Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 42

Übungsaufgaben

Aufgabe 42.1. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin t \\ t^5 \end{pmatrix}$$

für $t > 0$.

Aufgabe 42.2. Berechne zum Vektorfeld

$$F\colon (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto F(t,x,y) = \begin{pmatrix} x \sin t - \sin t \\ \frac{y}{t} + t^5 \end{pmatrix}$$

aus Aufgabe 42.1 das transformierte Vektorfeld zur durch die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ gegebenen linearen Abbildung φ. Bestimme die Lösungen zu diesem transformierten Vektorfeld.

Aufgabe 42.3. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 42.4. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 42.5. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 42.6. Bestimme alle Lösungen (für $t > 0$) des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & t^3 - t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 42.7. Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & t^2 - t + 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 42.8. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und seien

$$f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22} : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbare Funktionen mit

$$f_{11}(t)f_{22}(t) - f_{21}(t)f_{12}(t) \neq 0$$

für alle $t \in I$. Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{f_{11}'f_{22} - f_{12}'f_{21}}{f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}} & \frac{-f_{11}'f_{12} + f_{12}'f_{11}}{f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}} \\ \frac{f_{21}'f_{22} - f_{22}'f_{21}}{f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}} & \frac{-f_{12}f_{21}' + f_{22}'f_{11}}{f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Zeige, dass sowohl $\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{pmatrix}$ als auch $\begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix}$ Lösungen des Differentialgleichungssystems sind.

Aufgabe 42.9. Es sei

$$M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0$$

eine (variable) $n \times n$-Matrix, deren Einträge stetige Funktionen $a_{ij} \colon I \to \mathbb{R}$ seien. Zeige, dass die einzige konstante Lösung der linearen Differentialgleichung $v' = Mv$ die Nulllösung ist.

Aufgabe 42.10.*

Es sei

$$v' = Mv$$

ein lineares Differentialgleichungssystem auf $I \times \mathbb{R}^n$ (I ein reelles Intervall) mit einer Funktionenmatrix

$$M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n},$$

wobei das zugrunde liegende Vektorfeld zugleich ein Zentralfeld sei. Zeige, dass die Matrix die Gestalt

$$M(t) = \varphi(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit einer geeigneten Funktion $\varphi \colon I \to \mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 42.11. Es sei $M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ eine (variable) $n \times n$-Matrix, deren Einträge Funktionen $a_{ij} \colon I \to \mathbb{R}$ seien. Es sei $u \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ für alle $t \in I$. Zeige, dass $e^{\lambda t} \cdot u$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung $v' = Mv$ ist.

Aufgabe 42.12. Es sei $M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ eine (variable) $n \times n$-Matrix, deren Einträge stetige Funktionen $a_{ij}\colon I \to \mathbb{R}$ seien. Es sei $u \in \mathbb{R}^n$ ein (konstanter) Eigenvektor von $M(t)$ zum (variablen, von t differenzierbar abhängigen) Eigenwert $\lambda(t)$. Zeige durch ein Beispiel, dass $e^{\lambda(t)t} \cdot u$ keine Lösung der linearen Differentialgleichung $v' = Mv$ sein muss.

Aufgabe 42.13. Es sei

$$M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$$

eine (variable) $n \times n$-Matrix, deren Einträge stetige Funktionen $a_{ij}\colon I \to \mathbb{R}$ seien. Es sei $u(t) \in \mathbb{R}^n$ ein (variabler, von t differenzierbar abhängiger) Eigenvektor von $M(t)$ zum konstanten Eigenwert λ. Zeige durch ein Beispiel, dass $e^{\lambda t} \cdot u(t)$ keine Lösung der linearen Differentialgleichung $v' = Mv$ sein muss.

Aufgabe 42.14. Es sei $v' = Mv$ ein lineares Differentialgleichungssystem auf dem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V und $\varphi\colon V \to W$ eine bijektive lineare Abbildung. Zeige, dass die transformierte Differentialgleichung auf W ebenfalls linear ist.

Aufgabe 42.15. Löse mit einem Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t^2 - 1 & t^3 + t + 2 \\ t + 3 & t^2 + t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bis zur fünften Ordnung.

Aufgabe 42.16. Es sei M die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und D die Ableitung, aufgefasst als Operator[1]

$$D\colon M \longrightarrow M,\ f \longmapsto D(f) = f'.$$

Zu einem Polynom $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = a_nX^n + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$, betrachten wir den Operator

$$P(D)\colon M \longrightarrow M,\ f \longmapsto (P(D))(f) = a_nD^n(f) + \cdots + a_2D^2(f) + a_1D(f) + a_0f.$$

Berechne $(P(D))(f)$ für $P = 2X^3 - 4X^2 + 7X - 3$ und $f = x^4, e^x, e^{2x}, \sin x$. Zeige, dass $P(D)$ eine lineare Abbildung auf M ist.

Aufgabe 42.17. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass der Differentialoperator $(D - \lambda)^n$ die Funktionen $x^j e^{\lambda x}$ mit $0 \leq j < n$ auf die Nullfunktion abbildet.

[1] Eine Abbildung, die Funktionen in Funktionen überführt, nennt man häufig Operator.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 42.18. (4 Punkte)

Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & -t^2-3t+4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 42.19. (8 (2+2+4) Punkte)

Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(1) Erstelle eine Differentialgleichung in einer Variablen, die die Funktion $z(t) = x^2(t) + y^2(t)$ zu einer Lösung (x, y) erfüllen muss.
(2) Finde eine Lösung für $z(t)$ aus Teil (1).
(3) Finde eine nichttriviale Lösung des Differentialgleichungssystems.

Bemerkung: Im ersten und zweiten Teil wird untersucht, wie sich bei einer Lösung des Systems der Abstand zum Nullpunkt (bzw. dessen Quadrat) verhält. Es liegt nahe, sich für den dritten Teil zu überlegen, wie sich bei einer Lösung der Winkel zur x-Achse verhält (Polarkoordinaten).

Aufgabe 42.20. (4 Punkte)

Finde eine nichttriviale Lösung (für $t > 1$) zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{4t^4-1}{t^5-t} & \frac{-3t}{t^4-1} \\ \frac{-t}{t^4-1} & \frac{3t^4-2}{t^5-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit Hilfe von Aufgabe 42.8.

Die für $t \in \mathbb{R}$, $-1 < t < 1$, und ein $n \in \mathbb{N}$ definierte lineare Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2t}{1-t^2}y' + \frac{n(n+1)}{1-t^2}y = 0$$

heißt *Legendresche Differentialgleichung* zum Parameter n.

Aufgabe 42.21. (5 Punkte)

Zeige, dass das n-te *Legendre-Polynom*[2]

$$\frac{1}{2^n(n!)}((t^2-1)^n)^{(n)}$$

eine Lösung der Legendreschen Differentialgleichung zum Parameter n ist.

[2]Hier bedeutet das hochgestellte (n) die n-te Ableitung.

Aufgabe 42.22. (6 Punkte)

Löse mit einem Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ t^3 & t^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^5 \\ t^6 \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bis zur sechsten Ordnung.

Abbildungsverzeichnis