# Scomposizione in fattori 13

Scomporre un polinomio in fattori significa scrivere il polinomio come il prodotto di polinomi e monomi che moltiplicati tra loro danno come risultato il polinomio stesso. Si può paragonare la scomposizione in fattori di un polinomio alla scomposizione in fattori dei numeri naturali.

Per esempio, scomporre il numero 36 significa scriverlo come $2^2 \cdot 3^2$ dove 2 e 3 sono i suoi fattori primi. Anche $36 = 9 \cdot 4$ è una scomposizione, ma non è in fattori primi. Allo stesso modo un polinomio va scomposto in fattori non ulteriormente scomponibili che si chiamano irriducibili.

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Il polinomio $3a^3b^2 - 3ab^4$ si può scomporre in fattori in questo modo

$$3ab^2(a-b)(a+b),$$

infatti eseguendo i prodotti si ottiene

$$3ab^2(a-b)(a+b) = 3ab^2(a^2+ab-ba-b^2) = 3ab^2\left(a^2-b^2\right) = 3a^3b^2 - 3ab^4.$$

La scomposizione termina quando non è possibile scomporre ulteriormente i fattori individuati. Come per i numeri la scomposizione in fattori dei polinomi identifica il polinomio in maniera univoca (a meno di multipli).

**Definizione 13.1.** Un polinomio si dice *riducibile* (scomponibile) se può essere scritto come prodotto di due o più polinomi (detti fattori) di grado maggiore di zero. In caso contrario esso si dirà *irriducibile*.

La caratteristica di un polinomio di essere irriducibile dipende dall'insieme numerico al quale appartengono i coefficienti del polinomio; uno stesso polinomio può essere irriducibile nell'insieme dei numeri razionali, ma riducibile in quello dei numeri reali o ancora in quello dei complessi. Dalla definizione consegue che un polinomio di primo grado è irriducibile.

**Definizione 13.2.** La *scomposizione in fattori di un polinomio* è la sua scrittura come prodotto di fattori irriducibili.

✍ *Esercizio proposto:* 13.1

## 13.1 Raccoglimento totale a fattore comune

Questo è il primo metodo che si deve cercare di utilizzare per scomporre un polinomio. Il metodo si basa sulla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

Prendiamo in considerazione il seguente prodotto:

$$a(x+y+z) = ax + ay + az$$

Il nostro obiettivo è ora quello di procedere da destra verso sinistra, cioè avendo il polinomio $ax + ay + az$ come possiamo fare per individuare il prodotto che lo ha generato? In questo caso semplice possiamo osservare che i tre monomi contengono tutti la lettera $a$, che quindi si può mettere in comune, o come anche si dice "in evidenza". Perciò scriviamo

$$ax + ay + az = a(x + y + z).$$

---

**Esempio 13.1.** Analizziamo la scomposizione in fattori $3a^2b\left(2a^3 - 5b^2 - 7c\right)$.

$$\begin{aligned} 3a^2b\left(2a^3 - 5b^2 - 7c\right) &= 3a^2b(2a^3) + 3a^2b(-5b^2) + 3a^2b(-7c) \\ &= 6a^5b - 15a^2b^3 - 21a^2bc. \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza, letta da destra verso sinistra, è il raccoglimento totale a fattore comune. Partendo da $6a^5b - 15a^2b^3 - 21a^2bc$ possiamo notare che i coefficienti numerici 6, 15 e 21 hanno il 3 come fattore in comune. Notiamo anche che la lettera $a$ è in comune, come la lettera $b$. Raccogliendo tutti i fattori comuni si avrà il prodotto $3a^2b\left(2a^3 - 5b^2 - 7c\right)$ di partenza.

---

**Procedura 13.1.** *Mettere in evidenza il fattore comune:*

*a ) trovare il* MCD *di tutti i termini che formano il polinomio: tutti i fattori in comune con l'esponente minimo con cui compaiono;*
*b ) scrivere il polinomio come prodotto del* MCD *per il polinomio ottenuto dividendo ciascun monomio del polinomio di partenza per il* MCD*;*
*c ) verificare la scomposizione eseguendo la moltiplicazione per vedere se il prodotto dà come risultato il polinomio da scomporre.*

---

**Esempio 13.2.** Scomporre in fattori $5a^2x^2 - 10ax^5$.

a ) Tra i coefficienti numerici il fattore comune è 5, tra la parte letterale sono in comune le lettere $a$ e $x$, la $a$ con esponente 1, la $x$ con esponente 2, pertanto il MCD è $5ax^2$;
b ) passiamo quindi a scrivere $5a^2x^2 - 10ax^5 = 5ax^2(\dots\dots\dots)$, nella parentesi vanno i monomi che si ottengono dalle divisioni $5a^2x^2 : 5ax^2 = a$ e $-10ax^5 : 5ax^2 = -2x^3$. Quindi: $5a^2x^2 - 10ax^5 = 5ax^2(a - 2x^3)$;
c ) verifica: $5ax^2(a - 2x^3) = 5a^2x^2 - 10ax^5$.

**Esempio 13.3.** Scomporre in fattori $10x^5y^3z - 15x^3y^5z - 20x^2y^3z^2$.

a ) Trovo tutti i fattori comuni con l'esponente minore per formare il MCD. $\text{MCD} = 5x^2y^3z$;
b ) divido ciascun termine del polinomio per $5x^2y^3z$:

$$10x^5y^3z : 5x^2y^3z = 2x^3, \quad -15x^3y^5z : 5x^2y^3z = -3xy^2, \quad -20x^2y^3z^2 : 5x^2y^3z = -4z,$$

il polinomio si può allora scrivere come $5x^2y^3z(2x^3 - 3xy^2 - 4z)$.

Il fattore da raccogliere a fattore comune può essere scelto con il segno + (positivo) o con il segno − (negativo). Nell'esempio precedente è valida anche la seguente scomposizione: $10x^5y^3z - 15x^3y^5z - 20x^2y^3z^2 = -5x^2y^3z(-2x^3 + 3xy^2 + 4z)$.

**Esempio 13.4.** Scomporre in fattori $-8x^2y^3 + 10x^3y^2$.

a) Poiché il primo termine è negativo possiamo mettere a fattore comune un numero negativo. Tra 8 e 10 il MCD è 2. Tra $x^2y^3$ e $x^3y^2$ mettiamo a fattore comune le lettere $x$ e $y$, entrambe con esponente 2, perché è il minimo esponente con cui compaiono. In definitiva il monomio da mettere a fattore comune è $-2x^2y^2$;
b) pertanto possiamo cominciare a scrivere $-2x^2y^2(\dots\dots\dots)$; eseguiamo le divisioni $-8x^2y^3 : (-2x^2y^2) = +4y$ e $10x^3y^2 : (-2x^2y^2) = -5x$. I quozienti trovati $+4y$ e $-5x$ vanno nelle parentesi.

In definitiva $-8x^2y^3 + 10x^3y^2 = -2x^2y^2(4y - 5x)$.

**Esempio 13.5.** Scomporre in fattori $6a(x-1) + 7b(x-1)$.

a) Il fattore comune è $(x-1)$, quindi il polinomio si può scrivere come $(x-1) \cdot [\dots\dots\dots]$;
b) nella parentesi quadra scriviamo i termini che si ottengono dalle divisioni:

$$6a(x-1) : (x-1) = 6a, \quad 7b(x-1) : (x-1) = 7b.$$

In definitiva $6a(x-1) + 7b(x-1) = (x-1)(6a+7b)$.

