(3) $\frac{x}{y(x-y)}-\frac{1}{x-y}$.　　(4) $x+\frac{x}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}$.

(5) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{b}{a^3-b^3}$.　　(6) $1+\frac{a+b}{a-b}$.

(7) $a-b-\frac{a^2+b^2}{a-b}$.　　(8) $x-1+\frac{2}{x+1}$.

(9) $x^2-x+1-\frac{2}{x+1}$.　　(10) $\frac{1+2a}{1-2a}+\frac{1-2a}{1+2a}$.

(11) $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-a}-\frac{2}{x}$　　(12) $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x-3}$.

(13) $\frac{a^2}{(x-a)(a-b)}+\frac{b^2}{(x-b)(b-a)}$.

(14) $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}+\frac{4x}{y}$.

(15) $\frac{1}{x^2-9x+20}-\frac{1}{x^2-11x+30}+\frac{1}{x^2-8x+15}$.

(16) $\frac{x^2+5xy-4y^2}{x^2-16y^2}-\frac{2xy}{2x^2+8xy}$.

(17) $\frac{a}{b^2-bc}+\frac{b}{c^2-ca}+\frac{c}{a^2-ab}$.

(18) $\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x-1}{x^2-x+1}-\frac{2}{x^4+x^2+1}$.

(19) $\frac{a+b}{(a-c)(b-c)}+\frac{b+c}{(b-a)(c-a)}+\frac{c+a}{(c-b)(a-b)}$.

(20) $\frac{1}{x^2-(y-z)^2}-\frac{1}{y^2-(z-x)^2}-\frac{1}{z^2-(x-y)^2}$.

2. 分式的乘法　把諸分式的分子連乘做分子,分母連乘做分母,再約分即得.

實際可先分解各分式中分子、分母的因

式,把相同的因式約去,然後把分子、分母各連乘起來.

例題一 求 $\frac{1-a^2}{b+b^2}\cdot\frac{1-b^2}{a+a^2}\cdot\frac{b+ab}{a-ab}$ 的結果.

【解】 原式 $=\frac{(\cancel{1+a})(1-a)}{\cancel{b}(\cancel{1+b})}\cdot\frac{(\cancel{1+b})(\cancel{1-b})}{a(\cancel{1+a})}\cdot\frac{\cancel{b}(1+a)}{a(\cancel{1-b})}$

$$=\frac{1-a^2}{a^2}.$$

(註) 兩分式間的乘號,可記作 $\cdot$.

【理由】 設兩分式為 $\frac{A}{B}$、$\frac{C}{D}$, 以 x、y 各表他們的值,

即 $x=\frac{A}{B}$, $y=\frac{C}{D}$.

去分母,得 $Bx=A$, $Dy=C$.

相乘,得 $BDxy=AC$.

以 BD 除,得 $xy=\frac{AC}{BD}$.

例題二 求 $\left(\frac{a}{bc}-\frac{b}{ac}-\frac{c}{ab}-\frac{2}{a}\right)\cdot\left(1-\frac{2c}{a+b+c}\right)$ 的結果.

【解】 原式 $=\left(\frac{a^2}{abc}-\frac{b^2}{abc}-\frac{c^2}{abc}-\frac{2bc}{abc}\right)\cdot$

$$\left(\frac{a+b+c}{a+b+c}-\frac{2c}{a+b+c}\right)$$

$$=\frac{a^2-b^2-c^2-2bc}{abc}\cdot\frac{a+b+c-2c}{a+b+c}$$

$$=\frac{a^2-(b+c)^2}{abc}\cdot\frac{a+b-c}{a+b+c}$$

$$=\frac{(a+b+c)(a-b-c)}{abc}\cdot\frac{a+b-c}{a+b+c}$$

$$=\frac{(a-b-c)(a+b-c)}{abc}$$

$$=\frac{a^2-2ac+c^2-b^2}{abc}.$$

特例　有時分子、分母的因式全部約去，那末得的積是 1.

例題　求 $\frac{x^2-3x+2}{x^2-10x+24}\cdot\frac{x^2-7x+12}{x^2-7x+10}\cdot\frac{x^2-11x+30}{x^2-4x+3}$ 的結果.

【解】

$$\text{原式}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-4)(x-6)}\cdot\frac{(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-5)}\cdot\frac{(x-5)(x-6)}{(x-1)(x-3)}=1.$$

習題三十九

求下列各題的結果:

(1) $\frac{3x^2y}{5xy^2z}\cdot\frac{2xyz^2}{9x^4y}$.　　(2) $\frac{a^2}{bc}\cdot\frac{b^2}{ca}\cdot\frac{c^2}{ab}$.

(3) $\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x+1}{(x-1)^2}$.　　(4) $\frac{1-x^3}{x^4+x^2+1}\cdot\frac{x^3+1}{1-x^2}$.

(5) $\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x+2}{x^2-1}\cdot\frac{x-1}{(x+2)^2}$.

(6) $\dfrac{a(a+x)}{a^2-2ax+x^2}\cdot\dfrac{a(a-x)}{a^2+2ax+x^2}$.

(7) $\dfrac{16x^2-9y^2}{x^2-4}\cdot\dfrac{x-2}{4x-3y}$.

(8) $\dfrac{a^4-27a}{2a^2+5a}\cdot\dfrac{4a^2-25}{2a^2-11a+15}$.

(9) $\dfrac{x^4-y^4}{a^3+b^3}\cdot\dfrac{a^2-ab+b^2}{x-y}\cdot\dfrac{a+b}{x+y}$.

(10) $\dfrac{(a-b)^2-c^2}{(a-c)^2-b^2}\cdot\dfrac{b^2-(c-a)^2}{c^2-(a-b)^2}$.

(11) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-5x+6}\cdot\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x+2}\cdot\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4x+3}$.

(12) $\left(a+\dfrac{ab}{a-b}\right)\left(b-\dfrac{ab}{a-b}\right)$.

(13) $\left(\dfrac{x^2+y^2}{xy}+2\right)\left(\dfrac{xy^2-x^2y}{x^2-y^2}+x-y\right)$.

(14) $\dfrac{x^6-y^6}{x^4+2x^2y^2+y^4}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}\cdot\dfrac{x+y}{x^3-y^3}$.

3. 分式的除法 把除式的分子、分母倒轉來,同被除式相乘就得.

例題一 求$\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-b^2}\div\dfrac{a^3-b^3}{(a+b)^2}$的結果.

【解】 原式$=\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-b^2}\cdot\dfrac{(a+b)^2}{a^3-b^3}$

$$=\frac{a^2+ab+b^2}{(a+b)(a-b)}\cdot\frac{(a+b)^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

$$=\frac{a+b}{(a-b)^2}.$$

【理由】 設兩分式爲 $\frac{A}{B}$、$\frac{C}{D}$; 以 x、y 表他們的值.

卽 $$x=\frac{A}{B}, \quad y=\frac{C}{D}.$$

去分母,得 $Bx=A, \quad Dy=C.$

相除,得 $$\frac{Bx}{Dy}=\frac{A}{C}.$$

以 $\frac{D}{B}$ 乘,得 $$\frac{x}{y}=\frac{AD}{CB}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}.$$

例題二 求 $\left(\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{x}\right)\div\left(\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$ 的結果.

【解】 $$\text{原式}=\left(\frac{x^3}{xy^3}-\frac{y^3}{xy^3}\right)\div\left(\frac{x^2}{xy^2}+\frac{xy}{xy^2}+\frac{y^2}{xy^2}\right)$$

$$=\frac{x^3-y^2}{xy^3}\div\frac{x^2+xy+y^2}{xy^2}$$

$$=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy^3}\cdot\frac{xy^2}{x^2+xy+y^2}$$

$$=\frac{x-y}{y}.$$

習題四十

求下列各題的結果:

(1) $\frac{4a^2b}{5x^2y}\div\frac{2ab^2}{15xy^2}.$ (2) $\frac{1}{x^2-y^2}\div\frac{[\text{illegible}]}{x-y}.$

(3) $\dfrac{ab-b^2}{(a+b)^2}\div\dfrac{b^2}{a^2-b^2}$.　　(4) $\dfrac{a^2b^2+3ab}{4a^2-1}\div\dfrac{ab+3}{2a+1}$.

(5) $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a^2-b^2)^2}\div\dfrac{a-b+c}{a^4-b^4}$.

(6) $\dfrac{x^3+y^3}{x-y}\div\dfrac{x+y}{x^3-y^3}$.

(7) $\dfrac{6a^2}{x^3+y^3}\div\dfrac{2a}{x^2-xy+y^2}$.

(8) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-6x+9}\div\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$.

(9) $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{c^2-a^2-b^2+2ab}\div\dfrac{a+b+c}{a-b+c}$.

(10) $\dfrac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x^3+y^3}\div\dfrac{(x+y)^2}{x^2-xy+y^2}$.

(11) $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)\div\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$.

(12) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}\right)\div\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right)$.

4.繁分式化簡法　分下列的二種:

(A)　分子、分母各是幾個分式加減的,可先把他們加減出來,再用分式除法化簡.

例題　化簡 $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}$.

【解】　原式 $=\dfrac{\dfrac{x+1}{x^2-1}+\dfrac{x-1}{x^2-1}}{\dfrac{x+1}{x^2-1}-\dfrac{x-1}{x^2-1}}=\dfrac{\dfrac{2x}{x^2-1}}{\dfrac{2}{x^2-1}}$

$$=\frac{2x}{x^2-1}\div\frac{2}{x^2-1}=\frac{2x}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-1}{2}=x.$$

(B) 分子或分母中又有繁分式的,可順次用加,減法同除法逐步化簡.

例題 化簡 $\dfrac{x}{x-\dfrac{x+2}{x+2-\dfrac{x-1}{x}}}$.

【解】 原式 $=\dfrac{x}{x-\dfrac{x+2}{\dfrac{x^2+2x}{x}-\dfrac{x-1}{x}}}$

$$=\frac{x}{x-\dfrac{x+2}{\dfrac{x^2+x+1}{x}}}$$

$$=\frac{x}{x-\dfrac{x^2+2x}{x^2+x+1}}$$

$$=\frac{x}{\dfrac{x^3+x^2+x}{x^2+x+1}-\dfrac{x^2+2x}{x^2+x+1}}$$

$$=\frac{x}{\dfrac{x^3-x}{x^2+x+1}}=x\cdot\frac{x^2+x+1}{x^3-x}$$

$$=x\cdot\frac{x^2+x+1}{x(x^2-1)}=\frac{x^2+x+1}{x^2-1}.$$

習題四十一

化簡下列的繁分式:

(1) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}}{a+b-\dfrac{2ab}{a+b}}$.

(2) $\dfrac{\dfrac{x+y}{y}+\dfrac{y}{x-y}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$.

(3) $\dfrac{\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}$.

(4) $\dfrac{\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{1-a}{a}}{\dfrac{a}{1+a}-\dfrac{1-a}{a}}$.

(5) $\dfrac{\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{x}{a^2}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{ax}+\dfrac{1}{x^2}}$.

(6) $\dfrac{a+\dfrac{ab}{a-b}}{a-\dfrac{ab}{a-b}}$.

(7) $1+\dfrac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}$.

(8) $\dfrac{\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{x}{x^2-y^2}}{\dfrac{x}{xy+y^2}-\dfrac{y}{x^2+xy}}$.

(9) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$.

(10) $\dfrac{x-2}{x-2-\dfrac{x}{x-\dfrac{x-1}{x-2}}}$.

(11) $\dfrac{a^2}{x+\dfrac{a^2}{x-\dfrac{a^2}{x}}}$.

(12) $\dfrac{x+\dfrac{1}{y}}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}}-\dfrac{1}{y(xyz+x+z)}$.

第三節 分式方程式解法

含分式的方程式,叫做分式方程式,解法

有下列的數種:

1.化整法 先用方程式中各項分母的 *L. C. M.* 乘各項,化爲整方程式,然後用普通方程式的解法做.

例題 解方程式 $\frac{x-2}{x-1}+1=\frac{1}{x-1}$.

【解】 去分母 $x-2+x-1=1$.

移項 $x+x=1+2+1$.

集項 $2x=4$.

去係數 $x=2$.

特例 有時用化整法求得的根代入原題,不能合用,稱爲假根.凡用化整法求得的根都應代入原題,看他是不是假根.

例題 解方程式 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x(x+1)}=0$.

【解】 去分母 $x+1=0$.

移項 $x=-1$.

【實驗】 以 $x=-1$ 代入原方程式,得

$$\frac{1}{0}+\frac{1}{0}=0.$$

但 0 不能做除數,這等式毫無意義,所以 -1 是原方程式的假根.

【理由】 分式方程式的所以有假根,因爲去分母時曾以 $x+1$ 乘各項;這 $x+1$ 的值也許是 0.若果是

0,這解法就不合理,因爲等式的兩邊用 0 乘,所得的應是恆等式$0=0$,決不能用他來求 x 的緣故.

【注意】 用化整法求得的根,只須代入原方程式的各分母,就能決定他是否假根:若代入後有一個或數個分母的值等於 0,求得的是假根;若都不是 0,求得的是眞根.

2. 加減法 集方程式中的各項於一邊,使其他一邊是 0,加減各項得一個分式,命分子等於 0,得一個整方程式,然後用普通的方法解.

例題 解方程式$\dfrac{x-2}{x-1}+1=\dfrac{1}{x-1}$.

【解】 移項 $\dfrac{x-2}{x-1}+1-\dfrac{1}{x-1}=0$.

通分 $\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x-1}-\dfrac{1}{x-1}=0$.

集項 $\dfrac{x-2+x-1-1}{x-1}=0$.

整理 $\dfrac{2x-4}{x-1}=0$.

命 $2x-4=0$.

解得 $x=2$.

【理由】 一個分式等於 0,就是分子被分母除得的商是 0,但必須被除數是 0,而除數不是 0,那末商才能是 0,所以分子$2x-4=0$.

特例 加減後所得的一個分式,若可以約分,必須約成最簡分數,然後命分子等於0.

例題 解方程式$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x(x+1)}=0.$

【解】 通分 $\frac{x}{x(x+1)}+\frac{1}{x(x+1)}=0.$

集項 $\frac{x+1}{x(x+1)}=0.$

約分 $\frac{1}{x}=0.$

但分子1決不能等於0,所以原方程式沒有根.

【注意一】 集項後若不去約分,卽命$x+1=0$,那末分母中也含因式$x+1$,分母也就等於0,但以0除0,得的商不一定是0(因0×任何數=0,故0÷0=任何數),所以非經約分不可.

【注意二】 凡用加減法求得的根,必是眞根.

習題四十二

解下列的分式方程式(若是假根應棄掉他):

(1) $\frac{x-6}{x-8}=3.$ (2) $\frac{x+1}{x+2}=\frac{3}{4}.$

(3) $\frac{x-2}{x-6}=\frac{x-7}{x+9}.$ (4) $\frac{5}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{8}{x}.$

(5) $\frac{x-6}{2x-3}=\frac{4}{17}.$ (6) $x-\frac{x^2+3}{x+2}=1$

(7) $\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{x-5}{x-2}$.　　(8) $\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{7x-21}{7x-26}$.

(9) $\dfrac{16}{3x-4}=\dfrac{27}{5x-6}$.　　(10) $\dfrac{x}{x+4}-\dfrac{x-1}{x+3}=0$.

(11) $\dfrac{3+4x}{1+x}+\dfrac{3+2x}{1-x}=\dfrac{2x+1}{1+x}$.

(12) $\dfrac{x+3}{2+3x}+\dfrac{1-4x}{4x+1}=\dfrac{1-2x}{2+3x}$.

(13) $\dfrac{4x-17}{x-3}+\dfrac{3x-10}{x-4}=7$.

(14) $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}+\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=2x$.

3. **特別法**　有時把分式方程式的分母去掉後,得的整方程式不止一次,這時當用特別法解.

例題　解方程式

$$\frac{x-7}{x-9}+\frac{x-3}{x-5}=\frac{x-4}{x-6}+\frac{x-6}{x-8}.$$

【解】　除算

$$1+\frac{2}{x-9}+1+\frac{2}{x-5}=1+\frac{2}{x-6}+1+\frac{2}{x-8}.$$

兩邊各減去 2,

$$\frac{2}{x-9}+\frac{2}{x-5}=\frac{2}{x-6}+\frac{2}{x-8}.$$

以 2 除 $\frac{1}{x-9}+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x-8}$.

移項 $\frac{1}{x-9}-\frac{1}{x-8}=\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-5}$.

集項 $\frac{1}{(x-9)(x-8)}=\frac{1}{(x-6)(x-5)}$.

交叉乘 $(x-6)(x-5)=(x-9)(x-8)$.

乘算 $x^2-11x+30=x^2-17x+72$.

解得 $x=7$.

【注意一】 除算的手續,就是用分母除分子,得的餘數仍做分子,而把整商加在這分式的前面,理由如下:

$$\frac{x-7}{x-9}=\frac{x-9+2}{x-9}=\frac{x-9}{x-9}+\frac{2}{x-9}=1+\frac{2}{x-9}.$$

【注意二】 移項的目的在使兩邊都成兩分式的差,且使各邊兩分母中數字的差相等,這樣一來,集項後可使兩邊分子中為相等的兩數字而不含 x.

【注意三】 交叉乘卽是去分母,所以求得的根不一定是眞根,應代入原方程式實驗.

4.聯立方程式解法 可把各方程式都化為整方程式再解.

例題 解聯立方程式 $\begin{cases} \dfrac{1}{3x+1}=\dfrac{2}{5y+4}, \\ \dfrac{1}{4x-3}=\dfrac{2}{7y-6}. \end{cases}$

【解】 交叉乘 $\begin{cases} 5y+4=6x+2, \\ 7y-6=8x-6. \end{cases}$

整理 $\begin{cases} -6x+5y=-2 \cdots\cdots(1), \\ -8x+7y=0 \cdots\cdots(2). \end{cases}$

$$\begin{array}{ll} (1)\times 4 & -24x+20y=-8 \\ (2)\times 3 & \underline{-24x+21y=\ \ 0}\,(- \\ & \qquad -y=-8. \end{array}$$

$\therefore$ $y=8.$

代入(2) $-8x+56=0.$ 答 $\begin{cases} x=7, \\ y=8. \end{cases}$

解得 $x=7.$

特例一 含二次項的分式方程式,有時可化成如第五章第四節特別解法(A)的形式再做.

例題 解聯立方程式 $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+4y}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{xy}{3x-8y}=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

【解】 交叉乘 $\begin{cases} x+4y=3xy, \\ 3x-8y=4xy. \end{cases}$

以 xy 除　$\begin{cases} \dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{x}=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ \dfrac{3}{y}-\dfrac{8}{x}=4 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

$(1)\times 3-(2)$　$\dfrac{20}{x}=5.$

$(1)\times 2+(2)$　$\dfrac{5}{y}=10.$

解得 $\begin{cases} x=4, \\ y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

特例二　分母中不僅含 x 或 y 時,有時仍可仿第五章第四節特別解法的(A)做.

例題　試解 $\begin{cases} \dfrac{12}{x-3}+\dfrac{8}{y-1}=8 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ \dfrac{27}{x-3}-\dfrac{12}{y-1}=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】　$(1)\div 2$　$\dfrac{6}{x-3}+\dfrac{4}{y-1}=4$

$(2)\div 3$　$\dfrac{9}{x-3}-\dfrac{4}{y-1}=1$　(+

$$\dfrac{15}{x-3}=5.$$

交叉乘　$5x-15=15.$

解得　$x=6.$

代入(1)　$4+\dfrac{8}{y-1}=8.$

解得　$y=3.$

答 $\begin{cases} x=6, \\ y=3. \end{cases}$

習題四十三

解下列的分式方程式(應棄掉假根):

(1) $\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}.$

(2) $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+10}=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+8}.$

(3) $\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-6}{x-7}-\frac{x-7}{x-8}.$

(4) $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-4}{x-5}+\frac{x-2}{x-3}.$

(5) $\frac{2x+3}{x+1}=\frac{4x+5}{4x+4}+\frac{3x+3}{3x+1}.$

(6) $\frac{16x-13}{4x-3}-\frac{40x-43}{8x-9}=\frac{32x-30}{8x-7}-\frac{20x-24}{4x-5}.$

(7) $\begin{cases}\frac{x+3y}{x-y}=8,\\ \frac{7x-13}{3y-5}=4.\end{cases}$

(8) $\begin{cases}\frac{3x+1}{4-2y}=\frac{4}{3},\\ x+y=1.\end{cases}$

(9) $\begin{cases}\frac{1}{3x+1}=\frac{1}{5y+4},\\ \frac{1}{4x-3}=\frac{1}{7y-6}.\end{cases}$

(10) $\begin{cases}\frac{x+3}{y+7}=\frac{x-2}{y-3},\\ \frac{x+3y-4}{x+y}=2.\end{cases}$

(11) $\begin{cases}\frac{x+1}{y+1}=\frac{x+5}{y},\\ x-y=1.\end{cases}$

(12) $\begin{cases}\frac{x+1}{y-1}-\frac{x-1}{y}=\frac{6}{y},\\ x-y=1.\end{cases}$

(13) $\begin{cases} \dfrac{xy}{2x+y}=\dfrac{1}{10}, \\ \dfrac{xy}{3x+4y}=\dfrac{1}{20}. \end{cases}$ (14) $\begin{cases} \dfrac{xy}{y+2x}=\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{xy}{3y-2x}=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

(15) $\begin{cases} \dfrac{5y}{3y-4x}=\dfrac{1}{x}, \\ \dfrac{6x}{4y-5x}=\dfrac{1}{y}. \end{cases}$ (16) $\begin{cases} \dfrac{14}{x+1}-\dfrac{9}{y-2}=4, \\ \dfrac{8}{x+1}+\dfrac{3}{y-2}=5. \end{cases}$

5. 應用問題解法 舉二例於下:

例題一 有一分數,若從分子、分母各減1,所得分數的值等於$\frac{1}{3}$;若分子、分母各加3,所得分數的值等於$\frac{1}{2}$.求原分數.

【解】 設分子爲x,分母爲y,得方程式

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{y-1}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{x+3}{y+3}=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

化簡,得 $\begin{cases} 3x-y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ 2x-y=-3 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

(1)−(2) $x=5.$

代入(1) $15-y=2.$

解得 $y=13.$

故原分數爲$\frac{5}{13}$.

例題二 有二位的整數,用二數字的和除他,得整商 6,餘數 11;用二數字的和除他的倒位數,得整商 4,餘數 3.求原數.

【解】 設原數的十位數字爲 x,個位數字爲 y,

得方程式
$$\begin{cases}\dfrac{10x+y}{x+y}=6+\dfrac{11}{x+y},\\[2ex]\dfrac{10y+x}{x+y}=4+\dfrac{3}{x+y}.\end{cases}$$

去分母
$$\begin{cases}10x+y=6x+6y+11,\\10y+x=4x+4y+3.\end{cases}$$

整理
$$\begin{cases}4x-5y=11,\\-3x+6y=3.\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}x=9,\\y=5.\end{cases}$$

故原數爲 95.

習題四十四

(1) 有一分數,若在分子加 1,其值等於 $\frac{1}{2}$;若在分母加 1,其值等於 $\frac{1}{3}$.求原分數.

(2) 有一分數,若在分子加 1,從分母減 1,其值等於 1;若在分子上加分母,從分母內減分子,其值等於 4.求原分數.

(3) 有一眞分數,用分子、分母的和除分子、分母的差,得的商是$\frac{5}{12}$;若在分子加 5,從分母減 5,其值爲 1.求原分數.

(4) 有二位的整數,用二數字的和除他,得商 7;若用從十位數字減去個位數字所得的差除他的倒位數,得商 12.求原數.

(5) 有二位的整數,用二數字的和除他,得商 7;若除他的倒位數,得商 4.求原數.

(6) 有上、中、下三種茶葉,中茶比下茶貴 4 角 5 分,上茶比中茶貴 3 角 5 分.用10元 8 角所買上茶的斤數,同用 2 元 8 角所買下茶的斤數的和,等於用13元 6 角所買中茶的斤數.問三種茶每斤的價各多少?

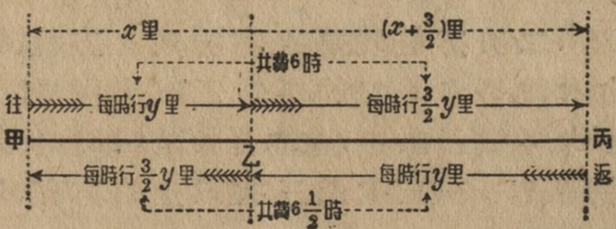
(7) 一船逆流行 6 里同順流行10里,共費 4 時;若逆流行10里,順流行20里,共費 7 時.求此船在靜水中的速度同水流的速度.

【提示】 列方程式後,仿本節聯立方程式的特例二解.

(8) 沿河有甲、乙、丙三鎭,從甲到乙比從乙到丙近$1\frac{1}{2}$里.某船往時從甲到乙後,加速一半,共經 6 時而抵丙;返時從丙到乙,速度與往時的原速度相等,從乙到甲,又加速一半,共費 $6\frac{1}{2}$ 時.求甲、乙及乙、

丙間的距離.

【提示】　設甲、乙間的距離為 x 里,某船初速每時為 y 里,從下圖可得二個聯立方程式.



第十章　二次方程式

第一節　重要名詞

1. 二次方程式,高次方程式　方程式中項的次數最多是二的,叫做二次方程式;最多是三的,叫做三次方程式;最多是四的,叫做四次方程式;………三次及三次以上的方程式,總稱高次方程式.

【例】　$2x^2-5x+2=0$, $4x^2-25=0$, $3x-4y=xy$, 都是二次方程式. $x^3+6x^2+11x+6=0$, $x^4=64$, 都是高次方程式.

2. 純二次方程式,普通二次方程式　二次方程式中缺掉 x 的一次項的,叫做純二次方程式;除此以外,都是普通二次方程式.

【例】　$4x^2-25=0$ 是純二次方程式, $2x^2-5x+2=0$ 是普通二次方程式.

用 a、b、c 代已知數,得下列的模範式:

(*A*)　純二次方程式　　$x^2=a$.

(*B*)　普通二次方程式　$ax^2+bx+c=0$(a、b 都不能等於 0. 若 $a=0$ 時,成一次方程式;若 $b=0$ 時,成純二次方程式).

3.等根二次方程式 二次方程式通常都有二個根,但有時僅有一個根.這一個根可以認爲是二個相等的根(理由見本章第三節2),這種方程式叫做等根二次方程式.

【例】 $x^2-5x+6=0$ 的根有 2、3 兩種,學者可代入實驗;而 $x^2-14x+49=0$ 的根僅有 7 一種,所以後者是等根方程式.

4.不盡根數 解二次方程式時,常要把一數開平方.若這數不是整平方數,那末開平方永遠不盡.在實用上可開幾位小數,得一近似值.但在代數上,只須用根號表出,不必實行開方.這種開方不盡而用根號表出的數,叫做不盡根數.不盡根數是一種特殊的無理數,通常也可以稱做無理數.

【例】 $\sqrt{2}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt[3]{4}$、$\sqrt[3]{6}$ 等,都是不盡根數.

5.虛數 解二次方程式時,有時須把負數開平方.把負數開平方的意義,就是要求一個數,使他的平方等於這負數.然實際不論正、負整數,分數或不盡根數,他們的平方都是正數,決不能得負數,所以不得不擴張數的範圍,稱負數的平方根爲虛數.

【例】 $\sqrt{-2}$,$\sqrt{-4}$,$\sqrt{-a}$ 等,都是虛數.

虛數可用$\sqrt{-1}$做單位,爲便利計可把$\sqrt{-1}$省寫做 i,詳下節.

第二節 基礎計算

1. 不盡根數的化簡 分下列的三種:

(A)根號下的數有整平方因數的 可把整平方的因數開出來,放在根號的前面,使根號下的數不再有整平方的因數.

例題 化簡$\sqrt{288}$.

【解】 $\sqrt{288}=\sqrt{12^2\times 2}=12\sqrt{2}$.

【理由】 因二數積的平方等於二數平方的積,

故 $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2=ab$.

兩邊各開平方,得 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.

就是二數積的平方根等於二數平方根的積.

於是知 $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=a\sqrt{b}$.

【注意一】 先用因數分解法把 288 化做質因數連乘式,得 $2\times2\times2\times2\times2\times3\times3$,就同因數中取出成對的各組,得 2×2, 2×2, 3×3 三對,尙餘單獨的因數 2,故知 $288=(2\times2\times3)^2\times2=12^2\times2$.

【注意二】 12同$\sqrt{2}$的中間略去的是乘號,與帶分數中略去加號不同.

(B)根號下是一個分數的 先化這分數

的分母成整平方數,再把分子、分母分別開方,所得的分數的分母中就沒有不盡根數.

例題一　化簡$\sqrt{\frac{4}{7}}$.

【解】　$\sqrt{\frac{4}{7}}=\sqrt{\frac{4\times7}{7\times7}}=\frac{\sqrt{4\times7}}{\sqrt{7\times7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{2}{7}\sqrt{7}$.

