sit $2a+b-a+b$, variatis nempe signis quantitatum subducendarum, inde manifestum fit; quòd ad subtrahendum a ex $2a+b$ differentia denotetur per $2a+b-a$, utpote subducendo quantitatem a , præponendo ei signum $-$, ut in subtractione simplicium est dictum: at quoniam subducendo quantitatem a ex $2a+b$, plus justo tollitur, siquidem non a absolutè tollendum proponitur, sed diminuta quantitate b ; hinc fit, ut $2a+b-a$ minor sit quàm justa differentia, quantitate b : adeoque ad veram differentiam obtinendam, oportet addere quantitatem b , & scribere $2a+b-a+b$, hoc est, $a+2b$. Et sic de aliis

De Multiplicatione quantitatum compositarum.

Post hæc, ad multiplicandum quantitates compositas, operatio institui potest ad modum Arithmeticæ vulgaris: oportet enim earum partes multiplicare in se invicem, ut in simplicibus est ostensum, atque producta simul addere. Quod autem ad signa + & — attinet iisdem præfigenda, sciendum est: eadem signa (hoc est + per +, vel — per —) facere signum +, diversa verò (hoc est + per —, vel — per +) facere —. Ut ad multiplicandum $a + b$ per c : multiplicatis + a per + c , & + b per + c , fiunt + ac , & + bc : quibus additis, fit productum + $ac + bc$, seu $ac + bc$. Sic si multiplicandum sit $a - b$ per c , produceretur $ac - bc$.

Nec aliter fit, si ad multiplicandum proponatur $a + b$ per $c + d$: multiplicatis enim $a + b$ per c , ut ante; & rursus $a + b$ per d (si quidem $a + b$ non tantum per c , sed etiam per d multiplicari debet): fiet $ac + bc + ad + bd$. Non secus ad multiplicandum $a - b$ per $c - d$ scribitur $ac - ad - bc + bd$: multiplicatis nempe primùm $a - b$ per + c , fit + $ac - bc$: deinde $a - b$ per — d , fit — $ad + bd$. quippe + a per — d , producit — ad : at — b per — d producit + bd , juxta regulam. Et sic de aliis. Nec refert utrum à dextra an verò à sinistra initium fiat, sicut sequentibus exemplis manifestum fiet.

Exempla multiplicationis compositarum.

| | | | | | |
|----------|-------------------|-----------------------|-----------------------------|---------------------|----------------|
| Mult. | $a + b$ | $a - b$ | $a + b$ | $a - b$ | $a + b$ |
| | per c | c | $c + d$ | $c - d$ | $a + b$ |
| | prod. | $ac + bc$. | $ac - cb$. | $ac + bc$ | $ac - bc$ |
| | | | $+ ad + bd$ | $- ad + bd$ | $aa + ab$ |
| | | product. | | | |
| | | $ac + bc + ad + bd$. | $ac - bc - ad + bd$. | $aa + 2ab + bb$. | $aa - ab + bb$ |
| Multipl. | $a - b$ | $a + b$ | $aa - 2ab + bb$ | $aa - ab + bb$ | |
| per | $a - b$ | $a - b$ | $a - b$ | $a + b$ | |
| | $- ab + bb$ | $aa + ab$ | $- aab + 2abb - b^3$ | $+ aab - abb + b^3$ | |
| | $aa - ab$ | $- ab - bb$ | $a^3 - 2aab + abb$ | $a^3 - aab + abb$ | |
| prod. | $aa - 2ab + bb$. | $aa - bb$. | $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$. | $a^3 + b^3$. | |

Mult.

$$\begin{array}{r} \text{Mult.} \quad 3dd+4de+ee \qquad \qquad \qquad 2a^3+\frac{1}{2}aab+\frac{2}{3}abb \\ \text{per} \quad \quad 3dd-ee \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \frac{2}{3}ab-\frac{1}{2}aa \\ \hline 9d^4+12d^3e+3ddee \qquad \qquad \qquad -a^5-\frac{1}{4}a^4b-\frac{1}{3}a^3bb \\ \hline -3ddee-4dc^3-e^4 \quad +\frac{4}{3}a^4b+\frac{1}{3}a^3bb+\frac{2}{5}aab^3 \\ \text{product.} \quad 9d^4+12d^3e-4dc^3-e^4. \quad \frac{1}{12}a^4b+\frac{4}{5}aab^3-a^5. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Multipl.} \quad 4a^3+3aa-2a+1 \\ \text{per} \quad \quad \quad aa-5a+6 \\ \hline +24a^3+18aa-12a+6 \\ -20a^4-15a^3+10aa-5a \\ +4a^5+3a^4-2a^3+1aa \\ \hline \text{product.} \quad 4a^5-17a^4+7a^3+29aa-17a+6. \end{array}$$

Cæterùm advertendum hîc est, non rarò utile esse, multiplicationem hoc modo non instituere, sed tantummodo eam innuere interferendo voculam *in* vel *M*. Vt ad multiplicandum $4a^3+3aa-2a+1$ per $aa-5a+6$, scribo $4a^3+3aa-2a+1$ in $aa-5a+6$, vel $4a^3+3aa-2a+1$ *M* $aa-5a+6$.

Quòd autem $+$ per $-$, vel $-$ per $+$ faciat $-$, sic patet. Esto $a-b$ multiplicandum per c , & sit $a-b \infty e$: hinc si utrobique addatur b , fiet $a \infty b+e$. Iam quoniam æquales quantitates per eandem quantitatem multiplicatæ producunt æquales; ideo si utrinque multiplicetur per c , erit $ac \infty bc+ec$, hoc est, auferendo utrinque bc , erit $ac-bc \infty ec$. Quocirca cum statuatur $a-b \infty e$, & utrâque parte ductâ in c , producatur $ac-bc \infty ec$; per spicuum fit, $-b$ ductum in $+c$, producere $-bc$.

Nec aliter ostendetur $-$ per $-$ multiplicatum producere $+$. Etenim si $a-b$ multiplicandum sit per $c-d$: ponendo, ut ante, $a-b \infty e$, erit productum ex $a-b$ in $c-d$ æquale producto ex e in $c-d$ vel $c-d$ in e : id est, $ce-de$. Sed ce , ut supra, æquatur $ac-bc$: unde $ac-bc-de$ æquabitur producto ex $a-b$ in $c-d$. Porrò cum $a-b$ æqualis sit posita ipsi e , & utrâque parte ductâ in d , productum $ad-bd$ æquetur producto de : hinc si ex $ac-bc$ subtrahatur $ad-bd$ loco de , ei æquale; erit juxta regulam subtractionis $ac-bc-ad+bd$ productum quæsitum. E quibus liquet $-b$ multiplicatum per $-d$ producere $+bd$.

$ac - ad$, subducendum ex dividendo, & relinquitur o . Deinde divido $-bc$ per $+c$, & oritur $-b$, sub linea scribendum in quotiente. Quoniam autem multiplicato divisore $c - d$ per $-b$, fit productum $-bc + bd$, & eo ex reliquo dividendi ablato, remanet nihil; patet divisionem esse ad finem perductam, & quotientem esse $a - b$.

Sic etiam ad dividendum $aa - 2ab + bb$

| | | |
|----------------|-------------------------|------------|
| per $a - b$): | $aa - 2ab + bb$ | $aa a$ |
| | $\underline{aa - ab}$ | $a $ |
| | $o - ab$ | $-ab -b$ |
| | $- \underline{ab + bb}$ | $+ a $ |
| | $o \quad o$ | |

fit quotiens $a - b$.

Divido primum aa per a , & oritur a , scribendum sub linea in quotiente. Vnde multiplicato divisore $a - b$ per a , & ablato producto $aa - ab$ ex dividendo, scribendum erit reliquum $-ab$ sub linea ducta infra $-2ab$. Deinde divido $-ab$ per $+a$, & fit $-b$, scribendum sub linea in quotiente. Tum ducto divisore $a - b$ in $-b$, fit productum $-ab + bb$, quod sublatum à reliquo dividendi relinquitur o . Et erit operatio finita, ac quotiens quaesitus $a - b$.

Eadem ratione si dividendum sit $aa - bb$ per $a + b$.

| | | |
|------------------|---------------------------------|------------|
| Divid. | $aa - bb -ab$ | $aa a$ |
| Divis. $a + b$) | $aa - bb -ab$ | $a $ |
| | $\underline{o \quad o \quad o}$ | $-ab -b$ |
| Quotiens | $a - b$ | $+ a $ |

Incipiendo rursus à primo termino, divido aa per a , & habebitur a , scribendum sub linea in quotiente. Vnde multiplicato divisore $a + b$ per quotientem inventum a , producet $aa + ab$, quod sublatum ex dividendo relinquet $-ab$: & quoniam hic terminus praeter superfluum $-bb$ ad dividendum huc accessit, ideo post lineam ei adscribitur. Deinde divido $-ab$ (nempe id quod modò ad dividendum accessit) per $+a$, & habetur $-b$ in quotiente sub linea scribendum. Quo facto, si multiplicetur divisor $a + b$ per hunc quotientem $-b$, exfurget $-ab - bb$ ad subtrahendum ex eo, quod relinquitur in dividendo: quod cum post subtractionem

nem relinquit 0; liquet absolutam esse operationem, & quotientem fore $a - b$.

Nec aliter se res habet si dividatur $a^3 + b^3$ per $a + b$, & incipiatur ab ultimo termino.

$$\begin{array}{r}
 \text{Dividend.} \quad a^3 + b^3 \mid -abb \mid +aab \\
 \text{Divisor } a + b \text{.)} \quad +a^3 + b^3 \mid -abb \mid +aab \\
 \hline
 \text{Quotiens} \quad +aa - ab + bb.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 b^3 \mid bb \\
 b \mid \\
 -abb \mid -ab \\
 +b \mid \\
 +aab \mid +aa \\
 +b \mid
 \end{array}$$

Etenim diviso $+b^3$ per $+b$, fit $+bb$, scribendum in quotiente. tum ducto divifore $a + b$ in $+bb$, producitur $+abb + b^3$: Id quod si subtrahatur ex dividendo, relinquetur $-abb$. Deinde diviso $-abb$ per $+b$, oritur $-ab$, scribendum in quotiente, quo multiplicato per diviforem $a + b$ exfurgit $-aab - abb$, ad subtrahendum ex reliquo dividendi, eritque residuum $+aab$. Denique diviso $+aab$ per $+b$, prodibit $+aa$ scribendum in quotiente: unde si multiplicetur divifor $a + b$ per $+aa$, & productum $+a^3 + aab$ auferatur ex residuo dividendi, erit reliquum 0. Id quod ostendit, diviso $a^3 + b^3$ per $a + b$, oriri $aa - ab + bb$, quod erat faciendum.

*Sequuntur adhuc nonnulla exempla ad uberio-
rem exercitationem divisionis compositarum.*

$$\begin{array}{r}
 \text{Dividend.} \quad a^3 - 3aab + 3abb - b^3 \\
 \text{Divisor } a - b \text{.)} \quad +abb - b^3 \\
 \hline
 \quad \quad \quad +2abb \quad 0 \\
 \quad \quad \quad -2aab + 2abb \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad -aab \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad a^3 - aab \\
 \hline
 \text{Quotiens} \quad +aa - 2ab + bb.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 -b^3 \mid +bb \\
 -b \mid \\
 +2abb \mid -2ab \\
 -b \mid \\
 -aab \mid +aa \\
 -b \mid
 \end{array}$$

| | | | | |
|-------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| Dividend. | $9d^4 + 12d^3e - 4de^3 - e^4$ | $-3ddee$ | $-ce^4$ | $+ee$ |
| Divif. $3dd - ee$ | $3d^4 + 12d^3e - 4de^3 - e^4$ | $-3ddee$ | $-3ddee$ | $+3dd.$ |
| | $\underline{\quad\quad\quad\quad}$ | $\underline{\quad\quad\quad\quad}$ | $\underline{\quad\quad\quad\quad}$ | $\underline{\quad\quad\quad\quad}$ |
| Quotiens | $+4de + 3dd + ee$ | | $-4de^3$ | $+4de.$ |
| | | | $-ee$ | |

| | | | | |
|--|---|---------------------|---------------------|---------------------|
| Dividend. | $\frac{1}{2}a^4b + \frac{4}{9}aab^3 - a^5$ | $-\frac{1}{3}a^3bb$ | $-a^5$ | $+2a^3.$ |
| Divif. $\frac{2}{3}ab - \frac{1}{2}aa$ | $\frac{2}{3}a^4b + \frac{4}{9}aab^3 - a^5$ | $-\frac{1}{3}a^3bb$ | $-\frac{1}{2}aa$ | |
| | $-\frac{1}{4}a^4b$ | | $-\frac{1}{4}a^4b$ | $+ \frac{1}{2}aab.$ |
| | $-\frac{1}{4}a^4b$ | | $-\frac{1}{2}aa$ | |
| | $\underline{\quad\quad\quad\quad}$ | | $-\frac{1}{3}a^3bb$ | $+ \frac{2}{3}abb.$ |
| Quotiens | $+ \frac{2}{3}abb + \frac{1}{2}aab + 2a^3.$ | | $-\frac{1}{2}aa$ | |

| | | | | | |
|--------------|--|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|-----------------|
| Divid. | $d^4 - b^4 + 2aady + 2aaby + aadd - aabb - bd^3 + bbd - b^3d - aabd$ | | | | Pag. 340. |
| Div. $d + b$ | $d^4 - b^4 + 2aady + 2aaby + aadd - aabb - bd^3 + bbd - b^3d - aabd$ | | | | lin. 4. |
| | $\underline{\quad\quad\quad\quad}$ | $\underline{\quad\quad\quad\quad}$ | $\underline{\quad\quad\quad\quad}$ | $\underline{\quad\quad\quad\quad}$ | |
| Quotiens | $+d^3 - bdd + bbd - b^3 + 2aay + aad - aab.$ | | | | |
| | $d^3 d^3 - bd^3$ | $- bdd$ | $+ bbd$ | $+ bbd - b^3d$ | $- b^3.$ |
| | $d + d$ | $+ d$ | $+ d$ | $+ d$ | |
| | $+ 2aady$ | $+ 2aay.$ | $+ aadd$ | $+ aad.$ | $- aabd aab.$ |
| | $+ d$ | $+ d$ | $+ d$ | $+ d$ | |

| | | | | |
|-------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|--------------------|
| Dividend. | $+y^6 - 8y^4 - 124yy - 64$ | -64 | $+4$ | $\text{Pag. } 77.$ |
| Divisor $yy - 16$ | $+y^6 + 8y^4 + 4yy - 64$ | -16 | | |
| | $\underline{\quad\quad\quad\quad}$ | $\underline{\quad\quad\quad\quad}$ | $\underline{\quad\quad\quad\quad}$ | |
| | $-16y^4 - 128yy$ | | $-128yy + 8yy.$ | |
| | $-\underline{16y^4 - 128yy}$ | | -16 | |
| | $\underline{\quad\quad\quad\quad}$ | | $-16y^4 + 1y^4.$ | |
| Quotiens | $+1y^4 + 8yy + 4.$ | | | -16 |

Divi-

Etenim ut a multiplicatum per a facit aa , seu a quadratum, cuius radix seu latus dicitur a ; sic & radice quadratâ extractâ ex aa proveniet rursus a . Similiter cum aa , hoc est, a quadratum multiplicatum per a producat a^3 seu cubum ex a ; ita etiam extractâ radice cubicâ ex a^3 , fiet a . Et sic de cæteris radicibus.

Nec aliter fit si ex quantitibus compositis radix sit extrahenda. Sicut enim ex quantitibus simplicibus radicis extractio non secus se habet atque extractio radicis ex aliquo numero, quæ tantum unius sit characteris: ita radix, quantitas existens composita, non aliter extrahetur, ac si ex aliquo numero radix, quæ pluribus constet characteribus, eliceretur.

Vt ad extrahendam radicem quadratam ex $aa + 2ab + bb$: extraho primùm radicem ex aa , & fit a , quæ in se multiplicata & ab aa ablata relinquit 0. Deinde multiplicato a per 2, divido $+ 2ab$

$$\begin{array}{r} \text{Quadratum} \quad aa + 2ab + bb \\ \quad \quad \quad aa + 2ab + bb \\ \hline \quad \quad \quad 0 \quad \quad 0 \quad \quad 0 \\ \text{Radix} \quad \quad \quad a + b \\ \text{Divisor} \quad \quad \quad 2a \end{array}$$

per $2a$, & fit $+b$: quod adscribo priori radici inventæ a . Hinc si ducatur $2a$ in b , fit $+2ab$, quod sublatum ex $2ab$ relinquit 0. Similiter si multiplicetur b in se, fiet $+bb$; quâ itidem ex $+bb$ ablatâ, remanebit 0. Et operatio erit ad finem perducta, eritque radix quæsitæ $a + b$. Et sic de aliis.

Exempla extractionis radicum ex compositis.

$$\begin{array}{r} \text{Quadratum} \quad a^4 - 2aabb + b^4 \\ \text{Radix} \quad \quad aa - bb \\ \text{Divisor} \quad \quad 2aa \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Quadratum} \quad 64xx - 160x + 100 \\ \text{Radix} \quad \quad 8x - 10 \\ \text{Divisor} \quad \quad 16x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Quadratum } aa + 2ac + cc - 2ab - 2bc + bb \\ \hline \begin{array}{cccccc} aa & + & 2ac & + & cc & - & 2ab & - & 2bc & + & bb \\ \hline \circ & & \circ & & \circ & & \circ & & \circ & & \circ \end{array} \end{array}$$

$$\text{Radix } \frac{a+c-b}{2}$$

$$\text{Primus divisor } 2a$$

$$\text{Secundus divisor } 2a+2c$$

$$\text{Quadratum } \frac{aa}{a} \quad \frac{a+c}{2}$$

$$\text{Radix } a$$

$$\text{per } \frac{2}{2a+2c}$$

$$\text{secundus divisor.}$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{ccc} a & a & \\ \text{per } \frac{2}{2a} & \frac{a}{aa} & -2ab | -b \text{ quot. secundus.} \\ \hline \text{Primus divisor } 2a & aa & +2a | \\ +2ac & +c \text{ quotus primus} & 2a+2c \\ +2a & & -b \\ \hline 2a & c & -b & -2ab-2bc. \\ +c & c & -b \\ \hline +2ac & cc. & +bb \end{array} \end{array}$$

$$\text{Cubus } a^3 + 3aab + 3abb + b^3$$

$$\text{Radix } a+b$$

$$\text{Divisor } 3aa$$

$$+3aab | +b.$$

$$+3aa$$

$$\text{Cub. } 27x^6 - 54x^5 + 171x^4 - 188x^3 + 285xx - 150x + 125 \quad \text{Cub. } 27x^6$$

$$27x^6 - 54x^5 + 36x^4 - 8x^3 + 60xx - 150x + 125 \quad \text{Rad. } 3xx$$

$$\begin{array}{r} \circ \quad \circ + 135x^4 - 180x^3 + 225xx \quad \circ \quad \circ 3xx \\ + 135x^4 - 180x^3 + 225xx \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \circ \quad \circ \quad \circ \\ \hline \circ \quad \circ \quad \circ \end{array}$$

$$3xx$$

$$9x^4.$$

$$\text{Radix } 3xx - 2x + 5.$$

$$\text{per } 3$$

$$\text{Primus divif. } 27x^4$$

$$-54x^5$$

$$27x^4 \text{ i. div.}$$

$$\text{Secundus divisor } 27x^4 - 36x^3 + 12xx + 27x^2 - 2x \text{ quot. primus.}$$

| | | | | | |
|---------------------------|----------|----------------|------------------------|--------------|--|
| | $-2x$ | $-2x$ | | $3xx - 2x$ | |
| $+27x^4$ | $-2x$ | $-2x$ | $3xx - 2x$ | $3xx - 2x$ | |
| $-2x$ | $+4xx$ | $+4xx$ | $-6x^3 + 4xx$ | | |
| $-54x^3$ | $+3xx$ | $-2x$ | $9x - 6x^3$ | | |
| | $+12x^4$ | $-8x^3$ | $9x^4 - 12x^3 + 4xx$ | | |
| per 3 | $+36x^4$ | | per 3 | 3 | |
| | | | $27x^4 - 36x^3 + 12xx$ | Secund. div. | |
| | | | $+5$ | $+5$ | |
| $+135x^4$ | $+5$ | quotus secund. | | $+5$ | |
| $+27x^4$ | | | $+5$ | $+5$ | |
| | | | $+25$ | $+25$ | |
| | | | $+3xx - 2x$ | $+5$ | |
| $+27x^4 - 36x^3 + 12xx$ | | | $+75xx - 50x$ | $+125$ | |
| | $+5$ | per 3 | | | |
| $+135x^4 - 180x^3 + 60xx$ | | | $+225xx - 150x$ | | |

Cæterùm si quantitates, ex quibus radix extrahi debet, tales fuerint, ut radix prædicto modo inveniri non possit, designabitur ipsa præfigendo quantitibus propositis signum $\sqrt{\quad}$. Vt ad extrahendum radicem quadratam ex aq , scribo \sqrt{aq} ; quo indicatur radicem quadratam ex aq esse extractam, vel adhuc esse extrahendam. Sic & $\sqrt{aa+bb}$ designabit radicem quadratam ex $aa+bb$.

Similiter ad extrahendum radicem cubicam ex aaq , scribo $\sqrt[3]{C.aaq}$. Vt & $\sqrt[3]{C.a^3-b^3+abb}$, ad extrahendam radicem cubicam ex a^3-b^3+abb . Quæ quidem radices vocantur quantitates Surdæ seu Irrationales, ad modum numerorum surdorum seu irrationalium, de quibus Arithmetici agunt.

Vbi notandum, signum $\sqrt{\quad}$, vocari Signum Radicale, atque in genere usurpari ad denotandam quamcunque radicem, siue Quadratam, siue Cubicam, siue Quadrato-quadratam, &c; sed ad illam distinguendam, communiter scribi \sqrt{Q} , vel etiam simpliciter $\sqrt{\quad}$, ad denotandam radicem Quadratam: & $\sqrt[3]{C}$, ad denotandam radicem Cubicam: & \sqrt{QQ} seu $\sqrt{\sqrt{\quad}}$, ad denotandam radicem Quadrato-quadratam, &c. quæ radices etiam sic designantur: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, &c; atque ab aliis, hoc quoque pacto: $\sqrt[2]{z}$, $\sqrt[3]{c}$, $\sqrt[2]{z}$, &c.

DE LOGISTICA FRACTIONVM.

Quandoquidem ex divisione quantitatum simplicium & compositarum ostensum est oriri Fractiones, sicut in Arithmetica vulgari, quarum operatio easdem leges sequitur atque numerorum fractorum vulgariū; satis erit, si suppositis horum regulis, illarum operationem exemplis exponamus.

Hinc, cum per fractionem quālibet designetur semper divisionem aliquam esse faciendam, utpote illarum quantitatum, quæ numeratoris vicem gerunt, per quantitates, quæ pro denominatore habentur, facile constat, si numerator denominatori fuerit æqualis, tunc per fractionem illam designari unitatem. Ut $\frac{bb}{bb}$, $\frac{ab+bb}{ab+bb}$, & similes. Vnde patet, quānam ratione unitas denotari possit in formam fractionis, cujus denominator sit is, qui requiritur.

Quòd si verò ab , $aa-bb$, &c. in formam fractionis designare velimus, oportet tantum, assumpto ab & $aa-bb$, &c. tanquam numeratore fractionis, subscribere pro denominatore unitatem, hoc pacto: $\frac{ab}{1}$ & $\frac{aa-bb}{1}$, &c.

Porrò si quantitas aliqua, ut a , designanda sit in formam fractionis, cujus denominator ea sit, quæ præscribitur, ut d , aut $a+b$, &c; oportet multiplicato a per d , aut per $a+b$, scribere $\frac{ad}{d}$, aut $\frac{aa+ab}{a+b}$, &c.

Non aliter fit, si $a + \frac{aa}{d}$ sit redigendum ad formam unius fractionis. Etenim, multiplicato a per denominatorem d , addatur producto ad numerator aa , & summæ $ad+aa$ subscribatur denominator d , habebiturque $\frac{ad+aa}{d}$. Sic & $\frac{aa}{d} - a$ in formam unius fractionis reductum, facit $\frac{aa-ad}{d}$. Haud fecus si $a + b + \frac{aa+bb}{a-b}$ reducatur ad fractionem, fiet $\frac{2aa}{a-b}$.

Cæterum notandum hîc, cum ad dividendum aa per bb , scribatur $\frac{aa}{bb}$ pro quotiente; ideo ad hunc quotientem sive fractionem $\frac{aa}{bb}$ multiplicandum per divisorem seu denominatorem bb , pro-

pro-

producto scribendum esse numeratorem aa . Non secus si $\frac{bb}{a-b}$ multiplicetur per $a-b$, productum erit bb . Vnde patet ad multiplicandum $\frac{a}{2b}$ per $2ab$; quoniam multiplicato $\frac{a}{2b}$ per $2b$, productum est a ; superest tantum ut hoc productum adhuc multiplicetur per a , ut habeatur quæsitum productum aa . Similiter ad multiplicandum $\frac{1}{2}$ per $2ab$: cum multiplicato $\frac{1}{2}$ per 2 , fiat 1 ; hinc multiplicandum tantum restat 1 per ab , & fit productum quæsitum $1 \cdot ab$ seu ab . Et sic de aliis.

De Reductione fractionum ad simpliciores.

I Am ad reducendum fractionem $\frac{aac}{cd}$ ad simpliciore; elisâ comuni literâ c , quæ tam in numeratore quàm in denominatore reperitur, fiet $\frac{aa}{d}$. Sic & ad abbreviandum $\frac{ab^3}{abc}$: elisis literis a, b , numeratoris atque denominatoris, hoc est, diviso tam ab^3 quàm abc per ab , fiet $\frac{bb}{c}$.

Eodem modo ad abbreviandum $\frac{aac - aad}{cd - dd}$: quoniam diviso aac per cd , oritur $\frac{aa}{d}$, id quod multiplicatum per $cd - dd$, producit $aac - aad$; hinc $\frac{aac - aad}{cd - dd}$ ad minores terminos reductum, erit $\frac{aa}{d}$.

Pari ratione ad reducendum $\frac{aac - aad - bbc + bbd}{cd - dd}$: quia (ut supra) diviso aac per cd , oritur $\frac{aa}{d}$, id quod multiplicatum per $cd - dd$, producit $aac - aad$; & rursus $-bbc$ diviso per cd , oritur $-\frac{bb}{d}$, quod per $cd - dd$ multiplicatum producit $-bbc + bbd$; hinc $\frac{aac - aad - bbc + bbd}{cd - dd}$ abbreviatum, facit $\frac{aa - bb}{d}$.

Sic & $\frac{a^5 c c o o m m + 4 a^6 c c m^3 p}{o o p p x^4 + 4 m p^3 x^4}$ abbreviatum, facit $\frac{a^5 c c m m}{p p x^4}$.

Pag. 214.
lin. 15.

Non secus $\frac{aac - aad - acd + add}{cd - dd}$ reducitur ad $\frac{aa}{d} - a$, vel

$\frac{aa-ad}{d}$. Nam $aac - aad$ divisum per $cd - dd$, facit $\frac{aa}{d}$; & $-acd + add$ divisum per $cd - dd$, facit $-a$.

Similiter si fuerit $\frac{a^3 - abb}{aa + 2ab + bb}$: divido $a^3 - abb$ per $aa + 2ab + bb$, & relinquitur post divisionem $+ 2abb + 2b^3$ (nullâ hîc quotientis $a - 2b$ habitâ ratione). Deinde divido $aa + 2ab + bb$ per reliquum $+ 2abb + 2b^3$, & fit quotiens $\frac{a}{2bb} + \frac{1}{2b}$. Hinc cum perfecta sit divisio, & nihil remaneat, dividendus erit numerator $a^3 - abb$ & denominator $aa + 2ab + bb$ per $2abb + 2b^3$, Invenieturque $\frac{aa}{2bb} - \frac{a}{2b}$, pro numeratore,

$$\& \frac{a}{2bb} + \frac{1}{2b}, \text{ pro denominatore.}$$

hoc est, multiplicando ubique per $2bb$, habebitur $\frac{aa-ab}{a+b}$.

Nec aliter fit ad abbreviandum $\frac{a^3 - b^3}{aa - bb}$. Divisis enim $a^3 - b^3$ per $aa - bb$, relinquitur $abb - b^3$: dein $aa - bb$ per $abb - b^3$, fit quotiens $\frac{a}{bb} + \frac{1}{b}$, & perfecta est divisio absque reliquo. Quare si dividatur $a^3 - b^3$ & $aa - bb$ per $abb - b^3$,

$$\text{fiet } \frac{aa}{bb} + \frac{a}{b} + 1, \text{ pro numeratore.}$$

$$\& \frac{a}{bb} + \frac{1}{b}, \text{ pro denominatore.}$$

Ideoque si ubique multiplicetur per bb , fiet fractio reducta $\frac{aa+ab+bb}{a+b}$.

Simili operatione reducitur $\frac{a^4 - b^4}{aa+ab}$ ad $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{a}$: Vt

$$\& \frac{x^3 - 25x}{xx+10x+25} \text{ ad } \frac{xx-5x}{x+5}. \text{ Et sic de aliis.}$$

Ostendâ igitur ratione, quâ fractiones ad simpliciores reduci possunt, superest ut explicemus, quo pacto datis duabus aut pluribus quantitibus, sive simplicibus, sive compositis, inveniatur minima quantitas, quæ per ipsas sine reliquo dividi potest. id quod in sequentibus usum habere patebit. Est autem operatio similis ei, quâ secundum prop. 36. lib. 7. Elementorum Euclidis, datis duobus numeris, minimus invenitur numerus, qui per ipsos sine reliquo dividitur.

Vt,

Vt, ad inveniendum minimam quantitatem, quæ dividi potest per duas datas aac & cd : constitutis aac & cd in formam fractionis, hoc pacto: $\frac{aac}{cd}$; reduco fractionem hanc ad ejus primitivam, seu

simplicio rem $\frac{aa}{d}$. Quibus juxta se positis, hoc modo: $\frac{aac}{cd} \times \frac{aa}{d}$,

si multiplicatio instituat per crucem, procreabitur eadem quantitas ex aac in d , atque ex cd in aa : fiet enim utrobique $aacd$, minima quippe quantitas, quæ sine reliquo dividi potest per aac & cd .

Sic & ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi potest per duas datas $aac - aad$ & $cd - dd$; reduco (ut ante) fractionem $\frac{aac - aad}{cd - dd}$ ad ejus primitivam $\frac{aa}{d}$: Tum multiplicato $aac - aad$ per d , aut $cd - dd$ per aa , fiet quantitas quæ sita $aacd - aadd$. minima scilicet, quæ divisibilis est per $aac - aad$ & $cd - dd$.

Similiter si dentur $a^4 - b^4$ & $aa + ab$: quoniam $\frac{a^4 - b^4}{aa + ab}$ reducit ad $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{a}$, & $a^4 - b^4$ multiplicatum per a facit $a^5 - ab^4$; erit $a^5 - ab^4$ quantitas quæ sita.

Eâdem ratione si datæ fuerint $x^3 - 25x$ & $xx + 10x + 25$, erit quæ sita quantitas $x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x$. Et sic de cæteris.

Quòd si verò compertum sit aut constet, duas illas datas quantitates ad simpliciores reduci non posse, sed primitivas esse; oportet unam per alteram multiplicare, ad inveniendam quantitatem quæ sitam. Vt ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi potest per $aa - ab$ & $a + b$: quoniam $\frac{aa - ab}{a + b}$ ad simpliciores terminos reduci nequit, multiplico $aa - ab$ per $a + b$, (cum secundùm præcedentia scribendum foret $\frac{aa - ab}{a + b} \times \frac{aa - ab}{a + b}$), & fit quæ sita quantitas $a^3 - abb$.

Cæterùm datis tribus aut pluribus quantitibus, inveniatur minima quantitas quæ per ipsas absque reliquo dividi potest, hoc modo: Vt ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi potest per $a^3 - abb$, $aa + 2ab + bb$, & $aa - bb$: quæro primum, ut ante, minimam quantitatem, quæ dividi potest per

$a^3 - abb$ & $aa + 2ab + bb$, & fit $a^4 + a^3b - aabb - ab^3$.
 quæ cum & dividatur per $aa - bb$, manifestum est $a^4 + a^3b - aabb - ab^3$ esse quantitatem quæsitam. Sic & si datæ fuerint
 $a^4 - b^4$, $aa + ab$, $a^4 + ab^3$, & $a + b$: inventâ primùm minimâ
 quantitate $a^5 - ab^4$, quæ dividi potest per duas $a^4 - b^4$ & $aa + ab$,
 (ut ante), quoniam ipsa dividi nequit per tertiam $a^4 + ab^3$: hinc
 ad $a^5 - ab^4$ & $a^4 + ab^3$ similiter aliam quæro, ut $a^7 - a^6b +$
 $a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6$. quæ cum hîc etiam divisibilis sit per
 reliquam $a + b$, patet $a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6$
 esse quantitatem quæsitam. Et sic de cæteris.

*De Reductione fractionum ad eandem
denominationem.*

Q Vibus explicatis, facile est ostendere, quâ ratione fractiones
 diversæ denominationis reducantur ad fractiones ejusdem
 denominationis. Ut ad reducendum fractiones $\frac{b^3d}{aac}$ & $\frac{a^3}{cd}$ ad ean-
 dem denominationem: quæro primùm minimam quantitatem,
 quæ dividi potest per denominatores aac & cd (ut jam est ostensum),
 & fit $aacd$: quæ erit denominator communis. Iam ad in-
 veniendum numeratores, dividatur denominator inventus $aacd$
 per aac & cd , unumquemque scilicet ex denominatoribus datis,
 & quotientis d & aa multiplicentur per numeratores b^3d & a^3
 datarum fractionum, ut habeantur numeratores quæsitæ b^3dd & a^5 ,
 fiuntque fractiones quæsitæ $\frac{b^3dd}{aacd}$ & $\frac{a^5}{aacd}$.

Similiter ad reducendum $\frac{b^4}{aac - aad}$ & $\frac{a^3 + b^3}{cd - dd}$ ad eandem de-
 nominationem: invento denominatore communi $aacd - aadd$,
 minimâ nempe quantitate, quæ dividi potest per $aac - aad$ &
 $cd - dd$, divido $aacd - aadd$ per $aac - aad$ & $cd - dd$, &
 quotientes d & aa multiplico per numeratores b^4 & $a^3 + b^3$, fiunt-
 que fractiones quæsitæ $\frac{b^4d}{aacd - aadd}$ & $\frac{a^5 + aab^3}{aacd - aadd}$.

Eodem modo si $\frac{125}{x^3 - 25x}$ & $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$ reducantur ad ean-
 dem denominationem, provenient $\frac{125x + 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$ &
 $\frac{x^3 - 30xx + 125x}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Non

Non secus $\frac{a^5}{a^4 - b^4}$, $\frac{a^3 - aab}{aa + ab}$, $\frac{a^5 - b^5}{a^4 + ab^3}$, & $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$ redu-
ctæ sub eodem denominatore, facient

$$\frac{a^7 - a^5 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^6}{a^7 - 3a^5 b + 5a^4 bb - 6a^3 b^3 + 5a^2 b^4 - 3a b^5 + aab^6},$$

$$\frac{a^6 - a^5 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^6}{a^7 - a^5 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^6},$$

$$\frac{a^5 - a^7 b + a^5 bb - a^5 b^3 - a^3 b^5 + aab^5 - ab^7 + b^8}{a^7 - a^5 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^6}, \&$$

$$\frac{a^5 - a^7 b + 2a^5 bb - 2a^3 b^3 + 2a^2 b^4 - 2a^3 b^5 + aab^6 - ab^7}{a^7 - a^5 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^6}.$$

De Additione & Subtractione fractionum.

Additio & Subtractio fractionum eodem modo perficiuntur, atque additio & subtractio numerorum fractionum vulgarium. Etenim si fractiones ejusdem fuerint denominationis, oportet tantum earum numeratores addere aut subtrahere, & summæ vel reliquo subscribere denominatorem communem. Vt ad addendum $\frac{aa}{c}$ ad $\frac{bb}{c}$, summa erit $\frac{aa+bb}{c}$. Sic & $\frac{2ad}{d+e}$ additum ad $\frac{2ae}{d+e}$, facit $\frac{2ad+2ae}{d+e}$, seu $2a$. Non secus si addantur $\frac{bd}{b+d}$, $d + \frac{bb}{b+d}$, & $a - \frac{dd}{b+d}$, erit summa $a + \frac{2bd+bb}{b+d}$.

Quod si fractiones diversæ denominationis fuerint, reducendæ erunt prius ad eandem denominationem: quo factò, operandum erit ut jam dictum est. Vt ad addendum $\frac{125}{x^3-25x}$ ad $\frac{x-25}{xx+10x+25}$:

fiet summa $\frac{x^3 - 30xx + 250x + 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Non secus si addantur $\frac{a^5}{a^4 - b^4}$, $\frac{a^3 - aab}{aa + ab}$, $\frac{a^5 - b^5}{a^4 + ab^3}$, & $\frac{aa+ab+bb}{a+b}$, erit summa $\frac{4a^5 - 6a^7 b + 9a^5 bb - 9a^5 b^3 + 7a^4 b^4 - 6a^3 b^5 + 3aab^5 - 2ab^7 + b^8}{a^7 - a^5 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^6}$.

Iam ad subtrahendum $\frac{aa}{c}$ de $\frac{bb}{c}$, scribo pro differentia $\frac{bb - aa}{c}$.

Eodem modo subductis $\frac{2ae}{d-e}$ à $\frac{2ad}{d-e}$, reliquum erit $\frac{2ad - 2ae}{d-e}$ seu

$2a$ Similiter $\frac{bd}{b+d}$ de $d + \frac{bd}{b+d}$ relinquit $\frac{dd+bb}{b+d}$.

Nec aliter fit, si subtrahendum sit $\frac{b^4}{aac - aad}$ de $\frac{a^3 + b^3}{cd - dd}$. Ete-

nim reductis ad eundem denominatorem, si auferatur $\frac{b^4 d}{aacd - aadd}$
 de $\frac{a^5 + aab^3}{aacd - aadd}$ relinquetur $\frac{a^5 + aab^3 - b^4 d}{aacd - aadd}$. Sic & si tollatur
 $\frac{125}{x^3 - 25x}$ ex $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$, remanebit $\frac{x^3 - 30xx - 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Eâdem ratione ad subducendum $\frac{aa - ab}{a + b}$ de a , reductâ quanti-
 tate a ad denominatorem $a + b$, demptoque $\frac{aa - ab}{a + b}$ de $\frac{aa + ab}{a + b}$,
 fiet reliquum $\frac{2ab}{a + b}$. Non secus si subtrahatur $b + \frac{cc}{b + d}$ de $a + b$,
 relinquetur $a - \frac{cc}{b + d}$.

De Multiplicatione fractionum.

AD multiplicandum $\frac{ab}{c}$ per $\frac{de}{f}$, multiplico numeratorem a b
 per numeratorem de , ut & denominatorem c per denomi-
 natorem f (ad modum fractionum vulgarium), fitque productum
 $\frac{abde}{cf}$. Sic & $\frac{aa - bb}{c}$ multiplicatum per $\frac{2ab}{b + c}$ producit $\frac{2a^3 b - 2ab^3}{bc + cc}$.

Ad faciliorem autem operationem non rarò convenit abbrevi-
 viare quantitates per crucem. Ut ad multiplicandum
 $\frac{aac - aad - bbc + bbd}{aa + 2ab + bb}$ per $\frac{a^3 - abb}{cd - dd}$: quoniam $aac - aad - bbc + bbd$
 $+ bbd$ & $cd - dd$ reducuntur ad simpliciores $aa - bb$ & d , ut &
 $a^3 - abb$ & $aa + 2ab + bbd$ ad $aa - ab$ & $a + b$; hinc loco mul-
 tiplicandi $aac - aad - bbc + bbd$ per $a^3 - abb$ multiplico $aa - bb$
 per $aa - ab$; & loco multiplicandi $aa + 2ab + bbd$ per $cd - dd$
 multiplico $a + b$ per d : eritque productum $\frac{a^2 - a^3 b - aabb + ab^3}{ad + bd}$.

Porrò ad multiplicandum $aa - bb$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$: substituto 1
 pro denominatore ipsius $aa - bb$, quoniam numerator $aa - bb$
 & denominator $a + b$ reduci possunt ad $a - b$ & 1 , hinc multi-
 plicatis numeratoribus inter se, ut & denominatoribus, fiet pro-
 ductum $\frac{a^3 - 2aab + abb}{1}$ seu $a^3 - 2aab + abb$.

Eâdem ratione cùm multiplicatur $a + \frac{bb}{a - b}$ per $a - 2b + \frac{bb}{a}$, hoc
 est, $\frac{aa - ab + bb}{a - b}$ per $\frac{aa - 2ab + bb}{a}$: quoniam $aa - 2ab + bb$
 & $a -$

& $a-b$ reduci possunt ad $a-b$ & 1; hinc multiplicatis $aa-ab$
 $+bb$ per $a-b$, & a per 1, provenit $\frac{a^3 - 2aab + 2abb - b^3}{a}$ seu
 $aa - 2ab + 2bb - \frac{b^3}{a}$.

Similiter si ad multiplicandum proponatur $\frac{xx-5x}{x+5}$ per $\frac{xx-25}{x}$:
 reductis $xx-5x$ & x ad $x-5$ & 1, itemque $xx-25$ & $x+5$
 ad $x-5$ & 1, multiplico tantum $x-5$ per $x-5$, & fit produ-
 ctum $xx-10x+25$.

Præterea ad multiplicandum $a + \frac{bb}{a-b}$ per $a-b$: quoniam a
 per $a-b$ facit $aa-ab$, & $\frac{bb}{a-b}$ per $a-b$ facit bb ; hinc produ-
 ctum quæsitum erit $aa-ab+bb$. Quâ quoque ratione multi-
 plicabitur $\frac{aa-ab}{a+b}$ per $aa-bb$, & producetur $a^3 - 2aab + abb$.
 cum enim $aa-bb$ fiat ex $a+b$ in $a-b$, & $\frac{aa-ab}{a+b}$ multiplica-
 tum per $a+b$ producat $aa-ab$, superest tantum multiplican-
 dum $aa-ab$ per $a-b$, ut habeatur $a^3 - 2aab + abb$.

Denique si multiplicandum sit $\frac{a^3 - abb}{cd - dd}$ per $c-d$, fiet, divisio
 $cd-dd$ per $c-d$, productum $\frac{a^3 - abb}{a}$.

De Divisione fractionum.

AD dividendum $\frac{ab^3}{c}$ per $\frac{bb}{c}$: omisso communi denominatore
 c , divido ab^3 per bb , fietque quotiens ab . Pari ratione si
 $\frac{a^3 - abb}{c-d}$ dividatur per $\frac{aa+2ab+bb}{c-d}$, oriatur $\frac{a^3 - abb}{aa+2ab+bb}$ seu
 $\frac{aa-ab}{a+b}$.

Quòd si denominatores fuerint diversi, reductio ad eandem
 denominationem fiet, si multiplicatio instituat per crucem, ut
 in vulgaribus. Ut ad dividendum $\frac{a^3 - b^3}{a+b}$ per $\frac{aa-ab+bb}{c}$: quo-
 niam multiplicato prioris numeratore $a^3 - b^3$ per posterioris de-
 nominatorem c , & hujus numeratore $aa-ab+bb$ per illius
 denominatorem $a+b$, fiunt $a^3c - b^3c$ & $a^3 + b^3$; hinc quotiens
 erit $\frac{a^3c - b^3c}{a^3 + b^3}$.

Advertendum autem hîc est, ad facilitatem operationis, fractionum numeratores, sicut etiam, denominatores non rarò ad simpliciores terminos reduci possent. Ut ad dividendum $\frac{a^4 - b^4}{aa - 2ab + bb}$

per $\frac{aa + ab}{a - b}$: cum numeratores $a^4 - b^4$ & $aa + ab$ reduci possint ad $a^3 - aab + abb - b^3$ & a , & denominatores $aa - 2ab + bb$ & $a - b$ ad $a - b$ & 1 ; ideo loco multiplicandi $a^4 - b^4$ per $a - b$, multiplico $a^3 - aab + abb - b^3$ per 1 , & fit $a^4 - aab + abb - b^3$; & loco multiplicandi $aa + ab$ per $aa - 2ab + bb$ multiplico a per $a - b$, & fit $aa - ab$. unde quotiens divisionis fit

$$\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{aa - ab} \text{ vel } a + \frac{bb}{a}. \text{ Eâdem ratione si } \frac{x^4 - 625}{xx - 10x + 25}$$

dividatur per $\frac{xx + 5x}{x - 5}$, oriatur $\frac{x^3 - 5xx + 25x - 125}{xx - 5x}$. Nam $x^4 - 625$ & $xx + 5x$ reduci possunt ad $x^3 - 5xx + 25x - 125$ & x , quin & $xx - 10x + 25$ & $x - 5$ ad $x - 5$ & 1 , unde producta ex multiplicatione per crucem fiunt $x^3 - 5xx + 25x - 125$ & $xx - 5x$.

Porrò ad dividendum $a^3 - 2aab + abb$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$: substituto 1 pro denominatore dividendi $a^3 - 2aab + abb$, quoniam numeratores $a^3 - 2aab + abb$ & $aa - ab$ reduci possunt ad $a - b$ & 1 ; hinc multiplicatis $a - b$ per $a + b$ & 1 per 1 , fiet quotiens $aa - bb$.

Sic & ad dividendum $aa + \frac{3abb}{a + 4b}$ per $a + b$, hoc est, $\frac{a^2 + 4aab + 3abb}{a + 4b}$ per $\frac{a + b}{1}$: divido $a^3 + 4aab + 3abb$ per $a + b$, & fit $aa + 3ab$, unde quotiens quæsitus fit $\frac{aa + 3ab}{a + 4b}$. Haud aliter, si dividatur $aa - ab$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$, oriatur $a + b$. Et $\frac{xx + 5x}{x - 5}$ per $xx + 5x$, oriatur $\frac{1}{x - 5}$. Ac $a^3 - aab$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$, oriatur $aa + ab$. Et denique $\frac{xx + 5x}{x - 5}$ per $x + 5$, exsurget $\frac{x}{x - 5}$.

De Radicum extractione ex fractionibus.

CVM in Radicum extractione ex fractionibus radix ex numeratore & denominatore extracta exhibeat radicem quæsitam: hinc si extrahenda sit radix quadrata ex $\frac{aabb}{cc}$, quoniam ra-

dix quadrata ex $aabb$ est ab , & radix quadrata ex cc est c , scribo pro radice quæsitâ $\frac{ab}{c}$.

Eodem modo, si extrahatur radix quadrata ex $\frac{a^4 - 2aabb + b^4}{aa + 4ab + 4bb}$ fiet $\frac{aa - bb}{a + 2b}$. Pari ratione ad extrahendam radicem quadratam ex $4 + \frac{64xx - 160x}{25}$: quoniam $4 + \frac{64xx - 160x}{25}$ in formam fractionis facit $\frac{100 - 160x + 64xx}{25}$, & radix quadrata ex $100 - 160x + 64xx$ est $10 - 8x$, & radix quadrata ex 25 est 5 ; erit radix quæsitâ $\frac{10 - 8x}{5}$ seu $2 - \frac{8x}{5}$.

Non secus radix cubica ex $\frac{27x^6 - 54x^5 + 171x^4 - 188x^3 + 285xx - 150x + 125}{x^3 - 9xx + 27x - 27}$ erit $\frac{3xx - 2x + 5}{x - 3}$.

Quòd si quæsitâ radix prædicto modo ex numeratore atque denominatore extrahi nequit, præponitur datæ fractioni signum radicale $\sqrt{\quad}$. Vt ad extrahendam radicem quadratam ex $\frac{ccxx}{4bb} - ac$, scribo $\sqrt{\frac{ccxx}{4bb} - ac}$; vel quia $\frac{ccxx}{4bb} - ac$ in formam fractionis facit $\frac{ccxx - 4abbc}{4bb}$, & ex denominatore $4bb$ extrahi potest radix, quæ est $2b$: ideo quæsitâ radix sic quoque scribi poterit $\sqrt{\frac{ccxx - 4abbc}{2b}}$. Similiter radix quadrata ex $\frac{aabb}{aa + bb}$, erit $\frac{ab}{\sqrt{aa + bb}}$.

Idem de reliquis radicibus est intelligendum.

DE LOGISTICA QVANTITATVM SURDARVM.

QVemadmodum fractiones oriuntur ex divisione imperfecta quantitatum, quarum una per alteram sine reliquo dividi nequit: ita ex extractione radicis quantitatum radicem non habentium exsurgunt quantitates Surdæ, quarum operationem sequentibus exemplis exponere visum fuit.

De Reductione quantitatum surdarum.

Sciendum itaque, quòd, sicut ad operationem fractionum diversæ denominationis oportet prius ipsas ad eundem denominato-

naturem reducere, ita & opus sit, quantitates surdas, si diversa signa radicalia habuerint, reducere ad idem signum radicale. Quod fit, si ad numeros, à quibus radices denominantur, minimus inveniatur numerus, qui per ipsos sine reliquo dividi possit. Vt ad reducendum \sqrt{aq} seu $\sqrt{2aq}$ & $\sqrt{C.aaq}$ seu $\sqrt{3aaq}$ ad idem signum radicale: quæro ad 2 & 3 (numeros à quibus \sqrt{Q} & \sqrt{C} denominantur) minimum numerum, qui per ipsos sine reliquo dividi potest, qui est 6. Iam cum 6 divisò per 2 oriatur 3, & per 3 divisò oriatur 2; hinc aq multiplicandum erit in se cubicè, & aaq quadratè; fientque sub eodem signo $\sqrt{QC.a^3q^3}$ seu $\sqrt{6a^3q^3}$, & $\sqrt{QC.a^2qq}$ seu $\sqrt{6a^2qq}$. Sic & \sqrt{ab} & $\sqrt{\sqrt{a^3b+ab^3}}$ sub eodem signo radicali erunt $\sqrt{\sqrt{aabb}}$ & $\sqrt{\sqrt{a^3b+ab^3}}$.

Huc refer cùm quantitas aliqua rationalis per multiplicationem in se reducitur ad aliquod signum radicale. Exempli gratiâ: ad reducendum $a+b$ ad idem signum radice cum $\sqrt{aa+bb}$ oportet multiplicare $a+b$ in se quadratè, & fit $\sqrt{aa+2ab+bb}$. Non secus si multiplicetur $a+b$ in se cubicè, fiet

$\sqrt{C.a^3+3aab+3abb+b^3}$ sub eodem signo cum $\sqrt{C.a^3-b^3+abb}$.

Et sic de aliis.

Deinde sciendum, quantitates surdas non rarè ad simplices reduci posse, tollendò ex signo radicali quicquid est rationale: nimirum, dividendo quantitates sub eodem signo $\sqrt{\quad}$ comprehensas per aliquod Quadratum, vel Cubum, &c. per quod multiplicatione fuerint productæ. Vt $\sqrt{75aa}$ reduci potest ad $5a\sqrt{3}$: nam $75aa$ producitur ex multiplicatione $25aa$ per 3, quarum radices sunt $5a$ & $\sqrt{3}$; adeò ut, si $75aa$ dividatur per quadratum $25aa$, sub signo radicali tantùm scribendum sit 3, hoc modo: $5a\sqrt{3}$. Id quod monstrat $5a$, hoc est, $\sqrt{25aa}$, multiplicatum esse per $\sqrt{3}$.

Eodem modo cum $a^3b+aabb$ dividi possit per quadratum aa , & oriatur $ab+bb$; fit ut pro $\sqrt{a^3b+aabb}$ scribi queat $a\sqrt{ab+bb}$.

Similiter quoniam $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$ dividi potest per quadratum $aa+2ac+cc-2ab-2bc+bb$, cujus radix est $a+c-b$, & quotiens est $ab+bb$; hinc

hinc loco $\sqrt{a^3b - aabb + 2aabc - abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4}$
 scribi potest $a + c - b\sqrt{ab + bb}$.

Non secus pro $\sqrt{\frac{aaomm}{ppxz} + \frac{4aam^3}{pxz}}$ scribi poterit $\frac{am}{pz} \sqrt{oo + 4mp}$: *Pag. 31. lin. 9.*

reducto enim ultimo termino ad eandem denominationem cum priori, potest utriusque numerator dividi per $aamm$, cujus radix est am , oriturque $oo + 4mp$. Denominator autem cum sit rationalis, liberabitur à signo \sqrt , extrahendo radicem ex $ppxz$.

Eàdem ratione loco

$\sqrt{C. x^6 - 9x^5 + 27x^4 - 15x^3 - 108xx + 324x - 324}$
 scribi potest $x - 3\sqrt{C. x^3 + 12}$. Et sic de aliis.

Verùm enimverò quoniam sæpenumero difficile est invenire Quadratum, Cubum, &c. per quod divisio, ad hanc reductionem necessaria, institui possit; non inutile fuerit, si hoc loco ostendamus, quã ratione datarum quarumlibet quantitatum divisores omnes inveniantur; perinde atque in numeris est ostensum. vide p. 300.

Dividantur datæ quantitates per quantitatem aliquam primitivam (hoc est, quæ non nisi per unitatem aut se ipsam dividi potest), & rursus quotiens per hanc eandem sive aliam primitivam, idque fiat donec perveniatur ad quantitatem aliquam primitivam, quæ per se ipsam est dividenda. Vt ad inveniendum divisores omnes quantitatis $a^3b + aabb$: divido $a^3b + aabb$ per a , & fit $aab + abb$, id quod rursus per a divisum dat $ab + bb$. Iam quia quotiens hïc per a amplius dividi nequit, divido $ab + bb$ per b , & provenit $a + b$, quæ quantitas est primitiva, ideoque per se ipsam dividenda. Quibus peractis referentur divisores $a, a, b,$ & $a + b$.

Ratio inveniendi divisores omnes quarumcunque datarum quantitatum.

$$\begin{array}{r} a^3b + aabb \quad | \quad aab + abb \quad | \quad ab + bb \quad | \quad a + b \quad | \quad 1 \\ a \quad \quad \quad | \quad a \quad \quad \quad | \quad b \quad \quad \quad | \quad a + b \end{array}$$

Iam ut ex hisce divisoribus inveniantur divisores omnes quantitatis $a^3b + aabb$, multiplico primùm a per a , & fit aa . Deinde b per $1, a,$ & aa , fiuntque $b, ab,$ & aab . Denique multiplico $a + b$ per $1, a, aa, b, ab,$ & aab , & fiunt $a + b, aa + ab, a^3 + aab, ab + bb, aab + abb,$ & $a^3b + aabb$.

$$\begin{array}{r} \text{I.} \\ \hline a. \quad a. \\ \hline a a. \\ \hline b. \quad a b. \quad a a b. \end{array}$$

$$a + b. aa + ab. a^3 + aab. ab + bb. aab + abb. a^3 b + aabb.$$

Atque ita divisores omnes erunt 1, a, aa, b, ab, aab, a + b, aa + ab, a³ + aab, ab + bb, aab + abb, & a³ b + aabb.

Sic & ad inveniendum omnes divisores quantitatis $a^6 - 2a^4bb - 2aab^4 + b^6$: divido $a^6 - 2a^4bb - 2aab^4 + b^6$ per quantitatem primitivam $aa + bb$, & fit $a^4 - 3aabb + b^4$, id quod rursus divisum per quantitatem primitivam $aa + ab - bb$ dat $aa - ab - bb$, quæ quantitas etiam primitiva est, adeoque per se ipsam dividenda. Eruntque divisores reservandi $aa + bb$, $aa + ab - bb$, & $aa - ab - bb$.

$$\begin{array}{r} a^6 - 2a^4bb - 2aab^4 + b^6 \Big| a^4 - 3aabb + b^4 \Big| aa - ab - bb \Big| 1 \\ aa + bb \Big| aa + ab - bb \Big| aa - ab - bb \Big| \end{array}$$

Ex quibus ut inveniantur divisores omnes quantitatis $a^6 - 2a^4bb - 2aab^4 + b^6$: multiplico primùm $aa + bb$ per $aa + ab - bb$, & fit $a^4 + a^3b + ab^3 - b^4$. Deinde 1, $aa + bb$, $aa + ab - bb$, & $a^4 + a^3b + ab^3 - b^4$ per $aa - ab - bb$, fiuntque $aa - ab - bb$, $a^4 - a^3b - ab^3 - b^4$, $a^4 - 3aabb + b^4$, & $a^6 - 2a^4bb - 2aab^4 + b^6$.

$$\begin{array}{r} \text{I.} \\ \hline aa + bb. \quad aa + ab - bb. \\ \hline a^4 + a^3b + ab^3 - b^4. \end{array}$$

$aa - ab - bb. a^4 - a^3b - ab^3 - b^4. a^4 - 3aabb + b^4. a^6 - 2a^4bb - 2aab^4 + b^6$. Ita ut divisores omnes sint 1, $aa + bb$, $aa + ab - bb$, $a^4 + a^3b + ab^3 - b^4$, $aa - ab - bb$, $a^4 - a^3b - ab^3 - b^4$, $a^4 - 3aabb + b^4$, & $a^6 - 2a^4bb - 2aab^4 + b^6$.

Pag. 78,
lin. 12.

Eodem modo ut inveniantur divisores omnes quantitatis $a^6 + 2a^4cc + aac^4$: divido $a^6 + 2a^4cc + aac^4$ per a , & fit $a^5 + 2a^3cc + ac^4$, quod rursus per a divisum, dat $a^4 + 2aac + c^4$. Iam cum hic quotiens dividi amplius non possit per a aut c simileve quantitatem, divido $a^4 + 2aac + c^4$ per $aa + cc$, vel, quod hic idem est, ex $a^4 + 2aac + c^4$ extraho radicem quadratam

dratam $aa + cc$, quâ denuo per seipsam divisâ, provenit 1. Vnde cum divisores reservati sint $a, a, aa + cc$, & $aa + cc$; ideo ut ex iis inveniatur divisores omnes quantitatis $a^6 + 2a^4cc + aac^4$: multiplico primùm a per a , & fit aa : deinde 1, a , & aa per $aa + cc$, fiuntque $aa + cc, a^3 + acc, & a^4 + aacc$: ac denique $aa + cc, a^3 + acc, & a^4 + aacc$ per $aa + cc$, & fiunt $a^4 + 2aacc + c^4, a^5 + 2a^3cc + ac^4, & a^6 + 2a^4cc + aac^4$; eruntque divisores omnes 1, $a, aa, aa + cc, a^3 + acc, a^4 + aacc, a^4 + 2aacc + c^4, a^5 + 2a^3cc + ac^4, & a^6 + 2a^4cc + aac^4$.

$$\begin{array}{r|l}
 a^6 + 2a^4cc + aac^4 & a^5 + 2a^3cc + ac^4 \\
 a & a \\
 \hline
 & a^4 + 2aacc + c^4 \\
 & aa + cc \\
 & \hline
 & 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 I. \\
 \hline
 a. \quad a. \\
 \hline
 aa.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 aa + cc. a^3 + acc. a^4 + aacc. \\
 \hline
 aa + cc. a^4 + 2aacc + c^4. a^5 + 2a^3cc + ac^4. a^6 + 2a^4cc + aac^4.
 \end{array}$$

Similiter ad inveniendum divisores omnes quantitatis $a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4$: quia, factâ divisione per b , oritur $a^3 - aab + 2aac + acc - abb + bcc - 2bbc + b^3$, & hujus quotientis per $a + b$, oritur $aa - 2ab + 2ac - 2bc + cc + bb$, & radix quadrata ex $aa - 2ab + 2ac - 2bc + cc + bb$ est $a + c - b$, hoc est, $aa - 2ab - 2ac - 2bc + cc + bb$ divisum per $a + c - b$, dat $a + c - b$; divido demum $a + c - b$ per $a + c - b$, & fit 1. Vnde cum divisores reservati sint $b, a + b, a + c - b, & a + c - b$; multiplico b per $a + b$, & fit $ab + bb$: tum 1, $b, a + b$, & $ab + bb$ per $a + c - b$, fiuntque $a + c - b, ab + bc - bb, aa + ac + bc - bb, & aab + abc + bbc - b^3$: ac denique $a + c - b, ab + bc - bb, aa + ac + bc - bb, & aab + abc + bbc - b^3$ per $a + c - b$, fiuntque $aa - 2ab + 2ac - 2bc + cc + bb, aab + 2abc + bcc - 2abb - 2bbc + b^3, a^3 + 2aac + acc - aab - abb + bcc - 2bbc + b^3, & a^3b + aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4$. Atque ita divisores omnes erunt 1, $b, a + b, ab + bb, a + c - b, ab + bc - bb, aa + ac + bc - bb, aab + abc + bbc - b^3, aa - 2ab + 2ac - 2bc + cc + bb, aab + 2abc + bcc - 2abb - 2bbc + b^3, a^3 + 2aac$

$$+acc - aab - abb + bcc - 2bbc + b^3, \& a^3b - aabb + 2abc \\ + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4.$$

Non secus si proponatur $a^3bc - ab^3c$, invenientur ex divisoribus reservatis $a, b, c, a - b, \& a + b$ divisores sequentes: $1, a, b, ab, c, ac, bc, abc, a - b, aa - ab, ab - bb, aab - abb, ac + bc, aac - abc, abc - bbc, aabc - abbc, a + b, aa + ab, ab + bb, aab + abb, ac + bc, aac + abc, abc + bbc, aabc + abbc, aa - bb, a^3 - abb, aab - b^3, a^3b - ab^3, aac - bbc, a^3c - abb, aabc - b^3c, \& a^3bc - ab^3c.$

Neque prætereundum hoc loco videtur, quo pacto horum divisorum ope duæ pluresve quantitates datæ aliâ ratione, quam ex superioribus facilè fuit colligere, ad simplicissimos terminos reduci queant. Vt ad reducendum $a^3 - abb, aab - b^3, \& a^3 + aab - abb - b^3$ ad terminos simplicissimos, eandem cum ipsis rationem habentes; quæro primo (ut ante) omnes cujusque quantitatis datæ divisores: eruntque ipsius $a^3 - abb$ divisores $1, a, a - b, aa - ab, a + b, aa + ab, aa - bb, \& a^3 - abb$: ipsius autem $aab - b^3$ divisores erunt $1, b, a - b, ab - bb, a + b, ab + bb, aa - bb, \& aab - b^3$: at verò ipsius $a^3 + aab - abb - b^3$ divisores erunt $1, a - b, a + b, aa - bb, aa + 2ab + bb, \& a^3 + aab - abb - b^3$. Iam cum inter ipsos tres sint, qui sibi invicem respondeant, ut $a - b, a + b, \& aa - bb$, quorum ope datæ quantitates ad simpliciores reduci possunt; hinc ad inveniendum terminos simplicissimos, divido $a^3 - abb, aab, aab - b^3, \& a^3 + aab - abb - b^3$ per $aa - bb$ (utpote divisorem pluribus dimensionibus constantem), fiuntque $a, b, \& a + b$. Vbi notandum, quantitates propositas fore inter se primas, si nulli ex divisoribus sibi mutuò respondeant.

Quæ ratio inveniendi divisores non ineptè quoque adhiberi potest ad fractionum abbreviationem. Vt ad abbreviandum

Fide supra pag. 22. $\frac{a^3 - abb}{aa + 2ab + bb}$: quia tam numerator quàm denominator dividi potest per $a + b$, poterit pro $\frac{a^3 - abb}{aa + 2ab + bb}$ scribi $\frac{aa - ab}{a + b}$. Et sic de cæteris.

Inventis autem omnibus divisoribus, videndum est num aliqui ex ipsis sint quadrati, vel cubi, &c. qui si reperiantur, adhiberi poterunt ad prædictum modum liberandi quantitates ex signo radicali.

dicali. Vt quia inter divisores quantitatis $a^3b + aabb$ reperitur quadratum aa , poterit $\sqrt{a^3b + aabb}$, dividendo per aa , reduci ad $a\sqrt{ab + bb}$.

Sic & cum $a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4$ pro divisore habeat quoque quadratum $aa + 2ac + cc - 2ab - 2bc + bb$, poterit pro

$\sqrt{a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4}$ scribi $a + c - b\sqrt{ab + bb}$. Similiter cum numerus 75 inter divisores quoque habeat quadratum numerum 25, reduci poterit $\sqrt{75aa} = 5a\sqrt{3}$. Ita &, quia 1200 dividi potest per numeros quadratos 4, 16, 25, 100, & 400; poterit pro $\sqrt{1200aabb}$ scribi $2ab\sqrt{300}$ vel $4ab\sqrt{75}$, vel $5ab\sqrt{48}$, vel $10ab\sqrt{12}$, vel denique $20ab\sqrt{3}$.

Quòd si inter divisores præter unitatem quadratum nullum aut cubus &c. reperitur, non poterit data quantitas præcedenti modo reduci, nisi velis eam in formam fractionis designare. Vt quia 10 præter unitatem quadratum nullum inter divisores admittit, poterit $\sqrt{10aa}$, dividendo 10 per aliquod quadratum, ut lubet, ut 4, 25, 100, &c. denotari hoc pacto: $2a\sqrt{\frac{5}{2}}$, vel $5a\sqrt{\frac{2}{5}}$, vel $10a\sqrt{\frac{1}{10}}$, &c.

Sciendum denique, quòd, licet hæ quantitates omnes per se consideratæ furdæ existant, tamen inter se collatæ duorum sint generum: aliæ enim dicuntur Commensurabiles seu Communicantes; aliæ verò Incommensurabiles seu non Communicantes.

Communicantes sunt, quæ affinitatem habentes cum quantitatibus rationalibus, aut etiam numeris, inter se sunt ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, seu sicut numerus ad numerum.

Non Communicantes verò sunt, quarum unius ad alteram ratio non est ut quantitatis rationalis ad quantitatem rationalem, aut numeri ad numerum.

Ratio autem dignoscendi communicantes à non communicantibus est, si, postquam ad simplicissimos terminos sunt reductæ, reperiantur inter se esse ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, aut numerus ad numerum. Vt $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$ sunt communicantes, quia divisione per $\sqrt{3}$, maximum earum com-

munem divisorem, reducuntur ad $\sqrt{25aa} \& \sqrt{9aa}$, hoc est, ad $5a \& 3a$: adè ut pro $\sqrt{75aa} \& \sqrt{27aa}$ scribi possit $5a\sqrt{3} \& 3a\sqrt{3}$, quæ inter se sunt ut $5a$ ad $3a$, vel 5 ad 3 .

Eodem modo communicantes erunt $\sqrt{a^4+aabb} \& \sqrt{aabb+b^4}$, quia utrâque divisâ per $aa+bb$, oriuntur $\sqrt{aa} \& \sqrt{bb}$, seu $a \& b$: ideoque reducuntur ad $a\sqrt{aa+bb} \& b\sqrt{aa+bb}$, quæ inter se sunt ut a ad b .

Pag. 31. Similiter communicantes sunt $\sqrt{\frac{00xz}{aa} + \frac{4mpxz}{aa}}$ &

$\sqrt{\frac{aa00mm}{ppxz} + \frac{4aam^3}{pxz}}$: quippe reducuntur ad $\frac{x}{a}\sqrt{00+4mp}$ & $\frac{am}{px}\sqrt{00+4mp}$, quarum unius ad alteram ratio est, ut $\frac{x}{a}$ ad $\frac{am}{px}$, seu pxz ad aam .

Haud aliter communicantes erunt $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ & $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$: reductæ enim ad $x+3$ $\sqrt{xx+12} \& 5-x\sqrt{xx+12}$, habent inter se eam rationem, quæ est ipsius $x+3$ ad $5-x$. Et sic de aliis.

De Additione & Subtractione quantitatum surdarum.

AD addendum vel subtrahendum quantitates surdas, oportet primùm explorare utrum sint communicantes nec ne: si enim communicantes fuerint, adduntur tantùm vel subtrahuntur quantitates vel numeri, qui extra signum radicale reperiuntur. Vt ad addendum $\sqrt{75aa} \& \sqrt{27aa}$, hoc est, $5a\sqrt{3} \& 3a\sqrt{3}$, scribo, additis $5a \& 3a$, pro summa $8a\sqrt{3}$; & $2a\sqrt{3}$, pro eorundem differentia, utpote sublatis $3a$ ex $5a$.

Eodem modo si fuerint $\sqrt{a^4+aabb} \& \sqrt{aabb+b^4}$, hoc est, $a\sqrt{aa+bb} \& b\sqrt{aa+bb}$: addendo & subtrahendo $a \& b$, erit summa $a+b\sqrt{aa+bb}$, & differentia $a-b\sqrt{aa+bb}$. Similiter si proponatur $\sqrt{\frac{00xz}{aa} + \frac{4mpxz}{aa}}$ & $\sqrt{\frac{aa00mm}{ppxz} + \frac{4aam^3}{pxz}}$, hoc est, $\frac{x}{a}\sqrt{00+4mp}$ & $\frac{am}{px}\sqrt{00+4mp}$, erit summa $\frac{pxz+aa}{apx}\sqrt{00+4mp}$,

& dif-

& differentia $\frac{px - aam}{apx} \sqrt{00 + 4mp}$. Nec aliter fit si habeatur $\sqrt{\frac{4aabb - 4aaxx}{bb}}$ vel $\frac{2a}{b} \sqrt{bb - xx}$ & $\sqrt{bb - xx}$: erit enim Pag. 173,
lin. 18.

summa $\frac{2a+b}{b} \sqrt{bb - xx}$, & differentia $\frac{2a-b}{b} \sqrt{bb - xx}$. Pari ratione additis $\sqrt{x^4 + 6x^3 + 21xx + 72x + 108}$ & $\sqrt{x^4 - 10x^3 + 37xx - 120x + 300}$, hoc est, $x + 3$ $\sqrt{xx + 12}$ & $5 - x \sqrt{xx + 12}$, erit summa $8 \sqrt{xx + 12}$, eisdemque subtraçtis, erit differentia $2x - 2 \sqrt{xx + 12}$.

Quòd si verò non communicantes fuerint, non poterunt addi vel subtrahi ita ut unam radicem constituent, quocirca addendæ vel subtrahendæ sunt mediantibus signis + & -. unde Binomia & Multinomia exsurgunt. Vt si addendum fit $\sqrt{aa+bb}$ ad $\sqrt{aa-bb}$, scribo pro summa $\sqrt{aa+bb} + \sqrt{aa-bb}$; & ad subtrahendum $\sqrt{aa-bb}$ de $\sqrt{aa+bb}$, scribo pro reliquo $\sqrt{aa+bb} - \sqrt{aa-bb}$. Non secus si addatur $a+b$ ad $\sqrt{aa+bb}$, erit summa $a+b + \sqrt{aa+bb}$; at si subducatur $\sqrt{aa+bb}$ de $a+b$, erit reliquum $a+b - \sqrt{aa+bb}$. Cum enim $a+b$ sit quantitas rationalis, & $\sqrt{aa+bb}$ quantitas surda, non magis communicantes esse possunt, quàm omnes quantitates surdæ, quæ diversis signis radicalibus designantur. Haud dissimili ratione concludes summam ex $aa+bb + a\sqrt{aa+bb}$ & $aa-bb - b\sqrt{aa+bb}$ esse $2aa + a - b\sqrt{aa+bb}$, & differentiam esse $2bb + a + b\sqrt{aa+bb}$.

De Multiplicatione quantitatum surdarum.

SI quantitates datæ sunt communicantes, oportet, multiplicatis quantitatibus vel numeris extra signum radicale positis, productum multiplicare per quantitatem vel numerum sub signo radicali contentum, ut habeatur productum quæsitum. Vt ad multiplicandum $\sqrt{75aa}$ per $\sqrt{27aa}$, hoc est, $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$, multiplico primùm $5a$ per $3a$, & fit $15aa$: tum $15aa$ per 3 , eritque productum quæsitum $45aa$.

Eodem modo ad multiplicandum $\sqrt{a^2+abbb}$ per $\sqrt{abb+b^2}$, hoc est, $a\sqrt{aa+bb}$ per $b\sqrt{aa+bb}$: multiplicato a per b , &

producto ab per $aa + bb$, fiet productum quæsitum $a^3b + ab^3$.
Nec aliter fit si ad multiplicandum proponatur

$\sqrt{x^4 + 6x^3 + 21xx + 72x + 108}$ per
 $\sqrt{x^4 - 10x^3 + 37xx - 120x + 300}$, hoc est, $x + 3\sqrt{xx + 12}$,
per $5 - x\sqrt{xx + 12}$: Multiplicatis enim $x + 3$ per $5 - x$, fit
 $15 + 2x - xx$, quod multiplicatum per $xx + 12$, productum
facit $180 + 24x + 3xx + 2x^3 - x^4$.

Quòd si datæ quantitates non fuerint communicantes, oportet tantum multiplicare quantitates sub signis radicalibus comprehensas, & producto præfigere commune signum radicale. Si verò signa radicalia diversa fuerint, reducenda prius sunt ad idem signum, sicut superius est ostensum, & deinde operandum, ut jam dictum est. Ut, ad multiplicandum \sqrt{ab} per \sqrt{cd} : multiplicatis ab per cd , præfigatur producto $abcd$ signum $\sqrt{\quad}$, & fit productum quæsitum \sqrt{abcd} . Sic & ad multiplicandum $\sqrt{aa + bb}$ per $\sqrt{aa - bb}$: multiplicatis $aa + bb$ per $aa - bb$, fiet productum $\sqrt{a^4 - b^4}$. Similiter si multiplicari debeat $\sqrt{aa + bb}$ per $a + b$, reduco prius $a + b$ ad idem signum radicale, & fit $\sqrt{aa + 2ab + bb}$: tum multiplicatis $aa + 2ab + bb$ per $aa + bb$, fit productum $\sqrt{a^4 + 2a^3b + 2aabb + 2ab^3 + b^4}$, vel etiam scribendo hoc pacto: $a + b\sqrt{aa + bb}$. Nec aliter fit si multiplicandum sit $a + \sqrt{bc}$ per $a + \sqrt{bc}$, hoc est, $a + \sqrt{bc}$ in se: multiplico primum $a + \sqrt{bc}$, per a , & fit $aa + a\sqrt{bc}$: tum $a + \sqrt{bc}$ per \sqrt{bc} , fitque $a\sqrt{bc} + bc$. quæ producta si addantur, fiet productum quæsitum $aa + bc + 2a\sqrt{bc}$. Non secus si multiplicandum proponatur $\sqrt{aa + bb} + \sqrt{aa - bb}$ per $\sqrt{aa + bb} - \sqrt{aa - bb}$: quia multiplicando $\sqrt{aa + bb}$ per $\sqrt{aa + bb}$, & $+\sqrt{aa - bb}$ per $-\sqrt{aa - bb}$ (omissis scilicet tantum signis radicalibus) fiunt $aa + bb$ & $-aa + bb$; at verò multiplicando $\sqrt{aa + bb}$ per $-\sqrt{aa - bb}$, & $\sqrt{aa + bb}$ per $+\sqrt{aa - bb}$ producta evanescent: hinc productum quæsitum erit $2bb$.

De Divisione quantitarum surdarum.

SI datæ quantitates sunt communicantes, oportet tantum dividere quantitates, vel numeros, extra signum radicale positos, & quod

& quod oritur erit quotiens quæsitus. Vt ad dividendum $\sqrt{75aa}$ per $\sqrt{27aa}$, hoc est, $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$: divido $5a$ per $3a$, seu 5 per 3 ; eritque quotiens quæsitus $\frac{5}{3}$ seu $1\frac{2}{3}$. Sic & ad dividendum $\sqrt{a^2+abb}$ per $\sqrt{abb+b^2}$, hoc est, $a\sqrt{aa+bb}$ per $b\sqrt{aa+bb}$: divisio a per b , fit quotiens $\frac{a}{b}$. Non secus \sqrt{abcc} seu $c\sqrt{ab}$ divisum per \sqrt{ab} dat c . Et sic de aliis.

Quòd si communicantes non fuerint, dividendæ erunt quantitates sub signis radicalibus comprehensæ, & ei quod oritur præfigendum est commune signum radicale. Vt ad dividendum $\sqrt{a^3b-ab^3}$ per $\sqrt{aa-bb}$: divisio a^3b-ab^3 per $aa-bb$, fit ab ; unde quotiens quæsitus erit \sqrt{ab} .

Et quidem si signa radicalia fuerint diversa, reducenda priùs erunt ad idem signum, & deinde operatio instituenda crit, ut jam dictum est. Vt ad dividendum a^3+abb per $\sqrt{a^4+abb}$: multiplicando a^3+abb in se, fit $a^6+2a^4bb+aab^2$; quare divisâ $\sqrt{a^6+2a^4bb+aab^2}$ per $\sqrt{a^4+abb}$, erit quotiens $\sqrt{aa+bb}$. Sic & si dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}$ per $a+b$: multiplico primùm $a+b$ in se, ut fiat sub eodem signo radicali $\sqrt{aa+2ab+bb}$, quo facto, si dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}$ per $\sqrt{aa+2ab+bb}$, fiet quotiens quæsitus $\sqrt{aa-bb}$.

Non aliâ ratione $aa+bb$ divisum per $\sqrt{aa+bb}$, facit $\sqrt{aa+bb}$. quippe diviso quadrato per suum latus, oritur latus. Vnde si a^3+abb dividatur per $\sqrt{aa+bb}$, oriatur $a\sqrt{aa+bb}$.

Porrò si dividendum sit $a^3+abb+ab\sqrt{aa+bb}$ per $a\sqrt{aa+bb}$, divido primùm a^3+abb per $a\sqrt{aa+bb}$, & fit, ut ante, $\sqrt{aa+bb}$; tum $ab\sqrt{aa+bb}$ per $a\sqrt{aa+bb}$, & fit b , unde quotiens quæsitus erit $\sqrt{aa+bb}+b$. Non secus si dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4-aa+bb}$ per $a+b$, oriatur $\sqrt{aa-bb}-a+b$. Similiter si dividendum proponatur $ab+b\sqrt{bc}$ per $a+\sqrt{bc}$: quoniam ab divisâ per a , eadem exoritur quantitas b , quæ provenit dividendo $b\sqrt{bc}$ per \sqrt{bc} : hinc quotiens quæsitus erit b . Eodem modo $aab-bbc-ab+\frac{bbc}{a}$

\sqrt{bc} divisum per $a-\sqrt{bc}$, facit $ab-\frac{b \cdot b \cdot c}{a}$.

Postea ad dividendum $aa-bc$ per $a+\sqrt{bc}$ divido aa per a , & fit

& fit a , quod multiplicatum per \sqrt{bc} producit $a\sqrt{bc}$, eritque reliquum dividendi $-a\sqrt{bc} - bc$. diviso jam $-a\sqrt{bc}$ per a , fit \sqrt{bc} , quod multiplicatum per $+\sqrt{bc}$, facit $-bc$: hoc igitur si auferatur à reliquo dividendi $-bc$, relinquetur 0, & absoluta erit divisio, eritque quotiens quæsitus $a - \sqrt{bc}$. Eodem modo $ab - cd$ divisum per $\sqrt{ab} - \sqrt{cd}$, dat $\sqrt{ab} + \sqrt{cd}$: & $a^3 + bc\sqrt{bc}$ divisum per $a + \sqrt{bc}$, dat $aa + bc - a\sqrt{bc}$: & $aabb - ccd$ divisum per $\sqrt{ab} - \sqrt{cd}$, dat $\frac{ab+cd}{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}} \sqrt{ab+\sqrt{ab+cd}} \sqrt{cd}$: & $a^3b - abbc$ divisum per $aa + a\sqrt{bc}$, dat $ab - b\sqrt{bc}$: ut & $a^3 + abc + aa - bc\sqrt{bc}$ divisum per $a - \sqrt{bc}$, dat $aa + bc + 2a\sqrt{bc}$.

Denique ad dividendum $\sqrt{a^2 + b^2}$ per $c - d$: quia $\sqrt{a^2 + b^2}$ per $c - d$ seu $\sqrt{cc - 2cd + dd}$ dividi nequit, scribo pro quotiente $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c - d}$, vel $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{cc - 2cd + dd}}$, vel etiam hoc pacto: $\frac{1}{c - d} \sqrt{a^2 + b^2}$.

Eodem modo si dividatur $a\sqrt{aa + bb}$ per $a + b$, fiet quotiens $\frac{a}{a + b} \sqrt{aa + bb}$. Similiter $aa + bb$ divisum per $\sqrt{aa - bb}$ exhibet quotientem $\frac{aa + bb}{\sqrt{aa - bb}}$: & $aa + \sqrt{abcd}$ per $a + \sqrt{bc}$, facit $\frac{aa + \sqrt{abcd}}{a + \sqrt{bc}}$.

Sic etiam ad dividendum $180 + 24x + 3xx + 2x^3 - x^4$ per $8\sqrt{xx + 12}$, scribitur pro quotiente $\frac{180 + 24x + 3xx + 2x^3 - x^4}{8\sqrt{xx + 12}}$; vel quia $180 + 24x + 3xx + 2x^3 - x^4$ producit ex $15 + 2x - xx$ in $xx + 12$, quadratum nempe ipsius $\sqrt{xx + 12}$, fit ut scribi quoque possit $\frac{15 + 2x - xx \text{ in } xx + 12}{8\sqrt{xx + 12}}$, vel brevius $\frac{15 + 2x - xx}{8}$

$\sqrt{xx + 12}$, utpote dividendo $xx + 12$ per $\sqrt{xx + 12}$. Non aliter si $180 + 24x + 3xx + 2x^3 - x^4$ fit dividendum per $x + 3\sqrt{xx + 12}$, scribo pro quotiente $\frac{180 + 24x + 3xx + 2x^3 - x^4}{x + 3\sqrt{xx + 12}}$ seu $\frac{60 - 12x + 5xx - x^3}{\sqrt{xx + 12}}$. nam $180 + 24x + 3xx + 2x^3 - x^4$ dividi potest per $x + 3$, & fit $60 - 12x + 5xx - x^3$; vel quoniam $60 - 12x + 5xx - x^3$ producit ex $5 - x$ in $xx + 12$, fit ut etiam scribi possit $\frac{5 - x \text{ in } xx + 12}{\sqrt{xx + 12}}$ seu $5 - x\sqrt{xx + 12}$.

De Extractione Radicis Quadrata ex Binomiis.

Modus, quo ex quantitibus binomiis radix quadrata extrahitur, non differt ab eo, qui in numeris adhiberi solet ad inventionem radice quadratæ ex Binomiis, estque talis:

Regula extrahendi radicem quadratam ex Binomiis.

Subductis quadratis partium dati Binomii à se invicem, si radix quadrata reliqui ad partem majorem addatur, & ab eadem auferatur; erunt radices quadratæ ex semisse summa & differentia, per signum + vel — dati Binomii connexæ, binæ partes radice quæsitæ.

Vt ad extrahendum radicem quadratam ex $a a + b c + 2 a \sqrt{b c}$, subtraho $4 a a b c$, quadratum minoris partis ex $a^4 + 2 a a b c + b b c c$ quadrato partis majoris, & relinquitur $a^4 - 2 a a b c + b b c c$, cujus radix quadrata $a a - b c$ addita ad majorem partem $a a + b c$, & ab eadem ablata facit summam $2 a a$, & differentiam $2 b c$, quarum semiffes sunt $a a$ & $b c$: unde radices quadratæ sunt a & $\sqrt{b c}$, quæ si connectantur per signum +, erit radix quæsitæ $a + \sqrt{b c}$.

Sic radix quadrata ex $m m + \frac{p x x}{m} + x \sqrt{4 p m}$ erit $m + x \sqrt{\frac{p}{m}}$ Pag. 182. lin. 13.

Eodem modo si extrahenda sit radix quadrata ex $a + b \sqrt{a b} + 2 a b$: subducto $4 a a b b$, quadrato partis minoris, ex $a^3 b + 2 a a b b + a b^3$, quadrato majoris partis, erit reliqui $a^3 b - 2 a a b b + a b^3$ radix quadrata $a - b \sqrt{a b}$. quæ si addatur & auferatur ex majori parté $a + b \sqrt{a b}$, fiet summa $2 a \sqrt{a b}$, & differentia $2 b \sqrt{a b}$, unde semiffium radices quadratæ constituunt radicem quæsitam.

$$\sqrt{a \sqrt{a b} + b \sqrt{a b}} \text{ seu } \sqrt{\sqrt{a^3 b} + \sqrt{a b^3}}$$

Nec aliter fit cum extrahitur radix quadrata ex $a + d \sqrt{b c} + 2 \sqrt{a b c d}$: etenim subtracto $4 a b c d$, quadrato minoris partis, ex $a a b c + 2 a b c d + b c d d$, quadrato majoris partis, relinquetur $a a b c - 2 a b c d + b c d d$, cujus radix quadrata est $a - d \sqrt{b c}$: hæc ergo si addatur & subtrahatur ex majori parte $a + d \sqrt{b c}$, erit summa $2 a \sqrt{b c}$, & differentia $2 d \sqrt{b c}$: Ex quarum dimidiis si radices quadratæ extrahantur, fiet radix quæsitæ $\sqrt{a \sqrt{b c} + d \sqrt{b c}}$ vel $\sqrt{\sqrt{a a b c} + \sqrt{d d b c}}$.

Quòd si, subductis quadratis partium dati binomii à se invicem, reliqui radix quadrata & major pars binomii communicantes non fuerint: fatius erit ipsi binomio signum universale radicis quadratæ præfigere. Vt ad extrahendam radicem quadratam

Fig. 6. ex $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ scribo $\sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. quæ radices vulgò appellantur Vniversales.

DE REDUCTIONE ÆQVATIONVM.

QVoniã ad resolvendum aliquod Problema, id ipsum supponendum est ut jam factum, atque nomina imponenda sunt quantitatibus tum datis, tum quæsitis; & quidem pro datis à D. Des-Cartes ordinariè ponuntur priores literæ Alphabeti a, b, c , &c. pro quæsitis autem posteriores z, y, x , &c: fit ut percurrendo Problematis difficultatem, eo ordine, quo omnium naturalissimè patet, quâ ratione dictæ quantitates, nullo inter cognitæ & incognitæ factò discrimine, à se invicem dependent, tandem inveniatur via quantitatem aliquam duobus modis exprimendi. id quod Æquatio vocatur. Vnde cum æquatio nihil aliud sit, quàm mutua comparatio duarum rerum æqualium, quæ variè denominantur: facilè constat, quantitates hæc cognitæ & incognitæ, prout diversimode sunt affectæ atque dispositæ, diversas efficere posse Æquationum formulas, quæ tamen per sequentes regulas reduci queunt ad hæc similesve species:

$$\begin{aligned} z &\propto b, \text{ aut} \\ zz &\propto -az + bb, \text{ aut} \\ z^3 &\propto +az^2 + bbz - c^3, \text{ aut} \\ z^4 &\propto +az^3 + bbz^2 - c^3z + d^4, \text{ \&c.} \end{aligned}$$

De Reductione per Additionem.

Vt si habeatur æquatio inter $z - 3$ & 12 , hoc est, si fuerit $z - 3 \propto 12$: quoniam si æqualibus æqualia vel idem addas, ea quæ fiunt sunt æqualia; hinc si utrinque addatur $+ 3$, fiet $z \propto 15$. nam $- 3$ & $+ 3$ addita faciunt 0.

Sic & si fuerit $z - b \propto 0$, addendo utrinque b , fiet $z \propto b$. Aut si ha-

fi habeatur $b - z \infty 0$, fiet, addendo utrobique $z, b \infty z$. Et si habeatur $z z - a q \infty 0$, erit $z z \infty a q$: ut & si $z^3 - a a q$ æquetur 0, fiet $z^3 \infty a a q$, &c.

Non secus si habeatur $z^4 - a z^3 - b b z z \infty d^4 - c^3 z$, addendo utrique parti $+ a z^3 + b b z z$, fiet $z^4 \infty a z^3 + b b z z - c^3 z + d^4$.

Ex quibus constat, quantitates signo $-$ adfectas addi utrique parti, si eximantur ab una parte, & in alteram partem transferantur sub signo $+$.

De Reductione per Subtractionem.

DEinde si fuerit $z + 3 \infty 12$; quia si ab æqualibus æqualia vel idem auferas, illa quæ relinquuntur sunt æqualia, fit ut, subtrahendo utrinque $+ 3$, habeatur $z \infty 9$.

Eodem modo si habeatur $z z + a z \infty b b$, subtrahendo utrinque $+ a z$, fiet $z z \infty - a z + b b$.

Similiter $z^3 + 2 c^3 \infty a z z + b b z + c^3$ reducetur ad $z^3 \infty a z z + b b z - c^3$, subtrahendo utrinque $+ 2 c^3$.

Vnde colligitur quantitates signo $+$ adfectas ab utraque parte subtrahi, eximendo ipsas ex una parte & transferendo in alteram partem sub signo $-$: atque adeò quicquid vel additione vel subtractione transfertur, adfici signo contrario.

De Reductione per Multiplicationem.

PORRò si ad reducendum proponatur $\frac{x}{3} \infty 5$: quoniam æqualia per æqualia vel idem multiplicata, producunt æqualia; fiet multiplicando utrinque per 3, $z \infty 15$. Sic & si habeatur $z \infty \frac{a q}{x}$, inuenietur, multiplicando utrinque per $z, z z \infty a q$, &c.

Eodem modo si fuerit $\frac{x x}{x - b} \infty a$: quoniam, delendo denominatorem $z - b$ prioris partis $\frac{x x}{x - b}$, ipsa pars multiplicatur per $z - b$: hinc oportet etiam alteram partem a multiplicare per $z - b$, ut habeatur æquatio inter $z z$ & $a z - a b$.

Similiter si fit $\frac{x x}{a} \infty \frac{x x - b x + b b}{x}$: quoniam, sublato denomina-

tore a partis prioris $\frac{x^2}{a}$, multiplicata est pars prior per a , & fit $z z$; hinc oportet & alteram partem $\frac{zx - bx + bb}{x}$ multiplicare per a , ut habeatur $\frac{axx - abx + abb}{x}$. Vnde cum æquatio proposita reducta sit ad $z z \infty \frac{axx - abx + abb}{x}$, si denuo utraque pars multiplicetur per x , denominatorem posterioris partis $\frac{axx - abx + abb}{x}$, fiet $z^3 \infty axz - abz + abb$.

Ex quibus patet, æquationem, cujus utraque pars est fractio, reduci ad aliam, quæ fractione caret, multiplicando per crucem, numeratorem nempe prioris partis per denominatorem posterioris, & numeratorem posterioris partis per denominatorem prioris. Quod idem est ac si binæ partes æquationis ad eandem denominationem reducantur, ipsæque deinde, omittendo communem denominatorem, per eundem multiplicentur.

Vbi notandum, ad majorem abbreviationem atque operationis facilitatem, non rarè tum numeratores, tum denominatores, ante hanc multiplicationem ad simpliciores terminos reduci posse. Vt si fuerit $\frac{x^3}{xx - aa} \infty \frac{ax - aa}{x + a}$: reductis denominatoribus $zx - aa$ & $x + a$ ad $z - a$ & 1 , fiet $\frac{x^3}{x - a} \infty \frac{ax - aa}{1}$. ac proinde, si multiplicetur per crucem, inuenietur $z^3 \infty axz - 2aaz + a^3$. Similiter si habeatur $\frac{axx - bbx}{x + b} \infty \frac{a^3 - abb}{x}$: reductis numeratoribus $axx - bbx$ & $a^3 - abb$ ad z & a , habebitur $\frac{x}{x + b} \infty \frac{a}{x}$, ubi si per crucem multiplicetur, fiet $z z \infty az + ab$. Non secus si habeatur $\frac{axx - bx^2}{bb - bx} \infty \frac{aa - ab}{b}$: cum numeratores $axz - bxz$ & $aa - ab$ reduci possint ad $z z$ & a , ut & denominatores $bb - bx$ & b ad $b - z$ & 1 , fiet $\frac{zx}{b - z} \infty \frac{a}{1}$; ideoque multiplicando per crucem, exsurget $z z \infty -az + ab$.

Huc etiam refer, cum integrum æquatur fractioni. Vt si habeatur æquatio inter $\frac{ax^3 - bx^3}{xx + ax + aa}$ & $ab - bb$: substituta enim unitate pro denominatore ipsius integri $ab - bb$, cum $ax^3 - bx^3$ & $ab - bb$ reduci possint ad z^3 & b , erit æquatio talis

$\frac{z^3}{zx+ax+aa} \propto \frac{b}{1}$, unde multiplicando per crucem, invenietur æquatio $z^3 \propto bzz + abz + aab$.

Ad hæc si proponatur \sqrt{z} æquari ζ : quoniam æqualium æqualia quoque sunt quadrata, cubi, &c; hinc si utraque pars in se multiplicetur quadratè, habebitur $z \propto z\zeta$. Sic & si fuerit $\sqrt{z} \propto \sqrt{\zeta}$: ductâ utrâque parte in se quadratè, fiet $z \propto \zeta$. Pari ratione si \sqrt{z} æquetur $\sqrt{aab-b}$, erit $z \propto aab-b$. Haud secus si fuerit $\sqrt{C.z} \propto \sqrt{C.aabb-b}$, fiet, utramque partem in se multiplicando cubicè, $z \propto aabb-b$. Et sic de aliis.

De Reductione per Divisionem.

POSTEA si detur $z z \propto 4z$: quoniam, æqualibus per æqualia vel idem divisis, proveniunt æqualia, fit ut, si utraque pars dividatur per z , oriatur $z \propto 4$. Sic & si habeatur $z^4 \propto az^3 + bbz z$, dividendo utrinque per $z z$, fiet $z z \propto az + bb$. Similiter fit, si proponatur $3 z \propto 1 z$: etenim si utrobique dividatur per 3 , proveniet $z \propto 4$. Eodem modo si fuerit $az \propto ab$, dividendo utramque partem per a , fiet $z \propto b$. Nec aliter si habeatur $ax - bx \propto bb$, oriatur, divisâ utrâque parte per $a-b$, $x \propto \frac{bb}{a-b}$. Haud secus si proponatur $az z + bz z \propto abz + bbz - abb - b^3$: quoniam utraque pars dividi potest per $a+b$, oriatur $z z \propto bz - bb$. Sic & si fuerit $az z - bz z \propto aaz - bbz + abc$, dividendo utrinque per $a-b$, fiet $z z \propto az + bz + \frac{abc}{a-b}$, seu $z z \propto \frac{a}{+b} z + \frac{abc}{a-b}$.

pag. 149.
lin. 27.

Huc referendum quoque est, cùm binæ æquationis partes, juxta modum p. 34. ostensum, reduci possunt ad simpliciores terminos. Vt si fuerit æquatio inter $az^4 - abz^3 + abbz z$ & $-abz^3 + 2abbz z - 2ab^3 z + ab^4$: dividendo utramque partem per maximum communem divisorem $az z - abz + abb$, oriatur $z z \propto -bz + bb$.

De Reductione per Extractionem Radicis.

DENIQUE ad reducendum $z z \propto z\zeta$: quoniam æqualium quadratorum ac cuborum &c. æqualia quoque sunt latera seu radices, fit ut, si ex utraque parte extrahatur radix quadrata, pro-

veniat $z \propto 5$. Sic & si fuerit $z^3 \propto 125$, erit, extractâ utrinque radice cubicâ, $z \propto 5$. Eâdem ratione, si habeatur $z z \propto aa + 2ab + bb$: extractâ utrobique radice quadratâ, fiet $z \propto a + b$. Nec aliter fit si fuerit $z z \propto aa + bc + 2a\sqrt{bc}$, erit enim $z \propto a + \sqrt{bc}$. Non secus si xx

Pag. 6. æquetur $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, erit $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$.

His subjunge sequens exemplum, in quo omnes præcedentes modi reductionis simul occurrunt. Proponatur $\sqrt{\frac{xx+3aa}{4}} - \sqrt{\frac{xx-3aa}{4}}$

$\propto \sqrt{\frac{axx}{b}}$: quia igitur eorum, quæ æqualia sunt, æqualia quoque sunt quadrata, fiet, multiplicando utramque partem in se quadratè,

$\frac{1}{2}zz - \sqrt{\frac{x^2-9a^4}{4}} \propto \frac{axx}{b}$. Addatur jam utrinque $\sqrt{\frac{x^2-9a^4}{4}}$, & subtrahatur $\frac{axx}{b}$, transferendo scilicet ipsas in alteram partem sub

contrario signo, ut habeatur $\sqrt{\frac{x^2-9a^4}{4}}$ sola ex una parte, fietque

$\frac{1}{2}zz - \frac{axx}{b} \propto \sqrt{\frac{x^2-9a^4}{4}}$. Quo facto, multiplicetur rursus utraque

pars æquationis in se quadratè, ut evanescat signum radicale; habebiturque $\frac{1}{4}z^4 - \frac{ax^4}{b} + \frac{aa^2x^4}{bb} \propto \frac{x^2-9a^4}{4}$. Vbi si utrinque dematur

$\frac{1}{4}z^4$, ac reliquæ partes omnes addendo ac subtrahendo ex una parte in alteram transferantur, quod fit mutatis tantùm signis, erit

$\frac{ax^4}{b} - \frac{aa^2x^4}{bb} \propto \frac{9a^4}{4}$. Porrò ut deleantur fractiones, reducantur

omnes termini ad communem denominatorem $4bb$: quo peracto si utrinque per eundem multiplicetur, ipsum nempe denominatorem omittendo, obtinebitur $4abz^4 - 4aa^2z^4 \propto 9a^4bb$.

Dividatur jam ubique per a , hoc est, a ubique deleatur fitque $4bz^4 - 4a^2z^4 \propto 9a^3bb$: quo facto, dividatur utraque pars per $4b - 4a$ ut habeatur quantitas z^4 ex una parte sola, eritque

$z^4 \propto \frac{9a^3bb}{4b-4a}$. Vbi si utrobique extrahatur radix quadrata, habe-

bitur $zz \propto \frac{3}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b-a}}$: & si denuo utrinque extrahatur radix

quadrata, invenietur $z \propto \sqrt{\frac{3}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b-a}}}$.

E quibus patet, reductionem per additionem & subtractionem

nem institui tam ad diminuendam multitudinem terminorum, quàm ad æquationem ritè ordinandam; reductionem verò per multiplicationem ad evitandas tum fractiones tum quantitates furdas; & reductionem per divisionem, tam ad deprimendas dimensiones, quàm ad reducendam æquationem ad debitam formam & simplicissimos terminos; ac denique reductionem per extractionem radicis, ad obtinendam æquationem ex minimis terminis constantem; præterquam quòd omnes hæ reductiones etiam ad quantitatem quæsitam ex data æquatione inveniendam utiles esse possint. Atque hæc quidem ad introductionem Methodi Geometriæ Renati Des-Cartes dicta sufficiant.

F I N I S.



FRANCISCVS à SCHOOTEN
A D L E C T O R E M.

CÆterùm ne locus superstes hujus paginæ vacuus relinquere-
tur, visum fuit hoc loco simul indicare sphalmata, quæ in
Exercitationibus nostris Mathematicis, quas anno 1657 in lucem
emisimus, fuerunt commissa, ac postmodum à nobis recognita: ut,
iis sequenti modo correctis, Lectoris studium in consimili argu-
mento absque mora occuparetur.

Pag. 6. l. 2 lege *pretium*. p. 7. l. 8 lege *questio*. p. 163. l. penult. lege
quasi verim. p. 193. l. 12. lege *nulle omnino*. p. 228. l. 3 lege *fitz z*—2 aa.
ibid. l. penult. lege *in circumferentiâ*. p. 295. l. 28 lege *descriptio*.
p. 317. l. 22 lege *quod est rectum*. p. 327. l. 4 lege *Ostensio*. ibid. l. an-
tep. lege *ipsa circa*. p. 329. l. 10 pro E G lege E C. p. 347. l. 5 pro
E C, E F lege ϵ C, ϵ F. p. 361. l. 1. lege *ad E, ita ut A E sit æqualis AB*.
p. 372. l. antep. post *Quod*, & p. 393. l. 9 post *Quod eo tolle vir-*
gulas. p. 423. l. 15 pro 69 lege 639. p. 432. l. 7 lege 1634.
p. 434. l. ult. & p. 462. l. 30, ut & p. 480. l. 24. lege *abs re*. p. 471.
l. 22 lege *in locum x x*. p. 525. lineæ 6, 7, 8, 9, 10 in locum linea-
rum 2, 3, 4, 5 sunt substituendæ, & vice versâ. p. 527. l. 21 lege
Ha autem.

D E
ÆQVATIONVM

Natura, Constitutione, & Limitibus
Opuscula Duo.

Incepta à
FLORIMONDO DE BEAVNE,

In Curia Blesensi Consiliario Regio;
Absoluta verò, & post mortem ejus edita

ab

ERASMIO BARTHOLINO,
Medicinæ & Mathematicum in Regia Academia
Hafnienfi Professore publico.



AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDC LXXXIII.
Sumptibus Societatis.

SVMMO MVSARVM

MÆCENATI

ILLVSTRISSIMO ET EXCELLENTISSIMO

DOMINO,

IOACHIMO GERSDORPH

TOPARCHÆ IN TVNDBYHOLM, &c.

EQVITI AVRATO,

REGNI DANIÆ SVMMO AVLÆ MAGISTRO,

PRINCIPI SENATORI,

REGIÆ MAIESTATIS PRÆSIDI BORINGHOLMENSIS

H O C


SPECIMEN ANALYTICES

NOVO ARGVMENTO

CONSECRAT

OBSEQVIVM.

Quod

 Vod jam pridem in votis
erat, studii & pietatis meæ
experimentum Tibi pro-
bari, id recentissima Mu-
sarum Algebra interpre-
tabitur. Etsi enim, beneficia maxima,
quibus me totamque domum nostram
oneraſti, quàm grato animo exceperim,
mihi ipſe ſim teſtis; tamen miſeram eam
vitam putavi, cui eſſe gratam probare
antea non licuit: id aliquo obſequio,
tum ipſi Tibi, tum cæteris omnibus in-
dicatum, maximeque perſpicuum eſſe
deſideravi. Neque æquum eſt, virtutis
deprædicationem privatis tantùm pa-
rietibus claudi. Inter ingratos etiam
annumerantur ii, qui beneficia accepta
paucis commemorant; totus Orbis,
adhibendus eſt, pietatis noſtræ teſtis &
conſcius. Quoniam verò monimen-
tum Tuarum virtutum nulla unquam
obſcurabit oblivio; nullum erit tali
Heroi dignius genus obſequii, quàm

quod nulla temporis circumscriptione
terminatur. Quocirca hoc opusculum
Algebraicum opportunissimum existi-
mavi, quod meae perpetuae observan-
tiae testem sempiternum constituerem;
in quod haud obscurè conjicio, nihil
senectuti, nihil successoribus licere.
Mirandam Algebrae vim multis verbis
exponere supervacuum est, quippe se-
cura demonstrationis suae, semper &
pacis & belli serviit artibus; in qua hoc
eximium est, quòd abundantias defe-
ctusque pari momento aestimet, neque
illi, quae plus habent, magis necessaria
sunt, quam quae minus; atque hoc suae
scientiae habet monimentum, quod
mortales faciunt Virtutis. Verùm, ar-
tium & scientiarum incrementa, non in
ipsarum modo ingenio, sed etiam in su-
periorum clementia sita sunt; aestiman-
tur quoque pleraque mortalium pre-
tium, quod libido calumniandi consti-
tuit; & quis neget, eximium decus, sæ-

piùs favoris , quàm virtutis esse benefi-
cium ? unde patrono & defensore iis
opus est , sub cujus auspiciis floreat.
Algebræ nihil ad augendum fastigium
superest, hoc tamen uno modo crescere
potest. Te ergo præsertim invocat, cu-
jus cepimus & affectus & judicii expe-
rimentum , quantum maximum Musæ
capere potuerunt. Indulgentiæ Tuæ
propinquum exemplum est Astrono-
mia , quam in Tuo gremio suscepisti,
cum naufragium illud observationum
Tychonicarum , quas invidiosâ tran-
quillitate provectas improvisus turbo
abstulerat , Tuâ benignitate refarcires.
Tuo beneficio patriam receperunt. Ta-
ceo literas Græcas, quas majoribus suis
ita reddidisti, ut illæ utrum plus Tibi, an
Tu illis debeas ambigi possit. Et ut ver-
bo absolvam, Tuæ benevolentia usum
nec litteris nec hominibus unquam de-
negasti. Quare illud extremum oro, ut
eidem Generositati, cui tribuisti hoc, ut

litteras susciperes, attribuas, ut susceptas tuearis ac foveas: atque hoc grati animi, non omnino quale velim, sed quale possum hoc tempore monimentum, favore excipere digneris. Celebratum est famâ & acclamatione quantum Astronomiam amplificaverit Dania, Tibi verò renascentis Astronomiæ gratia debetur. Et si proposito annueris, non tam patriæ quàm Tibi debitorem constitues etiam Algebram, hoc est, Mathesin Vniversalem. Ego florentem virtutis Tuæ gloriam æternam opto, Tibique felicissimos annos precatus, in clientelam Tuam receptum esse, supra humanum solatium recreabor.

Ill^x & Exc^{mæ} Dⁿⁱ V^x

*Hafnia, Anno
c1515 clvii.*

Deditissimus

ERASMIUS BARTHOLINVS,
Medicinæ & Mathematicum Professor
Regius.

ERASMI BARTHOLINI

Ad Tractatum de Natura & Constitutione


Æquationum

EPISTOLA PRÆLIMINARIS

Ad Clarissimum Virum

CLAVDIUM HARDY,

Regis Gallix Consiliarium.

