1931年

第1卷

第4期

國立武漢大學

理科季刊

第一卷第四期

QUATERLY JOURNAL OF SCIENCE

WU-HAN UNIVERSITY, WUCHANG, CHINA

Vol. I. No. 4 June 1931

本 期 目 錄

中華民國二十年六月發行

國立武漢大學理科季刊委員會編印

中華郵政局特准掛號認為新聞紙類

國立武漢大學理科季刊

第一卷第四期目錄

國立武漢大學理科季刊

第二卷第一期目錄預告

微分學的幾個根本問題

湯 璪 眞

內容: 1. ∂x, ∂y, ∂z 該當是甚麼?

2. 和 dx, dy, ∂z 的比較.

3. 由 $\partial z=\frac{\partial z}{\partial x}\partial x+\frac{\partial z}{\partial y}\partial y$ 推廣到 $\partial z=\frac{\partial z}{\partial u}\partial u+\frac{\partial z}{\partial v}\partial v$.

4. $\frac{1}{\partial x}$, $\frac{1}{\partial y}$, $\frac{1}{\partial z}$ 該當是甚麼?

5. $\frac{\partial x}{\partial y}=o$ 分解成 $\partial x\cdot\frac{1}{\partial y}=o$, 等等.

6. 由 $\partial z\cdot\frac{1}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}$, $\partial z\cdot\frac{1}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}$ 推廣到 $\partial z\cdot\frac{1}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial u}$, $\partial z\cdot\frac{1}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial v}$

7. 特例的幾何意義.

8. $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, $\partial^2 z$ 該當是甚麼?

9. 和 d^2x, d^2y, d^2z 的比較.

10. 初步講法中所應有的重要假設:

∂x 和 ∂y 並不因 x,y 變而變.

11. $\partial^2 x=o$, $\partial^2 y=o$.

12. $\partial=\partial x\frac{\partial}{\partial x}+\partial y\frac{\partial}{\partial y}$.

13. 定理:

$$\partial^2=\left(\partial x\frac{\partial}{\partial x}+\partial y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\partial x\frac{\partial}{\partial x}+\partial y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

14. 定理:

$$\partial^2=\left(\partial u\frac{\partial}{\partial u}+\partial v\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\partial u\frac{\partial}{\partial u}+\partial v\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

15. 我所謂多乘量的點乘積.

16. $\partial^2 z \cdot \frac{1}{\partial x}\frac{1}{\partial y}=\frac{1}{\partial x}\frac{1}{\partial y}\cdot\partial^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ 等等.

17. 推廣到 n 度空間.

18. 各種變化好像和分數變化一樣:

$$\partial f=\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\partial x^\alpha=\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\partial u^\alpha;$$

$$\partial u^\alpha=\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}\partial x^\beta,\quad \partial x^\beta=\frac{\partial x^\beta}{\partial u^\alpha}\partial u^\alpha;$$

$$\partial x^\alpha\cdot\frac{1}{\partial x^\beta}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta}=\frac{\partial u^\alpha}{\partial u^\beta}=\partial u^\alpha\cdot\frac{1}{\partial u^\beta};$$

$$\partial u^\alpha\cdot\frac{1}{\partial u^\alpha}=\frac{1}{\partial x^\beta}\cdot\partial x^\beta=\partial x^\beta\cdot\frac{1}{\partial x^\beta}=\frac{1}{\partial u^\alpha}\cdot\partial u^\alpha;$$

$$\partial f\cdot\frac{1}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial f}{\partial x^\alpha},\quad \partial f\cdot\frac{1}{\partial u^\alpha}=\frac{\partial f}{\partial u^\alpha};$$

$$\partial=\partial x^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}=\partial u^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha};$$

$$\partial^2=\left(\partial x^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\left(\partial x^\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)=\left(\partial u^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)\left(\partial u^\beta\frac{\partial}{\partial u^\beta}\right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}=\partial^2 f\cdot\frac{1}{\partial x^\alpha}\frac{1}{\partial x^\beta}.$$

19. $\frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}$ 和 $\partial^2 f\cdot\frac{1}{\partial u^\alpha}\frac{1}{\partial u^\beta}$ 間的關係.

20. 一個合理的提議.

正文

發明微分學的經過是先有導數然後有微分,換句話說是先有 $\frac{dy}{dx}$ 然後有 dx 和 dy,先有 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 然後有 $\partial x, \partial y, \partial z$ 之類.人們對於 dx 和 dy,差不多已由驚異態度習慣成自然了;至於 $\partial x, \partial y, \partial z$ 等等,大概在這裏總算是第一次見面,還不會不

驚異的或懷疑的.

有人說,這不足爲奇,你無非仿照

$$dy=\frac{dy}{dx}dx \qquad (1)$$

這點關係,視 $\partial x, \partial y, \partial z$ 爲無限小再說明

$$\partial z=\frac{\partial z}{\partial x}\partial x \qquad (2)$$

而已,其結果還不是兩個偏微分 ∂x 與 ∂z 之商等於一個偏導數 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 麽?

像這種意見,誰都知道是大錯而特錯的,因爲根據這種意見,決不能說明

$$\frac{\partial x}{\partial y}=o \text{ 與 } \frac{\partial y}{\partial x}=o \qquad (3)$$

二者能同時成立的事實呢.

有了上面的幾點考究,於是乎發生一個屬於微分學的根本問題:

∂x, ∂y, ∂z 該當是甚麽?

這個答案和 dx, dy, dz 相似,所以有先提出 dx, dy, dz 的定義作爲對照之必要.

設 x, y 爲兩獨立變數, z 爲依賴變數,其關係以函數表之如下

$$z=f(x,y). \qquad (4)$$

在研究範圍內設 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 均能存在,又設 Δx 和 Δy 是兩個變數,則下式

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y \qquad (5)$$

卽可作爲dz的定義.次令z以次爲x及y則由定義得

$$dx=1\Delta x+0\Delta y \qquad \therefore dx=\Delta x \tag{6}$$

$$dy=o\Delta x+1\Delta y \qquad \therefore dy=\Delta y \tag{7}$$

再由(5)又得

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{8}$$

現在我們明白了,dx, dy, dz是x, y, z以外的三個變數.是怎樣的變數呢,這倒還是隨便,我們很可以說不獨由(8)看出dz是和x, y有關的變數就是dx, dy也未嘗不可作爲與x y有關的變數,(因爲定義中的Δx和Δy很可以先規定作爲與x, y有關的變數,自然由(6)(7)知道dx和dy也可作爲與x, y有關的變數了.)

現在可以說明$\partial x, \partial y, \partial z$了.仍如前設$\frac{\partial z}{\partial x}$與$\frac{\partial z}{\partial y}$均能存在又設$a$和$b$是平面或曲面的兩個獨立向量其始點同爲$(x,y)$.則下式

$$\partial z=\frac{\partial z}{\partial x}a+\frac{\partial z}{\partial y}b \tag{5'}$$

卽可作爲∂z的定義.次令z以次爲x及y,則由定義得

$$\partial x=1a+ob \qquad \therefore \partial x=a \tag{6'}$$

$$\partial y=oa+1b \qquad \therefore \partial y=b \tag{7'}$$

再由(5')又得

$$\partial z=\frac{\partial z}{\partial x}\partial x+\frac{\partial z}{\partial y}\partial y \tag{8'}$$

現在我們明白了$\partial x, \partial y, \partial z$是三個向量.是怎樣的向量呢,這倒還是隨便.我們很可以說不獨由(8')看出∂z是和x, y

有關的向量,就是∂x,∂y也未嘗不可作爲與x,y有關的向量,(因爲定義中的a和b很可以先規定作爲與x,y有關的向量,自然由(6')(7')知道∂x和∂y也可作爲與x,y有關的向量了.)

假如z只是x的函數而不是y的函數,那我們立卽知道

$$\frac{\partial z}{\partial y}=o\,;$$

再以此式代入(8'),卽得一個和(1)相對應的公式了

$$\partial z=\frac{\partial z}{\partial x}\partial x\,. \qquad (1')$$

注意罷!這就是上面的方程式(2).由這樣看來,你若將∂x,∂y,　　數看,就會要發生(3)不可以解釋的結果,但若當作向量——一種推廣的數——看,我們知道(2)是可以成立的;成立之後可以再想方法去解釋(3).

現在有人發問了.像上面說來,∂x,∂y,∂z果然和dx,dy,dz相似!然而我們應知道其所以用dx,dy,dz的原故是因爲不僅(8)式

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (8)$$

成立,而且假如z是函數的函數的時候,換句話說是假如

$$\left.\begin{aligned} z&=\Phi(u,v)\\ u&=f(x,y)\\ v&=g(x,y)\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

的時候,我們知道類似(8)式的

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv \tag{10}$$

也能成立,這就是用微分符號 d 的重要意義所在.像你這個 ∂ 的符號,又怎樣呢?

關於這一點我們只要囘憶從(9)如何變成(10),當然同一個樣可以得到類似的下式

$$\partial z=\frac{\partial z}{\partial u}\partial u+\frac{\partial z}{\partial v}\partial v. \tag{10'}$$

證法,由(8')可知

$$\partial u=\frac{\partial u}{\partial x}\partial x+\frac{\partial u}{\partial y}\partial y$$

$$\partial v=\frac{\partial v}{\partial y}\partial x+\frac{\partial v}{\partial y}\partial y$$

再由(4)微分之,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\therefore \partial z=\frac{\partial z}{\partial x}\partial x+\frac{\partial z}{\partial y}\partial y=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\partial x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\partial y$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\partial x+\frac{\partial u}{\partial y}\partial y\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\partial x+\frac{\partial v}{\partial y}\partial y\right)$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\partial u+\frac{\partial z}{\partial v}\partial v$$

是爲所證.

於是乎有人發問了,當作數固然不可以解釋(3),如果當作向量,難道就真能解釋(3)麼?

我囘答說:"可以之至!"如果要解釋(3),可先將(3)拆散成

$$\partial x\cdot\frac{1}{\partial y}=o \text{ 和 } \partial y\cdot\frac{1}{\partial x}=o \tag{3'}$$

的形狀.現在我們應當知道,又出現和 ∂x ∂y 不同的 $\frac{1}{\partial x}$ $\frac{1}{\partial y}$ 兩種新東西了.我於是將 $\frac{1}{\partial z}$ 並作一起再提出一個屬於微分學的根本問題:

$\frac{1}{\partial x}$, $\frac{1}{\partial y}$, $\frac{1}{\partial z}$ 該當是甚麽?

這個答案我雖已經得到了,但是不能依一種和 dx, dy, dz 對照的方式說出來.好罷!我就另換一個方式,這個方式是將該問題分作兩層各別解決:

(甲) 屬于 $\frac{1}{\partial x}$, $\frac{1}{\partial y}$ 者.

我們知道向量解析中每遇一羣獨立向量必有一羣相倒的獨立向量.依上面所說我們不是已經有兩個獨立向量 a 和 b 嗎?所以我們可以設倒向量爲 a' 和 b'.換一句話 a' 和 b' 是適合

$$\begin{aligned} a\cdot a'&=1, & b\cdot a'&=o, \\ a\cdot b'&=o, & b\cdot b'&=1, \end{aligned} \tag{11}$$

的兩個向量.現在我說: $\frac{1}{\partial x}$ 和 $\frac{1}{\partial y}$ 該當是 a' 和 b'.是什麽道理呢?因爲是這樣,卽可由 (11) 用直接代入之法得到

$$\begin{aligned} \partial x\cdot\frac{1}{\partial x}&=1, & \partial y\cdot\frac{1}{\partial x}&=o, \\ \partial x\cdot\frac{1}{\partial y}&=0, & \partial y\cdot\frac{1}{\partial y}&=1: \end{aligned} \tag{12}$$

這幾個等式無異於說

$$\begin{aligned} \partial x\cdot\frac{1}{\partial x}&=\frac{\partial x}{\partial x}, & \partial y\cdot\frac{1}{\partial x}&=\frac{\partial y}{\partial x}, \\ \partial x\cdot\frac{1}{\partial y}&=\frac{\partial x}{\partial y}, & \partial y\frac{1}{\partial y}&=\frac{\partial y}{\partial y}; \end{aligned} \tag{13}$$

因此(3)和(3')得到一個適當的解釋了.他們能同時成立的!這還不足爲奇!更奇的是下面更普遍一點的兩個公式能夠成立

$$\partial z\cdot\frac{1}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x},\quad \partial z\cdot\frac{1}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y} \tag{14}$$

證法,因

$$\begin{aligned}\partial z\cdot\frac{1}{\partial x}&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}a+\frac{\partial z}{\partial y}b\right)\cdot a'\\&=\frac{\partial z}{\partial x}a\cdot a'+\frac{\partial z}{\partial y}b\cdot a'\\&=\frac{\partial z}{\partial x}1+\frac{\partial z}{\partial y}o\\&=\frac{\partial z}{\partial x}.\end{aligned}$$

至於另外的那個公式,其證法相同可以從略.

(乙) 屬於$\frac{1}{\partial z}$者.

剛有一個函數 z 想去解釋 $\frac{1}{\partial z}$ 我已經試了多次了,其結果沒有重大意義!獨立變數有多少個,函數也要有這麼多個才能生出引起你注意的意義來.上面不是有兩個獨立變數嗎?所以我就用兩個函數.這兩個函數不必用 z, z' 之類,倒不如改用 u 和 v 表示更爲明瞭些,因此我們的題目變爲

$\frac{1}{\partial u}$ 和 $\frac{1}{\partial v}$ 該當是甚麼?

的新形式了.

這道問題的解法,又變成和(甲)一樣.因爲我們已經知道 ∂z,現在當然知道甚麼是 ∂u 和 ∂v,既知 ∂u 和 ∂v 便可以依

∂x 和 ∂y 決定 $\frac{1}{\partial x}$ 和 $\frac{1}{\partial y}$ 的方法一樣去決定 $\frac{1}{\partial u}$ 和 $\frac{1}{\partial v}$,詳細點說,$\frac{1}{\partial u}$ 和 $\frac{1}{\partial v}$ 是 ∂u 和 ∂v 的倒向量.

但是應當注意的,在倒向量之存在與否.如果要這些倒向量存在,首先就要 ∂u 和 ∂v 是獨立向量,換句話,必須

$$\partial u \times \partial v \neq o$$

才行;但

$$\partial v \times \partial v = \left(\frac{\partial u}{\partial x} a + \frac{\partial u}{\partial y} b\right) \times \left(\frac{\partial v}{\partial x} a + \frac{\partial v}{\partial y} b\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} a \times b$$

$$= J a \times b,$$

所以結果是 u, v 兩函數的 J (Jacobian) 不能為 o.於是乎我說:

如果 $J \neq o$,$\frac{1}{\partial u}$ 和 $\frac{1}{\partial v}$ 該當是 ∂u 和 ∂v 的倒向量羣.是甚麼道理呢?因為是這樣即可以由倒向量羣之性質得到

$$\begin{aligned} &\partial u \cdot \frac{1}{\partial u} = 1, \quad \partial v \cdot \frac{1}{\partial u} = o, \\ &\partial u \cdot \frac{1}{\partial v} = 0, \quad \partial v \cdot \frac{1}{\partial v} = 1; \end{aligned} \tag{15}$$

這幾個等式無異於說

$$\begin{aligned} &\partial u \cdot \frac{1}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial u}, \quad \partial v \cdot \frac{1}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial u}, \\ &\partial u \cdot \frac{1}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial v}, \quad \partial v \cdot \frac{1}{\partial v} = \frac{\partial v}{\partial v}; \end{aligned} \tag{16}$$

因此(3)和 (3') 又從此得到推廣的一層解釋了.這就是這

理.但這還不足為奇,更奇的是下面更普遍的兩個公式能夠成立

$$\partial z \cdot \frac{1}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \partial z \cdot \frac{1}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial v}. \tag{17}$$

證法,因由 (10') 得

$$\begin{aligned} \partial z \cdot \frac{1}{\partial u} &= \left(\frac{\partial z}{\partial u}\partial u + \frac{\partial z}{\partial v}\partial v\right) \cdot \frac{1}{\partial u} \\ &= \frac{\partial z}{\partial u}\partial u \cdot \frac{1}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\partial v \cdot \frac{1}{\partial u} \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} 1 + \frac{\partial z}{\partial v} 0 \\ &= \frac{\partial z}{\partial u}. \end{aligned}$$

餘類推.

以上的兩獨立向量 a 和 b 是任意挑選的.以下我們打算在平面上研究 ∂z 的幾何意義.為簡便之故,我們暫時假設 a 和 b 是正坐標軸上的兩單位向量 i 和 j 於是 $a'=a=i, b'=b=j$.

我們知道(4)式是有兩種幾何意義的,最普通的一種是把(4)當作空間的曲面,還有一種是把他仍舊當作平面裏的東西.我現在用後一種幾何意義.其辦法就是設有一未定常數 c 並設

$$f(x, y) = c \tag{18}$$

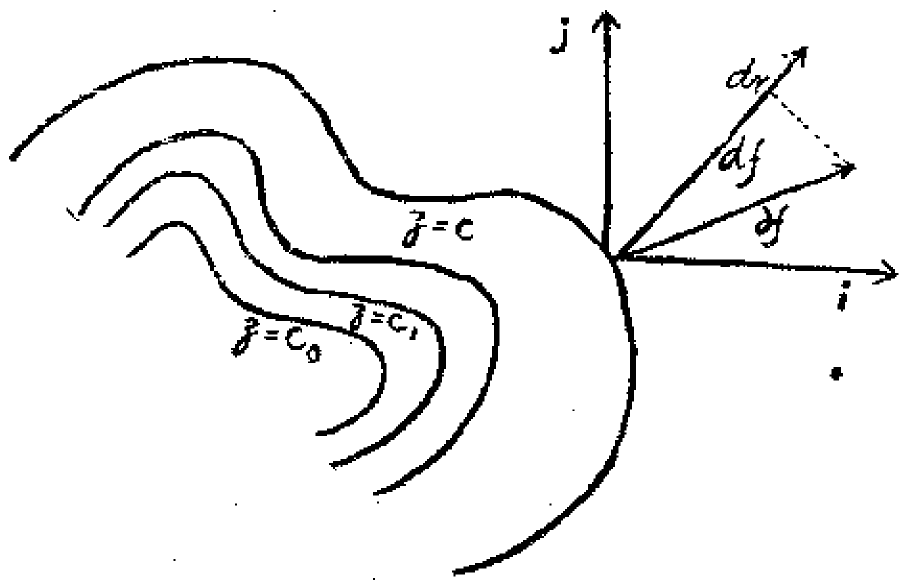
於是即得

$$z = c \tag{19}$$

因為 (18) 表示一羣曲線所以 (19) 也表示這同一羣的

曲線,因此(4)在平面裏的幾何意義就是一羣曲線,既可用(18)表示也可用(19)表示.

許多人把 dx, dy, dz,當作無限小在那裏講,似乎以為不是這樣,心裏就想不通.其實這是不必的,因為就上邊定義只



知道 dx, dy 和 dz 是變數而已,所以你當作無限小(注意!無限小是一種變數!)講是可以的,然而不當作無限小講還是可以.現在為簡便起見,倒不如把來當作有限數目講還好些.你看罷!我先設

$$dx^2+dy^2=1 \qquad (20)$$

(這就是說 $ds=1$, 注意 $ds=0$ 的曲線不是實曲線)我立卽可以證明 df (卽是 dz,不過我們注意在(18),所以改寫為 df, 同理以下不用 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 而用 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 不用 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 而用 $\frac{\partial f}{\partial y}$)是 ∂f 落在 dr 向量(其坐標為 dx 和 dy)上的正射影.證法就是因為 ds

=1，所以dr之長是1,因此該射影是

$$\partial f \cdot dr = \left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j\right) \cdot (dx\, i + dy\, j)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = df \cdot \qquad \text{由}(8).$$

由這個證法又知道:如果$ds \neq 1$,那末df是∂f和dr的內乘積.

如果dr受了($df=0$!)

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \qquad (21)$$

的條件,那末普通已經知道dr向量是在切線裏邊,此時

$$\partial f \cdot dr = o \qquad (22)$$

因此我們知道∂f是法線上的向量.

於是乎又有問題了,即是∂f的長短,和曲線生甚麼關係不呢?據我考究的結果,∂f的長短和曲線生不了關係,也就是說曲線的形狀雖然完全知道,但是∂f的長度並不因之決定.證,因曲線形狀之決定是只要知道方程(18)

$$f(x, y) = c$$

並不是要知道函數f.我們很可以改上方程式爲下方程

$$\varphi(f) = c' \qquad (23)$$

而曲線之形狀仍然不變,所要的條件是函數φ只是f的函數,f以外φ不再是x, y的函數就行了.但是∂f是

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$$

其長度由

$$\left|\partial f\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \tag{24}$$

決定,斷然不許由 $|\partial\varphi|$ 來決定;這是因爲

$$\begin{aligned}\left|\partial\varphi\right|&=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\\&=\left|\frac{\partial\varphi}{\partial f}\right|\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\\&=\left|\frac{\partial\varphi}{\partial f}\right|\ \left|\partial f\right|.\end{aligned}$$

所以我們只要挑選

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial f}\right|\neq 1$$

就得 $|\partial f|\neq|\partial\varphi|$ (例如 $\varphi(f)=mf$, $m\neq 1$ 是) 這就是說 ∂f 的長度是由函數 $f(x,y)$ 決定而不由曲線的形狀決定.

自此以下我們再討論

$\partial^2 x$, $\partial^2 y$ 和 $\partial^2 z$ 該當是甚麼?

這個答案又和 d^2x, d^2y, d^2z 相似.初步的微積分,通例說 dx 和 dy 與 x, y 均無關係,換一句話 x 和 y 變的時候 dx 和 dy 並不因之而變.

現在設 z 爲 x, y 之函數,則由 (4) 仍得 (8),取 (8) 微分之,左邊得 $d(dz)$ 可簡寫之爲 d^2z,右邊注意 dx 和 dy 不是 x 和 y 的函數,那末得的結果便是

$$d^2z=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2.$$

從這裏立時推出

$$d^2x=0, \qquad d^2y=0.$$

因爲 z 與 f 實際相同所以如果從(8)命

$$d=dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}$$

卽可以從上式得

$$d^2z=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f.$$

現在按照同一個道理來說明 $\partial^2x,\partial^2y,\partial^2z$.我在前面不是已經聲明了 ∂x 和 ∂y 是任意向量嗎?如果用初步的講法,當然也應照微積分一樣,假設 ∂x 和 ∂y 並不因 x,y 變而變.按照向量解析微分一個向量的方法再加以適宜之推廣先成立下面

$$\partial a=\partial x\frac{\partial a}{\partial x}+\partial y\frac{\partial a}{\partial y}$$

這個公式.這是 ∂a 的定義,看看右方便知道是向量的一般乘積之和,也就是向量解析家所謂二乘量(dyadistic).現在設 z 爲 x, y 的函數則由(4)仍得(8').取(8')微分之,左邊得 $\partial(\partial z)$ 可簡寫爲 ∂^2z,右方注意 ∂x 和 ∂y 不是 x,y 的函徵,那末得的結果便是

$$\partial^2z=\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\partial x\,\partial x+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(\partial x\,\partial y+\partial y\,\partial x)$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\partial y\,\partial y.$$

從這裏立時知道

$$\partial^2x=0, \qquad \partial^2y=0.$$

因爲 z 與 f 實際相同,所以如果從(8')命

$$\partial = \partial x \frac{\partial}{\partial x} + \partial y \frac{\partial}{\partial y}$$

即可以從上式得

$$\partial^2 = \left(\partial x \frac{\partial}{\partial x} + \partial y \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\partial x \frac{\partial}{\partial x} + \partial y \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

現在再設 z 是函數的函數,那末從(9)仍得(10).微分之,即得

$$d^2z = \frac{\partial f}{\partial u^2}(du)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(dv)^2$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial u}d^2u + \frac{\partial f}{\partial v}d^2v$$

又從(9)仍得(10')微分之得

$$\partial^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\partial u\,\partial u + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}(\partial u\,\partial v + \partial v\,\partial u) + \frac{\partial f}{\partial v^2}\partial v\,\partial v$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial u}\partial^2 u + \frac{\partial f}{\partial v}\partial^2 v\,.$$

和前面比較一下,知道這時的 d^2z 和 $\partial^2 z$ 竟比以前的都有一些不同的處所!

然而這不同的事實並不稀奇,仍可併到同形狀的簡單的公式如下:

$$\left.\begin{aligned} d^2z &= \left[\left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]f \\ d^2z &= \left[\left(du\frac{\partial}{\partial u} + dv\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(du\frac{\partial}{\partial v} + dv\frac{\partial}{\partial v}\right)\right]f \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \partial^2 z &= \left[\left(\partial x\frac{\partial}{\partial x} + \partial y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\partial x\frac{\partial}{\partial x} + \partial y\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]f \\ \partial^2 z &= \left[\left(\partial u\frac{\partial}{\partial u} + \partial v\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\partial u\frac{\partial}{\partial u} + \partial v\frac{\partial}{\partial v}\right)\right]f \end{aligned}\right\}$$

證法相似,所以現在祗證明一個公式於下:

按照微分記號的意義,知道

$$\left(du\frac{\partial}{\partial u}+dv\frac{\partial}{\partial v}\right)f=du\frac{\partial f}{\partial u}+dv\frac{\partial f}{\partial v}\text{命}=F.$$

再依照d^2z的意義,知道

$$d^2z=d\,(dz)$$

$$=\left(du\frac{\partial}{\partial u}+dv\frac{\partial}{\partial v}\right)\left[\left(du\frac{\partial}{\partial u}+dv\frac{\partial}{\partial v}\right)f\right]$$

$$=\left(du\frac{\partial}{\partial u}+dv\frac{\partial}{\partial v}\right)F$$

$$=du\frac{\partial F}{\partial u}+dv\frac{\partial F}{\partial v}$$

$$=du\frac{\partial}{\partial u}\left(du\frac{\partial f}{\partial u}+dv\frac{df}{dv}\right)+dv\frac{\partial}{\partial v}\left(du\frac{df}{du}+dv\frac{df}{dv}\right)$$

$$=du\frac{\partial}{\partial u}\left(du\frac{\partial f}{\partial u}\right)+du\frac{\partial}{\partial u}\left(dv\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$+dv\frac{\partial}{\partial v}\left(du\frac{\partial f}{\partial u}\right)+dv\frac{\partial}{\partial v}\left(dv\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

因此按照微分記號的意義又能

$$=\left[\left(du\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(du\frac{\partial}{\partial u}\right)+\left(du\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(dv\frac{\partial}{\partial v}\right)\right.$$

$$\left.+\left(dv\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(du\frac{\partial}{\partial u}\right)+\left(dv\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(dv\frac{\partial}{\partial v}\right)\right]f$$

$$=\left[\left(du\frac{\partial}{\partial u}+dv\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(du\frac{\partial}{\partial u}+dv\frac{\partial}{\partial v}\right)\right]v$$

如果$(a+b)^2$不依二項式定理展開而依下面的方法展開(注意!不要交換下面的ab次序!)

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=aa+ab+ba+bb$$

那末由上面的公式寫出下面的結果亦未嘗不可:

$$d^2=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2=\left(du\frac{\partial}{\partial u}+dv\frac{\partial}{\partial v}\right)^2$$

$$\partial^2=\left(\partial x\frac{\partial}{\partial x}+\partial y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2=\left(\partial u\frac{\partial}{\partial u}+\partial v\frac{\partial}{\partial v}\right)^2$$

旣知道 $\partial^2 z$,於是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ \text{和}\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

也得着適當的解釋了.我們先說明兩個多乘量的點乘積.據我的意見,以爲是下面這樣的爲好.

設有多乘量 Φ, Ψ, Θ,.... 則所謂點乘積 $\Phi\cdot\Psi$, ... 者必適合下列四條件始可:

1) 若 Φ 與 Ψ 爲任意二多乘量,則

$$\Psi\cdot\Phi=\Phi\cdot\Psi$$

2) 又若 λ 爲任意之數則

$$\Phi\cdot(\lambda\Psi)=\lambda(\Phi\Psi).$$

3) 若 Φ 與 Ψ 爲同類多乘量,Θ 爲其他任意多乘量,則

$$(\Phi+\Psi)\cdot\Theta=\Phi\Theta+\Psi\cdot\Theta$$

4) 若 Φ 爲向量 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$ 之積,Ψ 爲向量 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n$ 之積,且 $m\leqq n$,則

$$\Phi\cdot\Psi=(\varphi_1\cdot\psi_1)(\varphi_2\cdot\psi_2)\cdots(\varphi_m\cdot\psi_m)\psi_{m+1}\psi_{m+2}\cdots\psi_n.$$

現在假設 z 是 x, y 的函數,則由 1) 2) 3) 4) 卽得

$$\partial^2 z\cdot\frac{1}{\partial x}\frac{1}{\partial x}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\partial x\,\partial x+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,\overline{\partial x\,\partial y+\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\partial y\,\partial y\right)\cdot\frac{1}{\partial x}\frac{1}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ \partial x\ \partial x \cdot \frac{1}{\partial x}\frac{1}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y}\ \partial x\ \partial y \cdot \frac{1}{\partial x}\frac{1}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y}\ \partial y\ \partial x \cdot \frac{1}{\partial x}\frac{1}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\partial y\ \partial y \cdot \frac{1}{\partial x}\frac{1}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} 1\times 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y}\ 1 \times 0 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y} 0\times 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} 0\times 0$$

因此得到

$$\partial^2 z \cdot \frac{1}{\partial x}\frac{1}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

同理

$$\left.\begin{aligned} &\partial^2 z \cdot \frac{1}{\partial x}\frac{1}{\partial y} = \partial^2 z \cdot \frac{1}{\partial y}\frac{1}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y} \\ &\partial^2 z \cdot \frac{1}{\partial y}\frac{1}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{aligned}\right\}$$

這是非常奇異的事實.再利用1)知道

$$\partial^2 z \cdot \frac{1}{\partial x}\frac{1}{\partial x} = \frac{1}{\partial x}\frac{1}{\partial x} \cdot \partial^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

同理

$$\left.\begin{aligned} &\partial^2 z \cdot \frac{1}{\partial x}\frac{1}{\partial y} = \frac{1}{\partial x}\frac{1}{\partial y} \cdot \partial^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ &\partial^2 z \cdot \frac{1}{\partial y}\frac{1}{\partial y} = \frac{1}{\partial y}\frac{1}{\partial y} \cdot \partial^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{aligned}\right\}$$

上面所應注意的,z 不是函數的函數.假如 z 是函數的函數,究應得怎樣的結果?

$$\partial^2 z \cdot \frac{1}{\partial u}\frac{1}{\partial u} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\ \partial u\ \partial u + \frac{\partial^2 f}{\partial u\ \partial v}\ \overline{\partial u\, \partial v + \partial v\, \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\partial v\, \partial v\right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial u}\partial^2 u + \frac{\partial f}{\partial v}\partial^2 v\right) \cdot \frac{1}{\partial u}\frac{1}{\partial u}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} 1\times 1 + 0 + 0 + \frac{\partial f}{\partial u}\ \partial^2 u \cdot \frac{1}{\partial u}\frac{1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\ \partial^2 v \cdot \frac{1}{\partial u}\frac{1}{\partial u}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\partial x\, \partial x + \frac{\partial^2 u}{\partial x\ \partial y}\ \partial x\, \partial y + \cdots\right) \cdot \frac{1}{\partial u}\frac{1}{\partial u}$$

$$+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\partial x\,\partial x+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\partial x\,\partial y+\cdots\right)\cdot\frac{1}{\partial u}\frac{1}{\partial u}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial v}{\partial u}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right]$$

$$+\frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\cdots\right].$$

上式證明中之末尾已經用了(17)的道理,又 $\partial x/\partial u$ 的值是先由(9)解出 x,y 再對 u,v 微分卽得,看看上式知道通例是

$$\partial^2 z\cdot\frac{1}{\partial u}\frac{1}{\partial u}\neq\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$

這個不等的事實,歸到下文去解釋爲好.

以上的結果擺在曲面上講還是可以的,然而我們不必費這事了,我們此刻不妨就從 n 度空間講起,一方包括上述各種爲特例,他方還看出更有趣味的事實來.

設 n 度曲空間任一點 P 的坐標是 $x^1,x^2,\cdots x^n$. 以 P 爲始點在這空間作 n 個互相獨立的向量 $a^1,a^2,\cdots,a^n$. 再設有 x^α ($\alpha=1,2,\cdots,n$ 以下希拉字母皆如此) 的函數 $f=f(x^\alpha)=f(x^1,x^2,\cdots,x^n)$, 我們便可以敍述 ∂f 之定義如下 (依 Einstein 寫法省去 Σ):

$$\partial f=\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}a^\alpha.$$

從此立卽知道

$$\partial x^\alpha=a^\alpha$$

再以此代入 ∂f 等式中又得

$$\partial f=\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\partial x^\alpha.$$

你看!這公式好像和分數的變化一樣,豈不是比

$$df=\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}dx^\alpha$$

還要有趣味些嗎?

假設 f 是函數的函數,換句話 f 是 u^α 的函數,u^α 又是 x^β 的函數

$$u^\alpha = u^\alpha(x^\beta),$$

而且 Jacobian $J \equiv \left| \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \right| \neq 0$. u^α 既是函數所以可照 ∂f 同樣得 ∂u^α 爲

$$\partial u^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \partial x^\beta$$

因爲 $J \neq 0$, 所以可解出 ∂u^β 爲

$$\partial x^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial u^\alpha} \partial u^\alpha .$$

這就是

$$\partial x^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^\beta} \partial u^\beta ,$$

所以代入 ∂f 等式中又得

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^\beta} \partial u^\beta \right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^\beta} \right) \partial u^\beta$$

而因
$$\frac{\partial f}{\partial u^\beta} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^\beta}$$

所以得
$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial u^\beta} \partial u^\beta$$

再換用指數 α 卽得

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} \partial u^\alpha$$

更命 a^α 的倒向量羣爲 a'_α 且命

$$\frac{1}{\partial x^\alpha} = a'_\alpha ,$$

於是 $\frac{1}{\partial x^\alpha}$ 也有了意義.由是利用倒向量羣的性質

$$a^{\alpha} \cdot a'_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \begin{cases} =1 \cdots\cdots \text{若 } \alpha=\beta \\ =0 \cdots\cdots \text{若 } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

卽得

$$\partial f \cdot \frac{1}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} a^{\alpha} \cdot a'_{\beta} = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} \delta^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial f}{\partial x^{\beta}}$$

由此地我們便知道

$$\underline{\partial x^{\alpha} \cdot \frac{1}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}}$$

$$\underline{\partial f \cdot \frac{1}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}}$$

最後可說明 $\frac{1}{\partial u^{\alpha}}$. 我們已經知道 $\frac{1}{\partial x^{\alpha}}$ 和 ∂x^{α} 成倒向量,同樣我們也可以命 $\frac{1}{\partial u^{\alpha}}$ 和 ∂u^{α} 成倒向量羣來說明 $\frac{1}{\partial u^{\alpha}}$. 於是我們立時得了第一個性質

$$\underline{\partial u^{\alpha} \cdot \frac{1}{\partial u^{\beta}} = \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial u^{\beta}}}$$

同時還可以證明第二個性質

$$\underline{\partial f \cdot \frac{1}{\partial u^{\alpha}} = \frac{\partial f}{\partial u^{\alpha}}},$$

證法就是因爲

$$\begin{aligned} \partial f \cdot \frac{1}{\partial u^{\beta}} &= \left(\frac{\partial f}{\partial u^{\alpha}} \partial u^{\alpha}\right) \cdot \frac{1}{\partial u^{\beta}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u^{\alpha}} \left(\partial u^{\alpha} \cdot \frac{1}{\partial u^{\beta}}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u^{\alpha}} \delta^{\alpha}_{\beta} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u^{\beta}}. \end{aligned}$$

在 n 度曲空間內過每一點的向量也有所謂一般乘積,從這種乘積可作成二乘量,三乘量,… 等等多乘量.由一個

向量 a 導出的 ∂a 的定義,如果命爲

$$\partial a = \partial x^{\mu} \frac{\partial a}{\partial x^{\mu}},$$

那末從右邊一看,便知道 ∂a 是一個二乘量.再設 f 如前,那末一定可以先求 df 和 ∂f,再求 $d(df)$ 和 $\partial(\partial f)$.這可簡寫爲 d^2f 和 $\partial^2 f$.現在我們問:

d^2f 和 $\partial^2 f$ 該當是甚麽?

這答案是和 dx^{α}, ∂x^{α} 的性質生關係的.假設 dx^{α} 和 ∂x^{α} 都不與 x^{α} 相關,那末我們得

$$d^2x^{\alpha} = d(dx^{\alpha}) = dx^{\beta} \frac{\partial\, dx^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = 0,$$

$$\partial^2 x^{\alpha} = \partial(\partial x^{\alpha}) = \partial x^{\beta} \frac{\partial \partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = 0.$$

因此

$$\begin{aligned} d^2f &= d(df) \\ &= dx^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(dx^{\beta} \frac{\partial f}{\partial x_{\beta}} \right) \\ &= dx^{\alpha} \left[\frac{\partial dx^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial f}{\partial x^{\beta}} + dx^{\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \right] \\ &= dx^{\alpha} \left[0 + dx^{\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial^2 f &= \partial(\partial x) \\ &= \partial x^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\partial x^{\beta} \frac{\partial f}{\partial x^{\beta}} \right) \\ &= \partial x^{\alpha} \left[\frac{\partial \partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial f}{\partial x^{\beta}} + \partial x^{\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \right] \\ &= \partial x^{\alpha} \left[\quad + \partial x^{\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \right] \end{aligned}$$

所以得

$$d^2 f = dx^{\alpha}\, dx^{\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}}$$

$$\partial^2 f = \partial x^{\alpha}\, \partial x^{\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}}$$

現在再命

$$d = dx^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad \partial = \partial x^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

那末由上面兩個公式立時推得

$$d^2 = \left(dx^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)^2, \quad \partial^2 = \left(\partial x^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\left(\partial x^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right).$$

再設 f 是函數的函數,

$$f = f(u^\alpha(x^\beta))$$

那末從這裏先得(參看上文)

$$df = du^\alpha \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} \text{命} = F$$

$$\therefore \quad d^2 f = d(df)$$

$$= dx^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(du^\beta \frac{\partial f}{\partial u^\beta}\right)$$

$$= du^\beta \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^\beta} \frac{\partial F}{\partial x^\alpha}$$

$$= du^\beta \frac{\partial F}{\partial u^\beta}$$

$$= du^\beta \frac{\partial}{\partial u^\beta}\left(du^\alpha \frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\right)$$

$$\partial f = \partial u^\alpha \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} \text{命} = F$$

$$\therefore \quad \partial^2 f = \partial(\partial f)$$

$$= \partial x^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\partial u^\beta \frac{\partial f}{\partial u^\beta}\right)$$

$$= \partial u^\beta \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^\beta} \frac{\partial F}{\partial u^\alpha}$$

$$= \partial u^\beta \frac{\partial F}{\partial u^\beta}$$

$$= \partial u^\beta \frac{\partial}{\partial \mu^\beta}\left(\partial u^\alpha \frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\right)$$

故得

$$d^2 f = \left(du^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)\left(du^\beta \frac{\partial}{\partial u^\beta}\right) f$$

$$\partial^2 f = \left(\partial u^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)\left(\partial u^\beta \frac{\partial}{\partial u^\beta}\right) f.$$

因之卽得

$$d^2 = \left(du^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)\left(du^\beta \frac{\partial}{\partial u^\beta}\right), \quad \partial^2 = \left(\partial u^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)\left(\partial \mu^\beta \frac{\partial}{\partial \mu^\beta}\right).$$

現在更說明

$$\partial^2 f \cdot \frac{1}{\partial x^\lambda} \frac{1}{\partial x^\mu} \text{ 和 } \partial^2 f \cdot \frac{1}{\lambda \partial u} \frac{1}{\partial u^\mu}.$$

這都是多乘量的點乘積.這種點乘積我還是用以前所述1) 2) 3) 4)各條件所決定的定義.因爲

$$\partial^2 f = \partial x^\alpha \, \partial x^\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$$

所以

$$\partial^2 f \cdot \frac{1}{\partial x^\lambda} \frac{1}{\partial x^\mu} = \left(\partial x^\alpha \cdot \frac{1}{\partial x^\lambda}\right)\left(\partial x^\beta \cdot \frac{1}{\partial x^\mu}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$$

$$= \delta_\lambda^\alpha \, \delta_\mu^\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \, \partial x^\beta}$$

卽

$$\partial^2 f \cdot \frac{1}{\partial x^\lambda} \frac{1}{\partial x_\mu} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^\lambda \partial x_\mu}$$

假如 f 是函數的函數,那末在前面我們已經知道

$$\partial^2 f \cdot \frac{1}{\partial u} \frac{1}{\partial v} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial u \, \partial v}$$

現在當然還是不等,也就是說

$$\partial^2 f \cdot \frac{1}{\partial u^\lambda} \frac{1}{\partial u^\mu} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial u^\lambda \partial u^\mu}$$

關於這節的研究因爲比較複雜,所以應推到後面一點再講.

上面有一點要特別注意的,就是假設 ∂x^α 都不與 x^α 相關.有這假設才能得上文的許多結果.但是這假設在一般的曲空間是行不了的.在一般的曲空間並不是

$$\partial^2 x^\alpha = 0.$$

那末是甚麼呢?這個答案可以這麼說出來,因爲 ∂x^α 是和 x, y 有關的向量,所以

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\partial x^\alpha)$$

還是一個向量既是向量便可以用原來這羣向量∂x^α表示,也就是說可以成下面的形狀

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\partial x^\alpha)=X^\alpha_{\beta\gamma}\partial x^\gamma.$$

其中$X^\alpha_{\beta\gamma}$是因所論空間的種類和坐標而定的.因此

$$\partial^2 x^\alpha=\partial(\partial x^\alpha)=\partial x^\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\partial x^\alpha)$$

$$=\partial x^\beta\left[\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\partial x^\alpha)\right]=\partial x^\beta\ X^\alpha_{\beta\gamma}\ \partial x^\gamma$$

現在我們知道了,$\partial^2 x^\alpha$ 是這麼一個東西:

$$\partial^2 x^\alpha=X^\alpha_{\beta\gamma}\partial x^\beta\partial x^\gamma.$$

從這裏便可化出$\partial^2 f$:

$$\partial^2 f=\partial(\partial f)=\partial\left(\partial x^\beta\frac{\partial f}{\partial x^\beta}\right)=\partial x^\beta\ \partial\frac{\partial f}{\partial x^\beta}+\partial(\partial x^\beta)\frac{\partial f}{\partial x^\beta}$$

$$=\partial x^\beta\partial x^\gamma\frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}+\partial^2 x^\alpha\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$$

$$\therefore\ \partial^2 f=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}+X^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\right)\partial x^\beta\partial x^\gamma$$

如果 f 是函數的函數,那我們只要先注意 $\partial^2 u^\alpha$ 不過是好一些的 $\partial^2 f$,所以得 $\partial^2 u^\alpha$ 成下面的形狀

$$\partial^2 u^\alpha=U^\alpha_{\beta\gamma}\ \partial u^\beta\ \partial u^\gamma,$$

再照上面算$\partial^2 f$的方法便得

$$\partial^2 f=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^\beta\partial u^\gamma}+U^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\right)\partial u^\beta\partial u^\gamma.$$

由上面算出來的$\partial^2 f$可以簡寫成

$$\partial^2 f=X_{\beta\gamma}\,f\,\partial x^\beta\,\partial x^\gamma$$

$$\partial^2 f=U_{\beta\gamma}\,f\,\partial u^\beta\,\partial u^\gamma.$$

這兩個公式有重要的意義!一個用 x^α 表示一個用 u^α 表示,而其形狀却是一樣的.在從前,已經假設過 $\partial^2 x^\alpha=0$, 在此地看來不過是一個特例,因為我們只要命

$$X^\alpha_{\beta\gamma}=0$$

就行了,然而相應於 $\partial^2 x^\alpha=0$ 的 $\partial^2 u^\alpha$ 通例並 $\neq 0$, 所以美滿的講法還是照上面

$$\partial^2 x^\alpha=X^\alpha_{\beta\gamma}\partial x^\beta\partial x^\gamma$$

公式推下來的為好.因此上面所說的例外(見 24 面)

$$\partial^2 f\cdot\frac{1}{\partial u^\lambda}\frac{1}{\partial u^\mu}\neq\frac{\partial^2 f}{\partial u^\lambda\partial u^\mu},$$

現在也有了一個解釋,這不等式的兩方通例是不相等的,他們的關係是由上面的公式

$$\partial^2 f=U^\alpha_{\beta\gamma}\partial u^\beta\,\partial u^\gamma$$

和 $\frac{1}{\partial u^\lambda}\frac{1}{\partial u^\mu}$ 作一個點乘積就得出來了:

$$\begin{aligned}\partial^2 f\cdot\frac{1}{\partial u^\lambda}\frac{1}{\partial u^\mu}&=U_{\beta\gamma}f\,\partial u^\beta\,\partial u^\gamma\cdot\frac{1}{\partial u^\lambda}\frac{1}{\partial u^\mu}\\&=U_{\beta\gamma}f\left(\partial u^\beta\cdot\frac{1}{\partial u^\lambda}\right)\left(\partial u^\gamma\cdot\frac{1}{\partial u^\mu}\right)\\&=U_{\beta\gamma}f\frac{\partial u^\beta}{\partial u^\lambda}\frac{\partial u^\gamma}{\partial u^\mu}\\&=U_{\beta\gamma}f\,\delta^\beta_\lambda\,\delta^\gamma_\mu\\&=U_{\lambda\mu}f\end{aligned}$$

把這結果詳細寫出來,便是所求 $\partial^2 f\cdot\frac{1}{\partial u^\lambda}\frac{1}{\partial u^\alpha}$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^\lambda\partial u^\mu}$ 的關係:

$$\partial^2 f\cdot\frac{1}{\partial u^\lambda}\frac{1}{\partial u^\mu}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^\lambda\partial u^\mu}+U^\alpha_{\lambda\mu}\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}.$$

這裏邊 $U^\alpha_{\lambda\mu}$ 的意義,因為 $\partial^2 u^\alpha$ 是從 $\partial^2 f$ 推出來的,所以知道

$$U^{\alpha}_{\lambda\mu} = X_{\beta\gamma}\ u\alpha \frac{\partial x\beta}{\partial u\lambda} \frac{\partial x_\nu}{\partial u\mu}$$

也就是說

$$U^{\alpha}_{\lambda\mu} = \left(\frac{\partial^2 u\alpha}{\partial x\beta \partial x\gamma} + X^{\lambda}_{\beta\gamma} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x\lambda}\right) \frac{\partial x\beta}{\partial u\lambda} \frac{\partial x\nu}{\partial u\mu}.$$

現在我們寫出這兩個公式

$$\partial^2 f \cdot \frac{1}{\partial x^\lambda} \frac{1}{\partial x^\mu} = X_{\lambda\mu}\ f$$

$$\partial^2 f \cdot \frac{1}{\partial u^\lambda} \frac{1}{\partial u^\mu} = U_{\lambda\mu}\ f$$

作一個比較.先看看他們的形狀是一樣的,再看從前所講的

$$\partial^2 f \cdot \frac{1}{\partial x^\lambda} \frac{1}{\partial x^\mu} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}$$

$$\partial^2 f \cdot \frac{1}{\partial x^\lambda} \frac{1}{\partial x^\mu} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial u^\lambda \partial u^\mu}$$

不過是上面那兩公式的特例而已.

在普通微分學下面這個記號

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}$$

是代表微分兩次的意思,換句話就是用來代替

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y},$$

這句話,在　度曲空間講起來,就是

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \text{和} \frac{\partial^2}{\partial u^\beta \partial u^\gamma}$$

代替下面兩個記號

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \text{和} \frac{\partial}{\partial u^\beta} \frac{\partial}{\partial u^\gamma}.$$

在 ∂^2, $\partial^2 x^\alpha$, $\partial^2 u^\alpha$, $\partial^2 f$ 等等沒有意義以前,那當然沒有甚麼關

係,但是上面我們已經將 ∂^2 等等的真意義,發見出來了,那就不如提議:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \text{不代替} \frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial x^\gamma} \text{而代替} X_{\beta\gamma};$$
$$\frac{\partial^2}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} \text{不代替} \frac{\partial}{\partial u^\beta}\frac{\partial}{\partial u^\gamma} \text{而代替} U_{\beta\gamma}.$$

這種提議究竟有甚麼價值?這只要看,根據這種提議能發生甚麼好的效果就行了.

首先注意的一個效果是 $\partial^2 x^\alpha$ 的公式變成一個好像合乎分數變化的形式

$$\partial^2 x^\alpha = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \partial x^\beta \ \partial x^\gamma.$$

在這地方我們應當注意的一點,就是將 x^α 微分兩次固得 $\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\gamma}=0$. 然而普通所認識的 $\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}$ 根據上面的提議,竟變成不等於 0 了.不等於 0,那末又等於甚麼?這可以取前面的公式

$$\partial^2 x^\alpha = X^\alpha_{\beta\gamma} \partial x^\beta \ \partial x^\gamma$$

比較(用 $\frac{1}{\partial x^\beta}$ $\frac{1}{\partial x^\gamma}$ 先作點乘積再來比較)便知道

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = X^\alpha_{\beta\gamma} = X_{\beta\gamma} x^\alpha$$

因此我們知道 $\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}$ 的確可以不等於 0.由此即進而求 $\partial^2 f$.

$$\partial^2 f = \partial(\partial f) = \partial\left(\partial x^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\right)$$
$$= \partial(\partial x^\alpha)\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + \partial x^\beta \ \partial \frac{\partial f}{\partial x^\beta}$$
$$= \partial^2 x^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + \partial x^\beta \ \partial x^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\frac{\partial f}{\partial x^\beta}$$

在這裏注意微分的次序可以交換,

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\frac{\partial f}{\partial x^\beta}=\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\gamma},$$

再用 $\partial^2 x^\alpha$ 代入,卽得

$$\partial^2 f=\left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\gamma}\right)\partial x^\beta\partial x^\gamma.$$

這個公式曾經簡寫爲

$$\partial^2 f = X_{\beta\gamma}\, f\, \partial x^\beta\, \partial x^\gamma$$

依照上面的提議卽應寫成

$$\partial^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\partial x^\beta\,\partial x^\gamma$$

比較係數便知道

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}=\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\gamma}+\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$$

因此我們知道 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\gamma}$ 的關係是:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}-\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\gamma}=0$,假如 ∂x^α 是 x^β 的函數,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}-\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial f}{\partial x^\gamma}=\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$,假如 ∂x^α 是 x^β 的函數.

以上是假設 f 是 x^α 的函數而言,如果再設 f 是函數的函數,那末根據上面的提議所得的結果還是一樣的.由上面 $\partial^2 f$ 的公式得

$$\partial^2 u^\alpha=\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\partial x^\beta\;\partial x^\gamma$$

$$=\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\frac{\partial x^\beta}{\partial u^\lambda}\frac{\partial x^\gamma}{\partial u^\mu}\partial u^\lambda\;\partial u^\mu$$

所以假如命

$$\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial u^\beta\partial u^\gamma}=\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^\lambda\partial x^\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^\beta}\frac{\partial x^\mu}{\partial u^\gamma}$$

(注意,由分數性質知道這好記憶得很),卽得

$$\partial^2 u^\alpha=\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial u^\beta\partial u^\gamma}\partial u^\beta\;\partial u^\gamma.$$

照上面的方法同樣再得

$$\partial^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial u^\beta \partial u^\gamma}\partial u^\beta\,\partial u^\gamma$$

這時候$\frac{\partial^2 f}{\partial u^\beta \partial u^\gamma}$和$\frac{\partial}{\partial u^\beta}\frac{\partial f}{\partial u^\gamma}$的關係還是

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^\beta \partial u^\gamma}-\frac{\partial}{\partial u^\beta}\frac{\partial f}{\partial u^\gamma}=0 \qquad \text{……………特例的}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^\beta \partial u^\gamma}-\frac{\partial}{\partial u^\beta}\frac{\partial f}{\partial u^\gamma}=\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\gamma}\frac{\partial f}{\partial u^\alpha} \qquad \text{……………通例,}$$

從$\partial^2 f$, $\partial^2 x^\alpha$, $\partial^2 u^\alpha$, 的公式再作點乘積便知道

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}=\partial^2 x^\alpha\cdot\frac{1}{\partial x^\beta}\,\frac{1}{\partial x^\gamma}=\frac{1}{\partial x^\beta}\,\frac{1}{\partial x^\gamma}\cdot\partial^2 x^\alpha$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}=\partial^2 f\cdot\frac{1}{\partial x^\beta}\,\frac{1}{\partial x^\gamma}=\frac{1}{\partial x^\beta}\,\frac{1}{\partial x^\gamma}\cdot\partial^2 f$$

$$\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\gamma}=\partial^2 u^\alpha\cdot\frac{1}{\partial u^\beta}\,\frac{1}{\partial u^\gamma}=\frac{1}{\partial u^\beta}\,\frac{1}{\partial u^\gamma}\,\partial^2 u^\alpha$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^\beta \partial u^\gamma}=\partial^2 f\cdot\frac{1}{\partial u^\beta}\,\frac{1}{\partial u^\gamma}=\frac{1}{\partial u^\beta}\,\frac{1}{\partial u^\gamma}\cdot\partial^2 f.$$

再從上面許多公式中又得出幾個公式

$$\partial^2=\partial x^\beta\,\partial x^\gamma\frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}=\partial u^\beta\,\partial u^\gamma\frac{\partial^2}{\partial u^\beta \partial u^\gamma}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}=\frac{1}{\partial x^\beta}\,\frac{1}{\partial x^\gamma}\cdot\partial^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^\beta \partial u^\gamma}=\frac{1}{\partial u^\beta}\,\frac{1}{\partial u^\gamma}\cdot\partial^2$$

以下再講的是將∂用之於向量,如果命

$$\frac{1}{\partial x^\beta}\cdot\partial^2 x^\alpha=\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta}$$

那末立卽知道

$$\partial^2 x^\alpha\cdot\frac{1}{\partial x^\beta}=\frac{\partial x^{2\alpha}}{\partial x^\beta}=\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\partial x^\alpha)\ \left(\text{同}=\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}\partial x^\gamma\right)$$

再命 a 爲向量又

$$\frac{\partial a}{\partial x^\beta}\cdot\frac{1}{\partial x^\gamma}=\frac{\partial a}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}$$

立卽又知道

$$\partial a=\partial x^\lambda\frac{\partial a}{\partial x^\lambda}=\partial x^\lambda\ \partial x\ \ A_{\lambda\mu}$$

$$=\partial x^\lambda\ \partial x^\gamma\left(\frac{1}{\partial x^\gamma}\cdot\partial x^\mu\right)A_{\lambda\mu}$$

$$=\partial x^\beta\ \partial x^\gamma\left(\frac{1}{\partial x^\gamma}\cdot\partial x^\mu A_{\beta\mu}\right)$$

$$=\partial x^\beta\ \partial x^\gamma\left(\frac{1}{\partial x^\gamma}\ \frac{\partial a}{\partial x^\beta}\right)$$

$$\therefore\quad \partial a=\partial x^\beta\ \partial x^\gamma\frac{\partial a}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}$$

又

$$\partial a\cdot\frac{1}{\partial x^\beta}\ \frac{1}{\partial x^\gamma}=\frac{\partial a}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}$$

此外我們可以再進而研究 ∂f,∂f,以及 $d\partial f$,等等,然而沒有大困難了,因此在此地便宣告結束.

標準偏差與誤差之限度

鄭亞余

測量難得真値,採取近似値則生誤差.誤差欲小,則須精度大.精度欲大,則須標準偏差小.而普通用以為測量之近似値者,為算術平均.由概率算法,算術平均出現之概率較一切測量値之出現度為大.但以測量囘數之大小,所得之算術平均不無差異,因此所生誤差亦當隨諸測量囘數而變.故欲定誤差精度,標準偏差之大小,只視測量囘數與其測量値之算術平均為何如耳.

設將各測量値除以定値,並按照概率之理排列其相當之各項如次.

$$y_0+y_1+\cdots\cdots+y_{n-1}+y_n$$

$$=q^n+nq^{n-1}p+\cdots\cdots+np^{n-1}q+p^n$$

$$=(q+p)^n=1.$$

今 $\Sigma y=1$

故算術平均為 $\Sigma ny_n \div 1=\bar{x}$

$$\bar{x}=np\left(q^{n-1}+\frac{(n-1)}{1!}q^{n-2}p+\cdots\cdots+p^{n-1}\right)$$

$$=np(q+p)^{n-1}$$

$$=np$$

上式中 n 爲甚大之整數,即爲測量之回數.

設以 σ 爲標準偏差更將座標軸之中心移至 $\bar{x}$

則於 $\sigma^2+\bar{x}^2=m_2$

$$m_2=(y_0\times o^2+y_1\times 1^2+\cdots\cdots+y_\gamma\ \times\gamma^2+\cdots\cdots+y_n\times n^2)\div\Sigma y$$

$$=\Sigma\gamma^2{}_nC_r p^{n-r}q^r=\Sigma\left\{r(r-1)+r\right\}{}_nC_r p^{n-r}q^r$$

$$=n(n-1)q^2\Sigma_{(n-2)}C_{(r-2)}p^{n-r}q^{r-2}+nq\Sigma_{(n-1)}C_{(r-1)}p^{n-r}q^{r-1}$$

$$=n(n-1)q^2(p+q)^{n-2}+nq(p+q)^{n-1}$$

$$=n^2q^2+nq(1-q)$$

$$=\bar{x}^2+npq$$

$\therefore\quad \sigma^2=npq$

但由 Normal curve 所求之標準偏差如次

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{\sqrt{\pi}}x^2e^{-h^2x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2h^2}$$

式中 h 爲測量之精度.普通 σ 愈小愈好.但以精度最大無過於一而常小於一.

故 $\sigma^2\geqq\frac{1}{2}$

可知最小之 σ 不能小過.7071

又由 $\sigma^2=npq$

n 固愈大愈好.但設 n 已定,則求最大之 σ,希望 pq 最大.

因 $p+q=1$

故其最大時 $p=q=\frac{1}{2}$ 故 $\sigma^2\leqq\frac{n}{4}$

總之　　$\frac{n}{4}\geqq\sigma^2\geqq\frac{1}{2}$

上式中之 n 固爲甚大之整數,而由實際測量之材料計算,其結果可得較小之 n,故可以發生 $\sigma^2>\frac{n}{4}$ 之情形.然則此時之標準偏差不適用矣.至如 $\sigma^2<\frac{1}{2}$ 必是計算錯誤,亦不可取以爲準也.

標準偏差之值無負,誤差則是過猶不及.其誤爲正與誤爲負之機會均相等也.以是決定誤差之限度,只就其絕對值論之.

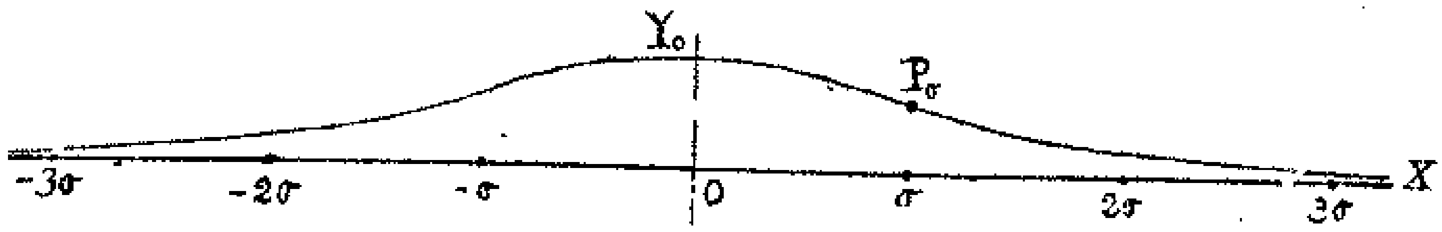
因誤差曲線爲對稱者

故由　$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=2\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=1$$

得　$$\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{2}=.5$$

實際算得　$$\int_{0}^{3\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=.49865$$

比較上二式並參看誤差曲線之形勢則可得結論矣.



圖中 σ 已設爲 1, P_σ 爲反點爲 .2424.誤差仍循 X 軸而定.

$$Y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

誤差之絕對值小於3σ,根據概率算法之理,其誤差爲誤差曲線所控制,固不待論.其時之誤差尙小,猶無礙於事理.若至較3σ過大時,則於前二式與曲線圖相較,可知其增加概率之力太薄弱,不足取矣.倘其誤差竟一旦大越此軌範之外,殆亦真理所不容許者矣.何則,誤差決不能大至於無窮大也.

測量難得真值.苟得真值,則無誤差.是誤差可希望小至於爲零也.

總之 $3\sigma \geqq |x| \geqq 0$

此篇理論雖淺,而用處頗廣.誤差之限度曾見於各名著,標準偏差之限度竟無一論及之者.倘稍忽略,必於不知不覺間,發生謬誤不小.是以於此具述其理,並附釋其例於次.

誤差之小限度爲零,標準偏差之小限度爲.7071,皆爲定值,無庸贅矣.至如決定誤差之大限度,則須先求標準偏差.決定標準偏差之大限度,則須先求 n 之值.理論上 n 固爲甚大之整數,實用上以材料比例相稱之關係常爲帶分數,其值或有小之甚者.

設有曲線 $y=x^3-2cx^2+c^2x$

取 $x=o,\cdots\cdots,c$ 間之 y 作爲所得之材料.(c 未必爲n)

則 $$\bar{x}=\frac{\int_o^c yxdx}{\int_o^c ydx}=\frac{2}{5}c$$ ($\frac{2}{5}$未必爲p)

$$\sigma^2=\frac{\int_0^c yx^2dx}{\int_0^c ydx}-\bar{x}^2=\frac{1}{25}c^2$$

但 $\sigma^2=npq \qquad \bar{x}=np$

$$\frac{\sigma^2}{\bar{x}}=q<1 \quad \text{故宜} \quad \sigma^2<\bar{x}$$

而得 $n=\frac{\bar{x}}{p}=\frac{\bar{x}}{1-\frac{\sigma^2}{\bar{x}}}=\frac{\bar{x}^2}{\bar{x}-\sigma^2}$

上例可得 $$n=\frac{\left(\frac{2}{5}c\right)^2}{\frac{2}{5}c-\frac{1}{25}c^2}=\frac{4c}{10-c}$$

$$\frac{n}{4}=\frac{c}{10-c}>\frac{1}{25}c^2$$

然須 $c<10$.而實際 c 有不小於10者,即是 $\sigma^2\nless\bar{x}$ 其求 n 之法當如次.

作曲線 $y=x^3-2cx^2+c^2x$ 之對稱曲線 $y_1=cx^2-x^3$

則所視為兩曲線之 n 者應完全一致.

令
$$\bar{x}_1=\frac{\int_0^c y_1xdx}{\int_0^c y_1dx}=\frac{3}{5}c$$

$$\sigma_1^2=\frac{\int_0^c y_1x^2dx}{\int_0^c y_1dx}-\bar{x}_1^2=\sigma^2=\frac{1}{25}c^2$$

由計算,兩曲線之標準偏差一致,結果是上.由理論,兩標準偏差亦應一致,蓋於 npq 中,n 既一致,兩曲線又屬對稱者,只是 p 與 q 前後互換位置耳,其值故毫無變易也.

於此又知 $\bar{x}_1>\bar{x}, \qquad \bar{x}_1+\bar{x}=c$

倘 $c \nless 10$ $\sigma^2 \nless \bar{x}$

則應有 $\sigma^2 < \bar{x}_1$

然則

$$n=\frac{\bar{x}_1{}^2}{\bar{x}_1-\sigma^2}=\frac{\left(\frac{3}{5}c\right)^2}{\frac{3}{5}c-\frac{1}{25}c^2}=\frac{9c}{15-c}$$

可知此時 $15>c>10$

故凡算得 $\sigma^2<\bar{x}$ 決定 n 則甚易,算得 $\sigma^2\nless\bar{x}$ 則採用 $\bar{x}_1$

總之 σ^2 應小於 $\bar{x}$,否則必小於 $(c-\bar{x})$.然而此亦易與也.

倘 $\sigma^2=\bar{x}$ 則未必 $\sigma^2=c-\bar{x}$ 故由 $\sigma^2<c-\bar{x}$ 求 n.

倘 $\sigma^2=\bar{x}=c-\bar{x}$ 則其曲線本身對稱,所得之結果必有相當之價值,其適用之範圍亦不在小也.

例如原有曲線 $y_a=\cdot125x^3-2\cdot55x^2+13\cdot005x$

取其截 X 軸之部分爲材料.可知 $c=10\cdot2$

$$\bar{x}_a=\frac{2}{5}\times10\cdot2=4\cdot08$$

$$\sigma_a{}^2=\frac{1}{25}\times10\cdot2=4\cdot1616$$

此時 $\sigma_a{}^2\nless\bar{x}_a$ 故取 $10\cdot2-4\cdot08=6\cdot12$

而得 $4{\cdot}1616<6{\cdot}12$

但根據此曲線取如次之排列計算,其結果則稍異.

上列爲 x,下列爲 y.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	10.58	16.81	19.44	19.22	17.90	13.23	8.96	4.84	1.62	.05	0

此處 $c=11,\ \bar{x}=4{\cdot}126$ $\sigma^2=3{\cdot}923$

$\Sigma y=N=112{\cdot}65$

$4{\cdot}126>3{\cdot}923>{\cdot}5$

似此情形,實用並不須求 n.但檢視 σ^2 是否小於 $\bar{x}$ 或 $(c-\bar{x})$,其次檢視其是否大於 $\frac{1}{2}$ 卽可矣.($\sigma^2>c$ 則不可取)

又由上項材料算得一種 Pearson 曲線如次

$$y_b=25{\cdot}39\left(1+\frac{x^2}{4{\cdot}69231^2}\right)^{-4\cdot31458}e^{-\cdot360928\tan^{-1}\left(\frac{x}{4\cdot69231}\right)}$$

參看拙著數理統計學〔武漢大學講義〕

倘 $x=0$ 則 $(y_b)_0=25{\cdot}39$

此值應與 $(y_a)_{4\cdot38147}$ 相當.而 (y_a) 為原曲線故應視作真值,以是 (y_b) 為近似值.

$$(y_a)_{4\cdot38147}=19{\cdot}11168$$

然則 $25{\cdot}39-19{\cdot}11168=6{\cdot}27832$ 是為誤差,欲決定此誤差是否超出軌範,當先決定其標準偏差,法如次.

設有量,總個數為 N.而於其中測得某項同號數之量,確值為 y_c.

則是 $p=\frac{y_c}{N}$ $\qquad q=1-\frac{y_c}{N}$

又 y_c 為所得之確值,故為其時之算術平均.

是以 $y_c=Np$ 此亦與上式相符合.

故 $\sigma^2=Npq=N\times\frac{y_c}{N}\times\left(1-\frac{y_c}{N}\right)=y_c\times\frac{N-y_c}{N}$

上例得 $\sigma^2=19{\cdot}11168\times\frac{112{\cdot}65-19{\cdot}11168}{112{\cdot}65}=15{\cdot}87$

$$\frac{N}{4}=\frac{112{\cdot}65}{4}=28{\cdot}16>15{\cdot}87>{\cdot}5$$

故所求之標準偏差可用也.卽 $\sigma=3{\cdot}9836$

$$3\sigma=11{\cdot}9508$$

由是知誤差之絕對値小於 11.9508 者,猶可謂爲無大妨礙之差.今 6.27832 旣小於 11.9508 是其誤差尙在情理之中,雖或忽視殆亦無關緊要歟.

方程式之根之對稱函數史略

Washington and Lee 大學 H. Grey Funkhouser 著

程綸譯

一函數對於任意若干字母爲對稱者,卽互換其任意二字母而不變之函數也.其最簡者卽二次方程式之根與係數之關係.若 α 及 β 爲方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根,則 $\alpha+\beta=-b$ 及 $\alpha\beta=c$, 卽 b 與 c 爲二根 α 及 β 之對稱函數.

本篇之目的,乃在獲得方程式之根與係數關係之淺顯智識;明瞭對稱函數論題微弱之起始與暗中摸索之先驅者;並追溯至十九世紀時歷史之發展,而略論及有功於此理論發展之各數學家.

此種研究,實無窮盡,今兹目的則以簡潔之方式紀載已往之事實,使知代數之所以形成今日之狀態;並供給方程式論之學者於此論題之特殊部份以歷史之資料.於吾個人之經驗以爲凡一論題將其起源之知識與其發達之盛衰,一貫研究,復週知此以高貴之遺產加惠於後學之前代著名學者,必能興致勃然也.或稍易其觀點,以成其著述,遂覺其所經之思潮,固已長流數百年,更將如此繼續於無窮歲月也.

此論題之原起,於古史中已難探索,亦不易解釋.余爲此

文幸得哥倫比亞大學師範學院 David Eugene Smith 教授之圖書館及美國數學會之圖書館,紐約公共圖書館,供余任意瀏覽.此三圖書館中,尤以前者藏書豐富.足使余文增色不少.

原起之討論除 Peletier, Vieta, 及 Vandermonde 三人外,參酌何處,均有註明.關於前二人者 Charles Hulton 曾有敍述見 Mathematical and Philosophical Dictionary (倫敦 1796 年). 至 Vieta 關於根與係數之著作之重述,則參照 Francis Maseres 之 Tracts on the Resolution of Cubic and Biquadratick Equations (倫敦 1803) P.531. Vandermonde 理論之基礎則載在 Faa de Bruns 之 Théorie des Formes Binaires (1876) P.51.

若視代數之發展爲整個的,則對稱函數論題之範圍隨符號之引用與進步而擴大.蓋以文字之語句表示方程式,則根與係數之間難知其清晰之關係. Franciscus Vieta (1540–1603) 乃最先引用字母代表數之一人.以前之事跡,知之甚鮮.故"代數省略法"與此論題之發展,甚關重要.而視覺能助思想成顯著之進步也.

Luca Pacioli (1445–1509) 之 Sūma (1494) 一書爲當時數學之總綱,而將代數之部歸於下名 —— L' Arte Magiore; Ditta del Vulgo la Regola de la Cosa, over Alghebra e Amucabala[1]. 書中曾用配方法解方程式似已略有二次方程式之清晰概念.雖彼未明白提出而似頗承認方程式之根與數字部份之關係矣.

此論題之起點,似由於十六世紀中葉多才怪僻之數學家 Girolamo Cardano (1501–1576). 其名以三次方程式之最先解法而顯著.其代數之著作 Ars Mrgua 於 1545 年出版.書中敘及方程式[2] $x^3+72=11x^2$ 之根爲 $\sqrt{40}-4$, $\sqrt{40}+4$, 3. 雖其確根爲 $-\sqrt{40}+4$, $\sqrt{40}+4$, 3. 但其錯誤,並不涉及其所繫關係之知識.彼曾謂正根與負根之差,恆等於第二項之係數 —— "Differentia aequationum verarum et fictaru semper est numerus quadratoru." 由 $\sqrt{40}+4$ 與 3 之和,減 $\sqrt{40}-4$, 得 11, 卽 x^2 之係數.

彼又顯明若無第二項則負根之和等於正根之和.

Jacques Peletier (1517–1582) 於十三年後作一代數之論文述及當根爲有理.不論其爲整數或分數時,由絕對項之除數求方程式根之方法.並謂其根常藏於絕對項中而爲其除數中之數.[3]

Rafael Bombelli (生於 1530) 於 1572 年刊行其代數[4]與 Cardan 所述者相同.

Vieta 之代數著作,對於代數之各部份均有極深之影響於本題尤甚.但湮歿無聞,身後始彰.1615 年 Alexander Anderson始刊佈之.其書中之第十四章有四定理述及各根皆正時方程式之根與其各項係數之普偏關係.其第一定理 Vieta 之原文如下:

Si B+D in A−A quadratum aequatur

B in D, Aerplicabilis est de qualibet illarum duarum B vel D. 3N−1 Q aequetur 2. Fit 1N1 vel 2.

用近代術語卽

若 $(a+b)x-x^2=ab$; 則 $x=a$ 或 b.

$3x-x^2=2$, $x=1$ 或 2.

三次,四次,五次者之述法相同.

如 Vieta 所表出之關係似彼已有清晰之觀念,但並非如此. Cajori 之初等數學史中云:

"Vieta 已得方程式之根與係數關係中一部份之知識.不幸彼擯斥一切而只限於正根,遂未能深明全體之關係.於此事實之完全認識其最接近者可於下例見之,卽方程式 $x^3-(u+v+w)x^2+(uv+vw+wu)x-uvw=0$ 之根爲 u,v,w, 此敍述可完全應用於三次式而 u,v,w 可代表任何數.但 Vieta 依其習慣,僅指定字母爲正値,故其所表之意義,常狹於原文所具之意義."[5]

雖然,卽使其爲由前代遺傳而來少數畸零之敍述,而 Vieta 所成其進步之偉大,不可不知.彼已爲方程式根之對稱函數史中之第一人築成大道,引入門徑:使其能取捨材料,信手拈來,不僅於本題,且及於代數之各方,而立足於百年後也.

此人卽 Albert Girard (1595–1632) 其代數之著作爲三十四頁之小册,書名 Invention Nouvelle en l' Algèbre, 刊佈於 1629 年.

Girard 所創之三角形,後謂之Pascal三角形,常用爲證明對稱函數中定理之基礎,然彼固未嘗具有此觀念也.至此三角形如何作成,如何解釋,誠有趣味之事.今勉以文字譯之如下:

```
        1
  -------------
      1   1
    1   2   1
  1   3   3   1
1   4   6   4   1
```

"將兩邊各置多數 1 字,而中間則置其他數字,此數字乃由加法得之.此三角形亦謂之選數三角形.頂上之 1 只算術的,其餘爲代數的,即 1 1 爲(1)之次數,1 2 1爲(2)之次數, 1 3 3 1 爲(3)之次數,依此推至無窮."[6]

(1)之符號爲 Girard* 用以代表一次未知數者;(2)及(3)各代表二次及三次之符號.

設用"第一段""Première faction"表示一組數之和,則"第二段""deuxiène faction"表示每次取二數之和,以此類推.其所述之定理爲"若有一組數則各段之積之組可用選數三角形表示之,並可與各數之組同級."例如有四數,則選 1 4 6 4 1 一列代表四次乘方.1 代表最高次之 1, 4 爲第一段, 6 爲第二段,以此類推.

復以方程式 1(4)=4(3)+7(2)−34(1)+24 爲例,云最高次之指數爲 4,此 4 字即指明恰有四解答,不多不少,但又謂欲知其全體必須列成另一次序以取其符號.如

*Girard之符號爲一圓包圍此數,今因排印方便起見,改用括弧.

$$1(4)-7(2)-24(0)=4(3)-34(1);$$

則帶有適當符號之係數為4, −7, −34, −24.卽四解答之四段.[7]

彼又得方程式$x^4-4x+3=0$,含有二虛根.並顯明由根構成係數之法則,在一切情形均可成立,

Girard 發現根之乘方之和可表以係數,乃偶然獨立而得.彼於討論上述各根與各段之關係時,為簡單起見,假設數個文字以代其和,每次取二之積,及每次取三之積等等,卽相似於所謂和,平方之和,及立方之和等等.並設下例以便明瞭此二觀念並非代表一物.

"若第二,第三,第四項之係數為A, B, C,則於任何次之方程式中

		解答
A	卽為	
A^2-2B		各平方之和
$A^3-3AB+3C$		各三方之和
$A^4-4A^2B+4AC+2B^2-4D$		各四方之和"[8]

此卽最著名之牛頓定理.然於一世紀前 Girard 已得其大概矣.

Charles Hutton, (1737−1823) 於其 Mathematical and Philosophical Dictionary (1795−6)中論 Girard 之句語如下:

"知由各根之和與其積以構成各乘方之係數之通則者,彼第一人也.知求任何方程式之各根乘方之和之通則

者亦彼第一人也."[9]

Thomas Harriot (1560–1621) 與 Girard 同時,亦曾發現根與係數之關係,惜其見地與知識遠遜之.其著作於歿後十年由其友人 Walter Waruer 刊佈.此書或作於 1610 年[10] 彼由二項因子或根之構成之觀點以研究方程式,故當根爲正時,曾承認根與係數之關係.下例卽其法也.

$$\begin{array}{ll} a=+b & a-b=o \\ a=+c & a-c=o \\ a=+d & \underline{a-d=o} \\ & aaa-baa+bca \\ & \quad -caa+baa \\ & \quad -daa+cda-bcd=o \end{array}$$ [11]

Cajori 謂"彼爲分析方程式成簡單因子之第一人,但未承認有虛根,甚或未承認負根."[12]

William Oughtred (1574–1660) 於 1631 年刊佈 Claois Mathematicae, 依 Vieta 而擴充之,但尙未至今日吾人所研究之關係.

此後二十五年,於牛頓時代,稍有對稱函數發展之曙光. René Descartes 之幾何初版於 1637 年,始討論方程式之根及其性質. Descartes 以二項因子相乘構成方程式,其方法相似於 Harriot. 彼又顯明一方程式能用含有未知數之二項式使之加一根或減一根以變其次.彼之致力於方程式僅

由幾何之觀點,故既得其變換,卽不再求根與係數之關係矣.

1673 年 John Wallis (1616–1703) 刊佈其惟一之著作 De Tractatus Algebra Historicus et Practicus. 書中有一小章專論"係數之成分" Composition of Coeffecient. 此論題有關於任何方程式所含根之明顯的個數;而"由最高次向下計算至第二項係數爲各根之和,第三項係數爲各長方形之和,等等"[13] 亦易於了解.此卽其貢獻之總綱也.然彼或並不知 Girard 之著作,或知之而以爲無提及之必要.前說似較可信.而 Harriot 之代數中已包含此先驅之歷史家,則彼所未及知也.

有人於重要之真理,得重新之發現,卽將其結果演成較原發明者更爲合宜之形式以供於世,而歸其榮譽於已有,傳名後代而前人反寂然無聞,此往見不鮮者矣.論及 Girard 與牛頓之關係卽此情形. Girard 後約百年 Isaac Newton 牛頓 (1642–1727) 之 Arithmetica Universalis 出版.書中有用方程式之變化之標題,卽論根之乘方之和之定理.此後則對稱函數之著作始與"牛頓定理"並刊矣.

今因便於比較之故,將 1707 年牛頓所作錄於下:

"今設任何方程式中各項之已知量變其符號各爲 p, q, r, s, t, v. 等等.卽 p 爲第二項者,q 爲第三項者,v 爲第四項者,s 爲第五項者,以此類推,各項之符號既已察得,再使 $p=a$, $pa+2q=b$, $pb+qa+3r=c$, $pc+qb+ra+4s=d$, $pd+qc+rb+sa+5t=e$,

$pe+qd+rc+sb+ta+6v=f$, 推至無窮,得一套演式.

"則 a 卽各根之和,b 卽各根平方之和,c 卽立方之和,d 卽四方之和,e 卽五方之和,f 卽六方之和等等."[14]

此定理何由得來,牛頓既未證明,亦無例證,只於決定方程式根之極限時直接應用各乘方之和而已. 1769 年 Arithmetica Universalis 之英國版中有 Theaker Wilder 牧師之跋文述及此定理之由來,以爲"由此各量之代數式及二項式定理得之甚易."[15]

至十八世紀中葉根與係數之關係已知之甚詳. 1726 年 Crousaz, 1740 年 Clairaut 與 1748 年 Maclaurin 之代數,皆有數章論及根與係數.

牛頓以後致力於牛頓公式之證明與例證之數學家甚衆,其中最重要爲 1748 年 Maclaurin[16] 及 1750 年 Euler[17] 之證明. 後者謂之牛頓定理之雙層例證,而第一證明則用對數微分及展開成級數之法,第二證明則代數之初等方法,然第二證明更爲完善. Leopold Kronecker (1823–1891) 復修其例證,尤爲精美.其求 n 次方程式中 r 次乘方之和,在 $r\geq n$ 時與 Maclaurin 法相似,但 $r<n$ 時不同.

Jean Castillon (1709–1791) 於 1761 年重刊 Arithmetica Universalis 於此定理加入詳細之註釋.[18] 此刊本之附錄中並有 Georg. F. Baermanus (1717–1769) 之證明.彼謂彼已早知此定理對於方程式之極限理論之用途,並深惜當時數學家缺

乏一正確之例證.彼搜求未獲遂自創一有價值之證法,捨棄以希臘字母代表係數之尋常方法,而利用增長之用處及微分之記法.

自牛頓之深刻影響而後,本題之進步,日新月異.近代對稱函數之學者所知之第二人卽Edward Waring博士,在康橋大學任Lucasian講座之教授凡三十八年.(自1760年至1798年)彼爲方程式論著述最富之一人.並於對稱函數有三重要定理,載於1770年所刊行Meditations Algebraicae書中之第一章.

第一定理卽求根之n次乘方之和直接表以係數函數之公式.而Waring並未述明得此定理之方法.第二定理,爲三定理中用處較少者,卽求根之各次乘方之和之公式.第三定理爲求根之任何有理之完整對稱函數表以係數之方法.此定理爲近代對稱函數基本定理之起點.

至於Alexamder Théophile Vandermonde (1735–1796)爲化學家,音樂家,政治經濟學家,亦爲數學家;首先造成對稱函數表爲其特點.於Meditations Algebraicae刊行十年後彼得一組函數以代Waring公式.[19]然於其計算未述方法,故其著作不彰而爲二十五年後Hirsch之結果所掩矣.

於Waring獲得第一定理時Leonard Euler (1707–1783)於俄國不謀而合得相似之定理.其結果歸集於1771年正月在Saint Petersburg學院之講演稿,講題爲Observation Circa Radices Aequationum, 卽於是年出版.對稱函數論中之消去法爲最重要應用之一實卽由於 Euler.[20]用對稱函數以求最後方程式之法,亦由彼首先發表於 1748 年柏林科學院.二年後 Gabriel Cramer (1704–1752) 之代數曲線說[21]中仍依此而用較普遍之法.

十八世紀之大數學家而有功於對稱函數者厥爲 Joseph Louis Lagrange (1736–1813) 其著作雖未能視爲盡美盡善,然方法可云觀止矣.至彼之研究對稱函數其目的則在探求高次方程式之解法而改進之.

Lagrange 之 Traité de la Résolutions des Équations Numériques de tous les Degrés 第一版刊行於 1798 年.彼於用循環級數以求近似値法中,發現用代數除法可以證牛頓定理.[22]此卽各法中之最簡者,亦卽近代教科書中所常見者也.

Lagrange 於此書中首先將 Σ 符號引用於對稱函數中以代總和.已前 Wallis 之代數中因餘弦而用此符號.實則用此符號以代總和由於 Euler[23]於 1735 年.Lagrange 亦爲首先述及並承認凡根之有理而完整函數必能表以係數之一人.彼於此定理曾云,"此爲方程式論中最有效力之定理."[24]

Lagrange 貢獻之主要爲一著名公式.[25]Lonis Poinsot (1777–1859) 讚之曰" 旣臻優美,復能普遍,此其所以著名也." 此公式卽爲直接求一方程式之根之同類負乘方之和之式.後人據此定理以爲硏究之基礎者甚衆.其中最重要者爲

Cauchy 關於此定理之各種引證[26]及 Eugène Rouche[27]有力而簡單之證明.[28] Lagrange 亦曾用對數以得牛頓定理.

首先用現代方法表示對稱函數實由於 Meyer Hirsch (1765–1851) 其所著代數之序文中曰"余以對稱函數爲始,因其爲一切之基礎也."[29] 繼之以牛頓定理之證明,及凡根之有理對稱函數可表以係數函數之普遍引證.通常應用之對稱函數表首由 Hirsch 造成.其中含有至十次方程式之各值.彼用根之同類乘方之函數以造成之,並有其方法之引證.然若函數非簡單之形式,則其方法必須冗長之計算,故爲後來 Cayley 及 Sylvester 之公式代替矣.

註 1. Sūma de Arithmetica, geometria, Proportionie Proportinalita, Venice, 1494, Folia 67.

註 2. Artis Magnae, sive de regulis algebraicis 第二版 Basel, 1570, P. 10

註 3. L' algèbre départie en deux livres, Lyon 1554

註 4. L' algèbra perte maggiore dell' arimetica divisa in tre libri, 1572.

註 5. 增訂本, New York, 1917, P. 230.

註 6. 原書 P. 42.

註 7. 原書 P. 43.

註 8. 原書 P. 46.

註 9. 第一册 P. 63.

註 10. D. E. Smith, History of Mathematics 1623. 第一册 P. 388.

註 11. Artis Analytical Prax is ad Aequationes Algebraicas Resoluendes. London. 1631 P. 18.

註 12. History of Mathematics 1919 P. 157.

註 13. 英國版本, London, 1685, P. 142.

註 14. Arithmetica universalis sive de compositione et resolutione arithmetica liber, Cambridge, 1707, P. 251.

註 15. P. 394.

註 16. A Treatise of Algebra, London, 1748. PP 286. ff.

註 17. gemina theonuatis Neutonioni, quo traditur reletiv inter coeffecientes cuius vis aequationis algebraicae et summas potestatum radicum eiusden, opuscula Varii Argumenti, 1750. 第二册 p. 108.

註 18. p. 70.

註 19. Mémoires de l' Académie des Sciences (1771).

註 20. Cajori, History of Mathematics, p. 235.

Meyer Hirsch, Literal Calculus and Algebra, J. A Ross 譯本 (1827) p. 143.

註 21. Introduction à l' Analyses des Ligues Courbes (Geneva, 1750) p. 660.

註 22. Traité dela Resolution des Équations Numériques (第二版, Paris. 1808) p. 133.

註 23. Johaunes Tropfke, Geschichte der ElementorMathematik (Berlin 1921)第二册 p. 33.

註 24. 原書 p. 193.

註 25. Memoirs of Berlin Academy, 1768, Traité de la Résolution des Équations Numériques, p. 211.

註 26. Memoirs sur Quelques Séries Analogues à la Série de Lagrange, Mémoires de l' Académie des Sciences (1830) 第九册 p. 104.

Oeuveres Complètes d' Augustin Cauchy (Paris 1882-1911) 第一類函,第二册. p. 73.

註 27. Journal de l' École Polytechnique, 第二十二册 p. 193. ff.

註 28. J. A. Serret, Cours d' Algèbre Supérieure (第三版 1866) p. 462.

註 29 Samulung von Aufgabon aus de Theorie der Algebraischen Gleichungen Berlin 1809. p. 16.

〔譯者註〕原文載 The American Mathematical Monthly 1930 年八九月份合刊,又原文中之註,分置於各頁之末,今因便於排印起見,悉置於篇末,

(未完)

重力與電

(Gravitation and Electrety)[1]

H. Weyl 著　　吳南薰重譯

準 Riemann 所述,幾何學所根據者有二:

1. 空間爲三次元連續 (Three-dimentional Continuum) 其中各點,可以三坐標 x_1, x_2, x_3 之值表明之.

2. Pythagora 之定理　設極近兩點,表之爲

$$P=(x_1, x_2, x_3) \qquad P'=(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3) \qquad (1)$$

(無論用何坐標) 則一點間距離 ds 之自乘,等於其相關坐標 dx_μ 與 dx_ν 之諸乘積之和,卽

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu \qquad (g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}) \qquad (2)$$

此第二事實,可簡言之曰空間爲一度量連續(Metrical Continuum). 欲合接近作用(Immediat Action)之物理學之精神,吾人假定 Pythagora 之定理,僅在極小距離,確爲有效.

由特殊相對論,發見時間可以同等根據與空間三坐標相聯合,作爲第四坐標 x_4,而物質事象之大舞臺,一世界一遂成四次元度量連續.於是限定世界度量性質之二次式(2),無須如三次元空間幾何學,必作爲正,而有不動指數 (

1. 見 Einstein and Other 之相對原理中

Inertial Index) 3 焉.[2] Riemann非未指出此二次式,宜視爲物理之實在,(Physical Reality) 蓋此自示(例如遠心力)爲及於物質之真效用之原,而物質亦因有反作用也.繼續至今,幾何學者與哲學者咸視空間之度量性質,專在空間本身,而與所含物質無關係.此實由於 Einstein 以一人之心力,獨創此一般相對論之偉大建築,絕非 Riemann 時代所克完成之者也.準 Einstein 之說,重力現象,亦必列諸幾何學之敍述中,而物質影響於測定之法則,不外重力法則:(2)式之$g_{\mu\nu}$,爲重力位(Gravitational Potential)之成分.當重力位構成一不變二次微分式時,電磁現象,爲一四位(Four-potential)所支配,而四位之成分Φ_μ,組成一不變一次微分式$\Sigma\Phi_\mu dx_\mu$,但二現象一重力與電一並存時,彼此各自分離焉.

Levi-Civita, Hessenberg 與著者之最近研究,明證 Riemann 幾何學之發展,若宜與自然一致,則所必據之基本概念,爲向量之極微平行變位.設 p 與 p* 爲一曲線所連結之二點,則 p 點之已知向量,可平行於其本身,順此曲線,由 p 運動至 p*.然就一般言之,向量由 p 至 p* 之移轉,非可得而積分者,申言之,至 p* 之向量,與其變位所經過之路程有關係,其可得而積分之者,惟在 Euclid 之"無重力"幾何學.上述之 Riemann 幾何學,仍含有限幾何學(Finite geometry)之殘餘要

2. 申言之若選擇一坐標令在連續之特別點, $ds^2=\pm dx_1^2\pm dx_2^2\pm dx_3^2\pm dx_4^2$ 則無論何時三符號將爲正一符號將爲負

素,(Residual Element)一就余所能知者,未有真實理由.此假基於表面論中之偶然根原(Accidental origen)二次式(2)不徒可使吾人就同點之二向量,比較其長,卽在任意二點之向量,亦可得而比較之.然真正微數幾何學,(Infinitesimal geometry)必僅允許長由某點至極近點之移轉原理.凡長由一點至有限距離之他點之移轉問題,彼實禁止吾人假定爲可以積分者,而更特別如方向之移轉問題,已證明其爲不能積分也.若以此假定爲虛僞,則一幾何學應用於世界時,不徒重力現象,卽電磁現象,亦將以驚人語說明之.準現今創出之理論,二種現象,同出一原,吾人不能使電任由重力分離.此論中之一切物理量,在世界幾何學中,含有深義,而表明物理效用之量,特可視爲純數(Pure numbers).此論導出一世界定律,其要義已經明確解釋,尙足使吾人就一定意義;理解世界之何以有四次元也.茲暫不計及物理解釋,略述Riemann之改正幾何學後,進而應用於物理學焉.

一定坐標系內,有極近p點之p'點,其相關坐標,(參考1式)爲極微變位pp'之成分,而由一坐標系變至他坐標系之轉換,表之以一定轉換式

$$x_{\mu}=x_{\mu}(\overset{*}{x}_1,\overset{*}{x}_2,\cdots\cdots,\overset{*}{x}_n) \qquad \mu=1,2,3,\cdots,n$$

此可定同點在二系內之坐標關係,於是p點之同一極微變位之成分dx_μ與$d\overset{*}{x}_\mu$間,有一次轉換式

$$dx_{\mu}=\sum_{\nu}\alpha_{\mu\nu}d\overset{*}{x}_{\nu} \qquad (3)$$

但$a_{\mu\nu}$爲關於P點之誘導因數(Derivative)$\frac{\partial x_\mu}{\partial x^*_\nu}$ p點之逆變向量(Contravarient Vector) X,無論關於何系,自有n個已知數ξ^μ爲其成分,當轉入他系時,可視爲一極微變位之成分,以同法(3)轉換之.余以P點之向量全體,爲在P點之向量空間.第一,此爲一次或仿似,(affine)卽以某數乘P點之向量,或以二向量相加,仍爲P點之一向量;第二,此實爲度量的,卽準屬於(2)之對稱雙一次方式,無向量乘積

$$XY=YX=\sum_{\mu\nu}g_{\mu\nu}\xi^\mu\eta^\nu$$

對於含有成分ξ^μ,η^ν之向量X與Y爲不變.然吾思此種方式,必僅與一任意之正因數成比例.若空間種種點,表之以坐標x_μ,則由P點之度量性質,$g_{\mu\nu}$僅在其比例範圍內決定之.就物理意義言之,有明確意味者,亦僅爲$g_{\mu\nu}$之比.蓋P爲已知原點時,發自P點之光信號,所達到之接近諸世界點,皆可滿足方程式

$$\sum_{\mu\nu}g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu=o$$

也.欲達解析說明之目的,吾人先選出一定坐標系,次就各點P,定賦與諸$g_{\mu\nu}$之任意比例因數.於是表出之諸公式,必有二重不變性:關於坐標之任意連續轉換,必爲不變,又若以$\lambda g_{\mu\nu}$易$g_{\mu\nu}$,而λ爲位置之任意連續函數,則諸公式亦仍保不變.此第二不變性之附屬,爲吾理論之特性焉.

設P, P^*爲二任意點,而就P點之各向量X,選定P^*點有一向量X^*,適足使aX變爲aX^*,(但a爲任意選定數)而

$X+Y$ 變爲 X^*+P^*，且 P 點之零向量,(Vector Zero) 適爲 P^* 點零向量相應之惟一量,則吾人已在 P^* 點之向量空間,造成 P 點向量空間之仿似或一次重出物.(affine or Linear Replica) 當 P^* 點之矢量 $Y,^*X^*$ 之無向量乘積,對於 P 點之一切向量 XY，適與 X, Y 之無向量乘積爲比例時,此重出物特有一酷似點.（自余觀之,此僅爲相似重出物之觀念含有客觀意義;前述理論已允許合同 (Congruent) 重出物之一定概念.) P 點向量,移至隣近點 P' 之平行變位,依二公理之假定,可決定其意義焉.

1. 依 P 點向量,移至隣點 P' 之平行變位,P 點向量空間之相似形像,再造於 P' 點之向量空間.
2. 若 P_1,P_2 爲 P 點隣近之二點,P 點之極微向量 PP_2，依平行變位,移至 P_1 點,變爲 P_1P_{12}，而 P 點之向量 PP_1，亦依平行變位,移至 P_2 點,變爲 P_2P_{21}，則點 P_{12} 與 P_{21} 適相重合,申言之,極微平行變位,爲一交換變位.

假定 1 謂平行變位,爲向量空間,由 P 至 P' 之仿似轉換,(Affine Transformation) 可解析表明之如次:在 P 點 $(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 之分向量 ξ^μ，由平行變位,變而爲 P' 點 $(x_1+dx_1,x_2+dx_2,\cdots,x_n+dx_n)$ 之分向量 $\xi^\mu+d\xi^\mu$，而 $d\xi^\mu$ 必與 ξ^μ 有一次式之關係,即

$$d\xi^\mu=-\sum_\nu d\gamma^\mu_\nu\xi^\nu \qquad (4)$$

其第二假定,示吾人以 $d\gamma^\mu_\nu$ 爲微分 dx_ϱ 之一次式,即

$$d\gamma^\mu_\nu=\sum_\varrho\Gamma^\mu_{\nu\varrho}dx_\varrho \qquad (5)$$

面右邊之性質,含有對稱性質

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}=\Gamma^{\mu}_{\rho\nu}.$$

若 P 點之二向量 ξ^{μ}, η^{μ},依平行變位,轉換為 P' 點之 $\xi^{\mu}+d\xi^{\mu}$ 與 $\eta^{\mu}+d\eta^{\mu}$,則 1 所述之相似假定,(Postulate of Similarity) 勝於仿似,(affinity) 直示吾人以

$$\sum_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}+dg_{\mu\nu})(\xi^{\mu}+d\xi^{\mu})(\eta^{\mu}+d\eta^{\mu})$$

必與 $\sum_{\mu\nu}g_{\mu\nu}\xi^{\mu}\eta^{\mu}$ 為比例

若吾人稱此與 1 微異之比例因數為 $1+d\varphi$,又依普通方法,以公式

$$a_{\mu}=\sum_{\nu}g_{\mu\nu}a^{\nu}$$

解釋指數之降下,則

$$dg_{\mu\nu}-(d\gamma_{\mu\nu}+d\gamma_{\nu\mu})=g_{\mu\nu}d\varphi. \tag{6}$$

由是而知為一次微分式

$$d\varphi=\sum_{\mu}\varphi_{\mu}dx_{\mu} \tag{7}$$

若此為已知,則由(6)式或

$$\Gamma_{\mu,\nu\rho}+\Gamma_{\nu,\mu\rho}=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\rho}}-g_{\mu\nu}\varphi_{\rho}$$

與對稱條件(5),可求得量 Γ 也無疑.是則空間之內部度量關係 (Metrical Connection) 二次式(2)之外,又由一次式(7)而定,但任意之比例因數須除外,[3]吾人若以 λg 易 $g_{\mu\nu}$ 而不變坐標

3. 余曾以下列諸點,修正此構造,(參攷1921年"Raum, Zeit, Materie"第 4 版 §§13, 18 之最後陳述(a)欲易平行變位可以滿足之假定 1 與 2,有一假定於此:設點 P 有一坐標系,採用此系時,P 點每個向量之成分,可準平

行變位,移至極近 P 點之任意點,仍然不變,此假定特表平行變位之特性,同於移轉,可確言其保向量於不變,(b)準一點 P 之行列陣(metrics) P 點之各個向量 $X=\xi^{\mu}$,實屬於次種地域,(Tract)卽二向量惟有同一測定數(measure-number) $l=\Sigma g_{\mu\nu}\xi^{\mu}\xi^{\mu}$ 時,可限定同一地域,茲則不得不以 P 與其隣近諸點之行列關係,加諸 P 點之行列陣依變至極近點 P' 之合同移動,在 P 點之地域,移動至 P' 點之一定地域中,若吾人必須使地域之合同移轉之概念,與(a)所假定之向量平行變位之概念相彷似,則知此種過程,(在此過程中地域之測定數 l 以 dl 增加)可表之以 $dl=ld\varphi$　$d\varphi=\Sigma\varphi_{\mu}dx_{\mu}$ 在此情形下,行列陣與行列關係,可確定彷似關係,(平行變位)——而準吾人空間問題之現今見解,此實爲幾何學之根本事實,——但此書所載之陳述,此爲一次式 $d\varphi$,其在已知行列陣之平行變位,仍保不變,

系,則量 $d\gamma^{\mu}_{\nu}$ 不變,$d\gamma_{\mu\nu}$ 有因數 λ,而 $dg_{\mu\nu}$ 變爲 $\lambda dg_{\mu\nu}+g_{\mu\nu}d\lambda$,於是方程式(6),表明 $d\varphi$ 變爲

$$d\varphi+\frac{d\lambda}{\lambda}=d\varphi+d(\log\lambda)$$

一次式 $\Sigma\varphi_{\mu}dx_{\mu}$ 中,倘未確定者,非爲依測定單位之任意選擇,所宜決定之比例因數,而爲其所固有之任意原素,由相加完全微分所搆成.就幾何學之解析表明,

$$g_{\mu\nu}dx_{\mu}dx_{\nu},\qquad \varphi_{\mu}dx_{\mu} \tag{8}$$

與

$$\lambda g_{\mu\nu}dx_{\mu}dx_{\nu}\qquad \varphi_{\mu}dx_{\mu}+d(\log\lambda) \tag{9}$$

占同等之地位,但 λ 爲位置之任意正函數,故有成分

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial\varphi_{\mu}}{\partial x_{\nu}}-\frac{\partial\varphi_{\nu}}{\partial x_{\mu}} \tag{10}$$

卽

$$\Delta F=F_{\mu\nu}\,dx_{\mu}\delta x_{\nu}=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\Delta x_{\mu\nu}$$

之逆對稱張量(Anti-symmetrical Tensor)含有不變之深義,而

此成分與在 P 點之二任意變位 dx 及 δx,有二重關係,——或與有成分 $\Delta x_{\mu\nu}=dx_\mu\delta x_\nu-dx_\nu\delta x_\mu$ 之表面原素,(Surface Elemet)有一次關係,而 $\Delta x_{\mu\nu}$ 可由此二變位而定,此理論之特例,已發展於今,卽在原點任意選擇之長單位,許其以平行變位,轉換於空間之一切點,而與所過路程無關係,——當令 Φ_μ 等於零而 $g_{\mu\nu}$ 可絕對決定時,此特例於是乎出,是則 $\Gamma^\mu_{\nu\varrho}$ 不外爲 Christoffel 之三指數符號而已.此例之生起,其必要且充分之不變條件,爲張量 $F_{\mu\nu}$ 之恆等於零.

此自暗示 Φ_μ 在世界幾何學中,爲四位,而張量 F 因解爲電磁場,蓋電磁場之不在,爲迄今專論重力現象之 Einstein 理論,所必要之條件也.若承認此見解,將見電量有如次性質,卽在一定坐標系內,以數所表之特性,與測定單位之任意選擇無關係.實則測定單位與次元(Dimension)之問題中,必有此理論之新確定法,從來測定單位,業已任意選定後,某量之一値,若可定各坐標系內數之母式(Matrix) $a_{\mu\nu}$,而二任意極微變位之不變二次式

$$a_{\mu\nu}dx_\mu\delta x_\nu \tag{11}$$

之係數亦諸數所搆成,則此量已稱爲第二秩(Second Rank)之張量.然吾人今日之稱爲張量者,爲以一坐標系爲基礎,而 $g_{\mu\nu}$ 所含之比例因數,一定選擇後,$a_{\mu\nu}$ 卽可明確決定.且令轉換坐標時,(11)式仍保不變,但以 $\lambda g_{\mu\nu}$ 易 $g_{\mu\nu}$,則 $a_{\mu\nu}$,變爲 $\lambda^e a_{\mu\nu}$,於是吾人謂此張量有權(Weight) e,或以次元"長=

l''歸諸一次原素 ds,則謂其有次元 l^{2e}.惟 o 權之張量,爲絕對不變,而有成分$F_{\mu\nu}$之場張量,屬於此類準(10)式,此張量可滿足 Maxwell 之第一方程式系

$$\frac{\partial F_{\nu\varrho}}{\partial x_{\mu}}+\frac{\partial F_{\mu\varrho}}{\partial x_{\nu}}+\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\varrho}}=o$$

平行變位之觀念,一旦明確,則幾何學與張量計算,不難創設焉.

(a)極短線 (Geodestic Lines) 已知一點 P 與在此點之一向量,則始於 P 點,順此向量方向之極短線,可平行於向量本身,順其原有方向,繼續運動此向量以定之.若取一適宜褁數(Parameter) τ ,則極短線之微分方程式,爲

$$\frac{dx^2_{\mu}}{d\tau^2}+\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho}\frac{dx_{\nu}}{d\tau}\frac{dx_{\varrho}}{d\tau}=o$$

(因曲線長之概念未有意義此自不能特定爲長度最短之線)

(b)張量計算　例如欲由有成分f_{μ} 秩 1 權 0 之協變張量場,以微分法導出秩 2 之張量場,須取 P 點之任意向量 ξ^{μ},造成一不變量 $f_{\mu}\xi^{\mu}$,並將向量 ξ^{μ} 平行於其本身,由坐標 x_{μ} 之 P 點,移至坐標 $x_{\mu}+dx_{\mu}$ 之 P' 點,造成此不變量之極微變化.就此變化,吾人可得

$$\partial f_{\mu}\xi^{\mu}=\frac{\partial f_{\mu}}{\partial x_{\nu}}\xi^{\mu}dx_{\nu}+f_{\varrho}d\xi^{\varrho}=\left(\frac{\partial f_{\mu}}{\partial x_{\nu}}-\Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}f_{\varrho}\right)\xi^{\mu}kx_{\nu}$$

故右邊括弧內之量,爲權 o 秩 2 之分張量場,而以完全不變方法,由場 f 造成之者也.

(c)曲率(Curvature) 欲構成 Riemann 曲率張量之類似,可始

自上所採用之圖,卽由點 P, P_1, P_2 與 $P_{12}=P_{21}$,所組成之極微平行四邊形[4].若吾人將 P 點之一向量 $X=\xi^\mu$,平行於其本身,移至 P_1 點後,復由 P_1 移至 P_{12},次則先移至 P_2,復由 P_2 移至 P_{12},則因 P_{12} 與 P_{21} 相重,而搆成同在此點之二向量之差 ΔX,始有意義.就其成分,可得

$$\Delta\xi^\mu=\Delta R^\mu_\nu\xi^\nu \tag{12}$$

但 ΔR^μ_ν 與所移轉之向量 X 無關係,而反與二變位 $PP_1=dx_\mu, PP_2=\delta x_\mu$ 所限定之表面原素,有一次關係,卽

$$\Delta R^\mu_\nu=R^\mu_{\nu\varrho\sigma}dx_\varrho\delta x_\sigma=\frac{1}{2}R^\mu_{\nu\varrho\sigma}\Delta x_{\varrho\sigma}$$

此曲率之成分 $R^\mu_{\nu\varrho\sigma}$ 僅與地點 P 有關係,而具有二對稱性質:(1)因後二指數 ϱ 與 σ 之交換,而變其符號,(2)若吾人完成三循環交換 $\nu\varrho\sigma$,將各成分相加,則其結果爲零.試使指數 μ 復其原位,可就 $R_{\mu\nu\varrho\sigma}$ 得權 1 秩 2 之共協變張量之成分.且吾人無須計算,可知 R 以自然不變方法,分爲二部分,

$$R^\mu_{\nu\varrho\sigma}=P^\mu_{\nu\varrho\sigma}-\frac{1}{2}\delta^\mu_\nu F_{\varrho\sigma} \qquad \left(\text{若}\begin{matrix}\mu=\nu & \delta^\mu_\nu=1\\ \mu\neq\nu & \delta^\mu_\nu=0\end{matrix}\right) \tag{13}$$

其第一項 $P^\mu_{\nu\varrho\sigma}$,非徒就指數 ϱ, σ,卽就 μ, ν,亦爲逆對稱.但 $F_{\mu\nu}=o$,特定吾人之空間,爲未有電磁場者,卽在此間內,長之移轉問題,爲可以積分者,而方程式 $P^\mu_{\nu\delta\sigma}=o$,如(13)所示,則對於重力場之不在時,卽對於可積分之方向移轉問題,應

4 但極微平行四邊形之二對邊,依平行變位由一邊生出他邊之事無關緊要.吾人僅就 P_{12} 與 P_{21} 之重合言之,

爲不變之條件,惟Euclid之空間,則同時爲無重力亦無電磁者也.

一次式如(12)之最簡不變量,就每個向量 X,定有一向量 ΔX,實爲其"激發物"(Spur) $\frac{1}{2}\Delta R^{\nu}_{\mu}$, 職是之故,準(13)式,吾人就現在事項,得一方式

$$-\frac{1}{2}F_{\varrho\sigma}dx_{\varrho}\partial x_{\sigma}$$

此爲吾人前已遇見者.張量如 $\frac{1}{2}F_{\varrho\sigma}$ 之最簡不變量,爲"其量之自乘"

$$L=\frac{1}{4}F_{\varrho\sigma}F^{\varrho\sigma}$$

因 F 有權 o,可知 L 明爲權-2 之一不變量.若 g 爲 $g_{\mu\nu}$ 之負行列式,而體積之極小原素,爲

$$d\omega=\sqrt{g}\,dx_0dx_1dx_2dx_3=\sqrt{g}\,dx$$

則知 Maxwell 之理論,爲電作用量 (Quantity of Electrical Action) 所支配,而此量等於最簡不變量之積分 $\int Ld\omega$,直亘某選定領域,實則以次之意義支配之,卽由 $g_{\mu\nu}$ 與 Φ_μ 之某變化,消失於世界領域之極限,可得

$$\delta\int Ld\omega=\int(S^{\mu}d\Phi_{\mu}+T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})d\omega$$

但 $$S^{\mu}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}F^{\mu\nu})}{\partial x_{\nu}}$$

爲一般化之 Maxwell 方程式之左邊,(其右邊爲四電流之成分)而 $T^{\mu\nu}$ 爲電磁場之能力.運動量張量.因 L 爲權-2 之不變量,而 n 次元幾何學中,體積原素,爲權 $\frac{n}{2}$ 之不變量,惟

次元之數 $n=4$ 時,此積分始有深義.卽就吾人之解釋,Maxwell 方程式之可能性,實限於四次元之例.然四次元世界中,電磁作用量,雖爲一純數,而驗諸觀測之物理問題,(例如電子)未據吾人理論,實行計算之先,量 l 之大小,不能以 $C.G.S$ 制之慣用單位確定之.

試由幾何學移至物理學,吾人倣 Mie 理論之先例,宜假定一切自然法則,奠基於一定積分之不變量,卽作用量

$$\int \mathbf{W} d\omega = \int W dx \qquad W = \mathbf{W}\sqrt{g},$$

適使真世界依其特性,可與其他一切四次元行列空間相區別.特性者何,其領域某部分所含之作用量,關於位 $g_{\mu\nu}, \Phi_\mu$ 之變化,在所論領域之極限,歸於消失者,可取一定常値是也.作用之世界密度,W,必爲權-2 之不變量.無論何時,作用量爲一純數:卽吾人之理論,直可說明世界之原子構造,而現今觀察,舉最根本之重要物,——作用量子(Action Quantum)——附着於玆焉.吾人就 W 所能取之推測,其最簡單最自然者,爲

$$\mathbf{W} = R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} R^{\nu\rho\sigma}_{\mu} = |R|^2$$

準(13)式,吾人可得

$$\mathbf{W} = |P^2| + 4L$$

(除與前項相加宜附諸電項之 4 外,諒無可疑者.)然吾人卽不特述作用量,亦可由作用原理,推出一般結論.準 Hilbert, Lorentz, Einstein, Klein 與著者之研究,吾人將證明電量

不滅之法則,關於坐標轉換,(由(8)至(9)之轉換)與"測定不變量"(Measure Invarience)攸關,猶之物質不滅之四法則,(能力運動量張量)與作用量(含有四任意函數)之不變量相關聯,試加以第五任意函數,測定不變量始現於茲焉.自余觀之,結合電量於能力與運動量之方法,藉今所創立之理論,似爲一般議論中之强有力者,——以純粹推理事項中,能全爲確定之一問題者爲限.

就在世界領域之極限,歸於消失之變化,吾人可得

$$\delta\int W dx=\int\left(W^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}+w^{\mu}\delta\phi_{\mu}\right)dx \qquad \left(W^{\mu\nu}=W^{\nu\mu}\right) \tag{15}$$

於是自然法則可取方式

$$W^{\mu\nu}=o, \qquad w^{\mu}=o \tag{16}$$

前式可視爲重力場之法則,後式可視爲電磁場之法則,以

$$W^{\mu}_{\nu}=\sqrt{g}\,\mathbf{W}^{\mu}_{\nu} \qquad w^{\mu}=\sqrt{g}\,W^{\mu}$$

所解釋之$\mathbf{W}^{\mu}_{\nu}$與$\mathbf{W}^{\mu}$,爲權-2秩2或1之張量之混合或逆變成分,方程式系(16)中,與不變量性質相應者,有過多之五式.此可表之以含W^{μ}_{μ}與w_{μ}於左邊之不變恆等式加次:

$$\frac{\partial w^{\mu}}{\partial x_{\mu}}\equiv W^{\mu}_{\mu} \tag{17}$$

$$\frac{\partial W^{\mu}_{\nu}}{\partial x_{\mu}}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}W^{\beta}_{\alpha}=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}w^{\mu} \tag{18}$$

其第一式由測定不變量而出,蓋由(8)至(9)之轉換,吾人對於$\log\lambda$試取位置$\delta\varrho$之極小函數,可得變化

$$\delta g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}\delta\varrho, \qquad \delta\Phi_{\mu}=\frac{\partial(\delta\varrho)}{\partial x_{\mu}}$$

對此變化，(15) 式必歸於消失.次則藉世界連續之極微變形,利用作用量關於坐標轉換爲不變,可得恆等式

$$\frac{\partial W^{\mu}_{\nu}}{\partial x_{\nu}}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}}W^{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^{\mu}}{\partial x_{\mu}}\Phi_{\nu}-\Gamma_{\alpha\mu}w^{\alpha}\right)\equiv o$$

準(17)式,以 $g_{\alpha\beta}W^{\alpha\beta}$ 易 $\frac{\partial w^{\mu}}{\partial x_{\mu}}$ 時,此式變爲(18)式.

故僅由重力法則,吾人已得

$$\frac{\partial w^{\mu}}{\partial x_{\mu}}=o \tag{19}$$

而僅由電磁法則,可得

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}W^{\mu}_{\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}W^{\beta}_{\alpha}=o \tag{20}$$

在 Maxwell 理論中,w^{μ} 有方式

$$w^{\mu}=\frac{\partial(\sqrt{g}F^{\mu\nu})}{\partial x_{\nu}}-S^{\mu} \qquad S^{\mu}=\sqrt{g}\,S^{\mu}$$

但 S_{μ} 表四電流.因爲第一部分,滿足方程式 (19)，上式示吾人以電量不滅之法則

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,s^{\mu})}{\partial x_{\mu}}=o$$

又 Einstein 重力論中,W^{μ}_{ν}亦由二項而成,其第一項恆滿足方程式 (20)，而其第二項等於能力運動量之混合成分T^{μ}_{ν}與 $\sqrt{g}$ 相乘而得之積.故方程式(20)導出物質不滅之四法則.若吾人就作用量選定方式 (14)，則酷似之情狀,表現於吾人理論中.此五不滅原理,爲場法則之"消去式,"(Eliminant) 卽諸法則以二重方法,由諸原理而生,遂表示其中過多者有五也.

若以方式(14)表作用量,則 Maxwell 方程式,變爲

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}F^{\mu\nu})}{\partial x_\nu}=s^\mu \qquad (21)$$

而電流爲

$$s_\mu=\frac{1}{4}\left(R\Phi_\mu+\frac{\partial R}{\partial x_\mu}\right)$$

但 R 表權-1 之不變量,吾人試先就 μ,ϱ,次就 ν,σ 約縮之,R 可由 $R^\mu_{\nu\varrho\sigma}$ 而出.若以 R^* 表僅由 $g_{\mu\nu}$ 搆成之 Riemann 曲率之不變量,則依運算可得

$$R=R^*-\frac{3}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,\Phi^\mu)}{\partial x_\mu}+\frac{3}{2}\Phi_\mu\Phi^\mu$$

在靜場中,電磁位之空間成分,歸於消失,而一切量與時間 x_0 無關係,準 (21), 必得

$$R=R^*+\frac{3}{2}\Phi_0\Phi^0=常數$$

但 $R\neq o$ 之世界領域中,吾人由長單位之適宜測定,可使到處之 $R=\pm 1$. 惟在與時俱變之條件下,吾人宜豫期表面 $R=o$,此明可表或種單一部分.因 R 未有權-2,不能用爲作用密度 (Einstein 重力論中表之以 R^*) 其結果爲吾人之理論,雖導至 Maxwell 之電磁方程式,而未導至 Einstein 之重力方程式四次微分方程式,實現於玆焉.然 Einstein 之重力方程式,全爲正確,亦屬難信之事,何也,他不具論,卽如其中所含重力常數,不可與其他自然常數,一例而觀,例如電子之荷電與質量之重力半徑,(小至 10^{20} 或 10^{40} 倍)實與電子本身之半徑,次數全異也.

吾人之目的,惟在簡單擴張此理論之一般原理.[5]其目的在以(14)所表作用量之特別式爲基礎,導出此理論之物理結果,且以經驗與之相較,特驗電子之存在,與原子內未曾說明之特性,可由此理出導出否.[6]由數學上觀之,此工作異常繁劇,何也.吾人若限定於一次項,恐不得近似之解答;蓋就電子內部,實不許略去高次項,而略去後之一次式,僅能得解答爲零也.余欲於他篇中,轉而就一切事項,詳細敘述之.

5. 解釋一切W不變量在包含$g_{\mu\nu}$之誘導函數僅至二次與Φ_μ之誘導函數僅至一次之需要下,容許其爲作用量之問題,已爲 R. Weitzeböck 所解答,(Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch in Wien, 129, 1920; 130, 1921.)若就變化$\delta\int W d\omega$之恆等於零略去不變量W.則準R. Bach (Math. Zeitschrift. 9, 1921, pp. 125 與 189) 之近日計算,僅存三組合.而眞正之W似爲 Maxwell 之 L 與R之自乘之一次組合,此種推測,已爲W. Pauli (Physik. Zeitschrift, 20, 1919, pp. 457-67) 與著者仔細研究之.吾人特以此爲根據導出質點之運動方程式.前所運出之不變量 (14) 偶覺是在自然界中占有位置.(參考"Raum, Zeit, Materie." ed. 4. §§ 35, 36, 或 Weyl, Physik, Zeitschrift, 22, 1621, pp. 473-80)

6. 余由 Mie 之理論,已引足此希望余不信物質問題可僅由場理論解決之.(參考余之"Feld und Materie" Ann. d. Physik, 65, 1921, pp. 541-63)

德國原子量委員會第九次報告(1931)

陳 鼎 銘 譯

本文載於德國化學會報告第64期第一卷中,卽一千九百卅一年一月七日刊,署名委員爲 M. Bodenstein, O. Hahn, O. Konigschmid (委員長), R. J. Meyer 四人,報文中記載同位元素 (isotopes) 及等重原子 (isobars) 研究之結果甚多,故譯記之,

譯者附誌.

本會就 1929 年12月至現在所知之九篇關於原子量論文,而作此報告.

依報告結果,應將從前實用原子量表中之 As = 74,66 改爲 74,93; Ta=181,5改爲 181,36; Re=188,7 改爲 186,31,

報文仍分爲三部.

I. 用物理化學法測定之原子量

在本報告期中並無此類專文之發表,日內瓦學者[1]如T. Batuecas, C. Schlatter及 G. Maverik 等發表研究氣體定律之壓縮性及差違之論文頗多,(如氧化炭與氮之測驗,氮,阿母

1) T. Batuecas, C. Schlatter u. G. Maverik, Journ. chim. physique 26, 548 [1929]; G. Maverik, ebenda 27, 36 [1930]; C. Schlatter, ebenda 27, 45 [1930]

1931.

實用原子量表

Ag	Silber	107.880	Mo	Molybdän	96.0
Al	Aluminium	26.97	N	Stickstoff	14.008
Ar	Argon	39.94	Na	Natrium	22.997
As	Arsen	74.93	Nb	Niobium	93.5
Au	Gold	197.2	Nd	Neodym	144.27
B	Bor	10.82	Ne	Neon	20.18
Ba	Barium	137.36	Ni	Nickel	58.69
Be	Beryllium	9.02	**O**	**Sauerstoff**	**16.0000**
Bi	Wismut	209.00	Os	Osmium	190.9
Br	Brom	79.916	P	Phosphor	31.02
C	Kohlenstoff	12.000	Pb	Blei	207.21
Ca	Calcium	40.07	Pd	Palladium	106.7
Cd	Cadmium	112.41	Pr	Praseodym	140.92
Ce	Cerium	140.13	Pt	Platin	195.23
Cl	Chlor	35.457	Ra	Radium	225.97
Co	Kobalt	58.94	Rb	Rubidium	85.45
Cp	Cassiopeium	175.0	Re	Rhenium	186.31
Cr	Chrom	52.01	Rh	Rhodium	102.9
Cs	Caesium	132.81	Ru	Ruthenium	101.7
Cu	Kupfer	63.57	S	Schwefel	32.06
Dy	Dysprosium	162.46	Sb	Antimon	121.76
Em	Emanation	222	Sc	Scandium	45.10
Er	Erbium	167.64	Se	Selen	79.2
Eu	Europium	152.0	Si	Silicium	28.06
F	Fluor	19.00	Sm	Samarium	150.43
Fe	Eisen	55.84	Sn	Zinn	118.70
Ga	Gallium	69.72	Sr	Strontium	87.63
Gd	Gadolinium	157.3	Ta	Tantal	181.36
Ge	Germanium	72.60	Tb	Terbium	159.2
H	Wasserstoff	1.0078	Te	Tellur	127.5
He	Helium	4.002	Th	Thorium	232.12
Hf	Hafnium	178.6	Ti	Titan	47.90
Hg	Quecksilber	200.61	Tl	Thallium	204.39
Ho	Holmium	163.5	Tu	Thulium	169.4
In	Indium	114.8	U	Uran	238.14
Ir	Iridium	193.1	V	Vanadium	50.95
J	Jod	126.93	W	Wolfram	184.0
K	Kalium	39.104	X	Xenon	130.2
Kr	Krypton	82.9	Yb	Yttrium	88.93
La	Lanthan	138.90	Y	Ytterbium	173.5
Li	Lithium	6.940	Zn	Zink	65.38
Mg	Magnesium	24.32	Zr	Zirkonium	91.22
Mn	Mangan	54.93			

尼亞及硫化氫之測驗,氧化炭及氯化氫之測驗等)其目的亦欲藉以測定原子量,但本報告未曾採用之,

II. 用化學法測定之原子量

鈣

鈣原子量之測定,為 O. Hönigschmid 與 G. Kempter[2] 研究之對象,蓋以鈣似有一同位元素,其原子量為41,為近世多方學者所探究之問題也,因此動機,此項研究亦入於深邃之境,

O. Honigschmid 與 Kempter 分析所用之試料為氯化鈣,其所用之分析法,大致與 T. W. Richards 與 O. Honigschmid 在二十年前,專為此種目的所選用之分析法相同,[3] 分析時用兩種氯化鈣,其一種氯化鈣之原料,為大理石,他一種則為市上之硝酸鈣,用硝酸將大理石溶化後,加純淨氧化鈣於所得之硝化物溶液中,使鐵與鎂生沉澱而除去之,然後令所得之硝化物從新結晶十次,乃加純淨之炭酸錏,使變為炭酸鈣,溶化炭酸鈣于極純淨之鹽酸中,使所得之氯化鈣從新結晶兩次,卽為測一種氯化鈣,(Probe I),市上之硝酸鈣從新結

2) O. Hönigschmide u. G. kempter, ztschr. Anorgan. allgem. chem. 195 [1931].

3) T. W. Richards u. O. Hönigschmid, Journ Amer. chem. Soc. 33, 28 [1911]

晶十五次,然後用上述之方法,變為氯化後,即成第二種氯化鈣,(Probe II),

將氯化鈣放在氯化氫氣流中融化之,在氮氣流中冷却之,秤其量用 Methylrot 作指示劑以檢查所製氯化鈣之酸或鹼反應,故用$\frac{n}{1000}$硝酸溶液及氫氧化鈉溶液,與用一純淨氯化鈣之標準溶液作比較,以觀其中和點之差違,然得加一相當之校正,

$Ca\,Cl_2 : 2\,Ag : 2\,Ag\,Cl$ 之比例用普通方法及藉反光微量測定法 (Nephelometer)之助以測定之,

所用之試藥皆按標準法而精製之,秤時用置換法並校正至真空狀態.

比例 Oa O2: 2 Ag'

No	Probe	Ca₂ Cl在真空	Ag'在真空	Ca Cl₂: 2Ag'	鈣之原子量
4	I	1.84526	3.58692	0.514441	40.082
5	I	1.62314	3.15509	0.514451	40.084
6	I	1.42216	2.76444	0.514447	40.083
7	I	2.21933	4.31400	0.514448	40.083
8	I	1.03950	2.02064	0.514441	40.082
9	I	1.45783	2.83364	0.514472	40.088
10	II	2.93786	5.71052	0.514464	40.086
11	II	2.45368	4.76952	0.514451	40.084
12	II	2.11276	4.10689	0.514441	40.082
		17.11152	33.26166	0.514451	40.084

比例 $Ca\,Cl_2 : 2\,Ag\,Cl$

No	Probe	Ca Cl₂在真空	AgCl 在真空	CaCl₂: 2AgCl	鈣之原子量
1	I	1.97942	5.11225	0.387191	40.083
2	I	2.35393	6.07937	0.387199	40.086
3	I	1.67385	4.32284	0.387210	40.089
5	I	1.62314	4.19217	0.387183	40.082
6	I	1.42216	3.67297	0.387196	40.085
7	I	2.21933	5.73153	0.387214	40.080
8	II	1.03950	2.68467	0.387198	40.086
9	II	1.45783	3.76499	0.387206	40.088
		13.76916	35.56079	0.387200	40.086

就所得分析之平均價觀之,鈣之原子量爲 40.085 此數較 T. W. Richards 與 O. Hönigschmid 所得者高 0.01, 其差錯之原因何在,不得而知.

本會對於目前有効之鈣原子量,認爲無更改之必要.

雖然,本研究之動機,原欲答復一種放射性鉀崩壞物之存在之一問題.

據 G. V. Hevesy 與 M. Lögstrup[4] 之放射性測定法,及 O. Hönigschmid 與 Goubeau[5] 之原子量測定法,近世學者多以鉀之同位元素 K_{41} 爲鉀放射之發動者,其放射 β 線之崩壞物,似爲鈣之同位元素 Ca_{41}, 果如是,則由於古老鉀鑛中所出之鈣,其原子量當較普通鈣之原子量爲大.

兩位俄國學者 A. V. Froscher 與 O. Frost[6] 亦研究頃述之問題,其所用之鈣,係由烏拉山所產之鉀長石中而鍊出,該鑛含 11% 鉀,僅含 0,042% 鈣,總共製得 0.15gr CaO,用此鈣之硫酸鹽與草酸鹽,作分級結晶,除去其所含之混合質,如 Ba 及 Sr 等,然後測定 $CaCl_2 : CaBr_2$ 之比例,而得 Ca=40.24 及 40.21, 其平均數爲 40.225, 爲證明其所用之精鍊法準確計,乃加 Ba, Sr, Fe, Mg, Al 之鹽於普通鈣化中物用上法精鍊測定之,而得 Ca=40.06, 40.16 及 40.08 三數,平均之,則爲 40.10,以此二

4) G. V. Hevery u. M. Lögstrup ztschr. anorgan. allg. chem. 171, 1 [1928]

5) IX. Bericht, B. 62, 1 [1929]

6) A. V. u. O. Frost, Nature, 125, 48 [1930]

氏斷定其由鉀長石製出之鈣之原子量較大於平常之鈣,並非由於夾雜物,實由於理想之鈣同位元素之所致,

而O. Hönigschmid[7]對於二氏所用精鍊法之効果,及所測定之原子量,覺尙有懷疑之處,蓋以二氏所作之三個比較試驗,其最高數與最低數之差,達0.10, 此數正等於二氏所用兩種鈣試驗所得原子量之差,(40.21及40.10)足見其所作之試驗,不十分精確也.

O. Hönigschmid與G. Kempter[8]檢驗V. Hevesy 由Sylvin(一種氯化鉀鑛)中鍊出之鈣化物,將約50草酸鈣變成氧化鈣後,再變爲硝酸鈣,然後加氧化鈣(係由原來精製之鈣化物加阿母尼亞所製成)於硝酸鈣溶液中,除去鎂及其他在碱性溶液中能生沉澱之金屬,將所得之硝酸鈣,從新結晶十次後,卽使之經過炭酸鹽,而變爲鹽酸鹽,然後用光學分析鑑定其純淨與否,而分析之,其用兩種完全純淨氯化鈣,由測定$CaCl_2$:2AgCl之比例,所得之結果爲Ca=40.20及Ca=40.23, 此數較原子量表中所載者(40.07)爲高,此種較高之數,大概由鈣族中原子量較大之金屬而來,因從前有人發現平常的鈣,如含有極小量之Ba或Sr時,亦足以增大鈣之原子量也,于是Ruthardt又在W. Gerlach指導之下,將O. Hönigschmid之鈣化物作一詳細火焰光帶試驗,果然發現第一種試物中含

7) O. Hönigschmid, Nature 125 911 [1930]

8) O. Hönigschmid, u. G. kempter, ztschr. Anorgan. Allgem. chem. 195 [1931]

有 0.24 At-% Sr，第二種試物中含有 0.29 At%Sr.就此結果計算之,應爲 Ca=40.199，（試驗所得者爲 40.195）及 40.222，(試驗所得者爲 90.266）觀此可知由光學分析算出之數,與試驗所測得之數實相符合,且證明鈣原子量之增高,實因含有雜質,非由于鈣之同位元素也,

O. Honigschmid 與 Kempter 將其鈣試物中之 Sr，鍊淨至僅含 Sr 0.015 At%，按此計算之,鈣之原子量應爲40.091實驗所得者爲 40.093.

彼等所用之鍊淨法,是以草酸鈣溶解于醋酸中,然後加草酸使生沉澱,所得之沉澱再溶解于醋酸,再加草酸又使生沉澱,如是反復至十次,故所得之草酸鈣,僅佔原有量十分之一,以此吾人可知欲除去鈣化物之 Ba 或 Sr（以 Sr 爲最難除去）非有多量之試物不可,

總之由 Sylvin 中取出之鈣之分析數,對於假想之鈣同位元素 41,不能與以承認及附會,即使 Sylvin 含有鈣同位元素 41,則其量亦必極微,以現有之分析法,不能證得之,

鉛

O. Honigschmid 在數年前已與 L. Birckenback[10] 及 E. Kothe 用氯

9） O. Hönigschmid u. H. striebel, ztschr. Anorgan. allgem. chem. 194, 293 [1930]

10） O. Hönigschmid, L. Birckemback u. E. kothe, sitzungsber. Bagr. Akad. Wiss. 1922, 179.

化鉈作決定鉈原子量之試驗矣,當時所定鉈之原子量爲294.39, 近又與 H. Striebel[9] 用溴化鉈作校定該原子量之試驗;溴化鉈係由純淨硫酸鉈 (Tl_2SO_4) 溶液中,用純淨溴化氫酸(用絕對純淨之氫與溴合成)所製成,在氮氣中蒸溜後,盛於水晶質玻璃管內而秤之,如此溶解度甚小之溴化物,在熱水中之溶解之,加硝酸銀使生沉澱,亦須于沸水中行之,

其僅用 Nephelometer 滴定法,測定Tl Br:Ag之比例,而未用秤量法,秤定所生Ag Br 沉澱,以測定Tl Br:Ag Br 之比例者,以Ag Br在熱時,對於Tl NO_3所生之吸藏(Okklusion)甚大故耳.

所用之試藥皆用普通法精淨之,用平衡法秤之,並校正至真空狀況下,

比例 Tl Br : Ag'

預備試驗

No	TlBr在眞空	Ag'在眞空	TlBr:Ag'	鉈原子量
7	3.86281	1.46582	2.635255	204.375
8	3.78429	1.43583	2.635611	204.414
9	3.96949	1.50639	2.635101	204.359
10	3.94471	1.49669	2.635623	204.415
	15.56130	5.90473	2.635398	204.391±0.024

最後試驗

No	TlBr在眞空	Ag'在眞空	TlBr:Ag'	鉈原子量
11	4.01222	1.52251	2.635267	204.377
12	3.97142	1.50692	2.635455	204.397
13	3.90498	1.48170	2.635472	204.399
14	4.07193	1.54509	2.635400	204.391
15	3.68886	1.39974	2.635389	204.390
16	4.04739	1.53580	2.635363	204.387
	23.69680	8.99176	2.635391	204.390±0.0008

就結果觀之,鉈原子量之折中數爲 204.39 與從前用其

氯化物所測定者相同.

砒

J. H. Krepelka[11]分析三氯化砒,重定砒之原子量,其所得之結果,已就"Nature"簡報中所載者,于上次報告中宣布之矣,現將所得詳細報告,特述於下,

其當作原料之金屬砒,係由三氧化砒製取之,三氧化砒先在稀鹽酸中從新結晶,及反覆昇華鍊淨之,後用糖炭還元成金屬砒,再使金屬砒在真空中昇華,導入氯氣,製成三氯化砒,在真空內作分級蒸溜而鍊淨之,盛于玻璃球內,抽去其空氣,密封而秤之,使秤過之三氯化砒,完全溶解于足量冰水中,(冰水中加有數滴硝酸)

$AsCl_3 : 3Ag' : 3AgCl$ 之比例,係用普通方法及 Nephelometer 所測定者,

秤量皆校正至真空狀況

比例 $As\,cl_3 : 3\,Ag'$

No	$As\,cl_3$在真空	As'在真空	$As\,cl_3$:3Ag	砒原子量
2	3.98710	7.11681	0.560237	74.941
3	4.81766	8.59961	0.560218	74.935
4	6.27437	11.20020	0.560201	74.930
5	2.42721	4.33242	0.560244	74.943
6	3.86442	6.89796	0.560227	74.938
7	5.09819	9.10041	0.560215	74.934
8	5.46890	9.76222	0.560211	74.933
9	5.10039	9.10415	0.560227	74.938
10	5.71146	10.19540	0.560200	74.929
11	3.05992	5.46180	0.560240	74.942
12	1.49994	2.67755	0.560191	74.926
		析中	0.560219	74.935

11) J. H. Krepelker, Collect. Trav. chim. Tchecoslovaquie 2, 255[1930]

比例 $As\,Cl_3 : 3\,Ag\,Cl$

No	As Cl_3在眞空	AgCl空在眞	$Ascl_3$:3AgCl	砒原子量
5a	2.42721	5.75672	0.421631	74.933
12a	1.49994	3.55734	0.421646	74.943
		折中	0.421638	74.936

就十三個分析之析中數觀之,砒原子量爲 74.935, 其折中差誤數爲 ± 0.004,

此檢驗之結果,與Aston由砒之質量光帶 (Massen Spectum) 所算出之數 74.93,適相符合,以此吾人簡短之爲

As=74.93

列於原子量表內,以其尙可爲現日可靠之數也.

鉭

現日原子量表中所列 Ta 原子量,181.5 之數,爲 C. W. Balke[12] 在 1910 年由測定 $2Ta\,Cl_5 : Ta_2O_5$ 之比例所算出之數也,1912 世界原子委員會,選納于原子量表中,當時德國原子量委員會,以無較善者,故亦採用之,然其數之不確,自不待言,以其所用之分析比例本不適當也,以此,用最新方法以校正 Ta 原子量爲不可緩最重要之工作, K. K. Krishnaswami[13] 近用測定 $Ta\,Cl_5 : 5\,Ag : 5\,Ag\,Cl$ 及 $Tu\,Br_5 : 5\,Ag : Ag\,Br$ 之比例而定之.

所用之藥品,皆按普通標準法精淨之,金屬鉭係由純淨

12) C. W. Balke, Journ. Amer. chem. Soc. 32, 1129 [1910]

13) K. K. Krish nasenami, Journ. chem. Soc. London 1930, 1277

氯化鉀鉭,用鈉還元所製成,(在抵抗力最大鉬質鍋中行之)爲減少氧化鉭之形成,故在氬氣流內舉行之,如此製得之金屬鉭,含 99.2% Ta, 餘 0.80 % 爲 Ta_2O_5,並用光帶之檢驗,證明其不含他種原素.

氯化鉭與溴化鉭,由氯,溴與鉭合成,在真空內昇華鍊淨後盛於玻璃球內固封之秤過之玻璃球置於阿母尼亞溶液中壓破之,因加水分解,生不溶化之鉭酸,用傾瀉法並用 Jenenser 玻質坩堝濾過之,取其透明溶液,置於生沉澱瓶中,用普通方法測驗氯化銀,

測驗玻璃球細片之重量時,須先除去黏於其上之鉭酸,用熱飽和草酸溶液卽可,然後集玻璃球之細片於一水晶質濾過器上而秤之,

因一切衡量,皆校正至真空狀况,故玻璃球須在空氣中及水中秤之,

		a) $TaBr_5$:5Ag			b) $TaBr_5$:54Ag Br		
No	$TaBr_5$	Ag	$TaBr_5$:5Ag	Ta	AgBr	$TaBr_5$:5AgBr	Ta
1	3.07127	—	—	—	4.96415	0.61869	181.36
2	3.72095	—	—	—	0.01413	0.61870	181.37
3	3.81890	3.54594	1.07698	181.34	0.17267	0.61868	181.35
4	3.59654	3.33939	1.07700	181.36	5.81303	0.61870	181.37
5	2.69071	2.49831	1.07701	181.37	4.34926	0.61866	181.33
6	2.61163	2.42488	1.07702	181.37	4.22133	0.61868	181.35
7	3.92094	3.64064	1.07699	181.35	6.33750	0.61869	181.36
8	2.04583	1.89956	1.07700	181.36	3.30681	0.61867	181.34
(a)	18.68455	17.34872	1.07700	181.36	4 1.17888	0.61868	181.35
(b)	25.47677						

No	a) Ta Cl_5 :5Ag $TaCl_5$	Ag	$TaCl_5$:5Ag	Ta	b) Ta Cl_5:5Ag Cl Agcl	$Tacl_5$:Agcl	Ta
1	3.15350	4.74301	0.66488	181.35	6.30152	0.50044	181.37
2	2.96215	4.45549	0.66483	181.33	5.91874	0.50047	181.40
3	4.08061	6.13756	0.66486	181.34	8.15438	0.50042	181.36
4	3.21073	4.82972	0.66479	181.30	6.41613	0.50042	181.36
5	3.49922	5.26278	0.66496	181.36	6.99201	0.50046	181.39
	16.90621	25.42856	0.66485	181.34	33.78278	0.50044	181.37

就各種分析之折中數觀之,鉭之原子量,應為 181.36, 其折中差錯數為 ±0.014.

上記之分析既避免一切錯誤發生之可能點,又係採用最新可靠之方法,所報告之24個分析之得數,又皆在181.30−181.40之間,故吾人可視為完全相等特將

Ta = 181.36

當作現時最可靠之數而列入原子量表中.

硫

O. Honigschmid 與 Sachtleben[14] 研究一硫化銀之定量合成法,乃由所得Ag_2:2Ag之比例,算出硫之原子量,彼等因此為測定硫原子量最簡單最確實之方法,事實上將約 10gr 銀在 250°C 在硫蒸氣中(用氮氣流導硫氣于銀上)燒之,經過 6−8 小時後,始可完全變為硫化銀,視所用硫氣濃度之大小,硫

14) O. Hönigschmid u. P. Sachtleben, ztschr. Anorgan. allgem. chem. 195 [1931]

化銀結晶之粗細亦異,此法惟一之難點,在推算銀之組成式,就 Stas 及其他學者(素研究硫化銀之物理性與化學性者)之報告,硫化銀至融化點時(約在845°C)安定不變,實際上溫度稍高于 300°C 時,卽分泌硫黃,硫化銀在200°–300° 之間安定不變,過量的硫黃在此溫度又可完全驅出,硫化銀雖經熱解離,或被氫還元之部分,如遇新來之硫黃,仍吸收前此遺失之硫量,故于秤量時無甚影響.

合成時用約 10 gr 之純銀,分作十粒,每粒約重1gr,置於兩端稍狹之小水晶管中,在稱瓶內稱之,硫化時用普通的器具,所得之硫化物,在 280°C 在氮氣流中燒半小時,以去其多量硫黃,此法須行二次,檢查硫化物重量是否一定,至所用之硫,則由加新蒸溜硫酸于純淨拋硫硫酸鹽而製取之,在真空中蒸溜二次,在氮氣流中於 200°C 時,卽可完全逃散無遺剩者.

一切秤量皆用對掉法,卽稱一次後使砝碼與秤瓶對掉再秤之,並校正至真空狀況上,合成硫化銀之比重,用比重計測定之,爲 7.20, 合成 NoII 之銀及硫化銀在平常空氣中稱一次,在真中秤瓶中 (No IIa) 稱一次.

比例 $Ag_2S:2Ag$

No	Ag在真空在	Ag_2S在真空	$Ag_2S:2Ag$	硫原子量
1	7,90291	9.07742	1.148617	320656
2	9.42181	10.82209	1.148621	320665
3	9,74522	11.19355	1.148620	320662
4	9.39836	11.02489	1.148622	320667

5	9.20378	10.57166	1.148622	320667
6	10.75224	12.35021	1.148617	320656
7	8.28317	9.51424	1.148623	320669
8	9.86327	11.32913	1.148618	320658
9	10.43748	11.98871	1.148621	320665
10	7.21091	8.28265	1.148627	320678
11	9.84440	11.30749	1.148621	320666
11a	9.84439	11.30748	1.148622	320667
	112.10794	128.76952	1.148620	32.0664

就十一個合成之折中數觀之,以銀爲107,880,硫原子量爲32,0964,其差錯折中數爲 ± 0,0006,

因此吾人現在共有下列各種硫原子量[15]

Richards u. Jones (1907) Ag_2SO_4: 2Agcl	32.068
Burt u. Usher (1911) NS: S	32.064
Scheuer (1914) 2Ag: Ag_2SO_4	32.063
Scheuer (1914) 2Ag: SO_2	32.065
Scheuer (1914) Ag_2SO_4: 2Agcl	32.060
Richards u. Hoover (1915) Na_2CO_3: Na_2SO_4: 2Na Br: 2Ag	32.056
Moles (1929) 由 SO_2 之密度算	32.061
Hönigschmid u. Sachtleben (1930) Ag_2S: 2Ag	32.066
折中	32.063

鉻

F. Gonzales[16] 有利用 Chromychlorid 之分析校定鉻原子量之報告,其所得數種試驗結果,可以證明其新分析之可用,

其所用之 Chromychlorid,係加硫酸于氯化鈉及鉻酸鉀混合物中,所製成,在低壓下反覆蒸溜精製之,在 30 m.m 恆壓下密封於玻璃球中,置水內壓碎之,濾過後,收集碎片,而稱之,用普通方法及藉 Nepheiometer 之助,測定濾液中之氯電

15) Literatur hierzubei E. Moles, Rec. trav. chim. Pays-Bas 48, 864 [1929]. X. Bericht, B. 63, 7 [1930]

離子,

盛 Chromychlorid 之玻璃球,在空氣中及在水內稱之,並校正至真空狀況下,

比例 $Cr\,O_2\,Cl_2 : 2Ag$

No	CrO_2Cl_2在眞空	Ag在眞空	$CrO_2Cl_2:2Ag$	鉻原子量
1	9.56543	13.32143	0.718049	52.012
2	9.54415	13.29120	0.718080	52.019

比例 $Cl\,O_2\,Cl_2 : 2Ag$

No	CrO_2Cl_2在眞空	Ag在眞空	$CrOCl_2:AgCl$	鉻原子量
1	0.56543	17.69786	0.540485	52.029
2	0.54415	17.65929	0.540460	52.022

就分析結果觀之,此法甚屬可用,但關於分析的材料之製造與精鍊上,尙有應改良之點,最要者分級蒸溜及裝 Chromychlorid 于玻璃時,宜在眞空中行之.

