始

平面解析幾何學講義

佐賀高等學校教授

理學士

山崎榮作著

東京

內田老鶴圃刊行

緒　言

本書ハ高等學校及ビ之ト同程度ノ諸學校ノ學生竝ビニ中等教員檢定試驗受驗者ノ參考書トシテ編纂セリ。

従ツテ專ラ簡單平易ニ記述シ,理論ノ高尚ニ亘ルモノ及應用ノ餘リ廣カラザルガ如キモノハ成ルベク之ヲ避ケンコトニ勉メタリ。尙編者ハ次ノ諸點ニモ注意セリ。

1. 獨習者ノ便宜ヲハカリ出來ルダケ多ク例解ヲ施セリ。
2. 例題,問題等ハ徒ラニ奇ヲ好マズ,多クハ古來有名ナルモノヨリ之ヲ撰ビタリ。
3. 座標ノ變換ニ就キテハ初學者ハ稍々了解ニ苦シムベシト信ジタル故ニ,直線,圓等ノ後ニ之ヲ述ベタリ。
4. 二次曲線ノ分類モ亦同樣ノ理由ニヨリテ拋物線,楕圓,双曲線ノ後ニ譲レリ。
5. 解析幾何學ノ公式ヲ導キ且ツ其結果ヲ暗記スルニ便ナラントノ考ヘヨリ,多クハ行列式ヲ用フルコトヽセリ。
6. 全編ニ收メタル公式ノ中重要ナルモノハ凡テ一括シテ卷末ニ載セタリ。
7. 原書ヲ讀ムニ便ナラシメンガ爲ニ術語和英對照表ヲ添ヘタリ。

本書ノ主眼トスル所ハ斯ノ如シト雖モ,余ノ淺學ナル

所ヨリ,脈絡ノ通ゼザルモノ,重複シテ冗漫ニ失シタルモノ,簡粗ニシテ十分意ヲ盡サヾル等ノ缺陷一二ニシテ止マザルベシ。コレ等ハ大方諸賢ノ叱正ヲ待ツテ訂正シ漸次完備ノ域ニ近ヅクコトヲ得バ編者ノ誠ニ光榮トスル所ナリ。

尙本書ニ載スル所ハ平面圖形ニ關スルモノノミナリ。立體解析幾何學ニ至リテハ稍々詳細ニ論ジ以テ近ク公刊セントス。

最後ニ本書ヲ編スルニ當リ,主トシテ參考セシハ次ノ諸書ナリトス。玆ニ深ク高敎ヲ謝ス。

中川,竹內兩氏共著	新撰解析幾何學敎科書
Bowser	Analytic geometry
Kikuchi	Analytical geometry
Loney	The elements of Coordinate geometry part I.
Osgood and Graustein	Plane and Solid analytical geometry
Puckle	An elementary treatise on Conic Sections and algebraic geometry
Salmon	A treatise on Conic Sections
Smith	An elementary treatise on Conic Sections

昭和二年五月一日

山崎榮作識

目次

第一章 點ノ座標

第二章 直線

第三章 直線ヲ表ハス高次方程式

第四章 圓

第五章 二ツ以上ノ圓

第六章 座標ノ變換

第七章　拋物線

第八章　楕圓

第九章　双曲線

第十章　二次曲線ノ分類

第十一章　二次曲線ノ一般論

平面解析幾何學講義

第一章

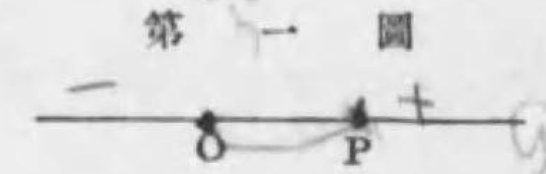
點ノ座標

1. 平面解析幾何學トハ平面上ニ於ケル幾何學的圖形ノ諸性質ヲ,代數學的解析法ニテ研究スル數學ノ一分科ナリ。

2. 直線上ノ點ノ座標

一ツノ直線 g ノ上ニアル任意ノ點 P ノ位置ヲ定ムルニハ,先ヅ其上ニ一點 O ヲトリ之ヲ定點トス(O點ハ何レニトルモ差支ヘナシト雖モ,一度定メタル上ハ同一問題ノ研究ヲナス間ハ其位置ヲ變ズベカラズ。)今任意ノ長サノ單位ニテ距離 OP ヲ測リ,其數値ヲ以テP點ノ位置ヲ定ムルモノトス。

第一圖



例ヘバ一分ヲ長サノ單位ニトル時,OP ノ長サガ五分ナラバP點ノ位置ハ5ナリトイフ。但シP點ハO點ヨリ右ニアル時ト,左ニアル時トニ從ヒ其符號ヲ異ニスルモノト規約ス。而シテ其符號ニハ代數學ニ於テ用フル正及ビ負ノ符號ヲ用ヒ,PハOヨリモ右ニアル時Pノ位置ヲ正ノ方向ニアリトシ,正ノ數ニテ表ハシ,Oヨリモ左ニアル時Pノ位置ヲ負ノ方向ニアリトシ,負ノ數ニテ表ハスヲ普通トス。

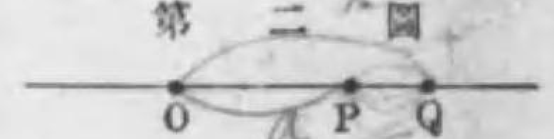
上ノ如キ規約ニ從フ時ハ＋2ナル點ハOノ右方ニアリテ，Oヨリ單位ノ長サノ二倍ニ當ル距離ニアル點ニシテ，－3ナル點ハOノ左方ニアリテOヨリ單位ノ長サノ三倍ニ當ル距離ニアル點ナリ。而シテO點自身ハO點ヨリノ距離ガ零ナルガ故ニ零ナル點トス。

一般ニaガ正又ハ負ノ實數ナル時ハ其數ニ對應スル點ガg直線上ニ唯一ツ存在シ,逆ニg直線上ニ點ヲ定ムル時ハ其點ニ對應スル正又ハ負ノ實數ハ唯一ツ決定セラル。約言スレバ直線g上ノ點ト實數トハ互ニ一々對應ヲナス。

定點Oヲ原點トイヒ,原點ニ關シテ一點Pノ位置ヲ表ハス數ヲP點ノ座標トイフ。

3. 一直線上ニアル二點間ノ距離

第　二　圖



一ツノ直線上ニ任意ノ二點P,Qアリ。ソノ座標ヲ夫々a, bトス。今線分PQヲPヨリQノ方向ニ測リタル距離ヲPQトシ,QヨリPノ方向ニ測リタル距離ヲQPトスレバ,PQトQPトハ其長サ相等シケレドモ之ヲ測ル方向ハ反對ナリ。解析幾何學ニテハ之等ヲ區別スルモノトス。卽チPヨリQヘノ方向ガ原點ヨリ見タル正ノ方向ト一致スル時ハPQヲ正トシ,之ニ反スル時ハ負トス。故ニ二點P, Qガ如何ナル位置ニアルモ

1°　$PQ=-QP$　從ツテ　$PQ+QP=0$　ニシテ且ツ

2°　$PQ=OQ-OP=b-a$　ノ關係アリ。

例　直線上ニ三ツノ點A, B, Cアル時,夫等ノ位置ノ如何ニ關セズ常ニ

$$AB+BC+CA=0$$

ナルコトヲ證セヨ。

解　與ヘラレタル直線ノ上ニ原點Oヲ定メ，O點ニ關シテA, B, Cノ座標ヲ夫々a, b, cトスレバ

$$AB=b-a$$

$$BC=c-b$$

$$CA=a-c$$

ナルガ故ニ

$$\boxed{AB+BC+CA=0}$$

4. 二點P, Qノ座標ヲ知リテPR:RQガ與ヘラレタル比ヲ有スル點Rノ座標

P, Qノ座標ヲ夫々x_1, x_2トシ,求メントスル點Rノ座標ヲxトシ,與ヘラレタル比ヲ$m:n$トスレバ

$$\left.\begin{array}{l} PR=x-x_1 \\ RQ=x_2-x \end{array}\right\} \qquad\qquad (1)$$

ナルガ故ニ

$$\frac{PR}{RQ}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{m}{n} \qquad\qquad (2)$$

ヨツテ

$$\boxed{x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n}} \qquad\qquad (3)$$

モシ線分PQノ中點Rノ座標ヲ求メンニハ,公式(3)ニ於テ$m=n$ト置ケバヨシ。卽チ

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}$$

又線分PQヲRニテ外分センニハ,線分PRニ對シテRQハ反對ノ方向ナルガ故ニ

$$\frac{PR}{RQ}=\frac{m}{-n}$$

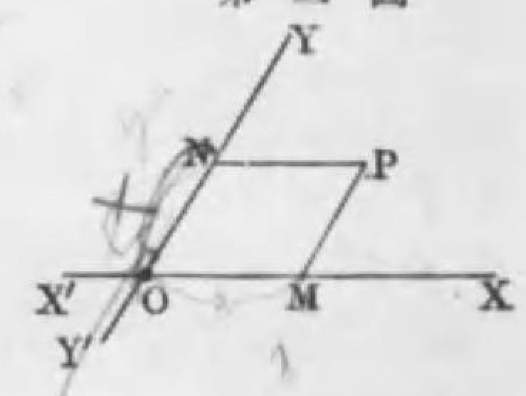
トセザルベカラズ。故ニ此場合ニハ

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n} \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ナリ。

5. 平面上ノ點ノ座標

第三圖



第二節ニ說明シタル直線上ノ點ノ座標ノ定メ方ヲ擴張スレバ平面上ノ點ノ座標ヲ決定スルコトヲ得。ソノ方法次ノ如シ。平面上ニ二ツノ相交ル直線X'OX, Y'OY ヲトリ,任意ノ點Pヨリ此二直線ニ平行ニ PM, PN ヲ引キ XX', YY' トノ交點ヲ M, N トス。

今任意ノ線分ヲ長サノ單位トシテOMヲ測リ,其數値aナリトセヨ。若シMガOヨリ右方ニアラバOMヲaニテ,左方ニアラバOMヲ$-a$ニテ表ハスモノトス。

次ニ前ト同ジ線分ヲ單位トシテ(必ズシモ同ジキヲ要セズ)ONヲ測リ其數値bナル時,若シNガOヨリ上方ニアラバONヲbニテ,下方ニアラバONヲ$-b$ニテ表ハスモノトス。

上ノ規約ニ從ヘバ一點Pニ對シテOM, ONノ大サカ定マリ,逆ニOM, ONノ大サガ定マラバコレニ對應スル點Pガ定マル。

OMノ長サヲ表ハス數ヲP點ノ横座標又ハx座標トイヒ, ONノ長サヲ表ハス數ヲP點ノ縱座標又ハy座標トイヒ,之等ヲ總稱シテP點ノ座標トイフ。

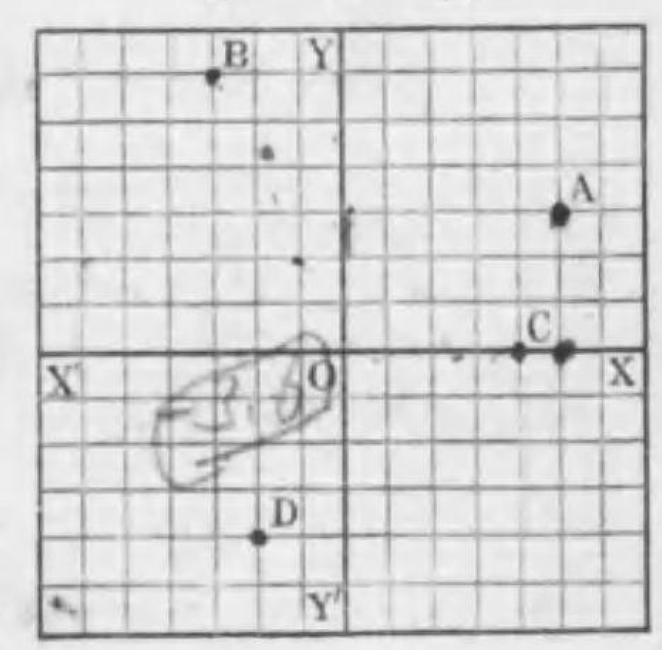
又點Oヲ原點トイヒ, X'OXヲx軸或ハ横軸, Y'OYヲy軸或ハ縱軸トイヒ,之等二ツノ軸ヲ總稱シテ座標軸トイフ。

X'OXニ於テX'ヨリXヘノ方向ヲx軸ノ正ノ方向トイヒ,之ト反對ノ方向ヲx軸ノ負ノ方向トイフ。同樣ニY'OYニ於テY'ヨリYヘノ方向ヲy軸ノ正ノ方向トイヒ,之ト反對ノ方向ヲY軸ノ負ノ方向トイフ。

6. 或點ノx座標ガaニシテ,y座標ガbナル時ハ其點ハ$x=a$, $y=b$ナリトイヒ.略シテ點(a, b)ト記ス。コノ場合ニx座標ヲ前ニ書クモノトス。

圖ニ於テA點ノx座標ハ5ニシテ,y座標ハ3ナルガ故ニ點(5, 3)ナリトイヒ,B點ノx座標ハ-3ニシテ,y座標ハ6ナルガ故ニ點(—3, 6)ナリトイフ。同樣ニC點ハ點(4, 0)ニシテD點ハ點(−2, −4)ナリ。

第四圖



注意i 下圖ノ如ク二ツノ軸ガ直交スル時ハ直交軸トイヒ,然ラザル時ハ斜交軸トイフ。一般ニハ直交軸ニ就テ研究スル方ガ簡單ナリ。依リテ本書ニテハ特ニ斷リナケレバ凡テ直交軸ヲ用フルモノトス。

注意ii 點ヲ表ハスニ座標ヲ用フルガ故ニ解析幾何學ヲ又座標幾何學トモイフ。

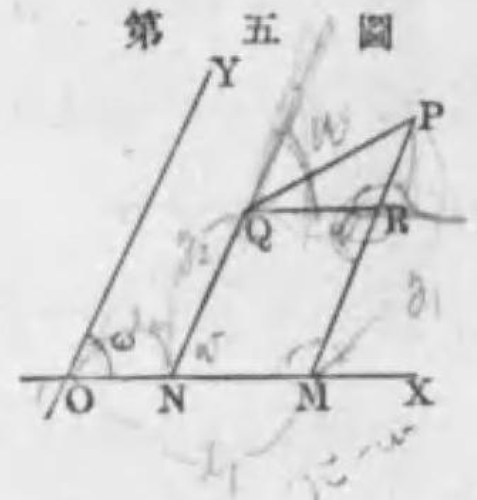
7. 二點間ノ距離,

與ヘラレタル二ツノ點ヲ $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ トシ,二ツノ軸ノ爲ス角ヲωトス。

P, QヨリY軸ニ平行ニ PM, QN ヲ引キx軸トM, Nニテ交ラ

シメ，Q ヨリ x軸ニ平行ニ QR ヲ引キ PM トRニテ交ラシムレバ

第五圖



$$OM=x_1 \qquad ON=x_2$$
$$MP=y_1 \qquad NQ=y_2$$
$$\therefore\ QR=x_1-x_2 \qquad RP=y_1-y_2$$
$$P\hat{R}Q=\pi-\omega$$

然ルニ三角法ノ定理ニヨレバ

$$PQ^2=QR^2+RP^2-2QR.RP\cos P\hat{R}Q$$

ヨツテPQノ長サヲdニテ表ハセバ

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\omega} \cdots\cdots(1)$$

若シ原點ヨリ一點$P(x_1, y_1)$マデノ距離ヲ求メンニハ(1)ニ$x_2=0,\ y_2=0$ト置クベシ。即チ

$$OP=\sqrt{x_1^2+y_1^2+2x_1y_1\cos\omega} \cdots\cdots(2)$$

若シ直交軸ノ場合ニ於テハ

$$\omega=\frac{\pi}{2} \qquad \text{從ツテ} \quad \cos\omega=0$$

ナルガ故ニ(1)及ビ(2)ハ夫々次ノ如ク簡單ニナルベシ。

$$PQ=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \cdots\cdots(3)$$
$$OP=\sqrt{x_1^2+y_1^2} \cdots\cdots(4)$$

注意　コノ公式ヲ用フルニ當リ,座標ノ符號ヲ忘ルベカラズ。例ヘバ點(3, 1)ト點(2, −3)トノ距離ヲ求メンニハ

$$x_1-x_2=3-2=1$$
$$y_1-y_2=1-(-3)=4$$

トスベキガ如シ。

例　二點(1, 2) (3, −2)ノ間ノ距離ヲ求メヨ。($\omega=60°$)

$PQ^2=(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+2(x_1-y_1)(x_2-y_2)\cos(\omega-\theta)$

解　公式(1)ニヨリ

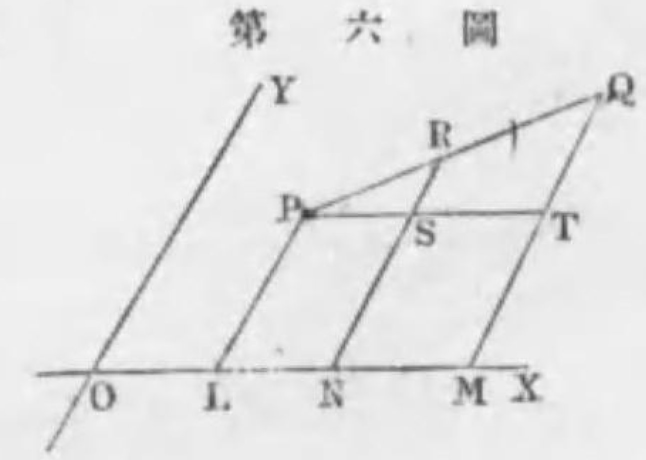
$$d=\sqrt{(1-3)^2+\{2-(-2)\}^2+2(1-3)\{2-(-2)\}\cos 60°}$$
$$=\sqrt{4+16-16\cos 60°}$$
$$=2\sqrt{3}$$

注意　座標ヲ定ムル時用ヒシ線分ノ單位ハ一分ナル時ハ上ノ結果ハ$2\sqrt{3}$分ニシテ,單位ハ一寸ナル時ハ,$2\sqrt{3}$寸ナリ。

8. 線分ヲ定比ニ分ツ點ノ座標

二點$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ヲ結ブ線分PQヲ定比$m:n$ニ分ツ點ヲRトシ,其座標ヲ(x, y)トス。

第六圖



圖ニ於テ PL, QM, RN ヲy軸ニ平行ニ引キ,x軸トノ交點ヲ夫々L, M, Nトシ, PSTヲx軸ニ平行ニ引キRN, QMト夫々S, Tニ交ラシムレバ

$$LN:NM=PS:ST=PR:RQ$$

然ルニ假定ニヨリ

$$PR:RQ=m:n$$

ナルガ故ニ

$$LN:NM=m:n$$

又　$LN=x-x_1 \qquad NM=x_2-x$

ナルガ故ニ

$$x-x_1:x_2-x=m:n$$

從ツテ

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n} \cdots\cdots(1)$$

同樣ニ

$$SR:TQ=PR:PQ=m:(m+n)$$

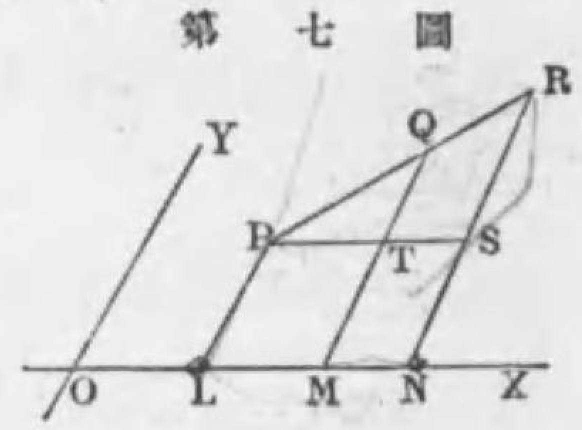
故ニ

$$y-y_1:y_2-y_1=m:(m+n)$$

從ツテ

$$y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

第七圖



若シ線分 PQ ヲ R ニテ外分セン＝ハ,線分 PR ニ對シテ RQ ハ反對ノ方向ナルガ故ニ

$$LN:NM=m:-n$$

トセザルベカラズ。

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned} x&=\frac{mx_2-nx_1}{m-n} \\ y&=\frac{my_2-ny_1}{m-n} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナリ。

系　線分 PQ ヲ二等分スル場合ニハ $m=n$ ナルガ故ニ點 R ノ座標ハ (1), (2) ヨリ直チニ

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{x_1+x_2}{2} \\ y&=\frac{y_1+y_2}{2} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ナリ。

注意 i　若シ直線 PQ ガ y 軸ニ平行ナル時ハ, L ト N トガ相重リ, 從ツテ M モ亦之等ニ重ナルガ故ニ

$$LN:NM=m:n$$

ナル比例式ハ無意義トナル。

然レドモ其場合ニハ

$$x=x_1=x_2$$

ナルガ故ニ上ノ公式ハ尚眞ナリ。PQ ガ x 軸ニ平行ナル時モ亦同樣ニ上ノ公式ハ眞ナリ。

注意 ii　$m=n$ ナルガ如ク線分 PQ ヲ外分スルコトヲ得ズ。何トナレバ R ノ座標ヲ定ムル公式 (3) ニ於ケル分母ヲ零トスレバナリ。

サレドモ R ヲ直線 PQ ノ方向ニトリ, 且ツ P 及ビ Q ヲ去ルコト次第ニ遠クナラシムレバ PR:RQ ハ -1 ヨリモ小ナル値ヲトリナガラ漸次 -1 ニ近ヅクベシ, 又 R ヲ直線 QP ノ方向ニトリ, 且ツ P, 及ビ Q ヲ去ルコト次第ニ遠クナラシムレバ PR:RQ ハ -1 ヨリ大ナル値ヲトリナガラ漸次 -1 ニ近ヅクベシ。

コノ事柄ヲ約言シテ比 PR:RQ ガ -1 ニナル時ニ應ズル點 R ハ直線 PQ 又ハ QP ノ延長上ニアル無限遠點ナリトイフ。

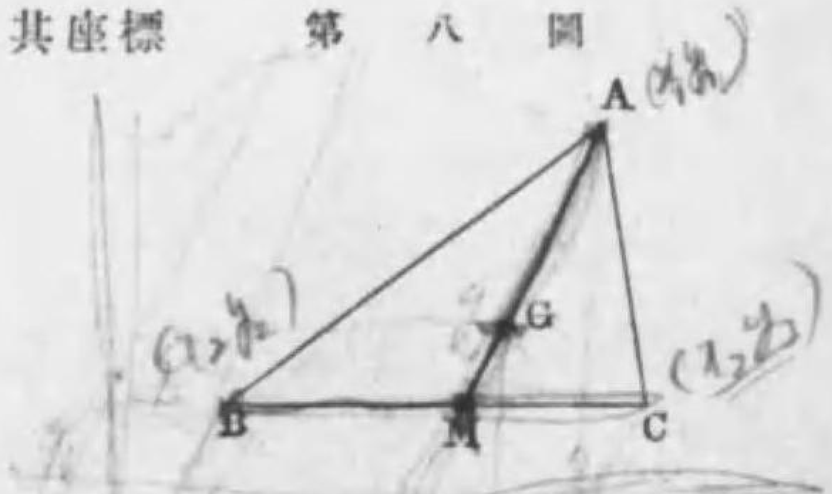
例　三角形ノ三ツノ頂點ノ座標ガ (x_1, y_1), (x_2, y_2), 及ビ (x_3, y_3) ナル時, 其三角形ノ重心ヲ求メヨ。

解　A, B, C ノ座標ヲ夫々 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) トシ, AM ヲ一ツノ中線, G ヲ重心トセヨ。

M ハ線分 BC ノ中點ナルガ故ニ其座標ハ

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{x_2+x_3}{2} \\ y&=\frac{y_2+y_3}{2} \end{aligned}\right\}$$

第八圖



次ニ G ハ中線 AM ヲ 2:1 ニ內分スルガ故ニ, 其座標ハ公式ニ

ヨリ

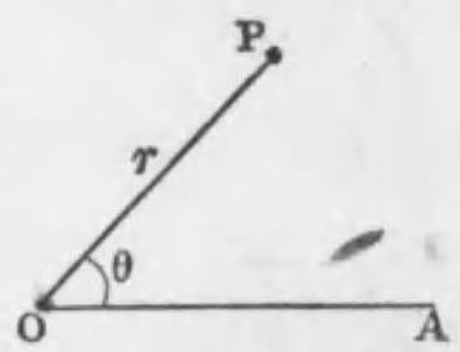
$$x=\frac{1}{3}\left\{x_1+\frac{2(x_2+x_3)}{2}\right\}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{1}{3}\left\{y_1+\frac{2(y_2+y_3)}{2}\right\}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

ナリ。

9. 極座標

第九圖



第五節ニ於テ說明シタル座標ノ外ニ種々ノ座標アリ。今ソノ一ヲ說明セン。

Oヲ定點, OA ヲ定位置ニアル半直線トス。然ル時ハ平面上ノ點Pノ位置ガ OP ノ長サト OP ガ OA トナス角トニヨツテ決定ス。

O點ヲ極, 半直線 OA ヲ原線トイヒ, OP ヲ動徑, $\widehat{AOP}$ ヲ偏角又ハ方向角トイヒ, 之等ヲ總稱シテP點ノ極座標トイフ。普通動徑ヲ r ニテ表ハシ, 偏角ヲ θ ニテ表ハス。而シテ極座標ガ r, θ ナル點ヲ點 (r, θ) トイフ。

偏角 θ ハ常ニ OA ヨリ測ルモノトシ, OA ヨリ時計ノ針ノ進ミト反對ノ向キニ測ルモノヲ正トシ, 然ラザル向キニ測ルモノヲ負トス。

極座標 r, θ ガ定マラバ點Pノ位置ハ定マルト雖モ, 逆ニP點ガ與ヘラレタル時, r ダケガ定マルト雖モ偏角 θ ハ一義ニハ決定セラレズ。

例ヘバ $(5, \frac{\pi}{4})$ ナル點ハ第九圖ニ於ケルP點ナルモ, 逆ニP點ノ極座標ハ $(5, \frac{\pi}{4})$ ニハ限ラズシテ一般ニ $(5, \frac{\pi}{4}+2n\pi)$ ナリトイフヲ得ベキガ如シ。玆ニ n ハ正又ハ負ノ整數又ハ零ナリトス。

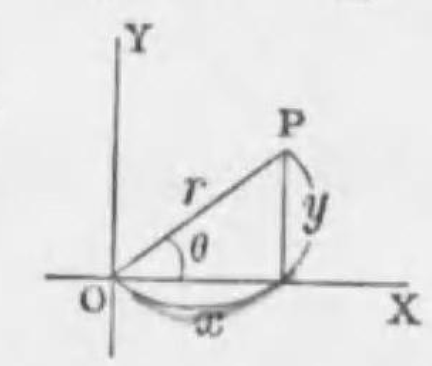
此不便ヲ避ケンガ爲メニ, 偏角ハ凡テ正角ヲトルモノトシ, 且ツ0ヨリ 2π マデニ限ルモノトス。

注意i　極ソノモノヽ座標ヲ考フルニ $r=0$ ナルモ, θ ガ不定ナリ。換言スレバ θ ヲ如何ニトルモ差支ヘナシ。ヨツテ其座標ハ一義ニハ定マラズト雖モ $r=0$, $\theta=0$ ト規約スベシ。

注意ii　極座標ニ對シテ第五節ニ說明シタル座標ヲ平行座標又ハでかると座標トイフ。蓋シ佛蘭西ノ大學者でかるとノ創始ニカヽレバナリ。

10. 直角座標ト極座標トノ關係

第十圖



直交軸ニ關スル原點Oヲ極座標ノ極ニトリ, x 軸ヲ原線ニトル時任意ノ點Pノ極座標 r, θ ヲ知ラバ, ソレニ應ズル直角座標 x, y ヲ定ムルコトヲ得。卽チ

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\theta \\ y&=r\sin\theta \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

逆ニ直角座標 x, y ヲ知ラバ, ソレニ應ズル極座標 r, θ ヲ求ムルコトヲ得ベシ。卽チ

$$\left.\begin{aligned} r&=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta&=\frac{y}{x} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

但シ此場合 r ハ確定スルモ, θ ハ二ツノ値ヲ得ベシ, 其何レヲ採ルベキカハP點ノ位置ニヨリテ定マル。

例ヘバ直交軸ニ關シテ點(1, 1)ノ極座標ヲ求メンニ

$$\left.\begin{aligned} r&=\sqrt{1+1}=\sqrt{2} \\ \tan\theta&=1. \end{aligned}\right\}$$

即チ $\theta=\frac{\pi}{4}$ 及ビ $\frac{5\pi}{4}$ ヲ得ベシト雖モ，點 $(1,1)$ ハ第一象限ニアルヲ以テ $\theta=\frac{5\pi}{4}$ ヲトルベカラズ。

11. 極座標ニテ表ハサレタル二點間ノ距離

二ツノ點 P, Q ノ座標ヲ夫々 (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) トシ，線分 PQ ノ長サヲ d トスレバ

三角形 POQ ヨリ

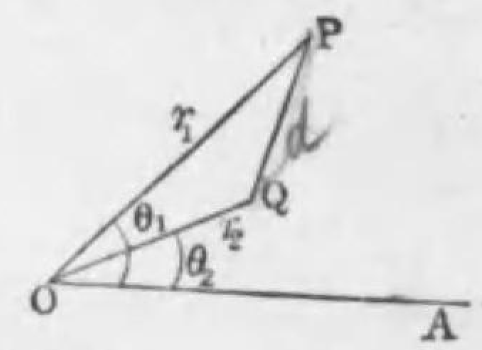
$$PQ^2=OP^2+OQ^2-2OP.OQ\cos POQ$$

ヨツテ

$$d=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

ナリ。

第十一圖

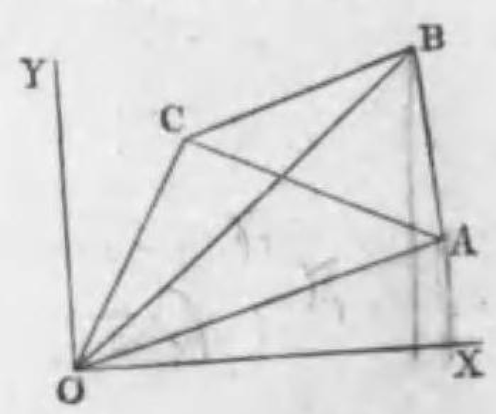


系　極ヨリ一點 $P(r_1, \theta_1)$ ニ至ル距離ヲ求メンニハ上ノ公式ニ $r_2=0$ ト置ケバヨシ。即チ

$$OP=\sqrt{r_1^2}=r_1$$

12. 三角形ノ面積

第十二圖



三角形 ABC ノ頂點 A, B, C ノ極座標ヲ夫々 (r_1, θ_1), (r_2, θ_2), (r_3, θ_3) トシ，極ヲ原點トシ，原線ヲ x 軸トセル直交軸ニ關スル座標ヲ夫々 (x_1, y_1), (x_2, y_2) (x_3, y_3) トセヨ。

然ル時ハ三角形 ABC ノ面積ハ二ツノ三角形 AOB, BOC ノ面積ノ和ヨリ AOC ノ面積ヲ減ジタルモノニ等シ。

故ニ求ムル面積ハ

$$\frac{1}{2}r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)+\frac{1}{2}r_2r_3\sin(\theta_3-\theta_2)-\frac{1}{2}r_3r_1\sin(\theta_3-\theta_1)$$

或ハ

$$\frac{1}{2}\{r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)+r_2r_3\sin(\theta_3-\theta_2)+r_3r_1\sin(\theta_1-\theta_3)\}$$

p.14 $-r_3r_1\sin(\theta_3-\theta_1)$

尚少シク變形スレバ

$$\frac{1}{2}(r_1\cos\theta_1\cdot r_2\sin\theta_2-r_1\sin\theta_1\cdot r_2\cos\theta_2)$$

$$+\frac{1}{2}(r_2\cos\theta_2\cdot r_3\sin\theta_3-r_2\sin\theta_2\cdot r_3\cos\theta_3)$$

$$+\frac{1}{2}(r_3\cos\theta_3\cdot r_1\sin\theta_1-r_3\sin\theta_3\cdot r_1\cos\theta_1)$$

今

$$x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta$$

ナルコトニ注意スレバ上ノ式ハ

$$\frac{1}{2}\{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)\}$$

トナル。但シ以上ノ諸式ノ値ハ A, B, C ノ位置ニヨリテ正トナリ，又ハ負トナル。故ニ其絶對値ヲトレバ良シ。(面積ニ負ナシ)

若シ行列式ヲ用フレバ次ノ如ク其形ハ甚ダ簡單トナル。

$$三角形ノ面積=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

13. 方程式ノ軌跡

第五節ニ於テ平面上ノ點ノ位置ハ $x=a, y=b$ ノ如キ二ツノ方程式ニテ定メラレタリ。今之等ノ内ノ一ツ，例ヘバ $x=a$ ノミガ與ヘラレタル時，幾何學的ニ何ヲ表ハスカヲ考ヘンニ，a ガ正ナル時ハ x 軸ニ沿フテ原點ヨリ右方ニ長サノ單位ノ a 倍ニ等シキ距離ニ點 M ヲトリ，(a ガ負ナラバ之ト反對ノ方向ニトル) M ヲ過リテ y 軸ニ平行ニ直線 MP ヲ引ケバ，コノ無限直線上ノ凡テノ點ノ x 座標ハ a ニシテ，之直線外ノ凡テノ點ノ x 座標ハ a ナラザルガ故ニ方程式 $x=a$ ハ無限直線 MP ヲ表ハスモノニシテ，

x座標ガaナル凡テノ點ノ軌跡ナリト解スルヲ得。

同樣ニ方程式$y=b$ノミガ與ヘラレタリトセヨ。b若シ正ナラバ原點ヨリy軸ニ沿フテ正ノ方向ニ單位ノ長サノb倍ニ等シキ距離ニ點Nヲトリ,(bガ負ナラバソノ反對ノ方向ニトル)Nヲ過リx軸ニ平行ニ直線NQヲ引ケバ此直線上ノ凡テノ點ノy座標ハbニシテ,此直線外ノ凡テノ點ノy座標ハbナラザルガ故ニ,方程式$y=b$ハ無限直線NQヲ表ハスモノニシテ,y座標ガbナル凡テノ點ノ軌跡ナリト解セラル。故ニ點(a, b)ハ方程式$x=a$ニテ表ハサレタル直線ト,方程式$y=b$ニテ表ハサレタル直線トノ交點ニ外ナラズ。

全ク同樣ニシテ方程式$x=0$ハy軸ヲ表ハシ,方程式$y=0$ハx軸ヲ表ハス。

一般ニ點ノ座標x, y又ハr, θノ間ニ一ツノ方程式アル時,

1° 或圖形上ノ凡テノ點ハ此方程式ヲ滿足シ,

2° 此圖形外ノ凡テノ點ハ此方程式ヲ滿足セズ。

カヽル時ハ其圖形ヲ稱シテ與ヘラレタル方程式ヲ滿足スル點ノ軌跡又ハ略シテ與ヘラレタル方程式ノ軌跡トイフ。

注意i 與ヘラレタル方程式ニ含マレタルx, y又ハr, θハ軌跡上ノ任意ノ點ノ座標ニシテ,特ニ指定セラレタル點ノ座標ヲ表ハスモノニアラズ。故ニ之等ヲ名ケテ流通座標トイフ。

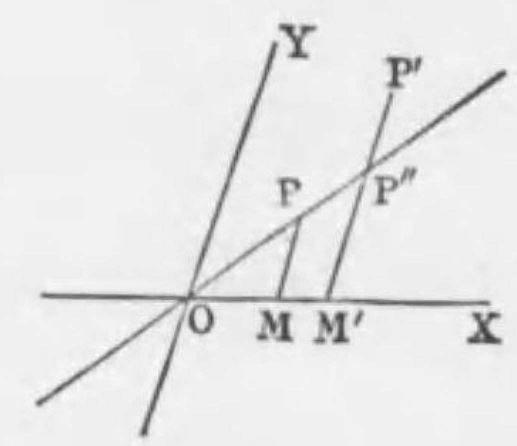
注意ii 軌跡ノ證明法ニハ常ニ前ニイヘル二ツノ命題ヲ滿足スルコトヲ示サヾルベカラズ。然レドモ實際證明スルニ當リテ甚ダ困難ヲ感ズル時アリ,カヽル場合ニハ夫等ノ對偶命題ヲ用フルモ差支ヘナシ。(詳細ハ拙著最新平面幾何學講義第六

編參照セヨ)

例1 方程式$x=y$ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 $X\hat{O}Y$ヲ二等分スル直線ハ求ムル軌跡ナリ。何トナレバ

第十三圖



i 此直線上ニ任意ノ一點Pヲトリ,y軸ニ平行ニPMヲ引キx軸ト交ル點ヲMトセバ

$$OM=MP$$

ナルコト容易ニ證明セラル。

即チP點ノ座標x, yノ間ニハ常ニ

$$x=y$$

ナル關係アリ。

ii 二等分線OP外ニ任意ノ點P'ヲトリ,P'ヲ過リy軸ニ平行ニP'P''M'ヲ引キ,OPトP''ニ,x軸トM'ニテ交ラシムレバ

$$M'P''=OM'$$

ナルガ故ニ

$$M'P' \fallingdotseq OM'$$

故ニ直線OP外ノ點ノ座標x, yハ

$$x=y$$

ナル關係ヲ滿足セズ。

ヨツテ無限直線OPハ求ムル軌跡ナリ。

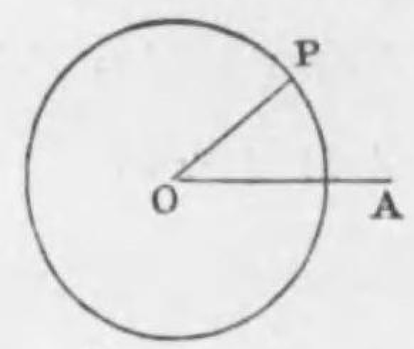
注意 上ノ證明ニハ點P, P'ヲ共ニ第一象限ニトレリ,然レドモ第四象限ニ就テモ亦同樣ナリ。

例2 方程式$r=a$ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 極ヲ中心トシ, a ヲ半徑トスル圓周ナリ, 何トナレバ

i 圓周上ニ任意ニ點 P ヲトリ, OP ヲ作レ, 然ル時ハ $\mathrm{OP}=r$ ナルガ故ニ P 點ノ座標ハ θ ガ如何ニ變ズルトモ方程式 $r=a$ ヲ滿足ス。

第十四圖



ii 此圓周外ニ任意ノ點 P′ ヲトレ, P′ ハ圓周ノ外部ニアラバ

$$r<\mathrm{OP}'$$

ニシテ, 圓周ノ內部ニアラバ

$$r>\mathrm{OP}'$$

ナリ。何レニシテモ, 方程式 $r=a$ ヲ滿足セズ。

ヨツテ求ムル軌跡ハ極ヲ中心トシ, a ヲ半徑トナル圓周ナリ。

第一章

問題

1. 四ツノ點 A, B, C, D ハ一直線上ニアル時ハ

$$\mathrm{AB}.\mathrm{CD}+\mathrm{AC}.\mathrm{DB}+\mathrm{AD}.\mathrm{BC}=0$$

ナルコトヲ證明セヨ。

2. 四ツノ點 A, B, C, D ハ一直線上ニアリテ

$$\frac{1}{\mathrm{AC}}+\frac{1}{\mathrm{AD}}=\frac{2}{\mathrm{AB}}$$

ナル時ハ,

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}=-\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

3. 二點 (a, o), (o, b) ノ距離ヲ求メヨ。 答 $d=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos}$

4. 長サ 10 ナル線分ノ一端ハ $(2, -3)$ ニシテ他ノ一端ノ x 座標ハ 10 ナルトキ, 此點ノ y 座標ヲ求ム。

5. 三ツノ點 (a, a), $(-a, -a)$, $(-\sqrt{3}a, \sqrt{3}a)$ ヲ頂點トスル三角形ハ正三角形ナルコトヲ證セヨ。

6. 四ツノ點 $(-2, -1)$, $(1, 0)$, $(2, 2)$, $(-1, 1)$ ヲ頂點トスル四邊形ハ平行四邊形ナルコトヲ證セヨ。

7. 三ツノ點 $(0, 5)$, $(3, 4)$, $(1, 3)$ ヨリ等距離ニアル點ノ座標ヲ求メヨ。

解 三ツノ點 $(0, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$ ヲ夫々 A, B, C トシ求ムル點ヲ P トシ, 其座標ヲ x, y トスレバ

$$\mathrm{PA}=\sqrt{x^2+(y-5)^2} \qquad \mathrm{PB}=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$$
$$\mathrm{PC}=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)}$$

而ルニ題意ニヨリ

$$\sqrt{x^2+(y-5)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$$

及ビ

$$\sqrt{x^2+(y-5)}=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}$$

コレヲ解キテ $x=0$ $y=0$ ヲ得。

ヨツテ求ムル點ハ原點ナリ。

8. 點$(0,-\frac{1}{2})$ハ二點$(1,-2)$, $(-3,4)$ヲ結ブ線分ヲ如何ナル比ニテ分ケタルカ。

9. 二點(a,b), (c,d)ヲ結ブ線分ヲ$m:n$ニ内分スル點ノ座標ヲ求メヨ。

10. 三角形ノ三ツノ頂點ノ座標ヲ夫々(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)トス。今最初ノ二點ヲ結ブ線分ヲ$m:l$ニ分チ,次ニ其分點ト第三ノ點トヲ結ブ線分ヲ$n:l+m$ニ分ツトキ,最後ノ分點ノ座標ヲ求メヨ。

11. A, B, C, D…………ヲ平面上ノn個ノ點トシ,其座標ヲ夫々(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), (x_4,y_4)…………(x_n,y_n)トス。今ABヲG_1ニテ二等分シ,次ニG_1CヲG_2ニテ$CG_2:G_2G_1=2:1$ニ内分シ,次ニG_3ニテ$DG_3:G_3G_2=3:1$ニ内分ス。カクノ如クセバ最後ノ分點G_{n-1}ノ座標ハ

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n},\quad \frac{y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n}{n}$$

ナルコトヲ證セヨ。

注意 G_{n-1}ヲn個ノ點ノ平均距離ノ中心トイフ。

12. 三角形ノ三ツノ頂點ノ座標ガ夫々$(a,c+a)$, (a,c), $(-a,c-a)$ナル時,其面積ヲ求メヨ。

13. 三ツノ點$(a,b+c)$, $(b,c+a)$, $(c,a+b)$ガ一直線上ニアルコトヲ證明セヨ。

解 三ツノ點ニテ作ル三角形ノ面積ハ

$$\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}$$

然ルニ

$$\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a+b+c & 1 \\ b & a+b+c & 1 \\ c & a+b+c & 1 \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

即チ三角形ノ面積ハ零ナリ,コレ三ツノ頂點ハ同一直線上ニアルコトヲ示ス。

14. 四邊形ABCDノ四ツノ頂點ノ座標ハ夫々(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), (x_4,y_4)ナル時,其面積ハ

$$\pm\frac{1}{2}\{(x_4-x_1)(y_4+y_1)+(x_1-x_2)(y_1+y_2)$$
$$+(x_2-x_3)(y_2+y_3)+(x_3-x_4)(y_3+y_4)\}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

15. 前題ノ公式ヲ用ヒ,四ツノ點$(-1,6)$, $(-3,9)$, $(5,2)$, $(3,9)$ニテ圍マルヽ四邊形ノ面積ヲ求メヨ。

16. 三角形ABCノ邊AB, ACノ中點ヲ結ブ線分ノ長サハ邊BCノ$\frac{1}{2}$ナルコトヲ證セヨ。

17. 三角形ABCノ重心ヲGトシ,Oヲ任意ノ點トスレバ

$$3(GA^2+GB^2+GC^2)=BC^2+CA^2+AB^2$$

及ビ

$$OA^2+OB^2+OC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3GO^2$$

ナルコトヲ證セヨ。

18. Oヲ原點トシ,二ツノ點P_1, P_2ノ座標ヲ夫々(x_1,y_1), (x_2,y_2)トスレバ

$$OP_1\cdot OP_2\cdot\cos P_1OP_2=x_1x_2+y_1y_2$$

ナルコトヲ證明セヨ。

解

$$OP_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$
$$OP_2=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

トシテ

$$P_1\hat{O}P_2=X\hat{O}P_2-X\hat{O}P_1$$

故ニ

$$\cos P_1\hat{O}P_2=\cos X\hat{O}P_1\cos X\hat{O}P_2+\sin X\hat{O}P_1\sin X\hat{O}P_2$$

然ルニ

$$\sin X\hat{O}P_1=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\quad \cos X\hat{O}P_1=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

$$\sin X\hat{O}P_2=\frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\quad \cos X\hat{O}P_2=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

故ニ

$$\cos P_2\hat{O}P_2=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

ヨッテ

$$OP_1\cdot OP_2\cdot\cos P_1\hat{O}P_2=x_1x_2+y_1y_2$$

19. 極座標ニ關スル二ツノ點$(2, 30°)$, $(4, 120°)$間ノ距離ヲ求メヨ。

20. 三ツノ點$(0, 0)$, $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$及ビ$\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$ハ正三角形ヲ作ルコトヲ證セヨ。

21. 極座標$\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ヲ直角座標ニ直セ。

22.
$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$$
ナル方程式ヲ極座標ニテノ方程式ニ化セヨ。

解
$$x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta$$
ヲ與ヘラレタル方程式ニ代入スレバ
$$r(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)=p$$
卽チ
$$r\cos(\theta-\alpha)=p$$

23. $x^2+y^2=a^2$ヲ極座標ニテノ方程式ニ直セ。

24. $x^2-y^2=2ay$ ヲ極座標ニテノ方程式ニ直セ。

25. $r^2=a^2\cos 2\theta$ヲ直角座標ニテノ方程式ニ直セ。

解
$$x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta$$
ヨリ
$$\cos\theta=\frac{x}{r} \qquad \sin\theta=\frac{y}{r} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
然ルニ與ヘラレタル方程式ヲ變形スレバ
$$r^2=a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
(2)ニ(1)ヲ代入シ,且ツ$x^2+y^2=r^2$ナルコトニ注意スレバ
$$x^2+y^2=a^2\left(\frac{x^2}{r^2}-\frac{y^2}{r^2}\right)$$
卽チ
$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

26. $r(\cos 3\theta+\sin 3\theta)=a\sin\theta\cos\theta$ ヲ直角座標ニテノ方程式ニ直セ。

27. 點$(5, 0)$ヨリ4ノ距離ニアル點ノ座標ヲ(r, θ)トスレバr, θハ次ノ方程式ニ適合スルコトヲ證セヨ。

$$r^2-10r\cos\theta+9=0$$

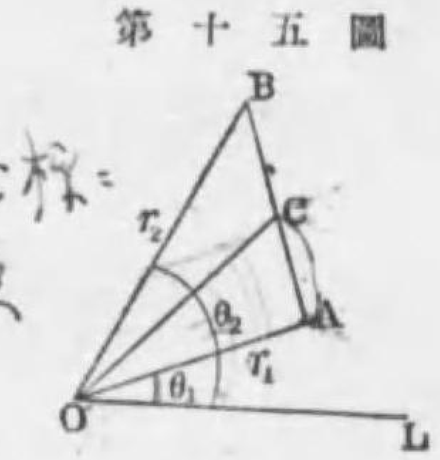
28. $\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ ヲ三ツノ頂點トスル三角形ノ面積ヲ求メヨ。

29. 交角ガωナル斜交軸ニ關シテ或點ノ座標ハ(x, y)トス。今原點ヲ極トシ,x軸ノ正ノ方向ヲ原線トスル時,此點ノ極座標ヲ(r, θ)トスレバ
$$x=\frac{r\sin(\omega-\theta)}{\sin\omega} \qquad y=\frac{r\sin\theta}{\sin\omega}$$
ナルコトヲ證セヨ。