 *V*amvis sinistra hujus seculi iudicia parùm apud me valeant, tamen à divulgandis ejusmodi quemlibet jure absterrent, quæ diversas hominum censuras vitare nequeunt. Verùm ego alto supercilio spretis calumniis, æquitatis amantior & publicæ utilitatis, proposito desistere nolui, tibi que, Vir Clarissime, exponere constitui, ea, quæ ad præfationem utilia esse putavi, eò libentius, quò cognoverim amicissimum tibi fuisse, dum in vivis esset, D. De Beaune, in Curia Blesensi Consiliarium Regium. Nam etsi vir hic fuerit pereleganti ingenio, & in tantum laudandus, in quantum intelligi virtus potest; tamen hoc in eo maximum fuit, quòd *Mathemata doctissimus*, ut tempore æqualis Viro summo D. Des-Cartes, ita *Analytices speciosæ peritiâ proximus*. Quo momento impulsus, dum Blesis linguæ Gallicæ exercendæ gratiâ degerem, amicitiam tanti Viri colui, diligenterque eâ familiaritate usus sum, quâ ipse me comiter amplectebatur. Interea de rebus Mathematicis omnis ferè sermo, & quoties alter-

alterutri de *Analyticis* sermocinari volupe, toties
nostra conferri colloquia necesse erat. Unde non ob-
scure intellexi, quantis fuerat ingenii dotibus ac stu-
diorum eminens, a quo, si publica negotia permitte-
rent, perfectio *Algebrae* maximè sperari posset.
Quare variis precibus hortatus sum, ut, quæ medita-
tus erat, publicis destinaret usibus. Verùm ille mul-
ta sibi obstare, occupationes tam publicas quàm pri-
vatas, valetudinem, operas amicorum, ea denique
principia, quæ ad intellectum suarum meditationum
necessaria erant, desiderari innuebat. Tum ego, &
meam operam ipsi polliceri paratissimam cœpi, & si-
gnificare conscriptam esse à me *Isagogen Cartesianam*,
quorum neutrum proposito moram afferre diu-
tius posset. Quibus valde recreatus, de edendis ope-
ribus suis seriò cogitabat. Sed, cùm *Arthriticis* do-
loribus plus solito, lecto detineretur, omnem à *Ma-*
thematicis, ad corporis valetudinem, curam trans-
ferre cogebatur. Ego interim ad perlustrandas reli-
quas *Galliae* provincias avocatus, per aliquod
tempus substiti *Flexiæ*; unde, cum varia negotia
reverti *Lutetiam* suaderent, placuit *Castrum Ble-*
sense transire, ut de sanitate amici certior fierem.
Quem in prædio suo, cum doloribus *Colicis* acriter
conflictantem, cùm deprehendissem, & affirman-
tem parùm prosperâ valetudine ex eo tempore se u-
sum fuisse; non mediocriter dolui, egregiis inventis
fortunam tam esse adversam: mea verò studia ite-
ratò

ratò obtuli, promittens, me bono publico, ejusque gratiâ, quasvis subiturum molestias. Sed postquam relaxationis morbi nulla affulgeret spes, suspirans valèdixi, iterque susceptum ingressus, Lutetiam redii. Vixibi consueta studia revocaveram, cum literæ mihi redderentur ab hospite meo, Viro humanissimo, D. Antonio Marchais, in urbe Blesense tunc linguæ Gallicæ Professore, nunc verò Serenissimi Principis Gastonis, Ducis Aurelianensium, Mathematico, quibus nuntiabatur, ægrum nostrum, oculorum usu privatum fuisse, temporibus solstitii Brumalis, ab acrimonia defluxionis Arthriticæ; exoptasse verò meam præsentiam tanto desiderio, ut de editione cogitationum suarum desperaret, nisi meâ operâ uti posset; adeoque rogasse, nisi grave nimis esset, operam quam pollicitus eram accommodarem. Exarserrat eâ tempestate bellum civile inter Regem Gallicæ & Principes consanguineos, sedesque exercitus Principum erat Stampæ, quam obsidione aggrediebatur Dux exercitus Regii. Hac cum transeundem esset iis, qui ad Comitatum Blesensem pergunt; anticipati curâ distractus, constitueram tamen longissimis viarum ambagibus, per Normanniam & Ducatum Andegavensem potiùs iter moliri, quàm spes amici deserere. Quippe ea pars territorii Parisiensis, Rothomagum versùs, tantum militibus vacavit. Cum inexpectato, propter adventum exercitus Lotharingici, solutâ obsidione Stampæ, ager Gasti-

Pars II. H nensis,

nensis, milite utriusque partis liberaretur; prædonibus tamen infestari vias significatum est. Quare arreptâ occasione, dissuadentibus amicis, itineri me commisi; parvi æstimans, uno periculo, & amico prodesse, & præclara inventa redimere. Neque primas spes fortuna destituit; quippe emenso periculossimo itinere, salvus revisi amicum, corpore satis sanum, nisi lumen oculorum rapuisset ægritudo. Sed dubium itineris eventum deterior fortuna excepit; cum in primordio nostrorum operum, forsân quòd diligentius, quàm permetteret anni tempus, Algebraicis subtilitatibus incumberem, æstate mediâ, summis caloribus, sub Caniculam, in gravissimum morbum ex febris synocho incidere. Et jam de mea salute desperantibus Medicis, inopinatò animam efflavit Vir Amplissimus D. De Beanne. Nam, cum amico aliquo, qui lecto ejus assiderat, de rebus Analyticis differentem, subitò destituit vox, deinde totum corpus vitalis calor reliquit, atque evasit perpetuam valetudinem die 19 Augusti, Anno 1652, natus Anno 1601 die 27 Sept. Sic præcipitantibus fati, fefellit spes omnium mortalitas. Ego, cum mihi indicari inconsultum ducerent nostri, dum morbus nondum declinaret, ne ægritudinem aggravarent, non nisi post multum tempus id rescivi. Tum nihil cunctatus, operam dedi, ut fidei meæ committerentur, quæ relicta fuerant adversaria, nullam curam mortuo detrectans, quam vivo destinaveram, publicæ utilitatis ratio-

nem

nem habiturus. Reluctantibus verò heredibus, cum alius pecuniâ sollicitasset animos eorum; parum abfuit, quin idem scripta, qui auctorem, casus traxisset. Ergo omni studio demonstrare occæpi, perituros omnes defuncti conatus nisi mihi traderentur; sparsas chartas, sine ordine, sine numero, sine explicatione, notis & characteribus exaratas supputationes, non ab alio intelligi posse, quàm qui aliquo tempore cum ipso familiariter vixisset. Quibus perpensis, tandem obtinui propositum, sed majori labore, quàm successu. Quippe omnia diligentius inspiciens, animadverti plura affectata quàm effecta. Inter tot adversaria solummodo absolutum inveni opus de Angulo Solido, quod jam pridem in publicum edidissem, nisi sumptus, propter copiam figurarum, Bibliopolæ fastidivissent. Tractatûs de Natura & Constitutione *Æquationum* ne litera quidem extabat, menti tamen D. de Beaune pleraque conformia esse differendo dum licuit cum vivo comperi. Ex iis, quæ de Limitibus *Æquationum* conscripsi, quedam reperta sunt in adversariis, quibus, cum multa desiderarentur, ultimam manum imponere necesse habui. Præfationem denique, quam Author huic operi præmittendam duxit, ne religio esset omittere, addidi. Non ignoras, Vir Clarissime, me rogatu Authoris omnia Gallicè prius conscripsisse, tibi quæ & aliis perlegendam dedisse & corrigenda; tamen nunc Latine edere coactus sum, ne diutiùs laterent. Nam etsi tibi

dum in Italia degerem, ad eum cordi fuerit horum scriptorum à me tibi relictorum editio, ut sumptibus propriis excudi parares, quo nomine multum tibi debentur posteris; tamen ne in Gallia quidem votum affectus es. Quocirca, cum Amstelodami iterato praelo subjiceretur Geometria Renati Des-Cartes, id operam dedi, ut hæc unà imprimerentur. Consistente verò Typographo modò Latine extarent, placuit Latinam interpretationem in consilium adhibere, & potius authoris precibus inobediens, quàm publici negligentior reputari. Quod perpendendum relinquo iis, qui me violatæ fidei tacite accusabunt. Subjunxissem alia, quorum vestigia adhuc supersunt in adversariis, sed quædam tanti indigent laboris, ut de restitutione quasi desperem, alia remoratur multitudo figurarum: cuncta tamen brevi videbit benevolus Lector, si Typographi obedierint. Interea hisce fruere, tuque Vir Clarissime, judica quid ex meis curis, & difficillimis itineribus, fructus colligi possit, tuum namque iudicium erit instar omnium. Quod si tamen & alii confiteantur, hinc non exiguum emolumentum ad omnes redundare, rogo ut id Manibus Viri Clarissimi Florimondi de Beaune acceptum referant; errores verò si offenderint, benigne corrigant, meaque humanitati ascribant. Vale.

P R Æ F A T I O.

DEcreveram in publicum edere hosce tractatus, multò prolixiores atque perfectiores, proximo insequente anno. Verùm anni hujus initio conflictatus cum gravissimo ad oculos defluxu, oculorum usu privatus fui. Vnde proposito planè destitiffem, nisi D. Erasmus Bartholinus operam mihi suam, ne mea circa hanc artem inventa oblivione sepulta jacerent, obtuliffet. Ejus igitur auxilio hoc opus composui, ad quod intelligendum suppono Lectores jam in Geometria Renati Des-Cartes versatos, additisque in eam Notis, à nobis olim (non quidem animo illas in publicum edendi) concinnatis; ut & doctiffimis Francisci à Schooten Commentariis; nec non Principiis Matheseos Vniversalis, seu Introductione ad Methodum Geometriæ Renati Des-Cartes, ab eodem Bartholino editâ.

PRIOR TRACTATUS
DE
NATURA
ET
CONSTITVTIONE
ÆQVATIONVM.

NATVRA ÆQVATIONVM.

C A P V T I.



Vltò faciliùs inueniemus Naturam & Con-
stitutionem Æquationum ex earum gene-
ratione & comparatione cum similibus seu
eiusdem formæ, quàm conferendo earum
radices cum certis mediis Geometricè pro-
portionalibus, ut præstitit Viëta.

Æquationes autem facilitatis gratiâ ita
disponere libet, ut omnes termini ab una
parte reperiantur æquales nihilo, ponendo ipsos ordine, prout
gradatim per incognitæ quantitatis dimensiones descendunt. Pri-
mum enim terminum vocabimus, ipsam quantitatem incognitam,
quæ plurimarum dimensionum existens nullis aliis quantitibus
adfcitur; secundum verò, in quo incognita quantitas unâ dimen-
sione minor est; tertium in quo duabus; & sic deinceps, usque ad
terminum omnino cognitum, quem pro ultimo habemus. Deinde,
loca, ubi terminorum aliqui deficiunt, asterisco complebi-
mus, quæ tum sub numero terminorum comprehenduntur. Hæc
omnia beneficio transpositionis faciliè peraguntur.

Ex iis, quæ scripta & commentata sunt in Geometriam Renati
des Cartes, nota est methodus cognoscendi, quot haberi possint
radices in qualibet Æquatione: nimirum, posse Æquationem tot
habere veras radices, quot mutationes signorum continuæ adfue-
rint, & quoties eadem signa se invicem sequuntur immutata, tot
posse reperiri falsas radices: modò in numerum terminorum ii
numerentur, qui deficiunt.

Porrò, duas Æquationes similes esse dicimus seu eiusdem for-
mæ, quando in utraque idem est primus terminus, & reliqui ter-
mini in utraque similiter sunt affecti; & si in una terminus ali-
quis abfuerit, ut is quòque absit in altera. Nam cum similes sunt
Æquationes, eandem habebunt constitutionem & naturam, &
fieri poterit comparatio seu collatio singulorum terminorum u-
nius cum singulis terminis correspondentibus alterius.

C A P V T II.

De natura & constitutione Aequationum Quadratarum, seu duarum dimensionum.

Quando æquationes hæc sunt affectæ, reducuntur omnes ad tres formas sequentes:

$$xx + lx - mm \infty 0$$

$$xx - lx - mm \infty 0$$

$$xx - lx + mm \infty 0.$$

I *Propositio.*

Ad intelligendam naturam & constitutionem prioris æquationis, formetur per multiplicationem harum duarum $x - b \infty 0$ & $x + c \infty 0$ sequens æquatio: $xx - bx - bc \infty 0$. Supponendo

+c

igitur c majorem quàm b , eandem habebit formam atque prima propositarum $xx + lx - mm \infty 0$. & per consequens, binæ hæc æquationes erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat collatio unius cum altera; & per comparisonem terminorum secundorum habebimus $c - b \infty l$. Vnde discimus, l esse differentiam inter falsam radicem c & veram b ; & , cognitâ falsâ c , veram b esse æqualem ipsi $c - l$; & , cognitâ verâ b , falsam c esse æqualem ipsi $b + l$.

Præterea, ex comparatione postremorum terminorum habebimus mm æqualem bc . Vnde sequitur mm esse æquale rectangulo sub vera & falsa radice; & , cognitâ falsâ c , veram b æqualem esse $\frac{mm}{c}$; & , cognitâ verâ b , falsam c æqualem esse $\frac{mm}{b}$.

2 *Propositio.*

Pro secunda æquatione proposita formetur rursus per multiplicationem duarum $x - b \infty 0$ & $x + c \infty 0$, æquatio $xx - bx - bc \infty 0$.

+c

In qua si supponamus b majorem quàm c , erit ipsa ejusdem formæ cum secunda proposita $xx - lx - mm \infty 0$. Et per consequens duæ illæ æquationes erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ ergo collatione unius cum altera, habebimus ex collatio-

latione secundorum terminorum $c - b \infty -l$, vel $l \infty b - c$. Vnde discimus, quòd l est differentia inter veram radicem b & falsam c ; & si cognita fuerit falsa c , erit vera b æqualis $l + c$; & si fuerit cognita vera b , falsa c erit æqualis $b - l$.

Porrò, per comparationem postremorum terminorum, habebimus $mm \infty bc$. Vnde sequitur mm esse æquale rectangulo sub vera & falsa radice; &, cognitâ falsâ c , veram b esse æqualem $\frac{mm}{c}$; &, cognitâ verâ b , falsam c esse $\infty \frac{mm}{b}$.

3 Propositio.

Pro tertia supra posita æquatione, formemus, per multiplicationem duarum $x - b \infty 0$ & $x - c \infty 0$, æquationem sequentem $xx - bx + bc \infty 0$, & habebit eandem formam atque proposita

tertia $xx - lx + mm \infty 0$, & consequenter hæ binæ æquationes erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Comparemus ergo unam cum altera, atque ex collatione secundorum terminorum habebimus $b + c \infty l$. Vnde discimus, quòd l est summa duarum verarum radicum, & si una earum, exempli gratiâ, c , est cognita, reliqua b æquabitur $l - c$.

Præterea ex comparatione ultimorum terminorum habebimus $mm \infty bc$, hoc est, mm æquale rectangulo sub duabus veris radicibus, quarum si alterutra est nota, exempli gratiâ, c , altera b æquabitur $\frac{mm}{c}$.

Quantum ad æquationem quadratam $xx - mm \infty 0$, quæ non est affecta, ipsa oritur ex duabus sequentibus $x - m \infty 0$, & $x + m \infty 0$. Vnde sequitur ipsam duas possidere radices, unam veram, alteram falsam, quarum utraque æquatur ipsi m .

C A P V T III.

De natura & constitutione Equationum Cubicarum seu tertiæ dimensionis, secundo termino carentium.

Omnès hæ æquationes reducuntur ad tres sequentes formas:

$$x^3 * + mmx - n^3 \infty 0.$$

$$x^3 * - mmx - n^3 \infty 0.$$

$$x^3 * - mmx + n^3 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem prioris æquationis propositæ, formemus per multiplicationem harum duarum $xx + bx + cc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^3 * - bbx - bcc \infty 0$. Supposito autem cc majori quàm bb ,

$+ cc$
 ipsa eandem habebit formam atque prima proposita $x^3 * + mmx - n^3 \infty 0$. & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat igitur illarum collatio, & per comparationem tertiorum terminorum habebimus $cc - bb \infty mm$. Vnde constat, si vera radix b cognoscitur, cc fore æquale $mm + bb$, & consequenter $xx + bx + mm + bb \infty 0$. quæ æquatio duas reliquas radices respicit, ac cum vera radice b concurrat ad formandam æquationem propositam.

Præterea, factâ comparatione ultimarum terminorum, habebimus $n^3 \infty bcc$. Vnde sequitur cc esse æquale $\frac{n^3}{b}$; & , cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $xx + bx + \frac{n^3}{b} \infty 0$ similiter duas reliquas radices respicere, & cum vera b concurrere ad formationem propositæ æquationis.

2 *Propositio.*

Pro secunda æquatione proposita formetur rursus per multiplicationem duarum $xx + bx + cc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^3 * - bbx - bcc \infty 0$. Supposito autem bb majori quàm cc , ha-

$+ cc$
 bebit illa eandem formam atque secunda $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$, & per consequens habebunt eandem naturam & constitutionem. Fiat igitur collatio, & ex comparatione tertiorum terminorum habebimus $bb - cc \infty mm$. Vnde constat, cc esse æquale $bb - mm$; & , cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $xx + bx + bb - mm \infty 0$ duas reliquas radices concernere. Porro, ex comparatione duorum postremorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bcc$, unde sequitur cc esse æquale $\frac{n^3}{b}$; & , cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $xx + bx + \frac{n^3}{b}$ similiter ad duas reliquas respicere.

3 *Propositio.*

Ad inveniendam naturam & constitutionem tertiæ æquationis propositæ, fiat ex duabus hisce $xx + bx - cc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^3 - bbx + bcc \infty 0$, eandem habens formam cum

$$-cc$$

tertia proposita $x^3 - mmx + n^3 \infty 0$. Vnde & ipsæ eandem habebunt naturam atque constitutionem. Fiat ergo collatio, & per comparationem tertiorum terminorum habebimus $bb + cc \infty mm$. Vnde constat, cc æquale esse $mm - bb$; & cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $xx + bx + bb - mm \infty 0$ ad duas reliquas radices respicere.

Præterea, ex comparatione postremorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bcc$, & per consequens $cc \infty \frac{n^3}{b}$. Quare, cognitâ verâ radice b , hæc æquatio $xx + bx - \frac{n^3}{b} \infty 0$ similiter duas reliquas radices concernet.

C A P V T I V.

De natura & constitutione Equationum Cubicarum seu trium dimensionum, tertio termino carentium.

HÆ æquationes reducuntur ad tres formas sequentes:

$$x^3 + lxx - n^3 \infty 0.$$

$$x^3 - lxx - n^3 \infty 0.$$

$$x^3 - lxx + n^3 \infty 0.$$

I *Propositio.*

Pro natura & constitutione primæ propositionis, fiat per multiplicationem harum duarum $xx + cx + bc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^3 - bxx - bbc \infty 0$. Et suppositâ c majore

$$+c$$

quàm b , habebit ipsa eandem formam cum prima proposita $x^3 + lxx - n^3 \infty 0$, & per consequens erunt ejusdem naturæ. Factâ ergo collatione, habebimus ex comparatione secundorum terminorum $c - b \infty l$, hoc est, $c \infty l + b$. Vnde constat, co-

gnitâ verâ radice b , æquationem $xx + bx + bb + bl \infty 0$ duas
 $+l$

reliquas radices respicere.

Præterea, ex comparatione duorum ultimorum terminorum; habebitur $n^3 \infty bbc$. unde sequitur c esse æqualem $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ radice b , æquationem $xx + \frac{n^3}{b}x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ duas reliquas radices concernere.

2 Propositio.

Pro secunda propositione fiat ex multiplicatione harum duarum $xx + cx + bc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio
 $x^3 - bxx^* - bbc \infty 0$. Et suppositâ b majore quàm c erit ejus-

$+c$
dem formæ cum secunda propositarum $x^3 - lxx^* - n^3 \infty 0$, adeoque erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ igitur collatione, ex comparatione secundorum terminorum habebimus $b - c \infty l$. Vnde constat, c esse æqualem $b - l$; &, cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $xx + bx + bb - bl \infty 0$ duas
 $-l$

reliquas radices respicere.

Porrò per comparationem postremorum terminorum habebimus $n^3 \infty bbc$. Vnde sequitur c esse æqualem $\frac{n^3}{b}$; &, si vera radix fuerit cognita, hanc æquationem $xx + \frac{n^3}{b}x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ duas reliquas radices concernere.

3 Propositio.

Pro tertia propositione formemus ex duabus $xx - cx - bc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^3 - cxx^* + bbc \infty 0$, quæ
 $-b$

habebit eandem formam atque tertia æquationum propositarum $x^3 - lxx^* + n^3 \infty 0$, & per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Quare factâ collatione, per comparationem secundorum terminorum habebimus $c + b \infty l$. Vnde discimus, quòd c æquetur $l - b$; &, si vera radix b sit cognita, quòd æquatio $xx - bx - bb - bl \infty 0$ ad duas reliquas radices investigan-

$-l$
das referri debeat.

Præ-

Præterea, comparatis ultimis terminis, habebimus $n^3 \propto b b c$, unde sequitur c æquari $\frac{n^3}{b}$; & , cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x x - \frac{n^3}{b} x - \frac{n^3}{b} \propto 0$ reliquis duabus inveniendis inferuire.

C A P V T V.

De natura & constitutione Equationum Cubicarum seu trium dimensionum, in quibus omnes termini extant.

Æ Quationes hæ reducuntur ad septem formas sequentes :

- $x^3 - l x x + m m x - n^3 \propto 0.$
- $x^3 + l x x - m m x - n^3 \propto 0.$
- $x^3 - l x x - m m x - n^3 \propto 0.$
- $x^3 + l x x + m m x - n^3 \propto 0.$
- $x^3 - l x x + m m x + n^3 \propto 0.$
- $x^3 + l x x - m m x + n^3 \propto 0.$
- $x^3 - l x x - m m x + n^3 \propto 0.$

I *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem primæ propositionis, fiat ex multiplicatione $x x - c x + d d \propto 0$ per $x - b \propto 0$, æquatio sequens $x^3 - b x x + d d x - b d d \propto 0$. atque eandem habebunt naturam & constitutionem.

Factâ ergo comparatione, ex collatione secundorum terminorum habebimus $b + c \propto l$, vel $c \propto l - b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $d d + b c \propto m m$, hoc est, $d d \propto m m + b b - b l$, quoniam c est inventa æquari $l - b$. Unde apparet, cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $x x - l x + m m + b b - b l \propto 0$ duas reliquas radices respicere.

Denique ex collatione postremorum terminorum habebimus $b d d \propto n^3$. unde constat, $d d$ æquari $\frac{n^3}{b}$; & , cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $x x - l x + \frac{n^3}{b} \propto 0$ duas reliquas radices concernere.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositarum fiat ex multiplicatione $xx+cx+dd\infty\infty$ per $x-b\infty\infty$ æquatio hæc $x^3-bxx-bcx-bdd\infty\infty$.

& suppositâ c majore quàm b , & bc majore quàm dd , habebit eandem formam, quàm propositio secunda $x^3+lxm-mmx-n^3\infty\infty$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione secundorum terminorum habebimus $c-b\infty l$, hoc est, $c\infty l+b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd-bc\infty mm$, hoc est, restituto valore ipsius c invento, habebitur $dd\infty bl+bb-mm$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $xx+lx+bb+bl-mm\infty\infty$ duabus reliquis radicibus investi-

gandis esse utilem. Denique, ex comparatione postremorum terminorum, habebimus $bdd\infty n^3$. Vnde sequitur d dtore æqualem $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b , æquationem hanc

$$xx+bx+\frac{n^3}{b}\infty\infty \text{ reliquis duabus infervituram.}$$

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione, fiat ex multiplicatione $xx+cx+dd\infty\infty$ per $x-b\infty\infty$ eadem æquatio $x^3-bxx-bcx-bdd\infty\infty$.

Et suppositâ b majore quàm c , & bc majore quàm dd , erit ejusdem formæ cum tertiâ propositarum $x^3-lxm-mmx-n^3\infty\infty$, & consequenter ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex collatione secundorum terminorum habebimus $c-b\infty l$, hoc est, $c\infty b-l$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd-bc\infty mm$, hoc est, substituto valore invento ipsius c , erit $dd\infty bb-bl-mm$. Vnde constat, quòd, cognitâ verâ radice b , hæc æquatio $xx+bx+bb\infty\infty$

ad duas investigandas reliquas adhiberi possit. Denique, ex collatione

latione postremorum terminorum, habebitur $b d d \propto n^3$. Vnde sequitur, dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $xx + bx + \frac{n^3}{b} \propto 0$ ad duas reliquas quærendas esse utilem.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositarum fiat ex multiplicatione $xx + cx + dd \propto 0$ per $x - b \propto 0$ eadem æquatio $x^3 - bxx - bcx - bdd \propto 0$. Et

$+c \quad +dd$

suppositâ c majore quàm b , & dd majore quàm bc , erunt ejusdem formæ ac quarta propositio $x^3 + lxx + mmx - n^3 \propto 0$, & consequenter ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ ergo ad æquationem, ex collatione secundorum terminorum habebimus $c - b \propto l$, seu $c \propto l + b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $dd - bc \propto mm$, hoc est, restituto valore ipsius c invento, erit $dd \propto bb + bl + mm$. Vnde constat, cognitâ vera radice b , hanc æquationem $xx + bx + bb + bl + mm \propto 0$

$+l$

duas reliquas radices respicere. Denique ex collatione postremorum terminorum habebimus $b d d \propto n^3$. Vnde sequitur, dd fore æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$xx + bx + \frac{n^3}{b} \propto 0$ ad indagandas duas reliquas adhiberi posse.

$+l$

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione fiat ex multiplicatione $xx - cx - dd \propto 0$ per $x - b \propto 0$ æquatio $x^3 - cxx - ddx + ddb \propto 0$. Et supposito bc

$-b \quad +bc$

majore quàm dd , erit ejusdem formæ cum quinta propositarum $x^3 - lxx + mmx + n^3 \propto 0$, & consequenter ejusdem naturæ & constitutionis erunt. Factâ ergo ad æquationem, ex comparatione secundorum terminorum, habebimus $l \propto c + b$, vel $c \propto l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $bc - dd \propto mm$, hoc est, restituto valore ipsius c invento, erit $dd \propto bl - bb - mm$. Vnde discimus, cognitâ radice verâ b , æqua-

æqua-

æquationem hanc $xx - lx - bl + bb + mm \infty 0$ duabus reli-

+b

quis inveniendis esse usui. Denique ex collatione postremorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd$. Vnde colligitur dd æquari $\frac{n^3}{b}$; & cognitâ radice verâ b , hanc æquationem $xx - lx - \frac{n^3}{b} \infty 0$

+b

duabus reliquis inveniendis inservire.

6 Propositio.

Pro sexta propositione formetur ex duabus $xx + cx - dd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^3 + cxx - ddx + ddb \infty 0$. Et, suppositâ

-b -bc

c majori quàm b , habebit ipsa eandem formam atque sexta propositarum $x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty 0$, & per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiať jam comparatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, feu $c \infty l + b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum erit $mm \infty dd + bc$, hoc est, substituto valore c invento, habebitur $dd \infty mm - bl - bb$. Vnde constat, si vera radix b sit cognita, hanc æquationem $xx + lx - mm \infty 0$, pro duabus reliquis inveniendis

+b +bl
+bb

usui futuram. Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $ddb \infty n^3$: & per consequens $dd \infty \frac{n^3}{b}$; adeoque, cognitâ

verâ radice b , hæc æquatio $xx + lx - \frac{n^3}{b} \infty 0$ ad investigandas

+b

duas reliquas utilis erit.

7 Propositio.

Pro septima propositione formetur ex duabus $x - b \infty 0$ & $xx + cx - dd \infty 0$ æquatio $x^3 + cxx - ddx + ddb \infty 0$. Sup-

-b -bc

positâ autem b majore quàm c , habebit ipsa eandem formam cum septima propositarum $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ igitur comparatione, orietur ex collatione secundorum terminorum,

lbb-

$l \infty b - c$, seu $c \infty b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, erit $mm \infty bc + dd$, hoc est, substituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty mm - bb + bl$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $xx + bx - mm + bb - bl \infty 0$ ad in-

veniendas duas reliquas infervire. Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $ddb \infty n^3$, unde erit dd æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cùm cognoscitur vera radix b , hæc æquatio $xx + bx - \frac{n^3}{b} \infty 0$ ad duas reliquas inveniendas adhiberi poterit.

C A P V T V I.

De natura & constitutione Equationum quatuor dimensionum, secundo & tertio termino carentium.

H Vjus generis æquationes ad tres formas sequentes reducuntur:

$$\begin{aligned} x^4 * * + n^3 x - p^4 &\infty 0. \\ x^4 * * - n^3 x - p^4 &\infty 0. \\ x^4 * * - n^3 x + p^4 &\infty 0. \end{aligned}$$

I *Propositio.*

Pro natura & constitutione prioris propositionis formemus ex duabus $x^3 + bxx + bbx + c^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^4 * * + c^3 x - bc^3 \infty 0$. Supposito verò c^3 majore quàm b^3 ,

habebit ea eandem formam atque prima propositio $x^4 * * + n^3 x - p^4 \infty 0$, & per consequens erit ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo comparatio, & ex collatione quatorum terminorum habebitur $c^3 - b^3 \infty n^3$, hoc est, $c^3 \infty n^3 + b^3$. unde cognoscimus, quando innotescit vera radix b , æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx + n^3 + b^3 \infty 0$ spectare ad investigationem trium reliquarum radicum.

Præterea, collatis ultimis terminis, fit $p^4 \infty bc^3$: unde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b , æquationem hanc

$x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas investigandas posse usurpari.

2 Propositio.

Pro secunda propositione fiat ex duabus $x^3 + bxx + bbx + c^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 - n^3x - p^4 \infty 0$. Et, si ponatur b^3

tur b^3 major quàm c^3 , habebit illa eandem formam atque secunda propofitarum $x^4 - n^3x - p^4 \infty 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione quatorum terminorum habebimus $c^3 - b^3 \infty -n^3$, hoc est, $c^3 \infty b^3 - n^3$. Vnde cognoscimus, inventâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + b^3 - n^3 \infty 0$, ad tres reliquas radices respicere. Porro, comparatis inter se terminis ultimis, habebimus $p^4 \infty bc^3$. Vnde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ tres reliquas radices concernere.

3 Propositio.

Pro tertia propositione fiat ex duabus $x^3 + bxx + bbx - c^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^4 - c^3x + bc^3 \infty 0$, & habebit eandem $-b^3$

formam atque tertia propofitarum $x^4 - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione quatorum terminorum habebimus $c^3 + b^3 \infty n^3$, hoc est, $c^3 \infty n^3 - b^3$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx - n^3 + b^3 \infty 0$ ad tres reliquas investigandas adhiberi posse. Præterea ex collatione ultimorum habebitur $p^4 \infty bc^3$. Vnde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas quærendas esse utilem.

C A P V T VII.

De natura & constitutione Equationum quatuor dimensionum, tertio & quarto termino carentium.

Æ Quationes hæ ad sequentes tres formas reducuntur :

$$x^4 + lx^3 * * - p^4 \infty 0.$$

$$x^4 - lx^3 * * - p^4 \infty 0.$$

$$x^4 - lx^3 * * + p^4 \infty 0.$$

I *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem primæ propositionis, fiat ex multiplicatione harum duarum $x^3 + cxx + bcx + b^2c \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 + cx^3 * * - b^3c \infty 0$.
 $-b$

Suppositâ vero c majore quàm b , habebit illa eandem formam atque prima propositio $x^4 + lx^3 * * - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat igitur adæquatio, & comparando secundos terminos habebimus $c - b \infty l$, hoc est, $c \infty l + b$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx + blx + b^3 + bbl \infty 0$ tribus reliquis
 $+l$ $+bb$

investigandis inservire. Deinde, collatis ultimis terminis, habebitur $p^4 \infty b^3c$. unde sequitur, c æquari $\frac{p^4}{b^3}$; & , cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + \frac{p^4}{b^3}xx + \frac{p^4}{bb}x + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas indagandas adhiberi posse.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + bcx + b^2c \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 + cx^3 * * - b^3c \infty 0$. Et
 $-b$

supponendo b superare ipsam c , habebit illa eandem formam atque secunda propositio $x^4 - lx^3 * * - p^4 \infty 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & collatis secundis terminorum habebimus $-b + c \infty -l$, hoc

est, $c \infty b - l$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx + b^3 - bbl \infty 0$ ad tres reliquas investi-

gandas usurpari posse. Præterea, comparando postremos terminorum, habebimus $p^4 \infty b^3 c$. Vnde sequitur, c æquari $\frac{p^4}{b^3}$; & cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $x^3 + \frac{p^4}{b^3} xx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ tribus reliquis inferuire.

3 Propositio.

Pro tertia propositione formetur ex duabus $x^3 - cxx - bcx - bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio hæc $x^4 - cx^3 + b^3c \infty 0$

& erit ejusdem formæ atque tertia propositarum $x^4 - lx^3 + p^4 \infty 0$, ac per consequens eandem habebunt naturam & constitutionem. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$x^3 - lxx - blx - bbl + b^3 \infty 0$ tribus reliquis inferuire. Por-

$+b \quad +bb$
rò, comparando postremos terminos, habebimus $p^4 \infty b^3 c$, & per consequens $c \infty \frac{p^4}{b^3}$; adeoque, cognitâ verâ radice b , poterit æquatio $x^3 - \frac{p^4}{b^3} xx - \frac{p^4}{b} x - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas radices investigandas adhiberi.

Non operæ pretium duximus meminisse æquationum quatuor dimensionum, in quibus secundus & quartus terminus defunt: quia illæ omnes reducuntur ad Quadratas, ac idcirco earum natura & constitutio eodem modo habetur.

C A P V T VIII.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, secundo termino carentium.

Æ Quationes hæ reducuntur ad septem formas sequentes :

$$x^4 * - m m x x + n^3 x - p^4 \infty 0.$$

$$x^4 * + m m x x - n^3 x - p^4 \infty 0.$$

$$x^4 * - m m x x - n^3 x - p^4 \infty 0.$$

$$x^4 * + m m x x + n^3 x - p^4 \infty 0.$$

$$x^4 * - m m x x + n^3 x + p^4 \infty 0.$$

$$x^4 * + m m x x - n^3 x + p^4 \infty 0.$$

$$x^4 * + m m x x - n^3 x + p^4 \infty 0.$$

I *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem primæ propositionis, fiat ex multiplicatione duarum $x^3 + b x x - c c x + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 * - c c x x + d^3 x - b d^3 \infty 0$. quæ eandem

$$-bb \quad +bcc$$

dem habebit formam atque prima propositarum $x^4 * - m m x x + n^3 x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione tertiorum terminorum habebimus $m m \infty c c + b b$, hoc est, $c c \infty m m - b b$. Deinde, comparando terminos quartos, erit $n^3 \infty d^3 + b c c$, hoc est, restituendo valorem $c c$ inventum, habebitur $d^3 \infty n^3 + b^3 - b m m$. Vnde comperimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + b x x + n^3 \infty 0$ tribus reliquis indagandis inservire.

$$-m \quad +b^3$$

$$-bmm$$

Præterea, conferendo inter se terminos ultimos, habebimus $p^4 \infty b d^3$. Vnde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & inventâ verâ radice b ,

hanc æquationem $x^3 + b x x - m m x + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas

$$+bb$$

quærendas adhiberi posse.

2 *Propositio.*

Pro secunda fiat ex multiplicatione $x^3 + bxx + ccx + d^3 \infty 0$
 per $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 + ccxx + d^3x - d^3b \infty 0$.
 $-bb \quad -ccb$

Supposito verò cc majore quàm bb , & ccb majore quàm d^3 , habebit illa eandem formam cum secunda propositarum $x^4 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat igitur adæquatio, & ex comparatione tertiorum terminorum habebimus $mm \infty cc - bb$, hoc est, $cc \infty mm + bb$. Deinde, collatis quartis terminis, erit $-cb^3 + d^3 \infty -n^3$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, habebitur $d^3 \infty bmm + b^3 - n^3$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b , æquationem $x^3 + bxx + mmx + bmm \infty 0$, tribus reliquis investigandis inservire.
 $+bb + b^3$
 $-n^3$

Præterea, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty d^3b$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & , cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $x^3 + bxx + mmx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas indagandas posse usurpari.
 $+bb$

3 *Propositio.*

Pro tertia, fiat ex duabus his $x^3 + bxx + ccx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^4 + ccxx + d^3x - d^3b \infty 0$. Et, supposito
 $-bb \quad -ccb$

to bb majore quàm cc , & ccb majore quàm d^3 , habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt naturæ & constitutionis. Vnde factâ adæquatione, ex collatione tertiorum terminorum habebimus $-mm \infty -bb + cc$, hoc est, $cc \infty bb - mm$. Deinde, collatis quartis terminis, habebimus $-n^3 \infty -ccb + d^3$, hoc est, substituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty b^3 + bmm - n^3$. unde patet, si cognita sit radix vera b , hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + b^3 \infty 0$
 $-m^2 + bm^2$
 $-n^3$

tri-

tribus reliquis investigandis infervire. Postremo, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto b d^3$, ac proinde $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , poterit æquatio $x^3 + b x x + b b x + \frac{p^4}{b} \propto 0$
 $\quad \quad \quad - m m$
 ad reliquas tres investigandas usurpari.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositarum formemus ex duabus $x^3 - b x x + c c x + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem $x^4 + c c x x + d^3 x - d^3 b \propto 0$.
 $\quad \quad \quad - b b \quad - c c b$

Et supposito $c c$ majore quàm b , ac d^3 majore quàm $c c b$, habebit ipsa eandem formam atque quarta propositio $x^4 + m m x x + n^3 x - p^4 \propto 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $m m \propto c c - b b$, hoc est, $c c \propto m m + b b$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \propto d^3 - c c b$, hoc est, restituendo valorem $c c$ inventum, erit $d^3 \propto b^3 + b m m + n^3$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $x^3 + b x x + m m x + b b$

$+ b^3 \propto 0$ tribus reliquis quærendis infervire. Denique, collatis
 $+ b m m$
 $+ n^3$

ultimis terminis, erit $d^3 b \propto p^4$; & per consequens $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$. unde,

cognitâ verâ radice b , hæc æquatio $x^3 + b x x + m m x + \frac{p^4}{b} \propto 0$
 $\quad \quad \quad + b b$

ad reliquas tres indagandas erit adhibenda.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione, fiat ex duabus $x^3 + b x x - c c x - d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 + b x x - c c x - d^3 b \propto 0$. Et
 $\quad \quad \quad - b b \quad + b c c$

supposito $b c c$ majore quàm d^3 , habebit ipsa eandem formam atque quinta propositarum $x^4 + m m x x + n^3 x + p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $m m \propto c c + b b$,
 $\quad \quad \quad \text{hoc}$

hoc est, $cc \infty mm - bb$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \infty bcc - d^3$; ideoque, restituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty bmm - b^3 - n^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx - mmx - bmm \infty$ reliquis

$$\begin{array}{r} +bb \quad +b^3 \\ +n^3 \end{array}$$

tribus quærendis inservituram. Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $d^3 b \infty p^4$. Vnde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx - mmx - \frac{p^4}{b} \infty$ ad tres reliquas investigandas posse adhiberi.

6 Propositio.

Pro sexta propositione formemus ex duabus $x^3 + bxx + ccx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^4 + cxx - d^3 x - bb - ccx$
 $+ d^3 b \infty 0$. & supponendo cc majus quàm bb , habebit ipsa eandem formam cum sexta propositarum $x^4 + mxx - n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per consequens erit utraque ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio & per comparationem secundorum terminorum habebimus $mm \infty cc - bb$, hoc est, $cc \infty mm + bb$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebimus $n^3 \infty d^3 + bcc$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty n^3 - bmm - b^3$. Vnde patet, datâ verâ radice b , æquationem $x^3 + bxx + mmx + bb$

$- n^3 \infty 0$ ad trium reliquarum investigationem posse usurpari.
 $+ bmm$
 $+ b^3$

Postremò, comparando ultimos terminos, erit $p^4 \infty d^3 b$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx + mmx - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres quærendas esse adhibendam.

7 *Propositio.*

Pro septima propositarum fiat ex duabus $x^3 + bxx + ccx - d^3 \infty 0$
 & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 + ccx - d^3x + bd^3 \infty 0$. Et sup-
 $-bb -bcc$

posito bb majore quàm cc , habebit ipsa eandem formam atque
 septima propositio $x^4 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$, & per conse-
 quens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæqua-
 tio, & comparando tertios terminos habebimus $-mm \infty -bb$
 $+cc$, hoc est, $cc \infty bb - mm$. Deinde, collatis quartis termi-
 nis, erit $n^3 \infty d^3 + bcc$, hoc est, restituendo valorem cc inventum,
 erit $d^3 \infty n^3 - b^3 + bmm$. unde constat, cognitâ verâ radice b ,
 hanc æquationem $x^3 + bxx + b^3x - n^3 \infty 0$ ad reliquas tres
 $-mm + b^3$

investigandas utilem esse. Postremò, comparando ultimos ter-
 minos, habebimus $p^4 \infty bd^3$. unde discimus, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & co-
 gnitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx + b^3x - \frac{p^4}{b} \infty 0$
 $-m^2b$
 ad reliquas tres quærendas adhiberi posse.

C A P V T IX.

*De natura & constitutione Equationum quatuor
 dimensionum, quarto termino carentium.*

HÆ æquationes reducuntur omnes ad septem sequentes for-
 mulas :

- $x^4 - lx^3 + mmxx^* - p^4 \infty 0.$
- $x^4 + lx^3 - mmxx^* - p^4 \infty 0.$
- $x^4 - lx^3 - mmxx^* - p^4 \infty 0.$
- $x^4 - lx^3 + mmxx^* - p^4 \infty 0.$
- $x^4 - lx^3 + mmxx^* + p^4 \infty 0.$
- $x^4 + lx^3 - mmxx^* + p^4 \infty 0.$
- $x^4 - lx^3 - mmxx^* + p^4 \infty 0.$

I *Propositio.*

Ad investigandam naturam & constitutionem primæ propositionis, formemus ex duabus $x^3 - cxx + ddx + bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquationem hanc $x^4 - cx^3 + ddx x^* - b b d d \infty 0$;
 $-b \quad +bc$

habebitque ipsa eandem formam atque prima propositio $x^4 - lx^3 + mmxx^* - p^4 \infty 0$, & per consequens duæ illæ æquationes ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & ex comparatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, seu $c \infty l + b$. Deinde, comparando tertios terminos, erit $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty mm - bl - bb$. unde constat, si cognoscitur verâ radix b , hanc æquationem $x^3 - lxx + mmx + bmm \infty 0$ ad reliquas tres investigandas infervire.
 $-b \quad -bl \quad -bbl$
 $-bb \quad -b^3$

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione formemus ex duabus $x^3 + cxx + ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^4 + cx^3 + ddx x^* - b b d d \infty 0$;
 $-b \quad -bc$

* $- ddbb \infty 0$. Suppositâ verò c majore quàm b , & bc majore quam dd , habebit illa eandem formam atque secunda proposita- rum $x^4 + lx^3 - mmxx^* - p^4 \infty 0$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, comparatis tertiis terminis, erit $-mm \infty dd - bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty bl + bb - mm$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + lxx + blx + bbl \infty 0$ ad reliquas tres quærendas
 $+b \quad +bb \quad +b^3$
 $-m^2 \quad -bm^2$

posse adhiberi.

Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty b b d d$. unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{b^2}$; & , cùm cognoscitur vera radix

radix b , hanc æquationem $x^3 + lxx + blx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ tres reli-
 $\begin{matrix} +b & +bb \\ -mm \end{matrix}$

quas radices concernere.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione, fiat ex duabus $x^3 + cxx + ddx + bdd \infty 0$
 & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 + cx^3 + ddx x^* - b b d d \infty 0$. Sup-
 $\begin{matrix} -b & -bc \end{matrix}$

positis autem b majore quàm c , & bc majore quàm dd , habebit
 ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 - lx^3 - mmxx^* - p^4 \infty 0$,
 & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutio-
 tionis. Fiat jam adæquatio, & comparando secundos terminos
 habebimus $-l \infty c - b$, hoc est, $c \infty b - l$. Deinde, conferendo
 tertios terminos, erit $-mm \infty dd - bc$, hoc est, restituendo va-
 lorem c inventum, habebitur $dd \infty bb + bl - mm$. Vnde discimus,
 cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + bbl \infty 0$
 $\begin{matrix} -l & +bl & +b^3 \\ -m^2 & -bm^2 \end{matrix}$

tribus reliquis inservire.

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty b b d d$.
 unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æqua-
 tionem $x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b}$ pro tribus reliquis usurpari.
 $\begin{matrix} -l & +bl \\ -mm \end{matrix}$

4 *Propositio.*

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + ddx + bdd \infty 0$
 & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 + cx + ddx x^* - b b d d \infty 0$. Sup-
 $\begin{matrix} -b & -bc \end{matrix}$

positis autem c majore quàm b , & dd majore quàm bc , habebit
 ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 + lx^3 + mmxx^* - p^4 \infty 0$,
 ac per consequens duæ illæ æquationes eandem habebunt
 naturam & constitutionem. Fiat jam adæquatio, comparatisque
 secundis terminis habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Dein-
 $\begin{matrix} L 2 & de, \end{matrix}$

de, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty dd - bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm + bl + bb$. unde constat, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$$x^3 + lxx + m mx + b mm \infty 0 \text{ ad tres reliquas adhiberi.}$$

$$\begin{array}{r} +b \quad +bl \quad +bb \\ \quad \quad +bb \quad +b^3 \end{array}$$

Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty b b d d$. unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b ,

hanc æquationem $x^3 + bxx + m mx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres

$$\begin{array}{r} +l \quad +bl \\ \quad \quad +bb \end{array}$$

quærendas esse utilem.

5 Propositio.

Pro quinta propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 - cx^3 - d d x x^* + b b d d \infty 0$. Et

$$\begin{array}{r} -b \quad +bc \end{array}$$

supponendo bc majus quàm dd , erit ipsa ejusdem formæ cum quinta propositione $x^4 - lx^3 + m mx x^* + p^4 \infty 0$, ac per consequens eandem habebunt naturam & constitutionem. Fiat jam adæquatio, & comparatis secundis terminis, habebimus $l \infty b + c$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \infty bc - dd$, hoc est, restituendo valorem inventum c , erit $dd \infty bl - bb - mm$. unde patet, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 - lxx - blx - bbl \infty 0$ ad reli-

$$\begin{array}{r} +b \quad +bb \quad +bmm \\ \quad \quad +mm \quad +b^3 \end{array}$$

quas tres quærendas adhiberi posse.

Postremò, comparando ultimos terminos, habebimus $bb d d \infty p^4$, ac per consequens $dd \infty \frac{p^4}{bb}$. unde, cognitâ verâ radice b ,

hæc æquatio $x^3 - lxx - blx - \frac{p^4}{b} \infty 0$ pro tribus reliquis in-

$$\begin{array}{r} +b \quad +bb \\ \quad \quad +mm \end{array}$$

vestigandis inservire poterit.

6 Propositio.

Pro sexta propositarum, fiat ex duabus $x^3 + cxx - ddx - bdd \infty$ & $x - b \infty$ hæc æquatio $x^4 + cx^3 - ddx x^* + b b d d \infty$.

$$\begin{array}{cc} -b & -bc \end{array}$$

Supponendo autem c majorem quàm b , habebit ipsa eandem formam atque sexta propositio, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando secundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, ex collatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm - bl - bb$.

Vnde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$$\begin{array}{ccc} x^3 + lxx - mmx - bmm \infty & 0 & \text{tres reliquas radices respicere.} \\ +b & +bl & +bb \\ +bb & +b^3 & \end{array}$$

Postremò, ex comparatione ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \infty b b d d$, ac per consequens $dd \infty \frac{p^4}{bb}$; adeoque, cognitâ

verâ radice b , hæc æquatio $x^3 + lxx - mmx - \frac{p^4}{b} \infty$ ad tres

$$\begin{array}{cc} +b & +bl \\ & +bb \end{array}$$

reliquas investigandas erit adhibenda.

7 Propositio.

Pro septima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx - bdd \infty$ & $x - b \infty$, hæc æquatio $x^4 + cx^3 - ddx x^* + b b d d \infty$.

$$\begin{array}{cc} -b & -bc \end{array}$$

Suppositâ autem b majore quàm c , habebit ipsa eandem formam atque septima propositarum $x^4 - lx^3 - mmx x^* + p^4 \infty$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $c - b \infty l$, hoc est, $c \infty b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \infty mm - bb + bl$. unde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx - mmx - bmm \infty$

$$\begin{array}{ccc} -l & -bl & -bb \\ +bb & +b^3 & \end{array}$$

tribus reliquis infervire. Denique, comparando postremos terminos, habebimus $p^4 \propto b b d d$; ac per consequens $d d \propto \frac{p^4}{b b}$; & cognitâ verâ radice b , hæc æquatio $x^3 + b x x - m m x - \frac{p^4}{b} \propto 0$

$$\begin{array}{r} -l \quad -bl \\ +bb \end{array}$$

ad tres reliquas erit referenda.

C A P V T X.

De natura & constitutione Equationum quatuor dimensionum, tertio termino carentium.

R Educuntur autem hæc æquationes ad septem sequentes formulas:

$$\begin{array}{l} x^4 - l x^3 * + n^3 x - p^4 \propto 0. \\ x^4 + l x^3 * - n^3 x - p^4 \propto 0. \\ x^4 + l x^3 * - n^3 x - p^4 \propto 0. \\ x^4 + l x^3 * + n^3 x - p^4 \propto 0. \\ x^4 - l x^3 * + n^3 x + p^4 \propto 0. \\ x^4 + l x^3 * - n^3 x + p^4 \propto 0. \\ x^4 - l x^3 * - n^3 x + p^4 \propto 0. \end{array}$$

I Propositio.

Pro natura & constitutione primæ propositionis, formemus ex duabus $x^3 - c x x - b c x + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hanc æquationem $x^4 - c x^3 * + d^3 x - b d^3 \propto 0$, & habebit ipsa eandem

$$\begin{array}{r} -b \quad +bb c \end{array}$$

formam atque prima propositio $x^4 - l x^3 * + n x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex comparatione secundorum terminorum habebimus $l \propto c + b$, hoc est, $c \propto l - b$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \propto d^3 + b b c$, hoc est, restituendo valorem inventum c , erit $d^3 \propto n^3 - b b l + b^3$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 - l x x - b l x + n^3 \propto 0$

$$\begin{array}{r} +b \quad +bb \quad +b^3 \\ -bb l \end{array}$$

ad tres reliquas quærendas adhiberi posse. Denique, comparando
ulti-

ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto b d^3$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognita verâ radice b , hæc æquatio $x^3 - lxx - blx + \frac{p^4}{b} \propto 0$
 $+ b \quad + bb$

ad reliquas tres erit referenda.

2 Propositio.

Pro secunda propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx + d^3 \propto 0$
 & $x - b \propto 0$, hæc æquatio $x^4 + cx^3 + d^3x - d^3b \propto 0$. Suppo-
 $-b \quad -bbc$

fitis autem c majore quàm b , & bbc majore quàm d^3 , habebit ipsa eandem formam atque secunda propositio $x^4 + lx^3 - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparisonem secundorum terminorum habebimus, $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto l + b$. Deinde, collatis quartis terminis, habebimus $d^3 - bbc \propto -n^3$, hoc est, substituendo valorem c inventum, erit $d^3 \propto bbl + b^3 - n^3$. Vnde patet, cognita verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + lxx + blx + bbl \propto 0$
 $+ b \quad + bb \quad + b^3$
 $- n^3$

tribus reliquis inservire. Postremò, per comparisonem ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \propto b d^3$, ac per consequens $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$;

& cognita verâ radice b , hæc æquatio $x^3 + lxx + blx + \frac{p^4}{b} \propto 0$
 $+ b \quad + bb$

ad tres reliquas investigandas erit utilis.

3 Propositio.

Pro tertia propositione fiat ex duabus, $x + cxx + bcx + d^3 \propto 0$
 & $x - b \propto 0$, hæc æquatio $x^4 + cx^3 + d^3x - d^3b \propto 0$. Suppo-
 $-b \quad -bbc$

fitis autem b majore quàm c , & bbc majore quàm d^3 , habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 + lx^3 - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat itaque earum adæquatio, & per comparisonem secundorum terminorum habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto l + b$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $d^3 - bbc \propto -n^3$, hoc est,
 resti-

restituendo valorem c inventum, erit $d^3 \propto lbb + b^3 - n^3$. Vnde
discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$$\begin{array}{r} x^3 + lxx + blx + lbb \propto 0 \\ + b \quad + bb \quad + b^3 \\ - n^3 \end{array}$$

lem. Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \propto d^3 b$, ac
per consequens $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b , hæc æquatio

$$\begin{array}{r} x^3 + lxx + blx + \frac{p^4}{b} \propto 0 \\ + b \quad + bb \end{array}$$

4 Propositio.

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + bcx + d^3 \propto 0$
& $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 + c x^3 + d^3 x - d^3 b \propto 0$. Sup-

positis autem c majore quàm b , & d^3 majore quàm bbc , habe-
bit ipsa eandem formam atque quarta propositarum $x^4 + l x^3 +$
 $+ n^3 x - p^4 \propto 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ &
constitutionis. Fiat ergo adæquatio, collatisque secundis termi-
nis habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto b + l$. Deinde, comparan-
do quartos terminos, habebimus $n^3 \propto d^3 - bbc$, hoc est, resti-
tuendo valorem c inventum, fiet $d^3 \propto n^3 + b^3 + bbl$. Vnde disci-
mus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$$\begin{array}{r} x^3 + bxx + bbx + n^3 \propto 0 \\ + l \quad + bl \quad + b^3 \\ + bbl \end{array}$$

Denique, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto d^3 b$,
ac per consequens $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b , hæc æ-

$$\begin{array}{r} x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \propto 0 \\ + l \quad + bl \end{array}$$

5 Propositio.

Pro quinta propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - bcx - d^3 \propto 0$
& $x - b \propto 0$, hæc æquatio $x^4 - c x^3 - d^3 x + b d^3 \propto 0$. suppo-

nendo autem bbc majus quàm d^3 , habebit ipsa eandem formam
quinta

atque quinta propositio $x^4 - lx^3 + n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque secundos terminos habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, ex collatione quatorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bbc - d^3$, hoc est, $d^3 \infty bbl - b^3 - n^3$, substituto nempe valore c invento. Vnde patet, cùm innotescit vera radix b , hanc æquationem $x^3 - lxx - blx - bbl \infty 0$ tri-

$$\begin{array}{r} +b \\ +bb \\ +b^3 \\ +n^3 \end{array}$$

bus reliquis inservire.

Postremò, ex collatione ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \infty d^3b$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 - lxx - blx - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas investigandas esse adhibendam.

$$\begin{array}{r} +b \\ +bb \end{array}$$

6. *Propositio.*

Pro sexta propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, æquatio $x^4 - cx^3 + d^3x + bd^3 \infty 0$. Suppo-

$$\begin{array}{r} -b \\ -bbc \end{array}$$

sitâ autem c majore quàm b , habebit ipsa eandem formam atque sexta propositarum $x^4 + lx^3 - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque secundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, ex collatione quatorum terminorum, habebimus $n^3 \infty d^3 + bbc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \infty n^3 - bbl - b^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + lxx + blx - n^3 \infty 0$ tribus reliquis inservire.

$$\begin{array}{r} +b \\ +bb \\ +bbl \\ +b^3 \end{array}$$

Denique, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bd^3$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + lxx + blx - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres esse referendam.

$$\begin{array}{r} +b \\ +bb \end{array}$$

7 *Propositio.*

Pro septima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx - d^3 \infty 0$
& $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 + cx^3 - d^3x + bd^3 \infty 0$. Suppo-

nendo autem b majorem quàm c , habebit ipsa eandem formam at-
que septima propositarum $x^4 - lx^3 - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per conse-
quens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæqua-
tio, comparandoque secundos terminos habebimus $c - b \infty -l$,
hoc est, $c \infty b - l$. Deinde, ex collatione quatorum termino-
rum, habebimus $n^3 \infty d^3 + bbc$, hoc est, restituendo valorem c
inventum, fiet $d^3 \infty n^3 - b^3 + bbl$. unde sequitur, cognitâ verâ
radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx - n^3 \infty 0$ reliquis

$$\begin{array}{r} -l \quad -bl \quad -bbl \\ +b^3 \end{array}$$

tribus inservire.

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty d^3 b$.
unde constat, d^3 æuari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , æquationem
hanc $x^3 + bxx + bbx - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas esse referendam.

$$\begin{array}{r} -l \quad -bl \end{array}$$

C A P V T XI.

*De natura & constitutione Equationum quatuor di-
mensionum, in quibus nullus terminus deest.*

R Educuntur hæ æquationes omnes ad quindecim sequentes
formas:

$$\begin{array}{l} x^4 - lx^3 + mxx - n^3x + p^4 \infty 0. \\ x^4 - lx^3 + mxx + n^3x + p^4 \infty 0. \\ x^4 - lx^3 - mxx - n^3x + p^4 \infty 0. \\ x^4 - lx^3 - mxx + n^3x + p^4 \infty 0. \\ x^4 + lx^3 + mxx - n^3x + p^4 \infty 0. \\ x^4 + lx^3 - mxx - n^3x + p^4 \infty 0. \\ x^4 + lx^3 - mxx + n^3x + p^4 \infty 0. \\ x^4 - lx^3 + mxx - n^3x - p^4 \infty 0. \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 x^4 - lx^3 + m m x x + n^3 x - p^4 &\infty 0. \\
 x^4 - lx^3 - m m x x - n^3 x - p^4 &\infty 0. \\
 x^4 - lx^3 - m m x x + n^3 x - p^4 &\infty 0. \\
 x^4 + lx^3 + m m x x - n^3 x - p^4 &\infty 0. \\
 x^4 + lx^3 + m m x x + n^3 x - p^4 &\infty 0. \\
 x^4 + lx^3 - m m x x - n^3 x - p^4 &\infty 0. \\
 x^4 + lx^3 - m m x x + n^3 x - p^4 &\infty 0.
 \end{aligned}$$

I Propositio.

Pro natura & constitutione primæ propositionis, dignoscendâ fiat ex duabus hisce, $x^3 - c x x + d d x - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 - c x^3 + d d x x - f^3 x + b f^3 \infty 0$, quæ eandem

$$\begin{array}{r}
 -b \quad +bc \quad -bdd
 \end{array}$$

habebit formam atque prima propositarum $x^4 - lx^3 + m m x x - n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $m m \infty d d + b c$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $d d \infty m m - b l + b b$. Tum per collationem quatorum terminorum habebimus $n^3 \infty f^3 + b d d$, hoc est, substituendo valorem $d d$ inventum, fiet $f^3 \infty n^3 + b b l - b m m - b^3$. Unde constat, cùm innotescit verâ radix b , hanc æquationem $x^3 - l x x + m m x - n^3 \infty 0$ tribus reliquis inservire.

$$\begin{array}{r}
 +b \quad +bb \quad -bbl \\
 -bl \quad +bm^2 \\
 +b^3
 \end{array}$$

Postremò, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty b f^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b , hanc æ-

quationem $x^3 - l x x + m m x - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas esse re-

$$\begin{array}{r}
 +b \quad +bb \\
 -bl
 \end{array}$$

ferendam.

2 Propositio.

Pro secunda propositione, fiat ex duabus, $x^3 - c x x - d d x - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 - c x^3 - d d x x - f^3 x + b f^3 \infty 0$.

$$\begin{array}{r}
 -b \quad +bc \quad +bdd
 \end{array}$$

Suppositis autem bc majore quàm dd , & bdd majore quàm f^3 , habebit ipsa eandem formam atque secunda propositarum $x^4 - lx^3 + mxx + n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio & per comparationem secundorum terminorum habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty bc - dd$, hoc est, substituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty bl - bb - mm$. Tum ex collatione quatorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd - f^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty bbl - b^3 - bmm - n^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 - lxx + mxx + n^3 \infty 0$ tri-

$$\begin{array}{r} +b \quad +bb \quad +b^3 \\ -bl \quad +bmm \\ -bbl \end{array}$$

bus reliquis inservire.

Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 - lxx + mxx - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas investigan-

$$\begin{array}{r} +b \quad +bb \\ -bl \end{array}$$

das posse adhiberi.

3 Propositio.

Pro tertia propositione fiat ex duabus $x^3 - cxx - ddx - f^3 \infty 0$, & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 - cx^3 - ddx - f^3x + bf^3 \infty 0$.

$$\begin{array}{r} -b \quad +bc \quad +bdd \end{array}$$

Suppositis autem dd majore quàm bc , & f^3 majore quàm bdd , habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 - lx^3 - mxx - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $bc - dd \infty -mm$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \infty bl + mm - bb$. Tum ex comparatione quatorum terminorum habebimus $bdd - f^3 \infty -n^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty n^3 + bbl + bmm - b^3$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b , hanc æqua-

æquationem $x^3 - lxx - blx - n^3 \infty$ o tribus reliquis inservire.

$$\begin{array}{r} +b \quad -mm \quad -bbl \\ \quad +bb \quad -bm^2 \\ \quad \quad +b^3 \end{array}$$

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b , hanc æ-

quationem $x^3 - lxx - mmx - \frac{p^4}{b} \infty$ o ad tres reliquas esse re-

$$\begin{array}{r} +b \quad -bl \\ \quad +bb \end{array}$$

ferendam.

4 Propositio.

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3 - cxx - ddx - f^3 \infty$ & $x - b \infty$ o hæc æquatio $x^4 - cx^3 - ddx - f^3x + bf^3 \infty$.

$$\begin{array}{r} -b \quad +bc \quad +bdd \end{array}$$

Suppositis autem dd majore quàm bc ; & bdd majore quàm f^3 , habebit ipsa eandem formam atque quarta propositio $x^4 - lxx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty$ o, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $c \infty l - b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebimus $bc - dd \infty - mm$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm + bl - bb$. Tum ex comparatione quattorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd - f^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm + bbl - b^3 - n^3$. Unde constat, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$x^3 - lxx - mmx - bmm \infty$ o tribus reliquis inservire.

$$\begin{array}{r} +b \quad -bl \quad -bbl \\ \quad +bb \quad +b^3 \\ \quad \quad +n^3 \end{array}$$

Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus, $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b , hanc æqua-

tionem $x^3 - lxx - mmx - \frac{p^4}{b} \infty$ o ad tres reliquas esse refe-

$$\begin{array}{r} +b \quad -bl \\ \quad +bb \end{array}$$

rendam.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione, formemus ex duabus, $x^3 + cxx + ddx - f^3 = 0$ & $x - b$, hanc æquationem $x^4 + cx^3 + ddx - f^3 x$
 $-b \quad -bc \quad -bdd$

+ $bf^3 = 0$. Suppositis autem c majore quàm b , & dd majore quàm bc , habebit ipsa eandem formam atque quinta propositurum $x^4 + lx^3 + mxx - n^3x + p^4 = 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos, habebimus $c = l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis habebimus $mm = dd - bc$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd = mm - bl - bb$. Tum, ex collatione quatorum terminorum, habebimus $n^3 = f^3 + ddb$, hoc est, restituito valore dd invento, erit $f^3 = n^3 + mmb - bbl - b^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$$\begin{array}{r} x^3 + lxx + mxx - n^3 = 0 \text{ tribus reliquis inservire.} \\ +b \quad -bl \quad -m^2b \\ \quad -bb \quad +bbl \\ \quad \quad +b^3. \end{array}$$

Denique, ex comparatione ultimorum terminorum, habebimus $bf^3 = p^4$, ac per consequens $f^3 = \frac{p^4}{b}$. unde constat, cognitâ verâ

radice b , hanc æquationem $x^3 + lxx + mxx - \frac{p^4}{b} = 0$ ad tres
 $+b \quad -bl$
 $\quad -bb$

reliquas esse referendam.

6 *Propositio.*

Pro sexta propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + ddx - f^3 = 0$ & $x - b = 0$ hæc æquatio $x^4 - bx^3 - bcxx - bddx + bf^3 = 0$.
 $+c \quad +dd \quad -f^3$

Suppositis autem c majore quàm b , & bc majore quàm dd , habebit ipsa eandem formam atque sexta propositio $x^4 + lx^3 - mxx - n^3x + p^4 = 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $c = l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc = -mm$, hoc est, substituto valore c
 in-

invento, erit $dd \infty bl + bb - mm$. Tum, comparando quartos terminos, habebitur $n^3 \infty f^3 + bdd$, hoc est, restituito valore dd invento, erit $f^3 \infty n^3 + bmm - b^3 - bbl$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + lxx + blx - n^3 \infty 0$

$$\begin{array}{r} +b \quad +bb \quad -bmm \\ -mm \quad +bbl \\ +b^3 \end{array}$$

tribus reliquis infervire.

Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + lxx + blx - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas esse referendam.

$$\begin{array}{r} +b \quad +bb \\ -mm \end{array}$$

7 Propositio.

Pro septima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 + cx^3 - ddx - f^3x + bf^3 \infty 0$.

$$\begin{array}{r} -b \quad -bc \quad +bdd \end{array}$$

Suppositis autem c majore quàm b , & bdd majore quàm f^3 , habebit ipsa eandem formam atque septima propositio $x^4 + lx^3 - mxx + n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty b + l$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituyendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bb - bl$. Tum ex comparatione quattorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd - f^3$, hoc est, substituito valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm - b^3 - bbl - n^3$. Vnde sequitur, cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $x^3 + bxx - mxx - bmm \infty 0$ reliquis tribus infervire.

$$\begin{array}{r} +l \quad +bb \quad +b^3 \\ +bl \quad +bbl \\ +n^3 \end{array}$$

Postremò, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

tio-

tionem $x^3 + bxx - mnx - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres esse referendam.

$$\begin{array}{r} +l \quad +bb \\ +bl \end{array}$$
8 *Propositio.*

Pro octava propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 - cx^3 + ddx + f^3x - f^3b \infty 0$.

$$\begin{array}{r} -b \quad +bc \quad -bdd \end{array}$$

Supposito autem bdd majore quàm f^3 , habebit ipsa eandem formam atque octava propositio $x^4 - lx^3 + mnx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bl + bb$. Tum ex collatione quatorum terminorum habebitur $f^3 - bdd \infty -n^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm - bbl - n^3 + b^3$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$$x^3 - lxx + mnx + bmm \infty 0 \text{ tribus reliquis inservire.}$$

$$\begin{array}{r} +b \quad +bb \quad +b^3 \\ -bl \quad -bbl \\ -n^3 \end{array}$$

Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$, unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$$x^3 - lxx + mnx + \frac{p^4}{b} \infty 0 \text{ ad tres reliquas esse referendam.}$$

$$\begin{array}{r} +b \quad +bb \\ -bl \end{array}$$

9 *Propositio.*

Pro nona propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 - cx^3 + d^3xx + f^3x - f^3b \infty 0$.

$$\begin{array}{r} -b \quad +bc \quad -bdd \end{array}$$

Supposito verò f^3 majore quàm bdd , erit ipsa ejusdem formæ cum propositione nona $x^4 - lx^3 + mnx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per

con-

consequens habebunt duæ illæ æquationes eandem naturam & constitutionem. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \propto b + c$, hoc est, $c \propto l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebitur $m m \propto d d + b c$, hoc est, subrogato valore c invento, erit $d d \propto m m + b b - b l$. Tum collatis quartis terminis, fiet $n^3 \propto f^3 - b d d$, hoc est, substituto valore $d d$ invento, erit $f^3 \propto n^3 + b^3 + b m m - b b l$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$$x^3 - lxx + m mx + n^3 \propto 0 \text{ tribus reliquis infervire.}$$

$$\begin{array}{r} + b \quad + bb \quad + bmm \\ \quad - bl \quad + b^3 \\ \quad \quad - bbl \end{array}$$

Præterea, comparatis ultimis terminis, habebimus $f^3 b \propto p^4$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æqua-

tionem $x^3 - lxx + m mx + \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres reliquas esse referendam.

$$\begin{array}{r} + b \quad + bb \\ \quad - bl \end{array}$$

10 *Propositio.*

Pro decima propositione fiat ex duabus hisce $x^3 + cxx + dd x + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 + cx^3 + ddxx + f^3x - f^3b \propto 0$.

$$\begin{array}{r} -b \quad -bc \quad -bd^2 \end{array}$$

Suppositis autem b majore quàm c , & bc majore quàm dd , nec non bdd majore quàm f^3 , habebit ipsa eandem formam atque decima propositio $x^4 - lxx^3 - m mx^2 - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparatisque secundis terminis habebimus $c - b \propto -l$, hoc est, $c \propto b - l$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \propto -mm$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \propto bb - bl - mm$. Tum ex comparatione quattorum terminorum habebitur $f^3 - bd^3 \propto n^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \propto b^3 - bbl - bmm - n^3$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + b^3 \propto 0$ tribus reliquis infervire.

$$\begin{array}{r} -l \quad -bl \quad -bbl \\ \quad -m^2 \quad -bmm \\ \quad \quad -n^3 \end{array}$$

Denique, comparatis ultimis terminis, habebitur $p^4 \propto bf^3$. unde constat, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres reliquas esse referendam.

$$\begin{array}{r} -l \\ -bl \\ +mm \end{array}$$

II Propositio.

Pro undecima propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx - ddx - f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 + cx^3 - ddx + f^3x - bf^3 \propto 0$.

$$\begin{array}{r} -b \\ -bc \\ +ddb \end{array}$$

Suppositâ autem b majore quàm c , habebit ipsa eandem formam atque undecima propositio $x^4 - lx^3 - mxx + n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione secundorum terminorum habebimus $c - b \propto -l$, hoc est, $c \propto b - l$. Deinde, comparando tertios terminos, habebimus $mm \propto dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, erit $dd \propto mm + bb - bl$. Tum, ex collatione quattorum terminorum, habebitur $n^3 \propto f^3 + ddb$, hoc est, substituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \propto n^3 - mm - b^3 + bbl$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx - mxx + n^3 \propto 0$ reliquis tribus inservire.

$$\begin{array}{r} -l \\ -bb \\ +bbl \\ +bl \\ -mm \\ -b^3 \end{array}$$

Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $bf^3 \propto p^4$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx - mxx + \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad reliquas tres esse referendam.

$$\begin{array}{r} -l \\ -bb \\ +bl \end{array}$$

II 2 Propositio.

Pro duodecima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio $x^4 + cx^3 + ddx + f^3x - f^3b \propto 0$.

$$\begin{array}{r} -b \\ -bc \\ -bdd \end{array}$$

Suppo-

Suppositis autem c majore quàm b , & dd majore quàm bc , nec non ddd majore quàm f^3 , habebit ipsa eandem formam atque duodecima propositio $x^4 + lx^3 + mxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde conferendo secundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \infty dd - bc$, hoc est, substituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm + bb + bl$. Tum comparando quartos terminos habebimus $f^3 - bdd \infty -n^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm + bbl + b^3 - n^3$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + b^3 \infty 0$

$$\begin{array}{r} +l \quad +bl \quad +bbl \\ +mm \quad +bm^2 \\ -n^3 \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis postremis terminis, habebimus $bf^3 \infty p^4$, ac per consequens $f^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b , hæc æquatio $x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas erit referenda.

$$\begin{array}{r} +l \quad +bl \\ +mm \end{array}$$

13 Propositio.

Pro decima tertia propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 + cx^3 + ddx + f^3x - b - bc - bdd - f^3b \infty 0$. Suppositis autem c majore quàm b , & dd majore quàm bc , nec non f^3 majore quàm ddd , habebit ipsa eandem formam atque decima tertia propositio $x^4 + lx^3 + mxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, collatisque secundis terminis, habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, comparando tertios terminos, habebimus $mm \infty dd - bc$, hoc est, restituito valore c invento, erit $dd \infty mm - bb - bl$. Tum, comparatis quartis terminis, habebimus $n^3 \infty f^3 - bdd$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty n + b^3 + bbl - bmm$. Vnde constat, cognitâ

verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx - bbx + b^3 \infty 0$
 $\begin{array}{r} +l \quad -bl \quad +bbl \\ +m^2 \quad +n^3 \\ -bm^2 \end{array}$

reliquis tribus infervire.

Postremò, ex collatione ultimorum terminorum, habebimus $bf^3 \infty p^4$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b ,

hanc æquationem $x^3 + bxx - bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres
 $\begin{array}{r} +l \quad -bl \\ +mm \end{array}$

esse referendam.

14 Propositio.

Pro decima quarta propositione formemus ex duabus hisce
 $x^3 + cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem
 $x^4 + cx^3 + ddx + f^3x - f^3b \infty 0$. Suppositis autem c majore
 $\begin{array}{r} -b \quad -bc \quad -bdd \end{array}$

quàm b , & bc majore quàm dd , nec non bdd majore quàm f^3 ,
 habebit ipsa eandem formam atque decima quarta propositio
 $x^4 + lx^3 - mxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem
 erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde ex
 collatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, hoc
 est, $c \infty l + b$. Deinde, comparatis tertiis terminis, habebitur
 $dd - bc \infty -mm$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \infty$
 $bb + bl - mm$. Tum collatis quartis terminis habebitur $f^3 - bdd$
 $\infty -n^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty b^3 + bbl$
 $-bmm - n^3$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æ-
 quationem $x^3 + bxx + bbx + b^3 \infty 0$ tribus reliquis infervire.

$$\begin{array}{r} +l \quad +bl \quad +bbl \\ -m^2 \quad -bm^2 \\ -n^3 \end{array}$$

Denique, ex comparatione postremorum terminorum, habe-
 bimus $p^4 \infty f^3b$. unde sequitur, cognitâ verâ radice b , hanc æqua-
 tionem $x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas esse referendam.

$$\begin{array}{r} +l \quad +bl \\ -m^2 \end{array}$$

15 Propositio.

Pro decima quinta & ultima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 + cx^3 - ddx + f^3x - bf^3 \infty 0$. Suppositâ verò c majore

$$-b \quad -bc \quad +bdd$$

quàm b , habebit ipsa eandem formam atque decima quinta propositio $x^4 + lx^3 - mxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, conferendoque secundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc est, substituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bb - bl$. Tum collatis quartis terminis, habebitur $n^3 \infty f^3 + bdd$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty b^3 + bbl + n^3 - bmm$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + b^3 \infty 0$ tribus re-

$$\begin{array}{r} +l \quad +bl \quad +bbl \\ -mm \quad +n^3 \\ -bm^2 \end{array}$$

liquis inservire.

Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty f^3b$, ac per consequens $f^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde sequitur, cognitâ verâ radice b ,

hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas

$$\begin{array}{r} +l \quad +bl \\ -mm \end{array}$$

esse referendam.

O B S E R V A N D A

hic in genere nonnulla.

1. **N**Otandum, nos in omnibus præcedentibus adæquationibus supponere æquationes comparatas inter se habuisse æque multas radices, aut veras, aut falsas, aut imaginarias. Et ad dignoscendas imaginarias à reliquis, interviet Tractatus Diorsiticus, quem subjungere animus est.

2. Quòd si diligenter perpendantur ea, quæ præcedunt, par-

tebit, mutatis signis terminorum locorum parium, ut 2^{di} , 4^{ti} , &c. non mutatis signis reliquorum, (comprehendendo sub terminorum numero etiam locos vacantes:) secundum terminum semper æquari summæ radicum æquationis, affectarum cum suis signis $+$ & $-$; tertium verò, summæ productorum earundem radicum, cum singulæ binæ in se invicem ducuntur: & quartum, summæ productorum multiplicationis, factæ ex singulis ternis, atque sic deinceps.

Vnde sequitur, deficiente secundo termino, ipsam falsam summamvè falsarum radicum æquari ipsi veræ vel verarum summæ; & deficiente tertio termino, productum vel summam productorum ex binis, per signum $+$ vel $-$ designatorum, æquari summæ productorum vel ei, quod ex reliquis binis producitur ac cum contrario signo afficitur, & sic de cæteris.

Primum Exemplum. Fiat ex multiplicatione $x - b \infty 0$ per $x + c \infty 0$ hæc æquatio $xx - bx - bc \infty 0$. Quare mutatis signis

secundi termini ac retento signo tertii, habebimus $xx + bx -$
 $-c$

$bc \infty 0$. Vnde apparet, $b - c$ esse summam radicis veræ $+b$ & falsæ $-c$; & $-bc$ esse productum ex multiplicatione falsæ $-c$ per veram $+b$.

Secundum Exemplum. Fiat deinde alia æquatio $xx - bx + bc \infty 0$,

ex multiplicatione $x - b \infty 0$ per $x - c \infty 0$. Quare mutatis signis secundi termini, retento signo tertii, habebitur $xx + bx + bc \infty 0$.

Vnde apparet, $+b + c$ esse summam duarum verarum radicum, & $+bc$ esse productum ex earum multiplicatione.

Tertium Exemplum. Fiat ex continua multiplicatione trium radicum $x - b \infty 0$, $x - c \infty 0$, & $x + f \infty 0$ æquatio sequens: $x^3 - bxx + bcx + bcf \infty 0$. Quare mutatis signis terminorum

$-c$ $-bf$
 $+f$ $-cf$

loco paripositorum, relinquendo signa reliquorum, habebimus $x^3 + bxx + bcx - bcf \infty 0$. Vnde apparet, secundum termi-

$+c$ $-bf$
 $-f$ $-cf$

num $+b+c-f$ esse summam verarum radicum $+b, +c,$ & falsæ $-f$; & tertium terminum $bc-bf-cf$ esse summam trium productorum $+bc, -bf,$ & $-cf$, prout singulæ binæ radices in se invicem ducuntur; at quartum terminum $-bcf$ esse productum multiplicationis trium radicum $+b, +c,$ & $-f$. Patet quoque, deficiente secundo termino, falsam f æquari summam duarum verarum $+b$ & $+c$; & deficiente tertio termino, producta multiplicationis $-bf$ & $-cf$, signo $-$ affecta, æquari producto $+bc$, signo $+$ affecto.

Quartum Exemplum. Formemus æquationem ex continua multiplicatione trium $x-b \infty 0, x-c \infty 0,$ & $x-d \infty 0$, quæ sit $x^3 - bxx + bcx - bcd \infty 0$. Et mutatis signis locorum parium,

$$\begin{array}{r} -c \quad +db \\ -d \quad +dc \end{array}$$

retentis signis reliquorum, habebimus $x^3 + bxx + dcx + bcd$.

$$\begin{array}{r} +c \quad +bd \\ +d \quad +bc \end{array}$$

Vnde perspicimus, secundum terminum $+b+c+d$ esse summam radicum $+b, +c,$ & $+d$; & tertium terminum $+dc+db+bc$ esse summam productorum ex singulis binis radicibus in se invicem ductis; at quartum terminum $+bdc$ esse productum multiplicationis omnium trium radicum.

Quintum Exemplum. Fiat ex multiplicatione quatuor $x-b \infty 0, x-c \infty 0, x-d \infty 0,$ & $x+f \infty 0$ sequens æquatio

$x^4 - bx^3 + bcxx - bcdx - bcdf \infty 0$. Vnde mutatis signis

$$\begin{array}{r} -c \quad +bd \quad +bcf \\ -d \quad +cd \quad +bdf \\ +f \quad -bf \quad +cdf \\ -cf \\ -df \end{array}$$

terminorum, locis paribus constitutorum, retentis signis reliquorum, habebimus $x^4 + bx^3 + bcxx + bcdx - bcdf \infty 0$.

$$\begin{array}{r} +c \quad +bd \quad -bcf \\ +d \quad +cd \quad -bdf \\ -f \quad -bf \quad -cdf \\ -cf \\ -df \end{array}$$

Atque apparet, $+b+c+d-f$ esse summam quatuor radicum æqua-

æquationis; & tertium terminum esse summam productorum ex singulis binis radicibus in se invicem ductis; at quartum terminum esse summam productorum ex singulis ternis radicibus; ac denique ultimum terminum esse productum earundem quatuor radicum $+b$, $+c$, $+d$, & $-f$, in se invicem ductarum. Patet quoque, deficiente secundo termino, falsam radicem $-f$ æquari summæ trium verarum $+b$, $+c$, & $+d$. Et, deficiente tertio termino, summam productorum ex binis, per $-$ designatorum, æquari reliquæ summæ productorum ex binis, cum signo $+$ affectorum. Non secus se res habet cum defecerit quartus.

Sextum & ultimum exemplum. Fingamus quoque ex multiplicatione continua quatuor radicum $x-b$, $x-c$, $x-d$, & $x-f$ hanc exurgere æquationem

$$x^4 - bx^3 + bcx^2 - bcdx + bcdf = 0. \text{ Et mutatis signis lo-}$$

| | | |
|------|-------|--------|
| $-c$ | $+bd$ | $-bcf$ |
| $-d$ | $+cd$ | $-bdf$ |
| $-f$ | $+bf$ | $-cdf$ |
| | $+cf$ | |
| | $+df$ | |

corum imparium, retentis reliquis, habebimus

$$x^4 + bx^3 + bcx^2 + bcdx - bcdf. \text{ Atque apparet, secun-}$$

| | | |
|------|-------|--------|
| $+c$ | $+bd$ | $+bcf$ |
| $+d$ | $+bf$ | $+bdf$ |
| $+f$ | $+cd$ | $+cdf$ |
| | $+cf$ | |
| | $+df$ | |

dum terminum $+b + c + d + f$ esse summam quatuor radicum; tertium terminum $+bc + bd + cd + bf + cf + df$ esse summam productorum multiplicationis ex singulis binis; quartum $+bcd + bcf + bdf + cdf$ esse summam productorum multiplicationis ex singulis ternis; ac denique $+bcdf$ esse productum earundem quatuor radicum $+b$, $+c$, $+d$, & $+f$, in se invicem ductarum.

C A P V T XII.

Regula pro inveniendis reliquis Equationis radicibus, unâ falsarum datâ.

Oportet mutare signa terminorum locorum parium æquationis propositæ, ita ut falsæ radices evadant veræ, & veræ falsæ. Transformatâ hoc pacto æquatione, suppositâque radice datâ pro vera, inveniatur æquatio, reliquis radicibus inveniendis inserviens, sicuti supra docuimus. Atque in æquatione sic inventa mutantur signa terminorum locorum parium, habebimusque æquationem requisito satisfacientem.

Exempli gratiâ. Esto æquationis $x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0$ una ex falsis radicibus data, quæ sit b , atque mutatis signis terminorum locorum parium, habebimus $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0$. Supponatur jam radix falsa b hujus æquationis esse vera, atque ut habeatur æquatio, reliquis duabus radicibus inserviens, consulta- tur Capitis V. Prop^o 2^{da}; & elicientur inde hæ duæ æquationes

$$\begin{array}{r} xx + lx + bb \infty 0 \\ + b + bl \\ - mm \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{r} xx + bx + \frac{n^3}{b} \infty 0 \\ + l \end{array}$$

Quocirca mutatis utriusque æquationis signis locorum pa- rium, habebimus $xx - lx + bb \infty 0$ & $xx - bx + \frac{n^3}{b} \infty 0$,

$$\begin{array}{r} -b + bl \\ - mm \end{array} \quad \begin{array}{r} -l \end{array}$$

quarum quælibet quæsito satisfaciet.

C A P V T XIII.

Ad tollendum secundum terminum Equationum

Q V A D R A T A R V M.

$xx + lx - mm \infty 0$. Sit $z - \frac{1}{2}l \infty x$, & habebimus $zz^* - \frac{1}{4}ll \infty 0$.

$xx - lx - mm \infty 0$. Sit $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}l + z \infty x, \\ \frac{1}{2}l - y \infty x, \end{array} \right\}$ eritque $\left\{ \begin{array}{l} zz^* - \frac{1}{4}ll \infty 0 \\ yy^* - \frac{1}{4}ll \infty 0. \end{array} \right.$

Pars II.

O

xx —

$$xx - lx + mm \infty 0. \text{ Sit } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}l + z \infty x, \\ \frac{1}{2}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque } \left\{ \begin{array}{l} z^2 * - \frac{1}{4}ll \infty 0. \\ + mm \\ yy * - \frac{1}{4}ll \infty 0. \\ + mm \end{array} \right.$$

CUBICARVM.

$$x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0. \text{ Sit } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}l + z \infty x, \\ \frac{1}{3}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque } \left\{ \begin{array}{l} z^3 * - \frac{1}{3}llz - \frac{2}{27}l^3 \infty 0. \\ + m^2 - n^3 \\ + \frac{1}{3}lm^2 \\ y^3 * - \frac{1}{3}lly + \frac{2}{27}l^3 \infty 0. \\ + m^2 - n^3 \\ - \frac{1}{3}lm^2 \end{array} \right.$$

$$x^3 - lxx - mmx - n^3 \infty 0. \text{ Sit } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}l + z \infty x, \\ \frac{1}{3}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque } \left\{ \begin{array}{l} z^3 * - \frac{1}{3}llz - \frac{2}{27}l^3 \infty 0. \\ - m^2 - \frac{1}{3}lm^2 \\ - n^3 \\ y^3 * - \frac{1}{3}lly + \frac{2}{27}l^3 \infty 0. \\ - m^2 + \frac{1}{3}lm^2 \\ + n^3 \end{array} \right.$$

$$x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty 0. \text{ Sit } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}l + z \infty x, \\ \frac{1}{3}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque } \left\{ \begin{array}{l} z^3 * - \frac{1}{3}llz - \frac{2}{27}l^3 \infty 0. \\ + mm + \frac{1}{3}lm^2 \\ + n^3 \\ y^3 * - \frac{1}{3}lly + \frac{2}{27}l^3 \infty 0. \\ + m^2 - \frac{1}{3}lm^2 \\ - n^3 \end{array} \right.$$

$$x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0. \text{ Sit } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}l + z \infty x, \\ \frac{1}{3}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque } \left\{ \begin{array}{l} z^3 * - \frac{1}{3}llz - \frac{2}{27}l^3 \infty 0. \\ - m^2 - \frac{1}{3}lm^2 \\ + n^3 \\ y^3 * - \frac{1}{3}lly + \frac{2}{27}l^3 \infty 0. \\ - m^2 + \frac{1}{3}lm^2 \\ - n^3 \end{array} \right.$$

$$x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0. \text{ Sit } z - \frac{1}{3}l \infty x, \text{ eritque } z^3 * - \frac{1}{3}llz + \frac{2}{27}l^3 \infty 0. \\ - m^2 + \frac{1}{3}lm^2 \\ - n^3$$

$$x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0. \text{ Sit } z - \frac{1}{3}l \infty x, \text{ eritque } z^3 * - \frac{1}{3}llz + \frac{2}{27}l^3 \infty 0. \\ + m^2 - \frac{1}{3}lm^2 \\ - n^3$$

 $x^3 +$

$x^3 + lx - mmx + n^3 \infty 0$. Sit $z = \frac{1}{3}l \infty x$, eritque $z^3 * -\frac{1}{3}llz + \frac{2}{27}l^3 \infty 0$.
 $-m^2 + \frac{1}{3}lm^2 + n^3$

Q V A D R A T O - Q V A D R A T A R V M.

$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$. Esto $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \infty x, \\ \frac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\}$ eritque $\left\{ \begin{array}{l} z^4 * -\frac{3}{8}llz - \frac{1}{8}l^3z - \frac{3}{276}l^4 \\ + m^2 + \frac{1}{2}lm^2 + \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ -n^3 - \frac{1}{4}ln^3 + p^4 \\ y^4 * -\frac{3}{8}lly + \frac{1}{8}l^3y - \frac{3}{276}l^4 \\ + m^2 - \frac{1}{2}lm^2 + \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ + n^3 - \frac{1}{4}ln + p^4 \end{array} \right.$

$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$. Sit $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \infty x, \\ \frac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\}$ eritque $\left\{ \begin{array}{l} z^4 * -\frac{3}{8}llz - \frac{1}{8}l^3z - \frac{3}{276}l^4 \\ -m^2 - \frac{1}{2}lm^2 - \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ + n^3 + \frac{1}{4}ln^3 + p^4 \\ y^4 * -\frac{3}{8}lly + \frac{1}{8}l^3y - \frac{3}{276}l^4 \\ -m^2 + \frac{1}{2}lm^2 - \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ -n^3 + \frac{1}{4}ln + p^4 \end{array} \right.$

$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$. Sit $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \infty x, \\ \frac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\}$ eritque $\left\{ \begin{array}{l} z^4 * -\frac{3}{8}llz - \frac{1}{8}l^3z - \frac{3}{276}l^4 \\ + m^2 + \frac{1}{2}lm^2 + \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ + n^3 + \frac{1}{4}ln^3 + p^4 \\ y^4 * -\frac{3}{8}lly + \frac{1}{8}l^3y - \frac{3}{276}l^4 \\ + m^2 - \frac{1}{2}lm^2 + \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ -n^3 + \frac{1}{4}ln + p^4 \end{array} \right.$

$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$. Esto $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \infty x, \\ \frac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\}$ eritque $\left\{ \begin{array}{l} z^4 * -\frac{3}{8}llz - \frac{1}{8}l^3z - \frac{3}{276}l^4 \\ -m^2 - \frac{1}{2}lm^2 - \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ -n^3 - \frac{1}{4}ln^3 + p^4 \\ y^4 * -\frac{3}{8}lly + \frac{1}{8}l^3y - \frac{3}{276}l^4 \\ -m^2 + \frac{1}{2}lm^2 - \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ + n^3 - \frac{1}{4}ln + p^4 \end{array} \right.$

$$x^4 + lx^3 - m m x x + n^3 x + p^4 \infty 0. \text{ Esto } z = \frac{1}{4} l \infty x, \text{ erit-}$$

$$\text{que } z^{4*} = \frac{3}{8} ll z z + \frac{1}{8} l^3 z - \frac{3}{256} l^4 \infty 0.$$

$$+ m^2 - \frac{1}{2} l m^2 + \frac{1}{16} ll m^2$$

$$- n^3 + \frac{1}{4} l n^3$$

$$+ p^4$$

$$x^4 + lx^3 - m m x x + n^3 x + p^4 \infty 0. \text{ Esto } z = \frac{1}{4} l \infty x, \text{ erit-}$$

$$\text{que } z^{4*} = \frac{3}{8} ll z z + \frac{1}{8} l^3 z - \frac{3}{256} l^4$$

$$- m m + \frac{1}{2} l m^2 - \frac{1}{16} ll m m \infty 0.$$

$$+ n^3 - \frac{1}{4} l n^3$$

$$+ p^4$$

$$x^4 + lx^3 - m m x x - n^3 x + p^4 \infty 0. \text{ Esto } z = \frac{1}{4} l \infty x, \text{ erit-}$$

$$\text{que } z^{4*} = \frac{3}{8} ll z z + \frac{1}{8} l^3 z - \frac{3}{256} l^4$$

$$- m m + \frac{1}{2} l m^2 - \frac{1}{16} ll m m \infty 0.$$

$$- n^3 + \frac{1}{4} l n^3$$

$$+ p^4$$

$$x^4 - lx^3 + m m x x - n^3 x - p^4 \infty 0. \text{ Esto } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} l + z \infty x, \\ \frac{1}{4} l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{ eritque } \left\{ \begin{array}{l} z^{4*} = \frac{3}{8} ll z z - \frac{1}{8} l^3 z - \frac{3}{256} l^4 \\ + m^2 + \frac{1}{2} l m^2 + \frac{1}{16} ll m^2 \infty 0, \\ - n^3 - \frac{1}{4} l n^3 \\ - p^4 \\ y^{4*} = \frac{3}{8} ll y y + \frac{1}{8} l^3 y - \frac{3}{256} l^4 \\ + m^2 - \frac{1}{2} l m^2 + \frac{1}{16} ll m^2 \infty 0, \\ + n^3 - \frac{1}{4} l n^3 \\ - p^4 \end{array} \right.$$

$$x^4 - lx^3 - m m x x + n^3 x - p^4 \infty 0. \text{ Esto } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} l + z \infty x, \\ \frac{1}{4} l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{ eritque } \left\{ \begin{array}{l} z^{4*} = \frac{3}{8} ll z z - \frac{1}{8} l^3 z - \frac{3}{256} l^4 \\ - m^2 - \frac{1}{2} l m^2 - \frac{1}{16} ll m^2 \infty 0, \\ + n^3 + \frac{1}{4} l n^3 \\ - p^4 \\ y^{4*} = \frac{3}{8} ll y y + \frac{1}{8} l^3 y - \frac{3}{256} l^4 \\ - m^2 + \frac{1}{2} l m^2 - \frac{1}{16} ll m^2 \infty 0, \\ - n^3 + \frac{1}{4} l n^3 \\ - p^4 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 x^4 - lx^3 + mmxx + \\
 n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto }
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{1}{4}l + z \infty x, \\
 \frac{1}{4}l - y \infty x,
 \end{array} \right\}
 \text{eritque}
 \left\{ \begin{array}{l}
 z^{4*} - \frac{3}{8}llz - \frac{1}{8}l^3z - \frac{3}{256}l^4 \\
 + m^2 + \frac{1}{2}lm^2 + \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\
 + n^3 + \frac{1}{4}ln^3 \\
 - p^4 \\
 y^{4*} - \frac{3}{8}lly + \frac{1}{8}l^3y - \frac{3}{256}l^4 \\
 + m^2 - \frac{1}{2}lm^2 + \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\
 - n^3 + \frac{1}{4}ln^3 \\
 - p^4
 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 x^4 - lx^3 - mmxx - \\
 n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto }
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{1}{4}l + z \infty x, \\
 \frac{1}{4}l - y \infty x,
 \end{array} \right\}
 \text{eritque}
 \left\{ \begin{array}{l}
 z^{4*} - \frac{3}{8}llz - \frac{1}{8}l^3z - \frac{3}{256}l^4 \\
 - m^2 - \frac{1}{2}lm^2 - \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\
 - n^3 - \frac{1}{4}ln^3 \\
 - p^4 \\
 y^{4*} - \frac{3}{8}lly + \frac{1}{8}l^3y - \frac{3}{256}l^4 \\
 - m^2 + \frac{1}{2}lm^2 - \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\
 + n^3 - \frac{1}{4}ln^3 \\
 - p^4
 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto } z - \frac{1}{4}l \infty x, \text{ erit-} \\
 \text{que } z^{4*} - \frac{3}{8}llz + \frac{1}{8}l^3z - \frac{3}{256}l^4 \\
 + m^2 - \frac{1}{2}lm^2 + \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\
 - n^3 + \frac{1}{4}ln^3 \\
 - p^4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto } z - \frac{1}{4}l \infty x, \text{ erit-} \\
 \text{que } z^{4*} - \frac{3}{8}llz + \frac{1}{8}l^3z - \frac{3}{256}l^4 \\
 - m^2 + \frac{1}{2}lm^2 - \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\
 + n^3 - \frac{1}{4}ln^3 \\
 - p^4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto } z - \frac{1}{4}l \infty x, \text{ erit-} \\
 \text{que } z^{4*} - \frac{3}{8}llz + \frac{1}{8}l^3z - \frac{3}{256}l^4 \\
 - m^2 + \frac{1}{2}lm^2 - \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\
 - n^3 + \frac{1}{4}ln^3 \\
 - p^4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto } z - \frac{1}{4}l \infty x, \text{ erit-} \\
 \text{que } z^{4*} - \frac{3}{8}llz + \frac{1}{8}l^3z - \frac{3}{256}l^4 \\
 + m^2 - \frac{1}{2}lm^2 - \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\
 + n^3 - \frac{1}{4}ln^3 \\
 - p^4
 \end{array}$$

Vnde colligere licet, omnes suppositiones, quæ ad tollendum secundum terminum adhibentur, necessariò exhibere æquationem realem, modò reales radices adfuerint in æquatione proposita; & si nullæ in his fuerint, id indicio esse, nullas quoque esse imaginarias in æquatione proposita. Nam, exempli gratiâ, si sit æquatio $x^4 - lx^3 - m m x x + n^3 x + p^4 \infty 0$: patet, si radix est realis, x necessariò debere æqualis esse $\frac{1}{4}l$, vel major, vel minor. Si æqualis fuerit $\frac{1}{4}l$, ultimus terminus æquationis transformatæ deficere debet; si major fuerit quàm $\frac{1}{4}l$, æquatio transformata denominata à radice z erit realis; si denique minor fuerit; transformata æquatio à radice y denominata itidem realis erit.

Quòd si secundus terminus æquationis propositæ afficitur signo $+$, ut, exempli gratiâ, si sit $x^4 + lx^3 - m m x x + n^3 x - p^4 \infty 0$: patet, si adfuerit radix aliqua realis, suppositionem hanc $z - \frac{1}{4}l \infty x$ semper esse necessariò realem ac denotare aliquam quantitatem; adeoque transformatam æquationem admittere quoque aliquam radicem.

Deinde constat, radices veras æquationum à radice y denominatarum esse falsas æquationum à radice z denominatarum; & contra, radices veras æquationum à radice z denominatarum esse falsas æquationum à radice y denominatarum.

CAPUT XIV.

*Continens modum tollendi penultimum terminum
Æquationum, secundo termino carentium.*

Pro Cubicis. Supponatur ultimus terminus divisus per incognitam quantitatem R^2 esse æqualis radici æquationis propositæ, & sic æquatio transformetur, in qua demum penultimus deficiet terminus.

Pro Quadrato-quadratis. Supponatur ultimus terminus divisus per incognitam quantitatem R^3 esse æqualis radici æquationis propositæ, & tum rursus transformatâ æquatione penultimus terminus deficiet.

Pro æquationibus quinque dimensionum supponatur ultimus terminus divisus per incognitam quantitatem R^4 esse æqualis radici æquationis propositæ, & sic in infinitum, transmutatis deinde æquationibus, uti dictum est.

Sed

Sed pro æquationibus quatuor dimensionum commodius est, supponere quadratum ultimi termini divisum per incognitam quantitatem R esse æquale radici incognitæ, atque ita transformare æquationem.

Exemplum Cubicarum. Proponatur $x^3 * + mmx - n^3 \infty 0$. Esto $\frac{n^3}{R^2} \infty x$, &, transformatâ æquatione, habebitur $\frac{n^9}{R^6} + \frac{mmn^3}{R^2} - n^3 \infty 0$. Hinc multiplicatis omnibus per R^6 , fiet $n^9 + mmn^3 R^4 - n^3 R^6 \infty 0$, adeoque divisis per n^3 , fiet $n^6 + mmR^4 - R^6 \infty 0$, hoc est, per transpositionem, habebitur $R^6 - mmR^4 * - n^6 \infty 0$. æquatio cubica, carens penultimo termino, & in qua cùm datur R^2 ex suppositione habetur $x \infty \frac{n^3}{R^2}$.

Aliud Exemplum. Proponatur $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$. Esto $\frac{n^3}{R^2} \infty x$, fietque $\frac{n^9}{R^6} - \frac{mmn^3}{R^2} - n^3 \infty 0$, hoc est, $R^6 + mmR^4 * - n^6 \infty 0$. æquatio cubica, in qua penultimus terminus deficit, & in qua cùm datur R^2 , ex supra posita suppositione habetur x .

Tertium Exemplum. Proponatur $x^3 * - mmx + n^3 \infty 0$. Esto $\frac{n^3}{R^2} \infty x$, eritque, transformatâ æquatione, $\frac{n^9}{R^6} - \frac{mmn^3}{R^2} + n^3 \infty 0$, hoc est, $R^6 - mmR^4 * + n^6 \infty 0$. æquatio cubica, carens penultimo termino, & in qua cùm datur R^2 ex suppositione id habetur quod requiritur.

Exemplum Quadrato-quadratarum. Proponatur $x^4 * - mmxx + n^3 x - p^4 \infty 0$. Esto $\frac{p^2}{R} \infty x$, &, transformatâ æquatione fiet, $\frac{p^8}{R^4} - \frac{mmp^4}{R^2} + \frac{n^3 pp}{R} - p^4 \infty 0$. Hoc est, multiplicatis omnibus per R^4 , habebimus $p^8 - mmp^4 R^2 + n^3 pp R^3 - p^4 R^4 \infty 0$, ac proinde divisis per p^4 , habebitur $R^4 - \frac{n^3}{pp} R^3 + mmR^2 * - p^4 \infty 0$. æquatio quatuor dimensionum, carens penultimo termino.

Exemplum secundum. Proponatur $x^4 * + mmxx - n^3 x + p^4 \infty 0$. Supponendo $\frac{pp}{R} \infty x$, transformetur æquatio, fietque $R^4 - \frac{n^3}{pp} R^3 + mmR^2 * + p^4 \infty 0$. æquatio in qua penultimus terminus deficit.

Exemplum tertium. Proponatur $x^4 * - m m x x - n^3 x + p^4 \infty 0$.
 Suppositâ $x \infty \frac{p p}{R}$, æquatio transformata erit $R^4 - \frac{n^3}{p p} R^3 - m m R^2 * + p^4 \infty 0$, carens penultimo termino.

Exemplum quartum. Proponatur $x^4 * - m m x x + n^3 x + p^4 \infty 0$.
 Supposito $\frac{p p}{R} \infty x$, erit transformata æquatio $R^4 + \frac{n^3}{p p} R^3 - m m R^2 * + p^4 \infty 0$, penultimo termino destituta.

Exemplum quintum. Proponatur $x^4 * + m m x x - n^3 x - p^4 \infty 0$.
 Et supposito $\frac{p p}{R} \infty x$, æquatio transformata erit $R^4 + \frac{n^3}{p p} R^3 - m m R^2 * - p^4 \infty 0$, carens penultimo termino.

Exemplum sextum. Proponatur $x^4 * - m m x x - n^3 x - p^4 \infty 0$.
 Et supposito $\frac{p p}{R} \infty x$, erit æquatio transformata $R^4 + \frac{n^3}{p p} R^3 + m m R^2 * - p^4 \infty 0$, quæ destituitur penultimo termino.

Exemplum septimum. Proponatur $x^4 * + m m x x + n^3 x - p^4 \infty 0$.
 Supposito $\frac{p p}{R} \infty x$, transformata æquatio erit $R^4 - \frac{n^3}{p p} R^3 - m m R^2 * - p^4 \infty 0$, carens penultimo termino.

Ex quibus manifestum est, ex omnibus æquationibus auferri posse penultimum terminum, quandoquidem superius ostensum est, ex omni æquatione tolli posse secundum, ac modò jam est demonstratum, quo pacto ex æquationibus, secundo termino carentibus, penultimus terminus auferatur. Id quod annotasse operæ pretium duximus, cum Vieta, postquam Capite 1^{mo} de *Æquationum Emendatione* secundum terminum cujusque æquationis tollere docuit, versùs finem ejusdem Capituli affirmet, posse etiam aliquando alios auferri æquationis terminos, atque ex hac nostra quidem methodo constet, quomodo semper penultimus tolli queat.

C A P V T X V.

Methodus transmutandi Equationes Cubicas compositas, in quibus secundus terminus deest, in Equationes Cubicas simplices, quando id fieri potest.

Proponatur hæc æquatio $x^3 + 3 m m x - n^3 = 0$. Supponamus $z z - z x - m m = 0$, hoc est, $x = \frac{z z - m m}{z}$. Unde,

transmutatâ æquatione, habebitur

$$\frac{z^6 - 3 m m z^4 + 3 m^4 z z - m^6}{z^3} + \frac{3 m m z z - 3 m^4}{z} - n^3 = 0,$$

hoc est, multiplicatis omnibus per z^3 , invenietur hæc æquatio $z^6 - n^3 z^3 - m^6 = 0$, vel $z^6 = n^3 z^3 + m^6$, cujus radix est $z^3 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} n^3 + \sqrt{\frac{1}{4} n^6 + m^6}}$. Quæ est æquatio cubica simplex.

Cognita autem ejus radice z , erit ex supra positis radix altera $x = \frac{z z - m m}{z}$. Quæ semper est possibilis, cum z major sit quàm m .

Aliter. Supponatur $z z + z x - m m = 0$, eritque $x = \frac{m m - z z}{z}$. Unde transmutatâ æquatione habebimus $z^6 + n^3 z^3 - m^6 = 0$, hoc est, $z^6 = -n^3 z^3 + m^6$, cujus radix est $z^3 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} n^3 + \sqrt{\frac{1}{4} n^6 + m^6}}$. Quæ rursus æquatio est cubica simplex. Cujus ope, cum cognoscitur z , habebitur $x = \frac{m m - z z}{z}$, quæ semper erit possibilis.

Proponatur item hæc æquatio $x^3 - m m x - n^3 = 0$, supponaturque $z z - z x + m m = 0$, hoc est, $x = \frac{z z + m m}{z}$. Unde

$$\text{transmutatâ æquatione habebimus } \frac{z^6 + 3 m m z^4 + 3 m^4 z z + m^6}{z^3} - \frac{3 m m z z - 3 m^4}{z} - n^3 = 0,$$

hoc est, $z^6 - n^3 z^3 + m^6 = 0$.

feu $z^6 = n^3 z^3 - m^6$, cujus radix est $z^3 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} n^3 - \sqrt{\frac{1}{4} n^6 - m^6}}$.

Pars II.

P

Unde

Vnde patet, oportere m^6 non majus esse quàm $\frac{1}{4} n^6$, ut æquatio hæc $z^6 \infty n^3 z^3 - m^6$ locum obtineat. Nam si majus sit, non posset proposita æquatio $x^3 * - m m x - n^3 \infty 0$ sic in simplicem cubicam transmutari.

CAPVT XVI.

Methodus generalis, concernens usum secundarum radicum, ad tollenda signa radicalia ex Equatione proposita.

SI fuerint duæ æquationes, in quibus eadem litera reperitur, licet ipsas reducere comparando cum duabus aliis, in quibus hæc litera pauciores habet dimensiones.

Exempli gratiâ, habeamus hæc duas æquationes $x^3 + b x x - c c x - d^3 \infty 0$ & $x^3 - l x x + m m x - n^3 \infty 0$. Quibus transpositis, habebimus $x^3 \infty - b x x + c c x + d^3$ & $x^3 \infty + l x x - m m x + n^3$, ac per consequens $\frac{l x x - m m x + n^3}{b - c - d^3} \infty 0$, hoc

est, $x x \infty \frac{m m x + c c x + d^3 - n^3}{l + b}$. in quâ litera x pauciorum est

dimensionum. Atque ut habeatur adhuc alia, multiplicetur tantùm æquatio inventa per x , & inuenietur $x^3 \infty \frac{m m x x + d^3 x}{l + b} - \frac{c c - n^3}{l + b}$.

Quæ comparata cum aliqua ex præcedentibus, verbi gratiâ, cum secunda, exhibet sequentem æquationem $+m^2 x x - n^3 x - l n^3 \infty 0$.

$$\begin{array}{r} + c c \quad + l m^2 - b n^3 \\ - l l \quad + b m^2 \\ - l b \quad + d^3 \end{array}$$

in quâ litera x similiter duarum tantùm est dimensionum. Sed si collata fuisset cum prima æquatione, inventa fuisset alia, ubi x adhuc pauciores habuisset dimensiones, ita ut eligenda sit ad comparisonem facillima. Atque sic continuando inveniri hîc possunt duæ aliæ, ubi x est unius dimensionis, & tandem alia ubi prorsus deest. Quod ipsum docet, dari tales æquationes, in quibus litera, quæ in utraque inveniri debet, mutuâ illâ comparatione planè aufertur. Vnde apparet, posse quidem aliquando auferrî hanc literam, quamvis non diminuatur numerus dimensionum.

Exem-

Exempli gratiâ, si dentur hæ æquationes $xx - bx - cc \infty 0$
 & $xx - bx + dd - bb \infty 0$, habebimus $xx - bx \infty cc$, &
 $xx - bx \infty +bb - dd$, ergo $cc \infty bb - dd$.

Venio jam ad asymmetrias seu irracionales quantitates, pro
 quibus tollendis, oportet tantum supponere literas æquales sin-
 gulis terminis asymmetris æquationis propositæ. Quâ quidem ra-
 tione non tantum obtinebimus æquationem propositam, in qua
 omnes hæ literæ sunt substitutæ; sed etiam tot alias, quot literæ
 fuerunt suppositæ. Vnde collatis ordine omnibus hisce æquatio-
 nibus, devenietur ad æquationem, ubi nulla literarum invenitur
 ac per consequens nullum signum radicale.

Exempli gratiâ, proponatur æquatio $c + \sqrt{C.bbx} - \sqrt{dx} \infty 0$.
 Ad tollendas igitur ejus asymmetrias, ponamus $R \infty \sqrt{C.bbx}$,
 & $z \infty \sqrt{dx}$. Quibus in æquatione proposita substitutis, habe-
 bimus $c + R - z \infty 0$; atque ex reliquis suppositionibus erit
 $R^3 \infty bbx$, & $zz \infty dx$. Primò, ad tollendum R , habebimus
 $R \infty z - c$, ideoque $R^3 \infty z^3 - 3czz + 3ccz - c^3$. Atqui est
 quoque $R^3 \infty bbx$. Quare erit $z^3 - 3czz + 3ccz - c^3 -$
 $bbx \infty 0$, & per consequens $z^3 \infty + 3czz - 3ccz +$
 $c^3 + bbx$. Sed si multiplicetur superiùs proposita æquatio zz
 ∞dx per z , habebitur etiam $z^3 \infty dxz$. Ergo erit
 $3czz - 3ccz + c^3 \infty 0$, & substituto dx loco zz , habebi-

mus $3cdx - 3ccz + c^3 \infty 0$, hoc est, $3ccz \infty 3cdx + bbx$
 $- dx + bbx$ dx c^3

seu $z \infty \frac{3cdx + bbx + c^3}{3cc + dx}$. Quæ si multiplicetur per z , fiet

$zz \infty \frac{3cdxz + bbxz + c^3z}{3cc + dx}$. Sed est quoque $zz \infty dx$. Igi-

tur habebimus $3cdxz + bbxz + c^3z \infty 3ccdx + ddxx$,

hoc est, $\frac{3ccdx + ddxx}{3cdx + bbx + c^3} \infty z$. Inventa autem est

$z \infty \frac{3cdx + bbx + c^3}{3cc + dx}$. Quare habebimus tandem

$$d^3 x^3 - 3 c c d d x x + 3 c^4 d x - c^5 \infty 0. \text{ In qua } \text{\AA} \text{quatione nul-}$$

$$- 6 b b c d \quad - 2 c^3 b b$$

$$- b^4$$

lus terminus irrationalis reperitur. Quòd si autem alii adhuc reperirentur, oporteret tantum operando ut supra auferre cæteras literas, cæteris terminis irrationalibus æquales suppositas. Quâ quidem ratione omnes omnino termini irrationales tollentur, calculus verò prolixior evadet.

Necessitas hujus methodi vel hinc patet, quòd, si fuerint plures quatuor terminis irrationalibus, signa radicalia, per methodum à Vieta traditam, Capite quinto de Emendatione Æquationum, tolli non possint.

F I N I S.



Ad Tractatum de Limitibus Æquationum
EPISTOLA PRÆLIMINARIS.