氯

A. F. Scolt 與 C. R. Johnson[17] 分析 Nitrosylchlorid 就 NOCl:Ag 之比例計算氯之原子量,

此處所用之計算比例爲最適當,以其用作基礎之銀原子量 107.880, 及氮原子量 14.008, 皆屬已經檢定爲最妥善之數值也,此法惟一之缺點,在 NOCl 之易生光學的分解,但此亦能力避免之.

16) F. Gonzales, Anales Soc. esponder Fisica Quim. 28, 579 [1930]
17) A. F. Scott u. C. R. Johnson, Journ. physical chem. 33, 1975 [1929]

彼等曾試驗分析物質,可否用合成法製取之,結果多量之氯,極難除去,故採用Tilden法(用氮氧根硫酸與氯化氫)並略加變更以製取之,起反應之器具,完全用玻璃製成,氮氧根硫酸由加SO_2於發烟硝酸中取得之,再置SO_3與硝酸混合溶液于濃硫酸中,導入空氣以驅逐多量之硝酸及氧化氮,然後使在真空中與 HCl 起反應,所成之NOCl仍在真空中分級蒸溜之,(注意避免 NOCl 之加水分解)裝于小玻璃球內密封之,爲防止光學的分解計,分級蒸溜及製造品之保存,皆在暗室中行之,

所用之藥品,及原子量的銀,皆用普通方法謹慎精製之,

所測定者爲NOCl:Ag:AgCl之比例,容量約 5 cc. 玻璃球在一有蓋載水之瓶中壓碎之,將透明溶液傾出,洗淨玻璃碎片,收集在一濾紙上,燒去濾紙後,卽稱其重量.

爲檢查各個分級蒸溜物之成分計,乃測定其所含之氯量,下表所列,爲視作最純淨的分級蒸溜物之分析結果,就其成分之固定均一度觀之,卽以此三個分級蒸溜物爲絕對純淨之一固定化合物,非一沸點相同之混合物,因爲彼等相信決無一混合物所得之分析數,恰等于氯之原子量也,再者三個分級蒸溜物質中之夾雜物,如 HCl, Cl_2, NO, N_2, O_2 皆已完全除去,

比例 NOCl : Ag

No	NOCl在真空	Ag在真空	NOCl:Ag	氯原子量
50	3.92308	6.46486	0.606832	35.4570

51	4.16219	6.85896	0.606825	53.4563
52	4.17839	6.88567	0.606824	35.4562
		折中	0.606827	35.4565

就表觀之氯之原子量爲35.4565,與現行原子量表中所載者正相同.

錸

去年原子量委員會始將 Rhenium=188.7 收入原子量表中,此數爲W. 與 I. Noddack 用氫還元 ReS_2 爲金屬錸時所算出之數,在本報告年中,德國化學工業界,製取甚多量之錸,因此 O. Hönigschmid 與 R. Sachtleben[18] 得以用普通的秤量法,重新規定其原子量.

暫時研究之結果,以分析甚安定之錸酸銀,測定 $AgReO_4$: $AgBr$ 之比例爲最適宜.

錸之銀鹽可用三種方法製得之

1. 市上所售之錸酸鉀,較爲純淨,重新結晶數次,加中性硝酸銀溶液于其稀薄溶液中,生較難溶解之錸酸銀沉澱,但如此所得之沉澱乃一銀鹽與鉀鹽之混合物,故此種沈澱法,須再用硝酸銀行一次,然後使所得之銀鹽重新結晶數次.

2. 與 3. 法乃使過錸酸與硝酸銀或氧化銀起反應而生銀鹽,此二法較第一法爲善,所用之過錸酸,先由過錸酸鉀

18) O. Hönigschmid u. R. Sachtleben, ztschr. anorgan. allgem. chem. 191, 309 [1930]

在高溫時用氫還元,用水洗去 K_2O, 將金屬錸在氧氣內燒之,成 Re_2O_7 用昇華法精鍊之,Re_2O_7 易溶于水而成過錸酸,此酸與硝酸銀卽成純淨之銀鹽,若氧化銀,則在熱過錸酸中甚易溶化,冷却時銀鹽卽結晶而出矣,爲除去過錸酸中之夾雜物如灰塵等,使其熱溶液經過一鉑質Gooch坩堝濾之卽可.

分析時,用在純淨空氣中熔化之銀鹽,在熔化時稍起分解,與一切銀鹽相似,觀原來透明無色熔質表面有分解之黑色薄膜卽知,如加極少量之純淨過錸酸于銀鹽上,則此分解作用,可減至極小,其餘份之過錸酸在銀鹽之熔點下,亦甚易逃散,

$AgReO_4$:$AgBr$ 之比例,則加極純淨溴化氫酸于過錸酸銀溶液中,生 $AgBr$ 沈澱以測定之,

所有秤量法皆用置換法,並校正至真空狀況下,

比例 $AgReO_4$: $AgBr$

Nr	試料	$AgReO_4$在眞空	$AgBr$在眞空	$AgReO_4$:$AgBr$	錸原子量
1	I	5.36365	2.81186	1.90751	186.34
2	IIa	7.83577	4.10795	1.90747	186.33
3	IIb	8.55829	4.48684	1.90742	186.33
4	IIb	6.34973	3.32894	1.90743	186.33
5	III	8.90918	4.97111	1.90729	186.30
6	III	6.95494	3.64684	1.90712	186.27
7	III	7.85704	4.11965	1.90726	186.30
		51.82860	27.17309	1.90735	186.31_4

所用物質量之兩極端比例……1 : 1.65
各數値的最大誤差……3.7:10.000
各分析的拆中誤差……±1.3:10.000
拆中數的拆中誤差……±0.5:10.000

就分析結果觀之Re=186,31,其拆中誤差爲±0.02,此數較原子量表中所載者少2.4,卽約低1%,從前之數本爲一臨時的,且係由100 m.g二硫化物算出之者,其所用之分析法經O. Honigschmid及R. Sachtleben證明爲不適宜,故不可靠,此新數則由一足信之舊法,及足量之物質所測出,故本委員會認爲在現時可靠之數,而列入原子量表內,

III.化學元素與原子種類在同位元素研究上之地位.

A. 質量光帶分析結果

(Massen-Spektroskopische Ergebniss)

用質量光帶分析測定原子量之法,經F. W. Aston之研究,又遂一長足之進步,

在前報告中對於Aston所創"原子質量縮小"(Packung-anteil)之原理已申明爲極重要矣,Aston意中之一個原子種類的質量縮小部份是指其原子量之差於整數者,用構成原子之陽電子(Proton)數目除之卽得,Aston能由質量光帶測定此種縮小部份因之能詳細測定許多單個原子種類之原子量,在純淨的原素亦能測得其實用原子量,以氧原子量16爲標準

19) VII. Bericht, B. 61, 31 [1928]

Aston之新進步,在用光學微量測定法(Microphotometrischem Weg)能將一混合原素所含各同位元素之比較量完全測定之,[20]知混合原素中各同位原素之原子量及各位元素之濃度,卽知該混合原素之折中原子量,若注意及其某原素之縮小部份卽知該原素之實用原子量矣.以Aston之標準原子量 $O_{16}=16$ 計算,然氧並非一純淨之原素,除 O_{16} 外尙含有極少量之同位元素 O_{17} 及 O_{18},[21]故化學原子量之基礎O=16(混合元素)較Aston之質量光帶之原子量爲高,二者之差約計氧原子量的1/1000,如欲使Aston的原子量,算至實用實用原子量,必須將Aston的數値縮少至比例15.998:16方可.[22]

直至現在Aston所作之檢查,爲久已所知含有多數的同位元素之原素如Krypton, Xenon及汞[23]等最近Aston又發現銘與鉬均爲混合原素,故亦檢查其原子量,

其檢查之結果分列于下,

Krypton

各同位元素原子量	78	80	82	83	84	86
密率%	0.42	2.45	11.79	11.79	56.85	16.70

20) F. W. Aston, proceed. Roy. Soc. London A. 126, 511 [1930]
21) X. Bericht, B. 63, 19 [1930].
22) X. Bericht, B. 63, 21 [1930]
23) F. W. Aston, proceed. Roy. Soc., London A 126 511 [1930]

由此算得之平均原子量爲 83.857 如加縮小部份 8.8×10^{-4} 之校正則爲 83.783(O_{16}=16) 若再校正至化學標準原子量O=16則得 Krypton 之實原子量(當作混合元素)爲 83.77 ± 0.02.

Xenon.

各同位元素原子量	124	126	128	129	130	131	132	134	136
密率	0.08	0.08	2.30	27.13	4.18	20.67	26.45	10.31	8.79

由此算得之平均原子量爲 131.35 校正至縮小部份則爲 131.28 再校正至化學標備原子O=16則其實用原子量爲 131.26 ± 0.04

汞

各同位元素原子量	196	198	199	200	201	202	204
密率	0.10	9,89	16.45	23.77	13.67	29.27	6.85

由此其平均原子量爲 200,63 如注意及其極少量之縮小部份則實用原子量(O=16)爲200,62 ± 0.05

如將上面 Krypton, Xenon, 汞各結果數與現在實用原子量比較之則汞數甚相等而Krypton 及 Xenon 則差約 1 %

故Aston主張應重新測驗此二原素之比重以重新檢查此二原素之實用原子量也.

Aston在其論文添入"Isotopen-moment"之新名詞此名詞之定義卽混合原素之折中原子量與各同位元素原子量之差,乘各個同位元素之密率所得各積之總合數也,因此一個純淨原素之 Jsotopen moment 是等于零,若由二個密率相等,質量不同的同位元素之混合原素,例如溴79及78二同位元素,密率相等,則其 Isotopen moment 爲$0.5\times1+0.5\times1=1$ 假如溴的組成爲$0.5\ Br_{78}+0.5\ Br_{82}$則其 Jsotopen-moment 爲2. 餘類推,Aston視 Jsotopen-moment 爲用質量光帶測定原子量時錯誤之大概標準,同時又視爲用物理法(如擴散速度及蒸發速度)變更混合原素之原子量時之詳細標準,

Aston測定上述之原素之 Jsotopen-moment 爲Krypton=0.87, Xenon=1.71, 汞=1.40.

鉻與鉬

最初Aston爲鉻僅由一種原子所成,而鉬則未之檢查,及用此二金屬之炭氧根化合物,(Carboryl)作詳細之硏究時,始發現鉻由四種同位元素[24]所組成鉬由七種[25]同位元素所組成.

24) F. W. Aston, Nature 126 200 [1930]

25) F. W. Aston, Nature 126 348 [1930]

詳細的結果如下

鉻

同位元素原子量	50	52	53	54
密率%	4.9	81.6	10.4	3.1

縮小部份爲$-10\times10^{-4}\pm3$,由此知鉻實用原子量(O=16)爲52.011±0.006此數與原子量表中所載者極相合

其一同位元素Cr_{50}與現尙未定之Ti_{50}爲等重原子其他一同位元素Cr_{54}確與Fe_{54}爲等重原子,(isobars)

鉬

各同位元素原子量	92	94	95	96	97	98	100
密率%	14.2	10.0	15.5	17.8	9.6	23.0	9.8

最令吾人注意者是其各同位元素之濃度之差甚小

鉬之縮小部份尙不能如鉻之詳細測定,但大概爲-5.5×10^{-4}其密率亦不能如上述各元素者之確.

就所測得之結果,觀鉬之實用原子量爲95.97±0.05,與原子量表中所載者亦甚相合,

Mo_{92}與Mo_{94}與已確定之Zr_{92}及Zn_{94}爲等重原子Mo_{96}與尙未確定之Zr_{96}爲等重原子.

下表將Aston測定之上述諸混合原素之實用原子量與原子量表中所載者作一比較.

實用原子量

原素	Asfon測定者	由從來舊法測定者
Cr	52.011±0.006	52.01
Kr	83.77 ±0.02	82.9
Mo	95.97 ±0.05	96.0
X	131.27 ±0.04	130.2
Hg	200.62 ±0.05	200.61

B. 線條光帶分析結果

(Band Spektroskopische Ergebniss)

茲將前次報告中所載用線條光帶分析測定現猶未知又屬其弱的同位元素之結果,繼述如下

氧

氧的二個同位元素O_{18}及O_{17}之存在,已被W. F. Giauque與H. L. Jahnston[26]所發現,並且其與O_{16}的比較濃度又經H. P. Babcock[27]之重證,亦爲[28] $O_{18}:O_{16}=1:1256$及$O_{17}:O_{16}=1:10000$.

S. M. Naude[29]又證明此二同位元素存在于氧化氮的線條

26) W. F. Giauque u. H. L. Johnson, Journ. Amer. chem. Soc. 51, 3528 [1929]
27) H. D. Babcock, proceed. National Acad. Sciences Washington 15 471 [1929]
28) X. Bericht, B. 63, 20 [1930]
29) X. Bericht, B. 63 21 [1930]

光帶中,並由此氣體中確證其比較濃度為O_{18}:O_{16}=1:1075±110,並主張作此種試驗用氧化氮較用空中氧[30]尤為適宜,就其所得之結果觀之,O_{18}在氧中之量較以前諸學者所云者稍高,但此甚小之數值,對于由O_{16}=16計算O=16時無大影響,

A. Mecke 與 K. Wurm[31]由另一出發點,研究同位元素O_{18},由空中氧之線條光帶,計算O_{18}精確原子量,以O_{16}=16.000測得O_{18}=17.991±0.01,彼等雖未主張此數為絕對精確,著者斷定此二同位元素之質量差異一定小于2,000,因此二同位元素,必佔有各異之縮小部份,W. F. Giauque 與 H. L. Johnston[32]主張,須由線條光帶測驗同位元素的陪伴者(對主要的成分而言)之原子量,則其精確度可達至1:10000,著者亦以為然.

氮

S. M. Naude檢驗氧化氮線條光帶時,發現四種不同之分子類,適等于 $N_{14}O_{16}$, $N_{14}O_{18}$, $N_{14}O_{17}$ $N_{15}O_{16}$ 四化合物[33],由此可知氧同位元素外,尚有一至現在尚未發現氮同位元素N_{15}之存在,其存在之證據,與夫由O_{18}:O_{16}所求出之 N_{15}:N_{14} 比較密率為1:700±140,已詳載于其論文中[34]矣,就此可知此新同位

30) S. M. Kaudé, physical Rev. 36 333 [1930]
31) A. Mecke u. K. Wurm, ztschr. physik 61, 37 [1930]
32) X. Bericht, B. 63, 21 [1930]
33) S. M. Naudé, physical Rev. 34, 1498 [1929], 35, 130 [1930].
34) S. M. Naudé, physical Rev. 36, 333 [1930].

元素N_{15}在氮中之密率,較O_{18}在氧中者稍强.

如吾人由N_{15}在混合氮原素中之密率,及利用$N=14.008_3$,以求N_{14}之原子量,則 $N_{14}=14.0069\pm0.0012$, 若較Aston報告,使14.008 與O_{16}:O=15.998:16 比算之,則N_{14}之值,與Aston所算出之值($N_{14}=19.0063\pm0.0029$)甚相同.

Naude又用Aston規定,計算其他原子類以0=16作標準所定之原子量,已另製一表,其所算出之數,有與由化學法算出爲尤佳者,雖其校正數甚微,可歸之于實驗誤差內,然目前尙無將此表公布之必要,參閱 E. Mole[35]之討論,氧雖非單純原素但暫時以0=16爲標準,尙不致影響原子量,

G. Herzbery[36]在氮氣中檢驗無電極的圓圈放電之光帶,亦證明有上述氮同位元素之存在,並發現N_{15}及N_{14}的質量縮小不同,報告此二同位元素之比較密度爲1:800,此數與在Naude所定的誤差範圍之內.

氯

H. Becker[37] 由研究直接測量氯化氫的紫外線光帶之式樣與寬度時,發現有氯的同位元素Cl_{39}存在之預兆,又在氯化氫旋轉振動光帶中,尋出與中心質量39相當之吸收線條光帶,證上述之預兆爲事實.[38]

35) E. Moles, Anales Soc. Espanoda Fisica Quim. 28, 127 [1930]
36) G. Herzberg, ztschr. physical. chem. B, 9, 43 [1930]
37) H. Becker, ztschr. physik 59, 583 [1930]
38) H. Becker, ztschr. physick 59, 601 [1930]

作一比較濃度之估計,尙不可能,然有極少數之Cl_{39}之存在可斷言也.

以前Aston于氯的質量39處,曾發現一黑暗部,當時未能于一切氯化物中發現之,故未將Cl_{39}列入其表中.

鉛

自L. Grebe與H. Konnen[39]于鈾鉛及釷鉛線條光帶中測定同位元素効果後,最近R. Mecke[40]于平常鉛中得着久已候望之Pb_{206}及Pb_{208},而于Aston所測定之較弱同位元素Pb_{207},則未能尋出,然S. Bloomenthal[41]用弧形放電于平常鉛中發現鉛之三種同位元素Pb_{207}, Pb_{207}, Pb_{207}.之存在,並所測定比較濃度亦與Aston所報告者相同.鈾鉛(原子量206.1)光帶僅指示Pb_{206}之光帶.

C.鈾與鉛間安定原素存在之研究

(續下表)

39) L. Grebe u. H. Konen, physikal. ztschr. 22, 546 [1921]

40) R. Mecke, Naturmiss. 17, 122 [1930]

41) S. Bloomental, physical Rev. 35 34 [1930]

現時已知的普通化學原子之同位元素表

原子號碼	記 號	原 子	實用原子量	同位元素數目	同位元素原子量[44)]
1	H	Wasserstoff	1.0078	1	1.0078
2	He	Helium	6.940	1	4
3	Li	Lithium	4.002	2	9
4	Be	Beryllium	9.02	1	6b, 7a
5	B	Bor	10.82	2	10b, 11a
6	C	Kohlenstoff	12.000	1+[1]	12a, [13b]
7	N	Stickstoff	14.008	1+[1]	14, [15]
8	O	Sanerstoff	16.000	1+[2]	16a, [17c], [18b]
9	F	Flour	19.000	1	19
10	Ne	Neon	20.81	3	20a, 21c, 22b
11	Na	Natrium	22.997	1	23
12	Mg	Magnesium	24.32	3	24a, 25b, 26c
13	Al	Alumium	26.97	1	27
14	Si	Silicium	28.06	3	28a, 29b, 30c
15	P	Phosphor	31.02	1	31
16	S	Schwefel	32.06	3	32a, 33c, 34b
17	Cl	Chlor	35.457	2+[1]	35a, 37b, [39c]
18	Ar	Argon	39.94	2	36b, 40a
19	K	Kalium	39.104	2	39a, 41b[45]
20	Ca	Calcium	40.07	2	40a, 44b
21	Se	Ccandium	45.10	1	45
22	Ti	Titan	47.90	1(2)	48, (50)
23	V	Vanadium	50.95	1	51
24	Cr	Chrom	52.01	4	50c, 52a, 53b, 54d
25	Mn	Mangan	54.84	1	55
26	Fe	Eisen	58.94	2	54b, 56a
27	Co	Kobalt	58.69	1	59
28	Ni	Nickelt	63.57	2	58a 60b
29	Cu	Kupfer	65.38	2	63a 65b
30	Zn	Zink	69.72	7	64a, 65e, 66b, 67d 68c, 69g, 70f
31	Ga	Gallium	72.60	2	69a, 71b
32	Ge	Germanium	74.93	8	70c, 71g, 72b, 73d, 74a 75e, 76f, 77h
33	As	Arsen	79.2	1	75
34	Se	Selen	79.916	6	74f, 76c, 77e, 78b, 80a, 82d
35	Br	Brom	82.9	2	79a, 81b
36	Kr	Krypton	85.45	6	78e, 80d, 82c, 83c, 84a, 86b
37	Rb	Rubidium	87.63	2	85a, 87b[45]
38	Sr	Strontium	88.93	2	86b, 88a
39	Y	Yttrium	91.22	1	89
40	Zr	Zirkonium	96.0	3(4)	90a, 92c, 94b, (96)
42	Mo	Molybdan	107.880	7	92d, 94e, 95c, 96b, 97g, 98a, 100f
	Cd				
47		Silver	112.41	2	107a, 109b
48	Ag	Cadaium	114.8	6	110c, 111e, 112b, 113d, 114a, 116f
49	In	Indium	118.70	1	115

44). 加入之字母是按照Aston的規定表示混合原數內某同位元素比較參加度(a示甚強的,b示較弱的成分),圓括弧內的數悉示尚非準確之數,因爲完備起見故亦列入,方括弧內表示同位元素之原子種類係由線條光帶測驗而得其濃度甚小.

續前表

原子號號	記號	原素	實用原子量	同位元素數目	同位元素原子量
50	Sn	Zim	121.76	11	112, 114, 115, 116c, 117f, 118b, 119e, 120a, 121h, 122g, 124d
51	Sb	Antimon	127.5	2	121a, 123b
52	Te	Tellur	126.93	3	126b, 128a, 130a
53	I	Jod	130.2	1	127
54	X	Xenon	132.81	9	124h, 126h, 128g, 129a, 130f 131c, 132b, 134d, 136e
55	Cs	Caesium	137.36	1	133
56	Ba	Barium	138.90	1(2)	(136) 138
57	La	Lanthan	140.13	1	139
58	Ce	Cerium	140.92	2	140a, 142b
59	Pr	Praseodym	144.27	1	141
60	Nd	Neodym	200.61	3(4)	142, 144, (145) 146
80	Hg	Quecksilber	207.21	7	196g, 198e, 199c, 200b 201d, 202a, 204f
82	pb	Blei	209.21	3(4)	206b, 207c, 208a, (209)
83	Bi	Wismut	209.00	1	209

現時測定無放射性原素之等重原子類表

Ar_{40}	(Ti_{50})	Cu_{65}	Zn_{69}	Zn_{70}	Ga_{71}	Ge_{74}
Ca_{40}	Cr_{50}	Zn_{65}	Ga_{69}	Ge_{70}	Ge_{71}	Se_{74}
Ge_{75}	Ge_{76}	Ge_{77}	Se_{78}	Se_{80}	Se_{82}	Kr_{86}
As_{75}	Se_{76}	Se_{77}	Kr_{78}	Kr_{80}	Kr_{82}	Sr_{86}
Zr_{92}	Zr_{94}	(Zr_{96})	Cd_{112}	Cd_{114}	In_{115}	Cd_{116}
Mo_{92}	Mo_{94}	Mo_{96}	Sn_{112}	Sn_{114}	Sn_{115}	Sn_{116}
Sn_{127}	Sn_{124}	Te_{126}	Te_{128}	Te_{130}	X_{136}	Ce_{142}
Sb_{121}	X_{124}	X_{126}	X_{128}	X_{130}	(Ba_{136})	Nd_{142}

按照 Haskins 最初所倡之規則,凡原子號碼為偶數之原素,其所含同位元素之數目,幾乎無例外的,較在其兩傍奇

45), 斜字印的原子量是照其有關係的放射性原素的成分而列入的. (鈾87尚屬假定)

數號碼原素所含同位元素爲多,于是吾人可推想Polonium及Rodium有否無放射性或甚弱的同位元素之存在,此種同位元素,如或真有其存在,自不能于鈾或釷原質中探求之,須于與此等原素化學性結晶性相似之原素之化合物中求得之.

Polonium.

G. V. Hevesy與A.Guenther[42]根據頃述之推想,試驗多種碲及鉍之礦質中,有否此樣Polonium同位元素之存在先加入一定量之Polonium于被試之礦質中後用電解法析出之.由收獲量中用放射測定法檢驗.已加之Polonium量外同時可知有否新無放射性的同位元素之加入.結果未發現其存在,因此二人斷定每克礦質中所愈安定同位元素,決不能多於10^{-11}克.

鐳

O.Hahn 與K. Donat[43]以前亦作與頃述同樣之試驗,在鋇礦質中求一安定之鐳同位元素,由Mitherit礦質中製得220K. Gr.溴化鋇,依照製鐳法作分級重新結晶,此法應可增加推想上之鐳同位原素至五十萬倍之多,然結果未發見之,以

42) G. V. Hevesy u. A. Guenther, Nature 125, 744 [1930]

43) O. Hakn u. K. Donat, ztschr. physikal, chem. A 139, 143 [1928].

此二人斷定每克鋇鑛中所含之安定鐳同位元素必在2×10^{-10}克以下.

以原子構造論解釋氯與氟原子價之異點

高　志

吾人欲研究原子價之問題,須先了解原子之電子層組織.保李原則 (Pauli's Equivalent Principle) 謂在一原子中二電子不能俱有同樣之五個量子數 (Quantun numbers). 電子層之組織即由此五個量子數標定.此五個量子數爲:

(一) n　總量子數 (Total Quantun No.), 表示電子之總能力.

$n = 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots$

(二) l　角動量子數 (Reduced Agimuthal Quantum No.), 表示電子之角動量 (Angular Momentum).

$l = 0, 1, 2, 3, \cdots\, n-1.$

(三) S　軸轉量子數 (Spin Quantun No.), 表示電子本身之電磁動量 (Magnetic Momentum of Isolated Electron).

$S = \frac{1}{2}.$

(四) m_l　l 之電磁量子數 (Magnetic Quantun No. of l), 表示磁場中角動量子數之限度.

$M_l = -l, -l+1, \cdots 0 \cdots l-1,\ l\ .$

(五) m_s　s 之電磁量子數 (Magnetic Quantun No. of s), 表示磁場中軸轉量子數之限度.

$m_s = \pm\frac{1}{2}$.

每電子層最多能容納若干電子,可由保李原則推定之,例如

設 $n=1$,

則 $l=o,\cdots,n-1,=o$

$m_l=-l,\cdots o,\cdots l,=o$

$s=\frac{1}{2}$

$m_s=\pm\frac{1}{2}$

故 n 等于 1 時最多電子數爲 2,卽在第一電子層中最多能容納二電子其一之 m_s 爲 $+\frac{1}{2}$, 其他之 m_s 爲 $-\frac{1}{2}$. 列表說明如下

	第一電子之量子數	第二電子之量子數
n	1	1
l	0	0
m_l	0	0
s	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
m_s	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

由此可知於此二電子之外無其他第三電子能于第一電子層中存在.

又設 $n=2$,

則 $l=o$ 或 1;

$l=o$ 時, $m_l=o$,

$l=1$ 時, $m_l=-1$或o或1

$s=\frac{1}{2}$

$m_s=\pm\frac{1}{2}$

故最多電子數當爲8. 列表說明如下:

	第一電子之量子數	第二電子之量子數	第三電子之量子數	第四電子之量子數	第五電子之量子數	第六電子之量子數	第七電子之量子數	第八電子之量子數
n	2	2	2	2	2	2	2	2
l	0	0	1	1	1	1	1	1
m_l	0	0	−1	−1	0	0	1	1
s	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
m_s	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	第一對		第二對		第三對		第四對	

由此表可見 m_l 每有一値,則因 m_s 有正負之不同可有一對不同之電子.表中共得四對,卽有八個不同之電子.故知無第九電子能在第二電子層中存在.

由此類推,令n等于1, 2, 3, 4 則得下表:

n	1	2		3			4			
l	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3
m_l	0	0	1,0,−1	0	1,0,−1	2,1,0,−1,−2	0	1,0,−1	2,1,0,−1,−2	3,2,1,0,−1,−2,−3
s	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
m_s	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$
電子數	2	2,	2 2 2	2,	2 2 2,	2 2 2 2 2	2,	2 2 2,	2 2 2 2 2,	2 2 2 2 2 2 2
每層最多電子數	2	8		18			32			

每層中之最多電子數亦可用簡單之代數式表出

令: m_l之可能值之數目爲P,

m_s之可能值之數目爲Q.

$\because \quad m_l=-l,\ -l+1,\cdots o,\cdots l-1,\ l\ ,$

$\therefore \quad P=2l+1$

$\because \quad m_s=\pm\frac{1}{2}$

$\therefore \quad Q=2$

故每層中之最多電子數爲

$$\sum_{l=o}^{l=n-1} PQ=\sum_{l=o}^{l=n-1} 2(2l+1).$$

等差級數之總和爲

$$S=\frac{N}{2}(A+L)$$

其中之N爲項數(在此處N=n, 因l=o, 1,2,$\cdots$n−1), A爲首項,L爲末項.

在此處 $A=2(2\times0+1)=2,$

$L=2[2(n-1)+]=4-n-2,$

故在第n層中之最多電子數爲

$$S=\frac{n}{2}[2+4n-2]=2n^2.$$

原子之化合成爲化合物多係各以其未成對之電子互相配偶如:

$$:\ddot{\underset{..}{F}}\cdot+{}_{\times}H\longrightarrow:\ddot{\underset{..}{F}}\overset{\cdot}{\times}H$$

故電子之所以能作爲原子價用者,在乎其爲未成對.

氟之原子數爲九,有九電子圍繞于原子核之四周,氮之

原子數爲十七,有十七電子圍繞于原子核之四周.氟與氯之電子在各電子層中之分配可以下表説明:

n	1	2				3									原子價
l	0	0	1			0	1			2					
m_l	$\frac{1}{2}$	0	1,0,−1			0	1,0,−1			2,1,0,−1,−2					
s	$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$					
m_s	2	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$			$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$			$\pm\frac{1}{2}$					
F 之電子分配	2	2	2	2	1										1
Cl 之電子分配 1	2	2	2	2	2	2	2	2	1						1
2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1					3
3	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1				5
4	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1			7

氟原子共有二電子層,其第一層及第二層之各亞分層已爲電子佔據,故除上表所示之分配外不能有其他多於一個單獨電子之分配.若欲將第二層之電子搬至第三層,則所需之能力太大,遠非尋常化學反應所能供給.氟之原子價所以恒爲一者,即因此故.至於氯則異於是,氯共有三電子層.第三層之亞分層僅爲電子佔去一部分,而電子在亞分層之間變換位置所需之能力甚少,爲通常化學反應所能供給,故電子在第三電子層中能有充分分散之餘裕,以產生多個之單獨電子.氯之原子價,所以有 1, 3, 5, 7 四

種可能者,即因此故.

氯與氟同屬一族,而其原子價竟有若是之差別,其原因爲何,吾人自上述之理論乃可得一解釋.此外氮與磷原子價之異點亦可用此理說明,茲未暇論及容後詳之.

三價碳之討論

徐賢恭

碳元質之元子價,僅有一種,即四價,此種觀念,已持之甚久,及 1900 年,高門貝格 (Gomberg) 氏製得一新氫碳化物 (Hydrocarbon), 名為三𮜺甲烷基 (Triphenylmethyl), 於是又有三價碳之說與.其後三價碳化合物,復相繼發現,迄今計有 Xanthyl Diphenyl-thionylmethyl 及諸 Metal Ketyl,共不下數十種矣,試分別討論如下.

一. 三𮜺甲烷基

於 1900 年高門貝格氏將氯化三𮜺甲烷基物 (Triphenylmethylchloride), $(C_6H_5)_3.C.Cl$, 溶於𮜺質 (Benzene) 中,加銀粉使起作用,以為即可得六𮜺乙烷 (Hexaphenylethane), 因據其推測,此反應當如下式之進行:

$$2(C_6H_5)_3C.Cl+2Ag \longrightarrow \underbrace{(C_6H_5)_3C-C(C_6H_5)_3}_{\text{六𮜺乙烷}}+2AgCl$$

乃結果不然,其所得之物分析之,發現其中碳之重量,較由六𮜺乙烷分子式算出之量約少百分之六,且含有氧元質,並非一氫碳化合物.後彼不使與空接觸,再做一次試驗,始得出一氫碳化物,但此物,異常活潑,殊似一未飽和物質,其

性質據高氏之研究,大略如下:

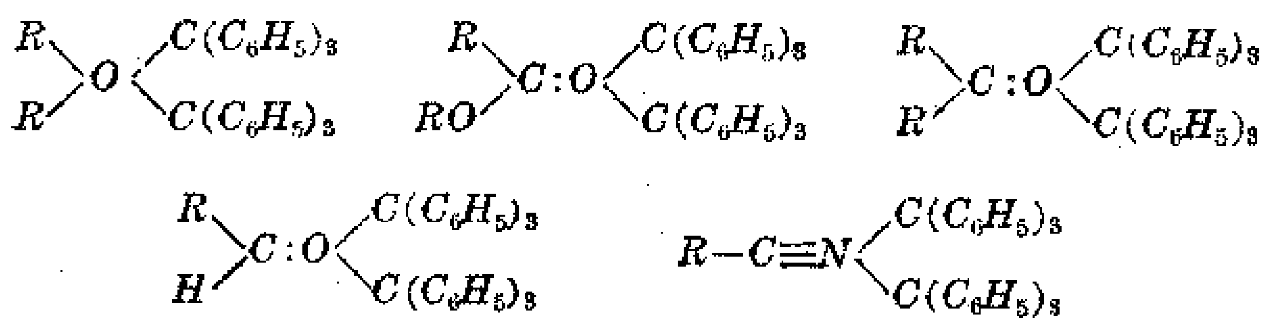
a. 初製出時為一無色晶體,極易溶於多數有機溶劑中,做成黃色溶液.

b. 甚至於零度時,亦與碘化合,產生碘化三煸甲烷基物(Triphenylmethyliodide) $(C_6H_5)_3CI$.

c. 露置空氣中,縱為時極短,亦可氧化,變為過氧化物(Peroxide). 高氏發現若使過氧化鈉與三煸一氯甲烷(Triphenylchloro-methane) 起作用,所得之物,亦與此同,故推知其構造為

$$(C_6H_5)_3C-O-O-C(C_6H_5)_3$$

d. 與醚類(Ethers), 䤉類(Esters), 酮類(Ketones), 醛類(Aldehydes), 烷屬(Paraffins), 烯屬(Olefines), 氰基烷(Nitriles), 二硫化碳,三氯甲烷(Chloroform) 諸物質均甚易化合,其產物均相當於一分子試劑——醚䤉酮等——與一分子六煸乙烷相加而成:



(R = 烷基)

e. 溶於醚中,不使與空氣接觸,可與鈉化合產生一磚紅色(Brick red)物其公式為 $NaC(C_6H_5)_3$.

f. 與造鹽素——氯,溴,碘——化合,發生鹽化三輪甲烷基物(Triphenylmethyl halide);與氧化氮化合,發生亞硝基物 Nitroso Compound); 與二氧化氮化合,發生硝基物 (Nitro compound)與亞硝酸鹽(Nitrous ester)之混合物;與氫化合——須細鉑在場——發生三輪甲烷(Triphenylmethane);

$$(C_6H_5)_3CNO \qquad (C_6H_5)_3CNO_2 \qquad (C_6H_5)_3C.ONO \qquad (C_6H_5)_3CH$$

由以上所舉諸反應觀之,高氏所得之氫碳化物,殊甚活潑,至爲明顯.但高氏推想六輪甲烷,應極穩固,必不致如此,故認定此物爲另一種氫碳化物也。現通稱之爲三輪甲烷基.關於此物質之構造,意見分歧,其說不一,試列舉如下.

a. 三價碳之臆說(Trivalent Carbon hypothesis)

高氏從此物化學性質推之,謂其實一三輪甲烷基,有一三價碳存在,其公式爲

$$\left.\begin{array}{l} C_6H_5 \\ C_6H_5 \\ C_6H_5 \end{array}\right\rangle C'''$$

此種三價碳之新倡說,對於該物質諸重要反應,頗能解釋.如與氧及碘化合,其反應式可表示如下:

$$\begin{array}{l} (C_6H_5)_3C \\ (C_6H_5)_3C \end{array} + \begin{array}{c} I \\ | \\ I \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} (C_6H_5)_3CI \\ (C_6H_5)_3CI \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (C_6H_5)_3C \\ (C_6H_5)_3C \end{array} + \begin{array}{c} O \\ \| \\ O \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} (C_6H_5)_3C-O \\ \qquad\qquad\quad | \\ (C_6H_5)_3C-O \end{array}$$

又與醚鹽諸物質化合,其反應式亦可同樣表示之,故殊爲

可信:

$$\begin{array}{l}(C_6H_5)_3C\\(C_6H_5)_3C\end{array} + \begin{array}{l}C_2H_5\\C_2H_5\end{array}\!\!>O \longrightarrow \begin{array}{l}C_2H_5\\C_2H_5\end{array}\!\!>O<\!\!\begin{array}{l}C(C_6H_5)_3\\C(C_6H_5)_3\end{array}$$

$$\begin{array}{l}(C_6H_5)_3C\\(C_6H_5)_3C\end{array} + \begin{array}{c}C_2H_5\\|\\OOC.CH_3\end{array} \longrightarrow \begin{array}{l}CH_3\\C_2H_5O\end{array}\!\!>C:O<\!\!\begin{array}{l}(C_6H_5)_3C\\(C_6H_5)_3C\end{array}$$

但仍有數種現象與此式不甚相合.一爲分子量問題:三坽甲烷基,$(C_6H_5)_3C$; 之分子量爲 243; 乃用冰點法 (Freezing Point Method) 以萘坽 (Naphthalene) 爲溶劑,測出高氏氫碳化物之分子量爲330-370,與三坽甲烷基相差甚遠.又以坽質爲溶劑,於靠近零度時測出之値爲480-485,此結果幾爲243之雙倍,而與六坽乙烷之分子量486實頗相近.此現象當時殊予高氏公式相當之打擊.但彼仍力執己見,大加解說,謂其所製得之物質於固態時爲六坽乙烷,及溶於一溶劑中,則有一部份分解,發生三坽甲烷基,與剩餘六坽乙烷成立一平衡狀態:

$$(C_6H_5)_3C-C(C_6H_5)_3 \rightleftharpoons 2(C_6H_5)_3C$$

此平衡狀態,隨溶液之溫度,濃度,與溶劑之性質而變化.在坽質中,溫度靠近零度時,其分解度極微,故測得之分子量相當與六坽乙烷之分子量,於萘坽中則分解度較大,故測得之分子量在六坽乙烷與三坽甲烷基之間.此種解說與希侖克 (Schlenk), 麥爾 (Mair) 及皮卡得 (Piccard) 諸氏對於六坽乙烷之研究,尙能互相印證:

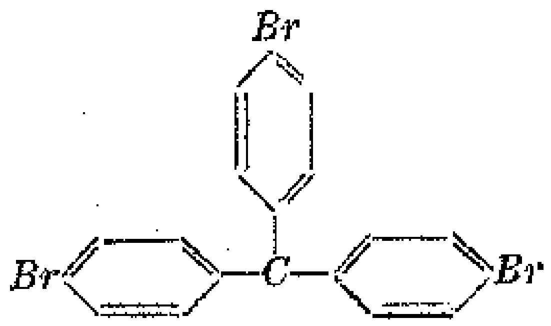
希麥二氏測定六焓乙烷之分子量於焓質溶劑中.從所得之結果,算出其約有百分之三十已分解爲三焓甲烷基.皮氏用顏色觀察法(Coloration Observation),亦曾證明六焓乙烷於溶液中有一部份解離而與未解離之分子成立一平衡狀態.彼又發現使金屬作用於氯化三焓甲烷基物 $(C_6H_5)_3CCl$, 所得之物質,於濃溶液中,其分子量相當於六焓乙烷.溶液漸稀,則其值漸低,幾與稀度(Dilution)成正比例.同時溶液之顏色,亦有甚顯著之變化.例如將此所得之物質溶於醚中,配成百分之五溶液,其色爲淡黃,再加不含空氣之醚稀薄之,則見淡黃色逐漸變深,終至變爲橘紅色爲止.反之將醚蒸發使溶液變濃,則濃厚之色又漸退去,同時測出其中所含物質之分子量,復行變大.由此諸例,高氏之解說,殊有依據,而其三價碳之觀念,終尚不致受何影響也.

其次另有二問題,始終用此公式仍無法解決;若將高氏之氫碳化物加酸,則變爲渥爾曼(Ullman)與波爾賽曼(Borsum)二氏所製得之氫碳化,

$$(C_6H_5)_3C\cdot C_6H_4\,CH\begin{matrix}\diagup C_6H_5\\ \diagdown C_6H_5\end{matrix}$$

此種變化,倘承認高氏氫碳化物之公式爲 $(C_6H_5)_3C$, 則殊難索解.又高門貝格與鮑勒(Bone)二氏曾取 Trip-bromotriphenyl-chloride $(C_6H_4Br)_3C\,Cl$ 與過量之銀,封於一瓶中,搖動若干久,使起變化,結果所用之銀,悉將氯元子取去,此外復取

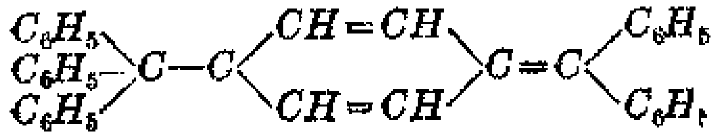
去一元子溴,但銀尙有剩餘,而對其餘二溴元子,則並無作用,此殊使人發生疑慮蓋三煸甲烷基,係由氯化三煸甲烷基物加銀取去氯元子而成.今於此試驗中,僅氯化三煸甲烷基物,換以 Tri-p-bromo-triphenyl Chloride, 其餘均相同.若三煸甲烷基之公式爲 $(C_6H_5)_3C$,則此時所得之物,當爲 Tri-p-bromo-triphenylmethyl, 必無疑義,



而此物中三溴元子均結着於三煸圈 (Benzenoid ring) 上,其對於銀之作用應均相等,銀既能取其一,必可同取其二,何致銀尙有剩餘,乃對其餘二溴元子毫無作用?此足證明高氏公式殊有問題也.

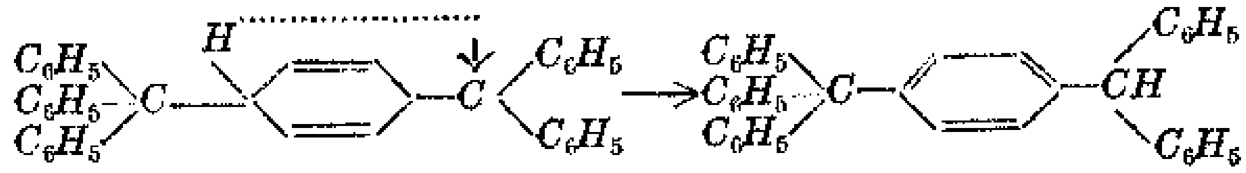
b. 奎甯式之臆說 (Quinonoid hypotnesis)

賈柯遜 (Jacobson) 氏因鑒於高氏公式對於甚多現象,不能解釋,殊不信任,於是於 1904 年又進一奎甯式之臆說,以代替高氏三價碳之臆說,彼謂三煸甲烷基中含有一奎甯式圈 (Brimonoid ring), 其公式如下:

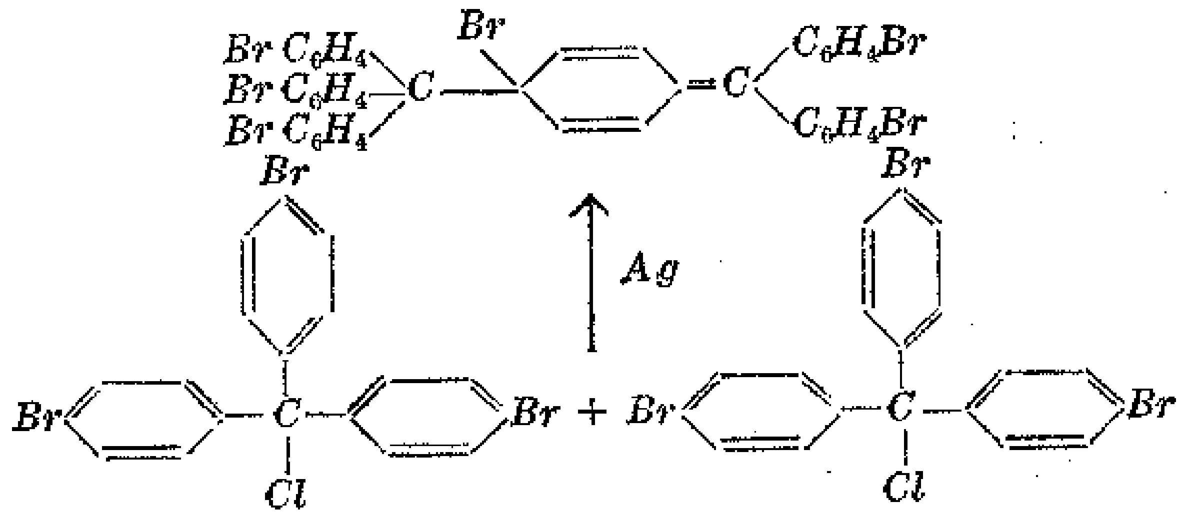


按此公式,三煸甲烷基加酸變爲渥波二氏之氫碳化物,其

變化殊易表示之:



而高鮑二氏試驗之結果,亦不難說明:彼假定銀將 Tri-p-bromo-triphenylchloride 中二氯元子取去後,非發生兩分子 Tri-p-bromo-triphenylmethyl $(C_6H_4Br)_3C$, 乃發生下式之物:



此物因含有一奎甯式圈,結着於其上之溴,不及其餘結着於kind圈上溴元子之穩固,故獨易被銀所取去也.由此高氏公式所不能解決之問題,賈氏公式實能解決之,似後者較優於前者,實則殊難言之,高氏公式所能解釋之現象,賈氏公式不能解釋者尚甚多,如三𥓶甲烷基氧化後,變為過氧化物, $(C_6H_5)_3C-O-O-C(C_6H_5)_3$ 用賈氏公式,即殊覺困難,須經過數步甚複雜之同分異性變化 (Isomeric Change) 之假設,始可解釋之,其他不必枚舉矣.

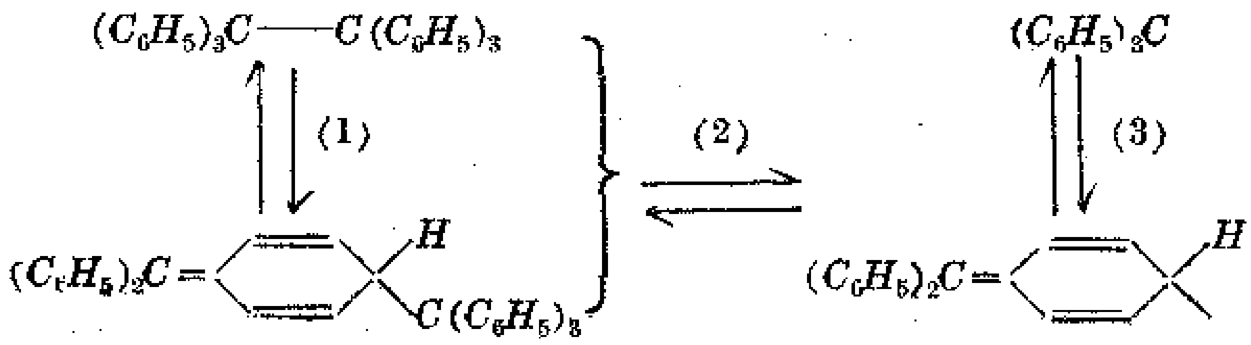
考高氏與賈氏兩種公式就其式態 (Type) 言之,均為固

定不變,故稱爲靜定公式,(Static formula) 就其應用言之,各能解釋三𬭎甲烷基一部份之反應,但不能求其全也,

C. 變動異性體之臆說 (Tautomerism Hypothesis)

高氏原倡三價碳之臆說,主張三𬭎甲烷基之公式爲 ($C_6H_5)_3C$. 後因有若干現象,殊難解釋,不無疑慮,而賈氏公式有時亦不能應用,故亦難單獨成立.但若假定其與賈氏之公式能以並存,則三𬭎甲烷基之諸反應,均無不可解釋之矣,於是彼又進一變動異性體之臆說如下:

三𬭎甲烷基,可發生四種變形體 (Modification), 此四者於溶液中,均能同時存在,彼此成立一平衡狀態:



此圖表示,三𬭎甲烷基,於固態時原爲六𬭎乙烷,及溶於溶液中,則有一部份起變動異性之變化 (Tautomeric Change),產生奎寧式之物質,具賈氏之公式;此奎寧式物質,旋又有一部份分解,變爲兩種自由根 (Free radicle) 均含有一三價碳元子.此兩根尙可互相變換,有一定之平衡狀態.

此種臆說,殊爲奇妙,對於三𬭎甲烷基之各種性質,大率皆能應用.三𬭎甲烷基溶於一溶劑中,由無色變爲黃色,此可由變化(1),卽由公式變爲奎寧式,解釋之.溶於解離作用

甚强之溶劑如液體二氧化硫中,其溶液之傳電率(Conductivity)甚大,且溶液愈變稀薄,傳電率愈變大,可由變化(2),卽由賈氏物質分解爲兩種自由根,以解釋之.三輪甲烷基之分子量隨溶劑之性質與溶液之稀度(Dilution)及溫度而有不同亦可用變化(2)解釋之,因賈氏物質之分解度與溶劑之性質及溶液之稀度,溫度等,至有關係也.又與碘甚易化合,得碘化三輪甲烷基物 $(C_6H_5)_3CI$, 此因有二自由根存在之故.其反應可設想碘先與二自由根化合,而成兩種碘化物, $(C_6H_5)_3C.I$ 及 $(C_6H_5)_2C:C_6H_4\langle{}^{H}_{I}$,後者蓋不穩固,做成之後,立卽起重排變化,變爲 $(C_6H_5)_3CI$, 故吾人尋常所得者,均爲碘化三輪甲烷基物.其餘諸例,不縷舉矣.

綜上以觀,所述之三種臆說,比較之,當以後者爲最佳,雖不能謂爲十分真確,但總可謂甚近於真確,而三輪甲烷基可含有一三價碳元子,現已成爲定論矣.自此氫碳化物發現以後,尚有甚多其他三價熔物質相繼發現,可於下見之.

二. 與三輪甲烷基類似之三價碳化合物

三雙輪甲烷基(Tri-diphenylmethyl)—希朗克(Schlenk)氏用碎銅與三雙輪一氯甲烷(Tri-diphenylchloromethane), $(C_6H_5.C_6H_4)_3C.Cl$ 起作用,製得一蒼綠色細晶狀物,溶解度爲186°,於溶液中,發生深紫色溶液,其公式,無論爲固態抑於溶液中,由分子量之證明,均相當於下。對氧有銳敏之作用,產生無色過氧化物,與三輪甲烷基之性質極相似:

$$\left.\begin{array}{r} C_6H_5{\cdot}C_6H_4 \\ C_6H_5{\cdot}C_6H_4 \\ C_6H_5{\cdot}C_6H_4 \end{array}\right\rangle C^{III}$$

三雙煸甲烷基

Diphenyl-diphenylmethyl 與 Phenyl-di-diphemylmethyl 一希氏又由 Diphenyl-diphenylmethylchloride 及 Phenyl-di-diphenylmethychloride

$$\left.\begin{array}{r} C_6H_5 \\ C_6H_5 \\ C_6H_5{\cdot}C_6H_4 \end{array}\right\rangle CCl \qquad \left.\begin{array}{r} C_6H_5 \\ C_6H_5{\cdot}C_6H_4 \\ C_6H_5{\cdot}C_6H_4 \end{array}\right\rangle CCl$$

得出兩種化合物,於固態時爲無色,溶解時,則做成深色之溶液,由分子量之證明,此無色物爲雙分子式化合物(Bimoleculer Compound),於溶液中,即有一部份分解,發生Diphenyl-diphenylmethyl 及 Phenyl-di-diphenylmethyl:

$$\left.\begin{array}{r} C_6H_5 \\ C_6H_5 \\ C_6H_5{\cdot}C_6H_4 \end{array}\right\rangle C-C\left\langle\begin{array}{l} C_6H_5 \\ C_6H_5 \\ C_6H_4{\cdot}C_6H_5 \end{array}\right. \rightleftarrows 2 \left.\begin{array}{r} C_6H_5 \\ C_6H_5 \\ C_6H_5{\cdot}C_6H_4 \end{array}\right\rangle C^{III}$$

Cololess tetraphenyl-di-dephenylmethane Colored diphenyl-diphenylmethyl

$$\left.\begin{array}{r} C_6H_5 \\ C_6H_5{\cdot}C_6H_4 \\ C_6H_5{\cdot}C_6H_4 \end{array}\right\rangle C-C\left\langle\begin{array}{l} C_6H_5 \\ C_6H_4{\cdot}C_6H_5 \\ C_6H_4{\cdot}C_6H_5 \end{array}\right. \rightleftarrows 2 \left.\begin{array}{r} C_6H_5 \\ C_6H_5{\cdot}C_6H_4 \\ C_6H_5{\cdot}C_6H_4 \end{array}\right\rangle C^{III}$$

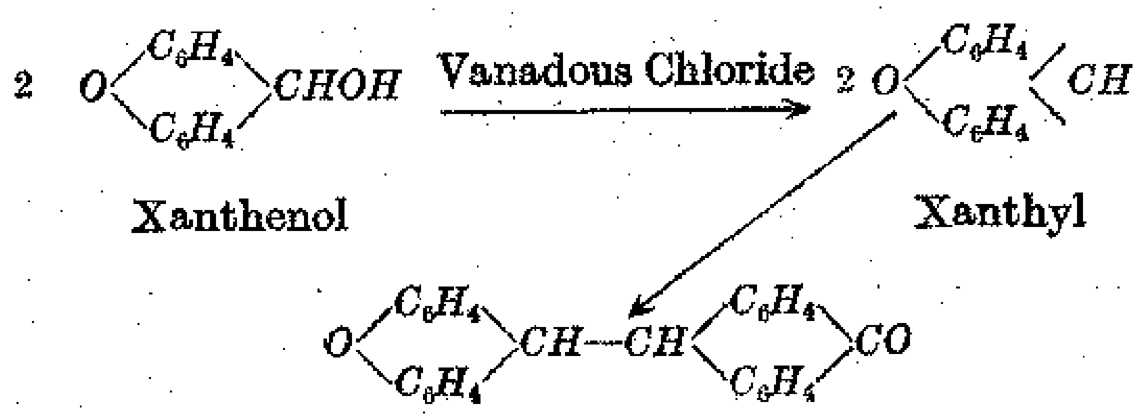
Colorless diphenyl-tetra-diphenylmethane Colcred diphenyl-diphenylmethyl

Xanthyl 一柯侖特(Conant)與斯羅安(Sloan)二氏曾發現用第一釩鹽(Vanadous salt)加於一 Cabinol 或 Oxonium 鹽上,可製出三價碳化合物,例如三煸甲烷醇(Triphenyl-Carbinol)溶於鹽酸中,以氯化第一釩(Vanadous Chloride)還原之,即得一三煸甲烷基

$$(C_6H_5)_3COH \xrightarrow{\text{Vanaetous Chloride}} (C_6H_5)_3C^{III}$$

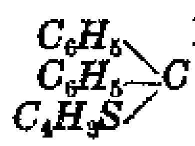
又如 Triphenyl-pyrylium Chloride 於同樣處理之下,亦可發生一三價碳之未飽和根.

利用此法處理 Xanthenol, 曾得出一固體自由根,可稱爲 Xanthyl,其中乃含有一三價碳元子,若溶少許 Xanthenol 於濃鹽酸中,做成一稀薄溶液,則加以氯化第一釩時所得之根,爲一粉紅色之沈澱,此物甚穩固,過濾之後,尙可經數小時,始漸變爲無色 Bixanthyl:



Bixanthyl

Diphenyl-thionylmethyl —高門柏格與紀客林 (Jickling) 二氏,曾推廣三價碳自由根之硏究,而致力於雜環化物 (Heterocyclic Compounds) 之範圍.彼等從 α-iodo-thiophene 與 Benzophenone,藉 Grinard 反應,製出 Thionyl-diphenyl Carbinol, 再加鹽酸,卽生一相當之氯化物.此物溶於33質中,用銀或其他金屬處理之,溶液卽現紅色據高紀二氏之推測其中已產生Diphenyl-thionyl methyl



III

此物甚易吸收氧元素,從氧之吸收量推算之,其反應式相當於下,與三苯甲烷基對氧之作用,如出一轍:

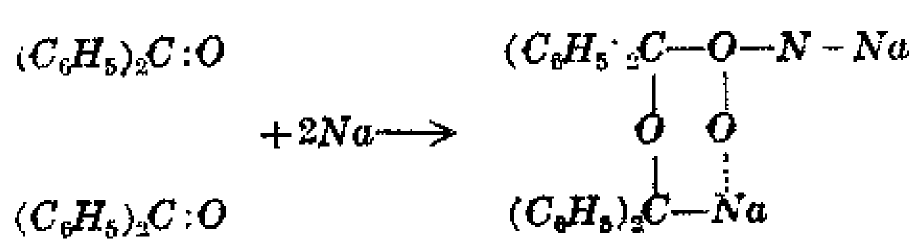
$$2\ (C_6H_5)_3C + O_2 \longrightarrow (C_6H_5)_3C{-}O{-}O{-}C(C_6H_5)_3$$

三. Metal-Ketyls

1891 年頃柏克曼(E. Beckmann)與保爾 (T. Paul) 二氏做鈉對於二芳香基酮 (Diaryl Ketones) 作用之研究,得出甚奇異之結果:第一,作用時,毫無氫氣放出;其次,所得之產物有濃厚之色;第三,此產物異常活潑,與氧或水氣 (Moisture) 極易化合.

就鈉與苯基苯酮 (Benzophenone) 之作用而言,其產物為暗青色。此物之組成 (Composition),相當於一分子酮與一原子鈉之比,其與水化合,隨當時之情形,或產生苯基苯酮與Benzohydrol, $C_6H_5-CH(OH)-C_6H_5$ 之混合物,或此混合物而外尚雜以 Benzopinacoline, $(C_6H_5)_2C(OH)-(HO)C(C_6H_5)_2$ 不等;用二氧化碳處理之得一黃色粉末,加水卽分解為苯基苯酮與Sodium benzilate, $(C_6H_5)_2C(OH).COONa$; 其公式有數種,懸而未決凡二十餘年.

先是柏保二氏假定其公式如下:



至1903年,阿可銳(Acree)氏又進一與此大同小異之公式:

$$\begin{array}{l}(C_6H_5)_2C-ONa\\ \quad\quad\quad\;|\\ (C_6H_5)_2C-ONa\end{array}$$

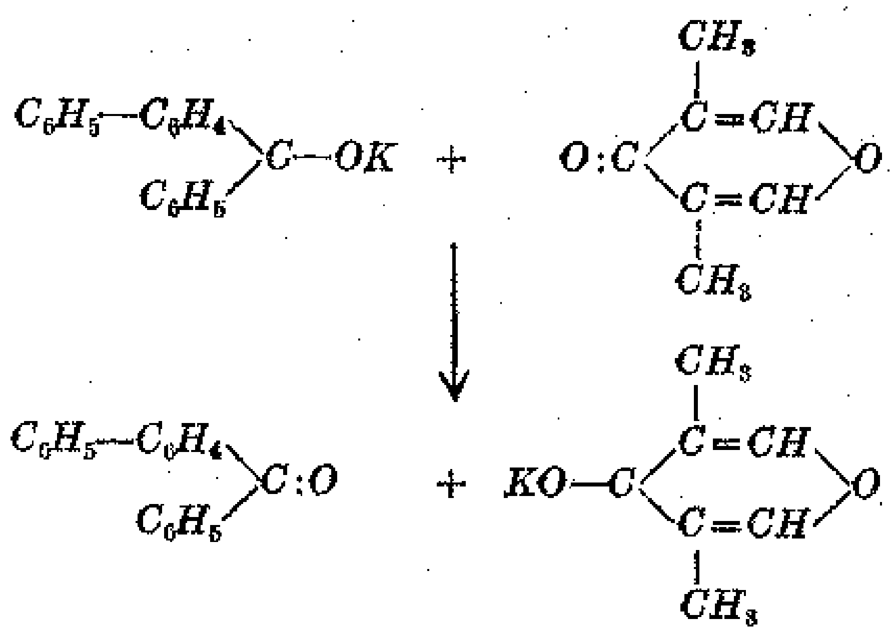
十餘年後,希侖克(W. Schlenk)與賽爾(Thal)二氏又研究此問題.彼等由分子量之測定入手,其法先將配好之酮溶液洗於充滿氮素沸點測驗器中,測定其沸點爲若干,後加入適量之純淨鉀片,再定該溶液之沸點,結果兩次相同,此卽表示兩次溶液中所含之分子數均相等.由此可推知加金屬鉀所生之產物,必由一分子酮與一元子鉀所合成而以上二公式均不能成立矣;因據此二公式,乃二分子酮僅做成一分子 Potassium Ketyl 故於末後之溶液中,分子數必減少於是沸點必降低,此與實驗殊不相合.

希賽二氏由此實驗之結果,復參照其他之發現,遂將以上二公式推翻創立一新公式如次:

$$\begin{array}{l}C_6H_5\diagdown\;\overset{\mathrm{III}}{}\\ \quad\quad\;\;\,C-OK\\ C_6H_5\diagup\end{array}$$

其中倘含有一三價碳原子.自此公式貢獻以後,則該物質之諸性質,均可解釋.故此公式,今已確然成立矣.凡希賽二氏公式,卽一三價碳元子帶有二氫碳根不一定爲二芳香基)與一ONa羣所代表之物質現有一特殊名稱,謂之 Metal ketal

Metal-Ketyl 之製法有二:一爲用鈉或鉀直接與酮質製出之;但有甚多之酮,用直接法結果殊不佳,於是又有間接法以代替之.例如製二甲烷基𤇥氧酮(Dimethyl-pyrone)之 Potassium Ketyl,乃將最易溶化之 Potassiumphenyl-diphenyl Ketyl, $C_6H_5 \cdot C_6H_4-C(OK)-C_6H_5$, 做成以脫溶液 (Ethereal solution), 再加二甲烷基𤇥氧酮,則起雙分解,發生亮紅色二甲烷基𤇥氧酮之 K-ketyl 沈澱及 Phenyldiphenyl Ketone, 此物仍溶於溶液中:

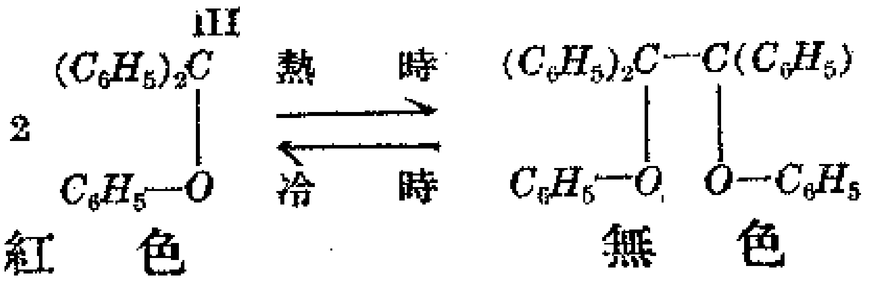


用頃述之二法,現已製出甚多之 Potassium Ketyl, 茲列表如下,表中第一列爲酮質,第二列爲Ketyl之組成,第三列爲之顏色:

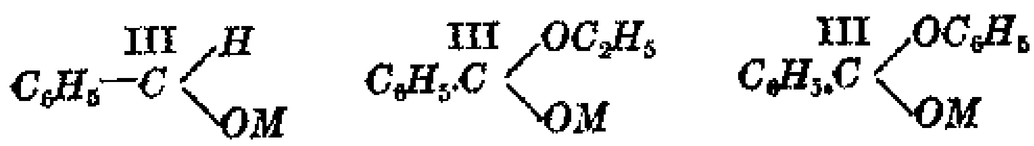
酮名	Ketyl	顏色
Dimethyl pyrone	$C_7H_8O_2K$	亮硃紅色
β-Benzopinacoline	$C_{26}H_{20}OK$	深紅色
Phthalophenone	$C_{20}H_{14}OK$	暗紅色
N-Methyl-isatin	$C_9H_7O_2K$	深青色

O-Methyl-isatin	$C_9H_7O_2K$	深紫色
m-Dibenzoyl-benzene	$C_{20}H_{14}O_2K$	暗紅色
P-Dibenzoyl-benzene	$C_{20}H_{14}O_2K_2$	深紅色
Furil	$C_{10}H_6O_4K$	黑 色
Phenanthrenequinone	$C_{14}H_8O_2K$	黑欆色

相當於 Metal-ketyl 式態 (Type) 之三價碳自由根,尙有數種可於此地提及之.韋蘭得 (Wieland) 氏曾發現當三苯甲烷基過氧化物, $(C_6H_5)_3C-O-O-C(C_6H_5)_3$, 溶於熱萘 (Naphthalene) 中,則分解爲二根 $(C_6H_5)_3C-O\cdots$,此根立起重排變化,變爲另一式狀 (Form), 之紅色三價碳自由根 $(C_6H_5)_2C^{III}-OC_6H_5$, 於熱溶液中可自由存在,冷時卽成無色之雙分子式化合物:



又苯酮 (Benzaldehyde), 苯酸乙烷醚 (Ethyl benzoate), 及苯酸苯醚 (Phenyl benzoate) 等,與鈉,鉀諸鹼金屬化合,各產生深色活潑之物質,其公式有人硏究,亦與 Metal-ketyl 同一式態,均爲三價碳自由根也:



(M = 鹼金屬)

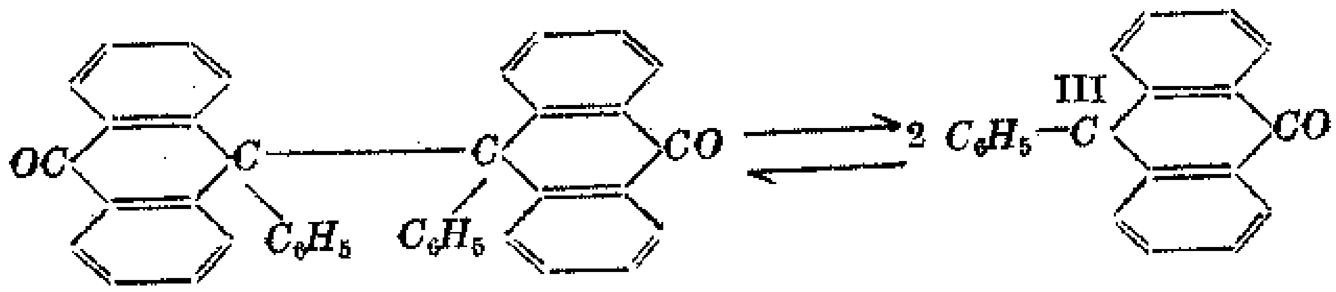
四. 結論

由以上討論之結果,約有數點,至堪注意一爲三價碳元子所結合之根乃均爲三輪基,或其中有二輪基,至少亦有一未飽和氫碳基與一負元子,如 $C(C_6H_5)_3$, $C(C_6H_4.C_6H_5)_3$, $C_4H_3S(C_6H_5)_2C$, $(C_6H_5)_2CONa$, $C_6H_5-C\left\langle\begin{matrix}H\\ONa\end{matrix}\right.$ 等,但並未見其與三正元子,如氫,或正根相結合而成甲烷基 (Methyl), CH_3, 等之自由根也,其故有人解釋如下:據溫勒爾 (Wener) 氏元子價之理論,各元質均有一定量之愛力,碳元質當亦然,若與三氫元子化合,可設想其被氫中和之量,並不甚多,尙有足夠之剩餘愛力,可與另一氫元子或他根化合產生甲烷 (Methane), C4,或甲烷基誘導物 (Methyl derivative). 但與三輪基化合,則因每一輪基中均有餘價存在,故可多吸收碳元子之愛力,於是剩餘者卽少,遂不致若甲烷基之易與他元子或根相化合.此種解釋,自有其相當之理由.其次爲三價碳化合物,迄今已發現者雖甚多,但率皆於溶液中始能存在,固態之根,尙不多見.再次凡能分解爲三價碳之物質,其分子必爲對稱式 (Symmetrical form), 且二中心碳元子 (Central Carbon) 均各與二雙價標 (Double bond) 碳元子相聯合,做成下式之元子羣 (Atomic group):

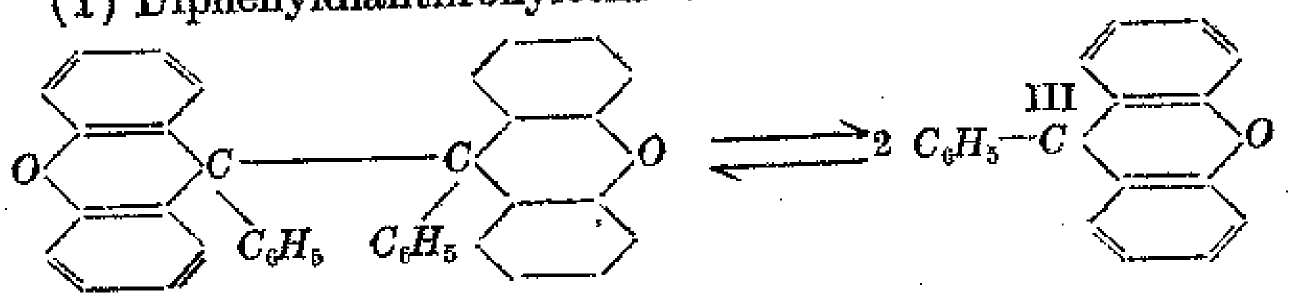
$$\begin{matrix}C=C\\C=C\end{matrix}\!\!>C^1-C^2<\!\!\begin{matrix}C=C\\C=C\end{matrix}\quad \text{或}\quad C:C-\overset{1}{C}-C:C——C:C-\overset{2}{C}-C:C$$

(C^1,C^2 爲中心碳元子)

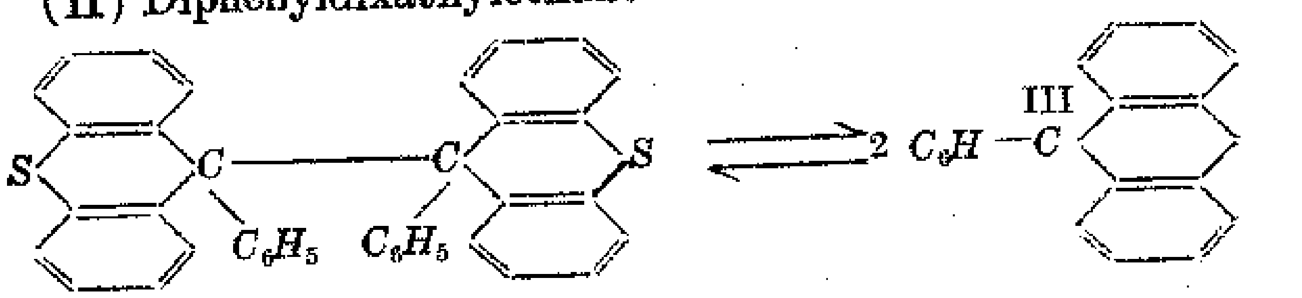
例如 Hexaphenylethane, Tetraphenyl-di-phenylethane 及 Diphenyl-tetra-diphenylethane 諸物質,均含有此種元子羣,故均可分解爲當之三價碳根此已討論於上,茲再舉數例以明之:



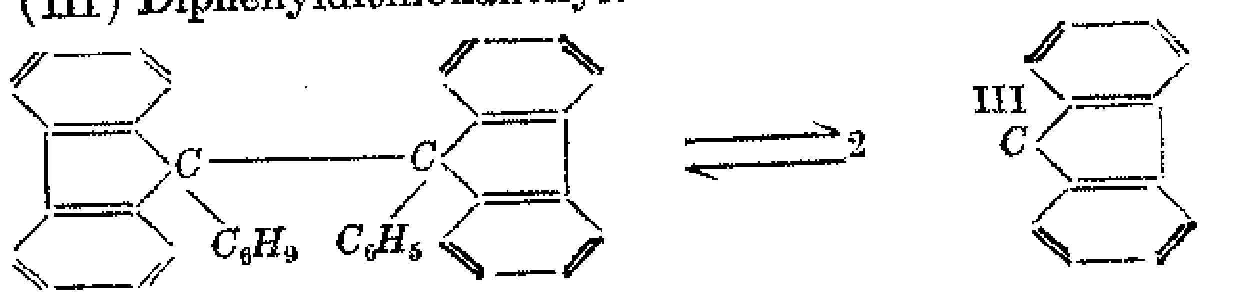
(I) Diphenyldianthronylethane



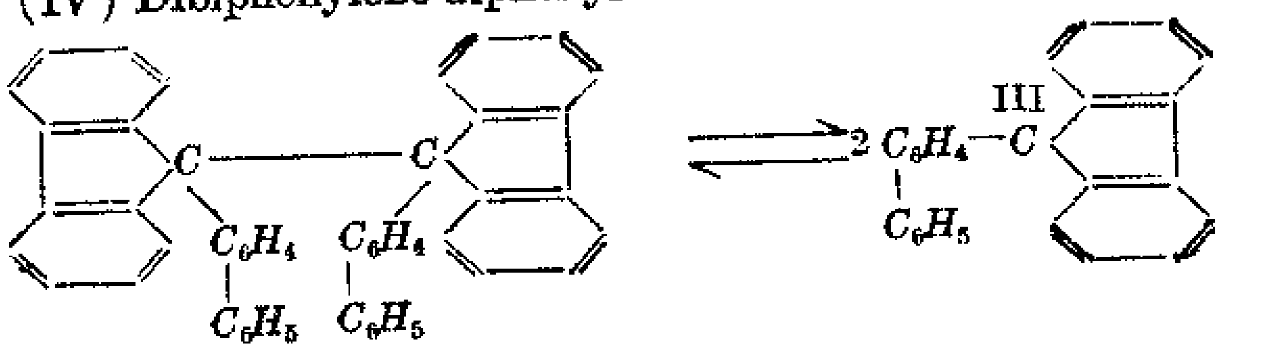
(II) Diphenyldixathylethane



(III) Diphenyldithioxanthylethane



(IV) Dibiphenylene-diphenylthane



(V) Dibiphenylene-dibiphenylethane

以上五種物質之分解度,各有不同,且隨環境 (Condition) 而異.總上以觀,C:C–C–C:C元子羣蓋有使一分子分解之作用也.

關於此問題之參考書

Recent advances in Organic Chemistry—Stawart. Vol. I & II.

Organic Chemistry—Cohen. Part I.

Theoretical Chemistry—Hanrisch

Das Triphenylmethyl—J. Schmidlin

植物生理學史略

張 珽

第 二 部

自 1860 年迄 1900 年

導 言

1860 年以後,植物生理作用之研究,驟起轉變,光華爆耀,震鑠當時,植物生理學,始得逐漸成立獨立之一科,以與形態學分席,不復如前此附庸一角.其中經歷,雖萬緒千端,然理治統緒,則鼓激其變遷者,主因蓋不過下述兩事.

第一: 則爲原形質研究之進展.動物學者於 Sarcode 之研究,當時已頗詳贍,而 Von Mohl 諸宗師,於植物之 Protoplasm,亦已積有相當功績.然直至 1863 年, Max Schultze 始認明所謂 Sarcode 與 Protoplasm 者,實爲同一物質,質言之,則動植物生理上基本構造,完全同等.有此一發現,學者視野一新,研究大集,四十年間,關於植物營養,呼吸,等等新陳代謝作用現象,漸得正確瞭解.同時動物學者,正努力繼續從事動物原形質之研究,相得彌彰.而歷來關於植物動物攝食方法,食物材料,代謝產物之利用等現象,因其外表上有著大逈殊,歷來認爲不可揣測者,自 Sachs 等先哲關於光合方面之

研究,Winogradsky, Beijerinck, Warington 諸學者關於下等植物生活法式之研究,漸臻明瞭,由是而動植物生活方式與手段雖或有異,然基本原理無殊之原則,遂以成立.

第二: 文藝復生,生物學得有地位,自由發展以來,關於生命本身之解釋,夙有兩派: 一以生命爲宇宙之奧秘,玄奇而不可揣度,以玄學眼光探討實際實象而又忘其實際,動見矛盾,此爲所謂生命論(Vitalism)派. 一爲機械論(Mechanism)派,於生命現象只求以簡單機械律裁制解說,忽視生命現象之繁與複,膠柱之見,鑿枘亦多,兩派各爲成見所囿,故爭辯愈多,惑亂益烈.迄 Charles Robert Darwin 之說出,一切生命現象,各經重新估價,而植物對於環境之適應,乃得確定爲生命表現中最高錯綜(Complex)之一.

今賅括此四十年中植物生理學進展趨勢,與各學者勤愼奮鬥之情形,就 Reynolds Green 繼 Sachs 成規而作之 "A History of Botany, 1860-1900" 中之所述,存其大畢,擷要删繁,爲十一章記之如次;

A. 新陳代謝之研究:

I. 合成: 1. 水分之吸收及利用 ……第一章

2. 二氧化碳之攝取與光合 ……第二章

3. 由氮至蛋白質 ……第三章

4. 灰分循環之概況 ……第四章

II. 同化: 1. 純粹無機養料之生活 ……第五章

2. 養分之運用及儲存 ……第六章

III.分解: 1. 消化 ……第七章

2. 呼吸 ……第八章

IV.生活方式之研究 ……第九章

B. 適應現象之研究:

I. 生長與環境 ……第十章

II. 刺戟感應 ……第十一章

第一章

綠色植物與水分之關係

第一節 水分之吸收

I. 過去諸說:

1. Dutrochet: 創滲透說 (Osmosis), 以機械定律爲解釋,謂植物根細胞中所含鹽分之濃度甚高,足以吸收外界之水分,使上升甚遠.此實爲近代滲透定律之權輿,所惜者,當時,半透性膜 (Semi-Permeable membrane) 尙未發現,故 Dutrochet 遂有根中鹽液,同時亦有流出之假定,於事相尙未能得真詮耳.

2. De Saussure: De Saussure 謂植物根有選擇力,能選擇其需要之物質而吸收之.此卽所謂選擇力說 (Selective Power Theory), 以解釋:

a. 何以不同之鹽類吸收之分量不同.

b. 同一鹽類,不同之植物所吸收之分量又不同.

3. De Candolle: 創海綿狀組織說 (Spongiole Theory),謂根尖特具海綿組織狀之吸收器官,由其吸濕性及毛細管作用,將外界物質之合於其需要者,溶解而積存組織內之水中.此吸收器復具收縮力,能壓此種水分使入於根.

II. 進展諸說

1. Graham: 1862, 1863 兩年,發表其研究,爲後此 Traube 等多數學者所根據之名著.(Phil. Trans. 1862; Ann. d. Phys. u. Chemie, 1863).

2. Traube: 1867 至 1874 年之間,疊有所發表. Traube 以含有醋酸鉛或硫酸銅之動物膠質濃液,滴入鞣質之溶液中,遂得一外包膠體狀膜(卽鞣酸動物膠質)內函膠體溶液之擬似細胞.此細胞之內容物,能繼續地自外圍溶液中吸收水分,張大其體積,結果內容之動物膠質溶液亦逐漸稀薄. Traube謂真正之植物細胞,其吸水之情形正與此相等.Nägeli曩以爲細胞膜之生成,在於物質分子之塡充 (Intussusception), Traube 此實驗極足以證明之.改正從來滲透說中"交流" 一觀念之錯誤,以此爲始.

3. Sachs: 各學者於植物吸收水分之問題爭論方劇時, Sachs 正研究植物與土壤之關係. 1859 至 1860 兩年間,注意於土壤中水分與空氣之分佈.由此研究,得知最利於植物吸收之水分,爲包在土壤或砂礫表面之薄水層.植物吸收水分之部分,爲根尖略下之根毛帶.吸收之機轉則爲根毛

細胞與外間水分之滲透.受吸收物質爲土壤中各種鹽分溶解於水中而成之稀薄溶液,

4. Pfeffer: 1877 年, Pfeffer 發表其關於滲透作用與植物組織中水分移轉間之關係之研究,題爲 Osmotische untersuchungen. 此種研究,卽爲 Vant Hoff 氏滲透壓說之根據,不特在生理學界開一新紀元,卽物理學界亦爲之耳目一新.據Pfeffer之假定,則植物細胞之原形質,成薄層,貼附於細胞膜上時,其組織不均齊,卽兩側表面之貼於細胞膜,及圍於空胞者,對於物質透過之抵抗,遙大於中央柔軟之部分.換言之,卽原形質全體顯然有分工作用.所以然者,蓋由於原形質中溶存之蛋白質,遇水沈澱而成爲變性之薄層,——Pfeffer名之爲Plasma membrane——故在物質透過中,兩者遂有著大之差異.鹽類溶液之所以有能透過有不能透過者,蓋全由於鹽類本身分子之大小及 Plasma membrane 分子間空隙之大小.

Pfeffer之研究,主爲各種鹽類所生之滲透壓,及滲透後細胞內所生成之張力.又由內部滲透壓與細胞膜含水力兩者間之關係,說明植物細胞膨壓之所以生成,實出於此兩種力量之和協.

1886 年,Pfeffer 更發現某數種氨基輪質染料 (Aniline dyes) 之稀薄溶液,能透過原形質層而不致於使之死亡.此發現極爲重要,後來多種研究皆自此導出.

1890 Pfeffer又發表其紀錄 Plasmahaut und Vacuolen, 更爲前說而特別注意於 Plasmahaut (Plasma membrane) 與空胞間之關係.

5. De Vries 與 Pfeffer 同於 1877 年發表其關於滲透之研究. De Vries試驗細胞液中各種成分之滲透數量,求得其相比數,結果決定滲透壓與分子量之間有重大關係.又就原形質分離 (Plamolysis) 現象作研究,說明由此法可以測定各種不同物質及不同濃度之溶液之滲透壓.其論文題爲 Untersuchungen über die mechanischen ursachen der Zellstreckung, Sachs 評 De vries 之研究曰"自 Nägeli, Pfeffer 及余提出細胞原形質及膨壓間相互之關係後,至 1877 年得 De Vries 之研究,始克完滿說明," 推重蓋有如此.

1884, De Vries 又發表其關於甜菜 (Beta vulgaris)根細胞之研究,謂其細胞中之滲透壓,在 15—21 氣壓之間.

6. Wieler 1893 年定出 Pinus Sylvestris 之髓線細胞,其滲透壓與 De Vries 關於甜菜之計算,不相上下.

7. Dixon 1896 年定出槭屬之葉,其細胞中膨壓,在 8 氣壓以上.

8. 外此如 Westermaier (1883), Krabbe (1884), Janse (1888), Stange(1892) Copeland(1896) 等,亦各有關於水生陸生植物細胞滲透壓之研究.

9. 最後關於滲透現象之學說,極關重要者,尙有 Reid 18

90年所發表之研究,謂生活物質對於鹽類有一種濾過性,爲選擇滲透之所由起.

III.　Plasma membrane:

1. Chodat及Baubier:　1898年,由實驗之結果,證明Pfeffer所提出原形質分化而成之Plasma membrane,初無固定之分化,蓋就原形質分離現象作研究時,結果見細胞膜內側,在起原形質分離後,尙有多量原形質粘附其上.

2. Overton:　1900年於多種物質對於原形質之透過性及其條件,詳加研究,結果發表謂細胞質內層與外層,確有極大差異.惟Overton之解釋,則謂此差異乃起於外層所含Cholesterin及Lecithin之分量較多.

IV.　吸收與根.

1. Sachs:　1859, 1860兩年間對於根毛之機械作用,已注意作研究.1865年,更進謂水液由土壤中以滲透而進達根之皮層 (Cortex), 復由滲透而傳輸至於全部組織中,生成極大膨壓,其隣近之細胞,內部空虛,不能抵抗此壓力,水遂乘隙濾入.由此乃有著大之水壓發生.舉凡樹枝截斷後樹液之噴出,水孔之排水,蜜腺之分泌等,皆由此壓力激成.此種壓力,Sachs名之曰"根壓"(Root Pressure).

2. Hoffmeister:　1862年,發現根壓每日循一定之週期而變化.

3. Baranetzky:　更就根壓作詳盡之研究,1873年發表Ei-

ne mittheilung über die Periodicität des Blutens, 證明在任何環境條件下,植物每日中必有一個時期所吸收水液之分量,達到最高點,唯依植物之種類與環境條件之不同而有變化.此變化之原因,則主爲日光之照射,若將曝光時間更變,則週期亦生大變化.

4. Brosig 1876 年, Detmer 1877 年,繼續研究根壓現象,最後 1893 年 Wieler 亦有所發表. Wieler 更發現根壓每年中亦有週期,春季壓力最大,冬季有數週幾於全部停頓,故推定根壓與根之生活力有關.

5. 從來皆認爲根毛能分泌有機酸類,故置根於大理石板上,則石受腐蝕,1896, 年 Czapek 始證明根除二氧化碳外,實不生出真正之酸類,唯能製造酸性鹽如 KH_2PO_4 等.

V. 根壓與蜜汁分泌

1. Pfeffer: 1877 年對於花中蜜腺之分泌,作精細研究,結果證明花蜜之分泌,並非根壓所生成,而爲腺細胞本身之活動,在其名著 Osmotische Untersuchungen 中,更舉出櫻葉之蜜腺,其分泌亦全由腺細胞主持,水分且可取自空氣中,無須仰給於枝幹.

2. Darwin: 1877 年發現催促蜜腺之分泌者,光亦爲重要因子.

3. Wilson: 更發現溫度對於蜜之分泌亦能生影響.

第二節 水分之蒸騰

I. 關於作用中機轉之討論:

1. Hales: 始證明一葉表面所蒸發之水量,較等面積之游離水面所蒸發者為少,故斷定植物體中水分之蒸騰,不全為自然之蒸發.

2. Sachs: 始明定蒸騰為植物之一種生活作用.1860年,就葉之內部構造作精密之研究,證明葉之蒸發面,不主在葉表角皮,而多在葉肉中細胞間隙.故葉之蒸發表面,不當為葉表角皮之面積,而當為葉中各細胞間隙各邊之總和,故其蒸發量與游離水面之比例,比值當更小.然已死之生物性膜,其蒸發率且較游離水面為遙大,則生活之葉,必具有絕大力量,能制止體中水分自然之蒸發,其理至明.

Sachs以為蒸騰作用與根之吸收力量間有絕大關係.蒸發量與土壤中之溫度及土壤本身之性質,相互成比.將菸草栽培於粗砂土與粘土中,則在粗砂土中者,其所排出水分,遙較植於粘土中者為少.又酸類能增加蒸發量,而鹼類及多數中性鹽類,則有制止蒸騰之力.

3. Bügerstein: 1876年由實驗知硝酸及碳酸能使蒸騰水量增加.濃鹽溶液所增加之蒸騰量,較之稀酸或稀鹽液尤大.唯鹽類之濃度達一定之限度後,則其促進蒸騰之力量,卽又大減.

4. Vesque: 1880年復注意及蒸發量與土壤中之吸收量之相互關係,結果斷定不同之土壤,畀予植物之吸收量及

植物之蒸騰量有關係,而鹽類之存在轉為次要之間接因子.

5. Haberlandt: 1887 年, Von Höhnel 1879年及 1880年,各作有關於全植物體蒸騰量之精密的實驗. Haberlandt 得知每一 diem 中玉蜀黍之蒸騰量為 80 gram.亞麻為 191 gram, 向日葵亦大概相同. Von Höhnel 之研究,則更為精細,知植物各部分之蒸騰量亦不相同.就其計算結果言,具葉二十萬片之一株山毛櫸樹,在暑日中一日所排出水分之量,為 30 至 40 Kg.

II. 氣孔與蒸騰作用之關係:

1. Von Mohl: 1856 年始說明氣孔兩側之保護細胞(Guard Cell) 之膨壓生變化時,則氣孔啓閉之度不同,蒸騰之量遂亦受影響而變化,此後多年,罕復有學者注意及此,逮 1880 年,對於植物刺戟感應之研究起後,舊案重提,氣孔及保護細胞之作用,乃得大白.

2. Schwendener: 1881 年,就氣孔及保護細胞,作詳盡之研究,以詳細精確之圖,表明保護細胞細胞膜有某數部分特別增厚,結果其膨壓發生變化時,細胞之形狀亦生變化,因而影響及於蒸騰.

3. Sachs: 證實 Von Mohl 及 Schwendener 之說,謂保護細胞在光中,能因與隣接細胞在滲透壓上發生變化而變形,因以操持氣孔之開闔,調節水分之蒸發.

4. Leitgeb 1881年由研究氣孔夜間閉合現象之結果,提出另一假說,謂保護細胞之開闔,全非自動的,其發動力乃在其他葉表表皮細胞之膨壓發生變化,因而强制保護細胞,使起收縮.黑暗對於表皮細胞之膨壓,有變化力量.

5. G. Haberlandt 及 Schäffer 各據此說之一面,互相爭執,1887至1888兩年,爭論最烈.後此討論研究,又復低沉,直至1896年始復有人注意.

6. Schellenberger 1896年,復提出討論.

7. Trancis Darwin 1898年發明吸濕計 (Hygroscope), 對於蒸騰量乃能作極精確嚴密之計算.利用此器械之精確,Darwin乃得作極精密之實驗,結果得推論四事:

a. 保護細胞膨壓之變化,實爲氣孔開闔中重要因子.

b. 氣孔之開闔,爲植物本身之一種自動的生活現象.

c. 膨壓之變化,不過爲此種作用表現時之器械.

d. 溫度光線……等外界因子,爲引起此作用必需之刺戟.唯保護細胞所受此種種條件之刺戟,則與全植物體他處完全相同,並無特異之處.

自 Von mohl以來,學者皆以爲保護細胞中之葉綠體,必與氣孔之開閉有關,以葉綠體多則引起滲透之物質亦必多,而滲透壓遂生變化也.第據 Darwin 之研究,則擱置暗處半小時之久,滲透物質似可全部破壞,而保護細胞之形狀,則殊不變化,又氣孔長在黑暗中,則恆大開,置於無二氧化碳

之空氣中,氣孔亦無閉合現象,則葉綠體對於氣孔之閉合,實無作用.

6. Kohl: 1895年,說明日光光帶中,紅線藍線,(即能受葉綠體之吸收者)可使氣孔張開.

7. Stahl: 1897年,發現若溫度適宜,則睡眠植物之氣孔,夜間不復閉合. T. Darwin 贊同之,且謂氣孔夜間之閉合與否,有固定之旋律在,與睡眠旋律相似,但不及其顯著.夜間氣孔雖不閉合,亦無蒸騰作用.

III. 蒸騰作用與原形質生活之力:

1. Baranetzky 1872年,發現振撼後之樹枝,暫時間其失水量有增加.若振撼過久,則失水量又復銳減.

2. Wiesner 1876年謂 Baranetzky 之實驗,經彼複試,未能獲得同一之結果.

Wiesner 同年以黃化及正常之玉蜀黍作實驗,知在定溫定濕之空氣中,光能直接作用於蒸騰作用而不必影響及於氣孔.彼設法將玉蜀黍之氣孔幾於全部鎖閉,而後以光曝之,結果則黃化植物之排水量倍增,而正常植物且更增至七倍.作用之光帶部分,與引起同化作用之光線相同.又就 Hartwegia 作實驗,知其氣孔在暗中雖亦常開,唯光線照射之後,則排出水汽之量立增至一倍半.據 Wiesner 之解釋,則謂葉綠素能變光之勢能為熱能,因以影響及於蒸騰耳.

3. Von Höhnel 以蒸騰作用之進行與葉本身所含水分

之多寡無關,提出蒸騰作用應爲原形質生活作用之一種.

4. kohl: 1886年證明 Baranetzky之實驗結果,確合於事實.

5. Van Tieghem 1886年亦發表謂色素能增進蒸騰作用,此說在法國風行一時,且有 Chlorovaporization 之稱.Dehérain 1876年曾提出謂如葉無二氧化碳之吸收,則光線之照射立卽增加蒸騰作用.

6. Jumelle 1889年亦由觀察之結果,而提出謂葉綠素能影響蒸騰作用.

7. 德國英國學者對於葉綠素之影響於蒸騰,則始終持懷疑態度.Kohl 及 Verschaffelts 作同樣之硏究,亦未得有相同結果.反之,1884之頃,法國學者 Bonnier,mangin 且曾發現菌類之蒸騰,亦受光線之促進,足徵葉綠素實無影響蒸騰作用之能力.

IV. 蒸騰作用與植物生活之關係:

1 Wiesner 1876年綜括歷來學者意見,提出斷案,謂植物之所以必有蒸騰者,蓋因其必吸收多量過淡之溶液,始足以敷其鹽類之要求量,所餘之水分,乃不得不藉蒸騰以排出之.

2. Hales, Meyer, Sachs 諸前輩皆謂植物根壓所吸收之水分,恆以蒸騰排出體外.Sachs 更謂由此蒸騰之結果,可使乘機闖入植物體中之空氣,生成負壓,俾根壓之進行,彌得暢遂.

3. Von Höhnel 1876年,在水銀中截斷正在蒸騰中之植物莖,結果見水銀升入莖中成柱,至於數公分之高,此負壓(卽吸收力)之値,約爲大氣壓力之半至三之一.若蒸騰停止,則負壓亦卽消失.

4. 自 Von Höhnel 證明蒸騰確能助進吸收後,學者對於水分在植物體中沿直軸上升之作用,遂亦思就此求解釋. Vesque 1880年研究之結果,知蒸騰後所生成之低壓,確能使根壓增高,而使水分源源流入於各導管空隙.故氣溫升高時,木本植物所吸收之水分卽受牽制;蓋以其導水管中之氣體,因熱而膨脹,遂使負壓減少,而水分之吸入乃亦困難也.

5. Pappenheim 1892 年見松柏類植物之假導管中氣體之張力,不及四分之一氣壓.

6. Schwendener 同年發現其他木本植物之導水管中氣壓,亦大概如是.

7. Haberlandt 發現蘚類中心柱中之長形細胞,亦有負壓之現象可見.

8. Strasburger 1891,Pappenheim 1892 年見凡樹枝中,有蒸騰卽有負壓以使水分上昇.

9. Brown 及 Escombe 1899 年始提出水分蒸騰,除排出過剩水分及生成負壓,以促進根之吸收外,尙有一絕大作用,卽爲調節體溫,據 Dr Brown 在英國植物學會 Dover 會議席

上之演說,則向日葵(Helianthus annuus)之葉片,每平方公尺之重量約爲 250 gram,其比熱約爲0.9,在光明之日光中,每平方公尺之葉所蒸發之水量,可達 275c.c.,其所耗熱力,爲162800 calorie.若停止其蒸騰,則葉之溫度平均每分鐘必增高12° C.故實驗時,偶一不愼而使葉梗之水流窒塞,葉恆卽被傷害.

第三節　植物體中水液之上昇

I.　過去之觀念——毛細管說:

自 Hales 以至於1861以前,學者皆公認植物體中水壓之上昇,純爲導水管及各種細胞間隙之一種毛細管作用.

II.　進展諸說:

A. 關於毛細管作用說之反對論調:

1. Hartig　由組織學上之研究,發現松柏科植物之假導管,彼此不相通,其重緣孔亦有薄膜蔽在,則毛細管作用斷不能解釋水液上升之現象.

2. Quincke　1863年,始提出謂水在導水管中成薄層沿管壁而上.

3. Böhm　1865年謂空氣之壓力亦爲助進水液上升之一因子.

4. Nägeli 1866年謂植物若倚毛細管作用以使水分上昇,則必不能敵其蒸騰中之消失.

5. Sachs　1868年採 Quincke 之說,於其 Lehrbuch 中.

6. Unger 1868年則謂細胞膜本身之蓄水力(Imbibition),實爲招致水液使之上昇之一大原動力.

7. Sachs 見Unger之說後,大加贊賞,謂細胞膜之蓄水力,於引致水液之上升,有絕大力量.於是1879年,在其所著Über Porosität des Holzes 中,提出細胞膜之蓄水力與毛細管之差異.次年,更在其 Vorlesungen uber Pflanzenphysiolazie 中,明詔學者,謂植物體中水液上升之原動力,全由蒸騰後露在空氣中之各末端部分,所含水分逐漸消失,於是其細胞膜所蓄水分,遂感不足,而各細胞間含水量之平衡,因以破壞,欲求恢復,隣近此末端細胞之下方各細胞,細胞膜乃輸水分於因蒸騰而水分減少之各細胞膜中.此輸出水分之細胞,其細胞膜旋又以同一理由同一方法,由下面隣近細胞中,獲得水分.此種吸水作用,漸漸循植物之縱軸下達,終至於根,自幼根之尖端,引水至於葉中.幼根乃自土壤中不時吸收水分,以使其細胞膜之含水量,常保持飽和狀態.

Sachs爲此說時,更根本反對根壓之說法,以爲植物吸水之作用,全在蒸騰後各細胞細胞膜含水量平衡失却後對於分水之牽引.

B. 關於Sachs之學說之反辯:

1. Hofmeister 1857年發現之所謂 Jamin's Chain, 即導管中水液與氣泡斷續相承之串,1878年Von Höhnel及 Böhm同時覆檢得之,可知植物體中水分之上升,含 Sachs 所假定之

蒸騰及細胞膜之蓄水力為主力,細胞膜為途徑者外,實尚有其他力量與途徑在.

2. Elfving　1882年發現若以椰脂窒塞割斷枝條之導水管,使水不能通入,則葉之枯萎甚速.

3. Vesque　1883年以鐵夾緊壓新截斷之枝,使其導水管窒塞,則水分不能復上升;惟去夾而使其導水管之管口再通,則水分又可輸入.

4. Kohl　1885年, Strasburger 1891年,均有同一之實驗.

5. Böhm　1878年重發現 Jamin's Chain 後,乃復提出舊時之機械說,以為植物體中水液之上昇,實為各部分水壓氣壓不均衡,而引起之一種濾過作用.然 Elfving, Von Hōhnel, Russow, Vesque 皆反對之,第亦各持一說,了無整一合宜之解釋.至1889年, Böhm 竟更進而謂水液上升,毛細管作用為唯一之原動力.

C. 滲透力普在之說法:

1. Westmaier　1883年至1884年之間,復提出此問題詳加討論,而自創一新說. Westermaier 批評毛細管說,謂蒸騰作用足使導水毛細管中水柱之降下度,遙大於毛細管作用力所能使水柱上昇之度.復謂 Sachs 之所謂細胞膜蓄水力云者,實亦不過毛細管作用之一種,亦不足以解釋.唯導管附近,時有一種特殊之生活細胞,能以內滲透 (Endosmosis) 之力量,自隣近細胞獲得水分,而濾之於導水管中,其働力

與現象,一與根之導水管之濾入水分之情形相似.此種濾過,爲間歇性的,故水泡與氣泡在導水管中,遂成Jamin's Chain.高樹體中之滲透現象,往往在極高之枝上猶得發現,導管假導管與其近旁之生活細胞,能起極明著之滲透.據Westermaier之意見,則木部柔膜組織及髓線之作用爲最强.

2. Godlewski　1884年提出同一之意見.

3. Janse　1892年極贊成之.

4. Schwendener　1892年及1893年更以實驗研究,爲此說之證明.

D. Strasburger及同情諸學者:

1. Strasburger　1891以蒸沸或毒物吸入法,殺死莖之組織,使達10至12公尺之長後,結果水分仍能自莖中上升,且往往超出已死部分至於數公尺之高.由是乃反對Westermaier諸人所持之生活力說,以爲此種水分上升,純爲物理的作用,初不必賴生活細胞之力.

Schwendener 1893提出反對,對於Strasburger之所謂殺死組織.究竟是否真已死亡,認爲可疑,且說純水柱雖不能以氣壓而上升至達氣壓表水柱以上,然Jamin's Chain則可能.

2. Dixon及Joly　1894年在愛爾蘭研究水之特殊抵抗張力,知水柱能在狹管中上升甚遠.且水柱中雜有空氣存在與否,與其上升之高度無影響.故水液在植物體中之上升,實爲一種機械的現象.據其計算,木材中之水柱,其附着

張力,可達 7 氣壓,故水分可以伸張達高樹之顛而有餘.至吸引水分使其生成上達張力之働力,則爲蒸騰中細胞之細胞膜物質所生出之表面張力.

3. Askenasy　1895 年在德國有所發表,其所持理論,略與 Dixon 及 Joly 同,唯以爲吸水使生成上達之抵抗張力者,爲細胞膜之蓄水力.

英德兩派之學者,均主張除水之張力外,葉肉細胞之滲透性的吸水力,實亦爲吸水上升之一主要因子.葉中膨壓漸次低減,則自水柱之頂端吸水以彌補之,而下方水分遂以是而漸漸上升.且此種力量實爲使水液由根梢上升至莖端之最要主動力.

III.　水分上升之測量:

1. Mc Nab　1871 年使植物吸收鋰鹽之淡溶液,然後在不同之各種高度處,截樹幹取其汁液,作分光鏡的檢查,結果得測知各種植物吸收之速率.

2. Pfitzer　1877 年, Sachs 1878 年,均有同類之試驗.

(未完)

廣西兩棲類與爬蟲類地理分佈之研究(1)

Mell 博士原著

董爽秋譯

廣西貴州兩省,在科學上爲中國最暗昧之區域.廣州中山大學辛樹幟教授於西曆一九二八年組織生物採集隊進向廣西中部之猺山(桂江,潯江.與柳江間之分水嶺,約在北緯 24.5 度東經110度,高出海平線約 1500 米尺). 此區域之邊界,雖曾由法國傳教士及Dewal (路線係經過廣西雲南)作過採集;但區中動植物情形至今猶完全未明.辛教授之採集隊所得之動植物標本,非常豐富有趣.關於所採得之鳥類Stresemann 博士(Journ. F. Ornith., 1929, H. 2, P. 323-337und 1930, H.I, P.) 與辛教授(中文)曾有報告.至於第一次所採集之爬蟲及兩棲類,乃具有下述之特徵.

廣西與印度較爲接近,更因其北方廣有山地以禦冬天寒風.故印度區與印度馬來區動物(Gecks gecko, Elaphe Taenuura Vaillanti, Dryophis, Bungarus fasciatus, Amblycephalus moellendorffü) 北向之擴佈在廣西者較多於其鄰省廣東,境中此等動物,及其他南方性動物其腹鱗 Ventralia 數量較多於廣東及其他中國陸地者 (Ptyas korros, Calamaria Septentrionulis,

(1) 見德國 Sitzungs berichte der Gesellschaft naturforschender Freunde.

Bungarus multicinctum, Naja naja, E. T. Vaillauti 而尤以尾下鱗 Subcaudalia 爲特著). 而與海南東京之動物相近.最特著者則爲新屬 Shinosaurus (辛氏蜥蜴屬) 之發見,此屬或將代表一新科.外此則Geomyda Spengleri,之多見,亦極特別.此兩種俱爲地球上古代溫熱時期之遺物,獨得殘存於此. (Geomyda 亦見於琉球.又因此區內低下地域之氣候與印度區及印度馬來區環境相似,故亦有 Natrix piscator 有色型之發見,且彼古北極區性之南方代表(Natrix Stolata) 與 (Subminiata) 腹鱗之數量,亦大爲減少,凡此情形,皆適與其同種物之生於雲南,廣東北部,福建等地者相反.

其第二種特徵爲其所含太平洋古北極區及東喜瑪拉亞之種類,數量甚多,與海南及南中國海岸各地之動物大異.(如近似於印度產 Takydromus khasiensis 之 T.Kwangsiensis, 其分佈僅限於斯而不復東向廣東擴布,多數鳥類亦然). 又所含東喜瑪拉亞型其腹鱗數量亦甚多,而與其鄰省廣東產者相反 (Liopeltis, Amblycephalus m. kwangtungensis 爲達到貴州產 A. M. boulengeri 之中間種型,居於中等高山地帶之 Trimeresurus mucrosquamatus 數量之多,遠過於廣東與福建所產,惟台灣高山之個體數堪與相等). 只由此卽可斷定猺山甚高 —— 其森林所達地域必高過於其鄰省廣東北部高山(此地山巔之高約 1300 米,森林所達只 1100 米), 而與福建西北部卦墩山高度等. (此山巔約 2000 米森林達15

00與1900呎). 在其較高地帶內彼至今只見於台灣及福建高山之 Sphenomorphus boulengeri. 亦發見於猺山.由是吾人似更可推定多數模式的東喜瑪拉亞高地種型,至今倘只見於雲南及福建台灣者 Macropisthodon, Natrix swinhonis-nuchalis, Trimeresurus monticola. 或亦可發見於斯. E. Stresemanns由其鳥類之研究,亦推得有類似之結論.

又其與印度支那更較接近及更較高之地域內,倘有第三種特徵足以為其與東方鄰省廣東之動植物界別焉:卽其平原與山坵之景象如桂江等地,皆由石灰質堆集而成;廣西與廣東北部動植物差異之原因蓋卽在此.而非彼桂江與遠江(黔江)間之水界也,(此水界無一點可達900呎者)由是而如 Tapinophis 屬至今只見於中國東部爲一單種之屬者,現有一歧異種型發現於斯而可別爲新種;此種孤立現象,在 Holarchus, Molge, Tylotriton 及 Rana 等亦有同樣之表現.

對於中國兩棲類動物,至今猶未見有整個分類.吾人所知之南中國爬蟲類,則可由其數量,分析如下表:

Ge gr. Gebiet 地理區域	Ges. Zahl d. Spezies 種之總數	Paz. Palaearkt. Formen(%) 太平洋古北極區種型	Osthimal. Formen(%) 東喜瑪拉亞區種型	Prähimal. Formen(%) 前喜瑪拉亞區種型	Indomal. Formen (%) 印度馬來種型	Indische. Formen (%) 印度種型	Endemismen[1] (%) 原產物
Hainan 海南	74	18,9	14,8	4,2	45,9	16,2	17,7%
					62,1		
Küstenzone Von Kwangtung 廣東濱海帶	70	22,9	11,4	2,9	45,7	17,1	3,6%
					62,8		
Kwangsi (yao shun) 廣西(猺山)	34	26,4	32,4	3,0	29,4	8,8	32,3%[2]
					38,2		
Nordkwangtung 廣東北部	52	34,6	40,4	11,5	3,9	9,6	
					13,5		23,3%
Fukien 福建	72	36,1	34,7	6,9	12,7	9,6	
					22,3		

此第一次寄送之廣西猺山爬虫類標本尙未及吾人所可期望之半數但其原產物Endemismen之數量之大,實堪驚異.就中亦有多數種型在命名原則上.尙未穩定其名稱,此種現象,乃證知廣西在動物地理上可成爲東喜瑪拉亞之一特別區域,宜名曰猺子區(Provincia yaotsica)將來研究必猶可發現極多可喜之現象可期而待也.

1)一屬作四單位計,一種作二單位計.亞種與體型Form作一單位計.

2)中國富有原產物之區域,依吾人近世所知,以雲南四川之高山爲最,約爲39%.

關於"中國哺乳類誌"

石聲漢

正在我動身離開廣州的時候,接到Mr. Glover M. Allen一封信,他告訴我說美國天然歷史博物部American Natural History Museum 的亞洲採集隊Asiatic Expedition在幾年工作之後,現在已經結束,採集隊底主任Dr. R. C. Andrews 預備刊出一部叢書,詳細報告他們採集所得的結果.在這部叢書中有一種是預備把歷來知道的關於中國和蒙古(請注意!美國人是不把蒙古算做中國的)所產的哺乳類種類,作一個完全的討論。現在,初步的工作已經完竣,編纂成書的工作也已經開始,大概一年以外,就可以出版了.

從事生物學的中國人,聽了該生出一種甚麼感想呢?

歐洲的東西,不用說歐洲人自己努在力地整理,——搜求更不用說已經是過去的事情.美洲,澳洲,非洲,凡屬在他們政治勢力下面的地域,所謂"無色人種"的學者,也正各自在努力搜求整理,各個地方的地方動物誌(Jauna)一類的書,也差不多要完備了.和歐洲貼近的亞洲呢?西伯利亞荒塞的地域,和中亞細亞高加索一帶,俄國的學者們用心地做過了,甚至中國的蒙古,東三省,新疆一帶,如像Dybowski, Przewalski, Pallas, Satunin 諸學者底搜尋研究,也就和他們在附近一帶的"屬地"一樣,堆積下了許多不磨的文獻.向西,葱嶺以南, Afghanistan, Belugistan, 亞洲土耳其,印度,向南緬甸,暹邏,安南,馬來,印支半島,馬來半島,印度洋太平洋亞洲諸島他們尤其注意.調查研究的工作,一方面發表,一方面繼續進行,差不多除去歐洲北美以外最明白的動物分佈區域就要算這些地方.向東去,日本和附近諸島,從前 Siebold, Temminck在動物方面,Thunberger, Maximowicz諸學者在植物方面,已經創立了空前而且絕後的功績,那可憐的幾個小島中有限的動植物,差不多已經到了"完全明白"的境地.他們本國人肯爭氣,自己便爬着跑着一樣地跟着人家來搜尋,再有些些不甚明白的地方,也就沒有甚麼困難.美國人和英國人還是不肯放鬆,仍舊要來探尋,結果的報告,過去十多年二十年前還有刊出,然而所獲也有限的很了,而且,多半都是關於台灣琉球,朝鮮等"中國地方"的記載.

把這些地方和兩極地帶除了去之後,所賸下的中國如何?中國人素來愛誇說"地大物博,"就實際的情形說來,這四個字原是"當之無愧"的.拿地圖來看看,經緯度所佔的地方,中國的幅原固然是大;同時就動植物地理分佈上看時,中國剛好在古北極區和東洋區兩個區域交接的地方,這兩區的動植物,不用說是都應當有的.然而,我們就能夠以此自豪了嗎?中國已知的生物有多少種類是自已發現

的呢?中國動物誌植物誌的記載中有不有中國人自己底功績包括在內呢?歷來中國幾個著名的採集地點可有幾處是自己發現發表的?河北的東陵,福建的卦墩,雲南的大雪山……,尤其可憐的是康蜀之間的 Moupin, 到現在我們竟連漢文地名都找不出!至於其他新疆,西藏,青海蒙古等處原來沒有漢名的地方,外國人所作的採集記載,我們有許多簡直不知道他們說的是那裏.同時,外國人却一趟不了一趟地來了又來:法國的 Pere David Pere Heude, 英國的 Swinpol, Reeves 等人,已經過去了,他們在各處零零星星的搜集,已經留有不朽的功績.稍微近代的英國的貝淳公爵東亞採隊 The Duke of Bedfordis Asiatic Expedition, 由山東起,經過直隸,山西,內蒙,陝西,甘肅,下到四川雲南,作了四五年大規模的探訪,古北極區中,給他們找出了秦嶺的一條動物分佈分界線來.美國人更不服氣,仗着他們底富力,北至蒙古,南至海南,作了五六年的大採集,名為亞洲採集隊,實際所注意的只不過是中國這個未知區域而已.最近,他們結束了採集調查的工作後,研究報告就快印了出來了.

說到地方動物誌這件事情,尤其叫人難過.本來,一個地方的東西弄清楚了之後,原來應當把結果報告出來,使後來的人容易檢查,容易比較的,不單只是一種矜奇務博的事情.因此,德國的淡水植物誌,淡水動物誌改版又再改版地刊行;英國 Barrett Hamilton 把英國的哺乳類研究綜括起

來做成精確絕倫的六本 History of British Mammals, 雖然不全出自他手,但這書却實在是"絕唱"; G. S. Miller Catalogue of ammals of Western Europe, 直叫歐洲的學者很不容易有再進一步的工作.推而至於某一個博物館,也許要做它所藏全世界的動物的動物誌,如像 British Museum 的幾部大書, Catalogue of Marsupialia and Monotremata, Catalogue of Apes and Monkeys, Catalogue of Ungulata, Catalogue of Birds Eggs 之類,用意方面還不至使人生出不快之感.進一步,如像法國人研究 Congs,印支半島和英國人研究印度,南部中亞細亞荷蘭人在南洋羣島的調查美國人在非律賓的研究對於自己底"屬地"所做的工夫,一部部的大書刊印着出來.在這些地方,本地的居民文化程度比不上歐人,他們越俎代庖來做,我們在旁邊看着時,一方面固然要欽服他們底毅力與精細,如像 Fauna of British India,Fauna of Malag Peninsula, ... 等大部的著作,和 Journal of Asiatic Society, ... 等幾十年的雜誌,實在是驚人的工作,同時却也的確要有點不平之感.現在,他們照樣在中國的研究一部分一部分地結束了,就照樣拿出對待"屬地"的辦法來,照樣要出地方動物誌了.

在這方面的工作,就現在所能夠知道的,如像鳥類方面,英國的 J. de la Touche 已經有了作中國鳥類目錄的企圖.以他個人過去的經驗,和他所憑據的材料,他做這個工作原沒有甚麼不適當的地方,只是我們自己却難爲受得下去.

Pope Schmidt, Stejneger 諸人關於中國的爬蟲兩棲,預稿已經有了幾篇,當然接着會有出現的.此外如Dr. Needham關於中國的蜻蜓,也有了一部很完全的研究.關於哺乳類的一方面,因為英國人和美國人所走的道路不同,各自競爭,一個東西,一個南北,我們猜不到這方面的綜結工夫究竟誰做.前年英國的古田譚士先生 Mr. Oldfield Thomas 逝世以後,做東洋哺乳類的人沒有繼起,我們還想着這步工夫的工作上增加了不少的困難,因為有許多的難題,非由過去學者個人積累的經驗中去找解決是很難的.現在這步工夫美國人在做了,在替我們做了,而且快要做好了,我們從事生物學的中國人怎樣?

然而,不要灰心,他們底工作雖則是快要做好了,但是我們可以說完善是絕對不會的.第一,他們來採集中國的東西,在經濟方面,經驗方面,方法方面,雖比我們強,他們底修養雖然比我們好,可是經驗方法的修養我們是可以學得來的,我們學得了方法,積下了經驗,我們儘可以再從事採集,搜求.十步之內,必有芳草,我們怎麼就知道我們沒有新發現?在材料方面不能勝過他們呢?第二,他們所到的地方,大概都是交通比較便利,或者他們容易去到的地域,因此像貴州底大部分,廣西全省,湖南江西南部,以至於青海甘肅許多荒僻的地方,到底還是"未知區域,"他們只能推測,不能去實際的研究.在這一點,我們也可以由搜集材料的

區域上勝過他們.同時,我家若真能夠捨一點時間,多多注意注意野外工作,在生態上增加記載,也可以更正許多的錯誤.就是退一步說,我們自家從前不知道努力,把這初步的工作讓給人家去做去了,我們若是再寬宏大度地把這綜結完成的工作,也讓他們去專美,那我們就是自願做馬來人,印度人,阿富汗,俾路支人,願意把自家底國家給人家做屬地看待,願意人家把自己的民族當做沒有文化的人看待!

因此,旁的方面我不說,我總希望中國能有一個從事生物學的人,能夠蠲除一切成見……,努力把這些未知區域裏的東西搜集出來,再就人家已經去過的地方,努力作更精細的調查研究,自家先預備一點實力,然後再把人家底工作拿來做基礎,補充改正,做出一部詳盡博洽的中國哺乳類誌出來,爭氣一點,不要叫人家輕視我們到底!

自然,做這方面的工作原有不少的困難;第一件最叫人傷心的就是材料問題:生物科學源來脫不了一點貴族意味,在實際應用方面,暫時很難談到;因此採集調查底"重要",很難得到瞭解.蒐集材料,便是萬分困難的事情了.第二,哺乳類底分類是最難最煩的事情,數量雖少,變化極多,又沒有一律一定的標準,在實際工作底初步,比任何部分的分類研究都要困難.初學的人,沒有堅決的毅力,不屈不阻地向前做,不問成功,不畏挫折,不怕改正錯誤……(自然

錯誤是必有而且必須改正的,)不怕沒有人同情,那是很難有希望的.第三,中國底哺乳類,研究情形之糟,是比任何部分的動物底研究要利害的.因爲哺乳類底材料不易得,研究困難,所以各國的人注意的也不少.每一個學者,得到一點材料,往往要定出許多新種新亞種出來.這些新種新亞種,自然我們不能說他完全沒有理由,但憑偏見而定下的實在也不在少數.過去的學者,如 Satunin, 如Pallas,如 Matschie, 現在如 Cabrera 等,往往不免要犯這種偏見.如果真要詳細整理,我們不能不把他們底模式標本一一檢查過.然而在現在這樣的時候,我們怎麼能夠有這樣的經濟能力與時間去做偌大的功夫!不過,經歷的艱難愈多所得到的成功才愈有價值愈有意味.如果我們甘願受人家底輕視,不想自家振作,那就不用說,隨他好了.不然,事在人爲,我們總自家來努力一番,光榮的前路正在等着我們,爲甚麼不去做呀?

黃土之研究

王恭睦

黃土在中國分佈之廣,關係於民生及國民經濟之重,其重要尤有過于煤鐵油等礦,加之中國素以農立國,農業物不僅爲民食民衣所利賴,且亦爲國際貿易上之主要出口之一,中國不幸目前已成爲被各强國經濟侵略之一大中心,每年在商業上入超之損失不可數計,至望多產農作物,以希補救於萬一,然近年不但農產品出口額日漸弱落,入口糧食日愈增多,而每有超過出口之勢（參考前年海關統計）,且國內連年饑饉,死亡枕藉,數動以百萬計,而流離失所者,動復以千萬計,而此種大饑饉又幾盡發生於黃土區域內,豈黃土之土性不良有以兆之乎,實則黃土土層之厚,土質之肥,爲世界上至難得土壤之一,各種不幸,半由於人禍半由於天災（原由於林業之不振）有以致之,可慨也夫.　　著者附記　民國二十年元旦

目　次

緒言

黃土爲淤沙狀之沈積,色黃或黑（在多含腐植土時),泥土狀,大部分爲砂粒所成,惟粒極細,各粒間不相聯結,故質甚軟,若取其置於兩指間磨研之,卽成細粉末,爲最肥沃土壤之一,極適于造林及農作.散布亞歐美等洲,而以中國之黃土沈積最厚,在中國北部所占面積更大,不僅關係於社會至巨,且供給最好之科學研究材料.

黃土中每夾有一層或多層之散漫礫石,石塊大小不等,成水平層,土中有細長之空細管,黃土本身則鮮具層狀,然亦有成層狀者（如五台山南麓,第二圖),中多灰質結核,形圓,橢圓菌狀,或長至一公尺餘,稱爲黃土人,土崩時每在垂直之方向上,故道旁或河旁之土都成直立之壁,黃土在風化後則疏鬆,易爲風所吹起,并被攜之遠方,車道經厚層之黃土時,土受車輪作用而鬆散,隨被風所吹去,故道路之

高度漸減,而終至于深入於兩旁成絕壁之黃土谷中,(第一圖)陝甘居民多掘入土中居住,且有作上下層之穴而居者,每成穴居之村落,法雖經濟,然甚危險,因一遇土崩,或因地震而土崩,則全村生命盡遭危難,故卽如地震不甚烈,土亦至有下崩之可能,上次甘肅大地震中生命損失如此之巨者,此亦一原因也.再則人民製造煤球及鄉村居民造房屋,牆壁大都取材於黃土.

第一圖
黃土谷及深道
(After Richthofen)

沈積厚層之黃土區域必成大規模之平地,平原或高原,因利於種植.成爲沃野,山東平原卽其例也.

各處黃土粗視之似皆相同,惟其沈積時期,成因,成分及特性每稍各異.

黃土之分佈

黃土分佈於北半球上較爲普遍,如亞洲歐洲及其他之地面部分,均產多量之黃土.

中歐之黃土帶起於法之東北部,經荷蘭,比利時,萊茵(Rhein)河以達德意志之南部及中部,再由舒來興(Schlesien),格立親(Galizien)波蘭,捷克,羅馬尼亞以至俄羅斯之南部,

厚度僅爲3—8公尺,鮮過20公尺者,惟在極相近處,厚度變化極烈,較高之處則無黃土,山谷黃土必積聚於山之背風面,其向風面之谷中則無之.

俄國南部極肥沃之黑土(Tschernojom),實亦爲黃土,惟因上部多含腐植土(Humus)故成黑色.

北美之 Ohio, Indiana, Illinois, Iowa, Kausas, Nebresca, 南經 Missouri 以至 Mississippi 河流域,黃土占據之面積亦甚大,

紐西蘭 Pampas 及阿根庭亦有黃土.

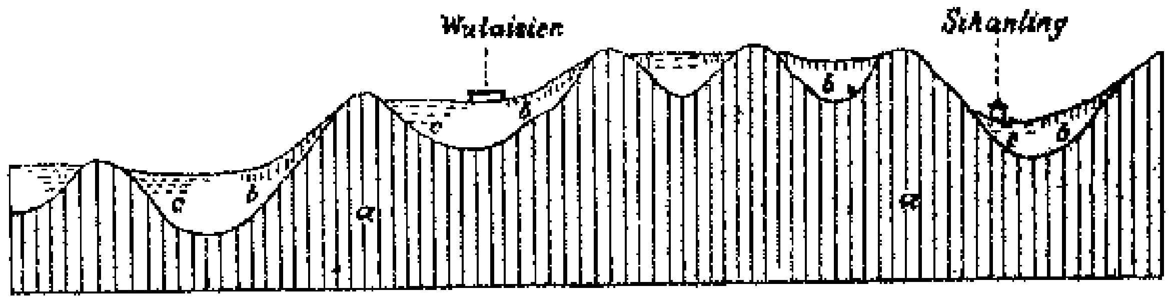
中國北方黃土之分佈既廣,積層亦較他國特厚,除中國本部外,東三省蒙古新疆綏遠等等莫不有之,東三省遼河流域之黃土區爲向所著名者,內蒙草原上亦有之.

在中國南部則黃土除在江蘇及安徽間或有之外,幾爲絕跡,而蘇皖之黃土所占面積及其厚度均遠不如揚子以北之黃土層矣.

中國北部黃土之厚度亦至不均,從前歐人考察者以爲自數公寸至2400公尺,未免言之過甚,據最近調查,普通至多不過60公尺,惟局部之厚度則或過之,如甘肅黃土,有過80公尺者,山西黃河西岸亦有達一百公尺者,與歐人所得述之數相去不知幾許矣.

無論在平原,高原,盆地,山麓(如天山),山坡上,山谷中,及山地上(高度可達1600公尺,第二圖).俱可積黃土.

黃土所積之處,地勢亦較平.



第二圖　五台山南麓之黃土盆地剖面
a.岩石, b.陸黃土 c.湖黃土 (After Richthofen)

依 V. Tillo 之計算,黃土所占面積在亞洲約爲百分之三,占面積計 511.150 平方英里,平均厚度爲30公尺,當共有40.000 立方公里.

北美黃土所占面積爲百分之五,歐洲約百分之七,南美約百分之十,惟其厚度則不如亞洲矣.

總計黃土占地面上之面積約爲百分之四.

黃土之物理性質

黃土之普通特性及其沈積狀況,既如上述,茲就其粒狀比重機械成分(所含土粒之大小及其百分率)礦物成分等,偏重於中國黃土而分論之.

I.　土粒之大小及其百分率

黃土所含土粒之大小研究,亦至有興趣,平均而言,其土粒較砂其細,較泥土之粒爲粗,此黃土之所以含砂雖多,而仍半似砂半似土也,惜其機械的分析因來源不同而結果亦異,(大都由於局部土質之變換太烈,亦有由於分析方法之不同者)加之歷來學者所分析樣本之數太少,其間

尙未得滿意之統計,惟位在東南之黃土,其極細之粒之百分率較大,而極粗之粒之百分率較小,爲可注意耳.

玆總集中國黃土之分析表示之如下:

直徑		%
2—1	mm.	.0034— 2.89
1—0.5	mm.	.0067— 4.38
0.5—0.2	mm.	.07—14.98
0.2—0.1	mm.	.09—10.52
0.1—0.05	mm.	4.49—49.44
0.05—0.02	mm.	9.72—43.22
20—10	μ	3.28—27.80
10—5	μ	2.48—12.60
5—2	μ	2.68— 9.11
2.—1	μ	1.87— 6.48
1.—0.5	μ	1.17— 5.57
0.5—0.2	μ	1.68— 6.15
<0.2	μ	1.04—15.39

就全體言,百分率最高之粒爲直徑在0.1與0.02 mm.之間,惟中國北方之黃土與江蘇之黃土較,則北方分土粒百分率最高者爲在0.1與 0.05 之間,在 0.05 與0.02 mm之間者少,江蘇黃土百分率最高之粒直徑卽在 0.05 與0.02 mm之間,百分率較低者在北方爲直徑大都在0.1與 0.05,亦有在0.-

05與 0.02 之間者,而江蘇黃土已在20與 10 μ 之間,最大之顆粒,在江蘇黃土中直徑2—1mm者僅0.0034%, 1—0.5mm者亦僅 0.00067%, 此種最低之百分率,在北方爲至鮮見.

上列之分析爲較精確,巴博爾曾取 758 粒而計算之,其平均大小爲0.0124mm.

美國黃土之粒直徑都在0.005與 0.05 之間,較中國之黃土粒爲均勻.

II. 黃土顆粒之形狀

以土粒在顯徵鏡下察之,可知其大都爲多稜角,而非圓形,至於各地土粒形狀之分別,尙少學理上之見解.

III. 黃土粒之比重及其百分率

黃土中比重大於 2.67 之顆粒,在中國北方大約占1.9—8.0%,在江蘇爲 12.4%, 其小於 2.67 者則在北方爲 92—98%,在江蘇爲僅 87.5%, 約言之比重較大之礦物粒在北方黃土中極少,平均約在 2 與 5 %之間,曾重行沈積之黃土,其中比重過於 2.75 之礦物爲僅 1.18%, 比重如石英之礦物爲5.975%,原生黃土中則比重高者爲在 (?) 4.03, 與 18.914% 之間,低者爲在27.53與38.324%之間.

IV. 黃土之礦物成分

黃土中以角閃石及石英爲最多,次爲黑雲母及白雲母(黑雲母多時則白雲母少,白雲母多時則黑雲母亦較少), 鐵礦 (Magnetite, Ilmenite, Limnite), Plagioclase, Microcline, Feldspar, Arthoclase, 等間或極多,再則爲 Zircon, Tormaline, Pyroxene, Chlorite, 卽 Rutile, Apatite, Epidote, Eiotite, Calcite, Aegirine, andalusite, Hypersthene, Aogirine, Actinolite, Granat, 等亦時有發現.

上列各種礦物雖可在顯微鏡下鑑定之,然因曾受風化,頗難識別也.

黃土之化學成分

1. 石英(SiO_2)

大約爲60.198—69.89% (After Li). 5.53—14.11% (After Wang).

2. 氧化第二鐵(Fe_2O_3)

約爲3.30—5.6%.

3. 氧化第一鐵(FeO)

爲0.21—1.5%.

在如此之大面積中,鐵成分差別之微,至可異也.

4. 氧化鋁(Al_2O_3)

3.97—7.60%, 在近地面10公分(Cm)之土中,所含Al_2O_3之量有時較下層(100—200公分之間)爲少,尤以東三省之黃土爲甚,蓋因上層之土曾受腐植土之作用也.

依李君之分析爲9.124—12.26%, 較上率爲過高矣.

依巴博爾氏之分析則$A_2lO_3+Fe_2O_3$爲1.81%, 當更高矣.

5. 氧化錳(MnO)

0.02—0.25%, 依巴博爾之分析則高至2.09%, 總之黃土含錳之量至微,各地含量之差亦低,卽上下層土中所含之

量之差亦不顯著,惟東三省之上層黃土因腐植作用而含量低.

6. 氧化鎂(MgO)

0.90—1.96%,依李君之分析則爲2.28—2.98%,東三省之黃土上層亦與氧化錳及氧化鋁同,因腐植土之作用含量較小,各地黃土含量之差亦不甚顯著,上述黃土含黑雲母不少,證之以化學分析,更爲可信.

CO_2之量差與MgO量差無關,因CO_2與CaO至有關係,而MgO量與矽質化合物有關係也.

7. 灰質(CaO)

0.70—7.21% 依李君之分析爲8.76—14.63%,相差似過巨,大概因地而異.

黃土中之灰量在中國各地方相差甚遠,卽上下層間相差之數亦大,腐植土多處(如東三省)則幾無灰質.

中國黃土含CaO之量不多,而上下層中之含量亦不甚差;在二公尺以下之黃土,尙未分析,不得而知,就山東安邱某地之黃土在深入地面下一公尺處之CaO量爲7.21%,德法下層之黃土每含多量之CaO.蓋與氣候有關,因中國北部冬季乾燥,而夏季則雨量被蒸發及他種消耗者多,不能深入地中,故上層土中之CaO亦不被水溶解以達下層也.

卽東三省黃土之CaO成分亦較MgO爲多者,蓋因農民

多用植物灰施肥,而植物灰中Ca量較Mg爲多故也.

8. 氧化鉀(K_2O)

0.41—1.13%. 依李君之分析爲1.47—3.90%.

在各地方及離地面二公尺間黃土所含氧化鉀之量差均幷不大,而上層 K_2O 量所以不較下層爲少者一因人工施肥,一因時有由風送來之新黃土加入也.

9. 氧化鈉(Na_2O)

0.00—0.44%. 依李君之分析爲1.05—2.35%. 惟無論如何較氧化鉀之量爲小.

10. 無水燐酸(P_2O_5)

0.21—0.67%.

11. 無水炭酸(CO_2)

0.00—4.48%. 依李君之分析爲0—7.08%. 黃土含 CaO 多者'含CO_2亦多,少則亦少.

12. 氮(N)

0.03—0.11%. 惟東三省之黃土因所含腐植土多,其含量高至 0.28 % 外,此外各處之含量則無大差異.

黃土中之氮質,大都爲分離之組織,每在種麥後添植豆科植物而來.

氮爲植物生長所需要之原質,故在種麥後再種豆一次,不但多得食料且無異於施肥也.

13. 腐植土(Humus)

0.26—1.44%. 除吉林某地之土含腐植土高至.90—3.73%外,此外各處均至多不過1.44%. 故中國黃土中腐植土量幷不高,在距地面二公尺以內之黃土所含腐植土之量,上下無大差別,足見植物之根,易深入土中也.

此外與農業無關及含量極微之化合物或原質,姑不一一列述.

上述盡爲中國黃土之分析,惟其間各研究者所得之結果,間有出入,其一部分彼此不符之點,原由於各地黃土及上下層之黃土,或原生與重行沈積之土之化學成分應各稍不同,然其間亦有相差過巨者,如石英成分,依李君爲約自百分之六十至七十,依威爾遜及巴博爾爲64.22%. (河南黃土), 彼此尙相符,然依王君之分析,則僅5.53—14.11%相差之巨,當非偶然,此外則如錳,鎂,石灰,鉀之量,依王君之分析,各地 (東北至吉林,南至江蘇,西至陝西,所分析標本達數十種), 不應無大差別者,然與李君之結果,相差亦多,惟關於黃土之分析尙少,現尙不克依分析結果,作系統之理解,上列各項中,分析結果數相差甚遠者,同時幷列,姑示大概已矣.至於中國黃土之化學成分與外國黃土成分之比較,當在"中國黃土與歐美黃土之比較"中述其大概.

黃土中之化石

黃土中化石至少,保存亦鮮佳者,茲總列各處已經發現之動物化石如左:

無脊推動物

Heli *x* sp

Pupa sp.

脊推動物

爬蟲類

龜(水產)

鳥類

駝鳥 (Struthiolithus)

Myospalax (?)

哺乳類

毛象 (Mammut, Elaphas primigenius Blum).

Elappas Nemadicus.

毛犀 (Rh tichorhinus Fisch)

西磨犀 Rhinoceros aff. simus

野驢 Equus asinus

鹿 Cervus sp.

北地鹿 Rangifer tarandus Lin.

羊 Ovis sp.

野猪 Sus sp.

河馬 Hippopotamus sp

熊 Ursus sp.

鬣狗 Hyena sp.

冰狐(北極狐) Canis lagopus

旅鼠 Myodes lemmus

地鼠 Spermophilus sp.

山撥鼠 Arctomys Marmotta

豪鼠(豪猪) Hystrix sp.

Castoid 等等

上列各種動物除寒區之草食者如毛象,毛犀,冰狐,北地鹿等外,大都爲草原上所產之動物,尤以駝鳥,野驢,旅鼠,地鼠,山撥鼠等,與現產於西比利亞草原上之動物羣相同.

惟其中亦不乏溫帶及濕地域在不甚乾燥之空氣中所產之動物如水產之龜, Hystirix, Castoid, Hippopotamus 等,再如鹿類又爲森林中之動物, Hystrix sp. 與現產福建,湖北,浙江南部,安徽,廣西等省之 H. subcristata Schw. 似雖在骨骼之構造稍有不同,惟產此之氣候,當與現在江南各省相仿彿,此等非草原產動物爲數少,且僅限於局部之區域,然在沈積黃土時期中,有局部上不同氣候則顯然也.

黃土之成因

黃土之成因曾久成一科學上之問題,在德人 Richthofen 遊歷中國時目擊中國北部偉大區域且于研究至有利之厚層黃土沈積,並參照歐洲之風沈積情形,黃土之成因始得大白.

黃土之成因學說,不外爲風成及水成二種,而風成間又

有遠方沈積及原地沈積二種.

I. 風成

(A)主張風成之遠方沈積者,以爲細土之爲自風自遠處攜帶而來而沈積於他處地面上,爲常見不鮮之事實,細土之來源,係自岩石之風化,岩石在極乾燥區域中,因風化作用而成石礫,粗砂,細砂,以至細土,終至使該處變成沙漠,風在沙漠中之機械能力特偉,風向所之,風砂走石,惟其較重較大之細石及砂粒,在最近處重行在空氣下沈,僅其間之細粒,則被挾而行,每至達數千公里以外然後沈積,此種實例在有沙漠之大陸中所恆見,其間且有極可怪之現象,如下土,雨血,或下血雪等,亦不過爲風之作用,歐洲南部及中部在1901年三月九日至十二日所下之土其來源係在非洲察哈喇砂漠,土中有石英,石灰,泥質,以及鐵質,此鐵質即兆紅色,若遇下雨及下雪,則鐵質使雨水及雪成紅色,而成雨血及雨血雪,在中國歷史中及神異小說中亦不乏此種記載,下土則在南方(如江浙等省每年平均亦約有一天)亦間有之.

風運細土之力不僅甚遠,且爲量亦巨,在上述中歐及南歐數日間之積土,僅在意大利一國已超過1,300,000噸,若在草原上或乾燥之區域中則日積月累,厚層黃土之成立,亦意中事耳.

此種土之沈積,且不限陸地上,卽海洋中亦有之.

沈積厚層黃土之處,以在草原上爲最合,就地理上之分佈言,草原最接近沙漠,且每數月不下雨,自附近或遠處吹來之土可以積至極厚,風夾泥土之量,每使日光不能射達地面,近水樓台先得月,故受惠獨厚,不僅此也,在較潮濕處,雖間有多量之黃土落下,然因水流之作用,仍被冲去,故沈積也難,若在似砂漠之氣候中及不毛之地,積成之土,仍可被下次之風吹去他處,厚層之黃土沈積仍無希望,惟在草原上多草之區域中,土層積於草上,而草不被掩死,風過後草仍繼續長至地面上,如是則下次風起,因草之保護,土不復爲風所吹去,待風過後積土又多,乃又發生一草蓋,而重復接收泥土,因之黃土沈積之厚度,得以與日俱進,漸而地面亦因之增高,在盆地上,或流水不經之多草盆地中,因空氣較爲安靜,而沈積之速率亦高.

故成厚層風積土之條件爲:

(1)挾土之風

(2)草蓋

(3)大面積無流水之盆地

此三條件在大陸之中部最合,尤其爲草原區域,故蒙古及土耳其斯坦之草原爲多黃土之地.

此理論且多事實上之證明.(1)就化石言,黃土中多寒地,乾地之陸產草食動物及與西北利亞草原上現產相似或相同之動物,如駝鳥,毛象,毛犀,冰狐,及齧鼠類,已如上述,其

間之駝鳥更與現產草原上駝鳥極似.

(2)就沈積情形言,黃土爲不成層之沈積,故非水成.

(3)土中多細孔之管,此種管,不過自草根腐爛而成,與上述草爲黃土厚層沈積之條件正合.

(4)土中多石灰質等易於溶解於水中之化合物.

(5)土中乏水產化石.

(6)如中國江南因多水,故無黃土,北方乾燥而多黃土,且近來自北風吹來之土,其特性亦與黃土相同.

(7)黃土之所以有垂直之裂面者,一因極長之樹根,每深入土中,二因在沈積下層之黃土時,各顆粒不密連,易於分離,待上層增厚時,下層所受壓力甚大,然在水平面上之各粒,則彼此間無壓力作用,而易於分離,故黃土每在垂直方向上裂下,水成土層不能有此現象.

(8)就風向及土之厚度言,與此說亦相合,中國黃土係由北風自中亞細亞攜帶而來,故北方土層厚而南方薄.

(9)就山旁之沈積區域言,譬如歐洲之山谷黃土沈積不在挾土之風之方向上,而在山之背面.

(10)就土粒之大小言,被吹愈遠之土粒當愈細,愈近之土粒當愈粗,在中國北方其間尙難有若何之分別,惟江蘇黃土最大顆粒(直徑在 2 與 1 mm 間).僅有 0.0334% 之百分率,直徑在 1 與 0.8 mm 間者,亦僅 0.0067%,在北方爲至鮮見,其間占百分率最高之顆粒,在南方爲 0.05 與 0.02mm 之

間,次之爲 20 μ 與 10 μ 間,在北方則爲0.1與0.05mm 之間,次之則大都爲在 0.05 與 0.02mm 之間,顯見風抵江蘇前,風力已稍差,較大之顆粒,已在北方下落矣.

(11)土顆爲多稜角,爲土顆在空氣因風力自相擦而成.

(B)原地沈積:在沈積黃土以前,中國北部後新統紅土分佈極廣,因紅土中含三趾馬(Hipparion)化石甚多,故亦稱三趾馬紅土(Hipparion red Clay),黃土卽沈積其上,黃土與紅土大部分爲無關係,然亦間有自紅土漸成黃土之現象,因紅土受風化作用成爲黃土,故上層爲黃土,下層爲紅土,其間則有過渡層半似黃土而半似紅土者,就化學及機械分析證之,亦極有漸進之情形.

惟由此原因所成之黃土,係爲局部之分佈,其區域遠不如第一原因(遠地沈積)之廣.

II. 水成黃土亦有自水之運送作用沈積所成者,流水作用能造成自大石塊以至細泥之沈積,則黃土之由於水成,亦屬可能,其例證亦多.

(1)黃土亦間成層,其間并有礫石.

(2)美國高有平面黃土(highlevel loess)及低平面黃土(lower level loess).前者爲冰成,後者爲水成.

(3)駝鳥蛋時有數個在一處,顯係爲水冲來之土所蓋而成化石.

(4)有 Castoid 之化石發現, Castoid 則非生長於乾燥之

區域中.

含 Hystrix 化石,而 Hystrix 產於現在福建江西等省,足見其爲溫帶中及非乾燥區域之物.

(5)有水龜及河馬之發現,至少可斷定其地當時爲溫暖及有河流區域.

(6)黃河附近多土層,與黃土風成之原理相反.

(7)有鹿類化石,足見其地多森林,其間氣候亦當非似草原上矣.

除第三項掩蓋駝鳥蛋之土亦可自風吹來外,均爲黃土水成之强有力證據,而一部分黃土爲在水中所沈積,自無疑問,Richthofen 因之分黃水爲陸黃土及湖黃土二種(第二圖).陸黃土係在乾區中陸地地面上所成,湖黃土則由流水作用者水下沈積之土,前者不成層狀,後則成層狀,二者或相間而生(第二圖).

尤有進者,湖黃土爲陸黃土之因水作用重復沈積一次,或亦稱重行沈積之黃土(Redeposited Loess).二者之區別甚大,上頁已經述及,玆不復贅,再則就其中顆粒之比重言,其間之百分率亦不同,於黃土之物理性質中已述及,大概湖黃土土粒比重大者,百分率較底,比重低者,百分率較高,在陸黃土則反之.

故湖黃土之成因較陸黃土爲複雜,爲先經風之運輸作用成陸黃土,再由水流作用於陸黃土而成湖黃土.

中國黃土與歐美黃土之比較

成因相同之黃土,不論在中國或歐美均有至多相似之特性,色黃,有微細及多稜角之土粒,垂直之裂面并含石灰質及細砂粒,中多細空管,及凝結塊(黃土人)與陸產螺,惟歐洲黃土厚度不大,在較高處（300至400公尺以上）則無黃土之痕跡,再則歐美多水成之黃土,然歐洲黃土無論風成或水成,其沈積時期均較中國黃土為遲.

土粒之來源,在中國為岩石在乾燥氣候中風化所成,而為自中亞細亞之北風攜帶而來,在歐洲則為冰積層之四周上被冰磨擦所成或自冰河上流之兩岸為冰所攜帶而來之細土,在冰期之後或溶冰時期中經風吹散於各處,瑞士阿爾伯斯山各河流中為水所帶下之細土,一部分沈積湖中,一部分為風吹入空氣中而積之於他處;北美亦多水成及冰成(土粒來源自冰)黃土已於上述,紐西蘭之黃土亦為冰積層中之細土由風之作用重行沈積者.

各國黃土化學成分之比較可於下列巴博爾及威爾遜之分析表中見之:

化合物 \ 產地	河南 (Wilson)	德國 (萊茵河)	瑞士 (Neubad)	密西西比	Kanas(Cherokee)	淤泥
SiO_2	64.22	58.97	71.09	81.13	69.66	86.96
Al_2O_3	18.10	9.97	16.78	8.52	12.71	4.69
Fe_2O_3		4.25		2.92	4.89	2.86

CaO	6.31	11.31	1.81	0.31	1.09	0.71
MgO	2.09	2.04	—	0.39	1.28	0.43
Na_2O	0.22	0.84	0.23	0.52	1.17	1.07
K_2O	0.99	1.11	1.30	1.78	2.42	0.91
TiO_2	—	—	—	0.78	1.72	0.69
P_2O_5	—	—	0.11	0.08	0.15	0.07
N	—	—	—	0.11	0.23	0.11
CO_2	4.1	11.08	0.80	—	—	—
MnO_2	+	—	—	—	—	—
H_2O(110°C)	0.73	—	—	—	—	—

黃土在地質上之地位

玆就與黃土有密切關係之各層略述之,則黃土在地質上之地位,不難明瞭也.

