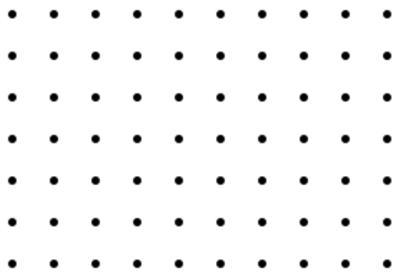
Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2015/2016

Analysis III

Vorlesung 63



Ein Gittermaß weist nur den Gitterpunkten ein positives Maß zu. Wenn der Gitterabstand hinreichend klein ist, liefert das Gittermaß eine gute Approximation für den Inhalt für Figuren, die nicht allzu kompliziert sind.

Gittermaße

Als weiteres diskretes Maß besprechen wir Gittermaße.

Definition 63.1. Sei $\epsilon > 0$. Die Menge

$$\Gamma_\epsilon = \{(a_1, \ldots, a_n)\epsilon \,|\, a_i \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

nennt man das *Gitter* zum Gitterabstand ϵ. Das durch

$$\mu_\epsilon(T) = \epsilon^n \cdot \#(T \cap \Gamma_\epsilon)$$

definierte Maß auf $\mathbb{R}^n$ heißt das *Gittermaß* zum Gitterabstand ϵ.

Pointillismus: Der Flächeninhalt (auf dem Bild) der hellgrünen Rasenfläche entspricht in etwa der Anzahl der hellgrünen Farbtupfer, der Anzahl der hellgrünen Pixels und der Anzahl der hellgrünen Synapsen.

Ausschöpfungseigenschaften

Definition 63.2. Sei M eine Menge und sei T_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Teilmengen in M mit $T_n \subseteq T_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$. Dann sagt man, dass diese Folge eine *Ausschöpfung* von T bildet (oder T ausschöpft), und schreibt dafür $T_n \uparrow T$.

Der $\mathbb{R}^k$ wird beispielsweise durch die Bälle $B(0,n)$ oder die Würfel $[-n,n]^k$ ausgeschöpft.

Definition 63.3. Sei M eine Menge und sei T_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Teilmengen in M mit $T_n \supseteq T_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $T = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n$. Dann sagt man, dass diese Folge eine *Schrumpfung* von T bildet (oder gegen T schrumpft), und schreibt dafür $T_n \downarrow T$.

Bei einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ gehört mit einer jeden solchen auf- oder absteigenden Folge von Teilmengen T_n auch die Vereinigung bzw. der Durchschnitt zu $\mathcal{A}$. Bei einem Prämaß auf einen Präring setzen wir, wenn wir von Ausschöpfung bzw. Schrumpfung sprechen, voraus, dass die Vereinigung bzw. der Durchschnitt zum Präring gehören.

Wir fassen einige Rechenregeln für Prämaße zusammen.

Lemma 63.4. *Es sei M eine Menge, $\mathcal{P}$ ein Präring auf M und μ ein Prämaß auf $\mathcal{P}$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Es ist $\mu(\emptyset) = 0$.*
(2) *Für Mengen $S, T \in \mathcal{P}$ mit $S \subseteq T$ gilt $\mu(T) = \mu(S) + \mu(T \setminus S)$. Insbesondere ist ein Prämaß monoton.*
(3) *Für Mengen $S, T \in \mathcal{P}$ gilt $\mu(T \cup S) = \mu(S) + \mu(T) - \mu(S \cap T)$.*
(4) *Seien T_n, $n \in \mathbb{N}$, und T aus $\mathcal{P}$ mit $T \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$.*[1] *Dann gilt*
$$\mu(T) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(T_n)\,.$$
(5) *Sei $T_n \uparrow T$ eine Ausschöpfung in $\mathcal{P}$. Dann ist*
$$\mu(T) = \lim_{n \to \infty} \mu(T_n)\,,$$
wobei diese Folge monoton wachsend ist.
(6) *Sei $T_n \downarrow T$ eine Schrumpfung in $\mathcal{P}$ und sei $\mu(T_0) < \infty$ vorausgesetzt. Dann ist*
$$\mu(T) = \lim_{n \to \infty} \mu(T_n)\,,$$
wobei diese Folge monoton fallend ist.

[1] Man sagt, dass die T_n, $n \in \mathbb{N}$, eine *Überpflasterung* von T bilden.