Clarissimo Viro

FRANCISCO à SCHOOTEN,
Mathematicum in Illustri Leidensi Academia
Professori,

ERASMIUS BARTHOLINVS

S. P.

Nisi meminissem, quanto majore animo honestatis fructus in conscientia, quàm in fama reponatur; nequaquam opportunum fuisset, in edendis hisce opusculis Analyticis consilium. Verùm quia communibus magis commodis quàm privatae jactantiae studui, eò animus ausus est, deliberato consilio obsequi. Cujus meae conscientiae interpreterem, non alium magis desidero, quàm te, Vir Clarissime, quem utilitatibus aliorum, plus quàm propriae laudi, indies deseruire, compertum habeo. Venit in mentem studiosum illud otium, quod Leidæ mihi semper emolumento, utrisque deinde solatio erat, cujusque varietates si oratione repetere vellem, prout animo pleræque obversantur, non dubito quin existimationi hominum diligentia & fides nostra, & in plerisque etiam pietas subjiceretur. Et licèt nesciam, an ullum

tempus jucundiùs exegerim ; tamen eâ de causâ
magnifacio , quòd amicitia tua , usque ad inti-
mam familiaritatem , capacem me redderet . Ne-
que aliam interpretationem habuit , quòd Leidâ
discessurus , Isagogen Cartesianam typis excu-
dendam concinna veram , ut meam famam cum
tua extenderem . Quâ de causâ , cum non modò
offensas , verùm etiam simultates varias subie-
rim ; non ignoro , quæ futura sit de hisce jam
edendis sententia . Ne dubites tamen quin omnia
æquo animo toleraverim , præsertim quia pietas
& obsequium causam junxere . Quem enim præ-
terit , fatum literatorum ? Mihi certè non im-
provisa est calumniandi vanitas . Est ita natu-
rà comprobatum , ut benefactis major ex conscien-
tiâ merces , quàm in ore hominum reponatur :
nam plerique , tantum suæ detractum iri gloriæ
existimant , quantum cesserit alienæ : postremò ,
ignavissimus quisque aliorum scripta carpere
non veretur . Sic contendere pro moribus tempo-
rum eruditio est . Quod recordantem , posterita-
tis magna miseratio subit . Quot enim præclara
inventa putas obscurari , propter scelus hoc ob-
trectandi ? Plerique se intra perpetuum silen-
tium tenere amant , potiùs quàm malignitati in-
terpretantium exponi . Ita communem hunc er-
rorem , bonum publicum magnis detrimentis ex-
piabit . Ego aliorum exemplo quidem didici ,
nul-

nullam ex meis laboribus sperare laudem; tanta tamen mihi semper fuit reverentia posterum, ut censuram erroris non tam reformidem quam inhumanitatis. Sed, ut de pictore nisi Artifex judicare, ita nisi Mathematicus non satis potest perspicere Mathematica; tuæ potissimum sententiæ hæc exponuntur. Eximium habent usum ea quæ sequenti tractatu exponentur, ad numerosam *Æquationum* resolutionem, ut reliquas utilitates pertranseam, quia Tu eas ignorare non potes. Quare Lectores rogo, ut judiciis parcant, donec penitus omnia inspexerint. Et si qui fuerint qui hæc recusaverint, sciant se nec inventis gratiam adimere, nec mihi laudis conscientiam. Te verò, *Vir Clarissime*, si offenderint, omnibus commendationibus destituta reputabo. Vale.

POSTERIOR TRACTATUS
DE
LIMITIBVS
ÆQVATIONVM,

Seu

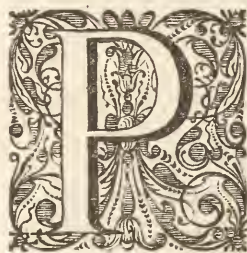
Quo pacto ex forma Æquationum affectarum
definiri possint limites, intra quos radices
veræ debent offendi.

D E
L I M I T I B V S
Æ Q V A T I O N V M.

C A P V T I.

*De Aequationum Quadratarum seu duarum
dimensionum limitibus.*

Prop. I. $xx - lx + mm \infty 0$.



Er transpositionem erit $mm \infty lx - xx$, & si prima pars fuerit realis, erit etiam altera pars realis, ideoque lx majus quàm xx ; & diviso utroque termino per x , erit l major quàm x . Quin & per transpositionem propositæ æquationis habebitur $xx \infty lx - mm$: ideoque altera pars est realis, & lx majus quàm mm . Vnde diviso utroque termino per l , erit x major quàm $\frac{mm}{l}$. Quare æquationis propositæ utraque radix x major erit quàm $\frac{mm}{l}$, sed minor quàm l .

Prop. 2. $xx - lx - mm \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $xx \infty lx + mm$, ideoque xx majus erit quàm mm , & x major quàm m , ac proinde mx majus quàm mm . Vnde xx minus erit quàm $lx + mx$, adeoque si utraque pars dividatur per x , erit x minor quàm $l + m$. Rursus, quoniam xx æquatur $lx + mm$, erit xx majus quàm lx ; ac proinde si uterque terminus dividatur per x , erit x major quàm l , & lx majus quàm ll . Hinc cum xx æquetur $lx + mm$, erit xx majus quàm $ll + mm$, hoc est, x major quàm $\sqrt{ll + mm}$. Postremò, quandoquidem x major est quàm m , erit lx majus quàm lm , & xx majus quàm $lm + mm$, hoc est, x major quàm $\sqrt{lm + mm}$. Vnde radix æquationis propositæ erit major quàm maxima harum duarum $\sqrt{ll + mm}$ & $\sqrt{lm + mm}$, sed minor quàm $l + m$.

Pars II.

Q

Pro-

Prop. 3. $xx + lx - mm \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $xx + lx \infty mm$, & per consequens $\frac{m}{l}$ majus erit quàm x . Rursus existente $xx + lx \infty mm$, erit mm majus quàm xx , & m major quàm x , ac proinde mx majus quàm xx . Atqui habemus $xx + lx \infty mm$. Ergo $mx + lx$ majus erit quàm mm . Hinc divisâ utrâque parte per $m + l$, fiet x major quàm $\frac{mm}{l+m}$. Quare inventa est x radix æquationis propositæ major quàm $\frac{mm}{l+m}$, at minor quàm $\frac{mm}{l}$ & m .

C A P V T II.

De limitibus Æquationum Cubicarum seu trium dimensionum, secundo termino carentium.

Prop. 1. $x^3 - mmx + n^3 \infty 0$.

PER transpositionem habebimus $x^3 \infty + mmx - n^3$, eritque mmx majus quàm n^3 . Vnde diviso utroque termino per mm , erit x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Deinde per transpositionem erit $mmx - x^3 \infty n^3$, ac per consequens mm majus quàm xx , & m major quàm x . Quare inventa est utraque radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{n^3}{mm}$, & minor quàm m .

Prop. 2. $x^3 - mmx - n^3 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 - mmx \infty n^3$, eritque xx majus quàm mm , & x major quàm m . Erit quoque $x^3 - n^3 \infty mmx$, ideoque x^3 major quàm n^3 , & x major quàm n , ac proinde nnx majus quàm n^3 . Atqui per transpositionem propositionis habemus $mmx + n^3 \infty x^3$. Quare $mmx + nnx$ majus erit quàm x^3 ; & divisâ utrâque parte per x , erit $mm + nn$ majus quàm xx ; ideoque x minor quàm $\sqrt{mm + nn}$. Inventa ergo est x radix æquationis propositæ major quàm m & n , at minor quàm $\sqrt{mm + nn}$. Atque liquet, ad evitandam extractionem radicis cubicæ ipsius n^3 , quòd loco nn in vinculo assumi possit quantitas aliqua, quæ non fit

fit minor. Id quod non erit difficile, cognitis nempe tribus dimensionibus ipsius n^3 , fumendoque loco m rectangulum sub duabus quantitatibus; quarum alterutra non sit ipsâ n minor. Eritque hoc ad sequentia notatu dignum.

Prop. 3. $x^3 + m m x - n^3 \infty 0.$

Per transpositionem habebimus $x^3 \infty n^3 - m m x$, eritque $\frac{n^3}{m m}$ major quàm x . Rursus erit $m m x \infty n^3 - x^3$, & consequenter n^3 major quàm x^3 , & n major quàm x , ac proinde $m m x$ majus quàm x^3 . Sed per transpositionem æquationis propositæ est quoque $x^3 + m m x \infty n^3$. Ergo $m m x + n n x$ majus erit quàm n^3 , & divisâ utrâque parte per $n n + m m$, erit x major quàm $\frac{n^3}{n n + m m}$. Inventa itaque est radix x æquationis propositæ esse major quam $\frac{n^3}{m m + n n}$, sed minor quàm $\frac{n^3}{m m}$ & n . Possumus etiam loco $n n$ accipere rectangulum duarum maximarum dimensionum ipsius n^3 , ut radicis cubicæ extractio evitetur.

C A P V T III.

De limitibus Æquationum Cubicarum, penultimo termino carentium.

Prop. 1. $x^3 - l x x + n^3 \infty 0.$

Per transpositionem erit $x^3 + n^3 \infty l x x$, ideoque $x x$ majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Rursus erit $n^3 \infty l x x - x^3$, & consequenter l major quàm x . Quælibet igitur radicem x æquationis propositæ major erit quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, & minor quàm l .

Prop. 2. $x^3 - l x x - n^3 \infty 0.$

Per transpositionem erit $x^3 - l x x \infty n^3$, ideoque x major quàm l . Rursus erit $x^3 - n^3 \infty l x x$, & consequenter x major quàm n , & $x x$ majus quàm $n n$, & $n x x$ majus quàm n^3 . Atqui habemus quoque per transpositionem $l x x + n^3 \infty x^3$. Quare erit $l x x + n x x$ majus quàm x^3 . Dividatur utraque pars per $x x$, eritque $l + n$ major

major quàm x . Inventa itaque est radix x æquationis propositæ major quàm l & n , sed minor quàm $l+n$. Manifestum est quoque ad evitandam extractionem radicis cubicæ ex n^3 , quòd loco n sumi possit minor trium dimensionum ipsius n^3 , quando x major est; & quando minor perhibetur quàm $l+n$, quòd tunc loco n maxima trium dimensionum ipsius n^3 accipi queat, & sic de reliquis, quibus ob nimiam facilitatem non immoramur.

$$\text{Prop. 3. } x^3 + lxx^* - n^3 \infty 0.$$

Per transpositionem erit $x^3 \infty n^3 - lxx$, ac per consequens $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx . Est etiam $lxx \infty n^3 - x^3$, & consequenter n major quàm x , & nnx majus quàm x^3 . Sed habetur $x^3 + lxx \infty n^3$. Ergo $nnx + lxx$ majus erit quàm n^3 , hoc est, divisâ utrâque parte per $n+l$, erit xx majus quàm $\frac{n^3}{n+l}$. Inventa est itaque radix x æquationis propositæ major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l+n}}$, sed minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & n . Demonstratur præterea $nnx + lnx$ majus esse quàm n^3 , & $nx + lx$ majus quàm nn , & consequenter x major quàm $\frac{nn}{l+n}$, quandoquidem n major est quàm x .

CAPVT IV.

De Æquationibus Cubicis, in quibus omnes termini extant.

$$\text{Prop. I. } x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0.$$

PER transpositionem habebimus $x^3 - lxx \infty n^3 - mmx$. Hinc si x æquetur ipsi l , erit etiam x ipsi $\frac{n^3}{mm}$ æqualis. Ideoque, si vicissim l æquetur ipsi $\frac{n^3}{mm}$ hoc est, $lmm \infty n^3$, erit similiter x radix æquationis propositæ æqualis ipsi l & $\frac{n^3}{mm}$. Præterea si $x^3 - lxx$ est realis, hoc est, x major quàm l , erit quoque $n^3 - mmx$ realis, & consequenter $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x . Quòd si autem eadem quantitas $x^3 - lxx$ nihilo minor sit, transponatur proposita æquatio hâc ratione $lxx - x^3 \infty mmx - n^3$. Et quandoquidem supponitur

tur $lxx - x^3$ esse realis, hoc est, l major quàm x , erit $mmx - n^3$ etiam realis, & consequenter major erit x quàm $\frac{n^3}{m}$. Inventa est itaque radix æquationis propositæ æqualis ipsi l & ipsi $\frac{n^3}{m}$, cùm duo hi termini æquantur. Et si unam tantùm habeat aut tres, quælibet earum erit intra hos limites, quando inæquales sunt; si verò æquales, hoc est, $lm \infty n^3$, substituto lm loco n^3 in æquatione proposita, & dividendo per $x - l$, cognoscemus eam non habere aliam radicem in hoc casu quam l .

Prop. 2. $x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 - mmx \infty n^3 - lxx$. Quòd si ergo xx & mm sunt æqualia, erit etiam xx ipsi $\frac{n^3}{l}$ æquale; & si xx majus est quam mm , erit quoque $\frac{n^3}{l}$ majus quam xx ; & si xx minus est quam mm , minus quoque erit $\frac{n^3}{l}$ quam xx . Inveni itaque sunt duo limites m & $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, quorum cuilibet æquatur radix æquationis propositæ, si fuerint æquales, hoc est, si $lm \infty n^3$ æquatur ipsi n^3 ; aut necessariò inter duos erit, si inæquales fuerint. Eadem est ratio duorum reliquorum limitum n & $\frac{m}{l}$.

Prop. 3. $x^3 - lxx - mmx - n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^3 - lxx \infty mmx + n^3$, ideoque x major quàm l . Rursus cum per transpositionem sit $x^3 - mmx \infty lxx + n^3$, erit xx majus quam mm , & x major quam m , & mx majus quam mmx . Sed per transpositionem est quoque $x^3 - n^3 \infty lxx + mmx$, & per consequens x major quam n , & xxx majus quam n^3 . Quin & per transpositionem propositæ habetur $lxx + mmx + n^3 \infty x^3$, atque inventum est xxx majus quam mmx , & xxx majus quam n^3 . Ergo erit $lxx + mxx + nxx$ majus quam x^3 . Quocirca si utraque pars dividatur per xx , erit $l + m + n$ major quam x . Inventa est itaque radix x æquationis propositæ major quam l , m , & n ; sed minor quam $l + m + n$.

Prop. 4. $x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^3 + mmx \infty n^3 - lxx$, ideoque $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx . Sed est quoque $x^3 + lxx \infty n^3 - mmx$, ideoque $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x . At verò est etiam $lxx + mmx \infty n^3 - x^3$, & consequenter n major quàm x ; quare & nnx majus erit quàm x^3 , & lnx majus quàm lxx . Atqui est $x^3 + lxx + mmx \infty n^3$. Ergo $nnx + lnx + mmx$ majus erit quàm n^3 , & x major quàm $\frac{n^3}{nn + ln + mm}$. Quare inventa est radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{n^3}{mm + ln + mm}$, at minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, $\frac{n^3}{mm}$, & n .

Prop. 5. $x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $mmx + n^3 \infty lxx - x^3$, ideoque l major quàm x . Rursus erit $x^3 + n^3 \infty lxx - mmx$, & per consequens x major quàm $\frac{mm}{l}$. Invenimus ergo, quamlibet duarum radicum æquationis propositæ necessariò majorem esse quàm $\frac{mm}{l}$, & minorem quàm l . Sed per transpositionem est quoque $x^3 + mmx \infty lxx - n^3$, & consequenter xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Quare & x major erit quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$.

Prop. 6. $x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^3 + lxx \infty mmx - n^3$, ideoque x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Similiter erit $x^3 + n^3 \infty mmx - lxx$, & per consequens $\frac{mm}{l}$ major quàm x . Rursus erit $lxx + n^3 \infty mmx - x^3$, & consequenter m major quàm x . Invenimus ergo, quamlibet duarum radicum æquationis propositæ necessariò majorem esse quàm $\frac{n^3}{mm}$, sed minorem quàm $\frac{mm}{l}$ & m .

Pro-

Prop. 7. $x^3 - lxx - m mx + n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^3 - lxx \infty m mx - n^3$. Vnde patet, si x æqualis est ipsi l , quòd tunc quoque x ipsi $\frac{n^3}{m m}$ est æqualis. Ideoque si l æquatur ipsi $\frac{n^3}{m m}$, hoc est, $l m m \infty n^3$, una radicem æquationis propositæ æquabitur singulis terminorum l & $\frac{n^3}{m m}$; & si inæquales fuerint, neutra ex duabus radicibus æquationis propositæ poterit esse inter hos terminos. Quia videmus, cum x major est quàm l , tum quoque x majorem esse quàm $\frac{n^3}{m m}$; & si minor est quàm l , tum similiter x minorem esse quàm $\frac{n^3}{m m}$. Sed per transpositionem est etiam $x^3 - m mx \infty lxx - n^3$. Hinc si xx æquetur ipsi $m m$, erit quoque $xx \infty \frac{n^3}{l}$. Ideoque si fuerint hi termini $m m$ & $\frac{n^3}{l}$ æquales, hoc est, $l m m \infty n^3$, una radicem æquationis propositæ major erit unoquoque terminorum æqualium m & $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$; & si inæquales fuerint, neutra duarum radicem æquationis propositæ erit inter duos ex his terminis. Præterea per transpositionem est quoque $x^3 + n^3 \infty lxx + m mx$, ideoque $lxx + m mx$ majus quàm x^3 , & $lx + m m$ majus quàm xx . At x erit realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm m , si æquatio proposita fuerit realis. Et si æqualis fuerit vel major quàm m , erit & $lx + m x$ majus quàm xx , ac per consequens $l + m$ major quàm x . Quòd si autem minor fuerit quàm m , multo magis $l + m$ major erit quàm x . Porrò ex hac eadem æquatione constat, quòd $lxx + m mx$ etiam majus est quàm n^3 . Hinc cum $l + m$ major sit quàm x , ideoque $llx + l m x$ majus quàm lxx ; erit quoque $llx + l m x + m mx$ majus quàm n^3 , & x major quàm $\frac{n^3}{ll + lm + mm}$. Invenimus igitur, quòd quælibet radicem æquationis propositæ major est quàm $\frac{n^3}{ll + lm + mm}$, & multo major quàm $\frac{n^3}{ll + 2lm + mm}$, at minor quàm $l + m$. Denique, quoniam $l + m$ major est quàm x , si major fuerit x quàm m , erit inter hosce terminos $l + m$ & m . Quòd si verò m major est quàm x , invenimus, quòd $lxx + m mx$ est ma-

jus.

jus quàm n^3 , hinc $lmx + mmx$ multo magis erit majus quàm n^3 ; adeoque x major quàm $\frac{n^3}{lm + mm}$, & consequenter x major quàm minor horum duorum terminorum m & $\frac{n^3}{lm + mm}$.

CAPVT V.

De Equationibus quatuor dimensionum, secundo & tertio termino carentibus.

Prop. 1. $x^4 - n^3x + p^4 = 0$.

PER transpositionem est $x^4 = n^3x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Sed per transpositionem est quoque $p^4 = n^3x - x^4$, & consequenter n^3 major quàm x^3 , ac n major quàm x . Ergo utraque radix æquationis propositæ major erit quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minor quàm n .

Prop. 2. $x^4 - n^3x - p^4 = 0$.

PER transpositionem est $x^4 = n^3x + p^4$, ideoque x^3 major quàm n^3 , & x major quàm n , & $nnxx$ majus quàm n^3x . Sed est quoque $x^4 - p^4 = n^3x$, ideoque x^4 majus quàm p^4 , & x major quàm p , & $ppxx$ majus quàm p^4 . At per transpositionem est etiam $n^3x + p^4 = x^4$. Ergo $nnxx + ppxx$ majus erit quàm x^4 . Hinc divisâ utraque parte per xx , erit xx minus quàm $nn + pp$, & x minor quàm $\sqrt{nn + pp}$. Invenimus igitur, quòd radix æquationis propositæ est major quàm n & p , sed minor quàm $\sqrt{nn + pp}$, ac proinde multo minor quam $n + p$.

Prop. 3. $x^4 + n^3x - p^4 = 0$.

PER transpositionem erit $x^4 = p^4 - n^3x$, ac per consequens $\frac{p^4}{n^3}$ major quàm x . Similiter erit $n^3x = p^4 - x^4$, & consequenter p^4 majus quàm x^4 , & p major quàm x , & p^3x majus quàm x^4 . Sed est præterea $x^4 + n^3x = p^4$, ideoque $p^3x + n^3x$ majus quàm p^4 , & x major quàm $\frac{p^4}{p^3 + n^3}$. Invenimus itaque, quòd radix æquationis propositæ est major quàm $\frac{p^4}{p^3 + n^3}$, at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$ & p .

C A P V T V I.

De Æquationibus quatuor dimensionum, in quibus tertius & quartus terminus deficiunt.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 + p^4 = 0$.

Per transpositionem est $x^4 = lx^3 - p^4$, ideoque x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$. At verò est etiam $p^4 = lx^3 - x^4$, & consequenter l major quàm x . Invenimus igitur, quòd unaquæque duarum radicum æquationis propositæ est major quàm $\sqrt[4]{C. \frac{p^4}{l}}$, at minor quàm l . Hinc quoniam l major est quàm x , & lx^3 majus quàm p^4 , habebitur lx^3 majus quàm p^4 , & consequenter x^3 majus quàm $\frac{p^4}{l}$, & x major quàm $\frac{p^4}{l}$.

Prop. 2. $x^4 - lx^3 - p^4 = 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 = p^4$, ideoque x major quàm l . Similiter est $x^4 - p^4 = lx^3$, & consequenter x^4 majus quàm p^4 , & x major quàm p , ac proinde px^3 majus quàm p^4 . Sed est etiam $lx^3 + p^4 = x^4$. Ergo $lx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4 , & $l + p$ major quàm x . Invenimus igitur, quòd radix x æquationis propositæ major est quàm l & p , at minor quàm $l + p$.

Prop. 3. $x^4 + lx^3 - p^4 = 0$.

Per transpositionem est $x^4 = p^4 - lx^3$ ideoque $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3 . Similiter est $lx^3 = p^4 - x^4$, ac per consequens p major quàm x , & px^3 majus quàm x^4 . Atqui est etiam $x^4 + lx^3 = p^4$. Ergo $lx^3 + px^3$ majus erit quàm p^4 , & x^3 major quàm $\frac{p^4}{l+p}$. Quare invenimus, quòd radix x æquationis propositæ major est quàm $\sqrt[4]{C. \frac{p^4}{l+p}}$, sed minor quàm p & $\sqrt[4]{C. \frac{p^4}{l}}$. Facillimè verò evitantur extractiones radicum cubicarum, sumendo terminos paulò majores aut minores, prout necessitas requirit. Atque in hoc ca-

fu, quoniam x^3 major est quàm $\frac{p^4}{l+p}$, & p major quàm x , erit pxx majus quàm $\frac{p^4}{l+p}$, & xx majus quàm $\frac{p^4}{lp+pp}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lp+pp}}$. Præterea, quandoquidem $\frac{p^4}{l}$ majus est quàm x^3 , erit $\frac{p^4 x}{l}$ majus quàm x^4 , & lpx majus quàm lx^3 , quia p major est quàm x . Atqui est $x^4 + lx^3 \infty p^4$. Ergo $\frac{p^4 x}{l} + lpx$ majus erit quàm p^4 . Hinc, multiplicatâ utrâque parte per l , & divisâ per pp , habebitur $ppx + llx$ majus quàm lpp , & x major quàm $\frac{lpp}{ll+pp}$.

De æquationibus quatuor dimensionum, in quibus secundus & quartus terminus deficiunt, nihil addimus: siquidem illæ ad quadratas referuntur, ita ut ipsarum limites eodem modo quo quadratarum inveniri possint.

CAPVT VII.

De Æquationibus quatuor dimensionum, secundo termino carentibus.

Prop. I. $x^{4*} - mxx - \frac{1}{l}n^3x - p^4 \infty 0$.

PER transpositionem erit $x^4 - mxx \infty p^4 - n^3x$. Vnde apparet, quòd, si fuerit xx æquale ipsi mm , hoc est, $x \infty m$, etiam x ipsi $\frac{p^4}{n^3}$ sit æqualis futura. Ideoque si fuerit m æqualis ipsi $\frac{p^4}{n^3}$, hoc est, $mn^3 \infty p^4$, radix x æquationis propositæ æquabitur singulis terminorum m & $\frac{p^4}{n^3}$; & si inæquales fuerint, unaquæque radicum æquationis propositæ, siue unam siue tres habuerit, semper erit inter duos hosce terminos. Præterea cognoscitur, si duo hi termini fuerint æquales, hoc est, $mn^3 \infty p^4$, substituto mn^3 loco p^4 in æquatione proposita, eâque divisâ per $x - m$, fore, ut non possit habere aliam radicem realem præter m .

Prop.

Prop. 2. $x^4 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^4 - n^3x \infty p^4 - mmxx$. Unde constat, si x æqualis fuerit ipsi n , fore etiam $xx \infty \frac{p^4}{mm}$; hoc est, $x \infty \sqrt{\frac{p^4}{mm}}$ aut $\frac{p^2}{m}$; & si fuerit $n \infty \sqrt{\frac{p^4}{mm}}$ aut $\frac{p^2}{m}$, tunc radicem æquationis fore æqualem cuilibet horum terminorum; & si inæquales fuerint, tunc eam necessariò futuram inter hosce duos.

Idem demonstrabitur de duobus reliquis p & $\frac{n^3}{mm}$; nempe si fuerint æquales, radix æquationis propositæ æquabitur unicuique illorum duorum; sin inæquales, necessariò constituetur inter duos, transpositâ scilicet æquatione in hunc modum $x^4 - p^4 \infty n^3x - mmxx$.

Prop. 3. $x^4 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^4 - mmxx \infty n^3x + p^4$, ideoque x majus quàm mm , & x major quàm m , & mx^3 majus quàm $mmxx$. Sed est etiam $x^4 - n^3x \infty mmxx + p^4$, ideoque x^3 major quàm n^3 , & x major quàm n , & nx^3 majus quàm n^3x . Eodem modo est $x^4 - p^4 \infty mmxx + n^3x$, & consequenter x^4 majus quàm p^4 , & x major quàm p , & px^3 majus quàm p^4 . Atqui per transpositionem est quoque $mmxx + n^3x + p^4 \infty x^4$. Quare $mx^3 + nx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4 , & $m+n+p$ major quàm x . Consimili ratione demonstrabitur, quòd $mmxx + n^3xx + p^3xx$ majus erit quàm x^4 , & consequenter $mm + nn + pp$ majus quàm xx . Invenimus ergo, quòd radix x propositæ æquationis major est quàm m , n , & p , at minor quàm $m+n+p$, & $\sqrt{mm+nn+pp}$.

Prop. 4. $x^4 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + mmxx \infty p^4 - n^3x$, ideoque $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x . Similiter est $x^4 + n^3x \infty p^4 - mmxx$, ac per consequens

sequens $\frac{p^4}{m m}$ majus quàm $x x$, hoc est, $\frac{p p}{m}$ majus quàm x . Atqui est quoque $m m x x + n^3 x \infty p^4 - x^4$, & consequenter p^4 majus quàm x^4 , ac p major quàm x , & $p^3 x$ majus quàm x^4 , nec non $m m p x$ majus quàm $m m x x$. Sed est etiam $x^4 + m m x x + n^3 x \infty p^4$. Quare $p^3 x + m m p x + n^3 x$ majus est quàm p^4 , ac per consequens, divisâ utrâque parte per $p^3 + m m p + n^3$, erit radix x propositæ æquationis major quàm $\frac{p^4}{p^3 + m m p + n^3}$; at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, $\frac{p p}{m}$, & p .

Prop. 5. $x^4 - m m x x + n^3 x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $n^3 x + p^4 \infty m m x x - x^4$, ideoque $m m$ majus quàm $x x$, & m major quàm x . Similiter est $x^4 + p^4 \infty m m x x - n^3 x$, & consequenter x major quàm $\frac{n^3}{m m}$. Præterea est $x^4 + n^3 x \infty m m x x - p^4$, ac per consequens $x x$ majus quàm $\frac{p^4}{m m}$, hoc est, x major quàm $\frac{p p}{m}$. Invenimus ergo quamlibet radicem æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{n^3}{m m}$ & $\frac{p p}{m}$, at minorem quàm m .

Prop. 6. $x^4 + m m x x - n^3 x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + m m x x \infty n^3 x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Sed est etiam $x^4 + p^4 \infty n^3 x - m m x x$, ac per consequens $\frac{n^3}{m m}$ majus quàm x . Similiter est $x^4 + m m x x + p^4 \infty n^3 x$, ideoque n^3 major quàm x^3 , & n major quàm x . Invenimus ergo quamlibet duarum radicem æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minorem quàm $\frac{n^3}{m m}$ & n .

Prop. 7. $x^4 - m m x x - n^3 x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - m m x x \infty n^3 x - p^4$. Vnde patet,

tet, si $x x$ æquatur ipsi $m m$, hoc est, $x \propto m$, eandem x fore æqualem ipsi $\frac{p^4}{n^3}$; ac per consequens, si fuerint termini hi m & $\frac{p^4}{n^3}$ æquales, erit una radicum æquationis propositæ æqualis singulis ipsorum; & si inæquales fuerint; neutra duarum radicum æquationis propositæ poterit esse inter illos duos m & $\frac{p^4}{n^3}$. Eodem modo per transpositionem est $x^4 - n^3 x \propto m m x x - p^4$. Vnde similiter discimus, si x^3 æquatur ipsi n^3 , hoc est, $x \propto n$, fore etiam $x x \propto \frac{p^4}{m m}$, hoc est, $x \propto \frac{p^4}{m}$. Ideoque si hi termini n & $\frac{p^4}{m}$ fuerint æquales, una ex radicibus æquationis propositæ æquabitur singulis eorundem terminorum; sin verò inæquales fuerint, nulla radicum æquationis propositæ inter illos duos constituta erit. Præterea per transpositionem est $x^4 + p^4 \propto m m x x + n^3 x$, ideoque $m m x x + n^3 x$ majus quàm x^4 , & $m m x + n^3$ majus quàm x^3 . Porrò, si proposita æquatio est realis, erit x realis, & æqualis, vel major, vel minor quàm n . Si fuerit æqualis vel major, erit $m m x + n n x$ majus quàm x^3 , & $m m + n n$ majus quàm $x x$, hoc est, x minor erit quàm $\sqrt{m m + n n}$. Si fuerit x minor quàm n , minor etiam erit quàm $\sqrt{m m + n n}$. Quare patet, quamlibet radicum æquationis propositæ necessariò minorem esse quàm $\sqrt{m m + n n}$. Denique existente $x^4 + p^4 \propto m m x x + n^3 x$, erit similiter $m m x x + n^3 x$ majus quàm p^4 . Et quia inventa est $\sqrt{m m + n n}$ major quàm x , erit consequenter $m m x \sqrt{m m + n n}$ majus quàm $m m x x$, ideoque $m m x \sqrt{m m + n n} + n^3 x$ majus quàm p^4 , & x major quàm $\frac{p^4}{m m \sqrt{m m + n n} + n^3}$. Quare inventus est terminus unus major & alter minor quàm quælibet duarum radicum æquationis propositæ. Atque ita modo sequenti capite observato propositione septimâ demonstrari potest, quòd x major est quàm minor horum terminorum n & $\frac{p^4}{m m n + n^3}$.

CAPVT VIII.

De Aequationibus quatuor dimensionum, penultimo termino carentibus.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 + m m x x^* - p^4 \infty 0.$

PER transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4 - m m x x$. Vnde constat, si x est æqualis ipsi l , etiam $x x$ æquari $\frac{p^4}{m m}$, hoc est, $x \infty \frac{p^4}{m}$ ideoque si l æqualis est ipsi $\frac{p^4}{m}$, hoc est, $l m \infty p p$, erit radix æquationis propositæ æqualis singulis terminorum l & $\frac{p^4}{m}$; & si fuerint inæquales, unaquæque radicum æquationis propositæ, siue unam, siue tres habuerit, semper erit inter hos terminos; sed si fuerint æquales, hoc est, $l m \infty p p$, & $l m m \infty p^3$, substituto $l m m$ loco p^4 in æquatione proposita, eâque divisâ per $x - l$, cognoscemus in hoc casu non haberi aliam radicem veram præter l .

Prop. 2. $x^4 + lx^3 - m m x x^* - p^4 \infty 0.$

PER transpositionem est $x^4 - m m x x \infty p^4 - lx^3$. Vnde constat, si fuerit $x \infty m$, etiam $\sqrt{C. \frac{p^4}{l}}$ æquari ipsi x ; ideoque si duo termini m & $\sqrt{C. \frac{p^4}{l}}$ sint æquales, erit radix æquationis æqualis singulis horum terminorum; sin verò inæquales fuerint, erit illa necessariò inter duos. Similiter per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty m m x x - lx^3$. Vnde discimus, quòd si x æqualis est ipsi p , fore quoque eam æqualem ipsi $\frac{m m}{l}$; ideoque si termini p & $\frac{m m}{l}$ æquantur, erit radix æquationis æqualis unicuique illorum; sed si inæquales fuerint, erit illa necessariò inter utroque constituta.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 - m m x x^* - p^4 \infty 0.$

PER transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty m m x x + p^4$, ideoque x
major

major quàm l . Sed & per transpositionem est $x^4 - m m x x \infty l x^3 + p^4$, ideoque x major quàm m , & $m x^3$ majus quàm $m m x x$. Similiter per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty l x^3 + m m x x$, ideoque x major quàm p , & $p x^3$ majus quàm p^4 . Præterea per transpositionem propositionis est $l x^3 + m m x x + p^4 \infty x^4$, ideoque $l x^3 + m x^3 + p x^3$, majus quàm x^4 , & $l + m + p$ majus quàm x . Quare invenimus radicem x æquationis propositæ majorem esse quàm l , m , & p , at minorem quàm $l + m + p$. Denique per transpositionem est $x^4 \infty l x^3 + m m x x + p^4$, ideoque x^4 majus quàm $l x^3 + m m x x$, & $x x$ majus quàm $l x + m m$. Atqui demonstratum est superiùs x majorem esse quàm l , ac proinde $l l$ minus quam $l x$. Multò igitur magis $x x$ majus erit quàm $l l + m m$, & x major quàm $\sqrt{l l + m m}$. Non dissimili ratione demonstrabitur, quòd x major est quàm $\sqrt{\sqrt{l^4 + p^4}}$, $\sqrt{\sqrt{m^4 + p^4}}$, & $\sqrt{\sqrt{m m p p + p^4}}$.

Prop. 4. $x^4 + l x^3 + m m x x^* - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + l x^3 \infty p^4 - m m x x$, ideoque $\frac{p^4}{m m}$ majus quàm $x x$, & $\frac{p p}{m}$ majus quàm x . Similiter est $x^4 + m m x x \infty p^4 - l x^3$, ac per consequens p major quàm x , & $p p x x$ majus quàm x^4 , & $l p p$ majus quàm $l x^3$. Sed per transpositionem propositionis est etiam $x^4 + l x^3 + m m x x \infty p^4$. Quare $p p x x + l p x x + m m x x$ majus erit quàm p^4 , & $x x$ majus quàm $\frac{p^4}{p p + l p + m m}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{p p + l p + m m}}$. At verò existente $x^4 + l x^3 + m m x x \infty p^4$, erit quoque p^4 majus quàm $l x^3$, ideoque $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3 , & $\sqrt{C. \frac{p^4}{l}}$ majus quàm x . Inventa igitur est radix x æquationis propositæ major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{p p + l p + m m}}$; at minor quàm $\frac{p p}{m}$, $\sqrt{C. \frac{p^4}{l}}$, & p .

Prop. 5. $x^4 - l x^3 + m m x x^* + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $m m x x + p^4 \infty l x^3 - x^4$, ideoque l major

ior quàm x . Deinde est $x^4 + p^4 \infty lx^3 - m m x x$, ac per consequens x major quàm $\frac{m m}{l}$. Præterea est $x^4 + m m x x \infty lx^3 - p^4$, ac proinde x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$, & x major quàm $\sqrt{C. \frac{p^4}{l}}$. Inuenimus igitur, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{m m}{l}$ & $\sqrt{C. \frac{p^4}{l}}$, at minorem quàm l .

Prop. 6. $x^4 + lx^3 - m m x x^* + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + p^4 \infty m m x x - lx^3$, ideoque $\frac{m m}{l}$ majus quàm x . Deinde est $lx^3 + p^4 \infty m m x x - x^4$, ac proinde m major quàm x . Præterea est $x^4 + lx^3 \infty m m x x - p^4$, & consequenter $x x$ majus quàm $\frac{p^4}{m m}$, hoc est, x major quàm $\frac{p p}{m}$. Inuenimus ergo, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{p p}{m}$, at minorem quàm $\frac{m m}{l}$ & m .

Prop. 7. $x^4 - lx^3 - m m x x^* + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^4 - lx^3 \infty m m x x - p^4$. Vnde patet, si x æqualis est ipsi l , ipsam x quoque fore æqualem ipsi $\frac{p p}{m}$; & per consequens, si fuerint termini l & $\frac{p p}{m}$ æquales, erit una radicum æquationis propositæ æqualis singulis illorum; & si fuerint inæquales, neutra duarum radicum æquationis propositæ poterit esse inter illos duos constituta. Eodem modo per transpositionem est $x^4 - m m x x \infty lx^3 - p^4$. Vnde similiter constat, si fuerit x æqualis ipsi m , fore quoque x æqualem ipsi $\sqrt{C. \frac{p^4}{l}}$; ideoque si æquales fuerint m & $\sqrt{C. \frac{p^4}{l}}$, una radicum æquationis propositæ æqualis erit cuilibet horum terminorum æqualium; & si fuerint inæquales, nulla radicum æquationis propositæ erit inter illos duos constituta. Porro per transpositionem est quoque $x^4 + p^4 \infty lx^3 + m m x x$, unde $lx^3 + m m x x$ majus erit quàm x^4 , & $lx + m m$ majus quàm $x x$. Iam si fuerit æquatio proposita realis,

lis, erit x vel æqualis, vel major, vel minor quàm m , & $l+m$ major quàm x . Quòd si fuerit x minor quàm m , multo magis ipsa minor erit quàm $l+m$.

Deinde ex eadem æquatione $x^4 + p^4 \infty lx^3 + mmxx$ etiam constat, quòd $lx^3 + mmxx$ majus est quàm p^4 . Atqui inventa est $l+m$ major quàm x . Ergo $llxx + lmx$ majus erit quàm lx^3 , & $llxx + lmx + mmxx$ majus quàm p^4 , ideoque xx majus quàm $\frac{p^4}{ll+lm+mm}$. Hinc cum $llxx + 2lmx + mmxx$ multò majus sit quàm p^4 , erit quoque per consequens $lx + mx$ majus quàm pp , & x major quàm $\frac{pp}{l+m}$. Quare invenimus quamlibet duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\sqrt{\frac{p^4}{ll+lm+mm}}$ & $\frac{pp}{l+m}$, at minorem quàm $l+m$.

Cæterùm quoniam invenimus, quòd x necessariò est minor quàm $l+m$; patet, si x supponitur major quàm m , eam fore inter hos terminos $l+m$ & m . Quòd si m fuerit æqualis aut major quàm x ; quoniam $lx^3 + mmxx$ majus est quàm p^4 , erit & $lmx + mmxx$ majus quàm p^4 , & xx majus quàm $\frac{p^4}{lm+mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lm+mm}}$. Quare unaquæque duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor duorum terminorum m & $\sqrt{\frac{p^4}{lm+mm}}$, at minor quàm $l+m$.

C A P V T IX.

De limitibus Æquationum quatuor dimensionum tertio termino carentium.

Prop. I. $x^4 - lx^3 + n^3x - p^4 \infty 0$.

PER transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4 - n^3x$. Vnde patet, quòd si x æqualis est ipsi l , fore quoque x æqualem ipsi $\frac{p^4}{n^3}$; ideoque si fuerit l æqualis ipsi $\frac{p^4}{n^3}$, hoc est, $ln^3 \infty p^4$, radix æqua-

Pars II.

S

tionis

tionis propositæ æqualis erit singulis terminorum l & $\frac{p^4}{n^3}$; & si fuerint inæquales, unaquæque radicum æquationis propositæ, siue unam, siue tres habuerit, semper erit inter hos terminos. Præterea cognoscimus, quòd, si fuerint hi ultimi termini æquales, hoc est, $ln^3 \propto p^4$, substituto in æquatione proposita ln^3 loco p^4 , & divisâ æquatione per $x - l$, ipsa non possit aliam habere veram radicem quàm l .

$$\text{Prop. 2. } x^4 + lx^3 - n^3x - p^4 \propto 0.$$

Per transpositionem est $x^4 - n^3x \propto p^4 - lx^3$. Vnde constat, si x æqualis est ipsi n , fore quoque $x^3 \propto \frac{p^4}{l}$, hoc est, $x \propto \sqrt[3]{C. \frac{p^4}{l}}$; & si fuerit n æqualis ipsi $\sqrt[3]{C. \frac{p^4}{l}}$, radix æquationis æquabitur singulis horum terminorum; & si fuerint inæquales, erit necessariò inter duos. Deinde per transpositionem est $x^4 - p^4 \propto n^3x - lx^3$. Vnde patet, si fuerit x æqualis ipsi p , fore quoque $x \propto \sqrt[3]{\frac{n^3}{l}}$, hoc est, $x \propto \sqrt[3]{\frac{n^3}{l}}$; ideoque si fuerit p æqualis ipsi $\sqrt[3]{\frac{n^3}{l}}$, radix æquationis propositæ æquabitur singulis horum terminorum, & si fuerint inæquales, erit necessariò inter utrosque.

$$\text{Prop. 3. } x^4 - lx^3 - n^3x - p^4 \propto 0.$$

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \propto n^3x + p^4$, ideoque x major quàm l . Eodem modo est $x^4 - n^3x \propto lx^3 + p^4$, ac proinde x major quàm n , & nx^3 majus quàm n^3x . Similiter est $x^4 - p^4 \propto lx^3 + n^3x$, ideoque x major quàm p , & px^3 majus quàm p^4 . Sed per transpositionem est quoque $lx^3 + n^3x + p^4 \propto x^4$. Quare $lx^3 + n^3x + p^4$ majus erit quàm x^4 , & $l + n + p$ major quàm x . Ergo invenimus radicem x æquationis propositæ majorem esse quàm l , n , & p , at minorem quàm $l + n + p$. Porrò ex hac æquatione $lx^3 + n^3x + p^4 \propto x^4$ etiam constat, quod $lx^3 + n^3x$ est minus quàm x^4 : & quandoquidem invenimus l minorem esse quàm x , erit lx^3 minus quàm lx^3 , ideoque $lx^3 + n^3x$ multo minus quàm x^4 , & x^3 major quàm $l + n^3$. Non dissimili ratione demonstrabitur, quòd x major est quàm $\sqrt[3]{\sqrt{l^4 + p^4}}$ & $\sqrt[3]{\sqrt{ln^3 + p^4}}$.

Pro-

Prop. 4. $x^4 + lx^3 + n^3x - p^4 = 0$.

Per transpositionem est $x^4 + lx^3 = p^4 - n^3x$, ideoque $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x . Eodem modo est $x^4 + n^3x = p^4 - lx^3$, ac proinde $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3 . Similiter est $lx^3 + n^3x = p^4 - x^4$, & per consequens p major quàm x , & p^3x majus quàm x^4 , ac $lppx$ majus quàm lx^3 . Sed per transpositionem propositionis est quoque $x^4 + lx^3 + n^3x = p^4$. Quare $p^3x + lppx + n^3x$ majus erit quàm p^4 , & x major quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + n^3}$: Et sic inventa est radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + n^3}$, at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, $\sqrt{C. \frac{p^4}{l}}$, & p .

Prop. 5. $x^4 - lx^3 + n^3x + p^4 = 0$.

Per transpositionem est $n^3x + p^4 = lx^3 - x^4$, ideoque l major quàm x . Deinde est $x^4 + p^4 = lx^3 - n^3x$, quare erit xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$, hoc est, x major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$. Sed est quoque $x^4 + n^3x = lx^3 - p^4$, ideoque x^3 majus quàm $\frac{p^4}{l}$, & x major quàm $\sqrt{C. \frac{p^4}{l}}$. Quare invenimus, quòd quælibet duarum radicum æquationis propositæ necessariò major est quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & $\sqrt{C. \frac{p^4}{l}}$, at minor quàm l .

Prop. 6. $x^4 + lx^3 - n^3x + p^4 = 0$.

Per transpositionem est $x^4 + p^4 = n^3x - lx^3$, ideoque $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx , hoc est, x minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$. Deinde est $x^4 + lx^3 = n^3x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Præterea est $lx^3 + p^4 = n^3x - x^4$, & idcirco n^3 major quàm x^3 , hoc est, x minor quàm n . Ergo invenimus, unamquamque duarum radicum x æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minorem quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & n .

Prop. 7. $x^4 - lx^3 - n^3x + p^4 = 0$.

Per transpositionem habebimus $x^4 - lx^3 = n^3x - p^4$. Vnde patet, si x æqualis est ipsi l , fore quoque x æqualem ipsi $\frac{p^4}{n^3}$; & per consequens, si fuerint hi termini l & $\frac{p^4}{n^3}$ æquales, hoc est, $ln^3 = p^4$, una ex radicibus æquationis propositæ æqualis erit singulis horum terminorum æqualium l & $\frac{p^4}{n^3}$; & si inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propositæ poterit esse inter ipsos. Deinde per transpositionem est $x^4 - n^3x = lx^3 - p^4$. Vnde simili modo patet, si x æquatur ipsi n , ipsam x quoque æquari ipsi $\sqrt[4]{C. \frac{p^4}{l}}$; ideoque si termini hi n & $\sqrt[4]{C. \frac{p^4}{l}}$ æquales fuerint, una radicem æquationis propositæ æquabitur singulis horum terminorum æqualium; & si fuerint inæquales, nulla radicem æquationis propositæ erit inter utrosque. Porro per transpositionem est quoque $x^4 + p^4 = lx^3 + n^3x$, ideoque $lx^3 + n^3x$ majus quàm x^4 , & $lxx + n^3$ majus quàm x^3 . Iam si fuerit proposita æquatio realis, erit x realis, & vel æqualis, vel major vel minor quàm m . Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lxx + n^3x$ majus quàm x^3 . Sin verò minor sit, erit x multò minor quàm $l+n$. Quare utraque duarum radicem propositæ æquationis necessariò minor erit quàm $l+n$. Quin & existente $x^4 + p^4 = lx^3 + n^3x$, erit quoque $lx^3 + n^3x$ majus quàm p^4 . Atqui invenimus $l+n$ majorem esse quàm x , ac proinde $ll + nn + 2ln$ majus quàm xx , & $l^3 + lnn + 2lln$ majus quàm lxx , nec non $l^3x + lnnx + 2llnx$ majus quàm lx^3 . Ergo $l^3x + lnnx + 2llnx + n^3x$ majus erit quàm p^4 , & x major quàm $\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}$.

Et quandoquidem cubus ex $l+n$ major est quàm $l^3 + lnn + 2lln + n^3$, multò magis erit x major quàm p^4 divisum per cubum ex $l+n$. Invenimus itaque quòd quælibet duarum radicem æquationis propositæ major est quàm p^4 divisum per cubum ex $l+n$, ut & major quàm $\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}$, at minor quàm $l+n$. Præterea, quoniam $l+n$ major est quàm x , si fuerit x major

major quàm n , erit necessariò inter hos terminos $l + n$ & n . Quòd si verò n fuerit vel æqualis vel major quàm x , quia $lx^3 + n^3 x$ majus est quàm p^4 , erit & $l n n x + n^3 x$ majus quàm p^4 , & x major quàm $\frac{p^4}{l n n + n^3}$. Ac proinde quælibet radicem æquationis propositæ major erit quàm minor horum terminorum n & $\frac{p^4}{l n n + n^3}$, at minor quàm $l + n$.

C A P V T X.

De limitibus Equationum quatuor dimensionum, in quibus nullus terminus deest.

Prop. I. $x^4 - lx^3 + m m x x - n^3 x + p^4 \infty 0$.

PER transpositionem est $lx^3 + n^3 x \infty x^4 + m m x x + p^4$, ideoque $lx^3 + n^3 x$ majus quàm x^4 , & $l x x + n^3$ majus quàm x^3 . Iam si fuerit proposita æquatio realis, erit & x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm n . Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $l x x + n x x$ majus quàm x^3 , hoc est, $l + n$ major quàm x , & x minor quàm n . Multò igitur magis minor erit quàm $l + n$. Ergo x necessariò minor erit quàm $l + n$. Deinde ex eadem æquatione $lx^3 + n^3 x \infty x^4 + m m x x + p^4$ constat, esse $lx^3 + n^3 x$ majus quàm p^4 . Sed inventa est $l + n$ major quàm x , ac per consequens $l l + n n + 2 l n$ majus quàm $x x$, & $l^3 x + l n n x + 2 l l n x$ majus quàm $l x^3$. Quare erit $l^3 x + l n n x + 2 l l n x + n^3 x$ majus quàm p^4 , & x major quàm $\frac{p^4}{l^3 + l n n + 2 l l n + n^3}$; & quandoquidem cubus ex $l + n$ major est quàm $l^3 + l n n + 2 l l n + n^3$, multò magis erit x major quàm p^4 divisum per cubum ex $l + n$. Inventus est itaque terminus unus major & alter minor quàm unaquæque radicem æquationis propositæ, sive hæc duas sive quatuor radices habuerit. Præterea, quoniam invenimus, quòd $l + n$ semper major est quàm x , si ponatur x quoque major quàm n ; manifestum est eam esse inter duos terminos $l + n$ & n . Quòd si autem x fuerit æqualis vel minor quàm n , quoniam est $l x^3 + n^3 x$ majus quàm p^4 ; erit $l n n x + n^3 x$

majus quàm p^4 , ideoque x major quàm $\frac{p^4}{lnn+n}$. Ergo unaquæque radicum propositæ æquationis, siue duas, siue tres habuerit, major erit quàm minor horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn+n}$, at minor quàm $l+n$.

Prop. 2. $x^4 - lx^3 + m m x x + n^3 x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $m m x x + n^3 x + p^4 \infty lx^3 - x^4$, ideoque l major quàm x . Similiter est $x^4 + n^3 x + p^4 \infty lx^3 - m m x x$, ac idcirco x major quàm $\frac{m m}{l}$. Præterea est $x^4 + m m x x + p^4 \infty lx^3 - n^3 x$, ac per consequens $x x$ majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Denique est $x^4 + m m x x + n^3 x \infty lx^3 - p^4$, & consequenter x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$. Quare invenimus, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{m m}{l}$, $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, & $\sqrt{C. \frac{p^4}{l}}$, at minorem quàm l .

Prop. 3. $x^4 - lx^3 - m m x x - n^3 x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $lx^3 + m m x x + n^3 x \infty x^4 + p^4$, ideoque $lx^3 + m m x x + n^3 x$ majus quàm x^4 . Iam si proposita æquatio fuerit realis, erit x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm maxima duarum m & n . Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lx^3 + m x^3 + n x^3$ majus quàm x^4 , & $l+m+n$ major erit quàm x , & magis si fuerit x minor quàm maxima duarum m & n . Quare $l+m+n$ erit necessario major quàm x . Præterea m erit aut æqualis, aut major, aut minor quàm n . Quòd si fuerit æqualis aut major, & quidem x major quàm m , erit radix æquationis propositæ inter hosce terminos $l+m+n$ & m . Quòd si, existente m æquali aut majore quàm n , etiam m sit æqualis vel major quàm x ; erit & $l m m x + m^3 x + n^3 x$

+ $n^3 x$ æquale aut majus quàm $lx^3 + mmxx + n^3 x$, ac per consequens majus quàm p^4 ; ideoque x major quàm

$\frac{p^4}{lm + m^3 + n^3}$. Vnde si fuerit m vel æqualis vel major quàm n , erit x necessariò major quàm minor horum duorum terminorum m & $\frac{p^4}{lm + m^3 + n^3}$; & si n fuerit major quàm m , consimili ratione demonstrabitur x etiam necessariò majorem esse minore horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{ln + mmn + n^3}$. Invenimus ergo unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse minore horum terminorum m & $\frac{p^4}{lm + m^3 + n^3}$, si m vel æqualis vel major fuerit quàm n ; aut majorem minore duorum n & $\frac{p^4}{ln + mmn + n^3}$, si n major sit quàm m ; at verò semper minorem quàm $l + m + n$.

Prop. 4. $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3 x + p^4 = 0$.

Per transpositionem est $lx^3 + mmxx = x^4 + n^3 x + p^4$, ideoque $lx^3 + mmxx$ majus quàm x^4 , & $lx + mm$ majus quàm xx . Iam si fuerit proposita æquatio realis, erit & x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm m . Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lx + mx$ majus quàm xx , & $l + m$ major quàm x ; & multò magis, si fuerit x minor quàm m . Ergo x necessariò minor erit quàm $l + m$. Vnde si fuerit x major quàm m , erit inter hosce terminos $l + m$ & m . Quòd si x fuerit vel æqualis vel minor quàm m , quandoquidem & $lx^3 + mmxx$ majus est quàm p^4 ; erit $lmxx + mmxx$ majus quàm p^4 ; ideoque xx majus quàm $\frac{p^4}{lm + mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lm + mm}}$. Quare quælibet duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor duorum terminorum m & $\sqrt{\frac{p^4}{lm + mm}}$, at minor quàm $l + m$.

$$\text{Prop. 5. } x^4 + lx^3 + m m x x - n^3 x + p^4 \infty 0.$$

Demonstrabitur ex transpositionibus requisitis $n^3 x$ fore majus quàm x^4 , ideoque n majorem quàm x ; & $n^3 x$ majus quàm lx^3 , ac proinde $\frac{n^3}{l}$ majus quàm $x x$; & denique $n^3 x$ majus quàm p^4 , & per consequens x majorem quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Invenimus itaque terminum unum majorem singulis radicum æquationis propositæ, at verò duos alios minores.

$$\text{Prop. 6. } x^4 + lx^3 - m m x x - n^3 x + p^4 \infty 0.$$

Per transpositionem est $m m x x + n^3 x \infty x^4 + lx^3 + p^4$, ideoque $m m x x + n^3 x$ majus quàm x^4 , & $m m x + n^3$ majus quàm x^3 . Iam si fuerit proposita æquatio realis, erit x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm n . Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $m m x + n n x$ majus quàm x^3 , & $\sqrt{m m + n n}$ major quàm x ; & multò magis, si fuerit x minor quàm n . Quare erit $\sqrt{m m + n n}$ semper major quàm x , & x erit inter terminos $\sqrt{m m + n n}$ & n , si major est quàm n . Quòd si fuerit æqualis aut minor quàm n , quoniam est $m m x x + n^3 x$ majus quàm p^4 , erit quoque $m m n x + n^3 x$ majus quàm p^4 , ideoque x major quàm $\frac{p^4}{m m n + n^3}$. Ergo quælibet duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{m m n + n^3}$, at minor quàm $\sqrt{m m + n n}$.

$$\text{Prop. 7. } x^4 + lx^3 - m m x x + n^3 x + p^4 \infty 0.$$

Factis transpositionibus requisitis, demonstrabitur esse x minorem quàm m & $\frac{m m}{l}$, at majorem quàm $\frac{n^3}{m m}$ & $\frac{p p}{m}$.

Prop.

Prop. 8. $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 = 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 = n^3x + p^4 - mmxx$, ideoque si fuerit $x^4 = lx^3$, erit $x = l$, & $ln^3 = n^3x$, & $n^3x + p^4 = mmxx$, ac proinde $ln^3 + p^4 = mmxx$, & $x = \sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$.

Vnde patet, si fuerit $l = \sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$, hoc est, si habeatur $llmm = ln^3 + p^4$; radicem æquationis propositæ fore æqualem singulis terminorum æqualium l & $\sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$: ac idcirco, substituto in hoc casu in æquatione proposita valore ipsius p^4 , nempe

$llmm - ln^3$, ipsam esse divisibilem per $x - l$. Quòd si fuerit x^4 majus quàm lx^3 , hoc est, x major quàm l , erit quoque $n^3x + p^4$ majus quàm $mmxx$; & si fuerit lx^3 majus quàm x^4 , hoc est, l major quàm x , erit & $mmxx$ majus quàm $n^3x + p^4$. Iam quandoquidem æquatio proposita est realis, erit x realis & vel æqualis, vel major, vel minor quàm p . Quòd si fuerit æqualis vel major quàm p , sitque major quàm l , quoniam tunc $n^3x + p^4$ quoque majus est quàm $mmxx$, erit & $n^3x + p^3x$ majus quàm $mmxx$, & $\frac{n^3 + p^3}{mm}$ majus quàm x . Ergo in hoc casu erit x major

quàm l , & minor quàm $\frac{n^3 + p^3}{mm}$. Quòd si autem x minori existente quàm l , ipsa sit æqualis vel major quàm p , quoniam & tunc $n^3x + p^4$ minus est quàm $mmxx$, erit similiter $n^3x + p^3x$ minus quàm $mmxx$, & consequenter $\frac{n^3 + p^3}{mm}$ minus quàm x .

Igitur in hoc casu erit x minor quàm l , & major quàm $\frac{n^3 + p^3}{mm}$.

Quare universaliter apparet, æquationem propositam non habere præter unam radicem realem ipsi l æqualem, cum est $llmm = ln^3 + p^4$; modò quælibet radicem, sive unam, sive tres habuerit, fuerit semper necessariò inter maximum & minimum trium terminorum l , $\frac{n^3 + p^3}{mm}$, & $\sqrt{\frac{n^3p + p^4}{mm}}$.

Prop. 9. $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4 - mmxx - n^3x$, ideoque si fuerit $x^4 \infty lx^3$, hoc est, $x \infty l$, erit $mmxx \infty -n^3x + p^4$, & per consequens $mmxx \infty -n^3l + p^4$, & $xx \infty \frac{p^4 - l n^3}{m m}$, & $x \infty \sqrt{\frac{p^4 - l n^3}{m m}}$. Quòd si ergo l æqualis est $\sqrt{\frac{p^4 - l n^3}{m m}}$, hoc est, si fuerit $l m m \infty p^4 - l n^3$; radix æquationis propositæ æqualis erit unicuique terminorum æqualium l & $\sqrt{\frac{p^4 - l n^3}{m m}}$: ideoque si in hoc casu in æquatione proposita loco p^4 , substituatur ejus valor, nempe $l m m + l n^3$, apparebit ipsam dividi posse per $x - l$, atque nullam aliam radicem veram admittere præter l . Si verò x^4 fuerit majus quàm lx^3 , hoc est, x major quàm l , erit & p^4 majus quàm $mmxx + n^3x$; & contra, si fuerit l major quàm x , erit etiam $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4 . Iam si æquatio proposita est realis, erit x realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm n . Esto igitur, quòd x major quàm l sit vel æqualis vel major quàm n ; quare cum & p^4 tunc majus sit quàm $mmxx + n^3x$, erit quoque p^4 majus quàm $m m n x + n^3 x$; ideoque $\frac{p^4}{m m n + n^3}$ majus quàm x . Quare in hoc casu erit x major quàm l , & minor quàm $\frac{p^4}{m m n + n^3}$. Quòd si x , cùm major est quàm l , minor fuerit quàm n , erit & p^4 majus quàm $mmxx + n^3x$, ideoque multò majus quàm $mmxx + n n x x$, & consequenter $\frac{p^4}{m m + n n}$ majus quàm xx , & $\sqrt{\frac{p^4}{m m + n n}}$ major quàm x . Quare in hoc casu x erit major quàm l , & minor quàm $\sqrt{\frac{p^4}{m m + n n}}$. Quòd si verò x , cùm minor est quàm l , vel æqualis fuerit vel major quàm n , erit $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4 , ideoque $mmxx + n n x x$ majus quàm p^4 , & xx majus quàm $\frac{p^4}{m m + n n}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{m m + n n}}$. Ergo in hoc casu erit x

minor

minor quàm l , & major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm+nn}}$. Postremò, cùm x minor quàm l , etiam ipsa minor sit quàm n , erit $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4 , & $mmnx + n^3x$ multò majus quàm p^4 , & per consequens x major quàm $\frac{p^4}{mmn+n^3}$. Igitur x in hoc casu, minor erit quàm l , & major quàm $\frac{p^4}{mmn+n^3}$.

Quæ cum ita sint, constat universaliter, æquationem propositam non habere nisi unam veram radicem, quæ æqualis est ipsi l , quando est $llm \infty p^4 - ln^3$, modo unaquæque radicem, sive unam tantum, sive tres habuerit, fuerit semper necessario inter maximum & minimum trium terminorum l , $\frac{p^4}{mmn+n^3}$, &

$$\sqrt{\frac{p^4}{mm+nn}}.$$

Prop. 10. $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Factis necessariis transpositionibus, demonstrabitur, quòd x major est quàm $l, m, n, \& p$. Deinde erit quoque per transpositionem $lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty x^4$, & per consequens $lx^3 + mx^3 + nx^3 + px^3$ majus quàm x^4 , & $l + m + n + p$ major quàm x . Porro, quoniam est $x^4 \infty lx^3 + mmxx + n^3x + p^4$, erit x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, & xx majus quàm $lx + mm$, ideoque multo magis x major erit quàm $\sqrt{ll+mm}$ & $\sqrt{lm+mm}$. Similiter, cum x^3 major sit quàm $lxx + mmx + n^3$, erit multo magis major quàm $l^3 + m^3 + n^3$, $l^3 + lmm + n^3$, & $2lm + n^3$, & sic de reliquis terminis, quos substituere licet loco x^3 , minores quàm x^3 . Sic x^4 majus est quàm $l^4 + m^4 + n^4$, quàm $m^4 + n^4 + p^4$, & sic de reliquis. Præterea, quoniam x major est quàm n & p , & $lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty x^4$, erit $lx^3 + mmxx + n^3xx + p^4xx$ majus quàm x^4 , ideoque $lx + mm + nn + pp$ majus quàm xx aliquâ quantitate. quæ quidem quantitas, etiam si sit incognita, si appelletur zz , habebitur $lx + mm + nn + pp \infty xx + zz$. Quantitas autem hæc incognita zz necessario minor erit quàm $mm + nn + pp$, aliàs, ablatis ex duabus partibus æquationis præcedentis, æqualibus, aut minori quantitate ex pri-

ma & majori ex secunda, effe reliqua lx aut æqualis, aut major quàm xx . Quod foret absurdum, quandoquidem x demonstrata est major quàm l . Quare habemus hanc æquationem $xx \infty lx + mm + nn + pp - zz$, quæ erit realis, eritque $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$. Manifestum verò est, quòd $\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp$ majus est quàm $\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp - zz$. Ergo $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$ major erit quàm x , ideoque $\sqrt{ll + mm + nn + pp}$ multo magis major erit quàm x ; ita ut radix propositæ æquationis necessariò sit inter $\sqrt{ll + mm}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$.

Prop. II. $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 - mmxx \infty p^4 - n^3x$. Vnde, si fuerit $x^4 - lx^3 - mmxx \infty 0$, hoc est, omnibus per xx divis, $xx - lx - mm \infty 0$, erit quoque $p^4 - n^3x \infty 0$. Hoc est, si fuerit $xx \infty lx + mm$, vel $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; erit & $p^4 \infty n^3x$, vel $x \infty \frac{p^4}{n^3}$. Quare constat, si fuerit $\frac{p^4}{n^3} \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, radicem æquationis propositæ fore æqualem singulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quòd si fuerit x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, hoc est, xx majus quàm $lx + mm$; erit p^4 etiam majus quàm n^3x , hoc est, $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x . Iam existente xx majori quàm $lx + mm$, erit $xx \infty lx + mm$ plus aliquâ quantitate. Quæ quidem quantitas, etiamsi sit incognita, si vocetur zz : habebitur $xx \infty lx + mm + zz$, & $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + zz}$, eritque x major quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare in hoc casu erit x minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & major quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quòd si fuerit x^4 minus quàm $lx^3 + mmxx$, hoc est, xx minus quàm $lx + mm$; erit & p^4 minus quàm n^3x , hoc est, x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Hinc existente xx minori quàm $lx + mm$,

erit

erit $x x \infty l x + m m$ minus aliquâ quantitate. Quæ si nominetur $z z$, habebitur $x x \infty l x + m m - z z$, hoc est, $x \infty \frac{1}{2} l + \sqrt{\frac{1}{4} l l + m m} - z z$, eritque x minor quàm $\frac{1}{2} l + \sqrt{\frac{1}{4} l l + m m}$. Ergo in hoc casu erit x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & minor quàm $\frac{1}{2} l + \sqrt{\frac{1}{4} l l + m m}$. Quare universaliter patet, radicem æquationis propositæ æqualem esse ipsi $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2} l + \sqrt{\frac{1}{4} l l + m m}$, quando $\frac{p^4}{n^3}$ æquatur ipsi $\frac{1}{2} l + \sqrt{\frac{1}{4} l l + m m}$; Sin fecus, quamlibet radicem, sive unam tantum, sive tres habuerit, semper esse inter hosce terminos $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2} l + \sqrt{\frac{1}{4} l l + m m}$.

Prop. 12. $x^4 + l x^3 + m m x x - n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty n^3 x - l x^3 - m m x x$; ideoque si fuerit $x \infty p$, erit quoque $n^3 x \infty l x^3 + m m x x$, & $x \infty \frac{n^3}{l p + m m}$. Vnde constat, si $l p p + m m p$ æquetur n^3 , radicem æquationis fore æqualem singulis terminorum æqualium p & $\frac{n^3}{l p + m m}$. Quòd si fuerit x^4 majus quàm p^4 , hoc est, x major quàm p , erit quoque $n^3 x$ majus quàm $l x^3 + m m x x$. Iam si æquatio proposita est realis, erit & x realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm m . Quòd si fuerit æqualis vel major quàm m , & eadem quantitas x etiam major sit quàm p , quandoquidem & tunc $n^3 x$ majus est quàm $l x^3 + m m x x$, erit $n^3 x$ majus quàm $l m x x + m m x x$, & $\frac{n^3}{l m + m m}$ majus quàm x . Quare in hoc casu erit x major quàm p , & minor quàm $\frac{n^3}{l m + m m}$. Quòd si existente x majore quàm p ipsa minor sit quàm m , erit $n^3 x$ majus quàm $l x^3 + m x^3$, & $\frac{n^3}{l + m}$ majus quàm $x x$. Ergo in hoc casu erit x major quàm p , & minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l + m}}$. Quòd si verò, x minori existente quàm p , ipsa sit major quàm m , vel eidem æqualis, quandoquidem & tunc $n^3 x$ minus est quàm $l x + m m x x$, erit $n^3 x$

minor quàm $lx^3 + mx^3$, hoc est, x majus quàm $\sqrt[l+m]{n^3}$. Quare in hoc casu erit x minor quàm p , & major quàm $\sqrt[l+m]{n^3}$. Denique, cùm fuerit x minor quàm p , & ipsa etiam minor quàm m , quoniam & tunc $n^3 x$ minus est quàm $lx^3 + m m x x$, erit $n^3 x$ minus quàm $l m x x + m m x x$, & x major quàm $\sqrt[l+m]{n^3}$. Vnde constat universaliter, radicem æquationis propositæ esse æqualem singulis terminorum æqualium p & $\sqrt[lp+m]{n^3}$, cùm est $lp p + m m p$ æquale ipsi n^3 ; sed cùm inæquales sunt, esse radicem æquationis propositæ necessariò inter majorem & minorem terminorum p , $\sqrt[l+m]{n^3}$, & $\sqrt[lm+mm]{n^3}$.

Prop. 13. $x^4 + lx^3 + m m x x + n^3 x - p^4 \infty 0$.

Factis necessariis transpositionibus, demonstrabitur x fore minorem quàm p , $\sqrt[l]{C. \frac{p^4}{l}}$, $\sqrt[m]{\frac{p^4}{m}}$, & $\sqrt[n^3]{\frac{p^4}{n^3}}$; at verò majorem quàm $\frac{p^4}{p^3 + lp p + m m p + n^3}$.

Prop. 14. $x^4 + lx^3 - m m x x - n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - n^3 x \infty m m x x + p^4 - lx^3$; ideoque si fuerit $x^4 \infty n^3 x$, hoc est, $x \infty n$, erit $m m x x + p^4 \infty lx^3$, hoc est, $\frac{m m n + p^4}{l} \infty x^3$. Quòd si fuerit x major quàm n , erit & $m m x x + p^4$ majus quàm lx^3 : sin minor fuerit, erit $m m x x + p^4$ minus quàm lx^3 . Iam, si x major est quàm n , & etiam vel æqualis vel major quàm p , quandoquidem & tunc $m m x x + p^4$ majus est quàm lx^3 , multo magis erit $m m x x + p p x x$ majus quàm lx^3 , hoc est, $\frac{m m + p p}{l}$ majus quàm x . Ergo in hoc casu erit x major quàm n , & minor quàm $\frac{m m + p p}{l}$. Quòd si x major fuerit quàm n , & etiam minor quàm p , quoniam & tunc $m m x x + p^4$ majus est quàm lx^3 , erit quoque $m m p p + p^4$ majus quàm lx^3 , hoc est, x^3 minor quàm $\frac{m m p p + p^4}{l}$, & x minor quàm $\sqrt[l]{C. \frac{m m p p + p^4}{l}}$.

Quare

Quare in hoc casu erit x major quàm n , & minor quàm $\sqrt{C. \frac{m m p p + p^4}{l}}$. Quòd si x minor fuerit quàm n , & vel æqualis vel major quàm p , quandoquidem & tunc $m m x x + p^4$ minus est quàm $l x^3$, erit quoque $m m p p + p^4$ minus quàm $l x^3$, & x major quàm $\sqrt{C. \frac{m m p p + p^4}{l}}$. Ergo in hoc casu erit x minor quàm n , & major quàm $\sqrt{C. \frac{m m p p + p^4}{l}}$. Quòd si verò x minor fuerit quàm n , & ipsa etiam minor sit quàm p , quoniam & tunc $m m x x + p^4$ minor est quàm $l x^3$; erit quoque $m m x x + p p x x$ minus quàm $l x^3$, & $\frac{m m + p p}{l}$ minus quàm x . Quare in hoc casu, erit x minor quàm n , & major quàm $\frac{m m + p p}{l}$. Vnde universaliter apparet, radicem æquationis propositæ necessariò esse inter maximum & minimum trium terminorum n , $\frac{m m + p p}{l}$, & $\sqrt{C. \frac{m m p p + p^4}{l}}$.

Prop. 15. $x^4 + l x^3 - m m x x + n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + l x^3 - m m x x \infty p^4 - n^3 x$; ideoque si fuerit $x^4 + l x^3 - m m x x \infty 0$, seu, divisis omnibus terminis per $x x$, $x x + l x - m m \infty 0$; erit quoque $p^4 - n^3 x \infty 0$, hoc est, si est $x x \infty - l x + m m$, vel $x \infty - \frac{1}{2} l + \sqrt{\frac{1}{4} l l + m m}$ erit $p^4 \infty n^3 x$, seu $x \infty \frac{p^4}{n^3}$. Vnde patet, si $\frac{p^4}{n^3}$ est æquale ipsi $-\frac{1}{2} l + \sqrt{\frac{1}{4} l l + m m}$, radicem æquationis propositæ esse æqualem singulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2} l + \sqrt{\frac{1}{4} l l + m m}$. Quòd si fuerit $x^4 + l x^3$ majus quàm $m m x x$, hoc est, $x x + l x$ majus quàm $m m$, erit quoque p^4 majus quàm $n^3 x$, hoc est, $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x . Ac proinde cum $x x + l x$ majus sit quàm $m m$, erit $x x + l x$ majus quàm $m m$ aliquâ quantitate. Quantitas autem hæc, licèt sit incognita, vocetur $z z$, eritque $x x + l x \infty m m + z z$, seu $x x \infty - l x + m m + z z$, hoc est, $x \infty - \frac{1}{2} l + \sqrt{\frac{1}{4} l l + m m + z z}$, ideoque x major quàm $-\frac{1}{2} l + \sqrt{\frac{1}{4} l l + m m}$. Ergo in hoc casu x minor erit quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & major quàm $-\frac{1}{2} l + \sqrt{\frac{1}{4} l l + m m}$. Quòd si fuerit $x^4 + l x^3$ minus

nus quàm $mmxx$, hoc est, $xx + lx$ minus quàm mm , erit quoque p^4 minus quàm n^3x , hoc est, x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Hinc cum $xx + lx$ minus sit quàm mm , erit $xx + lx$ minor quàm mm aliquâ quantitate. Vocetur quantitas hæc quamvis incognita zz , eritque $xx + lx + zz \propto mm$, vel $xx \propto -lx + mm - zz$, hoc est, $x \propto -\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm - zz}$, ideoque x minor erit quàm $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare in hoc casu erit x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & minor quàm $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Atque ita in genere perspicuum est, cum $\frac{p^4}{n^3}$ æquatur ipsi $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, radicem æquationis propositæ æqualem esse singulis terminorum æquationum $\frac{p^4}{n^3}$ & $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; sin minus, quamlibet radicem, sive unam tantum, sive tres habuerit, necessariò esse inter hosce terminos $\frac{p^4}{n^3}$ & $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$.

F I N I S.



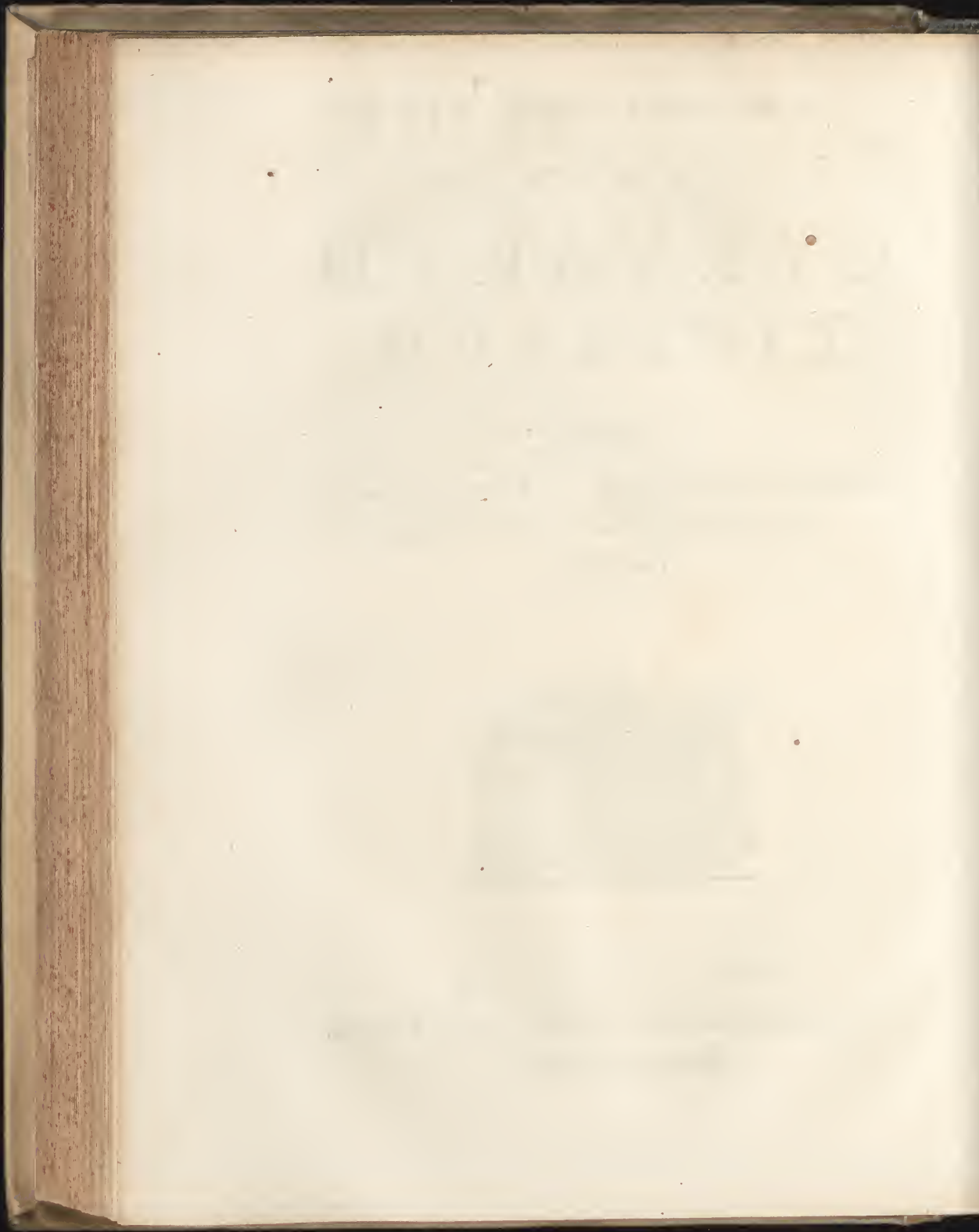
JOHANNIS DE WITT
ELEMENTA
CURVARVM
LINEARVM.

Edita

Operâ FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Academia Lugduno-Batava Matheseos
Professoris.



AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDC LXXXIII.
Sumptibus Societatis.



Clarissimo, Doctissimoque Viro,
D. FRANCISCO à SCHOOTEN,
IOHANNES DE WITT

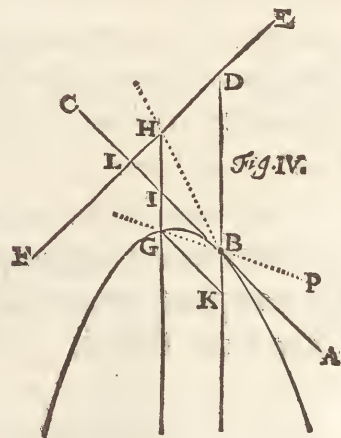
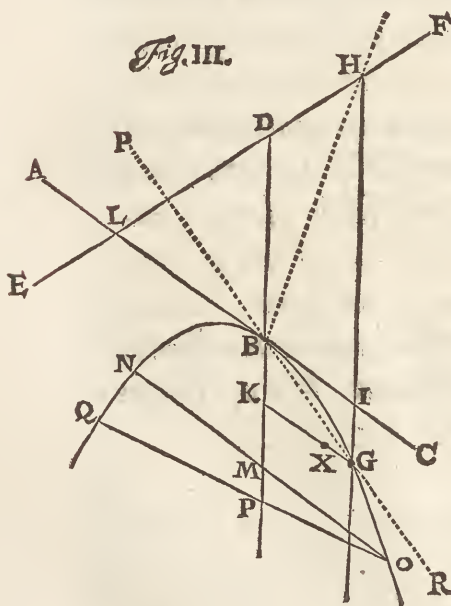
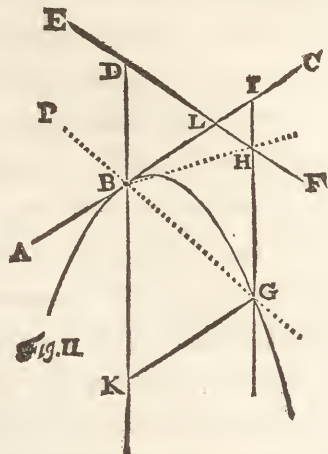
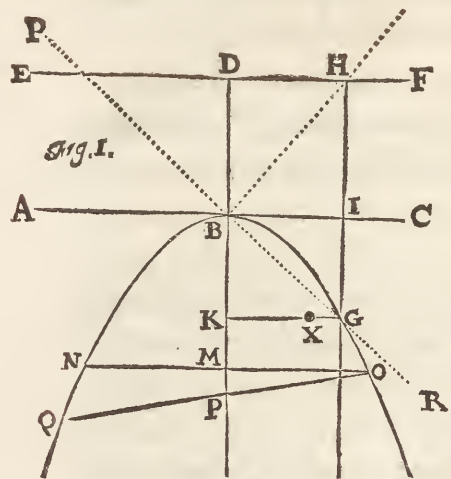
S. P. D.



*I*nearum rectorum, angulorumque, quos comprehendunt, ut & figurarum rectorum, quæ inde nascuntur, nec non Circulorum naturam veram atque intrinsecam, proprietatesque præcipuas, meo quidem iudicio, satis perspicuè tradiderunt Antiqui, ac quo pacto ex iisdem traditis, imò ex paucis & principalioribus eorundem principiis, qualibet Problemata Plana, ac generaliter quæcunque in linearum rectorum, angulorum, figurarumque rectorum, nec non Circulorum contemplatione & cognitione desiderari queunt, resolvantur atque eruantur, universali quâdam viâ & Methodo Analyticâ, per Aequationum inventionem, harumque resolutionem, plenius planiusque à Recentioribus ostensum est; Adeò ut vel unico Circulo dato, utut exiguo aut ingenti, quæcunque Problemata Plana per solas lineas rectorum unusquisque, in dictis Antiquorum Recentiorumque Geometrarum præceptis mediocriter versatus, facillimè resolvat; ac pro-

inde de iisdem vel plura vel alio modo proposita
ac demonstrata quaedam desiderare, & super-
vacuum & ineptum semper existimavi. At ve-
rò cum cæterarum linearum curvarum Elemen-
ta, prout à Veteribus tradita atque à Recentiori-
bus explicata sunt, diligentius considerassem, ori-
ginem earum è solido peti atque inde ipsas in pla-
num transferri naturali ordini, qui in Mathe-
maticis quam maximè observandus est, omnino
contrarium duxi; quemadmodum & demon-
strationes in iisdem Elementis propositas, multis
in locis eadem de causa & propter varias ratio-
num compositiones, quibus sæpe innituntur, sub-
obscuras, ac longa Propositionum serie Lectori-
bus tædio memoriæque oneri esse judicavi. Atque
eâ quidem contemplatione excitatus jampridem,
dum studiis humanioribus Liberaliumque Ar-
tium doctrinæ incumbere mihi otium erat, anim-
adverti, non eas solùm, quas vulgò Coni se-
ctiones appellarunt, sed & omnes omnino cur-
vas lineas, cujuscunque sint generis, multiplici-
ter quidem ex varia corporum diversimodè com-
positorum aut figuratorum sectione gigni, at ve-
rò earundem singulas infinitis quoque modis in
plano generari, ipsarum autem naturam & pro-
prietates ex ea generatione multò faciliùs quàm
ex corporum sectione deduci, ac firmiter mihi per-
suasum habeo, nullam aliam esse causam, quod
linea-

*linearum curvarum secundi generis ulteriorum-
que graduum ortus, natura, proprietas, atque
essentia, cum exacta specierum enumeratione, à
nemine antehac explicata ac demonstrata sint,
quam quòd tam in tractatione ortus & genera-
tionis, quam in demonstratione essentia ac pro-
prietatum linearum curvarum primi generis à
naturali & simplicissima via deflexum sit, ut-
pote cum earundem contemplatio, prout in plano
simplicissimè & quidem diversimodè generan-
tur, intellectum & imaginationem ad genesin
linearum curvarum secundi generis quasi sponte
ducat. Cumque eorum, quæ antehac, dum per
otium licuit, eò spectantia meditatæ sum, tu nunc
amicissime Schooteni, copiam tibi fieri desideres,
en, quantum in me est, desiderio tuo satisfacio,
quæque de eodem argumento à me quondam con-
scripta ac pene in ordinem redacta inveni, jam
tibi mitto, tuique omnino juris facio, cætera au-
tem, quæ sparsim tantum annotata sunt, si modò
graviora id ferent negotia, recolligam, debito-
que ordine conjungam; recollecta, atque ordinata
suo quoque tempore tibi missurus, Vale. Hagæ
Com. VIII Octobr. Anni M. DC. LVIII.*



159

JOHANNIS DE WITT
ELEMENTA
CURVARVM
LINEARVM.

LIBER PRIMVS.

CAPUT I.
DEFINITIONES PRIMÆ

I.



I per rectam lineam immotam altera recta certo sui puncto sibi semper parallela moveatur aut incedat, eodemque illo motu anguli cujusdam rectilinei, circa punctum fixum (quod idem sit cum ejus vertice) circulariter mobilis, crus unum semper per prædictum mobile punctum transiens secum ducat, atque ita simul cruris alterius, & dictæ lineæ incedentis intersectione curva describatur linea; recta, quæ, ut prædictum est, sibi semper parallela movetur aut incedit, *Describens* dicetur.

II.

Altera verò recta, immota manens, *Directrix* vocabitur.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, atque is qui ei est deinceps, *Angulorum mobilium* nomine venient.

IV.

IV.

At quos *describens* ad *directricem* efficit, *Anguli ad Directricem* dicentur.

V.

Punctum fixum, circa quod *angulus mobilis* circulariter movetur, *Polus* nuncupabitur.

VI.

Ea autem *describentis* pars, quæ inter *Polum* & *directricem* intercipitur, *Intervallum* nominabitur.

VII.

Crus *anguli mobilis*, quod *describens* secum ducit, *Crus Patiens*.

VIII.

Alterum verò crus, quod à *describente* secatur, *Crus Efficiens*, & per anguli verticem productum, *Linea Efficiens* appellabitur.

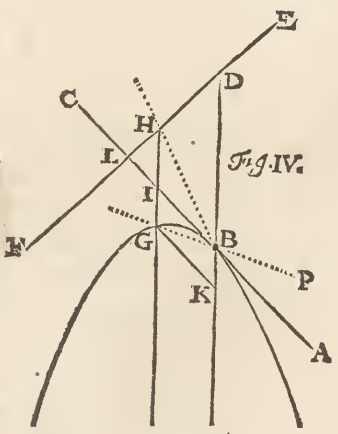
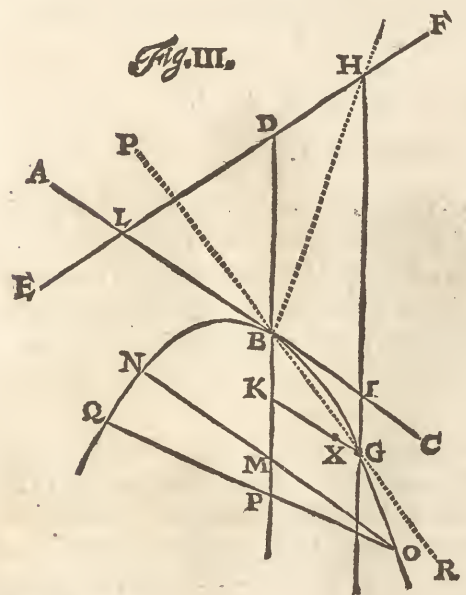
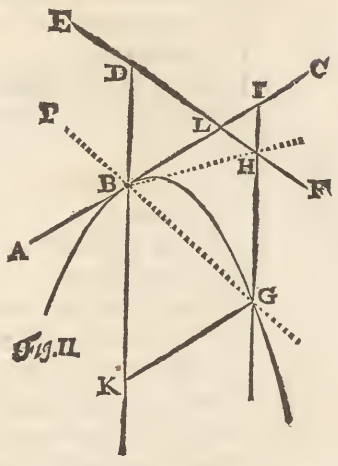
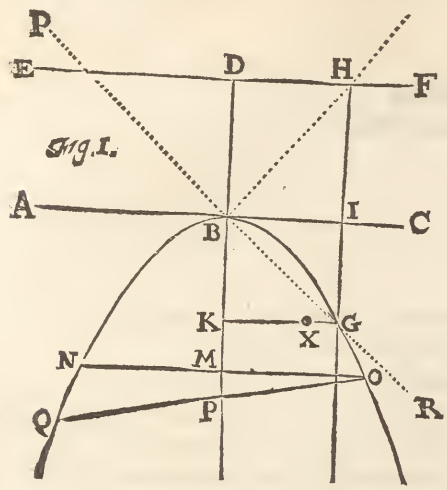
IX.

Cum *describens* per *Polum* transit, ac proinde & cum *crure patiente* coïncidit, esse tam *describentem* quàm *crus patiens*, ut & *lineam efficientem* totumque *angulum mobilem* in *statione prima* constitutum dicemus; ac quoties de iis simpliciter sermo erit in tali ipsas positione considerabimus,

X.

Quamlibet curvam, intersectione, uti prædictum est, in plano genitam, descriptam dicemus, *efficiente* atque *intervallo* consideratis, ut exhibentur ac sibi invicem junguntur in *statione prima*; aded ut *efficiens* cum *intervallo*, quod tam cum ipsa *describente* quàm cum *crure patiente* in eadem statione coïncidit, *angulum mobilem* utrinque constituat.

Vt in appositis figuris, si recta HG sibi semper parallela certo
 sui puncto, puta H, moveri concipiatur per immotam EF, eo-
 demque illo motu secum ducere crus BH anguli HBG, circu-



Part II.

X

later

lariter mobilis circa punctum B; ita ut idem crus BH semper transeat per prædictum ipsius HG punctum H, simulque alterius cruris BG ac dictæ lineæ HG intersectione G describatur curva linea BG: erunt

HG *describens.*

EF *directrix.*

HBG, HBP *anguli mobiles.*

FHG, EHG *anguli ad directricem.*

B *Polus.*

BD *intervallum.*

BH *crus patiens.*

BG *crus efficiens.*

PG *linea efficiens.*

DK *describens in statione prima, sive describens simpliciter.*

DBC, DBA *anguli mobiles in statione prima.*

AC *efficiens in statione prima, sive efficiens simpliciter.*

Curvam BG, efficiente AC, intervallo verò BD descriptam dicemus; Et apparet, cum efficiens PG est in statione AC, crus patiens BH coincidere cum intervallo BD; ac describentem HG tunc esse in statione DK, atque per efficientem & intervallum constitui utrinque angulos mobiles DBC, DBA.

T H E O R E M A I.

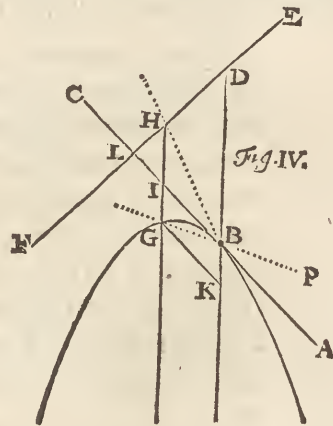
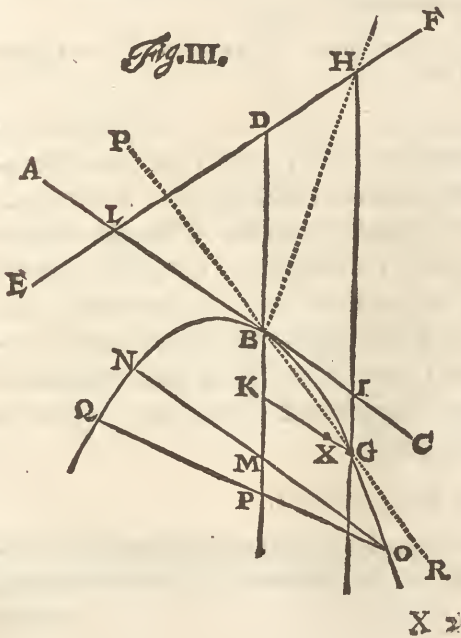
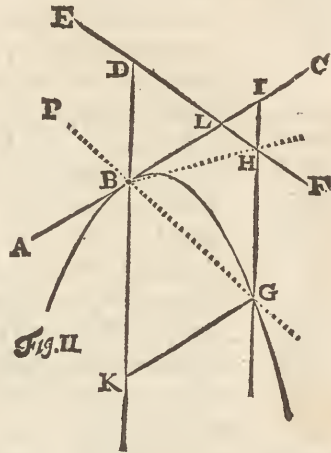
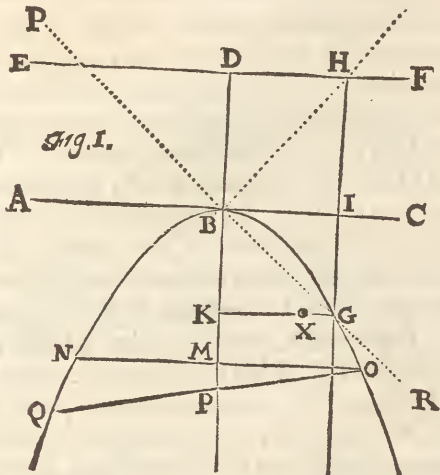
Propositio I.

Quolibet efficiente, & quocunque intervallo, si anguli mobiles æquales sint iis, qui ad directricem sunt ab eadem parte, curvâ descriptâ, hoc ipsi proprium erit, ut quavis recta à quolibet curvæ puncto ad describentem efficienti æquidistans applicata possit rectangulum, sub intervallo atque ea describentis parte, quæ inter Polum & applicatam intercipitur, contentum.

Sit efficiente ABC, intervallo BD, & directrice EF descripta curva BG; ita ut angulus mobilis DBA sit æqualis angulo EDB ad directricem, sitque à puncto G in curva utcumque assumpto ad describentem DBK applicata recta GK efficienti AC parallela: dico quadratum applicatæ GK rectangulo DBK æquale esse.

Con.

Constitutis enim tam *angulo mobili* quàm *describente* in statione uti fuère, cùm per ipsarum interfectionem descriptum est punctum G, veluti in HBG & HIG: si tam *angulus mobilis* quàm is



X 2

quis

¹ per Cor. qui ad *directricem* est rectus sit, uti in prima figura, erit ¹ ut HI
³ sexti ad IB, ita I B ad IG, id est ², ut DB ad GK, ita GK ad BK.
 Eucl.
² per 34 ac proinde ³ quadratum rectæ GK rectangulo D. B K æquale
 primi. erit.

³ per 17 At verò si obliquus fuerit uterque angulorum ABD, EDB,
 sexti. uti in cæteris figuris, secabunt sese *efficiens & directrix* productæ
 ad eas partes, ubi *angulus mobilis*, isque qui ad *directricem* est, acu-
⁴ per 29 ti erunt. sit itaque ipsarum interseccio in L puncto. Quoniam igitur
 primi. tam anguli LBD, LDB, ex constructione, quàm LIH,
⁵ per 6 LHI, propter parallelas DB, HI, æquales sunt ⁴; erunt quo-
 primi. que ⁵ tam lineæ LD, LB, quàm LH, LI; ac proinde & com-
 a in casu posita ⁴ vel residua ⁶ DH, BI æquales. Cum autem, an-
 fig. II & gulis DBI, HBG iisdem, sive æqualibus existentibus, addito ⁶,
 simili- vel ablato ⁴ communi angulo HBI, angulus DBH angulo
 bus. IBG, id est ⁶, BGK, fiat æqualis, atque angulus BDH ex
 b in ca- constructione angulo DBI, id est ⁷, BKG, sit æqualis: erunt ⁸
 sib. fig. III & IV, aut triangula BDH, GKB æquiangula, eritque proinde ⁹, ut BD
 simili- ad DH sive BI, hoc est ¹⁰, ad GK, ita eadem GK ad KB.
 bus. quare, ut supra ¹¹, quadratum applicatæ GK rectangulo DBK
 c in casu æquale erit. Quod est propositum.
 fig. II. & sim.

d in casib. fig. III & IV, aut similibus. ⁶ per 29 primi. ⁷ per 29 primi. ⁸ per 32 primi.
⁹ per 4 sexti. ¹⁰ per 34 primi. ¹¹ per 17 sexti.

Constat itaque, curvam interseccione, uti prædictum est, descriptam, eam ipsam esse, quæ Veteribus Parabola; *Polumque* idem punctum quod vertex; *lineam* autem *describentem in statione prima* eandem quæ diameteter, aut si *anguli mobiles* recti fuerint, quæ axis; *intervallum* verò idem quod latus rectum sive recentioribus Parameter ad eandem diametrum eundemvè axem pertinens; atque *efficienti* parallelas, eas, quæ ordinatim ad diametrum vel axem applicatæ dicebantur; quare & eadem nomina retineto.

Corollarium I.

Cum *describentis efficientisque* interseccio quibuscunque stationibus in uno tantum puncto fiat, manifestum est, *describentem* in quacunque

cunque statione, id est, rectas omnes diametro æquidistantes, in uno tantum puncto Parabolæ occurrere.

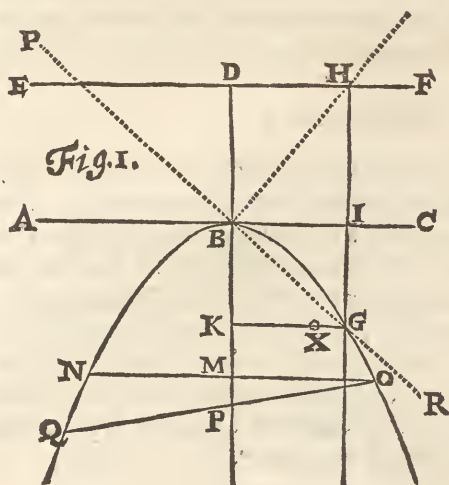


Fig. I.

Corollarium 2.

Cumque continuo describentis à Polo recessu major majorque semper fiat angulus, quem *crus efficiens* constituit ad lineam efficientem in statione prima, veluti GBI, manifestum est, quamlibet rectam à Polo ad quodlibet curvæ punctum ductam, ut, ex. gr., BG, totam intra Parabolam, productam autem, uti ad R, extra Parabolam cadere.

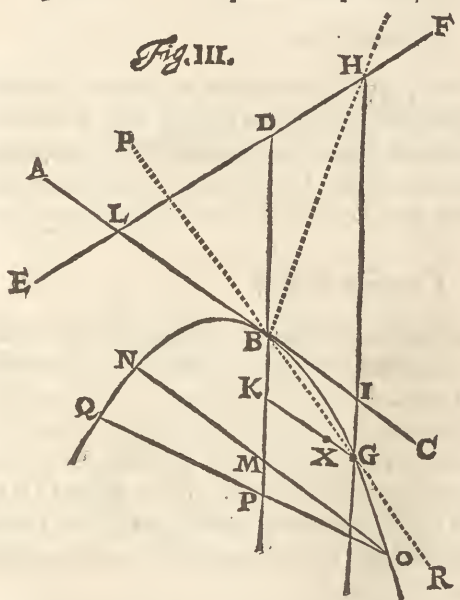


Fig. III.

Corollarium 3.

Constat præterea angulum GBK indefinite quidem diminui, omnique proposito angulo rectilineo minorem reddi posse; sed *crus* tamen

efficiens BG nunquam cum *describente* BK coincidere, multò minus ipsam transire: ad hoc enim necessum foret, ut *crus patiens*

¹ per 29 primi. BH *directrici* EF foret parallelum ¹, aut certè ut caderet infra eam, quæ à *Polo directrici* æquidistans ducta esset, quod planè impossibile est, cum *directricem* semper secet.

Corollarium 4.

Ideoq̄ue apparet, rectas omnes, quæ Parabolæ axem vel diametrum secant, productas tandem Parabolæ occurrere. Secet enim recta KX diametrum BKM, ac *crus efficiens* BG, in ea statione constitutum, ut KBG angulus minor sit dato angulo MKX ², per Parabolam transeat in puncto G. Quoniam igitur recta KX cruri BG occurrit, aut eidem occurret inter B & G, quo casu ipsa producta etiam curvæ BG occursura est ³, aut eidem in ipso G puncto occurret, quo casu & simul Parabolæ ibidem occurret, aut denique ipsi BG occurret ad partes G productæ, quo utique casu prius Parabolæ occurret ⁴.

² juxta Cor. præcedens.

³ per Corol. 2 hujus.

⁴ per Cor. 2 hujus.

Corollarium 5.

Manifestum quoque est, applicatas omnes, utrinque Parabolâ terminatas, ab axe aut diametro bifariam dividi. Vt, si ducta sit applicata NMO, quoniam ⁵ tam quadratum NM quàm quadratum MO æquale est rectangulo DBM: erunt quoque eadem quadrata inter se æqualia, ac proinde & rectæ NM, MO æquales.

⁵ per 1 hujus.

Corollarium 6.

Patet quoque præcedentis conversum, nempe non posse alias rectas præter eas, quæ *efficienti* æquidistant, in Parabola ab axe sive diametro bifariam secari. Si enim OQ, quæ non sit æquidistans ipsi AC, ab axe sive diametro BP bifariam divideretur in P, ductâ ON *efficienti* AC parallelâ, quæque proinde ab eodem axe sive diametro bifariam quoque secabitur in M⁶, foret OP ad PQ, ut OM ad MN: ideoque ⁷ ducta recta per N & Q esset diametro parallela, ac Parabolæ occurreret in duobus punctis N & Q. quod fieri non potest ⁸.

⁶ per Corol. præcedens.

⁷ per 2 sexti.

⁸ juxta Corol. 1 hujus.

Itaque non solùm applicatæ omnes à diametro bifariam dividuntur, sed & quæ à diametro bisecantur ad ean-

eandem ordinatim applicatæ sunt: & si diameter rectam quamlibet in Parabola ductam bifariam dividat omnes quoque ipsi æquidistantes bifariam secabit.

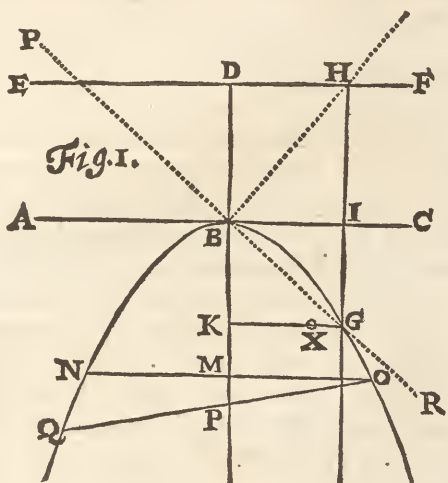


Fig. I.

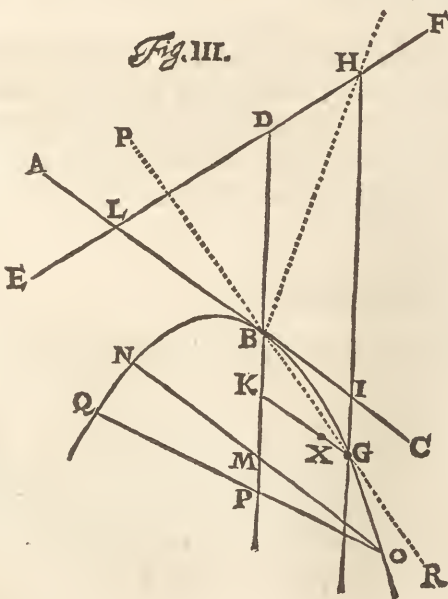


Fig. III.

Corollarium 7.

Ex demonstratis quoque facillè colligitur, applicatarum quadrata ad se invicem esse, sicut ad se invicem sunt diametri portiones inter verticem & applicatas interceptæ. Vt, si applicatæ sint GK, NM, erit quadratum ^{per 1} *bujus.* GK ad quadratum ipsius NM, ut rectangulum DBK ad rectangulum DBM , id est ², ut BK ad ^{per 1} *sexti.* BM .

Corollarium 8.

Ex ipsa porrò descriptione manifestum est, efficientem in statione prima, id est, rectam, quæ per *Polum* sive verticem applicatis æquidistans ducitur, ibidem Parabolam nec in alio præterea puncto contingere, multò minùs eandem secare.

re. Sumpto enim in curva præter *Polum* B puncto utcunque, veluti G, si *crus efficiens* eidem applicetur, uti in positione B G, constituetur ab ipso & *efficiente* angulus, ut G B C: atque aded punctum G, utcunque sumptum, id est, tota Parabola, præter *Polum* B, infra *efficientem* A B C cadet.

Corollarium 9.

Constat quoque ex antedictis, non posse aliam rectam præter *efficientem* Parabolam in *Polo* seu vertice contingere. Quoniam enim alia quævis recta per B ducta, ex. gr., P R, angulum constituit cum *efficiente* A C, ut R B C, si à *Polo* ad *directricem* ducatur recta B H, ita ut eidem angulo R B C æqualis sit angulus D B H, ac per punctum H agatur recta diametro parallela, ut H G: erit ea ipsa *describens*, & H B R *angulus mobilis*, utpote æqualis *angulo mobili* D B C; B R verò *crus efficiens*: ac proinde ipsarum H G, B R intersectio G in Parabola. Quare cum recta P R non in puncto B solummodo, sed & in puncto G Parabolæ occurrat, ac tota B G recta ³ intra curvam cadat, non continget recta P R Parabolam, sed eandem secabit.

³ per Coroll. I hujus.

Itaque omnes rectæ in Parabola ductæ, quæ contingenti in vertice æquidistant, ordinatim ad diametrum applicantur sive ab eadem diametro bifariam dividuntur; & contra, quæ cuilibet rectæ, à diametro bifariam divisæ, per verticem æquidistans ducitur, Parabolam in vertice contingit.

Corollarium 10.

Ex dictis quoque obvium est, quo pacto datâ positione Parabolæ diametro, ejusque vertice, & latere recto, nec non angulo, quem ordinatim applicatæ faciunt ad eandem diametrum, ipsa Parabola in plano describatur. Si enim describendæ Parabolæ diameter sit B K, vertex B, latus rectum ad eandem diametrum pertinens B D, (quod quidem ipsi diametro in directum sit positum,) atque angulus quem faciunt ad dictam diametrum ordinatim applicatæ A B K vel C B K: oportet, ductâ per D. lateris recti
termi-

THEOREMA II.

Propositio 2.

Si per assumptum utcunque in Parabola punctum re-
cta ducatur, axi diametrovè parallela, erit quoque as-
sumptum punctum Parabolæ vertex, ductaque parallela
itidem diameter.

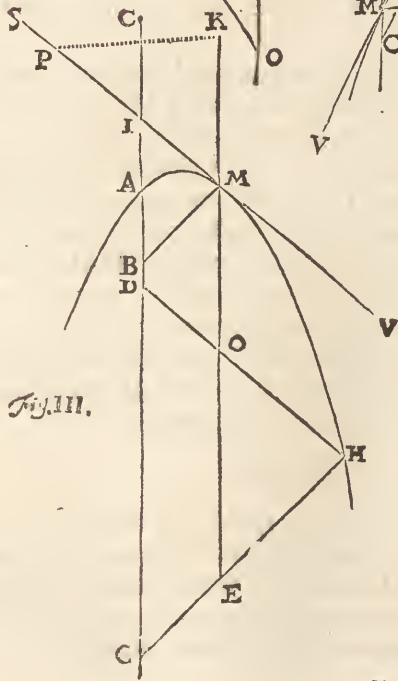
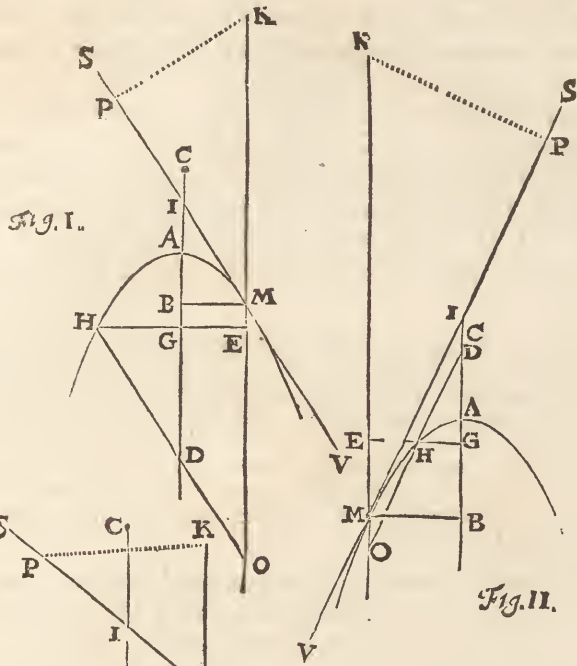
Sit Parabola quælibet H A M, cujus axis diametrovè A B, &
latus rectum ad eandem pertinens A C; sitque per punctum M,
in curva utcunque assumptum, ducta recta M O, axi sive diame-
tro A B parallela: dico assumptum quoque punctum M verti-
cem, dictamque M O diametrum esse; imò si ductâ, per M rectâ
S V, ita ut ab axe sive diametro A B extra Parabolam abscindat
portionem A I æqualem A B, quæ inter verticem A & applica-
tam M B intercipitur; productâque O M ad K, ita ut sit M K
ipsis A B vel A I & I M tertia proportionalis, efficiente S V, inter-
vallo verò M K Parabola describatur: dico hanc cum exposita
Parabola H A M eandem fore, ita ut altera alteri per omnia con-
gruat, ac proinde non solum M O diametrum, atque M verti-
cem fore, sed & M K latus rectum esse ad dictam diametrum M O
pertinens, & S V Parabolam in vertice M contingere, omnesque
ipsi parallelas in Parabola ductas ab M O bifariam dividi, atque
ad hanc ipsam M O ordinatim applicari.

Sit enim in exposita Parabola H A M assumptum præterea
aliud quodpiam punctum, ex. gr., H; sitque ab eodem ducta H G
ad axem sive diametrum A B ordinatim applicata, nec non H O
ipsi S V æquidistans, quarum prior, si opus fuerit producta, rectæ
K O occurrat in E; posterior verò, itidem producta, ubi opus
fuerit, prædictum axem sive diametrum A B secet in D. Et ap-
paret¹, si quadratum rectæ H O æquale sit rectangulo K M O,
Parabolam, quæ efficiente S V, intervallo verò M K describetur,
per punctum quoque H transituram. Esse autem quadratum re-
ctæ H O æquale rectangulo K M O multifariam id quidem, &
meo saltem iudicio, breviter simpliciterque satis in eum qui se-
quitur modum demonstratur.