【理由】　因二數商的平方等於二數平方的商,

故　$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}$.

兩邊各開平方,得　$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

就是二數商的平方根等於二數平方根的商.

【注意】　根號下的數不能同根號外的數約分,所以$\frac{2}{7}\sqrt{7}$不能等於2.

例題二　化簡$\sqrt{\frac{5}{8}}$.

【解】　$\sqrt{\frac{5}{8}}=\sqrt{\frac{5\times2}{8\times2}}=\sqrt{\frac{10}{16}}=\frac{\sqrt{10}}{4}=\frac{1}{4}\sqrt{10}$.

(C)分母中有不盡根數的　用分母中的不盡根數乘分子.分母,就可化去分母中的不盡根數.

例題一　化簡$\frac{1}{\sqrt{2}}$.

【解】　$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

【理由】 一數平方根的平方,仍是這數,所以 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$.

例題二 化簡 $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$.

【解】 $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{8}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{8\times3}}{3}=\frac{\sqrt{4\times6}}{3}$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

【注意】 本題實在就是 $\sqrt{\frac{8}{3}}$, 所以也好用(B)的方法化簡.

2. 虛數的化簡 用 i 表 $\sqrt{-1}$,根據 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$,可把虛數化簡.

例題一 化簡 $\sqrt{-9}$.

【解】 $\sqrt{-9}=\sqrt{9\times(-1)}=\sqrt{9}\sqrt{-1}=3i$.

例題二 化簡 $\sqrt{-5}$.

【解】 $\sqrt{-5}=\sqrt{5\times(-1)}=\sqrt{5}\sqrt{-1}=\sqrt{5}i$.

例題三 化簡 $\sqrt{-12}$.

【解】 $\sqrt{-12}=\sqrt{4\times3\times(-1)}=\sqrt{4}\sqrt{3}\sqrt{-1}$

$$=2\sqrt{3}i.$$

3. 純二次方程式解法 化純二次方程式爲 $x^2=a$ 的形式,兩邊各開平方,卽得 x 的值.

例題一 解方程式 $2x^2-8=0$.

【解】 移項 $2x^2=8$.

去係數 $x^2=4$.

開方 $x=\pm 2$.

【注意】 4 的平方根在算術上僅有 $+2$ 一種，但在代數上，-2 的平方也是 4，所以 4 的平方根有 $+2$ 同 -2 兩種. ± 2 是 $+2$ 或 -2 的意義.

例題二 解方程式 $3x^2-5=0$.

【解】 移項 $3x^2=5$.

去係數 $x^2=\frac{5}{3}$.

開方 $x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$.

化簡 $x=\pm\frac{1}{3}\sqrt{15}$.

例題三 解方程式 $\frac{x^2}{2}+9=0$.

【解】 去分母 $x^2+18=0$.

移項 $x^2=-18$.

開方 $x=\pm\sqrt{-18}$.

化簡 $x=\pm 3\sqrt{2}i$.

習題四十五

化簡下列各題的不盡根數或虛數:

(1) $\sqrt{250}$. (2) $\sqrt{147}$. (3) $\sqrt{50}$. (4) $\sqrt{128}$.

(5) $\sqrt{4725}$. (6) $\sqrt{\frac{2}{7}}$. (7) $\sqrt{\frac{1}{3}}$. (8) $\sqrt{\frac{27}{8}}$.

(9) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. (10) $\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{6}}$. (11) $\sqrt{-4}$. (12) $\sqrt{-8}$.

(13) $\sqrt{-\frac{1}{2}}$. (14) $\sqrt{-25}$. (15) $\sqrt{-7}$. (16) $\sqrt{-\frac{3}{4}}$.

解下列的純二次方程式:

(17) $x^2-3=61$. (18) $4x^2-25=0$.

(19) $\frac{2}{3}x^2=24$. (20) $2x^2+48=0$.

(21) $\frac{x^2}{8}=1$. (22) $\frac{x^2}{6}=\frac{1}{7}$.

(23) $(x-2)(x+2)=12$. (24) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{16}$.

(25) $\frac{5}{x-1}=\frac{x+1}{4}$. (26) $\frac{x+1}{x+4}=\frac{2x-1}{x+6}$.

(27) $(5+x)^2+(5-x)^2=58$. (28) $(4x-3)^2+(4x+3)^2=26$.

(29) $\frac{x^2}{4}+7-\frac{2x^2}{3}=\frac{5x^2}{6}-153$.

(30) $(x-3)^2=25$.

【提示】 若實行乘算,得的是普通二次方程式,解法較繁.現在可把$(x-3)$當作 y 看,於是原方程式是一個純二次方程式$y^2=25$.

第三節 普通二次方程式解法

1. 配方法 依下列的步驟:

I. 把原方程式整理,使含 x 的項集於等號的左邊,不含 x 的項則在等號的右邊,且

使 x^2 的係數爲 1.

II. 兩邊各加 x 係數一半的平方,使左邊成爲完全平方的三項式.

III. 兩邊各開平方,得二個一次方程式.

IV. 解這二個一次方程式,得原方程式的二個根.

例題一　解方程式 $x^2-8x+15=0$.

【解】　移項　　$x^2-8x=-15$.

配方　　$x^2-8x+16=-15+16$.

卽　　$(x-4)^2=1$.

開方　　$x-4=1$,　或　$x-4=-1$.

解得　　$x=5$,　或　$x=3$.

【理由】　由 $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2=x+(2a)x+\left(\dfrac{2a}{2}\right)^2$, 知道 x^2 的係數是 1 時,不含 x 的項必須是 x 係數一半的平方,才是完全平方的三項式.

例題二　解方程式 $x^2-3x-28=0$.

【解】　移項　　$x^2-3x=28$.

配方　　$x^2-3x+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=28+\dfrac{9}{4}$.

卽　　$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{121}{4}$.

開方　　$x-\dfrac{3}{2}=\dfrac{11}{2}$,　或　$x-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{11}{2}$.

解得　　$x=7$,　或　$x=-4$.

例題三　解方程式 $14-19x=3x^2$.

【解】　移項　$-3x^2-19x=-14$.

去係數　$x^2+\frac{19}{3}x=\frac{14}{3}$.

配方　$x^2+\frac{19}{3}x+\left(\frac{19}{6}\right)^2=\frac{14}{3}+\frac{361}{36}$.

即　$\left(x+\frac{19}{6}\right)^2=\frac{529}{36}$.

開方　$x+\frac{19}{6}=\frac{23}{6}$,

或　$x+\frac{19}{6}=-\frac{23}{6}$.

解得　$x=\frac{2}{3}$,　　或　$x=-7$.

【注意】　移項後所得 x^2 的係數是負,當用負數除各項,使 x^2 的項為正,以下各法都須如此.

例題四　解方程式 $x^2+25=10x$.

【解】　移項　$x^2-10x=-25$.

配方　$x^2-10x+5^2=-25+25$.

即　$(x-5)^2=0$.

開方　$x-5=0$.

解得　$x=5$.

【注意】　本題是等根二次方程式.

例題五　解方程式 $3x^2-x+5=2(x^2+x+2)$.

【解】　整理得　$x^2-3x=-1$.

配方 $$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-1+\frac{9}{4}.$$

即 $$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}.$$

開方 $$x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

解得 $$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

【注意】 求得的根有$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$同$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$二個,上面的結果是把二個根合寫在一起的簡式.

例題六 解方程式 $\frac{x^2}{2}-x+3=0$.

【解】 整理,得 $$x^2-2x=-6.$$

配方 $$x^2-2x+1=-6+1.$$

即 $$(x-1)^2=-5$$

開方 $$x-1=\pm\sqrt{5}\,i.$$

$$\therefore\quad x=1\pm\sqrt{5}\,i.$$

習題四十六

解下列的二次方程式:

(1) $x^2-7x+12=0$. (2) $x^2-x-30=0$.

(3) $x^2+5x=2x^2-10x+50$. (4) $3x^2-4x=39$.

(5) $2x^2-1=5x+2$. (6) $x^2-x=\frac{4}{9}$.

(7) $x^2-12x+6=\frac{1}{4}$. (8) $x^2+4=4x$.

(9) $3x^2-17x=0$. (10) $7x^2+6x-1=0$.

(11) $24x^2-5x=14$. (12) $x^2-(x-4)^2=2(x-5)^2$.

(13) $(x-2)(2x-3)=10$.

(14) $(2x+4)^2-(3x-1)^2=(4x-6)^2$.

(15) $x^2-3=\frac{1}{6}(x-3)$. (16) $(x-1)^2=2x$.

(17) $2x^2-2x+1=0$. (18) $x^2-x-1=0$.

(19) $9x^2=18x+11$. (20) $3x^2+4x+3=0$.

2. 分解因式法 步驟如下:

I. 集各項於左邊,使右邊爲 0,且使 x^2 的係數爲正.

II. 分解左邊的因式.

III. 命兩因式各等於 0,得二個一次方程式.

IV. 解這二個一次方程式,得原方程式的二個根.

例題一 解方程式 $-3x^2+5x=-2$.

【解】 移項 $-3x^2+5x+2=0$.

以-1乘各項 $3x^2-5x-2=0$.

分解因式 $(x-2)(3x+1)=0$.

命 $x-2=0$, 則 $x=2$.

命 $3x+1=0$, 則 $x=-\frac{1}{3}$.

【理由】 一數必須與 0 相乘,得的積才能是 0,所以知道 $(x-2)$ 同 $(3x+1)$ 兩因式都可以等於 0.

例題二 解方程式 $5x^2-3x=0$.

【解】 分解因式 $x(5x-3)=0$.

$\therefore$ $x=0$, 或 $5x-3=0$.

若 $5x-3=0$, 則 $x=\frac{3}{5}$.

$\therefore$ 所求的根是 0 同 $\frac{3}{5}$.

【注意】 二次方程式中不含 x 的項是 0 的,必有一個根是 0.

例題三 解方程式 $x^2-6x+9=0$.

【解】 分解因式 $(x-3)^2=0$.

則 $x-3=0$,

得 $x=3$.

【注意】 分解原式的因式後,左邊的兩個因式都是 $(x-3)$. 使二個因式各等於 0,得二個 x 的值都是 3,所以這 3 可以看做是原方程式的兩個相等的根,而原方程式是等根方程式.

習題四十七

用分解因式法解習題四十六(1)到(15)諸題.

3. 應用公式法 設有二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0) \cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

移項 $ax^2+bx=-c$.

去係數　　$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

兩邊各加係數一半的平方,得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}.$$

即　　$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

開方　　$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

凡二次方程式都可化爲(1)的形式,這時可用相當於(1)式中 a、b、c 的數值代入(2)中實行計算,即得 x 的值.

例題一　解方程式 $x^2+3x+2=0$.

【解】　與公式比較,知　$a=1, b=3, c=2$,代入公式,得

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times2}}{2\times1}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2}$$

$$=\frac{-3\pm1}{2}=-1\text{ 或 }-2.$$

例題二　解方程式 $3x^2-4x=7$.

【解】　移項,得　$3x^2-4x-7=0$.

與公式比較,知 $a=3, b=-4, c=-7$.

$$\therefore\quad x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times3\times(-7)}}{2\times3}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{16+84}}{6}=\frac{4\pm10}{6}=2\frac{1}{3}\text{ 或 }-1.$$

例題三　解方程式 $\frac{x}{3}+\frac{5}{x}=0.$

【解】　去分母,得　$x^2+15=0.$

與公式比較,知 $a=1, b=0, c=15,$

$$\therefore \qquad x=\frac{-0\pm\sqrt{0-4\times1\times15}}{2\times1}=\pm\frac{\sqrt{-60}}{2}$$

$$=\pm\frac{2\sqrt{15}i}{2}=\pm\sqrt{15}i.$$

例題四　解方程式 $2x^2-7x=0.$

【解】　與公式比較,知 $a=2, b=-7, c=0.$

$$\therefore \qquad x=\frac{7\pm\sqrt{49-4\times2\times0}}{2\times2}=\frac{7\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{7\pm7}{4}$$

$$=3\frac{1}{2}\text{ 或 }0.$$

例題五　解方程式 $4x^2-4x+1=0.$

【解】　由公式,得　$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\times4\times1}}{2\times4}$

$$=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{8}=\frac{4\pm0}{8}=\frac{4}{8}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

例題六　解方程式 $9x^2+6x-4=0.$

【解】　由公式,得　$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\times9(-4)}}{2\times9}$

$$=\frac{-6\pm\sqrt{180}}{18}=\frac{-6\pm6\sqrt{5}}{18}$$

$$=\frac{\cancel{6}(-1\pm\sqrt{5})}{\underset{3}{\cancel{18}}}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{3}$$

習題四十八

應用公式解習題四十六.

第四節　二次方程式應用問題

解二次方程式應用問題的步驟,仍與解一次方程式同;不過求得的根應研究其是否適用,以定取捨.舉例如下:

例題一　有四個連續的正整數,順次求出相鄰兩數的積,再求首末兩數的積,把四個積相加,得 224. 求這四個正整數.

【解】　設最小的數是 x,則其餘三數順次是 $x+1, x+2, x+3$.由題意得方程式

$$x(x+1)+(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+x(x+3)=224.$$

即　$x^2+x+x^2+3x+2+x^2+5x+6+x^2+3x=224.$

整理,得　$4x^2+12x-216=0.$

以 4 除,化簡,得　$x^2+3x-54=0.$

$$\therefore \qquad x=\frac{-3\pm\sqrt{9+216}}{2}=\frac{-3\pm 15}{2}$$

$$=6 \text{ 或 } -9.$$

因負數不適用,故所求的四數順次是6, 7, 8, 9.

例題二　有二位的整數,二數字的和是6,二數字的積的3倍恰巧等於原數.求原數.

【解】　設原數的十位數字爲 x,則個位數字爲 $(6-x)$,

得方程式　$10x+(6-x)=3x(6-x)$.

整理,得　$3x^2-9x+6=0$.

化簡,得　$x^2-3x+2=0$.

分解因式　$(x-1)(x-2)=0$.

命　$x-1=0$,　則　$x=1$,　$6-x=5$.

命　$x-2=0$,　則　$x=2$,　$6-x=4$.

故原數爲15或24,都能合用.

例題三　矩形面積是432方尺,長、闊的和是42尺.問長、闊各幾尺?

【解】　設長爲 x 尺,則闊爲 $(42-x)$ 尺,得方程式

$$x(42-x)=432.$$

整理,得　$x^2-42x+432=0$.

$$\therefore \qquad x=\frac{42\pm\sqrt{1764-1728}}{2}=\frac{42\pm\sqrt{36}}{2}$$

$$=\frac{42\pm 6}{2}=24\text{或}18.$$

$$42-x=18\text{或}24.$$

但矩形的長、闊並無絕對的區別，所以本題雖似有二種答數，實則僅有一種，卽長24尺，闊18尺.

例題四 兄弟二人歲數的和是40，歲數平方的和是750. 求二人的歲數.

【解】 設兄年爲 x 歲，則弟年爲 $(40-x)$ 歲.得方程式

$$x^2+(40-x)^2=750.$$

化簡，得 $$x^2-40x+425=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{40\pm\sqrt{1600-1700}}{2}=\frac{40\pm\sqrt{-100}}{2}$$

$$=\frac{40\pm 10i}{2}=20\pm 5i.$$

但歲數不能是虛數，故原題不合理.

習題四十九

(1) 有連續的二個正整數，其平方和爲 365. 求這二數.

(2) 有連續的三個正整數，其平方和爲 365. 求這三數.

(3) 大小二數的差是 7，其平方差爲 133. 求這二數.

(4) 二數的比是2:3，其積爲 294. 求這二數.

【提示】 小數:大數 =2:3, 根據單比例解法,知

$$小數=\frac{2\times 大數}{3}=\frac{2}{3}\times 大數.$$

(5) 二個正整數的比是4:5,若各加15,則其平方差爲999. 求這二數.

(6) 二個連續正整數的積是 992. 求這二數.

(7) 二個連續正奇數的和,等於夾在中間的一個偶數的平方.求這二個奇數.

(8) 有連續的五個正整數,其中較小的三數的平方和,等於較大的二數的平方和.求這五數.

(9) 某數的平方加該數 $\frac{1}{2}$ 的平方,再加該數 $\frac{1}{3}$ 的平方,得 441, 求這數.

(10) 二數的和是20,其立方的和是2240,求這二數.

(11) 有一正立方體,若各邊都增 3 寸,則體積增 8937 立方寸.問各邊原長多少?

(12) 一矩形田,長、闊相差 3 尺.若闊增 5 尺,長減 8 尺,則面積比原面積的一半多250方尺.求長同闊.

(13) 矩形的周是 4 丈 2 尺,若闊減 1 尺,長減 $\frac{1}{4}$,則面積是原面積的 $\frac{2}{3}$.問長、闊各多少?

(14) 兵士若干人,列成正方陣,尚餘 35 人;後改列成長方陣,縱行較前多 15 人,橫列爲 27 人,恰盡.求總兵數.

【提示】 設正方陣每邊爲 x 人,則總兵數爲 x^2+35.

(15) 兵士若干人,初排一正方陣,尙餘 100 人;次再排一正方陣,每邊人數比前次的一半多13人,則不足29人.求總兵數.

(16) 一矩形的公園,長70丈,闊50丈.圍繞此園有一等闊的馬路,面積是1024方丈.求馬路的闊.

(17) 有二位的整數,等於二數字積的 2 倍.已知個位數字較十位數字大 3,求原數.

(18) 父子歲數的和是 100,歲數的積的 $\frac{1}{10}$ 比父的歲數大 180.求二人的歲數.

(19) 東西兩地相距72里.甲、乙二汽車同時從東向西開行,甲車比乙車早到24分鐘.已知甲車每時比乙多行15里,求二車每時的速度.

【提示】 兩車所行的時數,乙比甲多 $\left(\frac{24}{60}=\right)\frac{2}{5}$ 時.

(20) 某商買緞若干尺,費國幣 150 元.後以每尺 1 元 5 角的價售去,所獲的利等於緞24尺的原價.求買得的尺數.

(21) 會員若干人,平均分派會費 120 元.後臨時加入會員 2 人,於是每人可少出會費 2 元.問原有會員幾人?

(22) 某船在靜水中每時的速度比水流速度多 4 里.今往返於相距 144 里的兩地,共經 15 時.求這船在靜水中每時的速度.

(23) 有甲、乙二管,可以注水入水槽.若獨開乙管,比獨開甲管須多費 6 時才能注水滿槽;若同時開二管,則 4 時可滿.問獨開一管,注水滿槽各需幾時?

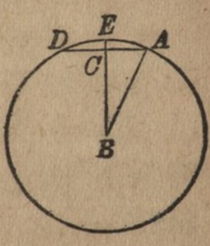
(24) 有兩輪車,前、後輪的周圍相差 2 尺.行 2520 丈的路,前輪比後輪多轉 60 次.求兩輪的周圍.

(25) 直角三角形的三邊的尺數是連續的三整數.求這三邊的長.

【提示】 三角形的一角是直角的,叫直角三角形.直角所對的邊是最長的邊,叫斜邊.根據幾何學中的畢氏定理,知道直角三角形斜邊的平方,必等於其他二邊平方的和.

(26) 直角三角形的斜邊長 17 尺,其他二邊的和是 23 尺.求這二邊的長.

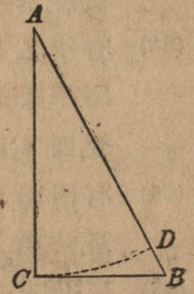
(27) 正圓的木柱,大部嵌入壁中,不知他的直徑.用鋸鋸入 1 寸,鋸道長 1 尺.求木柱的直徑.



【提示】 如右圖,設半徑 AB 爲 x 寸,則 ABC 是直角三角形.AC 是鋸道的一半,卽 5 寸;

BC是半徑同鋸深的差,卽$(x-1)$寸.

(28) 從旗竿頂垂下的索,有 2 尺拖在地下,把索的下端拉到離竿足 8 尺的地方,這索恰巧拉直.求旗竿的高.



【提示】 如右圖,設竿高 AC 爲 x 尺,則 ABC 爲直角三角形,BC 是索端同竿足的距離,卽 8 尺;AB 是索長,比竿高多 2 尺,卽 $(x+2)$尺.

第五節　二次方程式的根同係數的關係

1. 二根的和同係數的關係　二次方程式的公式是　$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$.

把他化做　$x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$.

設　$\dfrac{b}{a}=P,\quad \dfrac{c}{a}=Q,$

則得　$x^2+Px+Q=0$.

上式也可以認爲是二次方程式的公式,因爲任何二次方程式都可化做這種形式的緣故.

設 $x^2+Px+Q=0$ 的二根是 α (希臘字,讀如 *Alpha*), β (讀如 *Beta*), 根據二次方程式根的公式,得

$$\alpha=\frac{-P+\sqrt{P^2-4Q}}{2},\quad \beta=\frac{-P-\sqrt{P^2-4Q}}{2}.$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta=\frac{-P+\sqrt{P^2-4Q}}{2}+\frac{-P-\sqrt{P^2-4Q}}{2}$$

$$=-P.$$

用言語表示,就是「**二次方程式中 x^2 的係數是 1 時,二根的和等於 x 係數的相對數.**」

【注意】 $\alpha+\beta=-P$, 則 $P=-(\alpha+\beta)$.

2. 二根的積同係數的關係 據上條,可得

$$\alpha\beta=\frac{-P+\sqrt{P^2-4Q}}{2}\cdot\frac{-P-\sqrt{P^2-4Q}}{2}$$

$$=\frac{P^2-(P^2-4Q)}{4}=Q.$$

用言語表示,就是「**二次方程式中 x^2 的係數是 1 時,二根的積等於不含 x 的項.**」

3. 由預定根作二次方程式 使 x^2 的係數是 1; 求二個預定根的和,附以相反的號,做 x 的係數;求二個預定根的積,做不含 x 的項:放在等號左邊.再使右邊爲 0, 即得所求的二次方程式.

例題一　以 3 及 -4 爲根,作二次方程式.

【解】　已知 $\alpha=3, \beta=-4$,

$\therefore$　　$P=-(3-4)=1$,　　$Q=3(-4)=-12$.

所求的二次方程式是　$x^2+x-12=0$.

例題二　以 $1\frac{1}{3}$ 及 $\frac{1}{2}$ 爲根,作二次方程式.

【解】　已知 $\alpha=1\frac{1}{3}$,　$\beta=\frac{1}{2}$,

$\therefore$　　$P=-\left(1\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{11}{6}$,　　$Q=1\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$.

所求的二次方程式爲　$x^2-\frac{11}{6}x+\frac{2}{3}=0$.

即　　$6x^2-11x+4=0$.

例題三　以 $\frac{-3\pm2\sqrt{5}}{2}$ 爲根,作二次方程式.

【解】　已知 $\alpha=\frac{-3+2\sqrt{5}}{2}$,　$\beta=\frac{-3-2\sqrt{5}}{2}$,

$\therefore$　　$P=-\left(\frac{-3+2\sqrt{5}}{2}+\frac{-3-2\sqrt{5}}{2}\right)=-\frac{-6}{2}$

$=3$,

$$Q=\frac{-3+2\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{-3-2\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{(-3)^2-(2\sqrt{5})^2}{4}=\frac{9-20}{4}=-\frac{11}{4}.$$

所求的二次方程式爲　$x^2+3x-\frac{11}{4}=0$.

即 $$4x^2+12x-11=0.$$

【注意】 $(2\sqrt{5})^2=(2\times\sqrt{5})^2=2^2\times(\sqrt{5})^2=4\times5=20.$

例題四 以$\frac{1\pm\sqrt{3}i}{5}$爲根,作二次方程式.

【解】 已知 $\alpha=\frac{1+\sqrt{3}i}{5}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{3}i}{5}$,

$$\therefore \quad P=-\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{5}+\frac{1-\sqrt{3}i}{5}\right)=-\frac{2}{5},$$

$$Q=\frac{1+\sqrt{3}i}{5}\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{5}=\frac{1^2-(\sqrt{3}i)^2}{25}$$

$$=\frac{1+3}{25}=\frac{4}{25}.$$

所求的二次方程式是 $$x^2-\frac{2}{5}x+\frac{4}{25}=0.$$

即 $$25x^2-10x+4=0.$$

【注意】 $(\sqrt{3}i)^2=(\sqrt{3}\times\sqrt{-1})^2=(\sqrt{3})^2\times(\sqrt{-1})^2=3\times(-1)=-3.$

4. 變已知方程式的根作二次方程式

設有一已知方程式,不去求出他的根來,要另作一二次方程式,使這所作方程式的根是原方程式根的變形.舉例於下:

例題一 設有二次方程式$ax^2+bx+c=0$,試另作一二次方程式,使他的二根是上列

方程式二根的平方.

【解】　設$ax^2+bx+c=0$的二根是α、β,

則所求方程式的二根是α^2、β^2.

故所求方程式若用α、β表出,應爲

$$x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0.$$

欲將α、β換成a、b、c,必須應用下列二式:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots(1),\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

$(1)^2$　　$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=\frac{b^2}{a^2}$$

$(2)\times 2$　　$$2\alpha\beta=\frac{2c}{a}\quad(-$$

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{b^2-2ac}{a^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

$(2)^2$　　$$\alpha^2\beta^2=\frac{c^2}{a^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

以(3)、(4)代入用α、β表出的方程式,得所求的方程

式:　　$$x^2-\frac{b^2-2ac}{a^2}x+\frac{c^2}{a^2}=0.$$

即　　$$a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0.$$

【注意】　設有方程式$2x^2-7x+3=0$(二根是$\frac{1}{2}$同3),以$a=2$, $b=-7$, $c=3$代入上例的結果,得$4x^2-37x+9=0$(二根是$\frac{1}{4}$同9),這所得方程式的二根,恰是原方程式二根的平方.

例題二　設二次方程式$ax^2+bx+c=0$

的二根爲α、β，試作以$\frac{\alpha}{\beta}$、$\frac{\beta}{\alpha}$爲二根的方程式.

【解】 所求的方程式若用α、β表,應爲

$$x^2-\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)x+1=0\left(\text{因}\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=1\right).$$

利用分式加法及根據上例的(3)及(2),得

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{b^2-2ac}{a^2}\div\frac{c}{a}=\frac{b^2-2ac}{ac}.$$

代入前式,得 $x^2-\frac{b^2-2ac}{ac}x+1=0.$

故所求的方程式是 $acx^2-(b^2-2ac)x+ac=0.$

5. 求等根方程式中的缺項 已知一方程式是等根方程式,可利用根同係數的關係,求出這方程式中的缺項.

例題 方程式 $3x^2+4mx+m=0$ 是等根方程式,求m的值.

【解】 變原方程式爲 $x^2+\frac{4m}{3}x+\frac{m}{3}=0$, 設其根爲$\alpha$、$\beta$,

則 $\alpha+\beta=-\frac{4m}{3},\quad \alpha\beta=\frac{m}{3}.$

但 $\alpha=\beta$,

$$\therefore\quad 2\alpha=-\frac{4m}{3}\cdots\cdots\cdots\cdots(1),\quad \alpha^2=\frac{m}{3}\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

(1)÷2 $\alpha=-\frac{2m}{3}$, 自乘得 $\alpha^2=\frac{4m^2}{9}\cdots\cdots(3).$

由(2),(3)得 $\dfrac{4m^2}{9}=\dfrac{m}{3}$.

$\therefore$ $12m^2=9m, 4m^2-3m=0, m(4m-3)=0,$

於是得 $m=0,$ 或 $m=\dfrac{3}{4}$.

【別解】 前已知方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的根是 $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. 若 b^2-4ac 爲 0, 則原方程式的根是 $-\dfrac{b}{2a}$, 而爲等根方程式(參閱第三節, 3, 例題五). 本題既是等根方程式,

則必 $(4m)^2-4\times3\times m=0$.

卽 $16m^2-12m=0$.

解得 $m=0,$ 或 $m=\dfrac{3}{4}$.

(註) 若 $b^2-4ac=0$, 則原方程式的二根相等;若 $b^2-4ac<0$, 則根是虛數;若 $b^2-4ac>0$, 而非整平方數,則根含不盡根數.所以利用 b^2-4ac 的值,可判別二次方程式根的種類,因此稱 b^2-4ac 爲二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的判別式.

習題五十

由下列各題中的預定根作二次方程式:

(1) $7, -5$. (2) $3, 11$. (3) $\dfrac{1}{2}, -5$.

(4) $-\dfrac{2}{3}, 4\dfrac{1}{5}$. (5) $2\pm i$. (6) $1\pm\sqrt{3}$.

(7) $-2\pm3\sqrt{7}$. (8) $-1\pm2\sqrt{2}i$. (9) $-5\pm4i$.

(10) $\frac{3\pm2i}{2}$. (11) $\frac{-1\pm5\sqrt{2}}{4}$. (12) $\frac{-7\pm\sqrt{5}i}{3}$.

(13) 設方程式$ax^2+bx+c=0$的二根是α、β,試作以$\frac{1}{\alpha}$、$\frac{1}{\beta}$爲根的二次方程式.

(14) 設方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根是α、β,試作以$\alpha+\beta$, $\frac{1}{\alpha+\beta}$爲根的二次方程式.

