泰和匡文濤編譯

微積分學講義

上海商務印書館出版

微積分學講義

序

癸卯之夏、鄙人從吾邑張撰玉先生習極大極小問題。始知微積之爲用大矣。爾後酷嗜斯學。日取李譯拾級、逐題推演。華譯溯源。仿解丁崇煇之於代數術。亦補詳式。適是年周藩君拾級詳草出版。故演草束諸高閣。而所補溯源之詳式。強半散諸友人。繼攻潘謝譯述之微積學、晦者明之、略者詳之。所列問題。一一爲之解答。共成三大册。呈諸林提學開謩蒙賜序言、許與世之疇人相商榷。適見某書室有該全草出版之預告。又不果。今承乏江右高等師範學校數學一席、教授理化本部微積學。參攷各書。不下數十種。寸有所長。尺有所短。未便妄下批評而根津千治所著之微分學積分學二講義。簡而賅、略而當。新穎可愛。特點甚多故特迻譯。以公同好。但鄙人和文程度甚淺、學力時日。均屬有限、訛謬之處。自知不免。尚望博雅君子有以正之、幸甚

民國四年一月　泰和匡文濤序於江右高等師範學校

微分學講義原緒言

著者當起本書之稿時。本期作一通俗易解之微分講義。此非今日最要求者乎。而此事之難。實有出乎意料以外者。故作稿愈多。而自歎力微亦愈甚。顧是爲之。遂成此書。

理論缺嚴密。在本書趣旨固爲當然。而又不能斂跡之者。則著者之病也。例如「無限制之大」。不能安於「無限大」。故作「比甚大數更大」。又深慮甚大云云之觀念。人各不同。且恐「比任何大數更大」一語。更不透徹。故終作「比任何數更大之數曰無限大」。以爲界說。諸如此類。均與通俗易解之旨。互相背馳。

雖然。反覆思之。是非高等數學之一端乎。世之習高等數學者。如此之點。稍注意焉。則著者之所切望也。

微分學之本體。唯在研究微分法及由微分法所得之微係數。級數及極大極小等。不過局之應用。倘僅欲知微分及微係數之所謂 $\frac{dy}{dx}$ 者。則讀本書最初四編足矣。

際今日文運駸進之盛。國文自有之微積分書亦屬不少。先輩所著。固無俟推讚。然即予拙著之一小册。亦自有其特色在。此可自信者也。

本書級數一編。如普通德人之書。就不與代數重複之範圍內。自收斂之檢定說起。又平面曲線上微分之應用。常例置諸微分學之後。而本書則更列舉著名之平面曲線一編。以爲曲線追跡之例。並記其應用最廣之性質之一端者。殆亦本書之特色歟.

編幅之限制與著者之習慣。往往不知不覺。混入於省筆略算之處不少。法學專家語及「債權者」「債務者」時。常告吾人。謂以「權」爲甲以「務」爲乙而直譯之。則大意瞭然。由是觀之。數學本爲專門。今強稱爲通俗或實爲不可能之事歟.

讀者諸君。倘因拙著而微有所獲。則著者至以爲榮也。

明治四十四年夏　　　　根津千治識

積分學講義原緒言

本書係繼本叢書之微分學。而以簡明方法。講述積分學及其應用者也。

因之本書往往避嚴密之理論。而致力於幾何學力學等之應用方面。且於彼特種之定積分等。多從省略。而於微分方程式。記述特詳。此即其第一事實也。

曲面及空間曲線之應用。其於微分學中所遺略者。均論及之。微分方程式問題中。多舉力學問題。其中如解追跡曲線惑星運動等。則亦本書所自負之一端也。又最後設變分法一章。論述極小回轉面及最速落著線者。亦信其於斯學研究上稍有裨益故也。

本書於先輩著書。多所採擇。固不待言。

讀者諸君。因拙著而獲得積分學之要領。則本書至以爲榮也。

明治四十四年　　根津千治識

微積分學講義目次

上卷　微分學

前篇　本論

第一章　緒論

第二章　微分法

第三章 累次微分法

第四章 偏微分法

第五章 級數

第六章　不定形

第七章　函數之極大極小

後篇　平面曲線之應用

第八章　平面曲線總論

第九章 平面曲線各論

下卷 積分學

前篇 本論

第一章 積分學之基礎

第二章 不定積分

第三章 關於定積分之定理

第四章 重積分

後篇 曲線曲面等之應用

第五章 平面圖形

第六章 曲面

第七章 空間曲線

續篇 微分方程式

第八章 第一階微分方程式

第九章 第二階微分方程式

第十章 變分法

GREEK ALPHABET

WITH

PRONUNCIATIONS

Α	α	Alpha	阿爾法
Β	β	Beta	比達
Γ	γ	Gamma	敢麻
Δ	δ	Delta	笛爾達
Ε	ε	Epsilon	耶皮西倫
Ζ	ζ	Zeta	者達
Η	η	Eta	耶達
Θ	θ	Theta	底達
Ι	ι	Iota	愛阿達
Κ	κ	Kappa	卡扒
Λ	λ	Lambda	郎姆塔
Μ	μ	Mu	繆
Ν	ν	Nu	紐
Ξ	ξ	Xi	耶格洒
Ο	ο	Omicron	阿米可倫
Π	π	Pi	排
Ρ	ρ	Rho	鑼
Σ	σ, ς	Sigma	西格馬
Τ	τ	Tau	橢
Υ	υ	Upsilon	亞皮西倫
Φ	φ	Phi	腓
Χ	χ	Chi	啓
Ψ	ψ	Psi	撲洗
Ω	ω	Omega	阿蔑嘉

微積分學講義

上卷微分學

前篇 本論

第一章 緒論

1. 數之分類。

數數時稱爲幾個幾個之數曰正整數。施四則之運算於正整數時。爲包括例外起見。再設負整數及分數(以0約之數尙省略)

正整數與負整數及分數。總稱之曰有理數(*Rational number*)。

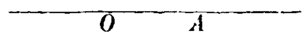
由次於四則運算之開方法。又不得不設不盡根數及虛數(*Imaginary number*)。

其他如圓周率π亦爲不盡數。因該數以小數表之。只能表其近似值。故云不盡。

實則不盡數含不盡根數)者。可作得一分數(小數係其特別者)與此數之差。能比任何數更小之數之謂也。

不盡數一稱無理數(*Irrational number*)。有理數與無理數。總稱之曰實數(*Real number*)。與此對待之數爲虛數。而在高等數學。於實數虛數以外。殆無導入新種類數之必要。然則實數虛數。於現今爲最廣義之數也。

於一直線上取一點O。規定線分AO之他端A。為與一實數a相對應之點。則



凡實數皆得令與直線之點相對應。又直線上之一切點。皆得令與實數相對應。

此解析學與幾何學相關連之第一步也。直線上之點有連續性(*Continuity*)。同時實數亦有連續性。

以直線上之點表實數時。其定點O稱原點(*Origin*)。又$a=1$。則OA為一單位之長。因之OA規定適宜之單位。則就與實數x相對應之點P言之。OP之長必為單位之x倍。

此等規約。以下略而不言。

[注意] 數之分類。為最有興味之基礎數學之一分科。其精密之研究。應取*Stolz*, *Hankel*, *Dedekind*等所著之書觀之。

2. 變數及常數。

於一事件。某量(*Quantity*)得以數表之。其所表之數名為其量之數值(*Numerical value*)。數值之研究。乃以該事件為數學之一問題者也。然攷其事件之進行。則其數值於進行中。可分為變與不變二種。

其變者曰變數(*Variable*)。不變者曰常數(*Constant*)。

通常表此等之記號

在變數用$x, y, z, \ldots\ldots;\ \xi, \eta, \epsilon, \ldots\ldots$

在常數用$a, b, c, \ldots\ldots;\ \alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$

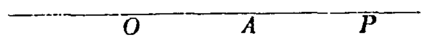
變數亦得為虛數。但茲限定以論實數值為主。

實數值之變數。一名實變數(*Real variable*)。但依前限以免紛歧。略稱變數。

[例] 從一直線上之定點A。以一定之速度a(每秒)。在此直

線上之同方向行等速運動。得其點P。關於A而與P反對之方向有b距離之定點O。

則x秒之後OP之距離y。可以次式表之。



$$y=ax+b.$$

就此例考之。a,b為常數。x為變數。而y亦為變數。

3. 連續變數及其區域。

變數在α,β $(\alpha<\beta)$二數之間。得順次占得實數。則自α至β之區域(*Interval*)內。稱為連續變數(*Continuous variable*)。

表示「自α至β」之區域。以(α,β)及$\alpha\leqq x\leqq\beta$。其區域亦得以直線上之線分表之。

於某區域內。若非連續變數。則稱其區域內為不連續(*Discontinuous*)。

4. 函數。

於一區域(α,β)內。由一變數x之各值。常得確定他變數y之值。則於區域(α,β)內稱y為x之函數(*Function*)。

此種關係。以$y=f(x)$, $y=\psi(x)$等表之。

此處之x。稱自變數(*Independent variable*)。其y稱被變數(*Dependent variable*)。

要之函數與被變數。同一物也。換言之。函數之變數。即為被變數。

〔例〕就$y=ax+b$。其a,b為常數。x在某區域內變化。則x為自變數。而y為被變數。換言之。y為x之函數。

於(α,β)一區域內。對於自變數x之各值。y常得惟一之確定值。則於(α,β)區域內。y稱為x之一價函數(*One-valued function*)。若y常得二確定值。則稱二價(*Two-valued*)。二價以上。準此命名。又二價及二價以上。一般稱為多價(*Many-valued*)。

〔例〕1.　$y=4x^2$ 於任何區域內 y 爲 x 之一價函數。∵ $x=0$ 則 $y=0$, $x=1$ 則 $y=4$, $x=2$, 則 $y=16,\ldots$

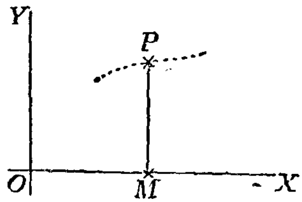
〔例〕2.　$y^2=3x+1$。試求其函數 y。於 $x\geqq-\frac{1}{3}$ 區域內。常爲二價函數。例如 $x=\frac{1}{3}$ 則 $y=\pm\sqrt{2}$, $x=1$ 則 $y=\pm2,\ldots$ 而 $x=-\frac{1}{3}$ 則 $y=0$。∴ 如題言。

〔例〕3.　於 $y=f(x)$。其 $f(x)$ 爲 $3x^2+2x+1$ 之記號。則 $f(0)$, $f(1)$ 是何意義。

(解)　$f(0)=3\times0^2+2\times0+1=1$,

$f(1)=3\times1^2+2\times1+1=6$.

有 OX、OY 二直線。互相直交。令 OX 上之點 M。表 x 之值。($OM=x$)。從此點引 OY 之平行線。表 y 之值。($PM=y$)。則點 P 之坐標。爲變數 x 與函數 y 之對應值。今與 x 以諸值 則 y 亦得確定之值。P 之坐標變易。可得點羣。



5.　函數之形式。

x 之函數 y 多爲 $y=f(x)$ 之形式。然 x, y 往往有相混淆於一方程式之內者。今以 $F(x,y)=0$ 表示之。解此方程式。得視作 $y=f(x)$ 之形式。因之方程式 $F(x,y)=0$ 之 y。一般爲多價函數。而於此形式之 y。曰 x 之陰函數 (*Implicit function*)。

與此對照。$y=f(x)$ 形式之 y。曰 x 之陽函數 (*Explicit function*)。

〔例〕　$x^2+y^2=a^2$。其 y 爲 x 之陰函數。試解原式爲 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$。則 y 爲 x 之陽函數。即普通之形式。

6　函數之分類。

令 $F(x,y)=0$ 爲有理整方程式。則稱滿足此式之 y 爲 x 之

代數函數 (*Algebraic function*)。特此方程式爲 y 之一次式。則得

$$uy+v=0.\ (u, v \text{僅爲} x \text{之有理整式})。$$

若 u 不含 x。則 u 視爲常數可也。由是當有下式之形。

$$y=-\frac{v}{u}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n.$$

此爲 x 之有理整函數 (*Rational integral function*)。

若 u 爲 x 之 m 次有理整式則

$$y=-\frac{v}{u}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}.$$

此稱 x 之有理分數 (*Rational fraction*)。

有理整函數及有理分數總稱之曰有理函數。

與此相反之代數函數曰無理函數 (*Irrational function*)。

代數函數以外其他之函數曰超越函數 (*Transcendental function*)。超越函數其種類不能限制然次之四種乃應用最廣者是名初等超越函數。

(1) 指數函數 (*Exponential function*)

$$y=a^x \qquad \text{但 } a>0$$

(2) 對數函數 (*Logarithmic function*)

$$y=\log x$$

(3) 三角函數 (*Trigonometric function*)

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\tan x, \text{等}$$

(4) 圓函數 (*Cyclometric functions*)

$$y=\operatorname{arc}\sin x \quad \text{又}=\sin^{-1}x.$$

$$y=\operatorname{arc}\cos x \quad \text{又}=\cos^{-1}x.$$

$$y=\operatorname{arc}\tan x \quad \text{又}=\tan^{-1}x \text{等}.$$

7. 逆函數。

於 (α, β) 區域內 $y=f(x)$ 之函數 y。其各確定值亦爲連續變數，

在 (A,B) 區域內。可占得各實數值。則 y 可作自變數觀。是 x 爲 y 之陰函數。從此得 $x=\psi(y)$。則 x 在於 (A,B) 區域內爲 y 之函數。此爲 $y=f(x)$ 之逆函數 (*Inverse function*)。

〔例〕 從 $y=a^x$ $(a>0)$ 得 $x=\log_a y$ $(y>0)$。此於任何區域內。其指數函數與對數函數。互爲他之逆函數。又從 $y=\sin x$ 得 $x=\sin^{-1}y$。令 $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ 及 $-1\leqq y\leqq 1$。則無論何者。均爲一價函數。且互爲他之逆函數。

8. 極限值。

變數 x 順次變易其值漸近於一確定值 a 時。x 與 a 之差之絕對值(此以 $|x-a|$ 表之) 能令比任何之數更小。則 a 稱爲 x 之極限值 (*Limiting value*)。又稱 x 收斂 (*to converge*) 於極限值 a。或稱 x 歸着於極限值 a。以 $Lim\, x=a$ 表之。

然 x 若經過比 a 較小之數。歸着於此。則須 $Lim\, x=a-0$ 表之。

變數 x 收斂於極限值 a 時。同時 x 之函數 y。亦收斂於他之確定值 b。

此以下式表之。

$$\underset{\mathrm{Lim}\, x=a}{Lim}\, y=b \quad 又 \quad \underset{\mathrm{Lim}\, x=a\pm 0}{Lim}\, y=b\pm 0.$$

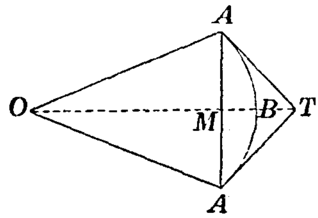
欲避其繁。特簡略書之如次。

$$\underset{x=a}{Lim}\, y=b \quad 又 \quad Lim\, y=b.$$

〔例〕1. $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$。此 x 突然爲 1。則原式爲 $\dfrac{0}{0}$。是無意義。若 x 不爲 1。則約分之爲 $y=x+1$.

此 x 雖不爲 1。若與 1 極近。則極限值必收斂爲 1。因之 y 之極限值爲 2。卽 $\underset{x=1}{Lim}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$

〔例〕2. $\lim\limits_{x=0}\frac{\sin x}{x}$。此$\frac{\sin x}{x}$之$x$突然爲0。則$\frac{\sin x}{x}$爲$\frac{0}{0}$。然於單位之半徑之圓。令$\widehat{AA'}$比半圓周小。



則　$\overline{AA'}<\widehat{ABA'}<\overline{AT}+\overline{A'T}$,

即　$2\overline{AM}<2\widehat{AB}<2\overline{AT}$.

令$\widehat{AB}=x$, 則$AM=\sin x$, $AT=\tan x$。

$$\sin x<x<\tan x.$$

以$\sin x$約之則

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}.$$

然　$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

令此與1相減則

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x.$$

即　$$0<1-\frac{\sin x}{x}<2\sin^2\frac{x}{2}.$$

然　$$\sin\frac{x}{2}<\frac{x}{2},$$

而　$$0<1-\frac{\sin x}{x}<\frac{x^2}{2}.$$

此x收斂爲0。則$\frac{x^2}{2}$亦收斂爲0。

然$1-\frac{\sin x}{x}$亦常收斂爲0。即$\frac{\sin x}{x}$收斂爲1。

$\therefore$　$$\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

9. 關於極限値之定理。

x之二函數設爲$y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$。令$x=a$。其極限値收斂爲b_1, b_2。則有次之定理。

(I) 二個變數之極限值之和。等於變數之和之極限值。

(證明) ϵ_1, ϵ_2 爲任何小數。從極限值之定義。得

$$|y_1-b_1|<\epsilon_1, \quad |y_2-b_2|<\epsilon_2$$

更令 $\epsilon_1+\epsilon_2$ 比任意之小數 ϵ 亦小。則

$$|(y_1+y_2)-(b_1+b_2)|<\epsilon$$

卽比任意之小數亦小。故得

$$Lim\,(y_1+y_2)=b_1+b_2。$$

$$\therefore \quad Lim\,y_1+Lim\,y_2=Lim\,(y_1+y_2)。$$

(II) 二個變數之極限值之積。等於變數之積之極限值。

(證明) 試用前之記號。則

$$|y_1y_2-b_1b_2|=|y_1y_2-b_1y_2+b_1y_2-b_1b_2|$$
$$<|y_1-b_1||y_2|+|y_2-b_2||b_1|$$
$$<\epsilon_1|y_2|+\epsilon_2|b_1|$$

然 ϵ_1, ϵ_2 如 $\epsilon_1|y_2|+\epsilon_2|b_2|<\epsilon$ (任意之小數) 則從此得 $|y_1y_2-b_1b_2|<$

卽 $$Lim\,y_1y_2=b_1b_2$$

$$\therefore \quad Lim\,y_1\,Lim\,y_2=Lim\,y_1y_2.$$

(III) 二個變數之極限值之商。等於變數之商之極限值。

(證明) $$\left|\frac{y_1}{y_2}-\frac{b_1}{b_2}\right|=\frac{|y_1b_2-y_2b_1|}{|y_2b_2|}=\frac{|y_1b_2-b_1b_2+b_1b_2-y_2b_1|}{|y_2b_2|}$$
$$<\frac{|y_1-b_1||b_2|+|y_2-b_2||b_1|}{|y_2b_2|}$$
$$<\frac{\epsilon_1|b_2|+\epsilon_2|b_1|}{|b_2|(|b_2|-\epsilon_2)}.$$

然如 $$\frac{\epsilon_1}{|b_2|-\epsilon_2}<\frac{\epsilon}{2}, \quad \frac{\epsilon_2|b_1|}{|b_2|(|b_2|-\epsilon_2)}<\frac{\epsilon}{2}$$ 以定 $\epsilon_1\,\epsilon_2$.

得 $$\left|\frac{y_1}{y_2}-\frac{b_1}{b_2}\right|<\epsilon.$$

$$\therefore \quad Lim\frac{y_1}{y_2}=\frac{b_1}{b_2}.$$

$$\therefore \quad \frac{Lim\,y_1}{Lim\,y_2}=Lim\frac{y_1}{y_2}$$ (但除去 $Lim\,y_2=0$)

10. 無限大無限小。

變數 x 之絕對值能比任何正數更大。則稱 x 爲無限(*Without limit*)增大。或無限減小。又稱極限值的無限大(*Infinity or Infinitely great*)。或稱「x 成無限大」。以 ∞ 表之。卽 $\operatorname{Lim} x=\infty$。

∞ 爲一般無限增大之正數量與無限減小之負數量併用之記號。然有時必加 $+\infty$, $-\infty$ 及 $\pm\infty$ 之號以區別之。

∞ 爲示比任何之正數更大。又比任何之負數更小之記號。並非一定之值。

變數 x 以 0 爲極限值而收斂時。則稱 x 爲無限小(*Infinitesimal or Infinitely small*)。此以下式表之。 $\operatorname{Lim} x=0.$

無限小與 $-\infty$。不可誤解。又無限小不可與絕對的零 $(a-a)$ 混同。

蓋無限小乃表收斂於極限值 0 之記號;而非數值,

無限小亦有 $+0, -0, \pm 0$ 之區別。

本節 x 之變數。無論自變數,因變數均同。

(例) 1. $\operatorname{Lim}_{x=1}\dfrac{1}{1-x}$. x 收斂爲 1。則能令 $\dfrac{1}{|1-x|}$ 比任何之正數更大。

例如令比任意正數 K 更大則從

$$\frac{1}{1-x}>K \quad 得 \quad x>\frac{K-1}{K}$$

卽 x 如上式取之足矣。

$$\therefore \quad \operatorname{Lim}_{x=1}\frac{1}{1-x}=\infty.$$

詳言之。x 經過僅比 1 更小之數。而近於 1。則爲 $+\infty$。經過僅比 1 更大之數而近於 1。則爲 $-\infty$。

(例) 2 $1-0.\dot{9}$ 爲無限小。何則。欲令比 $\epsilon=0.00001$ 更小。則取 $1-0.999999$ 足矣。欲令比 $\epsilon=0.0000001$ 更小。則取 $1-0.99999999$ 足矣。故得令其差比任何之數更小。而 $0.\dot{9}$ 決不爲 1 故也

11. 無限小及無限大之位置。

命二個變爲無限小之變數爲 y_1, y_2 則

$$\lim y_1=0, \qquad \lim y_2=0.$$

然 y_1, y_2 收斂於極限值時,亦有遲速緩急之差。

例如小數 y_1^2 比較 y_1 收斂爲0甚急速.此可由檢 $y_1^2 : y_1$ 之比值爲 y_1 之小數知之。故有二個變數。欲計其變爲無限小之遲速。則取商之極限值 $\lim \frac{y_1}{y_2}$ 可也。其法分敘如次。

(I) $\lim \frac{y_1}{y_2}$ 爲0以外之有限值.

此 y_1, y_2 稱同位 (*Same order*) 之無限小。

(II) $\lim \frac{y_1}{y_2}=0$。

此 y_2 比 y_1 稱高位 (*Higher order*) 之無限小。

(III) $\lim \frac{y_1}{y_2}=\infty$。

此 y_2 比 y_1 稱低位 (*Lower order*) 之無限小。

位亦可以適宜之數字表之。如 y_1 爲第一位 (*First order*)。若 $\lim \frac{y_1}{y_2}$ 爲0以外之有限值。則 y_2 常爲第一位之無限小。

若 $\lim \frac{y_1}{y_2}$ 爲0又爲 ∞。且定 $\lim \frac{y_1^n}{y_2}$ 爲0以外之有限值 n。則 y_2 稱爲第 n 位 (n^{th} *order*) 之無限小。

普通稱 $\lim x=0$ 爲第一位無限小。其他與此對照,宜呼爲第幾位無限小。可以知之。

無限大若爲第 n 位無限小之逆數。故由上之規定。稱「第 n 位無限大」。

〔例〕1. $\lim\limits_{x=0}\frac{\sin x}{x}=1$〔第8節例2〕。

故 $\sin x$ 與 x 爲同位無限小。故 $\lim\limits_{x=0}\sin x$ 爲第一位無限小

〔例〕2. $\lim\limits_{x=0}(1-\cos x)=0, \qquad \lim x=0$。

然 $$\lim_{x=0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x=0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x=0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x=0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\lim_{x=0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}.$$

故 $\lim\limits_{x=0}(1-\cos x)$ 爲第二位無限小。

〔例〕3. $\lim\limits_{x=0}\cot x=\infty$, $\lim\limits_{x=0}\frac{1}{x}=\infty$.

因就其各逆數爲

$$\lim_{x=0}\frac{\frac{1}{\cot x}}{x}=\lim_{x=0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}$$

$$=\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x=0}\frac{1}{\cos x}=1\times 1=1$$

故 $\cot x$ 與 $\frac{1}{x}$ 爲同位無限大。卽第一位之無限大。

12. 函數之連續。

於 (α,β) 區域內。x 爲連續變數。y 亦爲連續變數。則於 (α,β) 區域內。稱 y 爲 x 之連續函數 (*Continuous function*)。

一函數欲檢查其爲連續函數與否。可就其區域內各點檢查之。今設 x 在某區域內有 a 之一值。x 經過 a 時。若其函數 $y=f(x)$ 亦經過 $f(a)$ 而爲連續變數。則與 $a-|h|, a, a+|h|$ (任何區域內之值) 三值相對應之 $f(a-|h|), f(a), f(a+|h|)$。在 $\lim h=0$ 時。非均收斂爲 $f(a)$ 不可。由是得連續查定之法則如次。

$$y=f(x)$$

若經過$x=a$時爲連續則令

$$|f(a+h)-f(a)|<\epsilon.$$

任意之正數ϵ設能存立。而與此相應。非有$|h|\leqq\delta$之正數δ不可。否則不能爲$\lim_{h=0} f(a+h)=f(a)$故也。

反之。與以任何之正數ϵ爲

$$|f(a+h)-f(a)|<\epsilon,\quad |h|\leqq\delta.$$

如能決定如此之正數δ。則$f(x)$經過$x=a$時爲連續。

何則。因$\lim|f(a+h)-f(a)|=0$。卽$\lim f(a+h)=f(a)$故也。

故x經過a時。其函數y爲連續。簡稱之曰y於$x=a$時連續。

如上之檢定於某區域內各點施行之。若施行此法則有不適用之點。則謂函數在該點爲不連續。其點稱不連續點(*Discontinuous point*)。

初等函數(卽代數函數,初等超越函數,及其他函數之總稱)中不連續點。常孤立存在。其種類之重要者有三。列舉如次。

(I) 無限大之不連續點。

於$x=a$之點。若$y=f(x)=\infty$。則與連續變數之定義相背戾。又與前記之查定法則不合。

〔例〕1. $y=\frac{1}{x-a}$.

於$x>a$及$x<a$之區域內。y雖爲連續函數。而若於$x=a$之點。則爲 $\lim_{x=a} y=\infty$.

但 $\lim_{x=a-0} y=-\infty$, $\lim_{x=a+0} y=+\infty$.

〔例〕2. $y=\frac{x}{(x-1)^2}$.

於$x=1$之點爲$\lim_{x=1} y=\infty$。詳表之爲$\lim_{x=1\pm0} y=+\infty$。

(II) 飛躍之不連續點。

x經過比a小之值。而漸近於a時。y雖收斂爲b。x若經過比a大之值而漸近於a。有時y收斂爲b_1。

換言之，於$x=a$之點。y自b飛變至b_1，而爲不連續變數。

〔例〕 $y=\dfrac{a^{\frac{1}{x-a}}-1}{a^{\frac{1}{x-a}}+1}\ (a>1).$

$$\lim_{x=a-0} a^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x=a-0}\frac{1}{a^{\frac{1}{x-a}}}=0,$$

$$\therefore \lim_{x=a-0} y=\frac{\lim\ (a^{\frac{1}{x-a}}-1)}{\lim\ (a^{\frac{1}{x-a}}+1)}=\frac{-1}{1}=-1.$$

又以 $\lim\limits_{x=a+0} a^{\frac{1}{a-x}}=0.$

$$\therefore \lim_{x=a+0} y=\lim\frac{1-a^{\frac{1}{a-x}}}{1+a^{\frac{1}{a-x}}}=\frac{1}{1}=1.$$

卽於$x=a$之點。y從-1飛變至1。

(III) 不定之不連續點。

x近a時。函數雖爲有限。有時究不能收斂爲一定之値。

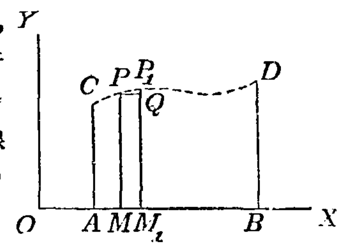
〔例〕 $y=\sin\dfrac{1}{x-a}.$

x近於a時。y不出$+1$與-1之間明矣。然究無一定之極限値。

13. 連續函數與曲線。

於(α,β)區域內，有連續函數$y=f(x)$。

坐標軸爲OX, OY。於OX上取$OA=\alpha$, $OB=\beta$, $OM=a$, $MM_1=h$。引OY之平行線PM, P_1M_1。則$f(a)=PM$, $f(a+h)=P_1M_1$。又從P引OX之平行直線PQ。與P_1M_1會於Q。則$P_1Q=f(a+h)-f(a)$.



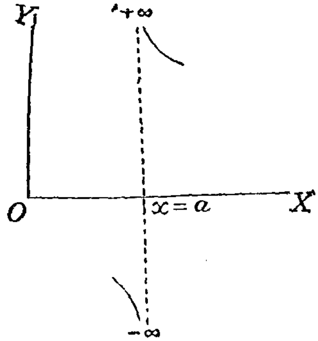
$\therefore$ $\overline{PP_1}=\sqrt{\{f(a+h)-f(a)\}^2+h^2}$. 然則從連續查定之法。得使$PP_1$比任何之正數(卽$\eta$)更小。

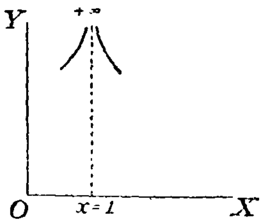
卽於$|f(a+h)-f(a)|<\frac{y}{2}$之範圍內取$|h|<\frac{y}{2}$之$h$

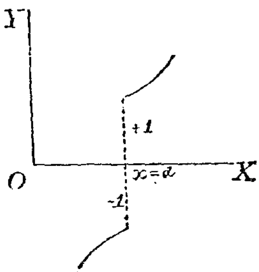
則$|f(a+h)-f(a)|+|h|<y$。從而$\sqrt{\{f(a+h)-f(a)\}^2+h^2}<y$。

故對於x表線分AB。而得$y=f(x)$表CD之曲線(Curve)。

函數於某區域內而爲不連續時，則曲線亦馳於無窮遠。或爲飛變。前節(I)例1,2及(II)例表示如下。







14. 關於連續之定理。

同一區域內。有同爲連續之函數設爲

$$y_1=f_1(x), \qquad y_2=f_2(x).$$

今將示其和及積與商。於同一區域內。亦爲連續。

(I) 二個連續函數之和。於同點亦爲連續函數。

(證明) ϵ 爲任意之正數.依連續查定之法.則於 $x=a$ 點.令

$$|f_1(a+h_1)-f_1(a)|<\frac{\epsilon}{2},\ |f_2(a+h_2)-f_2(a)|<\frac{\epsilon}{2}$$

之 h_1, h_2 設爲

$$|h_1|\leqq\delta_1, \qquad |h_2|\leqq\delta_2$$

今令 δ_1, δ_2 中之小者爲 δ、則欲

$$[\{f_1(a+h)+f_2(a+h)\}-\{f_1(a)+f_2(a)\}]<\epsilon$$

其 h 與 δ 二數量之間有 $|h|\leqq\delta$ 足矣。故 $f_1(x)+f_2(x)$ 於 $x=a$ 之點亦爲連續。

(II) 二個連續函數之積.於同點亦爲連續函數。

(證明) $|f_1(a+h)f_2(a+h)-f_1(a)f_2(a)|$

$$=|\{f_1(a+h)-f_1(a)\}f_2(a+h)+\{f_2(a+h)-f_2(a)\}f_1(a)|$$

$$<|f_1(a+h)-f_1(a)||f_2(a+h)|+|f_2(a+h)-f_2(a)||f_1(a)|$$

故

$$|f_1(a+h)-f_1(a)|<\frac{\epsilon}{2|f_2(a+h)|},$$

$$|f_2(a+h)-f_2(a)|<\frac{\epsilon}{2|f_1(a)|}.$$

求 h 之制限爲 $|h|\leqq\delta$。則

$$|f_1(a+h)f_2(a+h)-f_1(a)f_2(a)|<\epsilon, \quad |h|\leqq\delta$$

卽 $f_1(x)f_2(x)$ 於 $x=a$ 爲連續。

(III) 二個連續函數之商.於同點亦爲連續函數。

(證明) $\left|\frac{f_1(a+h)}{f_2(a+h)}-\frac{f_1(a)}{f_2(a)}\right|=\left|\frac{f_1(a+h)f_2(a)-f_1(a)f_2(a+h)}{f_2(a+h)f_2(a)}\right|$

$$=\left|\frac{\{f_1(a+h)-f_1(a)\}f_2(a)-\{f_2(a+h)-f_2(a)\}f_1(a)}{f_2(a+h)f_2(a)}\right|$$

$$<|f_1(a+h)-f_1(a)|\frac{1}{|f_2(a+h)|}+|f_2(a+h)-f_2(a)|\frac{|f_1(a)|}{|f_2(a+h)f_2(a)|}$$

然則

$$|f_1(a+h)-f_1(a)|<\frac{\epsilon}{2}|f_2(a+h)|$$

$$|f_2(a+h)-f_2(a)|<\frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{|f_2(a+h)f_2(a)|}{|f_1(a)|}$$

加以$|h|\leqq\delta$。則

$$\left|\frac{f_1(a+h)}{f_2(a+h)}-\frac{f_1(a)}{f_2(a)}\right|<\epsilon,\quad |h|\leqq\delta.$$

故$\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$於$x=a$爲連續。與連續查定之法則合。

次於(α,β)區域內。設x之連續函數$y=f(x)$。能在(A,B)區域內占得各值。而於(A,B)區域內y之連續函數$z=g(y)$亦爲連續函數。則可證明如次之定理。

(IV) <u>一變數之連續函數之連續函數。於其變數之同點。亦爲其變數之連續函數。</u>

(證明) 取$f(a)=b$，任意之正數爲ϵ。則

$$|g(b+k)-g(b)|<\epsilon,\quad |k|\leqq\eta$$

之η。從此可求得。而以η更可從

$$|f(a+h)-f(a)|<\eta,\quad |h|\leqq\delta$$

定得δ之值。由是令$f(a+h)=b+k$。則

$$|g\{f(a+h)\}-g\{f(a)\}|<\epsilon,\quad |h|\leqq\delta$$

故$g\{f(x)\}$於$x=a$爲連續函數。

15. $\displaystyle\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

先假定n爲x之正整數。則依二項定理。得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{n}\right)^n$$
$$=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\dots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

然$n\geqq2$時。則

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

$$<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$<1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$<3\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

然 $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\dots$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

令上各項。與前展開式之各項比較。第一第二之兩項皆相等。其他各項。皆以後者較大。

∴ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ ……………………(2)

故 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 雖因 n 之大而漸漸增大。究比3較小。且明明較 $1+\frac{1}{1}=2$ 更大

∴ $2<\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ ……………………(3)

次令 x 爲正分數。則設有如次式之整數。

$$n<x<n+1$$

故 $1+\frac{1}{n}>1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1}$

從而得 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$ …………(4)

然 $\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

而(4)之兩端之項之差,能比任何正數更小,從而與$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$之差亦同。

$$\therefore \qquad \lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

最後令x爲負數。則$x=-x'$,而

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{x'}\right)^{-x'}=\left(\frac{x'}{x'-1}\right)^{x'}$$

$$=\left(1+\frac{1}{x'-1}\right)^{x'}$$

$$\therefore \qquad \lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x'=\infty}\left(1+\frac{1}{x'-1}\right)^{x'-1}\lim\left(1+\frac{1}{x'-1}\right)$$

$$=\lim_{x'=\infty}\left(1+\frac{1}{x'}\right)^{x'} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

如是x爲正或負之任何實數值,雖爲無限大,而$\lim\limits_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$常達於一定之值,此一定之值,以$e$表之。茲舉實際之值如次。

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e=2.71828\ldots$$

此卽自然對數之底數也,

〔例〕1. 求$\lim\limits_{x=0}\frac{a^x-1}{x}$。

(解) 令$x=\log_a(1+x')$。則

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{x'}{\log_a(1+x')}=\frac{1}{\log_a(1+x')^{\frac{1}{x'}}}$$

而令x'收斂爲0。則x亦收斂爲0。

$$\therefore \qquad \lim_{x=0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{1}{\log_a \lim\limits_{x'=0}(1+x')^{\frac{1}{x'}}}=\frac{1}{\log_a e}$$

〔例〕2. 求$\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

〔解〕 $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x$

$\therefore \quad \underset{n\to\infty}{Lim}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left[\underset{\frac{n}{x}=\infty}{Lim}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x=e^x.$

第二章　微分法

1. 微分及微分係數。

於(α,β)區域內。函數$y=f(x)$爲一價而且連續。

多價連續變數各系統。俟後續論。今專考究一價。例如前習$(\pm)$爲二價函數。則$(+)$之系統爲一價函數。而$(-)$之系統亦爲一價函數。

今令α與β間之二值爲$x, x+h$。就此二點用下之記號。

$(x+h)-x=h=\Delta x$　　自變數之差

$f(x+h)-f(x)=\Delta y$　　函數之差

然x若令一定。h漸次減小。令$Lim\ h=0$。則假設Δx固爲連續。Δy亦連續。故任何亦爲無限小。此無限小以dx, dy〔又$df(x)$〕表之。則dx, dy稱爲x, y之微分(*Differential*)

又，前二式之差之商(*Difference quotient*)爲

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

令　　$Lim\ h=0,$

則　　$\underset{h=0}{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\underset{h=0}{Lim}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

此以$\left(\frac{dy}{dx}\right)$表之。

然$\left(\frac{dy}{dx}\right)$等於$dx$約$dy$之商。

今將$\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{(dy)}{(dx)}$，即

$$\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\lim\limits_{h=0}(x+h)-f(x)}{\lim\limits_{h=0}h}.$$

證明如次。

令 $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\left(\frac{dy}{dx}\right)+\epsilon,$$

則h收斂爲0。ϵ亦收斂爲0。即$\lim\limits_{h=0}\epsilon=0$。而

$$f(x+h)-f(x)=h\left(\frac{dy}{dx}\right)+\epsilon h.$$

暫令$\left(\frac{dy}{dx}\right)\neq 0$。則$h$爲第一次之無限小。$\epsilon h$確爲高次之無限小。因之棄去比第一次高之無限小。取其近似值爲

$$\lim_{h=0}\{f(x+h)-f(x)\}=\lim_{h=0}h\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

即 $$dy=dx\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$\therefore$ $$\frac{(dy)}{(dx)}=\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

若$\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$，則$dy=0$。此關係能適用爲眞。

如是差之商之極限值$\left(\frac{dy}{dx}\right)$等於差之極限值$dy$, dx之商。但實際上不用括弧。僅書爲$\frac{dy}{dx}$。又爲$\frac{df(x)}{dx}$，$\frac{d}{dx}f(x)$等。特其極限值爲<u>有限確定</u>。是名<u>微分商</u>（*Differential quotient*）又稱<u>微分係數</u>（*Differential coefficient*）。

而 $$\lim_{h=+0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ 爲過x之微分商

$$\lim_{h=-0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ 不及x之微分商

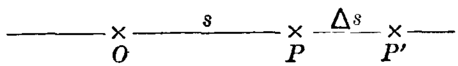
此二值有時不同。必有以區別之。

故$h=\pm 0$時。極限值有相等者。是名完全微分商(*Completed. q.*)

求函數之微分係數。稱微分法(*Differentiation*)。適用微分法。乃微分學(*Differential calculus*)之基本問題。

〔例〕 運動一直線上之點。從直線上之一定點O至距離s。設爲經過時間t之函數。

即 $s=f(t)$.



用本節之記號

$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$……$PP'$間之平均速度

$\dfrac{ds}{dt}=v$……於P點之速度

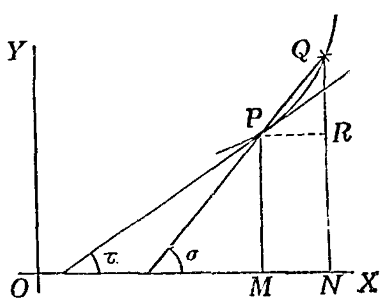
又令$v=\psi(t)$考之。則

$\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$……$PP'$間之平均加速度

$\dfrac{dv}{dt}=a$……於P點之加速度

奈端(*Newton*)發明微積學。實從此方面想到。

2. 微分係數與曲線。



$y=f(x)$表曲線上P, Q二點。

$OM=x$, $ON=x+h$,

$PM=f(x)$, $QN=f(x+h)$.

則 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\frac{QR}{PR}=\tan\sigma$$

今令 $\lim h=0$ 而Q無限近於P。

則直線PQ爲P點之切線。σ亦可變化而達於一定之值τ

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}=\tan\tau.$$

τ爲P點之切線之方向角(*Direction angle*)。或簡稱爲P點之切線角(*Tangent-angle*)。因之微分係數$\frac{dy}{dx}$。有時稱爲曲線之切線之方向率(*Direction coefficient*)。

切線角常爲與X軸所成正方向之角。故不可不比二直角小。

奈端(*Newton*)與來本之(*Leibniz*)。殆同時立定微積分學之基礎。蓋由斯幾何學上以進入者也。

然有某正數δ。在$|h|\leqq\delta$之間。則

$$f(x-|h|)<f(x)<f(x+|h|)$$

是爲函數$f(x)$於點x爲增大。而此h之值。可正可負。

$$\therefore \qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0,$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}>0$$

又同法

$$f(x-|h|)>f(x)>f(x+|h|)$$

是爲函數$f(x)$於點x爲減小。其h與正負無關。

$$\therefore \qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}<0。 \qquad \therefore \qquad \frac{dy}{dx}<0.$$

是則由切線角論之。其歸着亦得同一之結果。

3. 微分係數之函數。

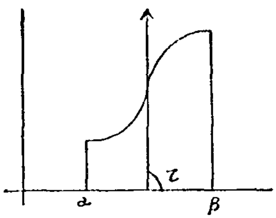
於(α,β)區域內x變化時。對於其全部分或一部分之各值。而微分係數$\frac{dy}{dx}$亦有確定值。則其確定值存在之區域內。$\frac{dy}{dx}$亦爲x之函數。

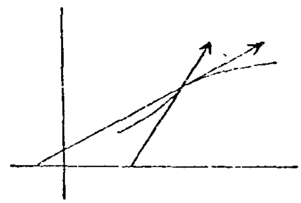
由此着眼點。$\frac{dy}{dx}$ 以 y' 或 $f'(x)$ 表之。是謂 x 之導來函數 (*Derived function*)

然則 $$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

導來函數與微分係數本同一物。不過視法不同耳。

$f'(x)$ 在 $f(x)$ 連續之區域 (α,β) 內連續云者。不限定於區域內之





某點。$f'(x)$ 有不連續。有爲無限大。有爲飛變。有爲不定者。

4. 函數之和之微分法。

設二種函數 $f(x)$, $g(x)$ 於同一區域內。任何亦爲連續。且有導來函數如 $$y=f(x)+g(x)$$

則 $$\frac{dy}{dx}=\lim_{h=0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h=0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}$$

然 $y=f_1(x)+f_2(x)+\cdots\cdots+f_n(x)$ 之微分係數。一般爲 $f_1(x)$ 之微分係數與 $f_2(x)+\cdots\cdots+f_n(x)$ 之微分係數之和。後者又分爲 $f_2(x)$ 與 $f_3(x)+\cdots\cdots+f_n(x)$ 等。如是則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df_1(x)}{dx}+\frac{df_2(x)}{dx}+\cdots\cdots+\frac{df_n(x)}{dx}$$

故函數和之微分係數。等於各微分係數之和。

〔例〕 $y=f(x)+c$ (但 c 爲常數)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dc}{dx}$$

然 $$\frac{dc}{dx}=\lim_{h=0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h=0}\frac{0}{h}=0$$

是常數之微係數爲0。

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}$$

然則函數加減常數。於微分係數無關係。

5. 函數之積之微分法。

設 $f(x), g(x)$ 於同一區域內任何亦爲連續。且有導來函數。則令

$$y=f(x)g(x),$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\lim_{h=0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h=0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+\{g(x+h)-g(x)\}f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+\lim_{h=0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)$$

$$=\frac{df(x)}{dx}g(x)+\frac{dg(x)}{dx}f(x).$$

然一般分 $y=f_1(x)f_2(x)f_3(x)\cdots\cdots f_n(x)$ 爲 $f_1(x)$，與 $f_2(x)\,f_3(x)\cdots\cdots f_n(x)$ 之二部分。適用上之微分法。更分 $f_2(x)\,f_3(x)\cdots\cdots f_n(x)$ 爲二部分。遂於最後之結果爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df_1(x)}{dx}f_2(x)f_3(x)\cdots f_n(x)+\frac{df_2(x)}{dx}f_1(x)\,f_3(x)\cdots f_n(x)+\cdots$$
$$+\frac{df_n(x)}{dx}f_1(x)\,f_2(x)\cdots f_{n-1}(x)$$

故函數之積之微分係數。等於各微係數乘其殘餘之函數之和。

〔例〕 $y=cf(x)$ (但 c 爲常數)

$$\frac{dy}{dx}=c\frac{df(x)}{dx}+f(x)\frac{dc}{dx}$$

$$=c\frac{df(x)}{dx}.$$

卽函數與常數相乘之積之微分係數。等於常數乘函數之微分係數。

6. 函數之商之微分法。

設 $f(x)$, $g(x)$ 於同一區域內任何亦爲連續。且有有限確定之微分係數如

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\lim_{h=0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h=0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h\,g(x+h)g(x)}$$

$$=\lim_{h=0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x)-\{g(x+h)-g(x)\}f(x)}{h\,g(x+h)g(x)}$$

$$=\frac{\lim\left\{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)\right\}}{\lim_{h=0} g(x+h)g(x)}$$

$$=\frac{\dfrac{df(x)}{dx}g(x)-\dfrac{dg(x)}{dx}f(x)}{\{g(x)\}^2}.$$

故函數 $\frac{u}{v}$ 之微分係數。等於 $\dfrac{\dfrac{du}{dx}v-\dfrac{dv}{dx}u}{v^2}$.

〔例〕 $y=\dfrac{c}{f(x)}$. (但 c 爲常數)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dc}{dx}f(x)-\frac{df(x)}{dx}c}{\{f(x)\}^2}$$

$$=-c\frac{\frac{df(x)}{dx}}{\{f(x)\}^2}.$$

7. 函數之函數之微分法。

設$y=f(x)$。於(a,β)之區域內爲連續。且有導來函數。又$z=\psi(y)$與此對應之區域內亦爲連續。且有有限確定值$\frac{d\psi(y)}{dx}$。則

$$z=\psi\{f(x)\}$$

$$\therefore\qquad \frac{dz}{dx}=\underset{h=0}{Lim}\frac{\psi\{f(x+h)\}-\psi\{f(x)\}}{h}$$

$$=\underset{h=0}{Lim}\frac{\psi\{f(x+h)\}-\psi\{f(x)\}}{f(x+h)-f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

今命$f(x+h)-f(x)=k$。則

$$=\underset{k=0}{Lim}\frac{\psi(y+k)-\psi(y)}{k}\cdot\underset{h=0}{Lim}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\frac{d\psi(y)}{dy}\cdot\frac{df(x)}{dx}$$

故函數之函數之微分係數等於各自變數之微分係數之積。

以下乃依自第4節至第6節之基本法則。以求初等函數之微分係數。

8. x^n之微分係數。

先命n爲正整數。則適用第5節得n個相等之$\frac{dx}{dx}x^{n-1}$。

$$\therefore\qquad \frac{d(x^n)}{dx}=n\frac{dx}{dx}n^{n-1}.$$

然以

$$\frac{dx}{dx}=1.$$

$$\therefore \qquad \frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}$$

次命n爲負整數。則$n=-m$。從第6節得

$$\frac{d(x^n)}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{x^m}\right)}{dx}=-\frac{\frac{d(x^m)}{dx}}{(x^m)^2}$$

$$=-\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}=-mx^{-m-1}$$

$$=nx^{n-1}.$$

又命n爲分數。則$n=\frac{p}{q}$。但p, q爲整數。則

$$x^n=x^{\frac{p}{q}}=(x^p)^{\frac{1}{q}}.$$

從$y=x^p$, $z=x^n=y^{\frac{1}{q}}$則由第7節得

$$\frac{d(x^n)}{dx}=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d(x^p)}{dy}.$$

然從　$z=y^{\frac{1}{q}}$得$z^q=y$.

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dz}=qz^{q-1}$$

$$\therefore \qquad \frac{dz}{dy}=\frac{1}{qz^{q-1}}=\frac{1}{qx^{n(q-1)}}$$

又

$$\frac{d(x^p)}{dy}=px^{p-1}$$

故

$$\frac{d(x^n)}{dx}=\frac{px^{p-1}}{qx^{n(q-1)}}=\frac{p}{q}x^{p-1-\frac{p}{q}(q-1)}=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$$

$$=nx^{n-1}$$

故<u>n爲任何有理數</u>。

$$\frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}.$$

〔例〕 1. $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$

從第5節

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(a_0x^n)}{dx}+\frac{d(a_1x^{n-1})}{dx}+\cdots+\frac{d(a_{n-1}x)}{dx}+\frac{da_n}{dx}$$

$$=a_0\frac{d(x^n)}{dx}+a_1\frac{d(x^{n-1})}{dx}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dx}$$

$$=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}.$$

〔例〕 2. $y=(ax+b)^2.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\{(ax+b)^2\}}{d(ax+b)}\cdot\frac{d(ax+b)}{dx}$$

$$=2(ax+b)\left\{\frac{d(ax)}{dx}+\frac{db}{dx}\right\}$$

$$=2(ax+b).a$$

$$=2a(ax+b)$$

〔例〕 3. $y=\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha(ax^2+bx+c)-(\alpha x+\beta)(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$=\frac{-a\alpha x^2-2a\beta x+c\alpha-b\beta}{(ax^2+bx+c)^2}$$

〔例〕 4. $y=3x^2+2x+1,$ $\qquad \frac{dy}{dx}=6x+2.$

〔例〕 5. $y=(a^2-x^2)^3,$ $\qquad \frac{dy}{dx}=-6x(a^2-x^2)^2.$

〔例〕 6. $y=\frac{x^2-2x+4}{x^2-1},$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{2x^2-10x+2}{(x^2-1)^2}.$

9. $\log x$之微分係數。

$$\frac{d(\log x)}{dx}=\lim_{h=0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}$$

$$=\lim_{h=0}\frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h=0}\frac{x}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h=0}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

然 $\lim_{h=0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\lim_{z=\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}=e$

而 $$=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x}$$

∴ $$\frac{d(\log x)}{dx}=\frac{1}{x}$$

〔例〕 1. $y=\log_a x$

∵ $$y=\log_a x=\frac{\log_e x}{\log_e a}$$

∴ $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\log_e a}\cdot\frac{d(\log x)}{dx}=\frac{2}{x\log_e a}$$

〔例〕 2. $y=x\log x$

從第5節得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{dx}\log x+\frac{d(\log x)}{dx}x$$

$$=\log x+\frac{1}{x}x$$

$$=\log x-1$$

〔例〕 3. $y=\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

先以 $\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 看作 $u=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 之函數

又以 $u=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 看作 $v=\frac{1-x}{1+x}$ 之函數。而 $\frac{1-x}{1+x}$ 之商之微分法。由第7節得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\times\frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}}\times\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=\frac{1}{x^2-1}$$

〔例〕 4. $y=(1-x)\log(1-x)$, $\quad \frac{dy}{dx}=-1-\log(1-x)$

〔例〕 5. $y=\log f(x)$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)}{f(x)}$

10. e^x 之微分係數。

$$\frac{d(e^x)}{dx}=\lim_{h=0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\lim_{h=0}\frac{e^h-1}{h}$$

從第一章第15節例1。得

$$\lim_{h=0}\frac{e^h-1}{h}=\frac{1}{\log_e e}$$

$$\therefore \qquad \frac{d(e^x)}{dx}=e^x$$

〔例〕 1. $y=a^x$ (但 $a>0$)

$$\frac{d(a^x)}{dx}=\lim_{h=0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\lim_{h=0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$=\frac{a^x}{\log_a e}=a^x\log a$$

〔例〕 2. $y=e^{\frac{1}{x}}$

先命 $u=\frac{1}{x}$。其次方可求 x 之微分係數。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(a^u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=a^u\log a.\frac{-1}{x^2}$$

$$=-\frac{a^{\frac{1}{x}}\log a}{x^2}$$

〔例〕 3. $y=a(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$, $\frac{dy}{dx}=e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}$

〔例〕 4. $y=a^{mx}$, $\frac{dy}{dx}=m\log a.a^{mx}$

〔例〕 5. $y=\frac{a^x}{x^a}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{a^x}{x^{a+1}}(x\log a-a)$

11. 三角函數之微分係數。

(I). $\sin x$ 之微分係數。

$$\frac{d(\sin)}{dx}=\lim_{h=0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h=0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h=0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.\lim_{h=0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$$=1\times\cos x$$

$$\frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x$$

(II)　$\cos x$ 之微分係數。

$$\frac{d(\cos x)}{dx}=\underset{h=0}{Lim}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$=\underset{h=0}{Lim}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=-\sin x$$

$$\frac{d(\cos x)}{dx}=-\sin x$$

(III)　$\tan x$ 之微分係數。

$\tan x$ 於 $x=(2c+1)\frac{\pi}{2}$ 之點。爲無限大而不連續。

故今令 $x\doteqdot(2n+1)\frac{\pi}{2}$。則

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{d(\tan x)}{dx}=\frac{\frac{d(\sin x)}{dx}\cos x-\frac{d(\cos x)}{dx}\sin x}{(\cos x)^2}=\frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$\therefore\quad\frac{d(\tan x)}{dx}=(\sec x)^2$$

(IV)　$\cot x$ 之微分係數。

於不含 $x=n\pi$ 之區域內。則

$$\frac{d(\cot x)}{dx}=\frac{\frac{d(\cos x)}{dx}\sin x-\frac{d(\sin x)}{dx}\cos x}{(\sin x)^2}=\frac{-1}{(\sin x)^2}$$

$$\therefore\quad\frac{d(\cot x)}{dx}=-(\operatorname{cosec} x)^2$$

(V) $\sec x$之微分係數。

於$x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$之區域內。

$$\frac{d(\sec x)}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{dx}=\frac{\sin x}{(\cos x)^2}$$

$$\therefore \qquad \frac{d(\sec x)}{dx}=\sec x\cdot\tan x.$$

(VI) $\operatorname{cosec} x$之微分係數。

於$x \neq n\pi$之區域內。

$$\frac{d(\operatorname{cosec} x)}{dx}=\frac{-\cos x}{(\sin x)^2}$$

$$\therefore \qquad \frac{d(\operatorname{cosec} x)}{dx}=-\operatorname{cosec} x\cdot\cot x.$$

〔例〕 1. $y=\log\cos mx.$

$y=\log u,\ u=\cos v,\ v=mx$。則爲函數之函數之函數。故

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}(-\sin v)\cdot m$$

$$=-\frac{m\sin mx}{\cos mx}=-m\tan mx.$$

〔例〕 2. $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times 2\cos 2x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$=(\cos x)^2$$

〔例〕 3. $y=e^{\sin x}$, $\qquad \frac{dy}{dx}=\cos x\cdot e^{\sin x}.$

〔例〕 4. $y=\frac{a\sin x}{1+\cos x}$, $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{a}{1+\cos x}.$

〔例〕 5. $y=(x\tan x)^2,\qquad \frac{dy}{dx}=2x\tan x\{\tan x+x(\sec x)^2\}.$

注意. $(\sin x)^2$等。有表以$\sin^2 x$等之記號。以後亦採用之。

12. 圓函數之微分係數。

(I) $\sin^{-1}x$之微分係數.

$$y=\sin^{-1}x \qquad 但\quad -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2},$$

則 $$\sin y=x.$$

以$\sin y$為y之函數。而y為x之函數。故$\sin y$為x之函數之函數.

$$\therefore\qquad \frac{d(\sin y)}{dy}\,\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{dx}$$

即 $$\cos y\,\frac{dy}{dx}=1$$

即 $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

則 $$\frac{d(\sin^{-1}x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(II) $\cos^{-1}x$之微分係數。

於$0<\cos^{-1}x<\pi$之一價函數。

令 $$y=\cos^{-1}x$$

則從$\cos y=x$得

$$-\sin y\frac{dy}{dx}=1$$

$$\therefore\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

即 $$\frac{d(\cos^{-1}x)}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(III) $tan^{-1}x$ 之微分係數。

於 $-\frac{\pi}{2}<tan^{-1}x<\frac{\pi}{2}$ 之一價函數。

令 $y=tan^{-1}x,$

則從 $tan\, y=x$ 得

$$sec^2 y\frac{dy}{dx}=1,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{sec^2 y}.$$

$$\therefore\quad \frac{d(tan^{-1}x)}{dx}=\frac{1}{1+x^2}.$$

(IV) $cot^{-1}x$ 之微分係數.

令 $0<cot^{-1}x<\pi,\quad y=cot^{-1}x,$ 則從 $cot\, y=x$ 得

$$-cosec^2 y\frac{dy}{dx}=1,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{cosec^2 y}.$$

$$\therefore\quad \frac{d(cot^{-1}x)}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

(V) $sec^{-1}x$ 之微分係數。

令 $0<sec^{-1}x<\pi,\quad y=sec^{-1}x,$ 則從 $sec\, y=x$ 得

$$sec\, y\ tan\, y\frac{dy}{dx}=1$$

$$\therefore\quad \frac{d(sec^{-1}x)}{dx}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

(VI) $cosec^{-1}x$ 之微分係數。

令 $-\frac{\pi}{2}<cosec^{-1}x<\frac{\pi}{2}$. 同樣得

$$\frac{d(cosec^{-1}x)}{dx}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

注意. 由以上之結果。知 $sin^{-1}x$, $cos^{-1}x$, $tan^{-1}x$, $cot^{-1}x$, $sec^{-1}x$, $cosec^{-1}x$ 等。不過符號之差異耳。而函數之區域變。則任何之符號亦變。

（例） 1. $y=sec^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

命 $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=u$, 則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(sec^{-1}u)}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{-\frac{d(\sqrt{a^2-x^2})}{dx}}{a^2-x^2}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}}\cdot\frac{ax(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{a^2-x^2}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

（例） 2. $y=x\sin^{-1}x$, $\quad\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sin^{-1}x$.

（例） 3. $y=\cos^{-1}\frac{a}{x}$, $\quad\frac{dy}{dx}=\frac{a}{x\sqrt{x^2-a^2}}$.

（例） 4. $y=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$, $\quad\frac{dy}{dx}=\frac{1}{a^2-x^2}$.

13. 對數之微分法。

當求複雜函數之微分係數。則先作其對數。然後適用微分法較爲簡便。是謂對數微分法 (*Logarithmic differentiation*).

(I) $y=\{f(x)\}^{\psi(x)}$ 之微分係數。

作其對數。則爲

$$\log y=\psi(x)\log f(x).$$

從此得

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{d\psi(x)}{dx}\log f(x)+\frac{\psi(x)}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}$$

$$=\psi'(x)\log f(x)+\frac{\psi(x)}{f(x)}f'(x),$$

$$\therefore\qquad\frac{dy}{dx}=\{f(x)\}^{\psi(x)}\left\{\psi'(x)\log f(x)+\frac{\psi(x)}{f(x)}f'(x)\right\}.$$

(II) $y=f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ 之微分係數。

作其對數爲

$$\log y=\log f_1(x)+\log f_2(x)+\cdots+\log f_n(x),$$

$$\therefore\quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{f'_1(x)}{f_1(x)}+\frac{f'_2(x)}{f_2(x)}+\cdots+\frac{f'_n(x)}{f_n(x)}.$$

從此求 $\frac{dy}{dx}$ 更覺簡明。

〔例〕 1. $y=x^x$.

作其對數爲 $\log y=x\log x$.

從此得 $$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\log x+\frac{x}{x},$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=x^x(\log x+1).$$

〔例〕 2. $y=\sqrt[x]{x}$, $\qquad \frac{dy}{dx}=\sqrt[x]{x}\,\frac{1-\log x}{x^2}$.

〔例〕 3. $y=(x^{x-1})^{x-2}$, $\quad \frac{dy}{dx}=(x^{x-1})^{x-2}\left\{(2x-3)\log x+\frac{x^2-3x+2}{x}\right\}$.

〔例〕 4. $y=x(x-1)\sqrt{x-2}$.

$$\log y=\log x+\log(x-1)+\frac{1}{2}\log(x-2),$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2(x-2)},$$

$$\frac{dy}{dx}=x(x-1)\sqrt{x-2}\,\frac{5x^2-3x-8x+4}{2x(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{5x^2-11x+4}{2\sqrt{x-2}}.$$

〔例〕 5. $y=x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{2}}$, $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{9x^2+x-2}{6x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{1}{2}}}$.

14. 平均值之定理。

玆設於此(α,β)區域內有一價且連續之函數$\varphi(x)$。其導來函數$\varphi'(x)$。亦於此全區域內連續。尙有$\varphi(\alpha)=0$, $\varphi(\beta)=0$。

有如此條件之函數$\varphi'(x)$。則於此區域內至少必有一回爲0。

何則。$\varphi(x)$若不爲常數。則x由α增加。因之$\varphi(x)$亦不能不由$\varphi(x)=0$增加而又減少。

今$\varphi(x)$增不能增至無限。而其終局不可不爲$\varphi(\beta)=0$。故非由增轉至減不可。今命此點爲$x=x_0$。則

$$\varphi(x_0-|h|)<\varphi(x_0)>\varphi(x_0+|h|),$$

$$\therefore\qquad \frac{\varphi(x_0-|h|)-\varphi(x_0)}{-h}>0,\quad \frac{\varphi(x_0+|h|)-\varphi(x_0)}{|h|}<0.$$

試考$Lim\, h=0$之極限。則不及x_0之微分係數。與過x_0之微分係數。若不收斂於同一之極限值。則與$\varphi'(x)$爲連續之旨相背戾。

$$\therefore\qquad \varphi'(x_0)=0.$$

$\varphi(x)$由$x=\alpha$起減小時亦同。

又$\varphi(x)$決不增減。卽爲常數。則$\varphi'(x)$於全域內常爲0。

此從$\varphi(\alpha)=0$, $\varphi(\beta)=0$, 得$\varphi'(x)=0$, 是謂洛兒氏之定理(*Rolle's theorem*)。

今攷究次之函數。

$$\varphi(x)=f(x)-f(\alpha)-\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\{f(\beta)-f(\alpha)\}.$$

但$f(x)$及$f'(x)$於(α,β)區域內。任何亦爲一價連續。

然則$\varphi(x)$與$\varphi'(x)$皆於(α,β)區域內爲一價連續。且$\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$皆爲0明矣。

故必有令

$$\psi'(x_0)=0$$

之 x_0 點

即
$$f'(x_0)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=0.$$

今改書之而從 h 之正負。令

$$\alpha=a,\quad \beta=a+h,\qquad 又\qquad \alpha=a+h,\quad \beta=a.$$

且 x_0 爲區域內之一值。故以

$$x_0=a+\theta h,\quad 0<\theta<1.$$

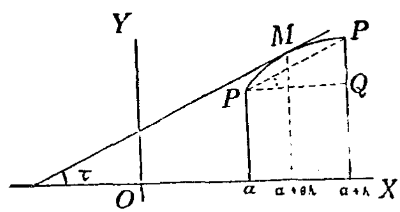
表之。則

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h).$$

由是得次之定理。

平均值之定理 (*Mean-value theorem*) $f(x)$ 與 $f'(x)$ 共爲一價連續之區域內從適宜之 θ 得

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h),\quad 0<\theta<1.$$



$x=a,\quad x=a+h.$

間之曲線 $f(x)$

爲 PP_1

令 $P_1Q=f(a+h)-f(a)$

則

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{P_1Q}{PQ}=\tan P_1\hat{P}Q$$

$\therefore \qquad f'(a+\theta h)=\tan\tau$ (本章第2節)

則平均值之定理。要爲表示

$$P_1\hat{P}Q=\tau$$

而因其函數之 $(a, a+h)$ 之平均增減率。等於其間之微分係數。故有此命名。

第三章 累次微分法

1. 累次導來函數。

設 $f(x)$ 於 (α,β) 區域內。爲一價而且連續之函數。其導來函數。爲有限而且確定。則

$$\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{df(x)}{dx}=f'(x).$$

前章已論之矣。

若 $f'(x)$ 更於 (α,β) 區域之全部。或其一部分之區域。(α',β') 爲一價而且連續之函數。其導來之函數爲有限確定。則表示如次。

$$\lim_{h=0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\frac{df'(x)}{dx}=f''(x).$$

此稱 $f(x)$ 之第二次導來函數 (*Second derived function*)。與此對照而 $f'(x)$ 稱第一次導來函數。

同樣。$f''(x)$ 更於某區域內。有一價且連續而有限確定之導來函數。如 $f'''(x)$。是謂第三次導來函數。

依此條件。順次得

$$f'(x),\quad f''(x),\quad f'''(x),\quad \ldots\ldots,\quad f^{(n)}(x).$$

此等導來函數。總稱之曰 $f(x)$ 之累次導來函數 (*Successive derived functions*)。

求 $f^{(n)}(x)$ 之方法。曰累次微分法 (*Successive differentiation*)。

2. 累次微分及累次微分係數。

微分係數。一名微分商。又名導來函數。同一物也。不過着眼點異耳。前既論之矣，卽

$$\frac{df(x)}{dx}=f'(x).$$

$$\frac{df'(x)}{dx}=f''(x)=\frac{d\frac{df(x)}{dx}}{dx}.$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

又就微分觀之。由第二章第一節。得

$$df(x)=\left(\frac{df(x)}{dx}\right)dx$$

卽 $$df(x)=f'(x)dx \qquad \cdots\cdots(1)$$

然 $df(x)$ 等於 x 之函數乘 dx。

今以 dx 當做常數看。

更求其微分。則

$$d\{df(x)\}=\frac{d\{f'(x)dx\}}{dx}dx=\frac{df'(x)}{dx}dx\,dx$$

$$=f''(x)dx\,dx.$$

$d\{df(x)\}$ 謂之第二次微分 (*Second differential*)。

以記號 $d^2f(x)$ 表之。又 $dx\,dx$ 以 dx^2 表之。

卽 $$d^2f(x)=f''(x)dx^2 \qquad \cdots\cdots(2)$$

同樣，第三次及第三次以上之微分。表以下式。

$$\left.\begin{array}{l} d^3f(x)=f'''(x)dx^3 \\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ d^nf(x)=f^{(n)}(x)dx^n \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots(3)$$

此等導來函數。總稱之曰累次微分 (*Successive differentials*)。

dx 爲第一位無限小。從 (1) $f'(x)$ 不爲 0 而爲有限值。則 $df(x)$ 亦爲第一位無限小。又從 (2) 以 dx^2 爲第二位無限小。而 $f''(x)$ 不爲 0 而爲有限值。則 $d^2f(x)$ 亦爲第二位之無限小。一般從 (3) 概稱 $d^nf(x)$ 爲第 n 位之無限小。

次以 $dx, dx^2, dx^3, \ldots, dx^n$ 約 (1), (2), (3) 之兩邊。則

$$\frac{df(x)}{dx}=f'(x),$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}=f''(x)=\frac{d\dfrac{df(x)}{dx}}{dx},$$

$$\frac{d^3f(x)}{dx^3}=f'''(x),$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$\frac{d^nf(x)}{dx^n}=f^{(n)}(x).$$

如是由微分之商之點觀察之。此等稱第一次，第二次，第三次，…，第 n 次之微分商。又稱微分係數。總稱累次微分係數 (*Successive differential coefficients*)。又稱累次微分商 (*Successive differential quotients*)。

求累次微分商。頗爲困難。今舉應用最多者。示其簡明之方法如次。

3. $\sin x$ 及 $\cos x$ 之累次微分係數。

(I) $y=\sin x.$

$$\frac{dy}{dx}=-\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right).$$

$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$

試從數學的歸納法。則

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

(II) $y=\cos x.$

$$\frac{dy}{dx}=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right).$$

$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

(例) 1. 求 $y=\tan x$ 之第三次微分係數。

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x=2\sec^2x\cdot\tan x,$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3y}{dx^3}&=4\sec^2x\cdot\tan^2x+2\sec^4x\\&=4\sec^2x(\sec^2x-1)+2\sec^4x\\&=6\sec^4x-4\sec^2x.\end{aligned}$$

〔例〕 2. 求 $y=(\sin x)^p$ 之第二次導來函數。

$$y'=p(\sin x)^{p-1}\cos x,$$

$$y''=p(p-1)(\sin x)^{p-2}\cos^2 x-p(\sin x)^{p-1}\sin x$$

$$=p(p-1)(\sin x)^{p-2}\{1-(\sin x)^2\}-p(\sin x)^p$$

$$=p(p-1)(\sin x)^{p-2}-p^2(\sin x)^p.$$

〔例〕 3. 試求 $y=\tan x+\sec x$ 之 y''。

$$y''=\frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}.$$

〔例〕 4. 求 $y=\sin^3 x$ 第 n 次微分係數。

$$y=\sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x),$$

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

〔例〕 5. 求 $y=\sin^2 x$ 第 n 次微分係數。

$$\frac{d^n y}{dx^n}=2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{\overline{n-1}\,\pi}{2}\right).$$

4. e^x $\log x$ 及 x^m 之累次微分係數。

(I) $y=e^x$.

$$\frac{dy}{dx}=e^x,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^x,\quad \ldots\ldots$$

一般爲

$$\frac{d^n y}{dx^n}=e^x.$$

(II) $y=\log x$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}=x^{-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-x^{-2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=2x^{-3},$$

$$\cdots\cdots$$

一般爲

$$\frac{d^ny}{dx^n}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

(III) $y=x^m$.

m 爲正整數。此以 n 代之。則

$$\frac{dy}{dx}=n\,x^{n-1},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=n(n-1)x^{n-2},\quad \cdots\cdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n}=n(n-1)\ldots2.1=n!$$

而 $\dfrac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=0$, 以上皆爲0.

若 m 不爲正整數。則

$$\frac{d^ny}{dx^n}=m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

〔例〕 1. $y=e^{-x}\cos x$, 則 $\dfrac{d^4y}{dx^4}+4y=0$, 試證之。

〔證〕
$$\frac{dy}{dx}=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x+e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x$$

$$=2e^{-x}\sin x,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-2e^{-x}\sin x+2e^{-x}\cos x,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=2e^{-x}\sin x-2e^{-x}\cos x-2e^{-x}\cos x-2e^{-x}\sin x$$

$$=-4e^{-x}\cos x=-4y.$$

$$\therefore\quad \frac{d^4y}{dx^4}+4y=0.$$

〔例〕 2. 求 $y=x\log x$ 之第二導來函數。

$$y''=\frac{1}{x}.$$

〔例〕 3. $y=x^{n-1}\log x,$ $\qquad y^{(n)}=\dfrac{(n-1)!}{x}.$

〔例〕 4. $y=x\,e^{x},$ $\qquad y^{(n)}=x\,e^{x}+n\,e^{x}.$

〔例〕 5. $y=\dfrac{1}{a^2-b^2x^2}.$

分解原式。爲 $\quad y=\dfrac{1}{2a}\left\{\dfrac{1}{a+bx}+\dfrac{1}{a-bx}\right\}$

則 $\quad \dfrac{d^ny}{dx^n}=\dfrac{(-1)^nb^n}{2a}\left\{\dfrac{1}{(a+bx)^n}-\dfrac{1}{(a-bx)^n}\right\}.$

如是分解。以求累次微分商。更覺簡便。

如 $\quad y=arctg\,x,$ 令

$y'=\dfrac{1}{1+x^2}=-\dfrac{1}{2i}\left\{\dfrac{1}{i+x}+\dfrac{1}{i-x}\right\}$ 則所得 $y^{(n)}$ 之公式簡而明。

〔例〕 6 $\quad y=\dfrac{a+x}{a-x},$ $\qquad \dfrac{d^ny}{dx^n}=\dfrac{2a\cdot n!}{(a-x)^{n+1}}.$

5. 函數之積之累次微分係數。

令 u, v 任何亦爲 x 之函數。且任何亦爲有有限確定。至第 n 次之導來函數。

則 $$y=uv,$$

$$y'=u'v+uv',$$

$$y''=u''v+2u'v'+uv'',$$

$$y'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''.$$

一般爲

$$y^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\dots+uv^{(n)}.$$

是亦從數學的歸納法。得證明其爲眞矣。

此稱來本之之公式 (*Leibnitz's formula*)。

〔例〕 $y=arc\sin x.$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

適用來本之之公式卽得。

第四章 偏微分法

1. 含二自變數之函數。

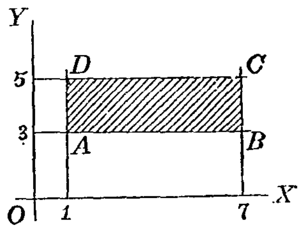
於某限制之下。設二變數不相關係。各得任意變化。

由此 x 之任意一値。與 y 之任意一値組合。而第三變化常爲確定之値。則名此限制爲變數 x, y 之區域 (*Domain*)。z 爲此區域內 x, y 之函數。

此以 $z=f(x, y)$, $z=\psi(x, y)$ 等表之。其 x, y 爲自變數。z 爲被變數。

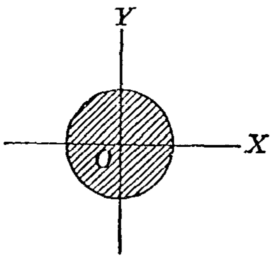
〔例〕 1. $z=\sqrt{(x-1)(7-x)}+\sqrt{(3-y)(y-5)}$.

