Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 11

Die Pausenaufgabe

AUFGABE 11.1. Zeige, dass in Beispiel 11.4 das Distributivgesetz nicht gilt, wenn man die Rollen von Addition und Multiplikation vertauscht.

Übungsaufgaben

AUFGABE 11.2. Es seien $a, b \in R$ Elemente in einem kommutativen Halbring R. Berechne

$$(a+b) \cdot (a+2b) \cdot (a+3b)\,.$$

AUFGABE 11.3. Es seien $a, b, c, d \in R$ Elemente in einem kommutativen Halbring R. Berechne

$$(ab+2d) \cdot (a^2+4bc) \cdot (3bd+ac)\,.$$

AUFGABE 11.4. Es seien $a, b, c \in R$ Elemente in einem kommutativen Halbring R. Berechne

$$(a+b+c)^2\,.$$

AUFGABE 11.5. Berechne

$$(2+4+3) \cdot (4+5+1+2)$$

mit und ohne Distributivgesetz.

AUFGABE 11.6. Sei R ein kommutativer Halbring und $f, a_i, b_j \in R$. Zeige die folgenden Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f^i + \sum_{j=0}^{m} b_j f^j = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) f^k$$

und

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i f^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j f^j \right) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k f^k \text{ mit } c_k = \sum_{r=0}^{k} a_r b_{k-r}\,.$$

Bei einer Summe oder einem Produkt von mehreren Zahlen (oder Elementen eines kommutativen Halbringes) ist es nicht immer sinnvoll, eine feste Reihenfolge der Indexmenge zu haben. Häufig ist es besser, die Reihenfolge zu wechseln und oft gibt es gar keine natürliche Reihenfolge. Man muss sich zuerst klar machen, dass die Summe nicht von der Reihenfolge abhängt. Die Argumente sind ähnlich wie im Beweis zu Lemma 6.9.

Aufgabe 11.7. Es sei R ein kommutativer Halbring, I eine endliche Menge und seien a_i, $i \in I$, Elemente aus R. Man definiert die Summe $\sum_{i \in I} a_i$, indem man eine Nummerierung (eine Bijektion)

$$\varphi\colon \{1, \ldots, n\} \longrightarrow I$$

fixiert und

$$\sum_{i \in I} a_i := \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}$$

setzt.

(1) Zeige, dass diese Summe unabhängig von der gewählten Nummerierung ist.
(2) Zeige

$$\sum_{i \in I} a_i = \left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} a_i \right) + a_j$$

für ein beliebiges $j \in I$.
(3) Es sei

$$I = I_1 \cup I_2$$

eine disjunkte Vereinigung. Zeige

$$\sum_{i \in I} a_i = \left(\sum_{i \in I_1} a_i \right) + \left(\sum_{i \in I_2} a_i \right).$$

(4) Formuliere die entsprechenden Gesetze für das Produkt $\prod_{i \in I} a_i$.

Aufgabe 11.8.*

Beweise die folgende Form des allgemeinen Distributivgesetzes für einen kommutativen Halbring R durch Induktion über k, wobei der Fall $k = 2$ verwendet werden darf (dabei sind $n_1, \ldots, n_k$ natürliche Zahlen und $a_{j,i} \in R$).

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n_1} a_{1,i_1}\right) \cdot \left(\sum_{i_2=1}^{n_2} a_{2,i_2}\right) \cdots \left(\sum_{i_k=1}^{n_k} a_{k,i_k}\right) = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k) \in \{1,\ldots,n_1\} \times \{1,\ldots,n_2\} \times \cdots \times \{1,\ldots,n_k\}} a_{1,i_1} \cdot a_{2,i_2} \cdots a_{k,i_k}.$$

AUFGABE 11.9. Es sei R ein kommutativer Halbring. Zeige, dass

$$0 \cdot (1 + 1 + \cdots + 1) = 0$$

ist (mit einer beliebig langen Summe von Einsen).