**Esempio 13.6.** Scomporre in fattori $10(x+1)^2 - 5a(x+1)$.

a) Il fattore comune è $5(x+1)$, quindi possiamo cominciare a scrivere $5(x+1) \cdot [\dots\dots\dots]$;
b) nella parentesi quadra scriviamo i termini che si ottengono dalle divisioni:

$$10(x+1)^2 : 5(x+1) = 2(x+1), \quad -5a(x+1) : 5(x+1) = a.$$

In definitiva $10(x+1)^2 - 5a(x+1) = 5(x+1)\left[2(x+1) - a\right]$.

---

✍ *Esercizi proposti:* 13.2, 13.3, 13.4, 13.5, 13.6, 13.7, 13.8, 13.9, 13.10, 13.11

## 13.2 Raccoglimento parziale a fattore comune

Quando un polinomio non ha alcun fattore comune a tutti i suoi termini, possiamo provare a mettere in evidenza tra gruppi di monomi e successivamente individuare il polinomio in comune.

Osserviamo il prodotto $(a+b)(x+y+z) = ax + ay + az + bx + by + bz$. Supponiamo ora di avere il polinomio $ax + ay + az + bx + by + bz$ come possiamo fare a tornare indietro per scriverlo come prodotto di polinomi?

---

**Esempio 13.7.** Scomponiamo in fattori $ax + ay + az + bx + by + bz$. Non c'è nessun fattore comune a tutto il polinomio.

Proviamo a mettere in evidenza per gruppi di termini. Evidenziamo $a$ tra i primi tre termini e $b$ tra gli ultimi tre, avremo: $a(x+y+z) + b(x+y+z)$. Ora risulta semplice vedere che il trinomio $(x+y+z)$ è in comune e quindi lo possiamo mettere in evidenza $ax + ay + az + bx + by + bz = a(x+y+z) + b(x+y+z) = (x+y+z)(a+b)$.

---

**Procedura 13.2.** *Eseguire il raccoglimento parziale.*

*a ) Dopo aver verificato che non è possibile effettuare un raccoglimento a fattore comune totale raggruppo i monomi in modo che in ogni gruppo sia possibile mettere in comune qualche fattore;*
*b ) verifico se la nuova scrittura del polinomio ha un polinomio (binomio, trinomio, . . . ) comune a tutti i termini;*
*c ) se è presente il fattore comune a tutti i termini lo metto in evidenza;*
*d ) se il fattore comune non è presente la scomposizione è fallita, allora posso provare a raggruppare diversamente i monomi o abbandonare questo metodo.*

---

**Esempio 13.8.** Scomporre in fattori $ax + ay + bx + ab$.

a ) Provo a mettere in evidenza la $a$ nel primo e secondo termine e la $b$ nel terzo e quarto termine: $ax + ay + bx + ab = a(x + y) + b(x + a)$;
b ) in questo caso non c'è nessun fattore comune: il metodo è fallito. In effetti il polinomio non si può scomporre in fattori.

**Esempio 13.9.** Scomporre in fattori $bx - 2ab + 2ax - 4a^2$.

a ) Non vi sono fattori da mettere a fattore comune totale, proviamo con il raccoglimento parziale: $b$ nei primi due monomi e $2a$ negli altri due;
b ) $\underline{bx} - \underline{2ab} + \underline{\underline{2ax}} - \underline{\underline{4a^2}} = b(\underline{x - 2a}) + 2a(\underline{x - 2a}) = (x - 2a)(b + 2a)$.

**Esempio 13.10.** Scomporre in fattori $bx^3 + 2x^2 - bx - 2 + abx + 2a$.

a ) Raggruppiamo nel seguente modo: $\underline{bx^3} + \underline{\underline{2x^2}} - \underline{bx} - \underline{\underline{2}} + \underline{abx} + \underline{\underline{2a}}$ tra quelli con sottolineatura semplice metto a fattore comune $bx$, tra quelli con doppia sottolineatura metto a fattore comune 2;
b ) $\underline{bx^3} + \underline{\underline{2x^2}} - \underline{bx} - \underline{\underline{2}} + \underline{abx} + \underline{\underline{2a}} = bx(\underline{x^2 - 1 + a}) + 2(\underline{x^2 - 1 + a}) = (x^2 - 1 + a)(bx + 2)$.

**Esempio 13.11.** Scomporre in fattori $5ab^2 - 10abc - 25abx + 50acx$.

a ) Il fattore comune è $5a$, quindi:

➡ $5ab^2 - 10abc - 25abx + 50acx = 5a(b^2 - 2bc - 5bx + 10cx)$;

b ) vediamo se è possibile scomporre il polinomio in parentesi con un raccoglimento parziale $5a(\underline{b^2} - \underline{2bc} - \underline{\underline{5bx}} + \underline{\underline{10cx}}) = 5a[b(\underline{b - 2c}) - 5x(\underline{b - 2c})] = 5a(b - 2c)(b - 5x)$.

---

✍ *Esercizi proposti:* 13.12, 13.13, 13.14, 13.15, 13.16, 13.17, 13.18, 13.19, 13.20,13.21, 13.22

## 13.3 Riconoscimento di prodotti notevoli

### 13.3.1 Quadrato di un binomio

Uno dei metodi più usati per la scomposizione di polinomi è legato al saper riconoscere i prodotti notevoli. Se abbiamo un trinomio costituito da due termini che sono quadrati di due monomi ed il terzo termine è uguale al doppio prodotto degli stessi due monomi, allora il trinomio può essere scritto sotto forma di quadrato di un binomio, secondo la regola che segue:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad \Rightarrow \quad A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2.$$

Analogamente nel caso in cui il monomio che costituisce il doppio prodotto sia negativo:

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \quad \Rightarrow \quad A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2.$$

Poiché il quadrato di un numero è sempre positivo, valgono anche le seguenti uguaglianze

$$(A+B)^2 = (-A-B)^2 \quad \Rightarrow \quad A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2 = (-A-B)^2$$

$$(A-B)^2 = (-A+B)^2 \quad \Rightarrow \quad A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2 = (-A+B)^2.$$

---

**Esempio 13.12.** Scomporre in fattori $4a^2 + 12ab^2 + 9b^4$.

Notiamo che il primo ed il terzo termine sono quadrati, rispettivamente di $2a$ e di $3b^2$, ed il secondo termine è il doppio prodotto degli stessi monomi, pertanto possiamo scrivere:

$$4a^2 + 12ab^2 + 9b^4 = (2a)^2 + 2 \cdot (2a) \cdot (3b^2) + \left(3b^2\right)^2 = \left(2a + 3b^2\right)^2.$$

**Esempio 13.13.** Scomporre in fattori $x^2 - 6x + 9$.

Il primo ed il terzo termine sono quadrati, il secondo termine compare con il segno "meno". Dunque: $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = (x-3)^2$, ma anche $x^2 - 6x + 9 = (-x+3)^2$.

**Esempio 13.14.** Scomporre in fattori $x^4 + 4x^2 + 4$.

Può accadere che tutti e tre i termini siano tutti quadrati. $x^4 + 4x^2 + 4$ è formato da tre quadrati, ma il secondo termine, quello di grado intermedio, è anche il doppio prodotto dei due monomi di cui il primo ed il terzo termine sono i rispettivi quadrati. Si ha dunque:

$$x^4 + 4x^2 + 4 = \left(x^2\right)^2 + 2 \cdot (2) \cdot (x^2) + (2)^2 = \left(x^2 + 2\right)^2.$$

---

**Procedura 13.3.** *Individuare il quadrato di un binomio:*

*a ) individuare le basi dei due quadrati;*
*b ) verificare se il terzo termine è il doppio prodotto delle due basi;*
*c ) scrivere tra parentesi le basi dei due quadrati e il quadrato fuori dalla parentesi;*
*d ) mettere il segno "più" o "meno" in accordo al segno del termine che non è un quadrato.*

Può capitare che i quadrati compaiano con il coefficiente negativo, ma si può rimediare mettendo in evidenza il segno "meno".