於$7\geqq x\geqq 1, 5\geqq y\geqq 3$限制之下。$z$為$x, y$之函數。今表此限制於直交軸之區域內。則可得矩形$ABCD$。



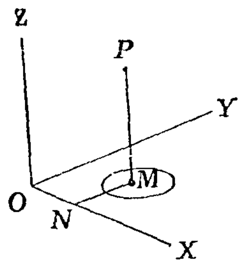
此區域內所有x, y之值之組合。卽在矩形或在其周上之各點。

〔例〕 2. $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.



於$x^2+y^2\leqq a^2$限制之下。x, y為其變數。z為其函數。而此限制以直交軸表之。則為以原點為中心。半徑為a之圓內或圓周上之點之坐標x, y。而z為其函數。

於同點取直角相交之三直線OX, OY, OZ。於OX上表區域內之x之一值$ON=x$。從N引OY平行線。$NM=y$表區域內之y之一值。則此x, y為區域內一點之坐標。



與此坐標x, y相對應之$z=f(x, y)$之確定值。表以OZ平行之PM。則對於區域內之x, y之值而表z之值。以P點有x, y, z三坐標表空間之點羣。

z之確定值於區域內。常有惟一個時。稱為一價函數。常為二個及二個以上時。稱為多價函數。若自變數惟一個者同。但於多價

函數。就其正系統。亦得視作一價函數。例如 $z^2=a^2-x^2-y^2$。此 z 雖爲二價。然區分爲正系統與負系統。則爲二個一價函數。

又 $z=arctg\dfrac{x}{y}$ 限於 $-\dfrac{\pi}{2}<z<\dfrac{\pi}{2}$ 以內。則亦爲一價函數。

是則本章及本章以下、於 $z=f(x, y)$。除有特別規定外。均視爲一價。

x, y 之區域。以種種方法考之 雖爲吾人之自由。然本章及本章以下。均如前例 1, 2。僅研究關於直交軸而表平面之一部分而已。

是於初等函數。大概足用故也。

因之空間之點羣。亦概有簡明之關係。

於二個自變數有二種。即

陽函數 $z=f(x, y)$。

陰函數 $F(x, y, z)=0$。

玆先以陽函數爲主而詳論之。

2. 函數 $z=f(x, y)$ 之連續。

如前所述 x, y 之區域內之坐標。限於表平面之一部分。

今將於此區域內。規定一點如 $x=a, y=b$ 爲連續之意。

x 從近於 a 之值。而收斂爲 a。與 y 從近於 b 之值。而收斂爲 b 無關係。且不拘兩者收斂之方法若何。z 常收斂於確定值 $f(a, b)$。如此謂函數於 $x=a, y=b$ 之點爲連續。

由此定義。則得一點連續査定之法則如次。

$z=f(x, y)$。於 $x=a, y=b$ 之點爲連續。則與任何之正數 ϵ。常爲

$$|f(a+h, b+k)-f(a, b)|<\epsilon.$$

其h, k為

$$|h|\leqq\delta,\quad |k|\leqq\delta.$$

從此求得正數δ。必能存在。

反之。與任意正數ϵ相應而為

$$|f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)|<\epsilon,$$

$$|h|\leqq\delta,\quad |k|\leqq\delta.$$

如得正數δ存在。則$z=f(x, y)$。

於$x=a, y=b$之點為連續。

何則。前者之δ若不存在。則

$\lim\limits_{h=0,\ k=0} f(a+h,\ b+k)$ 其收斂之值。當不等於$f(a, b)$。是與假設相反。

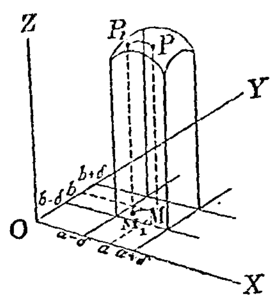
又後者得

$$\lim_{\epsilon=0}|f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)|=0.$$ 卽

$$\lim_{\epsilon=0} f(a+h,\ b+k)=f(a,\ b).$$ 故云。

如上之查定。於此區域內。各點之x, y能滿足時。則稱$z=f(x,y)$為在此區域全部內而連續。

今關於坐標軸。表$z=f(x, y)$之連續如次。



於區域內 $|h|\leqq\delta,\quad |k|\leqq\delta,$

則 $$a-\delta\leqq a+h\leqq a+\delta,$$

$$b-\delta\leqq b+k\leqq b+\delta.$$

是關於直交軸而表正方形$x=a$, $y=b$之點。M為其中心

於此正方形之區域內。自 $x=a+h,\ y=b+k$ 之點 M_1 至 M。其 h 與 k 各自獨立收斂。則與此對應之函數 z 之一端之點 P_1 亦常收斂於 P。此種事實。於區域內 M_1P_1 之位置。及其收斂之方法。均無關係。

然從 P 任意之方向為 P_1。欲令 PP_1 比任意之正數 (η) 尙小。則

$$PP_1=\sqrt{\{f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)\}^2+h^2+k^2}$$
$$<|f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)|+|h|+|k|.$$

而 $$|f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)|<\epsilon\leqq\frac{\eta}{3},$$

$$|h|\leqq\delta\leqq\frac{\eta}{3},\quad |k|\leqq\delta\leqq\frac{\eta}{3}.$$

如是決定 $\epsilon,\ \delta$ 可也換言之。P 對於所有各 h,k。必有任何相近之點 P_1。故於某點連續之函數 $z=f(x,\ y)$。於其點之近處而表曲面之一部。或於區域內而連續。得表一曲面 (*Surface*)。

〔例〕 $z=f(x,\ y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}.$

其點 $x=0,\ y=0$ 之近所收斂之方法。亦不連續之一奇例也。

先令 x,y 之一方暫為常數。他之一方僅收斂為 0。然後他亦收斂為 0。

則 $$\lim_{x=0}f(x,\ y)=\frac{0}{y^2}=0,\quad \lim_{y=0}\{\lim_{x=0}f(x,\ y)\}=0,$$

$$\lim_{y=0}f(x,\ y)=\frac{0}{x^2}=0,\quad \lim_{x=0}\{\lim_{y=0}f(x,\ y)\}=0.$$

又 x,y 沿 $x:y=a:b$ 之直線。而令收斂於 $x=0,\ y=0$。則 $x=a\epsilon,\ y=b\epsilon$。

而 $$\lim_{\epsilon=0}f(a\epsilon,\ b\epsilon)=\lim_{\epsilon=0}\frac{2ab\epsilon^2}{(a^2+b^2)\epsilon^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

即可見因 x,y 之收斂之方法。而歸着於全不相同之極限值。

3. 偏微分係數及偏微分。

於某區域內之連續函數 $z=f(x, y)$。令 y 在此區域內爲一定值。則與此相應之 x。於 (α, β) 區域內。而 $z=f(x, y)$ 爲 x 之連續函數。固勿具論。

而
$$\lim_{h=0}\{f(x+h, y)-f(x, y)\}=0.$$

令
$$\Delta_x z=f(x+h, y)-f(x, y),$$
$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h}.$$

其 h 收斂令爲 $+0$。亦爲 -0。

若其極限值至有限確定之處。則表以

$$\frac{\delta}{\delta x}\lim_{h=0}\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h}.$$

此名<u>關於 x 之偏微分係數</u> (*Partial differential quotient*)。又名<u>偏微分商</u>。

偏微分係數。一般爲 x, y 之函數。而因視法不同。有下式種種表示之方。

$$\frac{\delta z}{\delta x}=f'_x(x, y)=f'_x=z'_x=z_x$$

而此謂關於 x 之<u>偏導來函數</u> (*Partial derived function*)。

此與第二章第1節所論者同。

$$\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{\lim_{h=0}\Delta_x z}{\lim_{h=0}\Delta x}.$$

而 $\lim \Delta_x z=d_x z.$ 則

$$\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)=\frac{(d_x z)}{(dx)}.$$

$$\therefore \quad d_x z=\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)dx=f'_x(x, y)\,dx.$$

此名關於x之偏微分 (*Partial differential*)。

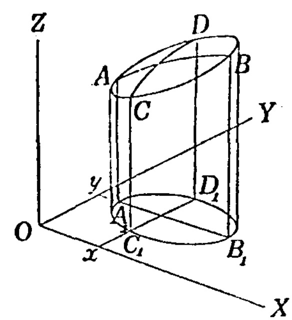
x於區域內固定於某常數。僅令y於其區域(γ, δ)內變化。則得同樣考之。爲

$$\frac{\delta z}{\delta y} = Lim_{k=0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

$$= f'_y(x, y) = f'_y = z'_y = z_y,$$

$$d_y z = \frac{\delta z}{\delta y} dy = f'_y(x, y)\, dy.$$

偏微分係數。依幾何學的考察如次。



令y爲固定常數。沿垂於OY之平面所截取之直線A_1B_1。而於單一自變數之處。行同一之方法。則$\frac{\delta z}{\delta x}$表曲線$AB$之切線角之正切。同樣。$\frac{\delta z}{\delta y}$表垂於$OX$之平面與曲面相交之曲線$CD$之切線角之正切。

〔例〕 1. 從$z = tan^{-1}\frac{y}{x}$以求$\frac{\delta z}{\delta x}, \frac{\delta z}{\delta y}$,

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

〔例〕 2. 從$z = x \cos y$求$\frac{\delta z}{\delta x}, \frac{\delta z}{\delta y}$.

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \cos y, \quad \frac{\delta z}{\delta x} = -x \sin y.$$

〔例〕 3. $z=ye^x+xe^y$之偏導來函數如何。

$$ye^x+e^y,\quad e^x+xe^y.$$

4. 全微分。

今於$z=f(x,y)$，論其一般x, y之變化。

令 $\Delta z=f(x+h,y+k)-f(x,y)$。

則以x之變化與y之變化無關係。

其h, k。各自獨立收斂爲0。

雖然。特與簡單之一次的關係。保其一定比而共收斂爲0之處考之。如

$$h:k=a:b \quad (a, b\text{爲常數}).$$

則令 $$h=a\epsilon,\quad k=b\epsilon.$$

其ϵ爲收斂於0之數。

更令 $$\Delta s=\sqrt{h^2+k^2}=\epsilon\sqrt{a^2+b^2}.$$

則Δs亦與ϵ同時收斂爲0之數。

$$\therefore \quad \frac{\Delta z}{\Delta s}=\frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$=\frac{f(x+a\epsilon,y+b\epsilon)-f(x,y)}{\epsilon\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{f(x+a\epsilon,y+b\epsilon)-f(x,y+b\epsilon)}{a\epsilon}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$+\frac{f(x,y+b\epsilon)-f(x,y)}{b\epsilon}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

今命 $Lim\ \epsilon=0.$

則 $$\lim_{\epsilon=0}\frac{\Delta z}{\Delta s}=f'_x(x,y)\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+f'_y(x,y)\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

試以下式表之。

$$\lim_{\epsilon=0}\frac{\Delta z}{\Delta s}=\frac{dz}{ds}=f'_s(x,y).$$

則 $$f'_s(x,y)=f'_x(x,y)\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+f'_y(x,y)\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

此稱於$s(a:b)$之方向之全導來函數。從微分係數之視法，則

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a\epsilon}{\epsilon\sqrt{a^2+b^2}}\text{ 等之極限等於 }\frac{dx}{ds}.$$

$$\therefore\qquad \frac{dz}{ds}=\frac{\delta z}{\delta x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\delta z}{\delta y}\cdot\frac{dy}{ds}.$$

此稱於$s(a:b)$之方向之全微分係數 {*Total differential coefficient in the direction* $s(a:b)$}。

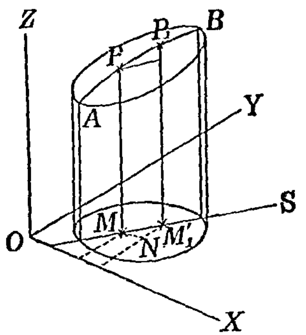
又 $$\Delta z=f(x+h,y+k)-f(x,y)$$
$$=f(x+a\epsilon,y+b\epsilon)-f(x,y)$$
$$=\frac{f(x+a\epsilon,y+b\epsilon)-f(x,y+b\epsilon)}{a\epsilon}\cdot a\epsilon$$
$$+\frac{f(x,y+b\epsilon)-f(x,y)}{b\epsilon}\cdot b\epsilon.$$

命 $\lim_{\epsilon=0}\Delta z=dz.$ 則

$$dz=f'_x(x,y)\,dx+f'_y(x,y)\,dy$$

即 $$dz=\frac{\delta z}{\delta x}dx+\frac{\delta z}{\delta y}dy.$$

此稱 $z=f(x, y)$ 之全微分 (*Total differential*)。



於區域內之點。令 M 爲 x, y。M_1 爲 $x+h, y+k$。則

$$MM_1=\sqrt{h^2+k^2}=\Delta s$$

故 $\frac{dz}{ds}$ 表含 s 通過 M, M_1 之直線，平行於 OZ 之平面，而截曲面 $z=f(x, y)$ 所得曲線 AB 之上之微分係數。

5. 累次偏微分法。

於 $z=f(x, y)$ 連續區域。而在有限確定之條件之下。如第三節得偏導來函數。爲

$$\frac{\delta z}{\delta x}=f'_x(x, y)=\lim_{h=0}\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h},$$

$$\frac{\delta z}{\delta y}=f'_y(x, y)=\lim_{k=0}\frac{f(x, y+k)-f(x, y)}{k}.$$

此稱第一次之偏導來函數。

更於此等之 x 及 y。爲有有限確定之偏導來函數。則

$$\frac{\delta\frac{\delta z}{\delta x}}{\delta x}=\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}=f''_{xx}(x, y),$$

$$\frac{\delta\frac{\delta z}{\delta x}}{\delta y}=\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}=f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\delta\frac{\delta z}{\delta y}}{\delta x}=\frac{\delta^2 z}{\delta y\delta x}=f''_{yx}(x, y),$$

$$\frac{\delta\frac{\delta z}{\delta y}}{\delta y}=\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}=f''_{yy}(x, y).$$

此稱第二次之偏導來函數。

此當考究其f''_{xy}與f''_{yx}之異同。

令 $$V=f(x+h, y+k)-f(x+h, y)-f(x, y+k)+f(x, y).$$

觀察此式有二樣。

先令

$$V=\{f(x+h, y+k)-f(x, y+k)\}-\{f(x+h, y)-f(x, y)\}.$$

從平均值之定理(第二章第14節)。

令 $$f(x+h, y)-f(x, y)=hf'_x(x+\theta_1 h, y),\quad 0<\theta_1<1.$$

以$y+k$代其y。則

$$f(x+h, y+k)-f(x, y+k)=hf'_x(x+\theta_1 h, y+k).$$

$$\therefore\quad V=h\{f'_x(x+\theta_1 h, y+k)-f'_x(x+\theta_1 h, y)\}.$$

更從平均值之理。得

$$V=hkf''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k),\quad \begin{matrix}0<\theta_1<1,\\ 0<\theta_2<1.\end{matrix}$$

次令

$$V=\{f(x+h, y+k)-f(x+h, y)\}-\{f(x, y+k)-f(x, y)\}.$$

與上同樣。得

$$V=k\{f'_y(x+h, y+\theta_3 k)-f'_y(x, y+\theta_3 k)\},\quad 0<\theta_3<1.$$

$$V=khf''_{yx}(x+\theta_4 h, y+\theta_3 k),\quad \begin{matrix}0<\theta_3<1,\\ 0<\theta_4<1.\end{matrix}$$

從此二結果。知

$$f''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k)=f''_{yx}(x+\theta_4 h, y+\theta_3 k).$$

然則f''_{xy}, f''_{yx}任何x, y於區域內爲連續。而於$Lim\, h=0$, $Lim\, k=0$之極限。則

$$f''_{xy}(x, y)=f''_{yx}(x, y)$$

即 $$\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}=\frac{\delta^2 z}{\delta y\delta x}.$$

(實際上此交換之法則得以成立。故 f, f'_y, f''_{xy} 爲連續。又 f, f'_y, f''_{yx} 合於連續之條件。亦頗充分)。

從第二次考之。更得第三次之偏導來函數。卽

$$f'''_{xxx}, f'''_{xxy}, f'''_{xyx}, f'''_{xyy}, f'''_{yxx}, f'''_{yxy}, f'''_{yyx}, f'''_{yyy}.$$

以上準此而假定交換之法則爲

$$f'''_{xxy}=f'''_{xyx}=f'''_{yxx},$$

$$f'''_{xyy}=f'''_{yxy}=f'''_{yyx}.$$

全微分亦與偏導來函數同樣。如

$$dz=\frac{\delta z}{\delta x}dx+\frac{\delta z}{\delta y}dy.$$

爲第一次全微分.

$$d(dz)=\frac{\delta dz}{\delta x}dx+\frac{\delta dz}{\delta y}dy$$

$$=\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta z}{\delta x}dx+\frac{\delta z}{\delta y}dy\right)dx$$

$$+\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta z}{\delta x}dx+\frac{\delta z}{\delta y}dy\right)dy.$$

假定交換之法則。且令 $d(dz)=d^2z$。則

$$d^2z=\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}dx^2+2\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}dxdy+\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}dy^2.$$

是稱第二次之全微分 (*Second total differential*)

有時用次之記號。

$$d^2z=\left(\frac{\delta}{\delta x}dx+\frac{\delta}{\delta y}dy\right)^2 z.$$

是從二項定理展開之後。各項添附z。恰如第二次全微分。此法甚便宜。

一般由數學的歸納法。可得

$$d^n z=\left(\frac{\delta}{\delta x}dx+\frac{\delta}{\delta y}dy\right)^n z.$$

〔例〕 1. $z=x^5-6x^3y^2-y^4x.$

$$\frac{\delta z}{\delta x}=5x^4-18x^2y^2-y^4,\quad \frac{\delta z}{\delta y}=-12x^3y-4y^3x,$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}=20x^3-36xy^2,\quad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}=-12x^3-12y^2x,$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}=\frac{\delta^2 z}{\delta y\delta x}=-36x^2y-4y^3.$$

〔例〕 2. $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 求其第二次之偏導來函數。

$$\frac{y^2-a^2}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)^3}},\quad \frac{xy}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)^3}},\quad \frac{x^2-a^2}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)^3}}.$$

〔例〕 3. 令從 $z=e^{ax+by}$ 之方程式。得 $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}=A\frac{\delta z}{\delta y}+B\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$ 則 a, b, A, B 之間有如何之關係。但 a, b, A, B 爲常數。

(解) $$\frac{\delta z}{\delta x}=a\,e^{ax+by},\quad \frac{\delta^2 z}{\delta x^2}=a^2e^{ax+by},$$

$$\frac{\delta z}{\delta y}=b\,e^{ax+by},\quad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}=b^2e^{ax+by}.$$

以此代入方程式。則

$$a^2=Ab+Bb^2.$$

〔例〕 4. 令 $z=\phi(y+ax)+\psi(y-ax)$。則 $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}=a^2\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$ 試證明之。

6. 函數之函數之偏微分法。

(I) 單一自變數之二種函數之函數。

單一自變數爲x。二種函數爲$u=f(x)$, $v=g(x)$。更論$z=\phi(u,v)$之微分法。

以z爲單一自變數x之函數。實非偏微分係數。唯有應用偏微分法之必要而已。

於某區域內。u, v爲有有限確定之導來函數。假定z爲有u或v之偏導來函數。

先令x的$h=\Delta x$。變爲$x+\Delta x$。

則u, v爲

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta u,$$
$$g(x+\Delta x)-g(x)=\Delta v.$$

u, v變而爲$u+\Delta u$, $v+\Delta v$.

則z亦當變爲

$$\Delta z=\phi(u+\Delta u,v+\Delta v)-\phi(u,v).$$

即 $$\Delta z=\frac{\phi(u+\Delta u,v+\Delta v)-\phi(u,v+\Delta v)}{\Delta u}\Delta u$$
$$+\frac{\phi(u,v+\Delta v)-\phi(u,v)}{\Delta v}\Delta v.$$

又 $$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\phi(u+\Delta u,v+\Delta v)-\phi(u,v+\Delta v)}{\Delta v}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$+\frac{\phi(u,v+\Delta v)-\phi(u,v)}{\Delta v}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

令$Lim\,\Delta x=dx$, $Lim\,\Delta u=du$, $Lim\,\Delta v=dv$.

則 $$dz=\frac{\delta z}{\delta u}du+\frac{\delta z}{\delta v}dv,$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\delta z}{\delta u}\frac{du}{dx}+\frac{\delta z}{\delta v}\frac{dv}{dx}.$$

更令 $\frac{\delta z}{\delta u}$, $\frac{\delta z}{\delta v}$, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$。任何亦有導來函數.并許假定交換法則。

則
$$d(dz)=d^2z=\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\delta z}{\delta u}du+\frac{\delta z}{\delta v}dv\right)du$$
$$+\frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{\delta z}{\delta u}du+\frac{\delta z}{\delta v}dv\right)dv$$
$$=\frac{\delta^2 z}{\delta u^2}du^2+2\frac{\delta^2 z}{\delta u\delta v}dudv+\frac{\delta^2 z}{\delta v^2}dv^2.$$

$$\therefore\qquad \frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dx}=\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{\delta^2 z}{\delta u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+2\frac{\delta^2 z}{\delta u\delta v}\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{\delta^2 z}{\delta v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$$

以上至第 n 次。亦與前節同 而得表以簡潔之記號法。

(注意) dz, d^2z 等之形。與前節全微分之形無異。惟前節之 dx, dy 假定爲交互無關係之變化 而本節之 du, dv 爲同一自變數之函數之變化。且保存其 $du=\frac{du}{dx}dx$, $dv=\frac{dv}{dx}dx$ 之關係。

(II) 二個自變數之函數之函數。

$u=f(x, y)$, $v=g(x, y)$, 更 $z=\phi(u, v)$ 之 x, y。於某區域內、勿論何者，亦爲一價連續。各有偏導來函數。

先僅以 x 變爲 Δx。y 爲一定。

u, v 變爲

$$\Delta_x u=f(x+\Delta x, y)-f(x, y),$$
$$\Delta_x v=g(x+\Delta x, y)-f(x, y).$$

從而令 z 的變化.爲

$$\Delta z=\phi(u+\Delta_x u, v+\Delta_x v)-\phi(u, v).$$

則 $$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\phi(u+\Delta_x u,\ v+\Delta_x v)-\phi(u,\ v+\Delta_x v)}{\Delta_x u}\cdot\frac{\Delta_x u}{\Delta x}$$
$$+\frac{\phi(u,\ v+\Delta_x v)-\phi(u,\ v)}{\Delta_x v}\cdot\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

於Δx的無限小之極限。爲

$$\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{\delta z}{\delta u}\cdot\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta z}{\delta v}\cdot\frac{\delta v}{\delta x}.$$

同樣。Δy亦爲

$$\frac{\delta z}{\delta y}=\frac{\delta z}{\delta u}\cdot\frac{\delta u}{\delta y}+\frac{\delta z}{\delta v}\cdot\frac{\delta v}{\delta y}.$$

更令假定高次之偏導來函數。則

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}=\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\delta z}{\delta u}\cdot\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta z}{\delta v}\cdot\frac{\delta v}{\delta x}\right)\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta z}{\delta u}\cdot\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$$
$$+\frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{\delta z}{\delta u}\cdot\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta z}{\delta v}\cdot\frac{\delta v}{\delta x}\right)\frac{\delta v}{\delta x}+\frac{\delta z}{\delta v}\cdot\frac{\delta^2 v}{\delta x^2}$$
$$=\frac{\delta^2 z}{\delta u^2}\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2+2\frac{\delta^2 z}{\delta u\delta v}\cdot\frac{\delta u}{\delta x}\cdot\frac{\delta v}{\delta x}+\frac{\delta^2 z}{\delta v^2}\left(\frac{\delta v}{\delta x}\right)^2$$
$$+\frac{\delta z}{\delta u}\cdot\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+\frac{\delta z}{\delta v}\cdot\frac{\delta^2 v}{\delta x^2}.$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}=\frac{\delta^2 z}{\delta u^2}\left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)^2+2\frac{\delta^2 z}{\delta u\delta v}\cdot\frac{\delta u}{\delta y}\cdot\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta^2 z}{\delta v^2}\left(\frac{\delta v}{\delta y}\right)^2$$
$$+\frac{\delta z}{\delta u}\cdot\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}+\frac{\delta z}{\delta v}\cdot\frac{\delta^2 v}{\delta y^2}.$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}=\frac{\delta^2 z}{\delta u^2}\cdot\frac{\delta u}{\delta x}\cdot\frac{\delta u}{\delta y}+\frac{\delta^2 z}{\delta u\delta v}\left(\frac{\delta u}{\delta x}\cdot\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta u}{\delta y}\cdot\frac{\delta v}{\delta x}\right)$$
$$+\frac{\delta^2 z}{\delta v^2}\cdot\frac{\delta v}{\delta x}\cdot\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta z}{\delta u}\cdot\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}+\frac{\delta z}{\delta v}\cdot\frac{\delta^2 v}{\delta x\delta y}.$$

等等。

〔例〕 1. $z=f(x,y)$，而 $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$ 求其 $\frac{\delta z}{\delta r}$, $\frac{\delta z}{\delta\vartheta}$.

又證明 $\left(\frac{\delta z}{\delta r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\delta z}{\delta\vartheta}\right)^2=\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)^2$.

(解)

$$\frac{\delta z}{\delta r}=\frac{\delta z}{\delta x}\cdot\frac{\delta x}{\delta y}+\frac{\delta z}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta r}$$

$$=f'_x(x,y)\cos\vartheta+f'_y(x,y)\sin\vartheta,$$

$$\frac{\delta z}{\delta\vartheta}=\frac{\delta z}{\delta x}\cdot\frac{\delta x}{\delta\vartheta}+\frac{\delta z}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta\vartheta}$$

$$=-f'_x(x,y)\,r\sin\vartheta+f'_y(x,y)\,r\cos\vartheta.$$

上之平方。與下以 r 約之平方相加。則

$$\left(\frac{\delta z}{\delta r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\delta z}{\delta\vartheta}\right)^2=\{f'_x(x,y)\}^2+\{f'_y(x,y)\}^2$$

$$=\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)^2.$$

〔例〕 2. $z=\sin^{-1}\frac{y}{x}$，而 x, y 爲 t 之函數。求其 $\frac{dz}{dt}$.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\delta z}{\delta x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\delta z}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{-\frac{y}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$=-\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

7. 同次函數。

二個自變數 x, y 之函數。爲 $z=F(x,y)$。x, y 代以 xt, yt。且有次之關係。

$$F(xt, yt)=t^n F(x,y).$$

有如此關係之函數 $F(x,y)$。謂爲關於 x, y 之 n 次之同次函數 (*Homogeneous function of the n^{th} order*)。

定理. n 次之同次函數 $z=F(x,y)$。

爲 $$x\frac{\delta F}{\delta x}+y\frac{\delta F}{\delta y}=nF.$$

(證明) 命 $xt=u,\ yt=v$. 則

$$F(u,v)=t^n F(x,y).$$

以 $$u=xt,\quad v=yt.$$

而 $$\frac{\delta F}{\delta u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\delta F}{\delta v}\cdot\frac{dv}{dt}=nt^{n-1}F(x,y).$$

即 $$x\frac{\delta F}{\delta u}+y\frac{\delta F}{\delta v}=nt^{n-1}F(x,y).$$

茲命 $t=1$. 則 $u=x,\ v=y$.

而 $$x\frac{\delta F}{\delta u}+y\frac{\delta F}{\delta y}=nF.$$

(注意) 此定理.稱爲來本之之公式。

本定理。於 $F(x,y)$ 爲代數有理整式時。亦能適用,

例如 $$z=ax^2+2bxy+cy^2.$$

則 $$x\frac{\delta z}{\delta x}+y\frac{\delta z}{\delta y}=2z.$$

而 $$z=ax^3+bx^2y+cxy^3+dy^3.$$

則 $$x\frac{\delta z}{\delta x}+y\frac{\delta z}{\delta y}=3z.$$

$F(x,y)$ 亦有不爲代數式者。

例如 $$z=tan^{-1}\frac{y}{x}.$$

則 $$x\frac{\delta z}{\delta x}+y\frac{\delta z}{\delta y}=0.$$

又 $$z=y\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}.$$

則 $$x\frac{\delta z}{\delta x}+y\frac{\delta z}{\delta y}=z.$$

8. 陰函數之導來函數。

(1) x之函數y爲

$$f(x,y)=0 \quad \text{之形狀。}$$

今欲從此求$\frac{dy}{dx}$。則將此陰函數先用代數解法。得$y=\phi(x)$。而後可適用微分法。然代數解法。大概困難。且甚煩瑣。因如次考之。

令 $$z=f(x,y).$$

則z爲x, y之函數。

於此處。其值爲0而爲一定。

是y之x之函數之變化。常從$z=0$而變化故也，

如是視法。依前節求微分。則$\frac{dz}{dx}=0$。而

$$0=\frac{\delta f}{\delta x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\delta f}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

從此得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}}. \qquad \left(\text{但 } \frac{\delta f}{\delta y}\neq 0\right).$$

$\left(\dfrac{\delta f}{\delta y}=0\right.$。則 $\dfrac{\delta f}{\delta x}=0$。此種形狀、詳論於第六章不定形$\Big)$。

欲得 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$、則

從 $\quad f=0$. 得 $\dfrac{\delta f}{\delta x}+\dfrac{\delta f}{\delta y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0.$

又從 $\quad \dfrac{\delta f}{\delta x}+\dfrac{\delta f}{\delta y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0.$

得 $$\frac{\delta}{\delta x}\left\{\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}\right\}+\frac{\delta}{\delta y}\left\{\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}\right\}\frac{dy}{dx}=0.$$

即 $$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\delta f}{\delta y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\delta f}{\delta x\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$$

代入 $\dfrac{dy}{dx}$ 之值。得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{\delta^2 f}{\delta x^2}\left(\dfrac{\delta f}{\delta y}\right)^2-2\dfrac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\cdot\dfrac{\delta f}{\delta x}\cdot\dfrac{\delta f}{\delta y}+\dfrac{\delta^2 f}{\delta y^2}\left(\dfrac{\delta f}{\delta x}\right)^2}{\left(\dfrac{\delta f}{\delta y}\right)^3}.$$

第三次以上之導來函數。亦可以同法推定。

(II) 二自變數 x, y 之陰函數 z 爲

$$f(x, y, z)=0 \quad \text{之形。}$$

此可與 (I) 同樣。考得 x, y, z 之函數 (實常爲0)。

令 z 爲 x, y 之函數。則

$$\frac{\delta f}{\delta x}\cdot\frac{\delta x}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}=0,$$

$$\frac{\delta f}{\delta x}\cdot\frac{\delta y}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta y}+\frac{\delta f}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta y}=0.$$

然$\frac{\delta x}{\delta x}=1$, $\frac{\delta y}{\delta y}=1$。而$x, y$互爲無關係之變化。

$$\therefore \qquad \frac{\delta x}{\delta y}=0, \quad \frac{\delta y}{\delta x}=0.$$

$$\therefore \qquad \frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}=0,$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}+\frac{\delta f}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta y}=0.$$

故令$\frac{\delta f}{\delta z}\neq 0$. 則

$$\frac{\delta z}{\delta x}=-\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta z}}, \qquad \frac{\delta z}{\delta y}=-\frac{\frac{\delta f}{\delta y}}{\frac{\delta f}{\delta z}}.$$

從此可求得第二次導來函數爲

$$\frac{\delta}{\delta x}\left\{\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}\right\}+\frac{\delta}{\delta z}\left\{\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}\right\}\frac{\delta z}{\delta x}=0,$$

$$\frac{\delta}{\delta y}\left\{\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}\right\}+\frac{\delta}{\delta z}\left\{\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}\right\}\frac{\delta z}{\delta y}=0,$$

$$\frac{\delta}{\delta y}\left\{\frac{\delta f}{\delta y}+\frac{\delta f}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta y}\right\}+\frac{\delta}{\delta z}\left\{\frac{\delta f}{\delta y}+\frac{\delta f}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta y}\right\}\frac{\delta z}{\delta y}=0.$$

(II) 單一自變數x之二個函數u, v。其聯立方程式爲

$$\phi(u, v, x)=0, \qquad \psi(u, v, x)=0.$$

ϕ, ψ可作三個變數之函數看。試求其微分。則

$$\frac{\delta\phi}{\delta u}\frac{du}{dx}+\frac{\delta\phi}{\delta v}\frac{dv}{dx}+\frac{\delta\phi}{\delta x}=0,$$

$$\frac{\delta\psi}{\delta u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\delta\psi}{\delta v}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{\delta\psi}{\delta x}=0.$$

解之。則

$$\frac{du}{dx}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\delta\phi}{\delta x} & \frac{\delta\phi}{\delta v}\\ \frac{\delta\psi}{\delta x} & \frac{\delta\psi}{\delta v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\delta\phi}{\delta u} & \frac{\delta\psi}{\delta v}\\ \frac{\delta\psi}{\delta u} & \frac{\delta\psi}{\delta v}\end{vmatrix}},\qquad \frac{dv}{dx}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\delta\phi}{\delta u} & \frac{\delta\phi}{\delta x}\\ \frac{\delta\psi}{\delta u} & \frac{\delta\psi}{\delta x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\delta\phi}{\delta u} & \frac{\delta\phi}{\delta v}\\ \frac{\delta\psi}{\delta u} & \frac{\delta\psi}{\delta v}\end{vmatrix}}.$$

但 $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$ 之成立。必須

$$\begin{vmatrix}\frac{\delta\phi}{\delta u} & \frac{\delta\phi}{\delta v}\\ \frac{\delta\psi}{\delta u} & \frac{\delta\psi}{\delta v}\end{vmatrix}\neq 0.$$

試置換兩方程式。以代上記聯立方程式之ϕ, ψ。則可得第二次導來函數。與前相同。

〔例〕 1. 從 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=0$. 以求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

(解) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}=0.\quad \therefore\ \frac{dy}{dx}=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$

試再求微分。則

$$-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}-\frac{1}{3}y^{-\frac{4}{3}}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^{-\frac{1}{3}}\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

$$\therefore\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x^{-\frac{4}{3}}+y^{-\frac{4}{3}}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{3y^{-\frac{1}{3}}}=\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}.$$

(注意) 從 (I) 所得之公式。以求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 亦可。

〔例〕 2. 從 $ax^2+by^2=c$. 以求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{ax}{by},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{ac}{b^2y^3}.$$

〔例〕 3. 從 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 求 $\frac{\delta z}{\delta x}$, $\frac{\delta z}{\delta y}$.

(解)
$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2z}{c^2}\frac{\delta z}{\delta x}=0. \qquad \therefore \quad \frac{\delta z}{\delta x}=-\frac{c^2x}{a^2z}.$$

$$\frac{2y}{b^2}+\frac{2z}{c^2}\frac{\delta z}{\delta y}=0. \qquad \therefore \quad \frac{\delta z}{\delta y}=-\frac{c^2y}{b^2z}.$$

〔例〕 4. 從 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=2ax$.

求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$.

(解)
$$2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=0.$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=2a.$$

相減。得

$$2z\frac{dz}{dx}=-2a. \qquad \therefore \quad \frac{dz}{dx}=-\frac{a}{z}.$$

又
$$2y\frac{dy}{dx}=2a-2x. \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{a-x}{y}.$$

更各求其微分。則

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+z\frac{d^2z}{dx^2}=0. \qquad \therefore \quad \frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{a^2}{z^3}.$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+y\frac{d^2y}{dx^2}=-1. \qquad \therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{a^2}{y^3}$$

9. 自變數之變換。

先於有單一自變數 x 之函數 $y=f(x)$。從 $x=\varphi(t)$ 之 x。與自變數 t 變換。則以 y 爲 t 之函數。而

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)\frac{dy}{dx}.$$

$$\therefore\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{\varphi'(t)}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=\{\varphi'(t)\}^2\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

$$\therefore\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}=\frac{\varphi'(t)\frac{d^2y}{dt^2}-\varphi''(t)\frac{dy}{dx}}{\{\varphi'(t)\}^3}.$$

等等。

知 $y=f\{\varphi(t)\}$ 之情形。則 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ 亦爲已知之函數。

〔例〕 1. 於 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 而令 $x=a\sin\theta$. 則與此置換。而得

$$y=b\cos\theta.$$

$$\therefore\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-b\sin\theta}{a\cos\theta}=-\frac{b}{a}\tan\theta.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a\cos\theta(-b\cos\theta)-(-a\sin\theta)\left(-\frac{b}{a}\tan\theta\right)}{(a\cos\theta)^3}$$

$$=-\frac{b(a\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{a^3\cos^4\theta}.$$

〔例〕 2. 於 $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{1-x^2}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{y}{1-x^2}=0$. 而命

$x=\cos t$. 則

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin t}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sin t\frac{d^2y}{dt^2}-\cos t\frac{dy}{dt}}{\sin^3 t}.$$

試將此而置換之。則可得簡單之形。爲

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0.$$

〔例〕 3. 於 $y=f(x)$. 而命 $x=\phi(y)$. 則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dy}}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}\cdot\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

等等。

次於二個自變數 x, y 之函數 $z=f(x, y)$。

而 $\quad x=\phi(\xi, \eta), \quad y=\psi(\xi, \eta)$.

從 x, y 變換新自變數 ξ, η. 則

$$\frac{\delta z}{\delta \xi}=\frac{\delta z}{\delta x}\cdot\frac{\delta x}{\delta \xi}+\frac{\delta z}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta \xi}=\phi'_\xi\frac{\delta z}{\delta x}+\psi'_\xi\frac{\delta z}{\delta y},$$

$$\frac{\delta z}{\delta \eta}=\frac{\delta z}{\delta x}\cdot\frac{\delta x}{\delta \eta}+\frac{\delta z}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta \eta}=\phi'_\eta\frac{\delta z}{\delta x}+\psi'_\eta\frac{\delta z}{\delta y}.$$

解之。

$$\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\delta z}{\delta\xi}\psi'_\xi\\ \dfrac{\delta z}{\delta\eta}\psi'_\eta\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\varphi'_\xi\cdot\psi'_\xi\\ \varphi'_\eta\cdot\psi'_\eta\end{vmatrix}},\qquad \frac{\delta z}{\delta x}=\frac{\begin{vmatrix}\varphi'_\xi\dfrac{\delta z}{\delta\xi}\\ \varphi'_\eta\dfrac{\delta z}{\delta\eta}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\varphi'_\xi\cdot\psi'_\xi\\ \varphi'_\eta\cdot\psi'_\eta\end{vmatrix}}.$$

更欲得 $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}$, $\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$。則不可不解上之聯立方程式之微分

〔例〕 1. 於 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 而 x, y 爲自變數。令

$$x=a\cos\varphi\sin\theta,$$

$$y=b\cos\varphi\cos\theta.$$

則與此置換。而得

$$z=c\sin\varphi.$$

故 $$\frac{\delta z}{\delta\varphi}=c\cos\varphi,\qquad \frac{\delta z}{\delta\theta}=0.$$

$$\therefore\quad \frac{\delta z}{\delta x}=\frac{\begin{vmatrix}c\cos\varphi & -b\sin\varphi\cos\theta\\ 0 & -b\cos\varphi\sin\theta\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-a\sin\varphi\sin\theta & -b\sin\varphi\cos\theta\\ a\cos\varphi\cos\theta & -b\cos\varphi\sin\theta\end{vmatrix}}$$

$$=-\frac{c}{a}\cos\varphi.$$

$$\frac{\delta z}{\delta y}=\frac{\begin{vmatrix}-a\sin\varphi\sin\theta & c\cos\varphi\\ a\cos\varphi\cos\theta & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-a\sin\varphi\sin\theta & -b\sin\varphi\cos\theta\\ a\cos\varphi\cos\theta & -b\cos\varphi\sin\theta\end{vmatrix}}$$

$$=-\frac{c}{b}\cos\varphi\cot\theta.$$

〔例〕 2. 於 $R=1+\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)^2$。而自變數 x, y 爲

$$x=r\cos\phi, \qquad y=r\sin\phi.$$

從此變換 r, ϕ。則

$$\frac{\delta z}{\delta r}=\frac{\delta z}{\delta x}\cdot\frac{\delta x}{\delta r}+\frac{\delta z}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta r}$$

$$=\frac{\delta z}{\delta x}\cos\phi+\frac{\delta z}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta r},$$

$$\frac{\delta z}{\delta\phi}=\frac{\delta z}{\delta x}\cdot\frac{\delta x}{\delta\phi}+\frac{\delta z}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta\phi}$$

$$=-\frac{\delta z}{\delta x}r\sin\phi+\frac{\delta z}{\delta y}r\cos\phi.$$

此二聯立方程式。後者以 r 約之。各乘平方相加。則

$$\left(\frac{\delta z}{\delta r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\delta z}{\delta\phi}\right)^2=\left(\frac{\delta z}{\delta\phi}\right)^2+\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)^2.$$

$$\therefore \qquad R=1+\left(\frac{\delta z}{\delta r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\delta z}{\delta\phi}\right)^2.$$

10. 自變數及函數之變換。

先於 $y=f(x)$ 之 x, y 爲

$$x=\phi(u,v), \qquad y=\psi(u,v).$$

其自變數 u 與函數 v 變換。而 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots$, 以表 $u, v, \frac{dv}{du}, \frac{d^2v}{du^2}$, $\ldots\ldots$, 之項。

以y爲x之函數。而x爲u之函數。則

$$\frac{dy}{du}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{du},$$

$$\frac{d^2y}{du^2}=\frac{a^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{du^2}.$$

$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

然

$$\frac{dx}{du}=\frac{\delta\varphi}{\delta u}+\frac{\delta\varphi}{\delta v}\cdot\frac{dv}{du}=\varphi'_u+\varphi'_v\frac{dv}{du},$$

$$\frac{dy}{du}=\frac{\delta\psi}{\delta u}+\frac{\delta\psi}{\delta v}\cdot\frac{dv}{du}=\psi'_u+\psi'_v\frac{dv}{du},$$

$$\frac{d^2x}{du^2}=\varphi''_{uu}+2\varphi''_{uv}\frac{dv}{du}+\varphi''_{vv}\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\varphi'_v\frac{d^2v}{du^2},$$

$$\frac{d^2y}{du^2}=\psi''_{uu}+2\psi''_{vv}\frac{dv}{du}+\psi''_{vv}\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\psi'_v\frac{d^2v}{du^2}.$$

$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

以此置換於前者。而

$$\frac{dy}{du}=\frac{\dfrac{dy}{du}}{\dfrac{dx}{du}}=\frac{\psi'_u+\psi'_v\dfrac{dv}{du}}{\varphi'_u+\varphi'_v\dfrac{dv}{du}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\varphi'_u+\varphi'_v\dfrac{dv}{du}\right)\left(\psi''_{uu}+\ldots\right)-\left(\psi'_u+\psi'_v\dfrac{dv}{du}\right)\left(\varphi''_{uu}+\ldots\right)}{\left(\varphi'_u+\varphi'_v\dfrac{dv}{du}\right)^3}.$$

$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

〔例〕 於 $\rho=\dfrac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$、而令

$$x=r\cos\phi,\qquad y=r\sin\phi.$$

令 r 為 ϕ 之函數、則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\phi}}{\dfrac{dx}{d\phi}}=\frac{r\cos\phi+\dfrac{dr}{d\phi}\sin\phi}{-r\sin\phi+\dfrac{dr}{d\phi}\cos\phi},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(-r\sin\phi+\dfrac{dr}{d\phi}\cos\phi\right)\left(-r\sin\phi+2\dfrac{dr}{d\phi}\cos\phi+\dfrac{d^2r}{d\phi^2}\sin\phi\right)}{\left(-r\sin\phi+\dfrac{dr}{d\phi}\cos\phi\right)^3}$$

$$-\frac{\left(-r\cos\phi+\dfrac{dr}{d\phi}\sin\phi\right)\left(-r\cos\phi-2\dfrac{dr}{d\phi}\sin\phi+\dfrac{d^2r}{d\phi^2}\cos\phi\right)}{\left(-r\sin\phi+\dfrac{dr}{d\phi}\cos\phi\right)^3}$$

$$=\frac{r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\phi}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\phi^2}}{\left(-r\sin\phi+\dfrac{dr}{d\phi}\cos\phi\right)}.$$

$$\therefore\quad \rho=\frac{\left\{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\phi}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\phi}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\phi^2}}.$$

(注意) 變數之變換其主要者、為軸式坐標與極式坐標之變換。又適用於軸式坐標軸之移動等。至其適用之例。於曲線論最多。

第五章 級數

1. 常數項之數級。

某規則之下。作無限之實數。如

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

成級數。如

$$u_1+u_2+u_3+\ldots \tag{1}$$

是謂<u>無限級數</u>(*Infinite series*)。

表此級數。自最初之數至n項之和。爲

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n.$$

而 $$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} S_n=S.$$

其<u>有限確定值</u>S能存在。則級數(1)稱<u>收斂</u>(*Convergent*)。S謂此級數之<u>值</u>。

又$Lim\, S_n$無有限確定之值。則稱<u>發散</u>(*Divergent*)。

(例) 1. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}},$$

$$Lim\, S_n=2.$$

故上之級數爲收斂。

〔例〕 2. $+1\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$

令 $$u_1=1,\quad u_2=\frac{1}{2},\quad u_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\quad \cdots$$

$$u_n=\frac{1}{2^{n-2}+1}+\frac{1}{2^{n-2}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

則 $$S_n=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{2^{n-2}+1}+\frac{1}{2^{n-2}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2},$$

$$>1+\frac{n-1}{2}.$$

$\therefore$ $$Lim\, S_n=+\infty.$$

故上之級數爲發散。

〔例〕 3. $1-1+1-1+1-\cdots$

此級數。在 S_n 爲 1 又爲 0 之內。n 雖增。仍爲不定數。

是亦發散也。

2. 正項之級數。

關於各項爲正之級數。其爲收斂或發散。可直從其定義推定之。玆列舉其簡單之性質如次。

(1) 收斂級數之項之值。僅於某項以下無限減小。

何則。

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

$$\therefore \qquad Lim\, u_n = Lim\, S_n - Lim\, S_{n-1} = 0.$$

又 $Lim\, u_n$ 不歸着於0。則其級數非收斂。

(2) 於收斂級數之初項之前。新附加有限個項。或削減收斂級數最初有限個之項。依然爲收斂級數。

何則。令

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots = S.$$

爲有限確定值。則

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_m + u_1 + u_2 + u_3 + \dots = v_1 + v_2 + \dots + v_m + S,$$

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \dots = S - (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_m).$$

其任何亦爲有限確定。

(3) 各項爲正之級數。必爲收斂。否則限於 $+\infty$ 之發散。

何則。

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n.$$

此僅從 n 之增而增大。不能以不定或 $-\infty$ 相加故也。

(4) 從一個收斂級數。取去其項。作成級數。亦爲收斂。

何則。後所作之級數。從最初之數而至 n 項之和。令爲 S'_n。則

$$S'_n < S.$$

$$\therefore \qquad Lim\, S'_n \leqq S.$$

〔例〕 令 $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$ 爲收斂。則

$$1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

亦爲收斂。

(5) 有級數。比收斂級數相應對之各項小。則此級數亦為收斂。

何則。

$$u_1+u_2+u_3+\ldots=S.$$

為收斂。

而 $v_1+v_2+v_3+\ldots$ 之級數。

令 $v_1<u_1,\quad v_2<u_2,\quad v_3<_3,\quad \ldots$

則 $S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n,$

$$S'_n=v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n.$$

常為 $S'_n<S_n.$

$\therefore\quad Lim\, S'_n<Lim\, S_n=S.$

〔例〕 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots$

其極限值收斂為2。則與此相應對之各項比較更小之級數，

如 $$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$$

亦為收斂。

3. 正項級數收斂之查定。

I. 級數 $u_1+u_2+u_3+\ldots$ 則因

$$Lim\frac{u_{n+1}}{u_n}<1,\quad 或\quad >1.$$

從而為收斂或發散。

(證明)

令 $\qquad Lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=h<1.$ 則

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<h'<1,\quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}<h',\quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}}<h',\quad \ldots$$

$$u_{n+1}<u_n h',$$

$$u_{n+2}<u_{n+1}h'<u_n h'^2,$$

$$u_{n+3}<u_{n+2}h'<u_n h'^3.$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

而 $\qquad u_1+u_2+u_3+\ldots<u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n-1}+u_n(1+h'+h'^2+\ldots).$

故 $\qquad u_1+u_2+u_3+\ldots$ 爲收斂。

又 $Lim\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$。則某項以下。從項數之增。項之值亦增大。其爲發散明甚。

(注意) $Lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$。則以上之査定不適用。當依據(III)以査定之。

II. 級數 $u_1+u_2+u_3+\ldots$ 則因

$$Lim\sqrt[n]{u_n}<1,\ \text{或}\ \geqq 1.$$

從而爲收斂或發散。

(證明)

令 $\qquad Lim\sqrt[n]{u_n}=h<1.$

則某項以下。爲

$$\sqrt[n]{u_n}<h'<1,\quad \sqrt[n+1]{u_{n+1}}<h',\quad \sqrt[n+2]{u_{n+1}}<h',\quad \ldots$$

$\therefore$ $u_n < h'^n,\quad u_{n+1} < h'^{n+1},\quad u_{n+2} < h'^{n+2},\quad \ldots$

$\therefore$ $u_1+u_2+u_3+\ldots < u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}+h'^n(1+h'+h'^2+\ldots)$.

故 $u_1+u_2+u_3+\ldots$ 爲收斂。

又 $Lim\sqrt[n]{u_n}\geqq 1$。則 $Lim\, u_n$ 不能歸着於0。故不能爲收斂。

III. 級數 $u_1+u_2+u_3+\ldots$ 則因

$$Lim\, u\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)>0,\quad 或\quad \leqq 1.$$

從而爲收斂或發散。

(證明) 以 $u_1+u_2+u_3+\ldots$ 與

$$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ldots\quad 比較。$$

求適於下式之 k 之值。

$$Lim\, n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=Lim\, n\left(1-\frac{n^k}{(n+1)^k}\right).$$

於此右邊。令 $n=\frac{1}{h}$。則

$$\lim_{h=\infty} n\left\{1-\frac{1}{(1+h)^k}\right\}=\lim_{h=\infty}\frac{1}{(1+h)^k}\left\{\frac{(1+h)^k-1}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h=\infty}\frac{1}{(1+h)^k}\left\{k+\frac{k(k-1)}{2!}h+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}h^2+\ldots\right\}$$

$$=k.$$

然 $$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ldots=\frac{1}{1^k}+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{4^k}+\frac{1}{5^k}+\frac{1}{6^k}+\frac{1}{7^k}\right)+\ldots$$

$$<\frac{1}{1^{k-1}}+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{4^{k-1}}+\frac{1}{8^{k-1}}+\ldots$$

故　$\frac{1}{2^{k-1}}<1$，卽　$2^{k-1}>1$，卽　$k>1$.

則　$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\dots$　爲收斂。

又　$k\leqq 1$. 則

$$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\dots\geqq\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$$

故爲發散。

故　$$Lim\, n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)>1,\quad \text{或}\quad \leqq 1.$$

從而$u_1+u_2+u_3+\dots$爲收斂或發散。

〔例〕 1.　$1+\frac{p}{1}x+\frac{p(p+1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{p(p+1)(p+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+.$　　$(x>0)$.

於此級數爲

$$u_n=\frac{p(p+1)\dots(p+n-2)}{(n-1)!}x^{n-1},$$

$$u_{n+1}=\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!}x^n.$$

$\therefore$　$$Lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=Lim\frac{p+n-1}{n}x=x.$$

故$x<1$爲收斂。$x>1$爲發散。

又$x=1$。則級數爲

$$1+\frac{p}{1}+\frac{p(p+1)}{1\cdot 2}+\frac{p(p+1)(p+2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots$$

$$Lim\, n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=Lim\, n\left(1-\frac{p+n-1}{n}\right)=1-p.$$

故　$1-p>1$.　卽　$p<0$爲收斂。

$1-p<1$.　卽　$p>0$爲發散。

4. 正負項混淆之級數。

命正項及負項混淆之級數爲

$$u_1+u_2+u_3+\dots$$

則此級數。視 $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\dots$ 之收斂而收斂。

何則。試僅取出 $u_1+u_2+u_3+\dots$ 之中之正項。爲

$$v_1+v_2+v_3+\dots$$

再僅集其負項。爲

$$-w_1-w_2-w_3-\dots$$

則以此兩者。爲 $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\dots$ 之一部分[第2節(4)]。任何亦爲收斂。

今代其值爲 S', $-S''$.

命 $$S_n=u_1+u_2+u_3+\dots+u_n$$
$$=v_1+v_2+v_3+\dots+v_m-w_1-w_2-w_3-\dots-w_l$$
$$=S'_m-S''_l.$$

則 $$\mathrm{Lim}\,S_n=\mathrm{Lim}\,S'_m-\mathrm{Lim}\,S''_l=S'-S''.$$

各項絕對值之級數 $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\dots$ 爲收斂。則級數 $u_1+u_2+u_3+\dots$ 爲絕對的收斂 (*Absolutely convergent*)。又名無條件之收斂 (*Unconditional convergent*)。

絕對的收斂之級數。其項之順次。任何換轉。而其值常一定爲 $S'-S''$。

然各項絕對值之級數 $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\dots$ 雖爲發散。而有時 $u_1+u_2+u_3+\dots$ 爲收斂。

如此級數。謂之附條件之收斂(*Conditional convergent*)。

附條件收斂之級數。由其項之排法。可使占得任何之值。

何則。附條件收斂之級數。必

$$v_1+v_2+v_3+\ldots=+\infty,$$

$$-w_1-w_2-w_3-\ldots=-\infty.$$

蓋 $v_1+v_2+v_3+\ldots$ 與 $-w_1-w_2-w_3-\ldots$ 皆爲有限。故亦爲確定值。從而 $u_1+u_2+u_3+\ldots$ 亦當收斂。若僅其一方面爲無限大。則 $u_1+u_2+u_3+\ldots$ 亦當爲無限大故也。

然轉換 $u_1+u_2+u_3+\ldots$ 之順序。而得任意之正值。令等於A。則先僅取正項。而

$$v_1+v_2+\ldots+v_{p-1}\leqq A<v_1+v_2+\ldots+v_{p-1}+v_p.$$

次附加負項。

$$v_1+v_2+\ldots+v_p-w_1-w_2-\ldots-w_{q-1}\geqq A,$$

$$A>v_1+v_2+\ldots+v_p-w_1-w_2-\ldots-w_{q-1}-w_q.$$

又次附加正項。而

$$v_1+v_2+\ldots+v_p-w_1-\ldots-w_q+v_{p+1}+\ldots+v_{r-1}\leqq A,$$

$$A<v_1+\ldots+v_p-w_1-\ldots-w_q+v_{p+1}+\ldots+v_r.$$

如此行無限手續。卽得。

又若欲令任意之負值等於B。則先取負項可也。

〔例〕 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$ 爲附條件之收斂級數。而售此順序。可得等於$\log 2$之證明。(見後章)

然欲令此級數等於1·5。則令

$$1\cdot5=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{4}+\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{25}-\frac{1}{6}+\frac{1}{27}+\cdots$$

足矣。

5. 羃級數。

x之羃指數。爲正整數排列之順序。添以常數係數$a_0, a_1, a_2, \ldots$,如此作成無限級數。如

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$$

是謂x之羃級數(*Power series*)。

此級數爲

$$Lim\left|\frac{a_nx^n}{a_{n-1}x^{n+1}}\right|=Lim\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}x\right|<1.$$

是謂絕對的收斂。然今令

$$Lim\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|=g.$$

則關於x爲

$$|x|<g. \quad 卽 \quad -g<x<+g.$$

此級數爲絕對的收斂。

此$-g<x<+g$之x之區域,稱羃級數之收斂域(*Convergency-interval*)。

(注意) 於$x=+g$與$x=-g$之點。而羃級數爲收斂與否。尙未一定。要從各級數特別研究之。

<u>一個之羃級數</u>

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots。$$

<u>與其各項導來函數作成之羃級數</u>

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\dots。$$

<u>其收斂域相等。</u>

何則。就後者言之。

$$Lim\left|\frac{(n+1)a_{n+1}x^n}{n\,a_n\,x^{n-1}}\right|=Lim\left|\frac{n+1}{n}\,\frac{a_{n+1}}{a_n}\,x\right|$$

$$=Lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\,x\right|.$$

故 $$|x|<Lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=g.$$

此比1小。故云。

6. 函數之展開。

函數$f(x)$。從其第一次至第n次導來函數$f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$。均無論如何。於$(\alpha, \beta)$區域內爲一價。且連續。今將作得次之函數。

$$F(x)=f(x)+\frac{\beta-x}{1!}f'(x)+\frac{(\beta-x)^2}{2!}f''(x)+\dots$$

$$+\frac{(\beta-x)^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x).$$

然$F(x)$。亦於(α, β)區域內爲一價連續。特於$x=\alpha, x=\beta$。則

$$F(\alpha)=f(\alpha)+\frac{\beta-\alpha}{1!}f'(\alpha)+\frac{(\beta-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha)+\dots$$

$$+\frac{(\beta-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x).$$

$$F(\beta)=f(\beta).$$

而 $$F'(x)=\frac{(\beta-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x).$$

又從平均值之定理(第二章第14節)。則

$$F(\beta)-F(a)=(\beta-a)F'\{a+\theta(\beta-a)\}. \qquad 0<\theta<1.$$

合此與前值置換。則

$$f(\beta)=f(a)+\frac{\beta-a}{1!}f'(a)+\frac{(\beta-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots$$
$$+\frac{(\beta-a)^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_n.$$

而 $$R_n=(\beta-a)^n\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}\{a+\theta(\beta-a)\}.$$

此關係之右邊。爲關於 $(\beta-a)$ 之冪級數。自其最初項至第 n 項加以 R_n 者也。如是表函數之值爲冪級數。稱函數之展開 (*Expansion*)。其 R_n 稱級數 n 項之剩餘 (*Remainder or Residue*)。

上記之剩餘式。由可西氏發明。故稱可西氏之剩餘式(*Cauchy's Remainder-form*)。

又 $$f(\beta)=f(a)+\frac{\beta-a}{1!}f'(a)+\frac{(\beta-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots$$
$$+\frac{(\beta-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(\beta-a)^n}{(n-1)!}C.$$

考 $$\phi(x)=f(\beta)-f(x)-\frac{\beta-x}{1!}f'(x)-\frac{(\beta-x)^2}{2!}f''(x)-\cdots$$
$$-\frac{(\beta-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)-\frac{(\beta-x)^n}{(n-1)!}C.$$

則 $$\phi(a)=0,$$
$$\phi(\beta)=0.$$

且 $$\psi'(x)=-\frac{(\beta-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)+n\frac{(\beta-x)^{n-1}}{(n-1)!}C.$$

故從第二章第14節。則可爲$\psi(x_0)=0$之x_0必可存在。今令

$$x_0=a+\theta'(\beta-a). \qquad 0<\theta'<1.$$

則 $$0=-\frac{(\beta-a)^{n-1}(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}\{a+\theta'(\beta-a)\}$$
$$+n\frac{(\beta-a)^{n-1}(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!}C.$$

∴ $$C=\frac{1}{n}f^{(n)}\{a+\theta'(\beta-a)\}.$$

從此C換置$f(\beta)$之展開式。則羃級數n項之剩餘。爲

$$R'_n=\frac{(\beta-a)^n}{n!}f^{(n)}\{a+\theta'(\beta-a)\}. \qquad 0<\theta'<1.$$

此稱拉果蘭諸氏之剩餘式(*Lagrange's Remainder-form*)。

(注意) 二剩餘式之θ, θ'。均爲在0與1之間之數。固勿具論。然一般不能求得者也。

7. 戴勞之定理。

於前節所得之展開式。而令

$$a=x, \qquad \beta=x+h.$$

則得次之定理。

定理. 函數$f(x)$。設自其第一次至第n次之導來函數。均無論如何。於$(x,x+h)$區域內爲一價連續。則

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\dots$$
$$+\frac{h^n}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+R_n$$

令 $$R_n=h^n\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x+\theta h). \qquad 0<\theta<1.$$

又 $$R'_n=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta' h). \qquad 0<\theta'<1.$$

此稱戴勞氏之定理 (*Taylor's Theorem*)。

戴勞之展開式中。而令 $\lim\limits_{n=\infty} R_n=0$。則極限值得 $f(x+h)$ 之無限級數。

定理. 函數 $f(x)$ 及其所至之導來函數。於 $(x, x+h)$ 區域內。任何亦爲一價連續。且 $\lim R_n=0$。則得收斂級數如次。

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\dots$$

$f(x)$ 之導來函數。自第 $(n+1)$ 次以上悉爲0。則爲有限級數。如

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\dots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x).$$

8. 馬格老臨之定理。

於第6節所得之展開式。

令 $$\alpha=0, \qquad \beta=x.$$

則得次之定理。

定理. 函數 $f(x)$ 自其第一次至第 n 次之導來函數。均無論何如。其於 $(0, x)$ 區域內爲一價連續。則

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\dots$$
$$+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+R_n.$$

令 $$R_n=x^n\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\theta x). \qquad 0<\theta<1.$$

又 $$R'_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta' x). \qquad 0<\theta'<1.$$

此稱馬格老臨之定理(*Maclaurin's Theorem*)。

定理. 函數$f(x)$及其所至之導來函數。於$(0, x)$區域內。任何亦爲一價連續。且$Lim\ R_n=0$。則得收斂級數如次。

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\dots$$

9. 指數函數之展開。

$f(x)=e^x$. 則

$$f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\dots=f^{(n+1)}(x)=e^x.$$

故 $$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\dots=f^{(n+1)}(0)=1.$$

故依馬氏定理。則

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+R'_n.$$

此 $$R'_n=\frac{x^n}{n!}e^{\theta' x}.$$

然$m\leqq|x|<m+1$, $m+1<n$之數。m, n而

令 $$R'_n=\frac{x^m}{m!}e^{\theta' x}\cdot\frac{x}{m+1}\cdot\frac{x}{m+2}\cdot\dots\cdot\frac{x}{n}.$$

則 $$1>\frac{|x|}{m+1}>\frac{|x|}{m+2}>\dots>\frac{|x|}{n}.$$

而 $$\left|\frac{x}{m+1}\cdot\frac{x}{m+2}\cdot\dots\cdot\frac{x}{n}\right|<\left|\frac{x}{m+1}\right|^{n-m}.$$

∴ $$Lim\left|R'_n\right|<\left|\frac{x^m}{m!}e^{\theta' x}\right|Lim\left|\frac{x}{m+1}\right|^{n-m}=0.$$

是 x 爲任何有限值。亦適於用。故

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots,\qquad -\infty<x<+\infty.$$

〔例〕 a^x 爲關於 x 之冪級數。試展開之。

答

$$a^x=1+\frac{x\log a}{1!}+\frac{x^2(\log a)^2}{2!}+\frac{x^3(\log a)^3}{3!}+\dots,$$

$$-\infty<x<+\infty.$$

10. 對數函數之展開。

$f(x)=\log x$。以此不可應用馬氏定理。

而令 $f(x)=\log(1+x)$、則

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=+\frac{1!}{(1+x)^2},\quad f'''(x)=-\frac{2!}{(1+x)^3},$$

$$\dots,\quad f^{(n-1)}(x)=(-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}.$$

而 $x>-1$ 爲一價連續。

故

$$f(0)=1,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=-1!,$$

$$f'''(0)=+2!,\quad \dots,\quad f^{(n-1)}(0)=(-1)^{n-2}(n-2)!.$$

而拉果闌諸之剩餘式，爲

$$R'_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{x^n}{(1+\theta' x)^n}.$$

而 $0<x<1.$

故

$$\frac{x}{1+\theta' x}<1.\qquad \therefore\qquad Lim\left(\frac{x}{1+\theta' x}\right)^n=0.$$

$$\therefore\qquad Lim\ R'_n=0.$$

又可西氏之剩餘式。爲

$$R_n=\frac{x}{1+\theta x}\left(\frac{-x+\theta x}{1+\theta x}\right)^{n-1}.$$

而 $-1<x<0$.

故 $$\frac{-x+\theta x}{1+\theta x}<1.$$

$\therefore$ $$Lim\left(\frac{-x+\theta x}{1+\theta x}\right)^{n-1}=0. \qquad \therefore \qquad Lim\,R_n=0.$$

然 $x>1$。則得羃級數爲發散。

簡之。則

$$log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots, \qquad -1<x<+1.$$

特 $x=1$. 則得

$$log\,2=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

爲附條件之收斂級數。

〔例〕 1. 試展開 $log\frac{1+x}{1-x}$.

(解) $$log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots, \qquad -1<x<+1.$$

以 $-x$ 代其 x。則得

$$log(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\dots, \qquad -1<x<+1.$$

相減。

則 $$log\frac{1+x}{1-x}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots\right), \qquad -1<x<+1$$

〔例〕 2. 已知 $log\,n\,(n>0)$。試作 $log(n+1)$ 之公式。

(解) 於對數級數。而令 $x=\frac{1}{n}$。則

$$\log\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3}-\cdots$$

$$\therefore\qquad \log(n+1)=\log n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3}-\cdots\right),$$

$$1<n<+\infty.$$

又於例1之級數。而令 $x=\frac{1}{2n+1}$。則

$$\log\frac{n+1}{n}=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^3}+\cdots\right\},$$

$$\log(n+1)=\log n+2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^3}+\cdots\right\},$$

$$0<n<+\infty.$$

(注意) 從此等公式。可作得逐次爲整數順序之自然對數。

11. 三角函數之展開。

令 $f(x)=\sin x$. 則

$$f'(x)=\cos x,\quad f''(x)=-\sin x,\quad f'''(x)=-\cos x,$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x)=\sin x,\quad \ldots$$

此與 $f(x)$ 無論如何.其至 x 之有限値爲一價連續而

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1,$$

$$f^{\mathrm{IV}}(0)=0,\quad \ldots$$

是以生一個爲0之項。

今令級數 $2n$ 項之剩餘式。爲

$$R'_{2n}=\frac{x^{2n}}{(2n)!}f^{(n)}(\theta' x).$$

$\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 爲x任何之有限值。於極限爲0。已於第9節證明。

故 $\quad Lim\, R_n=0.$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots,\qquad -\infty<x<+\infty.$$

同樣。得

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots,\qquad -\infty<x<+\infty.$$

〔例〕 1. 試展開 $\sin x\cos x$.

(解) $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{2x}{1!}-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+\ldots\right\}$$

$$=\frac{x}{1!}-\frac{2^2x^3}{3!}+\frac{2^4x^5}{5!}-\ldots,\qquad -\infty<x<+\infty.$$

〔例〕 2. 試展開 $(\sin x)^2$.

答 $$\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6!}-\ldots,\qquad -\infty<x<+\infty.$$

12. 二項式之展開。

令$f(x)=(1+x)^m$ (m爲正或負之有理數)。

則 $$f'(x)=m(1+x)^{m-1},\quad f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2},\quad\ldots,$$

$$f^{(n-1)}(x)=m(m-1)\ldots(m-n+2)(1+x)^{m-n+1}.$$

而 $$f(0)=1,\quad f'(0)=m,\quad f''(0)=m(m-1),\quad\ldots,$$

$$f^{(n-1)}(0)=m(m-1)\ldots(m-n+2).$$

令其剩餘式。爲

$$R_n=m(m-1)\dots(m-n+1)(1+\theta x)^{m-n}\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}x^n$$

$$=mx\frac{(1+\theta x)^m}{1-\theta}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdots\frac{m-n+1}{n-1}.$$

則 $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$ 與 $\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdots\frac{m-n+1}{n-1}$. 爲

$-1\leqq x\leqq 0$. 於極限爲0.

∴ $Lim\ R_n=0.$

又 $R'_n=m(m-1)\dots(m-n+1)(1+\theta' x)^{m-n}\frac{x^n}{n!}$

$$=(1+\theta' x)^m\left(\frac{x}{1+\theta' x}\right)^n\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-n+1}{n}.$$

則 $0\leqq x\leqq 1$. 此與前同樣。而得

$Lim\ R'_n=0.$

故 $$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots$$

$$-1\leqq x\leqq +1.$$

13. 用未定係數之展開法。

$f'(x)$ 爲展開函數 $f(x)$ 之所得。於某區域內之冪級數。爲

$$f(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\dots+A_{n-1}x^{n-1}+R(x).$$

試假定展開所得之級數。爲

$$f'(x)=A_1+2A_2x+3A_3x^2+\dots+(n-1)A_{n-1}x^{n-2}+R'(x).$$

用別法展開所得者。爲

$$f'(x)=B_0+B_1x+B_2x^2+\dots+B_{n-1}x^{n-2}+R_{n-1}.$$

比較其係數。可得決定 A_0 $A_1, A_2, \ldots$

此稱未定係數之法 (*Method of undetermined coefficients*)。

今命 $$f(x)=\tan^{-1}x$$

$$=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_{2n-1}x^{2n-1}+R(x).$$

則 $$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+(-1)^n\frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$

此羃級數由除法得來。

然以 $$=A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots+(2n-1)A_{2n-1}x^{2n-2}+R(x).$$

而 $$A_0=\tan^{-1}0-R(0)=-R(0).$$

$$A_1=1.$$

$$2A_2=0. \qquad \therefore \quad A_2=0.$$

$$3A_3=-1. \qquad \therefore \quad A_3=-\frac{1}{3}.$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$(2n-2)A_{2n-2}=0. \qquad \therefore \quad A_{2n-2}=0.$$

$$(2n-1)A_{2n-1}=(-1)^{n-1}. \qquad \therefore \quad A_{2n-1}=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

故 $$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+R(x)-R(0).$$

然從第二章第14節。則

$$R(x)-R(0)=x\,R'(\theta x) \qquad 0<\theta<1.$$

$$=(-1)^n\frac{\theta^{2n}x^{2n+1}}{1+(\theta x)^2}.$$

故令 $-1\leqq x\leqq+1$. 則

$$Lim\{R(x)-R(0)\}=0.$$

卽 $$tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots,\qquad -1\leqq x\leqq+1.$$

〔例〕 由未定係數之法。證明次之級數。

$$sin^{-1}x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\dots,$$

$$-1<x<+1.$$

(注意) 於 $tan^{-1}x$ 之展開式。令 $x=1$。則得次之附條件收斂之級數。

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

是實据來本之計算 π 之公式。

然現今計算 π 之簡便級數如次。

令 $$tan\,\alpha=\frac{1}{5}.\quad 則從\ tan\,4\alpha=\frac{120}{119}.$$

得 $$tan\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{tan\,4\alpha-1}{1+tan\,4\alpha}=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239}.$$

$\therefore$ $$4\alpha-\frac{\pi}{4}=tan^{-1}\frac{1}{239}.$$

$\therefore$ $$\frac{\pi}{4}=4\alpha-tan^{-1}\frac{1}{239}.$$

又 $$tan\,\alpha'=\frac{1}{10}.$$

則 $$tan\,2\alpha'=\frac{2\times\frac{1}{10}}{1-\left(\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{20}{99}.$$

從 $$\tan(2\alpha'-\alpha)=\frac{\frac{20}{99}-\frac{1}{5}}{1+\frac{20}{99}\times\frac{1}{5}}=\frac{1}{515}.$$

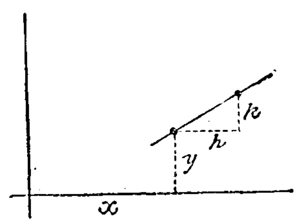
得 $$2\alpha'-\alpha=\tan^{-1}\frac{1}{515}.$$

令 $$\alpha=2\alpha'-\tan^{-1}\frac{1}{515}=2\tan^{-1}\frac{1}{10}-\tan^{-1}\frac{1}{515}.$$

則 $$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}&=8\tan^{-1}\frac{1}{10}-\tan^{-1}\frac{1}{239}-4\tan^{-1}\frac{1}{515}\\&=8\left\{\frac{1}{10}-\frac{1}{3\cdot10^3}+\frac{1}{3\cdot10^5}-\cdots\right\}\\&\quad-\left\{\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot239^3}+\cdots\right\}\\&\quad-4\left\{\frac{1}{515}-\frac{1}{3\cdot515^3}+\cdots\right\}\\&=0\cdot7853981\ldots\end{aligned}$$

14. 二個自變數之函數之展開。

二個自變數 x, y 之函數爲 $f(x,y)$。而 $f(x+h, y+k)$ 爲關於 h, k 展開之冪級數。



令特強制其關係。如

$$h:k=a:b.$$

令 $$\frac{h}{a}=\frac{k}{b}=\epsilon.$$

則 $$f(x+h, y+k)=f(x+a\epsilon, y+b\epsilon)=F(\epsilon).$$

是爲單一自變數ϵ之函數。

適用馬氏定理。則

$$F(\epsilon)=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}\epsilon+\frac{F''(0)}{2!}\epsilon^2+\ldots+\frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\epsilon^{n-1}+R_n.$$

而 $F(0)=f(x,y).$

$$F'(0)=\frac{\delta f}{\delta x}a+\frac{\delta f}{\delta y}b. \qquad \therefore \quad \epsilon F'(0)=\frac{\delta f}{\delta x}h+\frac{\delta f}{\delta y}k.$$

$$F''(0)=\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}a^2+2\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}ab+\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}b^2$$

$$=\left(\frac{\delta}{\delta x}a+\frac{\delta}{\delta y}b\right)^2 f.$$ 〔記號法〕

$$\therefore \quad \epsilon^2F''(0)=\left(\frac{\delta}{\delta x}h+\frac{\delta}{\delta y}k\right)^2 f.$$

....

