Prof. Dr. H. Brenner — Osnabrück WS 2015/2016

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 26

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 26.1. Bestimme den größten gemeinsamen Teiler von $X^2 - 1$ und $X^3 - 1$ sowie eine Darstellung davon.

Übungsaufgaben

Aufgabe 26.2. Bestimme den größten gemeinsamen Teiler von $X - 1$ und $X - 2$ sowie eine Darstellung davon.

Aufgabe 26.3. Bestimme den größten gemeinsamen Teiler von $X^4 - X^3 + 7X^2 - 5X + 11$ und $X^3 - 6X^2 + 4X + 6$ sowie eine Darstellung davon.

Aufgabe 26.4. Bestimme in $\mathbb{Q}[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $P = X^3+2X^2+5X+2$ und $Q = X^2 + 4X - 3$.

Aufgabe 26.5. Bestimme in $\mathbb{Q}[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $P = X^9 - 1$ und $Q = X^3 - 1$.

Aufgabe 26.6. Bestimme in $\mathbb{R}[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $P = X^3 + \pi X^2 + 7$ und $Q = X^2 + \sqrt{7}X - \sqrt{2}$.

Aufgabe 26.7. Bestimme in $\mathbb{F}_5[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $P = X^4 + 3X^3 + X^2 + 4X + 2$ und $Q = 2X^3 + 4X^2 + X + 3$.

Aufgabe 26.8. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K und seien $F, G \in K[X]$ zwei Polynome. Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Zeige, dass F ein Teiler von G in $K[X]$ genau dann ist, wenn F ein Teiler von G in $L[X]$ ist.

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den euklidischen Algorithmus für ganze Zahlen, der völlig analog zum euklidischen Algorithmus für Polynome läuft.

Aufgabe 26.9.*

Die Wasserspedition „Alles im Eimer" verfügt über einen 7- und einen 10-Liter-Eimer, die allerdings keine Markierungen haben. Sie erhält den Auftrag, insgesamt genau einen Liter Wasser von der Nordsee in die Ostsee zu transportieren. Kann sie diesen Auftrag erfüllen?

Aufgabe 26.10.*

Bestimme in $\mathbb{Z}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 1071 und 1029.

Aufgabe 26.11. Bestimme in $\mathbb{Z}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 2956 und 2444.

Aufgabe 26.12.*

Bestimme den größten gemeinsamen Teiler von 3146 und 1515 und gebe eine Darstellung des ggT von 3146 und 1515 mittels dieser Zahlen an.

Aufgabe 26.13. Bestimme die Kerne der Potenzen M^i zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 26.14. Bestimme die Kerne der Potenzen M^i zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 26.15. Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Kerne zu den Potenzen

$$(3E_3 - M)^i .$$

Aufgabe 26.16. Bestimme die Haupträume zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26.17. Zeige, dass für eine diagonalisierbare Abbildung

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

und jedes $\lambda \in K$ die Gleichheit

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) = \operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda)$$

gilt.

Aufgabe 26.18. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine trigonalisierbare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann diagonalisierbar ist, wenn für jedes $\lambda \in K$ die Gleichheit

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) = \operatorname{Haupt}(\varphi, \lambda)$$

gilt.

Aufgabe 26.19. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein trigonalisierbarer Endomorphismus und

$$V = H_1 \oplus \cdots \oplus H_m$$

die direkte Summenzerlegung in Haupträume im Sinne von Satz 26.12. Zeige, dass es eine φ-invariante Fahne V_i derart gibt, dass in der Fahne die Untervektorräume

$$H_1, H_1 \oplus H_2, \ldots, H_1 \oplus \cdots \oplus H_j$$

für $j = 1, \ldots, m$ auftreten.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 26.20. (3 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{C}[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $P = X^3 + (2-i)X^2 + 4$ und $Q = (3-i)X^2 + 5X - 3$.

Aufgabe 26.21. (5 Punkte)

Wir betrachten eine digitale Uhr, die 24 Stunden, 60 Minuten und 60 Sekunden anzeigt. Zur Karnevalszeit läuft sie aber nicht in Sekundenschritten, sondern addiert, ausgehend von der Nullstellung, in jedem Zählschritt immer 11 Stunden, 11 Minuten und 11 Sekunden dazu. Wird bei dieser Zählweise jede mögliche digitale Anzeige erreicht? Nach wie vielen Schritten kehrt zum ersten Mal die Nullstellung zurück?

Aufgabe 26.22. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $P \in K[X]$ ein Polynom. Zeige, dass

$$\operatorname{kern}(P(\varphi))$$

ein φ-invarianter Untervektorraum ist.

Aufgabe 26.23. (4 Punkte)

Bestimme die Haupträume zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$