---

**Esempio 13.15.** Scomporre in fattori $-9a^2 + 12ab - 4b^2$.
Mettiamo $-1$ a fattore comune $-9a^2 + 12ab - 4b^2 = -(9a^2 - 12ab + 4b^2) = -(3a - 2b)^2$.

**Esempio 13.16.** Scomporre in fattori $-x^4 - x^2 - \frac{1}{4}$.

$$-x^4 - x^2 - \frac{1}{4} = -\left(x^4 + x^2 + \frac{1}{4}\right) = -\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2.$$

**Esempio 13.17.** Scomporre in fattori $-x^2 + 6xy^2 - 9y^4$.

$$x^2 + 6xy^2 - 9y^4 = -\left(x^2 - 6xy^2 + 9y^4\right) = -\left(x - 3y^2\right)^2.$$

---

Possiamo avere un trinomio che "diventa" quadrato di binomio dopo aver messo qualche fattore comune in evidenza.

---

**Esempio 13.18.** Scomporre in fattori $2a^3 + 20a^2 + 50a$.
Mettiamo a fattore comune $2a$, allora $2a^3 + 20a^2 + 50a = 2a(a^2 + 10a + 25) = 2a(a + 5)^2$.

**Esempio 13.19.** Scomporre in fattori $2a^2 + 4a + 2$.

$$2a^2 + 4a + 2 = 2\left(a^2 + 2a + 1\right) = 2(a + 1)^2.$$

**Esempio 13.20.** Scomporre in fattori $-12a^3 + 12a^2 - 3a$.

$$-12a^3 + 12a^2 - 3a = -3a\left(4a^2 - 4a + 1\right) = -3a(2a - 1)^2.$$

**Esempio 13.21.** Scomporre in fattori $\frac{3}{8}a^2 + 3ab + 6b^2$.

$$\frac{3}{8}a^2 + 3ab + 6b^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}a^2 + 2ab + 4b^2\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}a + 2b\right)^2,$$

o anche

$$\frac{3}{8}a^2 + 3ab + 6b^2 = \frac{3}{8}\left(a^2 + 8ab + 16b^2\right) = \frac{3}{8}(a + 4b)^2.$$

---

✍ *Esercizi proposti:* 13.23, 13.24, 13.25, 13.26, 13.27, 13.28, 13.29, 13.30, 13.31, 13.32

### 13.3.2 Quadrato di un polinomio

Se siamo in presenza di sei termini, tre dei quali sono quadrati, verifichiamo se il polinomio è il quadrato di un trinomio secondo le seguenti regole (sezione 12.2 a pagina 306)

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

$$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A + B + C)^2 = (-A - B - C)^2.$$

Notiamo che i doppi prodotti possono essere tutti e tre positivi, oppure uno positivo e due negativi: indicano se i rispettivi monomi sono concordi o discordi.

---

**Esempio 13.22.** Scomporre in fattori $16a^4 + b^2 + 1 + 8a^2b + 8a^2 + 2b$.

I primi tre termini sono quadrati rispettivamente di $4a^2$, $b$ e $1$ e si può verificare poi che gli altri tre termini sono i doppi prodotti: $16a^4 + b^2 + 1 + 8a^2b + 8a^2 + 2b = \left(4a^2 + b + 1\right)^2$.

**Esempio 13.23.** Scomporre in fattori $x^4 + y^2 + z^2 - 2x^2y - 2x^2z + 2yz$.

$$x^4 + y^2 + z^2 - 2x^2y - 2x^2z + 2yz = \left(x^2 - y - z\right)^2 = \left(-x^2 + y + z\right)^2.$$

**Esempio 13.24.** Scomporre in fattori $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.

In alcuni casi anche un polinomio di cinque termini può essere il quadrato di un trinomio. Per far venire fuori il quadrato del trinomio si può scindere il termine $3x^2$ come somma:

$$3x^2 = x^2 + 2x^2.$$

In questo modo si ha:

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x^2 - 2x + 1 = (x^2 - x + 1)^2.$$

---

Nel caso di un quadrato di un polinomio la regola è sostanzialmente la stessa:

$$(A + B + C + D)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2AB + 2AC + 2AD + 2BC + 2BD + 2CD.$$

✍ *Esercizi proposti:* 13.33,13.34,13.35, 13.36, 13.37

### 13.3.3 Cubo di un binomio

I cubi di binomi sono di solito facilmente riconoscibili. Un quadrinomio è lo sviluppo del cubo di un binomio se due suoi termini sono i cubi di due monomi e gli altri due termini sono i tripli prodotti tra uno dei due monomi ed il quadrato dell'altro, secondo le seguenti formule:

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \quad \Rightarrow \quad A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$$
$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 \quad \Rightarrow \quad A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3.$$

Per il cubo non si pone il problema, come per il quadrato, del segno della base, perché un numero elevato ad esponente dispari, se è positivo rimane positivo e se è negativo rimane negativo.

---

**Esempio 13.25.** Scomporre in fattori $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$.

Notiamo che il primo ed il quarto termine sono cubi, rispettivamente di $2a$ e di $b$, il secondo termine è il triplo prodotto tra il quadrato di $2a$ e $b$, mentre il terzo termine è il triplo prodotto tra $2a$ e il quadrato di $b$. Abbiamo dunque:

$$8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3 = (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot (b) + 3 \cdot (2a) \cdot (b)^2 = (2a + b)^3.$$

**Esempio 13.26.** Scomporre in fattori $-27x^3 + 27x^2 - 9x + 1$.

Le basi del cubo sono il primo e il quarto termine, rispettivamente cubi di $-3x$ e di $1$. Dunque:

$$-27x^3 + 27x^2 - 9x + 1 = (-3x)^3 + 3 \cdot (-3x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3x) \cdot 1^2 + 1 = (-3x + 1)^3.$$

**Esempio 13.27.** Scomporre in fattori $x^6 - x^4 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{27}$.

Le basi del cubo sono $x^2$ e $-\frac{1}{3}$ i termini centrali sono i tripli prodotti, quindi $\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^3$.

---

✍ *Esercizi proposti:* 13.38, 13.39, 13.40, 13.41, 13.42, 13.43, 13.44, 13.45,13.46

### 13.3.4 Differenza di due quadrati

Un binomio che sia la differenza dei quadrati di due monomi può essere scomposto come prodotto tra la somma dei due monomi (basi dei quadrati) e la loro differenza.

$$(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2 \quad \Rightarrow \quad A^2 - B^2 = (A+B)\cdot(A-B).$$

---

**Esempio 13.28.** Scomporre in fattori $\frac{4}{9}a^4 - 25b^2$.

$$\frac{4}{9}a^4 - 25b^2 = \left(\frac{2}{3}a^2\right)^2 - (5b)^2 = \left(\frac{2}{3}a^2 + 5b\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a^2 - 5b\right).$$

**Esempio 13.29.** Scomporre in fattori $-x^6 + 16y^2$.

$$-x^6 + 16y^2 = -\left(x^3\right)^2 + (4y)^2 = \left(x^3 + 4y\right)\cdot\left(-x^3 + 4y\right).$$

**Esempio 13.30.** Scomporre in fattori $a^2 - (x+1)^2$. La formula precedente vale anche se $A$ e $B$ sono polinomi. Quindi $a^2 - (x+1)^2 = [a + (x+1)]\cdot[a - (x+1)] = (a+x+1)(a-x-1)$.