故
$$\begin{aligned}f(x+h,y+k)=f(x,y)&+\frac{1}{1!}\left(\frac{\delta}{\delta x}h+\frac{\delta}{\delta y}k\right)f(x,y)\\&+\frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{\delta x}h+\frac{\delta}{\delta y}k\right)^2 f(x,y)\\&+\cdots\\&+\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\delta}{\delta x}h+\frac{\delta}{\delta y}k\right)^{n-1}f(x,y)\\&+R_n.\end{aligned}$$

令R_n爲拉果閑諸之剩餘式。則

$$R_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{\delta}{\delta x}h+\frac{\delta}{\delta y}k\right)^n f(x+\theta h,y+\theta k).$$

此謂可西氏定理之擴張.

令前式之x, y各為0。而h, k代以x, y。則

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\delta}{\delta x}x+\frac{\delta}{\delta y}y\right)f(0,0)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{\delta x}x+\frac{\delta}{\delta y}y\right)^2 f(0,0)$$
$$+\cdots$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\delta}{\delta x}x+\frac{\delta}{\delta y}y\right)^{n-1}f(0,0)$$
$$+R_n.$$

令　$$R_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{\delta}{\delta x}x+\frac{\delta}{\delta y}y\right)^n f(\theta x,\theta y).$$

是謂馬氏定理之擴張。

(注意1)　三個自變數之函數。全與此同樣。

例如　$$f(x+h,y+k,z+l)=f(x,y,z)+h\frac{\delta f}{\delta x}+k\frac{\delta f}{\delta y}+l\frac{\delta f}{\delta z}$$
$$+\frac{1}{2}\left(h^2\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}+k^2\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}+l^2\frac{\delta^2 f}{\delta z^2}\right)$$
$$+\left(2kl\frac{\delta^2 f}{\delta y\delta z}+2lh\frac{\delta^2 f}{\delta z\delta x}+2hk\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\right)$$
$$+\cdots$$

(注意2)　從本節之記號法。

例如等於　$\left(\frac{\delta}{\delta x}x+\frac{\delta}{\delta y}y\right)^2 f(0,0)$　者。

為　$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta x^2}, \frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta x\delta y}, \frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta y^2}$　等。

示以$x=0, y=0$之值。各各乘$x^2, 2xy, y^2$等之和。

第六章 不定形

1. 不定形之狀態。

於函數$f(x)$。其x突然令爲某有限值a、或無限大∞。則有

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\times\infty,\quad \infty-\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0,\quad 1^\infty.$$

等之形式。然於$x=a$或$x=\infty$之$Lim\, f(x)$。有時爲有限值。

如$\frac{0}{\infty}$,$\frac{\infty}{0}$,$\infty\times\infty$等。不必檢查其極限值。其無有限值明矣,

反之。取上記一列之形式:其爲有限值與否。應視其極限值。不依極限值。不能定之。由此稱不定形(*Indeterminate forms*)。

依級數之助。此等之極限值。任何亦可決定。

今將逐次說明之。

2. $\frac{0}{0}$之不定形。

先令 $x=a$.

使 $f(x)=\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$.

爲$\frac{0}{0}$之形。

然 $$\underset{x=a}{Lim}\, f(x)=\underset{x=a}{Lim}\,\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\underset{h=0}{Lim}\,\frac{\phi(a+h)}{\psi(a+h)}$$

$$=\underset{h=0}{Lim}\,\frac{\phi(a)+\phi'(a)h+\phi''(a)\frac{h^2}{2!}+\ldots+\phi^{(n)}(a+\theta h)\frac{h^n}{n!}}{\psi(a)+\psi'(a)h+\psi''(a)\frac{h^2}{2!}+\ldots+\psi^{(n)}(a+\theta' h)\frac{h^n}{n!}}$$

以$\phi(a)=0, \psi(a)=0$. 而

$$=\underset{h=0}{Lim}\frac{\phi'(a)+\phi''(a)\frac{h}{2!}+\ldots+\phi^{(n)}(a+\theta h)\frac{h^{n-1}}{n!}}{\psi'(a)+\psi''(a)\frac{h}{2!}+\ldots+\psi^{(n)}(a+\theta' h)\frac{h^{n-1}}{n!}}.$$

令此處之$\phi'(a), \psi'(a)$。任何亦不爲0。則

$$\underset{x=a}{Lim}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{\phi'(a)}{\psi'(a)}.$$

而$\phi'(a), \psi'(a)$均不爲0。則此極限値爲有限。若一方爲0。則爲0或∞。

若$\phi'(a), \psi'(a)$。任何亦爲0。則

$$\underset{x=a}{Lim}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\frac{\phi''(a)}{\psi''(a)}.$$

又$\phi''(a), \psi''(a)$皆爲0。則

$$=\frac{\phi'''(a)}{\psi'''(a)}.$$

等等。要之連續。

$$\underset{x=a}{Lim}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\underset{x=a}{Lim}\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}=\underset{x=a}{Lim}\frac{\phi''(x)}{\psi''(x)}=\ldots$$

使其分母子之雙方脫却爲0之形。則可得極限値。

次令　　　　$x=\infty$. 則從

$$f(x)=\frac{\phi(x)}{\psi(x)}.$$

取其不定形$\frac{0}{0}$.

則
$$\lim_{x=\infty} f(x)=\lim_{x=\infty}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x=0}\frac{\phi\left(\frac{1}{x}\right)}{\psi\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x=0}\frac{-\frac{1}{x^2}\phi'\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}\psi'\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x=0}\frac{\phi'\left(\frac{1}{x}\right)}{\psi'\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x=\infty}\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}.$$

以後同於x的有限值之例。

〔例〕 1. 求 $\lim\limits_{x=0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

(解)
$$\lim_{x=0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x=0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x=0}\frac{\sin x}{6x}$$

$$=\lim_{x=0}\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

〔例〕 2. $x=1$時。$\dfrac{\log x}{x-1}$之極限值如何。 答 1.

〔例〕 3. 試求 $\lim\limits_{x=0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$。 答 $\log\dfrac{a}{b}$.

3. $\dfrac{\infty}{\infty}$之不定形。

令x爲某有限值或無限大。則

$$f(x)=\frac{\phi(x)}{\psi(x)}.$$

爲$\frac{\infty}{\infty}$之形。故

$$Lim\, f(x)=Lim\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=Lim\frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\phi(x)}}.$$

取此最後式。爲$\frac{0}{0}$之不定形。故

$$=Lim\frac{-\frac{\psi'(x)}{\{\psi(x)\}^2}}{-\frac{\phi'(x)}{\{\phi(x)\}^2}}=Lim\left\{\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\right\}^2 Lim\frac{\psi'(x)}{\phi'(x)}$$

$$=\{Lim\, f(x)\}^2\, Lim\frac{\psi'(x)}{\phi'(x)}.$$

$$\therefore\qquad Lim\, f(x)=Lim\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=Lim\frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}.$$

即與前節同樣。可從分母子之微分求得。

(例) 求$\underset{x=\infty}{Lim}\frac{e^x}{x^n}$. (但$n>0$).

(解) $$\underset{x=\infty}{Lim}\frac{e^x}{x^n}=Lim\frac{e^x}{nx^{n-1}}=Lim\frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}=\cdots$$

此m爲正整數。命$m-1<n\leqq m$。則

$$=\underset{x=\infty}{Lim}\frac{e^x}{n(n-1)\ldots(n-m+1)x^{n-m}}=\infty.$$

(注意) 取$0\times\infty$之不定形。則直從

$$\frac{0}{\frac{1}{\infty}}\quad 或\quad \frac{\infty}{\frac{1}{0}}$$

之形。依前節或本節。可求得其極限值。

例如 $$\underset{x=\infty}{Lim}\, 2^x\sin\frac{a}{2^x}=\underset{x=\infty}{Lim}\frac{\sin\frac{a}{2^x}}{\frac{1}{2^x}}=a.$$

4. $\infty-\infty$之不定形。

令x爲有限值或無限大。取

$$f(x)=\phi(x)-\psi(x),$$

爲$\infty-\infty$之形。則

$$\phi(x)=\frac{\phi_1(x)}{\phi_0(x)}, \quad \psi(x)=\frac{\psi_1(x)}{\psi_0(x)}.$$

令$\phi_0(x)$, $\psi_0(x)$之極限爲0。則

$$f(x)=\frac{\phi_1(x)\,\psi_0(x)-\phi_0(x)\,\psi_1(x)}{\phi_0(x)\,\psi_0(x)}.$$

於極限爲$\frac{0}{0}$。故直從此形之上。適用第2節之微分法。則得極限值。

〔例〕 1. 於$f(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{e^x-1}$之$x=0$。求其極限值。

〔解〕

$$\operatorname*{Lim}_{x=0} f(x)=Lim\frac{e^x-1-\sin x}{\sin x(e^x-1)}$$

$$=Lim\frac{e^x-\cos x}{\cos x(e^x-1)+\sin x\cdot e^x}.$$

$$=Lim\frac{e^x+\sin x}{\sin x+2\cos x\cdot e^x}=\frac{1}{2}.$$

〔例〕 2. 求$\operatorname*{Lim}_{x=0}\left(3\cot x-\frac{x^2+3}{x-x^2}\right)$. 答 -3.

〔例〕 3. 求$\operatorname*{Lim}_{x=\frac{\pi}{2}}\left(x\tan x-\frac{\pi}{2}\sec x\right)$. 答 -1.

5. 0^0, ∞^0, 1^∞ 之不定形。

令x為有限值或無限大。取

$$f(x)=\phi(x)^{\psi(x)}.$$

為0^0, ∞^0, 1^∞之任何形。

變原形為

$$\log f(x)=\psi(x)\log\phi(x).$$

此皆為$0\times\infty$之不定形。故求得此$\log f(x)$之極限值A。則從

$$\operatorname{Lim}\log f(x)=A.$$

可得

$$\operatorname{Lim} f(x)=e^A.$$

〔例〕 1. 求 $\operatorname{Lim}\limits_{x=0}(\sin x)^x$.

(解) 令 $f(x)=(\sin x)^x$. 為

$$\log f(x)=x\log\sin x=\frac{\log\sin x}{x^{-1}}.$$

則 $$\operatorname{Lim}\log f(x)=\operatorname{Lim}\frac{\log\sin x}{x^{-1}}$$

$$=\operatorname{Lim}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{-x^{-2}}=\operatorname{Lim}\frac{x^2\cos x}{-\sin x}$$

$$=\operatorname{Lim}\frac{2x\cos x-x^2\sin x}{-\cos x}=0.$$

∴ $$\operatorname{Lim} f(x)=\operatorname{Lim}(\sin x)^x=e^0=1.$$

〔例〕 2. 求 $\operatorname{Lim}\limits_{x=0}(1-\cos x)^{\sin x}$. 答 1.

〔例〕 3. 求 $\underset{x=\infty}{Lim}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$.

(解) 命 $f(x)=\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ 爲

$$\log f(x)=x\log\left(1+\frac{a}{x}\right)=\frac{\log\left(1+\frac{a}{x}\right)}{x^{-1}}.$$

則 $$Lim\ \log f(x)=Lim\frac{\log\left(1+\frac{a}{x}\right)}{x^{-1}}$$

$$=Lim\frac{\frac{-\frac{a}{x^2}}{1+\frac{a}{x}}}{-x^2}=Lim\frac{a}{1+\frac{a}{x}}=a.$$

∴ $Lim\ f(x)=e^a$.

〔例〕 4. 求 $\underset{x=1}{Lim}\ x^{\frac{1}{1-x}}$. 答 $\frac{1}{e}$.

〔例〕 5. 求 $\underset{x=\frac{\pi}{2}}{Lim}\ (\sin x)^{\tan x}$. 答 1.

第七章 函數之極大極小

1. 函數之極大極小。

函數 $f(x)$ 於 (α,β) 區域內。設爲一價連續。(α,β) 區域內之一點 a 之近傍。卽定 y 以適當之正數。如 $(a-y,a+y)$ 區域內。$f(a)$ 取最大值或最小值時。則稱 $f(c)$ 於 $x=a$ 爲極大 (*Maximum*) 或極小 (*Minimum*)。

此以解析法表之。則令h爲$0<h<\eta$。

而 $$f(a-h)<f(a)>f(a+h)$$ 爲極大。

$$f(a-h)>f(a)<f(a+h)$$ 爲極小。

今於$f'(x)$之$x=a$之近傍。假定亦爲連續。

如是則極大爲

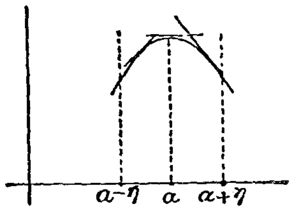
$$\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}>0,\quad \frac{f(a+h)-f(a)}{h}<0.$$

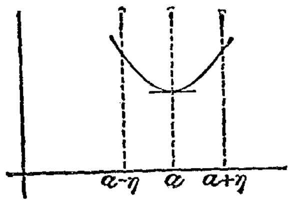
極小者爲

$$\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}<0,\quad \frac{f(a+h)-f(a)}{h}>0.$$

於$Lim\, h=0$之極限。有不及a之微分係數。與過於a之微分係數（參照第二章第1節）。有反對之符號：而就$f'(x)$於$x=a$爲連續觀之。則無論極大極小。均爲

$$f'(a)=0.$$





然則$f(x)$於(α,β)區域之全部。有綿亘連續之導來函數$f'(x)$。則方程式

$$f'(x)=0$$

之根。悉含有全區域內極大極小之x之值。

然$f'(x)=0$。雖爲極大極小必要之條件。究非充分之條件也。欲判定$f'(x)=0$之一根$x=a$。果爲極大極小與否。可從定義容易導出之，(參照第二章第2節)。就適宜小之正數δ。如

$$\left.\begin{array}{l}f'(a-\delta)>0\\ f'(a+\delta)<0\end{array}\right\}\text{則爲極大。}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(a-\delta)<0\\ f'(a+\delta)>0\end{array}\right\}\text{則爲極小。}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(a-\delta)>0\\ f'(a+\delta)>0\end{array}\right\}\text{則非極大極小。}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(a-\delta)<0\\ f'(a+\delta)<0\end{array}\right\}\text{亦非極大極小，}$$

如是檢察之可也。

是法於一般之檢察。究甚繁雜。

多數如$f''(x)$亦於$x=a$之近傍爲有限確定。依以上之查定。則

極大 $\dfrac{f'(a-h)-f'(a)}{-h}<0,\quad \dfrac{f'(a+h)-f'(a)}{h}<0.$

極小 $\dfrac{f'(a-h)-f'(a)}{-h}>0,\quad \dfrac{f'(a+h)-f'(a)}{h}>0.$

若非極大極小。則以上之差之商。於一方>0。他一方<0。今於$Lim\,h=0$之極限視察之。則

極大 $f''(a)\leqq 0,$ 極小 $f''(a)\geqq 0.$

若非極大極小。則$f''(a)=0$。

是$f''(a)$爲有限確定時。則

$f'(a)=0,\quad f''(a)<0$ 極大。

$f'(a)=0,\quad f''(a)>0$ 極小。

$f'(a)=0,\quad f''(a)=0$ 未定。

若更$f'''(x)$爲有限確定。則令

$$f'(a)=0,\quad f''(a)=0,\quad f'''(a)\neq 0.$$

則從$f'''(a)$之符號。而以定$f'(a)$爲極大或極小。且其值爲0。而$f'(a-\delta)$與$f'(a+\delta)$同符號。從而$f(a)$非極大極小。

又 $$f'(a)=0,\quad f''(a)=0,\quad f'''(a)=0,\quad f^{\mathrm{IV}}(a)\neq 0,$$

且$f^{\mathrm{IV}}(x)$爲有限確定。則以$f''(a)$爲0之極大或極小。而有$f''(a-\delta)$與$f''(a+\delta)$同符號。從而$f'(x)$於$(a-y,\ a+y)$區域內。僅專爲增或僅專爲減。且$f'(a)=0$。故$f'(a-\delta)$與$f'(a+\delta)$異符號。卽$f(a)$爲極大或極小。

一般適用此推理。累次導來函數至第$(n-1)$次爲0。而$f^{(n)}(a)\neq 0$。若n爲奇數。則$f(a)$非極大極小。n爲偶數，則$f(a)$爲極大或極小。

〔例〕 1. 於$f(x)=x^4-a^2x^2+a^4$。求其極大極小之x之值。

（解） 變原式爲

$$f'(x)=4x^3-2a^2x=0.$$

解之。得

$$x=0,\quad x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

而 $$f''(x)=12x^2-2a^2.$$

則 $$f''(0)=-2a^2.\qquad 故\qquad x=0\text{ 爲極大。}$$

$$f''\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=4a^2.\qquad 故\qquad x=\frac{a}{\sqrt{2}}\text{ 爲極小。}$$

$$f''\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=4a^2.\qquad 故\qquad x=-\frac{a}{\sqrt{2}}\text{ 爲極小。}$$

〔例〕 2 求$f(x)=2x^3-9x^2+12x$之極大極小之x之值。

答 於$x=1$爲極大。$x=2$爲極小。

〔例〕 3. 求$f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$之極大極小之$x$之值。

答 $x=0$爲極大，$x=3$爲極小。

〔例〕 4. 於$f(x)=a^2\cos x+b^2\cos 2x$之極大極小。求其$x$之值。

〔解〕 從$f'(x)=-a^2\sin x-2b^2\sin 2x=0.$

卽 $\sin x(a^2+4b^2\cos x)=0.$

得 $\sin x=0,\quad \cos x=-\dfrac{a^2}{4b^2}.$

∴ $x=n\pi,\quad x=\cos^{-1}\left(-\dfrac{a^2}{4b^2}\right).$

然 $f''(x)=-a^2\cos x-4b^2\cos 2x,$

$f''(n\pi)=\mp a^2-4b^2.$

∴ $f''\left\{\cos^{-1}\left(-\dfrac{a^2}{4b^2}\right)\right\}=\dfrac{16b^4-a^4}{4b^2}.$

故於$x=2m\pi$爲極大，於$x=(2m+1)\pi$。則$a^2\gtreqless 4b^2$。從而極小或極大。

於$x=\cos^{-1}\left(-\dfrac{a^2}{4b^2}\right)$，則$a^2\gtreqless 4b^2$。從而極大或極小。

又 $a^2=4b^2.$

則 $\cos^{-1}\left(-\dfrac{a^2}{4b^2}\right)=\cos^{-1}(-1)=(2m+1)\pi.$

而 $f'''(x)=a^2\sin x+8b^2\sin 2x,$

$f'''\{(2m+1)\pi\}=0,$

$f^{\mathrm{IV}}(x)=a^2\cos x+16b^2\cos 2x,$

$f^{\mathrm{IV}}\{(2m+1)\pi\}=-a^2+16b^2=12b^2.$

卽 $x=(2m+1)\pi$ 爲極小。

〔例〕 5. 於$f(x)=b+(x-a)^{\frac{2}{3}}$之極大極小求其$x$之值.

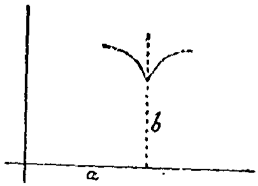
(解) $f'(x)=\frac{2}{3}(x-a)^{-\frac{1}{3}}$。除$x=a$之點外。雖爲連續。而不爲0。

然 $x>a$之間$f'(a)>0$,

$x<a$之間$f'(a)<0$.

於 $x=a$. 則$f(a)=b$.

故 $x=a$爲極小。



2. 陰函數$F(x, y)=0$之極大極小。

前節所論極大極小之查定。勿論陽函數與陰函數,均可適用。今特述陰函數查定之便宜方法。

陰函數

$$F(x, y)=0 \qquad (1)$$

假定y爲x之連續函數。而$\frac{dy}{dx}$亦爲連續。則

$$\frac{\delta F}{\delta x}+\frac{\delta F}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

此爲極大極小必要之條件。從$\frac{dy}{dx}=0$。則

$$\frac{\delta F}{\delta x}=0 \qquad (2)$$

此方程式(2)。一般含有x, y。

(1)與(2)爲聯立方程式。得x, y之根組。故$x=a$爲極大或極小。則與此對應之$y=b$。爲函數之極大值或極小值。

聯立方程式之根。判別其極大極小與否。則求$\frac{d^2y}{dx^2}$之符號。於

$$\frac{\delta^2 F}{\delta x^2}+2\frac{\delta^2 F}{\delta x\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\delta^2 F}{\delta y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\delta F}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

而以 $\frac{dy}{dx}=0$. 則

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{\delta^2F}{\delta x^2}}{\frac{\delta F}{\delta y}}.$$

試以x, y之對應值。置換之可也，

(注意) 本節必要假定爲 $\frac{\delta F}{\delta y}\neq 0.$

若 $\frac{\delta F}{\delta y}=0$。則不可不待特種之研究，

〔例〕 1. 求 $F(x, y)=x^3+y^3-3axy=0$ 之 y 之極大極小。

(解) $F(x, y)=x^3+y^3-3axy=0,$

$F'_x(x, y)=3x^2-3ay=0.$

解之。則

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=a\sqrt[3]{2} \\ y=a\sqrt[3]{2} \end{cases}$$

由前之根組，則以 $F'_y(x, y)=3y^2-3ax$ 亦爲 0。而 $\frac{dy}{dx}$ 爲不定形。必難斷定 $\frac{dy}{dx}=0$。從而極大極小不能論。

由後之 $x=a\sqrt[3]{2}$, $y=a\sqrt[3]{2}$。則 $F'_y(x, y)\neq 0$。$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2x}{y^2-ax}<0$。於 $x=a\sqrt[3]{2}$。而見函數 y 之極大值爲 $a\sqrt[3]{2}$.

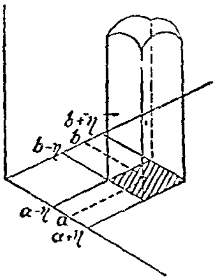
〔例〕 2. $F(x, y)=(x^2+y^2)^2-2axy^2=0$ 之 y 之極大極小。求其 x 之值。

答 $x=\frac{3}{8}a$ 爲極大或極小。

3. 二個自變數之函數之極大極小。

函數$f(x,y)$於某區域內(參照第四章第1節)爲一價連續。

又$\dfrac{\delta f}{\delta x}$, $\dfrac{\delta f}{dx}$假定爲有限確定且連續。



則定η爲適當之正數。於$a-\eta\leqq x\leqq a+\eta$, $b-\eta\leqq y\leqq b+\eta$之區域。略稱$x=a$, $y=b$之點之近傍。

$f(a,b)$對於其近傍之價爲最大或最小。則$f(x,y)$於$x=a$, $y=b$爲極大或極小。

卽h,k。任何亦令於$(-\eta,+\eta)$區域內.同時不爲0之變數。則

$$f(a+h,b+k)<f(a,b) \quad 極大。$$

$$f(a+h,b+k)>f(a,b) \quad 極小。$$

今h,k不爲獨立之變數。

令 $\quad h:k=p:q.$

但p,q爲某常數。則得

$$h=p\epsilon,\quad k=q\epsilon.$$

更令 $\quad \Delta s=\sqrt{h^2+k^2}=\sqrt{p^2+q^2}\,\epsilon.$

則 $\quad \dfrac{f(a+h,b+k)-f(a,b)}{\Delta s}$

若爲極大。則$\epsilon<0$之間爲正。$\epsilon>0$之間爲負。若爲極小。則$\epsilon<0$之間爲負。$\epsilon>0$之間爲正。而部分導來函數以任何亦爲連續。於$Lim\,\epsilon=0$之極限。爲

$$\frac{df}{ds}=\frac{\delta f}{\delta x}\cdot\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}+\frac{\delta f}{\delta y}\cdot\frac{q}{\sqrt{p^2+p^2}}=0.$$

而於極大極小之點。此關係的常數p, q。不拘如何。不可不成立。故此為極大極小必要之條件。而

$$\frac{\delta f}{\delta x}=0,\quad \frac{\delta f}{\delta y}=0.$$

故求$f(x, y)$之極大極小。必先解聯立方程式$\frac{\delta f}{\delta x}=0, \frac{\delta f}{\delta y}=0$。將其所得各根組$x=a, y=b$之$f(a, b)$與$f(a+h, b+k)$比較可也。

又 $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}, \frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}, \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$為連續。則與第1節同。$p, q$不拘如何。祇視察$\frac{\delta^2 f}{\delta s^2}$為正或負。卽可得決定其極小或極大。

然以 $$\frac{d^2 f}{ds^2}=\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\cdot\frac{p^2}{p^2+q^2}+2\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\cdot\frac{pq}{p^2+q^2}+\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\cdot\frac{q^2}{p^2+q^2}=$$

$$\frac{\left\{\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\cdot\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}+\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\right\}^2+\left\{\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\right)^2\right\}\frac{q^2}{p^2+q^2}}{\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}}$$

而

(1) $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\right)^2>0$。且$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}<0$。則$\frac{d^2 f}{ds^2}<0$。故極大。

(2) $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\right)^2>0$。且$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}>0$。則$\frac{d^2 f}{ds^2}>0$。故極小。

(3) $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\right)^2<0$。依上記分數式之分子$p, q$。雖以任何之正負值。而$\frac{d^2 f}{ds^2}$不能有一定之符號。

卽此非極大極小。

(4) $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\right)^2=0$。則以$p, q$。令 $\frac{d^2 f}{ds^2}=0$。於此方向。更有研究之點。以極大極小與否。僅有此。尚不得斷定故也。

(注意) 以上不可不假定 $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\neq 0$。若 $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}=0$。而 $\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\neq 0$。則從此可得同樣之查定。而

$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\right)^2<0$。是必非極大極小。

又 $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}=0,\ \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}=0$。則

$$\frac{d^2 f}{ds^2}=2\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\cdot\frac{pq}{p^2+q^2}.$$

其無一定之符號明矣。

故亦非極大極小。

〔例〕 1. 將長a有限直線分爲三分。試求其積之極大極小。

(解) 令第一,第二分爲x, y。則第三分爲$a-x-y$。而三分之積爲

$$f(x, y)=xy(a-x-y),$$

$$\frac{\delta f}{\delta x}=ay-2xy-y^2=0,$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}=ax-x^2-2xy=0.$$

解此聯立方程式。則得一組根爲

$$x=\frac{a}{3},\qquad y=\frac{a}{3}.$$

以此值代換下式。則

$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\right)^2=(-2y)(-2x)-(a-2x-2y)^2$ 爲正。

而$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}=-2y$爲負。

故x, y各爲$\frac{a}{3}$。即三分相等之積爲極大。

$a=\frac{a}{3}, y=\frac{a}{3}$之外之根組。非極大極小。故略。

〔例〕 2. $f(x, y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$爲極大極小。試求其$x, y$之值。

(解)
$$\frac{\delta f}{\delta x}=2ax+2hy+2g=0,$$
$$\frac{\delta f}{\delta y}=2hy+2by+2f=0.$$

介$ab-h^2 \neq 0$。則解之。得

$$x_0=\frac{fh-bg}{ab-h^2}, \quad y_0=\frac{gh-af}{ab-h^2}.$$

而
$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}=2a, \quad \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}=2b, \quad \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}=2h.$$

$$\therefore \quad \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}\right)^2=4(ab-h^2).$$

故$a<0, b<0, ab-h^2>0$。其$f(x_0, y_0)$爲極大。而$a>0, b>0, ab-h^2>0$。其$f(x_0, y_0)$爲極小。

又$ab-h^2<0$。則無x, y以推其極大或極小。

最後$ab-h^2=0$。則聯立方程式$\frac{\delta f}{\delta x}=0, \frac{\delta f}{\delta y}=0$。至無一式可決定其$x, y$。

〔例〕 3. $\varphi(x, y)=0$。求 $z=f(x, y)$ 之極大極小。其方法如何。

（解） 今從 $\varphi(x, y)=0$。考究 y 爲 x 之函數。則極大極小必要之條件。爲

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta f}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

然
$$\frac{\delta\varphi}{\delta x}+\frac{\delta\varphi}{\delta y}\,\frac{dy}{dx}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

今以未定係數 λ 乘 (2) 加於 (1)。則

$$\frac{\delta(f+\lambda\varphi)}{\delta x}+\frac{\delta(f+\lambda\varphi)}{\delta y}\,\frac{dy}{dx}=0.$$

然欲求 λ 適當之度。可令定爲

$$\frac{\delta(f+\lambda\varphi)}{\delta x}=0, \quad \frac{\delta(f+\lambda\varphi)}{\delta y}=0.$$

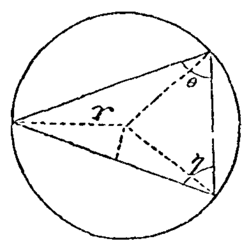
則極大極小之 x, y。可從此與 $\varphi=0$ 求得。

結局. 聯立方程式

$$\frac{\delta(f+\lambda\varphi)}{\delta x}=0, \quad \frac{\delta(f+\lambda\varphi)}{\delta y}=0, \quad \varphi=0.$$

此得由極大極小之 x, y 與 λ 定之。

〔例〕 4. 有一定半徑之圓。求內接最大面積之三角形。



（解） 令內接三角形之二角爲 θ, η。則第三角爲 $\pi-\theta-\eta$。其各對邊爲 $2r\sin\theta$, $2r\sin\eta$, $2r\sin(\theta+\eta)$。從圓之中心引垂線。代以 $r\cos\theta$, $r\cos\eta$, $-r\cos(\theta+\eta)$。令三角形之面積爲 S。則

$$S=r^2\sin\theta\cos\theta+r^2\sin\eta\cos\eta-r^2\sin(\theta+\eta)\cos(\theta+\eta)$$

$$=\frac{r^2}{2}\{\sin 2\theta+\sin 2\eta-\sin 2(\theta+\eta)\}$$

$$=\frac{\delta S}{\delta\theta}=r^2\{\cos 2\theta-\cos 2(\theta+\eta)\}$$

$$=2r^2\sin(2\theta+\eta)\sin\eta=0.$$

$$\therefore\qquad \frac{\delta S}{\delta\eta}=2r^2\sin(2\eta+\theta)\sin\theta=0.$$

於 $\sin\theta,\ \sin\eta$ 之爲0者棄之。則

$$2\theta+\eta=\pi,$$

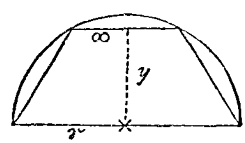
$$2\eta+\theta=\pi.$$

從此 $\theta=\eta=\pi-\theta-\eta=\dfrac{\pi}{3}.$

卽最大面積之三角形爲正三角形。

〔例〕5. 有直六面體。設其體積爲一定。試求其表面積之最小者。

〔例〕6. 以半圓直徑爲底邊。而作內接梯形。試求其面積之最大者。



(解) 令梯形平行之二邊爲 $2r, 2x$。高爲 y。面積爲 z。則

$$z=y(x+r).$$

然 $\phi=x^2+y^2-r^2=0,$

$$\frac{\delta(z+\lambda\phi)}{\delta x}=y+2\lambda x=0,$$

$$\frac{\delta(z+\gamma\phi)}{\delta y}=x+2\lambda y+r=0.$$

從此二方程式與$\phi=0$。則得

$$x=\frac{r}{2},\quad y=\frac{\sqrt{3}}{2}r,\quad \lambda=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\left(\text{試作}\ \frac{d^2z}{dx^2}\text{。則可見其爲負}\right)$。

故平行二邊其小邊等於半徑r。則其面積最大。

〔例〕 7. 有$ax+by=c$。而$z=x^2y$。試求其極大極小。

答 $x=\frac{2c}{3a}$ 爲極大。

後篇　平面曲線之應用

微分學之應用雖甚廣。而其整齊者。究以曲線及曲面論爲最。是稱微分幾何學(*Differential Geometry*)。實研究此等之一分科。本章及次章所講述者。不過其最緊要之一部耳。

第八章　平面曲線總論

1. 平面曲線之方程式。

今關於直角坐標式及極坐標式。假定其二個坐標間之關係式爲已知則得研究平面曲線。從二個坐標之關係式。於其中之主要者。列舉如次。

(甲) 直角坐標式。

(i) 陽函數式 $y=f(x)$.

(ii) 陰函數式 $F(x, y)=0$.

(iii) 變率式 $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$.

(乙) 極坐標式。

(i) 陽函數式 $r=f(\phi)$.

(ii) 陰函數式 $F(r, \phi)=0$.

平面曲線。大別爲二種。

(I) 代數曲線(*Algebraic curve*)。

於直角坐標式。關於x, y而爲有理整方程式之曲線之謂。從其方程式之次數。以區別其曲線之次數(*Order*)。

〔例〕 $y=ax^2+bx+c$ 二次代數曲線。

$y^2=ax^2+bx+c$ 二次代數曲線。

$x^4+y^4+3axy=0$ 四次代數曲線。

(II) 超越曲線 (*Transcendental curve*)。

凡不屬於代數曲線之總稱。

〔例〕 $y=2\sqrt{x}$ 拋物線之上半部。

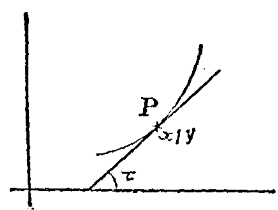
$r=ae^{m\phi}$ 對數螺線。

$y=\sin x$ 正弦曲線。

(注意) 以下恐嫌繁碎。故單稱曲線。從其方程式之函數及其導來函數。可視作爲一價連續。

2. 切線及法線。

曲線之切線 (*Tangent*)。卽割線之二交點相接近於無限之極限之直線。



關於直角坐標式，如第二章第2節所述，令曲線上一點 P (其坐標爲 $x|y$) 之切線角爲 τ。則

$$\frac{dy}{dx}=\tan\tau.$$

然令切線上任意一點爲 $\xi|\eta$。則

$$\frac{\eta-y}{\xi-x}=\tan\tau.$$

而 $$\eta-y=\frac{dy}{dx}(\xi-x) \quad \ldots\ldots(1)$$

是切於曲線上一點 $x|y$ 之切線方程式。

(i) 曲線 $y=f(x)$。則從 (1) 得

$$\eta-y=f'(x)(\xi-x) \quad \ldots\ldots(1')$$

(ii) 曲線爲 $F(x, y)=0$。則以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\delta F}{\delta x}}{\frac{\delta F}{\delta y}}.$$

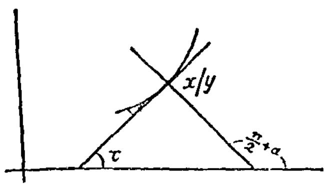
從 (1) 得 $(\xi-x)\frac{\delta F}{\delta x}+(\eta-y)\frac{\delta F}{\delta y}=0$ ……………… (1'')

(iii) 曲線爲 $x=\phi(t), y=\psi(t)$。則以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

從 (1) 得 $\dfrac{\eta-y}{\frac{dy}{dt}}=\dfrac{\xi-x}{\frac{dx}{dt}}$ ……………………………… (1''')

曲線之法線 (*Normal*)。卽從切線之切點所作垂直線之謂



令法線上任意一點爲 $\xi|\eta$。則從

$$\frac{\eta-y}{\xi-x}=tan\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-cot\ \tau.$$

於曲線上之點 $x|y$ 之法線方程式。爲

$$\eta-y=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(\xi-x) \text{ ……………………… (2)}$$

(i) 曲線爲 $y=f(x)$。從此得

$$\eta-y=-\frac{1}{f'(x)}(\xi-x) \text{ ……………………… (2')}$$

(ii) 曲線爲$F(x, y)$。則

$$\frac{\xi-x}{\frac{\delta F}{\delta x}}=\frac{\eta-y}{\frac{\delta F}{\delta y}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2'')$$

(iii) 曲線爲$x=\phi(t), y=\psi(t)$。則

$$(\xi-x)\frac{dx}{dt}+(\eta+y)\frac{dy}{dt}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2''')$$

(注意) 於以上之公式$\frac{\delta F}{\delta x}, \frac{\delta F}{\delta y}$或$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$爲0。則須直接作方程式。

(例) 於橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$之周上一點$x|y$。試作其切線及法線之方程式。

(解) 令$F(x, y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$. 則

$$\frac{\delta F}{\delta x}=2\frac{x}{a^2}, \quad \frac{\delta F}{\delta y}=2\frac{y}{b^2}.$$

以此代入(")。得

$$\frac{(\xi-x)x}{a^2}+\frac{(\eta-y)y}{b^2}=0.$$

然 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

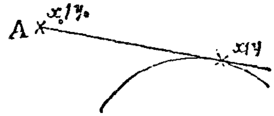
∴ 切線 $$\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}=1.$$

又代入(2")。得

法線 $$a^2\frac{\xi-x}{x}=b^2\frac{\eta-y}{y}.$$

(注意) 關於極坐標式之切線及法線。述於後節。

3. 從曲線外一點之切線。



曲線為 $F(x, y)=0$。(他可類推)。從其外一點 $A(x_0\,y_0)$ 引切線。則其切點 x, y 為聯立方程式。如

$$\begin{cases} F(x, y)=0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (\alpha) \\ (x_0-x)\dfrac{\delta F}{\delta x}+(y_0-y)\dfrac{\delta F}{\delta y}=0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (\beta) \end{cases}$$

解之。即得所求。

令此一根組為 $x_1\,y_1$。則從 $x_0\,y_0$ 之切線方程式。為

$$(\xi-x_1)\frac{\delta F}{\delta x}+(\eta-y_1)\frac{\delta F}{\delta y}=0.$$

今特限 $F(x, y)$ 為 n 次代數曲線。研究其從曲線外之點 $x_0\,y_0$。得引幾個切線。

分 $F(x, y)$ 為同次式之羣。如

$$F(x, y)=\varphi_n(x, y)+\varphi_{n-1}(x, y)+\dots+\varphi_0(x, y)=0.$$

即 φ_n 為 n 次之同次式。φ_{n-1} 為 $(n-1)$ 次之同次式。等等。

從此得

$$\frac{\delta F}{\delta x}=\frac{\delta\varphi_n}{\delta x}+\frac{\delta\varphi_{n-1}}{\delta x}+\dots+\frac{\delta\varphi_1}{\delta x},$$

$$\frac{\delta F}{\delta y}=\frac{\delta\varphi_n}{\delta y}+\frac{\delta\varphi_{n-1}}{\delta y}+\dots+\frac{\delta\varphi_1}{\delta y}.$$

變為

$$x\frac{\delta F}{\delta x}+y\frac{\delta F}{\delta y}=\left(x\frac{\delta\varphi_n}{\delta x}+y\frac{\delta\varphi_n}{\delta y}\right)+\left(x\frac{\delta\varphi_{n-1}}{\delta x}+y\frac{\delta\varphi_{n-1}}{\delta y}\right)$$

$$+\dots+\left(x\frac{\delta\varphi_1}{\delta x}+y\frac{\delta\varphi_1}{\delta y}\right).$$

右邊之各項。適用來本之之公式（第四章第7節例5)。則

$$x\frac{\delta F}{\delta x}+y\frac{\delta F}{\delta y}=n\mathfrak{u}_n+(n-1)\mathfrak{u}_{n-1}+\ldots+\mathfrak{u}_1.$$

從此右邊減$n(\mathfrak{u}_n+\mathfrak{u}_{n-1}+\ldots+\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_0)=0$。則

$$=-\mathfrak{u}_{n-1}-2\mathfrak{u}_{n-2}-\ldots-(n-1)\mathfrak{u}_1-n\mathfrak{u}.$$

即 $(n-1)$ 次之代數式。

既明乎此。則從 $(n-1)$ 次之$x_0\frac{\delta F}{\delta x}+y_0\frac{\delta F}{\delta y}$。減方程式$(\beta)$。即爲$(n-1)$次。

故方程式 (α) 爲n次方程式。則從 (α), (β) 所得之根$x|y$。虛實合計有$n(n-1)$組。即

從n次代數曲線之外之點。得引$n(n-1)$個切線。

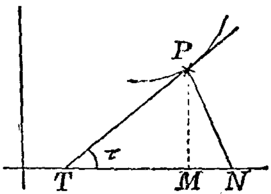
（注意） 於幾何學從曲線外之點。所引得切線之個數。以爲曲線之種別。是謂之級 (*Class*)。

由上之結果。則

n次代數曲線。爲$n(n-1)$級曲線。

4. 切線法線之長及其正射影。

切於曲線上P點之切線與x軸相交於T。P點之法線交x軸於N。P點在x軸之正射影爲M。則命名如次。



PT = 切線之長 = T.

PN = 法線之長 = N.

TM = 切線影 (*Subtangent*) = t.

NM = 法線影 (*Subnormal*) = n.

切線之長與法線之長。各就其絕對值而言。切線影與法線影。如上圖之TM, NM之方向各爲正。卽切線影之正方向與法線影之正方向。互爲反對。

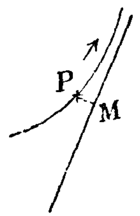
從$y'=\tan\tau$容易知

$$\left.\begin{aligned}&\text{切線影}\quad t=\frac{y}{y'}\\&\text{法線影}\quad n=yy'\\&\text{切線之長}\quad T=\sqrt{y^2+\frac{y^2}{y'^2}}=\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}\\&\text{法線之長}\quad N=\sqrt{y^2+y^2y'^2}=|y|\sqrt{1+y'^2}\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

5. 漸近線。

於直角坐標式。曲線之坐標x, y之一方或雙方。其絕對值比任何之正數更大。是爲此曲線有無限枝(*Infinity branch*)。

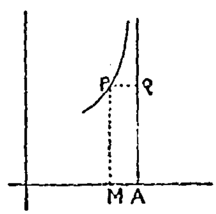
曲線之無限枝上之一點P。沿此枝不遠離原點之方向而走。從此之距離。於極限而收斂爲0。若一直線。此爲無限枝之漸近線(*Asymptote*)。



下卽述求曲線之漸近線之方法。

(I) 平行於y軸之漸近線。

有$x=a$之漸近線AQ。如圖從無限枝上之點P至此線之距離爲PQ。則



$$\lim PQ=\lim MA=0.$$

卽 $$\lim(a-x)=0.$$

∴ $$\lim x=a.$$

而 $$\lim y=\infty.$$

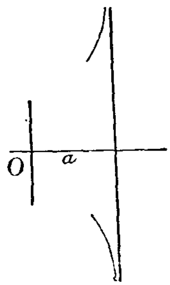
由是平行於y軸之漸近線。當令 $Lim\, y=\infty$。以求x之値a。卽知其在$x=a$之中。

〔例〕 1. 於 $y^2=\dfrac{\sqrt{a+x}}{a-x}\ (a>0)$，而令 $Lim\, y=\infty$。則

$$Lim\ (a-x)=0.$$

然令 $Lim\, x=a-0$。則

$$Lim\, y=\pm\infty.$$



又令 $Lim\, x=a+0$。則取y爲虛數値。而漸近線之位置。如圖所示。

〔例〕 2. 於 $y=\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+x}}$。而令 $1+x=0$。則y爲無限大。

而 $Lim\, x=-1-0$ 之側，y爲虛數値。

$Lim\, x=-1+0$ 之側，$Lim\, y=+\infty$。

然則 $1+x=0$。則y軸之正方向。在原點之同側。爲無限枝之漸近線。

〔例〕 3. 於代數曲線。平行於y軸之漸近線。可於曲線方程式。令y之最高次項之係數等於0。從其方程式之根之中求得。試證明之。

(證明) 代數曲線之方程式關於y爲m次。則排列爲y之降冪。如

$$F(x,y)=u_0(x)y^m+u_1(x)y^{m-1}+\ldots+u_m(x)=0.$$

從此得

$$u_0(x)+u_1(x)\frac{1}{y}+\ldots+u_m(x)\frac{1}{y^m}=0.$$

今令 $Lim\, y=\infty$。則

$$u_0(x)=0.$$

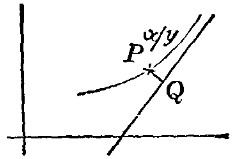
然則不爲 $u_0(x)=0$。則不能爲 $Lim\, y=\infty$。

故解 $u_0(x)=0$。則 $Lim\, y=\infty$ 悉在其中。

(II) 不平行於y軸之漸近線。

假定曲線之無限枝有漸近線

$$\eta=\alpha\xi+\beta.$$



試求其 α, β。

從曲線上之點 $P(x|y)$ 至此漸近線之距離 PQ。爲

$$PQ=\frac{y-\alpha x-\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

然從漸近線之定義。則常以 $Lim\, PQ=0$。

而 $$\lim_{x=\infty}(y-\alpha x-\beta)=0.$$

從此 $$\lim_{x=\infty}\left(\frac{y}{x}-\alpha-\frac{\beta}{x}\right)=0.$$

然以 $$Lim\,\frac{\beta}{x}=0.$$

從此求得 α, β 之値爲

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{y}{x}\right)=\alpha.$$

$$\lim_{x=\infty}(y-\alpha x)=\beta.$$

若 $$Lim\, x=\infty,\quad Lim\, y=\infty.$$

則從不定形 $\frac{\infty}{\infty}$。可得

$$\lim_{x=\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x=\infty}\frac{dy}{dx}.$$

又 $\quad Lim\, x=\infty,\quad Lim\, y=b$ (有限值).

則 $\quad \underset{x\to\infty}{Lim}\dfrac{y}{x}=0.\quad$ 然 $\quad \underset{x=\infty}{Lim}\dfrac{dy}{dx}=0.$

$\therefore \quad Lim\dfrac{y}{x}=Lim\dfrac{dy}{dx}.$

又如 (I) $Lim\, x=a$ (有限值).

$Lim\, y=\infty.$

則 $\quad Lim\dfrac{y}{x}=\infty.\quad$ 然 $\quad Lim\dfrac{dy}{dx}=\infty.$

故可得 $\quad Lim\dfrac{y}{x}=Lim\dfrac{dy}{dx}.$

故有漸近線之無限枝。常爲

$$Lim\frac{y}{x}=Lim\frac{dy}{dx}=a.$$

即無限枝之切線角正切之極限值 $\dfrac{dy}{dx}$。等於漸近線與 x 軸所成角之正切 a。換言之。則漸近線爲無限枝之切線之極限位置。

(注意) $a=0$。則得平行於 x 軸之漸近線。

(例) 求雙曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 之漸近線。

(解) 兩邊以 x^2 約之。則 $b^2-a^2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2=\dfrac{a^2b^2}{x^2}.$

$\therefore \quad Lim\left(\dfrac{y}{x}\right)=\pm\dfrac{b}{a}.$

而 $\quad Lim\left\{y-x\left(\pm\dfrac{b}{a}\right)\right\}=Lim\dfrac{ay\mp bx}{a}$

$$=Lim\frac{a^2y^2-b^2x^2}{a(ay\pm bx)}=0$$

故從$y=\pm\frac{b}{a}x$求得漸近線。爲

$$bx-ay=0,\quad bx+ay=0.$$

($y=\infty$。x爲有限值。故爲平行於y軸之漸近線)。

6. 代數曲線之漸近線及漸近曲線。

特於代數曲線。得定一層容易之漸近線。

(I) 代數曲線$F(x,y)=0$。僅關於y而爲一次。

書此爲

$$y=\frac{\phi(x)}{\psi(x)}.$$

令$\phi(x),\psi(x)$爲任何有理整函數。則可直得次之事實。

(i) 解$\psi(x)=0$。則從其實根得作平行於y軸之漸近線。

(ii) $\phi(x)$之次數。比$\psi(x)$更低。則

$$\lim_{x=\infty}\frac{y}{x}=0,\quad \lim_{x=\infty}y=0.$$

由是有$y=0$之漸近線。

(iii) $\phi(x),\psi(x)$爲同次。則令

$$y=\beta+\frac{\phi_1(x)}{\psi(x)}.$$

β爲常數。而$\phi_1(x)$亦比$\psi(x)$爲低次。則

$$\lim\frac{y}{x}=0,\quad \lim y=\beta.$$

故有$y=\beta$之漸近線。

(iv) $\phi(x)$ 比 $\psi(x)$ 之次數高1。則如前令

$$y=\alpha x+\beta+\frac{\phi_1(x)}{\psi(x)}.$$

則 $$\text{Lim}\,\frac{y}{x}=\alpha,\quad \text{Lim}\,(y-\alpha x)=\beta.$$

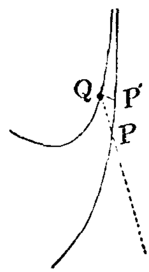
故有 $y=\alpha x+\beta$ 之漸近線。

(v) $\phi(x)$ 比 $\psi(x)$ 次數高2。則同樣令

$$y=ax^2+bx+c+\frac{\phi_1(x)}{\psi(x)}.$$

更就拋物線 $y_1=ax^2+bx+c$ 考之。

$$\text{Lim}_{x=\infty}\,(y-y_1)=\text{Lim}\,PQ=0.$$



今從拋物線 Q 點之法線。與曲線交於 P'。則 $P'Q$ 亦於極限爲0。

然此拋物線。曰曲線無限枝之漸近拋物線 (*Asymptotic parabola*)。

(vi) 一般 $\phi(x)$ 比 $\psi(x)$ 次數高 m。則得

$$y=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m+\frac{\phi_1(x)}{\psi(x)}.$$

而此 m 次拋物線

$$y_1=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m.$$

總稱漸近曲線 (*Asymptotic curve*)。

(II) n 次代數曲線。

方程式以同次式之項表之爲

$$F(x,y)=\phi_n(x,y)+\phi_{n-1}(x,y)+\ldots+\phi_1(x,y)+\phi_0=0.$$

更書此爲

$$x^n\phi_n\left(1,\frac{y}{x}\right)+x^{n-1}\phi_{n-1}\left(1,\frac{y}{x}\right)+\ldots+x\phi_1\left(1,\frac{y}{x}\right)+\phi_0=0.$$

以x^n約其各項。則

$$\phi_n\left(1,\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}\phi_{n-1}\left(1,\frac{y}{x}\right)+\ldots+\frac{1}{x^{n-1}}\phi_1\left(1,\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x^n}\phi_0=0.$$

令$\underset{x=\infty}{Lim}\frac{y}{x}=a$（有限值）。則於上之方程式$Lim\,x=\infty$。

$$\phi_n\left(1,\,Lim\frac{y}{x}\right)=0.$$

然則n次代數曲線。令n次之同次羣爲$\phi_n(x,y)$。則得此羣之x爲1。y爲a之方程式。

$$\phi_n(1,a)=0.$$

解之。則其根可定漸近線$\eta=a\xi+\beta$之方向。

決定β。則從$y=ax+\beta$。

置換 $$\frac{y}{x}=a+\frac{\beta}{x}.$$

而 $$\phi_n\left(1,\,a+\frac{\beta}{x}\right)+\frac{1}{x}\phi_{n-1}\left(1,\,a+\frac{\beta}{x}\right)+\ldots+\frac{1}{x^n}\phi_0=0.$$

依可西氏之定理。試展開各項。則

$$\begin{aligned}&\phi_n(1,a)+\phi'_n(1,a)\frac{\beta}{x}+\phi''_n(1,a)\frac{\beta^2}{2x^2}+\ldots\\&\quad+\phi_{n-1}(1,a)\frac{1}{x}+\phi'_{n-1}(1,a)\frac{\beta}{x^2}+\ldots\\&\qquad+\phi_{n-2}(1,a)\frac{1}{x^2}+\ldots\\&\qquad\quad+\ldots\\&\qquad\qquad+\phi_0\frac{1}{x^n}=0.\end{aligned}$$

而以$\phi_n(1,a)=0$。去其最初之項。各項以x乘之。則

$$\{\phi'_n(1,a)\cdot\beta+\phi_{n-1}(1,a)\}+\{\phi''_n\cdot\beta+2\phi'_{n-1}\cdot\beta+2\phi_{n-2}\}\frac{1}{2x}+\ldots=0.$$

茲令 $Lim\, x=\infty$。則

$$\phi'_n(1,\alpha)\cdot\beta+\phi_{n-1}(1,\alpha)=0.$$

$$\therefore\qquad \beta=-\frac{\phi_{n-1}(1,\alpha)}{\phi'_n(1,\alpha)}.\qquad 但\ \phi'_n(1,\alpha)\neq 0).$$

若 $\phi_n(1,\alpha)=0$。而 $\phi_{n-1}(1,\alpha)\neq 0$。則 $\beta=\infty$。從此不能得漸近線。

又 $\phi'_n(1,\alpha)=0$。且 $\phi_{n-1}(1,\alpha)=0$。各項更以 x 乘之。而令 $Lim\, x=\infty$，

則 $$\phi''_n(1,\alpha)\cdot\beta^2+2\phi'_{n-1}(1,\alpha)\cdot\beta+2\phi_{n-2}(1,\alpha)=0.$$

解此可得 β。

〔例〕 1. 求 $x^3=ay(x-b)$ 之漸近線。

(解) 令 $y=\dfrac{x^3}{a(x-b)}$。則 $Lim\, x=b$, $Lim\, y=\infty$。

故得 $x=b$ 之一個漸近線。

又令 $$y=\frac{1}{a}(x^2+bx+b^2)+\frac{b^3}{a(x-b)}.$$

則 $y=\dfrac{1}{a}(x^2+bx+b^2)$ 即 $ay=x^2+bx+b^2$ 爲漸近拋物線。

〔例〕 2. 求 $x^2+4xy-6x+4y=0$ 之漸近線。

答 $x+1=0,\ x+4y-7=0.$

〔例〕 3. 求 $xy(x+y-1)+p=0$ 之漸近線。

(解) 令 y^2 之係數 x 爲 0。則得平行於 y 軸之漸近線 $x=0$。(第5節 I, 例3)。

又於最高次之同次羣 $xy(x+y)$。令 x 爲 1, y 爲 α。則

$$\alpha(1+\alpha)=0.$$

$$\therefore\qquad \alpha_1=0,\quad \alpha_2=-1.$$

而 $$\beta=-\frac{-\alpha}{(1+\alpha)+\alpha}=\frac{\alpha}{1+2\alpha}.$$

$$\therefore\qquad \beta_1=0,\quad \beta_2=1.$$

故不平行於y軸之漸近線。爲$y=\alpha_1x+\beta_1$之$y=0$。及$y=\alpha_2x+\beta_2$之$y=-x+1$。

答 $x=0, y=0, x+y-1=0.$

(例) 4. 求$(x+a)y^2=(y+b)x^2$之漸近線。

答 $x+a=0, y+b=0, y=x-a+b.$

(例) 5. 求$x^3-xy^2-y^2+y=0$之漸近線。

答 $x+1=0, x-y-\frac{1}{2}=0, x+y-\frac{1}{2}=0.$

7. 曲線之凹凸及彎曲點。

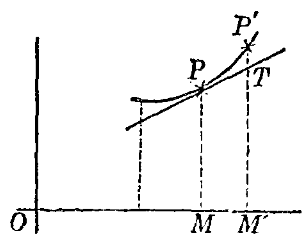
曲線之方程式爲$y=f(x)$。

先研究曲線上之點$P(x|y)$之近旁。

令曲線上他一點爲$P'(x+h, y_1)$。則

$$y_1=f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x+\theta h).$$

如圖$P'M'=y_1$與P點之切線交於T。於P點之切線爲



$$\eta-y=f'(x)(\xi-x).$$

而令 $\xi=OM'=x+h.$

則 $\eta=TM'=y+hf'(x).$

$$P'T=P'M'-TM'=\frac{h^2}{2}f''(x+\theta h).$$

然$f''(x)\neq0$。則於$f''(x+\theta h)$不爲0之範圍$-\eta\leqq h\leqq+\eta$之中。而連續函數$f''(x+\theta h)$。常有相同之符號。$P'P$於x之近旁。常爲正或常爲負。

玆將其名稱分述如次。

(i) $f''(x)>0$。則於適宜之區域 $(x-\eta, x+\eta)$ 內 $P'T>0$。卽曲線在切線之上。(甲圖)

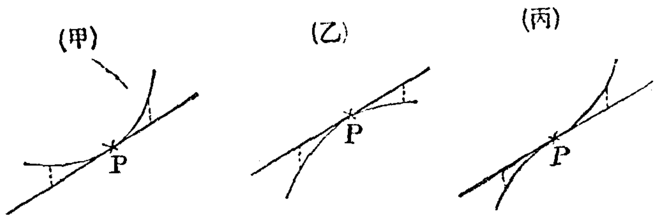
稱此爲曲線於 P 點下凸 (*Convex downwards*)。又名上凹 (*Concave upwards*)。

(ii) $f''(x)<0$。則於點 P 之前後。而 $P'T<0$ 卽曲線在切線之下。(乙圖)

稱此爲曲線於 P 點上凸 (*Convex upwards*)。又名下凹 (*Concave downwards*)。

(iii) $f''(x)=0$。且 $f''(x)$ 於 $(x-\eta, x)$ 與 $(x, x+\eta)$ 有反對之符號。則曲線於一側在切線上。他側在切線下。(丙圖)

此點 P 曰彎曲點 (*Point of inflexion*)。



今將研究如何之處則如 $f''(x)$ 方可於點 P 之前後取反對之符號。

若 $f''(x)=0$。則於 $y_1=f(x+h)$ 之展開式。求至第三次導來函數如

$$y_1=f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x+\theta'h).$$

則 $$P'T=\frac{h^3}{6}f'''(x+\theta'h).$$

故令 $f'''(x)$ 不爲0。而爲連續。則於適宜之區域 $(x-\eta', x+\eta')$。不可不常爲正或常爲負。而 h^3 的點 P 之前後。取反對之符號。此 $P'T$ 於點 P 之前後。變其符號。

換言之。則

$f''(x)=0, f'''(x)\neq 0$ 之點 x 爲曲線之彎曲點。

若 $f'''(x)=0, f^{\mathrm{IV}}(x)\neq 0$。則

$$P'T=\frac{h^4}{4!}f^{\mathrm{IV}}(x+\theta''h).$$

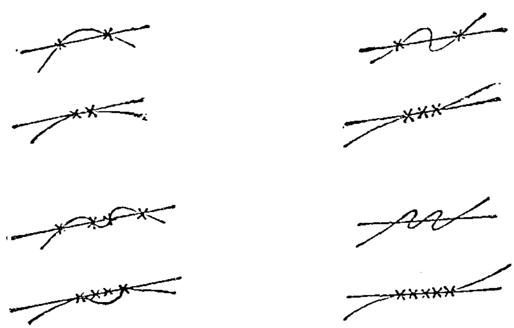
此處之點 P。不爲彎曲點。

逐次如斯。故 $f''(x)=0, f'''(x)=0, \dots$。令其最初不爲0之導來函數爲 $f^n(x)$。則可知 n 爲奇數。則有彎曲點。n 爲偶數。則無彎曲點。

最後 $f''(x)\neq 0$。則從 $P'T=\frac{h^2}{2}f''(x+\theta h)$。令 $Lim\ h$ 爲第一次無限小。故 $Lim\ P'T$ 爲第二次無限小。此稱曲線與切線爲第一次之切觸 (*Contact of the first order*)。

$f''(x)=0, f'''(x)\neq 0$, 即於彎曲點。而 $Lim\ P'T$ 爲第三次無限小。此稱第二次之切觸。

逐次如斯。得考一般第 n 次之切觸。



〔例〕 1. 求 $f(x)=\sin x$ 之彎曲點及其前後之凹凸。

(解) $f''(x)=-\sin x,\quad f'''(x)=-\cos x.$

則從 $f''(x)=-\sin x=0.$

得 $x=m\pi$ (m 爲任意之整數)。

而 $f'''(m\pi)\neq 0.$

此任何亦爲彎曲點。

m 爲奇數。令 $\pi>k>0$。則

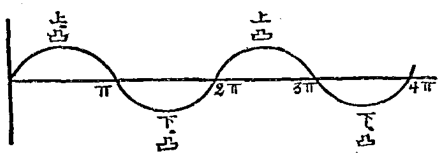
$$f''(m\pi-k)<0,\quad f''(m\pi+k)>0.$$

故 $x=m\pi, y=0$, 其前爲上凸，後爲下凸。

m 爲偶數。則

$$f''(m\pi-k)>0,\quad f''(m\pi+k)<0.$$

卽 $x=m\pi, y=0$, 其前爲下凸。後爲上凸。



〔例〕 2. 求 $y=x^3-3x^2-2x$ 之彎曲點及其前後之凸凹，

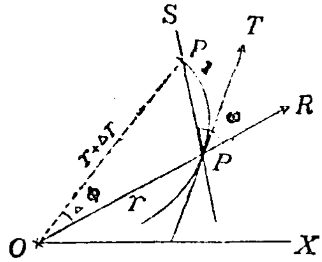
答 彎曲點爲 $x=1, y=-4$。其前爲上凸。後爲下凸

〔例〕 3. 求 $xy^2=a^2(a-x)$ (但 $a>0$) 之彎曲點及其前後之形。

答 彎曲點 $x=\frac{3}{4}a,\ y=\frac{a}{\sqrt{3}}$。其前爲上凸。後爲上凹。及彎曲點 $x=\frac{3}{4}a,\ y=-\frac{a}{\sqrt{3}}$。其前爲上凹。後爲上凸。

8. 極方程式之曲線。

(I) <u>切線及法線。</u>

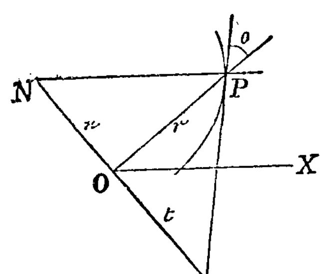


曲線之極方程式爲 $r=f(\phi)$。取其上之點 $P(r|\phi)$ 與他點 $P_1(r+\Delta r|\phi+\Delta\phi)$。延長動徑。於 P 與 PP_1 成 ω 角。則於 ΔOPP_1 而

$$\frac{OP}{OP_1}=\frac{\sin O\hat{P}_1P}{\sin O\hat{P}P_1},\quad \text{即}\quad \frac{r}{r+\Delta r}=\frac{\sin(\omega-\Delta\phi)}{\sin\omega}.$$

$$\therefore\quad \frac{r}{\Delta r}=\frac{\sin(\omega-\Delta\phi)}{\sin\omega-\sin(\omega-\Delta\phi)}=\frac{\sin(\omega-\Delta\phi)}{2\sin\frac{\Delta\phi}{2}\cos\left(\omega-\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$$

$$\therefore\quad \frac{r}{\frac{\Delta r}{\Delta\phi}}=\frac{\frac{\Delta\phi}{2}}{\sin\frac{\Delta\phi}{2}}\cdot\frac{\sin(\omega-\Delta\phi)}{\cos\left(\omega-\frac{\Delta\phi}{2}\right)}.$$



於 P 點之切線與動徑延長線所成之角命爲 θ。則於 $Lim\ \Delta\phi=0$ 之極限爲

$$\frac{r}{\frac{dr}{d\phi}}=\tan\theta.$$

次過極點 O。引垂於動徑 OP 之直線。令交於 P 點之切線及法線爲 T, N。則得命名如次。

$$OT=t=r\tan\theta=\frac{r^2}{r'}\text{..................}$$ 極切線影

$$ON=n=\frac{r}{\tan\theta}=r'\text{..................}$$ 極法線影

$$PT=T=\sqrt{r^2+t^2}\text{..................}$$ 切線之長

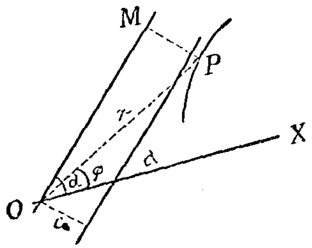
$$PN=N=\sqrt{r^2+n^2}\text{..................}$$ 法線之長

是 T, N 亦爲絕對值。而 t, n 之符號有正負之分。卽從 $r'\gtrless 0$。而 t, n 爲正或負。

(II) 漸近線。

由極方程式。已知曲線比動徑 r 之絕對值的如何之正數亦大之部分。有無限枝。

今假定曲線無限枝的一個有漸近線。則其與原線成 α 角。以對應於 $Lim\ r=\infty$。而



曲線之漸近線與原線所成之角。在合 $Lim\ r=\infty$ 之 ϕ 角。

更求漸近線與原點 O 之距離 c。

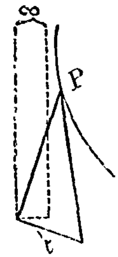
從曲線上之點 $P(r\,\phi)$。引平行於漸近線之動徑之垂線 MP。則

$$MP=r\sin(\alpha-\phi).$$

$$\lim_{r=\infty} MP=c=\lim_{r=\infty} r\sin(\alpha-\phi)$$

$$=Lim\frac{\sin(\alpha-\phi)}{\frac{1}{r}}=Lim\frac{-\cos(\alpha-\phi)}{-\frac{r'}{r^2}}$$

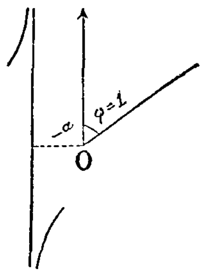
$$=Lim\frac{r^2}{r'}=Lim\ t.$$



即從原點至漸近線之距離。等於極切線影之 $Lim\, r=\infty$ 之極限值。

〔例〕 求 $r=\dfrac{a\phi}{\phi-1}$ $(a>0)$ 之漸近線。

$\phi=1\pm0,\ Lim\, r=\infty$。



而

$$\frac{r^2}{r'}=\frac{\dfrac{a^2\phi^2}{(\phi-1)^2}}{\dfrac{-a}{(\phi-1)^2}}=-a\phi^2.$$

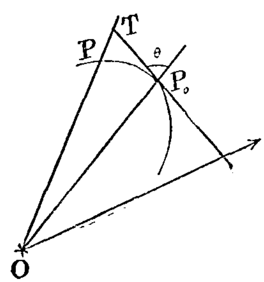
$$\therefore \quad Lim\frac{r^2}{r'}=Lim\, t=-a.$$

故所求之漸近線。如圖所示。

(III) 曲線之凹凸。

與直角坐標式相類似。其定義有凹於極方 (*Concave towards the pole*)。凸於極方 (*Convex towards the pole*)。彎曲點。

即極方程式從曲線上之點 $P_0(r_0|\phi_0)$ 之近傍一點 $P(r|\phi)$。介於 P_0 之曲線之切線之上。成角 ϕ 之點爲 $T(R|\phi)$。則



$$\delta=\frac{1}{r}-\frac{1}{R}.$$

δ 於 P_0 爲極小。則謂此於 P_0 爲凹於極方。極大。則云凸於極方。若非極大極小。則云 P_0 爲彎曲點。

然 $$\frac{R}{\sin\theta}=\frac{r_0}{\sin(\theta-\phi+\phi_0)}.$$

∴ $$\frac{1}{R}=\frac{\sin(\theta-\phi+\phi_0)}{r_0\sin\theta}=\frac{1}{r_0}\{\cos(\phi-\phi_0)-\cot\theta\sin(\phi-\phi_0)\}.$$

然於 P_0 之 r' 書爲 r_0'。則 $\tan\theta=\frac{r_0}{r_0'}$。而

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r_0}\cos(\phi-\phi_0)-\frac{r_0'}{r_0^2}\sin(\phi-\phi_0).$$

∴ $$\delta=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\cos(\phi-\phi_0)+\frac{r_0'}{r_0^2}\sin(\phi-\phi_0).$$

$$\delta'=\frac{r'}{r^2}+\frac{1}{r_0}\sin(\phi-\phi_0)+\frac{r_0'}{r_0^2}\cos(\phi-\phi_0).$$

$$\delta''=\frac{r''r-2r'^2}{r^3}+\frac{1}{r_0}\cos(\phi-\phi_0)\frac{r_0'}{r_0^2}\sin(\phi-\phi_0).$$

故於 P_0 之 δ', δ'' 等。書以 δ_0', δ_0'' 等。則

$$\delta_0'=0.$$

$$\delta_0''=-\frac{r_0''r_0-2r_0'^2}{r_0^3}+\frac{1}{r_0}=\frac{r_0^2+2r_0'^2-r_0r_0''}{r_0^3}.$$

故得如次之查定。

(i) 於 $r>0$, $r^2+2r'^2-rr''>0$ 之點。則 δ 爲極小。卽凹於極方。

(ii) 於 $r>0$, $r^2+2r'^2-rr''<0$ 之點。則 δ 爲極大。卽凸於極方。

(iii) 於 $r^2+2r'^2-rr''=0$ 之點。則過此點之際變 δ 之符號。故爲彎曲點。

(注意) 應用以上之查定。於 $r<0$ 之處。則 (i) 與 (ii) 當變換。

〔例〕 求 $r=\frac{a}{\sqrt{\phi}}$ $(a>0)$ 之彎曲點。

(解) $$r'=-\frac{a}{2\vartheta^{\frac{3}{2}}},\quad r''=\frac{3a}{4\vartheta^{\frac{5}{2}}}.$$

∴ $$r^2+2r'^2-rr''=\frac{a^2}{\vartheta}+\frac{a^2}{2\vartheta^3}-\frac{3a^2}{4\vartheta^3}.$$

$$=a^2\frac{4\vartheta^3-1}{4\vartheta^3}=0.$$

而 $$\vartheta=\pm\frac{1}{2}.$$

以ϑ之負數量無用。故以$\vartheta=\frac{1}{2}$試之。則

$$\delta=\frac{\sqrt{\vartheta}}{a}-\frac{1}{\sqrt{2}a}cos\left(\vartheta-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}a}sin\left(\vartheta-\frac{1}{2}\right).$$

命$\vartheta=\frac{1}{2}+h$。則

$$\delta=\frac{1}{\sqrt{2}a}\{\sqrt{1+2h}-cos\,h-sin\,h\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}a}\Big\{1+h-\frac{1}{2!}h^2+\frac{1.3}{3!}h^3-\frac{1.3.5}{4!}h^4+\dots$$

$$-\left(1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!}-\dots\right)-\left(\frac{h}{1!}-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}-\dots\right)\Big\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}a}\left\{\frac{4}{3}h^3-\frac{2}{3}h^4+\dots\right\}.$$

故δ依h之正負而變符號。

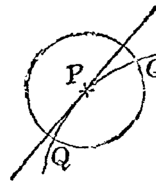
故$\vartheta=\frac{1}{2}$(其動徑$r=\sqrt{2}a$)爲彎曲點。

9. 曲線之奇點。

本章自本節以前。作連續曲線之一價函數看。確定切線之第一次導來函數。亦假定爲連續而論。

如是於曲線上一點 P 之近傍。其曲線亦爲一價連續。而切線亦確定連續。則此點稱爲普通點 (*Ordinary point*)。

今將曲線上之一點 P 爲普通點。其必要且充分之條件。列舉如次。



P 爲中心而畫一圓。則

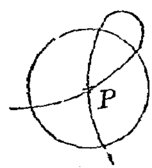
(i) 曲線與適宜小之半徑之圓。有二點(Q 及 Q')相交。(是曲線的一價連續之條件也)。

(ii) PQ, PQ' 之角 QPQ' 於圓之半徑的小之極限。而等於 π。(是切線連續變化之條件也)。

此爲普通點之在定。

曲線上之點。此查定若不適用。則此點稱曲線上之奇點 (*Singular point*)。於晚近曲線屢屢得實見者。有次之五種。

(1) 重複點 (*Multiple point*)。

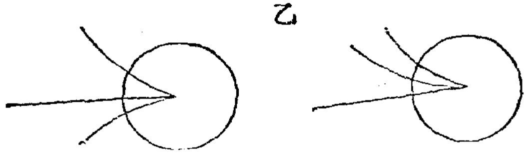


曲線與圓相交有三或三以上之點。則當其圓之中心之點 P。曰重複點。卽過 P 有二或二以上之曲線枝。特於此點各曲線枝之切線異其方向。則此點曰結節點 (*Node*)。

(2) 尖點 (*Cusp*)。

於曲線二枝之點 P 有共通切線。且其二枝雖於此點一方之側切於切線。然在於此點終止。則此點曰尖點。

甲　　乙



尖點有二種。於切線反對之側，各有一枝相切。如(甲圖)。是爲第一種尖點。又稱角狀尖點(*Keratoid cusp*)。二枝切於切線之同側。如(乙圖)。是爲第二種尖點 又稱嘴狀尖點(*Rhamphoid cusp*)。

任何尖點。以 P 爲中心之圓。與曲線雖有 Q, Q' 二點相交。然 $Q\hat{P}Q'$ 的極限收斂爲 0。

(3) 孤立點(*Isolated point*)。

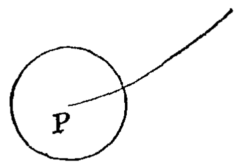
點 P 雖存在。然其近傍爲曲線，是謂孤立點。

此以 P 爲中心之圓。與曲線不相交。

解析上。孤立點得作爲二個虛曲線唯一實點相交看。

此或稱共軛點(*Conjugate point*)。

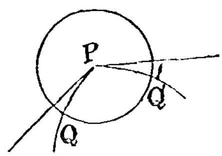
(4) 終止點(*Point d'arrêt*)。



至曲線的 P 點有一枝，且於此點終止。則此點曰終止點。

此以 P 爲中心之圓與曲線。唯有一點相交。

(5) 角折點(*Point saillant*)。



曲線有二枝於點 P 相合。且終止。特切線之方向各異耳。則此點曰角折點。

換言之。曲線之切線。過此點不爲連續之變化，而起飛躍之不連續。

此 $Q\hat{P}Q'$ 的極限不等於 π。

(注意) 終止點。角折點，並無適切之英語。故均示以法語。然亦非譯自法語。因法語 *Point Saillant* 寧可譯爲凸起點 彼德語之 *Endpunkt, Eckpunkt*。最適應於吾之命名也。

10. 曲線奇點之查定。

關於直交軸之曲線方程式爲

$$F(x, y)=0.$$

$x_0|y_0$ 爲曲線上之一點。於此點之近旁。假定在展開 $F(x, y)$ 爲特勞氏級數之下。則此點 $x_0|y_0$ 爲普通點耶。抑爲奇點耶。求其驗知之法。則

先變換坐標軸。而令

$$x=x_0+\xi, \quad y=y_0+\eta.$$

然 $$F(x_0+\xi, y_0+\eta)=F(x_0, y_0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\delta}{\delta x_0}\xi+\frac{\delta}{\delta y_0}\eta\right)F(x_0, y_0)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{\delta x_0}\xi+\frac{\delta}{\delta y_0}\eta\right)^2F(x_0, y_0)$$
$$+\dots$$

略記此爲

$$=F(x_0, y_0)+F'_{x_0}\xi+F'_{y_0}\eta$$
$$+\frac{1}{2}(F''_{x_0x_0}\xi^2+2F''_{x_0y_0}\xi\eta+F''_{y_0y_0}\eta^2)$$
$$+\dots$$
$$=0.$$

以 $x_0|y_0$ 爲曲線上之點。而

$$F(x_0, y_0)=0.$$

故 $$F'_{x_0}\xi+F'_{y_0}\eta+\frac{1}{2}(F''_{x_0x_0}\xi^2+2F''_{x_0y_0}\xi\eta+F''_{y_0y_0}\eta^2)+\dots=0\dots\dots(1)$$

今過新原點(舊 $x_0|y_0$ 點)之直線爲

$$\eta=t\xi\dots\dots(2)$$

ξ 爲其截曲線之點之橫坐標。則

$$(F'_{x_0}+F'_{y_0}t)\xi+\frac{1}{2}(F''_{x_0x_0}+2F''_{x_0y_0}t+F''_{y_0y_0}t^2)\xi^2+\dots=0\dots\dots(3)$$

(I) F'_{x_0}與F'_{y_0}於$x_0|y_0$同時不爲零。然則從上之方程式得

單根$\xi=0$.