I 黃土以下之地層:

(1) 三趾馬層卽紅土層;土粒細,其色紅,故稱紅土,又因其中三趾馬(Hipparion)化石極多,故亦稱三趾馬層,此層緊密位於黃土之下,在中國北部分佈亦廣,土中時有礫石層,厚度約達70公尺,Richthofen以之與黃土一同計算,故以爲黃土厚度達數百公尺,積此土時,該處積土時之氣候一如草原(Steppe Conditions),紅土與黃土之界線,每極不分明,因二者難以分別也,然亦有界限極明顯處,如蒙古邊境等是,其界限最明顯處爲二者之間有礫石層之發現,足見大陸

大部在乾燥之氣候中,亦有局部之多水之地,此種現象,現亦有之.

亦有切入紅土中而沈積之黃土,稱爲遺留沈積(Residual deposit),其中之黃土人長度每達一尺.

斯羅塞氏(Schlosser)指一部分之黃土係自紅土風化而來,并比之于德國巴燕省之中新統後期之Flinz沈積,因Fl-ing上部風化情形,與之極似,其說不無根據,惟自紅土所成之黃土僅占一小部分,且風之運送距離亦不甚遠也.

以紅土與黃土較爲有較多之細泥及鐵質,然比重較高之礦物及石英則較少,故稍堅而少砂粒,是以依物理之特性言,二者顯有區別,紅土之土粒在顯微鏡下測之,如黃土,爲多稜角之礦物顆粒,礦物亦爲石英, Feldspar, Hornblende, Augite 及雲母.

紅土在風化以後則漸鬆,經風之作用則砂性較重,細泥則較少,故紅土經風化作用可成黃土,毫無疑義也.

(2) 三門系:黃土之下每有礫石層之沈積,爲一侵蝕時期之表示,層中有介殼(Quadrula)及螺類動物化石,此類化石應出自冰積期初葉.

II.黃土以上之地層:

較黃土爲遲之沈積則有重行沈積之黃土及洪積層(Allurial).

(1) 重行沈積之黃土:

風成黄土每被水冲而重被運之他處而沈積,在山下之坡上,黄土上部每有砂,礫石及黄土層之沈積,中鮮化石,惟間有水產動物,且成層狀,石塊間每有羊,牛,鹿等動物骨骼,察其層狀,顯係急流所成,雖其黄土層之成因間與風有關係,然厚度難過數尺,而他種沈積之厚度每達50尺,造成此等層之河流每深切入風成之黄土層中(參考第二圖).

黄土入河水中後,其原有之易於溶解於水中之物質漸漸消失,而僅遺留較堅固之化合物如石英,細泥,輕氧化鐵等.

此種重行沈積之黄土多粘性,水分不易穿過,難以耕種,故其肥沃度遠不如原生黄土也,若使其利於種植,必須加入適當之肥料,土中各粒間之徽隙減至45.33%,在原生黄土則爲47.84% (按 W. C. Lowdermilk).

此種黄土因水作用,得砂甚多,而泥質則少.

(2)洪積層:在河流之兩旁,狹谷中及大河流域之平原上每有自河流之侵蝕作用而沈積之礫石砂土等.

沈積黄土之時期

沈積黄土之時期可以二方法定之,(一)由於其中化石之鑑定及其與地面各處所得之化石相比較,并以當時氣候之變換與他處相比較.(二)將其上下各部地層之時代鑑定清楚.

依後法可測知黄土較紅土及三門系爲新,三趾馬層之

沈積時期爲在上新期,三門系爲更新期初期之沈積,重行沈積之黃土及洪積層爲最近之地質時期所成,故沈積黃土之時期當在更新期中葉.

黃土與中國農業

黃土之肥沃與其至有利種植,爲顯然之事實,世界聞名之南俄肥沃黑土卽其好證,惟其中含多量之腐植土,故色深,實則仍屬黃土也,卽就物理的,礦物的及其化學的特性推測,事事可以證其肥沃度之高,非一般之土壤所可及也.玆分論之左:

就化學成分言,黃土中 CaO 與 MgO 量之比例爲 1.8:1 於植物生長至爲有利.

其中鹽基之比例爲 3:1:1.3, 卽 3 mol. SiO_2:1 mol. Al_2O: 1.3 mol. 鹽基,亦至有利於農林業.

土中燐酸至少有 0.21%,就一般而論,含 0.1% 燐酸之土壤,已算肥沃,何況中國黃土含燐酸之量平均高達 0.4%,且局部竟高至 0.93% 者乎,無怪中國南部之農民,每有取之爲肥料者.

除燐酸外 K_2O,CaO 及 MgO 爲植物所必需之品,惟土中如有 1% 之 K_2O 及 1% 之 CaO+MgO_2 已合於種植,然在中國黃土中每有超出此百分率數倍者,黃土肥沃之度,不言而喻.

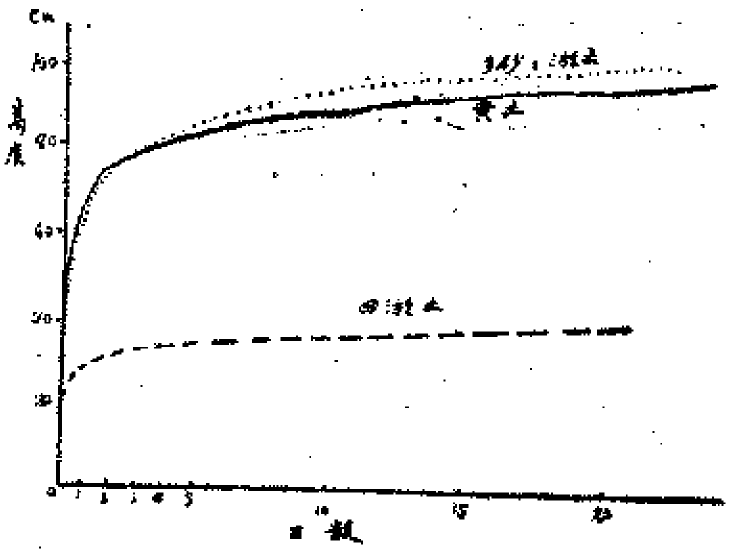
卽土中氮氣,若在種穀類植物後,添種一次豆類,則其百

分率決不至於減少.

就礦物粒言,土中之礦物粒雖多少已受風化作用,然尙少經風化而在顯微鏡下仍可鑑定者,待其漸就分解後,即無異於天然施肥也.

就土粒之大小言,其中百分率最高者爲0.01—0.1之直徑,已屬佳土,加以其間大小土粒之組合法,亦極利於植物之滋生,再則水分在土中亦能調均,如上層水分減低,下層之水分能攜帶滋養溶液昇至上層以供給植物,亦即自然施肥,故在黃土上種植,不必年年加肥,即絕不加肥亦有豐收之望,較之中國南部之洪積土,往往年須施肥,其相去何異天壤哉.

在黃土,細淤土及砂性洪積土中水分上昇之速率可以下圖(After New and Hilgard)明之:



就此三曲線可以推知水分之在各種土壤中上昇之速率,在細淤土中二十日內不達40cm.在黃土中高度雖稍不

及多砂之淤土,然在第一日中增高之速則尤過之,於植物不無利焉.

就黃土之保存水性能力言,土粒間徵隙雖尙易透水,然其喪失水分之速率并不大,玆列下表示之:

黃土能含水分之最高百分率(乾時)	36.65%
黃土能含水分之最高百分率(濕時)	26.82%
一天以後黃土中之水分(自 36.65 % 減至)	33.93%
二天以後黃土中之水分	33.15%

(After Lowdermilk)

土中徵隙雖能引起多量之水分,然其粒之細仍使地下水不易透過而達井內,因之土中易於溶解之植物滋養品如石灰質等亦不至於喪失也.

總之黃土土性之厚迥異尋常,中國有此大區域之黃土亦可謂得天獨厚者也,惜乎林業不克發展,以至如無洪水之災必有久旱之苦,以至赤地千里,歐人竟有"中國北部砂漠化"之言,豈不令人自愧乎.

參考書目

Anderson: Cenozoic of North China. Geol. Surv. China. Peiping.

Barbour: China. Journal of Sei. & Art. Vol. 3. no 8 & no. 9.

Li: Bull. of Seol. Society of China. 1928. p. 191-203.

Owen: A later Studies of loess. Pan Amer. Geolog Vol. 45.

Richthofen: China.

Schlosser: Palaeon. Sinica Ser. C. Vol. 1. F. 1.

Wang: Der Chinesische Loessboden. 1927.

Wrighti: Origin and distribution of the Loess in N. China & Central Asia. Bull. G. S. A. Vol. 13.

書評

Physik, Ein Lehrbuch für Studierende an den Universitäten und technischen Hochschulen. Westphal, W. H. 著,1930, 第二版. XVI,571頁,裝訂本 Rm. 19, 80.J. Springer, Berlin.

新近物理學進步之速,及其所涉範圍之廣,爲從來所未有.因之物理學之分類自當與前大異;材料輕重之分配亦多與前不能相同.普通物理學課本之編者,所遇不能解決之困難,在在皆是.其欲于五六百頁之書以述近世物理學之內容,殆爲不可能之問題.本書著者竟以其巧妙之思想,豐富之經驗,成功這一本適合現代要求的課本.

物質結構問題之侵入物理學,爲時不可謂暫,而普通物理著者多施以後毋式的待遇.學者于此不但不能得相當知識,反因此零碎不完,漫無統系的敍述,覺物理學如百貨商店,不能有貫通的可能.本書以原子自然觀的立場出發;其取材之輕重,悉以此爲準.其分類亦適合新近物理學的趨勢,而解放了傳統的分類之桎梏.其敍述之次序約依下之分類: (1) 力學, (2) 論力, (3) 物理統計學, (4) 振動學, (5) 物質結構學.

第一章總論,分爲:物理學之內容與方法,單位與測量,及

物質.第二章論剛體.其關於第三牛頓公理,離心力,地球自轉及衝突等,所論極爲精審.第三章論引力.對于惰性質量及重力質量,說明極爲清晰.于月繞地球運動之例中,不略去地球自己繞兩者重心的運動,不蹈它書有不必須的省略之弊.其對于 Kepler 三定律之討論與補正,尤爲它書所不及.第四章論力學定律的一些應用,使學者對之有進一步的了解.第五章論可變形體力學.對于一些零碎事實之無關以後各章的了解者均行略去以省地位.于氣體力學,多用氣體動力論以推出各定律,使學者明瞭其精髓.第六章論振動,波動,及音學.關于振動及波動均爲了解新物理學之基本知識.第七章論所謂分子作用.第八章論熱學.偏重統計方面,其說明 Entropy 一節最爲精采.第九章論電與磁.多以電子論之立場說明各現象.其于有關物質構造論之處,均詳細說明.但關于交流用微分方程式而不加以詳細引導,學者不易了解耳.如能加以附註,使學者發生疑問時,可以參閱,則較爲便利.第十章論光學及一般輻射學.關于光之迴折,分極及分光,較它書爲精細明晰.關于磁光學亦詳細引導,使學者于此較難而重要的問題,可得相當的知識.第十一章爲本書最精采的部分,述量子論及物質結構.對于學者之習物理及化學者尤爲適用.末章則爲相對論亦甚簡要.

本書之編制與普通物理學課本不大相同未免受守舊

者之反對,但均不能不承認其大體上之成功.此書初版在1928年七月出版,1930年已出再版,可證要求此類課本者之多,而其價値亦可想見矣. 潘祖武.

Einführung in die Physik. Band I: Einführung in die Mechanik und Akustik. Pohl, R. W. 著, 1930. VIII, 250 頁.裝訂本 Rm 15,80. J. Springer., Berlin.

Pohl, 與其說他是科學家不如說是藝術家.他對於光學的實驗尤其非常巧妙.他在講演實驗物理的時候,聽衆總是屏息以待:他怎樣以靈敏的手腕做出那恰在期待的現象.這一部書就是他長久經驗的結晶.

這本書雖然還是依傳統的分類,但其內容的分配完全是獨出心裁的.取材非常簡當,非與專事堆積者所可同日語也.他的標準是Anschaulichkeit,[1]所以在這二百餘頁的書中已有四百四十個圖,圖下附以簡單說明,使閱者一目了然.所以看這書較爲容易,且非常有趣.

本書所詳細說明的,却爲它書所簡略的.(因爲在初步的說法會發生極大的困難).譬如第三牛頓定律,在平常的說明,要使觀念非常淸晰,大不容易.又如旋轉體運動及

1) Anschaulich 是顯現眼前的意思.Anschaulichkeit 曾見一本英文物理學中譯爲 Mental picture.

Coriolis 運動,數學地雖不算複雜而于 Anschaulichkeit 則發生很大的困難.本書却詳細說明,再附上相當的圖,就覺非常明顯不發生甚嗎困難了.

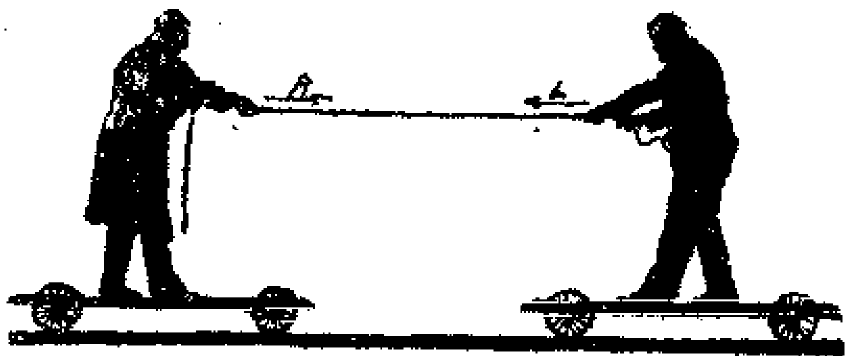


Abb. 45. Kraft = Gegenkraft; actio = reactio.

Abb. 182. Ein Drehstuhl mit hohem Trägheitsmoment zur Vorführung von Corioliskräften. Die hier gezeichneten Zusatzmassen benutzt man zweckmäßig auch bei den in den Abb. 174, 176, 178, 180 dargestellten Versuchen.

本書之第二篇可算是波動之最好的初步說明.於波之反射,屈折,迴折,等現象,除詳細說明之外還附有照片,及圖表,使學者于波動現象顯現眼前,不會發生難于想像的困難了.習此之後,于近世物理一定較易了解.

本書之好處已如上述,但如一切初步說明法所不能免的,關於量的方面,缺點很多;在波動學部分亦正因其非常 Anschaulich,而此種缺點更覺顯明.所以此書利益於教者當較讀者爲多.如與 Westphal 之 Physik 並讀,必有可駭之效率.

這一部書應有三本.這是第一本.第二本是電學,其優點正與此同.因其先出,已有英譯本.第三本,關于熱學和光學,現尙未出版.據云新的實驗如電子的廻折等亦將收入.第三本當較一二兩本尤爲精采,因光學恰是他擅長的一科.

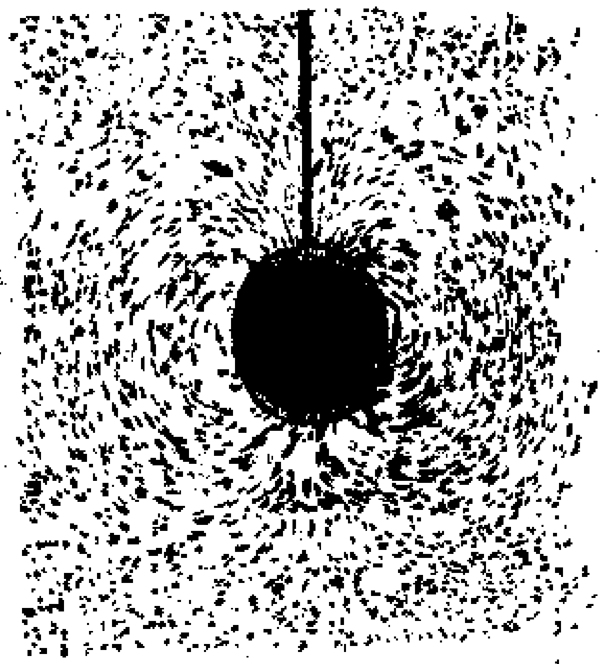


Abb. 264. Stromlinien beim Umströmen einer Kugel. Beobachtet von einem mit der ungestörten Strömung bewegten Bezugssystem.

Man vergleiche dies Bild mit dem Feldlinienbild einer magnetischen Kugel, z. B. Abb. 186 im Bande „Elektrizitätslehre".

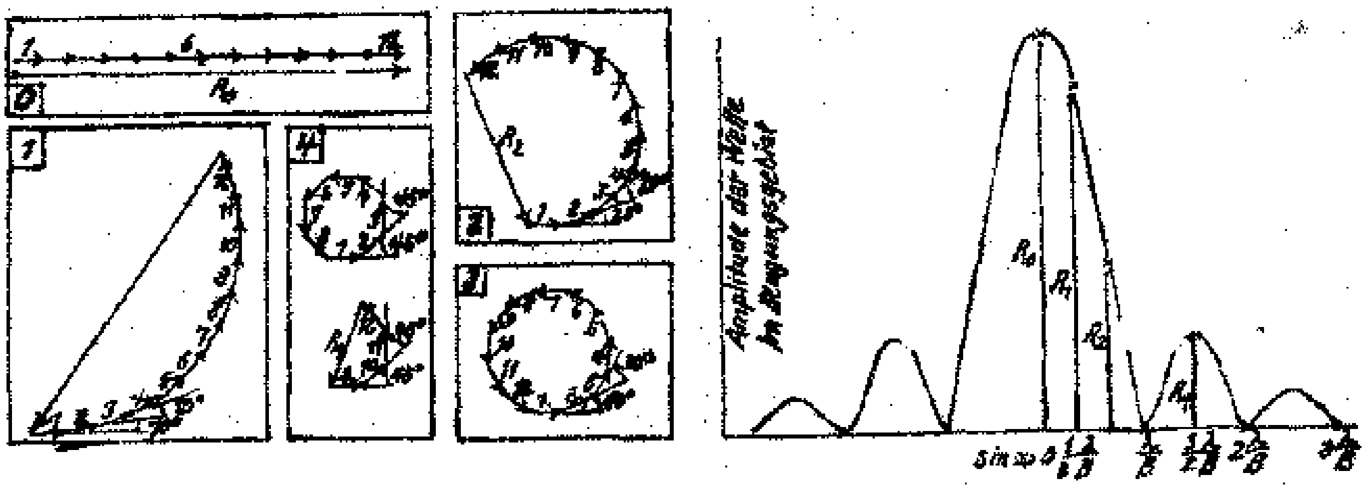


Abb. 886. Das Amplitudengebirge bei Begrenzung eines ebenen Wellenzuges durch einen Spalt. Daneben die zur Konstruktion benötigten Hilfsfiguren. Die Intensität bzw. Energie der Welle ist dem Quadrat der Amp.Radia. proportional. Man hat daher für einen Vergleich mit den Messungen (z. B. Abb. 401) die Ordinaten dieses Amplitudengebirges zu quadrieren.

潘碩武

行列式及方程式各一問題

近讀算學書籍,得下之二問題.此二問題與所求證者,似不相合.爰述於下,希著者譯者於再版時更正之.

1. 何魯,段子燮合著之行列式詳論P.88, 9°.

令

$$f_2(x)=\begin{vmatrix} y & 1 \\ 1 & y \end{vmatrix}$$

$$f_3(x)=\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & y \end{vmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n(x)=\begin{vmatrix} y & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 1 & y & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 1 & 1 & y & \cdots\cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots & y \end{vmatrix}$$

y 爲 x 之倚數.

證

$$\frac{df_n}{dx}=\frac{n!}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-}f_2$$

如 $y=sin\,x$, 則

$$\frac{df_n}{dx}=-\frac{n!}{2}cos^n x$$

以上為原題.錯誤之證明如下:

$$f_n(x)=nf_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}$$

而非 $f'_n(x)=nf'_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}$ 也.

今以原書之例,以證其終結之謬誤.

$$f_4(x)=\begin{vmatrix} \sin x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sin x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \sin x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \sin x \end{vmatrix}$$

$$=\sin^4 x-6\sin^2 x+8\sin x-3$$

$$f'_4(x)=4(\sin^3 x-3\sin x+2)\cos x$$

而 $f'_4(x)\neq-\frac{4!}{2}\cos^4 x$ 也.

2. 日本林鶴一,小野藤太著陳文譯初等方程式論 P.286, 40°. 解聯立方程式

$$x^3+2yzu-x(y^2+z^2+u^2)=a$$

$$y^3+2zux-y(z^2+u^2+x^2)=b$$

$$z^3+2uxy-z(u^2+x^2+y^2)=c$$

$$u^3+2xyz-u(x^2+y^2+z^2)=d$$

得次之根

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \\ b & a & d & c \end{vmatrix}$$

$$x=\begin{vmatrix} d & a & b \\ c & b & a \\ a & d & c \end{vmatrix}\Big/\Delta^{\frac{2}{3}},\qquad y=-\begin{vmatrix} c & a & b \\ d & b & a \\ b & d & c \end{vmatrix}\Big/\Delta^{\frac{2}{3}},$$

$$z=\begin{vmatrix} c & d & b \\ d & c & a \\ b & a & c \end{vmatrix}\Big/\Delta^{\frac{2}{3}},\qquad u=-\begin{vmatrix} c & d & a \\ d & c & b \\ b & a & d \end{vmatrix}\Big/\Delta^{\frac{2}{3}}$$

錯誤之證明. 在證明其錯誤之前,先設下式:

$$ax+by+cz+du=\delta$$

$$cx+dy+az+bu=0$$

$$dx+cy+bz+au=0$$

$$bx+ay+dz+cu=0$$

則得

$$x=\delta\begin{vmatrix} d & a & b \\ c & b & a \\ a & d & c \end{vmatrix}\Big/\Delta,\qquad y=-\delta\begin{vmatrix} c & a & b \\ d & b & a \\ b & d & c \end{vmatrix}\Big/\Delta$$

$$z=\delta\begin{vmatrix} c & d & b \\ d & c & a \\ b & a & c \end{vmatrix}\Big/\Delta\qquad u=-\delta\begin{vmatrix} c & d & a \\ d & c & b \\ b & a & d \end{vmatrix}\Big/\Delta$$

與原題之解答比較,可知

$$\delta=\Delta^{\frac{1}{3}}$$

而

$$\delta=ax+by+cz+du$$

$$=\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ y & x & u & z \\ z & u & x & y \\ u & z & y & x \end{vmatrix}$$

現在卽發現

$$\left\{\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ y & x & u & z \\ z & u & x & y \\ u & z & y & x \end{vmatrix}\right\}^3=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

之相等式能否成立之問題.徵按

$$\left\{\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ y & x & u & z \\ z & u & x & y \\ u & z & y & x \end{vmatrix}\right\}^3=\begin{vmatrix} F(x) & F(y) & E(z) & F(u) \\ F(y) & F(x) & F(u) & F(z) \\ F(z) & F(u) & F(x) & F(y) \\ F(u) & F(z) & F(y) & F(x) \end{vmatrix}$$

$$F(x)=x^3+8\,u\,y\,z+3\,u\,(x^2+y^2+z^2)$$

而 $$F(x)\neq x^3+2\,u\,y\,z-\,x\,(x^2+y^2+u^2)$$

今以實値證之.

$$x=1,\qquad y=5,\qquad z=2,\qquad u=3,$$

$$a=23,\qquad b=123,\qquad c=3,\qquad d=12,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}=11^4\cdot 15$$

$$\begin{vmatrix} 23 & 123 & 3 & 12 \\ 123 & 23 & 12 & 3 \\ 3 & 12 & 23 & 123 \\ 12 & 3 & 123 & 23 \end{vmatrix} = 161^4 \cdot 131 \cdot 9919$$

$11^4 \cdot 15 \neq 161^4 \cdot 131 \cdot 9919$ 也.

華羅庚

國立武漢大學理科季刊投稿簡章

一・本季刊登載關於數學物理化學生物地質等學科之稿件海內外人士惠賜大作一律歡迎

二・投寄稿件不拘文言白話但須依本季刊形式一律橫書每面二十二列每列二十三字繕寫清楚并加新式標點符號

三・稿件題目之下請署姓名如係譯稿須註原著者姓名或雜誌書報之名稱及其出版時期地點

四・稿中如有插畫或圖表請另用白厚紙繪畫或製成照片或附寄原圖

五・本刊稿件依照數學物理化學生物地質等學科之順序登載

六・來稿如未登載除預先聲明者外恕不退還

七・稿件登載後本刊略備薄酬以答雅意

八・稿件內容本刊得酌量增删但不願意者請預先聲明

九・來稿請寄武昌國立武漢大學理科季刊委員會

國立武漢大學理科季刊第一卷第二期目錄

國立武漢大學理科季刊第一卷第三期目錄

定價： 每冊銀五角 總發行所： 武昌國立武漢大學出版部

代售處： 各埠商務印書館

國立中央研究院

各所館新出版刊物

所館	出版品	編著者	定價
化學研究所	集刊第三號（中國新本艸圖誌第二集第一卷）	趙燏黃	一册一元五角
	集刊第四號（徵量磷之另一比色定量法等）	曾義	一册一角五分
	集刊第五號(英文)（右旋性穀氨酸誘導體之硃）	曾昭掄 朱汝華	一册一角五分
工程研究所	中央陶瓷試驗塲工作報告	周仁	一册七角
	集刊第一號	王季同	一册六角
地質研究所	集刊第十號(中文)	葉良輔等	一册一元五角
	集刊第十號(英德文)	斯行健等	一册一元五角
	叢刊第一號	葉良輔等	一册一元五角
天文研究所	恆星光帶強度分配的研究(英文)	余靑松	一册五角
	民國二十年天文年曆		一册一元五角
氣象研究所	集刊第二號	呂炯	一册一元
	氣象月刊四卷一期 二期		每期一册一元六角
歷史語言研究所	安陽發掘報告第三期	李濟等	一册一元五角
	延平王戶官楊英從征實錄		一册二元
	校輯宋金元人詞	趙萬里	五册四元
	山東人體質之研究	吳金鼎	一册一元
	明淸史料	第五卷	一册一元
	〃	第六卷	一册一元
	〃	第七卷	一册一元
社會科學研究所	六十五年來中國國際貿易統計(中英文)	楊端六 侯厚培	一册八元
	近代農村經濟的趨向	宗華	一册五角
	英文初編圖書目錄		一册八角
自然歷史博物館	叢刊第八號	方炳文	一册二角五分
	特刊第一號	E. D. Merrill	一册一角

經售處						
上海	商務印書館	生活週刊社	開明書店	新月書店‡	北新書局*	中國書店‡
南京	商務印書館	中大出版部	保文堂*	國粹書店*	本院	
北平	歷史語言研究所	北大出版部	景山書社	開明書店	神州國光社	商務書館
各埠	商務印書館					

‡經售史語所刊物

*經售史語及社會科學兩所刊物

普通刊物

英文概況（二十年） 每册一元五角

十八年度總報告 每册一元五角

院務月報 每册一角

本院各所館出版品爲數繁多不克備載茲摘錄其最新出版者若干種於上詳細書目請附郵票一分向南京成賢街本院或上海亞爾培路三三一號本院出版委員會函索

國立中山大學天文台定期刊物

兩月刊

每兩月出版一冊。內容特別注意天文特種問題的研究及最近天文界消息的傳達。兼發表中國天文學會變星觀測委員會委員所有變星觀測之報告暨該會會務，末附廣州每月氣象之報告。爲國內罕有之天文雜誌。現已出至第二卷，凡對於天文有興趣者，不可不讀。

零售每冊大洋二角郵費國內二分 外六分

預定半年連郵費國內六角 外七角

預定全年連郵費國內一元二角 外一元四角

發行者　國立中山大學天文台

國立武漢大學理科季刊

第一卷第四期

價目				郵費
全	年	四	冊	訂購全年 本國及日本不加郵費 其他地域加郵費六角
價	銀	二	圓	
每	期	零	售	函購零本 本國及日本加郵費五分 其他地域郵費一角五分
價	銀	五	角	

本刊以九月十二月三月及六月爲出版期

費須先惠空函不覆

各地代售處零售概不另加郵費

編輯者　國立武漢大學理科季刊委員會

發行者　國立武漢大學出版部

印刷者　中國科學公司

代售處　商務印書館

總發行所　武昌 國立武漢大學出版部

中華民國二十年六月發行

1931年

第2卷

第1期

國立武漢大學

理科季刊

第二卷第一期

QUATERLY JOURNAL OF SCIENCE

WU-HAN UNIVERSITY, WUCHANG, CHINA

Vol. II No. 1 September 1931

本 期 目 錄

中華民國二十年九月發行

國立武漢大學理科季刊委員會編印

中華郵政局特准掛號認爲新聞紙類

國立武漢大學理科季刊

第二卷第一期目錄

15842

國立武漢大學理科季刊

第二卷第二期目錄預告

顯微鏡下無限小的看法

湯 璪 眞

很微小的物體,如果擺在顯微鏡下面,大家知道變成大的物體了.如果物體愈見微小,自然顯微鏡的放大率也須愈大才行,所以假如人世間有充分放大率的顯微鏡,我們可以說不會有無限小的東西.

然而 $dx, dy, \ldots$ 這些東西,普通不還是認為無限小嗎?這大概是因為沒有適當顯微鏡的原故.但是我們應當知道不用顯微鏡終久是不行的!有甚麼不行?這就是說會要發生不可解釋的矛盾.

無限小的意義,應當分作尋常的和數學的兩種,尋常的意義以為一種東西慢慢的分裂成小的東西,到了某時便不能察覺這些小東西的大小了,於是這些極小的東西便叫作無限小.如果 $dx, dy, \ldots$ 作為這樣的無限小,那末其所取的數值便是變數 $\Delta x, \Delta y, \ldots$,的特殊值.因此按照數學上極限的定義會要得一個近似的等式

$$\frac{dy}{dx} \doteq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

或不可能的結果而不是得數學的等式

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

了.這是甚麼道理呢?就是因爲 dx, dy 如果還不是 o, 那末所取的數值不過是變數 Δx 和 Δy 中各取一值而已,因此所得的結果便是上面的近似等式,如果 dx 和 dy 已經變成 o, 那末所得的結果便是

$$dx = o, \quad dy = o,$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$$

然而我們應當知道這是不可能的結果,因爲近世的數學都說沒有 o 能做除數的呀!所以總之不能得上面那個數學的等式.如果要得那個數學的等式,數學上便另外想出一種數學意義的無限小.甚麼是數學意義的無限小?我現在特別的說出來.即是以 o 爲極限的任何變數通叫做無限小.按照這個意義,我們立即知道 Δx 是無限小;何以呢?因爲他第一是變數第二他的極限是 o.如果要說明 dx, dy 是甚麼樣的無限小.我們須要利用這個 Δx. 先注意

$$\lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

已經對 Δx 爲常數,換句話說他不是 Δx 的函數了,所以爲明瞭起見可以再用一個符號 y' 代替他.現在假設 dy 是用

$$dy = y \; \Delta x$$

決定的,那末因 $y = x$ 時的 $y' = 1$, 所以代入上式便得了 $dx = 1 \; \Delta x$,也就是

$$dx = \Delta x$$

用這樣的 dx 和 dy 便得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'\Delta x}{\Delta x}=y'.$$

再實行寫出 y' 本來的算式,卽得

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

現在算是把這數學的等式確立了,但是同時有一個問題發生:

究竟 dx 和 dy 是不是都成無限小?

由 $dx=\Delta x$ 式一看,知道 dx 的確是無限小,因爲 Δx 原來是無限小呀.但是 dy 便不見得是無限小了.要說明這一點,我們只要舉一個例就夠了.設 $y=$ 任何常數,於是 $y'=0$, 因此 $dy=y'\Delta x=0\Delta x=0$. 所以這時候 dy 只有一個數值 0 了.假如我們注意變數的定義:

A symbol which takes on more than one value is a variable,

便知道上面所說的這個 dy 只是常數而不是變數,既不是變數那末按照無限小的定義,這個 dy 也就不是無限小了.

我說了這一套話,人家會要以爲這是吹毛求疵,其實可以吹求的還多着呢,又豈但只是你這一點!

我說,別點暫且不談,這點是很要緊,因爲這點若不弄清,那末一般的人們會要將尋常的和數學的兩種無限小混爲一談,其結果不知道自己所學的,倒底還是數學的公式還是近似的公式?如果錯認微積分裏邊那些公式爲近似的,那豈不是大笑話!

到了這時候,我得要大胆說出一句話,卽是那些微分公

式都不是近似的,而是能按照嚴密的邏輯方法從數學上的公理推出來的.其實這句話已經由數學家在許多高等微積分裏邊一步一步的證實了.我所要說的,不過是到底 $dx, dy, \ldots$ 該當是甚麼?這個根本問題如果有了滿意的解答.那末一般的人們便不至疑心那些微分公式了.

我現在有一個解法,這個解法的名稱,我叫他作顯微鏡下無限小的看法.其理由差不多還是根據數學家已經用過的基本公式

$$dy = y' \Delta x.$$

注意這公式完全是定義的(可以參考 Gouasat 著的 Mathematical Analysis 英譯第一卷第 20 面公式及譯者底注,或參考 Pierpont 著的 Theory of Functions 第一卷第244面,或參考其他書籍亦可). 現在問題來了!為甚麼一定要是這樣定義呢?推廣一點行不行?行的!其辦法就是用

$$dy = \varrho y' \Delta x,$$

做推廣的定義.這裏邊的 ϱ, 我叫他顯微鏡的放大率,如果這顯微鏡的作用簡直和普通眼睛一樣,換一句話,並不放大也不縮小那末自然 $\varrho=1$,因此這個定義公式變成前面那個定義公式 $dy=\varrho y'\Delta x$ 了.這就是說,我現在這個定義 $dy=\varrho y'\Delta x$,的確是推廣的定義.好!定義推廣了,那麼效果又怎麼樣?我說這就要看顯微鏡的放大率而定.如果鏡的確是顯微鏡,那麼自然一定 $\varrho>1$, 但是這個物體 Δx 變小的時候而你老

用原來這副顯微鏡.那末 $\varrho=$ 常數,其結果 dx(此時 $=\varrho\Delta x$,因由推廣的定義公式 $dy=\varrho y'\Delta x$, 命 $y=x$ 則 $y'=1$ 故也),dy 都還是無限小(例外是 $dy=o$).這樣一來我這推廣的定義,並沒有多大價值了.要顯出這推廣定義的價值,便須於物體 Δx 變小的時候,同時換用放大率變大的旁的許多顯微鏡.我不是說過罷,假如人世間有充分放大率的顯微鏡,我們可以說不會有無限小的東西.現在這句話驗了.這時候放大率 ϱ 是 Δx 的函數這函數的性質是 Δx 變小的時候則放大率 ϱ 變大,重要的性質只要 $\varrho\Delta x$ 有極限而且不必爲 o 就好了,此外 ϱ 的性質還沒完全固定.要固定此外的性質,那完全看人們如何換用顯微鏡的情形而定.上面所說 $\varrho\Delta x$ 有極限而且不必爲o,那並不是一件難事.例如命 $\varrho=\frac{1}{\Delta x}$,即知 $\varrho\Delta x=1$, 於是 $\varrho\Delta x$ 的極限也是1. $\varrho\Delta x$ 既是可以有極限而且不必爲 o,於是前面的 $dy=\varrho y'\Delta x$; 現在可以說是已經經過充分放大率的顯微鏡的作用,其結果可以不再說 dy 是無限小而是放大了成爲

$$dy=\lim_{\Delta x\to o}\varrho y'\Delta x;$$

其中的 y 可以 $=x$, 可以不必 $=x$, 分這兩層運算之後,即得

$$dx=\lim_{\Delta x\to o}\varrho\cdot\Delta x=\lim_{\Delta x\to o}\varrho\Delta x,$$

$$dy=\lim_{\Delta x\to o}\varrho y'\Delta x=y'\lim_{\Delta x\to o}\varrho\Delta x=y'dx.$$

因此得了兩個重要的一般的公式於下

$$\begin{cases} dx = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \varrho\Delta x\,, \\ dy = y'dx. \end{cases}$$

上邊已經說過,放大率 ϱ 可以挑選之使 $\varrho\Delta x$ 的極限 $\neq$ 0,因此知 $dx \neq 0$,所以 dx 可以做除數,於是從上面第二式得

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

這個等式既然需要放大率 ϱ 受 $\varrho\Delta x$ 的極限 $\neq$ 0 的限制,所以我們的注意點不如集中於上面那兩個一般的公式.由那兩個公式看去,知道一件很重要的事實.卽是如果用充分放大率的顯微鏡,那末 Δx 在沒有放大以前是無限小,但是放大的 $\varrho\Delta x$ 結果成了 dx 畢竟不必是無限小.是甚麽?是常數!是甚麽常數?是與變數 Δx 無關的數.其所取的數値,那還須看 ϱ 的本身才能決定.例如命 $\varrho=\frac{1}{\Delta x}$,則其數値為

$$\begin{cases} dx=1\,,\text{這時候的} \\ dy=Dy,\ \text{其中}\ D=\dfrac{d}{dx}\,, \end{cases}$$

因 $dx = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \varrho\Delta x = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\cdot\Delta x=1, dy=y'dx=y'=\frac{d}{dx}y=Dy$ 故也.又如命 $\varrho=\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$,則得

$$\begin{aligned} dx &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\Delta x \\ &=\pm \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}} \\ &= \frac{\pm 1}{\sqrt{1+y'^2}}\ ; \end{aligned}$$

於是從尋常的微分公式

$$\frac{ds}{dx}=\pm\sqrt{1+y'^2}$$

利用 $dy=y'dx$ 得

$$ds=s'dx=\frac{ds}{dx}dx=\pm\sqrt{1+y'^2}\times\frac{\pm 1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

因之

$$\begin{cases} dx=\dfrac{\pm 1}{\sqrt{1+y'^2}} \\ ds=1. \end{cases}$$

由這幾個例可以看出:第一 dx 和 ds 各可以等於常數 1,第二 $dx=1$ 的時候 $dy=Dy$ 和 $D=\frac{d}{dx}$ 都表示

$$d=D,$$

第三 dx 在前面雖說是常數,但應當注意他只是與 Δx 無關的數而不一定是與 x 無關的數因為上面的 dx 公式中明明含了 y',而 y' 可以是 x 的函數.自然 dx 也可以是 x 的函數了.

上面的例還未說明 dx 的一般性質.現在可以說了.先設 $f(x)$ 只是 x 的未定函數〔此函數包括不含 x 的未定常數為特例〕而不是 Δx 的函數,再設放大率 $\varrho=\frac{f(x)}{\Delta x}$.於是 dx 變為

$$dx=\lim_{\Delta x\to 0}\varrho\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)}{\Delta x}\Delta x=f(x)$$

也就是

$$dx=f(x).$$

因此我們斷定一句:dx 通例是 x 的未定函數,特例是不含 x 的未定常數[因爲上面已經聲明那函數包括不含 x 的未定常數爲特例].

微積分上說 dx 是無限小,照上面講來是沒有關係.因爲不是無限小也行呢.頂有關係的是說 dx 不因 x 而變(舉一例,可參考 Goursat 著的 Mathematical Analysis 英譯第一卷第 20 面第 12 列的幾句話). 這個意思就是上面我所斷定的:dx 特例是不含 x 的未定常數.如果限於這個特例.那末 $d^2x=d(dx)=d$ 常數 $=0$,卽是說 x 作獨立變數的時候.必受下面的限制

$$d^2x=0;$$

因此獨立變數的函數和函數的函數兩者自二次微分起所有的公式竟變成不相同了.詳細一點說就是若有函數 $y(x)$, 那末

a) x 作獨立變數的時候得

$$dy=y'dx,\quad d^2y=y''dx^2+y'd^2x=y''dx^2,\cdots\cdots$$

b) x 作函數(例如 t 的函數)的時候得

$$dy=y'dx,\quad d^2y=y''dx^2+y'd^2x,\quad d^3y=\cdots\cdots$$

但是如果照上邊所斷定的: "dx 通例是 x 的未定函數" 這一句話,那末通例

$$d^2x\neq 0;$$

因爲由

$$dx = f(x)$$

得
$$d^2x = d(dx) = df(x) = f'dx = f'f$$

的結果呀! 於是獨立變數的函數和函數的函數,兩者自二次微分起所有的公式仍能變成相同〔同爲上文之 b)〕.

公式中關於 dx 的已說完了.現在再看 $dy = y'dx$ 罷. y 與 x 不同處,因爲 y 是依賴變數;再看此式既含 y',當然需要 y' 存在. y' 如果真是存在,那末 dy 的公式便能化到和 dx 的公式大致一樣如下:

$$dy = \lim_{\Delta x \to 0} \varrho \Delta y .$$

證,因爲 y' 存在,故

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varrho \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varrho \Delta y}{\varrho \Delta x} \varrho \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim \varrho \Delta x = y'dx .$$

以下我再研究以上所說種種的幾何意義.設 x 爲獨立變數, y 爲其函數

$$y = F(x)$$

而且 y' 存在.此方程之 x, y 可作爲平面上之正坐標,因之此方程通例代表一曲線, (x,y) 代表此曲線上一點 P 設 x 於其間隔內任意增加 Δx,則得

$$y + \Delta y = F(x + \Delta x)$$

這時候 $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ 代表曲線上一點 Q.

由上邊兩式相減得

$$\Delta y = F(x + \Delta x) - F(x).$$

尋常微積分到這一步便以 Δx 除之,我的不然,我用放大

率 ϱ 乘之化爲

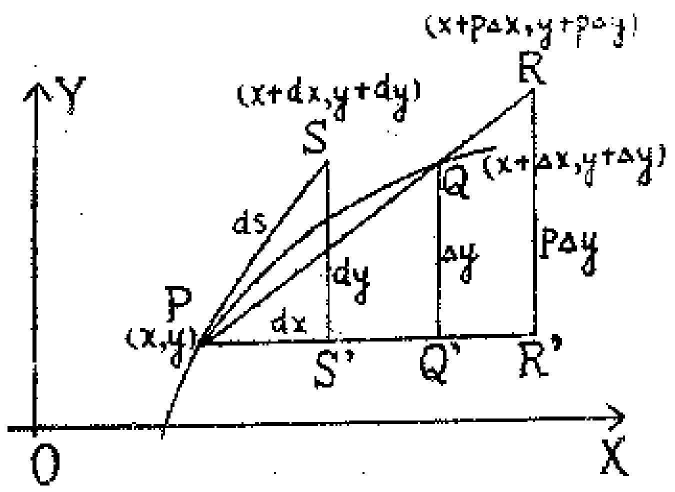
$$\varrho\Delta y=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\varrho\Delta x\equiv\frac{\Delta y}{\Delta x}\varrho\Delta x$$

然後命 $\Delta x\to 0$ 再取其極限卽得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varrho\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\varrho\Delta x$$

卽　　$$dy = y'dx$$

這一步的幾何意義是這樣：過 P Q 作一直線，次用放大率 ϱ 將 P Q 放大爲 P R（R 點仍在 P Q 直線上）使 $\overline{PR}=\varrho\overline{PQ}$。於是 R 點之坐標依解析幾何必爲 $(x+\varrho\Delta x, y+\varrho\Delta y)$。過 P 作直線平行於 x 軸，次



作 Q R 之正射影於其上且命爲 Q' 及 R' 則 $\overline{PQ'}=\Delta x, \overline{PR'}=\varrho\Delta x$, $\overline{Q'Q}=\Delta y$, $\overline{R'R}=\varrho\Delta y$. 當 $\Delta x\to 0$ 時 $Q\to P$。P 與 Q 完全相合後，P 與 R 不必完全相合因此時 P 之坐標爲 (x,y) 而 R 之坐標 $(x+\varrho\Delta x, y+\varrho\Delta y)$ 取極限後應變爲 $(x+dx, y+dy)$ 故也。命此點爲 S，則 P S 直線名曰原曲線之切線。作 S 之射影於 PR' 直線上且命爲 S' 則 $\overline{PS'}=dx$, $\overline{S'S}=dy$.

因 $P\ S\ S'$ 成直角三角形，則 $PS^2=PS'^2+S'S^2=dx^2+dy^2$，故知 $PS=ds$。

從這裏更可用圖示法表明極坐標之公式：

過 OP 作直線 ON 且命 $\overline{OP}=r$, $\angle XON=\theta$. 則 r,θ 爲 P 點之極坐標,與 xy 之關係爲

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

(以下微分時,可任取 x,y,r,θ 中之一爲獨立變數,餘爲函數.

$$\therefore\quad \begin{cases} dx = dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta \\ dy = dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$\therefore\quad dr = dx\cos\theta + dy\sin\theta$$

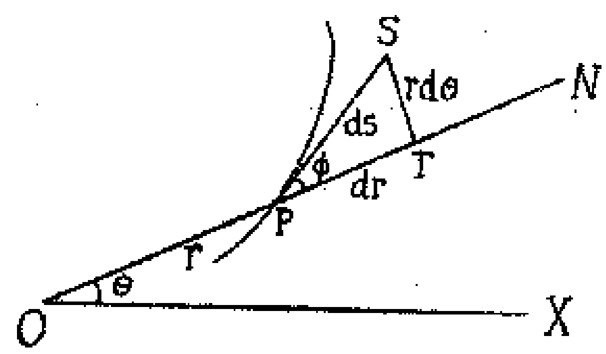
$$= \overline{PS'}\cos\theta + \overline{S'S}\sin\theta$$

$= PS'S$ 拆線落於 ON 線上之正射影

$= PS$ 落於 ON 線上之正射影

命 $= \overline{PT}$.

由是 dr 得一幾何意義,卽 $\overline{PT}=dr$.



同理 $\overline{TS}$(以 θ 之增加方向爲正) $=rd\theta$.

次命 $\angle NPS=\varphi$ 則由圖立知下述之諸公式

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$\sin\varphi = \frac{rd\theta}{ds} = r\frac{d\theta}{ds}$$

$$\cos\varphi = \frac{dr}{ds}$$

$$\tan\varphi = \frac{rd\theta}{dr} = r\frac{d\theta}{dr}.$$

....

這都是 $dx, dy, \cdots$ 不當作無限小講的好處!

以上是說單一獨立變數 x 的 dx 及其函數 y 的 dy. 如果有多個獨立變數呢,那末我們可以取兩個 x 和 y 爲例.設 z 爲 x 和 y 的函數,這時候可依上同樣得下面的重要結果:

$dx = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \rho\Delta x$ 通例 = 未定函數 $f(x,y)$ 特例 = 未定常數

$dy = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \rho\Delta y$ 通例 = 未定函數 $g(x,y)$ 特例 = 未定常數

$$dz = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \rho\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

其餘的可以類推,不再多說了.

各國億兆與分釐之記數法

曾　瑊　益

第一章　計數法之起源

外物常觸吾人眼簾,必欲知其多少,此計數觀念之所由起也.計數法之最簡單者,即動手指以數之,觀乎小兒初學數目,每知屈指以計數,彼非洲土人,現仍有利用手指與足趾以計數者.其故可深知矣.因一手之指數爲五,兩手之指數爲十,兩手兩足之指趾數共爲二十.故計數法亦有五進位,十進位,二十進位三種.所謂進位云者,即計數至某數目時,可以暫停之意.在有史以前,人類運用手指以計數,其初必以一手之指數,爲其進位之標準,及其不足,乃繼之以手指足趾之全數焉.此各種進位法所以并行不悖也.厥後依經驗之結果,知用五進位,嫌其太小,用二十進位,覺其過大,惟以十進位,適得乎中,因此無論古今中外,舉全世界各種族之人,莫不採用此法.現今數學書中,雖尙有其他種種進位法,然均不過有此理論而已,實際上并不取用之也.至若在諸等數中,其各名詞之互易,雖不盡依十而易名,但各名詞中所含之單位,有過乎十者,則仍以十進位也.

既明計數法以十進位矣,由此推而大之,十十個單位,十

十十個單位,以及其他諸大數之記法將如何?再推而小之,十分單位,十十分單位,以及其他諸小數之記法又如何?此則亟欲解決之問題也.

回答此問題,對於大數,命十十曰百,十百曰千,十千曰萬.對於小數,就長短言之,命十分尺曰寸,十分寸曰分,十分分曰釐.就輕重言之,命十分兩曰錢,十分錢曰分,十分分曰釐.就價值言之,命十分圓曰角,十分角曰分,十分分曰釐.則尋常應用,已能充分滿足矣.於此若將各位數目,列成數碼記之.每位遇十進位,則在其中,可得一極有興趣之問題焉.蓋細察各國列位法,無論何國,恆由左而右,且大數居左,小數居右也,在各國文字,有自上向下行者,有自左向右行者,有自右向左行者,其列位順序,莫不皆然.例如有一數爲一萬二千三百四十五,在中文,爲自上而下行者,但列數入算盤時,係自左而右,書成數碼時,則作〡〢〣〤〥.在歐美文,爲自左而右行者,書成羅馬數碼作爲$\overline{X}$MMDDDXLV,書成亞剌伯數碼作爲12345.在土耳其印度之回文,爲自右而左行者,但書成數碼時,竟反其道而行之,作爲∖ ⊦ ⊬ ≤ ɵ,此非奇異之現象也耶?

大數用至萬位,有時仍嫌不足,小數用至釐位,有時倘欠精密,於是不得不加設億兆與毫絲諸名詞以濟其窮,此等數目,究值幾何?此又爲吾人所欲知者也.茲請分章論之.

第二章　億兆之記數法

中文對於大數之記法,有億兆等名詞,西文對於大數之記法,有 Million, Billion, Trillion 等名詞.億兆之名詞,有數意義, Million, Billion, Trillion 之名詞,亦有數意義焉.

我國史載夏禹使大章豎亥,步東極至西垂,步南極至北垂,皆日二億三萬餘里.韻會載十萬日億,十億日兆.朱子註書,嘗然其說.吾人常稱全國民衆爲四百兆,甲午賠款爲四百兆,庚子賠款爲六百兆.此以十萬日億,十億日兆也. 天文書載各行星與日之距離,謂地球距日爲一億四千九百萬公里,海天星距日四十五億公里,昊王星距日六十七億公里.物理書載:依據星之輻射性質,推測太陽之年齡,約已有八兆年.此以萬萬日億,萬億日兆也. 算學啓蒙記大數之類日:"一,十,百,千,萬,十萬,百萬,千萬,萬萬日億,萬萬億日兆,萬萬兆日京,萬萬京日陔,萬萬陔日秭,萬萬秭日壤,萬萬壤日溝,萬萬溝日澗,萬萬澗日正,萬萬正日載,萬萬載日極,萬萬極日恆河沙,萬萬恆河沙日阿僧祇,萬萬阿僧祇日那由他,萬萬那由他日不可思議,萬萬不可思議日無量數."此以萬萬爲億,萬萬億爲兆也. 數術記遺日:"黃帝爲法,數有十等,及其用也,乃有三焉.十等者,億,兆,京,垓,秭,壤,溝,澗,正,載.三等者,謂上中下也.其下數者十十變之,若言十萬日億,十億日兆,十兆日京也.中數者,萬萬變之,若言萬萬日億,萬億日兆,萬兆日京也.上數者數窮則變,若言萬萬日億,億億日兆,兆兆日京也."算法統宗日:"自萬以下,皆以十進,

自億以上,有以十進者,如十萬曰億,十億曰兆之類,謂之小數.有以萬進者,如萬萬曰億,萬億曰兆之類,謂之中數.有以自乘之數進者,如萬萬曰億,億億曰兆之類.謂之大數.今皆從中數". 由此則萬萬爲億,億億亦可爲兆也. 總上諸說,可知億兆之記數法,有十進名,萬進名,萬萬進名,自乘數進名四種.惟其中萬萬進名,及自乘數進名兩種.早覺其弘廓繁冗,無人採用.因此僅餘十進名,萬進名兩種,故禮記註疏,康熙字典,辭源,以及其他各辭書字典中,所載億兆等名詞之解釋,僅有此二義而已.又在日本各字典中,所載億(オク)兆(テフ),京(キヤウ)垓(ガイ)諸名詞之解釋,亦均僅具古今二種意義焉.

至於西文.在拉丁稱千曰 Mille, 以上更大之數.不曰萬,十萬,百萬,而曰十千(Decem milia), 百千(Centum milia),千千(Millena milia或 Mille milia). 現在各國均稱千千曰 Million. 由拉丁文千字變來,可直譯爲"大千". 適合我國百萬之數.較此更大之數.復有 Billion, Trillion, Quadrillion 等名詞.惟其進名之法,則各國不同.大別言之,可分以千進名與以百萬(卽大千)進名兩種.以千進名之法者,是以千千爲 Million, 千 Million 爲 Billion, 千 Billion 爲 Trillion, 千 Trillion 爲 Quadrillion 等.此爲法,美及南歐各國所用之進名法也.以百萬進名之法者,是以大千爲 Million,大千 Million 爲 Billion,大千 Billion 爲 Trillion, 大千 Trillion 爲 Quadrillion 等.此爲英,德及北歐各國所用之進名

法也.嘗閱外國俚俗字典辭書,竟有以英國之 Billion, 卽作美國之 Billion, 而以法國之 Trillion, 卽爲德國之 Trillion 者,此則不可爲訓也.例如美國人估計全世界金銀額量,謂自哥倫布發現美洲以來,全世產金總額約 1 Billion 盎斯 (Ounce), 儲銀總額約 15 Billion 盎斯,現今每年產金約 20 Million 盎斯,每年產銀約 250 Million 盎斯.此處所用之 Billion 不過英國 Billion 之千分之一.又如云德國付歐戰賠款爲 132000 Million 金馬克.在德文可云尙不足一 Billion 之數,在法文則已超過一百 Billion 矣.再在英國書中,謂重一公分 (Gramme) 之氫或重十二公分之炭,或重十六公分之氧,其中所含原子之個數爲 660000 Trillion.重一公分之氫,其中所含電子之個數爲 1100 Quadrillion. 在美國書中,載各種波動常數,謂人耳可聞之音波,每秒鐘振動次數在二十與二萬之間,無線電波振動次數在二萬與一千萬之間,有感覺之熱波振動次數在 20 Trillion 至 300 Trillion 之間,光波振動次數在 430 Trillion 至 750 Trillion 之間,紫外線及X光線之波振動次數在 870 Trillion 至 1 Quadrillion 500 Trillion 之間.在此英美兩國雖同用 Trillion, Quadrillion 之名詞,但其所代表之數目各不相同.蓋美國以一萬萬萬爲一 Trillion, 英國以一百萬萬萬萬爲一 Trillion.美國之一 Trillion, 祇當英國一 Trillion 之百萬分之一,而英國之一 Quadrillion, 却爲美國之一 Quadrillion 之十萬萬倍也.讀者須注意及之.

古時各國記數,均屬簡單,萬位以上,殆不恆用.我國黃帝使隸首作算數,始有億兆之名.憶當時計數,必係以十進位,每位立以一名.此法在夏禹時仍沿用之,惟如此進名,甚覺拙鈍,故周髀算經所載日道周徑,即改用以萬進名之法.數術記遺所稱在黃帝時已有萬萬而變之中數云者,想係穿鑿附會之辭,故孔繼涵算經十書序,引詩伐檀疏毛傳十萬曰億,古數也,鄭箋萬萬曰億,今數也,以駁其說.至創數窮則變之上數,及立萬萬易名之說,必更爲後人好奇者爲之也無疑.因此之故,同一之名詞,遂發生歧異之意義焉.

記大數我國恆用萬字,如曰萬歲,萬方,萬國,萬里之類.寫簡筆時另用万字,作圖案時又有卍字.蓋不特重視此字,且以之作命大數之樞紐焉.如在萬以上之數,冠以十百等字稱曰十萬,百萬等.西文則注重千字,如在千以上之數,冠以十,百等字,稱曰十千,百千等.又百萬曰 Million, 其字義爲大千.十萬萬曰 Milliard, 其字義爲高千,均由千字轉變而成.此中西之殊點也.惟古時希臘文之 μυριοι 一字,適與我國之萬字相當,印度人亦間有用之者,現今西文中尚存 Myriad 一字,已不常用耳.

印度人之命數法,亦與我國古時同,每位立以一名,十位曰達昆 (Dacon), 百位曰撲塔 (Çata),千位曰薩哈拉 (Sahasra),萬位曰猶塔 (Ayuata),再上則曰拉沙 (Laksha), 普累塔 (Prayuta), 科提 (Kôti),維巴達 (Vyarbuda), 帕馬 (Padma), 卡瓦 (Kharva) 等,皆

以十進位也.

西人用 Million 一字,約在十三世紀之後.1340年蒲郎努(Maximus Panudes)著作中,始見此字.十四世紀義大利各數學家通用此字以代表百萬 (10^6) 之數,故百萬進名法,亦由義大利發其端.如 1478 年在特累維索(Treviso) 刊行之算術,1484 年波基(Borghi)所著之數學 (De Arte Mathematiche), 1494 年帕奇利(Pacioli)所著之算術(Summa de Arithmetica)等書,皆用百萬進名之法也.嗣後英國採取義大利之法,德國法國亦沿用之,於是遍及於各國矣.至於用千進名之法,係起源於西班牙,1512 年奧忒加 (Ortega) 所著之算術中,命十曰 Dezena, 百曰 Centena, 千曰 Millar, 再進位稱十千曰 Dezena de millar, 百千曰 Centena de Millar, 至千千另立一名曰 Cuento,此千進名法之由來也.又各國最初用 Byilion, Tryllion, Quadrillion, Quyllion, Sixlion, Septyllion, Ottyl'ion, Nonyllion 等名詞,厥爲法人朱魁(Nicolas Chuquet). 伊於 1484 年開始書寫於一手抄本中,但至 1520 年拉洛 (La Roche) 方將朱氏抄本刊行於世,書中所舉各名詞,爲前此他國所未見.其進位法,則係採用百萬進名之法.故在歐西各國,對於大數名詞,作有系統之研究,解決命數法之困難者,其功當屬諸法國.

英國在數學書中用 Million 一字,係在 1514 年杜坎 (Ducange) 及 1522 年吞斯退 (Tonstall) 著作之後,而用 Billion, Trillion 等字,則又在 1687 年陸克(Locke)著作之後也.

波蘭國用Million一字,可云於1538年始見於克洛(Klōs)之算術書中.荷蘭人夫里栖(Gemma Frisius)於1540年以拉丁文著書,祇知用千千(Millena millia)之名,至1567年譯爲義大利文時,始改用大千(Millioni)之名以代之.德人克拉徵(Clavius)於1583年以拉丁文著書,解釋千千(Millena millia)卽大千(Millione)之意,故拉丁文用大千之名詞,應在十六世紀之後半期.至1687年赫肯柏(Heckenberg)著書中,始見Billion, Trillion等名詞,是爲德人用此等名詞之權輿.在1585年史蒂芬(Stevinus)用荷蘭文所著之算術書中,稱百萬曰千千(Mille mille),十萬萬曰千千千(mille mille mille),萬萬萬曰千千千千(mille mille mille mille)此時已略知用千進位之法.但在吉刺(Albert Girad, 1595年生於法國,1632年卒於荷蘭)之著作中,則尙仍舊用百萬進名之法也.又西班牙古時用Quento或Cuento代表百萬(10^6),而以大千(Millon)代表萬萬萬(10^{12}).迨至1594年聖大克廬茲(Santa-Cruz)著作出,乃改以大千(millon),代表百萬(10^6).在法國原稱十萬萬(10^9)曰高千(Millard),於1566年里昻(Lyons)特校昌(Trenchant)之著作中,尙見此名詞,但對於Billion一字,在十六世紀時,尙用之以代表萬萬萬(10^{12}),同時亦用以代表十萬萬(10^9).及至十七世紀時,廢棄百萬進名法,改用千進名法.於是Billion一字,僅含有十萬萬(10^9)一種之解釋也.在義大利首先本用百萬進名之法,至1602年卡塔第(Cataldi)著實用算術(Practica

Aritmetica), 乃改用以千進名之法命 10^6 曰 Millioni, 10^9 曰 Bilioni, 或曰 Duilioni, 10^{12} 曰 Trilioni, 10^{15} 曰 Quadrilioni, 或曰 Quattrilioni, 10^{18} 曰 Quintillion. 即 Bilioni, Trilioni 等名詞,傳入義大利,亦以此書爲最早. 荷蘭人凡得叔 (Van der Schuere) 於 1600 年仍用百萬進名之法,命 10^6 曰 Millioen, 10^{12} 曰 Bimillioen, 10^{18} 曰 Trimillioen, 10^{24} 曰 Quadrimillioen, 及至 1634 年,乃改用以千進名之法,命 10^9 曰 Bimillion 或曰 Billion, 10^{12} 曰 Trimillion 或曰 Trillion, 10^{15} 曰 Quadrimillion 或曰 Quadrillion. 至於美國採用以千進名之法者,蓋因脫離英國羈絆革命獨立時,受有法國之影響,故其進名法,與英國迥異. 總上所說,可知各國用 Million, Billion Trillion 等名詞及其進名法之大略.簡單言之, Million 一字,在昔曾用作百萬 (10^6) 解釋,亦用作萬萬萬 (10^{12}) 解釋,幸現存者僅一義而已.但各國對於 Billion, Trillion 等字之解釋及進名法之運用,則至今尙有二意義也.

法美用千進名之法,亦曰三位進名之法,其法以三位爲一節 (Period). 英德用百萬進名之法,亦曰六位進名之法,其法以六位爲一節.但此兩法,於每隔三位時,均用記號逗(,)以區別之,例如依據相對論推測宇宙曲率半徑之長爲

1500000000000000000000000 公里

依歐美記法,咸列爲

1,500,000,000,000,000,000,000 公里

此數在法美分作八節,稱曰 1 Sextillion 500 Quintillion 公里.在

英德分作四節,稱曰 1500 Trillion 公里.因此二法均以三位作隔,故法美記數法,有勝於英德記數法之處.此命大數毋甯採用三位進名法之爲愈也.

我國記大數,用一位進名法,則不若用四位進名法.筆算數學載命數法以四位爲一頓.故每隔四位可仿例作記號撇(﹨)以分離之.如上述曲率半徑之長可作爲

垓　京　兆　億　萬
15﹨0000﹨0000﹨0000﹨0000﹨0000 公里

此數分爲六頓,稱曰十五垓公里.

以我國記頓法,與歐美記節法相較,原不適合.惟是歐風東漸,近來譯本刊文統計簿記等記載,有遷照西法以三位作逗者.於是有人設法欲使中西溝通.如嚴濟慈編輯之初中算術,其於命數法中,取消十進名法中之京,垓,秭,溝等字,列表如下:

百十　百十
……澗,秭秭秭,兆兆兆,億萬千,百十個

如此求與西法符合,可謂煞費苦心者矣.惜用此法,對兆以上之名詞,減少三分之二,似亦非盡善之策. 又有人謂億兆以上之名詞,意義紛歧,不如廢棄不用.如民國二十年六月五日漢口武漢日報載南京電"中華書局前呈教部請改正十進記數法,萬以上不用億兆兩字,卽在萬字上冠以數字,教部已暫予照准,并通令各省市教廳局轉飭各書坊

遵照". 所謂不用億兆兩字,在萬字上冠以數字者,意謂廢棄億兆以上諸字,而在萬字上,僅冠以十百千萬等字也.依照此說則上述宇宙曲率半徑,當稱曰十五萬萬萬萬萬公里,亦覺太費辭矣.

然則欲記大數,果應如何乎?曰:廢一位進名法而用四位進名法,使億兆等名詞,僅存一意義,依照數理精蘊,數學精詳,算法統宗,筆算數學,梅氏叢書輯要諸書,以四位為一頓可也.列表如下:

千	百	十	京	千	百	十	兆	千	百	十	億	千	百	十	萬	千	百	十	個
京	京	京		兆	兆	兆		億	億	億		萬	萬	萬					

千	百	十	澗	千	百	十	溝	千	百	十	穰	千	百	十	秭	千	百	十	垓
澗	澗	澗		溝	溝	溝		穰	穰	穰		秭	秭	秭		垓	垓	垓	

千	百	十	阿	千	百	十	恆	千	百	十	極	千	百	十	載	千	百	十	正
阿僧祇	阿僧祇	阿僧祇	僧祇	恆河沙	恆河沙	恆河沙	河沙	極	極	極		載	載	載		正	正	正	

千	百	十	無	千	百	十	不	千	百	十	那
無量數	無量數	無量數	量數	不可思議	不可思議	不可思議	可思議	那由他	那由他	那由他	由他

此表自個位至千無量數位,共分十八頓,凡七十二位,自千無量數以上之數,仍可陸續進位,照前循環,以至任何大之數目.

至於歐美記大數,則可採三位進名之法,以三位爲一節.其各節名稱,依亨克爾(Henkle)規定,列表如下:

(1) Million
(2) Billion
(3) Trillion
(4) Quadrillion
(5) Quintillion
(6) Sextillion
(7) Septillion
(8) Octillion
(9) Nonillion
(10) Decillion
(11) Undecillion
(12) Duodecillion
(13) Tertio-decillion
(14) Quarto-decillion
(15) Quinto-decillion
(16) Sexto-decillion
(17) Septo-decillion
(18) Octo-decillion
(19) Nono-decillion
(20) Vigillion
(21) Primo-vigillion
(22) Secundo-vigillion
(23) Tertio-vigillion
(24) Quarto-vigillion
(25) Quinto-vigillion
(26) Sexto-vigillion
(27) Septo-vigillion
(28) Octo-vigillion
(29) Nono-vigillion
(30) Trigillion
(31) Primo-trigillion
(32) Secundo-trigillion
(33) Tertio-trigillion
(34) Quarto-trigillion
(35) Quinto-trigillion
(36) Sexto-trigillion
(37) Septo-trigilion
(38) Octo-trigillion
(39) Nono-trigillion
(40) Quadragillion
(50) Quinquagillion
(60) Sexagillion
(70) Septuagillion
(80) Octogillion
(90) Nonagillion
(100) Centillion
(101) Primo-centillion
(110) Decimo-centillion
(111) Undecimo-centillion
(112) Duodecimo-centillion
(113) Tertio-decimo-centillion
(114) Quarto-decimo-centillion
(120) Vigesimo-centillion
(121) Primo-vigesimo-centillion
(130) Trigesimo-centilliion
(140) Quadragesimo-centillion
(150) Quinquagesimo-centillion
(160) Sexagesimo-centillion
(170) Septuagesimo-centillion
(180) Octogesimo-centillion.
(190) Nonagesimo-centillion
(200) Ducentillion

(300) Trecentillion
(400) Quadringentillion
(500) Quingentillion
(600) Sexcentillion
(700) Septingentillion
(800) Octingentillion
(900) Nongentillion
(1,000) Millillion
(1,100) Centesimo-millillion
(1,200) Ducentesimo-millillion
(1,300) Trecentesimo-millillion
(1,400) Quadringentesimo-millillion
(1,500) Quingentesimo-millillion
(1,600) Sexcentesimo-millillion
(1,700) Septingentesimo-millillion
(1,800) Octingentesimo-millillion
(1,900) Nongentesimo-millillion
(2,000) Bi-millillion
(2,001) Primo-bi-millillion
(2,500) Quingentesimo-bi-millillion
(3,000) Tri-millillion
(4,000) Quadri-millillion
(5,000) Quinqui-millillion
(6,000) Sexi-millillion
(7,000) Septi-millillion
(8,000) Octi-millillion
(9,000) Novi-millillion
(10,000) Deci-millillion
(11,000) Undeci-millillion
(12,000) Duodeci-millillion
(13,000) Tredeci-millillion
(14,000) Quatuordeci-millillion
(15,000) Quindeci-millillion
(16,000) Sexdeci-millillion
(17,000) Septi-deci-millillion
(18,000) Octi-deci-millillion
(19,000) Novi-deci-millillion
(20,000) Vici-millillion
(21,000) Semeli-vici-millillion
(22,000) Bi-vici-millillion
(23,000) Tri-vici-millillion
(24,000) Quadri-vici-millillion
(25,000) Quinqui-vici-millillion
(26,000) Sexi-vici-millillion
(27,000) Septi-vici-millillion
(28,000) Octi-vici-millillion
(29,000) Novi-vici-millillion
(30,000) Trici-millillion
(30,010) Decimo-trici-millillion
(30,100) Centesimo-trici-millillion
(35,000) Quingentesimo-trici-millillion
(40,000) Quadragi-millillion
(50,000) Quinquagi-millillion
(60,000) Sexagi-millillion
(70,000) Septuagi-millillion
(80,000) Octogi-millillion
(90,000) Nonagi-millillion
(100,000) Centi-millillion
(100,010) Decimo-centi-millillion
(100,100) Centesimo-centi-millillion
(101,000) Semeli-centi-millillion
(102,000) Bi-centi-millillion
(150,000) Quinquagi-centi-millillion
(160,000) Sexagi-centi-millillion
(170,000) Septuagi-centi-millillion

(180,000)	Octogi-centi-millillion	(400,000)	Quadringenti-millillion
(190,000)	Nonagi-centi-millillion	(500,000)	Quingenti-millillion
(200,000)	Ducenti-millillion	(600,000)	Sexcenti-millillion
(210,000)	Deci-ducenti-millillion	(700,000)	Septingenti-millillion
(250,000)	Quinquagi-ducenti-millillion	(800,000)	Octingenti-millillion
		(900,000)	Nongenti-millillion
(300,000)	Trecenti-millillion	(1,000,000)	Milli-millillion

此表中名詞均係由拉丁文轉變作成.所應注意者,照數目之位數計算,自第七位以上,方稱第一節,以後再稱第二節,第三節等.括弧內所記諸數字,表示節數之次第.其各字末尾字母爲 o 者,表示該數應以之相加.末尾字母爲 i 者,表示該數應以之相乘.若兩字末尾均爲 i 者,表示應取其和以之相乘.而各名詞之最後一字,卽表示相加或相乘時之被加數或被乘數也.又第五節第七節第九節所用之 Quintillion, Sextillion, Nonillion 等字非由拉丁文之基數 Quinque, Sex, Novem 等字轉來,乃由序數 Quintus, Sextus, Nonus 等字變成,故用於更大節數之名詞時亦仍之.

今若將西文之 Billion, Trillion, Quadrillion 諸字,直譯爲中文.則在英德所用者,可稱"貳方大千","叁方大千", 肆方大千"等.在法美所用者,可稱"貳方千千","叁方千千","肆方千千"等.以我國之大書數字"壹貳叁肆伍陸染捌玖拾佰仟",譯拉丁文之冠首字,免與常用數字相混,蓋因英德所用之名稱如下表:

Million $= 1000000 = 千 \times 千 =$ 千千 $=$ 大千

Billion $= (1000000)^2 = (大千)^2 =$ 大千之平方 $=$ 貳方大千

Trillion $= (1000000)^3 = (大千)^3 =$ 大千之三次方 $=$ 叁方大千

Quadrillion $= (1000000)^4 = (大千)^4 =$ 大千之四次方 $=$ 肆方大千

………………………………………………

法美所用之名稱如下表:

Million $= 1000 \times 1600 = 千 \times 千 = 千^2 =$ 千千

Billion $= (1000)^2 \times 1000 = 千^2 \times 千 = 千^2 \cdot 千 =$ 貳方千千

Trillion $= (1000)^3 \times 1000 = 千^3 \times 千 = 千^3 \cdot 千 =$ 叁方千千

Quadrillion $= (1000)^4 \times 1000 = 千^4 \times 千 = 千^4 \cdot 千 =$ 肆方千千

………………………………………………

例如現今已知之極大素數爲$2^{127}-1$,卽

170,141,183,460,469,231,730,639,127,715,884,105,727

可稱曰:一百七十陸方大千,一十四萬一千一百八十三伍方大千,四十六萬零四百六十九肆方大千,二十三萬一千七百三十參方大千,六十三萬九千一百二十七貳方大千,七十一萬五千八百八十四大千,一十萬零五千七百二十七,或曰:一百七十拾壹方千千,一百四十一拾方千千,一百八十三玖方千千,四百六十捌方千千,四百六十九柒方千千,二百三十一陸方千千,七百三十伍方千千,六百三十九肆方千千,一百二十七參方千千,七百一十五貳方千千,八百八十四千千,一十萬零五千七百二十七是也.

第三章　分釐之記數法

小數之記數法,因所用單位不同而各異.論長度以尺爲單位,小數爲寸分釐毫.容量以升爲單位,小數爲合勺撮抄(撮抄之位置或有互易者).重衡以兩爲單位,小數爲錢分釐毫.貨幣以圓爲單位,小數爲角分釐毫.此等名詞均以十進名.此各名數之小數記數法也.至於不名數,以一爲單位,小數爲分釐毫等,亦以十進名.故不論名數與不名數之小數中,大都含有分釐之名詞也.所應注意者,雖同用分釐名稱,但其所居位次,則彼此歧異焉.蓋用於長度重衡貨幣者,以分爲單位之百分之一,居小數之第二位,釐爲單位之千分之一,居小數之第三位,用於不名數者,以分爲單位之十分之一,居小數之第一位,釐爲單位之百分之一,居小數之第二位也.

我國民間銀錢借貸,及押當利息之計算,常曰月利二分者,謂本銀一兩或一圓,一月利息二分,卽百分之二也.曰年利二分者,謂本銀一兩或一圓,一年利息二錢或二角,卽百分之二十,亦卽十分之二也.曰日利一分者,謂本銀百兩或百圓,一日利息一分,卽百分之百分之一,亦卽萬分之一也.但近世銀行利息,或債劵公息,及公司股票等利息之計算,常曰長年六釐者,謂本銀一圓,按月利息六釐,全年以十個月計算,每年六分,卽百分之六也.故民間計算月利,以分爲百分數,銀行計算年息,以釐爲百分數也.

古時計算地積,周制六尺爲步,百步爲畝,百畝爲頃.秦制

二百四十步爲畝.後世以五尺之平方爲一弓,亦曰一積步,二百四十弓爲一畝.弓之下爲分釐,畝之下亦有分釐.今制以六十方丈爲一畝.一畝之十分之一爲分,一分之十分之一爲釐,一釐之十分之一爲毫,一毫即六方尺.是以畝爲單位,分爲十分數,釐爲百分數也.

隋書載祖冲之割圓術,以丈尺寸分釐毫秒忽等名詞,計算圓周,其所用分釐等字,適與近代通行之意義相符,惟在毫以下,不曰絲而曰秒,是其異點也.

宋秦九韶數書九章載:"小數之類,一以下,有分,釐,毫,絲,忽,微,塵,沙,渺,莽,輕,淸,煙,"是以分爲十分數,釐爲百分數.其自微以下之名詞,與他處所用者不同.

筆算數學載:"小數命名之法有二.其一乃被十每分一次,即有一次名目,如錢被分一次爲分,二次爲釐,三次爲毫,四次爲絲,五次爲忽,六次爲微,七次爲纖,八次爲沙,自此下推,命名之法則易,乃每八次連名,(內含千萬)至十六次爲塵.自第九至十六,諸次乃倒用大數各位名目,與塵名相連,如第九次爲千萬塵,十次爲百萬塵,十一次爲十萬塵,十二次爲萬塵,十三次爲千塵,十四次爲百塵,十五次爲十塵,至十六次爲塵,再下推八次(即以十分二十四次)爲埃,又八次爲渺,又八次爲漠,又八次爲模糊,餘次不必盡述.此命名之法係珠算所言,大抵指天平衡數立名.其二乃按命分現成之法命名,以十分一次爲十分分二次爲百分,分三次爲千

分餘可類推,此乃筆算通行之法,任分何數何物無不合用."此種衡數記法,若以兩爲單位,則分爲百分數,應居小數之第二位.但既以小數第九位至第十六位,爲千萬塵至塵之數,自第十七位至第二十四位,爲千萬埃至埃之數,餘均每八位易名,而以小數第一位至第八位爲分釐毫絲忽微纖沙八個名詞則分爲十分數,應居小數之第一位也.惟是在沙以上之小數,既以十進名,在沙以下之小數,改以萬萬進名,前後甚覺參差,且與同書中,命大數時,主張四位爲頓,以萬進名者,彼此對照之,亦現有出入之處.

算學啓蒙載一以下之小數,爲"分,釐,毫,絲,忽,微,纖,沙,萬萬塵曰沙,萬萬埃曰塵,萬萬渺曰埃,萬萬漠曰渺,萬萬模糊曰漠,萬萬逡巡曰模糊,萬萬須臾曰逡巡,萬萬瞬息曰須臾,萬萬彈指曰瞬息,萬萬刹那曰彈指,萬萬六德曰刹那,萬萬虛曰六德,萬萬空曰虛,萬萬清曰空,萬萬淨曰清,千萬淨,百萬淨,十萬淨,萬淨,千淨,百淨,十淨,一淨."此以小數之第一位爲分,第二位爲釐,其在沙以下之小數,與在筆算數學所說者同,以萬萬進名.但在虛空以下之小數,以一字作一名詞則與他書有別.

至於歐西計算長度,以Metre爲單位,譯曰公尺,舊譯曰米突,亦譯作粎,以下公寸,公分,公釐之名稱,亦譯作粉,粴,粍.容積以Litre爲單位,譯曰公升,舊譯曰立突,亦譯作竔,以下公合,公勺,公撮之名稱亦譯作竕,竰,竓.重衡以Gramme爲單位,

譯曰公分,舊譯曰瓦.亦譯作克,以下公釐,公毫,公絲之名稱,亦譯作瓰,甅,瓱,或兝,兣,兞.在此所用粉,糎,竕,竰,瓰,甅等字,原譯自日語,再參酌小數名詞意義,以致相率通用者也.以表列之如下:

長　度　表

Kilometre	＝公里＝粁
Hectometre	＝公引＝粨
Decametre	＝公丈＝籵
Metre	＝公尺＝粎＝三市尺
Decimetre	＝公寸＝粉
Centimetre	＝公分＝糎
Millimetre	＝公釐＝粍

容　量　表

Kilolitre or Stere	＝公秉＝竏＝一立方公尺
Hectolitre	＝公石＝竡＝百立方公寸
Decalitre	＝公斗＝竍＝十立方公寸
Litre	＝公升＝竔＝一立方公寸＝一市升
Decilitre	＝公合＝竕＝百立方公分
Centilitre	＝公勺＝竰＝十立方公分
Millilitre	＝公撮＝竓＝一立方公分

重　衡　表

Kilogramme	＝公斤＝瓩＝兛＝二市斤
Hectogramme	＝公兩＝瓸＝兡
Decagramme	＝公錢＝瓧＝兙

Gramme	＝公分＝瓦＝克＝三市分二市釐
Decigramme	＝公釐＝瓰＝兝
Centigramme	＝公毫＝甅＝兣
Milligramme	＝公絲＝瓱＝兞

地　積　表

Hectare	＝公頃＝⿰安百＝一平方公引
Are	＝公畝＝安＝一平方公丈
	公分＝⿰安分＝十平方公尺
Centiare	＝公釐＝⿰安釐＝一平方公尺

由上表,知西人之度量衡,亦用分釐爲譯語.惟長度之公寸亦譯粉,公分亦譯糎,公釐亦譯粍,重量之公分亦譯克,公釐亦譯兝,公毫亦譯兣.(惟中華書局刊行之工商部製定新度量衡圖表,以長度公寸爲籿,公分爲粉,公釐爲糎,重量公兩爲⿺儿兩,公分爲兝,是爲例外)原名雖同,而譯語中用分釐字樣者與加分釐偏旁者,意義各殊,卽重量以公分爲單位,長度之公分,則爲單位百分之一,而含有偏旁之字體,則分爲單位十分之一,釐爲百分之一,難免不互相淆混焉.

又西人計算地積,其單位爲 Are, 譯曰公畝,亦譯爲安,日本譯作亞爾,其百分之一爲Centiare, 譯曰公釐,亦譯爲⿰安釐,日本譯作⿰亞釐,其進名法,與我國計畝數同,是以釐爲單位之百分之一也.

日本常以分爲小數之第一位,釐爲小數之第二位,但對於割合算(或步合算),則以割爲十分之一,分(或步)爲百分

之一,釐爲千分之一.所謂割者,卽如我們折扣中之幾折,成分中之幾成之意也.

因分釐之名詞,用爲小數及名數或譯語時,意義各別,互相錯亂.故陳榥特作新字以區別之,將小數之分釐毫絲忽,改爲忿㦥恈㦗惚,蓋因我國心旁之寫法,與豎立之除號相似.故借以加諸分釐毫絲忽旁,以示一爲十百千萬等數所除之結果,且讀時讀爲上聲,使音亦略有分別.此抑不得已之苦衷也.

惟我國舊有"成"之名稱.所謂幾成者,卽十分之幾之謂也.他如銀之成色,農家之收成,商家之成本,皆原於此.因此陳文主張以十分之一爲成,百分之一爲分,千分之一爲釐,卽成居小數之第一位,分居小數之第二位,釐居小數之第三位.如此與各名數之記數法,亦趨一致.(惟計算重量,以公分爲單位,計算地積,以分卽畞,爲畝之十分之一,又公分爲公畝之十分之一等,作爲例外)卽與百分算中,常書百分之一爲 1% 而以 % 爲一分之意義亦能一貫.

故吾人記小數,可依十進法,以第一位爲成,第二位爲分,第三位爲釐(省作厘),第四位爲毫(省作毛),以下再小之數,依據數理精蘊,算法統宗,數學精詳等書,每位易一名稱,以表列之如下:

成分釐毫絲忽微纖沙塵埃渺漠模逡須瞬彈剎六虛清

糊巡臾息指那德空淨.

上表所含小數,共有二十二位,若欲再求精密,則已無名詞可用.欲濟其窮可將大數命名法倒用之,即取其最小之單位而附以"之十分之一""之百分之一"等,或曰"十分之幾""百分之幾"等是也.如斯則應用無窮境矣.例如在物理學中,計算波長之單位爲 Ångatrom, 以 Å 表之,等於 10^{-8} cm.可云爲一公塵,亦可云爲一億分之一公分電子球直徑之長爲

·000,000,000,000,37 cm.

可云爲三公逡巡七公須臾,亦可云爲百兆分之三十七公分.又計算氫一分子之重量爲 1.65×10^{-24} gramme, 則曰一秭分之一又百分之六十五公分.一電子之重量爲 9.01×10^{-28} gramme, 則曰一穰分之九又百分之一公分.又現今已知之最小數值,爲圓周率 π 之第七百零七位小數,即

$$\frac{1}{(10)^{707}}=\frac{1}{100(1000)^{234}\times1000}$$

則曰一百貳佰參拾肆方千千分之一 (100 Quarto-trigesimo-ducentillionth) 也,

各國命數名詞表

數目	$(1000)^4$	$(1000)^3$	$(1000)^2$	1000	100	10	1
中 日	兆	十億	百萬	千	百	十	一
美	Trillion	Billion	Million	Thousand	Hundred	Ten	Unit
英	Billion		Million	Thousand	Hundred	Ten	Unit
德	Billion		Million	Tausend	Hundret	Zehn	Einer
法	Trillion	Milliard, Billion	Million	Mille	Cent	Dix	Unité
拉丁			Million	Mille	Centum	Dĕcem	Mŏnas
希臘	τϱιλλνον	βιλλιον	ἑναἑκατοιμμ ύϱιον	χίλιοι	ἑκατόν	δέκα	ἕνας
義大利	Trillioni	Billioni, Duilioni	Milione, Millione	Mille	Cento	Dieci	Uno
西班牙	Trilion	Bilion	Millón	Millar	Ciento	Diez	Uno
葡萄牙	Trili˜o	Bilião	Milhão	Milhar	Cem	Dez	Um
荷蘭	Trimillion, Trillion	Bimillion, Billion	Millioen	Duizend	Tondred	Tien	Eenheid
瑞典	Billiōn		Milliōn	Tusen	Hundra	Ti'o	En, Ett
挪威	Billion		Million	Tūsinde	Hŭndrede	Ti	Ēn
丹麥	Billion		Million	Tūsin 'e	Hŭndrede	Ti	Ēn
波蘭	Billion		Million	Tysiąc	Sto	Dziesięć	Jeden
俄	Биллiонъ		миллiонъ	тысяча	сто	десять	единица
亞剌伯	Trilioûm	Bilioûm	Malioûm	Alf	Miya	ʿAchra	Wâḥid
土耳其	Trilyon	Bilyon	Milyon	Bin	Jüs	On	Bir
印度		Padma	Prayuta	Sahasra	Çata	Daçon	Eka

各國記數法對照表

各國記數法對

$(10)^{99}$		Secundo-trigillion			Secundo-trigillion	Secundo-trigillioni
$(10)^{98}$						
$(10)^{97}$						
$(10)^{96}$	穰無量數	Primo-trigillion	Sexdecillion	Sexdecillion	Primo-trigill on	Primo-trigillioni
$(10)^{95}$						
$(10)^{94}$						
$(10)^{93}$		Trigillion			Trigillion	Trigillioni
$(10)^{92}$	秭無量數					
$(10)^{91}$						
$(10)^{90}$		Nono-vigillion	Quintodecillion	Quintodecillion	Nono-vigillion	Nono-vigillioni
$(10)^{89}$						
$(10)^{88}$	垓無量數					
$(10)^{87}$		Octo-vigillion			Octo-vigillion	Octo-vigillioni
$(10)^{86}$						
$(10)^{85}$						
$(10)^{84}$	京無量數	Septo-vigillion	Quartodecillion	Quartodecillion	Septo-vigillion	Septo-vigillioni
$(10)^{83}$						
$(10)^{82}$						
$(10)^{81}$		Sexto-vigillion			Sexto-vigillion	Sex-vigillioni
$(10)^{80}$	兆無量數					
$(10)^{79}$	千億無量數					
$(10)^{78}$	百億無量數	Quinto-vigillion	Tredecillion	Tredecillion	Quinto-vigillion	Quinto-vigillioni
$(10)^{77}$	十億無量數					
$(10)^{76}$	億無量數					
$(10)^{75}$	千萬無量數	Quarto-vigillion			Quarto-vigillion	Quarto-vigillioni
$(10)^{74}$	百萬無量數					
$(10)^{73}$	十萬無量數					
$(10)^{72}$	萬無量數	Tertio-vigillion	Duodecillion	Duodecillion	Tertio-vigillion	Tre-vigillioni
$(10)^{71}$	千無量數					
$(10)^{70}$	百無量數					
$(10)^{69}$	十無量數	Secundo-vigillion			Secundo-vigillion	Secundo-vigillioni
$(10)^{68}$	無量數					
$(10)^{67}$	千不可思議					
$(10)^{66}$	百不可思議	Primo-vigillion	Undecillion	Undecillion	Primo-vigillion	Primo-vigillioni
$(10)^{65}$	十不可思議					
$(10)^{64}$	不可思議					
$(10)^{63}$	千那由他	Vigillion			Vigillion	Vigi lioni
$(10)^{62}$	百那由他					
$(10)^{61}$	十那由他					
$(10)^{60}$	那由他	Nono-decillion	Decillion	Decillion	Nonodecillion	Nonodecillioni
$(10)^{59}$	千阿僧祇					
$(10)^{58}$	百阿僧祇					
$(10)^{57}$	十阿僧祇	Octodecillion			Octodecillion	Octodecillioni
$(10)^{56}$	阿僧祇					
$(10)^{55}$	千恆河沙					
$(10)^{54}$	百恆河沙	Septodecillion	Nonillion	Nonillion	Septodecillion	Septodecillioni
$(10)^{53}$	十恆河沙					
$(10)^{52}$	恆河沙					
$(10)^{51}$	千極	Sextodecillion			Sextodecillion	Sextodecillioni
$(10)^{50}$	百極					
$(10)^{49}$	十極					
$(10)^{48}$	極	Quinto-decillion	Octillion	Octillion	Quintodecillion	Quintodecillioni

各國記數法對照表

各國記數法對照表

$(10)^{92}$	$(10)^{91}$	$(10)^{90}$	$(10)^{89}$	$(10)^{88}$	$(10)^{87}$	$(10)^{86}$	$(10)^{85}$	$(10)^{84}$	$(10)^{83}$	$(10)^{82}$	$(10)^{81}$	$(10)^{80}$
秭無量數				垓無量數				京無量數				兆無量數
		Nono-vigillion			Octo-vigillion			Septo-vigillion			Sexto-vigillion	
		Quintodecillion						Quartodecillion				
		Quintodecillion						Quartodecillion				
		Nono-vigillion			Octo-vigillion			Septo-vigillion			Sexto-vigillion	
		Nono-vigillioni			Octo-vigillioni			Septo-vigillioni			Sex-vigillioni	

$(10)^{79}$	$(10)^{78}$	$(10)^{77}$	$(10)^{76}$	$(10)^{75}$	$(10)^{74}$	$(10)^{73}$	$(10)^{72}$	$(10)^{71}$	$(10)^{70}$	$(10)^{69}$	$(10)^{68}$
千億無量數	百億無量數	十億無量數	億無量數	千萬無量數	百萬無量數	十萬無量數	萬無量數	千無量數	百無量數	十無量數	無量數
	Quinto-vigillion			Quarto-vigillion			Tertio-vigillion			Secundo-vigillion	
	Tredecillion						Duodecillion				
	Tredecillion						Duodecillion				
	Quinto-vigillion			Quarto-vigillion			Tertio-vigillion			Secundo-vigillion	
	Quinto-vigillioni			Quarto-vigillioni			Tre-vigillioni			Secundo-vigillioni	

$(10)^{67}$	$(10)^{66}$	$(10)^{65}$	$(10)^{64}$	$(10)^{63}$	$(10)^{62}$	$(10)^{61}$	$(10)^{60}$	$(10)^{59}$	$(10)^{58}$	$(10)^{57}$	$(10)^{56}$	$(10)^{55}$	$(10)^{54}$	$(10)^{53}$	$(10)^{52}$
千不可思議	百不可思議	十不可思議	不可思議	千那由他	百那由他	十那由他	那由他	千阿僧祇	百阿僧祇	十阿僧祇	阿僧祇	千恆河沙	百恆河沙	十恆河沙	恆河沙
	Primo-vigillion			Vigillion			Nono-decillion			Octodecillion			Septodecillion		
	Undecillion						Decillion						Nonillion		
	Undecillion						Decillion						Nonillion		
	Primo-vigillion			Vigillion			Nonodecillion			Octodecillion			Septodecillion		
	Primo-vigillioni			Vigi llioni			Nonodecillioni			Octodecillioni			Septodecillioni		

$(10)^{51}$	$(10)^{50}$	$(10)^{49}$	$(10)^{48}$	$(10)^{47}$	$(10)^{46}$	$(10)^{45}$	$(10)^{44}$	$(10)^{43}$	$(10)^{42}$	$(10)^{41}$	$(10)^{40}$
千極	百極	十極	極	千載	百載	十載	載	千正	百正	十正	正
Sextodecillin			Quinto-decillion			Quarto-decillion			Tertio-decillin		
			Octillion						Septillion		
			Octillion						Septillion		
Sextodecillion			Quintodecillion			Quartodecillion			Tertiodecillin		
Sextodecillioni			Quintodecillioni			Quartodecillioni			Tredecillioni		

各國記數法對照表

各國記數法對照表

總數	中日	美	英	德	法	義
1	一	Unit	Unit	Einer	Unité	Uno
10	十					
10^2	百					
$(10)^3$	千	Thousand	Thousand	Tausend	Mille	Mille
$(10)^4$	萬					
$(10)^5$	十萬					
$(10)^6$	百萬	Million	Million	Million	Million	Milione, Millioni
$(10)^7$	千萬					
$(10)^8$	億					
$(10)^9$	十億	Billion			Milliard, Billion	Billioni, Dulioni
$(10)^{10}$	百億					
$(10)^{11}$	千億					
$(10)^{12}$	兆	Trillion	Billion	Billion	Trillion	Trillioni
$(10)^{13}$	十兆					
$(10)^{14}$	百兆					
$(10)^{15}$	千兆	Quadrillion			Quadrillion	Quadrillioni, Quatrilioni
$(10)^{16}$	京					
$(10)^{17}$	十京					
$(10)^{18}$	百京	Quintillion	Trillion	Trillion	Quintillion	Quintillioni
$(10)^{19}$	千京					
$(10)^{20}$	垓					
$(10)^{21}$	十垓	Sextillion			Sextillion	Sextillioni
$(10)^{22}$	百垓					
$(10)^{23}$	千垓					
$(10)^{24}$	秭	Septillion	Quadrillion	Quadrillion	Septillion	Septillioni
$(10)^{25}$	十秭					
$(10)^{26}$	百秭					
$(10)^{27}$	千秭	Octillion			Octillion	Octillioni
$(10)^{28}$	穰					
$(10)^{29}$	十穰					
$(10)^{30}$	百穰	Nonillion	Quintillion	Quintillion	Nonillion	Nonillioni
$(10)^{31}$	千穰					
$(10)^{32}$	溝					
$(10)^{33}$	十溝	Decillion			Decillion	Decillioni
$(10)^{34}$	百溝					
$(10)^{35}$	千溝					
$(10)^{36}$	澗	Undecillion	Sextillion	Sextillion	Undecillion	Undecillioni
$(10)^{37}$	十澗					
$(10)^{38}$	百澗					
$(10)^{39}$	千澗	Duodecillion				Duodecillioni

各國記

小數	中	日	美	英	德	法	義
$\frac{1}{10}$	成	分	Tenth	Tenth	Zehnte	Dixième	Decimo
$\frac{1}{(10)^2}$	分	釐	Hundredth	Hundredth	Hundertste	Centième	Centesimo
$\frac{1}{(10)^3}$	釐	毫	Thousandth	Thousandth	Tausendste	Millième	Millesimo
$\frac{1}{(10)^4}$	毫	絲	Ten thousandth	Ten thousandth			
$\frac{1}{(10)^5}$	絲	忽	Hundred thousandth	Hundred thousandth			
$\frac{1}{(10)^6}$	忽	微	Millionth	Millionth	Millionste	Millionième	Millionimo
$\frac{1}{(10)^7}$	微	纖	Ten millionth	Ten millionth			
$\frac{1}{(10)^8}$	纖	沙	Hundred millionth	Hundred millionth			
$\frac{1}{(10)^9}$	沙		Billionth	Thousand millionth		Billionième	Billionimo

照表

各國記數法對照表

整數	中	日	美	英	德	法	義
1	一		Unit	Unit	Einer	Unité	Uno
10	十						
10^2	百						
$(10)^3$	千		Thousand	Thousand	Tausend	Mille	Mille
$(10)^4$	萬						
$(10)^5$	十	萬					
$(10)^6$	百	萬	Million	Million	Million	Million	Millione, Millioni
$(10)^7$	千	萬					
$(10)^8$	億						
$(10)^9$	十	億	Billion			Milliard, Billion	Billioni, Duilioni
$(10)^{10}$	百	億					
$(10)^{11}$	千	億					
$(10)^{12}$	兆		Trillion	Billion	Billion	Trillion	Trillioni
$(10)^{13}$	十	兆					
$(10)^{14}$	百	兆					
$(10)^{15}$	千	兆	Quadrillion			Quadrillion	Quadrillioni, Quatrilioni
$(10)^{16}$	京						
$(10)^{17}$	十	京					
$(10)^{18}$	百	京	Quintillion	Trillion	Trillion	Quintillion	Quintillioni
$(10)^{19}$	千	京					
$(10)^{20}$	垓						
$(10)^{21}$	十	垓	Sextillion			Sextillion	Sextillioni
$(10)^{22}$	百	垓					
$(10)^{23}$	千	垓					
$(10)^{24}$	秭		Septillion	Quadrillion	Quadrillion	Septillion	Septillioni
$(10)^{25}$	十	秭					
$(10)^{26}$	百	秭					
$(10)^{27}$	千	秭	Octillion			Octillion	Octillioni

各國記數法對照表

小數	中	日	美	英	德	法	義
$\frac{1}{10}$	成	分	Tenth	Tenth	Zehnte	Dixième	Decimo
$\frac{1}{(10)^2}$	分	釐	Hundredth	Hundredth	Hunderste	Centième	Centesimo
$\frac{1}{(10)^3}$	釐	毛	Thousandth	Thousandth	Tausendste	Millième	Millesimo
$\frac{1}{(10)^4}$	毫	絲	Ten thousandth	Ten thousandth			
$\frac{1}{(10)^5}$	絲	忽	Hundred thousandth	Hundred thousandth			
$\frac{1}{(10)^6}$	忽	微	Millionth	Millionth	Millionste	Millionième	Millionimo
$\frac{1}{(10)^7}$	微	纖	Ten millionth	Ten millionth			
$\frac{1}{(10)^8}$	纖	沙	Hundred millionth	Hundred millionth			
$\frac{1}{(10)^9}$	沙		Billionth	Thousand millionth		Billionième	Billionimo
$\frac{1}{(10)^{10}}$	塵		Ten billionth	Ten thousand millionth			
$\frac{1}{(10)^{11}}$	埃		Hundred billionth	Hundred thousand millionth			
$\frac{1}{(10)^{12}}$	渺		Trillionth	Billionth	Billionste	Trillionième	Trillionimo
$\frac{1}{(10)^{13}}$	漠		Ten trillionth				
$\frac{1}{(10)^{14}}$	模糊		Hundred trillionth				
$\frac{1}{(10)^{15}}$	逡巡		Quadrillionth			Quadrillionième	Quadrillionimo
$\frac{1}{(10)^{16}}$	須臾		Ten quadrillionth				
$\frac{1}{(10)^{17}}$	瞬息		Hundred quadrillionth				
$\frac{1}{(10)^{18}}$	彈指		Quintillionth	Trillionth	Trillionste	Quintillionième	Quintillionimo
$\frac{1}{(10)^{19}}$	剎那		Ten quintillionth				
$\frac{1}{(10)^{20}}$	六德		Hundred quintillionth				
$\frac{1}{(10)^{21}}$	虛空		Sextillionth			Sextillionième	Sextillionimo
$\frac{1}{(10)^{22}}$	清淨		Ten sextillionth				

畢達哥拉斯定理

管 公 度

I. 緒 言

1. 畢達哥拉斯定理之來歷.

畢達哥拉斯定理者,幾何學中關於推理及應用兩方面,最重要定理之一也.

其希臘語原文曰:

Εν τοῖς ὀρθογωνίοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν υ'ποτεινούσης πλερᾶς τετράγωνον, ἴδον ἐστὶ τοῖς ἀπό τῶν τὴν ὀρθὴν γωνὶαν περιεκονσῶν πλενρών τετραγώνοις.

拉丁語原文曰:

In rectangulis triangulis quadratum, quod a latere rectum angulum subtendente describitur, aequale est eis, quae a lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

德語原文曰:

In den rechtwinkeligen Dreiecken ist das Quadrat, welches von der dem rechten Winkel gegenüber liegenden Seite beschrieben wird, den Quadraten, welche von den ihn umschliessenden Seiten beschrieben werden gleich.

法語原文曰:

Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés construits surles côtés de l'angle droit.

英語原文曰:

In any right-angled triangle, the square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the other sides.

日語原文曰:

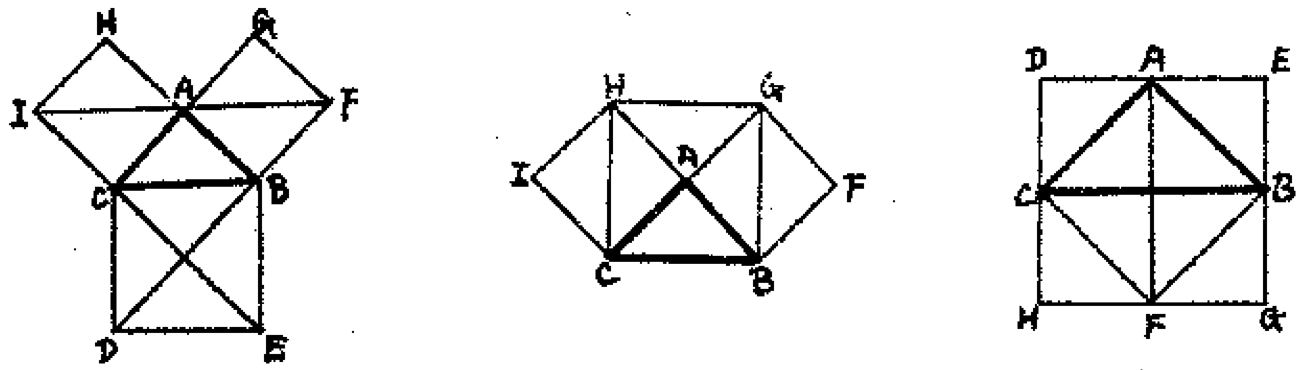
任意ノ直角三角形ニ於テ斜邊上ノ正方形ハ他ノ二邊上ノ正方形ノ和ニ等シ.

卽任意直角三角形中,斜邊上之正方形,等於兩股上正方形之和.

從 Proclus (氏爲西曆紀元412年至485年間之人,曾著歐幾里得〔Euclid〕一書)之記載,此定理之證明,果爲畢達哥拉斯之證明與否,尙不可知.畢達哥拉斯自行發見也耶?抑習諸埃及之僧侶者耶?抑或取自巴比倫者耶?無由判定.因而有種種之傳說,其中最廣行者,卽畢達哥拉斯從埃及之僧侶,習三角形一邊〔記以 Osiris〕=3,他邊〔記以 Isis〕=4,斜邊〔記以 Horus〕=5之性質,故當時有稱此三角形爲埃及三角形或畢達哥拉斯三角形者.但三角形之此性質,不僅埃及人知之,我國古代夏禹王時卽已發見,且迦勒底亞人,非尼西亞人,波斯人,印度人,亦知之.特於希臘及印度,稱之爲結婚定理.此恐當時選擇賢婿,以能通此定理爲標準也.

畢達哥拉斯居留於埃及者21年,於巴比倫者12年,故畢達哥拉斯由埃及巴比倫得知三角形之此性質一說,較屬

可信.當時埃及巴比倫等多由甎瓦以察知此性質,卽將半正方形之甎瓦,列如下之左圖,斜邊上之正方形爲 4 枚,直角傍之二邊上之正方形,各爲 2 枚是也.至下之中圖爲甎瓦之自然排列法,若如右圖排列之,則更形一目了然矣.



雖然,此定理一般的證明,當推畢達哥拉斯創始,無疑也蓋氏由奇數順位疊加法[$1+3=2^2$,$1+3+5=9=3^2$,等]推移於 3, 4, 5, 爲邊之直三角形,其法如次:

任取一奇數[例如取 7]爲最小邊,將其自乘[$7^2=49$]減 1[$49-1=48$]以 2 除其較[$48\div2=24$]爲次邊,再加以 1[$24+1=25$]卽斜邊也.

[一般述之,取奇數 $2m+1$ 爲最小邊,則

$$\left\{(2m+1)^2-1\right\}\div 2=2m^2+2m$$

爲次邊,$2m^2+2m+1$ 爲斜邊.蓋以

$$(2m^2+2m+1)^2=(2m^2+2m)^2+2(2m^2+2m)+1$$
$$=(2m^2+2m)^2+(2m+1)^2$$

故也.]

當發見一般的直角三角形此性質之時,曾殺牛供祭壇以謝天神云.

嗣後定理之證明,爲簡便計,均設三角形ABC中,A爲直角,與角A, B, C相對之邊各爲a, b, c, 且b<c,

故畢達哥拉斯定理可記如次

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

2. 畢達哥拉斯小傳.

畢達哥拉斯 Samos 島國人也.其父名 Mnessarch, 會島之飢饉,以功得公民權,而偕其妻 Pithay, 嘗爲經商旅行.西曆紀元前 569 年,赴 Tyr, 產畢達哥拉斯.氏 18 歲時,苦國王 Polycrates 之無道,遂出亡於 Lesbos 島,而往依其伯父,甚爲其伯父所器重.在此處受 Ferekid 之教者凡二年. Ferekid 者,與 Anaximander 及 Thales 並稱,當時賢哲之一也.

畢達哥拉斯像

斯時 Thales 已達 90 歲之高齡,畢達哥拉斯復從此二大碩學修天文及數學. Thales 者,卽由埃及人傳太陽曆於歐洲,爲世所知也.氏並嘗測日蝕月蝕,及由陰影以測金字塔高.又幾何學中之重要定理,如內接於圓之角與弧之關係,二等邊三角形之底角與等邊之性質,皆渠所發

見者也. Anaximander 者,卽使用器械測定太陽之高度,教授地理學,創始由銅版上刻畫地圖,著名之士也.又氏爲最初散文體之記者,亦爲世所稱道,蓋當時一切學術上之著述,多爲久行於印度人間之韻文體,自 Anaximander 出,始打破其頽風,而以散文體記之.

Thales喜畢達哥拉斯之可深造也,嘗極力慫慂此有爲之青年,遊學於埃及.因之畢達哥拉斯努力爲遊學埃及之預備,而於 Sidon 非尼西亞僧侶學校,修業一年,西曆547年,遂赴埃及.

時畢達哥拉斯之逃亡罪,已爲其國王所赦免,王並親爲之作書,介紹於埃及國王 Amasis. 然以外國人爲不潔者之故,畢達哥拉斯獲入埃及僧侶階級之特許,曾經不可名狀之困難;蓋斯時埃及僧侶社會之心理,縱本國人亦雅不欲其參入其間,而習其所學也.

初,埃及國王曾親送畢達哥拉斯於 Hellopolis 寺院,院之僧侶,拒而不納.嗣交於Memphis 之長老會議,由長老會議之決議,始收容氏於 Theben. 此處,畢達哥拉斯爲收容於僧侶之階級曾被科以種種困難之條件,然無論障礙之如何,氏之決心,終不爲之而稍銼也.

有志者事竟成,畢達哥拉斯終於舉行一切之儀式,通過一切之試驗,得依僧正 Sonchis 之門牆,而開始研究其所學矣.在此滯留於埃及之21年中,畢達哥拉斯不僅涉獵埃及

之一切學術,爲自已藥籠中物,且能於僧侶階級中,一露頭角,而佔一最高榮譽之地位.

西曆427年,王 Amasis 薨,翌年,其子 Psammenit 卽位.波斯王 Kambis 侵入埃及,惡僧侶甚,於是向之所謂僧侶階級者,悉被捕.畢達哥拉斯亦在其中,而被放於巴比倫.

巴比倫者,當時 Krotona 人,印度人,猶太人,與我國人,及其他民族商業集中地也.畢達哥拉斯居留於此者12年,舉凡迦勒底亞人之豐富學問,畢達哥拉斯因得以盡習之,旋得間,恢復自由而返故鄉,時行年已56歲矣.其先師 Ferekid 尙健在也.居無何,畢達哥拉斯復爲研究希臘之宗教的,科學的,及社會的狀態,旅行於其地者又半年.

自後畢達哥拉斯遂在Samos島,設帳授徒.然其生涯,至爲慘淡,幾全無門弟子;有之,惟 Eratokles 之子,亦名爲畢達哥拉斯者,一人而已.畢達哥拉斯竟至於自給學費,其貧困之況可知.職是之故,畢達哥拉斯不得不去其祖國,而赴彼文化夙稱發達之大希臘都市,以覓其第二故鄉.

西曆510年,畢達哥拉斯赴 Kroton, 是年,創著名革命暴發之年也. Traquinius 氏由羅馬, Hippias 氏自雅典,均避難於此.卽Kroton之附近,亦常起暴動.

畢達哥拉斯在 Kroton, 曾向青年爲一場之演說,開始吐露其意見於公衆.述青年之義務,沈痛激烈.故當時之父老,多舉其子弟之教育以託之.繼爲第二次演說,述家庭中之

規律與風紀.後又續爲二次之演說,述兒童與婦女之問題.最後就虛榮立論之結果,致 Hera 寺院中,遺棄之華服,值數千金之鉅,蓋婦女界中,無論何人,一聆其訓,已失其衣華服而招搖過市之勇氣也.

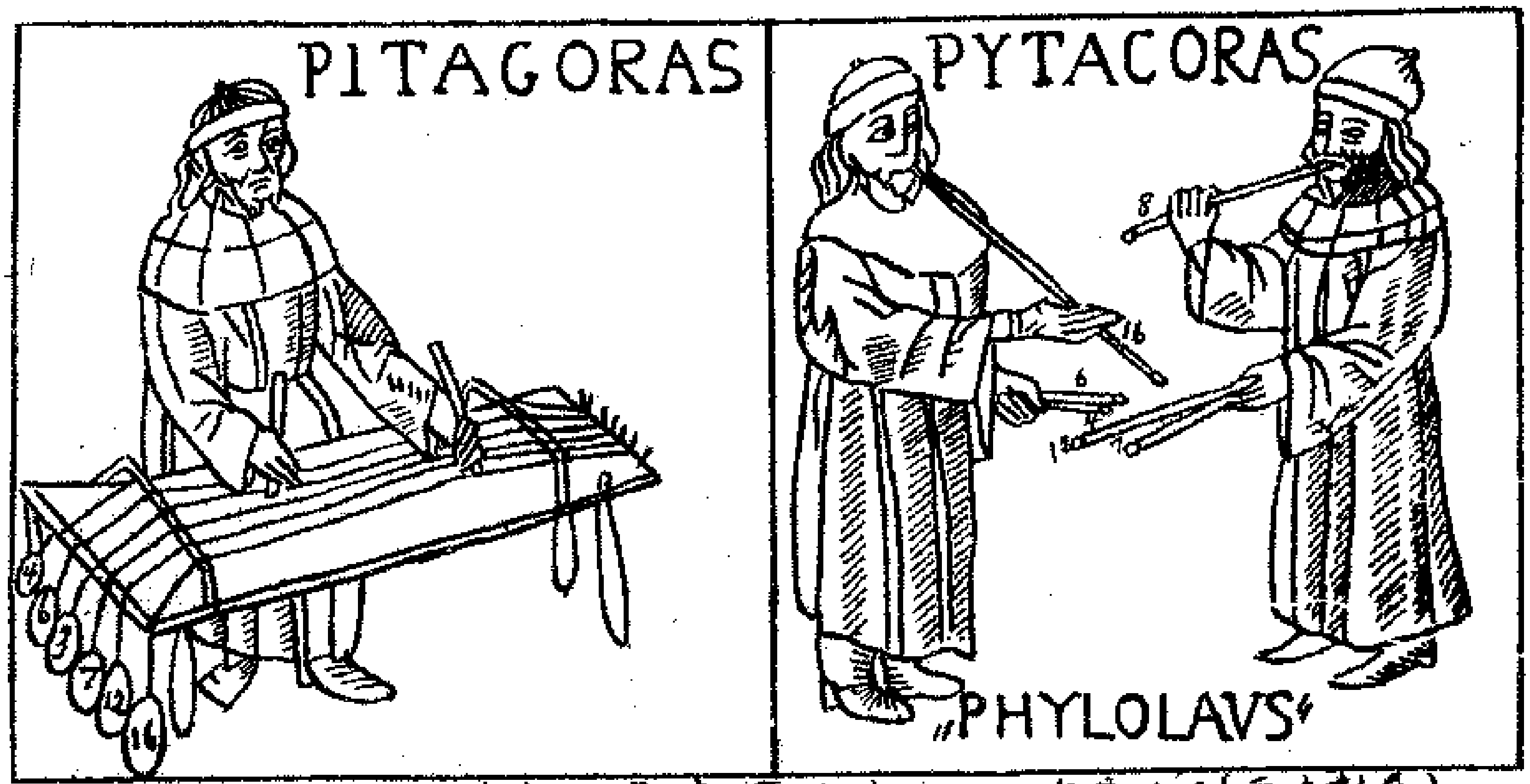
畢達哥拉斯之演說也,熱烈流暢,發輝無餘,故使 Kroton 之民俗風紀爲之一新,無足怪也.時各界人士聽畢達哥拉斯之講者,踴躍成羣,嘗溢於其門.除終日傾耳於畢達哥拉斯教誨之青年外,每夕高貴之男女老幼來集者約600人.彼以獲與此60歲老人結伉儷爲幸福之才學並秀之妙齡女子 Theana, 亦參預盛會中之一人也.

聽衆因之分爲二部:其一,即狹義之學校,所謂學生是也;他一,卽單純之聽講者,所謂廣義之學校是也.對於前者,畢達哥拉斯取嚴正之學理,由數學之概念,說至最高深之抽象哲學,使由論理的組織以理解科學的全體,同時並說明一切斷片的知識,其害殆甚於無知.

惟是吾人對於畢達哥拉斯學派中之數學者及道德學者,須有區別之必要.所謂道德學者,卽不受一嚴格之科學教育,僅列席於夜間之通俗講演,此種講演之主題,卽倫理,靈魂不滅,及靈魂轉生,[輪迴] 等是也.

西曆490年頃,畢達哥拉斯之學校,已達其隆盛之絕頂.斯時,被此學校驅除之 Hyppasos 氏,竟立於 Kroton 民主黨之陣頭,而攻擊其舊時同窗侶伴矣.畢達哥拉斯之學校,遂被破

壞,其財產遂被沒收,而其自身亦遂被放逐.



音樂家之畢達哥拉斯(1492年意大利亞木刻畫)

自是畢達哥拉斯被放於 Tarent, 不得志者16年,此處亦民主黨勢力極盛區也.西曆474年,畢達哥拉斯已96歲矣,再逃於 Metapont, 貧困交加者又四年.然此地亦卒爲民主黨之勢力所征服,火以私宅爲學校之畢達哥拉斯之家,其門弟子之罹悲慘拷問而死者,實繁有徒.而畢達哥拉斯竟自炎火之中,得免於難,亦云幸矣.隨卽卒去,時年99歲.

II. 根據圖形相等的證明

1. Euclid 第1卷第47命題所載者.

此證明因畫於三角形ABC各邊上正方形之內外,〔內外之區別,卽畫於三角形反對之側者爲外,與三角形同側者爲內.〕而分八類,卽:

1°. a^2, b^2, c^2 皆畫於外方.

2°. a^2 與 b^2 畫於外方, c^2 畫於內方.

3°. a^2 與 c^2 畫於外方, b^2 畫於內方.

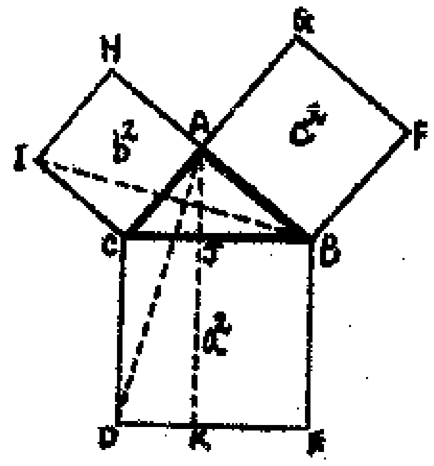
4°. b^2 與 c^2 畫於外方, a^2 畫於內方.

5°. a^2 與 b^2 畫於內方, c^2 畫於外方.

6°. a^2 與 c^2 畫於內方, b^2 畫於外方.

7°. b^2 與 c^2 畫於內方, a^2 畫於外方.

8°. a^2, b^2, c^2 皆畫於內方.



[1°] 平行 CD 作 AK;

聯結 AD, IB.

則因 $CA=CI$, $CD=CB$, $A\hat{C}D=I\hat{C}B$,

故 $\triangle ACD \equiv \triangle ICB$.

又 $\triangle ACD = \frac{1}{2}$矩形CK,

$\triangle ICB = \frac{1}{2}$正方形$b^2$,

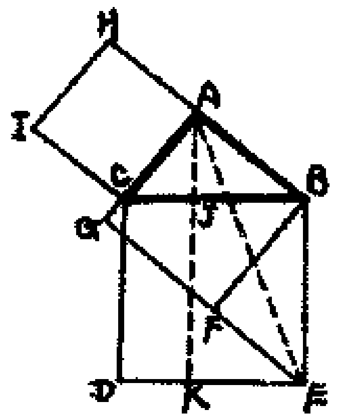
故 矩形$CK=b^2$.

同理 矩形$BK=c^2$.

故 $b^2+c^2=$矩形CK + 矩形$BK=a^2$.

[2°] 由前證易知矩形 $ck=b^2$, 故此時只須證明矩形 $BK=c^2$ 足矣.

但直線GF必過E點,何則,因聯EF在$\triangle BFE$, $\triangle BAC$中:



$BE=BC,\quad BF=BA,\quad E\hat{B}F=C\hat{B}A,$

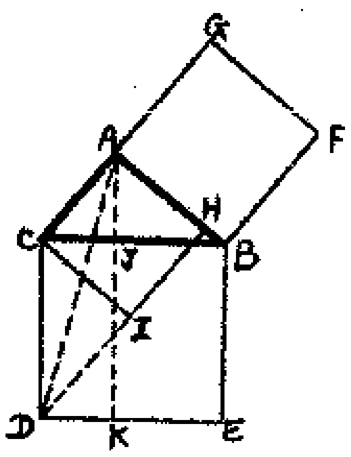
[因此二角之二邊彼此兩兩垂直.]

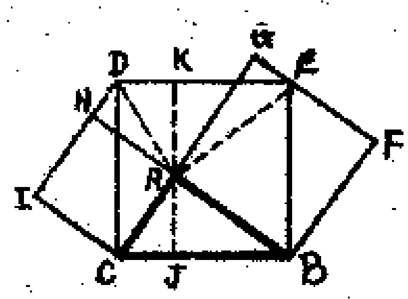
故　$\triangle BFE\equiv\triangle BAC.$

故　$B\hat{F}E=B\hat{A}C\,[=\hat{R}]$,而 GFE 爲一直線.

故　矩形$BK=2\triangle ABE=c^2$.

[3°]　此時之證明,與2°同樣,卽不過在2°之證明中,將c^2與b^2交換而已.[次之左圖]





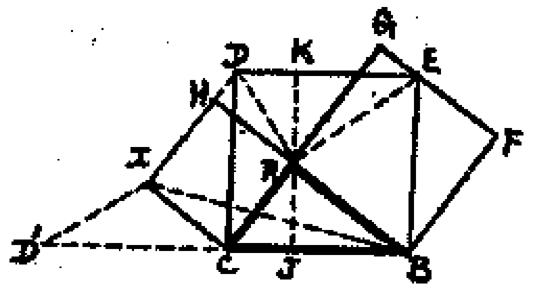
[4°]　於上之右圖中,因HI通過D,GF通過E,[與2°之證明同樣.]故

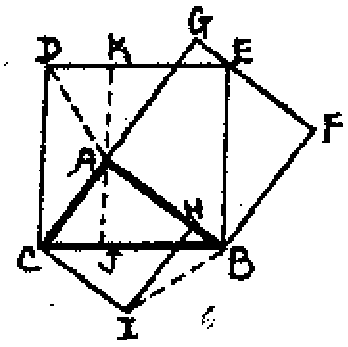
矩形$CK=2\triangle CAD=b^2$.　　矩形$BK=2\triangle BAE=c^2$.

[別證]　在次之左圖中,延長BC至D',令$CD'=CD=CB$,聯結ID',

則以$D'\hat{C}I=D\hat{C}A$[俱爲$I\hat{C}D$之餘角],而夾此二角之兩邊又彼此相等,故$\triangle D'IC\equiv\triangle DAC$. 但$\triangle D'IC=\triangle BCI$[等底等

高］，





故 $\triangle DCA=\triangle ICB$. 而 $\triangle DCA=\frac{1}{2}$矩形 CK, $\triangle ICB=\frac{1}{2}b^2$

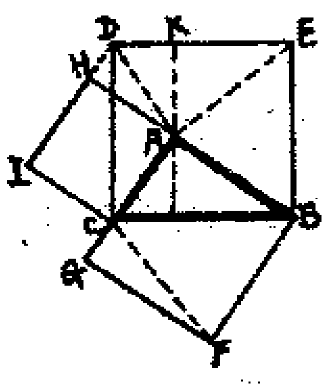
故矩形 $CK=b^2$. 同理矩形 $BK=2\triangle ABE=c^2$.

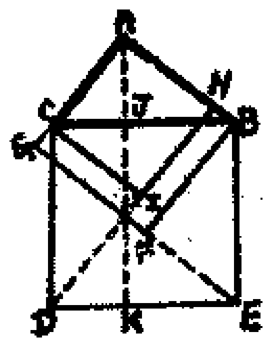
［5°］ 在上之右圖中，$\triangle CAD\equiv\triangle CIB$. 何則，蓋因 $D\hat{C}A=B\hat{C}I$［俱爲 $A\hat{C}B$ 角之餘角］，$CA=CI$, $CD=CB$ 故也.

但 $\triangle DCA=\frac{1}{2}$矩形 CK, $\triangle CIB=\frac{1}{2}b^2$, 故矩形 $CK=b^2$.

又與 4° 同樣，矩形 $BK=c^2$, 易於證明.

［6°］ 在次之左圖中，HI 必過 D 點［與 2° 之證明同樣］，故矩形 $CK=2\triangle CAD=b^2$, 又 $\triangle AEB\equiv\triangle FCB$, 而 $\triangle AEB=\frac{1}{2}$矩形 BK, $\triangle FCB=\frac{1}{2}c^2$, 故矩形 $BK=c^2$.



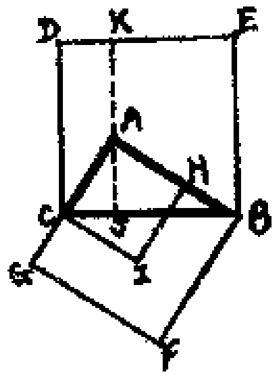


［別證］ 與 4° 之別證同樣，聯結 IB, 且延長 BC 至 D′, 令 $CD'=CD$. 而證明 $\triangle DCA$ 與 $\triangle ICB$ 等積可也.

［7°］ 在上之右圖中,以HI過D,GF過E,［與2°同樣］.故矩形 $CK=b^2$, 矩形 $BK=c^2$, 依2°之證明,容易證得.

［8°］ 此時與5°及6°同樣得證明:

矩形 $CK=b^2$, 矩形 $BK=c^2$.



2. Arabic版之Euclid中所載者.

於右圖中,設FG及IH之交點爲L,聯結AL, 又垂直于DE作AK, 則因

$L\hat{G}A=C\hat{A}B$ ［$=\hat{R}$］, $LG=CA$, $GA=AB$,

故 $\triangle LGA\equiv\triangle ABC$,

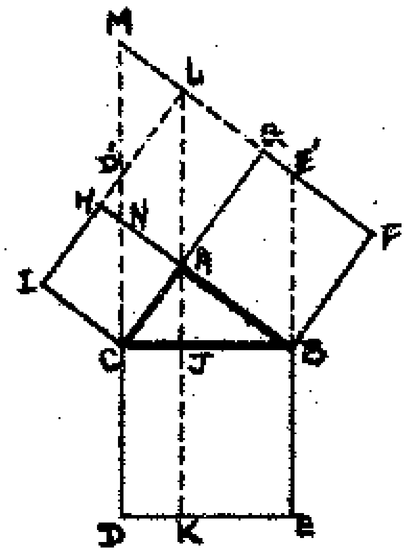
故 $LA=BC$ $G\hat{A}L=A\hat{B}C=C\hat{A}J$,

從而LAJK爲一直線.

次延長DC,令與IH相交於D′,

則 平行四邊形 $ACD'L=b^2$,

蓋以此二形同以AC爲底,而具同高CI故也.



又 平行四邊形 $ACD'L=$ 矩形CK,

蓋此二形具等底 $LA=BC=CD$, 及有同等CJ故也.

故 矩形 $CK=b^2$.

同樣延長EB令交FG於E′,

則 平行四邊形 $ABE'L=c^2$, 及 平行四邊形 $ABE'L=$ 矩形BK,

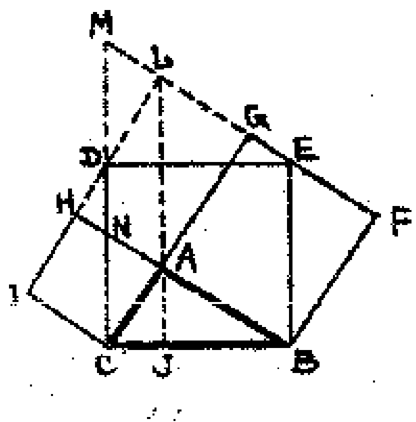
故 矩形 $BK=c^2$.

故 $a^2=b^2+c^2$.

注意 因 $\triangle ID'C\equiv\triangle ABC\equiv\triangle FBE'$, 則 $CD'=BE'=CB$ 甚明. 故矩形 $BCD'E'$, 即作於斜邊上內方之正方形也.是以若將 a^2 與$\triangle ABC$同側作於斜邊上,如次圖,則其證明較前更形單簡.

[別證] 此 J.J.I. Hoffmann 氏之研究也.

於右圖中,延長CD令交FG於M點.



如前 平行四邊形$ACDL=b^2$,

平行四邊形$ANML$

$=$ 平行四邊形$ACDL$

$=b^2$,

同樣 平行四邊形$ABEL=c^2$,

故 平行四邊形$BNME=b^2+c^2$,

但 平行四邊形$BNME=a^2$,

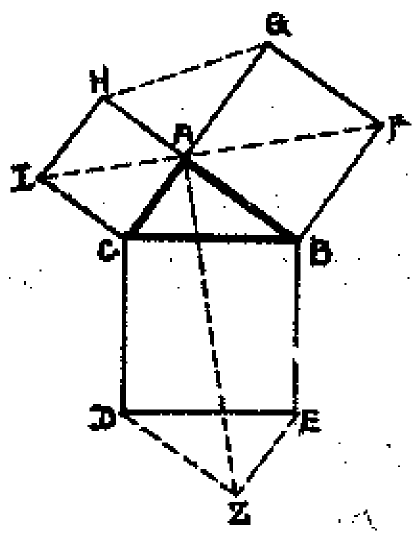
何則,以此二形具等底$MN(=AL=BC)=CD$, 及有同高BC故也.

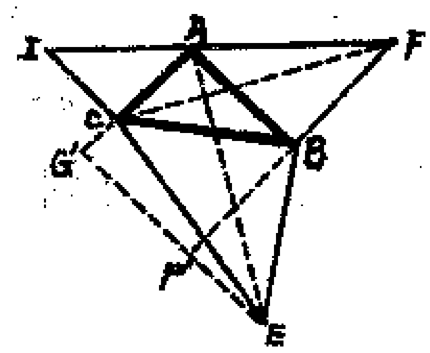
故 $$a^2=b^2+c^2.$$

3. Tempelhoff 及 Terquem 氏之研究.

在次之左圖中,於DE上與 $\triangle ABC$ 位置相反而作一與其相等之直角三角形DZE.

聯結 AZ, HG, AI, AF.





因 $I\hat{A}C+C\hat{A}B+B\hat{A}F=2\angle{}sR$, 故 AI 與 AF 必結爲一直線.

復因 AC=AH, AB=AG, 及 $H\hat{A}G=C\hat{A}B$,

故 $\triangle AHG \equiv \triangle ABC$.

又六邊形 CIHGFB 及 CABEZD 全等積,因是等之六邊形,各由全相等之四個四邊形 IHGF, ACDZ, ICBF,ZEBA 中,每二個所合成者也.

故今由此二六角形中,各減去 $\triangle ABC$ 之二倍,則 $a^2=b^2+c^2$ 甚明.

4. J. J. I. Hoffmann 氏之研究.

在上之右圖中,自 B 垂直於BA作BF,令 BF=BA;自 C 垂直於CA作CI, 令 CI=CA; 又自 B 垂直於BC作BE,令 BE=BC;

則 IAF 必結爲一直線,甚明.

又在兩四邊形 IFBC 及 ABEC 中,各作一對線而分爲兩

個三角形,

則　　$\triangle FBC \equiv \triangle ABE,$

〔因　$F\hat{B}C = A\hat{B}E,$　$BF = BA,$　$BC = BE.$〕

$\triangle ICF = \triangle ACE,$

〔因在等底 $IC = CA$ 之上,而具等高 $BF + CA = G'F' + F'E.$〕

故　　四邊形 IFBC= 四邊形 ABEC.

自此兩邊同時減去$\triangle ABC$,

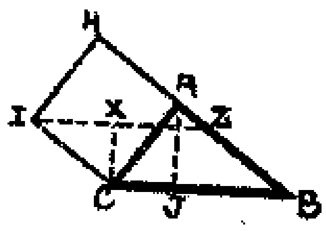
則　　$\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2,$

故　　$a^2 = b^2 + c^2.$

5. Oscar Werner 氏之研究.

平行於BC作IZ,又垂直於BC作CX,與AJ.

則b^2=平行四邊形IZBC$=BC \times CX.$



但　　$\triangle ICX \equiv \triangle CJA,$

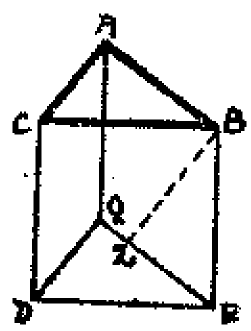
故　　$CX = CJ$,

故　　$b^2 = BC \times CJ.$

同理　　$c^2 = BC \times BJ.$

邊邊相加,故得　$b^2 + c^2 = BC\,(CJ + BJ)$

$= BC \times BC = a^2.$



6. Fabre 氏之研究.

自 A 作AQ,令與DC平行而且相等.

則因二直角三角形 QED, ZBE 全相等,

故平行四邊形ABEQ之高BZ等於其底邊QE.

故　c^2 = 平行四邊形ABEQ.

同理　b^2 = 平行四邊形ACDQ.

故　b^2+c^2 = 五角形CBEQD + △ABC

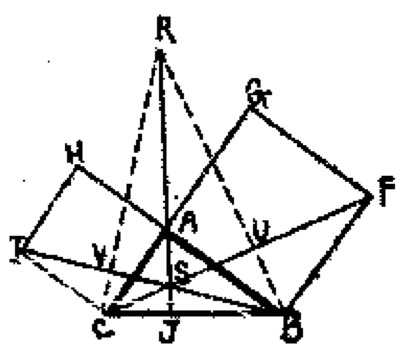
= 五角形CBEQD + △QED,

蓋因△ABC與△QED爲全等故也.

故　b^2+c^2 = 正方形CBED = a^2.

7. Renan 氏之研究

聯結IB及CF,且自 C 作IB之垂線CV,自 B 作CF之垂線BU,又自 A 作CB之垂線AJ,則此等之三垂線必相會於一點.



何則,蓋若令CV與AJ相遇之點爲R,則以 △ICB,△CAR 之三邊彼此互爲垂直,

故此兩三角形爲等角,復以 IC = AC 之故,此兩形必又爲全等甚明.

故　AR = BC.

同理,若令BU與AJ之交點爲R′,則由 △FBC 與△BAR′ 爲全等, AR′ = BC 之故, R與R′ 非相合不可,故也.

故　$\triangle CAR = \triangle ICB = \frac{1}{2}b^2$,

$\triangle BAR = \triangle FBC = \frac{1}{2}c^2$,

故　$\triangle CAR+\triangle BAR=\frac{1}{2}(b^2+c^2)$.

又　$\triangle CAR+\triangle BAR=\frac{1}{2}AR(JC+JB)$

$=\frac{1}{2}BC\times BC=\frac{1}{2}a^2$,

故　$a^2=b^2+c^2$

8. M. Piton-Bressant 氏之研究.

設 Z, Y, X, 各各爲正方形 a^2, b^2, c^2 之中心.

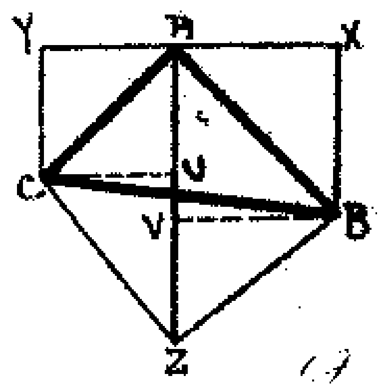
YAX 必爲一直線,何則,因在 A 點此線一方之角之和等於二直角故也.

又 AZ 必平行 BX,何則,因四邊形 ABZC 內接於圓,且 $BZ=CZ$,於是 AZ 爲角 A 之二等分線,

從而　$B\hat{A}Z=45°$,

但　$A\hat{B}X$ 亦等于 45°,於是 $B\hat{A}Z=A\hat{B}X$,

故也.



又　$AZ=BX+CY$,

何則,因垂直於 AZ 作 BV 及 CU,於是得兩正方形 AUCY, AVBX, 及兩全等的直角三角形 VBZ, UZC, 而

$$AZ=UZ+AU=BX+CY$$

故也.

又四邊形 ABZC 及 YXBC 爲等積形,何則,因

四邊形 $ABZC=\frac{1}{2}AZ\times(CU+BV)=\frac{1}{2}AZ\times YX$,

$$\text{四邊形 } YXBC=\frac{1}{2}(BX+CY)\times YX=\frac{1}{2}AZ\times YX,$$

故也.

故由是等之四邊形中,各減去$\triangle ABC$,

則 $\triangle BCZ=\triangle AYC+\triangle AXB,$

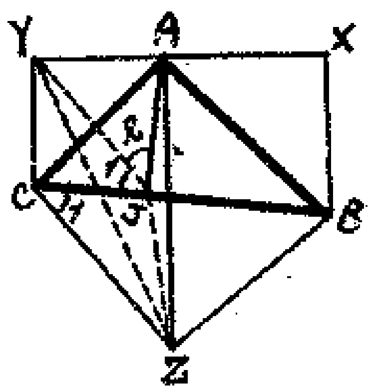
從而 $4\triangle BCZ=4\triangle AYC+4\triangle AXB,$

故 $a^2=b^2+c^2.$

注意: 自上之證明中,得次之直角三角形著名性質,即"聯結直角三角形之直角頂與斜邊上正方形之中心之直線,必等於聯結他之二角頂與其相隣正方形之中心之直線之和".

9. M. Piton-Bressant 氏之研究.

在次圖中,(與前圖殆相同.)作AJ垂直於CB,聯結 YJ, YZ, JZ,



則以 $AZ \parallel CY,$

故 $\triangle AYC=\triangle ZYC$ …………(1)

又以四邊形AYCJ內接於圓,

故 $\hat{J}_1=\hat{J}_2=45^\circ,$

於是 $\hat{J}_1=\hat{C}_1$, 而 $YJ \parallel CZ,$

故 $\triangle ZYC=\triangle CJZ$ …………(2)

由(1)及(2),故 $\triangle AYC=\triangle CJZ.$

同理 $\triangle AXB=\triangle BJZ.$

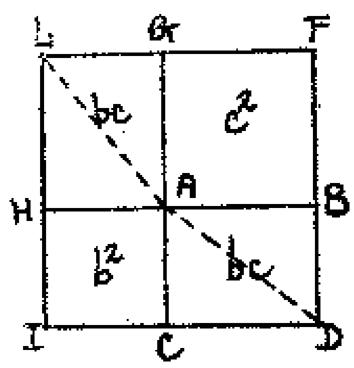
故　　$\triangle AYC+\triangle AXB=\triangle BCZ.$

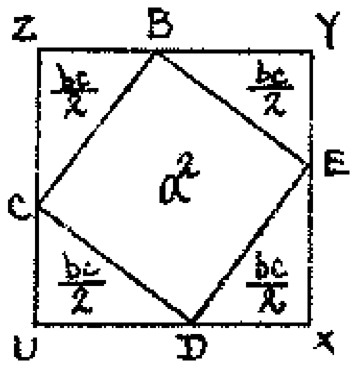
故　　$a^2=b^2+c^2.$

III. 根據圖形部份移動的證明

1. Bretschneider Simpson 兩氏之研究.

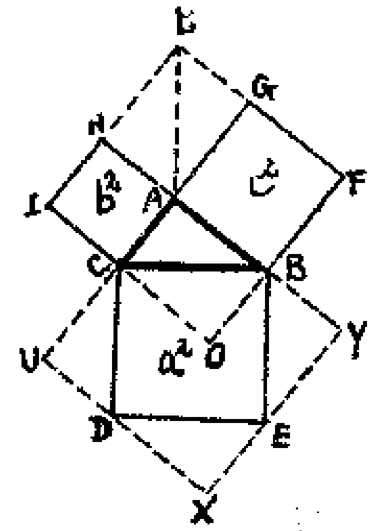
作 b+c 上之正方形在次之左圖中,此圖形由 b^2, c^2 及兩個矩形 bc 即 b^2, c^2, 與四個面積等於 $\frac{1}{2}$ bc 之直角三角形而成.又在右圖中,此圖形爲 a^2, 與四個面積爲 $\frac{1}{2}$bc 之直角三角形而成.然以左圖與右圖全相等,故 $b^2+c^2=a^2$ 甚明.

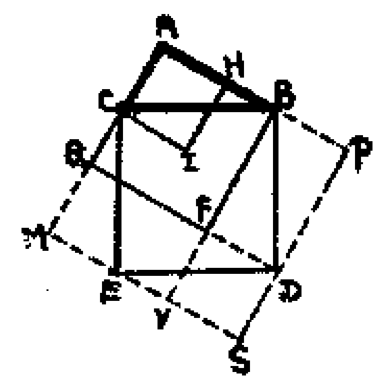




［別證 1］　次之左圖爲 H. Boad, J. Delboeuf 兩氏之研究.卽將前證中之左右兩圖合而爲一者是也.由前證,不難推得.但若倣 II. 1. 可分八類而證明之.今示一例如次.

在右圖中,過 D 平行於AC,過 E 平行於AB引直線,而作一四邊形APSM,則GF必過D點.〔II.1.6°〕





但 FDSV＝CAHI＝b^2,　APSM＝$(b+c)^2$,

故　矩形 GV＝矩形 PF＝2△BDF＝2△ABC,

△CME ≡ △ESD ≡ △DPB ≡ △ABC.

今若由 APSM 中,減去 b^2+c^2,

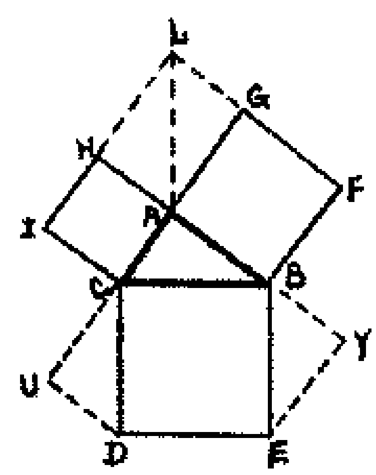
則餘　矩形 GV+矩形 PF＝4△ABC.

又若由 APSM 中,減去 a^2,

則餘　△ABC+△MCE+△SED+△PDB＝4△ABC.

故　$b^2+c^2=a^2$.

[別證 2]　此證見於 London 之 Philosophic transactions,不過圖形之配置,與前較異耳.

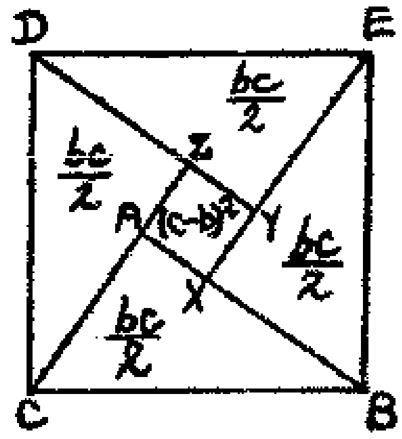


即五邊形 CBFLI 較 b^2+c^2 大 △ABC 之 3 倍,又五邊形 DEYAU 與前形等積,而大於 a^2 者亦爲 △ABC 之 3 倍.

故　$b^2+c^2=a^2$.

但此時若將 b^2, c^2 畫於外方, a^2 畫於

內方,則其證明,殆將更形單簡.



2. Bhaskara氏之研究.

此印度數學家之研究,卽在a^2之內,a邊之上,作四個等於△ABC之三角形.則其中央之四方形,必等于$(c-b)^2$.然若注意於

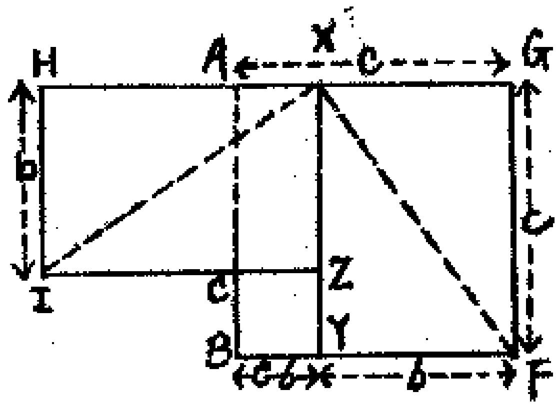
$$(c-b)^2+4\left(\frac{1}{2}bc\right)=b^2+c^2\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

又由圖形　$(c-b)^2+4\left(\frac{1}{2}bc\right)=a^2$,

故　$b^2+c^2=a^2$.

[別證1]　此乃前證(1)之幾何的說明.

在右圖中,令正方形BZ爲$(b-c)^2$ IA爲b^2, BG爲c^2.

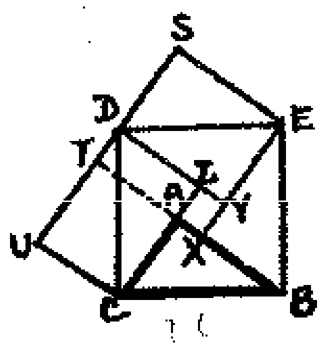


則其全圖形,必由等於$(b-c)^2$之正方形BZ,及二個等於bc之矩形IX與XF而成,卽公式(1)之幾何的表示也.

今若將此二矩形各作一對角線,而分爲四角直角三角形,且將其在外方之二個卽△IHX,△XGF,置於正方形BZ之周圍,則與前證之圖形同樣,全圖形必又爲a^2.

故　$b^2+c^2=a^2$.

[別證2]　Le Blond氏改正的Sauveur氏之研究.



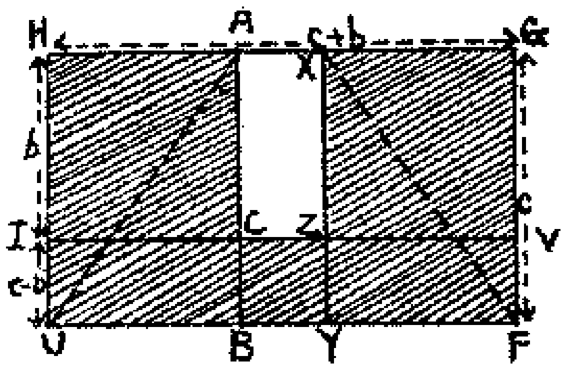
此證殆與前證同樣,卽將前二證之圖,合而爲一者是也.