Beweis. (1) ist in der Definition von Prämaß enthalten, da die leere Summe als 0 definiert ist.[2] (2) folgt direkt aus der Definition, da T die disjunkte Vereinigung aus S und $T \setminus S$ ist. (3) folgt daraus, dass $S \cup T$ die disjunkte Vereinigung aus den drei Mengen $S \setminus T$, $T \setminus S$ und $S \cap T$ ist. (4). Wir verwenden den folgenden Standardtrick: Wir schreiben $S_n = T_n \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i \right)$. Dann gilt offensichtlich $\bigcup_{i=0}^{n} T_i = \bigcup_{i=0}^{n} S_i$ für alle n, wobei die Vereinigungen der S_i jeweils disjunkt sind. Entsprechned Damit gilt

$$\begin{aligned}
\mu(T) &= \mu\left(T \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n\right)\right) \\
&= \mu\left(T \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n\right)\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T \cap S_n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mu\left(T \cap S_n\right) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu\left(S_n\right) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu\left(T_n\right).
\end{aligned}$$

(5). Wir schreiben die einzelnen Teilmengen T_n als disjunkte Vereinigung mittels $S_0 = T_0$ und $S_n = T_n \setminus T_{n-1}$. Damit ist

$$T_n = S_0 \cup S_1 \cup \ldots \cup S_n,$$

und da dies eine disjunkte Vereinigung ist, gilt $\mu(T_n) = \sum_{i=0}^{n} \mu(S_i)$. Entsprechend gilt

$$T = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$$

und daher

$$\mu(T) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(S_i) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \mu(S_i)\right) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(T_n\right).$$

(6) Wir setzen $S_n = T_0 \setminus T_n$. Da T_n, $n \in \mathbb{N}$, eine absteigende Folge ist, ist S_n, $n \in \mathbb{N}$, eine aufsteigende Folge, und zwar gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (T_0 \setminus T_n) = T_0 \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n\right) = T_0 \setminus T.$$

[2] Man kann auch, sobald es eine messbare Menge T mit endlichem Maß gibt, mittels $\mu(T) = \mu(T \cup \emptyset) = \mu(T) + \mu(\emptyset)$ argumentieren, woraus aus $\mu(T) < \infty$ direkt $\mu(\emptyset) = 0$ folgt.

Daher gilt

$$\mu(T_0 \setminus T) = \lim_{n\to\infty} \mu(T_0 \setminus T_n) = \lim_{n\to\infty} (\mu(T_0) - \mu(T_n)) = \mu(T_0) - \lim_{n\to\infty} \mu(T_n)$$

nach Teil (5). Somit ist (da $\mu(T_0) < \infty$ ist)

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T_n) = \mu(T_0) - \mu(T_0 \setminus T) = \mu(T).$$

□

DEFINITION 63.5. Es sei M eine Menge, $\mathcal{P}$ ein Präring auf M,

$$\mu\colon \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein Prämaß auf M. Dann heißt μ *endlich*, wenn

$$\mu(T) < \infty$$

für alle $T \in \mathcal{P}$ ist.

Wenn die Gesamtmenge M zu $\mathcal{P}$ gehört, so ergibt sich die Endlichkeit des Prämaßes sofort aus der Bedingung $\mu(M) < \infty$ aufgrund der Monotonie.

Für die Maßtheorie des euklidischen Raumes ist dieser Begriff zu stark, da ja der $\mathbb{R}^n$ kein endliches Volumen hat. Aber immerhin kann man den $\mathbb{R}^n$ durch die abzählbar vielen Kugeln $B(0,k)$, $k \in \mathbb{N}$, die selbst endliches Volumen haben, ausschöpfen. Diese Eigenschaft wird durch folgende Definition präzisiert.

DEFINITION 63.6. Es sei M eine Menge, $\mathcal{P}$ ein Präring auf M,

$$\mu\colon \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein Prämaß auf M. Dann heißt μ *σ-endlich*, wenn man M als eine abzählbare Vereinigung von Teilmengen M_i aus $\mathcal{P}$ mit

$$\mu(M_i) < \infty$$

schreiben kann.

Der Eindeutigkeitssatz für Maße

SATZ 63.7. *Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und es sei $\mathcal{E}$ ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem für $\mathcal{A}$. Es seien μ_1 und μ_2 zwei Maße auf $(M, \mathcal{A})$, die auf $\mathcal{E}$ übereinstimmen. Es gebe eine Ausschöpfung $M_n \uparrow M$ mit $M_n \in \mathcal{E}$ und mit $\mu_1(M_n) = \mu_2(M_n) < \infty$. Dann ist*

$$\mu_1 = \mu_2.$$

Beweis. Für jede messbare Menge $T \in \mathcal{A}$ ist $(T \cap M_n) \uparrow T$ eine Ausschöpfung von T, so dass es nach Lemma 63.4 (5) genügt, die Gleichheit