¹ ex 1
hujus.

² per 1
hujus, &
17 sexti.

Quoniam est² ut C A ad M B, ita M B ad B A, erit, dupli-
catis



catis consequentibus, ut CA ad duplam MB seu ad GE bis, ita MB ad BI, hoc est ³, ita HG ad GD: ac proinde ⁴ contentum sub mediis, nempe rectangulum HGE bis, æquale contento sub extremis, nimirum rectangulo sub CA & GD. Vnde cum bina quadrata rectarum HG & BM seu GE æqualia sint ⁵ binis rectangulis CAG & CAB seu CAI, id est ⁶, rectangulo sub CA & IG: erunt quoque, additis ^a demptive ^b utrinque æqualibus, nimirum rectangulo HGE bis ab una, ac rectangulo sub CA & GD ab altera parte ⁷, composita ^a vel residua ^b, nempe quadratum EH ac rectangulum sub CA & ID seu MO æqualia ^c.

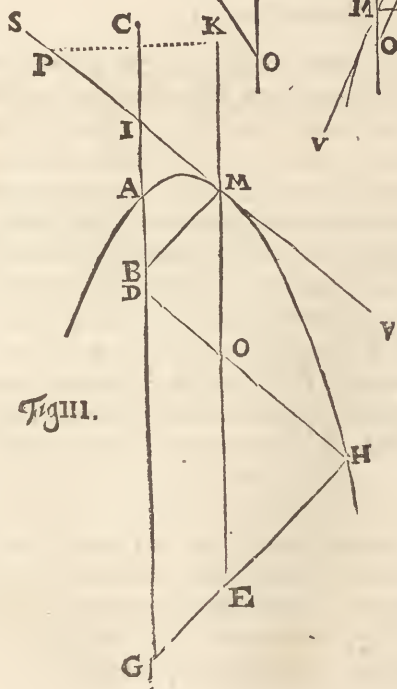
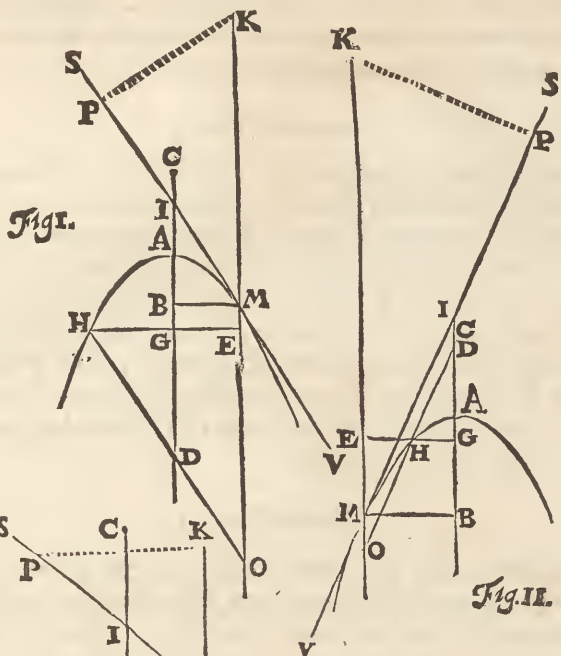
³ per 29 primi, &
⁴ sexti.
⁵ per 16 sexti.
⁶ per 1 hujus.
⁷ per 1 secundi.
^a in casu fig. I & simili-
bus.
^b in casu fig. II & III ac similibus. ⁷ quippe per supra demonstrata rectangulum HGE bis æquale est re-
ctangulo sub CA & GD. ^c in casu enim fig. I, si ab una parte ad bina quadrata rectarum HG & GE addatur rectangulum HGE bis, compositum fit EH quadratum, per ⁴ secundi; ac si ab altera parte ad rectangulum sub CA & IG addatur rectangulum sub CA & GD, fit, per I secundi, rectangulum sub CA & ID seu MO. Eodem modo, si in casibus fig. II & III ab una parte à binis quadratis rectarum HG & GE auferatur rectangulum HGE bis, residuum erit, per ⁷ secundi, EH quadratum; ac si ab altera parte à rectangulo sub CA & IG auferatur rectangulum sub CA & GD residuum erit, per ¹ secundi, rectangulum sub CA & ID seu MO.

Ideoque cum sit ut BM quadratum ad MI quadratum, sive ut CAB rectangulum ⁸ ad rectangulum sub KM & AB ⁹, hoc est ¹⁰, ut CA ad KM, seu, assumptâ communi altitudine MO, ut prædictum rectangulum sub CA & MO ad KMO rectangulum, ita ¹¹ EH quadratum ad HO quadratum; sitque rectangulum sub CA & MO, ut jam ostensum est, æquale quadrato EH: erit quoque ¹² rectangulum KMO quadrato HO æquale.

Vnde cum punctum H, ubicunque id in exposita Parabola AH assumptum fuerit, semper quoque sit in Parabola, quæ efficiente SV, intervallo verò MK describitur: sequitur alteram alteri per omnia congruere, ideoque hanc cum illa eandem esse; ita ut constet veritas eorum, quæ proponebantur.

Corollarium I.

Ex antedictis manifestum est, quòd, ductis in Parabola binis quibuslibet rectis sibi invicem æquidistantibus, quæ utramque bifariam dividit recta linea illius diameter existat. Quippe quæ per medium æquidistantium unius diameter ducetur, sive hæc sit ipsa diameter ex generatione, sive eidem parallela, per medium quo-



¹ per con-
clusionem
6 Cor. 1
hujus. quoque alterius æquidistantium transibit ¹. Atque ita apparet,
quo pacto datæ cujuscumque Parabolæ diametrum simulque ordina-
tim ad eandem applicatas invenire liceat.

Corollarium 2.

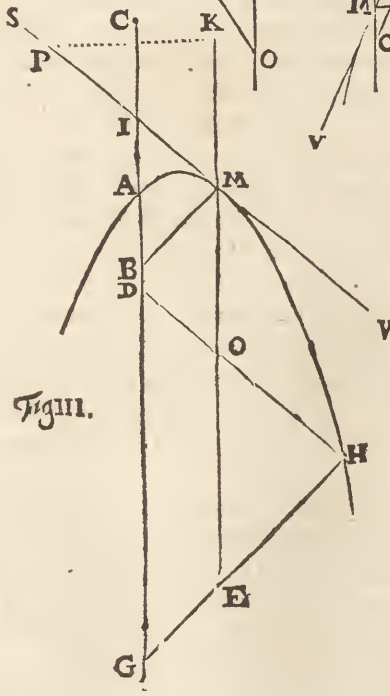
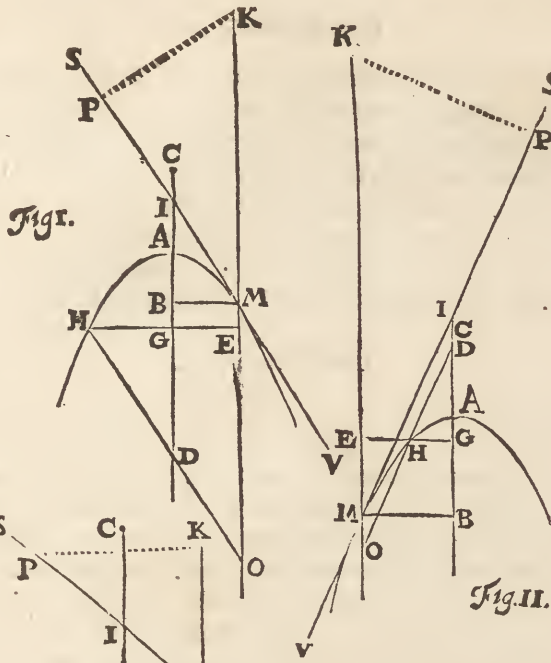
Patetque porrò, quælibet rectas Parabolam ubivis contingen-
tes, atque ordinatim à puncto contactus ad diametrum applica-
tas, æquales utrinque à vertice diametri portiones abscindere;
& vice versâ à terminis applicatarum per diametrum ductas, ita
ut æquales utrinque à vertice diametri portiones ductæ applica-
tæque abscindant, Parabolam in dictis terminis contingere. Re-
ctam enim $S V$, ex eo quòd æquales sint $A I$, $A B$, Parabolam in
puncto M utcumque assumpto contingere, nunc ² demonstra-
tum; at nec aliam rectam in puncto M Parabolam contingere
posse, superiùs ³ ostensum est.

² in 2 hu-
jus.
³ per 9
Cor. 1
hujus.

Corollarium 3.

Atque hinc non difficulter colligitur, quo pacto à quolibet
puncto, non intra Parabolam dato, recta ducatur, quæ Parabo-
lam contingat. Inventis enim ⁴ diametro quâcumque & rectis,
quæ ad illam ordinatim applicantur, si in ejusdem diametri ter-
mino sit datum punctum, notum nunc est ⁵ rectam per idem pun-
ctum ductam, atque ordinatim applicatis æquidistantem, Para-
bolam ibidem contingere. At si alibi in curva sit punctum datum,
veluti M , sitque inventa diameter $A D$: oportet, ductâ ex M re-
ctâ $M B$ ipsi $A D$ applicatâ, sumptâque $A I$ ipsi $A B$ æquali, ducere
rectam per I & M . Sin autem extra curvam detur in diametro
producta, veluti I : oportet, factâ $A B$ ipsi $A I$ æquali, atque $B M$
ordinatim ad $A D$ applicatâ, quæ Parabolæ occurrat in M , ducere
rursus rectam per I & M . At verò si neque in curva neque in dia-
metro producta detur, ut, si inventa diameter sit $M O$, datumque
punctum I : oportet, ductâ $I D$ diametro $M O$ parallelâ, quæ Pa-
rabolam fecerit in A , sumptâque $A B$ ipsi $A I$ æquali, atque ex B
ductâ $B M$ ordinatim ad $A D$ applicatâ, nimirum, quæ æquidi-
stans sit contingenti in A , Parabolæque occurrat in M , ducere
iterum rectam per I & M . quippe constat ex antedictis ⁶, ipsam
 $I M$ omni casu Parabolam contingere in puncto M .

⁴ per 1
Corol. 2
hujus.
⁵ per 8
et 9 Co-
rol. 1 hu-
jus.
⁶ per 2
hujus,
ejusque
Cor. 2.



Corollarium 4.

Constat præterea, assumptæ cujuslibet diametri parametrum esse tertiam proportionalem duabus rectis, quarum una est vel axis vel datæ diametri portio, intercepta inter ejusdem verticem & eam, quæ Parabolam in assumptæ diametri termino contingit, altera verò ea prædictæ contingentis pars, quæ inter datam & assumptam diametrum interjacet. Demonstratum enim est ¹, rectam MK , ex eo quòd ipsis AI , IM tertia sit proportionalis, assumptæ utcunque diametri MO parametrum esse.

¹ in 2
hujus.

Corollarium 5.

Ex demonstratis quoque non difficulter colligitur, quo pacto, datâ positione quâlibet Parabolæ diametro, ejusque vertice, & latere recto, nec non angulo, quem faciunt ordinatim ad dictam diametrum applicatæ, alia ejusdem Parabolæ diameter, quâcum applicatæ alium quemlibet angulum constituent, ac ipsius vertex, & latus rectum inveniuntur. Si enim datâ positione diametro MO , vertice M , & latere recto MK , anguloque SMK vel VMK , quem applicatæ faciunt ad dictam diametrum MO , aliam ejusdem Parabolæ diametrum invenire oporteat, quâcum applicatæ angulum constituent æqualem dato cuilibet angulo ABM : ducatur à termino K ad SV recta KP in angulo KPV ipsi dato ABM æquali, divisâque PM bifariam in I ducatur per I recta IB ipsi MO æquidistans. Deinde ab M ad eandem IB applicetur recta MB in angulo MBI dato angulo æquali, divisâque BI bifariam in A , erit quæsitâ diameter AB , vertex punctum A , ejusque parameter AC , recta nempe, quæ ipsis AB , BM tertia proportionalis existit. Est enim ² punctum M in Parabola, quæ efficiente ipsi BM parallelâ ac intervallo AC describitur, quandoquidem quadratum applicatæ BM ex constructione ³ rectangulo CAB est æquale. Deinde quoniam similia sunt triangula BIM & PMK , ob æquales angulos ad B & P (ex constructione), atque ad I & M ⁴ (ob parallelas AD , MO) erit ⁵ ut BI ad IM , ita PM ad MK . & sumptis antecedentium dimidiis, ut AI ad IM , ita IM ad MK . Quare secundum ea quæ superius ⁶ demonstrata sunt, Parabolæ diametris AB , MO , ac parametris AC , MK ,

² per 1
hujus.

³ per 17
sexti.

⁴ per 29
primi.

⁵ per 4
sexti.

⁶ in 2
hujus.

Fig. I.

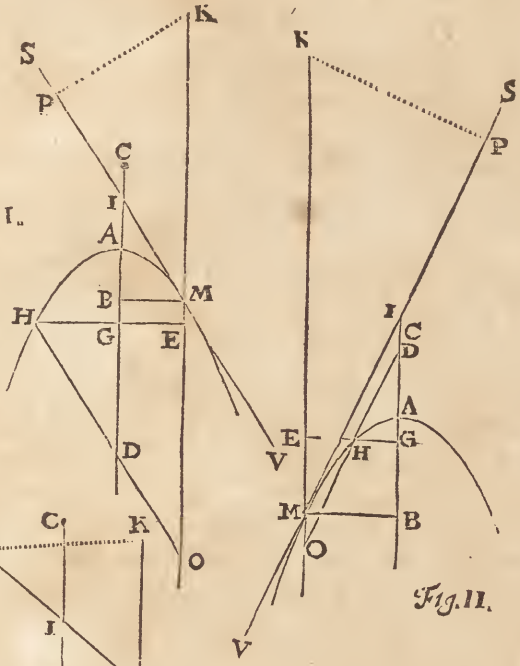


Fig. II.

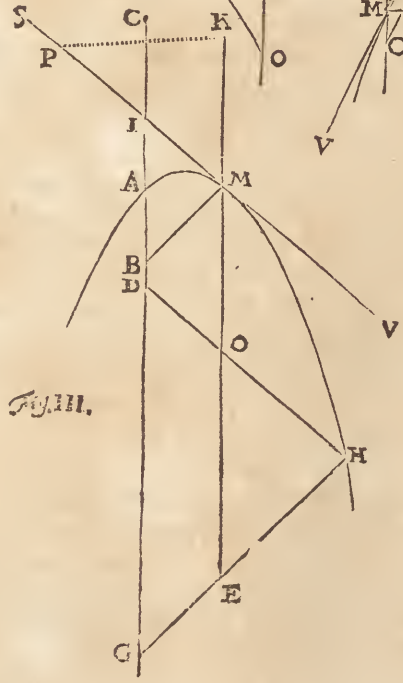


Fig. III.

Pars II.

Z

MK, in dictis angulis descriptæ omnino eadem erunt. Sunt autem & anguli, quos faciunt MB aliæque ad diametrum AD applicatæ, ex constructione, dato angulo ABM æquales. Quocirca effectum est, quod quærebatur. Quòd si verò datus angulus ABM rectus fuerit, ipse axis erit, inventa AD.

Etiam si curva, quâlibet *efficiente*, & quocunque *intervallo* descripta, si *anguli mobiles* inæquales sint iis, qui ad *directricem* sunt ab eadem parte, ea ipsa sit, cui post Circulum & Parabolam inter curvas primi generis primum locum tribuam, utpote quam sequenti specie quodammodo simpliciorum iudicem; cujusque propterea ortum, naturam, & proprietates nunc expositurus eidem describendi methodo insistere, præmissis que in principio definitionibus inhærere possem; cum tamen ea ipsius proprietas, quam primam ac maximè universalem existimo, & è qua cæteras facillimè deduco, ex aliis generationum speciebus distinctiùs appareat atque expeditiùs demonstratur, quod in Mathematicis, & præcipuè in Elementorum explicatione non parvi faciendum puto, eam selegi, quæ à jam dicta quàm minimum deflectat, quæque similiter anguli rectilinei rectæque lineæ motu & interfectione perficitur; at in qua dicti anguli motus non circularis sed rectus, ac contra dictæ lineæ non rectus sed circularis est, ut ex definitionibus in eum finem adaptatis, & sequenti Capite propositis, magis elucescet.

C A P V T II.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

I.

SI recta linea circa punctum fixum circulariter mota angulum quendam rectilineum, altero sui crure immo-

immotæ rectæ lineæ applicatum, per eandem immotam lineam promoveat, & secum ducat, ita ut prædicta recta circulariter mota semper per idem applicati cruris punctum transeat, simulque alterius cruris ac ejusdem lineæ motæ interfectione curva describatur, appellabitur hæc ipsa circulariter mota *linea describens*.

II.

Altera verò immota manens *Directricis* nomen retinebit.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, isque quæciet deinceps, similiter & hîc *Angulorum mobilium* nomine venient.

IV.

Sicuti & punctum fixum, circa quod *describens* circulariter movetur, *Polus* nuncupabitur.

V.

Rursusque crus *anguli mobilis*, quod à *describente* per *directricem* promovetur, *Crus patiens*.

VI.

Alterum autem crus, quod à *describente* secatur, *Crus efficiens*, & per anguli verticem productum *Linea efficiens* appellabitur.

VII.

Cùm *describens efficiens* parallela est ac proinde nulla ipsarum interfectio existit, tam *efficientem* quàm *describentem* in *statione prima* constitutas dicemus; ac quoties de iis simpliciter sermo erit, in tali ipsas statione considerabimus.

VIII.

Intervallum autem hic nominabimus tam eam *Cruris* patientis partem, quæ inter *anguli mobilis* verticem & *describentem* interjacet, quàm eam *describentis* portionem, quæ inter *Polum* & *directricem* intercipitur.

Vt in apposita figura, si recta ABC^a circa A punctum circulariter moveri concipiatur, motuque suo promovere & secum ducere angulum $BE C^a$; ita ut crus EB semper applicatum maneat immotæ rectæ lineæ KL , ac prædicta ABC mobilis semper transeat per idem punctum cruris EB , ex. gr., per B , simulque alterius cruris EC & dictæ lineæ ABC interfectione C describatur curva lineæ cC , sitque ducta AD cruri EC parallela: in figura quatuor distinctis stationibus exhibentur.

apparet, quò magis recta ABC ad ipsam AD accedit, eò minorem fieri angulum ECB . ac tandem cum ipsa ABC pervenit ad AD , ita ut cum ipsa coincidat, eundem angulum ECB tunc penitus evanescere: cum AD , ac proinde & dicta ABC , statione illâ, cruri EC parallela sit; ita ut tunc dictum crus EC sive recta CEM eadem sit cum lineâ GFH , nimirum suppositâ DF ipsi BE , æquali, eruntque

ABC describens in stationibus diversis.

KL directrix.

$BE C$, BEM , sive DFH & DFG anguli mobiles.

A Polus.

EB crus patiens.

EC crus efficiens.

MC lineâ efficiens.

GFH efficiens in statione prima, seu efficiens simpliciter.

ADI describens in statione prima, seu describens simpliciter.

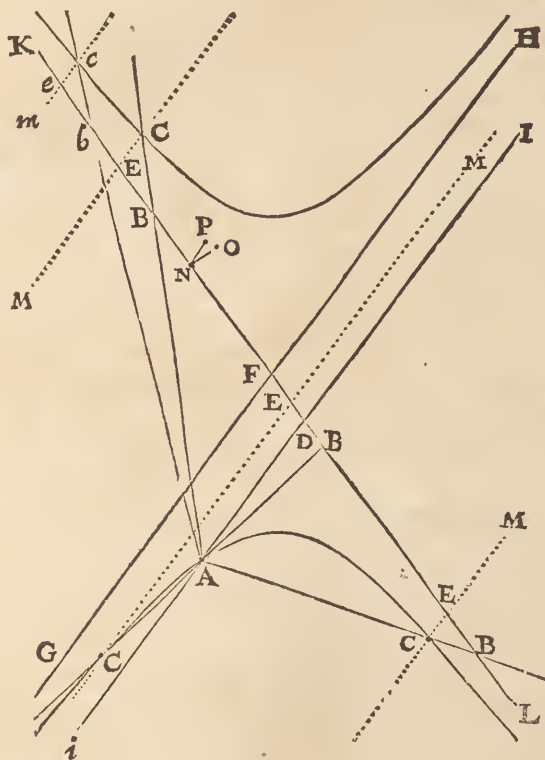
EB seu FD & AD utrumque intervallum.

THEOREMA III.

Propositio 3.

Quibuslibet *angulis mobilibus* ac quibuscunque *intervallis*, juxta definitiones præmissas descriptâ curvâ, hoc ipsi proprium erit, ut rectangulum contentum

tum sub qualibet recta *efficienti* parallelâ, à quocunque curvæ puncto ad *directricem* ductâ, atque eâ *directricis* parte, quæ inter dictam parallelam & *efficientem* intercipitur, æquale sit ei, quod sub utroque *intervallo* continetur, rectangulo.



Sit quolibet *angulo mobili* BE C, & quibuscunque *intervallis* EB, seu FD & AD, *directrice* KDL, descripta curva cC; ita ut *efficiens* sit GFH, sitque à puncto C in curva utcunque assumpto ad *directricem* ducta CE *efficienti* GFH, ac proinde & *intervallo* AD parallela: dico rectangulum FEC æquale esse ADF re-ctangulo, sive ei, quod sub AD, EB continetur.

Z 3.

Con-

Constituitis enim tam *angulo mobili* quàm *describente* in statione uti fuère, cùm per ipsarum interfectionem descriptum est punctum C, veluti in BE C, & ABC, quoniam æquales sunt rectæ EB, FD, additâ vel ablatâ utrinque FB vel ED: erunt quoque rectæ BD, FE æquales; cumque ¹ propter parallelas EC, AD æquiangula sint triangula BDA, BEC: erit ² ut BD, id est, FE, ad DA, ita BE ad EC: ideoque ³ rectangulum FEC sub extremis æquale rectangulo sub mediis AD, EB seu ADF. Quod erat propositum.

¹ per 29
primi.
² per 4
sexti.
³ per 16
sexti.

Quare cum & omnia rectangula, ut FEC, inter se quoque sint æqualia, manifestum est, curvam, interfectione, uti prædictum est, descriptam, eam ipsam esse, quam Veteres Hyperbolam vocarunt, aut, si binas curvas eodem & continuato motu genitas simul consideres, esse eas, quas Oppositas Sectiones dixere: *directricem* verò KL ac *efficientem* GH eas ipsas, quas Asymptotos nuncupaverunt, atque ipsarum occursum sive interfectionem, ut F, idem illud punctum, quod Hyperbolæ sive Oppositarum Sectionum Centrum ab ipsis appellatum fuit. ideoque & hæc singula iisdem illis nominibus in posterum indigitabimus, solummodo sectionum nomen, ob rationes superiùs ⁴ expositas, minùs congruum evitaturi. Rectangulum autem sub *intervallis* contentum, seu, quadratum ei æquale, Hyperbolæ Potentiam dicemus.

⁴ in Epistola ad Schotanium.

Corollarium I.

Ex ipsa descriptione manifestum est, Asymptotos & Hyperbolam magis magisque ad se invicem continuè accedere, tandemque pervenire ad distantiam, datâ quâlibet distantia minorem; cujus tamen, si demonstrationem exactiorem desideres, data distantia sit recta NO, ad Asymptoton FK perpendicularis. Sumptâ igitur NP, quæ eadem NO minor sit, si fiat ut NP ad AD, ita DF ad Fe, ac per e ducatur ec ipsi NP æqualis atque Asymptoto FH æquidistans: erit ⁵ rectangulum Fec Potentiæ ADF æqua-

⁵ per 16
sexti.

in uno tantum puncto, secare: quandoquidem hæ productæ ab utraque Asymptoto magis magisque semper abscedunt.

Corollarium 3.

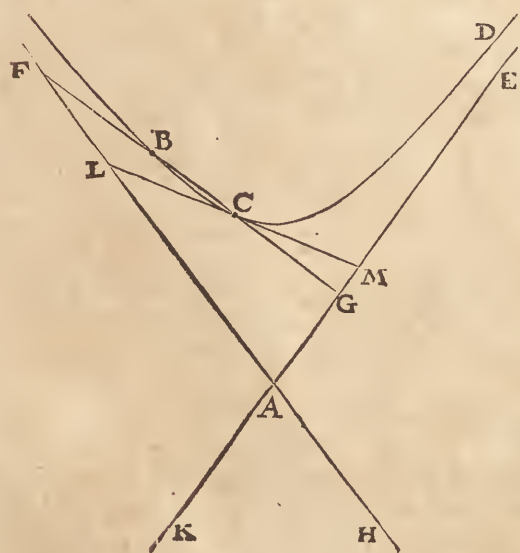
Constat præterea, *efficientem* in quacunque statione, id est, re-ctas omnes Asymptoto parallelas similiter Hyperbolæ, & qui-dem in uno tantum puncto, occurrere, productæque illam ibidem secare. Impossibile enim est, ut *describens* atque *efficiens* ullâ statione sese in pluribus punctis interfecent.

THEOREMA IV.

Propositio 4.

Recta linea, sive per bina quælibet in Hyperbola puncta transiens, sive eidem ita occurrens, ut producta utrinque extra Hyperbolam cadat, utrique Asymptoto, intra angulum, qui curvam continet, occurrit.

Sint in Hyperbola BCD, cujus Asymptoti KAE, HAF,



ductæ FBCG, transiens per bina curvæ puncta B & C, atque MC eidem occurrens in C, ita ut producta versùs L utrinque extra Hyperbolam cadat; Dico tam rectam FBCG quàm rectam MCL utrique Asymptoto KAE & HAF intra angulum EAF occurrere. Hoc enim si non accideret, eadem FBCG vel MCL aut Asym-

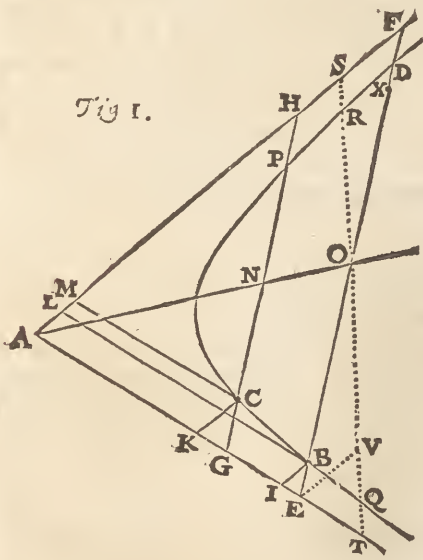
Asymptotorum alterutri parallela esset, aut, si vel huic vel illi Asymptoto extra angulum E A F occurreret, ex puncto intra angulum K A H ad verticem ei qui Hyperbolam continet ducta hanc vel illam Asymptoton secaret; ideoque¹ curvæ in uno tantum puncto non verò in duobus occurreret, ac producta eandem secaret, non autem utrinque extra Hyperbolam caderet, contra id quod ponitur. Ac proinde constat propositum.

THEOREMA V.

Propositio 5.

Assumptis, vel in una eademque, vel in oppositis Hyperbolis, duobus utcumque punctis, ductisque per eadem sive unâ rectâ sive duabus, sibi mutuò parallelis: erunt rectangula sub ductâ vel ductarum partibus, Hyperbolâ & Asymptoto utrinque interceptis, sibi invicem æqualia.

Fig. 1.



Sint, vel in eadem, vel in oppositis Hyperbolis BPCD, cujus Asymptoti AE, AF, assumpta utcumque bina puncta B & C, ac per eadem ductæ binæ rectæ BD, CP sibi invicem⁴ parallelæ Asymptotisque⁴ concurrentes in punctis E, F, G, H: dico rectangulum EBF rectangulo GCH æquale esse.

Ductis enim per eadem puncta B & C rectis, utrique Asymptoto parallelis alteraque A-

symptoto terminatis, BI, BL, CK, CM: erit¹, propter rectangula IBL & KCM² æqualia, ut IB ad KC, hoc est³, ut EB

⁴ per 16
sexti.

ad GC , ita CM ad BL , id est, ita CH ad BF . ac proinde ⁴ re-
ctangula EBF & GCH æqualia sunt. Quod demonstrandum
erat.

Eodem modo ostendetur, si per bina puncta, ut B &
 D , una recta ducatur BD , quæ utrique Asymptoto oc-
currat in punctis E & F^a , rectangula EBF , FDE sibi
invicem æqualia esse.

Corollarium 1.

In oppositis Hyperbolis, si parallelarum altera per centrum
transeat, ut CP in tertia figura, eadem demonstratione compro-
batum erit, rectangula sub partibus quarumlibet rectarum, quæ
per Asymptotos ad utramque curvam ducuntur, singula æqua-
lia esse quadrato æquidistantis à centro ad Hyperbolam ductæ.
Quare cum ex dictis appareat, si, ductâ per centrum rectâ ut-
cunque veluti CGP in eadem figura, eidem ubivis alia recta æ-
quidistans ducatur BD , quæ secet Asymptotos in E & F , rectan-
gulum EBF vel FDE quadrato GC itemque & GP quadrato
æquale esse: sequitur, ipsas quoque GC , GP esse sibi invicem
æquales, hoc est, quamlibet rectam ad oppositas Hyperbolas per
centrum ductam, in eodem centro bifariam secari.

Corollarium 2.

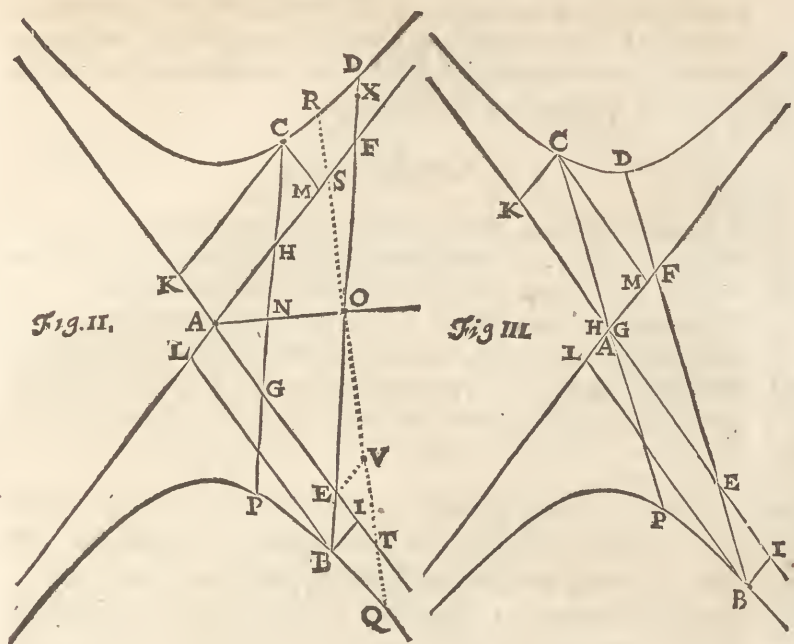
Constat quoque cujuslibet rectæ, sive per unam eandemque,
sive per oppositas Hyperbolas ductæ, partes Hyperbolâ & Asym-
ptotis interceptas sibi invicem esse æquales.

Ductâ enim utcunque BD , quæ Asymptotis occurrat in E &
 F , cum ex antedictis ⁵ BF sit ad DF , ut DE ad BE : erit quoque
dividendo ⁶, vel, in oppositis Hyperbolis, componendo ⁷, BD
ad DF , ut eadem BD ad BE , ideoque DF , BE ⁸, ac proinde &
 BF , DE sibi invicem æquales erunt.

⁵ per 5
hujus, &
16 sexti.
⁶ per 17
quinti.
⁷ per 18
quinti.
⁸ per 9
quinti.

Corollarium 3.

Unde pariter constat, rectam, quæ vel unius ejusdemque, vel
oppositarum Hyperbolarum, bina puncta conjungit, nullo alio
sui



fui puncto in Hyperbola esse. Si enim præter D & B aliud quoddam ipsius DB punctum, ex.gr. X, in Hyperbola foret, esset ¹ XF ^{per Coroll. præced.} ipsi BE ac proinde & ipsi DF æqualis, pars toti, quod est absurdum.

Corollarium 4.

Facile autem apparet, & conversum quoque propositionis verum esse: nempe, si, iisdem positis, & rectangulis EBF, GCH æqualibus, punctorum B & C unum in Hyperbola sit, & alterum quoque fore in eadem vel opposita Hyperbola, cujus A symptoti sunt AE & AF. Ex eo enim quod æqualia sint rectangula EBF & GCH, demonstrabitur æqualia quoque esse rectangula AIB & AKC eadem methodo, quâ conversum supra ostensum fuit. ideoque si punctum B sit in Hyperbola, erit quoque ² punctum C in eadem aut in opposita Hyperbola, cujus A symptoti sunt AE, AF, & vice versâ. De binis autem punctis in eadem linea, ut B & D, idem dictum esto; imò & idem erit in eadem linea, si dicta

puncta, ut B & D, æqualiter ab Asymptotis distent: quandoquidem, si BE, DF æquales sunt, additâ utrinque BD, vel in oppositis Hyperbolis ipsâ EF, & BF, ipsi DE, ideoque & rectangulum EBF rectangulo FDE æquale erit.

Corollarium. 5.

Apparet quoque, eam, quæ ex centro quamlibet rectam, vel in una eademque, vel in oppositis Hyperbolis ductam, bifariam dividit, omnes quoque ipsi æquidistantes bifariam dividere. Ut, si ex centro A ducta ANO dividat bifariam rectam CP; cui æquidistans sit BD; cum, æqualibus NP, NC additis demptivè æqualibus¹ PH, CG, æquales quoque sint NH, NG, ideoque & OE, OF²: erunt similiter, demptis rursus additivè æqualibus³ BE, DF, ipsæ OB & OD quoque æquales.

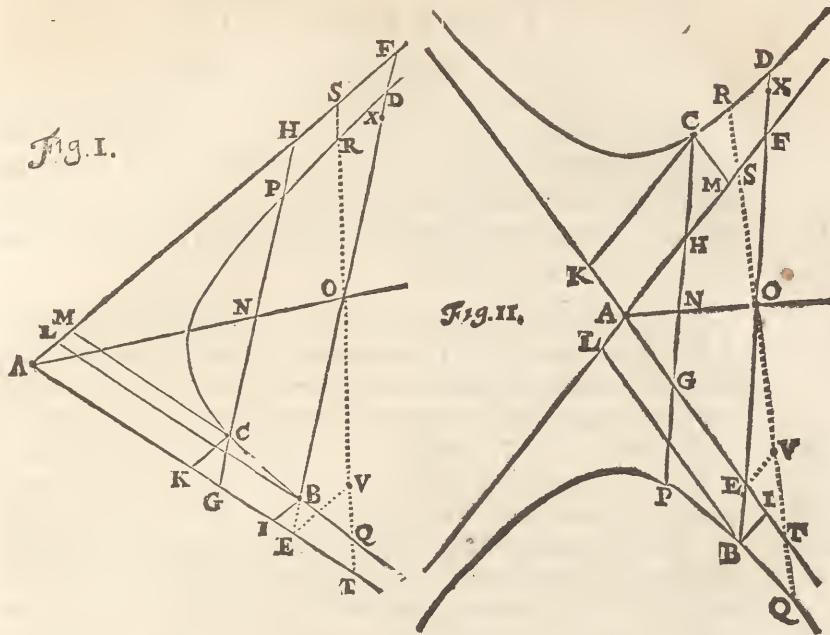
¹ per 2
Cor. 5
hujus.
² per 9
quinti, &
⁴ sexti.
³ per 2
Cor. 5
hujus.
^a ut AO
similef-
que in
I figura.
^b ut AO
similef-
que in
II figura.
^c ut PC,
DB in
utraque
figura.

Ejusmodi autem rectæ à centro per Hyperbolam ductæ^a, interceptæ diametri, seu diametri simpliciter; at quæ à centro inter oppositas Hyperbolas ducuntur^b, secundæ diametri; parallelæ verò per easdem bifariam sectæ^c, ordinatim ad diametros applicatæ vocantur; & si applicatæ ad angulos rectos à diametris secantur, eadem diametri Hyperbolæ axes appellantur. Quando autem secunda diameter ordinatim ad interceptam diametrum applicatis parallelæ est, altera alteri *Conjugata* dicitur.

Corollarium 6.

Ex præmissis colligitur, non posse alias rectas, quàm dictas parallelas seu ordinatim applicatas, à diametro bifariam secari. Si enim fieri possit, secetur à diametro AO bifariam præter applicatas alia recta, ut QR, Asymptotis occurrens in S & T; & sit per O ordinatim applicata BOD, Asymptotis occurrens in E & F. Æquales ergo erunt tam EO, FO⁴, quàm

⁴ per 2, &
⁵ Cor. TO, SO⁵. Quoniam verò, ductâ EV ipsi SF parallelæ⁶,
⁵ hujus. æqui-
⁵ ex hy-
poth. juncto Cor. 5 hujus. ⁶ per 15 & 29 Primi.



æquiangula sunt triangula EOV & FOS : erit ¹ ut EO ad ¹ per 4 OV , ita FO ad OS . Quare cum EO ipsi FO sit æqualis, ^{sexti.} erit & ² OV ipsi OS , hoc est, rectæ OT æqualis, ^{per 14} quod est absurdum. Non ergo bifariam secatur recta RQ à dia- ^{quinta} metro AO .

Corollarium 7.

Atque hinc manifestum fit, quòd, si vel in una eademque vel ad oppositas Hyperbolas binæ quælibet rectæ sibi invicem æquidistantes ductæ sint, quæ utramque bifariam dividit recta lineæ per centrum transeat seu diameter sit: Quippe quæ per medium unius æquidistantium diameter ducetur, per medium quoque alterius æquidistantium transibit ³. Unde apparet, quo pacto datæ ³ per 5 Hyperbolæ vel oppositarum Hyperbolarum diametros quotlibet, simulque ordinatim applicatas ad easdem, nec non & centrum, utpote quod binarum pluriumvè diametrorum communis intersectio est, reperire liceat. ^{Corol. 5} ^{hujus.}

THEOREMA VI.

Propositio 6.

Recta per quodlibet Hyperbolæ punctum ad utramque Asymptoton ducta, quæ in eodem puncto bifariam dividitur, curvam ibidem contingit; & contra, contingens ad utramque Asymptoton producta in puncto contactus bifariam divisa est.

¹ per 2
Cor. 5
hujus.

² per 4
Cor. 5
hujus.

³ per 3
Cor. 5
hujus.

Sit per punctum C in Hyperbola BCD, cujus Asymptoti AE, AF, ducta recta GCH, utrinque Asymptotis terminata, quæ in eodem puncto C bifariam dividatur. Dico rectam GH curvam contingere in C. Secet enim, si fieri potest, recta GH Hyperbolam in C & I: eritque ¹ IH rectæ CG, ideoque & ipsi CH æqualis. quod est absurdum. Non secet ergo GH Hyperbolam, sed eandem contingit. Dico porro conversim, si GH in puncto C Hyperbolam contingat, eandem quoque in C bifariam dividi. Hoc enim si non sit, sumatur in CH majori parte ipsa HI æqualis GC. Hinc cum punctum C sit in Hyperbola, erit quoque ² punctum I in Hyperbola, totaque CI ³ intra curvam cadet, ideoque ipsa GH Hyperbolam non continget, sed eandem in punctis C & I secabit, contra id quod ponebatur. Non ergo GC ipsi CH inæqualis est. Ideoque casu utroque constat propositum.

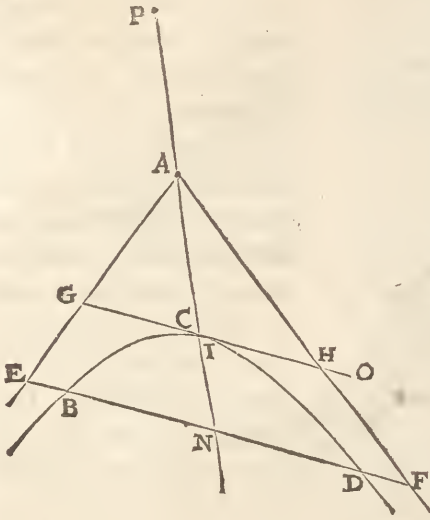
Corollarium I.

⁴ per 2
Cor. 5
hujus.
⁵ per 5
hujus.

Manifestum itaque est ex antedictis, singula rectangula, quæ comprehenduntur sub partibus cujuslibet rectæ contingenti parallelæ, inter Hyperbolam & Asymptotos interceptis, esse æqualia dimidiæ tangentis quadrato. Ut, si tangenti GCH æquidistans utcumque ducta sit BD, Asymptotis occurrens in E & F: erit rectangulum EBF sive ⁴ BFD, ut & FDE sive DEB æquale rectangulo GCH ⁵, id est, ipsius CH vel CG, dimidiæ tangentis quadrato.

Corollarium 2.

Patet porrò, rectam, quæ per diametri terminum ducitur æquidistans ei, quæ in Hyperbola ab eadem diametro bifariam secatur, id est, ordinatim applicatis parallela, Hyperbolam in dicto termino contingere. Ut, si ad diametrum AN ordinatim applicata sit BND, quæ producta Asymptotis occurrat in E & F, ac per diametri terminum C ducta sit recta GCH, ipsi BND æquidistans, cum æquales sint NF & NE¹: erunt² quoque CH & CG æquales, ideoque³ GCH Hyperbolam continget in C.



quæ producta Asymptotis occurrat in E & F, ac per diametri terminum C ducta sit recta GCH, ipsi BND æquidistans, cum æquales sint NF & NE¹: erunt² quoque CH & CG æquales, ideoque³ GCH Hyperbolam continget in C.

¹ per 2
² & 5 Corol. 5 hujus.
³ GCH Hyperbolam continget² per 9 quinti, & 4 sexti.
 3 per 6 hujus.

Corollarium 3.

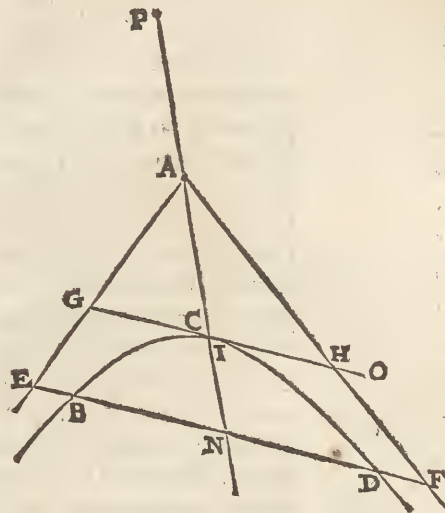
Hinc liquet, non solum omnes rectas in Hyperbola, contingenti parallelas, à diametro per tactum ductâ bifariam secari, ideoque ad eam ordinatim applicatas esse, sed & non posse plures rectas in uno eodemque puncto Hyperbolam contingere. Ut, si contingenti GH parallela sit BD, Asymptotis occurrens in E & F, ductâ per tactum C diametro ACN, quæ ductæ BD occurrat in N: quoniam⁴ GC, CH æquales sunt, nec non EN, NF⁵, erunt quoque (demptis æqualibus⁶ EB, DF,) BN, ND æquales, ideoque & ad dictam diametrum ACN ordinatim applicatæ. At verò non posse aliam rectam præter GH Hyperbolam in puncto C contingere, patet, quandoquidem & omnes ipsi æquidistantes in Hyperbola ductæ, quæque aliæ essent quàm prædictæ applicatæ, bifariam quoque per eandem diametrum dividerentur⁷. quod fieri non posse superius⁸ ostensum est.

⁴ per 6 hujus.
⁵ per 9 quinti & 4 sexti.
⁶ per 2 Cor. 5 hujus.
⁷ per supra demonstrata.
⁸ in Cor. 6.

Cæ-⁵ hujus.

Cæterùm monendum hîc , ut diametrorum quoque magnitudo dêterminetur , eam , quæ à quocunq; in Hyperbolâ puncto per centrum ducta oppositâ Hyperbolâ terminatur , ideoque intercepta inter cêntrum & curvam dupla est ¹, ut CAP , vel Hyperbolæ , vel oppositarum Hyperbolarum transversam ; diametrum ; eamque , quæ in ipsius termino curvam contingens utrinque Asymptotis terminatur , aut quæ ipsi per centrum æqualis

¹ per CO
vol. I
§ hujus.



& parallela ducitur , ut GCH , secundam diametrum transversæ conjugatam ; at verò illam , quæ ipsis PC , GH , transversæ nempe secundæque diametro tertia est proportionalis , ut CO , rectum latus sive Parametrum dici.

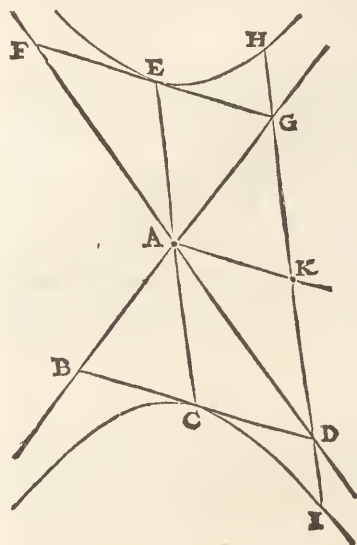
THEOREMA VII.

Propositio 7.

Quæ per terminum transversæ cujuslibet diametri recta ducitur , contingenti in vertice parallela , oppositam Hyperbolam contingit , & quæ ad secundam diametrum , assumptæ cuicunque diametro conjugatam , ordinatim applicatur , eidem assumptæ diametro æquidistat.

Sit

Sit Hyperbolæ, vel oppositarum Hyperbolarum IC, HE, quarum Asymptoti BG, DF, diameter transversa utcunque assumpta CE, perque ejus terminum E ducta recta FEG paralle-



la ipsi BD, quæ curvam in vertice C contingit, ita ut hæc atque illa Asymptotis occurrant in punctis B, D & F, G: dico prædictam quoque FEG oppositam Hyperbolam contingere in E; & si per centrum A ducatur secunda diameter AK, diametro CE conjugata, ordinatim ad eandem AK applicatas ipsi CE diametro æquidistare.

Quoniam enim est ¹ tam AE ad EG, ut AC ad CB, quàm AE ad EF, ut AC ad CD; & sunt tam AE, AC² quàm CB, CD³ æquales, erit quoque ⁴ tam EG ipsi CB, quàm EF ipsi CD, ac proinde & EG ipsi EF æqualis. Unde ⁵ recta FG

¹ per 29
primi, &
⁴ sexti.

² per 1
Corol. 5
hujus.

³ per 6
hujus.

⁴ per 14
quinti.

⁵ per 6
hujus.

oppositam Hyperbolam HE continget in puncto E. Quod primo loco propositum fuit. Porro si per G & D ducatur recta GD, secans secundam diametrum AK in K, oppositisque Hyperbolis

⁶ per 33
primi.

occurrans in H & I, cum æquales & parallelae sint EG, CD, erunt & ⁶ quæ ipsas conjungunt GD, CE parallelae & æquales.

⁷ per 3
Cor. 6
hujus.

Ideoque cum secunda diameter AK contingentibus BD, FG, id est ⁷ ordinatim ad diametrum CE applicatis æquidistans sit, ut-

⁸ per 34
primi.

pote ex Hypothesi ipsi CE conjugata: erunt quoque ⁸ rectæ GK, EA, ut & KD, AC, ideoque & ⁹ GK, KD æquales.

⁹ per 1
Cor. 5
hujus.

Quibus si addantur æquales ¹⁰ GH, DI: erunt similiter rectæ KH, KI sibi invicem æquales. Quocirca cum ¹¹ ad secundam diametrum AK applicata sit recta HI, etiam cæteræ omnes ad eandem applicatæ ¹² eidem HI ac proinde & diametro CE æquidistabunt. Quod secundo loco propositum erat.

¹⁰ per 2
Cor. 5
hujus.

¹¹ per 6
Cor. 5
hujus.

¹² per 5
& 6
Cor. 5
hujus.

¹² per 5
& 6
Cor. 5
hujus.

PROBLEMA I.

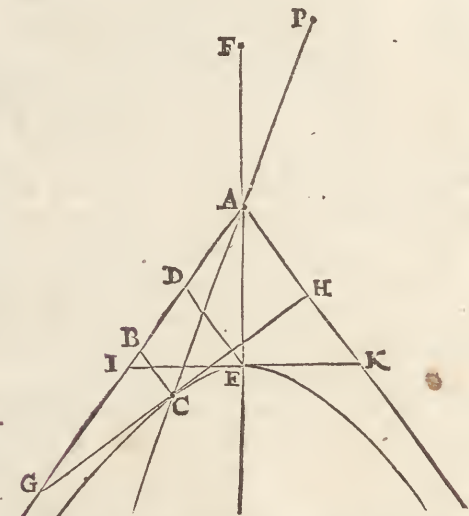
Propositio 8.

Datis quibuscunque diametris conjugatis, Hyperbolæ axes conjugatos invenire.

Sint datæ diametri conjugatæ PC, GH , oporteatque invenire conjugatos axes ejus Hyperbolæ, cujus eadem PC, GH conjugatæ diametri existunt.

Ductis ab A centro per G & H Asymptotis AG, AH , ductâque à C ad eorum alterutram rectâ CB alteri æquidistante, sumatur inter AB, BC

media proportionalis AD . Dein ductâ DE ipsi AD æquali, atque Asymptoto AH parallelâ, erit EAF , transiens per E & A ac ipsius EA dupla, transversus axis qui quæritur, atque IEK ad eandem perpendicularis, ac utrinque Asymptotis terminata, axis secundus, priori conjugatus.



¹ ex hypothesi.
² per 17 sexti.
³ per 3 hujus.
⁴ per 5 primi.
⁵ per 29 primi.
⁶ per 32 primi.
⁷ per 26 primi.
⁸ per sup. demonstr.
⁹ per 6 hujus.

la est, rectangulumque ADE ipsi ABC æquale²; erit quoque punctum E ³ in Hyperbola. Porrò cum propter rectas DA, DE æquales⁴ æqualis quoque sit DAE angulus ipsi DEA , id est⁵, EAK angulo, sintque & anguli AEI, AEK ex constructione æquales: erunt⁶ triângula AEI, AEK æquiángula, atque ob latus AE commune⁷ etiam æqualia, latusque IE lateri EK æquale. Unde cum punctum E ⁸ in Hyperbola existat, dividatque bifariam rectam IK , utrinque Asymptotis terminatam, continget ipsa IK ⁹ curvam in E : ideoque, & propter angulos FEI, FEK rectos, conjugati axes erunt FE, IK .

THEO-

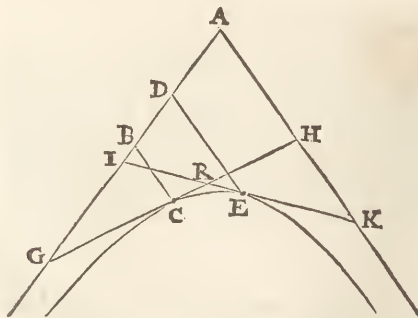
THEOREMA VIII.

Propositio 9.

Qualibet contingentes ab angulo Hyperbolæ Asymptotis comprehenso æqualia abscindunt triangula, & rectangula sub eorundem triangulorum lateribus comprehensa invicem quoque æqualia sunt, ac præterea majora eorundem latera à contingentibus, ipsæque bases seu contingentes Asymptotis terminatæ, in mutuo occursum, nec non ipsarum partes curvam contingentes inter occursum & Asymptotos interjectæ, in punctis contractus, in eadem ratione secantur.

Hyperbolam CE, cujus Asymptoti AG, AK, rectæ GH, IK utrinque Asymptotis terminatæ, ac sibi mutuo in R occurrentes, contingant in punctis C & E: dico tam rectangula quàm triangula GAH, IAK æqualia esse; ac præterea esse GI ad IA, sicut KH ad HA; itemque GR ad RH, sicut KR ad RI; nec non GC ad CR, sicut KE ad ER.

Ductis enim à punctis contractus C & E rectis CB, ED Asymptotorum alterutri, ut AH, parallelis, cum sit ut GC ad GH, ita GB ad GA, & BC ad AH¹; sitque GH ipsius GC dupla².



erit quoque tam GA^{1 per 4} ipsius GB quàm AH^{2 per 6} ipsius BC dupla, ideoque³ rectangulum GA^{3 per 20} H rectanguli GBC si-^{sexti.} ve ABC quadruplum. Eodem modo rectangulum IAK rectanguli ADE quadruplum ostendetur. Hinc cum æqualia sint rectangula

ABC, ADE⁴, erunt quoque eorum quadrupla, nimirum^{4 per 3} rectangula GAH & IAK æqualia. Quod est primum.^{hujus.}

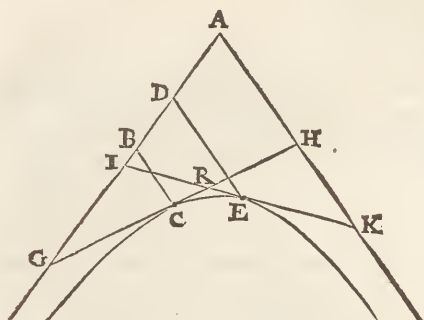
Unde cum⁵ sit ut GA ad AK, ita IA ad AH, triangula quo-^{5 per 16} que^{sexti.}

6 per 15
sexti.

que GAH, IAK æqualia erunt⁶, utpote habentia latera circa communem angulum, reciproca. Quod est secundum.

7 per 16
quinti.

8 per 17
quinti.



Ac cum permutando⁷ quoque sit GA ad IA, ut AK ad AH: erit &⁸ dividendo GI ad IA, ut KH ad HA. Quod est tertium.

9 per 15
sexti.

Porro cum ab æqualibus triangulis GAH, IAK ablato communi quadrilatero IRHA, residua, nempe trian-
gula GRI & KRH, quoque æqualia remaneant, erunt⁹ eorundem latera circa æqualem angulum ad R reciproca, id est, erit GR ad RH, ut KR ad RI. Quod est quartum.

10 per 18
quinti.

11 per Co-
roll. 19
quinti.

Unde cum componendo¹⁰ quoque sit GH ad RH, ut KI ad RI, aut, sumptis antecedentium dimidiis, CH ad HR, ut EI ad IR: erit & per conversionem rationis¹¹ CH sive GC ad CR, ut EI sive KE ad ER. Quod est quintum. Atque ita demonstrata sunt ea, quæ proponebantur.

THEOREMA IX.

Propositio 10.

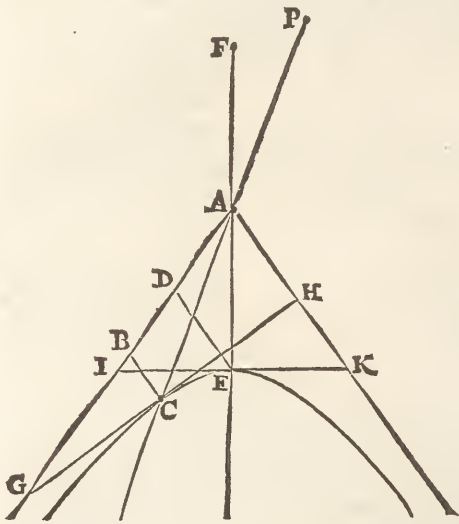
Ductâ quacunq; in Hyperbola diametro, erit ut quadratum secundæ ad quadratum transversæ diametri, si-
ve ut parameter ad transversam diametrum, ita quadratum cujuslibet ordinatim applicatæ ad rectangulum sub ejusdem diametri partibus, utroque transversæ termino & applicatâ interceptis, comprehensum.

Sit in Hyperbola BCD, cujus Asymptoti AE, AF, ducta diameter utcunq; PACN, cujus secunda diameter transversæ PC conjugata sit GCH, parameter verò CI, ipsis nempe PC, GH tertia proportionalis, & sit ordinatim ad dictam diametrum appli-

applicata quælibet DN: dico esse ut GH quadratum ad CP quadratum, aut, quod idem est ¹, ut recta IC ad rectam CP, ita ¹ per Corol. 20

Productâ enim applicatâ DN utrinque per Hyperbolam ad Asymptotos, ut EB NDF, cum sit ² FN quadratum ad HC quadratum, id est ³, ad BFD rectangulum, ut NA quadratum

ad CA quadratum: ³ per 1
erit dividendo ⁴ DN ^{Corol. 6}
quadratum ad HC ^{hujus.}
quadratum, ut PNC ⁴ per 6
rectangulum ⁵ ad ^{secundi, &}
CA quadratum, & ⁵ per 6
permutando ⁶ DN ^{secundi.}
quadratum ad PNC ⁶ per 16
rectangulum, ut HC ^{quinti.}
quadratum ad CA
quadratum, sive ⁷ ut ⁷ per 15
GH quadratum ad ^{quinti.}
CP quadratum, aut,
quod idem est, ut IC
ad CP. Quod demon-
strandum erat.



Corollarium I.

Hinc colligitur, quo pacto datae cujuslibet Hyperbolæ, ut BCD, Asymptoti inveniantur. Quippe inventis ⁸ centro A, diametro quâcunque AN ⁸ per 7
quæ curvam secet in C, & ordinatim ad eandem applicatâ BN; ^{Coroll. 5}
productâ NA ad P, ut AP ipsi AC sit æqualis, ductâque per C re- ^{hujus.}
ctâ GCI applicatâ BN parallelâ, in eadem notentur puncta H &
G, ita ut sit PNC rectangulum ad BN quadratum, sicut AC qua-
dratum ad quadratum abs CG seu CH: erunt, quæ ex A centro
per G & H ducuntur rectæ AGE & AHF, Asymptoti quæ sitæ? ⁹ per con-
^{versum}
¹⁰ hujus;

Corollarium. 2.

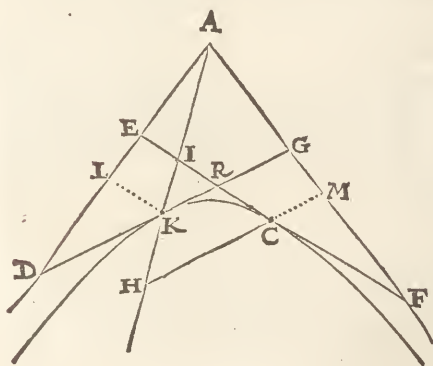
Ex demonstratis patet, si per P & I transversæ diametri parametricæ terminos ducatur recta PIK, occurrens cuilibet applicatâ,
Bb 3. catâ,

THEOREMA X.

Propositio II.

Si quælibet contingens cuicunque Hyperbolæ diametro occurrat, atque à puncto contactus recta ad eandem diametrum ordinatim applicetur, erit rectangulum sub diametri portionibus à centro per contingentem applicatamque abscissis æquale femidiametri transversæ quadrato.

Quamcunque Hyperbolam $K C$, cujus Asymptoti $A D$, $A F$, contingat in puncto C utcunque sumpto recta $E C F$, Asymptotis occurrens in E & F , diametro autem $A H$ utcunque ductæ



in I ; & per punctum contactus C ad eandem diametrum ordinatim applicata sit CH , quæ producta Asymptoto occurrat in M . Dico rectangulum $HA I$ æquale fore quadrato femidiametri KA , sive, quod idem est ¹, continetur ^{1 per 17. sexti.} proportionales esse HA , KA , & IA .

Ductis enim DKG applicatæ CH , & KL con-

tingenti FE parallelis, notatoque intersectionis puncto R , cum fit ² RC ad CF , ut RK ad KD , hoc est ³, MG ad MF , ut ^{2 per 2 Cor. sexti, & 9 hujus.} LE ad LD : erit quoque ⁴ MG ad GF , ut LE ad ED . Quare cum porrò ⁵ fit FG ad GA , ut DE ad EA : erit ⁶ ex æquo ^{3 per 2 sexti.} MG ad GA , id est ⁷, HK ad KA , ut LE ad EA , hoc est ⁸, ut ^{4 per compositionem rationem ratio-} KI ad IA : & ⁹ componendo HA ad KA , ut KA ad IA . Quod demonstrandum erat.

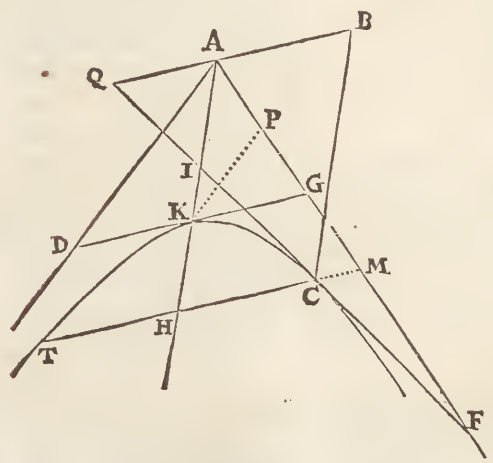
nis contrariam, vide Clavius ad 18 quinti. ⁵ per 9 hujus. ⁶ per 22 quinti. ⁷ per 2 sexti. ⁸ per 2 sexti. ⁹ per 18 quinti.

THEOREMA XI.

Propositio 12.

Si quælibet contingens cuicunque secundæ Hyperboles diametro occurrat, atque à puncto contactus recta ad eandem diametrum ordinatim applicetur, erit rectangulum sub secundæ diametri portionibus, à centro per contingentem applicatamque abscissis, æquale semi-secundæ diametri quadrato.

Quamcunque Hyperbolam $K C$, cujus Asymptoti $A D$, $A F$, contingat in puncto C , utcunque sumpto, recta $F C Q$, occurrens secundæ diametro $A B$, utcunque ductæ in Q : dico, si ex C ad eandem diametrum $A B$ ordinatim applicetur recta $C B$, & ex A eidem æquidistans ducatur $A K H$, secans contingentem $F C Q$ in I , Hyperbolæque occurrens in K , atque per K recta agatur $D K G$ ipsi $A B$ parallela, (ita ut $A K H$ diameter sit secundæ diametro $A B$ conjugata, ac semi-secundæ



¹ per 7
hujus.

diametri magnitudine sint $K G$, $K D$,) fore rectangulum $B A Q$ æquale ipsius $K G$ vel $K D$ semi-secundæ diametri quadrato.

² per 11
hujus, &
Cor. 20
sexti.
³ per 4
& 22
sexti.

Ductâ enim per C rectâ $T C M$ secundæ diametro $A B$ parallelâ, ideoque ad interceptam diametrum $A K H$ ordinatim applicatâ, quæ Hyperbolæ occurrat in T diametroque $A H$ in H , Asymptoto verò $A F$ in M : Quoniam est ² $H A$ quadratum ad $K A$ quadratum, sive ³ $H M$ quadratum ad $K G$ quadratum seu

feu¹ ad T M C rectangulum, ut H A seu C B ad I A, id est², ut¹ per 1
 B Q ad A Q; erit dividendo³ H C quadratum seu B A quadratum
 ad K G quadratum, ut B A ad A Q. Ac propterea⁴ B A, K G,
 & A Q proportionales erunt, rectangulumque B A Q⁵ quadra-
 to K G æquale. Quod demonstrandum erat.

Cor. 6
 hujus.
 2 per 4
 sexti.
 3 per 17
 quinti.
 4 per Cor.
 20 sexti.
 5 per 17
 sexti.

Corollarium ad duas propositiones præcedentes.

Ex dictis facillimè colligitur, quo pacto à dato quolibet puncto
 ducenda sit recta, quæ datam Hyperbolam contingat.

Si enim datum punctum in ipsa curva sit, veluti K, inventis A-
 symptotis⁶, ductâque ad illarum alterutram rectâ alteri A sympto-
 to parallelâ, ut K P, ac sumptâ P G ipsi A P æquali, continget jun-
 cta G K D Hyperbolam in K⁷. quoniam uti G P ipsi P A, ita G K
 ipsi K D æqualis est⁸.

6 per 1
 Cor. 10
 hujus.
 7 per 6
 hujus.
 8 per 2
 sexti.

Eodem modo, si datum punctum sit in A symptotorum alteru-
 tra, veluti G, divisâ A G bifariam in P, ductâque P K alteri A sym-
 proto parallelâ, quæ curvæ occurrat⁹ in K: continget juncta
 G K D¹⁰ Hyperbolam in puncto occurfus K.

9 per 2
 Cor. 3
 hujus.
 10 per 2
 sexti.
 6 hujus.
 11 inven-
 to per 7
 Corol. 5
 hujus.

Sit deinde datum punctum intra angulum A symptotis com-
 prehensum, veluti I: ductâ à centro¹¹ per I diametro, ut A I H,
 quæ curvæ occurrat in K, sumptâque A H ipsis A I, A K tertiâ
 proportionali, si per H agatur ordinatim applicata H C (nimi-
 rum, quæ contingenti in K æquidistet²), occurrens curvæ in C,
 continget juncta I C¹³ Hyperbolam in eodem C puncto.

12 per 3
 Cor. 6
 hujus.
 13 per 11
 hujus.

Sit denique datum punctum in alterutro angulorum, qui dein-
 cepti sunt, angulo Hyperbolam continenti, veluti Q: ductâ per Q
 & centrum A secundâ diametro Q A B, transversâque ipsi conju-
 gatâ A K H (nimirum, quæ producta quamlibet rectam in Hyper-
 bola ductam ipsi Q A B æquidistantem bifariam dividat), nec non
 tangente K G vel K D, A symptoto terminatâ; si fiat quadrato
 K G vel K D æquale rectangulum Q A B, ac per B ad secundam
 diametrum A H applicetur recta B C, nempe ipsi A K æquidi-
 stans¹⁴, quæ curvæ occurrat in C: juncta Q C¹⁵ in eodem pun-
 cto C Hyperbolam continget.

14 per 7
 hujus.
 15 per 12
 hujus.

Manifestum porrò est, si datum punctum vel intra Hyperbo-
 lam foret, vel intra angulum ad verticem ei, qui Hyperbolam
 continet: fieri non posse¹⁶, ut ab eodem puncto ducatur recta,
 quæ producta eandem non secet.

16 juxta
 1 Cor. 3
 hujus.

CAPUT III.

DEFINITIONES TERTIÆ.

I.

SI quodlibet trianguli rectanguli latus, five id rectum angulum subtendat, five acutorum alterutri oppositum sit, in eodem angulo moveatur, ita ut uterque moti lateris terminus semper existat, maneatque in latere, cui ab initio junctus fuit, producto tamen five ab altera five ab utraque parte, prout opus fuerit; idemque ille motus tam per angulos, qui præfato deinceps sunt, quàm per eum, qui ipsi ad verticem est, ordine continuetur, donec ad positionem situmque pristinum latus motum redierit, atque ita quolibet puncto quod in eodem, utcunque etiam producto, notare placuerit, curva describatur linea, prædictum mobile latus *Describentis Lineæ* nomine designabitur.

II.

Punctum autem quod in eodem ad descriptionem notare placuerit, *Punctum Efficiens*, aut *Punctum simpliciter* vocabitur.

III.

Distantia verò ejusdem puncti tam ab uno quàm ab altero *describentis* termino *Intervallum* dicitur.

IV.

Cum de *angulo* simpliciter sermo erit, eum intelligemus, quem subtendit, & in quo movetur *describens*.

V.

Anguli vertex, quem *describens* continuato motu quasi circumambulat, *Centrum* appellabitur.

VI.

V I.

Alterutrum *anguli* crus, utrinque, si opus fuerit, productum, atque ab utraque parte à *Centro* sumptum, magnitudine *intervalli* in altero crure terminati *Directrix* vocabitur.

V I I.

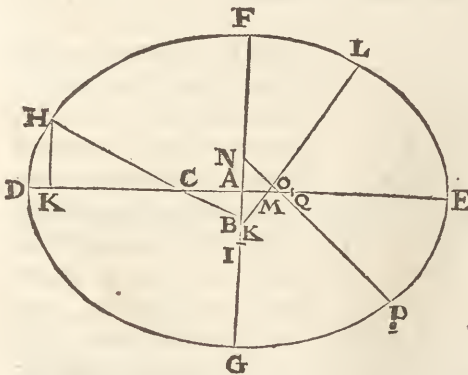
Describentem in statione prima dicemus, cum ea ad *directricem* est perpendicularis: idem autem & tunc de *puncto* dictum esto, ac cum de iis simpliciter sermo erit in ea statione considerabuntur.

V I I I.

Recta à *puncto* per *Centrum* ducta, interceptæ inter *punctum* & *centrum* dupla, *Secans* nuncupabitur.

Ut si trianguli rectanguli *A B C* latus *B C* moveatur in *angulo* *B A C*, ex. gr., ut terminus *C* tendat ad *A*, simulque *B* vel retrocedat vel promoveatur versùs *I*; ita tamen, ut iidem termini *B* & *C* semper sint & exactè maneant in lateribus, quibus ab initio

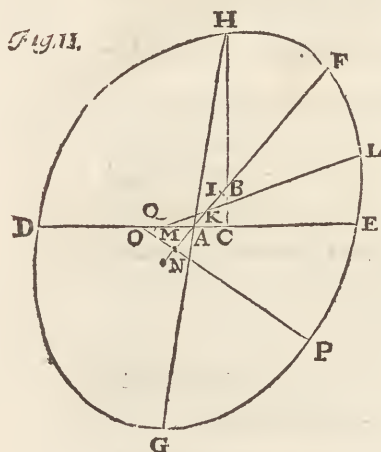
Fig. 1.



uncti fuere, nempe *B* in latere *A B*, ac *C* in latere *A C*, productis ubi opus fuerit; eodemque illo motu quolibet sui puncto. ex. gr., *H*, assumpto, prout placuerit, sive in ipsa *B C*, sive in eadem producta, (ut à nobis plerumque assumetur, cum id naturæ quodammodo convenientius videatur,) describat curvam li-

neam: nempe, ut, ubi punctum *C* pervenerit ad *A*, ac punctum *B* ad *I*, simulque *H* processerit ad *F*, descripta sit per motum puncti

H curvæ portio HF: deinde puncto C promoti per A ad M, simulque termino B retrogresso vel progresso ab I ad K, ita ut H



pervenerit ad L, descriptus sit arcus FL: eodemque modo, ubi punctum B per K continuato motu pervenerit ad A, simulque punctum C per M progrediendo pervenerit ad Q, ac punctum H in E incidit, descriptus sit arcus LE: ac rursus ubi punctum B per A progressum fuerit ad N, simulque punctum C ex Q vel retrocesserit vel progressum sit ad O, ita ut tunc punctum H pervenerit ad P, descriptus sit arcus EP: atque si porro eodem pacto motus ille continuetur, donec prædictum punctum per G & D transierit rursusque ad H pervenerit, descripta sit tota curva HFLEPGD: erunt

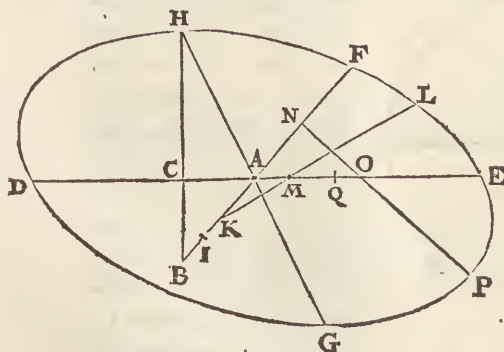
BC, quæ & in aliis stationibus est IA, KM, AQ, NO, &c. *linea describens.*

H *punctum efficiens.*

HC & HB utrumque *intervallum.*

Anguli vertex, nempe punctum A, *Centrum.*

Fig. III.



Et si alterutrum *anguli* crus, exempli gratiâ, AC, utrinque, si opus fuerit, productum sit, veluti ad D & E; ita nempe, ut tam AD quam AE æqualis sit rectæ HB, *intervallo* videlicet, quod in altero crure terminatur, tota DE *directrix* erit.

Cum autem *describens* BC eidem *directrici* DE est perpendicularis, quod quidem fit, quando ipsa positione eadem est cum crure AB, uti AI, *angulo* nempe existente recto, ut in

ut in prima figura, aut si obliquus fuerit *angulus*, in ipsa positione BC, uti exhibetur in sequentibus figuris, erit IA, casu primo, & BC, casu altero; *describens in statione prima* seu *describens simpliciter*, ideoque punctum F vel H, quod eidem in directum est, *punctum efficiens in statione prima* seu *punctum simpliciter*.

Ac proinde FAG^a vel HAG^b, nempe ab eodem puncto per^a in casu fig. I & similib. ^b in casu fig. II & III ac similib.

THEOREMA XII.

Propositio 13.

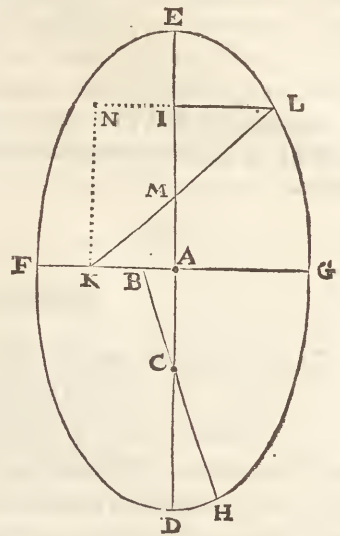
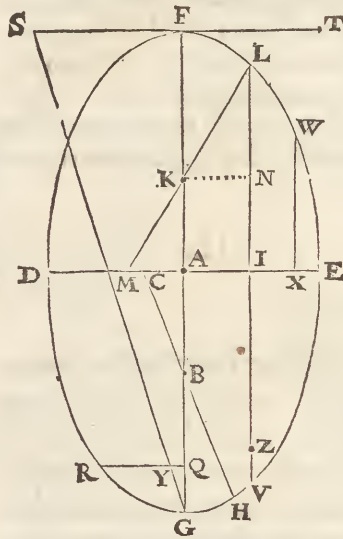
In quocunque *angulo*, & quibuslibet *intervallis*, juxta definitiones hoc capite propositas, curvâ descriptâ, hoc ipsi proprium erit, ut quadratum cujuslibet *secanti* æquidistantis, à quolibet *directricis* puncto ad curvam applicatâ, eandem rationem habeat ad rectangulum sub partibus *directricis* per applicatam factis, quam quadratum *secantis* ad quadratum *directricis*.

Sit in quocunque *angulo* BAC, *intervallis* quibuslibet HC, HB, descripta curva DHEG, cujus *directrix* DAE, *secans*^a in casu FAG^a vel HAG^b; atque à puncto I in *directrice* DE utcunque fib. fig. I, assumpto, ad curvam applicata IL *secanti* FAG^a vel HAG^b II, & similibus. ^b in casu DIE, ut est quadratum *Secantis* FG^a vel HG^b ad quadratum *directricis* DE. ^a in casu terarum

Sit enim recta KM *describens* in ea statione, uti fuit, cum per *directricis* fig. & similibus. eandem descriptum est punctum L. Et primò quidem, si *angulus* BAC rectus sit^a, ductâ KN *directrici* DE parallelâ, quæ occurat applicatâ LI, aut eidem productâ, si opus fuerit, in N: ^{1 per 34 primi.} cum *intervallum* KL æquale sit dimidiæ *directrici* AE vel AD, ^{2 per 47 primi.} ideoque & KL quadratum æquale AE vel AD quadrato, ablati^{5 secundi.} utrinque æqualibus, nimirum^{3 per 4 &} 1, quadrato KN ab una, & quadrato AI ab altera parte, residua quoque, nempe LN quadratum & DIE rectangulum², æqualia erunt. Unde cum^{3 sit} 3 sit ut LI quadratum ad LN quadratum, id est⁴, ad DIE rectangulum, ^{4 per supra demonstr.}

Fig. I.

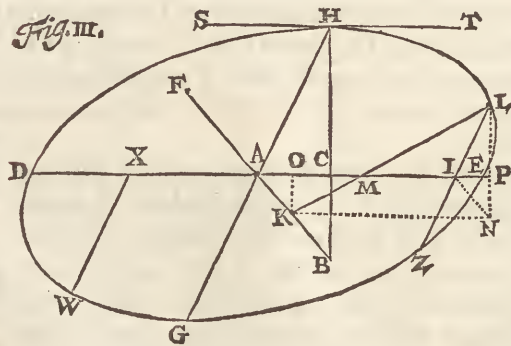
Fig. II.



^a per 15
quinti.

gulum, ita LM quadratum ad LK quadratum, hoc est, ita FA quadratum ad AE quadratum, sive ¹ ut FG quadratum ad DE quadratum, constat priori casu propositum.

Fig. III.



Non sit deinde *angulus* BAC *rectus*^b, ducanturque ad *directricem*, eamvè productam, si opus fuerit, rectæ KO, LP *describenti* BC *parallelae*, ideo-

que ad *directricem* DE *perpendiculares*, ut & IN *lateri* AB *parallela*, quæ ipsi LP, eidemvè productæ, si opus fuerit, occurrat in N; ita ut ² similia sint triangula AHC & ILP, itemque

² per 29
primi.

Fig. IV.

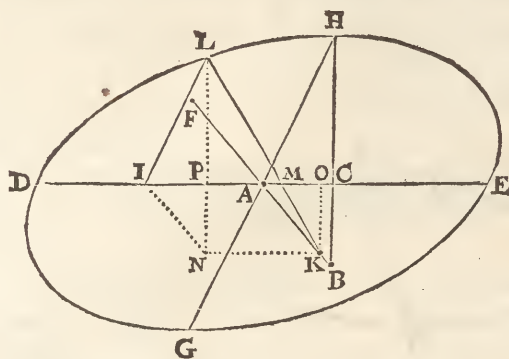


Fig. V.

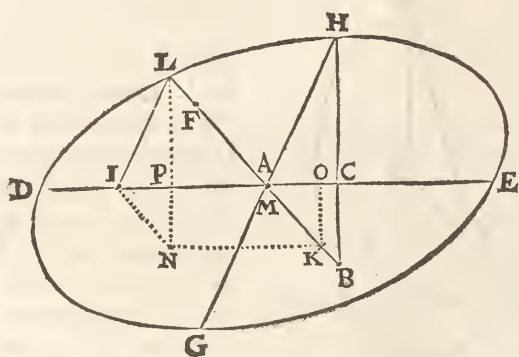
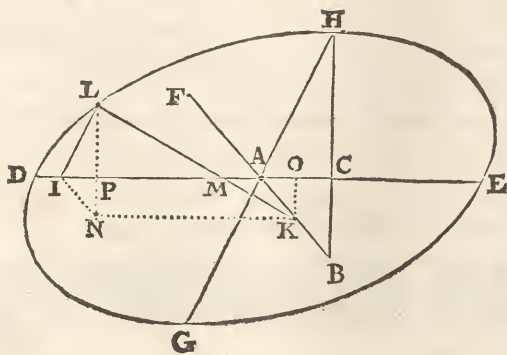


Fig. VI.



que AHB & ILN, ac denique jungatur KN. Quoniam itaque est ¹, ut ² per 4 BA ad KA, ^{festi.} five ut BC, id est, MK, ad KO, ita ML, hoc est, HC, ad LP; ut autem HC ad LP, ita HA ad LI, & ita BA ad NI, ac per consequens BA ad KA, ut eadem BA ad NI: erit ² KA ip-² per 9 si NI æqualis. ^{quinti.} Sunt autem & parallelæ, ex hypothefi. Quare & AI, KN æquales & parallelæ erunt ³. ^{3 per 33} Porrò cum æ-^{primi.} quales sint rectæ KL & AE vel AD, ideoque & ipsarum quadrata, hinc subductis ab iis æqualibus, quadrato nimirum KN ab una, ac quadrato AI ab altera parte, erunt

Fig. VII.

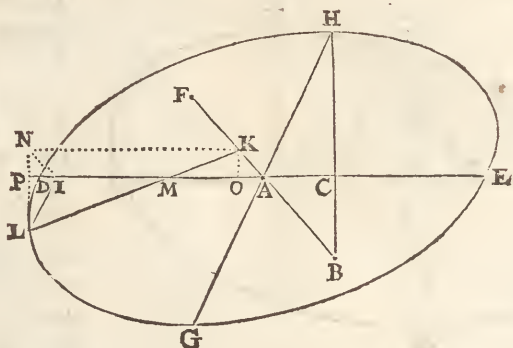
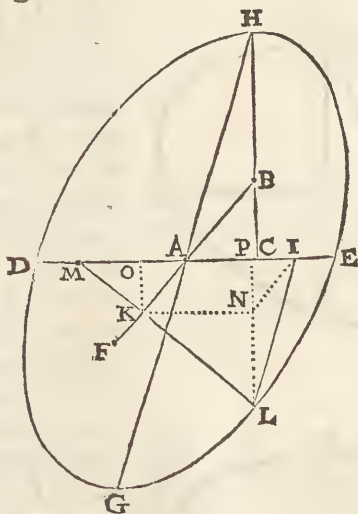


Fig. VIII.



¹ per 47
primi, &
⁵ secundi.
² per 4 &
²² sexti.
³ per su-
pra de-
monstr.

⁴ per 15
quinti.

erunt quoque resi-
dua, quadratum nem-
pe LN & rectan-
gulum DIE æqua-
lia ¹. Unde cum sit
² LI quadratum ad
LN quadratum, hoc
est ³, ad DIE re-
ctangulum, ut AH
quadratum ad HB
quadratum, id est,
ad AE quadratum,
sive ⁴ ut HG qua-
dratum ad DE qua-
dratum, erit etiam
hoc casu propositum
manifestum.

Atque ita liquet, prædictam curvam eam ipsam esse,
quæ Veteribus Ellipsis dicta fuit, *directricem* verò ac
secantem eas ipsas, quas conjugatas diametros, aut, si
angulus rectus fuerit, conjugatos axes vocârunt.

Conjugatas itaque diametros appellabimus binas
rectas per centrum ductas, ac utrinque Ellipsi termina-
tas;

tas; ita ut (quemadmodum de *directrice* & *secante* jam demonstratum est,) quadrata rectorum quæ alteri ipsarum applicantur alteri æquidistant, ita se habeant ad rectorum sub partibus per applicationem factis, ut quadratum alterius ad quadratum ejusdem quæ per applicatas secatur.

Et hæc quidem, cui applicatæ insistant, transversa; illa verò, cui eadem æquidistant, secunda diameter vocabitur.

Cæteræ autem omnes, per centrum ductæ ac utrinque Ellipsi terminatæ, diametri simpliciter dicuntur.

Rectam lineam quæ transversæ secundæque diametro tertia est proportionalis, Latus Rectum sive Parametrum vocabimus ad transversam diametrum pertinentem.

Notandum tamen est, si *angulus* rectus sit, ac *punctum* ab utroque *describentis* termino æqualiter distet, curvam, quæ motu ejusdem *puncti*, uti prædictum est, describitur, circumferentiam Circuli esse.

Corollarium 1.

Ex ipsa demonstratione & collatione figuræ primæ cum secunda manifestum est: in Ellipsi, conjugatorum axium transversum etiam secundum esse, & contra. Sive enim LI vel huic vel illi axi applicata sit, eodem modo semper probabitur esse quadratum ejusdem applicatæ ad rectorum sub partibus axis cui applicatio fit, ut quadratum axis alterius ad quadratum axis prædicti qui per applicatam secatur.

Corollarium 2.

Apparet porrò rectam per punctum ductam *directrici* parallelam, hoc est, eam, quæ per terminum secundæ diametri trans-

versæ æquidistans ducitur, Ellipsin in eodem termino, & in nullo præterea puncto contingere, multò minus eandem seca-

Fig. I.

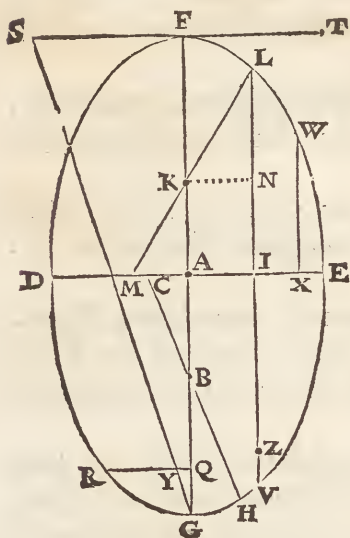
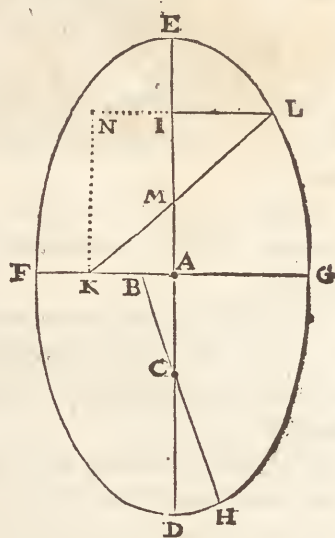
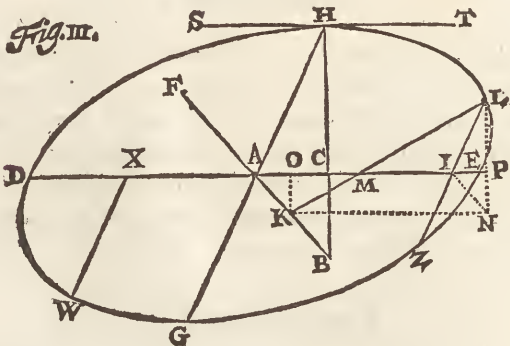


Fig. II.



re. Si enim per F^a aut H^b terminum secundæ diametri GF^a vel GH^b ductâ rectâ ST , transversæ diametro DE paralle-

^a in casu fig. I & similib.
^b in casu fig. III & similib.



lâ, assumatur aliud quòdcunque in curva punctum, veluti L, quod descriptum sit *describente* in statione KM , ducaturque LI

LI^a vel LP^b ad transversam diametrum perpendicularis, fiet ut^a in casu in triangulo MLI^a vel MLP^b recta ML, id est, perpendicularis FA^a vel HC^b, major sit¹ quàm LI^a vel LP^b; adeò ut punctum L, quod in curva utcunque assumptum est, id est, tota Ellipsis, præter F^a aut H^b punctum, infra ductam ST, seu versùs Ellipseos centrum, cadat.

fig. I & similib.
in casu fig. III & similib.
¹ per 18 primi.

Corollarium 3.

Manifestum quoque est in Ellipsi applicatarum quadrata ad se invicem esse, ut rectangula sub diametri portionibus per applicatas factis. Ut si applicatæ sint LI, WX, erit quadratum WX ad rectangulum DXE, ut quadratum LI ad rectangulum DIE: cum² utriusque ratio sit eadem quæ quadrati FG^a vel HG^b ad² quadratum DE, sive quæ parametri ad transversam diametrum; ideoque & permutatim WX quadratum ad LI quadratum, ut DXE rectangulum ad DIE rectangulum.

² per 13 hujus.

Corollarium 4.

Constat etiam ordinatim ad axem sive diametrum applicatas utrinque ad Ellipsin productas ab axe sive diametro bifariam secari. Ut, si applicata LI producta Ellipsi occurrat in V, quoniam est³ quadratum LI ad rectangulum DIE, ut quadratum VI ad idem DIE rectangulum, erit⁴ quadratum LI æquale quadrato VI, ideoque & ipsa recta LI ipsi rectæ VI æqualis.

³ per Cor. præced.
⁴ per 9 quintæ.

Corollarium 5.

Constat porrò, applicatas Ellipsi in pluribus quàm duobus punctis non occurrere. Si enim LIV alio sui puncto præter L & V, exempli gratiâ, puncto Z, in Ellipsi esset, rectæ IL & IZ⁵, ideoque IV & IZ pars & totum, æquales forent, quod est absurdum.

⁵ per Cor. præced.

Corollarium 6.

Ex dictis porrò colligitur, si ab extremitate transversæ diametri,

Y QF rectangulum, ut ¹ idem G QF rectangulum ad R Q qua- ¹ per 17
dratum, æqualia erunt ² Y QF rectangulum ad R Q quadratum: ² per 9
id est, si veterum Geometrarum more id proponi placeat. ^{quinti.}

Quæ ab Ellipsi ad diametrum applicatur potest spa-
rium adjacens lateri recto, latitudinem habens lineam
quæ à diametro inter ipsam applicatam & diametri ver-
ticem abscinditur, deficiensque figurâ simili similiter-
que positâ ei quæ lateribus transverso recto que con-
tinetur.

Corollarium 7.

Patet quoque ex antedictis, quo pacto, datis quibuslibet dia-
metris conjugatis, Ellipsis in plano describatur.

Ut si conjugatis axibus D A E & F A G ^a Ellipsis sit descri-
benda, *describente* B C, quæ semi-axium A D, A F differentia sit, ^a in casu
intervallis verò H C, H B, ipsis A F, A D utroque utrique æquali- ^{fig. I &}
bus, in *angulo* D A G, curva describatur, eritque hæc ipsa Ellipsis ^{similib.}
quæ sita.

At si aliis quibuslibet conjugatis diametris, obliquè sese inter-
secantibus, ut D E, H G ^b, Ellipsis sit describenda: demissâ à ter- ^b in casu
mino unius ad alteram perpendiculari, ut H C, sumptâque in ea- ^{fig. III &}
dem seu in ipsa producta, si opus fuerit, rectâ H B ipsi D A vel ^{similib.}
A E æquali, & per B & A ductâ rectâ B A F, si *describente* B C, *in-*
tervallis verò H C, H B, in *angulo* B A C Ellipsis describatur, erit
hæc ea ipsa quæ quæritur.

Itaque cum datis diametro parametroque, nec non angulo
quem faciunt cum eadem diametro ordinatim ad ipsam applica-
tæ, conjugatæ quoque diametri datæ sint: simul quoque inno-
tescit, quo pacto & illis datis Ellipsis describatur.

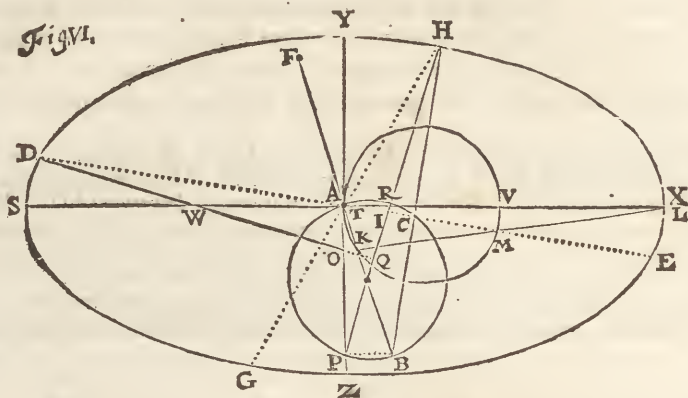
T H E O R E M A XIII.

Propositio 14.

In Ellipsi circa quoscunque axes descriptâ, ducta quæ-
libet diameter transversa est, habetque secundam sibi
conjugatam,

¹ per 13
hujus,
ejusque
Cor. 7.

omnia congruere. Sunt autem ¹ hujus conjugatæ diametri DE, HG. Quare & illius, quæ cum ipsa eadem est, conjugatæ dia-



metri erunt, nimirum DE transversa², & HG secunda. Quod demonstrandum erat.

Corollarium. I.

Hinc colligitur non solum Ellipses omnes suos habere axes, sed & quo pacto datis quibuscumque diametris conjugatis, ejus Ellipseos cujus diametri sunt, axes inveniuntur.

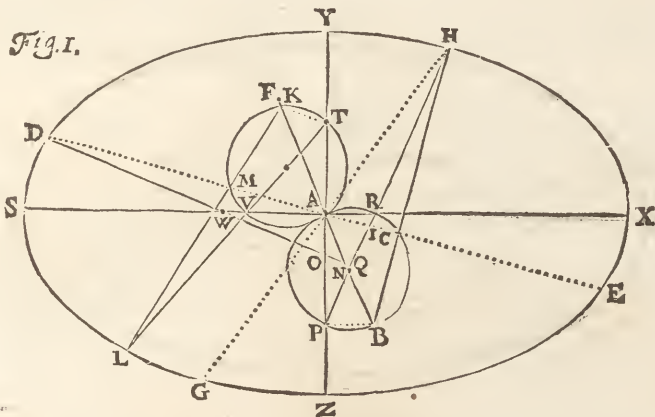
Ut si cujuscunque Ellipseos conjugatæ diametri sint DAE & HAG, ductâ HB, semidiametro DA vel AE æquali, atque ad DE perpendiculari, junctâque BA ac ipsâ bifariam in N divisâ, si centro N intervallo NA vel NB circulus describatur, secans rectam per H & N ductam in P & R: erunt rectæ HP, HR semi-axes magnitudine, quæ idcirco utrinque à centro A versùs, aut per puncta R & P, æquali longitudine in directum positæ, sicut totæ SX & YZ, exhibebunt magnitudine ac positione quæsitos axes ejusdem Ellipseos, cujus DAE & HAG conjugatæ diametri existunt.

² per 4.
primi.

³ per 3.
tertii.

Ductâ enim PB, sumptâque AO ipsi AR, ideoque ² & ductâ PB æquali, agatur DO, occurrens ipsi SX in W. Cum itaque ob angulum ACB rectum descriptus circulus etiam per C transeat ³, erunt anguli PBH & OAD æquales, quoniam uterque

que cum angulo ¹ P A C seu P B C duos rectos constituit ¹. Unde cum triangula O A D, P B H latera O A, A D lateribus P B, B H, utrumque utriusque, & quidem circa æquales angulos æqualia habeant: erit quoque ² basis O D basi P H, id est, rectæ S A vel A X, ut & angulus A O D angulo B P H seu ³ P R A æqualis. Hinc cum æqualia sint triangula R A P, O A W, propter angulos ad R & O æquales, atque ⁴ R A P, O A W rectos, nec non latera R A & O A æqualia: erit etiam ⁵ latus A W lateri A P, ut & latus O W ipsi P R æquale. Quocirca cum ⁶ describentes sint in casu simili-
bus. ¹ per 13 primi & 22 tertii. ² per 4 primi. ³ per 29 primi. ⁴ per 31 tertii & 13 primi. ⁵ per 26 primi. ⁶ per 13 hujus.



O W, P R ejus Ellipseos, cujus axes sunt S X, Y Z, & quidem in sitatione reciproca constitutæ, punctaque efficientia D & H: manifestum est ex superiori demonstratione, Ellipsin, quæ axibus S X, Y Z describitur, cum ea, cujus diametri conjugatæ sunt D E & H G, omnino eandem esse:

Atque ita, quæ de Ellipsi, circa quoscunque axes descripta, superiori Theoremate proposita ac demonstrata sunt, etiam cuilibet Ellipsi, & circa quascunque diametros conjugatas descriptæ, convenire, manifestum est.

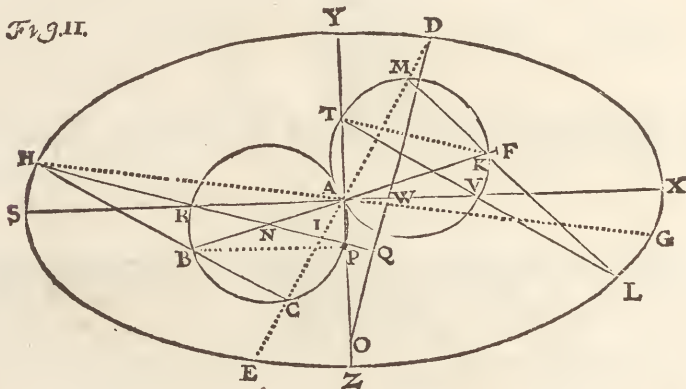
Corollarium 2.

Sequitur porrò ex demonstratione ejusdem Theorematis, in Ellipsi diametros omnes à centro bifariam secari. demonstratum enim est, in diametro DE, utcumque ductâ, partem AE parti DA æqualem esse, cum utraque *intervallo* HB æqualis sit.

Corollarium 3.

Patet insuper in Ellipsi, quarumcunque diametrorum conjugatarum transversam etiam secundam esse, & contra. Ut, si conjugatarum diametrorum DE, HG transversa sit DE, & HG se-

Fig. II.



¹ per 14
hujus
ejusque
Corol. 1. cunda; cum in Ellipsi ducta quælibet diameter ¹ transversa sit, habeatque secundam sibi conjugatam, erit quoque HG transversa. At verò & DE secundam esse ipsi HG conjugatam, factâ collatione figuræ I cum II transpositis tantùm literis, ac mutatis mutandis demonstratum simul apparebit.

Corollarium 4.

² per 2
Cor. 13. &
³ Cor. 14
hujus. Quare & quæ per terminum transversæ diametri secundæ æquidistans seu ordinatim applicatis parallela ducitur Ellipsin in eodem termino & in nullo præterea puncto contingit, totaque extra Ellipsin cadit ².

Corollarium 5.

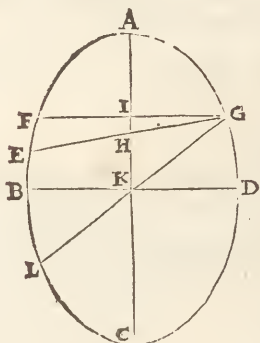
Adeoque quælibet recta, à quovis curvæ puncto ad quamcunque Ellipseos diametrum ordinatim applicata, tota intra Ellipsin cadit; utpote cum ea nec in totum extra Ellipsin cadere¹, nec e-

¹ per
Cor. præ-
cedens.
² per 5
Cor. 13
hujus.

T H E O R E M A XIV.

Propositio 15.

Quæ bina quælibet Ellipseos puncta conjungens recta linea bifariam à diametro dividitur, erit aut per centrum ducta, aut ad eandem diametrum ordinatim applicata, hoc est, conjugatæ diametro æquidistans.



Si enim in Ellipsi ABCD, cujus centrum K, à diametro AKC bifariam divideretur recta EHG, quæ neque per centrum transeat, neque conjugatæ diametro BD æquidistans sit; applicatâ ordinatim GIF, ductâque per centrum rectâ GKL: Quoniam esset, ut GH ad HE, ita tam GI ad IF³, quàm GK ad KL⁴, re-

³ per 4
Cor. 13
hujus.
⁴ per 2
Cor. 14
hujus.
⁵ per 2
sextri.
⁶ per 13
& 3 Cor.
14 hujus.
⁷ in 5^{to}
Coroll. 13
hujus.

Corollarium I.

Ideoque si diameter rectam quamlibet in Ellipsi non per centrum ductam bifariam dividat, omnes quoque ipsi æquidistantes bifariam secabit⁸.

⁸ per 4
Cor. 13^a
& 15^{tan}
hujus.

alterum, uti in W , applicetur in statione reciproca ipsi OW , eidem æqualis recta PR , nempe ut AP , AR ipsis AW , AO singulæ singulis æquales sint, ac producta PR Ellipfi occurrat in puncto H , à quo si per centrum A ducatur recta HAG , Ellipfi terminata: constat, per ea, quæ ad Propositionem 14^{tam} hujus libri demonstrata sunt, eandem HAG esse diametrum ipsi DE conjugatam.

Atque ita simul apparet, singulis diametris suas quoque distinctas conjugatas diametros esse, eidemque diametro unam tantum conjugatam duci posse.

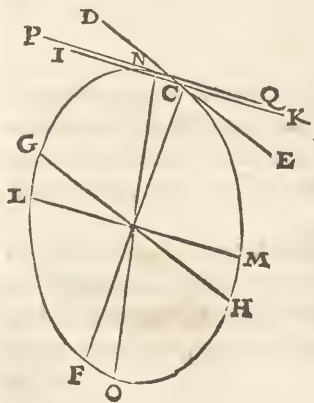
Corollarium.

Unde porrò perspicuum fit, quo pacto per datum quodlibet in Ellipfi punctum recta ducatur, quæ curvam in eodem ac in nullo alio præterea puncto contingat. Si enim ductâ per datum punctum & centrum diametro, inventâque alterâ ipsi conjugatâ ^{1 per 16}, ^{hujus.} per idem punctum recta ducatur inventæ diametro conjugatæ ^{2 per 4} æquidistans: erit eadem recta ² contingens quæ sita. ^{Cor. 14} ^{hujus.}

THEOREMA XV.

Propositio 17.

Ellipsin in uno eodemque puncto præter rectam, quæ parallela est diametro illi, quæ per punctum & centrum ducitur, conjugatæ, alia recta non contingit.



Contingat Ellipsin $CHFG$ in puncto C recta DCE , parallela diametro GH , quæ conjugata sit diametro CF , per punctum C & centrum ductæ: dico aliam rectam in puncto C eandem Ellipsin non contingere.

Si enim fieri potest, contingat eandem quoque in puncto C recta ICK , diametroque LM , eidem ICK æquidistanti, altera conjugata ducatur NO , (quæ cum à priori CF

¹ per 4
Cor. 14
hujus.
² per 2
Cor. 13
hujus.
³ per idem
Coroll.

CF diversa sit¹, punctum N cum puncto C non coincidet,) ac per N ipsi LM, ideoque & contingenti ICK, æquidistans ducta sit PQ. Cadet itaque² punctum C, adeoque recta ICK infra rectam PNQ: nimirum, versùs Ellipseos centrum. At verò & eodem modo³ punctum N, ideoque recta PNQ, infra contingentem ICK: nempe, versùs idem centrum cadet, quod repugnat. Non contingit ergo ICK Ellipsin. Eadem de omnibus alijs est demonstratio, ac proinde constat propositum.

Corollarium.

⁴ per Coroll. præcedens.
⁵ per 4
Cor. 13
hujus.

Constat itaque⁴ in Ellipsi cuilibet tangenti parallelas, æquidistantes quoque esse diametro conjugatæ ei, quæ per tactum & centrum ducitur; ac proinde & ad diametrum per tactum ductam ordinatim applicari, atque ab illa bifariam dividi⁵, & contra, quæ per cujuscunque diametri terminum ducitur æquidistans cuilibet rectæ, per eandem diametrum bifariam sectæ, Ellipsin in eodem vertice contingere.

T H E O R E M A X V I.

Propositio 18.

Si quælibet contingens productæ Ellipseos diametro cuicunque occurrat, atque à puncto contactus ad eandem diametrum recta ordinatim applicetur: erit rectangulum sub diametri portionibus, à centro per contingentem applicatamque abscissis, semidiametri quadrato æquale, & contra.

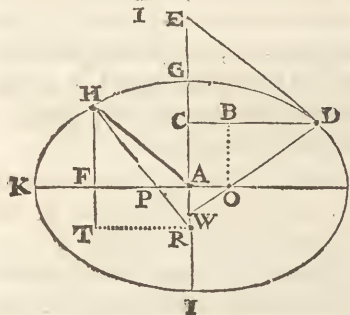
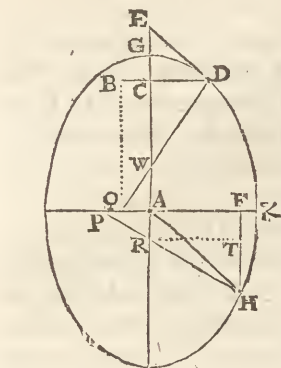
Quamcunque Ellipsin GD, cujus centrum A, contingat in puncto D, utcunque sumpto, recta DE, diametro IG occurrens in E; atque à puncto contactus D ad eandem diametrum ordinatim applicata sit DC: dico rectangulum CAE quadrato semidiametri AG æquale esse.

Sit enim primum axis diameter IG, sitque OW describens, in statione uti fuit, cum per eandem descriptum est punctum D; ita ut OD intervallum semi-axi AG æquale sit, PR autem describens in statione, ipsi OW recprocâ; ita ut à curvæ puncto H, quod
nempe

nempe *describenti* PR in directum est, ducta diameter HA conjugata sit ei, quæ per D & A duceretur¹, ideoque & contingenti DE parallela². Sitque porrò ad secundum axem AK applicata HF, ducanturque OB, RT

ipsis AG, AK æquidistantes, quæ applicatis DC, HF, productis, si opus fuerit, occurrant in B & T.

Itaque cum similia sint triangula OAW & RAP³, erunt quoque triangula WCD & RTH, nec non OBD & PFH⁴ similia. At verò & latera WD & RH, nec non OD & PH⁵ æqualia sunt. Quare & latera WC & RT sive AF, nec non DB, & HF⁶ æqualia erunt. Sunt autem porrò⁷ triangula EDC & HAF æquiangula; unde ex antedictis erit⁸ DC ad CW sive AF, id est⁹, EC ad HF sive DB, uti eadem DB ad BO¹⁰. Unde cum proportionales sint EC, DB, BO, erit¹¹ ut EC ad BO sive CA, ita DB quadratum ad BO quadratum; &



componendo¹², ut EA ad CA, ita¹³ DO quadratum ad BO quadratum, hoc est, GA quadratum ad CA quadratum; ac proinde¹⁴ & rectæ EA, GA, CA proportionales erunt, ideoque¹⁵ rectangulum CAE quadrato semi-axis AG æquale. Cumque in puncto D alia recta præter ipsam DE Ellipsin contingere non possit¹⁶, patet conversum quoque verum esse: nimirum, si rectangulum CAE æquale sit quadrato semi-axis AG, & per C ordinatim applicata Ellipsi occurrat in D, junctam ED esse contingentem.

Deinde non sit recta IG Ellipseos GD axis, sed alia diameter quæcunque, cujus parameter IB, atque ab assumpto in curva

in D. contingat, diametroque GI occurrat in E, & ad eandem diametrum ordinatim applicata sit DC, rectangulum CAE quadrato semidiametri AG æquale esse.

Corollarium.

Ex dictis perspicuum est, quo pacto à dato quolibet puncto ducenda sit recta, quæ Ellipsin contingat.

Si enim datum punctum in ipsa curva sit, veluti D: jam supra ¹ in Cor. ostensum est, quo pacto per dictum punctum contingens ducatur. ^{16. hujus.} Quod tamen & hoc quoque modo per præcedens Theorema perficietur.

Ductâ ex D ad inventam ² diametrum GI rectâ ordinatim ² per DC, fiat rectangulum CAE quadrato semidiametri AG æquale, jungaturque ED. ^{2 Cor. 15. hujus.}

At si extra Ellipsin sit datum punctum, ut E: ductâ ad A centrum ³ rectâ EA, quæ Ellipsin secet in G, quadrato AG æquale fiat rectangulum EAC; ac per C ductâ ordinatim applicatâ CD: nimirum, quæ ⁴ æquidistet contingenti quæ per G ducetur ⁵, occurratque Ellipsi in D, jungatur ED: eritque hæc ipsa tam priori quàm posteriori casu ⁶ contingens quæ sita. ^{3 inventum per 2 Coroll. 15 hujus. 4 juxta Cor. 17. hujus.}

A puncto autem intra Ellipsin dato non posse duci rectam, quæ eandem contingat, manifestissimum est. ^{5 per præcedentia, aut 5 Coroll. 14. hujus.}

Atque ita me compendiosè viâ fatis planâ ac maxime naturali, absque ulla solidi consideratione, Elementa proprietatesque præcipuas Curvarum, quas Veteres *Coni sectiones* appellavêre, tradidisse confido. E quibus principiis cætera omnia, quæ ad Parabolam, Hyperbolam, vel Ellipsin pertinent, absque ulteriori manu ductione facillimè deducet, quicumque animum iis debite applicuerit, atque in Geometricis per se ad ulteriora progredi valeat. Adeò ut eâdem tractandi methodo hisce diutiùs inhærere supervacuum putem, præsertim cum insignis & sublimior quædam scientia super sit, cui Veteres enixissimè incubuisse ex quorundam relatu ac nonnullis antiquorum Geometrarum fragmentis manifestum est; quæque tam ab iisdem

quàm à Recentioribus *Locorum Inventio* sive *Compositio* appellata fuit. Ad quam promovendam, ab Apollonio cæterisque Geometris ea præcipuè conscripta esse, quæ in Conicorum tractatione prædictis Elementis superaddidere, omnino credibile est. Cumque penitiorum curvarum linearum notitiam perfectamque earum enumerationem ac distinctionem, ut & distributionem in sua genera & species, cum segregatione earum, quæ verè Geometricæ non sunt, ab iis quæ in Geometriam sunt recipiendæ, ex accurata *Loci* tractatione imprimis petendam existimem: è re fore duxi, eandem tractationem hæc subjungere, non quidem eâ methodo, sicut à Veteribus inchoata videtur, cum vix integrum & ingens volumen eidem sufficeret, si vel tantum *Locorum*, quæ *Plana*, ac *Solida* (quamvis, meo iudicio, minùs rectè,) vocârunt, id est, quæ vel *recta linea*, vel *Parabola*, vel *Hyperbola*, vel *Ellipsis*, sive *circuli circumferentia* existunt, (quorumque *Locorum Compositio*ni eos solummodo intentos fuisse invenimus,) doctrinam exactè complecteretur, atque id porro volumen in immensum excreveret, si ad *Loca*, quæ sunt lineæ curvæ secundi generis, uti nobis propositum est, extenderetur; sed Arte Analyticâ per *Æquationum* examen & præcepta generalia, quibus omnes omnino casus possibiles resolvantur ac determinantur. In quibus pertractandis eum ordinem sumus observaturi, ut jam post explicationem Elementorum *Parabolæ*, *Hyperbolæ*, & *Ellipsis*, (suppositâ notitiâ eorum, quæ ad linearum rectarum, angulorum, & figurarum rectilinearum, nec non Circulorum naturam pertinent) inventionem ac determinationem tradamus eorum *locorum*, quæ vel rectæ lineæ sunt vel ex prædictis curvis constant; (Illa autem & nobis, ne quid temerè mutemus,

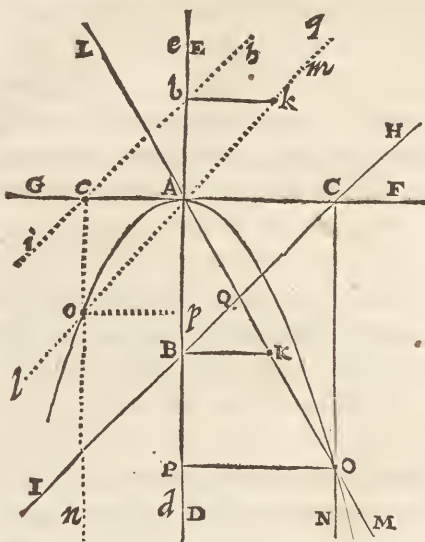
mus, *Locorum Planorum*, *Solidorumque* nomine venient) atque eo ipso ostendamus in primo curvarum genere, præter Circulum, non nisi Parabolam, Hyperbolam, & Ellipsin esse recipiendas: Tractationi autem ulteriorum locorum, quæ pertinent ad lineas curvas secundi generis, similiter quoque earundem curvarum Elementa præmittemus. Cum verò ad ipsarum generationem viam sternant non tantum descriptiones linearum curvarum primi generis, hoc libro propositæ atque explicatæ, sed & multi alii illas in plano describendi modi: operæ pretium duximus eorundem modorum, qui certè infiniti sunt, ut quilibet huic speculationi intentus faciliè experietur, vel illos saltem hîc adjungere, quos aut ad descriptiones curvarum secundi generis auxilio nobis fore, aut Mechanicæ curvarum primi generis in plano delineationi præcedentibus aptiores judicamus.