在正方形CE卽a^2中,作四個等於△ABC之三角形,及正方形AY,卽$(b-c)^2$,復將△ABC置於△UCD之位置,△XEB置於△SED之位置,則UDS必爲一直線.

次將BA延長令其與UD相交於T,則正方形UA,等于b^2,正方形TE,等於c^2.

故由ACUSEX,與BCDE兩圖形等積,則$b^2+c^2=a^2$甚明.

［別證3］　設UV爲以c+b及c−d爲二邊所包之矩形,UG爲以c+b及c爲二邊所包之矩形.



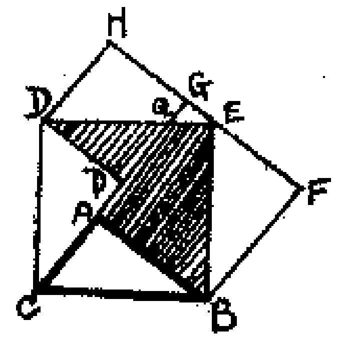
今於矩形UV中,加等於b^2之二正方形IA及ZG,則得圖形中之陰影部份,而此形等於b^2+c^2甚明.何則,若取矩形UC,而置於CX上,則得二正方形IA及BG,其一等於b^2,他一等於c^2故也.〔卽公式$(c+b)(c-b)+2b^2=b^2+c^2$之幾何的表示〕.

又若在二矩形UA,YG中,各作一對角線,分爲四個直角三角形,依2之圖而置於正方形BZ之周圍,則得a^2.故等於b^2+c^2之陰影部份,得變爲正方形a^2.

故　　　　$b^2+c^2=a^2$.

3. A. Marre, Rouche, 及 Comberousse 氏之研究.

在BC及AB上,各作正方形CE及AF,則E必在GF之上.[II. 1. 4°]



自D平行於GF作DP,平行於AG作DH,並令其與FG之延長線相交於H.

則DHGP必爲邊b上之正方形,何則,因兩三角形PCD,HED,皆全等於△ABC,而DP=DH=b故也.

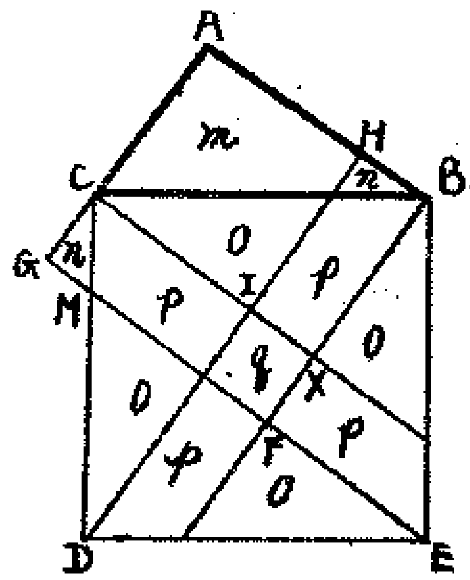
今若取兩三角形ABC及PCD,置於△HED,△FBE之位置,則是等三角形與有陰影五角形APDEB,爲b^2與c^2之和甚明.

故 $$b^2+c^2=a^2.$$

4. P. J. N. Reichenberger 氏之研究.

在△ABC中,將a^2作於外方,b^2與c^2作於內方,並將正方形b^2, c^2之相交於I,F之邊,延長之,令與a^2之邊相交,則HI必過D, GF必過E. [II. 1. 7°]

由右圖之記法,



$$a^2=4o+4p+q \cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

但 $b^2+c^2=2m+2o+2n+2p+q$,

而以 $\triangle ABC=m+n$, $\triangle CBX=o+p$,

$$\triangle ABC\equiv\triangle CBX,$$

故 $$2m+2n=2o+2p,$$

故 $$b^2+c^2=4o+4p+q\cdots(2).$$

由(1)及(2),故 $b^2+c^2=a^2$.

[別證1] 此亦前人之研究也.與前圖同樣作正方形,惟直線之畫法,稍異其趣.

卽在次之左圖中,

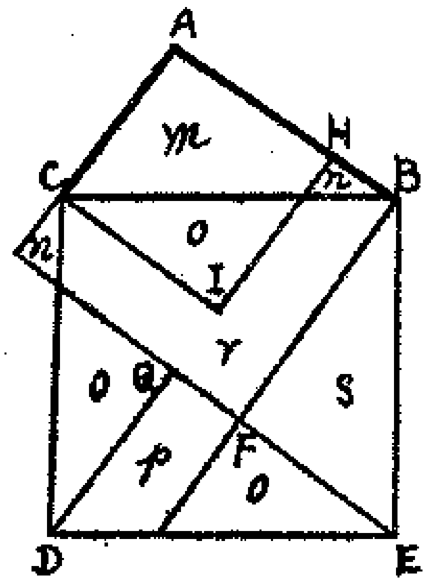
$$a^2=p+3o+r+s,$$

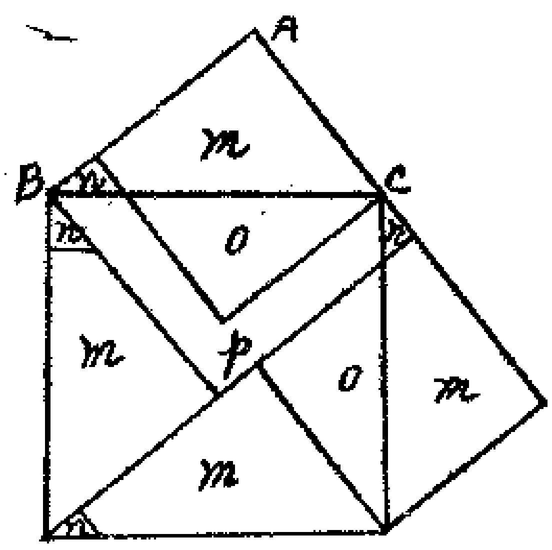
$$b^2+c^2=2m+2n+2o+r.$$

然以三個三角形ABC, FBE, QED全相等,

故 $m+n=s=p+o.$

故 $b^2+c^2=(s)+(p+o)+(2o+r)=a^2.$





[別證2] 在上之右圖中,

$$b^2=m+o, \qquad c^2=m+2n+o+p,$$

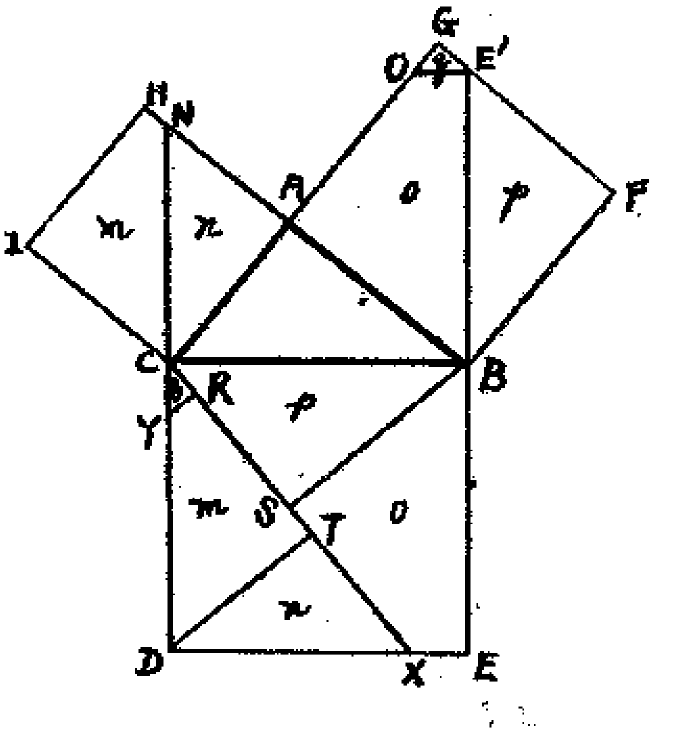
故 $b^2+c^2=2m+2n+2o+p.$

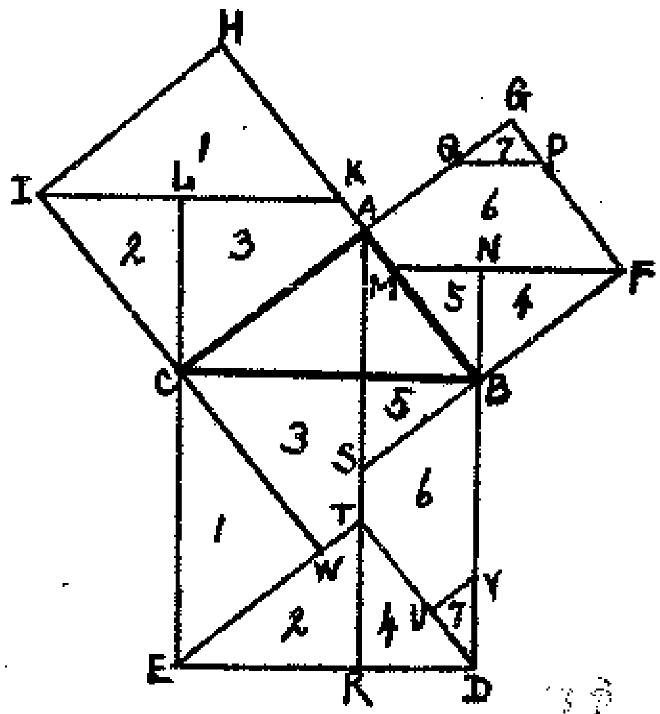
又 $a^2=2m+2n+2o+p.$

故 $b^2+c^2=a.$

5. 依 M. de C. G. F. 改正之 Ozaman 氏與 J. Wipper 氏之研究.

在次之左圖中,延長EB,令與GF相交於E',延長 DC, 令與AH 相交於N,又平行於BC引 E'O. 於是 b^2, c^2, 被分爲 m n, o, p, q,五部分,而此五部分,又恰得變爲 a^2. 何則,因取DX＝DY＝CN,聯結CX, 自 Y,D,B 作CX之垂線 YR, DT, BS,則 a^2 亦恰被分爲m, n, o, p, q,五部分故也.



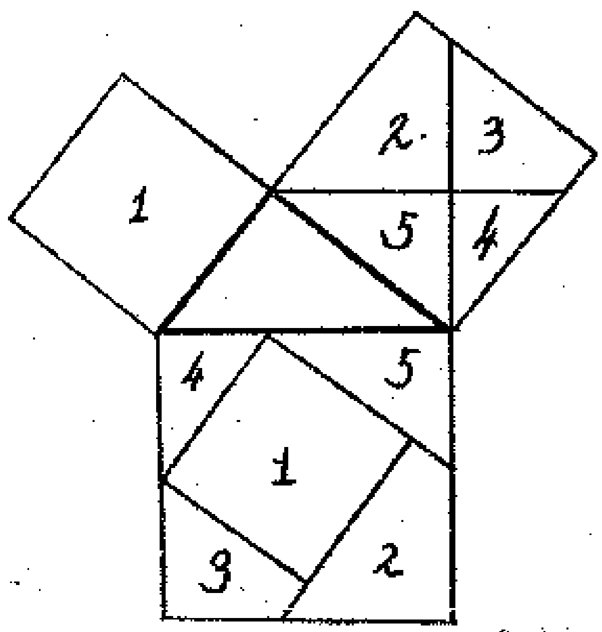


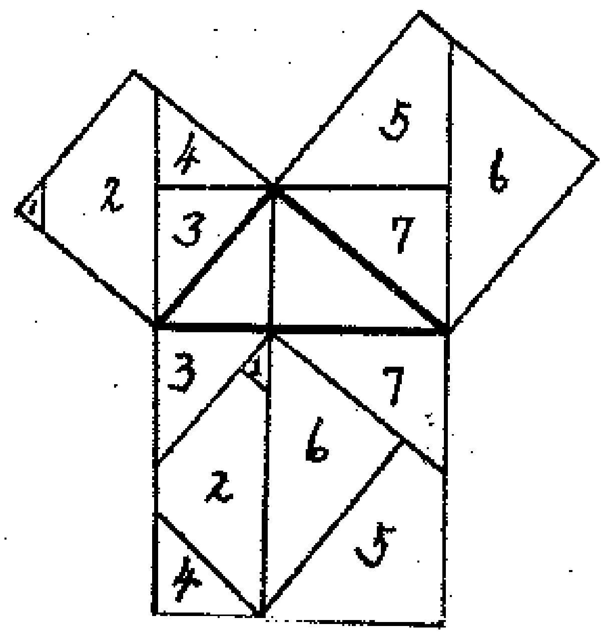
6. E. Littrow 氏之研究.

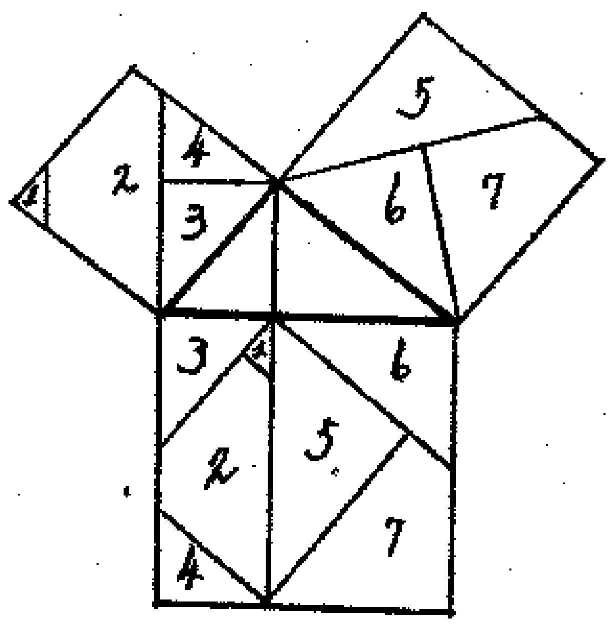
在上之右圖中,作IK平行於CB,令與EC之延長線相交於L,則 b^2 被分爲 1, 2, 3 三部分,次平行於BC作FM,令與DB之延長線相交於 N; 取FP等於BM,平行於FM作PQ,則 c^2 被分爲4, 5, 6, 7, 四部分.末作AR垂直 ED; ET 平行於CA,且令其與AR相交於 T; 聯結TD;延長 IC 交ET 於 W;取VD等於PQ,作UV垂

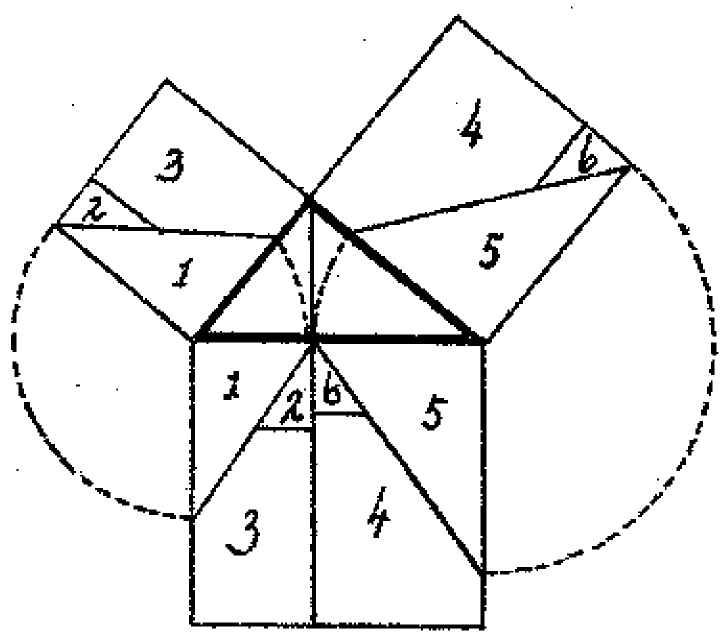
直於DT,則 a^2 亦被分爲 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 七部分.而以同數字所記之圖形爲全相等,易於證明.

注意: 次之圖形亦與前同類者也,讀者可自證之.



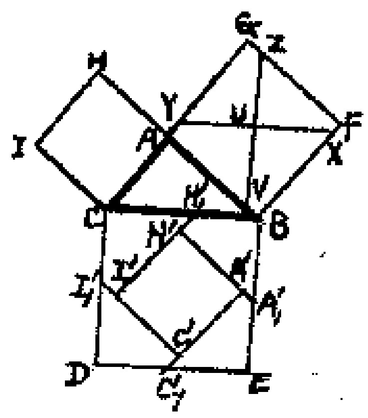






7. Périgal 及 Wipper 氏之研究.

設 U 爲正方形 c^2 之中心,過 U 作XY平行於 BC, ZV 垂直



於BC,而分 c^2 爲四個全等的四邊形,此等四邊形各邊UZ, UX, UV及UY,皆等於 $\frac{1}{2}$BC. 何則,因CYXB爲平行四邊形,YX＝CB,而UY $=\frac{1}{2}YX=\frac{1}{2}BC$, 故也.

但 H_1', A_1', C_1', I_1,爲正方形 a^2 各邊之中點,c^2 中之全等的四個四邊形,得置於 a^2 中如右圖所示之位置.

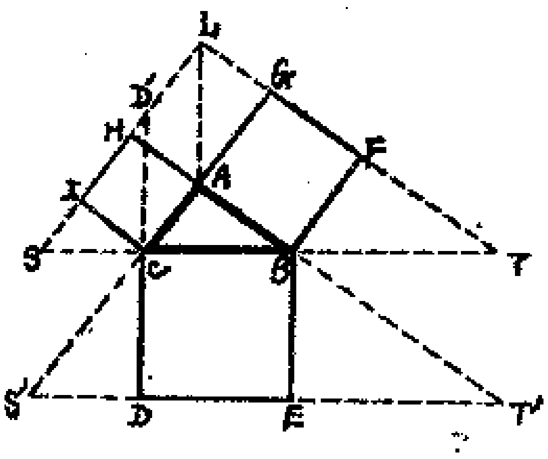
故此時只須證矩形 I′H′A′C′, 與正方形IHAC卽 b^2 相等,足矣.

然此矩形之各邊與 b^2 之邊相等,例如:

$$H'A'=H'A'_1-A'A'_1=BX-AY=CY-AY=CA,$$

故I′H′A′C′ 等於 b^2, 甚明.

8.　J. Wipper 氏之研究.



作兩個直角三角形LTS及AT′S′則LS＝AS′,且此二直角三角形爲全相等.

何則,因若聯結LA,並延長DC,令其與LS相交於D′,則依II, 2, ACD′L必爲一平行四邊形,而　D′L＝CA.

又以△ID′C＝△ABC, 於是 CD′ = CB = CD, 則三角形CD′S, DCS′ 爲全相等,而　D′S＝CS′.

故　$LS = LD' + D'S = AC + CS', = AS'$，故也.

今由$\triangle LTS$中減去b^2及c^2,則得

$$\triangle ICS + \triangle HLA + \triangle GLA + \triangle FBT + \triangle ABC \cdots\cdots\cdots\cdots (1),$$

次由$\triangle AT'S'$中減去a^2,則得

$$\triangle DCS' + \triangle EBT' + \triangle ABC \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2),$$

但　$\triangle ICS + \triangle HLA = \triangle CD'S = \triangle CDS'$,

同樣　$\triangle GLA + \triangle FBT = \triangle EBT'$,

故(1)及(2)兩式相等,

故　$$b^2 + c^2 = a^2.$$

9.　M. Rojot 氏之研究.

如圖作a^2於$\triangle ABC$之外方,b^2, c^2於內方,則HI必過D,GF必過E.〔II, 1. 7°〕

先以c^2爲由有陰影四邊形JBFM及$\triangle AGM$,$\triangle AJB$所合成,若將四邊形JBFM不動,而將$\triangle AGM$置於與其全等的$\triangle BFE$之上,$\triangle AJB$置於其與之全等的$\triangle MKE$之上,則此時之圖形,變爲矩形BK.

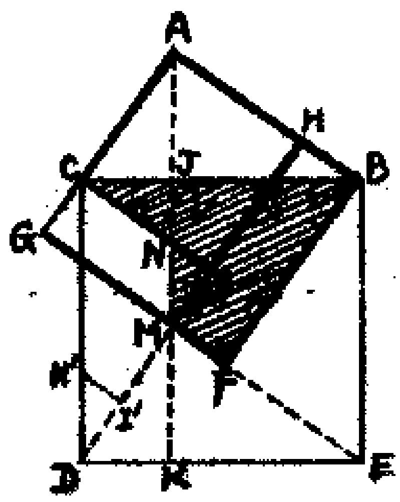
故　$c^2 =$ 矩形BK.

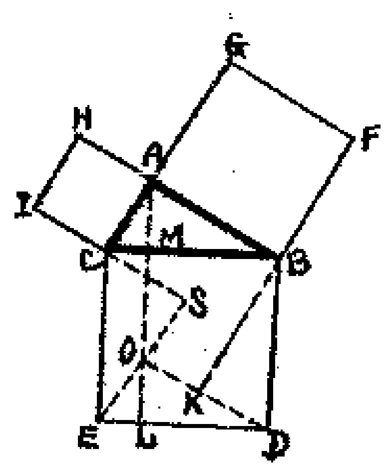
又以b^2爲由有陰影之$\triangle CJN$及$\triangle AJC$四邊形AHIN所合成,若將$\triangle CJN$之位置不動,而將$\triangle AJC$置於與其全等之$\triangle MKD$之上,四邊形AHIN置於與之全等之四邊形CII'N'之上,且將其一部份$\triangle NIM$置於與其全等之$\triangle N'I'D$之上,則此時之圖

化形,變爲矩形CK.

故 $b^2 =$ 矩形CK.

故 $b^2 + c^2 = a^2$.





[別證] 在上之右圖中,作DO平行於AB,令其與自A所作DE之垂線AL相交於O;復延長FB交DO於K;又聯結EO延長之交IC之延長線於S.

則由△KBD, △ABC爲全相等,

故 BK = BA = BF,

故 平行四邊形DOAB = 正方形ABFG $= c^2$,

故 $c^2 =$ 矩形BDLM.

同樣又由△SEC, △ABC爲全相等,

故 CS = CA = CI,

故 平行四邊形EOAC = 正方形ACIH $= b^2$,

故 $b^2 =$ 矩形CELM.

故 $b^2 + c^2 = a^2$.

(未 完)

光電池之選擇

袁 至 純

當光射在某種金屬上時,能使之發射電子,正與熱伊洪整流器〔Thermionic valve〕之絲被熱而發射電子相同.其電子發射率比例于光之總量.如果被照的金屬爲電輪道之陰極〔cathode〕,而鄰近導體爲陽極〔anode〕,則流過此輪道之電流隨光之强度而變化,正如電流流過熱伊洪整流器之陽極絲的輪道一樣.

電子在光影響之下而發射,已知其爲光電效應.由發射電子所生的光電流是非常之小,比在熱伊洪整流器裏所流的還要小得多.在模範電池〔typical cell〕,以 3 cm 直徑的窗戶,在 20 cm.的距離,而曝于100瓦特〔watt〕的電燈光下,大約有百萬分之一安培〔1 microampere〕.于是放大光電流之方法常爲人所注意.在電池內放大電流的方法,其與光電效應的關聯非常密切.當電子以相當的速度穿過氣體時,把偶然碰着的分子擊破了,並從那裏分離出電子來;這些電子同起初的電子混同進行.此歷程稱爲因衝撞而伊洪化.在光電池之陰極與陽極間的空間滿裝以氣體,並用比較大的電場,則達到陽極的電子之數目,能使比離開陰極的

電子數目大得多;而起初由于電子從陰極發射的電流也特別地放大.這樣放大電流的電池,叫做充滿氣體的電池,以別于不放大的真空電池.

電池之價值,常以指定的光量投射于其上所得到的放大電流而判別之.但下面三個因子,于決定電流常是重要的:

1. 落在陰極上的投射光之比例.
2. 原光電流與投射光之比率.
3. 由所充的氣體之放大.

但最好的方法,是試驗現時所通用各種樣式的電池,並研究它們的設計,如何受這些以及旁的因子所影響.

此處選出常見的四種光電池以說明所包括的主要原理.下邊各圖卽示明它們裏邊的構造.

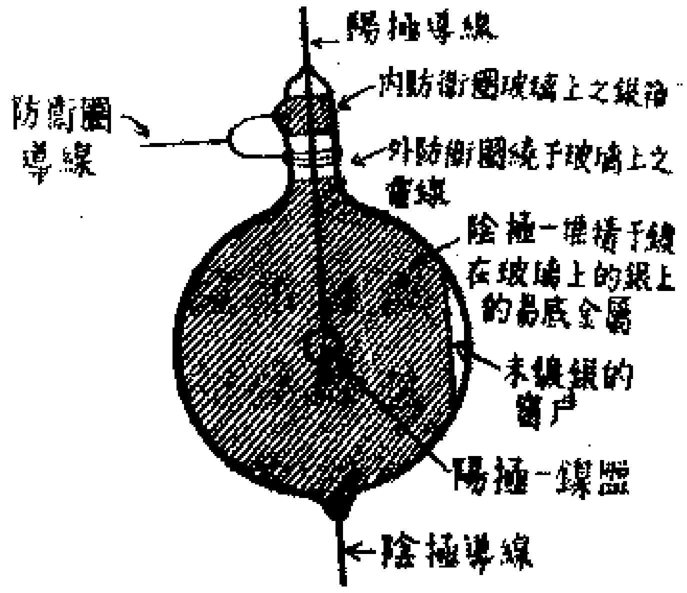


圖1.　A式.

上面三個因子之第二個,是由于陰極的材料而決定.當

電池用于可見的光時(與紫外光區別),于這類材料之選擇是非常有限的;因爲知道僅有七種金屬對于這樣的光是容易感受的.卽鈉〔sodium〕,鉀〔potassium〕,鉚〔rubidium〕,鎧〔caesium〕,鋰〔lithium〕,鎴〔strontium〕,鋇〔barium〕.所有這些金屬之化學的反應甚强,且在空氣中養化甚速.它們不只必須包封在閉密器裏而且必須在閉密器裏調製;我們不能

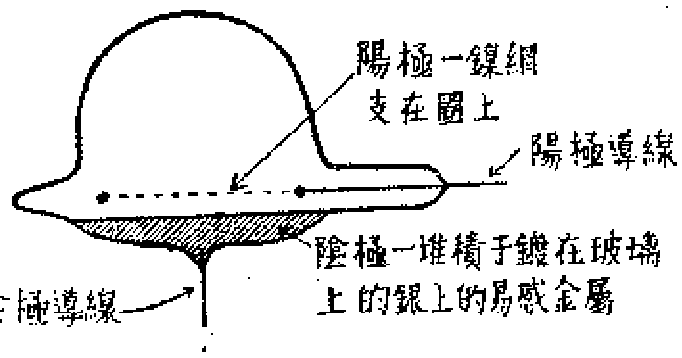


圖 2. B 式

夠在空氣中製造陰極與在空氣中把它引入電池.調製之最便利的方法,爲用任何材料之潔淨的面,在密閉器裏,輸入該材料的蒸汽,並把它凝結在所要的地方.這些金屬之前四種,能用玻璃器蒸取,而後三種則不能.這就是很少應用它們的理由;關于它們的光電屬性的事實很少可用.但它們不曾被用的真理由是調製的困難.

蒸溜之可能性影響于電池之設計,有如金屬之選擇一樣.金屬最容易凝結在器壁上,而陰極通常爲金屬在該壁上之薄層(如A式與B式).因金屬凝結之滴,易于互相接觸而引于外,故該層通常堆積于銀薄膜之上,而該銀薄膜又

化學地堆積于玻璃上.但陰極之為外壁的一部並非必須的;由于小心的應付,能將金屬凝結于離壁而立之板上,同時可小心加熱將其從壁中逐出.(如C式與D式).此點須有較精密的研究.

雖則金屬之大部分能從器壁逐出,且有窗戶讓光射入,而它的薄膜常留着.此薄膜是光電地易于感受,但因它非

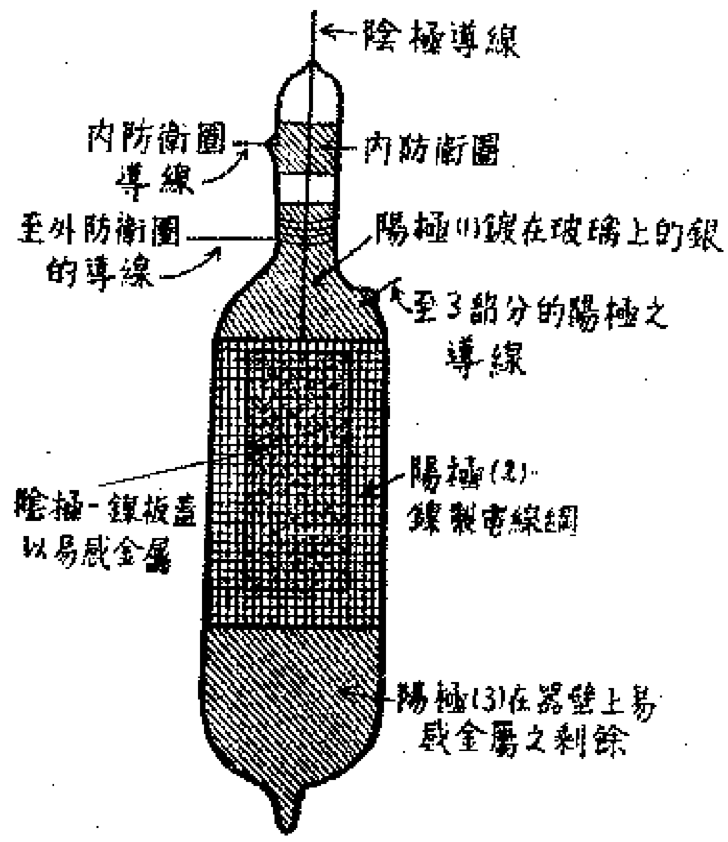


圖3. C式

常薄並堆積在絕緣面上,故具有甚高的阻力,而非良好地連結于引出外面的導線.在A, B, E, F式裏,其器壁為陰極,其蓋于窗戶的薄膜全部被曝于光中,並且是一部而非全部與陰極連結;所以它貢獻于全光電流者極不規則.但在

C 式與 D 式,曝于光的薄膜之一部,其連結于陽極較好于陰極,並且于電流無所貢獻.僅部分地連結于陰極的玻璃壁之一部,爲形成陰極架之絕緣體的小面積,而此部分能防禦光之侵入.C 式與 D 式其作用所以比 A 式與 B 式稍有規則一點.

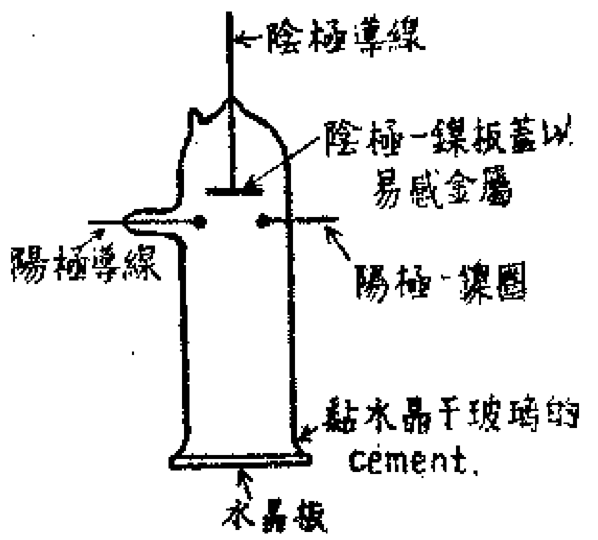


圖 4.　D 式

但金屬薄膜之存于電池它部而不在特製的陰極上,有兩個旁的或較重要的效應.第一是當電池反連結時常給與若干光電流;在特製之陽極的電極上將常有若干有作用的金屬,而且,如果將此電極作爲陰極,則當它爲光所照時將有光電流流動.如果這陽極面積較陰極甚小,如在除 C 以外之所有各式樣,則反電流必小;但它在有些應用上是很重要的.第二效應係由于薄膜之傳導性;因爲電可以亘過使電極互相絕緣的玻璃表面而逃逸.此種煩擾在些

電池比旁的電池是較嚴重的;有一部分的于製造時將防衞圈嵌入之,此圈爲堆積在玻璃上的銀圈,且連結于地,于是從一極逃至它極的漏電被阻止了,但不會逃于地中.

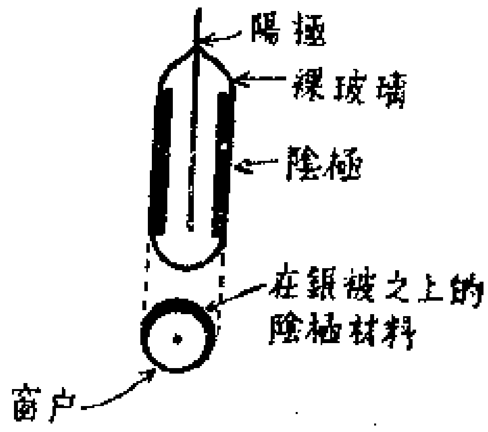


圖 5. E 式.

現在再講第一因子,如果所用的光爲拓散的光,如日光〔day light〕,則落在電池陰極上的光之總量是簡單比例于其面積或其窗戶之面積,如果這面積較陰極的小,增加光量之惟一的方法,只有把電池做的很大.具有面積 500 sq. cm.之陰極的電池,曾用以紀錄日光,及應用于遠視法〔television〕, 此時被遠視的物體爲運動的光點所照着.但以透鏡把光集中于電池之上的時候更多;于是陰極與窗戶之面積不甚重要,只要光束〔beam〕之全部能夠進去就夠了.這是非常重要之點;因爲是光電池與硒〔selenium〕電池間之一個差異.在硒電池其效應有賴于光照之平均强度,但在光電池則僅賴于光之全量.只要光達到陰極,無論光如何分配于陰極在實際上沒有關係.玻璃壁上之光學的缺

點,只要它們不會使從陰極所發之光之任何部分傾斜就沒有關係;如果它們僅把光于陰極上拓展出去則利多而弊少.

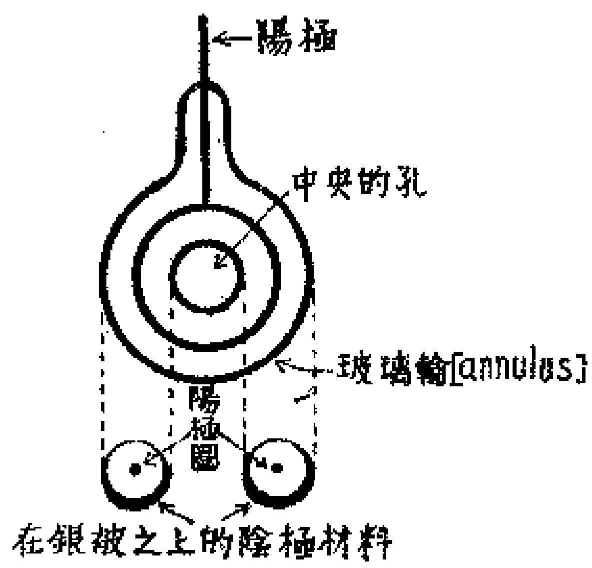


圖 6. F 式

旁一方面,自然,在窗戶與陰極中間必須沒有任何不透明的物體;而且在特別情形裏陽極必須不會干涉,或,如果干涉,必須用細網以吸收光之甚小部分.據此則 A 式之板一般地當用一圈;但以邊向光之板還是好用的.又,如果用對于玻璃爲不透明的紫外光,則須預備一水晶窗戶以便光能夠射入 (D 式).

所有這些都是顯然的.從此觀點有趣味的僅有兩種構造,爲 A 式與 F 式.陰極可將投射于其上之光反射出去.除 A 式之外在一切電池,此反射光離去該電池而不復發生什麽效果;但在此種式樣,如果窗戶之面積比較形成陰極的壁之全面積爲甚小時,它的大部分再落于陰極之別部

分復可以發生光電效果.這所包含的原理與研究熱放射裏所用的作爲"黑體"〔black-bodies〕的相同,而此種式樣之電池,有時叫做黑體電池.無論如何,此種式樣的電池沒有甚麽利益,除對于特殊目的之外沒有用它.F式爲關于電報攝影〔picture-telegraphy〕而設計的;光之酷烈點穿過中央孔集中于影片上,而從它拓散地反射之光爲輪體〔annulus〕所收去.

在真空電池裏電極之形狀及大小于已定的光電發射所產生的電流沒有關係;因爲如果應用夠强的電場,所有發射的陰電子都能夠引到陽極.但在充滿氣體的電池,其放大由于衝撞的伊洪化所產生,那末形狀及大小均甚重要.這就是說在電場比較地均匀的電池有一些利益超過那些電場在陽極鄰近較强于陰極鄰近的電池.除非陽極比較陰極大得多.——一個在光學方面顯出困難的布置——這兩個電極將幾乎同樣大小與近于平行平面.從此觀點,B式的利益超過A式,同時在構造上有偉大功績的E式居于中間.又甚小的電池雖則對于許多目的比較方便但却是不利益的;例如它們適可放入"有聲影片〔talking films〕所用的電影幻燈之小小空間裏.電池之大小與形狀,在可得的放大上之效果不曾研究的很完全,而所立的這樣的結論不常應用.

市場上常看見的電池,大多數是充滿氣體的電池,而對

于許多重要用法,沒有旁的値得研究,但不能固執那真空電池除靈敏度之外有各種利益超過充滿氣體電池.如果可能,由增加投射光之量,從真空電池得到所希望的電流,或由改良利用電流的方法,從真空電池的出量〔output〕能夠適用于所做的工作,則採用充滿氣體電池沒有意思.真空電池爲精密而優美地便于處理的器械,充滿氣體電池必須巧妙的處理,而且永沒有完全可靠的.

由陰極材料所決定的發射,是這裏主要的研究.因爲于可見的分光景,大部分的工作,鉀電池或薄膜電池之一是最好的.

但還有些次要的研究.薄膜陰極在它們經長時期的發射比厚層的一定較能不變,所以對于高度地精密的工作爲佳.在真空電池裏厚層之緩慢與不規則的變化大概由于溫度的變化,這變化使層面蒸溜從一部分滴到它部分;雖則溫度于發射上沒有直接的影響,但它有間接的影響,所以溫度的變化是務須避免的.

在選擇電池之形式.不爲壁之部分的陰極是非常有利益的,且沒有任何不利益來抵消,兩電極間盡可能地均勻的場可生較低的飽和電壓.球狀的式樣對于這兩種理由是不適合的,而且從黑體原理之應用,像不會獲得任何重要的事件.

因電流很小,所以絕緣體在真空電池裏是非常重要的.

内防衛圈是合式的.但在鉀或鈉電池非絕對必須的.鎧及鋤是非常適合于在玻璃上形成傳導的薄膜;電池充滿以這些金屬當常有防衛圈,它無論如何不會阻止"絕緣的"電極與地球間的漏電.厚層的鎧除對于非常特別的目的之外當做陰極是沒有利益的;縱有利益,此缺點亦必甚爲重要.用鎧的薄膜當做陰極的電池此缺點較不顯著;對于將在玻璃上成薄膜的金屬之剩餘被移去了.自然,外部的絕緣是相等地重要的;外防衛圈之形成,爲以電線捲于電池兩電極之間.

在充滿氣體電池,靈敏度由"有效發射"〔effective emission〕所決定,而有效發射爲發射與放大之積.我們第一必須注意這兩個因子不是完全獨立的.

以已知形式的電極,在已知壓力之下,浸入已知氣體,在一切低電壓,無論陰極是甚麼材料,放大是相同的;但赤熱位勢與材料有關;赤熱位勢大則極大的放大亦大.易感受的鉀給與赤熱位勢較高于不易感受的鉀,而兩者的赤熱位勢較高于鎧.這三種材料中間極大的放大,對于白光的以發射而增加,有效發射之差異仍大過那些如下表所示的.但這規則是不普遍的;鈉之赤熱位勢高于鉀,于是此類金屬對于紫外光甚爲適用.

充滿氣體的燈

(T=2650°K.)

鈉〔sodium〕	5.0×10^{-7}amp lumen	
鉀〔potassium〕	10.	”
銣〔rubidium〕	4.4	”
鎧〔caesium〕	1.7	”
鉀在養化銅上〔potassium on copper oxide〕	8	”
鎧在養化銀上〔caesium on silver oxide〕	12.5	”

還須記着,充滿氣體電池的赤熱放電可變化其發射;在有些電池赤熱放電是會增加發射的;此效果好像用易感受的鉀大于用任何旁的陰極.旁一方面,薄膜陰極赤熱放電通常是會損壞的,或任何大電流穿過平常所充滿的氣體(氦〔helium〕,氖〔neon〕,氬〔argon〕)的確會壞;如果它們用這樣的氣體,必須保持低度的放大以避免損壞.鉀在銅陰極上能用氫氣以充滿之,而經過它的放電沒有損壞;但此是不便利的,因氫氣連續地被吸收,而要用鈀〔palladium〕管重新充滿之.

在決定有效發射的兩因子中間這些互相作用的結果,係對于所有旁的以改正易感受的鉀陰極之地位.如果所用的是白光,則在充滿氣體電池裏比一切旁的是更好的了;但,如上所述,新的進展可以變化這位置.在紫外光,自從知道它以來,各種不同的陰極之有效發射與其實在發射

的階次相同.

其次,我們要研究電池式樣對于放大的影響.此事在各種式樣間一定有很大的差異.但下邊的敍述是重要的,卽極大的放大僅在小心控制的條件之下可以得到,與不須過度放大時它們能夠以任何合理的形式得到.製造者一般地不要求過于10倍的放大;而在此點他們是很聰明的;因爲,他們的電池雖則真實地成功很多,而更奢望的要求將迷惑了所有巧妙的用者.如果他們的要求只限于此,則無論何種式樣都可弄的很好.

市面上最多數的電池,其式樣在平面的〔plane〕(B式)與球形的〔spherical〕(A式)兩極端之間,而行爲亦然.因兩電極間的位勢所生的場,較大球式的更爲均勻而較平面式的更不均勻.其表性曲線較峻峭于那些平面式而較平坦于球式.平面式除對于甚小的光當黑暗電流〔dark current〕重要時之外是最好的;但大多數旁的製造者不採用它,其中必有堅强的理由.于不過大的光照用間斷電流時,它們有重要的利益.大小的差異一如式樣之甚可注意.好電池,在球式的泡有10與3 cm.的直徑,而在筒狀的泡,其長之變化從15到3 cm,直徑從4到1 cm.較小的電池在我們的經驗上是不滿意的,而且其最小的好像曾經折本過.較大的電池僅適用于特殊目的,而其面積通常是不均勻的.

赤熱位勢與約束位勢,因所裝的氣體及壓力的不同,而

有可注意的變化.赤熱位勢于黑暗裏通常在300與120 Volts之間,而約束位勢在200與100之間.以便利之故,常採用低位勢;但于高度的放大,長程之直線回答,以及低臨界限度,則以高位勢爲適用.位勢一般地在球式的較高于在平面式的.

下邊的一羣試驗,于我們所討論的的解釋之下,在大多數應用中可判別電池之性質.

1. 當電池曝于已知的光,以16 Volts的位勢應用于其上時,測量其電流.此爲發射之指示.

2. 在通過赤熱放電之後,再做試驗(1),只要知道此電池用此手續不會損壞就行.

3. 用 0.001, 0.01, 0.1, 1 lumen 之四個常數光,以決定電壓之特性曲線.

4. 試驗絕緣與黑暗電流.

近年來光電池之所以如此發展者,一方面因應用于光度之測定,它方面,因新的應用,如有聲電影,遠處照相等之多量的需要.這類光電變換之應用,尙有遠視法,光電話及Schäffer 的光電測量笛.于光電變換的應用之外尙有許多新的應用,如光電繼音器,化學歷程之處理機關或記載機關.較新的光電池之形式,一部分根據內光電效應,卽導電性變化,旁一部分,根據外光電效應,卽表面被照而走出電子.前者如硒電池,以其惰性太大,不利于用;所以後者之發

展較爲迅速而普遍,而其式樣日新月異,除 Alkali 金屬光電池外,尚有新式的半導版光電池與感光探觸器等.總之光電池與日常生活之關係日漸密切,研究者日多,而其應用範圍之拓張,大有一日千里之勢.這篇小文不過述其常用的數種,或可作爲選擇時之參考耳

煤的研究的新趨勢

葛毓桂

在昔研究煤者大都注重他的化學方面的分析,例如近似分析(Proximate Analysis)定他的灰分,水分及揮發物等,元素的分析 (Ultimate Analysis) 定他的炭,氫,氮等原素之量,屬於物理方面的探討,乃是近一二十年的事,在這個時期內,不但在物理方法,有顯著的成效,在化學方面也另闢有新途徑.

歐戰以前世界各國,皆傾心於基本問題的研究,原料問題尤特別注意.煤是最重要的一種原料,他的性質及利用有特殊成績,關於他的論著幾不可數計.本篇以綜合方法敘述他的新趨勢.

煤係由植物遺骸(plant-remains)堆積而成,乃是現在已經公認的.且植物遺骸是搆成煤的主要品.動物遺骸(Animal-remains)煤中幾全無發現.至礦物混於煤中的可有兩個來源,一個是先天的與生俱來的.(凡植物大半皆含有礦物質,多少不一).二是後天的,偶然的外界侵入的,然皆不關重輕.

任何植物,不論大小,巨細,皆是種種不同,易於分裂的東

西構成的,在他的腐爛過程中,必有各式不同的變化.植物的重要部分,是幹根葉皮種子,及胞子等.煤紀植物(Coal-age plant) 胞子多而種子少,現在的下等植物如蘚苔羊齒均有這種胞子,木材質(Woody parts)及其他纖維的結構部分組成植物的間架的,由經驗知道是較易腐爛的.至枝幹葉等的防水外皮都有抵抗腐爛性質.

植物是煤的本源已經多方證明,用肉眼觀察煤床雖然很少發現顯明的植物遺骸.但是往往自煤層的頂上或底下尋出化石樹幹.這種化石足以充分表示樹的構造,在泥土之下,亦往往找到保留的樹根,仍然留在他生長的地位,有時植物之枝莖等深深印入片岩(Shale)之內,如第一圖.

樹梗印入片岩 ×¼
第一圖

瀝青(lignites)以性質論介乎泥煤(Peat)與煤之間,並不像黑色煙煤(Bituminous coal)變化的那樣利害,所以恆表現構成他的植物質之構造.整塊樹身變化做瀝青的也屢找得證據.這種情形,煙煤是少有的,但是也說不定,能用肉眼看出他的木質結構來.別的遺骸尤其有抗腐性的胞子(Spores)之皮自煙煤裏用肉眼尋找出來的.

I 煤的顯微鏡的考查

切實觀察煤裏植物殘跡 (plant-débris) 的性質,必須借助於顯微鏡.普通的方法係把煤製成透明薄片置顯微鏡下觀察之.薄片顏色發紅或橘黃不等.由他的不同的顏色及不同的含量可分辨構成煤的各種物質,如第九,第十,第十一各圖.(圖見後頁)薄片裏倘有較大的植物組織,單用肉眼亦看得見.若利用顯微鏡幾乎任何煤的透明薄片都能發見各式各樣的植物遺體.顯著的能窺全豹,一望而知,細小而破碎的則不易定奪屬於何種植物,但有經驗的人,也能辨別屬於何種植物,及植物之何部分.

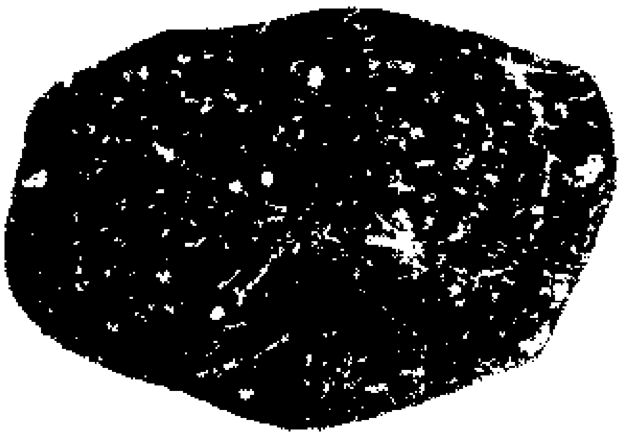
另有一個有用的方法,就用返射光法(reflected light metho.)將煤的磨光面(或先用或不先用化學劑侵蝕)置顯微鏡返射光線(人造光或太陽光)於面上觀察之.此法特別用到含炭分高的硬煤,因爲不易把他切成薄片,若研究亮煤 (bright coal) 的纖維構造亦應如此,如第八圖(見後).

壓榨過緊之煤,研究其中之植物遺骸,宜用縱斷面,即沿煤層成直角切斷之面.

以顯微鏡觀察植物之構造——煤裏最普通又最容易辨別的植物遺骸是:胞子殼(Spore coats)表皮(Cuticle),木材構造(Woody structure)及樹脂(Resins)等.

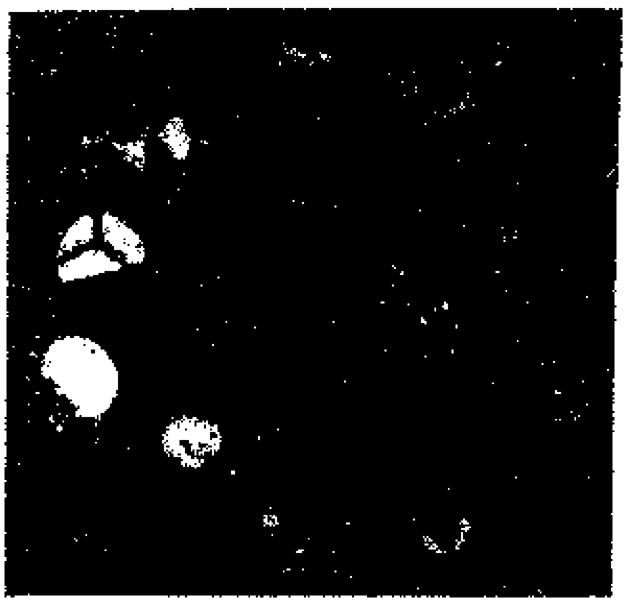
胞子殼——胞子甚小,作圓球形,外覆有防水之皮,所以保護幼芽(或胚種 germ)及儲藏下代新生植物的食料.當胞子由植物墜下時,大半已經破裂,他的儲蓄物,不純因幼芽

之生長而消耗,或經腐爛損壞或經腐爛程序而失亡.防水胞衣仍宛然存留,供吾人之探討,沿煤層製成的橫斷薄片,胞子殼現黃色如板狀.參看第二圖.沿煤層成直角製得的縱斷切面,則爲環狀薄厚不一,參看第十圖.有的煤胞子殼極多大小不等,大至1/8英寸,小者僅及一英寸的 1/1000 而已.



煤切面之胞子殼,原狀,橫面.
第 二 圖

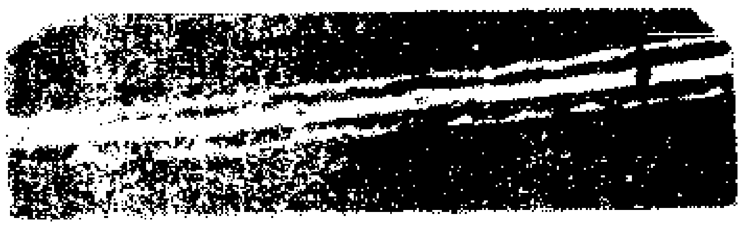
胞子殼是成煤的植物物質中最能抵抗腐蝕的,所以仍能保存胞子的固有形狀及特性.有爲Y-形特殊形態者,乃是由四粿胞子互相接合而成,如第三圖.



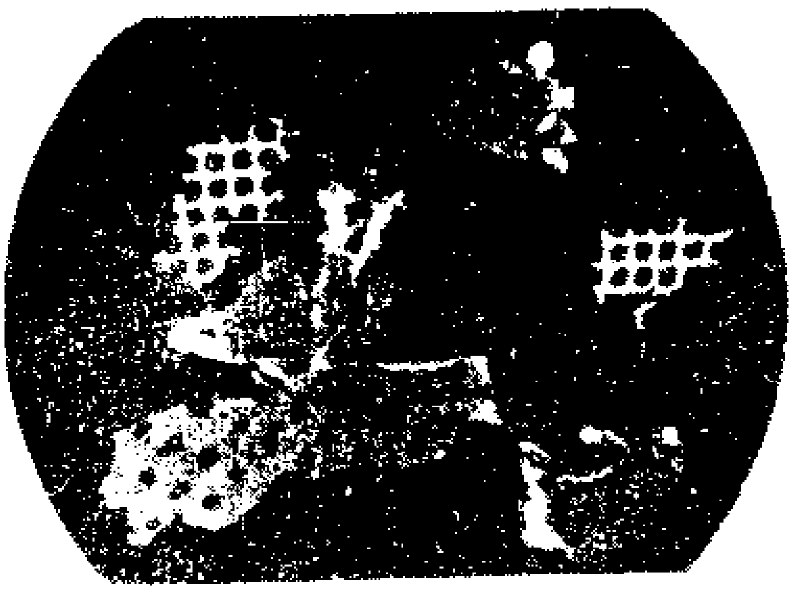
自煤中提出胞子皮
第 三 圖

表皮——植物的另一種有抗腐能力的部分,是枝葉等的外表皮,所以煤中常常發現表皮碎屑.表皮的能以辨識,是因爲他同原來植物形狀相似,在煤裏,植物的內層業已腐爛淨盡,僅留殘餘之軀殼,證明構成植物的諸細胞.參看第四,第五各圖.

木材構造——植物大部分是細胞構成的,大小不一,直



表皮之縱斷面 ×50
第四圖

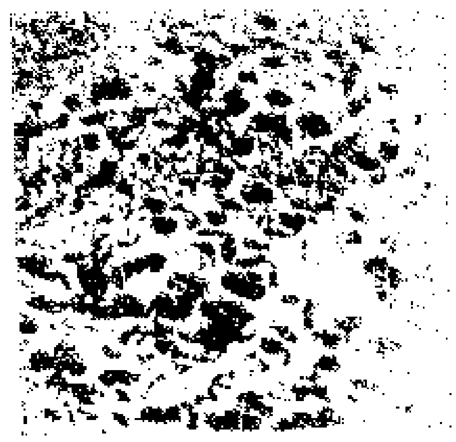


白樺樹皮之表皮(原形)
第五圖

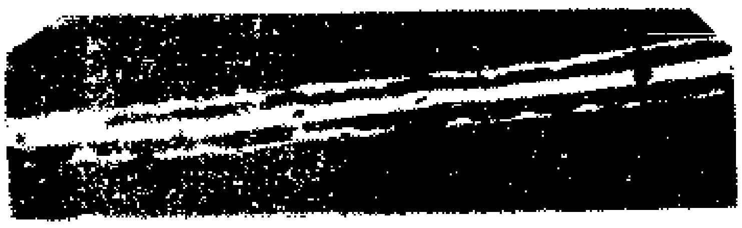
徑有達1/100英寸者,為構造植物骨骼的惟一材料.他們排列的形勢同蜂房有點相似.同樣細胞構成的植物,因為又柔而脆,不能算做木材,例如根芽幼葉等.細胞不能抵抗腐蝕,所以吾人由殊察覺得細胞,他們的腐爛等級各有不同,參看第六第七第八各圖.有的完好如初,有的無復有細胞之原狀.許多細胞構造物已轉變為膠形物,非過細觀察,辨不出原來細胞之痕迹.

第六圖 纖維組織,未腐 縱斷 ×125

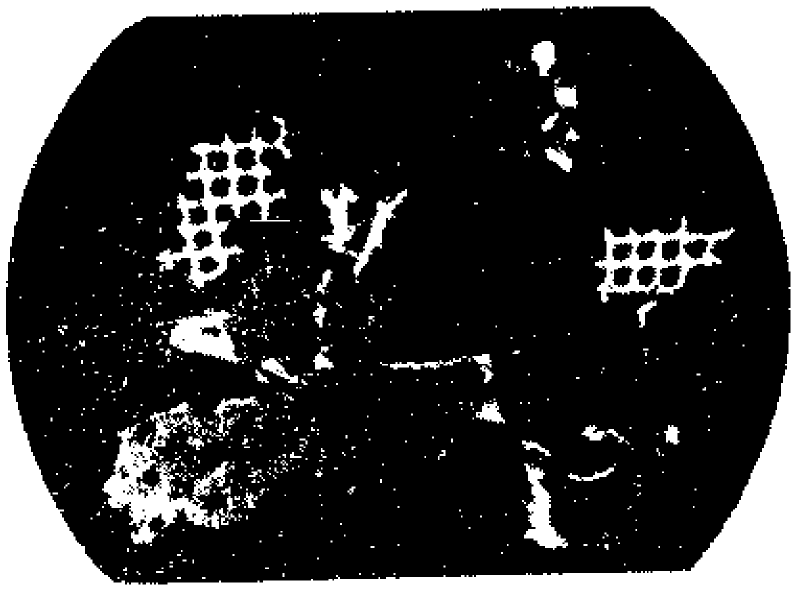
第七圖 纖維組織,已腐 橫斷面 ×125



第八圖　樺皮之斷面 ×15



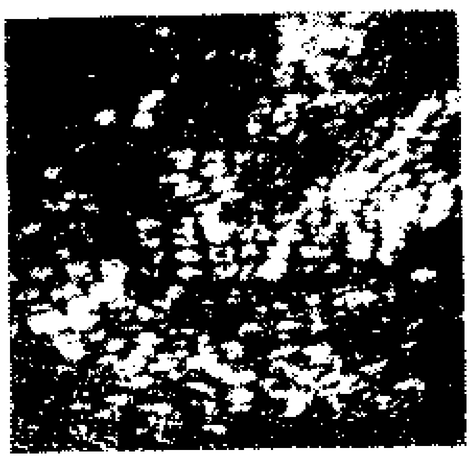
表皮之縱斷面 ×50
第四圖



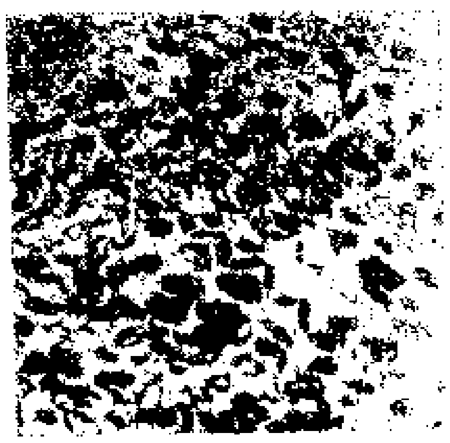
自煤提取之表皮(原形)
第五圖

徑有達1 100英寸者,為構造植物脊樑的惟一材料.他們排列的形勢同蜂房有點相似.同樣細胞構成的植物,因為又柔而脆不能算做木材,例如根芽,幼葉等.細胞不能抵抗腐蝕,所以吾人由煤裏覺得細胞,他們的腐爛等級各有不同,參看第六第七第八各圖.有的完好如初,有的無復有細胞之原狀.許多細胞構造物已轉變為膠形物,非過細觀察,辨不出原來細胞之痕迹.

第六圖 纖維組織,未破 縱斷 ×100

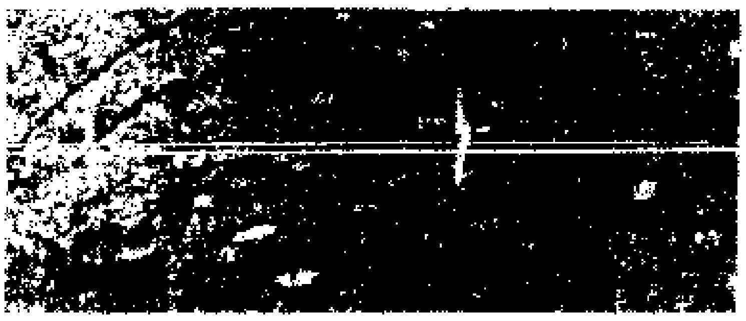


第七圖 纖維組織,已破 橫面 ×150



第八圖 提取之細胞 ×150

樹脂——樹脂在活的植物中含量並不多,(以重量計)他有抗腐性,植物的其他部分一經腐爛之後,他的成分比例自然增加,合胞子殼表皮一樣,當植物生長時,樹脂的形狀如淚珠,自枝幹各處流出,尤其受傷害的植物更顯著.他分布在木材的細胞中間.淚珠(Tear)樹脂及細胞樹脂,煤中均能發現.細胞樹脂在保留的木材細胞(Wood cells)就其固有之地位發現.參看第九圖.有時細胞牆壁完全腐去,僅樹脂保存仍佔據其原來位置歷歷可數.



細胞間樹脂蝕面

第九圖

所有植物之遺骸煤中俱能保存,且爲構成煤的一種原料,不是僅是印影如一般人所想像,無實物可供試驗.煤若以化學劑處理之後,可用方法分析各種植物遺骸.參看第三,第五及第八圖有的和現在的植物遺骸逼似,有的(木材部分)已經很大變化,但是與木材之關係仍屬瞭然.

II. 帶狀之煤(Banded coals)

雖然各種煤都能表現植物遺骸的一部或全部,可是他們在煤裏的分佈,並不均勻.大多數形成帶狀,明暗相間,厚薄不等,自 1/10 英寸至 2 英寸.其明亮部分有的柔軟如木炭之粉.第十,第十一兩圖,均表示帶狀煤之形態.

煤的不同的四部分,用肉眼可大致分辨.若用顯微鏡及

帶狀煤：面表 Vitrain
第十圖

帶狀煤：塊：表 Fusain
第十一圖

化學方法能確切實證.研究煤者,不能當他是混然一塊,必就其各部分別研究.(有的煤四種俱具). 此四者之命名及定義列下:—

Vitrain——亮而黑,貌似玻璃脆弱,破裂後有如玻璃狀之灣屈面.

Clarain—卽原來的亮煤,自成細微帶層,軟而脆,破裂爲不定形之塊.

Durain—黝黑之煤,外貌灰而粗,頗堅硬,破裂成粗而黝黑之斷面.

Fusain—軟柔而俱有纖維狀之物,易成粉,持之能染手,慨爲小片狀附著於煤塊之各面.

用顯微鏡觀察這四種煤所以不同的原故就立刻發現他們各含有不同的植物遺骸,例如, Vitrain 薄片,並未曾發現有抗腐性之植物遺骸,惟是紅色膠狀之物而已,若過細觀察,此膠狀物,則微微呈現木質細胞之結構,設磨光後用酸侵去其表面之一部,細胞更屬顯明如第十二圖. Vitrain

Vitrain：蝕面·橫斷
第十二圖

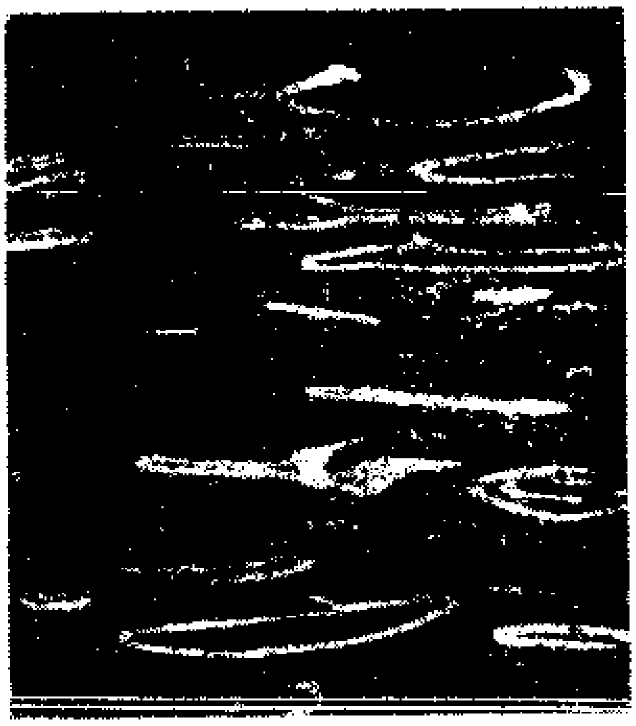
乃是由木材之枝幹誘導而成,其中木材質已轉化作硬的膠狀物,僅剩有原來木質細胞的痕跡而已.

Calarain 是一種混合物.其薄片呈現清楚透亮的層疊,同 Vitrain 相似,其中雜有胞子殼,表皮以及其他植物遺骸.第十三圖. Clarain 是由 Vitrainised 木材碎屑搆成,過於細小,無復有 Vitrain 之特性,可資鑑別,並攙和植物的其殘體.如第十三圖.整塊之明暗,及斷面之清亮,各隨其所含之雜質爲轉移.

Clarain：切面 ×10
第十三圖

Durain 的薄片比別的煤更暗淡無光.參看第十四圖.所含胞子殘體甚多,破爛的木質細胞亦不少,性質極似 fusain. Durain 係由極細小的細胞殘體同泥土沈澱,同時堆積而成.他的黝黑的顏色就因爲他是由這極微細的球狀物搆成之故.

Fusain 是木材纖維搆成,仍保留他的原來的細胞結搆,參看第十四圖.



Duain：切面·縱斷 ×25
第十四圖

Vitrains 及 Fusains 較爲簡單,係由成煤植物(Coal-forming plant)的纖維部分誘導而來, Clarain 及 durain較爲複雜係由多數不同的植物轉化生成.

不要以爲 Vitrain, Clarain, durain,fusain, 四者,在化學方面是相同的.煤的性質不相同之故,不僅由於植物遺骸之不同,當植物遺骸經硬化作用,變做煤時的諸情況,也很有影響.因爲造成煤的情景不同所以煤有瀝青與煙煤,煙煤與明煤之別.植物性質大致無別,惟一經成煤之過程,則大異其趣,至有瀝青明煤相差之巨.這種種變化之範圍俟研究煤的化學性質的時候,應有充分的解釋.

不論煤的外表,是帶狀是塊形,及其來歷怎樣,均可分做二種或二種以上的不同的煤.—(vitrain,clarain, durain, fusain). 此說極適於煙煤,明煤亦爲此四種煤構成,但不易辨識耳,此四種煤者乃是一切煤之母,且放諸四海而皆準.卽驗諸世界之煤無不如是也.

近來研究煤的性質的工作,大半傾心於這四種煤的鑑別英國尤其努力.

世界各地之煤,他們的普遍性質大體上極相似.各地之成煤植物之變化因其地而異.但是構成植物之原料,任何時代,殆屬一致不變,所以成煤紀(Coal-forming age)之原料和現在一樣,但是多處之比例不能不有差異.

III 煤的化學分析

用顯微鏡的觀察法,知道煤是下列四種物質的混合物,— a 各種頑性之植物,(b)一部或全部腐爛的纖維肌體,(cellular tissus)(c)樹脂,以及稍量的(d)未經證實的諸物質化學試驗乃是以邏輯的方法,探求煤所含的東西,及其誘導體.

溶劑作用(The reaction of solvents)—令煤的成分離異而並不變性是可做到的,如有機溶劑之提取卽是.此法提取量甚少,鮮有超過百分之以上者.單純有機物如Ether, Chloroform等作溶劑,用遲緩且不能完成.設先以劇烈溶劑如Pyridine處理之,則作用迅速且易完成.煤侵於Pyridine中,其膠狀之物卽散佈於Pyridine之中,如泥土之散佈於水裏一樣.然後再用別的溶劑分別提取.

經這個處理法,令煤分做α—,β—,及γ—三部,如下表,—

煤 { Vitrain, Clarain, Durain, Fusain }

被Pyridine提取

不溶部分	溶解部分
不播散的腐質 (undispersed ulmin)	以Chloroform提取

抵抗性的植物遺骸	不溶解	溶解
(α—部分)	播散的腐質(dispersed ulmin)	大部分是樹脂(Resin)及炭氫化物
	(β—部分)	(γ—部分)

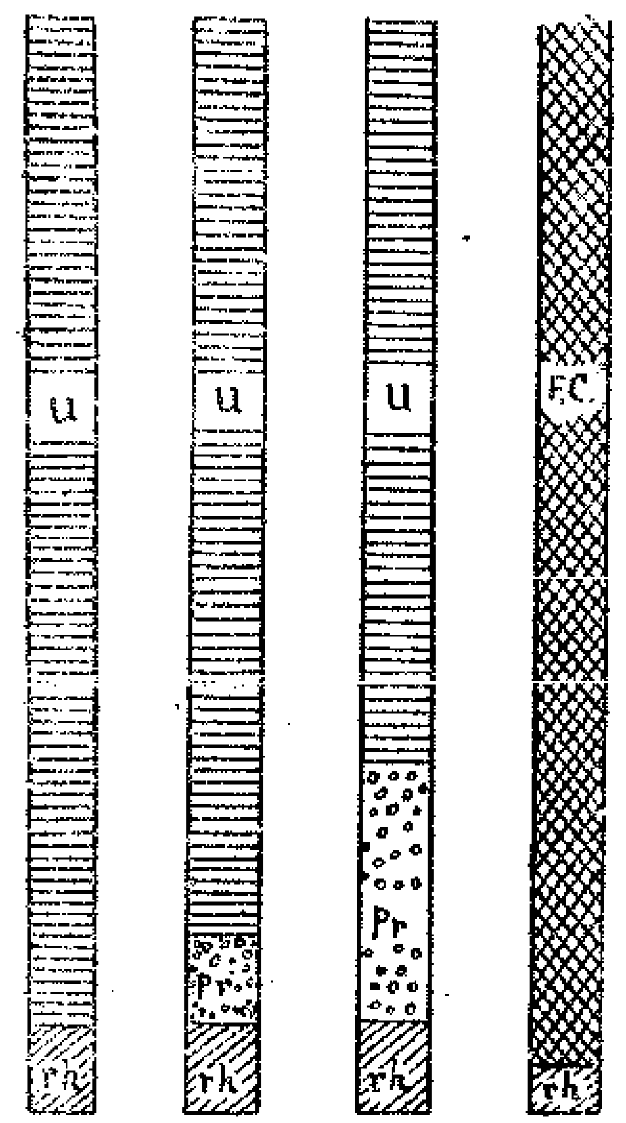
煤中所含樹脂及炭氫化物,爲量甚少,鮮有超過2-3%者.樹脂是從植物遺留下來可無疑意,但植物含炭氫物甚少,而石臘(Waxes)之量頗多,殆煤成時臘漸脫變爲炭氫物,故不復有臘之存在.

設令煤審愼行真空蒸餾,在煤的主要物未曾分解之前,則炭氫化物已先蒸出,且毫未變其性質,殆至高溫(卽煤可以分解的溫度)樹脂方得蒸過且微有變化.

提取植物遺骸—將煤在150°c時佈於空中,或以過氧化氫(H_2O_2)處理之,令其氧化之後,僅餘有抵抗性的植物之肌體(Plant tissues).此肌體主要成分爲胞子殼,表皮,以及纖維組織等.

腐質(Ulmins)—當植物腐爛時,其枝幹各部分以及植物其他部分盡行腐化變作黃褐色膠狀物,在泥煤礦中可以發現.此物名曰腐質,形同而色澤稍黑之物煤裏也有,也是由於植物木材部分腐化而成,腐質實爲煤的主要成分.他含有氮及有機硫,亦爲煤中各物之最易起氧化作用者.

所有的煤概由下列三種物質搆成:(1)樹脂及炭氫化物,(2)有抵抗性的植物遺骸,(Plant remains),(3)腐質(量之多少不等)由此三者多少的比例足以確定煤之性質.帶狀煤

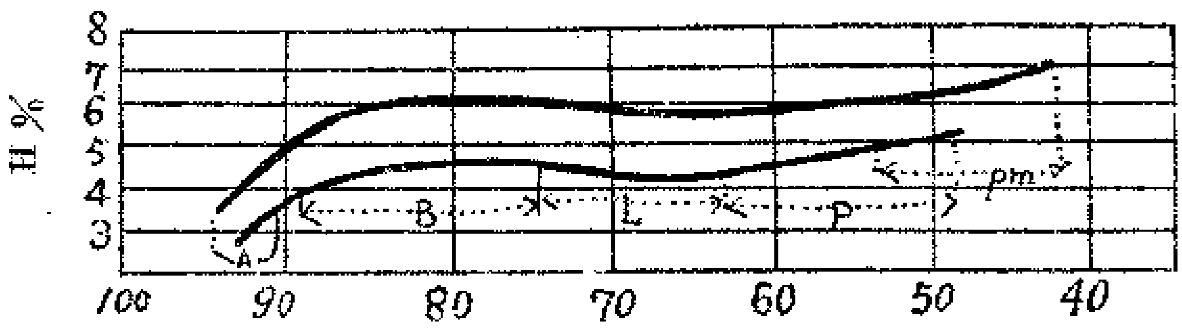


第十五圖 Vitrain, Clarain, Durain, Fusain, 中之植物遺痕
U=Ulmin Pr=Risistant plant remains. uh=Resins and hgdro-carbons. fc.=fusainisod cell Structure

(banded coal)的四部(Vitrain, Clarain, durain, fusain)即是最好的例如十五圖,煤之所以分做四部分,是純因所含此三者的量,多寡比例不等的原故.一種煤中之 Vitrain, Clarain 及durain主要不同的原因,就 Vitrain 不含抗性植物遺骸, Clarain 微含之,durain爲量甚多,

煤的原素成分—煤的含炭量70-95%,氧量25-2%,而含氫量無甚出入約4-6%之間,然如硬煤則有僅3%,氮硫各平均爲1%.

以炭及氫之成分作縱橫兩座標,可以表示煤的種種性質如下圖



第十六圖　A = 硬煤　C%　L = 瀝青煤
B = 煙煤　Pm = 植物質
P = 泥煤

就上圖觀察,知道煤與煤間性質之變化是漸進的,不是突然的.而構成煤的各因子之變動也是如此.此圖區域之窄狹表示(1)成煤物質的成分之均勻,自左向右經泥煤至於原來植物之域,(2)變化之程序,亦未大受外界之影響.

圖中煤區域(Coal band)與煤的品級(Rank of coal)有密切的關係,且極相符合,煤的所以不一致,不僅是由於其中各支體(ingredients)量的多寡的關係,而各支體內之成分亦顯有差異.實在的各級煤中所含樹脂,油類或抗性之植物體其間之成分並無若何差異.且炭分87%以上之煤爲量更少,不足影響煤之性質,及其研極成分(ultimate composition).影響於煤之成分者當是腐質部分.

由經驗詔示吾輩,煤的性質係沿煤的區域變化,假使炭分增加黑度亦增進,於是抵抗加熱之變化及溶劑化學劑之侵蝕亦同時增長.通常把煤分做瀝青,煙煤,亞煙煤及硬煤各種,可以大致表示上述性質變遷之迹.

Holroyd 及 Wheeler 兩氏之工作係先分離煤之揮發物後,再加以適當之溫度分解之,然後分別試驗各分解物及分解前與已分解後的煤的性質,曾證明分解者乃是煤的腐質部分.分解時需要溫度愈高者,則此煤之含炭量亦愈大.含C80%者於300°C分解,若含C87%則在370°C方能分解.並且表明諸煤間腐質性質的不同.煤中腐質之變化,更由其增加抵抗氧化之能力證實之.

總而言之,煤之腐質是可變動之物,煤與煤各有不同,其變動之量足以注定煤之品級.可用種種不同方法測量之,最普通的有三法,(1)炭量,(2)對於氧化物之動作,(3)分解時的溫度.

合理的分析(Rational Analysis)—要充分的注明煤的成分下列幾種相關的量必須測定(1)樹脂及炭氫化物,(2)植物遺骸(3)腐質以及腐質的品級.

IV 煤的性質

煤的性質之不同,在于他含頑性植物遺骸之種類及比例Vitrain中絕無,Durain則多至20-30% Fusains幾全是形似炭化之木材細胞組織當蒸餾時,煤之各支體均有其相當產物.例如樹脂,炭氫物蒸餾時幾無變化,腐質產生含石炭酸之微量煤膏,至於樹皮幾盡產生煤膏,且內中大半是不飽和之炭氫物,黝黑之煤比明亮者多產煤膏,且膏中石炭酸之量亦較少.氧化作用,含腐質少之Durains若同亮煤比較;則較遲緩.

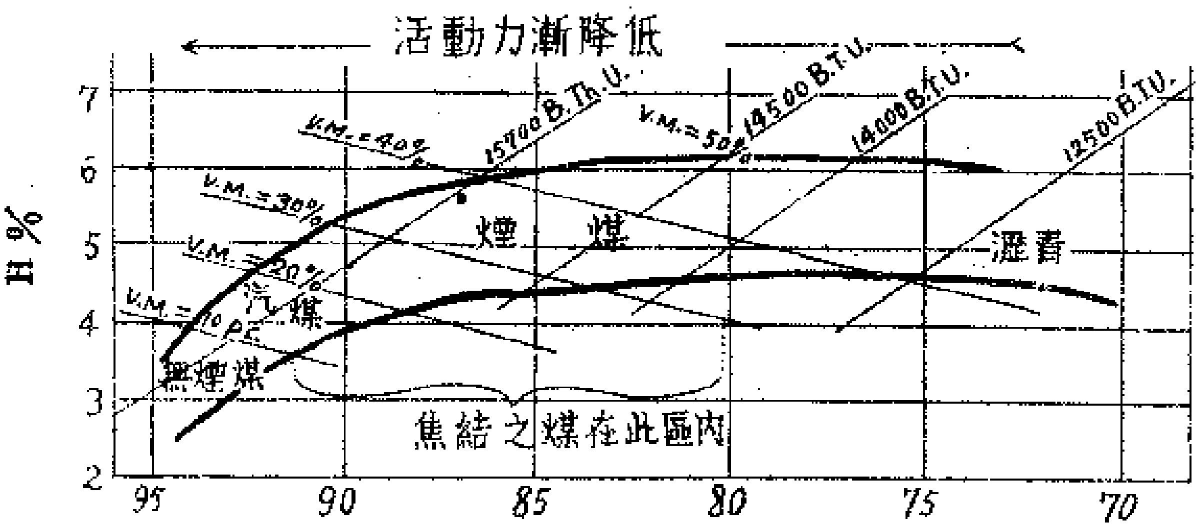
標準的焦性煤是光亮(bright)之煤,幾至全部熔融.Durains與Fusains加熱不能熔,惟能暴炸,其粉末與原煤無異Vitrains Clarains, Durains三者間凝集(Caking)性之不同,不是由於二者間可提取物量的關係,(因爲量之變動極不規則),是因爲煤中腐質的性質之不同.

論到含灰量,看起來黝煤比亮煤污穢些.黝黑之煤往往

夾雜有泥土層,是亮煤所絕無者.惟爲量甚少約2-3%亮煤(Vitrain 及 Clarain)之灰顏色比黝煤之灰更棕褐,且較易熔融,而與普通植物之灰極相似.

研極(Ultimate)成分及性質—煤之炭量是煤腐質品級的最好試金石,氫量爲煤種類的試金石,因爲煤中所含富有氫之植物遺骸,恆影響於煤之種類故也.

依研極成分作煤分類的根據,並及其性質,要緊的是區爲明暗兩種,他們分析上的差異雖極小,而實際上不同之點則甚大.成分影響及其性質參看第十七圖.Seyler氏根據研極成分而分類的計劃,目前大多採用.



v.m.=volatile matter 揮發物　　C%

第十七圖

試觀上圖,從連接等揮發物之各線,自低 C H 至高 C 就表示當 C 量增高則揮發物減少;從連接等熱值之各線看,增高 H/C 即是增加熱值.

煤之焦化能力,自C分過80%起逐漸加增,若過到C 90%焦化力頓歸無有.

低級煤之所以異於高級煤在行低溫蒸餾時,分解的溫度,揮發物之量與性質種種.煤級愈高者,在低溫下發生之水汽及CO_2亦愈少於高溫下則無此分別.通常含氫量多之煤產生之煤膏及揮發物亦多.

活動力(Reactivity)(或氧化易否)與灰分增加之方相反,如第十七圖,C分甚高活動力愈低,即愈不容易融化.活動力與H量之關係尙無充分之試驗.活動力可以燃燒釋之.低C煤比高C煤易燃,宜乎含78-82%之亮煤缺乏凝集性者,爲家庭採用之燃料也.

論到煤礦的安全問題,活動力之大小必須十分注意.所謂自燃(Spontaneous combustion)現相,即是活動力增加促進融化發生之現相也.

是篇材料大半採取F.V.Tideswell所著"Some modernxdeas on Coal"登載於Full in Seilnce and Practice Vol IX No.7 PP 296—306.附注於此以示不敢掠人之美—編者.20, 11, 15.

植物生理學史略

(續第一卷第四期)

張 珽

第二章

光合作用之研究

第一節 過去關於光合作用之概念

1. Priestley, Ingenhausz, De Saussure 已發現植物能吸收二氧化碳,呼出氧氣。

2. Sénébier 始明定植物對於氣體之吸收與呼出,其間有一定關係存在;此種氣體交換,且與植物製造有機物之經過有關。

3. De Saussure證明綠色植物,在日光中能固定空氣中所含之二氧化碳,以增加其體重;且更指出植物體重之增加,與自空氣中吸收得來之二氧化碳及自土壤中吸收得來之水分,有重大關係。

唯 De Saussure 絕無一語道及葉綠素之重要,甚且懷疑葉綠素是否有用,以其見紅色之赤濱藜 (Atriplex hotensis), 葉綠素被掩於紅色色素者,亦與普通植物同一能吸二氧化碳而增加體重也

4. Dutrochet 始明白倡言唯含葉綠素之部分乃能吸收二

氧化碳放出氧氣.

5. Von Mohl 始知凡葉綠素體中皆有澱粉粒.Nägeli, Cramer, Böhm 亦有同一之發現;唯皆未嘗道及此兩種物體間之關係,斯為可異耳.

6. Liebig 決定植物體所吸收之二氧化碳,得自空氣,實證 De Saussur 所言,而反對當時一般學者以為植物養分全得自腐埴質之說法,

唯是 1860 年以前,雖吉光片羽,西爪東鱗,於光合作用之現象,經過,結果等,有不少散在之發現;然迄未有一人,能將此等事綜合連貫,而組成一系統觀念.直至 Sachs 出,始知此等片段事實,彼此間關係雖若不甚分明,實同為一種重要生活作用之各部分.生物之基本生活現象,由無機物以製造有機物之合成作用,即為此各種現象之連貫.

Sachs 由研究結果,始知:

a. 葉綠素在植物合成體質上之重要.

b. 植物器官之生長營養,與葉綠體之作用有關係.

c. 葉綠素之生成與活動全賴日光.

d. 葉綠素活動結果之產物.

自有 Sachs 及其研究後,世人始知注意生物生命現象物理及化學的研究;近代生理學之門徑乃開.故 Sachs 之榮譽,初不在其個人比較簡單而不甚精確之實驗,與 Würzburg 羣弟子之研究,而在乎其獨具慧眼,能綜合羣言,卓然有所豎

關也.近代談植物生理學者,莫不肅然尊 Sachs 爲大師,豈無因哉?

在 Sachs 之門下,作植物在碳水化合物方面之營養作用之研究者,計有四大方向;即氣體交換之情形;葉綠素之形質;二氧化碳合成作用之經過;及作用中勢能之變化是.茲即依此四者爲綱,以述四十年來關於植物光合作用之研究史:

第二節　光合作用中之氣體交換

歷來皆以爲植物之養料,胥取自植物自身腐敗後所生成之腐埴質(Humus).至 De Saussure 乃明定植物能吸收空氣中之二氧化碳;且植物所吸收之二氧化碳,主要之來源在空氣,唯一小部分或得自土壤.又植物所吸收之二氧化碳,其量約略與排出之氧量相等,此爲決定光合作用中氣體交換現象之始.關於氣體交換現象,歷來爭論之焦點,皆集在交換途徑一方面;至於分量問題,則自 De Saussure 以來,即已成定案矣.

I. 氣體交換途徑之定出:

A. 氣孔說(Stomatal Theory): 以爲光合作用中植物氣體交換之途徑在氣孔者:

1. Dutrochet 1832 年謂葉之細胞間隙,彼此相通,又藉氣孔以與外界相連,極可注意;由其呼出二氧化碳一點以言,此構造實可與肺相擬.

2. Garreau 1850 年亦曾由實驗得知氣體交換與氣孔有關.

3. Sachs 1865年於所著Experimental physiologie中,約略提出謂開放之氣孔爲植物行氣體交換之途徑.在Lehrbuch中乃著爲定論.1832年,於Vorlesungen中,更進謂引氣體入植物體中,爲氣孔之一種作用.唯Sachs未指明氣孔爲氣體交換之唯一器官,其Lehrbuch中,且曾謂角皮當亦爲氣體交換之一種媒介物.

B. 角皮說(Cuticular Theory): 以爲氣體交換之途徑,在葉表面之角皮者:

1. Boussingault 於 1861 至 1867 六年中,專從事植物光合作用及氣體交換之研究.其結果第一事,卽證定De Saussure 氣體交換之等量關係一發現,定出植物吸收之二氧化碳氣分量與所排出之氧相等.次之,則取 Nerium oleander(夾竹桃屬之一種)之葉(此植物之葉僅底面有氣孔)兩片,形狀大小皆適相等者,塗以豚脂,一塗表面,一塗裏面,然後納於含有30% 二氧化碳之玻璃管中,以强瀰散光照之.結果經若干時後,氣孔經窒塞之葉,分解二氧化碳達17.5 c.c.,而氣孔開放葉面封脂之葉,分解二氧化碳之量,僅有10 c.c.而已,由是決定二氧化碳之吸收;主在透過表皮之擴散,葉之表面作用較裏面爲活潑.

2. Barthelémy 1868 年由實驗之結果,證明 Boussingault 之

說,且謂表皮中角皮層之構造,特別適於二氧碳之穿入,與Frémy說極似樹膠膜者脗合.至於氣孔,則不過植物排出氣體之通道所裝活瓣,以調節氣體排出之量,同時防止氣體侵入葉中者而已.

C.　兩派之爭論:

1. H.J.C. Müller 1870 年,及 1873 年迭以精密之實驗爲根據,反對Barthelémy之說.

2. Barthelémy 1878 年亦以實驗之結果自爲辯護.

3. Mergert 1877 至 1878 兩年,以銾之蒸汽,環圍植物之葉,結果唯葉之內面能吸收,而表皮角皮皮層不見有銾汽之侵入.

4. Wiesner 1879 年計算氣體穿過各種小孔之擴散速率,知密度不同之氣體,透過有氣孔表皮之擴散率,與學理上計算所得結果相等,爲氣孔說作一强有力之證明.

5. Pfeffer 1880 年見氣孔保護細胞膨壓減低時,二氧化碳之吸收,極爲因難,由是在空氣之葉,其光合作用,亦大受障礙.唯Pfeffer初不反對角皮說,以爲角皮擴散在氣體吸收中亦有相當作用,第不若氣孔之大耳.

6. Haberlandt 1884 年提出謂細胞間隙爲構成細胞(Constructive Cells)輸出"生體構成質"(Plastic Substances)之通路,與氣體交換無關.故氣體交換之途徑全在表皮之角皮層.

7. Mangin 1887年就剝下之角皮層,悉心作實驗研究.藉細

菌之作用,析離葉之最外一層表皮,而計算二氧化碳藉滲透通過此皮層之量,知實不足以與由另一實驗計算得來氣體交換中二氧化碳之吸入量相當.且空氣中二氧化碳之張力所能引起透過角皮之擴散,亦不足以供給氣體交換中所需之二氧化碳量.

D. 最後決定——氣孔說:

1. Wiesner 及 Molisch 1889 年證明無氣孔之表皮,雖在高壓下亦不許氣體作器械通過.

2. Böhm 研究各種物質之供給給予澱粉形成之影響,知二氧化碳雖略能透過表皮細胞,但爲量極微.

3. Stahl 1894 年就 Sachs 早年之發現爲基礎,以葉綠體中生成澱粉粒爲吸收二氧化碳最顯明之表徵,據之以作二氧化碳吸收之定量研究,結果知凡氣孔被窒之處,雖久暴光中,其葉綠體中無澱粉之生成;而正常之葉,氣孔開放者,可見有多量澱紛.

4 Meissner 同年由相似之實驗,亦得相同之結果.

5. Frost Blackman 由 Godlewski 1873 年之發表(見後)及 Boussingault 所據以爲角皮說之實驗激起研究興趣,而作極精細之實驗,至 1895 年始付諸發表.其實驗之法,爲特製兩玻璃室,彼此僅一穴相通,而以葉夾置兩室之間,使葉適成一隔膜,葉面葉背,各祇與一室相通.於是在一室中以定速率輸入含有二氧化碳之空氣,使通過葉而導入他室,再以滴定

法量出透過此葉後之空氣中所含二氧化碳之量.

供實驗之材料,有蛇葡萄 (Ampelopsis hederacea) 美國篠懸木 (Platanus occidentalis) 大虎杖 (Polgonum sachalensis) 等僅背面有氣孔之葉,實驗結果,知二氧化碳之吸入,與氣孔之疏密成正比.在蛇葡萄等葉正面無氣孔之葉,正面幾無吸收之可言.

Blackman復就 Boussingault之實驗作覆檢,知若用含CO_2達30%之空氣,其結果確與 Boussingault 所得者相同;然若使CO_2之含量減少,則適得其反,但再將CO_2之量增高,葉背面被窒塞時,所破壞之CO_2之量,仍多於葉表面被塞者.由是更得一推論,謂CO_2含量過高,可以使葉綠體中毒,而失去對於CO_2之抵抗力,故此氣體得以儘量侵入,而阻止光合作用進行.

II. 氣體交換中之分量問題:

1. De Sausstre 卽謂氣體交換中二氧化碳吸入之量與氧排出之量相等.

2. Boussingault 始明定吸入之CO_2等於排出之氧(見前).

3. Godlewski 1873 年發見過量之CO_2侵入葉中,則光合作用受障礙,澱粉粒之生成立卽停止.

4. Hoppe-Seyler 1879 年以血色素(Hämoglobin) 爲試劑,於氧之呼出作定量之研究.

5. Engelmann 1881年以 Bacterium termo 爲標示.

6. Bejerinck 1890 年以 Indigo Carmine 溶液爲試劑,次年又

以某數種發光細菌所發光之强度爲標示.

7. Brown 及 Escombe 1900 年由實驗知:

a. 向日葵(Helianthus annuus)之葉,每平方公尺每小時能藉氣孔吸收大氣中稀薄至於僅達0.026%之 CO_2,以製成1.8 Gram之碳水化合物.

b. 若在薄膜上穿成極小之孔,且使各孔間之距離,約在孔徑之十倍以外者,則CO_2可以流暢通過,此情此景,正與葉背氣孔之情狀相當.

c. 在光合作用中,一葉所能吸收之CO_2量與葉周空氣中所存在之CO_2之量約成正比.

III. 氣體交換中原形質之變化: 氣體交換之通路,雖已明爲氣孔;第交換後原形質吸收CO_2之機轉,則又爲一複雜之問題.大致CO_2當在細胞間隙中,以滲透穿過間隙各側之細胞膜,而達於能履行光合之細胞原形質,始能因其作用,而起變化.其穿透之機轉,各家各有其說:

1. Barthelémy 以爲角皮之構造,當如 Frémy 所言,與樹膠膜相似.(見前)

2. Wiesner 及 Molisch 1889 年發現細胞膜質(Cellulose)之細胞膜,濕潤時能許CO_2透過,乾後則否.

3. Leitzmann 1887 年時亦有相似之發現.

4. Sachsse 1888年發現水生植物不但能攝取游離態之CO_2,且能自溶解之碳酸鹽及重碳酸鹽取結合態之CO_2以供用,

足以間接證明CO_2之吸入細胞原形質,爲一種滲透作用.

5. Hassak同時亦有同樣之發表.

6. F. Darwin 及 Pertz 1896 年證明 Sachsse 及 Hassak 之說.

至於無氣孔之植物,(在羊齒以下之植物,無特殊分化之葉,即亦無分化之氣孔,雖有之亦僅限於某局部)則以其角皮不甚完全,故其體表處處可以顯出潤濕之細胞膜質膜對於CO_2之滲透的特性,而CO_2可以自由壓入.

第三節 葉綠體

I_2 葉綠素在光合作用中功能之認定:

1. Sachs 實爲定出葉綠體爲吸收CO_2之器官之第一人1865年在其所著 Experimental physiologie 中,明指出葉綠素爲崩解OC_2放出氧之器官;光合作用產物之出現,不在細胞之他處而在葉綠體中.Sachs畢生之成功,蓋以關於光合作用之研究爲最大,彼以六旬之高齡,專注於此問題之探討,其毅勇與成功,俱足令人敬服也.

葉綠素普通恒含於特別分化之器官,名曰葉綠體 (Chloroplastid) 者之中.葉綠體現在大概唯植物有之;唯似不僅限於植物,且植物亦有闕如者.就一般情形言,大概最原始之生物,實皆含葉綠素;厥後以進化而起分工,於是乃僅植物保有之,而動物則逐漸消失,即植物亦有棄去此種器官之傾向,唯大部份則仍保有之耳.是種說法,乍視之似甚覺平凡,然實則爲過去數十年中關於葉綠素功能苦心研究

所得之結論綜結而得,於此可見學問之建樹,良非易爲也.

2. Boussingault 1864, 1869 年繼續發表謂唯正常葉綠體(當時不名 Chloroplastid而名 Chlorophyll corpuscle)中始有吸收利用 CO_2之活動.

3. Pfeffer 1881 年發現無葉綠素之葉綠體,不能表現光合作用之能力.

4. Zimmermann 1893 年證實Pfeffer之說.

5. Kny 1897年發現葉綠素脫離葉綠體後,亦無光合能力. Kny應用 Engelmann 氏細菌實驗氧氣法(詳後),以含有葉綠素及細菌之油滴,懸垂於含CO_2之水中,而以光曝之,結果不見有氧之生成.

按 Czapek 1900, 1902, 1903 等數年,繼續實驗以含葉綠素之油滴導入生活細胞中,結果亦不見有CO_2分解現象.自 1900 年以還,Usher 及Priestley 數發現謂葉綠素之濃溶液能分解 CO_2,唯尚無證實之者耳.

II. 葉綠體:

1. Pringsheim 1874 年用稀酒精溶液脫除葉綠素後,得見葉綠體爲一海綿狀構造之器官.用蒸汽脫葉綠素,色素成膠粘狀之液滴脫出後,所得結果地質亦同.

Pringsheim 謂葉綠素實以機械的附着粘連於海綿狀之葉綠體底質中.

2. A. Meyer 1883 年復作同樣之實驗證明 Pringsheim 之說,

謂葉綠體之地質確爲海棉狀物.Meyer且在此地質之網孔角上,發現綠色之小點("Grana"),故遂以爲葉綠素實成油狀而充塞於葉綠體之網中.

3. Reinke同年見葉綠素溶液顯有螢光(Fluorescence),而葉綠體無之,亦贊成葉綠體與葉綠素之間必有一種特殊結合.

4. Chodat 1892年謂葉綠體必爲多孔物:

5. Timiriazeff 1899年以錦鷄蘭(Phajus)之葉綠體(錦鷄蘭之葉綠體以巨大著稱)供檢查,結果發表其所見葉綠體之構造,與前此各學者之意見不同.葉綠素成薄層而蔽在葉綠體之表面,其中間有分佈較厚之處,在紅光下視之則呈黑點狀,Meyer之所謂Grana者,蓋即此較厚之處.層之厚徑約爲16 μ;由其厚徑上Timiriazeff以爲葉綠素之濃度必甚高,至少當爲通常綠玉色之四千倍;以是葉綠素在葉綠體中,幾於成固體狀.Reinke謂葉綠體不顯螢光性殆即葉綠體中葉綠素濃度太高之故;以葉綠素唯較稀之溶液始有螢光也.

III. 葉綠素:

1. Frémy 1860年謂葉綠之酒精浸出液,與醚(Ether)及氫氯酸 HCl 共同振蕩,則生成兩種沉澱,一爲藍綠,一則黃色,分別名之爲葉藍質(Phyllocyanin)及葉黃質(Phylloxanthin).唯此兩物是否原來同時存在於葉綠素中,抑爲酸作用於同一物質而生成之兩種產物,則未敢決.

2. Timiriazeff 1869 年謂此兩物同起自葉綠素之分解.

3. Kraus 1872 年斷定葉綠體中同時有兩種色素並存,一爲綠色之葉綠素,即 Chlorophyll Proper,別有一種黃色之葉黃素(Xanthophyll)在.兩者之間關係如何,Kraus 未有說明;然大致殆與Frémy之兩種色素不同.

4. Konrad 1872 年反對Frémy之說,謂葉綠素當爲單一之物質,第葉綠體中或同時雜有他種色素存在.

5. Pringsheim 1874 年贊同 Konard 之意見.

6. Gautier 1876 年就葉綠素作種種化學分析,結果決定其構造必與動物之膽汁色素(膽黃素 Bilirubin)相近似,遂分別命膽黃素及葉綠素之構造式爲 $C_{16}H_{18}N_2O_3$ 及 $C_{19}H_{22}N_2O_3$.

7. Frémy 1877 年以爲其所發見之葉藍質爲一種複雜酸類之鉀鹽.

8. Hoppe-Seyler 1879 年就葉綠之醚醇浸出液分析之結果,見其所分中有鎂及磷,乃斷定其爲與 Lecithin 相類似之物質,唯 Hoppe-Seyler 不以爲其所製抽出液卽爲葉綠素,而名之爲 Chlorophyllan.

9. Pringsheim 同年發現葉綠素之一種酸類誘導物,名之曰 Hypochlorin.

10. Tschirch 1884 年證明 Chlorophyllan 與 Hypochlorin 實爲一物.

11. Schunck 及 Marchlewski 1895 年記載葉綠素之一種誘導

物名 Phylloporphyrin, 其吸收光帶 (Absorptive spectrum) 與由血色素得來之誘導物名 Hämatoporphyrin 者極爲相似,唯吸收帶略偏右.由是斷定兩色素之化學性質必有相當關係,殆極近似,蓋乾溜之均可得 Pyrrole 爲其產物也.

IV. 葉綠素生成時之環境條件:

A. 鐵分:

Gris 1857 年卽已發現無鐵之供給時,植物不能生成葉綠素.

B. 光線:

1. Sachs 1859 年謂生於暗處之植物所以呈黃色者,卽以無光線不能生成葉綠素故.在弱光之下,葉綠素旋分解而旋生成.由是斷定光爲生成葉綠素必不可少之條件.

2. Famintzin 1867 年證明 Sachs 之假定.

3. Wiesner 1876年亦有同樣之證明.且謂强光中,折射性最强之光線,與葉綠素之生成最有關係.

4. Reinke 1893 年始證明凡可視光帶皆能影響於葉綠素之生成,而要以 B, D 間之線爲最有力.

C. 溫度

1. Sachs 1864 年提出溫度對於葉綠素之生成有關.在生長之最低溫度 (Minimum temperature) 中,葉綠體無復變爲綠色之可能.

2. Wiesner 1877 年發現植物生成葉綠素,各有其最適溫

度 (Optimum temperature), 唯此溫度則各種植物各各不同.

3. Elfring 1880 年發現溫度太低時,光線之照射只能使葉綠體中黃化質(Etiolin)之產量增加,而無生成葉綠素之力量,故植物之黃色益濃.

D.　氧:

1. Timiriazeff 1886 年發現以新生態 (Nascent) 氫處理葉綠素之濃液則變爲極淡之黃色液,唯若略有氧或空氣,則此黃色立又轉綠.此黃色色素 Timiriazeff 名之曰Protophyllin, 其稀溶液之光帶,在折射性弱之一段中絕無吸收帶,濃度增高時,則可生成與葉綠素光帶中 NO. 2, NO.4 相當之吸收帶,而無 NO.1. 在暗中製備之黃化幼植物浸出液中,亦有此色素.唯在還元後之綠葉中,極不易析得,蓋以光線之作用影響太大也.

2. Correns 1892 年提出謂環植物之氣體中,氧之分壓降至若干度後,葉綠素即無生成之可能.

V.　葉綠體之作用與生體之關係:

1. Sachs 即以爲器官之生長,與葉綠素之同化作用,爲相涉而各自獨立之兩種活動.

2. Engelmann 1881 年發現析出體外之葉綠體亦能略使 CO_2 起崩解.

3. Haberlandt 1887 年由在 25 % 糖溶液中觀察瓢簞蘚 (Funaria hygrometrica)葉綠體之情况,所得結果,作爲更明晰之

陳述.

4. Ewart 1896 年,在濃度不同之糖液之中將多種苔蘚植物之葉截爲薄片,使其葉綠體逸出,然後置之於有糖液之台玻璃上,加 Bacterium termo 以爲標示.結果得見有多數植物之葉綠體,脫離生體後亦能生成氧氣,使細菌來聚附.而尤以不染原來組織之碎屑者,其作用更佳.植物之有此特性者,計有 Catherina undulata, 瓢簟蘚, Dicranum scoparium, 苦草 (Vallisneria spiralis) 及 Selaginella helvetica (一種地柏)等.藥物之作用,能使此種獨立性之光合作用大受障礙,受障礙者則爲色素體本身.

5. Engelmann 析取綠水螅 (Hydra viridis) 之綠色體 (Plastid) 以作實驗,結果亦同.唯動物學者,多認此綠色體,爲一種與水螅共生之藻類,而不認爲葉綠體耳.

VI. 其他色素與光合作用

A. 黃化質 (Etiolin)

1. Gris 1857 年時提出黃化植物中所含之黃色物質(卽黃化質),能變爲葉綠素.

2. Mikosch 1878 年始證明 Gris 之說.

3. 此色素之葉綠素之關係,在此四十年中迄未有鮮明之訂定.兩者光帶極相似; Pringsheim, Wiesner 等諸學者皆曾證明兩者共同存在於植物之綠色部分,甚或同在一色素體 (Chromoplastid) 中可以同時檢出此兩種色素.

4. Draper 1878 年發現黃化植物亦能放出氧氣, 1881 年 Engelmann 歸之於黃化質之活動.

5. Ewart 1897 年證明此現象爲確.

B. 葉黃素 (Xanthophyll) 及柑色素 (Carotin):

Kohl 1871 年發現此兩色素亦能放氧.

C. 菌紫素 (Bacteriopurpurin);

1. Engelmann 1888 年見某數種紫色細菌,亦能分解 CO_2 而放出氧氣.

2. Ewart 1797 年謂此等細菌實含有葉綠素少量,唯爲菌紫素所蔽不得見.光合卽爲此少量葉綠素之活動,與菌紫素無關.

第四節　光合作用之歷程

Sachs 1860 至 1865 五年中關於光合作用歷程之研究,實爲近代關於此問題一切智識之肇端.雖其結果未有一事能得究竟,且在事實上有多數錯誤之處,然關於此一問題各方面之推究,多以 Sachs 之研究爲基,其創始之功,吾人殊不能不深深感謝也.

關於光合歷程之研究,爲此時代植物生理學上一最大問題.於其取材,經歷,中間產物,結果產物,及作用進行時環境條件之影響等,此四十年中均有極詳盡精細之探討.玆分述如次:

I. 光合作用之取材與結果產物:

1. Sachs 1862年由種種實驗及微量分析法,斷定Nägeli, von Mohl 等所見藏在葉綠體中之澱粉粒,當為崩解CO_2起同化作用後最初可得見之產物.後此再與由根吸收得來之其他種種無機鹽類結合,以製造種種複雜之有機物,構成體質.植物之營養,祇需有 CO_2, 葉綠素,日光,造成澱粉,再由根吸收無機鹽類,與之複合,卽可造成種種生命必需之物質.

2. Godlewski 1873 年證明CO_2確為生成澱粉粒所必不可少之材料.無 CO_2, 則雖在强光下亦無澱粉粒之生成.已生成者,且能逐漸消失.

3. Moll 1877年證明植物光合所需之 CO_2, 全取自空氣中,若無 CO_2, 則植物之葉,雖經光線之照射及種種其他物質之供給,亦不能生成澱粉.

4. Sachs 1882 年就此問題再作覆檢,結果證明絕對唯空氣為能供給植物以碳之給源.在其Vorlesungen中提出綜結之意見曰:"據余之學說以言,正常植物之一切有機物質,皆以同化器官中葉綠素所製成之澱粉為基礎,植物體中各種有機態之結合碳,原來皆以澱粉之形狀而存在."

II. 光合之經過及其中間產物之推測:

光合之終結產物,歷經探討,已確定其為澱粉無疑.唯光合之材料, CO_2 及水,均為極簡單之物質,而澱粉則為極複雜之碳水化合物,其分子構造迄今猶未得知者.兩者之間,繁

簡之差極遠,非一蹴而就,殆不容疑,於是往時學者羣起對於光合之中間產物,作種種揣測.

A.　各家學說之大概:

1. Berthelot 及 Kekulé 1861 年提出謂光合之第一步產物爲蟻酸 HCOOH 或含蟻醯基(Formyl group) HCO— 之化合物.

2. Von Bäyer 1870 年始以實驗爲根據,創出光合作用全部經過之假定如次:

a. 二氧化碳崩解爲一氧化碳及氧,水崩解爲原子態之氫及氧.

$$CO_2 \longrightarrow CO + O$$

$$H_2O \longrightarrow 2H + O$$

b. 氧結合爲分子態而放出.

$$2O \longrightarrow O_2 \uparrow$$

c. 氫及一氧化碳結合爲蟻醛(Formaldehyde):

$$CO + 2H \longrightarrow HCOH$$

d. 六分子之蟻醛,疊合(Polymerize)而生成一分子六碳糖(Hexose):

$$6HCOH \longrightarrow C_6H_{12}O_6$$

e. 六碳糖失水縮合而爲澱粉.

$$nC_6H_{12}O_6 - nH_2O \longrightarrow (C_6H_{10}O_5)n.$$

3. Gerland 1871年以葉綠素本身爲光合作用之產物.

4. Sachsse 1877 年提出與 Gerland 相同之意見.

5. Erlenmeyer 1877 年非難 Bäeyer 之假說,而於其所定初步作用中提出修改謂:

a. 二氧化碳與水先結合爲蟻酸及過氧化氫.

$$CO_2+2H_2O\longrightarrow HCOOH+H_2O_2$$

b. 此兩化合物乃各各分解而放出氧.

$$2HCOOH\rightarrow 2HCOH+O_2$$

$$2H_2O_2\longrightarrow 2H_2O+O_2$$

後此各步變化,Erlenmeyer 無所道及.

6. Pringshem 又提出 Hypochlorin 爲光合之中間產物.惟據 Hilburg 之實驗,則CO_2之供給斷絕後,葉中所能提出之 Hypochlorin 分量並不少減,故 Pringsheim 之說,不攻自破.

7. Vines 1886 年見原形質能分泌一種高級碳水化合物卽細胞膜質 (Cellulose),以使細胞膜增厚,而CO_2之吸收一經開始立見澱粉之生成,乃推想葉綠體本身必與光合作用有更密切之關係,而疑澱粉粒之生成爲葉綠體之一種分泌作用.於是假定光合之經歷爲:

a. 由二氧化碳及水先生成類似蟻醛之物質如 Bäyer 之假定.

b. 此類似蟻醛之物乃與土壤中吸收得來之氮鹽及硫鹽之氮及硫及原有蛋白崩解後所生成含氮化合物中之氮化合成蛋白質.

c. 此蛋白質旋受葉綠體之同化,而變爲葉綠體原形質

之一部.

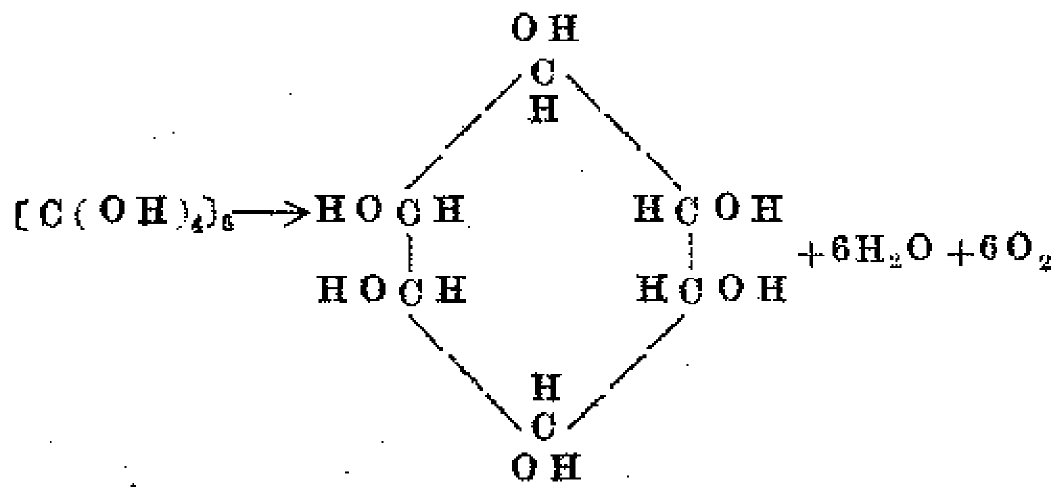
d. 葉綠體原形質,乃析出體質之一部分成澱粉粒而分泌之.

8. Crato 1892 年又提出一種特殊之假說,其程序爲:

a. 二氧化碳及水結合爲正碳酸(Ortho-carbonic acid),溶存於細胞液中.

$$CO_2+2H_2O \longrightarrow H_4CO_4$$

b. 此正碳酸六個結合而生成一輪質環,旋復分解而生成六分子之水,六分子之氧及一分子之六氫氧基酚(Hexahydroxyl phenol):



c. 六氫氧基酚起分子重排(Molecular rearrangement)而變爲葡萄糖(Glucose):

$$C_6H_6(OH)_6 \longrightarrow CH_2OH(CHOH)_4CHO$$

9. Bach 1893 年由亞硫酸在光中能析出硫與水而生成硫酸之變化:

$$3H_2SO_3 \xrightarrow{light} 2H_2SO_4+H_2O+S\downarrow$$

著想假定另一種光合之歷程為:

a. 水與二氧化碳結合成碳酸.

$$CO_2 + H_2O \longrightarrow H_2CO_3$$

b. 碳酸崩解生成碳與水及一種新酸類.

$$3H_2CO_3 \longrightarrow 2H_2CO_4 + H_2O + C.$$

c. 碳與水結合成蟻醛,而新生成之酸則崩解為過氧化氫及二氧化碳.過氧化氫再分解而生成氧.

$$\left.\begin{array}{l} H_2O+C \longrightarrow HCOH \\ H_2CO_4 \longrightarrow CO_2+H_2O_2 \end{array}\right\}$$

$$2H_2O_2 \longrightarrow 2H_2O+O_2\uparrow$$

B. 澱粉與糖:

1. Schimper 1880年發表其歷年來關於植物體同化作用中碳水化合物全部變化之機轉: Schimper 見植物體內部不見光線之深處所含白色體(Leucoplastid)中,亦有澱粉粒;此種澱粉粒由糖類之供給而生成.若曝此種白色體於日光中,亦能生成葉綠素.由是乃決定糖類在光合作用中之生成實較澱粉為早.澱粉之生成,則為繼起而次要之步驟,無論色素體有色無色,皆必先生成糖然後始有澱粉.一時學者以其與Sachs之假定,"澱粉為光合之第一步產物"一說,大相牴觸.羣起非難之.顧 Sachs 獨忻然以 Schimper 之說為是,與己說了無矛盾,而深咎反對諸學者之孟浪,將一己之假定誤引穿鑿,致生誤會.1865年在其 Expermientalphysio-

logie 中,Sachs原已聲明二氧化碳與水一遇合而放出氧,立卽生成糖,不過澱粉爲光合之第一步產物而已.

至1885年,Schimper乃明定葡萄之生成,確在澱粉之先,及達一定濃度後,糖乃變爲澱粉.

2. 唯Sachs至對於糖之爲澱粉前身,雖已承認,而於糖之來歷,Bäyer所說是否確當,則絕未提及,第謂由光合生成糖時,有同化功能之葉綠體,其原形質中之蛋白質,亦必有相當參與,與Vines之說,略復相侔.

3. Böhm 1883年由多次硏究之結果,斷定糖實爲澱粉之前身,久置暗䧟,澱粉粒完全消失後之綠葉,若使與糖液(蔗糖葡萄糖均可)相接觸,或插其柄於糖液內,則澱粉粒立又顯出於細胞中.

4. Meyer及Schimper 1885年有同一之證明,Meyer且證明在光合進行時,植物體中同時有糖及澱粉並在.

5. Laurent 1887年 Klebs 1888年 Acton 1890年皆謂各種低級碳水化合物之溶液,可使植物生成澱粉.

C. 葉中存在之糖類——同化產物:

1. Sachs早年曾記載謂有時同化作用後不能發現澱粉之存在,如洋葱(Allium cepa)之葉中,卽廣有葡萄糖而無澱粉.

2. Müller-Thurgau 1882年謂葉中澱粉減少後,則還原糖之量增加.

3. Kayser 1883年自某數種植物之葉中析得蔗糖及其

轉化(Inversion)後之產物,且曾設法使蔗糖自細胞液中結晶分出.

4. Meyer 1885 年證明在光合時葉中同時有澱粉及還元糖並在.就20Kg.之 Allium Porrum 之葉,壓取其汁,而以醑精及醋酸鉛沉澱之,得還元糖,此糖雖未能結晶分出,但已得一種在204°C熔烊之 Osazone,其旋光力爲 α D—20°其性質與轉化糖極爲近似,唯未能析出葡萄糖及果糖之單體耳.

5. 同年Meyer在Yucca之葉中發現菊糖(Inulin).

6. S. Keim 1891 年見櫻桃之葉中有蔗糖存在.

7. Brown及 Escomb 細檢各種植物葉中所含之糖,結果得有蔗糖(Sucrose),麥芽糖(Maltose),果糖(Fructose),葡萄糖(Glucose)四種.同時不意中發現金蓮花(Tropaeo'um majus)之葉,光合之初步產物,絕對必爲蔗糖,光合進行正烈時,葉肉柔膜組織之細胞液中,卽有多量蔗糖堆積.故斷定蔗糖爲一種暫時儲存養分,後此各種代謝變遷,胥以蔗糖爲起點,葡萄糖果糖爲蔗糖之分解產物,而麥芽糖則起自澱粉之分解.容或蔗糖之生成,須先經果糖葡萄糖等較簡單之階級,唯其存在必甚暫,俄頃間卽已變爲蔗糖也.

D. 光合中是否有蟻醛生出之研究

1. Bokorny 1888 年以水綿(Spirogyra)爲材料作種種實驗.用種種方法使之吸收蟻醛,試覘其能否生成澱粉.蟻醛本身爲一種強有力之毒物,故關於直接用蟻醛飼育之實驗

皆失敗,唯用磺酸鈉氧代甲烷基(Sodium oxymethyl sulphonate) $\left.\begin{matrix}O\\H\end{matrix}\right\rangle C-O-\underset{\underset{O}{\|}}{\overset{\overset{O}{\|}}{S}}-ONa$ 及 Methylal 等能徐徐放出蟻醛之物,則水綿不致死亡,且能略有澱粉生成.第在常態中則水綿體內不能檢出蟻醛之存在,又他種物質亦往往可以形成澱粉;故不能遽斷蟻醛必爲光合中之一種產物.

2. Curtius 及 Reinke 1897年見葉綠在光中時含有蟻醛,但在黑暗中則又消失.

3. Reinke 1899年復謂綠葉中蟻醛無游離存在者,唯成一種分子式爲$C_2H_4O_2$之物.

4. Pollacci 1900年謂綠葉中可析出游離蟻醛.

III. 光合產物之定量的研究:

1. Weber 1878年,在Sachs之實驗室中,作綠葉所形成碳水化合物之定量研究,由重量之比較上決定植物所生成澱粉之分量,方法不甚精密,故結果只能得一種近似値,據其計算:最小者爲金蓮花葉,每平方公尺,每小時生成澱粉4.446 gram. 最大者爲向日葵葉,每平方公尺,每小時生成澱粉5.56 gram.

2. Sachs 1884年發表其著名之半葉研究法所得結果,數量較爲正確.其法爲在某植物體上選定一葉,左右適相對稱而無差者,於淸晨沿其中肋剖破,取此半之某部分乾燥

而權之.至黃昏,再在他半上位置相同大小相等之一部分,照同一方法處理之而求其重量,兩兩相比,所差之數,卽認為光合之成績體重量.據其計算,則向日葵之葉,每平方公尺,每小時能製成碳水化合物 0.914 gram.後此更將供檢驗之葉,摘離母株,以免養分輸入體內之損失,則得數為 1.5 gram.而同一單位所吸收CO_2之量,則為 1.8 gram.

此種實驗,當然有種種因子,使其結果不能正確:—

a. 不能選擇得完全相等之兩部分以作比較.

b. 若任葉在莖上,則所製產物,必因運輸至體內而減少,使結果得數過小.

c. 若使葉與母株分離,則同化產物堆積時,又使其器官生別種變化.

d. 同化時同時尚有呼吸作用之進行,亦足使重量之測算發生錯誤.

唯事實上雖有如許窒礙,然就Brown及Morris 1892年更精密更進步之方法測驗所得結果,覺亦相去不遠.

3. Kreussler 1885年以強度約等於瀰散光之電光照射西洋藪莓(Rubus fruticosus)之葉於含有0.3% CO_2之空氣(十倍於正常空氣之含量)中,則每平方公尺之葉,每小時能崩解CO_2 2.5 gram.換言之,卽約可生成 1.54 gram 之澱粉.

4. Brown 及 Escombe 1899年以設計精密完備之器械作實驗,測定面積之葉在光綫下所吸收之CO_2之分量.用含CO_2分

量一定之空氣,在定溫下以定速度使之通過該葉,每次實驗六小時,然後再檢定其所含CO_2之濃度.計算之結果,知光之强度爲一定時CO_2之吸收量與其分壓成正比.

據其測定,則向日葵之葉,每平方公尺,每小時能吸收412 c.c. 之 CO_2, 可製成0.8 gram之糖.

IV. 光合時之環境條件:

生物之生命,爲一種極複雜之錯綜與顚頏,環境條件偶變,卽足以影響及於生活作用中之平衡,從而生命現象亦起變化.光合爲生命現象最高表現之一種,故其所受環境之限制亦極大.大概言之,光,熱, CO_2 之濃度,與結果產物之堆積,皆足以影饗及其進行.四十年中關於此方面之研究,顯著之結果,約有:

1. Godlewski 1873年之觀察,知空氣中所含CO_2, 以8—10%爲最適濃度.

2. Kreussler 1885年之研究,以含定量CO_2之空氣,供給植物,而以强度爲一定之電燈光照射之,檢定CO_2受利用之度,結果知CO_2之銷耗,依其供給量之增加而增加,唯不成比例.大概令植物之光合力增加至於常態之二倍,當增高空氣中之CO_2至17倍,卽使空氣中含CO_2達 2.56%. 至於最適濃度,當遙較 Godlewski 之計算爲低;大概光合作用進行最速時,空氣中所含CO_2只能在1%上下.

3. Blackman 1900年以爲CO_2之濃度給予光合作用之影響,

溫度之變化亦能上下之.且證明在强度不同之光下，CO_2之最適濃度有相比之變化.

4. Brown及 Escombe 1900 年更有特別重要之發現,蓋在某一種限度之內,雖如 Godlewski 之所言,光合之成績與CO_2之分壓成正比;惟此種CO_2之過量的供予,於植物本身祇有害而無益.光合作用進行加速後,植物之乾量初無明著之增加,然其營養中之平衡大受擾亂,結果成長發育均失正常,生殖作用卽首蒙其影響.若CO_2之給予量增加愈高,則結果亦愈顯,唯要以CO_2之含量增大兩倍至多或三倍時爲最顯.

5. Montemartini 1895 年謂光合時CO_2之濃度雖可以增高,然空氣中含CO_2達4%以上時,植物之生長,卽生障礙.

6. Mangin 1896年謂植物之光合,在空氣中含CO_2由 4 至於 15% 時,雖極活躍,然植物本身,則大蒙其害.

7. Boussingault 1868 年時,發現若將樹枝離母株,使其光合結果物無從輸出時,則離株之他種病態尙未能發生時,吸收CO_2之活動,卽已逐漸停止.

8. Saposchnikoff 1890 年見葡萄 (Vitis) 之葉中,光合作用進行達一定限度後,卽因光合產物之堆積,其活動亦遂停止.

第五節　光合中勢能之變化

植物利用空中之CO_2以製造有機物質之現象,發現之初,皆稱爲碳氧同化作用 (Carbon dioxide Assilmilation), 或碳素同化作用 (Carbon Assilmilation), 學者所注意者,皆在其化學方

面之研究.至於就其中勢能之變化,作物理學方面之研究者,則爲時雖較早,但比較上反不若作化學研究者之多.即其作用之名稱,亦直至1893年 Mac Millan 提議改用光合作用(Photosynthesis)(Photo=光, synthesis=合成)後,始得於物理化學兩方面之變化,同時顧及,而使人一瞥之下,即得明確之概念也.

光合之材料, CO_2 與水,皆爲潛勢能(Potential Energy)極低之化合物,然光合結果所成之碳水化合物,則縮合之程度愈高時,其所蘊藏之潛勢能亦愈富.此蘊藏之勢能,蓋全取自日之光與熱,而以化學勢能(Chemical energy)之狀態,儲之體中者.個中勢能變化之機轉,經過去四十年中之研究,始得漸歸了然焉.

I. 光與光合: 日光爲光合之必要條件,徵諸前節所述葉綠之生成.葉綠體之作用諸節,蓋已無可置疑.於決定光與光合作用之關係後,一般學者之注意力,乃移而至於求知日光中究竟某一部分之光綫爲最有力量,於是光帶(Spectrum)與光合間關係之研究以起.

1. Brewster 1834年作葉綠素之吸收光帶圖.

2. Draper約於Brewster之後十年,復作同一之研究,其結果顯示光綫之促成CO_2之崩解者,黃色部(即照耀力最强之部)爲最力,故一時學者皆以爲綠葉中光化學變化,實與其所受之光之照耀力成正比. Pfeffer 於此點大爲贊許,故益得

信仰.

3. 1868至1870三年之間,學者乃於此問題深加注意.思決定各種化學條件,物理條件各因子間之固定關係.在此方面工作者,有 Timiriazeff, Lommel, Müller Pfeffer 等諸人,而 Timiriazeff之研究,尤爲重要.

Timiriazeff 之第一種成功,卽爲革除歷來所信仰之"光合力與日光之照耀力成正比"一觀念.此說所本據者爲 Draper 之實驗; Timiriazeff 則謂 Draper 所實驗之光線爲不純之光.就CO_2之崩解度,照耀力,及勢能量分別作種種曲線,結果發現化學變化之曲綫,並不與 Frauhofer 氏照耀力曲綫重合;在可視光帶中,雖略與勢能曲綫略有關係;然就光帶全部中之曲綫言,此兩綫亦絕無關係,蓋勢能綫之最高點在紅下線 (Infra-red ray) 部中,第据 Cailletet 實驗,使光通過碘之二硫化碳溶液,析得其紅線,使作用於植物時,固不見有CO_2之崩解也.

4. Sir John Herschel 曾有一定律,謂凡光化學之變化,唯作用中之物質所能吸收之光線始能引起.生理學者思將此定律應用之於光合作用一方面.努力於此者,有 Jamin, E. Baepuere', Lommel, 及 Timiriazeff 等諸人,而最大榮譽,則屬之於 Lommel.

1871年, Lommel 在 Poggendorf 之 Annalen 中,發表 Uber des Verhalten des Chlorophylls zum Licht, 謂引起光合之光線,確以葉綠

素所能吸收之紅綫,在 B 與 C 之間者爲最有力.此綫之機械强度 (Mechanical Intensity) 極高.由是後來學者遂公認 Lommel 爲確定"二氧化碳還元量爲日之輻射勢能與葉綠素所吸收勢能之函數"定律之第一人.

5. Timiriazeff 則以爲 Herschel 之定律,在光合作用方面不能應用: 蓋光合作用中吸收光綫者爲葉綠素,而實作用之物質則爲不能吸收光線之 CO_2. 由是 Timiriazeff 乃另提出一假說,謂葉綠素之作用不過爲一種感觸劑 (Sensitizer), 能吸收光綫,而使之在已體以外引起化學變化.而與葉綠並存之兩種色素,卽葉黃素 (Xanthophyll) 與 Protophyllin,亦有相當作用.

6. Pringsheim 1874 年則以葉綠素所吸收之光線,並非利用之以作用於CO_2而使之還元,實因此等光線極有礙於光合作用之機轉,故吸收之以免光合受障礙.此說原爲理想中所擬出,無實驗上之根據,故旋踵間卽爲其他學者所譏彈而破裂.

7. Nagamatz 1886 年由實驗證明透過綠葉後之光線,無再引起光合作用之能力, Pringsheim 之假說,遂一敗塗地.

8. Timiriazeff 1871 年改良 Bunsen 之氣體計量器(Gaso meter), 使極精密,至於可以量出0.001 c.c.之氣體.納葉於小形扁平管中,以含定量CO_2之空氣環之,然後以欲試之光帶中色線曝之,再量其管中空氣所含 CO_2 之量.以其器械極精

細,故不難利用小孔中所透進之光綫以資實驗,而光帶之不純於是可免. N.J.C. Müller 同時之實驗,即因光帶不純而結果不正確.而自有實驗以來,所以實驗某種光線之作用者,所用方法,無非將植物栽培於色玻璃板後,或使光線通過鉻酸鉀或重鉻酸鉀或硫酸錏銅等色液後照射之;或將葉受此種光線.光線經此種處理後,不特性質已變,即強度上亦已受重大影響,而所用以阻止他種光線之羼入者,又未必真能將他種光線吸收罄盡.有 Timiriazeff 此法之後,關於光帶與光合之研究,乃克臻完善焉.

Timiriazeff 更以生活之八仙花 (Hydranglea), 先置暗中三四日,使所含澱粉皆溶解輸入體內後,再以極強極純之光帶照射其上至五六小時之久.然後脫去葉綠素,更以碘液處理之,則見光帶各部中,有澱粉粒依其各部之分界線生成,而成為一深淺不同之藍色帶.帶色最明顯之部分,在於BC之間,向藍色端漸漸淡褪.由此實驗可證明藍色部不能分解 CO_2. 後之更以補色光帶 (Dubosg之發明,能使日光分成兩光帶,此一帶之色適為他一帶之補色)法,證明在藍色部亦能分解 CO_2. 唯其力量僅為紅黃端之一半.

9. Engelmann 1881 年提出應用細菌法以檢出微量之氧.至 1884 年其方法始告完成. Engelmann 發現 Bacterium termo 在遊離氧中有活潑之運動,而在缺氧時則極鈍滯,乃思利用之以檢出光帶中若何部對於光合之貢獻最大.用綠色

下等藻類一條,以絕不含氧之水裝置於顯微鏡玻璃台上,加細菌於其中,然後加蓋玻璃而以蠟或油封其口,俾外間之氧不致闌入.裝置既畢,乃引一極純光帶照射此藻,若干時後再鏡檢之,當可見細菌羣聚於呼出氧氣最多(卽光合最旺)之處大肆活動.結果亦唯有B-C之間爲最强,與 Timiriazeff 之所見者相同;唯F-G間另有一進較小之活潑區域.

10. Pfeffer 以同一方法實驗,謂不能得同等之結果.

11. Reinke 發明一種器械,自名之爲 Spectrophore, 能任意擇用光帶中之某部分光線.使自自動日光反射鏡 (Heliostat) 得來之光線,經一透鏡 (Lens) 而達三稜鏡上,使其光帶映於一玻璃屏之面.屏後有木板兩片,可以任意開闔,而使屏上之光,依需要之闊度透入屏後.木板前面,裝一透鏡,使自屏得來之光,集成一線,以射於其供實驗之植物.更用各種圓柱鏡,使光帶中各種光線集中成等闊之帶,以資比較.其硏究自 1884 年至 1885 年繼續一年有餘,唯絕未發表絲毫結果,亦奇事也.

12. Engelmann 1884 年發現藍色部有次高頂點; Timiriazeff 1885 年又證實之,至 1886 年, Bonnier 及 Mangin 更謂紫外線 (Ultra-violet ray) 部,亦略能引起光合作用.

13. Kohl 1897 年,證實 Bonnier 及 Mangin 之發現.

14. Pfeffer 始終不承認紅色部以外有頂點,謂最有效之光波爲波長 655—590 $\mu\mu$ 之處.

15. Reinke 亦謂僅有一項點可尋,最有效之光波波長爲720—685 μμ. Engelmann 謂紅色部之有效光波波長爲685—655 μμ 之處, Timiriazeff 亦贊同之.四家三說,所定之處,適相介接.

II. 溫度給與光合之影響: 此問題之研究,在此四十年中,過問者甚少,雖 Kreussler 一人爲最有成績.

Kreussler 1890 年謂溫度漸增至 25°C 時,碳水化合物之合成亦漸增高.某數種植物以 40°C 爲最旺.過此以後,無論何種植物之光合作用皆驟減;至於 45°C 卽完全停止. 1888 年, Kreussler 曾作低溫之實驗,結果見 −2.4°C 時荆棘之葉,尙能微有光合作用. 1892 年, Jumelle 證明其不誤.

Kreussler 之研究,雖未能得完善結果,然後此 1902 年 Blackmann 及 Matthaei 之研究,則全以此爲張本.

III. 光合中勢能之利用: 光合時葉綠素所吸收之勢能,如何利用之問題,四十年中研究之成績如次:

1. Ed. Becquerel 1868 年據實驗之結果,謂向日葵能將所受日光之二百五十分之一儲爲潛勢能.

2. Timiriazeff 1870 年以爲當有 1%. 又據其用 Phytoactinometer 試驗之結果,以强光照槭樹之一片葉,則投射光被吸收 27%; 若疊三葉而照之,吸收量達 31%. 西洋菩提樹葉一片

吸收29%,三片吸收35%.又槭葉一片,吸收黃光 13.8%,紅光 10%.

3. N.J.C. Müller 1976 年用一種遙較精密之方法以日熱計(Pyroheliometer)及適於起光合之綠葉,同時曝於日光下,以作實驗,知在最好環境條件中,吸收量可達5%.

4. Detlefsen 1886 年,將曝於日光之綠葉下面,置一電計微量寒暑表(Thermopyle),記出無CO_2不能起光合時透過此葉之日熱,及在含10%CO_2之空氣中起光合後透過此葉之日熱,而作比較,結果見在光合時葉能利用投射光線之0.3至於1.1%,以使寒暑表之溫度略增,唯其理想雖極高,惜乎方法不精,故尙多錯誤.

5. Timiriazeff 1894年改良Müller之法,作相似之實驗,結果謂葉能利用日之勢能之3.5%.

6. Brown 及 Escombe 1898, 1899 兩年之實驗,(詳見前第四節III)估算日之輻射勢能受綠葉所吸收之量及以後之利用,用Callendar 氏記載輻射計(Recording radiometer)量葉面所受之光及熱能之總量,又同時計算實驗中葉所吸收CO_2之量與蒸出之水量,兩相比較,結果知八月中強日光之下,葉能吸收所受投射勢能之28%,以生成體內功能(指物理學上之 Work).

此28%中,其27.5 %用以蒸發由蒸發作用所排出之水,餘0.5%則用為光合之能.然在強彌散光下,則能吸收投射

勢能之95%,而以2.7%供光合.由此可知光之强度對於勢能之吸收及其利用上,有絕大影響.

本章原係石聲漢君所作,曾刊登國立中山大學出版之「自然科學」;茲商得其同意修改數處,收入本文,俾植物生理學史成爲完璧.不敢掠美,因附誌於此.

（未　完）

最近之法國生物學界

（續第一卷第三期）

何　春　喬

格羅——生命現象之性質與長度——外因說與內因說之爭辯——動物的分布與古生物學——環境與動物相——物種起原——先適學說——結論

三,格羅.(L.Cuénot)

格羅氏現任朗西(Nancy)大學教授.對於動物學有極廣漠之研究.晚年粹平生之所學,著了一部偉大精粹的書,叫作"動物物種之發生"(La genèse des espéces animales).此書對於生物學各大問題,皆有獨到之見解.最近又著有"適應"一書,亦著名於世.他對於生物適應的現象,有一種特殊的解釋,不落達爾文拉馬克之故套,尤爲其學說之特色.

現在將他這兩部名著,依次分析於下.

生命現象之性質與長度

便是現在還有許多人相信生命之中必有神祕之物.每一個生物的集團,必是一片神靈的光花燃燒之表現.

所以動物的身體與器官,必有一種能思想能動作的實體支配著.這種外觀察覺不出的實體,必有他特殊的意義與目的.至於身體,不過是這個實體的忠僕,執行主人家的命令而已.

這一類生機說的見解,乃古代柏拉圖的觀念派之遺毒.依據觀念派的見解,則所謂物質界或物理現象,乃永久大觀念之多少實現於外者;而此永久之大觀念,乃為真正之"絕對".

試仔細研究生物,便知這樣淺薄的見解,實毫無根據.最下等的原生物(Protistes),為生命最簡單之表現.試檢驗其本體,便知其為極複雜之異質(Hétérogène)分子組合而成.便在這個異質組成中,演出生命的現象.其中有各種的膠狀體分集為大小各種的微粒,分擔着輕重不等的電力,到了電解的溶液中,便會自由的游泳起來.核與纖維居中,外則有半滲透性的膜,用與外圍判分;此外還含有不溶解的物質,或係晶體或係非晶體.

"在一個細胞之中,因異質集合而有生命;集合之外,別無所謂生命.此集合之物,或為澱粉,或為晶質,或為一片染色體,或為一粒細胞質,彼此相較,不得謂前兩種較死而後兩種較生.彼此皆在生命互相反應之中,各顯其作用".

"所以生命與異質是不可分離的.我們所稱之生命現象,乃繼續反應之結果;所謂繼續之反應,一方面起於環境與

細胞之間,一方面亦起於細胞內彼此各物質之間.”

當這一副化學的機器開動了以後,不免漸次有一些部分的消耗與部分的汚垢,於是從前溶解性的物質,此時不免如化學家之所云,沉澱而堆積.於是該化學的機器,對於自然界一切外力之侵害,尤其是對於寄生蟲之攻圍,漸次衰微而減少其抵抗之能力.

正如Bichet之所云:“抵抗死亡便謂之生命”.衰老之進行,雖極遲緩,但並無停止之期.所以衰老一起生命便成江河日下之勢.身體衰弱,如被活吞.到了某一定的時期,便達到了死亡的時期.所謂死亡卽前述集合現象之瓦解;因之,所謂生命之持續現象,宣告截止.

生命之持續,不是無限的.每一種動物,都有他生命持續之最高限度.此限度之在各種動物,相差極大,但尚不知其原因之所在.與食料無關,亦與體大無關.獅係肉食,生命可三十五年.羊係草食可十五年;但鹿亦草食可達四十年.鼠體小,約二三年.象體大可百年至百二十年;但鸚鵡亦小,竟可生活到百年以上.其他鴿與雞,可達十年以至三十年.龜三百年.珠貝五十年到一百年.蜜蜂五六月.海葵六七十年.

外因說與內因說之爭辯

自從突變現象發現以來,學者之中,已有人特別注重內因.以後突變說又與曼兌爾遺傳律聯絡起來,於是內因說益盛.因爲以前許多學者雖知道溫度濕度光線營養等,都

能影響於生物之形體然大都難於遺傳;至於突變,則不假外因,驟然出現,且能卽刻固定而遺傳.至是而學者都知道外因爲不足輕重.他們將生物變異,分爲性質絕對不同之兩種:第一爲波變,(Fluctuation),完全屬於個體性的變異,是乃由外因而生,不能遺傳於後代.其二爲突變(Mutation),係突然出現,原因內發,可以遺傳.波變不過是一個固定位置之照例的左右擺動,絕對不會影響到中央固定之位置.這種變異,有時傾向甲方,一會兒又可以回到乙方的.至於突變,乃內部平衡破裂之表現.一經破裂,必以新的平衡而固定.平衡之破裂與新的平衡之成立,原因皆在內部.此種內因,以前主張漸變的進化學者,皆甚忽視,到了突變學派出,乃認此爲進化之主因,或甚至認爲唯一之原因.生物發展中"階級的繼續(例如季節的變形與變態的發展),乃由內因所決定.卽分析到了最後,仍受父母遺傳質之支配;至於外界可變之因子(如營養,溫度等),不過生物發展到某一個喫緊期能略予加速或減退之而已".

由此可見季節的變形等一切發展的變異,皆受生物遺傳質的支配.至於外因,不過暫時的作用,無永存之價值.但是反對者則以爲眼前季節變形之交替,雖受內因的決定,但此所謂內因或遺傳質者,究何由成?此必係積年累月之中,該生物投置於某一環境中乃被熔鑄而成該生物眼前身體之各部.然則所謂內因或遺傳質者,不卽長期之外因

所形成乎?

突變派亦不否認外因,但以為外因之所及,僅以身體質為限;無論如何,不能影響到生殖質;因之,不能遺傳於後代.但有一點,值得我們注意的,就是他們雖認定突變之原因在內部,亦認定外因可以使突變易於產生.所以 Cuénot 講道;"有時普通的外因,以及身體方面之改變,如果加於卵子或精子育成 (Ov genèse ou spermatogenése) 中之感覺銳敏期,能使配偶子(Gramètes),容易出現突變."

有幾個著名的實驗,向來被學者引為後天遺傳之證明者, Cuénot 氏皆一一加以批評,或予特殊之解釋.

例如 Standfuss以某種蝶類 (Venessa urticæ) 的蛹,放在冰點以下之飼育箱中,後來從八千二百三十一個蛹裏面,得到從來沒有的黑色翅蝶四十二個.此變色之黑蝶,自相交配,結果於兩百成蟲中,又得四個黑蝶.我們應予注意的,即此次交雜後所得之幼蟲與蛹,係在普通環境中飼育而成者.乃第二代仍有四個黑蝶出現.不過此四個黑蝶,都係雄性,且係一母所生.

又例如 Fischer 氏以燈蛾 (Arctia caja) 的蛹,每天放在零下八度,約經幾點鐘之久.結果四十八個之中,得到四十一個形態歧異之蛾,翅上帶着向來沒有的黑色.此新得之蛾,試使自交,結果得到一百五十六個普通蛾,因為此次交配所得之蛹,乃在尋常環境中育成者.但有一點足以引起我

們注意的,卽除了一百五十六個普通蛾之外,仍有十七個變色之蛾;黑色之點,佈滿全翅,肖似其兩親.

這兩個著名的實驗,足以證明後天遺傳,似無疑義,但是Cuénot 則別有解釋.他以爲變色之原因,仍在內部,外界情境之改變,不過誘因.內因如果缺乏,單是外因決不會生效.他問道:爲甚麼用作實驗的許多蛹子,有變有不變呢?是知同有外因,不能引起同樣之變化;所以然者,內因有所不同.蓋善變之個體,必內部先有變異之機.換言之卽內部構造,先已失却平衡;外因加被,內變乃顯.Standfuss的實驗中,有足暗示此理者.試看第二代四個黑蝶,同出一母,足徵必此母蝶,內構特殊;且四蝶均雄,尤可用 Morgan 輩發現之連性(Sex-linkage) 遺傳來說明.

試再徵引兩個證明後天遺傳的例子於下:—

Kammerer 曾取兩種蠑螈作實驗的材料.一種叫作黑螈(Salamandra atra),生活於亞爾普士山高峯之上.該處寒氣極重,溫度之變化甚大.又山上很少瀦水之區,因之此螈乃生活於陸地之上,不復入水爲生.其形極小,體色甚黑,故稱黑螈.每產僅兩子;子在母體內,經過胎兒發展中一切應有之階級後然後出世;其時鰓已脫落,可以直接營陸地之生活.

又一種蠑螈叫作斑螈 (Salamandra maculosa).此螈生於平原,或生於矮山及幽谷中.體被黃色斑點,故稱斑螈.身體比黑螈大;當生殖的時候,必尋得瀦水之區而產子.每產多子,

多可得七十二個,少亦在十五以上.子產出時,僅有初步之發展.具羽狀鰓故營水中生活;必經數月,乃棄水而登陸.

凡此皆自然之狀態. Kammerer 試驗,乃顚倒這兩種蠑螈的環境,察其影響於發展之深淺;再看這些後天的影響,有無遺留於後代的能力.他從亞爾普士山上取囘黑螈,飼育於較高溫度之中,且令飼育箱中,濕度極重.又在飼育黑螈之旁,設有瀦水小池,任其自由利用.在這個與原產地極端相反的環境中,發展特別加快;產子比較的早,產子亦比較加多;每產五子到九子.所生之子,亦較幼稚,仍有鰓,所以卽入水生活,待發展完成後乃登陸上.

反之,再將斑螈飼育於冷而乾燥的地方,旁邊不設瀦水小池.結果生子較少,至多不過七個有時僅生兩子.其尤異者所生胎兒,已充分成熟,鰓已脫落.

Kammerer 的試驗中,尤有驚人的一點,卽他發現黑螈經此試驗後早生之子,達到成體後,雖置之於原來之環境中,亦可遺傳其經試驗後所得之性質.卽試以經此試驗後所得之黑螈,置於與其祖先習居之山地相似之地方,仍能生有五子,且各有鰓.不過用斑螈作返祖試驗,不如此之顯著.然卽此黑螈之例,已足爲後天遺傳之直接證明.在生物學上,當然有非常重大的意義.

此外Tower氏類似性質之試驗,結果尤爲顯著.他所用的材料是一種鞘翅類,名叫茄蜂 (Leptinotarsa decem lineata), 乃

寄生於茄之一種金花蟲.這種昆蟲每一個翅鞘上,必有五條平行縱紋,胸部有斑點,以此為特色.但在自然界有時亦呈各種異態,不過數目不多,統計約占六千分之一. Tower 氏試以此種昆蟲,置於攝氏溫度三十五度之中,再令空氣乾燥氣壓極低,必為此裝置,異態之個體乃激增.Tower氏更看出此特殊外力之參加,以在兩性細胞形成或成熟之期為最有効.因此Tower氏叫這個時期為易感期

據Tomer氏對於數字之計算:凡經此特殊外力後所產之卵子,試再飼養於尋常環境中,其結果在五十八個育成之成體中,計有

八十二個呈 pallida 異型;

二個呈 immaculo thorax 異型;

僅四個呈decemlineata普通型.