(15) 設方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根是α、β,試作以$\alpha\beta$、$\frac{1}{\alpha\beta}$爲根的二次方程式.

(16) 設方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根是α、β,試作以$\frac{1}{\alpha^2}$、$\frac{1}{\beta^2}$爲根的二次方程式.

(17) 方程式$4x^2+(1+a)x+1=0$的二根相等,求 a 的值.

(18) 方程式 $x^2-(a-3)x+a=0$ 的二根相等,求 a 的值.

第六節 聯立二次方程式解法

(I) 一次與二次聯立的

1. 代入法 凡一次同二次聯立的方程式,都可用代入法解,步驟如下:

I. 變一次的方程式,使含 y 的項獨居一邊,且係數爲 1(換以 x 亦可).

II. 代入二次的方程式,消去未知數 y,得含 x 的一元二次方程式.

III. 解這一元二次方程式,得 x 的二個值.

IV. 以 x 的二個值代入 *I* 所得的方程式,得 y 的二個對應值.

例題 試解下列的聯立方程式:

$$\begin{cases} 4x+y=7 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1). \\ 3x^2-2xy-y^2+4x+7y=13 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$$

【解】 變(1)爲 $y=7-4x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$

以(3)代入(2)

$$3x^2-2x(7-4x)-(7-4x)^2+4x+7(7-4x)=13.$$

化簡,得 $5x^2-18x+13=0.$

$$\therefore \quad x=\frac{18\pm\sqrt{324-260}}{10}=\frac{18\pm8}{10}=1 \text{ 或 } 2\frac{3}{5}.$$

代入(3),得 $y=3$ 或 $-3\frac{2}{5}.$

$$\text{答}\begin{cases} x=1, \\ y=3. \end{cases} \qquad \text{或}\begin{cases} x=2\frac{3}{5}, \\ y=-3\frac{2}{5}. \end{cases}$$

【注意】 所得的兩組根須分列清楚,不可混亂.因 $x=1$ 時,y 必須是 3,才能適合原方程式.若以 $x=1$,

$y=-3\frac{2}{5}$ 代入原方程式,結果一定不對.

2. 特別法 特種的問題,可先求出 x、y 的和同差,再用一次聯立方程式的加減法做,比代入法便利.

例題一 試解 $\begin{cases} x+y=7 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ x^2-y^2=21 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】 (2)÷(1) $x-y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(3).$

$[(1)+(3)]\div 2$ $x=5$
$[(1)-(3)]\div 2$ $y=2$ 答.

$$\left.\begin{aligned} x&=5 \\ y&=2 \end{aligned}\right\}\text{答.}$$

例題二 試解 $\begin{cases} x+y=7 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ x^2+y^2=25 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】 $(1)^2$ $x^2+2xy+y^2=49 \cdots\cdots\cdots\cdots(3).$

(3)−(2) $2xy \quad =24 \cdots\cdots\cdots\cdots(4).$

(2)−(4) $x^2-2xy+y^2=1,$

開方 $x-y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(5).$

或 $x-y=-1 \cdots\cdots\cdots\cdots(6).$

(1),(5) 聯立,得 $\begin{cases} x=4, \\ y=3. \end{cases}$ (1),(6) 聯立,得 $\begin{cases} x=3, \\ y=4. \end{cases}$

習題五十一

解下列的聯立方程式.

(1) $\begin{cases} x-y=3, \\ x^2-y^2=39. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-y=10, \\ x^2+y^2=58. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=6 \cdots\cdots(1), \\ xy=5 \cdots\cdots(2). \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x-y=2 \cdots\cdots(1), \\ xy=143 \cdots\cdots(2). \end{cases}$

【提示】 $(1)^2-(2)\times4$. 【提示】 $(1)^2+(2)\times4$.

(5) $\begin{cases} x^2-xy=-3, \\ x-y=-1. \end{cases}$ (6) $\begin{cases} xy+y^2=4, \\ x+y=1. \end{cases}$

【提示】 $(1)\div(2)$. 上列二題一樣.

(7) $\begin{cases} x+y=4, \\ x^2+xy+y^2=13. \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x-y=17, \\ x^2-xy+y^2=219. \end{cases}$

【提示】 $(1)^2-(2)=(3)$, $(2)-(3)\times3$. 上二題一樣, 下四題仿此.

(9) $\begin{cases} x+y=15, \\ x^2-xy+y^2=57. \end{cases}$ (10) $\begin{cases} x-y=-3, \\ x^2+xy+y^2=3. \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x+y=2, \\ x^2-5xy+y^2=25. \end{cases}$ (12) $\begin{cases} x-y=-5, \\ x^2+3xy+y^2=205. \end{cases}$

(13) $\begin{cases} 4x+3y=3, \\ 7xy=1\frac{1}{6}. \end{cases}$ (14) $\begin{cases} 2x+5y=-12, \\ x^2-y^2+3x-y=16. \end{cases}$

(15) $\begin{cases} 2x-5y=3, \\ x^2+xy=20. \end{cases}$　(16) $\begin{cases} 4x+9y=12, \\ 2x^2+xy=6y^2. \end{cases}$

(17) $\begin{cases} 4x-5y=1, \\ 2x^2-xy+3y^2+3x-4y=47. \end{cases}$

(18) $\begin{cases} 4x-y=4, \\ 4x^2+2xy+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{5}{12}(4x+y)=41. \end{cases}$

(II) 二次與二次聯立的

通常二次與二次聯立的方程式消去一元後,得的方程式不止二次,他的解法不在初等代數範圍以內,現在僅就能用二次解法做的問題,分類舉例於後.

1. 可用加減法消成一次的 兩式中所含的全部二次項都相同,或都成倍數的,可用加減法把二次項完全消去,得一個一次方程式,然後用代入法做.

例題 試解 $\begin{cases} xy+x=15 \cdots\cdots(1), \\ xy-y=8 \cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】 (1)−(2)　$x+y=7 \cdots\cdots(3).$

變(3)為　$y=7-x.$

代入(1)　$x(7-x)+x=15.$

化簡,得 $x^2-8x+15=0.$

分解因式, $(x-3)(x-5)=0.$

命 $x-3=0,$ 或 $x-5=0,$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=3, \\ y=4. \end{cases} \quad 或 \begin{cases} x=5, \\ y=2. \end{cases}$$

2.可用除法消成一次的 兩式中含未知數的項移於一邊後,若有相同的因式,可用除法消得一個一次方程式,再用代入法做.

例題 試解 $\begin{cases} x^2-y^2=16, \\ 2x^2-3xy+y^2=14. \end{cases}$

【解】 化原式爲 $\begin{cases} (x+y)(x-y)=16 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ (2x-y)(x-y)=14 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

(1)÷(2) $\dfrac{x+y}{2x-y}=\dfrac{16}{14}.$

交叉乘 $14x+14y=32x-16y.$

化簡,得 $5y=3x.$

$\therefore$ $y=\dfrac{3}{5}x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$

以(3)代入(1) $x^2-\dfrac{9}{25}x^2=16.$

解得 $x=\pm 5,$

代入(3),得 $y=\pm 3.$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=5, \\ y=3. \end{cases} \quad \begin{cases} x=-5, \\ y=-3. \end{cases}$$

3.一式中各項全是二次的 一個方程式中沒有一次項,且不含 x 的項是 0 的,可把這式分解因式,求得 $x=?y$ (或 $y=?x$),再代入他式.

例題 試解 $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ 3x^2-y^2+2x-y=31 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】 分解(1)的因式 $(x-2y)(x-3y)=0.$

命 $x-2y=0,$ 則 $x=2y \cdots\cdots\cdots\cdots(3).$

命 $x-3y=0,$ 則 $x=3y \cdots\cdots\cdots\cdots(4).$

以(3)代入(2) $12y^2-y^2+4y-y=31.$

化簡,得 $11y^2+3y-31=0.$

$$\therefore \quad y=\frac{-3\pm\sqrt{9+1364}}{22}=\frac{-3\pm\sqrt{1373}}{22}.$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=\dfrac{-3+\sqrt{1373}}{11}, \\ y=\dfrac{-3+\sqrt{1373}}{22}. \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{-3-\sqrt{1373}}{11}, \\ y=\dfrac{-3-\sqrt{1373}}{22}. \end{cases}$$

以(4)代入(2) $27y^2-y^2+6y-y=31.$

化簡,得 $26y^2+5y-31=0.$

$$\therefore \quad y=\frac{-5\pm\sqrt{25+3224}}{52}=\frac{-5\pm57}{52}$$

$$=1\text{ 或 }-1\frac{5}{26}.$$

$$\therefore\quad \begin{cases}x=3,\\ y=1.\end{cases}\qquad \begin{cases}x=-3\frac{15}{26},\\ y=-1\frac{5}{26}.\end{cases}$$

【注意】 利用 $x=2y$ 求得 y 後,應仍代入該式以求 x,不能代入 $x=3y$ 中.

4. 可以消成各項全是二次的 兩方程式中除二次項外,其他的若是祇有不含 x 的項,或同文字的一個一次項,可用加減法把他消去,然後仿上條的方法做.

例題 試解 $\begin{cases}2x^2-xy+y^2=2y \cdots\cdots\cdots(1),\\ 2x^2+4xy \quad =5y \cdots\cdots\cdots(2).\end{cases}$

【解】 $(1)\times5$ $\qquad 10x^2-5xy+5y^2=10y$

$(2)\times2$ $\qquad \underline{4x^2+8xy \qquad =10y}\ (-$

$$6x^2-13xy+5y^2=0.$$

分解因式 $\qquad (2x-y)(3x-5y)=0.$

命 $\quad 2x-y=0,\quad$ 則 $\quad y=2x \cdots\cdots\cdots(3).$

命 $\quad 3x-5y=0,\quad$ 則 $\quad y=\frac{3}{5}x \cdots\cdots\cdots(4).$

以(3)代入(2);解得 $\qquad x=1$ 或 0, $y=2$ 或 0.

以(4)代入(2),解得 $\qquad x=\frac{15}{22}$ 或 0, $y=\frac{9}{22}$ 或 0.

$$\therefore \quad \begin{cases} x=1 \\ y=2. \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0. \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{15}{22} \\ y=\dfrac{9}{22}. \end{cases}$$

(註) 2.條的例題也可仿此法消去不含文字的項再解.

習題五十二

解下列各題的聯立方程式:

(1) $\begin{cases} xy+2=9y, \\ xy+2=x. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x-2y=5xy, \\ 15x-4y=4xy. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+xy+x-y=14, \\ x^2+xy-x+y=16. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} xy+x=25, \\ 2xy-3y=28. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=6, \\ 4x^2-y^2=3. \end{cases}$ (6) $\begin{cases} 2x^2-xy+3y^2=9, \\ 4x^2-9y^2=7. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=44, \\ 2x^2-xy+y^2=16. \end{cases}$ (8) $\begin{cases} 2x^2-xy=15x, \\ 2xy-y^2=5x. \end{cases}$

(9) $\begin{cases} 2x^2-5xy+3y^2=0, \\ 2x^2-y^2+x-y=15. \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0, \\ x^2+3xy-y^2+2x-3y=2. \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=39, \\ 2x^2+3xy+y^2=63. \end{cases}$

(12) $\begin{cases} x(x+y)+y(x-y)=158, \\ 7x(x+y)=72y(x-y). \end{cases}$

5. 可求出二根的和差的　有時可用加、減及乘方、開方，求出二根的和同差，再仿一次聯立方程式解.

例題一　試解 $\begin{cases} x^2+y^2=13 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ xy=6 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】　(2)×2　　$2xy=12 \cdots\cdots\cdots\cdots(3).$

(1)+(3)　　$x^2+2xy+y^2=25.$

開方，得　　$x+y=\pm5 \cdots\cdots\cdots\cdots(4).$

(1)−(3)　　$x^2-2xy+y^2=1.$

開方，得　　$x-y=\pm1 \cdots\cdots\cdots\cdots(5).$

把(4)、(5)分別聯立，得四組聯立方程式：

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-5 \\ x-y=\ \ 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-5 \\ x-y=-1. \end{cases}$$

解得　$\begin{cases} x=3 \\ y=2, \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=3, \end{cases} \begin{cases} x=-2 \\ y=-3, \end{cases} \begin{cases} x=-3 \\ y=-2. \end{cases}$

例題二 試解 $\begin{cases} x^2+xy+y^2=39 \cdots\cdots(1) \\ x^2-xy+y^2=19 \cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】 (1)−(2) $2xy \quad =20 \cdots\cdots(3).$

(3)÷2 $xy \quad =10 \cdots\cdots(4).$

(1)+(4) $x^2+2xy+y^2=49.$

開方,得 $x+y=\pm 7 \cdots\cdots(5).$

(2)−(4) $x^2-2xy+y^2=9.$

開方,得 $x-y=\pm 3 \cdots\cdots(6).$

把(5),(6)分別聯立,得四組聯立方程式:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=3, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=7 \\ x-y=-3, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-7 \\ x-y=3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-7 \\ x-y=-3, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=5 \\ y=2, \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=5, \end{cases} \begin{cases} x=-2 \\ y=-5, \end{cases} \begin{cases} x=-5 \\ y=-2. \end{cases}$

6. 特殊的三元聯立方程式 通常三元聯立方程式不能用二次方程式的解法做,但下列的例題却是例外.

例題 試解 $\begin{cases} xy+zx=27 \cdots\cdots(1), \\ yz+xy=32 \cdots\cdots(2), \\ zx+yz=35 \cdots\cdots(3). \end{cases}$

【解】 $[(1)+(2)+(3)]\div 2$ $xy+yz+zx=47$ ……(4).

從(4)分別減去(1),(2),(3),得

$$\begin{cases} yz=20 \cdots\cdots(5), \\ zx=15 \cdots\cdots(6), \\ xy=12 \cdots\cdots(7). \end{cases}$$

(5)×(6)×(7) $x^2y^2z^2=3600$.

開方,得 $xyz=\pm 60$ ……(8).

以(5),(6),(7)分別除(8),得

$$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=5, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \\ z=-5. \end{cases}$$

習題五十三

解下列各題的聯立方程式:

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=65 \\ xy=28. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 9x^2+4y^2=52 \\ xy=4. \end{cases}$

【提示】 (1)±(2)×12,開方,得 $3x\pm 2y$ 的值.

(3) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21 \\ xy=-4. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=79 \\ xy=21. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x^2-5xy+y^2=37 \\ xy=9. \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x^2+4xy+y^2=-8 \\ xy=-4. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=189, \\ x^2-xy+y^2=117. \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=109, \\ x^2-6xy+y^2=73. \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x(y+z)=6, \\ y(z+x)=12, \\ z(x+y)=10. \end{cases}$ (10) $\begin{cases} yz=4, \\ zx=9, \\ xy=16. \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$ (12) $\begin{cases} 3x^2-4y^2=44, \\ 5x^2+6y^2=86. \end{cases}$

【提示】 把x^2同y^2都看作一次項,用加減法求他們的值,得二個純二次方程式.上二題一樣.

(13) $\begin{cases} x^2-1=9y, \\ x^2+x=6y. \end{cases}$ (14) $\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ x+y=xy-2. \end{cases}$

【提示】 消去含y的項,或消去x^2都可以.

【提示】 $(2)^2-(1)$,把xy看作一次項,求值,與(1)聯立.

(15) $\begin{cases} x^2+xy=8x+3 \\ y^2+xy=8y+6. \end{cases}$

【提示】 相加得$(x+y)$的二次方程式,解得$(x+y)$的值;變(1)爲$x(x+y)=8x+3$,以$(x+y)$的值代入求x.

(16) $\begin{cases} 2(x+y)^2-9(x+y)-18=0, \\ (x-y)^2+(x-y)-6=0. \end{cases}$

【提示】　就(1)求 $(x+y)$ 的值;就(2)求 $(x-y)$ 的值.

(III)　應用問題

例題　東西兩車站相距 240 里,甲車在東站,乙車在西站,同時相向開行.二車在途中相遇後,甲經 4 時達西站,乙經 9 時達東站.求二車的速度.

【解】　設甲車每時行 x 里,乙車每時行 y 里,

則甲在相遇後行 $4x$ 里,即乙在相遇前所行的里數;乙在相遇後行 $9y$ 里,即甲在相遇前所行的里數.

由是知從出發到相遇,甲費 $\frac{9y}{x}$ 時,乙費 $\frac{4x}{y}$ 時,

得方程式 $\begin{cases} 4x+9y=240, \\ \dfrac{9y}{x}=\dfrac{4x}{y}. \end{cases}$

化得 $\begin{cases} y=\dfrac{240-4x}{9} \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ 4x^2-9y^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

以(1)代入(2),化簡,得　$x^2+96x-2880=0.$

分解因式 $(x+120)(x-24)=0.$

命 $x+120=0,$ 則 $x=-120$(不適用).

命 $x-24=0,$ 則 $x=24.$

以$x=24$代入(1),得 $y=16.$

答甲車每時行24里,乙車每時行16里.

習題五十四

(1) 甲在東鎮,乙在西鎮,同時相向起行,相遇時甲已比乙多走24里.相遇後甲再行4時達西鎮,乙再行9時達東鎮.求二人的速度.

(2) 有二整數,其和爲其差的6倍,而積比和多23.求這二數.

(3) 二正分數的和是$\frac{5}{6}$,他們的積等於他們的差.求這二個分數.

(4) 矩形各邊都增1尺,則面積爲48方尺;各邊都減1尺,則面積爲24方尺.求各邊的長.

(5) 直角三角形的斜邊長2尺,面積是96方寸,求其他二邊的長.

【提示】 其他二邊的積,是面積的2倍.

(6) 某人向銀行借國幣若干元,用單利計算利息.若在6年後歸還,應出本利和5200元;若在10年後歸還,應出本利和6000元.求本金及年利率.

(7) 某甲借國幣 200 元與某乙,預算在某期限間可得單利息 48 元.若年利率減少.01,而欲得同樣的利息,則期限當延長 2 年.求時期同年利率.

(8) 某人買上、下二種糖,上種比下種少 4 斤,而上種比下種每斤貴 1 分 5 釐.已知上糖共價 1 元 4 角 8 分,下糖共價 2 元零 4 分.求二種糖的斤數同每斤的價.

第十一章　根式方程式、簡易高次方程式

第一節　根式方程式

方程式中含有根式的,叫做根式方程式.解法的步驟如下:

I. 移根式同非根式使各集於一邊.

II. 兩邊各自乘,使化爲普通方程式.

III. 解這方程式,求出 x 的值.

IV. 以 x 的值代入原方程式,實驗是否適合.那不適合的是假根,應棄掉他.

例題　試解 $7+\sqrt{x^2-x-5}=2x$.

【解】　移項　$\sqrt{x^2-x-5}=2x-7$.

自乘　$x^2-x-5=4x^2-28x+49$.

化簡,得　$x^2-9x+18=0$.

解得　$x=3$ 或 6.

【實驗】　以 3 及 6 分別代入原方程式,得

$$7+\sqrt{3^2-3-5}=7+1\neq 2\times 3;$$

$$7+\sqrt{6^2-6-5}=7+5=2\times 6.$$

所以求得的 6 是眞根,3 是假根.

【理由】　根式方程式的所以有假根,因爲曾經

自乘的手續.凡一式,不論正負,自乘後得的式總是正,所以本題若改為$7-\sqrt{x^2-x-5}=2x$,照上法解出來,得的根也是 3 同 6,這時的 3 反是眞根,6 反是假根.

特例一 若一方程式中不止有一個根式時,自乘一次後仍有根式,應再移項自乘,才得普通方程式.

例題 試解$2\sqrt{5+2x}-\sqrt{13-6x}=\sqrt{37-6x}$.

【解】 自乘

$$4(5+2x)-4\sqrt{5+2x}\sqrt{13-6x}+(13-6x)=37-6x.$$

移項,化簡 $2x-1=\sqrt{5+2x}\sqrt{13-6x}$.

自乘 $4x^2-4x+1=(5+2x)(13-6x)$.

化簡 $16x^2=64$.

解得 $x=2$(眞根), 或 $x=-2$(假根).

【注意】 如上例,曾經自乘二次的,有時得的二根會都是假根.

特例二 若把根式方程式的兩邊各自乘後,所得的是四次方程式時,在特殊情形之下,可用特別法解.

例題 試解$9\sqrt{x^2-9x+28}=x^2-9x+36$.

【解】 變原式為

$$(x^2-9x+28)-9\sqrt{x^2-9x+28}+8=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

設 $\sqrt{x^2-9x+28}=y\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$

則　$x^2-9x+28=y'$ ……………………(3)

以(2)、(3)代(1),得　$y^2-9y+8=0.$

解得　$y=1$ 或 $8.$

分別代入(3),得　$x^2-9x+27=0,$

或　$x^2-9x-36=0.$

解得　$x=\dfrac{9\pm3\sqrt{3}\,i}{2}$ 或 $12,\ -3.$

【注意】　如上的方程式,得的 y 是正時,求得 x 的值都是眞根;若 y 是負時,求得 x 的值都是假根,因爲用 y 代的根式是正的緣故.

習 題 五 十 五

解下列各題的根式方程式(應棄去假根):

(1)　$2x-\sqrt{x^2-4x-5}=10.$　(2)　$\sqrt{x^2-x-5}-2x=5.$

(3)　$\sqrt{4x-3}-\sqrt{x-4}=4.$　(4)　$3x-\sqrt{x^2-2x-6}=12.$

(5)　$x=7\sqrt{2-x^2}.$　(6)　$x+\sqrt{x+5}=7.$

(7)　$\sqrt{x+7-\sqrt{5(x-2)}}=3.$　(8)　$\sqrt{13+x}+\sqrt{13-x}=6.$

(9)　$\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}=2.$　(10)　$x-\sqrt{(x-4)(5x-24)}=2.$

(11)　$\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+1}.$

(12)　$x^2+3x+3\sqrt{x^2+3x-2}=6.$

(13)　$2\sqrt{x^2-2x+1}+x^2=23+2x.$

(14)　$2x^2+6x=226-\sqrt{x^2+3x-8}.$

【提示】　變原式爲

$$2(x^2+3x-8)+\sqrt{x^2+3x-8}-210=0.$$

*第二節　簡易高次方程式

1. 純三次方程式　像$x^3=a$的形式的是純三次方程式.只須將 a 開立方,即得 x 的值;但在算術上 a 的立方根只有一數,在代數上却有三數.

例題　試解$x^3=8$.

【解】　移項　　$x^3-8=0$.

分解因式　　$(x-2)(x^2+2x+4)=0$.

命 $x-2=0$, 則 $x=2$.

命 $x^2+2x+4=0$, 則 $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2}=-1\pm\sqrt{3}\,i$.

2. 複方程式　把高次方程式中的某式看作一個一次因式,求出他的值來,再重複求解.

例題　試解$(x^2+x)^2+4(x^2+x)=12$.

【解】　移項　　$(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12=0$.

設$(x^2+x)=y$, 得　　$y^2+4y-12=0$.

解得　　$y=2$ 或 -6.

即　　$x^2+x=2$ ……………………(1),

或　　$x^2+x=-6$ ……………………(2).

就(1)解,得　　　　　　$x=1$ 或 -2.

就(2)解,得　　　　　　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{23}i}{2}$.

【注意】　n 次方程式必有 n 個根,有時缺少的是等根.

習題五十六

解下列各題的方程式:

(1)　$x^3-27=0$.　　　　(2)　$x^3+8=0$.

(3)　$x^4-13x^2+36=0$.　　　　(4)　$x^4-7x^2-8=0$.

【提示】　上二題可視作

$$(x^2)^2-13(x^2)+36=0,\quad (x^2)^2-7(x^2)-8=0.$$

(5)　$x^4+x^2+1=0$.　　　　(6)　$x^4-x^2+1=0$.

(7)　$x^6-1=0$.　　　　(8)　$x^6+1=0$.

(9)　$x^6-64=0$.　　　　(10)　$x^6-7x^3-8=0$.

(11)　$x^4+1=0$.　　　　(12)　$x^4-1=0$.

(13)　$(x^2-x)^2-8(x^2-x)=-12$.

(14)　$(x^2-2)^2=14(x^2-2)+15$.

(15)　$(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=0$.

(16)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{17}{4}$.

3. 逆係數方程式　方程式中的 n 項集於一邊,將冪順列後,若第一項與第 n 項,第二項與第 $(n-1)$ 項,……的係數都相同,叫做逆係

數方程式,可用因式分解法求他的根(若係數的絕對值相同而符號相反,亦可用此法).

例題一　試解$3x^3-7x^2-7x+3=0$.

【解】　分解因式　$(3x^3+3)-(7x^2+7x)=0$.

$3(x+1)(x^2-x+1)-7x(x+1)=0$.

$(x+1)[3(x^2-x+1)-7x]=0$.

$(x+1)(3x^2-10x+3)=0$.

$(x+1)(3x-1)(x-3)=0$.

命　$x+1=0,\quad 3x-1=0,\quad x-3=0;$

得　$x=-1,\quad x=\frac{1}{3},\quad x=3.$

例題二　試解$4x^4-4x^3-7x^2-4x+4=0$.

【解】　以x^2除各項　$4x^2-4x-7-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}=0$.

分解因式

$$4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)-7=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

設　$x+\frac{1}{x}=y\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$.

自乘　$x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2$.

移項　$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$.

以(2)、(3)代入(1)　$4(y^2-2)-4y-7=0$.

化簡　$4y^2-4y-15=0$.

$$\therefore \qquad y=\frac{4\pm\sqrt{16+240}}{8}=\frac{4\pm16}{8}$$

$$=\frac{5}{2}\text{或}-\frac{3}{2}.$$

代入(2),得　$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2};\quad x+\frac{1}{x}=-\frac{3}{2}.$

化簡,得　$2x^2-5x+2=0;\quad 2x^2+3x+2=0$

解得　$x=2,\ x=\frac{1}{2};\quad x=\frac{-3\pm\sqrt{7}i}{4}.$

4. 其他簡易高次方程式　下面再舉二個可用因式分解法解的簡易高次方程式.

例題一　試解 $2x^3-3x^2=2x-3.$

【解】　移項　$2x^3-3x^2-2x+3=0.$

分解因式　$x^2(2x-3)-(2x-3)=0.$

$(2x-3)(x^2-1)=0.$

$(2x-3)(x+1)(x-1)=0.$

命　$2x-3=0,\ x+1=0,\ x-1=0.$

得　$x=1\frac{1}{2},\quad x=-1,\quad x=1.$

例題二　試解 $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)=-8.$

【解】　變得　$[(x-1)(x-6)][(x-3)(x-4)]+8=0.$

乘算　$(\overline{x^2-7x}+6)(\overline{x^2-7x}+12)+8=0.$

$(x^2-7x)^2+18(x^2-7x)+80=0.$

解得　$(x^2-7x)=\frac{-18\pm\sqrt{324-320}}{2}$

$$=\frac{-18\pm2}{2}=-10 \text{ 或 } -8.$$

就 $x^2-7x+10=0$, 解得 $x=2$ 或 5.

就 $x^2-7x+8=0$, 解得 $x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{2}$.

習題五十七

解下列各題的方程式:

(1) $12x^3+5x^2-5x-12=0$.

(2) $7x^4-17x^3+17x-7=0$.

(3) $x^3-8x^2-8x+1=0$.

(4) $x^4+5x^3+6x^2+5x+1=0$.

(5) $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$.

(6) $x^3+x^2=4x+4$.

(7) $x^3-3x^2-28x=0$.

(8) $(x^2-6)(x-2)=3x-6$.

(9) $(3x-2)(x^2-26)=9x^2-4$.

(10) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$.

(11) $(x-3)(x+4)(x+1)(x-6)=-108$.

(12) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$.

(13) $(x^2+7x+6)(x^2+7x+12)=280$.

(14) $(x+3)(x+6)(x+8)(x+16)=1050x^2$.

【提示】 原方程式可化爲

$$(\overline{x^2+48}+19x)(\overline{x^2+48}+14x)-1050x^2=0.$$

$$(x^2+48)^2+33x(x^2+48)-784x^2=0.$$

*第三節　簡易聯立高次方程式

例題一　試解 $\begin{cases} x+y=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ x^3+y^3=28 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】　(2)÷(1)　$x^2-xy+y^2=7 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$

(1)²　$x^2+2xy+y^2=16 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$

(4)−(3)　$3xy=9 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5).$

(5)÷3　$xy=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6).$

(3)−(6)　$x^2-2xy+y^2=4.$

開方　$x-y=\pm 2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7).$

(7)的二式分別同(1)聯立,得

$$\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=4, \\ x-y=-2. \end{cases}$$

解得　$\begin{cases} x=3, \\ y=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1, \\ y=3. \end{cases}$

【別解】　(1)³　$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=64 \cdots\cdots(3).$

(3)−(2)　$3x^2y+3xy^2=36.$

化得　$xy(x+y)=12.$

以(1)代入,得　$4xy=12.$

$$\therefore \qquad xy = 3 \cdots\cdots(4).$$

(1),(4)聯立即得解,與上相同.