30. 極ヲOトシ與ヘラレタル二ツノ點A, Bノ極座標ヲ夫々(r_1, θ_1), (r_2, θ_2)トスル時,角AOBノ二等分線ガABト交ル點ノ極座標如何。

解 圖ニ於テ二等分線ヲOCトシ,ABトノ交點ヲCトスレバ

第十五圖



長サ 直角坐標ニ
要ス 変換

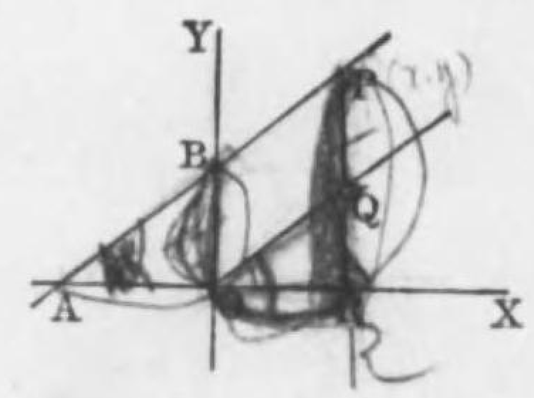
$$L\hat{O}A=\theta_1 \qquad L\hat{O}B=\theta_2$$
ナルガ故ニ
$$L\hat{O}C=\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$
又A, Bノ直角座標ハ夫々
$$(r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1) \quad (r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2)$$
ニシテ,OCハ$A\hat{O}B$ノ二等分線ナルガ故ニ
$$AC:CB=OA:OB=r_1:r_2$$
故ニC點ノ直角座標ハ
$$x=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}(\cos\theta_1+\cos\theta_2)$$
$$y=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}(\sin\theta_1+\sin\theta_2)$$
故ニ
$$OC=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}\sqrt{2+2\cos(\theta_1-\theta_2)}$$
$$=\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$$
ヨッテ求ムル極座標ハ
$$\left(\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}, \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$
ナリ。

第二章

直　　線

14. y 軸上ノ截片及ビ x 軸トナス角ヲ知リテ直線ノ方程式ヲ求ムルコト。

第十六圖



與ヘラレタル直線ABガ y 軸トB點ニテ交リ,其截片OBノ長サヲ b(但シOBノ正角ヲ考フルヲ要ス)トシ,ABノ x 軸ヨリ上ニ在ル部分ガ,x軸ノ正ノ向キト成ス角ヲ α トス。

今原點ヨリ AB ニ平行線 OQ ヲ引キ, AB 上ノ任意ノ點ヲ P トシ,其座標ヲ x, y トス。P ヨリ y 軸ニ平行ニ PQR ヲ引キ OQ トQニテ, x 軸トRニテ交ラシム。

然ル時ハ

$$RP = RQ + QP$$

$PR = \tan\alpha\, OR + b$

故ニ

$$RP = OR\tan R\hat{O}Q + OB = OR\tan O\hat{A}B + OB$$

ソコデ

$$\tan O\hat{A}B = \tan\alpha = m$$

トスレバ, m ハ常數ニシテ

$$RP = mQR + b$$

卽チ

$$y = mx + b, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

コノ關係ハPヲAB上ノ如何ナル位置ニトルモ成立ス。故ニ(1)ハ求ムル方程式ナリ。

注意 i OQ ノ方程式ハ明カニ $y=mx$ ナリ。

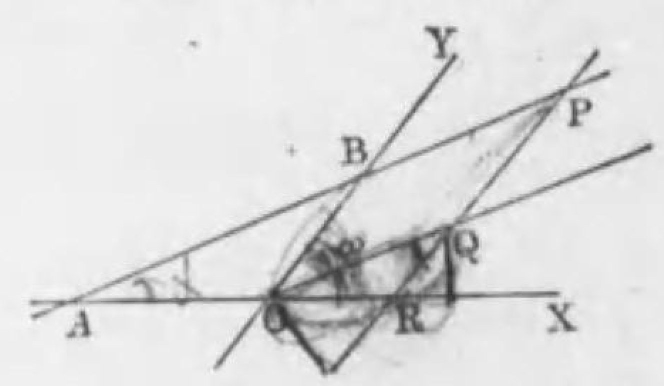
注意 ii m ヲ直線ノ方向係數又ハ角係數トイヒ, b ト共ニ常數ナリ。故ニ直線ハ x, y ニ就キテ一次ノ方程式ナリ。

注意 iii 直線ノ x 軸トナス角トハ其直線ノ x 軸ヨリ上ニ在ル部分ト x 軸ノ正ノ方向トノナス角ナリ。

15. 斜交軸ニ關シテ同上。

二ツノ軸ノ交角ヲ ω トセヨ。

第十七圖



圖ニ於テ $R\hat{A}B=\alpha$ トセバ

$$RP=RQ+QP$$
$$=RQ+OB \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ $\triangle ROQ$ ヨリ

$$\frac{RQ}{OR}=\frac{\sin R\hat{O}Q}{\sin O\hat{Q}R}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}$$

故ニ

$$RQ=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}\cdot OR \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

今與ヘラレタル直線 AB 上ノ任意ノ點 P ノ座標ヲ x, y トシ, (1) ニ (2) ヲ代入スレバ

$$y=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}x+b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

コノ關係ハ P ヲ AB 上ノ如何ナル位置ニトルモ成立ス。故ニ (3) ハ求ムル方程式ナリ。

注意 $\omega=\frac{\pi}{2}$, 即チ二ツノ軸ハ互ニ直交ナル時ハ $\sin(\omega-\alpha)=\cos\alpha$ ナルガ故ニ $\tan\alpha=m$ ト置カバ (3) ハ

$$y=mx+b$$

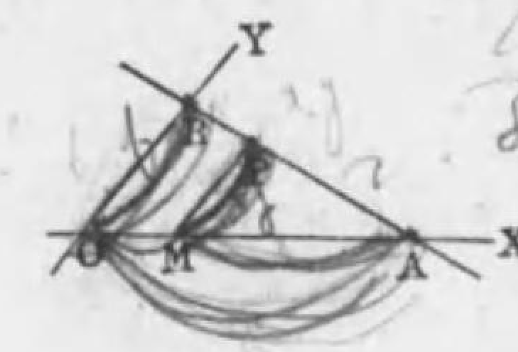
コレ前節ニ得タルモノナリ。

16. 二ツノ軸ヨリノ截片ヲ知リテ直線ノ方程式ヲ

求ム。

直線 AB ガ兩軸ヲ截ル點ヲ A, B トシ, $OA=a$, $OB=b$ トセヨ。(a, b ニ正,負ヲ附ケルコト勿論ナリ)

第十八圖



直線 AB 上ニ任意ノ點 P ヲトリ, 其座標ヲ x, y トシ, PM ヲ y 軸ニ平行ニ引ケバ

$$\frac{MP}{OB}=\frac{MA}{OA}$$

即チ

$$\frac{y}{b}=\frac{a-x}{a}$$

整頓スレバ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

コレ求ムル直線ノ方程式ナリ。

例. 點 (2, 1) ヲ過ル直線ガ x 軸ヲ原點ヨリ右ニ截リ y 軸ヲ下ニ截リ, 且ツ截片ノ長サ等シクテ符號ノミ異ナル時, 其方程式ヲ求メヨ。

解 x 軸ニテノ截片ヲ a トスレバ, y 軸ニテノ截片ハ $-a$ ナルガ故ニ, コノ直線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$$

而ルニ假定ニヨリ, コノ直線ガ點 (2, 1) ヲ過ルガ故ニ

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{-a}=1$$

ガ滿足セラレザルベカラズ。コレヨリ $a=1$ ヲ得。

ヨツテ求ムル方程式ハ

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{-1}=1$$

即チ

$$x-y=1$$

17. 一次ノ方程式ハ直線ヲ表ハス。

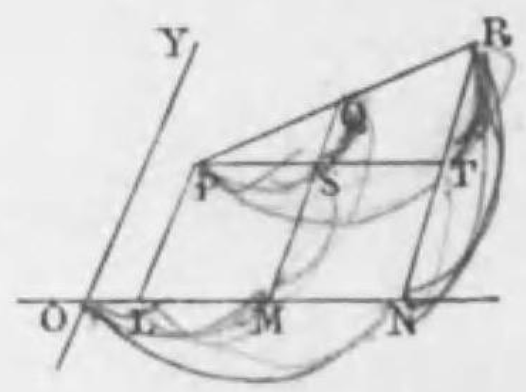
前三節ニヨリ,直線ハx, yニ就キ一次ノ方程式ニテ表ハサレタリ。コレヨリ其逆命題,即チ一次方程式ハ必ズ直線ヲ表ハスコトヲ證明セントス。

一次方程式ヲ

$$Ax+By+C=0$$

トシ,此方程式ガ表ハス曲線上ノ任意ノ三ツノ點ヲ P, Q, R トシ,其座標ヲ夫々 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) トス。

第十九圖



P ノ座標ハ方程式ヲ滿足スルガ故ニ

$$Ax_1+By_1+C=0 \cdots\cdots(1)$$

同樣ニ

$$Ax_2+By_2+C=0 \cdots\cdots(2)$$

$$Ax_3+By_3+C=0 \cdots\cdots(3)$$

(1) ト (2) トヨリ

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0$$

(1) ト (3) トヨリ

$$A(x_3-x_1)+B(y_3-y_1)=0$$

故ニ

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} \cdots\cdots(4)$$

今 P, Q, R ヨリ y 軸ニ平行ニ PL, QM, RN ヲ引キ x 軸トノ交點ヲ夫々 L, M, N トシ次ニ P ヨリ x 軸ニ平行ニ PST ヲ引キ QM, RN トノ交點ヲ夫々 S, T トスレバ (4) ノ關係式ハ

$$\frac{SQ}{PS}=\frac{TR}{PT}$$

ヨツテ二ツノ三角形 PSQ, PTR ハ互ニ相似ナリ。

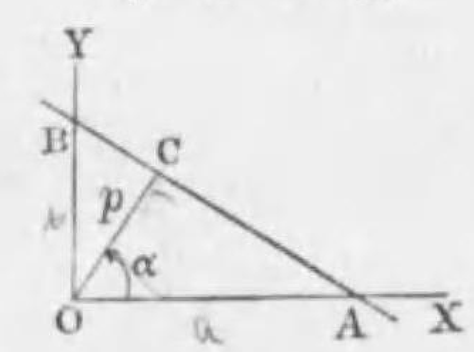
然ルニ此二ツノ三角形ハ一ツノ對應邊 PS, PT ハ同一直線上ニアルガ故ニ,他ノ對應邊 PQ, PR モ亦同一直線上ニアルベク,從ツテ三ツノ點 P, Q, R ハ一直線上ニアルベシ。

コノ事ハ方程式ガ表ハス曲線ノ上ノ何レノ三點ニ就イテモ成立ス。故ニ一次方程式ニテ表ハサレタルモノハ直線ナリ。

18. 原點ヨリノ垂線ノ長サ及ビ其垂線ガ x 軸トナス角ヲ知リテ直線ノ方程式ヲ求ム。

與ヘラレタル直線ヲ AB トシ,原點ヨリノ垂線 OC ノ長サヲ p, OC ガ x 軸トナス角ヲ α トス。

第二十圖



今 $OA=a$, $OB=b$ ト假定スレバ,直線 AB ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

兩邊ニ p ヲ乘ズレバ

$$\frac{p}{a}x+\frac{p}{b}y=p \cdots\cdots(1)$$

然ルニ

$$\frac{p}{a}=\cos\alpha,\quad \frac{p}{b}=\sin\alpha \cdots\cdots(2)$$

(2) ヲ (1) ニ代入スレバ

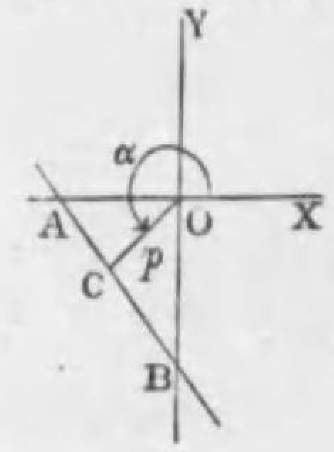
$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \cdots\cdots(3)$$

コレ求ムル方程式ナリ。

注意 i　上ノ方程式ヲ直線ニ關スルへつせノ正規方程式トイヒ, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ ヲ直線 AB ノ方向餘弦トイフ。

注意 ii　上ノ公式ニ於ケル垂線ノ長サpヲ常ニ正ナラシメンニハ角αヲOヨリ2πマデトラシムルコトヲ要ス。例ヘバ右圖ノ如キニアリテハ,角αハ矢ノ方向ニテ示セルモノナラザルベカラズ。

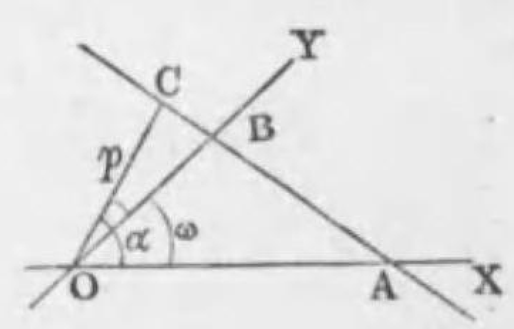
第二十一圖



19. 斜交軸ニ關シテ同上。

與ヘラレタル直線ヲABトシ,二ツノ軸ノナス角ヲωトスレバ圖ヨリ直チニ

第二十二圖



$$\left.\begin{aligned} OA&=\frac{p}{\cos\alpha} \\ OB&=\frac{p}{\cos(\omega-\alpha)} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ $OA=a$, $OB=b$ ト假定スレバ第十六節ニヨリ,ABノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\cdots\cdots\cdots(2)$$

兩邊ニpヲ乘ズレバ

$$\frac{p}{a}x+\frac{p}{b}y=p\cdots\cdots\cdots(3)$$

ヨツテ(3)ニ(1)ヲ代入スレバ

$$x\cos\alpha+y\cos(\omega-\alpha)=p,$$

20. 方程式 $Ax+By+C=0$ ヲへつせノ正規方程式ニ化スルコト。

二ツノ方程式

$$Ax+By+C=0$$

及ビ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$$

ガ同一直線ヲ表ハスモノトスレバ,之等ノ二ツノ方程式ハ全ク

同一ノモノナラザルベカラズ。故ニ

$$\frac{A}{\cos\alpha}=\frac{B}{\sin\alpha}=\frac{C}{-p}$$

ノ關係アル筈ナリ。

ヨリテ

$$\frac{A^2}{\cos^2\alpha}=\frac{B^2}{\sin^2\alpha}=\frac{A^2+B^2}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=A^2+B^2$$

故ニ

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\qquad \sin\alpha=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

及ビ

$$p=\frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

然ルニpハ常ニ正ナルガ故ニ,根號ノ前ノ複符號ハpヲシテ正ナラシムルヤウニトルベシ。

約言スレバ $Ax+By+C=0$ ヲ先ヅ

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y=\frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

トナシ,右邊ガ正トナルガ如ク複符號ヲ定ムレバヨシ。

例1　$x+y\sqrt{3}=6$ ヲへつせノ正規方程式ニ直セ

解　　$A=1$　$B=\sqrt{3}$　　$\sqrt{A^2+B^2}=2$,

サテ與ヘラレタル方程式ハ

$$\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=3,$$

然ルニ

$$\cos60^\circ=\frac{1}{2}\qquad \sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

ヨツテ求ムル方程式ハ

$$x\cos60^\circ+y\sin60^\circ=3,$$

例2　原點ヨリノ距離ガ4ニシテ,x軸トナス角ガ60°ナルガ如キ直線ノ方程式ヲ求ム(14,九大農科)

解　圖ニ於テABヲ與ヘラレタル直線,OCヲ垂線, $O\hat{A}C=60^\circ$

トス。

然ル時ハ

$$A\hat{O}C=30^\circ,\ \text{従ツテ}\ X\hat{O}C=150^\circ$$

ナルガ故ニ公式ニヨリ

$$x\cos 150^\circ+y\sin 150^\circ=4,$$

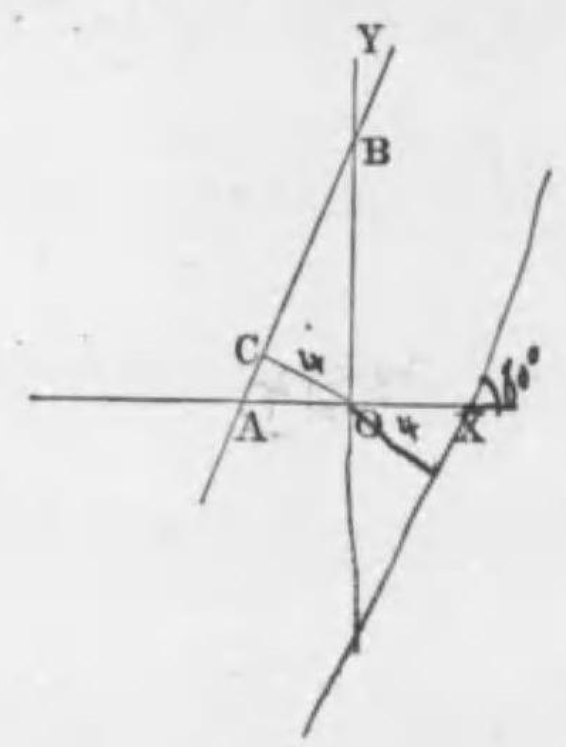
卽チ

$$\frac{-\sqrt{}}{2}x+\frac{1}{2}y=4$$

従ツテ

$$-\sqrt{3}x+y=8,$$

第二十三圖



21. 二定點ヲ過ル直線ノ方程式

二ツノ定點ヲ $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ トシ,求ムル直線ノ方程式ヲ

$$Ax+By+C=0 \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

ト假定ス。P及ビQハ此直線ノ上ニアル爲メニハ夫々

$$Ax_1+By_1+C=0 \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$Ax_2+By_2+C=0 \quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナルヲ要ス,(1),(2)及ビ(3)ヨリ未定係數A,B,Cヲ消去スレバ

$$(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+x_1y_2-x_2y_1=0 \quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

或ハ行列式ヲ用フレバ

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad\cdots\cdots\cdots(5)$$

コレ求ムル方程式ナリ。

注意 i 上ノ公式ハ斜交軸ノ場合ニモ適用セラル。

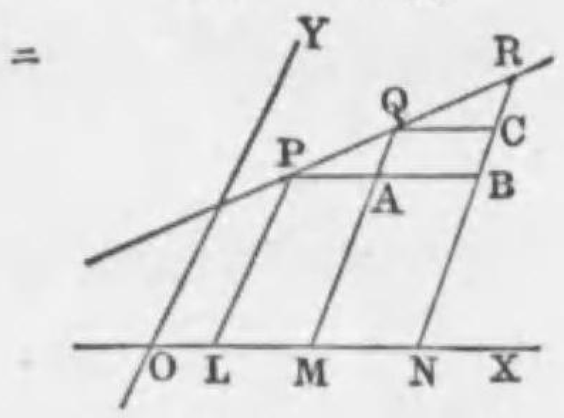
注意 ii 上ノ公式ハ初等幾何學的ニモ求ムルコトヲ得。卽チ次ノ如シ。

二ツノ定點P,Qヲ結ブ直線上ニ任意ノ點Rヲトリ,其ノ座標

$\sin 330^\circ < 0$

ヲ x,y トセヨ。P,Q,Rヨリ y 軸ニ平行ニPL,QM RNヲ引キP,Qヨリ x 軸ニ平行ニPAB,QCヲ引ケバ

第二十四圖



$$\frac{BR}{PB}=\frac{AQ}{PA} \quad\cdots\cdots\cdots(6)$$

然ルニ

$$\left.\begin{aligned} PB&=x-x_1 \\ BR&=y-y_1 \\ PA&=x_2-x_1 \\ AQ&=y_2-y_1 \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots(7)$$

(6)ニ(7)ヲ代入スレバ

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad\cdots\cdots\cdots(8)$$

或ハ變形シテ

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad\cdots\cdots\cdots(9)$$

(8)又ハ(9)ハ前ニ得タル(4)及ビ(5)ニ同ジキモノナリ。

系　三ツノ點 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$, $R(x_3,y_3)$ ガ一直線ノ上ニアル爲メニハ二ツノ點例ヘバP,Qヲ結ブ直線上ニ第三ノ點Rガ載リ居ラザルベカラズ。ヨツテ三點ガ列座スル爲メニハ上ニ得タル方程式ノ x,y ニ夫々 x_3,y_3 ヲ代入スルモ尙滿足スベキ筈ナリ。ヨツテ其條件式ハ

$$\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

或ハ

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

22. 二ツノ直線ノ交點

二ツノ直線ノ方程式ヲ

$$ax+by+c=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$a'x+b'y+c'=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

トセヨ。

交點ノ座標ハ之等二ツノ方程式ヲ同時ニ滿足スベキガ故ニ(1)ト(2)トヨリ得ラルヽxトyノ値ハ交點ノ座標ナリ。

即チ

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b} \\ y&=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

系 i $ab'-a'b=0$ ニシテ $bc'-b'c\neq 0$ 及ビ $ca'-c'a\neq 0$ ナル時,即チ

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=k \qquad \frac{c}{c'}\neq k$$

ナル時ハ(3)ヨリx,yノ値ヲ求ムルコトヲ得ズ。換言スレバ交點ノ座標ガ無シ。ヨツテ此場合二ツノ直線ハ互ニ平行ナリ。

斯ノ如キ場合ニ代數學ニ於テハ一組ノ根x,yガ存在セズト言ハズシテ無限大ナリトイフ如ク,幾何學ニテモ交點ノ座標ガ存在セズト言ハズシテ無限大ナリトイフ。從ツテ共交點ハ無限遠點ナリト解ス。

コノ解釋ニ從フ時ハ任意ノ二ツノ直線ハ常ニ必ズ相交ルコトヽナルベク共交點ノ座標ハ有限ニシテ確定ノ値ナル時ハ相交ルトイヒ,無限大ナル時ハ互ニ平行ナリトイフ。

系 ii $ab'-a'b=bc'-b'c=ca'-c'a=0$

即チ

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k$$

ナル關係アル時ハ,x,yノ値ハ全ク不定ナリ。然レドモ方程式(1)ハ

$$k(a'x+b'y+c')=0$$

トナリ,全ク(2)ト一致ス。故ニ二ツノ直線ハ實ハ同一ノ直線ナリ。

23. 無限遠ニ於ケル直線

直線ノ方程式

$$ax+by=c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ヲ變形シテ

$$\frac{x}{\frac{c}{a}}+\frac{y}{\frac{c}{b}}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

トスレバ第十六節ニヨリ二ツノ軸ノ截片ハ夫々$\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$ナリ。

今(1)ニ於テ $a=0$ ニシテ b,c ハ共ニ零ニアラザルモノトスレバ( )ニヨリテ直線(1)ハ y 軸ヲ原點ヨリ$\frac{c}{b}$ノ距離ニ截ルモx軸トハ無限遠點ニテ交ル。コレ即チx軸ニ平行ナル直線ナリ 同樣ニ $b=0$ ニシテ a,c ハ共ニ零ニアラザル時ハ直線(1)ハy軸ト無限遠點ニ交ル,コレ即チy軸ニ平行ナル直線ナリ。

然ルニ若シ $a=b=0$ ニシテ $c\neq 0$ ナル時ハ二ツノ軸ノ上ノ截片ハ共ニ無限大ナルガ故ニ直線ハ全ク無限遠ニアリ。之ヲ無限遠ニ於ケル直線トイヒ,其方程式ハ

$$0x+0y=c$$

ナリ。

24. 一定點ヲ過ル直線ノ方程式

一ツノ定點ヲ(x',y')トスレバ此點ヲ過ル直線ノ方程式ハ

$$y-y'=m(x-x') \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ナリ。何トナレバ(1)ハxトyトニ就キテ一次方程式ナルガ故ニ直線ヲ表ハシ,且ツxトyトニ夫々x',y'ヲ代入スルモ成立スル

ガ故ニ此直線ハ點(x',y')ヲ過ルベケレバナリ。

注意 i 茲ニ m ガ如何ナル値ニテモ(1)ハ必ズ定點(x',y')ヲ過ル。故ニ平面上ノ一定點ヲ通過スル直線ハ無數ニアリ。

注意 ii コノ定理ヲ用ヒテ二ツノ點(x_1,y_1), (x_2,y_2)ヲ過ル直線ノ方程式ヲ求ムルコトヲ得。何トナレバ一ツノ點(x_1,y_1)ヲ過ル直線ノ方程式ハ

$$y-y_1=m(x-x_1)\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ此直線ハ第二ノ點(x_2,y_2)ヲ通過スル爲メニハ

$$y_2-y_1=m(x_2-x_1)$$

ナラザルベカラズ。故ニ

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)ヲ(1)ニ代入スレバ

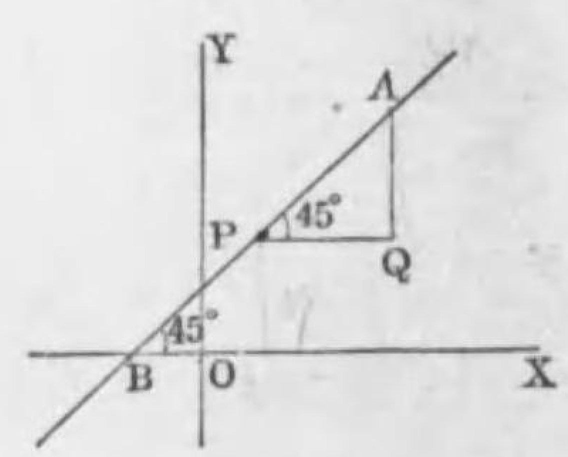
$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

コレ第二十一節(9)ト全ク一致ス。

例 點(3,4)ヲ過リ且ツ x 軸ト45°ヲナス如キ直線ノ方程式ヲ求ム

解 A點ヲ點(3,4)トシ,求ムル直線ヲABトス。

第二十五圖



先ヅA點ヲ過ル直線ノ方程式ハ一般ニ

$$y-4=m(x-3)\cdots\cdots(1)$$

ナリ。

今直線AB上ニ任意ノ點Pヲトリ,其座標ヲ x,y トス, 次ニP及ビAヨリ二ツノ軸ニ平行ニPQ, AQヲ引ケバ

$$\frac{QA}{PQ}=\frac{4-y}{3-x}=\frac{y-4}{x-3}=\tan45^\circ=1\cdots\cdots(2)$$

然ルニ(1)ヨリ

$$m=\frac{y-4}{x-3}$$

故ニ(2)ヨリ $m=1$

ヨツテ求ムル直線ノ方程式ハ

$$y-4=x-3$$

卽チ

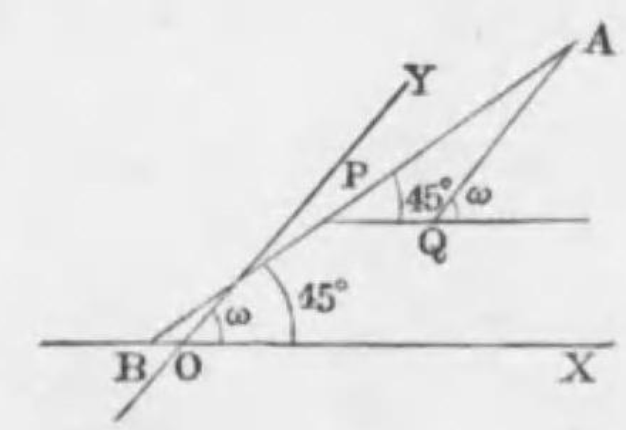
$$x-y+1=0$$

注意 方向係數 m トハ直線ガ x 軸トナス角ノ正切ナリ(本章第十四節參照)

次ニ斜交軸ニ就キテ考フルニ二ツノ軸ノナス角ヲ ω トシ,與ヘラレタル直線ヲ AB トシ,ソノ上ノ任意ノ點ヲ P トシ,其座標ヲ x,y トス。

今P及ビAヨリ二ツノ軸ニ平行ニPQ, AQヲ引ケバ △APQヨリ

第二十六圖



$$\frac{QA}{PQ}=\frac{y-4}{x-3}=\frac{\sin45^\circ}{\sin(\omega-45^\circ)}$$

ヨツテ求ムル方程式ハ

$$(y-4)\sin(\omega-45^\circ)$$
$$=\sin45^\circ(x-3)$$

整頓シテ

$$x+(\cos\omega-\sin\omega)y-3+4(\sin\omega-\cos\omega)=0$$

25. 二ツノ直線ノ交點ヲ過ル直線ノ方程式

二ツノ與ヘラレタル直線ノ方程式ヲ夫々

$$ax+by+c=0\cdots\cdots(1)$$

$$a'x+b'y+c'=0\cdots\cdots(2)$$

トセヨ,

k ヲ任意ノ實數トシ(1)及ビ(2)ヨリ次ノ方程式

$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

ヲ作ル時ハ(3)ハ x ト y トニ就キテ一次ノ方程式ナルガ故ニ直線ヲ表ハシ,且ツ(1),(2)ヲ同時ニ滿足スル點ノ座標(卽チ二直線ノ交點ノ座標)ハ(3)ヲモ滿足セシムルガ故ニ(3)ニテ表ハシタル方程式ハ(1)ト(2)トノ交點ヲ過ル直線ナリ。

注意 上ノ定理ハ斜交軸ニモ適用セラル。又 k ノ値ヲ變ズルニ從ヒ,交點ヲ過ル直線ノ位置ガ變ズ。

例 二ツノ直線 $2x-3y+4=0$, $x+y-2=0$ ノ交點ト點 $(2,3)$ トヲ過ル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

解 與ヘラレタル二ツノ直線ノ交點ヲ過ル直線ノ方程式ハ一般ニ

$$2x-3y+4+k(x+y-2)=0$$

此直線ハ點 $(2,3)$ ヲ過ル爲メニハ x, y ノ代リニ夫々 2,3 ヲ代入スル時モ成立スベキ筈ナリ。故ニ

$$4-9+4+k(2+3-2)=0$$

卽チ

$$3k-1=0$$

從ツテ

$$k=\frac{1}{3}$$

ヨツテ求ムル方程式ハ

$$2x-3y+4+\frac{1}{3}(x+y-2)=0$$

整頓シテ

$$7x-8y+10=0$$

26. 三ツノ直線ガ同一ノ點ニテ交ル條件

三ツノ與ヘラレタル直線ヲ夫々

$$ax+by+c=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$a'x+b'y+c'=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

$$a''x+b''y+c''=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

トセヨ。之等ガ同一ノ交點ヲ共有スル爲メニハ(1),(2)ヨリ得タル交點ノ座標ハ(3)ヲモ滿足スベキガ故ニ

$$\frac{a''(bc'-b'c)}{ab'-a'b}+\frac{b''(ca'-c'a)}{ab'-a'b}+c''=0$$

ナルヲ要ス。分母ヲ拂ヘバ

$$a''(bc'-b'c)+b''(ca'-c'a)+c''(ab'-a'b)=0$$

コレ求ムル條件式ナリ

行列式ヲ用フレバ其形甚ダ簡單ナリ。卽チ

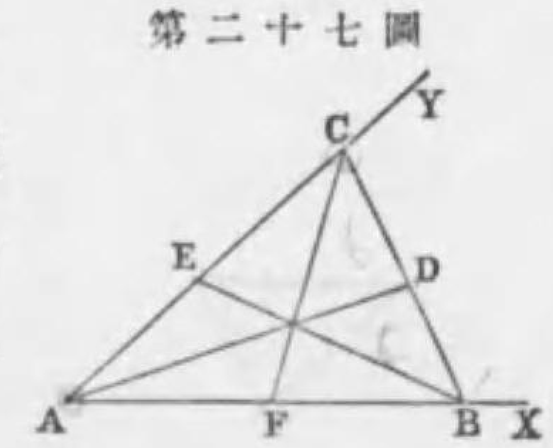
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}=0$$

注意 上ノ定理ハ斜交軸ニ關シテモ尙成立ス。

例 三角形ノ三ツノ中線ガ一點ニテ會スルコトヲ證明セヨ。

解 $\triangle ABC$ ニ於テ二邊 AB, AC ヲ x 軸及ビ y 軸ニトリ

第二十七圖



$AB=2c$ $AC=2b$ トスレバ三ツノ邊ノ中點 D, E, F 及ビ三ツノ頂點 A, B, C ノ座標ハ夫々 (c,b), $(0,b)$ $(c,0)$, $(0,0)$, $(2c0,)$ $(0,2b)$ ナル故ニ直線 AD, BE, CF ノ方程式ハ夫々

$$bx-cy=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$bx+2cy-2bc=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

$$2bx+cy-2bc=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

之等ノ三ツノ直線ガ一點ニテ會スル條件ハ上ノ定理ヨリ

$$\begin{vmatrix} b & -c & 0 \\ b & 2c & -2bc \\ 2b & c & -2bc \end{vmatrix}=0$$

ナリ。然ルニコノ條件式ハ明カニ成立ス,ヨツテ證セラレタリ。

27. 二ツノ直線ノ交角

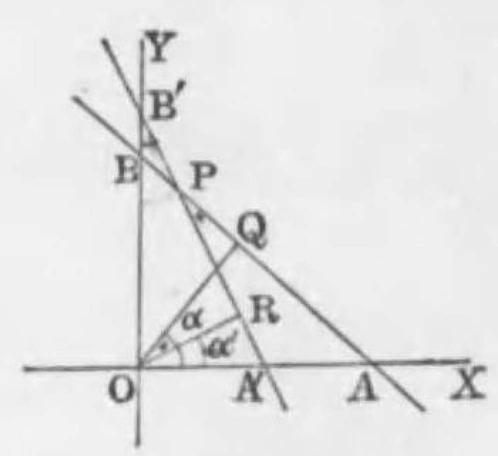
(i)　二ツノ直線ガヘつせノ正規方程式ニテ與ヘラレタル時,

卽チ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$$

$$x\cos\alpha'+y\sin\alpha'=p'$$

第二十八圖



ナル時,前者ヲ AB, 後者ヲ A′B′ トスレバ

圖ヨリ

$$\alpha=\mathrm{A\hat{O}Q}$$

$$\alpha'=\mathrm{A'\hat{O}R}$$

然ルニ交角 APA′ ハ角 QOR ニ等シ。故ニ

$$\mathrm{A\hat{P}A'}=\alpha\sim\alpha'$$

ナリ。

(ii)　二ツノ直線ハ $y=mx+b$　$y=m'x+b'$ ニテ與ヘラレタル時

之等ノ直線ガ x 軸トナス角ヲ α,α' トスレバ

$$\tan\alpha=m \qquad \tan\alpha'=m'$$

ニシテ,二ツノ直線ノ交角 θ ハ α ト α' トノ差ニ等シキガ故ニ

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\alpha')=\frac{\tan\alpha-\tan\alpha'}{1+\tan\alpha\tan\alpha'}=\frac{m-m'}{1+mm'}$$

ヨツテ交角

$$\theta=\arctan\frac{m-m'}{1+mm'} \qquad \tan\theta=\pm\frac{m-m'}{1+mm'}$$

(iii)　二ツノ直線ハ $ax+by+c=0$, 及ビ $a'x+b'y+c'=0$ ニテ與ヘ

ラレタル時

少シク書キカヘルト

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

$$y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'}$$

ヨツテ

$$m=-\frac{a}{b} \qquad m'=-\frac{a'}{b'}$$

ヨツテ

$$\frac{m-m'}{1+mm'}=\frac{a'b-ab'}{aa'+bb'}$$

故ニ交角 θ ハ

$$\theta=\arctan\frac{a'b-ab'}{aa'+bb'}$$

系　(ii) ノ場合ニ　$m=m'$ ナル時ハ $\tan\theta=0$, 從ツテ $\theta=0$, 卽チ二ツノ直線ハ平行ナリ,又 $1+mm'=0$ ナル時ハ $\tan\theta=\infty$　從ツテ $\theta=90^\circ$, 卽チ二ツノ直線ハ互ニ垂直ナリ

(iii) ノ場合ニ $a'b-ab'=0$ 卽チ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ ナル時ハ二ツノ直線ハ平行ニシテ,$aa'+bb'=0$, 卽チ $\frac{b}{a}=-\frac{a'}{b'}$ ナル時ハ互ニ垂直ナリ。

例　點(1,3)ヲ過リ直線 $x+2y-1=0$ ニ垂直ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

解　與ヘラレタル直線ヲ書キカヘルト

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

故ニ方向係數ハ $-\frac{1}{2}$ ナリ,之ヲ m' トス。

然ルニ點(1, 3)ヲ過ル直線ノ方程式ハ一般ニ

$$y-3=m(x-1)$$

然ルニ互ニ垂直ナルベキガ故ニ

$$mm'=-1 \quad 從ツテ \quad m=2$$

ヨツテ求ムル方程式ハ $y-3=2(x-1)$

即チ

$$y-2x-1=0$$

別解, 求ムル直線ノ方程式ヲ

$$y=mx+b$$

ト假定スレバ,點(1,3)ヲ過ル爲メニハ

$$3=m+b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又垂直條件ヨリ

$$m\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1),(2)ヲ解キテ

$$m=2 \qquad b=1$$

ヨツテ求ムル直線ノ方程式ハ

$$y=2x+1,$$

28. 斜交軸ニ關シテ同上

斜交軸ニ關シテ二ツノ直線 AB, CD ノ方程式ヲ

$$y=mx+b$$

$$y=m'x+b'$$

トシ, x 軸トナス角ヲ夫々 α,α' トシ,二ツノ軸ノナス角ヲ ω トスレバ第十五節ニヨリ

$$m=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$m'=\frac{\sin\alpha'}{\sin(\omega-\alpha')} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)ヨリ

$$\sin\alpha=m\sin(\omega-\alpha)=m(\sin\omega\cos\alpha-\sin\alpha\cos\omega)$$

故ニ

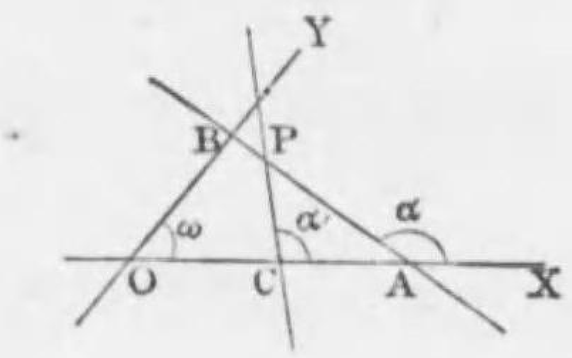
$$\tan\alpha=\frac{m\sin\omega}{1+m\cos\omega} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

同樣ニ(2)ヨリ

$$\tan\alpha'=\frac{m'\sin\omega}{1+m'\cos\omega} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

然ルニ交角 APC ハ

第二十九圖



$$\theta=\alpha-\alpha'$$

ニ等シキガ故ニ

$$\tan(\alpha'-\alpha')=\frac{\tan\alpha-\tan\alpha'}{1+\tan\alpha\tan\alpha'}$$

之ニ(3),(4)ヲ代入スレバ

$$\tan(\alpha-\alpha')=\frac{(m-m')\sin\omega}{1+(m+m')\cos\omega+mm'}$$

ヨツテ交角 θ ハ

$$\theta=\arctan\frac{(m-m')\sin\omega}{1+(m+m')\cos\omega+mm'}$$

系 i $m=m'$ ナル時ハ二ツノ直線ハ互ニ平行ニシテ $1+(m+m')\cos\omega+mm'=0$ ナル時ハ互ニ垂直ナリ。

系 ii 二ツノ直線ガ

$$ax+by+c=0$$

$$a'x+b'y+c'=0$$

ニテ與ヘラレタル時ハ m,m' ニ相當スルモノハ $-\frac{a}{b}$ 及ビ $-\frac{a'}{b'}$ ナルガ故ニ交角ハ

$$\theta=\arctan\frac{(a'b-ab')\sin\omega}{aa'+bb'-(ab'+a'b)\cos\omega}$$

故ニ $a'b-ab'=0$ ナル時ハ二ツノ直線ハ互ニ平行ニシテ,

$$aa'+bb'-(ab'+a'b)\cos\omega=0$$

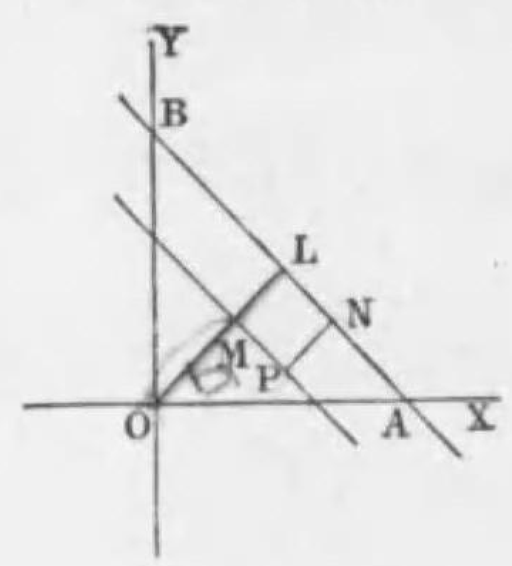
ナル時ハ互ニ垂直ナリ。

29. 定點ヨリ定直線ヘノ垂線ノ長サ

直交軸ニ關シ,定直線 AB ノ方程式ヲ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$$

トシ,定點Pノ座標ヲ x',y' トセヨ。



第三十圖

Pヲ過リABニ平行ニPMヲ引キ垂線OMノ長サヲ p' トスレバ直線OMガ x 軸トナス角ガ矢張リ α ナルガ故ニPMノ方程式ハ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p'$$

然ルニPガ此直線ノ上ニアルガ故ニ其座標 x',y' ニテ滿足セラルベシ,卽チ

$$p'=x'\cos\alpha+y'\sin\alpha$$

而シテ求ムル距離PNガOLトOMトノ差ナルガ故ニ

$$PN=p-(x'\cos\alpha+y'\sin\alpha) \quad\cdots\cdots(1)$$

注意 圖ノ如クP點ハ原點ト直線ABノ同ジ側ニアル時ハOLハOMヨリ大ナルモ,P點ハ其反對ノ側ニアル時ハOLハOMヨリモ小ナリ。故ニ定點ヨリ定直線ニ至ル距離ノ公式トシテ(1)ヲ用フル時ハ點 (x',y') ハ原點ト直線ノ同ジ側ニアル時ハ其距離正ニシテ,反對ノ側ニアル時ハ負ナリ

系 i 定直線ガ $ax+by+c=0$ ニテ與ヘラレタル時ハ先ヅ之ヲ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

ノ形ニ直シテ後上記ノ公式ヲ用フベシ,卽チ直線ノ方程式ヲ

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

トス。(第二十節)然ル時ハ點 (x',y') ヨリノ垂線ノ長サハ

$$\pm\frac{ax'+by'+c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad\cdots\cdots(2)$$

サテ點 (x',y') ガ原點ト直線ノ同ジ側ニ在ル時ニ,垂線ノ長サガ

正ナルガ如ク定ムル時ハ(2)ノ複符號ノトリ方ハ(1)ト比較シテ $\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ ガ正トナル如クセザルベカラズ。

ヨツテ $ax'+by'+c$ ガ c ト同ジ符號ナル時ハ點 x',y' ハ原點ト直線ノ同ジ側ニアリ,c ト反對ノ符號ナル時ハ點 x',y' ハ原點ト直線ノ反對ノ側ニアリ。

例 點(4,3)ヨリ直線 $3x-y+4=0$ ニ引ク垂線ノ長サヲ求メヨ。

解 公式(2)ニヨリ,垂線ノ長サハ

$$\pm\frac{12-3+4}{\sqrt{9+1}}=\pm\frac{13}{\sqrt{10}}$$

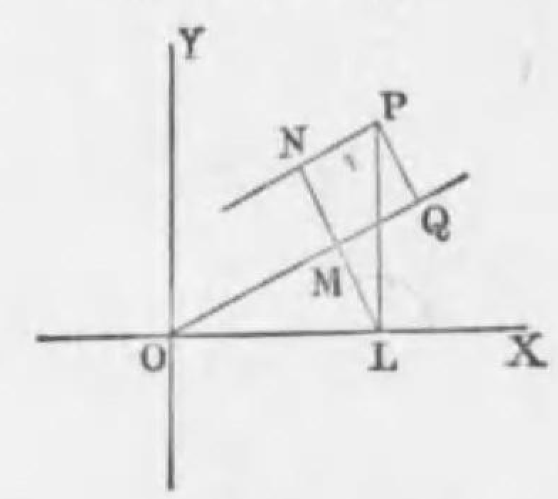
玆ニ複符號ハ分子ノ第三項ヲ正ナラシムルガ如ク定ムルガ故ニ+ヲトル。卽チ其長サハ $\frac{13}{\sqrt{10}}$ ナリ。從ツテ點(4,3)ハ原點ト直線ノ同ジ側ニアリ。

系 ii 直線ガ原點ヲ過ル時ヲ考ヘンニ,其方程式ヲ

$$ax+by=0$$ 絶対値ナレ

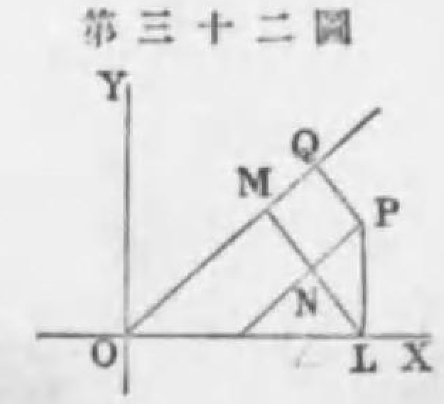
トス。コノ場合ハP點ガ直線ト原點ノ何レノ側ニアルカヲ定ムルコトヲ得ズ。然レドモ其座標ヲ x',y' トスレバ圖ヨリ

第三十一圖



$$\begin{aligned}QP&=LN-LM=LP\cos P\hat{L}M-OL\cos O\hat{L}M\\&=y'\sin O\hat{L}M-x'\cos O\hat{L}M\\&=y'\sin X\hat{L}M+x'\cos X\hat{L}M\\&=\pm\frac{ax'+by'}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{aligned}$$

第三十二圖



但シ複符號ヲ y' ノ係數ガ正ナル如クトル時ハ直線ヨリモ上部ニP點ガアル時ハ距離正トナルベク,下部ニアル時ハ負トナルベシ。

30. 定直線ト定角ヲナス直線ノ方程式

AB ヲ定直線トシ, P ヲ任意ノ點トシ, P點ヲ過リテ AB ト定角 θ ヲナスベキ直線 PA, PB ヲ作ラントス。

今直線 AB ノ方程式ヲ $y=mx+b$ トシ, 求ムル直線ノ方程式ヲ

$$y=m'x+b'$$

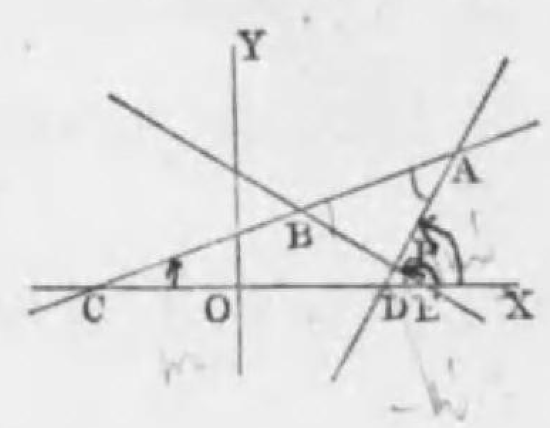
トスレバ

$$\theta=\mathrm{PAB}=\mathrm{X\hat{D}A}-\mathrm{X\hat{C}A}\cdots\cdots(1)$$

及ビ

$$\theta=\mathrm{\hat{P}BA}=\mathrm{X\hat{C}A}+\mathrm{D\hat{E}P}\cdots\cdots(2)$$

第三十三圖



然ルニ假定ニヨリ

$$\left.\begin{array}{l}\tan\mathrm{X\hat{C}A}=m\\ \tan\mathrm{X\hat{D}A}=m'\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\left.\begin{array}{l}\tan\mathrm{X\hat{C}A}=m\\ \tan\mathrm{D\hat{E}P}=-m'\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

負

ヨツテ(1), (3)ヨリ

$$\tan\theta=\tan(\mathrm{X\hat{D}A}-\mathrm{X\hat{C}A})=\frac{m'-m}{1+mm'}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(2), (4)ヨリ

$$\tan\theta=\tan(\mathrm{X\hat{C}A}+\mathrm{D\hat{E}P})=\frac{m-m'}{1+mm'}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

然ルニ題意ニヨリ θ ガ定角ナルガ故ニ $\tan\theta$ ハ定値ナリ, 今之ヲ a ト置カバ(5), (6)ヨリ

$$m'=\frac{m+a}{1-am}\quad 及ビ\quad m'=\frac{m-a}{1+am}$$

ヨツテ求ムル方程式ハ

$$\left.\begin{array}{l}y=\dfrac{m+a}{1-am}x+b'\\ 及ビ\quad y=\dfrac{m-a}{1+am}x+b'\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

ニシテ前者ハ AD ノ方程式ニシテ後者ハ BE ノ方程式ナリ。

注意 玆ニ b' ハ如何ナル常數ニテモ可ナリ。ソハ畢竟P點ノ位置ガ定マラヌガ故ナリ。若シ P 點ハ定點ニシテ其座標ガ x', y' ナル時ハ之ヲ上ノ結果ニ代入スレバ

$$b'=y'-\frac{m\pm a}{1\mp am}x'$$

トナリテ確定スベシ。從ツテ(7)ノ二ツノ直線ノ方程式ハ

$$y-y'=\frac{m\pm a}{1\mp am}(x-x')\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