Tower又有一次試驗,所用之外力,仍係高溫.但空氣濕潤.結果一百一十四個中,九十個屬普通型;二十三個呈 melanicum 異態型,一個呈 tortuosa 異態型.各種異態,皆能遺傳兩種試驗,都足以使異態之數增加.其何以致此,則不能不認定為外界物理環境變化之結果. Cuénot 對於此例亦不能不認定"外界精境之變化與突變之發生,有因果的關係.他並且講道:"總之,要得到一些突變的機會,必使外圍情境,有極深之改變".

然則外因亦為突變發生不可少之條件;但與舊日之進

化學派,有甚麼區別呢?所不同者,舊日之進化學派,承認後天遺傳突變派則否之.

據 Cuénot 氏說法, Tower 氏的試驗結果並不足以證明後天遺傳.因爲處於特殊環境下之茄蜂,乃係成體,雖置於三十五度之高溫下,本身並不發生變化.異態之發生,特在其所產之子;是其子自呈異態,並非乃親後天之遺傳.

舊日進化學者,每忽視變異機制中之內因.環境之變化,必及於生殖質,乃有突變之產生.此於Tower氏發現之易感期中,可以證明.蓋所謂易感期,卽相當生殖細胞形成或成熟之期.外界影響,直達於生殖細胞;此生殖細胞,發生突變,竟達於將來之成體.並非某成體受外界影響後,身體起甚麼變化,再以此身體之變化,經生殖細胞而傳送於後代.還有一件應該注意的事項:突變之性質,不必與外界誘因同其屬性外界誘因不同者,而出現之突變或竟相同;反之,同樣之誘因,因所加之種類不同,或因所加之個體不同,而發生突變與否,或發生突變之性質,不必相同.蓋突變之主體在內部,誘因雖有使突變發生之機會,決不能操縱突變之性質.一個生物體,彷彿一個化學之集團.外界理化之誘因,作用不過如接觸劑.接觸劑的作用,可以使這個化學的集團,容易發生自發的反應,但並不能參加此反應而產生新的性質.

總之:

一,突變爲新種造成之重要原因;

二,突變常在生物體之內部,屢代潛修,到了相當時期,突然發現.發現之時期,不必假助於外界之誘因;

三,外界誘因亦屢爲誘導突變外出之利器;但其作用,亦止於誘導.髣髴顯像劑一般,能夠將原來潛伏的像,顯示出來;但並不能造像.又如一盤的機制,已經安排停妥,外因不過觸發的作用.以後的一切經過,依安排之次第,源源而來,便與觸發的動作無關了.有時外因有篩子的作用.例如個體組織,非常複雜,有了這個篩子,倘設置一個環境,因而內部安排了的幾副機制,僅一副可以透過;

四,誘導,教育,選擇與經驗,都是篩子的作用;

五,突變與波變,也不見得有絕對的區別.上述長期潛伏與準備之突變,外因亦有時參加作用.最初外因的作用縱有所改變,亦極不固定.但積累太多,有時足以破裂該生物原有之平衡,而成立一個新的平衡狀態,其結果或竟成生新的物種.

六,不過積累之波變,想達到固定與遺傳的境地,必以達到生殖質後爲有效.若僅及於身體質,則積累雖多,亦無效力.

每一個個體發展期中,必有一個易感期.在這個時期,生殖質最容易受外因之服感.這便是 Tower 氏所發現的生殖細胞形成與成熟之期.

七同樣的外因由長期之堆累而產生突變者,亦直接及於身體質而產生波變.突變與波變,性質可以完全不同,雖然外因並無差異.

以上為 Cuénot 氏對於內因外因輕重比較之見解.他對於拉馬克所謂因用不用所起之變異,可以遺傳之說,自然不能承認.他講:

"時常有些器官,因為生殖質突變的原因而萎縮,並不見有因不用乃退減的理由在." 他因舉出: "犬與貓常變成短尾;羊與牛常無角;鷄子常缺乏頭毛,或冠,或臀骨……;昆蟲無眼,生活於半明以至極明之區." 凡此都非因不用而退化,實突變所產生.

Cuénot 氏之解釋訓練,飼養等之何以能使物種增進,亦甚有趣.他講:—

練習決不能使物種真正改進.不過由練習可以摘發內部偶有蘊蓄之突變性而使之外現,同時其他不相干的性質,便沒有機會發展或日久脫落. "凡物種漸次增進之歷史如賽跑馬與快步馬之何以養成,皆不足以證明是乃訓練效果堆積之所成;不過就馬羣之中,先天賦有快蹄之稟性者選擇而孳生之.進步之原因,在於先天之稟賦;苟無此稟賦,訓練絕無所施其技".

人類與其他動物同.教育之於人種,絕無促進之效力.教育之效能,僅及於本身便截止.教育能賦予個人以知識,習

慣及經驗.但是這些經驗,並不能附麗在生殖細胞,以遺傳於後代.每一世代,不能不另起爐灶,從新費力.

動物的分佈與古生物學

每一物種之個體數,在地質每一時代中,分佈之廣狹,並不一致.分佈廣狹之原因甚多:氣候,食料,鹽分,及地面之斷續,皆足以操縱之.例如大夜蛾(Saturnia pyri)產生於北歐及南非全部,但是因氣候的關係,絕不能越亞爾普士山而北.在法國亦僅達於Bretagne, Normandie以及東北諸省爲止.反之,岩金蝶(Colias Palæno)則產生於北俄以及斯堪丁那夫半島間,或分佈於德意志及瑞士之高山寒峯,與法意相接處之亞爾普士極峯上,亦有發現於Pyrénés山頂者.此外則歐洲平原絕無此蝶之踪迹.

又例如虎,則又與上列兩例皆不同.凡密林叢草中皆可容虎,氣候似不足以限之,熱帶溫帶,固爲產虎之區,但北至外貝加爾及西比利亞地方,亦時見虎之跡迹.蓋其逐食之勇氣超過於畏寒之感也.

動物分布之進展,有時可以漸次追溯其經過之痕迹.例如前述之茄蜉(Leptinotarsa decemlineata),最初寄生於茄,以後流傳到了美洲,便寄生於與茄類似之一種植物,名叫Solanaum rostratum之上.此種情形乃先經由Texas, Arizona,以達於Canada之邊沿.到了千八百五十年至六十年之間,竟又能寄生於馬鈴薯.

現在生物之分佈狀態,尙多少受各該生物在地質時代分佈之影響.某一種生物之最初出現於地面,那時地球上水陸之分布,並不與現在一樣.以後又隨着水陸之改觀,而隨時改變其分佈之狀態.每一種生物之最初發生,大概僅限於地球之某一部分.是必該地有特別適宜的機會,乃能扶植該生物以遂其生長;日久漸次滋蔓,乃流傳到更遠的地方.例如毛猛獁 (Elephas primigenius) 最初係出現於戈壁或阿穆爾省一帶,後分佈於西北利亞之全部.漸乃蔓延於歐洲至西海岸之濱.其中有些越過柏林海峽;蓋當時尙有一條狹的陸地,連接亞美大陸.他們渡過這個地峽以後,便到了亞拉斯加以及北美全部.向使猛獁之產生在柏林地峽已斷之後,則美洲必無猛獁之蹤迹;又或產生與亡種,在歐亞未合之先,則歐洲亦必無此獸之化石.是知生物眼前的分布,實與各該生物之歷史有關.

所以生物學者常求教於古地學家,以便察知現在生物分佈之來源.同時古地學家亦從生物學者所得之化石中,推測地球水陸之如何變遷.

以上論生物分佈與外界物理的關係,次則論生物與生物相互之影響.啄木鳥集注之處能使某種樹棲之昆蟲,完全絕迹,此乃當有之事.有一種蝦寄蟲(Bacterium pestis Astaci),寄生於蝦,繁衍於歐洲後,幾使歐洲川河之蝲蛄全體絕迹.印度之貓鼬,偶然被人帶到了 Jamaique 島,頓使該島之鼠,

Copromys以及海燕等數種動物,完全消滅.葡萄牙的牡蠣,遇着了法蘭西的牡蠣便足以取其位置而代之.

又澳洲果蝇(Icerya Purchesi),大概因混在甚麼貨物裏面,便不知不覺的輸送到了世界各地,尤以到美洲與地中海一帶者爲多.這種昆蟲,乃於此新到的地方,普遍的寄生於橙樹及枸櫞樹,以至爲果樹業之大害.大家想得沒有辦法,乃從他的老家澳洲地方,特別輸入他原來的仇敵,乃一種瓢蟲(Novius cardinalis).自從此種瓢蟲輸入之後,果蝇之數乃大減,至今在果樹業上,已不大成問題.

每一個地域的動物相(Faune),必常成平衡之觀.這個平衡,不是靜的平衡,而是動的平衡,這個平衡常在波動之中,這方有所失,那方必有所補.偶然間,小的部分有了小的變化,結果或竟令平衡全失,但不久又回到一個新的平衡.

人類社會,也是一種動的平衡狀態.一個原來全體調和的社會相,因爲偶然有異種人之參加,結果可以使全體社會,起重大的改變.但最後乃成功另一種社會相,即另成一種平衡與調和的狀態.

有些動物,在地質時代中之某時期繁榮於某一地帶,現在或竟完全絕迹.這裏面的原因,有時很多.例如傳染病利害的時候,可能於短期間將某種之各個體,完全消滅.又如敵害之驟然輸入,不必侵害成體,單是捜殺卵子或幼蟲,都可以達到完全滅種的程度.其他如長期冬寒,久旱不雨,足

以使許多植物絕迹,因而依此植物為生之動物,亦全體陷於滅亡.又如冰原廣被,凝結不開,亦為亡種之利器.前述之猛獁,向來繁衍於北歐之平原,後來冰原廣被,食料缺乏,乃羣陷於死亡.猛獁之死,與其謂由於寒,無甯謂原於饑.

饑餓與傳染者,兩者大概係物種滅亡之主要原因,其中饑餓之原因,或尤為普遍.人類以善蓄糧防饑著,但是水旱瀕仍,死亡相藉的事,常載在史册.歐洲 Philippe-Auguste 時代,一次饑荒,餓死幾十萬人,這是大家都知道的一件事.

自然界物種與物種競爭,以至滅種之事,數見不鮮;而競爭之原因,重在食料.新種輸入,舊種滅亡,上面已經講過.有時不必滅亡,則另闢新地:流徙於沙漠,高原,以及高山之巔,深海之淵,幽暗之洞等為他生物所不耐生活之區,是皆逃避滅種之方法.又或大陸之一部脫離本土自成小島;此小島之成立,若在強暴新種之侵入以前,則大陸舊種雖遭死滅,但此小島可不受生存競爭之影響,因而島上之舊種,便如魯殿靈光,巋然獨存.正如現在許多動植物,在自然界,業已不耐競爭而絕迹者,但有因人工飼養或早移植於植物園者,反得存在.此隔離之小島,亦恰如自然界之"植物園."

此種實例,數見不鮮.澳洲之單孔類及有袋類,馬答加斯加之狐猿 (Lemuriens) 與 Dinornis 鳥, Galapas 之巨龜,中非洲之長頸鹿與 Okapi 獸,皆屬此例.

Cuénot 氏又注意到古生物學裏面的一個現象:凡巨大

之種,容易趨於滅亡.第二世紀之末,凡各種巨怪之蜥蜴類,如梁龍(Diplodo us),雷龍(Brontosaurus),以及堅頭類中之蝦蟆龍(Mastodonsaurus)等,皆巨大之種,突然絕迹.第三紀之末,巨大鳥類如隆鳥(Æpiornis),第四紀中,如猛獁,長頸鹿,鯨,駝鳥等,都有趨向墳地,日就淪亡之概.這些巨大族類,容易滅亡之理由何在?身軀既壯,目標亦大,容易惹起害敵之注意麼?或身軀既壯,則達於成熟之幼稚期必長;幼稚期中,身心之防衞力弱,害敵來侵,無法抵抗,亦屬滅亡之主因乎?或身體既壯,食料必多;食料之多,不可常得,饑餓其致死之原因乎?又或因食料需要既大,勢必各自覓食;羣體既不可成,防禦自然力弱,因而漸次絕滅乎?不然,或因身軀極大,容易藏納寄生蟲;此各該巨大動物,即以傳染病而羣陷於死亡乎?凡此各因皆屬可能,Cuénot 氏亦不曾加以決定.意者饑餓之原因,或較重要.

環境與動物相

海水愈深,則光線愈減.百米以下,幾成完全黑暗之境.到了這樣深度,任何植物都不能生存.因之,自然學者向來都以爲深海之底,必完全沒有生物.最初地中海中之海底偵察,彷彿與這個見解相合.但接着有人在大西洋海底浚土,纔知道海底不僅有生物存在,且種類繁多,形狀奇異.例如海底甲殼類,多盲其目;觸角與節肢,皆細長無倫.又有放燐光之海參與驚人之張燈魚.又有帶着信號的頭足類,此燈

具紅,綠,藍紫各色,能自由的燃熄.

海底的動物,不是盲目,便是發光或匍匐於地上,或固定於海底.他們多以泥土爲食.泥土之中,也有不少的細菌類等寄生其中,尤其是生物死體,混在泥土中者,必不算少數.因爲上層許多生物,日有死亡,其屍體或整或碎,如雪片之下降,皆沉落於海底.由海底上升,每一層各有其生物之殊相.現在單講到與海底極端相反之一層,卽海面生物.這層生物,單就動物講,大概體輕透明,便於浮水,亦便於隱身.此中著者如水母之輕薄無色,開期如心臟之伸縮,以運行其身體.又如仙女之裙帶(Cestus veneris),則長袖善舞,輕衫逐浪.此外如 Physalis, Pleurobrachia, Benenix 等,皆形態性質與上述兩種相近者.

海底生物,多盲其目.其因海底無光,所以盲目麼?但有些海底魚類,不僅不盲其目,且雙目反較常魚爲大,此又何故?光線刺激之說,似不足解釋之.不然,此雙目特大之魚,或新從光明之國移來,尙未適應此新土歟?或此魚之幼期,生活於有光之區域,所以有目;迨後降落,尙不能遽改歟?再就發光體論,亦多不解.爲甚麼有發光體複雜之構成:發光組織之外,排列着許多反射鏡,又有兩個晶體,成爲直角的排列,把光線集中到垂直的方向而發出?不過我們單就發光問題來講:發光本是動植物常見之現象;土螢,夜炤,以及飛光蟲等,人所習見.便是水中動物,如水母, Pholodes Eledone, Hippodium 以及一些水棲橈脚類,不生海底,亦自發光.也許這些水棲發光動物之中,有利用其發光能力,探入海底,卽刻發現該處害敵稀少,因而棲止,亦未可知.所以發光的作用,不能用宿命的眼光,斷定爲黑暗中需要所產生.

鹹水與淡水生物之區別,亦與此問題有連帶關係.原來鹹水與淡水生物,絕不可混,混則互死.但有些動物,如楊枝魚,普通蟹及鰮魚等,旣可在淡水生活,亦可棲息於海水.葉脚類中之 Artemia salina, 與多毛類中之 Nereis diversicolar, 異脚類中之 Corophium longicorne, 尋常皆生於鹹水中,但飽和之鹹水,亦能生活.鰻與鮭,某期居淡水,某期又轉入鹹水,均無不適.海爲生物之故鄉,生存之競爭劇烈;最初必此等對於鹹淡無關之動物,卽所謂泛鹽性 (Euryhalines) 之動物,離海而轉入江河之口,或鹹湖中久乃達於純粹之淡水.

就生物相與環境相較,適應現象,似不可掩.但似所謂適應者,乃該動物未到某環境之前,先已具備各該適應之性質,是謂之先適 (Preadaptation); 下節特別討論,茲不贅.

(本章未完)

漢特爾馬則梯(Handel-Mazzett)氏貴州植物採集記

董爽秋譯

此文譯自漢特爾馬則梯氏之西南中國自然景象(Naturbilder aus Suedwest-China)中之一篇該書詳於雲南.貴州及湖南兩地則較略.因氏在後兩地採集之時間較少也.董爽秋教授以該書爲研究吾國西南植物地理分佈之要籍,乃發奮譯之.屬稿初成,會余組織貴州生物採集隊成功.特請其將貴州植物採集記一篇,先登本刊,以爲貴州採集隊員參考之用.其他關於雲南及湖南兩省採集記,俟整理後將請其繼續在本刊發表也.

二十年四月十二日　辛樹幟於誌廣州中山大學

1917年由雲南府過貴州而去湖南

過雲南東部

余因整理工作及包紮標本,已就擱時間甚久,更因外交問題未定,使余稽延時日,不能早決行止.三月十三日北京政府內閣會議,通過對德絕交議案.德國領事Weiss被迫於月之二十一日攜眷陸行道經揚子江而出境.余以奧國人猶可自由旅行中國境內.因決意取道貴州,湖南,江西,浙江,而以上海爲終點.斯時也,余尚不知先時傳教士在貴州曾採集若干種類,而Léueillé對此等材料所作無益之工作情形又若何否則余將一走廣西,因此省生物情形,至今猶完全黑暗而未爲人所知也.余所取之路皆隨主要山脉而行,

因此等山地多森林,而富有新奇植物.當余辭別督軍時,彼則問余可須兵士隨行,並曰兵士之數,不能少過於20人,因過少將反被人繳械,余聞言甚慰,但余終則謝絕之,因余係一歐洲人,若遇賊數不及20人,余又何害,若賊數過20,則僅20名兵士,亦無濟於事.余從外交委員 Fremdenkommissar 之言,取道宜良而過黃草壩,因此路偏南而較安甯;此人固早已離開雲南高原區域,而久留於珠江 Djüdjiong以北低窪之地者,余今喜從其言,而欲一探亞熱帶低窪之地焉.

余此去仍以李 Li 爲差使者,因各地方言,必藉彼口語筆書以達意且爲余準備飲食,亦非此人不可.余之大隊組織亦仍舊,惟只八匹驢馬,因所攜行裝物件已大減,而途中所採標本,遇有機會將隨地寄運.惜乎1914年爲余採集之工人,今已不能復獲,新雇一人,身懶惰,而眼近視,三禮拜後,即已不能復用,囑其回家.

六月五日,余由雲南府(昆明)起身,但心猶懸懸,不能或釋因余寶貴標本暨 C. Schneider 所採者,共五十一箱,雖已貯存於德國領事署中,但水火兵災,所不免也,且外交上變化如何,更不可測;後中國對德宣戰,果曾經軍隊啓驗多箱,更於1918年,得 Stiebritz 之力,而從漲潮泛濫中救出,終保無虞,真萬幸也.

余所行之路,係舊時馬路,時有陷入灰泥石中五粎者;出發之第二日傍晚,即抵宜良;此地居鐵道之旁,步行未及一

小時之隔然而翌晨於拜達河(音譯)Beida-ho畔,見滓滑爛泥隨上次漲潮而高達於兩岸至二粎,以覆於草野上,而成一寬廣條痕;旋知已爲中國淫雨時期矣.余因下爛泥而上渡船以過河;正向東進,路過一支谷,谷之兩坡生有棗樹 Ziziphus Satiua; 其灰泥石脊岡,高達2000 粎,中有一岡居拜達河之南,而與河之東西向深入之部分相伴,且於大嘯(音譯)Daschao 村,依同向分出一支脈.岡上生有 Keteleeria 林與 Quercus Variabilis (槲屬)林; Pinus Armandi (松屬)亦常見者,猶係真正雲南高原之景象也.然而一向東南眺望,所見已不同矣.東南之地,其童然不毛而稍帶波縐之平面,擴張甚遠,於其盡處則有一形同突凸之齒狀低矮山脈,兩面皆青藍色;山脈之彼方,東南處,更有一較闊之高山,名曰老貴山(音譯)Laogui-Schan, 亦皆與西南山脈連成一貫者.前去稍遠,復有一低淺谷槽向西南行.在谷之深處,則大不同於高山所見,有多數銳角石灰岩,挺出如山峯.此種成形,係由風雨剝蝕洗去上層灰泥石質,而下層之堅硬之石灰岩,因以挺出而成此尖頂塔.谷之最低線上之各岩坵,皆生有樹林.吾人橫過谷山之頂,達一平原,曰天生關,而住宿焉.地甚乾燥,僅可得黃泥水,以調飲食,形狀一如四川鹽源以西之石灰山地.此地以水牛駕車,載運貨物,直至板橋;此車除於雲南府與蒙自兩城有相同者外,他處則未能復見.其山濠中常因風雨侵蝕而起變異.濠內黃土已爲雨水所洗去,所留者則

爲人體高之灰色石灰尖錐,獨立其中,尖錐之邊旁,形圓而光滑,但因水衝物擊,常有洞穿缺刻之成形,且有久經侵蝕而完全倒塌者.院牆屋頂則有自岩石下垂之 Dendrobium Clavatum (石斛屬)開花其上.余所隨之路雖曾一度行近溪谷但未幾又復上平坦高原,可北望拜達河之彼方,羣山綿亘,滿載松林,猶保有雲南高原之景象.自此上昇,稍遠,過母雞山(音譯)Mudji-schan之石灰崗而向馬街.馬街爲由陸涼下傾之一寬廣谷盤.在谷之東邊,出城而至山麓中,有一小湖,此湖在 Davies 氏地圖上,未曾指出,但可見於Stieler氏袖珍地圖中.此地多肥沃泥土,且具有泉水,故爲稻田之極善者.

翌日余離馬街而向東南行,所過皆處女區,只地質上(在余所過路之南方),稍爲 Leclère 所研究. Davies 氏地圖上所載路線之遠近,與事實多不符合,雖因外交問題,而余今不能不復作道路測量.但余所測圖樣,不另取繪圖紙,只繪於日記簿中,免爲他人所窺見.余自淸晨,即獨自策馬上山,山之最高處約 2500 粎,展延向東北行.山上有一硫黃礦,所產硫黃,皆以驢馬運售各處.拜達河之溪谷,以此處爲北抵曲靖最寬廣之綠色溪壑也.山坡之上(大部分爲石灰質,下部亦有藏煤炭而傾向東南者)則生有甚多狹稜形之 Juniperus Formosana(檜屬).余因大隊久不至,遂獨自前進,旋見彼等已由他路而去.余路稍偏向下,而入一低窪之地.中有多數石灰質垢陵,行列而挺立焉.在一茶舍中得引路者導余

直立上一砂石岡,岡上有繁茂之冬綠槲屬林.過岡乃見余之大隊方畢午餐,因急取食而裹腹焉.立於吾等之下者,復有同向之小山脉及溪壑,山多斷裂,而溪則常爲山坵層端所掩遮,致莫覩其全景,而其主要之土層則爲石灰,砂石及灰泥石三層,互相間換耳.在此等山之東方遠處,可見彼背林山(音譯) Beling-Schan, 觀此標識,乃知羅平及其全境之所在矣;山立如鋸齒狀,山脉之末,則較高焉.

師宗一小城也,居一河畔,河來自西南.在吾人之前有數石灰石小山坵,挺立於平原中,更有數支谷,溪流自右來於山嘴間,山嘴爲砂在山岡,其上蓋有松林.此地有一軍官來訪,謂奉督軍令强予隨帶20名兵士,以作護衞.余因得有兵士護衞,道路測量,坦然無所顧忌矣.

谷盤之對面,見有銀白色花穗之印度白茅, Imperata Cylindrica以爲其乾燥草原 Steppe 主要成分;余路過此,遂上登漸向背林山進發.路過數林,林木稀少,爲 Lithocarpus Sbicata Var Collettii或雲南松 Pinus Yunnanensis 相與間換而成者旋登一山脊岡,岡右下傾,而抵一與吾人對向而來之溪水,左則有一深濠,以其地土層傾向西北,而與彼由師宗流至之小溪谷相接;但其脊峯本身,則奔騰直上而與彼錐峯之行列連,行列中之最遠者,約高 2400 粎,爲背林山之主峯.吾路則向右行,只達 2100 粎,在松林中已見有艷麗紅花之特那畏氏百合, Lilium Delavayi (百合屬), 乾燥之 Dracocephalum Urticifolium (青蘭屬),細小之 Iris Collettii (鳶尾屬),幾未木質化之新奇竹類,名 Indocalamus Andropogonoides 者,生於黃土上野草間之紅色亨利馬先蒿 Pedicularis Henryi (馬先蒿屬廣生於湖南,直至廣東邊界猶見有此物)及新發現之高大暗黃色 P. Lopingensis.山中居民爲苗人,衣灰色麻布衣,而耕於是,但田地甚少,大道之旁,亦不見有彼等村落.至生於石灰石間者,則有直立綠色草本之 Smilax Herbacea (牛尾菜屬).與草葉紅花之蘭科,曰 Bletilla Yunnanensis 者;又特那畏氏木蘭 Magnolia Delauayi(木蘭屬)亦常見者.此地新奇植物既多,前去定亦如是,未可一目而過焉,是夜因卽留宿於一小村中,曰洽爾囒 Tschaorl.

翌日雨後稍霽,因上山坡見一奇景,爲余終生所不能忘者.其地如有無數亂石,皆以其銳端向上挺立,儼若一石化之杉樹林,叢立於羅平盆地之彼方,其數逾千,相立並無序列,高約 50—100 粎,偏向東南,則全境較高,各錐石間,遠望之,如漏斗然.

羅盆之平地,高 1600 粎,在此數之上 300 粎處,其植物情形,已不同高山景象矣.雲南高原氣候,至此已盡,故此地已感受東南季候風,而全年多雨.地之較低處,則等於亞熱帶,亦與雲南中部開曠之地同,其高熱及平均雨量之影響於植物,一如海洋氣候然,而山坡之上,已成一片草地,不見有樹木矣.而中國人猶火燒刀伐,極力破壞之,因此所見只野

草,矮小灌木,攀緣植物及草本植物等,猶可强佔其地而盛生焉,就中且有多數種類,爲余等未曾見者.此地猶爲雲南境,而植物則已屬於別一區矣.生於斯者有褐毛大圓葉之獮猴桃 Actinidia Chinensis 及褐毛之 Rubus Clinocephalus (懸鈎子屬), 他則爲方萌芽之高深禾本科,如Saccharum Arundinaceum 與 Themeda gigantea, 藏其間者,更有適當花期而高未及米之 Castanea Seguinii (栗屬)及高達人身之 Lilium Brownii (百合屬), 此物葉小,花少而大,花瓣背面呈褐色而有香氣.喜水之 Alnus Nepalensis(赤楊屬)猶特多,大葉之 Viburnum Cylindricum (莢蒾屬)亦常見者.在山麓之金梭羅(音譯) Djinsolo 村旁,近一泉源處,有一高深樹林,林中生有扇骨木屬 Photinia 枇杷屬 Eriobotrya 及山樝子屬 Mespilus, 後者具硬刺樹基被有地衣,爲新種Graphis Lopingensis.在乾燥平原之地,則見有杉木Cunninghamia Lanceolata 羣生而成林.雖然,此物或非野生者,但遠在西方罕見針葉樹之地,而富有此物,足徵其氣候已改變矣.

羅平乃一小城如師宗,立於平原之西緣,距金棱羅村步行須二小時.六月十二早,余由羅平前進,路見多山,皆被有闊葉林,及至金鷄山(音譯) Djindjis Chan村, 乃入林觀察.林中樹木皆等高,約 10 米,葉不甚大,而具有暗綠色樹蓋,雲南鼠刺 Itea Yunnensis (鼠刺屬) 乃林中之主要成分,他如羽葉之化香樹 Platycarya strobilacea, 大葉之 Ficus Silhetensis (無花果

屬)以及 Xanthoxylon Alatum, Schoepfia Jasminodora, 枇杷 Eriobotrya Japonica,皆常見者,稍高則有 Photinia Crassifolia. 關於錐峯之頂,可由此而觀其餘者;此等錐峯,彼此距離甚遠,其土層漸向東傾斜,因此山坡乃均成梯級.以其全境而觀,似以下沈,故其漏斗形盆地 Dolinen, 皆已塡充,而其墾植田原,亦漸次擴張於其間矣.是等錐峯,究因何而有此變形？山之地層,在地質學上爲 Trias, 與所遇於他地者完全不同.地隔余遠,因不能解答是問題,但依吾所感觸,似乎其近似熱帶之雨量,有以助成之也.更東進而抵板橋.板橋之旁有一石灰山,山有林,林中成分亦稍異於他地者; Lithocarpus Dealbata, Pistacia Chinensis, Carpinus Turczaninowü (黑見風乾屬)與 Xanthoxylon,乃其主要成林分子,Cupressus Funebris 亦常見有,但係栽培者也.由此前進,旋卽路過昨日所見鋸齒狀山錐,而高已達 1820 粎.所見 Andropogon Delavayi (蜀黍屬)之紅色乾燥草原 Steppe, 乃示吾人猶身在雲南而未出其境也;草原中除Andropogon Delaveyi 爲主要分子外,其他草本植物亦甚多 Pinus Armandi, P. Yunnanensis, Keteleeria Davidiana 乃原中之樹木也.然而未移時,卽於一河畔見有新奇植物,如Pterocarya Stenoptera 然.再遠而於背滾(譯音) Begung 村,見有與樟腦樹爲近親之 Cinnamomnm Glandülferüm.吾人之路,漸已離山(吾人前此在山上皆沿其縱向而行)終則完全向北而去,可見有二深陷之溪谷,一曰黃牛河(音) Hwangniu-ho, 西自師宗來,他則由北與

伊子河(音譯) Yidse-ho同向流至,而兩相匯合於江的(音譯) Djiangdi.由山路下行至1250粎地,卽見有松林,Keteleeria林及Quercus Variabilis林,惟所期望之亞熱帶植物,猶缺如,且吾早所預定,將爲此而特留一日之想,已成泡影矣.

經過貴州西南部

伊子河 Yidse-ho 居貴州西南邊境,流入廣西北界之拜達河(音譯)Beda-ho (卽南盤江), 以爲雲南與貴州之交界線而對岸之江的 Djiangdi 村,猶爲雲南境地.伊子河畔復生有甚多 Pterocarya Stenoptera (紫檀屬); 此樹高而易顯,具羽葉,其柔荑花序下垂,長過 30糎,而有槭果狀之翼果.河之兩岸,常爲河水漲溢,更有彎曲性之灌木,如山茱萸 Cornuspaucineruis, Ficuspiriformis (無花果屬)及Distylium Chinese(蚊母樹屬)等生長如斯.山谷溪流,漸變狹窄,始則東南行約10粁,卽南折而向西南,余道經此溪谷,旋卽棄而東上.此地富有石灰質,砂石,而青石板尤甚.由西北下向,直抵河道,生於其上之植物,亦較爲新奇,如與澤胡桃屬 Pterocarya 爲近親之Engelhardtia Colebrookiana(仁杞屬),乃近來新發見者,其崖壁之高,達 1600 粎.遇有平坦之地,則生有赤楊 Erlen, 松樹,爲一乾生植物與濕生植物之混合林也.更右向,有一深窪,窪之彼岸向南擴大,爲一平原,地質上曾未破壞.所過之路,在古洽(音)Gootscha 已達 1760 粎,由此左折而下,以入山谷,谷中多山杉木屬 Cunninghamia. 此物之生於谷中,必係野生者,因其爲斯境最

常見之針葉樹.其次有一山谷趨向東南而為一羣富有乾燥草原之銳峯童山所構成,谷水成溪,但不可見,或由北方繞道而去,未可知也.稍北,多山綿亘,產纖甚豐,乃相合而成多谷,以夾於彼相與平行之岩崗 Felskanten 而來.及出此等谷口,即達黃草壩,又名興義縣.此地旅舍壞極,然猶必留住一日;因此地岩崗上所生灌木,須詳經觀察耳.

此城甚大,建於一平原上,地高約 1300 粎.城之四圍,兩山聞立,中分其城牆為兩部,山上築有炮台,人力天工,因成畫景.六月十五,余觀察一岩崗,為西部之第二崗,崗上植物頗不少,但在下部,僅見有實用木材,及玉蜀黍;凡天然產灌木,皆已破壞,直至極上層,始見有灌木生焉.然而即此已可觀矣:若薄葉大花之亞麻科 Linaceae, 如 Tirhitsis Chinensis,華瓜木 Alangium chinense 烏臼 Sapium Rotundioblium, 若新發見而有熱帶親緣之 Salacia Sessiliflora, 若 Rhamnus Paniculiflorus, 若 Rhamnella Martinii (圓葉鼠李屬), 若蔓延岩石之 Ficus Baileyi (無光果)等,皆其主要之成分也.於崗下溪邊,余曾採得 Bischofia Trifoliata (赤木屬)及 Fraxinus Chinensis, 前者係大戟科之一種,高成大樹具圓形樹蓋,及三裂葉.

其溪皆於城下飛流於石灰石上,而成瀑布.其平原植物有茶油樹 Thea Oleifera, 余見斯物,此其始也.又花呈黑褐之白微 Cynanchum Atratum 亦常見於此,而海金沙 Lygodium Jaboniсum 則雜於 Gleichenia Linearis(裏白屬)中,而匍匐於彼險峻

之路緣.其平原猶不甚低;一河斷其緣而深入內部,以成溪壑,壑之極狹處,通衢來往,必由此過,因築有石橋,名曰天星橋 Tienksin-Tjiao, 約長25粎(此地高過海平線 1050 粎). 由此上行,復見有錐形山山之林斷續而成行列,幾與東西綿亘之山脈相垂直,及過丁笑(音) Dinghsiao 夜驛 Nachbstation, 旋卽離赴興義之路而左轉,梯步以上,達一高原.時天雖雨,猶可眺遠,下視深處,遍植田禾,零星村落,亦隨在可見.仰望上層,復爲平原,惟高峯環立耳,其上猶見有矮小灌木叢藪,由 Myrsine Africana 及 Pyracantha Crenulata 等所組成,如在雲南然;且雲南松 Pinus Yunnanensis 亦尙廣生於斯.此地高原亦偏向西南而斜行;原上有小河,卽天星河橋所在河流之源也.吾人於此過河而右折,復見斯河於阿橫(音) Ahung 村.於路聞河水滄浪,且時見水鷗 Wasserstseule 起叢藪中.設天久雨,雨水與泉水合,則由地道湧出,以高漲焉.吾等沿河行,更遠則僅見爲一狹小溪流而已.午餐後,同人皆小憩,余利此時復尋獲多種化石於石灰層 Kalkschichten 內;層分二種,一爲粗大木質層,一則稍帶扁平,且扁平者多夾雜於大木質層中,而化石卽存於此扁平層也.據此化石,則其地層之名,曰石岩層 Karbon, 因以定矣.吾等所沿行之小溪,亦常於山谷中,間斷的潛流於地下,而復於一山嶺之地噴出之;嶺高 1660 粎,而通行之路過焉.周圍皆童狀,但隨在皆被有草野 Wiese, 繼續幾成一片,以與雲南之乾燥草原 Steppe 別.生其中者,尙

有(毛氈苔) Drosera Peltata, 但其主要成分,爲彼黑穗花序之 Scleria Hookeriana(真珠屬)耳;至薇 Osmunda Jopanica, 珍珠菜 Lysimachia Clethroides, 薊 Cirsium Belingschanicum, 與三白草 Houttuynia Cordata, 乃表其地濕度之大,而 Castanea Seguinii (栗屬), Indigofera Esquirolii (木藍屬)及 I. Dosua 則亦其最常見之分子也. 由此下行,亦有一小溪與之隨,惟只有數處,流行於地面耳. 在路之東北向,有石灰質之山褶以橫斷去路.又向東傾斜之盆地,爲盆狀,卽曹羅(音) Tjiaolou 也.

盆地之彼方,高起爲脊崗,崗成自石英,上覆有已斷裂爲層端 Schichtköpfen 之石灰石.由此沿其各小溪而行,見溪流常斷續不整;其植物則泥炭蘚 Torfmoosen 與苔類 Lebermoosen (Nardia Truncata), 羣生之 Osmunda Cinnamomea, 燈心草屬 Juncus, 莞屬 Scirpus, 荸薺屬 Heleocharis, 蘆屬 Phragmites, 野青茅屬 Calamagrostis, 圓形羽葉之 Histiopteris Incisa, 直立之懸鉤子屬 Rubus 幼芽, 雲南八仙花 Hydraugen Yunnanensis 及生於小叢藪周緣之虎杖 Polygonum Cuspidatum, 皆其常見者也.在其最高山嶺 Sattel(高約 1720 粎)之一沼野中,有蘭科植物名 Platanthera Hologlottis 者,羣花馥郁,香氣襲人.其山坡則富有榛樹 Corylus Heterophylla, 而蕨 Pteridium Aquilinum 亦其中主要分子;更有 Betula Luminifera (樺木屬)雜生其間.嶺之次谷,溪流下行而成數小瀑布.此地產煤,煤之外,更有紅褐色之鐘乳石 Sinter, 藏於溪源而爲扁平圓錐形,其上只密被叢藪.及少數土馬

騣 Polytrichum Commune 而已.但淡綠色之苔類Lebermoosen與嬌弱而成墊褥 Polster 之藻類 Algen (Ulothrix Subtilis)亦常見者也.最後吾人行抵一小山嶺,嶺近石英青崗,立崗之緣,可望全境.在崗之麓,多坵陵,亦爲石灰質,稍向東北傾斜.然而全境地層之構造爲何,雖觀其斷面,亦莫能知;由此北行約20粁,卽見一較高山地之邊緣,在緣之前,有一深坳,其溪水則分作西南與東北二向而流去,但在新城(興仁)又折向東北流;山脈連綿,至此復改他向矣.此地空氣濕度過高,雖天氣晴明,亦莫能遠眺,以觀其所以.

新城之地,高只 1450 餘粎.登其高地,則見全境等高,惟龍山(音) Lung-Schan 較高耳.山遠立於道右,乃漸由新城之地,傾移層積而成者也.巴林(音) Baling, 一市鎭也,立一溪畔,吾人曾於此一宿焉.溪南行以斷龍山,而合流於大盤江 Hwatjiao-ho 者也.由興義而來之電線柱,在此復吾等同道.線依同向而行,導吾人過三高地,在前二高地間,有湖存焉;其溪流向右行而成一河道,此河道於龍山前向東流去,更有一溪,亦同向流,但終消沒於一吸水洞 Saugloch 中.此洞來自南毋漳 Nanmutschang, 南毋漳有水銀鑛,亦要地也.吾人晌午而過焉.由此則吾人之路偏向北矣;旋卽經一山谷而下行.未幾過一村,名曰吉郡 Tjidwen, 村有水蠟樹 Ligustrum Lucidum, 數量之多,未之前見.又 Celastrus Gemmatus (蔓性落霜紅屬)之高攀蔓繞,Drynaria Fortunei 之枝枒高覆,亦常見者;吾過此更見

有一棕櫚植物種子,落於一樹叉上,乃即於此萌發而成一小樹,亦奇觀也.此外若刺楸樹 Kalopanax 爲吾人兩日來所驚異者;樹上生刺,尤以長枝爲多,枝挺出有多粎高,上有大葉,深裂爲掌狀,但老枝上之葉則較小,而爲槭葉狀;至與此近似之樹,則有梓屬 Catalpa 之各種,此屬中最常見者,除雲南 Catalpa 具有近粎長之莢長之莢者外,尙有大葉之 Catalpa Ovata, 此物具白花,花瓣之內面,有褐色斑點及黃色條紋.谷盡於一小出口,成漏斗形,由此前進,多岩石之地,稍傾而成層,即山坵與山稜,漏斗形盆地 (Dolinen) 與稜緣盆地 (Karrenfelder) 互相間換,地各不同,但在路之下面,無不綠葉叢生,而爲灌木叢藪及樹林也.在此多石之地,居民房屋,皆砌以石板,而玉蜀黍即其食料也.田地多位於漏斗形盆地 Dolinen 之深處,小田而連成阡陌者罕見也.玉蜀黍除少數田地外,則皆播種於稜緣盆地 Karreufelder, 蓋以石稜間多洞穴,黃土填其中,玉蜀黍生焉.但常有一穴中,只見有一植物獨得生存,環境狹小使之然也.更由此橫過二漏斗形盆地,未幾即抵太平街 Taipinggai 太平街乃立於灰泥石崗脊上之一小村落耳.至所橫過之二漏斗形盆地,一則平坦而闊約千粎,他則爲一極狹而長者,儼如一小山谷,深達80粎,直至其可爲道路用之石稜爲止路之兩傍,尤較深焉.

太平街爲一山村,晨光初放,曉景彌佳.高山峻石,吾固已多見於雲南,而此地幽絕亦自成其佳境耳.由村而下谷中,

卽抵大盤江 (Hwatjiao-ho) 之河流,但在村上,不能見也.蓋以下此200粎處尙有一塊平原,闊約五粁.平原中有一深坳,作盆狀,猶爲灰泥石所成.由此以觀盆坳之彼方,則見爲石灰質,已漸漸陷落而成層,但猶蓋覆於灰泥石之上,且由多種峭壁錐形山,行列而成連脉.及達河之彼岸,懸崖峭壁,高出尤甚,頂端則碎裂爲多數角狀突起物,相與錯列如鋸齒,以横斷去路,儼然一峻峭山牆也.自此左轉而向西北行,近可渡河(音) Kotu-ho 口,有一曠野,但向右行,則見多山齊出,彼此相接,竟不知其溪谷之所自出.至由瑞高集(音) Schuigaodji 盆坳所出之溪流,乃折向右行,但路則直前,而過錐形山地.此等地所生之幽密叢藪中,新奇植物,猶未可多見,所見者只烏臼 Sapium rotundifolium, Iodes Vitiginea 及一大形之 Rapanea 而已. Rapanea 係一小樹,其花不甚明顯,發自葉下之枝木中, Sapium rotundifolium 爲大戟科之小樹,具革質圓形葉,至 Iodes Vitiginea 則於密枝粗葉之下,有葡萄狀果實垂其蔓莖上,果形似櫻桃,色亦如之,但較扁平,毛甚短,因令余欲一嘗之;但其精美之味中,帶有青酸氣 Blausäurearoma, 因知其亦非可食者,而棄置之.又圓羊齒 Nephrolepis Cordifolia 亦此地常見者也.此物爲一淺綠色之羊齒,具單羽葉,及顯明之貯水節,節行列於露出地面之根段上,數多,被有褐色鱗片,此地氣候潮濕,乾燥地土因獲有潤澤,不僅利於普通植物之繁生,而於岩石上苔蘚 (Papillaria nigrescens, Anomodon integerrimus, Hypnum leptothallum) 及大形綠色膠狀藻類 (Nostoc commune) 之生存尤適.苔蘚生於岩石上,非雨濕無以發育,而藻則每得雨,卽膨大其藻體於各巖穴中.由村而下,其路險峭如梯級,及高達地 970 粎時,吾人復見有川滇界邊乾熱深谷中之亞熱帶植物,餘甘子 Phyllanthus emblica, Alangium Chinense, Ficus cuspidifera 及 Oroxylum Indicum; Oroxylum 爲一樹,具有大莢,其花正開,氣臭而色暗紅,羣集而成頭狀穗;花瓣於花開後,不多時卽次第脫落,其萼片常爲蟻集遊之所.於上述各植物間,常雜有大形之 Mallotus barbatus (楸屬), 嬌弱芳香之 Dalbergia Cavaleriei, 蔓藤之 Argyreia Wallichii, 白色之 Aganosma elegans及一新發見之馬鞭草科植物曰 Premna Crassa 者.更下而達河邊,則見於高深之 Saccharum arundinaceum (甘蔗屬)與 Themeda gigantea (菅屬)間者,有具刺之五加科植物 Brassaiopsis papayoides 與 Callicarpa macrophylla (紫珠屬), 在路下之巖穴中,昂然挺立焉.Brassaiopsis之簇葉叢生,徑達一粎,擬之棕櫚,無大別焉;其葉爲革質扇形,呈暗綠色.至 Callicarpa macrophylla 爲馬鞭草科之一種,葉大對生,於枝梢之葉腋內,有玫瑰紅色之花,羣集而成穗狀花序.在地高 580 粎處,以中等水勢爲準,距水面約 10 粎高,建有鐵索橋,以過黃草河(音) Hwa-tjiao-ho (卽大盤江). 河之彼岸,峭壁高障,壁有洞隙,路過焉.路爲梯級狀,峻險異常,過此者必拾級而上.河之上流向西北,而下流則向東北,谷深達 300 粎,峭壁豎立,幾與谷底相

垂直,稍碎裂,爲石灰層.由河面直上,約300呎,有一狹長平野,卽法郎村(音) Falang 之所在也.熱帶草原林 Savannenwald 中之餘物,如單純樹木及灌木,猶可見於斯.此種草原林,已遍生於巖壁上.余因欲詳考其分子,與在雲南所見者,有何關係;乃於六月二十下午留此,此觀察焉.此地山谷之幽深,雨風之方向,皆足以使溪谷兩旁之地以乾燥焉.此亦卽其所以成熱帶草原林之因也.究其氣候如何,直接觀察,不可能也.蓋以余所攜之濕度表 Fadeuhygrometer, 在下午天雲少現時,所示空氣濕度,爲百分之六十四,及晚八時,在微風之下,所示則爲百分之七十二. Falang 村旁之岩石崗上,長有南天竹 Nandina Domestica 與伏牛花 (Berberitzen) 及 Mahonia 爲近親,但具有白花之穗狀花序及複羽葉;此外尙有新發現之 Ficus Caesia 與 Premna Anthopotamica 亦常見者也.由高下覩河流橋路,幾令人眩暈欲墜;見河則暗覆於深草叢林之綠帶中,見路則成一狹長帶,而直下山坡,見橋下怪石嵯峨,水流其旁,直爲其吞沒而不之見.又向河之上流,與法郎村遙相斜對處,復有一小村落,高懸於峻巖之上,然而於此深山峭壁中,彼等果何依而生活其間,非吾人所得詳知也.由法郎村上登,以越鋸形山脉之狹道,路過處,幾皆爲全無灌木乾燥草原 Steppe, 然而余曾採獲兩種極饒興趣之半灌木;一爲 Hibiscus Sagittifolius (木槿屬), 有木質粗根及大形腥紅花,此物在近東乾燥草原植物中不與焉;至其他一種則爲

新發見之 Phaius Steppicola, 乃一白花大形之蘭科植物也.

其山脈由兩行同向之鋸齒形山峯連接而成,齒峯高過於狹道更100餘粎,而狹道之高出海面,已1270粎矣.以故峯聳雲端,洵大觀也.其西邊則峻峭而斷裂成層,較之下面豁壑,則全異矣.由狹道下行,只50粎,有一平坦之地,關嶺城在焉.此地舊名募役,而立於其北之小城,則名曰關嶺,現兩相交換,各從今名.漸向北擴展爲一廣闊之盆地,係由灰泥石所成,以夾於石灰質之兩崖間.吾人所由之路,過此旋卽折向右. Cupressus Funebris 在此爲野生者無疑,因常生於山峯上而成林,亦有與 Cunninghamia (沙木屬)雜生於一處者,但松樹已久不見矣.未幾吾人又入岩石不毛之地矣,卽非真係不毛之地,而此種印像已一再復現吾人之前,蓋以巖崗之地,雖見有叢藪樹林生焉.此處爲多數由西南延向東北之短崗,崗甚大,排列於路右之下方,更有窄狹之深漏斗形盆地,陷落於其間.觀其形狀,知與雲南蒙自蠻耗間之高山極相近似,其地層亦相同,由此達彼,乃相連而互合者也.及抵吉昌平(音) Djitschangpin, 同人於斯午餐,餐後小憩,余則利用此機會,登一生有樹林之岩石錐峯,余登此山.使余復憶路過 Salwin-Irrawadi 時,同樣待達高頂,卽大雨傾盆而下.在此吉昌平之山林中,隨在可見雲南鼠茱 Itea yunnanensis, 要卽其主要之成分也.遠視之,卽可識其細長之綠色葇荑花序,序自平伸之枝上成行而下垂.枇杷 Eriobotrya Zaponica 與各村

所栽製扇用之棕櫚名Trachycarpus Excelsa者,問之居民,謂曾係本地土產云; Cinnamomum Glandulivcrum (樟屬), Celtis Biondii (朴樹屬), Photinia (扇骨木屬), Albizzia Julibrissin, Evonymus(小衛茅屬)Pittosporum(海桐花屬) Hellwingia 及新發見之 Andrachne Attenuata, 皆其體高形顯者也.林內之草本植物,非常稀少;余於此曾尋獲褐色花之Liparis Acuminata.於此見有數小溪,橫於前,溪合於東,余因工作延時,急欲歸隊,以便前進.余於此初次見一民族,曰花苗 Hwa-Miao. 苗人由市塲歸來,皆成羣結隊,且人各肩負一秤,此因漢人與苗人交易,出入貨物時,常易秤以衡之,故苗人皆不以漢人爲信,而各自攜秤以與俱.苗婦皆着多褶長裙,亦易與漢人別.吾人行經之路,直至募役(永甯), 猶只少失其高度也.

翌晨由募役出發,未幾復入一深谷,谷中人煙稀少,幾莫之見,但谷底之高,猶超過黃草河 Hwatjias-ho,而形狀亦完全不同.谷之兩面,皆係石灰質之峻險岩巖,上層特硬,因成垂直之峭壁.兩面之地,遍生綠草,尤以下面之三分之一處爲甚,其分子爲高深禾本科,如 Saccharum Arundinaceum (甘蔗屬) Themeda Gigantea (菅屬), Arundodonax 等,因成真正所謂沼澤草叢 Dschungel 也.此處更有一樹林,繞寺宇而立,林之形質,無異於深谷者;林中主要分子,爲彼富有玫瑰色蝶形花之 Dalbergia Hupeana, 甜香麗質,嬌艷宜人,又 Ficus Cuspidifera 亦常見者也.溪河上築有長石橋,曰壩陵橋(音) Baling-Tjiao, 過

橋登路,漸向北去.夜來大雨傾盆,溪河漲溢,梯行級路,山水下流,亦儼然一小溪也.若據此溪水高漲之景象,而推測其平均雨量,未免有估量過值之虞.稍北則水氣塵雲,瀰漫深谷,及登其高處,始漸見對面滴水塘(音) Dischui-Tan 之白瀑.再下行稍遠,其溪水乃與黃果樹之白水河流合而成一坦鑊,以爲接受由募役流過溪水之所,更於距吾人行路15粁處,折向東流而去.

沿路有一平原,出煤礦,乃與募役之平原等高而相接,上具闊葉林;成林分子,以 Cunninghamia (沙木屬)與 Thea Oleifera (山茶屬)爲盛,雜其中者 Gleichenia Linearis(皂莢屬)尤多,但以白水河曲流深入,致與吾人相隔絕.余因知黃果樹有名瀑,因欲一往觀焉.及見其實,飛銀濺白,高掛天空,猶非耳聞所能想像其萬一也.白水河之上流河道,少有深刻山巖而入者,但在黃果樹,水則自天空飛落,約高50粎而入深谿,谿則更作 S 形,曲流而下,縈紆屈由稍遠,即不能見其水流之所出沒.此瀑布——名曰犀牛塘(音) Hsiniutan ——在乾燥時期,僅爲數溪所合成,水勢之大,猶過於其對面之滴水塘也.瀑布之上流,有主路與余由西南來路相接於斯.其接合處,即黃果樹村之所在地也.所謂主路者,即過蘭台(音) Lang-tai 與珠景(音) Djiidjing, 爲由貴陽以達雲南府之通路,亦植有電線柱者也.

由黃果樹過貴陽以達貴定

由黃果樹出發,所經之幹路,較之雲南者,寬坦多矣.路之所過,多平垣之石灰崗,石灰質上鋪有含煤之灰泥石,再上則爲石英,漸向東北而抵鎮甯.上述之石灰山,多錐峯行列,而成谿壑,路則半落其中.將盡一日之行程,而達一大城,曰安順.城中旅舍亦多,較雲南者爲佳.於路見多村,屋皆石砌,現居民遠徙,而屋已墟廢矣;此皆爲軍隊過境之所破壞者.

安順城立於一東南流之河畔,其理上之測量,闊度當矣,而長則與地圖上所載大異.依余之路程記載,應在Greenwich(注)東105度58分30秒,即在省城(貴陽)西南80粁處,是則較Davies圖上所記(約距貴陽35英里),猶稍異焉.去此而過鄉莊,路皆平坦,而成直線,更經一與前進似之谿壑,而達安平.安平多垢林;爲林之特徵者,新鮮闊葉樹也,其中有數種,早已現於關嶺.若袍桐 Paulownia Tomentosa,紫荊 Cercis Chinensis, Firmiania Simplex 等,皆其闊葉樹之顯著者,而於暗綠葉中現有褐色也.且後者猶在幼嫩花序時期,而前二種已密結果實矣.至其岩壁上,則生有美麗之苦苣苔科 Gesneriaceae, 如大形紫色垂花及厚肉葉之 Didymocarvus Eburneus 與尙未發生之 Lysionotus Pauciflorus 是;又黃色而富有腺體之小 Sedum Derynarioides (景天屬)亦岩壁上常見者也.此外則但見灌木叢藪,隨在而成草野耳.至其灌木叢之形狀,皆高不過枳,猶有少數禾本科植物雜生其間,但灌木與半灌木,其主要成

譯注: Greenwich爲倫敦城之一部,在Lhemso河畔.

分也;就中尤以蝶形花者爲普遍,如胡枝子屬 Lespedeza, 山菉豆屬 Desmodium 及木藍屬 Indigofera 等屬,皆各有多種,而以其帚狀或錐形分枝與各色玫瑰紅花,特顯其形色之多,而尤以 Lesp. Farmosa 之麗紅花色,隱藏於銀光綠葉中,爲最鮮明,他若富有黃色花序之 Castanea Seguinü (栗屬), 金黃色之 Hypericum Hookerinum (金絲桃屬)及新發見之 Salix Praticola (柳屬)等,亦皆叢藪中之主要分子也.且夾生其間者,亦尙有鮮花麗質之多年生及一年生草本,其最顯著者,如野牡丹科 Melastomaceae 之 Osbeckia Crinita (草野牡丹屬)具有深玫瑰紅之大形花,以顯露於其紅色長毛之萼片圍中,餘若深藍鐘形花之桔梗 Platycodon Grandiflorus, 玫瑰紅之 Belamcanda Sineusis(射干屬)以及 Iris tectarum (鳶尾屬), 秋牡丹 Anemone Japonica 與 Senecis Argunensis (望江南屬)亦常見者也.又蕨 Pteridium Aquilinum 亦其灌木叢中之極普遍者,且有 Nephrodium Xylodes, 或爲歐洲 Thelypteris 之一近似者,以充實於叢藪之下,以故此全植物羣落,與在 Salwin 與 Irrawadi 區域中相等氣候之下所產生者,多相近似,因彼處亦時有 Betula Luminifera (樺木屬)小樹散生焉.余於斯更見有茶樹在地高 1300 粎處,行列於玉蜀黍間以或零星小叢,此余平生所未曾見者也.其枝上被有地衣,且此地衣每因採折茶葉而感受傷害.於一茶室中,曾有人示余以此爲其平地之原產物,言下似有矜喜之色.雲南府之羔冲山(音) Tschangtschung-Schan 叢

農業學校曾栽有此物,但未知其能否永存焉.

翌日所見,爲由安平南流溪谷之對面景物,又大異矣.灰泥石峯之下,有一石灰山,連亘向西南傾斜.石灰山巅,則爲真正之中生草野 Wieser, 而生有甚多亂草與中歐之普通有花植物,如胡蘿蔔 Daucus Carata, Senecis Argunensis(望江南屬), Agrimonia Zeylanica?(龍芽草屬), Brunella Vulgaris, Hypericum Perfartum(金絲桃屬)及 Lotus Carniculatus (百脈根屬)是也.在其乾燥之砂石上,則復見有雲南蔓越橘屬 Vaccinium 之叢藪(V. Compharifolium 與 V. fragile), 而雜有矮小之 Gleichenia Linearis (芼萁屬)於其間;然而未幾吾人又身入石灰石錐峯之間矣.但所經過者,多爲西北山地凹凸易成褶皺之層表 Schichtflachen). 在一狹隘之山路中,尋獲 Leontopodium Artemisüfolium, 此爲吾在中國最後獲見者,且棘蘺叢藪,亦復饒興趣.菩提樹葉狀之大形山茱萸科 Cornaceae 如 Jorriccellia Tiliifolia, 乃常見者.而粗鬆砂石之各溪畔,除綠柳垂岸外,尙有 Mariscus Chinensis (莎草屬)密生於斯.於 1200 糎高處.吾人曾橫過一河流,初未知此河卽爲揚子江與南盤江 Beids-ho (卽廣東西江上流)間之一真正分水界,因此河遠來於南方以與其幹流合.各處山地,幾皆等高,而無遠景之可言.惟於此處北望而見在兩山夾谷,榮茂出青,洵佳緻也.其一山,林木甚深,有一寺宇在焉,林中河水,穿流縈紆,而向東去,余於河之對方,卽清鎭城前,見數銀松在焉;此松雖亦與生於雲南者爲近親,

而非同種,甚顯明也.其針葉短小而細薄,色深綠,其新鮮景象印人之深,事後思之,猶如見物.此松名曰馬尾松 Pinus Massoniana, 公布之廣,直至熱帶,同時與之並生者,尙有一種闊葉大樹,即楓 Liquidambar Formosana 是也.楓形似篠懸木(Platanus), 亦與有親緣關係,始生於此,是後則常見者矣.

六月二十七,吾人上登一高嶺,達 1320 粎,下午又繼續下嶺,俟抵一小盤谷後,其坡始漸向東斜.未幾有復見有石灰岩覆於脊崗之灰泥石上,而向東傾.上述新奇之松樹,於此密生成林,而岩石上則見有 Abelia Microphylla 之玫瑰色鐘形花,到處開放,洵足觀也.吾人出溪谷,幾不知有一平原之地,實則隱約間,貴陽之城,已隔林在望矣.更半時許,抵城之西門,入城後,尋訪久之,始得一稍可人意之旅舍而居焉.

貴陽城中居民之數爲七萬,城較雲南府爲大,地勢之高,全境皆係 1070 粎,街道中溝渠暗藏,上覆石板,甚清潔,但商業則不及雲南府之繁盛,且名勝古蹟及高大建築物,而可爲城市壯觀瞻者,亦皆缺如.

城之東音兩面,皆立有錐峯,西與北則爲一脈連綿之山地.春甯山(音譯) Tschwenning-Tchan 約較城高 200 粎.山之旁,在吾來路之稍北處,有一山垭.余於七月一日,訪登此山,山之下部爲石灰質,上層則爲砂石,然皆生有高深闊葉林.林中分子,以 Quercus Acutissima (槲屬), Myrica rubra, Carpinus Fargesiana 爲盛,雜生其間者,亦尙有其他闊葉樹及松樹與沙

木屬 Cunninghamia 等.上述 Myrica rubra 之葉與果,與 Frogaria 極相近似,果紅色,加糖煑食,味甚美,即中名所謂楊梅是也.林下則有 Thea Olefera,金州月非草 Vaccinium Japonicum, Gautheria Laxiflara 等灌木生其中.金州月非草爲一綠葉灌木,枝上有翼角,花白色如 Axycoccos. 又兩峯夾谷中,有一寺宇.寺旁楓樹 (Ligmdambar) 林立;相與間生者,更有花顯本强之大樹 Meliosma Henryi. 至陰濕之地,則有多數草本生焉,如紫萼 Hosta Coerulea, Lysimachia Trientaloides, L. Capillipes 及多種羊齒植物是.後者亦常生於岩石上.東門城外有東山(音) Dungschan, 植物少有奇異者,但一登其上,則四野青山,全形在望,亦可得一概觀焉.更有青色淨水河,來自西南高山,由城南盡處而繞向東.因而灰白牆宇間,架有大橋,橋外遠處,則石灰石之白禿峯,或灰泥石之黃褐帶,彼此相映,以成彩景.山麓石灰岩因被採取爲農田肥料,故多斷裂.此地之灌木草野羣 (Heidewiesenformation) 中,亦有數種極饒興趣之植物,如裂葉黃色之委陵菜 Patentilla Chinensis 是.南嶽山(音譯) Nanyo-Schan 位城南之較遠處,登其禿峯,堪以遠眺,山景亦絕奇.旁山之內方,多錐峯,高約 200-300 粎,相列成行,且只於近山處單峯獨立,他則皆相與融合而成一環圈.圈形略長,南北直徑約 15 粁,而東西則爲 5 粁,誠亦奇景也.觀其全景,幾疑爲一龐然大火山口 Krater 也,幸彼顯露於外,而知爲水成岩所構成,得未誤解.山圈之石灰層,皆作散射狀向谷盤之中心

處傾斜;但出其上者,猶有灰泥石,爲兩堅層,更夾一軟層於其間;兩堅層於石灰環以內復組成二環形低矮壁壘,彼此分立甚明,惟於南相遠處,因爲盤中央高起之地所遮蔽,而未知其是否完全相連貫者.在此種三重環圈之中,高起爲一平原,且向南擴張尤遠.由是更因盤谷之中心凹下,而成一漏斗形盆地.但漏斗之緣,爲一圓環,光滑如切,實一疑慮而未可解也. Platycaria, 髓菜屬 Itea, 樟屬 Cinnamamum, Xantha xylon, Ligustrum Lucidum, 棕櫚植物與槲屬 (Quercus) 爲其寺林 (Tempelwald) 中主要成分,但於高處岩石上,則見有紫陽花狀之 Schizophragma iutegrifolium 與新發見之 Pyracantha Discolor; Schizophragma integrifolium 本爲大形攀緣植物,而在此則爲亞種 (Varietät Minus), 故形如紫陽花.

余於七月六日,出貴陽城,東行,稍遠,見山皆以各種砂石爲主要成分,路過數水,皆東北流,矮小植物以 Mariscus Chinensis 爲多,有時竟爲所充滿.河之兩岸,則爲柳屬 (Salix) 與梣屬 (Fraxinus). 及至龍里城,則見有 Paliothyrsis Sinensis 生於一山坻上,爲熱帶植物椅科 Flacourticeae 之一大樹,具有蜜香白花之總狀 (Rispen) 花序.更東行稍遠,則見有低濕原 (Wiesenmoore) 現於路旁,原中以 Typha Orientalis 爲主要成分,生於其下者,則歐洲之沼蘚 Acrocladium Cuspidatum.夾於沙木屬 Cunninghamia 之疏枝棘葉間者,則有 Lycopodium Casuarinoides 以其細長之硬葉隨風招展於彼小灌木之上.至其山坡則

松樹及夏綠槲屬,羣聚成林,更有 Clethra Cavaleriei 與 Vaccinium Iteophyllum 雜其間,以爲其成林之灌木分子.是日午餐後,同人小憩於龍珠(音譯) Lungdsu 村.余則利用此時間以觀察一密被灌木叢之山濠 Graben; 蔓生其中者,以狹葉白花之 Actinidia Fuluicoma Var. hirsuta (獼猴桃屬)爲普遍.更於濠之深處,見有狹長柔弱之 Nephrodium Decursiuoinnatum. 在此等新發見之種中,有多數隨吾人行甚遠而不間斷,至其他種類只星散各處,不相連接,如草本狀之 Macleaya Cordata 是.此物高踰二糎,具深綠色厚圓葉及玫瑰紅花總狀 Riapen 之花序.

立於旺慶橋(音譯) Wongtschengtjia 與貴定間之嶺脊,乃係一石灰層之背斜 Anticlinal; 路經此過一小谿壑,有洞穴,有瀑布,景緻頗佳.此外則全境皆甚單純,而無所觀,且其形狀亦較貴陽之西爲開曠矣.貴定地勢高 1020 粈,較貴陽爲低.

赴貴州東南部三脚(三合)

由貴定過一石英山之狹徑,地高 1300 粈,而向東南下行.此地山勢單弱未若在貴陽以前所見之强盛矣.然而懸岩深谷,猶數見不鮮.自此下行,經一溪谷向東流,而屬於沅水以入湖南之洞庭湖,但已不若貴定之溪流,而可爲流入揚子江之四川烏江上流門戶也.山路壁竪,梯級下行,路旁有一小谿壑,滿塡林木,林中以五加科 (Araliaceae) 之小樹 Schefflera Delauayi 爲最多.其樹分枝少,葉大而厚,呈灰綠色,分裂

爲掌狀,每葉之長達粎之四分之三,多葉相集於上端,因成一奇特之樹叢,如棕樹形.此外若具有軟刺果實之大戟科 Euphorbiaceae 小樹, Mallotus Nepalensis (梂屬), 亦常見者也.山之高處,載有樧屬林;林地下之山坡上,沙木屬 Cunninghemia 生焉.至狹隘溪路兩旁之懸岩及旁出之幽壑中,各種形式之森林叢藪,一望而知.所謂馬家郡(音譯) Madjiadwen 者,卽此羣山多壑中之一小村也.村高 1080 粎,處此深山中,似專備採集總屯留所之用也.七月九日,卽余逗留於此之日也.觀其各山坡上,隨在皆顯有 Hydraugea Aspera 之藍紫各色花球於叢藪中;然而村之對面小林壑,尤爲余所欲詳察者也.林中小攀緣植物特盛,蔓延各樹,若織網然,如 Schizandra Henryi, 白花之 Jasmium Lanceolarium (迎春花屬), 香氣馥郁小紅花之 Trachelospermum Axillare 及 Rubus Suinhoei 等是,後者具黑果,垂紫紅色 Purpurne 萼片中,美好如歐洲之木莓 Brombeeren,而爲饕餮者所垂涎,實則一嘗其味,乃澁縮不能食者也.懸於峭壁之裂隙上者,有大形細裂之 Gleichenia Glauca; Gymnotheca Chinesis 係一草本植物,生於岩石之洞隙中,與胡椒 Pfeffer 有親緣關係,氣味濃厚如熊爪,莖細長而匍匐,隨地可以生根,花白色而無花瓣,相聚以成疏散穗狀花序.至灌木叢藪中,則以紅色葉果之 Acer Fargesü 與天靑花色之嬌小虎耳草科 Saxifragaceae 灌木 Dichroa Febrifuga,較爲普遍,而 Castanopsis Tibetatna 之大樹,乃挺生其上者也.此樹具常綠葉,革質

齒緣,長達25粴,但甚窄狹,背面爲褐氈狀,其花序挺直而爲穗狀,長達15粴,果皮多刺.此地新有一種竹,名曰Indocalamus Longiaritus, 筍上籜葉,闊大如手,但自此以達湖南,乃常見者矣.

在馬家郡之下,所由之路,乃離彼折向東北之溪河,而隨一支流向東南行.其懸岩之地,下抵溪谷,上接行路,無處不見有金黃色蝴蝶花,相集成總狀花序之有刺 Caesolpinia Nuga, 以其籐蔓彌延於灌木叢中,而爲之害.在牯東(音譯) Gudon 之地,橫過一正向東北流之溪河;一路惟幽谷峻嶺,或上或下,直至翌日,始達都勻之一南向溪谷.此地山形復多斷裂,幾與錐山相似,但因氣候不同之影響,遍地皆成綠色,卽多石英之地,亦無明顯險峭山角之成形.河之彼方有一村,曰溫郡(音譯) Wendwen, 石灰坵陵復見於此,而谷則行於45度傾斜角之峻峭崖層間,直至都勻爲止.其溪河之左右,各有一支流與之匯合;兩岸夾以 Rhododendron Rivulare, 較他植物尤顯.其右方支流係來自一富有森林的高山之山麓,惜余因在貴陽延時過久,不能復有一日暇,而留此以走謁焉.雖然,余此時已不再作路程測量,但以吾大隊行程時間計之,及以中國里數推之,乃知都勻城之所在,較 Stieler 氏袖珍地圖所載,約更東去20粁 Km.

其河流初則向南,及下流甚遠,始折向東,而吾所隨之路,待登一970粎高嶺後,亦與之同行矣.嶺上盡爲野草所蓋

覆,林木餘痕,未可見也.他方有較平坦之地,上生有矮小灌木,因成範圍狹小之乾燥草野 Trocken Wiesen,可與歐洲之灌木草野 Heide-Wiesen 相比較.生其中者,矮小半灌木 Stauden亦極多,如 Oldenlandia Uncinella, Patentilla Chinensis, Burmannia Disticha, Uelastoma Repens 及數種矮小蘭科植物,如 Calanthe Angusta Var. Laeta 與 Phyllomphax Galeandra 等是也.

路遇一漁人,向之買得大鯢魚 Riesensalamander (Megalobatrchus Maximus) 兩尾,長達 42 糎,有脊鰭,頭扁闊達 6½ 糎;此魚應卽出自本地之溪河中者,據云由此魚中可以製藥,而余則浸以福爾末林耳.及過一小溪,而達彼方,卽復入砂石之地,始見有林木如松樹等發生,但下行,而另過一溪谷,則見其景象又稍異矣.如彼總狀花序而葉有褐毛之新發見小樹 Meliosma pannosa, 乃其主要之分子也.觀其禾本科植物之成分,與生於乾燥草原 Steppen 者極相近似,乃推知全境氣候,似乎過於乾燥,此或地之兩山皆連山綿亙,而大氣閉塞之故也.水溪之旁,有一小村,曰多級(音譯) Dadjie 村.村旁有一石灰坵,高起而爲超越砂石向西傾斜之層端 Schichtkopf,斜面峻峭如壁豎,而植物之新奇可採者甚多,故雖疾馳而過,已可見其葉背雪白之 Sorbus Folgneri,粗糙小葉之檵花 Loropetalum Sinense 及綠色蝶形花之 Apios Fatunei 等.或雜灌木叢中,或生溪流岸上,皆隨地而顯其形者也.山坵之上有樹林,林木繁茂,令余不能不一往觀焉.余因於七月十三,留宿於

毛草坪(音譯)Maotsoping.毛草坪亦一村落也,離彼山垭約半小時行程.

翌日上午,即返多級村,以觀察其山垭,而便詳考其究竟.其地層之表面,近於腐植土 Humusboden, 上生有高深竹林(Phyllostachys Puberula), 更有楓屬 Liquidambar, 槲屬 Quercus Eriobotrya 與 Photinia Dauidsoniae 等大樹,爲雜其中而高出林表者.至生其下者,則有玫瑰紅之 Ardisia, 葉有白斑之 Rubus Cha'faujoni 等.但生於稜角 Kante 與裂崖上者有一灌木林,與地中海之灌木羣 Macchia 極相近似.林中木多小葉,且無高大樹木,惟錯根盤節之老樹,乃常見者,如見風乾屬 Carpinus, Guercus phylliroides, 球形小實之 Pittosporum Floribundum, 葉常綠而花鮮黃之 Evonymus Dielsiana 及 Platycarya 等是.其中更有一樹,形與槲屬相近,而又如 Lithocarpus 具有直立之雌花穗狀花序,實一大可奇異者;其葉爲三數,亦有五數,相聚成羽葉,幼葉上生有黃褐色毛,與花序同,此樹終則定名曰 Engelhardtia Chrysolepsis, (仁杞屬)而係與胡桃有親緣關係者.下午余興趣猶未減,因更於崗脊之低窪中,走訪一低濕原 Wiesenmoor.其地下土質,多砂礫,有泉水外滲.原中分子,除 Mariscus Chinensis 外,新發見之大形 Schoenus Sinensis, 乃其主要之成分也.此物彼此密生,如小垤陵,終則相接成指環.翌晨由毛草坪出發,未幾即達小河,爲由西南而來自都勻者,行經斯地,高達 600 桿.

吾人乃乘小渡船而過彼岸,旋卽上登高山達1200粎.吾人更兩度橫過石灰岩層 Kalkschichten 於砂石之崗脊間.楓屬Liquidambar與沙木屬 Cunninghamia, 皆爲高大老樹,而障蔽於山坡上者,而 Callicarpa Lyi 則不多見者也.崗脊上地層多直立,蓋以此崗爲一裂隙所留存之低落部分,而遠在對方之地層,則又反向西傾斜矣.由此下山,而達八寨甚近,道旁見 Hydrangea paniculata, 此物固已余所累見者,然現正其着花之時耳.其花甚大,爲黃白色,雖已有不結實者,然羣花相集而爲總狀花序,秀麗如彩球,誠美觀也.八寨爲一市集,周圍景象,似與雲南高原之地相近,如砂石(或青石板?)上之紅土,低矮山岡,與平弱錐峯,以及槲屬與銀松Föhre之樹林等,皆其近似之點也.

但余自過八寨,不卽取道東進,而反折向南下者,因欲一觀彼深深南處之都江 Du-Dsiang 溪谷故也.此外更於路見有背負闊大木板,赴集求售者,乃知必有高大樹木(普通只松樹)出其間,故欲前往一窮其究竟,是亦余南下之一因也.溪谷之右,連山綿亙,山坡之上,時見有甚大苗村在焉.遠望之,此等苗村,與彼那希(音譯)Nahsi村落,甚相近似,但於此等苗村所見,皆係狹長而高之黑暗木屋,因感有一種特別印像,不若彼那希村,使人所感受者,惟憂鬱蕭條而已,凡苗人所居之地,漢人卽不前往,與那希同;而樹林亦同樣可以保存無損.其山多不甚高,而高大之常綠槲屬大樹,皆羣聚而

密生焉.此地居民,對於歐洲人,定未習見,一日旁晚,余走訪蕎里(音譯) Tjiaoli 村,因欲觀察其周圍叢藪也,時有二婦人前往汲水,適與余遇於井泉,駭號而走,急奔返家,緊閉其門而未敢出.翌晨,又有一農人,於數百粎外,見余卽遠遁而去,雖然,余只一人,何驚駭若是,可知其少所見也.生於灌木林下之植物,可注意者,有 Lysimachia Paridiformis; 其葉有四,合組而成一單輪.又 Nahonia Lèveillêana 正當開花之期,亦顯著者.至於乾燥之山坡上,則以 Sapium Sebiferum 爲極常見者.其葉甚小,爲斜方形,野生形狀與白楊相近.此地於500粎以上,卽已屬亞熱帶之階段 Subtropischestufe, 因未幾卽遇有栽培之橙樹 Orangen (Citrus Aurantium). 由此而過田野,再別沿一溪行,旁午卽抵三脚,爲都江岸畔之一小城也.江流來自西,來處雒峯連立,一望而見,甚顯然也,而此亦卽貴州西南全部之景象也.

過古州而往黎平

三脚在商業上爲交通於廣西之要地,而城實不甚大.余今所經之路,由貴定至此,亦如對方去湘大道,直至鎭遠,皆有驢馬大隊,絡繹於途.據云余所見,猶非交易繁盛之時也.由此東下,所有貨物,皆可於都江上作舟運,而沿江之路,只彼有要務者,始輕身策行其上.余物件衆多,未可攜以路行,因以洋六元,雇二小舟,爲運載行李等件,以往古州.當日下午,因須易換標本紙,及修整行軍床而過去.翌日侵曉,余卽

策驢隨余之輕身大隊前進,因余不欲呆坐舟中,空見翠花雜木,過余而不能採.由三脚至三江(音譯) Sandjiang, 爲 90 里,若舟行,晌午可至,但余路行,因須隨地觀察採集,直至旁晚始達,然而於路猶怱怱急行,而未敢久延也.途中往覆過河,共須四次,其中雖有一次,吾等之驢,係自行浮泳而過,餘則每次上船,需時甚多,所過之路,多狹隘崎嶇,大有難行之慨.但吾之驢,常喜行於碎石亂擲而成之階級上,且每步四五級,致余在鞍上常必留意其步履,而不敢安坐.馬夫頭目,因懶於路行,乘舟而去,只留其兩伙伴隨吾等路行,故每於驢梯登山路,左旋右轉時,卽未能固持驢韁,使不致動.日已西下,吾正趕程而進,忽遇崩裂之地而斷去路,必繞道而行,旋又遇一獨木橋,亦必繞道而始可前.待抵瑞興(音譯) Schuising, 已暝色蒼茫矣.瑞興係一船戶村落,旁江而居三江之下.余於此日,與余之兩採集者,竟日工作而未少息,勞苦甚矣.因斯地植物繁盛,且與余前此之所見者稍異;此亦因其深山峽谷之中,溫熱濕氣,直與熱帶相近,大利於植物之更新而不見有若何損傷之形跡.有毒之 Croton Tiglium, 在野生形狀,乃常見者;此物爲淺綠葉之小樹,卽只取其一粒細小種子而服之,亦發生猛瀉作用;同樣若大葉黃毛之 Ficus Hirta 亦不少. Melosma Fordii 小紅花之散放密香, Erdysanthera Rasea 攀緣藤之蔓延叢藪,皆顯著者也;但如 Mussaenda Wilsonii 與 M. Puberula 又多因其蛋黃色小花,爲彼擴大之白色萼片所

包圍,而隱蔽於叢藪中,亦大堪注意者.惜乎兩岸隔河,居此則無由及彼;余常見對岸有一暗色小棕樹,固知其與 Trachycarpus excelsa有別,但因無由觀其所以,未敢斷其爲何種.距河岸稍遠處,飛砂羣集成灘,地多平坦,生其上者,則有 Saccharum Arundinaceum, 此物固羣生者,但以他種原因,斷裂爲多數段落,合各段落而總觀之,儼然一高深草原羣落也,人立其中,隱而不見,但其銀色之繐狀花序,猶高過焉.隱其下者,以羊齒植物爲最多,其葉帶秒端,屈曲下垂,及地而生根,更匍匐前行,復生新葉帶 (Nephrodium Proliferum). 他若石蒜科之 Crinum Latifalium,亦偶爾以其10釐闊葉與雪白花色,表現其中.河水高漲之度,似不甚高,但於兩岸之地,猶可見有水跡,亦明示其高漲之度,且知每年高漲時期,亦必甚長,而岸壁久浸於水中,方留此痕,在溪流較狹處,其高漲水跡超過現時低落水面約 7 糎.此種高漲水跡,若於平坦處,則遠向兩旁擴大.然而此漲水淹沒之地,並非童無草木者,且有多科灌木,叢生於斯,而成一高過人身之叢藪,其枝條多屈曲,可隨漲潮高落以屈伸,因得不爲所害,及今猶見有河水高漲時,飄浮水面之葉與草,懸垂於枝端莖杪,而復可認也.榕屬,Ficus Piritomis, Elaeagnus Lanceolata, 桃金孃科 Myrtaceae; 樟科 Laurceae (Syzygium Odoratum, Machilus Salicina 有藍黑色漿果), Dissium Chinense, Cornus Paucineruis, 及美麗之Rubiaceae, Adina Globiflara而具有紅白嬌柔之球形頭狀花序,皆可見於此叢藪

中.至裸露之岩石上,則爲彼矮小之 Buxus Harlandu 所在之地,此外則惟禾本科與地衣爲斯帶中極常見者,如先發見之 Arundinella Fluviatilis, 羣生於岩隙中之砂土上,及黑色之 Heppia Applamata,皆其主要者,另有一白花地衣,因於急促間,未能採得.日間所採得者,必待壓製,故余是日,直至深夜,始得安眠,

翌日余只於河旁之某一定要點,及其支流匯合之溪口,作精確觀察,餘時則登船憩息,似不較昨日之勞也.據云此地水盜甚多,余因取四巡士在船護行,一人與余隨,餘三人則留他一舟中.途中遇數濠口,山濠中皆滿充林木,心欲往觀,惜因不得泊舟之所而未果.是等林濠,昨日適於谷之他面,而與余相對,其中如野香蕉(此種定甚新奇,因於中國南部,應有多種香蕉) Alocasia 之大葉,以及藏其下之新奇種類,皆爲余望而不可及者也.於路更見有一無花果屬大樹 Ficus Parvifolia, 此物亦常生於深谷中,其樹基之根散射的作板狀向外突起,即所謂支柱 Plankeugerust 是也.上載暗色樹蓋極大,鄉人多栽於村旁,以乘其蔭蔽,余曾得花枝而藏之,亦快事也.現時河水深度,甚適於舟行,河底多亂石,有時湍水下流,潺潺作響,且水花四射,泡沫高濺,而船身則盧搖無定,急躍而下.更有於河流寬坦處,障以石堤者,惟於堤之中央,開口如石門,船必展轉而由此門過,過門時,船首必出水浪,而高起於空中,直至其船勢高出達一定程度,始如飛箭

脫弓而下,船身又深入水中矣.此種行駛,頗饒佳趣,且亦甚安穩,因此等舟子,多係苗人 Miao,(其語言尾音多"阿A",因憶與明家 Mindjia 之言語相近),乃自幼習於斯,長於斯者,河岸石壁上之一洞一穴,彼等無不知之;設舟行遇有峻拔高懸之岩壁,彼卽早爲之備,將長桿插入石壁之洞中,使船不致衝擊岩壁之稜角,以墜入峭壁下之急水漩渦中.當湍流危急之時,彼等則全力以抗之,一待險過,則又興緻橫生,行歌互答.最後於右邊支谷得一地,植物繁茂,似有停泊之價値,蔭於其峻峭山坡上者,有楓樹 Liquidambar Formosana, Castanapsis Fissa, Myrica Esculenta, Schima Crenata 等樹,下則有大形羊齒 Gleichenia Glanca, 密生成羣,又地上苔蘚聚生,如熱帶之 Bazzania Tridens. 沿支谷而進,尙有數種,如 Ficus Sardida (新發見者), Embelia Parviflora, Polypodium Coronans. 以總數計,所得實不多,且雖已尋訪較優地點,終亦徒然而無所獲.惟於峭絕(但不甚高)之綠坡上,見有多數苗村,旁水而立,乃大堪注意者.此後則直至天堂(音譯) Tientang,.始泊岸焉.

天堂之地,溪河水面不再若是之狹隘矣.水底沉砂過厚,以故兩岸砂灘多不見有灌木移植其中,然而惟彼 Pterocarga Stenoptera 常植根於水潮漲溢之地;其直立之幹木,堅實如核桃質,雖當潮水高漲,猶可固持其本身而不爲所害,此地風景殊不足觀,惟地質構造,又小有變易矣.自三脚而向古州,迄今皆爲一片橫立之灰色大成岩 Grauwacke, 橫交於

河上,幾成直角,但自此東傾之堆積物 Kanglomerat, 乃作腹形之隆起;更有灰泥石 Mergel 覆其上.自此前行,久之,達一由左匯合之支河口,有甚多水力舂臼在焉,已示其近古州城矣.古州城與河岸之距,步行數分鐘可達.余因舟行,乃於七月十九日旁午抵此,但余之大隊,猶必遲一日始至,余於此.所遇甚適,因於近城之對面一抵平山坵上,有一叢林Hain,旁羊牯廟(音譯)Yanggumiao而立.叢林中有 Photinia Subumbellata, P. Davidsoniae, Pyracantha Discolor及美麗之藍色 Porana Sinensis, 但林之主要分子,則爲 Quercus Varialilis. 至於城之西南有山,名豹蹄山(音譯) Baotieschan,覆於其峻峭山坡上者,有一大森林,七月二十日下午,余走謁此林,山之麓有叢藪草野 Buschwiese, 登山時,見黃花之蘭科植物,名 Habenaria Linguella 者,盛於其間,同樣有 Striga lutea 與 Wikstroemia Lndica 花亦盛開蔓延於草下者,更有 Lycopodium Cernuum, 至生於樹林中,則有Clerodendron Mandarinorum,係一大樹,開大形白色花,花氣馥郁,彌蔓林野.他若 Firmiania Simplex, Castanea Henryi, Eriolisryo Japouica, Liquidambor Formosana Myrica Rubro Aleurites Fordii, 樺木屬 Betula, 白楊屬 Populus 等,皆其林之分子也.翌早臨行,偷閒一視城市,不禁爲之驚異者久之.因此城與余前此所見之中國城市,已大不相同,當余彳行於其商業繁盛之主要街道中,見房屋皆係多層高樓,而建自大石者,且飾以金質及其他彩色,幾疑身入別一民族之地,而另感有一種印像.

然而此地亦非十分美足者;其地誠一商業中心點,但只處於杜任(音譯)Tujen或彭地(音譯) Pen-di 各村間,而由其居民以廣交易,故其建築式雖較進步而美善,然較之雲南土著中國人之房屋,無大別也此豈因彼炎熱氣候,與此高僅300粎之地相同,而有間接之連貫歟?且自此而東,各城建築式亦多差相近似矣.

當地行政長官,强余於六名警察外,更帶十六名兵士護送,因此去將達邊界,而路多不甚安靜.由古州動身,橫過一寬廣溪谷.谷屬於都江之支河者,過此則余之路東北行矣.此地已有棉花,余於中國見斯物,是乃第一次也更見有葡萄蔓生於潭水旁之陰棚欄杆上,但其數量甚微,只可用作水菓,若以之釀酒,未足也.稍前而過小溪谷,卽上登砂石山,山則超前所云灰泥石山而上之.路有二處已傾陷,須繞道而過,或於所攜物件須肩負而過.未幾吾人見有一大隊担負商人,約20人,謂方於兩點鐘前,遇盜於一山嶺上,盜數約亦如之,所刼之物,共計可3000元之値,且傷多人而遁去,當午憩時,客商羣集而緊隨余等行甚多,蓋欲藉余之兵力以保險耳,移時吾等卽遇二傷者,不僅爲之拭裹血口,且以橦椅急負而下山.旋又於嶺上之一小飯店中,見一人肺部受刀刺,血流滿口,傷勢甚重,難望有救,余欲以歐洲方法試爲之治療,知亦無濟,後雖經中國醫生診治,而終莫效,更前進數百步,卽爲羣商被刼之地,血跡紙片,以及破碎物件,皆是

徵也.而彼匪人已暗藏於幽洞深草中去矣,此等盜賊,謂係湖南人而過界者,蓋以其地方官常曰:"賊非本境人,一出境卽無由追捕."而湖南官吏又曰:"賊未害吾轄地,非干我事."因此賊等皆逍遙法外,而出沒於兩省邊界之地.吾兵士之一部分,曾上山坡尋覓,然而彼等已深藏遠避,當無所見.是晚余宿於蔡毛(音譯) Tschaimon 村.復見二人來村中求爲包裹傷口,一人腿上受一刀刺.甚深,他則爲石塊或類似兵器而傷其頭皮.

此地多脊崗及小溪谷,相與連成一片.故其全境可視爲一高原,高出海面 950 粎.其溪谷之水多向南溪流,待近黎平,始轉向東北流去,山地皆綠而多林,然林木若所伐者多,則林疏而光透入,谷中常見有削皮之大木,沿溪而下,常亦有已解造爲高柱者,以輕重負,如歐洲阿爾帕山 Alpen 所伐之木然,因此等木須抵河水後,始可桴流而下,且由此間可運至廣州云,其居民謂係東家(音譯) Dungdjia 與仲家 Tschung-djia 二種,彼此間所別甚微,與緬甸之山族 Schan 爲親族,服色全與漢人異,皆尙黑,婦女則服多褶衣而至膝,男人之髮,盤結於頭頂稍近額處,身軀不甚大,頗清潔,但形狀猶多如竊賊.其村落亦類似苗人者,惟多廟宇,所感稍異.據云此民族係來自印度者,其房屋建以木,高有多層,每層有一狹頂,連層累積,視之如印度寶塔然.其積谷之所,(亦有住屋,)皆立柱高樑,而築之如水上,或爲防鼠齧及其他種動物竊

食而然也.屋下敞室內,多厝尸棺,一如漢俗須待吉日而葬.各村皆有漢商住其間,而此等商人,則於其寂靜之房屋內,一如他處皆裝以櫥廚,貼以紅紙條.此地為牧養水牛之中心點,牛有奇大者,且有不耕作而專為生殖用之牡牛,角上則套以白鐵皮,以示其有專用者,因此馬則為其村人所不能見者.余之大隊過此,馬鈴聲響,村人奇之,多羣集而觀,且有牽兒攜女,來吾隊以示之曰"此卽馬也,"村中亦無所謂馬廐獸欄,故吾人之馬必置於村路中,而飼以米及青草.馬於夜間,時有將屋簷推落而奔入稻田者,村人因以發出種種呼號喧嚷之聲,酣睡靑夢,每為所害.

從古州至黎平之半途中,有一兵營,隨來兵士,應於此交代,而另由此得23名兵士及一軍官.彼等匪人,因余常有兵士護送而過,害及彼等未能多所搶刼,(余等復遇一商人之墓,係於三禮拜前而彼賊害者),而仇余甚,但亦無如之何耳.至於採集之事,則日忙於午憩晚宿之時,因途中所遇,隨在皆有新奇者生焉,此所舉者,只 Antidesma Japonicum, Randia Yunnonensis, Quercus Picta (新發見者), Blastas Spathulicalyx 及 Oldenlandia speciasa 而已.溪河之旁,常生有 Fraxinus,此或係最後離羣而立者.在一溪河中有一綠島,島由 Pentasaeme Stauntoni 所組成者,此物係蘿摩科 Asklepiadaceae 之一種,而此科亦只此屬始有水生種.其物之生於此地者,常浸於水中,約三分之一或及其半,而其莖上之葉,只生於杪端,與毛莨科

之白屈菜相近似,

由古州至黎平之一段行程中,雖天雨酷熱,而在吾之旅行記中,亦印象最深之一節也.最後吾人行抵黎平之綠谷,谷甚深.由西南來,而爲一寬廣低窪之地,山坡之上,盡被斫伐,狀已童然,且凹凸而成無數小山窪,乃其特徵所在,極易認識,其灌木草野 Buschwiesen 中,常有蕨 Pteridium Aquilinum 叢聚生,使放藍色光彩.

七月二十四至二十八,余則留於黎平,因余傷風甚重,鼻塞頭昏,體稍發熱,此城甚小.然已有玻璃窗戶,而購買外貨,亦較雲南各大城爲多,故於此已有香港運至之罐頭牛乳出售,每罐售洋三角,價甚廉也,此物爲余所不可少者,因可藉此以改其水中之泥味耳,時理政縣長,係新接任者,似甚有知識.而甚和藹,當余於二十五日走訪南荆山(音譯) Nan-djin-Schan 之寺宇林 Tempelwald 時,願以差役四人供余差使,但余只攜二人以隨,餘二人則留於家,寺宇林成自高大老樹,且猶繼續發展不已,但其林下植物,則甚貧乏;惟於林園之地,見有 Symplocos Confusa 之香花沁鼻耳,然猶有爲高林樹叢所蔭閉而窒至死者.至於草本植物而生於一泉源旁者,則有大形之 Hydrocotyle Nepalensis, 較爲新奇也.

書　評

H. Weyl, Gruppenthertie Und Quantenmechanik,

第二版,366頁,1931,裝訂本24馬克

在本刊第一卷第一期中,已介紹過這部書的第一版.它的確是習物理學的必不可少的一部書,因爲以前應用羣論於物理學中者甚小,所以物理學者注意羣論的也較少,有了這一部書,當然便利的多.也就是上述的原因,覺得這書不易讀的也很多.著者於再版中,所以取"初等化"〔"Elementarisisierung"〕的態度.

在本書初版和再版間的兩年半中,量子力學沒有甚麼主要的進步,所以新版大體沒有什麼變更.第一,二章無甚變動.第三章從前是純用超越方法的地方現在也有用初等的方法的,如Jondan-Hölder定理之證明等,此外各處都與新的"抽象代數學"〔"Abstrakte Algebra"〕有密切的關係.第四章論Heisenberg-Pauli的量子電力學處,因尚沒有滿意的結果,較有困難.然書中討論此問題之處亦頗精彩.本章亦已應用第三章之初等方法.第五章也是如此.較初版更爲注重物理的方面,

全書的內容較初版易讀的多,其 Elganz 雅亦不因"初等化"而稍減.與 Born 所著的量子力學有相同的好處而其精緻或且過之.

潘祖武.

國立武漢大學理科季刊投稿簡章

一・本季刊登載關於數學物理化學生物地質等學科之稿件海內外人士惠賜大作一律歡迎

二・投寄稿件不拘文言白話但須依本季刊形式一律橫書每面二十二列每列二十三字繕寫清楚并加新式標點符號

三・稿件題目之下請署姓名如係譯稿須註原著者姓名或雜誌書報之名稱及其出版時期地點

四・稿中如有插畫或圖表請另用白厚紙繪畫或製成照片或附寄原圖

五・本刊稿件依照數學物理化學生物地質等學科之順序登載

六・來稿如未登載除預先聲明者外恕不退還

七・稿件登載後本刊略備薄酬以答雅意

八・稿件內容本刊得酌量增刪但不願意者請預先聲明

九・來稿請寄武昌國立武漢大學理科季刊委員會

國立武漢大學理科季刊第一卷第三期目錄

國立武漢大學理科季刊第一卷第四期目錄

民國六年創刊
介紹科學藝術的雜誌 學藝 奇數號載社會科學論文
偶數號載自然科學論文

第十一卷第七號要目

第十一卷第八號要目

國立中央研究院

各所館新出版刊物

所館	出版品	編著者	定價
化學研究所	集刊第三號（中國新本艸圖誌 第一集 第二卷）	趙燏黃	一冊一元五角
	集刊第四號（鐵量磷之另一比色定量法等）	曾義	一冊一角五分
	集刊第五號(英文)（右旋性酸鹼類誘導體之硃）	曾昭掄 朱汝華	一冊一角五分
工程研究所	中央陶瓷試驗場工作報告	周仁	一冊七角
	集刊第一號	王季同	一冊六角
地質研究所	集刊第十號（中文）	葉良輔等	一冊一元五角
	集刊第十號（英德文）	斯行健等	一冊一元五角
	叢刊第一號	葉良輔等	一冊一元五角
天文研究所	恆星光帶強度分配的研究（英文）	余青松	一冊五角
	民國二十年天文年曆		一冊一元五角
氣象研究所	集刊第二號	呂炯	一冊一元
	氣象月刊四卷一期 二期		每期一冊一元六角
歷史語言研究所	安陽發掘報告第三期	李濟等	一冊一元五角
	延平王戶官楊英從征實錄		一冊二元
	校輯宋金元人詞	趙萬里	五冊四元
	山東人體質之研究	吳金鼎	一冊一元
	明清史料	第五卷	一冊一元
	,,	第六卷	一冊一元
	,,	第七卷	一冊一元
社會科學研究所	六十五年來中國國際貿易統計（中英文）	楊端六 侯厚培	一冊八元
	近代農村經濟的趨向	宗華	一冊五角
	英文初編圖書目錄		一冊八角
自然歷史博物館	叢刊第八號	方炳文	一冊二角五分
	特刊第一號	E. D. Merrill	一冊一角

經售處							
上海	商務印書館	生活週刊	開明書店	新月書店	北新書局*	中國書店**	
南京	商務印書館	中大出版部	保文堂*	國粹書店*	本院		
北平	歷史語言研究所	北大出版部	景山書社	開明書店	神州國光社	商務書館	
各埠	商務印書館						

** 經售史語所刊物

* 經售史語及社會科學兩所刊物

普通刊物

英文概況（二十年） 每冊一元五角

十八年度總報告 每冊一元五角

院務月報 每冊一角

本院各所館出版品爲數繁多不克備載茲摘錄其最新出版著若干種於上詳細書目請附郵票一分向南京成賢街本院或上海亞爾培路三三一號本院出版委員會函索

國立武漢大學理科季刊

第二卷第一期

價目	郵費
全年四册 價銀二圓	訂購全年 本國及日本不加郵費 其他地域加郵費六角
每期零售 價銀五角	函購零本 本國及日本加郵費五分 其他地域郵費一角五分
本刊以九月十二月三月及六月爲出版期	
費須先惠空函不覆	
各地代售處零售概不另加郵費	

編輯者　國立武漢大學理科季刊委員會

發行者　國立武漢大學出版部

印刷者　中國科學公司

代售處　商務印書館

總發行所　武昌 國立武漢大學出版部

中華民國二十年九月發行

1931年

第2卷

第2期

國立武漢大學
理科季刊

第二卷第二期

QUATERLY JOURNAL OF SCIENCE

WU-HAN UNIVERSITY, WUCHANG, CHINA

Vol. II No. 2 December 1931

本 期 目 錄

中華民國二十年十二月發行

國立武漢大學理科季刊委員會編印

中華郵政局特准掛號認爲新聞紙類

國立武漢大學理科季刊

第二卷第二期目錄

國立武漢大學理科季刊

第二卷第三期目錄預告

微分的嚴密底直觀意義

湯　璪　眞

打開許多教科書一看,往往尋得到和下面意思相類似的話:

(1)曲線上一點的鄰點,是曲線上一個和這一點無限接近的點,

(2)切線是連結曲線上兩個鄰點的線.

由第一句話講,兩個鄰點在曲線上應當有距離,不過這距離是無限小罷了(注意,無限小是以0爲極限的變數,其所取的數值通例不允許是0),由第二句話講,兩個鄰點在曲線上又應當沒有距離,因爲一有距離,切線便成爲因距離而變的變線了,但是切線並不是變線而是定線呀(注意,切線是變線的極限位置,所以應當是定線)!因此我們看出來,鄰點這個概念,如果照上面那樣講是會要發生矛盾的.

教科書上爲何要講這類矛盾的話?自然爲的是要無限小的性質能夠有直觀意義,使學者容易明瞭些.那知道混變數與極限爲一談的見解,無論如何是不正確的,其結果當然要發生矛盾才行. 所以這種直觀意義,只好說是近似的或檢直說是矛盾的,決不能說是嚴密的.

究竟直觀意義,也有所謂嚴密的沒有?有的!所以現在提出本文的題目來研究.

微分這東西是一種無限小的性質,但本身並不是無限小.這件事實已經在本季刊本卷"顯微鏡下無限小的看法"裏面指明了.在那裏並已說明

$$dx = \lim_0 \Delta x \quad , \quad dy = \lim_0 \Delta y,$$

而且 $(x+dx,\ y+dy)$ 是切線裏面未定的一點.上面那個鄰點的講法,既要發生矛盾,所以我們先變更那個講法.其法如下:

(1) 曲線上一點 (x,y) 的第一級鄰點,是切線上的 $(x+dx,\ y+dy)$ 點,

(2) 切線是連結曲線上 (x,y) 點和鄰點 $(x+dx, y+dy)$ 的線.

由 dx 和 dy 的未定性質,立卽知道曲線上 (x,y) 點固定以後,他的第一級鄰點是還可以變的,不過老在切線上變罷了.再可注意的是,第一級鄰點可在切線上任何位置,不必和 (x,y) 點無限接近.

鄰點既換成了這樣的意義,於是第一級微分便都有了嚴密的直觀意義. 現在先指出〔下面 r 代表 (x,y) 點的位置向量〕:

第一級微分 dr = 本點到第一級鄰點的向量,

第一級微分 ds = ″ ″ ″ ″ ″ 長度,

第一級微分 dx = ″ ″ ″ ″ ″ 落在 x 軸上的正射影,

第一級微分 dy = „ „ „ „ „ 落在 y 軸上的正射影,

第一級微分 dr = „ „ „ „ „ 落在動徑上的正射影,

第一級微分 $rd\theta$ = „ „ „ „ „ 落在動徑垂線(方向與 θ 相同)上的正射影.

這些事實差不多在"顯微鏡下無限小的看法"完全證明過了,所以丟開不談.

現在再講第二級微分!於是急於要問的便是 d^2x 和 d^2y 有甚麼直觀意義. 先設曲線是用正坐標表示:

$$y=\Phi(x)$$

其中 x 爲獨立變數其 Φ 可設爲解析函數,於是若 (x,y) 爲曲線上一點 P 則曲線上其他任意點 Q(並不一定是無限接近的點)可命爲

$$\left(x+dx\ ,\ y+dy+\frac{1}{2!}d^2y+\frac{1}{3!}d^3y+\cdots\cdots\right)$$

過這個 Q 點作直線平行於 y 軸交 P 點的切線於 R,那末 R 一定是

$$(x+dx\ ,\ y+dy),$$

這是大家知道的,已經不用說了.再命這 QR 直線交合乎下面四個條件的拋物線:

1) 過 P 點,

2) 與原曲線的 P 點的切線相切,

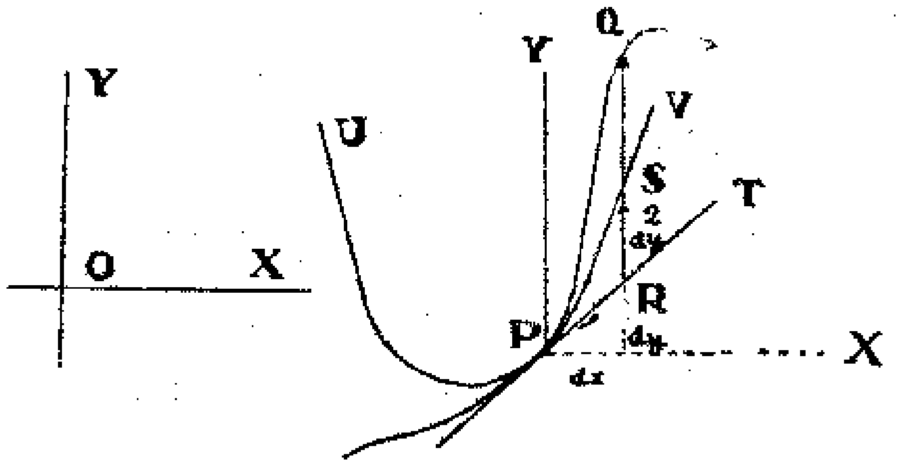
3)　在 P 點的曲率等於原曲線在 P 點的曲率 $\times 2$,

4)　以過 P 點而平行於 y 軸的線 PY 爲一直徑,

於 S 點,那末(證明在後) S 點一定是

$$(x+dx+d^2x\ ,\ y+dy+d^2y)$$

自然這裏不過爲整齊起見才添上 d^2x,實際這是 o, 所以不添也可以的這就是說 d^2x 的意義我們不必去管.現在來看 d^2y 的嚴密底直觀意義.這個可以簡單的用下面



$$d^2y=\overline{RS}$$

這個等式表明出來這是甚麼道理呢?這只要將上面所已經指明出來底 R 點 $(x+dx,\ y+dy)$ 和 S 點 $(x+dx+d^2x,\ y+dy+d^2y)$ 的 y 坐標相減便知道了,dx 變的時候上圖裏邊的 $ds(=\overline{PR})$ 也變,同時 d^2y 也變,可注意的就是 ds 的末端 R 老在切線 PT 上,d^2y 的末端 S 老在拋物線 UPV 上,而且 RS 老是平行的變.

現在證明上面這幾層性質.取 P 爲新原點,PT 和 PY 爲新坐標軸,那末 S 點的坐標便是 $(ds,\ d^2y)$

$$\because \quad dy = y'\,dx$$

$$\therefore \quad d^2y = y''\,dx^2 + y'\,d^2x = y''\,dx^2$$

次設原 x 軸轉至 PT 線之角爲 θ, 又 PT 轉至 PY 之角爲 ω, 則

$$dx = ds\cos\theta = ds\sin\omega$$

$$\therefore\quad d^2y = y''\sin^2\omega\, ds^2$$

P 點固定時上式之 y'' 及 ω 均爲固定,所變者僅 ds 及 d^2y 而已,故知其與平面解析幾何之方程(用 x,y 作斜坐標)

$$y = m\,x^2$$

相當.因之知 S 點 (ds, d^2s) 之軌跡爲一拋物線.

這個拋物線其所以有上述1)2)4)三個性質,其道理可以直接從上面這個方程看出來.他還有那3)的性質,這只要改成正坐標一看,便知道了.過 P 作 PX 線平行於原 x 軸,則 PX 和 PY 便成直角軸.由上圖立卽知道 S 點對於這直角軸的正坐標是 $(dx, dy+d^2y)$. 其關係是

$$dy + d^2y = y'\,dx + y''\,dx^2$$

因爲 P 點暫時在曲線上固定,所以上式中 y' 和 y'' 也是固定,但其餘的都是可以變的,因此這個方程和平面解析幾何的方程(用 X,Y 作正坐標)

$$Y = y'X + y''X^2$$

相當從這裏求 P 點 $(X=o, Y=o)$ 的拋物線曲率便知道是原曲線曲率的二倍.

以上所說,是用 x 作獨立變數,也就是用 x 作曲線 $y=\Phi(x)$ 的參數,因爲這曲線方程可以改成

$$\begin{cases} x = t \\ y = \Phi(t) \end{cases}$$

的原故.但是曲線的參數方程通例不是這樣的特殊,而是有一個一般的寫法.假如用一般的參數方程,我們可以發見一重要事實,就是上邊那拋物線會要變動.其變動的狀況是上邊所述1)2)3)三個性質仍舊,但是4)的那個性質要改成"以過P點而平行於$(\ddot{x},\ddot{y})$方向的線爲一直徑."現在來證明這句話於下:

設曲線用正坐標xy含一參數表示:

$$(1)\qquad \begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t), \end{cases}$$

其中t爲參數,其f及g假定是解析函數.於是若(x,y)爲曲線上一點,那末曲線上其他點便可以用下式表示(以下的d^2x, d^3x等要由上面所用的$x=f(t)$決定):

$$(2)\qquad \begin{cases} X=x+dx+\frac{1}{2!}d^2x+\frac{1}{3!}d^3x+\cdots\cdots \\ Y=y+dy+\frac{1}{2!}d^2y+\frac{1}{3!}d^3y+\cdots\cdots \end{cases}$$

向使在右方丟掉一些項數,那末左方的(X,Y)通例不代表曲線上的點而代表其他種點.這種點我們先考究一下看看.假如丟掉之後只剩一項,那末(X,Y)便成了(x,y),於是所代表的便是本點.假如丟掉之後還剩兩項,那末(X,Y)便成了$(x+dx, y+dy)$,於是所代表的便是本點的第一級鄰點.假如還剩三項,那末(X,Y)便成了$(x+dx+\frac{1}{2}d^2x, y+dy+\frac{1}{2}d^2y)$,這時所表的點可以叫作本點$(x,y)$的第二級鄰點;其餘第三級鄰點等,可以類推.每級鄰點均有一個軌跡,例如第一級鄰點的軌跡是(x,y)點的切線已經不用證明了.第二級

鄰點的軌跡是拋物線現在證明於下. 和第二級鄰點相類的點有一種是 $(x+dx+\frac{m}{2}d^2x, y+dy+\frac{m}{2}d^2y)$ 點,這可以叫作 (x,y) 點的 m 倍第二級鄰點.這種點的軌跡也是拋物線,現在併入此地一起證明.證法,命

$$(3)\qquad \begin{cases} X = x+dx+\frac{m}{2}d^2x = x+\dot x\,dt+\frac{m}{2}\ddot x\,dt^2 \\ Y = y+dy+\frac{m}{2}d^2y = y+\dot y\,dt+\frac{m}{2}\ddot y\,dt^2 \end{cases}$$

於是 dt 變的時候,(X,Y) 點便畫出一條曲線.如果要知道這是甚麼曲線,我們應當消去這參數 dt 看看再說.消去的方法是先以 $\dot y$ 乘第一式以 $\dot x$ 乘第二式相減,再以 $\ddot y$ 乘第一式以 $\ddot x$ 乘第二式相減.這兩個結果是

$$\dot y X-\dot x Y=\dot y x-\dot x y+\frac{m}{2}(\dot x\ddot y-\ddot x\dot y)dt^2$$
$$\ddot y X-\ddot x Y=\ddot y x-\ddot x y+\quad(\ddot y\dot x-\ddot x\dot y)dt.$$

從這裏的第二式求出 dt 再代入這裏的第一式而整理之,馬上得

$$(4)\qquad m(\ddot y X-\ddot x Y-\ddot y x+\ddot x y)^2=2(\dot x\ddot y-\ddot x\dot y)(\dot y X-\dot x Y-\dot y x+\dot x y)$$

由此立卽知道:假如固定曲線上的 (x,y) 點,那末他的 m 倍第二級鄰點 (X,Y) 便畫出由上列方程式所表示的一條拋物線.由這方程式再看出這拋物線有四個特性:

1)　必過原曲線上所固定的這 (x,y) 點,

2)　必切原曲線於 (x,y) 點,因爲由(4)知道 $\dot y X-\dot x Y-\dot y x+\dot x y=o$ 代表這拋物線的切線,同時由(1)知道還代表原曲線的切線呀!

3)　必以過 P 點而平行於 $(\ddot{x},\ddot{y})$ 方向的線爲一直徑因爲從方程(4)知道令左方等於 o 便得過 (x,y) 點的拋物線直徑爲 $\ddot{y}X-\ddot{x}X-\ddot{y}x+\ddot{x}y=o$,

4)　其在 (x,y) 點的曲率必爲原曲線在 (x,y) 點的曲率乘 m;這件事實不從(4)看而從(3)看,這是沒有不可以的,因爲(3)可以作拋物線(4)的參數表示呀!其參數 dt,爲易於明白起見,此時可改用 T,於是 $T=dt$,所以從(3)得下面各種微分:

$$\left.\begin{aligned}\delta X &= \dot{x}\,\delta T + m\ddot{x}\,T\,\delta T\\ \delta Y &= \dot{y}\,\delta T + m\ddot{y}\,T\,\delta T\end{aligned}\right.,\text{在}(x,y)\text{點}\begin{cases}=\dot{x}\,\delta T\\ =\dot{y}\,\delta T\end{cases}$$

$$\delta^2X = m\ddot{x}\,\delta T^2$$

$$\delta^2Y = m\ddot{y}\,\delta T^2$$

由曲率公式立卽推知這拋物線在 (x,y) 點的曲率

$$K=\frac{\delta\Theta}{\delta S}=\frac{\delta^2Y\,\delta X-\delta^2X\,\delta Y}{\delta S^3}$$

$$=\frac{m\ddot{y}\dot{x}-m\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}=m\frac{d^2y\,dx-d^2x\,dy}{ds^3}$$

$=mk=$ 原曲線在 (x,y) 點的曲率乘 m.

我們所說的拋物線必有上邊四個特性,反轉來,拋物線如果有上邊四個特性,那末一定就是我們所說 m 倍第二級鄰點的軌跡,因爲拋物線由四個條件(例如過四點)決定呀!這 m 倍的 m 有兩個數値頂可注意.頭一個是 $m=o$.於是這鄰點是第一級鄰點,其軌跡是切線,也就是上面所說拋物線的一個特例.第二個是 $m=1$,於是這鄰點是第二級鄰

點,其軌跡是"過原曲線上所固定的 (x,y) 點,切原曲線於此處,更吮切原曲線於此處(因此時曲率等於原曲線的曲率), 而且以 $(\ddot{x},\ddot{y})$ 方向爲主軸方向的"惟一的拋物線.這條拋物線可以叫作曲率拋物線.其餘由 m 倍第二級鄰點所畫的拋物線便叫作 m 倍曲率拋物線

這些拋物線的公共直徑方向 $(\ddot{x},\ddot{y})$ 和曲線的切線方向 $(\dot{x},\dot{y})$ 有正交斜交的分別.奇怪的是這正斜的性質並不是完全由原曲線本身決定而是與參數 t 有關係的.例如用 x 作參數的時候,依前面所已經說過的一看,立卽知道拋物線的直徑方向 $(\ddot{x},\ddot{y})$ 是 $(o,1)$,因之通例與曲線的切線方向 $(\dot{x},\dot{y})$ 是斜交.再舉一例,用曲線的長度 s 作參數.這時候 $s=t,$ 所以

$$dx^2+dy^2=ds^2=dt^2$$

$$\therefore \qquad \dot{x}^2+\dot{y}^2=1$$

$$\therefore \qquad \dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}=o.$$

因之拋物線的直徑方向 $(\ddot{x},\ddot{y})$ 與曲線的切線方向,老是正交的.以下用 s 作參數的時候微分記號規定用(′)置在函數的右肩處表示.因此上邊這兩層關係變成

$$\left.\begin{array}{l} x'^2+y'^2=1 \\ x'x''+y'y''=o \end{array}\right\}\text{也 就 是}\left\{\begin{array}{l} r'^2 \quad =1 \\ r'.r''=o \end{array}\right\}.$$

所以過原曲線上所固定的 (x,y) 點作法線便是各 m 倍拋物線的公共主軸,同時這 (x,y) 點是公共項點.

上面舉的兩個例還只告訴我們,拋物線公共直徑方向$(\ddot{x},\ddot{y})$和曲線的切線方向$(\dot{x},\dot{y})$可以斜交可以正交.如果要知道這正斜的詳細狀況,我們可以先將這兩方向照向量解析寫成$\ddot{r}$和$\dot{r}$於是因為$\dot{r}=r'\dot{s}$, 所以得

$$\ddot{r}=r''\dot{s}^2+r'\ddot{s},$$

這個式子,是說$\ddot{r}$這個方向因參數的挑選而變.適宜挑選參數必可以使$\ddot{r}$取任意的方向.欲知其理可命這個任意方向為$r''p+r'q$於是必須有l使

$$\dot{s}^2=lp\ ,\ \ddot{s}=lq$$

因之
$$\frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2}=\frac{q}{p},\ 命=k.$$

$$\therefore\quad -\frac{1}{\dot{s}}=kt \qquad\qquad \therefore\quad \log\frac{c}{t}=ks$$

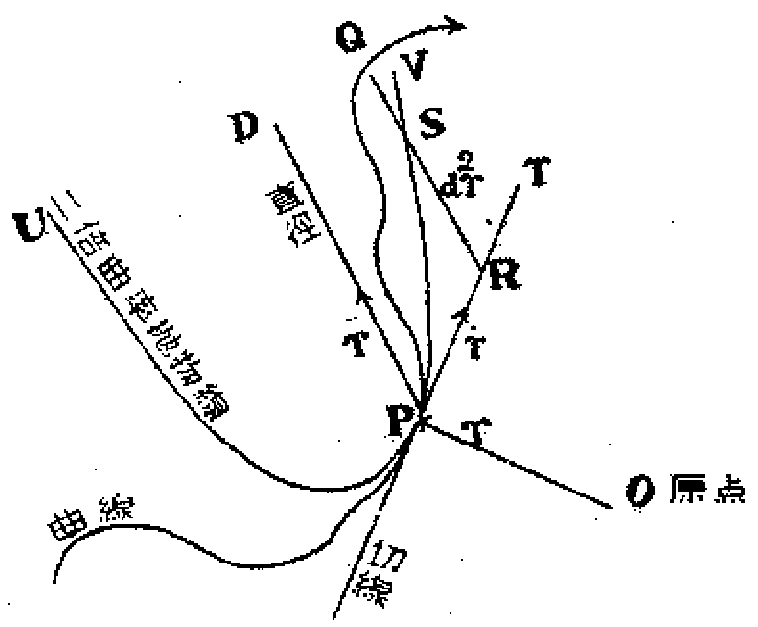
$$\therefore\quad t=ce^{-ks}$$

這個意思就是說若命參數$t=ce^{-ks}/p$,卽可使$\ddot{r}$取任意的方向.因此知道上面所說拋物線公共直徑方向$\ddot{r}$和曲線的切線方向$\dot{r}$可成任意的角度.

既知道各種第二級鄰點的意義和軌跡,於是第二級微分便都有了嚴密的直觀意義.現在說出d^2r, d^2s , d^2x , d^2y這四種於下:

第二級微分d^2r = 第一級鄰點$r+dr$到二倍第二級鄰點$r+dr+d^2r$的向量這個d^2r向量是與參數生關係的.參數固定的時候d^2r必平行於與這參數相應底曲率拋物線的直

徑.這平行的性質很容易證明第一因爲直徑方向是 $(\ddot{x}, \ddot{y})$ 也就是 $\ddot{r}$ 第二因爲 $d^2r = d\,(dr) = d\,(\dot{r}\,dt) = \ddot{r}dt^2 + \dot{r}d^2t = \ddot{r}dt^2$, 所以 d^2r 和直徑都平行於 $\ddot{r}$, 因此 d^2r 必平行於直徑.有這平行的性質,我們就可以作 d^2r.



作法,如圖先在曲線上之 P 點作出向量 $\ddot{r}$(按曲線之方程爲(1)故可求出 $\ddot{x}$ 及 $\ddot{y}$ 因之得 $\ddot{r}$)於是得直徑 PD. 次卽依上述之1) 2) 3) 4)四個性質(詳言之卽過 P 點,且以 PT 爲切線 PD 爲直徑,更以曲線之曲率乘 2 爲曲率)作出二倍曲率拋物線 UPV. 然後過切線 PT 上任意點 R 作直線平行於直徑 PD 令其交 UPV 於 S 則向量 $\overrightarrow{RS}$ 卽爲 d^2r 這時候 PR 決定的向量 $\overrightarrow{PR}$ 就是 dr, 其有向長度(以切線 PT 之方向爲正)卽爲 ds. 當 R 在切線上變動的時候 d^2r 老是平行的變.這裏還有一點可以注意的,就是 P 點恰好是 r 點, R 點恰好是 $r+dr$ 點, S 點恰好是 $r+dr+d^2r$ 點.若要知道第二級鄰點,只須平分 RS 於是那個平分點 M 就是所要的第二級鄰點 $r+dr+$

$\frac{1}{2}d^2r$〔因爲這 $=(r+dr)+(r+dr+d^2r)$ 折半的原故〕若要知道 m 倍第二級鄰點,只須注意 $r+dr+\frac{m}{2}d^2r=\overrightarrow{OR}+m\,\overrightarrow{RM}$, 於是立卽知道他是 RS 上的任意點,因此 Q 點(RS 交曲線之點)也是一個 m 倍第二級鄰點.旣知道 d^2r, 自然就可以用他說明:

第二級微分 d^2s = 向量 d^2r 射在切線上的正射影.這很容易證明.第一因爲 $d^2r=d(dr)=d(r'ds)=r''ds^2+r'd^2s$, 第二因爲 $r'^2=1$, $r'.r''=o$. 所以 d^2r 射在切線上的正射影 $=r'.d^2r=r'.(r''ds^2+r'd^2s)=o+1d^2s=d^2s$.

第二級微分 d^2x = 向量 d^2r 射在 x 軸上的正射影.

第二級微分 d^2y = ,, ,, y ,, ,, ,,

以上算是已經把幾種第二級微分的嚴密底直觀意義說明了.其餘的自然可以類推,不必細說.這當中有一點應當注意的就是上面所說各種二級鄰點各種曲率拋物線以及 d^2r 的作圖均和參數生關係.換一句話不能由曲線本身決定,也就是說曲線雖然已經知道 r 和 dr 雖然都已經固定,但是 d^2r 這些東西並沒有決定.以下專就 d^2r 說罷.於是參數定則 d^2r 定,參數不定則 d^2r 不定(因爲參數變則 $\ddot{r}$ 與 $\dot{r}$ 成任意角,是 $\ddot{r}$ 變也.而 d^2r 平行於 $\ddot{r}$ 故 d^2r 亦變). 然而我們研究曲線時,是要研究與參數不生關係的性質,所以參數不必限於一種,也就是說參數應當不定,因此 d^2r 應當不定.

以下所研究的是假設曲線已經知道,r 和 dr 都已經固定,看這不定的 d^2r 如何變法.因爲 $\ddot{r}$ 與 $\dot{r}$ 成任意角所以 d^2r

與切線 PRT 成任意角(參看上圖). 現在過 S 點作一直線平行於切線,那我們立卽可以證明這個性質:假如 d^2r 變而其第一端固定在 R 點,那末第二端 S 必在剛纔作底切線的平行線上變.這個道理是由於

$$d^2r = r'' ds^2 + r' d^2s$$

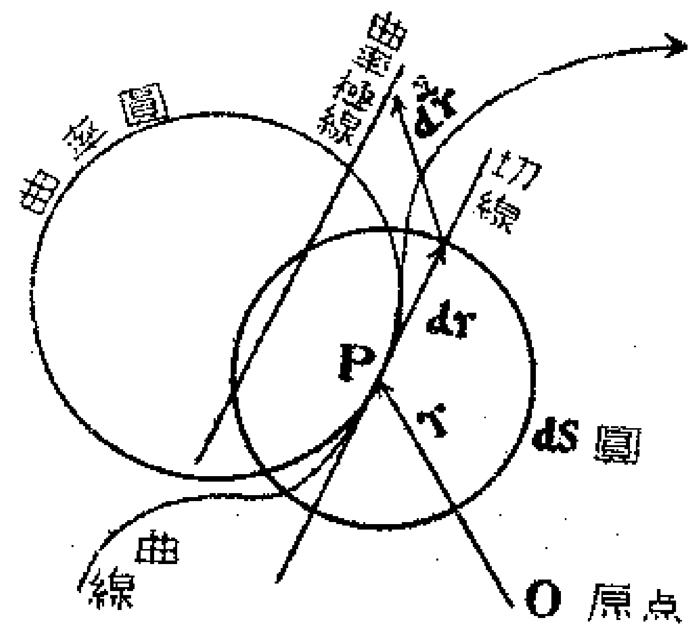
右方的第一項表示由曲線上 P 點向曲率中心這個方向($\because ds^2 > o$)所量的一個定向量(定向量者因 r 定則 r'' 定,又 dr 定則 ds^2 亦定故也). 右方的第二項表示平行於切線($\because r'$ 成切線向量)的一個未定向量(未定之故係因其中 $d^2s=\ddot{s}dt^2$ 與參數 t 有關故也). 但是上面已經說過 d^2r 與切線 PRT 可成任意角, 可知 S 點是在這切線的平行線上連續地變.因此 S 點的軌跡就是這道平行線.這道平行線可以叫作 ds 圓的曲率極線.這是甚麼道理呢?因爲他恰好是曲率中心對於以 r 點爲中心 ds 爲半徑所作那圓的極線呀!證法,命曲率爲 k, $\frac{r''}{\sqrt{r''^2}}$ 爲向量 n 則由 r 點到曲率中心之向量(可名曰曲率半徑向量)爲 $\frac{1}{k}n$. 所以含在 d^2r 中那個向量 $r'' ds^2$ 和這個向量的關係,一是在同一直線,二是同一方向,三是同以 r 爲第一端,四則其乘積爲

$$\frac{1}{k}n \cdot r'' ds^2 = \frac{1}{k} n \cdot kn\, ds^2 = ds^2$$

又因切線垂直於曲率半徑,所以得到上邊所說的曲率極線的性質.

這曲率極線的性質很可注意,因爲能夠使我們很容易

地作出d^2s的圖.作法如下圖先由原點至曲線上任意點P決定一向量是爲向量r,次由P點至切線上任意點$r+dr$



決定一向量是爲dr,最後由$r+dr$點至曲率極線(注意此線因dr而變,即因ds而變)上任意點決定一向量是爲d^2r.這樣的作法既簡單而又不與參數相關,所以比較有價值些.以下再舉一個例作爲這個性質的應用.

於曲線上任意點r作其dr及d^2r,則此二向量決定一平行四邊形.若其面積命爲dF,則曲線在r點之曲率K必爲

$$K = \frac{dF}{ds^3}.$$

證此時應先說出曲率K之意義及dF確爲一微分之性質.於曲線上再取一點$r+\Delta r$,則其處之dr應比在r處者增加Δdr故其結果爲$dr+\Delta dr$.由原向量dr與此向量所決定之平行四邊形設有面積ΔF則由平面三角考之知

$$\Delta F = ds\,(ds + \Delta ds)\sin\Delta\Theta.$$

次命放大率爲 ϱ(這是根據顯微鏡下無限小的看法)則各無限小 $\Delta F, \Delta\theta, \Delta s$ 均可放大如下

$$\varrho\Delta F = ds\,(ds+\Delta ds)\,(\varrho\Delta s)\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\,\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}.$$

取其極限再注意 $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ 之極限爲曲率 K 卽得

$$dF = ds\,ds\,ds\,K\ 1$$

故如題云.至此時之 dF 確係 dr 與 d^2r 所定平行四邊形之面積與否,可再論之於下.利用平面解析幾何知道 dr 和 $dr+\Delta dr$ 所夾的平行四邊形面積爲

$$\Delta F = \begin{vmatrix} dx & dy \\ dx+\Delta dx & dy+\Delta dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dx & dy \\ \Delta dx & \Delta dy \end{vmatrix}$$

$$\therefore \varrho\,\Delta F = \begin{vmatrix} dx & dy \\ \varrho\Delta dx & \varrho\Delta dy \end{vmatrix}$$

取其極限卽又得

$$dF = \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}$$

由這裏立卽知道 dF 的確是 dr 和 d^2r 所定平行四邊形之面積.這個式子的重要可作爲和

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

同等的看.因此曲率公式又可變爲

$$K = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

這個公式反比尋常微積分的曲率公式有直觀意義些,因爲分子是代替面積 dF, 分母是代替長度三方 ds^3 呀!再令

$dx=1$ （這意思是說用 x 作獨立參數而且對於 x 微分)則 $d^2x=o'$又 $dy=Dy$ 又 $d^2y=D^2y$ 因之上式並能包括尋常微積分的曲率公式: $K=D^2y/(1+Dy^2)^{\frac{3}{2}}$.

曲率公式中有 $d\theta$, 其直觀意義還未說明.現在補充如下:

因爲 $$K=\lim\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=\lim\frac{\varrho\Delta\theta}{\varrho\Delta s}=\frac{\lim\varrho\Delta\theta}{\lim\varrho\Delta s}$$

又 $$ds=\lim\varrho\Delta s,\ d\theta=\lim\varrho\Delta\theta$$

所以 $$K=\frac{d\theta}{ds}.$$

由這裏立卽知道(下面 ϱ 爲曲率半徑)

$$d\theta=\frac{ds}{\varrho}\quad 又\ d\theta=\frac{dF}{ds^2}$$

所以 $d\theta$ 是兩個長度之比或是兩個面積之比.此外各級微分的詳細的直觀意義如何,現在不再說了.

論 $x^3+y^3+z^3=R$ 之有理解答

黎希孟 (H. W. Richmond) 著

程綸 譯

〔原文見 Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 一九三〇年六月號〕

(一) 凡一有理數(R)能表以三有理數 (x,y,z,) 之立方和,此三數不必爲正數,其最先之證明由李次 (Leeds) 之校長銳烈 (Ryley) 刊佈於一八二五年. (註一)其公式乃以一襄變數表 x,y,z, 使此襄變數之各值導出 x,y,z, 一組之值能適合上述關係,且此襄變數之每一有理値能導出 x,y,z, 之一組有理値.狄卡生(Dickson) 所參用之解法其所得結果與銳烈之公式相同.賴稻(Landau)(註二)另用一方法而變易其形式,近代作家之論文(註三)曾述及之.如此更可信銳烈在百年前之結果已深知將一數分成三個立方之解法且其公

(註一) 見狄卡生著數論史 (History of the Theory of Numbers) 第二册 p.726.其他所引用之討論載於 Messenger of Mathematics, 51 (1922) 172.

(註二) 見 Vorlesungen über Zahlentheorie, Band IV. p 216.

(註三) 見 Proceedings of London Mathematical Society (2) 21 (1922) 404 – 409.

式爲唯一的.今考究其方法之原理與成功之緣故,則發現有無數之相似公式存在,而其中之一最少其簡單必與此相埒.今先敍銳烈公式及賴稻之修正於第二節,再敍此方法之推廣於第三節中.

銳　烈　公　式

(二) 今欲得

$$x^3 + y^3 + z^3 = R \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

之特別解答.設

$$u = x + y + z; \qquad v = y + z;$$

則

$$R = (u-v)^3 + (v-z)^3 + z^3 = u^3 - 3v\,(u^2 - z^2) + 3v^2(u-z) \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

於此處可將 $x, y, z,$ 或 $u, v, w,$ 之值加一條件

$$u^3 - 3v\,(u^2 - z^2) = o \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{III})$$

以限制之.有此條件,則可用 θu 代 z 而以 θ 表 $u : v : z$ 之比.欲避免比例常數之符號,最好用一未定乘數 h; 則

$$u = 3h\,(1-\theta^2), \quad v = h, \quad z = 3h\theta\,(1-\theta^2);$$

由 $u, v, z,$ 之值可知

$$R = 3v^2\,(u - z) = 9h^3\,(1-\theta)^2\,(1+\theta).$$

再將乘數 h 代以新乘數 $\varrho = 3h\,(1-\theta)$.則由

$$u = \varrho(1+\theta); \quad v = \tfrac{1}{3}\varrho\frac{1}{1-\theta}; \quad z = \varrho\theta(1+\theta);$$

可定出 $x, y, z,$ 以得最後之代數的結果,故

$$x^3 + y^3 + z^3 = u^3 - 3v(u^2 - z^2) + 3v^2(u-z) = \tfrac{1}{3}\varrho^3\frac{1+\theta}{1-\theta}\ .$$

以此 u,v,z 之值,則所求得 x 與 y 之值皆可表以 ϱ 與 θ,而求 x,y,z, 之立方和等於 R 之問題變爲求 ϱ 與 θ 之關係以使

$$3R = \varrho^3(1+\theta)/(1-\theta);$$

故代以

$$\theta = (3R-\varrho^3)/(3R+\varrho^3).$$

賴稽以襄變數 $\Phi=(1+\theta)/(1-\theta)$ 而變更之,其方程式爲

$$u=12K\Phi(\Phi+1); \qquad v=R(\Phi+1)^3; \qquad z=12R\Phi(\Phi-1);$$

$$R = 72\,k^3\,\Phi\,(\Phi+1)^6.$$

以 $\sigma=6R(\Phi+1)^2$ 代乘數 k,可知若

$$u=2\sigma\frac{\Phi}{\Phi+1}\;;\quad v=\frac{1}{6}\sigma\,(\Phi+1)\;;\qquad z=2\sigma\frac{\Phi(\Phi-1)}{(\Phi+1)^2}\;;$$

則　$$x^3+y^3+z^3=\tfrac{1}{3}\sigma^3\,\Phi.$$

欲使 x,y,z, 之立方和等於 R, 可使

$$\Phi = 3R/\sigma^3.$$

在以 Φ 之值代時可得 u,v,z 之值並可推出 x,y 之值爲 ϱ 之函數:其結果同前,只以 σ 代 ϱ 耳.凡 ϱ 及 σ 之有理值能導出 x,y,z 之有理值以適合所與方程式(1)

此法所以成功之故.

(三) 欲求簡單而明瞭可視 x,y,z 之齊次方程式代表平面曲線;今如方程式(I)非爲齊次,則可視 x,y,z 爲空間之笛卡兒座標,而齊次方程式卽代表頂點在原點之圓錐.如此並無混淆.

反觀上節各步驟中,曾假定 x,y,z 與襄變數之有理代數函數成比例.可寫爲

$$x=hX(t);\quad y=hY(t);\quad z=hZ(t);\quad \cdots\cdots(\mathrm{IV})$$

此處 $X(t), Y(t), Z(t)$ 三函數中至少有一函數爲三次而無一高於三次者,此即 x,y,z 有三次之齊次關係而所表爲有一個二重點之三次曲線.將此各値代入得

$$x^3+y^3+z^3=h^3F(t),\cdots\cdots(\mathrm{V})$$

三次曲線

$$x^3+y^3+z^3=o\cdots\cdots(\mathrm{VI})$$

與前三次曲線相遇於九點,即相當於 $F(t)$ 成爲零之各値,實則第二節中之方程式之次數低於九,即表以襄變數 θ 者有三,表以 Φ 者有七:此意即謂在消失之交點處襄變數爲無窮,與通常同;蓋兩三次曲線必有九公點也.用此法則 F 之形式爲十字形狀,即

$$F(t)\equiv K(t-a)^6(t-b)^2(t-c);\cdots\cdots(\mathrm{VII})$$

因此故能先以新乘數 s 代 h.而令

$$s=h(t-a)^2(t-b),\cdots\cdots(\mathrm{VIII})$$

則 $$x^3+y^3+z^3=Ks^2(t-c)/(t-b);\cdots\cdots(\mathrm{IX})$$

再令此式等於 R 而解 t 之一次方程式.於此可見於曲面(I)上有一九次之有理曲線,並知(1)與頂點在原點之三次圓錐有交點,且得曲線上各點 x,y,z 各座標之式以成一襄變數 s 之有理代數函數,此即幾何之釋義也.[如此所演

卽將第二節中重演之,而以總襄變數 t 以代 θ,

$$t=[(P\theta+Q)/(R\theta+S)]$$

但爲求數字之應用則於公式上須再詳論之.各函數 $X(t), Y(t), Z(t)$ 中之係數必爲有理數,(註四).此事雖非主要却爲必須.蓋因 t 之一有理値能導出 x, y, z 之有理値也.若 X, Y, Z 中之係數皆有理數,則 $F(t)$ 中亦必如此.由 F 之因子形式,可知在此條件之下 a, b, c 必爲有理數;故第一個三次式有此各値之各點必爲有理座標,然此各點亦在第二個三次式 (VI) 上,並易知此曲線上只有三點爲有理座標,卽三實折向點其座標爲 $1, -1, o$ 之各種次序.於(IV)與(VI)之九交點中其六在(IV)上而 t 之値爲 a, 其二 t 之値爲 b, 其一 t 之値爲 c; 而每點爲(VI)之實折向點之一.今過(VI)上之九個任意點作第二個三次曲線爲不可能;則過(VI)上之任意八點作一三次曲線未使其均以第九點爲與(VI)之公共點.若使此八點卽折向點,且在此 t 爲 a, 有六次及 t 爲 b 有二次,則取前者之切線二次與後者之切線一次可成此三次曲線束中之一線;第九點卽 t 爲 c 之處,故與後折向點相合;若將(VI)上各點之座標用橢圓函數表之,尤爲此推論

(註四)此處欲求一更準確之敍述,似不可能,然某無理係數之函數能變形之成有理係數之函數,故卽適用於此目的.但必須知雖一三次曲面之各點之座標,通常表以兩襄變數之有理代數函數,而在對分之三次曲面內,實點並不相當於實襄變數.此種不規則性在實數與非實數間及有理數與無理數間爲並行,非不可能.故於此只粗示其大意耳.

之堅證.至 t 之互異二値能生(IV)之同一點僅指此點爲此三次曲線所過之二重點時而言;卽當 t 過 b 値,(IV)有一枝與(VI)相切;當 t 過 c 値時又有另一枝橫過此同點.

凡以(IV)之函數 X,Y,Z 必爲有理係數且函數 F 必能分解如(VII)爲條件時,則惟一之解答,卽頃所求得者.其六交點必在某一折向點如 $(0,-1,1)$ 上,而他三交點或在此點上或在他一折向點如 $(1,-1,0)$ 上.過此九點之三次曲線束爲

$$x^3+y^3+z^3=\lambda(y+z)^3$$

或

$$x^3+y^3+z^3=\lambda(y+z)^2(x+y);$$

依第二折向點與第一折向點重合或不重合而定.前線束內無一線有二重點;但在後者,若 λ 爲 3,則三次線有一二重點在 $(1,-1,0)$.於今所述條件之下,此爲惟一之解答,亦卽謂之銳烈解答,由此點言之,銳烈解答爲惟一的.

此法之推廣

(四) 雖然,此法中加有非必須之限制於函數 $X(t),Y(t),Z(t)$,卽曾假定 (Ft) 必含有六次乘方之一次因子(註五)若

$$F(t)\equiv K(t-a_1)^3(t-a_2)^3(t-b)^2(t-c)$$

此全部演算,同樣有效,而以新乘數 s 以代 h,使

$$s=h(t-a_1)(t-a_2)(t-b).$$

方程式(VII)及(VIII)依此變更,方程式(IX)仍然成立,直至最後只一不同之處,a_1 及 a_2 不必定爲有理値,而以此爲根

(註五)函數 X,Y,Z 之次數,決不能低於三.今假定其次數爲三,但或可高於三.

之二次式必爲有理係數.連(IV)之相當各點所成之線必爲有理方程式,且此線與(VI)之第三交點必爲有理座標,即必爲(VI)之三實折向點之一.總之,此三次曲線與(VI)相切於兩個三重點而與(VI)之折向點爲共線點,又有一結點卽因另一折向點在餘三交點上.亦卽一枝與(VI)相切之二重點,故由此三次曲線而得與銳烈相似之解答,卽吾人所欲求者也.

簡單之解答

(五) 復次,茲假定結點在 $(1,-1,0)$;則兩個三重切點將與 $(0,-1,1)$ 爲共線.今 $x=o$ 爲過後者之一線,由此可導出之特別簡單之解答,頗有單另敍述之價值,直線 $x=o$ 與(VI)相遇於一實折向點 $(0,-1,1)$ 及二虛折向點 $(0,-w,1)(0,-w^2,1)$;且在後二點之切點有三重切點,而此切線之方程式卽爲

$$y^2-yz+z^2=o.$$

由此卽知凡三次曲線束

$$x^3+y^3+z^3=\lambda(x+y)(y^2-yz+z^2)$$

必與(VI)有三個三重切點在所須之三點.若 λ 之值爲 3,則於 $(1,-1,0)$ 有二重點而一枝切(VI)於此點.今設 λ 之值爲 3,再代以

$$z=\theta(x+y);$$

消去因子 $(x+y)^2$ 可得

$$x(1-3\theta^2+\theta^3)=y(2-3\theta+3\theta^2-\theta^3).$$

再以 $1-\psi$ 代 θ 而化簡之;若仍如第二節引用乘數 h, 則得下各值

$$x=h(1+\psi^3);\quad y=h(3\psi-1-\psi^3);\quad z=h(3\psi-3\psi^2)\cdots\cdots\cdots(X)$$

而 $$x^3+y^3+z^3=9h^3\psi(1-\psi-\psi^2)^3.$$

仍如第二節之手續,再引用新乘數 s 以代 h, 而使

$$s=3h(1-\psi+\psi^2);$$

則 $$x^3+y^3+z^3=\tfrac{1}{3}s^3\psi.$$

欲將所與之有理數 R 表以三有理數之立方和,使 ψ 之值為 $3R/S^3$;則每 S 之一有理值能得一有理解答.此公式表以 x,y,z 之顯函數,其範圍與銳烈公式相若.兩者皆精奇複湊而與此解答所從出之方程式(I)相較則為非對稱的.

襄變數若在某極限內則用銳烈公式能將一有理正數表以三有理正立方之和.(參看註三所參閱之文)今用此公式則極限較簡而易定.y 成零時 ψ 之值為 $2\cos(2\pi/9)$, $2\cos(8\pi/9)$, $2\cos(14\pi/9)$. 因 x,y,z 之符號必同故 ψ 必在 1 與 $2\sin10^\circ$ 卽 0.34730 之間或 -1 與 $-2\cos20^\circ$, 卽 -1.87938 之間;此卽所求之極限也.

$x^3+y^3+z^3=R$ 之二襄變數之解答.

(六) 今再得如第四節所推演之最普遍之解答.前已論及三次曲線束有三重切點與(VI)切於二點,而與一折向點 $(0,-1,1)$ 為共線點,另一三重點切於第二折向點 $(1,-1,0)$, 線束中之某數線對於後一點成結點且能將座標 x,y,z 表以

襄變數 t 之三次函數而當代入(VI)時此三次函數導出一 t 之九次方程式如下形式

$$F(t)=K(t^2+dt+e)^3(t-b)^2(t-c).$$

今以字母 Q 代 $x^3+y^3+z^3$ 與

$$U=x+y+z;\quad v=y+z;\quad w=x+y;$$

相演算較便於用 x,y,z, 表以 u,v,w 則得

$$Q\equiv x^3+y^3+z^3\equiv u^3+3vw\,(v+w-2u)\cdots\cdots\cdots\cdots(XI)$$

設有二切點與 $(0,-1,1)$ 爲共線而在直線 $u=pv$ 上;則方程式

$$[Q-(u-pv)^3]\ \frac{w}{v}=o$$

爲一三次曲線(由一直線一圓錐曲線而成)切 $Q=o$ 於所求點,使 R 變值時由方程式

$$[Q-(u-pv)^3]\ \frac{w}{v}+RQ=o$$

能得適所述線束之一線.展開得

$$3w^2(v+w-2u)+3pu^2w-3puvw+p^3v^2w+Ru^3+3Rvw(v+w-2u)=o$$

由此易知若 $3R=-p^3$ 則此曲線有一結點在第二折向點 $(1,-1,0)$ 〔在此處 u 及 v 成爲零〕

故由所與方程式(1)之一解答所從導出之三次曲線束爲

$$3[Q-(u-pv)^3]\ \frac{w}{v}-p^3Q=o,$$

或

$$Q(3w-p^3v)=3w\,(u-pv)^3,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(XII)$$

後式中含有非必須之因子 v. 展開之得方程式

$$v(9w^2-9p^2uw-3p^3w^2+6p^3uw)-p^3u^3+9pu^2w-18uw^2+9w^3=o.$$

於此代以 $u=tw$,將 u,v,w 表以次數不高於三之多項式,並用乘數 h 以求便利則

$$\left.\begin{aligned} v&=h(9-18t+9pt^2-p^3t^3)\\ w&=3h[(3p^2-2p^3)t+(p^3-3)]\\ u&=3h[(3p^2-2p^3)t^2+(p^3-3)t]\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{XIII})$$

(七) 此三方程式各含有兩裹變數 t 及 p 爲適宜而複雜之形式.欲計算 Q 最好用(XI)之結果,如此能有相當之化簡.故得

$$(3w-p^3v)=h(p^2t-3)^3,$$

$$(u-pv)=h(p^2t-3)(p^2t^2-6pt+3p+3t),$$

$$Q=9h^3[(3p^2-2p^3)t+(p^3-3)](p^2t^2-6pt+3p+3t)^3.$$

此處 Q 之形式能適用於銳烈解答之方法(對於第五節亦然),卽 t 之一次函數乘以另一函數之立方.設 h 代以新乘數 g,而使

$$g=3h(p^2t^2-6pt+3p+3t);$$

u,v,w 以及 x,y,z 皆能表以 t 及 p 之有理函數各乘以新乘數 g,由此 x,y,x 之各值則

$$x^3+y^3+z^3=\tfrac{1}{3}g^3[(3p^2-2p^3)t+(p^3-3)].$$

欲使 Q 或 $x^3+y^3+z^3$ 爲所與之有理值 R,可使 t 爲能令方括弧內之式等於 $3R/g^3$ 之值足矣.偏以 t 之值代入,則得 x,y,z,之各值其各立方之和爲 R 而能表以兩裹變數 p 及 g.凡兩裹變數之有理值能得 x,y,z,之各有理值.

上所得各值仍可列成更佳之形式.可用 $s=p^2t-3$ 以代襄變數 t; p^3h 以代 h,又為避免分數則用 S 以代方括弧乘以 3.