AUFGABE 11.10. Zeige, dass $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit der komponentenweisen Addition und der komponentenweisen Multiplikation ein kommutativer Halbring ist. Gilt in diesem Halbring die Eigenschaft, dass aus $xy = 0$ folgt, dass x oder y gleich 0 ist?

AUFGABE 11.11. Da man die natürlichen Zahlen zum Zählen von endlichen Mengen nimmt, es aber auch unendliche Mengen gibt, denkt sich Gabi Hochster, dass man die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ um ein weiteres Symbol ∞ (sprich unendlich) erweitern sollte. Diese neue Menge bezeichnet sie mit $\mathbb{N}^\infty$. Sie möchte die Ordnungsstruktur, die Addition und die Multiplikation der natürlichen Zahlen auf ihre neue Menge ausdehnen, und zwar so, dass möglichst viele vertraute Rechengesetze erhalten bleiben.

(1) Wie legt Gabi die Ordnung fest?
(2) Wie legt sie die Nachfolgerabbildung fest? Gelten die Peano-Axiome?
(3) Wie legt sie die Addition fest? Sie möchte ja nur mit dem einzigen neuen Symbol ∞ arbeiten.
(4) Gilt mit dieser Addition die Abziehregel?
(5) Zuerst denkt sie an die Festlegung

$$0 \cdot \infty = 1,$$

doch dann stellt sie fest, dass sich das mit dem Distributivgesetz beißt. Warum?
(6) Gabi möchte nun, dass für die neue Menge die Eigenschaften aus Satz 8.14 und aus Satz 9.6 nach wie vor gelten. Wie legt sie die Verknüpfungen fest?
(7) Handelt es sich bei $\mathbb{N}^\infty$ mit den Festlegungen aus Teil (6) um einen kommutativen Halbring?
(8) Gilt die Kürzungsregel?

AUFGABE 11.12.*

Wir rechnen mit den Zahlen $0, 1, 2, \text{viele}\ (v)$ nach den folgenden Verknüpfungstabellen.

$+$	0	1	2	v
0	0	1	2	v
1	1	2	v	v
2	2	v	v	v
v	v	v	v	v

und

$\cdot$	0	1	2	v
0	0	0	0	0
1	0	1	2	v
2	0	2	v	v
v	0	v	v	v

Zeige, dass es sich dabei um einen kommutativen Halbring handelt. Gilt für diesen die Abziehregel?

Bei den folgenden Aufgaben zur Potenzmenge denke man an die Interpretation, wo G eine Grundschulklasse und $M = \mathfrak{P}(G)$ die möglichen (in Hinblick auf die Gastauswahl) Geburtstagsfeiern sind.

AUFGABE 11.13. Mustafa Müller hat Geburtstag. Auf jeden Fall lädt er Heinz, Gabi und Lucy ein. Er überlegt sich, ob und wen er aus dem erweiterten Freundeskreis $\{\text{Maria}, \text{Bayar}, \text{Peter}, \text{Fritz}, \text{Silvia}\}$ noch einladen soll.

(1) Wie viele Möglichkeiten besitzt Mustafa?
(2) Nach langem Überlegen erstellt Mustafa eine Wertetabelle

Name	Maria	Bayar	Peter	Fritz	Silvia
?	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$

Wen lädt er ein?
(3) Wie würde seine Wertetabelle aussehen, wenn er Bayar, Peter und Fritz einladen wollte?

AUFGABE 11.14. Es sei G eine endliche Menge mit n Elementen. Zeige, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(G)$ genau 2^n Elemente besitzt.

Zu Mengen L, M wird mit $\operatorname{Abb}(L, M)$ die Menge aller Abbildungen von L nach M bezeichnet.

AUFGABE 11.15. Sei G eine Menge. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\mathfrak{P}(G) \text{ und } \operatorname{Abb}(G, \{0,1\}) .$$

AUFGABE 11.16. Sei G eine Menge und $\mathfrak{P}(G)$ ihre Potenzmenge. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathfrak{P}(G) \longrightarrow \mathfrak{P}(G),\ T \longmapsto \complement T,$$

bijektiv ist. Wie lautet die Umkehrabbildung?