トナル。

系 P點(x', y')ヲ過リ AB ニ平行ナル直線ノ方程式ハ(8)ニ $a=0$ ヲ代入スレバ得ラル, 卽チ

$$y-y'=m(x-x')\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

又P點ヲ過リ AB ニ垂直ナル直線ハ(9)ニ示セル直線ニモ垂直ナルガ故ニ其方程式ハ

$$y-y'=-\frac{1}{m}(x-x')\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

或ハ(8)ヲ少シク變形シテ

$$y-y'=\frac{\dfrac{m}{a}\pm1}{\dfrac{1}{a}\mp m}(x-x')$$

極値計算

ソコデ $a=\infty$ ト置カバ

$$y-y'=-\frac{1}{m}(x-x')$$

ヲ得ラル。

31. 二直線ノナス角ノ二等分線ノ方程式

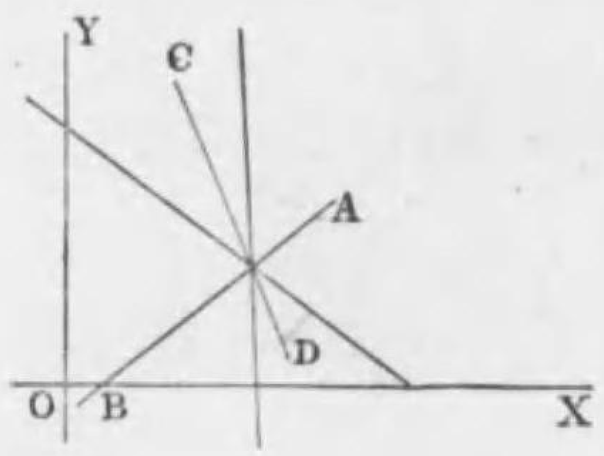
二ツノ直線ノ方程式ヲ夫々

$$x\cos a+y\sin a=p$$

$$x\cos a'+y\sin a'=p'$$

トシ,其ナス角ノ二等分線ヲ AB, CD トスレバ之等ノ直線上ノ點ヨリ與ヘラレタル二ツノ直線至ル距離ハ相等シカルベシ。

第三十四圖



然ルニ直線 AB 上ノ點ハ二ツノ直線ニ關シ原點ト同ジ側ニアルカ又ハ反對ノ側ニアリ。

故ニ AB 上ノ任意ノ點 (x', y') ヨリ之等ノ二直線ニ下ス垂線ハ夫々

$$p-x'\cos\alpha-y'\sin\alpha, \qquad p'-x'\cos\alpha'-y'\sin\alpha'$$

ナルカ,又ハ

$$-(p-x'\cos\alpha-y'\sin\alpha), \quad -(p'-x'\cos\alpha'-y'\sin\alpha')$$

ナルカナリ。而シテ其長サハ相等シカルベシ。故ニ直線 AB ノ方程式ハ x', y' ヲ流通座標 x, y ニ直シタルモノ即チ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=x\cos\alpha'+y\sin\alpha'-p'$$

又 CD 上ノ點ハ一ツノ直線ト原點ノ同ジ側ニアリ,他ノ直線ト反對ノ側ニアルガ故ニ,ソノ垂線ノ長サハ等シカルベキモ符號ハ反對ナリ。故ニ其方程式ハ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=-(x\cos\alpha'+y\sin\alpha'-p')$$

例 三角形ノ三ツノ角ノ二等分線ハ一點ニ會スルコトヲ證セヨ。

解 三角形 ABC ノ內部ニ原點ヲトル時,三ツノ邊 AB, BC, CA ノ方程式ヲ夫々

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \quad\cdots\cdots(1)$$

$$x\cos\beta+y\sin\beta=p' \quad\cdots\cdots(2)$$

$$x\cos\gamma+y\sin\gamma=p'' \quad\cdots\cdots(3)$$

トスレバ, A 角ノ二等分線ノ方程式ハ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=x\cos\gamma+y\sin\gamma-p'' \quad\cdots\cdots(4)$$

又 B 角, C 角ノ二等分線ノ方程式ハ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=x\cos\beta+y\sin\beta-p' \quad\cdots\cdots(5)$$

$$x\cos\beta+y\sin\beta-p'=x\cos\gamma+y\sin\gamma-p'' \quad\cdots\cdots(6)$$

(4), (5) 及ビ (6) ヲ書キ換ヘト

$$x(\cos\gamma-\cos\alpha)+y(\sin\gamma-\sin\alpha)+p-p''=0 \quad\cdots\cdots(7)$$

$$x(\cos\alpha-\cos\beta)+y(\sin\alpha-\sin\beta)-p+p'=0 \quad\cdots\cdots(8)$$

$$x(\cos\beta-\cos\gamma)+y(\sin\beta-\sin\gamma)-p'+p''=0 \quad\cdots\cdots(9)$$

(7), (8) 及ビ (9) ノ三ツノ直線ハ同一ノ點ヲ過ル爲メニハ第二十六節ニヨリ

$$\begin{vmatrix} \cos\gamma-\cos\alpha & \sin\gamma-\sin\alpha & p-p'' \\ \cos\alpha-\cos\beta & \sin\alpha-\sin\beta & -p+p' \\ \cos\beta-\cos\gamma & \sin\beta-\sin\gamma & -p'+p'' \end{vmatrix}=0$$

ナラバヨシ。

然ルニ上ノ行列式ノ値ハ各列ヲ加フルト容易ニ零ナルヲ見ル。ヨツテ證セリ。

32. 第二十六節ニ於テ已ニ三ツノ直線ガ同一ノ點ヲ過ルベキ條件ヲ求メタルガ,尚茲ニ他ノ方法ニヨリテ求メントス。

直線ノ方程式ヲ

$$ax+by+c=0$$

$$a'x+b'y+c'=0$$

$$a''x+b''y+c''=0$$

トシ,コレ等ガ一點ニ會スル爲ノ條件ハ x, y ノ値ノ如何ニ關セ

ズ常ニ

$$l(ax+by+c)+m(a'x+b'y+c')+n(a''x+b''y+c'')=0$$

ヲ滿足セシムルガ如キ常數 l, m, n ガ存在スルコトナリ。何トナレバ上ノ條件式ヲ書キ換ヘルト

$$x(al+a'm+a''n)+y(bl+b'm+b''n)+(cl+c'm+c''n)=0$$

コレガ x, y ノ値ノ如何ニ關セズ成立スル爲ニハ

$$al+a'm+a''n=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$bl+b'm+b''n=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$cl+c'm+c''n=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ガ同時ニ成立スルコトナリ。

然ルニ(1), (2)及ビ(3)ハ同時ニ成立スル爲ノ條件ハ實ニ

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}=0$$

ニ外ナラズ。

注意 コノ定理ヲ用ヒテ再ビ前節ノ例題ヲ解カンニ三ツノ二等分線ノ方程式ヲ少シク書キ直スト

$$(x\cos\gamma+y\sin\gamma-p'')-(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p)-(x\cos\beta+y\sin\beta-p')=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$(x\cos\beta+y\sin\beta-p')-(x\cos\gamma+y\sin\gamma-p'')=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1), (2)及ビ(3)ノ左邊ニ1ヲ乘ジテ(實ハソノ儘)相加フレバ x, y ノ値ノ如何ニ關セズ零ナリ。故ニ三ツノ二等分線ハ一點ニ會ス。

例 三角形ABCノ三ツノ高サハ一點ニ會スルコトヲ證セヨ。

解 △ABCニ於テ三ツノ頂點A, B, Cノ座標ヲ夫々(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)トスレバ直線BCノ方程式ハ

$$y-y_2=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}(x-x_2)$$

ナルガ故ニ頂點Aヨリ之ニ垂線ヲ引ケバ,共方程式ハ

$$y-y_1=-\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}(x-x_1)$$

分母ヲ拂ヒ,整頓スレバ

$$y(y_2-y_3)+x(x_2-x_3)-\{y_1(y_2-y_3)+x_1(x_2-x_3)\}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

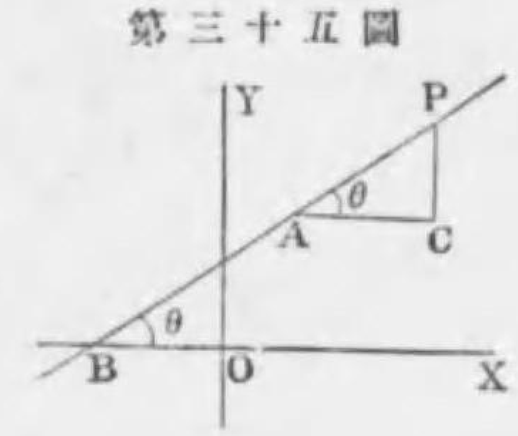
同樣ニB. Cヨリ邊CA, ABニ引ケル垂線ノ方程式ハ夫々

$$\begin{cases} y(y_3-y_1)+x(x_3-x_1)-\{y_2(y_3-y_1)+x_2(x_3-x_1)\}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ y(y_1-y_2)+x(x_1-x_2)-\{y_3(y_1-y_2)+x_3(x_1-x_2)\}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

之等ノ三ツノ方程式ノ左邊ヲ相加フレバ x, y ノ値ノ如何ニ關セズ零ナリ。ヨツテ三ツノ高サハ一點ニテ會ス。

33. 第二十四節例題ニ於テ一點ヲ過リ且ツ x 軸ト與ヘラレタル角ヲナス直線ノ方程式ヲ求メタルガ後ニ屢々利用セラルヽコトアルベキ他ノ形ニ於ケル方程式ヲ求メントス。

第三十五圖



定點ヲAトシ,共座標ヲ(x', y')トシ, x 軸トナス角ヲ θ トス。

求ムル直線ABノ上ニ任意ノ一點Pヲトリ,共座標ヲ(x, y)トシ,動點Pト定點Aトノ距離ヲ l トス。

今AC, PCヲ夫々二ツノ軸ニ平行ニ引キ,交點ヲCトスレバ

$$AC=x-x'=AP\cos\theta=l\cos\theta$$

$$\therefore\ l=\frac{x-x'}{\cos\theta} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又

$$CP=y-y'=AP\sin\theta=l\sin\theta$$

$$\therefore\ l=\frac{y-y'}{\sin\theta}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヨツテ

$$\frac{x-x'}{\cos\theta}=\frac{y-y'}{\sin\theta}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

コノ關係ハ直線ABノ上ノ如何ナル位置ニP點ヲトルモ成立ス。故ニ(3)ハ直線ABノ方程式ナリ。

系　方程式(1),(2)ヨリ

$$\left.\begin{aligned}x&=x'+l\cos\theta\\ y&=y'+l\sin\theta\end{aligned}\right\}$$

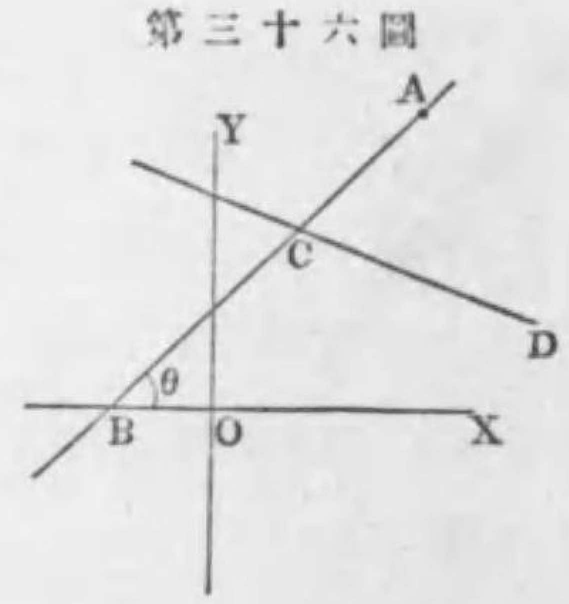
ナルガ故ニ直線ABノ上ノ任意ノ點Pノ座標ハ

$$x'+l\cos\theta,\quad y'+l\sin\theta$$

ナリ。但シlハ定點AトP點トノ距離ニシテP點ハA點ニ關シB點ト同ジ方向ニアラバ(前圖)負ナリトス。カクノ如クスレバ直線上ノ點ハ一ツノ變數lニテ定ムルコトヲ得。

注意　コノ定理ヲ用フレバ直線ABハ他ノ直線トC點ニテ交ル時,ACノ長サヲ求ムルコトヲ得ベシ。

第三十六圖



直線ABニ於テ定點ヲA其座標ヲ(x',y')トシ,x軸トナス角ヲθトスレバ,コノ上ノ任意ノ點ノ座標x,yハ

$$\left.\begin{aligned}x&=x'+l\cos\theta\\ y&=y'+l\sin\theta\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

今他ノ與ヘラレタル直線ヲCDトシ,其方程式ヲ

$$ax+by+c=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

トシ,二ツノ直線ノ交點ヲCトスレバ(2)ハC點ノ座標ニヨツテ滿足セラルベシ。即チ

$$a(x'+l\cos\theta)+b(y'+l\sin\theta)+c=0$$

故ニACノ長サハ

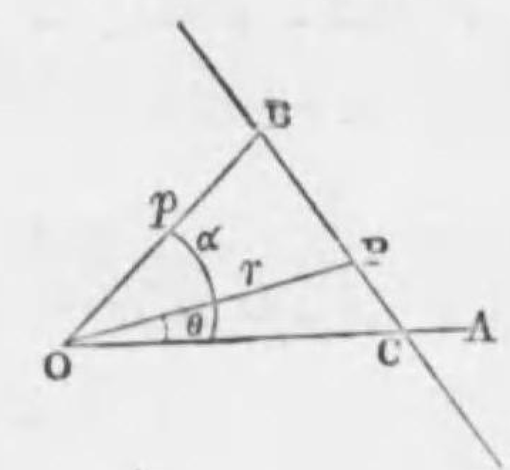
$$l=-\frac{ax'+by'+c}{a\cos\theta+b\sin\theta}$$

ニテ與ヘラル。

34. 直線ノ極方程式

Oヲ極,OAヲ原線トス。

第三十七圖



任意ノ直線BCガ與ヘラレタル時,極Oヨリノ垂線OBノ長サヲpトシ,OBガ原線トナス角ヲαトス。

今此直線上ニ任意ノ點,Pヲトリ,ソノ極座標ヲ(r,θ)トスレバ圖ヨリ

$$OB=OP\cos P\hat{O}B$$

即チ

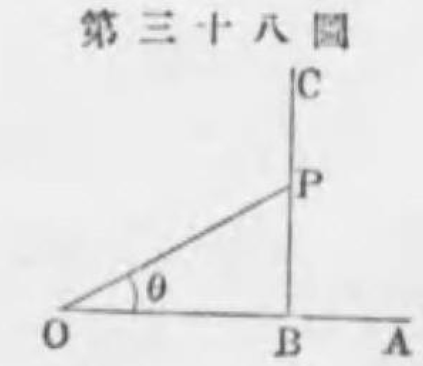
$$p=r\cos(\alpha-\theta)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此關係ハ直線BC上ニ於テP點ノ位置ノ如何ニ關セズ成立ス。故ニ(1)ハ求ムル直線ノ極方程式ナリ。

系 i　直線BCハ原線ニ垂直ナル時ハ$\alpha=0$ナルガ故ニ其方程式ハ

$$r\cos\theta=p\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

第三十八圖



茲ニpハ極Oヨリ直線BCニ引キタル垂線OBノ長サナリ。

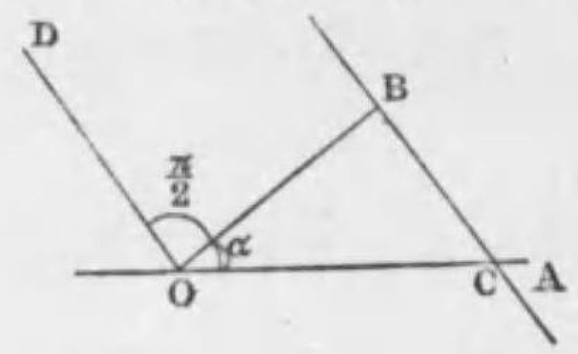
系 ii　$\theta=\frac{\pi}{2}+\alpha$ナル時ハ(1)ヨリ

$$r=\frac{p}{\cos\frac{\pi}{2}}=\infty$$

コレP點カ直線BCノ上ノ無限遠點ニシテBCニ平行ナル直

線 OD ト BC トノ交點ナリ。

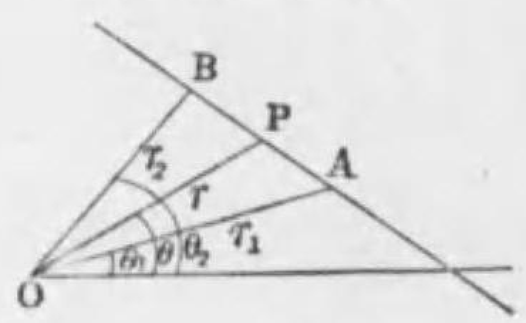
第三十九圖



例　二ツノ點(r_1, θ_1), (r_2, θ_2)ヲ過ル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

解　AB ヲ二ツノ與ヘラレタル點ヲ結ブ直線トシ, P ヲ其上ノ任意ノ點トシ,其座標ヲ(r, θ)トス。

第四十圖



然ル時ハ圖ヨリ

$$\triangle AOB = \triangle AOP + \triangle POB$$

ナルガ故ニ

$$\frac{1}{2} r_1 r_2 \sin A\hat{O}B = \frac{1}{2} r_1 r \sin A\hat{O}P + \frac{1}{2} r r_2 \sin POB$$

即チ

$$r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = r r_1 \sin(\theta - \theta_1) + r r_2 \sin(\theta_2 - \theta)$$

即チ

$$\frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{r} = \frac{\sin(\theta - \theta_1)}{r_2} + \frac{\sin(\theta_2 - \theta)}{r_1}$$

コレ求ムル直線ノ方程式ナリ。

35.　軌跡ノ問題

與ヘラレタル條件ニ適スル點ノ軌跡ヲ求メンニハ,先ヅ座標軸ヲ適當ノ所ニ選ムベシ。蓋シ座標軸ノ選ビ方ノ功拙ハ問題ノ解決ニ甚ダ影響スルモノナリ。次ニ與ヘラレタル條件ニ適スル一點ノ座標間ニ如何ナル關係アルカヲ考ヘ,之ヲ方程式ニ表ハシ,然ル後其座標ヲ流通座標トスレバ,其方程式ハ必ズ或圖形ヲ表ハスベシ。而シテ今求メントスル軌跡ハ必ズ其圖形ノ上ニアルベシ。

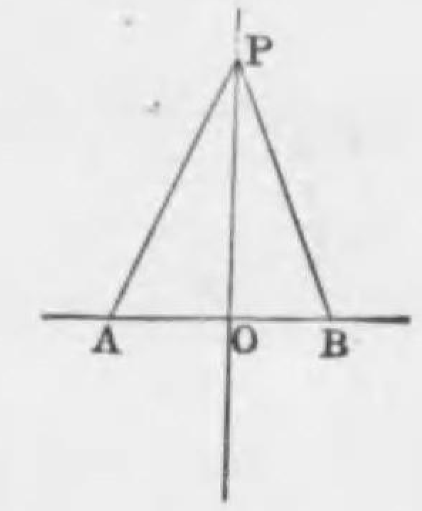
然レドモ其圖形上ノ凡テノ點ハ悉ク與ヘラレタル條件ヲ滿

足スル點ノ軌跡ナリヤ否ヤハ不明ナリ。故ニ條件ニ適セザル點アル時ハ除去セザルベカラズ。

例1　二ツノ定點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解　二ツノ定點ヲ A, B トシ之ヲ結ブ直線ヲ x 軸ニ,線分 AB ノ垂直二等分線ヲ y 軸ニ選ベ。

第四十一圖



今線分AB ノ長サヲ$2a$トスレバ二ツノ點 A, B ノ座標ハ夫々$(-a, 0)$, $(7, 0)$ナリ。

今P點ヲ所設ノ條件ニ適スル一點トシ,其座標ヲ x, y トスレバ

$$AP^2 = (x+a)^2 + y^2$$
$$BP^2 = (x-a)^2 + y^2$$

故ニ

$$(x+a)^2 + y^2 = (x-a)^2 + y^2$$

簡單ニスレバ

$$4ax = 0$$

然ルニ $a \fallingdotseq 0$ ナルガ故ニ

$$x = 0,$$

ヨツテ所要ノ軌跡ハ $x=0$ ニテ表ハサルル直線,即チ y 軸ナリ。

逆ニ y 軸上ニ任意ノ點$(0, y)$ヲトラバ

$$AP^2 = a^2 + y^2 = BP^2$$

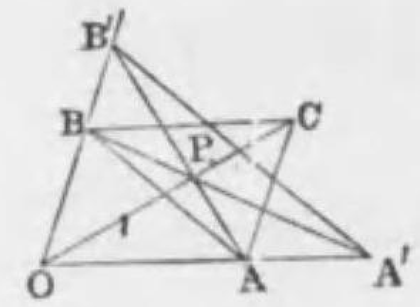
ナルガ故ニ y 軸上ノ凡テノ點ハ求ムル要件ニ適スル點ノ軌跡ナリ。

例2　三角形 OAB ノ底邊 AB ニ平行ニ直線 A′B′ ヲ引キ,邊 OA, OB 又ハ夫等ノ延長トノ交點ヲ A′, B′ トスル時, AB′, A′B ノ

交點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

解　頂點 O ヲ原點, 邊 OA, OB ヲ夫々 x 軸, y 軸トシ, $OA=a$, $OB=b$ トスレバ

第四十二圖



A′B′ ガ AB ＝平行ナルガ故＝

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=k$$

故＝　$OA'=k.OA=ka,$

$$OB'=k.OB=kb,$$

故＝直線 AB′ ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{kb}=1 \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

直線 A′B ノ方程式ハ

$$\frac{x}{ka}+\frac{y}{b}=1 \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

P ハ AB′ A′B ノ交點ナルガ故＝(1), (2) ヲ解キテ

$$x=\frac{k}{k+1}a, \qquad y=\frac{k}{k+1}b,$$

卽チ k ノ値ノ如何＝關セズ(換言スレバ直線 A′B′ ノ位置ノ如何＝關セズ) P 點ノ x 座標ト y 座標トノ間＝ハ常＝

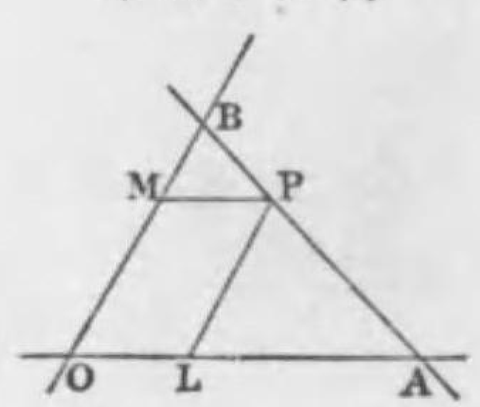
$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b} \quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナル關係アリ。故＝(3)＝テ示セル直線ハ求ムル軌跡ナリ。

注意　方程式(3)ヨリ知ルガ如ク求ムル軌跡ハ OA, OB ヲ二ツノ隣邊トスル平行四邊形ノ第四ノ頂點 C ヲ通過ス。

例3　三角形ノ一ツノ角ノ大サト位置トガ與ヘラレ且ツコノ角ヲ挾ム二邊ノ和ガ與ヘラレタル時, 第三邊ヲ $m:n$ ＝分ツ點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

第四十三圖



解　△AOB ＝於テ一ツノ角 O ノ大サガ與ヘラレ, 且ツ $OA+OB=s$ トス。

今 $AP:PB=m:n$ ナリトシ, 邊 OA, OB ヲ夫々 x 軸, y 軸トシ, P 點ノ座標ヲ x, y トス。

然ル時ハ圖ヨリ

$$\frac{MP}{OA}=\frac{PB}{AB}$$

故＝

$$\frac{OL}{OA}=\frac{PB}{AB}=\frac{n}{m+n}$$

ヨツテ

$$OA=\frac{m+n}{n}x,$$

同樣＝

$$OB=\frac{m+n}{m}y,$$

故＝ P 點ノ座標 x, y, ノ間＝

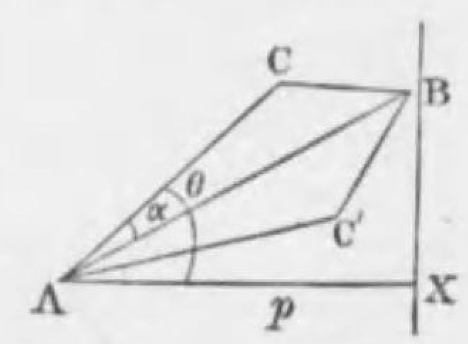
$$\frac{m+n}{n}x+\frac{m+n}{m}y=s$$

ナル關係アリ。卽チ求ムル點ノ軌跡ナリ。

例4　三角形 ABC ノ三ツノ角ノ大ガ與ヘラレ, 頂點 A ハ固定シ, B 點ハ定直線上ヲ動ク時第三ノ頂點 C ノ軌跡ヲ求メヨ。

解　三ツノ角 A, B, C ノ大サヲ夫々 α, β, γ トシ, A ヲ極, 極ヨリ定直線＝引ケル垂線 AX ヲ原線トシ, 且ツ其長サヲ p トス。又 C 點ノ座標ヲ r, θ トス。

第四十四圖



サテ B ハ定直線ノ上＝テ如何ナル位置＝アルモ常＝ AB:AC ハ一定ナリ。

故＝

$$AB=kr\cdots \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ル＝又

$$AB\cos(\theta-\alpha)=p \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナルヲ以テ (1), (2) ヨリ AB ヲ消去スレバ

$$k.r.\cos(\theta-\alpha)=p$$

コレ求ムル軌跡ノ極方程式ナリ。

注意 第三ノ頂點C′ヲABニ關シCト反對ノ側ニトル時ハ

$$AB\cos(\theta+\alpha)=p$$

ナルヲ以テ

$$kr\cos(\theta+\alpha)=p$$

モ亦求ムル軌跡ナリ。

注意, 例2以下ニ於テ逆證明ヲ省ケリ,學者自ヅカラ試ムベシ。

第二章

問題

1. 二ツノ點(a, b), $(-a, -b)$ヲ過ル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

2. x軸ト$60°$ヲナシ, y軸ヲ4ニテ截ル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

3. 二ツノ軸ノ上ノ截片ガ夫々$-1, \sqrt{3}$ナル直線ノ方程式ヲ作リ, 次ニx軸トナス角ヲ求メヨ。

4. 四ツノ直線$x+2y=0$, $2x-y=0$, $2x+4y+1=0$, $4x-2y=1$ガ矩形ヲナスコトヲ證セヨ。

解 四ツノ與ヘラレタル方程式ヲ$y=mx+b$ノ形ニ直セバ

$$y=-\frac{1}{2}x \quad\cdots\cdots(1)$$

$$y=2x \quad\cdots\cdots(2)$$

$$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4} \quad\cdots\cdots(3)$$

$$y=2x-\frac{1}{2} \quad\cdots\cdots(4)$$

故ニ(1)ト(3)トハ互ニ平行ニシテ, (2)ト(4)トハ互ニ平行ナリ。而シテ(1)及ビ(3)ハ(2)及ビ(4)ト互ニ垂直ナリ$1+mm'=0$ノ關係ガ成立スル數)故ニ四ツノ直線ハ矩形ヲナス。

5. 點$(4, 5)$ヲ過ル直線ハ二ツノ軸トナス三角形ノ面積ハ40ナル時,其直線ノ方程式ヲ求メヨ。

6. 原點及ビ二ツノ直線$x-y=4$, $7x+y+20=0$ノ交點ヲ過ル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

7. 二ツノ直線$x-2y-a=0$, $x+3y=2a$ノ交點ヲ過リ,直線$3x+4y=1$ニ平行ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

8. 二ツノ直線$x+2y+3=0$, $3x+4y+7=0$ノ交點ヲ過リ,直線$x=y$ニ垂直ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

9. 二ツノ直線$4x+3y=7$, $24x+7y=31$ノナス角ノ二等分線ノ方程式ヲ求メヨ。

10. 直線$4y-5x+25=0$ノ上ニ二ツノ點$(1, 4)$, $(7, 3)$ヨリ等距離ニア

ル點ヲ求メヨ。

解 與ヘラレタル條件ニ適スル點ヲPトシ，其座標ヲx', y'トスレバ假定ニヨリテ

$$(x'-1)^2+(y'-4)^2=(x'-7)^2+(y'-3)^2$$

即チ

$$12x'-2y'=41 \cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ P點ノ座標ハ與ヘラレタル直線ノ方程式ヲ滿足スルガ故ニ

$$4y'-5x'+25=0 \cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) ト (2) トヨリ

$$x'=3 \qquad y'=\frac{-5}{2}$$

ヨツテ求ムル點ハ$\left(3, \frac{-5}{2}\right)$ナリ。

11. 二ツノ平行線 $y=mx+b$ ト $y=mx+c$ トノ距離ヲ求メヨ。

12. 三ツノ點$(3a, 0)$, $(a, 2b)$, $(0, 3b)$ハ一ツノ直線上ニアルコトヲ證セヨ。

13. 三ツノ直線 $y=x$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 及ビ $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ ガ同一ノ點ヲ過ルコトヲ證セヨ。

14. 三點$(0, 0)$, $(0, a)$, (b, c)ヲ頂點トスル三角形ノ三ツノ中線ノ方程式ヲ作リ，且ツ此三線ハ一點ニ於テ會スルコトヲ證明セヨ。

(大正十年文檢)

15. 三點$(0, 0)$, $(2, 1)$, $(-1, 3)$ヲ頂點トスル三角形ノ垂心ノ座標ヲ求メヨ。

16. 二ツノ直線 $y=m_1x+b_1$, $y=m_2x+b_2$ トy軸トニテ圍マルヽ三角形ノ面積ヲ求メヨ。

17. 定點(a, b)ヨリ定直線 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ ニ至ル垂線ノ長サヲ求メヨ。

(大正十一年文檢)

18. p及ビp'ヲ原點ヨリ二ツノ直線

$$x\sec\theta+y\operatorname{cosec}\theta=a$$

$$x\cos\theta+y\sin\theta=a\cos 2\theta$$

ヘノ垂線ノ長サトスレバ $4p^2+p'^2=a^2$ ナルコトヲ證セヨ。

解 二ツノ直線ヲヘつせノ正規方程式ニ直セバ

$$\frac{x\sec\theta+y\operatorname{cosec}\theta}{\sqrt{\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta}}=\frac{a}{\sqrt{\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta}}=a\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{x\cos\theta+y\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=\frac{a\cos 2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=a\cos 2\theta$$

但シ $a\sin\theta\cos\theta$ ハ負ナラバ初メノ方程式ノ兩邊ニ -1 ヲ乘ジ，$a\cos 2\theta$ ハ負ナラバ後ノ方程式ノ兩邊ニ-1ヲ乘ズルモノトス。

何レニシテモ

$$4p^2=a^2\sin^2 2\theta \qquad p'^2=a^2\cos^2 2\theta$$

$$\therefore \qquad 4p^2+p'^2=a^2,$$

19. 三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ハ一點ニ會スルコトヲ證セヨ。

20. 三角形ノ一ツノ角ノ二等分線ト他ノ二ツノ外角ノ二等分線トハ一點ニ會スルコトヲ證セヨ。

21. 二ツノ軸ヨリ截リ取ル截片ノ逆數ノ和ガ一定ナルガ如キ直線ハ必ズ定點ヲ過ルコトヲ證セヨ。

解. x軸及ビy軸上ノ二ツノ截片ヲa, bトスレバ直線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \cdots\cdots\cdots(1)$$

假定ニヨリテ截片ノ逆數ノ和ガ一定ナルガ故ニ

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{k} \cdots\cdots\cdots(2)$$

玆ニkハ常數ナリ。

(1) ニ (2) ヲ代入スレバ

$$\frac{x}{a}+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{a}\right)y=1 \cdots\cdots\cdots(3)$$

然ルニ (3) ハ座標(k, k)ニテ滿足セラル，ヨツテ (1) ハ定點(k, k)ヲ過ル。

22. 二ツノ軸ニ沿ヒテ動ク線分アリ，二ツノ截片ノ差ハ其包ム面積ニ比例スル時ハ此ノ線分又ハ其延長ハ必ズ定點ヲ過ルコトヲ證セヨ。

23. 二等邊三角形ABCニ於テ二邊AB, ACヲ夫々E, Fマデ延長シ $BE.CF=AB^2=AC^2$ ナラシムル時直線EFハ或定點ヲ過ルコトヲ證セヨ。

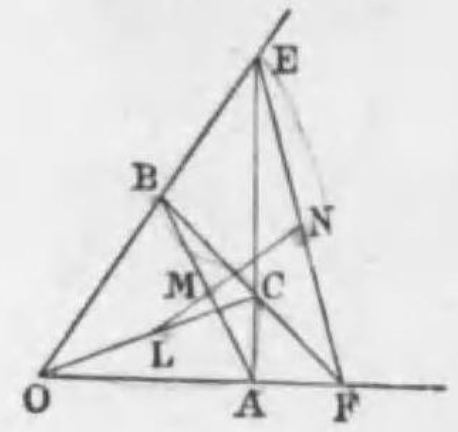
24. 完全四邊形ノ對角線ノ中點ハ一ツノ直線上ニアルコトヲ證セヨ。 (明治三十八年文檢)

解 完全四邊形ヲ OACBEF トシ，邊OA ヲ x 軸ニ OB ヲ y 軸ニ撰ビ

$$OA=2a,\qquad OB=2b$$

トシ，C ノ座標ヲ $2h$, $2k$ トスレバ，OC ノ中點 L ノ座標ハ h, k ニシテ AB ノ中點 M ノ座標ハ (a, b) ナリ，故ニ直線 LM ノ方程式ハ

第四十五圖



$$y-b=\frac{k-b}{h-a}(x-a)$$

次ニ BC ノ方程式ハ

$$y-2b=\frac{k-b}{h}x.$$

ニシテ AC ノ方程式ハ

$$y=\frac{k}{h-a}(x-2a)$$

サテ點 E ハ AC, OB ノ交點ニシテ F ハ BC, OA ノ交點ナルガ故ニソノ座標ハ夫々

$$E\left(0,\ \frac{-2ak}{h-a}\right)\qquad F\left(\frac{-2bh}{k-b},\ 0\right)$$

故ニ EF ノ中點 N ノ座標ハ

$$x=\frac{-bh}{k-b}\qquad y=\frac{-ak}{h-a}.$$

而シテコノ座標ハ直線 LM ノ方程式ヲ滿足スベシ，故ニ三ツノ中點 L, M, N ハ列座ス。

25. 三角形 ABC ノ頂點 A ヲ過ル直線上ノ二定點ヲ P, Q トス。直線 BC 上ニ任意ニ一點 R ヲトリ直線 PR, AB ノ交點ヲ S, 直線 QR, AC ノ交點ヲ T トスル時ハ直線 ST ハ他ノ一定點ヲ過ルコトヲ證明セヨ。 (大正九年文檢)

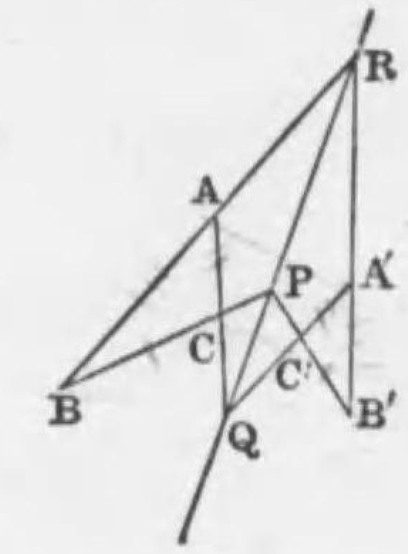
26. 三角形 ABC ノ頂點 A, B, C ヨリ他ノ三角形 A′B′C′ ノ邊 B′C′, C′A′, A′B′ ヘ下セル垂線ハ同一ノ點ヲ過ル時ハ A′, B′, C′ ヨリ BC, CA, AB ヘ下セル垂線モ亦同一ノ點ヲ過ルコトヲ證セヨ。

(大正三年文檢)

27. 二ツノ三角形ノ相對應スル邊ノ交點ガ一直線上ニ在ル時ハ其對應スル頂點ヲ結ビ付クル直線ハ一點ヲ過ルコトヲ證明セヨ。 (明治三十年文檢)

解 二ツノ三角形 ABC, A′B′C′ ニ於テ互ニ對應スル邊ヲ BC, B′C′; CA, C′A′; 及ビ AB, A′B′ トシ夫等ノ交點ヲ P, Q, R トシ且ツ一直線上ニアルモノトス。

第四十六圖



直線 PQR ヲ y 軸ニトリ BC, CA, AB ノ方程式ヲ

$$ax+by+c=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$a'x+b'y+c'=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

$$a''x+b''y+c''=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

トス。簡單ニセンガ爲メニ (1), (2) 及ビ (3) ノ方程式ノ代リニ夫々

$$s=0\qquad s'=0\qquad s''=0$$

ナル略記號ヲ用ヒントス。

サテ邊 B′C′ ハ BC ト y 軸トノ交點ヲ過ルガ故ニ其方程式ヲ

$$x+ls=0 \quad\cdots\cdots(4)$$

トスベシ(第二十五節參照)

同樣ニ C′A′, A′B′ ノ方程式ハ

$$x+ms'=0 \quad\cdots\cdots(5)$$

$$x+ns''=0 \quad\cdots\cdots(6)$$

次ニ (5), (6) ヨリ

$$ms'-ns''=0 \quad\cdots\cdots(7)$$

ヲ作ラバコハ (5), (6) ニテ表ハサレタル直線ノ交點 A′ ヲ過ル直線ニシテ，且ツ $s'=0$ $s''=0$ ヲ同時ニ滿足スル座標ニテモ適合スルガ故ニ A 點ヲ過ル，卽チ AA′ ノ方程式ナリ。

全ク同樣ニシテ BB′, CC′ ノ方程式ハ

$$ns''-ls=0 \quad\cdots\cdots(8)$$

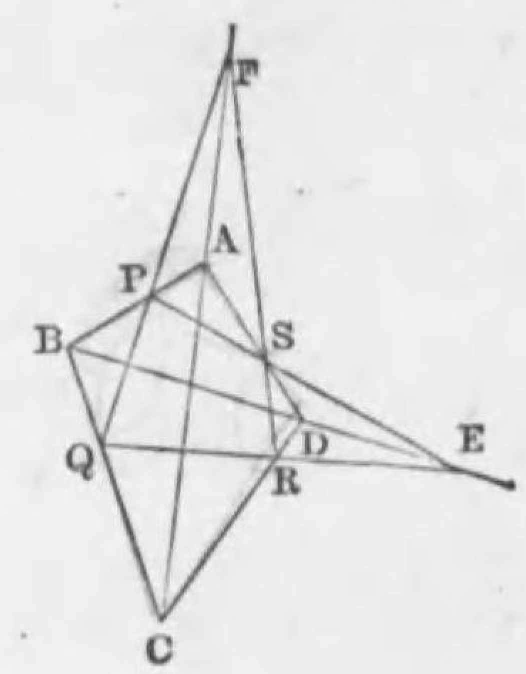
$$ls-ms'=0 \quad\cdots\cdots(9)$$

(7), (8) 及ビ (9) ヲ加フレバ其左邊ハ x, y ノ如何ニ關セズ恒等的ニ零

ナリ。故ニ第三十二節ニヨリ AA', BB', CC' ハ一點ニ會ス。

28. 四邊形 ABCD ノ各邊 AB, BC, CD, DA ノ上ニ夫々 P, Q, R, S ノ四ツノ點ヲ取ル時若シ三ツノ直線 PQ, AC, SR ハ一點ニ相交ラバ他ノ三ツノ直線 PS, BD, QR モ亦一點ニ交ルコトヲ證明セヨ。

第四十七圖



解　四邊形ヲ ABCD トシ對角線 BD, AC ヲ夫々 x 軸, y 軸トシ, A, B, C, D ノ座標ヲ夫々 $(0, a)$, $(b, 0)$, $(0, c)$, $(d, 0)$ トスレバ四ツノ邊ノ方程式ハ次ノ如シ。

$$AB;\quad \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$$

$$BC;\quad \frac{x}{b}+\frac{y}{c}=1$$

$$CD\quad \frac{x}{d}+\frac{y}{c}=1$$

$$DA;\quad \frac{x}{d}+\frac{y}{a}=1$$

ナリ。今 PQ, AC, SR ノ交點ヲ F トシ其座標ヲ $0, y'$ トシ, PQ, SR ノ方程式ヲ夫々

$$y-y'=mx$$

$$y-y'=m'x$$

トス。

PS ハ AB ト PQ トノ交點ヲ過ルガ故ニ其方程式ハ

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}-1+\lambda(y-y'-mx)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

又 PS ハ AD ト SR トノ交點ヲ過ルガ故ニ其方程式ハ

$$\frac{x}{d}+\frac{y}{a}-1+\mu(y-y'-m'x)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

然ルニ之等ノ二ツノ方程式ハ同一ノ直線 PS ヲ表ハスガ故ニ

$$\lambda=\mu=\frac{1}{m-m'}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{d}\right) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ナラザルベカラズ。

ソコデ PS ト x 軸卽チ BD トノ交リノ座標ヲ求メンニハ (1) 又ハ (2) ニ $y=0$ ト置カバヨシ, 卽チ

$$x=\frac{\lambda y'+1}{\frac{1}{b}-m\lambda}$$

コレニ (3) ヲ代入スレバ

$$x=\frac{y'(d-b)+bd(m-m')}{mb-m'd}$$

次ニ上ト全ク同樣ニシテ QR ノ方程式ヲ求メ, BD トノ交リノ x 座標ヲ求ムレバ上ト一致スルヲ見ル。故ニ PS, BD, QR ハ一點 E ニ於テ會スベシ。

29. 二ツノ直線ノ極方程式ハ

$$r=2\sec\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$r=\sec\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$

ナル時, 交點ノ極座標及ビ交角ヲ求メヨ。

30. 極方程式 $2r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$ ニテ表ハサルル直線ヲ畫ケ。

31. 極方程式 $\sin 2\theta=0$ ハ如何ナル曲線ヲ表ハスカ。

32. 二ツノ點 (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) ヲ結ブ直線上ニ極ヨリ垂線ヲ引ク時, 其足ノ座標ヲ求ム。

解　與ヘラレタルニ二ツノ點ヲ結ビ付ケル直線ノ方程式ハ第三十四節例題ニヨリテ

$$r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)=r_1r\sin(\theta-\theta_1)+rr_2\sin(\theta_2-\theta)$$

少シク書キカヘルト

$$r\cos\theta(r_2\sin\theta_2-r_1\sin\theta_1)+r\sin\theta(r_1\cos\theta_1-r_2\cos\theta_2)-r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)=0$$

直交座標ニ直スト

$$x(r_2\sin\theta_2-r_1\sin\theta_1)+y(r_1\cos\theta_1-r_2\cos\theta_2)-r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)=0$$

ヨツテ極ヨリノ垂線ノ長サヲ p トスレバ第二十九節ニヨリ

$$p=\pm\frac{r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}}$$

ニシテ, 垂線ガ原線トナス角ヲ α トスレバ

$$\alpha=\mathrm{arc}\cos\frac{\pm(r_2\sin\theta_2-r_1\sin\theta_1)}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}}$$

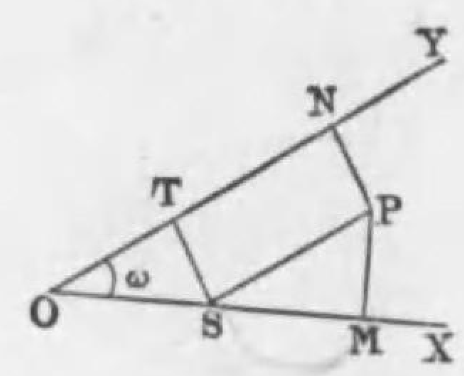
但シ複符號ハ垂線ノ長サヲ正ナラシムルヤウニ撰ブモノトス。

33. 任意ノ點 P ヨリ相交ル直線 OX, OY ニ垂線 PM, PN ヲ引ク時

OM+ON ヲ一定ノ長サ l ナラシムルガ如キ點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 OX, OY ヲ二ツノ軸ニトリ，其ナス角ヲ ω トス。

第四十八圖



P ヨリ y 軸ニ平行ニ PS ヲ引キ x 軸ト交ル點ヲ S トシ，S ヨリ PN ニ平行ニ ST ヲ引キ y 軸ト交ル點ヲ T トスレバ圖ヨリ

$$OM=OS+SM \quad ON=OT+TN$$

今 P ノ座標ヲ x, y トスレバ

$$OM=x+y\cos\omega$$

$$ON=x\cos\omega+y$$

故ニ

$$OM+ON=(x+y)(1+\cos\omega)=l$$

ヨツテ P 點ノ軌跡ハ

$$(x+y)(1+\cos\omega)=l$$

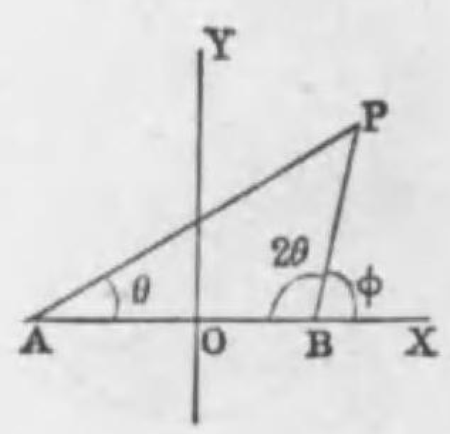
ナリ。

34. 三角形ノ底邊ノ長サハ一定ニシテ定位置ニアルモノトス。底角ノ一ツノ正切ハ他ノ一ツノ正切ノ m 倍ナル時，頂點ノ軌跡ヲ求ム。

35. 與ヘラレタル底邊ヲ有シ，一ツノ底角ガ他ノ底角ノ二倍ニ等シキ三角形ノ頂點ノ軌跡ヲ求ム。(明治三十八年文檢)

解 底邊 AB ヲ x 軸トシ，其垂直二等分線ヲ y 軸トシ，且ツ $AB=2a$ トセヨ。然ラバ A, B 二點ノ座標ハ夫々 $(-a, 0)$, $(a, 0)$ ナリ。

第四十九圖



軌跡ノ一點ヲ P トシ，$P\hat{B}A=2P\hat{A}B$ トセバ圖ヨリ直チニ

$\pi-\phi=2\theta$ 從ツテ

$$\tan 2\theta=-\tan\phi \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

P ノ座標ヲ x, y トスレバ

$$\frac{y}{x+a}=\tan\theta, \quad \frac{y}{x-a}=\tan\phi$$

(1) ニ代入スレバ

$$-\frac{y}{x-a}=\frac{\dfrac{2y}{x+a}}{1-\left(\dfrac{y}{x+a}\right)^2}$$

分母ヲ拂ヒ整頓スレバ

$$y^2-3x^2-2ax+a^2=0.$$

コレ求ムル軌跡ナリ。

36. 相交ル二ツノ直線 OA, OB 上ニ夫々 A′, B′ ヲトリ $OA'+OB'=OA+OB$ ナラシムル時，AB′, A′B ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

37. 前題ニ於テ

$$\frac{1}{OA'}-\frac{1}{OB'}=\frac{1}{OA}-\frac{1}{OB}$$

ナラシムル時，AB′, A′B ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

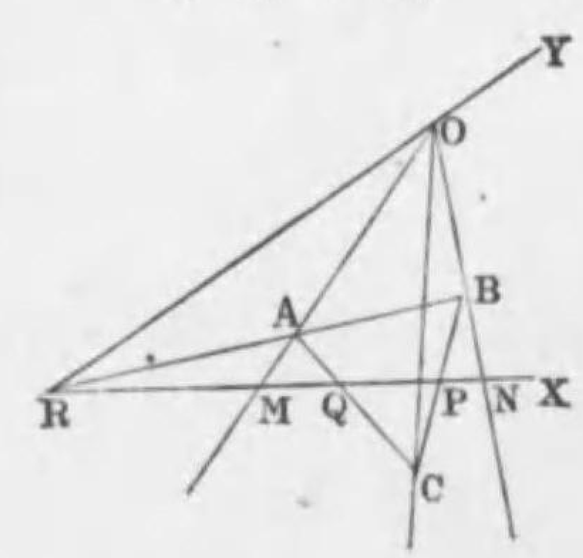
38. 二ツノ點 A, B アリ。B ヲ過ル任意ノ直線上ニ A ヨリ垂線 AP ヲ下シ，AP 上ニ一點 Q ヲトリ，$AP.AQ=K^2$ ナラシムル時 Q ノ軌跡如何。

39. 互ニ垂直ナル二ツノ直線 OX, OY アリ，A ハ OY 上ノ定點ニシテ B ハ OX 上ノ動點ナリトス。今線分 AB ノ上ニ正三角形 ABC ヲ作リ，頂點 C ヲ O 點ニ關シ AB ノ反對ノ側ニトル C 點ノ軌跡如何。