則
$$\left.\begin{aligned} u&=x+y+z=hp(s+3)S;\\ v&=y+z=h(3S-s^3);\\ w&=x+y=hp^3S;\\ Q&=x^3+y^3+z^3=3h^3p^3S(S+s^2)^3 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{XIV})$$

式中
$$S=3[(3-2p)s+(6-6p+p^3)].$$

此結果之優點在能定出一兩襄變數之解答,而不在解答所取之形式.凡曲面(I)上之有限部份內每一微小凸狀面積含有有理座標之各點.若擇定任何三正數 a, b, c, 則必能求得 x, y, z 能適合(I)之各值令 x/a, y/b, z/c, 之各差小於任何指定之微數; (若 a, b, c, 中一個或多個為負,仍然真確).雖然,由另一方觀之,則必須知此兩襄變數之解答,實非完全之解答;因 x, y, z, 所得之各值僅限於 p 能適合方程式(X),或由此方程式所產生之各方程式之各有理值也.

畢達哥拉斯定理

（續第二卷第一期）

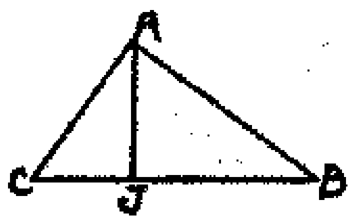
管　公　度

IV.　代數的證明

1. Bhâskara及Wallis兩氏之研究.

作AJ垂直CB,則因△JAC及△JBA相似於△ABC,

故得　$\frac{CJ}{AC}=\frac{AC}{BC}$,



即　$\overline{AC}^2=CJ\times BC\cdots\cdots(1)$;

及　$\frac{BJ}{AB}=\frac{AB}{BC}$,

即　$\overline{AB}^2=BJ\times BC\cdots\cdots(2)$.

將(1),(2)兩式邊邊相加,

故　$\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=(CJ+BJ)BC=\overline{BC}^2$.

〔別證〕R. P. Lamy氏之研究.

在次之左圖中,如前

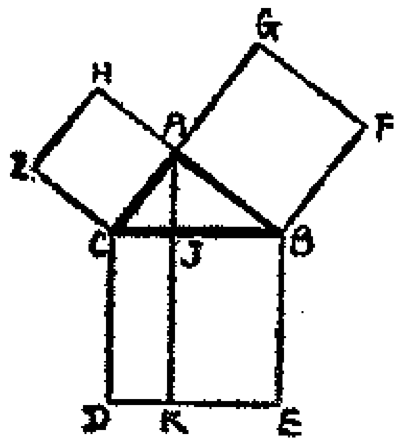
$\overline{AC}^2=CJ\times BC$,　　$\overline{AB}^2=BJ\times BC$,

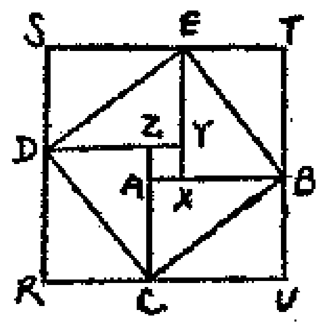
但　CJ × BC = 矩形CK,　BJ × BC = 矩形BK,

故 $\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=$ 矩形CK+矩形BK $=\overline{BC}^2$.

2. Marre 氏之研究.

次之右圖.乃合III, 1 及 2,爲一者是也.卽 A Z Y X 爲$(c-b)^2$,





DEBC 爲 a^2, RSTU 爲 $(c+b)^2$, 又八個三角形皆全等於△ABC.

今因 $a^2=(c+b)^2-4\triangle ABC,$

又 $a^2=(c-b)^2+4\triangle ABC,$

故 $2a^2=(c+b)^2+(c-b)^2,$

卽 $2a^2=2b^2+2c^2,$

故 $a^2=b^2+c^2.$

3. Bezout 氏之研究.

於 1 圖中,由相似三角形 JAC, JBA, ABC,

$$\frac{\triangle JAC}{\overline{AC}^2}=\frac{\triangle JBA}{\overline{AB}^2}=\frac{\triangle ABC}{\overline{BC}^2},$$

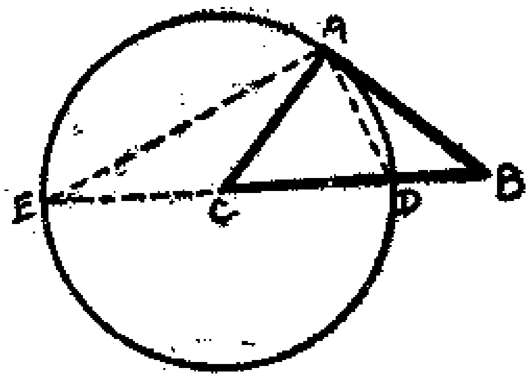
故依合比之理, $\dfrac{\triangle JAC+\triangle JBA}{\overline{AC}^2+\overline{AB}^2}=\dfrac{\triangle ABC}{\overline{BC}^2}$

但 $\triangle JAC + \triangle JBA = \triangle ABC$

故 $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2.$

4. Wurreef 氏之研究.

以 C 爲中心,CA 爲半徑,作圓截 BC 於 D, E, 則由 △ABD, △EBA 爲相似形,



$BD : BA = BA : BE = BA : BD + 2CD,$

故 $\overline{BA}^2 = BD(BD + 2CD) = \overline{BD}^2 + 2BD.$

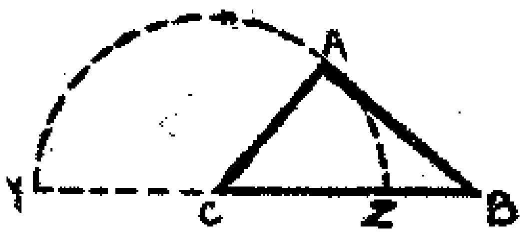
CD兩邊同加 $\overline{AC}^2 (= \overline{CD}^2)$, 則

$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + 2BD \cdot CD + \overline{CD}^2$

$= (BD + DC)^2 = \overline{BC}^2.$

5. J. J. I. Hoffmann 氏之研究.

以 C 爲中心, CA 爲半徑,作一半圓,令其與 BC 相交於 Y, Z



則 $\overline{AB}^2 = BY \times BZ,$

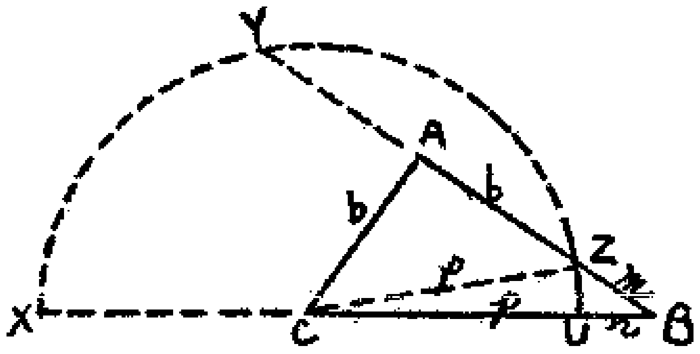
卽 $\overline{AB}^2 = (BC + AC)(BC - AC),$

卽 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2,$

故 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$

6. J. J. I. Hoffmann 氏之研究.

在 AB 上,取 AZ = AC, 以 C 爲中心, CZ 爲半徑,作一半圓,令其與 AB 相交於 Y,與 BC 相交於 X 及 U.



則　$BZ \times BY = BU \times BX$,

但由圓形之記法.

$m(m+2b)=n(n+2p)$,

即　$m^2+2bm=n^2+2pn$.

今由直角二等邊三角形AZC,

$$2b^2=p^2,$$〔見I.〕

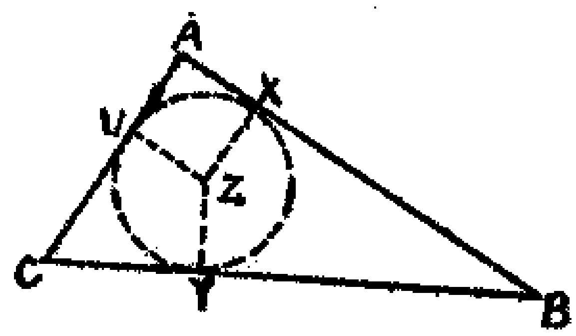
故　$b^2+m^2+2bm+b^2=n^2+2pn+p^2$,

即　$b^2+(m+b)^2=(n+p)^2$,

故　$b^2+c^2=a^2$.

7. Möllmann 氏之硏究.

設△ABC之內切圓心爲Z,自Z向三邊作垂線ZX, ZY, ZU,則是等之直線必皆等於內切之半徑 r



因AUZX爲以r爲一邊之正方形,

又　$BX=BY,\quad CY=CU$,

故　$b+c-a=2r$,

故 $(b+c+a)(b+c-a)=2(b+c+a)r$

$$=2br+2cr+2ar,$$

$$=4\triangle ABC=2bc.$$

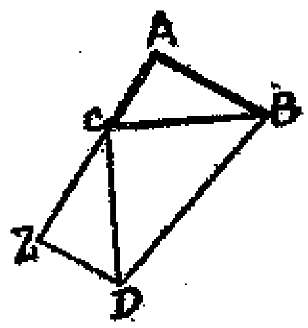
但 $(b+c+a)(b+c-a)=(b+c)^2-a^2$.

故　$(b+c)^2-a^2=2bc$

故　$b^2+c^2=a^2$.

8. Garfield 氏之研究.

先作CD垂直於CB,令CD＝CB, 次自 D 向AC之延長線作垂線DZ,則三角形 ABC, ZCD 爲全等形,而其面積皆等於 $\frac{1}{2}bc$ 又三角形 BCD之面積等於 $\frac{1}{2}a^2$. 但是等之三個三角形適合爲一梯形,且其面積爲 $\frac{1}{2}(b+c)^2$.

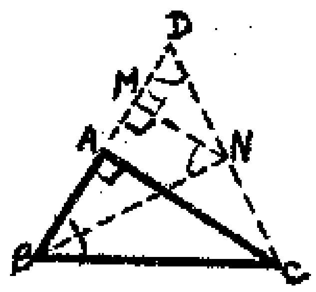


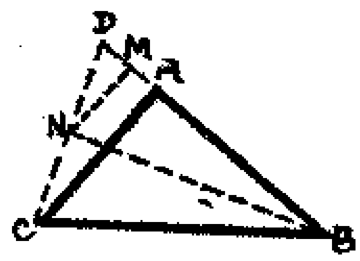
故 $$\frac{1}{2}(b+c)^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2\times\frac{1}{2}bc.$$

故 $$b^2 + c^2 = a^2.$$

9. J. J. I. Hoffmann 氏之研究.

延長AB至D,令 CD ＝ BC, 聯結CD,二等分AD於M,作MN平行於AC,聯結BN.





則△CAD, △BMN爲相似形,何則,因 $C\hat{A}D = B\hat{M}N$ 〔$=\hat{R}$〕, $D\hat{C}A = N\hat{B}M$〔各爲$\hat{D}$之餘角.〕

故 $$AC: AD = BM: MN.^{**}$$

但 $$BM = MA + AB = \frac{1}{2}DA + AB$$

又 $$MN = \frac{1}{2}AC,$$

故 $$AC: AD = \frac{1}{2}DA + AB: \frac{1}{2}AC$$

$$= DA + 2AB: AC.$$

故 $\overline{AC}^2 = \overline{DA}^2 + 2DA\cdot AB.$

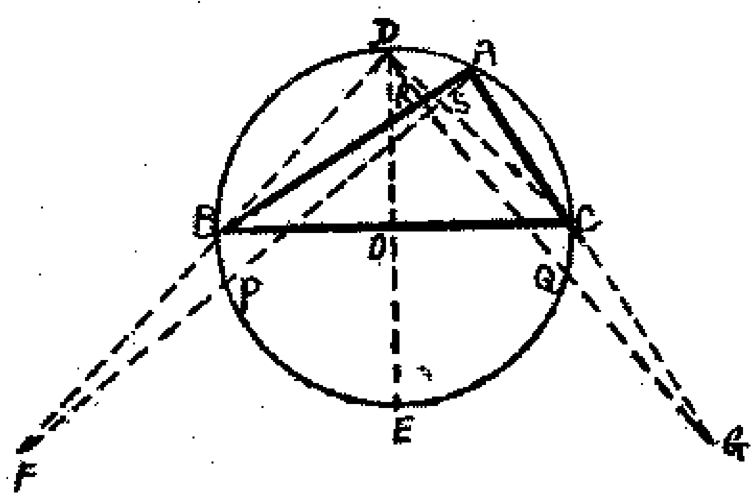
故 $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{DA}^2 + 2DA\cdot AB + \overline{AB}^2$

$$= (DA + AB)^2$$

$$= \overline{DB}^2 = \overline{BC}^2.$$

10. Hoffmann 氏之研究.

二等分 BC 於 O, 以 BO 爲半徑畫一圓,則此圓,必通過 C 及 A. 復自 O 作 DE 垂直於 BC, 聯結 DB,DC, 又延長 DB 至 F, 令 FB = BA,而聯結 AF; 延長 AC 至 G, 令 CG = CD, 而聯結 DG.



則因 △FDS 相似於 △GAR, 何則,以 $F\hat{D}S = G\hat{A}R$ 〔 $= \hat{R}$〕, $\hat{F} = \hat{G}$, 〔因各各爲 $D\hat{B}A$, $A\hat{O}D$ 之一半,且此二角又相等.〕故也.

故 $DS : DF = AR : AG$ ……………………………………(1).

今旣 $\hat{F} = \hat{G} = C\hat{D}Q,$

故 $D\hat{B}A = 2\hat{F} = 2C\hat{D}Q.$

故 弧 DA = 2 弧 CQ.

於是　2 弧 CQ + 弧 AC = 弧 DA + 弧 AC = 90° 之弧.

但　弧 CQ + 弧 QE = 90° 之弧,

故　2 弧 CQ + 弧 AC = 弧 CQ + 弧 QE.

故　弧 CQ + 弧 AC = 弧 QE,

卽　弧 AQ = 弧 QE.

但　弧 DB = 弧 BE,

故　$\frac{1}{2}$(弧AQ+弧DB) = $\frac{1}{2}$(弧 QE + 弧 BE).

然以$\frac{1}{2}$(弧 AQ + 弧 DB) 測度角 DRB, $\frac{1}{2}$(弧 QE + 弧 BE) 測度角 BDR,

故　$D\hat{R}B = B\hat{D}R$,

故　$BD = BR$.

同理　$CA = CS$.

故(1)得變爲　$DS : DB + BF = AR : AC + CG$,

卽　$DS : DB + BA = AR : AC + CD$,

卽　$DS : 2BR + AR = AR : 2CS + DS$,

故　$\overline{DS}^2 + 2\,DS \cdot CS = \overline{AR}^2 + 2BR \cdot AR$ …………(2),

又　$\overline{BA}^2 = (BR+AR)^2 = \overline{BR}^2 + 2BR \cdot AR + \overline{AR}^2$

$= \overline{BD}^2 + 2BR \cdot AR + \overline{AR}^2$ ………………(3);

$\overline{CA}^2 = \overline{CS}^2 = (CD - DS)^2 = \overline{CD}^2 - 2CD\,DS + \overline{DS}^2$,

卽　$\overline{CA}^2 = \overline{BD}^2 - (2CD \cdot DB - \overline{DS}^2)$,

將 $CS + DS$ 代 DC,得 $\overline{CA}^2 = \overline{BD}^2 - \left\{2\,(CS + DS)\,DB - \overline{DS}^2\right\}$.

去括弧而簡單之,得 $\overline{CA}^2 = \overline{BD}^2 - 2CS \cdot DS - \overline{DS}^2$,

卽 $$\overline{CA}^2=\overline{BD}^2-(2CS\cdot DS+\overline{DS}^2)\cdots\cdots\cdots(4).$$

由 (3),(4) 兩式,並參攷(2)式,

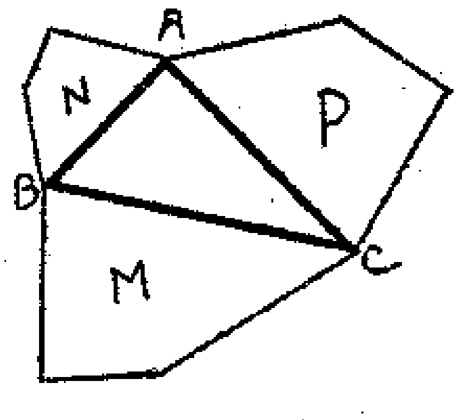
故得 $$\overline{BA}^2+\overline{CA}^2=2\overline{BD}^2=\overline{BC}^2.$$

V. 定理的擴張

1. Euclid 氏之研究.

以直角三角形之三邊爲對應邊,按相似位置,而作三個相似多角形,則斜邊上之多角形,必等於他二邊上多角形之和.

設 M, N, P 爲三邊上所作相似多角形之面積,



則 $$\frac{M}{\overline{BC}^2}=\frac{N}{\overline{AC}^2}=\frac{P}{\overline{AB}^2}=\frac{N+P}{\overline{AC}^2+\overline{AB}^2}.$$

但依畢達哥拉斯定理,

$$\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2.$$

故 $$M=N+P.$$

2. Henry Perigal 氏之研究.

於△ABC中,設 BAC 爲直角, BGDHC, CKELA, AMFNB 爲邊 BC,CA, AB 上,按相似位置,所作之相似形,且設

$$BC : CA : AB=1 : \lambda : \mu.$$

(1)若此等相似形外切於圓時:

設 O, O′ 各各爲圖形 BCD, ABF, 之內切圓心; P, Q, R,……;

P', Q', R'……爲其切點. Bp, Cp'爲過P平行於$O'P'$之直線之垂線, q, q' 爲同樣被決定之點.

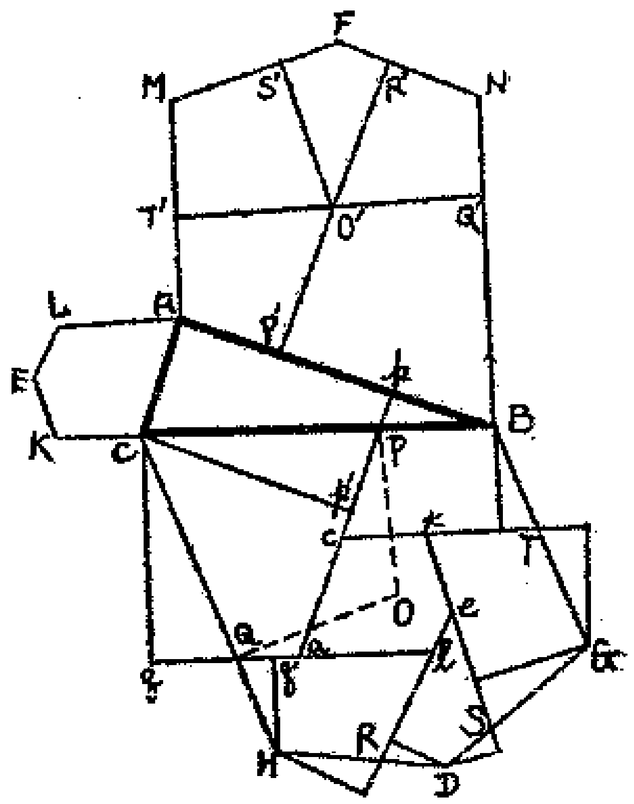
今以 $\triangle Cp'P$ 與 $\triangle BAC$ 爲等角,

故 $Cp' = \mu\ CP = BP'$,

同理 $Cq = \mu\ CQ = BQ'$,

且 $Cqap'$ 與 $BP'O'Q'$ 爲等角,

故此二形爲全相等.



但 $\triangle CqQ = \triangle Cp'P$,

故 $CQaP = Cqap' = BP'O'Q'$

又 $qa = O'P' = q'l$,

故 $qq' = al$.

但 $qq' = qQ + Qq' = \lambda\ CQ + \lambda\ QH$

$= \lambda\ CH = AL$,

故 $al = AL$

而圖形 ckela 與 CKELA 爲等角,

故此二圖形爲全相等.

故圖形 BDC 等於圖形 CEA, AFB, 之和.

〔此證法若相似形傍切於圓時,亦得適用.〕

(2)若相似形內接於圓時:

設 O, O' 爲外接圓之中心; P, Q, R,……; P', Q', R',……爲對應邊之中點.

如前法,易證圖形 BDC 等於圖形 CEA, AFB, 讀者自試之

可也.

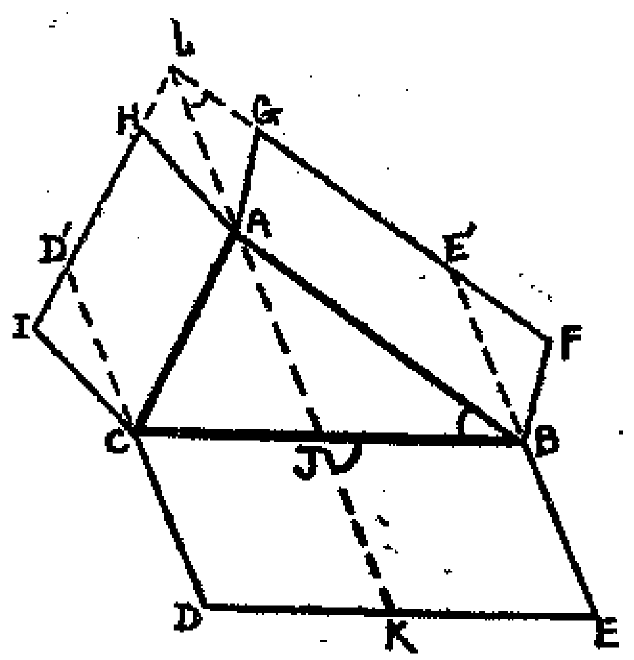
(3)若相似形三角形時:則上述二法;任何一個,皆可適用.

(4)若相似形既不內接於圓復不外切於圓時:則分此三個相似形,各爲同數之相似三角形,而以圖形BDC,CEA,AFB一切之對應線皆爲1: λ: μ 卽BC:CA:AB之比,

故以此對應三直線爲邊,而作相似於△ABC之三角形,則依(3),每三個對應相似三角形既爲真,故其和〔卽原相似形.〕亦必真也.

3. Pappus氏之研究.

在任意三角形ABC之二邊AB, AC上,作任意平行四邊形ABFG, ACIH. 延長FG,及IH令交於L,聯結AL,延長之交BC於J; 再延長至K,使JK等於AL.則平行四邊形BCDE,〔其二邊之長與方向,皆等於BC及JK.〕等於平行四邊形ABFG,及ACIH之和.



過 B 及 C 平行於 LK 作直線 E'BE 及 D'CD,

則　平行四邊形 ABFG = 平行四邊形 ABE'L,

平行四邊形 ACIH = 平行四邊形 ACD'L.

但以　JK = AL,

故　平行四邊形 ABE'L = 平行四邊形 BEKJ,

平行四邊形 ACD'L = 平行四邊形 CDKJ,

故　平行四邊形 ABFG + 平行四邊形 ACIH

= 平行四邊形 BCDE.

4. Euclid 氏之研究.

直角體之對角線上正方形,等於相交於一角頂之三稜上正方形之和.

此證極單簡,故從略.

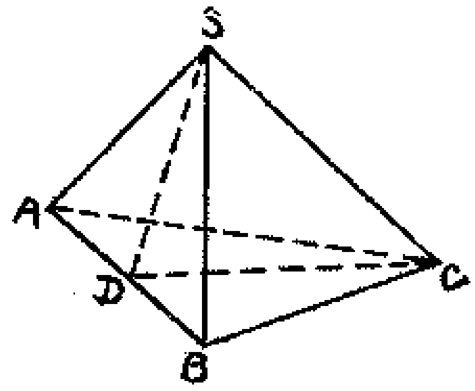
5. De Gua 氏之研究.

三角錐之三面,若兩兩垂直,卽三角錐爲一三直三面角時,則第四面之面積之平方,必等於他三面面積之平方之和.

設三直三面角之頂點爲 S, ABC 爲此三直三面角之一截面,卽三角錐之底.

垂直於 AB 作 SD, 聯結 CD, 則以 CS 垂直於面 ASB, 由三垂線之定理, CD 亦必垂直於 AB.

今應用畢達哥拉斯定理於圖形中之直角三角形,



則 $\overline{AB}^2\times\overline{DC}^2=\overline{AB}^2\times(\overline{SD}^2+\overline{SC}^2)$

$=\overline{AB}^2\times\overline{SD}^2+\overline{AB}^2\times\overline{CS}^2$

$=\overline{AB}^2\times\overline{SD}^2+(\overline{SA}^2+\overline{SB}^2)\times\overline{SC}^2$

$=\overline{AB}^2\times\overline{SD}^2+\overline{SA}^2\times\overline{SC}^2+\overline{SB}^2\times\overline{SC}^2$

故 $\overline{ABC}^2=\overline{ASB}^2+\overline{ASC}^2+\overline{BSC}^2$.

VI. 雜　性　質

關於直角三角形三邊上正方形奇妙的性質.

1°. 〔1圖〕 AZ等於 BX 及CY之和.

2°. 〔1圖〕 三角形 RZS, 等於三角形CYR, BXS之和.

因 AZ平行於BX及CY,

故 $\triangle CZY=\triangle CYA$,

$\triangle BZX=\triangle BXA$.

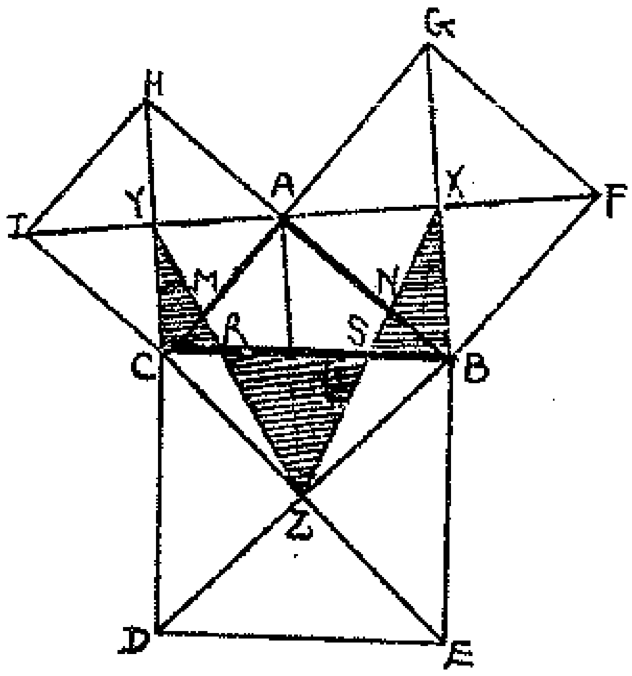
但 $\triangle CZB=\triangle CYA+\triangle BXA$,

故 $\triangle CZB=\triangle CZY+\triangle BZX$.

今由此兩邊減去其共通部分

$\triangle CZR+\triangle BZS$,

故 $\triangle RZS=\triangle CYR+\triangle BXS$.



(1 圖)

3°. 〔1圖〕 三角形 YZX 與四邊形YXBC或ABZC等積.

何則,因AZ垂直 YX,〔II.8.〕是等四邊形之面積,皆等於 $\frac{1}{2}\times AZ\times YX$,而此又等於三角形YZX 之面積,故也.

〔別證〕依前節　$\triangle RZS = \triangle CYR + \triangle BXS$,

今於此兩邊各加四邊形YXBC,

故　　$\triangle XZY =$ 四邊形 YXBC.

又令AC,YR之交點爲M;AB,XS之交點爲N,

則　　$\triangle AYM = \triangle MCZ$,　　$\triangle AXN = \triangle NBZ$.

邊邊相加,得　$\triangle AYM + \triangle AXN, = \triangle MCZ = \triangle NBZ$.

再加五邊形AMRSN於其兩邊,

故　$\triangle XZY =$ 四邊形 ABZC.

4°.〔1圖〕三角形YZX,與直角傍二邊之半和上所作正方形等積.

因依1°,YZX之面積爲$\frac{1}{2} \times AZ \times YX$,

而　$$\frac{1}{2} \times AZ \times YX = \frac{1}{2}(BX + CY) \times YX = \frac{1}{2}\overline{YX}^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{b\sqrt{2}}{2} + \frac{c\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(b + c)^2,$$

故也.

5°.〔1圖〕四邊形ABEC, ABDC, IFBC爲等積.

因　四邊形ABEC $= \triangle ABC + \frac{1}{2}a^2 =$ 四邊形ABDC,

而　四邊形IFBC $= \triangle ABC + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2$,

故也.

6°.〔2圖〕直線AZ, BY, CX, 爲自三角形YZX之三角頂,向對邊所作之垂線.

因AZ平行於XB或YC,〔II,8〕故ZA爲由Z向邊XY所作之垂線甚明.

次以AZ=XY,及XA=XB,故兩直角三角形AZX,XYB全相等,

故　　$A\hat{Z}X = X\hat{Y}B.$

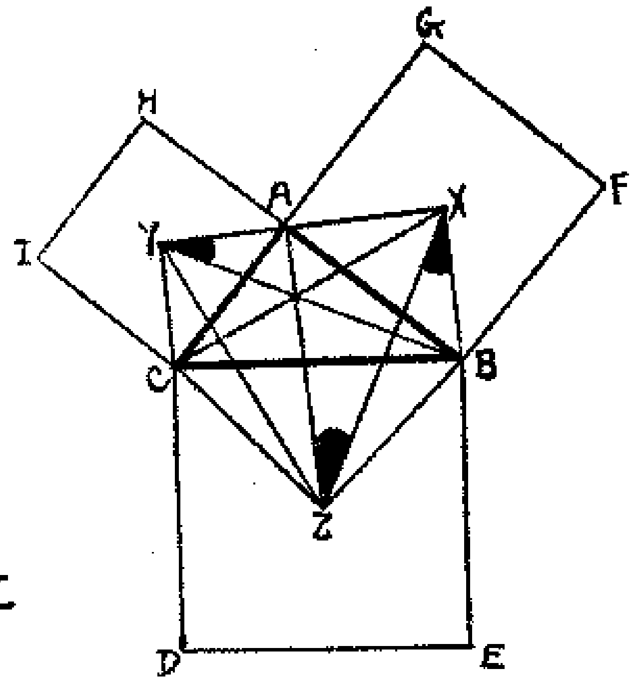
但　　$A\hat{Z}X = Z\hat{X}B$〔內錯角〕,

故　　$X\hat{Y}B = Z\hat{X}B.$

而以YX垂直於XB,故YB垂直於XZ.

同理CX垂直於YZ.

注意　由三角形AZX及XYB之相等,故BY = ZX,同理,CX =YZ.



(2　圖)

7°.〔3圖〕三角形ABC之重心,〔三中線之交點.〕即三角形YZX之重心.

自Z作CB之垂線,則其垂足R必為BC之中點,又作三角形ABC之中線AR,及三角形YZX之中線ZT.

今欲證明本性質,只須證AR及ZT,各各在其全長之$\frac{2}{3}$處一點U相交足矣.

何則,設以R為中心,RC = RZ為半徑,作圓.則此圓周以$C\hat{A}B$為直角之故,必過A點.復令此圓周與YZ之第二交點為S.因$Z\hat{A}S$為直角,故ZRS為垂直於CB之直徑,

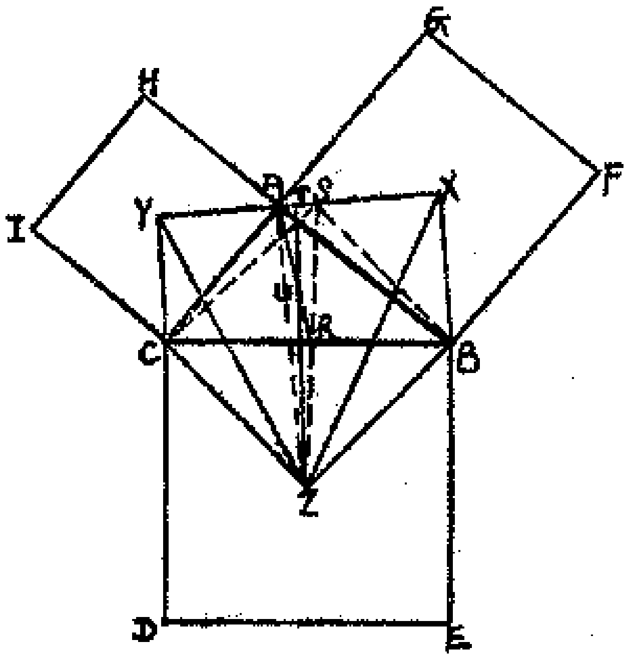
於是CSBZ為一正方形,而SC=SB.但二直角三角形SYC及SXB以SC = SB及$Y\hat{S}C + X\hat{S}B = R$之故,為全相等.

故　　CY = AY = SX,

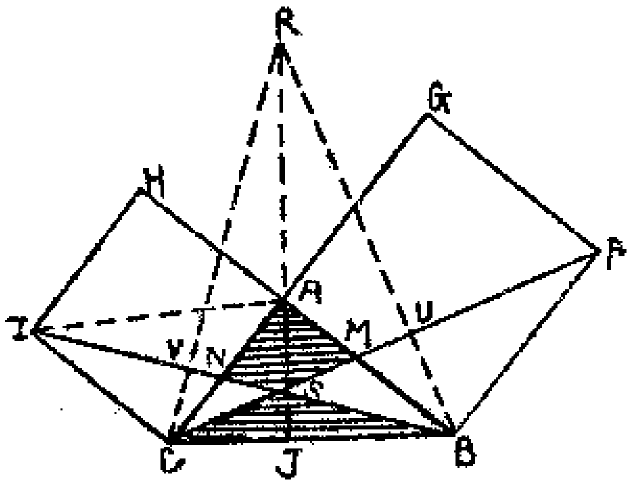
從而YX之中點T,又為AS之中點.故AR,ZT為三角形AZS之

二中線,故AR, ZT必在其各自之長之$\frac{2}{3}$處一點U相交.

注意 三角形AZS與三角形ABC及YZX,有相同之重心.



(3 圖)



(4 圖)

8°. 〔4圖〕 Euclid之圖形中,直線BI, CF及垂線AJ,必相交於一點.

自B作CF之垂線BU,自C作BI之垂線CV,則此二垂線與AJ必同交於一點R.〔II, 7.〕

故AJ,BI,CF爲三角形RBC,自其頂角A,B,C,各各向其對邊所作之垂線.

故此三線必同交於一點S甚明.

9°. 〔5圖〕 三角形AGH, BEF, CDI與△ABC等積.

先三角形HAG及三角形ABC,以其夾直角之二邊彼此相等,其爲等積也,甚明.

次作三角形CDI之高DU,則因CD=CB,且$B\hat{C}A=U\hat{C}D$,故△CUD=△ABC.

但以 $\triangle$CUD 及 $\triangle$CDI 有同高 DU，又有等底 CU = CA = CI，故 $\triangle$CUD = $\triangle$CDI.

故　$\triangle$CDI = $\triangle$ABC.

同理　$\triangle$BEF = $\triangle$ABC.

10° 〔5圖〕 六角形 IHGFED 各邊上所作正方形之和，爲斜邊上正方形之 8 倍

設邊 ID 爲 e，FE 爲 d，

則由直角三角形 DUI，　$e^2 = 4b^2 + c^2$.

同理　$d^2 = 4c^2 + b^2$

邊邊相加，得　$e^2 + d^2 = 5c^2 + 5b^2 = 5a^2$

故　$a^2 + c^2 + d^2 + a^2 + e^2 + b^2 = 5a^2 + 2a^2 + b^2 + c^2 = 8a^2$

11° 〔4圖〕 四邊形 AMSN 與三角形 SBC 等積.

因 NA 與 MA，易證其爲三角形 ABC 內接正方形之二邊而相等；又 AC = CI，

故　$\triangle$CMA = $\triangle$INA.

又因　$\triangle$ABC = $\triangle$IBA，

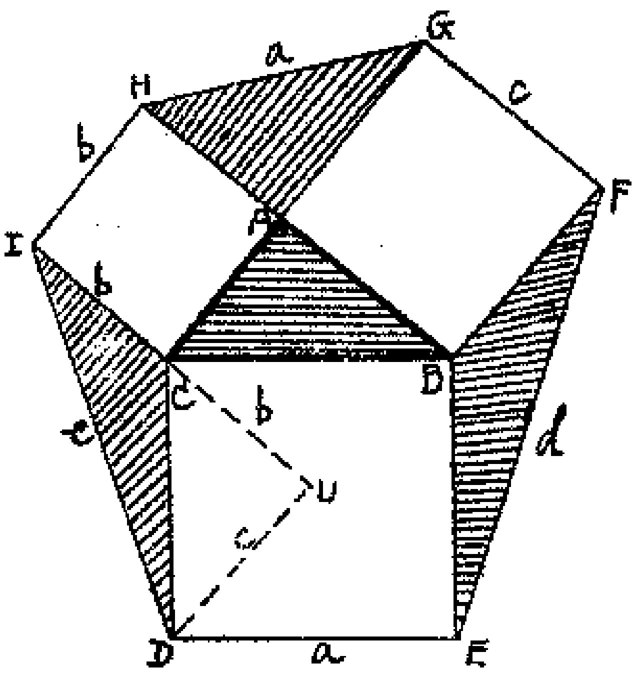
故　$\triangle$ABC − $\triangle$NBA = $\triangle$IBA − $\triangle$NBA，

故　$\triangle$CBN = $\triangle$INA.

故　$\triangle$CMA = $\triangle$CBN.

兩邊同減 $\triangle$CSN，

故　四邊形 AMSN = 三角形 SBC.



(5 圖)

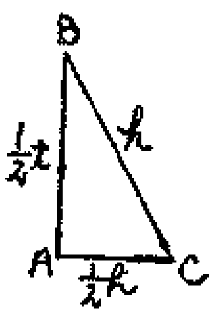
〔參看本刊第 1 卷第 1 期拙著初等幾何學一題之研究〕

VII. 附　　錄

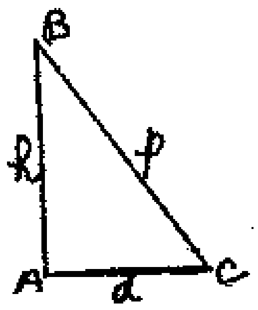
正多角形與直角三角形之關係.

次之所述之正多角形,皆內接於同圓者也.

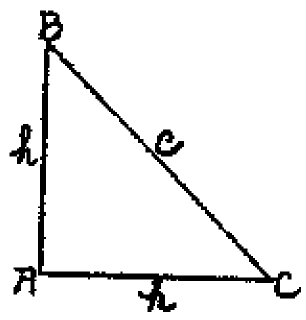
(1 圖)



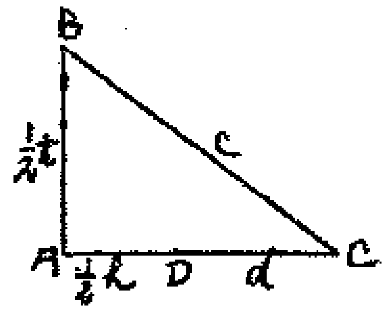
(2 圖)



(3 圖)



(4 圖)



1. 若直角三角形直角傍之二邊,一爲正三角形一邊之半分,一爲正六角形一邊之半分時,則其斜邊,卽正六角形之一邊也.〔1圖〕

2. 若直角三角形直角傍之二邊,爲正六角形之一邊時,則其斜邊,卽正方形之一邊也.〔2圖〕

3. 若直角三角形直角傍之二邊,一爲正六角形之一邊,一爲正十角形之一邊時,則其斜邊,卽正五角形之

Tâbi: Ibn Qorra 氏幾何原本翻譯本中之畢達哥拉斯定理(1350, A.D.)

一也

也.〔3圖〕

4.　若直角三角形直角傍之一邊AB爲正三角形一邊之半分,他一邊 AC = AD + DC〔AD爲正六角一邊之半分,而DC正十角形之一邊也.〕時,則其斜邊,卽正方形之

一邊也.〔4圖〕

是等之關係,若設圓之半徑爲 r,而注意於

內接正三角形之一邊 $t = r\sqrt{3}$,

內接正方形之一邊 $c = r\sqrt{2}$,

內接正六角形之一邊 $h = r$,

內接正五角形之一邊 $p = \frac{1}{2}r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$,

內接正十角形之一邊 $d = \frac{1}{2}r\left(\sqrt{5} - 1\right)$,

由畢達哥拉斯定理,不難推得.

〔完〕

數學史年表

(自紀元前至十九世紀末葉)

管公度

4500 B. C. 間　中國伏羲時代,觀測天文,測定地理.

3800 B. C. 間　中國黃帝時代,師大撓作甲子,容成作曆,隸首司算數.

2500 B. C. 間　埃及及巴比倫之數學已發達,自 Rhind Papyrus 及 Senkereh 之石碑,可以察知.

1000 B. C. 間　印度之幾何學已發達,自婆羅門之古文書 Sulva Sutra,可以察知.

700 B. C. 間　中國周公時代之數學書,周髀算經九章算經等發表.方程,勾股之語,始見於九章之中.

640 B. C. 間　Thales 生於希臘,始立學校教數學.

569 B. C. 間　Pythagoras 生,創設畢達哥拉斯學派,而數學教學之風盛.

429 B. C.　Plato 生於雅典,自是所謂幾何學之三大問題,卽圓積問題,立方倍積問題,及角之三

	等分法,漸爲數學界之大問題.
330 B. C.	Euclid生,編纂所謂歐幾里得幾何原本,初等數學之系態始定.
287 B. C.	Archimedes 生於 Syracuse, 發輝其異常之天才,而多所發見.
260 B. C. 間	Apollonius 生,著圓錐曲線論及其他,幾何學大進步.
130 A. D. 間	亞尼山大利亞之 Ptolemy, 著有名之 Almagest, 數學天文學大進步.
250 A. D. 間	Diophantus 生於亞尼山大利亞,代數學大發達.
598 A. D.	Brahmagupta 生於印度,硏究數學天文學而多所擴張.
880 A. D. 間	Alkarismi 生於阿拉比亞,研究數學,著代數學一書,爲代數之名所自出.
1175 A. D. 間	Leonardo生於意大利之 Pisa, 始傳現行阿拉伯數字於歐羅巴洲.
1489 A. D.	在 Leipzig 出版之商業算術中,初使用十,一爲加減號.
1540 A. D.	Vieta 生於法蘭西,用文字代數,始創今日符號代數學之形態.
1545 A. D.	Cardon (1501-1576 意大利人)發表其數學

書 Ars Magna,開始採用方程式之虛根及複素數根.

1601 A. D. Fermat 生於法蘭西,渠之關於數論及其他之創見,不勝枚舉,猶以 Fermat 大定理,最膾炙人口.

1614 A. D. Napier (1550-1617, 英人)發表其關於對數之發見.

1638 A. D. 後世所喧稱 Descartes (1596-1650, 法人) 之名著 La Géométrie 出版,爲解析幾何學之創見.

1642 A. D. Newton 生於英,微分積分學之發明,乃渠二十五六歲時之事也.

1646 A. D. 與 Newton 並稱之微分積分學之發明者 Leibnitz 生於德意志,彼又於 1678 年之論文中,採用行列式之概念.

1667 A. D. John Bernoulli 生於瑞士,約自一世紀以前所流行之三角函數概念,殆始完全.

1689 A. D. Rolle (1652-1719, 法人)發表其所謂 Rolle 定理.

1707 A. D. Euler 生於瑞士,對於微分積分學解析幾何學等一般解析學方面,多異常開拓.其於 1748 年發表之無限解析序論中,開始以 e

表自然對數之底,以 π 表圓周率.

1715 A. D. Taylor (1685-1731, 英人)發表其所謂 Taylor 定理.

1730 A. D. De Moivre (1667-1754, 法人)發表其所謂 De Moivre 定理.

1736 A. D. 被稱爲十八世紀大數學家之 Lagrange 氏生於意大利,於一般數學,貢獻極大.猶以其函數論實開 Cauchy (1789-1857, 法人) Jocobi (1804-1851, 德人) Weierstrass (1815-1897德人)等後起諸大數學家研究之端倪.

1742 A. D. Maclaurin (1698-1746, 英人)發表其所謂Maclaurin 定理.

1749 A. D. Laplace 生於法, 1812 年發表關於確率論及最小二乘法之論文,但確率之概念, 1654 年時 Pascal (1623-1663,法人)於其與 Fermat 之通信中,已論及之.

1759 A. D. Lagrange 完成變分法之理論.

變分法 John Bernoulli 及 Euler 均曾研究之.

1760 A. D. Euler 證明 Fermat 大定理之 n=3 者,至n=4 者,二十二年以前,渠已證明之矣.

1761 A. D. Lambert (1728-1777, 德人)始證明 π 爲無理數.

1763 A. D.	倫敦 Philosphical Transaction 上揭載確率論中致用最宏之 Bayes 定理.
1768 A. D.	Daniel Bernoulli (1700-1782, 瑞士人)始應用微分積分學於確率論.
1774 A. D.	Euler 始論定曾由 Euclid 發見之指數爲分數負數時之二項定理的收斂範圍.
1776 A. D.	Vander Monde (1735-1796, 法人)始用現今行列式之形式.
1777 A. D.	Euler 始以 i 表 $\sqrt{-1}$, 又是年 Gauss 生於德意志,於整數論,誤差論及其他一般數學上,發輝其古今獨步之大天才.
1781 A. D.	Waring (1734-1798, 英人)證明一切調和級數之指數比 1 大時爲收斂,否則爲發散.
1789 A. D.	Cauchy 生於法蘭西,於一般解析論無限級數論,多獨創的發見,猶以無限級數論爲甚.
1796 A. D.	Gauss 發見正十七角形之作圖法,次年1801,發見一般的 $n=2^k+1$ 爲素數時之正 n 邊形之作圖法.又同年所謂 Apollonius 以來之最大幾何學者 Steiner 生於瑞士,綜合幾何學大進步.
1802 A. D.	Abel 生於挪威,函數論大進步.由 Fredholm

(1866—, 挪威人), Bôcher (1867-1918 美人)等所完成之積分方程式論,其根源卽始於 Abel. 彼又於 1826 年證明五次以上之方程式,僅用根號,不能解.

1808 A. D. Kramp (1760-1826, 法人)始以 n! 表 n 之階乘.

1810 A. D. Kummer 生於德意志,研究 Fermat 大定理而構成 Ideal Number 之理論.

1811 A. D. 少年天才 Galoi 生於法,獨創置換羣論,1830 年彼之論文中,始用Group術語.

1823 A. D. Ohm (1792-1872 德人)論定曾於 1749 年被 Euler 研究之複素數之複素數冪性質.氏又爲著名物理學者.

1826 A. D. Lobatschewsky (1793-1856, 俄人)始論非歐氏幾何學.但最初懷疑 Euclid 公理之學者,爲意大利牧師 Saccheri (1667-1733). 又同年,Crelle (1780-1855, 德人)創刊著名之 Crelle Journal.

1828 A. D. Plücker (1801-1868, 德人)著解析幾何學論,採用同次坐標線坐標,解析幾何學由是大進步.

1836 A. D. 使 Liouville (1809-1882 法人)著名之 Louville Journal 創刊.

1838 A. D. 是年發表之De Morgan(1806-1871,英人)論文

中,始見數學的歸納法術語.

1841 A. D. Archiv der Mathematik und Physik 創刊於德意志.

1842 A. D. Nouvelles Annales de Mathematique 創刊於法蘭西.

1843 A. D. Hamilton (1805-1865 英人)發見四元法.

1845 A. D. Adams (1814-1892英人)由計算預言天王星之位置.其翌年1846, Leverier (1811-1877 法人)亦爲同樣之預言.

1855 A. D. Sylvester (1814-1897 英人)主辦 Quaterly Journal.

1861 A. D. Weierstrass 發見無長連續曲線之實例.

1866 A. D. Cremona (1830-1903 意人)發表三次曲線之綜合的理論.而自柏林學會獲得 Steiner 獎金之一半.

1873 A. D. Hermite (1822-1901, 法人)始證明 e 之超越性.

1882 A. D. Lindemann (1852-, 德人)始證明 π 之超越性.

1884 A. D. Schwartz (1845-, 德人)由變分法證明球面爲定表面積之曲面中,容積最大者.但此事,二千年前, Archimedes 已知之.

1897 A. D.　　在瑞士之 Zurich，開第一次世界數學大會.

Faraday 與近世電氣工業

裘 至 純

今年 1931,正是 Faraday (1791—1867)發現電磁感應(Electro-magnetic induction)的百年紀念.我於是想到我們現在于物質生活上能夠得到如此的舒適,如要光明有電燈,要溫煖有

電爐,要煑食有電灶,要行動有電車等,雖然許多科學家都

曾有過不少的功績,但是Faraday的功績,更是偉大而不可磨滅的.我來寫這篇文章,蓋欲借此以紀念先哲,作高山仰止之意.

說到Faraday的大名,在讀過物理和化學的人們,大概沒有不知道的.因爲他發明和發現的東西,在物理和化學上,都佔着重要的位置.如電磁感應定律(Law of Electromagnetic Induction),變壓器(Transformer),自感係數(Coefficient of Self-Induction),Faraday盤(Disc),靜電感應的冰桶實驗(Ice-Pail Experiment),以靜電方法比較電容量(Comparison of Capacities by Electrostatic Methods),誘電體的實驗(Experiment Dielectrics),電與光之密切關係(A close relationship between electricity and light),經過氣體放電現象之黑暗空間(Farady Dark Space),力管(Tube of Forces),磁力線(Magnetic Line of Force),以及電解定律(Laws of Electrolysis)等,都具有重大的價值.即使社會上一般的人未能一一知道Faraday的偉績,然而卽在此不知不覺之中已享受了Faraday的恩物,大概不能否認的罷.

現在我所欲說的不是Farady所發明和發現的一切,而是他許多發明和發現中的一小部分,卽電磁感應問題.因爲他對于世界文明的推進,與人類生活的幸福上有莫大的關係.

我在談這問題之前,要來檢閱在Faraday未發現電磁感應之先,人類是怎樣地驅使電氣的力量.

1800 年以前,僅知道摩擦能夠生電,卽以不同的物質如貓皮,火漆棒,綢,玻璃棒等,互相摩擦而生電.當時各國學者都努力于此場地的實驗,結果,證明了這些電之應用非常有限,因爲它們不容易絕緣和控制.譬如 1672 年普魯士之 Otto von Guerike 所創作之摩擦發電機, (Frictional electric machine) 係以手持乾毛布壓于硫礦之球上,使硫礦球迴轉,能生多量之電氣.至 1760 年 Ramsden 又另有創作,卽用面塗錫汞膏之革枕四個,相對裝于一木匡內,中夾玻璃圓板,板之中心有軸,軸有柄,可用手使它旋轉.此種裝置較前確已進步.至 1840 年英人 Armstrong 又發明蒸汽發電機,蓋利用水蒸汽經狹小之木管流射,蒸汽的水分遂摩擦木管之壁而生電.此爲摩擦發電機發電量最多的機械了.至 1865 年 Holtz 鑒于摩擦發電機之不適用,遂另覓途徑以發明感應發電機. (Influence machine) 蓋用玻璃圓板二片水平平行裝置,一固定,一可旋轉,在固定的板之任一直徑上相對貼二紙片,欲發電時,先以小電源例如帶負電之樹脂棒,傳電氣於其上,再旋轉其它一個,卽能生電.此非摩擦,乃係互相感應,無摩擦物之阻礙,可迅速迴轉,故所生之電,比任何摩擦發電機所生的都大.後來 Topler 又加以改良,使旋轉時能自發電不必觸小電源.至于今日最流行最簡便之感應發電機,則又爲 Wimshurst 所發明.蓋亦 Holtz 機械之變形,不過將水平裝置改爲垂直,二紙片改爲許多錫箔片,迴轉時依

滑車之助得互轉于反對方向罷了.

遍觀以上各種機械,幾費思索,幾費年月,得到如此地步已屬不易,然而要取它們所發之電以供日常生活之用,實爲不可能.

至 1800 年 Volta 公布他所發現的低壓電(Low-tension electricity) 時,才爲電氣發達史上開了一個新紀錄.蓋以不同金屬相接觸卽生電化學的作用. Volta 堆 (Pile) 作爲電源時和摩擦發電機或感應發電機不同.摩擦電無須乎輪道 (Circuit),但 Volta 電,傳導輪道却是不可少的.在此輪道中,電壓雖相對地低,而所生電流却相當地强而且不變. Volta之名,在 1881 年巴黎國際電氣會議 (International Electrical Congress) 時,已將它列爲實用電氣的單位,卽 Volt.

1820 年頃,電與磁已各分離而爲獨立的科學,電有摩擦與 Volta 之別,磁則爲一種鐵礦之天然性質叫做磁石 (Lodestones),它能由接觸而傳授與中性鋼棒或鋼針.是年,Copenhagen 大學的 Oersted 卽發現出任何導線從 Volta 電池導有定常電中電流時,能使掛在其近旁之磁針傾斜.此爲磁與電中間在運動時相互之關係,產生了科學的新分枝 —— 電磁學 (Electromagnetism). Oersted 之名,已於 1930 年 Oslo 國際電氣工業委員會 (International Electrotechnical Commission 簡稱 I.E.C.)將它列入電磁單位裏,卽稱爲 Oersted.

緊接着 Oersted 的發現而來的則有 Ampère 的工作.他因證

明了電流作用,有如磁極般互相吸引與排斥的現象,于是更進一步確定電與磁中間的電磁之關鍵.他因把這些電力學之力 (Electromechanical forces) 置于堅固的數學基礎上,才有這樣的成功. Ampere 之名,也由 1881 年巴黎國際電氣會議把它定為實用電磁的電流單位.

Oersted 和 Ampere 的工作,對于電磁的電流指示器與電流表 (Galvanometers),開了發展之途徑,對于電磁石 (Electromagnets) 與電動機 (Electric motor) 也暗示了出發點.由電流流過導線時使磁針運動,即為發明電動機繼續旋轉之初步.在第一個小電動機未出世以前, Faraday 及其他諸人所發明的東西,多含有旋轉的事實.

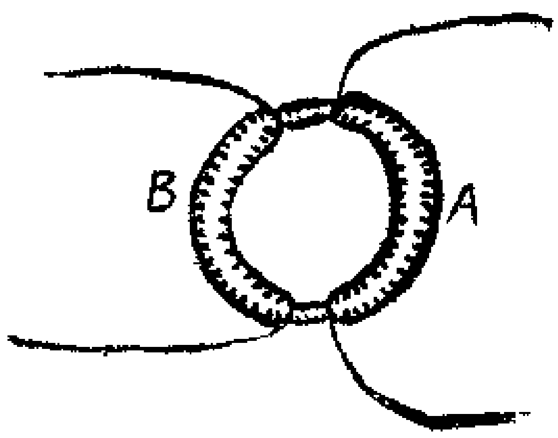
要知道 Faraday 所發明的詳細情形,須讀他的科學工作日記.該日記保存在英國倫敦皇家研究院 (The Royal Institution) 已許多年了,現在英人完全把它登在今年 Faraday 的紀念册裏,作為有價值的永久的附錄.它啓示了以後如此深切的功用,是出乎作者意料之外的.在該日記中, Faraday 懷疑電與磁中間,除 1820 年 Oersted 所已經發現者外,必還有個相互聯絡的關鍵.在講他尋得此關鍵之先,還要知道些同它有關的事實.

1821 年,英人 Wollaston 在研究 Oersted 的有名實驗,想以電流改變磁針傾斜為永久旋轉,並希望發生相反的效果,即電流繞着磁石旋轉.他的實驗失敗了.於是 Faraday 起首研

究磁的旋轉,而且在 1821 年的聖誕節,就得到第一次磁針繞着電流的旋轉.

1824 年,他力辯 Volta 電流影響於磁石,則磁石應該影響于電流.但是不能得到實驗的證據.又他知道帶電體作用於不帶電體上,如導線通電流時即爲帶電體.該導線能夠使旁的導線發生與自己相同的情形麽?在 1825 年他以一通電流的導線接近另一連有電流表的導線,但是沒有結果.因爲瞬間存在的感應現象,他沒有看見.至 1828 再實驗,仍無結果.

但 Faraday 堅持到底.在 1831 年八月,又用一軟鐵環,以線圈 A 與 B 繞之,線圈 B 連以電流表.當線圈 A 連接以十個電池時,電流表之針擺動,但最後靜止在原來的位置.及開放電路時,而針又擺動.Faraday 當時不能明白是甚麽道理.次日,他取一鐵圓柱體繞以線圈,連以電流表.再置圓柱體于磁棒兩極之間."Every time the magnetic contact at N and S was made or broken, there was magnetic motion at the indicating helix——the effect being, as in former cases, not permanent, but a mere mo-



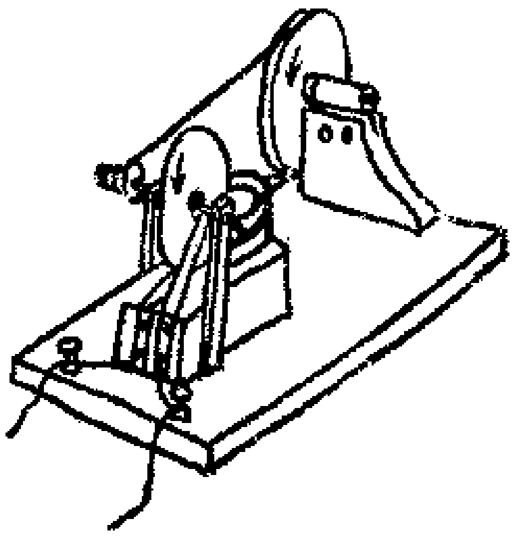
1931,八月,Faraday 實驗裝置

1931,八月,Faraday 實驗所用線圈.

mentary push or pull.….Hence here distinct conversion of magnetism into electricity." 此實驗爲 Oersted 的實驗之逆;由磁發生電流.

在 1831 八月二十九日, Faraday 的日記裏,又記載着下面的一個嚴密的實驗.卽以長二百零三呎之絕緣導線繞於一木塊上,連以電流表,另以一等長線圈繞於同一木塊上,卽插入于第一線圈之間,而連以十個電池所成的電池組之兩極.當閉鎖電路時,則電流表裏忽然有輕微之影響,放開電路時亦然.不過指針原在中央,閉鎖時如傾左,則放開時必偏右罷了.但若以 Volta 電流連續地通過時,雖線圈上已因多量電流通過而發生强熱,而電流表裏却不見有任何影響.於是他所要尋求的關鍵總算得着了.

十月十七日.他僅以永久鋼磁鐵穿過導線圈,而得到同樣的效果.在這些實驗裏,此種意外的現象,卽感應效果,是不連續的,僅瞬間的,並且具有從普通來頓瓶 (Layden jar) 經過而顫動的電波之性質,比 Volta 電池的電流所具有的還要多.


Faraday Disc

他又發明一種發電機,卽所謂 Faraday Disc Dynamo. 爲他實驗電磁感應最早所用的儀器之一.卽以銅盤旋轉於磁極之間,而盤與磁場垂直.以連電流表的輸道之一端接觸盤之軸,他端則接觸于

盤之周.旋轉該盤,則電流表之指針擺動.此盤所發之電雖少,不能供日常生活之用,但由此發明的進步,遂演成今日之代那模發電機(Dynamo-electric generator).及他近七十歲時,就已親見以導體線圈迅速地旋轉于大的永久磁石之間而產生電流的代那模了.可惜他不及看見今日大規模的電氣工業的建立.

1834年Faraday起首研究Self induction的作用,並且認爲它是電流之自己感應("Induction of an electric current on itself")他能證明額外電流(Extra current)之存在.這額外電流,在放開電路時,與原電流有同方向,而使原電流加强,在閉鎖電路時,却反使原電流減弱.此種發現,對于早先橫過大西洋所用之海底電線,是有重大價值的.

近世初學電氣工程的人,一定以爲第一是產生發電機(Electric generator),其次是電動機(Motor),第三是交流的變壓器(Transformer);其實却不然,在發現基本原理的程序看來,第一應是電動機,其次高流的變壓器,第三才是發電機.

1831年Faraday在皇家研究院致力于磁與電相互關係的實驗時,還有一位科學研究者,在同一場地裏工作.這人是誰,就是Joseph Henry.他從前曾在離紐約城250Km的Albany Academy讀書,至1826年即擔任該處之數學的與物理的教授.他與Faraday相隔甚遠,環境不同,而同時在電磁的同一場地裏研究,却得到一致的結果.Faraday所在的皇家研究

院,可算是那時一個設備最好的實驗室,Henry 是遠在美洲國家的一個學校裏.當日要倫敦與紐約兩方研究者交換科學意見,是必須很長久的時日的.

他們以不同的實驗儀器各自獨立地發現,即從一個線圈上磁力線之增減,於另一線圈上產生電流,但Faraday 記載他的觀察在 1831 年八月,而於同年十二月發表, Henry 的觀察則一直到 1832 年六月才公布.電磁學的場地如此之大,而兩位優秀先進之科學家的成就,又如此卓越,所以人人都能知道他們. Faraday 與 Henry 兩位之名,曾經國際會議以 farad 與 henry 之標號列入國際電單位裏.

從 1831 年電磁感應原理發現以後,要達到今日電燈與電工率分配功用之成功,是必須經過一相當研究時期的.且須要各國物理學家數學家將這發現的東西,安置於量的基礎上.這工作已由那幾位領導者,如 Gauss, Joule 與 Maxwell 等,經過許多年月才產生.所有這三位的大名,都已列入國際電與磁的單位裏.

於是科學發明者又來了新的工作了,即利用原理以建立關於適應實用的需要.隨後就要有一批資本家與商業家,充分地作發明之實用性的宣傳與投資.其次就要訓練一班工程師和設計者,再在電氣傳送 (Transmission) 與分配 (Distribution) 系制裏,準備,建造及安置機械與儀器.再次就要訓練一班運用者,監察者,與修理者,以保持此系制連續

運用之效力.

最後,大多數人對於電氣機械與儀器的使用,遂變成很熟悉而有經驗了.此種教育與訓練的擴大歷程之常常前進,對于原來發現之工業成就上,是必須的.在我們近世的文明裏,如此處所述之科學的發現漸漸滲入于大衆的心裏,因之成爲國際工業的成功.所以現在三尺之童對於不須點火而自會發亮的電燈,不須用力而自會走路的電車,不用炭而自會發熱的電爐等亦不以爲奇了.現在電氣事業之進步,正在一日千里,將來如何,還是不可限量,不能不承認都是受Faraday之賜了.

Faraday 的偉績,即他所發明和發現的東西,和他同近世電氣工業的關係,大概已說過.現在要轉來叙述他的歷史了.一個如此偉大的科學家的生平,想亦大家所願意知道的罷.

Faraday 是英國人,他的父親在倫敦當鐵匠,生活非常困難,幸喜他的母親善理家務,才得以勉强度日.關于他的父母,除此之外也就沒有甚麽可以稱述的了.

他在 1791 年生于倫敦,我們從二十世紀回溯到十八世紀,這墜地時的哭聲還不甚遠.蓋從Faraday出世至今不過百四十年,死後也只有六十四年吧了.所以他的儀表和風度,尚在許多老年人的記憶之中.

Faraday 幼時,曾由樓上失足下墜,幾乎喪命.我們試想,如

果那時他就死了,則今日世界又成何狀況?他的不死,真是世界的大幸啊!

他做小學生時,雖則沒有可以令人特別注意的地方,但他自己常常這樣說:"I was a very highly imaginative person,and I could believe in the Arabain Nights as easily as in the Encyclopcedia; but facts were important to me and saved me. I could trust a fact, and always cross examine an assertion."

他離開學校之後,好像沒有什麼特別的志向,于是一變而為書賈的學徒了.書賈的舖子就設在他所居的比隣.然Faraday是個伶俐的孩子,他的生活很規矩,他要做的工作他就專心去做.還有許多卑賤的職務,如送新聞紙至主顧家等.但是Faraday由此單調的職務,得達到一個很好的目的,就是書賈教他訂書,而不收他的學費,因為他的父親沒有供給學費的能力.

Faraday十四歲時,他就不像普通的孩子們把寶貴的光陰虛度了;他得師傅的允許可以讀書舖裏所有的書.在那些書裏,他最覺得有味的,就是Mrs. Marcet's Conversation on Chemistry 這一本.久而久之,他就被這本書引上科學之路了.

七年之後,Faraday就變為對于科學非常有趣味的人,但因他沒有特別的訓練,故除訂書之外,彷彿于他沒有什麼事似的.那時他已是一個羽毛豐滿的工人了,而他且站在使用他人的地位,成為一個監工者.在任何情形之下,Faraday 對于科學,總是念念不忘地想寫信給Sir Humphry Davy,向他借用皇家研究院的儀器.然皇家研究院的院長 Davy 非常忙,沒有介紹的信是不覆的.但 Faraday 很聰明,因爲他常常去聽Sir Humphry Davy的公開講演,曾抄有許多的筆記,並且畫了許多實驗用的儀器的圖,于是將這些筆記本連信一起送去,以證明他對于科學的興味.這些筆記,至今還保存在皇家研究院的博物館裏.因此,得到偉大的Davy 謙恭而負責的回信,並且願意和他見面.

Davy 見他之後,知道他會訂書,於是就叫他在皇家研究院訂書,並幫着他私人的工作.這總算是很好的了,但是Faraday 處處表現出熱心要做科學家,於是 Davy 看出他不適宜於訂書的生活,使他擔任皇家研究院實驗室的助教.從此 Faraday 得免除了以前所做的各種雜務了.

不久,Dauy 將遊歷大陸,隨帶一小小化學實驗室, Faraday 要求與他同行,充秘書與助教之職,約一年有半才歸.歸後又重任皇家學院助教.

年三十,還是一個助教,但是已成爲 davy 的承繼者了,年俸百鎊並可居住院內.Faraday 在此時期,才與一銀匠女兒結婚.他在戀愛與結婚的生活中,是最有勇氣的.他曾親手寫過下面的一段話: "Amongst these records and events, I here insert the date of one which, as a source of honour and happiness, far exceeds all the rest. We were married on June 12, 1821."

Faraday 無子女,然喜與孩子爲伍,他爲一勤於工作者,但又不與世絕緣.而且富有同情的天性.

他在皇家研究院,一直至三十二歲時才開始授課,但僅以教授不在時爲限,至他任正式講師時,年已三十六歲了.但我們要記着他二十二歲才進皇家研究院,而且不曾受過大學或專門學校的教育.在這時以前,他完全爲一私自研究的科學家,但他寫給朋友的信,却是非常有趣的.這些信已由皇家研究院的秘書 Dr. Bence Jones 收集在 Faraday 的文集裏.

當 Faraday 的講演大成功時,他已是一實驗家,尤其是發現家,所以他非常出名.前面已經說過,他發現了電磁感應的原理,使近世能夠製造代那模,並引導實用電學長足的進步,而至有今日大規模的電氣工業的結果.如果 Faraday 是一個實用的發明家如 Lord Kelvin,則我們或者早就看見代那模也未可知.但 Faraday 却專門研究純粹科學去了.

很奇怪的是,如此大實驗家大發現家却非數學家.有個歐洲大陸的科學家曾說:"Faraday 很自負地說過,在他的生活歷程中,僅有過一次數學的計算,即轉 Babbage 計算機的時候." 如果 Faraday 的確說過這話,那自然是諧謔了.但 Faraday 不曾受過高等數學的訓練,是無可諱言的.我寫這一段,並不是要對于 Faraday 有所責難,他不曾受過高等數學的訓練,而有此偉大的發明和發現,更屬人所難能的,如

果再加有高等數學的訓練,則其成功當必更有可觀了.所以我以爲他或者有顯數學的心.大數學家 Clerk Maxwell 對于 Faraday 的工作曾這樣說過:"It shows him to have been a mathematician of high order, and one from whom the mathematicins of the furture may derive valuable and fertile methods."

提起 Maxwell (1831–1879),我們也應該深切地紀念他,因爲他在電磁學方面,與 Faraday 的關係非常深,而且他就是 Faraday 發現電磁感應定律那年誕生的.所以今年又是他誕生的百年紀念了.下面決定波動之以 $v=1/\sqrt{\mu k}$ 的速度傳播的三個方程式:

$$K\mu\frac{d^2F}{dt^2}+\nabla^2F=o,$$

$$K\mu\frac{d^2G}{dt^2}+\nabla^2G=o,$$

$$K\mu\frac{d^2H}{dt^2}+^2\nabla H=o,$$

就是他把 Faraday 的電媒質 (dielectric Medium) 觀念用數學的式子表出來,爲 Faraday 的觀念立了穩固的根基. Faraday 萬想不到他發現電磁感應定律之日,而他的承繼者也跟着就出世了.

M. Faraday 年譜 (1791 – 1867)

1791 生于倫敦之 Newington.

1804 在所居比鄰的書舖學訂書.連着做了好幾年的訂書匠,卽在這時就喜歡讀科學書.

1809 常聽 Mr. Tatum 的自然哲學講演.

1812 曾到皇家學院聽過大化學家 Sir H. Davy 的講演.是時他在倫敦的法國人家裏充短工的訂書匠.

1813 寫信並附筆記本與 Davy,繼得 Davy 的榮幸的回信.不久,即在皇家研究院當 Davy 的助教.

是年秋,Davy 挈眷遊歐洲大陸,他隨着他們任秘書,曾到過法,意,瑞士等國.

1815 回皇家研究院,仍任助教.

1816 發表第一篇論文.

1820 開始授課,但以教授不在時爲限.

1821 與銀匠女兒結婚,並攜其夫人入皇家研究院.他們倆居住在那裏一共四十六年.

是年聖誕節,他發現了第一次磁針繞電流旋轉.

1823 起首實驗氣體液化.

1824 被選爲皇家學會會員.

曾辯論 Volta 電流影響于磁,則磁應該再影響于電流.

他又研究電解與 Volta 電池發明電解二定律.

1825 任皇家研究院導師.

他曾以通過電流的導線接近連電流表的導

線作實驗,無結果.

1828 再實驗仍無結果.

1831 于鐵環上分繞以兩線圈作實驗,得出新現象.

又以鐵圓柱體繞電線,接電流表,置于磁棒兩極間實驗.

又以兩條長203呎之線圈,同繞於一木塊上作實驗.

又以永久鋼磁鐵穿過導線圈實驗,均得到與上同樣的效果.即有名的磁電與感應電流.是年終即公布於世.

是年大物理家大數學家 J. C. Maxwell 誕生.

1832 大物理家Henry發表論文,與他的結果,不謀而合.

1834 引用"Anode"與"Cathode"兩名詞.

又起首研究Self-induction證實額外電流 (Extra current)。

1835 公布上面問題的論文.

又着手于靜電感應的研究,建立一種新觀念叫做dielectrics. 又定"lines of force"之名,並由此導出重要的發現,即今日所謂"Specific inductive capacity."

1837 公布前問題的實驗.

1845	由實驗證實光與磁或電之直接關係.
1846	公布上面實驗的結果.
1861	Maxwell 譯他的理論爲數學術語.
1862	實驗在磁極間之鈉線.
1867	死,時年七十七歲.

植物生理學史略

(續第二卷第一期)

張　挺

第　三　章

氮之吸收及含氮化合物之構成

十九世紀後期,開植物新陳代謝中"碳之循環"之研究門徑者,為德之大學者Sachs.植物由無機之CO_2及水分以製造有機之高級碳水化物,其中歷程,因此四十年中關於光合作用之研究,遂得逐漸分明.然碳水化合物不過為一種儲藏養分,換言之,卽植物暫時貯蓄其藉葉綠素吸收得來之日之輻射勢能,以供日後他種活動時勢能之需要者.生命本身所寄之物質,卽所謂原形質(Protoplasm)者,則非此簡單之光合作用所能生成.蓋原形質主為蛋白質所構成;蛋白質為含氮化合物;而碳水化合物所含原質,碳,氫,氧之外,更無他物,故植物必再設法取得氮加於其中,合成蛋白質,造成原形質,以繼續維持生命.本章之主題,卽為此種氮循環之研究史.在此方面之研究,以法之生理學者Boussingault 創其基,英學者 Warington, 俄學者 Winogradsky 揚其

緒;法學者 Berthelot, 荷蘭學者 Beijerinck 諸人之研究,亦後先輝映,盛極一時.顧卓絕一時,領袖羣倫之學者 Sachs 及 Pfeffer 兩人,則以方向不同,造詣遂別,故於此轉不見稱焉.

第一節　氮之給源之研究

I.　腐植質說之擊破:

1. 1860年以前,學者多相信腐植質(Humus)爲植物一切養分之唯一給源.土壤中之硝酸鹽及錏鹽不過促進腐植質使溶解而助吸收之物質而已. Liebig 雖曾一度强烈反對,至於使之僵死,然後此經 De Saussure, Von Mohl 諸人之提倡,遂又復興.

2. Boussingault 自 1840 年時卽已注意於植物之氮之取給問題.唯其研究,則延至 1860 年之頃,始告成熟.其最重要之結果,卽證明正常之綠色植物,絕對不能吸取大氣中之游離氮以供用,而必賴諸土壤中之結合氮.而結合氮之供給,則又絕對不爲腐植質,必爲硝酸鹽及錏鹽.

1860, 1861 兩年中, Boussingault 以銀葉菊芋 (Helianthus Argophyllus)爲材料,以實驗植物之氮的取給.分栽培植物爲三組:第一組栽於絕不含任何其他礦物質之純砂中;第二組於純砂中加植物灰分中應有之各種礦質及硝酸鉀,第三組與第二組同,唯不用硝酸鉀而用碳酸鉀.歷時 86 日後,第一組第三組之植物,除似有少量得自大氣中之碙精(NH_3)之痕跡外,氮量不見有些許增加.至於第二組,則增加極

旺.且在成長量上,第二組植物亦爲第一組與第三組之六倍.由此可以證明普通綠色植物必需有硝酸鹽以供給其氮之需要始能發育.

II. 證明綠色植物不能直接利用大氣中之游離氮

1. Lawes 及 Gilbert 於 1850 年以後,在英國 Rothamstead 實驗場作詳盡之實驗,1861 年,兩氏與 Pugh 聯合發表論文,證明Boussingault 植物不能直接利用大氣中之游離氮而只能攝取硝酸鹽及錏鹽之說.

2. Berthelot 1876 年至 1892 年關於此問題之研究,發表極重要之論文多篇.其主要之結論,卽爲確定綠色植物洵不能直接利用大氣中之游離氮,唯大氣實亦爲綠色植物氮之給源之一,特其供給方法爲間接的而非直接的,換言之,卽土壤中有種種特殊生物,能固定大氣中之游離氮,使變爲結合態氮,以供綠色植物之利用;又氣象之變遷中,亦恆有變游離氮爲氮鹽之可能.(其實驗之詳情,當於述固氮作用 (Nitrogen-Fixation) 時細及之.)

III. 綠色植物所能攝取之氮化物之種類:

1. Liebig 1840 年謂綠色植物絕對只能利用錏鹽,有機氮不能利用,故腐植質不能爲植物之氮的給源.

2. Boussingault 1861 年聲明綠色植物僅能利用硝酸鹽及錏鹽.

3. Hampe 1865 年至 1867 年中,由多種實驗證明植物亦

能吸收尿素(Urea)($CO(NH_2)_2$)尿酸(Uric acid) $C_5H_4N_4O_3$ 錏基醋酸(Glycine) CH_2NH_2COOH 等較高級氮化物.

4. Wagner 1868年加入肌漿素(Creatine) $C_4H_9O_2N_3$ 等於Hampe之表中.

5. Wolf同年發現Tyrosine亦可應用.

6. Schlösing1874年發現植物之葉能吸收偶然雜在大氣中之硇精痕跡.

7. Mayer 同年有同樣之發現.

8. Kerner 1887 年更證明有時此種硇精之吸收直爲一種重要之給源.

9. Molisch 同年發現若亞硝酸鹽之濃度在 0.08 %時,植物特嗜吸收之;第濃度再高則有毒.

10. Baumann 同年謂未耕土壤中,結合氮多成錏鹽而存在,硝酸鹽之分量,實尙不足供定量分析之檢查.

11. Pitsch 1887 年至 1896 年繼續作九年之實驗研究,結果斷定錏鹽對於植物之營養價值僅次於硝酸鹽.

12. Laurent 1889年發表謂植物利用錏鹽與硝酸鹽可以同等.

13. Paignicul 1890 年亦有同樣之發表.

14. Muntz 1890 年發表其多次實驗之結果,除去土壤中之硝酸鹽,且設法阻止硝酸鹽及亞硝酸鹽之生成時,錏鹽卽爲植物之唯一的氮的給源.實驗之材料爲玉蜀黍,豆,亞

麻及大麥;此等植物皆能藉其根吸收錏鹽,以得蕃盛之成長.

15. Mazé 1900 年以玉蜀黍及其他禾本科之雜草,芸苔(Brassica),及葱屬(Allium)之一種作實驗,結果證明硝酸鹽錏鹽之營養價值,約略相等.

綜上所述,吾人可知正常綠色植物所能攝取之氮,主要者爲硝酸鹽及錏鹽,而硇精及錏基化合物,固亦未嘗不可供植物之營養.無論動物或植物,其死骸埋藏土中時,因細菌之作用逐漸腐敗,將其體中所含之氮,成硇精及種種錏基化合物而放出,及其後更經其他細菌之作用,變而爲亞硝酸鹽終成硝酸鹽.是知土壤中之氮化合物,簡單者與複雜者固可同出於一源;曩時學者所持之腐植質,實亦含有不少之植物態氮,初不可一概抹煞.然吾人須知有機化學之進步,亦較近數十年來始漸成功,昔之學者良不知此等化合物間固有線索關係可尋,而土壤中種種生物的化學的作用之進行,亦近日始逐漸闡明,吾人決不可以不能融會責之古人也.

第二節 固氮作用之研究

土壤中之氮量有限,而植物之取給無窮,雖曰物質不滅,然氮化物經植物吸收後,動物或再利用之,其後腐敗崩解,往往有游離氮放出,氮之量雖未變,而氮化物則已顯有消失.然土壤中所含之氮化物,初不少減,果爲何哉?經學者聚

探之結果,知有多種下等生物,具有一種特殊之生活功能,能將大氣中之游離氮,陸續使成結合氮而還諸土壤.又迅雷風雨,起空中放電現象時,大氣中之游離氮與游離氧,亦往往能因電之作用而結合成氮氧化合物.此種變游離氮爲結合氮之作用,謂之固氮作用(Nitrogen-Fixation).固氮作用之研究,多屬諸下等植物生理方面,而尤以細菌學(Bacteriology)方面之鑽研最爲重要.故卽直謂固氮作用之研究,爲細菌學方面之一種工作,亦無不可.茲將此四十年中關於固氮作用之研究情形,分述於次:

I. 固氮作用現象之證明:

1. Boussingault已謂雨水能將空中放電所固定之氮洗入土壤中,成爲硝酸鹽.

2. Berthelot 1876 年至 1892 年之研究:

a. 着手之先,對據以前學者所作關於植物能否利用大氣中之游離氮之研究,深致不滿.蓋 Berthelot 以爲自 Boussingault發表其關於銀葉菊芋之研究後,諸學者所作之類似的實驗,皆不免牽杞柳爲桮棬,太違反天然.在此種與自然環境相去太遠之環境中,實不足洞知事實之真象.

b. 1876 年第一次實驗,在實驗室中用無聲電氣火花使某數種有機物作用於空氣,結果游離氮確能變成氮化物;唯所成究爲何物,則未能明定.由是 Berthelot 乃

推定謂在雷雨中亦必有同等之固氮作用.

c. 1877 年,用電位差與離地面不遠處大氣層電荷相似之電力,作用於含水之濾紙,結果見濾紙之含氮量有四倍之增加;若以糊精染濾紙,則氮量增至十六倍.

d. 1885 年,發現土壤中有數種細菌,與氮之固定有關.大氣中游離氮之受固定,泰半當爲此種細菌之力.

3. Joulie 1886 年以蕎麥,紅麥,及荷蘭紫雲英等植物供實驗.以種種不同之土壤,施種種不同之肥料,先以分析法測定土中原來含有之氮量,再測定供給之氮量,最後計算結果栽培物中所含之氮,而作比較,結果確有氮之固定.唯就實驗時之情形言,則此等綠色植物,實無自行固定之能力,則土壤中之微生物,必與氮之固定有關.

4. Frank 1886 年發表論文,謂土壤中所含之氮,必時因種種原因而成游離態以消失,或由積潦沖洗及植物之吸收而以氮鹽之形狀褪去.然土壤中之氮,初不見銳減,且往往激增,是必有所本因.第 Frank 本人不能解釋,遂以爲當與某數種尙未明知之植物有關.

5. Tacke 1889 年謂含細菌之土壤,在較短時期中,每 100 Gram 能有 25mg 之氮量的增加.

6. Schlösing 及 Laurent 1891 年以不同目之多種植物供實驗,以定量之游離氮供給之,於實驗畢事後,再量此游離氮之消耗量.結果見有某數種植物,確能吸收大氣中之游離

氮;唯其成長,皆與栽培所用土壤面上之下等藻類及蘚苔有關.由是乃決定氮之固定,實為此等下等植物之活動,而非栽培植物之力,且指明氮之固定,須有光線及空氣之供給.

7. Armond Gautier 及 Drouin 1891 年以同樣之試驗,亦得相同之結果.唯結論則反對 Schlösing 及 Laurent 之說法,以為氮之固定,實為土壤中微生物之生活作用.好氣微生物(Aerobic microbes) 在氧化有機物時,同時亦略能氧化大氣中之氮少量而固定之.此種固定氮旋復為嫌氣微生物所利用而生成硇精 (NH_3) 及其他含錏基之化合物.土壤面上之藻類,更吸收此等含氮物質而貯藏之.故此等下等綠色植物,實與高等植物相同,只能間接利用大氣中之氮,真能固氮者則為土壤中存在之微生物.

8. 1892 年中,法國生理學界遂以是而起劇烈之辯爭:Berthelot 堅持細菌為固定游離氮之唯一使者,而 Schlösing 及 Laurent 則固執成見,以固氮為土壤表面下等綠色植物之作用.

9. Kossowitsch 1894 年又以卓絕之實驗,解決此學術界之糾紛.其實驗及結果為:

a. 初用特殊培養器培養囊球菌 (Cystococcus),而以不含氮化物之空氣供給之,結果發現如不在培養基中略加硝酸鹽,此植物不能成長,且成長率與硝酸鹽之供

給量成正比.

b. 再用藻類之純粹培養與數種土壤細菌合共培養,不用有機養料,結果亦微有氮之固定可見.

c. 再以多種藻類(念珠藻 Nostoc 等)之混合培養與細菌合培,則有多量結合氮之增加.

d. 若有糖類存在時,則固氮作用之結果尤大.

由是 Kossowitsch 乃推定藻類與細菌實營共生生活.此種共生生活,卽爲固氮作用之起因,至少必爲其必要條件.在此共生生活中,藻類以光合結果所得碳水化合物之一部分,供給細菌,細菌則固定大氣中之氮,給予藻類,以助其生長.證以曝此種混合培養於日光中,則其固定作用較在暗中者爲速;又若 CO_2 之供給加增時,氮化合物亦等比增加,彌覺可信.

在此種共生生活中,藻類之有粘質外膜者,固氮作用之進行爲最適;在加糖時,則以無粘質膜之藻類爲易受影響.

10.Puriewitsch 1895 年謂此種共生生活中之非綠色植物,有時含有麴黴 (Aspergillus) 及青黴 (Penicillium).

11.Winogradsky 同年所作之實驗,乃使此問題得達完滿之解決. Winogradsky 將耕土接種於絕不含氮化物之培養液中,則不久卽起盛旺之酪酸醱酵作用 (Butyric fermentation),而其中之微生物生成許多菌簇 (Zoogloea) 之團塊.以弱鹼類類中和所生出之酪酸,則醱酵作用卽繼續進行,至培養

液中不復有碳水化合物存在後,始行停止.此時所餘之培養液,已能供菌類及藻類之成長發育,足證在醱酵作用之進程中,已有含氮化合物生成.由化學分析之結果,確知其不謬.

取菌簇析離而檢查之,得見其中含有三種細菌,兩種爲線狀細菌,一種爲酪酸鼓槌菌(Clostridium).此三種生物之析離,極爲困難,以酪酸鼓槌菌滋不易培養也.析離之後,乃得晰知三種細菌各箇之特性.據 Winogradsky 言,如空氣不能斷絕,則三者之共存爲固氮作用之必需的條件.蓋酪酸鼓槌菌實爲固氮作用之真正執行者,唯此種細菌爲一種偏性嫌氣菌,極憚游離氧之存在,非有他兩種線狀細菌共存,吸收培養液中之游離氧,則鼓槌菌直無生存之可能.而鼓槌菌實爲特具固氮能力之唯一的生物.

Winogradsky 之研究,唯詳此三種生物之特性及其特別之能力.至於大氣中之氮,經此三種細菌之固定後,究變爲何種氮化物,則未論及.

12. Berthelot 及 Beijerinck 反對 Winogradsky 之說,以爲固氮作用之能力,決非酪酸鼓槌菌所獨具.一種名固氮桿菌(Azotobacter)之細菌,及藍綠藻中如念珠藻(Nostoc)及 Anabaena 等,亦具固氮力.故 Beijerinck 乃特創一說,謂當另有一羣特殊生物,具有一種共通之生理作用,能利用極低級氮化物馴至於游離氮以供其氮之需要.此等生物可稱爲底級氮營

養生物(Oligonitrophilous organisms).

II. 綠色植物與固氮之細菌之共生:

自發現細菌等下等植物之固氮作用後,旋卽轉而更究其與高等綠色植物之關係,結果遂有多組共生生活之發現.此發現不特於學術界有絕大影響,且於經濟上亦有重大關係.1880年以後,關於此種共生生物之組合,發現愈多,將來必尙有無限之繼長續增也.

A. 關係之發現:

1. Lachmann 1858年之頃,觀察多種豆類植物根上之瘤狀突起物,發現中函有多數生物,與細菌甚爲相似,且想出假說,謂此等細菌狀之微生物與豆類利用土壤中氮化物之能力之增加,有一定關係.

2. Boussingault 1859年於加有砂礫(石英)之肥沃園土中栽種羽扇豆(Lupin),結果能使土壤中之結合氮含量大增,生出硝酸鹽及錏鹽甚多.此種現象, Boussingault 未加解釋,第以爲決非得自大氣,且謂細檢栽培之羽扇豆,絕不見有可以證明其能固大氣中游離氮之事實,以自圓其所主張綠色植物不能利用游離氮之說.1876, 1883兩年,復再三提出類似之否認.

3. Dehérain由1879至1881三年間之觀察,知栽種歐苜蓿(Sainfoin) 後,雖作物能將土壤中之氮化物吸去多量,然土中之氮化物分量,並不減少且反有增加.

4. Schultz-Lupitz 於 1881 年發表其實驗十五年所得之結果,謂同一耕土,栽羽扇豆十五年,年年之收穫量如舊.易而栽種穀類於曾栽此豆之土中,則穀類之收穫特豐.在十五年以前所作關於該處土壤之分析,與十五年後分析結果相較,知氮之含量洵有不少之增加.

5. Gilbert 及 Lawes 1883 年,證明栽種紫雲英(Clover)亦能使土壤中之結合氮增加.

6. Hellriegel 及 Wilfarth之實驗報告,於 1886, 1888 兩年刊出者:

a. 栽培植物: 豌豆;其他豆類;燕麥;大麥.

b. 栽培液: 第一組; 無結合氮之礦物質溶液.

第二組; 含硝酸鈉之礦物質溶液.

第三組; 和有少量耕土浸出液之水.

栽培植物於洗淨而經過殺菌之盆砂中,而分別以此各組栽培液為灌漑水.

c. 結果: 第一第二第三三組中之穀類植物,不論曾否以耕土水灌漑,其成長量恆與供給之氮化物成正比.

豆類在第一第二組中,其成長情形,與穀類相似;在第三組,則成長蕃昌,且有氮之增加.

d. 結論: 豆科植物與禾本科植物不同,可不必賴土壤中之硝酸鹽以為氮之給源.大氣中之游離氮,即足以維持其氮之需要,而使之完全發育.唯此種吸收大氣

中之氮之能力,與其根上之瘤狀突起有關.瘤狀突起之生長愈蕃,則氮之吸收量亦愈大.

B. 豆根瘤:

1. Malpighi 1867 年, De Candolle 1825 年, Treviranus 1853 年,卽已注意豆類之有根瘤.

2. Woronin 1874 年見赤楊亦有根瘤,乃悉心檢查,結果得知赤楊之根瘤,爲 Schinzia 屬之菌類,而羽扇豆等之根瘤,則爲細菌,豆類根瘤之細胞,充滿無色之粘滑物質,其中卽埋藏有細菌狀之顆粒.

3. Eriksson 1874 年見豆科各屬之根,皆有此種根瘤,遂以爲實卽側根之變態.瘤中有菌絲狀菌體,亦有波曲細菌(Vibrio) 狀菌體,唯兩者是否相關,則不敢斷定.

4. Kny 發現在消毒過之土壤中,豆類無根瘤生出.

5. Frank 1879 年證明 Eriksson 之所見,且更進而證明細菌狀之菌體,實自菌絲發芽生出.

6. Marshall Ward 1884 年至 1886 年之研究,始將根瘤之構造,傳受及生成方式,經過等逐項詳悉.其結果:

a. 栽培於消毒過之培培液中之蠶豆 (Vicia faba), 無根瘤發生;唯若以根瘤之小片置入培養液中,且使與根毛相接觸,則根瘤發生極速.故知根瘤實由細菌侵入寄生生長而起.

b. 寄生生物原存在於土壤中,但極易隨水而蔓延至於

根之他部.

c. 寄生生物中之細菌狀物（按當時尚未明定其爲細菌)一與根毛相接觸,立卽發出一絲狀體,透入根毛內部.

d. 此絲狀體穿過根毛而達皮層（Cortex）後,穿入組織中,組織卽因此種寄生刺激以起異常成長,生成根瘤.

e. 根瘤之細胞原形質起變化而呈泡沫狀.

f. 菌絲狀體卽出芽而生成許多細菌狀小體 (Corpuscle)（卽假菌體 Bacteroid),充滿此泡沫狀之空隙中.

g. 根瘤崩壞時,此種Corpuscle一部分還散入土壤中,一部分則受植物組織之溶解而消失.

7. Bruchorst 1885年以爲假菌體 (Bacteroid) 實爲寄主植物本身根組織中之原素,而非菌類,故名之曰假菌體.

8. Prazmowski 1888年證明 Marshall Ward 之發現爲不謬,但以爲 Ward 所謂 Corpuscle, 實卽細菌,而所謂菌絲 (Hyphae) 者,實卽細菌之菌簇(Zoogloca).此種假菌體能溶解而供給寄主以結合氮.

9. Hellriegel 及 Wilfarth 1886年至1888年間關於綠色植物與固氮細菌共生現象之實驗時,更有關於豌豆 (Pisum sativum) 萌蘖植物(Seedlings)之成長實驗.其結果謂萌蘖植物發芽後,能消耗其種子中原來之儲藏養分,而作一定之成長.及至自身原有之儲藏養分,消耗盡絕,則成長卽停止;但不

久又可恢復成長.唯此第二期之成長,則與根瘤之蕃息情形有絕大關係.

又由各種植物與根瘤之關係上作推論時,知寄主與誘起根瘤之微生物,顯有固定之選擇的關係在.某一種植物,僅有某一種特殊之微生物,可以使之發生根瘤.豆科植物雖不賴根瘤微生物之作用以吸收游離氮,亦能藉氮化物(硝酸鹽最適合)之吸收而成長,但成長最旺盛則必在有根瘤發生之後.如藜科(Chenopodiaceae),蓼科(Polygonaceae)十字花科(Cruciferae)等,則與穀類相同,不賴根瘤而專恃氮鹽之吸收以成長.

10.Vines 1888 年發表謂土中有氮鹽存在時,則豆科植物之根瘤發育被阻遏;大致豆根瘤發育之良窳與土壤中氮鹽之分量約成反比.1889 年更謂土壤中氮鹽缺乏,卽足以促起根瘤之生長.

11.Beijerinck 1888年自根瘤中析取固氮微生物而培養之其後將培養生物接種於蠶豆,見其亦能發生根瘤.此種細菌, Beijerinck 卽名之爲根瘤細菌 (Bacillus radicicola),能依所寄寄主之性質而顯不同之特性.

12.Frank 1890 年謂根瘤之假菌體,實由寄主植物崩壞其本身原形質與菌原形質結合所成之菌原形體(Mycoplasm)生成,其中含有一種球菌,名 Rhizobium leguminosarum,乃真爲固氮微生物.

13.Mazé 1897 年始發表謂此種微生物確具固氮之能力,自根瘤中析出而作純粹培養於蛋白質溶液中時,能固定游離氮而使培養基中之含氮量激增.

14.Nobbe 及 Hiltner 1899 年始正式證明吸收游離氮者爲細菌而非豆葉.其實驗方法爲接種根瘤細菌 (B. radicicola) 於刺槐 (Robinia) 根上,栽刺槐於不含氮之培養液中.若根瘤沉在水下不與大氣相接時,則刺槐不能有絲毫氮之吸收;根瘤一出水面,大氣可以供其利用時,刺槐立卽有氮之增加.

15.Miss Dawson 1899,1900 兩年所發表之研究,爲此問題作一圓滿之結束:

a. 固氮微生物之侵入寄主,確以菌絲狀之絲狀體爲先,與Marshall Ward所見者同.此種絲狀體本身,則爲多數桿狀物個個相接連於一髓狀質中而成,庸或卽 Prazmowski 之所謂菌簇.

b. 由此菌簇出芽,生成假菌體;假菌體往往呈 V. X. Y. 等形狀.此等形狀究係分枝發生之結果抑爲數個個體相連而成,則未能明定.

c. 根瘤細菌 (Bac. radicicola) 之寄生,爲形成豆根瘤之唯一原因,亦卽爲唯一之生物.Hellriegel 及 Wilfarth所發現之選擇性,不在微生物而在寄主本身生理上特質之差異.

C. 豆科植物與根瘤菌以外之共生:

1. Petermann 1893年見大麥在消毒過之土壤中不能固定游離氮,唯在有藻及細菌之土壤中時,則顯能有氮之固定.

2. Hiltner 1896 年證明赤楊(Alnus)發生根瘤後亦能固定空中之游離氮.

3. Aeby 1896 年,Pfeiffer 及 Frank 1897 年之實驗,皆證明大麥不能因細菌及藻之作用以固定游離氮.

4. Nobbe 1892 年至 1894 年就胡頹子(Elaeagnus)之根瘤作研究,謂亦有固氮作用.Schmid,Hiltner, Hotter 等諸學者所見亦同.

5. Nobbe 及 Hiltner 1899 年發表五年中關於羅漢松(Podocarpus) 之根瘤之研究,謂在全無氮鹽之石英砂中培植羅漢松幼植物之有根瘤者,結果能生長如常.

6. Hiltner 1899 年就毒麥(Lolium temulentum)作研究,見其與一種菌體有共生現象,且可以此而起固氮作用.

第三節 氮化物在土壤中所經之變化

I. 由錏鹽變爲硝酸鹽之經過: 植物吸收氮鹽,多喜硝酸鹽,錏鹽蓋在其次;在硝酸鹽中,生長恆較暢達.第有機物崩解後,所生成者多爲錏鹽,然則必有一種力量能變錏鹽爲硝酸鹽,始得長保植物成長之平衡狀態.研究之結果,知土壤中有多種細菌,確具有氧化錏鹽使成硝酸鹽之能力.作此方面之研究者,以英學者 Warington 與俄

學者 Winogradsky 爲最有成績.

I. Warington: 在英國 Rothamstead 農業試驗場之研究:

a. 第一次實驗研究,結果 1879 年在 Journal of Chemical Society (London) 發表者.

(一)供試溶液: 含氯化錏 NH_4Cl 及綠色植物成長必需之各種礦物質.

(二)由此溶液生成硝酸鹽之條件:

(1) 土壤細菌之存在.

(2) 過剩量成鹽鹽基類 (Salifiable base) (如 $CaCO_3$ 等)之存在.

(3) 40° C 以下之定溫,在黑暗中之培養.

(三)硝化之結果: 所得化合物有爲硝酸鹽者,亦有爲亞硝酸鹽者,而兩者同時並在者亦間有之.

(四)變異之原因: Warington 當時尚未敢遽斷.彼以爲殆由外界條件之組合不同而引起;然所用土壤中微生物之性質狀況,亦必大有關係.

b. 第二次實驗: 1884 年在 Jour. Chem. Soc. 發表者.仍繼續從事其特製溶液之微生物培養,欲求解決差異之原因.結果覺外界條件實爲副因,主要之條件,似仍在乎微生物本身性質上之差異.蓋"在完全同等之環境條件下,兩全同之溶液中,某一液中僅有亞硝酸鹽告成,他一液則又只能生成硝酸鹽,結果全視所接種

之微生物之特性而定." 又 1879 年至 1880 年之頃,曾製備得一種特殊之培養,不能氧化錏鹽而祇能變亞硝酸鹽爲硝酸鹽類.第 Warington 不以爲此另爲一種生物,而以爲不過同一生物生活作用中特殊之一段落.

Warington 既證明硝化全爲一種微生物之作用,乃更進而究其在土壤中之分佈以及其分佈所能達之土壤深度,在其論文中頗有所發揮.

c. 第三次實驗: 1891 年所發表.特別注意於亞硝酸之生成及不生成硝酸鹽而只有亞硝酸產生時之情況.由觀察結果,知通常土壤中亞硝酸鹽之生成,係還元細菌在氧之供給不充足時還元硝酸鹽而起.然在前此以濃錏鹽溶液與少量土壤混合培養中亞硝酸鹽之生出,則爲根本不同之兩事.在此種培養中,微生物所引起者爲氧化作用,將錏鹽氧化成爲亞硝酸鹽,及硝酸鹽.

Warington 1879 年至 1882年,繼續培養其最初所培養之微生物錏鹽混合液之僅能生成亞硝酸鹽者,三年之中,迄未有硝酸鹽生成.始猶以爲是殆同一種硝化生物衰老後之表徵,洎再細心研究,乃析離得另一種生物,確爲專氧化錏鹽成亞硝酸鹽而不能生成硝酸鹽者,與 Schlösing 及 Murtz (詳下)之發現相符.由是 Warington 乃再進求能氧化錏鹽

使成硝酸鹽之生物.結果僅製得此種生物之培養,而不能析取其純粹之個體.

氧化錏鹽成亞硝酸鹽之微生物,可名之曰亞硝酸微生物.据 Warington 之研究,此等生物具有如下之特性:

a. 不能以動物膠(Gelatin)或寒天(Agar-agar)培養.

b. 在稀薄之肉羹中能徐徐發育.

c. 能在石刀柏素(Asparagin),牛乳,尿,尿素(Urea)之溶液及培養液之含有無機錏鹽者中蕃息暢茂,而生成亞硝酸鹽.然不能還元硝酸鹽使成亞硝酸鹽類.

2. Schlösing 及 Muntz 1879 年曾發表兩通信,謂已析得一種硝化微生物,詳述其析離方法,作用領域,作用時之溫度條件,及其他環境條件所能給予之影響等.蓋卽亞硝酸微生物.

3. Duclaux 1883 年檢查 Schlösing 及 Muntz 所發現之亞酸微生物,結果見其性質有極大之變異,故提出謂能氧化錏鹽之微生物種(Species)數當甚多.

4. Frankland 教授夫婦 1890 年亦發表謂曾析得亞硝酸微生物,其性質記載與 Schlösing, Muntz, Warington 等所發現者略同.

5. Winogradsky 之研究,牛與 Warington 同時,然其較重要之結果,則皆在 1890 年以後所得.最初 Winogradsky 原爲研究鐵細菌與硫黃細菌(見後"化學合成"章)者,由此等細

菌對於有機性食料之特殊性質,適引起研究硝化細菌之興趣,結果遂得有"化學合成 Chemosynthesis"一大發現開,研究之新途徑,建不世之殊勳.

Warington 發現良好有機性養料不特不能增益硝化微生物之營養與發育,寖且有極大之損害. Winogradsky 自此一點出發,繼作研究,以僅含硫酸錏 $(NH_4)_2SO_4$, 磷酸鉀 K_2HPO_4 及鹽基性碳酸鎂 $Mg_2CO_3(OH)_2$ 之培養液,厲行消毒後,以舊硝化微生物之培養液一滴接種其中,則數日中,立起盛旺之硝化作用,兩週內,全部之錏鹽卽皆耗盡.由培養液面上菌皮 (Scum) 中,析得微生物五種,此五種微生物皆與硝化作用無關.在器底有細菌簇之沉澱,經種種困難,始得析出所有之微生物,乃真能引起硝化作用者.於是再以此菌簇爲母,接種於新培養液中,結果得見極暢達之硝化作用;若加錏鹽少量於其中,則硝化作用之進行愈適,不久卽全部褪變.

Winogradsky 培養此種菌簇中之硝化細菌,最初所得,亦如 Warington 之結果,在培養液中所生出之氮氧鹽,有爲亞硝酸態者,亦有爲硝酸態者,兩態化合物出現之比例,亦極不一致.然不久卽得發 Warington 之所未明,知硝化作用之進行,實有兩步,第一步爲氧化錏鹽使成亞硝酸鹽,第二步乃更氧化亞硝酸鹽使成硝酸鹽類.由是Winogradsky乃更進究此兩部作用之履行,究竟是否果如 Warington 之所假定,

爲同一生物生活之各方面,抑係由兩種或多種不同之生物各具之特殊生理作用相輔相成而得.經長期悉心研究之結果,乃得分出兩組不同之細菌,一組專自錏鹽造成亞硝酸鹽,他組則能將亞硝酸鹽變爲更高級之氧化物.此兩組細菌具有嫌惡有機物之通性,能純以無機物質爲養分之給源,取碳於碳酸鹽及 CO_2, 取氮於錏鹽,除無葉綠素之一特點外,其餘營養狀態,殆與普通綠色植物相似.至其形態上及生理上之特徵,則有如次:

a. 硝酸細菌組 (Nitrous Bacteria): 種數甚多,計有兩型:

(一) Nitrosomonas: 橢圓,球狀或卵圓形之細菌,產於亞,歐,非等地.有鞭毛一本.在培養液中生成霧狀之菌簇而沉於器底.

(二) Nitrosococcus: 球狀細菌.美洲,澳洲之亞硝酸細菌皆爲此型.無鞭毛.不能成菌簇.

b. 硝酸細菌組 (Nitric Bacteria): 爲最小生物之一種,體長桿狀,在培養液中,能生成膠團狀菌簇.

兩類細菌共具之特徵爲:

a. 不能形成胞子 (Spore).

b. 葡萄糖,尿素,石刀柏素 (Asparagine), 甘油 (Glycerine) $C_3H_5(OH)_3$ 等之存存,皆足以阻其發育. (1899 年 Winogradsky 與其弟子 Omelianski 之實驗)

c. 在 10 % 之牛肉羹中能成長甚好,唯亞硝酸菌不能超

過 20 − 40 %,硝酸菌不得超過 60 %.

d. 以膠狀硅砂(Gelatinous Silica)之培養基培養之,成長極適.

e. 醋酸鈉 CH_3COONa 及酪酸鈉 C_3H_5COONa 之存在,不得超過 0·5 %;過此則成長生活皆受妨礙.

硝酸細菌極畏硇精,0·0005 % 之時,即受障礙,達 0·015 % 則成長完全停止.又其氧化亞硝酸鹽之力量,亦不若亞硝酸細菌氧化錏鹽之作用强烈迅速.

II. 有機態氮在土壤中之變化: 有機態氮化物在土中逐漸崩解還元,終且生成硇精,個中歷程,多與細菌之作用有關.最初學者多以爲腐敗時必有游離氮發生,後此經多方辯論探討,始知腐敗時並不發生游離氮,惟恆自硝酸鹽還元生出.

1. Goppelsröder 1862 年指出耕土中有硝酸鹽變爲游離氮之還元現象.

2. Mensel 1875 年始將此現象之發生,歸諸細菌之生活作用.

3. Schlöing 1868 年謂尿液及菸汁腐敗醱酵時,硝酸鹽逐漸銷減而生成氧化氮 N_2O_5,亞氧化氮 N_2O_3 及游離氮.糖起乳酸醱酵時,亦有相同作用.1873 年更發現大氣不生變化時.則濕潤之耕土中,亦有相同現象發生.

4. Warington 1881 年得見土壤中之硝酸鹽能變爲亞硝

酸鹽,浸假而亞硝酸鹽亦崩解.

5. Dehérain 及 Maquenne 1882 年證明此種分解確如 Mensel 之所言,爲一種細菌作用.

6. Gayon 及 Dupetit 1882 年得製成此種特殊生物之純粹培養.具此種還元力之生物種類甚多,其活動結果所生成之產物亦有著大差異.

7. 繼 Gayon 及 Dupetit 之後作得純粹培養者,1886 年有 Heraeus, 1887 年有 Warington, 1888 年有 Frankland 夫婦.

第四節 植物體中高級氮化物之構成

正常之綠色植物,藉種種方法及種種來源吸收得各種氮鹽後,乃藉同化作用逐漸變之爲較高級之氮化物,由無機而進至有機,終則構成各種複雜之蛋白質,而造成生命物質.關於其構成之機轉,及構成時之環境條件,至今猶未能得明確之認定.良以蛋白質之爲物,構造既太複雜,又脆弱善變,不任處理,故化學者生物學者已窮於應付之方,不知將藉何術始克明其本性.求溯其在生體內構成之經歷,事尤綦難.然在此過去四十年中,諸學者仍復不憚煩瑣,不畏艱辛,力事研求,雖所得結果,支離破碎,不能獲全豹之瞥影,顧集此羣斑,亦且差近真象矣.

I. 取材問題: 關於植物究竟取何種物質以構成蛋白質之問題,歷來皆注重在氮之取給方面.蓋碳也,氫也,氧也,其來源當在水,大氣中之 CO_2, 容或更略取之於各

種碳酸鹽,終以碳水化合物狀之結合體供給需求,可無庸再置疑矣.磷硫兩原質之來源,當爲磷酸及硫酸鹽,亦極易瞭解.雖此兩原質之如何加入於蛋白質分子中,迄今猶未解決;然在事實上如氮之問題能完全明白,則亦正可由此例彼,大概推知.至於氮化物,一方面因其結合狀態之不同,錏鹽與硝酸鹽在吸收上之難易,已爲頗大問題,另一方面氮在植物界之循環,經過變遷,遙較碳,氫,氧,磷,硫諸原質爲複雜;故歷來學者注意之點,幾於皆集中在氮之變化一方面.關於由大氣中之游離氮經下等植物(固氮細菌)之作用,逐漸變爲氮鹽之固氮作用;別一羣下等植物(硝化細菌,)將錏鹽氧化爲亞硝酸鹽及硝酸鹽,以供高等植物之吸收之硝化作用;及另一羣生物之將硝酸鹽變爲亞硝酸鹽而終放出游離氮之還元作用等等氮循環現象,已具見前述.而關於植物所能利用之氮化物之種類,前亦已約略論及.最重要之氮鹽,自當爲錏鹽及硝酸鹽兩者.兩者之中,孰爲最適,自Liebig已來,既經無數次之辯爭.在Liebig及其弟子,皆以錏鹽爲植物體中氮之唯一來源;Boussingault則又以爲硝酸鹽實爲植物所最嗜,且舉其所作關於固氮作用之實驗,結果爲佐證.揆諸實際,則硝酸鹽錏鹽之吸收與利用,要當視環境條件及兩種鹽類之供給分量等爲轉移,而植物本身,某一種植物對於某一種鹽類,亦恆不免有所偏嗜.1862年Gilbert及Lawes提出析植物爲嗜硝酸鹽羣嗜錏鹽羣,嗜

爲明辨.徒執一端,以爲絕對,未免膠柱也.

II. 光在氮鹽之吸收及氮化合物之合成上之影響:

1. Sorokine 1875 年發現蕎麥葉在日光中曝射後,所含硝酸鹽卽較體中他部爲少.

2. Pagnioul 1879 年更進而發現莙薘(Beta Vulgaris)葉中硝酸鹽之分量因日曝而有減少後;此減少之分量,卽有相當量之含氮有機物生成.

3. Emmerling 1880 年; Molisch 1883 年; Berthólot 及 André 1884 年 Capus 1886 年皆有發表證明 Paginoul 之發現.

4. Schimper 1888 年謂紋天竺葵(Pelargonium)葉中所含之多量硝酸鹽,一經日曝,數日後卽全消失,故氮之吸收,必與 CO_2 之吸收相似,有賴於日光及葉綠素.

5. Muntz 1890 年之實驗,發現錏鹽之吸收,在光明時其分量較在暗中時爲大.

6. Laurent, Marchal, Carpiaux 1896 年之發表:

a. 就斑色植物之葉作實驗,知日光所給予錏鹽吸收之影響,與葉綠素無關,蓋白葉所受之影響,較綠葉爲大也.

b. 植物在暗中時直無吸收硝酸鹽之可能.

c. 黃化之葉吸收硝酸鹽之分量甚少,正常綠葉之吸收特別顯著.

d. 吸收硝酸鹽後,有錏鹽態之中間產物生成.

e. 無論錏鹽或硝酸鹽之吸收,其所受光線之影響皆爲紫外部 (Ultra-violet) 光線.

7. Godlewski 1897 年之實驗,爲最完備最重要: 將小麥之萌蘖植物,分組栽培之,或置諸暗陬,或任受光線,或給予硝酸鹽,或全不給予,而閉置於不含 CO_2 之空氣中,使僅賴其胚乳內原來儲藏之碳水化合物以爲營養.結果發現唯在有光線時,始能有蛋白質之生成;在暗中則只能生錏基錏醯基 (Amino and Amido-) 化合物.由是 Godlewski 乃推斷謂蛋白質之生成,當有兩步: 第一步爲由氮鹽生成錏基化合物,不需光線之存在;第二步變此等錏基化合物爲蛋白質時,則光線爲不可少之條件.

8. 日人木下 (Kinoshita) 1895 年就錏鹽之吸收與利用所作研究,知其與光線之關係亦與 Godlewski 所發現關於硝酸鹽之情况相同,玉蜀黍及大麥在暗陬發芽時,能吸收錏鹽以製成多量之石刁柏素 (Asparagine), 但無蛋白質生出.

9. 日人鈴木梅太郎 (Surzuki) 1898 年發現黃化植物體中石刁柏素之生出,亦須有碳水化合物之存在;同時又見植物亦儘有能在暗中利用硝酸鹽及糖以製成蛋白質者.

據 Godlewski 之假說,植物在暗中似能自硝酸鹽及碳水化合物以生成錏基及錏醯基化合物,然實際上高級氮化物之生成,恐不能若是之簡單也.

10.Hansteen 1898 年就硝酸鹽與錏鹽在蛋白質合成作用初步中之價值,作比較實驗,以小浮萍(Lemna minor)爲材料,結果發現此植物在暗中能自氯化錏或硫酸錏及碳水化合物以製造蛋白質,然硝酸鹽則不能受利用.

III. 蛋白質合成之經過之種種推測:

A. 硝酸鹽如何利用?

1. Gautier 1872 年謂蟻醛 HCOH 能還元由硝酸鹽分解得來之游離硝酸,使氮成低級氧化物.蟻醛在植物體中之存在,蓋根據 Bayer 之假定而來.

2. Emmerling 1881 年,以蠶豆(Vicia faba)作實驗,結果提出一種假說,謂根所吸收之硝酸鹽,受有機酸之崩解作用,放出游離硝酸,此游離硝酸卽爲造成蛋白質之第二步材料.彼以爲此種崩解爲葉中之作用,以自根上溯,硝酸鹽之分量逐漸減少;及至葉中,乃無復硝酸鹽之存在,而代以多量結晶性含氮有機物.

3. Biltz, Kellner, Borodin 諸學者後先數年中皆有同等之發現.

4. Schimper 1888 年在吸收多量硝酸鈣 $Ca(NO_3)_2$ 後之葉中,發現有蓚酸鈣 $Ca(COO)_2$ 多量生成.Schimper 以爲是蓋由蓚酸(Oxalic acid) $(COOH)_2$ 分解硝酸鈣而成,與 Emmerling 同一意見.

5. Laurent 1890 年發現植物在日光中時確有將硝酸還

元之作用.

6. Berthelot 1898 年證實在日光中植物確能還元硝酸;而生成亞硝酸,過氧化氮(N_2O_4)及氧等.

7. Bach 1896 年提出一極繁複之假說,解釋硝酸鹽在植物體中受利用之情況:

a. 由根上昇之稀薄硝酸鹽亞硝酸鹽溶液,起電解而生成亞硝酸及硝酸基;此基旋復與植物體中存在量極多之碳酸H_2CO_3起作用,而生出游離硝酸及亞硝酸;日光在此種複分解中爲必要條件:

$$H_2CO_3 + 2NO_3^{-} \longrightarrow 2HNO_3 + CO_3^{--}$$

$$H_2CO_3 + 2NO_2^{-} \longrightarrow 2HNO_2 + CO_3^{--}$$

b. 蟻醛作用於析出之游離硝酸,如 Gautier 曩所假定;所成結果物爲亞硝酸及次亞硝酸(Hyponitrous acid) HNO:

$$\underset{\text{硝酸:}}{\begin{matrix}O\\O\end{matrix}\!\!>\!N-OH} \xrightarrow{HCOH} \underset{\text{亞硝酸}}{O=N-OH}$$

$$\underset{\text{亞硝酸}}{O=N-OH} \xrightarrow{HCOH} \underset{\text{次亞硝酸}}{O=N-H}$$

c. 次亞硝酸中之 $=N-H$ 基受水之加添而成爲沉錏 Hydroxy'amine (氫氧代硇精):

$$=N-H \longrightarrow \begin{matrix}OH\\H\end{matrix}\!\!>\!N-H$$

d. 沉錏與蟻醛作用而生成蟻醛基代沉錏(Formaldoxime)

$$\boxed{\begin{matrix}H\\H\end{matrix}}>N-OH+HC\boxed{O}H\longrightarrow CH_2=N-OH$$

蟻醛基代沉錏

e. 蟻醛基代沉錏起重排而成錏蟻醛(Formamide):

$$CH_2-N-OH\rightarrow HCO-NH_2$$

f. 錏蟻醯失水而生成氫氰酸(Hydrocyanic acid)(參閱下段):

$$HC\boxed{O}-N\boxed{H_2}\longrightarrow HC\equiv N$$

Bach以硝酸10 C. C.,蟻醛25 C.C.,水150 C. C.之混合液加氯化鉑0.5 Gram而曝之日光中,結果謂確有蟻醛基代沉錏及錏蟻醯生成,以爲是殆鐵證. 顧實際上Bach此種假說,臆測之成分彌多,迄1900年之頃,猶未得充分之實際證明.第從來關於蛋白質形成初步之機轉之假說,則以此爲最周密,故與 Bäyer 關於碳水化合物形成之假說,當胥爲後代學者所根据而證明釐定之準則.

8. Lutz 1899年曾竭力求在多種隱花植物,藻,菌中析求沉錏,以證實Bach之假說,但一無所獲.第吾人當知Bäyer所提出蟻醛爲光合作用中途產物之假定,雖已得公認,然蟻醛之尋求,固亦未嘗或有結果也.

B.　蛋白質合成之中間產物諸說:

1. Bach之錏蟻醯說,已見之上述.

2. 氫氰酸(Hydrocyanic acid) HCN之說法:

a. Gautier 1892 年提出謂蛋白質之組成,當以氫氰酸爲出發點,其他各種原子團,分別附着於氫氰酸中氮碳原子上卽得.且氫氰酸極易疊合 (Polymerize), 以生成種種複雜之氮碳氫之化合物,則其爲有機氮化物之始基,尤爲可能.

b. Kossel在植物體中析得 Adenine $C_5H_5N_5$, 卽爲氫氰酸之一種疊合體, Gautier 之說,遂得一强有力之證明.

c. Treub 1895 年見 Pangium edule(馬來羣島產之一種椅科 Flacourtiaceae 植物)體中蛋白質形成之處附近有多量氰化物之堆積.由其出現之地點及其狀況上推想,Treub 以爲此實植物吸收氮鹽後第一步合成作用產物.後此Treub本人及其同時代之硏究者得在植物體中發現游離之氫氰酸,故此說益臻鞏固.

d. Bach 1896 年之假說,亦認氫氰酸爲蛋白質形成中之一步.唯由事實言,氫氰酸殊不似合成產物而當分解產物耳.

C. 醯基及醯醯基化合物:

1. Pfeffer 1872 年謂澱粉生成時石刀柏素亦復變爲蛋白質.

2. E. Schulze 及其弟子常有在植物體中發現醯基醯醯基化合物之報告.

3. Borodin 1878 年發表謂植物之葉能自某數種糖糖類

及錏基錏醯基化合物製成蛋白質.若截斷幼苗而置之暗陬,則無糖類生成,亦卽無蛋白質生出,唯有多量錏基及錏醯基化合物堆積其間.

4. Godlewski, 木下,鈴木, Hansteen 等之實驗雖足證明蛋白質爲糖及錏基錏醯基化合物複合而成,然兩者究竟以何種作用複合,則莫能言.

IV. 葉綠素與光對於蛋白質形成之作用:

1. Frank 及 Otto 1890 年證明在光線下葉中確有石刀柏素生出.

2. Hansteen 1898 年之發表,所載多次實驗得來之結果:

a. 植物在暗中時能自葡萄糖或蔗糖與尿素生成蛋白質.

b. 麩錏醯(Glutamide)及石刀柏素唯在有葡萄糖時始能生成蛋白質.

c. 錏基代醋酸(Glycin or Glycocoll)則需要蔗糖以造蛋白質.

3. Maliniak 1900 年發表其實驗,證明 Hansteen 之說.

4. Saposchnikoff 1895 年發現脫離樹幹之葉,亦能在日光中生成蛋白質,而以培養液中含氮鹽時結果爲最明顯.光度漸弱,則碳水化合物之量漸少而蛋白質特增.

5. Zaleski 1901 年發表謂休眠中或生長中之球莖,塊根等,在暗中時,則不吸收氮,而自既有之氮鹽以製成蛋白質.

6. Jwanoff 證明 Zaleski 之說爲不謬. (未完)

雲南中部之西及西北部採鳥記

Lord Rothschild F. R. S. Ph. D. 著

Novitates Zoologicae, Vol. XXVIII.

任　國　榮　譯

1918 至 1919 年間,著名植物採集家 George Forrest 君爲 Colonel Stephenson Clarke 君于雲南中部之西及西北部採得鳥類標本一千四百四十二,共二百七十九種及亞種. Colonel Stephenson Clarke 君以新種之標準型及全體標本之半慨贈不列顚博物院,餘半則送來 Tring 博物院.

本文主要採集區爲麗江一帶之山脈及騰越四周之山谷,次則爲唐山 (Tong Shan), 揚子江流域,瑞麗江與怒江之分水界,及瑞麗江流域等處.

麗江或麗江山脈,在雲南西北部,採集區域約在北緯27.20°,東經100.22°. 騰越縣約在北緯25°東經 98.28°. 瑞麗江及怒江分水界約在北緯25.40°東經98°.鳥類方面,希馬拉雅之特性極爲顯著,但亦有許多北方鳥遷移至此以越冬者,至騰越及瑞麗江一帶則緬甸性轉優.

關於雲南鳥類前此既有兩文發表,其一爲1912 年Collingwood Ingram 在 Navitates Zoological 所發表者,其中包含彼時所

知之一切記載;次一爲1914年Bang Phillips于Bulletin of the Museum of Comparative Zoology 1914所發表者,只將其真正之採集結果,加以記載. Engram列舉352型,而Bangs則記載238型. 後者有78型爲前者所未有,故至1914年時,雲南既知名之鳥類共430型,其中確係錯誤者計有七型,則實有423型也.1916年日本之S. Uchida及N. Kuroda,於Annotationes Zoological Tappences更記載46型,其中有33型既經前人記載者,故至1921年,雲南鳥類數目竟達436. 此次採集結果,共得新型59,則現今既知之總數,又爲496矣.

此次採集,巨大之鳥類,幾全闕如,每種個數又如是之少,而竟得279種,與496之總額較,其比例不可謂不高也.第二次採集結果,送來192鳥,只有中文紀錄,間並紀錄亦缺去,因皆係從騰越縣得來(包含瑞麗江及怒江分水界), 吾故統以騰越縣記載之.

1. 鷓鴣Fraucolinus Chinensis (Osb) Tetrao Chinensis Osbeck, Vay.en Chine, Vol, ii p. 326 (1771) (中國)有一斑紋顯著,顏色鮮亮之雄鳥,無採集日期.

2. 雲南竹鷄Bambusicola fytchi Anders. Bambusicola futchi Anderson P.Z.S., p. 214. pl.xi.(1871) (雲南西部之潘西)

Collingwood Ingram只記載Anderson之標本. Bang & Phillip用Bambusicola Oleagina一名詞,記載一蒙自標本.彼等以其標本與亞森母之B. fytchi hopkinsoni Godw-Aust.比較,而不曾認定其

標準地乃在雲南西部之潘西(Ponse)也.胸部及脅部之差別,殊無多大(就 Bangs 及 Phillips 所列舉者而言);惟 f. fytchi 與 f. hopkinsoni之不同,則在前者之頭項,背及腰之赭色較遜而橄欖灰較勝,而背及肩間部之點斑則爲黑色,其緣赭,並非如 f. hopkinsoni之全作赭色者;腮喉淡黃而非赭黃.

2♂, 騰越縣.

3. 鶉 Coturnix Coturnix Japonica Tem. & Schl. Coturnix Uulgaris Japonica Temminck & Schlegel, Siebold's Faun. Jap. Aves. p. 103 pl. 61 (1849)(日本).

1♂, VII, 1918, 8, 500 呎玉蜀黍田中.

虹彩褐;嘴暗褐;腿及足暗褐.

4. 麗江血雉 Ithaginis Clarkei Rothschild.

Ithaginis Clarkei Rothschild, Bull. B. O. C. XI. p. 67 (1920)(麗江山地,雲南).

其地點與 I. kuseri Beebe 相同,此乃一極有趣味之發見也.

1♂, 成鳥,3♂ 未成長鳥, 1♀ 鳥 VII 1918, 12, 000 — 14, 000 呎之松林中.(虹彩橙黃;嘴黑;腿及足朱色,爪暗褐).

此品種與 Cruentus 最大之區別,在其冠羽較長,耳羽長而尖銳.

5. 耳雉 Crossoptilon Crossoptilon Crossoptilon (Hodgs). Phasianus Crossoptilon Hodgson, Tourn. AS. Soc. Bengal. Vii. p. 864 (1838)(無確切之標準地點).

Forrest 君所得之三標本,體色非白而作淡之藍灰色,喉則汙褐灰,驟視之似與 C. Crossoptilon 有別.詳細考察之下,始知喉部顏色,乃係染汙.而新褪之羽毛,除一二根爲淺色者外,其餘則爲純白,故在未得有完全易羽之標本以前,此型實不能判別也.

在雉類圖譜 (Monograph of Pheasauts) 中, Beebe 君謂 Crossoptilon 翮之數目無判別上之價值,此說吾極不贊同.蓋就翮與耳部之簇羽兩點觀之,則 Crossoptilon 一屬,可分爲判然不同之兩羣,每羣各有兩種:

第一羣:—— 尾羽之小羽 (Plumule), 大抵不甚連接,翮數 22—24; 耳部簇羽而光銳 C. Mantschunicum C. auritum.

第二羣:—— 尾羽二十枚,小羽較爲連接;耳部簇羽短而鈍. C. harmani, C. Crossoptilon.

2 ♂, 1 ♀, VIII, IX 1918, 13,000—14,000 呎松林中. (虹彩金黃嘴赤黃,腿及足朱赤;爪暗褐).

Hartert 君謂在文獻中實用 Phasianus Crossoptilon— 名,獨在圖畫上則名之曰 Thibetanum.

6. 栗雉 Phasianus Colchicus elegans Elliot.

Phasianus elegans elliot, Ann. May. Nat. Hist. (4), Vi. p. 312 (1870) (四川).

近來鳥學家,將四川之 P. elegans 與雲南之 P. sladeni 合爲一種,蓋以現在之材料而言,確無若何進境,除非將來能得

到大幫之雲南標本,則雲南鳥之名稱乃能創定耳. Forest之標本,竟無成鳥,滋可惜也.

1 幼鳥, VII 1918, 9,000—11,000 呎.

7. 白面鷄 Amaurornis Phoenicurus Chinensis (Bodd.)

Fulica Chinensis Boddaert. Tabl. Pl. Eul. P. 54 (1783) (香港)

1 ♀, VI 1918, 8,500—9,000 呎,沼澤之地,麗江流域. (虹彩暗褐;嘴青;上顎基部幽赤;腿及足橄欖黃.)

8. 彩鷸 Rostratula bengalensis bengalensis (Linn.)

Rallus bengalensis Linnaeus, Syst. Nat. ed. XI. P. 153 (1758) (亞洲).

1 ♂, 騰越, 5000 呎, X1919, 稻田中. (虹彩藍黑;嘴上部暗褐而下部較淺淡;腿及足爲幽暗之青色.)

9. 山鷸 Scolopax rusticola rusticola Linn.

Scolapax rusticola Linnaeus, Syst. Nat. ed. XI. p. 146 (1758) (瑞典).

1 ♀, 騰越周邊之丘陵山谷中, 5000—7,000 呎, X 1919. (虹彩幽紫;嘴上部暗褐,下部較淺;腿及足灰褐.)

10. 黑尾鷸 Limosa limosa melanuroides gould.

Limosa melanuroides gould. Proc. Zool. Sac. London, p. 84 (1846) (Port Essington).

1 ♀, 騰越, 5000 呎, X 1919, 沼澤及稻田中. (虹彩深紫;嘴褐而帶粉紅;腿及足暗青灰.)

11. 磯鷸 Tringa hypoleucos Linn.

Tringa hypoleucos, Linnaeus Syst. Nat. ed. XI. P. 149 (1758) (瑞典)

2♂,4♀,騰越,5000呎,III,X,1919,稻田,河流沼澤中. 1♂麗江流域,10,000呎,X 1918.(虹彩藍黑或暗褐;嘴黑褐;腿及足淺灰青.)

12.沼鷸 Tringa glareola Linn.

Tringa glareola Linnaeus, Syst. Nat. ed. XI. P. 149 (1458)(瑞典)

1♂, 騰越山谷之地,5,000—5,500呎 X 1919,稻田及沼地.(虹彩深紫;嘴黑褐;腿及足橄欖青.)

13.草鷸 Tringa ocrophus Linn.

Tringa ocrophus Linnaeus, Syst. Nat. ed. XI. P. 149 (1758)(瑞典).

1♂, 揚子江流域,6,000呎,IX 1918; 2♂, 1♂, 騰越5,000呎 X 1919; 1♀瑞麗江流域VIII 1919. (虹彩藍黑;嘴黑褐;腿及足淺灰青) 1♀騰越縣.

14.青鶴鷸 Tringa Nebularia (gunn.)

Scolopat Nebularia gunnerus, in Leem, Beskr. Finm. Lapp. P. 251(1767)(那威).

1♀ 瑞麗江流域6,000呎,XI 1919 (虹彩黑褐;嘴之基部一段橙赤,其餘黑;蠟膜橙赤;腿及足幽褐黃;爪黑.)

15.緬甸瘤眼鷸 Sarcogrammus indicus atronuchalis (Blyth).

Lobiranellus atronuchalis Blyth, Jerdon's Birds India, iii. P. 648 (1864)(緬甸)

1♀ 未成長鳥騰越山谷,5,000呎,VIII 1919,沼地.(虹彩黑褐嘴之近基部一段橙赤,其餘黑,臘膜橙赤;腿及足幽褐

黃;爪黑.

16.灰鷸 Microsarcops Cinereus (Blyth).

Pluvianus Cinereus Blyth, Journ. As. Soc. Bengal XI. P. 587 (1842) (Calcutta).

1♂, 騰越平原, 5,300 呎, X 1919, 稻田及沼地. (虹彩橙赤;嘴橙色而尖端黑;腿及足檸檬黃;爪黑.)

17.金鷸 Charadrius dominicus fulfus gm.

Charadrius fulfus gmelin, Syst. Nat. i. 2. p. 687 (1789) (Tahiti).

1♂, 1♀, 騰越, 5,000 呎, X 1919, 稻田中, (虹彩深紫;嘴黑褐;腿及足青灰.)

18.長嘴環頸鷸 Charadrius placidus gray.

Charadrius placidus gray, Cat. Mamm. Birds, etc. of Nepal. & Tibet in Brit. Mus. 2nd ed. p. 70 (1863) (尼泊爾).

3♀, 瑞麗江流域 6,000 呎, VI, IX 1919, 在溪流旁側, 2♀, 騰越山谷, 5,300 呎, VIII, X 1919, 稻田及沼地. (虹彩赤褐,褐紫或黑;嘴黑褐;腿及足或乳脂黃或焦褐或幽黃;爪黑.)

19.小環頸鷸 Charadrius dubius dubius Scop.

Charadrius dubius Sopoli, Del. Fauna et Flore Insubr. ii P. 93 (1786) (Luzon).

1♀ 未成長鳥,騰越山谷, 5,300 呎, X 1919, 稻田及沼地. (虹彩深褐;嘴黑褐;腿及足橄欖褐.)

20.楔尾靑鴿 Sphenurus sphenurus (Vig).

Vinago Phenurus Vigars, p. Z. S. p. 173 (1831)(希馬拉雅).

此單獨之雌鳥,試與克什米爾及錫金之諸雌鳥較,前者之上體較暗靑而頭與下體之黃色較少.但再與諸雄鳥較,吾則以爲不能區別也.

1♀, 烏 VI, 1919. 瑞麗江與怒江分水界松林中. (虹彩赤朱;嘴藍;腿及足淺紅;爪灰.)

21.紅鳩 Oenopopelia tranquebarica humilis (Temm).

Columba humilis Temmick, pl. Col. livr 44. pl. 259 (1824)(孟加拉,呂宋).

1♀, 揚子江流域, 7,000 呎, IX 1918; 1♀ 騰越山谷, 5,000 呎, VIII 1919, 雜木林,竹叢中.

(虹彩黃,嘴暗褐;腿及足暗褐; 虹彩黑褐;嘴幽黑;腿及足灰而帶紅色).

22.雲南珍珠鳩 Streptopelia Chinensis vacillans Hart.

Streptopelia Chinensis vacillans Hartert, Nov. Zool. XX iii. p. 83 (1916)(雲南).

1♂, 騰越平原竹叢中, VIII 1919, 5,000 呎(虹彩橙色;嘴赤褐;腿及足幽粉紅色).

23.山鳩 Streptopelia Orientalis orientalis (Lath.)

Columba orientalis Latham, Ind. Orn. ii. p. 606 (1790)(中國)

Forresl君只送來一標本.

1♂, 麗江山地松林中, 10,000 呎, IX 1918. (虹彩橙色;嘴

深紅而色幽,及足深洋紅).

24.斑林鴿 Columba hodgsoni Vig.

Columba hodsoni Vigors, P. Z. S. P. 16 (1832) (尼泊爾).

Forrest 送來之各雌鳥,其翕與翼(在雄鳥應爲栗赤色)深石板藍而有鋼藍之光輝,與Salvadori所記之雌鳥成深灰色者不同.

1♂ 成鳥, 2♀成鳥麗江山脈, 9,000—13,000 呎, VI—IX 1918; 1♂幼鳥,瑞麗江與怒江分水界 10,000—11,000 呎, XI 1919. (成鳥,虹彩乳脂白;嘴幽洋紅而尖端黑;腿及足橄欖青;爪黃.幼鳥虹彩淡紅,嘴黑;腿及足幽黑;爪黃).

25.小鷿鷈 Podiceps rufficollis poggei (Rchw.)

Colymbus nigricans poggei Richenow, Journ Orn. p. 125 (1902) (直隸,中國).

吾以爲雲南之小鷿鷈係poggei一亞種. Collingwood Ingram 君 (Nov.Zool. xix. (1912), p.273) 引 Anderson 之鑑定認爲 P. fluviatilis philippensis, 此乃吾取不能贊同.

2♂, 2♀, 騰越山谷, VIII 1919,5300 呎溪流及池塘中.(♂,虹彩白而帶灰,嘴褐赤;腿及足暗灰赤. ♀,虹彩淺橙色;嘴黑,中央淺橄欖青;腿及足暗灰青.

25.小栗鷺 Ixobrychus Cinnamoneus (gm.)

Ardea Cinnamomea, Syst. Nat. i. 2. p. 643 (1789) (中國).

1♂, 1♀瑞麗江流域, 5,000 呎, VI 1919, 稻田及沼地. (虹彩

橙黃;嘴上部暗褐而下部幽褐黃;腿橄欖青;足表面橄欖青而下面橙色;爪幽褐).

27.夜鷺 Nycticorax Nycticorax Nycticorax (L.)

Ardea Nycticorax Linnaeus, Syst. Nat. ed. XI. p. 142 (1758) (歐洲南部):

1♂ 成鳥,麗江山脈,9,000 呎, X 1918, 沼地; 1♀ 未成長鳥,騰越西北部丘陵中,5,000—6,000 呎 X 1919,溪流及沼地.(♂成鳥,虹彩鮮赤;嘴黑及淺青黃;腿及足淺黃;爪褐. ♀未成長鳥,虹彩赤橙色;嘴之上部黑而渲染青色,下部近青色;腿及足鮮青而帶黃,趾暗橄欖青).

28.綠簑鷺 Butorides Striatus javanicas (Horsf.)

Ardea javanica Horsfield, Trans. Linn. Soc. London, Vol. XIII. p. 190 (1821) (爪哇).

1♂,騰越平原,53,000 呎, IV 1919 沼地及稻田中.(虹彩黃;嘴上部黑而下部黃,眼周之裸皮黃青;腿及足橄欖黃).

29.沼鷺 Ardeola bacchus (Bp.)

Buphus bacchus Bonaparte, Consp. gen. Av. ii. p. 127 (1855) (馬來半島).

1♀ (冬羽),麗江山脈, X 1918, 10,000 呎,地沼卑濕之地 1♀ (冬羽), X 1919,騰越平原, 5,300 呎,稻田中.(虹彩金黃;嘴上部褐黑,下部青橙色;蠟膜青黃;腿及足淨橄欖青;爪暗橄欖色).

30.黃頸鷺 Bubulcus ibis Coromandus (Bodd.)

Cancroma Coromanda Boddaert, Tabl. Pl.Enl. p. 54 (1783) (Coromandel.)

1♀, 騰越山谷, VIII 1919, 5,000 呎,稻田中. (虹彩淺黃;嘴淺橙而帶赤;蠟膜黃;腿幽黃;足表面黑而底面幽青.)

31.印度雀鷹 Accipiter Nisus Melanochistus Hume.

Accipiter Melanochistus Hune, Ibis, p. 356 (1869) (Simla)

1♀, 麗江山脈, 9,000—12,000 呎, X1918,懸崖及松林中.(虹彩橙黃;嘴黑;懸膜灰;腿及足黃;爪黑).

32.東鷹 Accipiter gentilus schvedorvi (Menzb.)

Astur palumbarius Schvedowi Menzbier, Orn. Geogr. Eur. Russl. in Mem. Scient. Univers. Imp. Moscow Hist. Nat. p. 439 (1882) (Transbaicalia.)

1♀ 未成長鳥,湄公河與怒江分水界, 6,000—12,000 呎,森林及懸崖上(1919).(虹彩金黃;嘴灰;蠟膜黃;腿及足金黃爪黑).

33.灰鷂 Circus Cyaneus Cyaneus (Linn.)

Falco Cyaneus Linnaeus Syst. Nat. ed. Xiii. p. 126 (倫敦附近).

1♂, 騰越北部, 6,000 呎 X1919,郊外廣場中. (虹彩淺黃;嘴黑;蠟膜黃;腿及足橙色;爪黑).

34.黑胸鷂 Circus Melanoleucus (Forst).

Falco Melanoleucus Forrster, Ind, Zool, p.12pl. ii. (1781) (錫蘭).

1♂, 1♀ 騰越東北部之丘陵中, 5,500—8,000 呎, X 1919, 郊外曠地.(♂虹彩爲淺琥珀黃色,嘴黑;蠟膜淡靑黃而色幽;腿及足淺橙色;爪黑).

35.塞鷲 Aquilla Nipalensis Nipalensis Hodgs.

Aquilla Nipalensis Hodgson, Asiatic Res. XViii. pt. ii. Pl. i. pp. 13—16 (1833) (尼泊爾平原).

♀ 未成長鳥,麗江山脈, 11,000—15,000 呎, 1918, 懸崖及松林中. (虹彩黃;嘴黑褐;蠟膜黃;腿及足橙色;爪黑.)

36.緬甸隼 Falco tinnunculus saturatus (Blyth.)

Tinnunculus saturatus Blyth, Fdurn As. Soc. Bengal, XXViii. p. 277 (1859) (德尼薩拉).

1♀ (記載則爲雄性), 麗江山脈, 9,000—12,000 呎,松林中, VIII 1918. (虹彩深褐而色幽;嘴藍灰;蠟膜黃;腿及足橙黃;爪黑).

37.捷隼 Falco Subbutes Streichi Hart. & Neum.

Falco Subbuteo Streichi Hartert & Neumann. Yourn. f. Orn. p. 592 (1907) (Swatari).

1♀ 成鳥,騰越西南部丘陵中,7,000呎,X 1919, (虹彩黑褐;嘴藍灰;蠟膜淡橙色;腿及足橙色;爪黑褐).

38.希馬拉雅林梟 Strix Aluco Nivicola (Blyth)?

Syrnium nivicola Blyth, Yourn. AS. Soc. Bengal, Xiv. p. 185 (1845) (希馬拉雅).

Forrest之雌成鳥標本,較La Touche之S. aluco harterti稍大,且下腹之白斑亦較大,但無多數標本作比較,殊不能判別,此極有價值之品種耳.

1♀ 成鳥,2♀未成長鳥,麗江山脈,12,000—13,000呎,VII,IX 1918,松林中.(虹彩褐灰;嘴橄欖灰).

39.環頸耳鴞 Otus bakkamoena glabripes (Swinh.)

Epialtes glabripes Sevinhoe, Ann. May. Nat. Hist (4) vi. p. 152 (1870)(中國南部及台灣).

1♀, 騰越山谷,5,400呎,IV 1919,(4卵No. I.)林木及居宅中;1♂騰越西北部丘陵中,6,000呎,X 1919.虹彩褐;嘴褐或青灰;腿及足褐灰).

Ingram以Otus lempiji erythrocampe一名詞記載一蒙自標本,其體之大小,與吾茲所定之標本相若. erythrocampe—種,其體實較大,且虹彩黃色,而Forrest之兩標本及Ouston之標本,虹彩皆爲暗褐也.(譯者按作者意謂Ingram之鑑定不確初,特不欲直斥其錯誤,故婉曲以達意).

O. b. glabripes于台灣及中國南部皆有記載,O.b. umbratilis則得自海南.前種吾等所有標本,皆得自台灣.如將來能得大幫標本後,則此二種與O.b. erythrocampe等皆須作詳細鑑別也.

Bangs & phillips曾記載O. Malayana之雄及雌,但其量度絕爲無稽,較bakkamoena—種差100 mm.較Malayana—種差60

mm. 至吾以爲或係85及93之前,減去一"1"字,彼之標本與吾及Igram者固同也.

40.鷹鵑 Cuculus sparverioides Vig.

Cuculus sparverioides Vigors, Proc. Com. Zool. Soc London pt. i. p. 173 (1832) (希馬拉雅).

Forrest 之三標本,概係幼鳥,惟唐山 (Tong Shan) 之雄鳥,或係第二年者,其餘兩枚係當年鳥(或只有一).

♂♀ 未成長鳥,唐山, 9,000—10,000 呎, VIII 1918; 1♂未成長鳥,騰越周之山林中, 5,000—6,000 呎, VI 1919, 松林及曠野平原間. (虹彩淺黃;嘴青黑;腿足及爪橙色).

41.杜鵑之一種 Cuculus intermedius intermedius Vahl.

Cuculus intermedius Vahl, Shriv. of Nat. Selskabet, Kjöbenhaven, iv. p. 58 (1789) (Tranquebaria.)

1♂, 2♀ 麗江山脈, 9,000–10,000 呎 VI, VIII 1918, 松林及曠地. (♂虹彩褐黃;嘴灰黑;腿及足幽橙色; ♀虹彩暗褐或褐黃) 1♂ 瑞麗江, 8,000 呎, V 1919 (♂虹彩暗黃).

42.希馬拉雅杜鵑 Cuculus Optatus gould.

Cuculs optatus gould, p. Z. S. pt. Xiii. p. 18 (1845) (Port Essington)

2♂成鳥 1♀未成長鳥,麗江山脈, 8,500–10,000 呎, V, IX 1918, 松林, (♂虹彩灰黃;嘴暗褐;基部黃;腿及足褐. ♀未成長鳥,虹彩暗褐;嘴帶紫色;腿及足橙色).

43.杜鵑 Cuculus canorus telephonus Heine.

Cuculus telephonus Heine, Fourn. f. Orn. p. 352 (1863) (日本).

1 ♂ 成鳥,麗江山脈 X1918; 1?未成長鳥,大理府(雲南中部),6,500 呎, IV 24, 1918. (虹彩暗褐;足幽橙色;嘴黑褐) 1 ♂ 成鳥,騰越山谷 VII 1919.

44.緬甸雨鵑 Cacomantis Merulinus querulus Heine.

Cacomantis Querulus Heine, Fourn. f. Orn. p. 352 (1863) (印度,尼泊爾,緬甸).

1 ♂,騰越周圍之丘陵中, 6,000 呎, VI 1919; 1 ♂ 成鳥,瑞麗江與怒江分水界, 7,000 呎V 1919; 1 ♂未成長鳥瑞麗江, 7,000 呎, VIII 1919, 森林及曠地之叢樹中. (虹彩淺赤,淺橙,或黃褐;嘴暗褐;腿及足橙黃;黃或淺褐).