C A P U T I V.

Alia Parabolam, Hyperbolam, & Ellipsin in plano delineandi Methodus.

Sit triangulum quodcunque isosceles ABC , & tam æqualia crura AB , AC , quàm basis BC utrinque indefinitè producantur, ut ad D , E , & F , G , nec non HI ; sitque ab alterutro angulorum ad basin ducta quævis recta terminata, opposito cruri æquidistans, ut BK , & per terminum ejusdem K altera recta, utrinque indefinitè extensa, liberè transeat, quæ circa verticem anguli reliqui, nempe punctum A , ut Polum, circulariter mobilis sit, veluti $LAKM$; ac denique rectæ FG insistens CN ipsi DE parallela transeat per ipsarum FG & HI intersectionem C . Dico, si angulus EBH atque ipsi ad verticem DBI cum recta BK moveatur in utramque partem, ita tamen ut crus AB semper applicatum maneat rectæ DE , simulque recta HI huc atque illuc promoveat rectam CN , sibi ipsi semper æquidistan-

tem, ac recta BK ad polum A circulariter moveri faciat prædi-



ctam LM, per punctum K semper transeuntem, intersectionem ipsarum CN, LM, quæ fit ad O, Parabolam describere, cujus diameter est AD, parameter KB, ac FG eandem contingens in vertice A.

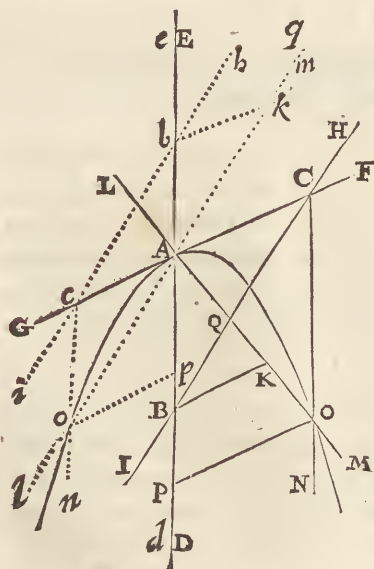
In quacunque enim statione constitutus fuerit angulus EBH seu DBI, si intersectio rectarum FG, HI designetur per C, atque ab intersectionis puncto O ad dia-

metrum applicata sit OP ipsi FG æquidistans: erit semper KB

ad BA, hoc est, ad AC, uti eadem AC ad CO¹: ac proinde² rectangulum sub KB, CO, id est³, sub KB, AP quadrato rectæ AC, hoc est⁴, ipsius OP æquale. Unde si BAC angulus rectus fuerit, erit AD axis, sin minus, diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciunt angulos ipsi BAC vel BAG angulo æquales.

In transitu etiam hîc notandum est, eodem illo motu per intersectionem ipsarum HI, LM, puta Q, Hyperbolam sive oppositas

¹ per 29
primi, &
⁴ sexti.
² per 17
sexti.
³ per 34
primi.
⁴ per eandem.



positas Hyperbolas describi; ut &, quamvis triangulum BAC isosceles non foret, nec etiam recta BK ex angulari puncto B sed ubivis in recta AD educta esset, nihilominus tamen curvam AO Parabolam fore; at verò nec parametrum priori, nec verticem, nec diametrum posteriori casu easdem remanere, quas tamen illis quoque casibus determinare facillimum est.

Quoniam autem circa finem capitis primi monuimus, curvam, juxta definitiones in principio ejusdem capitis propositas, quâlibet efficiente; & quocumque intervallo descriptam, si anguli mobiles inæquales sint *iis qui ad directricem* sunt ab eadem parte, Hyperbolam esse, idque Mechanicæ ejusdem in plano delineationi non inutile judicamus: idcirco id demonstratione jam comprobandum duximus, simul ostensuri, quo pacto eadem Methodus ad prædictas Hyperbolarum delineationes commodè applicetur.

Sit itaque efficiente IG , intervallo AL , & directrice KLO , angulis autem IAL & KLA inæqualibus, descripta curva DAM : dico eandem curvam Hyperbolam esse; ac si ductâ à Polo A ad directricem rectâ AK , ita ut angulus LAK angulo LAG æqualis sit, centro A & intervallo AK circulus describatur, secans efficiens in I & G , ad directricem in K & Q ^a, perque puncta I & K , nec non per G & Q ducantur rectæ IK , GQ , sibi mutuo occurrentes in F , rectas FI , FG Asymptotos esse^b.

Sumpto enim in curva puncto utcumque, veluti D , applicetur tam *angulus mobilis*, ut OAD , quàm *describens*, ut OD , in statione uti fuere, cum per eas descriptum est punctum D . Quoniam igitur æquales sunt anguli AIK , AKI inter se¹, nec non simul sumpti angulo KAG , (quippe tam posterior quàm prior² cum angulo IAK binos rectos constituunt): erunt quoque anguli AIK seu AIF & GAL , utpote æqualium dimidia, inter se æquales, ac propterea³ rectæ IKF & AL parallelæ; ideoque sicut IKF rectæ FG occurrit, ita & eidem FG occur-

^a aut eandem in K contingens, uti in casu fig. V. exhibitio. ^b si verò dictorum punctorum binarum coincident velut I & K . ^c in III, ac G & Q

in IV. fig. tangat ibidem circulum recta, ut IF in priori, & GF in posteriori eum contingere cernitur. ¹ per 5 primi. ² per 13 & 32 primi. ³ per 28 primi. ^c in casu fig. III, quoniam uterque angulorum AIF & GAL rectus est, & IKF , AB parallelæ erunt.

tuit¹,) ⁴æquiangula erunt eadem triangula LAK & OQC

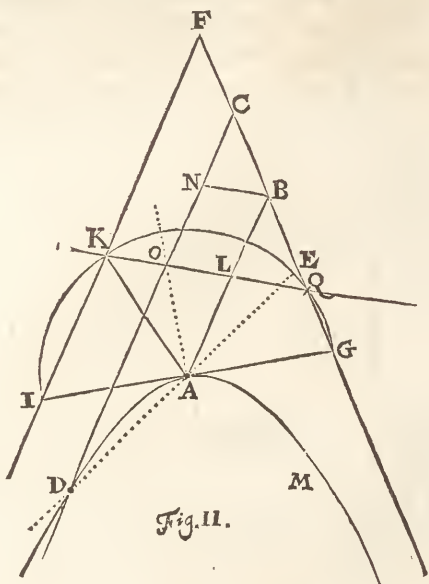


Fig. II.

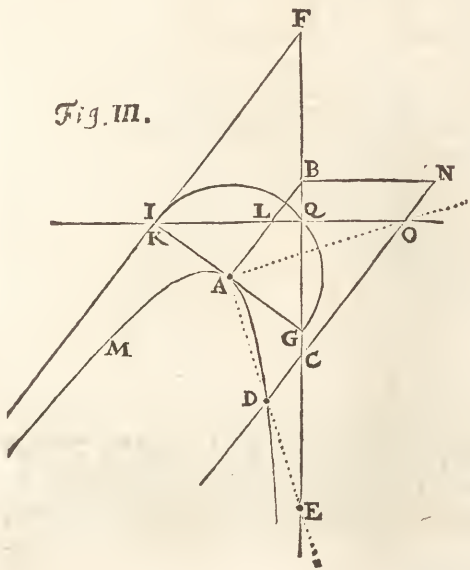


Fig. III.

Pars II.

Gg

(ob

in I & five² NBC. Porrò, II^{fig.} per quoniam angulus 13 primi, & 2 tertii. in IV feu ALO æqualis per 13 primi, est, (quippe tam hinc quam ille cum angulo ac 31 tertii.

d in casu fig. III apparet, tam angulum OQC quam LAK rectum esse, per 13 primi, & 31 tertii: ac in fig. V & VI angulos GIF & OQC æquales, per 32 tertii & 21 ejusdem.

lo IGQ sive IGF³ 3 in fig. I, binos rectos consti-

per 13 primi & 22 tertii, in fig. III, per 13 primi & 31 tertii; in fig. IV per 13 primi, 18 & 31 tertii; in fig. V per 13 primi & 32 tertii; in fig. VI, per 13 primi, quoniam angulo IGQ æqualis est IKQ per 21 tertii.

tuit^e,) atque angulis e in fig. II LAG, OAD vel angulus AGE OAE iisdem sive æ- angulo qualibus addito vel ALO ablato communi est æqualis, quia OAG^f, compositi uterque vel residui LAO, cum angulo GAD vel GAE æ- angulo quales quoque sunt, IKQ ac LO, AO sibi mutuo occurrant; GE situit, quoque & AD sibi per 29 primi & mutuo occurrant necesse est; sit itaque f vel, in ipsarum occurfus E casu fig. II & similibus, æquiangula erunt triangula, BAE. AGE, ALO, eritque propterea⁴ AL⁴ per 4 ad AG, ut LO sive sexti permut.

¹ per sup. (ob triangula LAK & NBC ¹ similia) est quòque ² eadem dem. AL ad AK, hoc est, ad eandem AG, ut NB ad BC. unde per ² per 4 sequenti. consequens erit ³, ut NB ad GE, ita eadem NB ad BC. ac proinde ⁴ rectæ GE & BC, ideoque & GB seu ⁵ FB & CE, nec non BE & FC æquales erunt. Denique cum, propter triangula ⁴ per 9 sequenti. ⁵ per sup. demonstr.

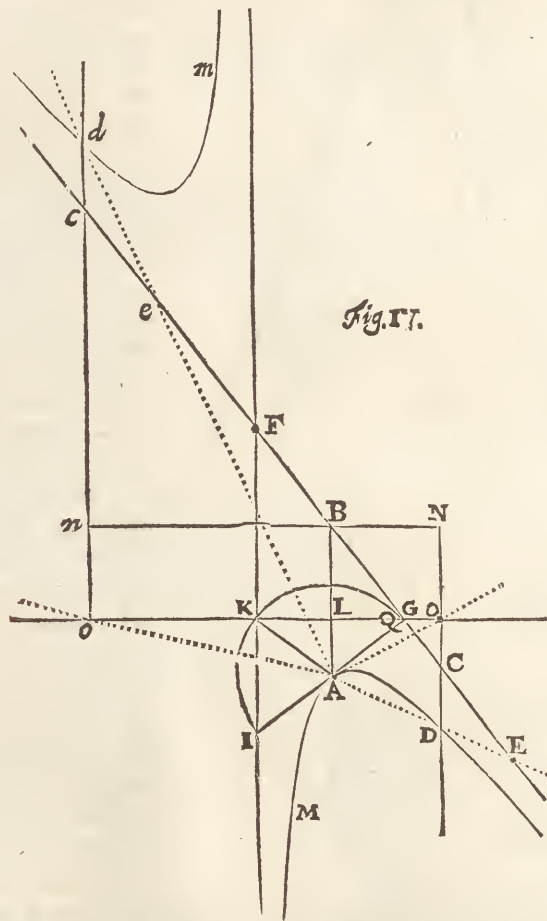


Fig. II.

⁶ per 29 primi. ABE & DCE ⁶ similia, ⁷ BE fit ad CE, hoc est ⁸, FC ad FB, ut BA ad CD: erit ⁹ rectangulum FCD sub extremis æquale rectangulo FBA sub mediis. Quod cum semper accidat, ubi-
⁷ per 4 sequenti. ⁸ per sup. demonstr. ⁹ per 16 sequenti.

metris conjugatis HA , IG , Hyperbola fit describenda, ductis in casu posteriore Asymptotis FI , FG , diametro IG circulus describatur, qui secet utramque Asymptoton, puta

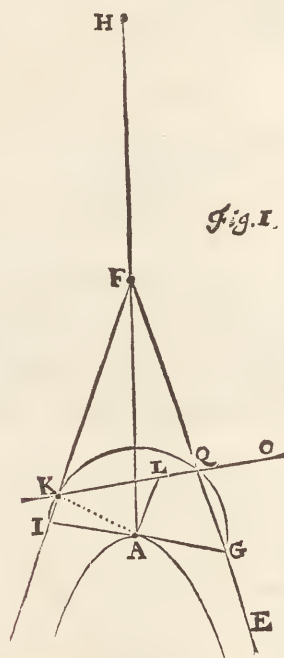


Fig. I.

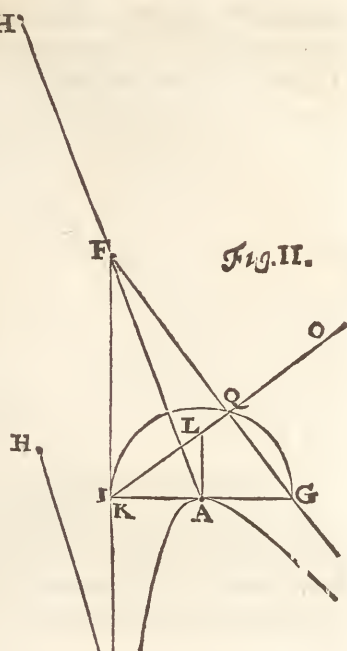


Fig. II.

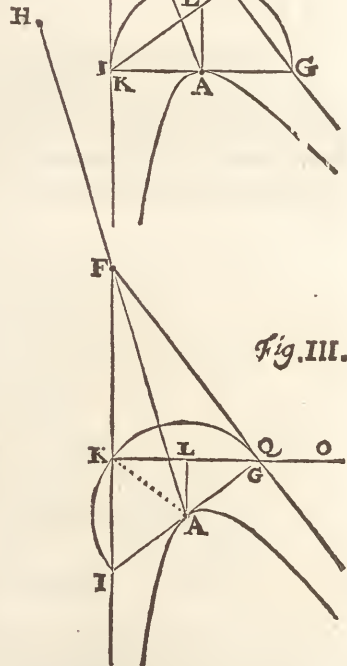


Fig. III.

aut alteram in K & Q , ductâque per K & Q rectâ KO , cui ducta AL , Asymptotorum alterutri, ut FI , æquidistans, occurrat in L : facillimè colligitur ex præmissis, si efficiente IG , intervallo AL , ac directrice KO , curva describatur, eandem fore Hyperbolam, quæ delineanda proponitur.

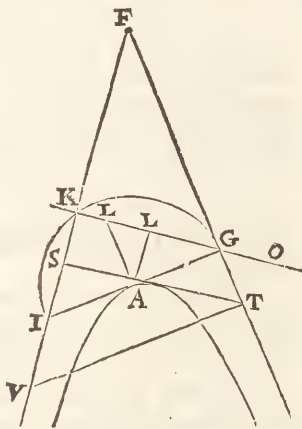
Nonnunquam tamen, ut obliquos circumferentiæ & rectarum occursums evitemus, hæc eadem absque Circuli descriptione efficere expedit.

Ita-

Itaque si, ductâ AL Asymptotorum alterutri, ut FI, parallelâ, ad eandem Asymptoton ducatur AK, ita ut LA K angulus angulo LAG æqualis sit, & per K recta KO secans prædictam AL in L, ita ut angulus FKO angulo FGI æqualis sit: erit curva, efficiente IG, intervallo AL, ac directrice KO descripta, ea ipsa Hyperbola, quæ quæritur.

Ad Mechanicas porrò Hyperbolarum descriptiones non inutile forejudicavimus paucis hîc ostendere, quo pacto vel *angulis mobilibus* rectis, vel ita ut *describens* ad *directricem* sit perpendicularis, quælibet Hyperbolæ in plano delineari queant.

Si itaque vel hoc, vel illo modo describenda sit in plano Hyperbola, cujus Asymptoti sint FS, FT, quamque contingat recta ST, utrinque Asymptotis terminata: Ductâ ab alterutro punctorum S



vel T rectâ, vel ad hanc, vel ad illam Asymptoton perpendiculari, uti TV, quam ad FT angulos rectos efficere supponimus, eidem TV per punctum I (nempe ita sumtum ut IF inter VF & SF media sit proportionalis) agatur æquidistans IG, quæ continget quoque Hyperbolam quæsitam¹, propterea quòd sit VF¹ per 9 ad IF, hoc est², IF ad SF, uti³ TF² ad GF. Ideoque descripto super eandem IG circulo IKG, qui tangat³ per 2 Asymptoton FT in G⁴, atque alteram secet in K, si per K & G ducatur recta KGO, eidemque occurrat⁵.

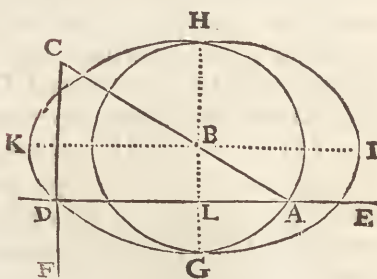
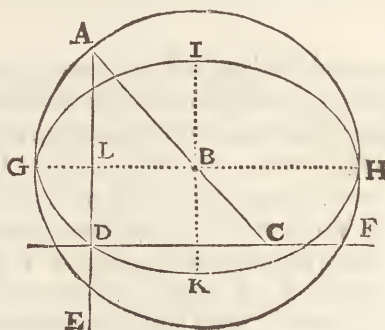
ducta ab A, puncto medio tangentis IG, recta AL in L, quæ quidem AL vel ad eandem IG, vel ad ductam KO sit perpendicularis: erit Hyperbola, quæ efficiente IG, directrice KO, atque intervallo AL, ad eandem efficientem, dictamvè directricem perpendiculari, describitur, juxta ea quæ modò exposita sunt, hæc ipsa, quæ delineanda proponitur.

Similiter & vel datis quibuslibet *angulis mobilibus*, vel

ita ut *describens* ad *directricem* datos quoslibet angulos efficiat quamcunque Hyperbolam in plano delineare haud difficile erit.

Cæterùm sequentem quoque Ellipsin in plano describendi rationem hîc adjecisse suum aliquando usum habebit.

Recta linea, ut $A B C$, ad Polum B circulariter mota binis sui punctis A & C , in eadem utcunque assumptis (sive B sit inter A & C , sive C sit inter A & B ,) promoveat rectas $A D E$, $D C F$,



sibi ipsis semper æquidistantes, ac se invicem ad rectos angulos interfecantes: dico curvam, quæ continuâ earundem intersectione, veluti D , describitur, Ellipsin esse, cujus centrum est B , & axes $G B H$, $I B K$, nempe magnitudine ipsarum $A B$, $B C$ duplæ, positione verò ipsis $A D E$, $D C F$, æquidistantes per B Polum ductæ, atque ibidem bifariam divisæ.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque; veluti D , applicentur ipsi *describentes* $A D E$, $D C F$ in statione uti fuere, cum per illarum intersectionem descriptum est punctum D ;

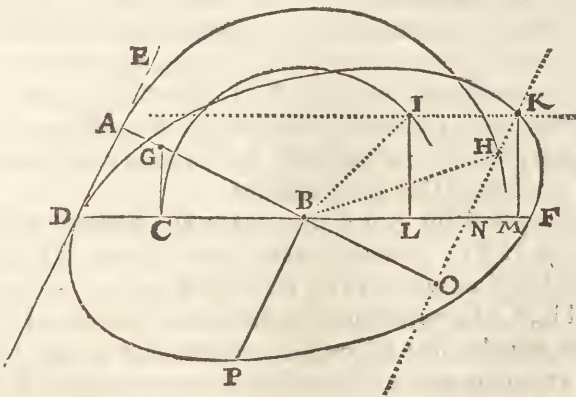
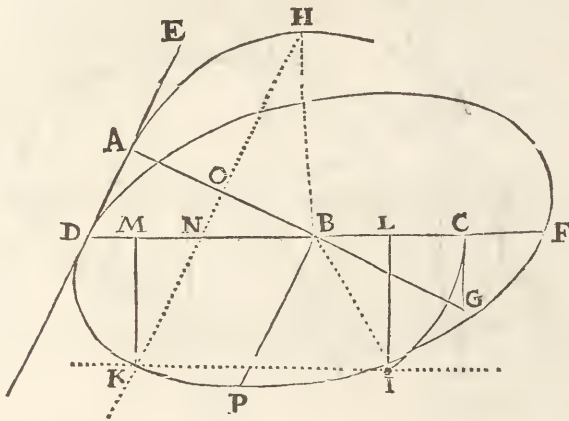
noteturque porrò punctum, ubi earum alterutra, veluti $A D E$, vel hanc vel illam ductarum $G H$, $I K$, ex. gr., ipsam $G H$, secat, ut in L . & sit $G A H$ circumferentia Circuli, qui per motum puncti A describitur. Quoniam itaque est ¹ $A B$ quadratum ad $B C$ quadratum, hoc est, $G B$ quadratum ad $B K$ quadratum, ut $A L$ quadratum sive ² $G L H$ rectangulum ad $L D$ qua-

¹ per 2
 & 22
 sexti.
² per 14
 secundi,
 vel 35
 tertii.

quadratum: constat¹, curvam GKH, uti prædictum est, descriptam Ellipsin esse, cujus axes sunt GH, IK. ^{1 per 13}
hujus.

Manifestum autem est, si puncta A & C æqualiter à B Polo distent, prædictam curvam Circuli circumferentiam fore.

Non sit deinde ABC una linea recta, sed angulus quicumque, sive obtusus, sive acutus ABC, sintque prædictæ rectæ DAE,

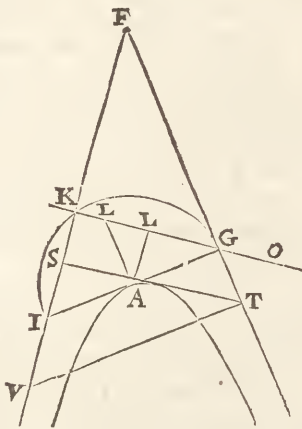


DCF in punctis A & C ita junctæ, ut, cùm earum altera uni cruri

Itaque si, ductâ AL Asymptotorum alterutri, ut FI, parallelâ, ad eandem Asymptoton ducatur AK, ita ut LA K angulus angulo LAG æqualis sit, & per K recta KO secans prædictam AL in L, ita ut angulus FKO angulo FGI æqualis sit: erit curva, efficiente IG, intervallo AL, ac directrice KO descripta, ea ipsa Hyperbola, quæ quæritur.

Ad Mechanicas porrò Hyperbolarum descriptiones non inutile fore judicavimus paucis hîc ostendere, quo pacto vel *angulis mobilibus* rectis, vel ita ut *describens* ad *directricem* sit perpendicularis, quælibet Hyperbolæ in plano delineari queant.

Si itaque vel hoc, vel illo modo describenda sit in plano Hyperbola, cujus Asymptoti sint FS, FT, quamque contingat recta ST, utrinque Asymptotis terminata: Ductâ ab alterutro punctorum S vel T rectâ, vel ad hanc, vel ad illam Asymptoton perpendiculari, uti TV, quam ad FT angulos rectos efficiere supponimus, eidem TV per punctum I (nempe ita sumtum ut IF inter VF & SF media sit proportionalis) agatur æquidistans IG, quæ continget quoque Hyperbolam quæsitam¹, propterea quòd sit VF¹ ad IF, hoc est², IF ad SF, uti³ TF ad GF. Ideoque descripto super eandem IG circulo IKG, qui tangat³ Asymptoton FT in G⁴, atque alteram fecerit in K, si per K & G ducatur recta KGO, eidemque occurrat



ducta ab A, puncto medio tangentis IG, recta AL in L, quæ quidem AL vel ad eandem IG, vel ad ductam KO sit perpendicularis: erit Hyperbola, quæ efficiente IG, directrice KO, atque intervallo AL, ad eandem efficientem, dictamvè directricem perpendiculari, describitur, juxta ea quæ modò exposita sunt, hæc ipsa, quæ delineanda proponitur.

Similiter & vel datis quibuslibet *angulis mobilibus*, vel

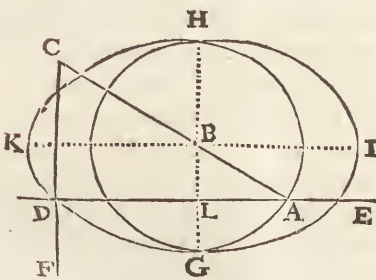
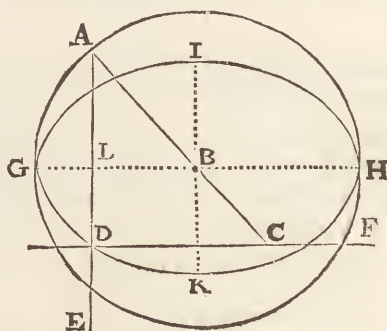
Gg 3 ita

¹ per 9
hujus.
² ex hyp.
pothesi.
³ per 2
⁴ sexti, &
componendo per 18
quinti.
⁴ per Cor.
16 tertii.

ita ut *describens* ad *directricem* datos quoslibet angulos efficiat quamcunque Hyperbolam in plano delineare haud difficile erit.

Cæterùm sequentem quoque Ellipsin in plano describendi rationem hîc adjecisse suum aliquando usum habebit.

Recta linea, ut $A B C$, ad Polum B circulariter mota binis sui punctis A & C , in eadem utcunque assumptis (sive B sit inter A & C , sive C sit inter A & B ,) promoveat rectas $A D E$, $D C F$,



sibi ipsis semper æquidistantes, ac se invicem ad rectos angulos interfecantes: dico curvam, quæ continuâ earundem intersectione, veluti D , describitur, Ellipsin esse, cujus centrum est B , & axes GBH , IBK , nempe magnitudine ipsarum AB , BC duplæ, positione verò ipsis ADE , DCF , æquidistantes per B Polum ductæ, atque ibidem bifariam divisæ.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D , applicentur ipsi *describentes* ADE , DCF in statione uti fuere, cum per illarum intersectionem descriptum est punctum D ;

noteturque porrò punctum, ubi earum alterutra, veluti ADE , vel hanc vel illam ductarum GH , IK , ex. gr., ipsam GH , secatur, ut in L . & sit GAH circumferentia Circuli, qui per motum puncti A describitur. Quoniam itaque est $^1 AB$ quadratum ad BC quadratum, hoc est, GB quadratum ad BK quadratum, ut AL quadratum sive $^2 GLH$ rectangulum ad LD

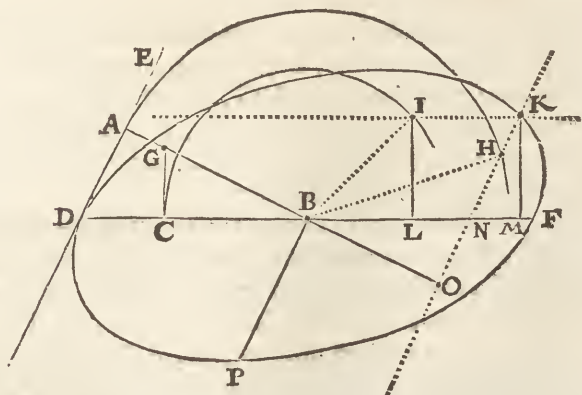
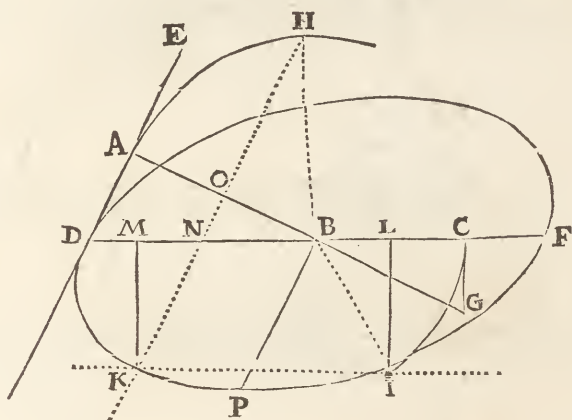
¹ per 2
E 22
sexti.
² per 14
secundi,
vel 35
tertii.

qua-

quadratum: constat¹, curvam GKH, uti prædictum est, descri-
ptam Ellipsin esse, cujus axes sunt GH, IK. ^{1 per 13}
hujus.

Manifestum autem est, si puncta A & C æqualiter à B
Polo distent, prædictam curvam Circuli circumferen-
tiam fore.

Non sit deinde ABC una linea recta, sed angulus quicumque,
sive obtusus, sive acutus ABC, sintque prædictæ rectæ DAE,



DCF in punctis A & C ita junctæ, ut, cùm earum altera uni
cruri

mus, ita & Parabola Hyperbolaque, quarum generationes solummodo per similes intersecciones in præcedentibus exposuimus, per motum puncti in una eademque recta describi possunt. At verò quoniam prædictarum curvarum generationes, ut jam ante quoque monuimus, infinitæ sunt, atque earum facillimas quidem ac maximè naturales à nobis jam propositas existimamus, hisce diutiùs inhærendum non videtur; itaque ad *Locorum Planorum, Solidorumque* inventiones ac determinaciones progredimur.



IOHANNIS DE WITT
 ELEMENTA
 CURVARVM
 LINEARVM.

LIBER SECVNDVS.

CAPVT I.
 PROPOSITIO GENERALIS.

IN omni quæstione, ubi indagandus proponitur Locus, sive is sit ad lineam rectam, sive ad curvam, suppositis duabus lineis rectis incognitis atque indeterminatis, datum vel assumptum angulum comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, devenitur ad Æquationem, assumptum quodlibet quæsti Loci punctum determinantem; in qua quidem æquatione, postquam ad simplicissimos terminos erit reducta, si neutra incognitarum ad duas pluresve dimensiones assurgat, hoc est, si neque in se, neque in alteram incognitam ducta seu multiplicata reperiat, quæstus Locus erit linea recta: At si earundem incognitarum altera ad quadratum ascendat, altera verò non item, sed neque in se, neque in alteram incognitam ducta sit, erit Locus quæstus Parabola. Quòd si verò utraque ad quadratum ascendat, sive altera in alteram ducta in æquatione reperiat (altiùs enim æquatio non assurgat, si de loco Plano Solidovè quæstio sit): erit Locus quæstus vel Hyperbola, vel Ellipsis, vel Circuli circumferentia.

Quorum quidem omnium particularis determinatio, descriptio, & demonstratio variis modis fieri potest; at verò ex simplicissimis, generalissimisque aliquem annotasse suffecerit.

Ac primo quidem casu, cùm neutra quantitarum incognitarum ad duas pluresve dimensiones ascendit, si earum una exprimat per x , atque altera per y , potest æquatio ad aliquam sequentium formularum reduci.

I. $y \propto \frac{bx}{a}$, sive (posito $a \propto b$) $y \propto x$.

II. $y \propto \frac{bx}{a} + c$, sive, posito, ut supra, $y \propto x + c$.

III. $y \propto \frac{bx}{a} - c$, sive $y \propto x - c$.

IV. $y \propto -\frac{bx}{a} + c$, sive $y \propto -x + c$.

Fiat autem earundem quantitarum incognitarum secundum regulam talis assumptio, ut initium unius, verbi gratiâ, ipsius x , certum sit & immutabile, utque eadem illa quantitas ex certo & immutabili illo initio in linea recta positione data intelligatur indefinitè extendi, altera verò indeterminatæ quoque longitudinis linea priori in extremitate incerta in dato vel assumpto angulo conjungi. Quibus quidem suppositis, ea, quæ prædicta sunt, sequentibus Theorematis non incongruè proponi, determinari, ac demonstrari posse videntur.

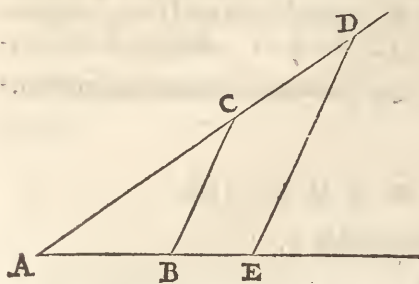
THEOREMA I.

Propositio I.

Si æquatio sit $y \propto \frac{bx}{a}$, erit locus quæsitus linea recta.

Sit enim ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam AB indefinitè se extendere intelligatur. Dein, sumpto in eadem AB puncto utcunque, veluti B, agatur BC in angulo

angulo ABC, ipsi dato vel assumpto æquali; ita ut eadem sit ratio interceptæ AB ad ductam BC, quæ est *a* cognitæ ad *b* cognitam.



hoc est, ut sit uti *a* ad *b*, ita AB ad BC. Denique per puncta A & C ducatur recta AC, indefinite extensa, eritque hæc ipsa locus quæsitus.

Etenim assumpto in AC puncto utcunque, veluti D, ductâque DE in angulo DEA, dato

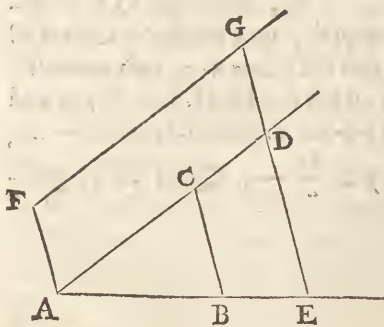
vel assumpto æquali, si eadem DE vocetur *y*, erit ¹ ut AB ad ¹ per 29 BC, hoc est, ut *a* ad *b*, ita AE ad ED, hoc est, ita *x* ad *y*. Et ⁴ *per 16* ⁵ *primi, &* ⁶ *sexti.* fit ² *a y* ∞ *b x*, hoc est, dividendo utrinque per *a*, erit *y* ∞ $\frac{bx}{a}$. ² *per 16* ⁶ *sexti.*

Quare cum punctum D utcunque sumptum sit in linea AC, erit eadem de omnibus aliis lineæ AC punctis demonstratio, ac proinde ipsa AC locus est quæsitus. Atque ita non solùm Theorematis propositi veritas demonstrata, sed & Locus quæsitus determinatus est.

THEOREMA II.

Propositio 2.

Si æquatio sit $y \propto \frac{bx}{a} + c$, erit Locus quæsitus linea recta.



Positis, factisque, ut supra, agatur insuper ex A recta AF ipsi BC parallela, atque ad easdem cum ea partes, quæ sit æqualis *c* cognitæ. Et ex F ductâ FG parallelâ AC, dico eandem FG esse Locum quæsitum.

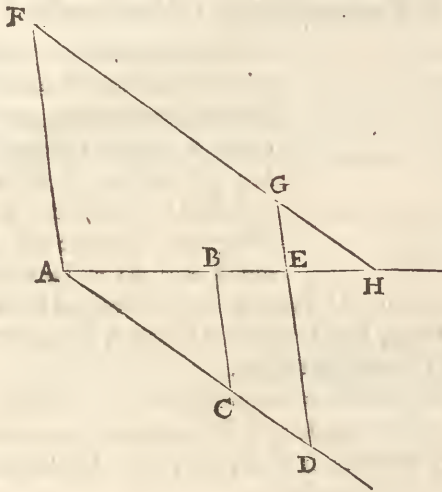
Sumpto enim in FG puncto utcunque, veluti G, ductâque GE in angulo AEG,

Hh 3 dato

THEOREMA IV.

Propositio 4.

Si æquatio sit $y \propto c - \frac{bx}{a}$, erit Locus quæsitus linea recta.



Positis, factisque, ut in Theoremate 2^{do}, excepto quòd punctum C ab opposita parte ipsius AB cadat, quodque angulus ABC æqualis sit dati vel assumpti anguli ad binos rectos complemento, quemadmodum in adjuncta figura apparet, agatur ex F recta FG ipsi AC parallela, occurrens rectæ AB in H: dico FH esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in FH puncto utcunque, veluti G, ductâque GE in angulo AEG, dato vel assumpto æquali, quæ producta secet AC in D, si eadem GE vocetur y , erit $ED \propto c - y$. Cumque sit¹ ex constructione, ut AB ad BC, ita AE ad ED, hoc¹ per 13 est, ut a ad b , ita x ad $c - y$: erit propterea² $ac - ay \propto bx$, vel³ $ay \propto ac - bx$, id est, dividendo utrinque per a , $y \propto c - \frac{bx}{a}$. Quod⁴ per 16⁵ erat propositum.

At verò fieri etiam potest, ut per operationem, priusquam ad æquationem deveniatur, quantitatum incognitarum altera penitus evanescat, alteraque sola alicui cognitæ quantitati æqualis remaneat; atque exin-

exinde binæ insuper formulæ nascuntur , quæ huc referri debent: nimirum ,

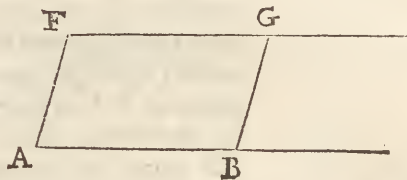
1. $y \propto c$, vel

2. $x \propto c$.

T H E O R E M A V.

Propositio 5.

Si æquatio sit $y \propto c$, Locus quæsitus est linea recta.



Sit quantitatis x , quæ per operationem evanuit, initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam AB indefinitely se extendere intelligatur. Deinde ex A ductâ AF $\propto c$, faciente

cum AB angulum, ipsi dato vel assumpto aut ejusdem ad binos rectos supplemento æqualem, si ex F agatur FG ipsi AB parallela, dico eandem FG esse Locum quæsitum.

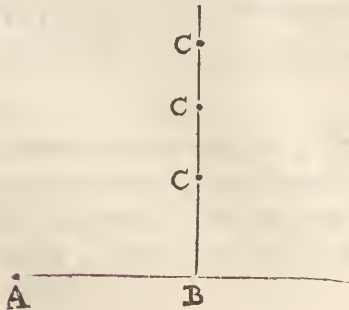
Etenim assumpto in FG puncto utcunque, veluti G, ductâque GB ipsi AF parallelâ, apparet eandem GB omnesque ipsi æquidistantes ¹ rectæ AF fore æquales, hoc est, esse $y \propto c$. Quod erat demonstrandum.

¹ per 34
primi.

T H E O R E M A VI.

Propositio 6.

Si æquatio sit $x \propto c$, erit Locus quæsitus linea recta.



In linea AB, quæ, ut supra, pro x concepta sit, sumatur à puncto A longitudo AB æqualis c cognitæ, atque ex B in dato vel assumpto angulo ducatur rectâ BC. dico eandem BC, indefinitely productam, esse Locum quæsitum.

Su mpto enim in eadem puncto

Et utcumque, veluti C, erit ex hypothesi CB cum priore AB comprehendens angulum ABC dato vel assumpto æqualem, poteritque proinde eadem CB vocari y . At verò est ex constructione, & remanet semper AB, hoc est, $x \infty c$. Quod est propositum.

CAPVT II.

PORRò secundo casu, supra expresso, cum nempe in æquatione, ad simplicissimos terminos reductâ, quantitatum incognitarum altera ad quadratum ascendit, altera verò non item, sed neque in se, neque in alteram quantitatem incognitam ducta reperitur: poterit æquatio ad aliquam sequentium formularum reduci.

| | | | | |
|--------------------------|---|---------------|---|-----------------------|
| I. $yy \infty ax$ | } | vel conversim | { | $ay \infty xx$ |
| II. $yy \infty ax + bb$ | | | { | $ay + bb \infty xx$ |
| III. $yy \infty ax - bb$ | | | { | $ay - bb \infty xx$ |
| IV. $yy \infty -ax + bb$ | | | { | $bb - ay \infty xx$. |

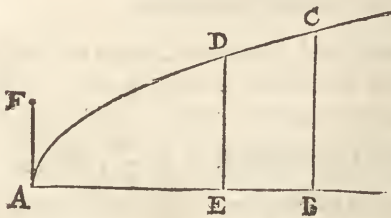
Supponendo y & x esse quantitates incognitas, vel ab initio conceptas, vel postmodum assumptas, ut mox latius explicabitur.

THEOREMA VII.

Propositio 7.

Si æquatio sit $yy \infty ax$, vel conversim $ay \infty xx$: erit Locus quæsitus Parabola.

Sit ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam AB indefinitè se extendere intelligatur, & sit datus vel assumptus angulus æqualis angulo ABC; Assumatur primò eadem AB ut Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant cum ipsa angulos æquales dato vel assumpto angulo ABC, cuiusque latus rectum AF



Pars II.

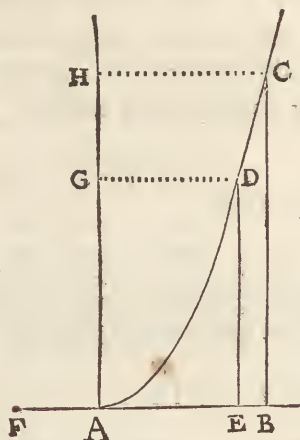
Ii

fit

1 per 10
Coroll.
primi, &
4 Coroll.
secundi
hujus.
2 per 1
primi
hujus.

sit æquale a cognitæ. Dico Parabolam $A D C$, quæ ¹ per prædictæ diametri verticem A descripta sit, habeatque latus rectum eidem diametro correspondens ∞a , esse Locum quæsitum.

Sit enim in eadem curva $A D C$ assumptum punctum utcunque, veluti D , ductâque $D E$ in angulo $A E D$ dato vel assumpto æquali, si ipsa $D E$ vocetur y , erit, ex natura Parabolæ ² quadratum ex $E D \infty F A E$ rectangulo, hoc est, $yy \infty ax$. Quod erat propositum.



3 per 1
primi
hujus.

Ad demonstrationem autem secundæ hujus Theorematis partis iisdem ut supra suppositis, ducenda est ex A puncto recta $A H$ ipsi $B C$ parallela, atque eadem $A H$ assumenda pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel assumpto angulo $A B C$ seu $A H C$ æquales, ac cætera, ut supra, eritque Parabolæ $A D C$ Locus quæsitus.

Est enim ³ quadratum ex $G D$ five $A E$ quadratum æquale rectangulo sub $F A$ & $A G$, seu $F A$ & $E D$, id est, $xx \infty ay$. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA VIII.

Propositio 8.

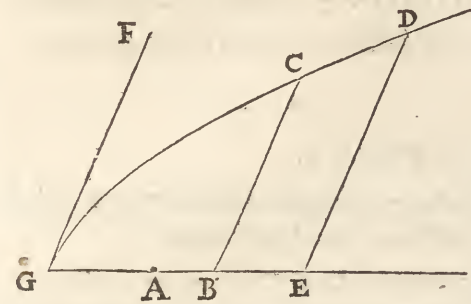
Si æquatio sit $yy \infty ax + bb$ aut conversim $ay + bb \infty xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Sit ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem illa x per rectam $A B$ indefinitè se extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus æqualis angulo $A B C$. Deinde producat $A B$ versùs A usque ad G , ita ut sit $A G \infty \frac{bb}{a}$; assumptâque $G B$ pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos æquales dato vel assumpto angulo $A B C$, cujusque latus rectum

rectum GF sit æquale & cognitæ: dico Parabolam GCD, quæ

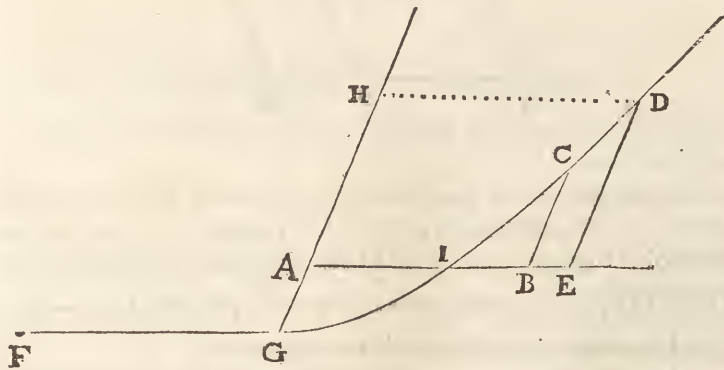
per prædictæ diametri verticem G descripta sit, habeatque latus rectum eidem diametro correspondens $\propto a$, esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DE in angulo AED, dato vel



assumpto æquali, si ipsa DE vocetur y , quoniam GE sive AE + AG est $\propto x + \frac{bb}{a}$, atque ex natura Parabolæ ^{1 per 1} quadratum ex ^{primi hujus} ED \propto rectangulo sub FG & GE, erit $yy \propto ax + bb$. Quod ^{jus.} primò erat demonstrandum.

Ad explicationem verò secundæ hujus Theorematis partis iisdem ut supra positis, ducatur ex A recta AH ipsi BC parallela; eâdemque productâ versùs A usque ad G, ita ut AG sit $\propto \frac{bb}{a}$, di-



co, si ad GH diametrum latere recto GF $\propto a$ Parabola describatur ut GC, quæ secet rectam AB in I, curvam ID esse Locum quæsitum.

Est enim ^{2 per 1} ex natura Parabolæ ^{primi hujus} rectangulum sub FG & GH ^{con-} ^{jus.}

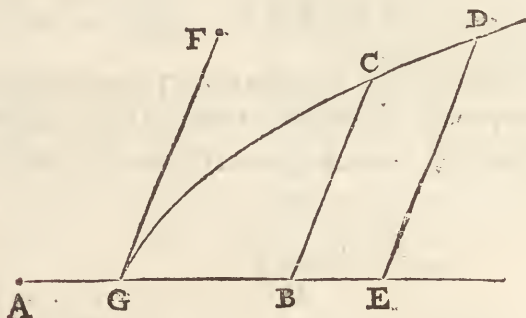
contentum æquale quadrato ex HD seu AE, ac proinde, quoniam GH, sive DE + AG, $\propto y + \frac{bb}{a}$, atque FG $\propto a$, erit, factâ debitâ multiplicatione, $ay + bb \propto xx$. Quod est propositum.

T H E O R E M A IX.

Propositio 9.

Si æquatio sit $yy \propto ax - bb$ aut conversim $ay - bb \propto xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Suppositis iisdem, quæ in præcedenti Theoremate, auferatur ab AB recta AG $\propto \frac{bb}{a}$, fiantque cætera, ut ibidem dictum est; dico curvam GCD esse Locum quæsitum.

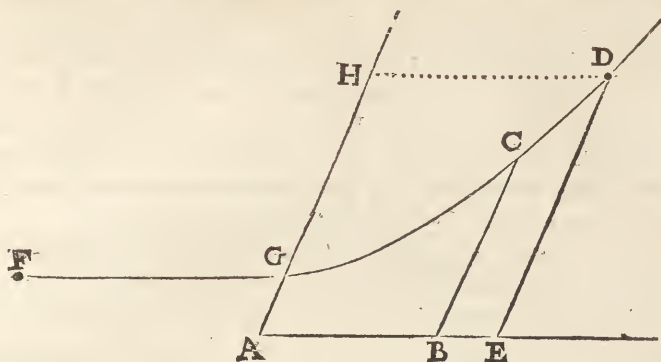


^a per. 1.
primi hu-
jus.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, demissâque DE ipsi CB parallelâ, si eadem DE vocetur y , erit ex natura Parabolæ ¹ quadratum ex ED seu yy æquale rectangulo sub FG & GE, id est, producto ex a in $x - \frac{bb}{a}$, nimirum, $ax - bb$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

Ad explicationem autem secundæ hujus Theorematis partis, iisdem ut supra positis, ducatur ex A recta AH ipsi BC parallela; atque ab ea subductâ AG $\propto \frac{bb}{a}$, fumatur GH pro diametro, &c. ut supra, dico curvam GCD fore Locum quæsitum.

Est



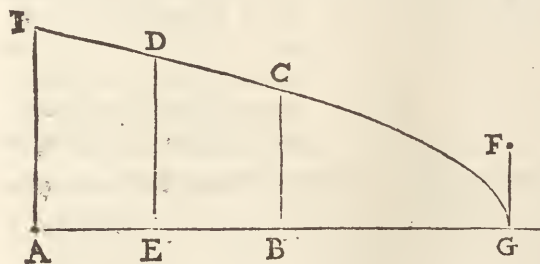
Est enim ¹ ex natura Parabolæ rectangulum sub FG & GH ^{per eandem.} contentum æquale quadrato ex HD seu AE, ideoque, quoniam ^{dem.} GH sive DE — AG æquatur $y - \frac{bb}{a}$, atque FG $\propto a$, erit, factâ debitâ multiplicatione, $ay - bb \propto xx$. Quod erat propositum.

THEOREMA X.

Propositio 10.

Si æquatio sit $yy \propto bb - ax$ aut conversim $bb - ay \propto xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Sitenim, ut supra, ipsius x initium immutabile A punctum,

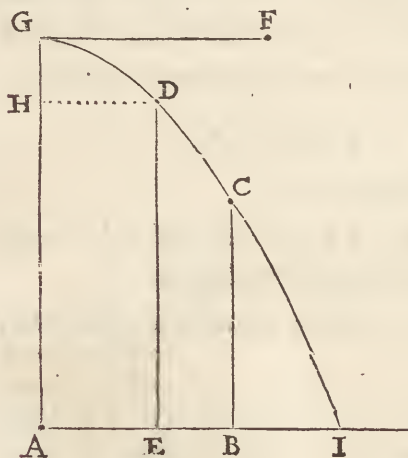


intelligaturque eadem x in recta AB indefinitè se ab A extendere versus B; angulus verò datus vel assumptus esto æqualis angulo

A'B'C. Deinde ab A versus B assumptâ AG $\propto \frac{bb}{a}$ sumatur GA

pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciunt angulos æquales dato vel assumpto ABC , aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Quo factò, si per prædictæ diametri verticem G versus A Parabola describatur, cujus latus rectum GF eidem diametro correspondens sit $\propto a$, quæque Parabola rectam AI ipsi BC parallelam fecet in I : dico ejusdem Parabolæ portionem, inter verticem G & punctum intersectionis I interceptam, nempe curvam GCI , esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D , demissâque DE ipsi CB parallelâ, si eadem DE vocetur y , cum ¹ ex natura Parabolæ quadratum ipsius DE sit æquale rectangulo sub FG & GE , & GE sive $AG - AE$ sit $\propto \frac{bb}{a} - x$, ac $FG \propto a$, factâ debitâ multiplicatione, erit $yy \propto bb - ax$. Quod demonstrandum determinandumque erat.



² per eandem.

Ad explicationem autem secundæ hujus Theorematis partis, iisdem ut supra positis, ex A ducatur AG ipsi BC parallelâ atque $\propto \frac{bb}{a}$, assumaturque GA pro diametro, &c. per omnia, ut supra, excepto quòd punctum intersectionis I sit in recta AE .

Cum enim ductâ DH ipsi AB parallelâ ² ex natura Parabolæ rectangulum sub FG & GH contentum sit æquale quadrato ex HD seu $A E$, sitque

GH sive $AG - ED \propto \frac{bb}{a} - y$, atque $FG \propto a$, factâ multiplicatione, ut decet, erit $bb - ay \propto xx$. Quod erat propositum.

Regula

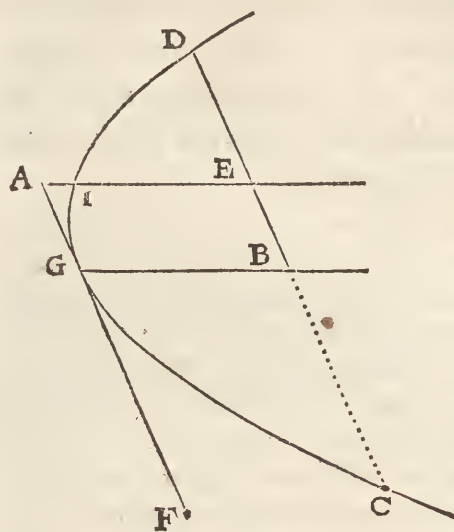
Regula universalis, modusque reducendi omnes æquationes, quæ ex convenienti operatione producuntur, cùm Locus quæsitus est Parabola, ad aliquem quatuor casuum, præcedentibus totidem Theorematis jam explicatorum.

Si contingat ut quantitas incognita, quæ in æquatione ad duas dimensiones ascendit, in eadem quoque inveniat unius dimensionis, cum alia, sive cognita, sive incognita quantitate, vel etiam cum utraque planum aliquod faciens, loco ejusdem assumenda est alia, vel ipsam excedens, vel ab ea deficiens dimidio quantitatis, quacum illa planum, uti dictum est, constituere reperitur, pro diversa dicti plani signo $+$ vel $-$ affectione. Quo opere ipsa æquatio ad aliquem quatuor præcedentium casuum reducetur, ita ut ei convenientem lineam Parabolicam determinare, per ea quæ superius sunt explicata, haud difficile sit.

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis VII.

Si æquatio sit $yy + 2ay \propto bx - aa$; assumpto, juxta Regulam, $z \propto y + a$, erit $z - a \propto y$. Hinc si ubique in æquatione loco ipsius y substituatur $z - a$, ejusdemque quadratum loco yy : habebitur $zz - 2az + aa, + 2az - 2aa \propto bx - aa$, hoc est, omittis iis quæ sese mutuò tollunt, erit $zz \propto bx$. Vnde statim apparet æquationem esse reductam ad formulam Theorematis VII, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, eademque x intelligatur se ab A per rectam AE indefinitè extendere; sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAF . Deinde, quoniam z est $\propto y + a$, si y supra lineam AE exurgere intelligatur, ducenda est infra eam recta GB ipsæ AE parallela,
ira

ita ut pars rectæ AF, omniumque ipsi parallelarum, intercepta



inter AE & GB, veluti AG, æquetur a cognita. Porrò prædicta GB assumenda est ut Parabolæ diameter, ad quam si per ejusdem verticem G, existente GF latere recto, ipsi diametro GB correspondente, ∞b Parabola describatur, secans rectam AE in I: dico curvam ID indefinitely versus D productam esse Locum quæsitum.

Etenim assumpto in eadem curva puncto utcunque, veluti D,

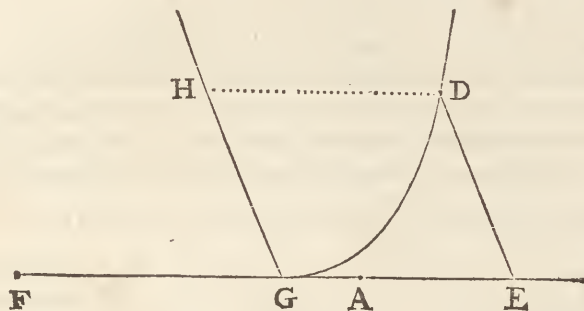
ductâque DE ipsi AF parallelâ, si eadem DE vocetur y , producatique donec prædictæ diametro GB occurrat in B: erit ex constructione intercepta EB ∞a , ac proinde tota DB $\infty y + a$, hoc est, z . Quare cum ex natura Parabolæ quadratum ex DB æquetur rectangulo sub FG & GB, vel FG & AE: erit quoque $z z \infty bx$, five, restituto $y + a$ loco z , $yy + 2 ay + aa \infty bx$, id est, $yy + 2 ay \infty bx - aa$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

Quòd si æquatio fuisset $yy - 2 ay \infty bx - aa$, factâ assumptione secundùm Regulam, atque operatione, ut supra; deventum fuisset ad eandem æquationem, nimirum, $z z \infty bx$. Sed quoniam z eo casu juxta Regulam assumenda fuisset $\infty y - a$, idcirco quoque diameter GB (iisdem ut supra positis) non infra, sed supra rectam AE cecidisset, cæteraque omnia eodem quo supra modo expedienda fuissent.

Si verò æquatio sit $by - aa \infty xx + 2 ax$, quæ est conversa superius expositæ, assumpto juxta Regulam $v \infty x + a$, erit $v - a \infty x$. Quare si loco ipsius x in æquatione substituatur $v - a$, atque hujus

hujus quadratum loco xx : erit $by - aa \propto vv - 2av + aa$,
 $+ 2av - 2aa$, hoc est, omissis iis, quæ se mutuo tollunt, erit
 $by \propto vv$.

Vnde statim apparet, reductam esse æquationem ad formulam
 prædicti Theorematis septimi conversim, ac proinde Locum
 quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem
 esto in apposita figura ipsius x initium immutabile punctum A,



intelligaturque eadem x à prædicto puncto A per rectam A E in-
 definite se extendere, sitque datus vel assumptus angulus, quem
 comprehendunt y & x , æqualis angulo A G H vel F G H. Dein-
 de, quoniam v æquatur $x + a$, producenda est recta A E versùs A
 usque ad G, ita ut A G sit $\propto a$; & ex G ducenda est G H, faciens
 angulum E G H vel F G H dato vel assumpto angulo æqualem,
 ipsaque G H sumenda est pro Parabolæ diametro, ad quam si per
 ejus verticem G atque latere recto F G $\propto b$ Parabola describatur,
 ut G D: dico curvam G D esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D; ductâque D E
 ipsi H G parallelâ, si eadem D E vocetur y , cum G E sit $\propto x + a$
 seu v , atque ex natura Parabolæ F G H rectangulum \propto quadrato
 ex HD sive G E, erit $by \propto vv$, sive, restituto $x + a$ loco v , by
 $\propto xx + 2ax + aa$, seu $by - aa \propto xx + 2ax$. Quod determi-
 nandum, demonstrandumque erat.

Quòd si æquatio fuisset $by - aa \propto xx - 2ax$, eadem per omnia
 mutatis mutandis secundum Regulam instituenda fuisset opera-
 tio, cecidissetque eo casu punctum G inter A & E.

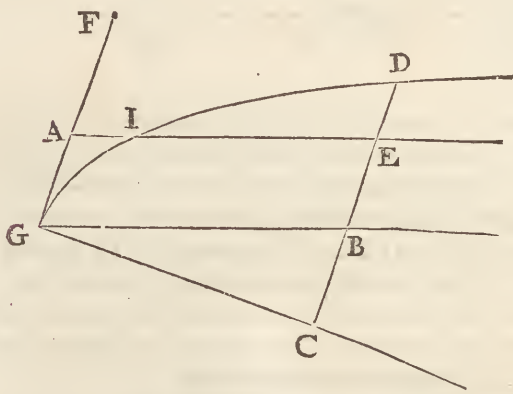
Eodem modo si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \propto bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$,

assumpto juxta Regulam $z \propto y + \frac{bx}{a} + c$: erit $y \propto z - \frac{bx}{a} - c$.

Quo substituto in locum ipsius y , ejusdemque quadrato loco yy , expunctisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis sequentem formam induta erit superior æquatio:

$zz \propto \frac{2bc}{a}x + bx$, aut $zz \propto dx$, si loco $\frac{2bc}{a} + b$ substituatür d .

Vnde iterum apparet, æquationem esse reductam ad formulam Theorematis VII, ac propterea Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem esto in sequenti figura ipsius x initium immutabile punctum A , atque eadem x ab A puncto per rectam AE indefinitè se extendere intelligatur, sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAF vel EAG . Deinde quoniam z est $\propto y + c + \frac{bx}{a}$,



si y supra lineam AE exurgere intelligatur, veluti ED , ducenda primum est infra eandem rectam GB ipsi parallela, ita ut partes rectæ FG omniumque ipsi æquidistantium inter prædictas AE & GB interceptæ, veluti AG , EB , æquen-

tur c cognita. Quo peracto, cum quævis recta, quæ possit esse y , ad rectam GB producta, ut, exempli gratiâ, DB , sit $\propto y + c$, oportet ipsi adhuc adjungere $\frac{bx}{a}$, ut fiat æqualis z assumptæ.

Quare, cum GB seu AE indefinitè sumpta sit $\propto x$, si ex G juxta I Theorema hujus libri infra eandem GB recta ducatur, ut GC ; ita ut omnium ipsi GF parallelarum partes inter GB & GC interceptæ, veluti BC , ad partes ipsius GB inter G & dictas parallelas

rallas interceptas, veluti BG, eandem rationem habeant, quæ est inter b & a . Quod ipsum ut fiat, statuatur ut a ad b , ita GB ad BC: eritque BC $\propto \frac{bx}{a}$. Eodem modo rectæ omnes ipsi BC parallelæ, quæ à GB ad GC ducuntur, erunt $\propto \frac{bx}{a}$. Atque ita recta quælibet supra AE exurgens, quæ possit esse y , postquam ad rectam GC erit producta, ut, exempli gratiâ, DC, erit $\propto y + c + \frac{bx}{a}$ seu z . Hujus igitur quadratum cum debeat esse $\propto dx$, statim inde apparet, si Parabola descripta foret ad diametrum GC, cujus latus rectum GF ita esset assumptum, ut rectangula, sub eodem latere recto & diametri portionibus, inter verticem & ordinatim applicatas interceptis, contenta, forent $\propto dx$, eandem illam Parabolam fore Locum quæsitum. At verò cum ratio rectæ GB ad rectam BC, aliarumque similium, cognita sit, nempe, ut a ad b ; sitque itidem notus angulus GBC, sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto EAF: erit propterea quoque ¹ nota ratio GB ad GC, aliarumque similium, quæ sit ut a cognitæ ad e cognitam. Hinc cum GB seu AE indefinitè sumpta exprimat per x , erit GC itidem indefinitè sumpta, hoc est, omnis diametri portio inter verticem & ordinatim applicatas intercepta $\propto \frac{ex}{a}$. Quæ cum in latus rectum ducta producere debeat æquationis terminum dx , idem quoque æquationis terminus dx per $\frac{ex}{a}$ divisus ut prædictum latus rectum restituat necesse est: ac proinde per eandem divisionem cognoscitur quæsitum latus rectum æquari $\frac{ad}{e}$. Sumptâ ergo GF $\propto \frac{ad}{e}$ pro latere recto, si ad diametrum GC, ut supra dictum est, describatur Parabola GID, secans rectam AE in I: dico curvam ID fore Locum quæsitum.

Atque hîc, ut & in aliis similibus exemplis obiter notandum, si Parabola descripta prædictam AE non secaret, id certo indicio fore, quæstionem propositam, per quam legitimâ operatione ad supra expressam æquationem perventum fuerit, ejus esse conditionis, ut Locus ad indagandum propositus sui quidem naturâ

linea Parabolica existat; sed quòd nulla tamen quæstioni satisfaciens describi possit, cum propositæ quantitates, eo, ut petitur, modo, conjungi nequeant.

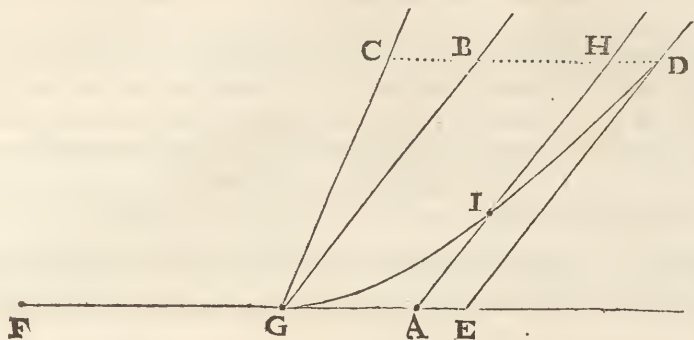
Ad demonstrationem autem eorum, quæ supra dicta sunt, fumatur in curva I D punctum utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi F G parallelâ, quæ protracta secet rectam G B in B, occurratque diametro G C in C, si D E vocetur y , cum E B seu A G sit $\propto c$, & B C $\propto \frac{bx}{a}$, erit tota D C $\propto y + c + \frac{bx}{a}$, hoc est, z . Cumque ex natura Parabolæ quadratum ex D C \propto F G C rectangulo, erit quoque ex antedictis $z z \propto dx$. Ac proinde substitutis aut restitutis $y + c + \frac{bx}{a}$ loco z , itemque $\frac{2bc}{a} + b$ in locum ipsius d , & ablatis quæ propter æqualitatem se invicem tollunt, ordinatisque omnibus, ut decet, erit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \propto bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Sin autem æquatio fuisset $yy - \frac{2bxy}{a} - 2cy \propto bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$, factâ assumptione secundum Regulam atque operatione uti decet, ad eandem æquationem perventum fuisset; sed quoniam z juxta assumptionem eo casu faciendam fuisset æqualis $y - \frac{bx}{a} - c$, idcirco quoque suppositis, ut ante, rectâ G B non infra sed supra rectam A E, ut & G C non infra sed supra eandem G B ducenda fuisset, cæteraque omnia eodem quo supra modo fuissent expedienda.

Si verò æquatio sit $by - \frac{bbyy}{aa} - cc \propto xx + \frac{2byx}{a} + 2cx$, quæ est conversa superius expositæ, assumpto juxta Regulam $v \propto x + \frac{by}{a} + c$, erit $x \propto v - \frac{by}{a} - c$. Vnde substituto hoc valore in locum ipsius x , ejusdemque quadrato loco xx , expunctisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis, superior æquatio sequenti formâ induta erit $\frac{2bc}{a}y + by \propto vv$, aut (si loco $\frac{2bc}{a} + b$ substituatur d) $dy \propto vv$. Id quod rursus arguit æquationem propositam reductam esse ad formulam prædicti Theorematis V II conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam.

Ad

Ad cujus specificam determinationem esto in sequenti figura ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem x à puncto A per rectam A E indefinitè se extendere intelligatur, sitque da-



tus vel assumptus angulus E A H vel F A H. Deinde, quoniam ex secunda parte Theorematis VII constat, prædictam Parabolam ita esse describendam, ut ordinatim applicatæ ad ejus diametrum sint ipsi A E parallelæ, debeantque juxta æquationem propositam æquales esse quantitati assumptæ v , hoc est, $x + \frac{by}{a} + c$, ducenda primùm est recta G B ipsi A H parallela, ita ut pars rectæ E A, versùs A productæ, ut & omnium ipsi æquidistantium, velut A G vel H B sit ∞c cognitæ. Quo facto, cum quævis recta, quæ possit esse ipsi A E æquidistans & æqualis, ac proinde exprimi per x , ut, verbi gratiâ, D H, ad rectam G B producta; uti D B, æquetur $x + c$: ita porrò è puncto G ducenda, & , secundùm ea, quæ in præcedentibus explicata sunt, constituenda est Parabolæ diameter ab adversa parte ipsius G B, quàm est punctum E in recta G C, ut, si G B indefinitè vocetur y , B C, aliarumque omnium ipsi A E parallelarum inter eandem G C & rectam G B interceptæ partes exprimentur per $\frac{by}{a}$. Atque ita quælibet recta ipsi A E parallela, quæ possit esse x ad rectam G C producta, veluti D C, fit $\infty x + c + \frac{by}{a}$, hoc est, v . Cujus quidem quadratum cum æquale esse debeat alteri æquationis termino, nempe, dy : statim apparet, si Parabola descripta foret ad diametrum G C,

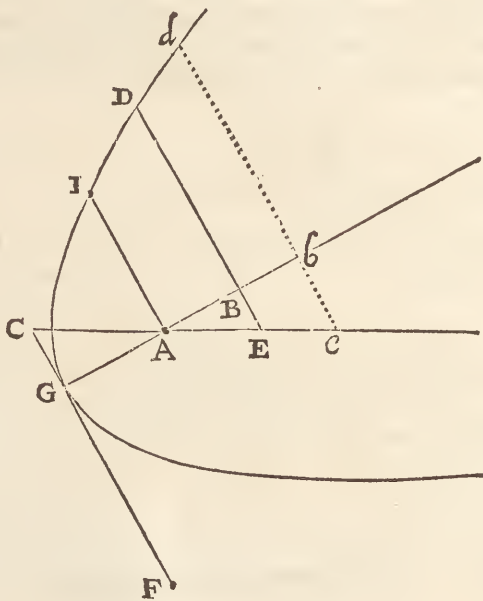
¹ per 6
sexi.

cujus latus rectum GF ita esset assumptum, ut rectangula contenta sub eodem latere recto & diametri portionibus, inter verticem G & ordinatim applicatas interceptis, forent $\propto dy$, eandem illam Parabolam fore Locum quaesitum. At verò cum ratio rectæ GB ad rectam BC aliarumque similium cognita sit, nimirum, ut a ad b ; sitque itidem notus angulus sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto $E A H$: erit quoque ¹ ratio ipsius GB ad GC aliarumque similium cognita, quæ sit ut a cognitæ ad e cognitam. Quocirca si GB sive ED indefinitè sumpta exprimitur per y , erit GC itidem indefinitè sumpta, hoc est, omnis diametri portio, inter verticem & ordinatim applicatas intercepta $\propto \frac{ey}{a}$. Quæ cum in latus rectum ducta producere debeat æquationis terminum dy , idem quoque æquationis terminus dy per $\frac{ey}{a}$ divisus ut prædictum latus rectum restituat necesse est. ac proinde factâ eâdem divisione indicabit quotiens latus rectum quaesitum fore $\frac{ad}{e}$. Hinc, sumptâ $GF \propto \frac{ad}{e}$, pro latere recto, si ad diametrum GC inventam, ut supra dictum est, describatur Parabola GID , secans rectam AH in I : dico curvam ID fore Locum quaesitum.

Sumpto enim in eadem puncto utcumque, veluti D , ductâque DE ipsi AH , ut & DC ipsi AE parallelâ, quæ quidem DC secet rectas AH & GB in punctis H & B , occurratque diametro GC in puncto C : erit $AE \propto x \propto DH$; $ED \propto y \propto GB$; AG & $HB \propto c$; $BC \propto \frac{by}{a}$ ideoque tota $DC \propto x + c + \frac{by}{a}$, hoc est, v . Cumque ex natura Parabolæ rectangulum FGC sit æquale quadrato DC : erit, factâ multiplicatione $\frac{ad}{e}$ in $\frac{ey}{a}$, atque v in se ipsam, $dy \propto vv$. Et substitutis aut restitutis $x + c + \frac{by}{a}$ loco v , itemque $\frac{2bc}{a} + b$ in locum ipsius d , atque ablatis quæ propter æqualitatem se invicem tollunt, ordinatisque omnibus, ut decet, $by - \frac{bbyy}{aa} - cc \propto xx + \frac{2byx}{a} + 2cx$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

De cæteris autem casibus, ad prædictam formulam spectantibus, supervacuum fuerit plura exponere, cum ex prædictis facile expli-

per rectam AE indefinitè se extendere intelligatur, sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo AED . Deinde, quoniam $z \propto y - \frac{bx}{2a}$, si y supra lineam AE exurgere intelligatur, veluti ED , ducenda quoque est supra lineam AE ex puncto A recta AB , ita ut eadem sit ratio AE ad EB , quæ est ipsius $2a$ cognitæ ad b cognitam, hoc est, ut sit uti $2a$ ad b , ita AE seu x ad EB , eritque $EB \propto \frac{bx}{2a}$. idem intellige de omnibus aliis rectis ipsi EB parallelis, atque inter AE & AB interceptis, quæ quidem singulæ ipsi $\frac{bx}{2a}$ erunt æquales. Hinc,



quemadmodum ex supra dictis patet, si terminus dd in æquatione deficeret, prædicta AB Parabolæ diameter foret, ejusque vertex punctum A , & , positâ ratione AE ad AB , ut $2a$ ad e , latus rectum ipsi correspondens esset $\propto \frac{2ab}{e}$. Iam verò cum rectangulum, quod sub latere recto & portione diametri, inter verticem atque ordinatim applicatas interceptâ, continetur, æquale esse debeat $bx + dd$: manifestum est, si, iisdem positis, diameter

AB

AB versùs A producatur ad G, ita ut rectangulum sub prædicto latere recto & parte GA contentum sit $\propto dd$, rectam GB quæsitam fore diametrum, ejusque verticem prædictum G punctum: ac proinde & dd per prædictum latus rectum, hoc est per $\frac{2ab}{e}$, divisum æquari longitudini GA, ideoque GA fore $\propto \frac{dde}{2ab}$. Quare

si diametro GB & latere recto GF $\propto \frac{2ab}{e}$ in dato angulo Parabola describatur GD d , secans AI ipsi ED parallelam in I: dico curvam ID d fore Locum quæsitum.

Verùm obiter hîc quoque notandum venit, prædictum verticem G etiam inveniri hoc pacto: si nempe EA producatur ad C, ita ut AC sit $\propto \frac{dd}{b}$, ac deinde per punctum C ipsi DE parallela ducatur CG, occurrens productæ AB in G: erit enim in eodem illo concursus puncto vertex quæsitus.

Demonstratio.

Sumatur in prædicta curva punctum utcunque, veluti D, ductâque DE in angulo AED, dato vel assumpto æquali, secante diametrum GB in B: erit, ex constructione, BE $\propto \frac{bx}{2a}$; ideoque si ED vocetur y , erit DB $\propto y - \frac{bx}{2a}$ seu z ; FG $\propto \frac{2ab}{e}$, GA $\propto \frac{dde}{2ab}$; AB $\propto \frac{ex}{2a}$, totaque GB $\propto \frac{dde}{2ab} + \frac{ex}{2a}$. At cum ex proprietate Parabolæ DB quadratum sit æquale rectangulo FGB, erit, factâ multiplicatione ipsius z in se ipsam, atque $\frac{2ab}{e}$ in $\frac{dde}{2ab} + \frac{ex}{2a}$, $zz \propto dd + bx$. Vnde substituto $y - \frac{bx}{2a}$ loco z ; obtinebitur $yy - \frac{bxy}{a} + \frac{bbxx}{4aa} \propto bx + dd$, id est, $yy - \frac{bxy}{a} \propto -\frac{bbxx}{4aa} + bx + dd$. Quod erat demonstrandum.

Quomodo autem pro casu hujus exempli converso Parabola describenda sit, ex comparatione ejusdem cum antedictis facile est colligere.

$$\text{Si æquatio fuerit } \frac{bcy}{a} + by - \frac{bby}{aa} + \frac{1}{4}cc \propto xx + \frac{2byx}{a} - cx,$$

Pars II.

Ll

assum-

assumpto juxta Regulam $v \propto x + \frac{by}{a} - \frac{1}{2}c$, erit $x \propto v - \frac{by}{a} + \frac{1}{2}c$.
 quo substituto in locum ipsius x , ejusdemque quadrato loco xx ,
 ablatisque iis, quæ se invicem destruant, atque omnibus ritè or-
 dinatis, æquatio superior sequenti formâ erit induta.

$$by + \frac{1}{2}cc \propto vv.$$

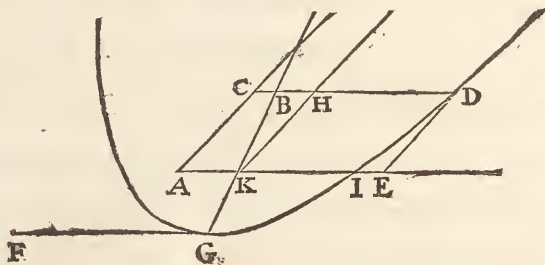
Vnde apparet eandem esse reductam ad formulam prædicti
 Theorematis VIII conversim, ac proinde Locum quæsitum esse
 Parabolam. Cujus specifica determinatio (suppositis, ut in adjun-
 cta figura, A E indefinitè assumptam esse quantitatem incogni-
 tam x , atque cum altera y constituere angulum æqualem angulo
 E A C vel ejusdem ad binos rectos supplemento) quoniam ex jam
 ante explicatis quasi sponte profluit, idcirco eam adjunctâ figurâ
 breviter indicasse suffecerit.

Determinatio Loci.

A E indefinitè $\propto x$.

E D omnesque ipsi parallelæ $\propto y$.

A K $\propto \frac{1}{2}c \propto$ C H, quia K H parallela A C.



Vt a ad b , ita K H seu y ad H B: unde H B fit $\propto \frac{by}{a}$, & D B \propto
 $-\frac{1}{2}c + \frac{by}{a} \propto v$.

Vt a ad e , ita K H seu y ad K B: unde K B (in qua diameter) fit
 $\propto \frac{ey}{a}$.

by divisum per $\frac{ey}{a}$, reddit $\frac{ab}{e}$: unde latus rectum F G fit $\propto \frac{ab}{e}$.

$\frac{1}{2}cc$, nempe terminus æquationis in totum cognitus, divisus per $\frac{ab}{e}$

$\frac{ab}{c}$, nempe per latus rectum, reddit $\frac{cce}{2ab}$: unde K G fit $\propto \frac{cce}{2ab}$, atque GB $\propto \frac{cce}{2ab} + \frac{cy}{a}$.

Demonstratio.

Rectangulum FGB \propto BD quadrato, ergo $\frac{1}{2}cc + by \propto vv$, vel $by \propto vv - \frac{1}{2}cc$, hoc est, $by \propto xx + \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa} - cx - \frac{bcy}{a} + \frac{1}{4}cc$.
 $-\frac{1}{2}cc$.

Quocirca deletis delendis, factâque decenti transpositione, fiet $\frac{bcy}{a} + by - \frac{bbyy}{aa} + \frac{1}{4}cc \propto xx + \frac{2byx}{a} - cx$. Quod erat propositum.

Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis IX.

Sit æquatio $yy + \frac{bxy}{a} - cy \propto ax - \frac{bbxx}{4aa} - cc$. Assumatur juxta Regulam $z \propto y + \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}c$, eritque $y \propto z - \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$. Quo substituto in locum ipsius y , & ejus quadrato loco yy , fient æquationis termini, ut sequitur: $z z \propto ax - \frac{bcx}{2a} - \frac{3}{4}cc$. Facilitatis ergo pro $a - \frac{bc}{2a}$ scribatur d , supponendo a esse majorem quàm $\frac{bc}{2a}$, eritque æquatio $z z \propto dx - \frac{3}{4}cc$. Et apparet eandem reductam esse ad formulam Theorematis IX, ac propterea Locum quæsitum esse Parabolam, quàm ex iis, quæ jam explicata sunt, determinare ac describere facillimum erit; ut ex sequenti figura iisque quæ super eâdem breviter annotata sunt, colligere licebit.

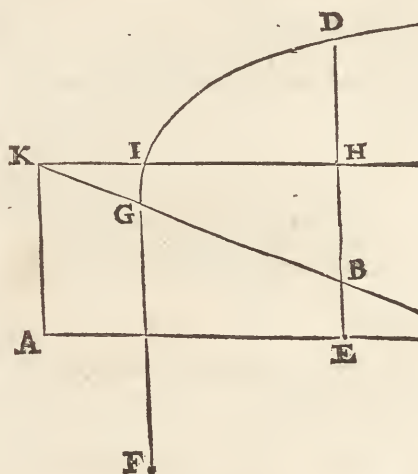
Determinatio Loci.

Sit initium immutabile ipsius x punctum A.
 A E indefinitè $\propto x$.
 E D omnesque ipsi parallelæ $\propto y$.
 E A K vel A E D, angulus quem x & y comprehendere debent.
 L 1 2 A K

$AK \propto \frac{1}{2}c$.

KH parallela ipsi A E.

Vt $2a$ ad b , ita KH seu x ad HB : unde H Berit $\propto \frac{bx}{2a}$.



Vt $2a$ ad e , ita KH seu x ad KB : unde KB (in quâ diameter) $\propto \frac{ex}{2a}$.

dx divisum per $\frac{ex}{2a}$, reddit $\frac{2ad}{e}$: unde latus re-
ctum, quod fit FG, erit $\propto \frac{2ad}{e}$.

$\frac{3}{4}cc$ divisum per $\frac{2ad}{e}$, red-
dit $\frac{3cce}{8ad}$: unde KG fit $\propto \frac{3cce}{8ad}$, atque GB $\propto \frac{ex}{2a} - \frac{3cce}{8ad}$.

Hinc si GB diametro & latere recto FG per verticem G descripta sit Parabola, secans KH in I, erit ID Locus quæsitus.

Demonstratio.

Esto punctum D utcumque sumptum in ID, & DE ducta parallela ipsi AK, quæ si vocetur y ; erit HD $\propto y - \frac{1}{2}c$, ac DB $\propto y - \frac{1}{2}c + \frac{bx}{2a}$, hoc est, z . Cujus quadratum cum æquetur rectangulo FGB, erit $zz \propto dx - \frac{3}{4}cc$, hoc est, $yy - cy + \frac{1}{4}cc + \frac{bxy}{a} - \frac{bcx}{2a} + \frac{bbxx}{4aa} \propto ax - \frac{bcx}{2a} - \frac{3}{4}cc$. Ac proinde, si utrinque demantur æquales, terminique ritè transponantur, habebitur $yy + \frac{bxy}{a} - cy \propto ax - \frac{bbxx}{4aa} - cc$. Quod erat propositum.

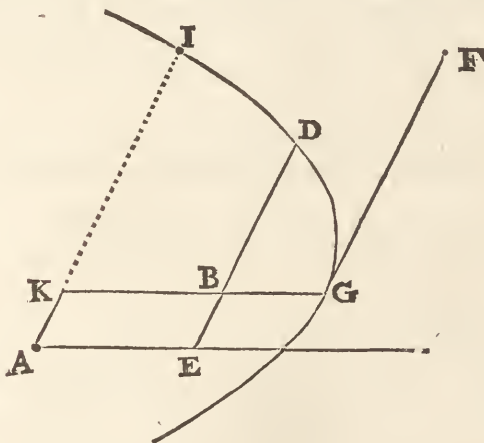
Atque hujus quidem exempli conversum, ut & cæteros casus huc spectantes, ex iis, quæ jam dicta sunt, simili modo reducere atque resolvere non difficile erit.

Exem-

*Exempla reductionis æquationum ad formulam
Theorematis X.*

Si æquatio sit $ay - yy \propto bx$, sive, quod idem est, $yy - ay + bx \propto 0$, assumpto juxta Regulam $z \propto y - \frac{1}{2}a$, erit $y \propto z + \frac{1}{2}a$. Quo substituto in locum ipsius y , & ejusdem quadrato loco yy , remanebit $zz \propto \frac{1}{4}aa - bx$. Vnde apparet, eandem esse reductam ad casum Theorematis X, ideoque per ea, quæ ibidem sunt demonstrata, Locum quæsitum esse Parabolam.

Ad cujus specificam determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile punctum A, eademque x se indefinitè ab A versùs E extendere intelligatur; sit autem datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAK,



aut ipsius ad binos rectos complemento. Deinde, quoniam z assumpta est $\propto y - \frac{1}{2}a$, si y supra rectam AE exurgere intelligatur, ducenda quoque est supra ipsam rectam KG ipsi AE parallela, ita ut AK omnesque ipsi æquidistantes inter AE & KG interceptæ sint $\propto \frac{1}{2}a$. Quo facto, si juxta Regulam fiat $KG \propto \frac{aa}{4b}$, eademque sumatur pro Parabolæ diametro, ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi AK parallelæ, cujusque latus rectum FG sit $\propto b$: erit ipsius portio descripta GDI, quæ inter verticem G & productam AK intercipitur, Locus quæsitus.

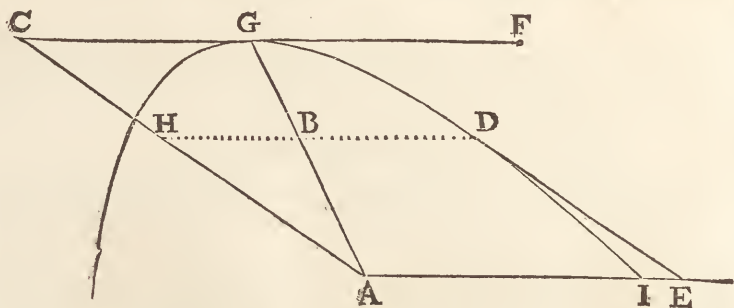
Ll 3

Etenim

Etenim assumpto in curva GDI puncto utcunque, veluti D , ductâque DE ipsi AK parallelâ, quæ secet diametrum KG in B , si eadem DE vocetur y : erit $DB \propto y - \frac{1}{2}a$ seu z , ac GB sive $GK - KB \propto \frac{a^2}{4b} - x$. Hinc, cum ex natura Parabolæ quadratum ex BD sit æquale rectangulo $FG B$, erit $z z \propto \frac{1}{4}aa - bx$, hoc est, $yy - ay + \frac{1}{4}aa \propto \frac{1}{4}aa - bx$, sive $yy - ay + bx \propto 0$, sive etiam $ay - yy \propto bx$. Quod erat propositum.

Si æquatio fuerit $\frac{bbyy}{aa} + dy - cc \propto \frac{2byx}{a} - xx$, sive, quod eadem est, $xx - \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa} + dy - cc \propto 0$: assumpto juxta

Regulam $v \propto x - \frac{by}{a}$, erit $x \propto v + \frac{by}{a}$. Quo substituto in locum ipsius x , ejusdemque quadrato loco xx , fiet, omnibus ritè ordinatis, $cc - dy \propto vv$. Vnde apparet casum esse Theorematis X conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Quæ quidem ut specificè describatur, esto ipsius x initium immutabile A punctum, intelligaturque eadem x se extendere ab A versus E indeterminatè, sitque angulus datus vel assumptus, quem y



& x comprehendunt, æqualis angulo $E A H$ aut ipsius ad duos re-
ctos complemento. Deinde sumatur in $A H$ recta $A C \propto \frac{cc}{a}$, du-
caturque ex C recta $C F$ ipsi $A E$ parallela, atque in eadem sumptâ
 $C G$, quæ se habeat ad $C A$, ut cognita b ad a cognitam, hoc est,
ut sit uti a ad b , ita $A C$ ad $C G$, agatur $A G$, eaque pro diametro
Parabolæ sumatur, quæ per verticem G versus A erit describenda.
Porro cum in triangulo $A C G$ ob rationem cognitam laterum
 $A C$,

AC, CG, cognitum angulum C comprehendentium, utpote dato vel assumpto aut ejusdem ad duos rectos supplemento æqualem, cognita item sit ratio, quam habet AC ad AG, quæ sit ut a ad e ; erit, AC existente $\propto \frac{c^c}{d}$, AG $\propto \frac{c^c e}{ad}$. Per quam si terminus æquationis, in totum cognitus, nimirum ec , dividatur, orietur $\frac{ad}{e}$ pro latere recto. Ac proinde si fiat GF $\propto \frac{ad}{e}$, erit GF latus rectum quæsita Parabolæ, diametro GA correspondens; atque iccirco si ad dictam diametrum, dictumque latus rectum Parabola describatur, ut GDI, secans AE in I: dico IDG curvam esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductisque DE ipsi AH, ac DBH ipsi AE parallelis, si eadem DE exprimatur per y , erit quoque AH $\propto y$. Cumque sit ut AC ad CG, id est, ut a ad b , ita AH ad HB: erit HB $\propto \frac{by}{a}$, ideoque cum DH seu AE sit $\propto x$, erit DB $\propto x - \frac{by}{a}$ seu v . Similiter cum sit ut AC ad AG, hoc est, ut a ad e , ita AH seu y ad AB: erit AB $\propto \frac{ey}{a}$, & GA — AB seu GB $\propto \frac{c^c e}{ad} - \frac{ey}{a}$. Hinc cum ex natura Parabolæ rectangulum FGB sit æquale quadrato ex BD, erit, factâ multiplicatione ipsius FG seu $\frac{ad}{e}$ in GB seu $\frac{c^c e}{ad} - \frac{ey}{a}$, & ipsius BD seu v in se ipsam, $ec - dy \propto v v$. Hoc est, restituto $x - \frac{by}{a}$ loco v , erit: $ec - dy \propto x x - \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa}$, vel $\frac{bbyy}{aa} + dy - ec \propto \frac{2byx}{a} - x x$.

Quod determinandum, demonstrandumque erat:

Obiter autem & hîc notandum, ut ex antedictis quoque facile est colligere, aliter etiam diametrum GA atque latus rectum GF indagari potuisse, hoc modo:

Cum AH indeterminatè sit $\propto y$, juxta primum Theorema hujus ita ducatur AG, ut recta HB, quemadmodum & quælibet alia ipsi AE parallela, quæ inter AH & AG intercipitur, sit $\propto \frac{by}{a}$; ponaturque ratio, quæ est inter AH & AB similesque, ut a ad e : ideoque cum AB indeterminatè sit $\propto \frac{ey}{a}$, terminus æquationis dy

per.

per eandem divisus ostendet latus rectum sectionis $FG \propto \frac{ad}{e}$. Similiter terminus æquationis cc per prædictum latus rectum seu $\frac{ad}{e}$ divisus dabit quotientem $\frac{cce}{ad}$ pro quæsitâ AG .

Plura hîc exempla subjungere supervacuum foret, cum mox omnes omnino casus possibiles generali regulâ annotare ac demonstrare animus sit.

Porro quamvis Regulas capite primo explicatas particularibus ibidem exemplis seu casibus in hypothesi non illustraverimus, neque etiam id aut hîc aut in sequentibus ullo modo necessarium ducamus, quippe cum unusquisque, qui Regulas ipsas rectè perceperit, easdem quibuslibet propositis exemplis seu casibus in hypothesi facilè applicare valeat: quandoquidem tamen libro primo insignes quasdam proprietates Parabolæ, Hyperbolæ, atque Ellipsis consultò prætermisimus, eâ mente, ut in hoc libro suis locis per modum Problematum non incongruè proponi ac demonstrari, simulque tanquam propositarum Regularum particularia exempla haberi possent, earundem explicationem hîc & sub finem sequentis capituli subjiciemus.

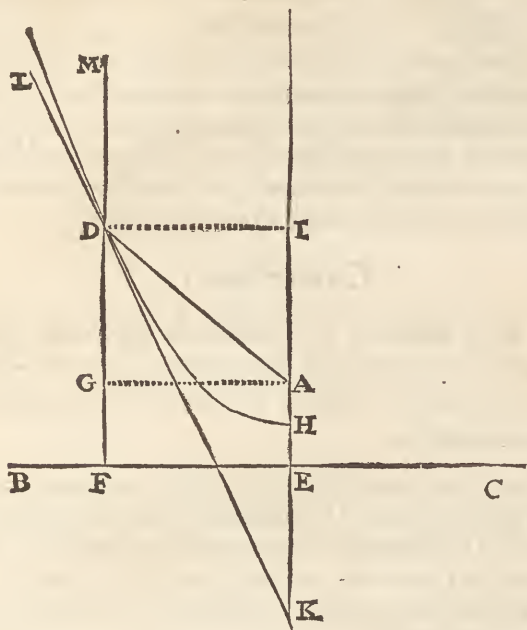
P R O B L E M A I.

Propositio II.

Datis puncto & lineâ rectâ, in plano per utrumque ducto aliud punctum invenire, à quo binæ rectæ, altera ad datum punctum, altera ad datam lineam perpendiculariter ductæ, sibi invicem sint æquales: & quoniam infinita sunt ejusmodi puncta, quæ quæstioni satisfaciunt, Locum determinare ac describere, in quo cuncta & singula reperiantur.

Sit datum punctum A , & data positione recta linea BC , oporteatque in plano quod per utrumque ducitur, aliud punctum invenire,

nire, quemadmodum D; ita ut ductæ rectæ DA, DF, quarum hæc ad datam BC intelligitur perpendicularis, sibi invicem æquales sint.



Ductâ perpendiculari AE, quæ vocetur a , ac suppositis juxta Regulam binis lineis EF, FD incognitis atque indeterminatis datum angulum rectum EFD comprehendentibus tanquam cognitis ac determinatis, quarum prior EF vocetur x , ac posterior FD nominetur y ; si ducta præterea intelligatur AG ipsi EF æquidistans, erit in triangulo rectangulo AGD basis AD $\propto y$, utpote \propto ductæ DF; latus verò AG seu recta EF $\propto x$, & GD, sive (si punctum G cadat inter D & F) $FD - AE$, aut (si punctum D inter F & G cadat) $AE - FD \propto y = a$. Vnde, cum quadratum basis æquale sit binis laterum quadratis simul sumptis, æquatio erit $yy \propto xx + yy - 2ay + aa$, hoc est, ablatis iis quæ se invicem destruant, omnibusque ritè ordinatis, erit $2ay - aa \propto xx$. Qui quidem casus est Theorematis noni hujus libri conversim, ac proinde Locus quæsitus erit linea Parabolica. Quare si juxta

ea, quæ ibidem exposita sunt, ex E ducatur recta EI indefinitè extensa atque ipsi FD æquidistans; & ab eadem auferatur recta $E H \propto \frac{a^2}{2a}$, id est, $\frac{1}{2}a$: erit describendæ Parabolæ diameter in dicta EI, (quæ quidem diameter axis quoque est, propter angulum EFD rectum) vertex autem in H, ac parameter $\propto 2a$. Vnde, per ea quæ libri primi capite primo exposita sunt; Parabolam ipsam describere facillimum erit. Cumque porrò axis punctum A, utpote quod ab H vertice distat quartâ ipsius parametri parte, id ipsum sit, quod vulgò Parabolæ Focus seu Umbilicus nuncupatur, apparet ex præmissis rectè inferri, quæ sequuntur.

Corollarium 1.

Quæ ab Umbilico ad quodlibet Parabolæ punctum recta ducitur æqualis est axis portioni per applicatam ab eodem puncto abscissæ & quadrante parametri per verticem productæ.

Constat enim ex antedictis rectam AD, utcunque assumptum fuerit in curva punctum D, si per idem illud ad axem ordinatim applicata sit DI, æqualem esse perpendiculari DF, hoc est, rectæ IE, nempe axis portioni, per applicatam DI abscissæ, & per verticem H, longitudine HE $\propto \frac{1}{2}a$, id est, quadrante parametri, productæ.

Corollarium 2.

Manifestum quoque est ex antedictis, si positis quæ supra, & productâ FD, uti ad M, per assumptum punctum D contingens ducta sit, ut LDK, angulum FDK sive MDL angulo ADK æqualem esse.

¹ per 1
Cor. 2
primi bu-
jus.
² per 5
primi.

Occurrat enim contingens LDK axi producto in K, eritque ¹ recta IH ipsi HK, ideoque (æqualibus HE, AH utrinque additis) recta IE, hoc est, AD, ipsi AK æqualis; ac proinde ² & angulus ADK angulo AKD, hoc est, angulo FDK sive MDL æqualis sit necesse est.

CAPVT III.

Tertio autem casu supra expresso, cum nempe quantitatum incognitarum utraque ad quadratum ascendit, sive altera in alteram ducta in æquatione reperitur, neque æquatio ad terminos magis simplices reduci potest, ad aliquam sequentium formularum devenitum erit;

I. $yx \propto ff.$

II. $\frac{lyy}{g} \propto xx - ff.$

III. $yy - ff \propto \frac{lx}{g}.$

IV. $\frac{lyy}{g} \propto ff - xx.$

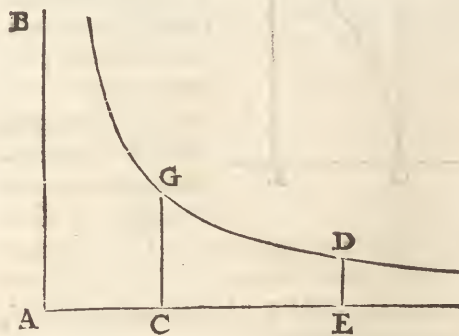
THEOREMA XI.

Propositio 12.

Si æquatio sit $yx \propto ff$, Locus quæsitus est Hyperbola.

Sit enim, ut in præcedentibus, ipsius x initium immutabile A

punctum, atque eadem illa x per rectam A.E indefinitely se extendere intelligatur; sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A B, aut ejusdem ad binos rectos supplemento. Deinde sumatur in A E recta A C $\propto f$, ducaturque C G eidem



æqualis ac ipsi A B parallela, descriptaque ^{per punctum G at-}

Mm 2

que ^{per ea}

que ^{que in}

Corol. ad

II & 12, nec non cap. ult. lib. primi hujus tradita sunt.

que Asymptotis A E, A B Hyperbolâ G D: dico curvam G D esse Locum quæsitum.

¹ per 3
primi hu-
jus.

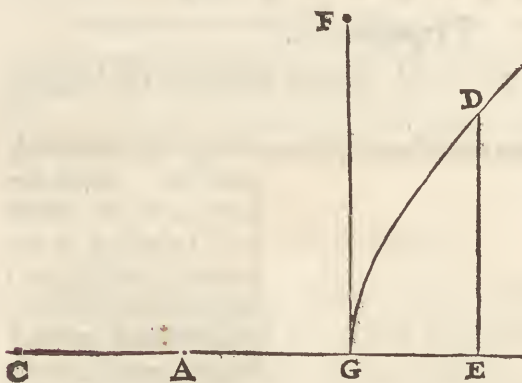
Sumatur enim in eadem curva punctum utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A B parallelâ, erit ex natura Hyperboles ¹ rectangulum A E D rectangulo A C G, hoc est, quadrato ex A C æquale. Hinc, cum A E sit assumpta pro incognita quantitate x , si E D vocetur y , erit $yx \propto ff$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

T H E O R E M A XII.

Propositio 13.

Si æquatio sit $\frac{lyy}{g} \propto xx - ff$, erit Locus quæsitus linea Hyperbolica.

Aut enim si ipsi g æqualis est aut inæqualis, & si æqualis sit, erit superior æquatio eadem ac si esset $yy \propto xx - ff$ (quod semel monuisse sufficiat). Ac



facile apparet, si ipsius x initium immutabile sit punctum A, atque eadem x se in linea A E ab A versùs E indefinitè extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo A G F,

quòd si tam A G quàm A C fiant $\propto fcognitæ$, ac G F sumatur $\propto G C$, centroque A, & transversâ diametro C G ipsi G F lateri recto sive parametro æquali describatur ² Hyperbola, ut G D, eandem curvam G D fore Locum quæsitum.

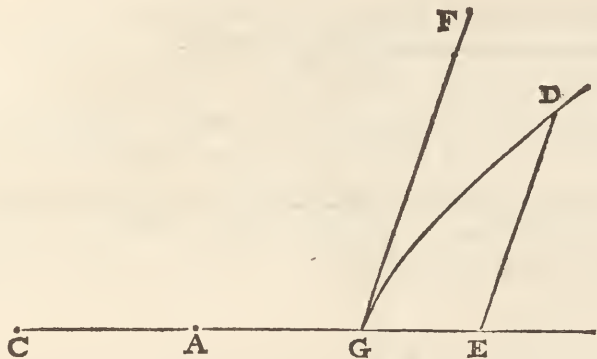
² per ea
quæ cap.
ult. primi
hujus
ostensa
sunt.

³ per 10
primi hu-
jus.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi F G parallelâ, erit ³ ex natura Hyperboles, cum C G & G F supponantur æquales, quadratum ex D E æquale rectangulo C E G.

CEG. Hinc, si DE vocetur y , cum ex hypothesi CE seu AE + AC sit $\infty x + f$, & GE five AE - AG $\infty x - f$, erit $yy \infty xx - ff$.

At verò si l & g sint inæquales, apparet esse, ut $ladg$, ita $xx - ff$ ad yy . Ac proinde si juxta ea, quæ supra exposita sunt, non jam parameter GF diametro transversæ CG æqualis, sed ut $ladg$,



ita fiat transversa diameter CG ad GF parametrum, cæteraque omnia, ut supra, eodem modo quæsito erit satisfactum.

Est enim ¹ ex natura Hyperboles, ut FG ad GC, ita ED ^{per 10} quadratum ad CEG rectangulum, hoc est, ut g ad l , ita yy ad ^{primi hujus.} $xx - ff$, unde, revocando proportionem ad æqualitatem, erit $lyy \infty gxx - gff$. Ac proinde si utraque hujus æqualitatis pars dividatur per g , erit $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

THEOREMA XIII.

Propositio 14.

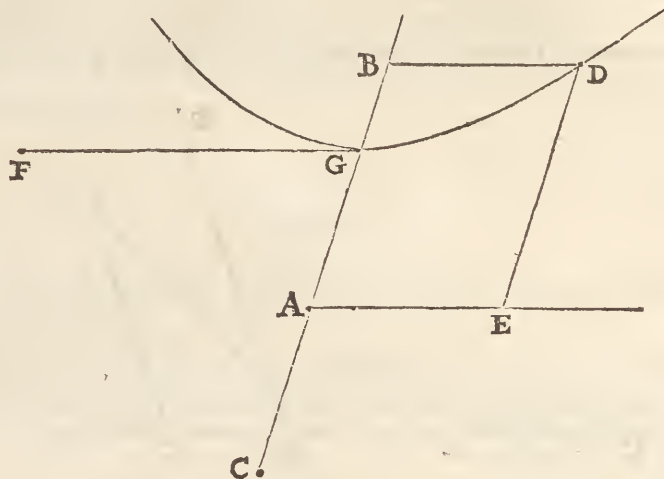
Si æquatio sit $yy - ff \infty \frac{lxx}{g}$, erit Locus quæsitus Hyperbola.

Ad cujus determinationem specificam esto in apposita figura ipsius x initium immutabile punctum A, ipsaque x se ab A versùs

M m 3

E in

E in linea AE indefinite extendere intelligatur, sitque angulus quem y & x comprehendunt æqualis angulo EAG aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Deinde, cum sit ut $ladg$, ita $yy - ff$



ad xx , statim apparet, si tam AG quam AC sumantur æquales f cognitz, fiatque ut $ladg$, ita CG ad GF (quæ quidem GF sit ipsi AE parallela), ac postea centro A, transversâ diametro CG, & parametro GF Hyperbola describatur GD, eandem curvam GD fore Locum quæsitum.

Sumpto namque in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AG, ac DB ipsi AE parallelâ, si eadem DE vocetur y , erit CB, hoc est, $DE + AC$, $\infty y + f$; & BG, sive $DE - AG$, $\infty y - f$, ideoque CBG rectangulum $\infty yy - ff$. Dein cum ¹ ex natura Hyperbolæ sit ut CG ad GF, hoc est, ex hypothesi ut $ladg$, ita rectangulum CBG ad DB sive AE quadratum, id est, ita $yy - ff$ ad xx : erit $g yy - gff \infty lxx$, hoc est, $yy - ff \infty \frac{lxx}{g}$:
¹ per 10 primi hujus.

Quod demonstrandum, determinandumque erat.

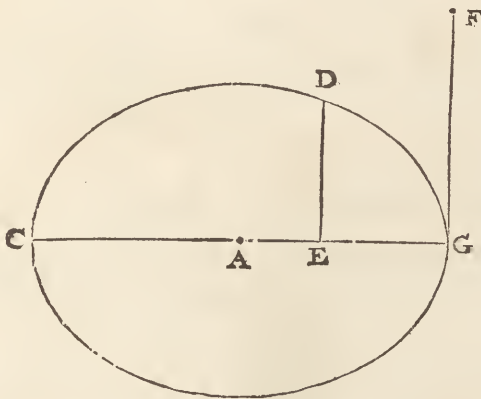
THEOREMA XIV.

Propositio 15.

Si æquatio sit $\frac{yy}{g} \propto ff - xx$, erit Locus quæsitus Ellipsis.

At verò cum Ellipseos species, quæ latera rectum & transversum æqualia habet, angulumque quem ordinatim applicatæ faciunt ad diametrum rectum, sit Circuli circumferentia: palam fit casu proposito Locum quæsitum etiam Circuli peripheriam esse posse.

Hinc ad prædicti Loci determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem x se per lineam A E ab A versùs E indeterminatè extendere intelliga-



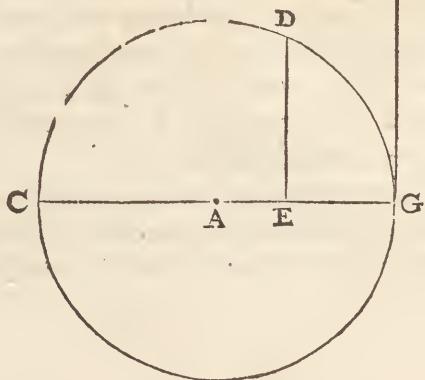
tur, sitque angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo A G F. Porrò cum sit ut l ad g , ita $ff - xx$ ad yy : faciliè apparet, si tam A G quàm A C sumantur æquales f cognitæ; fiatque ut l ad g , ita C G ad G F, ac centro A, transversâ diametro C G, & parametro G F Ellipsis describatur G D C eandem curvam G D C fore Locum quæsitum.

Sum-
14 primi

hujus, ut & per ea que circa finem cap. 4 ejusdem lib. tradita sunt.

Sumpto namque in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque

¹ per 13
primi hu-
jus.



DE ipsi FG paral-
lelâ, erit ¹ ex natu-
ra Ellipseos ut FG
ad GC, ita ED qua-
dratum ad CEG re-
ctangulum. Hoc est,
si ED vocetay, cum
CE sit $\infty f + x$, &
EG $\infty f - x$, erit ut
g ad l, ita yy ad ff
 $-xx$, unde $\frac{lyy}{g} \infty ff$
 $-xx$. Quoderat pro-
positum.

Cæterùm liquidò
constat, si CG & GF
æquales fuerint, hoc
est, si l ∞g , quòd
etiam CEG rectan-
gulum quadrato ED

æquale sit futurum. Ideoque si angulus C G F sit rectus, curvam
G D C fore Circuli circumferentiam.

*Regula universalis, modusque reducendi
omnes æquationes, quæ ex convenienti ope-
ratione existunt, cum Locus vel Hyperbo-
la est, vel Ellipsis, vel Circuli circumfe-
rentia, ad aliquem quatuor casuum præ-
cedentium, totidem Theorematibus jam
explicatorum.*

Si contingat, ut quantitatum incognitarum non mo-
dò una in alteram, aut non tantùm alterutra vel utra-
que in se ducta, sed & vel hæc, vel illa, vel utraque u-
nius præterea dimensionis in æquatione reperitur,
constituens planum cum alia, sive cognitâ sive incogni-
tâ,

tâ, five etiam cum partim cognita & partim incognita quantitate: oportet loco incognitarum, aut illarum alterutrius, assumere alias vel aliam, quæ ipsas excedunt, vel ab iis deficiunt; idque integrâ quantitate, quæ cum illa incognita, in cuius locum nova non est assumpta, planum constituere reperitur, si nempe incognitarum neutra in se ipsam in æquatione ducta sit; sin secus, dimidio tantum ejus quantitatis, quæ planum constituit cum incognita, in cuius locum assumptio facta est, casu utroque juxta differentem affectionem per signa + vel —, quæ præfiguntur iisdem illis quantitativibus, ita ordinatis, ut cum incognitis ab eadem æquationis parte reperiantur. Quo facto, & reiterato, ubi opus, si ad formulas Parabolæ, capite secundo expositas perventum non fuerit, ad aliquem quatuor suprapositorum casuum reducta erit æquatio, ac proinde ipsi convenientem Locum determinare ac describere, per ea quæ superius explicata sunt, haud difficile erit.

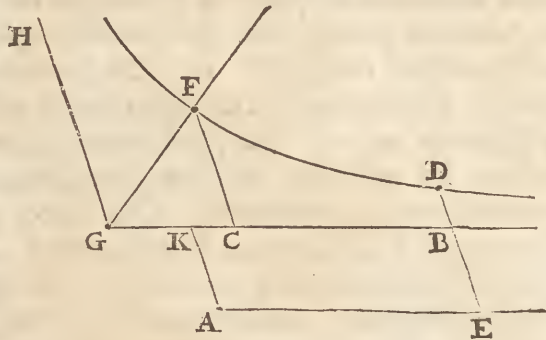
*Exemplum reductionis æquationum ad formulam
Theorematis XI.*

Si æquatio fuerit $yx - cx + by \propto ee$: assumpto $z \propto y - c$, & $v \propto x + b$, erit $z + c \propto y$, & $v - b \propto x$.