以曲線過新原點。當然得單根$\xi=0$。雖然。特於直線(2)之方向t爲

$$F'_x+F'_{y_0}t=0 \quad (但\ F'_{y_0}\neq 0).$$

試選定之。則$\xi=0$爲(3)之二重根。

即於(2)。而令

$$t=-\frac{F'_{x_0}}{F'_{y_0}}.$$

則 $$F'_{x_0}\xi+F'_{y_0}\eta=0.$$

截曲線之二點。相接近於無限之極限.即爲切線。(結果與第二節之公式(1'')爲一致)。

若$F'_{y_0}=0$。則不可假定$F'_{x_0}\neq 0$。而直線(2)之方程式爲$\xi=\tau\eta$。可到着同一之結果。

然則F'_{x_0}, F'_{y_0}皆於$x_0|y_0$之近旁爲連續。則$x_0|y_0$爲普通點。

故曰

$F(x,y)$試展開爲特勞氏之級數。且F'_x, F'_y在$F(x,y)=0$上之點$x_0|y_0$於其近旁爲連續。又於$x_0|y_0$同時不爲0。則$x_0|y_0$爲曲線$F(x,y)=0$之普通點。

(II) $F'_{x_0}=0$, $F'_{y_0}=0$。而$F''_{x_0x_0}$, $F''_{x_0y_0}$, $F''_{y_0y_0}$同時不爲零。

則從(3)以

$$\frac{1}{2}(F''_{x_0x_0}+2F''_{x_0y_0}t+F''_{y_0y_0}t^2)\xi^2+\ldots=0.$$

而直線(2)之方向t不拘如何。$\xi=0$爲二重根。

故知曲線之二枝過新原點。

更特滿足t爲二次方程式.如

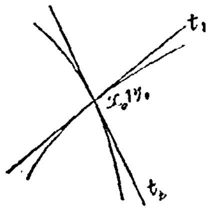
$$F''_{x_0x_0}+2F''_{x_0y_0}t+F''_{y_0y_0}t^2=0.$$

試選定之。則於其方面僅一ξ收斂爲0。而$\xi=0$爲三重根。

判別上之二次方程式之根，分論如次。

(i) $F''_{x_0x_0}F''_{y_0y_0}-(F''_{x_0y_0})^2<0$

此可得二個不相等之實根t_1, t_2。於此二方向爲曲線一枝之切線，故$x_0|y_0$爲二重點(即結節點)。

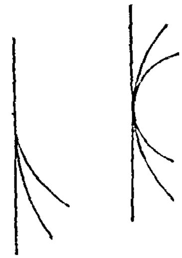


(ii) $F''_{x_0x_0}F''_{y_0y_0}-(F''_{x_0y_0})^2>0.$

此爲虛根。而t任爲如何，亦不能得切於曲線之直線，故新原點不可不爲孤立點。

(iii) $F''_{x_0x_0}F''_{y_0y_0}-(F''_{x_0y_0})^2=0.$

以得實而等之根t，故此曲線於此點不爲孤立點，而有共同切線耶，抑或爲尖點耶，實難限制。



(III) $F'_{x_0}=0,\ F'_{y_0}=0,\ F''_{x_0x_0}=0,\ F''_{x_0y_0}=0,\ F''_{y_0y_0}=0$。而$F'''_{x_0x_0x_0}$, $F'''_{x_0x_0y_0}$, $F'''_{x_0y_0y_0}$, $F'''_{y_0y_0y_0}$悉同時不爲零。

於此$x_0|y_0$而$\xi=0$爲三重根，

而特定t適於三次方程式。如

$$F'''_{x_0x_0x_0}+3F'''_{x_0x_0y_0}t+3F'''_{x_0y_0y_0}t^2+F'''_{y_0y_0y_0}t^3=0.$$

則$\xi=0$爲四重根，即$x_0|y_0$爲三重點。

$F'''_{x_0x_0x_0}$等皆爲零。以此推之。得四重點，五重點等。要之

試展開$F(x,y)$爲特勞氏之級數。且F'_x, F'_y於連續區域內爲奇點，則

$$\frac{\delta F}{\delta x}=0,\quad \frac{\delta F}{\delta y}=0.$$

而於其點爲$\frac{\delta^2F}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2F}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2F}{\delta x\delta y}\right)^2\gtreqless 0.$

從而爲結節點或孤立點。

爲 $$\frac{\delta^2F}{\delta x^2}\cdot\frac{\delta^2F}{\delta y^2}-\left(\frac{\delta^2F}{\delta x\delta y}\right)^2=0.$$

則爲二重點。

又 $\frac{\delta^2F}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^2F}{\delta y^2}$, $\frac{\delta^2F}{\delta x\delta y}$ 皆爲零。

則爲三重點或更多於三之重複點,

(注意) 代數曲線。必得展爲特勞氏級數。而終止點角折點,則於此不發生。

(例) 1. 求$x^3-3axy+y^3=0$ $(a>0)$之奇點。

(解) 令$F(x, y)=x^3-3axy+y^3$。則

$$\frac{\delta F}{\delta x}=3x^2-3ay,\quad \frac{\delta F}{\delta y}=-3ax+3y^2.$$

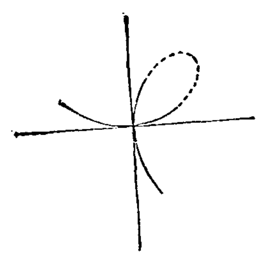
故從$x^2-ay=0, ax-y^2=0$得原點$0|0$爲奇點。(點$a|a$不在曲線上)。

於此奇點$0|0$之切線之方向爲t。則

$$\left(\frac{\delta^2F}{\delta x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}+2\left(\frac{\delta^2F}{\delta x\delta y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}t+\left(\frac{\delta^2F}{\delta y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}t^2=0.$$

從此得$t=0$與$t=\infty$。

在實際上於此曲線原點之近旁之形。如圖所示。



於代數曲線。惟於原點爲奇點時。則於奇點之切線方程式。準前述之査定。求得簡單之法則如次。

定理 代數曲線最低次之項爲第m次。($m\geqq 2$)於原點有m之重複點。且於此點之切線方程式，令最低次之同次羣等於零以求之，即得。

(證明) 代數曲線爲$F(x,y)=0$。原點爲奇點。可以

$$\left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=0,\quad \left(\frac{\delta F}{\delta y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=0.$$

而$F(x,y)$不可有一次項。

即最少亦不可不爲

$$F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+(\text{高次項})=0.$$

於此以

$$\left(\frac{\delta^2 F}{\delta x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=a,\quad \left(\frac{\delta^2 F}{\delta x\delta y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=b,\quad \left(\frac{\delta^2 F}{\delta y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=c.$$

則原點爲二重點。而於原點之切線$y=tx$。其方向t爲下式之根。

$$a+bt+ct^2=0.$$

故解最低次之羣。

$$ax^2+bxy+cy^2=0.$$

即得。

是直得原點之切線方程式。

一般。假定

$$F(x,y)=a_0x^m+a_1x^{m-1}y+\ldots+a_my^m+(\text{高次項})=0.$$

則原點明明爲m重複點。

於原點之切線$y=tx$。其方向t可從

$$a_0+a_1t+\ldots+a_mt^m=0.$$

而知有m個。(實或虛)

是直同於從

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}y+\ldots+a_ny^m=0.$$

得切線之方程式。

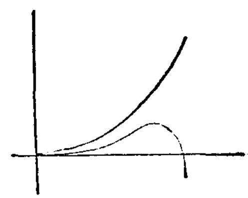
〔例〕 2. 於 $(y-x^2)^2-x^5=0$。求其原點近旁之形。

(解) 此曲線之最低次項僅有 y^2。而原點爲重複點。於此點之切線爲

$$y^2=0.$$

故原點爲尖點、又於此點有共通切線之二枝之切點。

然 $x<0$。則 y 爲虛。而曲線於原點爲終止。從而原點爲尖點。



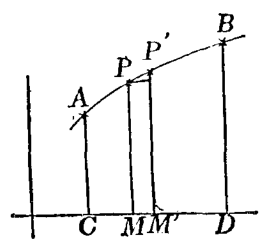
今從原方程式求 y。則

$$y=x^2\pm x^{\frac{5}{2}}=x^2(1\pm\sqrt{x}).$$

而 $0\leqq\sqrt{x}<1$ 之間。y 之二値任何亦爲正。若 $1<\sqrt{x}$。則 y 之値一正一負。

故原點之近旁如圖所示。卽原點爲第二種尖點。

11. 弧之微分。



於方程式 $y=f(x)$ 之連續區域內。

從此曲線之一部分。曰其弧 (*Arc*)。

今暫承認弧 AB 之長。以 s 表之。

其上二點 $P(x|y)$, $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 之間之弧 PP' 命爲 Δs。則

$$\overline{PP'}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

$$=\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

實際上。規定P'與P接近於無限之極限。則弧PP'等於$\overline{PP'}$。即

$$Lim\ \Delta s = Lim\ \Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

表以微分之關係。則

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

$$= dx\sqrt{1+f'(x)^2}.$$

而此ds稱弧之微分 (*Differential of Arc*)。

於極坐標式之曲線。則

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

從此 $$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta.$$

$$dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta.$$

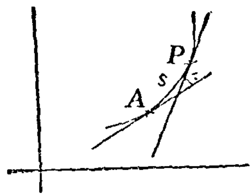
$\therefore$ $$dx^2+dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

$\therefore$ $$ds = \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2}$$

$$= d\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

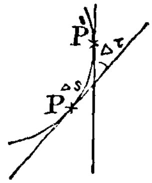
(注意) 弧之長。本於ds之規約。此乃積分極限值最普通之說也。

12. 曲度。



自$y=f(x)$之曲線上。而於$y''\neq 0$之區域內之弧AP。其長度以s表之。於A, P切線方向之變角命為τ。則τ為曲線之弧之全曲度 (*Total curvature*)。

$\frac{\tau}{s}$為其平均曲度 (*Mean curvature*)。



令P, P'爲弧上之二點。$\Delta\tau$爲弧$PP'=\Delta s$之全曲度。

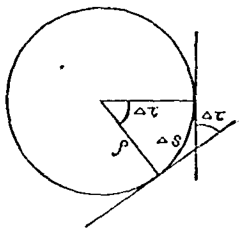
令P'無限接近於P之極限爲

$$Lim\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\frac{d\tau}{ds}.$$

則此極限值。稱爲於點P之曲度。

特於半徑ρ之圓爲

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\frac{1}{\rho}.$$



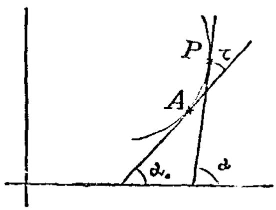
如是於圓任何之部分。而Δs有一定之關係。故

$$\frac{d\tau}{ds}=\frac{1}{\rho}.$$

然則某曲線於其上一點之曲度考之。必常有與此相等之曲度之圓爲

$$\rho=\frac{1}{\frac{d\tau}{ds}}=\frac{ds}{d\tau}.$$

從此得以定某曲線。此圓之半徑ρ。曰曲線上一點之曲度半徑 (*Radius of curvature*)。



又令A, P之切線角爲α_0, α。則

$$\tau=\alpha-\alpha_0.$$

$$\therefore \qquad d\tau=d\alpha.$$

以 $$\tan\alpha=\frac{dy}{dx}.$$

$$\therefore \qquad d\tau=d\left(\tan^{-1}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^2+dy^2}.$$

而 $$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

∴ $$\rho=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}.$$

令x爲自變數。則

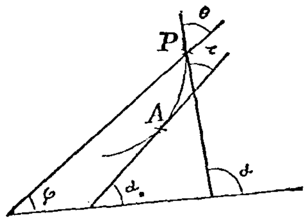
$$d\tau=d\left(tan^{-1}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}dx}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx.$$

從此 $$\rho=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

次於極坐標式。則

$$\alpha=\theta+\phi.$$



而以 $$tan\,\theta=\frac{r}{r'}.$$

∴ $$\alpha=tan^{-1}\frac{r}{r'}+\phi.$$

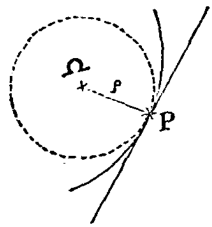
∴ $$d\tau=d\alpha=\frac{r'^2-rr''}{r^2+r'^2}d\phi+d\phi$$

$$=\frac{r^2-rr''+2r'^2}{r^2+r'^2}d\phi.$$

而 $$ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\phi.$$

∴ $$\rho=\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''}\quad\left(但\ r'=\frac{dr}{d\phi},\ r''=\frac{d^2r}{d\phi^2}\right).$$

(注意一) 於曲線上之一點P。求其曲度半徑。



作與此相等之半徑之圓於曲線同側。且切於曲線之切線之切點P。則此圓稱P點之曲度圓(*Circle of curvature*)。其中心曰曲度之中心(*Centre of curvature*)。

(注意二) $y''=0,\ r^2+2r'^2-rr''=0$

亦規約為曲度。此即彎曲點。其$\rho=\infty$而曲度之中心得看做走於無窮遠之處

(注意三) 曲度圓為過曲線上三點之圓。於三點無限相接近之極限處之圓。得以見之。

又 曲度之中心。為曲線上二點之法線之交點。取其二點無限相近之位置。亦得見之。

此二者。詳述於後節。

(例) 1. 曲線$y=x^4-4x^3-18x^2$。求其原點之曲度半徑。

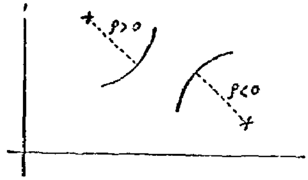
(解) $$\frac{dy}{dx}=4x^3-12x^2-36x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=12x^2-24x-36.$$

$$\therefore\qquad \rho=\frac{\{1+(4x^3-12x^2-36x)^2\}^{\frac{3}{2}}}{12x^2-24x-36}.$$

$x=0$ 命分子之平方根為正。則得$-\dfrac{1}{36}$.

答 $\dfrac{1}{36}$.



（注意） 分子之平方根爲正。則其絕對値爲弧之微分 ds。於是 ρ 從 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 之正負而爲正負。

故 $\frac{d^2y}{dx^2}>0$ 卽曲線下凸。

則 $\rho>0$.

而 $\frac{d^2y}{dx^2}<0$ 卽曲線上凸。

則 $\rho<0$.

〔例〕 2. 求 $r=a(1-\cos\theta)$ 之曲度半徑。

（解） $r'=a\sin\theta.$

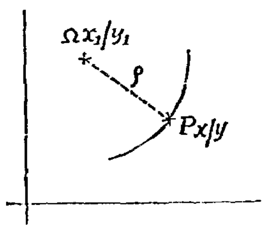
$r''=a\cos\theta.$

$$\therefore\qquad \rho=\frac{a^3\{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\}^{\frac{3}{2}}}{a^2\{(1-\cos\theta)^2+2\sin^2\theta-(1-\cos\theta)\cos\theta\}}$$

$$=\frac{a(2-2\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{3-3\cos\theta}=\frac{\sqrt{4}a}{3}(1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}=\frac{4a}{1}\sin\frac{\theta}{2}.$$

13 縮閉線及伸開線。

一曲線。其曲度中心之軌跡。曰此曲線之縮閉線（*Evolute*）。對於縮閉線而稱原曲線爲伸開線（*Involute*）。



於曲線上之點 $P(x|y)$。命其曲度中心爲 $\Omega(x_1|y_1)$。則

$$(x_1-x)^2+(y_1-y)^2=\rho^2.$$

然 $x_1|y_1$。又爲在 P 點法線上之點、而

$$(x_1-x)dx+(y_1-y)dy=0$$

從此二方程式。

得 $$\begin{cases} x_1-x=-\dfrac{(dx^2+dy^2)\,dy}{dx\,dy^2-dy\,d^2x}, \\[2ex] y_1-y=-\dfrac{(dx^2+dy^2)\,dx}{dx\,dy^2-dy\,d^2x}. \end{cases}$$

然x, y爲單一自變數t之函數，則從此消去t。而求得縮閉線之方程式爲

$$F(x_1, y_1)=0.$$

〔例〕 求橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 之縮閉線。

(解) 令 $x=a\cos\varphi$. 則從方程式得 $y=b\sin\varphi$.

$$\therefore \qquad dx=-a\sin\varphi\,d\varphi, \qquad dy=b\cos\varphi\,d\varphi.$$

$$d^2x=-a\cos\varphi\,d\varphi^2, \quad d^2y=-b\sin\varphi\,d\varphi^2.$$

$$\therefore \qquad x_1-a\cos\varphi=-\frac{b\,(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)\cos\varphi\,d\varphi^3}{ab\,d\varphi^3}.$$

$$y_1-b\sin\varphi=-\frac{a\,(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)\sin\varphi\,d\varphi^3}{ab\,d\varphi^3}.$$

$$\therefore \qquad x_1=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3\varphi, \quad y_1=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3\varphi.$$

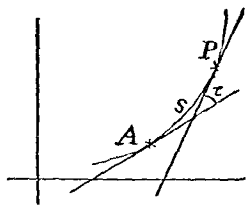
試從此消去φ。則

$$a^{\frac{2}{3}}x_1^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}y_1^{\frac{2}{3}}=(a^3-b^3)^{\frac{2}{3}}.$$

是橢圓之縮閉線之方程式。

次將縮閉線與伸開線之關係，述其二三。

令縮閉線上之點$\Omega(x_1|y_1)$與伸開線上之點$P(x|y)$相對應，則



$$x_1=x+\rho\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=x-\rho\sin\alpha.$$

$$y_1=y+\rho\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=y+\rho\cos\alpha.$$

故 $$dx_1 = dx - \rho\cos\alpha\, d\alpha - \sin\alpha\, d\rho.$$

$$dy_1 = dy - \rho\sin\alpha\, d\alpha + \cos\alpha\, d\rho.$$

然由 $\frac{dy}{dx}=\tan\alpha$。得

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\frac{dy}{ds}=\cos\alpha.$$

$$\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\frac{dy}{ds}=\sin\alpha.$$

∴ $$dx=\cos\alpha\, ds=\cos\alpha\, \rho\, d\alpha.$$

$$dy=\sin\alpha\, ds=\sin\alpha\cdot\rho\, d\alpha.$$

故 $$dx_1=-\sin\alpha\, d\rho.$$

$$dy_1=\cos\alpha\, d\rho.$$

從此

$$\frac{dy_1}{dx_1}=-\cot\alpha\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

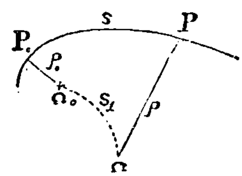
$$dx_1^2+dy_1^2=d\rho^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

從(1)。則縮閉線之切線爲伸開線之法線。

從(2)。縮閉線之弧之微分 ds_1 等於 $d\rho$ 之絕對值。

故今命

$$ds_1=d\rho.$$



則從此

$$s_1=\rho+c.$$

計算縮閉線之弧之始點爲 Ω_0。對應於此點之伸開線上之點爲 P_0。命 P_0 至 Ω_0 之曲度爲 ρ_0。則 $s_1=0$。

從 $0=\rho_0+c.$ ∴ $c=-\rho_0.$

∴ $$s_1=\rho-\rho_0.$$

即縮閉線之弧$\Omega_0\Omega$之長s_1。等於其兩端之點爲曲度中心之曲度半徑之差。

從 $ds_1=-d\rho$. 得 $s_1=\rho_0-\rho$.

(注意一) 取ρ長之絲一端。固定於曲線$\Omega\Omega_0$之棚上之一點Ω。令絲在於Ω之切線之方向之直線上儘絲伸長。他一端P移動於棚$\Omega\Omega_0$之側。絲常採切於$\Omega\Omega_0$之切線之方向。且密着於棚之部分之長。等於餘絲之長與ρ之差。故P之軌跡爲伸開線。而棚爲其縮閉線也。從此事實得伸開,縮閉之命名。

(注意二) 從絲長ρ之增減。而對於同一之縮閉線可得無限多數之伸開線。換言之。一曲線之縮閉線雖確定唯一個。而伸開線有無限多數之一羣。

(注意三) 於曲線之彎曲點。其曲度之中心走至無窮遠。從而曲度半徑爲無窮遠之切線之極限。即於彎曲點之法線爲縮閉線之漸近線。

14. 包絡線。

拋物線$y^2=4dx$。令d爲種種之値。則可得共軸共頂點之種種拋物線。

又$x^2+y^2=r^2$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$等。變$r$及僅變$a$或$b$。亦同樣也。

由是知一般曲線之方程式有若干常數。從此常數確定曲線之形狀位置等。

今以α表曲線之一個常數。則其方程式書爲

$$f(x, y, \alpha)=0.$$

其 α 可作變數看。是稱曲線之變率 (*Parameter*)。

從變率之變化而生一羣曲線。是謂同類曲線 (*Curves of a family*)。

今令變率 α 之二值為 $\alpha, \alpha+\Delta\alpha$。則同類曲線為

$$f(x, y, \alpha)=0.$$

$$f(x, y, \alpha+\Delta\alpha)=0.$$

從此可得一切交點。又

$$\frac{f(x, y, \alpha+\Delta\alpha)-f(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha}=0.$$

亦能滿足。

$f(x, y, \alpha)=0$ 的 α 之函數。令有有限確定之第一導來函數。則於極限而

$$f(x, y, \alpha)=0, \quad f(x, y, \alpha+d\alpha)=0.$$

其相鄰接之同類曲線之交點。在

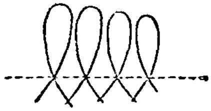
$$\frac{\delta}{\delta\alpha}f(x, y, \alpha)=0.$$

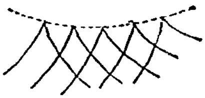
亦能滿足。故從

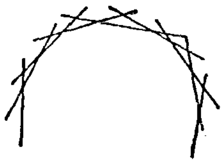
$$\begin{cases} f(x, y, \alpha)=0, \\ \dfrac{\delta}{\delta\alpha}f(x, y, \alpha)=0. \end{cases}$$

消去 α。則相鄰接之同類曲線。可得其交點之極限之位置之軌跡。

此交點之極限之位置。若不在曲線之奇點。則此軌跡稱 $f(x, y, \alpha)=0$ 之包絡線 (*Envelope*)。







(注意) 曲線之奇點之軌跡。從奇點之種類。而呼結節點之軌跡.尖點之軌跡等。此等均缺少如次所述包絡線之性質。

<u>同類曲線之包絡線。其各曲線與此共通點有共通切線。</u>

(證明) 令同類曲線爲

$$f(x, y, \alpha)=0. \quad (\alpha \text{ 爲變率})$$

則包絡線爲

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha)=0, \\ \dfrac{\delta}{\delta \alpha} f(x, y, \alpha)=0. \end{cases}$$

同類曲線之一個(對於α之某定值)切線方向率$\dfrac{dy}{dx}$。可從下式求之。

$$\frac{\delta f}{\delta x} dx+\frac{\delta f}{\delta y} dy=0.$$

包絡線切線之方向率 $\dfrac{dy}{dx}$。從 $\dfrac{\delta}{\delta \alpha}(x, y, \alpha)=0$。得 $\alpha=\phi(x, y)$。此可置換於$f(x, y, \alpha)=0$。

從 $$\frac{\delta f}{\delta x} dx+\frac{\delta f}{\delta y} dy+\frac{df}{\delta \alpha} d\alpha=0.$$

可得所求。

然於後者。以 $\frac{\delta f}{\delta a}=0$

而於兩曲線之共通點。任何亦爲

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}}.$$

此相爲一致。

(注意) 奇點之軌跡。於奇點以 $\frac{\delta f}{\delta x}=0, \frac{\delta f}{\delta y}=0$。則如上所記之方向率爲不定。

〔例〕 1. 有一定面積。試求其共軸橢圓之包絡線。

(解) 令橢圓之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

其面積爲 πab。令 πk^2 代之。前共軸橢圓之同類曲線。可得變其變率 a $\left(b \text{ 則 } \frac{k^2}{a}\right)$。

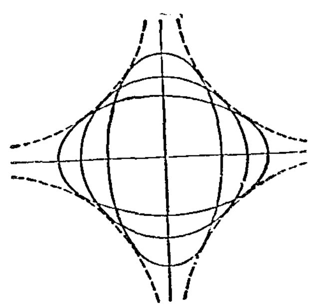
故包絡線之方程式爲

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2y^2}{k^4}=1, \\ -\frac{2x^2}{a^3}+\frac{2ay^2}{k^4}=0. \end{cases}$$

從此消去 a。即

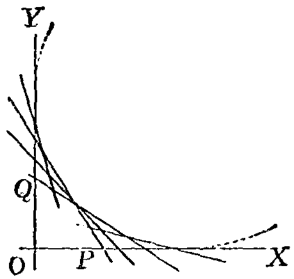
$$4x^2y^2=k^4.$$

即爲共軛等邊雙曲線。



〔例〕 2. 一直線交於直角坐標軸之點爲 P, Q。而 $OP+OQ$ 爲一定。問此直線之包絡線如何

(解) 直線方程式爲



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

則 $a+b=k$ (常數).

∴ $$\frac{x}{a}+\frac{y}{k-a}=1.$$

即 $(k-a)x+ay=a(k-a)$.

及 $-x+y-k-a-a=0$.

從此消去a。則得包絡線爲拋物線。如

$$(x+y-k)^2-4xy=0.$$

〔例〕 3. 從二定點之距離之積。如爲一定。試求其直線之包絡線。

(解) 令二定點爲 $(-k|0)$, $(k|0)$。此關於定軸之直線方程式爲

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha+p=0.$$

從二定點之距離爲

$$-k\cos\alpha+p,\quad k\cos\alpha+p.$$

而 $p^2-k^2\cos^2\alpha=c^2$. (c 爲常數)

則 $$x\cos\alpha+y\sin\alpha\pm\sqrt{c^2+k^2\cos^2\alpha}=0.$$

$$-x\sin\alpha+y\cos\alpha\mp\frac{k^2\cos\alpha\sin\alpha}{\sqrt{c^2+k^2\cos^2\alpha}}=0.$$

試先求x, y。則

$$x=\mp\cos\alpha\sqrt{c^2+k^2\cos^2\alpha}\mp\frac{k^2\cos\alpha\sin^2\alpha}{\sqrt{c^2+k^2\cos^2\alpha}}$$

$$=\mp\frac{c^2+k^2}{\sqrt{c^2+k^2\cos^2\alpha}}\cos\alpha.$$

$$y=\mp\sin\alpha\sqrt{c^2+k^2\cos^2\alpha}\mp\frac{k^2\cos^2\alpha\sin\alpha}{\sqrt{c^2+k^2\cos^2\alpha}}$$

$$=\mp\frac{c^2}{\sqrt{c^2+k^2\cos^2\alpha}}\sin\alpha.$$

$$\therefore\qquad \frac{x^2}{c^2+k^2}+\frac{y^2}{c^2}=1.$$

是卽所求之包絡線之方程式。

〔例〕 4. 於曲線$\left(\frac{x-a}{h}\right)^2+\left(\frac{y-b}{k}\right)^2=1$。而$h, k$爲常數。而$a, b$爲變數。但常爲$\left(\frac{a}{h}\right)^2+\left(\frac{b}{k}\right)^2=1$，求此曲線之包絡線。

答 $$\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}=4.$$

〔例〕 5. 垂於拋物線之軸之弦。爲直徑之圓。求其包絡線。

答 有同軸之拋物線。

15. 二個曲線之切觸。

二個曲線之方程式爲

$$y=f(x),\quad y_1=f_1(x).$$

於某x之值。而

$$y=y_1,\quad y'=y_1',\quad y''=y_1'',\quad \ldots,$$

$$y^{(\mu)}=y_1^{(\mu)},\quad y^{(\mu+1)}\neq y_1^{(\mu+1)}.$$

此稱兩曲線，於點$P(x|y)$爲μ次之切觸(*Contact of the* μ^{th} *order*)。

今於x之近旁，假定y, y_1任何亦得展開爲特勞氏之級數。

令$Y=f(x+\Delta x), Y_1=f_1(x+\Delta x)$. 則

$$Y=y+y'\frac{\Delta x}{1!}+y''\frac{\Delta x^2}{2!}+\ldots+y^{(\mu)}\frac{\Delta x^\mu}{\mu!}+y^{(\mu+1)}\frac{\Delta x^{\mu+1}}{(\mu+1)!}+R_{\mu+2}.$$

$$Y_1=y_1+y_1'\frac{\Delta x}{1!}+y_1''\frac{\Delta x^2}{2!}+\ldots+y_1^{(\mu)}\frac{\Delta x^\mu}{\mu!}+y_1^{(\mu+1)}\frac{\Delta x^{\mu+1}}{(\mu+1)!}+R'_{\mu+2}.$$

以最初 $(\mu+1)$ 項皆相等。而

$$Y-Y_1=\frac{y^{(\mu+1)}-y_1^{(\mu+1)}}{(\mu+1)!}\Delta x^{\mu+1}+R_{\mu+2}-R'_{\mu+2}.$$

然 $\lim\limits_{\Delta x=0}(Y-Y_1)$ 爲第 $(\mu+1)$ 次之無限小。

而　$y=y_1$　則示 $x|y$ 與 $x|y_1$ 爲共通點，

$y'=y_1'$　則示於共通點有共通切線。

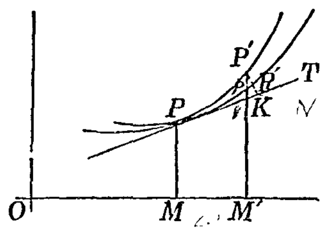
$y''=y_1''$　則示共通切線之同側爲凸凹。或於共通點爲雙方之彎曲點。

故一般表 μ 次之切觸。如下圖。

$$OM=x,\quad PM=y=y_1,$$

$$P'M'=Y,\quad pM'=Y_1.$$

從此　$Y-Y_1=P'p.$



於此極限爲第 $(\mu+1)$ 次之無限小，則

$$\lim_{MM'=0}\frac{P'p}{(MM')^{\mu+1}}.$$

表不爲零之有限值。

今變換此切線 PT 與 P 點之法線爲坐標軸。

令 PT, $P'M'$ 之交點爲 K。故以 $\lim\frac{PK}{MM'}$ 爲常數。而 $\lim PK$ 與 $\lim MM'$ 爲同次無限小。又令 $P'N\perp PT$。故以

$$KN=P'K\sin\alpha=(Y-y-y'\Delta x)\sin\alpha$$

而 $Lim\, KN$ 爲第二次無限小。

故 $Lim\, PN$ 與 $Lim\, MM'$ 爲同次無限小。

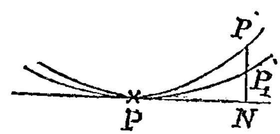
次令 $P'N$ 與曲線 y_1 之交點爲 P_1'。則

$$\frac{P'P_1'}{P'p}=\frac{\sin\hat{p}}{\sin\hat{P}_1'}.$$

故 $Lim\frac{P'P_1'}{P'p}$ 常爲不爲零之有限值。從而 $Lim\, P'P_1'$ 與 $Lim\, P'p$ 爲同次無限小。

故於 μ 次切觸點之近旁。得

$$\lim_{PN=0}\frac{P'P_1'}{(PN)^{\mu+1}}=k\ (\text{不爲零之有限值})。$$

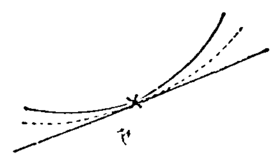


然則兩曲線在共通切線之同側明矣。又

(i) μ 爲奇數 $(\mu>1)$。

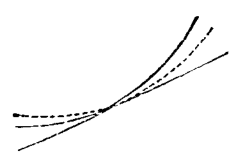
此處之 $Y-Y_1$。僅關係於 Δx 之符號。

以依 $y^{(\mu+1)}-y_1^{(\mu+1)}$ 之符號。而一方之曲線在切觸點之近旁。他方夾於曲線與切線之間。



(ii) μ 爲偶數。

與前相反。變 Δx 之符號。而兩曲線於切觸點相截合。



(注意) 二個曲線爲

$$y=f(x),\quad y_1=f_1(x).$$

令其 $(\mu+1)$ 個點。如 $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ (順其大小之次序)。

則 $y-y_1=f(x)-f_1(x)=F(x)$.

此等函數有 $(\mu+1)$ 個之 x 爲零.

然則依洛兒氏之定理(第二章第14節)。

$$x_0<x_0'<x_1<x_1'<x_2<\ldots,<x_{\mu-1}<x'_{\mu-1}<x_\mu.$$

於點 $x_0', x_1', x_2', \ldots, x'_{\mu-1}$. 從而

$$F'(x)=y'-y_1'=0.$$

又 $x_0'<x_0''<x_1'<\ldots,<x''_{\mu-2}<x'_{\mu-1}.$

於點 $x_0'', x_1'', x_2'', \ldots, x''_{\mu-2}$ 從而

$$F''(x)=y''-y_1''=0$$

試考其次第高次之導來函數。惟最後一點 $x_0^{(\mu)}$ 爲

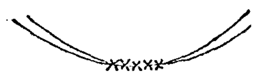
$$F^{(\mu)}(x)=y^{(\mu)}-y_1^{(\mu)}=0.$$

此處之 $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ 悉收歛爲 x_0。則於點 x_0 而得

$$y=y_1,\ y'=y_1',\ y''=y_1'',\ \ldots,\ y^{(\mu)}=y_1^{(\mu)}.$$

等 μ 次之切觸。通俗述此爲

<ins>μ 次之切觸。有 $(\mu+1)$ 個相鄰接之點爲共通。</ins>



16. 吻合曲線。

曲線 C 之方程式爲

$$y=f(x).$$

$f(x)$ 於曲線上之點 $x_0|y_0$ 之近旁。假定得展開爲可西氏級數，如

$$y=f(x)=y_0+y_0'(x-x_0)+\frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

今考有 $(n+1)$ 個之常數 $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$。且關於 $x-x_0$。得展開爲冪級數。如次之曲線 C'。

$$y_1=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\dots+c_n(x-x_0)^n$$
$$+A_1(x-x_0)^{n+1}+A_2(x-x_0)^{n+2}+\dots.$$

(但 A_1, A_2 為 $c_0, c_1, \dots, c_n$ 之函數)。

然 μ 為比 n 更小之整數。兩曲線 C, C' 有 μ 次之切觸。則

$$c_0=y_0,\ c_1=y_0',\ c_2=\frac{y_0''}{2!},\ \dots,\ c_\mu\frac{y_0^{(\mu)}}{\mu!}.$$

且如 $$c_{\mu+1}\neq\frac{y_0^{(\mu+1)}}{(\mu+1)!}.$$

使其常數為確定可也。而所餘 $(n-\mu-1)$ 個之常數。無不可任意置之。

又 $c_{\mu+1}$ 以能充上式不等之條件為限。亦可任意。從而曲線 C' 之形狀及位置全不確定。

雖然。特令 $\mu=n$。

則以 $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ 之常數悉確定。從而曲線 C' 亦全確定。

而於 $$A_1\neq\frac{y_0^{(n+1)}}{(n+1)!}.$$

則 C' 與 C 為正。為 n 次之切觸。

是謂此確定曲線 C' 於 C 之點 $x_0|y_0$ 為吻合 (*To osculate*)。又確定曲線 C' 曰吻合曲線 (*Osculating curve*)。一名切觸曲線。

若定 $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ 的 n 次切觸為

$$A_1=\frac{y_0^{(n+1)}}{(n+1)!}.$$

又，更至 $A_2, \dots$ 之最初若干的同樣之值。則期 n 次之切觸。而得 n 次以上之切觸。是曰吻合過 (*Superosculation*)。

次示淺近之切觸曲線。

(I) 吻合直線 (*Osculating straight line*)。

曲線C'之方程式爲

$$y_1=c_0+c_1(x-x_0).$$

令此與曲線C吻合。則

$$c_0=y_0=f(x_0),\quad c_1=y_0'=f'(x_0).$$

決定c_0, c_1卽得 卽

$$y_1=y_0+f'(x_0)(x-x_0).$$

卽
$$y_1-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

是第一次之切關爲吻合直線。

而是不外切線之方程式。故曰

吻合直線在第一次之切關爲切線。

(II) 吻合圓 (*Osculating circle*)。

令圓之方程式爲

$$(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2=r^2.$$

從α, β, r^2組成前所述之c_0, c_1, c_2。暫且看做α, β, r爲變率。

欲令此圓與曲線$y=f(x)$吻合。則必使

$$y_1=y,\quad y_1'=y',\quad y_1''=y''.$$

然欲得y_1, y_1', y_1''。則從

$$\begin{cases}(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2=r^2,\\ x_1-\alpha+(y-\beta)y_1'=0,\\ 1+y_1'^2+(y_1-\beta)y_1''=0.\end{cases}$$

解之卽得。而代入吻合之條件。則

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2,\\ x-\alpha+(y-\beta)y'=0,\\ 1+y'^2+(y-\beta)y''=0.\end{cases}$$

由此於曲線上之點$x|y$之吻合圓。決定其常數a, β, r如次。

$$\begin{cases} a = x - \dfrac{(1+y'^2)y'}{y''}, \\ \beta = y + \dfrac{1+y'^2}{y''}, \\ r = \dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}. \end{cases}$$

因此r等於曲度半徑。$a|\beta$即吻合圓之中心。爲曲度圓之中心。故曰

吻合圓與曲度圓同一。

(III) 吻合圓錐曲線(*Osculating conic*)。

令最普通圓錐曲線之方程式爲

$$ax^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c=0.$$

是與五個變率c_0, c_1, c_2, c_3, c_4相當。

吻合當有四次切觸。

但抛物線減少一常數項。而爲三次切觸。前條吻合圓。更減少一個常數項。而爲二次切觸。

第九章 平面曲線各論

1. 曲線之追跡及其方法。

表平面曲線之方程式。而畫於平面上。是謂曲線之追跡(*Tracing of curve*)。

追跡普通之方法。爲對應一個坐標種種之値。以求他坐標之値。在關於坐標軸。而標記曲線上之數個點。

例如$y^2=x^2(x-1)$。

與x以0, 1, 2, 3, ...。則可得其相對應之y之值。

從此此曲線不難察知其大體。

雖然。此特察知其大體而止耳。至如點1|0之近傍。須有一段之精細事。不僅此也。

曲線方程式。關於任何兩坐標。在三次或三次以上之高次方程式。解法繁煩。反覆不便。茲據至簡至便之方法。確立追跡之順序如次。

2. 於直角坐標式之曲線追跡。

(1) 先當變方程式之形。以便於追跡。

(2) 於此形而研究曲線。當依次之順序。

(i) 坐標軸,原點,或何等之直線。關於點。檢查其有無對稱(*Symmetry*)。

(ii) 求坐標軸或他特殊直線上之截點。

(iii) 決定曲線存在之區域。

(iv) 求漸近線。且決定此與曲線之關係。

(v) 求奇點。且決定於其近旁之曲線之形。

(3) 次求$\dfrac{dy}{dx}$之後。當為次之研究。

(vi) 求極大極小之點。

(vii) 定曲線之增減。

(4) 最後求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。當為次之研究。

(viii) 求彎曲點。

(ix) 定曲線之凸凹。

(x) 求曲度。

其他於某區域計算方程式之一二點。是爲必要。

又 以上綱目中。不見特段之必要。

〔例〕 1. 求 $y^2=\dfrac{x(x-a)(x-2a)}{x+3a}$ 之追跡。但 $a>0$。

(解) 儘其形便於追跡。

(i) 此曲線關於 x 軸對稱。

何則。對於 x 之一值。可得 y 之二值。其絕對值相等。而符號相反。

(ii) x 爲 $0, a, 2a$。則 y 爲 0。

(iii) 以 $x<-3a$ 之間。則 $y^2>0$。而曲線得以存在。

以 $-3a<x<0$ 之間。則 $y^2<0$。而曲線不能存在。

$0<x<a$ 之間。則 $y^2>0$。而曲線存在。

$a<x<3a$ 之間。則 $y^2<0$。而曲線再不存在。

$2a<x$ 之間。則曲線存在。

(iv) $x+3a=0$。則 $y=\infty$ 爲平行於 y 軸之漸近線，

而 (iii) 與 (i) 之曲線在其左側。

又由原方程式 (參照第八章第6節)。

得 $$y^2(x+3a)-x(x-a)(x-2a)=0.$$

其最高次項爲 y^2x-x^3。故

從 $$\alpha^2-1=0. \quad 得 \quad \alpha=\pm1.$$

又二次項爲 $3ay^2+3ax^2$。故

從 $$\beta=-\frac{3a(1+\alpha^2)}{2\alpha}=-\frac{6a}{\pm2}=\mp3a.$$

得次之二個漸近線。

$$y=x-3a, \quad y=-x+3a.$$

而求此二漸近線與曲線之交點。

則從 $(x-3a)^2=\dfrac{x(x-a)(x-2a)}{x+3a}$. 僅得 $x=\dfrac{27}{11}a$.

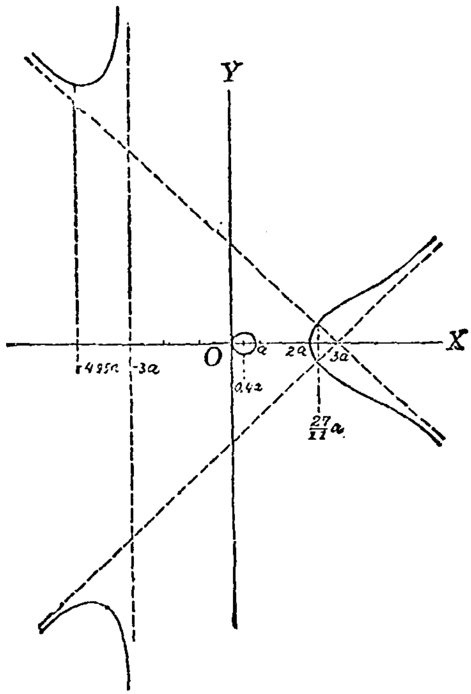
(v) 此曲線爲奇點。何則,

令 $F=y^2-\dfrac{x(x-a)(x-2a)}{x+3a}$.

則 $\dfrac{\delta F}{\delta y}=2y=0$。而 $\dfrac{\delta F}{\delta x}$ 不爲零故也。

(vi) $2\log y=\log x+\log(x-a)+\log(x-2a)-\log(x+3a)$.

$$\frac{2}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-2a}-\frac{1}{x+3a}.$$



然則關於x軸之枝線。爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+3ax^2-9a^2x+3a^3}{\sqrt{x(x-a)(x-2a)(x+3a)(x+3a)}}.$$

從 $\frac{dy}{dx}=0$。則 $x=-4.95a$, $x=0.4a$ 爲極大或極小之點。

(vii) $x<-4.95a$ 之間。則 $\frac{dy}{dx}<0$。從而 y 因 x 之增。而反減小。

$-4.95a<x<-3a$ 之間。則 $\frac{dy}{dx}>0$。從而 y 增大.

$0<x<0.4a$ 之間。則 $\frac{dy}{dx}>0$。

$0.4a<x<a$ 之間。則 $\frac{dy}{dx}<0$。

$2a<x$ 之間。則 $\frac{dy}{dx}>0$。

依此得曲線之形。如圖所示。

〔例〕 2. 試求 $x^4-xy^2+y^3=0$ 之追跡。

令 $y=xt$。則曲線之方程式如次。

$$x=t^2(1-t),\quad y=t^3(1-t).$$

(i) 此曲線無對稱軸。

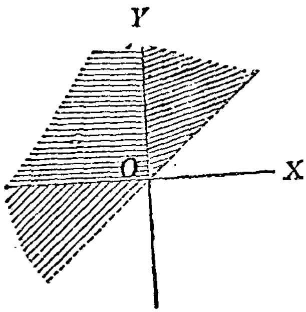
(ii) 此曲線過原點。其他不交於軸。

(iii) $0<t<1$ 之間。x,y 共爲正。

令 $t<1$。則 x,y 共爲負。

又 $t<0$ 之間。則 x 爲正。而 y 爲負。

然以 $t=\frac{y}{x}$。則除曲線不存在之區域外如次。



(iv) 此曲線無漸近線。

(v) $\frac{\delta}{\delta x}(x^4-xy^2+y^3)=4x^3-y^2=0.$

$\frac{\delta}{\delta y}(x^4-xy^2+y^3)=3y^2-2xy=0$

是僅原點爲奇點。而於原點之切線方程式爲$y^3-xy^2=0$。

卽 $y=0$ 及 $x=y.$

(vi) $\frac{dx}{dt}=2t-3t^2,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=2-6t.$

$\frac{dy}{dt}=3t^2-4t^3,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=6t-12t^2.$

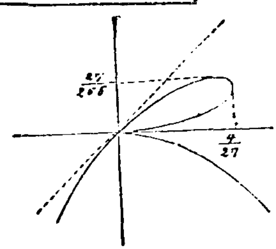
故x於$t=0$爲極小。$t=\frac{2}{3}$爲極大、

而y於$t=\frac{3}{4}$爲極大

(vii) t如看做爲自變數。則其相對應如次。

t	$-\infty$	-1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$+\infty$
x	$+\infty$	2	0	$\frac{4}{27}$	$\frac{9}{64}$	0	$-\infty$
y	$-\infty$	-2	0	$\frac{8}{81}$	$\frac{27}{256}$	0	$-\infty$

從上表。得如圖所示之曲線形。



(注意) 觀本例。取$x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$之形。則變其t。而得曲線之追跡。如是之曲線。謂之單軌曲線(*Unicursal curve*)。

3. 關於極坐標式之曲線之追跡。

(1) 先當變方程式爲便於追跡之形。

(2) 於此形當如次之研究。

(i) 原線之極或何等直線。關於點而檢查其有無對稱。

(ii) 定曲線存在之區域。

(3) 次求 $\dfrac{dr}{d\vartheta}$ 之後。當爲次之研究。

(iii) 求漸近線(或漸近圓)。且定與曲線位置之關係，

(iv) 求切線與動徑所成之 θ 角。

(4) 最後求 $\dfrac{d^2r}{d\vartheta^2}$ 當爲次之研究。

(v) 求彎曲點。

(vi) 求曲度。

其他所必要者。爲求對應於 r 或 ϑ 之特殊値之 ϑ 或 r 之値。而摘記曲線上之若干點。

〔例〕 1. 試求 $r=a\sec\dfrac{\vartheta}{3}$ $(a>0)$ 之追跡。

〔解〕 (i) ϑ 之絕對値相等。而符號相反。則 r 之値亦相等。故原線爲此曲線之對稱軸。

(ii) 對於 ϑ 之任何値亦有 r。但 $|r|\geqq a$。而 $0\leqq\dfrac{\vartheta}{3}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ 之間。則 r 爲正。與 ϑ 共爲增大，$\dfrac{\pi}{2}\leqq\dfrac{\vartheta}{3}\leqq\pi$ 之間。則 r 爲負。而其絕對値與 ϑ 共減小。

(iii) $\dfrac{\vartheta}{3}=\dfrac{\pi}{2}$. 則 $r=\infty$.

而以 $r'=\frac{a}{3}\sin\frac{\phi}{3}\sec^2\frac{\phi}{3}$.

則 極切線影$=\frac{r^2}{r'}=3a\csc\frac{\phi}{3}$.

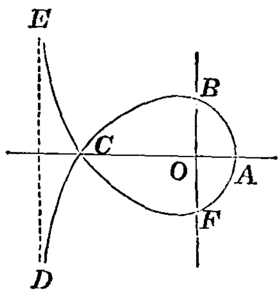
故從 $\frac{\phi}{3}=\frac{\pi}{2}$。則極切線影$=3a$。由是得漸近線。

(iv) 令切線與動徑所成之角爲θ。

則 $\tan\theta=\frac{r}{r'}=3\cot\frac{\phi}{3}$.

故

ϕ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\tan\theta$	∞	$3\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$



更摘記次之特殊之點。則曲線之追跡。如圖所示。

ϕ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
r	a	$\frac{2a}{\sqrt{3}}$	$2a$	∞	$-2a$	$-\frac{2a}{\sqrt{3}}$	$-a$
點	A	B	C	D, E	C	F	A

〔例〕 2. 試求$r=a\sin n\phi$ $(a>0)$之追跡.

〔解〕 (i) r與ϕ同時有反對之符號。亦可滿足此方程式.而過原點垂於原線之直線。爲此曲線之對稱軸。

(ii) 對於ϕ之任何值。而常有r。但$|r|\leqq a$。

(iii) $r'=an\cos n\phi,\quad r''=-an^2\sin n\phi.$

而 $n\phi=\dfrac{\pi}{2}$. 即 $\phi=\dfrac{\pi}{2n}$.

∴ $r'=0,\quad r''<0.$ r爲極大。

又$\phi=\dfrac{3\pi}{2n}$則極小。$\phi=\dfrac{5\pi}{2n}$則極大。以下準此。

(iv) 切線與動徑所成之角爲θ。則

$$\tan\theta=\frac{r}{r'}=\frac{1}{n}\tan n\phi.$$

從此 $n\phi=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots$ 爲 0.

$n\phi=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2},\ \dfrac{5\pi}{2},\ \ldots$ 爲 $\dfrac{\pi}{2}$.

(v) 彎曲點。由第八章第8節。

$$r^2+2r'^2-rr''=a^2(\sin n\phi)^2+(1+a^2n^2)(\cos n\phi)^2<0.$$

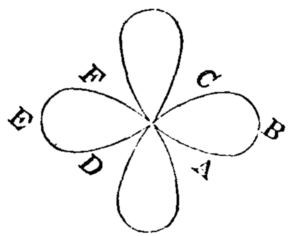
由是彎曲點絕對不存在。

今綜合此等。列表如次。

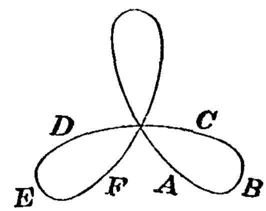
ϕ	0	$\frac{\pi}{4n}$	$\frac{\pi}{2n}$	$\frac{3\pi}{4n}$	$\frac{\pi}{n}$	$\frac{5\pi}{4n}$	$\frac{3\pi}{2n}$	$\frac{7\pi}{4n}$	$\frac{2\pi}{n}$	…
r	0	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	a	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{a}{\sqrt{2}}$	$-a$	$-\frac{a}{\sqrt{2}}$	0	…
θ	0	$\frac{1}{n}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{1}{n}$	0	$\frac{1}{n}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{1}{n}$	0	…
點		A	B (極大)	C		D	E (極小)	F		

次圖乃表示n爲2, 3, 4及$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$最淺近之追跡。

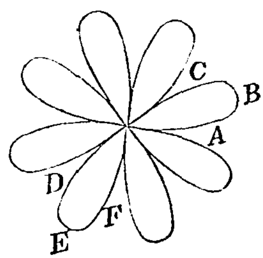
$n=2$



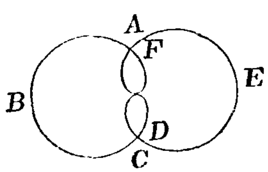
$n=3$



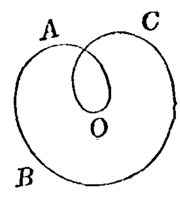
$n=4$



$n=\frac{1}{2}$



$n=\frac{1}{3}$



4. 蔓葉形線 (*Cissoid of Diocles*)。

$$y^2(2a-x)=x^3. \quad (a>0).$$

從此方程式。令變爲

$$y^2=\frac{x^3}{2a-x}.$$

則

(i) 關於x軸對稱。

(ii) 過原點。

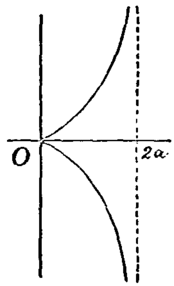
(iii) 於$0\leqq x\leqq 2a$之間曲線存在。

(iv) $x=2a$爲漸近線。

(v) 以原點爲尖點。而$y=0$。則爲此點之切線。

(vi) 於$y=x\sqrt{\dfrac{x}{2a-x}}$之枝線。其$\dfrac{dy}{dx}$常爲正。故此枝線增大。

又$\dfrac{d^2y}{dx^2}$亦爲正。正向上凹。



此曲線在紀元前二世紀之頃。數學家的奥靑盧氏(*Diocles*)所發明。故冠以氏名。當時因欲解「二倍立方體之問題」而發見之。

5. 葉形線(*Folium of Descartes*)。

$$y^3-3axy+x^3=0.$$

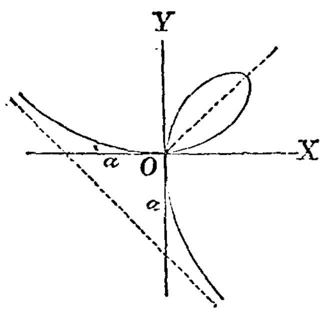
此曲線過原點。且於原點爲奇點。而於原點之切線爲$xy=0$。

從此　　$x=0,\quad y=0.$

故原點爲結節點。

依第八章第6節。得漸近線。爲

$$y+x+a=0.$$



命 $y=xt$。則此曲線爲

$$x=\frac{3at}{t^3+1},\quad y=\frac{3at^2}{t^3+1}.$$

是謂單軌曲線。

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x	0	$+$	∞	$-$	0	$+$	$\frac{3a}{2}$	$+$	0
y	0	$-$	∞	$+$	0	$+$	$\frac{3a}{2}$	$+$	0

此曲線。稱提羅伯法曲線 (*de Roberval*)。

十七世紀之曲線研究家,多少誤作此曲線,至代加德(*Des Cartes*)始獨立作成之。

其他有名之三次曲線。如

馬格老臨之三等分用線 (*Trisectrix*)。

$$x(x^2+y^2)=\frac{a}{2}(y^2-3x^2).$$

結繩形線 (*Strophoid*)。

$$x(x^2+y^2)=a(x^2-y^2).$$

此任何亦酷似上記之葉形線。

又如阿格尼西 (*Witch of Agnesi*) 之曲線。(十八世紀之伊大利人)。

$$y^2x+a^2(x-2a)=0.$$

此曲線有一漸近線。又有一彎曲點。

(注意) 三等分用線。可適用分角爲三等分之問題,故名。

6 蚌殼形線 (*Conchoid of Nicomedes*)。

$$(x^2+y^2)(a-x)^2=b^2x^2.$$

試變此為極坐標式。則

$$r=\frac{a}{\cos\theta}\pm b.$$

由是得次之性質。

(i) 關於原線對稱。

(ii) 以 $r\cos\theta=a\pm b\cos\theta$。而 $r\cos\theta$ 在 $a-b$ 與 $a+b$ 之間。

(iii) $\theta=\frac{\pi}{2}$, $r=\infty$。而以

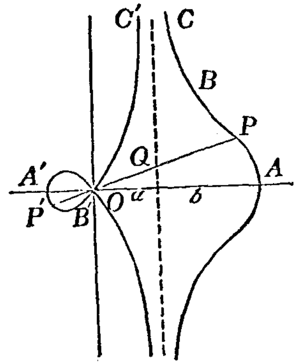
$$r'=\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}.$$

$$\text{極切線影}=\frac{r^2}{r'}=\left(\frac{a}{\cos\theta}\pm b\right)^2\frac{\cos^2\theta}{a\sin\theta}=\frac{(a\pm b\cos\theta)^2}{a\sin\theta}.$$

故 $\theta=\frac{\pi}{2}$。則極切線影 $=a$。

由是得漸近線。

(iv) 依直角坐標式。則原點為奇點。而 $(b^2-a^2)x^2-a^2y^2=0$ 為原點之切線。



故 $b>a$ 則如圖上之結節點。$b<a$ 則原點為尖點。$b=a$ 則原點為孤立點。

今與 θ 以特殊之值。則

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
r	$a\pm b$	$\sqrt{2}a\pm b$	∞
點	A, A'	B, B'	C, C'

(注意) 此曲線係尼哥墨德(*Nicomedes*)亦使用以解二倍立方體之問題。(尼哥墨德係的奥肯盧以前之人)。

依其形狀而冠以氏名。故如斯命名。尼哥墨德所作曲線之性質。爲過原點之任意直線。交此曲線於P, P'。交此漸近線於Q。則

$$QP=QP'=b.$$

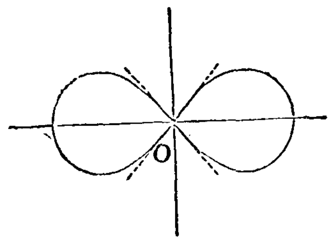
此證明甚容易。

7. 雙紐形線(*Lemniscate*)。

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

試變此爲極坐標式。則

$$r^2=2a^2\cos 2\theta.$$



從此求其追跡。即得如圖所示。

此曲線之曲度半徑爲$\frac{2a^2}{3r}$

(注意) 從相距$2a$之二個定點之距離r_1, r_2,求其積爲一定之點之軌跡。則

$$r_1r_2=b^2.$$

從直角坐標式得

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=b^4-a^4$$

此曲線名可西利氏之卵形線(*Cassini's Oval*)。二個定點。曰其焦點。特於$a=b$則得上記之雙紐線。

前記之雙紐形線。一稱白奴利之雙紐形線(*Lemniscate of Bernoulli*)。

與此酷似者。爲

$$y^4=y^2-x^2.$$

即哥魯氏之雙紐形線(*Gerono's Lemniscate*)。

8. 心臟形線 (*Cardioid*)。

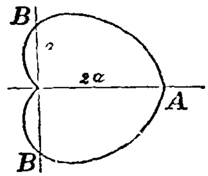
$$(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2).$$

試變此爲極坐標式。則

$$r=a(1+\cos\vartheta).$$

(i) 關於原線對稱。

(ii) 從ϑ之一周。而r由$2a$經過a。而至減少爲0。又由0經過a。而歸於$2a$。



(iii) 視直角坐標式。則原點爲尖點。而於此點之切線爲$y=0$。

(iv) 曲度半徑爲$\frac{2}{3}\sqrt{2ar}$.

(注意) 依二個定圓之距離之比。其一定之點之軌跡。爲二個中心之距離r_1, r_2。有次之形狀。

$$\frac{r_1}{p}+\frac{r_2}{q}=1.$$

此以直角坐標式表之。則得四次曲線。如

$$(x^2+y^2-a^2)^2+b(x-d)=0.$$

又變此爲一個圓之中心爲極之極坐標式。如

$$r^2-(a+b\cos\vartheta)r+e^2=0.$$

此曲線。稱卡的遜之卵形。(*Cartesius' Oval* 十七世紀之人)。

此卵形之格外。令$e=0$。則

$$r=a+b\cos\vartheta.$$

試變此爲直角坐標式。則

$$(x^2+y^2-bx)^2=a^2(x^2+y^2).$$

此曲線。名巴斯恰爾(*Pascal*)之蚌殼形線。又名蝸牛形線(*Limaçon*, 法語卽蝸牛之意。故譯蝸牛形線)。心臟形線。實其例外。唯變更爲$a=b$得之耳。

9. 蝸牛形線 (*Limaçon*)。

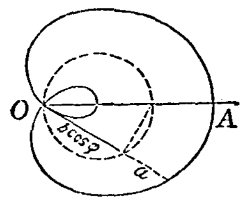
其方程式爲

$$(x^2+y^2-bx)^2=a^2(x^2+y^2).$$

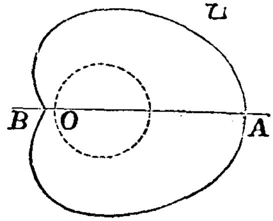
又 $r=a+b\cos\vartheta$

$a=b$。則其追跡已見前節。玆不贅。而$a>b$。則其追跡如甲圖。$a<b$。則其追跡如乙圖。

甲



乙



(注意) 圓錐曲線。以其一焦點爲原點。則表其極坐標式之形。爲

$$\frac{1}{\rho}=a+b\cos\vartheta.$$

而$\frac{a}{b}$爲其偏心率。

曲線對於ϑ。其動徑的關係爲

$$r\rho=c\ (\text{常數}).$$

是$r=f(\vartheta)$，與$\rho=F(\vartheta)$。交互爲逆(*Inverse*)。

然則甲圖之曲線。爲偏心率比1大之圓錐曲線。卽雙曲線之逆也。

乙圖之曲線。爲偏心率比1小之圓錐曲線。卽橢圓之逆也。

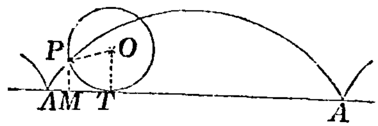
而心臟形線。實爲抛物線之逆。

(注意) 前述數種之四次曲線。除尼哥墨德蚌殼形線外。任何亦爲首尾連續之曲線。如二次曲線之圓及橢圓。此等雙紐形線，心臟形線等。均爲連續一個曲線而成。總稱之曰閉合曲線(*Closed Curve*)。

10. 擺線 (*Cycloid*)。

一圓切於一直線上不滑而回轉時。其周上一定點之軌跡稱擺線。

今令此直線爲直角坐標式之 x 軸。圓周上之定點恰恰在此直線之切點之位置 A。令爲原點。於任意之位置取一點 $P(x|y)$。由圖之記號得



$$P\hat{O}T=\theta,\quad \text{圓之半徑}=a.$$

則 $$x=AM=AT-MT=\widehat{PT}-MT=a\theta-a\sin\theta,$$

$$y=PM=OT-OP\cos\theta=a-a\cos\theta.$$

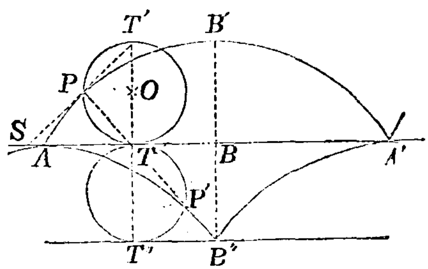
故擺線之方程式。由單一自變數 θ 之助。則如次。

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta), \\ y=a(1-\cos\theta). \end{cases}$$

次考究此曲線之性質。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}=\cot\frac{\theta}{2}.$$

令過切點 T 之直徑爲 TT'。則 $T\hat{T'}P=\frac{\theta}{2}$。而於 P 之擺線之切線過 T'。從而 TP 爲擺線之法線。



次求擺線之曲率半徑 ρ。則

$$\rho=\frac{\{dx^2+dy^2\}^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}=\frac{a^3\{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\}^{\frac{3}{2}}(d\theta)^3}{a^2\{(1-\cos\theta)\cos\theta-\sin^2\theta\}(d\theta)^3}$$

$$=-4a\sin\frac{\theta}{2}.$$

ρ之負止示曲線的下凹。今暫勿論。則

$$|\rho|=2\times 2a\sin\frac{\theta}{2}=2PT=PP'.$$

今作圓、令以TP'爲弦。切於AA'之點爲T。則得等於圓O之圓。

而 $\qquad \widehat{TP'}=\widehat{TP}=AT.$

$\qquad$ 半圓周$=AB=AT+TB=AT+T''B''.$

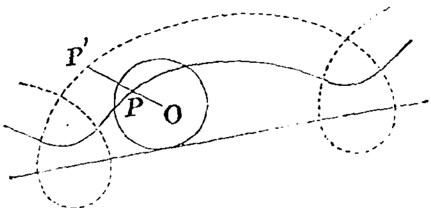
故 $\qquad \widehat{T''P'}=T''B''.$

然則曲度之中心P'之軌跡、亦等於原曲線之擺線即

<u>擺線之縮閉線等於此之擺線</u>。

11. 餘擺線 (*Trochoid*)。

有圓切於直線不滑而回轉。則其一個半徑或其延長線上之點(不在圓周上)之軌跡。稱<u>餘擺線</u>。



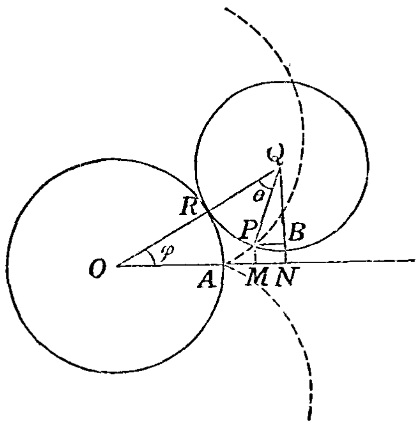
餘擺線之方程式、自擺線之方程式容易導出。即如次、

$$\begin{cases} x=a\theta-k\sin\theta, \\ y=a-k\cos\theta. \end{cases} \qquad (k\text{爲}OP\text{或}OP'\text{之長}).$$

圓內之點P追跡之曲線。名<u>扁餘擺線</u>(*Prolate Trochoid*)、圓外之點P'之軌跡名<u>長餘擺線</u>(*Oblate Trochoid*)。

12. 圓外擺線 (*Epicycloid*) 及圓內擺線 (*Hypocycloid*)。

一圓外切於他之定圓。不滑而回轉，則回轉圓周上一定點之軌跡。曰圓外擺線。又內切而回轉之軌跡。曰圓內擺線。



今定圓爲 O。外切於此之圓。於其周上之定點。與此相切之點之位置爲 A。從此回轉 θ 度之圓。其中心之位置爲 θ。定點之位置爲 P。切點爲 R。則於圖。

$$x = OM$$
$$= ON - MN.$$
$$y = PM$$
$$= QN - QB.$$

令 $OA = a,\quad QP = b.$

$P\hat{Q}R = \theta,\quad A\hat{O}R = \varphi.$

則從 $\widehat{AR} = \widehat{PR}.$ 得 $a\varphi = b\theta.$

以 $P\hat{Q}S = \frac{\pi}{2} - \varphi - \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi - \frac{a}{b}\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{a+b}{b}\varphi.$

而 $ON = (a+b)\cos\varphi,\quad QN = (a+b)\sin\varphi.$

$MN = b\cos\frac{a+b}{b}\varphi,\quad QB = b\sin\frac{a+b}{b}\varphi.$

故

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos\varphi - b\cos\frac{a+b}{b}\varphi. \\ y = (a+b)\sin\varphi - b\sin\frac{a+b}{b}\varphi. \end{cases}$$

是即所求圓外擺線之方程式。

圓內擺線之方程式。與前同樣求之。所得如次。

$$\begin{cases} x=(a-b)\cos\phi+b\cos\dfrac{a-b}{b}\phi, \\ y=(a-b)\sin\phi-b\sin\dfrac{a-b}{b}\phi. \end{cases}$$

依 a, b 之關係。此兩曲線之形。發生次之區別。

(i) $a=nb$（n 爲正整數）。

回轉之圓繞定圓一周。定點再合於 A。二周、三周，…其曲線之軌跡。均與前同。（次頁之圖。乃表 $n=6$ 之軌跡也）。

特 $a=2b$。則圓內擺線通過直徑。

又 $a=4b$。則圓內擺線之方程式爲

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

此名星形線（*Asteroid*）。

實則爲橢圓之縮閉線也。

(ii) $a:b=m:n$（m、n 爲正整數）。

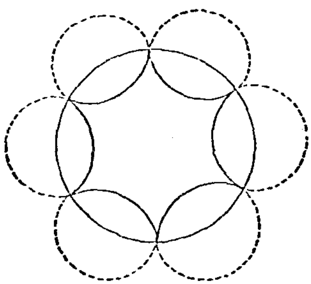
m 回轉之後。同於曲線之追跡。

(iii) a, b 有不可通約之比。

此雖得幾次回轉。決不能得相合之軌跡。即可多得相異同形之弧。

（注意一） 擺線，圓外擺線，圓內擺線。其定點相切之點常爲尖點，從而圖所示 $a=6b$。有六個尖點。故或呼此爲

六尖點圓外擺線。六尖點圓內擺線等。



(注意二) 擺線,餘擺線,圓外擺線.圓內擺線等。一般曲線 $y=f(x)$。切於他之曲線 $y=\phi(x)$。而且回轉最爲簡易.