40. 三角形 ABC アリ頂點 A, B ハ夫々定マレル直線 OM, ON 上ニアリ。邊 BC, CA, AB ハ夫々一直線上ノ點 P, Q, R ヲ過ル時ハ頂點 C ノ軌跡ハ點 O ヲ過ル一ツノ直線ナリ。(明治三十四年文檢)

解 RQP ヲ x 軸，RO ヲ y 軸トシ

第五十圖



$$RM=a, \quad RO=b,$$

$$RQ=c, \quad RN=c'$$

$RP=c''$ トシ頂點 C ノ座標ヲ h, k トス。

先ヅ OM, ON ノ方程式ハ夫々

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \frac{x}{a'}+\frac{y}{b}=1$$

次ニ直線 QC ノ方程式ハ

$$y(c-h)+k(x-c)=0$$

故ニAノ座標ハQC, OMノ交點トシテ得ラル。卽チ

$$x'=\frac{ab(h-c)+kac}{b(h-c)+ak} \quad y'=\frac{b(a-c)k}{b(h-c)+ak}$$

同樣ニBノ座標ハ

$$x''=\frac{a'b(h-c')+a'c'k}{b(h-c')+a'k},\ y''=\frac{b(a'-c')k}{b(h-c')+a'k}$$

然ルニ假定ニヨリ直線ABハ點R卽チ原點ヲ過ルガ故ニ

$$\frac{x'}{y'}=\frac{x''}{y''}$$

ナル關係アリ。卽チ

$$\frac{ab(h-c)+kac}{b(a-c)k}=\frac{a'b(h-c')+a'c'k}{b(a'-c')k}$$

ソコデh, kヲ流通座標x, yニ直スト

$$\frac{(a'c-ac')x}{aa'(c-c')-cc'(a-a')}+\frac{y}{b}=1.$$

コレ求ムル軌跡ナリ。

然ルニ之ハxトyトニ就イテ一次ノ式ナルガ故ニ直線ヲ表ハシ，而カモO點ノ座標0, bニテ滿足セラルルガ故ニO點ヲ過ル直線ナリ。

41. 一定點ヲ過ル直線ガ他ノ二ツノ定直線ニテ截リトラルル部分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

42. 一直線上ニ三ツノ點A, B, Cアル時，角APBト角BPCトガ等シキガ如キ點Pノ軌跡ヲ求メヨ。

43. 定點Oヲ過ル直線ガ他ノ二ツノ定直線トノ交點ヲ夫々R, Sトス。今コノ直線ノ上ニ一點Pヲトリ

$$OR+OS=2OP$$

ナラシムル時，Pノ軌跡ヲ求メヨ。

44. 前題ニ於テ

$$OR.OS=OP^2$$

ナラシムル時，Pノ軌跡ヲ求メヨ。

45. n個ノ與ヘラレタル直線ト定點OトアリOヲ過ル任意ノ直線ガn個ノ直線ト交ル點ヲ$P_1, P_2, \cdots\cdots P_n$トス。今コノ直線上ニ點Pヲトリ

$$\frac{n}{OP}=\frac{1}{OP_1}+\frac{1}{OP_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{OP_n}$$

ナルガ如キ點Pノ軌跡ヲ求メヨ。

解 定點Oヲ極トシ任意ノ直線ヲ原線トシタル時，n個ノ值線ノ方程式ヲ夫々

$$r\cos(\theta-\alpha)=p_1$$
$$r\cos(\theta-\beta)=p_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r\cos(\theta-\lambda)=p_n$$

トシ，Pノ座標ヲr, θトスレバ$OP_1, OP_2, \cdots\cdots\cdots\cdots$ハ夫々

$$\frac{p_1}{\cos(\theta-\alpha)},\ \frac{p_2}{\cos(\theta-\beta)},\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

ナリ。ヨツテ求ムル點Pノ軌跡ハ

$$\frac{n}{r}=\frac{\cos(\theta-\alpha)}{p_1}+\frac{\cos(\theta-\beta)}{p_2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{\cos(\theta-\lambda)}{p_n}$$

第三章

直線ヲ表ハス高次方程式

36. x, y ニ就キ二次以上ノ方程式ハ一般ニハ復雜ナル曲線ヲ表ハスト雖モ，特別ノ場合ニハ若干個ノ一次式ニ分解セラレ，從ツテ直線ノ群ヲナスコトアリ。以下詳說セン。

37. x, y ニ就キ二次ノ同次方程式ハ必ズ原點ヲ過ル二ツノ直線ヲ表ハス。

x, y ニ就キ二次ノ最モ一般ナル同次式ハ

$$ax^2+2hxy+by^2=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

ナリ。

之ヲ書キ直シテ

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{2h}{b}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{a}{b}=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

(2) ヲ $\dfrac{y}{x}$ ニ就キテ解ケバ

$$\frac{y}{x}=\frac{-h\pm\sqrt{h^2-ab}}{b}, \quad \cdots\cdots(3)$$

(3) ノ右邊ノ二ツヲ α, β トスレバ (1) ハ

$$(y-\alpha x)(y-\beta x)=0$$

トナル。故ニ (1) ハ二ツノ直線

$$y-\alpha x=0, \quad y-\beta x=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

ヲ表ハシ，而カモ之等ハ何レモ原點ヲ過ル。

注意 (3) ニ於テ $h^2-ab>0$ ナル時ハ α, β ハ共ニ相異ル實數ナルガ故ニ (1) ハ原點ヲ通ル二ツノ實直線ナリ。$h^2-ab=0$ ナル時

ハ $\alpha=\beta$ ナルガ故ニ(1)ハ唯一ツノ直線ナリ。然レドモ斯ノ如キ場合ニ代數學ニテハ唯一ツノ根トセズシテ,相等シキ二ツノ根ナリトイフガ如ク幾何學ニテモ唯一ツノ直線ナリトセズシテ,二ツノ相重ル直線ナリトイフ。

然ルニ $h^2-ab<0$ ナル時ハ. α, β ハ相異ル虛數ナルガ故ニ(4)ヲ滿足スル點ハ原點(0, 0)ヲ除イテハ存在セズ。從ツテ(1)ハ原點ヲ表ハストイフベキガ如シト雖モ,幾何學ニテハ矢張リ二ツノ虛直線ヲ表ハストイフ。

38. n 次ノ同次式ハ原點ヲ過ル n 個ノ直線ヲ表ハス。

x, y ニ就キテ n 次ノ同次式ノ最モ一般ナルモノハ

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}y+a_2x^{n-2}y^2+\cdots\cdots+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n=0\cdots(1)$$

ナリ。今 a_nx^n ニテ除スル時ハ

$$\left(\frac{y}{x}\right)^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1}+\cdots\cdots+\frac{a_2}{a_n}\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{a_1}{a_n}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{a_0}{a_n}=0$$

ソコデ此方程式ヲ $\dfrac{y}{x}$ ニ就キテ解キ,其根ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\alpha_n$ トスレバ(1)ハ

$$y-\alpha_1x=0 \qquad y-\alpha_2x=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad y-\alpha_nx=0$$

ナル原點ヲ過ル n 個ノ直線ヲ表ハスコト明カナリ。

例　方程式 $xy=0$ ハ如何ナル曲線ヲ表ハスカ。

解　與ヘラレタル方程式ハ

$$x=0, \qquad y=0$$

ナル二ツノ直線卽チ x 軸ト y 軸トヲ表ハス。

39. 二次ノ同次式ノ表ハス二直線ノ交角

二次ノ同次式 $ax^2+2hxy+by^2=0$ ガ表ハス二ツノ直線ノナス

角ヲ θ トスレバ第二十七節ニヨリ

$$\tan\theta=\frac{m-m'}{1+mm'} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ第三十七節ニヨレバ

$$m+m'=-\frac{2h}{b}, \quad mm'=\frac{a}{b}$$

ヨツテ(1)ニ之等ヲ代入スレバ

$$\tan\theta=\pm\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

從ツテ交角 θ ハ

$$\theta=arc\tan\pm\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

注意　複符號ハ何レヲトルモ可ナリ。ソハ交角ノ中,銳角ヲ得ルカ,之ト補角ヲナス鈍角ヲ得ルカノ相違アルノミナレバナリ。

系i　$a+b=0$ ナラバ交角ハ直角ナリ。

系ii　若シ斜交軸ナラバ第二十八節ニヨリ

$$\tan\theta=\frac{(m-m')\sin\omega}{1+(m+m')\cos\omega+mm'}$$

ナルガ故ニ

$$m+m'=-\frac{2h}{b} \quad mm'=\frac{a}{b}$$

ヲ代入スレバ

$$\tan\theta=\pm\frac{2\sqrt{h^2-ab}\ \sin\omega}{a+b-2h\cos\omega}$$

ヨツテ交角 θ ハ

$$\theta=\mathrm{arc}\tan\frac{\pm2\sqrt{h^2-ab}\ \sin\omega}{a+b-2h\cos\omega}$$

ニシテ $a+b-2h\cos\omega=0$ ナラバ二ツノ直線ハ互ニ直交シ, $h^2-ab=0$ ナラバ互ニ平行ナリ。

40. 二次ノ同次式ノ表ハス直線ノ二等分線。

二次ノ同次式

$$ax^2+2hxy+by^2=0$$

ノ表ハス二ツノ直線 OA, OB ノ方程式ヲ夫々

$$y=\alpha x, \qquad y=\beta x$$

トシ,二等分線 OC ノ方程式ヲ

$$y=mx$$

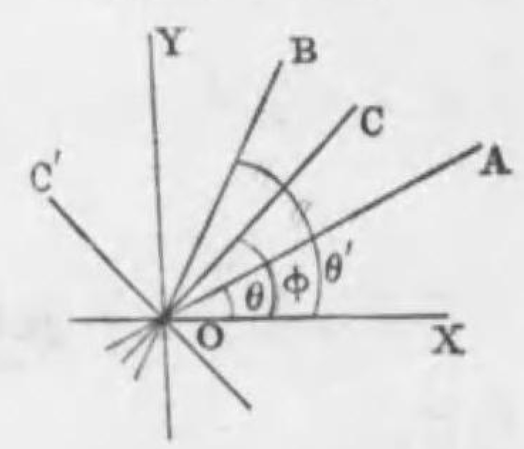
ト假定シ $X\hat{O}A=\theta,\ X\hat{O}B=\theta',\ X\hat{O}C=\phi$

トスレバ $\qquad 2\phi=\theta+\theta'$

ナルガ故ニ

$$\tan 2\phi=\tan(\theta+\theta') \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

第五十一圖



卽チ

$$\frac{2\tan\phi}{1-\tan^2\phi}=\frac{\tan\theta+\tan\theta'}{1-\tan\theta\tan\theta'} \cdots\cdots (2)$$

故ニ

$$\frac{2m}{1-m^2}=\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

然ルニ $\alpha+\beta=-\frac{2h}{b},\ \alpha\beta=\frac{a}{b}$, ニシテ二等分線 OC ハ原點ヲ過ルガ故ニ $m=\frac{y}{x}$ ナリ。ヨツテ之等ヲ(3)ニ代入シ,分母ヲ拂ヘバ

$$x^2-y^2-\frac{a-b}{h}xy=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

注意 i 二ツノ直線 OA, OB ノ外角ヲ二等分スル直線 OC′ ガ x 軸トナス角ヲ ϕ' トスレバ

$$2\phi'=\theta+\theta'+180^\circ$$

故ニ

$$\tan 2\phi'=\tan(\theta+\theta'+180^\circ)$$
$$=\tan(\theta+\theta')$$

ヨツテ(1)ト同ジ關係アリ。從ツテ(4)ハ OC 及ビ OC′ ヲ表ハス二ツノ直線ノ方程式ナリ。

注意 ii (4)ヲ第三十七節(2)ノ如クニ書キ直セバ

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{a-b}{h}\left(\frac{y}{x}\right)-1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

故ニ

$$\frac{y}{x}=-\frac{(a-b)\pm\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}{2h} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

而シテ根號內

$$(a-b)^2+4h^2$$

ハ常ニ正ナルガ故ニ(5)ニヨツテ示サルヽ $\frac{y}{x}$ ノ二ツノ根ハ決シテ虛數トナラズ。故ニ $ax^2+2hxy+by^2=0$ ノ表ハス二ツノ直線ハ實ナルト虛ナルトニ不拘,其二等分線ハ常ニ二ツノ實ナル直線ナリ。

41. 一般ノ二次方程式ハ二ツノ直線ヲ表ハス爲ノ條件。

x, y ニ就イテノ二次方程式ノ最モ一般ナルモノハ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0,$$

之ガ二ツノ直線ヲ表ハス爲ニハ二ツノ一次式ニ分解セラレザルベカラズ。

今假リニ

$$(lx+my+n)(l'x+m'y+n')=0$$

トナルモノトスレバ x, y ノ値ノ如何ニ不拘恒等的ニ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=(lx+my+n)(l'x+m'y+n')$$

ナラザルベカラズ。ヨツテ相對應スル各項ノ係數ハ相等シ。

卽チ

$$a=ll' \qquad b=mm' \qquad c=nn'$$
$$2f=mn'+m'n \qquad 2g=ln'+l'n$$
$$2h=lm'+l'm$$

故ニ

$$8fgh=(mn'+m'n)(ln'+l'n)(lm'+l'm)$$

右邊ヲ計算シテ上ノ關係式ヲ代入スレバ

$$8fgh=2abc+a(4f^2-2bc)+b(4g^2-2ac)+c(4h^2-2ab)$$

變形シテ整頓スレバ

$$af^2+bg^2+ch^2-2fgh-abc=0$$

(abc+2fgh−af²−bg²−ch²=0)

コレ求ムル條件式ナリ。

注意 i　上ノ左邊ヲ與ヘラレタル二次式ノちすくりみなんとトイヒ,通常Δヲ以テ表ハス。

條件式ヲ行列式ニテ記セバ

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0$$

注意 ii　上ノ條件式ハ亦次ノ如クニシテ求ムルコトヲ得。與ヘラレタル方程式ヲyノ降冪ニ竝ベ

$$by^2+2(hx+f)y+(ax^2+2gx+c)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之ヲyニ就イテ解カバ

$$y=\frac{-(hx+f)\pm\sqrt{\{(hx+f)^2-b(ax^2+2gx+c)\}}}{b}$$

根號內ヲxノ降冪ニ配列スレバ

$$(h^2-ab)x^2+2(hf-bg)x+(f^2-bc)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

サテ(1)ハ二ツノ一次式ニ分解セラルヽ爲ニハ(2)ガ完全ナル平方式ナラザルベカラズ。從ツテ(2)ノ判別式

$$(hf-bg)^2-(h^2-ab)(f^2-bc)=0$$

ナルヲ要ス。bニテ除シタル後整頓スレバ

$$af^2+bg^2+ch^2-2fgh-abc=0$$

コレ前ニ得タルモノト一致ス。

例　$2x^2-xy-y^2+3x+1=0$ハ如何ナル曲線ナルカ。

解　ちすくりみなんとヲ作ラバ

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

依テ與ヘラレタル方程式ハ二ツノ直線ヲ表ハスベシ,今原式ヲyニ就イテ解ハバ

$$y=\frac{-x\pm\sqrt{x^2+4(2x^2+3x+1)}}{2}=\frac{-x\pm(3x+2)}{2}$$

ヨツテ

$$y=x+1, \qquad y=-2x-1$$

ナル二ツノ直線ヲ表ハス。

第三章

問　題

次ノ方程式ハ如何ナル曲線ヲ表ハスカ。

1. $x^2-y^2=0$

2. $x^2-y^2-2x+1=0$

3. $2x^2-5xy-3y^2+3x+5y-2=0$

4. $bx^2-2hxy+ay^2=0$ ガ表ハス二直線ハ夫々 $ax^2+2hxy+by^2=0$ ガ表ハス二直線ニ垂直ナルコトヲ證セヨ。

解　第一ノ方程式ヨリ

$$\frac{y}{x}=\frac{h+\sqrt{h^2-ab}}{a}\quad\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{y}{x}=\frac{h-\sqrt{h^2-ab}}{a}\quad\cdots\cdots(2)$$

ヲ得，第二ノ方程式ヨリ

$$\frac{y}{x}=\frac{-h+\sqrt{h^2-ab}}{b}\quad\cdots\cdots(3)$$

$$\frac{y}{x}=\frac{-h-\sqrt{h^2-ab}}{b}\quad\cdots\cdots(4)$$

ヲ得，而シテ直線(1)及ビ(3)ノ方向係數ノ積ヲ作ルト

$$\frac{h+\sqrt{h^2-ab}}{a}\times\frac{-h+\sqrt{h^2-ab}}{b}=-1$$

ヨツテ夫等ノ二ツノ直線ハ互ニ垂直ナリ。同様ニシテ直線(2)ト(4)トモ互ニ垂直ナリ。

5. $x^2+6xy+9y^2+4x+12y-5=0$ ハ互ニ平行ナル二ツノ直線ヲ表ハスコトヲ證セヨ。

6. $x^2-y^2+x+3y-2=0$ ハ互ニ垂直ナル二ツノ直線ヲ表ハスコトヲ證セヨ。

7. $x^2-5xy+4y^2+x+2y+k=0$ ハ二ツノ直線ヲ表ハスヤウニ k ノ値ヲ定メヨ。　−2

8. $x^2-4x+3=0$ ガ表ハス二ツノ直線ト $y^2-6y+5=0$ ガ表ハス二ツノ直線トガ矩形ヲ作ルコトヲ示シ，次ニソノ面積ヲ求メヨ。

9. 直線 $x-y=2$ ト曲線

$$5x^2+12xy-8y^2+8x-4y+12=0$$

トノ二ツノ交點ヲ原點ニ結ビ付ケタル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

10. $ax^2+2hxy+by^2=0$ ガ表ハス二ツノ直線ノ何レカ一ツハ $a'x^2+2h'xy+b'y^2=0$ ガ表ハス二ツノ直線ノ何レカト一致スル爲ノ條件ヲ求メヨ。

解　共通ナル直線ノ方程式ヲ

$$y-mx=0$$

トスレバ，與ヘラレタル二ツノ方程式ノ左邊ガ何レモ $y-mx$ ニテ整除セラレザルベカラズ。ヨツテ剩餘定理ニヨリ

$$bm^2+2hm+a=0\quad\cdots\cdots(1)$$

$$b'm^2+2h'm+a'=0\quad\cdots\cdots(2)$$

(1)及ビ(2)ヨリ

$$m^2=\frac{a'h-ah'}{bh'-b'h}\quad\cdots\cdots(3)$$

$$m=\frac{ab'-a'b}{2(bh'-b'h)}\quad\cdots\cdots(4)$$

(3)及ビ(4)ヨリ

$$(ab'-a'b)^2=4(a'h-ah')(bh'-b'h)$$

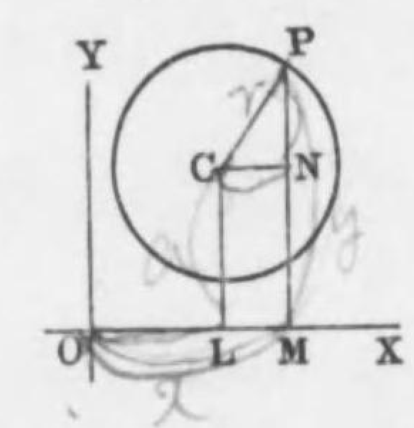
コレ求ムル條件ナリ。

第四章

圓

42. 圓ノ方程式

第五十二圖



Cヲ中心トシ其座標ヲ(a, b)トシ半徑ヲrトス。

今圓周上ニ任意ノ點Pヲトリ，其座標ヲx, yトス。次ニCL, PMヲy軸ニ平行ニ引キx軸トノ交點ヲ夫々L, Mトシ，CNヲx軸ニ平行ニ引キPMトノ交點ヲNトス。

然ル時ハ△CPNヨリ

$$CN^2+NP^2=CP^2 \quad \cdots\cdots(1)$$

然ルニ

$$CN=x-a, \qquad NP=y-b$$

故ニ(1)ハ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \cdots\cdots(2)$$

コノ關係ハ圓周上ニ於テハP點ノ位置ノ如何ニ關セズ成立ス。ヨツテ(2)ハ圓ノ方程式ナリ。

系　方程式(2)ヲ展開スレバ

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2=r^2$$

トナル。故ニ直交軸ニ關シテハ圓ノ方程式ハ次ノ二ツノ特長ヲ有ス。

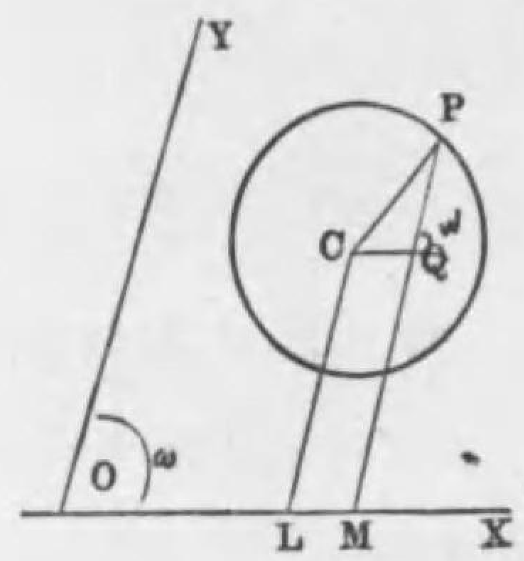
i.　x^2トy^2トノ係數ハ相等シ。

ii.　xyノ項ヲ含マズ。

43. 斜交軸ニ關シテ圓ノ方程式

圖ニヨリ

第五十三圖



$$CQ^2+QP^2-2CQ.QP\cos C\hat{Q}P=CP^2$$

然ルニ

$$CQ=x-a,\qquad QP=y-b,$$

$$C\hat{Q}P=\pi-\omega$$

ナルガ故ニ

求ムル圓ノ方程式ハ

$$(x-a)^2+(y-b)^2-2(x-a)(y-b)\cos(\pi-\omega)=r^2$$

即チ

$$(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\omega=r^2$$

系　斜交軸ニ關シテハ圓ノ方程式ノ特長ハ

i　x^2 ト y^2 トノ係數ハ相等シ。

ii　x^2 及ビ y^2 ノ係數ハ共ニ xy ノ係數トナス比ハ $1:2\cos\omega$ ナリ。

44. 直交軸ニ關シテ二次方程式

$$ax^2+ay^2+2gx+2fy+c=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ハ必ズ圓ヲ表ハス。

何トナレバ與ヘラレタル方程式ヲ少シク變化スルト

$$\left(x+\frac{g}{a}\right)^2+\left(y+\frac{f}{a}\right)^2=\frac{g^2+f^2-ac}{a^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故ニ(1)ハ點 $\left(-\frac{g}{a},\ -\frac{f}{a}\right)$ ヲ中心トシ $\sqrt{\frac{g^2+f^2-ac}{a^2}}$ ヲ半徑トスル圓ナリ。

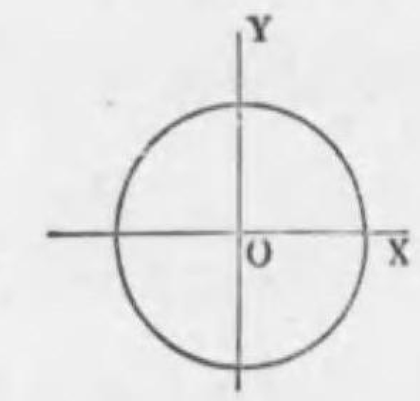
注意　モシ $g^2+f^2-ac=0$ ナル時ハ圓ノ半徑ハ零ナリ,カヽル圓ヲ點圓トイフ。

又 $g^2+f^2-ac<0$ ナル時ハ x, y ガ如何ナル實數ニテモ(2)ガ成立セズ。然レドモ幾何學ニテハ半徑ハ虚ナル虚圓ナリトイフ。

45. 種々ノ位置ニアル圓ノ方程式

i　中心ヲ原點ニ置ク時半徑 r ノ圓ノ方程式ハ第四十二節ノ公式(2)ニ

第五十四圖



$$a=0\qquad b=0$$

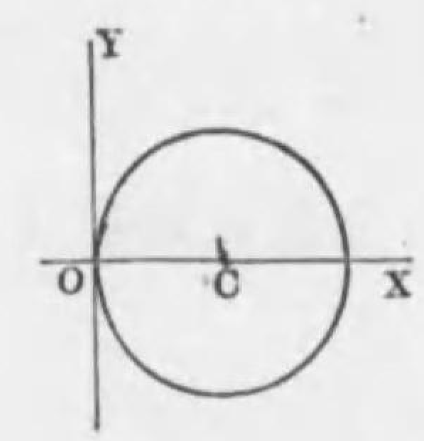
ト置キテ得ラル。即チ

$$x^2+y^2=r^2$$

ナリ。

ii　半徑ヲ r トシ,中心ヲ點 $(r, 0)$ ニ置ク時ノ圓ノ方程式ハ

第五十五圖



$$a=r\qquad b=0$$

ト置キテ得ラル。即チ

$$(x-r)^2+y^2=r^2$$

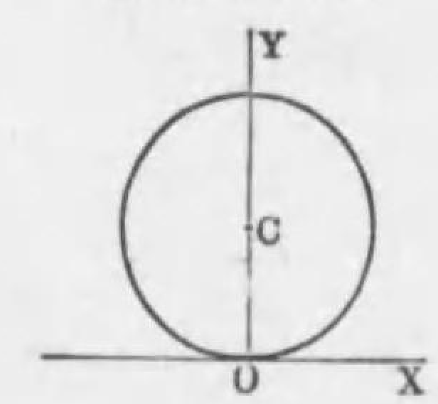
整頓スレバ

$$x^2+y^2=2rx$$

ナリ。

iii　半徑ヲ r トシ,中心ヲ點 $(0, r)$ ニ置ク時ノ圓ノ方程式ハ

第五十六圖



$$a=0\qquad b=r$$

ト置キテ得ラル,即チ

$$x^2+(y-r)^2=r^2$$

整頓スレバ

$$x^2+y^2=2ry$$

ナリ。

例　三ツノ點 $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$ ヲ過ル圓ノ方程式ヲ求メヨ。

解　直交軸ニ關スル圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ト假定ス。

コノ圓ハ點(0, 1)ヲ過ル爲ニハ(1)ノ左邊ニ $x=0,\ y=1$ ト置ケバ零トナラザルベカラズ。即チ

$$1+2f+c=0, \quad\cdots\cdots(2)$$

同様ニ點(1, 0), (2, 1)ヲ過ル爲ニハ夫々

$$1+2g+c=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

$$5+4g+2f+c=0 \quad\cdots\cdots(4)$$

(2), (3)及ビ(4)ヨリ

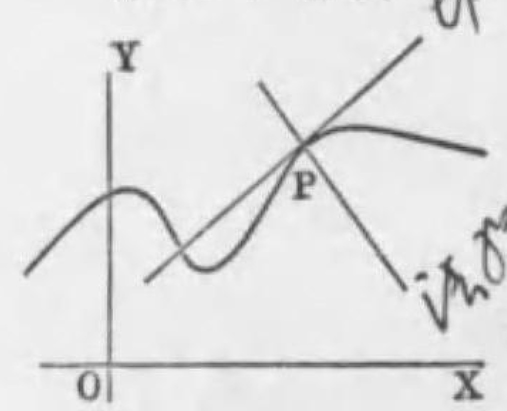
$$c=1, \qquad g=f=-1,$$

ヨツテ求ムル圓ノ方程式ハ

$$x^2+y^2-2x-2y+1=0,$$

定義　切線ト法線

第五十七圖



曲線上ニ二ツノ點P, Qヲトリ,割線PQヲ作リ,次ニP點ヲ固定シ,Q點ヲシテ曲線ノ上ヲ動カシメ漸次P點ニ接近セシムレバ割線PQガP點ノ周リニ廻轉ス。

今Q點ヲ限リナクP點ニ接近セシメタル時,割線ノ極限ノ位置ヲP點ニ於ケル曲線ヘノ切線トイフ。而シテP點ヲ切點トイヒ,切點ヲ過リ切線ニ垂直ナル直線ヲ法線トイフ。

46. 圓ノ切線ノ方程式

第五十八圖

圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2=r^2$$

トシ,其周上ノ點 $P(x_1, y_1)$ ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メントス。

今圓周上ニ任意ニ第二ノ點 $Q(x_2, y_2)$ ヲトリ割線PQヲ作ルト其方程式ハ

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1) \quad\cdots\cdots(1)$$

然ルニ二ツノ點 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ハ共ニ圓周上ノ點ナルヲ以テ

$$x_1^2+y_1^2=r^2$$

$$x_2^2+y_2^2=r^2$$

邊々相減ズレバ

$$y_1^2-y_2^2=-(x_1^2-x_2^2)$$

故ニ若シ $x_1-x_2\fallingdotseq 0,\ y_1+y_2\fallingdotseq 0$, 即チPQハ x 軸又ハ y 軸ニ平行ナラザルヤウニQヲトラバ

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2} \quad\cdots\cdots(2)$$

(2)ヲ(1)ニ代入スレバ

$$y-y_1=-\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}(x-x_1) \quad\cdots\cdots(3)$$

(3)ハ實ニ割線PQノ方程式ナリ。ソコデ點Qヲ點Pニ限リナク接近セシムレバ其極限ニ於テハ

$$x_2=x_1, \qquad y_2=y_1$$

ヨツテ(3)ハ

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

分母ヲ拂ヒ整頓スレバ

$$xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$$

然ルニ $x_1^2+y_1^2=r^2$ ナルガ故ニ求ムル切線ノ方程式ハ

$$xx_1+yy_1=r^2 \quad\cdots\cdots(4)$$

系　圓ノ方程式ガ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

ニテ與ヘラレタル時,其上ニアル一點 $P(x_1, y_1)$ ニ於ケル切線ノ方程式ハ上ト同様ニシテ

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2 \quad\cdots\cdots(5)$$

トナル。

例1　圓 $x^2+y^2=25$ ノ上ニアル一點 $(3, 4)$ ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メヨ。

解　公式(4)ニヨリ直チニ

$$3x+4y=25$$

ヲ得。

例2.　圓ノ方程式ガ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

ナル時,ソノ周上ノ一點 (x', y') ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メヨ。

解　與ヘラレタル方程式ヲ變形スレバ

$$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$$

ナルガ故ニ公式(5)ニヨリ切線ノ方程式ハ

$$(x+g)(x'+g)+(y+f)(y'+f)=g^2+f^2-c$$

整頓スレバ

$$\cancel{xx'+yy'+g(x+x')+f(y+y')+c=0},$$

47. 圓ノ法線ノ方程式

圓 $x^2+y^2=r^2$ ノ周上ノ點 (x', y') ニ於ケル切線ノ方程式ハ前節ニヨリ

$$xx'+yy'=r^2$$

故ニ其方向係數ハ $-\frac{x'}{y'}$ ナリ。然ルニP點ヲ過ル法線ハ其點ニ於ケル切線ニ垂直ナルガ故ニ其方向係數ハ $\frac{y'}{x'}$ ナリ。從ツテ法線ノ方程式ハ

$$y-y'=\frac{y'}{x'}(x-x')$$

分母ヲ拂ヒ,整頓スレバ

$$xy'-x'y=0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

系 i　上ノ方程式ハ $x=y=0$ ニテ滿足セラル。即チ法線ハ

必ズ圓ノ中心ヲ通過ス。

系 ii　圓ノ方程式ハ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

ニテ與ヘラルヽ時ハ點 $F(x', y')$ ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$(x-a)(y'-b)-(x'-a)(y-b)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

トナル。而シテ法線ハ點 (a,b) 即チ圓ノ中心ヲ通過ス。

48. 圓ト直線トノ交點

圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2=r^2 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

トシ,直線ノ方程式ヲ

$$y=mx+b \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

トスレバ夫等ノ交點ノ座標ハ(1),(2)ヲ同時ニ滿足スルガ故ニ二ツノ方程式ヲ解キテ得ル x, y ノ値ニ等シ,即チ

$$x=\frac{-mb\pm\sqrt{(1+m^2)r^2-b^2}}{1+m^2}$$

$$y=\frac{-m^2b\pm m\sqrt{(1+m^2)r^2-b^2}}{1+m^2}+b,$$

ナリ。

系 i　上ノ結果ヨリ次ノ事ガ容易ニ明カナリ。

1°. $(1+m^2)r^2>b^2$ ナル時ハ直線 $y=mx+b$ ハ圓 $x^2+y^2=r^2$ ト相異ル二點ニテ交リ,

2°. $(1+m^2)r^2=b^2$ ナル時ハ相重ナル二點ニテ交ル即チ切線ナリ。

3°. $(1+m^2)r^2<b^2$ ナル時ハ相交ラズ。然レドモ解析幾何學ニテハ二ツノ相異ル虛點ニテ交ルトイフ。

注意　$(1+m^2)r^2 \gtreqless b^2$ トハ圓ノ中心 $(0, 0)$ ヨリ直線 $y=mx+b$ ニ至ル距離ハ半徑ヨリ小ナルカ,等シキカ,或ハ大ナルカナリ。(第二十九節(2))ヨツテ上ノ結果ハ幾何學的ニモ說明スルコトヲ得,

系 ii 系 i ノ 2°. ニヨレバ方向係數ガ m ナル直線ガ圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ切線ナル時ハ $b=\pm r\sqrt{1+m^2}$ ナルガ故ニ其方程式ハ

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2},$$

ナリ。

例 圓 $x^2+y^2=r^2$ ノ切線ガ x 軸ト 45° ノ傾キヲナス時,此切線ノ方程式ヲ求メヨ。

解 方向係數ガ m ナル切線ノ方程式ハ

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2},$$

然ルニ x 軸ト 45° ノ傾キヲナス故ニ

$$m=\tan 45^\circ=1$$

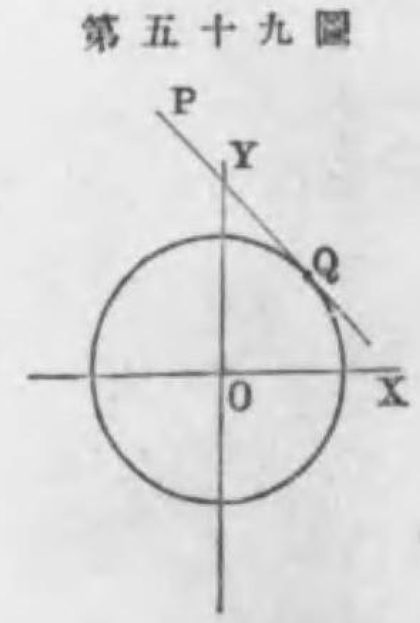
ヨツテ求ムル切線ノ方程式ハ

$$y=x+r\sqrt{2},\ 及ビ\ y=x-r\sqrt{2}$$

ノ二ツナリ。

49. 一ツノ點ヨリ引ク切線ノ切點

第五十九圖



圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2=r^2$$

トシ,任意ノ點ヲ $P(x_1,\ y_1)$ トシ,切點ヲ Q トシ,其座標ヲ $x_2,\ y_2$ ト假定ス。

Q 點ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$xx_2+yy_2=r^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

P 點ハコノ上ニアルベキニヨリ

$$x_1x_2+y_1y_2=r^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ガ成立ス。又 Q 點ガ與ヘラレタル圓ノ上ニアルガ故ニ

$$x_2^2+y_2^2=r^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2) ト (3) トヲ $x_2,\ y_2$ ニ就キテ解ケバ

$$\left.\begin{aligned} x_2&=\frac{r^2x_1\pm ry_1\sqrt{x_1^2+y_1^2-r^2}}{x_1^2+y_1^2}\\ y_2&=\frac{r^2y_1\mp rx_1\sqrt{x_1^2+y_1^2-r^2}}{x_1^2+y_1^2}\end{aligned}\right\}$$

コレニヨリテ一點 P ヨリ一ツノ圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ二ツノ切線ヲ引キ得ベキコトヲ知ル。

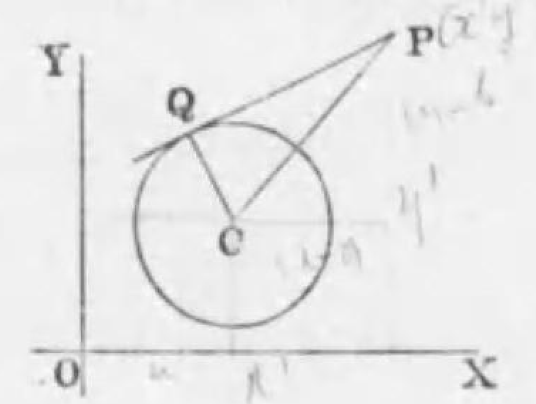
注意 $x_1^2+y_1^2-r^2>0$ ナル時ハ上ノ結果ヨリ二ツノ實ナル切點ヲ得ベク,從ツテ二本ノ實切線アリ。

$x_1^2+y_1^2-r^2=0$ ナル時ハ二ツノ切點ハ相重ナリ,從ツテ二ツノ切線ガ相重ナル。如何ニモ點 P ハ圓周上ニアルヲ以テナリ。

$x_1^2+y_1^2-r^2<0$ ナル時ハ實ナル切點ヲ得ズ。從ツテ切線ヲ有セズ。何トナレバ點 P ハ圓内ニアルヲ以テナリ。然レドモ此場合ニモ尙二ツノ虛切線アリトイフ。

50. 圓外ノ點ヨリ引ク切線ノ長サ

第六十圖



點 $(a,\ b)$ ヲ中心トシ,半徑 r ナル圓

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

ニ圓外ノ一定點 $P(x',y')$ ヨリ引ク切線ノ長サヲ求メンニ切點ヲ Q トスレバ三角形 PQC ヨリ

$$PQ^2=PC^2-CQ^2$$

然ルニ

$$PC^2=(x'-a)^2+(y'-b)^2$$

故ニ

$$PQ=\sqrt{(x'-a)^2+(y'-b)^2-r^2}$$

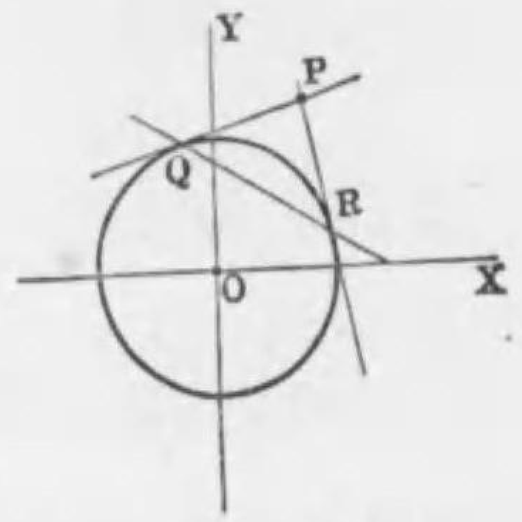
51. 圓ニ引ク二ツノ切線ノ切點ヲ結ブ直線

圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2=r^2$$

トシ,與ヘラレタル點ヲ $P(x', y')$ トシ,二ツノ切線 PQ, PR ノ切點 Q, R ノ座標ヲ夫々 (x_1, y_1), (x_2, y_2) ト假定ス。

第六十一圖



然ル時ハ切線 PQ, PR ノ方程式ハ第四十六節ニヨリ夫々

$$xx_1+yy_1=r^2 \quad\cdots\cdots(1)$$
$$xx_2+yy_2=r^2 \quad\cdots\cdots(2)$$

之等ハ何レモP點ヲ過ルガ故ニ

$$x'x_1+y'y_1=r^2 \quad\cdots\cdots(3)$$
$$x'x_2+y'y_2=r^2 \quad\cdots\cdots(4)$$

(3)及ビ(4)ナル條件ハ直線

$$x'x+y'y=r^2 \quad\cdots\cdots(5)$$

ノ上ニ二ツノ點 Q, R ガノリ居ル爲ノ條件ヲ示スモノナリ。

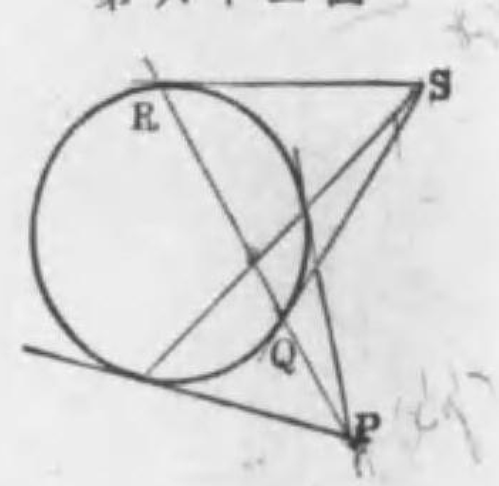
故ニ(5)ハ二ツノ切點 Q, R ヲ結ブ直線ノ方程式ナリ。

定義 弦 QR ヲ P ヨリ引ケル二ツノ切線ノ切觸弦トイフ。

52. 一點ヲ過ル圓ノ弦ノ兩端ヨリ切線ヲ引ク時,夫等ノ切線ノ交點ノ軌跡

$P(x', y')$ ヲ定點トシ,P ヲ過リ弦 PQR, PQ'R'………ヲ引ク時其兩端 Q, R; Q', R';………ヨリ引ケル切線ノ交點ヲ S, S'………トスル時, S, S'………ノ軌跡ヲ求メントス。

第六十二圖



今 S ノ座標ヲ (x_1, y_1) ト假定スレバ S ニ關スル切觸弦 QR ノ方程式ハ前節ニヨリ

$$xx_1+yy_1=r^2 \quad\cdots\cdots(1)$$

然ルニ P 點ハ QR ノ上ニアルベキガ故ニ

$$x'x_1+y'y_1=r^2 \quad\cdots\cdots(2)$$

即チ(2)ハ直線

$$x'y+y'y=r^2 \quad\cdots\cdots(3)$$

ノ上ニ $S(x_1, y_1)$ ガノリ居ル事ヲ示ス條件式ナリ。換言スレバ弦 PQR ガ如何ナル位置ヲトルモ(3)ノ上ニハ常ニ S 點ガノリ居ルベシ,(S', S''………モ同樣)ヨツテ求ムル軌跡ハ(3)ニテ示セル直線ナリ。

定義 直線 $x'x+y'y=r^2$ ヲ圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ關シテ點 (x', y') ノ極線ナリトイヒ,點 (x', y') ヲ圓ニ關スル其極線ノ極トイフ。

注意 上ノ定理ハ點 P ノ位置ノ如何ニ關セズ成立ス。故ニ若シ點 P ガ圓周上ニアラザレバ極線ノ方程式ハ切觸弦ト一致スルガ故ニ P 點ノ極線トハ P 點ヨリ引ク二ツノ切線ノ切點ヲ結ブ直線ナリトイフヲ得ベシ。

又若シ P 點ハ圓周上ニアル時ハ P 點ノ極線ハ切線ト一致スベシ。

例 1. 圓 $x^2+y^2=25$ ニ關シテ點(5, 3)ノ極線ノ方程式ヲ求メヨ。

解 公式 $x'x+y'y=25$

ニ於テ

$$x'=5, \quad y'=3$$

ヲ代入スレバ所要ノ極線ノ方程式ヲ得。即チ

$$5x+3y=25.$$

例 2 圓 $x^2+y^2=35$ ニ關シテ直線 $4x+6y-7=0$ ノ極ノ座標ヲ求メヨ。

解　極ノ座標ヲ(x', y')ト假定スレバ極線ノ方程式ハ

$$xx'+yy'=35$$

コレハ與ヘラレタル直線ノ方程式

$$4x+6y-7=0$$

ト一致スル爲ニハ $x'=20$, $y'=30$ ナルヲ要ス。從ツテ求ムル點ノ座標ハ 20, 30 ナリ。

53. P點ノ極線ハQ點ヲ過ラバQ點ノ極線モP點ヲ過ル。

P, Q ノ座標ヲ夫々(x_1, y_1), (x_2, y_2)ト假定シ,圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2=r^2$$

トスレバ,二ツノ點P, Qノコノ圓ニ關スル極線ノ方程式ハ夫々

$$xx_1+yy_1=r^2$$

$$xx_2+yy_2=r^2$$

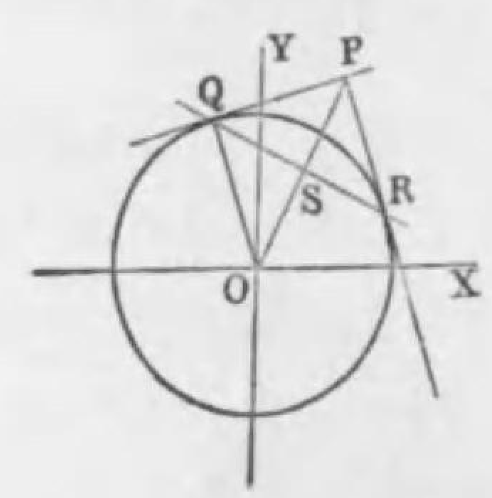
サテ假定ニヨリテPノ極線ハQヲ過ルガ故ニ

$$x_2x_1+y_2y_1=r^2$$

ナル條件ガ成立ス。然ルニ此條件ハQノ極線ガPヲ過ルベキ爲ノ條件ニ外ナラズ。ヨツテ證明セラレタリ。

系 i　圓ノ中心Oト點Pトヲ結ブ直線ガP點ノ極線ト直交ス。

第六十三圖



圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2=r^2$$

トシ, P點ノ座標ヲ x', y' トスレバ極線QRノ方程式ハ

$$xx'+yy'=r^2$$

從ツテ共方向係數ハ $m=-\dfrac{x'}{y'}$

又直線OPノ方程式ハ

$$y=\frac{y'}{x'}x$$

從ツテ共方向係數ハ

$$m'=\frac{y'}{x'}$$

故ニ

$$1+mm'=0$$

從ツテ二ツノ直線ハ互ニ直交ス。

系 ii　$\triangle OQP$ハ直角三角形ナルガ故ニ(前圖)

$$OS.OP=OQ^2=OR^2,$$

故ニ圓ノ中心ヨリ極及ビ極線ニ至ル距離ノ積ハ一定ニシテ圓ノ半徑ノ上ノ正方形ニ等シ。

系 iii　二ツノ點P, Qノ極線ノ交點ヲRトスレバ, Rハ直線PQノ極ナリ。

何トナレバRハPノ極線上ニアルガ故ニRノ極線ハPヲ過ルベシ。

同樣ニRガQノ極線上ニアルガ故ニRノ極線ハQヲ過ルベシ。

ヨツテRノ極線ハPQナラザルベカラズ。

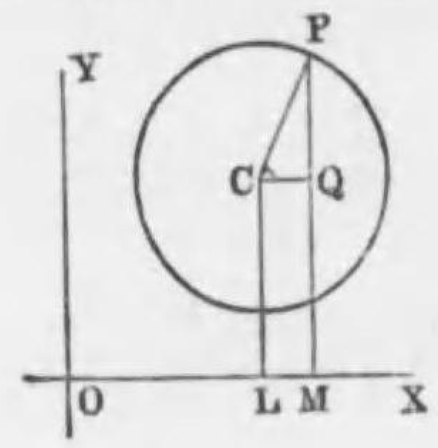
54. 一ツノ變數ヲ用ヒテ圓周上ノ點ノ位置ヲ定ムルコト

第三十三節ニ於テ一直線上ノ點ノ位置ヲ唯一ツノ變數ヲ以テ定メタルガ如ク,圓周上ノ點ノ位置モ亦一ツノ變數θヲ以テ示スコトヲ得。ソノ方法次ノ如シ。

Cヲ圓ノ中心, Pヲ圓周上ノ任意ノ點トシ, CL, PMヲy軸ニ平行ニCQヲx軸ニ平行ニ引キタリトシ$P\hat{C}Q$ヲθトス。

今Cノ座標ヲ(a, b)半徑ヲrトスレバPノ座標x, yハ夫々次ノ如シ。

第六十四圖



$$x = \mathrm{OM} = \mathrm{OL} + \mathrm{LM}$$
$$= \mathrm{OL} + \mathrm{CQ}$$
$$= a + r\cos\theta$$
$$y = \mathrm{MP} = \mathrm{MQ} + \mathrm{QP} = \mathrm{LC} + \mathrm{QP}$$
$$= b + r\sin\theta$$

ヨツテPノ座標ハ

$$\left.\begin{array}{l} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ナリ。

系 中心ハ原點ナル時ハ $a=b=0$ ナルガ故ニ

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

トナル。

注意 (1)ヨリθヲ消去スレバ方程式

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

ヲ得ベク, (2)ヨリθヲ消去スレバ方程式

$$x^2 + y^2 = r^2$$

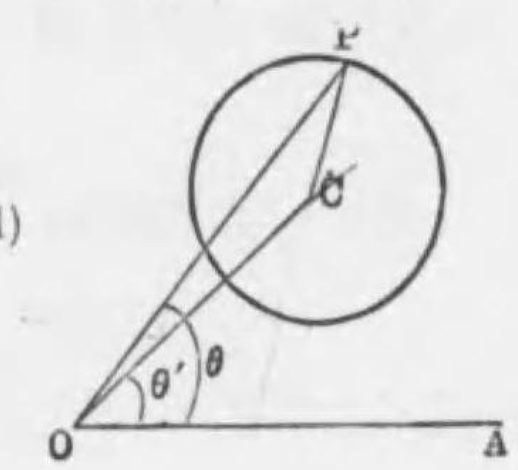
ヲ得ベシ。故ニ(1). (2)ハ夫々θナル一ツノ變數ニヨツテ表ハサレタル圓ノ方程式トイフモ可ナリ。