**Esempio 13.31.** Scomporre in fattori $\left(2a - b^2\right)^2 - (4x)^2$.

$$\left(2a - b^2\right)^2 - (4x)^2 = \left(2a - b^2 + 4x\right)\cdot\left(2a - b^2 - 4x\right).$$

**Esempio 13.32.** Scomporre in fattori $(a+3b)^2 - (2x-5)^2$.

$$(a+3b)^2 - (2x-5)^2 = (a+3b+2x-5)\cdot(a+3b-2x+5).$$

---

Per questo tipo di scomposizioni, la cosa più difficile è riuscire a riconoscere un quadrinomio o un polinomio di sei termini come differenza di quadrati. Riportiamo i casi principali:

- $(A+B)^2 - C^2 = A^2 + 2AB + B^2 - C^2$;
- $A^2 - (B+C)^2 = A^2 - B^2 - 2BC - C^2$;
- $(A+B)^2 - (C+D)^2 = A^2 + 2AB + B^2 - C^2 - 2CD - D^2$.

---

**Esempio 13.33.** Scomporre in fattori $4a^2 - 4b^2 - c^2 + 4bc$.

Gli ultimi tre termini possono essere raggruppati per formare il quadrati di un binomio.

$$\begin{aligned}4a^2 - 4b^2 - c^2 + 4bc &= 4a^2 - \left(4b^2 + c^2 - 4bc\right)\\ &= (2a)^2 - (2b-c)^2 = (2a+2b-c)\cdot(2a-2b+c).\end{aligned}$$

**Esempio 13.34.** Scomporre in fattori $4x^4-4x^2-y^2+1$.

$$4x^4-4x^2-y^2+1=\left(2x^2-1\right)^2-(y)^2=(2x^2-1+y)\cdot(2x^2-1-y).$$

**Esempio 13.35.** Scomporre in fattori $a^2+1+2a+6bc-b^2-9c^2$.

$$\begin{aligned}a^2+1+2a+6bc-b^2-9c^2&=\left(a^2+1+2a\right)-\left(b^2+9c^2-6bc\right)\\&=(a+1)^2-(b-3c)^2=(a+1+b-3c)\cdot(a+1-b+3c).\end{aligned}$$

---

✍ *Esercizi proposti:* 13.47, 13.48, 13.49, 13.50, 13.51, 13.52, 13.53, 13.54, 13.55, 13.56

## 13.4 Altre tecniche di scomposizione

### 13.4.1 Trinomi particolari

Consideriamo il seguente prodotto:

$$(x+3)(x+2)=x^2+3x+2x+6=x^2+5x+6.$$

Poniamoci ora l'obiettivo opposto: se abbiamo il polinomio $x^2+5x+6$ come facciamo a trovare ritrovare il prodotto che lo ha originato? Possiamo notare che il 5 deriva dalla somma tra il 3 e il 2, mentre il 6 deriva dal prodotto tra 3 e 2. Generalizzando:

$$(x+a)\cdot(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)\,x+a\cdot b.$$

Leggendo la formula precedente da destra verso sinistra:

$$x^2+(a+b)\,x+a\cdot b=(x+a)\cdot(x+b)\,.$$

Possiamo allora concludere che se abbiamo un trinomio di secondo grado in una sola lettera, a coefficienti interi, avente il termine di secondo grado con coefficiente 1, se riusciamo a trovare due numeri $a$ e $b$ tali che la loro somma è uguale al coefficiente del termine di primo grado ed il loro prodotto è uguale al termine noto, allora il polinomio è scomponibile nel prodotto $(x+a)(x+b)$.

Osserva che il termine noto, poiché è dato dal prodotto dei numeri che cerchiamo, ci dice se i due numeri sono concordi o discordi. Inoltre, se il numero non è particolarmente grande è sempre possibile scrivere facilmente tutte le coppie di numeri che danno come prodotto il numero cercato, tra tutte queste coppie dobbiamo poi individuare quella che ha per somma il coefficiente del termine di primo grado.

---

**Esempio 13.36.** $x^2+7x+12$.

I coefficienti sono positivi e quindi i due numeri da trovare sono entrambi positivi. Il termine noto 12 può essere scritto sotto forma di prodotto di due numeri naturali solo come:

$$12\cdot 1,\quad 6\cdot 2,\quad 3\cdot 4.$$

Le loro somme sono rispettivamente 13, 8, 7. La coppia di numeri che dà per somma $+7$ e prodotto $+12$ è pertanto $+3$ e $+4$. Dunque il trinomio si scompone come:

$$x^2+7x+12=(x+4)\cdot(x+3)\,.$$

**Esempio 13.37.** $x^2 - \overset{S}{8}x + \overset{P}{15}$.

I segni dei coefficienti ci dicono che i due numeri, dovendo avere somma (S) negativa e prodotto (P) positivo, sono entrambi negativi. Dobbiamo cercare due numeri negativi la cui somma (S) sia $-8$ e il cui prodotto (P) sia 15. Le coppie di numeri negativi che danno 15 come prodotto (P) sono $(-15, -1)$ e $(-5, -3)$. Allora i due numeri cercati sono $-5$ e $-3$. Il trinomio si scompone come:

$$x^2 - 8x + 15 = (x-5) \cdot (x-3) \, .$$

**Esempio 13.38.** $x^2 + \overset{S}{4}x - \overset{P}{5}$.

I due numeri sono discordi, il maggiore in valore assoluto è quello positivo. C'è una sola coppia di numeri che dà $-5$ come prodotto, precisamente $+5$ e $-1$. Il polinomio si scompone:

$$x^2 + 4x - 5 = (x+5) \cdot (x-1) \, .$$

**Esempio 13.39.** $x^2 - \overset{S}{3}x - \overset{P}{10}$.

I due numeri sono discordi, in valore assoluto il più grande è quello negativo. Le coppie di numeri che danno $-10$ come prodotto sono $(-10, +1)$ e $(-5, +2)$. Quella che dà $-3$ come somma è $(-5, +2)$. Quindi

$$x^2 - 3x - 10 = (x-5) \cdot (x+2) \, .$$

**Esempio 13.40.** In alcuni casi si può applicare questa regola anche quando il trinomio non è di secondo grado, è necessario però che il termine di grado intermedio sia esattamente di grado pari alla metà di quello di grado maggiore.

- $x^4 + 5x^2 + 6 = \left(x^2+3\right) \cdot \left(x^2+2\right)$;
- $x^6 + x^3 - 12 = \left(x^3+4\right) \cdot \left(x^3-3\right)$;
- $a^4 - 10a^2 + 9 = \underbrace{\left(a^2-9\right) \cdot \left(a^2-1\right)}_{\text{differenze di quadrati}} = (a+3) \cdot (a-3) \cdot (a+1) \cdot (a-1)$;
- $-x^4 - x^2 + 20 = -\left(x^4 + x^2 - 20\right) = -\left(x^2+5\right) \cdot \left(x^2-4\right) = -\left(x^2+5\right) \cdot (x+2) \cdot (x-2)$;
- $2x^5 - 12x^3 - 14x = 2x \cdot \left(x^4 - 6x^2 - 7\right) = 2x \cdot \left(x^2-7\right) \cdot \left(x^2+1\right)$;
- $-2a^7 + 34a^5 - 32a^3 = -2a^3\left(a^4 - 17a^2 + 16\right) = -2a^3\left(a^2-1\right)\left(a^2-16\right)$
  $= -2a^3(a-1)(a+1)(a-4)(a+4)$.