45.小毛鷄 Centropns bengalensis bengalensis (gm.)

Cuculus bengalensis gmelin, Syst. Nat. Vol. I. P. 214 (1788) (孟加拉)

有一幼鳥,易羽過半,頭,頸,肩間及腰部如成鳥,尾翼及腿仍留幼鳥羽.

1? 麗江山脈.

46.野馬關麗鵑 Pyrotrogon erythrocephalus yamakanensis (Rich.)

Harpactes yamakanensis Richett, Bull. B. O. C. Viii. p. XIViii. (1899) (福建).

此品種與 E. erythrocephalus 之區別,在上體較暗而橄欖色較濃,腮及喉黑.

1 ♂, 1 ♀, 瑞麗江怒江分水界, 8,000–9,000 呎, XII 1919, 雜林

中.(虹彩淺紅;嘴黑;腿及足淺灰褐).

47.地啄木 Yunx torquilla japonica Bp.

Yunx japonica Bonaparte, Consp. Gem. Avium, i. p. 112 (1850) (日本).

1 ♂ 麗江山脈 10,000,呎,松林, IX 1918. (虹彩深橙色;嘴灰褐;腿及足幽橄欖色).

48.斑腹小啄木 Picuminus innominatus chinensis (Harg.)

Vivia Chinensis Hargitt, Ibis, p. 228. pl. Vii. (1881) (梅溪 (May-Chee,)中國).

1 ♂ 揚子江流域,9,000 呎 IX 1918,叢林中.(虹彩褐;嘴灰黑;腿及足灰黑).

49.北平小斑啄木 Dryobatus pygmaeus scintilliceps (Swinh.)

Picus Scintilliceps Swinhoe, Ibis, P. 96 (1863) (北平).

2 ♂, 4 ♀, 麗江山脈, 10,000 呎, VI–X 1918, 松林. 1 ♀ 瑞麗江與怒江分水界, VIII 1919, 8,000 呎; 1 ♂ 揚子江流域, IX 1918; 1 ♀, 唐山, 10,000 呎, VIII 1918; 3 ♀ 騰越西北部丘陵之叢林中, III, X 1919. (虹彩暗褐;嘴暗灰;腿及足橄欖色至黑灰色) 2 ♀, 騰越縣.

50.北赭腹啄木 Dryobatus hyperythrus subrufinus (Cab. & Heine)

Xylurgus subrufinus Cabains & Heine Museum Heineanum, iV, Picidae, p. 50 (VI 1863) (中國北部).

3 ♂, 3 ♀ 麗江山脈, VI, VII 1918, 11,000–12,000 呎,松林.(虹

彩深褐;嘴上顎黑而下顎黃;腿及足暗橄欖色).

51.大吉嶺斑啄木 Dryobaes darjellensis (Blyth.)

Picus(Dendrocopus) derjellensis Blyth, Fourn. AS. SOC. Bengal. XiV i.p. 196 (1845) (大吉嶺).

1♀, 3♂,瑞麗江怒江分水界, 1♂未成長鳥,瑞麗江流域, 8,000–9,000 呎, V–XI 1919, 松林.(虹彩暗褐;嘴上顎黑而下顎灰;腿及足黑灰).

52.朱頂啄木 Dryobatus Cabanisi Cabanisi (Malh.)

Picus Cabanisi Malherbe, Fourn. f. Orn. p. 172 (1854) (中國).

2♂,瑞麗江與怒江分水界, 8,000 – 9,000 呎, VI, XI 1919, 1♂, 3♀,麗江山脈, VI IX, X 1918,松林.(虹彩幽赤;嘴暗藍灰;腿及足幽黑).

53.黑頂青啄木 Picus Canus sordidior (Rippon.)

Gecinus sordidior Rippon, Bull. B. O. C. X. iX. p. 32 (1906)(揚子江)

1♂, 1♀成鳥, 4♂, 4♀未成長鳥,麗江山脈, 9,000 呎, V, VII, VIII 1918.(虹彩幽灰;嘴黃褐而至於黑;腿及足銅灰或灰而帶青). 2♀成鳥,騰越山谷, VI 1919; 1♂,騰越縣.

54.佛蘭克林擬啄木 Cyanops franklini (Blyth.)

Bucco franklini Blyth, Fourn. As. Soc. Bengal. Xi. p. 167 (1842) (大吉嶺).

2♂, 1♀,瑞麗江流域, 6,000 呎,溪流 V, VIII 1919.(虹彩淺褐;嘴黑,下顎帶灰;腿及足灰黑). 1,♂騰越縣.

55.藍喉擬啄木 Cyanops asiatica (Lath.)

Trogon asiaticus Latham, Ind. Orn. Vol i. p. 201 (1790) (印度).

1 ♂,瑞麗江流域, 6,000-7,000 呎,雜林, VIII 1919. (虹彩淺黃;嘴幽灰藍,下顎淡橄欖色;腿及足幽橄欖青.

Oustalet 於雲南記載 davisoni Hume 此顯係地理上的錯誤,該品種只限於德尼薩拉,或且爲該地之 Asiatica 之代表種也.

56.小翠鳥 Alcedo atthis bengalensis Gm.

Alcedo bengalensis Gmelin, Syst Oat. i. 1. p. 450 (1788) (孟加拉).

有一騰越山谷之雄鳥,其藍色之胸帶極爲顯著.

1 ♂ 成鳥, 2 ♀ 未成長鳥,騰越山谷, 5000 呎, VII 1919, 溪流附近.(虹彩及嘴黑;腿及足赤). 1 ♂ 成鳥,麗江山脈,無日期

57.翡翠 Halcyon emyrnensis fusca (Bodd.)

Alcedo fusca Boddaert, Tabl. Plauch. Enl. d'Hist. Nat. de d' Aub p. 54 pl. 894 (1783.)

1 ♂ 騰越縣.

58.斑魚狗 Ceryle rudis leucomelanura (Reichenb.)

Ceryle leucomelanura Reichenbach, Handb. Alced. p. 21. pl. 409 B. f. 3,448 (1851) (錫蘭).

4 ♂, 1 ♀ 騰越山谷, 5,300 呎,溪流 IV 1919. (虹彩黑褐;嘴黑,腿及足黑).

59.灰頭鸚哥 Palaeornis schisticeps finschi Hume.

Forrest 之七標本羽毛零落既甚.

2♂, 1♀成鳥,揚子江流域, 7,000–9,000 呎, IX 1919, 松林. (虹彩淡黃;嘴橙色及紅色;腿及足青灰.) 1♂, 2♀未成長鳥,瑞麗江與怒江分水界 VII 1919; 1♀未成長鳥,麗江山脈,9,000–11,000 呎, VII 1918.

60.緬甸佛法僧. Coracias affinis Mc Clell

Coracias affinis Mc Clelland, P. P. S. p. 164 (1839) (亞森母).

Forrest 送來之成鳥,體羽極爲刁殘.

1♂, 1♀成鳥瑞麗江與怒江分水界, 5,000–7,000 呎,曠野, V 1199; 1♀未成長鳥瑞麗江流域 6,000–7,000 呎, VI 1919. (虹彩♂,嘴黑;腿及足幽黑.) 1藍騰越縣.

61.戴勝 Upupa epos indica Reichenb.

Upupa indiça Reichenback, Handb. spec. Orn. seansores, p. 320 pl. dx-cvi. f. 4,037 (印度).

Collingwood Ingram 鑑定蒙自標本, (4♂, 1♀) 認爲 U. e. saturatus Lönnb, 但 Forrest 之標本,吾則以爲係屬 U. e. indica 一種. Outram Bangs 又列舉蒙自之十標本皆爲 Saturatus 則此亞伯利亞及蒙古之 Saturatus 亦於冬季至雲南山谷及拔海較低之地矣.

雖然, U. e. Saturatus 一種,其形態極不固定,則確切之判別,固有待於獲得大幫生殖期之標本後也. Bangs & Phillips 以 U. epops subsk 一名詞,記載 U. e. indica.

1♂ 麗江山谷, 8,000–9,000, 呎,耕地, IX 1918. (虹彩黑;嘴黑褐;基部帶灰;腿及足幽灰褐).

62.馬來長尾夜燕 Caprimulgus Macurus Ambiguus (Hart.)

Caprimulgus Macurus Ambigus Hartert, Ibis, p. 373 (1896) (馬來半島,緬甸).

1♂,唐山, 9,000 呎, IX 1918.

63.夜燕 Caprimulgus indicus jotaka Temm. & Schleg.

Camprimulgus jotaka, Temm & Schleg. Sieboldis Eauna Fapouica, Aves, P. 37. pl. 12 (1847) (日本)

在此地作留鳥而非 indicus indicus 一種,滋可異也.雖然以其拔海言之 (11,000呎) 固應帶有古北極之情况也.

2♀ 麗江山脈, 11,000 呎, 松林, VI, VIII 1918.(虹彩紫褐;嘴黑腿及足灰黑).

64.大耳夜燕 Lycornis Cerviniceps Gould.

Lycornis Cerviniceps Gould, Icon Av. pt. ii. pl. iv. (1838) (中國及其附近諸島).

1♀,騰越南部丘陵中, 5,000–6,000 呎,雜林, VII 1919. (虹彩深赤褐;嘴黑褐;腿及足灰黑).

在中國,此或爲第一次紀錄.

65.家燕 Hirundo rustica gutturalis Scop.

Hirundo gutturalis Scopoli, Del. Flor and Faun. Insubr. ii. p. 96 (1768) (新幾內亞).

1♂成鳥,大理之山谷中,6,500呎V 1918; 1♂未成長鳥,麗江山谷,8500呎,VIII 1918,曠地.(虹彩暗褐;嘴,腿及足黑) 1♂騰越,5,500呎,曠地 VI 1919.

66.青鷦鷯 Tesia Cyaniventer Hodgs.

Tesia Cyaniventer Hodgson. Fourn. As. Soc. Bengal. VI. p. 101 (1837) (尼泊爾).

1♂,瑞麗江與怒江分水界,7.000呎 XII 1919.(虹彩暗褐;嘴褐,下顎橙色;腿及足暗橄欖色.) 1♀騰越縣,2919.

67.栗頂鷦鷯 Tesia Castaneo-Coronata (Burton.)

Sylvia? Castaneo Coronata Burton, P.Z.S. Lond. iii. 1835. P.52 (1836) (希馬拉雅).

3♂, 1♀ 1? 麗江山脈,13,000−1,4000呎, VII−IX 1918,松林(虹彩褐;嘴褐,下顎橄欖黃;腿及足橄欖黃.) 1♂,瑞麗江與怒江分水界, 7,000−8,000呎, XI 1919.

68.八莫長尾鷦鷯 SPelaeornis Kauriensis (Har.)

Urocichla kauriensis Harington, Ann. Mag. Nat. Hist. (8) ii. p. 246 (1908) (Watan 八莫縣).

1♀瑞麗江與怒江分水界,8000呎, XII 1919,叢林.(虹彩暗紅;嘴暗褐;腿及足褐).

69.澤口長尾鷦鷯 Spelaeornis souliei Oust.

Spelaeornis souliei Oustalet, Bull.Mus d' Hist. Nat. Paris, p. 257 no. 6 (1898) (澤口 Tse'-Kou.)

Forrest 送來一雄一雌及一未成長鳥.

此品種之幼鳥,尚未經描述;與成鳥比較則其上體之頭及後頸鮮赭,羽緣黑,背橄欖赭而有黑線橫斑;下體自喉以下深赭.

70.大理鷦鷯 Troglodytes troglodytes talifuensis (Sharpe.)

Anorthura Talifuensis Sharpe, Bull. B. O. C. X iii. p. 11 (1902) (大理府).

3♂, 2♀, 2? 麗江山脈, 14,000 呎,叢林, VII—X 1918. (虹彩暗褐或黑褐;嘴暗褐;腿及足褐).

71.粟背籬雀 Prunella immaculata (Hadgs.)

Accentor immaculatus Hodgson, P. L. S. X iii. p. 34 (尼泊爾).

2 成鳥,麗江山脈, 1918; 1♀,騰越縣, 1919.

72.漠平籬雀 Prunella Strophiatus Multistriatus (David.)

Accentor Multistriatus David, Ann. Mag. Nat. Mist. (4), Vii. P. 256 (1871 (漠平).

2♀, 7? 麗江山脈, 9,000—13,000 呎, VIII—X 1918, 溪旁之叢林中. (虹彩淡赤褐;嘴黑褐,腿及足淺褐而帶粉紅).

73.鷄足山籬雀 Prunella Collaris ripponi Hart.

Prunella Collaris ripponi Hartert, Vög. paläarpt. Faun.i. p. 766.

Tring 博物院之標準型,採期爲五月,而 Forrest 之標本則爲十月,其胸部較爲淨灰.

5♂,麗江山脈. 14,000 呎. X 1918. 懸崖及多石之原野. (虹

彩鮮赤褐;嘴黑,下顎近基部之三分二黃色;腿及足幽黃褐)。

74.黑背歧尾 Enicurus sinensis Gould.

Enicurus sinensis Gould, P. L. S. London, P. 665 (1865) (上海).

2 ♀ 麗江山脈, 9,000–10,000 呎,溪流中, VI 1918. (虹彩暗褐;嘴黑;腿及足粉紅肉色).

75.東方斑歧尾 Enicurus Maculatus Guttatus gould.

Enicurus guttatus Gould, P. L. S. London, P. 664 (1865)(錫金?).

Outram Bangs 之描記雲南鳥,認爲明確之另一種,謂其背部之斑點較大且多,因名爲 bacatcs. 但 Forrest 送來之單獨標本,其背部點斑,實無異於印度之 guttatus. 不列顛博物館中之雲南標本,其點斑固較大,但印度鳥之點斑較彼更大者亦有之,故 Bangs 之 Maculatus bacata 吾不能承認其有效也.

1 ♀,瑞麗江與怒江分水界, 8,000 呎,溪流及蔭翳之山谷間, V1919.(虹彩黑;嘴黑;腿及足爲透明之珠白色,) 1 ♂ 成鳥, 1 ♂ 未成長鳥,騰越縣, 1919.

[Enicurus Maculatus Omiss Subsp. Nov.

方吾將以上標本與印度之 M. guttata 比較時發覺 Tring 採集部中,有一福建鳥,其體遙大. Hartert 君以之與不列顛之福建之 guttata 標本較,吾等兩人,皆同意其爲一新地方種,實有定名之必要.

♂成鳥之體較大是與 M. guttata 不同,背部白點斑及頸部白帶斑亦俱較大.

翼長: E.M.Guttatus, 95-102 (1.107) MM.

翼長: E.M. Omissus, 112-115 MM.

產地,福建,唐旺旺採得,標準型在 Tring 博物院.]

76.灰背歧尾 Enicurus Schistaceus Hodgs.

Enicurus Schistaceus Hodgson, Asiat. Res. XiX. p. 189 (1836.)

2 ♂,瑞麗江與怒江分水界, 9,000 呎,V 1919; 1♀成鳥,1♀未成長鳥,騰越縣.

77.賀孫短尾 Hodgsonius phoenicuroides (Gray.)

Bradypterus phoenicuroides Gray, Cat. Mamm., etc., Nepal p. 70 (尼泊爾).

1♂, 3♀,麗江山脈, 10,000–12,000 呎,松林及叢林中, V–IX 1918. (虹彩黑褐;嘴黑褐;腿及足淺褐).

78.打箭爐紅喉鴝 Luscinia davidi (Oust.)

Calliope davidi Oustalet, Bull. Mus. Paris, p. 222 (1892)(打箭爐).

Forrest 送來之單獨雄鳥雖未十分成長,但易羽經已完竣,故喉部之橙朱色塊斑,較之吾等取存之兩個體羽刀殘者,遙為明瞭.

1 ♂,麗江山脈, 12,000–13,000 呎,松林, VII 1918. (虹彩黑;嘴黑;腿及足灰黑).

79.印度藍喉 Luscinia brunnea (Hodgs.(

Larvivora brunnea Hodgson, Fourn. As. Soc. Bengal, Vi. p. 102 (1837) (尼泊爾).♀

Forrest 送來一雄二雌及一極幼者.

幼鳥之上體深橄欖褐;頭及後頸羽毛有銹色之軸斑及明顯之黑羽緣;上尾筒橄欖赭,初列撥風帶黑而外蹼橄欖褐;尾石板黑;腮,喉及胸赭而帶白,邊緣煤黑;腹白而帶淡黃;羽緣微着煤黑色.

1 ♂ 成鳥,揚子江流域 8,000 呎,IX 1818; 1 ♀ 成鳥,唐山9,000–10,000 呎, VIII 1918, 1 ♀ 成鳥, 1? 未成長鳥,麗江山脈 10,000–12,000 呎, VIII 1918,松林及溪旁叢藪中.(虹彩暗褐;嘴暗腿及足灰而帶黑;♀及未成長者,虹彩黑褐;嘴褐;腿及足淡褐.) 1, 騰越縣, 1919.

80.黑駒 Natodela leucura Hodgs.

Muscisylvia leucura Hodgson, P. L. S. Lond. p. 27 (1845)(尼泊爾).

印度及亞森母之雄鳥翼長平均爲 89–94 MM. 但有一Margharita 雄鳥及一大吉嶺雄鳥,翼長竟達 97 MM. 有兩個八莫雄鳥及 Forrest 之雄鳥爲 97 MM. 有一安南雄鳥爲 99MM. 而其餘之安南鳥則爲 92-98 MM.

1 ♂,騰越周圍之丘陵, 6,000 呎,溪旁之叢林中, VIII 1919.(虹彩黑褐,嘴,腿及足皆黑).

81.白喉知更鳥 Phoenicurus Schisticeps (Gray.)

Ruticilla schisticeps Gray, Cat. Mamm. B. Nepal, pp. 69, 153 (1874)(尼泊爾).

1♂, 1♀, 麗江山脈.

82.江蘇知更鳥 phoenicurus frontalis sinae Hart.

Phoenicurus frontalis sinae Hartert, Bull. B. O. C. XXX Viii. p. 78 (1918) (江蘇).

雄鳥之前頭及喉部雖較淺淡,但雌鳥則與 f. frontalis 判然不同.

8 ♂ 成鳥, 6 ♀ 成鳥, 1 ♀ 未成長鳥, 1 ♀ 幼鳥,麗江山脈, 12,000 呎, VIII−X 1918, 松林, 1 ♂ 成鳥,騰越山谷, 5,300 呎, XI 1919; 4 ♂ (1個記作雌鳥), 騰越縣 1929.

83.南知更鳥 Phoenicurus auroreus leucopterus Blyth.

Phoenicura leucoptera Blyth, Fourn. As. Soc. Bengal. Xii. 1. p. 962 (1843) (馬拉甲).

5 ♂ 成鳥 1 ♀ 成鳥 3 幼鳥,麗江山脈10,000−11,000呎,溪旁之叢林中, VII, X 1918; 1 ♂ 成鳥,揚子江流域, IX 1918; 1♂ 成鳥,唐山, X 1918; 2 ♂ 成鳥, 1 ♂ 成鳥,騰越西北部之丘陵 5,300−5,500 呎,叢林及原野中 X 1919;2♂, 2 ♀ 成鳥,騰越山谷 5,300−5,500 呎, III, XI 1919. (虹彩暗褐;嘴,嘴腿及足黑).

此鳥之生殖地點雖未知,但必在雲南西南部生殖,可無置疑,在印度東部度冬者或不至雲南生殖耳.

84.賀孫知更鳥 Phoenicurus hodgsoni (Moore.)

Kuticilla hodgsoni Moore, P. Z. S. London, p. 26. pl. Aves Viii (1854) (尼泊爾).

2 ♀ 成鳥,麗江山脈, 10,000−11,000 呎,溪旁之叢林, X1918.

（虹彩黑;嘴暗褐;腿及足黑）.

85.溪駒 Chaimrrornis fuliginosa fuliginosa (Vig.)

Phoenicura fuliginora Vigors, Proc. Comm. Lool. Soe, London, i. p. 35 (1831) (希馬拉雅).

此種雌雄形態迴異,而其同屬之Cucocephala及bicolor兩種則雌雄同形.

4 ♀ 鳥騰越周圍之丘陵, 6,000呎, IV–IX, 1919, 溪旁之叢樹; 1 ♀ 成鳥,騰越山谷, IV 1919,5,500 呎; 2 ♂瑞麗江流域, 7,000 呎,IX 1919; 3 ♂成鳥, 1 ♀雛鳥,麗江山脈 90,000 呎,溪流之旁. V–VI 1918.（虹彩藍而帶黑;嘴,腿,足黑）.

86.白頂溪駒 Chaimarrornis Cucocephala (Vig.)

Phoenicura Cucocephala Vigors, Proc. Comm. Lool. Soc.London, i p. 35 (1841) (希馬拉雅).

1 ♂, 4 ♀成鳥, 1 ♂, 1 ♀未成長鳥麗江山脈, 9,000–10,000 呎水流, VIII, X 1918; 2 ♀成鳥,瑞麗江流域, VII 1919.（虹彩暗褐;嘴,腿及足黑）.

87.藍尾駒 Tarsiger cyanurus (pall.)

Motacilla cyanurus pallas, Reise Prov. Russ. Reich. ii. p. 709 (1773) (Yenissei.)

88.金叢 Tarsiger Chrysaeus Hodgs.

Tarsiger Chrysaeus Hodgson, H. L. S. London, p. 28 (1845) (尼泊爾).

1 ♂ 成鳥, 1 ♂ 未成長鳥, 7 ♀,麗江山脈, 12,000–13,000

呎,叢林, VII--X 1918.(虹彩暗褐;嘴黑,緣及下顎褐黃;腿及足橄欖黃.) 1♂成鳥, 1♀未成長鳥,騰越縣. 1919.

此鳥與錫金標本,完全相同,但從太白山,秦嶺得來之十八個雌雄標本,體則遙小.

89.雲南赤腰叢駒 Tarsiger rufilatus practicus (Bangs & Phillips.)

Ianthia practica Bang & Phillips, Bull. Mus. Comp. Lool. V iii. p. 292 (1914)(老狗寨).

Bangs. & phillips 謂此係一判然不同之品種,迨與大幫之 r. rufilatus 標本較,所差蓋甚微耳;雄鳥之背部稍爲深藍,腰部亦較暗,其主要之顏色的區別,乃在肩部之塊斑遙爲深藍也.雌鳥上體深暗,橄欖褐盛而赭色較遜;尾亦幽藍 Tring 博物院中有從秦嶺得來之雄鳥十一,雌鳥十八從,皆屬 r. practicus, 此型,只能認爲T. rufilatus 中區別甚微之一亞種耳.

2♂成鳥, 2♂未成長鳥,麗江山脈, 9,000-14,000呎,松林及林藪中, XIII-X 1918.(虹彩暗褐;嘴黑褐;腿及足暗褐).

90.赭胸藍駒 Dendrobiastes hyperythra hyperythra (Blyth.)

Muscicapa hyperythra Blyth, Fourn. As. Soc. Bengal, Xi. p. 885 (1842.)

1♂成鳥, 1♀?未成長鳥,騰越縣 1919.

91.知時雀 Copsychus Saularis Saularis (Linn.)

Gracula Saularis Linnaeus, Syst. Nat. ed. X. p. 109. No. 5 (亞細亞).

在不列顚博物院鳥類目錄中 (Cat. Birds, Brit, Mus, Vol. Vii. pp. 61-64)Sharpe 博士將所有之 Saularis 一種統屬于一標題

之下,而以 Musicus, amoenus等稱爲雜種 (Hybrids) 但最近之改正,已將 saularis, musicus, amoeus, ceylonensis, andamanensis, pagiensis Zoenicus 等概爲亞種矣。

4♂, 2♀,騰越山谷, III–IX 1919, 5,500 呎,竹叢中。(虹彩黑褐;嘴黑;腿及足褐黑。) 1♂騰越縣, 1919.

92.叢鵰Oreicola ferra haringtoni Hart.

Oreicola ferra haringtoni Hartert. Vög, paläark. Faun. i. p. 711 No. 1,080, (1910) (漠平).

1♂ 1♀ 1♂?未成長鳥,麗江山脈, 10,000 呎, VII–IX 1918; 1♂. 1♂, 2♀成鳥,一♂幼鳥,揚子江流域, 9,000 呎, IX 1918; 1♂幼鳥,唐山, 9,000–10,000 呎, VIII 1918; 4♂騰越丘陵, VI 1919, 6,000 呎; 1♂, 1♀,騰越山谷, III, VI 1919, 5,500 呎原野之叢林中。(虹彩黑褐;嘴,腿及足雄褐而雌暗褐。) 2♂成鳥, 1♂幼鳥, 1♂未成長鳥, 4♀成鳥, 1♀未成長鳥,騰越縣, 1919.

93.江蘇鵰 Saxicola torquata przewalskii (pleske.)

Pratincola Maura Var. przewalskii pleske, Wiss. Kes. przewalsky's Reisen Vögel, i.p. 46. pl. iv. ff. 1, 2, 3 (1889) (江蘇).

2♂, 1♀成鳥,麗江山脈。

94.緬甸嘯鶇 Miophoneus eugeniae Hume.

Miophoneus eugeniae Hume, Stray Feath. i.p. 475 (1873)(Thayetmys.)

此鳥與 M. Temmincki 之區別甚徵,只缺去翼覆羽之白斑

及腰腿等處之隱藏之白色部耳.

1♂,1♀,1幼雛,麗江山脈,10,000呎,VI-VIII 1918,懸崖;1♀騰越丘陵,VII 1919.(虹彩暗紅;嘴橙而嘴峯暗色;腿及足黑).

95.紅胸磯鶇 Monticola erythrogaster (Vig.)

Turdus erythrogaster Vigors, Proc. Comm. Soc. and Corr.Lcol. Soc. Lond. p. 171 (1831) (希馬拉亞).

1♀未成長鳥,唐山,9,000-10,000呎,VIII 1918; 1♀未成長鳥,山谷,8,000呎,VIII 1919.(虹彩黑褐;嘴,腿,足灰褐).

96.赤腹磯鶇 Monticola philipensis(P. L. S. Müll.)

Turdus philippensis P. L. S. Müller, Natursyst. Anhang, p. 142 (1776.)

1♂麗江山脈,11,000-12,000呎,VIII 1918.(虹彩褐;嘴,腿,足黑.) 1♂唐山, 9,000-10,000呎,VIII 1918.

Hartert 君以赤腹磯鶇,爲M. Solitarius之一亞種,吾則不以爲然蓋在中國南部及東南部,常同在一境域以生殖,故此實另一種也.若然則 La Touche 之較大之品種應命名爲M. philippensis Magna 而非 M. solitarius Magna 矣.

97.磯鶇 Monticola solitarius pandoo (Sykes.)

Petrocincla pandoo Sykes, P. L. S. Lond. p. 87 (1832) (Ghats 印度).

2♂,冷邦山谷 (Lang Bong Valley), 7,000呎 V 1918; 1♀,騰越山谷, 5,300呎, III 1919; 4未成長鳥瑞麗江流域, 9,000呎, VI 1919; 1未成長鳥,騰越西北部高山, 6,000呎, X 1919.(虹

彩暗褐以至于黑;嘴,腿及足黑).

98.江蘇灰首鶇 Turdus castaneus gouldi (Verr..)

Merula gouldi Verreaux, Nouv. Arch. Mus. Hist Nat. Paris, Vi. Bull. p. 34 (1870) (江蘇).

2♂, 5♀, 5雛,麗江山脈, 10,000–11,000 呎,叢藪及雜林中, VI 1918; 1♂,瑞麗江及怒江分水界, 9,000 呎, XI 1919. (虹彩褐,嘴金黃;腿及足黃褐).

初期羽毛之雌鳥,下體較黃而點斑較細.

99.赤喉鶇 Turdus ruficolis ruficolis pall.

Turdus ruficollis pallas, Reise prov. Russ. Reichs. iii. p. 694 (1776) (Dauria.)

1♂騰越山谷, 5,500 呎, III 1919, 叢林. (虹彩暗褐;嘴暗褐;尖端及下顎橙色;腿及足暗灰褐.) 2♀未成長鳥,騰越縣.

100. 灰鶇 Turdus fuscatus pall.

Turdus fuscatus pallas, Reise prov Reices. Russ iii. p. 694 (1776) (Dauria.)

2♂, 1♀騰越, III 1919; 1♂; 1♂(?),麗江山脈, 1918; 1♂,騰越縣.

101. 歐鶇 Turdus naumani Temm.

Turdus Naumani Temminck, Man. d, Orn. i. p. 170 (1820) (歐洲東部).

1♂,騰越山谷, 5,500 呎, 1919, 叢林. (虹彩暗褐;嘴黑褐,下

顎基段橙色;腿及足暗赤褐).

102. 白眉鶇 Turdus obscurus Gm.

Turdus obscurus Gmelin, Syst. Nat. ip. 816 (1788.)

3 ♀,麗江山脈,9,000 呎,X1918,叢林中.(虹彩及嘴黑褐;腿及足幽黃褐.) 1♀,騰越周圍之叢林,5,500 呎,XI 1919; 1♀騰越縣,1919.

1n3. 黑胸鶇 Turdus dissimilis Blyth.

Turdus dissimilhsBlyth, Fourn. As. Soc. Bengal. Xvi. p. 144. No. 12 (1847) (下孟加拉,希馬拉雅).

2 ♂, 1♀,騰越山谷, 5,500 呎,III 1919, 叢林中.(虹彩褐;嘴橙黃;腿及足幽黃褐.) 1♂未成長鳥, 1♀成鳥,瑞麗江流域,VII 1919; 1♀未成長鳥,麗江山地,10,000 呎, IX 1918; 1♂騰越縣.

104. 漠平鶇 Turdus auritus Verr.

Turdus auritus Verreaux, Nouv. Arch. Mus. Hist. Nat. Paris, Vi, Bull. p. 34 (1870) (漠平).

Forrest 送來之標本,成鳥只有一個與Tring博物院所藏從秦嶺得來之單獨標本較,則此三鳥之腹脅兩部之斑點遙多.

1 成鳥,2 未成長鳥,麗江山脈,12,000 呎, VIII–IX 1918, (虹彩暗褐;嘴幽灰褐;腿及足淡灰黃).

105. 山鶇 Tvrdus Mollissimus Blyth.

Turdus Mollisimus Blyth, Fourn. As. Soc. Bengal, Xi. p. 188 (1842)（大吉嶺）.

1♂, 1, ♀ 1未成長鳥,麗江山脈, 12,000 呎, VIII 1918, 叢林.（虹彩暗褐;嘴幽灰褐;腿及足淺灰黃）.

106. 紫鶇 Cocha purpurea Hodgs.

Cocha purpurea Hodgson, Fourn, As. Soc. Bengal, V. p. 359 (1836)（尼泊爾）.

在雲南此爲第一次記載.

1 ♂,麗江山脈, 9,000–10,000呎, VI 1918, 雜林中.（虹彩褐赤;嘴,腿及足黑）.

107. 鉤嘴眉 Pomatorhinus ruficollis stridulus Swinh.

Pomatorhinus stridulus Swinhoc, Ibis, p. 265 (1861)（福州北京山）.

從大陸得來之 p. ruficollis, 極爲複雜混亂,一方固有地方上之變異,同時亦有個體之不同.吾以爲已知名于大陸之各種,除 r. bakeri 外,實係相同.惟 Tring. 博物院中之 r. ruficollis 與中國及撣部之標本,則有差別,前者闇赭而與背部顏色一致,中國之 r. styani, r. stridulus, r. reconditus 等品種,据吾所見多數標本而言,泰半其尾部之橄欖色勝于背部,若背與尾部同爲赭色之標本,其赭色亦必較深於印度鳥.嘴部顏色,殊無一定,此係無關重要之特性,不必如 Bangs & phillips 描述 r. reconditus 時之特別標明也.在許多 r. styani 及 r. stridulus

標本中,嘴峯全部黑色,色亦有許多只嘴峯之基段黑色.在 r. ruficollis 則較爲一致,黑色之部常達三分之二或四分之三,惟雲南鳥則差異極大,或嘴峯全黃只于基部稍有黑點,或嘴峯之三分二皆爲黑色.

以 stridulus 之背,腰,尾皆深栗赭之標本與標準型之styani (背及尾橄欖色或橄欖色而渲染赭色)較,驟觀之似極相異,但其中實有許多"中間型,"則此兩種名詞,實不外同特異名耳. Hartert (Vog paläarkt. Faum., pt. i. pp. 639, 640)在錫金及中國,曾留意于 r. ruficollis 及 r. styani 兩者"中間型"之獲得;但据吾以上所云,錫金鳥與中國鳥實有明顯之差別,故至今吾獨不能使之合而爲一也.吾考察中國鳥及雲南鳥差近百個,並有幼鳥三枚,二者之間,吾殊不能發見若何差別,特許多中國鳥其嘴峯全黑,雲南鳥如此者絕無一個;而雲南鳥其嘴峯黑色極少者,亦遠爲中國鳥所不及耳.雲南鳥之嘴峯黃色發達者採期爲六月七月,黃色較少者採期爲十月,是則嘴色之變異,似亦不外季節的關係耳.故吾以爲 p. ruficolis 一種,現今只有五亞種:

p. ruficollis ruficollis Hodgs.……………………希馬拉雅,亞森母.

p. ruficollis stridulus swinh.……………………中國.

p. ruficollis bakeri Har. ……………………緬甸,撣部.

p. ruficollis Nigrostellatus Swinh……………………海南.

p. ruficollis Musicus Swinh. ……………………台灣.

Forrest 之九標本,胸部頗不相同,或橄欖灰而羽緣帶白,或白而羽之中央有橄欖褐條紋,又或橄欖赭而有寬闊之白羽緣.

2 ♂, 2 ♀ 麗江山脈, 9,000 呎, VI–IX 1918, 矮林叢藪中.(虹彩褐;嘴灰褐;腿及足幽灰.) 3 ♂, 2 ♀,騰越周圍之丘陵,6,000 呎, III–X 1919.

108. 蒙自鉤嘴眉 Pomatorhinus Macclellandi odious Bangs & Phillips.

Pomatorhinus Macclellandi odicus Bangs & Phillips, Bull. Mus. Conip. Lool. Viii. p. 286 (1914) (蒙自).

6 ♂, 4 ♀(翼長 ♂ 91–95 mm., ♀ 85–88 mm.), 麗江山脈, 9,000 –11,000 呎,叢林及松林中, V-VII 1908.(虹彩淡黃;嘴褐灰;腿及足灰褐.) 1 ♀, 騰越, V 1919.

109. 薩氏鉤嘴眉 Pomatorhinus erythrogenys imberbis salvad.

Pomatorhinus imberbis salavadori, Ann. Mus. Genov. (2), Viii. p. 410 (1889) (Yado Karen Hills.)

Collingwood Ingram 以 e. ferrugilatus 一名記載 Anderson 從目緬(Momien) 所得之標本. Forrest 送來之雛鳥,以吾所見,確係 e. imberbis 則 Anderon 所得者想亦同係此型也.

1 雛鳥,麗江山脈, 9,000–11,000 呎; VII 1918; 1 雛,騰越, VI 1919. (虹彩幽白;嘴灰褐;腿及足淺灰).

110. Ianthocincla subunicolor griseata subsp nov. (尙無相當譯

名).

與 S. subunicolor 比較,則此種之頭部較石板灰,上體及尾之赭色較遜而橄欖色較勝,初列撥風外翈之黃色,較深而鮮亮.下體喉,胸顏色較深,與下體之餘部有判然之區別,在 S. subunicolor 則腹部淺淡,逐漸侵入胸際.下尾筒橄欖色更盛.

3 ♀ 瑞麗江與怒江分水界, 10,000 呎, VIII (標準型), XI 1919. (虹彩褐;嘴,腿及足褐).

111. 澤口眉 Ianthocincla affinis oustaleti Hartert.

Ianthocincla affinis oustaleti Hartert, Vög. paläarkt. Faun. Vol. i. p. 633. No. 970 (1909) (澤口 Tsékou.)

Forrest 送來之九標本,與 Tring 之標準型完全一致.

5 ♂, 1 ♀ 麗江山脈, 10,000–13,000 呎, V–IX1918, 松林; 3 ♂ 瑞麗江與怒江分水界, 7,000 呎, V-VII 1919. (翼長, ♂ 100–109 MM.; ♀ 95 MM. 虹彩灰或灰白(♀幽褐);嘴黑褐;腿及足褐).

112. Ianthocincla ellioti ellioti (Verr.) (譯名尙無).

Trochalopterum ellioti Verreaux, Nouv. Arch. Mus. Paris, Vi Bull. p. 36 (1870) (西藏山中).

12 ♂, 唐山, 10,000 呎. IX 1918; 4 ♂, 3 ♀, 1雛,麗江山脈10,000–12,000 呎, V–VI 1918, 叢藪及松林中. (翼長 ♂ 97–100 MM.; ♀ 87–92 MM. 虹彩幽白;嘴黑;腿及足淺褐).

Colonel Rippon (Bull. B.O. C. XiX. p. 32. 1906) 描記一種曰Trochalopterovn yunnanensis 者,謂體色比 ellioti 較深亦較灰.此等差異,亦猶 ellioti ellioti 與 ellioti bonvaloti Oust. (ellioti honoripeta Hart.) 耳.或則 ellioti ellioti 爲生殖之品種,而較深較灰之honoripeta 則遷移時始至雲南也.

113. 藏草眉 Ianthocincla lanceolata bonvaloti (Oust.)

Cabax lancelatus bonvaloti oustalet, Ann, Scie. Nat. (7), Xii, p. 274 (B. bonualoti, p.273) (1892) (西藏).

Oustalet 之標準型旣甚殘舊,但與Forrest之雄鳥 (No. 2. W. R.) 相似,此鳥齡約兩年,頭及腮色極深而胸部條紋甚寬. Sharp 博士謂 B. yunnanensis 之特性,在其口角線栗色而非黑,此特性實非固定,蓋 Forrest 之標本中,口角線黑者二而栗色者五也.故雲南之 lanceolatus 能否另成一明顯之地方種實屬問題雖然,吾之所以別之爲二者,蓋須以新羽之中國鳥與新羽之雲南鳥較,然後始能判其異同,吾主觀雖認爲相同,而 Forrest 及 Rippon 之標本,體羽皆極刁殘,不足供鑑別.但無論如何,Oustalet之名詞亦較舊于Sharp之名詞也.

4 ♂, 1 ♀ 麗江山脈, 9,000–10,000 呎, V–IX 1918, 矮樹及松林中; 1 ♂,騰越,V1919; 1 ♀,瑞麗江及怒江分水界,9,000 呎, XI 1919. (虹彩淡黃;嘴橄欖黑;腿及足幽灰.) 2,騰越縣 1918.

114. 雲南白斑眉 Ianthocincla ocellata similis subsp nov.

♂ 鳥之頭部及喉部與T. o. artemisiae 最爲近似,但胸及前

頸有大形之黑斑,與 I. o. ocellata 相若,在 artemisiae 則此部之黑斑甚狹,且不至羽之先端,以故一望卽可別之.且喉部之黑色部較寬闊,擴延至胸際與上胸部點斑相連接(此係指 Similis). 耳羽及眉斑淡黃灰或褐灰與 artemisiae 雄鳥相同.胸腹兩部之淡黃色較深而較一致,在 O.ocellata及O. artemisiae 兩種則胸及腹中部較淡而與脅部判然有別也.翼之量度亦較小于二者:

翼長 ♂ O. artemisiae……………………………………133 MM.

翼長 ♂ O. ocellata………………………………………129 MM.

翼長 ♂ O. similis …………………………………………125 MM.

1 ♂,瑞麗江與怒江分水界, 8,000 呎, IX 1919.

115. Ianthocincla Maxima (Verr.) (尙無相當譯名).

Pterorhinus Maximus Terreaux, Nouv. Arch. Mus. Paris, Vi., Bull. p. 36. pl. 3. f. 1 (1870) (西藏山中).

3 ♂, 3 ♀ 麗江山脈, 11,000–13,000 呎, VII–IX 1918, 山谷崖石間. (虹彩幽灰;嘴灰褐;腿及足淺黃).

116 Ianthocincla forresti sp. nov. (尙無相當譯名).

此異常的品種,包含別種之許多特性耳羽及腮如 Melanostigma, 胸斑如 erythrocephala erythrolaema 而頭部則如 Nigrimentum.

成鳥頭部與 Nigrimentum 相似,但灰色較少而羽緣之葡萄色較盛,眉斑褐灰而寬闊,後部不作銀灰色.肩間部之點

斑遙少于 Nigrimentum; 背部赭色較少而橄欖色較多.耳羽狹長,灰而時染葡萄色,與 Melanostigma 相同,但羽之中央色較深暗;腮黑,如 Nigrimentum; 胸腹深葡萄栗,羽之中央全部黑,如 erythrolaema 及 e.woodi, 非如 Nigrimentum 之羽綠黑色

Forrest 送來三標本皆記爲雌鳥,翼長 100, 108, 108 故吾以爲係一雌而二雄也.雌鳥(?)肩間部黑斑較少而初列覆雨栗色而帶青,非鮮赭栗色.

2 ♂, 1 ♀?瑞麗江與怒江分界,9,000 呎, V-IX 1919, 叢林中.(虹彩淡黃(褐?); 嘴,腿及足暗褐.) 1 ♂,騰越縣.

117. 珊瑚 Tanthocincla Chinensis (Socp.)

Lanius Chinensis Scopoli, Del. Flor and Faun Insubr. ii. p. 86 (1786) (中國).

1 ♀,瑞麗江與怒江分水界, 7,000 呎, VIII 1919. (虹彩幽紅;嘴腿及足黑).

118. 小噪眉 Ianthocincla sannio (Swinh.)

Garrulax sannio Swinhoe Ibis, p. 403 (1867) (廈門).

1 ♂, 2 ♀,麗江山脈, 8,000–10,000 呎,雜林及松林中,VI 1918; 2 ♂, 1 ♀ 揚子江山谷, 6,000–8,000 呎, IX 1918; 2 ♂, 2 ♀, 騰越山谷, 5,500 呎, III 1919; 1 ♂,瑞麗江與怒江分水界,9,000 呎, VI 1919. (虹彩淡黃;嘴黑;腿及足暗褐).

119. 雲南紅嘴相思 Leiothrix luteus yunnanensis subsp Nov.

Hartert 于 Vägel der Paläarkischen Fauna 中,別 luteus 爲兩亞種;

初撥風內列諸枚,其羽基橙赤者白 l. luteus; 無橙赤者曰 l. calipygus. 但在 Tring 博物院之標本,此特性殊不顯著,惟 l. luteus之初列撥風自第四以後諸枚,其外翈基部三分之一,色深紅而光亮,在 l. calipygus 則爲橙色.致于初撥風內列諸枚,其外翈之赤色或橙色之散佈中斷情形,頗有差異.Tring 博物院有 l. calipygus 標本十個,其橙色散佈中斷于初撥風之第八第九兩枚者三個;只于第八枚者兩個;餘五個全不斷.五個之 l. luteus 亦無一有中斷者.新種鳥與 l. calipygus 之差別,在其體較大而頭部黃色極顯著,八個標本中,其七,八,九諸羽,赤色或橙色缺去甚多者計有六個,次列撥風之第一枚,其橙或赤色或殘缺,或全無,八個標本莫不如此,若在其餘兩亞種(l. luteus l. calipygus)則爲純黃也.

翼長 l. calipygus, ♂ 65–71 mm., ♀ 63 mm.

翼長 l. yunnanensis, ♂ 72–76 mm., ♀ 66 mm.

嘴基之黃色,隨季節而不同,乃一冬季特性也.

6 ♂, 2 ♀ 瑞麗江與怒江分水界, 7,000–10,000 呎, VXI 1919. (虹彩褐;嘴夏季橙赤,冬季朱而黑基;腿及足暗褐). (標本型 ♂ V 1919.)

從八莫得有一標本,翼長 65 mm. 初撥風六,七,八,九諸枚橙赤之色,缺去甚多,極欲得有多數以比較也.

120. Poupinia poecilotis sordidor subsp Nov. (尙無譯名).

與 M. p. poecilotis 之區別,在其腮部灰色勝而赭色遜;頭頂,

後頭,背,腰深橄欖褐而非赭褐;胸側帶灰,赭色較少.

据取標記爲雌鳥之五個標本中,有一個翼長 47 mm. 餘與雄鳥相同(七個雄鳥), 又有兩個無附記者翼長52,54mm. 實際上只有一雌鳥耳,餘十三皆雄鳥也,

13♂, 1♀,麗江山脈, 10,000–12,000 呎, VII–X 1918, 叢林. (虹彩嘴,腿及足皆暗褐).

121. 澤口頭鳥綫 Schoeniparus genestieri (Oust.)

Alcippe genestieri oustalet, Bull Mus d'Hist Nat. Paris, iii. p. 210 (1897) (澤口).

1♂, 2♀,唐山, 9,000–10,000 呎, VIII 1918; 1♂揚子江流域, 7,000 呎, IX 1918; 1♂, 1未成長鳥,麗江山脉, 10,000 呎, 1918,松林; 2♂, 1未成長鳥,騰越周圍之丘陵中, 6,000 呎, IV, VI 1919. (虹彩及嘴暗褐;腿及足淡褐.) 騰越縣, 1919.

Rippon 從撣部得來之 S. intermedius Rippon 與 S.genestieri 當係同物異名, Rippon 以其與 S. Mandelli 比較,足見當時不列顛博物院尙無 genestieri 之標本也.

122. 栗頭鶥 Pseudominla castaneceps (Hodgs.)

Minla castaneceps Hodgson, Ind. Kev. p. 33 (1838) (尼泊爾).

3♂,瑞麗江與怒江分水界, 8,000 呎, XII 1919, 雜林中.(虹彩褐;嘴褐,下顎極淺褐;腿及足橄欖色).

在中國此爲新記載.

123. 大理鶥 Proparus ruficapillus sordidior Ripp.

Proparus sordidior Rippon, Bull. B. O.C. Xiii p. 60 (1903) (雞足山, 雲南).

3 ♂, 唐山 9,000–10,000 呎, VIII 1918, 叢林; 2 ♂ 揚子江流域, 7,000–8,000 呎, IX 1918; 1 ♂, 騰越周圍之丘陵, 7,000 呎, X 1919. (虹彩暗褐;嘴黑褐,下顎黃褐;腿及足暗橄欖褐.) 1 ♂ 2 ♀, 騰越縣 1919.

124. 打箭爐鶥 Proparus Vinipectus bieti Oust.

Alcippe (Proparus) bieti Oustalet, Ann. Sci. Nat. ser. 7. Xii. pp. 283 304 pl. iX f. 2 (1892) (打箭爐).

8 ♂, 7 ♀ 麗江山脈, 10,000–12,000 呎, V–IX 1918, 松林. (虹彩及嘴暗褐;腿及足幽褐.) 2 ♂,騰越縣, 1919.

125. 藏鶥 Proparus swinhoei Verr.

Proparus swinhoei Verreaux, Nouv. Arch. Mus. Paris Vi, Bull. p. 38 (1870) (西藏).

2 ♂, 3 ♀ 瑞麗江與怒江分水界, 7,000–8,000 呎,VII 1919, 雜林. (虹彩褐;嘴青褐;腿及足幽橙色.) 1 ♂,騰越.

120. Brachypteryx Cruralis Blyth. (尙無譯名).

Brachypteryx Cruralis Blyth,Journ. As. Soc. Bengal Xvi. p.136(1847) (尼泊爾).

Bangs 及 Phillips 于蒙自得一單獨標本,記載爲 C. chinensis Ripp Forrest 送來成鳥及幼鳥共六枚,確係 Cruralis Cruralis 可無置疑,

5 ♂ 成鳥, 1 ♂ 未成長鳥,麗江山脈, 11,000–12,000 呎,VI–VIII 1918; 1 ♂ 成鳥,瑞麗江與怒江分水界,9,000 呎,VI 1919. 多石之山谷及懸崖上. (虹彩黑褐;嘴,腿,足皆暗褐.) 1 ♀,騰越縣, 1919.

127. 越家路西卑 Lioptila desgodinsi (Dav. & Oust.)

Sibia desgodinsi David and Oustalet, Bull. Soc. Philom. Paris(7), i. p. 139 (1877) (越家路 Yer-Ka-So).

4 ♂, 3 ♀ 麗江山脈, 8,500–11,000 呎, V–VI 1918 松林. (虹彩暗褐,嘴,腿及足黑).

Robinson 及 Kloss 于 "Birds of S. Annam and Cochin China" —— 文中以 Malacias desgodinsi 一名記載其所得之雌雄標本各六.吾得雲南鳥後,乃以之與安南鳥較,始覺安南鳥乃判然不同,遂定為新種:

Lioptila robinsoni sp. Nov.

與 L. desgodinsi 較,則體小而背部純為石板灰,耳羽玉桂褐而帶葡萄色,有寬濶之白軸斑,並不如desgodini之一致褐黑.

翼長: desgodini ♂ 100– 102 mm.; ♀ 93–95 mm.

翼長: robinsoni ♂ 89 – 90 mm.; ♀ 83–89 mm.

128. 雲南西卑 Lioptila pulchella coeruleotincta subsp. Nov.

與 P. pulchella 之差異,在其頭背較藍灰,初列撥風幾黑而羽緣鮮藍,中央翮琥珀褐而帶橄欖色,末端以下之黑部較

小,而灰色之末端較寬.下體灰色甚勻淨,幾全不着褐色,有一標本,腹部微現葡萄色,翮末端之灰色部不着褐色.

2 ♂, 2 ♀.翼長 ♂ 100–104 mm.; ♀ 93–94 mm. 瑞麗江與怒江分水界, 6,000–7,000 呎, V 1919 (標本型), 叢林及松林中. (虹彩暗褐;嘴黑;腿及足黑灰.) 1 ♂, 3 ♀,騰越縣, 1919.

129. 尼泊爾斑翼 Actionodura egertoni Gould.

Actinodura egertoni Gould, P. Z. S. Lond. iv. p. 18 (1836 (尼泊爾).

2 ♂, 1 ♀瑞麗江與怒江分水界, 7,000–9,000 呎, V, XI 1919 叢林中. (虹彩淺黃(黑褐?);嘴鉛褐;腿及足暗褐) 2 ♂, 1 ♀ 騰越縣, 1919.

此鳥確係 e. egertoni 而非 Bangs 及 Phillips 所與之 ramsayi 也.

130. 滇西斑翼 Ixops poliotis raturatior subsp Nov.

此鳥與 P. poliotis 之差異,在其頭部之槍尖狀羽毛有明顯之銀灰色羽緣,而羽毛之本身則石板黑而非褐黑;背部之橄欖色少而赭色濃,羽緣銹黃;下體較深栗赭,羽緣銹黃而顯明;耳羽較銀灰.

2 ♂,瑞麗江與怒江分水界,7,000 呎, V,VI 1919, 叢林中. (虹彩,嘴,腿及足褐.) 2 ♂, 2 ♀ 騰越縣, 1919.

♂ 標準型瑞麗江與怒江分水界, V,1919.

131. 八莫山紅頭 Stachyridopsis ruficeps Chamoensis Har.

Stachyridopsis Chamoensis Harington, Ann. and May. Nat. Hist. (8), ii. p. 245 (1908) (八莫).

2 ♂, 1 ♂ 瑞麗江與怒江分水界, 9,000 呎, VI, XII 1919. (虹彩褐,嘴黑褐;腿及足橄欖褐.) 2 ♂, 2 ♀ 騰越縣, 1919.

132. 美麗 Minla ignotinca Hodgs.

Minla ignotinca Hodgson, Ind. Rev. p. 33 (1838) (尼泊爾).

2 ♂, 瑞麗江與怒江分水界, 7,000–8,000 呎, V–VII 1919, 矮林. (虹彩及嘴暗褐;腿及足淺褐.) 1, 麗江山脈, 1918; 3 ♂, 3 ♀ 騰越縣.

♀ 鳥初列撥風之外瓣白或淺檸檬黃,非如雄鳥之作深紅者,而翮之羽緣及尖端皆淺粉紅色.

133. 雲南藍翼西花 Siva cyanuroptera wingatei Grant.

Siva wingatei Ogilvie Grant, Bull. B. O. C. X. p. 38 (1900) (雲南城).

Siva Cyanuroptera 共有區別顯明之亞種六,若能從雲南東部再得許多材料,或可增至七種.

茲將各型之檢索表列下:

1. 次列撥風末端之羽緣白.
   S. Cyanuroptera Cyanuroptera 亞森姆及希馬拉雅.
   次列撥風末端之羽緣非白. .... 2.

2. 頭部條紋顯著胸部灰.
   S. C. Wingatei: 八莫縣及雲南西部.
   頭部條紋顯著胸部白.
   S. C. sordida 德尼薩拉.
   頭部無顯著之條紋. .... 3.

3.
- 頭部褐而胸部灰.
  - S. C. subsp?: 眉州(Mee chow 阿迷州?), 雲南東部.
- 頭部藍而胸部白.
  - S. C. Oatesi: 緬甸東南部及撣部.
- 頭部一致褐色. ....4.

4.
- 初列撥風一致黑褐.
  - S. C. sordidior 馬來半島之 Perak.
- 初列撥風羽緣白.
  - S. C. orientalis: 安南及交趾支那.

從八莫縣得來之標本,與雲南西部之標準的 S. C. wingatei不能區別.

S. C. Cordida 極為稀少,不列顛博物院中僅有之標本,乃1914 年 Hume 從德尼薩來得來之標準型, Tring 博物院中尚未有也.

1 ♂, 2 ♀, 騰越周圍之丘陵中, 6,000–7,000 VI, XI 1919; 3 ♂, 2 ♀ 呎瑞麗江與怒江分水界, 7,000 呎, V 1919. (虹彩暗褐嘴暗橄欖色;腿及足淺橄欖色.) 1 ♂, 騰越縣 1919.

翼長 ♂ 65–66 mm.; ♀ 62–63 mm.

134. 麗江西花 Siva Strigula yunnanensis subsp. Nov.

Strigula 中之各型,每因羽之新舊不同,而體色差異甚大. 新羽之鳥,背,腰,上尾筒等部皆多着橄欖黃之條紋;舊羽者則此部皆暗灰,或稍着橄欖色.各亞種大概可分作兩部份.

如 s. s. strigula 則尾黑,只中翮內翈基部深栗; S.s. castaneicauda 及其餘諸亞種,則內翈七分之五及外翈內方七分之四所爲栗色.

S.s. yunnanensis 與 S. malayana 之區別,在雲南鳥頭部之橄欖橙黃色較爲鮮亮,雖舊羽之鳥,而與翕背等部之顏色區別判然;眼後有一寬闊而近白之帶斑;舊羽之鳥,背部橄欖色亦較深而灰色較少.與 S. Castaneicauda 比較,則雲南鳥上體之橄欖金黃色較少.

翼長:10 ♂ 69—71mm.; 6 ♀ 65—68 mm.

4 ♂, 4 ♀ 麗江山脈, 1,000—11,000 呎 VI,VII 1918, 雜林及松林中; 1 ♂,唐山, 9,000 呎, IX 1918; 2 ♀, 騰越丘陵, VI 1919; 1 ♂ 瑞麗江與怒江分水界, 8,000 呎, V 1919. (虹彩褐;嘴腿及足灰.) 2 ♀,騰越縣.

標準型 ♂, 麗江山脈, VII 1919.

Siva strigula omissa subsp. Nov.

伯刺 (Perak) 型與 S. Malayana 之異點,經既檢得 S. s. omissa 之下體鮮黃,頭部爲鮮明之橄欖橙黃色與背翕等部截然可辨;與雲南鳥較,則 omissa較小而上體較灰.

翼長: ♂ 67 mm.; 60—63 mm.

產地:伯拉.標準型 ♀, Cunong Kerbau, 伯拉, 5,000 呎, III 1913 (Tring 博物院).

135. 赭腹伯勞眉 Pteruthius rufiventer Blyth.

Pteruthius rufiventer Biyth, Journ As. Soc. Bengal, Xi p. 183 No 25 (1842) (大吉嶺 Dajeeling) ♀.

1 ♀. 瑞麗江與怒江分水界, 9,000 呎, XII 1919 森林中. (虹彩灰灰紫;嘴灰黑;腿及足淺褐).

136. 青伯勞眉 Pteruthius Xanthochloris pllidus (David.)

Allotrius Xanthochloris var. pllidus Armand David, Nouv. Arch. Mus. Paris, Vii., Bull. p. 14 (1871) (Kookonon 邊境).

1 ♂, 麗江山脈, X 1918; 1 ♀, 唐山, 9,000 呎, 松林, X 1918. (虹彩暗褐;嘴幽黑;腿及足灰).

137. Pteruthius Melanotis susp.?

Bangs 及 Phillips 于雲南記載 M. Melanotis, 但 Forrest 送來之標本,既非此種,亦非 M. tahanensis Hart.

單獨標本爲一雌鳥,翼覆兩有翼斑與 pt. melanotis 之其餘兩亞種之雌鳥相似.但其腮及喉之全部赭色如 M. tahanensis 雄鳥(在其餘兩種雌鳥則只腮及喉之兩側赭色耳.); 耳羽下帶斑褐黃而非橄欖黃或淨黃外翮純白,與 M. melanotis 相同,在 M. tahanensis 則該羽之基部爲煙灰色也.

1 ♀? 瑞麗江與怒江分水界, XII 1919; 1 ♀?, 騰越縣, 1919.

138. 伯勞眉 Pteruthius aeralatus ricketti O. Grant.

Pteruthius ricketti Ogilvie Grant, Bull B. O. C. Xiv. p. 92 (1904) (中國南部).

Ingram 及 Bangs 於雲南皆有 Pt. aeralatus aeralatus 之記載 Ingram 只引据 Anderson,並無標以比較, Bangs 則只有一雄鳥,故不能與真正之 aeralatus 比較也.

3 ♂,揚子江流域, 9,000 呎, IX 1918; 1 ♂,瑞麗江與怒江分水界, 5,000 呎, XII 1919, 雜林及松林中.(虹彩黑;嘴紫黑;腿及足淺褐)。

139. 雲南山鶯 Suya crinigera yunnanensis Har

Suya crinigera yunnanensis Harington, Bull B. O. C. XXX I, p. 110 (1913)(雲南).

Forrest送來之三標本,極爲刁殘,欲考察所謂季節型 Seasonal form) 之形態,絕無可能.据云在 C. crinigera 一種,其冬羽,上體棕黃褐而條紋黑;夏則羽黑褐稍有淡色之羽緣.此三鳥中之兩個有條紋,餘則色暗而幾無條紋.有條紋之鳥,採集爲五月,九月,無條紋者則爲六月.

1 ♀,大理山谷, 6,5000 呎, V 1918; 1 ♀,麗江山脈, IX 1918; 1 ♂,騰越, VI 1919.(虹彩褐;嘴上部暗褐;腿及足淡褐(有條紋之鳥.)). 5 騰越縣.

騰越縣之五標本,全無附記,體羽尚較完好,無條紋.

140. 白眉山鶯 Suya superciliaris Anderson.

Suya superciliaris Anderson, Lool. Rev. Two exp. W. yunnan p. 642 pl li. f. 1 (1878)(目甸 Momien.)

2 ♂,騰越 VI 1919.

141. 雲南斑喉其公 yuhina gularis grisetincta subsp nov.

與 Y. G. Yangpiensis 之差異,在其頭項較灰,背部褐色少遜,腰較深暗較灰而赤橄欖色較少,喉及上胸較淺,赭色較少.

1 ♂, 1 ♀ 瑞麗江與怒江分水界 10,000—11,000 呎, VI 19 19,叢林.(虹彩及嘴黑褐;腿及足淺褐.) 2 ♂, 1 ♀ 騰越縣, 1919.標準型♂,瑞麗江與怒江分水界.

142. 李仙江其公 yuhina flavicollis rouxi (Oust.)

Ixulus rouxi Oustalet, Bull. Mus. d'Hist. Nat. Paris, Vol. ii. p. 186 (1896) (李仙江,雲南).

4 ♂,瑞麗江與怒江分水界, 9,000 呎, VI 1919, 乾燥之叢林中.(虹彩及嘴黑褐;腿及足淡褐.) 2 ♂ 騰越縣.

騰越兩標本中有一體羽甚新而胸部稍染黃色者.如能得大幫之雲南,緬甸,亞森母等處新羽標本作比較,或可證明 f rouxi 及 f harterti 係同物異名也.

143. 八莫其公 yuhina diademata ampelina (Ripp.)

yuhina ampelina Rippon, Bull. B. O. C. Xi. p. 12 (1900)(Warar Busu, 6,000 呎, 八莫).

1 ♀ 未成長鳥, VIII 1919; 5 ♂, 9 ♀,麗江山脈, 9,000—12,000 呎,松林, V 1918.(虹彩黑褐;嘴,腿及足黃褐.) 2 ♂,騰越縣 1919.

Ingram 据 Oustalet 自澤口及,Wingate 自雲南東部之報告,而記載 diademata didemata, 但吾以爲此等皆係 Ampelina 也.

144. 麗江其公 Yuhina Occipitalis obscurior subsp Nov.

上體較 O occipitalis 既暗且灰;頭頂羽毛較淨灰而不帶褐色;背及腰較深暗而橄欖色較盛;後頸較灰而赭色轉少;尾色遙深暗,胸以下葡萄色勝於玉桂色.

10 ♂, 6 ♀ 麗江山脈, 11,000−12,000 呎, V−VII 1918; 3 ♀, 騰越縣, 1919, 松林. (虹彩暗褐;嘴赤褐;腿及足淺褐.) (翼,♂ 64−67 MM.; ♀ 61−63 MM.) 標準型 ♂, 麗江.

145. 扇尾鶯 Cisticola cisticola tintinnabulans (Swinh.)

Calamanthella tintinnabulans Swinhoe, Journ. As. Soc. N. China Branch, ii. (1859) (廈門等處).

1 ♂ 大理山谷, 6,5000 呎, V 1918; 1 ♂ 無附記; 1 ♀ 騰越周圍之丘陵中, 6,000 呎, 1919 VI 1919, 玉蜀黍田及矮林中. (虹彩暗褐;嘴黑褐;腿及足淺褐.) 1成鳥, 2 幼鳥,騰越縣.

146. 雲南白眼睛 Alcippe Nipalensis Yunnanensis Har.

Alippe fraterculа yunnanensis Harington, Bull. B. O. C. XXX iii. p. 63 (1913) (雞足山? Gyi-dzin-shan, 雲南).

此鳥之胸部其赭色較深於 Rippon 氏之大理府標本,但 N. fratercula 一種,吾等仍可發見其胸部有深淺之分,以其體較大,故此種極易與 fratercula 區別也.

3 ♂, 騰越西部丘陵, 6,000 呎, IV 1919; 1 ♂, 瑞麗江與怒江分水界, 9,000 呎, VI 1919; 1, 麗江山脈, 1918, 溪旁叢林中. (虹彩赤褐;嘴黑灰;腿及足灰褐).

Bangs 及 Phillips 以 A. Nipalensis hueti (Dav.) 一名詞記載蒙

自標本十一個?此或真係 A. N. yunnanensis 也.

147. 佛蘭克林鷦鶯 Franklinia gracilis (Frankl.)

Prinia gracilis Franklin, Proc. Comm. Sc. and Corr. Zool. Soc. London, p.119(1831) (恆河流域等處).

1 ♂, 麗江山脈, 1918; 1 ♂, 1 ♀ 騰越山谷, 5,300 呎, VIII 1919. (虹彩淺橙;嘴黑褐;腿及足褐).

在 Catalogue of Birds, Sharpe 博士以 Franklinia 與 Cisticola 合而爲一.在 Handlist 中彼則照 Oates (Fauna of British India, Birds, Vol i. pp. 370, 371) 次序,別而爲二.

148. 蜀西鷦鶯 Prinia inornata exter Thay & Bangs.

Prinia inornata exter Thayer & Bangs, Mem. Mus. Comp. Zool. XL p. 182, pl. V. ff 4-5 (1912) (四川西部).

1 ♂, 2 ♀, 麗江山脈, 1918; 3 ♂, 3 ♀, 3 未成長鳥,騰越山谷及其周圍之丘陵中, 5,000-6,000 呎, III-X 1919 叢林. (虹彩褐;嘴黑褐而帶灰;腿及足褐.) 7? 騰越縣.

149. 斑澤鶯 Megalurus palustris Horsf.

Megalurus palustris Horsfield, Trans Linn. Soc. Lond. Xiii. p. 159 1822.

1 ♀ 騰越平原, 5,400 呎, VI 1919, 稻田中. (虹彩暗褐;嘴黑下褐;顎鉛灰;腿及足淡褐).

150. 金頂鶯 Phyllergates Coronatus (Jerd & Blyth.)

Orthotomus Coronatus Jerdon & Blyth, P. Z. S. Lond. p. 200 (1816) (大吉嶺).

1 ♂, 騰越山谷, 5,500 呎, X 1919, 叢林. (虹彩暗褐,嘴褐,下顎淺淡;腿及足淺褐).

151. 厚嘴鶯 Phragamaticola aëdon (Pall.)

Muscicapa aëdon Pallas, Reise. Prov. Russ. Reich. iii. p. 695 (1776) (Dauria.)

2 ♂ 騰越, 5,500 呎, V 1919,叢林. (虹彩黑褐;嘴暗褐,下顎帶淺黃色;腿及足淺褐.) 1 ♂, 騰越縣, 1919.

152. 斑叢鶯 Lusciniola thoracia (Blyth.)

Dumeticola thoracia Blyth, Journ. As. Soc. Bengal, XIV p. 584 (1845) (尼泊爾).

2 ♂, 2 ♀ 麗江山脈, 11,000 呎 VI–VII 1918 松林. (虹彩暗褐;嘴黑褐;腿及足淺褐).

153. 太白山鶯 Hareites flavolivacea intricatus Hart.

Hareites flavolivacea intricatus Hartert, Vög. Palaearct. Fauna, i. p 533 (1909) (太白山).

1 ♀ 騰越縣.

154. 四川叢鶯 Horeites acanthizoides acanthizoides (Verr.)

Abornis acanthizoides Verreaux, Nouv. Arch. Mus. Paris. Vi. Bull. p. 37 (1871) (四川西部).

1 ♀ 騰越縣.

155. 赭頂叢鶯 Horeites brunneifrons (Hodgs.)

Orthotomus (Prinia) brunneifrons Hodgon, P,Z.S. London.

2 ♂, 3 ♀, 1 ♂未成長鳥,麗江山脈, 13,000 呎, X 1918, 松林; 1 ♂, 1 ♀,瑞麗江與怒江分水界, 7,000–8,000 呎, VI 1919.(虹彩及嘴暗褐;腿及足淺橄欖色).

156. 大叢鶯 Horeites Major Moor.

Horeites Major Moor, P.Z.S. Lond. p. 105 (1854) (尼泊爾).

1 ♂,麗江山脈, 13,000 呎, VIII 1918; 1 ♂,瑞麗江與怒江分水界, 7,000–8,000 呎, VI 1919 叢林.(虹彩褐;嘴黑褐;腿及足淡橄欖色).

157. 大衛叢鶯 Phylloscopus armandii (Milne-Edw.)

Abrornis armandii Milne-Edwards, Nouv. Mus. Bull. i. p. 22. pl. 2. f. 1 (1865) (中國北部).

翼 ♂ 67 MM; ♀ 56 MM.

1 ♂ 麗江山脈, 11,000 呎, V 1918; 1 ♀, Chien Chuan 山谷, 7,000 呎, V 1918, 叢林. (虹彩褐;嘴,腿及足幽褐).

158. 普安柳鶯 phylloscopus subaffinis (Grant.)

Oreopneuste subaffinis Grant, Bull B. O. C. X. p. 37 (1900) (貴州西北部之普安廳).

5 ♂, 6 ♀,麗江山脈, 6,000 呎, VII–XI 1918, 丘陵之叢林中. (虹彩,嘴,腿及足暗褐).

159. 沉褐柳鶯 Phylloscopus fuscatus (Blyth.)

Phyllopneustefuscata Blyth, Journ As. Soc. Bengal, Xi. p. 113 (1842) (calcutta.)

2 ♂，揚子江流域，8,000–9,000 呎，IX 1918; 1 ♂大理山谷，6,500 呎，V 1918，1 ♂，麗江山脈，X 1918; 1 ♂，騰越周圍之丘陵，1,000 呎，XI 1919，丘陵之叢林中。（虹彩褐；嘴褐，下顎基部三分之二黃；腿及足橄欖青.）翼長 55,56,58,61,65 MM.

160. 嘉定柳鶯 Phylloscopus maculipennis debilis (Thay & Bangs.)

Reguloides maculipennis debilis Thayer & Bangs, Bangs, Mem. Mus. Lool Harvard, Vol. XI. No. 4. p. 180 (1922) (嘉定，四川).

Forrest 送來之兩標本，頭部顏色與 ph. M. debilis 相合，其餘體部則不然，惜只有兩標本，未足以為比較也.

1 ♂，瑞麗江與怒江分水界，10,000 呎，XI 1919，雜林中.（虹彩褐；嘴暗褐；腿及足橄欖色）.

161. 麗江柳鶯 Phylloscopus proregulus forresti subsp Nov.

與 p. proregulus 及 p. newtoni 之區別，在其上體較深暗而少橄欖褐色；腰部硫黃色較盛；下顎基部之三分二，黑，而非淺色，眉斑及頭部帶斑較深暗.翼之長度稍小，或因性的關係也.

八個標本之翼長為 50, 52 ½, 52, 53, 54, 56, 53, 48 MM.（標準型 No. 2 ♀ 48 MM.

6 ♂，2 ♀ 麗江山脈，9,000–11,000 呎，松林 V 1918.（虹彩褐；嘴黑褐；腿及足橄欖青）.

162. 黃腹柳鶯 Phylloscopus occipitalis coronatus (Temm & Schleg)

Ficedula Coronata Temminck & Schlegel in Sieboldс Fauna Japonica

Aves, p. 48. pl. 18 (1847) (日本).

1, 麗江山脈.

163. 極鶯 Phylloscopus borealis borealis (Blas.)

Phyllopneuste borealis Blasius, Naumannia, P, 313 (1858) (鄂霍次克海).

1 ♂, 4 ♀ 麗江山脈, 9,000 呎, V 1918. (虹彩暗褐;嘴雄暗橄欖色,雌下顎淡橄欖色腿及足暗橄欖色.

164. 白尾柳鶯 Phylloscopus davisoni (Oates.)

Acanthopneuste davisoni Oates, Faun. Brit. Ind., Birds, Vol. i. p. 420. No. 430 (1889) (Mount Muleyit, Tenasserim.)

1 ♀, 瑞麗江與怒江分水界, 7,000 呎, XII 1919, 雜林中. (虹彩褐;嘴褐;下顎黃;腿及足橄欖色.) 1? 騰越.

165. 八莫捕蠅鶯 Cryptolopha Curkii teprocephala (Anders.)

Culicipeta tephrocephala Anderson, P. Z. S. London, p. 213 (1871) (八莫).

翼長 ♂ 55–58 MM.; ♀ 52–54 MM.

2 ♂, 5 ♀ 麗江山脈, 9,000–12,000 呎,叢林, V–VI 1918; ? 易羽鳥,揚子江流域, 9,000 呎, IX 1918. (虹彩褐,下顎褐黃;腿及足橄欖褐).

166. 灰頰捕蠅鶯 Cryptolopha poliogenys (Blyth.)

Culicipeta poliogenys Blyth, Journ As. Soc. Bengal. Xvi. p. 441 (1847) (大吉嶺).

3 ♂ 瑞麗江與怒江分水界, 8,000 呎, XII 1919, 叢林. (虹彩褐;嘴黑褐,下顎褐黃;腿及足橄欖褐).

167. 栗頂捕蠅鶯 Cryptolopha castaneiceps castaneiceps (Gray.)

Abrornis castaneiceps Gray, Cat. Mamm., etc., Nepal, p. 66. et App. p. 152 (1846) (尼泊爾).

1 ♂, 瑞麗江與怒江分水界, 8,000 呎, 叢林, XII 1911. (虹彩褐;嘴暗褐,下顎淺褐;腿及足橄欖色).

168. 灰頭黃鶲 Culicicapa Ceylonensis (Swains.)

Platynchus ceylonensis Swainson, Lool. Illustr. ser. i. pl. 13 and text (1820-1) (錫蘭).

2 ♀ 麗江山脈, IX 1918; 1 ♂, 1 ♀, 揚子江流域, 8,000–10,000 呎, IX 1918 叢林. (虹彩褐;嘴黑褐;腿及足暗橄欖色.) 1 ♂ 1 ♀, 瑞麗江與怒江分水界, 10,000 呎, V–VI 1919; 1 ♂, 1 ♀, 騰越縣 1919.

169. 黃腹鶲 bhelidorynx hypoxantha (Blyth.)

Rhipidura hypoxantha Blyth, Fourn. As. Soc. Bengal, Xii. p. 935 (1843(大吉嶺).

7 ♂, 2 ♀, 麗江山脈, 10,000–12,000 呎, VI–X 1918; 3 ♂ 瑞麗江與怒江分水界, 8,000 呎, V, XI 1919. (虹彩暗褐;嘴黑,下顎黃褐;腿及足暗橄欖色.) 1 ♂, 騰越縣, 1919.

170. 白腹藍鶲 Muscicapa Melanops Melanops Vig.

Muscicapa Melanops Vigors, proc. Comm. Lool. Soc. Lond. p. 171(1831)

(希馬拉雅).

2 ♂, 1 ♀ 麗江山脈, 8,500–10,000 呎, V–VII 1918 曠野及松林中; 1 ♀揚子江流域, IX 1918; 2 ♀唐山, 9,000-10,000 呎, IX 1918; (虹彩暗褐;嘴腿及足黑.)

3 ♂, 2 ♀ 騰越山谷, 5,300–5,400 呎, IV–V 1919, 叢林. (虹彩黑;嘴,腿及足黑).

雄鳥翼長度差異 83-89 MM,

171. 馬尼坡藍鶲 Muscicapa Cucomelanura Carviniventris (Sharpe.)

Digenia Cerviniventris Sharpe, Cat. Birds Brit. Mus iv. p. 460. No. 2 (1879) (馬尼坡之丘陵).

雄成鳥之胸部,比緬甸亞森毋,四川鳥較深而明顯.

3 ♂ 成鳥, 2 ♀ 成鳥, 1 ♂未成長鳥, 1 幼鳥,麗江山脈, 11,000–14,000 呎,松林, VII–VIII 1918, 1 幼鳥,瑞麗江流域, 6,000 呎, IX 1919. (虹彩赤褐;嘴黑;腿及足暗褐黑).

172. 漠平銹胸藍鶲 Muscicapa hodgsonii (Verr.)

Siphia hodgsonii Verreaux, Nouv. Arch. Mus. paris, Vi., Bull. p. 34 (1860) (漠平).

4 ♂ 成鳥, ♀ 3 成鳥,麗江山脈, 12,000–13,000 呎,松林, VI–X 1918. (虹彩,嘴,腿,及足黑.) 1 ♂ 成鳥, 2 ♀成鳥,騰越縣 1919.

173. 赤胸鶲 Muscicapa parva albicilla (pall.)

Muscicapa albicilla pallas, Loogr. Rosso-Asiat. i. p. 462 (1827) (Dauria.)

1 ♂ 幼鳥麗江流域. 12,000 呎, X 1918; 1 ♂, 1 ♀ 揚子江流域 7,000–9,000 呎, IX 1918; 1 ♂,唐山, 10,000 呎, VIII 1918; 1 ♂ 騰越西北部丘陵, X 1919, 叢林中. (虹彩赤以至暗褐;嘴,腿及足黑).

174. 橙喉鶲鶲 Muscicapa strophiata (Hodgs.)

Siphia strophiata Hodgson, Indian Review, i. p. 651 (1837) (尼泊爾).

兩個體羽不刀殘之雄鳥,翼長 76, 77 MM. 印度及中國別處之標本平均爲 67-73 MM., 但有兩個爲 75, 77, 故吾不能以雲南鳥與此有若何區別也.

3 ♂ 成鳥, 2 ♀ 成鳥, 1 ♂ 未成長鳥, 1 ♀ 極幼鳥,麗江山脈, 9,000–13,000 呎,雜林中, VII-X 1918. (虹彩黑褐;嘴黑;腿及足暗褐,) 2 ♂ 成鳥,騰越縣 1919.

175. 銹鶲 Muscicapa sibirica guliginosa (Hodgs.)

Hemichelidon fuliginosa Hodgson, P. Z. S. London, p. 32 (1845) (尼泊爾).

Forrest 送來之標本,比 Tring 博物院所藏者上體褐色遜而黑色盛,吾以爲此只新羽之關係耳.

4 ♂, 5 ♀ 成鳥, 3 ♂ 鳥極幼者,麗江山脈, 10,000–12,000 呎,松林中, VI–X 1918. (虹彩暗褐;嘴幽黑;腿及足黑.) 2 ♂ 成鳥, 4 ♀ 未成長鳥,騰越縣, 1919.

176. Muscicapa blythi nom. Nov. (尚無譯名).

Muscicapula molanoluca Blyth, Fourn. As. Soc. Bengal. Xii. p. 940 (1842) (尼泊爾,大吉嶺).

2 ♂ 成鳥,瑞麗江與怒江分水界, 9,000 呎,松林中, V 1919. (虹彩黑藍,嘴,腿,及足黑.) 1 ♂ 成鳥, 1 ♀ 未成長鳥, 1 騰越,縣, 19.9.

177. 大河藍鶲 Muscicapa rubeculoides dialilaema (Salvad.)

Cyornip dialilaema Salvadori, Ann. Mus. Genov. (2), Vii. p. 387 (1889) (大河 Karen Hills.)

其赭色直趨腮部,爲本種最明顯之特徵.

3 ♂ 成鳥,揚子江流域, 8,000 呎,溪旁之叢林中, IX 1918. (虹彩橙褐;嘴黑;腿及足灰黑).

178. 八莫藍鶲 Muscicapa tickelliae whitei (Har.)

Cyornis whitei Harington. Ann, Mag. Nat. Hist. (8), 11. p. 245 (1908) (八莫縣之華陀 Watau.)

1 ♂, 1 ♀ 騰越山谷, 5,400 呎,叢林, IV 1919. (虹彩黑褐;嘴黑;腿及足灰褐.) 1 ♂, 1 ♀, 騰越縣, 1919.

179. 赭腹尼他瓦 Niltava sundara Hodgs.

Niltava sundara Hodgson, Indian Review, i p. 650 (1837) (尼泊爾).

Outram Bangs 別雲南鳥爲 sundara denotata, 但 Forrest 送來之標本,吾以爲與錫金及亞森母並無差異,雖然,兩雄鳥乃極大,翼長 86 MM.

2 ♂, 2 ♀, 1 ♂, 4 ♀ 未成長鳥,麗江山脈, 10,000–11,000 呎溪旁之叢林中, VI–IX 1918; 1 ♂ 瑞麗江流域,5,000–6,000 呎, VI 1919. (虹彩黑褐;嘴;腿及足黑.) 1 ♂ 成鳥, 1 ♀ 未成長鳥,騰越縣, 1919.

180. 大尼他瓦 Niltava grandis (Blyth,)

Chaitaris grandis Blyth Journ. As. Soc. Bengal, Xi. p. 189 (1842) (大吉嶺).

1 ♂ 未成長鳥,騰越縣, 1919.

在雲南恐以此爲第一次記載.

181. 白喉扇尾鶲 Rhipidura albicollis albicollis (Vieill.)

Platyrhynchus albicollis Vieillot, Nouv. Dict. d'Hist. Nat. XXVII p. 13 (1818) (孟加拉).

此標本與 Tring 博物院之海南鳥相同,與印度之標準鳥並無區別.

2 ♂, 1 ♀ 揚子江流域, 7,000–8,000 呎溪旁之叢林中, IX 1918; 4 ♂, 1 ♀, 騰越山谷, 5,500 呎, III–IX 1919. (虹彩黑褐;嘴腿及足黑).

182. 短嘴山椒鳥 Pericrocotus brevirostris ethologus Bangs & Phillips.

Muscipeta brevirostris ethologus Bangs & Phillips, Bull. Mus. Canp. Lool. lviii. p. 282 (1914) (湖北 Hnenshan.)

10 ♂ 成鳥, 2 ♂ 未成長鳥, 6 ♂, 2 帶雛鳥羽,麗江山脈,9,-

000–12,000 呎, V–VIII 1918. (虹彩暗褐;嘴,腿及足黑).

Tring 博物院中之 brevirostris ethologus 標本,有二雄一雌乃從蒙自得來者,又有一雌與 Hume 氏所舉之 Neglectus 之雌鳥性質極爲一致,又與吾從 Cochar 北部之 Chin Hills 所得之 Neglectus 相同.若能更從雲南及亞森母得有多數標本以證 Neglectus 係與 brevirostris 並駕時,則可自成一種而不必視爲 brevirostris 中之一亞種矣.山椒鳥屬 (Pericroctus) 之赤,朱,黃等色彩,差異甚大, Bangs 及 Phillips 謂 Kulu 種,希馬拉雅緬甸種及中國種等鳥,常可以顏色上之差異而區別之,此種主張,吾不能完全贊同,除非有大幫之新羽鳥以資比較耳.

183. 朱山椒鳥 Pericrocotus speciosus speciosus (Lath.)

Turdus speciosus Latham, Iand. Orn. i. p. 363 (1790) (喜馬拉雅).

1 ♂ 成鳥, 1 ♂ 幼鳥, 1 ♀ 成鳥,騰越, VIII–IX 1919.

184. 橙紅山椒鳥 Pericrocotus roseus (Vieill.)

Muscicapa rosea Vieillot, N. Dic. d'Hist. Nat. XXi. p. 486 (1818) (孟加拉).

1 ♂, 1 ♀ 成鳥,騰越, III–IV 1919; 1 ♀,麗江山脈, 1918; 2 ♀ 揚子江流域, IX 1918.

185. 大龍眼燕 Graucalus Macei Less.

Graucalus Macei Lesson, Traite' d'Orn. p. 349 (1831) (孟加拉) (♀).

1 ♂ 未成長鳥,騰越縣, 1919.

136. 灰龍眼燕 Campophaga Melanoptèra (Rüpp.)

Ceblepyris Melanoptera Rüppell, Mus. Senckenb. iii. p. 25. pl. ii. f. 1 (1845).

1 ♂,瑞麗江流域, 7,000呎, IX 1919. (虹彩赤,嘴,腿及足黑).
1 ♂,騰越縣, 1919.

187.白首黑鵯 Microscelis leucocephalus (Gm.)

Turdus leucocephalus Gmelin, Syst. Nat. i.p. 826 (829 rect.) No. 104 (1789) (中國).

1 ♂ 成鳥, 1 ♀ 未成長鳥,唐山, 10,000 呎, VIII-IX1918; 1 ♂ 成鳥,瑞麗江與怒江分水界, 9,000 呎, XI 1919,山谷雜林中,(虹彩褐,嘴朱橙色,腿及足珊瑚紅).

188. 黑鵯 Microscelis Concolor (Blyth).

Hypsipetes Concolor Blyth, Journ. As. Soc. Bengal, XViis.p.816. No. 1,248 (1850) (德尼薩拉).

1 ♂ 成鳥, Chien-Chuan Valley, 7,000 呎, V 1918; 1 ♀ 未成長鳥,麗江山脈, 10,000 呎, IX 1918; 1 ♀ 未成長鳥,瑞麗江及怒江分水界, 7,000 呎, VII 1919. (虹彩褐赤;嘴幽褐赤;腿及足褐黑赤).

189. 鸚鵯 Spizixos Canifrons Blyth.

Spizixos Canifrons Blyth, Journ. As. Soc. Bengal, Xiv. p. 571 (1845) (Cherra Punji.)

當 Ingram 在 The Birds of Yunnan 一文 (Nov. Lool., XiX 1912) 記

載從蒙自所得之二雄一雌時,彼揣其標本爲未成長鳥,此事殊確. Bangs 及 Phillips 于蒙自及老狗寨得六標本,認爲新地方種以Spizixus canifrons ingrami 一名記載之.彼舉其重要之兩異點如下:喉灰而非褐;下體幽橄欖青而非青黃. Forrest 送來成鳥七個,吾以之與Tring博物院之八個標準鳥作比較.雲南與Tring之八個完全吻合,其中有兩個下體青黃與Tring之標準鳥同其鮮亮,而Tring之標準鳥亦有下體橄欖青,與雲南鳥同其幽暗者.十五標本中,其喉部或灰或褐灰,但決不如 Sharpe 所云作者古律褐者,蒙自之三幼鳥,其下體最爲鮮黃.以此種種事實,吾不得不謂 S. C. ingrami 與 S. canifrons 係同物異名也.

5 ♂,1 ♀,麗江山脈,8,000 呎 – 9,000 呎, V 1918,叢林及灌木林; 1 ♀, 瑞麗江與怒江分水界,VI 1919.(虹彩暗褐;嘴幽象牙色;腿及足灰褐.)

190. 斑青鵯 Alcurus striatus (Blyth.)

Trichophorus striatus Blyth, Journ. As. Soc. Bengal Xi. p. 184 (1842) (尼泊爾).

Bangs & Phillips 用 A. striatus paulus 一名詞,描述老狗寨之一雄一雌,据云;Oates對於緬甸及德那薩拉鳥較錫金鳥爲遙小一點,曾極注意,而雲南鳥適與緬甸及德那薩拉鳥相吻合云.吾曾將Tring博物院之十二雄,四雌加以量度,其結果六個錫金雄鳥翼長 98 – 107 mm. 六個亞森母及緬甸鳥則

爲 97－106 mm. Forrest 送來之二雄,翼長 109 mm. 比錫金鳥尙過 2mm. 故吾以爲雲南乃標準的 striatus 而 s.paulus 一名詞不能成立也.

2 ♂, 瑞麗江與怒江分水界, 8,000－9,000 呎, VII, XII 1919, 叢林中. (虹彩淡黃;嘴黑褐;及腿足灰黑).

191. 雲南青翼鵯 Iole Maclellandi similis subsp. Nov.

Maclellandi 之近親種類,頗爲紛雜,最近有將其分爲三種者——Maclellandi Horsf., tickelli Blyth, 及 holti Swinhoe; 次及末種更爲若干亞種.吾曾將 Forrest 之六標與經人記載之六型作愼密比較,吾以爲此係一新型,與 binghami Hartert 最爲親近,而比較之結果,又發見七亞種皆應同隸于 Maclellandi 一種之下.吾以爲 Maclellandi 及 tickelli 中之三亞種,其背部青色之多少,實不足以爲種的特徵,蓋其他各特徵,在七亞種中亦往往有程度上之差異也.吾茲以爲此七亞種應分列如下:

Iole Maclellandi Maclellandi (Hodgs.) 亞森母,希馬拉雅.

Iole Maclellandi holti (Swinhoe). 中國福州.

Iole Maclellandi similis Rotschild. 雲南.

Iole Maclellandi binghami Hart. 南撣部及上緬甸.

Iole Maclellandi tickelli (Blyth.) Karen Hills, Moulyit.

Iole Maclellandi peracensis Hart. & Butt 馬來聯邦.

Iole Maclellandi priseiventer (Robins. & Kloss) 安南南部.

I. M. similis 與 M.binghami 之區別,在其胸部較深暗,羽中央

之白色較明顯;背及頭較深暗而翼角覆雨羽之褐色較爲擴延.與 M. holti 之區別,在其腹部顏色較淺,下尾筒較黃.

3 ♂ 成鳥, 1 ♂ 幼鳥, 2 ♀ 瑞麗江與怒江分水界,8,000 呎, V,VIII 1919. (虹彩橙而帶淺赤;嘴黑褐;腿及足褐). 2 ♂, 1 ♀ 騰越縣, 1919.

標準型,瑞麗江與怒江分水界.

192. 黃肛鵯 Pygnonotus Xanthorhous And.

Pygnonotus Xanthorhous Anderson, Proc. As. Soc. Bengal, p. 265 (1869) (雲南 Manwyne.)

6 ♀, 麗江山脈,9,000 呎, V-VIII 1918, 溪旁叢林中. (虹彩暗褐;嘴,腿及足黑).

193. 緬甸橙肛鵯 Molpastes burmanicus (Sharpe.)

pycnonotus burmanicus Sharpe, Cat. B. Brit. Mus. vi. p. 125. No. 2 (1881) (緬甸鄉間).

4 ♂, 2 ♀, 騰越山谷, 5,500 呎, III-VIII 1919, 叢林. (虹彩暗褐;嘴,腿及足黑).

194. 克樂思 Chloropsis harwickii Yard & Selby.

Chloropsis hardwickii yardine & Selby Ill. Orn. ii. addenda, p. 1 (1830) (尼泊爾).

1 ♂, 麗江山脈, 1918; 1 ♂, 1 ♀, 瑞麗江與怒江分水界, XII 1919, 雜林中. (虹彩褐,嘴,腿及足黑).

195. 灰背斑伯勞 Hemipus picatus Capitalis Mc Clell.)

Muscicapa? capitalis Mc Celland P. Z. S. Lond p. 157. No. 24 (1839)(亞森母).

1♀瑞麗江流域,7,000呎,VIII 1919.(虹彩褐;嘴暗褐;腿及足黑).

196. 灰背伯勞 Lanius Schach tephronotus (Vig.)

Collurio tephronotus Vigors, Proc. Comm. Sic. Corr. Zool. Soc. Lond. pt. i. p. 43 (1831)(喜馬拉雅).

1♂, 1♀ 未成長鳥, 5♀, 麗江山脈,叢林及森林中,9,000−10,000呎, V-IX 1918; 1♀,未成長鳥, 2♂,未成長鳥,騰越周圍之丘陵及騰越山谷中,5,000−7,000呎, III-X 1919.(虹彩褐;嘴,腿及足皆黑).

197. 褐伯勞 Lanius cristatus cristatus Linn.

Lanius cristatus Linnaeus, Syst. Nat. ed. X. p. 93 (1758)(孟加拉).

有未記性別之兩標本,瑞麗江流域, IX 1919.

198. 緬甸伯勞 Lanius collurioides Less.

Lanius collurioides Lesson in Belanger's Voy. Ind. Or. Zoologie, Oiseaux, p. 250 (1834) (Pegu.)

1?未成長鳥,騰越四周之丘陵, 6,000−7,000呎, VIII 1919; 1?未成長鳥瑞麗江與怒江分水界,6,000呎 VIII 1919.

199. 黑頭伯勞 Lanius nigriceps nigriceps (Frankl.)

Collurio nigriceps Franklin, Proc. Comm. Se. Corr. Zoll. Soc. Lond. pt. i p. 117. No. 36 (1831) (Ganges & Nerbudda.)

1♂, 1♀ 騰越山谷, 5,500 呎, IX-X 1919; 1♀, 麗江山脈, 1918; 1♂ 未成長鳥, 瑞麗江流域, 6,000 呎, VIII 1919.

200. 陝西赭胸鸚嘴 Paradoxornis fulvifrons cyanophrys (Dov.)

Suthora cyanophrys Armand David, Journ. trois. Voy. Chine, i. p. 345 (1875) (陝西高原).

2♂, 2♀ 瑞麗江與怒江分水界 10,000–11,000 呎, V 1919, 竹叢中; 1♂, 麗江山脈 13,000–14,000 呎 VII 1918. (虹彩褐). 1♂, 1♀, 騰越縣, 1919.

201. 目緬粉紅鸚嘴 Paradoxornis webbiana brunnea (And.)

Suthora brunnea Anderson, P. Z. S. Lond. p. 211 (1871) (目緬, 雲南).

1? 麗江山脈, 1918; 1♂ 大理山谷, 6,500 呎, V 1918, 灌木及叢林中; 4♂, 1♀, 騰越山谷, 5,500 呎, III-VI 1919, (虹彩褐以至幽赤; 嘴及嘴峯帶黑, 其餘粉紅而帶黃灰; 腿及足幽灰). 1, 騰越縣, 1919.

202. 雲南褐鸚嘴 Paradoxornis unicolor saturatior subsp. nov.

上體比 U. unicolor 較爲深暗; 頭及上頸較深褐而飽和深灰; 背及腰較深暗, 橄欖褐勝而非黃褐; 翮較幽而赭色少; 腮及耳羽較爲深色. 下體之喉及胸皆較深色而灰色較盛; 腹脅暗灰褐而不帶黃色.

3♂, 2♀, 瑞麗江與怒江分水界, 9,000 呎, 雜林, VII-IX 1919. (虹彩褐, 嘴角質黃; 腿及足暗灰褐). 標準♂, VII.

203. 黑耳鸚嘴 Paradoxornis guttaticollis A. Dov.

Paradoxornis guttaticollis Armand David, Nouv. Arch. Mus. Paris, Vii., Bull. p. 14 (1871) (四川西部).

1♂, 3♀, 唐山, 10,000 呎, VIII 1918, 松林. (虹彩赤褐;嘴檸檬黃;腿及足幽青). 1♂, 瑞麗江與怒江分水界, 8,000 呎, V 1919. 1♂, 騰越南部丘陵, VIII 1919; 1♀, 瑞麗江流域, 7,000 呎, VIII 1919.

204. 雲南金冠 Regulus regulus yunnanensis Ripp.

Regulus yunnanensis Rippon, Bull. B. O. C. xix. p. 19 (1906) (雲南西部揚子江流域).

3♂, 1♀, 麗江山脈, 10,000 呎, 松林, X 1918. (虹彩褐;嘴黑褐;腿及足橄欖褐).

205. 打箭爐黑頭山雀 Aegithaliscus bonvaloti (Oust.)

Acredula bonvaloti Oustalet, Ann. Se. Nat. Zool. (7), 12. p. 286. pl. g. f. 1 (1891) (打箭爐).

10♂, 7♀ 麗江山脈, 7,000–14,000 呎, V-VII 1918, 松林. (虹彩淨黃;嘴黑;腿及足深褐).

206. 紅頭山雀 Aegithaliscus erythorcephalus concinus (Gould.)

Psaltria concina Gould, Birds of Asia, ii. pl. 65 (1855) (中國).

吾以為 Rippon 之 Ae. talifuensis 與上種實係相同,帶斑及脇部較深暗而頭部較淺淡者,係羽毛磨損之關係也. Tring 博物院有許多標本(及許多之 Forrest 標本)與 Rippon 之標準型,

完全相若。

2 ♂, 1 ♀ 唐山, 10,000 呎, IX 1918; 2 ♂, Chien-Chan Valley, 7,000 –8,000 呎, V-VI 1918; 2 ♂, 揚子江流域, IX 1918; 2 ♂, 1 ♀, 1?, 麗江山脈, 10,000 – 11,000 呎; VI-IX 1918; 1 ♂, 瑞麗江與怒江分水界, V1919, 松林. (虹彩淨黃;嘴黑,腿及足褐). 3 ♂, 2 ♀, 1?, 騰越縣 1919.

207. 雲南黑冠山雀 Parus dichrous wellsi Baker.

Parus dichrous wellsi Stuart Baker, Bull. B. O. C. XXXViii. p. 8 (1917) (雲南西部之揚子江).

4 ♂, 2 ♀ 麗江山脈, 10,000 – 13,000 呎, 松林, V-VII 1918. (虹彩鮮朱紅;嘴黑;腿及足深灰).

208. 錫金黑山雀 Parus rufonuchalis beavani (Jerd.)

Lophophanes beavani Jerdon, Birds of India, ii. p. 275 (1863) (Mount Tongloo, Sikkim.)

6 ♂, 1 ♀ 麗江山脈, 10,000 – 13,000 呎, 松林, V-VIII 1918. (虹彩黑褐;嘴,腿及足黑).

209. Parus ater subsp.?

Ingram 鑑定 Rippon 從麗江得來之標本,認爲 P. ater aemodius, 但此標本既甚凋殘. Forrest 從麗江得來之兩標本,體羽極爲不完,不能別其爲 ater aemodius 抑 ater pekinensis 也,惟其翼覆雨之白色及淡黃點斑尙未凋殘,因其點斑極爲細小,故吾以爲若能得有大幫新羽標本,則此必爲 ater 中一尙未

知名之中國地方種(第三種)也.

1♂, 1♀,麗江山脈, 10,000－13,000 呎, V-IV 1918, 松林.(虹彩暗褐;嘴黑;腿及足暗灰).

210. 灰山雀 Parus major commixtus Swinh.

Parus commixtus Swinhoe. Ibis (2), 4. p. 63 (1863)(廈門).

2♂ 成鳥,1?, 2 未成長鳥,麗江山脈, 10,000－12,000 呎,松林中, VI-VII 1918.(虹彩暗褐;嘴,腿及足黑).

Uchida 及 Kuroda 之記載為 P. major minor, 此顯係錯誤,蓋 M. comixtus 之標本中有與 M. minor 極相近似者也.

211. 青背山雀 Parus Monticolus insperatus Swinhoe.

Parus inspiratus Swinhoe, Ibis (2) 2. p 308 (1866)(台灣).

3♂, 麗江山脈, 9,000－12,000 呎, VI-VII 1918, 松林及雜林中.(虹彩暗褐;嘴,腿及足黑).

212. 打箭爐山雀 Parus hypermelaenus dejeani Oustalet.

Parus dejeani Oustalet, Bull Mus. Hist Nat. Paris, Vol. iii. p. 209 (1897)(打箭爐).

1♂, 麗江山脈,10,000 呎,V 1918, 松林.(虹彩褐;嘴;腿及足黑).

213. 黑斑黃山雀 Parus spilonotus Blyth.

Parus spilonotus Blyth, Cat. Bs. Mus. As. Soc. p. 103 (1849)(喜馬拉雅).

2♂, 瑞麗江與怒江分水界,9,000 呎, V,VII 1919 叢林.(虹

彩暗紅;嘴黑;腿及足黑灰).

214. 白尾鳾 Sitta himalayensis yard. & Selby.

Sitta himalayensis yardine & Selby, Illust. Orn. 3. pl. 144 (1835) (喜馬拉雅).

1♂, 瑞麗江與怒江分水界,9,000呎,雜林中, XII, 1919.(虹彩紫;嘴灰褐;腿及足暗褐).

215. 滇鳾 Sitta yunnarensis O.-Grant.

Sitta yunnanensis Ogilvie-Grant, Bull. B. O. C. x. p. xxxvii. (1900) (雲南南部之 Wai-Yuan).

10♂, 1♀ 麗江山脈, 9,000 呎,松林, V-VIII 1918. (虹彩暗褐;嘴灰黑;腿及足灰黑).

216. 閩鳾 Sitta europaea montium La Touche,

Sitta montium La Touche, Ibis, p. 404 (1899) (福建掛墩).

4♂, 麗江山脈, 9,000-13,000呎,松林, V-X 1918. (虹彩黑褐;嘴黑,邊緣及下顎帶灰;腿及足黑). 1♂, 1♀騰越縣,1919.

217. 攀牆鳥 Tichodroma Muraria (Linn.)

Certhia Muraria Linneaus, Syst Nat. edit. Xii. i. p. 184 (1766) (歐州南部).

1?麗江山脈, 1918.

219. 雲南攀木 Certhia himalayana yunnanensis Sharpe.

Certhia yunnanensis Sharpe, Bull. B. O. C. xiii. p. 11 (1902) (雲南西部之 Shayang.)

1♀麗江山脈, 1918.

219. 藏攀木 Certhia familiaris Rhamensis Bianchi.

Certhia Rhamensis Bianchi in Sharpe Handlist Birds, vol. iv. 355 – 360 (1903) (Kham 上湄公河).

1♂, 2♀, 麗江山脈, 10,000 呎, X 1918, 松林. (虹彩暗褐;嘴黑,下顎灰;腿及足橄欖褐).

220. 錫金攀木 Certhia discolor discolor Blyth.

Certhia discolor Blyth, Journ. As. Soc. Bengal. Xiv. ii. p. 580 (1845) (大吉嶺).

1♀, 瑞麗江與怒江分水界, 10,000 呎 V 1919.

221. 北綉眼 Zosterops erythorpleurus Swinhoe,

Zosterops erythropleurus Swinhoe, Ibis, P. 294 (1863) (中國北部)

9♂, 3♀,麗江山脈, 10,000 呎,溪旁之叢林中, X 1918. (虹彩暗褐;嘴幽粉褐而帶肉色;腿及足橄欖灰).

222. 南綉眼 Zosterops palpebrosa simplex Swinhoe.

Zosterops simplex Swinhoe, Ibis, p. 331 (1861) (廈門).

Oustalet 對於 Z. Mussoti 與 Z. Simplex 兩種之區別,除許多不足留意之特徵外,更舉顯著之異點二,謂前種體遙小而上背之青色含多量之金黃色.就大小而言, Simplex 之翼長度差由 51 至 62 mm. 而 Oustalet 則舉為 52 mm. Forrest 送來之標本,翼長 59 mm. 而其上體幽綠,只下腰微染金黃,但有許多 Simplex 則其金黃色正如 p. palpebrosa 也.故吾以為 Mussoti 實

與 aimplex 同將異名耳.

1? 麗江山脈,1918; 2, 騰越縣,1919.

223. 朱胸啄花鳥 Dicaeum ignipectus ignipectus (Blyth).

Myzanthe ignipectus Blyth, Journ. As. Soc. Bengal. Xii. p. 983. (1843) (尼泊爾及不丹).

2♂, 1♀,麗江山脈, 13,000 呎, VI 1918; 1♂, 瑞麗江與怒江分水界, 10,000 呎, V 1919, 松林. (虹彩黑褐;嘴,足及腿黑). 1♂,騰越縣.

224. 小啄花鳥 Dicaeum minulum olivaceum Wald.

Dicaeum olivaceum Walden, Ann. Mag. Nat. Hist. (4), Xv. p.401 (1875) (Tonghoo and Karen Hills.)

2♂, 1♀,騰越丘陵, 6,000–7,000 呎,松林及雜林中, VI-VIII 1919.(虹彩及嘴黑褐;腿及足灰黑). 2♂, 2?騰越縣.

225. 黃腹啄花鳥 Pachyglossa melanozantha Blyth.

Pachyglossa melanozantha Blyth, Journ. As. Soc. Bengal, Xiii. p. 1010 (1843) (尼泊爾).

在中國此爲第一次記載.

10 (概記作雄鳥), 麗江山脈,9,000–12,000呎,V-VIII 1918, 松林中. (虹彩赤褐;嘴灰黑;腿及足幽黑). 5♂騰越縣.

226. 赤尾太陽鳥 Æthopyga ignicauda (Hodgs.)

Cinnyris ignicauda Hodgson, Ind. Rev. ii. p. 273 (1837) (尼泊爾).

1♂, 麗江山脈, 1918; 3♂,瑞麗江與怒江分水界,7,000–

8,000呎,溪旁之叢林,VII 1919.(虹彩,嘴,腿及足黑).

Stuart Baker君記載於錦嶺(Chin Hills)得來之鳥爲Aethopyga ignicauda flavescens(Bull. B. O. C. xi. p. 71. No. 2 (1921),其最重要之特徵在其胸部參雜之朱色較少.通常雲南鳥,與錦嶺型較吻合而與喜馬拉雅鳥較不相似,獨此次所列舉之四雄則爲標準種 ignicauda ignicauda,蓋其胸部朱色,較喜馬拉雅鳥尙多也.若得有大幫之雲南西北部及西藏東部標本,以其胸部參雜朱色之擴大,必可證明此係一第三亞種.

譯者按: Stuart Baker 旣以胸部參雜朱色較多,上體赤色及下體黃色較深於標準種等特徵認此爲新亞種矣.(Aethopyga ignicauda exultans Stuart Baker, Bull. B. O. C. xlvi, p. 13 (1925)).

227. 騰越黃背太陽鳥 Aethopyga seheriae viridicauda subsp. nov.

背部灰色較盛而下體橄欖色較少,此點與S. andersoni相似,而與S. seherial相異,但尾部青色則與後種相同.

5♂, 騰越四周之丘陵, 5,000–6,000呎,權木叢中, VI 1919. (虹彩黑;腿及足黑褐;嘴褐).

Tring博物院有一撣部Maymyo得來之標本,與此相同.

228. 打箭爐太陽鳥 Aethopyga dabryii (Verr.)

Nectarinia dabryii Verreaux, Rev. and Mag. Zool. p. 173. pl. 15(1867)(打箭爐).

12♂成鳥, 1♂幼鳥, 2♂未成長鳥, 3♀麗江山脈,9,000

−12,000 呎,松林, V-VIII 1918. (虹彩黑褐;嘴黑;腿及足橄欖青). 1♂,瑞麗江與怒江分水界, 10,000 呎,V 1919; 2♀成鳥, 2♀, 騰越縣.

229. 黑胸太陽鳥 Aethopyga saturata (Hodgs.)

Cinnyris saturatus Hodgson. Ind. Rev. ii. p. 273 (1837) (尼泊爾).

1♂, 2♀,騰越縣.

230. 尼泊爾黃背太陽鳥 Aethopyga nipalensis (Hodgs.)

Cinnyris nipalensis Hodgson, Iad. Rev. ii. p. 273 (1837) (尼泊爾).

2♂, 2♀,瑞麗江與怒江分水界, 7,000−8,000 呎, V-XI 1919, 雜林. (虹彩黑褐;嘴,腿及足黑). 2♂成鳥, 2♂未成長鳥, 1♀ 騰越縣.

Ingram 記載爲 Sanguinipectus, 吾以爲此或因鳥皮不良以致鑑定時發生錯誤耳.

231. 賀孫鶺鴒 Motacilla alba hodgsoni Blyth.

Motacilla hodgsoni Blyth, Ibis, p. 49 (1865) (尼泊爾).

1♂, 麗江山脈, 8,500 呎, V 1918; 1♂,瑞麗與怒江分水界, 6,000 呎, V 1919, 流水. (虹彩暗褐;嘴,腿及足黑.)

232. 白面鶺鴒 Motacilla alba leucopsis Gould.

Motacilla leucopsis Gould, P. L. S. Zond. p. 78 (1837) (印度).

1?,麗江山脈, 1918.

233. 灰鶺鴒 Motacilla Coarula melanope Pall.

Motacillo melanope Pallas, Reise Prov. Russ. Reich. iii. p. 696 (1776)

(Dauria.)

1♂，麗江山脈，9,000－10,000呎，X 1918，溪流及田野；1♂騰越山谷，5,000－6,000呎，X 1919.（虹彩暗褐；嘴黑褐；腿及足幽褐）.

234. 堪察加黃鶺鴒 Motacilla flava simillima Hart.

Motacilla flava simillima Hartert, Vög paläarkt. Fauna, i.p. 289. No. 454 (1910)(堪察加).

2♂，騰越縣，1919.

235. 黃頭鶺鴒 Motacilla citreola Citreola Pall.

Motacilla citreola Pallas, Reise Prov. Russ. Reich. iii. p. 696 (1776)（西伯利亞東部）.

2♀，麗江山脈，9,000呎，V 1918，溪流，2♂，騰越山谷及平原，5,300呎，IV 1918.（虹彩，♂黑，♀暗褐；嘴黑褐；腿及足黑）.

236. 滇鷚 Anthus Cerezowskii yunnanensis Uch. & Kur.

Anthus maculatus yunnanensis Uchida & Kuroda, Annot. Zool. Fap. vol. ii.p. 134. No. 2 (1916)（蒙自）.

4♂，4♀，麗江山脈，10,000－13,000 呎，高山草原中，V-VIII 1918.（虹彩暗褐；嘴黃褐；腿及足淡褐）.

237. 長爪鷚 Anthus richardi richardi Vieill.

Anthus richardi Vieillot, Nouv, Dict. d'Hist. Nat. xxvi. p. 491 (1818)（法國）.

1♂，2♀，騰越山谷，5,500呎，曠野之草原中，III 1919.（虹彩

暗褐;嘴黑;上顎之兩側及下顎全部灰褐;腿及足淺褐而色幽).

238. 樹鷚 Anthus roseatus Blyth.

Anthus roseatus Blyth, Journ. As. Soc. Bengal, Xvi. p. 437 (1847) (尼泊爾).

1♂, 1?麗江山脈,X 1918; 1♂騰越縣, 1919.

239. 孟加拉鷚 Anthus rufulus rufulus Vieill.

Anthus rufulus Vieillot Dict. d'Hist. Nat. XXvi. p. 494 (1818) (孟加拉).

1♂, 1♀騰越西部丘陵,6,000呎,曠原中,IV 1919.(虹彩暗褐;嘴粉紅褐;腿及足淺褐).

240. 小雲鳥 Alauda gulgula coelivox Swinh.

Alauda coelivox Swinhoe, Zoologist, p. 6724 (1859)(廈門).

2♂, 2♀,麗江山脈, 8,500 – 10,000 呎, VI-X 1918,多石之草原中. (虹彩褐;嘴灰褐;腿及足淺褐).

241. 北雲鳥 Alauda arvensis intermedia Swinh.

Alauda intermedia Swinhoe P. Z. S. Lond. P. 89 (1863)(上海).

1?麗江山脈, 1918.

242. 冠鵐 Melophus melanicterus (Gm.)

Fringilla melanicterus gmelin, Syst. Nat. i. pt. ii. p. 910 (1789) (澳門)

6♂ 成鳥,瑞麗江與怒江分水界, 6,000 – 7,000 呎,灌木及叢林林中, VI 1919; 2♀, 1♂ 未成長鳥,騰越, VIII-IX 1919.(虹

彩暗褐;嘴角褐;腿及足淺褐).

243. 小鵐 Emberiza pussilla Pall.

Emberiza pussilla Pallas. Reisa Prov. Russ. Reich. iii. p. 697 (1776) (Daurian Alps.)

2♀, 麗江山脈 1918; 1♂, 1♀ 騰越山谷, 5,000 呎, III 1919. 開曠乾燥之草原中. (虹彩暗褐;嘴暗灰褐;腿及足幽褐). 1♂, 騰越縣, 1919.

244. 灰首鵐 Emberiza fucata fucata Pall.

Emberiza fucata Pallas, Reise Prov. Reichs iii. p. 698 (1776) (Dnon & Ingoda.)

1♂, 騰越, V 1919; 1♂, 瑞麗江流域, 6,000 呎, VIII 1919; 1♂, 騰越縣, 1919.

245. 雲南草鵐 Emberiza Cia yunnanensis Sharpe.

Emberiza yunnanensis Sharpe, Bull. B. O. C. xiii. 12 (1902) (雲南西部之雞足山).

Hartert 鑑定秦嶺及打箭爐標本認爲係 yunnansis 其實 yunnansis 之色彩較深也.

11♂, 麗江山脈, 10,000 – 12,000 呎, 松林, V-IX 1918. (虹彩暗褐;嘴黑,上顎兩側及下顎全部灰色;腿及足淺褐).

Emberiza cia omissa subsp. Nov.

與 C. gadlewskii 之不同,在其頭部之赭褐較深及較擴大,背,尾,翼覆雨之羽緣亦然,腰純黃而非玉桂或玉桂赭色.頭,頸

及上胸之灰色俱較深於godlewskii. 又與C. Yunnanensis比較,則此鳥體羽之赭色及褐色部俱不若雲南鳥之深暗,斑眉灰而非灰白.腹,脇及下尾篇亦俱淺於雲南鳥而深於 godlewskii.

地點: 西太白山秦嶺山脈.

標準型 No. 1719, Tring 博物院.

246. 灰首鵐 Emberiza spodocephala melanops Blyth.

Emberiza melanops Blyth, Journ. As. Soc. Bengal. Xiv. p. 554 (1845) (Tipperah.)

2 ♂, 麗江山脈, 1918.

Oustalet 記雲南鳥爲sp. spodocephala 顯係錯誤.

247. 東鵐 Emberiza eleyans Temm.

Emberiza elegans Temminck, pl. Col. 583 (1835) (日本).

6 ♂, 2 ♀ 麗江山脈, 9,000 呎, V 1918, 叢林及松林中. (虹彩暗褐;嘴黑;腿及足極淺褐).

248. 唐湖銹雀 Passer rutilans assamilis Wald.

Passer assamilis Walden, Ann. Mag. Nat. Hist (4) v. 218 (1870) (唐湖 Tonghoo.)

5 ♂, 2 ♀,麗江山脈, 10,000 – 12,000 呎, V-VI 1918, 松林; 2 ♂, 騰越丘陵, 1919. (虹彩暗褐;嘴黑;腿及足幽褐). 1 ♂, 1 ♀,騰越縣, 1919.

249. 赤頭朱雀 Propyrrhula subhimachala (Hodgs.)

Carythus? subhimachalus Hodgson, As. Res. xix. p. 152 (1836)(尼泊爾).

Forrest 送來之標本,體羽褪換甚劇,翼長不能量度;頭,背,腰之散雜朱色尤多於希馬拉雅之雄鳥,胸部之赤色亦較濃.因只有一易羽之標本,不足以紀述一新地方種也.

1♂, 麗江山脈, 1918.

250. 尼泊爾朱雀 Procarduelis nipalensis Hodgs.

Carduelis nipalensis Hodgson, As. Res. XiX. p. 157 (1836) (尼泊爾中部及北部).

1♂, 4♀, 麗江山脈, 12,000－13,000 呎, VI-X 1918, 松林. (虹彩暗褐;嘴灰褐;腿及足灰褐).

251. 錫金朱雀 Procarduelis rubescens Blanford, P. Z. S. Zond. p. 694. pl. 74 (1871) (錫金).

1♂, 麗江山脈,13,000 呎,松林,X 1918; 1♂,瑞麗江與怒江分水界, 9,000 呎, V 1919. (虹彩暗褐;嘴幽褐;腿及足褐).

252. Haematospiza indica (Gm.) (尚無相當譯名).

Loxia indica Gmelin Syst. Nat. i. p. 847 (1780.)

3♂, 瑞麗江與怒江分水界, 10,000呎,松林及雜林中, VII 1919.(虹彩暗褐;嘴角黃;腿及足暗褐).

在中國此爲第一次記載.

253. 朱雀 Carpodacus erythrinus roseatus (Hodgs.)

Pyrrhulinota roseata Hodgson P.Z.S. London p. 36 (1845) (尼泊爾).

2♂ 成鳥,1♀成鳥,1♂,1♀未成長鳥,麗江山脈,8,500–12,000 呎,松林, V-VI 1918; 1♂成鳥,瑞麗江與怒江分水界,10,000 呎, IX 1916.(虹彩黑褐;嘴,腿及足角褐).

254. 藏朱雀 Carpodacus vinaceus Verr.

Carpodacus Vinaceus Verreaux Nouv Arch. Mus. Paris Vi., Bull p.39 (1870)(西藏高山).

1♂,1♀,瑞麗與怒江分水界,8,000–9,000 呎,叢林及松林中.VIII–IX 1919; 1♀,麗江山脈,11,000 呎, VI 1918.(虹彩暗褐;嘴角褐;褐腿及足幽褐).

255. 雞足山朱雀 Carpodacus ripponi (Sharpe.)

Propasser ripponi Sharpe, Bull. B. O. C. Xiii. p. 11 (1902)(雲南西部之雞足山).

8♂,3♀,麗江山脈,8,500–14,000 呎,松林及灌木林中.(虹彩雄暗褐,雌赤褐;嘴雄淺褐,雌暗褐.)

256. 雲南白眉朱雀 Carpodacus thura femininus Ripp.

Caopodacus femininus Rippon, Bull. B. O. C. XiX. p. 31 (1906)(雲南西部揚子江).

此亞種之雄鳥,尚未經人記載.雄鳥之 th. dubius 之區別,在其頭側較深暗,上半部爲深葡萄赤,幾與眼先同色;下體亦較幽而葡萄粉紅色較勝;背及腰亦遙爲深暗.雌鳥與 dubius 之雌鳥較,其下體羽之中央黑條紋較寬而較尖,眉斑無前部赭色之一段.

4♂,5♀,麗江山脈,11,000－14,000呎,松林,VII-X 1918.(虹彩暗褐;嘴,雄褐灰而雌灰褐;腿及足雄幽褐而雌幽暗褐).

257. 黃頭黑雀 Pyrrhoplectus epauletta (Hodgs.)

Pyrrhula? epauletta Hodgson As. Res. XiX p. 156 (1836)(尼泊爾北部及中部).

2♂, 瑞麗江與怒江分水界, 11,000 呎,崖石間, V,VII 1919 (虹彩黑;嘴黑褐;腿及足橄欖褐).

258. 沙?陽雀 Pyrrhula erythaca altera Ripp

Pyrrhula altera Rippon, Bull. B. O. C. XiX. p. 19 (1906)(雲南西部之沙陽 Shayang.)

5♂,4♀,麗江山脈, 1,2000 呎,松林, VI-VIII 1918, (虹彩暗褐;嘴黑,腿及足淺褐).

Pyrrhula erythaca taipaishanensis subsp. nov.

其白色之喉部常多着橙色,胸部之赤色擴延至於前頸,環繞顏面及額部之白帶斑較寬,此皆與 e. erythaca 不同之點,胸部之赤色亦差異甚大,一如 e. erythaca, 但常參雜黃色,自青橙黃以至火橙色或鮮朱不等.

雌鳥與 e. erythaca 雌鳥不同之點,在其黃色之顏面及前額,較不擴大.

翼長: 33♂ 78－84 mm.; 8♀ 76－81 mm.; 1♂ 未成長鳥 79 mm.

地點:秦嶺山脈之太白山.標準♂,17. Vi. 1905, Tring 博物院.

259. 藏金雀 Carduelis thibetanus (Hume.)

Chrysomitris thibetana Hume, Ibis, p. 107 (1872) (錫金及西藏邊境).

1 ♂, 麗江山脈, 1918.

在理,雲南之 Carduelis 應爲打箭爐之 C. bieti, 今竟得此品種,真可異也.

260. 雲南青雀 Carduelis ambiguus (Oust.)

Chrysomitris ambiguus Oustalet, Bull. Mus. Paris, p. 186 (1896) (雲南)

7 ♂, 3 ♀ 麗江山脈, 9,000–12,000 呎,松林, V-VI 1918; 3 ♂, 瑞麗江與怒江分水界,9,000 呎,V 1919.(虹彩暗褐;嘴角灰;腿及足灰褐).

261. 蠟嘴 Eophona melanura migratoria Hart.

Eophona melanura migratoria Hartert, Vög. paläar. Faun. i-p. 59. No. 96 (Sidimi.)

1 ♂, 1 ♀,騰越山谷,5,500 呎,松林及叢林中, III 1919. (虹彩黑褐;嘴淺橙色;腿及足淺赤褐).

262. 錫金大嘴雀 Perissospiza icteroides affinis (Blyth)

Hesperiphona affinis Blyth, Fourn.As. Soc. Bengal, XXiv. p. 178(1855) (錫金).

Forrest 送來之單獨雄鳥,尚未十分成長,腿羽仍爲橄欖色.

1 ♂, 麗江山脈, 14,000 呎,松林, VIII 1918.(虹彩暗褐;嘴幽藍青而有褐點斑;腿及足灰褐而帶粉紅色).

263. 馬來栗腹文鳥 Munia atricapilla atricapilla (Vieill.)

Loxia atricopilla Vieillot, Ois. Chant. p. 84. pl. 63 (1805) (大印度 Les Grandes Indes.)

6♂, 瑞麗江流域,6,000－7,000呎,叢林,VI 1919. (虹彩黑;嘴鉛灰;腿及足深灰). 1♂,瑞麗江與怒江分水界,VIII 1919.

264. 斑腹文鳥 Munia punctulata topela Swinh.

Munia topela Swinhoe, Ibis, p. 380 (1863) (台灣).

8♂成鳥,1♂未成長鳥,瑞麗江與怒江分水界,9,000呎,松林及雜林中,V－VI 1919; 2♂未成長鳥,南田山谷 (Nantien Valley) 4,500呎,IV 1919. 4♀,騰越西北部丘陵,6,000呎,X1919.(虹彩雄赤褐而雌深褐;嘴,雌幽黑而雄黑;腿及足雄深灰而雌紫灰).

1♂ 成鳥, 1♂幼鳥,騰越縣. 1919.

265. 緬甸赤文鳥 Sporaeginthus flavidiventris (Wall.)

Estrelda falvidiventris Wallace, P. Z. S. p. 495(1865)(Timor and Flores.)

1♂, 騰越南部丘陵, 6,000呎, X1919, 叢林中. (虹彩橙赤;嘴朱色;腿及足淡褐).

266. 緬甸黃鸝 Oriolus indicus tenuirostris Blyth.

Oriolus tenuirostris Blyth, Journ. As. Soc. Bengal. XV p. 48 (1846)(印度中部).

2♂ 成鳥, 1♂幼鳥, 1♀成長鳥, 1極幼之雛,麗江山脈10,000呎,松林中, VI 1918; 1♀未成長鳥,唐山, 10,000呎, VIII

1918.(虹彩深紅;嘴幽赤褐;腿及足黑).

Ingram 用 indicus indicus 記載兩蒙自鳥,必係此種無疑也.又或在平原生殖之鳥爲 indicus 在山中生殖者爲 tenuirostris 亦未可定.

267. 髮冠魚尾燕 Chibia hottentota (Linn.)

Corvus hottentota Linnaeus, Syst, Nat. i. edit. Xii. p. 155 (1766) (好望角,誤也!)

1♂, 揚子江流域, 6,000 – 7,000 呎,雜林, IX 1918. (虹彩淨黃;嘴,腿及足黑).

268. 黑魚尾燕 Dicurus ater cathoecus Swinh.

Dicurus cathoecus Swinhoe, P. Z. S. Lond. p. 377 (1871) (中國).

1♂, 1♀未成長鳥,騰越山谷,1919; 1♀瑞麗江流域,6,000 – 7,000 呎, VIII 1919. (虹彩深紅;嘴,腿及足黑).

269. 緬甸灰魚尾燕 Dicurus leucophaeus nigrescens Oates.

Dicurus nigrescens Oates, in Humés Nest and Eggs, edit. 2. i. p. 208 (1889) (Rangoon.)

Ingram 於彼之目錄中旣包含 nigrescens 及 longicaudata 兩種;但無論蒙自鳥或 Forrest 標皆非 longicaudatus, 可斷言也. Bangs and Phillips 記蒙自鳥爲 pyrrhops, 但此名亦不可用,應稱爲 nigrescens Oates.

1♂, 2♀, 1? 麗江山脈, 8,500 – 10,000 呎,松林及雜林中, V–VI 1918; 1♂騰越山谷, 5,500 呎, III 1919. (虹彩暗紅;嘴,腿及足

黑).

270. 白翼八哥 Sturnia nemoricola yerd.

Sturnia nemoricola yerdan, Ibis, p. 22 (1862) (Thayetmyo.)

1♀, 瑞麗江與怒江分水界,8,000 呎,叢藪及森林,VI 1919. (虹彩暗紅;嘴,基段黑,先段黃;腿及足淺橄欖色).

271. 南八哥 Acridotheres tristis (Linn.)

Paradisea tristis Linneaus, Syst. Nat. edit. Xii. i. p. 167 (1766) (菲律賓羣島).

1?麗江山脈, 1918.

272. 八哥 Acridotheres cristatellus Gm.

Gracula cristatella Gmélin, Syst. Nat. i. p. 397. no. 5 (1788) (中國).

1?麗江山脈, 1918.

273. 環頭八哥 Acridotheres albocinctus Godw.-Aust. and Wald.

Acridotheres albocinctus Godwin-Austen and Walden, Ibis, p. 251 (1875) (馬尼坡山谷).

1?麗江山脈, 1918.

(未完)

書 評

高等平面曲線論之重要書籍

以方程式表示平面曲線,可大別爲二.一曰代數曲線,爲有窮項代數方程式之軌迹.二曰超越曲線,爲指數,對數,三角函數,或其他超越函數方程式之軌迹.凡曲線以一次或二次代數方程式表之者,謂之初等平面曲線.其以三次以上之代數方程式表之者,謂之高等平面曲線.惟討論高等曲線時,幷非將初等曲線屏棄不論,不過謂二次以下曲線之性質,爲人所熟知耳.

代數方程式,依次數之增進,其曲線種類之數目亦加多,如下:

一次線祇直線一種.

二次曲線,亦名圓錐曲線.有圓,拋物線,橢圓,雙曲線四種.

三次曲線,牛頓,斯武林 (Stirling),克剌麥 (Cramer) 分爲十四類,共七十八種.普盧克 (Plücker) 分爲六十一屬,二百一十九種.薩曼 (Salmon) 分爲三十部.麥俾烏 (Möbius) 分爲七門.威涅 (Wiener) 分爲十三族.沙爾 (Chasles) 分爲五項.若以虧格

(Deficiency)及特殊性(Singularities)分之,則爲三大類.

四次曲線,歐拉(Euler)分爲一百四十六類,共五千餘種.普盧克分爲九系,一百五十二式.薛宥(Zeuthen)分爲九綱,三十六目.若以虧格及特殊性分之,則爲十大類.

五次以上之曲線,種類更多,分法愈繁.

由此觀之,可知研究高等曲線,非賴特別法術駕馭之不爲功.因採用之法甚夥,故所需之知識亦極廣.如創立三線坐標(Trilinear Coordinates),施行切線方程(Tangential Equations),幻設無窮遠元素(Elements at Infinity),利用對偶之原理(Principle of Duality),注意其特殊性,射影性(Projectivity),交比(Cross-Ratio),直射(Homography),配極(Reciprocation)等是.至若函數理論,不變式論,變換理論(Principle of Transformation),對應學說(Theory of Correspondence),橢圓積分(Elliptic Integral)亞伯爾積分(Abelian Integral)等,亦均爲研究此科者不可少之工具也.

關於是科書籍,英德法文咸備.而義大利幾何學派,更是嶄然奇出,特具精采.故欲窺全豹,義文書籍,尤須三致意焉.我國對於此科,目下尚無專書,致使純粹真理,在東亞隱然不彰.闡發光明之責,是深有望於同好.茲略述關於此科之重要書籍於次:

G. Salmon: Higher Plane Curves, third ed., Dublin.

(薩曼:　高等平面曲線論)

是書可稱英文書中研究此科者之聖經.在愛爾蘭之都伯

林出版三次.其第二版較初版擴充篇幅爲三七九面,三版更增至三九五面.書中記載薩曼之重要發明,披露普盧克,赫斯(Hesse), 揆力(Cayley)諸氏研究所得之結果.依賴是書之力,近世幾何與代數得有猛然之進展.惜已絕版,縱出重價,恐不易得手耳.

G. Salmon: Analytishe geometrie der höheren ebenen kurven.

(薩曼: 高等平面曲線解析幾何學)

是書爲薩曼平面曲線論之德文課本.

R. F. A. Clebsch: Vorlesungen Über Geometrie, bearbeitet und herausgeben von F. Lindemann, zweite aufl., Teubner, Leipzig.

(克勒布希: 幾何學講義)

凡三卷.爲德文書中之鉅製,抑研究是科者首屈一指之善本.熔合赫斯,薩曼,史泰(Steiner)諸氏之著作爲一爐.取虧格(Geschlecht)爲主,作有系統的研究,以區分代數曲線.誠不可不讀之書也.

R. F. A. Clebsch: Leçons sur la Géométrie, recueillies et complétées par F. Lindemann, et traduites par A. Benoist.

(克勒布希: 幾何學課本)

乃克勒布希幾何學講義法文譯本.書凡三卷,第一卷論圓錐曲線及代數方式之理論,第二卷論普通代數曲線及三次曲線,第三卷論亞伯爾積分與點面式(Connexes.)

F. Enriques: Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, Bologna.

(恩利魁: 代數函數與方程之幾何學原理)

書分二卷,爲義大利文最近之名著.讀是書可知義國幾何學派新近之發展.

J. L. Coolidge: Treatise on Algebraic Plane Curves, 1931.

(科立琪: 代數平面曲線論)

是書爲英文書中最新之名著.搜集各家精萃,合成一册,共五一三面,詳略適當,可作課本或自修之用.

S. Ganguli: Theory of Plane Curves, second ed., Calcutta.

(岡谷利: 平面曲線論)

書分二卷,刊行於印度之加爾各答大學.第一卷論曲線原理,第二卷論三四兩次曲線,而超越曲線亦附焉.

H. Hilton: Plane Algebraic Curves, Oxford.

(希爾頓: 平面代數曲線)

全書分二十一章.關於曲線之重要性質及原理,已粲然大備.其所採集例題,復暗示以解法途徑,尤便學者之研究.

H. Wieleitner: Theorie der ebenen Algebraischen Kurven höheren Ordnung.

(威來涅: 平面高等代數曲線原理)

C. Wiener: Die einleitung der ebenen Kurven, etc.

(威涅: 平面曲線論)

以上二書爲德文曲線論之傑作.

E. Beutel: Algebraische Kurven

(柏式: 代數曲線)

是書可供研究曲線論者之參攷.

J. Plücker: Analytisch-geometrische Entwicklungen, Essen.

(普盧克: 解析幾何學新論)

是書刊行於德國厄森地方,凡分三卷.採取簡略記法,避免煩厭運算,應用對偶原理,設立三線坐標,極可珍貴之書也.但已絕版,在舊肆中,或可得之.

J. Plücker: System der Analytischen Geometrie, Berlin.

(普盧克: 解析幾何系論)

是書刊行於柏林.當論三次曲線時,依無窮遠點之性質,詳細爲之分類.

J. Plücker: Theorie der Algebraischen Kurven, Bonn.

(普盧克: 代數曲線理論)

是書刊行於德國波昂地方.將四次曲線細爲分類.并就平面曲線之諸尋常特殊性列爲關係式,所謂普盧克方程式是也.依該方程式,遂得說明蓬舍勒似是而非之定理 (Poncelet's Paradox), 實爲近代幾何學中之一極重要發明.

L. Cremona: Introduzioni ad una teoria geometrica delle curve piane

(格里摩拿: 平面曲線幾何學原理)

是書爲義大利文.敍述多種新結果,且先以綜合法證明之,極可珍貴之作也.

L. Cremona: Einleitung in eine Geometrische Theorie der Ebenen Kurven, deutsch übertragen von M. Curtze, Greifswald.

是書爲上述格氏著作之德文譯本,刊行於德國之格來福華.

G. Cramer: Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes Algébriques, Cramer et Philibert, Genève.

(克剌麥: 代數曲線之解析)

是書刊行於瑞士之日內瓦.其討論四次曲線,係依在無窮遠處之性質,分之爲八科,再細分爲各種.

F .G. Teixeira: Tratado de las Curves Especiales Notables, Madrid.

(泰賽拉: 特種著名曲線論)

書分三卷,刊行於西班牙京城馬得里.因泰氏對於曲線論貢獻甚多,故是書之價値,自不待言,抑西班牙文中研究此科者之佳本也.

F. G. Teixeira: Traité des Coubers Spéciales remarquables,

(泰賽拉: 特種著名曲線論)

是書爲上述泰氏所著西班牙文之法文譯本.

G. Loria: Spezielle Algebraische und Transzendente Kurven der Ebene, deutsch übertragen von F. Schütte, Teubner, Leipzig.

(羅立亞: 特別代數及超越平面曲線)

此書由義文譯成德文,其名貴可知.書中載有汎代數曲線(Panalgebraische Kurven)之理論.

H. Wieleitner: Spezielle ebene Kurven.

(威來涅: 特別平面曲線)

此書亦威氏之名著.

H. Durége: Die ebenen Kurven dritter Ordnung, Leipzig,

(杜累治: 三次平面曲線)

H. Schröter: Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung, Teubner, Leipzig.

(許洛忒: 三次平面曲線論)

以上二書,爲德文討論三次曲線之專書.

E. Dumont: Introduction à la géométrie des courbes du troisième ordre.

(杜蒙: 三次曲線幾何學)

此書爲法文討論三次曲線之專書.

H. S. White: Plane Curves of the Third Order.

(槐特: 三次平面曲線)

此書爲美國討論三次曲線之專書,刊行於美國之劍橋.

A. B. Basset: Treatise on Cubic and Quartic Curves.

(巴塞: 三次及四次曲線論)

此書爲英國討論三四兩次曲線之專書,刊行於英國之劍橋.

G. H. Halphen: E'tude sur les points singuliers.

(哈芬: 特殊點之研究)

此書爲研究特殊點之專刊.

C. F. Klein: Einleitung in die höhere Geometrie, Göttingen, 2 Bde.

(克來因: 高等幾何學)

是書乃石印講義,分爲二卷,蓋不可少之參攷書也.

B. Pascal: Repertorium der höheren Geometrie.

(巴斯噶: 高等幾何學彙報)

是書用作參攷,極有裨益.

O. Schlömilch: Kompendium der höheren Analysis, 2 Bde.

(徐洛密: 高等解析彙編)

是書可供參攷之用.

H. Wieleitner: Bibliographie der höheren algebraischen Kurven für den Zeitabschnitt von 1890 bis 1904.

(威來涅: 高等代數曲線傳記自 1890 年至 1904 年)

M. Nöther: Göttinger Nachrichten.

(諾忒: 格丁根學報)

M. S. Lie: Göttinger Nachrichten.

(李氏: 格丁根學報)

A. Cayley: Collected Mathematical Papers, Cambridge, 13 vols.

(揆力: 數學全集)

以上四書,可備研究時之參攷.

F. Lucas: Études analytiques sur la théorie générale des courbes planes.

(劉卡司: 平面曲線普通原理之解析研究)

H. Malet: Étude géométrique des transformations birationnelles et des courbes planes.

(馬雷: 雙有理變換幾何學及平面曲線論)

以上二者,可作法文之參攷書.

B. Niewenglowski: Cours de Géométrie analytique, 3 volumes, 2e éd., Paris.

(聶溫洛基: 解析幾何學)

是書分三卷,其第二卷論平面曲線之作法.

R. A. Proctor: Treatise on the Cycloid and all Forms of Cycloidal Curves.

(普洛托: 旋輪線論)

此書中作有圓內外旋輪線各種有趣圖形.採用十三種不同之法,以解幾何學問題,又以七種獨立之法,以求圓內外旋輪線之面積.

P. Frost: Curve Tracing, 4 ed.,

(傅洛士: 曲線求迹法)

Wm, W. Johnson: Curve Tracing.

(約翰孫: 曲線求迹法)

以上二書為曲線求迹法之專書.

昭 安

國立武漢大學理科季刊投稿簡章

一・本季刊登載關於數學物理化學生物地質等學科之稿件海內外人士惠賜大作一律歡迎

二・投寄稿件不拘文言白話但須依本季刊形式一律橫書每面二十二列每列二十三字繕寫清楚并加新式標點符號

三・稿件題目之下請署姓名如係譯稿須註原著者姓名或雜誌書報之名稱及其出版時期地點

四・稿中如有插畫或圖表請另用白厚紙繪畫或製成照片或附寄原圖

五・本刊稿件依照數學物理化學生物地質等學科之順序登載

六・來稿如未登載除預先聲明者外恕不退還

七・稿件登載後本刊略備薄酬以答雅意

八・稿件內容本刊得酌量增删但不願意者請預先聲明

九・來稿請寄武昌國立武漢大學理科季刊編輯會

國立武漢大學理科季刊第一卷第四期目錄

國立武漢大學理科季刊第二卷第一期目錄

國立武漢大學文哲季刊第二卷第一號目錄

國立武漢大學社會科學季刊第二卷第二號目錄

定價：每册銀五角　總發行所：武昌國立武漢大學出版部
代售處：　各埠商務印書館

第十一卷第八號要目

第十一卷第九號要目

『東北問題專號』

國立中央研究院
各所館新出版刊物

所館	出版品	編著者	定價
化學研究所	集刊第三號(中國新本艸圖誌第一集第二卷)	趙燏黃	一册一元五角
	集刊第四號(微量磷之另一比色定量法等)	曾義	一册一角五分
	集刊第五號(英文)(右旋性穀胺酸誘導體之味)	曾昭掄 朱汝華	一册一角五分
工程研究所	中央陶瓷試驗場工作報告	周仁	一册七角
	集刊第一號	王季同	一册六角
地質研究所	集刊第十號(中文)	葉良輔等	一册一元五角
	集刊第十號(英德文)	斯行健等	一册一元五角
	叢刊第一號	葉良輔等	一册一元五角
天文研究所	恆星光帶強度分配的研究(英文)	余青松	一册五角
	民國二十年天文年曆		一册一元五角
氣象研究所	集刊第二號	呂炯	一册一元
	氣象月刊四卷一期二期		每期一册一元六角
歷史語言研究所	安陽發掘報告第三期	李濟等	一册一元五角
	延平王戶官楊英從征實錄		一册二元
	校輯宋金元人詞	趙萬里	五册四元
	山東人體質之研究	吳金鼎	一册一元
	明清史料	第五卷	一册一元
	,,	第六卷	一册一元
	,,	第七卷	一册一元
社會科學研究所	六十五年來中國國際貿易統計(中英文)	楊端六 侯厚培	一册八元
	近代農村經濟的趨向	宗華	一册五角
	英文初編圖書目錄		一册八角
自然歷史博物館	叢刊第八號	方炳文	一册二角五分
	特刊第一號	E. D. Merrill	一册一角

經售處						
上海	商務印書館	生活週刊社	開明書店	新月書店＋	北新書局＊	中國書店＋
南京	商務印書館	中大出版部	保文堂＊	國粹書店＊	本院	
北平	歷史語言研究所	北大出版部	景山書社	開明書店	神州國光社	商務印書館
各埠	商務印書館					

＋經售史語所刊物
＊經售史語及社會科學兩所刊物

普通刊物
英文概況(二十年) 每册一元五角
十八年度總報告 每册一元五角
院務月報 每册一角

本院各所館出版品爲數繁多不克備載茲摘錄其最新出版者若干種於上詳細書目請附郵票一分向南京成賢街本院或上海亞爾培路三三一號本院出版委員會函索

國立武漢大學理科季刊

第二卷第二期

價目	郵費
全年四冊 價銀二圓	訂購全年 本國及日本不加郵費 其他地域加郵費六角
每期零售 價銀五角	函購零本 本國及日本加郵費五分 其他地域郵費一角五分
本刊以九月十二月三月及六月爲出版期	
費須先惠空函不覆	
各地代售處零售概不另加郵費	

編輯者　國立武漢大學理科季刊委員會

發行者　國立武漢大學出版部

印刷者　中國科學公司

代售處　商務印書館

總發行所　武昌 國立武漢大學出版部

中華民國二十年十二月發行

1932年

第 2 卷

第 3 期

國立武漢大學

理科季刊

第二卷第三期

QUATERLY JOURNAL OF SCIENCE

WU-HAN UNIVERSITY, WUCHANG, CHINA

Vol. II No. 3 March 1932

本 期 目 錄

中華民國二十一年三月發行

國立武漢大學理科季刊委員會編印

中華郵政局特准掛號認爲新聞紙類

國立武漢大學理科季刊

第二卷第三期目錄

頁數

國立武漢大學理科季刊

第二卷第四期目錄預告

平面圖形之種種表示法

曾 瑊 益

以方程式表示圖形,因所含變數不同,其所作出之圖形迥異.由圖形以作方程式,因所用坐標各別,其所列出之方程式懸殊.是故研究平面圖形時,不可不知用何法以作圖,及採何術以列式也.此等問題,業經各數學家多方考慮.茲特集之於篇,諒必邀同好者之樂聞也.

(1) 卡氏坐標法. 爲解析幾何學中常用之法.設立原點,取橫縱二坐標軸,以橫坐標 x 及縱坐標 y 表出圖形,亦謂之雙線坐標法 (Bilinear coordinates), 以式列之爲

$$y = f(x).$$

此法再細分之爲二.當坐標軸之交角爲直角時,謂之直坐標法.當坐標軸之交角爲斜角時,謂之斜坐標法.

例. 求兩點 $P(x_1, y_1)$ 及 $Q(x_2, y_2)$ 之距離.

若命兩軸間之交角爲直角,用直坐標法,得兩點之距離爲

$$PQ = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}.$$

若命兩軸間之交角爲 ω, 用斜坐標法,得兩點之距離爲

$$PQ = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + 2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\omega}.$$

(2)極坐標法.　設立極點(Pole)及極軸(Pole axes).自任意點 P 至極點之長爲矢徑(Radius vector),以 r 表之.矢徑與極軸之交角爲矢角(Vectorial angle),以 θ 表之.列出其式爲

$$r = f(\theta)$$

例.　求圓錐曲線之極方程式.

設極點爲一焦點,極軸垂直於其準線,離心率爲 e,自焦點至準線之距離爲 p,則得圓錐曲線之方程式爲

$$r = \frac{ep}{1-e\cos\theta}.$$

(3)襄數表示法.　卽橫坐標 x 及縱坐標 y 均爲一個襄數 t 之函數,以式列之爲

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

例.　星形線(Astroid)之襄數方程式爲

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

(4)矢量坐標法(Vector coordinates).卽在方程式中用以定坐標者之變數,不僅有大小,并須有方向也.

(5)圓坐標法(Circular coordinates).爲皮耳士(Peirce)所用之法.設 ν 爲坐標軸與法線相交之角,ϱ 爲曲率半徑,以式列之爲

$$\varrho = f(\nu)$$

例.　$\varrho = A\sin^n \nu$

爲表示垂絲線,拋物線,旋輪線等各種曲線之方程式.

(6)本質方程(Intrinsic equation)表示法. 一曲線之本質方程者,乃表示曲線之長度與其切線方向變化之關係式.設 τ 爲坐標軸與切線相交之角, s 爲曲線之長,以式列之爲

$$s = f(\tau)$$

例. $s = R\tau$ 爲圓之本質方程.

$s = \frac{1}{2} R\tau^2$ 爲圓之漸伸線之本質方程

$s = c\tan\tau$ 爲垂絲線之本質方程.

$s = 4R\sin\tau$ 爲旋輪線之本質方程.

$s = \frac{1}{2} p \log\frac{1+\sin\tau}{1-\sin\tau} + \frac{p\sin\tau}{1-\sin\tau^2 t}$ 爲拋物線之本質方程.

(7)曲線長度及曲率半徑之表示法. 設 s 爲曲線長度, ϱ 爲其曲率半徑,以式列之爲

$$\varrho = f(s)$$

如此之式,可由直坐標所表之曲線,變其形而得之.

例. 由直線 $y=Ax$, 得 $\varrho=As$, 爲螺線之方程式.

由拋物線 $y^2=4px$, 得 $\varrho^2=4As$, 爲圓之漸伸線之方程式.

由雙曲線 $xy=A$, 得 $\varrho s=A$, 爲美麗雙有窮螺線之方程式.