例題二 試解 $\begin{cases} x+y=4 \cdots\cdots(1), \\ x^5+y^5=244 \cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】 (2)÷(1) $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4=61.$

變得 $(x^4+y^4)-xy(x^2+y^2)+x^2y^2=61 \cdots\cdots(3).$

$(1)^2$ $x^2+2xy+y^2=16.$

變得 $x^2+y^2=16-2xy \cdots\cdots(4).$

$(4)^2$ $x^4+2x^2y^2+y^4=256-64xy+4x^2y^2.$

變得 $x^4+y^4=2x^2y^2-64xy+256 \cdots\cdots(5).$

以(4),(5)代入(3),得

$$(2x^2y^2-64xy+256)-xy(16-2xy)+x^2y^2=61.$$

化簡,得 $x^2y^2-16xy+39=0.$

解得 $xy=3 \cdots\cdots(6),\quad xy=13 \cdots\cdots(7).$

(1),(6)聯立,解得 $\begin{cases} x=3, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=3. \end{cases}$

(1),(7)聯立,解得 $\begin{cases} x=2+3i, \\ y=2-3i; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2-3i, \\ y=2+3i. \end{cases}$

習題五十八

解下列各題的聯立方程式:

(1) $\begin{cases} x+y=5, \\ x^3+y^3=65. \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^3-y^3=152. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=3, \\ x^5+y^5=33. \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^5-y^5=242. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=19, \\ x^4+x^2y^2+y^4=133. \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=9, \\ x^4+x^2y^2+y^4=243. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x+y=4, \\ x^4+y^4=82. \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^4+y^4=82. \end{cases}$

【提示】　(7)題仿例二求得 $x^4+y^4=2x^2y^2-64xy+256$, 代入(2)式,可求 xy 的值.(8)題亦同.

(9) $x^2y(x+y)=80$…………(1),　　$x^2y(2x-3y)=80$…………(2).

【提示】　(1)÷(2),得 $\dfrac{x+y}{2x-3y}=1$,化爲 $x=4y$;代入(1),得 y 的純四次方程式.

(10) $xy(x-y)=12$…………(1),　　$x^3-y^3=63$…………(2).

【提示】　(2)÷(1),化簡得各項全是二次的方程式,可求得 $y=4x$ 及 $x=4y$,各代入(1)求解.

(11) $x^2-2xy+y^2-1=0$………(1),　　$xy(xy+1)=6$…………(2).

【提示】　由(1)可求 $x-y$ 的值;由(2)可求 xy 的值.

*第十二章　簡易不等式

第一節　重要名詞

1. 不等式　兩個代數式的中間用＞或＜的記號連起來,表示他們不等,叫做不等式.

【例】　$a+b>0$, $x-3<7$ 等,都是不等式.

2. 恆不等式、條件不等式　不等式中的文字用任何數替代都能成立的,叫做恆不等式;所含文字必須用某種界限內的數替代,方能成立的,叫做條件不等式.

【例】　$a^2+b^2>2ab$ 是恆不等式,因爲用任何數代 a、b,都能成立;$x-3<7$ 是條件不等式,因爲 $x \geqq 10$ 時就不成立.

第二節　重要公理及定理

1. 基礎公理一　正數大於 0,負數小於 0.

2. 基礎公理二　a 比 b 大時,$a-b>0$;a 比 b 小時,$a-b<0$.

3. 加法公理　不等式的兩邊各加上等數,大的一方仍大.

4. 減法公理 不等式的兩邊各減去等數,大的一方仍大.

5. 倒減公理 不等式的兩邊各從等數減去,大的一方變小.

6. 正數乘法公理 不等式的兩邊各用同一的正數乘,大的一方仍大.

7. 正數除法公理 不等式的兩邊各用同一的正數除,大的一方仍大.

8. 累加公理 幾個不等式中,大的一方諸式的和大於小的一方諸式的和.

9. 比較公理 若$a>b$, $b>c$,則$a>c$.

10. 移項定理 移不等式中的項到另一邊,當變他的符號.

【理由】 設$a+b>c$,則$a+b-b>c-b$(減法公理).

$$\therefore\ a>c-b.$$

設$a-b>c$,則$a-b+b>c+b$(加法公理).

$$\therefore\ a>c+b.$$

11. 變號定理 不等式中各項的號若全變,則大的一方變小.

【理由】 設$a>b$,則$-b>-a$(移項定理),

$$\therefore\ -a<-b.$$

12. 負數乘法定理 不等式的兩邊各用

同一的負數乘,大的一方變小.

【理由】 設$a>b$, $m>0$(卽m爲正數),

則$ma>mb$(正數乘法公理),

$-ma<-mb$(變號定理).

$\therefore \quad (-m)a<(-m)b$.

13. **負數除法定理** 不等式的兩邊各用同一的負數除,大的一方變小.

【理由】 同上條.

第三節 重要問題舉例

1. **證恆不等式** 利用上節的公理同定理,可以證明恆不等式的成立.

例題一 設$a \neq b$,試證$a^2+b^2>2ab$.

【證】 因$a \neq b$, 故 $a-b \lessgtr 0$(基礎公理二).

卽$a-b$是正數或負數,於是他的平方必是正數.

卽 $(a-b)^2>0$, $a^2-2ab+b^2>0$.

$\therefore \quad a^2+b^2>2ab$(移項定理).

例題二 設$a \neq b$,且都是正數,試證

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

【證】 因$a \neq b$,故$\sqrt{a} \neq \sqrt{b}$,卽$\sqrt{a}-\sqrt{b}$是正

數或是負數.於是　$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$.

即　$a-2\sqrt{ab}+b>0$.

$\therefore$　$a+b>2\sqrt{ab}$(移項定理).

以 2 除,得　$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$(正數除法定理).

2.解不等式　利用上節的公理同定理,求條件不等式中的未知數應在何種界限內,才能使不等式成立,叫做解不等式.

例題一　試解 $5x-\frac{1}{4}>7+\frac{17x}{3}$.

【解】　以 12 乘　$60x-3>84+68x$(正數乘法公理).

移項　$60x-68x>84+3$(移項定理).

即　$-8x>87$.

以-8除　$x<-10\frac{7}{8}$(負數除法定理).

故知凡比 $-10\frac{7}{8}$ 小的一切數值,都能適合題中的不等式.

例題二　求適合於下列不等式中 x 的正整數值:

$$\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{3}<\frac{1}{4}(x+2)+\frac{1}{3}x<\frac{1}{2}(x-4)+3.$$

【解】　先就　$\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{3}<\frac{1}{4}(x+2)+\frac{1}{3}x$ 解:

以 12 乘　$6(x+1)+4<3(x+2)+4x$,

(正數乘法公理).

即 $6x+6+4<3x+6+4x$.

移項 $6x-3x-4x<6-6-4$(移項定理).

即 $-x<-4$.

$\therefore$ $x>4$(變號定理).

次就 $\frac{1}{4}(x+2)+\frac{1}{3}x<\frac{1}{2}(x-4)+3$ 解:

以12乘 $3(x+2)+4x<6(x-4)+36$,

(正數乘法公理).

即 $3x+6+4x<6x-24+36$.

移項 $3x+4x-6x<36-24-6$(移項定理).

即 $x<6$.

於是 x 的正整數值僅有 5 一種.

習題五十九

(1) 設 $a \neq b \neq c$, 試證 $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$.

【提示】 仿第三節 1 例一,可得同類的三式,再利用累加定理同正數除法定理,即得.

(2) 設 $a \neq b$, 且同號,試證 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$.

【提示】 化第三節 1 例一的恆不等式即得.

(3) 設 $a \neq b$, 而 $a+b$ 爲正數,試證 $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

【提示】 仿第三節 1 例一得 $a^2-2ab+b^2>0$, 兩邊各加 ab, 以 $a+b$ 乘,再以 a^2b^2 除,即得.

(4) 設 $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$, 試證 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$.

【提示】 變題設爲 $ad \neq bc$,仿第三節 1 例一得 $a^2d^2+b^2c^2>2abcd$. 兩邊各加 $a^2c^2+b^2d^2$,分解因式卽得.

試解下列的不等式:

(5) $2x-5>7$.

(6) $3-4x<5$.

(7) $5x-8<3x+2$.

(8) $\frac{1}{15}x<\frac{7}{3}$.

(9) $x-\frac{5}{7}>\frac{2}{9}x+2$.

(10) $\frac{5}{2}x-4<7-\frac{1}{3}x$.

(11) $\frac{3x}{8}-\frac{2x-1}{12}>\frac{3x+1}{6}-\frac{5}{4}$.

(12) 求適合於下列二個不等式中 x 的正整數值:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x>\frac{x}{5}+1 \\ \frac{7}{5}x-1<\frac{2}{3}x+2. \end{cases}$$

第十三章　函數圖解

第一節　重要名詞

1. 常數、變數　前述的各種數,不論已知數或未知數,在同一問題中常固定不變,叫做常數.若在一問題中,一數可以變動不居的,叫做變數.

【例一】　某人現有國幣10元,逐日收入2元,設 x 日後此人應有國幣 y 元,則得等式

$$y=2x+10.$$

在這個等式中,x 同 y 的關係如下:

若 $x=$	……	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	……
則 $y=$	……	2	4	6	8	10	12	14	16	18	…….

故 x 同 y 都是變數,而 2 同 10 是常數.

【例二】　某工廠工人每名每日織布 5 丈,x 人於 y 日內共織布 $5xy$ 丈.則人數 x,日數 y 同布的丈數 $5xy$ 都是變數,祇有 5 是常數.

2. 函數(應變數)、自變數　在有相互關係的二數中,若一數變,則他數跟他變;若一數定,則他數跟他定;這時稱自變、自定的一數為自

變數,跟了自變數變或定的他數爲函數,或應變數.

通常用 x 表自變數,y 表函數.但 x 的函數亦可用 $f(x)$ 來表.

【例一】　若行路的速度一定,則所行路的長短,是所行時刻的函數.又所行時刻也是所行路長的函數.

【例二】　在 $y=2x+10$ 中,可把 x 視作自變數,而把 y 視作 x 的函數.因爲 x 的值若變或定,則 y 的值也就跟了他變或定.

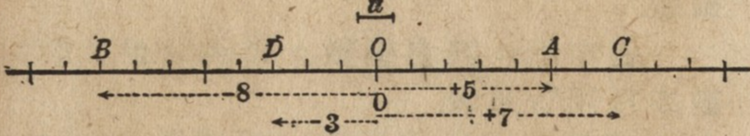
3. 數尺,原點　函數變遷的情狀,可用圖形表出,惟應先述用點表數的方法.

作一直線,在其中定一 0 點,稱爲原點.另定一單位長的線段 u,用 u 的長量這直線,若從 0 起向右量,所得 u 的倍數表正數;若從 0 起向左量,所得 u 的倍數表負數:這直線叫做數尺.

在數尺上的任何一點,都可以表一個數.反之,凡一數,都可以在數尺上取出一點來表他.

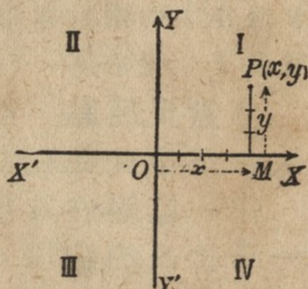
【例】　如下圖, $+5$ 以數尺上的 A 點表, -8 以數尺上的 B 點表,數尺上的 C 點表 $+7$, D 點表 -3,

O 點表 0.



4. 坐標、軸、象限 用數尺,只能用數表一直線上的諸點,若欲用數表一平面上的諸點,當用坐標.

如右圖,在一平面上取縱、橫互相垂直的二直線 $X'X$、$Y'Y$, 命其交點爲 O.這 O 點亦稱原點, $X'X$ 叫做橫軸或 x 軸, $Y'Y$ 叫做縱軸或 y 軸.二軸分平面爲四部分,各部都叫象限,依圖中所記(I)、(II)、………分別叫做第一、第二、………象限.



橫軸上的點,在 O 右的表正數,在 O 左的表負數,同數尺一樣;縱軸上的點,在 O 上的表正數,在 O 下的表負數.不在二軸上的點,如 P, 可從這點引橫軸的垂線 PM, 量從 O 到垂足 M 的距離,向右爲正,向左爲負,得數以 x 表;再

量從M到P的距離,向上爲正,向下爲負,得數以y表;把這二數記作(x, y),叫做P點的坐標.x是P的橫坐標,y是P的縱坐標.

【例一】　如右圖,P點的坐標爲$(3, 2)$.

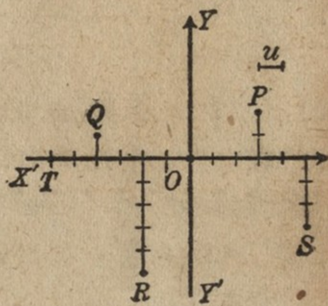
【例二】　Q點的坐標爲$(-4, 1)$.

【例三】　R點的坐標爲$(-2, -5)$.

【例四】　點$(5, -3)$爲S.

【例五】　點$(-6, 0)$爲T.

【例六】　點$(0, 0)$爲O.



第二節　一次函數的圖形

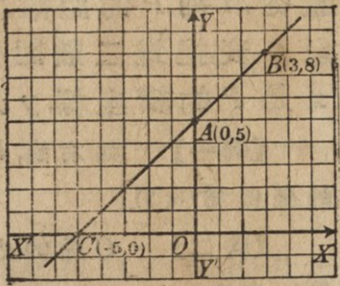
x的一次式,可以稱做x的一次函數.欲畫一次函數的圖形,可任意假定x的值,作橫坐標,再求出這函數的值,作縱坐標,在圖中定出一點,作記號"×"表之;再用同法定出第二點;然後過這兩點作直線即得.

例題一　試畫函數$x+5$的圖形.

【解】　設$y=x+5$.

命$x=0$,則$y=5$;

命 $x=3$, 則 $y=8$.



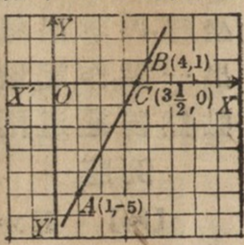
在圖中定出二點 $A(0,5)$, $B(3,8)$, 過這二點作直線,卽得所求的圖形.

【理由】 一次函數的圖形總是直線,他的理由應在解析幾何學中證明,不在本書範圍以內.但若用實驗的方法,也能知道這定理的眞確:設順次用各數表 x 的值,逐一求出函數 $x+5$ (卽 y) 的值,得下表:

x	……	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	……
y	……	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	……

從上圖知點 $(-5,0)$、$(-4,1)$、$(-3,2)$、………$(4,9)$、$(5,10)$、………都在求得的一直線上.

根據初等幾何學,知通過二點的直線必有一條,且祇有一條,所以我們只須定出直線中的二點,已經可以畫出全部的圖形了.



例題二. 試畫函數 $2x-7$ 的圖形.

【解】 設 $y=2x-7$,

命 $x=1$, 則 $y=-5$;

命 $x=4$, 則 $y=1$.

在圖中定出二點 $A(1,-5)$、$B(4,1)$, 過這二點作一直線,即得所求的圖形.

第三節 一次方程式的圖解

1. 一元一次方程式 用圖形可以解一元一次方程式,其步驟如下:

I. 整理原方程式,使化為 $ax+b=0$ 的形狀.

II. 畫出函數 $ax+b$ 的圖形,使與橫軸相交.

III. 圖形與橫軸的交點的橫坐標,就是原方程式中 x 的值.

例題一 用圖解方程式 $x+5=0$.

【解】 畫出函數 $x+5$ 的圖形(見上節例題一),與橫軸交於 C 點,這 C 點的橫坐標是 -5, 故所求的根是 -5.

【理由】 據上節例題一,知圖形中的任何一點,其橫坐標若表 x 的值,則縱坐標必表 $x+5$ 的值.今欲解 $x+5=0$,就是要求 x 是幾的時候,$x+5$ 才是 0.換句話說,就是橫坐標是幾,那末縱坐標是 0.因為縱坐標是 0 的點必在橫軸上,所以圖形與橫軸的交點的橫坐標,就是 x 的值.

例題二 用圖解方程式$2x-7=0$.

【解】 畫出函數$2x-7$的圖形(見上節例題二),與橫軸交於C點,這C點的橫坐標是$3\frac{1}{2}$,故所求的根是$3\frac{1}{2}$.

2.二元聯立一次方程式 步驟如下:

I. 把兩方程式各化做$y=?x+?$的形狀.

II. 畫出函數$?x+?$的圖形,每式一個,得兩個圖形,通常可相交於一點.

III. 兩個圖形的交點的橫坐標是x的值,縱坐標是y的值.

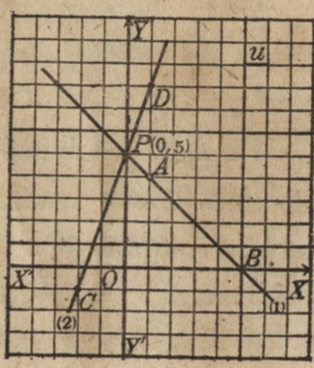
例題一 用圖解 $\begin{cases} x+y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ 3x-y+5=0 \cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】 化(1)為 $y=5-x$,

命 $x=1$, 則 $y=4$;

命 $x=5$, 則 $y=0$.

在圖中定二點$A(1,4)$、$B(5,0)$,得圖形(1).



化(2)為 $y=3x+5$,

命 $x=-2$, 則 $y=-1$;

命 $x=1$, 則 $y=8$.

在圖中定二點$C(-2,-1)$、$D(1,8)$,得圖形(2).

兩形相交於P點,這P點的橫坐標爲0,縱坐標爲5,故得所求的根$x=0, y=5$.

【理由】 仿上節例題一,知圖形(1)中的任何一點,其横坐標若表x的值,則縱坐標必表y(即$5-x$)的值.故圖形(1)中的各點的坐標,都能適合於方程式(1).

同樣,知圖形(2)中的各點的坐標,都能適合於方程式(2).

於是兩個圖形的交點P的坐標$x=0, y=5$必能同時適合於兩個方程式.

例題二 用圖解 $\begin{cases} x-4y=11 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ 2x+3y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

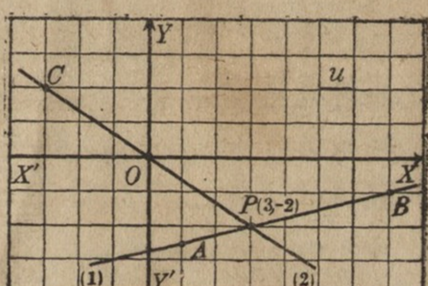
【解】 化(1)爲 $y=\dfrac{x-11}{4}$,

命 $x=1$, 則 $y=-2\dfrac{1}{2}$;

命 $x=7$,

則 $y=-1$.

在右圖中定$A\left(1,-2\dfrac{1}{2}\right)$、$B(7,-1)$二點(註),得圖形(1).



化(2)爲

$$y=-\frac{2}{3}x,$$

命 $x=-3$, 則 $y=2$;

命 $x=0$, 則 $y=0$.

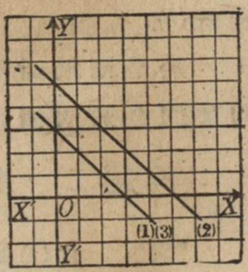
在圖中定 $C(-3,2)$、$O(0,0)$ 二點,得圖形(2).

兩形的交點 P 的橫坐標為 3,縱坐標為 -2,故得所求的根 $x=3, y=-2$.

(註) 作圖時,可以任意取一格、二格或三格、………作一單位.本題的 u 取一格.

【注意】 在代數解法中,有時遇到如

$$\begin{cases} x+y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x+y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$



的方程式,不能求得他的根.如用圖形解,則所得的兩個圖形是兩條平行線,不能相交,即不能求得他們的交點的坐標.

又如方程式

$$\begin{cases} x+\ y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x+2y=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3), \end{cases}$$

他的兩個圖形是同一直線,線中各點,都可以認為是二線的交點,所以交點的坐標沒有一定,即原方程式沒有根.

習題六十

用圖解求下列一元一次方程式的根:

(1) $5x-12=0.$　　(2) $2x=-6.$

(3) $3x=-7.$　　(4) $x+15=0.$

(5) $8x-7=6x+1.$　　(6) $2(x-3)=0.$

用圖解求下列二元聯立一次方程式的根:

(7) $\begin{cases} x+y=7, \\ x-y=3. \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} x+y=1, \\ 2x-y=-13. \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x-y=0, \\ 6x-5y=1. \end{cases}$　　(10) $\begin{cases} 2x+y=6, \\ x+2y=3. \end{cases}$

(11) $\begin{cases} 7x-3y=24, \\ 3x+2y=-16 \end{cases}$　　(12) $\begin{cases} 4x+3y=7, \\ -2x+y=4. \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x+y=0, \\ x-y=0. \end{cases}$　　(14) $\begin{cases} 9x-4y=-1, \\ x+2y=\frac{7}{3}. \end{cases}$

(15) $\begin{cases} 7y-9x=15, \\ 3y-x=-5. \end{cases}$　　(16) $\begin{cases} x-4y=5, \\ 3x+7y=-\frac{27}{2}. \end{cases}$

第十四章　開方

第一節　開平方

代數式的開平方同算術中數的開平方法類似,現在僅就開得盡的問題,述其步驟如下:

I. 把代數式中的各項依某文字的冪順列.

II. 求出首項的平方根,就是所求的根的首項.

III. 從原式減去根的首項的平方,得第一餘式.

IV. 2倍根的首項,來除第一餘式,得根的次項.

V. 2倍根的首項,加這次項,用次項乘,從第一餘式內減去,得第二餘式.

VI. 2倍已得的首、次二項,仿*IV*求根的第三項;以下仿*V*繼續做下去,直到開盡為止.

例題一　求 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ 的平方根.

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & a+b+c \\ \hline
 & a^2+2ab+2ca+b^2+2bc+c^2 \\
 & a^2 \\ \hline
2a+b & 2ab+2ca+b^2+2bc+c^2 \\
 & 2ab \qquad +b^2 \\ \hline
2a+2b+c & 2ca \qquad +2bc+c^2 \\
 & 2ca \qquad +2bc+c^2 \\ \hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

【理由】 因 $(a+b)^2 =a^2+2ab+b^2$

$$=a^2+b(2a+b);$$

$$(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2ca+2bc+c^2$$

$$=a^2+b(2a+b)+c(2a+2b+c);\cdots\cdots\cdots;$$

$$(a+b+c+\cdots\cdots+n)^2=a^2+b(2a+b)+c(2a+2b+c)$$

$$+\cdots\cdots\cdots+n(2a+2b+2c+\cdots\cdots\cdots+n).$$

故知平方根是 n 項的,冪可分爲 n 部:第一部是根的首項的平方;第二部是根的首項的 2 倍加次項,再乘次項;第三部是……;第 n 部是前面 $(n-1)$ 項和的 2 倍加第 n 項,再乘第 n 項.

例題二 求 $4x^4-12x^3+25x^2-24x+16$ 的平方根.

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2-3x+4 \\
\hline
 & 4x^4-12x^3+25x^2-24x+16 \\
 & 4x^4 \\
\hline
4x^2-3x & -12x^3+25x^2-24x+16 \\
 & -12x^3+9x^2 \\
\hline
4x^2-6x+4 & 16x^2-24x+16 \\
 & 16x^2-24x+16 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

特例 有缺冪的應預留空位.

例題 求$x^6+4x^5-10x^3+4x+1$的平方根.

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3+2x^2-2x-1 \\
\hline
 & x^6+4x^5\qquad-10x^3\qquad+4x+1 \\
 & x^6 \\
\hline
2x^3+2x^2 & 4x^5\qquad-10x^3\qquad+4x+1 \\
 & 4x^5+4x^4 \\
\hline
2x^3+4x^2-2x & -4x^4-10x^3\qquad+4x+1 \\
 & -4x^4-8x^3+4x^2 \\
\hline
2x^3+4x^2-4x-1 & -2x^3-4x^2+4x+1 \\
 & -2x^3-4x^2+4x+1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

【注意一】 實際代數式的平方根除照上法求

得的一個外,還有符號全反的一個根.

【注意二】　三項式的開平方,可用因式分解法.

*第二節　開立方

代數式的開立方,也同算術類似,現在也祇就開得盡的問題,述其步驟如下:

I.　依式中某文字的冪順列.

II.　求出首項的立方根,就是所求的根的首項.

III.　從原式減去根的首項的立方,得第一餘式.

VI.　3 倍根的首項的平方,來除第一餘式,得根的次項.

V.　3 倍根的首項的平方,加首、次二項積的 3 倍,再加次項的平方,然後乘以次項,從第一餘式減去,得第二餘式.

VI.　3 倍已得的首、次二項和的平方,仿 *IV* 求根的第三項,以下仿 *V* 繼續做下去,直到開盡為止.

例題一　求 $a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2+3c^2a+3ca^2+6abc$ 的立方根,

【解】 $a+b+c$

$$a^3+3a^2b+3ca^2+3ab^2+6abc+3c^2a+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$$

$$a^3$$

$$\begin{array}{l|l}
3a^2+3ab+b^2 & 3a^2b+3ca^2+3ab^2+6abc+3c^2a+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3 \\
 & 3a^2b\qquad +3ab^2 \qquad\qquad +b^3 \\
\hline
3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2 & 3ca^2 \qquad +6abc+3c^2a+3b^2c+3bc^2+c^3 \\
=3a^2+6ab+3b^2+3ca+3bc+c^2 & 3ca^2 \qquad +6abc+3c^2a+3b^2c+3bc^2+c^3 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

【理由】 因 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$=a^3+b(3a^2+3ab+b^2);$$

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3ca^2+6abc+3b^2c+3c^2a+3bc^2+c^3$$

$$=a^3+b(3a^2+3ab+b^2)+c[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2];$$

....;

$$(a+b+c+\cdots\cdots+n)^3=a^3+b(3a^2+3ab+b^2)+c[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]$$

$$+\cdots\cdots+n[3(a+b+c+\cdots)^2+3(a+b+c+\cdots)n+n^2].$$

故知立方根是 n 項的,冪可分爲 n 部:第一部是根的首項的立方;第二部是根的首項平方 3 倍,加首、次二項積的 3 倍,再加次項的平方,乘以次項;第三部是………;第 n 部是前面 $(n-1)$ 項和的平方 3 倍,加前面 $(n-1)$ 項的和乘第 n 項的 3 倍,再加第 n 項的平方,乘以第 n 項.

例題二　求 $x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8$ 的立方根.

【解】

$$
\begin{array}{l|l}
 & \quad x^2-\ x\ +2 \\
\hline
 & x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8 \\
 & x^6 \\
\cline{2-2}
3(x^2)^2+3x^2(-x)+(-x)^2 & -3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8 \\
=3x^4-3x^3+x^2 & -3x^5+3x^4-\ \ x^3 \\
\cline{2-2}
3(x^2-x)+3(x^2-x)\times 2+2^2 & 6x^4-12x^3+18x^2-12x+8 \\
=3x^4-6x^3+9x^2-6x+4 & 6x^4-12x^3+18x^2-12x+8 \\
\cline{2-2}
 & \hfill 0
\end{array}
$$

【注意一】　實際代數式的立方根除照上法求得的一個外,還有二個虛數的根,現在暫且不論.

【注意二】　求四項式的立方根,可用因式分解法.

習 題 六 十 一

求下列各題的平方根:

(1) $x^4-2x^3+7x^2-9x+9$. (2) x^4-4x^3+8x+4.

(3) $9x^4+12x^3-2x^2-4x+1$.

(4) $x^4-4x^3y+10x^2y^2-12xy^3+9y^4$.

(5) $x^6-12x^5+60x^4-160x^3+240x^2-192x+64$.

(6) $x^6-22x^4+34x^3+121x^2-374x+289$.

求下列各題的立方根:

(7) $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1$.

(8) $8x^6+48x^5+60x^4-80x^3-90x^2+108x-27$.

(9) $8x^6-12x^5+18x^4-13x^3+9x^2-3x+1$.

(10) $x^6-3ax^5+5a^3x^3-3a^5x-a^6$.

(11) 求 $16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4$ 的四次根.

【提示】 先開平方,把所得的平方根再開平方.

(12) 求 $729x^6-1458x^5+1215x^4-540x^3+135x^2-18x+1$ 的六次根.

【提示】 先開平方,把所得的平方根再開立方.

第十五章　比、比例

第一節　重要名詞

1. 比、前項、後項　a 是 b 的幾倍或幾分之幾,這倍數或分數叫做 a 對於 b 的比,記作 $a:b$ 或 $\frac{a}{b}$. a 是前項,b 是後項,同算術中的完全一樣.

2. 比例、內項、外項　若 $a:b=c:d$, 就說 a、b、c、d 四數成比例. a 同 d 是外項,b 同 c 是內項.

3. 比例中項、比例第三項　若 $a:b=b:c$, 那末 b 叫做是 a、c 的比例中項; c 叫做是 a、b 的比例第三項.

第二節　重要定理

1. 定比定理　比的兩項各乘以同數,或除以同數,比值不變.

【公式】　$a:b=ma:mb$,　$a:b=\frac{a}{m}:\frac{b}{m}$.

【理由】　比的前項就是被除數,後項就是除數,根據定商定律,知道用同數乘或除,他們的商不變.