---

È possibile applicare questo metodo anche quando il polinomio è in due variabili.

---

**Esempio 13.41.** $x^2 + 5xy + 6y^2$.

Per capire come applicare la regola precedente, possiamo scrivere il trinomio in questo modo: $x^2 + \overset{S}{5}xy + \overset{P}{6}y^2$.

Bisogna cercare due monomi A e B tali che $A + B = 5y$ e $A \cdot B = 6y^2$. Partendo dal fatto che i due numeri che danno 5 come somma e 6 come prodotto sono $+3$ e $+2$, i monomi cercati sono $+3y$ e $+2y$, infatti $+3y + 3y = +5y$ e $+3y \cdot (+2y) = +6y^2$. Pertanto si può scomporre come segue: $x^2 + 5xy + 6y^2 = (x+3y)(x+2y)$.

---

La regola, opportunamente modificata, vale anche se il primo coefficiente non è 1. Vediamo un esempio.

**Esempio 13.42.** $2x^2 - x - 1$.

Non possiamo applicare la regola del trinomio caratteristico, con somma e prodotto, ma con un accorgimento, possiamo riscrivere il polinomio in un altro modo. Cerchiamo due numeri la cui somma sia $-1$ e il prodotto sia pari al prodotto tra il primo e l'ultimo coefficiente, o meglio tra il coefficiente del termine di secondo grado e il termine noto, in questo caso $2 \cdot (-1) = -2$. I numeri sono $-2$ e $+1$. Spezziamo il monomio centrale in somma di due monomi in questo modo

$$2x^2 - x - 1 = 2x^2 - 2x + x - 1.$$

Ora possiamo applicare il raccoglimento a fattore comune parziale

$$2x^2 - x - 1 = 2x^2 \underbrace{-2x + x}_{-x} -1 = 2x \cdot \underline{(x-1)} + 1 \cdot \underline{(x-1)} = (x-1) \cdot (2x+1)\,.$$

**Procedura 13.4.** *Sia da scomporre un trinomio di secondo grado a coefficienti interi* $ax^2 + bx + c$ *con* $a \neq 1$, *cerchiamo due numeri* $m$ *ed* $n$ *tali che* $m + n = b$ *e* $m \cdot n = a \cdot c$; *se riusciamo a trovarli, li useremo per dissociare il coefficiente* $b$ *e riscrivere il polinomio nella forma* $ax^2 + (m+n) \cdot x + c$ *su cui poi eseguire un raccoglimento parziale.*

✍ *Esercizi proposti:* 13.57, 13.58, 13.59, 13.60, 13.61, 13.62, 13.63, 13.64, 13.65, 13.66

### 13.4.2 Scomposizione con la regola Ruffini

Anche il teorema di Ruffini permette di scomporre in fattori i polinomi. Dato il polinomio $P(x)$, se riusciamo a trovare un numero $k$ per il quale $P(k) = 0$, allora $P(x)$ è divisibile per il binomio $x - k$, allora possiamo scomporre $P(x) = (x-k) \cdot Q(x)$, dove $Q(x)$ è il quoziente della divisione tra $P(x)$ e $(x-k)$.

Il problema di scomporre un polinomio $P(x)$ si riconduce quindi a quello della ricerca del numero $k$ che sostituito alla $x$ renda nullo il polinomio. Un numero di questo tipo si dice anche *radice del polinomio*.

Il numero $k$ non va cercato del tutto a caso, abbiamo degli elementi per restringere il campo di ricerca di questo numero quando il polinomio è a coefficienti interi.

❑ **Osservazione** Le radici intere del polinomio vanno cercate tra i divisori del termine noto.

**Esempio 13.43.** $P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$.

Le radici intere del polinomio sono da ricercare nell'insieme dei divisori di 8, precisamente in $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$. Sostituiamo questi numeri nel polinomio, finché non troviamo quello che lo annulla.

Per $x = 1$ si ha $p(1) = (1)^3 + (1)^2 - 10 \cdot (1) + 8 = 1 + 1 - 10 + 8 = 0$, pertanto il polinomio è divisibile per $x - 1$.

Utilizziamo la regola di Ruffini per dividere $P(x)$ per $x - 1$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | −10 | 8 |
| 1 | | 1 | 2 | −8 |
| | 1 | 2 | −8 | 0 |

Predisponiamo una griglia come quella a fianco, nella prima riga mettiamo i coefficienti di $P(x)$, nella seconda riga mettiamo come primo numero la radice che abbiamo trovato, cioè 1. Poi procediamo come abbiamo già indicato per la regola di Ruffini (sezione 11.7 a pagina 288).

I numeri che abbiamo ottenuto nell'ultima riga sono i coefficienti del polinomio quoziente: $q(x) = x^2 + 2x - 8$.

Possiamo allora scrivere:

$$x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x - 1) \cdot (x^2 + 2x - 8).$$

Per fattorizzare il polinomio di secondo grado $x^2 + 2x - 8$ possiamo ricorrere al metodo del trinomio notevole. Cerchiamo due numeri la sui somma sia $+2$ e il cui prodotto sia $-8$. Questi numeri vanno cercati tra le coppie che danno per prodotto $-8$ e precisamente tra le seguenti coppie $(+8; -1)$, $(-8; +1)$, $(+4; -2)$, $(-4; +2)$. La coppia che dà per somma $+2$ è $(+4; -2)$. In definitiva si ha:

$$x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x - 1) \cdot (x^2 + 2x - 8) = (x - 1)(x - 2)(x + 4).$$

**Esempio 13.44.** $x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30$.

Le radici intere vanno cercate tra i divisori di 30, precisamente in $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm10, \pm15, \pm30\}$. Sostituiamo questi numeri al posto della $x$, finché non troviamo la radice.

Per $x = 1$ si ha $P(1) = 1 - 5 - 7 + 29 + 30$ senza effettuare il calcolo si nota che i numeri positivi superano quelli negativi, quindi 1 non è una radice.

Per $x = -1$ si ha

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^4 - 5 \cdot (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 29 \cdot (-1) + 30 \\ &= +1 + 5 - 7 - 29 + 30 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Una radice del polinomio è quindi $-1$; utilizzando la regola di Ruffini abbiamo:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | −5 | −7 | 29 | 30 |
| −1 | | −1 | 6 | 1 | −30 |
| | 1 | −6 | −1 | 30 | 0 |

Con i numeri che abbiamo ottenuto nell'ultima riga costruiamo il polinomio quoziente: $x^3 - 6x^2 - 1x + 30$. Possiamo allora scrivere:

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30 = (x + 1)(x^3 - 6x^2 - x + 30).$$

Con lo stesso metodo scomponiamo il polinomio $x^3 - 6x^2 - 1x + 30$. Cerchiamone le radici tra i divisori di 30, precisamente nell'insieme $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm10, \pm15, \pm30\}$. Bisogna ripartire dall'ultima radice trovata, cioè da $-1$.

Per $x = -1$ si ha $P(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 - 1 \cdot (-1) + 30 = -1 - 6 + 1 + 30 \neq 0$.

Per $x = +2$ si ha $P(+2) = (+2)^3 - 6 \cdot (+2)^2 - 1 \cdot (+2) + 30 = +8 - 24 - 2 + 30 \neq 0$.

Per $x = -2$ si ha $P(-2) = (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 - 1 \cdot (-2) + 30 = -8 - 24 + 2 + 30 = 0$.