$$\mu_1(T \cap M_n) = \mu_2(T \cap M_n)$$

für alle $T \in \mathcal{A}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Sei n fixiert. Wir betrachten das Mengensystem

$$\mathcal{D}_n = \{T \in \mathcal{A} | \, \mu_1(T \cap M_n) = \mu_2(T \cap M_n)\}$$

und wir wollen zeigen, dass dies ganz $\mathcal{A}$ ist. Da $\mathcal{E}$ durchschnittstabil ist, gehört nach Voraussetzung jede Menge $E \in \mathcal{E}$ zu $\mathcal{D}_n$. Wir behaupten, dass $\mathcal{D}_n$ ein Dynkin-System ist. Offenbar ist $M \in \mathcal{D}_n$. Seien $S \subseteq T$ Teilmengen, die zu $\mathcal{D}_n$ gehören. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mu_1\left((T \setminus S) \cap M_n\right) &= \mu_1\left((T \cap M_n) \setminus (S \cap M_n)\right) \\
&= \mu_1(T \cap M_n) - \mu_1(S \cap M_n) \\
&= \mu_2(T \cap M_n) - \mu_2(S \cap M_n) \\
&= \mu_2\left((T \cap M_n) \setminus (S \cap M_n)\right) \\
&= \mu_2((T \setminus S) \cap M_n),
\end{aligned}$$

so dass auch $T \setminus S$ zu $\mathcal{D}_n$ gehört. Sei schließlich T_i, $i \in I$, eine abzählbare Familie paarweise disjunkter Teilmengen aus $\mathcal{D}_n$, und sei $T = \bigcup_{i \in I} T_i$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mu_1\left(T \cap M_n\right) &= \mu_1\left(\bigcup_{i \in I} (T_i \cap M_n)\right) \\
&= \sum_{i \in I} \mu_1\left(T_i \cap M_n\right) \\
&= \sum_{i \in I} \mu_2\left(T_i \cap M_n\right) \\
&= \mu_2\left(\bigcup_{i \in I} (T_i \cap M_n)\right) \\
&= \mu_2\left(T \cap M_n\right),
\end{aligned}$$

so dass auch T zu $\mathcal{D}_n$ gehört. Damit ist $\mathcal{D}_n$ ein Dynkin-System, das das durchschnittsstabile Erzeugendensystem $\mathcal{E}$ enthält. Nach Lemma 61.11 ist daher $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_n$, und es gilt Gleichheit. $\square$

Bildmaße

Definition 63.8. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(N, \mathcal{B})$ ein Messraum und

$$\varphi \colon M \longrightarrow N$$

eine messbare Abbildung. Dann nennt man das durch

$$\nu(T) := \mu(\varphi^{-1}(T))$$

definierte Maß auf N das *Bildmaß* von μ unter φ. Es wird mit $\varphi_* \mu$ bezeichnet.

Das Bildmaß ist in der Tat ein Maß, siehe Aufgabe 63.7.

Lemma 63.9. *Es seien* $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ *und* $(S, \mathcal{C})$ *Messräume und*

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

und

$$\psi\colon N \longrightarrow S$$

messbare Abbildungen. Es sei μ *ein Maß auf* M. *Dann gilt für die Bildmaße*

$$(\psi \circ \varphi)_* \mu = \psi_*(\varphi_* \mu).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 63.8. □

Definition 63.10. Es seien $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und $(N, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume. Eine messbare Abbildung

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

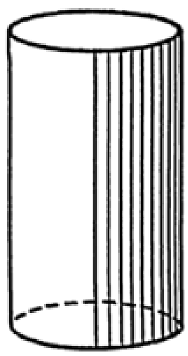
heißt *maßtreu*, wenn für jede messbare Menge $T \subseteq N$ die Beziehung

$$\nu(T) = \mu(\varphi^{-1}(T))$$

gilt.

Eine messbare Abbildung $\varphi\colon (M, \mathcal{A}, \mu) \to (N, \mathcal{B}, \nu)$ ist genau dann maßtreu, wenn ν das Bildmaß von μ unter φ ist.

Produkt von topologischen Räumen



Eine Zylinderoberfläche ist der Produktraum aus einer Kreislinie und einem Intervall.

Definition 63.11. Unter dem *Produkt der topologischen Räume* X und Y versteht man die Produktmenge $X \times Y$ zusammen mit derjenigen Topologie (genannt *Produkttopologie*), bei der eine Teilmenge $W \subseteq X \times Y$ genau dann offen ist, wenn man sie als Vereinigung von Produktmengen der Form $U \times V$ mit offenen Mengen $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ schreiben kann.

Abbildungsverzeichnis