Bei der folgenden Aufgabe denke man an $A =$ Mädchen der Klasse, $B =$ Jungs der Klasse.
Aufgabe 11.17.*

Sei G eine Menge, die als disjunkte Vereinigung

$$G = A \uplus B$$

gegeben ist. Definiere eine Bijektion zwischen der Potenzmenge $\mathfrak{P}(G)$ und der Produktmenge $\mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B)$.

Aufgabe 11.18. Es sei G eine Menge und $M = \mathfrak{P}(G)$ die zugehörige Potenzmenge. Betrachte die Vereinigung von Teilmengen von G als eine Verknüpfung auf M. Ist diese Verknüpfung kommutativ, assoziativ, besitzt sie ein neutrales Element?

Aufgabe 11.19. Es sei G eine Menge und $M = \mathfrak{P}(G)$ die zugehörige Potenzmenge. Betrachte den Durchschnitt von Teilmengen von G als eine Verknüpfung auf M. Ist diese Verknüpfung kommutativ, assoziativ, besitzt sie ein neutrales Element?

Aufgabe 11.20. Es sei G eine Menge und $M = \mathfrak{P}(G)$ die zugehörige Potenzmenge. Zeige, dass auf M durch die Beziehung

$$S \subseteq T$$

eine Ordnung gegeben ist. Zeige, dass es sich nicht um eine totale Ordnung handelt.

Aufgabe 11.21.*

Es sei M eine beliebige Menge. Zeige, dass es keine surjektive Abbildung von M in die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ geben kann.

Aufgabe 11.22. Welche Entwicklungen im Leben eines menschlichen Individuums kann man als einen Zuwachs an Abstraktionsfähigkeit beschreiben?

Aufgabe 11.23. Welche Abstraktionsstufen im Grundkurs Mathematik (Teil 1 und 2) stellen für Sie besondere Hürden dar? Logik, Argumentation, Symbolik, Mengen, Abbildungen, Potenzmenge, Axiome, Folgen und Konvergenz, Äquivalenzrelationen und Quotientenmenge, reelle Zahlen, Stetigkeit?

Aufgabe 11.24. Erläutere Vor- und Nachteile des axiomatischen Aufbaus der Mathematik.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 11.25. (3 Punkte)

Wir betrachten die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit den beiden Verknüpfungen Addition und Potenzierung und den ausgezeichneten Elementen 0 und 1. Welche Eigenschaften eines kommutativen Halbringes erfüllt diese Struktur, welche nicht?

Aufgabe 11.26. (3 Punkte)

Ein Adventskranz hat vier Kerzen, wobei am ersten Advent genau eine Kerze, am zweiten Advent genau zwei Kerzen usw. brennen sollen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Adventskranz „abzubrennen"? Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Kerzen, die zuvor schon angezündet waren, wieder angezündet werden sollen, und wie viele, wenn stets so viele neue Kerzen wie möglich angezündet werden?

Aufgabe 11.27. (2 Punkte)

Es seien $a, b, c \in R$ Elemente in einem kommutativen Halbring R. Berechne

$$(2ac + b^2) \cdot (a + 5bc) \cdot (2a + 3bc)\,.$$

Aufgabe 11.28. (4 (2+2) Punkte)

Es seien $a, b \in R$ Elemente in einem kommutativen Halbring R. Zeige die Formel für die vierte Potenz,

$$(a + b)^4 \;=\; a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

auf die beiden folgenden Arten.

(1) Berechne
$$(a + b) \cdot (a + b)^3\ .$$
(2) Berechne
$$(a + b)^2 \cdot (a + b)^2\ .$$

Aufgabe 11.29. (2 Punkte)

Skizziere ein Inklusionsdiagramm für sämtliche Teilmengen einer dreielementigen Menge.

Abbildungsverzeichnis