Quindi $-2$ è una radice del polinomio. Applichiamo la regola di Ruffini, ricordando che nella prima riga dobbiamo mettere i coefficienti del polinomio da scomporre, cioè $x^3 - 6x^2 - 1x + 30$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -6 & -1 & 30 \\ -2 & & -2 & 16 & -30 \\ \hline & 1 & -8 & 15 & 0 \end{array}$$

Il polinomio $q(x)$ si scompone nel prodotto $x^3 - 6x^2 - x + 30 = (x+2) \cdot (x^2 - 8x + 15)$.

Infine possiamo scomporre $x^2 - 8x + 15$ come trinomio notevole: i due numeri che hanno per somma $-8$ e prodotto $+15$ sono $-3$ e $-5$. In conclusione possiamo scrivere la scomposizione:

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30 = (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x-3) \cdot (x-5).$$

Non sempre è possibile scomporre un polinomio utilizzando solo numeri interi. In alcuni casi possiamo provare con le frazioni, in particolare quando il coefficiente del termine di grado maggiore non è 1. In questi casi possiamo cercare la radice del polinomio tra le frazioni del tipo $\frac{p}{q}$, dove $p$ è un divisore del termine noto e $q$ è un divisore del coefficiente del termine di grado maggiore.

**Esempio 13.45.** $6x^2 - x - 2$.

Determiniamo prima di tutto l'insieme nel quale possiamo cercare le radici del polinomio. Costruiamo tutte le frazioni del tipo $\frac{p}{q}$, con $p$ divisore di $-2$ e $q$ divisore di 6. I divisori di 2 sono $\{\pm 1, \pm 2\}$ mentre i divisori di 6 sono $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$. Le frazioni tra cui cercare sono

$$\left\{\pm\frac{1}{1}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{1}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{6}\right\}$$

cioè

$$\left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{3}\right\}.$$

Si ha $\quad A(1) = -3; \quad A(-1) = 5; \quad A\left(\frac{1}{2}\right) = -1; \quad A\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 6 & -1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & & -3 & 2 \\ \hline & 6 & -4 & 0 \end{array}$$

Sappiamo dal teorema di Ruffini che il polinomio $A(x) = 6x^2 - x - 2$ è divisibile per $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ dobbiamo quindi trovare il polinomio $Q(x)$ per scomporre $6x^2 - x - 2$ come $Q(x) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Applichiamo la regola di Ruffini per trovare il quoziente. Il quoziente è $Q(x) = 6x - 4$. Il polinomio sarà scomposto in $(6x - 4) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$. Mettendo a fattore comune 2 nel primo binomio si ha:

$$6x^2 - x - 2 = (6x - 4)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2(3x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (3x - 2)(2x + 1).$$

---

✍ *Esercizi proposti:* 13.67, 13.68, 13.69, 13.70, 13.71

### 13.4.3 Somma e differenza di due cubi

Per scomporre i polinomi del tipo $A^3 + B^3$ e $A^3 - B^3$ possiamo utilizzare il metodo di Ruffini.

**Esempio 13.46.** $x^3 - 8$.

Il polinomio si annulla per $x = 2$, che è la radice cubica di 8. Calcoliamo il quoziente.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | −8 |
| 2 | | 2 | 4 | 8 |
| | 1 | 2 | 4 | 0 |

Il polinomio quoziente è $Q(x) = x^2 + 2x + 4$ e la scomposizione risulta

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4).$$

Notiamo che il quoziente somiglia al quadrato di un binomio, ma non lo è in quanto il termine intermedio è il prodotto e non il doppio prodotto dei due termini, si usa anche dire che è un "falso quadrato". Un trinomio di questo tipo non è ulteriormente scomponibile.

**Esempio 13.47.** $x^3 + 27$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 27 |
| −3 | | −3 | 9 | −27 |
| | 1 | −3 | 9 | 0 |

Il polinomio si annulla per $x = -3$, cioè $P(-3) = (-3)^3 + 27 = -27 + 27 = 0$. Il polinomio quindi è divisibile per $x + 3$. Calcoliamo il quoziente attraverso la regola di Ruffini.

Il polinomio quoziente è $Q(x) = x^2 - 3x + 9$ e la scomposizione risulta

$$x^3 + 27 = (x+3)(x^2 - 3x + 9).$$

In generale possiamo applicare le seguenti regole per la scomposizione di somma e differenza di due cubi:

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2),$$
$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2).$$

✍ *Esercizi proposti:* 13.72, 13.73, 13.74

### 13.4.4 Scomposizione mediante metodi combinati

Nei paragrafi precedenti abbiamo analizzato alcuni metodi per ottenere la scomposizione in fattori di un polinomio e talvolta abbiamo mostrato che la scomposizione si ottiene combinando metodi diversi. Sostanzialmente non esiste una regola generale per la scomposizione di polinomi, cioè non esistono criteri di divisibilità semplici come quelli per scomporre un numero nei suoi fattori primi. In questo paragrafo vediamo alcuni casi in cui si applicano vari metodi combinati tra di loro.

Un buon metodo per ottenere la scomposizione è procedere tenendo conto di questi suggerimenti:

1. analizzare se si può effettuare *un raccoglimento totale*;
2. *contare il numero di termini* di cui si compone il polinomio:

a) *due* termini. Analizzare se il binomio è
   i. una *differenza di quadrati* $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$;
   ii. una *differenza di cubi* $A^3 - B^3 = (A-B)\left(A^2 + AB + B^2\right)$;
   iii. una *somma di cubi* $A^3 + B^3 = (A+B)\left(A^2 - AB + B^2\right)$;
   iv. una *somma di quadrati* $A^2 + B^2$, nel qual caso è *irriducibile*.
b) *tre* termini. Analizzare se è
   i. un *quadrato di un binomio* $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$;
   ii. un *trinomio particolare* del tipo $x^2 + Sx + P = (x+a)(x+b)$ con $a + b = S$ e $a \cdot b = P$;
   iii. un *falso quadrato* $A^2 \pm AB + B^2$, che è irriducibile.
c) *quattro* termini. Analizzare se è
   i. un *cubo di un binomio* $A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3 = (A \pm B)^3$;
   ii. una *particolare differenza di quadrati*
   $A^2 \pm 2AB + B^2 - C^2 = (A \pm B + C)(A \pm B - C)$;
   iii. un *raccoglimento parziale*, tipo $ax + bx + ay + by = (a+b)(x+y)$.
d) *sei* termini. Analizzare se è
   i. un *quadrato di un trinomio* $A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A+B+C)^2$;
   ii. un *raccoglimento parziale*, tipo
   $ax + bx + cx + ay + by + cy = (a+b+c)(x+y)$.

3. se non riuscite ad individuare nessuno dei casi precedenti, provate ad applicare la *regola di Ruffini*.