2. 連比定理　諸比相等時,諸前項的和

比諸後項的和等於原有的諸比.

【公式】 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$

則 $\frac{a+c+e+g+\cdots\cdots}{b+d+f+h+\cdots\cdots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{c}{f}=\frac{g}{h}=\cdots\cdots\cdots\cdots.$

【理由】 設以 r 表原有諸比的值,得

$a=br$(以 b 乘 $\frac{a}{b}=r$,即得),$c=dr, e=fr, g=hr,\cdots\cdots\cdots\cdots.$

$$\therefore \frac{a+c+e+g+\cdots\cdots}{b+d+f+h+\cdots\cdots}=\frac{br+dr+fr+hr+\cdots\cdots}{b+d+g+h+\cdots\cdots}$$

$$=\frac{(b+d+g+h+\cdots\cdots)r}{b+d+g+h+\cdots}=r=\text{原有諸比}.$$

【注意】 用 r 表原有諸比的值,可以利用他來證明等式,這種方法很重要.

3. 等積定理 比例式中二外項的積等於二內項的積.

【公式】 若 $a:b=c:d$, 則 $ad=bc$.

【理由】 因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 以 bd 乘兩邊,得 $ad=bc$.

4. 逆等積定理 若 a、d 的積等於 b、c 的積,則四數成比例,可以 a、d 作二個外項,b、c 作二個內項.

【公式】 若 $ad=bc$, 則 $a:b=c:d$,

【理由】 因 $ad=bc$, 以 bd 除兩邊,得 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

5. 反比定理 兩比相等時,他們的反比

也相等.

【公式】　若 $a:b=c:d$, 則 $b:a=d:c$.

【理由】　因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 故 $1\div\frac{a}{b}=1\div\frac{c}{d}$, 即 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.

6. 更迭定理　把比例式的兩外項對調,或把兩內項對調,所得的比例式仍能成立.

【公式】　若 $a:b=c:d$, 則 $d:b=c:a$, $a:c=b:d$.

【理由】　因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 以 $\frac{d}{a}$ 乘兩邊,得 $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$;

以 $\frac{b}{c}$ 乘兩邊,得 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

7. 合比定理　兩比相等時,第一比中兩項的和比後項,等於第二比中兩項的和比後項.

【公式】　若 $a:b=c:d$, 則 $a+b:b=c+d:d$.

【理由】　因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 兩邊各加 1,得

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1,$$

即
$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

【注意】　$a:a+b=c:c+d$ 亦可,應先利用反比定理證.

8. 分比定理　兩比相等時,第一比中兩項的差比後項,等於第二比中兩項的差比後

項.

【公式】 若 $a:b=c:d$, 則 $a-b:b=c-d:d$.

【理由】 因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 兩邊各減去 1,得

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1,$$

卽
$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

【注意】 $a:a-b=c:c-d$ 亦可.

9. 分合定理 兩比相等時,第一比中兩項的和比差,等於第二比中兩項的和比差

【公式】 若 $a:b=c:d$,

則 $a+b:a-b=c+d:c-d$.

【理由】 根據合比定理,知 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\cdots\cdots(1)$.

根據分比定理,知 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\cdots\cdots(2)$.

(1)÷(2), 得 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

第三節 重要問題舉例

1. 求比值的問題 求兩個代數式的比值,實際就是把分式化簡;又求方程式中兩個未知數 x、y 的比值,須先求得 $?x=?y$. 各舉一例於下:

例題一 求 $a^2-b^2:a^2-2ab+b^2$ 的比值.

【解】 $a^2-b^2:a^2-2ab+b^2=\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$

$$=\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}$$

$$=\frac{a+b}{a-b}.$$

例題二 從 $x^2+2y^2=3xy$ 求 $x:y$ 的值.

【解】 移項 $x^2-3xy+2y^2=0.$

分解因數 $(x-y)(x-2y)=0.$

命 $x-y=0$, 則 $x=y$, 以 y 除得 $\dfrac{x}{y}=1.$

命 $x-2y=0$, 則 $x=2y$, 以 y 除得 $\dfrac{x}{y}=2.$

2. 求比例的未知數 根據等積定理,可以求比例式中的未知數,同算術中的解比例式一樣.

例題一 $a+b:a-b=a^2+2ab+b^2:x$, 求 x 的值.

【解】 根據等積定理,知

$$(a+b)x=(a-b)(a^2+2ab+b^2),$$

$$\therefore\quad x=\frac{(a-b)(a^2+2ab+b^2)}{a+b}=\frac{(a-b)(a+b)^2}{a+b}$$

$$=(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

例題二 $a^2+2ab+b^2:x=x:a^2-2ab+b^2$,

求 x 的值.

【解】 根據等積定理,知

$$x^2=(a^2+2ab+b^2)(a^2-2ab+b^2)$$
$$=(a+b)^2(a-b)^2=[(a+b)(a-b)]^2$$
$$=(a^2-b^2)^2.$$

開平方,得 $x=a^2-b^2$, 或 $x=-a^2+b^2$.

習題六十二

求下列各題中的比值:

(1) $x^3-y^3:x^2-y^2$.　　(2) $x^2+5x+6:x^2+4x+4$.

(3) $\dfrac{1}{x+y}:\dfrac{1}{x^3+y^3}$.

(4) $\dfrac{1}{x^4+x^2y^2+y^4}:\dfrac{1}{x^3-y^3}$.

求下列各式中的 x 同 y 的比:

(5) $3x+5y=2x-y$.　　(6) $4x^2-5xy+y^2=0$.

(7) $\dfrac{x}{5x+6y}=\dfrac{y}{x+6y}$.　　(8) $\dfrac{y-x}{y+x}=\dfrac{4x-y}{6x-y}$.

求下列比例式中的 x:

(9) $(a-b)^2:a^3-b^3=a^2-b^2:x$.

(10) $a+b:x=x:a-b$.

(11) $1:x^2=x^2:64$.

(12) $x+4:x+2=x+8:x+5$.

(13) $3x+2:x+7=9x-2:5x+8$.

(14) $x^2+x+1:62(x+1)=x^2-x+1:63(x-1)$.

3. 等式的證明 利用上節的定理,可證明比例式或等式.

例題一 設 $a:b=b:c=c:d$, 試證

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd}=\frac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2}.$$

【證】 若 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=r$,

應用定比定理,得 $\frac{a^2}{ab}=\frac{b^2}{bc}=\frac{c^2}{cd}=r$.

應用連比定理,得 $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd}=r$ ……………………(1).

仿上法,可得 $\frac{ab}{b^2}=\frac{bc}{c^2}=\frac{cd}{d^2}=r$,

$\frac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2}=r$ ……………………(2).

比較(1),(2),得 $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd}=\frac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2}$.

例題二 設 $a:b=c:d$, 試證

$$a^2+ab:c^2+cd=a^2-2ab:c^2-2cd.$$

【證】 因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

各加 1, 得 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ ……………………(1).

各減 2, 得 $\frac{a-2b}{b}=\frac{c-2d}{d}$ ……………………(2).

(1)÷(2) $$\frac{a+b}{a-2b}=\frac{c+d}{c-2d}.$$

根據定比定理,左邊兩項各用 a 乘;右邊兩項各用 c 乘,得 $$\frac{a^2+ab}{a^2-2ab}=\frac{c^2+cd}{c^2-2cd}.$$

根據更迭定理,得 $$\frac{a^2+ab}{c^2+cd}=\frac{a^2-2ab}{c^2-2cd}.$$

即 $$a^2+ab:c^2+cd=a^2-2ab:c^2-2cd.$$

習題六十三

(1) 設 $a:d=b:e=c:f$, l、m、n 爲任意的數,試證
$$a+b+c:d+e+f=la+mb+nc:ld+me+nf.$$

【提示】 以 r 表原有的各比,得 $a=dr$, $b=er$, $c=fr$, 於是可證等式兩邊的比都等於 r,下二題仿此.

(2) 設 $a:d=b:e=c:f$,試證
$$a+b+c:d+e+f$$
$$=\sqrt{la^2+mb^2+nc^2}:\sqrt{ld^2+me^2+nf^2}.$$

(3) 設 $l:a-b=m:b-c=n:c-a$,試證
$$l+m+n=0.$$

(4) 設 $ab=cd$, $be=df$,試證 $a:c=e:f$.

【提示】 根據逆等積定理,得二個比例式,比較一下即得.

設 $a:b=c:d$,試證下列各題:

(5) $ab+cd:ab-cd=a^2+c^2:a^2-c^2$.

【提示】 以 $\frac{a}{c}$ 乘 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$,再應用分合定理.

(6) $la+mb:pa+qb=lc+md:pc+qd$.

【提示】 以 l 乘原式,加 m 得第一式;以 p 乘原式,加 q 得第二式;兩式相除即得.

(7) $a:a+b=a+c:a+b+c+d$.

【提示】 由合比定理,得 $a:a+b=c:c+d$,再順次應用更迭定理同合比定理.

(8) $a:\sqrt{a^2+b^2}=c:\sqrt{c^2+d^2}$.

【提示】 自乘後,應用合比定理,再開平方.

(9) $a^2+c^2:b^2+d^2=c^2:d^2$.

(10) $a^2+c^2:ab+cd=ab+cd:b^2+d^2$.

*第十六章 指數、對數

第一節 關於指數的重要公式

關於指數的重要定律已散見前面各章，現在把他們彙集起來，得下面的幾個公式：

從第四章第六節，得

1. 冪的積 $a^m a^n = a^{m+n}$ ……………………(1)

（式中的 m、n 必須是正整數，以下諸式亦然。）

從第四章第七節，得

2. 冪的商 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\,(m>n)$ ……………………(2).

$\dfrac{a^m}{a^m} = 1$ ……………………(3).

從第九章第一節，得

$\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}\,(m<n)$ ……………………(4).

從第六章第一節，得

3. 冪的冪 $(a^m)^n = a^{mn}$. ……………………(5).

從第十四章，得

4. 冪的根 $\sqrt[n]{a^m} = a^{m\div n}$（$m$ 是 n 的倍數）……(6).

5. 根的冪 $(\sqrt[n]{a})^m = a^{m\div n}$（同上）……………………(7).

從第六章第一節，得

6. 積的冪 $(abc\cdots\cdots)^m=a^mb^mc^m\cdots\cdots,\cdots\cdots\cdots\cdots(8).$

7. 商的冪 $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}\cdots\cdots\cdots\cdots(9).$

從第十章第二節,得

8. 積的根 $\sqrt[n]{abc\cdots\cdots}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\cdots\cdots,\cdots\cdots(10).$

9. 商的根 $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\cdots\cdots\cdots\cdots(11).$

第二節 特殊的指數

上節許多公式中的指數,都限於正整數,並且有時須規定m同n的大小,或m是n的倍數,不免範圍太狹;於是數學家另創下列的三種指數,使他的範圍推廣,將來有極大的用途.

1. 零指數 不論何數,他的指數若是0,那末他的值一定是1.

【理由】 據公式(2),知 $\frac{a^m}{a^m}=a^{m-m}=a^0,$

據公式(3),知 $\frac{a^m}{a^m}=1,$

$\therefore$ $a^0=1\cdots\cdots\cdots\cdots(12).$

2. 負指數 $-m$次冪的意義,就是m次冪的倒數.

【理由】 由公式(2),得 $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

設 $n=0$, 則 $a^n=a^0=1$,

$$\therefore \quad \frac{1}{a^m}=a^{-m},$$

即 $$a^{-m}=\frac{1}{a^m}\cdots\cdots\cdots\cdots(13).$$

3. 分指數 $\frac{m}{n}$次冪的意義,就是m次冪的n次根,或n次根的m次冪.

【理由】 若公式(6)、(7)的m不成n的倍數,那末$m\div n$是一個分數$\frac{m}{n}$.

故 $$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m\cdots\cdots\cdots\cdots(14).$$

第三節 關於指數的重要計算

1. 特殊指數的初步應用 創立特殊的指數以後,第一節的公式除(8)到(11)四個外,其餘只須(1)、(5)二式,已經足夠.凡求冪的商,冪的根或根的冪,都可應用這二式求出來.

例題一 $\frac{a^5}{a^3}=?$

【解】 $\frac{a^5}{a^3}=a^5\times\frac{1}{a^3}=a^5\times a^{-3}=a^{5+(-3)}=a^2$.

例題二 $\frac{a^3}{a^3}=?$

【解】 $\frac{a^3}{a^3}=a^3\times\frac{1}{a^3}=a^3\times a^{-3}=a^{3+(-3)}=a^0=1.$

例題三 $\frac{a^3}{a^5}=?$

【解】 $\frac{a^3}{a^5}=a^3\times\frac{1}{a^5}=a^3\times a^{-5}=a^{3+(-5)}=a^{-2}=\frac{1}{a^2}.$

【注意】 上列三例本來應該應用公式(2),(3),(4)解,現在有了零指數同負指數,就可用公式(1)解.

例題四 $\sqrt[3]{a^6}=?$

【解】 $\sqrt[3]{a^6}=(a^6)^{\frac{1}{3}}=a^{6\times\frac{1}{3}}=a^2,$

或 $\sqrt[3]{a^6}=a^{\frac{6}{3}}=a^2.$

例題五 $(\sqrt[3]{a})^6=?$

【解】 $(\sqrt[3]{a})^6=(a^{\frac{1}{3}})^6=a^{\frac{1}{3}\times 6}=a^2.$

或 $(\sqrt[3]{a})^6=a^{\frac{6}{3}}=a^2.$

【注意】 上列二例本來應該應用公式(6),(7)解,現在有了分指數,就可用公式(5)解.

2. 特殊指數式的化簡 數字或代數式中含特殊指數的,可應用上節公式,把他化得簡單.

例題一 化簡 $25^{\frac{1}{2}}, 3^{-2}, 64^{-\frac{2}{3}}, \left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}, 81^{0.25}$.

【解】 $25^{\frac{1}{2}}=\sqrt{25}=5,\quad 3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9},$

$$64^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{64^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{(\sqrt[3]{64})^2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16},$$

$$\left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4}{25}}\right)^3}=\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^3}$$

$$=\frac{1}{\frac{8}{125}}=\frac{125}{8}=15\frac{5}{8}.$$

$$81^{0.25}=81^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{81}=3.$$

例題二　化簡 $a^{-3}, a^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{a^{-3}}, \sqrt{a^{-4}}$.

【解】　$a^{-3}=\frac{1}{a^3}$,　　　$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$,

$$\sqrt[3]{a^{-3}}=a^{\frac{-3}{3}}=a^{-1}=\frac{1}{a},$$

$$\sqrt{a^{-4}}=a^{\frac{-4}{2}}=a^{-2}=\frac{1}{a^2}.$$

3. 特殊指數式的積、商、冪、根　舉例如下:

例題一　$a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{3}{4}}=?$

【解】　原式 $=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}=a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{7}{12}}c^{\frac{5}{4}}$.

例題二　$x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{2}{3}}\div x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}=?$

【解】　原式 $=x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{2}}=x^{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$.

例題三　$\left(a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{5}}\right)^2=?$

【解】　原式 $=(a^{-\frac{1}{2}})^2(b^{\frac{2}{5}})^2=a^{-\frac{1}{2}\times 2}b^{\frac{2}{5}\times 2}=a^{-1}b^{\frac{4}{5}}$.

例題四　$\sqrt[3]{x^{-3}y^3z^{\frac{1}{2}}}=?$

【解】 原式$=\sqrt[3]{x^{-3}}\sqrt[3]{y^3}\sqrt[3]{z^{\frac{1}{2}}}=x^{\frac{-3}{3}}y^{\frac{3}{3}}z^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=x^{-1}yz^{\frac{1}{6}}$。

例題五 $(x+x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}-x^{-1})=?$

【解】

$$\begin{array}{l}
x+x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\\
x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}-x^{-1}\\
\hline
x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+1\\
\qquad x^{\frac{2}{3}}+1+x^{-\frac{2}{3}}\\
\qquad\quad -1-x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{4}{3}}\\
\hline
x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}+1 \qquad -x^{-\frac{4}{3}}
\end{array}$$

例題六 $(a^{\frac{1}{2}}-3a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+3a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{2}})$

$\div(a^{\frac{1}{3}}-2a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{6}}+b^{-\frac{1}{3}})=?$

【解】

$$\begin{array}{r|l}
 & a^{\frac{1}{6}}-b^{-\frac{1}{6}}\\
\cline{2-2}
a^{\frac{1}{3}}-2a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{6}}+b^{-\frac{1}{3}} & a^{\frac{1}{2}}-3a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+3a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{2}}\\
 & a^{\frac{1}{2}}-2a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}\\
\cline{2-2}
 & -a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+2a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{2}}\\
 & -a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+2a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{2}}\\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

4.解含特殊指數的方程式 含特殊指數的方程式,有時試把他化做二次方程式的形式來解.

例題　試解 $x^{\frac{1}{3}}-5x^{\frac{1}{6}}+4=0$.

【解】　原方程式為　$(x^{\frac{1}{6}})^2-5(x^{\frac{1}{6}})+4=0$.

解得　$x^{\frac{1}{6}}=1$,　或 $x^{\frac{1}{6}}=4$.

即　$\sqrt[6]{x}=1$,　或 $\sqrt[6]{x}=4$.

求 6 次冪,得　$x=1$,　或 $x=4096$.

有時須看作是分式方程式,化整後再用上法解.

例題　試解 $x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}-4=0$.

【解】　原方程式為　$x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{3}{x^{\frac{1}{2}}}-4=0$.

去分母　$x+3-4x^{\frac{1}{2}}=0$.

即　$(x^{\frac{1}{2}})^2-4(x^{\frac{1}{2}})+3=0$.

解得　$x^{\frac{1}{2}}=1$,　或 $x^{\frac{1}{2}}=3$.

即　$\sqrt{x}=1$,　或 $\sqrt{x}=3$.

自乘,得　$x=1$,　或 $x=9$.

習題六十四

化簡下列各題:

(1) $27^{\frac{2}{3}}$.　(2) $4^{-\frac{3}{2}}$.　(3) $16^{0.75}$.　(4) $64^{-0.5}$.

(5) $100^{-\frac{7}{2}}$.　(6) $81^{-\frac{3}{4}}$.　(7) $36^{-\frac{1}{2}}$.　(8) 2^{-3}.

(9) $\left(\dfrac{27}{125}\right)^{-\frac{4}{3}}$.　(10) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$.　(11) $\left(\dfrac{27}{62}\right)^{-\frac{2}{3}}$.　(12) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{2}}$

求下列各題的結果:

(13) $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}$. (14) $a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}}\div a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$.

(15) $a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\times a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$.

(16) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}c^{-1}\times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c\times a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$.

(17) $(a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}})^2$. (18) $[(a^{-2})^2]^{\frac{3}{4}}$.

(19) $(a^{-1}b^{\frac{1}{6}})^{\frac{3}{2}}$. (20) $[(a^{-\frac{5}{6}})^3]^{-\frac{1}{5}}$.

化下列各題的根號為分指數,再求其結果:

(21) $\sqrt{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{a}$. (22) $\sqrt[4]{a^2}\sqrt[3]{a^4}$.

(23) $\sqrt{a^3x}\sqrt[3]{a^2x^5}$. (24) $\sqrt{a^3b^{-2}}\div\sqrt[3]{a^{-4}b^5}$.

(25) $(\sqrt[3]{a^7}\sqrt[5]{a^7}\sqrt[3]{a^{-1}}\div a^{\frac{4}{5}}$.

(26) $\sqrt[3]{a^6\sqrt{b^3\sqrt{c}}}\div\sqrt{a^4b\sqrt[3]{c}}$.

求下列各題的積或商:

(27) $(x^{\frac{1}{2}}-4)(x^{\frac{1}{2}}+5)$.

(28) $(x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{3}})$.

(29) $(x+y)\div(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})$. (30) $(x-y)\div(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})$.

解下列各題的方程式:

(31) $6x+x^{\frac{1}{2}}-2=0$. (32) $x^{\frac{1}{2}}-5x^{\frac{1}{4}}+6=0$.

(33) $x+x^{-1}=3\frac{1}{3}$. (34) $x^{\frac{1}{3}}+5x^{-\frac{1}{3}}=6$.

第四節 關於對數的重要名詞

1. 對數、底數、眞數 在等式$3^2=9$中,

(A) 若已知3同2,求$3^2=?$,這是乘方問題.3叫做底數,2叫做冪指數(通常簡稱指數),所求的叫做冪數.

(B) 若已知9同2,求$?^2=9$,在算術中可改寫做$\sqrt[2]{9}=?$(通常2字略去不寫),這是開方問題.9叫做被開數,2叫做根指數,所求的叫做根數.

(C) 若已知3同9,求$3^?=9$,在代數中特創新的記法,寫做$\log_3 9=?$,這是對數問題.3叫做底數,9叫做眞數,所求的叫做9的對數(用3做底).

從此知道下列二式所表3、9、?三者的關係完全一樣:

$$(1)\quad 3^?=9,\qquad (2)\quad \log_3 9=?$$

普遍的說,若$a^x=m$,則稱x是m的對數(用a做底);a是底數,m是眞數.

下列二式所表a、m、x三者的關係完全一樣:

$$(1)\quad a^x=m,\qquad (2)\quad \log_a m=x.$$

【注意】 對數同指數的記法固然不同,他們的意義亦不可混同.例如在$a^x=m$中,對a說,x是他的

指數;對 m 說,x 是他的對數.

例題一 $\log_3 81=?$

【解】 因 $3^4=81$, $\therefore\ \log_3 81=4$.

例題二 $\log_2\frac{1}{8}=?$

【解】 因 $2^{-3}=\frac{1}{8}$, $\therefore\ \log_2\frac{1}{8}=-3$.

例題三 $\log_4 2=?$

【解】 因 $4^{\frac{1}{2}}=2$, $\therefore\ \log_4 2=\frac{1}{2}$.

例題四 $\log_4 0.125=?$

【解】 因 $4^{-\frac{3}{2}}=0.125$(即$\frac{1}{8}$),

$\therefore\ \log_4 0.125=-\frac{3}{2}$.

習題六十五

(1) 求 8, 128, $\frac{1}{4}$、$\frac{1}{64}$ 的對數(用 2 做底),逐一用式子表出來.

(2) 求 27, 81, $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{243}$ 的對數(用 3 做底),逐一用式子表出來.

(3) 求 64 的對數,用 8 做底是多少?用 4 做底是多少?

求以下各式的結果:

(4) $\log_9 27=?$ (5) $\log_5 125=?$

(6) $\log_5 \frac{1}{125} = ?$ (7) $\log_2 \sqrt{8} = ?$

(8) $\log_3 \sqrt{27} = ?$ (9) $\log_9 \frac{1}{27} = ?$

(10) $\log_5 \sqrt{125} = ?$ (11) $\log_4 (8\sqrt{2}) = ?$

(12) $\log_7 \sqrt[3]{49} = ?$ (13) $\log_{10} 1 = ?$

(14) $\log_{10} 10 = ?$ (15) $\log_{10} 100 = ?$

(16) $\log_{10} 1000 = ?$ (17) $\log_{10} .1 = ?$

(18) $\log_{10} .01 = ?$ (19) $\log_{10} .001 = ?$

2. 常用對數 用10做底的對數,叫做常用對數.通常爲便利計,都用這種對數.下面凡單說對數而不指明他的底的,必指常用對數.又 $\log_{10} m$ 常省寫做 $\log m$.

3. 指標,假數 除 1、10、100、1000、……及 .1、.01、.001、……的對數外,其餘各數的對數都從整數同小數兩部分所成.

對數的整數部分叫做指標,小數部分叫做假數.

對數的指標,依眞數中小數點的位置而定;對數的假數,非習高深數學不易直接求得,但在實用上只須檢表就得.方法詳第六節.

【例】 欲求 $\log \sqrt[3]{10000} = ?$ 時,因 $10^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{10000}$, 故 $\log \sqrt[3]{10000} = \frac{4}{3} = 1.3333\cdots\cdots$.其中的 1 是指標, $.3333\cdots\cdots$ 是

假數.

4. 對數表 對數的假數部分,從前的算學家已經把他算出若干位(以下各位四捨五入),列表以供應用,叫做對數表.本書附錄二所載的是取小數四位的對數表.

第五節 對數的重要性質

(I) 不限於常用對數的(以 a 爲底)

1. 積的對數 積的對數,等於各因數的對數相加.

公式 $\log_a mn = \log_a m + \log_a n.$

【理由】 設 $\log_a m = x, \quad \log_a n = y.$

則 $a^x = m \cdots\cdots\cdots(1), \quad a^y = n \cdots\cdots\cdots(2).$

(1)×(2) $a^x a^y = mn,$ 即 $a^{x+y} = mn.$

$\therefore \quad \log_a mn = x + y = \log_a m + \log_a n.$

推廣一下,得

$$\log_a mnp\cdots = \log_a m + \log_a n + \log_a p + \cdots.$$

2. 商的對數 商的對數,等於被除數的對數減去除數的對數.

公式 $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n.$

【理由】 仿上條,

(1)÷(2) $\frac{a^x}{a^y}=\frac{m}{n}$, 即 $a^{x-y}=\frac{m}{n}$.

$\therefore$ $\log_a\frac{m}{n}=x-y=\log_a m-\log_a n$.

3. 冪的對數 某數 p 次冪的對數,等於某數的對數乘以 p.

公式 $\log_a N^p=p\log_a N$.

【理由】 設 $\log_a N=x$, 則 $a^x=N$……………(1).

求其 p 次冪,得 $(a^x)^p=N^p$, 即 $a^{px}=N^p$.

$\therefore$ $\log_a N^p=px=p\log_a N$.

4. 根的對數 某數 r 次根的對數,等於某數的對數除以 r.

公式 $\log_a\sqrt[r]{N}=\frac{1}{r}\log_a N$.

【理由】 仿上條,

求(1)的 r 次根,得 $\sqrt[r]{a^x}=\sqrt[r]{N}$, 即 $a^{\frac{x}{r}}=\sqrt[r]{N}$.

$\therefore$ $\log_a\sqrt[r]{N}=\frac{x}{r}=\frac{1}{r}\log_a N$.

5. 1 的對數 1 的對數,無論以何數爲底,都等於 0.

公式 $\log_a 1=0$.

【理由】 因 $a^0=1$, $\therefore$ $\log_a 1=0$.

6. 底數的對數 眞數與底數相同,則對數爲 1.

公式 $\log_a a=1.$

【理由】 因 $a^1=a,$ $\therefore$ $\log_a a=1.$

(II) 限於常用對數的

7. 若諸數祇有小數點的位置相異,那末他們的對數祇有指標相異,其假數仍相同.

換句話說,如把一數的小數點移後 n 位或移前 n 位,則其對數較原數的對數多 n 或少 n.因 n 是正整數,故兩個對數的假數部分仍相同.

公式 $\left.\begin{aligned}\log(M\times10^n)&=\log M+n\\ \log(M\div10^n)&=\log M-n\end{aligned}\right\}$ (n 是正整數).

(註) 10^n 為 10、100、1000、…….以 10^n 乘 M,就是把小數點移後 n 位;以 10^n 除 M,就是把小數點移前 n 位.

【理由】 據本節 1、3 及 6,得

$$\begin{aligned}\log(M\times10^n)&=\log M+\log10^n\\ &=\log M+n\log10\\ &=\log M+n\text{(因 }\log10=1).\end{aligned}$$

據本節 2、3 及 6,得

$$\begin{aligned}\log(M\div10^n)&=\log M-\log10^n\\ &=\log M-n\log10\\ &=\log M-n.\end{aligned}$$

第六節　定指標法、對數表用法

1. 定整數的對數指標　整數有 n 位時，他的對數指標是 $n-1$.

【理由】　因 $10^0=1$,　　故 $log1=0$;

$10^1=10$,　　$log10=1$;

$10^2=100$,　　$log100=2$;

$10^3=1000$,　　$log1000=3$;

....

由上表，知眞數(1、10、100、1000、……)增大時，他的對數(0、1、2、3、……)也增大.所以我們可以推想到，凡大於1而小於10的數，卽1位的整數，他們的對數必比0大，比1小，卽是0.……依此類推，2位的整數的對數是1.………；3位的整數的對數是2.………；………

普遍的說，n 位的整數，他的對數指標是 $n-1$;

【例】　$log32$ 的指標是1，$log1302$ 的指標是3，$log7$ 的指標是0，$log389.23$ 的指標是2，$log56000$ 的指標是4.

2. 定小數的對數指標　小數的第 n 位才有有效數字(註)的，他的對數指標是 $-n$，可記做 $\bar{n}$.但通常爲便利計，記做 $(10-n)-10$，這 -10 應記在假數的後面.

(註) 1、2、3、……8、9是九個有效數字,而0不是有效數字.

【理由】 因 $10^0=1$, 故 $log1=0$;

$10^{-1}=.1$, $log.1=-1$;

$10^{-2}=.01$, $log.01=-2$;

$10^{-3}=.001$, $log.001=-3$;

…………………………………………….