此一般稱爲轉距軌跡 (*Roulette*)。

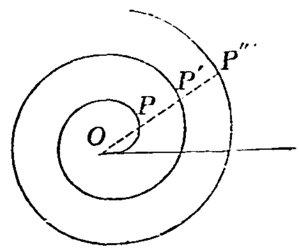
13. 亞奇默德氏之螺線(*Spiral of Archimedes*)。

其極方程式爲

$$r=a\phi.$$

所表之曲線.乃超越曲線之一種。

是名亞奇默德 (*Archimedes*) 或可魯 (*Conon*) 之螺殼形線。又略稱螺線。



此曲線之性質如次。

(i) 依 ϕ 之正負。而關於原線之垂直線。有對稱二部分成立各有無限枝。迴轉原點如螺殼形。且無限回轉。

(ii) 極法線影常爲一定.而等於 a。

(iii) 與過原點之直線之交點.順次命爲 $P, P', P'', \ldots$。則

$$PP'=P'P''=\ldots=2\pi a.$$

(注意) 與亞奇默德之螺線相對照,如

$$r=\frac{a}{\phi}.$$

是名逆螺線 (*Reciprocal spiral*)。又稱雙曲線的螺線 (*Hyperbolic spiral*)。

此曲線之特色.爲極切線影等於常數 $-a$。且有平行於原線之漸近線。

14. 對數螺線 (*Logarithmic spiral*)。

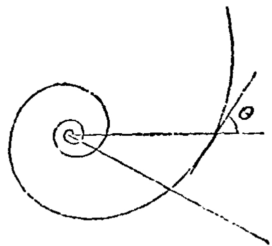
$$r=e^{a\phi}.$$

此極方程式所表之曲線爲<u>對數曲線</u>。

(i) 動徑與其一端之點之切線所成之角命爲θ，則

$$\tan\theta=\frac{r}{\frac{dr}{d\phi}} \qquad \text{(第八章第8節)}$$

$$=\frac{e^{a\phi}}{ae^{a\phi}}=\frac{1}{a}.$$



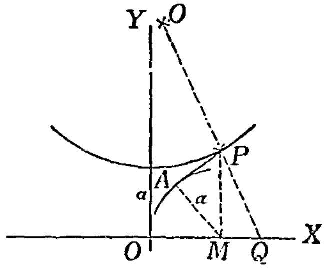
故對數螺線之切線。與於其切點之動徑成一定之角，而等於$\frac{1}{a}$。因此名對數螺線。又稱<u>等角螺線</u>(*Equiangular spiral*)。

(ii) 以$\lim\limits_{\phi=-\infty} r=0$，而原點爲此曲線之漸近點(漸近圓之圓的點)。

(注意) 研究對數螺線之主要人物，爲亞可白奴利(*Jacob Bernoulli*)。氏遺言刻此曲線中有興味諸性質。於己之墓碑。古昔亞奇默德被虐殺後。羅馬人爲之建壯麗之塔，以爲紀念，刻其所研究圓柱內切圓球之圖於塔。亞可氏之遺言。蓋私淑亞奇默德也。

15. 垂絲線 (*Catenary*)。

由各部一樣之物質製成有重之絲如鏈，針金，支其二點作曲線，是名垂絲線。



依其方程。求積分法如次。

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

即 $x=0,\quad y=OA=a.$

此 x 軸稱為垂絲線之軸。而垂絲線凸於 x 軸之方。

試求垂絲線之曲度半徑 OP。則

$$OP=\rho=\frac{\left\{1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)}$$

$$=\frac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2.$$

又 其法線方程式為

$$\eta-y=-\frac{1}{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)}(\xi-x).$$

命 $\eta=0$。則

$$\xi=OQ=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)y+x.$$

從此引 $OM=x$。則

$$MQ=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)y.$$

從此求 PQ 之絕對值。則

$$PQ=\sqrt{\overline{PM}^2+\overline{MQ}^2}$$

$$=\sqrt{y^2+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2y^2}$$

$$=\frac{y}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

$$=\frac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2.$$

故垂絲線.其曲度半徑OP。常等於法線的曲線與x軸截取之部分PQ。

次求於P之切線方程式。爲

$$\eta-y=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)(\xi-x).$$

試求此切線與點$M(x,0)$之距離MR.則

$$MR=\frac{y}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}}$$

$$=\frac{\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)}{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)}$$

$$=a.$$

故於曲線上之P之切線。與於P之縱軸之足M爲中心a爲半徑之圓相切.

(注意) 拋物線於直線上。不滑而回轉。則其焦點之轉距軌跡爲垂絲線.

16. 等切曲線 (*Tractrix*)。

一定直線之上。從其一點之切線之長。常爲一定.而等於a。如此之曲線爲

$$x=a\log\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}.$$

此名等切曲線.

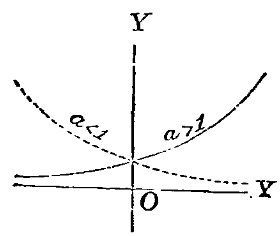
實則為

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}.$$

(注意) 拋物線在一直線上不滑而回轉則其軸之包絡線可作得此曲線。

17. 對數曲線 (*Logarithmic Curve*)。

$$y=a^x \quad (a>0).$$



此曲線對於x之一切值y常在$(0, +\infty)$區域內變化。

$$\frac{dy}{dx}=\log a.a^x.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(\log a)^2.a^x.$$

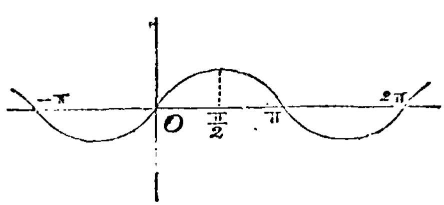
$a>1$則曲線常增大且下凸。

又$a<1$則曲線常減小且下凸。

要之任何x軸為y收斂為0之側之漸近線。

18. 正弦曲線 (*Sine Curve*)。

$$y=\sin x.$$



原點爲起點。於$x=n\pi$ (n爲正或負之整數) 之點。截取x軸。

又
$$\frac{dy}{dx}=\cos x.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\cos x.$$

於$x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$之點爲極大或極小，而$x=n\pi$之點爲彎曲點。

於$2n\pi\leqq x\leqq(2n+1)\pi$之間此曲線下凹

於$(2n-1)\pi\leqq x\leqq 2n\pi$之間。此曲線上凹。

微積分學講義

下卷　積分學

前篇　本論

第一章　積分學之基礎

1. 不定積分。

積分學中所欲研究之基本問題。在已知函數$\varphi(x)$。求此函數究爲如何函數之導來函數。此問題爲微分法之逆。

即微分法者。由函數$f(x)$求得其導來函數$f'(x)$之方法。

而上列問題。乃由$\varphi(x)=f'(x)$。而欲求其$f(x)$者也。

今試以$f(x)$表所求之函數。則

$$\frac{d}{dc}f(x)=\varphi(x).$$

$$\therefore \qquad df(x)=\varphi(x)\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

由$\varphi(x)dx$即$df(x)$求得$f(x)$之方法。謂之積分法(*Integration*)。而所求之$f(x)$謂爲微分$\varphi(x)dx$之積分(*Integral*)。

表積分之符號如次。

$$f(x)=\int\varphi(x)\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(注意) 上列問題決非積分之全般。而建設此問題以外之積分。俟後章述之

$\int$ 之記號。乃 S 之變形。用 *Sum* (和) 之第一字母。至用和字之理由。視次節定積分自明。

$\int$「積分」又可讀爲 (*Integral*)。

2. 積分常數。

已知函數 $\varphi(x)$。假使 $\varphi(x)\,dx$ 之積分存在。則除其常數項之差異。唯限於一種。

〔證〕 $\varphi(x)\,dx$ 之積分假定有兩種 如 $f(x)$ 及 $f_1(x)$。則

$$f(x)=\int\varphi(x)\,dx.$$

$$f_1(x)=\int\varphi(x)\,dx.$$

今命 $\quad F(x)=f_1(x)-f(x).$

則 $\quad dF(x)=df_1(x)-df(x)$

$\quad\quad =\varphi(x)-\varphi(x) \qquad$ [見前節 (1)]

$\quad\quad =0.$

$\therefore \quad F(x)=C. \qquad$ [C 爲常數]

$\therefore \quad f_1(x)-f(x)=C.$

即 $\quad f_1(x)=f(x)+C.$

此常數項 C。謂爲積分常數 (*Integration-constant*)。

以函數 $\varphi(x)$ 爲導來函數之原函數。即 $\varphi(x)\,dx$ 之積分。均宜視爲此有不定之常數項 C。

因之第一節之積分。謂爲不定積分 (*Indefinite integral*)。

3. 基本之積分公式。

積分乃微分之逆。故由微分得基本之積分公式如次。但各公式均應加積分常數C。

(I) $\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$. (但 $m \neq -1$)

(II) $\int \frac{dx}{x} = \log x$.

(III) $\int e^x dx = e^x$.

(IV) $\int \cos x\, dx = \sin x$.

$\int \sin x\, dx = -\cos x$.

(V) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$.

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$.

(VI) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x = -\cos^{-1} x$.

(VII) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x = -\cot^{-2} x$.

(注意) 上所記之七種公式。爲積分學研究之順序。最爲緊要。宜記憶之。

4. 基本法則。

(I) a爲常數。則

$$\int a\phi(x)\,dx = a\int \phi(x)\,dx.$$

〔證〕 令 $f(x) = \int \phi(x)\,dx$. 則

$df(x) = \phi(x)\,dx$.

故 $$d\{af(x)\}=adf(x)=a\phi(x)\,dx.$$

∴ $$af(x)=\int a\phi(x)\,dx=a\int\phi(x)\,dx.$$

(II) 令 $\phi(x),\psi(x)$ 爲二個函數。則

$$\int\{\phi(x)\pm\psi(x)\}dx=\int\phi(x)\,dx\pm\int\psi(x)\,dx.$$

〔證〕 令 $f(x)=\int\phi(x)\,dx,\quad g(x)=\int\psi(x)\,dx.$

則 $$df(x)=\phi(x)\,dx,\quad dg(x)=\psi(x)\,dx.$$

故 $$\begin{aligned}d\{f(x)\pm g(x)\}&=df(x)\pm dg(x)\\&=\phi(x)\,dx\pm\psi(x)\,dx\\&=\{\phi(x)\pm\psi(x)\}dx.\end{aligned}$$

∴ $$f(x)\pm g(x)=\int\{\phi(x)\pm\psi(x)\}dx.$$

然 $$f(x)\pm g(x)=\int\phi(x)\,dx\pm\int\psi(x)\,dx.$$

故二個函數之和或差之積分。等於各積分之和或差。

〔例〕 1. $\int\frac{2}{x}dx=2\int\frac{dx}{x}=2\log x.$

〔例〕 2. $\int\frac{\sin x}{3}dx=\frac{1}{3}\int\sin x\,dx=-\frac{\cos x}{3}.$

〔例〕 3. $$\begin{aligned}\int(ax^2+bx+c)\,dx&=\int ax^2dx+\int(bx+c)\,dx\\&=a\int x^2dx+\int bx\,dx+\int c\,dx\\&=a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx\\&=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx.\end{aligned}$$

(注意) $\int dx=x$ 因積分爲微分之逆故也。以上三例及以下二例。省略積分常數。

〔例〕 4. $\int\left(4e^x-\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$$=4\int e^x dx-3\int x^{-\frac{1}{2}}dx+2\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=4e^x-3\times\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+2\sin^{-1}x$$

$$=4e^x-6\sqrt{x}+2\sin^{-1}x.$$

〔例〕 5. $\int\left(\frac{x^3}{3}+x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{1+x^2}\right)dx.$

(答) $\frac{x^4}{12}+\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+2\tan^{-1}x.$

5. 變換積分法。

積分 $\int \phi(x)dx$ 儘其原形。不適合上所述之基本公式及法則。則變換變數 x 爲新變數 t 以適合之。是謂變換積分法(*Integration by substitution*)。

卽令 $x=\psi(t).$

則 $dx=\psi'(t)dt.$

從而得

$$\int\phi(x)dx=\int\phi\{\psi(t)\}\psi'(t)dt$$
$$=\Phi(t).$$

再變換 t 爲 x。則得

$$\int\phi(x)dx=f(x).$$

〔例〕 1. $\int (a+bx)^n dx.$

(解) 令 $a+bx=t$. 則

$$bdx=dt. \quad \therefore \quad dx=\frac{1}{b}dt.$$

$$\therefore \qquad \int (a+bx)^n dx=\frac{1}{b}\int t^n dt=\frac{t^{n+1}}{b(n+1)}=\frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b}.$$

〔例〕 2. $\int \frac{dx}{a+bx}.$

(答) $\frac{1}{b}\log(a+bx).$

〔例〕 3. $\int e^{ax}dx.$

(解) 令 $ax=t$. 則

$$adx=dt. \quad \therefore \quad dx=\frac{1}{a}dt.$$

$$\therefore \qquad \int e^{ax}dx=\frac{1}{a}\int e^t dt=\frac{1}{a}e^t=\frac{1}{a}e^{ax}.$$

〔例〕 4. $\int a^x dx.$

(解) 令 $a^x=t$ 則 $x\log a=\log t$.

$$\log a\, dx=\frac{dt}{t}.$$

$$\therefore \qquad dx=\frac{1}{\log a}\cdot\frac{dt}{t}.$$

$$\therefore \qquad \int a^x dx=\frac{1}{\log a}\int dt=\frac{t}{\log a}=\frac{1}{\log a}a^x.$$

〔例〕 5. $\int \cos(ax+b)\,dx.$

(答) $\frac{1}{a}\sin(ax+b).$

(例) 6. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$.

(解) 命 $x=at$. 則 $dx=adt$.

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\int \frac{adt}{a^2+a^2t^2}=\frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}t$$

$$=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}.$$

(例) 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

(答) $\sin^{-1}\frac{x}{a}$.

(例) 8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

(解) 命 $a^2-x^2=t$. 則 $-2xdx=dt$.

$$\therefore \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\times 2t^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{a^2-x^2}.$$

(例) 9. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2+bx^2}}$.

(答) $\frac{1}{2b}\log(a^2+bx^2)$.

(例) 10. $\int \tan x\,dx$.

(解) $\int \tan x\,dx=\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x}=\int \frac{-d(\cos x)}{\cos x}=-\log(\cos x)$.

(例) 11. $\int \cot x\,dx$.

(答) $\log(\sin x)$.

（例） 12. $\int \csc x\,dx.$

（解）
$$\int \csc x\,dx=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$
$$=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}}=\int\frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}}$$
$$=\log\left(\tan\frac{x}{2}\right).$$

6. 部分積分法。

令 u, v 爲 x 之函數。則
$$d(u, v)=udv+vdu.$$
$$\therefore\qquad udv=d(u, v)-vdu.$$
$$\therefore\qquad \int udv=uv-\int vdu.$$

又令 $u=\varphi(x)$，$dv=\psi(x)\,dx$。則
$$du=\varphi'(x)\,dx,\quad v=\int\psi(x)\,dx.$$

故前記之公式爲
$$\int\varphi(x)\psi(x)\,dx=\varphi(x)\int\psi(x)\,dx-\int\left\{\varphi'(x)\int\psi(x)\,dx\right\}dx.$$

即積分之函數。若爲二個函數之積分。則適用一部分的積分公式以求之。其例甚衆。

依此公式求積分之法。謂部分積分法 (*Partial integration*)。

〔例〕 1. $\int x\sin x\,dx.$

(解) 令 $x=u$, $\sin x\,dx=dv$. 則

$$dx=du,\quad -\cos x=v.$$

$$\therefore\quad \int x\sin x\,dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx$$

$$=-x\cos x+\sin x.$$

(例) 2. $\int\log x\,dx.$

(解) 令 $\log x=u$, $dx=dv$ 則

$$\frac{dx}{x}=du,\quad x=v.$$

$$\therefore\quad \int\log x\,dx=x\log x-\int dx$$

$$=x\log x-x.$$

(例) 3. $\int x\log x\,dx.$

(解)
$$\int x\log x\,dx=\int\log x\,(x\,dx)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{2}\int x^2 d(\log x)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2.$$

(例) 4. $\int xe^{ax}dx.$

(答) $\frac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax}.$

(例) 5. $\int\sin^{-1}x\,dx.$

(解) $$\int \sin^{-1}x\,dx = x\sin^{-1}x - \int x\,d(\sin^{-1}x)$$

$$= x\sin^{-1}x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}.$$

[參照前節例8]

(例) 6. $\int \tan^{-1}x\,dx.$

(答) $x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log(1+x^2).$

(例) 7. $\int e^{ax}\cos bx\,dx,\quad \int e^{ax}\sin bx\,dx.$

(解) $$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

由是 $$a\int e^{ax}\cos bx\,dx - b\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\cos bx.$$

$$b\int e^{ax}\cos bx\,dx + a\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\sin bx.$$

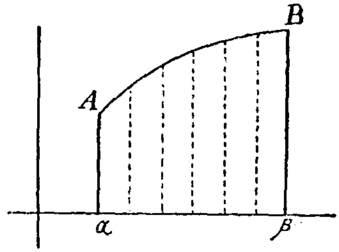
$\therefore$ $$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}.$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}.$$

7. 定積分之意義。

令 α, β 為有限之數。於 (α, β) 區域內。有一價且連續之一初等函數 $y=\varphi(x)$。為簡單說明起見。先僅就 $\varphi(x)$ 於此區域內常為正且增大者考之：

然此函數所表之曲線。約如下圖。但曲線之凹凸及彎曲點之有無。均在論外。



此曲線C與x軸及$x=\alpha$、$x=\beta$兩縱坐標線間所包圍之面積。以S表之。而此S之計算如次。

分$\beta-\alpha$爲n個等分。令每一等分爲Δx。則

$$\frac{\beta-\alpha}{n}=\Delta x.$$

x軸上分點之縱坐標線。其兩端順次令爲

$$\psi(\alpha),\quad \psi(\alpha+\Delta x),\quad \psi(\alpha+2\,\Delta x),\quad \ldots,$$

$$\psi(\alpha+\overline{n-1}\,\Delta x),\quad \psi(\beta).$$

於此處令

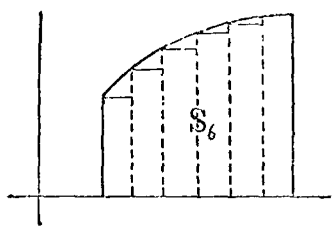
$$S_n=\psi(\alpha)\,\Delta x+\psi(\alpha+\Delta x)\,\Delta x+\ldots+\psi(\alpha+\overline{n-1}\,\Delta x)\,\Delta x$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\psi(\alpha+k\,\Delta x)\,\Delta x.$$

$$S'_n=\psi(\alpha+\Delta x)\,\Delta x+\ldots+\psi(\alpha+\overline{n-1}\,\Delta x)\,\Delta x+\psi(\beta)\,\Delta x$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\psi(\alpha+k\,\Delta x)\,\Delta x.$$

其S_n, S'_n乃表下圖所集合矩形之面積。且

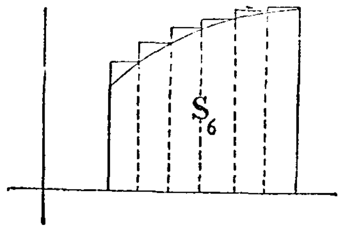


$$S_n<S<S'_n.$$

因

$$S'_n-S_n=\{\psi(\beta)-\psi(\alpha)\}\,\Delta x.$$

此n爲無限大.



而 Δx 收斂爲0時。則 $S'_n - S_n$ 亦收斂爲0。卽

$$\lim_{n=\infty} (S'_n - S_n) = 0.$$

$$\therefore \qquad \lim_{n=\infty} S'_n = \lim_{n=\infty} S_n.$$

由是此極限値亦不可不等於 S。卽

$$\lim_{\Delta x=0} \Sigma\varphi(x+k\,\Delta x)\,\Delta x = S.$$

此表之如次。

$$S = \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx.$$

以上期於簡單。故假定 $\varphi(x)$ 常常增大。今假令 $\varphi(x)$ 爲正，且連續減小。則

$$S_n > S > S'_n.$$

然不過此異耳。其他則全然相同。故可達到同一之結論。從而 $\varphi(x)$ 常爲正。則不論其全域內。增減如何。上所記之結果，均能適合也。

最後 $\varphi(x)$ 於全區域內爲負。如何。則於其 $\{-\varphi(x)\}$ 之函數。亦可適用上記之手續。而

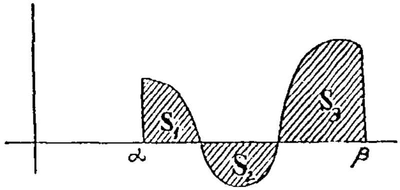
$$\lim \Sigma\{-\varphi(x+k\,\Delta x)\}\,\Delta x = S.$$

卽 $$-\lim \Sigma\varphi(x+k\,\Delta x)\,\Delta x = S.$$

卽 $$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx = -S.$$

然則一般之式，其 $\varphi(x)$ 於 (α, β) 區域內爲正或負。則 $\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$ 表正數部分之面積與負數部分之面積之代數和。例如右圖之曲線。

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx$$
$$=S_1-S_2+S_3.$$



由是得次之定理。

定理 α與β任何亦爲有限值。而$\varphi(x)$於(α,β)區域內。爲一價且連續之函數。則

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\varphi(x+k\,\Delta x)\,\Delta x=\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\,dx=S.$$

$$\left(但\ \Delta x=\frac{\beta-\alpha}{n}\right).$$

S爲$\varphi(x)$之代表。即表曲線與x軸。$x=\alpha$, $x=\beta$兩直線間之面積之代數和。

此$Lim\ \Sigma$之略號之$\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\,dx$。稱爲定積分(*Definite integral*)。α謂其下限(*Lower limit*)。β謂其上限(*Upper limit*)。又區域(α,β)謂其積分之區域。

8. 定積分與不定積分之關係。

先研究定積分$\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\,dx$.

此定積分之上限β。由前述之條件。($\varphi(x)$於(α,β)區域內爲一價且連續)。作在其範圍內變化看。

試以X代其β。則$\int_{\alpha}^{X}\varphi(x)\,dx$對應於$X$之確定值爲有限。且表確定之面積$S$。是亦$X$之函數也。由是命

$$\int_{\alpha}^{X}\varphi(x)\,dx=F(X).$$

此處之x雖爲積分變數。然對於積分上爲不用之變數。而X則爲積分函數之變數。

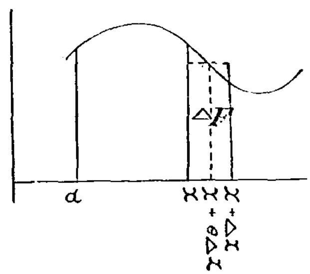
此二種變數x, X之區別。固甚判然。然普通令爲

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx = F(x).$$

從此可知所表示之x有二種。不可混同。須切記之。

此紛易之表法。稍有便宜。觀以下所論。當爲首肯。

求函數$F(x)$之微分係數。



定x爲某值之後。Δx爲$\varphi(x)$。於$(x, x+\Delta x)$區域內。僅增大或僅減小。如令

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\Delta F.$$

則ΔF可表一種面積。而ΔF爲$\Delta x\cdot\varphi(x)$與$\Delta x\cdot\varphi(x+\Delta x)$之間之值。由前述$\Delta x$之限制明甚。從而

$$\Delta F=\Delta x\cdot\varphi(x+\theta\,\Delta x)$$

適合於上式之θ之值。必可存在。

而欲令

$$|F(x+\Delta x)-F(x)|.$$

比任意之正數ϵ更小。則令Δx比$\epsilon\div\varphi(x+\theta\,\Delta x)$更小卽可達得之。故<u>$F(x)$於$\varphi(x)$之一價且連績之區域內。爲一價且連績之函數。</u>

又 $$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\varphi(x+\theta\,\Delta x).$$

於極限爲

$$F'(x)=\varphi(x).$$

即 $$\frac{d}{dx}\int_a^x \varphi(x)\,dx=\varphi(x).$$

(注意) 積分變數x與積分函數之變數X，區別如次。

$$\frac{d}{dX}\int_a^X \varphi(x)\,dx=\varphi(X).$$

次考不定積分。

從 $$\int \varphi(x)\,dx=f(x).$$

依定義。則

$$\varphi(x)=f'(x)$$

是則定積分$F(x)$與不定積分$f(x)$之間有次之關係。

$$F'(x)=f'(x).$$

$\therefore$ $$F'(x)-f'(x)=0.$$

$\therefore$ $$F(x)-f(x)=C. \qquad (C\text{爲常數})$$

$\therefore$ $$F(x)=f(x)+C.$$

即 $$\int_a^x \varphi(x)\,dx=f(x)+C.$$

欲求常數C。則令 $x=a$、

$$\int_a^a \varphi(x)\,dx=0=f(a)+C.$$

$\therefore$ $$C=-f(a).$$

由是 $$\int_a^x \varphi(x)\,dx=f(x)-f(a).$$

或 $$\int_a^\beta \varphi(x)\,dx=f(\beta)-f(\alpha).$$

即 $$\int_a^\beta \varphi(x)\,dx=\left.\int \varphi(x)\,dx\right|_{x=\beta}-\left|\int \varphi(x)\,dx\right|_{x=\alpha}.$$

（注意） 於應用諸方面。悉用定積分。而不定積分乃抽象的。實徵分法之逆問題。殊不必要。應用上絕少用之。然由前述之關係觀之。不定積分之函數出見時。得置換變數。以求定積分。是不定積分亦宜研究。不可忽之。

如前所述。不定積分決非積分學之全般。又定積分亦不必以表面積爲限。學者宜審之。不可誤解。

第二章 不定積分

1. 有理整函數之積分。

令 $$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n.$$

依第一章第4節I, II得

$$\int f(x)\,dx=a_0\int x^n dx+a_1\int x^{n-1}dx+a_2\int x^{n-2}dx+\dots$$
$$+a_{n-1}\int x\,dx+a_n\int dx$$
$$=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\frac{a_2}{n-1}x^{n-1}+\dots$$
$$+\frac{a_{n-1}}{2}x^2+a_nx.$$

2. 有理分數之積分。

有理分數爲

$$\frac{\phi(x)}{f(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\dots+b_{m-1}x+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n}.$$

此爲已約分數。

若$m \leqq n$。則可得

$$\frac{\phi(x)}{f(x)} = F(x) + \frac{\phi_1(x)}{f(x)}.$$

此處之$F(x)$爲有理整函數。$\phi_1(x)$爲比$f(x)$低次整函數。

$F(x)$之積分。由前節求得。

若由本節求之。則假定$m<n$。一般決無妨礙。

由代數學基本之定理。$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$任何亦爲實數。則

$$f(x) = a_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n).$$

然此分解只有一種。

而$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$表實或虛之常數。

又$a_1, a_2, \ldots, a_n$之中。有虛數$p+qi$。則必再有一虛數$p-qi$存在。與之相伴。

由是得作下式。

$$\{x-(p+qi)\}\{x-(p-qi)\} = x^2-2px+(p^2+q^2).$$

是則有理整函數$f(x)$。常可分解爲一次因數$x-a$。與二次因數$x^2+\beta x+\gamma$之二種形狀。幾個連乘之積。但a, β, γ任何亦爲實數。且

$$\beta^2 \div 4-\gamma<0.$$

由是發生次列之四種形式。

(I) <u>$x-a$爲$f(x)$之單一因子。</u>

卽$\dfrac{\phi(x)}{f(x)}$其分子比分母低。爲低位分數。且令

$$f(x) = (x-a)f_1(x).$$

則$x-a$與$f_1(x)$爲互素。

然
$$\frac{\phi(x)}{f(x)} = \frac{\phi(x)}{(x-a)f_1(x)} = \frac{\phi(x)-Af_1(x)+Af_1(x)}{(x-a)f_1(x)}$$

$$= \frac{A}{x-a} + \frac{\phi(x)-Af_1(x)}{(x-a)f_1(x)}.$$

此處之未定係數A。為

$$\phi(a)-Af_1(a)=0. \quad 即 \quad A=\frac{\phi(a)}{f_1(a)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

以適於A之值代之。則

$\phi(x)-Af_1(x)$ 必可為$x-a$所約。

故令 $\phi(x)-Af_1(x)=(x-a)\phi_1(x)$.

則 $$\frac{\phi(x)}{(x-a)f_1(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{\phi_1(x)}{f_1(x)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

而 $$\int\frac{A}{x-a}dx=A\,log(x-a)=log(x-a)^A \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(II) <u>$x-a$為$f(x)$ m重之複因數。</u>

令 $f(x)=(x-a)^m f_1(x)$.

則與前同樣。得

$$\frac{\phi(x)}{f(x)}=\frac{\phi(x)}{(x-a)^m f_1(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{\phi_1(x)}{(x-a)^{m-1}f_1(x)}$$

$$=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\frac{\phi_2(x)}{(x-a)^{m-2}f_1(x)}$$

$$=\cdots$$

$$=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{A_m}{x-a}+\frac{\phi_m(x)}{f_1(x)} \quad \cdots\cdots(4)$$

而 $$\left\{\begin{aligned}&\int\frac{A_1}{(x-a)^m}=-\frac{A_1}{(m-1)(x-a)^{m-1}}\\&\int\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}=-\frac{A_2}{(m-2)(x-a)^{m-2}}\\&\quad\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\\&\int\frac{A_{m-1}}{(x-a)^2}=-\frac{A_{m-1}}{x-a}\\&\int\frac{A_m}{x-a}=A_m\,log(x-a)\end{aligned}\right. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(注意) 欲決定未定係數 $A_1, A_2, \ldots, A_m$。其法如次。

$$\frac{\phi(x)}{(x-a)^m f_1(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\cdots$$
$$+\frac{A_m}{x-a}+\frac{\phi_m(x)}{f_1(x)}.$$

各項以 $(x-a)^m$ 乘之則

$$\frac{\phi(x)}{f_1(x)}=A_1+A_2(x-a)+A_3(x-a)^2+\cdots$$
$$+A_m(x-a)^{m-1}+\frac{\phi_m(x)}{f_1(x)}(x-a)^m.$$

$$\therefore\quad \left\{\begin{aligned}
A_1&=\frac{\phi(a)}{f_1(a)}\\
A_2&=\left|\frac{d}{dx}\cdot\frac{\phi(x)}{f_1(x)}\right|_{x=a}\\
A_3&=\frac{1}{2!}\left|\frac{d^2}{dx^2}\cdot\frac{\phi(x)}{f_1(x)}\right|_{x=a}\\
&\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\\
A_m&=\frac{1}{(m-1)!}\left|\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\cdot\frac{\phi(x)}{f_1(x)}\right|_{x=a}
\end{aligned}\right. \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(III) $x^2+\beta x+\gamma\left(\frac{\beta^2}{4}-\gamma<0\right)$ 爲 $f(x)$ 之單一因數。

令 $f(x)=(x^2+\beta x+\gamma)f_1(x).$

則
$$\frac{\phi(x)}{f(x)}=\frac{\phi(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)f_1(x)}$$
$$=\frac{\phi(x)-(Lx+M)f_1(x)+(Lx+M)f_1(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)f_1(x)}$$
$$=\frac{Lx+M}{x^2+\beta x+\gamma}+\frac{\phi(x)-(Lx+M)f_1(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)f_1(x)}.$$

此 $\phi(x)-(Lx+M)f_1(x)$ 適爲 $x^2+\beta x+\gamma$ 所約。決定其未定係數 L, M。其商以 $\phi_1(x)$ 表之，則

$$\frac{\varphi(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)f_1(x)}=\frac{Lx+M}{x^2+\beta x+\gamma}+\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}\quad\text{..............}(7)$$

而 $L=0$，則

$$\int\frac{M}{x^2+\beta x+\gamma}dx=M\int\frac{dx}{\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)}$$

$$=\frac{M}{\sqrt{\gamma-\frac{\beta^2}{4}}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\gamma-\frac{\beta^2}{4}}}\quad\text{........}(8)$$

$L\neq 0$。則

$$\int\frac{Lx+M}{x^2+\beta x+\gamma}dx=\frac{L}{2}\int\frac{(2x+\beta)}{x^2+\beta x+\gamma}dx$$

$$+\left(M-\frac{L\beta}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+\beta x+\gamma}$$

$$=\frac{L}{2}\log(x^2+\beta x+\gamma)$$

$$+\frac{M-\frac{L\beta}{2}}{\sqrt{\gamma-\frac{\beta^2}{2}}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\gamma-\frac{\beta^2}{2}}}\quad\text{..}(9)$$

(IV) $x^2+\beta x+\gamma\left(\frac{\beta^2}{4}-\gamma<0\right)$ 爲 $f(x)$ 之 m 重複因數。

令 $f(x)=(x^2+\beta x+\gamma)^m f_1(x)$.

與前同樣。得

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\varphi(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^m f_1(x)}$$

$$=\frac{L_1x+M_1}{(x^2+\beta x+\gamma)^m}+\frac{L_2x+M_2}{(x^2+\beta x+\gamma)^{m-1}}+\dots$$

$$+\frac{L_mx+M_m}{x^2+\beta x+\gamma}+\frac{\varphi_m(x)}{f_1(x)}\quad\text{...}(10)$$

令γ爲自2至m間之整數。則

$$\int\frac{Lx+M}{(x^2+\beta x+\gamma)^r}dx=\frac{L}{2}\int\frac{(2x+\beta)}{(x^2+\beta x+\gamma)^r}dx$$
$$+\left(M-\frac{L\beta}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^r}$$
$$=-\frac{L}{2(r-1)(x^2+\beta x+\gamma)^{r-1}}$$
$$+\left(M-\frac{L\beta}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^r}\ldots\ldots(11)$$

然
$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{x+\frac{\beta}{2}}{(x^2+\beta x+\gamma)^{r-1}}\right\}$$
$$=\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^{r-1}}-\frac{2(r-1)\left(x^2+\beta x+\frac{\beta^2}{4}\right)}{(x^2+\beta x+\gamma)^r}$$
$$=-\frac{2r-3}{(x^2+\beta x+\gamma)^{r-1}}+\frac{2(r-1)\left(\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)}{(x^2+\beta x+\gamma)^r}.$$

而
$$\int\frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^r}=\frac{2r-3}{2(r-1)\left(\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)}\int\frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^{r-1}}$$
$$+\frac{x+\frac{\beta}{2}}{2(r-1)\left(\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)(x^2+\beta x+\gamma)^{r-1}}\ldots(12)$$

由此公式(12)。反覆適用。最後可得(9)之積分。

(注意) 如公式(12)。逐次推移。最終得比較的簡易之積分式以求積分.此法謂之累次積分法(*Successive integration*)。

以上所述之四種。於有理分數之分解盡之矣.故知自(1)至(12)之公式。有理分數。常可求得其積分。而其基本之形(*Normal form*)。如次之四種。

$$\int\frac{dx}{x-a},\quad \int\frac{dx}{(x-a)^r},\quad \int\frac{dx}{x^2+\beta x+\gamma},\quad \int\frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^r}.$$

又積分之結果，以代數函數，對數函數，逆三角函數，三種之中爲限。且不出此以外。此亦有注目之價值者也。

〔例〕 1. $\int\frac{x^4-2x^3-2x}{x^3-x^2-4x+4}dx.$

(解) $$\frac{x^4-2x^3-2x}{x^3-x^2-4x+4}=x-1+\frac{3x^2-10x+4}{x^3-x^2-4x+4}.$$

$$\frac{3x^2-10x+4}{x^3-x^2-4x+4}=\frac{3x^2-10x+4}{(x-1)(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

從 (1) 得

$$A=\frac{3-10+4}{(1-2)(1+2)}=1.$$

$$B=\frac{3\times 2^2-10\times 2+4}{(2-1)(2+2)}=-1.$$

$$C=\frac{3(-2)^2-10(-2)+4}{(-2-1)(-2-2)}=3.$$

$$\therefore\quad \frac{x^4-2x^3-2x}{x^3-x^2-4x+4}=x-1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+2}.$$

$$\therefore\quad \int\frac{x^4-2x^3-2x}{x^3-x^2-4x+4}dx$$

$$=\int(x-1)dx+\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x-2}+3\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=\frac{1}{2}x^2-x+log(x-1)-log(x-2)+3\,log(x+2)$$

$$=\frac{1}{2}x^2-x+log\frac{(x-1)(x+2)^3}{x-2}.$$

(注意) 求 A, B, C。則

$$3x^2-10x+4=A(x-2)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x-2).$$

順次命 x 為 $1, 2, -2$ 卽得。

〔例〕 2. $\displaystyle\int\frac{2x+34}{x^3-2x^2-11x+12}dx.$

(答) $\displaystyle log\frac{(x-4)^2(x+3)}{(x-1)^3}.$

〔例〕 3. $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}dx$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{5}{12}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{5}{12}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=\frac{1}{3}log\frac{x+1}{x-1}+\frac{5}{12}log\frac{x-2}{x+2}.$$

〔例〕 4. $\displaystyle\int\frac{x^2+2}{(x-2)^3}dx.$

(解) 命 $\displaystyle\frac{x^2+2}{(x-2)^3}=\frac{A}{(x-2)^3}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2}.$

則 $x^2+2=A+B(x-2)+C(x-2)^2.$

命 $x=2.$ 則 $A=6.$

一度微分之後。命 $x=2$。則 $B=4$。

二度微分之後。命 $x=2$。則 $C=1$。

$$\therefore\quad\frac{x^2+2}{(x-2)^3}=\frac{6}{(x-2)^3}+\frac{4}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-2}.$$

$$\therefore\quad\int\frac{x^2+2}{(x-2)^3}dx=6\int\frac{dx}{(x-2)^3}+4\int\frac{dx}{(x-2)^2}+\int\frac{dx}{x-2}$$

$$=-\frac{3}{(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}+log(x-2)$$

$$=log(x-2)-\frac{4x-5}{(x-2)^2}.$$

〔例〕 5. $\int \frac{4x^2-3x}{(x-1)^2(x+2)}dx.$

(答) $\frac{14}{9}\log(x-1)+\frac{22}{9}\log(x+2)-\frac{1}{3(x-1)}.$

〔例〕 6. $\int \frac{(x^2-2)}{x^3(x+2)^2}dx.$

(答) $\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{4(x+2)}+\frac{1}{8}\log\frac{x+2}{x}.$

〔例〕 7. $\int \frac{x^2+1}{x^3-1}dx.$

(解) 令 $\frac{x^2+1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Lx+M}{x^2+x+1}.$

則 $x^2+1=A(x^2+x+1)+(x-1)(Lx+M).$

令 $x=1.$ 則 $A=\frac{2}{3}.$

令 $x=0.$ 則 $M=-\frac{1}{3}.$

令 $x=2.$ 則 $L=\frac{1}{3}.$

∴ $\frac{x^2+1}{x^3-1}=\frac{2}{3(x-1)}+\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}.$

∴
$$\int\frac{x^2+1}{x^3-1}dx=\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx$$
$$=\frac{2}{3}\log(x-1)+\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$
$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{2}{3}\log(x-1)+\frac{1}{6}\log(x^2+x+1)$$
$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

〔例〕 8. $\int\frac{x^2dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$.

(答) $-\frac{1}{2(x-1)}+\log\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x^2+1}}$.

〔例〕 9. $\int\frac{dx}{x^4+1}$.

(答) $\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}$.

〔例〕 10. $\int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}$.

(解) 命 $\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Lx+M}{(x^2+1)^2}+\frac{Px+Q}{x^2+1}$.

則 $1=A(x^2+1)^2+(Lx+M)x+(Px+Q)(x^2+1)x$.

命 $x=0$. 則 $A=1$.

比較x^4之係數。得$0=A+P$.

$\therefore$ $P=-1$.

比較x^3之係數。卽得$Q=0$.

代入A, P, Q之值:得

$$1=(x^2+1)^2-(x^2+1)x^2+(Lx+M)x.$$

$\therefore$ $Lx+M=(x^2+1)x-x^3-2x$.

命 $x=0$. 則 $M=0$.

又命 $x=1$. 則 $L=-1$.

$\therefore$ $\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{(x^2+1)^2}-\frac{x}{x^2+1}$.

$$\therefore \qquad \int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}-\int\frac{xdx}{x^2+1}$$

$$=\log x+\frac{1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\log(x^2+1)$$

$$=\frac{1}{2(x^2+1)}+\log\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(別解) 令 $x^2+1=\frac{1}{z}$. 則 $2xdx=-\frac{dz}{z^2}$.

$$\therefore \qquad \int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{-\frac{dz}{z^2}}{\left(\frac{1}{z}-1\right)\frac{1}{z^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{z}{z-1}dz$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{z-1}\right)dz$$

$$=\frac{1}{2}\int dz-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z-1}$$

$$=\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}\log(z-1)$$

$$=\frac{1}{2(x^2+1)}+\log\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(例) 11. $\int\frac{x^3}{(1+x^2)^4}dx.$

(解) 令 $x^2=t$. 則 $2xdx=dt$.

$$\therefore \qquad \int\frac{x^3}{(1+x^2)^4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{t}{(1+t)^4}dt.$$

而令 $\qquad \frac{t}{(1+t)^4}=\frac{A}{(1+t)^4}+\frac{B}{(1+t)^3}+\frac{C}{(1+t)^2}+\frac{D}{1+t}.$

如例4.得

$$A=-1,\quad B=1,\quad C=0,\quad D=0.$$

$$\therefore \qquad \int\frac{x^3}{(1+x^2)^4}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(1+t)^4}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(1+t)^3}$$

$$=\frac{1}{6(1+t)^3}-\frac{1}{4(1+t)^2}$$

$$=\frac{1}{6(1+x^2)^3}-\frac{1}{4(1+x^2)^2}.$$

〔例〕12. $\int\frac{x^4}{(1+x^2)^6}dx.$

〔解〕 $x^4=(1+x^2-1)^2=(1+x^2)^2-2(1+x^2)+1.$

$$\therefore \qquad \frac{x^4}{(1+x^2)^6}=\frac{1}{(1+x^2)^4}-\frac{2}{(1+x^2)^5}+\frac{1}{(1+x^2)^6}.$$

然 $\int\frac{dx}{(1+x^2)^6}=\int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^6}dx$

$$=\int\frac{dx}{(1+x^2)^5}-\int\frac{x^2}{(1+x^2)^6}dx.$$

而由部分積分法。得

$$\int\frac{x^2}{(1+x^2)^6}dx=\int\frac{1}{2}x\frac{2xdx}{(1+x^2)^6}$$

$$=-\frac{x}{10(1+x^2)^5}+\frac{1}{10}\int\frac{dx}{(1+x^2)^5}.$$

$$\therefore \qquad \int\frac{dx}{(1+x^2)^6}=\frac{x}{10(1+x^2)^5}+\frac{9}{10}\int\frac{dx}{(1+x^2)^5}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

同樣 $\int\frac{dx}{(1+x^2)^5}=\frac{x}{8(1+x^2)^4}+\frac{7}{8}\int\frac{dx}{(1+x^2)^4}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^4}=\frac{x}{6(1+x^2)^3}+\frac{5}{6}\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}=\frac{x}{4(1+x^2)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(1+x^2)^2} \quad \cdots\cdots\cdots (4)$$

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{x}{2(1+x^2)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=tan^{-1}x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

以自 (1) 至 (6) 之式代之。則

$$\int\frac{x^4}{(1+x^2)^6}dx=\int\frac{dx}{(1+x^2)^6}-2\int\frac{dx}{(1+x^2)^5}+\int\frac{dx}{(1+x^2)^4}$$

$$=\frac{x}{10(1+x^2)^5}-\frac{11x}{80(1+x^2)^4}+\frac{x}{160(1+x^2)^3}$$

$$+\frac{x}{128(1+x^2)^2}+\frac{3x}{256(1+x^2)}+\frac{3}{256}tan^{-1}x.$$

(注意) 如例 11, 12。可求得

$$\int\frac{x^m}{(1+x^2)^n}dx. \quad (但\ m, n\ 爲正整數)$$

又此種積分。可用置換法。令 $x=tan\,\theta$ 爲三角函數之積分。詳後節。

3. 無理式 $f(x, \sqrt[n]{ax+b})$ 之積分。

$f(x, \sqrt[n]{ax+b})$ 之 x 與 $\sqrt[n]{ax+b}$ 爲有理函數。

則令 $\qquad \sqrt[n]{ax+b}=z.$

由是 $\qquad x=\frac{1}{a}(z^n-b), \quad dx=\frac{n}{a}z^{n-1}dz.$

$$\therefore \qquad \int f(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx=\frac{n}{a}\int f\left(\frac{z^n-b}{a}, z\right)z^{n-1}dz.$$

是 z 爲有理函數之積分。

與此同樣，求得

$$\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\right)dx = n(ab'-a'b)\int f\left(\frac{b'z^n-b}{a-a'z^n}, z\right)\frac{z^{n-1}}{(a-a'z^n)^2}dz.$$

$$\left(但 \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}=z\right)$$

〔例〕 1. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}$.

（解） 令 $\sqrt{x-1}=z$ 則

$$x=z^2+1, \quad dx=2zdz.$$

$$\therefore \qquad \int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}} = \int \frac{2zdz}{z^2+z+1}$$

$$= \int \frac{(2z+1)dz}{z^2+z+1} - \int \frac{dz}{z^2+z+1}$$

$$= \log(z^2+z+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$$

$$= \log(x+\sqrt{x-1})$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}}.$$

〔例〕 2. $\int \frac{xdx}{(ax+b)^{\frac{3}{2}}}$.

（答） $\frac{2(ax+2b)}{a^2\sqrt{ax+b}}$.

〔例〕 3. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}+1}dx$.

（解） 令 $\sqrt[6]{x}=z$. 則

$$x=z^6, \quad dx=6z^5dz.$$

$$\therefore \qquad \int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}+1}dx = 6\int \frac{z^2-1}{z^3+1}z^5 dz = 6\int \frac{z^6-z^5}{z^2-z+1}dz.$$

$$= 6\int\left(z^4-z^2-z+\frac{1}{z^2-z+1}\right)dz$$

$$= 6\left(\frac{z^5}{5}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^2}{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{6x^{\frac{5}{6}}}{5}-2x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{3}}-4\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x^{\frac{1}{6}}-1}{\sqrt{3}}.$$

〔例〕 4. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}$.

(答) $3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+\log(\sqrt[6]{x}+1)^6$.

〔例〕 5. $\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}$.

〔例〕 6. $\int (a+x)\sqrt{b-x}\,dx = \frac{2}{5}(b-x)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(a+b)(b-x)^{\frac{3}{2}}$.

〔例〕 7. $\int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx = \sqrt{a^2-x^2}-\cos^{-1}\frac{x}{a}$.

4. 無理式 $f(x, \sqrt{a+bx+cx^2})$ 之積分。

$f(x, \sqrt{a+bx+cx^2})$ 爲 x 與 $\sqrt{a+bx+cx^2}$ 之有理函數。則得二種如次。

(I) 於 $a+bx+cx^2$。而 $b^2-4ac>0$。

則分解 $a+bx+cx^2$ 爲一次因數。得

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{c(x-\alpha)(x-\beta)}.$$

而 $\qquad c>0.$

令 $z=\sqrt{\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}}$.

則 $x=\dfrac{\alpha-\beta z^2}{1-z^2}$, $dx=\dfrac{2(\alpha-\beta)z}{(1-z^2)^2}dz$.

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\frac{\sqrt{c}(\alpha-\beta)z}{1-z^2}.$$

∴ $$\int f(x,\sqrt{a+bx+cx^2})\,dx$$

$$=2(\alpha-\beta)\int f\left(\frac{\alpha-\beta z^2}{1-z^2},\ \frac{\sqrt{c}(\alpha-\beta)z}{1-z^2}\right)\frac{z}{(1-z^2)^2}dz.$$

若 $c<0$

則令 $z=\sqrt{\dfrac{x-\alpha}{\beta-x}}$.

$$x=\frac{\alpha+\beta z^2}{1+z^2},\quad dx=\frac{2(\beta-\alpha)z}{(1+z^2)^2}dz.$$

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\frac{\sqrt{-c}(\beta-\alpha)z}{1-z^2}.$$

∴ $$\int f(x,\sqrt{a+bx+cx^2})\,dx$$

$$=2(\beta-\alpha)\int f\left(\frac{\alpha+\beta z^2}{1+z^2},\ \frac{\sqrt{-c}(\beta-\alpha)z}{1+z^2}\right)\frac{z}{1-z^2}dz.$$

(II) 於 $a+bx+cx^2$。而 $b^2-4ac<0$。

因 $\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4c}\{(2cx+b)^2-(b^2-4ac)\}}$.

則不可不令 $c>0$。

否則 $\sqrt{a+bx+cx^2}$ 爲虛數。

由是令 $\sqrt{a+bx+cx^2}=z-\sqrt{c}x$.

則 $$x=\frac{z^2-a}{b+2\sqrt{c}z},\quad dx=\frac{2(\sqrt{c}a+bz+\sqrt{c}z^2)}{(b+2\sqrt{c}z)^2}dz.$$

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\frac{\sqrt{c}a+bz+\sqrt{c}z^2}{b+2\sqrt{c}z}.$$

$\therefore$ $$\int f(x,\sqrt{a+bx+cx^2})\,dx$$

$$=2\int f\left\{\frac{z^2-a}{b+2\sqrt{c}z},\frac{\sqrt{c}a+bz+\sqrt{c}z^2}{b+2\sqrt{c}z}\right\}$$

$$\times\frac{\sqrt{c}a+bz+\sqrt{c}z^2}{(b+2\sqrt{c}z)^2}dz.$$

(注意一) 以上二種之置換。所有方法盡之矣。然若$a>0$。則用次之置換法.爲更簡便。

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=xz+\sqrt{a}.$$

$$x=\frac{-b+2\sqrt{a}z}{c-z^2},\quad dx=\frac{2(\sqrt{a}c-bz+\sqrt{a}z^2)}{(c-z^2)^2}dz.$$

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=\frac{\sqrt{a}c-bz+\sqrt{a}z^2}{c-z^2}.$$

$\therefore$ $$\int f(x,\sqrt{a+bx+cx^2})\,dx$$

$$=2\int f\left\{\frac{-b+2\sqrt{a}z}{c-z^2},\frac{\sqrt{a}c-bz+\sqrt{a}z^2}{c-z^2}\right\}$$

$$\times\frac{\sqrt{a}c-bz+\sqrt{a}z^2}{(c-z^2)^2}dz.$$

(注意二) 凡將$f(x,\sqrt{a+bx+cx^2})$之有理函數.分爲有理式與無理式。則其形爲

$$\frac{\phi_1(x)+\psi_1(x)\sqrt{a+bx+cx^2}}{\phi_2(x)+\psi_2(x)\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

更化此分母爲有理式,則

$$\phi(x)+\psi(x)\sqrt{a+bx+cx^2}.$$

而令 $\psi(x)\sqrt{a+bx+cx^2}=\frac{\psi(x)(a+bx+cx^2)}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=F(x)\frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$.

則 $F(x)$ 之有理函數。由本節之積分。足以解決下式矣。

$$\int F(x)\frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

又此積分。分解 $F(x)$ 爲部分分數。只研究下列之一個基本形而已。

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

〔例〕 1. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$.

(解) 令 $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=z$. 則

$$x=a\frac{z^2-1}{z^2+1},\quad dx=4a\frac{z\,dz}{(z^2+1)^2}.$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=2a\frac{z}{z^2+1}.$$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{2}{a}\int\frac{dz}{z^2-1}=\frac{1}{a}\int\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)dz$$

$$=\frac{1}{a}\log\frac{z-1}{z+1}$$

$$=\frac{1}{a}\log\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$$

$$=\frac{1}{a}\log\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

(別解) 令 $\sqrt{a^2-x^2}=-xz+a$. 則

$$x=\frac{2az}{1+z^2},\quad dx=2a\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}dz.$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

$$\therefore\qquad \int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{a}\log z$$

$$=\frac{1}{a}\log\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

(例) 2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+c^2x^2}}$.

(解) 令 $\sqrt{a^2+c^2x^2}=z-cx$. 則

$$a^2+c^2x^2=(z-cx)^2=z^2-2cxz+c^2x^2.$$

$$a^2=z^2-2czx.$$

$$0=2(z-cx)dz-2czdx.$$

$$\therefore\qquad \frac{dx}{z-cx}=\frac{dz}{cz}.$$

$$\therefore\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2+c^2x^2}}=\frac{1}{c}\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{c}\log z$$

$$=\frac{1}{c}\log(cx+\sqrt{a^2+c^2x^2}).$$

(注意) 本題亦得令 $\sqrt{a^2+c^2x^2}=xz+a$.

(例) 3. $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$.

(例) 4. $\displaystyle\int\sqrt{2ax+x^2}dx=\frac{x+a}{2}\sqrt{2ax+x^2}$

$$-\frac{a^2}{2}\log(x+a+\sqrt{2ax+x^2}).$$

〔例〕 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-cx^2}}$. $(c>0)$

(答) $\frac{1}{\sqrt{c}}\sin^{-1}\frac{cx-b}{\sqrt{b^2+ac}}$.

〔例〕 6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-3x^2}}=-\sqrt{\frac{2-3x}{x}}$.

〔例〕 7. $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2-2x+3}}$

$$=-\frac{1}{\sqrt{6}}\log\frac{2x+\sqrt{6}\sqrt{x^2-2x+3}}{x-3}.$$

(注意) $f(x, \sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4})$ 之函數爲 x 與 $\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}$ 之有理函數,則 c 不拘爲零與否。其積分必表三種基本形如次。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{\sqrt{1+k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-a)\sqrt{(1-x^2)(1+k^2x^2)}}.$$

此三種。順次稱第一種,第二種,第三種之橢圓積分 (*Elliptic integrals*)。

於橢圓積分。令 $x=\sin\theta$。則 $dx=\cos\theta\, d\theta$。

由是第一種,第二種,第三種之形如次。

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta,$$

$$\int \frac{d\theta}{(\sin^2\theta-a)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

5. 二項式$x^m(a+bx^n)^p$之積分。

於二項式$x^m(a+bx^n)^p$。其a, b爲常數m, n, p爲有理數。

若m, n之雙方面或一方面爲分數。其最小公分母爲α。令

$$x=z^{\alpha}.$$

則
$$x^m(a+bx^n)^p dx=\alpha z^{m\alpha+\alpha-1}(a+bz^{n\alpha})^p dz.$$

其z之指數。爲二個整數。

又n爲負數。則

$$x^m(a+bx^n)^p dx=x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p dx.$$

其$-n$爲正。

更p爲整數。則爲有理分數之積分。

由是研究m爲正或負之整數。n爲正整數。p爲分數之式者足矣。

先研究$p=\frac{q}{r}$。令$a+bx^n=z^r$。則

$$x=\left(\frac{z^r-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

$$dx=\frac{r}{nb}\left(\frac{z^r-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}z^{r-1}dz.$$

$$\therefore \quad \int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{r}{nb}\int z^{q+r-1}\left(\frac{z^r-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}dz.$$

此積分之$\frac{m+1}{n}$爲整數。則爲有理函數之積分。

次同樣置換。而

$$\int x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p dx=-\frac{r}{na}\int z^{p+r-1}\left(\frac{z^r-b}{a}\right)^{-\frac{m+np-1}{n}-1}dz.$$

此積分之 $\frac{m+np+1}{n}$ 卽 $\frac{m+1}{n}+p$ 爲整數。則亦爲有理函數之積分。

由是下列三式之中。任一式爲整數。則二項式之積分。爲有理函數之積分。

(i) p.

(ii) $\frac{m+1}{n}$.

(iii) $\frac{m+1}{n}+p$.

不適合以上所列之式。則不外依下列之累次積分之公式。

由部分積分法。

命 $u=(a+bx^n)^p,\quad dv=x^m dx.$

則
$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1}-\frac{nbp}{m+1}\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}dx\ldots\ldots(1)$$

(1) 以 $m+1\neq 0$ 爲限。命 $m+n$ 與 $p-1$ 爲 m 與 p 簡單之。卽可適用。

又命 $u=x^{m-n+1},\quad dv=(a+bx^n)^p x^{n-1}dx.$

則
$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{(a+bx^n)^{p+1}x^{m-n+1}}{(p+1)bn}-\frac{m-n+1}{(p+1)bn}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}dx\ldots\ldots(2)$$

(2) 以 $p+1\neq 0$ 爲限。命 $m-n, p+1$ 爲 m, p 簡單之。卽可適用。

又於 (2) 以

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}dx=a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx+b\int x^m(a+bx^n)^p dx.$$

而
$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{(a+bx^n)^{p+1}x^{m-n+1}}{b(np+m+1)}-\frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx\ldots\ldots(3)$$

此 (3) 之 m 以 $m+n$ 代之。則

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{(a+bx^n)^{p+1}x^{m+1}}{a(m+1)}-\frac{b(np+m+n+1)}{a(m+1)}\int x^{m+n}(a+bx^n)^p dx\ldots\ldots(4)$$

(3) 與 (4) 以 $np+m+1\neq 0$, $m+1\neq 0$ 爲限。將 x^m 之項簡單之。卽可使用。

最後命 (1) 與 (4) 之右邊相等。而 $m+n$ 代以 m。則

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{(a+bx^n)^p x^{m+1}}{m+np+1}+\frac{nap}{m+np+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx\ldots\ldots(5)$$

同樣 (2) 與 (3) 之 $m-n$ 代以 m。則

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=-\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{na(p+1)}+\frac{m+np+n+1}{na(p+1)}\int x^m(a+bx^n)^{p+1}dx\ldots\ldots(6)$$

(5) 與 (6) 僅將 $(a+bx^n)^p$ 之項簡單之。卽可使用。

以上六種公式。均得減小二項式之指數之絕對值。除外 $m+1=0$, $p+1=0$, $m+np+1=0$ 各宜直接研究。毋庸具論。

但 $m+np+1=0$ 爲 $\frac{m+1}{n}+p$ 之整數之一種。

(例) 1. $\int x^{\frac{3}{2}}\left(1+2x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{3}}dx.$

(解) x之指數$\frac{3}{2}$及$\frac{1}{3}$。其分母之最小公倍數爲6。故令

$$x=z^6.$$

則 $$dx=6z^5dz.$$

$\therefore$ $$\int x^{\frac{3}{2}}\left(1+2x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{3}}dx=6\int z^9\left(1+2z^2\right)^{-\frac{1}{3}}dz.$$

(例) 2. $\int x^9\left(1+2x^2\right)^{-\frac{1}{3}}dx.$

(解) $m=9,\ n=2.$ 而

$$\frac{m+1}{n}=\frac{9+1}{2}=5.$$

故令 $$1+2x^2=z^3.$$

則 $$x^2=\frac{z^3-1}{2}.$$

$$xdx=\frac{3}{4}z^2dz.$$

$\therefore$ $$\int x^9\left(1+2x^2\right)^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{64}\int(z^3-1)^4zdz$$

$$=\frac{3}{64}\int(z^{13}-4z^{10}+6z^7-4z^4+z)dz$$

$$=\frac{3}{64}\left(\frac{z^{14}}{14}-\frac{4z^{11}}{11}+\frac{3z^8}{4}-\frac{4z^5}{5}+\frac{z^2}{2}\right).$$

(例) 3. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^8}}.$

(解) 因 $m=3,\ n=8,\ p=-\frac{1}{2}.$

故 $$\frac{m+1}{n}+p=\frac{3+1}{8}-\frac{1}{2}=0.$$

由是 $$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^8}}=\int\frac{x^3dx}{x^4\sqrt{x^{-8}+1}}=\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^{-8}}}.$$

令 $$1+x^{-8}=z^2.$$

則 $$-8x^{-9}dx=2zdz.$$

即 $$-8(z^2-1)x^{-1}dx=2zdz.$$

∴ $$\frac{dx}{x}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z^2-1}dz.$$

∴ $$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^8}}=-\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z^2-1}$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z-1}\right)dz$$

$$=\frac{1}{8}\log\frac{z+1}{z-1}$$

$$=\frac{1}{8}\log\frac{(z+1)^2}{z^2-1}=\frac{1}{8}\log\frac{(z+1)^2}{x^{-8}}$$

$$=\frac{1}{4}\log x^4(z+1)$$

$$=\frac{1}{4}\log(x^4+\sqrt{1+x^8}).$$

〔例〕 4. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x^3)^4}}.$

(答) $\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$

〔例〕 5. $\int\frac{x^mdx}{\sqrt{1-x^2}}.$ (但 m 爲正整數).

(解) 由累次積分之公式(3),得

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot x^{m-1}}{m}+\frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

此x^m之指數遞次減小2,最後得

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}.\quad (m\text{ 爲奇數}).$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=sin^{-1}x.\qquad (m\text{ 爲偶數}).$$

任何均可着落。

6. 含對數函數,逆三角函數之函數之積分。

對數函數,逆三角函數之微分係數,任何亦爲代數函數。今命$\phi(x)$爲代數函數。則

$$\frac{d}{dx}\{log\,\phi(x)\}=\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}.$$

$$\frac{d}{dx}\{tan^{-1}\phi(x)\}=\frac{\phi'(x)}{1+\{\phi(x)\}^2}.$$

$$\frac{d}{dx}\{sin^{-1}\phi(x)\}=\frac{\phi'(x)}{\sqrt{1-\{\phi(x)\}^2}}.$$

等。任何亦爲代數函數。

由是 $log\{\phi(x)\}$, $tan^{-1}\{\phi(x)\}$, $sin^{-1}\{\phi(x)\}$ 等。以 $P\{\phi(x)\}$ 表之。則 $f(x)\cdot P\{\phi(x)\}$ 之積分如次。

但$f(x)$與$\phi(x)$任何亦爲代數函數。

令 $\qquad u=P\{\phi(x)\},\quad dv=f(x)dx.$

則 $$du=P'\{\phi(x)\}\phi'(x)\,dx,\quad v=\int f(x)\,dx=F(x).$$

其 du 必爲代數函數。

今 $F(x)$ 爲代數函數。則

$$\int f(x)\cdot P\{\phi(x)\}\,dx=F(x)\cdot P\{\phi(x)\}-\int F(x)\;P'\{\phi(x)\}\phi'(x)\,dx.$$

此最後之積分。爲代數函數之積分。得依前節所述之積分處分之。

(注意) $F(x)$ 不爲代數函數。亦爲對數函數。又爲逆三角函數時得反覆適用部分積分法。

$f(x)\,[P\{\phi(x)\}]^n$ (n 爲整數) 之積分。得依前述之部分積分法以求之。

〔例〕 1. $\int x^n\log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$ (n 爲整數).

(解) $$\int x^n\log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\log(x+\sqrt{1+x^2})$$
$$-\frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

此最後之積分 $\frac{n+2}{2}$ 與 $\frac{n+2}{2}+\frac{1}{2}$。任何必有一爲整數。依前節之方法解之。卽得。

〔例〕 2. $\int\frac{\log(1+x^2)}{x^2}dx.$

(答) $$2\tan^{-1}x-\frac{\log(1+x^2)}{x}.$$

〔例〕 3. $\int x\sin^{-1}x\,dx.$

(解) $$\int x\sin^{-1}x\,dx=\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

然令 $$\sqrt{1-x^2}=1-xz.$$

則 $$x=\frac{2z}{1+z^2},\quad dx=\frac{2(1-z^2)}{(1+z^2)^2}dz.$$

∴ $$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=8\int\frac{z^2}{(1+z^2)^2}dz$$

$$=-\frac{2z}{(1+z^2)^2}+2\int\frac{dz}{(1+z^2)^2}$$

$$=-\frac{2z}{(1+z^2)^2}+2\int\frac{dz}{1+z^2}-2\int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^2}$$

$$=-\frac{2z}{(1+z^2)^2}+2\tan^{-1}z+\frac{z}{1+z^2}-\int\frac{dz}{1+z^2}$$

$$=\frac{z}{1+z^2}-\frac{2z}{(1+z^2)^2}+\tan^{-1}z$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2(1-\sqrt{1-x^2})}+\tan^{-1}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

而 $$\int x\sin^{-1}x\,dx=\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x-\frac{x}{4}-\frac{x^3}{4(1-\sqrt{1-x^2})}$$

$$+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

〔例〕 4. $\int x\tan^{-1}x\,dx.$

(答) $$\frac{x^2\tan x}{2}+\frac{\tan^{-1}x}{2}-\frac{x}{2}.$$

〔例〕 5. $\int x^m(\log x)^n dx.$ (n 爲整數)。

(解)　先令 $m=-1$. 則

$$\int \frac{(\log x)^n}{x}dx=\int (\log x)^n d(\log x)=\frac{(\log x)^{n+2}}{n+1}.$$

由是令 $n>0, m\neq-1$　則

$$\int x^m(\log x)^n dx=\frac{x^{m+1}(\log x)^n}{m+1}-\frac{n}{m+1}\int x^m(\log x)^{n-1}dx.$$

反覆適用此公式。即可得積分之值。

若 $n<0, m\neq-1$。則前公式之 $n-1$ 以 n 代之。而

$$\int x^m(\log x)^n dx=\frac{x^{m+1}(\log x)^{n+1}}{n+1}-\frac{m+1}{n+1}\int x^m(\log x)^{n+1}dx$$

之公式。得反覆適用之。

最後爲　$\int \frac{x^m}{\log x}dx.$

令 $x^{m+1}=z$　則

$$\int \frac{dz}{\log z}\quad 即\quad \int \frac{dz}{\int \frac{dz}{\int dz}}.$$

此名<u>積分對數</u>(Integral-logarithms)之新超越函數。

(注意)　$f(\log x)$ 之積分。由置換 $\log x=z$。卽變爲次節之積分。

7. 含指數函數之函數之積分。

含指數函數之函數中。有二種積分。一爲 e^{kx} 之代數函數 $f(e^{kx})$。二爲有理函數 $f(x)$ 與 e^{kx} 之積 $f(x)\cdot e^{kx}$。今分述如次。

先述 $f(e^{kx})$ 之積分

令 $e^{kx}=z.$

則 $dx=\dfrac{dz}{kz}.$

$\therefore$ $\displaystyle\int f(e^{kx})\,dx=\frac{1}{k}\int\frac{f(z)}{z}\,dz.$

由是得依據前數節所述之代數函數之積分以求之。

次述$f(x)e^{kx}$之積分。

分$f(x)$爲有理整函數$G(x)$，與有理分數$\dfrac{F(x)}{\phi(x)}$。則

$$f(x)=G(x)+\frac{F(x)}{\phi(x)}.$$

$$\int f(x)e^{kx}dx=\int G(x)e^{kx}dx+\int\frac{F(x)}{\phi(x)}e^{kx}dx.$$

而 $\displaystyle\int G(x)e^{kx}dx=\frac{1}{k}G(x)e^{kx}-\frac{1}{k}\int G'(x)e^{kx}dx.$

$$\int G'(x)e^{kx}dx=\frac{1}{k}G'(x)e^{kx}-\frac{1}{k}\int G''(x)e^{kx}dx.$$

等等。今令$G(x)$爲n次。則$G^{(n)}(x)$爲常數。

$$\int G(x)e^{kx}dx=\frac{e^{kx}}{k}\left\{G(x)-\frac{G'(x)}{k}+\frac{G''(x)}{k^2}-\cdots+(-1)^n\frac{G^{(n)}(x)}{k^n}\right\}.$$

又令分數$\dfrac{F(x)}{\phi(x)}$爲散分。則由其代表之項推究之。

由 $\dfrac{A}{x-a},\quad \dfrac{B}{(x-a)^m}.$

得 $\displaystyle A\int\frac{e^{kx}}{x-a}dx,\quad B\int\frac{e^{kx}}{(x-a)^m}dx.$

此二個積分。令

$$x-a=\frac{\log z}{k}.$$

則 $$dx=\frac{dz}{kz},\quad e^{kx}=z\cdot e^{ka}.$$

∴ $$A\int\frac{e^{kx}}{x-a}dx=Ae^{ka}\int\frac{dz}{\log z}.$$

$$B\int\frac{e^{kx}}{(x-a)^m}dx=Bk^{m-1}e^{ka}\int\frac{dz}{(\log z)^m}.$$

是終必為積分對數。

〔例〕 1. $\int\frac{e^x+1}{e^x-1}dx.$

（答） $2\log(e^x-1)-x.$

〔例〕 2. $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$

（答） $\tan^{-1}e^x.$

〔例〕 3. $\int\frac{a^x}{ma^x+n}dx.$ $(a>0).$

（解） 令 $a^x=t$. 則

$$dx=\frac{1}{\log a}\cdot\frac{dt}{t}.$$

∴ $$\int\frac{a^x}{ma^x+n}dx=\frac{1}{\log a}\int\frac{dt}{mt+n}=\frac{1}{m\log a}\log(mt+n)$$

$$=\frac{1}{m\log a}\log(ma^x+n).$$

〔例〕 4. $\int x^3e^xdx.$

(解) $$\int x^3e^x dx = x^3e^x - 3\int x^2e^x dx.$$

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx.$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x.$$

∴ $$\int x^3e^x dx = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x.$$

〔例〕 5. $\int (\log x)^2 dx.$

(解) 令 $\log x = t$. 則

$$\int (\log x)^2 dx = \int t^2e^t dt = t^2e^t - 2te^t + 2e^t$$

$$= x\{(\log x)^2 - 2\log x + 2\}.$$

〔例〕 6. $\int (\log x + 1)dx.$

(答) $x\log x.$

8. 含三角函數之函數之積分。

(I) <u>有理函數 $f(\sin x, \cos x, \tan x)$ 之積分。</u>

令 $$\tan\frac{x}{2} = t.$$

則 $$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

$$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$\therefore \quad \int f(\sin x, \cos x, \tan x)\,dx = 2\int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

卽爲有理函數之積分。

〔例〕 1. $\displaystyle\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$.

(解)
$$\int \frac{dx}{a\cos x+b\sin x} = 2\int \frac{dt}{\left(a\frac{1-t^2}{1+t^2}+b\frac{2t}{1+t^2}\right)(1+t^2)}$$

$$= 2\int \frac{dt}{a+2bt-at^2}$$

$$= \int \frac{2a\,dt}{a^2+b^2-(at-b)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log \frac{a\tan\frac{x}{2}-b+\sqrt{a^2+b^2}}{a\tan\frac{x}{2}-b-\sqrt{a^2+b^2}}.$$

〔例〕 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \log t = \log\left(\tan\frac{x}{2}\right)$.

〔例〕 3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$.

(答) $\log\left\{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$.

〔例〕 4. $\int \frac{dx}{a+b\tan x}=\frac{b}{a^2+b^2}\log(a\cos x+b\sin x)+\frac{ax}{a^2+b^2}$.

(注意) 如例4.僅 $\tan x$ 爲有理函數。則令 $\tan x=t$. 較爲簡便。

〔例〕 5. $\int \frac{\sin x\,dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}$.

(解) 令 $\cos x=z$. 則

$$\int \frac{\sin x\,dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}=-\int \frac{dz}{az^2+b(1-z^2)}$$

$$=-\frac{1}{b}\int \frac{dt}{1+\frac{a-b}{b}t^2}.$$

由是 $\frac{a-b}{b}>0$. 則

$$=\frac{1}{\sqrt{(a-b)b}}\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{b}}\cos x\right\}.$$

$\frac{a-b}{b}<0$. 則

$$=\frac{1}{2\sqrt{(b-a)b}}\log\frac{1-\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x}{1+\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x}.$$

(注意) 如例5之積分。其函數之形爲 $f(\sin^2 x, \cos x)\cdot\sin x$ 或 $f(\cos^2 x, \sin x)\cdot\cos x$. 則直令 $\cos x$ 或 $\sin x$ 爲 z. 較爲簡便。

(II) <u>$\sin^m x, \cos^n x$ 之積分(但 m, n 爲整數)。</u>

此雖得據(I)以求之。然如次之換置法。稍爲簡單。

$$\sin x=z,\quad \cos x\,dx=dz.$$

$$\therefore \qquad \int \sin^m x\cos^n x\,dx=\int z^m(1-z)^{\frac{n-1}{2}}dz.$$

此積分。見第五節之二項式之積分。

(i) $\dfrac{n-1}{2}$.

(ii) $\dfrac{m+1}{2}$.

(iii) $\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{m+n}{2}$.

任何亦爲整數。則得求積分之值。

而n爲奇數。則(i)爲整數。m爲奇數。則(ii)爲整數。雙方爲偶數。則(iii)爲整數。

故m, n以整數爲限時。則此三式任何均可適合。

此積分不置換變數。亦得直接由部分積分法行還元法如次。

先考　$u=\cos^{n-1}x,\ dv=\sin^m x\cos x\,dx=\sin^m x\,d(\sin x)$.

令$m\neq-1$. 則

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\frac{(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n-1}}{m+1}$$

$$+\frac{n-1}{m+1}\int(\sin x)^{m+2}(\cos x)^{n-2}dx\ldots\ldots(1)$$

次考　$u=\sin^{m-1}x,\ dv=\cos^n x\sin x\,dx=-\cos^n x\,d(\cos x)$.

令$n\neq-1$. 則

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=-\frac{(\sin x)^{m-1}(\cos x)^{n+1}}{n+1}$$

$$+\frac{m-1}{n+1}\int(\sin x)^{m-2}(\cos x)^{n+2}dx\ldots\ldots(2)$$

m與n有反對之符號。則適用公式(1), (2)。其雙方之絕對值各可盡其所有遞減小2.