55. 圓ノ極方程式

Oヲ極, OAヲ原線トシ與ヘラレタル圓ノ中心Cノ座標ヲ(r', θ'), 其半徑ヲRトス。今圓周上ノ任意ノ點Pノ座標ヲ(r, θ)トスレバ

三角形OCPニ於テ

第六十五圖



$$\mathrm{OP}^2 + \mathrm{OC}^2 - 2\mathrm{OP}, \mathrm{OC}\cos\mathrm{C\hat{O}P} = \mathrm{CP}^2$$

故ニ

$$r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta - \theta') = \mathrm{R}^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

コレ求ムル圓ノ極方程式ナリトス。

系 i 上ノ方程式ヲrニ就キテ解ケバ同ジθノ値ニ對シテ一般ニハ二ツノ値アリ。即チ

$$r = r'\cos(\theta - \theta') \pm \sqrt{\mathrm{R}^2 - r'^2\sin^2(\theta - \theta')} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

故ニ次ノ結論アリ。

1° $\mathrm{K}^2 - r'^2\sin^2(\theta - \theta') > 0$ ナラバ極ト圓周上ノ點Pトヲ結ブ直線ハ更ニ圓ト他ノ一點P′ニテ交ル。

2° $\mathrm{R}^2 - r'^2\sin^2(\theta - \theta') = 0$ ナラバP及ビP′ハ合致シ, 從ツテOPハコノ圓ノ切線トナル。

3° $\mathrm{R}^2 - r'^2\sin^2(\theta - \theta') < 0$ ナラバOPハ圓ト實點ニテハ交ラズ。

圓ノ中心ヨリ直線OPニ至ル距離ハ半徑ヨリカ小ナルカ, 等シキカ或ハ大ナルカニ從ヒ, $\mathrm{R}^2 - r'^2\sin^2(\theta - \theta') \gtreqless 0$ ナリ。故ニ上ニイヘル三ツノ事柄ハ能ク初等幾何學ニ於ケル事實ト符合スベシ。

系 ii 方程式(1)ニ於テrノ二ツノ値ヲr_1, r_2トスレバ

$$r_1 r_2 = r'^2 - \mathrm{R}^2$$

即チ一點ヨリ圓ニ引ク割線ニ於テ積OP・OP′ハθノ値ノ如何ニ關セズ一定ナリ。コレ已ニ初等幾何學ニテ知ル所ナリ。

系 iii OCハ原線ナル時ハ$\theta'=0$ナルガ故ニ圓ノ極方程式ハ

$$r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta = \mathrm{R}^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

系 iv 極Oハ圓ノ上ニアル時ハ$r'=\mathrm{R}$ナルガ故ニ

$$r-2R\cos(\theta-\theta')=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

系 v 極 O ガ圓周上ニアリ，且ツ OC ヲ原線トスレバ

$$r'=R \qquad \theta'=0$$

ナルガ故ニ方程式ハ

$$r-2R\cos\theta=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

系 vi 中心ハ極ナル時ハ，圓周上ノ點ノ位置ノ如何ニ關セズ常ニ

$$r=R \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

ナル關係ガ成立ス。ヨツテ此場合(6)ハ圓ノ方程式ナリ。

注意 極方程式ハ直交軸ニ關スル圓ノ方程式

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

ヨリモ導クコトヲ得。

何トナレバ原點ヲ極トシ x 軸ヲ原線ニトラバ圓ノ中心ノ座標 a, b ハ夫々

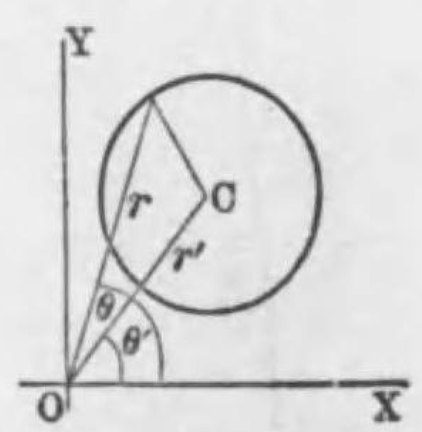
$$\left.\begin{aligned} a&=r'\cos\theta' \\ b&=r'\sin\theta' \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

茲ニ r', θ' ハ中心ノ極座標トス。

又圓周上ノ任意ノ點ノ座標 x, y ハ

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\theta \\ y&=r\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

第六十六圖



(1) ニ (2) ト (3) トヲ代入シ，且ツ $\cos(\theta-\theta')=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'$ ナルコトニ注意スレバ

$$r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')=R^2$$

トナル。

第四章

問題

1. 圓 $x^2+y^2-4x+6y=12$ ノ中心ノ座標及ビ半徑ノ長サヲ求メヨ。

2. 中心ノ座標ガ 2, 3 ニシテ半徑ガ 10 ナル圓ノ方程式ヲ求メヨ。

3. 二ツノ圓 $x^2+y^2-2x+6y=4$, $x^2+y^2-4x-4y=0$ ノ中心ヲ結ブ直線ノ方程式ヲ求メヨ。

4. 二ツノ點 (x', y'), (x'', y'') ヲ結ブ線分ヲ直徑トスル圓ノ方程式ヲ求メヨ。

5. 圓 $x^2+y^2-5x+7y+6=0$ ガ二ツノ座標軸ヲ截リトル點ノ座標ヲ求メヨ。

6. 點 $(5, -7)$ ハ圓 $x^2+y^2-2x+6y=15$ ノ外部ニアルコトヲ示セ。

7. 二ツノ軸及ビ $x=a$ ナル直線ニ切スル圓ノ方程式ヲ求メヨ。

解 求ムル圓ノ方程式ヲ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ト假定ス。コノ圓ハ x 軸ニ切スル爲ニハ方程式ニ $y=0$ ト置キタルモノ即チ

$$x^2+2gx+c=0$$

ハ等根ナラザルベカラズ。

故ニ先ヅ

$$g^2=c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

同様ニ y 軸ニ切スル爲ニハ

$$f^2=c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

又直線 $x=a$ ニ切スル爲ニハ (1) ニ $x=a$ ト置キタル方程式

$$y^2+2fy+a^2+2ga+c=0$$

ガ等根ヲ有セザルベカラズ。故ニ

$$f^2=a^2+2ga+c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

(2), (3) 及ビ (4) ヨリ

$$g=-\frac{a}{2}, \quad f=\pm\frac{a}{2}, \quad c=\frac{a^2}{4},$$

故ニ求ムル圓ノ方程式ハ

$$x^2+y^2-ax+ay+\frac{a^2}{4}=0$$

及ビ

$$x^2+y^2-ax-ay+\frac{a^2}{4}=0$$

ノ二ツナリ。

8. x 軸及ビ二ツノ直線 $x=a$, $x=b$ ニ切スル圓ノ方程式ヲ求メヨ。

9. x 軸上ニ中心ヲ有シ原點及ビ點 (a, b) ヲ過ル圓ノ方程式ヲ求メヨ。

10. 圓 $x^2+y^2=4$ ノ切線ノ中 $x+2y+3=0$ ニ平行ナルモノヲ求メヨ。

11. 直線 $y=x+7$ ガ圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ切ストイフ。半徑ヲ求メヨ。

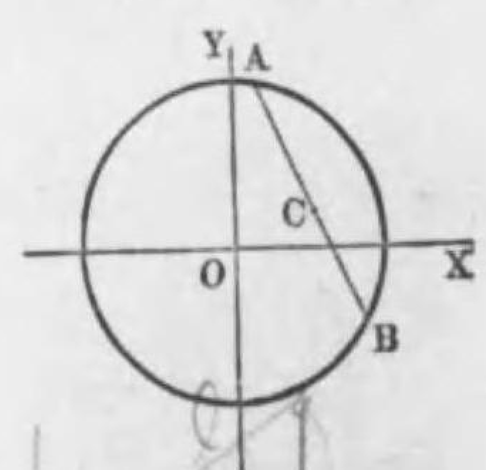
12. 直線 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ ガ圓

$$x^2+y^2-2ax\cos\alpha-2by\sin\alpha-a^2\sin^2\alpha=0$$

ニ切ストイフ。p ノ長サヲ求メヨ。

13. 圓 $x^2+y^2=16$ ニ於テ點 $(2, 1)$ ニテ二等分セラルル弦ノ方程式ヲ求メヨ。

第六十七圖



解 C 點ヲ $(2, 1)$ トシ此點ニテ二等分セラルル弦 AB ガ x 軸トナス角ヲ θ トス。此弦ニ沿ヒテ點 C ヨリ l ノ距離ニアル點ヲ (x, y) トスレバ第三十三節ニヨツテ

$$\left.\begin{array}{l} x=2+l\cos\theta \\ y=1+l\sin\theta \end{array}\right\}$$

若シ此點ガ圓周上ニアル時ハ

$$(2+l\cos\theta)^2+(1+l\sin\theta)^2=16$$

即チ

$$l^2+2l(\sin\theta+2\cos\theta)=11$$

コノ方程式ヲ解ケバ l ノ二ツノ値ヲ得ベシ。然ルニ C 點ハ弦 AB ノ中點ナルガ故ニ l ノ二ツノ値ガ絕對値等シク,符號ハ相反スベシ。

故ニ

$$\sin\theta+2\cos\theta=0$$

即チ

$$\tan\theta=-2$$

ヨツテ求ムル弦 AB ハ點 $(2, 1)$ ヲ過リ,方向係數ガ -2 ナル如キ直線ナリ。故ニ其方程式ハ

$$y-1=-2(x-2)$$

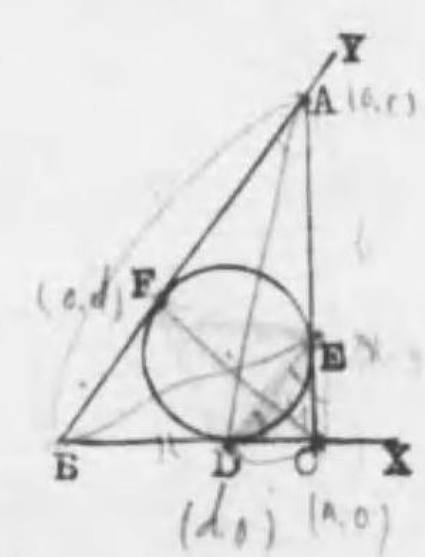
整頓シテ $2x+y=5$

14. 圓 $x^2+y^2=5$ ニ關シテ直線 $x+2y=1$ ノ極ノ座標ヲ求メヨ

15. 點 (x', y') ヨリ圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ引ケル二ツノ切線ノ切觸弦ガ原點ニ對シ直角ヲ張ル爲ノ條件ヲ求メヨ。

16. 三角形 ABC ノ內切圓ガ邊 BC, CA, AB ニ切スル點ヲ夫々 D, E, F トスル時,三ツノ直線 AD, BE, CF ガ同一ノ點ヲ過ルコトヲ證セヨ。 (大正元年文檢)

第六十八圖



解 三角形 ABC ノ邊 BC, AB ヲ夫々 x 軸, y 軸トセヨ。

今 A, F, D, C ノ座標ヲ夫々 $(0, c)$, $(0, d)$, $(d, 0)$, $(a, 0)$ トス。

幾何學ニテ能ク知ラルル定理ニヨリ

$$AE=AF, \quad BD=BF$$

然ルニ假定ニヨリ

$$AF=c-d=AE$$

$$CD=a-d=CE \text{ 從ツテ } AC=a+c-2d$$

而シテ E ノ座標 x, y ヲ求メンニ

$$AB : y=AC : CE$$

即チ

$$y=\frac{c(a-d)}{a+c-2d}$$

同樣ニ

$$x=\frac{a(c-d}{a+c-2d}$$

從ツテ直線 AD, BE, CF ノ方程式ハ夫々

$$cx+dy-cd=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$c(a-d)x-a(c-d)y=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$dx+ay-cd=0 \cdots\cdots(3)$$

然ルニ第二十六節ニヨリ

$$\begin{vmatrix} c & d & -cd \\ c(a-d) & -c(c-d) & 0 \\ d & a & -ad \end{vmatrix}=0$$

ナルガ故ニ AD, BE, CF ハ一點ニ於テ會ス。

17. 一ツノ定點ヲ過ル二ツノ直線ト他ノ二ツノ定直線トノ四ツノ交點ハ同一圓周上ニアル時,其圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

18. 定點Oヲ過ル直線上ノ點ヲP及ビQトシ,OPトOQトノ積ガ變ラザルモノトス。今P點ガ圓ヲ畫ク時ハQ點ハ如何ナル曲線ヲ畫クカヲ吟味セヨ。

解 定點Oヲ直交軸ノ原點ニトリ,圓ノ中心CトOトヲ結ブ直線ヲ x 軸ニ選ブ。今中心ノ座標ヲ a,o トスレバ,圓ノ方程式ハ

$$(x-a)^2+y^2=r^2 \cdots\cdots(1)$$

次ニP, Qノ座標ヲ夫々 x', y'; x'', y'' トスレバ直線OPQハ原點ヲ通過スルガ故ニ次ノ關係アリ。

$$\frac{x'}{x''}=\frac{y'}{y''} \cdots\cdots(2)$$

又Pハ圓周上ノ點ナルガ故ニ

$$(x'-a)^2+y'^2=r^2 \cdots\cdots(3)$$

サテ

$$OP.OQ=k$$

ナリトスレバ

$$(x'^2+y'^2)(x''^2+y''^2)=k^2 \cdots\cdots(4)$$

Q點ノ軌跡ハ(2), (3)及ビ(4)ヨリ x', y' ヲ消去シタル後 x'', y'' ヲ流通座標ニ直セバ可ナリ。ソレガ爲ニハ(3)ヨリ

$$x'^2+y'^2-2ax'+a^2=r^2 \cdots\cdots(5)$$

(4)ヨリ

$$x'^2+y'^2=\frac{k^2}{x''^2+y''^2} \cdots\cdots(6)$$

又(2)ト(4)トヨリ

$$\frac{x'}{x''}=\frac{y'}{y''}=\pm\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{x''^2+y''^2}}=\pm\frac{k}{x''^2+y''^2}$$

從ツテ

$$x'=\pm\frac{kx''}{x''^2+y''^2} \cdots\cdots(7)$$

(6)及ビ(7)ヲ(5)ニ代入スレバ

$$\frac{k^2}{x''^2+y''^2}\mp\frac{2akx''}{x''^2+y''^2}+a^2=r^2$$

整頓スレバ

$$(a^2-r^2)(x''^2+y''^2)\mp 2akx''+k^2=0 \cdots\cdots(8)$$

流通座標ニ直シ且ツ少シク變形スレバ

$$\left(x\mp\frac{ak}{a^2-r^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{rk}{a^2-r^2}\right)^2 \cdots\cdots(9)$$

卽チ求ムル軌跡ハ直線COノ上ニ中心ヲ有スル二ツノ圓ナリ。

若シ與ヘラレタル圓ハOヲ過ル時ハ $r=a$ ナルガ故ニ(8)ヨリ求ムル軌跡ハ二ツノ直線

$$x=\pm\frac{k}{2a}$$

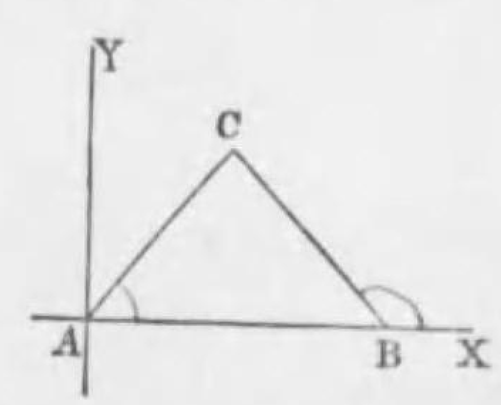
ナルヲ知ル。

19. 與ヘラレタル圓ノ一定切線上ニ任意ニ一定ノ長サノ線分ABヲトリ,Aヲ通過スル切線トBヲ通過スル切線トヲ作ル時,其交點ノ軌跡ハ如何ナル曲線ナルカ。　(大正九年文檢)

20. 二定點A, Bヲ過ル二ツノ直線AC, BCアリ,最初ハ共ニ直線ABノ上ニアルモノトス,今BCハACト同方向ニ而カモACノ二倍ノ速力ニテ廻轉スル時,其交點Cノ軌跡ヲ求メヨ。

解 ABヲ x 軸トシ,Aニ於テABニ垂直ナル直線ヲ y 軸トシABノ長サヲ a トス。

第六十九圖



今Cヲ軌跡上ノ一點トスレバ假定ニヨリ

テ

$$\hat{CBX}=2\hat{CAB}$$

故ニACノ方程式ヲ

$$y=mx \cdots\cdots(1)$$

トスレバBCノ方程式ハ

$$y=\frac{2m}{1-m^2}(x-a) \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

但シ玆ニ $m=\tan C\hat{A}B$ トス。

(1) 及ビ (2) ヨリ m ヲ消去スレバ

$$x^2+y^2-2ax=0$$

コレ求ムル軌跡ニシテ B ヲ中心トシ線分 AB ヲ半徑トスル圓ナリ。

21. 一ツノ點ヨリ與ヘラレタル正方形ノ四ツノ頂點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ一定ナル時，ソノ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

22. 圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ ト直線 $bx+ay=2ab$ トノ交點ヲ原點ニ結ビ付クル二ツノ直線ノ方程式ヲ求メ，且ツ $a^2+b^2=c^2$ ナル時ハ此二ツノ直線ハ直交スルコトヲ證セヨ。　(大正十二年文檢)

23. 點 $(1, -2)$ ノ二ツノ圓 $x^2+y^2+6y+5=0$, $x^2+y^2+2x+8y+5=0$ ニ就キテノ極線ハ同一ナルコトヲ證セヨ。

24. 中心ヲ同ジクスル圓ニ關スル與ヘラレタル直線ノ極ノ軌跡ヲ求メヨ。

25. 圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ就キテノ極ハ常ニ圓 $x^2+y^2=4r^2$ ノ上ニアル時ハ極線ハ $4x^2+4y^2=r^2$ ニ切スルコトヲ證セヨ。

26. 多クノ圓ハ皆一點ニ於テ切スル時ハ其等ノ圓ニ就キテノ一定點ノ極線ハ他ノ一定點ヲ過ルコトヲ證セヨ。

27. 周上ノ一點ヲ極トシ，其點ニ於ケル切線ヲ原線トシタル圓ノ極方程式ヲ求メヨ。

28. 前題ニ於テ一ツノ點 θ' ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メヨ。

29. 圓 $r=2a\cos\theta$ ニ於ケル二ツノ點ノ偏角ガ θ_1 及ビ θ_2 ナル時，コレ等ノ二點ヲ通ズル弦ノ極方程式ヲ求メヨ。

解　圓ノ半徑ヲ a トシ二ツノ點ヲ A, B トスレバ其極座標ハ夫々

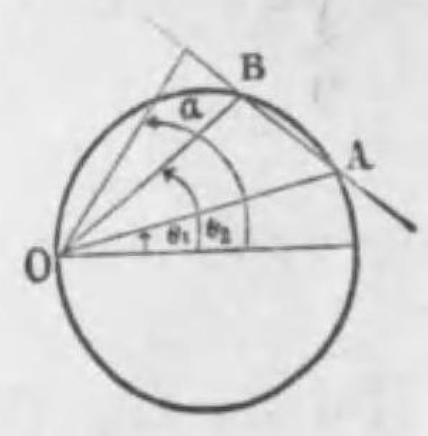
$$(2a\cos\theta_1,\ \theta_1)$$

$$(2a\cos\theta_2,\ \theta_2)$$

サテ直線 AB ノ極方程式ヲ

$$r\cos(\theta-\alpha)=p \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

第七十圖



ト假定ス。コノ直線ガ點 A ヲ過ル爲ニハ

$$2a\cos\theta_1\cos(\theta_1-\alpha)=p$$

B 點ヲ通過スル爲ニハ

$$2a\cos\theta_2\cos(\theta_2-\alpha)=p$$

故ニ

$$\cos\theta_1\cos(\theta_1-\alpha)=\cos\theta_2\cos(\theta_2-\alpha)$$

即チ

$$\cos(2\theta_1-\alpha)+\cos\alpha=\cos(\alpha-2\theta_2)+\cos\alpha,$$

故ニ

$$2\theta_1-\alpha=\alpha-2\theta_2$$

即チ

$$\alpha=\theta_1+\theta_2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

從ツテ

$$p=2a\cos\theta_1\cos\theta_2 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

(1) ニ (2) 及ビ (3) ヲ代入スレバ

$$r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2)=2a\cos\theta_1\cos\theta_2$$

コレ求ムル方程式ナリ。

30. 圓 $r=2a\cos\theta$ ニ於テ偏角 θ' ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$r\cos(\theta-2\theta')=2a\cos^2\theta'$$

ナルコトヲ證セヨ。

31. 圓 $r=a\cos\theta+b\sin\theta$ ノ中心ノ座標ヲ求メヨ。

32. $r^2\cos\theta-ar\cos2\theta-2a^2\cos\theta=0$ ハ一ツノ直線ト一ツノ圓トヨリ成ルコトヲ證セヨ。

33. 直線 $\frac{1}{r}=a\cos\theta+b\sin\theta$ ガ圓 $r=2c\cos\theta$ ニ切スル爲ノ條件ヲ求メヨ。

解　直線ト圓トガ相切スル爲メニハ θ ノ同ジ値ニ於イテ r ノ値ハ相等シキコトヲ要ス。

ソレガ爲メニ

$$r=2c\cos\theta \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{1}{r}=a\cos\theta+b\sin\theta \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1) 及ビ (2) ヨリ θ ヲ消去スレバ r ニ關スル方程式

$$r^4(a^2+b^2)-r^2(4ac+4b^2c^2)+4c^2=0$$

サテ r ノ値ガ同ジキ爲ニハ判別式

$$16b^2c^2(b^2c^2+2ac-1)$$

ガ零ナラザルベカラズ。ヨツテ求ムル條件ハ

$$b^2c^2+2ac=1,$$

34. 正三角形 ABC ニ於テ PA=PB+PC ナル如キ點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

解　一邊ノ長サ a トス。今邊 AB ヲ原線, A ヲ極トシ, 軌跡ノ一點 P ノ極座標ヲ r, θ トス。

然ル時ハ

$$PB=\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}$$

$$PC=\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos(60^\circ-\theta)}$$

故ニ題意ニヨリ

$$r=\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}+\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos(60^\circ-\theta)}$$

コレヲ簡單ニスレバ

$$r=\frac{2a}{\sqrt{3}}\cos(\theta-30^\circ)$$

コレ角 BAC ヲ二等分スル直線上ニ中心ヲ有シ, 且ツ其半徑ハ $\frac{a}{\sqrt{3}}$ ナル圓ナリ。

35. 三ツノ點 x_1, y_1 ; x_2, y_2 ; x_3, y_3 ヲ過ル圓ノ方程式ハ

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

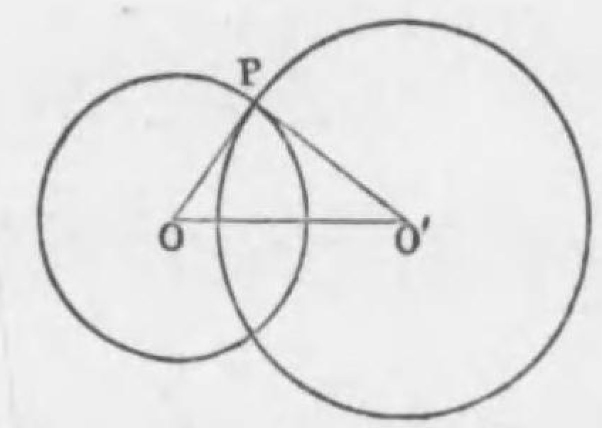
ナルコトヲ證セヨ。

第五章

二ツ以上ノ圓

56.　定義　**二ツノ圓ガ相交ル時, 交點ニ於ケル各圓ヘノ切線ハ直交スル時, 之等ノ二圓ハ互ニ直交スルトイフ。**

第七十一圖



二ツノ圓 O, O′ ガ直交スル時ハ交點 P ニテノ切線ハ夫々中心 O, O′ ヲ過ルベシ。

故ニ直交スル爲ニハ

$$OO'^2=OP^2+O'P^2$$

ナルコトヲ要ス。

故ニ二ツノ圓

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

$$x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0,$$

ニ於テ其中心ハ夫々 $(-g, -f)$, $(-g', -f')$ ニシテ半徑ノ平方ハ夫々 g^2+f^2-c, $g'^2+f'^2-c'$ ナルガ故ニ互ニ直交スル爲ニハ

$$(-g+g')^2+(-f+f')^2=g^2+f^2-c+g'^2+f'^2-c'$$

即チ

$$2gg'+2ff'=c+c'$$

ナルヲ要ス。

57,　二ツノ圓ノ交點ヲ過ル圓ノ方程式

二ツノ圓ノ方程式ヲ夫々

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(x-a')^2+(y-b')^2-r'^2=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

トシ,之等ヲ簡單ニ

$$s=0, \quad s'=0$$

ト記スベシ。然ル時ハ k ヲ常數トセバ

$$s+ks'=0$$

ハ(1),及ビ(2)ヲ同時ニ滿足セシムル點ノ座標ニテ滿足シ且ツ x^2 ト y^2 トノ係數ハ共ニ等シク,積 xy ノ項ナキヲ以テ與ヘラレタル二ツノ圓ノ交點ヲ過ル圓ノ方程式ナリ。

特ニ $k=-1$ ナル時ハ

$$s-s'=2(a-a')x+2(b-b')y-r^2+r'^2+a^2-a'^2+b^2-b'^2=0,$$

卽チ一次式ナルガ故ニ直線ヲ表ハス。コレ二ツノ圓ノ共通弦ナリ。

58. 二ツノ圓ヘノ等長ナル切線ナルベキ點ノ軌跡

二ツノ圓ヲ夫々

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$(x-a')^2+(y-b')^2=r'^2$$

トセヨ。第五十節ニヨリ任意ノ點 (x, y) ヨリノ切線ノ長サハ夫々

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2-r^2}$$

$$\sqrt{(x-a')^2+(y-b')^2-r'^2}$$

コノ二ツハ等長ナル爲ニハ點 (x, y) ハ常ニ次ノ方程式ヲ滿足スベシ。

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=(x-a')^2+(y-b')^2-r'^2$$

簡單ニシテ

$$2(a-a')x+2(b-b')y+a^2-a'^2+b^2-b'^2+r'^2-r^2=0$$

ヨツテ二ツノ圓ニ等長ノ切線ヲ下ス點ノ軌跡ハ直線ナリ。

定義　上ノ直線ヲ二ツノ圓ノ根軸トイフ。二ツノ圓ガ相交ル時ハ根軸ハ共通弦ナル事前節ヨリ直チニ知ラルベシ。

系 i　根軸ハ二ツノ圓ノ中心ヲ結ブ直線ニ垂直ナリ。

系 ii　三ツノ圓ニ就キ二ツ宛トル時生ズル三ツノ根軸ハ一點ニ會ス。

何トナラバ三ツノ圓ヲ夫々

$$s_1=0 \quad s_2=0 \quad s_3=0$$

トセバ三ツノ根軸ノ方程式ハ夫々

$$s_1-s_2=0 \quad s_2-s_3=0 \quad s_3-s_1=0$$

ナリ。而シテ之等ハ第三十二節ニヨリ同一ノ點ニテ會スルコトヲ知ル。

定義　三ツノ圓ニ關スル三ツノ根軸ノ交點ヲ夫等ノ圓ノ根心トイフ。

注意　三ツノ圓ノ中心ガ一直線上ニアラバ,三ツノ根軸ハ互ニ平行ナリ。從ツテ根心ヲ得ズ。然レドモ解析幾何學ニテハ平行線ガ無限遠點ニテ會スト考フルガ故ニ此場合ニモ根心ガ無限遠點ナリト解ス。

例 1.　三ツノ圓 $x^2+y^2+x+2y+3=0$, $x^2+y^2+2x+4y+5=0$ 及ビ $x^2+y^2-7x-8y-9=0$ ノ根心ヲ求メヨ。

解　第一,第二ノ圓ニ關スル根軸ノ方程式ハ

$$x+2y+2=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

第二,第三ノ圓ニ關スル根軸ノ方程式ハ

$$9x+12y+14=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

然ルニ三ツノ圓ノ根心ハ(1)及ビ(2)ノ交點ナリ,故ニ之ノ二ツヲ解キテ

$$x=-\frac{2}{3},\quad y=-\frac{2}{3}$$

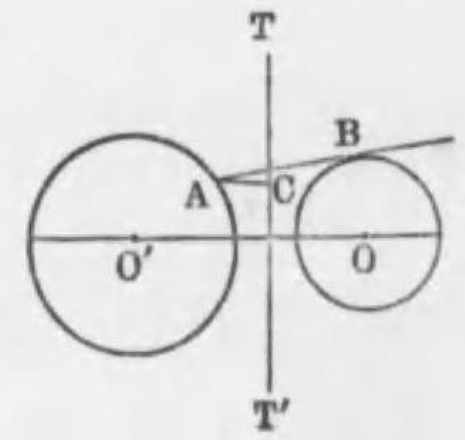
即チ點$\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$ナリ。

例2. 二ツノ圓アリ,一ツノ圓周上ノ點ヨリ他ノ圓ニ引ケル切線ノ上ノ正方形ハ共點ヨリ根軸ニ至ル距離ト二ツノ中心間ノ距離トノナス矩形ノ二倍ニ等シキコトヲ證明セヨ。

解 O, O′ヲ二ツノ圓トシ一ツノ圓周上ノ點ヲ $A(x', y')$ 共點ヨリ他ノ圓ニ至ル切線ヲ AB トス。

今中心 O, O′ ノ座標ヲ夫々 (a, b), (a', b') トシ,二ツノ圓ノ方程式ヲ夫々

第七十二圖



$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$(x-a')^2+(y-b')^2=r'^2$$

トスレバ根軸ノ方程式ハ

$$2(a'-a)x+2(b'-b)y$$
$$+a^2-a'^2+b^2-b'^2-r^2+r'^2=0,$$

又切線 AB ノ長サハ第五十節ニヨリ

$$AB^2=(x'-a)^2+(y'-b)^2-r^2, \cdots\cdots\cdots (1)$$

ニシテ中心間ノ距離ハ

$$OO'=\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2}, \cdots\cdots\cdots (2)$$

又垂線 AC ノ長サハ

$$AC=\frac{2(a'-a)x'+2(b'-b)y'+a^2-a'^2+b^2-b'^2-r^2+r'^2}{2\sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2}}$$

$$\therefore\quad AC.OO'=\frac{2(a'-a)x'+2(b'-b)y'+a^2-a'^2+b^2-b'^2-r^2+r'^2}{2} \cdots (3)$$

然ルニ A 點ハ圓 O′ ノ上ニアルガ故ニ

$$(x'-a')^2+(y'-b')^2=r'^2 \cdots\cdots\cdots (4)$$

(4) ヲ (3) ニ代入スルト

$$AC.OO'=\frac{(x'-a)^2+(y'-b)^2-r^2}{2} \cdots\cdots\cdots (5)$$

(5) ト (1) トヨリ

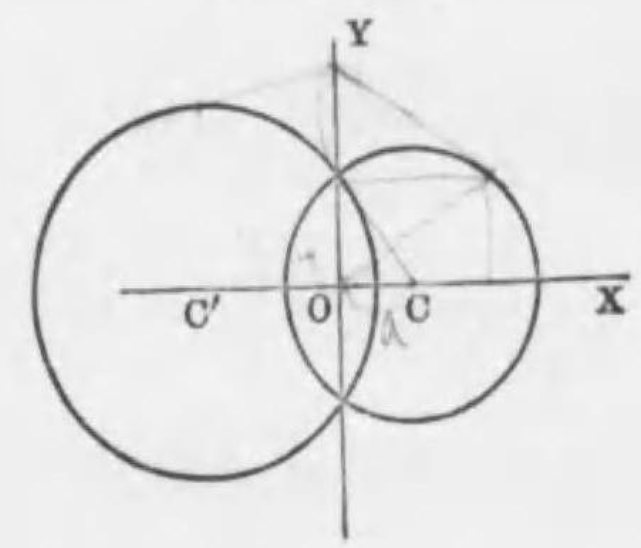
$$2AC.OO'=AB^2$$

59. 定義　同一ノ根軸ヲ有スル圓ノ群ヲ共軸圓トイフ。

共軸圓ノ方程式ヲ求メン。根軸ハ圓ノ中心ヲ結ブ直線ニ垂直ナルガ故ニ共軸圓ノ中心ハ凡テ同一ノ直線上ニアルベシ。ヨツテ之ヲ x 軸ニトリ,根軸ヲ y 軸ニトラバ簡單ニ求ムルコトヲ得ベシ。

今共軸圓ニ屬スル任意ノ二ツノ圓ヲトリ,其中心ヲ夫々 $(a, 0)$, $(a', 0)$ トスレバ之等ノ圓ノ方程式ハ

第七十三圖



$$(x-a)^2+y^2=r^2 \cdots\cdots (1)$$

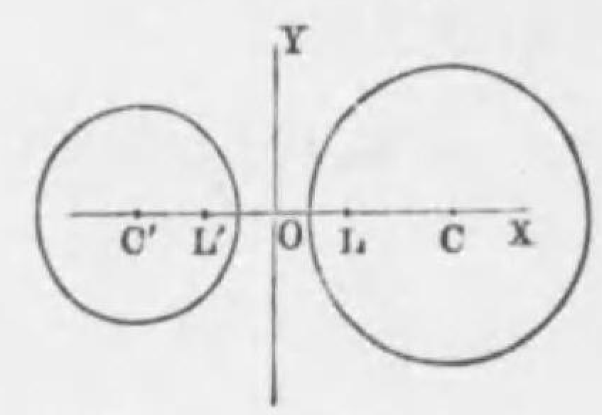
$$(x-a')^2+y^2=r'^2 \cdots\cdots (2)$$

然ルニ y 軸上ノ任意ノ點 $(0, y)$ ヨリ之等ノ圓ニ引ケル切線ノ長サノ平方ハ夫々

$$a^2+y^2-r^2,$$

$$a'^2+y^2-r'^2,$$

第七十四圖



假定ニヨリ切線ノ長サガ等シキガ故ニ

$$a^2+y^2-r^2=a'^2+y^2-r'^2$$

故ニ

$$a^2-r^2=a'^2-r'^2$$

ソコデ之等ヲ h トスレバ h ハ共軸圓ニ屬スル凡テノ圓ニ共通ナル値ナリ。

故ニ (1), (2) ノ如キ圓ハ凡テ

$$x^2-2kx+y^2+h=0 \cdots\cdots\cdots (3)$$

ノ形＝包含セラル。但シ k ハ共軸圓ノ各圓＝從ツテ異ナル値ヲトルモノトス。

系 i　(3)＝於テ $x=0$ ト置ケバ $y^2+h=0$ トナル。故＝ $h<0$ ナル時ハ($h<0$ ナリトハ $a^2-r^2<0$, 卽チ半徑ハ中心ノ x 座標ノ絕對値ヨリモ大ナルコトナリ)。y ノ二ツノ値ハ共＝實數ナリ。從ツテ共軸圓ハ凡テ二ツノ點＝於テ根軸ト交ルベシ。(第七十三圖), $h>0$ ナル時ハ y ノ二ツノ値ハ共＝虛數ナリ。從ツテ共軸圓ハ凡テ根軸＝交ラズ。(第七十四圖)。

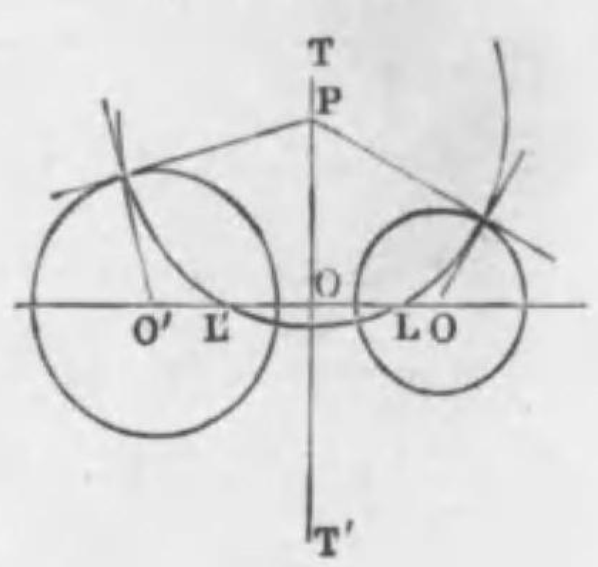
系 ii　(3)ハ又

$$(x-k)^2+y^2=k^2-h \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

ト書キ得ルヲ以テ $h<0$ ナラバ k^2-h ハ必ズ正ナルモ, $h>0$ ナラバ $k^2-h=0$ ナルガ如キ k ＝對シテハ共圓ノ半徑ハ零トナル。換言スレバ中心ヲ $(\sqrt{h}, 0)$, $(-\sqrt{h}, 0)$ トスル二ツノ圓ハ共＝點圓ナリ。(第七十四圖ノ L 及ビ L′)之ヲ共軸圓ノ限點トイフ。限點ハ根軸ヨリ等距離＝アル點ナリ。

60. 根軸上ノ任意ノ點 P ヨリ之等ノ凡テノ圓＝切線ヲ引ク時ハ, 之等ノ切線ハ等長ナルガ故＝切點ノ軌跡ハ圓ナリ。

第七十五圖



次＝軌跡ノ圓ノ半徑ハ共軸圓ヘノ切線ナルガ故＝此圓ハ共軸圓ト直交ス。

今其方程式ヲ求メン＝P點ノ座標ヲ $(0, y')$ トスレバPヨリ共軸圓

$$(x-k)^2+y^2=k^2-h$$

＝引ケル切線ノ長サハ

$$k^2+y'^2-(k^2-h)=y'^2+h$$

故＝求ムル圓ノ方程式ハ

$$x^2+(y-y')^2=y'^2+h$$

卽チ

$$x^2+y^2-2y'y=h,$$

ナリ。

($\pm\sqrt{h}$, 0)

コノ方程式＝限點 L, L′ ノ座標ヲ代入スレバ滿足ス。故＝共軸圓ヲ直角＝截ルガ如キ圓＝常＝二ツノ限點ヲ過ル。

61. 二ツノ圓ノ共通ノ切線

二ツノ圓ノ方程式ヲ夫々

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(x-a')^2+(y-b')^2=r'^2 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

トセヨ, (1)ノ圓ノ上ノ點 (x', y') ＝於ケル切線ノ方程式ハ

$$(x-a)(x'-a)+(y-b)(y'-b)=r^2,$$

ナリ。今圓ノ中心ト切點トヲ結ブ半徑ヲ r トシ、x 軸トナス角ヲ θ トスレバ

$$\frac{x'-a}{r}=\cos\theta, \quad \frac{y'-b}{r}=\sin\theta$$

∴ $x'-a=r\cos\theta$

ナルガ故＝切線ノ方程式ハ

$$(x-a)\cos\theta+(y-b)\sin\theta=r \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

トナル。

• 同様＝シテ(2)ヘノ切線ハ

$$(x-a')\cos\theta'+(y-b')\sin\theta'=r' \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

(3)ト(4)トハ同一ナル直線ヲ表ハス爲＝ハ x ト y トノ係數ヲ比較シテ

$$\tan\theta=\tan\theta'$$

故＝ $\theta=\theta'$ 或ハ $\theta=180^\circ+\theta'$

尙此外ニ常數項ガ相等シキコトヲ要ス。

i　$\theta=\theta'$ ナル時

コノ場合ニハ

$$a\cos\theta+b\sin\theta+r=a'\cos\theta+b'\sin\theta+r'$$

整頓スレバ

$$(a-a')\cos\theta+(b-b')\sin\theta+r-r'=0 \quad\cdots\cdots(5)$$

ii　$\theta=180^\circ+\theta'$ ナル時

コノ場合ニハ

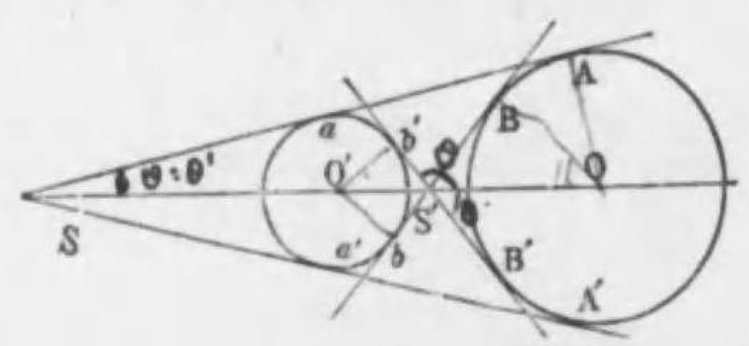
$$a\cos\theta+b\sin\theta+r=a'\cos\theta+b'\sin\theta-r'$$

整頓スレバ

$$(a-a')\cos\theta+(b-b')\sin\theta+r+r'=0 \quad\cdots\cdots(6)$$

(5)及ビ(6)ノ二ツハ θ ヲ定ムル方程式ニシテ各 θ ノ二ツノ値ヲ與フ。詳言スレバ(5)ノ二ツノ根ハ共通外切線 Aa, $A'a'$ ニ對應シ,(6)ノ二ツノ根ハ共通內切線 Bb, $B'b'$ ニ對應ス。

第七十六圖



例　二ツノ圓 $x^2+y^2+22x-4y-100=0$ 及ビ $x^2+y^2-22x+4y+100=0$ ノ共通切線ノ方程式ヲ求メヨ。

解　與ヘラレタル二ツノ圓ノ方程式ヲ書キ直セバ

$$(x+11)^2+(y-2)^2=15^2 \quad\cdots\cdots(7)$$

$$(x-11)^2+(y+2)^2=5^2, \quad\cdots\cdots(8)$$

故ニ(5)ニ相當スルモノハ

$$-22\cos\theta+4\sin\theta+10=0$$

之ヲ解キテ

$$\left.\begin{array}{l}\sin\theta=-\dfrac{48}{50}\\ \cos\theta=\ \ \dfrac{14}{50}\end{array}\right\} \text{或ハ} \left.\begin{array}{l}\sin\theta=\dfrac{4}{5}\\ \cos\theta=\dfrac{3}{5}\end{array}\right\}$$

之等ヲ(7)ニ代入スレバ((8)ニ代入スルモ同ジ結果ヲ得)

$$\frac{14}{50}(x+11)-\frac{48}{50}(y-2)=15$$

卽チ

$$7x-24y=250, \quad\cdots\cdots(9)$$

及ビ

$$\frac{3}{5}(x+11)+\frac{4}{5}(y-2)=15$$

卽チ

$$3x+4y=50, \quad\cdots\cdots(10)$$

次ニ(6)ニ相當スルモノハ

$$-22\cos\theta+4\sin\theta+20=0$$

之ヲ解キテ

$$\left.\begin{array}{l}\sin\theta=-\dfrac{3}{5}\\ \cos\theta=\ \ \dfrac{4}{5}\end{array}\right\} \text{或ハ} \left.\begin{array}{l}\sin\theta=\dfrac{7}{25}\\ \cos\theta=\dfrac{24}{25}\end{array}\right\}$$

之等ヲ(7)或ハ(8)ニ代入スレバ

$$\frac{4}{5}(x+11)-\frac{3}{5}(y-2)=15$$

卽チ

$$4x-3y=25 \quad\cdots\cdots(11)$$

及ビ

$$\frac{24}{25}(x+11)+\frac{7}{25}(y-2)=15$$

卽チ

$$24x+7y=125 \quad\cdots\cdots(12)$$

(9), (10) (11), 及ビ (12) ニテ示スモノハ求ムル四ツノ切線ノ方程

式ニシテ前ノ二ツハ共通外切線,後ノ二ツハ共通内切線ナリ。

注意　本題ハ亦次ノ如クシテ解クコトヲ得。

共通外切線ハSヲ過リ,共通内切線ハS′ヲ過ル。而シテ,二ツノ圓ノ半徑ヲ夫々r, r'トスレバ

$$\frac{O'S}{OS}=\frac{r'}{r}\quad \frac{O'S'}{OS'}=\frac{r'}{r}$$

ニシテ且ツ中心O又ハO′ヨリ切線ヘノ距離ハr又ハr'ナリ。

コノ事實ニ基ヅク解法ヲ次ニ述ベン。

二ツノ圓ノ中心ハ(−11, 2) (11, −2)ニシテ其半徑ハ夫々15, 5ナリ。

而シテS′ハ線分OO′ヲ半徑ノ比ニ内分セル點ナルガ故ニ其座標ハ$\left(\frac{11}{2}, -1\right)$ナリ。

サテ切線Bb, $B'b'$ハ共ニS′ヲ過ルガ故ニ其方程式ハ

$$y+1=m\left(x-\frac{11}{2}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

而シテ中心(11, −2)ヨリノ距離ガ±5ナリ。故ニ

$$\frac{m\left(11-\frac{11}{2}\right)-(-2+1)}{\sqrt{1+m^2}}=\pm 5,$$

コレヨリ

$$m=\frac{4}{3},\ \text{又ハ}\ -\frac{24}{7} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ヨツテS′ヲ過ル切線ノ方程式ハ(1)ト(2)トヨリ

$$4x-3y=25$$

或ハ

$$24x+7y=125,$$

次ニSハ線分OO′ヲ半徑ノ比ニ外分セル點ナルガ故ニ其座標ハ(22, −4)ナリ。

サテ切線Aa, Aa'ハ共ニSヲ過ルガ故ニ其方程式ハ

$$y+4=m(x-22) \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

而シテ中心(11, −2)ヨリノ距離ハ±5ナリ故ニ

$$\frac{m(11-22)-(-2+4)}{\sqrt{1+m^2}}=\pm 5,$$

之ヲ解キテ

$$m=\frac{7}{24}\ \text{或ハ}\ -\frac{3}{4} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

ヨツテSヲ過ル切線ノ方程式ハ(3)ト(4)トヨリ

$$7x-24y=250$$

或ハ

$$3x+4y=50,$$

ナリ。

62. 定義　二ツノ圓ノ共通外切線ノ交點Sヲ相似ノ外心トイヒ,共通内切線ノ交點S′ヲ相似ノ内心トイフ。而シテ此二ツヲ總稱シテ相似ノ中心トイフ。

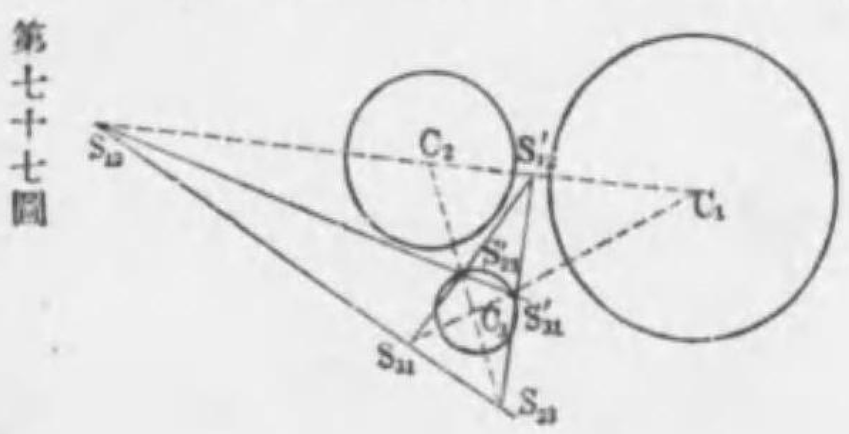
定理　三ツノ圓ノ六ツノ相似ノ中心ハ三ツ宛一直線上ニアリ。

今三ツノ圓ヲC_1, C_2, C_3トシ其方程式ヲ夫々

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$$
$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$$
$$(x-a_3)^2+(y-b_3)^2=r_3^2$$

トス。今C_1, C_2; C_2, C_3; C_3, C_1;ノ相似ノ外心及ビ内心ヲ夫々S_{12}, S'_{12}; S_{23}, S'_{23}; S_{31}, S'_{31}トスレバ之等ハ中心間ノ線分ヲ半徑ノ比ニ外分及ビ内分スルコトニヨリテ得ラルルガ故ニ夫等ノ座標ハ