由上表,知眞數(1.1、.01、.001、…)減小時,他的對數(0、−1、−2、−3、…) 也減小.所以我們可以推想到,凡小於1而大於.1的數,即小數第1位就有有效數字的數,他們的對數必比0小,比−1大,即是−1加上一個小數.因假數必須是正的小數,所以凡小數第1位就有有效數字的數,他們的對數指標是 −1. 依此類推,凡小數第2位才有有效數字的數,他們的對數指標是−2; …………………….

普遍的說,小數第 n 位有有效數字的,他的對數指標是 $-n$.

【例】 $log.0818$ 的指標是 −2, 記做 8.…−10; $log.723$ 的指標是 −1, 記做 9.…−10; $log.00053$ 的指標是 −4, 記做 6.…−10.

3. 求三位數的對數假數 眞數有三位時,要求他的對數假數,可在本書附錄二的對

數表第1,2兩頁中N的下方檢得首二位數字,再在N的右方檢得第三位數字,那行列相交的格裏的四位數字,就是所求的假數.

【例】 $log\,237$ 的假數是3747, $log\,904$的假數是9562.

特例一 眞數的三位數字後面有若干個0的,或有小數點的,可丟去0或小數點,而由所餘的三位數字求他的假數.

【理由】 根據上節7,知$log(M\times 10^n)$或$log(M\div 10^n)$與$logM$的假數相同,所不同的僅有指標.

【例】 $log743000$的假數是8710, $log\,5.53$ 的假數是7427, $log.00918$的假數是9628.

特例二 眞數不滿三位時,可在後面添0,補滿三位,仿上法求對數的假數.

【例】 $log2$的假數是3010, $log.81$的假數是9085.

4. 求四位數的對數假數 眞數有四位時,可仿上法在左行檢得首二位數字,上列檢得第三位數字,於行列相交處得較小數假數,再在同頁附表的橫線上方檢得第四位數字,於下方與首二位數字的同列中得一數,加在較小的假數上面就得.

【例】 欲求$log\,7524$的假數,先檢得$log\,752$的假

數是8762,再在附表的橫線上4的下方,左行75的同列檢得2,與8762相加,得所求的假數是8764.

特例一　若眞數的第四位大於5,附表的橫線上沒有這數,可先在第三位數字加1,就這首三位數字檢得較大的假數,再在附表的橫線上方檢得第四位數字的補數(註),於下方照前法得一數,從較大的假數減去就得.

(註)　一數的補數,就是同這數相加可以得10的數.例如7的補數是3,9的補數是1等.

【例一】　欲求*log*5668的假數,先檢得*log*567的假數是7536,再在附表的橫線上2(8的補數)的下方,左行56的同列檢得2,從7536減去,得所求的假數是7534.

【例二】　欲求*log*8697的假數,可在左行檢86,上列檢10,行列相交處的數是9395,同*log*870的假數一樣,再檢附表3字的下方,86的右邊是2(若看下列87的右邊却是1,比較少精確些),從9395減得所求的假數是9393.

特例二　四位數的首位是1時,在第1頁中沒有附表,可在對數表第3、4兩頁的左行檢首三位數字,上列檢第四位數字,於行列相交處一檢便得.

【例】 $log\ 1527$的假數是1838.

特例三 眞數是四位以上的數時,可把第四位以下的數字用四捨五入法略去,然後仿上法求假數.

【例】 欲求$log\ 377425$的假數,只須檢$log3774$的假數得5768.

5. 由眞數求對數 用本節1、2的方法求得指標,用3、4的方法求得假數,然後連寫起來,中間用小數點隔開,卽得所求的對數.

【例】 $log\ 27680=4.4422$, $log\ 2.34=0.3692$, $log .6543=9.8158-10$, $log .0003=6.4771-10$.

(註) $log\ .6543$也可記作$\bar{1}.8158$,但因指標是負數,假數是正數,計算不便,所以應記作$9.8158-10$.

6. 由對數求眞數 知道某數的對數,要求某數,是上法的還原,當先由已知的假數部分,用對數表求出眞數的各位數字,再由已知的指標,定眞數中小數點的位置.

【例一】 已知$log\ N=5.5684$,檢表中的假數,最近的是5682,比題中的假數末位多2,在同列的附表下方,檢得2,横線上方也是2,故得$N=370200$(因指標是5,故應有整數6位).

【例二】 已知$logN=0.8246$,檢表得最近的假數

是8248,末位少了2,附表中同列的2字上方是3,故得$N=6.677$.

【例三】 已知$\log N=8.4784-10$,檢表得最近的假數是4786,少了2,附表中同列沒有2,可取相近的數1(取3亦可),上方也是1,故得$N=.03009$(因指標是$8-10$,即-2,故首位3應是小數的第二位).

第七節 對數計算

1. **求諸數的積** 由第五節1的公式,可利用對數求諸數的積.這樣可節省不少時間,但所得的積祇有首三位數字精確.凡不必十分精密的計算,應用這法很便.以下三法亦然.

例題 求$654.3\times30.47\times.0258$的結果.

【解】 設所求的積是N,

則
$$\begin{aligned}\log 654.3&=2.8158\\ \log 30.47&=1.4839\\ \log .0258&=8.4116-10\ (+\\ \hline \log N&=2.7113.\\ \therefore\quad N&=514.4.\end{aligned}$$

【注意】 $\log N$的指標應是$12.\cdots-10$,可直接寫做2.

2. **求兩數的商** 由第五節2的公式,可

利用對數求兩數的商.

例題一 求 $384900\div35133$ 的結果.

【解】 設所求的商是N,

則

$$\begin{array}{rl} \log 384900 &= 5.5854 \\ \underline{\log \quad 35133} &\underline{= 4.5457}\ (- \\ \log \quad N &= 1.0397. \end{array}$$

$$\therefore \qquad N = 10.96.$$

例題二 求$14390\div.375$的結果.

【解】 設所求的商是N,

則

$$\begin{array}{rl} \log 14390 &= 4.1581 \\ \underline{\log .375} &\underline{= 9.5740-10}\ (- \\ \log \quad N &= 4.5841. \end{array}$$

$$\therefore \qquad N = 38380.$$

【注意】 一數減去-10,同加10無異,所以可由$14.1581-9.5740$求得$\log N$的值.

3. **求某數的羃** 由第五節3的公式,可利用對數求某數的羃.

例題一 求3649^3的結果.

【解】 設所求的羃是N,

則 $\log N=3\log 3649=3\times3.5622=10.6866.$

$$\therefore \qquad N=48600000000.$$

例題二 求 $.0584^5$ 的結果.

【解】　設所求的冪爲N,

則　$\log N=5\log .0584=5\times(8.7664-10)$

$=43.8320-50=3.8320-10.$

$\therefore\quad N=.0000006792.$

4. 求某數的根　由第五節 4 的公式,可利用對數求某數的根.

例題一　求 $\sqrt[3]{18490000}$ 的結果.

【解】　設所求的根是N,

則　$\log N=\frac{1}{3}\log 18490000=\frac{1}{3}\times 7.2669$

$=2.4223.$

$\therefore\quad N=264.4.$

例題二　求 $\sqrt[5]{.000566}$ 的結果.

【解】　設所求的根是N,

則　$\log N=\frac{1}{5}\log .000566=\frac{1}{5}\times(6.7528-10)$

$=\frac{1}{5}\times(46.7528-50)=9.3506-10.$

$\therefore\quad N=.2242.$

5. 指數方程式　凡含未知的指數的方程式,叫做指數方程式.若指數方程式可化爲 $a^x=b$ 的形狀的,可用對數求解.舉例於下:

例題　解方程式 $3^x=5.$

【解】　在原方程式的兩邊各取對數,得

$$log3^x = log5.$$

由第五節 3, 得 $$xlog3 = log5.$$

$$\therefore \qquad x = \frac{log5}{log3} = \frac{0.6990}{0.4771} = 1.465.$$

6. 應用問題 凡求積、商、冪、根的應用問題,都可利用對數求解.現在僅就複利的問題,詳述於下:

設本金爲 P, 利率爲 r, 期數爲 n, 本利和爲 A, 則算術中的複利公式,可改寫爲

$$A = P(1+r)^n \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \qquad P = \frac{A}{(1+r)^n} \cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

$$1+r = \sqrt[n]{\frac{A}{P}} \cdots\cdots\cdots\cdots(3), \qquad (1+r)^n = \frac{A}{P} \cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

這裏不必用複利表,可利用對數由公式(1)、(2)求 A 同 P; 由公式(3)求$(1+r)$,減去 1 得 r; 由公式(4),用指數方程式求 n.

例題一 本金500元,一年爲一期, 4 年後得本利和655.4元.求年利率.

【解】 由公式(3),知 $log(1+r) = \frac{1}{n}(logA - logP)$.

已知 $A = 655.4, \quad P = 500, \quad n = 4,$

$$\therefore \qquad log(1+r) = \frac{1}{4}(log655.4 - log500)$$

$$= \frac{1}{4} \times (2.8165 - 2.6990) = 0.0294,$$

$$\therefore \qquad 1+r = 1.07, \qquad r = .07 = 7\%.$$

例題二 本金 500 元,年利率 7%,一年爲一期.問幾年後得本利和 655.4 元?

【解】 已知 $A=655.4$, $P=500$, $r=.07$,

由公式(4),得 $1.07^n=\frac{655.4}{500}$.

兩邊各取對數,得 $n\log 1.07=\log 655.4-\log 500$.

$$\therefore \quad n=\frac{\log 655.4-\log 500}{\log 1.07}=\frac{2.8165-2.6990}{0.0294}=4.$$

習題六十六

利用對數求下列各題的結果:

(1) 2731×0.05283.　　(2) $66760\div 384$.

(3) $399\times .04317\times 8.599$.　　(4) $9.126\div 643.7$.

(5) $\frac{121.6\times 9.025}{3662}$.　　(6) $\frac{3.84\times 670700}{6909\times .03483}$.

(7) $.0839^3$.　　(8) $\sqrt[3]{0.03824}$.

(9) 12.34^{10}.　　(10) $\sqrt[7]{165.6}$.

(11) $2331^8\times\sqrt[3]{1.537}$.　　(12) $\sqrt{153300}\div\sqrt[5]{1849}$.

(13) 解下列的二個方程式:

$a.\quad 30^x=10,\qquad b.\quad 7^x=14.$

(14) 圓的半徑是 44.24 尺,求他的面積(圓面積 $=3.1416\times$ 半徑^2).

(15) 圓的面積是 100 方尺,求他的半徑.

(16) 本金 700 元,年利率 6%, 一年爲一期.問 100 年後的本利和多少?

【提示】 由複利公式(1),知

$$\log A=\log P+n\log(1+r)$$

(17) 年利率 6%, 一年爲一期, 100 年之後得本利和 237200 元.求本金.

【提示】 由複利公式(2),知

$$\log P=\log A-n\log(1+r).$$

(18) 本金 700 元,一年爲一期, 100 年之後得本利和 237200 元.求年利率.

(19) 本金 700 元,年利率 6%, 一年爲一期.問幾年後得本利和 237200 元?

(20) 某人存款若干元於銀行,每年複利一次.欲於20年後得 9 倍於本金的本利和,問年利率多少?

【提示】 已知$\dfrac{A}{P}=9$, $n=20$.

*第十七章　級數

第一節　重要名詞

1. 級數　依一定規則構成的諸數,連續表出,其中任何相鄰的兩項,都有一定的關係,這樣的一羣數,叫做級數.

【例】　1, 3, 5, 7, 9, ……………是逐項多 2 的級數.

1, 2, 4, 8, 16, …………是逐項大 2 倍的級數.

1, 4, 9, 16, 25, …………是逐項成連續平方數的級數.

2, 6, 12, 20, 30, ………是逐項成依次遞增的二個連續數的積的級數.

級數的種類極多,本書僅論最簡單的二種.

2. 等差級數、公差　以一定的差增、減的級數,叫等差級數.從等差級數中的任何一項減去前一項所得的差,是一個定數,叫做公差.

【例】　1, 3, 5, 7, 9, …………是等差級數,公差是 2.

9, 6, 3, 0, -3, ………是等差級數,公差是-3.

$1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2, \frac{4}{3}$, ……是等差級數,公差是$\frac{1}{3}$.

$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$, ……………………

是等差級數,公差是 d.

3. 等差中項　等差級數中除首、末二項外,其餘的項叫做是首、末二項的等差中項.

【例】　5、8、11、14、17、20是等差級數,其中8、11、14、17四數是5同20的等差中項.

4. 等比級數、公比　以一定的比增、減的級數,叫等比級數.等比級數中的任何一項對於前一項的比,是一個定數,叫做公比.

【例】　1, 2, 4, 8, 16, ……………是等比級數,公比是2.

$9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}$, …………是等比級數,公比是$\frac{1}{3}$.

$1, -2, 4, -8, 16$, ……是等比級數,公比是-2.

a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, 是等比級數,公比是r.

5. 等比中項　等比級數中除首、末二項外,其餘的項叫做是首、末二項的等比中項.

【例】　2、8、32、128是等比級數,其中8、32二數是2同128的等比中項.

第二節　等差級數

1. 求第n項　從等差級數$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$, ………,可見其中任何一項都是前一項同公差的和,公差d的係數總比該項所在的項數少1.所以命首項爲a,第n項爲t_n,得公式

$$t_n=a+(n-1)d\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

例題一 求3, 7, 11, 15, 19,………的第100項.

【解】 已知 $a=3, d=7-3=4, n=100$, 由公式(1), 得

$$t_{100}=3+(100-1)\times 4=399.$$

例題二 等差級數的第2項是13,第7項是 -12, 求第20項.

【解】 根據公式(1),得下列的聯立方程式:

$$\begin{cases} 13=a+(2-1)d, \\ -12=a+(7-1)d. \end{cases}$$

解得 $a=18, \quad d=-5,$

$$\therefore \quad t_{20}=18+(20-1)\times(-5)=-77.$$

2. 插入等差中項 設首項爲 a, 末項爲 l, 要在 a、l 之間插入 m 個等差中項,則 l 應是第 $(m+2)$ 項,代入公式(1),得

$$l=a+[(m+2)-1]d.$$

即 $$l=a+(m+1)d.$$

$$\therefore \quad d=\frac{l-a}{m+1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

例題 試在0同30之間插入5個等差中項.

【解】 已知 $a=0, l=30, m=5$, 代入公式(2),得

$$d=\frac{30-0}{5+1}=5.$$

$\therefore$ 所求的5個等差中項是5、10、15、20、25.

3. 求等差級數n項的和 設首項爲a，末項爲l，公差爲d，項數爲n，這n項的和爲S_n，則

$$
\begin{array}{rl}
 & S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-2d)+(l-d)+l. \\
+) & S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+2d)+(a+d)+a. \\
\hline
 & 2S_n=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)+(a+l)+(a+l) \\
 & \quad =n(a+l).
\end{array}
$$

$$\therefore \qquad S_n=\frac{n(a+l)}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

例題一 求$1+4+7+10+13+\cdots\cdots\cdots+100$.

【解】 已知$a=1$, $l=100$, $d=4-1=3$, 代入公式(1),得 $100=1+(n-1)\times 3$, 解得$n=34$.

代入公式(3),得 $S_{34}=\dfrac{34\times(1+100)}{2}=1717$.

例題二 求$8+6+4+2+0+(-2)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+$第500項.

【解】 已知$a=8$, $n=500$, $d=6-8=-2$, 代入公式(1),得

$$l=8+(500-1)\times(-2)=-990.$$

代入公式(3),得 $S_{500}=\dfrac{500\times(8-990)}{2}=-245500$.

習題六十七

(1) 求級數 $5, 9, 13, \cdots\cdots$ 的第 14 項.

(2) 求級數 $-3, -4, -5, \cdots\cdots$ 的第 37 項.

(3) 求級數 $\frac{1}{3}, 1, 1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{3}, \cdots\cdots$ 的第 15 項.

(4) 求級數 $a, a+3b, a+6b, \cdots\cdots$ 的第 10 項.

(5) 等差級數的首項是 2, 公差是 $\frac{1}{8}$, 問 10 是第幾項?

(6) 等差級數的首項是 1, 第 15 項是 -1, 問公差是幾?

(7) 等差級數的公差是 6, 第 17 項是 103, 問首項是幾?

(8) 等差級數的第 3 項是 10, 第 13 項是 30, 求他的第 7 項.

(9) 試在 3 同 30 之間插入 9 個等差中項.

(10) 試在 -4 同 17 之間插入 6 個等差中項.

(11) 求 $3+7+11+\cdots\cdots+$ 第 100 項.

(12) 求 $1+3+5+\cdots\cdots+555$.

(13) 求 $1+2+3+\cdots\cdots+n$.

(14) 求 $\frac{1}{2}+1+1\frac{1}{2}+2+\cdots\cdots+70$.

(15) 等差級數的和是 1000, 項數是 50, 首項是 10, 求末項同公差.

【提示】 代入公式(3)求末項,再用公式(1)求公

差.以下二題仿此.

(16) 等差級數的和是 165,項數是 10,末項是 30.求首項同公差.

(17) 等差級數的和是 -105,首項是 7,末項是 -21,求項數同公差.

(18) 等差級數的和是 600,公差是 5,首項是 5,求末項同項數.

【提示】 代入公式(1)及(3),得含未知數 l、n 的二個聯立方程式.以下二題仿此.

(19) 等差級數的和是 312,公差是 3,末項是 42,求首項同項數.

(20) 等差級數的和是 186,公差是 $\frac{1}{3}$,項數是 31,求首項同末項.

(21) 從飛機上擲下的炸彈,經 15 秒而達地面.已知第一秒內降下 49 公寸,以下每秒所降的距離都比前一秒多 98 公寸,問飛機離地多少高?

【提示】 本題就是求 $49+(49+98)+(49+2\times98)+\cdots\cdots+$ 第 15 項.

第三節 等比級數

1. 求第 n 項 從等比級數 $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \cdots\cdots$,可見任何一項都是前一項同公比的

積,公比 r 的指數總比該項所在的項數少 1. 所以命首項爲 a, 第 n 項爲 t_n,得公式

$$t_n=ar^{n-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

例題　求 1, 2, 4, 8, ……的第 15 項.

【解】　已知 $a=1$, $r=\frac{2}{1}=2$, $n=15$, 代入公式(1),得

$$t_{15}=1\times 2^{15-1}=2^{14}=8192.$$

2. 插入等比中項　設首項爲 a, 末項爲 l, 要在 a、l 之間插入 m 個等比中項,則 l 應是第 $m+2$ 項,代入公式(1),得

$$l=ar^{(m+2)-1}.$$

即　$$l=ar^{m+1}.$$

∴　$$r=\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

例題　試在 3 同 48 之間插入 3 個等比中項.

【解】　已知 $a=3$, $l=48$, $m=3$, 代入公式(2),得

$$r=\sqrt[3+1]{\frac{48}{3}}=\sqrt[4]{16}=\pm 2.$$

故所求的 3 個等比中項是 ± 6, 12, ± 24.

3. 求等比級數 n 項的和　設首項爲 a, 末項爲 l, 公比爲 r, 項數爲 n, 這 n 項的和爲 S_n,則

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}.$$

以 r 乘,得 $rS_n = \quad ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n.$

相減,得 $(1-r)S_n = a \qquad\qquad -ar^n.$

$$\therefore \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \cdots\cdots\cdots\cdots (3).$$

例題　求 $1+3+9+27+\cdots\cdots\cdots+$ 第10項.

【解】　已知 $a=1$, $r=\frac{3}{1}=3$, $n=10$, 代入公式(3),

得
$$S_{10} = \frac{1\times(1-3^{10})}{1-3} = 29524.$$

習題六十八

(1) 求級數 $2, 6, 18, \cdots\cdots\cdots\cdots$ 的第 7 項.

(2) 求級數 $6, 3, 1\frac{1}{2}, \cdots\cdots\cdots\cdots$ 的第 8 項.

(3) 求級數 $1, -2, 4, -8, \cdots\cdots\cdots$ 的第 9 項.

(4) 求級數 $4a, -6ma^2, 9m^2a^3, \cdots\cdots$ 的第 5 項.

(5) 試在 $\frac{1}{2}$ 同 $\frac{1}{16}$ 之間插入 2 個等比中項.

(6) 試在 14 同 224 之間插入 3 個等比中項.

(7) 求 $3+6+12+\cdots\cdots\cdots\cdots+$ 第 8 項.

(8) 求 $1-3+9-\cdots\cdots\cdots\cdots+$ 第 7 項.

(9) 求 $.1+.5+2.5+\cdots\cdots\cdots\cdots+$ 第 7 項.

(10) 求 $m-\frac{m}{4}+\frac{m}{16}-\cdots\cdots\cdots\cdots+$ 第 5 項.

(11) 某人在每年初存國幣 100 元於儲蓄銀行,年利

率 5 釐,每年複利一次.求 4 年末的本利和.

【提示】 第一年初的 100 元到第 4 年末應得本利和 (100×1.05^4) 元;同樣知第二年初的100元到第 4 年末應得本利和(100×1.05^3)元;…… . 所以本題就是求 $100\times1.05^4+100\times1.05^3+\cdots\cdots+100\times1.05$. 化簡單些,就是求 $100\times(1.05+1.05^2+\cdots\cdots+1.05^4)$.

(12) 等比級數的末項是2916,公比是 3,計有 7 項.求首項.

(13) 等比級數的首項是 1,末項是 16384,項數是 8.求公比.

【提示】 由公式(1),得 $r=\sqrt[n-1]{\dfrac{t_n}{a}}$,用對數解.

(14) 等比級數的首項是1024,末項是$\frac{1}{8}$,公比是$\frac{1}{2}$.求項數.

【提示】 由公式(1),得 $r^{n-1}=\dfrac{t_n}{a}$,用指數方程式求 $n-1$ 的值,再加 1 卽得.

附錄一

習題答案

習題一

(1) 315. (2) 6. (3) 66. (4) $47\frac{1}{4}$.

(5) 41. (6) 6. (7) 10. (8) 10.

(9) $7\frac{2}{3}$. (10) 37. (11)(12) $11\frac{11}{12}$. (13)(14) $1\frac{9}{16}$.

(15) $2x$. (16) $8x$. (17) x. (18) $4x$.

(19) $7x+5y$. (20) $9x+2$. (21) $9y+5x$. (22) $x+16$.

(23) $48x$. (24) $210x$. (25) $27x-36y+18$.

(26) $16x-18$. (27) $9x$. (28) $5x$. (29) $11x+16$.

(30) $13x+12y$.

習題二

(1) 7. (2) 5. (3) 2. (4) 14. (5) 6.

(6) 2. (7) 3. (8) 7. (9) 2. (10) 54.

(11) $2\frac{2}{3}$. (12) $1\frac{1}{3}$. (13) $1\frac{4}{5}$. (14) $\frac{4}{5}$. (15) $1\frac{1}{2}$.

(16) 12. (17) 12. (18) 16. (19) 63. (20) 60.

(21) 36. (22) $1\frac{1}{12}$. (23) 1. (24) 1. (25) $1\frac{9}{10}$.

(26) $\frac{22}{25}$. (27) 26. (28) 8. (29) 4. (30) 5.

(31) $1\frac{1}{2}$ (32) 17. (33) 1. (34) 5. (35) 3.

(36) $10\frac{4}{13}$. (37) 7. (38) 3. (39) 6. (40) 2.

(41) $1\frac{5}{7}$. (42) 2. (43) $\frac{1}{4}$. (44) 3. (45) 13.

(46) 2. (47) $1\frac{12}{47}$. (48) 104. (49) $8\frac{25}{36}$. (50) $1\frac{19}{80}$.

習題三

(1) $x-1, x+1$.

(2) $x+2, x+4, x+6$.

(3) $x+5$.

(4) $y-x$.

(5) $(100-x)$元.

(6) $\frac{54}{x}$.

(7) $6x$里.

(8) $\frac{x}{6}$時.

(9) 甲有$(35-x)$元,乙有$(28+x)$元.

(10) 兄$(a-x)$歲,弟$(b-x)$歲.

(11) $10x$角,$\frac{y}{10}$元.

(12) $[10x+5(x+3)]$元.

(13) $100x+10y+z$.

(14) $10x+(x-4)$.

(15) $2x+3$.

(16) $[4x+2(a-x)]$只.

(17) $(x+3+5)$歲.

(18) $[2(x-3)+3]$歲.

(19) $(7x+3)$枚,$\frac{x-3}{7}$人.

(20) $(100+3x-3y)$元.

(21) 順流$(10+x)$里,逆流$(10-x)$里.

(22) (x^2+25)人.

(23) $\frac{5x+6y}{x+y}$角.

(24) 全槽的$\frac{1}{x}$.

(25) $\left(\frac{x}{7}+\frac{x}{5}\right)$時.

(26) $(80x+60\times 2x)$元.

(27) $25(x+30)$分.

(28) $x(x-3)$方尺.

(29) $\left(6\times\frac{1}{3}x+4\times\frac{2}{3}x\right)$角.

(30)(a)　乙 $(x+15)$ 分,丙 $\frac{x+15}{2}$ 分.

(b)　甲 $(x-15)$ 分,丙 $\frac{x}{2}$ 分.　(c)　乙 $2x$ 分,甲 $2x-15$ 分.

習題四

(1)　23, 14.　　(2)　12.

(3)　13, 14, 15.　　(4)　13年.

(5)　母35歲,女7歲.　　(6)　雞29頭,兔21頭.

(7)　綢25尺,緞15尺.　　(8)　運到95個,破壞5個.

(9)　36.　　(10)　432.

(11)　5人,42枚.　　(12)　4秒.

(13)　繩20尺,竹15尺.　　(14)　8日.

(15)　$1\frac{19}{80}$ 日.　　(16)　$4\frac{4}{5}$ 分.

(17)　7時 $38\frac{2}{11}$ 分.　　(18)　9時 $16\frac{4}{11}$ 分.

(19)　4時 $5\frac{5}{11}$ 分, 4時 $21\frac{9}{11}$ 分.

(20)　7日.　　(21)　42里.

(22)　108里.　　(23)　甲13元,乙27元.

(24)　甲425元,乙1075元,丙4500元.

(25)　甲70,乙30.　　(26)　48尺,

(27)　1斗.　　(28)　馬2頭,牛4頭,羊94頭.

(29)　500人.　　(30)　40000元.

(31)　甲132, 乙138, 丙45, 丁405.

(32) 4 尺, 13 尺, 16 尺. (33) 男 4 人,女 3 人.

(34) 178 只. (35) 7 個.

習 題 五

(1) -1. (2) 14. (3) 1. (4) -16. (5) $-1\frac{1}{4}$.

(6) $\frac{11}{12}$. (7) -2. (8) -13. (9) -13. (10) 7.

(11) $-\frac{1}{6}$. (12) $-\frac{5}{42}$. (13) 8. (14) -16. (15) 49.

(16) $\frac{2}{3}$. (17) -51. (18) -2. (19) 0. (20) $\frac{1}{6}$.

習 題 六

(1) -24. (2) 84. (3) 0. (4) 140.

(5) -2. (6) 2. (7) 0. (8) 3.

(9) -48. (10) 384. (11) $\frac{2}{7}$. (12) $-1\frac{1}{4}$.

(13) -7200. (14) 3780. (15)(16) 50. (17)(18) -343.

(19)(20) 25.

習 題 七

(1) $-\frac{3}{4}$. (2) -4. (3) $\frac{1}{5}$. (4) 11.

(5) $-\frac{2}{3}$. (6) -20. (7) $-8\frac{1}{2}$. (8) $\frac{1}{2}$.

(9) 2 年前. (10) 不合理. (11) 甲負債10元,乙有國幣40元. (12) $-40°$.

習 題 八

(1) $39a-5b+4c$. (2) 0.

(3) $5ab+bc-ca$. (4) $3x^2-3y^2$.

(5) $8x^4+x^3+6x^2+7x-14$. (6) $x^2+9xy+5y^2$.

(7) $-2x^3+x^2+4x+2$. (8) x^2+7x.

(9) $a^3+b^3+c^3$. (10) $15x^3-4x^2+3x-4$.

(11) $7a^3+5a^2b+2ab^2+3b^3$.

(12) abc.

(13) $3x^2-2y^2-2xy-4yz-3zx$.

(14) x^3-5x-1.

(15) $2x^2+\frac{21}{10}xy+\frac{9}{8}y^2$.

(16) $3a^5+4a^3b^2+2a^2b^3+5ab^4+b^5$.

習題九

(1) $-13x-18y+19z$. (2) $5a-30b+4c$.

(3) $-2ac-2bd$. (4) $-6x^2y-2y^3$.

(5) x^3+3x^2+5x+7. (6) $x^5-2x^4-x^3+x^2-2x+2$.

(7) $8x^3y-12x^2y^2+21xy^3$. (8) $-a^3+c^3+abc$.

(9) $a^3-12a^2b+15ab^2+2b^3$.

(10) $-16x^2y-2x^2y^2+10xy^2$.

(11) $-2x^3+11x-7y+y^2$. (12) $-a^4x-3a^3x^2+5a^2x^3$

(13) $2a^3+6a^2b+6ab^2+2b^3$.

(14) $x^5-7x^4+10x^3-2x^2-9x+8$.

(15) $2x^2-14x-4$.