Vnde si secundum Regulam ubique in æquatione loco y substituatur $z + c$, erit $z + c \cdot x - cx + bz + bc \propto ee$, five $z + bz + bc \propto ee$; ac rursus si loco ipsius x subrogetur $v - b$, erit $z v - bz + bz + bc \propto ee$, id est, $z v \propto ee - bc$. aut, (si loco termini $ee - bc$, qui in totum cognitus est, scribatur ff) $z v \propto ff$. Et apparet æquationem reductam esse ad formulam Theorematis XI, ac proinde Locum quæsitum esse Hyperbolam.

Ad cujus specificam determinationem ac descriptionem esto in apposita figura initium ipsius x immutabile punctum A , atque eadem x per rectam AE indefinitè se extendere intelligatur, sitque angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAK .

aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Deinde, quoniam z est $\propto y - c$, si y supra lineam $A E$ exurgere concipiatur, ducenda quoque est supra eandem recta $K B$ ipsi $A E$ parallela; ita ut pars rectæ $A K$, omniumque ipsi æquidistantium, inter $A E$ & $K B$ intercepta, veluti $A K$, æquetur c cognitæ. Porro, quoniam v est $\propto x + b$, producenda est ipsa $B K$ per K usque ad G , ita ut $K G$ sit



$\propto b$. Quo facto, erit G centrum ipsius curvæ, & GB una Asymptotum, eritque altera ipsi AK parallela, ut GH . Vnde si juxta Regulam prædicti Theorematis XI in recta GB sumatur GC æqualis c cognitæ, ducaturque CF eidem GC æqualis, ac parallela rectæ AK vel GH , atque per punctum F , Asymptotis GB & GH , sive Asymptoto GB atque ad axem GF , Hyperbola describatur FD : dico curvam FD fore Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D , ductâque DE ipsi AK parallelâ, quæ secet rectam KB in B , si eadem DE vocetur y , erit DB sive $DE - EB \propto y - c$, id est, z . Est autem & GB sive $AE + GK \propto x + b$, hoc est, v . Quare cum ex natura Hyperboles rectangulum GBD æquetur GC quadrato, erit quoque $z v \propto ff$. aut restitutis $y - c$ loco ipsius z , & $x + b$ in locum ipsius v , atque $ee - cb$ loco ff , erit $yx - cx + by - cb \propto ee - cb$, hoc est, $yx - cx + by \propto ee$. Quoderat propositum.

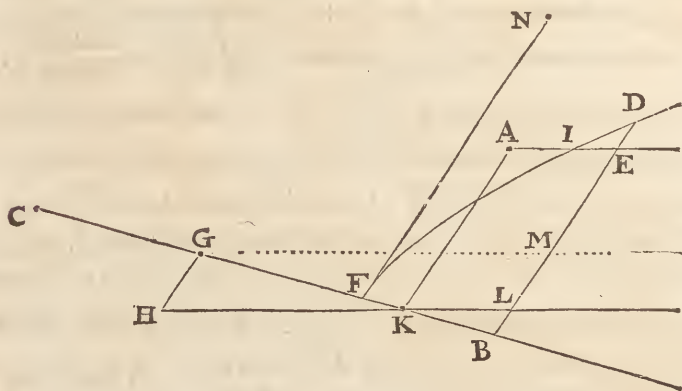
*Exempla reductionis æquationum ad formulam
Theorematis XII & XIII.*

Si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty \frac{fxx}{a} + ex + dd$, assumpto
 $z \infty y + \frac{bx}{a} + c$, erit $y \infty z - \frac{bx}{a} - c$, eoque substituto in locum
 ipsius y , atque ejusdem quadrato loco yy , sublatisque iis, quæ se
 invicem destruant, erit $zz - \frac{bbxx}{aa} - \frac{2bcx}{a} - cc \infty \frac{fxx}{a} + ex + dd$.
 Et factâ congruâ transpositione, $z \infty \frac{fxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} + ex + \frac{2bcx}{a}$
 $+ dd + cc$, hoc est, multiplicatis omnibus æquationis terminis
 per aa , productoque diviso per $fa + bb$; ut quantitas xx absque
 fractione remaneat, fiet $\frac{aaxx}{fa+bb} \infty xx + \frac{aaex+2abcx}{fa+bb} + \frac{aadd+aacc}{fa+bb}$.

Deinde assumpto $v \infty x + \frac{aae+2abc}{2fa+2bb}$, ut terminus quoque æ-
 quationis, in quo x unius dimensionis reperitur, planè evanescat,
 habebitur $x \infty v - \frac{aae-2abc}{2fa+2bb}$. Quo substituto in locum ipsius x ,
 atque ejusdem quadrato loco xx , ablatisque iis quæ se invicem
 tollunt, reducta erit æquatio ad formulam requisitam. At verò ut
 vitetur prolixior operatio loco $\frac{aae+2abc}{fa+bb}$ scribatur $2h$, ita ut
 fiat æquatio $\frac{aaxx}{fa+bb} \infty xx + 2hx + \frac{aadd+aacc}{fa+bb}$. Tum assum-
 pto $v \infty x + h$ seu $x \infty v - h$, eoque substituto loco x in æquatio-
 ne, ac ejusdem quadrato loco xx : erit $\frac{aaxx}{fa+bb} \infty vv - hb +$
 $\frac{aadd+aacc}{fa+bb}$. Vnde apparet, ante omnia hîc esse consideran-
 dum, utrum hb sit majus quàm $\frac{aadd+aacc}{fa+bb}$, an contra. si enim
 majus sit, erit casus Theorematis XII; sin contra, erit casus
 Theorematis XIII. Ponatur itaque primò majus, ac proinde æ-
 quatio formulæ Theorematis XII. Et constat exinde Locum
 quæsitum Hyperbolam esse.

Ad cujus peculiarem determinationem esto in apposita figura
 ipsius x initium immutabile A punctum, eademque x in linea A E
 ab A versùs E indefinitè se extendere intelligatur; sitque angulus

quem x & y comprehendunt æqualis angulo EAK aut ipsius ad duos rectos supplemento. Porro quoniam $z \propto y + c + \frac{bx}{a}$, si y supra lineam AE exurgere intelligatur, ut ED , ducenda primùm est infra eandem AE recta KL ipsi AE parallela; ita ut pars rectæ AK omniumque ipsi æquidistantium inter prædictas AE & KL intercepta, veluti AK , EL , &c. æquetur c cognitæ. Deinde productâ LK usque ad H , ita ut KH sit $\propto b$, ideoque HL indefinitè sumpta $\propto x + b$, hoc est, z , ducatur per H punctum recta HG ipsi AK parallela, ita ut KH ad HG sit, ut a ad b . Quo facto, si per puncta G & K recta agatur linea GKB , habebunt omnium ipsi AK parallelarum partes, quæ inter KL & KB in-

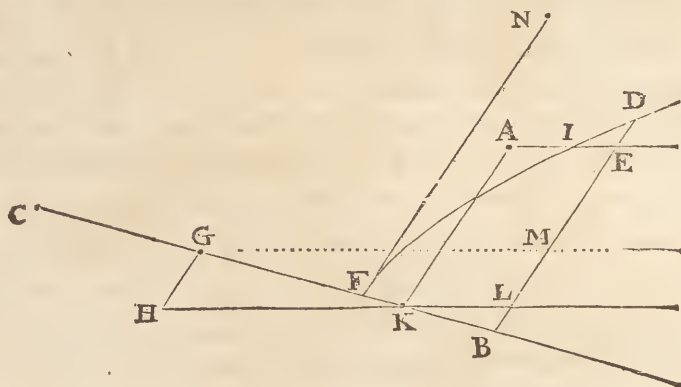


tercipiuntur (ut, exempli gratiâ, LB), ad partes ipsius KL , inter easdem parallelas & punctum K interceptas (ut, verbi gratiâ, LK) eandem rationem, quæ est inter b & a : hoc est, erit ut a ad b , ita KL ad LB , cum utraque sit ut KH ad HG . Ideoque cum KL sive AE indefinitè sumpta sit $\propto x$, erit LB , ut & quælibet ipsi parallela, inter KL & KB intercepta, $\propto \frac{bx}{a}$: ac proinde omnis linea supra AE rectam exurgens, quæ possit esse y incognita, ad rectam KB producta, veluti DB sive $DE + EL + LB$ erit $\propto y + c + \frac{bx}{a}$, hoc est, z . Vnde apparet, juxta Regulam lineam GB sumendam esse pro Hyperbolæ diametro, ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi AK seu DB parallelæ: eritque ejusdem

dem Hyperbolæ centrum G punctum. At verò cum ex ante dictis triangulum KHG omnino sit cognitum, utpote lateribus KH & HG anguloque ad H sub iisdem comprehenso notis, erit quoque cognita ratio lateris KH ad KG, hoc est, ipsius GM (quæ per G ipsi KL æquidistans intelligitur) ad GB, quæ sit ut a ad i . Quare cum GM seu HL indefinitè sit v , GB quoque indefinitè concepta, hoc est, quælibet diametri portio, inter centrum & ordinatim applicatas intercepta, erit $\frac{iv}{a}$. Cujus quidem interceptæ quadratum cum juxta formulam Regulæ unum æquationis terminum constituat, per multiplicationem aut divisionem, vel per utramque ita reducatur æquatio, ut in eadem quoque idem quadratum, nimirum $\frac{iivv}{aa}$ inveniatur. Quod quidem ut certâ methodo fiat, prædictum quadratum rectæ GB indefinitè conceptæ, hoc est, $\frac{iivv}{aa}$, dividatur per æquationis terminum, in quo v sive simpliciter, sive aliâ fractione affectum invenitur, ac per inventum quotientem tota æquatio multiplicetur. ut in supra posito exemplo, si $\frac{iivv}{aa}$ dividatur per vv , fiet quotiens $\frac{ii}{aa}$. quare tota æquatio multiplicanda est per ii , productumque dividendum per aa , ita ut fiat $\frac{iixx}{fa+bb} \propto \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd+iicc}{fa+bb}$. Vnde si juxta Regulam semi-latus transversum fiat GF vel GC $\propto \sqrt{\frac{iibb-iidd-iicc}{aa} - \frac{iivv}{fa+bb}}$, atque ratio transversi lateris CF ad rectum FN, ut ii ad $fa+bb$, & iisdem lateribus, diametroque ac centro jam inventis Hyperbole describatur FD, secans rectam AE vel KA productam in I: dico curvam ID esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AK parallelâ, eâque productâ ut fecet rectam KL in L, & diametro GB occurrat in B, si eadem DE vocetur y , erit ex ante dictis DB $\propto z$. Est autem, ut jam annotatum, GB $\propto \frac{iv}{a}$, atque ex hypothesi GF seu GC $\propto \sqrt{\frac{iibb-iidd-iicc}{aa} - \frac{iivv}{fa+bb}}$, ideoque BC $\propto \frac{iv}{a} + \sqrt{\frac{iibb-iidd-iicc}{aa} - \frac{iivv}{fa+bb}}$, ac BF $\propto \frac{iv}{a} -$

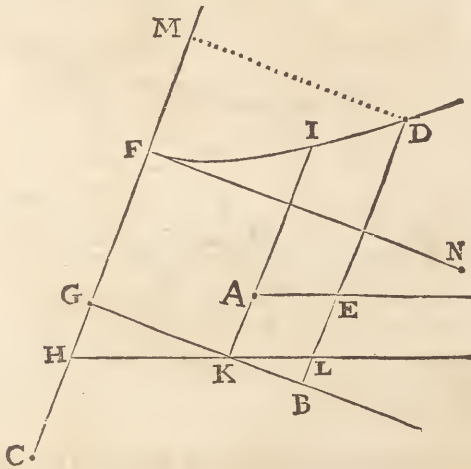
$\sqrt{\frac{iibb - iidd - iicc}{aa} \cdot \frac{fa + bb}{fa + bb}}$, & rectangulum CBF $\propto \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd + iicc}{fa + bb}$. Hinc cum ex natura Hyperboles NF ad FC, seu $fa + bb$ ad ii sit, ut DB quadratum, hoc est, zz , ad prædictum rectangulum CBF: erit $\frac{iixz}{fa + bb} \propto \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd + iicc}{fa + bb}$,



Multiplicetur jam utrinque per aa , & dividatur per ii , eritque $\frac{aaxz}{fa + bb} \propto vv - hb + \frac{aadd + aacc}{fa + bb}$. Dein restituto $x + b$ loco v , exurget $\frac{aaxz}{fa + bb} \propto xx + 2hx + \frac{aadd + aacc}{fa + bb}$; itemque $\frac{eaa + 2bca}{fa + bb}$ loco $2b$, exurget $\frac{aaxz}{fa + bb} \propto xx + \frac{eaa + 2bcax}{fa + bb} + \frac{aadd + aacc}{fa + bb}$. Porro multiplicatis omnibus per $fa + bb$ iisque divisus per aa , habebitur $zz \propto \frac{fxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} + ex + \frac{2bcx}{a} + dd + cc$. Ac denique restituto $y + \frac{bx}{a} + c$ loco ipsius z , expunctisque quæ se invicem destruant ac omnibus ritè ordinatis, fiet $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \propto \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Quod erat propositum.

At verò ponatur secundò hb minus quàm $\frac{dada + ccaa}{fa + bb}$, & supra posita æquatio $\frac{iixz}{fa + bb} \propto \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{dadi + ccii}{fa + bb}$, quæ, multiplicatis omnibus ejusdem terminis per $fa + bb$, ac producto diviso

diviso per *ii*, factâque decenti transpositione, eadem cum sequenti $zz - dd - cc + \frac{fabh + bbbh}{aa} \propto \frac{iivv}{aa}$ multip. per $fa + bb$ ac divis. per *ii*, id est, $\propto \frac{favv + bbvv}{aa}$. erit formulæ Theorematis XIII, unde Locus quæsitus iterum erit Hyperbola. Ad cujus specificam determinationem & descriptionem, postquam ut in præcedenti figura ductæ sunt lineæ AE, AK, KL, KH, HG, & GKB: erit quidem, ut supra, G centrum, at verò non erit diameter in linea GK, sed, juxta Regulam, in linea HG producta

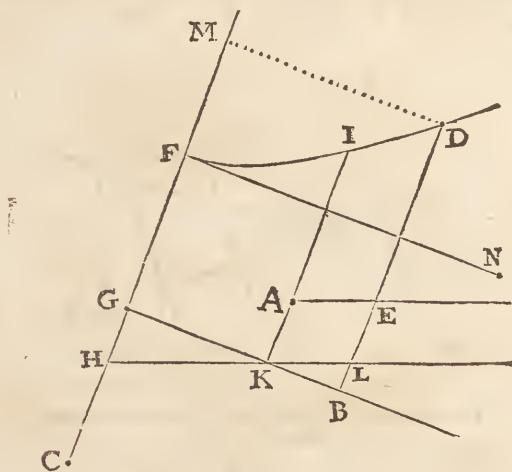


ad partes G, ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi GKB parallelæ, eritque juxta eandem Regulam dimidium transversæ diametri, nempe GF vel GC, æquale $\sqrt{dd + cc - \frac{fabh - bbbh}{aa}}$, ac ratio diametri ad parametrum ut $fa + bb$ ad *ii*. Quare si fiat, ut $fa + bb$ ad *ii*, ita CF ad FN, quæ quidem FN ipsi GKB æquidistans sit, erit FN parameter: ac proinde si centro G transversâ diametro CF & parametro FN Hyperbola describatur FD, secans ipsam AE vel KA productam in I, erit ID curva Locus quæsitus.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DB ipsi AK (sive GF), & DM ipsi GB parallelâ, si

E D

ED vocetur y , erit, ut supra, DB five MG $\propto z$, & BG five DM $\propto \frac{iv}{a}$. Cumque sit GF vel GC $\propto \sqrt{dd+cc} - \frac{fabb-bbbb}{aa}$, erit CM $\propto z + \sqrt{dd+cc} - \frac{fabb-bbbb}{aa}$, & MF $\propto z - \sqrt{dd+cc} - \frac{fabb-bbbb}{aa}$, ac propterea rectangulum CMF $\propto zz - dd - cc + \frac{fabb+bbbb}{aa}$. Est autem DM quadratum $\propto \frac{ii vv}{aa}$.



Quare cum ex natura Hyperboles sit ut FN ad FC, ita DM quadratum ad CMF rectangulum, hoc est, ut ii ad $fa+bb$, ita $\frac{ii vv}{aa}$ ad $zz - dd - cc + \frac{fabb+bbbb}{aa}$: erit quoque $zz - dd - cc + \frac{fabb+bbbb}{aa} \propto \frac{favv + bbvv}{aa}$. Et multiplicatis omnibus per aa , ac divisus per $fa+bb$, factâque transpositione cogniti termini, erit $\frac{aa zz}{fa+bb} \propto vv - hb + \frac{ddaa + ccaa}{fa+bb}$. Dein restitutus $x+h$ loco v , $\frac{aaa + 2bca}{fa+bb}$ loco z , atque $y + \frac{bx}{a} + c$ loco ipsius z , expunctisque quæ se invicem destruant ac omnibus ritè ordinatis, fiet $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \propto \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

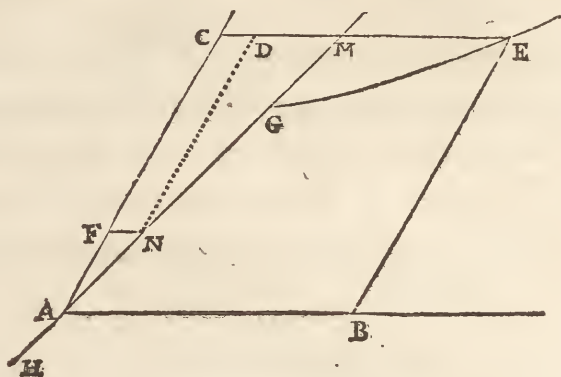
Si æquatio sit $xx + 2ay \propto \frac{2bxy}{a}$, aut $xx - \frac{2byx}{a} + 2ay \propto 0$.

Assumpto juxta Regulam $v \propto x - \frac{by}{a}$, erit $x \propto v + \frac{by}{a}$, eoque substituto in locum ipsius x , ejusdemque quadrato loco xx , sublatifque iis quæ se invicem destruant, erit $vv - \frac{bbyy}{aa} + 2ay \propto 0$. & factâ congruâ transpositione, $vv \propto \frac{bbyy}{aa} - 2ay$; hoc est, multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa , productoque diviso per bb , $\frac{aavy}{bb} \propto yy - \frac{2a^3y}{bb}$. Dein, assumpto $z \propto y - \frac{a^3}{bb}$, habebitur $y \propto z + \frac{a^3}{bb}$, eoque substituto in æquatione loco ipsius y , atque ipsius quadrato loco yy , erit $\frac{aavy}{bb} \propto zz - \frac{a^5}{b^4}$, sive $zz - \frac{a^5}{b^4} \propto \frac{aavy}{bb}$. Qui quidem casus est Theorematis 13ⁱⁱⁱ, ac proinde Locus quæsitus erit Hyperbola.

Ad cujus itaque peculiarem determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, eademque x in linea A B ab A versùs B indefinitè sese extendere intelligatur, sitque angulus, quem x & y comprehendunt, æqualis angulo A B E. Deinde, quoniam ex antedictis facillè colligitur Hyperbolam hoc casu & similibus ita esse describendam, ut ordinatim ad ejus diametrum applicatæ sint ipsi A B æquidistantes, ductâ rectâ A C ipsi B E parallelâ, quoniam $v \propto x - \frac{by}{a}$, ducenda porrò est recta

A M; ita ut omnium ipsi A B parallelarum partes, inter A C & A M interceptæ, veluti C M, ad partes ipsius A C inter A & dictas parallelas interceptas, veluti A C, eandem rationem habeant, quæ est inter b & a ; hoc est, ut sit quemadmodum a ad b , ita A C ad C M. Vnde si A C seu B E indefinitè sumpta vocetur y , erit C M & similes $\propto \frac{by}{a}$, ac describendæ Hyperboles diameter in dicta A M. Porrò, quoniam $z \propto y - \frac{a^3}{bb}$, si ab A C auferatur A F $\propto \frac{a^3}{bb}$: erit F C indefinitè sumpta $\propto z$, & ductâ F N ipsi A B parallelâ, N centrum. Ac proinde, cum ratio ductæ N D ipsi F C æquidistantis & æqualis ad rectam D M aliarumque similibus sit cognita, nempe ut a ad b , sitque itidem notus angulus

NDM, sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto angulo ABE, erit quoque ratio ND ad NM aliarumque similium nota, quæ sit ut a cognitæ ad e itidem cognitam.



Hinc cum ND seu FC indefinitè sumpta exprimatur per z , erit NM itidem indefinitè sumpta $\propto \frac{e^z}{a}$, cujus quidem quadratum cum juxta formulam Regulæ unum æquationis terminum constituere debeat, multiplicanda est superscripta æquatio per ee , productumque dividendum per aa , ita ut fiat $\frac{eez^2}{aa} - \frac{eeat}{b^2} \propto \frac{eevv}{bb}$. Quo peracto, si juxta Regulam semi-latus transversum fiat NG vel NH $\propto \frac{eaa}{bb}$, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut ee ad bb ; iisdemque lateribus ac diametro, & centro jam inventis Hyperbole describatur GE: dico curvam GE esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti E, ductâque EB in angulo ABE, dato vel assumpto æquali, nec non EC ipsi AB parallelâ, secante diametrum AM in M; si eadem EB, hoc est, AC, vocetur y , erit, ut supra, $CM \propto \frac{by}{a}$, ac proinde ME, sive $AB - CM$, $\propto x - \frac{by}{a}$, hoc est, v . Est autem, ut superius annotatum, $NM \propto \frac{e^z}{a}$, atque ex hypothesei NG seu NH $\propto \frac{eaa}{bb}$, ideoque $HM \propto \frac{e^z}{a} + \frac{eaa}{bb}$, & $MG \propto \frac{e^z}{a} - \frac{eaa}{bb}$, ac proinde rectangulum

gulum HMG $\propto \frac{eezx}{aa} - \frac{eeat}{b^2}$: hinc cum ex natura Hyperboles sit ut latus rectum ad transversum, sive ut bb ad ee , ita ME quadratum, id est, vv , ad prædictum rectangulum HMG : erit $\frac{eevv}{bb} \propto \frac{eezx}{aa} - \frac{eeat}{b^2}$, & multiplicatis omnibus terminis per aa , factoque per ee diviso, $\frac{aavv}{bb} \propto zz - \frac{as}{b^2}$. Dein restituto $y - \frac{a^2}{bb}$ in locum ipsius z , exurget $\frac{aavv}{bb} \propto yy - \frac{2a^2y}{bb}$; adeoque, multiplicatis omnibus per bb , factoque diviso per aa , habebitur $vv \propto \frac{bbyy}{aa} - 2ay$. Denique restituto $x - \frac{by}{a}$ in locum ipsius v , expunctisque iis quæ se invicem destruant, atque omnibus ritè ordinatis, fiet $xx + 2ay \propto \frac{2byx}{a}$. Quod fuit propositum.

PROBLEMA II.

Propositio 16.

Datis duobus punctis tertium invenire, à quo ad bina data ductæ rectæ lineæ dato differant intervallo, locumque determinare ac describere, quem quæsitum punctum contingat.

Sint data duo puncta A & B, oporteatque invenire tertium, utputa C, ita nempe ut ductæ rectæ CA, CB differant dato intervallo FG seu AD.

Quoniam in quæstione angulus datus non est, quò facilior sit operatio, assumatur rectus, ideoque à puncto C in rectam AB, quæ data puncta conjungit, productam, si opus fuerit, intelligatur demissa perpendicularis, ut CE; tum, suppositis, juxta Regulam, AE & EC incognitis atque indeterminatis, assumptum angulum AEC comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, earum prior, nimirum AE, vocetur x , ac posterior, nempe EC, nominetur y , ipsa autem AB, seu datorum punctorum cognita distantia, vocetur a , & data FG sive AD exprimat per b . Hinc cum BE sive (si punctum B cadat inter A & E) AE — AB, aut (si punctum E inter A & B cadat) AB — AE sit

O o z

 $\propto x$

$\propto x = a$, & $AC \propto \sqrt{xx+yy}$, at $BC \propto \sqrt{xx-2ax+aa+yy}$;
fitque $AC - AD \propto BC$: æquatio erit

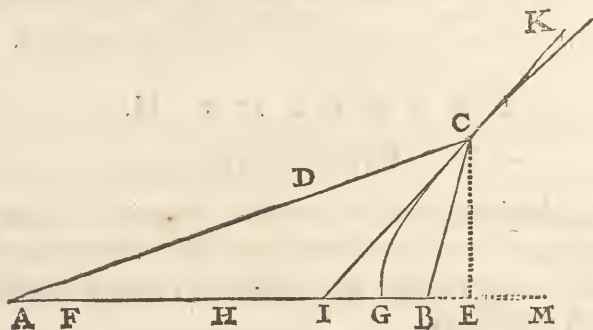
$\sqrt{xx+yy} - b \propto \sqrt{xx-2ax+aa+yy}$, factâque operatio-
ne convenienti, ut utraque æquationis pars à signo radicali libe-
retur, & transpositis transponendis, erit

$$4bbyy \propto 4aa xx - 4bb xx - 4a^3 x + 4bbax + a^4 - 2bbaa + b^4.$$

Vnde factâ divisione per $4aa - 4bb$ habebitur $\frac{bbyy}{aa-bb} \propto xx -$

$ax + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. Deinde assumpto juxta Regulam $v \propto x - \frac{1}{2}a$,
erit $x \propto v + \frac{1}{2}a$, ideoque substituto hoc valore in locum ipsius x ,
atque ejusdem quadrato loco xx , expunctisque iis quæ se invi-

Fig. I.



cem destruunt, erit $\frac{bbyy}{aa-bb} \propto vv - \frac{1}{4}bb$. Qui quidem casus est

Theorematis 12^{mi} hujus libri, ac proinde Locus quæsitus erit
Hyperbola. Cumque v assumpta sit pro $x - \frac{1}{2}a$, si ab A versùs E
sumatur $AH \propto \frac{1}{2}a$, erit, juxta Regulam, H centrum, & semi-
diameter transversa (puta HG ab una, & HF ab altera parte,) $\propto \sqrt{\frac{1}{4}bb}$, id est, $\frac{1}{2}b$; ita ut diameter transversa FG (quæ qui-
dem, ob applicatam CE ad diametrum HE perpendicularem,
transversus quoque axis est,) sit $\propto b$. Ratio autem transversæ
diametri ad parametrum, seu quadrati transversæ ad quadratum
secundæ diametri, erit ut bb ad $aa - bb$. Vnde per ea quæ libri
primi capitibus secundo & ultimo exposita sunt Hyperbolam
ipsam describere haud difficile erit. Porro cum quadratum semi-
diame-

diametri transversæ sit $\infty \frac{1}{4}bb$, erit quadratum semi-secundæ diametri $\infty \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. Atqui cum FB sive $BH + HF$ sit $\infty \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, & BG sive $BH - HG$ $\infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, erit quoque rectangulum FBG $\infty \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$, nempe ∞ quadrato semi-secundæ diametri, sive, ut Veteres loquebantur, æquale quadranti figuræ ad transversum axem factæ: ideoque puncta A & B ea ipsa sunt, quæ vulgo oppositarum Hyperbolarum Foci sive Umbilici nuncupantur. Vnde apparet, ex præmissis rectè inferri, quæ sequuntur.

Corollarium I.

Si ab assumpto utcunque in Hyperbola puncto ad utrumque Umbilicum rectæ ducantur, earum major minorem longitudine transversi axis superabit.

Etiamsi veritas præcedentis Corollarii ex antedictis omnino constet, cum tamen illud à Veteribus, Recentioribusvè, quòd sciam, non nisi per multas ambages longâque difficilium Theorematum concatenatione hæctenus demonstratum sit: id ipsum hîc demonstratione unicâ, & quidem breviori satisque simplici, aliter ostendisse non inutile fortè judicabitur.

Esto igitur Hyperbola quælibet GC , cujus centrum H , transversus axis FG , atque Umbilici A & B , adeoque rectangulum FBG ut & GAF semi-secundæ diametri quadrato æquale. Ductis autem ab assumpto quolibet curvæ puncto C ad puncta A & B rectis CA , CB , ordinatim ad axem applicetur CE , fiatque ut HF ad HA , ita HE ad HM , ideoque AHE rectangulo æquale rectangulum FHM . Vnde cum sit ², ut HFq ad GAF , ita FEq ad CEq : erit quoque, per compos. rationis contrariam, ut HFq ad $(HFq + GAF$, id est ³, ad) HAq ; ita FEq ad $FEq + CEq$; adeoque ⁴ ut HFq ad HAq , ita $(HFq + FEq$ sive ⁵) HEq ad $HAq + FEq + CEq$. Est autem quoque ⁶, ut HFq ad HAq , ita HEq ad HMq . Quocirca ⁷ HMq ∞ $HAq + FEq + CEq$; hoc est, addito utrinque HFq seu HGq , erit

¹ per 16
sexti.
² ex hypoth. &
per 10 primi hujus.
³ per 6
secundi.
⁴ cum sit
ut una
antece-
dentium
ad unam
conseq.
ita om-
nes ante-
cedentes
ad
omnes

O o 3.

HM

conseq. per 12 quinti. ⁵ per 6 secundi. ⁶ ex constructione & per 22 sexti. ⁷ per 9 & 11 quinti.

$${}^3 \text{ per } 6 \text{ secundi. } HMq + \begin{cases} HFq \\ \text{seu } \infty \\ HGq \end{cases} \begin{cases} HAq \\ \text{seu } + \\ HBq \end{cases} (HFq + FE G, \text{i.e.}') HEq, + CEq.$$

Hinc additis vel sublatiis ab utraque æquationis parte æqualibus,

$${}^2 \text{ per } 4 \text{ secundi. } \text{nimirum } \begin{cases} FHM \\ \text{seu } \\ GHM \end{cases} \text{ bis ab una, \& } \begin{cases} AHE \\ \text{seu } \\ BHE \end{cases} \text{ bis ab altera parte; } \\ \text{erit } {}^2$$

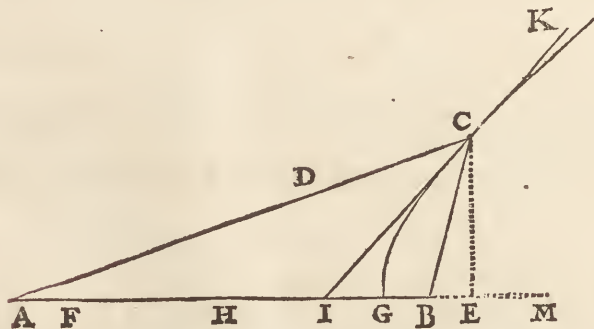
${}^3 \text{ per } 47 \text{ primi. } FMq \infty (AEq + CEq, \text{id est } {}^3) ACq$; itemque 4
 ${}^4 \text{ per } 7 \text{ secundi. } GMq \infty (BEq + CEq, \text{id est } {}^4) BCq$. Cumque propterea
 ${}^5 \text{ per } 47 \text{ primi. } FM \text{ sit } \infty AC$; & $GM \infty BC$; sitque ipsarum FM & GM dif-
 ferentia FG , manifestum est ipsarum quoque AC & BC majorem superare minorem, ejusdem FG , nempe axis transversi, longitudine. Quod demonstrandum erat.

Corollarium 2.

Ductis à quolibet Hyperbolæ puncto ad utrumque Umbilicum rectis, quæ angulum iis comprehensum bifariam dividit linea curvam in eodem puncto contingit; & conversim.

Si enim quæ angulum ACB bifariam dividit recta ICK non contingat Hyperbolam in C puncto, secet eandem, si fieri potest,

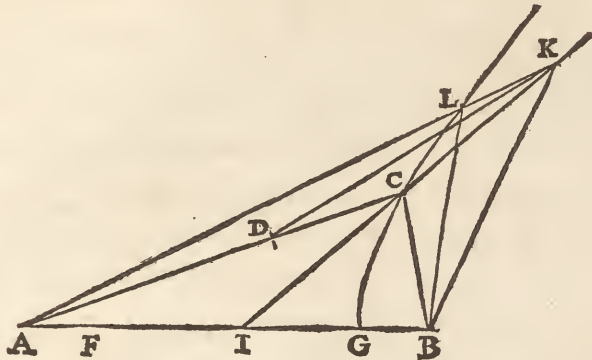
Fig. 1.



atque ita saltem aliquo sui puncto, veluti K , intra Hyperbolam sit.
 Tum

Tum ductis KB, KD, & KA (quarum posterior Hyperbolam fecet in L, à quo ad B ducta sit BL), cum in triangulis DCK, BCK latera DC, CK lateribus BC, CK utrumque utrique,

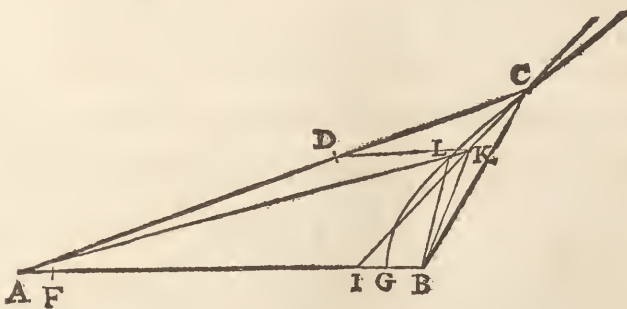
Fig. II.



circa æquales angulos, æqualia sint, erit quoque basis DK ba-
 si BK æqualis. Cumque porrò, juxta Corollarium præcedens,
 AL ipsam LB, ideoque & AK rectas BL, LK, simul sumptas,
 superet intervallo AD; sitque BK, ideoque & KD, ipsis BL,
 LK simul sumptis minor: per consequens AK eandem KD ma-
 jori longitudine quàm est AD excedet, id est, ipsa AK binis re-

Cume-
 nim ex
 hypothe-
 si anguli
 ACI &
 BCI æ-
 quales
 ponan-
 tur, erunt
 quoque
 anguli
 ACK &
 BCK,
 qui ipsis
 sunt
 deinceps,
 per 13
 primi æ-
 quales.

Fig. III.



ctis KD, DA simul sumptis major erit. Quod cum absurdissi-
 mum sit², non fecat Hyperbolam recta ICK, sed eandem con-
 tingit in C puncto. Cumque non possit in eodem puncto C alia
 recta,

² per 20^o primi.

per 3
Corol. 6
primi hu-
jus.

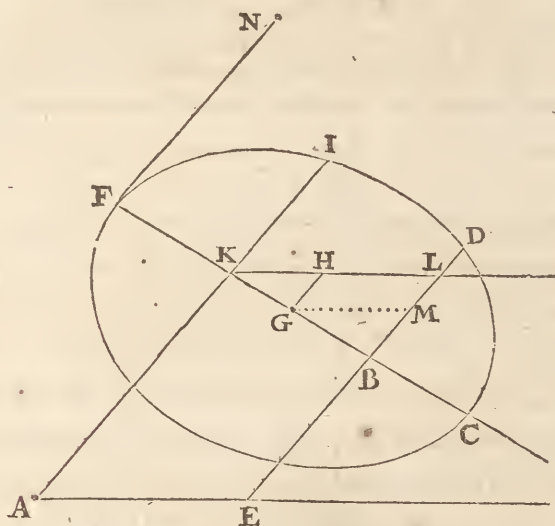
recta Hyperbolam contingere quàm I C K¹, manifestum est con-
versim, eam, quæ Hyperbolam in C contingit, angulum quoque
A B C bifariam dividere.

*Exemplum reductionis æquationum ad formulam
Theorematis XIV.*

Si æquatio sit $y + \frac{2bxy}{a} - 2cy\infty - xx + dx + kk$, assum-
pto juxta Regulam $z \infty y - c + \frac{bx}{a}$, hoc est, $y \infty z + c - \frac{bx}{a}$,
coque substituto in locum ipsius y , ejusdemque quadrato loco yy ,
sublatisque iis, quæ se invicem destruant, erit $zz - \frac{bbxx}{aa} + \frac{2bcx}{a}$
 $- cc \infty - xx + dx + kk$. id est, factâ decenti transpositione,
erit $zz \infty - xx + \frac{bbxx}{aa} + dx - \frac{2bcx}{a} + cc + kk$ five
 $zz \infty \frac{-aaxx + bbxx}{aa} + \frac{dax - 2bcx}{a} + cc + kk$. Supposito au-
tem a majore quàm b , ac multiplicatis omnibus æquationis ter-
minis per aa , productoque diviso per $aa - bb$, ut quantitas xx
absque fractione inveniatur, erit $\frac{aaaxx}{aa - bb} \infty - xx + \frac{daax - 2bacx}{aa - bb}$
 $+ \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Iam verò si facilioris operationis gratiâ loco
 $\frac{daax - 2bacx}{aa - bb}$ substituatur $2h$: erit æquatio $\frac{aaaxx}{aa - bb} \infty - xx + 2hx$
 $+ \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$, aut $\frac{aaaxx}{aa - bb} + xx - 2hx \infty \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$.

Hinc si juxta Regulam assumatur $v \infty x - h$ five $x \infty v + h$, atque
hoc in locum ipsius x , ejusque quadratum loco xx substituatur,
ac expungantur quæ se invicem destruant, habebitur $\frac{aaaxx}{aa - bb}$
 $+ vv - hb \infty \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Hoc est, factâ decenti transpositio-
ne, erit $\frac{aaaxx}{aa - bb} \infty - vv + hb + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Atque ita appa-
ret æquationem esse reductam ad formulam Theorematis XIV,
ideoque Locum quæsitum aut Ellipsin aut Circuli circumferen-
tiam existere. Rursus verò facilioris operationis ergo loco
 $\frac{aa}{aa - bb}$ scribatur $\frac{l}{g}$, & loco $hb + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$ scribatur ff , ita
ut æquatio sit talis $\frac{lxx}{g} \infty ff - vv$.

Ad peculiarem autem prædicti Loci determinationem ac descriptionem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem & se in linea AE ab A versùs E indefinitè extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAK vel ejusdem ad duos rectos complemento. Hinc quoniam $z \propto y - c + \frac{bx}{a}$, si y supra lineam AE exsurgere intelligatur, ducenda quoque est supra ipsam recta KL eidem parallela, ita ut pars rectæ AK omniumque ipsi æquidistantium inter prædictas AE & KL intercepta, veluti AK,



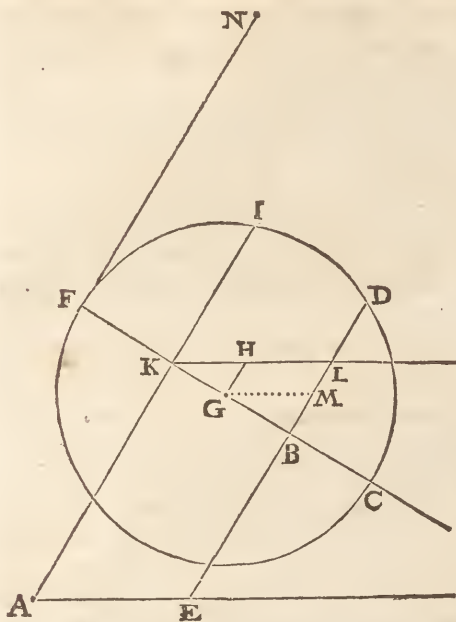
EL, &c. æquetur c cognitæ: ac deinde per punctum K infra rectam KL ducenda est recta KB in tali angulo, ut rectarum omnium ipsi AK parallelarum partes, quæ inter KL & KB interceptiuntur (veluti LB) ad partes ipsius KL, inter easdem parallelas & punctum K interceptas (ut verbi gratiâ LK) eandem habeant rationem, quæ est inter b & a , hoc est, ut sit uti a ad b , ita KL ad LB. Atque ita positâ KL sive AE, indefinitè sumptâ, $\propto x$, LB omnesque ipsi parallelæ inter KL & KB interceptæ erunt $\frac{bx}{a}$. Vnde ex prædictis constat diametrum fore in recta KB,

ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi A K æquidistantes. Iam verò cum v sit $\propto x - b$, à recta KL sive A E auferenda est KH, ita ut eadem KH sit $\propto b$, ideoque HL indefinitè quoque sumpta $\propto x - b$ seu v . Deinde per punctum H ducenda est HG ipsi A K parallela, secans inventam diametrum in G, eritque idem intersectionis punctum G quæsitæ Ellipseos centrum. Porro quoniam similibus triangulorum KHG & KLB nota est ratio lateris KH ad HG sive KL ad LB, ut & angulus sub iisdem lateribus contentus, utpote æqualis angulo dato vel assumpto E A K, erit quoque nota ratio lateris KH ad latus KG sive KL ad KB, quæ ponatur ut a cognitæ ad e itidem cognitam. Ideoque cum HL sive GM, quæ ipsi HL parallela intelligitur, indeterminatè sumpta sit $\propto v$, erit GB, similiter indeterminatè sumpta, hoc est, quælibet diametri portio inter centrum & quamlibet ordinatim applicatam intercepta, $\propto \frac{e^v}{a}$. Cujus quidem interceptæ quadratum cum in formula Theorematis XIV ultimum æquationis terminum constituat, æquatio supra exposito modo ita reducatur, ut terminus ejus extremus fiat $\frac{e^e v^v}{a a}$, id quod factum erit, si singuli æquationis termini multiplicentur per ee , productumque dividatur per $a a$. inde enim sequenti modo se habebit æquatio $\frac{leez}{gaa} \propto \frac{ffe}{aa} - \frac{eev}{aa}$. Hinc si juxta Regulam semi-latus transversum GF vel GC fiat $\propto \sqrt{\frac{eff}{aa}}$, id est, $\frac{ef}{a}$, & ratio transversæ lateris CF ad rectum latus FN, ut lee ad gaa , iisdemque lateribus, ac diametro, centroque, modò inventis, Ellipsis describatur FDC, secans rectam A E vel A K productam in I: erit curva IDC Locus quæsitus.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi A K parallelâ, ac si opus sit productâ ut fecet rectas KL & KB in L & B, si eadem DE vocetur y , erit DB, hoc est, DE $- EL + LB \propto y - c + \frac{bx}{a}$ seu z . Est autem ut jam annotatum est $GB \propto \frac{ev}{a}$, atque ex constructione GF vel GC $\propto \frac{ef}{a}$, ideoque $FB \propto \frac{ef}{a} + \frac{ev}{a}$, & $BC \propto \frac{ef}{a} - \frac{ev}{a}$, ac rectangulum FBC $\propto \frac{ffec}{aa} - \frac{eev}{aa}$. Hinc cum ex natura Ellipsis sit ut NF ad FC, hoc est,

ut

ut gaa ad lee , ita DB quadratum, hoc est, zz ad prædictum re-
ctangulum $FB C$; erit $\frac{leezz}{gaa} \propto \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$, id est, multiplica-



tis omnibus per aa ,
ac divisus per ee , erit
 $\frac{lxx}{g} \propto ff - vv$, ideo-
que restituto $x - h$
loco v , atque $hb +$
 $\frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$ loco ff ,
ut & $\frac{aa}{aa - bb}$ loco $\frac{l}{g}$,
erit $\frac{aaxx}{aa - bb} \propto hb +$
 $\frac{ccaa + kkaa}{aa - bb} - xx +$
 $2bx - hb$, hoc est,
 $\frac{aaxx}{aa - bb} + xx - 2bx$
 $\propto \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Por-
rò restituto
 $\frac{daa - 2bca}{aa - bb}$ loco $2b$,
fiet $\frac{aaxx}{aa - bb} + xx$
 $-\frac{daax + 2bcax}{aa - bb} \propto$

$\frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$, id est, factâ multiplicatione per $aa - bb$ ac divi-
sione per aa , erit $zz + xx - \frac{bbxx}{aa} - dx + \frac{2bcx}{a} \propto cc + kk$.

Ac denique loco z factâ restitutione ipsius $y - c + \frac{bx}{a}$, deletisque
iis quæ se invicem tollunt, ac omnibus ritè ordinatis, obtinebi-
tur $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy \propto -xx + dx + kk$. Quod determi-
nandum ac demonstrandum erat.

Notandum porrò hîc est, quòd si angulus $A K B$ foret rectus,
ac proinde ordinatim applicatæ, ut $DB, KI, &c.$ ad diametrum
 $K B$ perpendiculares, ac simul $F N$ æqualis $F C$, prædictam cur-
vam fore Circulum, quemadmodum ex elementis perspicuum est.

PROBLEMA III.

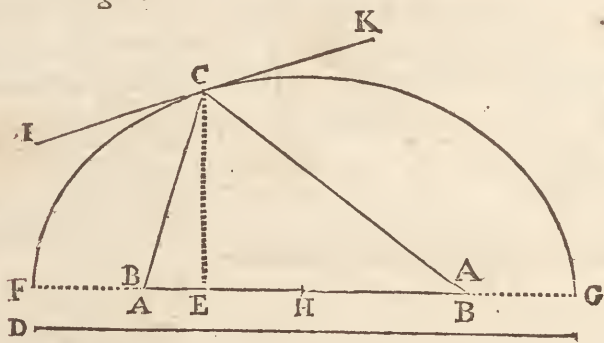
Propositio 17.

Datis duobus punctis tertium invenire, à quo ad bina data ductæ rectæ lineæ simul sumptæ datæ longitudini æquales sint; locumque determinare ac describere, quem quæsitum punctum contingat.

Sint data duo puncta A & B, oporteatque invenire tertium, utputa C; ita nempe, ut ductæ rectæ CA, CB simul sumptæ æquales sint datæ rectæ lineæ D.

Quoniam in quæstione angulus datus non est, quò facilius sit operatio, assumatur rectus; ideoque à puncto C in rectam AB, quæ data puncta conjungit, productam, si opus fuerit,

Fig. I.



intelligatur demissa perpendicularis, ut CE. Tum suppositis, juxta Regulam, AE & EC incognitis atque indeterminatis assumptum angulum rectum AEC comprehendentibus tanquam cognitis ac determinatis, earum prior, nimirum AE, vocetur x , ac posterior, nempe EC, nominetur y ; ipsa autem AB seu datorum punctorum distantia cognita appelletur a , & data D exprimatur per b . Hinc cum BE sive (si punctum E cadat inter A & B) $AB - AE$, aut (si punctum B inter A & E cadat) $AE - AB$ sit $\propto a - x$; atque AC $\propto \sqrt{xx + yy}$; & CB $\propto \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$; sitque $D - AC \propto CB$: æquatio erit $b - \sqrt{xx + yy} \propto \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$; factâque operatio-

ne decenti, ut utraque æquationis pars à signo radicali liberetur, & transpositis transponendis, erit

$$4bbxx - 4aaxx - 4bbax + 4a^3x \propto b^4 - 2bbaa + a^4 - 4bbyy,$$

hoc est, factâ divisione per $4bb - 4aa$, erit

$$xx - ax \propto \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa - \frac{bbyy}{bb - aa}.$$

Assumpto deinde juxta Re-

gulam $v \propto x - \frac{1}{2}a$, erit $x \propto v + \frac{1}{2}a$, eâque substitutâ in locum ipsius x , ejusdemque quadrato loco xx , expunctisque iis quæ se

$$\text{invicem destruant: erit } xx \propto \frac{1}{4}bb - \frac{bbyy}{bb - aa}, \text{ sive } \frac{bbyy}{bb - aa} \propto \frac{1}{4}bb$$

— xx . Qui quidem casus est Theorematis 13ⁱⁱⁱ, ac proinde Locus quæsitus Ellipsis. Cumque v assumpta sit pro $x - \frac{1}{2}a$, si ab A versus E sumatur $AH \propto \frac{1}{2}a$: erit, juxta Regulam, H centrum, & semi-diameter transversa (velut HF ab una, & HG ab altera parte) $\propto \frac{1}{2}b$; ita ut diameter transversa FG (quæ quidem, ob applicatam CE ad eandem perpendicularem, transversus quoque axis est,) sit $\propto b$. Ratio autem transversæ diametri ad parametrum, seu quadrati transversæ ad quadratum secundæ diametri erit, ut bb ad $bb - aa$. Vnde per ea, quæ Capitibus tertio & ultimo libri primi exposita sunt, quæsitæ Ellipsis facillimè describetur. Porro cum quadratum semi-diametri transversæ sit $\propto \frac{1}{4}bb$, erit quadratum semi-secundæ diametri $\propto \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$. Atqui cum FB seu GA sit $\propto \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$, & BG seu AF $\propto \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, erit quoque rectangulum FBG seu GAF $\propto \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$, nempe æquale quadrato semi-secundæ diametri, sive, ut Veteres loquebantur, æquale quadranti figuræ ad transversum axem factæ. Ideoque puncta A & B ea ipsa sunt, quæ vulgò Ellipseos Foci sive Umbilici nuncupantur. Vnde apparet, ex præmissis rectè inferri, quæ sequuntur.

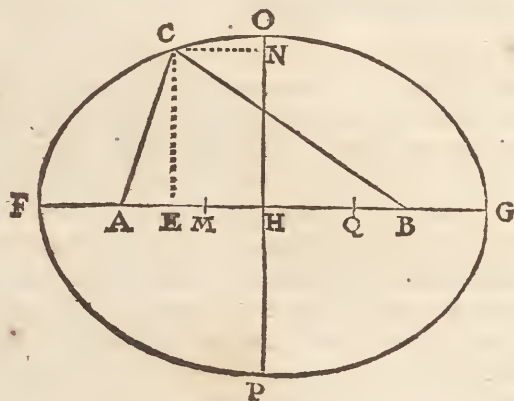
Corollarium I.

Quæ à quolibet in Ellipsi puncto ad utrumque Umbilicum rectæ ducuntur, simul sumptæ transverso axi æquales sunt.

Quemadmodum autem in Hyperbola superius demonstratum est, ductarum CA, CB differentiam transverso axi FG æquari, ita & hîc earum aggregatum eidem transverso axi æquale esse ostendetur, nempe, si non per additionem & compositionem,

ut ibidem factum est, sed per subductionem & divisionem argumentatio instituitur. Quod ipsum tamen, adhibitâ nonnullâ mutatione, elegantius quoque in hunc modum absolvi posse videtur.

Esto quælibet Ellipsis FCG , cujus centrum H , axis major FG , minor OP , atque Umbilici A & B ; adeoque rectangulum FBG ut & GAF æquale quadrato semi-secundæ diametri HO .



Ductis ab assumpto quolibet curvæ puncto C rectis CA , CB , ordinatim ad utrumque axem applicentur CE , CN ; & fiat ut HF ad HA , ita HE ad HM , adeò ut ¹ AHE rectangulo æquale sit rectangulum FHM ; sumaturque HQ æqualis ipsi HE . Hinc cum sit ² ut HFq ad HAq , ita HEq ad HMq , erit quoque per conversionem rationis ut HFq ad GAF seu ³ HOq , id est ⁴, ut CNq sive HEq ad ONP , ita idem HEq ad EMQ ; ac proinde ⁵ æqualia sunt rectangula ONP & EMQ . Quocirca cum ⁶ HMq unà cum EMQ , id est, cum ONP rectangulo, æquale sit HEq ; sitque & HFq ⁷ æquale quadratis rectorum HA & $(HO^3$ seu ⁸) CE unà cum rectangulo ONP : erunt $HMq + ONP + HFq$ æqualia $HEq + HAq + CEq + ONP$. Ac proinde si utrinque auferatur ONP rectangulum, remanebunt bina quadrata rectorum HM & HF seu HG simul æqualia tribus quadratis rectorum HE , HA seu HB , & CE . Hinc HO æquale est GAF rectang. ex hypoth. ⁹ per 5 secundi.

¹ per 16
sexti.

² per 22
sexti.

³ ex hy-
pothesi.

⁴ per 13
primi hu-
jus ejus-
que Co-
rol. 1

⁵ per 9
quinti.

⁶ per 5
secundi.

⁷ per 5
secundi.

⁸ quippe
quadr. ex

⁹ per 5
secundi.

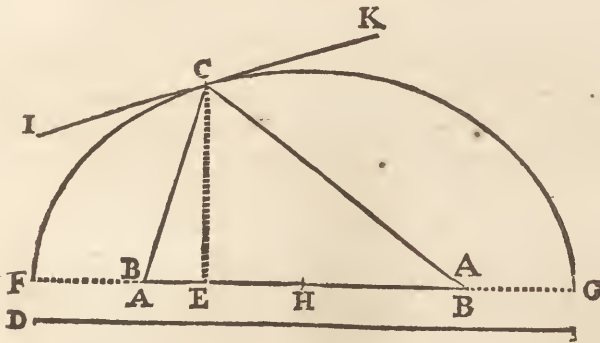
Hinc additis ablativè ab utraque æquationis parte æqualibus, nimirum FHM seu GHM bis ab una, & AHE seu BHE bis ab altera parte: erit FMg æquale $(AEg + CEg; id est^2,) ACg$: ^{1 per 7} itemque GMg æquale $(BEg + CEg, id est^4,) BCg$. Cum-^{secundi.} ^{2 per 47} que propterea recta FM æquetur ipsi AC, & GM ipsi BC: erit ^{primi.} ipsarum AC & BC aggregatum transverso axi FG æquale. ^{3 per 4} Quod demonstrandum erat. ^{secundi.} ^{4 per 47} ^{primi.}

Corollarium 2.

Ductis à quolibet Ellipseos puncto ad utrumque Umbilicum rectis, si per idem illud punctum altera recta agatur, æquales cum utraque ducta angulos constituens, eadem curvam in dicto puncto contingit; & contra.

Si enim recta ICK ita ducta, ut æquales sint anguli ACI, BCK, non contingat Ellipsin in C puncto, fecet eandem, si fieri potest, in C & K. Deinde producta AC ad L, ita ut tota AL

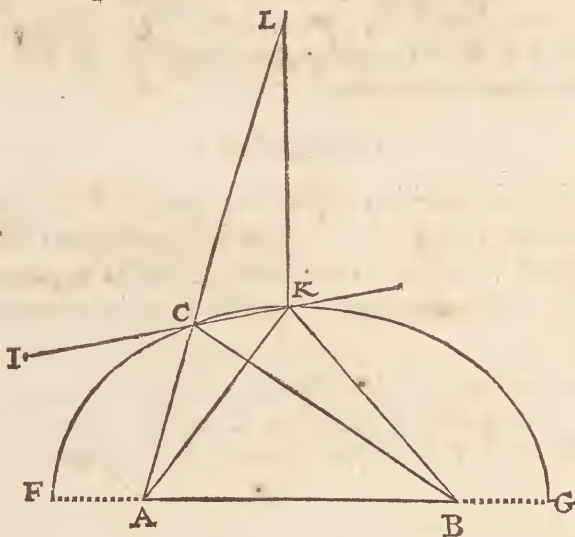
Fig. 1.



axi FG, ideoque ⁵ adjecta CL ipsi CB æqualis sit, jungan- ^{5 per Co-} tur AK, BK, LK. Cum igitur, in triangulis LCK, BCK ^{vol. 1 huc} latera LC, CK lateribus BC, CK, utrumque utrique, circa ^{jus.} æquales angulos, æqualia sint, erit quoque basis LK basi BK æqualis. At verò cum punctum K in Ellipsi supponatur, erunt, ^{pès}

per Corollarium præcedens, rectæ AK, KB, hoc est, latera AK, KL simul sumpta transverso axi FG, ideoque & basi AL

Fig II.



¹ per 20
primi.
² per 17
primi bu-
jus.

æqualia, quod est absurdum ¹. Non igitur secat recta ICK Ellipsin, sed eandem contingit in C puncto. Cumque non possit in eodem puncto C alia recta Ellipsin contingere quàm ICK ², manifestum est, è contra quoque eam, quæ Ellipsin in C contingit, efficere angulos ACI, BCK æquales.

CAPVT IV.

*Regula universalis inveniendi ac determinandi
loca qualibet plana & solida.*

Iam verò his omnibus ita præmissis, pro generali Regula concludi potest, æquationes omnes, quæ in indagacione Locorum prædicto modo obvenire atque obtingere possunt, ita ut in iis neutra quantitatum incognitarum in se ducta, neque factum sub iisdem ad solidum

lidum excurrat, sed aut quadratum, aut planum non excedat, ex aliqua sequentium formularum constare, vel ad earundem aliquam Methodo jam explicatâ reduci posse: nimirum,

$$1^{\text{mò}} \left\{ \begin{array}{l} y \propto \frac{bx}{a}, \text{ five, quod idem est, } y \propto x: \text{ cum supponi} \\ \text{possit esse } a \propto b. \\ y \propto \frac{bx}{a} \text{ \& } c, \text{ vel } y \propto c - \frac{bx}{a}. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Signum \&} \\ \text{significat} \\ + \text{ vel } - \end{array}$$

Sed hîc notandum, fieri etiam posse, ut per operationem quantitatum incognitarum altera evanescat, alteraque sola notæ alicui quantitati æqualis remaneat, sicut superiùs expositum est.

$$2^{\text{dò}} \left\{ \begin{array}{l} yy \propto dx, \text{ aut conversim } dy \propto xx. \\ yy \propto dx. ff, \text{ aut conversim } dy. ff \propto xx. \\ zz \propto dx, \text{ aut conversim } dy \propto vv. \\ zz \propto dx. ff, \text{ aut conversim } dy. ff \propto vv. \end{array} \right.$$

$$3^{\text{tiò}} \left\{ \begin{array}{l} yy \propto \frac{lx}{g}. ff. \\ zz \propto \frac{lx}{g}. ff. \\ yy \propto \frac{lv}{g}. ff. \\ zz \propto \frac{lv}{g}. ff. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{five etiam} \\ yx \propto ff. \\ zx \propto ff. \\ yv \propto ff. \\ zv \propto ff. \end{array}$$

Supponendo ubique y & x esse quantitates indeterminatas ac primò conceptas; at verò z esse quantitatem assumptam, & quæ composita sit ex y & aliâ quâdam quantitate, vel in totum cognitâ, vel cui etiam altera incognita primùm concepta, nimirum x , permixta sit; atque v quidem assumptam quoque esse, sed eo casu constare solummodo ex x & aliâ quantitate cognitâ, absque ulla ipsius y incognitæ quantitatis permixtione: aut contra v esse $\propto x$ & aliâ quâdam quan-

titate, cui & y incognita permixta esse possit atque eoque quidem casu z ex y & aliâ quantitate in totum cognitâ constare.

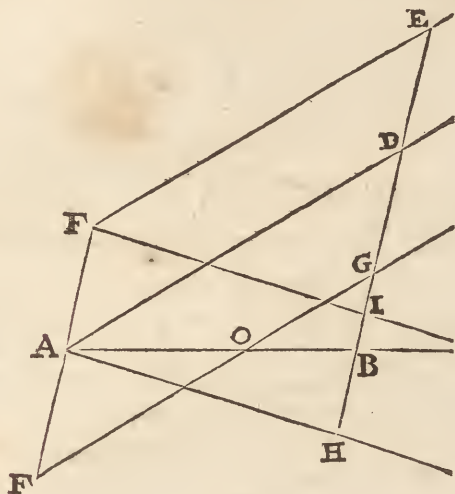
Et si æquatio similis sit alicui formularum sub N° 1. comprehensarum, erit Locus quæsitus Linea Recta; sub N° 2. Parabola; & sub N° 3. secundùm signorum angulorumque varietatem vel Hyperbola, vel Ellipsis, vel Circulus.

Vt autem prædicta Loca specificè determinentur sive prædictæ Lineæ in plano Geometricè describantur, sciendum est, aliquod debere præsupponi punctum, ut & aliquam lineam à quo exordium sumat, & per quam indefinitè se extendere intelligatur altera incognitarum quantitatum primò conceptarum; itemque angulum quendam esse præsupponendum, quem dictæ quantitates incognitæ constituent in puncto, in quo sibi invicem junctæ intelliguntur.

Sit itaque in apposita figura, ut & in sequentibus omnibus, prædictum punctum A, dictaque linea AB, à quo, & per quam quantitas x se indefinitè extendere concipiatur; atque angulus ABE, quem faciunt quantitates y & x , in puncto B sibi invicem junctæ.

Et primo quidem casu, cùm Locus quæsitus est Linea recta, nimirum, æquatione existente $y \propto x$ vel $y \propto \frac{bx}{a}$, ipsum A punctum erit initium dictæ lineæ, atque ut eadem specificè describatur sumendum est in linea AB punctum utcunque, exempli gratiâ, B, ac per illud ductâ rectâ, velut HBE, ita ut angulus ABE præsupposito vel concepto angulo sit æqualis, si in eadem recta sumatur punctum, veluti D; ita ut AB & BD sint æquales, vel ut AB sit ad BD, sicut a ad b , atque ex A per punctum D ducatur recta AD: erit eadem AD indefinitè extensa Locus quæsitus. At si in æquatione inveniatur quoque terminus c , ac ipse quidem signo + affectus sit, ducenda est e puncto A ad eandem partem lineæ AB quàm est punctum E, aut si signo — adficiatur ab altera parte, recta AF ipsi HBE parallela atque æqualis c cognitæ; ductâque FE vel FG, quæ rectam AB secet in O, ipsi AD parallela: erit FE vel OG indefinitè producta Locus quæsitus.

Sed si æquatio sit $y \propto c - \frac{bx}{a}$, in dicta linea HBE sumendum est ab altera parte lineæ AB, quâ datus vel assumptus angulus ABE existit, punctum H, ita ut AB ad BH sit, sicut a ad b ; ductâque AH, ex prædicto puncto F ab opposita parte lineæ AB, quâ sum-

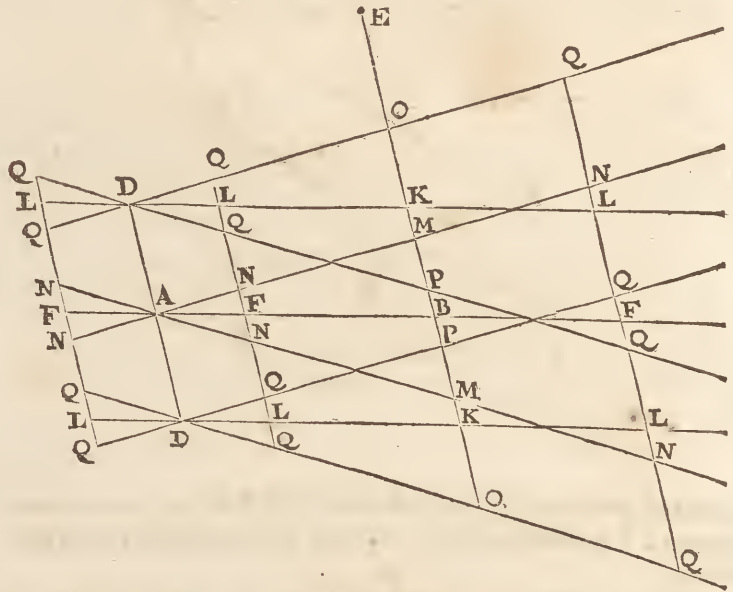


ptum est punctum H, ducenda est FI ipsi AH parallela: eritque eadem FI producta donec cum linea AB coincidat Locus quaeritus.

Etenim, cum tam AB quàm BD sit $\propto x$, aut AB ad BD ab una, ut & AB ad BH, ab altera parte, sit ut a ad b ; ac proinde BD vel BH $\propto \frac{bx}{a}$: itemque, cum AF seu DE vel DG ut & HI sint æquales & cognitæ: erit BE sive BD + DE $\propto \frac{bx}{a} + c$, & BG sive BD - DG $\propto \frac{bx}{a} - c$, ac BI sive HI - HB $\propto c - \frac{bx}{a}$. Unde cum punctum B sumptum sit utcumque, eadem erit de omnibus aliis, in linea AB, prædictisvè locis, assumptis punctis demonstratio: atque ita patet prædictas lineas AD, FE, FG, & FI esse Loca quaerita. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

At verò si juxta formulas sub N^o. 2 exhibitas Locus quæsitus sit linea Parabolica, erit

I. Primo casu, quando æquatio est $yy \propto dx$, ipsa AB Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel assumpto angulo ABE æquales, atque ejusdem vertex A punctum.



II. Secundo casu positâ æquatione $yy \propto dx \cdot ff$, manente diametro in eadem lineâ AB, sumptâque, ut in sequenti figura, $AF \propto \frac{ff}{d}$, erit ejusdem vertex in puncto F. Quod quidem punctum F, si uterque terminus tam dx quàm ff signo $+$ sit affectus, ab altera parte puncti A, quâ est punctum B, sumendum est; sed si vel terminus dx , vel terminus ff signo $-$ affectus sit, ab eadem parte puncti A, quâ est punctum B, sumi debet: & quidem si terminus dx signo $+$ affectus sit, ab A versùs B Parabola describenda est; sin contra terminus dx signo $-$ affectus fuerit, in contrariam partem, ab F nempe versùs A, describi debet.

At

At si æquatio sit $z z \propto dx$, vel $z z \propto dx ff$, cum z non sit quantitas primò concepta sed assumpta, vel assumpta erit pro $y \wp c$, vel pro $y \wp \frac{bx}{a}$, vel denique pro $y \wp \frac{bx}{a} \wp c$.

III. Et si quidem z assumpta sit pro $y \wp c$, qui sit casus tertius, ducenda est per punctum A recta AD ipsi BE parallela atque $\propto c$; ita ut, si z assumpta sit pro $y - c$, punctum D cadat ad eandem partem lineæ AB, quam conceptus est angulus ABE: Et, si z sit assumpta pro $y + c$, punctum D è contra ad alteram partem lineæ AB cadat. Deinde ductâ DK ipsi AB parallela, erit in eadem DK Parabolæ diameter, & D vertex, si æquatio sit $z z \propto dx$.

IV. Sed si sit $z z \propto dx. ff$, qui sit quartus casus, sumptâ DL $\propto \frac{ff}{d}$, erit vertex punctum L; quod quidem pro terminorum dx & ff per + vel - affectione eodem modo, ut supra de puncto F dictum est, vel citra vel ultra D punctum cadet; uti & vel in hanc vel in illam partem, prout terminus dx signo + vel - adfectus fuerit, ipsa Parabola, ut supra notatum est, describi debet: eritque omnibus & singulis prædictis quatuor casibus Parameter $\propto d$.

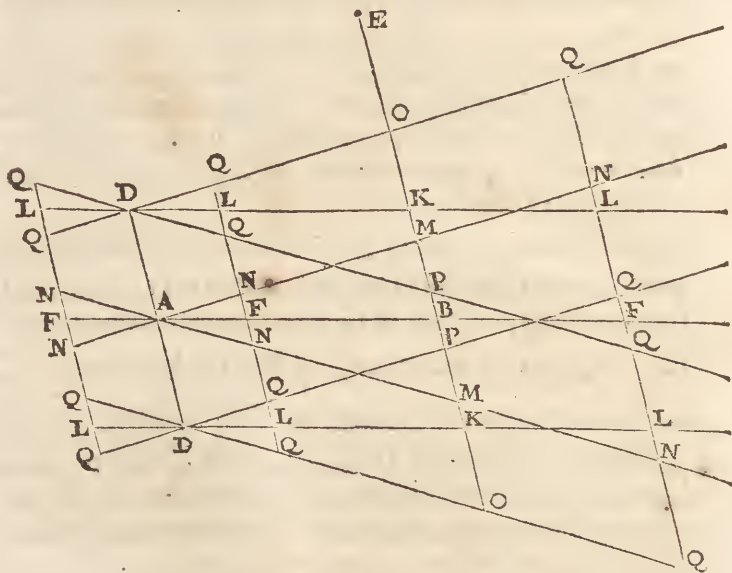
V. Si verò z assumpta sit pro $y \wp \frac{bx}{a}$, qui casus sit quintus, sumpto in linea BE puncto M, ita ut sit AB ad BM, sicut a ad b , (quod quidem punctum M sumendum est ab eadem parte lineæ AB, quâ conceptus est angulus ABE, si habeatur $-\frac{bx}{a}$, sed ab altera parte, si habeatur $+\frac{bx}{a}$) ducenda est per puncta A & M recta AM: eritque AM eo casu Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos angulo AME æquales, & si in æquatione terminus ff deficiat aut nullus sit, erit vertex in puncto A.

VI. Sin minus, qui sit casus sextus, ductis per puncta F & L rectis FL, quæ interfecent supra dictas diametros AM vel iis in directum adjunctas in punctis N: erit vertex in N, vel citra, vel ultra A punctum cadens, prout termini dx & ff in æquatione vel signo + vel signo - affecti fuerint; uti & vel in hanc vel in illam partem ipsa Parabola pro varia termini dx affectione, ut supra notatum est, describenda erit.

Si denique z assumpta sit pro $y \text{ ḡ } \frac{bx}{a} \text{ ḡ } z$, ductâ, ut modò expositum fuit, $AD \propto c$, ex puncto D (quod pro quantitatis c per signum $+$ vel $-$ affectione, ut supra, vel ab hac, vel ab illa parte lineæ AB sumi debet) ducenda est recta DO ipsi

VII. AM , quæ est ad eandem partem, parallela, si termini $\frac{bx}{a}$ & c eodem signo sint affecti, qui casus sit septimus.

VIII. At si diverso, qui sit casus octavus, ducenda est recta DP parallela ipsi AM , quæ est ab adversa parte lineæ AB , atque eadem DO vel DP sumenda est pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos angulo DOE vel DPE æquales: eritque vertex punctum D , si terminus ff in æquatione deficiat.



IX. Sin minùs, qui sit casus nonus, erit idem vertex ipsarum DO vel DP diametrorum & linearum LFL communis interseçtio, videlicet punctum Q , quodque iterum pro terminorum dx & ff per signum $+$ vel $-$ affectione vel citra vel ultra D punctum cadit; quemadmodum & ipsa Parabola vel versùs hanc

hanc vel versùs illam partem pro diversa termini dx affectione, ut supra est notatum, describenda est: Ac postremis quidem istis quinque casibus jam explicatis Parameter erit ad d cognitam, sicut $A B$ ad $A M$, hoc est, erit ut $A M$ ad $A B$, ita d ad Parametrum.

Quorum quidem omnium demonstratio perfacilis est. Intelligantur enim Parabolæ prædictis diametris ac parametris descriptæ, quæ per annotatos vertices transeant, sitque ordinatim ad easdem diametros applicatarum aliqua in recta $O E$ utcunque sumpta, & supponatur easdem Parabolæ prædictam applicatam secare in E puncto: & primo casu, cum pars diametri $A B$ inter verticem A & quamlibet ad eandem diametrum applicatam intercepta, veluti $A B$, concipiatur, ut x , ac singulæ illæ applicatæ, ut y ; sitque Parameter $\propto d$, atque ex natura Parabolæ ¹ rectangulum sub dicta Parametro & re-

cta $A B$ contentum sit $\propto B E$ quadrato: erit $dx \propto yy$.

¹ per 1
primi hu-
jus.

Secundo casu, ubi vertex est in puncto F cum triplici distinctione, ut supra monitum est, notandum primò venit, in casibus, ubi æquatio est $yy \propto dx \text{ } \& \text{ } ff$, punctum B in linea FB ab A versùs B indefinitè sumi posse: cum istis casibus ab A versùs B Parabolam describendam esse supra annotatum sit; At verò casu, ubi æquatio est $yy \propto ff - dx$, cum juxta Regulam Parabolæ in contrariam partem ab F versùs A sit describenda, punctum B non nisi inter F & A assumendum esse. id quod etiam ex ipsa æquatione manifestum est. Quoniam enim in prædicta æquatione $yy \propto ff - dx$ sive quod idem est $ff - yy \propto dx$, terminus ff major est quàm dx , utpote eundem excedens quantitate yy ; idcirco quoque si utrinque divisio fiat per d , $\frac{ff}{d}$ majus erit quàm x . Quare cum secundum Regulam $\frac{ff}{d} x$ quætur rectæ $A F$, & $x \propto$ rectæ $A B$; erit similiter recta $A F$ major quàm $A B$: ideoque B punctum inter A & F puncta, sicut dictum est, cadet. id quod ad casus quoque sequentes applicatum esto. Porro quoniam $A F$ est $\propto \frac{ff}{d}$, erit $F B$ (hoc est, observatâ triplici distinctione, ut prædictum est, $A B \text{ } \& \text{ } A F$, atque etiam $A F - A B$) æqualis $x \text{ } \& \text{ } \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - x$; eâque multiplicatâ per parametrum d , fit rectangulum $dx \text{ } \& \text{ } ff$,
atque

atque etiam $ff - dx$. quod æquale est quadrato applicatæ BE
 2. sive yy , ac proinde $yy \propto dx \text{ } \& \text{ } ff$, atque $yy \propto ff - dx$.

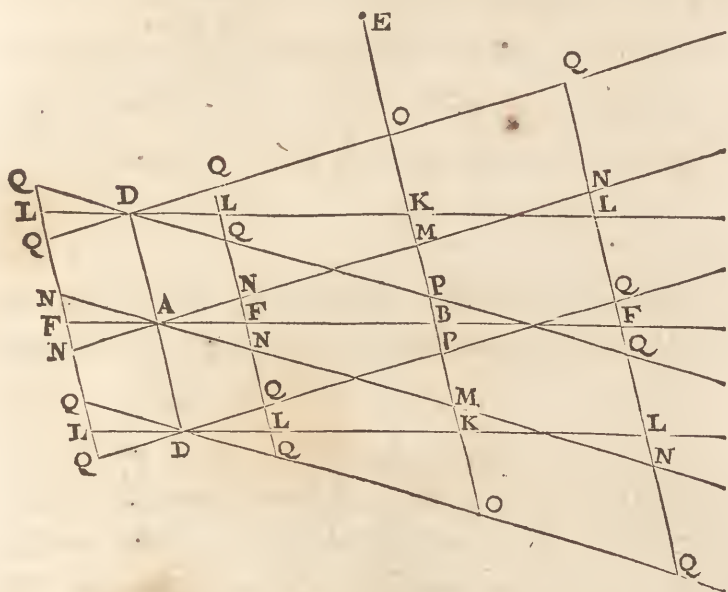
Tertio casu, ubi vertex est in puncto D, ac diameter in re-
 cta DK, quoniam AD seu BK est $\propto c$: erit KE, hoc est,
 BE - BK $\propto y - c$; & KBE, hoc est, BE + BK $\propto y + c$.
 Cumque eo casu z assumpta sit pro $y \text{ } \& \text{ } c$, erit KE & KBE $\propto z$.
 Est autem DK seu AB $\propto x$, parameterque $\propto d$, & rectangu-
 lum sub dicta Parametro & recta DK contentum \propto quadrato
 ex KE vel KBE. Quare cum hoc quadratum sit $\propto z z$, atque
 3. rectangulum illud $\propto dx$, erit $z z \propto dx$.

Quarto casu, ubi manente diametro in recta DK vertex est
 in puncto L, quoniam DL sive AF est $\propto \frac{ff}{d}$, erit LK (hoc
 est, observatâ triplici distinctione juxta Regulam, DK $\&$ DL,
 atque etiam LD - DK) æqualis $x \text{ } \& \text{ } \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - x$.
 quâ multiplicatâ per Parametrum d , fit rectangulum $dx \text{ } \& \text{ } ff$,
 atque etiam $ff - dx$. quod æquale est quadrato applicatæ KE
 vel KBE, hoc est, $z z$: eritque proinde $z z \propto dx \text{ } \& \text{ } ff$, atque
 4. $z z \propto ff - dx$.

Quinto casu, ubi vertex est in puncto A, diameterque in
 recta AM, cum sit ut a ad b , ita AB, hoc est, x , ad BM: erit
 BM $\propto \frac{bx}{a}$, ideoque ME, hoc est, BE - BM $\propto y - \frac{bx}{a}$, & MBE,
 hoc est, BE + BM $\propto y + \frac{bx}{a}$. Et quoniam eo casu z assumpta
 est pro $y \text{ } \& \text{ } \frac{bx}{a}$, erit ME & MBE $\propto z$. At cum in triangulo
 ABM cognita sint & angulus ABM, & ratio laterum AB,
 BM, dictum angulum comprehendentium, nota quoque est
 ratio reliquorum dicti trianguli laterum ad invicem, atque in
 specie etiam lateris AB ad AM, quæ sit ut a ad e . Ac proinde
 cum sit ut a ad e , ita AB, h. e., x ad AM: erit AM $\propto \frac{ex}{a}$. Cumque
 porrò juxta Regulam eo casu sit ut AM ad AB, hoc est, ut e
 ad a , ita d ad Parametrum: erit Parameter $\propto \frac{ad}{e}$. Quâ multi-
 plicatâ per AM seu $\frac{ex}{a}$ fiet rectangulum $\propto dx$. Quod æquale
 est quadrato applicatæ ME vel MBE, hoc est, $z z$; ac proin-
 5. de est $z z \propto dx$.

per 6
 sexti.

Sexto casu, ubi vertex est in puncto N, & diameter in re-
cta NM, quoniam est ut AB ad AM, ita AF ad AN, hoc est,
ut a ad e , ita $\frac{ff}{d}$ ad AN: erit AN $\propto \frac{eff}{ad}$, & NM (hoc est,
observatâ juxta Regulam triplici distinctione, AM \wp AN,
atque etiam NA — AM) $\propto \frac{ex}{a} \wp \frac{eff}{ad}$, atque etiam $\frac{eff}{ad}$
 $-\frac{ex}{a}$. Quâ multiplicatâ per Parametrum $\frac{ad}{c}$, fit rectangu-



lum $dx \wp ff$, atque etiam $ff - dx$. Quod cum \propto quale sit
quadrato applicatæ ME vel MBE, hoc est, $z z$: erit
 $6. z z \propto dx \wp ff$, atque $z z \propto ff - dx$.

Septimo casu, ubi vertex est in puncto D, & diameter in re-
cta DO, quoniam AD seu MO est $\propto c$, erit OE (sive BE —
BM — MO) $\propto y - \frac{bx}{a} - c$, & OBE (sive BE + BM + MO)
 $\propto y + \frac{bx}{a} + c$. Cumque eo casu z assumpta sit $proy - \frac{bx}{a} - d$,
vel $proy + \frac{bx}{a} + d$: erit OE & OBE $\propto z$. Porrò cum DO

Pars II.

Rr

seu

seu $A M$ sit $\propto \frac{ex}{a}$, Parameterque sectionis $\propto \frac{ad}{e}$, erit rectangulum sub Parametro & recta $D O$ contentum $\propto dx$. Cumque idem illud rectangulum æquetur quadrato applicatæ $O E$ vel

7. $O B E$, id est, $z z$: erit $z z \propto dx$.

Octavo casu, ubi, manente vertice in puncto D , diameter est in recta $D P$, quoniam $A D$ seu $B K$ est $\propto c$, & $K P \propto \frac{bx}{a}$, erit $P E$ una (sive $B E - B K + K P$) $\propto y - c + \frac{bx}{a}$, & $P E$ altera (sive $B E + B K - K P$) $\propto y + c - \frac{bx}{a}$. Cumque eo casu z assumpta sit pro $y + \frac{bx}{a} - c$ vel pro $y - \frac{bx}{a} + c$: erit utraque

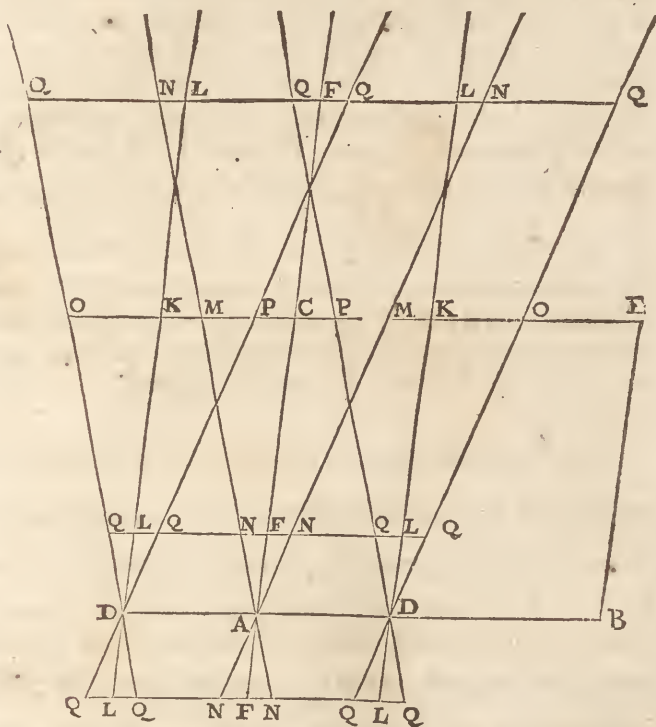
$P E \propto z$. Porro cum $D P$ seu $A M$ sit $\propto \frac{ex}{a}$ ac Parametro $\propto \frac{ad}{e}$, erit rectangulum sub Parametro & recta $D P$ contentum $\propto dx$. Cumque idem rectangulum æquale sit quadrato utriusque applicatæ $P E$, hoc est, $z z$: erit quoque $z z \propto dx$.

Nono casu, ubi vertex est in puncto Q , & diameter in recta $Q O$ vel $Q P$, quoniam, ut supra, $O E$ est $\propto y - \frac{bx}{a} - c$, atque $O B E \propto y + \frac{bx}{a} + c$; at verò $P E$ una $\propto y - c + \frac{bx}{a}$, ac $P E$ altera $\propto y + c - \frac{bx}{a}$, sitque eo casu z assumpta pro $y \pm \frac{bx}{a} \mp c$: erit $O E$, $O B E$, atque utraque $P E \propto z$. Et cum $D O$ aut $D P$ seu $A M$ sit $\propto \frac{ex}{a}$, atque $D Q$ seu $A N \propto \frac{eff}{ad}$: erit $Q O$ vel $Q P$ (hoc est, observatâ juxta Regulam triplici distinctione, $D O$ vel $D P \pm D Q$, atque etiam $Q D - D O$ vel $D P$) æqualis $\frac{ex}{a} \pm \frac{eff}{ad}$, atque etiam $\frac{eff}{ad} - \frac{ex}{a}$. Vnde si eadem $Q O$ vel $Q P$ multiplicetur per Parametrum $\propto \frac{ad}{e}$, erit rectangulum $\propto dx$

$\pm ff$, atque etiam $ff - dx$. Quod quidem rectangulum cum æquale sit quadrato applicatæ $O E$, $O B E$, aut utriusque $P E$, hoc est, $z z$: erit quoque $z z \propto dx \pm ff$, atque $z z \propto ff - dx$. Quæ quidem omnia sunt, quæ hîc demonstranda erant.

Quod autem ad æquationes superioribus novem casibus conversim correspondentes spectat, ut lineæ Parabolicæ describantur, quæ sint Loca quæsitâ: positis iisdem, ut supra, per pun-

punctum A ducenda est recta AC ipsi BE parallela, ac deinde ipsa AC, ubique consideranda, ut considerata fuit recta AB in superiori figura. Porro sumpto in eadem AC puncto utcunque, veluti C, atque per id ducta recta ipsi AB parallela, velut OCE, erit similiter hæc OCE ubique consideranda, sicut considerata fuit recta OBE in præcedenti figura, nullâ scilicet aliâ mutatione adhibitâ. Exempli gratiâ: Si æquatio sit $dy \propto xx$, erit AC diameter, A vertex, & Paramet-

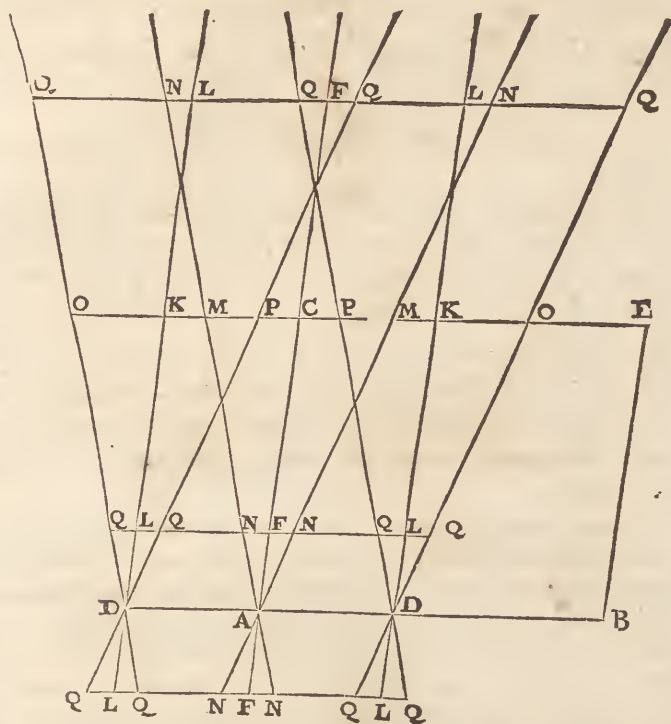


ter $\propto d$. Cum enim AC seu BE sit concepta ut y , & CE seu AB ut x , rectangulumque sub Parametro & AC contentum, hoc est, dy , æquetur quadrato rectæ CE seu AB, hoc est, xx : erit, ut petitur, $dy \propto xx$.

II. Si æquatio sit $dy \cdot ff \propto xx$, sumptâ AF $\propto \frac{ff}{d}$, erit F vertex, manente diametro in recta FC, atque Parametro $\propto d$. Est enim

- enim pro triplici juxta Regulam distinctione $FC \propto y \int \frac{ff}{d}$,
 atque etiam $\frac{ff}{d} - y$: ac proinde rectangulum sub Parametro
 ac eadem FC contentum $\propto dy \int ff$, atque etiam $ff - dy$.
 Quod quidem rectangulum cum æquale sit quadrato appli-
 catae CE , hoc est, xx : erit, ut petitur, $dy \int ff \propto xx$.
- III. Si æquatio sit $dy \propto vv$, vel $dy \int ff \propto vv$, atque v primùm
 assumpta sit pro $x \int c$, factâ $AD \propto c$, sumptoque puncto D ab
 A versùs B , si v sit assumpta pro $x - c$; at contra ab altera
 parte, si v assumpta fuerit pro $x + c$, erit, ductâ DK ipsi AC
 parallelâ, diameter in recta DK . Et si terminus ff deficiat,
 IV. erit vertex in D ; sin secus in L , cum triplici variatione, ut
 supra expositum est. Et patet, DB sive DAB , hoc est, KE
 sive KCE fore v , $DK \propto y \int \frac{ff}{d}$, atque etiam
 $\frac{ff}{d} - y$: ac proinde rectangulum sub Parametro d dictaque
 DK comprehensum $\propto dy$; at verò id quod sub d & LK com-
 prenditur $\propto dy \int ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem
 rectangulum cum æquale sit aut supponatur quadrato appli-
 catae KE sive KCE , hoc est, vv : erit, ut petitur, $dy \propto vv$, vel
 $dy \int ff \propto vv$.
- V. Sit deinde v assumpta pro $x \int \frac{by}{a}$, sumptoque in linea OCE
 puncto M à C versùs E , si habeatur $-\frac{by}{a}$; at ab altera parte
 lineæ AC , si habeatur $+\frac{by}{a}$, ita ut AC sit ad CM , sicut a
 ad b : erit in recta AM diameter, ejusque vertex in
 VI. puncto A , si terminus ff deficiat; sin minus, in N . Et positâ
 ratione AC ad AM , ut a ad e , ac proinde recta $AM \propto \frac{ey}{a}$,
 erit Parameter $\propto \frac{ad}{e}$. Est enim recta $CM \propto \frac{by}{a}$, ac proinde
 $ME \propto y - \frac{by}{a}$, atque $MCE \propto y + \frac{by}{a}$, id est, ME vel
 $MCE \propto v$. Quoniam ergo ex natura Paraboles rectangulum
 sub dicta Parametro & recta AM contentum \propto quadrato ex
 ME vel MCE , erit, $dy \propto vv$.
- Porro cum NA sit $\propto \frac{ffe}{da}$, erit $NM \propto \frac{ey}{a} \int \frac{ffe}{da}$, atque
 etiam

etiam $\frac{ff e}{d a} - \frac{e y}{a}$: ideoque rectangulum sub Parametro & recta NM contentum $\propto dy$ & ff , atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum sit \propto quadrato ex ME vel MCE, hoc est, vv ; erit quoque $dy \cdot ff \propto vv$.



Sit denique v assumpta pro x & $\frac{by}{a}$ & c : eritque, sup-
 VII. VIII. positis iisdem quæ supra, diameter in DO , vel in DP ;
 IX. & si terminus ff deficiat vertex in D ; sin minus, in Q .
 Et positâ ratione DK ad DO , ut & DK ad DP , sicut
 a ad e , ac proinde rectâ DO , ut & $DP \propto \frac{e y}{a}$; erit pa-
 rameter $\propto \frac{a d}{e}$. Est enim $OE \propto x - \frac{by}{a} - c$, atque

Rr 3

OCE

O C E $\propto x + \frac{by}{a} + c$; itemque P E una $\propto x - \frac{by}{a} + c$, ac P E altera $\propto x + \frac{by}{a} - c$, hoc est, O E, O C E, & P E una vel altera erit $\propto v$. Estque Q O vel Q P (sicut supra N M) $\propto \frac{ey}{a} \& \frac{ffe}{da}$, atque etiam $\frac{ffe}{da} - \frac{ey}{a}$: ac proinde rectangulum sub Parametro & Q O vel Q P $\propto dy \& ff$, atque etiam $ff - dy$. Quare cum idem rectangulum æquale sit quadrato ex O E vel O C E, aut ex una alterave P E, id est, $v v$: erit quoque $dy \cdot ff \propto v v$.

Atque ita demonstratum est generaliter, quod hoc loco propositum fuit.

At si denique æquatio similis sit alicui formularum sub N^o 3 comprehensarum, erit Locus quæsitus, si terminus in quo invenitur xx vel vv signo $+$ sit affectus, Hyperbola; sin idem terminus signo $-$ affectus sit, Ellipsis: excepto tantum, cum posteriori casu ordinatim ad diametrum applicatæ cum ea rectos angulos faciunt, & simul transversa diameter parametro est æqualis: quippe eo casu, ut patet, quæsitus Locus Circulus existit.

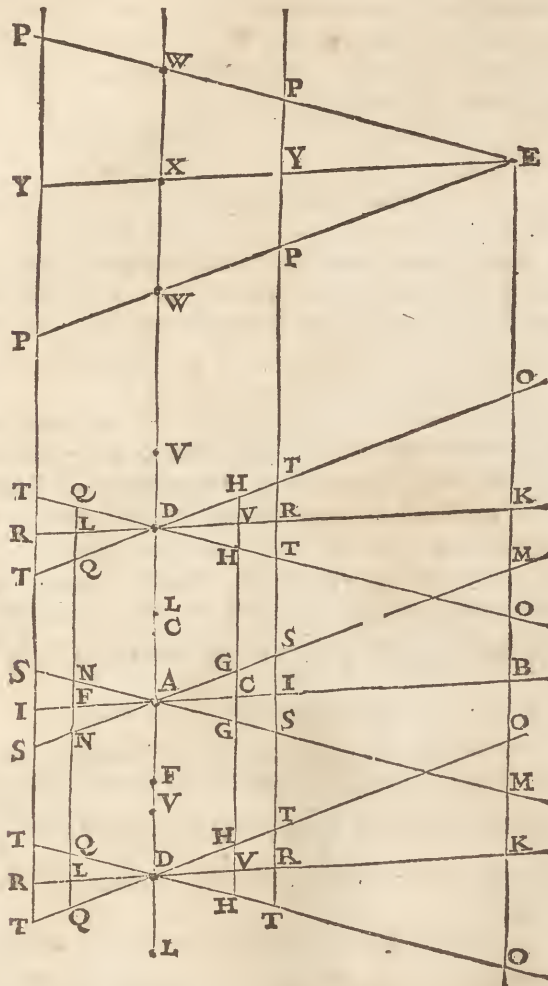
Et primo quidem casu, cum nempe terminus in quo xx vel vv signo $+$ affectus reperitur, ac proinde Locus quæsitus est Hyperbola, erit quoque terminus ff cum illo ab eadem æquationis parte constitutus vel signo $+$ affectus, vel contra; & si signo $-$ affectus sit, atque in æquatione habeatur fractio, ipsa majoris perspicuitatis gratiâ in terminum yy vel zz rejiciatur. Quo facto, remanente utraq; quantitate incognitâ primùm conceptâ, sequenti formâ se exhibebit æquatio: $yy \propto \frac{lx x}{g} + ff$, (id est,

Casus
1^{mus}, cum
Locus est
Hyperbo-
la.

$yy - ff \propto \frac{lx x}{g}$) aut $\frac{ly y}{g} \propto xx - ff$: eritque, ut in sequenti figura,

casu primo, nempe si terminus ff cum termino in quo xx unani æquationis partem constituens signo $+$ affectus sit, diameter Hyperbolæ describendæ in recta A X, quæ ducitur per punctum A positione datæ B E parallela. Sin contra, hoc est, si terminus ff signo $-$ affectus sit, uti casu secundo, erit diameter in data positione recta A B, quæ indeterminatè pro x concipitur; ita ut ad eandem

easdem diametros ordinatim applicatæ faciunt angulos, dato vel assumpto angulo ABE æquales: eritque casu utroque centrum Hyperboles in puncto A, & semi-latus transversum ∞f , quod in



dictis diametris respectivè per lineas A C vel A F exprimatur. Porro si l sit ∞g , vel, quod idem est, si termino $x x$ vel $y y$ nulla adhæreat

hæreat fractio, erunt latera transversum & rectum sibi invicem æqualia. At verò positis l & g inæqualibus, erit ratio lateris transversi ad rectum ut l ad g .

Si enim descripta intelligatur prædicta Hyperbola per punctum C in utraque diametro versùs X & versùs B respectivè; supponaturque eandem secare rectam $X E$, quæ ducta sit ipsi $A B$ æquidistans, ut & ipsam $B E$, ad dictas diametros respectivè ordinatim applicatas, in puncto E : erit

$$\begin{array}{ll} F X \propto y + f, & F B \propto x + f, \\ C X \propto y - f, & C B \propto x - f; \end{array}$$

ideoque rectangulum

$$F X C \propto y y - f f, \text{ \& } F B C \propto x x - f f.$$

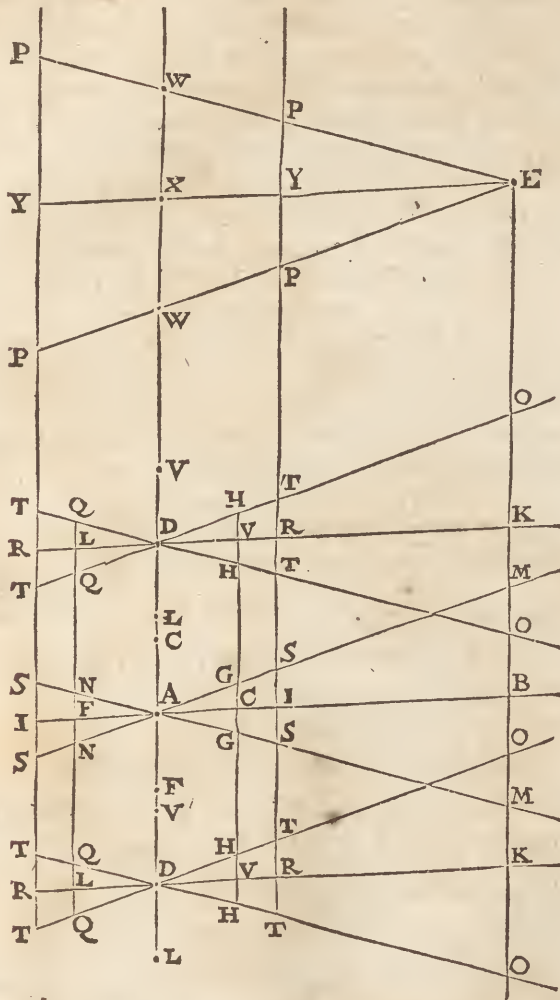
^{1 per 10 primi hujus.} Cum autem latere recto ipsi transverso æquali existente rectangulum $F X C$ sit \propto quadrato ex $X E$ seu $A B$, hoc est, $x x$; itemque rectangulum $F B C$ sit \propto quadrato ex $B E$, hoc est, $y y$: erit $y y - f f \propto x x$, hoc est, $y y \propto x x + f f$ itemque $x x - f f \propto y y$, sive $y y \propto x x - f f$.

^{2 per 10 primi hujus.} Sed cum secus recto latere ipsi transverso inæquali existente unius ad alterum ratio sit, ut l ad g ; similiterque etiam ratio rectanguli $F X C$ ad quadratum $X E$, aut rectanguli $F B C$ ad quadratum $B E$ eadem sit ², quæ transversi lateris ad rectum, hoc est, eadem quæ l ad g : erit ut l ad g , ita $y y - f f$ ad $x x$; itemque ut l ad g , ita $x x - f f$ ad $y y$, hoc est, reductâ proportionem ad æqualitatem, erit $l x x \propto g y y - g f f$, ut & $l y y \propto g x x - g f f$. unde divisis omnibus per g , sit $\frac{l x x}{g} \propto y y - f f$, hoc est, $y y \propto \frac{l x x}{g} + f f$; & $\frac{l y y}{g} \propto x x - f f$. Quod demonstrandum erat.

^{Casus 2^{us}, cum Locus est Hyperbola.} At si quantitatum incognitarum primò conceptarum unâ ex æquatione sublatâ, aliâque in ejusdem locum juxta Regulam assumptâ, æquatio sit $z z \propto \frac{l x x}{g} + f f$ (id est, $z z - f f \propto \frac{l x x}{g}$), vel $\frac{l x x}{g} \propto x x - f f$: aut z assumpta erit pro y $\text{§ } c$, vel pro y $\text{§ } \frac{b x}{a}$, aut

§. 1. pro y $\text{§ } \frac{b x}{a}$ $\text{§ } c$. Et quidem primò si z assumpta sit pro y $\text{§ } c$, ducenda est per punctum A recta $A D$ ipsi $B E$ parallela & $\propto c$; ita ut, si z fuerit assumpta pro $y - c$, prædictum punctum D cadat ab eadem parte lineæ $A B$, quâ datus vel conceptus est angulus $A B E$. Sin contra z fuerit assumpta pro $y + c$, idem illud punctum

Quum D reperiatur ab altera parte lineæ A B. Deinde per punctum D ductâ rectâ D K ipsi A B parallelâ, quæ fecerit rectam B E productam, si opus fuerit, in puncto K: erit describendæ Hyperbolæ



diameter, si terminus ff signo + affectus sit, in recta D X. sin
 contra, hoc est, si terminus ff signo — affectus sit, in prædicta
 Pars II. Ss recta

recta DK; ita ut ad easdem diametros ordinatim applicatæ angulos faciant, dato vel assumpto angulo ABE vel DKE sive DXE æquales. Eritque casu utroque D centrum, & semilatus transversum $\propto f$, quod in dictis diametris respectivè per lineas DV vel DL exprimatur; eritque porro transversus lateris ad rectum ratio, ut l ad g . Si enim descripta intelligatur prædicta Hyperbola per punctum V in utraque diametro, versus X & K respectivè, eademque secare supponatur rectam XE, ut & ipsam KE, ad dictas diametros ordinatim applicatas, in puncto E: erit DAX sive KBE $\propto y + c$, & DX seu KE $\propto y - c$; ideoque eadem DAX & KBE vel DX & KE ea ipsa, quæ pro z est assumpta: ac propterea LX $\propto z + f$, & LK $\propto x + f$

$$\text{atque } VX \propto z - f, \text{ \& } VK \propto x - f:$$

ideoque rectangula

$$LXV \propto z z - ff, \text{ \& } LKV \propto x x - ff.$$

Cumque eadem sit ratio tam unius quàm alterius rectanguli LXV ad quadratum XE, ut & utriusque rectanguli LKV ad quadratum ex KE vel KBE respectivè, quæ est lateris transversus ad rectum, hoc est, ut l ad g : erit quoque ut

$$l \text{ ad } g, \text{ ita } z z - ff \text{ ad } x x,$$

$$\text{itemque ut } l \text{ ad } g, \text{ ita } x x - ff \text{ ad } z z:$$

hoc est, revocatâ proportionem ad æqualitatem,

$$\text{erit } \frac{l x x}{g} \propto z z - ff, \text{ sive } z z \propto \frac{l x x}{g} + ff,$$

$$\text{\& } \frac{l z z}{g} \propto x x - ff: \text{ aut, si } l \text{ sit } \propto g,$$

$$\text{erit } z z \propto x x + ff,$$

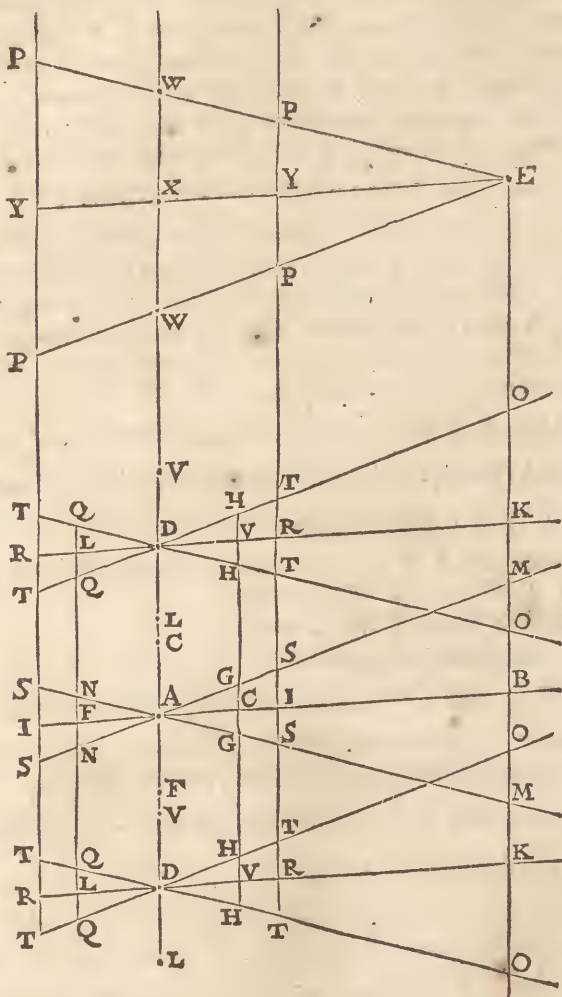
$$\text{\& } z z \propto x x - ff.$$

Quod quidem hic demonstrandum erat.

- s. 2. At verò secundò, si z assumpta sit pro $y \text{ \& } \frac{b x}{a}$, sumpto in linea BE puncto M, ita ut AB ad BM sit, sicut a ad b ; hoc est, ut BM sit $\propto \frac{b x}{a}$, (quod quidem punctum M, si z assumpta fuerit pro $y - \frac{b x}{a}$, ab eadem parte lineæ AB quâ datus vel conceptus angulus ABE sumendum est; sed contra, si habeatur $z \propto y + \frac{b x}{a}$, ab altera parte ejusdem lineæ AB sumi debet,) oportet per puncta A & M rectam lineam ducere AM, secantem HCH & QFQ per prædicta puncta C & F ductas ipsi BE parallelas in punctis G & N.

Quo

Quo facto, si terminus *ff* signo + affectus sit, erit quæsitæ Hyperbolæ diameter in recta *A W* ipsi *BE* parallela, ad quam ordinatim applicatæ, ut *E W*, sunt ipsi *A M* æquidistantes. Sin con-



tra, hoc est, si terminus *ff* signo — sit affectus, erit diameter in prædicta recta *A M*, ita ut ordinatim ad eam applicatæ cum ipsa faciant

faciant angulos angulo AME vel AMBE æquales: eritque tam unius quàm alterius Hyperbolæ centrum in puncto A. Et quantum ad earundem latera tam transversa quàm recta, erit ejus Hyperboles, quæ ad diametrum AW describitur, semi-latus transversum $\propto f$ (idque iterum exprimat per AC vel AF), & ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut aal ad eeg ; posito nimirum quòd ratio ipsius AB ad ductam AM sit ut aad e ; at verò Hyperboles, quæ ad diametrum AM describitur, semi-latus transversum erit AG vel AN. Quæ quidem AG vel AN erit $\propto \frac{ef}{a}$; cum sit ut AB ad AM, sive ut aad e ; ita AC vel AF, hoc est, f , ad AG vel AN; & ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag . Si enim prædicta Hyperbola descripta intelligatur, transiens per prædictum punctum C in diametro AW & per punctum G in diametro AM, præsupponaturque rectam ME vel WE ordinatim ad easdem diametros applicatas à prædicta Hyperbola secari in puncto E: erit MBE vel AXW $\propto y + \frac{bx}{a}$, & ME vel AW $\propto y - \frac{bx}{a}$, hoc est, AXW seu MBE, uti & AW seu ME ea ipsa erit, quæ pro z assumpta est. Est autem AM seu WE $\propto \frac{ex}{a}$, ac porro casu priori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum AW, (cùm nempe terminus ff signo + est affectus) FW sive FXW $\propto z + f$,

& CW sive CXW $\propto z - f$:

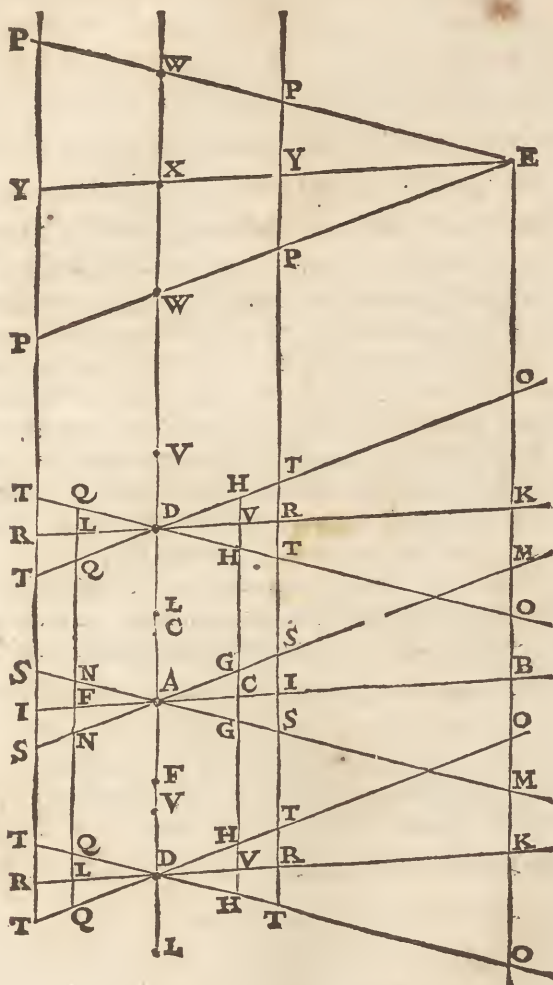
ideoque rectangulum

$$FWC \text{ vel } FXWC \propto zz - ff, \text{ \& quadratum } WE \propto \frac{eexx}{aa}.$$

Cumque sit ut latus transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum ad prædictum quadratum, hoc est, eo casu ut aal ad eeg , ita $zz - ff$ ad $\frac{eexx}{aa}$: erit $eelxx \propto eegzz - eegff$, & omnibus per eeg divisis, $\frac{lxx}{g} \propto zz - ff$, id est, $zz \propto \frac{lxx}{g} + ff$.

At verò casu posteriori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum AM, cùm nempe terminus ff signo - est affectus, erit NM $\propto \frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$, & GM $\propto \frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$: ideoque rectangulum NMG $\propto \frac{eexx}{aa} - \frac{efff}{aa}$. Cumque sit ut latus transversum ad rectum, id est, hoc casu, ut eel ad aag , ita prædictum rectangulum NMG

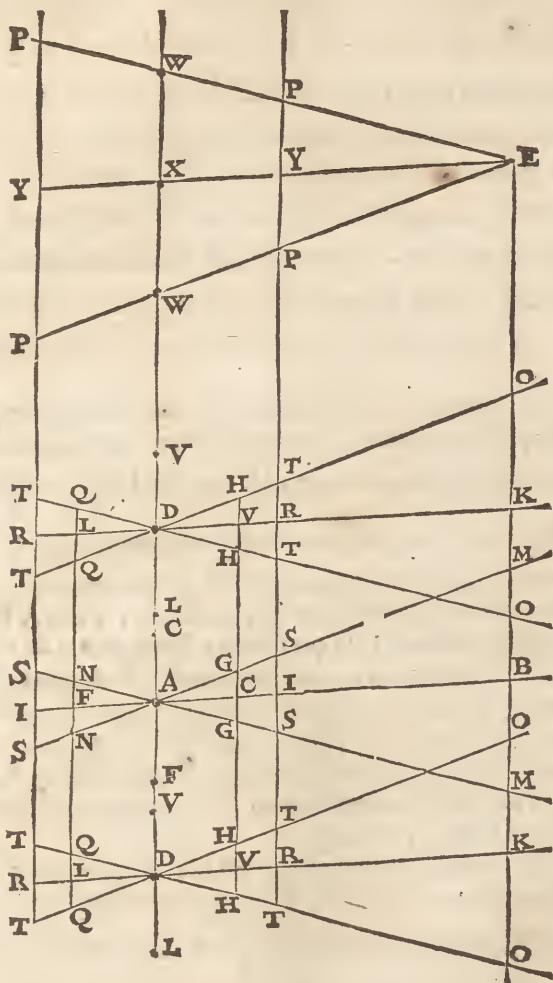
ad ME vel MBE quadratum, hoc est, ad zz : erit ut $eelad aag$,
 ita $\frac{eexx - eeff}{aa}$ ad zz : ac proinde $eelzz \propto eegxx - eegff$.