第七十七圖



$$S_{12}:\left(\frac{r_1a_2-r_2a_1}{r_1-r_2},\ \frac{r_1b_2-r_2b_1}{r_1-r_2}\right)\quad S'_{12}:\left(\frac{r_1a_2+r_2a_1}{r_1+r_2},\ \frac{r_1b_2+r_2b_1}{r_1+r_2}\right)$$

$$S_{23}:\left(\frac{r_2a_3-r_3a_2}{r_2-r_3},\ \frac{r_2b_3-r_3b_2}{r_2-r_3}\right)\quad S'_{23}:\left(\frac{r_2a_3+r_3a_2}{r_2+r_3},\ \frac{r_2b_3+r_3b_2}{r_2+r_3}\right)$$

$$S_{31}:\left(\frac{r_3a_1-r_1a_3}{r_3-r_1},\ \frac{r_3b_1-r_1b_3}{r_3-r_1}\right)\quad S'_{31}:\left(\frac{r_3a_1+r_1a_3}{r_3+r_1},\ \frac{r_3b_1+r_1b_3}{r_3+r_1}\right)$$

サテ二ツノ圓 C_1, C_2 ノ相似ノ外心 S_{12} ト C_1, C_3 ノ相似ノ外心 S_{31} トヲ結ブ直線ノ方程式ハ

第二十一節ニヨリテ

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \dfrac{r_1a_2-r_2a_1}{r_1-r_2} & \dfrac{r_1b_2-r_2b_1}{r_1-r_2} & 1 \\ \dfrac{r_3a_1-r_1a_3}{r_3-r_1} & \dfrac{r_3b_1-r_1b_3}{r_3-r_1} & 1 \end{vmatrix}=0$$

卽チ

$$\begin{aligned}&\{r_1(b_2-b_3)+r_2(b_3-b_1)+r_3(b_1-b_2)\}x\\&-\{r_1(a_2-a_3)+r_2(a_3-a_1)+r_3(a_1-a_2)\}y\\&+r_1(b_2a_3-b_3a_2)+r_2(b_3a_1-b_1a_3)+r_3(b_1a_2-b_2a_1)=0\end{aligned}$$

ナリ。而シテ此方程式ハ C_2 ト C_3 トノ相似ノ外心 S_{23} ノ座標ニヨツテ滿足セラル。

故ニ三ツノ外心 S_{12}, S_{23}, S_{31} ハ一直線ニアリ。

同樣ニシテ S_{12}, S'_{23}, S'_{31}; S_{23}, S'_{31}, S'_{12}; 及ビ S_{31}, S'_{23}, S'_{12} ハ何レモ三ツ宛一直線ニアルベシ。

定義 之等ノ直線ヲ三ツノ圓ノ相似ノ軸トイフ。故ニ三ツノ圓ニハ四ツノ相似ノ軸アリ。

第五章

問　　題

1. 次ノ二ツノ圓ハ互ニ直交スルコトヲ證セヨ。

$$x^2+y^2-2ax+c=0$$
$$x^2+y^2+2by-c=0,$$

2. 原點ヲ通リ且ツ二ツノ圓

$$x^2+y^2-6x+8=0$$
$$x^2+y^2-2x-2y=7$$

ト直交スル圓ノ方程式ヲ求メヨ。

3. 二ツノ圓

$$x^2+y^2-2x+5y=8$$
$$x^2+y^2+4x-2y=3$$

ノ根軸ノ方程式ヲ求メヨ。

4. 二ツノ圓

$$x^2+y^2=4$$
$$x^2+y^2+2x+4y=6$$

ノ根軸ヲ共有スル凡テノ圓ノ方程式ハ

$$(a+1)(x^2+y^2)+2a(x+2y)=6a+4$$

ナルコトヲ證セヨ。

5. 二ツノ圓

$$x^2+y^2-2x-6y+9=0$$
$$x^2+y^2+6x-2y+1=0$$

ノ共通切線ノ方程式ヲ求メヨ。

6. 二ツノ圓

$$x^2+y^2-2ax-4ay-4a^2=0$$
$$x^2+y^2-3ax+4ay=0$$

ガ相交ルコトヲ示シ，然ル後二ツノ共通外切線ノ方程式ヲ求メヨ。

7. 三ツノ圓

$$x^2+y^2-2x+3y-7=0 \cdots\cdots (1)$$

$$x^2+y^2+5x-5y+9=0 \cdots\cdots (2)$$

ノ $$x^2+y^2+7x-9y+29=0 \cdots\cdots (3)$$

ヲ直角ニ截ル圓ノ方程式ヲ求メヨ。

解 (1) ト (2) トノ根軸ノ方程式ハ

$$7x-8y+16=0 \cdots\cdots (4)$$

又 (1) ト (3) トノ根軸ノ方程式ハ

$$9x-12y+36=0$$

ヨツテ三ツノ圓ノ根心ハ $(8, 9)$ ナリ。サテ三ツノ圓ヲ直角ニ截ル圓ハ夫等ノ根心ヲ中心トシ，其點ヨリ各圓ニ至ル切線ノ長サヲ半徑トスル圓ナリ。

然ルニ根心ヨリ各圓ニ至ル切線ノ長サハ $\sqrt{149}$ ナリ。故ニ求ムル圓ノ方程式ハ

$$(x-8)^2+(y-9)^2=149$$

卽チ

$$x^2+y^2-16x-18y=4$$

8. 三ツノ圓

$$x^2+y^2+2x+17y+4=0$$

$$x^2+y^2-x+22y+3=0$$

$$x^2+y^2+7x+6y+11=0$$

ヲ直角ニ截ル圓ノ方程式ヲ求メヨ。

9. 一定點ヲ過リテ一定圓ト直交スル圓ハ他ノ一定點ヲ過ルコトヲ證セヨ。　(大正五年文檢)

10. 相切スル定圓ト定直線トノ各ニ切シ且ツ互ニ相切スル二ツノ圓ノ切點ノ軌跡ヲ求メヨ。　(大正六年文檢)

11. 或點ノ二ツノ與ヘラレタル圓ニ就キテノ極線ハ相一致スルヤ否ヤヲ吟味セヨ。　(明治四十二年文檢)

解 二ツノ圓ノ中心ヲ結ブ直線ヲ x 軸トシ，其根軸ヲ y 軸トスレバ五十九節ニヨリ二ツノ圓ノ方程式ハ

$$x^2+y^2-2kx+h=0$$

$$x^2+y^2-2k'x+h=0,$$

サテ與ヘラレタル點 (x', y') ノ此等ノ二ツノ圓ニ關スル極線ノ方程式ハ

$$xx'+yy'-k(x+x')+h=0$$

$$xx'+yy'-k'(x+x')+h=0,$$

之等ノ二ツノ直線ハ一致スル爲ニハ

$$k=k' \cdots\cdots (1)$$

ナルカ，或ハ點 (x', y') ハ

$$x'=\pm\sqrt{h}, \quad y'=0, \cdots\cdots (2)$$

ナラザルベカラズ。ヨツテ次ノ結論ヲ得。

i　$k=k'$ ナル場合ハ二ツノ圓ハ全ク一致ス。從ツテ點ノ位置ノ如何ニ關セズ極線ハ同一ナリ。

ii　$h>0$ ナル時，卽チ二ツノ圓ガ相交ラザル時 (五十九節) ハ二ツノ限點 $(\sqrt{h}, 0)$, $(-\sqrt{h}, 0)$ ニ於ケル極線ハ一致シ，$h=0$ ナル時，卽チ二ツノ圓ガ相切スル時 (五十九節系 i) ハ點 $(0,0)$ ニ於ケル極線ノミ一致ス。

12. 共軸圓ノ限點ノ極線ハ共軸圓ニ屬スル凡テノ圓ニ對シテ同一ナリ。

13. 共軸圓ニ屬スル二ツノ圓ノ共通切線ハ二ツノ限點ニ對シテ共ニ直角ヲ張ルコトヲ證セヨ。

解 二ツノ圓ヲ O, O′ トシ，根軸ヲ TT′ トス。共通切線ヲ AA′ トシ根軸トノ交點ヲ C トス。

然ル時ハ C ヲ中心トシ，AA′ ヲ直徑トスル圓ハ必ズ二ツノ限點ヲ過ル 六十節)，從ツテ共通切線ハ限點ニ對シテ直角ヲ張ル。

14. 或點ノ共軸圓ニ屬スル凡テノ圓ニ關シテノ極線ハ常ニ一ツノ定點ヲ過ルコトヲ證セヨ。

15. 二ツノ圓

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$(x-b)^2+(y-a)^2=r^2$$

ノ共通弦ノ長サヲ求メヨ。

16. $(\lambda+1)(x^2+y^2)=ax+\lambda by$ ニ於テλニ種々ノ値ヲ與ヘテ得ル凡テノ圓ハ共軸圓ナリ。

17. 共軸圓ノ各々ニ引ケル平行ナル切線ノ切點ノ軌跡ヲ求メヨ。

18. 二ツノ定點ヲ過ル圓ガ一ツノ定圓ヲ直角ニ截ル時ハ,夫等ノ共通弦ハ常ニ一ツノ定點ヲ過ルコトヲ證セヨ。

19. 一ツノ直線上ノ一點ニ於テ之ニ切スル一群ノ圓アリ,一定點ノ之等ノ圓ニ關スル極線ハ皆アル定點ヲ過ルコトヲ證セヨ。

20. 三ツノ圓

$$x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+C_1=0$$
$$x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+C_2=0$$
$$x^2+y^2-2a_3x-2b_3y+C_3=0$$

ノ各ト直交スル圓ノ方程式ハ

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ c_1 & a_1 & b_1 & 1 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 1 \\ c_3 & a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

ナルコトヲ證セヨ。

第六章

座標ノ變換

63. 解析幾何學ニテ幾何學的圖形ヲ研究スルニ座標ヲ用フルコト已ニ知ル所ナリ。而シテ圖形ガ與ヘラレタル時,座標軸ヲ如何ナル位置ニトルモ差支ヘナク要ハ研究ニ都合良キヤウニ軸ヲ選ブベキ事モ亦已ニ知ル所ナリ。

例ヘバ或座標軸ニ關シテノ直線ノ方程式ヲ$y=mx+b$ナリトセヨ。此場合其直線自身ヲx軸トスレバ其方程式ハ最早$y=mx+b$ニハアラズシテ單ニ$y=0$トナルベク,其直線自身ヲy軸トスレバ其方程式ハ$x=0$トナルベシ。換言スレバ同ジ直線ニテアリナガラ座標軸ノ選ビ方ニヨリ夫レヲ表ハス方程式ニ繁簡ノ別ヲ生ズ。ヨツテ問題ヲ解カンニハ成ルベク簡單ナル方程式ヲ用ヒ,運算ヲ簡ニシ容易ニ目的ヲ達セシムルヤウニ軸ヲ定ムルコトガ得策ナリ。座標ノ變換ハ實ニカカル目的ニ副ハンガ爲ニ外ナラズ。

64. 軸ノ平行移動法

平行移動法トハ軸ノ方向ヲ變ゼズシテ,原點ヲ移スコトヲイフ。

第七十八圖

Ox, Oyヲ舊座標軸, $O'X$, $O'Y$ヲ新座標軸トシ,新原點O'ノ舊座標軸ニ關スル座標ヲa, bトセヨ。

Pヲ任意ノ點トシ舊軸ニ關スル座標ヲ

x, y トシ新軸ニ關スル座標ヲ X, Y トスレバ圖ニヨリ

$$OM=OL+LM=OL+O'N$$

$$MP=MN+NP=LO'+NP$$

然ルニ

$$x=OM \quad y=MP \quad OL=a$$

$$LO'=b \quad X=O'N \quad Y=NP$$

故ニ

$$\left.\begin{array}{l} x=a+X \\ y=b+Y \end{array}\right\}$$

コレ新座標 X, Y ト舊座標 x, y トノ間ノ關係ニシテ,之ヲ變換式トイフ。

例 原點ヲ $(-1, 2)$ 點ニ移ストキハ方程式

$$x^2-y^2+2x+4y-3=0$$

ハ如何ニ變換セラルルカ。

解 X, Y ヲ新座標軸ニ關スル座標トスレバ,公式ニヨリ變換式ハ

$$\left.\begin{array}{l} x=X-1 \\ y=Y+2 \end{array}\right\}$$

ナルガ故ニ與ヘラレタル方程式ニ代入スレバ

$$(X-1)^2-(Y+2)^2+2(X-1)+4(Y+2)-3=0$$

整頓スレバ

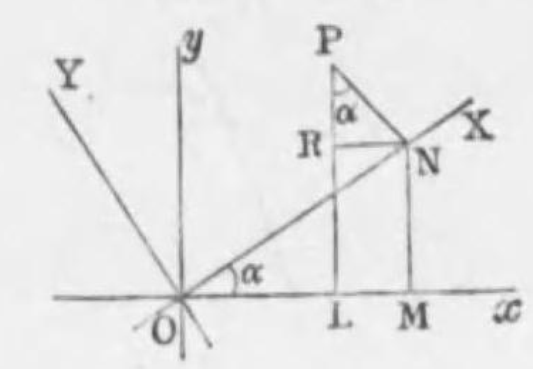
$$X^2-Y^2=0$$

コレ求ムル方程式ナリ。

65. 原點ヲ變ゼズシテ座標軸ヲ一定角ダケ廻轉スル場合,(直交軸)

Ox, Oy ヲ舊座標軸, OX, OY ヲ新座標軸トシ廻轉角ヲ α トス。

第七十九圖



今任意ノ點 P ノ舊軸ニ關スル座標ヲ x, y トシ新軸ニ關スル座標ヲ X, Y トス。

サテ PRL, PN ヲ夫々 Oy, OY ニ平行ニ引キ,次ニ NM ヲ Oy ニ平行ニ NR ヲ Ox ニ平行ニ引ケバ

$$\left.\begin{array}{l} x=OL \\ y=LP \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} X=ON \\ Y=NP \end{array}\right\}$$

ナリ。

然ルニ

$$OL=OM-RN \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$OM=ON\cos\alpha=X\cos\alpha$$

$$RN=NP\sin\alpha=Y\sin\alpha$$

故ニ (1) ハ

$$x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

全ク同様ニシテ

$$y=LP=MN+RP$$

故ニ

$$y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha, \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

(2) 及ビ (3) ハ求ムル變換式ナリ。

例 二ツノ軸ヲ 45° 宛廻轉スル時ハ方程式

$$y^2-x^2=4$$

ハ如何ニ變換セラルルカ。

解 x ノ代リニ $X\cos45^\circ-Y\sin45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$

y ノ代リ ニ $X\sin 45^\circ+Y\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$

ヲ代入スレバ

$$XY=2$$

トナル。コレ求ムル結果ナリ。

66. 前二節ヲ一緒ニシテ考フル。即チ原點ヲ點(a,b)ニ移スト同時ニ座標軸ヲ α ダケ廻轉スレバ其變換式ハ

$$x=a+X\cos\alpha-Y\sin\alpha$$
$$y=b+X\sin\alpha+Y\cos\alpha$$

ナリ。

例 原點ヲ點$(2,3)$ニ移シ,座標軸ヲ 45° 宛廻轉スル時,方程式

$$3x^2+2xy+3y^2-18x-22y+50=0$$

ガ如何ニ變換セラルルカ。

解 公式ニヨリ x, y ノ代リニ夫々

$$2+X\cos 45^\circ-Y\sin 45^\circ=2+\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$$
$$3+X\sin 45^\circ+Y\cos 45^\circ=3+\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$$

ヲ代入スレバ

$$4x^2+2y^2=1$$

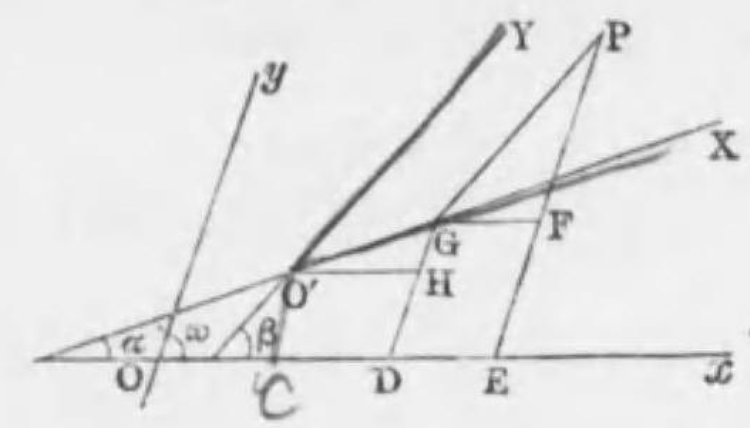
トナル。コレ求ムル結果ナリ。

67. 斜交軸ヨリ他ノ斜交軸ニ變換スルコト。

Ox, Oy ヲ舊座標軸, $O'X$, $O'Y$ ヲ新座標軸トシ, Ox ト $O'X$ トノ爲ス角ヲ α, Oy ト $O'Y$ トノ爲ス角ヲ β トシ,舊座標軸ノ爲ス角ヲ ω トス。

又新原點 O' ノ舊座標軸ニ關スル座標ヲ a, b トセヨ。

第八十圖



今任意ノ點 P ノ舊軸ニ關スル座標ヲ x, y トシ,新軸ニ關スル座標ヲ X, Y トスレバ

$$\left.\begin{array}{l}x=OE\\ y=EP\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{l}X=O'G\\ Y=GP\end{array}\right\}$$

今 O' ヨリ y 軸ニ平行ニ $O'C$ ヲ引キ x 軸トノ交點ヲ C トスレバ

$$OE=OC+O'H+GF \quad\cdots\cdots(1)$$

$\widehat{O'HG}=\pi-\omega$, $\widehat{O'GH}=\omega-\alpha$ ナル故ニ三角形 $O'GH$ ヨリ

$$O'H=O'G\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega},$$

同様ニ三角形 PGF ヨリ

$$GF=GP\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega},$$

ヨツテ(1)ヨリ

$$x=a+X\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}+Y\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega}, \quad\cdots\cdots(2)$$

又

$$EP=CO'+HG+FP \quad\cdots\cdots(3)$$

然ルニ三角形 $O'GH$ 及ビ PGF ヨリ

$$HG=O'G\frac{\sin\alpha}{\sin\omega},\ FP=GP\frac{\sin\beta}{\sin\omega},$$

ヨツテ(3)ヨリ

$$y=b+X\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}+Y\frac{\sin\beta}{\sin\omega} \quad\cdots\cdots(4)$$

(2)及ビ(4)ハ求ムル變換式ナリ。

系 i 若シ原點ヲ變ゼザル時ハ,其變換式ハ

$$x=X\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}+Y\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega}$$
$$y=X\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}+Y\frac{\sin\beta}{\sin\omega}$$

系 ii 舊座標軸ハ直交軸ナル時ハ $\omega=\frac{\pi}{2}$ ナルガ故ニ

$$\sin\omega=1,\qquad \sin(\omega-\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\sin(\omega-\beta)=\cos\beta$$

ナリ。ヨツテ變換式ハ

$$x=a+X\cos\alpha+Y\cos\beta$$
$$y=b+X\sin\alpha+Y\sin\beta$$

コレ卽チ直交軸ヨリ斜交軸ニ移リタル時ノ變換式ナリ。

系 iii　新座標軸ハ直交ナル時ハ $\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$ ナル關係アリ。故ニ

$$x=a+X\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}-Y\frac{\cos(\omega-\alpha)}{\sin\omega},$$
$$y=b+X\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}+Y\frac{\cos\alpha}{\sin\omega}$$

コレ斜交軸ヨリ直交軸ニ移リタル時ノ變換式ナリ。

系 iv　舊座標軸及ビ新座標軸ハ共ニ直交軸ナル時ハ $\omega=\frac{\pi}{2}$ ニシテ且ツ $\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$ ナルガ故ニ

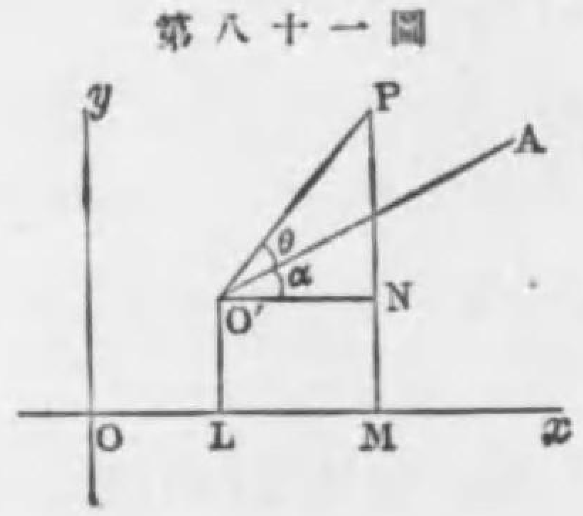
$$x=a+X\cos\alpha-Y\sin\alpha$$
$$y=b+X\sin\alpha+Y\cos\alpha$$

コレ直交軸ヨリ原點ヲ移シ且ツ軸ノ方向ヲ變ジタル他ノ直交軸ニ移ル變換式ニシテ已ニ六十六節ニ於テ述ベシ所ナリ。

68. 直交軸ヨリ極座標ヘノ變換

Ox, Oy ヲ直交軸, O' ヲ極トシ直交軸ニ關スル點 O' ノ座標ヲ a, b トス。

第八十一圖



今 $O'A$ ヲ原線トシ x 軸トノナス角ヲ α トセヨ。而シテ任意ノ點 P ノ直角座標ヲ x, y トシ極座標ヲ r, θ トスレバ

$$x=OM=OL+O'N=a+r\cos(\theta+\alpha)$$

$$y=MP=MN+NP=b+r\sin(\theta+\alpha)$$

系 i　原線ガ x 軸ニ平行ナラバ $\alpha=0$ ナルガ故ニ

$$x=a+r\cos\theta$$
$$y=b+r\sin\theta$$

系 ii　原線ガ x 軸ト平行ニシテ且ツ原點ニ極ヲ有スル時ハ a, b ハ共ニ零ナルガ故ニ

$$x=r\cos\theta$$
$$y=r\sin\theta$$

コレ已ニ第十節ニ於テ述ベタル所ナリ。

69. 方程式ノ次數ハ座標ノ變換ニヨリテ增減セズ

一ツノ座標軸ヲトリ,コレニ關シテ表ハサレタル一ツノ方程式ガ

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_rx^{n-r}y^r+\cdots\cdots\cdots\cdots=0$$

ナリトス。

然ル時任意ニ他ノ新ラシキ座標軸 X, Y ヲ取リ, 之ニ關シテ上ノ方程式ヲ變換センニ,變換式ノ最モ一般ナルモノハ

$$x=aX+bY+c$$
$$y=a'X+b'Y+c'$$

ナルガ故ニ元ノ方程式ニ於ケル各項例ヘバ $a_rx^{n-r}y^r$ ノ如キ項ハ變換ノ結果

$$a_r(aX+bY+c)^{n-r}(a'X+b'Y+c')^r$$

トナルガ其最高次ノモノト雖モ n 次ヲ超ユルコトナシ。從ツテ方程式ノ次數ハ增スコトナシ。

次ニ次數ハ減ズル事モナシ,何トナレバ若シ座標ノ變換ノ爲ニ減ズル事アラバ,之ヲ元ノ座標ニ戻ス時ハ元ノ方程式トナリ,

即チ次數ハ増スコトトナルベシ。然ルニ次數ハ増加セザル事ハ已ニ證明セル所ナレバナリ。

第六章

問　題

1. 軸ノ方向ヲ變ゼズ,原點ヲ(a, b)ニ移セバ次ノ方程式ハ如何ニナルカ。

i　$x+y-a-b=0,$

ii　$x^2-2ax+y^2-2by+a^2+b^2=c^2,$

2. 直交軸ヲ平行ニ移動シテ方程式

$$x^2+y^2+6x-2y=0$$

ノxトyトノ係數ヲ零ナラシムル爲ニハ原點ヲ如何ナル點ニスベキカ。

解 原方程式ヲ書キカヘテ

$$(x+3)+(y-1)^2=10,$$

ヨツテ

$$x=X-3 \qquad y=Y+1$$

ナル變換ヲナセバxトyトノ係數ガ消失シテ

$$X^2+Y^2=10$$

トナルベシ。故ニ原點ヲ$(-3, 1)$點ニ移セバ可ナリ。

3. 直交軸ヲ$45°$ダケ廻轉スルコトニヨリ次ノ方程式ヲ變形セヨ。

i　$x^2+y^2+2xy=1$

ii　$x^4+y^4+6x^2y^2=1.$

4. 直交軸ニ關シテ方程式

$$x^2+y^2=r^2$$

ガ軸ノ廻轉ニヨリテ不變ナルコトヲ示シ,併セテ其ノ幾何學的意味ヲ述ベヨ。

5. 原點ヲ同ジクスル二組ノ直交軸アリ。新座標軸ニ關シ舊座標軸ノy軸ノ方程式ハ$x-y=0$ナル時ハ新舊兩軸ノナス角ハ$45°$ナルコトヲ證セヨ。

6. 直交軸ニ關シテ方程式

$$y^2+4cy\cot\theta-4ax=0$$

アリ。原點トx軸トヲ變ゼズシテ交角θヲナス斜交軸ニ關シテノ方程式ニ直セ。

解　第六十七節系 ii ニ於テ

$$a=b=0,\quad \alpha=0\ .\ \beta=\theta,$$

ト置ケバ變換式ハ

$$x=X+Y\cos\theta$$

$$y=Y\sin\theta$$

之ヲ原式ニ代入スレバ

$$Y^2\sin^2\theta=4aX$$

トナル。

7. 交角ガ60°ナル斜交軸ニ關スル方程式

$$x^2-xy+y^2=0$$

ヲ原點ヲ變ゼズ且ツ軸ノナス角ヲ二等分スル直交軸ニ關スル方程式ニ直セ。

解　第六十七節系 i ニ於テ

$$\omega=60^\circ,\quad \alpha=30^\circ\quad \beta=120^\circ$$

ト置ケバ

$$x=\frac{X\sin30^\circ}{\sin60^\circ}+Y\frac{\sin(-60^\circ)}{\sin60^\circ}$$

$$y=\frac{X\sin30^\circ}{\sin60^\circ}+Y\frac{\sin120^\circ}{\sin60^\circ}$$

即チ

$$x=\frac{X}{\sqrt{3}}-Y$$

$$y=\frac{X}{\sqrt{3}}+Y$$

之ヲ原式ニ代入スレバ

$$X^2+9Y^2=0,$$

トナル。

8. 原點ヲ同ジクスル一般ノ變換式ヲ

$$x=mX+nY$$

$$y=m'X+n'Y$$

トスル時, m, m', n' ノ間ニハ

$$\frac{m^2+m'^2-1}{n^2+n'^2-1}=\frac{mm'}{nn'}$$

ナル關係アルコトヲ證セヨ。

解　第六十七節ニヨリ

$$m=\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}\qquad m'=\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}$$

$$n=\frac{\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega}\qquad n'=\frac{\sin\beta}{\sin\omega},$$

故ニ

$$m=\frac{\sin\omega\cos\alpha-\sin\alpha\cos\omega}{\sin\omega}=\cos\alpha-m'\cos\omega$$

從ツテ

$$m+m'\cos\omega=\cos\alpha$$

又

$$m'\sin\omega=\sin\alpha$$

平方シテ加フレバ

$$m^2+m'^2+2mm'\cos\omega=1,$$

從ツテ

$$m^2+m'^2-1=-2mm'\cos\omega$$

同樣ニ

$$n^2+n'^2-1=-2nn'\cos\omega$$

故ニ

$$\frac{m^2+m'^2-1}{n^2+n'^2-1}=\frac{mm'}{nn'}$$

9. 三角形ノ三ツノ頂點ノ座標ガ與ヘラレタル時, 二ツノ軸ノナス角ガθナルモノニ關スル時ノ面積ハ直交軸ニ關スル同ジ値ノ座標ノ三角形ノ面積ニ$\sin\theta$ヲ掛ケタルモノニ等シキコトヲ證セヨ。但シx軸及ビ原點ヲ變ゼザルモノトス。

解　直交軸ニ關スル三ツノ頂點ヲ夫々(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)トスレバ其面積ハ

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

ノ絕對値ニ等シ。

又本章問題6ニヨリ x_1, y_1 ニハ夫々 $x_1+y_1\cos\theta,\ y_1\sin\theta$ ヲ代入シ, x_2, y_2 ニハ夫々 $x_2+y_2\cos\theta,\ y_2\sin\theta$ ヲ代入シ, x_3, y_3 ニハ夫々 $x_3+y_3\cos\theta,\ y_3\sin\theta$ ヲ代入スレバ斜交軸ニ關スル三角形ノ面積ヲ得ベシ。卽チ

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1+y_1\cos\theta & y_1\sin\theta & 1 \\ x_2+y_2\cos\theta & y_2\sin\theta & 1 \\ x_3+y_3\cos\theta & y_3\sin\theta & 1 \end{vmatrix}$$

ノ絕對値ニ等シ。之ヲ少シク書キカヘルト

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1\sin\theta & 1 \\ x_2 & y_2\sin\theta & 1 \\ x_3 & y_3\sin\theta & 1 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1\cos\theta & y_1\sin\theta & 1 \\ y_2\cos\theta & y_2\sin\theta & 1 \\ y_3\cos\theta & y_3\sin\theta & 1 \end{vmatrix}$$

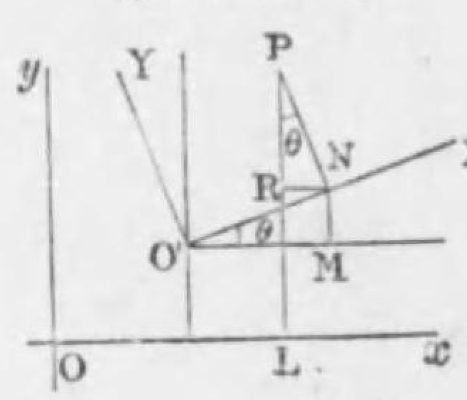
$$=\frac{1}{2}\sin\theta\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

トナル。コレ題言ノ示ス所ナリ。

10. 直交軸ニ關シ $x+y+c=0$ ニテ表ハサレタル直線アリ。之ヲ他ノ直交軸ニ關シ $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ ナル方程式ニヨリテ表ハサントス。後ノ直交軸ヲ如何ニトルベキカ, 玆ニ c, α, β, γ ハ孰レモ與ヘラレタル常數ナリ。 (大正二年文檢)

解 Ox, Oy ヲ舊座標軸 $O'X, O'Y$ ヲ新座標軸トシ, Ox ト $O'X$ トノナス角ヲ θ トシ O' 點ガ舊座標軸ニ關シテ點 x', y' トスレバ P 點ノ舊座標 x, y ト新座標 X, Y トノ間ニハ

第八十二圖



$$\left.\begin{aligned} x&=x'+X\cos\theta-Y\sin\theta \\ y&=y'+X\sin\theta+Y\cos\theta \end{aligned}\right\}$$

之ヲ與ヘラレタル方程式 $x+y+c=0$ ニ代入スレバ

$$(\cos\theta+\sin\theta)X+(\cos\theta-\sin\theta)Y+(x'+y'+c)=0$$

トナル。而シテコレハ

$$\alpha x+\beta y+\gamma=0$$

トハ一致スベキ筈ナリ。故ニ

$$\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\alpha}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\beta}=\frac{x'+y'+c}{\gamma}=k \cdots\cdots(1)$$

コレヨリ

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta+\sin\theta&=k\alpha \\ \cos\theta-\sin\theta&=k\beta \\ x'+y'+c&=k\gamma \end{aligned}\right\}$$

從ツテ

$$\cos\theta=\frac{k(\alpha+\beta)}{2} \cdots\cdots(2)$$

$$\sin\theta=\frac{k(\alpha-\beta)}{2} \cdots\cdots(3)$$

故ニ

$$\frac{k^2(\alpha+\beta)^2}{4}+\frac{k^2(\alpha-\beta)^2}{4}=1.$$

ヨツテ

$$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \cdots\cdots(4)$$

又 (2), (3) ヨリ

$$\tan\theta=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$$

コレヨリ求ムル角 θ ヲ得。尙 O' ハ (1) ヨリ直線

$$x+y+c-k\gamma=0$$

ノ上ニアルコトヲ知ル。

11. 一ツノ直交軸ヨリ, 原點ヲ共有スル他ノ直交軸ニ移ル公式ヲ

$$y=a_1X+b_1Y$$
$$y=a_2X+b_2Y$$

トスレバ

$$a_1^2+a_2^2=1,\quad b_1^2+b_2^2=1\quad a_1b_1+a_2b_2=0$$

ナルコトヲ示シ, 次ニ夫等ノ關係ヨリ

$$a_1^2+b_1^2=1\quad a_2^2+b_2^2=1\quad a_1a_2+b_1b_2=0$$

ナルコトヲ證セヨ。

解 $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2=(a_1b_2-a_2b_1)^2=1,$

今 $a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\Delta$ ト置ケバ

$$\Delta^2=1,$$

サテ

$$\left.\begin{array}{r} a_1^2+a_2^2=1 \\ a_1b_1+a_2b_2=0 \end{array}\right\} \text{及ビ} \left.\begin{array}{r} a_1b_1+a_2b_2=0 \\ b_1^2+b_2^2=1 \end{array}\right\}$$

ヨリ

$$\left.\begin{array}{l} a_1=\dfrac{b_2}{\Delta} \\ b_1=\dfrac{-a_2}{\Delta} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \qquad \left.\begin{array}{l} a_2=\dfrac{-b_1}{\Delta} \\ b_2=\dfrac{a_1}{\Delta} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1) ヨリ

$$a_1^2+b_1^2=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{\Delta}=\frac{\Delta}{\Delta}=1$$

故ニ

$$a_1^2+b_1^2=1, \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

又 (2) ヨリ

$$a_2^2+b_2^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

次ニ (3) 及ビ (4) ヨリ

$$a_1a_2+b_1b_2=0$$

ヲ得。

12. 極ト原線トヲ夫々原點トx軸トスル時,極方程式

$$r=a\sin\theta$$

ヲ直交軸ニ關スル方程式ニ直セ。

13. 前題ニ於テ $r=a+b\sec^2\theta$ ヲ直交軸ニ關スル方程式ニ直セ。

14. 二ツノ軸ノ交角 ω ナル斜交軸ヨリ原點ヲ極トシx軸ヲ原線トスル極座軸ニ變ズルニハ次ノ變換式ニヨルベキコトヲ證セヨ。

$$x=r\frac{\sin(\omega-\theta)}{\sin\omega} \qquad y=r\frac{\sin\theta}{\sin\omega}$$

第七章

拋物線

70. 定義　一ツノ與ヘラレタル點ヲFトシ,Fヲ過ラザル一ツノ與ヘラレタル直線アル時,一點PヨリF及ビ其直線ニ至ル距離ノ比ガ與ヘラレタル正ノ常數 e ニ等シキ時,P點ノ軌跡ヲ二次曲線又ハ圓錐曲線トイフ Conic Section

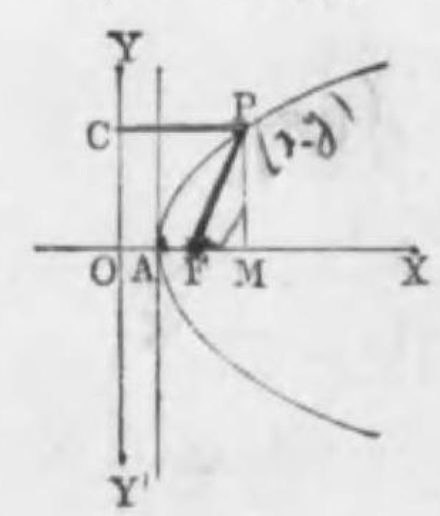
F點ヲ焦點トイヒ, e ヲ離心率トイフ。又與ヘラレタル直線ヲ準線トイヒ,焦點ヲ過リ之ニ垂直ナル直線ヲ二次曲線ノ軸トイフ。

71. 拋物線

拋物線トハ離心率 e ガ1ナル二次曲線ヲイフ。

72. 拋物線ノ方程式

第八十三圖



Fヲ焦點, OXヲ拋物線ノ軸, YY'ヲ準線トシ, OX, YY'ヲ座標軸ニトレ。

拋物線ノ上ノ任意ノ點Pノ座標ヲ x, y トシ定長OFヲ $2p$ トスレバ定義ニヨリPヨリ準線ニ至ル距離PCハPFニ等シ。

今PヨリOXニ垂線PMヲ下ス時ハ

$$FM^2+MP^2=FP^2=PC^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

然ルニ

$$FM=x-2p,\qquad MP=y$$

ナルガ故ニ (1) ニ代入スレバ

$$(x-2p)^2+y^2=x^2$$

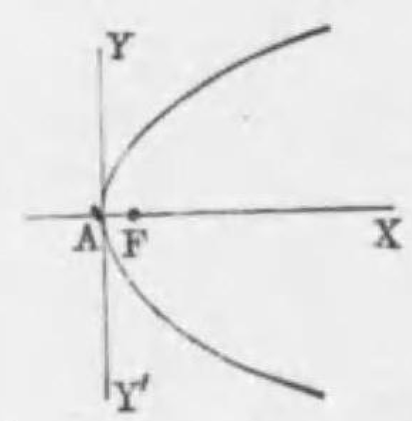
即チ

$$y^2=4p(x-p)$$

コレ求ムル抛物線ノ方程式ナリ。

系 上ノ方程式ニ於テ $y=0$ ト置カバ $x=p$ トナル。即チ抛物線ガ x 軸ト交ル點 A ガ線分 OF ノ中點ナリ。故ニ若シY軸ヲ p ダケ右方ニ移サバ方程式ハ更ニ簡單トナル。何トナレバ其變換式ハ

第八十四圖



$$x=X+p$$
$$y=Y$$

ナルガ故ニ上ノ方程式ニ代入スレバ

$$Y^2=4pX$$

トナル。

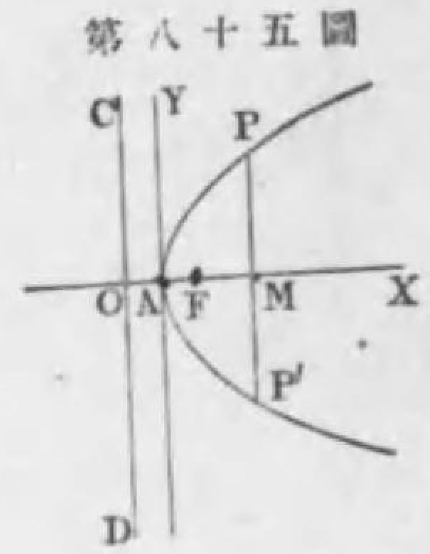
抛物線ガ其軸ト交ル點 A ヲ抛物線ノ頂點トイフ。

注意 準線ノ方程式ハ $x=-p$ ナリ。

73. 抛物線ノ作圖法

七十一節ノ定義ヨリ定規トこんぱすトヲ用ヒテ抛物線ヲ畫クコトヲ得。其方法次ノ如シ。

第八十五圖



F ヲ焦點トシ CD ヲ準線トセバ之ニ垂直ナル直線 OF ハ其軸ナリ。

先ヅ線分 OF ノ中點 A ガ抛物線ノ頂點ナリ。

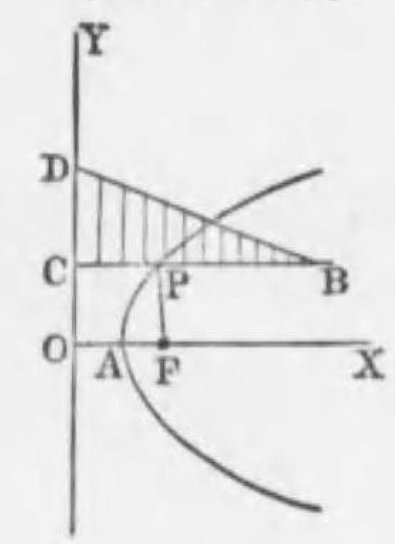
次ニ軸 AX 上ニ任意ノ點 M ヲトリ，垂線 P'MP ヲ引キ F ヲ

中心トシ OM ノ長サヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ，PMP' ト二ツノ點 P, P' ニテ交ラシムレバ，P 及ビ P' ハ共ニ抛物線上ノ點ナリ。

何トナレバ P, P' ヨリ準線 CD ニ至ル距離ハ F ニ至ル距離ニ等シキガ故ナリ。次ニ M ヲ AX 上ニ於テ種々ニ位置ヲ變ズレバ其都度抛物線上ノ二ツノ點ヲ得ベシ。

抛物線ハ又次ノ如クシテ作圖スルコトヲ得。

第八十六圖



三角定規 BCD ヲ圖ノ如ク準線 OY 上ニ沿ウテ滑ル如ク裝置シ，一邊 BC ニ等シキ長サヲ有スル絲ノ一端ヲ焦點 F ニ，他ノ一端ヲ定規ノ頂點 B ニ結ビ付ケ，鉛筆ノ端ニテ絲ヲ BF ニ對シテ張リナガラ定規ヲ上下ニ滑ラス時ハ鉛筆ノ端 P ハ抛物線ノ一部分ヲ畫ク。

其理如何トナレバ

$$FP+PB=\text{絲ノ長サ}=BC$$

兩邊ヨリ PB ヲ減ズレバ

$$FP=PC$$

コレ抛物線ノ定義ニ一致ス。

例 直交軸ニ關シ，原點ヲ焦點トシ，直線 $x+y=1$ ヲ準線トスル抛物線ノ方程式ヲ求ム。（大正十三年文檢）

解 原點ヲFトシ抛物線上ノ任意ノ點Pノ座標ヲ x, y トスレバ

$$PF^2=x^2+y^2$$

又 P ヨリ直線 $x+y=1$ ニ至ル距離ヲ PC トスレバ

$$PC^2=\left(\frac{x+y-1}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

故ニ PF=PC ノ條件式ハ

$$x^2+y^2=\frac{(x+y-1)^2}{2}$$

卽チ

$$x^2+y^2-2xy+2x+2y=1,$$

74. 拋物線($y^2=4px$)ノ形狀

i　方程式ニ $x=0$ ト置カバ $y=\pm 0$ トナルガ故ニ y 軸ハ頂點ニ於ケル切線ナリ。

ii　y ニ就キテ解カバ

$$y=\pm 2\sqrt{px}.$$

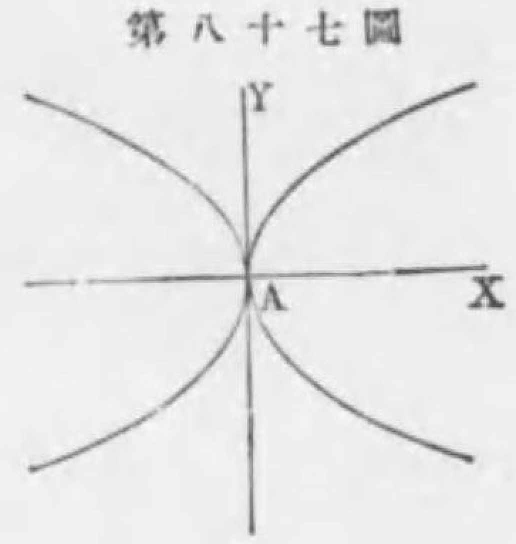
故ニ $p>0$ ナラバ x ガ正ナラザレバ y ガ實數値ナラズ。從ツテ曲線ガ y 軸ヨリ右方ニノミアリ。次ニ $p<0$ ナラバ x ガ負ナラザレバ y ガ實數値ナラズ。從ツテ曲線ハ y 軸ヨリ左方ニノミアリ。

ヨツテ p ガ正,負何レニテモ拋物線ハ常ニ y 軸ノ左右一方ニノミ限ラルヽ曲線ナリ。

iii　x ノ一ツノ値ニ對シテ,絶對値ハ等シクシテ符號ノ相反スル y ノ二ツノ値ヲ得ベシ。卽チ拋物線ハ其軸ニ關シテ對稱ナル圖形ナリ。

iv　x ノ絶對値ガ大トナラバ y ノ絶對値モ亦大トナルベシ。ヨツテ拋物線ハ y 軸ノ左右何レカ一方ニ於テ無限ニ擴ガリ居ルヲ知ル。

第八十七圖



注意　上ノ說明ニテ知レルガ如ク p ガ正ナル時ハ y 軸ノ右方ニ p ガ負ナル時ハ y 軸ノ左方ニアルト雖モ,ソハ唯曲線ノ軸ニ對スル位置ニ差アルノミニシテ其性質ニハ別ニ差アルコトナシ。故ニ今後ハ p ヲ正ナリトスベシ。

定義　$4p$ ヲ拋物線ノ主ナルぱらめーとるトイフ。

75. 第七十二節ニヨリ焦點 F ノ座標ハ $p, 0$ ナリ。

故ニ焦點ヲ過リ拋物線ノ軸ニ垂直ナル線分 PFP′ ヲ作ル時ハ PF ノ長サハ方程式

$$y^2=4px$$

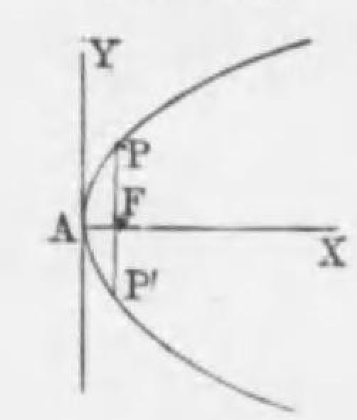
ニ於テ x ヲ p ト置ケバ得ラルベシ。卽チ

$$FP=2p$$

從ツテ PP′ ノ長サハ $4p$ ナリ。

定義　線分 PP′ ヲ拋物線ノ通徑トイフ。

第八十八圖



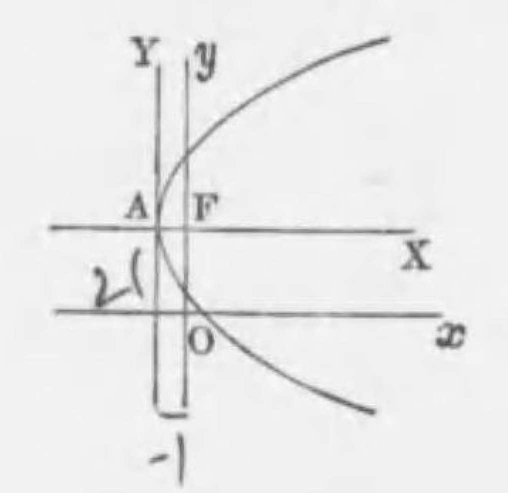
拋物線ノ通徑 PP′ ノ長サヲ知ラバ其方程式ガ定マリ從ツテ其形ハ完全ニ決定セラル。

例　拋物線 $y^2=4x+4y$ ノ頂點,軸,通徑及ビ焦點ヲ求メヨ。

解　原方程式ヲ少シク書キ直スト

$$(y-2)^2=4(x+1),$$

第八十九圖



故ニ座標軸ヲ平行ニ移動シ新原點ヲ $(-1,2)$ ニ移セバ

$$y^2=4x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トナル。

故ニ頂點ノ座標ハ $-1, 2$ ニシテ通徑ノ長サハ 4, 又其軸ノ方程式ハ $y=2$ ナリ。

然ルニ (1) ニテ表ハサレタル拋物線ノ焦點ノ座標ハ 1, 0 ナルガ故ニ原ノ座標軸ニ關シテハ 0, 2 ナリ。

76. 直線ト拋物線トノ交點

拋物線ノ方程式ヲ

$$y^2=4px \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トシ,直線ノ方程式ヲ

$$y=mx+b \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

トス。然ルニ交點ノ座標ハ(1),(2)ヲ同時ニ滿足スベキガ故ニ(2)ヲ(1)ニ代入スレバ

$$(mx+b)^2=4px$$

$-4mbp+4p^2=0$

即チ

$$m^2x^2+2x(mb-2p)+b^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

故ニ $(mb-2p)^2-b^2m^2 \gtreqq 0$, 即チ $p \gtreqq mb$ ナルニ從ヒ,與ヘラレタル直線ハ二ツノ實ナル點カ,相重ナル二ツノ點カ,又ハ二ツノ相異ル虛點ニテ於テ交ル。

77. 直線ガ拋物線ヲ截リトル弦ノ長サ。

拋物線及ビ直線ノ方程式ヲ夫々

$$y^2=4px, \qquad y=mx+b$$

トシ,其交點ヲ夫々(x_1, y_1) (x_2, y_2)トスレバ前節(3)ヨリ

$$x_1+x_2=-\frac{2(mb-2p)}{m^2}, \quad x_1x_2=\frac{b^2}{m^2}$$

然ルニ

$$\begin{aligned}(x_1-x_2)^2&=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\\&=\frac{4(mb-2p)^2}{m^4}-\frac{4b^2}{m^2}=\frac{16p(p-mb)}{m^4}\end{aligned}$$

又

$$y_1-y_2=m(x_1-x_2)$$

ヨツテ求ムル弦ノ長サハ

$$\begin{aligned}\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}&=\sqrt{1+m^2}\,|(x_1-x_2)|\\&=\frac{4}{m^2}\sqrt{1+m^2}\sqrt{p(p-mb)}\end{aligned}$$