(16) $3x^4y^4+2x^3y^3-2x^2y^2-14xy+18$.

習題十

(1) $4b-c$. (2) $-x+3y$. (3) $-5a$. (4) a.

(5) $10x-4y+2z$. (6) $x+4y$. (7) $-4x+10$. (8) 0.

(9) $(x+y)-(-2z+2w)$. (10) $(2a-3b)-(-5c+4d)$.

(11) $(x+2x^2)-(x^3-4x^4)$. (12) $(5m-3n)-(-2p+q)$.

(13) $(y^5-2y^3)-(-6y+2)$. (14) $(-2a+3a^2)-(4a^3-a^4)$.

習題十一

(1) $x^5-6x^4+15x^3-13x^2-7x+20$.

(2) $4x^4+22x^3-41x^2+41x-5$.

(3) $x^3+3xy+y^3-1$. (4) a^6-b^6.

(5) $a^5x^5-2a^2x^2-1$. (6) $x^5+151x-264$.

(7) $42x^5-16x^4+112x^3-168x^2+38x-200$.

(8) $a^5b+a^4b^2+a^3b^3-a^2b^4-ab^5-b^6$.

(9) $a^3+b^3+c^3-3abc$.

(10) $30a^8+7a^7b+7a^6b^2+15a^4b^4-2a^3b^5-2a^2b^6$.

(11) $2x^3-x^2y+6x^2z-3xyz+3xz^2-xy^2+3y^2z-5yz^2$
$-2z^3$.

(12) $a^3+a^2b+ab^2+b^3+2b^2x-ax^2+bx^2$.

(13) $a^4-2a^2b^2+b^4+4abc^2-c^4$.

(14) $\frac{1}{12}a^4+\frac{49}{180}a^3b+\frac{53}{60}a^2b^2-\frac{1}{15}ab^3-3b^4$.

(15) $x^3-6x^2-37x+210$. (16) $x^8+a^4x^4+a^8$.

(17) x^8-16 (18) a^8-b^8.

(19) $x^2+2xy+y^2$. (20) $x^2-2xy+y^2$.

(21) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$. (22) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$.

(23) x^3+y^3. (24) x^3-y^3.

(25) x^2-y^2 (26) $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$.

習題十二

(1) x^2-4x+8. (2) $-4x-7$, 餘 $-4x+8$.

(3) $-a^2+3ab-5b^2$, 餘 $-2ab^3+5b^4$.

(4) $x-y-z$. (5) $2x^2+2x+1$.

(6) $2x-7y$. (7) x^2-2x+1.

(8) $a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2$.

(9) $4a^3b^3+8ab+4$. (10) $x+\frac{1}{2}$.

(11) $1+3x-5x^2+6x^3$. (12) $4x^2-9x-5$.

(13) $x+y$. (14) $a^2+2ab+b^2+a+b+1$.

(15) $x^2-\frac{3}{4}x+1$.

習題十三

(1) $\frac{2}{3}$. (2) $-1\frac{1}{4}$. (3) -12. (4) $-6\frac{3}{5}$.

(5) 4. (6) 0. (7) $-\frac{1}{6}$. (8) 1,

(9) $-\frac{6}{17}$. (10) $1\frac{1}{6}$. (11) $\frac{abc}{a+b}$. (12) ab.

(13) $a+b$. (14) $-a+b$. (15) $\frac{a+b}{2}$. (16) $a+b$.

(17) $\frac{ac}{a+b}$. (18) 1, 2, 3. (19) $-1, 0, 1$. (20) 1504 人。

習題十四

(1) $\begin{cases} x=3, \\ y=1. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=0. \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x=2\frac{1}{9}, \\ y=1\frac{7}{9}. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=-\frac{4}{11}, \\ y=-\frac{5}{33}. \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x=-7\frac{1}{2}, \\ y=-7\frac{1}{2}. \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x=2\frac{1}{2}, \\ y=1\frac{1}{2}. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x=-4, \\ y=0. \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x=0, \\ y=\frac{1}{4}. \end{cases}$ (9) $\begin{cases} x=\frac{ac}{a+b}, \\ y=\frac{bc}{a+b}. \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x=\frac{1}{a+b}, \\ y=0. \end{cases}$ (11) $\begin{cases} x=a, \\ y=b. \end{cases}$ (12) $\begin{cases} x=a+b, \\ y=a-b. \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x=3, \\ y=\frac{1}{2}, \\ z=-1. \end{cases}$ (14) $\begin{cases} x=-1, \\ y=-2, \\ z=-3. \end{cases}$ (15) $\begin{cases} x=2, \\ y=5, \\ z=7. \end{cases}$

(16) $\begin{cases} x=8, \\ y=0, \\ z=-8. \end{cases}$ (17) $\begin{cases} x=9, \\ y=11, \\ z=13. \end{cases}$ (18) $\begin{cases} x=5, \\ y=4, \\ z=3. \end{cases}$

習題十五,習題十六

與習題十四(1)到(8)同。

習題十七

(1) $\begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{1}{3}. \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=-1\frac{1}{2}. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=3, \\ y=-7. \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x=18, \\ y=7. \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x=15, \\ y=-13. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x=9, \\ y=5, \\ z=-1. \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x=7, \\ y=10, \\ z=12. \end{cases}$ (9) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{1}{3}, \\ z=\frac{1}{4}. \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x=a, \\ y=2b, \\ z=3c. \end{cases}$

習題十八

(1) 見習題四. (2) 甲 24,乙 60.

(3) 甲 49 歲,乙 21 歲. (4) 馬 35 斤,人 15 斤.

(5) 甲 3 里,乙 $1\frac{1}{2}$ 里. (6) 甲 63 只,乙 45 只.

(7) 十元的 5 張,五元的 6 張,一元的 9 張,

(8) 牛 90 元,馬 80 元. (9) 甲 14 分,乙 21 分.

(10) 135.

(11) 甲 250 元,乙 200 元,丙 150 元.

(12) 前 12 呎,後 20 呎. (13) 9 人,72 元.

(14) 長 9 尺,闊 8 尺 (15) 5040 方尺.

習題十九

(1) $4x^2+12xy+9y^2$. (2) $a^2p^2-2abpq+b^2q^2$.

(3) $4a^2b^2-20abc+25c^2$. (4) $9x^4+6x^2+1$.

(5) $25a^4+30a^2b^2+9b^4$. (6) $16m^6+8m^3n^3+n^6$.

(7) $4x^2-8x+1$. (8) $x^2-x+\frac{1}{4}$.

(9) x^6+2x^3+1. (10) $a^4-2a^2b^2+b^4$.

(11) $\frac{m^2}{4}+\frac{mn}{3}+\frac{n^2}{9}$. (12) $1-2x^2y^2+x^4y^4$.

(13) $\frac{x^2}{9}+\frac{xyz}{6}+\frac{y^2z^2}{16}$. (14) $a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{16}$.

(15) $x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$.

(16) $x^8-2x^6-x^4+2x^2+1$. (17) 與(15)同.

(18) $9a^4-6a^3+31a^2-10a+25$.

(19) $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$.

(20) $x^4-10x^3+11x^2+70x+49$.

習題二十

(1) $4x^2-25y^2$ (2) $49a^2-64b^2$.

(3) x^2-1. (4) $-x^4+y^4$.

(5) $-4x^2+1$. (6) $9a^2-25$.

(7) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$. (8) $\frac{4}{9}x^4-\frac{9}{16}y^4$.

(9) $25x^6-9$, (10) $a^4x^2-b^4y^2$.

(11) $4a^4+7a^2b^2+16b^4$. (12) $a^2-b^2+2bc-c^2$.

(13) $a^2-b^2-2bc-c^2$. (14) $a^2+2ab+b^2-c^2$.

(15) $b^2+2bc+c^2-a^2$. (16) $a^2-2ac+c^2-b^2$.

(17) $x^4+x^2y^2+y^4$. (18) $81a^4+36a^2b^2+16b^4$.

(19) $a^2+2ab+b^2-c^2-2cd-d^2$

(20) $a^2-2ab+b^2-c^2+2cd-d^2$

(21) $625a^4-450a^2b^2+81b^4$.

(22) a^8-b^8. (23) $x^{16}-1$.

(24) $256x^8-32x^4+1$.

習題二十一

(1) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$. (2) x^3-3x^2+3x-1.

(3) $216a^3+540a^2+450a+125$. (4) x^3+3x^2+3x+1

(5) $27x^3y^3-27x^2y^2z+9xyz^2-z^3$.

(6) $\frac{a^3}{8}-\frac{a^2b}{4}+\frac{ab^2}{6}-\frac{b^3}{27}$.

(7) $64m^6-144m^4n^2+108m^2n^4-27n^6$,

(8) $1000x^3+300x^2y+30xy^2+y^3$.

(9) $a^3+b^3+c^3+3a^2b+3b^2c+3c^2a+3ab^2+3bc^2+3ca^2$
$+6abc$.

(10) $a^3+a^2+\frac{1}{3}a+\frac{1}{27}$.

(11) $64x^6-48x^4y^2+12x^2y^4-y^6$.

(12) $x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1$.

(13) x^3+1. (14) x^3-1.

(15) m^6+n^6. (16) $27x^3-y^3$.

(17) $x^3y^3+z^3$. (18) $-27x^3+8y^3$.

(19) $-1-8a^3$. (20) $\frac{x^3}{8}-\frac{y^3}{27}$.

習題二十二

(1) $x^2+14x+45$.　　(2) x^2+x-12.

(3) $15x^2-16xy-15y^2$.　　(4) $x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$.

(5) $2x^2-3x-35$.　　(6) $3x^6+2x^3-1$.

(7) $6x^4-17x^2+12$.　　(8) $6x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

(9) $\frac{x^2}{6}-\frac{11x}{6}-72$.

(10) $a^2+2ab+b^2-ca-bc-6c^2$.

(11) $4m^2-12mn+9n^2-4mp+6np-3p^2$.

(12) $x^4-16x^3+86x^2-176x+105$.

(13) $x^4-20x^3+140x^2-400x+384$.

(14) $4x^4-17x^2y^2+4y^4$.　　(15) $64a^4-244a^2b^2+225b^4$.

(16) $x^8-97x^4y^4+1296y^8$.

習題二十三

(1) $7b^2(2a^2b-9c+ab^2)$.　　(2) $x(x^2+3x-1)$.

(3) $8(3a^2+2b^2+c^2)$.　　(4) $27a^2b^3(ab^2+2a^3-3b^3)$.

(5) $2(a-b)[1+2(a-b)]$.　　(6) $(a+b)(2a-c)$.

(7) $x(x+y)$.　　(8) $(x+y)[(x+y)^2+3x]$.

(9) $(a+b)(x+y)(a+b-x-y)$.

(10) $(b-c)(ax^2+3)$.　　(11) $c(a-b)(1-c)$.

(12) $2a(x+y)$.　　(13) $(a-b)^2(x-y)$.

(14) $2b(x-y)^3$.

習題二十四

(1) $(x+y)(a-b)$.

(2) $(b+c)(a+x)$.

(3) $(a-b)(x+1)$.

(4) $(x+1)(x^2+1)$.

(5) $(x-1)(x^4+1)$.

(6) $(x-2)(x^3+2)$.

(7) $(x+2a)(x+3b)$.

(8) $(2x-3a)(4x-5b)$.

(9) $(x^2+3)(x^4+3)$.

(10) $a(2a-5b)(a+2bx)$.

(11) $(x-1)(x^4-2x^2+5)$.

(12) $(x+y+z)(x^2-yz)$.

(13) $(bx+ay)(ax+by)$.

(14) $(a^2+xy)(2x+3y)$.

(15) $(x-y)(ax-by)$.

(16) $(y+xz)(x+yz)$.

(17) $(2+ax)(a-2x)$.

(18) $(x+1)(ax^2+bx+a)$.

(19) $(x-2a)(x^2+bx+a^2)$.

(20) $(ay-x)(a^2-ax+x^3)$.

習題二十五

(1) $(x-2y)^2$.

(2) $(4x+1)^2$.

(3) $(1+4a)^2$.

(4) $(x+\frac{1}{2}y)^2$.

(5) $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)^2$.

(6) $(xy-3z)^2$.

(7) $(x-\frac{3}{2})^2$.

(8) $(5a^2+6b^2)^2$.

(9) $(1-2y)^2$.

(10) $-3x(2x-3a)^2$.

(11) $(2ax+b)^2$.

(12) $-4(x^2+1)^2$.

(13) $-3(m+1)^2$.

(14) $(x+y+z)^2$.

(15) $(a-b-c-d)^2$.

(16) $(3a+3b-c)^2$.

(17) $(2xy+a+b)^2$.

(18) $(x^2+1)^2$.

(19) $(x-y-2)^2$.　(20) $(2a+b-c)^2$.

(21) $(x+y+\frac{1}{2}z)^2$.　(22) $(m-n)(m-n-1)$.

(23) $(b+c)(a+b)^2$.

習題二十六

(1) $(8a+7b)(8a-7b)$.　(2) $(bc+2d)(bc-2d)$.

(3) $(1+4xy)(1-4xy)$.　(4) $(\frac{1}{2}a+1)(\frac{1}{2}a-1)$.

(5) $(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$.

(6) $(4x^2+9y^2)(2x+3y)(2x-3y)$.

(7) $3(4x^2+1)(2x+1)(2x-1)$.　(8) $(a+b+1)(a+b-1)$.

(9) $3(a+b)(a-b)$.　(10) $(5x+y)(x+5y)$.

(11) $4a(b+c)$.　(12) $4ab(a^2+b^2)$.

(13) $(c+a-2b)(c-a+2b)$.　(14) $(a-b+c)(a-b-c)$.

(15) $(1+a-b)(1-a+b)$.　(16) $(x-a+y-b)(x-a-y+b)$.

(17) $\left(1+\frac{1}{2}x+a+\frac{1}{2}b\right)\left(1+\frac{1}{2}x-a-\frac{1}{2}b\right)$.

(18) $(a-1)(a^3+a^2+a+1-b^2)$.

(19) $(x-y)(x+y+4)$.　(20) $(1-ax)(1+ax+bx)$.

(21) $(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$.

(22) $(a+b)^2(a-b)^2$.　(23) $(x+y)(4x^2+8xy+4y^2-1)$.

(24) $(x-y)(a+b)(a-b)$.

(25) $mn(a-b+c-d)(a-b-c+d)$.

(26) $(x^2+mxy-y^2)(x^2-mxy-y^2)$.

(27) $(2x+3y)^2(2x-3y)^2$.

(28) $3\left(\frac{1}{3}a-1+x\right)\left(\frac{1}{3}a-1-x\right)$.

(29) $2\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)$. (30) $(a+b)^3(a-b)$.

習題二十七

(1) $(x-1)^3$. (2) $(x+3)^3$.

(3) $(3a+2b)^3$. (4) $(m^2-5n^2)^3$.

(5) $\left(x-\frac{y}{3}\right)^3$. (6) $(1-x-y)^3$.

(7) $(x+y+1)^3$.

(8) $(2a-b)(4a^2-4ab+b^2-2a-b)$.

習題二十八

(1) $(4m-5n)(16m^2+20mn+25n^2)$

(2) $2(xy+2z)(x^2y^2-2xyz+4z^2)$.

(3) $(x+1)(x^2-x+1)$. (4) $(x-1)(x^2+x+1)$.

(5) $3ab(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$.

(6) $\left(3x+\frac{1}{2}y\right)\left(9x^2-\frac{3}{2}xy+\frac{1}{4}y^2\right)$.

(7) $\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{3}\right)\left(\frac{a^2}{16}-\frac{ab}{12}+\frac{b^2}{9}\right)$.

(8) $\frac{1}{9}\left(x-\frac{y}{2}\right)\left(x^2+\frac{xy}{2}+\frac{y^2}{4}\right)$.

(9) $2\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{6}+\frac{y^2}{9}\right)$.

(10) $-(4+x)(16-4x+x^2)$.

(11) $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$.

(12) $(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$.

(13) $4xy(x^2+3y^2)(3x^2+y^2)$. (14) $(a+b)(a^2+6ab+9b^2)$.

(15) $(2x+5y-5z)(4x^2+25y^2+25z^2-10xy+10xz-50yz)$.

(16) $x(1-x)^2(x^2-3x+3)$. (17) $2b(a+b)(a-b)(3a^2+b^2)$.

(18) $(a^4+b^4)(a^8-a^4b^4+b^8)$. (19) $(x^4+1)(x^8-x^4+1)$.

(20) $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2-x-3y)$.

(21) $(x-y)(x^2+xy+y^2-x+y)$.

(22) $(x+y)(x^2-xy+y^2+6)$.

(23) $(a-b)(a^2+ab+b^2-a-b-1)$.

(24) $(a-b)(a^2+ab+b^2-a+b-1)$.

(25) $(2xy+1)(2xy-1)(xy-3)(x^2y^2+3xy+9)$.

(26) $(x+y)(x^2+y^2)(x-y+1)$. (27) $(x+2y)^3$.

習 題 二 十 九

(1) $(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$.

(2) $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$.

(3) $\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)$.

(4) $\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\right)\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\right)$.

(5) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

(6) $(a^4-a^2b^2+b^4)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$.

(7) $(x^2+xy+2y^2)(x^2-xy+2y^2)$.

(8) $(x^2+2x+8)(x^2-2x+8)$.

(9) $(3a^2+2ab+b^2)(3a^2-2ab+b^2)$.

(10) $(x^2+5xy+y^2)(x^2-5xy+y^2)$.

(11) $(x^2+3x-1)(x^2-3x-1)$. (12) $2(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)$.

(13) $(a^2+3ab-2b^2)(a^2-3ab-2b^2)$.

(14) $(4a^2+3a+1)(4a^2-3a+1)$.

(15) $(x+3)(x^2+3)$. (16) $(a+b)(a^2-4ab+7b^2)$.

(17) $2(x-1)(4x^2-2x+1)$. (18) $(a+2)(a^2+7a+13)$.

(19) $(a+b+2)(a^2-ab+b^2+a+b+1)$.

(20) $(a+b-1)(a^2+b^2+4a-5b-ab+7)$.

(21) $(x+5)(x+3)$. (22) $(x-3)(x-13)$.

(23) $(x+5)(x-3)$. (24) $(x+1)(x-7)$.

習 題 三 十

(1) $(x-1)(x-4)$. (2) $(x+7)(x-6)$.

(3) $(x-7)(x+2)$. (4) $(x-5)(x+4)$.

(5) $(xy+2)(xy+4)$. (6) $(xy-6z)(xy-8z)$.

(7) $(x-4y)(x+8y)$. (8) $(x-21y)(x+4y)$.

(9) $(x-32)(x-7)$. (10) $(a+12)(a-9)$.

(11) $(x-y)(x+\frac{1}{4}y)$. (12) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$.

(13) $(a+b-3)(a+b-4)$. (14) $(x+y-2z)(x+y-5z)$.

(15) $(x+y-z+7)(x+y-z+8)$.

(16) $(x+y)(x-y)(x+4y)(x-4y)$.

(17) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$. (18) $(x+2)(x-2)(x+5)(x-5)$.

(19) $(x+1)(x^2-x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$.

(20) $(x+1)(x^2-x+1)(x+3)(x^2-3x+9)$.

(21) $(x+1)(x+2)(x+5)(x-2)$. (22) $(x+y+5)(x+y-4)$.

(23) $(x+y-2)(x+y+1)$. (24) $(a+b+3)(a+b+5)$.

(25) $(3x-y+8)(3x-y-3)$. (26) $(a+2)^2(a-1)(a-3)$.

習題三十一

(1) $(x-5)(3x-1)$. (2) $(x+4)(2x+3)$.

(3) $(x+1)(4x-3)$. (4) $(x-5)(3x-2)$.

(5) $(2x-5)(3x+7)$. (6) $(x-7)(5x-3)$.

(7) $(2x-y)(3x-5y)$. (8) $(2x+y)(5x-y)$.

(9) $(x-6y)(7x+9y)$ (10) $(x+5y)(7x-11y)$.

(11) $(xyz+3)(16xyz-9)$. (12) $(8mn-1)(2mn-27)$.

(13) $(3x+y)(3x-y)(x+2y)(x-2y)$.

(14) $(x+1)(x^2-x+1)(2x-1)(4x^2+2x+1)$.

(15) $(2x-y-5)(3x+7y-33)$.

習題三十二

(1) $12a^2b^3x^4$. (2) ab. (3) $x+a$.

(4) $x-2$. (5) $x-y$. (6) $a(x+a)$.

(7) $3x+1$. (8) $x+1$. (9) $4a^2b^2(b+2a)$.

(10) $x-y$. (11) $x-1$. (12) x^2-y^2.

(13) $x+1$. (14) $c(a-b)$.

習題三十三

(1) $x+3$. (2) $x-3$. (3) x^2-x-1.

(4) $ax^2-3a^2x+5a^3$. (5) $x-1$.

(6) x^2-3x-4. (7) $3x+2$. (8) x^2-x-3.

(9) x^2-6x-5. (10) $x+7$.

習題三十四

(1) $120a^4b^3c^3$. (2) $a(a^2-b^2)$.

(3) $3(x^2-4)$. (4) $(x+1)(x+2)(x+7)$.

(5) $6a(a^2-9b^2)(a-2b)$. (6) $(x-5)(x-6)(x+7)$.

(7) $(a^2-b^2)(a^3-b^3)$. (8) $20x^2y(3x+1)(4x-1)(5x+1)$.

(9) $(x+2)(x+3)(x^2-8)$. (10) $(x+y)(2x+3y)(x-y)^3$

(11) $(x^2-1)(x^2-4)$.

(12) $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$.

(13) $(x-y)(y-z)(z-x)$. (14) $(m-2n)(m^3-n^3)$.

習題三十五

(1) $(x+5)(x^3+x^2-10x+8)$.

(2) $(x+8)(x^3-6x^2-86x+35)$.

(3) $(x-3)(x^3+8x^2+17x+10)$

(4) $(x^4-1)(x^2+x+1)$.

(5) $(2x^2-3x-8)(2x^4+3x^3-13x^2-7x+15)$.

(6) $(x^2y-xy^2+y^3)(x^3-2x^2y+3xy^2-6y^3)$.

(7) $(x-2)(x^3-12x^2+47x-60)$.

(8) $(x+2)(x^3+8x^2+19x+12)$.

(9) $(x^2-4x+7)(x^3+8x^2-5x+4)$.

(10) $(x+3)(x-1)(x+1)(x+2)$.

習題三十六

(1) $\frac{30x^2}{40x^3}, \frac{25x}{40x^3}, \frac{28}{40x^3}$.　　(2) $\frac{3a(x-y)}{x^2-y^2}, \frac{2a}{x^2-y^2}$.

(3) $\frac{ab}{a^2-b^2}, \frac{a(a+b)}{a^2-b^2}, \frac{b(a-b)}{a^2-b^2}$.

(4) $\frac{x^3-1}{x^4-1}, \frac{(x-1)(x^2+1)}{x^4-1}, \frac{(x^2+1)(x+1)}{x^4-1}$.

(5) $\frac{a^2-16}{a-4}, \frac{1+4a}{a-4}$.

(6) $\frac{8(x+1)}{12(x^2-1)}, \frac{15(x-1)}{12(x^2-1)}, \frac{-96}{12(x^2-1)}$.

(7) $\frac{a^2}{a-a^2}, \frac{-1}{a-a^2}, \frac{3a-1}{a-a^2}$.

(8) $\frac{(x-a)^2}{(x+a)^2(x-a)^2}, \frac{(x+a)^2}{(x+a)^2(x-a)^2}, \frac{x^2-a^2}{(x+a)^2(x-a)^2}$.

(9) $\frac{x^2}{xy(x-y)}, \frac{-y^2}{xy(x-y)}, \frac{(1+xy)(x-y)}{xy(x-y)}$.

(10) $\frac{m^2+mn+n^2}{m^3-n^3}, \frac{-3mn}{m^3-n^3}, \frac{(m-n)^2}{m^3-n^3}$.

(11) $\frac{b(x-y)}{a^2b^2(x^2-y^2)}, \frac{x(x+y)}{a^2b^2(x^2-y^2)}, \frac{a(1+x)}{a^2b^2(x^2-y^2)}$.

(12) $\frac{(x+1)(x+2)}{(x^2-1)(x^2-4)}, \frac{2(x^2-4)}{(x^2-1)(x^2-4)}, \frac{3(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-4)}$,

$\frac{4(x-1)(x-2)}{(x^2-1)(x^2-4)}$.

(13) $\frac{3x+2}{(2x-3)(x-1)(3x+2)}, \frac{2x-3}{(2x-3)(x-1)(3x+2)}$,

$$\frac{2(x-1)}{(2x-3)(x-1)(3x+2)}.$$

(14) $\frac{z^2-y^2}{(x-y)(y-z)(z-x)}$, $\frac{x^2-z^2}{(x-y)(y-z)(z-x)}$,

$\frac{y^2-x^2}{(x-y)(y-z)(z-x)}$.

習題三十七

(1) $\frac{bx}{3ay^4}$.

(2) $\frac{1}{5xyz}$.

(3) $x+y$.

(4) $\frac{x-2}{x-5}$.

(5) $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$.

(6) $\frac{3y}{a-2}$.

(7) $\frac{a+x}{a+2x}$.

(8) $\frac{3}{4}a^2b(a+b)$.

(9) $\frac{a+b-c}{a-b-c}$.

(10) $\frac{a+b+c+d}{a-b+c+d}$.

(11) 1.

(12) $\frac{a^2+1}{a^4-a^2+1}$.

(13) $\frac{x-3}{x+2}$.

(14) $\frac{a+5}{a+4}$.

習題三十八

(1) $\frac{a^2+2ab-b^2}{a^2-b^2}$.

(2) $\frac{1}{x-y}$.

(3) $\frac{1}{y}$.

(4) $\frac{2x^2}{x^2-1}$.

(5) $\frac{a^3+2a^2b+2ab^2+b^3-b}{a^3-b^3}$,

(6) $\dfrac{2a}{a-b}$. (7) $\dfrac{-2ab}{a-b}$.

(8) $\dfrac{x^2+1}{x+1}$. (9) $\dfrac{x^3-1}{x+1}$.

(10) $\dfrac{2+8a^2}{1-4a^2}$. (11) $\dfrac{2a^2-ax-x^2+a+x}{x(x^2-a^2)}$.

(12) $\dfrac{6x+2}{(x+1)(x+2)(x-3)}$. (13) $\dfrac{ax+bx-ab}{(x-a)(x-b)}$.

(14) $\dfrac{4x^3}{y(x^2-y^2)}$.

(15) $\dfrac{x^2-12x+30}{(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}$.

(16) $\dfrac{x}{x-4y}$.

(17) $\dfrac{ca^2(c-a)(a-b)+ab^2(a-b)(b-c)+bc^2(b-c)(c-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}$.

(18) 0. (19) 0.

(20) $\dfrac{y+z-3x}{(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}$.

習題三十九

(1) $\dfrac{2z}{15x^2y}$. (2) 1.

(3) $\dfrac{1}{x-1}$. (4) 1.

(5) $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$. (6) $\dfrac{a^2}{a^2-x^2}$.

(7) $\dfrac{4x+3y}{x+2}$. (8) a^2+3a+9.

(9) x^2+y^2 (10)(11) 1.

(12) $\frac{-a^2b^2}{(a-b)^2}$.　(13) $\frac{x^3-2xy^2-y^3}{xy}$.　(14) $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$.

習 題 四 十

(1) $\frac{6ay}{bx}$.　(2) $\frac{1}{x+y}$.　(3) $\frac{(a-b)^2}{b(a+b)}$.

(4) $\frac{ab}{2a-1}$.　(5) $\frac{(a^2+b^2)(a+b-c)}{a^2-b^2}$.

(6) $x^4+x^2y^2+y^4$.　(7) $\frac{3a}{x+y}$.　(8) $\frac{x-1}{x-3}$.

(9) $\frac{a+b-c}{c-a+b}$.　(10) 1.　(11) $x-y$.

(12) $\frac{a^2+b^2}{2ab}$.

習 題 四 十 一

(1) $\frac{2}{a-b}$.　(2) $\frac{x^3}{x^2-y^2}$.　(3) $\frac{ab}{a^2+b^2}$.

(4) $\frac{1}{2a^2-1}$.　(5) $a-x$.　(6) $\frac{a}{a-2b}$.

(7) $\frac{1+x}{1+x^2}$.　(8) $\frac{xy^2}{(x+y)(x-y)^2}$.　(9) $\frac{x+1}{x}$.

(10) $\frac{x^2-3x+1}{x^2-4x+1}$.　(11) $\frac{a^2x^2-a^4}{x^3}$.　(12) 1.

習 題 四 十 二

(1) 3.　(2) 2.　(3) 3.　(4) -4.

(5) 10.　(6) 5.　(7) $-\frac{1}{4}$.　(8) 8.

(9) 12.　(10)(11)(12) 無根.　(13) $4\frac{2}{3}$.

(14) 0.

習題四十三

(1) -2. (2) -6. (3) $6\frac{1}{2}$.

(4) 4. (5) 5. (6) 1.