Ricordiamo infine alcune formule per somma e differenza di potenze dispari.

$$A^5 + B^5 = (A+B)\left(A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4\right),$$
$$A^5 - B^5 = (A-B)\left(A^4 + A^3B + A^2B^2 + AB^3 + B^4\right),$$
$$A^7 \pm B^7 = (A \pm B)\left(A^6 \mp A^5B + A^4B^2 \mp A^3B^3 + A^2B^4 \mp AB^5 + B^6\right),$$
$$\begin{aligned}(A^{11} - B^{11}) = (A-B)(&A^{10} + A^9B + A^8B^2 + A^7B^3 + A^6B^4 + \\ &+ A^5B^5 + A^4B^6 + A^3B^7 + A^2B^8 + AB^9 + B^{10}).\end{aligned}$$

La differenza di due potenze ad esponente pari (uguale o differente tra le basi dei due addendi) rientra nel caso della differenza di quadrati:

$$A^8 - B^{10} = \left(A^4 - B^5\right)\left(A^4 + B^5\right).$$

In alcuni casi si può scomporre anche la somma di potenze pari:

$$A^6 + B^6 = \left(A^2\right)^3 + \left(B^2\right)^3 = \left(A^2 + B^2\right)\left(A^4 - A^2B^2 + B^4\right),$$
$$A^{10} + B^{10} = \left(A^2\right)^5 + \left(B^2\right)^5 = \left(A^2 + B^2\right)\left(A^8 - A^6B^2 + A^4B^4 - A^2B^6 + B^8\right).$$

Proponiamo di seguito alcuni esercizi svolti in modo che possiate acquisire una certa abilità nella scomposizione di polinomi.

---

**Esempio 13.48.** $a^2x + 5abx - 36b^2x$.

Il polinomio ha 3 termini, è di terzo grado in 2 variabili, è omogeneo; tra i suoi monomi si ha MCD $= x$; effettuiamo il raccoglimento totale: $x \cdot \left(a^2 + 5ab - 36b^2\right)$. Il trinomio ottenuto come secondo fattore è di grado 2 in 2 variabili, omogeneo e può essere riscritto

$$a^2 + (5b) \cdot a - 36b^2.$$

Proviamo a scomporlo come trinomio particolare: cerchiamo due monomi $m$ ed $n$ tali che $m + n = 5b$ e $m \cdot n = -36b^2$; i due monomi sono $m = 9b$ ed $n = -4b$;

$$a^2x + 5abx - 36b^2x = x \cdot (a + 9b) \cdot (a - 4b)\,.$$

**Esempio 13.49.** $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$.

Facendo un raccoglimento parziale del coefficiente 2 tra gli ultimi tre monomi otterremmo $x^2 + y^2 + 2 \cdot (xy - x - y)$ su cui non possiamo fare alcun ulteriore raccoglimento.

I primi tre termini formano però il quadrato di un binomio e tra gli altri due possiamo raccogliere $-2$, quindi $(\underline{x + y})^2 - 2 \cdot (\underline{x + y})$, raccogliendo $(x + y)$ tra i due termini si ottiene

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y = (x + y) \cdot (x + y - 2)\,.$$

**Esempio 13.50.** $8a + 10b + (1 - 4a - 5b)^2 - 2$.

Tra i monomi sparsi possiamo raccogliere 2 a fattore comune

$$2 \cdot (4a + 5b - 1) + (1 - 4a - 5b)^2\,.$$

Osserviamo che la base del quadrato è l'opposto del polinomio contenuto nel primo termine. Ma poiché numeri opposti hanno lo stesso quadrato, possiamo cambiare il segno alla base del quadrato riscrivendo:

$$2 \cdot (4a + 5b - 1) + (-1 + 4a + 5b)^2\,.$$

Quindi si può mettere a fattore comune il termine $(4a + 5b - 1)$ ottenendo

$$\begin{aligned} 8a + 10b + (1 - 4a - 5b)^2 - 2 &= (4a + 5b - 1) \cdot (2 - 1 + 4a + 5b) \\ &= (4a + 5b - 1) \cdot (1 + 4a + 5b)\,. \end{aligned}$$

**Esempio 13.51.** $t^3 - z^3 + t^2 - z^2$.

Il polinomio ha 4 termini, è di terzo grado in due variabili. Poiché due monomi sono nella variabile $t$ e gli altri due nella variabile $z$ potremmo subito effettuare un raccoglimento parziale: $t^3 - z^3 + t^2 - z^2 = t^2 \cdot (t + 1) - z^2 \cdot (z + 1)$, che non permette un ulteriore passo. Occorre quindi un'altra idea.

Notiamo che i primi due termini costituiscono una differenza di cubi e gli altri due una differenza di quadrati; applichiamo le regole:

$$t^3 - z^3 + t^2 - z^2 = (t - z) \cdot \left(t^2 + tz + z^2\right) + (t - z) \cdot (t + z)\,.$$

Ora effettuiamo il raccoglimento totale del fattore comune $(t - z)$

$$t^3 - z^3 + t^2 - z^2 = (t - z) \cdot \left(t^2 + tz + z^2 + t + z\right).$$

**Esempio 13.52.** $P(x) = x^3 - 7x - 6$.

Il polinomio ha 3 termini, è di 3° grado in una variabile. Non possiamo utilizzare la regola del trinomio particolare poiché il grado è 3. Procediamo con la regola di Ruffini: cerchiamo il numero che annulla il polinomio nell'insieme dei divisori del termine noto $D = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.

Per $x = +1$ si ha $P(+1) = (+1)^3 - 7 \cdot (+1) - 6 = 1 - 7 - 6 \neq 0$.

Per $x = -1$ si ha $P(-1) = (-1)^3 - 7 \cdot (-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 0$.

Quindi $P(x) = (x+1) \cdot Q(x)$ con $Q(x)$ polinomio di secondo grado che determiniamo con la regola di Ruffini:

Pertanto: $P(x) = x^3 - 7x - 6 = (x+1) \cdot \left(x^2 - x - 6\right)$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -7 & -6 \\ -1 & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

Il polinomio quoziente è un trinomio di secondo grado; proviamo a scomporlo come trinomio notevole. Cerchiamo due numeri $a$ e $b$ tali che $a + b = -1$ e $a \cdot b = -6$. I due numeri vanno cercati tra le coppie che hanno $-6$ come prodotto, precisamente $(-6, +1)$, $(-3, +2)$, $(+6, -1)$, $(+3, -2)$. La coppia che fa al caso nostro è $(-3, +2)$ quindi si scompone $Q(x) = x^2 - x - 6 = (x-3) \cdot (x+2)$.

In definitiva $x^3 - 7x - 6 = (x+1) \cdot (x-3) \cdot (x+2)$.

**Esempio 13.53.** $\left(m^2 - 4\right)^2 - m^2 - 4m - 4$.

Il polinomio ha 4 termini di cui il primo è un quadrato di un binomio; negli altri tre possiamo raccogliere $-1$;

$$\left(m^2 - 4\right)^2 - m^2 - 4m - 4 = \left(m^2 - 4\right)^2 - \left(m^2 + 4m + 4\right)$$

Notiamo che anche il secondo termine è un quadrato di un binomio, quindi:

$$\left(m^2 - 4\right)^2 - (m+2)^2 \tag{13.1}$$

che si presenta come differenza di quadrati, allora diviene:

$$\left[\left(m^2 - 4\right) + (m+2)\right] \cdot \left[\left(m^2 - 4\right) - (m+2)\right].$$

Eliminando le parentesi tonde $\left(m^2 + m - 2\right) \cdot \left(m^2 - m - 6\right)$.