78. 拋物線ノ切線ノ方程式

拋物線ノ方程式ヲ

$$y^2=4px$$

トシ,其上ノ二ツノ點ヲ $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ トスレバ,コノ二點ヲ過ル割線ノ方程式ハ

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

然ルニ二ツノ點ハ共ニ拋物線ノ上ニアルガ故ニ

$$y_1^2=4px_1 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$y_2^2=4px_2 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

(2)及ビ(3)ヨリ

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4p}{y_1+y_2} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

故ニ(1)ハ

$$y-y_1=\frac{4p}{y_1+y_2}(x-x_1) \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

トナル。コレ拋物線ノ上ニアル二ツノ點P, Qヲ過ル割線ノ方程式ナリ。

此方程式ニ於テ $y_2=y_1$ トスレバ點(x_1, y_1)ニ於ケル切線ノ方程式ヲ得。即チ

$$y-y_1=\frac{2p}{y_1}(x-x_1)$$

分母ヲ拂ヒ,且ツ $y_1^2=4px_1$ ナルコトニ注意スレバ

$$yy_1=2p(x+x_1) \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

コレ點Pニ於ケル切線ノ方程式ナリ。

79. x軸ト與ヘラレタル角ヲ成ス切線ノ方程式

與ヘラレタル角ノ正切ヲ m トセヨ。然ル時ハ直線ノ方程式

$$y=mx+b \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ニ於テ,bヲ其直線ガ拋物線ニ切スル樣ニ定ムベシ。

ソレガ爲メニハ第七十六節ニヨリ

$$p=mb$$

ナルヲ要ス。

ヨツテ求ムル切線ノ方程式ハ

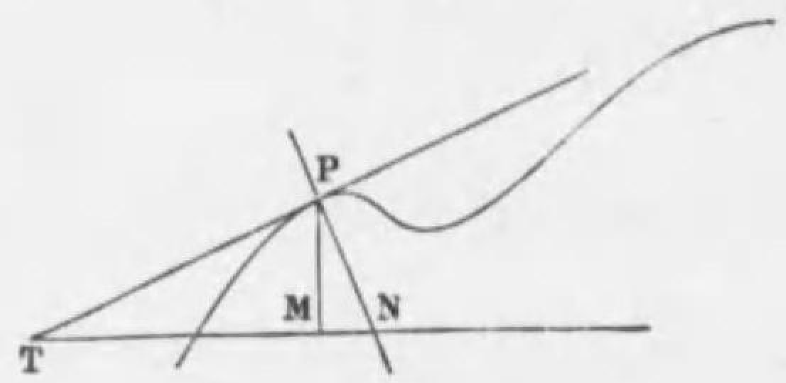
$$y=mx+\frac{p}{m} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナリ。

80 定義

曲線上ノ點Pニ於ケル切線ヲPT, 其點ニ於ケル法線ヲPNトシ, x軸ト交ル點ヲ夫々T, Nトス。

第九十圖



次ニP點ヨリx軸ニ垂線PMヲ引キ其足ヲMトスル時, 線分TMヲ次切線トイヒ, 線分MNヲ次法線トイフ。

今拋物線ノ上ノ點$P(x', y')$ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$yy'=2p(x+x')$$

故ニ切線ガx軸ヲ截ル點ノ座標ハ上ノ方程式ニyノ代リニ零ト置キテ得ベク, 卽チ

$$0=2p(x+x')$$

ヨリ

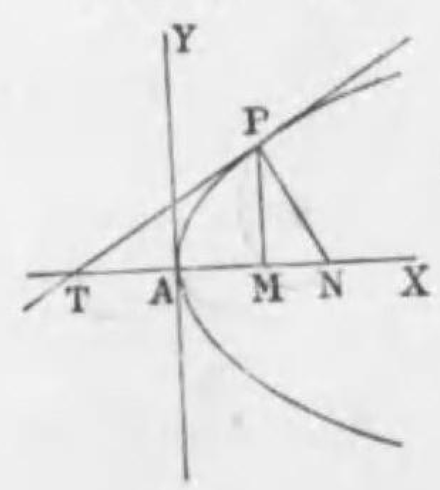
$$x=-x'$$

コレ卽チ

$$TA=AM$$

ナルコトヲ示ス。故ニ次切線ハ拋物線ノ頂點Aニヨツテ二等分セラル。

第九十一圖



注意 此事實ニヨリ拋物線ニ切線ヲ引クコトヲ得。卽チP點ニ於ケル切線ヲ作ランニハPヨリx軸ニ垂線PMヲ作リ

$$AM=AT$$

ナルガ如キ點Tヲy軸ニ關シテMノ反對ノ側ニトル時, 直線PT

ハ求ムルモノナリ。

81. 拋物線ノ法線ノ方程式

拋物線$y^2=4px$ノ上ノ點$P(x', y')$ニ於ケル法線PN(前圖)ノ方程式ヲ求メシニ, 假リニ其方程式ヲ

$$y-y'=m(x-x')$$

トスベシ。而ルニ法線ハ此點ニ於ケル切線

$$yy'=2p(x+x')$$

ニ垂直ナルベキニヨリ

$$m=-\frac{y'}{2p}$$

ヨツテ求ムル法線ノ方程式ハ

$$\boxed{y-y'=\frac{-y'}{2p}(x-x')}$$

Good

ナリ。

系 法線ハx軸ヲ截ル點Nノ座標ガ上ノ方程式ニ$y=0$ト置キテ得ラル。卽チ

$$2p=x-x',$$

ヨツテ

$$x=x'+2p,$$

卽チ

$$AN=AM+2p$$

故ニ次法線MNノ長サハ拋物線上ノ點Pノ位置ノ如何ニ關セズ一定長$2p$ヲ有ス。卽チ通徑ノ半分ニ等シ。

注意 コノ事實ヨリ拋物線ノ法線ヲ容易ニ引クコトヲ得。卽チ點Pニ於ケル法線ヲ得ンニハPヨリx軸ヘ垂線PMヲ引キ其足Mヨリ, x軸ノ上ニAト反對ノ方向ニ

$$MN=2p$$

ナルガ如キ點Nヲ求メ，PNヲ結ベバ可ナリ。

82. x軸ト與ヘラレタル角ヲナス法線ノ方程式

抛物線ノ上ノ點Pニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$y=mx+\frac{p}{m} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

玆ニmガ切線ガx軸トナス角ノ正切ナリ。

サテ(1)ト與ヘラレタル抛物線ノ方程式ヨリ，其切點ノ座標ヲ求ムレバ

$y^2=4px$

$(mx+\frac{p}{m})^2=4px$

$$x'=\frac{p}{m^2} \qquad y'=\frac{2p}{m}$$

ヨツテPヲ過ル法線ガx軸トナス角ノ正切ヲm'トスレバ其方程式ハ

$$\left(y-\frac{2p}{m}\right)=m'\left(x-\frac{p}{m^2}\right) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

然ルニ法線ガ切線ト直交スルガ故ニ

$$m=\frac{-1}{m'}, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)ヲ(2)ニ代入スレバ

$$y+2pm'=m'(x-pm'^2)$$

整頓スレバ

$$y=m'x-2pm'-pm'^3 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

コレ求ムル法線ノ方程式ナリ。

例　抛物線$y^2=4px$ノ切線及ビ法線ノ内x軸ト30°ヲナスモノヲ求メヨ。

解　　$$\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ヨツテ切線ノ方程式ハ七十九節公式(2)ニヨリ

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}p$$

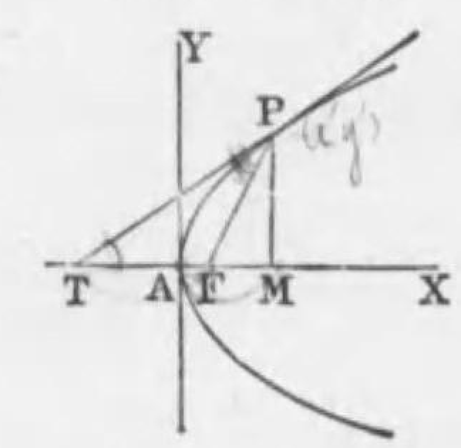
ニシテ,法線ノ方程式ハ本節公式(4)ニヨリテ

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2p}{\sqrt{3}}-\frac{p}{3\sqrt{3}},$$

ナリ。

83. 抛物線ノ切線ガx軸トナス角ハ其切點ト焦點トヲ結ブ直線トナス角ニ等シ。

第九十二圖



PTヲP點ニ於ケル切線,FPヲ焦點ト切點トヲ結ブ線分，PMヲx軸ヘノ垂線トセヨ。

今P點ノ座標ヲx', y'トスレバ

$$FP=\sqrt{(x'-p)^2+y'^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ點(x', y')ハ抛物線ノ上ノ點ナルガ故ニ

$$y'^2=4px' \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)ヲ(1)ニ代入スレバ結局

$$FP=x'+p,$$

トナル。

又　　$$TF=TA+AF$$
$$=AM+AF\text{(第八十節)}$$
$$=x'+p$$

故ニ三角形TFPハ二等邊ナリ,從ツテ

$$\widehat{PTF}=\widehat{TPF}$$

ナリ。

84. 焦點ヨリ抛物線ノ切線ニ引ク垂線ノ足ノ軌跡

抛物線ノ方程式ヲ

$$y^2=4px$$

トスレバ,其上ノ一點(x', y')ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$yy'=2p(x+x') \cdots\cdots (1)$$

ヨツテ焦點$(p,0)$ヲ過リ切線ニ垂直ナル直線ノ方程式ハ

$$y=\frac{-y'}{2p}(x-p) \cdots\cdots (2)$$

之等ハy軸上ニ於テ交ルベシ。何トナレバ(1)及ビ(2)ニ$x=0$ト置ケバ

$$y=\frac{2px'}{y'} \text{ 及ビ } \frac{y'}{2}$$

トナル。然ルニ$y'^2=4px'$ナルガ故ニ

$$\frac{2px'}{y'}=\frac{y'}{2}$$

ヨツテ切線ト焦點ヨリ之ニ下シタル垂線トノ交點ハ常ニy軸ノ上ニアリ。

85. 一點ヨリ拋物線ニ引ケル切線ノ切點

拋物線ヲ$y^2=4px$ナリトシ,其上ニアラザル一點ヲ(α,β)トセヨ。

今點(α,β)ヨリ引ケル切線ノ切點ヲx', y'トスレバ其點ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$yy'=2p(x+x')$$

而シテ此切線ハ點(α,β)ヲ過ルベキガ故ニ

$$\beta y'=2p(\alpha+x') \cdots\cdots (1)$$

又點(x',y')ハ拋物線ノ上ニアルガ故ニ

$$y'^2=4px' \cdots\cdots (2)$$

(1),(2)ヨリx', y'ヲ求ムレバ

$$x'=\frac{1}{2p}(\beta^2-2p\alpha\pm\beta\sqrt{\beta^2-4p\alpha})$$
$$y'=\beta\pm\sqrt{\beta^2-4p\alpha}$$

コレ求ムル切點ノ座標ナリ。

系 i　點(α,β)ハ拋物線ノ外部ノ點ナル時ハ

$$\beta^2-4p\alpha>0$$

ナリ。故ニ二組ノ切點ヲ得ベク,從ツテ拋物線ノ外部ノ點(α,β)ヨリハ二本ノ切線ヲ引クコトヲ得。而シテ其方程式ハ二ツノ點(α,β), (x',y')ヲ結ブ一双ノ直線ナリ。

系 ii　點(α,β)ハ拋物線ノ內部ノ點ナル時ハ

$$\beta^2-4p\alpha<0$$

從ツテx', y'ノ實數値ヲ得ズ。卽チ點(α,β)ヨリハ實ナル切線ヲ引クコトヲ得ズ。

玆ニ拋物線ノ內部トハ其軸AXヲ有スル部分ナリ。

系 iii　若シ點(α,β)ハ拋物線ノ上ニアル時ハ

$$\beta^2-4p\alpha=0$$

故ニ二ツノ切點ハ一致ス。從ツテ一ツノ切線アルノミナリ。

例　點$(4,10)$ヲ過リ,拋物線$y^2=9x$ニ引ケル切線ノ方程式ヲ求ム。

解　點$(4,10)$ヲ過ル切線ノ切點ノ座標ハ公式ニヨリ

$$x'=\frac{2}{9}(100-18\pm\sqrt{100-36})=\frac{2}{9}(82\pm80)$$
$$y'=10\pm\sqrt{100-36}=10\pm8$$

卽チ切點ハ$(36,18)$及ビ$\left(\frac{4}{9},2\right)$ノ二ツナリ。故ニ求ムル切線ハ之等ノ點ト$(4,10)$トヲ結ブ直線ナルガ故ニ其方程式ハ夫々

$$4y=x+36$$
$$4y=9x+4$$

ナリ。

86. 前節ニ於テ點(α,β)ヨリ引ケル二ツノ切線ノ切點ノ座標ハ

$$x'=\frac{1}{2p}(\beta^2-2p\alpha\pm\beta\sqrt{\beta^2-4p\alpha})$$
$$y'=\beta\pm\sqrt{\beta^2-4p\alpha}$$

故ニ二ツノ切點ヲ結ブ線分ノ中點ノ y 座標ハ β ナリ。ヨツテ點 (α, β) ト線分ノ中點トヲ結ブ直線ハ x 軸ニ平行ナリ。

87. 點 (x', y') ヨリ引ケル切線ノ方程式

第八十五節ニ於テ一點ヨリ拋物線ニ引ケル二ツノ切點ノ座標ヲ求メ,次ニ例題ニテ切線ノ方程式ニ就キテ述ベタルガ本節ニテ更ニ他ノ解法ニテ之ガ求メ方ヲ示サントス。

今任意ノ點 x', y' ヨリ拋物線ヘノ切線ヲ求メンニ其方程式ヲ

$$y=mx+\frac{p}{m} \quad \cdots\cdots(1)$$

トセヨ。(七十九節)切線ガ點 (x', y') ヲ過ルガ故ニ

$$y'=mx'+\frac{p}{m}$$

卽チ x' ト y' トノ間ニ

$$m^2x'-my'+p=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

ナル關係アルベキナリ。コレ卽チ點 (x', y') ヨリ引ケル切線ノ m ヲ定ムベキ方程式ニシテ一般ニハ m ノ二ツノ値アリ之ヲ夫々 m_1, m_2 トスレバ求ムル切線ノ方程式ハ

$$\left.\begin{aligned} y&=m_1x+\frac{p}{m_1} \\ y&=m_2x+\frac{p}{m_2} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(3)$$

而シテ之等ノ切線ハ $y'^2-4px' \gtreqless 0$ ナルニ從ヒ二ツノ實ナル切線ナルカ,一致シタル切線ナルカ或ハ又二ツノ虛ナル切線ナルコト已ニ第八十五節ニ述ベタリ。

注意　點 (x', y') ヨリ引ク二ツノ切線ハ互ニ垂直ナル爲ニハ方程式(2)ノ二ツノ根 m_1, m_2 ガ

$$m_1m_2=-1$$

ナラザルベカラズ。卽チ(2)ヨリ

$$\frac{p}{x'}=-1$$

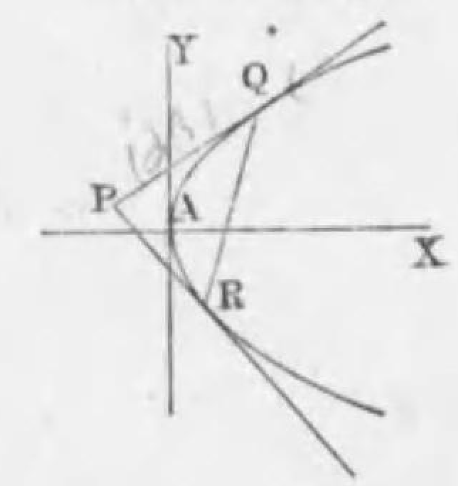
故ニ互ニ垂線ナル切線ノ交點ノ軌跡ハ

$$x=-p,$$

卽チ準線ナリ。

88. 拋物線ノ外部ノ點ヨリ二ツノ切線ヲ引ク時,切點ヲ結ブ弦ノ方程式

第九十三圖



(α, β) ヲ拋物線

$$y^2=4px$$

ノ外部ノ點Pトシ,二ツノ切點ヲ $Q(x', y')$, $R(x'', y'')$ トセヨ。

然ル時ハ Q ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$yy'=2p(x+x') \quad \cdots\cdots(1)$$

ニシテ,R ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$yy''=2p(x+x'') \quad \cdots\cdots(2)$$

之等ハ共ニ P ヲ過ル爲ニハ

$$\beta y'=2p(\alpha+x') \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\beta y''=2p(\alpha+x'') \quad \cdots\cdots(4)$$

(3)及ビ(4)ハ二ツノ點 (x', y'), (x'', y'') ガ共ニ直線

$$\beta y=2p(x+\alpha) \quad \cdots\cdots(5)$$

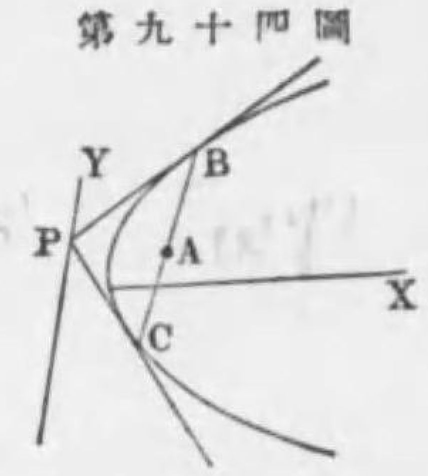
ノ上ニアルベキ條件ナリ。因ツテ(5)ハ切弦 ~~PQ~~ QR ノ方程式ナリ。

89. 定點ヲ過リ數多ノ弦ヲ引ク時,其兩端ニ於ケル切線ノ交點ノ軌跡。

A點ヲ定點トシ,其座標ヲ x', y' トシ A ヲ過ル任意ノ弦 BAC ヲ引キ,其兩端ニ於ケル切線ヲ BP, CP トシ,其交點ヲ $P(\alpha, \beta)$ ト假定セヨ。

今弦 BC ガ A 點ノ周リヲ廻轉スル時, P 點ノ軌跡ヲ求メントス。

第九十四圖



前節ニヨリ P 點ニ關スル切弦 BC ノ方程式ハ

$$\beta y=2p(x+\alpha) \cdots\cdots(1)$$

之ハ A 點ヲ過ル爲ニハ

$$\beta y'=2p(x'+\alpha) \cdots\cdots(2)$$

(2) ハ點 A ヲ過ル弦ノ位置ノ如何ニ關セズ其兩端ヨリ引ケル切線ノ交點 P ガ直線

$$yy'=2p(x+x') \cdots\cdots(3)$$

ノ上ニアルベキ爲ノ條件ナリ。故ニ (3) ハ求メントスル點 P ノ軌跡ナリ。

90. 定義 直線

$$yy'=2p(x+x')$$

ヲ拋物線 $y^2=4px$ ニ關シテ點 (x', y') ノ極線ナリトイヒ, 點 (x', y') ヲ拋物線ニ關シテ其直線ノ極トイフ。

定點ガ拋物線上ニアラバ其點ノ極線ハ其點ニテノ切線ニシテ, 然ラザル時ハ切弦ナリ。

系 i 焦點ノ極線ハ其方程式ニ $x'=p$, $y'=0$ ヲ代入シテ得ベシ。卽チ

$$x+p=0$$

ヨツテ焦點ノ極線ハ準線ナリ。

系 ii x 軸ノ上ノ任意ノ點 $(x', 0)$ ノ極線ノ方程式ハ

$$x=-x'$$

コレ y 軸ニ平行ナル直線ニシテ x 軸ト極ニ關シ原點ト反對ノ側ニアリテ極マデノ距離ニ等シキ點ニ於テ交ル。

例 1. 拋物線 $y^2=8x$ ニ關シテ點 $(3, 2)$ ノ極線ノ方程式ヲ求メヨ。

解 極線ノ公式ニ於テ

$$p=2 \quad x'=3, \quad y'=2$$

ト置カバ

$$2y=4(x+3)$$

卽チ

$$y=2x+6$$

例 2. 拋物線 $y^2=4px$ ニ關シテ直線 $ax+by+c=0$ ノ極ヲ求メヨ。

解 求ムル極ノ座標ヲ x', y' トスレバ, 其極線ノ方程式ハ

$$yy'=2p(x+x')$$

コレト與ヘラレタル直線ト一致スル爲ニハ

$$\frac{2p}{a}=\frac{-y'}{b}=\frac{2px'}{c}$$

卽チ

$$x'=\frac{c}{a} \quad y'=-\frac{2pb}{a},$$

例 3. P 點ノ極線ハ Q 點ヲ通過スルナラバ, Q 點ノ極線ハ P 點ヲ通ルコトヲ證セヨ。

解 拋物線ノ方程式ヲ

$$y^2=4px$$

トシ, P, Q ノ座標ヲ夫々 (x_1, y_1); (x_2, y_2) トスレバ P 點ノ極線ノ方程式ハ

$$yy_1=2p(x+x_1) \cdots\cdots(1)$$

然ルニ假定ニヨリ Q ガ此上ニアリ。故ニ

$$y_2y_1=2p(x_2+x_1) \cdots\cdots(3)$$

サテ Q ノ極線ノ方程式ハ

$$yy_2=2p(x+x_2) \cdots\cdots\cdots (4)$$

然ルニ(3)ニヨリ此直線ハ $P(x_1, y_1)$ ヲ通ルコト明カナリ。

91. 拋物線ノ平行弦ノ中點ノ軌跡

拋物線

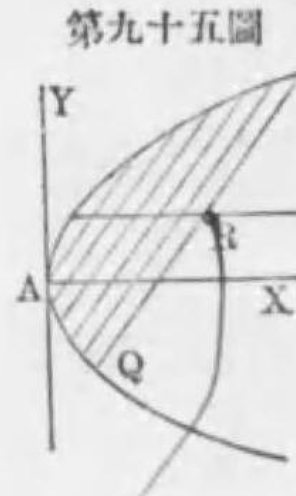
$$y^2=4px$$

ニ於テ互ニ平行ナル弦ガ x 軸トナス角ノ正切ヲ m トスレバ之等ノ弦ノ方程式ハ

$$y=mx+b \cdots\cdots\cdots (1)$$

ナリ。茲ニ m ガ一定ニシテ b ハ各弦ニヨリテ異ナルモノトス。

第九十五圖



サテ(1)ト拋物線トノ交點 P, Q ノ y 座標 y_1 及ビ y_2 ハ方程式

$$my^2-4py+4pb=0 \cdots\cdots\cdots (2)$$

ヨリ求メラル。

故ニ弦 PQ ノ中點 R ノ y 座標ハ(2)ヨリ

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2p}{m}$$

ヨツテ R ハ常ニ軸ニ平行ナル直線

$$y=\frac{2p}{m} \cdots\cdots\cdots (3)$$

ノ上ニアリ。

定義 曲線ノ徑トハ其平行弦ノ中點ノ軌跡ナリ。

系 i 拋物線ノ徑ハ凡テ x 軸ニ平行ナリ。

系 ii 徑ガ拋物線ト交ル點(頂點トイフ。之ニ對シテ拋物線ノ軸ト交ル點 A ヲ主頂點トイフ)ニ於ケル切線ハ平行弦ニ平行ナリ。

何トナレバ徑

$$y=\frac{2p}{m}$$

ガ拋物線ト交ル點ノ座標ハ $\left(\frac{p}{m^2}, \frac{2p}{m}\right)$ ナリ。故ニ其點ニ於ケル切線ノ方程式ハ七十八節ノ公式ヲ用フレバ

$$y=mx+\frac{p}{m} \cdots\cdots\cdots (3)$$

ナリ。故ニ切線ハ平行弦(1)ニ平行ナリ。

例 點 (h, k) ニ於テ二等分セラルヽ拋物線ノ弦ノ方程式ヲ求メヨ。

解 拋物線ノ方程式ヲ

$$y^2=4px$$

トシ、求ムル弦ノ方程式ヲ

$$y-k=m(x-h) \cdots\cdots\cdots (1)$$

ナリト假定ス。

點 (h, k) ヲ通ル徑ガ拋物線ト交ル點ノ座標ハ $\frac{k^2}{4p}, k$ ナルガ故ニ其點ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$ky=2p\left(x+\frac{k^2}{4p}\right)$$

然ルニ此切線ト求ムル弦トハ平行ナルベキニヨリ

$$m=\frac{2p}{k} \cdots\cdots\cdots (2)$$

(1)ニ(2)ヲ代入スレバ $y+3=\frac{4}{-3}(x-2)$

$$y-k=\frac{2p}{k}(x-h)$$

$-3y-9=4x-8$

コレ求ムル弦ノ方程式ナリ。 $4x+3y+1=0$

92. 拋物線ノ弦ノ兩端ニ於ケル切線ノ交點ハ此弦ヲ二等分スル徑ノ上ニテ交ル。

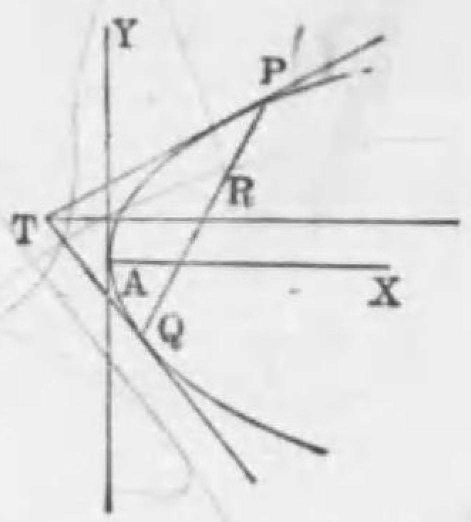
圖ニ於テ弦 PQ ノ方程式ヲ

$$y=mx+b \cdots\cdots\cdots (1)$$

トシ，P，Q ニ於ケル切線ノ交點ヲ T トシ

其座標ヲ (x', y') トス。

第九十六圖



然ル時ハ弦 PQ ハ點 T ヨリ引ケル切線

ノ切弦ナルガ故ニ其方程式ハ

$$yy'=2p(x+x') \cdots\cdots (2)$$

(1), (2) ハ同一ノ直線ナルガ故ニ

$$m=\frac{2p}{y'} \text{ 從ツテ } y'=\frac{2p}{m}, y$$

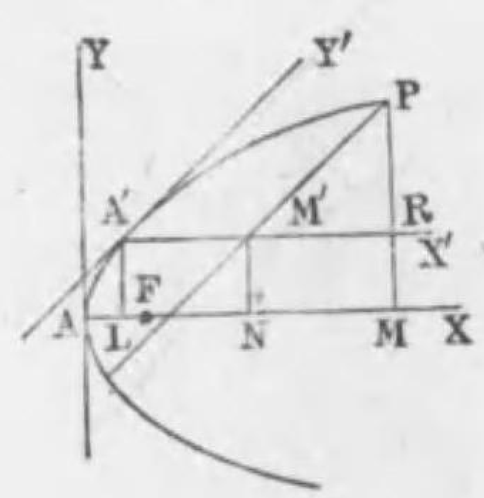
ヨツテ交點 T ハ直線

$$y=\frac{2p}{m}$$

ノ上ニアリ。而シテ此直線ハ前節ニヨリ弦 PQ ニ平行ナル弦ヲ二等分スル徑ナリ。ヨリテ證セラレタリ。

93. 拋物線ノ徑ト頂點ニ於ケル切線トヲ軸トスル時ノ拋物線ノ方程式

第九十七圖



拋物線ノ一ツノ徑ヲ A'X' トシ，其頂點 A' ノ座標ヲ m, n トシ，徑 A'X' ト切線 A'Y' トノ爲ス角ヲ α トセヨ。

然ル時ハ切線 A'Y' ノ方程式ハ，

$$ny=2p(x+m)$$

故ニ

$$\tan\alpha=\frac{2p}{n} \cdots\cdots (1)$$

サテ $P(x', y')$ ヲ拋物線ノ上ノ任意ノ點トシ，x, y ヲ新軸ニ關スル P ノ座標ナリトス。

今 A'Y' ニ平行ニ PM' ヲ引キ PM, M'N 及ビ A'L ヲ x 軸ヘノ垂線ナリトセバ

$$AM=x'=AL+A'M'+M'R=m+x+y\cos\alpha \cdots\cdots (2)$$

$$MP=y'=LA'+RP=n+y\sin\alpha \cdots\cdots (3)$$

然ルニ P ハ拋物線ノ上ニアルガ故ニ舊軸ニ關シテ

$$y'^2=4px' \cdots\cdots (4)$$

コレニ (2) 及ビ (3) ヲ代入スレバ

$$(n+y\sin\alpha)^2=4p(m+x+y\cos\alpha)$$

卽チ

$$y^2\sin^2\alpha+2y(n\sin\alpha-2p\cos\alpha)+(n^2-4pm)=4px \cdots\cdots (5)$$

然ルニ (1) ヨリ

$$\tan\alpha=\frac{2p}{n}$$

從ツテ

$$n\sin\alpha-2p\cos\alpha=0 \cdots\cdots (6)$$

又 A' モ拋物線ノ上ニアルガ故ニ

$$n^2=4pm \cdots\cdots (7)$$

(5) ニ (6) 及ビ (7) ヲ代入スレバ

$$y^2\sin^2\alpha=4px \cdots\cdots (8)$$

今 $\frac{p}{\sin^2\alpha}$ ヲ p' ト置カバ (8) ハ

$$y^2=4p'x \cdots\cdots (9)$$

トナル。コレ求ムル方程式ニシテ其形ハ AX, AY ヲ軸トシタル場合ト同一ナリ。

系 p' ハ焦點ト徑ガ拋物線ヲ截ル點卽チ頂點トヲ結ブ線分 FA' ノ長サニ等シ (前圖)

何トナレバ

$$FA'=\sqrt{\overline{FL}^2+\overline{A'L}^2}=\sqrt{(p-m)^2+n^2} \cdots\cdots (1)$$

然ルニ

$$n^2=4pm \cdots\cdots (2)$$

故ニ

$$FA'=(p+m)\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

而シテ(2)ヨリ

$$m=\frac{n^2}{4p}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

且ツ

$$n=2p\cot\alpha\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

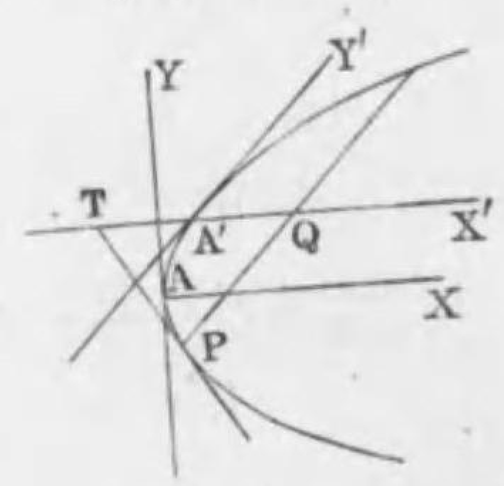
(3)ニ(4)及ビ(5)ヲ代入スレバ

$$FA'=\frac{p}{\sin^2\alpha}$$

ヨツテ證セラレタリ。

94. 徑ト其頂點ニ於ケル切線トヲ二ツノ軸ニスル時,切線ノ方程式ヲ求ム。

第九十八圖



A'X' ヲ抛物線ノ一ツノ徑トシ,其頂點 A' ニ於ケル切線ヲ A'Y' トス。然ル時ハ前節ニヨリテ抛物線ノ方程式ハ

$$y^2=4p'x$$

次ニ抛物線ノ上ノ點 P ノ二ツノ軸 A'X', A'Y' ニ關スル座標ヲ x', y' トスレバ四十六節ト同樣ノ方法ヲ用フレバ切線ノ方程式トシテ

$$yy'=2p'(x+x')$$

ヲ得。

系 切線 PT ガ徑 A'X' ト交ル點 T ノ x 座標ハ上ノ方程式ニ y ノ代リニ零ヲ代入スレバ得。

即チ

$$x=-x',$$

故ニ

$$A'T=A'Q$$

ナリ。茲ニ弦 PQ ハ A'Y' ニ平行ナリトス。

95. 定義　焦點 F ヲ過ル弦ヲ焦點弦トイフ。

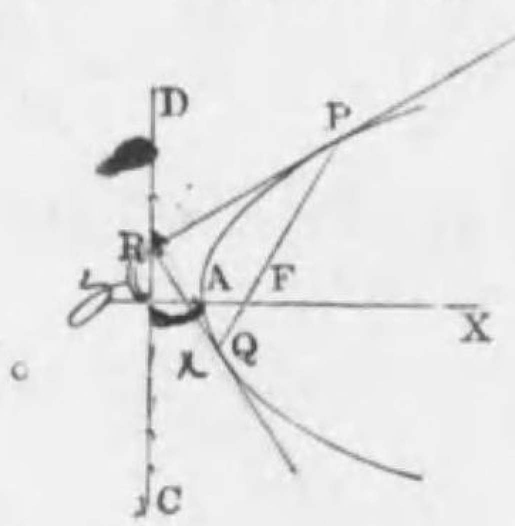
抛物線ノ焦點弦ニ關シテハ次ノ諸性質アリ。

1°. 焦點弦ノ端ニ於ケル切線ノ交點ハ準線ノ上ニアリ。

焦點弦 PQ ノ兩端ニ於ケル切線ノ交點 R ノ座標ヲ α, β ト假定スレバ切弦 PQ ノ方程式ハ八十八節ニヨリテ

$$y\beta=2p(x+\alpha)$$

第九十九圖



然ルニ此切弦ハ焦點 $F(p, 0)$ ヲ過ルベキガ故ニ

$$0=2p(p+\alpha)$$

$$\therefore \quad \alpha=-p,$$

即チ交點 R ノ x 座標ハ常ニ $-p$ ナリ。従ツテ R ハ準線 $x+p=0$ ノ上ニアリ。

2°. 焦點弦ノ兩端ニ於ケル切線ハ互ニ直交ス。

切線ノ方向係數ヲ m トスレバ七十九節ニヨリテ切線ノ方程式ハ

$$y=mx+\frac{p}{m}$$

然ルニ二ツノ切線ノ交點ハ $-p, 0$ ナルカ故ニ上ノ方程式ハ

$$-pm+\frac{p}{m}=0$$

ヲ滿足セザルベカラズ。即チ

$$m^2-1=0$$

従ツテ m ノ二ツノ値ハ夫々 $1, -1$ ナリ,故ニ直交ス。

3°. 焦點弦ノ兩端ニ於ケル切線ノ交點ト焦點トヲ結ブ直線

ハ焦點弦ニ垂直ナリ。

切線 PR, QR ノ交點 R ノ座標ハ 1° ニヨリテ $-p, \beta$ ニシテ(玆ニβハ二ツノ點P, Qノ位置ニヨツテ變化ス。) 焦點ノ座標ハ $p, 0$ ナリ。

故ニ直線 FR ノ方程式ハ

$$y=\frac{-\beta}{2p}(x-p), \quad \cdots\cdots(1)$$

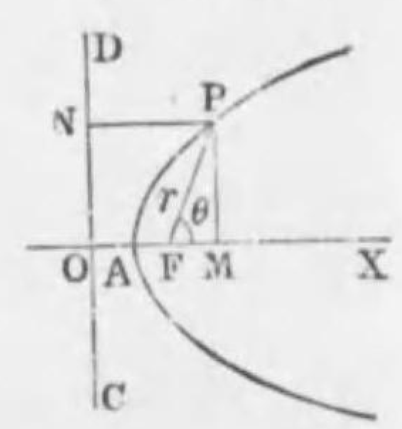
ニシテ焦點弦 PQ ハ點 R ニ關スル切弦ナルガ故ニ其方程式ハ

$$y\beta=2p(x-p) \quad \cdots\cdots(2)$$

ナリ。故ニ(1)ト(2)トハ互ニ直交ナリ。

96. 抛物線ノ極方程式

第百圖



焦點 F ヲ極トシ, FX ヲ原線トセヨ。

抛物線ノ上ニ任意ノ點 P ヲトリ, 其極座標ヲ r, θ トシ CD ヲ準線トスレバ定義ニヨリテ

$$FP=NP=OM=OF+FM$$

然ルニ

$$FP=r \qquad OA=AF=p, \qquad OF=2p$$

$$FM=FP\cos\theta=r\cos\theta$$

故ニ

$$r=2p+r\cos\theta$$

從ツテ

$$r=\frac{2p}{1-\cos\theta}$$

コレ求ムル抛物線ノ極方程式ナリ。

系 $\theta=0$ ナル時ハ方程式ヨリ

$$r=\infty$$

ヨツテ原線ノ正ノ方向ニ沿フ動徑ガ抛物線トハ無限遠點ニテ

交ル。

系 ii θ ガ 0 ナラザル時ハ r ノ値ハ有限確定ナリ。θ ガ $90°$ ナル時ハ $r=2p$ ナリ。コレ通徑ノ半分ナリ。又 θ ガ $180°$ ナル時ハ $r=p$ 卽チ AF ノ長サナリ。コレ焦點ノ直角座標ハ $(p, 0)$ ナルコトヲ示スモノナリ。

系 iii θ ノ代リニ $-\theta$ ヲ代入スルモ r ノ値ハ變ゼズ。卽チ抛物線ハ原線ニ關シテ對稱ナリ。

97. 抛物線上ノ點ノ座標ヲ一ツノ變數ニテ表ハス事。

抛物線ノ方程式ヲ

$$y^2=4px \quad \cdots\cdots(1)$$

トス。然ル時, 此上ノ任意ノ點ノ座標ヲ一ツノ變數 m ヲ用ヒテ表ハサンニハ

$$x=\frac{p}{m^2}, \quad y=\frac{2p}{m} \quad \cdots\cdots(2)$$

トスレバ可ナリ。ソハ實際(2)ヲ(1)ニ代入スレバ滿足スルガ故ナリ。

而シテ點 $\left(\frac{p}{m^2}, \frac{2p}{m}\right)$ ニテノ切線ノ方程式ハ七十八節ニヨリ

$$y=mx+\frac{p}{m} \quad \cdots\cdots(3)$$

然ルニ七十九節ニヨリ(3)ノ m ハ切線ガ x 軸トナス角ノ正切ナリ。

故ニ抛物線ノ上ノ任意ノ點ノ座標ハ其點ニ於ケル切線ノ方向係數ヲ m トスレバ

$$x=\frac{p}{m^2}, \quad y=\frac{2p}{m}$$

ナリ。

系　點$\left(\frac{p}{m^2}, \frac{2p}{m}\right)$ニ於ケル法線ノ方程式ハ

$$y-\frac{2p}{m}=-\frac{1}{m}\left(x-\frac{p}{m^2}\right)$$

卽チ

$$my+x=2p+\frac{p}{m^2},$$

ナリ。

98. 同焦點拋物線

拋物線ノ方程式ヲ

$$y^2=4px \cdots\cdots(1)$$

トス。今軸ヲ平行ニ移動シテ(1)ノ焦點$(p,0)$ニ原點ヲ移サバ,方程式(1)ハ

$$Y^2=4p(X+p)$$

ト變ズベシ。

故ニ(1)ト同ジ焦點及ビ軸ヲ有スル拋物線ノ方程式ハ新ラシキ軸ニ關シテ

$$Y^2=4\lambda(X+\lambda) \cdots\cdots(2)$$

ナル形ナリ。但シλガ任意ノ常數ナリ。

ソコデ(2)ヲ再ビ平行ニ移動シテ元ノ座標軸ニ戻ス時ハ

$$y^2=4\lambda(x+\lambda-p) \cdots\cdots(3)$$

トナル。換言スレバ(3)ハ與ヘラレタル拋物線(1)ト同ジ焦點ト軸トヲ有スル拋物線ノ方程式ナリ。

カヽル拋物線ヲ同焦點拋物線トイフ。

次ニλノ値ヲ種々ニ變化セシムル時,ソレニ對應スル拋物線ノ形狀ガ如何ニ變ズルカヲ研究セントス。

1°. $\lambda>p>0$ ナル場合

λガ正ナルヲ以テ拋物線(3)ハ右方ニ擴ガリ, x軸トノ交點ハ

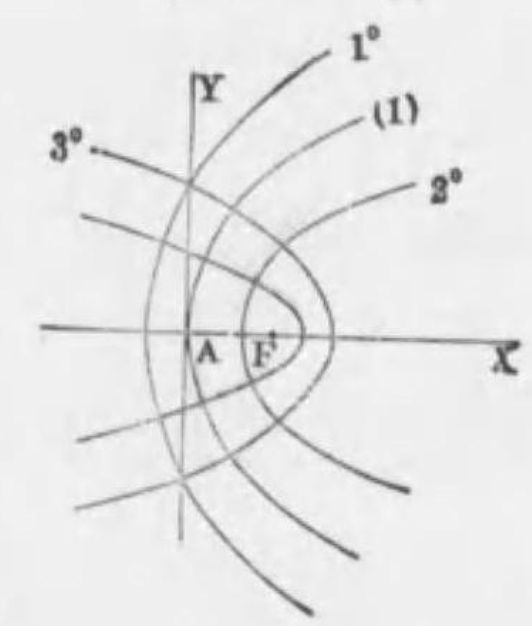
$(p-\lambda, 0)$ナリ。而シテ假定ニヨリ$p-\lambda$ガ負ナルガ故ニ其頂點ハ原點卽チ(1)ノ頂點ヨリモ左方ニアリ。λガpニ近ヅクニ從ヒ(3)ハ(1)ニ近ヅキ,之ニ反シテλガpヨリモ大トナレバナルホド,(3)ノ頂點ハ(1)ノ焦點ヨリモ左方ニ離レ,從ツテ拋物線ハ次第ニ相離ル。

2°. $p>\lambda>0$ ナル場合

コノ場合ニモλガ正ナルガ故ニ拋物線(3)ハ右方ニ擴ガル曲線ナルガ$p-\lambda$ガ正ニシテ且ツpヨリモ小ナルガ故ニx軸トノ交點卽チ(3)ノ頂點ハ(1)ノ頂點ト焦點Fトノ間ニアリ。

λガ零ニ近ヅケバ$p-\lambda$ガpニ近ヅクガ故ニ(3)ノ頂點ハ次第ニ(1)ノ焦點Fニ近ヅキ,拋物線ハ其軸ニ對シテ扁平トナル。

第百一圖



3°. $\lambda<0$ ナル場合

λガ負ナルガ故ニ拋物線(3)ハ左方ニ擴ガル曲線ニシテ$p-\lambda$ガpヨリ大ナルガ故ニx軸トノ交點卽チ其頂點ハ(1)ノ焦點Fヨリモ右方ニアリ。

λハ負ノ値ヲトリナガラ其絕對値ガ增加スル時ハ,(3)ノ頂點ハ愈々右方ニ去リ,絕對値ガ減少スルニ從ヒ其頂點ガFノ右方ヨリ漸次Fニ接近シ而カモ其軸ニ對シテ扁平トナルベシ。

第七章

問題

1. 拋物線 $y^2=8x$ ト直線 $y=x$ トノ交點ノ座標ヲ求メヨ。

2. 點 (a, b) ヲ焦點トシ, 直線

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

ヲ準線トスル拋物線ノ方程式ヲ求メヨ。

3. 拋物線

$$x^2-2ax+2ay=0$$

ノ頂點, 軸, 通徑及ビ焦點ヲ求メヨ。

4. 點 $(a, 0)$ ヲ頂點トシ, 點 $(a', 0)$ ヲ焦點トスル拋物線ノ方程式ハ

$$y^2=4(a'-a)(x-a)$$

ナルコトヲ證セヨ。

5. 拋物線 $y^2=4px$ ノ上ノ點 P ニテノ切線ノ x 軸ノ截片ガ y 軸上ノ截片ノ二倍ナリトイフ。其切線ノ方程式ヲ求メヨ。

解　x 軸ノ截片ガ y 軸上ノ截片ノ二倍ナルガ故ニ切線ノ方向係數ハ $\frac{1}{2}$ 又ハ $-\frac{1}{2}$ ナリ。

故ニ切線ノ方程式ハ七十九節ニヨリ

$$y=\frac{1}{2}x+2p$$

又ハ

$$y=-\frac{1}{2}x-2p$$

ナリ。

6. 拋物線 $y^2=4px$ ヘノ切線ガ x 軸トナス角ガ $60°$ ナリトイフ。切點ノ座標ヲ求ム。

7. 與ヘラレタル直線ニ平行ナル切線ヲ拋物線ニ引クニハ只一本ノミナルコトヲ證セヨ。

8. 二ツノ拋物線 $y^2=4px$ 及ビ $x^2+4py=0$ ニ共通ナル切線ノ方程式

ヲ求メヨ。

解　一ツノ拋物線

$$y^2=4px \quad \cdots\cdots(1)$$

ノ切線ノ方向係數ヲ m トスレバ其方程式ハ

$$y=mx+\frac{p}{m} \quad \cdots\cdots(2)$$

コレハ同時ニ他ノ拋物線

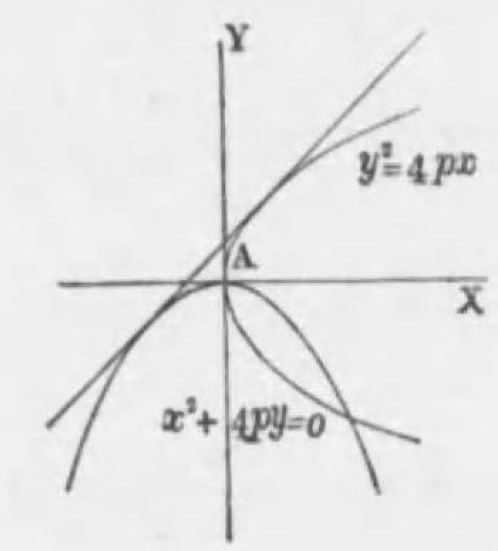
$$x^2+4py=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

ノ切線ナル爲ニハ(2)ヲ代入シタル

$$x^2+4p\left(mx+\frac{p}{m}\right)=0$$

ガ等根ナラザルベカラズ。

第百二圖



即チ

$$m^3=1 \text{ 從ツテ } m=1$$

ナルヲ要ス

故ニ共通切線ノ方程式ハ

$$y=x+p$$

ナリ。(圖ハ p ガ正ナル場合ナリ)

9. 焦點弦ガ拋物線ト交ル二ツノ點ノ y 座標ノ積ハ一定ナルコトヲ示セ。

10. 拋物線ノ三ツノ切線ニテ作ラルヽ三角形ノ垂心ハ準線ノ上ニアルコトヲ證セヨ。　(明治廿九年文檢)

解　三ツノ切線ヲ

$$y=m_1x+\frac{p}{m_1} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$y=m_2x+\frac{p}{m_2} \quad \cdots\cdots(2)$$

$$y=m_3x+\frac{p}{m_3} \quad \cdots\cdots(3)$$

トスレバ(2)ト(3)トノ交點ハ

$$\left\{\frac{p}{m_2m_3},\ p\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}\right)\right\}$$

ヨツテ此點ヲ通リ(1)ニ垂直ナル直線ノ方程式ハ

$$y+\frac{x}{m_1}=p\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}+\frac{1}{m_1m_2m_3}\right) \quad \cdots\cdots(4)$$

同様ニ(1), (3)ノ交點ヨリ(2)ニ垂直ナル直線ノ方程式ハ

$$y+\frac{x}{m_2}=p\left(\frac{1}{m_3}+\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_1m_2m_3}\right)\cdots\cdots(5)$$

ニシテ(1), (2)ノ交點ヨリ(3)ヘノ垂直線ノ方程式ハ

$$y+\frac{x}{m_3}=p\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_1m_2m_3}\right)\cdots\cdots(6)$$

(5), (6), (7)ヨリ垂心ノ座標ハ

$$x=-p,\quad y=p\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}+\frac{1}{m_1m_2m_3}\right)$$

ヨツテ垂心ハ常ニ準線 $x=-p$ ノ上ニアリ。

11. 拋物線ノ二ツノ切線ガ其軸トナス角ヲ θ, θ' トスレバ

1°. 積 $\sin\theta, \sin\theta'$ ガ一定ナラバ切線ノ交點ノ軌跡ハ焦點ヲ中心トスル圓ナリ。

2°. 積 $\mathrm{tna}\,\theta, \tan\theta'$ ガ一定ナラバ切線ノ交點ノ軌跡ハ軸ニ垂直ナル直線ナリ。

3°. $\cot\theta+\cot\theta'$ ガ一定ナラバ切線ノ交點ノ軌跡ハ軸ニ平行ナル直線ナリ。

4°. $\cot\theta-\cot\theta'$ ガ一定ナラバ切線ノ交點ノ軌跡ハ元ノ拋物線ナリ。

12. 軸ノ延長上ニアラザル點ヨリハ拋物線ニ等長ノ切線ヲ引クコトヲ得ズ。之ヲ證セヨ。

解　一點 (x', y') ヨリ引ク切線ノ方向係數ハ八十六節ニヨリ

$$m^2x'-my'+p=0$$

ノ二ツノ根ニテ與ヘラル。

今二ツノ根ヲ m_1, m_2 トスレバ

$$m_1+m_2=\frac{y'}{x'},\quad m_1m_2=\frac{p}{x'}\cdots\cdots(1)$$

又二ツノ切線ノ切點ヲ結ブ直線ハ點 (x', y') ノ極線ニシテ其方程式ハ

$$yy'=2p(x+x')$$

而シテ二ツノ切線ガ等長ナル爲ニハ極線ト切線トノナス角ハ相等シカルベシ。

故ニ

$m_2 > m_1$

$$\frac{\dfrac{2p}{y'}-m_1}{1+\dfrac{2pm_1}{y'}}=\frac{m_2-\dfrac{2p}{y'}}{1+\dfrac{2pm_2}{y'}}$$