Hoc est, factâ divisione per eeg , erit $\frac{2xx}{g} \propto xx - ff$. Quod hîc
 demonstrandum erat.

s. 3. Si denique tertio z assumpta sit pro y $\propto \frac{bx}{a}$ $\propto c$, ductâ, ut supra, $AD \propto f$, & DK ipsi AB parallelâ, sumptoque in linea KE puncto O ; ita ut DK ad KO sit, sicut a ad b , hoc est, ut KO sit $\propto \frac{bx}{a}$, ducenda est per puncta D & O recta DO , secans prædictam HCH in H , atque occurrens præfatæ QFQ in Q . (Constat autem ex superius explicatis prædictum punctum O , si in æquatione habeatur $-\frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ AB sumendum esse, quâ datus aut assumptus est angulus ABE ; at si habeatur $+\frac{bx}{a}$, illud ipsum punctum ex altera ejusdem lineæ parte sumi debere.) Quo facto, si terminus ff signo $+$ affectus sit, erit diameter quæsitæ Hyperbolæ in recta DW . Sin contra, hoc est, si terminus ff signo $-$ sit affectus, erit ipsa in prædicta recta DO ; ita ut ad eandem diametros ordinatim applicatæ angulos faciant angulo DWE sive $DXWE$, aut DOE sive $DOKE$ æquales: eritque tam unius quàm alterius Hyperbolæ centrum in puncto D . Et quantum ad earundem latera tam transversa quàm recta, erit ejus Hyperbolæ, quæ ad diametrum DW describitur, hoc est, cum terminus ff signo $+$ afficitur, latus transversum $\propto f$. idque hîc iterum exprimat per DV vel DL , ac ratio ejusdem lateris transversi ad rectum, ut aal ad eeg ; at verò Hyperboles, quæ ad diametrum DO describitur, nimirum, quando terminus ff signo $-$ affectus est, erit semi-latus transversum recta DQ vel DH , id est, $\frac{ef}{a}$; atque ratio ejusdem lateris transversi ad rectum, ut eel ad aag . Si enim descripta intelligatur Hyperbola, transiens per punctum V in diametro DW & per punctum H in diametro DO , supponaturque eandem Hyperbolam secare rectam WE vel OE in puncto E , erit $OKBE$ sive $DAWX \propto y+c+\frac{bx}{a}$, & OE sive $DW \propto y-c-\frac{bx}{a}$, ac OB sive $DAW \propto y+c-\frac{bx}{a}$, atque OKE vel $DXW \propto y-d+\frac{bx}{a}$. Hoc est, erunt omnes illæ prænominatæ lineæ eadem, quæ pro z assumptæ sunt. Est autem DO seu $WE \propto \frac{ex}{a}$, ideoque quadratum $WE \propto \frac{eexx}{aa}$: ac porrò casu priori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum DW ,

DW, cum nempe terminus *ff* signo + afficitur, LW sive LXW $\infty z + f$, & VW sive VXW $\infty z - f$: ideoque rectangulum LWV sive LXWV $\infty z z - ff$. Cumque sit ut latus



transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum ad WE quadratum, hoc est, eo casu, ut *aal* ad *eeg*, ita $z z - ff$ ad *eeex*

$\frac{cexx}{aa}$: erit $eelxx \propto eegzz - eegff$, ac, divisis omnibus per eeg ,

$$\frac{lxx}{g} \propto zz - ff, \text{ sive } zz \propto \frac{lxx}{g} + ff.$$

At verò casu posteriori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum DO , erit $QO \propto \frac{cx}{a} + \frac{cf}{a}$, & $HO \propto \frac{cx}{a} - \frac{cf}{a}$; ideoque rectangulum $QOH \propto \frac{cexx - eeff}{aa}$. Cumque iterum sit, ut latus transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum QOH ad quadratum ex $OKBE$ vel OE , sive OBE aut OKE : id est, eo casu, ut ee *lad aag*, ita $\frac{cexx - eeff}{aa}$ ad zz : erit quoque proinde $eelzz \propto eegxx - eegff$. Hoc est, divisis omnibus per eeg , erit $\frac{lxx}{g} \propto xx - ff$. Quæ quidem omnia sunt, quæ casu superiori in triplici sua distinctione determinanda ac demonstranda erant.

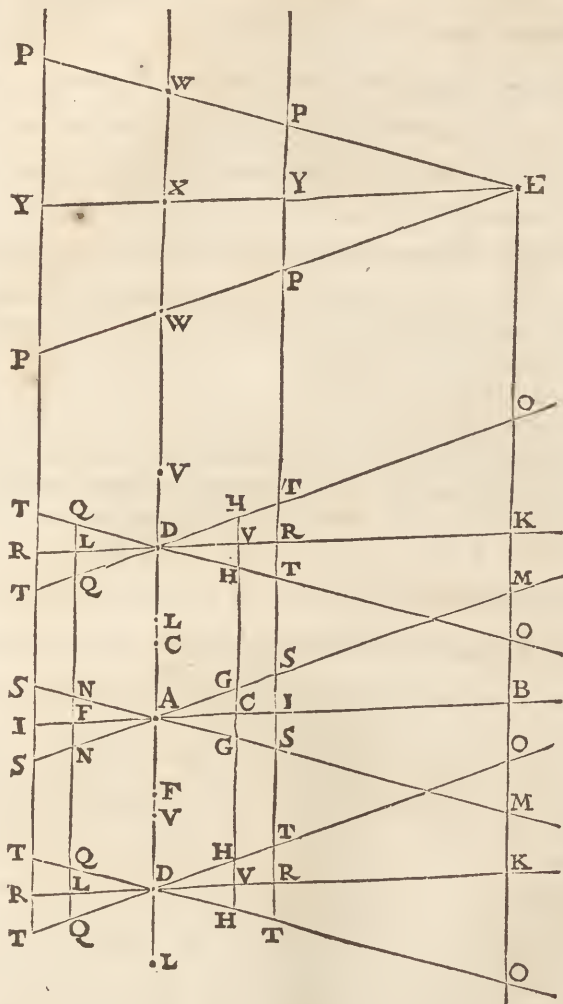
Casus
3^{us}, cum
Locus est
Hyper-
bola.

Si verò quantitatum incognitarum ab initio conceptarum, alterâ ex æquatione sublatâ, aliâque ejusdem loco secundum Regulam assumptâ, æquatio sit $yy \propto \frac{lvv}{g} + ff$, (id est, $yy - ff \propto \frac{lvv}{g}$) aut $\frac{lyy}{g} \propto vv - ff$; atque ipsa v tantùm assumpta sit pro x & notâ aliquâ quantitate, Sit v assumpta pro x & b ; Hoc casu in linea AB vel eadem productâ sumendum est punctum I , ita ut AI sit $\propto b$ (quod quidem punctum I , si v assumpta fuerit pro $x - b$, ab A versus B ; Sin contra, ab altera parte puncti A in producta BA sumi debet.) Quo factò, erit idem illud punctum I centrum describendæ Hyperboles, &, mutatis mutandis, cætera omnia, ut supra casu 1^{mo} memoratum est, nempe, diameter in recta IY vel in recta IB , semi-latus transversum $\propto f$, atque proportio lateris transversi ad rectum, ut *lad g*.

Casus
4^{us}, cum
Locus
est Hyper-
bola.

Si denique quantitatum incognitarum, primò conceptarum, utrâque ex æquatione sublatâ, aliisque earundem loco juxta Regulam assumptis, æquatio sit $zz \propto \frac{lvv}{g} + ff$, (id est, $zz - ff \propto \frac{lvv}{g}$), aut $\frac{lxx}{g} \propto vv - ff$; atque z primùm assumpta sit pro y & c , ducenda est utrinque IR parallela BE , & $\propto c$: quo factò, erit idem illud punctum R centrum, & diameter in recta RY vel

vel RK, ejuſque ſemi-latus tranſverſum ∞ , ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut l ad g . quemadmodum ea omnia, mutatis mutandis, caſu ſecundo §. I. fuſius explicata ſunt.



§. 2. At ſi z aſſumpta fuerit pro y $\& \frac{bx}{a}$, erit punctum S, in
Pars II. Tt quo

quo MA, vel quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam IR, vel eandem productam, si opus sit, interfecatur, centrum sectionis; & cætera omnia, mutatis mutandis, ut supra casu secundo §. 2. memoratum est. Nempe erit sectionis diameter in recta SP vel SM (atque ut ibidem AM seu EW erat $\propto \frac{e^x}{a}$, ita hîc SM seu EP erit $\propto \frac{e^y}{a}$: cum sit ut AB ad AM, hoc est, ut a ad e , ita BI, hoc est, v , ad SM); eritque porrò semi-latus transversum $\propto f$ & $\frac{ef}{a}$ respectivè, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut aal ad eeg , vel ut eel ad aag .

§. 3. Si denique z assumpta fuerit pro y & $\frac{bx}{a}$ & c , erit punctum T, in quo DO, vel quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam IR, vel productam, si opus sit, interfecatur, centrum; & reliqua omnia, mutatis mutandis, ut paragrapho præcedenti, & supra casu secundo §. 3. fusiùs expolitum est. Atque eorum omnium demonstratio in præcedentibus explicite est comprehensa, cum termini & quantitates omnes hîc cum prioribus conveniant, excepto tantùm, quòd, quæ ibidem designabantur per x , hîc sint x & b , hoc est, v . Ita enim quod ibi erat AB & EX $\propto x$, hîc est IB & EY $\propto v$; quod ibi erat DK & EX $\propto x$, hîc est RK & EY $\propto v$; quod ibi erat AM & EW $\propto \frac{e^x}{a}$, hîc est SM & EP $\propto \frac{e^y}{a}$; quod ibi erat DO & EW $\propto \frac{e^x}{a}$, hîc est TO & EP $\propto \frac{e^y}{a}$.

Quamvis autem secundùm Regulam accidere etiam possit, ut v composita sit ex x & aliâ quâdam quantitate, cui & incognita y permixta sit; ita tamen, ut eo casu z solummodo ex y & aliâ quantitate in totum cognitâ constare queat, haudquaquam tamen operæ pretium existimamus, casus omnes eò spectantes speciatim persequi: cum ex iis, quæ tam in Locis Parabolicis quàm in posteriori exemplo reductionis æquationum ad formulas Theorematum 12^{mi} & 13^{ti} superiùs explicata sunt, iidem illi casus per se manifesti sint atque in præcedentibus etiam omnino plenèque comprehendantur, si nimirum, substituto per omnia x loco y & vice versâ, eadem x non per rectam AB sed per eam, quæ ex A ipsi BE parallela ducta sit, atque y non per BE sed per rectam ipsi AB æquidistantem, designetur. Quòd hîc generaliter monuisse suffecerit.

Alii

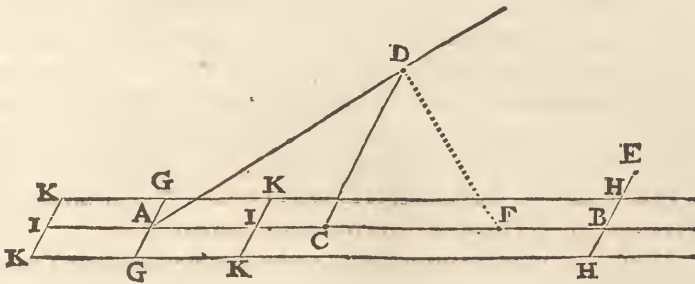
Alii quatuor casus, cùm Locus est Hyperbola.

Iam verò quod supra annotavimus accidere quoque posse, ut æquatio sit

1. $y x \propto ff$,
2. $z x \propto ff$,
3. $y v \propto ff$,
4. $z v \propto ff$,

omnibusque istis casibus Locum quæsitum esse Hyperbolam, ejus determinatio sive descriptio atque demonstratio ex iis, quæ jam ante explicata sunt, sponte quoque profluunt.

Primo enim casu, si in recta AB sumatur $AC \propto f$, atque ex puncto C ductâ rectâ CD , quæ ipsi BE sit æquidistans & æqualis priori AC , hoc est $\propto f$, per A & D recta linea ducatur: erit A centrum Hyperbolæ, cujus axis est in recta AD , & punctum D vertex, atque AB asymptotos. sive (ductâ rectâ DF ad AD perpendiculari ac in AB terminata) erit AD semi-latus transversum, & ratio transversû ad rectum, ut AD quadratum ad DF



quadratum. Si namque prædicta Hyperbole secare supponatur rectam BE in puncto E , erit ^{per 3} rectangulum $ABE \propto$ quadrato ex AC vel CD . Quare cum AB sit $\propto x$, $BE \propto y$, & $AC \propto f$: erit ^{primi hujus.} $xy \propto ff$. Quod primo casu erat demonstrandum.

Secundo casu, cùm nempe æquatio est $zx \propto ff$, oportet ut z juxta Regulam sit assumpta pro y δ notâ quâdam quantitate. Esto

itaque assumpta pro y $\mathcal{G}c$, atque idcirco ad describendam Hyperbolam ducatur per punctum A recta AG ipsi BE parallela, ac ∞c : sumpto nimirum puncto G vel ab hac vel ab illa parte lineæ AB , prout c quantitas signo $+$ vel $-$ fuerit affecta; ductâque porrò GH ipsi AB parallelâ, centro G , Asymptoto GH , cæterisque, ut supra, mutatis mutandis, Hyperbole describatur. Hæc igitur si secare supponatur rectam BE in puncto E , erit rectangulum $GHBE$ vel $GHE \infty ff$. Vnde cum sit $GH \infty x$, & HE vel $HBE \infty y \mathcal{G}c$, id est, z : erit GHE vel $GHBE$ rectangulum ∞zx , ac propterea $zx \infty ff$. Quod 2^{do} casu demonstrandum erat.

Tertio casu, nempe si æquatio sit $y v \infty ff$: v quoque tantum pro $x \mathcal{G}$ notâ quâdam quantitate sumpta sit oportet, veluti pro $x \mathcal{G}b$. Ideoque ad inventionem Loci quæsitî, in recta AB vel in ipsâ productâ sumenda est $AI \infty b$, ac porrò centro I , atque Asymptoto IAB vel IB , cæterisque, ut supra, mutatis mutandis, describenda est Hyperbola, quæ si rectam BE secare supponatur in E : erit rectangulum $IABE$ vel $IBE \infty ff$. Quare cum IAB vel IB sit $\infty x \mathcal{G}b$, hoc est, v , & $BE \infty y$: erit $y v \infty ff$. Quod 3^{io} casu demonstrandum erat.

Denique quarto casu, si nempe æquatio sit $z v \infty ff$: erit z assumpta pro $y \mathcal{G}c$, & v pro $x \mathcal{G}b$. Ideoque per prædictum punctum I ducenda est IK ipsi BE æquidistans & ∞c ; ductâque KH ipsi AB parallelâ, centro K , atque Asymptoto KGH vel KH , cæterisque, ut casu 1^{mo}, mutatis mutandis Hyperbole describenda est, quæ si secare supponatur rectam BE in E : erit rectangulum $KGHE$ vel KHE , ut & $KGHE$ vel $KHBE \infty ff$. Hinc cum HBE vel HE sit $\infty y \mathcal{G}c$, id est, z , & KGH vel $KH \infty x \mathcal{G}b$, hoc est, v : erit $z v \infty ff$. Quod 4^{to} casu demonstrandum erat.

Atque hæc quidem omnia sunt, quæ circa inventionem Locorum eo casu, quo iidem sunt in linea Hyperbolica, consideranda veniunt.

Altero autem casu generali formularum sub N^o 3. comprehensarum, cum nempe terminus, in quo invenitur xx vel vv signo $-$ sit affectus, ac proinde Locus quæsitus vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit, si in æquatione fractio reperiatur, rejici quoque illa poterit majoris perspicuitatis gratiâ in terminum yy vel zz . Quo factò primò, remanente utrâque quantitate inco-

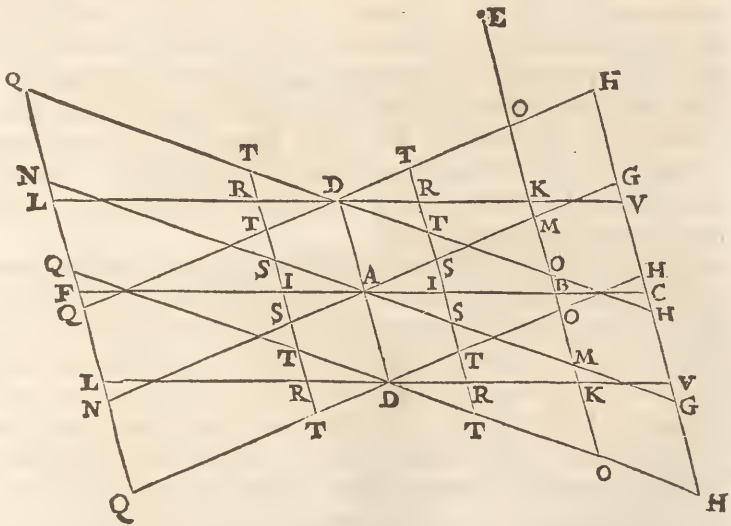
incognitâ ab initio conceptâ, sequenti formulâ se exhibebit æ-

quatio $\frac{1yy}{g} \propto ff - xx$: eritque, ut in sequenti figura, describendâ

Casus
1^{us}, cum
Locus vel
Ellipsis
vel Circu-
li circum-
ferentia
existit.

Ellipseos diameter in recta AB, quæ pro x indeterminatè est conce-
pta, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ cum ea
angulos faciant, dato vel assumpto angulo ABE æquales; ac cen-
trum in puncto A, & semi-latus transversum $\propto f$. id quod in di-
ceta diametro per lineam AC vel AF exprimitur, eritque ratio
ejusdem transversi lateris ad rectum, ut l ad g .

Si enim descripta intelligatur prædicta Ellipsis, transiens per
puncta C & F, secansque applicatam BE in puncto E: erit FB
 $\propto f + x$, & BC $\propto f - x$: ideoque rectangulum FBC $\propto ff - x x$.
At cum ex natura Ellipseos, lateribus recto transversoque æqua-
libus, prædictum rectangulum FBC sit \propto quadrato ex BE, ^{per 13}
hoc est, yy : erit quoque proinde eo casu $yy \propto ff - x x$. Et facile <sup>primi hu-
jus.</sup>



apparet, si, iisdem positis, BE super rectam FC foret quoque
perpendicularis, hoc est, ut angulus quem ordinatim applicatæ
faciunt ad diametrum sit rectus, prædictam curvam fore Circuli
circumferentiam.

Cum autem porrò, lateribus transverso rectoque inæqualibus
T t 3 . . . atque

¹ per 13
primi hu-
jus. atque in ratione ut l ad g , eadem sit ratio ¹ rectanguli FBC ad
 BE quadratum, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut
 l ad g : ex prædictis palàm est fore ut l ad g , ita $ff - xx$ ad yy ,
hoc est, esse $\frac{lyy}{g} \propto ff - xx$. Quod eo casu demonstrandum erat.

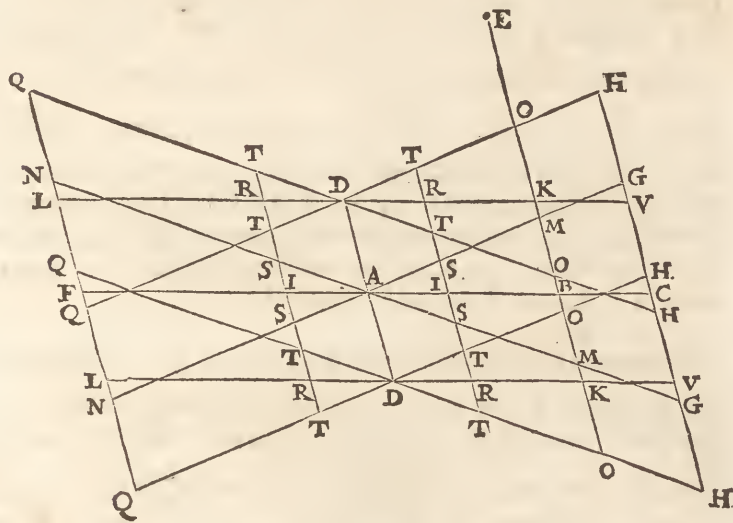
Casus At si, quantitatum incognitarum primò conceptarum unâ ex
^{2^{as}} cum æquatione sublatâ aliâque in ejusdem locum juxta Regulam as-
Locus est sumptâ, æquatio sit $\frac{lx^2}{g} \propto ff - xx$: aut z assumpta erit pro $y \& c$,
vel Ellipsis vel Circuli aut pro $y \& \frac{bx}{a}$, aut pro $y \& c \& \frac{bx}{a}$.
circumferentia.

S. I. Et primùm quidem, si z assumpta fuerit pro $y \& c$, ducenda est
per punctum A recta AD ipsi BE parallela ac $\propto c$, ita ut, si z
fuerit assumpta pro $y - c$, prædictum punctum D cadat ab eadem
parte lineæ AB , quâ datus vel conceptus est angulus ABE ; sin
contra z fuerit assumpta pro $y + c$, idem illud punctum D ab al-
tera parte lineæ AB reperiatur. Deinde ductâ per D rectâ DK
ipsi AB parallelâ, quæ secet rectam BE , productam versùs B , si
opùs fuerit, in puncto K , erit quæ sit Ellipseos diameter in recta
 DK , ad quam ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, dato
vel assumpto angulo ABE seu DKE æquales. Punctum autem
 D centrum erit, & semi-latus transversum $\propto f$. quod in dictis
diametris per lineas DV & DL exprimatur, eritque ratio trans-
versi lateris ad rectum, ut l ad g .

Si enim prædicta Ellipsis descripta intelligatur transiens per
puncta L & V , quæ supponatur secare rectam BE , ad prædictam
diametrum ordinatim applicatam, in puncto E : erit $KBE \propto y + c$,
& $KE \propto y - c$, ideoque eadem KBE vel KE ea ipsa, quæ pro z
assumpta est. Cumque LK sit $\propto f + x$, & $KV \propto f - x$: erit re-
ctangulum $LKV \propto ff - xx$. At cum eadem sit ratio dicti re-
ctanguli LKV ad quadratum ex KBE vel KE , hoc est, ad zz ,
quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g : erit ut l ad
 g , ita $ff - xx$ ad zz , hoc est, erit $\frac{lx^2}{g} \propto ff - xx$. Quod quidem,
si l sit $\propto g$, idem est ac $zz \propto ff - xx$. Atque hîc iterum facilè ap-
paret, quòd, existente angulo DKE vel DKE recto, & $l \propto g$,
hoc est, rectangulo $LKV \propto KE$ quadrato, prædicta curva Cir-
culus sit futura.

S. 2. At verò, si z assumpta fuerit pro $y \& \frac{bx}{a}$, sumpto in linea BE ,
pro-

productâ versùs B, si opùs fuerit, puncto M; ita ut AB ad BM fit, sicut a ad b , hoc est, ut BM fit $\propto \frac{bx}{a}$, (quod quidem punctum M, si z assumpta fuerit pro $y - \frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ AB, quâ datus vel conceptus est angulus ABE, sumi debet; sin contra, z pro $y + \frac{bx}{a}$ assumpta fuerit, ab altera ejusdem lineæ AB parte sumendum est) oportet per puncta A & M rectam lineam ducere NAMG, secantem rectam HCH, atque occurrentem ipsi QFQ, quæ per prædicta puncta C & F ipsi BE ductæ sunt æquidistantes, in G & N. Quo facto, erit quæsitæ Ellipseos diameter



in recta NG, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, angulo AME vel AMBE æquales. Porrò centrum ejusdem erit in puncto A, & semi-latus transversum erit recta AN vel AG. (quæ quidem AN vel AG, si ratio AB ad AM supponatur ut a ad e , æquabitur $\frac{ef}{a}$: cum sit ut AB ad AM, sive ut a ad e , ita AC, hoc est, f , ad AG.) Denique ratio transversi lateris ad rectum erit ut ecl ad aag , id est, si l sit $\propto g$,

$\propto g$, five, quod idem est, si termino $z z$ nulla adhæreat fractio, ut ee ad aa , hoc est, ut $A M$ quadratum ad quadratum $A B$.

Etenim si prædicta Ellipsis descripta intelligatur, transiens per N & G , supponaturque eandem secare rectam $M E$ vel $M B E$, ad prædictam diametrum ordinatim applicatam in puncto E : erit eadem $M E \propto y - \frac{bx}{a}$, & $M B E \propto y + \frac{bx}{a}$, ac

proinde ea ipsa, quæ pro z assumpta est. Cumque $A M$ sit $\propto \frac{ex}{a}$, erit $N M \propto \frac{ef}{a} + \frac{ex}{a}$, & $M G \propto \frac{ef}{a} - \frac{ex}{a}$: ideoque rectangulum $N M G \propto \frac{eff}{aa} - \frac{eex}{aa}$.

At cum eadem sit ratio dicti re-
ctanguli $N M G$ ad quadratum ex $M B E$ vel $M E$, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, eadem quæ eel ad aag : erit quoque ut eel ad aag , ita $\frac{eff - eex}{aa}$ ad $z z$, ac proinde $eel z z$

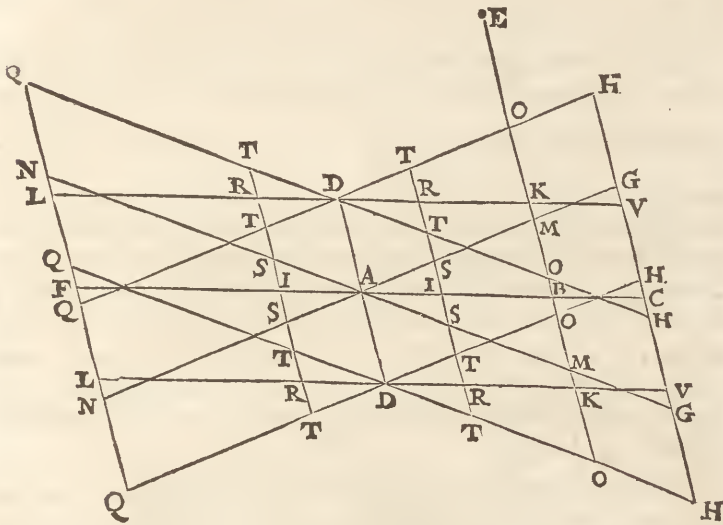
$\propto e e g f f - e e g x x$. id est, factâ divisione per $e e g$, erit $\frac{l z z}{g}$

$\propto f f - x x$. five, positâ $l \propto g, z z \propto f f - x x$. Vnde ex ante dictis iterum apparet, quod si angulus $A M B E$ vel $A M E$ rectus sit, ac simul $eel \propto aag$, hoc est, rectangulum $N M G \propto$ quadrato ex $M E$ vel $M B E$, prædictam curvam fore Circulum, cujus centrum sit A , & semi-diameter $A N$ vel $A G$.

- §. 3. Denique si tertio z assumpta sit pro y $\propto \frac{bx}{a}$, ductâ, ut supra, $A D \propto f$, & $D K$ ipsi $A B$ parallelâ, sumptoque in linea $K E$ puncto O , ita ut $D K$ ad $K O$ sit, sicut a ad b , hoc est, ut $K O$ sit $\propto \frac{bx}{a}$: ducenda est per puncta D & O recta $Q D O H$, secans prædictam $H C H$ in H , atque occurrens præfatæ $Q F Q$ in Q . (constat autem ex iis, quæ jam sæpiùs monita sunt, si habeatur $-\frac{bx}{a}$, prædictum punctum O ab eadem parte lineæ $D K$, quâ datus vel assumptus est angulus $D K E$, sumendum esse; at si habeatur $+\frac{bx}{a}$, illud ipsum ab altera ejusdem lineæ parte sumi debere.) Quo facto, erit describendæ Ellipseos diameter in prædicta recta $Q D H$, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ

plicatæ cum ea angulos faciant, angulo \cdot DOKE vel DOE
 æquales. Porro centrum erit in D, & semi-latus transversum
 DQ vel DH \propto AN seu $\frac{ef}{a}$, ac ratio transversi lateris ad rectum,
 ut eel ad aag .

Si enim quæsitæ Ellipsis descripta intelligatur, transiens per
 puncta Q & H, eademque secare supponatur rectam OE vel
 OKE in puncto E: erit $\text{OKBE} \propto y + c + \frac{bx}{a}$, $\text{OE} \propto$



$y - c - \frac{bx}{a}$, $\text{OBE} \propto y + c - \frac{bx}{a}$, & $\text{OKE} \propto y - c + \frac{bx}{a}$: ac proinde prænominatæ illæ lineæ eædem erunt, quæ pro
 z assumptæ sunt. Cumque porro sit DO seu $\text{AM} \propto \frac{ex}{a}$, ideoque
 $\text{QO} \propto \frac{ef}{a} + \frac{ex}{a}$, & $\text{OH} \propto \frac{ef}{a} - \frac{ex}{a}$: erit rectangulum QOH
 $\propto \frac{eeff - ceex}{aa}$. At cum eadem sit ratio dicti rectanguli QOH

Pars II.

Vu

ad

ad quadratum ex O K B E vel O E, aut ad quadratum ex O B E vel O K E, quæ est transversus lateris ad rectum, hoc est, ut eel ad aag : erit quoque ut eel ad aag , ita $\frac{eeff - eexx}{aa}$ ad zz ; ac propterea $eelzz \propto eegff - eegxx$, &, divisus omnibus per eeg , $\frac{lxx}{g} \propto ff - xx$. id est, si l sit $\propto g$, erit $zz \propto ff - xx$.

Atque hinc iterum facile apparet, si angulus D O K B E, D O E, D O B E, vel D O K E rectus foret, & simul $eel \propto aag$, prædictam curvam fore Circulum. Quæ quidem omnia sunt, quæ supra dicto casu in triplici sua variatione demonstranda erant.

Casus

3^{ius}, cum
Locus est
vel Elli-
psis vel
Circuli
circumse-
rentia.

Si verò quantitatum incognitarum ab initio conceptarum alterâ ex æquatione sublatâ, aliâque ejusdem loco secundum Regulam assumptâ, æquatio sit $\frac{lyy}{g} \propto ff - vv$, atque ipsa v assumpta sit pro x § notâ aliquâ quantitate; Sit v assumpta pro x § h , eritque eo casu in linea A B vel A F sumendum punctum I; ita ut A I sit $\propto h$. (quod quidem punctum I, si v assumpta fuerit pro $x - h$, ab A versùs B; sin contra ab A versùs F sumi debet.) Quo facto, erit idem punctum I centrum describendæ Ellipseos, &, mutatis mutandis, cætera omnia, ut supra, casu primo memoratum est. Hoc est, diameter erit in recta I B, ac semi-latus transversum erit $\propto f$, atque ratio transversus lateris ad rectum, ut l ad g .

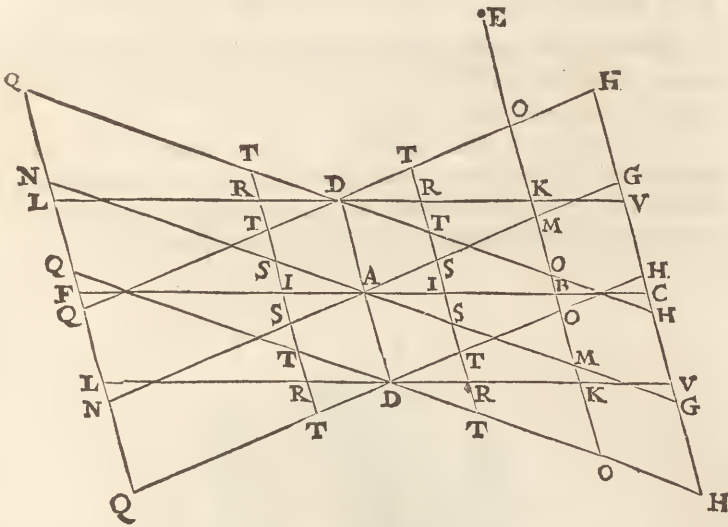
Casus

4^{ius}, cum
Locus vel
Ellipsis vel
Circuli
circumse-
rentia exi-
stât.

Si denique quantitatum incognitarum primùm conceptarum utrâque ex æquatione sublatâ, aliisque earundem loco juxta Regulam assumptis, æquatio sit $\frac{lxx}{g} \propto ff - vv$; atque z primò assumpta sit pro y § c , ducenda est utrinque I R, parallela ipsi B E, ac $\propto c$. Quo facto, erit idem punctum R centrum Ellipseos, & diameter ejus in recta R K vel R L, eritque ejus semi-latus transversum $\propto f$, ac ratio transversus lateris ad rectum, ut l ad g . quemadmodum ea omnia Casu 2^{do} §. 1, mutatis mutandis, fufius explicata sunt.

§. 2. At si z assumpta fuerit pro y § $\frac{bx}{a}$, erit punctum S, ubi M A, vel,

vel, quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam IR, productam, si opus fuerit, intersecatur, centrum Ellipseos; & cætera omnia, mutatis mutandis, ut supra casu secundo §. 2. memoratum est. Nempe erit sectionis diameter in recta SM, (atque ut ibidem erat $AM \propto \frac{ex}{a}$, ita hinc SM erit $\frac{ev}{a}$: cum sit ut BA ad AM, hoc est, ut a ad e, ita BI, id est, v, ad SM:) eritque porrò semi-latus transf-



versum $\propto \frac{ef}{a}$, & ratio transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag.

§. 3. Denique si z assumpta fuerit pro $y \oslash e \oslash \frac{bx}{a}$, erit punctum T, in quo DO, vel, quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam IR, productam, si opus fuerit, intersecatur, centrum Ellipseos; & reliqua omnia, mutatis mutandis, ut paragrafo præcedenti ac supra casu secundo §. 3

fufius explicatum est. Nempe erit diameter in recta TO , & semi-latus transversum $\propto \frac{ef}{a}$, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut eel ad $aa g$. Atque eorum omnium demonstratio in præcedentibus explicite est comprehensa, cum termini & quantitates omnes hîc cum prioribus conveniant; excepto tantum, quod quæ ibidem designabantur per x hîc designentur per x & h , hoc est, v . Ita enim quod ibi erat $AB \propto x$, hîc est $IB \propto v$; quod ibi erat $DK \propto x$, hîc est $RK \propto v$; quod ibi erat $AM \propto \frac{ex}{a}$, hîc est $SM \propto \frac{ev}{a}$; & quod ibi erat $DO \propto \frac{ex}{a}$, hîc est $TO \propto \frac{ev}{a}$.

Quæ quidem omnia sunt, quæ circa inventionem Loci illo casu, quo idem vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit, consideranda veniunt.

Atque ita generali Regulâ casus omnes inveniendi Loca per æquationes, in quibus neutra quantitatum incognitarum in se ducta nec factum sub iisdem ad tres dimensiones ascendit, sed vel quadratum vel planum non excedit, complexi sumus.

F I N I S.

FRANCISCI à SCHOOTEN,
LEIDENSIS,

*dum viveret in Academia Lugduno-Batava
Matheseos Professoris,*

T R A C T A T V S
DE
CONCINNANDIS
DEMONSTRATIONIBVS
GEOMETRICIS
ex Calculo Algebraico.

In lucem editus

à

PETRO à SCHOOTEN,
Francisci Fratres.



AMSTELODAMI,

Ex Typographia BLAVIANA, MDC LXXXIII.

Sumptibus Societatis.

Nobilissimis & Splendissimis Viris, Academiae Lugdunensis Curatoribus vigilantissimis,

- D. AMELIO à BOVCHORST, Wimmenumi Domino, de Ordine Equestri in Delegatos Præpotentium Hollandiæ Ordinum adscripto, & ejusdem honoratissimi Collegii Præsidi, Rhenolandiaë Aggerum Comiti, &c.
- D. GERARDO SCHAEP, I. C. Cortenhoevii Domino, Exlegato ad Serenissimos Daniaë Sueciæque Reges, antehac in Confessu Ordinum Generalium & Collegii Ordinum Hollandiæ Consiliariorum Delegato, Magnificæque Reip. Amstelædamensis Exconsuli, & nunc Ærarii urbani Præfecto.
- D. CORNELIO DE BEVERE, Equiti Aurato, Strevelshoeckii, West-isselmondæ, Lindæ, &c. Domino, Exlegato ad Serenissimos Magnæ Britanniaë Daniaëque Reges, Exconsuli primæ in Hollandiâ Dordrechtanorum Urbis, in Concilio Præpotentium Hollandiæ Ordinum ordinario Assessori.

EORVMQVE COLLEGIS,

Amplissimis, Spectatissimisque, florentissimæ Reipublicæ Leidenfis Consulibus,

- D. CORNELIO à BVYTEVEST.
- D. GVILHELMO PAETS, I. C. Aggerum Rhenolandiaë Chomarcho, &c.
- D. PAVLO à SWANENBURG, I. C. in Præpotentium Fœderati Belgii Ordinum Confessu Hollandiæ nomine Delegato & Assessori.
- D. RIPPARDO à GROENENDYCK, I. C.

NEC NON

Amplissimo, Consultissimoque Viro,

- D. IOHANNI à WEVELINCHOVEN, I. C. Reip. Leidenfis Syndico, & DD. Curatoribus à Secretis.

Nobi-

*Nobilissimi atque Amplissimi Viri, Domini
plurimum honorandi,*



Eminam assequendæ veritatis metho-
dum, quarum altera Synthefis five
Compositio dicta, altera Analysis vo-
cata five Resolutio, cum primis in
Mathefi à Veteribus frequentatam
tritamque fuiffe, palam faciunt ce-
lebria eorundem monumenta. Quo-
rum imitari exempla cupiens meus p.m. Frater, post-
quam methodo Synthetica scientiæ hujus præclara multa
publicis tam fcriptis quam prælectionibus cum fructu
tradidiffet, ad Analyfin quoque, certiffimam inveniendi
artem, ejufque perficiendæ rationem fua ftudia conver-
tit. Neque dubitabat quin pleraque omnia, quæ Veteri-
bus tantum gloriæ peperiffent, Analyfeos beneficio ac
ope reperta effent: fed quæ illi, ut inventorum major
admiratio foret, diffimulato hoc artificio & fuppreffo,
vulgari tantum Synthefeos forma exhibuiffent. Sed cum
Veterum diffimulatione factum videret, hunc Analyti-
cæ methodi præftantem ufum non modo à multis igno-
rari ac negligi, fed ipfam ejus certitudinem ac evidentiam
à nonnullis fufpectam haberi, atque adeo foli Synthefi
miferando labore inhæreretur: confultum judicavit hac
peculiari diatriba oftendere, ipfum quoque Syntheticum
demonftrandi modum in Analyfi contineri, atque ex ea
elici poffe; ut eo argumento quemvis convinceret, quan-
tum illa & prævaleat, & præferenda fit. Sed vix huic tra-
ctatui fupremam impofuerat manum, cum, proh dolor,
vita ejus, atque omnis reliqua de eo expectatio, interce-
dente fato abrupta fuit. At vero, ut pofthumus idem at-
que noviffimus induftriæ ejus fœtus in publicam lucem,
cui deftinatus erat, rite & honefte prodire poffet: ego, ut
defun-

defuncti frater unicus , mei esse officii atque pietatis existimavi , non tantum in me recipere editionis promovendæ ac juvandæ curam ; sed etiam pro veneratione & observantia , quæ vobis , Nobilissimi atque Amplissimi Domini , jure multiplici debetur , eundem fœtum inclytæ dignitati vestræ ac honori consecrare. Vtique futurum spero , ut cujus ingenii primitias , illustribus vestris nominibus olim inscriptas , propitia benignitate excepistis , hunc quoque ultimum ejusdem fructum gratiose suscipiatis. Neque solita humanitas vestra obstare sinet meam offerentis tenuitatem , qui simul hoc quantulocunque conatu pro vestris non modo in Fratrem , sed etiam in p. m. Parentem meum , longi temporis beneficiis meritisque gratum animum profiteri ac testari exoptem. Quod quidem pro illis , meque ipso , luculentius aliquando me facturum confido , si & mihi , à prima ætate similibus studiis innutrito , benevolentia & favoris vestri auram aspirare contingat. Interim DEVM OPT. MAX. suppliciter oro , ut consilia vestra & pro Reip. salute atque Academiae decore curas secundet , optimisque successibus donet.

Vestrarum Nobb. & Ampp.

humillimus cliens

P E T R V S à S C H O O T E N .

FRAN-

FRANCISCI à SCHOOTEN

Tractatus

De concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico.

LECTORI S.

Quoniam, quæ in Tractatu hoc docentur, evidentiùs per exempla quàm præcepta explicari atque intelligi possunt: sufficere judicavi variis diversorum generum exemplis rem apertissimè exponere, candidèque impertiri. Vale.

P R O B L E M A.

Datam rectam AB, utcunque sectam in C, ita producere ad D, ut rectangulum sub AD, DB comprehensum æquetur quadrato rectæ CD. Vide sequentem figuram.

Series Analyseos five Resolutionis.

Supposito Problemate ut jam factò,

voco AC. a CB. b & BD vel DE. x : eritque AD. $a+b+x$, & CD. $b+x$.

Deinde ut habeatur æquatio,

| | | |
|----------------|-----------------------|-----|
| Multiplico AD. | $a + b + x$ | x |
| per BD vel DE. | $\frac{a + b + x}{x}$ | x |

Eritque rectangulum sub AD, DB comprehensum, hoc est, $\square ADEF. ax + bx + xx$.

Pars II.

Xx

Si-

Similiter, multiplico CD. $b + x$
 per CD vel DG. $b + x$
 $+ bx + xx$
 $bb + bx$

Et fit quadratum ex CD, hoc est, $\square CDGH. bb + 2bx + xx.$

Vnde talis emergit æquatio

$$ax + bx + xx \propto bb + 2bx + xx.$$

Ad quam reducendam tollatur utrinque bx & xx ,

$$\text{eritque } ax \propto bb + bx. \dagger$$

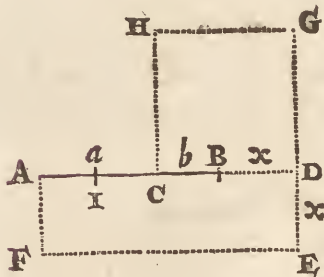
Deinde transferatur bx ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una & cognitæ ab altera parte habeantur,

$$\text{\& fit } ax - bx \propto bb.$$

Cujus utraq; pars si dividatur per $a - b$,

$$\text{invenietur } x \propto \frac{bb}{a-b}. \text{ Hoc est, resolutâ æqualitate}$$

in proportionem, erit ut $a - b$ ad b , ita b ad x .



Id quod docet, ad producendam AB usque ad D, qualis requiritur, sumendam esse CI æqualem CB, ita ut AI fit $\propto a - b$, ac deinde ad AI & IC vel CB, hoc est, ad $a - b$ & b , esse inveniendam 3^{tiam} proportionalem BD.

Vnde tale formari poterit Theorema, supponendo rectangulum AD B quadrato ex CD æquale esse.

Si AB producat ad D, ita ut rectangulum AD B sit æquale quadrato ex CD: erit AC major quàm CB, & excessus AI ad IC vel CB eandem habebit rationem, quam CB ad BD.

Cujus demonstratio eodem ordine procedit quo Analysis, sequendo nimirum ejusdem vestigia, hoc pacto:

Cum enim ex hypothesi \square ADB sit æquale \square^{to} ex CD,
 $ax + bx + xx \infty bb + 2bx + xx$

ablato utrinque \square^{lo} sub CD & DB,
 $bx + xx$

erit \square sub AC & DB æquale \square^{lo} sub CD & CB^b. a per 1 se-
cundi.

Rursus auferatur utrinque \square sub IC vel CB & BD, id est, bx ,
 eritque \square sub AI & BD æquale \square^{to} ex CB^d. b per 2 se-
cundi.

$ax - bx \infty bb$. c per 1 se-
cundi.

Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit^e
 ut A I ad I C vel C B, ita C B ad B D. d per 3 se-
cundi.

$a - b - - - b - - - - b \mid x$. Quod erat propositum. e per 17
sexti.

*Quoniam autem præstare videtur, loco horum æqua-
 lium rectangulorum considerare laterum proportionem,
 quandoquidem in demonstrationibus Geometricis, ubi hæ
 æqualitates vel proportiones schematum contemplationi
 insuper sunt astringendæ, linearum hæc inter se collatio
 simplicior est censenda quàm planorum aut solidorum,
 ipsaque etiam figuras requirit minùs intricatas, vel sal-
 tem ratiocinationes, quæ circa illas fiunt, magis liberæ
 reddit: idcirco convertenda erit æqualitas in proportio-
 nem atque hæc edusque continuanda varièque transmu-
 tanda, utendo sc. ad id modis argumentandi libro 5^o E-
 lementorum expositis, donec appareat quæsitum ex tri-
 bus prioribus proportionis terminis constare seu inveniri
 posse. Quod ipsum ut rectius percipiatur, visum nobis fuit
 aliam præcedentis Theorematis demonstrationem hîc
 afferre, qualis illa à principio usque ad finem per pro-
 portionalia procedit, & prioribus æqualitatibus ad
 amussim respondet.*

Etenim cum ex hypothesi sit

\square ADB æquale \square^{to} ex CD:
 $ax + bx + xx \infty bb + 2bx + xx:$

X x 2

Erit

f per 17
fexti. Erit f , resolvendo æqualitatem in proportionem,
ut AD ad CD, ita CD ad BD.

$$a + b + x \text{ --- } b + x \text{ --- } b + x \text{ / } x.$$

Hinc cum fit

ut totum AD ad totum CD,

$$a + b + x \text{ --- } b + x$$

ita ablatum CD ad ablatum BD:

$$\frac{b + x}{x}$$

g per 19
quinti.

erit etiam g

reliquum AC ad reliquum CB, ut ablatum CD ad ablatum BD.

$$a \text{ --- } b \text{ --- } b + x \text{ / } x.$$

h per 17
quinti.

Et dividendo h

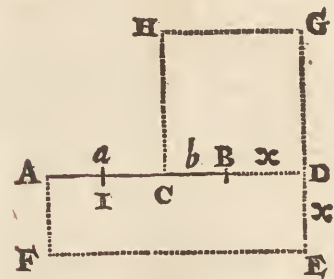
ut AI ad IC vel CB, ita CB ad BD

$$a - b \text{ --- } b \text{ --- } b \text{ / } x. \text{ ut proponeretur.}$$

Hinc, ut Problemati huic sit locus, patet, rectam AC ipsam CB debere esse majorem; atque ad eam hanc conditionem Problemati esse præfigendam, cum sine eâ constare nequeat, si velimus ut

quæsitum ex datis invenitur, utpote ad quod obtinendum BC ex CA est subtrahenda.

Idem etiam liquet, supponendo AC æqualem aut minorem quàm CB. Nam AC æquali existente ipsi CB, non posset rectangulum ADB quadrato ex CD æquale esse: cum illud unà cum quadrato ex CB eî tantum



i per 8
secundi.

æquale existat. Et quidem si AC ipsam CB minor sit, manifestum est, rectangulum ADB quadrato ex CD tunc adhuc multò minus fore.

Cum igitur constet Determinatio, Problema constructur hoc modo:

Constructio.

Assumptâ CI æquali CB, si fiat ut reliqua AI ad IC vel CB, ita CB ad BD: dico rectangulum ADEF, quod

quod sub AD & DB seu DE comprehenditur, æquale esse quadrato CDGH, à recta CD descripto.

Quod ipsum retrogrado ordine fit manifestum, incipiendo ab Analyseos fine & per ejusdem vestigia redeundo ad illius principium.

Finis Compositionis.

habebitur *

□ sub AD & DB seu ADEF æquale □^{to} ex CD seu CDGH!
 $ax + bx + xx \quad \infty \quad bb + 2bx + xx.$

Quod erat faciendum.

Rursus addito utrinque □^{lo} sub CD & DB, id est, $bx + xx$,

fiet ^m □ sub AC & DB æquale □^{lo} sub CD & CB ⁿ.
 $ax \quad \infty \quad bb + bx.$

Deinde addito utrinque □^{lo} sub IC vel CB & BD, id est, bx , ut in alteram transeat partem,

erit ° □ sub AI & BD æquale □^{to} ex CB.
 $ax - bx \quad \infty \quad bb.$

revocatâ proportionem ad æqualitatem,
 ut AI ad IC vel CB, ita CB ad BD:
 $a - b \text{ --- } b \text{ --- } b \text{ | } x$

Etenim cum ex Constructione fit

Principium Compositionis.

Alia ejusdem Problematis Compositio, per vestigia proportionalium secundæ Resolutionis regrediens.

Finis Compositionis.

erit ^r □ sub AD & BD seu ADEF æquale □^{to} ex CD seu CDGH. ^{p per 17}
 $ax + bx + xx \quad \infty \quad bb + 2bx + xx. \text{ ^{sexti.}}$

Quod erat faciendum.

id est, revocatâ proportionem ad æqualitatem,

$Xx \text{ 3.}$

erit

NOTA
 Hujus atque sequentium Problematum Compositiones retro legendas esse.
 k per 1^o secundi.
 l per 2^o secundi.
 m per 1^o secundi.
 n per 3^o secundi.
 o per 17^o sexti.

q per 12
quinti. erit etiam ^r

ut AD summa antec. ad CD summā conf., ita CD una antec. ad BD unam conseq.

$$\frac{a+b+x}{b+x} = \frac{b+x}{x}$$

ita CD antec. ad BD consequentem:

Hinc cum sit ut A C antec. ad C B conseq.,

$$a = \frac{b}{x}$$

ut A C ad C B, ita CD ad BD.

$$a = \frac{b}{x} = \frac{b+x}{x}$$

erit componendo ^r

r per 18
quinti.

ut AI ad IC vel C B, ita C B ad BD:

$$a - b = \frac{b}{x}$$

Cum enim ex constructione sit

Principium Compositionis

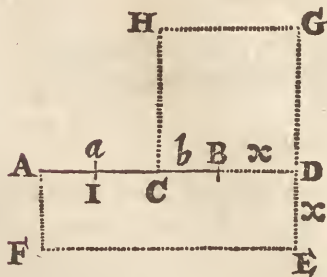
His igitur ita se habentibus, si velimus, ut, neglecto artificio, quo tum Constructio Problematis, tum ejus demonstratio fuit inventa, tantummodo constet, allatā Constructione quæsitum semper obtineri: poterimus, calculi vestigiis nunc prætermisissis, hujusmodi ad id afferre demonstrationem.

Demonstratio.

s per 17
sexii. Cum enim ex constructione AI sit ad IC vel C B, sicut C B ad B D: erit ^r rectangulum sub extremis AI & B D æquale quadrato mediæ C B. Quibus si addatur commune rectangulum sub IC vel C B & B D, erit & ^r rectangulum sub A C & B D æquale rectangulo sub CD & C B. His igitur si rursus addatur commune rectangulum sub CD & D B, erit similiter ^r rectangulum sub AD & D B seu A D E F ^r æquale quadrato ex C D. Quod erat faciendum.

t per 1 se-
cundi.
u per 3 se-
cundi.

x per 1
secundi.
y per 2
secundi.



ex C D. Quod erat faciendum.

Vel

Vel etiam sic:

Cum ex constructione AI fit ad IC vel CB, sicut CB ad BD: erit componendo ^a AC ad CB, sicut CD ad BD. Sed ut ^a per 18 una antecedentium CD ad unam consequentium BD, ita sunt ^b quinti. antecedentes AC & CD simul, id est, tota AD, ad consequentes CB & BD simul, id est, ad totam CD. Æqualia igitur sunt ^c per 17 quadratum CD & rectangulum ADB. Quod erat faciendum. ^{sexti.}

Quoniam itaque Problemate ad æquationem per ducto Algebrae munus est eam deinde juxta certas regulas transmutare, servando semper æqualitatem, sic ut tandem constet, quo pacto illius ope quæ sita quantitas ex datis inveniri possit: non inconueniens duxi, si unà hîc ostenderem, quibus modis aliquot illius usitatiores transmutationes in proportiones resolvi queant, cum hæ, ut supra monitum fuit, in Problematîs Geometricè resolvendis ac in Theorematis solito more demonstrandis, concinniores sint judicandæ; præsertim ubi eadem æqualitas ad tres pluresve dimensiones ascendit, atque idcirco illa cuique minus obvia est, quâ ratione per Geometriæ Elementa sit explicanda.

Typus aliquot æquationum, secundum Algebrae leges reductarum, & earundem in proportiones correspondentes resolutio; tam ad Problematum Resolutiones Geometricas ex calculo eliciendas, quàm ad Theorematum Demonstrationes ex eodem componendas, utilis.

Reductiones Algebraicæ Resolutiones Geometricæ.

| | | |
|--------------------------------|--|---------------------|
| Si fuerit $ax \propto bc$: | erit ^d ut a ad b , ita c ad x . | ^d per 16 |
| dividatur utrinque per a . | vel permutatim | ^{sexti.} |
| fit $x \propto \frac{bc}{a}$. | ut a ad c , ita b ad x . | |

| | | |
|--|--|---------------------|
| Si sit $ax \propto bx \propto cd$: | erit ^e ut $a \propto b$ ad c , ita d ad x . | ^e per 16 |
| dividatur utrinque per $a \propto b$ | vel permutatim | ^{sexti.} |
| fit $x \propto \frac{cd}{a \propto b}$. | ut $a \propto b$ ad d , ita c ad x . | |

Si

- f per 16 Si fit $ax \infty bc \& dc$: erit ^f ut a ad $b \& d$, ita c ad x .
 sexti. dividatur utrinque per a vel permutatim
 fit $x \infty \frac{bc \& dc}{a}$. ut a ad c , ita $b \& d$ ad x .
- g per 16 Si fit $ax \& bx \infty cd \& ed$: erit ^g ut $a \& b$ ad $c \& e$, ita d ad x .
 sexti. dividatur utrinque per $a \& b$ vel permutatim
 fit $x \infty \frac{cd \& ed}{a \& b}$. ut $a \& b$ ad d , ita $c \& e$ ad x .
- h per 16 Si fit $ax \infty bb - cc$: erit ^h ut a ad $b + c$, ita $b - c$ ad x .
 sexti. dividatur utrinque per a vel permutatim
 fit $x \infty \frac{bb - cc}{a}$. ut a ad $b - c$, ita $b + c$ ad x .
- i per 16 Si fit $ax \infty bb + bx$: * erit ⁱ ut a ad b , ita $b + x$ ad x .
 sexti. auferatur utrinque bx & dividendo ^k
 * Ut supra eritque $ax - bx \infty bb$. ut $a - b$ ad b , ita b ad x .
 ad nota dividatur utrinque per $a - b$
 tam †
 k per 17 fit $x \infty \frac{bb}{a - b}$.
 quinti.
- l per 16 Si fit $ax \infty bb - bx$: erit ^l ut a ad b , ita $b - x$ ad x .
 sexti. addatur utrinque bx & componendo ^m
 m per 18 eritque $ax + bx \infty bb$. ut $a + b$ ad b , ita b ad x .
 quinti. dividatur utrinque per $a + b$
 fit $x \infty \frac{bb}{a + b}$.
- n per 16 Si fit $ax - ac \infty bx$: erit ⁿ ut a ad b , ita x ad $x - c$.
 sexti. addito utrinque ac & dividendo ^o
 o per 17 erit $ax \infty bx + ac$. ut $a - b$ ad b , ita c ad $x - c$.
 quinti. auferatur utrinque bx & per compositionem rationis
 eritque $ax - bx \infty ac$. contrariam ^p
 p vide dividatur utrinque per $a - b$ ut $a - b$ ad a , ita c ad x .
 Clavium ad 18
 quinti. fit $x \infty \frac{ac}{a - b}$.
- q per 16 Si fit $ax - ac \infty bx + bc$: erit ^q ut a ad b , ita $x + c$ ad $x - c$.
 sexti. addito utrinque ac & dividendo ^r
 r per 17 erit $ax \infty bx + bc + ac$. ut $a - b$ ad b , ita $2c$ ad $x - c$.
 quinti. auferatur utrinque bx Vbi liquet, etiam si 4^{tus} hinc ter-
 eritque $ax - bx \infty bc + ac$. minus proportionalis quantita-
 tem

dividatur utrinque per $a-b$ tem quæsitam x seorsim non exhibeat, ipsam tamen ex tribus prioribus, qui quidem omnes sunt cogniti, inveniri posse. Id quod similiter de præcedenti ac sequenti formula aliisque est intelligendum.

fit $x \propto \frac{bc+ac}{a-b}$.

At verò si ipsa x quarto loco separatim desideretur, licebit ulterius sic argumentari.

α Haud secus, cum sit

ut a ad b , ita $x+c$ ad $x-c$,
erit invertendo ^a

^{a per Coroll. 4}

ut b ad a , ita $x-c$ ad $x+c$. ^{quinti.}

& per compositionem rationis contrariam ^b

^{b vide Clavium ad 18}

ut b ad $b+a$, ita $x-c$ ad $2x$. ^{quinti.}

Hinc cum $a-b$ — b $b+a$
sint 3 magnitudines ab una parte,

& $2c-x-c$ $2x$

tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est ordinata:

erunt ipsæ quoque ^c ex æqualitate in eadem ratione, hoc est, ^{c per 22 quinti.}

$a-b$ ad $b+a$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x . ^{d per 15 quinti.}

erit ^e ut a ad b , ita $c-x$ ad $c+x$. ^{e per 16 sexti.}

& componendo ^f
ut $a+b$ ad b , ita $2c$ ad $c+x$. ^{f per 18 quinti.}

Rursus cum sit

α ut a ad b , ita $c-x$ ad $c+x$,
erit invertendo ^g

^{g per Coroll. 4}

ut b ad a , ita $c+x$ ad $c-x$. ^{quinti.}

& per conversionem rationis ^h
ut b ad $b-a$, ita $c+x$ ad $2x$. ^{h per Coroll. 19 quinti.}

Hinc

Si sit $ac+ax \propto bc-bx$:

addito utrinque bx

erit $ac+ax+bx \propto bc$.

auferatur utrinque ac

eritque $ax+bx \propto bc-ac$.

dividatur utrinque per $a+b$

fit $x \propto \frac{bc-ac}{a+b}$.

i per 22
quinti.

k per 15
quinti.

l per 16
sexti.

m per 17
quinti.

n per Cor.
4 quinti.

o vide
Clavium
ad 18
quinti.

p per 22
quinti.

q per 15
quinti.

r per 16
sexti.

s per 18
quinti.

t per Cor.
4 quinti.

u per Cor.
19 quinti.

Si sit $ax + ac \infty bx - bc$:
addito utrinque bc
erit $ax + ac + bc \infty bx$.
auferatur utrinque ax
eritque $ac + bc \infty bx - ax$.
dividatur utrinque per $b - a$
fit $\frac{ac + bc}{b - a} \infty x$.

Si sit $ac - ax \infty bx + bc$:
addito utrinque ax
erit $ac \infty bx + ax + bc$.
auferatur utrinque bc
eritque $ac - bc \infty bx + ax$.
dividatur utrinque per $b + a$
fit $\frac{ac - bc}{b + a} \infty x$

Hinc cum $a + b - b \dots b - a$
sint 3 magnitudines ab una parte,
& $2c - c + x \dots 2x$
tres alix ab altera parte, quæ binæ
in eadem sunt ratione, quarumque
proportio est ordinata: erunt ipsæ
quoque ex æqualitate in eadem
ratione, hoc est,

$$a + b \text{ ad } b - a, \text{ sicut } 2c \text{ ad } 2x \text{ seu } c \text{ ad } x.$$

eritⁱ ut b ad a , ita $x + c$ ad $x - c$.
& dividendo^m

ut $b - a$ ad a , ita $2c$ ad $x - c$.

Rursus cum sit

a ut b ad a , ita $x + c$ ad $x - c$;

erit invertendoⁿ

ut a ad b , ita $x - c$ ad $x + c$.

& per compositionem rationis
contrariam^o

ut a ad $a + b$, ita $x - c$ ad $2x$.

Hinc cum $b - a - a \dots a + b$
sint 3 magnitudines ab una parte,

& $2c - x - c \dots 2x$,

tres alix ab altera parte, quæ binæ
in eadem sunt ratione, quarumque
proportio est ordinata: erunt ipsæ
quoque ex æqualitate in eadem
ratione, hoc est,

$$b - a \text{ ad } a + b, \text{ sicut } 2c \text{ ad } 2x \text{ seu } c \text{ ad } x.$$

erit^r ut b ad a , ita $c - x$ ad $x + c$.
& componendo^s

ut $b + a$ ad a , ita $2c$ ad $x + c$.

Rursus cum sit

a ut b ad a , ita $c - x$ ad $x + c$,

erit invertendo^t

ut a ad b , ita $x + c$ ad $c - x$.

& per conversionem rationis^u

ut a ad $a - b$, ita $x + c$ ad $2x$.

Hinc

Hinc cum $b+a$ — a $a-b$
 sint 3 magnitudines ab una parte,
 & $2c$ — $x+c$ $2x$
 tres aliæ ab altera parte, quæ binæ
 in eadem sunt ratione, quarumque
 proportio est ordinata: erunt ipsæ quoque ^a ex æquali-
 tate in eadem ratione, hoc est, ^{a per 22.}
quinti.

Si fit $ax - ac \propto bc - bx$:
 addito utrinque ac
 erit $ax \propto bc + ac - bx$.
 addatur utrinque bx
 eritque $ax + bx \propto bc + ac$.
 dividatur utrinque per $a+b$
 fit $x \propto c$.

$b+a$ ad $a-b$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x . ^{b per 15}
 erit ^c ut a ad b , ita $c - x$ ad $x - c$. ^{quinti.}
 Vnde concluditur c esse $\propto x$. ^{c per 16}
 Nam minor esse non potest, ^{sexti.}
 quoniam componendo ^d foret, ^{d per 18}
 ut $a+b$ ad b , ita 0 ad $x - c$. quod ^{quinti.}
 est absurdum. Similiter major
 esse nequit, quandoquidem per
 compositionem rationis con-
 trariam ^e foret ut a ad $a+b$, ita ^{e vide}
 $c - x$ ad 0 . quod perinde absur- ^{Clavium}
 dum est. Nec aliter se res habet ^{ad 18}
 in sequenti formula. ^{quinti.}

Si fit $ac - ax \propto bx - bc$:
 addito utrinque ax
 erit $ac \propto ax + bx - bc$.
 addatur utrinque bc
 eritque $ac + bc \propto ax + bx$.
 dividatur utrinque per $a+b$
 fit $c \propto x$.

erit ^f ut a ad b , ita $x - c$ ad $c - x$. ^{f per 16}
 Vnde rursus ut ante concludi- ^{sexti.}
 tur c esse $\propto x$: cum nec major
 nec minor esse possit.

Cum igitur in resolvendo Problemate appareat, supponendo illud ipsum ut jam factum, quo pacto quis argumentari possit, ut id quod in eo queritur ex datis inveniat: ritè me facturum judicavi, si ulterius hinc ostenderem, quâ ratione præcedentium reductionum vestigiis insistendo per illa eadem retrogradi liceat, ad equationes propositas, quas ipsius Problematæ conditiones adimplere suppono, Geometricè componendas.

Typus vestigiorum, juxta quæ æquationes superiùs reductæ ac resolutæ rursus componuntur, initium faciendo à fine reductionis & per eadem vestigia regrediendo; ad Compositiones Geometricas ex calculo eruendas utilis.

Compositiones Algebraicæ *Compositiones Geometricæ*

a per 16
sexti.

fit $ax \infty bc$.

erit $^a ax \infty bc$.

multiplicetur utrinque per a facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si fuerit $x \infty \frac{bc}{a}$: h.e., si fit ut a ad b , ita c ad x ; vel permutatim a ad c , ita b ad x :

b per 16
sexti.

fit $ax \& bx \infty cd$.

erit $^b ax \& bx \infty cd$.

multiplicetur utrinque per $a \& b$ facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si fit $x \infty \frac{cd}{a \& b}$: h.e., si fit ut $a \& b$ ad c , ita d ad x ; vel permutatim $a \& b$ ad d , ita c ad x :

c per 16
sexti.

fit $ax \infty bc \& dc$.

erit $^c ax \infty bc \& dc$.

multiplicetur utrinque per a facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si fit $x \infty \frac{bc \& dc}{a}$: h.e., si fit ut a ad $b \& d$, ita c ad x ; vel permutatim a ad c , ita $b \& d$ ad x :

d per 16
sexti.

fit $ax \& bx \infty cd \& ed$.

erit $^d ax \& bx \infty cd \& ed$.

multiplicetur per $a \& b$ facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si fit $x \infty \frac{cd \& ed}{a \& b}$: h.e., si fit ut $a \& b$ ad $c \& e$, ita d ad x ; vel permutatim $a \& b$ ad d , ita $c \& e$ ad x :

e per 16
sexti.

fit $ax \infty bb - cc$.

erit $^e ax \infty bb - cc$.

multiplicetur utrinque per a facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si fit $x \infty \frac{bb - cc}{a}$: h.e., si fit ut a ad $b + c$, ita $b - c$ ad x ; vel permutatim a ad $b - c$, ita $b + c$ ad x :

fit

fit $ax \propto bb + bx$. erit $f ax \propto bb + bx$. f per 16
 addatur utrinque bx id est, reducendo proportionem sexti.
 ad æqualitatem

eritque $ax - bx \propto bb$. ut $a ad b$, ita $b + x ad x$.
 multiplicetur utrinque per $a - b$ erit componendo s g per 18
 Si fit $x \propto \frac{bb}{a-b}$: hoc est, si fit ut $a - b ad b$, ita $b ad x$: † Vt supra ad
 notam †

fit $ax \propto bb - bx$. erit $h ax \propto bb - bx$. h per 16
 auferatur utrinque bx id est, reducendo proportionem sexti.
 ad æqualitatem

eritque $ax + bx \propto bb$. ut $a ad b$, ita $b - x ad x$.
 multiplicetur utrinque per $a + b$ erit dividendo i i per 17
 Si fit $x \propto \frac{bb}{a+b}$: hoc est, si fit ut $a + b ad b$, ita $b ad x$: quinti.

fit $ax - ac \propto bx$. erit $k ax - ac \propto bx$. k per 16
 auferatur utrinque ac id est, reducendo proportionem sexti.
 ad æqualitatem

eritque $ax \propto bx + ac$. ut $a ad b$, ita $x ad x - c$.
 addatur utrinque bx & componendo l l per 18
 erit $ax - bx \propto ac$. ut $a - b ad b$, ita $c ad x - c$. quinti.
 multiplicato utrinque per $a - b$ erit per divisionem rationis
 contrariam m m vide

Si fit $x \propto \frac{ac}{a-b}$: hoc est, si fit ut $a - b ad a$, ita $c ad x$: Clavium
 ad 17
 quinti.

erit $n ax - ac \propto bx + bc$. n per 16
 id est, reducendo proportionem sexti.
 ad æqualitatem,

ut $a ad b$, ita $x + c ad x - c$
 & componendo o o per 18
 ut $a - b ad b$, ita $2c ad x - c$. quinti.

fit $ax - ac \propto bx + bc$. vel, sumptis consequentium se- p vide
 auferatur utrinque ac . missibus, p Clavium
 ad 22

eritque $ax \propto bx + bc + ac$. ut $a - b ad 2b$, ita $2c ad 2x - 2c$. quinti.
 addatur utrinque bx id est, per divisionem rationis q vide
 erit $ax - bx \propto bc + ac$. contrariam, q Clavium
 ad 17
 Yy 3. mul- quinti.

r per 15
quinti. multiplicato utrinque per $a-b$ ut $a-b$ ad $b+a$, ita $2c$ ad $2x$.
erit etiam ^r

Si fit $x \propto \frac{bc+ac}{a-b}$: hoc est, si fit ut $a-b$ ad $b+a$, ita c ad x :

s per 16
sexti.

erit $ac+ax \propto bc-bx$.
id est, reducendo proportionem
ad æqualitatem,
ut a ad b , ita $c-x$ ad $c+x$.
& dividendo ^r

r per 17
quinti.

ut $a+b$ ad b , ita $2c$ ad $c+x$.
vel, sumptis consequentium se-
missibus, ^r

u vide
Clavium
ad 22
quinti.
x vide
Clavium
ad 18
quinti.
y per 15
quinti.

fit $ac+ax \propto bc-bx$.
auferatur utrinque bx
eritque $ac+ax+bx \propto bc$.
addatur utrinque ac
erit $ax+bx \propto bc-ac$.
multiplicato utrinque per $a+b$

ut $a+b$ ad $2b$, ita $2c$ ad $2c+2x$.
id est, per compositionem ratio-
nis contrariam, ^r
ut $a+b$ ad $b-a$, ita $2c$ ad $2x$.
erit etiam ^r

z per 16
sexti.

erit $ax+ac \propto bx-bc$.
id est, reducendo proportionem
ad æqualitatem,
ut b ad a , ita $x+c$ ad $x-c$.
& componendo ^r

a per 18
quinti.

ut $b-a$ ad a , ita $2c$ ad $x-c$.
vel, sumptis consequentium se-
missibus, ^b

b vide
Clavium
ad 22
quinti.
c vide
Clavium
ad 17
quinti.
d per 15
quinti.

fit $ax+ac \propto bx-bc$.
auferatur utrinque bc .
eritque $ax+ac+bc \propto bx$.
addatur utrinque ax
erit $ac+bc \propto bx-ax$.
multiplicato utrinque per $b-a$

ut $b-a$ ad $2a$, ita $2c$ ad $2x-2c$.
id est, per divisionem rationis
contrariam, ^c
ut $b-a$ ad $a+b$, ita $2c$ ad $2x$.
erit etiam ^d

Si fit $\frac{ac+bc}{b-a} \propto x$: hoc est, si fit ut $b-a$ ad $a+b$, ita c ad x :

erit $ac - ax \propto bx + bc.$ e per 16
 id est, reducendo proportionem sexii.
 ad æqualitatem

ut b ad a , ita $c - x$ ad $x + c.$

& dividendo ^f

ut $b + a$ ad a , ita $2c$ ad $x + c.$ f per 17

vel, sumptis consequentium se-
 missibus, ^g

ut $b + a$ ad $2a$, ita $2c$ ad $2x + 2c.$

id est, per compositionem ratio-
 nis contrariam, ^h

ut $b + a$ ad $a - b$, ita $2c$ ad $2x.$

erit etiam ⁱ

fit $ac - ax \propto bx + bc.$

auferatur utrinque ax

eritque $ac \propto bx + ax + bc.$

addatur utrinque bc

erit $ac - bc \propto bx + ax.$

multiplicato utrinque per $b + a$

Si fit $\frac{ac - bc}{b + a} \propto x$: hoc est, si fit ut $b + a$ ad $a - b$, ita c ad x :

g vide
Clavium
ad 22
quinti.
h vide
Clavium
ad 18
quinti.
i per 15
quinti.

fit $ax - ac \propto bc - bx.$

auferatur utrinque ac

eritque $ax \propto bc + ac - bx.$

auferatur utrinque bx

erit $ax + bx \propto bc + ac.$

multiplicato utrinque per $a + b$

Si fit $x \propto c$: seu, quod idem est, si x fit ad c , sicut $a + b$ ad $a + b$:

fit $ac - ax \propto bx - bc.$

auferatur utrinque ax

eritque $ac \propto ax + bx - bc.$

auferatur utrinque bc

erit $ac + bc \propto ax + bx.$

multiplicato utrinque per $a + b$

Si fit $c \propto x$: seu, quod idem est, si c fit ad x , sicut $a + b$ ad $a + b$:

Cum in duabus præcedentibus formulis non occurrat quâ viâ per proportionales, ut ante, ad æquationes priores perveniatur: licebit per æqualitatem procedere, æqualia per æqualia multiplicando, ac deinde ab æqualibus æqualia auferendo, omnino ut in Compositionibus hisce Algebraicis factum est.

P R O B L E M A.

Datam rectam AB, utcunque sectam in C, rursus secare in D; ita ut rectangulum sub AD, DC comprehensum sit æquale quadrato ex DB.

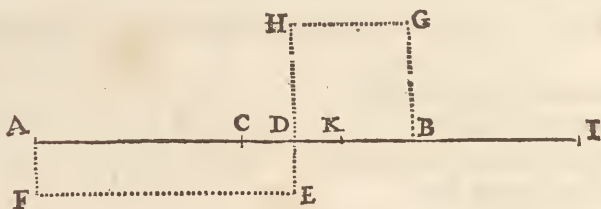
Series *Analyseos* sive *Resolutionis*.

Supposito Problemate ut jam factò,

voco AC. a

CB. b

& CD. x ; eritque AD $\propto a+x$, & DB $\propto b-x$.



Deinde ut habeatur æquatio,

Multiplico AD. $a+x$

per DC seu DE. x

Et fit rectangulum ADE F. $ax+xx$.

Similiter multiplico DB. $b-x$

per DB seu BG. $b-x$

$-bx+xx$

$bb-bx$

Et fit quadratum DBGH. $bb-2bx+xx$.

Vnde talis exurgit æquatio

$ax+xx \propto bb-2bx+xx$.

Ad quam reducendam tollatur utrinque xx ,

eritque $ax \propto bb-2bx$.

Deinde transferatur $2bx$ ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una parte habeantur, & cognitæ ab altera parte,

& fit $ax+2bx \propto bb$.

Cujus

Cujus utraque pars si dividatur per $a + 2b$,

invenietur $x \propto \frac{bb}{a + 2b}$. Hoc est, resolutâ æqualitate

in proportionem, erit ut $a + 2b$ ad b , ita b ad x .

Id quod docet, ad secandam AB in D, qualis requiritur, producendam esse AB ad I, ita ut BI sit æqualis BC; ac deinde ad AI & IB vel BC inveniendam esse 3^{tiã} proportionalem, hoc est, ut AI sit ad IB vel BC, sicut BC ad CD.

Vt autem pateat demonstratio, repetantur Analyseos vestigia. Si enim per hæc ipsa regrediamur, incipiendo ab ejus fine & desinendo ubi illa initium sumpsit, inventa simul erit via à dato seu concessio perveniendi ad quæsitum. In quem igitur finem binas sequentes compositiones, quarum altera Algebrae, altera Geometriæ genuina est, ob oculos ponere visum fuit, adhibitâ utriusque calculi interpretatione sive ad figuram relatione.

Compositio Algebraica.

Compositio Geometrica.

Finis *Compositionis.*

□ AD, CD vel ADEF
 & fit $ax + xx \propto$
 □ DB vel DBGH.
 $bb - 2bx + xx.$
 □ CD vel DK
 Addatur utrinque xx ,
 □ AC, CD
 eritque $ax \propto$
 (□ DB - □ CD vel DK) i.e. ^d,
 □ CBK
 $bb - 2bx.$
 □ CI, CD vel □ CDI + □ CD
 Auferatur utrinque $2bx$,
 □ AI, CD □ IB vel BC
 erit $ax + 2bx \propto bb.$
 Pars II.

□ AD, CD vel ADEF
 Et fit, per 3. 2^{di}. $ax + xx \propto$
 □ DB vel DBGH.
 $bb - 2bx + xx.$ per 6. 2^{di}. a per 3
secundi.
 □ CD vel DK
 Addatur utrinque xx
 □ ACD □ CBK b per 6
secundi.
 erit, per 16. 6^{ti}. $ax \propto bb - 2bx.$
 Id est, reducâ proportionem ad
 æqualitatem,
 AC CB BK KD vel CD
 ut a ad b , ita $b - 2x$ ad x . c per 5
secundi.
 Et, sumptis consequentium se- d per 1
secundi.
 missibus, vide Clavium ad 22 5^{ti}.
 AC CI BK KC
 ut a ad $2b$, ita $b - 2x$ ad $2x$. e per 3
secundi.
 Vnde dividendo erit, per 17 quimi.
 AI IC BC 2 CD vel CK
 ut $a + 2b$ ad $2b$, ita b ad $2x$. f per 17
id sexti.
 Zz

id est, reductâ proportionem five, sumptis consequentium duplis, *vide Clavium ad 22. 5^{ti}.*

AI IB BC CD

Ex constructione est, ut $a + 2b$ ad b , ita b ad x .

Principium *Compositionis*.

Adapertâ itaque tum ad Constructionem tum ad Demonstrationem viâ, licebit Problema construere atque dupliciter demonstrare, ut sequitur.

Constructio.

Productâ AB ad I, donec BI sit æqualis BC, fiat ut AI ad IB vel BC, ita BC ad CD: dico rectangulum ADC seu ADEF quadrato DB seu DBGH æquale esse.

Demonstratio.

Cum enim ex constructione AI sit ad IB vel BC, ut BC ad CD: erit ^g rectangulum sub extremis AI, CD, id est, ^h rectangulum sub AC, CD unâ cum rectangulo sub CI, CD, æquale quadrato mediæ IB vel BC. A quibus si commune aufe-

g per 17
fexti.
h per 1
secundi.



ratur rectangulum sub CI, CD: erit reliquum rectangulum sub AC, CD æquale BC quadrato, dempto eidem rectangulo sub CI, CD, id est, ⁱ rectangulo CDI unâ cum quadrato CD. At cum dempto CDI rectangulo à quadrato CB vel BI^k relinquitur quadratum DB: patet dictum rectangulum AC D quadrato DB æquale esse minus quadrato CD. Hinc cum, sumendo

i per 3
secundi.
k per 5
secundi.

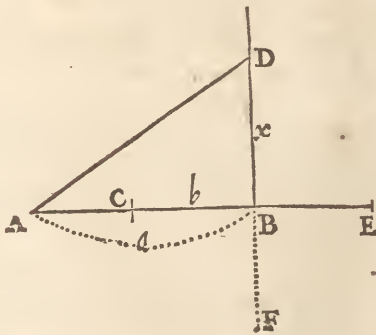
mendo CD & DK æquales, quadratum DB minus quadrato I per 6 se-
 CD vel DK' æquale sit rectangulo CBK: manifestum est, si ^{cundi.}
 æqualibus hisce rectangulis ACD & CBK addatur commune
 quadratum CD vel DK, etiam totum toti æquale esse, id est, ^{m per 3}
 rectangulum ADC seu ADEF ipsi DB quadrato seu DBGH.
 Quod erat faciendum.

Vel sic:

Cum ex constructione sit ut AI ad IB, ita BC ad CD: erit
 quoque, sumptis consequentium duplis, ^{n vide} ut AI ad IC, ita BC
 ad 2 CD seu CK; & dividendo ^{Clavium} ut AC ad CI, ita BK ad KC;
 id est, sumptis consequentium semissibus. ^{ad 22} ut AC ad CB, ita
 BK ad KD vel CD. ^{quinti.} Æquale igitur est ^{o per 17} rectangulum sub extre-
 mis AC, CD rectangulo sub mediis CB, BK. Quibus si adda-
 tur commune quadratum CD vel DK, erit & totum toti æqua-
 le, id est, ^{p vide} rectangulum ADC seu ADEF ipsi quadrato DB
 seu DBGH. ^{Clavium} Quod erat faciendum.

PROBLEMA.

Datâ rectâ AB utcunque sectâ in C, erectâque ex
 ejus termino B super ipsa perpendiculari indefinitâ BD.
 ex altero ejus termino A rectam lineam ducere AD,
 huic occurrentem in D; ita ut ipsa æqualis sit rectis
 DB; BC simul sumptis.



Series *Analyseos.*

Ponatur factum quod
 quæritur,
 sitque $AB \propto a$
 $CB \propto b$
 & $BD \propto x$: eritque
 $AD \propto b + x$.

Hinc cum angulus ad B
 sit rectus, erit ^{a per 47} quadra-
 tum ex AD æquale binis ^{primi.}
 quadratis ex AB & BD.

Zz 2

Vnde

Vnde talis resultat æquatio

$$\square AD \quad \square AB + \square BD$$

$$bb + 2bx + xx \infty aa + xx.$$

Ad quam reducendam, tollatur utrinque xx ,

$$\text{eritque } bb + 2bx \infty aa.$$

Deinde transferatur bb ad alteram partem, ut incognita quantitas ab una parte habeatur & reliquæ ab altera parte,

$$\text{\& fit } 2bx \infty aa - bb.$$

Cujus utraque pars si dividatur per $2b$,

$$\text{obtinebitur } x \infty \frac{aa - bb}{2b}. \text{ Hoc est, resolutâ æqualitate}$$

in proportionem, erit ut $2b$ ad $a + b$, ita $a - b$ ad x .

Quod ipsum docet, ad Problema hoc solvendum, prout BE in directum ipsius AB sumpta est æqualis BC, opus tantum esse, ad CE, AE, & AC invenire 4^{am} proportionalem BD.

Ad inveniendam autem demonstrationem, fiat repetitio vestigiorum Analyseos, incipiendo ab ejus fine & per eadem vestigia progrediendo usque ad ipsius initium; ita videlicet, ut quod in Analyfi seu Resolutione addendum præcipitur, id in Synthesi seu Compositione subtrahatur, & contra: cum Analyfi & Synthesi directè omnino sibi invicem opponantur.

Finis Compositionis:

Vnde & ipsæ rectæ FD & AD.

Æqualia igitur sunt $\square FD$ & $\square AD$.

$$\text{b per 47} \quad \square FB + 2\square FBD + \square BD, \text{ vel } \square FD^b. \quad \square AB + \square BD, \text{ vel } \square AD^c.$$

primi.

c per 4 se-
cundi.

$$\text{Et fit } bb + 2bx + xx \infty aa + xx.$$

$$\square BD$$

Rursus addatur utrinque xx ,

$$\square FB + 2\square FBD \quad \square AB^d.$$

d per 6 se-
cundi.

$$\text{eritque } bb + 2bx \infty aa.$$

$$\square FB \text{ vel } BC.$$

Addatur utrinque bb ,

$$\square CE, BD \text{ seu } 2\square FBD \quad \square EAC.$$

e per 16.
sexti.

$$\text{erit } 2bx \infty aa - bb$$

id est,

id est, reductâ proportione ad æqualitatem, sumptâque FB
 æquali BC,

$$CE \quad AE \quad AC \quad BD$$

Ex constructione est ut $2b$ ad $a+b$, ita $a-b$ ad x .

Principium Compositionis.

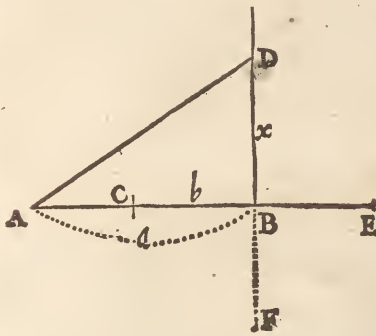
Inventâ igitur tum Constructione tum Compositione sive Demonstratione, poterit Problema, neglecto jam artificio, quo utraque fuit investigata, in hunc modum construi atque componi.

Constructio.

Productâ AB ad E, ut BE sit æqualis BC: fiat ut CE ad AE, ita AC ad BD, jungaturque AD. Dico hanc ipsi DB, BC simul sumptis æqualem esse.

Demonstratio.

Etenim productâ DB ad F, ita ut BF sit æqualis BC, quoniam per constructionem



CE est ad AE, sicut AC ad BD: erit ^f rectangulum sub extremis CE, ^{f per 16 sexti.}

BD, id est, duplum rectangulum FBD, æquale rectangulo sub mediis EA, AC. Quibus si addatur commune quadratum ex FB vel BC, erit etiam quadratum FB unâ cum duplo rectangulo FBD

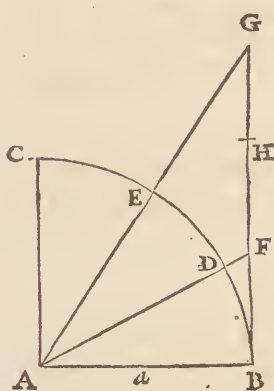
æquale quadrato ex AB. Quibus si rursus addatur commune quadratum ex BD: erunt quoque bina quadrata ex FB, BD ^{g per 6 secundum.} simul cum duplo rectangulo FBD, id est ^h, quadratum totius FD, ^{h per 4 secundum.}

æqualia binis quadratis ex AB, BD, id est ⁱ, æquale quadrato ^{i per 47 primi.} ex AD. Vnde & ipsæ rectæ FD & AD æquales erunt. Hinc

cum FD æqualis sit ipsis DB, BC simul sumptis, erit etiam AD ipsi DB, BC simul sumptis æqualis. Quod erat faciendum.

THEOREMA.

Si in quadrante circuli ABC sumatur arcus quilibet BD minor quàm 45 gr. cujus duplus sit BE, eorumque tangentes BF, BG: erit ut quadratum radii AB minus quadrato BF ad duplum quadrati AB, ita BF ad BG.



Series *Analyseos.*

Esto $AB \propto a$
 $BF \propto x$
 $BG \propto y$, eritque $FG \propto y - x$
 & $AG \propto z$.

Quoniam itaque arcus BE ipsius BD duplus ponitur, ac proinde angulus BAG duplus anguli BAF: erit angulus ad A in triangulo ABG rectâ AF bifariam sectus.

Vnde ^a erit
 ut FG ad BF, ita AG ad AB
 $y - x \propto x \propto z / a$.

Ideoque ^b $\square BF$, AG æquale $\square^{lo} FG$, AB

div. utrinque per x $\frac{xz \propto ay - ax.}{fit \quad z \propto \frac{ay - ax}{x}}$

Hinc ductâ utrâque parte in se quadratè,

erit $zz \propto \frac{aayy - 2aaxy + aaxx}{xx} \propto \frac{aa + yy}{aa + yy} \propto zz$. ^{per 47 primi.}

mult. utrinque per xx $aayy - 2aaxy + aaxx \propto aaxx + xxyy$
 toll. utrinque $aaxx$ $aayy - 2aaxy \propto xxyy$

div. utrinque per y $aay - 2aax \propto xxy$
 add. utrinque $2aax$ $aay \propto 2aax + xxy$

toll. utrinque xxy $aay \propto 2aax$
 div. utrinque per $aa - xx$ $fit y \propto \frac{2aax}{aa - xx}$.

$\square AB - \square BF \quad 2 \square AB \quad BF \quad BG$

Hoc est, erit ut $aa - xx$ ad $2aa$, ita x ad y . Vt proponebatur.

De-

a per 3
sexti.

b per 16
sexti.

Demonstrationis series eodem modo se habet quo Analyfeos, cum utriusque vestigia consentiant, quibus ab hypothefi ad quaefiti conclusionem perducimur. Vti hic videre est.

Etenim cum ^e fit
ut FG ad BF, ita AG ad AB:

$$y-x-x-z / a$$

erit quoque ^d

ut □ FG ad □ BF, ita □ AG seu □ AB + □ BG ad □ AB
 $yy-2xy+xx-xx-zz$, id est, $aa+yy / aa$.

& dividendo ^e

ut □ FG - □ BF vel FH,

id est, □ BGH^f ad □ BF, ita □ BG ad □ AB

$$yy-2xy-xx-yy / aa.$$

permutandoque ^g

ut □ BGH ad □ BG, vel^h ut HG ad GB, ita □ BF ad □ AB

$$y-2x-y-xx / aa.$$

Id est, invertendo & per conversionem rationis ⁱ,

ut □ AB ad □ AB - □ BF, ita GB ad BH

$$aa-aa-xx-y / 2x.$$

& duplatis antecedentibus ^k convertendoque

ut □ AB - □ BF ad 2 □ AB, ita BH ad 2 GB seu BF ad BG^l

$$aa-xx-2aa-x / y.$$

Quod erat ostendendum.

Quod si autem Algebrae ignaris sive in inveniendi arte imperitis ipsa demonstratio sit exhibenda, poterit ea praetermissis jam hisce vestigiis sic adhiberi.

Sumatur FH æqualis FB. Cum igitur in triangulo ABG angulus ad A rectâ AF bifariam sectus sit, erit^m ut FG ad BF, ita AG ad AB. Sed cum linearum proportionalium etiam proportionalia sint quadrata, erit & ⁿ ut quadratum FG ad quadratum BF, ita quadratum AG, id est, *per 47 primi*, summa quadratorum AB, BG, ad quadratum AB. Et dividendo ^o ut quadratum FG minus quadrato BF vel FH, id est ^p rectangulum BGH, ad quadratum BF, ita quadratum BG ad quadratum AB; permutandoque ^q ut rectangulum BGH ad quadratum BG seu ^r ut HG ad GB, ita quadratum BF ad quadratum AB. Hoc est,

c per 3
sexti.

d per 16
sexti.

e per 17
quinti.

f per 6
secundi.

g per 16
quinti.
h per 1
sexti.

i per Cor.
4 quinti,
per
Cor. 19.

k vide
Clavium
ad 22
quinti.

l per 15
quinti.

m per 3
sexti.

n per 22
sexti.

o per 17
quinti.

p per 6
secundi.

q per 16
quinti.

r per 1
sexti.

in-

8 per Cor. invertendo & per conversionem rationis', ut quadratum AB ad
 4 quinti. quadratum AB minus quadrato BF, ita GB ad BH; & dupla-
 5 per tis antecedentibus' convertendoque, ut quadratum AB minus
 Cor. 19 quadrato BF ad duplum quadrati AB; ita BH ad duplum ipsius
 6 quinti. GB seu " BF ad BG. Quod erat demonstrandum.
 7 vide Cla-
 vium ad

22 quinti.

u per 15

quinti.

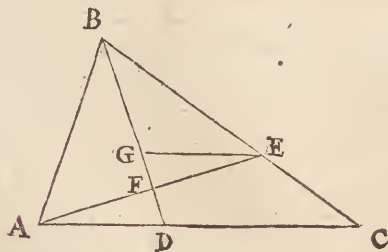
Hinc

Si, Tangens cujuslibet arcus minoris quam 45 gr. du-
 catur in duplum Quadratum Radii; à Quadrato Radii
 auferatur Tangentis quadratum; Illud productum divi-
 datur per hoc residuum: Quotus erit Tangens arcus dupli.

Theorema hoc à Clarissimo viro D. Ioanne Pellio excogitatum atque ingeniosè adhibitum pluribus modis demonstratum reperitur in tractatu ejus de controversiis, circa veram Circuli mensuram, inter ipsum & Clar. virum D. Christianum Severini Longomontanum ortis, ac anno 1647 in lucem editis.

THEOREMA.

Si fuerit triangulum ABC, cujus angulus ad B recta BD bifariam sit divisus, & ex BC abscindatur BE æqualis AB, jungaturque AE, secans BD in F: dico, si agatur EG parallela AC, occurrens ipsi BD in G, esse ut BG ad BD, ita AD ad DC, & AB ad BC; nec non DC bis esse ad excessum; quo DC superat AD, sicut BD ad DF.

Series *Analyses*.Esto $BD \propto b$ $AD \propto c$ $DC \propto y$ & $DF \propto z$.

Quoniam itaque triangulorum ABF, EBF anguli ad B ex hypothese sunt æquales, nec non latera AB, BF & EB, BF, quæ ipsos comprehendunt, æqualia: erunt & " anguli ad F æquales, id est recti, basif.

2 per 4
primi.

basisque AF basi FE æqualis. Porrò cum ^b propter parallelas ^b per 29
 AC, GE anguli DAF, FEG in triangulis AFD, FGE æqua-^{primi.}
 les sint, ut & ^c anguli ad verticem AFD & GFE, latusque AF ^c per 15
 lateri FE, ut ostensum est: erunt quoque ^d reliqua latera AD, ^{primi.}
 DF reliquis lateribus EG, GF æqualia. Hinc cum ^e propter si-^d per 26
 militudinem triangulorum BGE, BDC, BG sit ad GE, id est, ^{primi.}
 AD, sicut BD ad DC; nec non B G ad BE, id est AB sicut ^e per Cor.
 BD ad BC: erit quoque ^f permutando BG ad BD, sicut AD ^f per 16
 ad DC, & AB ad BC. Quod est primum. ^{quinti.}

Cæterum DC bis esse ad excessum, quo DC superat AD, sicut
 BD ad DF: ita patet.

Est enim, ut BG ad BD, ita AD ad DC

$$b-2z \text{ --- } b \text{ --- } c / y.$$

Ideoquæ \square BG, DC ∞ \square BD, AD.

$$by - 2yz \infty bc.$$

g per 16
 sexti.

add. utrinque 2yz $\frac{by \infty 2yz + bc}{by - bc \infty 2yz}$

toll. utrinque bc $\frac{by - bc \infty 2yz}{\text{fit } \frac{by - bc}{2y} \infty z.}$

div. utrinque per 2y $\frac{2DC \text{ DC} - AD \text{ BD} \text{ DF}}{2y \text{ ad } y - c, \text{ ita } b \text{ ad } z.}$ Hoc est, erit ut

$$2DC \text{ DC} - AD \text{ BD} \text{ DF}$$

2y ad y - c, ita b ad z. Quod est secundum.

Vel etiam, hoc modo:

Etenim cum sit

ut BG ad BD, ita AD ad DC

$$b-2z \text{ --- } b \text{ --- } c / y.$$

erit invertendo ^h

ut DC ad AD, ita BD ad BG

$$y \text{ --- } c \text{ --- } b / b-2z.$$

& per conversionem rationis ⁱ

ut DC ad DC - AD, ita BD ad DG

$$y \text{ --- } y - c \text{ --- } b / 2z.$$

id est, duplatis antecedentibus, ^k

ut 2DC ad DC - AD, ita 2BD ad DG seu BD ad DF

$$2y \text{ --- } y - c \text{ --- } b / z.$$

h per Cor.
 4 quinti.

i per Cor.
 19 quinti.

k vide
 Clavium
 ad 22
 quinti.

Ex his facile est, cognitis AD, DB, & DC, invenire DF.

Si enim, exempli gratiâ, AD sit 39, DB 45, & DC 325: fiat ut 2 DC 650 ad DC — AD 286, ita DB 45, ad DF 197.

THEOREMA.

Iisdem positis, dico rectangulum ADC unâ cum quadrato DB æquale esse rectangulo ABC.

Series *Analyseos*.

Esto AB $\propto a$
 BD $\propto b$
 AD $\propto c$
 BC $\propto x$
 DC $\propto y$
 & DF $\propto z$.

2 per 13
 secundi.

Etenim cum $2 \square BDF$ sit $\propto \square AD + \square DB - \square AB$,
 id est, $2bz \propto \frac{cc+bb-aa}{b}$

erit, dividendo utrinque per $2b$, $z \propto \frac{cc+bb-aa}{2b}$.

Vnde cum per antec. Theorema inventum quoq; sit $\frac{by-bc}{2y} \propto z$:

erit $\frac{cc+bb-aa}{b} \propto \frac{by-bc}{y}$

diviso utroque denomina-
 tore per 2, instituat
 multiplicatio per crucem
 add. utrinque ay

$\frac{ccy+bbby-aaay}{b}$ \propto $\frac{bby-bbc}{y}$

toll. utrinque bby $\frac{ccy+bbby-aaay}{b}$ \propto $\frac{bby-bbc}{y}$

add. utrinque bbc $\frac{ccy+bbby-aaay}{b}$ \propto $\frac{bby-bbc}{y}$

loco ay substit. cx $\frac{ccy+bbby-aaay}{b}$ \propto $\frac{bby-bbc}{y}$

div. utrinque per c $\frac{ccy+bbby-aaay}{b}$ \propto $\frac{bby-bbc}{y}$

$\square ADC + \square DB \square ABC$

Et fit $cy+bb \propto ax$. Quod erat propositum.

Quo autem pacto in adæquatione hac resolvenda argumen-
 tandum sit, ut sequendo vestigia allatæ reductionis, quæ ob su-
 periolem multiplicationem per crucem propriè Algebraïca est,
 quæ-

Ex demonstratis in antec.
 Theoremate vel ^{3^a} *Sexti* est
 ut AD add DC, ita AB ad BC
 $\frac{c}{y} \propto \frac{a}{x}$
 ac proinde per 16 *Sexti*
 $\square AD, BC \propto \square AB, DC$
 $cx \propto ay$.

quæsitum Theorematis Geometricè concludatur, sequens terminorum dispositio docebit.

Ex præcedenti Theoremate est
ut 2 DC ad DC — AD, ita BD ad DF

$$2y \text{ — } y - c \text{ — } b / z.$$

ac proinde^b 2 □ CDF æqual. □ BDC — □ ADB b per 16
sexti.

Deinde^c est, ut BD ad DC, ita 2 □ BDF ad 2 □ CDF. af- c per 1
sexti.
sumptâ fc. com. alt. 2 DF, id est, 2 z. d per 13
secundi.

Hinc cum^d
2 □ BDF æqu. □ AD + □ DB — □ AB, & a 2 □ CDF æqu. □ BDC — □ ADB:
2 bz ∞ cc + bb — aa, & 2 yz ∞ by — bc:

erit ut BD ad DC, seu^e □ BD ad □ BDC, e assum-
ptâ com.
altit. BD,
id est, b.
ita □ AD + □ DB — □ AB ad □ BDC — □ ADB.
cc + bb — aa — by — bc

ideoque^f
& reliq. □ AB — □ AD ad rel. □ ADB, ut totum ad totum seu BD ad DC. f per 19
quinti.
aa — cc — bc — b / y.

*Facile hîc esset quæsitum Propositionis concludere, re-
vocando hanc proportionem ad æqualitatem, & deinde
in locum a y substituendo c x. Sed quoniam sic ad solida
ascenditur, de quibus in posterioribus Elementorum li-
bris agitur, qui ob difficultatem suam magis præteriri
quàm pro Elementis Geometriæ addisci solent, poterim-
us iisdem sepositis in quæsitæ conclusionem sic ulterius
argumentari.*

Sed ut BD est ad DC, ita quoque est^g □ ADB ad □ ADC; g assum-
ptâ com.
altit. AD
seu c.
b — y — bc / cy;
& ut BD ad AD, ita quoque est^h □ ADB ad □ AD; & ⁱ h assum-
ptâ com.
altit. AD
seu c.
b — c — bc / cc

□ BD ad □ ADB seu bb ad bc. i assum-
ptâ com.
altit. BD
seu b
A a a 2 Erunt

Erunt itaque $\square AB$ — $\square AD$, $\square ADB$, & $\square AD$ tres magnitudines

aa — cc — bc cc ab una parte;

& $\square BD$, $\square ADB$, & $\square ADC$ tres aliæ ab altera

bb bc — cy

parte, quæ binæ sumptæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est perturbata:

k per 23
quinti.

quare etiam ex æqualitate proportionales erunt,

id est, $\square AB$ — $\square AD$ ad $\square AD$, sicut $\square BD$ ad $\square ADC$.

aa — cc — cc — bb / cy .

l per 18
quinti.

Et componendo ^l.

$\square AB$ ad $\square AD$, sicut $\square BD$ + $\square ADC$ ad $\square ADC$

aa — cc — $bb+cy$ / cy .

m per 16
quinti.

Permutandoque ^m

$\square AB$ ad $\square BD$ + $\square ADC$, sicut $\square AD$ ad $\square ADC$ seu

aa — $bb+cy$ — cc / cy .

AD ad DC , id est, c ad y . ⁿ

Sed ut AD ad DC , ita ^o est quoque AB ad BC , seu ^p, $\square AB$

c — y — a / x .

ad $\square ABC$, id est, aa ad ax .

n per 1
sexti.
relictâ
sc. com.
altit. AD

seu c .

o per

antec.

Theore-

ma vel 3

sexti.

p assum-

ptâ com.

altit. AB

seu a .

q per 9

quinti.

Vnde erit ut $\square AB$ ad $\square BD$ + $\square ADC$, ita $\square AB$ ad $\square ABC$.

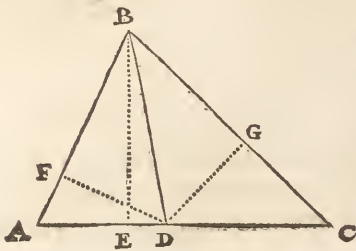
aa — $bb+cy$ — aa / ax .

Æqualia igitur sunt ^r $\square BD$ + $\square ADC$ & $\square ABC$.

$bb+cy$ \propto ax . Quod erat ostendendum.

Idem quoque aliter à nobis demonstratum reperitur Prop^{ne} 20^{ma} secundæ partis prioris tractatus Exercitationum nostrarum Mathematicarum; ac præterea etiam adhuc aliter ab aliis.

Alia præcedentis Theorematis Analysis, supponendo tantum 26 & 47 Propositiones primi libri Euclidis.



Demissis ex D super AB, BC, perpendicularibus DF, DG, patet, ob angulum ABC rectâ BD bifariam divisum, ipsas DF & DG, ut & FB & BG per 16 primi esse æquales. Deinde esto etiam BE perpendicularis ad AC, sitque

$$\begin{aligned} AB &\propto a \\ BD &\propto b \\ AD &\propto c \\ BC &\propto x \\ DC &\propto y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} FB \text{ vel } BG &\propto t, \text{ eritque } AF \propto a-t, \\ &\quad \text{ \& } GC \propto x-t. \\ \text{\& } ED &\propto v, \text{ eritque } AE \propto c-v, \\ &\quad \text{ \& } EC \propto y+v. \end{aligned}$$

per 47 primi.

$$\begin{array}{l} \text{Subtr. } \left\{ \begin{array}{l} \square AD. cc \\ \square AF. aa - 2at + tt \end{array} \right. \quad \text{Subtr. } \left\{ \begin{array}{l} bb. \square BD \\ tt. \square FB \end{array} \right. \end{array}$$

$$\square FD. cc - aa + 2at - tt \propto bb - tt. \square FD$$

dele utrinque t, & transfer cc & aa

$$\begin{array}{r} 2 \square ABF \quad \square AB + \square BD - \square AD \\ 2at \quad \propto \quad aa + bb - cc^* \end{array}$$

div. utrinque per 2 a

$$\text{fit } t \propto \frac{aa + bb - cc}{2a}$$

Sed t in aliis quoque terminis inveniri potest, quærendo eam per 3 latera trianguli DBC, hoc pacto:

A a a 3

Subtr.

per 47 primi.

$$\begin{array}{r} \text{Subtr. } \left\{ \begin{array}{l} \square D C. yy \\ \square G C. xx - 2xt + tt \end{array} \right. \quad \text{Subtr. } \left\{ \begin{array}{l} bb. \square BD \\ tt. \square BG \end{array} \right. \\ \square D G. yy - xx + 2xt - tt \infty bb - tt. \square D G \\ \hline \text{del. utrinque } tt, \& \text{ transf. } yy \& xx \\ 2 \square CBG \quad \square BC + \square BD - \square DC. \\ \cdot 2xt \infty xx + bb - yy * \\ \hline \text{div. utrinque per } 2x \\ \text{fit } t \infty \frac{xx + bb - yy}{2x}. \end{array}$$

Sive igitur quærat^r t per 3^a latera \triangle^{li} ABD, sive per 3^a latera \triangle^{li} DBC, elucet utique inde * Propositio 13 secundi libri Euclidis, ac præterea quomodo hæc ipsa adhibenda sit ad FB vel BG inveniendam.

Erit itaque

$$\begin{array}{r} \frac{aa + bb - cc}{a} \infty \frac{xx + bb - yy}{x} \\ \hline \text{diviso utroque denominatore per } 2, \text{ in-} \\ \text{fituatur multiplicatio per crucem} \\ \text{transf. quantitates, ut, quæ in } bb \text{ ductæ} \\ \text{sunt ab una parte habeantur} \\ \text{div. utrinque per } x - a \\ \frac{aax + bbx - ccx \infty aax + abb - ayy}{bbx - abb \infty aax - ayy + ccx - aax} \\ \hline \text{eritque } bb \infty \frac{aax - ayy + ccx - aax}{x - a}. \end{array}$$

Quærat^r jam v per 3^a latera trianguli ABD

per 47 primi.

$$\begin{array}{r} \text{Subtr. } \left\{ \begin{array}{l} \square A B. aa \\ \square A E. cc - 2cv + vv \end{array} \right. \quad \text{Subtr. } \left\{ \begin{array}{l} bb. \square BD \\ vv. \square ED \end{array} \right. \\ \square E B. aa - cc + 2cv - vv \infty bb - vv. \square E B \\ \hline \text{del. utrinque } vv, \& \text{ transf. } aa \& cc \\ 2cv \infty bb + cc - aa \\ \hline \text{div. utrinque per } 2c \\ \text{fit } v \infty \frac{bb + cc - aa}{2c}. \end{array}$$

Sed v quoque in aliis terminis inveniri potest, quærendo eam per 3^a latera trianguli DBC, hoc pacto:

Subtr.

per 47 primi

$$\begin{array}{l} \text{Subtr. } \left\{ \begin{array}{l} \square BD.bb \\ \square ED.vv \end{array} \right. \quad \text{Subtr. } \left\{ \begin{array}{l} xx.\square BC \\ yy+2yv+vv.\square EC \end{array} \right. \\ \square EB.bb-vv \infty \frac{xx-yy-2yv-vv.\square EB}{2\square CDE \quad \square BC-\square DC-\square BD} \\ \text{del. utrinque } vv, \& \text{ transf. } bb \& 2yv \\ \text{div. utrinque per } 2y \quad \frac{2yv \infty \quad xx-yy-bb \quad \dagger}{\text{fit } v \infty \quad \frac{xx-yy-bb}{2y}} \end{array}$$

Quærendo itaque v per 3^a latera $\triangle^{li} DBC$, emanat hinc Prop. 12 secundi libri Euclidis, ac præterea quomodo hæc ipsa debeat adhiberi ut inveniatur ED .

Quare erit

$$\frac{bb+cc-aa}{c} \infty \frac{xx-yy-bb}{y}$$

diviso utroque denominatore per 2, instituitur multiplicatio per crucem

$$bby+ccy-aa y \infty cxx-cyy-cbb$$

transf. quantitates, ut, quæ in bb ductæ sunt, ab una parte habeantur

$$bby+cbb \infty cxx+aa y-cyy-cyy$$

div. utrinque per $y \dagger c$

$$\& \text{ fit } bb \infty \frac{cxx+aa y-cyy-cyy}{y+c}$$

Dupliciter igitur invento bb , habebitur æquatio

$$\text{inter } \frac{axx-ayy+ccx-aa x}{x-a} \& \frac{cxx+aa y-cyy-cyy}{y+c}$$

mult. per crucem

$$\frac{axxy-ay^3+ccxy-aa xy+acxx-acyy+c^3x-aa cx}{\infty}$$

$$\frac{cx^3+aa xy-cxyy-ccxy-acxx-a^3y+acyy+accy}{\text{transpositis transponendis, fit}}$$

$$\frac{2acxx+cxyy+c^3x-cx^3-aa cx+2ccxy}{\infty}$$

$$2aaxy+ay^3+accy-axxy-a^3y+2acyy$$

$$\text{div. utrinque per } 2ax+yy+cc-xx-aa+2cy.$$

AD DC AB BC

eritque $cx \infty ay$. Hoc est, erit ut c ad y , ita a ad x .

$$\text{ac proinde } x \infty \frac{ay}{c}, \& \frac{cx}{a} \infty y.$$

Quæ tertia est Propositio libri sexti Euclidis.

Hinc

Hinc existente $bb \propto \frac{axx - ayy + ccx - aax}{x - a}$, si in locum ay

substituatur cx & vice versâ: habebitur $bb \propto \frac{axx - cxy + cay - aax}{x - a}$,

$$\square AD C + \square DB \square ABC$$

id est, $bb \propto ax - cy$; seu, quod eodem recidit, $cy + bb \propto ax$.

Omnino ut in antecedenti Theoremate. Unde facile est, cognitis AB, BC, AD , & DC , invenire BD .