I due fattori ottenuti si scompongono con la regola del trinomio. In definitiva si ottiene:

$$\begin{aligned}(m^2 + m - 2) \cdot (m^2 - m - 6) &= (m+2) \cdot (m-1) \cdot (m-3) \cdot (m+2) \\ &= (m+2)^2 \cdot (m-1) \cdot (m-3)\,.\end{aligned}$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare anche considerando che la 13.1 è sì una differenza di quadrati, ma a sua volta il termine $m^2 - 4$ è anch'esso una differenza di quadrati. Quindi si ha

$$\left(m^2 - 4\right)^2 - (m+2)^2 = (m+2)^2 \cdot (m-2)^2 - (m+2)^2$$

e mettendo in evidenza il fattore $(m+2)^2$ si può scrivere

$$(m+2)^2 \cdot \left[(m-2)^2 - 1\right].$$

Svolgendo le operazioni all'interno delle parentesi quadre si ottiene

$$(m+2)^2 \cdot \left[m^2 - 4m + 4 - 1\right] = (m+2)^2 \cdot \left[m^2 - 4m + 3\right].$$

A questo punto, per scomporre il fattore $m^2 - 4m + 3$ si deve cercare una coppia di numeri interi, tali che la loro somma sia $-4$ ed il loro prodotto sia 3. La coppia di valori è $(-3, -1)$ e quindi di può scrivere

$$\begin{aligned}\left(m^2-4\right)^2 - m^2 - 4m - 4 &= (m+2)^2 \cdot \left(m^2 - 4m + 3\right)\\ &= (m+2)^2 \cdot (m-1) \cdot (m-3).\end{aligned}$$

**Esempio 13.54.** $(a-3)^2 + (3a-9) \cdot (a+1) - \left(a^2 - 9\right)$.

$$(a-3)^2 + (3a-9) \cdot (a+1) - \left(a^2-9\right) = (a-3)^2 + 3 \cdot (a-3) \cdot (a+1) - (a-3) \cdot (a+3).$$

Mettiamo a fattore comune $(a-3)$:

$$(a-3) \cdot [(a-3) + 3 \cdot (a+1) - (a+3)].$$

Svolgiamo i calcoli nel secondo fattore e otteniamo:

$$(a-3)(a-3+3a+3-a-3) = (a-3)(3a-3) = 3(a-3)(a-1).$$

**Esempio 13.55.** $a^4 + a^2b^2 + b^4$.

Osserva che per avere il quadrato del binomio occorre il doppio prodotto, aggiungendo e togliendo $a^2b^2$ otteniamo il doppio prodotto cercato e al passaggio seguente ci troviamo con la differenza di quadrati:

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 = \left(a^2+b^2\right)^2 - (ab)^2 = \left(a^2+b^2+ab\right)\left(a^2+b^2-ab\right).$$

**Esempio 13.56.** $a^5 + 2a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + 2ab^4 + b^5$.

$$\begin{aligned}a^5 + 2a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + 2ab^4 + b^5 &= a^3\left(a^2+2ab+b^2\right) + b^3\left(a^2+2ab+b^2\right)\\ &= \left(a^3+b^3\right)\left(a^2+2ab+b^2\right)\\ &= (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)(a+b)^2\\ &= (a+b)^3\left(a^2-ab+b^2\right).\end{aligned}$$

**Esempio 13.57.** $a^2x^2 + 2ax^2 - 3x^2 - 4a^2 - 8a + 12$.

$$\begin{aligned} a^2x^2 + 2ax^2 - 3x^2 - 4a^2 - 8a + 12 &= x^2\left(a^2 + 2a - 3\right) - 4\left(a^2 + 2a - 3\right) \\ &= \left(x^2 - 4\right)\left(a^2 + 2a - 3\right) \\ &= (x+2)(x-2)(a-1)(a+3). \end{aligned}$$

---

✍ *Esercizi proposti:* 13.75, 13.76, 13.77, 13.78, 13.79, 13.80, 13.81, 13.82, 13.83, 13.84, 13.85

## 13.5 MCD e mcm tra polinomi

### 13.5.1 Divisore comune e multiplo comune

Il calcolo del *minimo comune multiplo* (mcm) e del *massimo comune divisore* (MCD) si estende anche ai polinomi. Per determinare MCD e mcm di due o più polinomi occorre prima di tutto scomporli in fattori irriducibili. La cosa non è semplice poiché non si può essere sicuri di aver trovato il massimo comune divisore o il minimo comune multiplo per la difficoltà di decidere se un polinomio è irriducibile: prudentemente si dovrebbe parlare di divisore comune e di multiplo comune.

Un polinomio $A$ si dice *multiplo* di un polinomio $B$ se esiste un polinomio $C$ per il quale si ha $A = B \cdot C$; in questo caso diremo anche che $B$ è *divisore* del polinomio $A$.

### 13.5.2 Massimo Comune Divisore

Dopo aver scomposto ciascun polinomio in fattori, il massimo comune divisore tra due o più polinomi è il prodotto di tutti i fattori comuni ai polinomi, presi ciascuno una sola volta, con il minimo esponente. Sia i coefficienti numerici, sia i monomi possono essere considerati polinomi.

**Procedura 13.5.** *Calcolare il* MCD *tra polinomi:*

*a ) scomponiamo in fattori ogni polinomio;*
*b ) prendiamo i fattori comuni a tutti i polinomi una sola volta con l'esponente più piccolo;*
*c ) se non ci sono fattori comuni a tutti i polinomi il* MCD *è* 1.

---

**Esempio 13.58.** Determinare il MCD $\left(3a^2b^3 - 3b^3, 6a^3b^2 - 6b^2, 2a^2b^2 - 24ab^2 + 12b^2\right)$.

a ) Scomponiamo in fattori i singoli polinomi;

$3a^2b^3 - 3b^3 = 3b^3\left(a^2 - 1\right) = 3b^3(a-1)(a+1)$;
$6a^3b^2 - 6b^2 = 6b^2\left(a^3 - 1\right) = 6b^2(a-1)\left(a^2 + a + 1\right)$;
$12a^2b^2 - 24ab^2 + 12b^2 = 12b^2\left(a^2 - 2a + 1\right) = 12b^2(a-1)^2$.

b ) i fattori comuni a tutti i polinomi presi con l'esponente più piccolo sono:

tra i coefficienti numerici il 3;
tra i monomi $b^2$;

tra i polinomi $a-1$.

Quindi il MCD è $3b^2(a-1)$.

---

### 13.5.3 Minimo comune multiplo

Dopo aver scomposto ciascun polinomio in fattori, il minimo comune multiplo tra due o più polinomi è il prodotto dei fattori comuni e non comuni di tutti i polinomi, quelli comuni presi una sola volta, con il massimo esponente.

**Procedura 13.6.** *Calcolare il* mcm *tra polinomi:*

*a ) scomponiamo in fattori ogni polinomio;*
*b ) prendiamo tutti i fattori comuni e non comuni dei polinomi, i fattori comuni presi una sola volta con il massimo esponente.*

---

**Esempio 13.59.** Determinare il mcm $\left(3a^2b^3-3b^3, 6a^3b^2-6b^2, 2a^2b^2-24ab^2+12b^2\right)$.

a ) Scomponiamo in fattori i singoli polinomi;

$3a^2b^3-3b^3=3b^3\left(a^2-1\right)=3b^3(a-1)(a+1)$;
$6a^3b^2-6b^2=6b^2\left(a^3-1\right)=6b^2(a-1)\left(a^2+a+1\right)$;
$12a^2b^2-24ab^2+12b^2=12b^2\left(a^2-2a+1\right)=12b^2(a-1)^2$.

b ) i fattori comuni presi con il massimo esponente e quelli non comuni sono:

tra i coefficienti numerici il 12;
tra i monomi $b^3$;
tra i polinomi $(a-1)^2\cdot(a+1)\cdot\left(a^2+a+1\right)$.

Quindi il mcm è $12b^3(a-1)^2(a+1)\left(a^2+a+1\right)$.

---

✍ *Esercizi proposti:* 13.86, 13.87, 13.88, 13.89, 13.90, 13.91, 13.92, 13.93, 13.94, 13.95, 13.96