分母ヲ拂ヒ(1)ヲ代入シテ簡單ニスレバ

$$4py'x'-y'^3=0$$

即チ

$$y'=0 \quad 又ハ \quad y'^2-4px'=0$$

即チ拋物線ノ軸ノ上ノ點ナルカ又ハ拋物線ノ上ノ點ナラザルベカラズ。然ルニ拋物線ノ上ノ點ナラバ二ツノ切線ハ合シテ一ツトナル。故ニ等長ナル切線ヲ引キ得ル爲ニハ拋物線ノ軸ノ上ノ點ナラザルベカラズ。

13. 任意ノ點ヨリ拋物線ニ三本ヨリ多クノ法線ヲ引クコト能ハザルコトヲ證セヨ。

解　法線ガ x 軸ト爲ス角ノ正切ヲ m トスレバ八十二節ニヨリ，法線ノ方程式ハ

$$pm^3+2pm-mx+y=0$$

コレ法線ノ方向係數 m ヲ定ムベキ三次ノ方程式ナリ。ヨツテ一般ニハ三ツノ法線アリ。

但シ點ガ x 軸上ニアリトシ，其座標ヲ $(h, 0)$ トスレバ

$$pm^3+2pm-mh=0$$

故ニ m ノ一ツノ値ハ零ナリ。即チ x 軸ソノモノハ法線ナリ。又 m ノ他ノ二ツノ値ハ實數ナル爲ニハ

$$h>2p$$

ナルヲ要ス。カヽル場合ハ三本ノ法線アリ。然レドモ

$$h<2p$$

ナラバ一本ノ法線アルノミナリ。

14. 拋物線上ノ三ツノ點ニ於ケル法線ガ一點ニ會スルナラバ，其三ツノ點ニテ作ラルヽ三角形ノ重心ハ拋物線ノ軸ノ上ニアルコトヲ證セヨ。

15. 拋物線ニ引クニツノ法線ガ x 軸トナス角ノ和ガ直角ナル時，

之等ノ法線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 八十二節ニヨリ法線ノ方向係數ヲ定ムベキ方程式ハ

$$pm^3+2pm-mx+y=0,$$

今一ツノ法線ノx軸トナス角ヲθトスレバ他ノ法線ノx軸トナス角ハ$90°-\theta$ナリ。故ニ

$$m'=\tan\theta,$$

$$m''=\tan(90°-\theta)=\cot\theta,$$

故ニ

$$p\tan^3\theta+2p\tan\theta-x\tan\theta+y=0 \cdots\cdots(1)$$

$$p\cot^3\theta+2p\cot\theta-x\cot\theta+y=0 \cdots\cdots(2)$$

(1), (2) ヨリθヲ消去スレバ

$$y^2=p(x-p)$$

コレ求ムル軌跡ナリ。

16. 抛物線ノ焦點ヨリ其法線ノ上ニ下シタル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。 (明治四十一年文檢)

17. 抛物線$y^2=4px$ノ上ニアル三ツノ點(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)ニテ作ラル丶三角形ノ面積ハ

$$\frac{1}{8p}\left|(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)\right|$$

ナルコトヲ證セヨ。

解 三角形ノ面積ハ

$$\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

然ルニ

$$x_1=\frac{y_1^2}{4p}, \quad x_2=\frac{y_2^2}{4p} \quad x_3=\frac{y_3^2}{4p}$$

ナルヲ以ツテ上ノ行列式ニ代入スレバ求ムル結果ヲ得。

18. 抛物線ノ三ツノ切線ニテ作ラレタル三角形ノ面積ト其等ノ切點ヲ頂點トスル三角形ノ面積ノ比ヲ求メヨ。

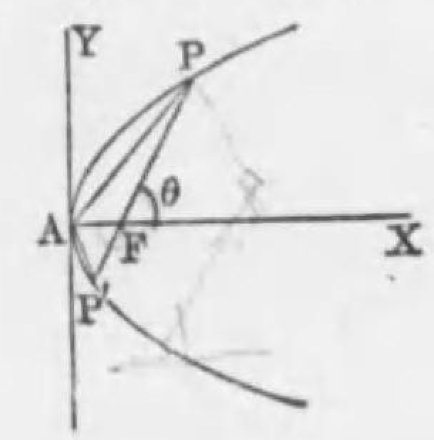
(明治三十四年文檢)

19. 抛物線ガ一ツノ圓ト四ツノ點ニテ交ル時,軸ノ一方ニアル交點ノy座標ノ和ト他方ニアル交點ノy座標ノ和トハ絕對値ヲ等シクスルコトヲ證セヨ。

20. 抛物線$y^2=4px$ノ主頂點ヲA, 焦點ヲF, 焦點ヲ過ル任意ノ弦ヲPFP′トスレバ三角形PAP′ノ面積ハ弦ノ長サノ平方根ニ比例スルコトヲ證セヨ。

解 焦點弦PFP′ガx軸トナス角ヲθトスレバ九十六節ニヨリ

第百三圖



$$FP=\frac{2p}{1-\cos\theta}$$

$$FP'=\frac{2p}{1-\cos(\theta+\pi)}=\frac{2p}{1+\cos\theta}$$

故ニ

$$FP+FP'=\frac{4p}{1-\cos^2\theta}=\frac{4p}{\sin^2\theta}$$

又焦點弦PFP′ノ方程式ハ

$$y=\tan\theta(x-p)$$

ヨツテ頂點ヨリ此直線ヘノ距離ハ

$$\frac{p\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=p\sin\theta$$

故ニ三角形PAP′ノ面積ハ

$$\frac{1}{2}\ \frac{4p}{\sin^2\theta}p\sin\theta=\sqrt{\frac{4p}{\sin^2\theta}}p\sqrt{p}$$

然ルニPP′ノ長サハ$\frac{4p}{\sin^2\theta}$ナリ。故ニ三角形PAP′ノ面積ハ弦PP′ノ長サノ平方根ニ比例ヲナス。

21. 抛物線ノ焦點Fニ於テ直交スル二ツノ直線AF, BFガ抛物線ト交ル點ヲA及ビBトス。A及ビBニ於ケル切線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。 (大正元年文檢)

22. 一點Pヨリ與ヘラレタル抛物線ニ引キタル三ツノ法線ノ足ヲ頂點トスル三角形ノ重心ハ元ノ抛物線上ニアル時Pノ軌跡ヲ求メヨ。

23. 與ヘラレタル長サノ通徑ヲ有スル抛物線ガ一定ノ他ノ抛物線ト同一圓周上ニアル四ツノ點ニ於テ交ル時コノ圓ノ中心ノ

軌跡ヲ求ム。 (大正五年文檢)

24. 拋物線ノ互ニ直角ヲナス法線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

(明治三十五年文檢)

解 法線ガ x 軸トナス角ノ正切ヲ m トスレバ其方程式ハ八十二節ニヨリ

$$pm^3+2pm-mx+y=0$$

即チ

$$m^3+\frac{2p-x}{p}m+\frac{y}{p}=0,$$

m ノ三ツノ根ヲ夫々 m_1, m_2, m_3 トスレバ

$$m_1+m_2+m_3=0 \cdots\cdots (1)$$

$$m_1m_2+m_2m_3+m_3m_1=\frac{2p-x}{p} \cdots\cdots (2)$$

$$m_1m_2m_3=-\frac{y}{p} \cdots\cdots (3)$$

而シテ假設ニヨリ二ツノ法線ハ直交スルガ故ニ

$$m_1m_2=-1 \cdots\cdots (4)$$

(1), (2), (3) 及ビ (4) ヨリ m_1, m_2, m_3 ヲ消去スレバ

$$y^2=p(x-3p)$$

コレ求ムル方程式ニシテ一ツノ拋物線ナリ。

25. AB, CD ハ圓ノ垂直ナル二ツノ直徑ナリ。A ヲ過ル弦 AF ガ CD ト交ル點ヲ E トシ, E ヲ過リテ AB ニ平行ナル直線ヲ引キ FB トノ交點ヲ P トスル時, P ノ軌跡ヲ求メヨ。

26. 拋物線ノ一ツノ徑ノ延長上ノ二ツノ點ヨリ二組ノ切線ヲ引ク時, 一組ノ切線ノ方向係數ヲ m_1, m_2 トシ他ノ一組ノ方向係數ヲ n_1, n_2 トスレバ

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}$$

ナルコトヲ證セヨ。

解 一ツノ徑ノ延長上ノ二ツノ點ノ y 座標ハ等シキガ故ニ $P(x_1, y_1)$ $Q(x_2, y_1)$ トス。

x 軸トナス角ノ正切ガ m ナル時, 切線ノ方程式ハ

$$y=mx+\frac{p}{m}$$

コノ切線ガ P ヲ過ル爲メニ

$$y_1=mx_1+\frac{p}{m}$$

分母ヲ拂ヒテ

$$m^2x_1-my_1+p=0 \cdots\cdots (1)$$

故ニ

$$m_1+m_2=\frac{y_1}{x_1} \quad m_1m_2=\frac{p}{x_1}$$

從ツテ

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=\frac{y_1}{p}$$

同樣ニ Q ヲ過ル切線ニ就キテハ

$$n^2x_2-ny_1+p=0 \cdots\cdots (2)$$

ニシテ

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}=\frac{y_1}{p}$$

故ニ

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}$$

27. 拋物線 $y^2=4px$ ノ上ニアル一點 P ニ於ケル法線ガ再ビ拋物線ト交ル點ヲ Q トシ, 焦點 F ヨリ P マデノ距離ヲ r トシ, F ヨリ P ニ於ケル切線マデノ距離ヲ d トスレバ

$$PQ=\frac{4dr}{r-p}$$

ナルコトヲ證セヨ。

28. 拋物線ノ上ノ三ツノ點 P, Q, R ノ y 座標ガ等比級數ヲナス時ハ, P, R ニ於ケル切線ハ Q ヲ通ル縱線ノ上ニテ交ルコトヲ證セヨ。

29. 拋物線上ノ二ツノ點 (x', y'), (x'', y'') ニ於ケル切線ノ交點ヲ (x_1, y_1) トシ, 法線ノ交點ヲ (x_2, y_2) トスレバ

1°. $x_1=\frac{y'y''}{4p}$, $y_1=\frac{y'+y''}{2}$

2°. $x_2=2p+\frac{y'^2+y'y''+y''^2}{4p}$, $y_2=-y'y''\frac{y'+y''}{8p^2}$

ナルコトヲ證セヨ。

30. 拋物線ノ弦ノ兩端ヲ頂點ニ結ブ時, 互ニ直交ナル時ハ之等ノ弦ノ極ハ y 軸ニ平行ナル一ツノ直線上ニアルコトヲ證セヨ。

31. 拋物線ノ上ニ中心ヲ有シ，焦點ヲ過ル圓ハ必ズ準線ニ切スルコトヲ證セヨ。

解　拋物線ヲ $y^2=4px$ トシ，其上ノ點ヲ (x', y') トスレバ焦點トノ距離ノ平方ハ

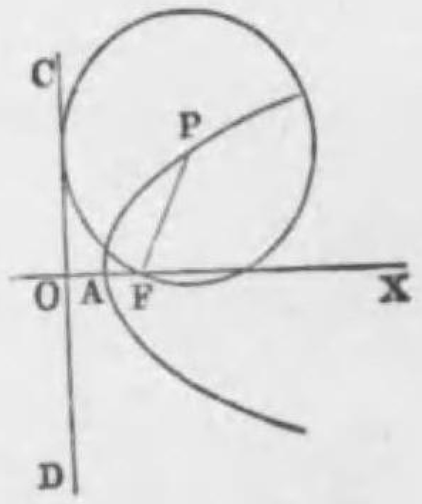
$$(x'-p)^2+y'^2$$

故ニ點 (x', y') ヲ中心トシ焦點ヲ過ル圓ノ方程式ハ

$$(x-x')^2+(y-y')^2=(x'-p)^2+y'^2$$

コノ圓ト準線

第百四圖



$$x=-p$$

トノ交點ハ $y'^2=4px'$ ナルコトニ注意スレバ重レル二ツノ點 $(-p, y')$ ナリ。故ニ證セラレタリ。

32. 二ツノ曲線 $y^2=2cx-x^2$, $y^2=4px$ ニ共通ナル四ツノ弦ノ方程式ヲ求メヨ。

解　與ヘラレタル二ツノ曲線ノ交點ヲ過ル曲線ノ方程式ハ

$$y^2-2cx+x^2+k(y^2-4px)=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

此曲線ハ直線ヲ表ハス爲ニハ四十一節ノ公式ニヨレバ

$$(c+2kp)^2(1+k)=0$$

故ニ

$$k=-1 \text{ 又ハ } k=-\frac{c}{2p}$$

コレ等ノ k ノ値ヲ(1)ニ代入スレバ

$$x=0,\ x=2(c-2p)$$

$$y=\sqrt{\frac{2p}{c-2p}}x,\quad y=-\sqrt{\frac{2p}{c-2p}}x$$

カクシテ四ツノ弦ノ方程式ヲ得タリ。

33. 拋物線ニ二ツノ切線 PQ, PQ′ ヲ引キ其交點 P ヨリ直線 PABC ヲ引キ曲線ト A, C ニテ交リ弦 QQ′ ト B ニテ交ラシムル時ハ線分 PA, PB, PC ハ調和級數ヲナス。

34. 拋物線上ノ任意ノ點ヨリ頂點ニ於ケル切線ニ下セル垂線ノ足ヲ過リ其點ト頂點トヲ結ビ付クル弦ニ垂直ナル直線ハ一定點ヲ過ルコトヲ證セヨ。　(明治四十三年文檢)

35. 直線 $y=mx+b$ ガ曲線 $y^2=4dx$ ノ法線ナル爲ニハ m, b, d ノ間ニ如何ナル關係アルコトヲ要スルカ。　(大正十一年文檢)

36. 拋物線 $y^2=4px$ ニ於テ直線 $y=x$ ニ平行ナル弦ヲ二等分スル徑ノ方程式ヲ求メヨ。

解　$x=y$ ニ平行ナル弦ガ拋物線ノ軸トナス角ハ 45° ナルガ故ニ其正切ハ 1 ナリ。

故ニ九十一節(2)ニヨリ直チニ

$$y=2p$$

ヲ得。

37. 拋物線 $y^2=4px$ ニ於テ直線 $y=2x$ ニ平行ナル弦ヲ二等分スル徑ト直線 $y=3x$ ニ平行ナル弦ヲ二等分スル徑トノ距離ハ $\frac{p}{3}$ ナルコトヲ證セヨ。

38. 同ジ頂點及ビ軸ヲ共有スル拋物線ニ於テ軸ニ垂直ナル一ツノ直線ノ上ノ點ヲ極トスル各ノ曲線ノ極線ハ一定點ヲ過ルコトヲ證セヨ。

39. 直線 $y=mx+b$ ト拋物線 $y^2=4px$ トノ交點ヲ Q, R トシ，一點 P ノ座標ヲ (x', y') トス。PQ ト PR トガ直交スル爲ノ條件ハ

$$m^2(x'^2+y'^2)-(4p-2mb)x'-4pmy'+b^2+4pmb=0$$

ナルコトヲ證セヨ。

40. 同一ノ軸ヲ共有スル二ツノ相等シキ拋物線アリ。內ノ拋物線ノ上ノ一點 O ヨリ外ノ拋物線ニ二ツノ弦 POP′, QOQ′ ヲ引キ之等ヲシテ直交セシムレバ

$$\frac{1}{\mathrm{PO, OP'}}+\frac{1}{\mathrm{QO, OQ'}}$$

ハ常數ナルコトヲ示セ。

41. 拋物線 $y^2=4px$ ノ上ニ x 座標ハ 1:k ナルガ如キ二ツノ點ヲ取リ，切線ヲ作ラバ其交點ノ軌跡ハ此二點ガ軸ノ同ジ側ニアラバ

$$y^2=px(k^{\frac{1}{4}}+k^{-\frac{1}{4}})^2$$

ニシテ反對ノ側ニアラバ

$$y^2=-px(k^{\frac{1}{4}}-k^{-\frac{1}{4}})^2$$

ナルコトヲ證セヨ。

解 二ツノ點ガ軸ノ同ジ側ニアル時ノミニ就キテ解カンニ一ツノ點ノ座標ヲ x', y' トスレバ,他ノ一ツノ點ノ座標ハ kx', $\sqrt{k}y'$ ナリ。

故ニ之等ノ點ニ於ケル切線ハ

$$yy'=2p(x+x') \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\sqrt{k}yy'=2p(x+kx') \quad\cdots\cdots(2)$$

ヨツテ其交點ハ

$$x=\sqrt{k}x' \quad y=\frac{2px'}{y'}(1+\sqrt{k})$$

然ルニ點 (x', y') ハ拋物線ノ上ノ點ナルガ故ニ

$$y'^2=4px'$$

之等ヨリ x', y' ヲ消去スレバ求ムル軌跡トシテ

$$y^2=px\left(\sqrt{k}+2+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$=px(k^{\frac{1}{4}}+k^{-\frac{1}{4}})^2$$

ヲ得。

* **42.** 焦點ヲ原點トスル時ハ拋物線ノ切線ノ方程式ハ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha+\frac{p}{\cos\alpha}=0$$

ノ形トナルコトヲ示セ。

解 焦點 $(p, 0)$ ヲ原點トスレバ拋物線 $y^2=4px$ ハ

$$y^2=4p(x+p) \quad\cdots\cdots(1)$$

トナル。

今切線ノ方程式ヲヘつせノ正規方程式

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha+q=0$$

トスレバ

$$y=-\frac{q+x\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad\cdots\cdots(2)$$

(2) ヲ (1) ニ代入シ分母ヲ拂ヘバ

$$x^2\cos^2\alpha+x(2q\cos\alpha-4p\sin^2\alpha)+q^2-4p^2\sin^2\alpha=0$$

切線ナル爲ニハ判別式

$$D=(q\cos\alpha-2p\sin^2\alpha)^2-\cos^2\alpha(q^2-4p^2\sin^2\alpha)$$

ガ零ナルコトヲ要ス。

故ニ

$$q=\frac{p}{\cos\alpha}$$

ヨツテ一般ニ切線ノ方程式ハ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha+\frac{p}{\cos\alpha}=0$$

ノ形ヲナス。

43. 拋物線ト圓トノ四ツノ交點ニ於ケル拋物線ノ切線ガ,其軸トナス角ヲ夫々 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ トスレバ

$$\tan\frac{\theta_1}{2}\tan\frac{\theta_2}{2}\tan\frac{\theta_3}{2}\tan\frac{\theta_4}{2}=1$$

ナルコトヲ證セヨ。

* **44.** 拋物線ノ焦點 F ヲ極トシ,其軸ヲ原線トシ,角ヲ邊 FA ヨリ測ルモノトスレバ其極方程式ハ

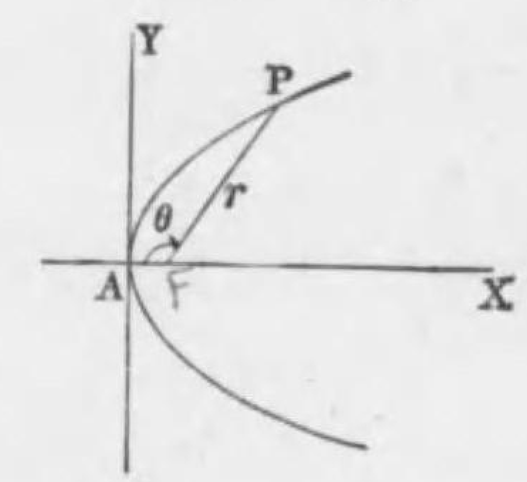
$$r=\frac{2p}{1+\cos\theta}$$

或ハ

$$r\cos^2\frac{\theta}{2}=p$$

ナルコトヲ示セ。

第百五圖



45. 拋物線 $r=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}$ ニ於テ偏角 2α ナル點ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$r\cos(\theta+\alpha)\cos\alpha=p$$

ナルコトヲ證セヨ。

* **46.** 拋物線 $r=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}$ ニ於テ x 軸ト $60°$ ヲナス焦點弦ノ長サハ $\dfrac{16}{3}p$ ナルコトヲ示セ。

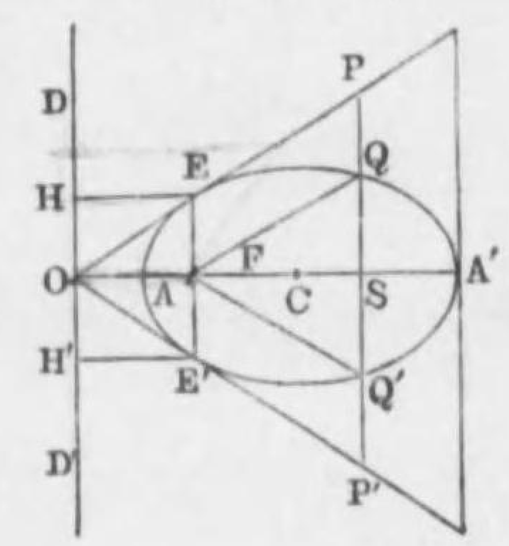
第八章

楕圓

99. 定義 楕圓トハ離心率eガ1ヨリモ小ナル二次曲線ナリ。(七十節參照)

楕圓ノ方程式ヲ求ムルニ先ダチ定規及ビこんぱすヲ以テ楕圓ヲ畫ク方法ヲ述ブベシ。

第百六圖



今Fヲ焦點, DD'ヲ準線トシ, eヲ1ヨリ小ナル定數ナリトス。

Fヲ過リ準線DD'ヘ垂線FOヲ引キOF及ビ其延長上ニ二ツノ點A, A'ヲトリ

$$AF : OA = e : 1$$
$$FA' : OA' = e : 1$$

ナラシムレバA及ビA'ハ求メントスル楕圓ノ上ノ點ナリ。

次ニOFニ垂線EFE'ヲ引キ其上ニ二ツノ點E, E'ヲ

$$FE : EH = FE : OF = e : 1$$
$$FE' : E'H' = FE' : OF = e : 1$$

ナル如クトラバE, E'モ亦求メントスル楕圓ノ上ノ點ナリ。

今OE, OE'ヲ作リ之ヲ延長ス。次ニAA'上ノ任意ノ點Sヲ過リ之ニ垂直ナル直線PSP'ヲ引キOE, OE'ト夫々P, P'ニテ交ラシムレバ

$$FE : OF = SP : OS = e : 1$$
$$FE' : OF = SP' : OS = e : 1$$

ナルガ故ニFヲ中心トシSP(或ハSP′)ニ等シキ長サヲ半徑トスル圓ヲ畫キ, SP, SP′ ニQ及ビQ′ ニテ交ラシムレバQ及ビQ′ハ求ムル楕圓ノ上ノ點ナリ。

コノ方法ヲ繰リ返シ用フレバ順次楕圓ノ上ノ點ヲ定ムルコトヲ得ベシ。

100. 定義　ニツノ點A, A′ヲ楕圓ノ頂點トイヒ,線分AA′ノ中點Cヲ楕圓ノ中心トイフ。

今中心Cヨリ焦點F及ビ點Oニ至ル距離ヲ求メンニAA′ノ長サヲ $2a$ トスレバ前圖ヨリ

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{FA'}}{\mathrm{OA'}}=\frac{e}{1}\cdots\cdots(1)$$

故ニ

$$\frac{\mathrm{AF+FA'}}{\mathrm{OA+OA'}}=\frac{2a}{2\mathrm{OC}}=\frac{e}{1}\cdots\cdots(2)$$

從ツテ

$$\mathrm{OC}=\frac{a}{e}\cdots\cdots(3)$$

又(1)ヨリ

$$\frac{\mathrm{FA'-AF}}{\mathrm{OA'-OA}}=\frac{\mathrm{AA'}-2\mathrm{AF}}{\mathrm{AA'}}=\frac{e}{1}$$

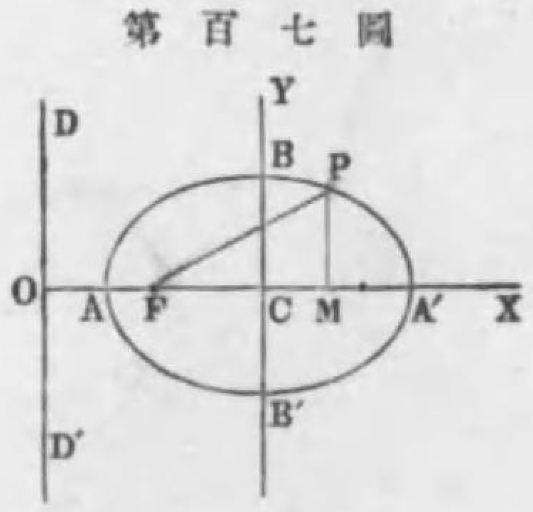
故ニ

$$\frac{2\mathrm{FC}}{\mathrm{AA'}}=\frac{e}{1}$$

從ツテ

$$\mathrm{FC}=ae.$$

第百七圖



101. 楕圓ノ方程式

F ヲ焦點, DD′ ヲ準線A, A′ ヲ頂點, Cヲ中心トシ, AA′ ヲ x 軸ニトリ, Cヲ過リ AA′ ニ垂直ナル直線ヲ y 軸ニトル。

今楕圓上ノ任意ノ一點ヲPトシ其座標ヲ x, y トス。

PF ヲ作リ PM, PD ヲ AA′ 及ビ DD′ ニ垂直ナリトシ, AA′ ノ長サヲ $2a$ トスレバ定義ニヨリ

$$\mathrm{FP}=e\mathrm{PD}$$

玆ニ e ハ1ヨリ小ナル定數トス。

故ニ

$$\mathrm{FP}^2=e^2\mathrm{PD}^2$$

卽チ

$$\mathrm{FM}^2+\mathrm{MP}^2=e^2\mathrm{OM}^2\cdots\cdots(1)$$

然ルニ

$$\mathrm{FM}=\mathrm{FC}+\mathrm{CM}=ae+x$$

$$\mathrm{OM}=\mathrm{OC}+\mathrm{CM}=\frac{a}{e}+x$$

$$\mathrm{MP}=y$$

故ニ(1)ハ

$$(ae+x)^2+y^2=e^2\left(\frac{a}{e}+x\right)^2$$

整頓スレバ

$$y^2=(1-e^2)(a^2-x^2)\cdots\cdots(2)$$

コレ楕圓ノ方程式ナリ。

102. 上ノ方程式ニ $x=0$ ト置カバ

$$y=\pm\sqrt{1-e^2}\,a$$

コレ線分 CB, CB′ ノ長サヲ示スモノニシテ共絕對値ハ相等シク共ニ a ヨリ小ナリ。之ヲ便宜上 $\pm b$ ニテ表ハセバ

$$1-e^2=\frac{b^2}{a^2}\cdots\cdots(3)$$

故ニ(2)ハ

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

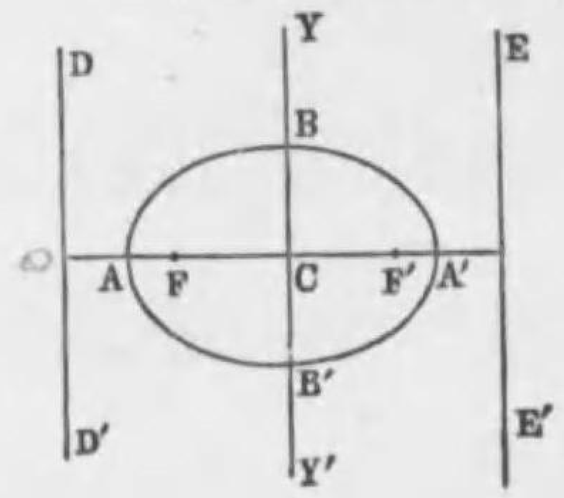
トナル。而シテ之ヲ書キ換フレバ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

トナル。之ヲ楕圓ノ對稱方程式又ハ標準ノ形式トイフ。

定義 線分 AA′, BB′ ヲ夫々楕圓ノ長軸,短軸トイヒ,其長サハ $2a$, 及ビ $2b$ ナリ

第百八圖



注意 百節ニヨレバ

$$\mathrm{OC}=\frac{a}{e}$$

$$\mathrm{FC}=ae$$

故ニ公式(4)ハ $\mathrm{F}(-ae, 0)$ ヲ焦點トシ, $x=-\frac{a}{e}$ 卽チ直線 DD′ ヲ準線トシタル楕圓ノ方程式ナリ。然レドモ y 軸ニ對シテ F ノ對稱點 $\mathrm{F}'(ae, 0)$ ヲ焦點トシ, DD′ ノ對稱直線 EE′ 卽チ $x=\frac{a}{e}$ ヲ準線トスルモ全ク同ジ方程式ヲ得ベシ。

例 1 楕圓ノ中心ヲ原點トシ,二ツノ軸ヲ座標軸ニトル時二ツノ點(2, 2), (3, 1)ヲ過ル楕圓ノ方程式ヲ求メヨ。

解 楕圓ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

ト置ケ。コノ楕圓ハ二ツノ與ヘラレタル點ヲ過ル爲ニハ夫々

$$\left.\begin{aligned}\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1,\\ \frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\end{aligned}\right\}$$

ヨツテ

$$a^2=\frac{32}{3} \qquad b^2=\frac{32}{5}$$

故ニ求ムル楕圓ノ方程式ハ

$$\frac{x^2}{\frac{32}{3}}+\frac{y^2}{\frac{32}{5}}=1$$

或ハ

$$3x^2+5y^2=32,$$

例 2. 焦點ヲ (f, g) トシ,直線 $ax+by+c=0$ ヲ準線トシ,離心率ヲ e トスル楕圓ノ方程式ヲ求メヨ。

解 楕圓ノ上ノ任意ノ點ノ座標ヲ x, y トスレバ,定義ニヨリ其點ト焦點及ビ準線マデノ距離ノ比ガ $e:1$ ナルガ故ニ

$$(x-f)^2+(y-g)^2:\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}=e^2:1$$

故ニ求ムル楕圓ノ方程式ハ

$$(x-f)^2+(y-g)^2=e^2\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$$

ナリ。

注意 上ノ方程式ニ適當ナル座標ノ變換ヲ施セバ百〇二節ニ示シタルガ如キ標準ノ形トナルコトハ後章述ブル所アベルシ。

103. 楕圓ノ形狀

楕圓ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トス。(1)ヨリ

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又ハ

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2)ヨリ x ガ $-a$ ヨリ a マデノ値ヲトル時ハ,之ニ對應スル y ノ二ツノ値ガ實數ニシテ其絕對値ガ相等シク,符號ハ相反ス。故ニ楕圓ハ x 軸ニ關シテ對稱ナリ。而シテ x ガ a ヨリモ大ナルカ,又ハ $-a$ ヨリモ小ナル時之ニ對應スル y ノ二ツノ値ハ共ニ虛數ナリ。換言スレバ x ノ絕對値ハ a ヨリモ大ナル部分ニハ曲線ナシ。

同様ニ y ガ $-b$ ヨリ b マデノ値ヲトル時ハ之ニ對應スル x ノ

二ツノ値ガ實數ニシテ共絕對値ガ相等シク,符號ハ相反ス。故ニ楕圓ハ y 軸ニ關シテ對稱ナリ。而シテ y ガ b ヨリモ大ナルカ,又ハ $-b$ ヨリモ小ナル時ハ之ニ對應スル x ノ二ツノ値ハ共ニ虛數ナリ。換言スレバ y ノ絕對値ガ b ヨリモ大ナル部分ニハ曲線ナシ。

今 x ガ $-a$ ナル時ハ y ノ二ツノ値ハ零ナリ。從ツテソノ點ニ於イテ x 軸ニ垂直ナル直線ハ楕圓ノ切線ナリ。次ニ x ガ $-a$ ヨリ零マデ漸次增加スルニ從ヒ y ノ絕對値モ漸次增加シ,x ガ零トナル時ハ y ノ二ツノ値ハ b 及ビ $-b$ ナリ。而シテ x ガ零ヨリ尙モ增加シテ a ニ至ルニ從ヒ y ノ絕對値ガ漸次減少シテ b ヨリ零ニ至ル。

但シ x ガ a ノ時ハ y ノ二ツノ値ハ共ニ零ナルガ故ニ其點ニ於イテ x 軸ニ垂直ナル直線ハ楕圓ノ切線ナリ。

又方程式(3)ヨリ y ガ b 又ハ $-b$ ナル時ハ x ノ二ツノ値ハ共ニ零ナルガ故ニ夫等ノ點ニ於イテ x 軸ニ平行ナル直線ハ何レモ楕圓ノ切線ナリ。

上ニ述ベシ所ニヨリ楕圓ハ凡テ有限ノ距離ニノミ存在シ,x 軸トハ二ツノ點 $(-a, 0)$, $(a, 0)$ ニ於テ交リ,y 軸トハ他ノ二ツノ點 $(0, b)$, $(0, -b)$ ニ於テ交リ且ツ之等ノ點ヲ過ル四ツノ直線

$$x=-a, \qquad x=a,$$
$$y=-b, \qquad y=b$$

ハ共ニ切線ナリ。

又點 (x', y') ハ楕圓ノ上ニアル時ハ點 $(-x', -y')$ モ亦楕圓ノ上ニアルコトハ方程式(1)ニヨリ明カナリ。ヨツテ楕圓ハ x 軸,y 軸ニ關シテ對稱ナルト共ニ點 C ニ關シテモ對稱ナリ。コレ C ヲ楕圓ノ中心ト稱スル所以ナリ。

注意 楕圓ノ方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ニ於テ a ト b トハ相等シキ時ハ此方程式ハ

$$x^2+y^2=a^2$$

トナルガ故ニ,原點 C ヲ中心トシ,a ヲ半徑トスル圓ナリ故ニ圓ハ楕圓ノ格段ナルモノナリ。

104. 定義　楕圓ノ通徑トハ焦點ヲ過リ長軸ニ垂直ナル直線ガ楕圓ノ內部ニアル部分ヲイフ。

今通徑ノ長サヲ求メンニ焦點ノ x 座標ハ ae 又ハ $-ae$ ナルガ故之等ノ何レカヲ方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ニ代入スレバ

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-a^2e^2)=b^2(1-e^2)=\frac{b^4}{a^2}$$

ヨツテ通徑ノ長サヲ $2p$ ニテ表ハセバ

$$2p=\frac{2b^2}{a}$$

書キ換フレバ

$$2a:2b=2b:2p$$

故ニ通徑ハ長軸及ビ短軸ノ第三比例項ナリ。

105. 楕圓ノ第二ノ定義

楕圓ノ上ノ任意ノ點 P ノ座標ヲ x, y トセヨ,焦點 F トヲ結ブ線分 PF ノ平方ハ

第百九圖

$$\begin{aligned}PF^2&=(-ae-x)^2+y^2\\&=(ae+x)^2+y^2\\&=(ae+x)^2+\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right)\end{aligned}$$

然ルニ百〇二節(3)ニヨリ

$$a^2=a^2e^2+b^2$$

故ニ

$$PF^2=a^2+2aex+e^2x^2=(a+ex)^2$$

從ツテ

$$PF=a+ex,$$

同様ニ

$$PF'=a-ex,$$

故ニ

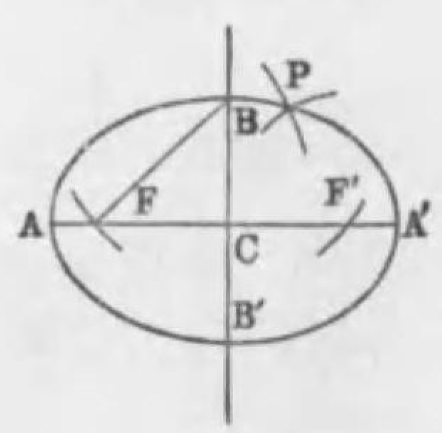
$$PF+PF'=2a$$

ヨツテ楕圓ハ又焦點ヨリノ距離ノ和ガ定長ナルガ如キ點ノ軌跡ナリトイフコトヲ得。コレ楕圓ノ第二ノ定義ナリ。

106. 第二ノ定義ニ從ヘバ,長軸ノ長サ(2a)及ビ短軸ノ長サ(2b)ヲ與ヘテ楕圓ヲ幾何學的ニ作圖スルコトヲ得。今ソノ方法ヲ述ブベシ。

1°. x 軸, y 軸ヲ設ケ原點ヲ C トス, C ガ中點ナルヤウ線分 $2a$, $2b$ ヲ二ツノ軸ノ上ニトリ,其端點ヲ夫々 A A', B B' トス。

第百十圖



B ヲ中心トシ a ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ,長軸トF, F' ニテ交ラシムレバ夫等ノ點ハ楕圓ノ焦點ナリ。

何トナレバ直角三角形 FCB ニ於テ CF ノ長サヲ x トスレバ

$$x^2=a^2-b^2$$

然ルニ百〇二節ニヨレバ

$$1-e^2=\frac{b^2}{a^2}\ 從ツテ\ a^2-b^2=e^2a^2$$

ヨツテ

$$x=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\pm ea$$

故ニ二ツノ點 F, F' ハ求メントスル楕圓ノ焦點ナリ。

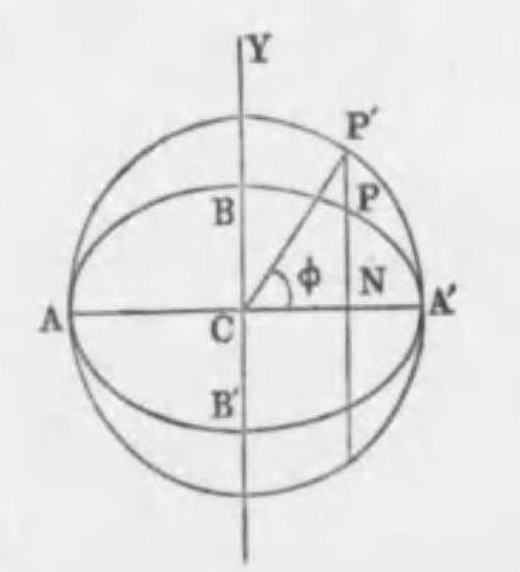
2°. F ヲ中心トシ FA ヨリハ大ニシテ FA' ヨリモ小ナル長サヲ半徑トスル圓ヲ畫キ,次ニ F' ヲ中心トシ $2a$ ヨリ前ノ半徑ヲ減ジタル長サヲ半徑トスル圓ヲ畫キ,其交點ヲ P トスレバ P ハ楕圓上ノ一點ナリ。

3°. 2° ノ方法ヲ繰リ返シテ用フル時ハ順次楕圓上ノ多クノ點ヲ得。

注意　1° ニテ二ツノ焦點 F, F' ヲ定メタル後長サ $2a$ ナル絲ノ兩端ヲ之等ノ點ニ結ビ付ケ,鉛筆ノ端ニテ絲ヲ張リツツ紙面ニ沿フテ動カス時ハ鉛筆ノ端ハ F, F' ヲ焦點トスル楕圓ヲ畫クベシ。

107. 楕圓ト圓トノ關係

第百十一圖



百〇三節ニ於テ圓ガ楕圓ノ格段ナルモノナリト述ベタリシガ今少シク深ク其關係ヲ究メンニ原點ヲ同ジクスル楕圓及ビ圓ノ方程式ヲ夫々

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$x^2+y^2=a^2$$

トスレバ,之等ハ二ツノ點 A, A' ニテハ相切スベシ。ソハ A 及ビ A' ニ於テハ切線 $x=a$, 又ハ $x=-a$ ヲ共有スレバナリ。

次ニ長軸 AA' ノ上ニ任意ノ點 N ヲトリ,其座標ヲ x, 0 トシ,コノ點ヲ過リ AA' ニ垂直ナル直線ヲ引キ,楕圓トP, 圓トP' ニ

テ交ラシメ

$$NP' = y'$$

ト置ケバ楕圓ノ方程式ヨリ

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

圓ノ方程式ヨリ

$$y'^2 = a^2 - x^2$$

ヨツテ

$$y : y' = NP : NP' = b : a$$

此關係ハ長軸 AA′ ノ上ニテハ如何ナル位置ニ N ヲトルモ成立スベシ。故ニ楕圓ハ圓ヲ x 軸ノ方向ニ $b:a$ ノ比ニテ縮メタルモノナリ。

系 五十四節ニ於テ圓周上ノ點ノ位置ヲ唯一ツノ變數卽チ角 P′CN ヲ以テ示シ得ルコトヲ說明セシガ,楕圓ノ上ノ點 P ノ位置モ亦唯一ツノ變數卽チ角 P′CN ヲ以テ示スコトヲ得。

今 P ノ座標ヲ x, y トシ, 角 P′CN ヲ ϕ トスレバ

$$x = CN = CP'\cos\phi = a\cos\phi \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$y = NP = NP'\frac{NP}{NP'} = CP'\sin\phi\frac{NP}{NP'} = a\sin\phi\frac{b}{a} = b\sin\phi \cdots\cdots\cdots (2)$$

(1)及ビ(2)ハ楕圓ノ上ノ任意ノ點ノ座標ヲ一ツノ變數 ϕ ノミニテ表ハシタルモノナリ。

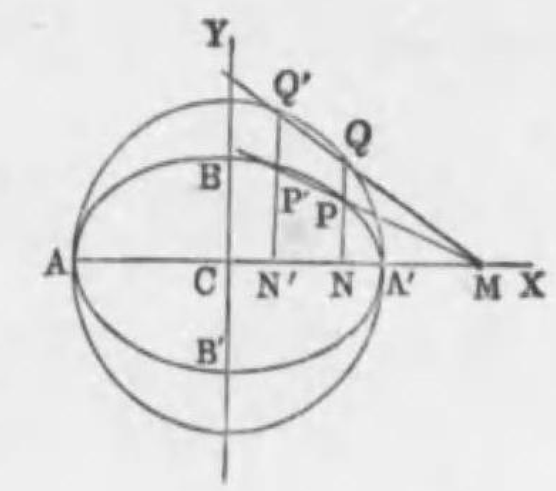
注意 (1),及ビ(2)ヨリ ϕ ヲ消去スレバ百〇二節公式(4)ヲ得ベシ。

定義 角 P′CN ヲ楕圓ノ上ノ點 P ノ離心角トイヒ AA′ ヲ直徑トスル圓ヲ楕圓ノ補助圓トイフ。

例 離心角ガ與ヘラレタル楕圓ノ上ノ二ツノ點ヲ結ブ直線ノ方程式ヲ求メヨ。

解 楕圓ノ上ノ二ツノ點ヲ P, P′ トシ,離心角ヲ夫々 ϕ, ϕ' トスレバ二點ノ座標ハ

第百十二圖



$$(a\cos\phi,\ b\sin\phi)$$

$$(a\cos\phi',\ b\sin\phi')$$

ナリ。故ニ之等ヲ結ビ付ケル直線ノ方程式ハ

$$y - b\sin\phi = \frac{b\sin\phi' - b\sin\phi}{a\cos\phi' - a\cos\phi}(x - a\cos\phi)$$

$$= \frac{-b}{a}\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\phi+\phi')}{\sin\frac{1}{2}(\phi+\phi')}(x - a\cos\phi)$$

卽チ

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\phi+\phi'}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\phi+\phi'}{2} = \cos\phi\cos\frac{\phi+\phi'}{2}$$

$$+\sin\phi\sin\frac{\phi+\phi'}{2}$$

$$= \cos\frac{\phi-\phi'}{2}$$

ヨツテ求ムル直線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\phi+\phi'}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\phi+\phi'}{2} = \cos\frac{\phi-\phi'}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ナリ。

注意 P, P′ ニ對應スル補助圓ノ上ノ點ヲ Q, Q′ トスレバ,其座標ハ夫々

$$(a\cos\phi,\ a\sin\phi),\quad (a\cos\phi',\ a\sin\phi')$$

ナルガ故之等ヲ結ビ付クル直線ノ方程式ハ

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\phi+\phi'}{2} + \frac{y}{a}\sin\frac{\phi+\phi'}{2} = \cos\frac{\phi-\phi'}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1)及ビ(2)ニ $y=0$ ト置カバ x ノ値ガ相等シ。故ニ直線 PP′ 及ビ QQ′ ハ x 軸ノ上ニテ相會ス。

108. 直線ト楕圓トノ交點

直線ノ方程式ヲ

$$y=mx+c \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トシ，楕圓ノ方程式ヲ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

卽チ

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

トスレバ，交點ノ座標ハ之等ヲ聯立方程式トシタル時ノ根ナリ。

(1)ノ y ノ値ヲ(2)ニ代入スレバ

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2ma^2cx+a^2(c^2-b^2)=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

コノ方程式ハ x ニ就キテ二次ナルガ故ニ交點ハ一般ニハ二ツアリ。

詳シクイヘバ(3)ノ判別式

$$D=a^2b^2(m^2a^2+b^2-c^2)$$

ガ正ナルカ，零ナルカ又ハ負ナルカニ從ヒ，二ツノ實ナル交點，二ツノ合シタル交點又ハ二ツノ虛ナル交點ヲ得。

故ニ若シ

$$m^2a^2+b^2=c^2$$

卽チ

$$c=\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}$$

ナル時ハ，(1)ハ楕圓ノ切線ニシテ，其方程式ハ

$$y=mx+\sqrt{m^2a^2+b^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

及ビ

$$y=mx-\sqrt{m^2a^2+b^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

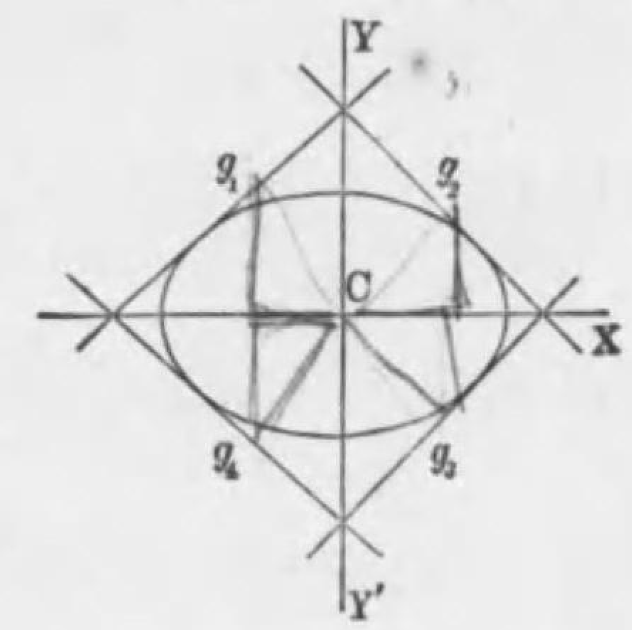
ニシテ，(4)ハ中心ヨリ上部ニ於テ y 軸ヲ截リ，(5)ハ中心ヨリ下部ニ於テ y 軸ヲ截リ而カモ互ニ平行ナリ。

例　楕圓ノ二ツノ軸ヲ截リ取ル截片ガ相等シキ切線ノ方程

式ヲ求メヨ。

解　x 軸ヲ中心Cヨリ左方ニ於テ截リ，y 軸ヲ中心Cヨリ上方ニ於テ截リ，而カモ其截片相等シキ切線ノ方向係數ハ1ナリ。

第百十三圖



故ニ其方程式ハ公式ニヨリ

$$y=x+\sqrt{a^2+b^2}$$

ニシテ，圖ニ於ケル直線 g_1 コレナリ。

又 x 軸ヲ中心ヨリ右方ニ，y 軸ヲ上方ニ於テ截リ而カモ其截片相等シキ切線ノ方向係數ハ -1 ナリ。故ニ其方程式ハ公式(5)ニヨリ

$$y=-x+\sqrt{a^2+b^2}$$

ニシテ圖ニ於ケル直線 g_2 コレナリ。

全ク同様ニシテ切線 g_3 ノ方程式ハ

$$y=x-\sqrt{a^2+b^2}$$

ニシテ，切線 g_4 ノ方程式ハ

$$y=-x-\sqrt{a^2+b^2}$$

ナリ。

109. 楕圓ノ焦點ヨリ切線ニ下ス垂線ノ足ノ軌跡

楕圓ノ切線ノ方程式ヲ

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トスレバ，一ツノ焦點 F'$(ae, 0)$ ヨリ之ニ下ス垂線ノ方程式ハ

$$y=-\frac{1}{m}(x-ae)$$

卽チ

$$my=-x+ae \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$