Quòd si autem, existente $bb \propto ax - cy$. pro x scribatur $\frac{ay}{c}$ fiet $bb \propto \frac{aay}{c} - cy$ vel $bbc \propto aay - ccy$. id est, dividendo

utrinque per $aa - cc$, erit $\frac{bbc}{aa - cc} \propto y$. Vel, resolvendo æqua-

$$\square AB - \square AD \square BD \quad AD \quad DC$$

litem in proportionem, erit ut $aa - cc$ ad bb , ita cad y . Simi-

liter, si pro y scribatur $\frac{cx}{a}$, erit $bb \propto ax - \frac{ccx}{a}$ vel $bb a \propto aax - ccx$.

id est, dividendo utrinque per $aa - cc$, erit $\frac{bba}{aa - cc} \propto x$. Vel,

$$\square AB - \square AD$$

resolvendo æqualitatem in proportionem, erit ut $aa - cc$ ad $\square BD \quad AB \quad BC$

bb , ita a ad x . Quæ quidem insuper ostendunt, quo pacto ex tribus lateribus $\triangle^{\text{li}} ABD$ inveniri possint BC & DC .

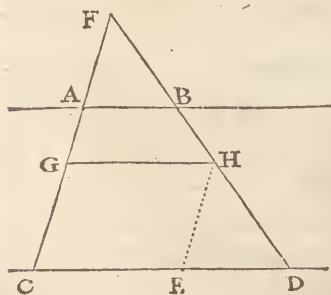
Atque ita constat, si ad præcedentis Theorematis investigationem duntaxat adhibeantur 26 & 47 Propositiones primi libri Euclidis, quâ ratione ex calculo non modò idem Theorema emanet, verùm etiam Propositio 12 & 13 secundi libri, 3^{ia} sexti, aliæque propositiones, in Euclide non extantes, quæ triangulum concernunt, cujus angulus bifariam est divisus.

Cæterum calculum hunc multò prolixiorum esse calculo antecedentis Theorematis nemini (ut opinor) mirum videri debet, cum ad illud indagandum supposuerimus Theorema, quod ei immediatè præcedit, tum etiam Prop. 12 aut 13 secundi: siquidem rationes, quæ in iis comprobandis cunctæ ac singulæ sunt perpendendæ, illis sic jam præsuppositis omnino prætermittuntur; quæ alioquin, si
rem

rem ipsam penitus inspicere atque à primis velut principiis, (quemadmodum in Algebra præsertim fieri solet,) deducere velimus, longâ serie forent spectandæ. Quæ quidem hîc refero, ut quilibet intelligat, nonnullos reperiri, etiam in Mathematicis haud leviter versatos, qui videntes hujusmodi calculum sæpenumero valde prolixum evadere, plurimisve terminis constantem, demonstrationes Geometricas ei longè præferunt, non animadvertentes ejusdem beneficio elici Theoremata, quibus ad id concatenatim utuntur. Existimantes præterea Algebram vel hoc nomine non magni faciendam esse, quod solummodo circa æquationes versetur ac easdem continuè respiciat, quod sanè ego maximi momenti judicaverim, quippe harum ope infinita genera Problematum pro uno genere Problematum haberi queunt, ac demum quicquid in universa Mathefi arduum seu difficile occurrit, id omne per æquationem absque ulla ambage & verborum involucris quàm simplicissime potest explicari.

P R O B L E M A.

Datis positione duabus rectis lineis parallelis AB, CD, & in iis duobus punctis A & E: è puncto F extra ipsas dato rectam lineam ducere FBD, quæ à positione datis abscindat rectas AB, ED, datam inter se rationem habentes AF ad CG, seu *a* ad *d*.



Series Resolutionis.

Ponatur factum, quod quaeritur, hoc est, sit AB ad ED, ut *a* ad *d*, sitque $AF \propto a$
 $CF \propto b$
 $CE \propto c$
 & $AB \propto x$.

Hinc ut AF ad CG, ita AB ad 4^{tam} seu ED

$$a \text{ --- } d \text{ --- } x \text{ / } \frac{dx}{a}$$

Sed ex similitudine \triangle^{loram} AFB & CFD est quoque

$$\text{ut AF ad AB, ita CE} \frac{\text{add. CE. } c}{a \text{ --- } x \text{ --- } b / \text{ad CD. } c + \frac{dx}{a}}$$

$$\text{Quare erit per 16 sexti } \square \text{ AF, CD } \square \text{ AB, CF} \\ ac + dx \propto bx.$$

Transferatur dx ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una parte habeantur

$$\text{eritque } ac \propto bx - dx.$$

Dividatur jam utraque pars per $b-d$

& fit $x \propto \frac{ac}{b-d}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $b-d$ ad c , ita a ad x .

Id quod arguit, ad Problema hoc solvendum, statuendum esse ut GF ad CE, ita AF ad AB. Vt autem ipsum componatur, repetantur Resolutionis vestigia & ab ejus fine per eadem redeatur ad id unde initium cepit. Quemadmodum superius jam sæpius monstratum fuit, atque etiam hinc videre est, præmittendo prius Constructionem, quæ sic se habet.

Constructio.

Ductâ G H parallelâ AB vel CD ac æquali CE, agatur ex F per H recta FHD, secans AB, CD in B & D: dico AB ad ED esse, sicut AF ad CG, seu a ad d .

Finis Compositionis.

AF CG AB ED.

Vnde per 16 sexti erit, ut a ad d , ita x ad f .

\square AF, ED \square CG, AB

erit similiter $af \propto dx$.

\square AF, CE

Hinc dempto utrinque communi ac ,

Quare

$$\square AF, CE + \square AF, ED \quad \square AF, CE + \square CG, AB.$$

Quare erit etiam $ac + af \propto ac + dx.$

$$\square CF, AB \quad \square AF, CE + \square CG, AB.$$

Erat autem $\& bx \propto ac + dx.$

$$\square CF, AB \quad \square AF, CD, \text{ seu, } \square AF, CE + \square AF, ED.$$

Quare per 16 sexti erit $bx \propto ac + af.$

eritque ex similitudine Δ ^{lorum} AFB, & CFD, ut a ad x , ita b ad $c + f$.

Esto jam $ED \propto f,$

$$\square CF, AB \quad \square AF, CE + \square CG, AB.$$

eritque $bx \propto ac + dx.$

$$\square CG, AB$$

Addatur utrinque $dx,$

$$\square GF, AB \text{ seu } \square CF, AB - \square CG, AB \quad \square AF, CE.$$

erit per 16 sexti $bx - dx \propto ac$

id est, reductâ proportione ad æqualitatem,

$$GF \text{ GH vel } CE \text{ AF } AB$$

Ex constructione est, ut $b - d$ ad c , ita a ad x :

Principium Compositionis.

Relictis igitur hisce vestigiis demonstratio eisdem superstru-
cta erit talis.

Demonstratio.

Quoniam itaque ex constructione GF est ad GH vel CE ,
sicut AF ad AB : erit ^a rectangulum sub extremis GF , AB a per 16
æquale rectangulo sub mediis AF , CE . Quibus si addatur com-^{sexti.}
mune rectangulum sub CG , AB , erit ^b rectangulum sub tota b per 1 se-
 CF & AB æquale duobus rectangulis sub AF , CE & sub CG , ^{cundi.}
 AB . Porro, quoniam ex similitudine triangulorum AFB &
 CFD , AF est ad AB , sicut CF ad CD : erit ^c rectangulum ^c per 16
sub mediis CF , AB æquale rectangulo sub extremis, AF , CD .^{sexti.}
hoc est, ^d æquale duobus rectangulis sub AF , CE & sub AF , ^d per 1 se-
 ED . Erat autem quoque rectangulum sub CF , AB æquale duo-^{cundi.}

bus rectangulis sub AF, CE & sub CG, AB. Æqualia igitur erunt bina rectangula sub AF, CE & sub AF, ED binis rectangulis sub AF, CE & sub CG, AB. A quibus si commune auferatur rectangulum sub AF, CE, erit etiam reliquum rectangulum sub AF, ED æquale reliquo rectangulo sub CG, AB.

e per 16
sexti.

Vnde * ut AF ad CG, ita AB ad ED. Quod erat faciendum.

*Hactenus quæ præcesserunt Problemata & Theoremata istius naturæ censerî possunt, quorum difficultas in demonstrationibus ex calculi vestigiis eliciendis potius quàm in iisdem per Algebram solvendis & ostendendis consistere judicari debet. Etenim cum in Algebra Problemate aut Theoremate ad Equationem perducto hæc secundùm certas regulas reducatur resolvaturque, at verò demonstratio Geometrica, quæ ex eorum calculo depromenda est, non semper eisdem legibus sit obnoxia, sed diversimodè prout requiritur, immutanda veniat, ut ipsa commodè feliciterque per Geometriæ Elementa explicetur: visum nobis fuit hîc consequenter illius contrarium in adductis aliquot exemplis patefacere, utpote in quibus præcipua difficultas in ipsorum per Algebram enodatione sita esse appareat. In quem finem duas primùm Quæstiones Arithmeticas in medium afferam, ut, ipsis beneficio calculi hujus Geometriæ solutis, cuique fiat manifestum, quo pacto illius ignari deinde ad easdem solvendas ratiocinari possint, vulgaribus tantùm Arithmetices regulis instructi. Quibus aliquot Quæstiones Geometricas ejusdem generis subjuncturus sum, quò simul constet pluri-
mas etiam tales reperiri, post quarum solutionem Algebraicam ultrò velut sese offert solutio ipsarum Geometrica, ita, ut quod illius demonstrationem insuper concernit Geometriæ Elementa jam edoctos non effugiat.*

Quæstio
44 primæ
partis libri
primi
Exercita-

Q V Æ S T I O.

O Enopola duplex habet vinum, unius 8 stufis, alterius 14 stufis constat cantharus. Vult autem mixtionem face-

facere, ita ut dolium vini vendere possit 35 florenis. Quæritur, quot cantharos utriusque ad hanc mixtionem faciendam sumere debeat?

tionem no-
strarum
Mathe-
matica-
rum.

Ponatur eum debere sumere x cantharos primi 8 stufr. seu a ,
& y cantharos secundi 14 stufr. seu b .

Deinde supponendo dolium continere 80 cantharos seu c , & pretium 35 flor. vel 700 stuforum, quo ipsum vendi debet, vocari d : erit $x + y \infty c$

$$\& x \infty c - y.$$

Quærat jam quanti constant canthari utriusque vini, quo dolium impleri debet: dicendo

Canth. constat stufr., quanti constabunt Canth. stufr.

$$1 \text{ --- } a \text{ --- } x / \text{ facit } ax. \text{ constant canthari primi vini, in dolium infundendi}$$

Canth. constat stufr., quanti constabunt Canth. stufr.

$$1 \text{ --- } b \text{ --- } y / \text{ facit } by. \text{ constant canthari secundi vini, in dolium infundendi}$$

stufur.

eritque summa $ax + by \infty d$.

transf. by in alt. part. $ax \infty d - by$

divid. utrinque per a $\text{fit } x \infty \frac{d - by}{a}$.

Erat autem $x \infty c - y$.

Quare erit $c - y \infty \frac{d - by}{a}$

mult. utrinque per a $ac - ay \infty d - by$

transf. quantitates, ut quæ in y ductæ sunt unam teneant æquationis partem $by - ay \infty d - ac$

div. utrinque per $b - a$

& fit $y \infty \frac{d - ac}{b - a}$ vel $\frac{1d - 1ac}{b - a}$. Id est, erit ut

$b - a$ ad 1, ita $d - ac$ ad y .

Quæstione hæc ita resolutâ, ut constet, quo pacto in quæsti inventionem circa hæc facienda ratiocinari liceat, inspiciatur sequens illorum interpretatio.

Mult. *c.* 80 Canth. seu, dolium Subtr.
per *a.* 8 stuf. Ex *d.* 700 stuf. constat dolium plenum
vino 8 & 14 stuforum

funt *a.c.* 640 stuf. *a.c.* 640 stuf.

constat dolium plenum vino 8 stuforum. Relinq. *d* — *a.c.* 60 stufri, quibus dolium plus constat impletum vino 8 stuf. & 14 stuforum, quàm plenum solo vino 8 stuforum: vel etiam, quibus canthari 14 stuforum in dolio contenti cariores sunt cantharis 8 stuforum, illorum loco sumptis.

| | | | | | |
|-----------------------------------|--------------------|--------|---|----------------------------------|--|
| | stuf. | | | | subtr. |
| | Ex <i>b.</i> 14 | | | | <i>c.</i> 80 Canth. dolii |
| | subtr. <i>a.</i> 8 | Canth. | | | |
| | $b - a$ 6 stuf. | — 1 — | $d - a.c.$ 60 stuf. | / facit $\frac{1d - 1ac}{b - a}$ | seu 10 canth. 14 stuforum ∞y |
| differentia pretii unius canthari | | | differentia pretii cantharorum in dolio | | rel. $c - y$ 70 canth. 8 stuforum ∞x . |

Q V Æ S T I O.

Quæstio
46 prime
partis libri
primi
Exercitationum
nostrarum
Mathematicarum.

Ancilla forum petit, habens $9\frac{1}{2}$ stufros, ut iis poma & pira emat; ubi veniens, 10 poma ipsi offeruntur 1 stuf. & 25 pira 2 stufis. Quæritur, si utriusque fructus simul 100 habere velit, quot poma & pira seorsim accipere debeat?

Ponatur ancillam debere accipere x poma, unde cum utriusque fructus 100 seu a simul pro $9\frac{1}{2}$ stuf. seu b habere velit, sequitur ipsam recipere debere $a - x$ pira.

Hinc cum 10 poma seu c offerantur 1 stufro seu d , & 25 pira seu e stufis 2 seu f , quaratur quantiam consent assumpta x poma, & $a - x$ pira.

Di-

Dicendo :

Poma constant stufr., quanti constabunt Poma $\frac{dx}{c}$ stufr.
 c ————— d ————— x / facit $\frac{dx}{c}$. constant poma sumenda

Pira constant stufr., quanti constabunt Pira
 e ————— f ————— $a-x$ / facit. $\frac{fa-fx}{e}$. constant pira su-
 menda

$$\begin{aligned} & \text{eritque summa } \frac{dex + cfa - cfx}{ce} \text{ stufr. } \infty b. \\ & \text{mult. utrinque per } ce \\ & \text{transf. } cfa \text{ ad alt. partem } \frac{dex + cfa - cfx \infty cbe}{ce} \\ & \text{div. utrinque per } de - cf \\ & \text{\& fit } x \infty \frac{cbe - cfa}{de - cf}. \end{aligned}$$

Ad fractionis hujus resolutionem, fiat ut c ad d , ita e ad quar-
 tam, quæ vocetur g : eritque $cg \infty de$. Vnde pro $x \infty \frac{cbe - cfa}{de - cf}$
 scribi poterit $x \infty \frac{cbe - cfa}{cg - cf}$ vel $\frac{be - fa}{g - f}$. Deinde fiat ut e ad f , ita
 a ad 4^{tam} , quæ vocetur h : eritque $eh \infty fa$; ita ut pro $x \infty \frac{be - fa}{g - f}$
 scribi possit $x \infty \frac{be - eh}{g - f}$. Hinc si demum fiat, ut $g - f$ ad e , ita
 $b - h$ ad 4^{tam} , erit ea ∞x , quantitati quæsitæ sumendorum po-
 morum.

Quæ itaque ad quæstionis solutionem citra Algebram sequen-
 ti modo argumentandum esse inferunt

Poma stufr. Poma
 c d e g
 10 — 1 — 25 / facit $2\frac{1}{2}$ stufr. constant 25 Poma.
 subtr. f. 2 stufr. pretium 25 pirorum.

Relinq. $g - f$. $\frac{1}{2}$ stufr. quo 25 poma cariora sunt 25 piris.

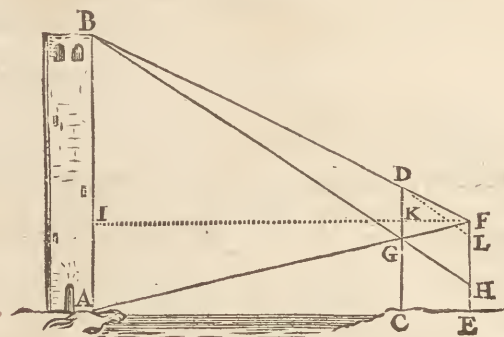
Pira stufr. Pira Subtr.
 e f a b . $9\frac{1}{2}$ stufr. constant 100 poma & pira simili-
 25 — 2 — 100 / facit h . 8 stufr. constant 100 pira
 relinq. $b - h$. $1\frac{1}{2}$ stufri, quibus 100 poma &
 pira simul cariora sunt 100 piris, vel etiam,
 qui-

quibus poma in centenario contenta cariora sunt piris eorum loco sumptis.

| | | | |
|-------------------|----------|------------------|--------------------|
| stuf. differ. | Poma | stuf. differ. | Subtr. |
| $g-f$ | e | $b-h$ | $a. 100$ |
| $\frac{1}{2}$ ——— | 25 ——— | $1\frac{1}{2}$ / | facit $x. 75$ poma |
| | | | $\& a-x. 25$ pira. |

P R O B L E M A.

Metiri altitudinem turris AB , ut & distantiam AC , beneficio duorum baculorum CD , EF , datis $GD \propto a$, $CE \propto b$, & $HF \propto c$.



Esto $AC \propto x$,
& $AB \propto y$.

Series *Analyseos*.

Ductâ IF parallelâ AE , erit propter similitudinem $\triangle^{rum} ABF$ & GDF

ut AB ad IF vel AE , ita GD ad KF vel CE .

$$y \text{ ——— } x+b \text{ ——— } a / b.$$

Ac proinde per 1^o sexti

$$by \propto ax + ab.$$

Eodem modo, erit propter similitudinem $\triangle^{rum} BDG$ & BFH ut BD ad BF , sive IK ad IF

hoc est, AC ad AE , ita GD ad HF .

$$x \text{ ——— } x+b \text{ ——— } a / c.$$

Adco-

Adeoque per 16 sexti

$$cx \propto ax + ab.$$

Auferatur utrinque ax ,

$$\& \text{ fit } cx - ax \propto ab.$$

Dividatur jam utraque pars per $c - a$,

$$\text{eritque } x \propto \frac{ab}{c-a}. \text{ Hoc est, resolvendo } \text{\ae} \text{qualita-}$$

tem in proportionem, erit ut
 $c - a$ ad a , ita b ad x .

Iam cum eidem $\text{\ae} \text{qualia}$ inter se quoque sint $\text{\ae} \text{qualia}$
erit $by \propto cx$. Hoc est, erit ut b ad c , ita x ad y .

Quod si autem invenire lubeat y , non inventâ priùs x , subro-
getur in hujus locum in $\text{\ae} \text{quatione}$ ultimò hîc inventâ valor ejus
inventus $\frac{ab}{c-a}$,

$$\text{fietque } by \propto \frac{abc}{c-a}.$$

Vbi, si utrinque dividatur per b , inveniatur $y \propto \frac{ac}{c-a}$. Quæ
quidem $\text{\ae} \text{qualitas}$ in proportionem sic resolvitur, dicendo: ut
 $c - a$ ad a , ita c ad y . E quibus itaque hujusmodi Constructio seu
operandi modus elucescit.

Sumptâ HL $\text{\ae} \text{quali}$ GD , junctaque DK , fiat ut
 $c - a$ ad a , hoc est, ut FL ad LH , five FD ad DB , five
etiam FG ad GA , ita EC seu b ad CA seu x ; & ita quo-
que FH seu c ad AB seu y .

Cujus demonstratio ex 2^{da} & 4^{ta} sexti libri Elementorum per-
spicua est, quippe considerando rectam DL ipsi BH parallelam
secare proportionaliter rectas BF , FH , perinde ac DC , quæ ipsi
 AB est parallela, secat rectas AF , AE ; ut & rectam FE eidem
 AB parallelam, facientem \triangle similia GFH & GAB .

Cæterùm ut praxis hujus Problematis cuivis obvia sit, visum
fuit illud per numeros illustrare, ut sequitur.

digit.

$$\text{Esto } GD \propto a \propto 24$$

$$CE \propto b \propto 30$$

$$\& HF \propto c \propto 25$$

Vt FL ad LH
 seu FD ad DB,
 five etiam FG ad GA,
 1 — 24, ita $\left. \begin{array}{l} EC. 30 \\ FH. 25 \end{array} \right\} ad \left. \begin{array}{l} CA. 720. \\ AB. 600. \end{array} \right\}$ digit.

P R O B L E M A.

Metiri distantiam turrium A, B, cùm ad A perve-
 nire licet, datis $CA \propto a$, $AD \propto b$, $CD \propto c$, $AE \propto d$,
 & $CF \propto e$.

Esto $AB \propto x$.

Series *Analyseos*.

Ductâ GE parallelâ CD, fiat
 propter similitudinem $\Delta^{rum} ADC$
 & AEG,

ut AD ad DC, ita AE ad EG

$$b — c — d \mid \frac{cd}{b} :$$

itemque

ut AD ad AC, ita AE ad AG.

$$b — a — d \mid \frac{a}{b} .$$

Hinc propter similia
 $\Delta^{la} CBF$ & GBE

erit ut

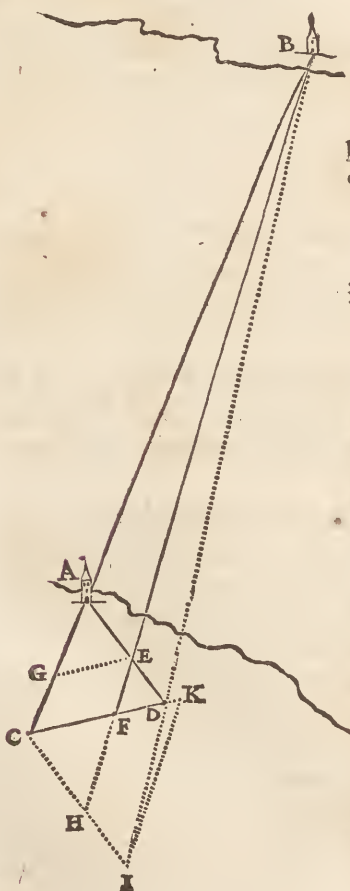
$$CF ad CB, ita GE \frac{add. AB. x}{ad + bx} \\ e — a + x — \frac{cd}{b} / ad GB. \frac{ad + bx}{b}$$

Ac proinde per 16 sexti erit

$$\square CF, GB \text{ æquale } \square CB, GE \\ \frac{ade + bex}{b} \propto \frac{acd + cdx}{b_1} .$$

Inventâ igitur æquatione, ut
 evanescant fractiones, multiplice-
 tur utriusque per b , & fit $ade +$
 $bex \propto acd + cdx$.

Transferantur jam quantitates,
 ita



ita ut quæ in x ductæ sunt unam partem æquationis obtineant, reliquæ autem alteram

$$\text{fietque } bex - cdx \propto acd - ade.$$

Denique dividatur utrinque per $be - cd$

$$\text{eritque } x \propto \frac{acd - ade}{be - cd}.$$

Iam ut æqualitas hæc omnium facillimè in proportionem resolvatur, simulque inde eluceat, quo pacto quis ratiocinari teneatur, ut quæsitam lineam AB seu x ex datis quàm brevissimè inveniatur: animadvertere oportet, quænam litera plurimum omnium in hisce terminis reperiatur. Quæ igitur cum hîc deprehendatur esse d , ipsaque se ter prodat, ubi reliquæ non nisi bis offenduntur, faciendum est, ad deprimendas dimensiones, ut illa in omnibus terminis inveniatur. In quem finem si fiat ut d ad b ,

ita e ad 4^{tam} , quæ vocetur f : erit $df \propto be$, ac proinde $x \propto \frac{acd - ade}{df - cd}$

seu $\frac{ac - ae}{f - c}$. nimirum, abbreviando terminos omnes per d . Vbi

si demum fiat ut $f - c$ ad $c - e$, ita a ad 4^{tam} : erit ipsa $\propto x$, hoc est, \propto quæsitæ lineæ AB . Atque ita apparet longitudinem ejus duabus regulis trium seu proportionum inveniri posse, quæ aliàs 3^{bus} aut pluribus investiganda foret, si nullum in resolvenda hac fractione fieret discrimen.

Vbi notandum, eandem fractionem $\frac{acd - ade}{be - cd}$ etiam alio modo in duas proportionum regulas esse resolubilem, quæ singulæ sicut præcedentes non præter unam dimensionem agnoscunt sive omnino simplices existunt. Nimirum considerando in duobus terminis reperiri cd , & in singulis reliquorum duorum reperiri e ; adeò ut, si planum cd in aliud transmutetur, cujus unum latus sit e , litera e sic in omnibus terminis haberi valeat, quæ deinde omitti possit. Ac proinde si statuatur, ut e ad c , ita d ad 4^{tam} , quæ vocetur g : erit $eg \propto cd$, ita ut pro $\frac{acd - ade}{be - cd}$ scribi possit

$$\frac{aeg - ade}{be - eg} \text{ vel } \frac{ag - ad}{b - g}.$$

Vnde si rursus fiat ut $b - g$ ad $g - d$, ita a ad 4^{tam} : erit ea $\propto x$, lineæ quæsitæ AB . Quæ quidem animadvertensio, cum in abstracto fiat nullâ factâ calculi relatione sive restrictione ad figuræ lineas, luculenter ostendit, quàm perperam judicent illi, qui non ritè perspicientes hujus Geometriæ Methodum

dum constructiones concinnas aliunde potiùs quàm ex ejus calculo derivari autumant. Quod utique plurimis exemplis demonstrare possem, iisque non inelegantibus, sed cum id prolixius explicare non sit hujus loci, hæc in medium attulisse suffecerit.

Denique ut pateat, quo pacto præcedentis fractionis resolutio ad figuræ lineas pertineat eaque simul nobis manifestet, quales lineæ ducendæ sint, quæ nos ad quæsitum finem perducant: consequens fuerit ut ea quæ ad facilitatem reductionis circa calculum seorsim sumus meditati ad figuræ lineas referamus. Constructio igitur sive operandi modus talis est.

Fiat ut d ad b , hoc est, ut AE ad AD sive CH ad CI , ita CF seu e ad CK seu f . Deinde fiat ut $f - c$ ad $c - e$, hoc est, ut KD ad DF sive ID ad DB , ita CA seu a ad AB seu x .

Cujus demonstratio ex ipsa proportionalium applicatione manifesta est.

Eâdem manente fractionis resolutione possunt dictæ proportionales diversis aliis modis figuræ accommodari, indeque velut aliæ constructiones concinnari, quibus licet figuræ valde dissimiles appareant, operatio tamen una eademque existit. Quas quidem omnes hîc exponere propter earum multitudinem supervacuum duximus. Idem intellige cum præcedens fractio secundo modo resolvitur.

Vnde colligere licet, cum ex sola applicatione harum proportionalium, manente resolutione fractionis aut eâdem aliquantum immutatâ, complures viæ ultro quasi sese prodant, quibus à datis ad quæsitum perducamur, quanto ideo cum emolumento hujus Geometriæ calculus ad omnifarias quæstiones adhibeatur; utpote cujus beneficio non modò difficultas omnis breviter ob oculos ponitur, sed etiam quid circa illas sit factu opus plene edocetur.

Cæterum ut iis, quibus hujus generis Problemata arrident, quæ absque ullo instrumento Mathematico in campo perfici queunt, etiam praxis allati Problematis constet, visum fuit illud servando priorem fractionis resolutionem secundum superiorem ejus applicationem per numeros illustrare, ut sequitur.

pedum

Esto CA ∞ a ∞ 450
 AD ∞ b ∞ 390
 CD ∞ c ∞ 420
 AE ∞ d ∞ 225
 & CF ∞ e ∞ 252.

Tum fiat
 Vt AE ad AD,
 five CH ad CI, ita CF ad CK

$$225 - 390 = 252 / 43\frac{6}{7}$$

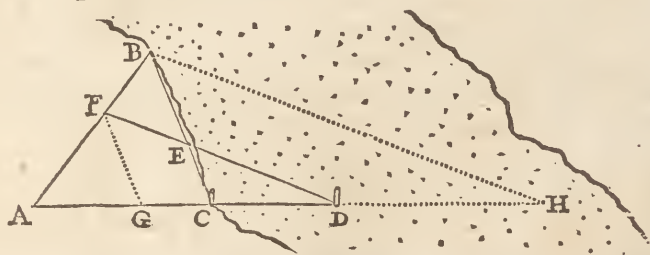
CD. 420

subtr. CD. 420 subtr. CF. 252

Deinde, ut DK. $16\frac{2}{7}$ ad FD. 168, ita CA. 450 ad AB. 4500. ped.
 Sive ut ID ad DB

P R O B L E M A.

Trianguli ABC producto latere AC ad D, ductâque rectâ DEF, secante CB, AB in E & F, dantur AB ∞ a, BC ∞ b, AC ∞ c, CD ∞ d, & CE ∞ e: oporteatque invenire AF ∞ x.



Series *Analyseos.*

Ductâ FG parallelâ BC, fiat propter similitudinem triangulorum ABC & AFG

ut AB ad BC, ita AF ad FG

$$a \text{ --- } b \text{ --- } x / \frac{bx}{a}$$

Ccc 3

Item

Itemque

ut A B ad A C, ita A F ad A G

A C

G C

 $a \text{ --- } c \text{ --- } x / \frac{cx}{a}$. quæ subducta ex c , relinquit $\frac{ca-cx}{a}$.
Hinc propter similia \triangle^{la} CED & GFD

erit

ut E C ad C D, ita F G

add. C D. d
 $e \text{ --- } d \text{ --- } \frac{bx}{a} / \text{ad G D. } \frac{da+ca-cx}{a}$.

Ac proinde per. 16 sexti

 \square E C, G D \square C D, F G
 $\frac{dae+cae-cex}{a} \propto \frac{dbx}{a}$.
mult. utrinque per a
 $\frac{dae+cae-cex \propto dbx}{a}$
add. utrinque cex
 $\frac{dae+cae \propto dbx+cex}{a}$
div. utrinque per $db+ce$
 $\& \text{ fit } \frac{dae+cae}{db+ce} \propto x$.

Ad resolvendam hanc fractionem, fiat ut e ad d , ita b ad 4^{tam} ,
 quæ vocetur f : eritque $fe \propto db$, adeoque $x \propto \frac{dae+cae}{fe+ce}$ seu $\frac{da+ca}{f+c}$.

Deinde fiat ut $f+c$ ad a , ita $d+c$ ad x . Quod ipsum docet, ut
 ex datis lineis investigetur quæ sita linea A F, ducendam esse ex B
 lineam B H ipsi F E D parallelam, donec occurrat productæ
 A C D in H. Cum enim statuendum sit ut e ad d , hoc est, ut C E
 ad C D, ita b seu C B ad 4^{tam} f : patet hanc fore ipsam C H. Ac
 proinde si porro fiat ut $f+c$ ad a , hoc est, ut A H ad A B, ita
 $d+c$ seu A D ad x : manifestum est inveniri hinc quantitatem
 quæ sita lineæ A F; ita ut hîc sicut in duobus præcedentibus Pro-
 blematis demonstratio ex sola proportionalium applicatione per
 se perspicua sit.

Quòd si autem quis alio operandi modo aut etiam eodem sed
 aliarum linearum ductu quæ sitam lineam A F invenire desideret,
 observare poterit ea, quæ à nobis in antecedenti Problemate in-
 dicata sunt.

Cæterùm cum & praxis hujus Problematis in extruendis for-
 talitiis, chomatibus, promontoriis, aliisque, non parvi usus exi-
 stat: nimirum, ubi in fluvio, mari, aut locis paludosis à certo
 puncto

puncto ceu termino recta linea determinari debet, datum continens virgarum pedumve numerum: non abs re fuerit, si & illius praxin paucis hic explicavero, præsertim cum absque ullo instrumento Mathematico negotium hoc expedire liceat.

Ponamus itaque in directum ipsius AC à C usque ad D definienda esse recta CD, continens 10 perticas seu virgas. In quem finem erectis tribus baculis, A, C, & B, efformantibus triangulum qualecunque ABC, ac inter B & C erecto ubicunque quarto E, si mensurentur AB, BC, AC, & CE, sitque, ex. gr., AB ∞ a ∞ 15, BC ∞ b ∞ 13, AC ∞ c ∞ 14, & CE ∞ e ∞ 5 perticarum seu virgarum: oportebit ex his juxta & ipsâ CD ∞ d ∞ 10 querere longitudinem lineæ AF, perinde ut supra atque ex sequenti operatione videre est.

| | | | | |
|----|----|--------------|-------------|----------------------|
| CE | CD | CB | | Add. |
| 5 | 10 | 13 | / ad CH. 26 | AC. 14. |
| | | add. AC. 14. | AB | CD. 10 |
| | | AH. 40 | — 15 | — AD. 24 / ad AF. 9. |

Hinc si ab A versùs B in recta AB mensurentur 9 perticæ seu virgæ, atque in F hujus mensurationis termino baculus erigatur, fiet, ut, si à C in directum ipsius AC progrediamur, extruendo aggerem aut etiam navigando cum scapha, donec perventum fuerit in directum ipsius FE, recta CD tunc 10 perticarum seu virgarum sit futura. qualis requireretur.

Qui plura hujus generis Problemata videre desideret, adæat Appendicem nostram de Simplicium Problematum constructione, quam unà cum Exercitationibus nostris Mathematicis haud ita pridem in lucem emisimus, ubi ista fusiùs pertractantur, etiam sine ullius calculi adjumento.

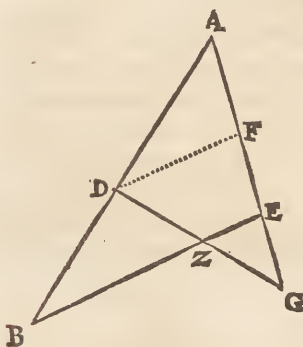
P R O B L E M A,

cujus solutione innotescit, quâ ratione priora duo Theoremata II^mi Capitis I^mi libri Almagesti PTOLEMÆI inventa fuerint seu inveniri possint.

In rectas AB, AG ductis utcunque rectis BE, DG, se mutuò decussantibus in Z, detur ratio GD ad DZ,

ut

ut a ad b , nec non ratio ZB ad BE , ut c ad d : oporteat-
que invenire rationem GA ad AE .



Series Analyseos.

Esto $GD \propto a$
 $DZ \propto b$, eritque $ZG \propto a-b$
 $BZ \propto c$
 $BE \propto d$, eritque $ZE \propto d-c$
 $AG \propto x$
 & $AE \propto y$, eritque $EG \propto x-y$.

Ductâ DF parallelâ BE , erit
per 2 sexti

ut GZ ad ZD , ita GE ex AE . $\left. \begin{array}{l} y \\ \frac{bx-by}{a-b} \end{array} \right\} \text{subtr.}$
 $a-b \text{ --- } b \text{ --- } x-y / \text{ ad } EF. \frac{bx-by}{a-b}$
 rel. $AF. \frac{ay-bx}{a-b}$.

Tum fiat propter similia Δ^{la} GZE & GDF

ut GZ ad ZE , ita GD / ad $DF. \frac{ad-ac}{a-b}$.

Quibus sic constitutis, erit ex similitudine Δ^{lorum} DAF & BAE

ut DF ad AF , ita BE ad AE

$\frac{ad-ac}{a-b} \text{ --- } \frac{ay-bx}{a-b} \text{ --- } d / y$

Et fit per 16 sexti

$\frac{ady-ac y}{a-b} \propto \frac{ady-bdx}{a-b}$.

Hoc est, omissio communi denominatore $a-b$
erit $ady-ac y \propto ady-bdx$.

Vnde dempto utrinque ady , ac reliquis hinc inde translatis,
ut signo + adficiantur

habebitur $bdx \propto acy$.

Quæ æqualitas in proportionem sic resolvitur

ut x ad y , ita ac ad bd .

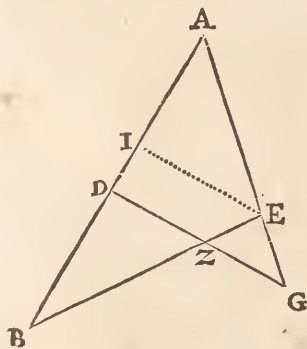
Quod

Quod ipsum docet, rationem quæsitam GA ad AE seu x ad y esse compositam ex ratione GD ad DZ seu a ad b , & ex ratione ZB ad BE seu c ad d , id est, rationem GA ad AE per 23 sexti esse eandem, quàm rectanguli sub GD, BZ seu ac ad rectangulum sub BE, DZ seu bd . Atque ita constat, quo pacto primum dictorum Theorematum inventum fuerit seu inveniri possit. Id autem ex Rheinoldi versione ita sonat.

In duas rectas lineas AB & AG deductæ duæ rectæ, lineæ BE & GD secant se mutuo in puncto Z. Dico quòd ratio GA ad AE composita est ex ratione GD ad DZ, & ex ratione ZB ad BE.

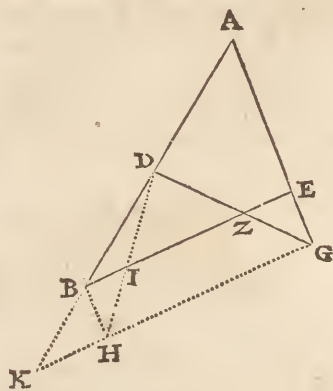
Hinc postquam innotuit, quo pacto datis rationibus GD ad DZ, & ZB ad BE etiam dari intelligatur ratio ipsius GA ad AE, utpote quæ ex datis hisce rationibus est composita: haud inutile fuerit, si ulterius hîc ostendam, quibus datis lineis hæc quæsitæ ratio exprimat, quandoquidem ratio dari dicitur cui eandem exhibere valeamus.

In quem finem si inventa ratio ac ad bd ad communem altitudinem redigatur, quod quidem quadrupliciter fieri potest, sumendo ad hoc aliquam ex datis lineis, obtinebitur quæsitæ ratio in simplicissimis terminis.

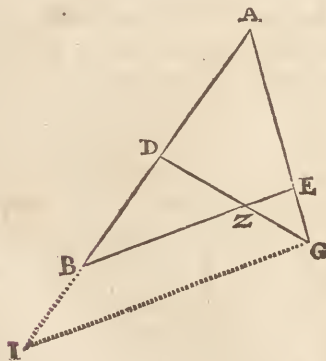


Etenim assumendo communem altitudinem c , si fiat ut c ad d , ita b ad 4^{tam} , quæ vocetur e : erit $ce \propto bd$, ita ut quæsitæ ratio sit eadem, quæ ac ad ce , hoc est, rejectâ communi altitudine c , ut a ad e . Quod ipsum Ptolemæi figuram prodit, in qua ex puncto E ducta est EI parallela ipsi GD. Si enim in ea fiat ut c ad d , id est, ut ZB ad BE, ita DZ seu b ad 4^{tam} e , erit ea linea EI; ita ut GD ad EI seu a ad e quæsitam rationem manifestet, eandem quippe quæ est ipsius GA ad AE. Ut patet ex 4^{ta} sexti, propter similitudinem Δ^{rum} DAG & IAE.

Sic etiam assumendo communem altitudinem a , si fiat ut a ad b ,
Pars II. D d d hoc



hoc est, ut DG ad DZ, ita HG vel BE seu d ad 4^{tam} , quæ vocetur f : erit ea \propto ZI. Et fit $af \propto bd$, ita ut quæsitâ ratio sit eadem, quæ ac ad af , hoc est, rejectâ a cõmmuni altitudine, eadem quæ c ad f seu BZ ad ZI. Hanc autem eandem esse, quam ipsius GA ad AE, ita patet. Productis namque AB, GH donec coeant in K, erit propter similitudinem Δ^{rum} BDZ, KD G, lineamque DH similiter in utroque ductam, ut BZ ad ZI, ita KG ad GH seu BE. Vt autem KG ad BE, ita est, propter similitudinem Δ^{rum} KAG & BAE, quoque GA ad AE. Quare etiam BZ ad ZI erit, ut GA ad AE. Vnde liquet; si a pro communi altitudine sumatur, ducendam esse ex G rectam GH ipsi BE parallelam, donec occurrat rectæ ex B ductæ ipsi AG parallelæ in H: eritque, junctâ HD, BZ ad ZI ratio quæsitâ.



Haud secus, si assumatur communis altitudo b , fiatque ut b ad a , hoc est, ut ZD ad DG, ita BZ seu c ad 4^{tam} , quæ vocetur g : erit ea \propto IG. Et fit $bg \propto ac$, ita ut quæsitâ ratio GA ad AE eadem sit, quæ bg ad bd , hoc est, rejectâ communi altitudine b , eadem quæ g ad d seu IG ad BE. ut patet ex similitudine Δ^{rum} IAG & BAE. Quod ipsum arguit, sumendo b pro communi altitudine, ducendam esse ex G rectam GI ipsi BE parallelam, donec occurrat productæ AB in I, ut habeatur ratio quæsitâ IG ad BE.

Ductâ G C ipsi B A parallelâ, donec occurrat rectâ I E C ipsi D G parallelâ in C, jungatur B, secans D G in F.

Quoniam itaque, propter similitudinem Δ^{rum} D A G & I A E, G A est ad A E, sicut G D vel I C ad I E; at ut I C ad I E, ita quoque est, propter similitudinem Δ^{rum} B I C & B D F, lineamque B E in utroque similiter ductam, D F ad D Z: erit etiam G A ad A E, sicut D F ad D Z. Assumatur jam forinsecus linea D G. Hinc cum ratio D F ad D Z sit composita ex ratione D F ad D G vel I C, sive B Z ad B E, & ex ratione D G ad D G: erit similiter ratio G A ad A E composita ex ratione B Z ad B E, & ex ratione D G ad D Z. Quod erat ostendendum.

Idem pariter de 2^{do} P T O L E M Æ I Theoremate aliisque similibus est intelligendum.

Vnde constat, præsuppositâ Algebrae cognitione, haudquaquam necessaria esse existimanda, quæ de Rationum Logistica communiter traduntur, non magis quàm si ad cuiusvis generis quæstiones per Algebram solvendas multifaria addiscantur Theoremata: cum & invenire illa & demonstrare ipsius Algebrae sit munus, quam quidem excolendo non modò ingenium exercetur, sed res ipsa funditus eruitur, citra eam verò sapissime illa ipsa Theoremata non satis feliciter adhibentur.

P R O B L E M A.

Latifundii A B C D cognitis omnibus lateribus & angulis, ab eodem datam portionem refecare, lineis E F, F G, G H, & H E latifundii lateribus A B, B C, C D, & D A parallelis, & ab iisdem pari ubique intervallo diffitis.

Iunctis A E, B F, C G, & D H, demittantur ex E, F, & G super A B, B C, C D, & D A perpendiculares E I, F L, F M, G N, G O, & E K; at ex D super G H & H E perpendiculares D P & D Q.

Quoniam itaque in rectangulis triangulis A I E & A K E quadrata,

Ponatur itaque EI ad IA vel EK ad KA esse, ut e ad f
 FL ad LB vel FM ad MB, ut e ad g
 GN ad NC vel GO ad OC, ut e ad h
 & DP ad PH vel DQ ad QH, ut e ad i .

Tum fiat EI vel EK AI vel AK

ut e ad f , ita x / ad $\frac{fx}{e}$

FL vel FM LB vel BM

ut e ad g , ita x / ad $\frac{gx}{e}$

GN vel GO NC vel CO

ut e ad h , ita x / ad $\frac{hx}{e}$

DP vel DQ PH vel HQ

ut e ad i , ita x / ad $\frac{ix}{e}$

Additis jam AI, AK, LB, BM, NC, CO, si ipsarum summa
 $\frac{2fx+2gx+2hx}{e}$ auferatur ex $a+b+c+d$, summa laterum AB,

BC, CD, & DA, relinquetur $a+b+c+d - \frac{2fx-2gx-2hx}{e}$,

summa rectorum IL, MN, OD, & DK, id est, ipsarum EF,

FG, GP, & QE. Quibus si addatur $\frac{2ix}{e}$, summa ipsarum PH,

HQ, erit $a+b+c+d - \frac{2fx-2gx-2hx+2ix}{e}$ summa late-

rum internorum EF, FG, GH, & HE. Porrò quoniam portio

abscindenda, quæ vocetur k , pro trapezio accipi potest, cujus

duo latera sunt parallela, fit ut si AB, BC, CD, & DA in rectam

lineam AR junctim collocentur, ut & EF, FG, GH, & HE in

rectam lineam ET, trapezium ARTE ipsi portioni abscin-

dendæ k futurum sit æquale. Quocirca si juxta vulgarem regu-

lam hujus area quæretur, addendo scilicet latera parallela AR

& ET, & semissem summæ multiplicando per ipsius latitudi-

nem EI seu x , habebitur æquatio inter $ax+bx+cx+dx$

$-\frac{fxx-gxx-hxx+ixx}{e}$ & k , id est, æquatione ritè ordinatâ,

erit $xx \infty \frac{aex+bex+cex+dex}{f+g+h-i} - \frac{ke}{f+g+h-i}$. Cujus radices

inveniuntur operando ulterius, quemadmodum pag. 7 hujus

Geometriæ indicatur, quarum quidem major dum lineam exhibet quæsitâ EI manifestè majorem, idcirco meritò hîc erit negligenda.

Quoniam autem ex E, F, G, & D intervallis EI vel EK, FL vel FM, GN vel GO, & DP vel DQ descriptis circuli rectæ AI vel AK, LB vel BM, NC vel CO, & PH vel HQ tangentibus sunt complementorum semissium datorum angulorum A, B, C, & D; fiet ut, si e pro radio sumatur, ipsæ *f, g, h, & i* dictas tangentes designent. Quod cum eodem modo de omnibus aliis figuris rectilineis intelligendum sit, à quibus hujusmodi portio resecari debet: haud difficulter poterimus, si angulos A, B, C, similesque vocemus externos, at angulum D internum, ut & eos omnes, qui hujusce generis existunt, atque præter æquationis constitutionem spectemus insuper, quænam ad illam resolvendam sive ad quæsitam latitudinem ex ea obtinendam sint facienda, regulam inde generalem formare, quæ sic se habet.

Additis figuræ lateribus, multiplicetur summa per radium 10000, productumque dividatur per summam tangentium, angulorum qui semissium datorum sunt complementa, cum videlicet dati anguli omnes sunt externi, aut per earundem differentiam, quum externi ac interni existunt, & fit primum inventum.

Deinde multiplicatâ areâ portionis abscindendæ per radium 10000, dividatur productum per prædictam summam vel differentiam tangentium, & fit secundum inventum. Quo subducto à quadrato semissis primi inventi, si reliqui radix ab eodem semisse auferatur, relinquetur latitudo quæsitâ.

Inventâ igitur per Algebram viâ, quâ Problema propositum solvendum sit, ipsius veritas ex sequentis calculi applicatione, quæ ab ea parùm est aliena, manifesta fiet; si modò ibidem consideraverimus, completo parallelogrammo ARSE, productisque AE, RT donec coeant in X, rectam ST, duplum supra dictæ summæ vel differentiæ tangentium referre, atque demissis perpendicularibus RV & XY rectam ST ad RV, ob similitudinem triangulorum STR & ARX, eam habere rationem, quam AR habet ad XY.

Angul.

A. 50. 0'

Add.

femiffis. 25. 0', ejus Tang. Compl.

B. 50. 38' A I vel A K est 214451

femiffis. 25. 19, ejus Tang. Compl.

C. 54. 12' L B vel B M est 211392

femiffis. 27. 6, ejus Tang. Compl.

N C vel C O est 195417

D. 205. 10'

621260

femiffis. 102. 35, ejus Tang. Compl.

P H vel H Q est 22322

differentia 598938

} subtr.

Add.

A B. 5354

B C. 501

C D. 2107

2 Rad. R V. D A. 248

partes S T. 1197876—100000—AR. 14961 ②

multipl.

AR. 14961 ②

ad X Y. 1249 ②.

134649

59844

29922

14961

product. 18685289 ①

Vt \triangle A R X seu $\frac{1}{2}$ X Y, A Rad \square X Y seu X Y, X Y,

vel, relicta communi

altitudine X Y

ut $\frac{1}{2}$ A R ad X Y,

five etiam, propter

simil. \triangle^{rum} S T R

& A R X

ut $\frac{1}{2}$ S T ad R V, ita

femiffis seu triang. A R X. 934 } 144 ①

subtr. part. re- ARTE. 600

sec. seu trap.

598938—100000—rel. triang. E T X. 334 } 144 ① / ad \square X Z. 558178 ①

eritque X Z. 7 | 4 | 7 ②.

Hinc subducta X Z seu 747 ② ex X Y seu 1249 ②, relinquetur 502 ② pro Y Z latitudine quaesita portionis abscindendae.

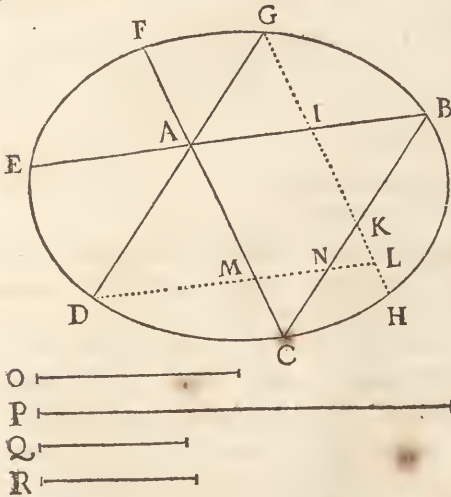
Ceterum cum non absimili modo à data qualibet figura rectilinea portio datae magnitudinis abscindi possit, aut etiam quae ipsius figurae certam partem sive partes contineat, lineis quibusdam duntaxat lateribus parallelis & ab iisdem aequali intervallo distantibus: plura hac de re afferre supervacaneum duximus, praesertim cum materiam hanc nec non determinationes eò spectantes jam saepius in Lectionibus nostris Publicis abundè pertractaveri-

veri-

verimus, eaque occasione illa multis etiam jam diu innotuisse certo sciverimus.

T H E O R E M A,
quod ad solutionem artificiosissimam Problemat-
tis pag. 372 ut concessum supponitur.

*Cum in rimanda olim solutione Problemat-
is p. 372 nonnulla deprehendissem, quæ ad eandem ut concessa suppo-
nebantur, eaque post commentarios meos in hanc Geome-
triam Theoremate ad id Geometricè resolutò corrobora-
râsssem: visum fuit calculum è quo eandem resolutionem
tunc deprompsi hinc in medium afferre, ac quo pacto idem
à me sit præstitum eâ quâ poterò perspicuitate curvis ob
oculos ponere. In quem finem sibi revocetur Theorema
jam dictum unâ cum illis, quæ ad explicationem ejus
p. 369 & 370 ulterius sunt allata, inspiciendus erit dein-
ceps sequens calculus.*



Assumpto quæsi-
to ut vero, hoc est,
CA esse ad AF,
sicut CB ad AG
ducatur porrò DL
parallela AB, se-
cans CA, CB in M
& N, ac occurrens
ipso GH in L, po-
naturque DA ∞ y.

Deinde calculus
sic procedat

Ex assumptione est

$$\frac{CA}{AF} = \frac{CB}{AG}$$

$$c \text{ --- } d \text{ --- } b / ad \frac{db}{c} \infty z$$

Ex similitudine Δ lorum BAC & AIG est

$$\frac{BC}{CA} = \frac{AG}{GI}$$

$b \text{ --- } c \text{ --- } \frac{db}{c} / ad d.$ Vnde IK erit $\infty c - d.$ pro qua
brevitatis causâ scribatur f.

Et apparet ex hac assumptione GI inveniri æqualem FA.
 E e e 2 : item-

itemque

CA AB GI IA

$$c \text{---} a \text{---} d / ad \frac{ad}{c} \left. \vphantom{\frac{ad}{c}} \right\} \text{add.}$$

Ex similitudi-
ne Δ rum CAB
& KIB est

A E. e

$$E I. \frac{ce+ad}{c}$$

CA AB KI

$$c \text{---} a \text{---} f / ad \text{ I B. } \frac{af}{c}$$

$$\square \text{EIB. } \frac{ceaf+adaf}{cc}$$

Ex hypothesi est

BA AE BC AD

$$a \text{---} e \text{---} b / ad \frac{eb}{a} \propto y$$

Ex natura Ellipsis, per 17. 3ⁱⁱⁱConicorum Apollonii, pro-
portionalia sunt

$$\square \text{FAC} \square \text{GKH} \square \text{DAG} \square \text{CKB}$$

$$dc \text{---} cx \text{---} yz \text{---} bz \text{---} zc$$

seu, rejectis communibus altitudini-
bus AC, GK; & AG, CK

$$FA \text{ KH } DA \text{ KB}$$

$$d \text{---} x \text{---} y \text{---} b \text{---} z$$

hoc est, restitutis valoribus ipsa-
rum y & z

$$d \text{---} x \text{---} \frac{eb}{a} \text{---} \frac{cb-db}{c} \text{ seu } \frac{fb}{c}$$

Vnde KH seu x, per 16. 6ⁱⁱ,

$$\text{fit } \propto \frac{acd-add}{ce} \text{ seu } \frac{adf}{ce}$$

$$\text{add. I K. f.}$$

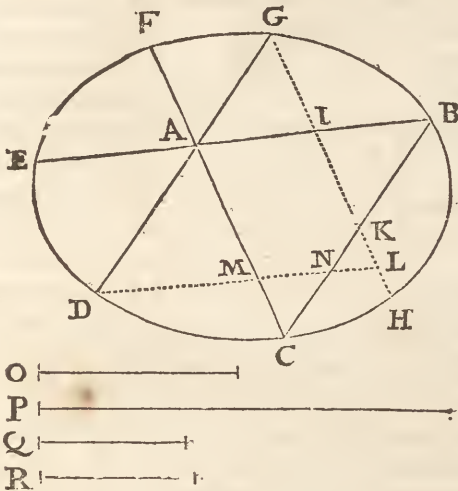
Et fit, multiplicando tum medios tum
extremos, $ace+aad \propto ace+aad$.

Id quod arguit, cum assumendo quæsitum tanquam concessum per calculum hunc Geometricum ad verum concessum devenimus, quæsitum illud, quod cum hoc concessio omnimode connectitur, esse quoque verum. Quod erat ostendendum.

Porro ut intelligatur, quâ ratione ex hoc calculo supra dicta resolutio à me deducta fuerit: haud gravabor eundem calculum hinc ulterius ita disponere, dictamque resolutionem illi à latere sic adhibere, ut cuiusvis sedulo hæc inspicienti enucleatè appareat, quisnam inter illum & hanc resolutionem mutuus consensus existat. Præsertim cum hujus resolutionis inventio deinde mihi ansam, complures alias demonstrationes Geometricas consiciendi,

sub-

subministraverit; atque ipsa etiam artificium detexisse mihi visa sit, quo Veteres, in multis difficilioribus demonstrationibus concinnandis, usi sunt. Qui quidem id unice studuisse videntur, quò sua inventa eorumque demonstrationes posteris majori admirationi forent, ut modum, quo ea ipsa invenerint ac demonstrationibus muniverint, prorsus supprimerent & absconderent.



Ex assumptione

$$CA \quad AF \quad CB \quad AG \\ c \text{ --- } d \text{ --- } b / \text{ ad } \frac{db}{c} \propto z$$

Et permutando per 16. 5.

$$CA \quad CB \quad AF \quad AG \\ c \text{ --- } b \text{ --- } d / \text{ ad } \frac{db}{c}$$

Ex similitudine $\Delta^{rum} BAC, AIG$

$$BC \quad CA \quad AG \quad GI \\ b \text{ --- } c \text{ --- } \frac{db}{c} / \text{ ad } d.$$

Et convertendo per Cor. 4. 5

$$CA \quad CB \quad GI \quad AG \\ c \text{ --- } b \text{ --- } d / \text{ ad } \frac{db}{c}$$

Quoniam igitur supponitur

CA esse ad AF, sicut CB ad AG; erit etiam permutando CA ad CB, sicut AF ad AG.

Iam quia, ex similitudine $\Delta^{rum} BAC$ & AIG , BC est ad CA, sicut AG ad GI; & convertendo CA ad CB, sicut GI ad AG: erit AF per 9. 5^{ti}

Quia hic ex assumptione reperitur GI exprimi per eandem quantitatem quam AF, colligitur inde ipsas æquales esse. Haud fecus æquales erunt EA & DM.

ipfi GI æquales. Eodem modo æquales erunt EA & DM.

Ecc 3:

Ex:

Ex hypothesi

BA AE BC AD

$$a - e - b / \text{ad } \frac{eb}{a} \propto y$$

Ex natura Ellipsis, per 17. 3ⁱⁱⁱ Conicorum Apollonii

□FAC □GKH □DAG □CKB

$$dc - cx - yz - bz - zz$$

H.e., rejectis communibus altitudinibus

AC, GK; & AG, CK,

FA KH DA KB

$$d - x - y - b - z$$

Et restitutis ipsarum y & z valoribus

FA KH DA KB

$$d - x - \frac{eb}{a} - \frac{cb - db}{c} \text{ feu } \frac{fb}{c}$$

$$\frac{ceb}{afb}$$

$$\text{KH } \frac{ce}{af}$$

$$\text{Fit } x \propto \frac{adf}{ce}.$$

Iam ut ex Elementis constet, quo pacto ratio ipsius DA ad KB in simplicissimis terminis exprimi possit, cum via illam inveniendi multiplicatione per cruce(m) (quemadmodum vulgo fit) omnino fit Algebraica: calculum hinc apponam è quo ipsæ DA & KB resultant.

BA AE BC AD

$$a - e - b / \text{ad } \frac{eb}{a}$$

CA IK BC KB

$$c - f - b / \text{ad } \frac{fb}{c}$$

EA AB

$$e - a$$

CA IK

$$23.6.c - f$$

□CAE □KI, AB

$$ce - af$$

Porro cum ex natura

Ellipsis □FAC fit ad

□GKH, seu, propter

rectarum AC, GK æ-

qualitatem, FA ad KH,

sicut □DAG ad

□CKB, h. e., propter

æqualitatem rectarum

AG, CK, ut DA ad KB;

& quidem ratio DA ad

KB, composita sit ex

ratione DA ad CB seu

EA ad AB, & ex ratio-

ne CB ad KB seu CA

ad IK: erit quoque ratio

FA ad KH com-

posita ex ratione EA ad

AB, & ex ratione CA

ad IK. Ideoque cum

ratio composita ex ratio-

ne EA ad AB, &

ex ratione CA ad IK,

sit ea, quam habet

□CAE ad □KI, AB:

erit similiter ratio i-

psius FA ad KH ea,

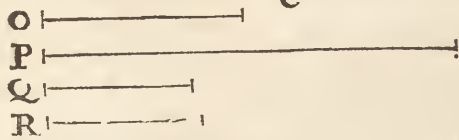
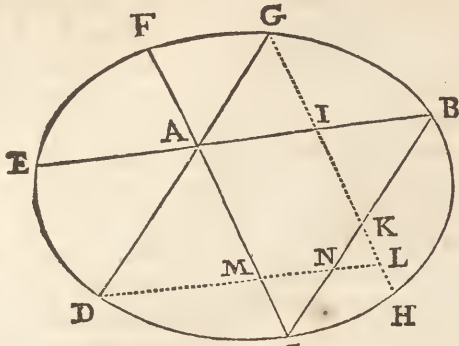
quam habet □CAE

ad □KI, AB.

Vbi apparet, cum in utraque hac proportionis regula idem terminus BC ipsis AD & KB præcedat, quod ratio ipsius AD ad KB, per hujus BC interpositionem, sit composita ex ratione AD ad BC seu EA ad AB, hoc est, e ad a , & ex ratione BC ad KB seu CA ad IK, hoc est, c ad f . Ac proinde, cum ratio ex his composita, per 23. 6, sit eadem rationi, quam habet □CAE ad □KI, AB, seu ce ad af : erit quo-

que

que ratio ipsius FA ad KH seu d ad x eadem, quam habet \square CAE ad \square KI, AB, seu ce ad af .



IH ad AC non satis commodè videtur Geometricè explicabilis: quæsiui priùs rationem ipsius IH ad IK; inde per compositionem rationis conversam, & per alias denique comparationes venio ad rationem ipsius IH ad AC, ut sequitur.

Esto KI ad FA, KH
 $\frac{f}{d} \dots \dots \dots x$
 ut O ad CA.

3 * $\frac{cf}{d} \dots \dots \dots c$

Mult. per AE. $e \dots \dots \dots e$

hoc est, ut \square O, AE ad \square CAE \square KI, AB

per 1. 6. $\frac{cef}{d} \dots \dots \dots af$

Vnde ex æquo & per compositionem rationis conversam erit

Vt KI + KH seu IH ad KI,

$\frac{f+x}{f} \dots \dots \dots f$

sic \square O, AE + \square KI, AB ad \square O, AE.

$\frac{cef}{d} + af \dots \dots \dots \frac{cef}{d}$

Ad comparandam KI ad FA, IH cum sicut linea AC, quia, inventa KH $\propto \frac{adf}{ce}$, ad KH ad di priùs debet IK $\propto f$, ut habeatur IH $\propto \frac{cef+adf}{ce}$, sed hoc pacto ratio ipsius

Esto jam sicut linea AC, quia, inventa sumptâ AE pro communi altitudine, erit KI ad FA, sicut \square sub O & AE ad \square CAE. Erat autem FA ad KH, sicut \square CAE ad \square KI, AB. Quare ex æquo erit ut KI ad KH, sic \square O, AE ad \square KI, AB; & per compositionem rationis conversam KI + KH seu IH ad KI, sicut \square O, AE + \square KI, AB, ad \square O, AE.

Sit

IH Sit KI ad AC, Deinde sit ut
 $f+x \dots \dots \dots f \frac{c}{d}$ KI ad AC, ita
 ut O ad P. Vnde, $\frac{cf}{d} \frac{cc}{d}$ O ad P. Vnde,
 assumptâ AE
 $\frac{cf}{d} \frac{cc}{d}$ pro communi
 altitudine, erit

Mult. per AE. $e \dots \dots \dots e$
 hoc est,

$\square O, AE + \square KI, AB$ ut $\square O, AE$ ad $\square P, AE$ ut $\square O, AE$
 $\frac{cef+adf}{d} \dots \dots \dots \frac{cef}{d} \frac{cce}{d}$ ad $\square P, AE$.

Vnde ex æquo erit ut IH ad AC, ita
 $\square O, AE + \square KI, AB$ ad $\square P, AE$.
 Sed ut IH ad AC, ita quoque est
 $\square KI, AB$ ad $\square O, AE$.

propter rectas IG & FA supra æquales
 mult. per IG. FA
 Quapropter ex æquo
 erit ut IH ad AC, sic

per 1.6. $\square GIH$ ad $\square FAC$, hoc est, per
 17.3^{ti} Conic. Apoll., ut $\square EIB$ ad $\square EAB$
 ad $\square P, AE$. Cum ve-

Quocirca erit ut $\square O, AE + \square KI, AB$
 ad $\square P, AE$, ita $\square EIB$ ad $\square EAB$.
 ror rursus, ut ante,
 $\square GIH$ sit ad $\square FAC$,

sicut $\square EIB$ ad $\square EAB$; & quidem IG & AF, ut supra, æqua-

les sint ostensæ: erit quoque IH ad AC, sicut $\square EIB$ ad $\square EAB$.

Vt autem IH ad AC, sic quoque erat $\square O, AE + \square KI, AB$ ad
 $\square P, AE$. Quocirca erit ut $\square O, AE + \square KI, AB$ ad $\square P, AE$
 ita $\square EIB$ ad $\square EAB$.

Fiat jam, ut AE ad AB, ita KI ad Q
 $e \frac{af}{c} \dots \dots \dots f \frac{af}{c}$ 5 * ad AB, ita KI ad
 eritque per 16.6. $\square KI, AB \propto \square Q, AE$. Q: eritque $\square KI,$
 $\square AB$ æquale $\square Q,$

Adeoque ut
 $\square O, AE + \square KI, AB$, seu $\square Q, AE$ ad $\square P, AE$,
 hoc est, rejectâ communi altitudine AE,
 $\square O, AE$ plus
 $\square KI, AB$ seu $\square Q,$

ut $O + Q$ ad P, sic $\square EIB$ ad $\square EAB$.
 $\frac{cf}{d} + \frac{af}{e} \frac{cc}{d} \frac{ceaf+adaf}{cc} - ea$ AE, ad $\square P, AE$,
 hoc est, destruen-

do communem
 altitudinem AE, ut $O + Q$ ad P, sic $\square EIB$ ad $\square EAB$.

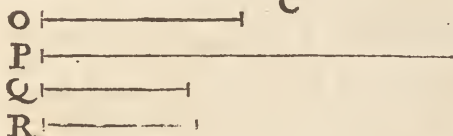
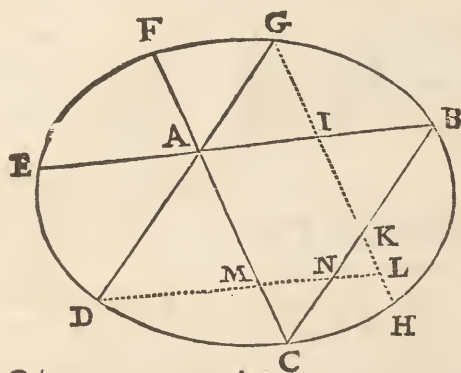
Explicita itaque est ratio, quam habet $\square GIH$ ad $\square FAC$,

quippe ostensa est eadem quæ ipsius IH ad AC, seu $O + Q$ ad P.

Quo-

Quocirca jam ratio explicanda restat, quæ est inter \square E I B & \square E A B.

Quoniam autem in hac explicanda ad 4^{or} dimensiones ascenditur, deveniendum erit ad pauciores dimensiones, ut tota resolutio duntaxat per rectorum aut planorum considerationem absolvatur.



| | | |
|---|---------------------------|----|
| EI seu | $\frac{EA + AI}{ce + ad}$ | EA |
| | $\frac{c}{c}$ | e |
| 23.6 | $\frac{IB}{af}$ | AB |
| | $\frac{c}{c}$ | a |
| \square E I B seu \square sub EA + AI in IB \square E A B | | |
| | $\frac{ceaf + adaf}{cc}$ | ea |
| Vt EI seu EA + AI est ad EA, | | |
| | $\frac{ce + ad}{c}$ | e |

Mult. per CA. $c \dots \dots c$
 sic \square EA, CA + \square AI, CA est ad \square CAE.

Vel, si pro \square EA, CA, propter similitudinem \triangle^{rum} CAB & AMD, ubi CA est ad AB,

Pars II.

Fff

Porro quoniam ratio \square^{li} E I B ad \square E A B composita est ex ratione EI seu EA + AI ad EA, & ex ratione IB ad AB; & quidem EA + AI ad EA, si com-

ficut A M ad MD seu E A scribatur \square B A M,
 ficut \square B A M + \square C A I ad \square B A M.
 Vel rursus, si pro \square C A I, propter similitudinem
 Vide supra ad notam 1* Δ^{rum} B A C & A I G, scribatur \square B A, G I,
 ficut \square B A M + \square B A, G I ad \square B A M,
 hoc est, ficut A M + G I, hoc est, G L ad A M.
 relicta communi altitudine B A,

Vt I B est ad A B,

$$\frac{af}{c} \text{ ————— } a$$

Mult. per C A

$$\frac{c \dots \dots c}{af \text{ ————— } ca}$$

ita \square I B, C A est ad \square C A B.

Vel, si pro \square I B, C A, propter similitudinem
 Vide supra ad notam 2* Δ^{rum} C A B & K I B, scribatur \square K I, A B,
 sic \square K I, A B, ad \square C A B, hoc est, relicta
 communi altitudine A B, ficut K I ad C A.

C A seu K I, A B ad \square C A B, hoc est, destruendo communem altitudinem A B, ficut K I ad C A: Erit quoque ratio \square^{li} E I B ad \square E A B, hoc est, ipsius O + Q ad P, composita ex ratione G L ad A M, & ex ratione K I ad C A.

Constat igitur, rationem \square^{li} E I B ad \square E A B seu ipsius O + Q ad P esse compositam ex ratione G L ad A M, & ex ratione K I ad C A.

Iam quia superior ratio ipsius O + Q ad P nulli rationi linearum, quæ in Ellipsi ductæ sunt, respondet; neque etiam adhuc luculenter patet, eam, si cum ratione G L ad A M, aut K I ad C A confertur, ex his compositam esse, quemadmodum ex assumptis jam fuit deductum; fiat præterea ut

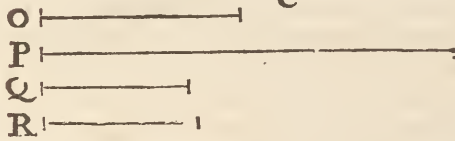
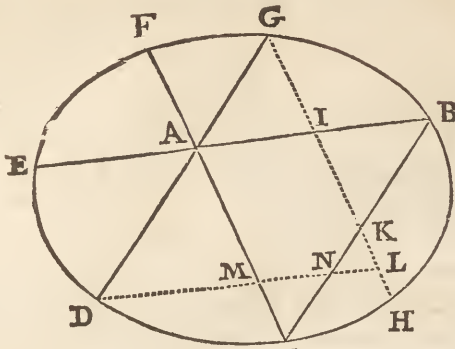
K I ad Q, sic F A ad R.

$$f \text{ ————— } \frac{af}{c} \text{ ————— } d \mid \frac{ad}{c} \cdot \sigma^*$$

eritque, per 16.6^{ti},

$$\square K I, R \propto \square Q, F A.$$

Denique fiat ut K I ad Q, sic F A ad R: eritque \square K I, R æquale \square Q, F A. Ac proinde cum O + Q ad P,



Vt O + Q est ad P,

$$\frac{cf}{d} + \frac{af}{e} = \frac{cc}{d}$$

Mult. per FA. d. d

hic $\square O, FA$ seu $KI, CA, + \square Q, FA$ seu KI, R est ad $\square P, FA$ seu $\square CA$. Rad

Vide supra ad notam 3* $cf + \frac{daf}{e} = cc$

$\square P,$
FA seu

Cur $\square P, FA$ sit $\infty \square CA$, ita concluditur

3* Est namque KI ad FA, ut O ad CA;

$$f \text{ --- } d \text{ --- } \frac{cf}{d} \text{ --- } c$$

& convertendo

FA ad KI, CA
 $d \text{ --- } f \text{ } c$
 ut CA ad O. P
 $c \text{ --- } \frac{cf}{d} \text{ } \frac{cc}{d}$

Vide supra ad notam 4*

Vnde ex æquo erit

ut FA ad CA, ita CA ad P.

$$d \text{ --- } c \text{ --- } c \text{ --- } \frac{cc}{d}$$

Ac proinde, per 17. 6^{ti}, $\square P, FA \infty \square CA$.

Fff 2

ad P, assumendo communem altitudinem FA, sit sicut $\square O, FA$ seu $KI, CA, + \square Q, FA$ seu

$\square CA$: Erit ratio composita ex ratione GL ad AM, & ex ratione KI ad CA eadem rationi \square^{li} KI, CA + $\square KI, R$ ad $\square CA$, hoc

est, eadem rationi, quæ componitur ex ratione KI ad CA, & ex ratione CA + R ad CA.

Ideoque si communis auferatur

KI

| | | | |
|-------|---|--------------|---------------------------|
| | KI | CA | ratio KI ad CA, erit quo- |
| | f | c | que reliqua ratio GL ad |
| 23.6. | CA + R | CA | AM eadem reliquæ rati- |
| | $c + \frac{ad}{e}$ | c | oni CA + R ad CA hoc |
| | <hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/> | | est, erit GL ad AM, ut |
| | \square KI, CA + \square KI, R | \square CA | CA + R ad CA. Quod |
| | $cf + \frac{daf}{e}$ | cc | verum esse deinceps sic |
| | | | ostenditur. |

Hinc cum ratio \square^{li} GIH ad \square FAC sive ipsius IH ad AC eadem sit ostensa quæ ipsius O + Q ad P, & hæc rursus eadem rationi, quæ componitur ex ratione KI ad CA, & ex ratione CA + R ad CA; at verò ratio \square^{li} EIB ad \square EAB eadem rationi, quæ componitur ex ratione GL ad AM, & ex ratione KI ad CA: sequitur, si ratio \square^{li} GIH ad \square FAC (quemadmodum suppositum fuit) eadem sit rationi \square^{li} EIB ad \square EAB, rationem compositam ex KI ad CA, & ex ratione CA + R ad CA debere quoque eandem esse rationi, quæ ex GL ad AM, & ex KI ad CA componitur. Ac proinde, si utrobique communis auferatur ratio KI ad CA, rationem reliquam CA + R ad CA eandem quoque fore reliquæ rationi GL ad AM.

Hoc autem cum nondum per se evidens sit, superest ut ipsum sequenti argumentatione resolvamus atque penitus manifestum reddamus.

Ex similitudine \triangle^{lorum} ABC & MDA est
AB AC MD seu AE MA seu IL

$$a \text{ --- } c \text{ --- } e / \text{ ad } \frac{ce}{a}. \text{ Vnde GL fit } \infty d + \frac{ce}{a}.$$

Ex similitudine \triangle^{lorum} ABC & IAG est
BA AC AI IG seu AF

$$a \text{ --- } c \text{ --- } \frac{ad}{c} \text{ --- } d$$

Ac proinde, per 16.6^{ti}, \square BAF ∞ \square CAI.

Ex similitudine \triangle^{lorum} GLD & AMD est

$$\text{GL ad AM,}$$

$$d + \frac{ce}{a} \text{ --- } \frac{ce}{a}$$

Quo-
niam e-
nim, pro-
pter simi-
litudinem
triangu-
lorum
GLD &
AMD,
est ut GL
ad AM
ita DL
seu EI ad
DM

sicut DL seu EI ad DM seu EA;

$$e + \frac{ad}{c} \text{ ----- } e$$

mult. per CA. c c

Vel per I. 2^{di} sicut \square EI, CA seu CAE + CAI seu AE, R ad \square CAE.

$$\frac{ce + ad \text{ ----- } ce}{\text{hoc est, relicta communi altitudine}}$$

AE sicut CA + R ad CA.

DM seu EA; ut autem EI ad EA, ita, assumpta communi altitudine

Ex constructione est

Vide supra ad notam 6*

$$\begin{array}{cccc} KI & Q & FA & R \\ f \text{ --- } \frac{af}{e} & \text{ --- } & d & \frac{ad}{e} \end{array}$$

itemque AE AB KI Q

Vide supra ad notam 5*

$$e \text{ --- } a \text{ --- } f \frac{af}{e}$$

Ideoque AE AB FA R

per I. 5^{ti}. $e \text{ --- } a \text{ --- } d \text{ --- } \frac{ad}{e}$

Ac proinde per 16. 6^{ti}, \square BAF \propto \square AE, R.

CA, \square EI, CA seu CAE plus \square CAI seu AE, R est ad \square CAE: Erit ut GL ad AM, ita \square CAE + \square R, AE ad \square CAE, hoc est, destruendo communem altitudinem AE, sic CA + R ad CA.

Hinc cum \square BAF etiam sit \propto \square CAI, erit similiter \square AE, R \propto \square CAI.

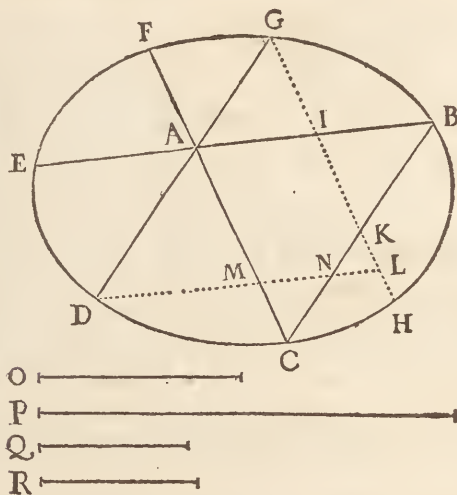
Patet itaque GL esse ad AM, sicut CA + R ad CA. Vt erat propositum.

Quare cum hoc pacto, assumentes quæsitum tanquam verum, per resolutionem Geometricam devenimus ad verum concessum: sequitur, quæsitum illud, quod cum concessio isto omnimodè connectitur, verum esse. hoc est, umbram baculi C, quæ transibat per A, transiisse similiter per B. Quod erat demonstrandum.

Et hæc quidem, quæ Resolutionem Geometricam Theorematis concernunt, quod ad solutionem Problematis pag. 372 ut concessum suppositum fuit. Cæterum quoniam iis; qui cum Logicis statuunt ex falsis etiam posse verum concludi, resolutio hæc ad quæsitum ostensionem incerta videri potest: placuit majoris certitudinis ergo idem Theorema Synthetice verificare, procedendo à concessis ad quæsitum, prout ad hoc me instigavit præstantissimus ac

undequaque doctissimus juvenis D. Petrus Hartfingius, Iaponensis, quondam in addiscendis Mathematicis discipulus meus solertissimus.

Demonstratio autem ipsa filium calculi sequitur, qualis extat pag. 370 § 371, at eodem nonnihil hic immutato; ut appareat passim artificium, quo singula Geometricè explicari queant.



Positâ, ut ante, $AD \propto y$

erit ut BA ad AE , ita BC ad AD

$$a \text{ --- } c \text{ --- } b \text{ | } \text{ ad } y \text{ seu } \frac{bc}{a}$$

ac proinde per 16. 6^{ti}

$$\square BA, AD, \square BC, AE$$

$$a \quad ay \quad \propto \quad bc.$$

Ex natura Ellipsis per 17 Conicorum Apollonii

$$AD.y \quad KB. b-z$$

$$AG.z \quad AG \text{ vel } CK \quad z$$

$$\text{est } \square DAG.yz \text{ ad } \square CKB. bz-zz,$$

$$FA. d \quad KH. x$$

$$AC. c \quad AC \text{ vel } KG. c$$

$$\text{ut } \square FAC. cd \text{ ad } \square GKH. cx.$$

Quoniam igitur ex hypothesi est BA ad AE , sicut BC ad AD : erit \square^{lum} sub extremis BA, AD æquale \square^{lo} sub mediis BC, AE . Deinde quoniam ex natura Ellipsis est, ut $\square DAG$ ad $\square CKB$, sive, rejectâ communi altitudine AG vel CK , ut DA ad KB , ita $\square FAC$ ad

id est, rejectis communibus altitudinibus z & c ,
erit ut DA ad KB , ita FA ad KH

$$y \text{---} b \text{---} z \text{---} d / \text{ ad } x.$$

five, assumendo communem altitudinem a ,
ut $\square BA, AD$ seu $\square BC, AE$ ad $\square BA, KB$, ita FA ad KH

$$a \text{ ay vel } bc \text{---} ab \text{---} az \text{---} d / \text{ ad } x. \delta$$

ad $\square BA, KB$: erit ut $\square BC, AE$ ad $\square BA, KB$, ita FA ad KH .

Esto jam $KI \propto f$.

eritque propter similitudinem $\triangle^{rum} BCA$ & BKI
ut BC ad CA , ita BK ad KI

$$b \text{---} c \text{---} b \text{---} z / \text{ ad } f \text{ seu } \frac{cb-cz}{b}. \text{ ac proinde}$$

add. $HK. x$ per 16. 6^{ti}.

$$\text{mult. HI. } \frac{f+x}{b} \text{ } \square BC, KI, \square CA, BK$$

per IG. $b \} bf \propto cb-cz$

Deinde sit $IG \propto h$.

$$\square GIH. fh+hx$$

eritque propt. simil. $\triangle^{rum} BCA$ & AGI
ut BC ad CA , ita AG ad GI

$$b \text{---} c \text{---} z / \text{ ad } h \text{ seu } \frac{cz}{b}. \text{ ac proinde per}$$

16. 6^{ti}

$$\square BC, IG \square CA, AG$$

$\beta \text{ } bh \propto cz.$

Similiter esto $AI \propto k$.
eritque propter simil. \triangle^{rum}
 BCA & AGI

ut BC ad BA , ita AG ad AI

$$b \text{---} a \text{---} z / \text{ ad } k \text{ seu } \frac{az}{b}. \text{ ac proinde per}$$

16. 6^{ti}

$$\text{add. AE. e}$$

$$\text{mult. EI. } \frac{k+e}{l} \text{ } \square BC, AI \square BA, AG$$

per IB. $l \text{ } \varepsilon \text{ } bk \propto az.$

$$\square EIB. kl+el$$

Sit item $IB \propto l$.

eritque propter simil. $\triangle^{rum} BCA$ & BKI

ut

ad $\square GKH$, id est, re-
lectâ communi altitu-
dine AC vel GK , ita
 FA ad KH ; & quid-
dem DA ad KB , si BA
pro communi altitu-
dine sumatur, sit
sicut $\square BA, AD$
seu $\alpha BC, AE$.

Porrò cum
ex similitudine
 $\triangle^{rum} BCA$ &
 BKI , BC sit
ad CA , sicut
 BK ad KI : erit
 \square sub BC, KI
æquale \square^{lo} sub
 CA, BK . Eân-
dem ratione
cum BC sit ad
 BA , sicut BK
ad BI : erit \square
sub BC, BI æ-
quale \square^{lo} sub
 BA, BK .

Haud secus
cum similia sint
 $\triangle^{ra} BCA$ &
 AGI , ac idcir-
co BC ad CA ,
sicut AG ad
 GI : erit \square sub
 BC, GI æqua-
le \square^{lo} sub CA ,
 AG . Similiter
cum BC sit ad

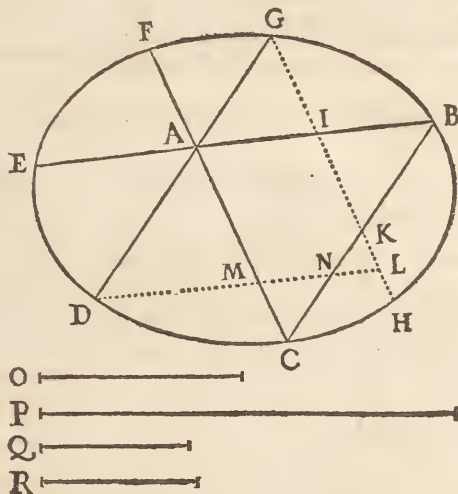
ut BC ad BA, ita BK ad BI

$$b \text{ --- } a \text{ --- } b \text{ --- } z / \text{ ad } l \text{ feu } \frac{ab - az}{b} . \text{ ac proinde per}$$

$$\square BC, BI \quad \square BA, BK$$

$$\gamma \quad bl \propto ab - az.$$

BA, sicut AG ad AI: erit pariter \square sub BC, AI \propto sub AB, AG.



Ex natura Ellipsis per 17.3^{ti} Conic. Apollonii

est \square FAC ad \square GIH, ut \square EAB ad \square EIB

$$cd \text{ --- } bf + bx \text{ --- } ael \text{ ad } kl + el.$$

Est autem per 23. 6^{ti} ratio \square FAC ad \square GIH

$$cd \text{ --- } bf + bx$$

composita ex ratione FA ad IH seu IK + KH, &

$$d \text{ --- } f + x$$

ex ratione CA ad GI, id est, assumendo commu-

$$c \text{ --- } b$$

BC

nem altitudinem b, ex ratione \square ^{li}

β

BC, CA ad \square BC, GI vel \square CA, AG, sive, reje-

$$bc \text{ --- } bb \text{ feu } cz$$

CA

Et communi altitudine c, ex ratione BC ad AG.

$$b \text{ --- } z.$$

Iam vero, quia ex

natura Ellipsis \square

FAC est ad \square GIH,

ut \square EAB ad \square EIB;

& quidem, ratio \square ^{li}

FAC ad \square GIH

composita sit ex ra-

tione FA ad IH seu

IK + KH, & ex ra-

tione CA ad GI, id

est, assumendo com-

muni altitudinem

BC, ex ratione \square ^{li}

BC, CA ad \square BC,

GI vel β \square CA,

AG, sive etiam, re-

Simi-

Similiter ratio \square^{li} E A B ad \square E I B composita est

$$ae \text{ --- } kl + el$$
 ex ratione E A ad I B, & ex ratione A B ad E I.

Quarum quidem E A ad I B, si B C pro communi

$$e \text{ --- } l \qquad a \text{ --- } k + e.$$
 altitudine sumatur, eadem est quæ \square^{li}

B C, E A ad \square B C, I B seu \square B A, B K, hoc est, ea-

$$be \text{ --- } bl \text{ vel } ab \text{ --- } az$$
 dem quæ δ F A ad K H.

Sed A B ad E I, si B C similiter pro communi altitu-

$$d \text{ --- } x$$

$$a \text{ --- } k + e \quad b$$
 dine sumatur, eadem, quæ \square^{li} A B, B C ad \square B C, E I

vel \square B C, A I, id est, B A, A G, + \square B C, E A vel \square B A,

$$ab \text{ --- } bk + be$$
 five $az + ay$,
 A D, hoc est, relictâ communi altitudine A B, seu a,
 eadem quæ B C ad A G + A D.

Erit igitur ratio composita ex ratione

$$b \text{ --- } z + y.$$
 F A ad I K + K H, & ex ratione B C ad A G, id est,

$$d \text{ --- } f + x \qquad b \text{ --- } z$$
 per 23. 6^{ti}, ratio \square^{li} F A, B C ad \square I K, A G + \square K H, A G,

eadem rationi quæ componitur ex ratione F A ad K H,

$$bd \text{ --- } fz + xz$$

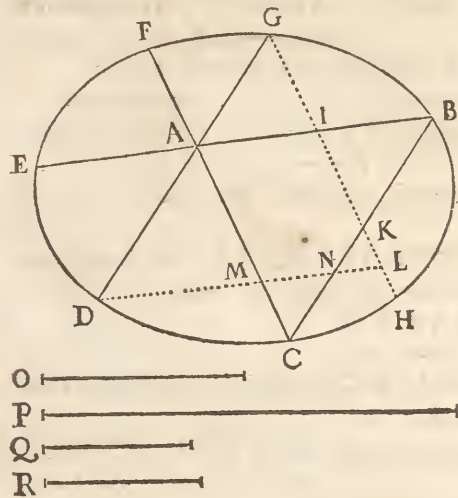
$$d \text{ --- } x$$
 & ex ratione B C ad A G + A D, id est, per 23. 6^{ti},

eadem rationi, quam habet

$$b \text{ --- } z + y$$
 \square F A, B C ad \square K H, A G + \square K H, A D.

$$bd \text{ --- } xz + xy.$$
 composita ex ratione F A ad I K + K H, & ex ratione B C ad A G, id est, per 23.
 6^{ti}, ratio \square^{li} F A, B C ad \square I K, A G + \square K H, A G, eadem rationi, quæ
 componitur ex F A ad K H, & ex ratione B C ad A G + A D. id est, per 23. 6^{ti},
 eadem rationi, quam habet \square F A, B C ad \square K H, A G + \square K H, A D.

jectâ communi
 altitudine C A,
 ex ratione B C ad
 A G; At ratio \square^{li}
 E A B ad \square E I B
 composita ex rati-
 one E A ad I B,
 & ex ratione A B
 ad E I; quarum
 quidem E A ad
 I B, si B C pro
 communi altitu-
 dine sumatur, est
 sicut \square B C, E A
 ad \square B C, I B seu
 γ \square B A, B K,
 quæ eadem o-
 stensa est δ ratio-
 ni F A ad K H;
 sed A B ad E I, si
 B C similiter pro
 communi altitu-
 dine sumatur, ut
 \square A B, B C, ad
 \square B C, E I, id est,
 ad \square B C, A I vel
 ε B A, A G, +
 \square B C, E A vel
 α \square B A, A D, si-
 ve etiam, relictâ
 communi altitu-
 dine A B, ut B C
 ad A G + A D:
 Erit ratio com-



Hinc cum
 $\square FA, BC, \text{ sit ad } \square IK, AG + \square KH, AG, \text{ sicut idem } \square FA, BC \text{ ad } \square KH, AG + \square KH, AD: \text{ erit, per 9. 5}^{\text{ti}},$
 ad $\frac{bd}{xz + xy} = \frac{bd}{xz + xy}$ cum $\square FA, BC$
 $\square IK, AG + \square KH, AG \propto \square KH, AG + \square KH, AD.$ ad $\square IK, AG + \square KH, AG$ eandem habeat rationem, quam idem $\square FA, BC$ ad $\square KH, AG + \square KH, AD:$ erit $\square IK, AG + \square KH, AG \propto \square KH, AG + \square KH, AD.$ A quibus si commune auferatur $\square KH, AG,$ erit quoque reliquum $\square IK, AG$ \propto reliquo $\square KH, AD.$ Vnde erit ut IK ad $KH,$ ita DA ad $AG.$

Vnde, dempto utrinque communi $\square KH, AG,$
 erit quoque reliq. $\square IK, AG$ \propto reliquo $\square KH, AD$
 $\frac{fz}{xz} = \frac{fz}{xz}$

Ac proinde, per 16. 6^{ti},
 ut IK ad $KH,$ ita DA ad $AG.$
 $f \text{ — } x \text{ — } y \text{ / ad } z.$

Sed

Sed ut IK ad KH, ita est, aff. comm. altit. *b*,
 $f \text{ --- } x$

ζ
 $\square IK, BC$ vel $\square CA, BK$ ad $\square KH, BC$.
 $bf \quad cb \text{ --- } cz \text{ --- } bx$

AB
 At DA ad AG, ita aff. comm. alt. *a*, est $\square DA, AB$
 $y \text{ --- } z$
 α
 vel $\square BC, AE$ ad $\square AG, AB$.
 $be \text{ --- } az$

Quare erit ut
 $\square CA, BK$ ad $\square KH, BC$, ita $\square BC, AE$ ad $\square AG, AB$.
 $cb \text{ --- } cz \text{ --- } bx \text{ --- } be$ / ad az .

δ
 Cum autem supra sit FA ad KH, i.e., aff. comm. alt. *b*,
 $d \text{ --- } x$
 $\square FA, BC$ ad $\square KH, BC$, sicut $\square AE, BC$ ad $\square KB, BA$,
 $bd \text{ --- } bx \text{ --- } be$ / ad $ab \text{ --- } az$,
 hoc est, convertendo
 $\square KH, BC$ ad $\square FA, BC$, sicut $\square KB, BA$ ad $\square AE, BC$:
 $bx \text{ --- } bd \text{ --- } ab \text{ --- } az$ / ad be :

Erunt $\square CA, BK$ $\square KH, BC$ $\square FA, BC$ tres magni-
 $cb \text{ --- } cz \text{ --- } bx \text{ } bd$ tudines ab
 una parte,
 & $\square KB, BA$ $\square AE, BC$ $\square AG, AB$ tres aliæ ab
 $ab \text{ --- } az \text{ } be \text{ --- } az$ altera par-
 te, quæ binæ
 sumptæ in eadem
 sunt ratione, qua-
 rumque proportio
 est perturbata:

BC Sed ut IK ad
 KH, ita est, af-
 sumptâ commu-
 ni altitudine BC,
 $\square IK, BC$ vel
 $\zeta \square CA, BK$
 ad $\square KH, BC$.

At sicut DA ad
 AG, ita, assumptâ
 communi altitu-
 dine AB, $\square DA,$
 AB vel $\alpha \square BC,$
 AE ad $\square AG,$
 AB. Quare erit
 ut $\square CA, BK$ ad
 $\square KH, BC$, ita
 $\square BC, AE$ ad \square

AG, AB. Cum
 autem supra sit δ ,
 ut FA ad KH, fi-
 ve, assumptâ com-
 muni altitudine
 BC, $\square FA, BC$
 ad $\square KH, BC$,
 ita $\square AE, BC$ ad
 $\square KB, BA$; id
 est, convertendo,
 $\square KH, BC$ ad
 $\square FA, BC$, sicut
 $\square KB, BA$ ad \square
 AE, BC: erunt
 $\square CA, BK,$ \square
 $KH, BC,$ & \square
 FA, BC 3 magni-
 tudines ab una
 parte, & $\square KB$

BA, $\square AE, BC,$ & $\square AG, AB$ tres aliæ ab altera parte, quæ binæ
 sumptæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est perturbata.

Quare etiam per 23. 5^{ti} ex æqualitate proportionales erunt

id est, $\square CA, BK$ ad $\square FA, BC$, sicut $\square KB, BA$

$$cb - cz \text{ ————— } bd \text{ ————— } ab - az$$

BA

ad $\square AG, BA$, seu, rej. com. alt. a , ut KB ad AG .

$$\text{————— } az \text{ } b - z \text{ ——— } z.$$

Id quod convenit cum æquatione inventa pag. 371, multiplicando sc. tum extremos tum medios terminos, ostendens nos in eodem calculo Geometricè explicando eò pervenisse, ubi

$$cbz - czx \text{ æquatur } bbd - bdx.$$

Denique ut inveniatur AG seu z , quoniam sumendo CA seu c pro communi altitudine,

KB est ad AG , sicut $\square CA, KB$ ad $\square CA, AG$:

$$b - z \text{ ——— } z \text{ ——— } cb - cz \text{ / ad } cz:$$

erit ut

$\square CA, BK$ ad $\square FA, BC$, ita $\square CA, KB$ ad $\square CA, AG$.

$$cb - cz \text{ ————— } bd \text{ ————— } cb - cz \text{ / ad } cz.$$

Hinc cum $\square CA, BK$ ad $\square FA, BC$ & ad $\square CA, AG$

$$cb - cz \qquad bd \qquad cz$$

eandem habeat rationem, erit per 9. 5^{ti},

$\square FA, BC$ æq. $\square CA, AG$.

$$bd \text{ } \propto \text{ } cz.$$

Vnde per 16. 6^{ti} erit,

ut CA ad AF , ita BC ad AG .

$$c \text{ ——— } d \text{ ——— } b \text{ / ad } z.$$

Quod erat propositum.

AG ; ac proinde CA ad AF , sicut BC ad AG . Quod erat demonstrandum.

Vnde & ipsæ ex æqualitate proportionales erunt, nimirum, erit ut $\square CA, BK$ ad $\square FA, BC$, ita $\square KB, BA$ ad $\square AG, BA$, id est, reliquâ communi altitudine BA , ita KB ad AG . Denique, quoniam, assumptâ communi altitudine CA , KB est ad AG , sicut $\square CA, KB$ ad $\square CA, AG$: erit ut $\square CA, BK$ ad $\square FA, BC$, ita $\square CA, KB$ ad $\square CA, AG$. Quocirca cum $\square CA, BK$ ad $\square FA, BC$ & ad $\square CA, AG$ eandem habeat rationem, erit $\square FA, BC$ æquale $\square CA$,

F I N I S.

1

Celeberrimi de Centro Oscillationis problematis solutio.

Viro Sapientissimo salutem dat

STEPHANVS GILLET,

Nulla in re tam irrita conatu laborarunt Viri Clarissimi, quam in centro oscillationis investigando; licet enim quadraginta abhinc annis mathematicus celebris musquam gentium extiterit ullus, qui huic indagacioni accuratissime haud incubuerit, quin etiam plurimi Evpoca audacter exclamarint; nullos tamen in errores incidit nullus. Næ ego aliena infelicitate minime exterritus, viam adeo expeditam inveni, ut ad scopum optatum recte pervenerim. Quo circa arbitror tibi rebus mathematicis gaudenti non ingratum fore, si hoc arcanum tantopere investigatum exhibuero.

Centri oscillationis demonstratio.

I. Definitio.

Oscillatio est ipsa agitatio penduli sua gravitate circa axem horizonti parallelum moti. V. G. Si pendulum, A, suam agitationem vi gravitatis incipiat in puncto μ . inhibeatque in puncto ν . ipsa agitatio hujus penduli totum arcum $\mu\nu$. percurrentis vocatur oscillatio.



II. Definitio.

Quorum pendulorum centra gravitatis arcus similes percurrunt, eadem suas oscillationes, similes faciunt, sicut pendula A & b.



III. Definitio.

Centrum oscillationis est punctum, quod in pendulo composito agitato perinde movetur, ac si nullo modo stipatum foret: ac proinde

* si in

si in extremo penduli simplicis resideret, oscillationes suas eodem tempore conficeret, atque pendulum compositum datum. Itaque tota difficultas huc recidit, ut inveniatur longitudo penduli simplicis, quod suas oscillationes similes eodem tempore conficiat, atque pendulum compositum datum: nam longitudo hujus penduli simplicis eadem est, atque distantia centri oscillationis penduli compositi ab axe. Qua in investigatione ut mens dirigatur, aliquid de gravitate, spatioque decurso præmittendum est.

I. Lemma.

Gravia gravitatem habent a levioribus, quæ tantumdem ascendent, quantum graviora descendunt.

I. Coroll.

Hinc colliges mobili secundum horizontem moto gravitatem acquiri nullam: Quia nulla leviora ascendunt.

II. Coroll.

Hinc animadvertis mobili circa centrum moto gravitatem acquiri nullam: ideo quod mobile haud magis deprimitur, quam extollitur.

III. Coroll.

Hinc vides gravitatem acquiri per solam descensionem centri: quippe qui alii motus pro nihilo habeantur; ac proinde incidentiam gravis semper esse spectandam ex altitudine descensionis centri.

IV. Coroll.

Hinc perspicis duorum gravium ex eadem altitudine cadentium, quorum unum perpendiculariter, alterum vero oblique decedit; utriusque velocitatem eandem esse in horizonte, sive in plano horizonti parallelo: propterea quod gravitas per motum vel circa centrum, vel horizonti parallelum, neque intenditur, neque remittitur.



V. Coroll.

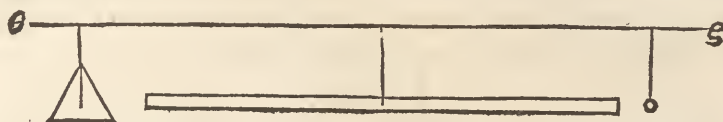
Hinc manifestum est velocitatem gravis pensilis, sive penduli eandem esse, atque gravis ex eadem altitudine perp. decidentis: pensile enim nihil aliud est, quam grave oblique decedens.



VI. Co-

VI. *Coroll.*

Hinc clarum est eandem esse velocitatem in omnibus pendulis quorum centra gravitatis æque distant ab axibus, quandoquidem æqualiter descendunt.

VII. *Coroll.*

Hinc liquet eandem esse velocitatem ejusdem plani tum in planum, tum in latus moti: utpote quod centrum utroque modo æque deprimitur.

II. *Lemma.*

Duobus gravibus ex eadem altitudine cadentibus, quorum unum perp. alterum vero oblique secundum rectam lineam decedit; Tempora utriusque incidentiæ sunt inter se sicut utraque linea secundum quas incidunt; quandoquidem eadem est velocitas in utroque mobili æqualiter descendente.

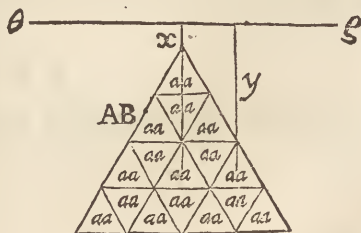
Coroll.

Hinc sequitur ut duobus gravibus ex eadem altitudine secundum singulas lineas rectas oblique cadentibus; Tempora utriusque incidentiæ inter se referantur, sicut utraque linea obliqua, vel sicut spatia decursa, si gravia sint æqualia.

III. *Lemma.*

Si planum indefinite dividatur in partes aliquotas. Summa productorum singularum partium per suam ab axe distantiam multiplicatarum, æqualis est producto totius plani per sui centri ab eodem axe distantiam multiplicati.

Sit planum (AB) indefinite divisum in partes aliquotas (aa), ex quibus singulis dimittantur singulæ lineæ inter se parallelæ, cæque ad axem $\theta\epsilon$ extra positum perpendiculares, quæ vocentur y : linea e plani centro ad eundem



* 2

axem

axem perp. ducta appelletur x : dico summam omnium productorum, $aa y$, esse æqualem producto abx .

Namque plani ita divisi singulæ partes perinde spectari possunt, ac si forent singula pondera: at ex geostatica summa productorum singulorum ponderum per suam ab axe distantiam multiplicatorum, æqualis est producto omnium ponderum per centri communis ab eodem axe distantiam multiplicatorum; Ergo &c.

I. Coroll.

Hinc perspicuum est summam productorum singularum partium ejusdem plani multiplicatarum per singulas peripherias, quarum semidiametri sunt ipsæ perpend. ad axem, esse æqualem producto totius plani multiplicati per peripheriam, cujus semidiameter est ipsa distantia centri ab axe.

II. Coroll.

Hinc patet spatium a plano in planum circa axem extra positum moto decursum, æquari producto ipsius plani multiplicati per peripheriam, cujus semidiameter est distantia centri ipsius plani ab axe.

III. Coroll.

Hinc ultro emergit investigatio omnium solidorum a planis circa axes motis descriptorum; sed istæc alibi.

IV. Coroll.

Hinc deduces spatium a plano in planum circa axem extra positum moto decursum, æquari alteri spatio, quod percurreretur si singula puncta, vel singulæ partes aliquotæ plani tantumdem ab axe distarent, quantum ipsius centrum gravitatis.

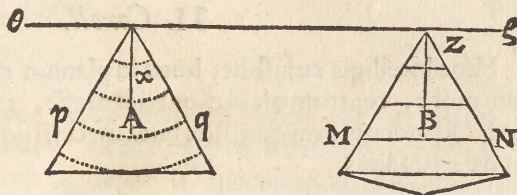
V. Coroll.

Hinc apparet spatia a planis æqualibus decursa, esse in eadem ratione, atque eorundem planorum distantias centrorum gravitatis ab axe.

VI. Coroll.

Hinc nullo negotio reperias spatium a plano in latus moto decursum:

Si enim planum A indefinite dividatur per superficies cylindraceas parallelas, quarum omnium sit idem axis $\theta\epsilon$: conficiatur planum, b , cujus singulæ lineæ axi parallelæ æquentur singulis sectionibus cylindraceis, quæ tantumdem ab axe distant, V. G. linea recta MN. æquetur sectioni. pq . sicque de cæteris; ex hujus plani b centro linea



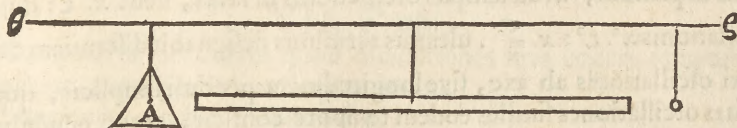
ad axem $\theta\epsilon$ perp. ducta vocetur Z: ex plani A centro linea perpend. ducta ad eundem axem appelletur, x . Spatium a plano A in planum est ad spatium ab eodem plano in latus moto decursum, sicut $x.z$. nam spatium a plano A in latus moto decursum, æquatur spatio per planum b in planum motum decurso.

Iam vero centrum oscillationis collustratur.

I. Problem.

Invenire centrum oscillationis plani in planum circa axem extra positum moti.

Centrum oscillationis idem est, atque centrum gravitatis ipsius plani.



Cum enim, ex 6^o corollario primi lemmatis, & ex 4^o coroll. 3^{ti} lemmatis, planum A eadem velocitate, idem spatium percurrat, quod percurreret si ipsius omnia puncta tantumdem ab axe distarent, quantum centrum gravitatis; necesse est ut oscillationes suas eodem tempore perficiat, atque perficeret si singula puncta tantumdem ab axe distarent: atqui si singula puncta tantumdem ab axe distarent, oscillationes suas eodem tempore conficeret, atque pendulum simplex, cujus longitudo est ipsa distantia centri gravitatis ab axe, Ergo &c.

I. *Coroll.*

Hinc noveris omnium planorum, quorum centra gravitatis ab axe æque distant, idem esse centrum oscillationis in planum.

II. *Coroll.*

Hinc intelligis cujuslibet lineæ in planum circa axem extra positum motæ, centrum oscillationis idem esse, atque centrum gravitatis; Quandoquidem quælibet linea spectari potest, sicut planum minimæ latitudinis.

II. *Probl.*

Invenire durationem oscillationis plani in latus circa axem extra positum moti.

Tempora oscillationum plani tum in planum, tum in latus moti, sunt inter se, sicut spatia utroque motu decursa; propterea quod utriusque oscillationis tempora perinde spectanda sunt, atque tempora incidentiarum duorum gravium æqualium ex eadem altitudine oblique decidentium.

III. *Probl.*

Invenire centrum oscillationis plani in latus circa axem extra positum moti.

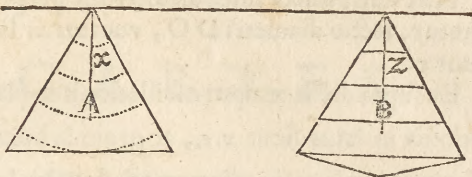
Si centri plani ab axe distantia vocetur x . tempusque oscillationis in planum, sit ad tempus oscillationis in latus, sicut x . z : hujus relationis $x^2. z^2: x. \frac{z^2}{x}$. ultimus terminus designabit distantiam centri oscillationis ab axe, sive longitudinem penduli simplicis, quod suas oscillationes similes eodem tempore conficit, atque pendulum in latus motum; propterea quod longitudines pendulorum simplicium sunt inter se, sicut quadrata temporum oscillationum.

IV. *Probl.*

Invenire durationem oscillationis solidi.

Si solidum A, indefinite dividatur per superficies cylindraceas parallelas, quarum omnium idem sit axis, atque oscillationis; com-
pona-

ponatur planum b , cu-
jus singulæ lineæ axi
parallelae, sint inter
se, sicut singulæ sectio-
nes cylindraceæ, quæ
tantumdem ab axe di-
stant. Distantia cen-
tri hujus plani ab axe



vocetur z . distantiaque centri solidi. ab eodem axe appelletur x .
Tempus oscillationis solidi, est ad tempus oscillationis penduli sim-
plicis, cujus longitudo sit x . sicut z . x . quandoquidem solidum spe-
ctari debet sicut planum in latus motum.

V. Probl.

Invenire centrum oscillationis solidi.

Hoc problema perinde solvitur, atque 3. prob. supra.

VI. Probl.

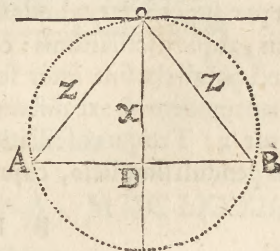
Invenire centrum oscillationis peripheriæ in latus circa tangen-
tem motæ.

Distantia centri oscillationis ab axe, sive longitudo penduli simpli-
cis oscillationes suas eodem tempore conficientis, refertur ad radium,
sicut quadratoquadratum diametri ad productum circuli per se ipsum
multiplicati; Quandoquidem spatium oscillatione in planum est ad
spatium oscillatione in latus decursum, sicut circulus ad quadratum
diametri, ut ex infinitorum geometria demonstratur.

VII. Probl.

Componere pendulum quod oscillationes suas eodem tempore
conficiat, atque pendulum simplex datum.

Longitudo penduli simplicis dati
sit diameter peripheriæ, quam axis
tangit in puncto O . si hac in peri-
pheria bina puncta A & B a puncto
suspensionis æque distantia ad libi-
tum sumantur; hæc duo puncta com-
ponent pendulum, quod suas oscilla-
tiones in latus eodem tempore con-
ficiet, atque pendulum simplex. ad
quod probandum.



Hæc

Hæc duo puncta linea diametrum perp. secante in puncto D. jungantur, sectio diametri D O, vocatur x . linea A O sive B O appelletur z .

Ex supra dictis tempus oscillationis in planum, est ad tempus oscillationis in latus sicut $x. z$, ac proinde hujus relationis $x^2. z^2 : x. \frac{z^2}{x}$, ultimus terminus sive diameter designabit longitudinem penduli simplicis, quod oscillationes suas eodem tempore conficit, atque pendulum ex istis binis punctis compositum, in latus motum.

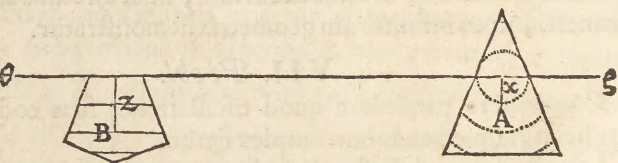
Coroll.

Hinc tibi confestim occurrunt infinita pendula composita, quæ suas quodque oscillationes eodem tempore conficiunt: verum haud scio an obstupescas quod periphæria suas oscillationes breviori tempore perficiat, quam pendulum simplex, cujus longitudo est ipsa diameter, cum periphæria integra resolvi possit in pendula simpliciora componentia, quorum singula suam quodque oscillationem eodem tempore seorsim conficiant; mirari tamen desines si perspexeris majorem esse gravitatem in periphæria conglutinata, quam in omnibus ipsius partibus disjunctim motis.

VIII. *Probl.*

Invenire durationem oscillationis cujuslibet penduli circa axem intra positum moti.

Si pendulum A, cujus distantia ab axe vocetur x . indefinite divi-



datur per superficies cylindræas parallelas, quarum omnium idem sit axis, atque oscillationis: componatur planum B, cujus singulæ lineæ axi parallelæ sint inter se, sicut singulæ sectiones cylindrææ, quæ tantumdem ab axe distant: distantiaque centri plani B ab axe appelletur z : Tempus oscillationis penduli A, erit ad tempus oscillationis penduli simplicis, cujus longitudo sit x , sicut $z. x$.

F I N I S.