(7) $\begin{cases} x=11, \\ y=7. \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x=5, \\ y=-4. \end{cases}$ (9) $\begin{cases} x=36, \\ y=21. \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x=5, \\ y=9. \end{cases}$ (11) $\begin{cases} x=-\frac{1}{5}, \\ y=-1\frac{1}{5}. \end{cases}$ (12) $\begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{1}{4}. \end{cases}$ (14) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=1. \end{cases}$ (15) $\begin{cases} x=-1, \\ y=-\frac{1}{2}. \end{cases}$

(16) $\begin{cases} x=1, \\ y=5. \end{cases}$

習題四十四

(1) $\frac{3}{8}$. (2) $\frac{3}{5}$. (3) $\frac{7}{17}$.

(4)(5) 84.

(6) 上茶 1 元 2 角,中茶 8 角 5 分,下茶 4 角.

(7) 靜水中 6 里,水流 4 里.

(8) 甲乙間 3 里,乙丙間 $4\frac{1}{2}$里.

習題四十五

(1) $5\sqrt{10}$.　(2) $7\sqrt{3}$.　(3) $5\sqrt{2}$.

(4) $8\sqrt{2}$.　(5) $15\sqrt{21}$.　(6) $\frac{1}{7}\sqrt{14}$.

(7) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.　(8) $\frac{3}{4}\sqrt{6}$.　(9) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$.

(10) $\frac{1}{3}\sqrt{33}$.　(11) $2i$.　(12) $2\sqrt{2}\,i$.

(13) $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,i$.　(14) $5i$.　(15) $\sqrt{7}\,i$.

(16) $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$.　(17) ± 8.　(18) $\pm 2\frac{1}{2}$.

(19) ± 6.　(20) $\pm 2\sqrt{6}\,i$.　(21) $\pm 2\sqrt{2}$.

(22) $\pm\frac{1}{7}\sqrt{42}$.　(23) ± 4.　(24) $\pm\frac{3}{4}$.

(25) $\pm\sqrt{21}$.　(26) $\pm\sqrt{10}$.　(27) ± 2.

(28) $\pm\frac{1}{2}$.　(29) $\pm 8\sqrt{2}$.　(30) $8, -2$.

習題四十六

(1) $3, 4$.　(2) $-5, 6$.　(3) $5, 10$.

(4) $-3, 4\frac{1}{3}$.　(5) $3, -\frac{1}{2}$.　(6) $1\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$.

(7) $\frac{1}{2}, 11\frac{1}{2}$.　(8) 2.　(9) $0, 5\frac{2}{3}$.

(10) $\frac{1}{7}, -1$.　(11) $\frac{7}{8}, -\frac{2}{3}$.　(12) $11, 3$.

(13) $4, -\frac{1}{2}$.　(14) $3, \frac{1}{3}$.　(15) $-1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}$.

(16) $2\pm\sqrt{3}$.　(17) $\frac{1\pm i}{2}$.　(18) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

(19) $\frac{3\pm 2\sqrt{5}}{3}$.　(20) $\frac{-2\pm\sqrt{5}\,i}{3}$.

習題四十七

與習題四十六(1)到(15)同.

習題四十八

與習題四十六同.

習題四十九

(1) 13, 14. (2) 10, 11, 12.

(3) 13, 6; -13, -6. (4) 14, 21; -14, -21.

(5) 36, 45. (6) 31, 32.

(7) 1, 3. (8) 10, 11, 12, 13, 14.

(9) 18; -18. (10) 8, 12.

(11) 3 尺. (12) 長 28 尺,闊 25 尺.

(13) 長 12 尺,闊 9 尺. (14) 1404 人.

(15) 500 人. (16) 4 丈.

(17) 36. (18) 父 60 歲,子 40 歲.

(19) 甲 60 里,乙 45 里. (20) 120 尺.

(21) 10 人. (22) 20 里.

(23) 甲 6 時,乙 12 時. (24) 前 28 尺,後 30 尺.

(25) 3 尺, 4 尺, 5 尺. (26) 8 尺,15 尺.

(27) 2 尺 6 寸. (28) 1 丈 5 尺.

習題五十

(1) $x^2-2x-35=0$. (2) $x^2-14x+33=0$.

(3) $2x^2+9x-5=0$. (4) $15x^2-53x-42=0$.

(5) $x^2-4x+5=0.$ (6) $x^2-2x-2=0.$

(7) $x^2+4x-59=0.$ (8) $x^2+2x+9=0.$

(9) $x^2+10x+41=0.$ (10) $4x^2-12x+13=0.$

(11) $16x^2+8x-49=0.$ (12) $3x^2+14x+18=0.$

(13) $cx^2+bx+a=0.$ (14) $abx^2+(a^2+b^2)x+ab=0.$

(15) $acx^2-(a^2+c^2)x+ac=0.$

(16) $c^2x^2-(b^2-2ac)x+a^2=0.$

(17) $-3, 5.$ (18) $1, 9.$

習題五十一

(1) $\begin{cases} x=8, \\ y=5. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=7, \\ y=-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3, \\ y=-7. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=5, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=5. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=13, \\ y=11; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-11, \\ y=-13. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=3, \\ y=4. \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x=-3, \\ y=4. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x=1, \\ y=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3, \\ y=1. \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x=10, \\ y=-7; \end{cases}$ $\begin{cases} x=7, \\ y=-10. \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x=8, \\ y=7; \end{cases}$ $\begin{cases} x=7, \\ y=8. \end{cases}$ (10) $\begin{cases} x=-2, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=2. \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x=3, \\ y=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=3. \end{cases}$ (12) $\begin{cases} x=4, \\ y=9; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-9, \\ y=-4. \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{1}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{4}, \\ y=\frac{2}{3}. \end{cases}$ (14) $\begin{cases} x=4, \\ y=-4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-5\frac{16}{21}, \\ y=-\frac{2}{21}. \end{cases}$

(15) $\begin{cases} x=4, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3\frac{4}{7}, \\ y=-2\frac{1}{35}. \end{cases}$ (16) $\begin{cases} x=-24, \\ y=12; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1\frac{1}{5}, \\ y=\frac{4}{5}. \end{cases}$

(17) $\begin{cases} x=\frac{7}{13}, \\ y=\frac{3}{13}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{3}{13}, \\ y=-\frac{5}{13}. \end{cases}$ (18) $\begin{cases} x=2, \\ y=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1\frac{5}{24}, \\ y=-8\frac{5}{6}. \end{cases}$

習題五十二

(1) $\begin{cases} x=3, \\ y=\frac{1}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=6, \\ y=\frac{2}{3}. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{2}{7}, \\ y=-1\frac{1}{2}. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=-3, \\ y=-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2\frac{1}{2}, \\ y=3\frac{1}{2}. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=5, \\ y=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=7\frac{1}{2}, \\ y=2\frac{1}{3}. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=\pm 1, \\ y=\pm 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm\frac{4}{5}\sqrt{5}, \\ y=\mp\frac{7}{5}\sqrt{5}. \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x=\pm 2, \\ y=\pm 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm\frac{17}{24}\sqrt{6}, \\ y=\mp\frac{11}{36}\sqrt{6}. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x=\pm 2, \\ y=\pm 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm\sqrt{2}, \\ y=\pm 3\sqrt{2}. \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x=9, \\ y=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x=\pm\sqrt{15}, \\ y=\pm\sqrt{15}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3, \\ y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3\frac{3}{14}, \\ y=-2\frac{1}{7}. \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x=1, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{2}{3}, \\ y=-\frac{2}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=4, \\ y=-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{2}{3}, \\ y=-\frac{1}{3}. \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x=\pm 2, \\ y=\pm 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 4\sqrt{3}, \\ y=\mp\sqrt{3}. \end{cases}$ (12) $\begin{cases} x=\pm 9, \\ y=\pm 7; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 8\sqrt{2}, \\ y=\pm\sqrt{2}. \end{cases}$

習題五十三

(1) $\begin{cases} x=\pm 7, \\ y=\pm 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 4, \\ y=\pm 7. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=\pm 2, \\ y=\pm 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 1\frac{1}{3}, \\ y=\pm 3. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=\pm 4, \\ y=\mp 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\mp 1, \\ y=\pm 4. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=\pm 7, \\ y=\pm 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 3, \\ y=\pm 7. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=\pm 9, \\ y=\pm 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 1, \\ y=\pm 9. \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x=\pm 2, \\ y=\mp 2. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x=\pm 12, \\ y=\pm 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 3, \\ y=\pm 12. \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x=\pm 12, \\ y=\pm 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 1, \\ y=\pm 12. \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x=\pm 1, \\ y=\pm 4, \\ z=\pm 2. \end{cases}$ (10) $\begin{cases} x=\pm 6, \\ y=\pm 2\frac{2}{3}, \\ z=\pm 1\frac{1}{2}. \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x=\pm 3, \\ y=\pm 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 3, \\ y=\mp 2. \end{cases}$ (12) $\begin{cases} x=\pm 4, \\ y=\pm 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 4, \\ y=\mp 1. \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x=-1, \\ y=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2, \\ y=\frac{1}{3}. \end{cases}$

(14) $\begin{cases} x=\pm 4, \\ y=\pm 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 2, \\ y=\pm 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2\pm\sqrt{6}, \\ y=2\mp\sqrt{6}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2\pm\sqrt{6}, \\ y=-2\mp\sqrt{6}. \end{cases}$

(15) $\begin{cases} x=3, \\ y=6; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{1}{3}, \\ y=-\frac{2}{3}. \end{cases}$

(16) $\begin{cases} x=4, \\ y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1\frac{1}{2}, \\ y=4\frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{4}, \\ y=-1\frac{3}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2\frac{1}{4}, \\ y=\frac{3}{4}. \end{cases}$

習題五十四

(1) 甲12里,乙8里.　(2) 7,5.

(3) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.　(4) 5,7.　(5) 16寸,12寸.

(6) 4000元,5%.　(7) 6年,4釐.

(8) 上糖8斤,每斤1角8分5釐;下糖12斤,每斤1角7分.

習題五十五

(1) 7,5.　(2) -2.　(3) 13, $4\frac{1}{9}$.

(4) 5.　(5) 無根.　(6) 4.

(7) 7,2.　(8) ± 12.　(9) 無根.

(10) $5\pm\sqrt{2}$.　(11) $-1, -\frac{1}{2}$　(12) $\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$.

(13) $-3, 5$.　(14) $9, -12$.

習題五十六

(1) $3, \frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$ (2) $-2, 1\pm\sqrt{3}i.$

(3) $\pm2, \pm3.$ (4) $\pm i, \pm2\sqrt{2}.$

(5) $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}.$ (6) $\pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}.$

(7) $\pm1, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}.$

(8) $\pm i, \pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}.$

(9) $\pm2, 1\pm\sqrt{3}i, -1\pm\sqrt{3}i.$

(10) $-1, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}, 2, -1\pm\sqrt{3}i.$

(11) $\pm\sqrt{\pm i}.$ (12) $\pm1, \pm i.$

(13) $-1, \pm2, 3.$ (14) $\pm1, \pm\sqrt{17}.$

(15) $1, 2, 3, 4.$ (16) $\pm2, \pm\frac{1}{2}.$

習題五十七

(1) $1, \frac{-17\pm\sqrt{287}i}{24}.$ (2) $\pm1, \frac{17\pm\sqrt{93}}{14}.$

(3) $-1, \frac{9\pm\sqrt{77}}{2}.$

(4) $-2\pm\sqrt{2}, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$

(5) $3, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}.$ (6) $-1, \pm2.$

(7) $0, 7, -4.$ (8) $2, \pm3.$

(9) $\frac{2}{3}, -4, 7.$　　(10) $1, -6, \frac{-5\pm\sqrt{39}i}{2}.$

(11) $5, -3, 1\pm\sqrt{13}.$　　(12) $0, -5, \frac{-5\pm\sqrt{15}i}{2}.$

(13) $1, -8, \frac{-7\pm\sqrt{55}i}{2}.$　　(14) $4, 12, -1, -48.$

習題五十八

(1) $\begin{cases} x=4, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=4. \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=6, \\ y=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-4, \\ y=-6. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=2, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{3\pm\sqrt{19}i}{2}, \\ y=\frac{3\mp\sqrt{19}i}{2}. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=3, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm1+\sqrt{6}i, \\ y=\pm1-\sqrt{6}i. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=\pm3, \\ y=\pm2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm2, \\ y=\pm3. \end{cases}$　(6) $\begin{cases} x=\pm3, \\ y=\pm3. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x=3, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2\pm5i, \\ y=2\mp5i. \end{cases}$

(8) $\begin{cases} x=3, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm\sqrt{10}i+1, \\ y=\pm\sqrt{10}i-1. \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x=\pm4, \\ y=\pm1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm4i, \\ y=\pm i. \end{cases}$　(10) $\begin{cases} x=-1, \\ y=-4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=4, \\ y=1; \end{cases}$

$\begin{cases} x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}, \\ y=2\pm2\sqrt{3}i; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2\pm2\sqrt{3}i, \\ y=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}. \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x=\pm 2, \\ y=\pm 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 1, \\ y=\pm 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{11}i\pm 1}{2}, \\ y=\dfrac{\sqrt{11}i\mp 1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{-\sqrt{11}i\pm 1}{2}, \\ y=\dfrac{-\sqrt{11}i\mp 1}{2}. \end{cases}$

習題五十九

(1) 到(4)係證明題. (5) $x>6$. (6) $x>-\frac{1}{2}$.

(7) $x<5$. (8) $x<35$. (9) $x>3\frac{24}{49}$.

(10) $x<3\frac{15}{17}$. (11) $x<4$. (12) 2, 3, 4.

習題六十

(1) $2\frac{2}{5}$. (2) -3. (3) $-2\frac{1}{3}$. (4) -15.

(5) 4. (6) 3. (7) $\begin{cases} x=5 \\ y=2. \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x=-4 \\ y=5. \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$ (10) $\begin{cases} x=3, \\ y=0. \end{cases}$ (11) $\begin{cases} x=0, \\ y=-8. \end{cases}$ (12) $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}, \\ y=3. \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$ (14) $\begin{cases} x=\frac{1}{3}, \\ y=1. \end{cases}$ (15) $\begin{cases} x=-4, \\ y=-3. \end{cases}$ (16) $\begin{cases} x=-1, \\ y=-1\frac{1}{2}. \end{cases}$

習題六十一

(1) x^2-x+3. (2) x^2-2x-2.

(3) $3x^2+2x-1$. (4) $x^2-2xy+3y^2$.

(5) $x^3-6x^2+12x-8$. (6) $x^3-11x+17$.

(7) x^2+x+1.　　(8) $2x^2+4x-3$.

(9) $2x^2-x+1$.　　(10) x^2-ax-a^2.

(11) $2x-3y$.　　(12) $3x-1$.

習題六十二

(1) $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}$.　　(2) $\dfrac{x+3}{x+2}$.

(3) x^2-xy+y^2.　　(4) $\dfrac{x-y}{x^2-xy+y^2}$.

(5) -6.　　(6) $1, \dfrac{1}{4}$.

(7) $-3, 2$.　　(8) $\dfrac{1}{5}$.

(9) $(a+b)(a^2+ab+b^2)$.　　(10) $\pm\sqrt{a^2-b^2}$.

(11) $\pm2\sqrt{2}, \pm2\sqrt{2}i$.　　(12) 4.

(13) $2, 2\dfrac{1}{2}$.　　(14) $5, \dfrac{-5\pm5\sqrt{3}i}{2}$.

習題六十三

係證明題.

習題六十四

(1) 9.　　(2) $\dfrac{1}{8}$.　　(3) 8.

(4) $\dfrac{1}{8}$.　　(5) $\dfrac{1}{10000000}$.　　(6) $\dfrac{1}{27}$.

(7) $\dfrac{1}{6}$.　　(8) $\dfrac{1}{8}$　　(9) $7\dfrac{58}{81}$

(10) $\dfrac{2}{3}$.　　(11) $1\dfrac{7}{9}$.　　(12) 64.

(13) $a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{13}{12}}c$. (14) $a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}$ (15) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$.

(16) ab. (17) $a^{3}b^{-1}$. (18) a^{-3}.

(19) $a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{4}}$. (20) $a^{\frac{1}{2}}$. (21) a.

(22) $a^{\frac{11}{6}}$ (23) $a^{\frac{13}{6}}x^{\frac{13}{6}}$. (24) $a^{\frac{17}{6}}b^{-\frac{8}{3}}$.

(25) $a^{\frac{39}{15}}$. (26) 1. (27) $x+x^{\frac{1}{2}}-20$.

(28) $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$. (29) $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$.

(30) $x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{4}}$ (31) $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}$.

(32) 16, 81. (33) $3, \frac{1}{3}$.

(34) 1, 125.

習題六十五

(1) 3, 7, −2, −6. (2) 3, 4, −1, −5. (3) 2, 3.

(4) $\frac{3}{2}$. (5) 3. (6) −3. (7) $\frac{3}{2}$.

(8) $\frac{3}{2}$. (9) $-\frac{3}{2}$. (10) $\frac{3}{2}$. (11) $\frac{7}{4}$.

(12) $\frac{2}{3}$. (13) 0. (14) 1. (15) 2.

(16) 3. (17) −1. (18) −2. (19) −3.

習題六十六

(1) 144.3. (2) 173.9. (3) 148.1.

(4) .01451. (5) .2996. (6) 10700.

(7) .0005907. (8) .3369. (9) 8184×10^{7}.

(10) 2.075. (11) 1007×10^{24}. (12) 86.99.

(13) a.677, b.1.356.　(14) 6149 方尺.　(15) 5.641 尺.

(16) 237200 元.　(17) 700 元.　(18) 6%.

(19) 100 年.　(20) 11.6%.

習題六十七

(1) 57.　(2) -39.　(3) $9\frac{2}{3}$.

(4) $a+27b$.　(5) 第65項.　(6) $-\frac{1}{7}$.

(7) 7.　(8) 18.

(9) 5.7, 8.4, 11.1, 13.8, 16.5, 19.2, 21.9, 24.6, 27.3.

(10) $-1,2,5,8,11,14$.　(11) 20100.　(12) 77284.

(13) $\frac{n(1+n)}{2}$.　(14) 4935.　(15) $30, \frac{20}{49}$.

(16) 3, 3.　(17) 15, -2.　(18) 75, 15.

(19) -3, 16.　(20) 1, 11.　(21) 11025 公寸.

習題六十八

(1) 1458.　(2) $\frac{3}{64}$.　(3) 256.

(4) $\frac{81}{4}m^4a^5$.　(5) $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$.　(6) 28, 56, 112.

(7) 765.　(8) 547.　(9) 1953.1.

(10) $\frac{205}{256}m$.　(11) \$452.56.　(12)(13) 4.

(14) 14.

附錄二

對數表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	附表 1	2	3	4	5
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	0414					
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	0792					
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	1139					
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	1461					
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	1761					
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	2041					
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	2304					
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2553					
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2788					
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	3010					
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	3222	2	4	6	8	11
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	3424	2	4	6	8	10
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	3617	2	4	6	8	10
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	3802	2	4	5	7	9
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	3979	2	4	5	7	9
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	4150	2	3	5	7	9
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	4314	2	3	5	7	8
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	4472	2	3	5	6	8
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	4624	2	3	5	6	8
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	4771	1	3	4	6	7
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	4914	1	3	4	6	7
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	5051	1	3	4	6	7
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	5185	1	3	4	5	7
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	5315	1	3	4	5	6
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	5441	1	3	4	5	6
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	5563	1	2	4	5	6
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	5682	1	2	4	5	6
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	5798	1	2	3	5	6
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	5911	1	2	3	5	6
39	5911	5922	5933	5944	5955	5996	5977	5988	5999	6010	6021	1	2	3	4	6
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	6128	1	2	3	4	5
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	6232	1	2	3	4	5
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	6335	1	2	3	4	5
43	6335	6345	6355	6265	6375	6385	6395	6405	6415	6425	6435	1	2	3	4	5
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	6532	1	2	3	4	5
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	6628	1	2	3	4	5
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	6721	1	2	3	4	5
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	6812	1	2	3	4	5
48	6812	6921	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	6902	1	2	3	4	4
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	6990	1	2	3	4	4

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	附表 1	2	3	4	5
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	7076	1	2	3	3	4
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	7160	1	2	3	3	4
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	7243	1	2	2	3	4
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	7324	1	2	2	3	4
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	7404	1	2	2	3	4
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	7482	1	2	2	3	4
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	7559	1	2	2	3	4
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	7634	1	2	2	3	4
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	7709	1	1	2	3	4
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	7782	1	1	2	3	4
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7853	1	1	2	3	4
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	7924	1	1	2	3	4
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	7993	1	1	2	3	3
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	8062	1	1	2	3	3
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	8129	1	1	2	3	3
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	8195	1	1	2	3	3
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	8261	1	1	2	3	3
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	8325	1	1	2	3	3
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	8388	1	1	2	3	3
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	8451	1	1	2	3	3
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	8513	1	1	2	2	3
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	8573	1	1	2	2	3
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	8633	1	1	2	2	3
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	8692	1	1	2	2	3
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	8751	1	1	2	2	3
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	8808	1	1	2	2	3
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	8865	1	1	2	2	3
77	8365	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	8921	1	1	2	2	3
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	8976	1	1	2	2	3
79	8976	8882	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	9031	1	1	2	2	3
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	9085	1	1	2	2	3
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	9138	1	1	2	2	3
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	9191	1	1	2	2	3
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	9243	1	1	2	2	3
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	9294	1	1	2	2	3
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	9345	1	1	2	2	3
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	9395	1	1	2	2	3
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	9445	0	1	1	2	2
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	9494	0	1	1	2	2
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	9542	0	1	1	2	2
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	9590	0	1	1	2	2
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	9638	0	1	1	2	2
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	9685	0	1	1	2	2
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	9731	0	1	1	2	2
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	9777	0	1	1	2	2
95	9777	9782	9776	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	9823	0	1	1	2	2
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	9868	0	1	1	2	2
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	9912	0	1	1	2	2

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
101	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082
102	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124
103	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166
104	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208
105	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249
106	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290
107	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330
108	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370
109	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410
110	0414	0418	0422	0426	0430	0434	0438	0441	0445	0449
111	0453	0457	0461	0465	0469	0473	0477	0481	0484	0488
112	0492	0496	0500	0504	0508	0512	0515	0519	0523	0527
113	0531	0535	0538	0542	0546	0550	0554	0558	0561	0565
114	0569	0573	0577	0580	0584	0588	0592	0596	0599	0603
115	0607	0611	0615	0618	0622	0626	0630	0633	0637	0641
116	0645	0648	0652	0656	0660	0663	0667	0671	0674	0678
117	0682	0686	0689	0693	0697	0700	0704	0708	0711	0715
118	0719	0722	0726	0730	0734	0737	0741	0745	0748	0752
119	0755	0759	0763	0766	0770	0774	0777	0781	0785	0788
120	0792	0795	0799	0803	0806	0810	0813	0817	0821	0824
121	0828	0831	0835	0839	0842	0846	0849	0853	0856	0860
122	0864	0867	0871	0874	0878	0881	0885	0888	0892	0896
123	0899	0903	0906	0910	0913	0917	0920	0924	0927	0931
124	0934	0938	0941	0945	0948	0952	0955	0959	0962	0966
125	0969	0973	0976	0980	0983	0986	0990	0993	0997	1000
126	1004	1007	1011	1014	1017	1021	1024	1028	1031	1035
127	1038	1041	1045	1048	1052	1055	1059	1062	1065	1069
128	1072	1075	1079	1082	1086	1089	1092	1096	1099	1103
129	1106	1109	1113	1116	1119	1123	1126	1129	1133	1136
130	1139	1143	1146	1149	1153	1156	1159	1163	1166	1169
131	1173	1176	1179	1183	1186	1189	1193	1196	1199	1202
132	1206	1209	1212	1216	1219	1222	1225	1229	1232	1235
133	1239	1242	1245	1248	1252	1255	1258	1261	1265	1268
134	1271	1274	1278	1281	1284	1287	1290	1294	1297	1300
135	1303	1307	1310	1313	1316	1319	1323	1326	1329	1332
136	1335	1339	1342	1345	1348	1351	1355	1358	1361	1364
137	1367	1370	1374	1377	1380	1383	1386	1389	1392	1396
138	1399	1402	1405	1408	1411	1414	1418	1421	1424	1427
139	1430	1433	1436	1440	1443	1446	1449	1452	1455	1458
140	1461	1464	1467	1471	1474	1477	1480	1483	1486	1489
141	1492	1495	1498	1501	1504	1508	1511	1514	1517	1520
142	1523	1526	1529	1532	1535	1538	1541	1544	1547	1550
143	1553	1556	1559	1562	1565	1569	1572	1575	1578	1581
144	1584	1587	1590	1593	1596	1599	1602	1605	1608	1611
145	1614	1617	1620	1623	1626	1629	1632	1635	1638	1641
146	1644	1647	1649	1652	1655	1658	1661	1664	1667	1670
147	1673	1676	1679	1682	1685	1688	1691	1694	1697	1770
148	1703	1706	1708	1711	1714	1717	1720	1723	1726	1729
149	1732	1735	1738	1741	1744	1746	1749	1752	1755	1758

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	1761	1764	1767	1770	1772	1775	1778	1781	1784	1787
151	1790	1793	1796	1798	1801	1804	1807	1810	1813	1816
152	1818	1821	1824	1827	1830	1833	1836	1838	1841	1844
153	1847	1850	1853	1855	1858	1861	1864	1867	1870	1872
154	1875	1878	1881	1884	1886	1889	1892	1895	1898	1901
155	1903	1906	1909	1912	1915	1917	1920	1923	1926	1928
156	1931	1934	1937	1940	1942	1945	1948	1951	1953	1956
157	1959	1962	1965	1967	1970	1973	1976	1978	1981	1984
158	1987	1989	1992	1995	1998	2000	2003	2006	2009	2011
159	1014	2017	2019	2022	2025	2028	2030	2033	2036	2038
160	2041	2044	2047	2049	2052	2055	2057	2060	2063	2066
161	2063	2071	2074	2076	2079	2082	2084	2087	2090	2092
162	2095	2098	2101	2103	2106	2109	2111	2114	2117	2119
163	2122	2125	2127	2130	2133	2135	2138	2140	2143	2146
164	2148	2151	2154	2156	2159	2162	2164	2167	2170	2172
165	2175	2177	2180	2183	2185	2188	2191	2193	2196	2198
166	2201	2204	2206	2209	2212	2214	2217	2219	2222	2225
167	2227	2230	2232	2235	2238	2240	2243	2245	2248	2251
168	2253	2256	2258	2261	2263	2266	2269	2271	2274	2276
169	2279	2281	2284	2287	2289	2292	2294	2297	2299	2302
170	2304	2307	2310	2312	2315	2317	2320	2322	2325	2327
171	2330	2333	2335	2338	2340	2343	2345	2348	2350	2353
172	2355	2358	2360	2363	2365	2368	2370	2373	2375	2378
173	2380	2383	2385	2388	2390	2393	2395	2398	2400	2403
174	2405	2408	2410	2413	2415	2418	2420	2423	2425	2428
175	2430	2433	2435	2438	2440	2443	2445	2448	2450	2453
176	2455	2458	2460	2463	2465	2467	2470	2472	2475	2477
177	2480	2482	2485	2487	2490	2492	2494	2497	2499	2502
178	2504	2507	2509	2512	2514	2516	2519	2521	2524	2526
179	2529	2531	2533	2536	2538	2541	2543	2545	2548	2550
180	2553	2555	2558	2560	2562	2565	2567	2570	2572	2574
181	2577	2579	2582	2584	2586	2589	2591	2594	2596	2598
182	2601	2603	2605	2608	2610	2613	2615	2617	2620	2622
183	2625	2627	2629	2632	2634	2626	2639	2641	2643	2646
184	2648	2651	2653	2655	2658	2660	2662	2665	2667	2669
185	2672	2674	2676	2679	2681	2683	2686	2688	2690	2693
186	2695	2697	2700	2702	2704	2707	2709	2711	2714	2716
187	2718	2721	2723	2725	2728	2730	2732	2735	2737	2739
188	2742	2744	2746	2749	2751	2753	2755	2758	2760	2762
189	2765	2767	2769	2772	2774	2776	2778	2781	2783	2785
190	2788	2790	2792	2794	2797	2799	2801	2804	2806	2808
191	2810	2813	2815	2817	2819	2822	2824	2826	2828	2831
192	2833	2835	2838	2840	2842	2844	2847	2849	2851	2853
193	2856	2858	2860	2862	2865	2867	2869	2871	2874	2876
194	2878	2880	2882	2885	2887	2889	2891	2894	2896	2898
195	2900	2903	2905	2907	2909	2911	2914	2916	2918	2920
196	2923	2925	2927	2929	2931	2934	2936	2938	2940	2942
197	2945	2947	2949	2951	2953	2956	2958	2960	2962	2964
198	2967	2969	2971	2973	2975	2978	2980	2982	2984	2986
199	2989	2991	2993	2995	2997	2999	3002	3004	2006	3008

發行處 各埠中華書局

(12