於 (1)。

$$\int(\sin x)^{m+2}(\cos x)^{n-2}dx=\int(\sin x)^{m}(\cos x)^{n-2}(1-\cos^2x)\,dx$$

$$=\int(\sin x)^{m}(\cos x)^{n-2}dx$$

$$-\int(\sin x)^{m}(\cos x)^{n}dx.$$

而 $m+n\neq 0.$

∴ $$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\frac{(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n-1}}{m+n}$$

$$+\frac{n-1}{m+n}\int(\sin x)^{m}(\cos x)^{n-2}dx\ldots\ldots(3)$$

同樣。(2) 亦

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=-\frac{(\sin x)^{m-1}(\cos x)^{n+1}}{m+n}$$

$$+\frac{m-1}{m+n}\int(\sin x)^{m-2}(\cos x)^{n}dx\ldots\ldots(4)$$

於 (3) 之 $n-2$ 以 n 代之。交換其兩邊。則 $n\neq -1$。而

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=-\frac{(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n+1}}{n+1}$$

$$+\frac{m+n+2}{n+1}\int(\sin x)^{m}(\cos x)^{n+2}dx\ldots\ldots(5)$$

同樣。(4) 亦 $m\neq -1$。而

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\frac{(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n+1}}{m+1}$$

$$+\frac{m+n+2}{m+1}\int(\sin x)^{m+2}(\cos x)^{n+2}dx\ldots(6)$$

於 (1) 與 (6)。假定 $m \neq -1$。

若 $m=-1$。則可直接適用 (3) 或 (5)。

同樣。於 (2) 或 (5)。$n=-1$。則可適用 (4) 或 (6)。

又於 (3), (4)。$m+n=0$。

則先從 (1), (2)。卽得避之。

由是依自 (1) 至 (6) 之公式。則 $\sin^m x \cos^n x$ 之積分。可歸結次之任何之積分。

m	n	最後之積分
偶	偶	$\int dx = x$
偶	正奇	$\int \cos x\,dx = \sin x$
正奇	偶	$\int \sin x\,dx = -\cos x$
正奇	正奇	$\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x$
負奇	正奇	$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \log(\sin x)$
正奇	負奇	$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\log(\cos x)$
負奇	負奇	$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \log(\tan x)$
負奇	偶	$\int \frac{dx}{\sin x} = \log\left(\tan\frac{x}{2}\right)$
偶	負奇	$\int \frac{dx}{\cos x} = \log\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right\}$

又特別之式。則可得次之公式。以證明之。

$$\int \sin^m x\,dx = -\frac{(\sin x)^{m-1}\cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int(\sin x)^{m-2}dx \ldots\ldots(7)$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x(\cos x)^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\int(\cos x)^{n-2}dx \ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos x}{(m-1)(\sin x)^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}\int\frac{dx}{(\sin x)^{m-2}} \ldots\ldots(9)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)(\cos x)^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{(\cos x)^{n-2}} \ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

(例) 1. $\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx.$

(解) 令 $\sin x = z.$ 則

$$\cos x\,dx = dz. \quad \cos^2 x = 1 - z^2.$$

而
$$\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx = \int z^4(1-z^2)\,dx$$

$$= \int z^4 dz - \int z^6 dz = \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7}$$

$$= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x.$$

(別解) 依公式 (3)。得

$$\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx = \frac{\sin^5 x\cos^2 x}{4+3} + \frac{3-1}{4+3}\int \sin^4 x\cos x\,dx$$

$$= \frac{\sin^5 x\cos^2 x}{7} + \frac{2}{7}\times\frac{\sin^5 x}{5}.$$

(例) 2. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx.$

(解) 命 $\cos x = z$. 則

$$\sin x\, dx = -dz, \quad \sin^2 x = 1 - z^2.$$

而 $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = -\int \frac{1-z^2}{z^4} dz = -\int \frac{dz}{z^4} + \int \frac{dz}{z^2}$$

$$= \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{z}$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} = \frac{1 - 3\cos^2 x}{3\cos^3 x}.$$

(別解) 由公式(2)。

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = -\frac{\sin^2 x(\cos x)^{-3}}{-4+1} + \frac{3-1}{-4+1}\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$$

$$= \frac{\sin^2 x}{3\cos^3 x} + \frac{2}{3}\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{3\cos^3 x} - \frac{2}{3\cos x}.$$

〔例〕 3. $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx.$

(答) $$\left(\frac{\sin^5 x}{6} - \frac{\sin^3 x}{24} - \frac{\sin x}{16}\right)\cos x + \frac{x}{16}.$$

〔例〕 4. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx.$

(答) $$\frac{1+\cos^2 x}{\cos x}.$$

〔例〕 5 $\int \frac{dx}{\sin^5 x}.$

(解) 命 $\cos x = z.$

則
$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^4 x} = -\int \frac{dz}{(1-z^2)^2}$$
$$= -\int \frac{1-z^2+z^2}{(1-z^2)^2}dz$$
$$= -\int \frac{dz}{1-z^2} - \int \frac{z^2 dz}{(1-z^2)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{1-z}{1+z} - \frac{1}{2}z\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1-z^2}$$
$$= \frac{1}{4}\log\frac{1-z}{1+z} - \frac{z}{2(1-z^2)}$$
$$= \frac{1}{4}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x}$$
$$= \frac{1}{2}\log\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \frac{\cos x}{2\sin^2 x}.$$

(別解) 依公式(9)。
$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x}$$
$$= -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\log\left(\tan\frac{x}{2}\right).$$

(例) 6. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x}$.

(答) $\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{3}{2}\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)$.

(例) 7. $\int \cos^2 x \sin^2 x\,dx$.

(解) $\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{8}(1-\cos 4x)$.

$$\therefore \qquad \int \cos^2 x \sin^2 x\, dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{1}{8}\,\frac{\sin 4x}{4} = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32}.$$

(例) 8. $\int \sin^4 x\, dx.$

(解) $\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3).$

$$\therefore \qquad \int \sin^4 x\, dx = \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{3}{8}\int dx$$

$$= \frac{\sin 4x}{32} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{8}.$$

(III) $f(x)\sin x$ 及 $f(x)\cos x$ 之積分。(但 $f(x)$ 爲有理函數)。

先分解 $f(x)$ 爲整式部分 $G(x)$，與分數式部分。

於 $G(x)\sin x$ 及 $G(x)\cos x$. 由部分積分法。得

$$\int G(x)\sin x\, dx = -G(x)\cos x + \int G'(x)\cos x\, dx$$

$$= -G(x)\cos x + G'(x)\sin x - \int G''(x)\sin x\, dx.$$

$$\int G(x)\cos x\, dx = G(x)\sin x - \int G'(x)\sin x\, dx$$

$$= G(x)\sin x + G'(x)\cos x - \int G''(x)\cos x\, dx.$$

依此公式。任何至最後亦可歸着於

$$\int \sin x\, dx = -\cos x.$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x.$$

其分數式部分。分解爲部分分數。可得一般之形。爲

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{B}{(x-a)^m}.$$

從而 $$A\int\frac{\sin x}{x-a}dx=A\int\frac{\sin(z+a)}{z}dz$$

$$=A\cos a\int\frac{\sin z}{z}dz+A\sin a\int\frac{\cos z}{z}dz.$$

$$A\int\frac{\cos x}{x-a}dx=A\cos a\int\frac{\cos z}{z}dz-A\sin a\int\frac{\sin z}{z}dz.$$

$$B\int\frac{\sin x}{(x-a)^m}dx=-\frac{B\sin x}{(m-1)(x-a)^{m-1}}$$

$$+\frac{B}{m-1}\int\frac{\cos x}{(x-a)^{m-1}}dx.$$

$$B\int\frac{\cos x}{(x-a)^m}dx=-\frac{B\cos x}{(m-1)(x-a)^{m-1}}$$

$$-\frac{B}{m-1}\int\frac{\sin x}{(x-a)^{m-1}}dx.$$

依此等求法。終得表以 $\int\frac{\sin z}{z}dz$ 及 $\int\frac{\cos z}{z}dz$.

(注意) $\int\frac{\sin z}{z}dz$ 及 $\int\frac{\cos z}{z}dz$. 名爲積分正弦及積分餘弦之新超越函數。

〔例〕 1. $\int\frac{x^4+1}{x^2-1}\sin x\,dx.$

(解) $$\frac{x^4+1}{x^2-1}=x^2+1+\frac{2}{x^2-1}=x^2+1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}.$$

$\therefore$ $$\int\frac{x^4+1}{x^2-1}\sin x\,dx=\int x^2\sin x\,dx+\int\sin x\,dx.$$

$$+\int\frac{\sin x}{x-1}dx-\int\frac{\sin x}{x+1}dx.$$

然 $$\int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\,dx.$$

∴ $$\int x^2\sin x\,dx + \int \sin x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + \cos x.$$

又 $$\int \frac{\sin x}{x-1}dx = \int \frac{\sin(z+1)}{z}dz = \cos 1\int \frac{\sin z}{z}dz$$

$$+\sin 1\int \frac{\cos z}{z}dz.$$

$$\int \frac{\sin x}{x+1}dx = \int \frac{\sin(z'-1)}{z'}dz' = \cos 1\int \frac{\sin z'}{z'}dz'$$

$$-\sin 1\int \frac{\cos z'}{z'}dz'.$$

由是所求積分之結果爲

$$-x^2\cos x + 2x\sin x + \cos x + \cos 1\left(\int \frac{\sin z}{z}dz + \int \frac{\sin z'}{z'}dz'\right)$$

$$+\sin 1\left(\int \frac{\cos z}{z}dz - \int \frac{\cos z'}{z'}dz'\right).$$

〔例〕 2. $\int x^3\cos^2 x\,dx.$

(答) $$\frac{x^4}{8} + \frac{x(2x^2-3)}{8}\sin 2x + \frac{3(2x^2-1)}{16}\cos 2x.$$

(IV) $G(x)e^{ax}\sin bx$ 及 $G(x)e^{ax}\cos bx$ 之積分 (但 $G(x)$ 爲整函數)。

介 $u = G(x)e^{ax}$, dv 爲 $\sin bx\,dx$ 或 $\cos bx\,dx$ 適用部分積分法得

$$\int G(x)e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$= -\frac{1}{b}G(x)e^{ax}\cos bx + \frac{1}{b}\int \frac{d}{dx}\{G(x)e^{ax}\}\cos bx\,dx$$

$$= -\frac{1}{b}G(x)e^{ax}\cos bx + \frac{1}{b}\int G'(x)e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$+\frac{a}{b}\int G(x)e^{ax}\cos bx\,dx.$$

$$\int G(x)e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$= \frac{1}{b}G(x)e^{ax}\sin bx - \frac{1}{b}\int \frac{d}{dx}\{G(x)e^{ax}\}\sin bx\,dx$$

$$= \frac{1}{b}G(x)e^{ax}\sin bx - \frac{1}{b}\int G'(x)e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$-\frac{a}{b}\int G(x)e^{ax}\sin bx\,dx.$$

由此二式得

$$\int G(x)e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}G(x)e^{ax}$$

$$+\frac{b}{a^2+b^2}\int G'(x)e^{ax}\cos bx\,dx - \frac{a}{a^2+b^2}\int G'(x)e^{ax}\sin bx\,dx.$$

$$\int G(x)e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}G(x)e^{ax}$$

$$-\frac{a}{a^2+b^2}\int G'(x)e^{ax}\cos bx\,dx - \frac{b}{a^2+b^2}\int G'(x)e^{ax}\sin bx\,dx.$$

陸續適用此二種公式。最後 $G(x)$ 之導來函數爲常數。即可得次之積分,

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}.$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}.$$

(參照第一章第6節例7)。

〔例〕 1. $\int xe^x \sin x\,dx$.

(解) 依公式。

$$\int xe^x \sin x\,dx$$

$$=\frac{\sin x-\cos x}{2}xe^x+\frac{1}{2}\int e^x\cos x\,dx-\frac{1}{2}\int e^x\sin x\,dx$$

$$=\frac{\sin x-\cos x}{2}xe^x+\frac{\cos x-\sin x}{4}e^x-\frac{\cos x+\sin x}{4}e^x$$

$$=\frac{\sin x-\cos x}{2}xe^x-\frac{\sin x}{2}e^x.$$

〔例〕 2. $\int e^{2x}\cos^2 x\,dx.$

(答) $\dfrac{e^{2x}\cos x(\sin x+\cos x)}{4}+\dfrac{e^{2x}}{8}.$

第三章 關於定積分之定理

1. 定積分之値之求法。

如第一章末之注意已說明。求得不定積分時。卽可容易從此求得定積分之值。而第二章專論不定積分一般之求法。今反覆詳論此中之關係。

函數$\varphi(x)$於(a, b)有限區域內。爲一價且連續。則於此區域內。此導來函數之函數$f(x)$如次。

$$\int\varphi(x)\,dx=f(x).$$

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\varphi(x+k\,\Delta x)\,\Delta x=\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\,dx \quad \left(但\ \Delta x=\frac{\beta-\alpha}{n}\right).$$

$$=\varphi(\beta)-f(\alpha).$$

函數$f(x)$之能求得者。僅爲極特別之一部分。而其不能求得者。反無限制。於定積分之應用。在如此之式。爲特別定積分。故其值有能求得者。又不盡根數夾於二個分數之間。依同樣之方法。有時可求其近似值。或以級數表之。

本章於積分之意義較擴張。故對於不能依不定積分之式之彌縫策。並(a, b)區域內爲無限之式。及函數$\varphi(x)$不連續之式。均詳論之。

〔例〕 1. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx,\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx.$

(n表不爲1之正整數)。

(解) 先令

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\left|\int\cos^n x\,dx\right|_{x=\frac{\pi}{2}}-\left|\int\cos^n x\,dx\right|_{x=0}.$$

令 $x=\frac{\pi}{2}-z.$ 則

$$=\left|-\int\sin^n z\,dz\right|_{\frac{\pi}{2}-z=\frac{\pi}{2}}-\left|-\int\sin^n z\,dz\right|_{\frac{\pi}{2}-z=0}$$

$$=\left|\int\sin^n z\,dz\right|_{z=\frac{\pi}{2}}-\left|\int\sin^n z\,dz\right|_{z=0}$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n z\,dz=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx.$$

由是此二個定積分之值相等。

然 $F(b)-F(a)$ 之記號。以 $\Big| F(x) \Big|_a^b$ 表之。

依部分積分法。則

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{(\sin x)^{n-1}\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int (\sin x)^{n-2} dx.$$

[見第二章第8節公式(7)]。

$$\therefore \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = -\left|\frac{(\sin x)^{n-1}\cos x}{n}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} dx$$

$$= \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} dx.$$

試反覆適用此公式。則由 n 之偶數與奇數。得次之二式。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2p} dx = \frac{2p-1}{2p}\cdot\frac{2p-3}{2p-2}\cdot\frac{2p-5}{2p-4}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2p+1} dx = \frac{2p}{2p+1}\cdot\frac{2p-2}{2p-1}\cdot\frac{2p-4}{2p-3}\cdots\cdots\frac{2}{3}.$$

(注意) 由上記之定積分。則計算 π 之值。可歸着至哇里氏 (*Wallis*) 之公式。即於 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 區域內。為

$$(\sin x)^{2p-1} \geqq (\sin x)^{2p} \geqq (\sin x)^{2p+1}.$$

$$\therefore \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2p-1} dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2p} dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2p+1} dx.$$

故

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\cdots\frac{2p-2}{2p-1} > \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{2p-1}{2p}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$> \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\cdots\frac{2p-2}{2p-1}\cdot\frac{2p}{2p+1}.$$

$$1>\frac{1}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdots\cdots\frac{(2p-3)^2}{(2p-2)^2}\cdot\frac{(2p-1)^2}{2p}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$>\frac{2p}{2p+1}=1-\frac{1}{2p+1}.$$

$$\therefore\qquad \frac{\pi}{2}=\underset{p=\infty}{Lim}\,\frac{2.2.4.4.6\ldots\ldots 2p-2.2p}{1.3.3.5.5\ldots\ldots 2p-1.2p-1}.$$

(例) 2. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}$. (但 $n>2$)。

(解) 於 (0, 1) 區域，則

$$1\geqq\frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\geqq\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

故
$$\int_0^1 dx>\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}>\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\Big|x\Big|_0^1>\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}>\Big|log(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1.$$

[見第二章第4節例 (2)]。

即
$$1>\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}>log(1+\sqrt{2})=0.881\ldots.$$

2. 平均値之定理。

(I) 積分函數 $\int\varphi(x)\,dx=f(x)$。試適用平均值之定理(微分學第38頁)。則

$$\int_a^\beta\varphi(x)\,dx=f(\beta)-f(a)=(\beta-a)f'\{a+\theta(\beta-a)\}.\quad 0<\theta<1.$$

即
$$\int_a^\beta\varphi(x)\,dx=(\beta-a)\varphi\{a+\theta(\beta-a)\}.\quad 0<\theta<1.$$

適用此公式。求得定積分之値之界限。

(II) 積分之函數$\varphi(x)$。由二個因數$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$而成。此積分於(α,β)區域內$\varphi_1(x)$常爲正。則於此區域內之$\varphi_2(x)$。其最大及最小之值。命爲g及k。

則 $$g \geqq \varphi_2(x) \geqq k.$$

以$\varphi_1(x) > 0$. 而

$$g\varphi_1(x) \geqq \varphi_1(x)\varphi_2(x) \geqq k\varphi_1(x).$$

$$\therefore \qquad g\int_\alpha^\beta \varphi_1(x)\,dx > \int_\alpha^\beta \varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx > k\int_\alpha^\beta \varphi_1(x)\,dx.$$

此定積分有確定值。則

$$g > \varphi_2\{\alpha+\theta(\beta-\alpha)\} > k. \quad 0<\theta<1.$$

其適於上式之θ必可存在。從而

$$\int_\alpha^\beta \varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx = \varphi_2\{\alpha+\theta(\beta-\alpha)\}\int^\beta \varphi_1(x)\,dx. \quad 0<\theta<1.$$

由是可求得定積分之值之大略。

〔例〕 1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$. (但$k^2<1$).

(解) 於$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$區域內之$\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$。其最大值爲$x=0$之值1。最小值爲$x=\frac{\pi}{2}$之$\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}$。由是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} > \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx.$$

即 $$\frac{\pi}{2} > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} > \frac{\pi}{2\sqrt{1-k^2}}.$$

〔例〕 2. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$. (但 $k^2<1, 0<a<1$).

(解) $\phi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\phi_2(x)=\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}$.

試適用第二公式。則以 $\phi_2(x)$ 之最小值爲 1。最大值爲 $\frac{1}{\sqrt{1-k^2a^2}}$.

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}<\int^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{1-k^2a^2}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

即 $$sin^{-1}a>\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}>\frac{sin^{-1}a}{\sqrt{1-k^2a^2}}.$$

$\therefore$ $$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\left\{1+\theta\left(\frac{1}{\sqrt{1-k^2a^2}}-1\right)\right\}sin^{-1}a.$$

$0<\theta<1.$

3. 於界限內不連續之函數之積分。

依最初之定義。則積分之函數 $\phi(x)$。其積分於 (α, β) 區域內。爲一價且連續 今將此定義擴張。$\phi(x)$ 於其區域內。爲有限回飛變而不連續及無限大之式。

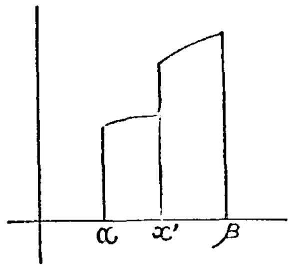
(I) (α, β) 內之點 x' 爲飛變而不連續。

則 $$\int_\alpha^{x'} \phi(x)\,dx,\quad \int_{x'}^\beta \phi(x)\,dx.$$

各由定義以確定。而

$$\int_\alpha^\beta \phi(x)\,dx=\int_\alpha^{x'} \phi(x)\,dx+\int_{x'}^\beta \phi(x)\,dx.$$

則$\natural(x)$宜爲有限回飛變之不連續。



(II)　(α,β)的界限內爲無限大。

於上限β爲$\natural(x)$的無限大。ϵ爲任意小之正數。則

$$\int_{\alpha}^{\beta-\epsilon}\natural(x)\,dx=f(\beta-\epsilon)-f(\alpha).$$

是爲有限確定。

若$\underset{\epsilon=0}{Lim}\,f(\beta-\epsilon)$有有限確定値。則

$$\int_{\alpha}^{\beta}\natural(x)\,dx=\underset{\epsilon=0}{Lim}\int_{\alpha}^{\beta-\epsilon}\natural(x)\,dx=\underset{\epsilon=0}{Lim}\,f(\beta-\epsilon)-f(\alpha).$$

若$\underset{\beta=0}{Lim}\,f(\beta-\epsilon)$爲無限大或爲不定。則此積分之値。亦爲無限大或爲不定。

下限α及雙方之界限$\natural(x)$爲無限大時。亦可同樣定之。卽

$$\int_{\alpha}^{\beta}\natural(x)\,dx=\underset{\eta=0}{Lim}\int_{\alpha+\eta}^{\beta}\natural(x)\,dx=f(\beta)-\underset{\eta=0}{Lim}\,f(\alpha+\eta).$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}\natural(x)\,dx=\underset{\epsilon=0}{Lim}\,f(\beta-\epsilon)-\underset{\eta=0}{Lim}\,f(\alpha+\eta).$$

(III)　(α,β)內之點x'爲無限大。

則

$$\int_{\alpha}^{\beta}\natural(x)\,dx=\underset{\epsilon=0}{Lim}\int_{\alpha}^{x'-\epsilon}\natural(x)\,dx+\underset{\eta=0}{Lim}\int_{x'+\eta}^{\beta}\natural(x)\,dx$$

$$=f(\beta)-f(\alpha)+\underset{\epsilon=0}{Lim}\,f(x'-\epsilon)-\underset{\eta=0}{Lim}\,f(x'+\eta).$$

從而$\underset{\epsilon=0}{Lim}\,f(x'-\epsilon)$與$\underset{\eta=0}{Lim}\,f(x'+\eta)$。任何爲有限確定。則積分之値。亦爲有限確定。

(注意) $\phi(x)$ 於積分區域內忘其爲無限大。而求其積分之値。往往錯誤。

例如

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \underset{\epsilon=0}{Lim} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \underset{\eta=0}{Lim} \int_{1+\eta}^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \underset{\epsilon=0}{Lim} \frac{-1}{(1-\epsilon)-1} - \frac{-1}{0-1}$$

$$+ \frac{-1}{2-1} - \underset{\eta=0}{Lim} \frac{-1}{(1+\eta)-1}$$

$$= -2 + \underset{\epsilon=0}{Lim} \frac{1}{\epsilon} + \underset{\eta=0}{Lim} \frac{1}{\eta}.$$

故此積分之値。宜爲無限大。若忘却不連續點。則如

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left| \frac{-1}{x-1} \right|_0^2 = -2.$$

又

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \underset{\epsilon=0}{Lim} \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x} + \underset{\eta=0}{Lim} \int_{\eta}^1 \frac{dx}{x}$$

$$= \underset{\epsilon=0}{Lim}\ log(-\epsilon) - log(-1) + log(1) - \underset{\eta=0}{Lim}\ log(\eta)$$

$$= \underset{\epsilon=0}{Lim}\ log\frac{-\epsilon}{-1} - \underset{\eta=0}{Lim}\ log(\eta) = \underset{\epsilon=0,\ \eta=0}{Lim} \frac{\epsilon}{\eta}.$$

故此積分之値爲不定。

〔例〕 1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

(解)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \underset{\epsilon=0}{Lim} \left| sin^{-1}x \right|_0^{1-\epsilon} = \underset{\epsilon=0}{Lim}\ sin^{-1}(1-\epsilon) sin^{-1}0$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

〔例〕 2. $\int_0^a \frac{dx}{a^2-x^2}$. $(a>0)$.

(解) $$\int_0^a \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\int_0^a\left(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^a\frac{dx}{a-x}+\frac{1}{2a}\int_0^a\frac{dx}{a+x}$$

$$=\frac{1}{2a}\underset{\epsilon=0}{Lim}\left|-log(a-x)\right|_0^{a-\epsilon}+\frac{1}{2a}\left|log(a+x)\right|_0^a$$

$$=\frac{1}{2a}\underset{\epsilon=0}{Lim}\ log\,\epsilon+\frac{1}{2a}log(2a).$$

故此積分之值為無限大。

〔例〕 3. $\int_\alpha^\beta \frac{dx}{(x-\alpha)^n}$.

(解) $$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{(x-\alpha)^n}=\frac{1}{n+1}\underset{\eta=0}{Lim}\left|\frac{-1}{(x-\alpha)^{n-1}}\right|_{\alpha+\eta}^{\beta}\qquad (n\neq 1).$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{\underset{\eta=0}{Lim}\frac{1}{\eta^{n-1}}-\frac{1}{(\beta-\alpha)^{n-1}}\right\}.$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x-\alpha}=\underset{\eta=0}{Lim}\left|log(x-\alpha)\right|_{\alpha+\eta}^{\beta}$$

$$=log(\beta-\alpha)-\underset{\eta=0}{Lim}\ log\,\eta.$$

由是此積分之值，若$n<1$，則為有限。

而 $$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{(x-\alpha)^n}=-\frac{(\beta-\alpha)^{1-n}}{n+1}.\qquad (n<1).$$

若$n\geqq 1$。則為無限大。

〔例〕 4. $\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}}dx$.

(答) $\frac{3}{8}\pi a^2$.

〔例〕 5. $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$.

(答)　π.

〔例〕 6. $\int_{0}^{2}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}dx$.

(解)　$\int\frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}dx=\frac{3}{2}(1-x)^{\frac{2}{3}}+\frac{3}{5}(1-x)^{\frac{5}{3}}$.

$$\therefore\quad \int_{0}^{2}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}dx=\underset{\epsilon=0}{Lim}\int_{0}^{1-\epsilon}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}dx+\underset{\eta=0}{Lim}\int_{1+\eta}^{2}\frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}$$

$$=\underset{\epsilon=0}{Lim}\left(\frac{3}{2}\epsilon^{\frac{2}{3}}+\frac{3}{5}\epsilon^{\frac{5}{3}}\right)-\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{5}\right)$$

$$+\frac{3}{2}(-1)^{\frac{2}{3}}+\frac{3}{5}(-1)^{\frac{5}{3}}$$

$$-\underset{\eta=0}{Lim}\left\{\frac{3}{2}(-\eta)^{\frac{2}{3}}+\frac{3}{5}(-\eta)^{\frac{5}{3}}\right\}$$

$$=-\frac{6}{5}.$$

4. 界限的無限大之積分。

依前所擴張積分之第二定義。考積分界限之一方及雙方爲無限大之式。

先令 $x'>a$。其 $\varphi(x)$ 之積分不拘 x' 爲如何。於 (a, x') 區域內有有限確定值。由是令

$$\int_{a}^{x'}\varphi(x)dx=f(x')-f(a).$$

若 $\underset{x'=\infty}{Lim}f(x')$ 爲有限確定。則決定其積。可如次表之。

$$\int_{a}^{\infty}\varphi(x)dx=\underset{x'=\infty}{Lim}\int_{a}^{x'}\varphi(x)dx=\underset{x'=\infty}{Lim}f(x')-f(a).$$

下限α爲無限大。亦可同樣定之。如

$$\int_{-\infty}^{\beta} \phi(x)\,dx = \underset{x''=\infty}{Lim} \int_{x''}^{\beta} \phi(x)\,dx = f(\beta) - \underset{x''=\infty}{Lim} f(x'').$$

又上下限均爲無限大。則

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,dx = \underset{x'=\infty,\, x''=-\infty}{Lim} \int_{x''}^{x'} \phi(x)\,dx$$

$$= \underset{x'=\infty}{Lim} f(x') - \underset{x''=-\infty}{Lim} f(x'').$$

若 $\underset{x'=\infty}{Lim} f(x')$, $\underset{x''=-\infty}{Lim} f(x'')$ 非爲有限確定。而爲無限大或爲不定。則其時積分之值。亦爲無限大或爲不定。

〔例〕 1. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$. $(a>0)$.

（解） $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} tan^{-1} \frac{x}{a}.$$

∴ $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \underset{x=\infty}{Lim} \left(tan^{-1} \frac{x}{a}\right) - \frac{1}{a} tan^{-1} 0.$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2a}.$$

〔例〕 2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

（解） $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \underset{x'=\infty}{Lim} (tan^{-1} x') - \underset{x''=-\infty}{Lim} (tan^{-1} x'')$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

〔例〕 3. $\int_a^{\infty} e^{-x} dx$.

（解） $$\int_a^{\infty} e^{-x} dx = -\underset{x=\infty}{Lim} e^{-x} + e^{-a} = e^{-a}.$$

〔例〕 4. $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$, $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$. $(a>0)$。

(解) 如第一章第6節例7。得

$$\int e^{-ax}\sin bx\,dx=-\frac{a\sin bx+b\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax}.$$

$$\int e^{-ax}\cos bx\,dx=-\frac{a\cos bx-b\sin bx}{a^2+b^2}e^{-ax}.$$

入此等界限。試求其極限值。則

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

〔例〕 5 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$

(解) 此積分之不定積分。以已知函數之有限項表之難矣。由是分爲二部分。如

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\int_0^1 e^{-x^2}dx+\int_1^\infty e^{-x^2}dx.$$

通過積分 (0, 1) 之區域。以 $e^{-x^2}\leqq 1$。而 $\int_0^1 e^{-x^2}dx<1.$

次於積分域 $(1,\infty)$。則 $e^{-x^2}\leqq e^{-x^2}\times x.$

$$\therefore\qquad \int_1^\infty e^{-x^2}dx<\int_1^\infty e^{-x^2}x\,dx=\left|-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right|_1^\infty=\frac{1}{2e}.$$

故 $$0<\int_0^\infty e^{-x^2}dx<1+\frac{1}{2e}$$

由是知此定積分有有限確定值。(實則此定積分之值。由變率之使用。得以證明 $\sqrt{\pi}/2$)。

5. 無限級數之積分。

函數$\varphi(x)$。於(α,β)區域內。爲一價連續之函數。試展開爲級數。則

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\ldots+\varphi_{n-1}(x)+R_n(x).$$

此$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_{n-1}(x),R_n(x)$.假定任何亦爲一價連續。則由第一章第4節(II)。

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx=\int_\alpha^\beta \varphi_0(x)\,dx+\int_\alpha^\beta \varphi_1(x)\,dx+\int_\alpha^\beta \varphi_2(x)\,dx$$

$$+\ldots+\int_\alpha^\beta \varphi_{n-1}(x)\,dx+\int_\alpha^\beta R_n(x)\,dx.$$

是$\underset{n=\infty}{Lim} R_n(x)=0$.且$\underset{n=\infty}{Lim}\int_\alpha^\beta R_n(x)\,dx=0$.

則無限級數積分之值。亦得爲無限級數如次。

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\ldots.$$

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx=\int_\alpha^\beta \varphi_0(x)\,dx=\int_\alpha^\beta \varphi_1(x)\,dx+\int_\alpha^\beta \varphi_2(x)\,dx+\ldots.$$

(注意) $\underset{n=\infty}{Lim} R_n(x)\neq 0$ 而 $\underset{n=\infty}{Lim}\int R_n(x)\,dx=0$.

則此積分之級數收歛於一點。

(例) 1. 試表$\int_0^a \frac{dx}{1+x}$. $(0<a<1)$爲無限級數。

(解) $$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^n\frac{x^n}{1+x}.$$

而由 $0\leqq x<a<1$. 得 $0<\frac{1}{1+x}\leqq 1$.

$$\therefore \qquad 0<\int_0^a \frac{x^n}{1+x}dx<\int_0^a x^n dx=\frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

$$\therefore \qquad \lim_{n=\infty}\frac{x^n}{1+x}=0,\quad \lim_{n=\infty}\int_0^a \frac{x^n}{1+x}dx=0.$$

$$\therefore \qquad \int_0^a \frac{dx}{1+x}=\int_0^a dx-\int_0^a x\,dx+\int_0^a x^2dx-\int_0^a x^3dx+\cdots.$$

然 $\int_0^a \frac{dx}{1+x}=\log(1+a)$. 而

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x}=\log(1+a)=\frac{a}{1}-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\cdots.$$

$$(0<a<1).$$

特 $a=1$. 則得附條件收斂之無限級數。

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots.$$

〔例〕 2. 試展開 $\int_0^a \frac{dx}{1+x^2}$. $(0<a\leqq 1)$ 爲無限級數。

(解) $$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+(-1)^n\frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$

由是與前例同樣.得

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x^2}=\Big|\tan^{-1}x\Big|_0^a.$$

$$\tan^{-1}a=a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}-\frac{a^7}{7}+\cdots.$$

特 $$\frac{\pi}{2}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

〔例〕 3. 試展開 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. $(0<a<1)$ 爲無限級數。

(解) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\dots$$

$$+\frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2.4.6\dots(2n-2)}x^{2n-2}+R_n(x).$$

$$R_n(x)=\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots\ 2n}\cdot\frac{1}{(1-\theta x^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

[參照微分學第94頁]。

$$\therefore\qquad \int_0^a R_n(x)\,dx<\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots\ 2n}\cdot\frac{1}{(1-\theta)^{n+\frac{1}{2}}}\int^a x^n dx$$

$$<\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots\ 2n}\cdot\frac{a^{n+1}}{(1-\theta)^{n+\frac{1}{2}}(n+1)}.$$

$$\therefore\qquad \lim_{n=0}\int_0^a R_n(x)\,dx=0.$$

$$\therefore\qquad \int_0^a\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^a dx+\frac{1}{2}\int_0^a x^2dx+\frac{1.3}{2.4}\int_0^a x^4dx+\dots.$$

$$\sin^{-1}a=\frac{a}{1}+\frac{1}{2.3}a^3+\frac{1.3}{2.4.5}a^5+\dots.$$

特 $a=1$ 則得收歛級數如次，

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2.3}+\frac{1.3}{2.4.5}+\dots.$$

〔例〕 4. $\int_a^x \frac{e^x}{x}dx$. $(0<a<x)$.

(解) $$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots.$$

$$\therefore\qquad \frac{e^x}{x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{1!}+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\dots.$$

$$\therefore \quad \int_a^x \frac{e^x}{x}dx=\int_a^x \frac{dx}{x}+\frac{1}{1!}\int_a^x dx+\frac{1}{2!}\int_a^x x\,dx+\frac{1}{3!}\int_a^x x^2dx+\dots$$

$$=\log\frac{x}{a}+\frac{x-a}{1!\,1}+\frac{x^2-a^2}{2!\,2}+\frac{x^3-a^3}{3!\,3}+\dots.$$

〔例〕 5. $\int_0^x \frac{\log(1+x)}{x}dx.\quad (0<x<1).$

(解) $\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots.$

$$\therefore \quad \int_0^x \frac{\log(1+x)}{x}dx=\frac{x}{1^2}-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\dots.$$

特 $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}dx=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\dots.$

同樣。 $\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}dx=-\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\dots.$

〔例〕 6. $\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx.$

(答) $\frac{x}{1!\,1}-\frac{x^3}{3!\,3}+\frac{x^5}{5!\,5}-\dots.$

〔例〕 7. $\int^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.\quad (0<x\leqq 1,\ k^2<1).$

(解) $$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1-k^2x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{1+\frac{1}{2}k^2x^2+\frac{1.3}{2.4}k^4x^4+\dots\right\}.$$

$$\therefore \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$+\frac{1}{2}k^2\int_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1.3}{2.4}k^4\int_0^x \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}+\dots.$$

而$\int^{x}\frac{x^{2p}dx}{\sqrt{1-x^2}}$如第二章第5節例5所示。由累次積分法可求得其值。特上限爲1。則

$$\int_0^1\frac{x^{2p}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....\quad 2n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

而 $$K=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

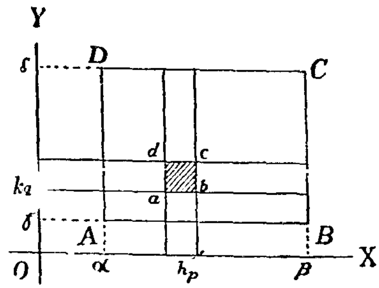
$$=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\left(\frac{1.3\ 5}{2.4\ 6}\right)^2k^6+\ldots\right\}.$$

(注意) 例4以下剩餘式之意味。略而不贅。

第四章 重積分

1. 界限爲常數之二重積分。

函數$\phi(x,y)$。其x於(α,β)區域內。y於(γ,δ)區域內。爲一價且連續。



直角坐標軸。於(α,β), (γ,δ)區域。可表$ABCD$矩形。

今於(α,β)區域。分爲m個。順次令爲

$$h_1, h_2, \ldots, h_p, \ldots, h_m.$$

於(γ,δ)區域分爲n個。順次令爲

$$k_1, k_2, \ldots, k_q, \ldots k_n.$$

如圖h_p與k_q得表小區域之矩形$abcd$。此以$[h_p, k_q]$表之。

於 $[h_p, k_q]$ 區域之變數。表以 x_p, y_q. 考次列二重之和。

$$S=\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} k_q h_p \phi(x_p, y_q).$$

於 $[h_p, k_q]$ 之 $\phi(x_p, y_q)$。其最大值與最小值。令爲 $g_{h,q}, l_{h,q}$。於 $[(\alpha,\beta)(\gamma,\delta)]$ 全域之 $\phi(x,y)$。其最大值與最小值。令爲 G, L。則

$$S_g=\sum_q\sum_p k_q h_p g_{p,q}>S.$$

$$S_l=\sum_q\sum_p k_q h_p l_{p,q}<S.$$

$$\sum\sum k_q h_p G=(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)G>S_g.$$

$$\sum\sum k_q h_p L=(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)L<S_l.$$

$$\therefore \qquad (\beta-\alpha)(\delta-\gamma)G>S_g>S>S_l>(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)L.$$

是則 S 不拘 m, n 爲如何。可知常止於有限之值。

又 S_g, S_l。因 m, n 之增大。從而迫近於 S。且

$$S_g-S_l=\sum\sum k_q h_p(g_{p,q}-l_{p,q}).$$

而 $\phi(x, y)$ 爲連續函數。對於任意之值 ϵ。爲

$$|(\phi(x,y)-\phi(x_p, y_q)|<\epsilon. \qquad |x-x_p|<\eta.$$
$$|y-y_q|<\eta.$$

以此定 η。而

$$|g_{p,q}-\phi(x_p, y_q)|<\epsilon.$$

$$|l_{p,q}-\phi(x_p, y_q)|<\epsilon.$$

$$\therefore \qquad g_{p,q}-l_{p,q}<2\epsilon.$$

$$\therefore \qquad S_g-S_l<\sum\sum k_q h_p.2\epsilon=(\beta-\alpha)(\delta-\gamma).2\epsilon.$$

即 S_g-S_l 爲各 h, 各 k 之次第取法。得比如何之正數小。

故 $Lim\, h=0$, $Lim\, k=0$. 於其極限之 S。可知能收斂爲不過有限之確定值。

此有限確定之 $Lim\,S$ 之值稱 $\mathfrak{f}(x,y)$ 之二重積分 Double Integral)，表之如次。

$$\int\limits_{(\alpha,\,\beta)}\int\limits_{(\gamma,\,\delta)}\mathfrak{f}(x,\,y)\,dx\,dy=Lim\,S=Lim\,\Sigma\,\Sigma k_q h_p\mathfrak{f}(x_p,\,y_q).$$

次述此二重積分爲積分之積分。

考 S 二重之和之取法，得次二樣之順序。

$$\sum_q\sum_p k_q h_p f(x_p,\,y_q)=\sum_q k_q\sum_p h_p f(x_p,\,y_q)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$=\sum_p h_p\sum_p k_q\mathfrak{f}(x_p,\,y_q)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

於 (1)，以

$$\underset{h=0}{Lim}\sum_q h_p\mathfrak{f}(x_p,\,y_q)=\int_\alpha^\beta\mathfrak{f}(x,\,y_q)\,dx.$$

而令 $\quad\sum_p h_p\mathfrak{f}(x_p,\,y_q)=\int_\alpha^\beta\mathfrak{f}(x,\,y_q)\,dx+\rho_q.$

則 ρ_q 之值。於 $Lim\,h=0$ 之極限爲 0，從而

$$\sum_q k_q\sum_p h_p\mathfrak{f}(x_p,\,y_q)=\sum_q k_q\int_\alpha^\beta\mathfrak{f}(x,\,y_q)\,dx+\sum_q k_q\rho_q.$$

令 $\rho_1,\rho_2\ \ldots,\rho$ 之最大絕對值爲 ρ，而 k 任何亦爲正。

$$\Big|\sum_q k_q\rho_q\Big|\leqq\sum_q k_q|\rho_q|\leqq|\rho|\,\Sigma k_q=|\rho|(\delta-\gamma).$$

$\therefore\qquad \underset{h=0,\,k=0}{Lim}\sum_q k_q\rho_q=0.$

$\therefore\qquad \displaystyle\int\limits_{(\alpha,\,\beta)}\int\limits_{(\gamma,\,\delta)}\mathfrak{f}(x,\,y)\,dx\,dy=\underset{h=0,\,k=0}{Lim}\sum_q k_q\sum_p h_p\mathfrak{f}(x_p,\,y_q)$

$$=\underset{k=0}{Lim}\sum_q k_\delta\int_\alpha^\beta\mathfrak{f}(x,\,y_q)\,dx$$

$$=\int_\gamma^\delta\Big\{\int_\alpha^\beta\mathfrak{f}(x,\,y)\,dx\Big\}dy.$$

於(2)，依同樣之手續。亦得

$$\int_{(\alpha,\beta)}\int_{(\gamma,\delta)}\phi(x,y)\,dx\,dy=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\int_{\gamma}^{\delta}\phi(x,y)\,dy\right\}dx.$$

又 $$\int_{\gamma}^{\delta}\left\{\int_{\alpha}^{\beta}\phi(x,y)\,dx\right\}dy=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\int_{\gamma}^{\delta}\phi(x,y)\,dy\right\}dx.$$

故此二重積分，得如次表之。

$$\int_{(\alpha,\beta)}\int_{(\gamma,\delta)}\phi(x,y)\,dx\,dy=\int_{\gamma}^{\delta}\int_{\alpha}^{\beta}\phi(x,y)\,dx\,dy.$$

(注意)。如上所述 (α,β)，(γ,δ) 之區域，雖任何亦為有限。例如

$$\underset{\beta=\infty}{Lim}\int_{\alpha}^{\beta}\phi(x,y)\,dx.$$

有有限確定值。且

$$\int_{\gamma}^{\delta}\left\{\underset{\beta=\infty}{Lim}\int_{\alpha}^{\beta}(x,y)\,dx\right\}dy.$$

亦有限確定。此以下式表之。

$$\int_{\gamma}^{\delta}\int_{\alpha}^{\infty}\phi(x,y)\,dx\,dy.$$

同樣 $$\int_{\gamma}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\phi(x,y)\,dx\,dy,\qquad \int_{\gamma}^{\infty}\int_{\alpha}^{\infty}\phi(x,y)\,dx\,dy.$$

$$\int_{\gamma}^{\delta}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,y)\cdot x\,dy,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,y)\,dx\,dy.$$

等，表任何之極限值。

〔例〕 1. $\int_{0}^{a}\int_{0}^{b}xy\,dx\,dy.$

(解) $$\int_{0}^{b}xy\,dx=\left|\frac{x^2}{2}y\right|_{x=0}^{x=b}=\frac{b^2}{2}y.$$

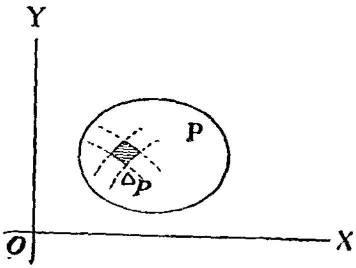
$$\therefore\quad \int_{0}^{a}\int_{0}^{b}xy\,dx\,dy=\frac{b^2}{2}\int_{0}^{a}y\,dy=\frac{b^2}{2}\left|\frac{y^2}{2}\right|_{0}^{a}=\frac{a^2b^2}{4}.$$

〔例〕 2. $\int_\alpha^\beta\int_0^\infty e^{-yx}dx\,dy.$

〔解〕 $\int_0^\infty e^{-yx}dx=\left|-\frac{1}{y}e^{-yx}\right|_0^\infty=\frac{1}{y}.$

∴ $\int_\alpha^\beta\int_0^\infty e^{-yx}dx\,dy=\int_\alpha^\beta\frac{dy}{y}=\log\frac{\beta}{\alpha}.$

2. 界限爲變數之二重積分。

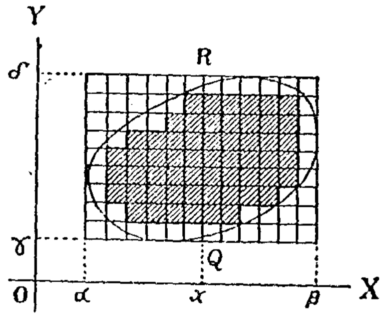


函數$\phi(x, y)$。於某域P爲一價且連續。此域內由某法則所分之小域$\Delta P_{p,q}$。其一組變數之值爲x_p, y_q。則作

$$\sum_p\sum_q\Delta P_{p,q}\phi(x_p, y_q).$$

若$Lim\ \Delta P=0$。於此二重和之極限值爲有限確定。則表之如下。

$$\iint_P\phi(x, y)\,dP.$$



此稱於P域之$\phi(x, y)$之二重積分。

今特作外接於域P。且有兩軸平行之邊之矩形。其邊爲$x=\alpha$, $x=\beta$及$y=\gamma$, $y=\delta$。分此矩形與前節同樣之小矩形(h_p, k_q)。則可得

$$Lim\sum_p\sum_q h_pk_q\phi(x_p, y_q)=\iint_P\phi(x, y)\,dx\,dy.$$

次導此二重積分。爲二個積分。

先以h_q爲一定。

$$\sum_q k_q \phi(x_p, y_q)$$

之極限值.與前節同樣。而

$$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \phi(x, y)\, dy.$$

但$\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ 爲包圍P域曲線之h_p之值。表示如次

$$xQ = y_1 = \psi_1(x).$$

$$xR = y_2 = \psi_2(x).$$

而後將h自h_1變至h_m考之。則二重和之極限值。爲

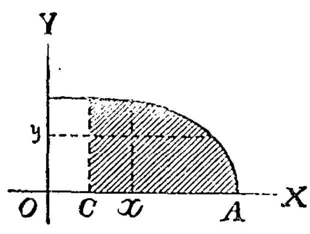
$$\int_a^\beta \left\{ \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \phi(x, y)\, dy \right\} dx.$$

試交換x與y。則

$$\int_\gamma^\delta \left\{ \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} \phi(x, y)\, dx \right\} dy.$$

〔例〕 1. 於$\iint_P \phi(x, y)\, dx\, dy$包圍$P$之曲線。爲

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad (x>0, y>0). \\ x = c, \\ y = 0. \end{cases}$$



則對於x之一定值。爲

$$\psi_1(x) = 0.$$

$$\psi_2(x) = y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

又對於y之一定值。爲

$$\chi_1(y)=c.$$

$$\chi_2(y)=x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

$$\therefore \qquad \iint\limits_P \phi(x,y)\,dx\,dy=\int_c^a\left\{\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\phi(x,y)\,dy\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}}\left\{\int_c^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}\phi(x,y)\,dx\right\}dy.$$

〔例〕 2. $\int_a^b\left\{\int_{-y}^{y}\sqrt{x+y}\,dx\right\}dy.$

(解) $$\int_{-y}^{y}\sqrt{x+y}\,dx=\left|\frac{2}{3}(x+y)^{\frac{3}{2}}\right|_{-y}^{y}=\frac{2}{3}(2y)^{\frac{3}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}y^{\frac{3}{2}}.$$

$$\therefore \qquad \int_a^b\int_{-y}^{y}\sqrt{x+y}\,dx\,dy=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_a^b y^{\frac{3}{2}}dy=\frac{4\sqrt{2}}{3}\left|\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right|_a^b$$

$$=\frac{8\sqrt{2}}{15}\left(\sqrt{b^5}-\sqrt{a^5}\right).$$

3. 三重積分。

函數$\phi(x,y,z)$。於$\alpha\leqq x\leqq\beta$, $\gamma\leqq y\leqq\delta$, $\epsilon\leqq z\leqq\eta$區域內。爲一價且連續。

分(α,β)爲$h_1,h_2,\ldots,h_p,\ldots,h_m$。$(\gamma,\delta)$爲$k_1,k_2,\ldots,k_q,\ldots,k_n$。$(\epsilon,\eta)$爲$l_1,l_2,\ldots,l_r,\ldots,l_u$。於$h_p$, k_q, l_r內之變數之一個一個。以x_p, y_q, z_r表之則三重和爲

$$\sum_p\sum_q\sum_r h_p k_q l_r \phi(x_p,y_q,z_r).$$

其各小域收歛爲0之極限値爲有限確定。則以下式表之。

$$\int_{(\alpha,\beta)}\int_{(\gamma,\delta)}\int_{(\epsilon,\eta)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

是名三重積分(*Triple Integral*)。

此三重積分。依第1節同樣之手續。可得書爲

$$\int_\alpha^\beta dx\int_\gamma^\delta dy\int_\epsilon^\eta f(x,y,z)\,dz.$$

又積分域非直六面體。爲一般面所圍之域R。則得表之如次.

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_\alpha^\beta dx\int_{\chi_1(x)}^{\chi_2(x)} dy\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

〔例〕 1. $\int_0^a\int_0^b\int_0^c x^3y^2z\,dz\,dy\,dx.$

(解) $$\int_0^c x^3y^2z\,dz=\left|\frac{1}{2}x^3y^2z^2\right|_0^c=\frac{1}{2}c^2x^3y^2.$$

$$\therefore\quad \int_0^b\int_0^c x^3y^2z\,dz\,dy=\frac{1}{2}c^2\int_0^b x^3y^2dy=\frac{1}{2}c^2\left|\frac{1}{3}x^3y^3\right|_0^b$$

$$=\frac{1}{6}b^3c^2x^3.$$

$$\therefore\quad \int_0^a\int_0^b\int_0^c x^3y^2z\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{6}b^3c^2\int_0^a x^3dx$$

$$=\frac{1}{6}b^3c^2\left|\frac{1}{4}x^4\right|_0^a=\frac{1}{24}a^4b^3c^2.$$

〔例〕 2. $\int_0^1\int_0^x\int_0^{x+y} e^{x+y+z}dz\,dy\,dx.$

(解) $$\int_0^{x+y} e^{x+y+z}dz=\left|e^{x+y+z}\right|_0^{x+y}=e^{2(x+y)}-e^{x+y}.$$

$$\therefore \qquad \int_0^x dy \int_0^{x+y} e^{x+y+z} dz = \int_0^x e^{2(x+y)}\, dy - \int_0^x e^{x+y} dy$$

$$= \Big| \frac{1}{2} e^{2(x+y)} \Big|_0^x - \Big| e^{x+y} \Big|_0^x$$

$$= \frac{1}{2} e^{4x} - \frac{1}{2} e^{2x} - e^{2x} + e^x$$

$$= \frac{1}{2} e^{4x} - \frac{3}{2} e^{2x} + e^x.$$

$$\therefore \qquad \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{x+y} e^{x+y+z} dz = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{4x} dx - \frac{3}{2}\int_0^1 e^{2x} dx + \int_0^1 e^x dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big| \frac{1}{4} e^{4x} \Big|_0^1 - \frac{3}{2}\Big| \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 + \Big| e^x \Big|_0^1$$

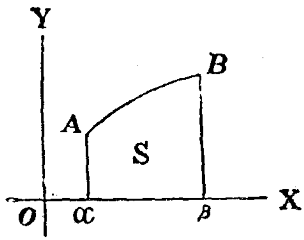
$$= \frac{1}{8} e^4 - \frac{1}{8} - \frac{3}{4} e^2 + \frac{3}{4} + e - 1$$

$$= \frac{1}{8} e^4 - \frac{3}{4} e^2 + e - \frac{3}{8}.$$

後篇 曲線曲面等之應用

第五章 平面圖形

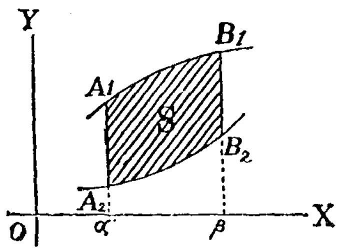
1. 平面曲線包圍之面積。



曲線 $y=f(x)$ 於 (α, β) 域內。爲一價連續。且決不爲負。或決不爲正。則此曲線。與 x 軸 $x=\alpha$, $y=\beta$ 包圍之面積爲 S。依第一章第7節所述如次。

$$S=\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

曲線於 (α, β) 域內。爲飛變之不連續。但爲有限回數。及平行於 y 軸有漸近線。則依第三章第3節。得求其面積之極限值。若曲線平行於 x 軸有漸近線.而域爲無限。則依第三章第4節以求之。



二種曲線 $y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$。於 (α, β) 域內 $y_1 \geqq y_2$。

此兩曲線與 $x=\alpha$ 及 $x=\beta$ 包圍之面積 S 如次。

$$S=\int_\alpha^\beta \{f_1(x)-f_2(x)\}\,dx \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(注意) 曲線之方程式 $x=\psi(t)$, $y=\chi(t)$。從公式(1)。得面積如次。

$$dx=\psi'(t)\,dt.$$

從 $\alpha=\psi(t)$. 得 $t=t_0$.

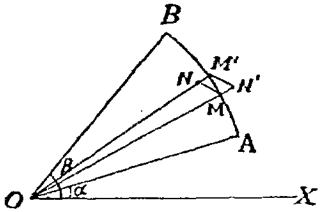
從 $\beta=\psi(t)$. 得 $t=t_1$.

$$\therefore \quad S=\int_{t_0}^{t_1}\chi(t)\psi'(t)\,dt \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

2. 極式坐標之面積。

關於極式坐標之曲線方程式。爲

$$r=f(\phi).$$



此曲線與 $\phi=\alpha$, $\phi=\beta$ 兩動徑所包圍扇形之面積爲 S。求之如次。

分 $\beta-\alpha$ 爲 n 個等分。每一等分。令爲 $\Delta\phi$。則

$$\frac{\beta-\alpha}{n}=\Delta\phi.$$

今取此等分之相鄰二動徑。OM, OM' 爲半徑。O 爲中心。作圓弧 MN, $M'N'$。其 N, N' 乃各與他動徑之交點。則

$$\text{扇形 } OMN=\frac{1}{2}r^2{}_p\Delta\phi.$$

$$\text{扇形 } OM'N'=\frac{1}{2}r^2{}_{p+1}\Delta\phi.$$

但 $r_p=f(\alpha+p\,\Delta\phi)$. $\quad 0\leqq p\leqq n$.

由是 $\quad S_n=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{2}r^2{}_p\Delta\phi. \qquad S'_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2}r^2{}_{p+1}\Delta\phi.$

$r=f(\phi)$。僅增大或僅減小於 (α,β) 之域則 S 在 S_n 與 S'_n 之間。而 $S_n\sim S'_n$。因 n 之增。從而達至任何小之程。

$$\therefore \quad S=\lim_{\Delta\phi=0}\Sigma\frac{1}{2}r^2\Delta\phi.$$

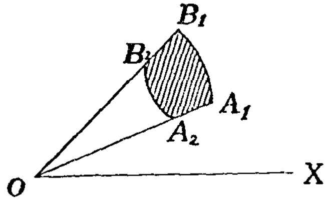
依第一章第7節表之如次。

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\vartheta \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(注意一) 上之公式(4)。在r爲ϑ之一價連續之函數時。必爲有限確定值。亦不必須r僅增大或僅減小。

又此曲線過原點有漸近線等之式。則求其面積之極限值。全與前節同樣。

(注意二) 兩曲線$r_1=f_1(\vartheta)$, $r_2=f_2(\vartheta)$於$\vartheta=\alpha$, $\vartheta=\beta$之間。而$r_1\geqq r_2$。則此等之間。所圍之面積如次。



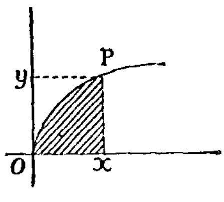
$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left\{r_1^2-r_2^2\right\}d\vartheta \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

3. 面積之例。

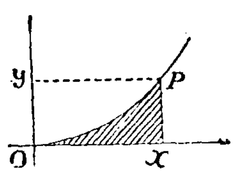
[I] 一般之拋物線$y=ax^m$. ($a>0$, m爲有理數).

此曲線與x軸及$x=0$。與任意之x之縱坐標軸,包圍之面積爲S。則

$1>m>0$



$m>1$



$$\therefore \quad S=a\int_0^x x^m dx.$$

(i) $\underline{m>0.}$

$$S=\frac{ax^{m+1}}{m+1}=\frac{xy}{m+1}.$$

卽如圖。

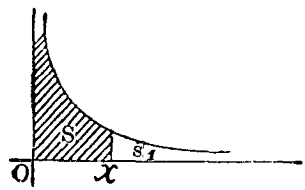
$$\text{面積}\,OPx:\text{面積}\,OPy=1:m.$$

特普通二次拋物線$y=px^2$.

其比爲$1:2$.

(ii) $\underline{0>m>-1.}$

此處之$y=ax^m$。其於$x=0$之點。雖爲不連續。然面積之極限值。仍爲有限確定。與(i)無異。卽



$$S=\frac{xy}{1+m}.$$

雖然値次之事實。則當注意。

$$S_1=a\int_x^{\infty}x^m dx=\infty.$$

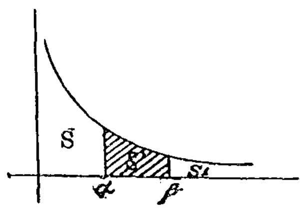
(iii) $\underline{m<-1.}$

此處將(ii)之S與S_1之形。轉換之如次。

$$S=\infty,\quad S_1=a\int_x^{\infty}x^m dx=\frac{xy}{-m-1}.$$

(iv) $\underline{m=-1.}$

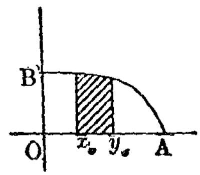
此曲線爲$y=\frac{a}{x}$。卽$xy=a$爲<u>直角雙曲線</u>。於前式之S, S_1。雙方均不爲有限。由是



$$S'=a\int_\alpha^\beta\frac{dx}{x}=a\log\frac{\beta}{\alpha}.$$

特令$\alpha=1, \beta=x$。則此面積S'。表對數$\log x$。

[II] 橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$



$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

$$S=\frac{b}{a}\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{b}{a}\left|\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}sin^{-1}\frac{x}{a}\right|_{x_0}^{x_1}$$

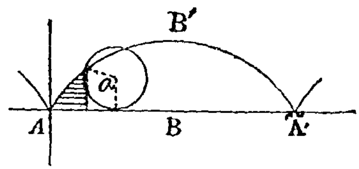
$$=\frac{x_1y_1-x_0y_0}{2}+\frac{ab}{2}\left(sin^{-1}\frac{x_1}{a}-sin^{-1}\frac{x_0}{a}\right).$$

特 $x_0=0$, $x_1=a$。則爲橢圓一象限之面積。而橢圓之面積如次。

$$\text{橢圓之面積}=4\frac{b}{a}\int^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\pi ab.$$

[III] 擺線 (*Cycloid*) $x=a(\theta-sin\,\theta)$, $y=a(1-cos\,\theta)$.

依第1節之公式(3)。則從等於0之 θ，至任意比 2π 小之 θ 之間如次。



$$S=a^2\int_0^{\theta}(1-cos\,\theta)^2\,d\theta$$

$$=a^2\int^{\theta}(1-2\,cos\,\theta+cos^2\,\theta)\,d\theta$$

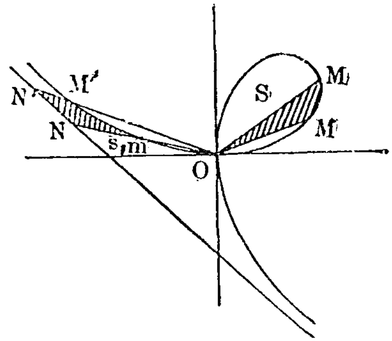
$$=a^2\left(\frac{3\theta}{2}-2\,sin\,\theta+\frac{sin\,2\theta}{4}\right).$$

特 $\theta=2\pi$. 則得擺線與 x 軸所圍之面積。爲

$$\text{擺線}\ AB'A'B\ \text{之面積}=3\pi a^2.$$

[IV] 葉形線 (*Folium of Descartes*) $x^3-3axy+y^3=0.\quad (a>0).$

此曲線。有 $x+y+a=0$ 之漸近線。(見微分學第180頁)。



今如次變換其變數。

$$x=r\cos\phi.$$

$$y=r\sin\phi.$$

其曲線之動徑爲 r_1。漸近線之動徑爲 r_2，則

$$r_1=\frac{3a\cos\phi\sin\phi}{\cos^3\phi+\sin^3\phi}.$$

$$r_2=-\frac{a}{\cos\phi+\sin\phi}.$$

令此曲線本身包圍之面積爲 S。其他之部分與漸近線之間之面積爲 S_1。則

$$S=\frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos^2\phi\sin^2\phi}{(\cos^3\phi+\sin^3\phi)^2}d\phi=\frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\tan^2\phi\sec^2\phi}{(1+\tan^3\phi)^2}d\phi$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(1+\tan^3\phi)}{(1+\tan^3\phi)^2}=\frac{3}{2}a^2.$$

$$S_1=\frac{a^2}{2}+\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}(r_2^2-r_1^2)\,d\phi$$

$$=\frac{a^2}{2}+a^2\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\left\{\frac{d(1+\tan\phi)}{(1+\tan\phi)^2}-3\frac{d(1+\tan^3\phi)}{(1+\tan^3\phi)^2}\right\}$$

$$=\frac{3}{2}a^2.$$

卽 $S=S_1.$

[V] 雙紐形線 (*Lemniscate*) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

試變原式爲極坐標式。則

$$r^2=a^2\cos 2\theta$$

由是令第一象限內。原線與此曲線包圍之面積爲 S。(參照微分學第183頁)。則

$$S=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta=\frac{a^2}{4}.$$

故此曲線本身包圍之二個面積之和。爲

$$4S=a^2.$$

4. 面積之近似值。

求定積分 $S=\int_a^\beta f(x)\,dx$ 之值，

先分積分域 (a,β) 爲 n 個等分。令其一等分爲 h。則

$$h=\frac{\beta-a}{n}.$$

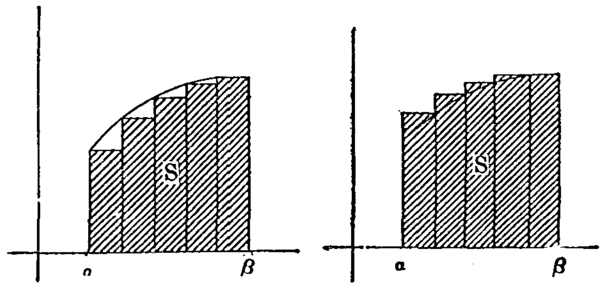
令 $f(x)$ 於此等分點之值。表之如次。

$$y_0=f(a),\quad y_1=f(a+h),\quad y_2=f(a+2h),\quad \dots,$$
$$y_{n-1}=f(\beta-h),\quad y_n=f(\beta).$$

而令

$$S'=h\{y_0+y_1+y_2+\dots+y_{n-1}\}.$$
$$S''=h\{y_1+y_2+\dots+y_{n-1}+y_n\}.$$

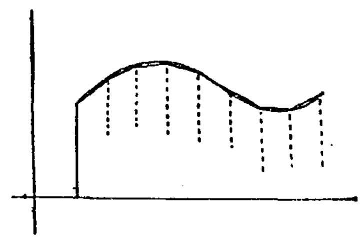
其 S', S''。表如圖階段狀之圖形之面積。於域 (a,β) 而 $f(x)$ 的絕對值增、卽 $\frac{dy}{dx}>0$。則 $S'<S<S''$.



令S', S''之等差中項爲S_1。則

$$S_1=h\left\{\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right\}$$

$$=h\left\{\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right\}.$$



此式可看做S之近似値。稱之曰梯形之公式。

S_1爲曲線下凹.卽$\frac{d^2y}{dx^2}>0$之間比S小。而$\frac{d^2y}{dx^2}<0$則比S大。

〔例〕 $\int_0^1\frac{dx}{1+x}$.

此定積分之値爲$\log 2$。容易求得。

今試適用前述之梯形公式.

令$n=10$.則

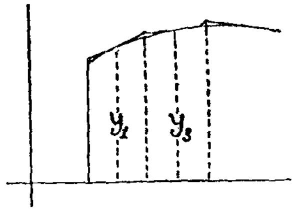
$$y_0=\frac{10}{10},\quad y_1=\frac{10}{11},\quad y_2=\frac{10}{12},\quad \ldots,\quad y_{10}=\frac{10}{20}.$$

從而

$$S_1=\frac{1}{10}\left(\frac{30}{40}+\frac{10}{11}+\frac{10}{12}+\ldots+\frac{10}{19}\right)=0.693771\ldots.$$

然 $\log 2=0.693147\ldots$。是小數點以下三位均符合矣。

次分域 (α,β) 爲 $2n$ 個等分。其一分爲 $h=\dfrac{\beta-\alpha}{2n}$。各分點之 y 之值。順次爲 $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.



於奇數縱坐標之端。作曲線之切線。與其鄰之縱坐標所包圍梯形之面積令爲 M。則

$$M=2h\{y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1}\}.$$

又以 $2n$ 代其 n。則

$$S_1=h\left\{\frac{y_0+y_{2n}}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{2n-1}\right\}.$$

曲線下凹之間。爲 $M>S>S_1$。而曲線上凹之間。則爲 $M<S<S_1$。

然則 $M-S : S-S_1$。h 收歛爲 0。宜取如何之值乎。則依平均值之定理。得 $2:1$ 之答。(茲因其手續太煩。故略)。

由是

$$\frac{M-S}{S-S_1}\doteqdot 2.\quad (\doteqdot \text{大約等之記號})。$$

$$S\doteqdot\frac{M+2S_1}{3}.$$

自 y_0 至 y_2 之 S, M, S_1 之小區分。各令爲 $\Delta S, \Delta M, \Delta S_1$。則

$$\Delta S=\int_a^{a+2h}f(x)\,dx\doteqdot\frac{\Delta M+2\,\Delta S_1}{3}$$

$$=\frac{2hy_1+2h\left(\dfrac{y_0+y_2}{2}+y_1\right)}{3}\doteqdot\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2).$$

次之各小區分亦同樣也。

$$\int_{a+2h}^{a+4h} f(x)\,dx \doteqdot \frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4).$$

$$\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots$$

故
$$S=\int_a^\beta f(x)\,dx$$
$$\doteqdot \frac{h}{3}\Big\{y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\dots+y_{2n-1})$$
$$+2(y_2+y_4+\dots+y_{2n-2})\Big\}.$$

此稱西披梭氏(Simpson)之公式。

〔例〕
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

令 $n=5$. 卽 $h=\frac{1}{10}$. 則

$$S\doteqdot\frac{1}{30}\Big\{\frac{10}{10}+\frac{10}{20}+4\left(\frac{10}{11}+\frac{10}{13}+\frac{10}{15}+\frac{10}{17}+\frac{10}{19}\right)$$
$$+2\left(\frac{10}{12}+\frac{10}{14}+\frac{10}{16}+\frac{10}{18}\right)\Big\}.$$
$$\doteqdot 0.69315035\dots.$$

5. 平面曲線之長。

如微分學第八章第11節所述,已規定曲線之弧之長。等於其弧上諸點順次連結爲屈折直線之長之極限值,故

$$ds=\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

令 $y=f(x)$。於域 (α,β) 爲一價連續。則自 $x=\alpha$ 至 $x=\beta$ 之間。其曲線之弧之長爲 s 如次。

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \dots\dots\dots\dots (1)$$

(注意一) 曲線之方程式爲$x=\psi(t)$, $y=\chi(t)$。則公式(1)之長如次。

$$y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\chi'(t)}{\psi'(t)}.$$

$$dx=\frac{dx}{dt}dt=\psi'(t)\,dt.$$

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\psi'(t)^2+\chi'(t)^2}\,dt\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(注意二) 曲線之方程式爲極坐標式。如$r=f(\phi)$。則

$$ds=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}\,d\phi.\qquad \text{(微分學第152頁)。}$$

而$\phi=\phi_0$與$\phi=\phi_1$之間之弧之長如次。

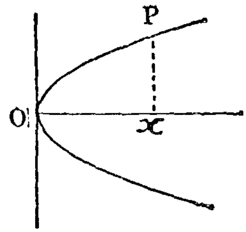
$$s=\int_{\phi_0}^{\phi_1}\sqrt{r^2+f'(\phi)^2}\,d\phi\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

6 曲線之長之例。

[I] 抛物線$y^2=4ax$.

$$y=2\sqrt{a}\sqrt{x}.$$

$$y'=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}.$$



自頂點O至對應於x之點P之弧之長OP,以s表之。則

$$s=\int_0^x\sqrt{1+\frac{a}{x}}\,dx=\int_0^x\sqrt{\frac{x+a}{x}}\,dx$$

$$=\sqrt{x(x+a)}+a\log\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+a}}{\sqrt{a}}.$$

[II]　擺線。　（參照第3節之圖）。

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta), \\ y=a(1-\cos\theta). \end{cases} \qquad \begin{cases} x'=a(1-\cos\theta), \\ y'=a\sin\theta. \end{cases}$$

$$s=2a\int_0^{\theta}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,d\theta=2a\int_0^{\theta}\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=8a\sin^2\frac{\theta}{4}.$$

令 $\theta=2\pi$. 則

擺線 $AB'A$ 之長 $=8a$.

[III]　雙紐形線 $r^2=a^2\cos 2\phi$.

$$r=a\sqrt{\cos 2\phi}.$$

$$r'=-\frac{a\sin 2\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}.$$

自 $\phi=0$ 至 $\phi\leqq\frac{\pi}{4}$ 之弧之長。以 s 表之。則

$$s=a\int_0^{\phi}\sqrt{\cos 2\phi+\frac{\sin^2 2\phi}{\cos 2\phi}}\,d\phi=a\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}$$

$$=a\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-2\sin^2\phi}}.$$

令 $\sqrt{2}\sin\phi=\sin\theta$. 則

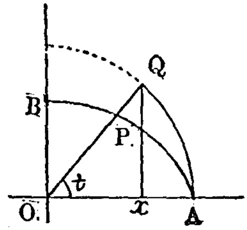
$$s=\frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}}.$$

即第一種之橢圓積分。（參照第二章第4節）。展開 $\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$ 爲級數。依級數之積分求之。即得其近似值。（參照第三章第5節例5）

今雙紐形線之周。以L表之。則

$$\frac{L}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}sin^2\theta}}.$$

[IV] 橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. $(a>b)$.



令$x=a\,sin\,t$. 則

$y=b\cos t$.

$$x'=a\cos t,\quad y'=-b\sin t.$$

$$\therefore \qquad s=a\int_0^t\sqrt{a^2cos^2t+b^2sin^2t}\,dt$$

$$=a\int_0^t\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}sin^2t}\,dt$$

$$=a\int_0^t\sqrt{1-e^2sin^2t}\,dt.$$ (e為橢圓之偏心率)。

是橢圓積分之第二種也。

今以E表橢圓之周。則

$$\frac{E}{4}=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2sin^2t}\,dt$$

$$=\frac{\pi a}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{e^2}{1}-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{e^4}{3}-\cdots\right\}.$$

〔例〕 1. 星形線$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. 求其所圍之面積及曲線之長。

(答) 面積$\frac{3}{8}\pi a^2$, 周$6a$.

〔例〕 2. 心臟形線$r=a(1+\cos\theta)$. 求其所圍之面積及其周之長。

(答) 面積$\frac{3}{2}\pi a^2$, 周$8a$.

〔例〕 3. 求雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，與直線 $x=a$, $x=x'$ $(x'>a)$ 之間之面積及其曲線之長。

（答） 面積 $\frac{b}{a}\left\{x'\sqrt{x'^2-a^2}-a^2\log\frac{x'+\sqrt{x'^2-a^2}}{a}\right\}$.

曲線之長 $2ae\int_0^{\theta}\sqrt{1-\frac{\cos^2\theta}{e^2}}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$$=2ae\left\{\tan\theta-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^2}\theta-\frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{e^4}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right)+\ldots\right\}.$$

但 e 爲雙曲線之偏心率。

而 $\tan\theta=\frac{\sqrt{x'^2-a^2}}{a}$.

第六章　曲面

1. 曲面之方程式。

本章研究次之各種曲面（Surface）。（但關於直角坐標 x, y, z）。

(i) 陽函數式 $z=f(x, y)$.

(ii) 陰函數式 $F(x, y, z)=0$.

(iii) 變率式 $x=\phi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$, $z=\chi(u, v)$.

曲面之最簡單者爲平面（Plane）。其方程式如次，

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

但 A, B, C, D 爲不含 x, y, z 之常數。

直角坐標所表 xy 之平面。有便於用極式坐標者。其面之方程式如次。

$$z=f(r, \phi),\quad 或\quad F(z, r, \phi)=0.\ 等。$$

此坐標式,稱為柱坐標式(*Cylindrical Co-ordinates*),或立體極坐標式(*Polar Co-ordinates in Space*)。

r, θ, ϕ 與 x, y, z 之關係如次。

$$x=r\sin\theta\cos\phi,\quad y=r\sin\theta\cos\phi,\quad z=r\cos\theta.$$

由是曲面之方程式如次。

$$r=f(\theta,\phi),\quad \text{或}\quad F(r,\theta,\phi)=0,\quad \text{等。}$$

2. 曲面之切平面及法線。

曲面之方程式為

$$f(x, y, z)=0 \qquad\qquad (1)$$

取其上之一點 $x|y|z$,於此點之近處,從此所表之函數及其導來函數,假定任何亦為一價且連續.

則近於點 $x|y|z$ 之曲面外,取一點 $\xi|\eta|\zeta$。

令 $\qquad \xi=x+h,\quad \eta=y+k,\quad \zeta=z+l.$

則 $\qquad f(x,y,z)=0,\quad f(\xi,\eta,\zeta)\neq 0.$

而 $\qquad f(\xi,\eta,\zeta)=f(x+h, y+k, z+l)$

$$=f(x,y,z)+h\frac{\delta f}{\delta x}+k\frac{\delta f}{\delta y}+l\frac{\delta f}{\delta z}+\dots\,.$$

(參照微分學第100頁)。

而 $\qquad (\xi-x)\dfrac{\delta f}{\delta x}+(\eta-y)\dfrac{\delta f}{\delta y}+(\zeta-z)\dfrac{\delta f}{\delta z}+\dots=f(\xi,\eta,\zeta).$

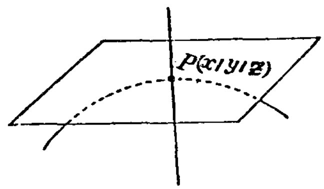
今 $\xi|\eta|\zeta$ 迫近於 $x|y|z$,棄 h, k, l 二次以上之項,則

$$(\xi-x)\frac{\delta f}{\delta x}+(\eta-y)\frac{\delta f}{\delta y}+(\zeta-z)\frac{\delta f}{\delta z}=f(\xi,\eta,\zeta).$$

$\xi|\eta|\zeta$歸着於曲面上。則

$$(\xi-x)\frac{\delta f}{\delta x}+(\eta-y)\frac{\delta f}{\delta y}+(\zeta-z)\frac{\delta f}{\delta z}=0\ \ldots\ldots\ldots(2)$$

考此關係式。$x|y|z$為一定點。ξ,η,ζ表變數之坐標。則關於此式之一次式。表一個平面。然而$x|y|z$為曲面上之一點。而以此為限所接近曲面上任意之點$\xi|\eta|\zeta$亦在此平面上。



由是此平面(2)。稱為曲面(1)之切平面(*Tangential Plane*)。點$x|y|z$。謂此切平面與曲面之切點(*Tangential Point*)。

於切點而引切平面之垂線。則謂為此點曲線之法線(*Normal Line*)。

法線之方向餘弦。與切平面同。而法線之方程式則如次。

$$\frac{\xi-x}{\frac{\delta f}{\delta x}}=\frac{\eta-y}{\frac{\delta f}{\delta y}}=\frac{\zeta-z}{\frac{\delta f}{\delta z}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

〔例〕 橢圓體 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

切平面之方程式。從(2)得

$$\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}+\frac{z\zeta}{c^2}=1. \qquad \left(\begin{array}{l}x|y|z\text{為面上之一點}\\ \xi,\eta,\zeta\text{為坐標變數}\end{array}\right).$$

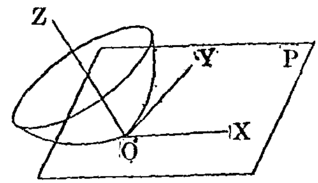
法線之方程式。從(3)得

$$\frac{\xi-x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{\eta-y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{\zeta-z}{\frac{z}{c^2}}.$$

3. 曲面之指曲線及曲度。

曲面之方程式爲陽函數。如

$$z=f(x,y) \quad\text{(1)}$$



試移曲面上之一點 $x|y|z$ 於坐標之原點。其點之法線爲 z 軸。切平面上取 X 軸與 Y 軸。

展開(1)之右邊。關於 x, y 列爲昇冪如次。

$$z=a'+b'x+c'y+ax^2+bxy+cy^2+\dots.$$

則此曲面過坐標之原點 $0|0|0$.

而 $a'=0.$

又因切平面 $z=0$. 故 $\frac{\delta f}{\delta x}=0, \frac{\delta f}{\delta y}=0.$

而 $b'=0, \quad c'=0.$

由是關於此坐標軸之曲面(1)之方程式如次,

$$z=ax^2+bxy+cy^2+\dots \quad\text{(2)}$$

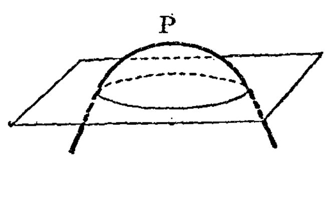
今 x, y 特別限於甚小之值。從而 z 亦甚小而近於 h。其三次以上之項棄之。則

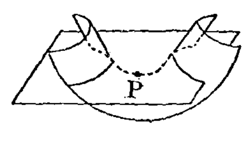
$$ax^2+bxy+cy^2=h \quad\text{(3)}$$

此二次式。表圓錐曲線。

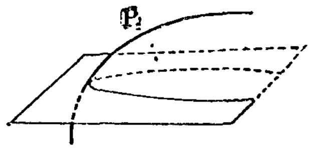
此曲線。謂曲面(1)之點 $x|y|z$ 之<u>指曲線</u>(*Indicatrix*)。

次圖所示。乃指曲線之橢圓，雙曲線，拋物線也。





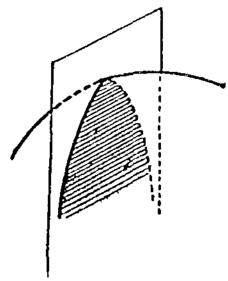
指曲線爲橢圓。則於點 $(x|y|z)$。而曲面僅在切平面之一方。



指曲線爲雙曲線。則曲面與切平面相交。

指曲線爲拋物線。則一方面曲面與切平面有共有之直線其他曲面在切平面一方之側。

含曲面上一點之法線。有平面與之相截。則其截斷面，謂此點之法線截面 (*Normal Section*)。



法線截面之曲線之曲度。一般依截斷面之方向而斷。不一定也。

於其點之指曲線之橢圓，雙曲線及拋物線爲其軸之方向之法線截面之曲度極大或極小也。此極大或極小之曲度，謂其點之主曲度 (*Principal Curvature*)。

〔例〕 橢圓體 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$。求其頂點之主曲度半徑。

(解) 坐標軸各平行移於頂點 $(0|0|c)$。則

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(z-c)^2}{c^2}=1.$$

$$\therefore \qquad z=c-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

$$=\frac{c}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)+\frac{c}{8}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\cdots.$$

由是此頂點之指曲線之方程式。爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}.$$

從而含其軸之$x=0$, $y=0$之法線截面爲$\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$, $\frac{x^2}{a^2}=\frac{2z}{c}$。其曲度半徑。爲

$$\rho_x=\left|\frac{\left\{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2z}{dy^2}}\right|_{y=0}=\frac{b^2}{c}.$$

$$\rho_y=\left|\frac{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2z}{dx^2}}\right|_{x=0}=\frac{a^2}{c}.$$

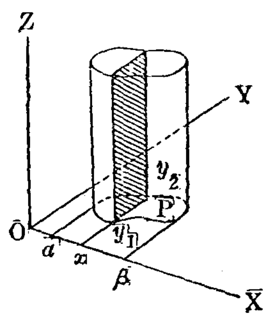
同様。於頂點$(a|0|0)$之主曲度半徑爲$\frac{c^2}{a}$, $\frac{b^2}{a}$。而頂點$(0|b|0)$之主曲度半徑爲$\frac{a^2}{b}$, $\frac{c^2}{b}$。

4. 求立體體積一般之公式。

曲面之方程式。爲

$$z=f(x, y).$$

今$z\geqq 0$。而一價連續之x, y於域P內。有P與曲面。爲底面及平行於z軸之母線。求其柱體積



依第四章第2節所述。則

$$V=\int_P\int f(x, y)\,dx\,dy\ \ldots\ldots(1)$$

V爲一定有限之值。於P內作平行於軸之邊之矩形。爲一個底面之角柱之和之極限值。

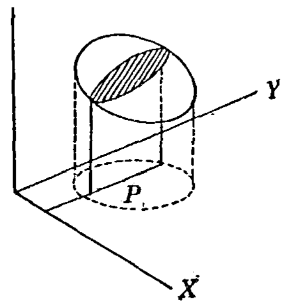
此 V 爲前述之柱體之體積 (*Volume*)。

於本節之圖。化此二重積分。爲積分之積分如次。

$$V=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\int_{y_1=\psi_1(x)}^{y_2=\psi_2(x)} f(x, y)\,dy\right\}dx \quad\cdots\cdots(2)$$

同樣變其順序。則

$$V=\int_{\gamma}^{\delta}\left\{\int_{x_1=\chi_1(y)}^{x_2=\chi_2(y)} f(x, y)\,dx\right\}dy \quad\cdots\cdots(3)$$



次述曲面自身所包閉者。其於域 P 內爲二個一價函數。

$$z_1=f_1(x, y),\quad z_2=f_2(x, y).$$

$$z_2 \geqq z_1.$$

分作

$$V_1=\iint_P z_1\,dx\,dy.$$

$$V_2=\iint_P z_2\,dx\,dy.$$

此包閉體之體積 V 如次。

$$V=\iint_P (z_2-z_1)\,dx\,dy.$$

然 $$z_2-z_1=\int_{z_1}^{z_2} dz.$$

依三重積分之定義(第四章第3節)及公式(2),(3)。得

$$V=\iiint_R dx\,dy\,dz \quad\cdots\cdots(4)$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}\left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} dz\right)dy\right\}dx.$$

(注意一) 直角坐標式所代之x, y變換爲r, ϕ。以使用柱坐標式。則ΔP內之$\Delta x \Delta y$亦可代以$r\Delta r\Delta\phi$。由是依公式(1)得次式。

$$V=\iint_R F(r,\phi)\,r\,dr\,d\phi \text{ ....(5)}$$

(注意二) 使用極坐標式。則$\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$可用$r^2 \sin\theta.\Delta r.\Delta\theta\,\Delta\phi$以代之。由公式(4)得

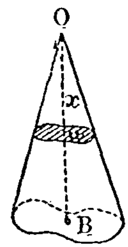
$$V=\iiint_P r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \text{ ....(6)}$$

(注意三) 自(1)至(6)之公式。乃求立體體積一般之公式。然特種之立體。無用二重積分之必要。

又自(1)至(6)之公式。應用各殊。次之示例。乃應用之最重要者。

5. 單一積分之體積。

[I] 錐體(Cone)。



令底之面積爲B。高爲h。頂點爲原點所取之高爲x軸。於高x之點所截之面積爲u。則

$$\frac{u}{B}=\frac{x^2}{h^2}. \qquad \therefore \qquad u=\frac{B}{h^2}x^2.$$

由是令此體積爲V。則

$$V=\int_0^h u\,dx=\frac{B}{h^2}\int_0^h x^2\,dx=\frac{1}{3}Bh.$$

又截頭圓錐之兩底面爲B, B'。高爲h'。則其體積V'如次式。

$$V'=\int_{h_1}^{h} u\,dx=\frac{B}{h_2}\int_{h_1}^{h} x^2\,dx=\frac{B(h^3-h_1{}^3)}{3h^2}$$

$$=\frac{1}{3}B(h-h_1)\left\{1+\frac{h_1}{h}+\frac{h_1{}^2}{h^2}\right\}.$$

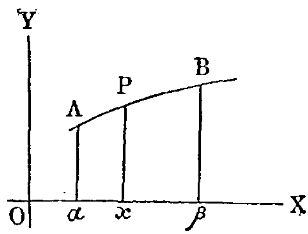
然 $h-h_1=h'$.

$$\frac{h_1^2}{h_2}=\frac{B'}{B}.$$

∴ $$V'=\frac{1}{3}Bh'\left(1+\sqrt{\frac{B'}{B}}+\frac{B'}{B}\right)=\frac{1}{3}h'(B+\sqrt{BB'}+B').$$

（注意） 初等幾何學所得之圓錐截頭圓錐，角錐，截頭角錐。任用以上二種公式。均可達同一之結果。

［II］ 回轉體 (*Solid of Revolution*)。



軸OX之周及AB曲線與二個縱坐標線$x=\alpha$, $x=\beta$所圍之圖形回轉一周。求其所生之體積。

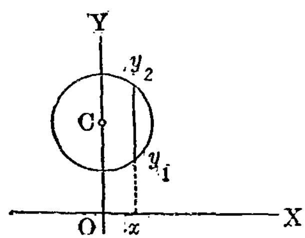
於域(α,β)內之點x之縱坐標線$\overline{xP}=y$。以之回轉一周而生圓。其垂於OX直線所截之面積爲u。則

$$u=\pi y^2.$$

命此回轉體之體積爲V。則

$$V=\int_\alpha^\beta u\,dx=\pi\int_\alpha^\beta y^2\,dx.$$

〔例〕 1. 有圓在同一平面上以不出會之直線爲軸而回轉。則生圓環 (*Circular ring*)。試求其體積。



（解） 圓之半徑爲a。自圓之中心C至回轉軸之距離CO爲c。則

$$x^2+(y-c)^2=a^2.$$

∴ $$y=c\pm\sqrt{a^2-x^2}.$$

即 $\quad y_2=c+\sqrt{a^2-x^2}.$

$\quad y_1=c-\sqrt{a^2-x^2}.$

故令此圓環之體積爲V。則

$$V=2\int_0^a u\,dx=2\pi\int_0^a(y_2{}^2-y_1{}^2)\,dx$$

$$=8\pi\cdot\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=2\pi^2a^2c.$$

〔例〕 2. 有雙紐形線 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 於 x 軸之周回轉一周。試求其所生之體積。

(答) $\quad \dfrac{\pi a^3}{48}\{3\sqrt{2}\,log(3+2\sqrt{2})-4\}$

〔例〕 3. 擺線的 x 軸之周回轉一周 試求其所生之體積之一V。

(解) 擺線之方程式爲

$$x=a(\theta-sin\,\theta),\quad y=a(1-cos\,\theta).$$

$\therefore \quad y^2\,dx=a^3(1-cos\,\theta)^3\,d\theta.$

$\therefore \quad V=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-cos\,\theta)^3\,d\theta$

$$=8\pi a^3\int_0^{2\pi}sin^6\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=16\pi a^3\int_0^{\pi}sin^6\varphi\,d\varphi \qquad (但\ \theta=2\varphi).$$

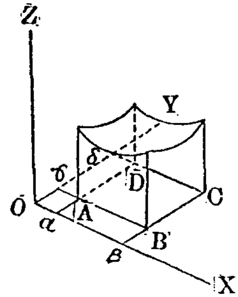
$$=32\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^6\varphi\,d\varphi$$

$$=32\pi a^3\,\frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad (第三章第1節例1).$$

$$=5\pi^2a^3.$$

6　二重積分之體積之例。

(例) 1. 有 $z=0$, $x=\alpha$, $x=\beta$, $y=\gamma$, $y=\delta$ 及 $xyz=c^3$。試求其曲面所包圍之體積。



(解) 依公式(1)。

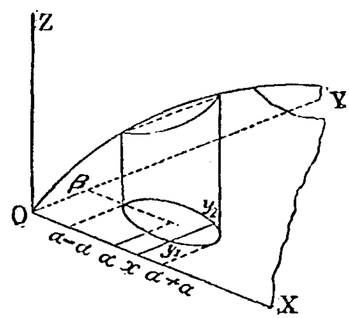
則 $z=\dfrac{c^3}{xy}$. 由是

$$V=c^3\iint_{\square AO}\frac{1}{xy}dx\,dy$$

$$=c^3\int_\alpha^\beta dx\int_\gamma^\delta dy$$

$$=c^3\log\frac{\beta}{\alpha}\log\frac{\delta}{\gamma}.$$

(例) 2. 橢圓柱 $\left(\dfrac{x-\alpha}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y-\beta}{b}\right)^2=1$。以平面 $z=0$ 及曲面 $xy=cz$ 截之。試求其所截部分之體積。



(解) $y_1=\beta-\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-\alpha)^2}$.

$y_2=\beta+\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-\alpha)^2}$.

令其體積爲 V。依公式(2)求之。得

$$V=\int_{\alpha-a}^{\alpha+a}\left\{\int_{y_1}^{y_2}\frac{xy}{c}dy\right\}dx$$

$$=\frac{1}{c}\int_{\alpha-a}^{\alpha+a}x\left\{\int_{y_1}^{y_2}y\,dy\right\}dx=\frac{1}{2c}\int_{\alpha-a}^{\alpha+a}(y_2^2-y_1^2)\,dx$$

$$=\frac{2b\beta}{ac}\int_{\alpha-a}^{\alpha+a}\sqrt{a^2-(x-\alpha)^2}\,x\,dx$$

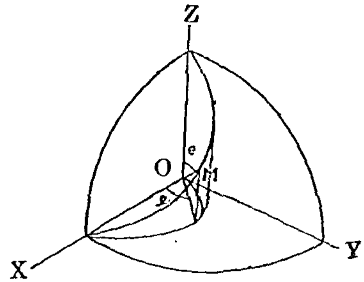
$$=\frac{2b\beta}{ac}\int_{-a}^{a}(\xi+\alpha)\sqrt{a^2-\xi^2}\,d\xi.\qquad(\text{但 }\xi=x-\alpha).$$

然 $$\int_{-a}^{a}\xi\sqrt{a^2-\xi^2}\,d\xi=0.$$

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\xi^2}\,d\xi=\frac{\pi a^2}{2}.$$

$\therefore$ $$V=\frac{\pi ab\,\alpha\beta}{c}.$$

〔例〕 3. 試求球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 與圓柱 $x^2+y^2=ax$。共有之部分之體積。



（解） $$x=r\cos\phi,$$

$$y=r\sin\phi.$$

則球之方程式為

$$r^2+z^2=a^2.$$

$\therefore$ $$z=\sqrt{a^2-r^2}.$$

依公式 (5)。求得體積 V 如次。

$$V=4\int\int\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr\,d\phi.$$

然由圓柱方程式。得

$$r=a\cos\phi.$$

$\therefore$ $$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_{r=0}^{r=a\cos\phi}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr\right\}d\phi$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right|_0^{a\cos\phi}d\phi$$

$$=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\phi)\,d\phi=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

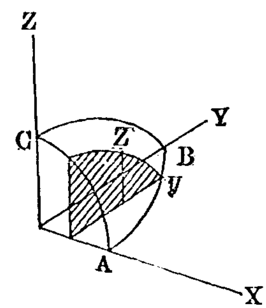
〔例〕 4. 有球 $x^2+y^2+z^2=a^2$。被二平行平面 $x=b$, $x=c$ (但 $-a<c<b<a$) 割截，求其所截部分之體積。

（答） $$\frac{\pi}{3}(b-c)(3a^2-b^2-bc-c^2).$$

7. 三重積分之體積之例。

〔例〕 1. 橢圓體 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$。求其包圍之體積$V$。

(解) x, y, z 爲正。此體之域爲R。則



$$V=8\iiint_R dx\,dy\,dz$$

$$=8\int^a\left\{\iint_{OAB} dy\,dz\right\}dx$$

$$=8\int_0^a\left\{\int_0^{y_1}\left(\int_0^{z'} dz\right)dy\right\}dx.$$

然 $$z'=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

$$y_1=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

$$\therefore\quad V=8\int_0^a\left\{\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz\right)dy\right\}dx.$$

今令 $\frac{x}{a}=\xi,\ \frac{y}{b}=\eta,\ \frac{z}{c}=\zeta$. 則

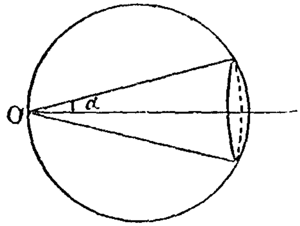
$$V=8abc\int_0^1\left\{\int_0^{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\int_0^{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} d\zeta\right)d\eta\right\} d\xi$$

$$=8abc\int_0^1\left\{\int_0^{\sqrt{1-\xi^2}}\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}\,d\eta\right\}d\xi$$

$$=8abc\int_0^1\left|\frac{\eta\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}{2}+\frac{1-\xi^2}{2}\sin^{-1}\frac{\eta}{\sqrt{1-\xi^2}}\right|_0^{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi$$

$$=8abc\int_0^1\frac{\pi}{4}(1-\xi^2)\,d\xi=\frac{4}{3}\pi abc.$$

〔例〕 2. 半徑a之球內有頂角2α之直圓錐。其頂點適在球面上，而軸亦適合於球之直徑。求此兩體共有之部分之體積V。



〔解〕 令直圓錐之頂點為原點。軸為原線。則球之極坐標式。為

$$r=2a\cos\theta.$$

$$\therefore \qquad V=\int\int\int r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\alpha}\left(\int^{2a\cos\theta} r^2\sin\theta\,dr\right)d\theta\right\}d\phi$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\alpha}\frac{8}{3}a^3\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta\right\}d\phi$$

$$=\frac{8}{3}a^3\int_0^{2\pi}\left|-\frac{\cos^4\theta}{4}\right|_0^{\alpha}d\phi=\frac{2}{3}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos^4\alpha)\,d\phi$$

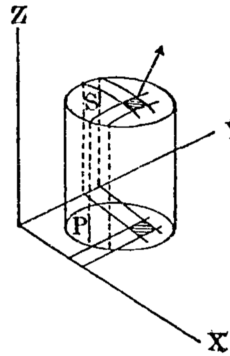
$$=\frac{4}{3}\pi a^3(1-\cos^4\alpha).$$

〔例〕 3. 有二平面 $lx+my+nz=0$ 及 $l'x+m'y+n'z=0$。截圓柱 $x^2+y^2=ax$。求其所截部分之體積。但第二平面截圓柱在z軸之正方向與第一平面之間。

(答) $$\int_0^a\left\{\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}}\left(\int_{-\frac{1}{n}(lx+my)}^{-\frac{1}{n'}(l'x+m'y)}dz\right)dy\right\}dx=\frac{ln'-l'n}{8nn'}\pi a^3.$$

8. 曲面求面積之一般公式。

曲面之方程式為$z=f(x,y)$。求此與其導來函數。對應於一價連續之域P之曲面積S



於域P。引平行於x軸與y軸之直線幾條。區分爲一小矩形之面積，爲

$$\Delta P=\Delta x_k\,\Delta y_l$$
$$=(x_k-x_{k-1})\,(y_l-y_{l-1}).$$

與此相對應之曲面，其小區分之面積爲ΔS。

於ΔS內之一點$(x'_k|y'_l|z')$之法線。與z軸成γ角，考ΔS的平面。爲

$$\Delta P=\Delta S\cos\gamma.$$

$$\therefore\qquad \Delta S=\frac{\Delta P}{\cos\gamma}.$$

依第1節公式(3)，得此法線之方程式，爲

$$\frac{\xi-x'_k}{\left(\dfrac{\delta f}{\delta x}\right)_{x'_k,y'_l}}=\frac{\eta-y'_l}{\left(\dfrac{\delta f}{\delta y}\right)_{x'_k,y'_l}}=\frac{\zeta-z'}{1}.$$

又此法線之方向餘弦，爲$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$。則

$$\frac{\xi-x'_k}{\cos\alpha}=\frac{\eta-y'_l}{\cos\beta}=\frac{\zeta-z'}{\cos\gamma}.$$

$$\therefore\qquad \frac{\cos\alpha}{\left(\dfrac{\delta f}{\delta x}\right)_{x'_k,y'_l}}=\frac{\cos\beta}{\left(\dfrac{\delta f}{\delta y}\right)_{x'_k,y'_l}}=\frac{\cos\gamma}{1}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}}{\sqrt{\left(\dfrac{\delta f}{\delta x}\right)^2_{x'_k,y'_l}+\left(\dfrac{\delta f}{\delta y}\right)^2_{x'_k,y'_l}+1}}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\delta f}{\delta x}\right)^2_{x'_k,y'_l}+\left(\dfrac{\delta f}{\delta y}\right)^2_{x'_k,y'_l}+1}}.$$

特令$\cos\gamma$為正。則

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2_{x'_k,y'_l}+\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2_{x'_k,y'_l}+1}}.$$

從而 $$\Delta S=\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2_{x'_k,y'_l}+\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2_{x'_k,y'_l}+1}\ \Delta x_k\ \Delta y_l.$$

考此平面之ΔS為S內之小區分。集合之。得二重和。

$$\sum_x\sum_y\Delta S=\sum_x\sum_y\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2+1}\ \Delta x\ \Delta y.$$

此Δx, Δy收斂為0。採其極限值。以定此曲面之面積S。由是

$$S=\iint_P\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2+1}\ dx\,dy\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

(注意一) 圓柱坐標式。

$$x=r\cos\phi,\quad y=r\sin\phi,\quad z=f(x,y)=F(r,\phi).$$

ΔP所代之$\Delta x\,\Delta y$。以$r\,\Delta r\,\Delta\phi$代之。則

$$S=\iint_P\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2+1}\ r\,dr\,d\phi.$$

然依微分學第73頁例2。

$$\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2+1=1+\left(\frac{\delta F}{\delta r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\delta F}{\delta r}\right)^2.$$

故 $$S=\iint_P\sqrt{r^2+\left(r\frac{\delta F}{\delta r}\right)^2+\left(\frac{\delta F}{\delta\phi}\right)^2}\ dr\,d\phi\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(注意二) 極坐標式。為

$$x=r\sin\theta\cos\phi,\quad y=r\sin\theta\sin\phi,\quad z=r\cos\theta.$$

$$z=f(x,y),\quad r=F(\theta,\phi).$$

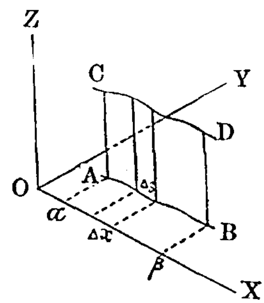
依公式(1)變換變數。卽可得次之公式，

$$S=\iint\sqrt{\left\{\left(\frac{\delta r}{\delta\theta}\right)^2+r^2\right\}\sin^2\theta+\left(\frac{\delta r}{\delta\phi}\right)^2}\,r\,d\theta\,d\phi\ldots\ldots(3)$$

9. 單積分之曲面積。

[I] 柱面 (*Cylindrical Surface*)。

有母線平行於 z 軸之柱面。卽 $\phi(x,y)=0$、被四種面 $z=0$, $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=f(x,y)$ 截斷。其所截取之部分之面積爲 S。則分柱面與 $z=0$ 相交之曲線 AB 爲幾分。對於其一分之弦爲 ΔS。於此小部分內一點之 $z=f(x,y)$ 之值。而作矩形和



$$\sum_{AB} z\,\Delta s.$$

則極限可表此曲面之面積。由是

$$S=\int_{x=\alpha}^{x=\beta} z\,ds$$

$$=\int_\alpha^\beta f(x,y)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

從 $\phi(x,y)=0$. 可得 y 及 $\dfrac{dy}{dx}$.

〔例〕 有圓柱 $x^2+y^2=ax$ 之面，求其截取球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 之部分之面積。

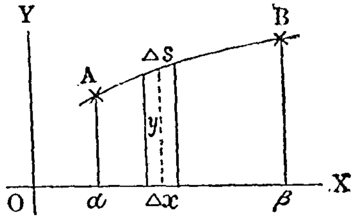
(解) 觀第6節例3之圖。則

$$S=4\int_0^a\sqrt{a^2-ax}\sqrt{1+\frac{1}{4}\cdot\frac{(a-2x)^2}{ax-x^2}}\,dx$$

$$=2\sqrt{a}\int_0^a\frac{a}{\sqrt{x}}dx=2a\sqrt{a}\Big|2\sqrt{x}\Big|_0^a=4a^2.$$

[II] 回轉面 (*Surface of Revolution*)。

於域 (α,β) 內曲線 $y=f(x)$。以 x 軸爲軸回轉一周。所生回轉面之面積爲 S。



域 (α,β) 之一小部分 Δx。其對應之曲線爲 Δs。以此爲直線考之。則其回轉面之面積。由初等幾何學定理。

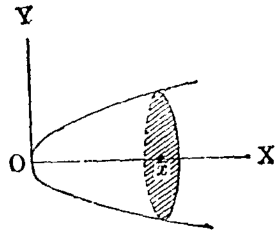
$2\pi y\dfrac{\Delta s}{\Delta x}\cdot\Delta x.$ 但 y 爲 Δx 中點之縱坐標。此爲域 (α,β) 之一切部分。試作其和。則其極限可表回轉面之面積。

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta y\frac{ds}{dx}dx$$

$$=2\pi\int_\alpha^\beta y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \quad\text{......(5)}$$

(注意) 從一般之公式 (2)。換置 r 爲 x, $z=F(r,\phi)$ 爲 $y=f(x)$。卽可求得此公式 (5)。

〔例〕 1. 拋物線 $y^2=2px$。其 x 軸之周回轉一周所生之曲面。被橫坐標 x 之平面截取。試求其頂點側之部分之面積。



(解) 依公式 (5)。得

$$S=2\pi\int_0^x y\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^x\sqrt{2px+p^2}\,dx$$

$$=\frac{2\pi}{3p}\left\{(2px+p^2)^{\frac{3}{2}}-p^3\right\}.$$

〔例〕 2. 橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。其 x 軸之周回轉一周. 試求其所生曲面之面積 S。

(解) 依公式 (5)。

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2).$$

$$\therefore \qquad y\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}x.$$

$$\therefore \qquad y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{y^2+\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)+\frac{b^4}{a^4}x^2}.$$

此 $a>b$。卽細長橢圓回轉體 (*Prolate Spheroid*)。

令 $\frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2$. 則

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-e^2x^2}.$$

$$\therefore \qquad S=4\pi\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-e^2x^2}\,dx=2\pi b^2+2\pi ab\frac{\sin^{-1}e}{e}.$$

若 $a<b$。卽扁平橢圓回轉體 (*Oblate Spheroid*)。

令 $\frac{b^2-a^2}{b^2}=e^2$. 則

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{b}{a^2}\sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}=\frac{b}{a^2}\sqrt{a^4+b^2e^2x^2}.$$

$$\therefore \qquad S=4\pi\frac{b}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^4+b^2e^2x^2}\,dx=2\pi b^2+\frac{\pi a^2}{e}\log\frac{1+e}{1-e}.$$

〔例〕 3. 擺線 $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ 之一節回轉 x 軸之周。試求其曲面積。

(解) $$\begin{cases} dx=a(1-\cos\theta)\,d\theta, \\ dy=a\sin\theta\,d\theta. \end{cases}$$

∴ $$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\sqrt{dx^2+dy^2}=2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta.$$

以 $$y=2a\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

而 $$S=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{\theta}{2}d\theta=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

10. 二重積分之曲面積之例。

〔例〕 1. 球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 之面。試求其自圓柱 $x^2+y^2=ax$ 所截取部分之面積。

(解) 依公式(1)

$$\frac{\delta f}{\delta x}=\frac{\delta z}{\delta x}=-\frac{x}{z}.$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}=\frac{\delta z}{\delta y}=-\frac{y}{z}.$$

∴ $$\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2+1}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{a}{z}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

∴ $$S=4a\iint_P\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dx\,dy$$ （參照第6節例3）。

$$=4a\int_0^a\left\{\int_0^{\sqrt{ax-x^2}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dy\right\}dx$$

$$=4a\int_0^a\left|\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\right|_0^{\sqrt{ax-x^2}}dx$$

$$=4a\int_0^a\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}dx$$

換置 $x=a\tan^2\theta$. 則

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d(\tan^2\theta)$$

$$=4a^2\left\{\left|\theta\tan^2\theta\right|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2\theta-1)d\theta\right\}$$

$$=4a^2\left\{\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=2\pi a^2-4a^2.$$

〔例〕 2. 曲面 $z^2+(\sqrt{x^2+y^2}-c)^2=a^2$。(但 $c>a$)。試求其全面積。

〔解〕 令 $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$. 則

$$z^2+(r-c)^2=a^2.$$

依公式 (2)。得

$$\frac{\delta z}{\delta r}=-\frac{r-c}{z},\quad \frac{\delta z}{\delta\vartheta}=0.$$

$$\therefore\qquad S=2\int\int\sqrt{r^2+\left\{-\frac{r(r-c)}{z}\right\}^2}\,dr\,d\vartheta\qquad(z\geqq 0).$$

$$=2\int\int\sqrt{\frac{z^2+(r-c)^2}{z^2}}\,rdr\,d\vartheta$$

$$=2\int\int\frac{a}{z}rdr\,d\vartheta$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\left\{\int_{c-a}^{c+a}\frac{rdr}{z}\right\}d\vartheta\qquad[r\text{ 之極限爲 }(r-c)^2=a^2].$$

$$=2a\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_{c-a}^{c+a}\frac{rdr}{\sqrt{a^2-(r-c)^2}}$$

$$=4\pi a\int_{c-a}^{c+a}\frac{rdr}{\sqrt{a^2-(r-c)^2}}.$$

令 $r-c=a\sin\theta$. 則

$$=4\pi a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(c+a\sin\theta)}{a\cos\theta}a\cos\theta\,d\theta$$

$$=4\pi a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(c+a\sin\theta)d\theta$$

$$=4\pi a\left|c\theta-a\cos\theta\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4\pi^2ac.$$

〔例〕 3. 求圓錐 $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 之面。自圓柱 $x^2+y^2=ax$ 截取之部分之面積。

(答) $\frac{\pi}{2}a\sqrt{a^2+c^2}$.

〔例〕 4. 求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 之全面積。

(答) $\frac{1}{2}\pi^2a^2$.

第七章 空間曲線

1. 空間曲線之方程式。

空間曲線 (*Curve in Space*)。假定其爲二個曲面相交之線。而研究之如次。

空間曲線之方程式。其主要者。爲次列之三者。

(i) 陽函數式 $\begin{cases} y=f(x), \\ z=g(x). \end{cases}$

(ii) 陰函數式 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$

(iii) 變率式 $x=\phi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t)$

此外尚有由上三種導來之柱坐標式,立體極坐標式之曲線。

空間曲線之最簡單者。即直線方程式如次。

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ A'x+B'y+C'z+D'=0. \end{cases}$$

及 $$\frac{x-\alpha}{L}=\frac{y-\beta}{M}=\frac{z-\gamma}{N}.$$

2. 空間曲線之切線及法平面。

空間曲線之方程式。爲

$$F(x,y,z)=0,\quad G(x,y,z)=0 \qquad\text{..............................(1)}$$

於其上之一點 $x|y|z$。依兩方程式所表之函數及其導來函數。任何亦爲一價且連續。

其外一點 $\xi|\eta|\zeta$。落於曲面 $F=0$ 之上。則得切平面。爲

$$(\xi-x)\frac{\delta F}{\delta x}+(\eta-y)\frac{\delta F}{\delta y}+(\zeta-z)\frac{\delta F}{\delta z}=0.$$

又 $\xi|\eta|\zeta$。落在曲面 $G=0$ 之上。則得切平面。爲

$$(\xi-x)\frac{\delta G}{\delta x}+(\eta-y)\frac{\delta G}{\delta y}+(\zeta-z)\frac{\delta G}{\delta z}=0.$$

而此兩關係式的兩曲面之各切平面。以 $\xi|\eta|\zeta$ 爲空間曲線 (1) 上之點。

而兩切平面相交之直線。爲

$$\frac{\xi-x}{\frac{\delta F}{\delta y}\frac{\delta G}{\delta z}-\frac{\delta F}{\delta z}\frac{\delta G}{\delta y}}=\frac{\eta-y}{\frac{\delta F}{\delta z}\cdot\frac{\delta G}{\delta x}-\frac{\delta F}{\delta x}\cdot\frac{\delta G}{\delta z}}$$

$$=\frac{\zeta-z}{\frac{\delta F}{\delta x}\cdot\frac{\delta G}{\delta y}-\frac{\delta F}{\delta y}\cdot\frac{\delta G}{\delta x}}\qquad\text{........(2)}$$

空間曲線 (1) 上之點 $x|y|z$。於其上通過迫近於此之點 $\xi|\eta|\zeta$。由是此直線。爲於點 $x|y|z$ 之空間曲線 (1) 之切線 (*Tangent* 或 *Tangential line*)。

(注意一) 空間曲線爲 $y=f(x)$, $z=g(x)$。則 (2)。以

$$\frac{\delta F}{\delta x}=-f'(x),\ \frac{\delta F}{\delta y}=1,\ \frac{\delta F}{\delta z}=0,\ \frac{\delta G}{\delta x}=-g'(x),\ \frac{\delta G}{\delta y}=0,\ \frac{\delta G}{\delta z}=1.$$

而切線之方程式如次。

$$\frac{\xi-x}{1}=\frac{\eta-y}{f'(x)}=\frac{\zeta-z}{g'(x)}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(注意二) 空間曲線之式爲 $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$。則由 (3) 之關係。得

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dz}{dt}}.$$

$$g'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

而切線之方程式如次。

$$\frac{\xi-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\eta-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{\zeta-z}{\frac{dz}{dt}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

過空間曲線(1)之上之點 $x|y|z$ 作垂於此點之切線之平面。是謂於此點之 (1) 之法平面 (*Normal plane*)。

法平面之方程式。其方向餘弦的切線。各各相同如次。

$$(\xi-x)\left(\frac{\delta F}{\delta y}\cdot\frac{\delta G}{\delta z}-\frac{\delta F}{\delta z}\ \frac{\delta G}{\delta y}\right)+(\eta-y)\left(\frac{\delta F}{\delta z}\cdot\frac{\delta G}{\delta x}-\frac{\delta F}{\delta x}\cdot\frac{\delta G}{\delta z}\right)$$

$$+(\zeta-z)\left(\frac{\delta F}{\delta x}\cdot\frac{\delta G}{\delta y}-\frac{\delta F}{\delta y}\ \frac{\delta G}{\delta x}\right)=0\ \cdots\cdots(5)$$

及 $$(\xi-x)+(\eta-y)f'(x)+(\zeta-z)g'(x)=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$(\xi-x)\frac{dx}{dt}+(\eta-y)\frac{dy}{dt}+(\zeta-z)\frac{dz}{dt}=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

〔例〕 1. 球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 之面與圓柱 $x^2+y^2=ax$ 之面。於空間交成曲線(參照第六章第6節例3之圖)。於其上一點 $x|y|z$ 之切線。作法平面。試求其方程式。

(解) $$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0.$$

$$G(x,y,z)=x^2+y^2-ax=0.$$

$$\frac{\delta F}{\delta x}=2x,\quad \frac{\delta F}{\delta y}=2y,\quad \frac{\delta F}{\delta z}=2z.$$

$$\frac{\delta G}{\delta x}=2x-a,\quad \frac{\delta G}{\delta y}=2y,\quad \frac{\delta G}{\delta z}=0.$$

故所求切線之方程式為

$$\frac{\xi-x}{2yz}=\frac{\eta-y}{z(a-2x)}=\frac{\zeta-z}{-ay}.$$

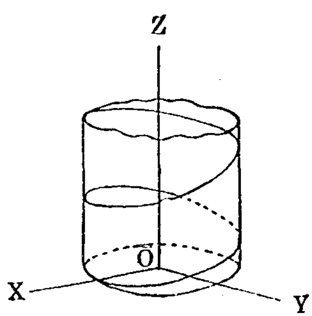
從此求得法平面之方程式為

$$2yz(\xi-x)+z(a-2x)(\eta-y)-ay(\zeta-z)=0.$$

即 $$2yz\xi+z(a-2x)\eta-ay\zeta=0.$$

〔例〕 2. 振子線 (*Helix*)。

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \\ z=bt. \end{cases}$$



試以圖解之。且求其上一點 $x|y|z$ 之切線及法平面之方程式。

(解) 由第一與第二之方程式消去 t，則

$$x^2+y^2=a^2.$$

由是知此曲線在以z軸爲軸a爲半徑之圓柱面上。

今就t自0增大之式考之。則此曲線上一點於xy平面上之正射影。與圓$x^2+y^2=a^2$之周上成角。同方向同角速度而回轉。

又$z=bt$。則此曲線上之點於z軸之方向。亦爲等速度而進行。

由是知此曲線之形狀。全與捩子同。〔捩子卽螺旋。恐其與螺線(*Spiral,* 微分學第190頁)相混。故特名捩子〕。

於捩子線一點$x|y|z$之切線。由公式(4)。得其方程式如次。

$$\frac{\xi-x}{-a\sin t}=\frac{\eta-y}{a\cos t}=\frac{\zeta-z}{b}.$$

卽
$$\frac{\xi-x}{-y}=\frac{\eta-y}{x}=\frac{\zeta-z}{b}.$$

由是求此點法平面之方程式。由公式(7)如次。

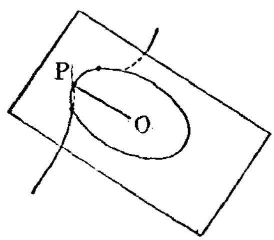
$$y(\xi-x)-x(\eta-y)-b(\zeta-z)=0.$$

卽
$$y\xi-x\eta-b\zeta+bz=0.$$

3 空間曲線之吻合平面及主法線。

通過空間曲線上之三點作圓。於三點爲限相近之極限之圓。謂其一點之曲度圓(*Circle of curvature*)。

此與平面曲線注意所述曲度圓之定義同(參照微分學第155頁注意)。



由是此圓之中心謂曲度中心此圓之半徑。謂曲度半徑曲度半徑之逆數。謂其點之曲度。

含曲度圓之平面。謂其點之空間曲線之吻合平面 (*Osculating plane*)。

空間曲線上一點 P 之法平面。與吻合平面相交之直線。(卽過 P 與曲度中心 O 之直線)。謂 P 點之主法線 (*Pincipal normal*)。

過法平面上 P。而垂於主法線之直線。謂點 P 之副法線 (*Binormal*)。

空間曲線之方程式。爲

$$x=\phi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t).$$

過其上三點 $x|y|z$, $x+\Delta x|y+\Delta y\ z+\Delta z$, $x+\Delta' x|y+\Delta' y|z+\Delta' z$ 之平面方程式。假定

$$A(\xi-x)+B(\eta-y)+C(\zeta-z)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

則

$$A\,\Delta x+B\,\Delta y+C\,\Delta z=0.$$

$$A\,\Delta' x+B\,\Delta' y+C\,\Delta' z=0.$$

由是

$$A\frac{\Delta x}{\Delta t}+B\frac{\Delta y}{\Delta t}+C\frac{\Delta z}{\Delta t}=0.$$

$$A\frac{\Delta x-\Delta' x}{(\Delta t)^2}+B\frac{\Delta y-\Delta' y}{(\Delta t)^2}+C\frac{\Delta z-\Delta' z}{(\Delta t)^2}=0.$$

由方程式 (1) 吻合平面之 A, B, C。適合於次之聯立方程式：

$$A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}=0.$$

$$A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

$$\therefore\quad \frac{A}{\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}}=\frac{B}{\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}}$$

$$=\frac{C}{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}.$$

由是點 $x|y|z$ 之吻合平面之方程式如次。

$$\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right)(\xi-x)+\left(\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right)(\eta-y)$$
$$+\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right)(\zeta-z)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

而點 $x|y|z$ 之主法線之方程式。由法平面。卽前節之公式 (4) 與前紀 (2) 之聯立方程式以求之卽

$$\frac{\xi-x}{\frac{dy}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right)-\frac{dz}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right)}$$
$$=\frac{\eta-y}{\frac{dz}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right)-\frac{dx}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right)}$$
$$=\frac{\zeta-z}{\frac{dx}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right)-\frac{dy}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right)}.$$

〔例〕 求捩子線之吻合平面，主法線。

（解） $x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt.$

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t=-y,\quad \frac{dy}{dt}=a\cos t=x,\quad \frac{dz}{dt}=b.$$
$$\frac{d^2x}{dt^2}=-a\cos t=-x,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-a\sin t=-y,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

從 (2) 得吻合平面之方程式如次。

$$by(\xi-x)-bx(\eta-y)+(y^2+x^2)(\zeta-z)=0.$$

卽 $by\xi-bx\eta+a^2\zeta-a^2z=0.$

而主法線之方程式，爲

$$\frac{\xi-x}{b^2x+a^2x}=\frac{\eta-y}{a^2y+b^2y}=\frac{\zeta-z}{-bxy+bxy}.$$

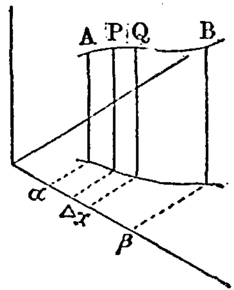
從此 $\xi/x=\eta/y,\quad \zeta=z.$

卽交於 z 軸，且平行於 xy 之平面之直線。

4. 空間曲線之弧之長。

空間曲線之方程式爲

$$y=f(x),\quad z=g(x) \quad\cdots\cdots(1)$$



分其弧 AB 爲幾分。取其一小部分 PQ。令 P 之坐標爲 $x|y|z$。Q 之坐標爲 $x+\Delta x|y+\Delta y|z+\Delta z$。直線 PQ 之長爲 Δs。則

$$\Delta s=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}\Delta x.$$

統各部分均如此。求其相加直線之長。得

$$\Sigma\Delta s=\Sigma\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}\Delta x.$$

各小部分的限甚小。採其極限值之和。以定弧 AB 之長 (*Length of arc*)。以 s 表之。則

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}dx \quad\cdots\cdots(2)$$

空間曲線之方程式。爲 $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$。則其弧之長如次。

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt \quad\cdots\cdots(3)$$

又用立體極坐標式如次。

$$S=\int_{\phi_0}^{\phi_1}\sqrt{\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2+\left(r\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2+(r\sin\theta)^2}\,d\phi \quad\cdots\cdots(4)$$

例 1. 求空間曲線 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$ 之長。(參照第六章第6節例3之圖)。

(解) 從 $x^2+y^2=ax$. 得

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=a. \qquad \therefore \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{a-2x}{2y}.$$

從 $z^2=a^2-(x^2+y^2)=a^2-ax$. 得

$$2z\frac{dz}{dx}=-a. \qquad \therefore \qquad \frac{dz}{dx}=-\frac{a}{2z}.$$

$$\therefore \qquad s=4\int_0^a\sqrt{1+\frac{(a-2x)^2}{4y^2}+\frac{a^2}{4z^2}}\,dx$$

$$=4\int_0^a\sqrt{1+\frac{(a-2x)^2}{4(ax-x^2)}+\frac{a^2}{4(a^2-ax)}}\,dx$$

$$=2\sqrt{a}\int_0^a\sqrt{\frac{a+x}{x(a-x)}}\,dx.$$

令 $x=a\cos^2\theta$. 則

$$s=-4a\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{2-\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=2\sqrt{2}\,a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}\,d\theta.$$

是爲橢圓積分。試展開之，依第三章第1節例1之公式。得積分如次。

$$s=\sqrt{2}\,\pi a\left\{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\cdot\frac{1.3}{2.4}-\frac{1}{128}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}-\cdots\right\}.$$

〔例〕 2. 求捩子線從交於 x 軸之點。至線上任意一點之弧之長。

(解) 自 $t=0$ 至 t 之積分。依公式 (3) 得

$$s=\int_0^t\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}\,dt$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^t dt=\sqrt{a^2+b^2}\,t=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}z.$$

(注意) 捩子線點P之切線。與xy平面相交。求其交點M之坐標。(P點之切線方程式。見第1節例2)。

$$\because \qquad \xi=x-\frac{yz}{b},\quad \eta=y+\frac{zx}{b},\quad \zeta=0.$$

由是
$$\overline{MP}=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{yz}{b}\right)^2+\left(\frac{zx}{b}\right)^2+z^2}=\frac{1}{b}\sqrt{x^2+y^2+b^2}\,z$$
$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}z.$$

是則捩子線$\widehat{AP}$之長。與$\overline{MP}$相等。

由是知直角三角形.其直角一邊平行之線爲軸之圓柱。卷而附之。卽得捩子線。

〔例〕 3. 空間曲線$x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at\tan\alpha$。求$t=0$至t之弧長。

(答) $at\sec\alpha$.

〔例〕 4. 空間曲線$x^2+y^2+z^2=a^2$及$\sqrt{x^2+y^2}\left(e^{n\tan^{-1}\frac{y}{x}}+e^{-n\tan^{-1}\frac{y}{x}}\right)=2a$。求其弧之長。

(解) 令$x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\theta$。則空間曲線之方程式。爲

$$r=a,\quad r\sin\theta(e^{n\phi}+e^{-n\phi})=2a.$$

$$\therefore \qquad \frac{dr}{d\phi}=0,\quad \frac{d\theta}{d\phi}=-\frac{n\sin\theta(e^{n\phi}-e^{-n\phi})}{\cos\theta(e^{n\phi}+e^{-n\phi})}.$$

$$\therefore \qquad s=\int_{\phi_0}^{\phi_1}\sqrt{\left\{-\frac{n\sin\theta(e^{n\phi}-e^{-n\phi})}{\cos\theta(e^{n\phi}+e^{-n\phi})}r\right\}^2+(r\sin\theta)^2}\,d\phi.$$

代入 $r=a$, $\sin\theta=\dfrac{2}{e^{n\phi}+e^{-n\phi}}$. 則

$$s=a\int_{\phi_0}^{\phi_1}\sqrt{n^2\left\{\frac{2}{e^{n\phi}+e^{-n\phi}}\cdot\frac{e^{n\phi}+e^{-n\phi}}{e^{n\phi}-e^{-n\phi}}\cdot\frac{e^{n\phi}-e^{-n\phi}}{e^{n\phi}+e^{-n\phi}}\right\}^2+\frac{4}{(e^{n\phi}+e^{-n\phi})^2}}\,d\phi$$

$$=2a\sqrt{n^2+1}\int_{\phi_0}^{\phi_1}\frac{d\phi}{e^{n\phi}+e^{-n\phi}}$$

$$=2a\sqrt{n^2+1}\int_{\phi_0}^{\phi_1}\frac{e^{n\phi}d\phi}{e^{2n\phi}+1}$$

$$=2a\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}\Big|\tan^{-1}e^{n\phi}\Big|_{\phi_0}^{\phi_1}$$

$$=2a\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}(\tan^{-1}e^{n\phi_1}-\tan^{-1}e^{n\phi_0}).$$

然 $\qquad \tan^{-1}e^{n\phi}=\theta.$

$\therefore \qquad s=2a\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}(\theta_1-\theta_0).$

續篇 微分方程式

第八章 第一階微分方程式

1. 定義。

含函數與其導來函數及其自變數之方程式。謂之微分方程式 (*Differential equation*)。

微分方程式。其自變數只一個者。謂之普通微分方程式 (*Ordinary D. E.*)。若有二個及二個以上。謂之部分微分方程式 (*Partial D. E.*)。

例如

(*a*) $$\frac{dy}{dx}+P(x)y+Q(x)=0.$$

(*b*) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+a^2y^2=b^2.$$

(*c*) $$\frac{d^4y}{dx^4}-12\frac{d^2y}{dx^2}+12y=16x^4e^{x^2}.$$

等等。任何亦爲普通微分方程式。

(*d*) $$x\frac{\delta z}{\delta x}+y\frac{\delta z}{\delta y}-z=0.$$

是即部分微分方程式之例也。

微分方程式。其中最高次之導來函數。爲一次，二次，三次，從而稱爲第一階，第二階，第三階，…。

例如前紀之 (*a*)，(*b*)，(*d*) 爲第一階之微分方程式。(*c*) 爲第四階之微分方程式。

又一般之形、如

$$\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0.$$

爲第一階之微分方程式。

$$\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0.$$

爲第二階之微分方程式。

微分方程式。其中最高次之導來函數之羃指數，爲其次數。

例如前記之 (a), (c), (d) 爲一次。而 (b) 爲二次。如次之方程式亦爲二次。

$$\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=a.$$

(注意) 英語於階與次極易混同。即階爲 *Order*, 次爲 *Degree*。本如此定明。然其他對於 *Order* 與 *Degree*。往往有視爲同一之習慣。故宜特別注意。

2. 第一階一次微分方程式之解。

第一階微分方程式之一般形狀、爲

$$\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

$\frac{dy}{dx}$ 爲一次方程式。換書如次。

$$\frac{dy}{dx}=\psi(x, y) \quad\cdots\cdots(2)$$

其兩邊以 $N(x, y)\,dx$ 乘之。

令爲 $M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0 \quad\cdots\cdots(2')$

則 (1) 爲 (2′) 之解或積分方程式。求適合此微分方程式之函數。爲

$$F(x, y, C)=0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

方程式 (3) 爲 (1) 之解 (*Solution*) 或積分方程式 (*Integral equation*)。

第一階一次微分方程式之解。常應含一個常數 C。

〔證〕 (3) 爲微分。而

$$\frac{\delta F}{\delta x}+\frac{\delta F}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

由 (4) 與 (3) 消去 C。而導來 (2)。得以考之。

含常數 C 之解 (3)。爲方程式 (1) 之一般解 (*General solution*)。與 C 以特別之値。則稱其特別解 (*Particular solution*)。

3. 微分方程式 $M(x)\,dx+N(y)\,dy=0$。

dx 與 dy 被乘之函數。各僅爲 x 與 y。則直可求得其積分方程式。如

$$\int M(x)\,dx+\int N(y)\,dy=C.$$

〔例〕 1. 解 $\dfrac{dx}{1+x}+\dfrac{dy}{1+y}=0.$

(解)

$$\int\frac{dx}{1+x}+\int\frac{dy}{1+y}=C.$$

$$\log(1+x)+\log(1+y)=C.$$

$$\log(1+x)(1+y)=C.$$

$$(1+x)(1+y)=e^{C}.$$

令 $e^{C}=c$. 則

$$(1+x)(1+y)=c.$$

是卽所求之一般解答也。

〔例〕 2. 解$\frac{dy}{dx}=n\frac{y}{x}$.

解 $$\frac{dy}{y}=n\frac{dx}{x}.$$

求積分。得

$$\log y=n\log x+c.$$

令 $C=\log c$. 則

$$\log y=n\log x+\log c=\log cx^n.$$

$$\therefore\quad y=cx^n.$$

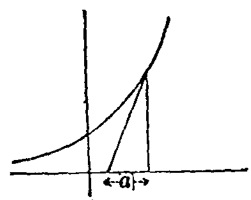
〔例〕 3. $x\sqrt{1+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$.

(答) $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$.

〔例〕 4. 切線影有一定之長a。試求其平面曲線。(參照微分學第126頁)。

(解) 切線影之長爲$\frac{y}{y'}$.

而 $$\frac{y}{\frac{dy}{dx}}=a.$$



卽 $$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{a}.$$

$$\therefore\quad \log y=\frac{x}{a}+C.$$

令 $C=\log c$. 則

$$\log y-\log c=\frac{x}{a}.$$

$$\frac{y}{c}=e^{\frac{x}{a}}.\qquad\therefore\quad y=ce^{\frac{x}{a}}.$$

卽切線影爲一定。則爲對數曲線。(見微分學第194頁)。

〔例〕 5. 求法線影爲一定之平面曲線。

(答) 拋物線 $y^2=2ax+C$.

4. 同次微分方程式。

微分方程式

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

其 $M(x,y)$ 與 $N(x,y)$。任何亦爲 x, y 同次之同次函數。此謂同次微分方程式 (*Homogeneous D. E.*)。

令 M, N 爲 n 次之同次函數 (微分學第63頁)。則

$$M(x, y)=x^n M\left(1, \frac{y}{x}\right)=x^n \phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$N(x, y)=x^n N\left(1, \frac{y}{x}\right)=x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

故 (1)。得書之如次。

$$\phi\left(\frac{y}{x}\right)dx+\psi\left(\frac{y}{x}\right)dy=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

令 $\quad \frac{y}{x}=v. \quad$ 卽 $\quad y=xv.$

則 $\quad dy=v\,dx+x\,dv.$

而 $\quad \phi(v)\,dx+\psi(v)\,\{v\,dx+x\,dv\}=0.$

卽 $\quad \{\phi(v)+v\psi(v)\}\,dx+x\,\psi(v)\,dv=0.$

$$\therefore \quad \frac{dx}{x}+\frac{\psi(v)\,dv}{\phi(v)+v\,\psi(v)}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

由此求積分。得

$$\log x+\int \frac{\phi(v)}{\phi(v)+v\,\psi(v)}\,dv=C.$$

換置 $\quad v=\frac{y}{x}.$

卽可得所求之解答。

〔例〕 1. 解 $(y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx-x\,dy=0.$

〔解〕 以 x 約原式,則

$$\left\{\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right\}dx-dy=0.$$

令 $\frac{y}{x}=v$. 則

$$(v+\sqrt{1+v^2})\,dx-v\,dv-x\,dv=0.$$

$$\therefore\qquad \sqrt{1+v^2}\,dx-x\,dv=0.$$

$$\frac{dx}{x}-\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}=0.$$

$$\log x-\log(v+\sqrt{1+v^2})=C.$$

$$\frac{x}{v+\sqrt{1+v^2}}=e^C=c.$$

$$\frac{x}{\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}=c.$$

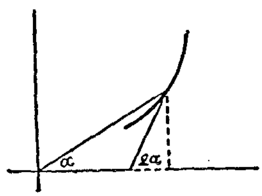
$$\frac{x^2}{y+\sqrt{x^2+y^2}}=c.$$

$$\sqrt{x^2+y^2}-y=c.$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=y+c.$$

$$\therefore\qquad x^2=2cy+c^2.$$

〔例〕 2. 切線與原線正方向所成之角。爲引切點之動徑與原線正方向所成之角之二倍。試求其平面曲線。



〔解〕 曲線上之點 $x|y$。引動徑與原線正方向成 α 角。則

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}.$$

$$\tan 2\alpha = \frac{dy}{dx}.$$ (微分學第22頁)。

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\frac{y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}}.$$

命 $\frac{y}{x} = v$. 則

$$y = vx.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v.$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} + v = \frac{2v}{1-v^2}.$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v(1+v^2)}{1-v^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{1-v^2}{v(1+v^2)}dv = \frac{dx}{x}.$$

然 $$\frac{1-v^2}{v(1+v^2)} = \frac{1}{v} - \frac{2v}{1+v^2}.$$

而 $$\frac{dv}{v} - \frac{2vdv}{1+v^2} = \frac{dx}{x},$$

$$\log v - \log(1+v^2) = \log x + C.$$

$$\frac{v}{1+v^2} = cx.$$

即 $$\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = cx.$$

$$\therefore \quad \frac{y}{x^2+y^2} = c.$$

$$\therefore \quad c(x^2+y^2) = y.$$

令 $c=\frac{1}{2k}$. 則

$$x^2+y^2=2ky.$$

$$\therefore \qquad x^2+(y-k)^2=k^2.$$

卽過原點在 y 軸上有中心之圓。

〔例〕 3. 曲線上之點 $x|y$。其切線影等於 $y-x$。試求其平面曲線。

(答) $\qquad y^2-2xy-C=0.$

5. $F(x)\frac{dy}{dx}+G(x)\cdot y+H(x)=0$。

以 $F(x)$ 約各項。得次形。

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y+Q(x)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

以此求積分。

令 $\qquad y=uv.$

則 $\qquad u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+P(x)\cdot uv+Q(x)=0.$

卽 $\qquad u\frac{dv}{dx}+v\left\{\frac{du}{dx}+P(x)\cdot u\right\}+Q(x)=0 \ldots\ldots\ldots (2)$

此可決定 u 如次。

$$\frac{du}{dx}+P(x)u=0.$$

卽 $\qquad \frac{du}{u}+P(x)\,dx=0.$

$$\log u+\int P(x)\,dx=0.$$

卽 $\qquad u=e^{-\int P(x)dx} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

然由 (2) 以求 v。則

$$u\frac{dv}{dx}+Q(x)=0.$$

卽 $$dv+e^{\int P(x)dx}\cdot Q(x)\,dx=0.$$

∴ $$v=C-\int e^{\int P(x)dx}\cdot Q(x)\,dx \quad\cdots\cdots(4)$$

由是從 (3), (4) 得

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left\{C-\int e^{\int P(x)dx}\cdot Q(x)\,dx\right\}\quad\cdots\cdots(5)$$

〔例〕 1. 解 $\frac{dy}{dx}-y+x=0.$

(解) 此方程式爲

$$P(x)=-1,\quad Q(x)=x.$$

故由 (5) 得

$$y=e^{\int dx}\left\{C-\int e^{-\int dx}\cdot x\,dx\right\}$$

$$=e^{x}\left\{C-\int xe^{-x}\,dx\right\}\qquad\text{(第二章第7節)。}$$

$$=Ce^{x}+x+1.$$

〔例〕 2. 試求 $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{x}$ 之平面曲線

(答) $$y=x\log\frac{c}{x}.$$

〔例〕 3. $\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y+Q(x)\cdot y^{n}=0.$ 〔白奴利 (*Bernoulli*) 之方程式〕之解法如何。

(解) 以 y^{n} 約各項。則

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{1-n}P(x)+Q(x)=0.$$

介 $y^{1-n}=z$. 則

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}.$$

故得自奴利之方程式如次。

$$\frac{1}{1-n}\cdot\frac{dz}{dx}+P(x)\cdot z+Q(x)=0.$$

是卽本節所求之解答也。

6 全微分方程式。

微分方程式

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

其左邊 $M\,dx+N\,dy$ 爲全微分。

是謂全微分方程式 (*Exact D. E.*)。

今作函數 $f(x,y)$ 之全微分。則

$$df=\frac{\delta f}{\delta x}dx+\frac{\delta f}{dy}dy.$$

設 $$M=\frac{\delta f}{\delta x},\quad N=\frac{\delta f}{\delta y} \quad\cdots\cdots(2)$$

此關係存在。則由 (1)

$$df=0$$

$$f(x,y)=C \quad\cdots\cdots(3)$$

是卽所求之解答。

然由 (2) 之關係

$$\frac{\delta M}{\delta y}=\frac{\delta N}{\delta x} \quad\cdots\cdots(4)$$

反之。(4) 之關係成立。則 (2) 之關係亦可成立。而 (4) 爲方程式 (1) 之全微分方程式所必要且充分之條件也。

由 (4) 之關係成立。得知全微分方程式以求 f。則由

$$\frac{\delta f}{dx}=M(x,y).$$

得 $$f=\int M(x,y)\,\delta x+\phi(y)\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,(5)$$

而 $\phi(y)$ 可由下式定之。

$$\frac{\delta f}{\delta y}=\frac{\delta}{\delta y}\left\{\int M(x,y)\,\delta x\right\}+\phi'(y)=N(x,y).$$

(注意) 考 $\int M(x,y)\,\delta x$。如 y 爲常數。則僅表示 x 之積分之記號。

〔例〕 1. 解 $(x^2+y)\,dx-(y^2-x)\,dy=0$.

(解) 令 $M=x^2+y$, $N=-y^2+x$. 則

$$\frac{\delta M}{\delta y}=1,\quad \frac{\delta N}{\delta x}=1. \qquad \therefore \quad \frac{\delta M}{\delta y}=\frac{\delta N}{\delta x}.$$

故原方程式之左邊爲全微分。

由是 $$\frac{\delta f}{\delta x}=x^2+y.$$

$$f=\int(x^2+y)\,\delta x+\phi(y)=\frac{x^3}{3}+xy+\phi(y).$$

然 $$\frac{\delta f}{\delta y}=x+\phi'(y)=-y^2+x.$$

$\therefore$ $$\phi'(y)=-y^2.$$

$\therefore$ $$\phi(y)=-\frac{y^3}{3}.$$

$\therefore$ $$f=\frac{x^3}{3}+xy-\frac{y^3}{3}=C.$$

令 $3C=c$. 則求得其解爲

$$x^3+3xy-y^3=c.$$

〔例〕 2. 解 $(3x^2-ay-y^2)\,dx-(ax-2by+2xy)\,dy=0$.

(答) $$x^3+axy-xy^2+by^2=C$$

7 積分因數。

微分方程式

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \quad \cdots\cdots (1)$$

此不爲全微分方程式。卽 $\frac{\delta M}{\delta y} \neq \frac{\delta N}{\delta x}$.

(1) 以 $\mu(x, y)$ 乘之。得

$$\mu(x, y)M(x, y)\,dx + \mu(x, y)N(x, y)\,dy = 0 \quad \cdots\cdots (2)$$

是爲全微分方程式。而

$$\frac{\delta(\mu M)}{\delta y} = \frac{\delta(\mu N)}{\delta x} \quad \cdots\cdots (3)$$

其 $\mu(x, y)$。謂之積分因數 (*Integrating factor*).

例如 $(1+y^2)\,dx + xy\,dy = 0$.

此非全微分方程式。

以 $2x$ 乘之. 則

$$(2x+2xy^2)\,dx + 2x^2y\,dy = 0.$$

$$\begin{cases} \frac{\delta}{\delta y}(2x+2xy^2) = 4xy, \\ \frac{\delta}{\delta x}(2x^2y) = 4xy. \end{cases}$$

此由前節求得其解。

而 $2x$ 卽積分因數。

定理. 微分方程式 (1)。必常有積分因數。

(證明) (1) 必應有積分方程式 $g(x, y, C) = 0$。試解之. 令

$h(x, y) = C$.

則
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta h}{\delta x}}{\frac{\delta h}{\delta y}}.$$

然直由 (1)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}.$$

$$\therefore\qquad \frac{\frac{\delta h}{\delta x}}{\frac{\delta h}{\delta y}}=\frac{M}{N}.$$

$$\therefore\qquad \frac{\frac{\delta h}{\delta x}}{M}=\frac{\frac{\delta h}{\delta y}}{N}.$$

令此式等於 μ。則

$$\frac{\delta h}{\delta x}=\mu M,\quad \frac{\delta h}{\delta y}=\mu N.$$

故
$$\begin{cases}\frac{\delta h}{\delta x}dx+\frac{\delta h}{\delta y}dy=0,\\ \mu M\,dx+\mu N\,dy=0.\end{cases}$$

卽得全微分方程式。

積分因數。在前證明中。μ 不以一個爲限。而 $\mu(x,y)F\{h(x,y)\}$ 之形之函數。其一切積分因數。容易證明。

卽方程式 (1) 有無數積分因數。

例如　(a) $\frac{y}{x^2}=C.$　(b) $\frac{x^2}{y}=C.$　(c) $\tan^{-1}\frac{y}{x^2}=C.$

將上三種微分作微分方程式。則

$$(a)\quad \frac{1}{x^3}(x\,dy-2y\,dx)=0.$$

$$(b)\quad -\frac{x}{y^2}(x\,dy-2y\,dx)=0.$$

$$(c)\quad \frac{x}{x^4+y^2}(x\,dy-2y\,dx)=0.$$

由是可見微分方程式

$$x\,dy-2y\,dx=0.$$

其積分因數有 $\frac{1}{x^3}$, $-\frac{x}{y^2}$, $\frac{x}{x^4+y^2}$, 等等。

然求一個積分因數 $h(x, y)$。則從 (3)

$$\mu\frac{\delta M}{\delta y}+M\frac{\delta\mu}{\delta y}=\mu\frac{\delta N}{\delta x}+N\frac{\delta\mu}{\delta y}.$$

即 $$\mu\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)=N\frac{\delta\mu}{\delta x}+M\frac{\delta\mu}{\delta y} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

此爲第一階之部分微分方程式。而概由原方程式 (1) 解之。則甚困難.

次就 (4) 之普通微分方程式之特別者。述其一二。

[I] <u>就 μ 僅爲 x (或 y) 之函數考之。</u>

就 μ 僅爲 x 之函數考之。則以

$$\frac{\delta\mu}{\delta y}=0,\qquad \frac{\delta\mu}{\delta x}=\frac{d\mu}{dx}.$$

由 (4) $$\mu\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)=N\frac{d\mu}{dy}.$$

$$\therefore\quad \frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{N}\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)dx$$

由是 $$\frac{1}{N}\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)=X \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

不可不僅含 x。

設 X 僅爲 x 之函數。則

$$\frac{d\mu}{\mu}=X.$$

$$\therefore\quad \log\mu=\int X\,dx.$$

$$\therefore\quad \mu=e^{\int X\,dx} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

同様 $$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\delta N}{\delta x}-\frac{\delta M}{\delta y}\right)=Y\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5')$$

此僅爲 y 之函數。則 μ 亦僅爲 y 之函數。

∴ $$\mu=e^{\int Y\,dy}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6')$$

〔例〕 解 $(3x^2+6xy+3y^2)\,dx+(2x^2+3xy)\,dy=0.$

(解) 此方程式

$$M=3x^2+6xy+3y^2,\qquad \frac{\delta M}{\delta y}=6x+6y.$$

$$N=2x^2+3xy,\qquad \frac{\delta N}{\delta x}=4x+3y.$$

∴ $$\frac{1}{N}\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)=\frac{2x+3y}{2x^2+3xy}=\frac{1}{x}.$$

由是依(6)得

$$\mu=e^{\int\frac{dx}{x}}=e^{\log x}=x.$$

試以此乘原方程式之各項。則

$$(3x^3+6x^2y+3xy^2)\,dx+(2x^3+3x^2y)\,dy=0.$$

$$\frac{\delta f}{\delta x}=3x^3+6x^2y+3xy^2.$$

$$f=\int(3x^3+6x^2y+3xy^2)\,\delta x+\phi(y).$$

$$=\frac{3}{4}x^4+2x^3y+\frac{3}{2}x^2y^2+\phi(y).$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}=2x^3+3x^2y+\phi'(y)=2x^3+3x^2y.$$

∴ $\phi'(y)=0.$ ∴ $\phi(y)=C.$

故所求之積分爲

$$\frac{3}{4}x^4+2x^3y+\frac{3}{2}x^2y^2+C=0.$$

卽 $$3x^4+8x^3y+6x^2y^2=c.$$

[II] 就μ爲(xy)之函數考之。

設此假定爲眞而令$xy=v$。則

$$\mu=\mu(v).$$

$$\therefore\qquad \frac{\delta\mu}{\delta x}=\frac{d\mu}{dv}\frac{dv}{dx}=y\frac{d\mu}{dv}.$$

$$\frac{\delta\mu}{\delta y}=\frac{d\mu}{dv}\frac{\delta v}{\delta y}=x\frac{d\mu}{dv}.$$

由是從(4)得

$$\mu\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)=(yN-xM)\frac{d\mu}{dv}.$$

$$\therefore\qquad \frac{d\mu}{\mu}=\frac{\dfrac{\delta M}{\delta y}-\dfrac{\delta N}{\delta x}}{yN-xM}dv.$$

故前假定爲眞,則

$$\frac{\dfrac{\delta M}{\delta y}-\dfrac{\delta N}{\delta x}}{yN-xM}=V \qquad\qquad (7)$$

爲$xy=v$之函數所必要且充分之條件也。然

$$\frac{d\mu}{\mu}=V\,dv.$$

$$\therefore\qquad \log\mu=\int V\,dv.$$

$$\therefore\qquad \mu=e^{\int V\,dv} \qquad\qquad (8)$$

〔例〕 求$(x^3y-2y^4)dx+(y^3x-2x^4)dy=0$之積分因數。

(解) $M=x^3y-2y^4,\quad \dfrac{\delta M}{\delta y}=x^3-8y^3.$

$N=y^3x-2x^4,\quad \dfrac{\delta N}{\delta x}=y^3-8x^3.$

$$\therefore \quad \frac{\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}}{yN-xM}=\frac{(x^3-8y^3)-(y^3-8x^3)}{(y^4x-2x^4y)-(x^4y-2xy^4)}$$

$$=\frac{9(x^3-y^3)}{-3xy(x^3-y^3)}=-\frac{3}{xy}=-\frac{3}{v}.$$

$$\therefore \quad \mu=e^{-3\int\frac{dv}{v}}=e^{-3\log v}=e^{\log(v^{-3})}$$

$$=v^{-3}=\frac{1}{v^3}=\frac{1}{x^3y^3}.$$

[III] 就 μ 為 $\frac{y}{x}$ 之函數考之。

令 $\frac{y}{x}=u$. 則

$$\mu=\mu(u).$$

$$\therefore \quad \frac{\delta\mu}{\delta x}=\frac{d\mu}{du}\frac{\delta u}{\delta y}=-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{d\mu}{du}.$$

$$\frac{\delta\mu}{\delta y}=\frac{d\mu}{du}\cdot\frac{\delta u}{dy}=\frac{1}{x}\cdot\frac{d\mu}{du}.$$

由是依 (4)

$$\mu\left(\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}\right)=-\left(\frac{y}{x^2}N-\frac{1}{x}M\right)\frac{d\mu}{du}.$$

$$\therefore \quad \frac{d\mu}{\mu}=\frac{x^2\left(\frac{\delta N}{\delta x}-\frac{\delta M}{\delta y}\right)}{xM+yN}du.$$

故 μ 得假定為 $\frac{y}{x}$ 之函數。則

$$\frac{x^2\left(\frac{\delta N}{\delta x}-\frac{\delta M}{\delta y}\right)}{xM+yN}=U \qquad (9)$$

爲 $\frac{y}{x}=u$ 之函數所必要且爲充分之條件。而此假定之下。爲

$$\frac{d\mu}{\mu}=U\,du.$$

$$\therefore \qquad \log\mu=\int U\,du.$$

$$\therefore \qquad \mu=e^{\int U\,du} \quad\text{..}(10)$$

8. 奇異解。

有微分方程式 $\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$。命其一般解爲 $F(x, y, C)=0$。試與 C 以 $1, 2, 3, \ldots, -2, \frac{1}{3}, 0.25, \ldots$ 等值。則稱特別解。前已述之矣。

然於第一階普通微分方程式 此等之特別解。全然各異。即不含一般解之解所發生者。是謂奇異解 (*Singular solution*)。

今就幾何學的考其一般解與特別解及奇異解。

特別解 $F(x, y, C_0)=0$。可作爲一種曲線看。有變率 C。一般解 $F(x, y, C)=0$。則表一羣之同類曲線（參照微分學第160頁）。

而由其微分方程式 $\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$ 所得之 $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$。必滿足特別解之曲線上一切點。

然此處一般解之同羣曲線，假定有包絡線。則此包絡線上之點 統同類曲線中之一種 $F(x, y, C_0)=0$ 之切點。而於此點。$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ 爲包絡線 特別解之曲線。亦同一也。由是包絡線上之點。均適合於微分方程式。

由是可知奇異解。乃表同類曲線 $F(x, y, C)=0$ 之包絡線。

(注意) 奇異解之例。見後可盧里 (*Clairaut*) 之方程式。

9. 第一階二次微分方程式。

$$L(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+M(x, y)\frac{dy}{dx}+N(x, y)=0 \ldots\ldots (1)$$

試命 $\frac{dy}{dx}=p$ 則 ( ) 略記如

$$Lp^2+Mp+N=0 \ldots\ldots (1')$$

p 爲二次方程式。而

$$p=\frac{-M\pm\sqrt{M^2-4LN}}{2L}$$

$M^2-4LN<0$。則 $\frac{dy}{dx}$ 卽切線爲虛線。玆省略不論。專論其餘。

上記之兩根。以 $f_1(x, y), f_2(x, y)$ 表之。則 (1) 爲

$$\{p-f_1(x, y)\}\{p-f_2(x, y)\}=0 \ldots\ldots (1'')$$

則 $$p=f_1(x, y), \quad p=f_2(x, y) \ldots\ldots (2)$$

由第 6 節以前各方法。得

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x, y, C_1)=0 \\ F_2(x, y, C_2)=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (3)$$

從此 (1) 之一般解。爲

$$F_1(x, y, C)F_2(x, y, C)=0 \ldots\ldots (4)$$

是卽可求得之積分方程式。蓋第一階微分方程式變率。只限一個故也。

(注意) 第一階 n 次微分方程式

$$L_0p^n+L_1p^{n-1}+L_2p^{n-2}+\ldots+L_{n-1}p+L_n=0.$$

試分解此式爲 n 個一次因數。得

$$(p-f_1)(p-f_2)\ldots(p-f_n)=0.$$

從此可得

$$F_1(x,y,C)F_2(x,y,C)\dots F_n(x,y,C)=0.$$

是即所求之積分方程式也。

〔例〕 1. 切線影爲切點坐標之比例中項。試求其平面曲線。

(解) $x:\frac{y}{p}=\frac{y}{p}:y.\qquad\therefore\quad p^2=\frac{y}{x}.$

$\therefore\qquad p=\pm\sqrt{\frac{y}{x}}.$

$\therefore\qquad \frac{dy}{\sqrt{y}}\mp\frac{dx}{\sqrt{x}}=0.$

$\therefore\qquad \sqrt{y}-\sqrt{x}=C_1,\quad \sqrt{y}+\sqrt{x}=C_2.$

故所求之曲線爲

$$(\sqrt{y}-\sqrt{x}-C)(\sqrt{y}+\sqrt{x}-C)=0.$$

即 $\qquad y-x-2C\sqrt{y}+C^2=0.$

令 $C^2=c$. 則

$$(x-y)^2-2c(x+y)+c^2=0.$$

是卽圓也。

(例) 2. 解 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx}-1=0.$

(解) $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\pm\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}.$

此變方爲同次微分方程式。故令

$$\frac{y}{x}=v.\qquad 則\qquad y=vx.$$

$\therefore\qquad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}=v\pm\sqrt{v^2+1}.$

$$\therefore \qquad \frac{dv}{\sqrt{v^2+1}} = \pm\frac{dx}{x}.$$

$$\therefore \qquad \log(v+\sqrt{v^2+1}) = \pm \log x + C.$$

$$\text{卽} \qquad \log\frac{v+\sqrt{v^2+1}}{x} = C_1, \quad \log(v+\sqrt{v^2+1})x = C_2.$$

$$\therefore \qquad \frac{v+\sqrt{v^2+1}}{x} = e^{C_1} = c_1, \quad (v+\sqrt{v^2+1})x = e^{C_2} = c_2.$$

$$\therefore \qquad \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2} = c_1, \quad y+\sqrt{x^2+y^2} = c_2.$$

由是所求之一般解爲

$$\left(\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2} - c\right)(y+\sqrt{x^2+y^2}-c) = 0.$$

從此得

$$(y+\sqrt{x^2+y^2})^2 - c(x^2+1)(y+\sqrt{x^2+y^2}) + c^2x^2 = 0.$$

10 缺變數之高次微分方程式。

[1] <u>缺 x 與 y。</u>

$$\phi\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

此 $\frac{dy}{dx}$。依代數的之解法。令其一個一次因數爲 $\frac{dy}{dx}-a$。從此

$$\frac{dy}{dx} = a.$$

$$\therefore \qquad y = ax + C.$$

由是求得一般解之一個一次因數爲 $\left(\frac{y-C}{x} - a\right)$.

故所求之一般解爲 $\phi\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0.$

〔例〕 $2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-7\left(\frac{dy}{dx}\right)+1=0.$

（解） $2\left(\frac{y-C}{x}\right)^3-7\left(\frac{y-C}{x}\right)+1=0.$

即 $2(y-C)^3-7x^2(y-C)+x^3=0.$

〔II〕 缺 y。

$$\phi\left(x,\frac{dy}{dx}\right)=0 \qquad (3)$$

解 $\frac{dy}{dx}$。固得適用普通之方法矣。

今由別法解之。

解 (3) 之 x。而令 $\frac{dy}{dx}=p$。則

$$x=f(p) \qquad (3')$$

(3′) 之微分式爲

$$dx=f'(p)\,dp.$$

然 $dx=\frac{dy}{p}.$

而 $dx=p'f'(p)\,dp.$

∴ $$y+C=\int pf'(p)\,dp \qquad (4)$$

由 (3′) 與 (4) 消去 p。則可求得 (3) 之一般解爲

$$F(x,y,C)=0.$$

〔例〕 1. 解 $x=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$

（解） $x=1+p^2.$

$$dx=3p^2dp.$$

$\therefore \qquad dy=p\times 3p^2\,dp=3p^3\,dp.$

$\therefore \qquad y+C=\frac{3}{4}p^4.$

然 $\qquad p=(x-1)^{\frac{1}{3}}.$

$\therefore \qquad y+C=\frac{3}{4}(x-1)^{\frac{4}{3}}.$

〔例〕 2. 解 $x=1+\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

(解) $\qquad x=1+p+p^2.$

$$dx=(1+2p)\,dp.$$

$\therefore \qquad dy=(p+2p^2)\,dp.$

$\therefore \qquad y=\frac{p^2}{2}+\frac{2}{3}p^3+c.$

由是求得一般解之變率式如次。

$$\begin{cases} x=1+p+p^2, \\ y=\frac{1}{2}p^2+\frac{2}{3}p^3+c. \end{cases}$$

[III] 缺 x。

$$\phi\left(y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0 \quad\text{...}\quad (5)$$

此與[II]同樣。得適用解 $\frac{dy}{dx}$ 及解 y 之二種方法。

今令 $\frac{dy}{dx}=p$。而述第二方法。

$$y=f(p) \quad\text{...}\quad (5')$$

$$dy=f'(p)\,dp.$$

然 $\qquad dy=p\,dx.$

而 $$dx=\frac{f'(p)}{p}dp.$$

∴ $$x+C=\int\frac{f'(p)}{p}dp\quad\cdots\cdots(6)$$

由 (5'), (6) 消去 p。即可求得一般解。

〔例〕 解 $y=a\dfrac{dy}{dx}+b\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

(解) $$y=ap+bp^2.$$

$$dy=(a+2bp)\,dp.$$

∴ $$dx=\frac{a+2bp}{p}dp=a\frac{dp}{p}+2b\,dp.$$

∴ $$x=a\log p+2bp+c.$$

由是求得一般解.如

$$\begin{cases}x=a\log p+2bp+c,\\ y=ap+bp^2.\end{cases}$$

11. 可盧里氏 (*Clairaut*) 之微分方程式。

微分方程式

$$y=xp+f(p).\quad\left(p=\frac{dy}{dx}\right)\quad\cdots\cdots(1)$$

是謂<u>可盧里氏 (*Clairaut*) 之方程式</u>。

欲解此式。則先令爲微分.則

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+f'(p)\frac{dp}{dx}.$$

從此 $$\{x+f'(p)\}\frac{dp}{dx}=0$$

由是得次二式。

$$\frac{dp}{dx}=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

$$x+f'(p)=0 \quad\cdots\cdots(2')$$

(i) 採用(2)。

$$p=C.$$

以此代入(1)。得

$$y=Cx+f(C) \quad\cdots\cdots(3)$$

是含變率 C 而爲一般解。

(ii) 採用(2′)。

此 $x=-f'(p)$ 代入(1)。得

$$\begin{cases} x=-f'(p), \\ y=-f'(p)\cdot p+f(p). \end{cases}$$

是亦爲一解也。然此不含變率 C，故不爲一般解。而亦不爲一般解之 C 代入某特別值之特別解。實則爲直線(3)之包絡線。即方程式(1)之奇異解也。

〔例〕 1. $y=xp+\dfrac{m}{p}$. (m 爲常數)。

(解) 令原式爲微分。而

$$p=p+x\frac{dp}{dx}-\frac{m}{p^2}\cdot\frac{dp}{dx}.$$

即

$$\left(x-\frac{m}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}=0.$$

從 $\dfrac{dp}{dx}=0$ 得 $p=C$。代入原方程式。

$$y=Cx+\frac{m}{C}.$$

是即爲一般解。而表同類直線。

又從 $x-\frac{m}{p^2}=0$。得

$$x=\frac{m}{p^2}. \qquad \therefore \quad p=\pm\sqrt{\frac{m}{x}}.$$

以此代入原方程式。則

$$y=\pm\sqrt{mx}\pm\sqrt{mx}=\pm2\sqrt{mx}.$$

$$\therefore \qquad y^2=4mx.$$

是即爲奇異解。而表前記同類曲線之包絡線之拋物線。

(注意) 由可盧里之方程式。則消一般之方程式,

$$x\phi(p)+y\psi(p)+\chi(p)=0. \quad \left(p=\frac{dy}{dx}\right) \cdots\cdots\cdots (1)$$

亦得與本節之方法同樣解之。

即以 $\psi(p)$ 約 (1) 之各項。爲

$$y=xg(p)+f(p) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1')$$

試令此爲 x 之微分。則

$$p=g(p)+xg'(p)\frac{dp}{dx}+f'(p)\frac{dp}{dx}.$$

由是 $$\{p-g(p)\}\frac{dx}{dp}-g'(p)\cdot x-f'(p)=0.$$

是即第5節所解之形。

從此求 $x=F(p)$。則

$$\begin{cases} x=F(p)+C, \\ y=\{F(p)+C\}g(p)+f(p). \end{cases}$$

是爲所求一般解之變率式。

〔例〕 2. $x+y\cdot p=ap^2$.

〔解〕 兩邊以 p 約之。則

$$y=-x\frac{1}{p}+ap.$$

以此爲微分。而得

$$p=-\frac{1}{p}+\frac{x}{p^2}\cdot\frac{dp}{dx}+a\frac{dp}{dx}.$$

即 $$p+\frac{1}{p}=\left(\frac{x}{p^2}+a\right)\frac{dp}{dx}.$$

即 $$\left(p+\frac{1}{p}\right)\frac{dx}{dp}-\frac{x}{p^2}-a=0.$$

$$\frac{dx}{dp}-\frac{x}{p(1+p^2)}-\frac{ap}{1+p^2}=0.$$

由是第 5 節之 P, Q。各爲 $-\frac{1}{p(1+p^2)}$, $-\frac{ap}{1+p^2}$。則可得次之結果。

$$x=\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\{c+a\log(p+\sqrt{1+p^2})\}.$$

是求得一般解如次。

$$\begin{cases} x=\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\{c+a\log(p+\sqrt{1+p^2})\}, \\ y=-\dfrac{x}{p}+ap. \end{cases}$$

〔例〕 3. 有直線交於直交軸。其截分(原點與交點間之長)之和,差,積,商各有一定。問此直線之包絡線各如何。

〔解〕 命切於此直線之包絡線之點爲 $x|y$。其方程式爲

$$\eta-y=\frac{dy}{dx}(\xi-x).$$ (微分學第 122 頁)。

則 x 軸之截分。由 $\eta=0$ 得

$$\xi=\frac{\frac{dy}{dx}x-y}{\frac{dy}{dx}}=\frac{px-y}{p}\text{.............................}(\alpha)$$

又 y 軸之截分。由 $\xi=0$ 得

$$\eta=y-\frac{dy}{dx}x=y-px\text{..............................}(\beta)$$

由是 (α), (β) 之和，差，積，商。各等於一定之 a。則各得次列左側微分方程式。從而可得右側之一般解。即此同類直線之方程式與奇異解。即其包絡線。

和 $y=xp-\dfrac{ap}{1-p}$,	(一般解)	$y=Cx-\dfrac{aC}{1-C}$.
	(奇異解)	$(x-y)^2-2a(x+y)+a^2=0$.
差 $y=xp-\dfrac{ap}{1+p}$,	(一般解)	$y=Cx-\dfrac{aC}{1+C}$.
	(奇異解)	$(x+y)^2-2a(x-y)+a^2=0$.
積 $y=xp+a\sqrt{-p}$,	(一般解)	$y=Cx+a\sqrt{-C}$.
	(奇異解)	$4xy=a^2$.
商 $ap=-1$,	(一般解)	$ay+x=C$.
	(奇異解)	無.

和式之包絡線。表切於第一象限之拋物線。以直角之二等分線為軸。x 軸 y 軸各為 $a|0$, $0|a$。

差式之包絡線亦同。但為切於第四象限之包絡線.

積式則為等邊雙曲線.

第九章 第二階微分方程式

1. 第二階微分方程式之解。

一般之形爲

$$\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0 \quad \text{......} (1)$$

解之爲 $\frac{d^2y}{dx^2}$。則

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad \text{......} (2)$$

令 $x=a$ 并與 y 及 $\frac{dy}{dx}$ 以適當之任意常數。如

$$y=c_1, \quad \frac{dy}{dx}=c_2.$$

則 $\frac{d^2y}{dx^2}=\psi(a, c_1, c_2,)$ 是爲一定，

若 $x_1=a+dx$。試求其與此相應對之 $y_1, \left(\frac{dy}{dx}\right)_1, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_2$。則

$$y_1=c_1+dy=c_1+c_2dx$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1=c_2+d\left(\frac{dy}{dx}\right)=c_2+\psi(a, c_1, c_2)dx.$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_1=\psi\{a+dx, c_1+c_2dx, [c_2+\psi(a, c_1, c_2)dx]\}.$$

若 $x_2=a+2dx$, $x_3=a+3dx$, ...。其對於 x 之變化亦同樣也

然設定二種常數 c_1, c_2，則對於 x 之變化。而適合 (2) 之 y 之變化。得以承認。

由是 (2) 之一般解爲

$$F(x, y, C_1, C_2)=0 \quad \text{......} (3)$$

反之，
$$\begin{cases} F=0, \\ \dfrac{\delta F}{\delta x}+\dfrac{\delta F}{\delta x}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0, \\ \dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{\delta F}{\delta x}+\dfrac{\delta F}{\delta x}\cdot\dfrac{dy}{dx}\right)+\dfrac{\delta}{\delta y}\left(\dfrac{\delta F}{\delta x}+\dfrac{\delta F}{\delta y}\cdot\dfrac{dy}{dx}\right)\dfrac{dy}{dx}=0. \end{cases}$$

從此消去 C_1, C_2 則求得 (1)。

(注意) 第 n 階微分方程式

$$\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0.$$

其一般解。亦同樣爲

$$F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0.$$

2. 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\psi(x)$。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\psi(x).$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}=\int\psi(x)\,dx+C_1.$$

$$\therefore \qquad y=\int\left\{\int\psi(x)\,dx\right\}dx+C_1x+C_2.$$

(注意) 此解法。可適用於一般之

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\psi(x).$$

〔例〕 1. 加速度等於一定之 a。試作其直線運動之公式。

(解) 令運動之距離爲 s。則

$$\frac{d^2s}{dt^2}=a. \qquad \text{(微分學第21頁)}$$

$$\therefore \qquad \frac{ds}{dt}=at+C_1 \ldots\ldots(\alpha)$$

$$s=\frac{1}{2}at^2+C_1t+C_2 \ldots\ldots(\beta)$$

若令 $t=0$。速度亦爲零。則

$$C_1=0.$$

又令 $t=0$, $\frac{ds}{dt}=0$, $s=0$。則

$$C_1=0,\ C_2=0.$$ 而

$$s=\frac{1}{2}at^2.$$

在地球上之落體,則 $a=g=9\ 81$。

〔例〕 2. $\frac{d^2y}{dx^2}=x+\sin x.$

(解) $$\frac{dy}{dx}=\int x\,dx-\int \sin x\,dx+C_1=\frac{1}{2}x^2-\cos x+C_1.$$

$$y=\frac{1}{2}\int x^2dx-\int \cos x\,dx+C_1\int dx+C_2$$

$$=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2.$$

3 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}=\psi\left(\frac{dy}{dx}\right)$。

令 $\frac{dy}{dx}=p$. 則

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}.$$

$$\therefore \qquad \frac{dp}{dx}=\psi(p).$$

$$\therefore \qquad \frac{dp}{\psi(p)}=dx.$$

$$\therefore \qquad \int\frac{dp}{\psi(p)}=x+C_1 \cdots\cdots\cdots\cdots (\alpha)$$

由 (α) 解得之 p。令為

$$p=\chi(x,\ C_1) \cdots\cdots\cdots\cdots (\alpha')$$

則 $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\chi(x,\ C_1).$

$$y=\int\chi(x,\ C_1)\,dx+C_2 \cdots\cdots\cdots\cdots (\beta)$$

此即原方程式之一般解也。

〔例〕 1. 曲度半徑如等於一定之 a。試求其平面曲線。

(解) $$\frac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}=a. \qquad \text{(微分學第154頁)。}$$

令 $\dfrac{dy}{dx}=p$. 則

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{a}(1+p^2)^{\frac{3}{2}}.$$

$$\therefore \qquad \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a}dx.$$

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{x}{a}+C_1=\frac{x+aC_1}{a}=\frac{x+c_1}{a}.$$

從此 $\qquad p=\pm\dfrac{x+c_1}{\sqrt{(a+c_1+x)(a-c_1-x)}}.$

故 $$y+c_2=\pm\int\frac{x+c_1}{\sqrt{(a+c_1+x)(a-c_1-x)}}dx$$

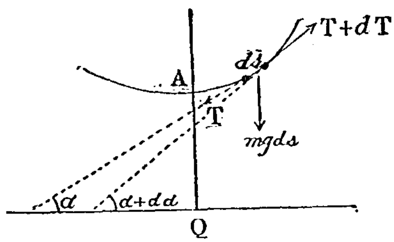
$$=\pm\sqrt{a^2-(x+c_1)^2}.$$

$$\therefore \qquad (y+c_2)^2=a^2-(x+c_1)^2.$$

$$\therefore \qquad (x+c_1)^2+(y+c_2)^2=a^2.$$

卽圓的曲度一定之唯一種之平面曲線也。

〔例〕 2. 求垂絲線(微分學第191頁)之方程式。



(解) 令絲之張力爲 T。張力之方向與 x 軸所成之角爲 α。則

<u>鉛直線之方向分力</u>

$$(T+dT)\sin(\alpha+d\alpha)-T\sin\alpha=mg\,ds.$$

卽 $$d(T\sin\alpha)=mg\,ds \quad\text{..............................}(i)$$

<u>水平線之方向分力</u>

$$(T+dT)\cos(\alpha+d\alpha)-T\cos\alpha=0.$$

卽 $$d(T\cos\alpha)=0 \quad\text{..............................}(ii)$$

令(i), (ii)爲積分。則

$$\begin{cases} T\sin\alpha=mgs+C, \\ T\cos\alpha=C'. \end{cases} \quad\text{..............................}(iii)$$

令 $\alpha=0, s=0$。卽自頂點 A 計算垂線之長。以 s 表之。則可令 $C=0$

$\alpha=0$。卽於 A 之張力。以 mgc 表之。則可令 $C'=mgc$。卽

$$\begin{cases} T\sin\alpha=mgs, \\ T\cos\alpha=mgc. \end{cases} \quad\text{..............................}(iv)$$

邊邊相割而

$$\tan\alpha=\frac{s}{c}.$$

卽 $$\frac{dy}{dx}=\frac{s}{c}.$$

而求微分 $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{c}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{v})$$

是爲垂絲線之微分方程式。

試解之。而令 $\frac{dy}{dx}=p$。則

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{c}\sqrt{1+p^2}.$$

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{c}dx.$$

$$\therefore \qquad log(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{1}{c}x+C_1.$$

然 $x=0$, $\frac{dy}{dx}=p=0$。則 $C_1=0$。

$$\therefore \qquad log(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{x}{c}.$$

$$p+\sqrt{1+p^2}=e^{\frac{x}{c}}.$$

故又 $$\frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}}=e^{-\frac{x}{c}}.$$

卽 $$-p+\sqrt{1+p^2}=e^{-\frac{x}{c}}.$$

$$2p=e^{\frac{x}{c}}=e^{-\frac{x}{c}}.$$

卽 $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}-e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

$$\therefore \qquad y+C_2=\frac{1}{2}\int e^{\frac{x}{c}}dx-\frac{1}{2}\int e^{-\frac{x}{c}}dx=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

令頂點 A 之坐標爲 $0|c$。則 $C_2=0$。

由是求得垂絲線之方程式、爲

$$y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)\text{..................................(vi)}$$

(注意) 一般第n階微分方程式$f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$。均得適用本節之解法以解之。

4. 微分方程式$\frac{d^2y}{dx^2}=\phi(y)$。

此方程式之兩邊以<u>$2dy$</u>乘之。則

$$2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}dx=2\phi(y)\,dy.$$

$$\therefore\qquad\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2\int\phi(y)\,dy+C_1.$$

$$\therefore\qquad\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{2\int\phi(y)\,dy+C_1}.$$

$$\therefore\qquad\pm\frac{dy}{\sqrt{2\int\phi(y)\,dy+C_1}}=dx.$$

$$\therefore\qquad\pm\int\frac{dy}{\sqrt{2\int\phi(y)\,dy+C_1}}=x+C_2.$$

〔例〕 1. 由單一弦運動 (*Simple harmonic motion*)

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2x.$$

試求其x爲t之函數。

(解) $$2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}dt=-2k^2x\,dx.$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=k^2(x^2-C_1^2).$$

$\therefore \qquad \frac{dx}{dt}=\pm k\sqrt{C_1{}^2-x^2}.$

$$\frac{dx}{\sqrt{C_1{}^2-x^2}}=\pm kdt.$$

$\therefore \qquad sin^{-1}\frac{x}{C_1}=\pm kt+C_2.$

$$\frac{x}{C_1}=sin(\pm kt+C_2).$$

$\therefore \qquad x=C_1\,sin(\pm kt+C_2).$

或表之如次。

$$x=A\ sin\ kt+B\ cos\ kt.$$

〔例〕 2. $\frac{d^2y}{dx^2}-n^2y=0.$

(答) $y=Ae^{nx}+Be^{-nx}.$

(注意) 第 n 階微分方程式 $f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}},\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$。亦得與本節同樣解之。

5. 微分方程式 $f\left(x,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$ 及 $g\left(y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$。

前之方程式。命 $\frac{dy}{dx}=p$。則

$$f\left(x,p,\ \frac{dp}{dx}\right)=0.$$

是爲第一階。得由前節之法解之。

後之方程式。命

$$\frac{dy}{dx}=p.$$

則 $$dx=\frac{dy}{p}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=p\frac{dp}{dy}.$$

故變原方程式爲

$$g\left(y,p,p\frac{dp}{dy}\right)=0.$$

是亦爲第一階之方程式。

〔例〕 1. $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$

(解) 令 $\frac{dy}{dx}=p$. 則

$$(1+x^2)\frac{dp}{dx}+1+p^2=0.$$

∴ $$\frac{dp}{1+p^2}+\frac{dx}{1+x^2}=0.$$

$$tan^{-1}p+tan^{-1}x=C_1.$$

即 $$tan^{-1}\frac{p+x}{1-px}=C_1.$$

$$\frac{p+x}{1-px}=tan\,C_1=c_1.$$

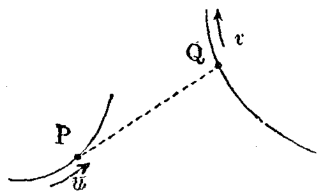
∴ $$p=\frac{dy}{dx}=\frac{c_1-x}{1+c_1x}.$$

∴ $$y=\int\frac{c_1-x}{1+c_1x}dx+c_2=\left(1+\frac{1}{c_1}\right)log(1+c_1x)-\frac{1}{c_1}x+c_2.$$

即 $$y+\frac{1}{c_1}x-c_2=\left(1+\frac{1}{c_1}\right)log(1+c_1x).$$

即 $$c'_1y+x-c'=(1+c_1)log(1+c_1x).$$

〔例〕 2. 追跡曲線(*Curve of Pursuit*) 卽一點 $Q(x', y')$ 以等速度 v 走於一曲線 $f(x', y')=0$ 之上。有第二點 $P(x, y)$ 以等速度 u 常向 Q 點之方向追之。求第二點軌跡之方法如何。



又 $f(x', y')=0$ 爲直線。則此追跡曲線如何。

(解) 直線方向 PQ。常可爲所求曲線之切線。則

$$y'-y=\frac{dy}{dx}(x'-x) \dots\dots\dots\dots (1)$$

又令兩曲線弧之微分爲 ds, ds'。則

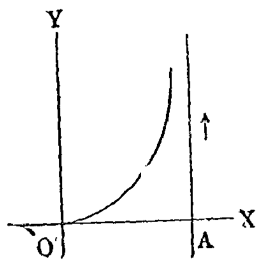
$$ds : ds' = u : v.$$

$$\therefore \qquad v\sqrt{dx^2+dy^2}=u\sqrt{dx'^2+dy'^2}.$$

$$\therefore \qquad \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{u}{v}\sqrt{\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2} \dots\dots\dots (2)$$

由 (1), (2) 與 $f(x', y')=0$ 消去 x', y'。則可得追跡曲線之微分方程式如次。

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$$



次被追者(兔)。於 $x'=a$ 上。自 x 軸上之點 A。走 y 軸之正方向。追者(犬)。自原點 0 常向兔走。則 (2)

$$dx'=0.$$

故
$$\begin{cases} x'=a \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(\alpha) \\ y'-y=\dfrac{dy}{dx}(x'-x) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(\beta) \\ dy'=\dfrac{v}{u}\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}dx \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(\gamma) \end{cases}$$

從此消去 y', x'。

卽以 (α) 代入 (β)。得

$$y'-y=\frac{dy}{dx}(a-x).$$

以此求微分。則

$$dy'-\frac{dy}{dx}dx=\frac{d^2y}{dx^2}(a-x)dx-\frac{dy}{dx}dx.$$

從此與 (γ)。得

$$\frac{d^2y}{dx^2}(a-x)=\frac{v}{u}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots(\delta)$$

是爲特別追跡曲線之微分方程式。

此依本節之方法以求積分。則

$v \neq u$.

$$y=\frac{1}{2}\left\{\frac{C_1(a-x)^{1-\frac{v}{u}}}{\frac{v}{u}-1}+\frac{1}{C_1}\cdot\frac{(a-x)^{1+\frac{v}{u}}}{1+\frac{v}{u}}\right\}+C_2.$$

若 $x=0$, $y=0$, $\dfrac{dy}{dx}=0$. 從而

$$C_1=a^{\frac{v}{u}}\quad C_2=\frac{a\dfrac{v}{u}}{1-\dfrac{v^2}{u^2}}.$$

則可得追跡曲線之方程式爲

$$y=\frac{1}{2}\left\{\frac{a^{\frac{v}{u}}(a-x)^{1-\frac{v}{u}}}{\frac{v}{u}-1}+\frac{a^{-\frac{v}{u}}(a-x)^{1+\frac{v}{u}}}{\frac{v}{u}+1}\right\}+\frac{a\frac{v}{u}}{1-\frac{v^2}{u^2}}.$$

又 $u=v$。則從 (δ)

$$y=\frac{1}{2}\left\{-C_1\log(a-x)+\frac{1}{2C_1}(a-x)^2\right\}+C_2.$$

$$C_1=a,\quad C_2=\frac{a}{2}\left(\log a-\frac{1}{2}\right).$$

$$\therefore\qquad y=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2a}(a-x)^2-a\log(a-x)\right\}+\frac{a}{2}\left(\log a-\frac{1}{2}\right).$$

〔例〕 3. $2(1-y)\dfrac{d^2y}{dx^2}=1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2.$

〔解〕 $\dfrac{dy}{dx}=p,\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=p\dfrac{dp}{dy}.$

$$2(1-y)p\frac{dp}{dy}=1+p^2.$$

$$\therefore\qquad \frac{2p\,dp}{1+p^2}=\frac{dy}{1-y}.$$

$$\log(1+p^2)=-\log(1-y)+C_1.$$

$$1+p^2=\frac{c_1}{1-y}.$$

$$p=\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{c_1-1+y}{1-y}}.$$

$$\therefore\qquad x=\int\sqrt{\frac{1-y}{c_1-1+y}}\,dy+c_2$$

$$=-2c_1\int\frac{z^2}{(1+z^2)^2}dz+c_2\qquad\left[\sqrt{\frac{1-y}{c_1-1+y}}=z\right]$$

$$=\sqrt{(1-y)(c_1-1+y)}-c_1\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-y}{c_1-1+y}}+c_2$$

6. 一般第二階微分方程式之種種之例。

一般之第二階微分方程式有一般的解法。然遇特別形狀。得適用特別手段如次。

[I] $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 爲同次之例。

〔例〕 1. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=e^x\frac{dy}{dx}$.

(解) 是各項均爲一次。

試假定

$$y=e^{\int u dx}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

則
$$\frac{dy}{dx}=u\cdot e^{\int u dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{du}{dx}\cdot e^{\int u dx}+u^2\cdot e^{\int u dx}.$$

故原方程式爲

$$e^{\int u dx}\left(u^2+\frac{du}{dx}\right)+u^2\cdot e^{\int u dx}=e^x\cdot e^{\int u dx}\cdot u.$$

$$\therefore\quad \frac{du}{dx}-e^x\cdot u+2u^2=0.$$

是爲白奴利之方程式(見第八章第4節例3)。依此解之。則

$$u=\frac{1}{2}\cdot\frac{e-e^x}{x+C_1}.$$

$$\therefore\quad y=e^{\frac{1}{2}\int\frac{e-e^x}{x+C_1}dx+C_2}.$$

[II] x 爲一次，y 爲 n 次，$\frac{dy}{dx}$ 爲 $(n-1)$ 次，$\frac{d^2y}{d^2x}$ 爲 $(n-2)$ 次時同次方程式之例。

例） 2. $x^4\dfrac{d^2y}{dx^2}=(x^3+2xy)\dfrac{dy}{dx}-4y^2.$

（解） y 爲二次，$\dfrac{dy}{dx}$ 爲一次，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 爲 0 次；則爲四次之同次方程式。

令 $x=e^\theta,\quad y=e^{2\theta}\cdot z$ ....(II)

卽
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{2e^{2\theta}\cdot z+e^{2\theta}\dfrac{dz}{d\theta}}{e^\theta}=e^\theta\left(2z+\frac{dz}{d\theta}\right).$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\theta}\left\{e^\theta\left(2z+\frac{dz}{d\theta}\right)\right\}\frac{d\theta}{dx}$$
$$=e^\theta\left(2z+3\frac{dz}{d\theta}+\frac{d^2z}{d\theta^2}\right)\frac{1}{x}=2z+3\frac{dz}{d\theta}+\frac{d^2z}{d\theta^2}.$$

依前方程式如次。

$$e^{4\theta}\left(2z+3\frac{dz}{d\theta}+\frac{d^2z}{d\theta^2}\right)=(e^{2\theta}+2e^{3\theta}z)e^\theta\left(2z+\frac{dz}{d\theta}\right)-4e^{4\theta}z^2.$$

$\therefore$
$$2z+3\frac{dz}{d\theta}+\frac{d^2z}{d\theta^2}=(1+2z)\left(2z+\frac{dz}{d\theta}\right)-4z^2.$$

$\therefore$
$$\frac{d^2z}{d\theta^2}+2(1-z)\frac{dz}{d\theta}=0.$$

令
$$\frac{dz}{d\theta}=p.$$

則
$$\frac{d^2z}{d\theta^2}=\frac{dp}{d\theta}=\frac{dp}{dz}\cdot\frac{dz}{d\theta}=p\frac{dp}{d\theta}.$$

故
$$p\frac{dp}{dz}+2(1-z)p=0.$$

$\therefore$
$$\frac{dp}{dz}+2(1-z)=0.\quad 或\quad p=0.$$

解之。

$$C_1>0,\quad 則\quad \theta=\frac{1}{\sqrt{C_1}}\tan^{-1}\frac{z-1}{\sqrt{C_1}}+C_2.$$

$$C_1<0,\quad 則\quad \theta=\frac{1}{1\sqrt{-C_1}}\log\frac{z-1-\sqrt{-C_1}}{z-1+\sqrt{-C_1}}+C_2.$$

但 $\theta=\log x,\ z=\dfrac{y}{x^2}.$

又從 $p=0$ 得 $y=cx^2$。是為前記一般解之特別解。而不為奇異解。

〔例〕 3. $x^3\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(y-x\dfrac{dy}{dx}\right)^2.$

(略解) x 為一次，y 為一次；$\dfrac{dy}{dx}$ 為 0 次，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 為 (-1) 次。可令 $x=e^\theta$，$y=e^\theta z$. 而考之。

(答) $y+C''x=x\log\dfrac{x}{x+C_1}.$

[III] 置換變數之特異之例。

〔例〕 4. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=ax+by.$

(解) 令 $ax+by=z.$

則 $a+b\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx},\quad b\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d^2z}{dx^2}.$

故原方程式為

$$\frac{d^2z}{dx^2}=bz.$$

是第 4 節之例 1 及例 2。而為所求之積分。

〔例〕 5. $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+ay=0.$

(解) 令 $x=\sin t$. 則

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}. \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2x}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt}.$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}=\frac{1}{\cos^2 t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{dy}{dt}\right).$$

以此等式代入原方程式。是亦為

$$\frac{d^2y}{dt^2}+ay=0.$$

〔IV〕 由微分而解之之例。

〔例〕 6. $xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-y^2-k^2)\frac{dy}{dx}-xy=0.$

(解) $$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-y^2-k^2)\frac{dy}{dx}-xy=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

令此為微分。則

$$\left(2xy\frac{dy}{dx}+x^2-y^2-k^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+x\frac{dy}{dx}-y=0.$$

卽 $$2xy\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+(x^2-y^2-k^2)\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right\}\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=0 \ldots\ldots (\beta)$$

試以 $\frac{dy}{dx}$ 乘 (β)。以 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 乘 (α)。相減。則

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2}+xy\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right\}\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=0.$$

去 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1$. 則

$$xy\frac{d^2y}{dx^2}+\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)\frac{dy}{dx}=0.$$

即 $$xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0.$$

即 $$\frac{d}{dx}\left\{xy\frac{dy}{dx}\right\}-\frac{d}{dx}(y^2)=0.$$

∴ $$xy\frac{dy}{dx}-y^2=C \qquad\cdots\cdots(\gamma)$$

以 (γ) 之 $\frac{dy}{dx}$ 之值代入 (α)。得

$$\frac{(y^2+C)^2}{xy}+(x^2-y^2-k^2)\frac{y^2+C}{xy}-xy=0.$$

從此 $$Cx^2-(k^2-C)y^2=C(k^2-C).$$

∴ $$\frac{x^2}{k^2-C}-\frac{y^2}{C}=1.$$

[V] 變率視同函數而解之之例。

〔例〕 7. $\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}+F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$

(解) $$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}+F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0 \qquad\cdots\cdots(1)$$

先解 $$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}=0 \qquad\cdots\cdots(2)$$

則 $$\frac{dy}{dx}=Ce^{-\int f(x)dx} \qquad\cdots\cdots(3)$$

此 (3) 之值。雖不能適合於 (1)。然假定 C 爲 y 之某函數。則能爲 (1) 之解。即

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left\{\frac{dC}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=Cf(x)\right\}e^{-\int f(x)dx}$$

$$=\left\{\frac{dC}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}-Cf(x)\right\}\frac{1}{C}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

以此代入 (1)。得

$$\frac{1}{C}\cdot\frac{dC}{dy}+F(y)=0\dots\dots\dots\dots(4)$$

$\therefore$
$$C=C'e^{-\int F(y)dy}\dots\dots\dots\dots(5)$$

由是從 (3) 得

$$\frac{dy}{dx}=C'e^{-\int F(y)dy}e^{-\int f(x)dx}.$$

從此求得一般解爲

$$\int e^{\int F(y)dy}dy=C'\int e^{-\int f(x)dx}dx+C''.$$

〔例〕 8. 解 $(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=e^x.$

(略解) 解 $(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=0.$ 則

$$y=C_1e^x+C_2x.$$

此處之 C_1, C_2 僅爲 x 之函數考之則

$$\begin{cases} C_1=c_1-\dfrac{x}{1-x}-\log|1-x|, \\ C_2=c_2+\dfrac{e^x}{1-x}+\displaystyle\int\frac{e^x}{1-x}dx. \end{cases}$$

$\therefore$
$$y=c_1e^x+c_2x-e^x\log|1-x|+x\int\frac{e^x}{1-x}dx.$$

7. 聯立第一階微分方程式。

聯立第一階微分方程式之中為一次。或可分解為一次之一組。為

$$\left.\begin{aligned} Q(x,y,z)\frac{dy}{dx}+R(x,y,z)\frac{dz}{dx}+P(x,y,z)=0 \\ Q'(x,y,z)\frac{dy}{dx}+R'(x,y,z)\frac{dz}{dx}+P'(x,y,z)=0 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

又為代數的解法。得

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx}=\phi(x,y,z) \\ \frac{dz}{dx}=\psi(x,y,z) \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解此(2)。先以前者為微分。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\delta\phi}{\delta x}+\frac{\delta\phi}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\delta\phi}{\delta z}\cdot\frac{dz}{dx}.$$

此與後者換置。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\delta\phi}{\delta x}+\frac{\delta\phi}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}+\psi\frac{\delta\phi}{\delta z}.$$

由是

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx}=\phi \\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\delta\phi}{\delta x}+\frac{\delta\phi}{\delta y}\frac{dy}{dx}+\psi\frac{\delta\phi}{\delta z} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

從此消去z。則可得第二階微分方程式。

$$f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

解之。得

$$F(x,y,C_1,C_2)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

表 (5) 爲陽函數。

$$y=G(x, C_1, C_2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

然後以此代入 (2) 之前者。

$$\frac{d}{dx}G(x, C_1, C_2)=G'(x, C_1, C_2)=\phi\{x, G(x, C_1, C_2), z\}.$$

從此可求得 z 如次。

$$z=H(x, C_1, C_2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

〔例〕 1. $$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}-3x+y=0\\&\frac{dy}{dt}-x-y=0\end{aligned}\right\}.$$

(解) 前方程式求微分。

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=0.$$

由後方程式換置 $\frac{dy}{dt}$。

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+x+y=0.$$

由前方程式換置 y。

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+x+3x-\frac{dx}{dt}=0.$$

即 $$\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+4x=0.$$

由前節[1]之法考之。

假定 $$x=e^{\int u\,dt}.$$

則 $$\frac{dx}{dt}=ue^{\int u\,dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2}=\left(\frac{du}{dt}+u^2\right)e^{\int u\,dt}.$$

由原方程式，消去 $e^{\int u dt}$。

$$\frac{du}{dt}+u^2-4u+4=0.$$

$$\frac{du}{(u-2)^2}+dt=0.$$

$$-\frac{1}{u-2}+t=C_1. \qquad \therefore \quad u=2+\frac{1}{t-C_1}.$$

$$\therefore \qquad x=e^{\int\left(2+\frac{1}{t-C_1}\right)dt+C_2}=e^{2t+\log(t-C_1)+C_2}$$

$$=C'e^{2t}\cdot(t-C_1). \qquad [e^{C_2}=C'].$$

或直令

$$x=e^{2t}(At+B).$$

以此代入原方程式之前者。

$$2e^{2t}(At+B)+Ae^{2t}-3e^{2t}(At+B)+y=0.$$

$$\therefore \qquad y=e^{2t}(At-A+B).$$

〔例〕 2. 解 $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y}$.

(解) 從 $\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y}$ 得 $ydy=zdz$.

$$\therefore \qquad y^2-z^2=C_1 \quad \dots\dots\dots\dots (a)$$

從此 $y=\pm\sqrt{C_1+z^2}$.

$$\therefore \qquad \frac{dx}{x}=\pm\frac{dz}{\sqrt{C_1+z^2}}.$$

$$\therefore \qquad \log x=\pm\log(z+\sqrt{C_1+z^2})+C_2.$$

$$C'x=z+\sqrt{C_1+z^2}. \qquad [C'=-\log C_2].$$

又 $C''x=\frac{1}{z+\sqrt{C_1+z^2}}=\sqrt{C_1+z^2}-z. \qquad [C''=-C_1\log C_2].$

卽 $$Cx=y\pm z\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\beta)$$

以 (β) 約 (α)。則

$$\frac{C_1}{Cx}=y\mp z\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\gamma)$$

從 (β) 與 (γ)。得

$$y=\frac{C}{2}x+\frac{C_1}{2Cx},\quad z=\pm\left(\frac{C}{2}x-\frac{C_1}{2Cx}\right).$$

或更換置變率。

$$y=Ax+\frac{B}{x},\quad z=\pm\left(Ax-\frac{B}{x}\right).$$

8. 聯立第二階微分方程式。

今避其一般。專就力學，星學應用之例。舉其二三。

〔例〕 1. $$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=ax+by\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=a'x+b'y\end{aligned}\right\}$$ 其解法如何。

(解) 以未定係數 λ 乘第二方程式兩邊。各與第一方程式相加。則

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\frac{d^2y}{dt^2}=(a+\lambda a')x+(b+\lambda b')y.$$

卽 $$\frac{d^2}{dt^2}(x+\lambda y)=(a+\lambda a')\left\{x+\frac{b+\lambda b'}{a+\lambda a'}y\right\}.$$

決定 λ 如次。

$$\frac{b+\lambda b'}{a+\lambda a'}=\lambda.$$

則 $$\frac{d^2}{dt^2}(x+\lambda y)=(a+\lambda a')(x+\lambda y).$$

令 $x+\lambda y=z$ 則

$$\frac{d^2z}{dt^2}=(a+\lambda a')z.$$

此積分已於第十節示明矣。

今由此得

$$z=F(t, C_1, C_2).$$

則 $$x+\lambda y=F.$$

∴ $$x=F-\lambda y.$$

以此代入原方程式第一。

$$F''-\lambda\frac{d^2y}{dt^2}=aF+(b-a\lambda)y.$$

卽 $$\lambda\frac{d^2y}{dt^2}+(b-a\lambda)y+aF-F''=0.$$

由是可求得 y。從而求得 x。

〔例〕 2. $$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2x}{dt^2}-2r\frac{dy}{dt}+ax=0\\&\frac{d^2y}{dt^2}+2r\frac{dx}{dt}+ay=0\end{aligned}\right\}$$ 試解之。

〔解〕 第一方程式求微分。

$$\frac{d^3x}{dt^3}-2r\frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}=0.$$

以第二方程式 $\frac{d^2y}{dt^2}$ 之值代入之。

$$\frac{d^3x}{dt^3}+(4r^2+a)\frac{dx}{dt}+2ray=0.$$

再求微分。

$$\frac{d^4x}{dt^4}+(4r^2+a)\frac{d^2x}{dt^2}+2ra\frac{dy}{dt}=0.$$

以第一方程式 $\frac{dy}{dt}$ 之值代入之。

$$\frac{d^4x}{dt^4}+2(2r^2+a)\frac{d^2x}{dt^2}+a^2x=0.$$

解之,得次式。

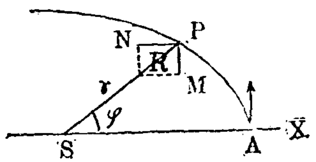
$$x=C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t+C_3\cos\beta t+C_4\sin\beta t.$$

但
$$\begin{cases}\alpha=\sqrt{2r^2+a+2r\sqrt{r^2+a^2}},\\ \beta=\sqrt{2r^2+a-2r\sqrt{r^2+a^2}}.\end{cases}$$

從而得 y 如次。

$$y=-\frac{1}{2ra}\cdot\frac{d^3x}{dt^3}-\frac{4r^2+a}{2ra}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

〔例〕 3. 質量 m 之點 P(惑星)。繞質量 M 之點 S(太陽)之周。依奈端引力之法則。運動一平面上。試以昔蒲里魯氏之法則證明之。



(解) 運動開始之點。在 x 軸之點 A。

則 $t=0,\quad SA=r_0,\quad \frac{dx}{dt}=0,\quad \frac{dy}{dt}=v_0.$

依奈端氏之法則。則於點 P, $SP=\sqrt{x^2+y^2}=r$。以 R 表其引力,則

$$R=k\frac{Mm}{r^2}. \qquad (k\text{ 爲常數})。$$

平行此引力兩軸之分力爲

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\overline{PM}=-R\cos\varphi=-k\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{x}{r}.$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-\overline{PN}=-R\sin\varphi=-k\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{y}{r}.$$

由是表點 P 之運動微分方程式如次。

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kM\dfrac{x}{r^3}\\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2}=-kM\dfrac{y}{r^3}\\[2ex] x^2+y^2=r^2\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

然此方程式(1)。各以 $2\dfrac{dx}{dt}, 2\dfrac{dy}{dt}$ 乘之,相加,則

$$2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}=-kM\frac{1}{r^3}\left(2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}\right)$$

即 $$\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}=-kM\frac{1}{r^3}\cdot\frac{d}{dt}(x^2+y^2),$$

以 $$x^2+y^2=r^2.$$

而 $$\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}=-2kM\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{dt}.$$

$$\therefore\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=2k\frac{M}{r}+C\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

然點 A 由前記之條件。

$$v_0^2=2k\frac{M}{r_0}+C.$$

由是於點 P 之速度以 v 表之,則

$$v^2-v_0^2=2k\frac{M}{r}-2k\frac{M}{r_0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2')$$

即 $$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=k\frac{Mm}{r}-k\frac{Mm}{r_0}=Rr-R_0r_0.$$

即示運動能力之變化,等於位置能力之變化。

次以 y, x 各乘 (1)，相減，則

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0.$$

$$\frac{d}{dt}\left\{x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right\}=0.$$

$$\therefore\qquad x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=C'\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

然由最初之條件。

$$r_0v_0=C'.$$

而令 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ 則

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=r\cos\theta\left(\frac{dr}{dt}\sin\theta+r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$-r\sin\theta\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$=r^2\frac{d\theta}{dt}.$$

故於點 P, dt 時間內由動徑之回轉，而生扇形之面積（第五章第 2 節）爲 $dS=\frac{1}{2}r^2d\theta$。於點 A 爲 $S_0=\frac{1}{2}r_0v_0$，則

$$\frac{dS}{dt}=S_0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3')$$

$$\therefore\qquad S=S_0t+C''.$$

然 $\qquad t=0,\quad S=0.$

$$S=S_0t\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

此公式表岢蒲里魯之第二法則。「動徑夾同一面積於同一時間內」。

又 (1) 之雙方以 $2S_0=x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}$ 乘之,則

$$2S_0\frac{d^2x}{dt^2}=-kM\frac{x}{r^3}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=-kM\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{r}\right).$$

$$2S_0\frac{d^2y}{dt^2}=-kM\frac{y}{r^3}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=+kM\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{r}\right).$$

以此求積分。則

$$\left.\begin{aligned}2S_0\frac{dx}{dt}&=-kM\frac{y}{r}+A\\2S_0\frac{dy}{dt}&=+kM\frac{x}{r}+B\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(5)$$

然由最初之條件。

$$0=A,\quad 2S_0v_0=+kM+B.$$

$$\therefore\qquad A=0,\quad B=r_0v_0^2-kM.$$

由是 (5)。各以 y, x 乘之,相減,則

$$2S_0\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=kMr+(r_0v_0^2-kM)x.$$

從 (3)。

$$4S_0^2=kMr+(r_0v_0^2-kM)r\cos\vartheta.$$

$$\therefore\qquad r=\frac{4S_0^2}{kM+(r_0v_0^2-kM)\cos\vartheta}=\frac{\frac{4S_0^2}{kM}}{1-\left(1-\frac{r_0v_0^2}{kM}\right)\cos\vartheta}.$$

卽

$$\left.\begin{aligned}r&=\frac{c}{1-e\cos\vartheta}\\e&=1-\frac{r_0v_0^2}{kM}\\c&=\frac{r_0^2v_0^2}{kM}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(6)$$

此公式(6)之e爲0, 1, <1, >1。從而點P之軌跡爲圓，拋物線，橢圓，雙曲線。

以惑星之式爲橢圓。而昔蒲里魯之第一法則。爲「惑星在太陽焦點之一之橢圓周上行動」。

最後由公式(4) $S=S_0t$。今惑星一周之時間以T表之。則橢圓之面積爲πab。而$\pi ab=S_0T$。

$$\therefore \qquad T^2=\frac{\pi^2a^2b^2}{S_0^2}=\frac{4\pi^2a^2b^2}{4S_0^2}.$$

然
$$b^2=a^2(1-e^2)=a\left\{\frac{1}{2}(r_0+r\pi)\right\}(1-e^2)$$
$$=a\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{c}{1-e}+\frac{c}{1+e}\right)\right\}(1-e^2)=ac$$
$$=a\frac{r_0^2v_0^2}{kM}=a\frac{4S_0^2}{kM}.$$

$$\therefore \qquad T^2=4\pi^2\frac{a^3}{kM}.$$

他惑星軌道之長軸爲a_1。其一周所需要之時間爲T_1。則

$$T_1^2=4\pi^2\frac{a_1^3}{kM}.$$

$$\therefore \qquad T_1^2 : T^2=a_1^3 : a^3 \quad\cdots\cdots(7)$$

卽知昔蒲里魯之第三法則爲「惑星一周時間之平方與其軌跡長軸之立方有比例」。

9. 級數積分法。

以前所述之特別形式及特別考法。不適合時。欲求其解。則由微分方程式。試展開爲級數卽可得其函數之近似值。

先就微分方程式爲

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

試解之。假定爲戴勞級數。如

$$y=y_0+\frac{x-x_0}{1!}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0+\cdots$$

$$+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0+\frac{(x-x_0)^n}{n!}\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0+\cdots \quad \ldots (2)$$

或爲馬格老臨之級數 如

$$y=y_0+\frac{x}{1!}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0+\frac{x^2}{2!}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0+\cdots$$

$$+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0+\frac{x^n}{n!}\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0+\cdots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2')$$

然 $x=x_0$ 或 $x=0$。對於任意常數。

$$y_0=C_1, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0=C_2, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0=C_3, \quad \ldots, \quad \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0=C_n.$$

從 (1)。

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0=\phi(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n)=\phi^{(0)}.$$

$$\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_0=\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n, \phi^{(0)}}=\phi_1^{(0)}.$$

$$\left(\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\right)_0=\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_{x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n, \phi^{(0)}, \phi_1^{(0)}}=\phi_2^{(0)}.$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

由是求得解答。爲

$$y=C_1+\frac{x-x_0}{1!}C_2+\frac{(x-x_0)^2}{2!}C_3+\ldots+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}C_n$$

$$+\frac{(x-x_0)^n}{n!}\phi^{(0)}+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\phi_1^{(0)}+\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

及
$$y=C_1+\frac{C_2}{1!}x+\frac{C_3}{2!}x^2+\ldots+\frac{C_n}{(n-1)!}x^{n-1}$$
$$+\frac{\phi^{(0)}}{n!}x^n+\frac{\phi_1^{(0)}}{(n+1)!}x^{n+1}+\ldots \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3')$$

第n階微分方程式。其一般解含n個任意常數。而此級數之收斂。即所求之式。

〔例〕 1. $\frac{d^2y}{dx^2}+ax^ny=0.$ (n 爲正整數)。

(解) 假定所求之解爲
$$y=A_0x^m+A_1x^{m+p_1}+A_2x^{m+p_2}+\ldots.$$

則 $$\frac{d^2y}{dx^2}=m(m-1)A_0x^{m-2}+(m+p_1)(m+p_1-1)A_1x^{m+p_1-2}+\ldots.$$

以 ax^n 乘其前式。與後式相加。則
$$0=m(m-1)A_0x^{m-2}+(m+p_1)(m+p_1-1)A_1x^{m+p_1-2}+\ldots$$
$$+aA_0x^{m+n}+aA_1x^{m+p_1-n}+\ldots.$$

其最低次之項僅爲 x^{m-2}。故
$$m(m-1)=0. \quad \therefore\ m=0 \text{ 及 } m=1.$$

次
$$m+p_1-2=m+n, \qquad p_1=n+2.$$
$$m+p_2-2=m+p_1+n, \qquad p_2=p_1+n+2=2(n+2).$$
$$m+p_3-2=m+p_2+n, \qquad p_3=p_2+n+2=3(n+2)$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

而
$$(m+p_1)(m+p_1-1)A_1+aA_0=0.$$
$$(m+p_2)(m+p_2-1)A_2+aA_1=0.$$
$$(m+p_3)(m+p_3-1)A_3+aA_2=0.$$

由是 $m=0$. 則

$$A_1=-\frac{aA_0}{(p_1-1)p_1}=-\frac{aA_0}{(n+1)(n+2)}.$$

$$A_2=-\frac{aA_1}{(p_2-1)p_2}=-\frac{aA_1}{2(2n+3)(n+2)}$$

$$=\frac{a^2A_0}{2(n+2)^2(n+1)(2n+3)}.$$

$$A_3=-\frac{aA_2}{(p_3-1)p_3}=-\frac{aA_2}{3(n+2)(3n+5)}$$

$$=-\frac{a^3A_0}{2.3(n+2)^3(n+1)(2n+3)(3n+5)}.$$

$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$

$m=1$. 則

$$A_1=-\frac{aA_0}{p_1(p_1+1)}=-\frac{aA_0}{(n+2)(n+3)}.$$

$$A_2=-\frac{aA_1}{p_2(p_2+1)}=-\frac{aA_1}{2(n+2)(2n+5)}$$

$$=\frac{a^2A_0}{2(n+2)^2(n+3)(2n+5)}.$$

$$A_3=-\frac{aA_2}{p_3(p_3+1)}=-\frac{aA_2}{3(n+2)(3n+7)}$$

$$=-\frac{a^3A_0}{2.3(n+2)^5(n+3)(2n+5)(3n+7)}.$$

$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$

故由 $m=0$ 與 $m=1$。得二種級數如次。

$$y_1=A_0'\Big\{1-\frac{a}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}+\frac{a^2}{2!(n+2)^2(n+1)(2n+3)}x^{2(n+2)}$$

$$+\frac{a^2}{3!(n+2)^3(n+1)(2n+3)(3n+5)}x^{3(n+2)}+\cdots\Big\}.$$

$$y_2=A_0''\Big\{x+\frac{a}{(n+1)(n+3)}x^{n+3}+\frac{a^2}{2!(n+2)^2(n+3)(2n+5)}x^{2n+5}$$

$$+\frac{a^3}{3!(n+2)^3(n+3)(2n+5)(3n+7)}x^{3n+7}+\cdots\Big\}.$$

此二種級數任何其變率亦各只有一個。故不爲一般解。然雙方適合原方程式。求其一般解之形如次。

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

$$=C_1\left\{1-\frac{a}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}+\dots\right\}$$

$$+C_2x\left\{1-\frac{a}{(n+1)(n+3)}x^{n+2}+\dots\right\}.$$

〔例〕 2. 祿軒得氏(*Legendre*)之方程式。

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n-1)y=0.$$

即 $$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right\}+n(n+1)y=0.$$

(略解) 試展開 y 爲 x 之降羃級數。如

$$y=A_0x^m+A_1x^{m-p_1}+A_2x^{m-p_2}+\dots.$$

代入原方程式。則最高次項之係數。

$$m=n \quad 及 \quad m=-n-1.$$

又 $$p_1=2,\quad p_2=4,\quad p_3=6,\quad \dots.$$

由是 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 一一樣定之。則

$$y_1=x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\dots.$$

$$y_2=x^{-(n+1)}+\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}x^{-(n+3)}$$

$$+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4(2n+3)(2n+5)}x^{-(n+5)}+\dots.$$

由是所求一般解爲

$$y=C_1y_1+C_2y_2.$$

(注意) $\frac{(2n)!}{2^n n! n!} y_1 = P_n(x)$.

$$\frac{2^n n! n!}{(2n+1)!} y_2 = Q_n(x).$$

各為第一種,第二種祿軒得氏之函數 (*Legendre's function of the first and second kind* 或 *Surface zonal harmonic of the first and second kind*)。

〔例〕 3. 勃司氏 (*Bessel*) 之方程式。

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0.$$

即 $$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+(x^2-n^2)y=0.$$

(略解) 試假定

$$y=A_0x^m+A_1x^{m+p_1}+A_2x^{m+p_2}+\dots.$$

則 $m=n$ 及 $m=-n$.

$$p_1=2,\quad p_2=4,\quad p_3=6,\quad \dots.$$

由是

$$y_1=x^n\left\{1-\frac{x^2}{1!2^2(n+1)}+\frac{x^4}{2!2^4(n+1)(n+2)}-\frac{x^6}{3!2^6(n+1)(n+2)(n+3)}+\dots\right\}.$$

$$y_2=x^{-n}\left\{1+\frac{x^2}{1!2^2(n-1)}+\frac{x^4}{2!2^4(n-1)(n-2)}+\frac{x^6}{3!2^6(n-1)(n-2)(n-3)}+\dots\right\}.$$

$$y=C_1y_1+C_2y_2.$$

(注意) $\frac{1}{2^n\pi(n)}y_1=J_n(x)$. $\left(但\ \pi(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx\right)$.

為勃司氏之函數 (*Bessel's function* 或 *Cylindrical harmonic*)。

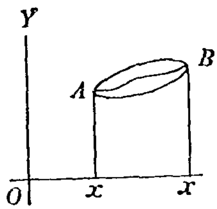
第十章　變分法

1. 變分法之問題。

定積分

$$v=\int_{x_2}^{x_1} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)dx.$$

y 爲 x 如何之函數.而研究 v 之極大或極小。是爲變分法 (*Calculus of Variation*) 之一問題也.



例如　二定點 A, B 之間之曲線。x 軸之周回轉一周 其所生回轉面之面積爲

$$S=\int_{x_0}^{x_1} 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx.$$

此 $y=f(x)$ 爲如何之曲線。而求其最小者。

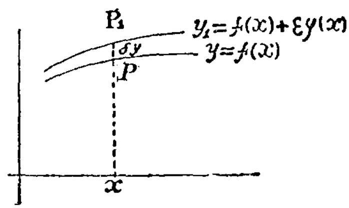
2. 變分。

設有一種曲線

$$y=f(x).$$

ϵ 表其無限小。而考第二曲線

$$y_1=f(x)+\epsilon\eta(x).$$

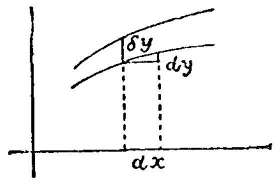


則此兩曲線無限接近。而

$$y_1-y=\overline{P_1P}=\epsilon\eta(x).$$

亦爲無限小.此謂 y 之變分。以 δy 表之。

(注意) 變分 δy 與微分 dy 不可混同。微分 dy。乃曲線對於其 dx 之變化。而變分 δy。乃曲線移於他曲線在同一橫坐標之變化也。



次考 $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ 之變分。

$$\delta f=f\left(x, y+\delta y, \frac{dy}{dx}+\delta\frac{dy}{dx}\right)-f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

$$=f(x, y+\delta y, p+\delta p)-f(x, y, p) \qquad \left[p=\frac{dy}{dx}\right]$$

$$=\frac{\delta f}{\delta y}\delta y+\frac{\delta f}{\delta p}\delta p.$$

最後考積分之變分。

$$\delta v=\delta\int_{x_0}^{x_1}f(x, y, p)\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\delta f\,dx.$$

定理 <u>函數 y 之變分之微分。等於其微分之變化。</u>

(證明) 如前圖 $\delta y=y_1-y$.

$\therefore \qquad d(\delta y)=d(y_1-y)=dy_1-dy.$

今於 x 之 y, y_1 各以 $y_x, (y_1)_x$ 表之。

$x+dx$ 之 y, y_1 各以 $y_{x+dx}, (y_1)_{x+dx}$ 表之。則

$$dy_1=(y_1)_{x+dx}-(y_1)_x.$$

$$dy=y_{x+dx}-y_x.$$

$$\therefore \qquad d(\delta y)=(y_1)_{x+dx}-(y_1)_x-\{y_{x+dx}-y_x\}$$

$$=(y_1)_{x+dx}-y_{x+dx}-\{(y_1)_x-y_x\}$$

$$=(y_1-y)_{x+dx}-(y_1-y)_x$$

$$=\delta y_{x+dx}-\delta y_x.$$

$$=\delta(y_{x+dx}-y_x).$$

$$\therefore \qquad d(\delta y)=\delta(dy).$$

3 積分之極大極小。

定積分

$$v=\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, p)\,dx. \quad \left(p=\frac{dy}{dx}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

於 $y=\phi(x)$ 爲極大或極小．則 y 從 p 之小變化，可變至自增大而減小。或自減小而增大。

即 $\quad v_{y+\delta y}-v_y<0, \quad v_{y-\delta y}-v_y>0.$

又 $\quad v_{y+\delta y}-v>0, \quad v_{y-\delta y}-v<0.$

即 $\quad \delta v=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

是 v 極大或極小所必要之條件也。

卽由前節

$$\delta v=\delta\int_{x_0}^{x_1} f\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\delta f\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\delta y+\frac{\delta f}{\delta p}\delta p\right)dx.$$

而 $\quad \delta p=\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(\delta y).$

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\delta f}{\delta p}\delta p\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\delta f}{\delta p}d(\delta y)$$

$$=\left|\frac{\delta f}{\delta p}\delta y\right|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta f}{\delta p}\right)\delta y\,dx.$$

然點 x_0 及 x_1。則 $\delta y=0$（參照第一節之圖）。故

$$\left|\frac{\delta f}{\delta p}\delta y\right|_{x_0}^{x_1}=0.$$

由是 $\quad \delta v=\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{\delta f}{\delta y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta f}{\delta p}\right)\right\}\delta y\,dx.$

由是極大極小之必要條件如次。

$$\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{\delta f}{\delta y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta f}{\delta p}\right)\right\}\delta y\,dx=0.$$

然以任意變分 δy. 而此積分亦必爲零。則必需

$$\frac{\delta f}{\delta y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta f}{\delta p}\right)=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

此方程式一般含 $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$。故爲第二階微分方程式。解之即可求得極大，極小之函數 y。

4. 極小回轉面 (*Minimum Surface of Revolution*)。

引用第 1 節之例。其回轉面

$$S=2\pi\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+p^2}\,dx.$$

求其極小函數 y。

從前節 (3)。其必要之條件爲

$$\frac{\delta}{\delta y}\left\{y\sqrt{1+p^2}\right\}-\frac{d}{dx}\left[\frac{\delta}{\delta p}\left\{y\sqrt{1+p^2}\right\}\right]=0.$$

即 $$\sqrt{1+p^2}-\frac{d}{dx}\left(\frac{yp}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0.$$

即 $$\sqrt{1+p^2}-\frac{y\frac{dp}{dx}+(1+p^2)p^2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

即 $$(1+p^2)^2-(1+p^2)p^2-y\frac{dp}{dx}=0.$$

即 $$1+p^2-y\frac{dp}{dx}=0.$$

從此 $dx=\frac{dy}{p}$. 故

$$1+p^2-yp\frac{dp}{dy}=0.$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{p\,dp}{1+p^2}.$$

$$\log y=\frac{1}{2}\log(1+p^2)+C_1.$$

$$y=c_1\sqrt{1+p^2}. \qquad [c_1=e^{C_1}].$$

$$y^2=c_1^2(1+p^2).$$

∴ $$p=\pm\sqrt{\frac{y^2}{c_1^2}-1}.$$

卽 $$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{y^2}{c_1^2}-1}.$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{c_1^2}-1}}=dx.$$

∴ $$c_1\log\left(\frac{y}{c_1}+\sqrt{\frac{y^2}{c_1^2}-1}\right)=\pm(x+c_2).$$

∴ $$\frac{y}{c_1}+\sqrt{\frac{y^2}{c_1^2}-1}=e^{\frac{\pm(x+c_2)}{c_1}}.$$

從而 $$\frac{y}{c_1}-\sqrt{\frac{y^2}{c_1^2}-1}=e^{\frac{\mp(x+c_2)}{c_1}}.$$

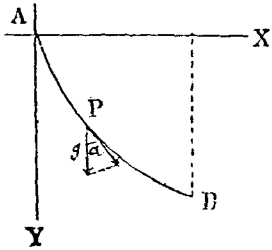
∴ $$2\frac{y}{c_1}=e^{\frac{\pm(x+c_2)}{c_1}}+e^{\frac{\mp(x+c_2)}{c_1}}.$$

∴ $$y=\frac{c_1}{2}\left(e^{\frac{x}{c_1}}+e^{-\frac{x}{c_1}}\right)e^{\pm\frac{c_1}{c_2}}.$$

卽垂絲線回轉面之最小面積。

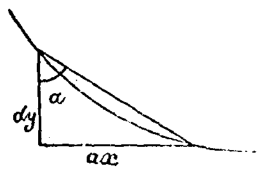
5. 最速落着線 (*Curve of Quickest Descent*)。

有一質點的重力。從高處一點 A、落行至低處一點 B。其間所需要最小時間之曲線路 謂之<u>最速落着線</u>。(又名 *Brachystochrone*)。



西歷 1696 年。約尼白奴尼 (John Bernoulli) 發明此問題 而來本之奈端等。卽時解之。實可謂變分法之起源 此乃此問題之重要歷史也。

然以自高處之點。其引力之方向爲 y 軸。含此軸與 B 之平面上通過 A 而垂於 y 軸之直線。爲 x 軸。假定最速落着線爲此平面上之曲線。



令曲線上 P 點之加速度爲 $\frac{d^2s}{dt^2}$。是爲重力 g 的切線之方向之分力，而

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g\cos\alpha=g\frac{dy}{ds}.$$

以 $2ds$ 乘之，則

$$2\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}dt=2g\,dy.$$

卽 $$d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=2g\,dy.$$

$\therefore$ $$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=2g\,y+C.$$

今令A點之速度爲0。則$y=0$。從此$\frac{ds}{dt}=0$。故$C=0$。故

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=2g\,y.$$

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2g\,y}.$$

$$dt=\frac{ds}{\sqrt{2g\,y}}=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}{\sqrt{2g\,y}}.$$

$$\therefore\qquad t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}dx.\qquad \left(p=\frac{dy}{dx}\right).$$

此卽所求t之極小者也。

然由第3節之公式(3)。

$$\frac{\delta}{\delta y}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}-\frac{d}{dx}\left\{\frac{\delta}{\delta p}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}\right\}=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

解之之先。作式如次。

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}=\frac{\delta}{\delta y}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\delta}{\delta p}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}\cdot\frac{dp}{dx}.$$

依而
$$\frac{\delta}{\delta y}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}=\frac{1}{p}\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}-\frac{1}{p}\cdot\frac{\delta}{\delta p}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}\cdot\frac{dp}{dx}.$$

代入(a)。

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}-\left[\frac{\delta}{\delta p}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}\cdot\frac{dp}{dx}+\frac{d}{dx}\left\{\frac{\delta}{\delta p}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}\right\}p\right]=0.$$

卽
$$\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}-\frac{d}{dx}\left\{\frac{\delta}{\delta p}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}\cdot p\right\}=0.$$

$$\therefore\qquad \sqrt{\frac{1+p^2}{y}}-\frac{\delta}{\delta p}\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}\cdot p=c.$$

卽
$$\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}-\frac{p^2}{\sqrt{y(1+p^2)}}=c.$$

去分母。則

$$1=c\sqrt{y(1+p^2)}.$$

$$\therefore\qquad p=\sqrt{\frac{1}{c^2y}-1}.$$

即
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{1-c^2y}{y}}.$$

$$dx=c\sqrt{\frac{y}{1-c^2y}}\,dy.$$

$$\therefore\qquad x+c'=c\int\sqrt{\frac{y}{1-c^2y}}\,dy.$$

求此右邊之積分。

令
$$y=\frac{1}{c^2}\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

則
$$x+c'=\frac{1}{c^2}\int\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta=\frac{1}{c^2}\int\frac{1-\cos\theta}{2}\,d\theta=\frac{1}{2c^2}(\theta-\sin\theta).$$

然 $y=0$, $x=0$, $c'=0$。故

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2c^2}(1-\cos\theta), \\ x=\dfrac{1}{2c^2}(\theta-\sin\theta). \end{cases}$$

故所求最速落着線爲擺線。

(終)

微積分學講義勘誤表

頁數	行數	原文	訂正
39		圖中曲線上右之P字	應改爲P_1
46	12	$\iota = arc\ tg\ x$ 之右補數語以便閱者	
		(譯注) arc 德法用以記反三角函數與英美所用之-1號	
		同本書兩種符號均用之又 tg 之符號與 tan 同	
71	5	試將此而……	試將此式而……
83	13	$\cdots - W_1$	$\cdots - W_1$
	14	$-S''_1$	$-S''_l$
	15	$-Lim\ S''_1$	$-Lim\ S''$
		上三行原文之l與1最易混淆	
183	1	亦使用	使用
199	12	$=cot^{-2}x$	$=cot^{-1}x$
213	1	若 $m \leqq n$	若 $m \geqq n$
	5	則假定 $m < n$	則假定 $m > n$
225	2	$f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ar+b}{a'x+b'}}dx\right.$	$f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\right)dx$
	8	$-\int \frac{dx}{z^2+z+1}$	$-\int \frac{dz}{z^2+z+1}$
235	5	$6\int z^9(\quad)^{-\frac{1}{3}}dz$	$6\int z^{14}(\quad)^{-\frac{1}{3}}dz$
249	9	$\int z^4(1-z^2)\,dx$	$\int z^4(1-z^2)\,dz$
260	11	$=\phi_2\{\quad\}\int^{\beta}\phi_1(x)\,dx$	$=\phi_2\{\quad\}\int_{a}^{\beta}\phi_1(x)\,dx$
261	5	$<\int^{a}$	$<\int_{o}^{a}$
270	5	$\int^{a} x^n dx$	$\int_{o}^{a} x^n dx$
271	10	(例) 7 $\int^{x}$	(例) 7 $\int_{o}^{x}$
272	16	於 $\gamma, \delta)$	於 (γ, δ)
329	4	$=n\ log n+c$	$=n\ log\ x + C$
347	18	$1+p^2$	$1+p^3$

元又(1641)

Lectures on Calculus

The Commercial Press, Limited

中華民國十三年十二月初版
十八年七月三版

(微積分學講義一冊)
(每冊定價大洋貳元肆角)
(外埠酌加運費匯費)

編譯者 泰和匡文濤
校訂者 紹興壽孝天
發行者 商務印書館
印刷所 上海北河南路北首寶山路 商務印書館
總發行所 上海棋盤街中市 商務印書館
分售處 北京 天津 保定 奉天 吉林 龍江 濟南 太原 開封 鄭州 西安 南京 杭州 蘭谿 安慶 蕪湖 南昌 漢口 長沙 常德 衡州 成都 重慶 瀘縣 福州 廣州 潮州 香港 梧州 雲南 貴陽 張家口 新嘉坡 商務印書分館

七三六〇白