由橢圓 $Ax^2+By^2=1$, 得 $A\varrho^2+Bs^2=1$, 爲圓外旋輪線之方程式,或得 $As^2+B\varrho^2=1$, 爲圓內旋輪線之方程式.若當 $A=B$ 時,則得 $\varrho=\sqrt{A^2-s^2}$, 爲旋輪線之方程式.

(8)矢徑與坐軸及切線之交角之表示法. 設 θ 爲矢徑

與坐軸之交角,ψ 爲矢徑與切線之交角,以式列之爲

$$\psi = f(\theta)$$

如此之式,可化爲 $\gamma = f(\theta)$ 而研究之.

例. $\psi=-\theta$ 爲直線之方程式.

$\psi=\theta$ 爲圓之方程式.

$\psi=\frac{1}{2}\theta$ 爲拋物線之方程式.

$\psi=-\frac{1}{2}(\theta-\pi)$ 爲心臟形線之方程式.

$\psi=-2^{\theta}$ 爲等邊雙曲線之方程式.

(9)坐軸與矢徑及切線之交角之表示法. 設 θ 爲坐軸與矢徑之交角,τ 爲坐軸與切線之交角,以式列之爲

$$\tau = f(\theta)$$

例. 因方程式 $\tau=a\theta$, 即等於 $\psi=(a-1)\theta$,

故 $\psi=b$ 或 $\tau=\theta+b$, 乃表示螺線之方程式.

又 $\tau=\frac{1}{2}\theta$ 爲拋線之方程式.

(10)橫坐標與矢徑之表示法. 設 x 爲橫坐標, r 爲矢徑之長,以式列之爲

$$r = f(x)$$

如此之式,可變爲直坐標,得 $r=\sqrt{x^2+y^2}=f(x)$.

例. $y = \sec x$ 變之得 $r = \sec x$.

$y = \tan x$ 變之得 $r = \tan x$.

$y = \log x$ 變之得 $r = \log x$.

(11)矢徑與坐軸之交角及橫坐標之表示法. 設 θ 爲矢

徑與坐軸之交角,x 爲橫坐標,以式列之爲

$$x = f(\theta)$$

如此之式,可變之爲極坐標.

例. $x=r\cos\theta$ 爲圓之方程式.

(12)矢徑與切線之交角及橫坐標之表示法. 設 ψ 爲矢徑與切線之交角,x 爲橫坐標,以式列之爲

$$x = f(\psi)$$

例. $x = B\cot\psi$

$$x = A\sqrt{\cot\tfrac{1}{2}\psi}$$

此二式均爲表示等邊雙曲線之方程式.

(13)橫坐標及坐軸與切線之交角之表示法. 設 x 爲橫坐標,τ 爲坐軸與切線之交角,以式列之爲

$$\tau = f(x)$$

例. $\tan\tau = Ax$ 爲拋物線之方程式.

$\sin\tau = Ax$ 爲圓之方程式.

(14)橫坐標及曲率半徑之表示法. 設 x 爲橫坐標,ϱ 爲曲率半徑,以式列之爲

$$\varrho = f(x)$$

例. 直線 $y=Ax$, 可變之得 $\varrho=Ax$.

(15)曲線長度及橫坐標之表示法. 設 s 爲曲線長度,x 爲橫坐標,以式列之爲

$$x = f(s)$$

例. $ax=s$ 爲直線之方程式.

$x=as^2$ 爲旋輪線之方程式.

(16)矢徑及其與切線之交角之表示法. 設 r 爲矢徑,ψ 爲矢徑與切線之交角,以式列之爲

$$\psi=f(r)$$

(17)矢徑及坐軸與切線之交角之表示法. 設 r 爲矢徑,τ 爲坐軸與切線之交角,以式列之爲

$$\tau=f(r)$$

(18)矢徑與曲率半徑之表示法. 設 r 爲矢徑,ρ 爲曲率半徑,以式列之爲

$$\rho=f(r)$$

例. $\rho=Ar$ 爲螺線之方程式.

$\rho=Ar^3$ 爲等邊雙曲線之方程式.

(19)曲線長度及矢徑之表示法. 設 s 爲曲線長度,r 爲矢徑,以式列之爲

$$r=f(s)$$

例. $r=as$ 爲螺線之方程式.

(20)矢徑與坐軸之交角及曲率半徑之表示法, 設 θ 爲矢徑與坐軸之交角,ρ 爲曲率半徑,以式列之爲

$$\rho=f(\theta)$$

但此式所表之曲線,不易求得.

(21)曲線長度及矢徑與坐軸之交角之表示法. 設 s 爲

曲線長度,θ 爲矢徑與坐軸之交角,以式列之爲

$$\theta = f(s)$$

例. $\theta=as$ 爲圓之方程式.

(22)矢徑與切線之交角及矢徑之表示法. 設 ψ 爲矢徑與切線之交角,r 爲矢徑,以式列之爲

$$r = f(\psi)$$

例. 方程式$r=a\psi$,等於$r=\frac{a}{a-1}\theta$,卽爲極坐標表示法,然亦等於$\psi=\frac{1}{a-1}\theta$,卽爲矢徑與坐軸及與切線之交角之表示法.

例. $\sin\psi = a\cos(\log r + b)\sqrt{-1}$ 爲圓之方程式.

(23)矢徑與切線之交角及曲率半徑之表示法. 設 ψ 爲矢徑與切線之交角,ϱ 爲曲率半徑,以式列之爲

$$\varrho = f(\psi).$$

(24)曲線長度及矢徑與切線之交角之表示法. 設 s 爲曲線長度,ψ 爲矢徑與切線之交角,以式列之爲

$$\psi = f(s).$$

(25)切線斜度 (Slope) 之表示法. 爲以切線斜度爲變數所作之方程式.設曲線上一點之直坐標爲 (x, y),在該點之切線斜度爲 $m\equiv\frac{dy}{dx}$,以式列之爲

$$f(m) = o.$$

(26)法線斜度之表示法. 爲以法線斜度爲變數所作之方程式.設曲線上一點之直坐標爲 (y, x),在該點之法線斜度爲$n\equiv-\frac{dx}{dy}$,以式列之爲

$$f(n)=o.$$

(27)切線與兩軸所成截段(Intercepts)之表示法. 爲以切線與軸 x 或 y 所成截段爲變數之方程式.設曲線上一點爲 $P(x,y)$, 在 P 作切線,與軸 x 相交,得自交點至原點之截段爲 $a\equiv x-y\frac{dx}{dy}$,又與軸 y 相交,得自交點至原點之截段爲 $b\equiv y-x\frac{dy}{dx}$, 以式列之爲

$$f(a)=o \quad 或 \quad f(b)=o.$$

例. 切線與兩軸所成截段之和爲定數之曲線爲星形線.

(28)法線與兩軸所成截段之表示法. 爲以法線與軸 x 或 y 所成截段爲變數之方程式.設曲線上一點爲 $P(x,y)$,在 P 作法線,與軸 x 相交,得自交點至原點之截段爲 $\alpha\equiv x+y\frac{dy}{dx}$,又與軸 y 相交,得自交點至原點之截段爲 $\beta\equiv y+x\frac{dx}{dy}$,以式列之爲

$$f(\alpha)=o \quad 或 \quad f(\beta)=o.$$

(29)切線長度之表示法. 設切線與坐軸相交於二點,以自切點至各交點之長爲變數所作之方程式也.設曲線上一點爲 $P(x,y)$, 在 P 作切線,自 P 沿切線至軸 x 之長爲 $t_1\equiv y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$;又至軸 y 之長爲 $t_2\equiv x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, 以式列之爲

$$f(t_1)=o \quad 或 \quad f(t_2)=o.$$

例. 切線向軸 x 者之長爲定數之曲線爲海亙史(Huyghens)之反摩擦曲線.

(30)法線長度之表示法. 設法線與坐軸相交於二點,以自曲線上之點至各交點之長爲變數所作之方程式也.設曲線上一點爲$P(x,y)$,在 P 作法線,自 P 沿法線至軸 x 之長爲 $n_1=y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, 又至軸 y 之長爲$n_2=x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$,以式列之爲

$$f(n_1)=o \quad 或 \quad f(n_2)=o$$

(31)次切線長度之表示法. 爲以次切線長度爲變數所作之方程式.設在曲線上一點 $P(x,y)$ 作切線.自 P 沿切線至軸 x 之長爲 t_1,則 t_1 在軸 x 上之射影爲次切線之長,卽 $t_{1x}=y\frac{dx}{dy}$,以式列之爲

$$f(t_{1x})=o.$$

例. 次切線之長爲定數之曲線爲對數曲線.

(32)次法線長度之表示法. 爲以次法線長度爲變數所作之方程式.設在曲線上一點 $P(x,y)$ 作法線.自 P 沿法線至軸 x 之長爲n_1,則 n_1 在軸 x 上之射影爲次法線之長,卽 $n_{1x}=y\frac{dy}{dx}$,以式列之爲

$$f(n_{1x})=o.$$

例. 次法線之長爲定數之曲線爲𢌞及拋物線.

(33)極次切線 (Polar subtangent) 長度之表示法. 爲以極次切線之長度爲變數所作之方程式.設曲線上一點之極坐標爲$P(r,\theta)$. 自 P 沿切線至極軸之線段與矢徑之交角爲 ψ,則極次法線之長爲$t'=r\tan\psi=r^2\frac{d\theta}{dr}$,以式列之爲

$$f(t')=o$$

例．極次法線之長爲定數之曲線爲雙曲螺線．

(34)極次法線長度之表示法．爲以極次法線之長度爲變數所作之方程式.設曲線上一點之極坐標爲$P(r,\theta)$．自P沿切線至極軸之線段與矢徑之交角爲ψ,則極次法線之長爲$n'=r\cot\psi=\frac{dr}{d\theta}$,以式列之爲

$$f(n')=o.$$

例．極次法線之長爲定數之曲線爲等距螺線．

(35)自極點至切線之距離之表示法．爲以自極點至切線所作垂線之長爲變數所作之方程式.設曲線上一點之極坐標爲$P(r,\theta)$,矢徑與切線之交角爲ψ,曲線之長度爲s,則自極點至切線之距離爲$p=r\sin\psi=r^2\frac{d\theta}{ds}$,以式列之爲

$$f(p)=o.$$

例．自極點至切線之距離爲定數之諸曲線爲諸直線及圓．

(36)自極點至法線之距離之表示法．爲以自極點至法線所作垂線之長爲變數所作之方程式.設曲線上一點之極坐標爲$P(r,\theta)$,在P作法線.自極點至法線之距離爲q,以式列之爲

$$f(q)=o.$$

(37)線坐標法 (Line coordinates)．一圖形視爲由一點之軌迹所作成者,常用點坐標法,以x,y,表之,列其方程爲

$$f(x, y) = o.$$

若一圖形視爲由一線之包迹 (Envelope) 所作成者,則用線坐標法,亦曰切線坐標法,以 (l, m) 表之,列其方程爲

$$\Phi(l, m) = o.$$

例. 設有方程 $lx + my + 1 = o$.

若以 l, m 爲常數,則此方程爲直線之卡氏方程式,其直線坐標爲 (l, m), 若以 x, y 爲常數,則此方程爲點之切線方程式,其點坐標爲 (x, y).

例. 求圓錐曲線之切線方程式.

i. 拋物線之切線方程式.

因切於拋物線 $y^2 - 4ax = o$ 之任意切線之方程式爲

$$x - ty + at^2 = o.$$

此式若恆等於

$$lx + my + 1 = o,$$

則得

$$l = -\frac{m}{t} = \frac{1}{at^2}$$

由此消去 t, 則得拋物線之切線方程式爲

$$am^2 = 1.$$

ii. 橢圓之切線方程式.

因切於橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 之任意切線之方程式爲

$$\frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} = 1$$

此式若恆等於

$$lx + my + 1 = o,$$

則得

$$la = -\cos\theta, \quad mb = -\sin\theta$$

由此消去 θ,則得橢圓之切線方程式為

$$a^2 l^2 + b^2 m^2 = 1.$$

iii. 雙曲線之切線方程式.

設雙曲線方程式為 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

依上法則,得雙曲線之切線方程式為

$$a^2 l^2 - b^2 m^2 = 1.$$

又設雙曲線以其漸近線為坐軸之方程式為 $xy = c^2$

而其任意切線之方程式為

$$\lambda^2 x + y - 2c\lambda = o$$

由此

$$l = -\frac{\lambda}{2c}, \quad m = -\frac{1}{2c\lambda}$$

則得雙曲線之切線方程式為

$$4c^2 lm = 1.$$

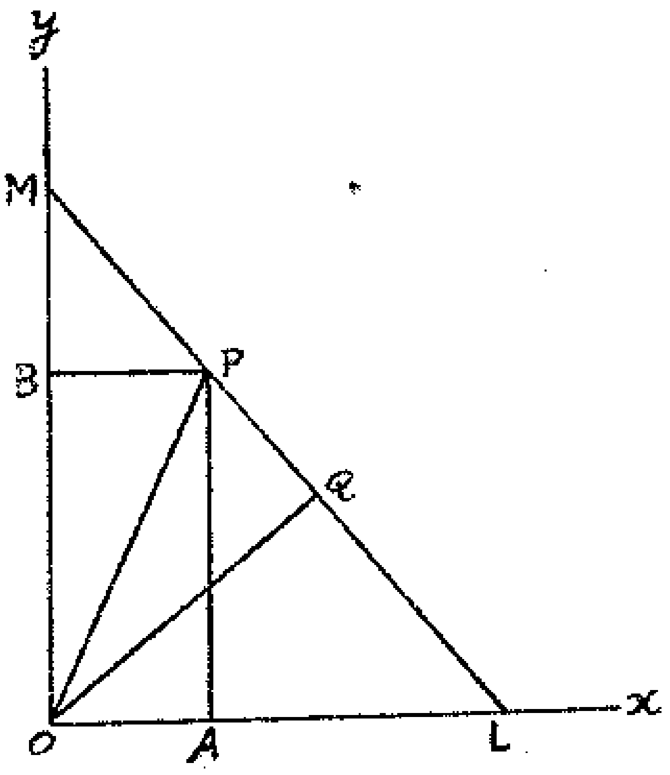
(38)切線極坐標法 (Tangential polar coordinates). 將圖形視作直線之包迹,而以極坐標表示之也.

例. 求一點之切線極坐標方程式.

設 P 為一點, LM 為通過該點之直線.

令 $OA = a, \quad AP = b = OB,$

$$\frac{1}{OL} = \xi, \quad \frac{1}{OM} = \eta$$



則得

$OL:BP::OM:BM$

或 $\frac{1}{\xi}:a::\frac{1}{\eta}:\frac{1}{\eta}-b$

$\therefore\quad a\xi+b\eta=1$

試作 $OQ \perp ML$, 令 $OQ=p$, $\angle QO$

則得

$\xi=\frac{\cos\Phi}{p}$, $\quad\eta=\frac{\sin\Phi}{p}$

於是方程式變爲

$a\cos\Phi+b\sin\Phi=p$

再若令 $OP=r$,$\angle POA=\theta$, 則又變爲

$p=r\cos(\Phi-\theta)$

此卽所求之切線極坐標方程式也.

(39)齊次坐標法. 研究平面圖形,常取二個坐標,本已足用.但若使各項之次數相同,成爲對稱之形,則尤多便利之處.卽於點坐標中用 (x, y, z), 於線坐標中用 (l, m, n) 是也.

例. 無窮遠點之坐標.

在點坐標中常用二個坐標 (x, y). 若討論無窮遠點,則宜用齊次坐標.如云 (h, k, o) 者,乃表示在直線 $kx-hy=o$ 上之一無窮遠點也.

又無窮遠點之切線方程式爲 $lx+my=o$.

例. 原點之坐標.

尋常原點之點坐標爲 (o, o). 用齊次坐標則爲 $(o, o, 1)$, 或

(o, o, c), 此式中之 c, 可爲任意之數.

又原點之切線方程式爲 $n=o$.

例. 過原點之直線之坐標.

在線坐標中,常用二個坐標 (l, m), 若討論過原點之諸直線,則宜用齊次坐標 (l, m, n). 如云 (k, k, o) 者,乃表示過原點之一直線也.

又過原點任意直線之卡氏方程式爲 $lx+my=o$.

例. 無窮遠線之坐標.

因在無窮遠處之直線之卡氏方程式爲 $z=o$. 若 l 及 m 等於零,則方程式 $lx+my+nz=o$ 變爲 $z=o$. 是以無窮遠線之線坐標爲 (o, o), 或以齊次坐標表之爲 $(o, o, 1)$.

(40)三線坐標法(Trilinear coordinates). 設取三定直線,作成標準三角形 (Triangle of reference) ABC, 其各邊爲 a, b, c, 各對角爲 A, B, C. 今任取一點 P, 向三邊作垂線,自點 P 至邊 a 之距離爲 α, 至邊 b 之距離爲 β, 至邊 c 之距離爲 γ, 則點 P 之三線坐標爲 (α, β, γ).

例. 三角形之重心之三線坐標爲 $\left(\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}\right)$.

三角形之內心之三線坐標爲 $(1:1:1)$.

三角形之外心之三線坐標爲 $(\cos A : \cos B : \cos C)$.

三角形之垂心之三線坐標爲 $(\sec A : \sec B : \sec C)$.

(41)三角坐標法 (Triangle coordinates). 亦曰面積坐標.設 $\triangle$ 爲準三角形 ABC 之面積.自任意一點 P 向各角頂作直線,

則

$$\frac{a\alpha}{2}=\text{三角形}PBC\text{之面積}$$

$$\frac{b\beta}{2}=\text{三角形}PCA\text{之面積}$$

$$\frac{c\gamma}{2}=\text{三角形}PAB\text{之面積}$$

由是　$a\alpha+b\beta+c\gamma=2\Delta$

$$\frac{a\alpha}{2\Delta}+\frac{b\beta}{2\Delta}+\frac{c\gamma}{2\Delta}=1$$

即　$$\frac{PBC\text{之面積}}{ABC\text{之面積}}+\frac{PCA\text{之面積}}{ABC\text{之面積}}+\frac{PAB\text{之面積}}{ABC\text{之面積}}=1$$

今令　$x=\frac{a\alpha}{2\Delta}$,　$y=\frac{b\beta}{2\Delta}$,　$z=\frac{c\gamma}{2\Delta}=1$

則上之恆等式變爲

$$x+y+z=1$$

謂之點 P 之方程式.此時 P 之坐標爲 (x, y, z), 謂之面積坐標.

今設於三角形各角頂置質量 m_1, m_2, m_3 求其重心 G, 則得

$m_1:m_2:m_3=GBC$ 之面積: GCA 之面積: GAB 之面積,

此時點 G 之坐標 $(m_1:m_2:m_3)$, 謂之重心坐標 (Barycentric coordinates), 適與面積坐標成比例,故面積坐標亦曰重心坐標.

例. 三角形之重心之面積坐標爲(1:1:1).

三角形之內心之面積坐標爲 $(a:b:c)$,

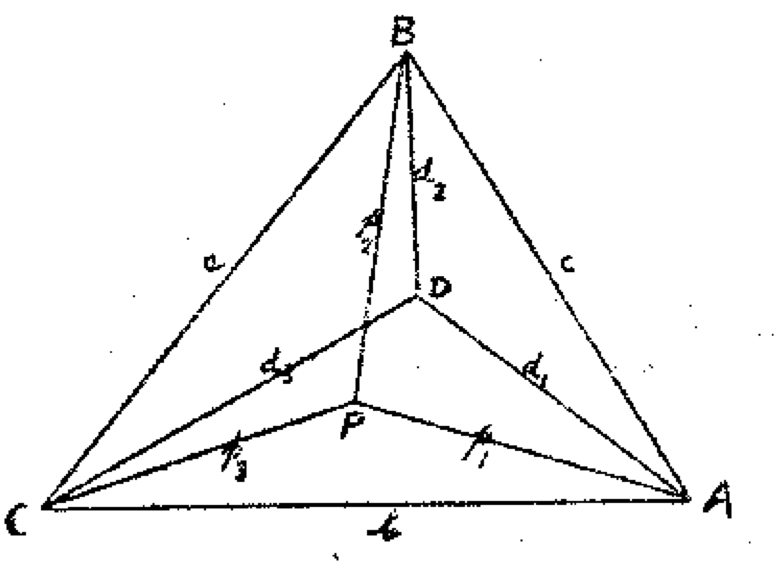
三角形之外心之面積坐標爲 $(\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C)$.

三角形之垂心之面積坐標為 $(\tan A : \tan B : \tan C)$.

(42) 射影坐標法 (Projective coordinates). 亦曰交比坐標 (Anharmonic coordinates).此法再分射影點坐標及射影線坐標兩種.

i. 射影點坐標.

設取四點 $A, B, C\ D$, 其中無有三點同在一直線者,作成標準三角形 $A\ B\ C$, 又自點 D 向各角頂作直線 d_1, d_2, d_3. 今自任意一點 P 聯各角頂作直線 p_1, p_2, p_3. 再依交比之定義,設 l_1, l_2, l_3, l_4 為四點 P_1, P_2, P_3, P_4 之坐標,則其交比為



$$(P_1P_2,P_3P_4)=\frac{(l_3-l_1)(l_4-l_2)}{(l_3-l_2)(l_4-l_1)}$$

於是作成交比

$$\lambda_1=(b\,c,\ d_1\,p_1),\quad \lambda_2=(c\,a,\ d_2\,p_2),\quad \lambda_3=(a\,b,\ d_3\,p_3).$$

因 p_1, p_2, p_3 共通過一點,此三交比必滿足於下式:

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1.$$

於此令

$$\lambda_1=\frac{x_3}{x_2},\qquad \lambda_2=\frac{x_1}{x_3},\qquad \lambda_3=\frac{x_2}{x_1},$$

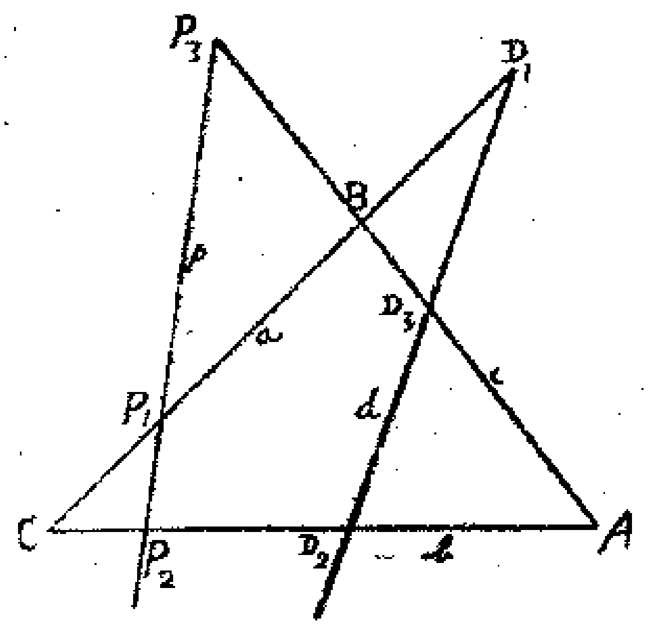
則 (x_1, x_2, x_3) 謂之點 P 之射影點坐標.

例. 在標準三角形 $A\,B\,C$ 中,點 A 之射影點坐標為 $(k,0,0$, 或 $1,0,0)$.點 B 之射影點坐標為 $(0,1,0)$,點 C 之射影點坐標為

$(o,o,1)$.

ii. 射影線坐標.

設取四線 a, b, c, d, 其中無有三線共過一點者,作成準三線形 $a \ b \ c$. 又線 d 與各邊相交於 D_1, D_2, D_3.令任意有一線 p, 與各邊相交於 P_1, P_2, P_3, 作成交比



$\lambda_1=(BC,D_1P_1)$, $\lambda_2=(CA,D_2P_2)$, $\lambda_3=(AB,D_3P_3)$

因 $P_1 \ P_2 \ P_3$ 共在一線上,此三交比必滿足於下式:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1.$$

於此令

$$\lambda_1 = \frac{u_3}{u_2}, \qquad \lambda_2 = \frac{u_1}{u_3}, \qquad \lambda_3 = \frac{u_2}{u_1},$$

則 (u_1, u_2, u_3) 謂之線 p 之射影線坐標.

例. 在準三線形 $a \ b \ c$ 中,線 a 之射影線坐標爲 $(1,o,o)$, 線 b 之射影線坐標爲 $(o, 1, o)$, 線 c 之射影線坐標爲 $(o,o\ 1)$.

(43)仿射坐標法(Affine coordinates). 爲射影坐標之特例.卽於準三角形中,取一邊 c 爲無窮遠線也.此種坐標,通常書爲非齊次之形式如下:

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1}{x_3}=(c\,a, d_2\,p_2) \\ y=\dfrac{x_2}{x_3}=(c\,b, d_1\,p_1) \end{cases}$$

又此法亦分仿射點坐標及仿射線坐標兩標.

(44)迷向坐標法 (Isotropic coordinates). 取方程式

$$\begin{cases} z = x + i y \\ \bar{z} = x - i y \end{cases}$$

式中之(x, y),即常用之卡氏坐標,此時之坐標$(z, \bar{z})$,謂之迷向坐標,亦曰絕對坐標 (Absolute coordinates).

惟因 z 與 $\bar{z}$ 爲相配複數,僅有其一,即可決定一個實點.故尋常對於一實點 P,恆以單一迷向坐標 z 表之已足.如欲用齊次坐標$(z_1 z_2)$,令

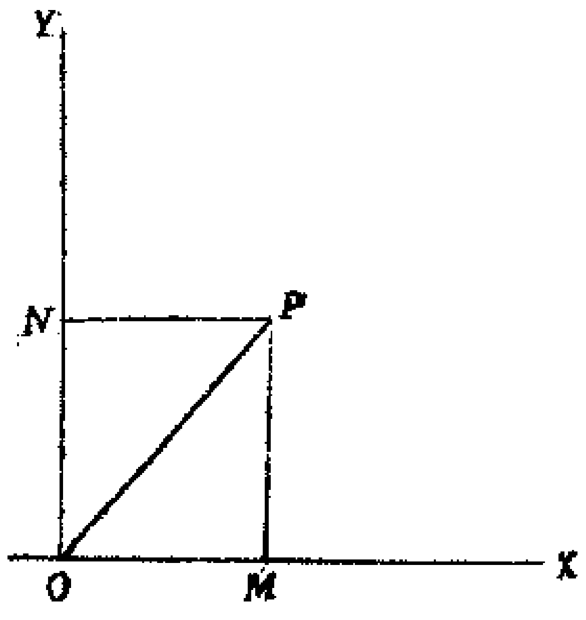
$$\frac{z_1}{z_2} = z, \qquad \frac{\bar{z}_1}{z_2} = \bar{z}$$

則由點 P 之迷向坐標$(z, \bar{z})$可變爲齊次迷向坐標$(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)$.

例. 無窮遠點之齊次迷向坐標爲$(z_1, o; \bar{z}_1, o)$.

(45)四線坐標法 (Quadrilinear coordinates). 取四線作標準四線(Four lines of reference)以研究圖形者也.

(46)四圓坐標法(Tetracyclical coordinates). 常用以研究圓之圖形,有特別四圓坐標及普通四圓坐標二種.



i. 特別四圓坐標.

設二直線 OX, OY, 在點 O 相交成直角, P 爲任意之一點,作 $PM \perp OX$, $PN \perp OY$, 則點 P 之四圓坐標爲

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \overline{OP}^2 : PN : PM : 1$$

此四坐標含有次之關係式:

$$x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_4 = 0.$$

例. 圓之方程式爲 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=o.$

ii. 普通四圓坐標.

設取四圓不交於一點者作爲標準四圓,其方程式爲

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=o$$
$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=o$$
$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4=o$$
$$d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3+d_4x_4=o$$

令

$$\varrho X_1=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4$$
$$\varrho X_2=b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4$$
$$\varrho X_3=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4$$
$$\varrho X_4=d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3+d_4x_4$$

則 $X_1:X_2:X_3:X_4$,謂之一點之普通四圓坐標.

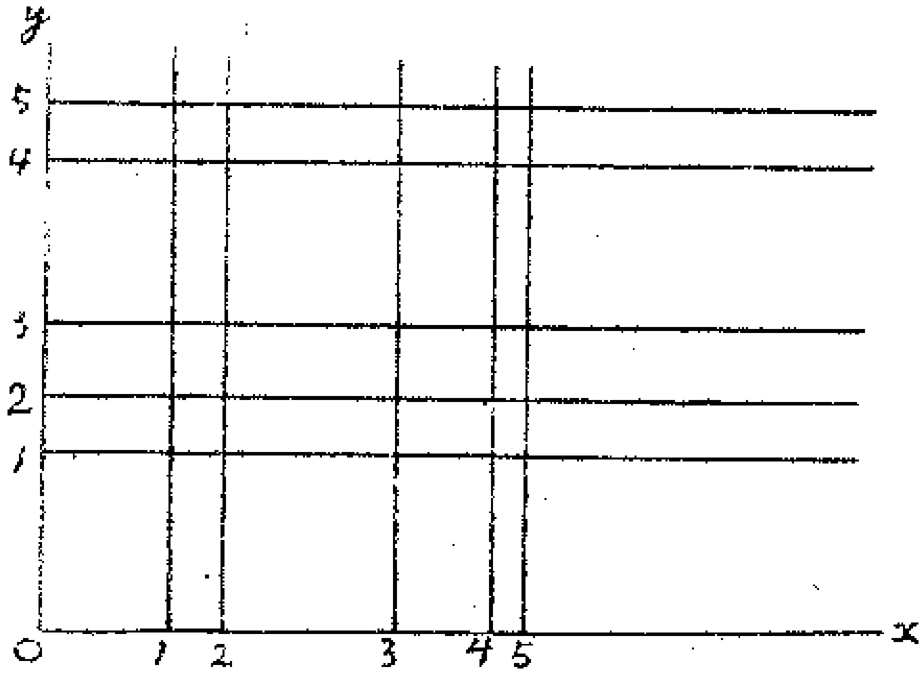
(47)複數表示法. 設 z 爲平面圖形中之一點,其直坐標爲 (x, y),極坐標爲 (r, θ).若以複數表之,則可任用下列三式之一.

$$z=x+iy$$
$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$z=re^{i\theta}$$

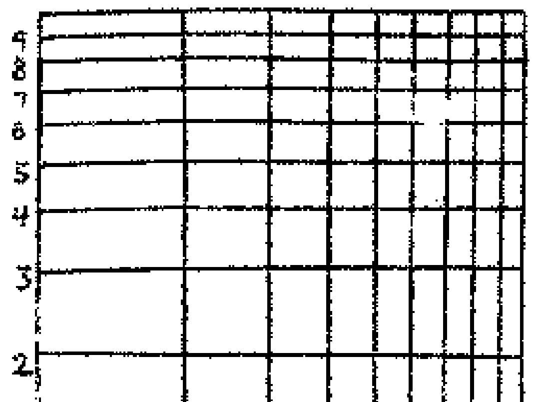
(48)變度坐標法. 在坐標中所用之長度隨時變化,其長短不趨一致者也.設直坐標 x 及 y,爲 u 及 v 之函數,即

$$x=\Phi(u),\qquad y=\Psi(v)$$

用此法常使平面中之曲線,化爲較簡之形.(如爲直線等)



(49)對數坐標法. 作圖於對數坐標紙上.所謂對數坐標紙者,於紙上設有兩軸 x 及 y,各軸上所示數目之大小,不依單位而定之,乃依對數而計算之也.例如在軸 x 及 y 上各取 1000 區分,令 2 位於第 301(log2=·301) 區分之處, 3 位於第 477 (log 3=·477) 區分之處, 4 位於第 602(log4=·602) 區分之處,餘類推.



對數坐標紙之種類不一.若在橫縱坐標中,將 1 至 10, 10 至 100, 100 至 1000 等數均區分者,則謂之複 (Multiple) 對數坐標紙.

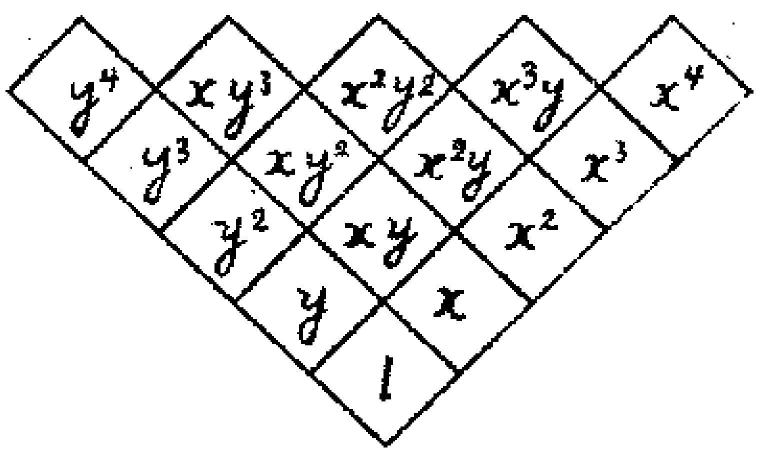
(50)化形法(Anamorphosis). 為圖解法之一種.不僅取用兩組平行於坐軸 x, y 之直線及他一組不受限制之直線,乃取用三組均不受限制之直線以作圖也.

(51)線圖解法 (Nomography). 為杜坎因 (D'Ocagne) 所用之法.乃藉直線以作圖者也.

(52)解析三角形表示法. 為笛瓜(De Gua)用以決定平面圖形近似形之法.設有四次代數方程式,牛頓將所含各項,列為次之正方形:

y^4	xy^4	x^2y^2	x^3y^4	x^4y^4
y^3	xy^3	x^2y^3	x^3y^3	x^4y^3
y^2	xy^2	x^2y^2	x^3y^3	x^4y^2
y	xy	x^2y	x^3y	x^4y
1	x	x^2	x^3	x^4

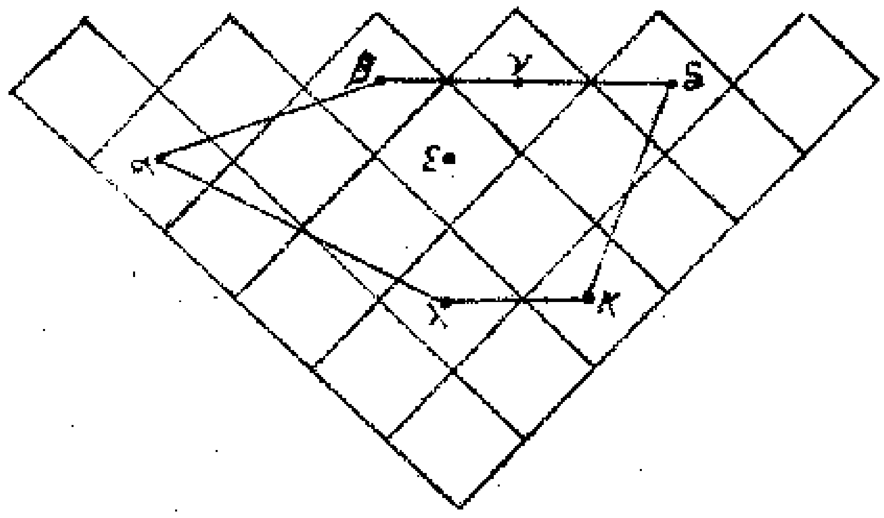
僅取其半數,即成次之解析三角形



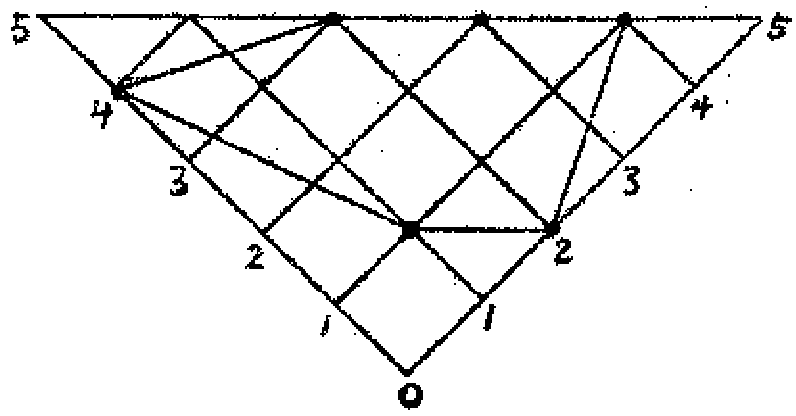
由此三角形,可研究曲線之種種性質.

例. $ay^4+bx^2y^3+cx^3y^2+dx^4y+ex^2y^2+kx^2+lxy=o$

此式各項可表示如下圖中之 α, β, γ, δ, ε, k, λ,



或表示如下圖,



(53)曲線坐標法 (Curvilinear coordinates). 任意點 P 之位置,可視爲共焦點諸橢圓及諸雙曲線之交點,而由兩囊數 λ, μ 決定之.如此所用之坐標非直線而爲曲線,故名曰曲線坐標.在特例時,如所取者爲共焦點之諸拋物線,則謂之拋物線坐標.如爲共焦點之諸橢圓,則謂之橢圓坐標.

例. 橢圓坐標.

設有一橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

及其共焦點之圓錐曲線

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$$

於此對於任意點 (x, y), 適相當於通過此點之圓錐曲線之一組襄數 λ, μ. 而此組襄數為下列方程式之根

$$\lambda^2+\lambda(a^2+b^2-x^2-y^2)+a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2=o$$

故
$$\begin{cases}\lambda+\mu=-a^2-b^2+x^2+y^2\\ \lambda\mu=a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2\end{cases}$$

由此式得

$$(a^2-b^2)x^2=\quad(a_2+\lambda)(a^2+\mu)$$

$$(a^2-b^2)y^2=-(b^2+\lambda)(b^2+\mu)$$

此時對於 (λ, μ) 之各組之值,適相當於四點,是卽兩圓錐曲線之交點也.因 λ, μ 為一個二次方程式之根,可以彼此互易.故點 (x, y) 可以橢圓坐標 (λ, μ) 或 (μ, λ) 表之.

(54)雙極坐標法(Dipolar coordinates). 設有兩個互相垂直共根軸之圓系:

$$\begin{cases}x^2+y^2+c^2=2xc\coth t\\ x^2+y^2-c^2-2yc\cot t\end{cases}$$

式中 c 為常數, t 及 u 為兩系中之實變襄數.其第一系為不相交之諸圓,以軸 y 為根軸.第二系為相交之諸圓,以軸 x 為根軸.今任取一點 P, 視作兩系中之圓之交點,則 P 之坐標 (x, y), 可以含有兩襄數 t, u 之函數表示之.而 (t, u) 者

謂之點 P 之雙極坐標.

(55)兩面中之等角(Conformal)表示法. 設有解析函數

$$w = f(z)$$

式中 $z=x+iy$, $w=u+iv$,由此函數可作圖形於平面 w 及平面 z,而由平面 w 之圖形,可作之於平面 z,反之亦然.如此兩平面中所作之圖形雖異,其角度恆不變,斯謂之等角表示法.

例. 設 $w=z^2$, 試於兩平面 w 及 z 中,互求其等角圖形.

因 $u+iv=x^2-y^2+i2xy$

卽得 $u=x^2-y^2$, $v=2xy$

由是由平面 w 中之圖,作於平面 z 中如下:

當 $u=o$ 時,則 $x^2-y^2=o$. 卽平面 w 中之軸 v, 在平面 z 中爲二直線 $x-y=o$ 及 $x+y=o$. 　當 $v=o$ 時,則 $2xy=o$. 卽平面 w 中之軸 u, 在平面 z 中爲二軸 x 及 y.

當 $u=c_1$ 時,則 $x^2-y^2=c_1$. 卽平面 w 中平行於軸 v 之諸直線,在平面 z 中爲兩組之直角雙曲線. 　當 $v=c_2$ 時,則 $2xy=c_2$. 卽平面 w 中平行於軸 u 之諸直線,在平面 z 中爲諸雙曲線.

又由平面 z 中之圖,作於平面 w 中如下:

當 $x=o$ 時,則 $u=-y^2$, $v=o$. 卽平面 z 中之軸 y, 在平面 w 中爲負軸 u. 　當 $y=o$ 時,則 $u=x^2$, $v=o$. 卽平面 z 中之軸 x, 在平面 w 中爲軸 u.

當 $x=c_3$ 時,則 $u=c_3^2-y$ 及 $v=2c_3y$, 由此消去 y 得 $v^2=4c_3^2(c_3^2-u)$, 卽平面 z 中平行於軸 y 之諸直線,在平面 w 中爲諸拋物線.

當 $y=c_4$ 時,則 $u=x^2-c_4^2$ 及 $v=2c_4x$, 由此消去 x 得 $v^2=4c_4^2(u-c_4^2)$, 卽平面 z 中平行於軸 x 之諸直線,在平面 w 中爲諸拋物線.

此外,兩平面中之其他諸曲線,均可仿此作之.

(56)傅利級數 (Fourier's Series) 表示法. 設圖形在一定節段 2π 間,爲單值,有窮,連續之函數,則恆可以傅利級數表示之,以式列之爲

$$
\begin{aligned}
f(x) = a_0 + a_1\sin x + a_2\sin 2x + a_3\sin 3x + \cdots\cdots \\
+ b_1\cos x + b_2\cos 2x + b_3\cos 3x + \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

(57)橢圓函數表示法. 若平面曲線之虧格 (Genus) 爲零時,其任意點之坐標,恆可表之爲一個襄數之函數,卽上述之襄數表示法也.但若虧格爲一時,則其任意點之坐標,恆可以橢圓函數表示之.

例. 設有三次曲線 $y^2=a+x^3\,3bx^2+3cx+d$. 則其任一點之坐標爲

$$
\begin{cases}
x=-\dfrac{b}{a}+\dfrac{4}{p}\wp u \\
y=\dfrac{4}{a}\wp' u
\end{cases}
$$

例. 設有四次曲線 $y^2=ax^4+6cx^2+4dx+e$. 則其任一點

之坐標為

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v} \\ y=\sqrt{a}\,[pu-(pu+v)] \end{cases}$$

式中 $\wp v=-\frac{b}{a}$, $\wp' v=\frac{d}{a}$.

(58)高等函數表示法. 若圖形之虧格為二或多於二時, 則須用越橢圓函數(Hyperelliptic functions), 狄達函數 (Theta functions), 亞伯爾函數 (Abelian functions), 以及其他種種函數表示之.

卵形及其應用

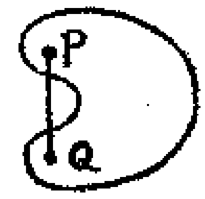
管公度

I. 說卵形.

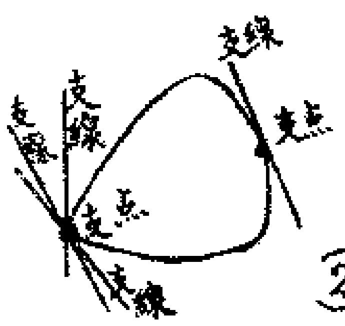
卵形之研究,在今日數學中,較為新穎.德人專攻此術者,頗不乏人,日儒藤原窪田之流,致力亦殷.關於此等之著述,現時尚無專書,不過東鱗西爪,散見於各大雜誌中而已.

定義. 設平面上有一組點之集合,簡記之以 M, 於其中任取兩點如 A, B, 聯成線分 (line segment) AB, 若 AB 上一切之點均屬於 M 中之時,則此 M 即名曰卵形 (Oval).

是故卵形必為閉合的,凸出的(Convex and closed). 非然者,則如圖 (1),將有聯線 PQ,其上之點,有不屬於 M 者矣.又其周界 (Boundary), 亦當屬於 M 中甚明.

①


定義. 在卵形之界線上,取一點,過此點,作一直線,若卵形全在此直線之一旁時,則此直線稱曰支線 (Supporting line). 此點曰支點 (Supporting Piont).若過支點,支線得作無限之多時,則此支點,又特名之曰角點 (Angular piont).[圖(2).]

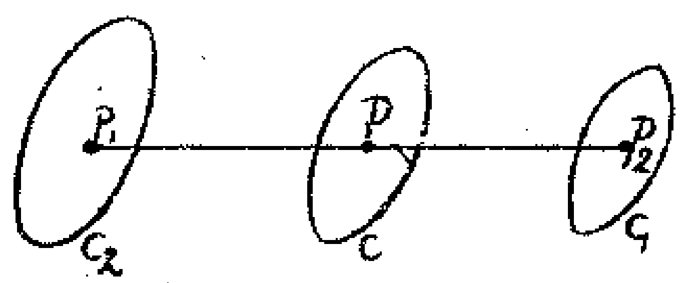


②

定理 A. 設有二卵形 C_1 及 C_2, 各於其中,任取一點 P_1

及 P_2,聯結之,令其中點爲 P,則 P 之軌迹,亦爲一卵形 C.

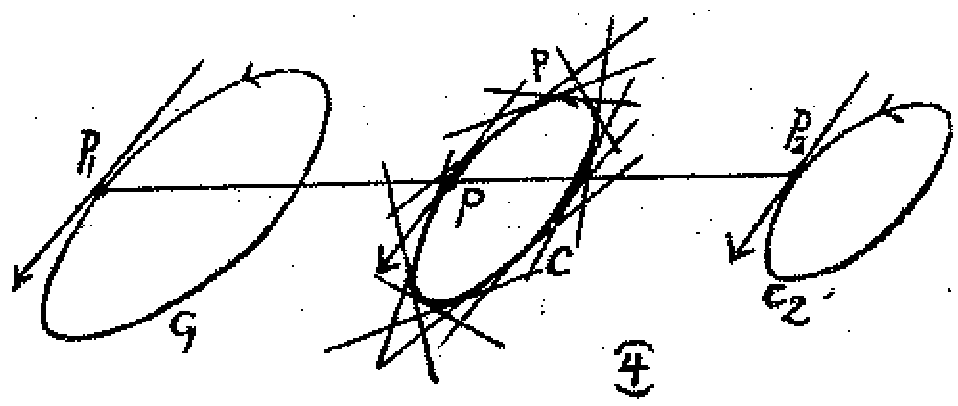
此理甚易,觀次圖(3),當不難領悟也.



(3)

定義.　卵形 C,稱爲 C_1, C_2 之平均卵形(Mean Oval).

今將述一作圖法焉.先與 C_1, C_2 以一定相同之方向,且令其支線之方向亦與之一致.以兩卵形中之點及其支線均可使之一一對應,故自 C_1 作一支線,則於 C_2 亦必可作一與之平行對應的支線,且僅能作一線而止.



(4)

聯結此二支線,令其中點爲 P.自 P 作與支線平行之直線 p,則此直線,卽卵形 C 在 P 點之支線也.

是等之直線 p,可作無限之多,其包絡(Envalope),卽所求之卵形 C 也.[圖(4).]

定理 B.　平均卵形之形狀,與 C_1 及 C_2 之平行移動(Translation)無關.

[證] 設 C_1 上一點之坐標爲 (x_1, y_1), C_2 上一點之坐標爲 (x_2, y_2), 則由定義, $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ 必爲 C 上之一點之坐標.

令 C_1 及 C_2 平行移動之轉換式各各爲

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + a_1 \\ y_1 = y'_1 + b_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = x'_2 + a_2 \\ y_2 = y'_2 + b_2 \end{cases}$$

此時 C 上一點之坐標變爲

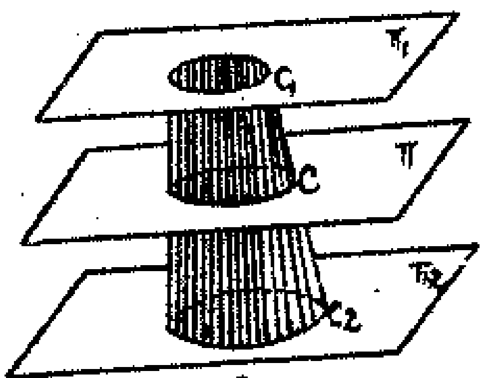
$$\frac{x'_1+a_1+x'_2+a_2}{2}, \qquad \frac{y'_1+b_1+y'_2+b_2}{2}$$

是此等之轉移,影響於 C 上一點之坐標者,不過加減一常數而已.由平面解析幾何學之理論,當知其形狀,並無若何之變化也.

今試將卵形之意義,擴充於空間.

定義. 設有二平行平面 π_1 及 π_2, π_1 上有一卵形 C_1, π_2 上有一卵形 C_2, 將此二卵形之對應點聯結之,則其所得之實體,名曰最小凸體 (Smallest Convex body).

此時 π_1 及 π_2 正中間之一平行平面 π, 其與最小凸體相交而生之截斷 (Section) C, 即 C_1 與 C_2 之平均卵形也.[圖(5).]



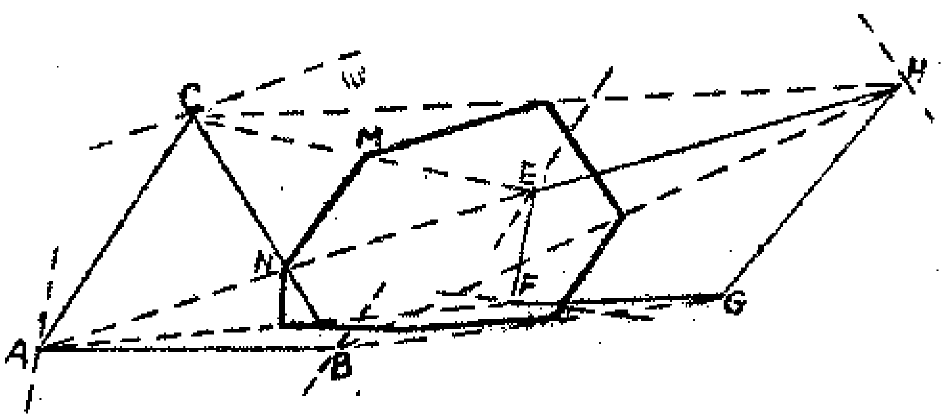
(5)

定理 C. 設 C_1 及 C_2 各各爲凸 n 邊形及凸 m 邊形,其

平均卵形 C 亦爲一多邊形,邊數爲 $n+m$.(但 C_1 任一邊與 C_2 任一邊不平行.)

[證] 爲確定計,(for definitness) 不妨假定 C_1 爲三邊形,C_2 爲四邊形,其一般性仍不失也.

如圖(6)設三邊形爲 ABC, 四邊形爲 $EFGH$. 今於此四邊



6

形中,作其與 AC 平行之對應的支線,則此直線通過 E 點甚明.聯結 EA, EC, 而令 M, N 各各爲 EC, EA 之中點,復聯 MN.

因 AC 爲 C_1 之支線且爲其一邊,故 MN 亦必爲 C 之支線且爲其一邊.

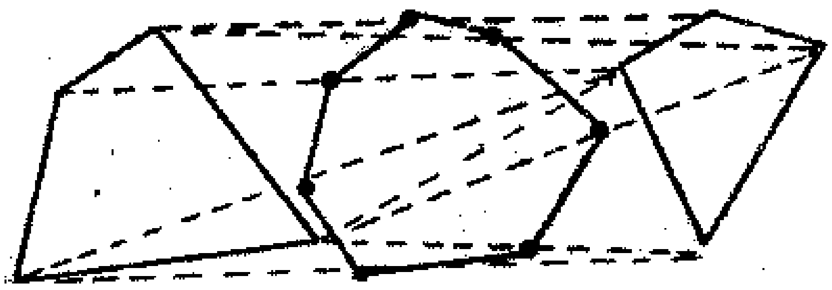
依同理,可見每對於三邊形之一邊,可決定平均卵形之一邊.同樣每對於四邊形之一邊,亦可決定其一邊.而此等之邊,共有 3+4 個,適成一閉合圖形.

故知平均卵形爲七邊形,其四邊平行於四邊形之四邊,他三邊平行於三邊形之三邊.

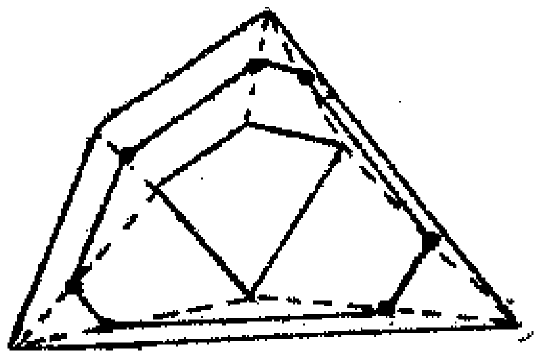
因原來假定 C_1 與 C_2 無二邊爲平行之故是以如此所得之 C, 亦自無兩邊相重合之事發生也.

系 I. 若兩多邊形有一對之邊平行時,則平均卵形之邊數,減少一個.[圖(7)]

系 II. 若二個多邊形皆爲 n 邊形,且其邊兩兩平行時,則其平均卵形,亦爲 n 邊形.[圖(8)]



(7)



(8)

復因 $MN=\frac{1}{2}AC$, 又得次系.

系 III. C 之周長,等於 C_1 之周長與 C_2 之周長之半和.

本系雖於卵形爲多邊形時爲真,卽在任意之卵形,亦屬真確也.

定理 D. 任意二卵形中,其平均卵形之周長,必等於此二卵形之周長之半和.

若將此兩卵形,作爲內接多邊形之極限觀,則本定理之爲真,不難會得矣.

至關於平均卵形之面積,復有次之定理.

定理 E. 設 C, C_1, 及 C_2 之面積各各爲 A, A_1 及 A_2 則

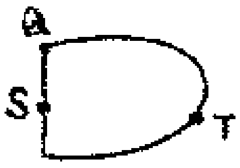
$$\sqrt{A} \geqq \frac{\sqrt{A_1}+\sqrt{A_2}}{2}.$$

上式等號之成立在 C_1 與 C_2 爲相似 (Similar) 且在相似位

置 (In similar situation) 之時也.

定義.　設 P 爲卵形 C 之一點,而過 P 得作一任意之線分,不屬於 C 時,則此點 P,名曰極點 (Extreme point).

注意: 第一,極點不能在卵形內,而常在周界上.



⑨

第二,卵形之界有爲直線時,則其上之點如 S 必不爲極點.

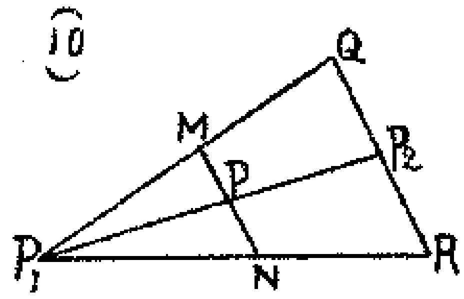
第三,凡極點:1.必爲角點, 2.必爲曲界上之點,如圖 (9) 中之 T,Q 是也.

定理 F.　設 C_1 C_2 之平均卵形爲 C,而 C 之任一極點爲 P,則 P 必爲 C_1 之極點 P_1 與 C_2 之極點 P_2 之聯線之中點;且如此之 P_1,P_2 僅有一對 (Only one pair).

［證］　C 既爲平均卵形,則 P 必爲 C_1,C_2 中之二點 P_1, P_2 之聯線之中點明矣.今證 P_1,P_2 卽爲極點.

如謂 P_2 非爲極點,則過 P_2 必可作線分 QR 屬於 C_2.

⑩



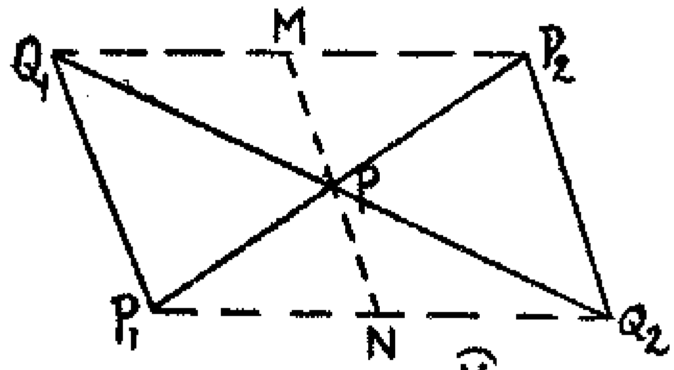
聯結 P_1Q, P_1R, 過 P 作 $MN \parallel QR$, 與 P_1Q, P_1R 各各相交於 M, N, 則 MN 亦當屬於 C 中. [(圖10)]

是 P 不爲 C 之極點,而與假定衝突,不合於理.

故 P_2 必爲 C_2 之極點.

同理,可證 P_1 必爲 C_1 之極點.

次證如此之 P_1,P_2 僅有一對.如謂如此之 P_1, P_2 具有兩對.設 P 又爲極點 Q_1, Q_2 聯線之中點.



(11)

聯結 P_1Q_1, P_2Q_2, 由卵形定義 P_1Q_1 必屬於 C_1, P_2Q_2 必屬於 C_2. 復聯 Q_1P_2, P_1Q_2, 由初等幾何學定理,易知 $P_1Q_2P_2Q_1$ 爲一平行四邊形. [圖(11)]

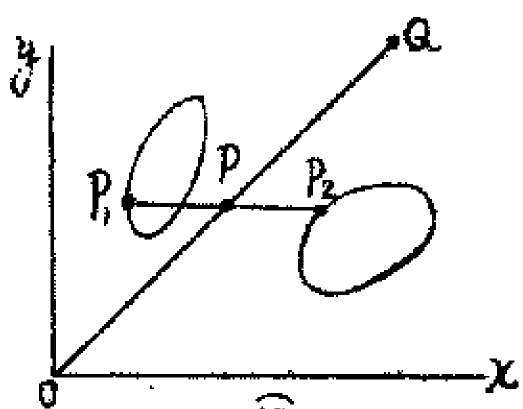
今自 P 作 P_1Q_1, P_2Q_2 之平行線 MN, 則 MN 亦當屬於 C 中矣.是 P 非 C 之極點,又與假定衝突.

故如此之 P_1, P_2 僅有一對也.

定義.　設 C_1, C_2 爲二卵形, C 爲平均卵形.不變 C 之形而放大之,令其周圍適爲 C_1 之周與 C_2 之周之和時,則此卵形稱曰和卵形(Sum Oval).

和卵形之作圖法.　設 O 爲坐標軸之原點, P 爲平均卵形上之任一點,聯結 OP 延長之至於 Q, 令 $OP=OQ$, 則 Q 之軌迹,即爲和卵形.

[證]　如圖(12)設 P 爲 P_1, P_2 之聯結之中點, P_1, P_2, P, Q, 之坐標各各



(12)

爲 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4). 則由解析幾何學知

$$x_3=\frac{x_1+x_2}{2}\quad,\quad y_3=\frac{y_1+y_2}{2}$$

$$x_4=x_1+x_2,\quad y_4=y_1+y_2$$

$$\therefore\qquad x_4=2x_3,\qquad y_4=2y_3.$$

故　$$ds=\sqrt{dx_4^2+dy_4^2}=\sqrt{4dx_3^2+4dy_3^2}=2\sqrt{dx_3^2+dy_3^2}.$$

故由 Q 之軌迹所生之卵形,其周長適爲平均卵形之二倍,亦卽卵形 C_1, C_2 之周之和也(系III).

故 Q 之軌迹,卽爲和卵形.

今將引用此種理論,以入代數.

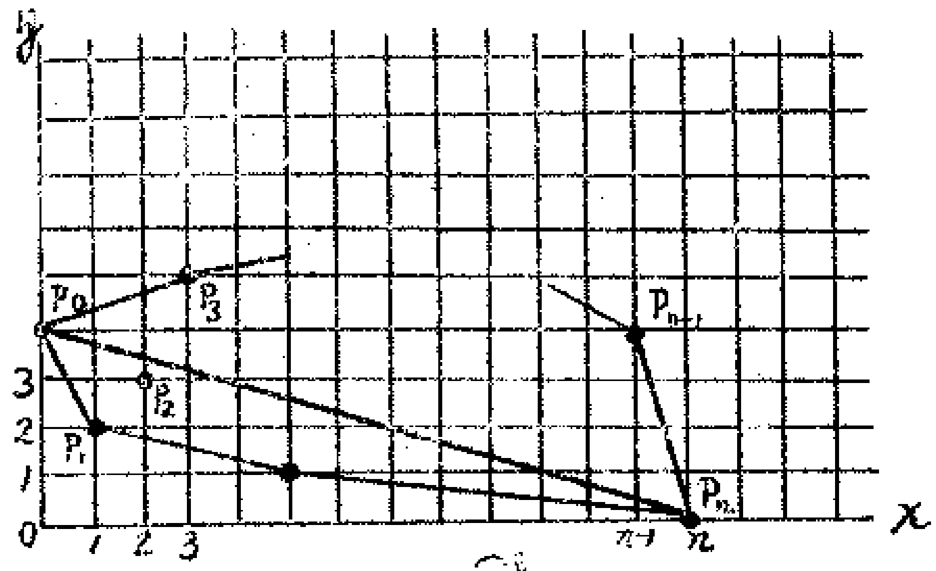
II.　卵形在代數上的應用.

設有一多項式爲

$$f(x)\equiv x^n+a_1p^{m_1}x^{n-1}+a_2p^{m_2}x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}p^{m_{n-1}}x+a_np^{m_n}.$$

此處 p 爲一素數, $a_1, a_2, \cdots a_n$ 對於 p 皆相互爲素 (Relative Prime); $m_1, m_2, \cdots m_n$ 皆爲正整數.

先作次之坐標格子,如圖(13),



(13)

而定下之 $n+1$ 個之點.

P_0　$(o,\ m_n)$

P_1　$(1,\ m_{n-1})$

$\cdot$　$\cdot\ \cdot\ \cdot$

$\cdot$　$\cdot\ \cdot\ \cdot$

$\cdot$　$\cdot\ \cdot\ \cdot$

$$
\begin{array}{ll}
P_{n-k} & (n-k,\ m_k) \\
\vdots & \cdots \\
P_n & (n,\ o)
\end{array}
$$

次作一最小凸多邊形(Smallest convex polygon),令含此 $n+1$ 個點.則此多邊形之項點,必爲此 $n+1$ 個中之點,又形外無此等之 P 點,其邊上容或有之,甚明,蓋以所作者爲最小故也.

將此多邊形以 $\mathfrak{P}_f$ 命之.

又聯結橫線 $P_o P_n$,令其與下面各邊而成一部份多邊形,以 $\mathfrak{P}'_f$ 命之.

今若 $f(x)$ 爲可約於有理自然域(Rational Körper 嗣後爲簡單計,以 R 代之.) 中,則

$$f(x) \equiv g(x)\ h(x),$$

由 Gauss 定理, g, h 之係數必皆爲整數.

$$\therefore \quad f(x) \equiv (x^{\mu} + b_1 p^{\beta_1} x^{\mu-1} + \cdots\cdots + b_{\mu} p^{\beta_{\mu}})\ (x^{\nu} + c_1 p^{\gamma_1} x^{\nu-1} + \cdots\cdots + c_{\nu} p^{\gamma_{\nu}}),$$

此處　$b_1 \cdots\cdots b_{\mu}$; $c_1 \cdots\cdots c_{\nu}$, 皆與 p 相互爲素,

$\beta_1 \cdots\cdots \beta_{\mu}$; $\gamma_1 \cdots\cdots \gamma_{\nu}$, 皆爲正整數,

且　$\mu + \nu = n$.

依上述之方法,對於 $g(x)$, $h(x)$ 亦可作相當之多邊形,各各以 $\mathfrak{P}_g$, $\mathfrak{P}'_g$; $\mathfrak{P}_h$, $\mathfrak{P}'_h$ 命之,而得次之定理.

定理 A.　$\mathfrak{P}'_f$ 爲 $\mathfrak{P}'_g$ 與 $\mathfrak{P}'_h$ 之利卿形.

此卽 Duma 氏之定理,氏原以向量 (Vector) 證明,今從藤原

松三郎之說焉.

〔證〕　本定理只在證 $\mathscr{F}_f$ 與 $\mathscr{F}_g$ 及 $\mathscr{F}_h$ 之和卵形之頂點一致可也.設 $\mathscr{F}_g$ 與 $\mathscr{F}_h$ 之和卵形爲 $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_f$ 之橫線兩端之頂點 P_o, P_n 與 $\mathscr{F}$ 橫線兩端之頂點一致甚明.因 p_o 之坐標爲 (o,m_n), P_n 之坐標爲 (n, o), 而 $\mathscr{F}$ 橫線兩端之坐標爲 $(o,\beta_\mu+\gamma_\nu)$ 與 $(\mu+\nu,o)$ 卽 (o,m_n) 與 (n,o) 故也.

設 $\mathscr{F}_f$ 之任一頂點爲 $(n-i-k,\ m_{i+k})$, 又 $(\mu-i,\beta_i)(\nu-k,\gamma_k)$ 各各爲 $\mathscr{F}_g$, $\mathscr{F}_h$ 中之點,[*]則 $(n-i-k,\ \beta_i+\gamma_k)$ 必爲 $\mathscr{F}$ 中之點.

今比較 x^{n-i-k} 之係數,得

$$a_{i+k}\,p^{m_{i+k}}=b_i\,c_k\,p^{\beta_i+\gamma_k}+b_{i-1}c_{k+1}p^{\beta_{i-1}+\gamma_{k+1}}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

爲確定計,假定 $(\beta_i+\gamma_k,\ \beta_{i-1}+\gamma_{k+1},\cdots\cdots\cdots)$ 中之最小者爲 $\beta_i+\gamma_k$,[**] 分二種情態而討論之.

〔甲〕　最小者只有一個,卽

$$\beta_i+\gamma_k<\beta_{i-1}+\gamma_{k+1},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

〔乙〕　最小者不只一個,卽

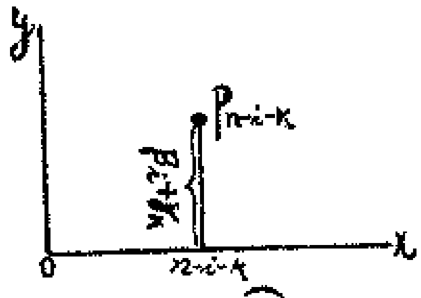
$$\beta_i+\gamma_k\leqq\beta_{i-1}+\gamma_{k+1},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

先論甲,斯時也,　$a_{i+k}\,p^{m_{i+k}}=p^{\beta_i+\gamma_k}A$,

此處　$A\not\equiv O \pmod{p}$,

$$\therefore A=a_{i+k},$$

$$\therefore m_{i+k}=\beta_i+\gamma_k.$$



14

[*] 因 i,k 固屬未定者也,故適當選擇之,此種假定,極爲可能.

[**] 苟 $\beta_i+\gamma_k$ 非最小,而最小者爲 $\beta_{i-1}+\gamma_{k+1}$ 之時,則在上之選擇 i,k 中,不取 i,k, 而令爲 $i-1$, $k+1$, 下之論證,仍不失爲眞也.

故若P_{n-i-k}爲$\mathfrak{P}'_f$之頂點,則此頂點必爲$\mathfrak{P}$中之點.

依同理,可見凡$\mathfrak{P}'_f$之頂點,皆屬於$\mathfrak{P}$中之點.

次論乙,斯時也, $a_{i+k}\,p^{m_{i+k}}=p^{\beta_i+\gamma_k}A$,

此處 $A\equiv O\,(\mathrm{mod.}\ p)$, 或 $A\not\equiv O\,(\mathrm{mod.}\ p)$.

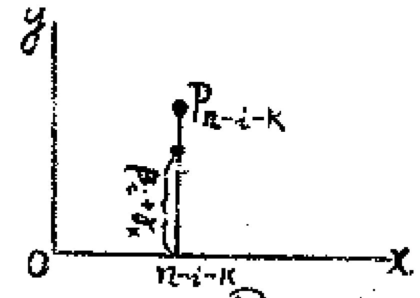
其在 $A\not\equiv O\,(\mathrm{mod.}\ p)$ 之時,卽甲,已述之矣.

其在 $A\equiv (O\,\mathrm{mod.}\ p)$ 之時,則

$$m_{i+k}\geqq\beta_i+\gamma_k\,.$$

此式卽表示$\mathfrak{P}$中必有一點,其縱坐標比同一橫坐標之$\mathfrak{P}'_f$之頂點爲低.

是亦$\mathfrak{P}'_f$之頂點,爲$\mathfrak{P}$中之點也.



15

但如此之以$\beta_i+\gamma_k\,(<m_{i+k})$爲縱坐標之點,决非$\mathfrak{P}$之極點可知,何則,如謂不然,則將與 I 之定理 F 衝突矣.

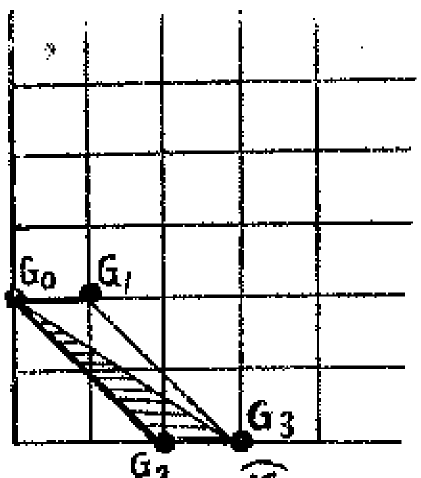
其逆亦真,(卽凡$\mathfrak{P}$之頂點,亦必爲$\mathfrak{P}'_f$中之點.)易於證明,故$\mathfrak{P}$與$\mathfrak{P}'_f$非一致不可.

〔例〕 設 $g(x)=x^3-2x^2+5^2x-3\cdot5^2$, $h(x)=5x^3+x^2-7\cdot5^1x+6\cdot5$.

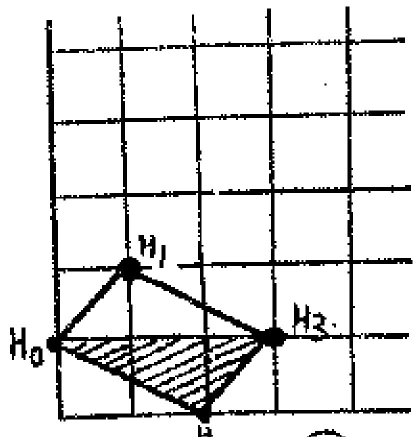
$$f(x)=g(x)\cdot h(x)=5x^6-9x^5-52x^4+6\cdot5x^3-3\cdot902x^2+5^3\cdot111x-18\cdot5^3$$

今作$\mathfrak{P}_f$,$\mathfrak{P}_g$及$\mathfrak{P}_h$如下之三圖,則$\mathfrak{P}_f$爲$F_0F_1F_6F_5F_4F_2$,$\mathfrak{P}_g$爲$G_0G_1G_3G_2$,$\mathfrak{P}_h$爲$H_0H_1H_3H_2$;$\mathfrak{P}'_f$爲$F_0F_6F_5F_4F_2$,$\mathfrak{P}'_g$爲$G_0G_3G_2$,$\mathfrak{P}'_h$爲$H_0H_3H_2$而$F_0=G_0+H_0$, $F_6=G_3+H_3$, $F_5=G_3+H_2$, $F_4=G_2+H_2$, $F_2=G_2+H_0$.

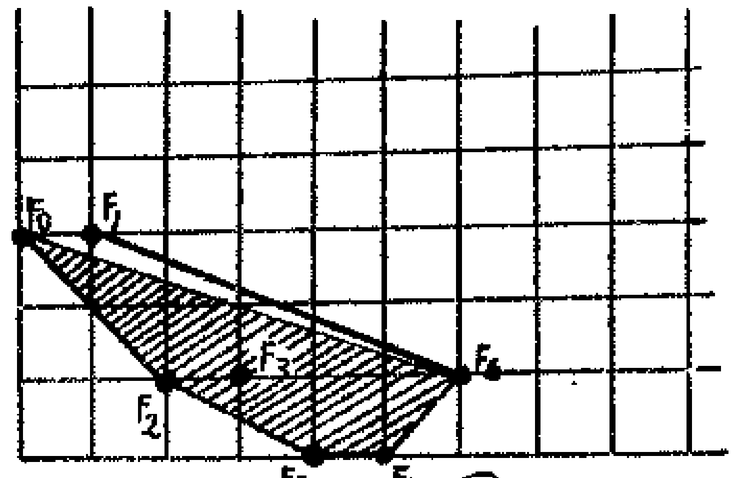
定理B. 設$\mathfrak{P}'_f$成一直線P_0P_n,且此直線除P_0P_n兩點以外無格子點 (Lattice point) 之時,則$f(x)$必爲不可約於R之



(16)



(17)

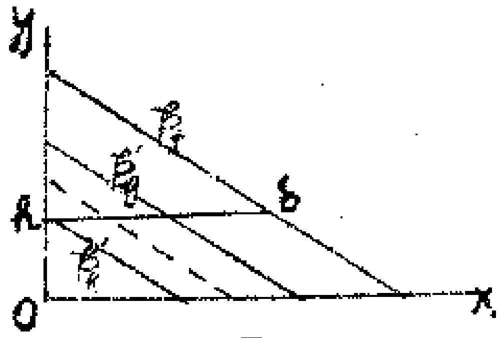


(18)

中。〔圖(19)〕

〔證〕　如謂 $f(x)$ 可約於 R 之中,則必

$$f(x)=g(x)\,h(x)$$



(19)

因 $\mathscr{P}_f$ 爲 $\mathscr{P}_g$, $\mathscr{P}_h$ 之和卵形,故 $\mathscr{P}_g$, $\mathscr{P}_h$ 之平均卵形爲一直線,故 $\mathscr{P}_g$, $\mathscr{P}_h$ 亦必爲直線.而此等直線與坐標軸之交點,皆爲格子點,不言而喻.今令 $\mathscr{P}_h$ 一端之點如圖爲 h, 自 h 作 ox 之平行線 $h\delta$, 使與 $\mathscr{P}_f$ 相遇於 δ, 則 δ 亦當爲格子點,是與假定衝突.

故 $f(x)$ 必不可約於 R 之中.

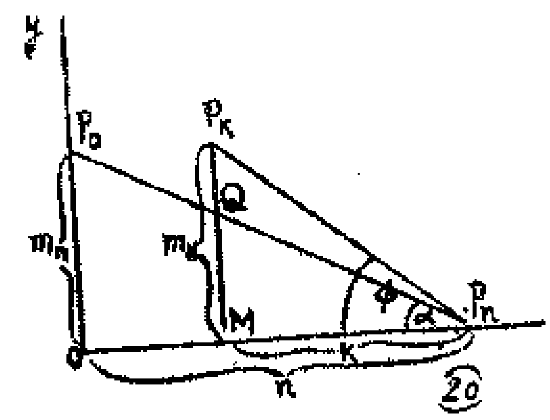
定理 C.　　設有一多項式爲

$$f(x)=x^n+a_1p^{m_1}x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n\,p^{m_n},$$

若 m_n 與 n 相互爲素,且 $\frac{m_n}{n}<\frac{m_k}{k}$　$k=1,2,\cdots\cdots n-1$ 之時,則 $f(x)$ 必爲不可約於 R 之中.

此爲 Koenigeberger 之定理,即上述之結果以文字表示之

者也.



［證］　所謂m_n與n相互爲素云者,卽P_0P_n上無格子點之意也.何則,如圖(20)若謂其上有一點Q,則因

$$\frac{m_n}{n}=\tan\alpha=\frac{QM}{K},$$

是m_n與n之間,有公約數矣.

所謂$\frac{m_n}{n}<\frac{m_k}{k}$云者,卽$\mathfrak{s}_1$成一直線之意也.何則聯結$P_kP_n$令

$$\frac{m_n}{n}=\tan\alpha,\qquad \frac{m_k}{k}=\tan\phi$$

則以$\frac{m_n}{n}<\frac{m_k}{k}$之故,是$\alpha$必較$\phi$角爲小,而如此之$P_k$盡當在橫線以上也.

可見本定理,完全與定理B相一致也.

矣.　若$m_n=1$之時,(1與n當然相互爲素)只須$m_k\neq o$, $k=1,2,\cdots\cdots,n-1$,則$f(x)$卽不可約於R之中.

換言之,卽次之 Einsenstein-Schönemann 之定理.

設$f(x)\equiv x^n+A_1x^{n-1}+\cdots\cdots+A_n$,而$A_1,A_2,\cdots,A_n\equiv o\ (\mathrm{mod.}\ p)$,(卽$m_k\neq o$)又$A_n\not\equiv o\ (\mathrm{mod.}\ p^2)$之時,(卽$m_n=1$)則$f(x)$卽不可約於$R$之中矣.

例如:　次之方程式在R中不可約也.

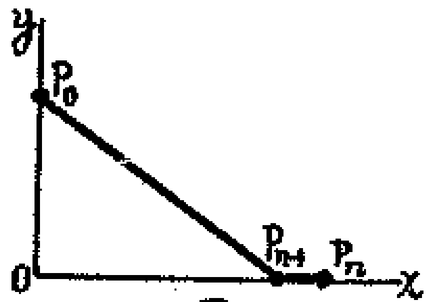
1.　$x^3+7x^2+14x+21=o.$

2.　$2x^3+9x^2+6x+12=o.$

關於卵形學說對於代數上之應用,今日研究之成績,已

集蔚然之大觀,茲為篇幅所限,不能一一細述,謹記其二三結果於此,以為關心之讀者告焉.

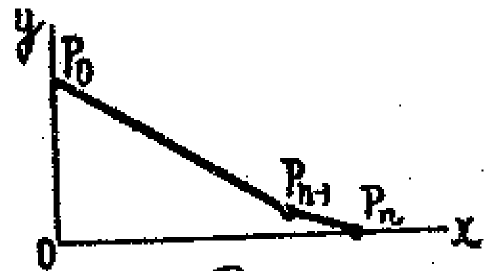
(I)　Perron 氏之研究.



21

如圖(21) P_{n-1} 亦在 ox 上,而 $\overline{P_0P_{n-1}}$ 聯結線上無格子點之時,則 $f(x)$ 為不可約.氏為德國之大數學家,於連分數一途,尤所擅長.

(II)藤原松三郎之研究.

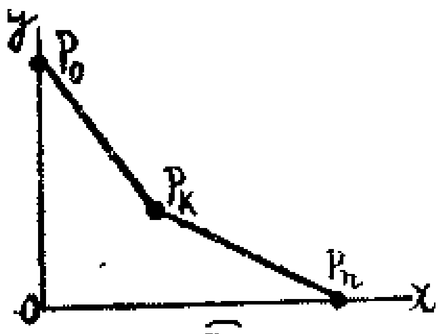


22

如圖(22)若橫線在 P_{n-1} 處折斷,而 P_0 至 P_{n-1} 之間無格子點之時,則 $f(x)$ 為不可約.

氏之研究較 Perron 蓋已進一步矣.

(III)大石氏之研究.



23

如圖(23)橫線在當中任一點折斷,而兩折斷線分上均無格子點之時,則 $f(x)$ 為不可約.

氏之研究方諸上述二者,更為擴充.

至於橫線三折之時, $f(x)$ 可約與否,尚在研究之中.吾人僻處干戈擾攘之中國,寡聞孤陋,或者當著者操觚之日,早已探討有成,未可知也.

郄蒿生變形法之研究

華羅庚

1. 定義.

n 次方程式

$$f(x) = (a_o, a_1, \cdots\cdots\cdots a_n \between x, 1)^n = o$$

命 $$y = (c_o, c_1, \cdots\cdots\cdots c_n \between 1, x)^k \qquad (k < n)$$

當 $f(x) = o$ 有一根, y 常有一值與之對應,以 n 個 y 之對應值爲根作方程式

$$F(y) = (b_o, b_1, \cdots\cdots\cdots\cdots b_n \between y, 1)^n = o$$

此種變形謂之郄蒿生變形法(Tschiunhausen's Transformation), $b_o, b_1, \cdots\cdots b_n$為$\Omega(a_o, a_1, \cdots\cdots a_n;\ c_o, c_1 \cdots\cdots c_{n-1})$內之有理整代數式.

2. 他種變形化爲郄氏變形法.

A. 今假定有一變形

$$y = \varphi(x) = (c_o, c_1, \cdots\cdots\cdots c_l \between 1, x)^l \qquad (l > n).$$

此種變形,吾人定可化之使 $l < n$; 何則,因 $\varphi(x)$ 之次數,既較 $f(x) = o$ 爲高,故可求得

$$\varphi(x) = P\, f(x) + Q\,.$$

Q 之次數低於 n, 而 $f(x)$ 常因 $f(x) = o$ 之各根而爲零;故 $y = \varphi(x)$ 之變形與 $y = Q$ 之變形無殊.

B. 假定有一變形

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

而 $f(x) = o$ 之根爲 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$, 而 y_1 爲 x_1 之對應根,則

$$y_1 = \frac{\varphi(x_1)}{\psi(x_1)} = \frac{\varphi(x_1)\,\psi(x_2)\,\psi(x_3)\cdots\cdots\psi(x_n)}{\psi(x_1)\,\psi(x_2)\,\psi(x_3)\cdots\cdots\psi(x_n)}$$

$\psi(x_1), \psi(x_2) \cdots\cdots \psi(x_n)$ 爲 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ 之對稱函數,故可以 $a_o, a_1, \cdots\cdots a_n$ 之有理整函數表出之; $\psi(x_2)\cdots\cdots\psi(x_n)$ 爲 $x_2, x_3, \cdots\cdots x_n$ 之對稱函數,惟對 x_1 不對稱,故知此函數可以 $a_o, a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 及 x_1 之有理整代數式表出之.

故變形 $y = \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$

當與 $y = \varphi_1(x)$ 有同樣之効果, $\varphi_1(x)$ 爲 x 之多項式,更由 (A) 可

得定理如下:

"凡變形 $y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 爲 x 之多項式恆可化爲郄氏變形".

3. 郄氏變形與薛維斯德之分離消去法之關係

郄氏變形借薛維斯德 (Sylvester) 之分離消去法之助而相得益彰,能使新方程式爲一行列式.卽在

$$f(x)=(a_o, a_1, \cdots\cdots a_n \between x, 1)^n = o$$

及

$$\Phi(x)=(c_k, c_{k-1} \cdots\cdots c_1, (c_o - y) \between x, 1)^k = o$$

中變之爲

$$\begin{aligned}
x^{k-1} f(x) &= o,\\
x^{k-2} f(x) &= o,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
x \quad f(x) &= o,\\
f(x) &= o,\\
x^{n-1} \Phi(x) &= o,\\
x^{n-2} \Phi(x) &= o,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\Phi(x) &= o.
\end{aligned}$$

視此諸式爲 $x^{k+n-1}, x^{k+n-2}, \cdots\cdots x^2, x, 1$ 爲未知數之方程式組,消去 $x^{k+n-1}, x^{k+n-2}, \cdots\cdots x^2, x, 1$ 可得

$$\begin{vmatrix} a_o & a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_k & a_{k+1} & \cdots\cdots & a_n & o & \cdots\cdots & o \\ o & a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_{k-1} & a_k & \cdots\cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots\cdots & o \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ o & o & o & \cdots\cdots & a_o & a_1 & \cdots\cdots & a_{n-k} & a_{n-k-1} & \cdots\cdots & a_n \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & \cdots\cdots & c_1 & c_o-y & \cdots\cdots & o & o & \cdots\cdots & o \\ o & c_k & c_{k-1} & \cdots\cdots & c_2 & c_1 & \cdots\cdots & o & o & \cdots\cdots & o \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ o & o & o & \cdots\cdots & o & o & \cdots\cdots & c_{k-1} & c_{k-2} & \cdots\cdots & c_o-y \end{vmatrix} = o$$

郯,薛二氏攜手,實與吾人以極大之補助,如用郯氏變形以解亞柏爾方程式是也.(羅以該段太長,未錄入本文中).

4. 用郯氏變形以解三次方程式

$$a_o x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = o$$

假定 $y = c_o + c_1 x + x^2$ $(c_2 = 1)$, 若何決定 c_o, c_1, 則 y 之方程式爲 $y^3 - b_4 = o$.

命所與方程式之根爲 x_1, x_2, x_3; y 之方程式之相應根爲 $y_1, \omega y_1, \omega^2 y_1$; ω 爲一之立方複虛根.

則

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= c_o + c_1 x_1 + x_1^2 \\ \omega y_1 &= c_o + c_1 x_2 + x_2^2 \\ \omega^2 y_1 &= c_o + c_1 x_3 + x_3^2 \end{aligned}\right\} \text{I.}$$

相加則得 $3c_o + c_1 \Sigma x_1 + \Sigma x_1^2 = o.$

以 ω 乘 I 中之第二式, ω^2 乘第三式,相加則得

$$(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3) c_1 + x_1^2 + \omega x_2^2 + \omega^2 x_3^2 = o,$$

$$c_1 + \Sigma x_1 = -\frac{x_2 x_3 + \omega x_3 x_1 + \omega^2 x_1 x_2}{x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3}.$$

ω 可為 1 之二立方複虛根之任一,故 $c_1+\Sigma x_1$ 當有二値,略加計算可知為下方程式之二根

$$(a_o a_2 - a_1^2)x^2 + (a_o a_3 - a_1 a_2)x + (a_1 a_3 - a_2^2) = o.$$

c_o, c_1 既定

$$b_4 = (c_o + c_1 x_1 + x_1^2)(c_o + c_1 x_2 + x_2^2)(c_o + c_1 x_3 + x_3^2)$$

亦極易決定,故吾人可解

$$y^3 - b_4 = o$$

所得之根,代入

$$y = c_o + c_1 x + x^2,$$

再解此二次式,卽得其解答矣.

5. 用郗氏變形以解四次方程式

於述四次方程式解法之前,先論新方程式係數與 $c_o, c_1, \cdots\cdots c_k$ 之關係,假定原有方程式之根為 $x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_n$; 新方程式之對應根為 $y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots y_n$, 則其間當有關係

$$y_i = c_o + c_1 x_i + c_2 x_i^2 + \cdots\cdots + c_k x_i^k \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots n).$$

y 方程式 y^{n-1} 之係數,當為

$$\Sigma y_1 = n c_o + c_1 \Sigma x_1 + c_2 \Sigma x_1^2 + \cdots\cdots + c_k \Sigma x_1^k.$$

顯然為 $c_o, c_1, c_2, \cdots\cdots c_k$, 之一次齊次式,又

$$\Sigma y_1 y_2 = \Sigma(c_o + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \cdots\cdots + c_k x_1^k)(c_o + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + \cdots\cdots + c_k x_2^k)$$

$\therefore y^{n-2}$ 之係數,顯然為 $c_o, c_1, \cdots\cdots c_k$ 之二次齊次式.同樣可知 y^{n-r} 之係數,當為 $c_o, c_1, \cdots\cdots c_k$, 之 γ 次齊次式.故若須化去 y 方程式之第一項以後之 γ 項,卽使其係數同時為零,則可

取 $k=\gamma$，須解

$$b_1=o,\quad b_2=o,\quad b_3=o,\cdots\cdots\cdots b_\gamma=o,$$

之 γ 個方程式以定 $c_o, c_1,\cdots\cdots\cdots c_k$，之比值，惟此 γ 個方程式，各爲一次，二次，三次，……γ 次。故普偏言之，須解 $\gamma!$ 次方程式方可定 $c_o, c_1,\cdots\cdots c_k$ 之比值。故在三次方程式中，須解二次方程式，始能化之爲二項方程式；至於四次方程式，化爲二項方程式時，須解一六次方程式，惟幸此六次式可以二，三次方程式解之。(於 §11, II 當確實担保之)今以化四次方程式爲三項式之準二次方程式之法，說明於下：

$$a_o x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=o,$$

其根爲 $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$。變形

$$y=c_o+c_1x+x^2$$

變得

$$y^4+b_2y^2+b^4=o$$

其對應根爲 $y_1, -y_1, y_2, -y_2$，則

$$x_1^2+c_1x_1+c_o=y_1\qquad x_3^2+c_1x_3+c_o=y_2$$

$$x_2^2+c_1y_2+c_o=-y_1\qquad x_4^2+c_1x_4+c_o=-y_2$$

相加可得

$$c_o+c_1\Sigma x_1+\Sigma x_1^2=o.$$

又以左二式相加減去右二式則得

$$\gamma=-\frac{x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2}{x_1+x_2-x_3-x_4},$$

$$\gamma+\Sigma x_1=\frac{2(x_1x_2-x_3x_4)}{x_1+x_2-x_3-x_4},$$

此顯然爲一三次方程式。

6. 郄氏變形與高次方程式

用郄氏變形解出四次方程式後,五次方程式可否能由郄氏變形以解之問題遂生.惟若化五次方程式爲二項方程式時,須解 $4!=24$ 次方程式,且此24次方程式決不能由五次以下方程式之助以解出之.故郄氏法至此亦技窮矣.惟吾人由方程式論中已知五次方程式之解法,實依賴於一六次分解式,故吾人當進一步研究,卽由郄氏變形產生之補助式,至少抑亦可化爲六次耶?抑六次以上耶?據研究之結果,知其一致,而揆力(Cayley)氏之五次方程式之補助式,尤爲其一美觀且有力之說明.今將揆氏原文作簡單說明如下:

$$“\qquad (4 \between 5, 1)^5 = (v - x_1)(v - x_2)\cdots\cdots\cdots(v - x_5)$$

爲簡單計,命 1, 2, 3, 4, 5 代其五根 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 且命

$$12345 = 12 + 23 + 34 + 45 + 51.$$

可作一六次式

$$(* \between \Phi, 1)^6 = o$$

其六根爲

$$\Phi_1 = 12345 - 24135, \qquad \Phi_4 = 21435 - 13245$$

$$\Phi_2 = 13425 - 32145, \qquad \Phi_5 = 31245 - 14325,$$

$$\Phi_3 = 14235 - 43125, \qquad \Phi_6 = 41325 - 12435,$$

卽

$$(1, 0, C, O, E, F, G \between \Phi, 1)^6 = O. \qquad \text{(A)}$$

C, E, G 爲所與方程式之係數之有理整函數,F 爲判別式

之平方根之常數倍,則

$$\Phi_1\Phi_6+\Phi_2\Phi_4+\Phi_3\Phi_5=(*\between x_1,1)^4,$$

$$\Phi_1\Phi_2+\Phi_3\Phi_4+\Phi_5\Phi_6=(*\between x_2,1)^4,$$

$$\Phi_1\Phi_5+\Phi_2\Phi_3+\Phi_4\Phi_6=(*\between x_3,1)^4,$$

$$\Phi_1\Phi_3+\Phi_2\Phi_6+\Phi_4\Phi_5=(*\between x_4,1)^4,$$

$$\Phi_1\Phi_4+\Phi_2\Phi_5+\Phi_3\Phi_6=(*\between x_5,1)^4.$$ "

由此可知,吾人可有相當之郗氏變形,

$$y=(*\between x,1)^4$$

變普通之五次方程式為

$$(*\between y,1)^5=o.$$

惟上式之能解否,惟(A)式是賴.由此可知,五次方程式之解法,若能用根號解者,定可用郗氏變形解之,不能用根號解者,郗氏變形亦不能例外.

7. 用郗氏變形消去高次方程式之第二,三,四項.

預備定理: $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ 之二次齊次函數 V, 常能以 n 個平方之和表出之.

證: 命 $V\equiv P_1x_1^2+2Q_1x_1+R_1$ (P_1 不含有 $x_1, x_2\cdots\cdots x_n$)

$$V\equiv\left(\sqrt{P_1}x_1+\frac{Q_1}{\sqrt{P_1}}\right)^2+R_1-\frac{Q_1^2}{P_1}$$

Q_1, R_1 各為 $x_2, x_3, \cdots\cdots x_n$ 之一次二次齊次式,故可復設

$$V_1=R_1-\frac{Q_1^2}{P_1}=P_2x_2^2+2Q_2x_2+R_2,$$

P_2 為常數, Q_2, R_2 不含有 x_1, x_2; 同樣可得

$$V_1=\left(\sqrt{P_2}\,x_2+\frac{Q_2}{\sqrt{P_2}}\right)^2+R_2-\frac{Q_2^2}{P_2}$$

$$\therefore\qquad V_1=\left(\sqrt{P_1}\,x_1+\frac{Q_1}{\sqrt{P_1}}\right)^2+\left(\sqrt{P_2}\,x_2+\frac{Q_2}{\sqrt{P_2}}\right)^2+R_2-\frac{Q_2^2}{P_2}.$$

依此方法,繼續施行,可得最後之項爲$R_{n-1}-\frac{Q^2_{n-1}}{P_{n-1}}$,此可書爲$P_n x_n^2$;故定理於以證明.

今當論入本題:

$$f(x)=(a_o,a_1,a_2,\cdots\cdots a_n\between x_1,1)^n$$

命 $$y=(c_o,c_1,c_2,c_3,c_4\between 1,x)^4$$

得 $$F(y)=(b_o,b_1,b_2,\cdots\cdots b_n\between y,1)^n$$

所謂消去第二,三,四項者,卽命

$$b_o=o,\qquad b_2=o,\qquad b_3=o$$

也 $b_1=o$ 爲 c_o, c_1, c_2, c_3, c_4 之一次齊次式,以之代入 $b_2=o$, $b_3=o$. 則各爲 c_1, c_2, c_3, c_4 之二次,三次齊次式,由預備定理可知 $b_2=o$ 可書爲

$$t^2-u^2+v^2-w^2=o.$$

可命 $t=u$, $v=w$ 此式爲俱爲一次齊次式與 $b_3=o$ 消去 c_1, c_2 而得一 c_3, c_4 之三次齊次式,可解三次方程式以求其比値. 故消去 n 次方程式之第二,三,四項祇須借助三次方程式卽可.

今可同樣說明,消去 n 次方程式之第二,三,五項祇須借助四次方程式卽可.

故五次方程式之普通形常可化爲

$$x^5+b_4x+b_5=o,\qquad x^5+b_3x^2+b_5=o,$$

$$x^5+b_2x^3+b_5=o,\qquad x^5+b_1x^4+b_5=o,$$

* 注意此二式決不會發生矛盾.

8.　郄氏變形之反變形

n 次方程式 $f(x)=o$ 可用 $n-1$ 次變形 $y=\psi(x)$ 以得 $F(y)=o$. 則定當有一逆變形能變 $F(y)=o$ 爲 $f(x)=o$ 且此變形亦在 $\Omega(a_o, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n;\ c_o, c_1 \cdots\cdots c_n)$ 內.

證:　作方程式

$$x^{n-2}f(x)=o,$$

$$x^{n-3}f(x)=o,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(x)=o;$$

$$x^{n-2}[\psi(x)-y]=o,$$

$$x^{n-3}[\psi(x)-y]=o,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi(x)-y=o,$$

視 $x^{2n-2}, x^{2n-3}, \cdots\cdots x$ 爲未知數,解此 $2n-2$ 個聯立方程式可得

$$x=\frac{H}{\Delta}$$

H, Δ 爲 $\Omega(a_o, a_1, \cdots\cdots a_n;\ c_o, c_1, \cdots\cdots c_{n-1})$ 內 y 之有理整代數式

由 2 可知其可化爲 $x=\varphi(y)$, $\varphi(y)$ 爲低於 n 次之代數整多項式,且其係數在 $\Omega(a_o, a_1, \cdots a_n;\ c_o, c_1, \cdots c_{n-1})$.

至於 Δ 是否爲零,殊需加以研究.惟 $\Delta=o$ 則 x 非不定即

無解,不定卽不啻言 x 之任何值皆滿足方程式 $f(x)=o$; 無解,卽不啻言 $f(x)=o$ 無根,此二者俱顯然不能存在,故

$$x=\frac{H}{\Delta}$$

乃確切不易.今舉一例如下:

$$x^3+x+1=o$$

用變形 $\quad y=1+x^2$

變之得 $\quad y^3-y^2-1=o$

今求其反變形

$$x^3+x+1=o$$

$$x^3+(1-y)x=o$$

$$x^2+(1-y)=o$$

得 $\quad \Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1-y\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=y \qquad H=-\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1-y\end{vmatrix}=-1$

$$x=-\frac{1}{y}=y-y^2$$

∴反變形爲 $x=y-y^2$

9. 郄氏變形與方程式代數解法之理論(上)

定理一. 方程式之不可以代數解法解之者,郄氏變形定不能解之.

定理二. 方程式之可以代數解法解之者,定能以郄氏變形以解之.

注: 吾人已知若 n 次不可化方程式 $f(x)=o$, 可有代數

解法者,則凡 $f(x)=o$ 之根,定可在某定範圍內,以 ω 之多項式表出之,ω 爲 $x^n-1=0$ 之原根,假定其爲

$$x=c_o+c_1\omega+c_2\omega^2+\cdots\cdots+c_{n-1}\omega^{n-1}.$$

此卽不啻說明

$$\omega^n-1=o,$$

可由變形 $x=c_o+c_1\omega+c_2\omega^2+\cdots\cdots+c_{n-1}\omega^{n-1}.$

而變爲 $f(x)=o$* ,

由8已知當有由 $f(x)=o$. 變爲 $x^n-1=0$ 之反變形存在,卽不啻言 $f(x)=o$ 能以某定代數範圍內之變形,可變爲二項方程式也.故吾曰:凡方程式之可有代數解法者,定能以鄭氏變形以解之.

* $f(x)=o$ 在不加入 ω 於範圍內爲不可化,則

$$\omega^n-1=o$$

與 $x=a_o+a_1\omega+a_2\omega^2+\cdots\cdots\cdots+a_{n-1}\omega^{n-1}$

消去 ω, 而得方程式假定其爲

$$g(x)=o.$$

方程式 $g(x)=o$ 爲 n 次,其係數間不含有 ω, $f(x)=o$ 有一根能適合之,故 $f(x)=o$ 之各根當盡能適合,卽

$$g(x)=o,$$

卽爲 $f(x)=o$ 也.

10. 受鄭氏變形不變之方程式

定理: 一 n 次方程式 $f(x)=o$, 其某二根間有關係

$$x_1 = Q(x_2),$$

Θ 爲 Ω 內之函數，$f(x)=o$ 在 Ω 內不可化,則 $f(x)=o$ 不因變 $y=\Theta(x)$ 而變化.

證：
$$g(x) = o$$
及
$$y = \Theta(x)$$
可得
$$F(y) = o$$

$F(y)=o$ 之係數在 Ω 內,故 $f(x)=o$ 有一根滿足 $F(y)=o$, 則各根俱能滿足之. $F(y)$ 爲 n 次,故 $F(y)=o$ 當於 $f(x)=o$ 一般無二.

故可知當繼續施以此種變形時,則

$$f(x) = o$$

始終不變,其各根間當成一組或幾組之連續變換.

11. 由郄氏反變形以解方程式

I. 三次方程式

$$y^3 - 1 = o$$

$$x = c_o + c_1 y + c_2 y^2$$

消去 y 則得
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ c_2 & c_1 & c_o-x & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & c_1 & c_o-x & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & c_1 & c_o-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_o-x & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_o-x & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_o-x \end{vmatrix}$$

$$= (c_o - x)^3 - 3\,c_1 c_2 (c_o - x) + 2c_1^3 + c_2^3 = o$$

凡三次方程式與此式比較係數,若能由此求得 c_o, c_1, c_2, 則三次方程式可解,且此三次方程式可由郝氏變形化爲二項次.惟比較係數時卽引出達達烈 (Tartarglia) 解三次方程式之法,故可知凡三次方程式俱可由此解出,卽凡三次方程式俱可化爲二項式.

II. 四次方程式

$$y^4 - 1 = o$$

$$x = c_o + c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3$$

消去 y 則

$$\begin{vmatrix} c_o - x & c_3 & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_o - x & c_3 & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_o - x & c_3 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_o - x \end{vmatrix} = o$$

卽 $(c_o - x)^4 - 2(2c_1c_3 + c_2^2)(c_o - x)^2 + 4(c_2c_3^2 + c_2c_1^2)(c_o - x)$

$$+ [c_2^2 - (c_1 + c_3)^2][c_2^2 + (c_1 - c_3)^2] = o$$

與四次方程式

$$(c_o - x)^4 + 6a_2(c_o - x)^2 + 4a_3(c_o - x) + a_4 = o.$$

比較係數,則

$$2c_1c_3 + c_2^2 = -3a_2 \qquad (1)$$

$$c_2(c_1^2 + c_3^2) = a_3 \qquad (2)$$

$$[c_2^2 - (c_1 + c_3)^2][c_2^2 + (c_1 - c_3)^2] = a_4 \qquad (3)$$

以 c_2 乘(1)則

$$2c_1c_2c_3 + c_2^3 = -3a_2c_2 \qquad (4)$$

(2)加(4)則

$$c_2(c_3+c_1)^2+c_2^3=a_3-3a_2c_2 \tag{5}$$

(2)減(4)則

$$c_2(c_3-c_1)^2-c_2^3=a_3+3a_2a_1 \tag{6}$$

以(5),(6)代(3)以消去 c_1, c_3 則

$$\left(c_2^2-\frac{a_3-3a_2c_2-c_2^3}{c_2}\right)\left(c_2^2+\frac{a_3+3a_2c_2+c_2^3}{c_2}\right)=a_4$$

卽

$$(2c_2^3+3a_2c_2-a_3)(2c_2^3+3a_2c_2+a_3)=a_4c_2^2$$

$$4c_2^6+12a_2c_2^4+(9a_2^2-a_4)a_2^2-a_3^2=o.$$

此爲準二次之三次方程式,與歐拉 (Euler) 所用之三次分解式相仿,故可知凡四次方程式可解,且可化爲二項式.由反變形之理論,可知郄氏變形之化四次方程式爲二項方程式,所涉及之六次方程式定可分爲二三次方程式解決之,故 5 所懸之疑問,於以解決.

III. 五次方程式

$$y^5-1=o$$

$$x=c_o+c_1y+c_2y^2+c_3y^3+c_4y^4$$

消去 y 則

$$\begin{vmatrix} c_o-x & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_o-x & c_4 & c_3 & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_o-x & c_4 & c_3 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_o-x & c_4 \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_o-x \end{vmatrix}=o.$$

即 $$(c_0-x)^5-5(c_1c_4+c_2c_3)(c_0-x)^3+5(c_1c_2^2+c_2c_4^2+c_4c_3^2+c_3c_1^2)(c_0-x)^2$$

$$+5[c_1^2c_4^2+c_3^2c_2^2-c_1c_2c_3c_4-(c_1c_3^3+c_3c_4^3+c_4c_2^3+c_2c_1^3)](c_0-x)$$

$$+c_1^5+c_2^5+c_3^5+c_4^5+5(c_1c_3^2c_4^2+c_2c_1^2c_3^2+c_3c_4^2c_2^2+c_4c_2^2c_1^2)$$

$$-5(c_1^3c_3c_4+c_2^3c_1c_3+c_3^3c_2c_4+c_4^3c_1c_2)=0$$

由此方程式與

$$x^5+5a_1x^4+10a_2x^3+10a_3x^2+5a_4x+a_5=0$$

比較係數,可得五次方程式可用根號解之條件,與 Glashan 發表於 American Mathematical journal 第23卷中者同.

今普遍言之:

由 $$y^n-1=0$$

與 $$x=c_0+c_1y+c_2y^2+\cdots\cdots+c_{n-1}y^{n-1}$$

消去 y 則得 $$\begin{vmatrix} c_0-x & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots\cdots & c_1 \\ c_1 & c_0-x & c_{n-1} & \cdots\cdots & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0-x & \cdots\cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots\cdots & c_0-x \end{vmatrix}=0$$

故得結果如次:

"凡 n 次不可化方程式而可用代數解法解之者,必須且祇須其能變爲上行列式之形,其中 c_0, c_1,……c_{n-1} 爲代數數"

由反變形之定理可知:

"凡 n 次方程式之可用根數解者,定可化爲二項形."

12. 郗氏變形與方程式之代數解法論(下)

方程式　$(a_o, a_1, a_2 \cdots\cdots a_n \between x, 1)^n = o$　(1)

經變形　$y = \Phi(x) = (c_o, c_1, \cdots\cdots c_{n-1} \between 1, x)^{n-1}$　(2)

得方程式　$(b_o, b_1, b_2 \cdots\cdots b_n \between y, 1,)^n = o$　(3)

定理一. 在 $\Omega(a_o, a_1, \cdots\cdots a_n; c_o, c_1, \cdots\cdots c_{n-1})$ 內(1),(3)二方程式之葛羅華羣爲同一.

證: 假定(1)之葛羅華羣爲 G, (3)之葛羅華羣爲 G'; 作一屬於 G' 之函數

$$\psi(y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots y_n)$$

此函數受 G' 之置換不變,若受 G' 外之置換卽變.又函數

$$\psi\left\{\Phi(x_1), \Phi(x_2), \cdots\cdots \Phi(x_n)\right\}$$

其間若施以與 G' 相同之置換,亦不變.故可知 G' 當爲 G 或 G 之分羣.

由反變形之理論,可知 G 又當爲 G' 或其分羣.故可知

$$G' = G.$$

定理二. 在某定範圍內,(1)之根與(3)之根間,定有(2)之關係連絡之. $c_o, c_1, \cdots\cdots c_{n-1}$ 爲某定範圍內之數.

證: 卽須證明任何二同次方程式常可有某定範圍內之郄蒿生變形法連絡之.假定郄氏變形爲

$$y_i = c_o + c_1 x_i + c_2 x_i^2 + \cdots\cdots + c_{n-1} x_i^{n-1} \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots n).$$

此 n 個方程式中,可視 $c_o, c_1, \cdots\cdots c_{n-1}$ 爲未知數以決定 $c_o, c_1, \cdots\cdots c_{n-1}$,舍方程式(1)有重根外,常有定解,卽(2)常能存立.

故依羣論之眼光看來,實爲由(1)係數所成之範圍之羣,

因添加 $c_0, c_1, \cdots\cdots c_{n-1}$ 等自然無理數(Natural Irrationalities) 使之化為某定羣也.(即(3)之羣).

13. 例

今舉一例以結是篇:

$$x^5+20x^3+30x^2+30x+10=o.$$

此方程式之葛羅華羣為 $G_{20}^{(5)}$, 可表為 §11 III 之行列式 $c_4=2^{\frac{1}{5}},\quad c_3=-2^{\frac{2}{5}},\quad c_2=2^{\frac{3}{5}},\quad c_1=-2^{\frac{4}{5}},\quad c_0=o.$ 或可由

$$y^5-2=o$$

施以變形 $x=y-y^2+y^3-y^4$ 以得,故可知其五根為:

$$\begin{array}{llll} 2^{\frac{1}{5}} & -2^{\frac{2}{5}} & +2^{\frac{3}{5}} & -2^{\frac{4}{5}}, \\ 2^{\frac{1}{5}}\omega & -2^{\frac{2}{5}}\omega^2 & +2^{\frac{3}{5}}\omega^2 & -2^{\frac{4}{5}}\omega^4, \\ 2^{\frac{1}{5}}\omega^2 & -2^{\frac{2}{5}}\omega^4 & +2^{\frac{3}{5}}\omega & -2^{\frac{4}{5}}\omega^3, \\ 2^{\frac{1}{5}}\omega^3 & -2^{\frac{2}{5}}\omega & +2^{\frac{3}{5}}\omega^4 & -2^{\frac{4}{5}}\omega^2, \\ 2^{\frac{1}{5}}\omega^4 & -2^{\frac{2}{5}}\omega^3 & +2^{\frac{3}{5}}\omega^3 & -2^{\frac{4}{5}}\omega, \end{array}$$

今更求其反變形

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(1-x)^3$$

$$H=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -x \end{vmatrix}=(2+x)(1-x)^2.$$

以 $x-1$ 除原式,則

$$x^4+x^3+21x^2+41x+71+\frac{81}{x-1}=o,$$

$$\therefore \qquad y=\frac{1}{81}(2+x)(x^4+x^3+21x^2+41x+71)$$

$$=\frac{1}{81}(x^5+3x^4+23x^3+83x^2+153x+142).$$

再化之 $$y=\frac{1}{72}(x^4+x^3+21x^2+41x+44)$$

此變形可化方程式原式爲二項式

$$y^5-2=o.$$

注: 本題可用同畫變形(Homographic Transformation) 解出之。

郗蒿生變形法與亞柏爾方程式

華 羅 庚

1. 奇質數次方程式

$$f(x) = (a_o,\ a_1,\ a_2, \cdots a_n \between x,\ 1)^n = o \tag{1}$$

若此爲亞柏爾方程式,則其根間有下之關係

$$x_2 = \Phi(x_1), \quad x_3 = \Phi(x_2), \cdots\cdots\cdots\cdots x_n = \Phi(x_{n-1}); \quad x_1 = \Phi(x_n)$$

由拙著郗蒿生變形法之研究 §10中已知(1)受郗氏變形

$$y = \Phi(x) = (b_o,\ b_1, \cdots\cdots\cdots\cdots b_{n-1} \between 1,\ x)^{n-1} \tag{2}$$

而不變,即

$$\begin{aligned}
y &= b_o + b_1 x + \cdots\cdots\cdots\cdots + b_{n-1} x^{n-1} \\
x_2 &= b_o + b_1 x_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + b_{n-1} x_1^{n-1} \\
x_3 &= b_o + b_1 x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + b_{n-1} x_2^{n-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= b_o + b_1 x_{n-1} + \cdots\cdots\cdots + b_{n-1} x_{n-1}^{n-1} \\
x_1 &= b_o + b_1 x_n + \cdots\cdots\cdots + b_{n-1} x_n^{n-1}
\end{aligned}$$

消去 $b_o, b_1, \cdots\cdots b_{n-1}$, 則得(2)式,可寫其形爲

$$\begin{vmatrix}
y & 1 & x & x^2 & \cdots\cdots & x^{n-1} \\
x_2 & 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots\cdots & x_1^{n-1} \\
x_3 & 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots\cdots & x_2^{n-1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_n & 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots\cdots & x_{n-1}^{n-1} \\
x_1 & 1 & x_n & x_n^2 & \cdots\cdots & x_n^{n-1}
\end{vmatrix} = o$$

可知
$$b_\gamma=(-1)^\gamma\frac{H_\gamma}{\Delta}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots\cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots\cdots & x_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots\cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$$ (D為判別式)

此二行列式施以$(0\ 1\ 2\cdots n)^\lambda$之置換時,變號則同時變號,不變號則同時不變,故$b_\gamma$不受此置換而變其數值,當為$\frac{n!}{n}$個值的函數(卽$(n-1)!$或較少惟詳細研究之結果在普通情形之下含$n=3$之$b_2$外恆為$(n-1)!$個值).

今專以b_o討論之,惟在討論之前,下之引實為重要.

引:
$$\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots\cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots\cdots & x_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_{\lambda-1} & x_{\lambda-1}^2 & \cdots\cdots & x_{\lambda-1}^{n-1}\\ 1 & x_{\lambda+1} & x_{\lambda+1}^2 & \cdots\cdots & x_{\lambda+1}^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots\cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=(-1)^{\lambda-1}\frac{\Delta}{f'(x_\lambda)}.$$

證:
$$f'(x_\lambda)=(x_\lambda-x_1)(x_\lambda-x_2)\cdots\cdots(x_\lambda-x_{\gamma-1})(x_\lambda-x_{\gamma+1})\cdots(x_\lambda-x_n).$$

惟
$$\begin{aligned}\Delta=(-1)^{\frac{n(n-1)}{1.2}}(x_1-x_2)(x_1-x_3)&\cdots\cdots\cdots\cdots(x_1-x_n)\\ (x_2-x_3)&\cdots\cdots\cdots\cdots(x_2-x_n)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &(x_{n-1}-x_n)\end{aligned}$$

$$=(-1)^{\frac{\lambda(n-1)}{1.2}-\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}+\lambda-1}f'(x_\lambda)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \cdots\cdots & x_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{\lambda-1} & x_{\lambda-1}^2 \cdots & x_{\lambda-1}^{n-1} \\ 1 & x_{\lambda+1} & x_{\lambda+1}^2 \cdots & x_{\lambda+1}^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_1^2 \cdots & x_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{\lambda-1} & x_{\lambda-1}^2 \cdots & x_{\lambda-1}^{n-1} \\ 1 & x_{\lambda+1} & x_{\lambda+1}^2 \cdots & x_{\lambda+1}^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\frac{\Delta}{f'(x_\lambda)}.$$

今以 b_o 論之

$$b_o=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x_2 & x_1 & x_1^2 \cdots\cdots & x_1^{n-1} \\ x_3 & x_2 & x_2^2 \cdots\cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_{n-1} & x_{n-1}^2 \cdots\cdots & x_{n-1}^{n-1} \\ x_1 & x_n & x_n^2 \cdots\cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{x_2^2x_3\cdots x_n}{f'(x_1)}+\frac{x_1x_3^2\cdots x_n}{f'(x_2)}+\cdots\cdots+\frac{x_1^2x_2\cdots x_{n-1}}{f'(x_n)}\right]$$

吾可立得屬於此羣之函數

$$\left.\begin{array}{l} \varphi\equiv x_2^2x_3\cdots\cdots x_n+x_1x_3^2\cdots x_n+\cdots\cdots+x_1^2x_2\cdots x_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_2^{n+1}x_3^n\cdots\cdots x_n^n+x_1^nx_3^{n+1}\cdots x_n^n+\cdots\cdots+x_1^{n+1}x_2^n\cdots x_{n-1}^n \end{array}\right\}\text{(I)}$$

此諸函數有 $(n-1)!$ 個或較少之值.今以第一個函數論之,此函數當然受 $(123\cdots n)^\lambda$ 而不變,今當證明置換之使此函數不變者定爲 $(12\cdots n)^\lambda$. 因此函數顯屬於任換羣,故可假定有另一置換

$$(12\alpha\cdots\cdots\varepsilon\lambda)$$

則 $x_1^2 x_2\cdots x_\lambda\cdots x_{n-1}$ 受此置換變爲 $x_2^2 x_\alpha\cdots x_1\cdots x_\lambda$. 此種之項爲 φ 內所無有.蓋此函數中之各項有 x_2^2 爲因子者,則決無 x_1 爲其因子也.故 x_λ 當不爲 $x_1^2 x_2\cdots x_{n-1}$ 之因子故

$$n=\lambda.$$

即 $(12\alpha\cdots\cdots\varepsilon\lambda)$

仿此可證 $\varepsilon=n-1$ 等,故可知凡使本函數不變之置換爲 $(12\cdots\cdots)$ 形者定爲 $(123\cdots\cdots n)$,故此函數恰有 $(n-1)!$ 個值.又(I)之各函數非 $(n-1)!$ 個即 $(n-1)!$ 之因子個數值,故可知(I)之各函數俱可以 φ 之有理整代數式於係數之範圍內表出之.

進言之. $b_1, b_2, \cdots\cdots b_{n-1}$ 皆可以 φ 之有理整代數式於係數之範圍內表出之.故可知 n 次方程式(n 爲質數)在範圍內

$$\Omega(a_0, a_1, \cdots\cdots a_n; \varphi),$$

可視爲亞柏爾方程式.

又亞柏爾方程式可以根號解,故可知凡 n 次方程式函數 φ 可以根號表出者,則此 n 次方程式可以根號解.

例: 三次方程式在 $\Omega(a_0, a_1, a_2, a_3, \varphi)$ 內可視爲亞柏爾方

程式

$$\Omega(a_o, a_1, a_2, a_3, \varphi) \equiv \Omega(a_o, a_1, a_2, a_3, \sqrt{D}).$$

附註: 由此可知凡質數次 (degree) 之亞柏爾羣,卽爲循環羣.

2. 複數次方程式

n 次亞柏爾方程式 $f(x)=o$ 其根間之關係非一串循環.(蓋一串循環雖 n 爲複數,猶依上節之步驟以得相彷之結果.)設 $n=\lambda\varepsilon$, 則可有下之關係

$$\left.\begin{array}{llll} x_2=\Phi(x_1), & x_3=\Phi(x_2), \cdots\cdots & x_\lambda=\Phi(x_{\lambda-1}), & x_1=\Phi(x_\lambda) \\ x_{\lambda+2}=\Phi(x_{\lambda+1}), & x_{\lambda+3}=\Phi(x_{\lambda+2}), \cdots\cdots & x_{2\lambda}=\Phi(x_{2\lambda-1}), & x_{\lambda+1}=\Phi(x_{2\lambda}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x_{(\varepsilon-1)\lambda+2}=\Phi(x_{(\varepsilon-1)\lambda+1}) & \cdots\cdots & x_{\lambda\varepsilon}=\Phi(x_{\lambda\varepsilon-1}), & x_{\lambda(\varepsilon-1)+1}=\Phi(x_{\lambda\varepsilon}) \end{array}\right\}(A)$$

今爲簡單計,略書爲

$$[1\,2\,3\cdots\lambda]\,[(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots2\lambda]\cdots[(\varepsilon-1)\lambda+1, (\varepsilon-1)\lambda+2, \cdots\cdots\lambda\varepsilon].$$

設另有一種絕對不同*之郡氏變形 $y=\Theta(x)$ 變能使 $f(x)=o$ 不變,則當有

$$[s_1\ s_2 \cdots\cdots s_\mu]\,[\cdots\cdots]\cdots\cdots[\cdots\cdots] \qquad (B)$$

(*所謂絕對不同云者乃 $\Phi_\alpha(x) \neq \Theta_\beta(x)$ 也令 $\Phi_\alpha(x)=x$, $\Theta_\beta(x)=x$, $\Phi_\alpha(x)=\Phi\Big\{\underbrace{\Phi\cdots\cdots}_{\alpha次}\Phi(x)\Big\}$).

今當證明(1) $s_1, s_2, \cdots\cdots s_n$ 無在 (A) 中之同一組者 (2) μ 爲 ε 之因子.

證: (1)假定 s_ξ, s_η 爲同組 $(\xi>\eta)$ 則

$$x_{s_\xi} = \Phi_t(x_{s_\eta}) \qquad t = s_\xi = s_\eta.$$

又
$$x_{s_\xi} = \Theta_{\xi-\eta}(x_{s_\eta}).$$

因此
$$\Phi_t(x_{s_\eta}) = \Theta_{\xi-\eta}(x_{s_\eta}).$$

因 $\Phi(x)$ 與 $\Theta(x)$ 絕對不同,故舍 $\xi-\eta=\lambda$ 外此式不能成立,惟 $\xi, \eta<\lambda$, 故 $S_1, S_2 \cdots\cdots S_\mu$ 中無屬於 (A) 中之同組者.

(2)在普通之羣論書中,俱已證明 μ 須為 n 之因子,又 $1 \cdots\cdots \mu$ 不在 A 之同一組中,故易知 μ 為 之因子.

若 (A) 內排列得當,則吾人可知 $(\varepsilon=\mu\nu)$

$$\Big[1\,(\lambda+1)(2\lambda+1)\cdots\cdots[(\mu-1)\lambda+1]\Big]\Big[\mu_{\lambda+1}\cdots\cdots[(2\mu-1)\lambda+1]\Big]\cdots\cdots$$

$$\Big[(\nu-1)\mu\lambda+1\cdots\cdots(\mu\nu-1)\lambda+1\Big].$$

(證略).有此則定有

$$\Big[2(\lambda+2)(2\lambda+2)\cdots\cdots[(\mu-1)\lambda+2]\Big]\Big[\mu_{\lambda+2}\cdots\cdots[(2\mu-1)\lambda+2]\Big]\cdots\cdots$$

$$\Big[(\nu-1)\mu\lambda+2\cdots\cdots(\mu\nu-1)\lambda+2\Big]$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

再依此同法以得有變形 φ 絕對不同於 Φ, Θ 則可另得一 $[\ \ ][\ \ ]\cdots\cdots[\ \ ]$ (c) 繼續進行,終可達一止境.

b_o 為屬於方程式 $f(x)=o$ 受 (A) 變形不變之羣(仿上節證明), 同樣屬於 (B) 可求 $b'_o\cdots\cdots$ 故可知當添加函數 $b_o, b'_o, \cdots\cdots$ 於原方程式可視作亞柏爾方程式.

3. 亞柏爾羣之分類

今根據以上之觀點可以串分類之,今作下列數例以明之.

1. 四個字母之亞柏爾羣

(i) 一串羣 $x_2=\Phi(x_1)$, $x_3=\Phi(x_2)$, $x_4=\Phi(x_3)$, $x_1=\Phi(x_4)$.

得循環羣 $(1\,2\,3\,4)^\lambda$ $\lambda=1, 2, 3, 4.$

(ii) 二串羣 $(1\,2)\,(3\,4)$, $(1\,3)\,(2\,4)$.

得羣 1, $(1\,2)(3\,4)$, $(1\,3)(2\,4)$, $(1\,4)(2\,3)$.

2. 六個字母之亞柏爾羣

(i) 一串羣 $(1\,2\,3\,4\,5\,6)^\lambda$, $\lambda=1, 2, 3, 4, 5, 6$

(ii) 二串羣

$$\left.\begin{array}{lll} x_2=\Phi(x_1), & x_3=\Phi(x_2), & x_1=\Phi(x_3) \\ x_5=\Phi(x_4), & x_6=\Phi(x_5), & x_4=\Phi(x_6) \end{array}\right\}(A)$$

$$\left.\begin{array}{lll} x_4=f(x_1), & x_5=f(x_2), & x_6=f(x_3) \\ x_1=f(x_4), & x_2=f(x_5), & x_3=f(x_6) \end{array}\right\}(B)$$

若注意及 $x_5=\Phi\left\{f(x_1)\right\}$, 極易推得本羣與上節所得者一般無二.故六字母之亞柏爾羣祇有一個.

3. 八次亞柏爾羣

(i) 一串羣 $(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8)^\lambda$, $(\lambda=1, 2, \cdots\cdots\cdots 8)$.

(ii) 二串羣 $(1\,2\,3\,4)\,(5\,6\,7\,8)$, $(1\,5)\,(2\,6)\,(3\,7)\,(4\,8)$.

得羣

1	$(1\,2\,3\,4)(5\,6\,7\,8)$
$(1\,3)(2\,4)(5\,7)(6\,8)$	$(1\,4\,3\,2)(5\,8\,7\,6)$
$(1\,5)(2\,6)(3\,7)(4\,8)$	$(1\,6\,3\,8)(2\,7\,4\,5)$
$(1\,7)(2\,8)(3\,5)(4\,6)$	$(1\,8\,3\,6)(2\,3\,4\,7)$

(iii)三串羣 〔1 2〕〔3 4〕〔5 6〕〔7 8〕 (A)

〔1 3〕〔2 4〕〔5 7〕〔6 8〕 (B)

〔1 5〕〔2 6〕〔3 7〕〔4 8〕 (C)

得羣 1 (1 2)(3 4)(5 6)(7 8)

(1 3)(2 4)(5 7)(6 8) (1 4)(2 3)(5 8)(6 7)

(1 5)(2 6)(3 7)(4 8) (1 6)(2 5)(3 8)(4 7)

(1 7)(2 8)(3 5)(4 6) (1 8)(2 7)(3 6)(4 5)

故八個字母之亞柏爾羣有三.

4. 十二個字母之亞柏爾羣

(i) 一串羣 $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)^{\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \cdots\cdots 12$.

(ii)二串羣(a) $12 = 2 \times 6$.

〔1 2 3 4 5 6〕〔7 8 9 10 11 12〕 (A)

〔1 7〕〔2 8〕〔3 9〕〔4 10〕〔5 11〕〔6 12〕 (B)

得羣 1 (1 2 3 4 5 6)(7 8 9 10 11 12)

(1 3 5)(2 4 6)(7 9 11)(8 10 12), (1 4)(2 5)(3 6)(7 10)(8 11)(9 12)

(1 5 3)(2 4 6)(7 11 9)(8 12 10), (1 6 5 4 3 2)(7 12 11 16 9 8)

(1 7)(2 8)(3 9)(4 10)(5 11)(6 12), (1 8 3 10 5 12)(2 9 4 11 6 7)

(1 9 5 7 3 11)(2 10 6 8 4 12), (1 10)(2 11)(3 12)(4 7)(5 8)(6 9)

(1 11 3 7 5 9)(2 12 4 6 8 10), (1 12 5 10 3 8)(2 7 6 11 4 9)

二串羣(b) $12 = 3 \times 4$.

$$x_{\lambda} = \Phi(x_{\varepsilon}), \qquad x_{\varepsilon} = f(x_{s})$$

Φ 之週期爲 3, f 之週期爲 4, $x_1 = \Phi\left\{f(x_2)\right\}$, $\Phi\left\{f\right\}$ 之週期當爲 12,故可化爲一串羣.

(iii)三串羣　　$2\times2\times3$.

$$x_\lambda=\Phi(x_\varepsilon),\qquad x_\varepsilon=f(x_\kappa).$$

Φ 爲二次,f 爲三次,故 $\Phi\{f\}$ 之週期當爲六次與二串羣合.故可知十二個字母之亞柏爾羣祇有兩個.

故可得下列數點:

1.　n 個字母之亞柏爾羣決不能多於 n 所能分爲因子之組數.

例.　$8=8,\ 2\times4,\ 2\times2\times2$ 故八個字母之亞柏爾羣至多爲三個.

2.　$n=\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_\gamma$, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots\lambda_\gamma$ 皆爲不同之質數,則 n 個字母之亞柏爾羣祇有一個卽循環羣.

3.　任與一數 n,吾人常可用例四之手續以決定 n 個字母所成之亞柏爾羣確數有幾.

中數之淺釋

鄭亞余

各國統計學之論著,俱於中數(Median)之解釋,不甚詳晰.曩者余以次式求之,頗能使其意義畢露.茲先舉其例,以資探討.

$$\int_{c_1}^{x_1} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{c_2} f(x)\,dx$$

式中 $f(x)$ 爲由統計材料組成之曲線. c_1 與 c_2 爲曲線截 X 軸時 x 之座標. x_1 爲中數.

此式意義不難領略,蓋謂 c_1 至 x_1 或 x_1 至 c_2 所限曲線內之面積爲其總面積之半也.

設　$f(x) = 7x^2 - x^3$

則　$\int_o^{x_1} (7x^2 - x^3)\,dx = \tfrac{1}{2}\int_o^7 (7x^2 - x^3)\,dx$

令　$x_1 = 7u$

則由　$\frac{7^4\mu^3}{3} - \frac{7^4\mu^4}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{7^4}{3} - \frac{7^4}{4}\right)$

$$\frac{\mu^3}{3} - \frac{\mu^4}{4} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{12}$$

即　$8\mu^3 - 6\mu^4 = 1$

若令　$y = 6\mu^4 - 8\mu^3 + 1$

以　$\mu = o$　　$y = 1$

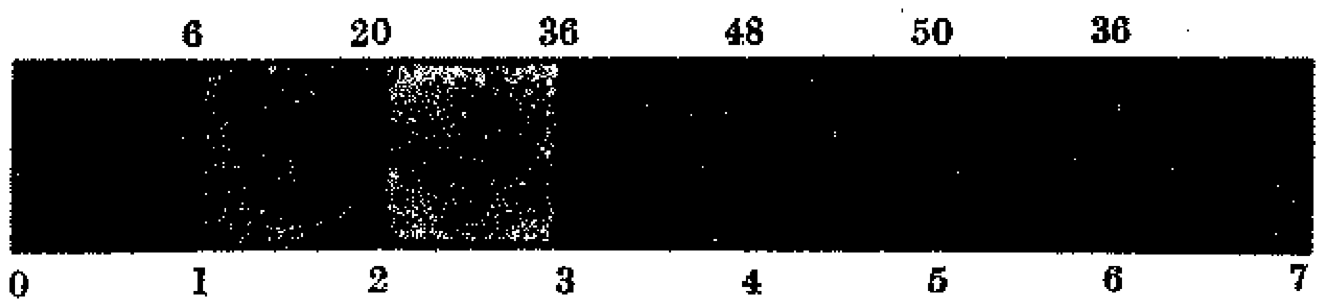
$\mu = 1 \qquad y = -1$

並審知 o 與 1 之間,始有適用之根.且 $\mu>\frac{1}{2}$ 故取得 ·6 爲其近似根.然則 $x_1=4\cdot2$

若夫何以採取此 x_1 之中數,其性質何以與平均數極數相似,其功用何以亦與平均數極數相同,則是此篇所由作也.

茲先設想世間有一種特殊光帶,其中一段,不能用顏料繪其色,亦不易以平常光帶比其麗.但於某種情况之下,有人以爲屬於太陽七色光帶之一段.而又不能決其爲綠,爲赤,抑爲紫黃.於是設想襲用代議制中過半數之表決法,惟以久執厥中者爲定準.其時傾左傾右皆被摒置,自不待言.由此論之,久執厥中者卽中數也.今申述其意義明釋其理由如次.

强分太陽光帶爲七段.每段兩端記以數目.由 o 至 1 爲



兼審知 o 與 1 之間,始有適用之根,且 $g<1$ 故取得 o 爲其近似根,然則 $a_1=4.2$

若夫何以採取此 a_1 之中數,其性質何以與平均數極數相似,其功用何以亦與平均數極數相同,則是此篇所由作也.

茲先設想世間有一種特殊光帶,其中一段,不能用顏料繪其色,亦不易以平常光帶比其麗.但於某種情境之下,今人以爲屬於太陽七色光帶之一段,而又不能決其爲綠,爲赤,抑爲紫黃.於是設想襲用代議制中過半數之表決法,惟以允執厥中者爲定準.其時偏左偏右者被擯置,自不待言.由此論之,允執厥中者即中數也.今申述其意義明釋其理由如次.

還分太陽光帶爲七段,每段兩端記以數目,由 o 至 1 爲

赤.由 1 至 2 爲橙黄.由 2 至 3 爲黄.由 3 至 4 爲綠.由 4 至 5 爲青.由 5 至 6 爲藍.由 6 至 7 爲紫.

代議士 196 人辨識其所設光帶之情形如次.

承認其光帶屬於赤或橙之二色者 6 人.

承認其光帶屬於橙或黄之二色者 20 人.

承認其光帶屬於黄或綠之二色者 36 人.

承認其光帶屬於綠或青之二色者 48 人.

承認其光帶屬於青或藍之二色者 50 人.

承認其光帶屬於藍或紫之二色者 36 人.

應用余所計算中數之方法

$$\begin{array}{rl} 6 & \\ 20 & \\ \underline{36} & \cdots\cdots\cdots\cdots y_{1m} \text{ 因得 } x_{1m}=3 \\ 62 & \cdots\cdots\cdots\cdots S_1 \\ \underline{48} & \cdots\cdots\cdots\cdots y_m \text{ 因得 } x_m=4 \\ 110 & >\frac{1}{2}\times 196 \end{array}$$

$$\therefore \quad x_{1m}+\frac{x_m-x_{1m}}{2}+\frac{\frac{1}{2}\times 196-S_1}{y_m}(x_m-x_{1m})$$

$$=3+\frac{4-3}{2}+\frac{98-62}{48}(4-3)$$

$$=3+\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{4}=4\cdot 25$$

故中數在於青色光帶之間,而偏於綠色.

平均數爲 $\frac{812}{196}=4\cdot 142\cdots$ 亦在於青色之間,並稍偏於綠色.極數近於 5 亦必在於青色之間,而偏於藍色.

以是中數位於平均數與極數之中.採用平均數者.以其於 Gauss' normal curve 中,其時會合適有極大之出現概率故也.

採用極數者,以其於班行中,獨有極大之出現概率故也.中數既位於二者之間,稍左即有同於平均數之出現概率.稍右即有同於極數之出現概率.凡於統計曲線之嚴密計算,平均數與極數之距離甚小.故其間之曲線起詣極峯.以是能知其間之中數亦有較大之出現概率也.因此,統計學常採用中數.

今中數爲 4·25. 代議士爲 196 人.就中真誠主張恰屬於中數之地位,究爲若干人,於其團體中,力量究爲如何,則由次法可以知之.

先於各屬人數次第求其差

0		6		20		36		48		50		36		0
	6		14		16		12		2		-14		-36	

用比例配分法

$\frac{6}{6+14}\times 6=1\cdot 8\doteqdot 2$　　爲主持偏於赤者.

$\frac{14}{6+14}\times 6=4\cdot 2\doteqdot 4$　　爲主持偏於橙者.

$\frac{14}{14+16}\times 20\doteqdot 9\cdot 3\doteqdot 9$　　爲主持偏於橙者.

$\frac{16}{14+16}\times 20\doteqdot 10\cdot 6\doteqdot 11$　　爲主持偏於黃者.

$\frac{16}{16+12}\times 36\doteqdot 20\cdot 5\doteqdot 21$　　爲主持偏於黃者.

$\frac{12}{16+12}\times 36\doteqdot 15\cdot 4\doteqdot 15$　　爲主持偏於綠者.

$\frac{12}{12+2}\times 48\doteqdot 41\cdot 1\doteqdot 41$　　爲主持偏於綠者.

$\frac{2}{12+2}\times 48 \fallingdotseq 6\cdot 8 \fallingdotseq 7$ 爲主持偏於青者.

$\frac{2}{2+14}\times 50 \fallingdotseq 6\cdot 2 \fallingdotseq 6$ 爲主持偏於靑者.

$\frac{14}{2+14}\times 50 \fallingdotseq 43\cdot 7 \fallingdotseq 44$ 爲主持偏於藍者.

$\frac{14}{14+36}\times 36 \fallingdotseq 10\cdot 0 \fallingdotseq 10$ 爲主持偏於藍者.

$\frac{36}{14+36}\times 36 \fallingdotseq 25\cdot 9 \fallingdotseq 26$ 爲主持偏於紫者.

故得表如次

(2)	(4+9)	(11+21)	(15+41)	(7+6)	(44+10)	(26)
赤	橙	黃	綠	靑	藍	紫

因是可知其眞誠主持屬於靑色者13人耳.人數雖少,操持不急不緩,偏左則左勝,偏右則右勝.雖此13人之主張,不必皆中於理,然俱不遠矣.若夫允執厥中者,則在於13人之中,其人數不過三人而已.理由如次.

已知代議士196人,按照次述之曲線法則,自組班行.

$$f(x)=7x^2-x^3$$

無論某部分配布組合亦可按照此曲線法則,不失其度.今屬於靑色者13人,中數之位置爲$4\frac{1}{4}$既屬於靑色矣.是以分靑色光帶爲4段,以求13人中住足於中數位置之數目.先以4, $4\frac{1}{4}$, $4\frac{2}{4}$, $4\frac{3}{4}$, 5 次第代入

$$f(x)=7x^2-x^3$$

可知

$$f(4)=48=\frac{3072}{64}$$

$$f\left(4\frac{1}{4}\right)=\frac{3179}{64}$$

$$f\left(4\frac{2}{4}\right)=\frac{405}{8}=\frac{3240}{64}$$

$$f\left(4\frac{3}{4}\right)=\frac{3249}{64}$$

$$f(5)=50=\frac{3200}{64}$$

$$f(4)+f(4\tfrac{1}{4})+f(4\tfrac{2}{4})+f(4\tfrac{3}{4})+f(5)=\frac{15940}{64}$$

故得

$$\frac{\frac{3179}{64}}{\frac{15940}{64}}\times 13=\frac{3179}{15940}\times 13\doteqdot 2\cdot 5927\doteqdot 3$$

是以住足於中數位置者不及三人也.

夫於 196 人中而以二三人之主張爲定準,非其認識確切,烏能至此哉.

特別相對律之評論

鄭亞余

由特別相對律,吾人已知時間空間爲相對者,推演而知速度加速度質量勢力各關係.今余摘其已成之程式更申論之,意在引證起信,措辭淺拙則未暇計及也.

(一) 相對論之成功,在於先知光有最大之速度.是以於靜世界測得之任何速度必小於光.以此轉變入於動世界,仍必小於光.動世界與靜世界之相對速度亦必小於光,勿具論矣.

故令　$$v = c - a$$

由　$$V_x = \frac{V_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}V_x}$$

設　$$V_x = c - b$$

則　$$V_x = \frac{(c-b)-(c-a)}{1-\frac{(c-a)}{c^2}(c-b)}$$

$$= c \times \frac{a-b}{a+b-\frac{ab}{c}}$$

但　$$a < c$$

$$\frac{a}{c} < 1 \quad 即 \quad o < 1 - \frac{a}{c}$$

$$0<b\left(1-\frac{a}{c}\right)$$

$$\therefore \qquad a<a+b\left(1-\frac{a}{c}\right)$$

移項 $\qquad a-b<a+b-\frac{ab}{c}$

卽 $\qquad \dfrac{a-b}{a+b-\dfrac{ab}{c}}<1$

$\therefore \qquad a\times\dfrac{a-b}{a+b-\dfrac{ab}{c}}<c$

卽 $\qquad V_x<c$

是靜世界測得小於光之速度,轉變入於動世界必仍小於光之速度也.

設光速度爲最大而不變易者,則於動世界靜世界觀測之數値必常一定,亦不因有轉變而生增減.

故 $\qquad V_x=c$

則 $\qquad V_x=\dfrac{c-v}{1-\dfrac{v}{c^2}+c}$

$$=c$$

設令 $V_x=c$ 亦可推得 $V_x=c$ 無待言矣.

倘吾人反設宇宙間竟有速度較光爲大之物,自然現象將何所似耶.曰,吾人將不信賴光所傳達之事跡而將憑藉其大於光速度之物以傳達消息矣.譬如瞽者素以聲音推地之遠近事之先後.設一旦目明,必知聲音傳達事跡猶不如光,而將憑藉敏捷之光,以抹煞一切遲緩之消息矣.

已知　　$v=c-a$

設在靜世界於時刻 t_1 內,在 (x_1, o, o) 發生一事件,而後在 (x_2, o, o) 乃終了,其時刻爲 t_2.

又令 V_x 爲其事件之反應速度

故靜世界得　　$x_2-x_1=V_x(t_2-t_1)$

其事件之終始由動世界之觀測

$$\bar{t}_2=\beta\left(t_2-\frac{vx_2}{c^2}\right)$$

$$\bar{t}_1=\beta\left(t_1-\frac{vx_1}{c^2}\right)$$

$$\bar{t}_2-\bar{t}_1=\beta(t_2-t_1)-\beta\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)$$

$$=\beta(t_2-t_1)\left(1-\frac{v}{c^2}V_x\right)$$

上式中已令　　$V_x>o$

又以　　$t_2-t_1>o$

則　　$1-\frac{v}{c^2}V_x\nless o$

反之　　$1-\frac{v}{c^2}V_x<o$

$$\beta(t_2-t_1)\left(1-\frac{v}{c^2}V_x\right)<o$$

卽　　$\bar{t}_2-\bar{t}_1<o$　　$\bar{t}_2<\bar{t}_1$

然而　　$t_2-t_1>o$　　$t_2>t_1$

由此則知同一事件,得以觀測地位不同,時間順序發生顚倒之現象矣;然此必無之事也.何則,先見白川已死,後見白川病臥醫院,豈科學所容許之事跡也耶.

是以仍令　$1-\frac{v}{c^2}V_x \nless o$

倘或反設　$1-\frac{v}{c^2}V_x \leqq o$

則　$c^2-vV_x \leqq o$

$c^2 \leqq vV_x$

既已令　$v<c$

故得　$V_x>c$

是卽容許宇宙間有大於光速度之捷物也,然則容許時間順序顚倒之現象亦能存在於科學界矣,是又烏乎可者.

(因由 $V_x>c$ 可推得 $t_2<t_1$ 與 $t_2>t_1$ 故上段云云.)

倘設一種動物常布滿日光之中,對於某靜世界,日光與其中之動物作相對運動,其相對速度 $v=c$

日光中某動物於其光世界裏測得一速度 V_x 則某靜世界觀測此速度之 V_x 如次.

$$V_x=\frac{V_x+c}{1+\frac{c}{c^2}V_x}$$

$$=\frac{(V_x+c)c}{c+V_x}$$

$$=c$$

反設光世界爲靜而其相對之世界爲動.

則　$$V_x=\frac{V_x-c}{1-\frac{c}{c^2}V_x}$$

$$=-c$$

由是可知任何世界對於光世界中之任何速度,觀測則變,常只為 c, 無能於其世界中增減光速度之毫末者.

任何速度必小於光速度,倘竟反設兩世界之相對速度大於光速度,則知次式化成虛數,非常用之方式矣.

令

$$v = c + a$$

$$v^2 = c^2 + a^2 + 2ca$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{2a}{c}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - 1 - \frac{a^2}{c^2} - \frac{2a}{c}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}\sqrt{\frac{a^2}{c^2} + \frac{2a}{c}}}$$

由上式可知相對速度不能超過光速度.倘吾人一旦發現大於光速度之捷物,則一切定數之 c, 均應易以較大之定數而代其位置.光所傳達之事跡,將如今日吾人所視於聲之地位,不甚推重矣.然而此亦不過虛幻之設想而已.豈足見諸實事.

(二) 觀測異地之時間,先須發信號.最善之信號莫如光.以其速度最大,能免除擾亂之影響,能由地球及於其外之列星,無往不利.

設於同世界中 A 發光爲信號至 B 反射歸 A。

令　$t_a = A$ 之 a 表測得發光之時刻

$t_b = B$ 之 b 表測得光到之時刻

$t_a' = A$ 之 a 表測得光由 B 歸 A 之時刻

既設光速爲不變者

故　$$c = \frac{AB}{t_b - t_a} = \frac{BA}{t_a' - t_b}$$

卽　$$t_b - t_a = t'_a - t_b$$

∴　$$t_b = \tfrac{1}{2}(t_a' + t_a)$$

可知 a 表與 b 表不以位置有異所測之時刻而有長短之不同.此類現象名曰等時性.利用此等時性,始能觀測時間.要不能不藉光爲信號.昔者根據地球之自轉而定晝夜,名曰恆星日.其後因時間急緩之差較巨,乃根據地球之公轉以定晝夜,名曰太陽日.則時間之屬爲相對而非易測者,與夫用光爲信號之深心,可以知矣.

今設美與日不幸開戰於太空中,兩國所用之砲彈,名曰理想自發砲,彈自動自進於每秒間擊射一次,砲彈之速度每秒百里.茲設美日飛機相距千里時,開始攻擊.則砲彈進射至十秒之末卽達敵機,於是每彈起落,擊者與被擊者所經之時間,固常相等也.殊知日方詭計,距美機千里時,二擊之頃,便令飛機前進,進行速度每秒五里.於是時,美人猶處夢中,以爲前後被擊時間,仍舊爲一秒.其實日之一彈與二彈固於開戰後十秒與十一秒相繼落下.其三彈落下未及

十二秒甚矣.距離減短故也.

因　$1000^{\text{哩}}-5^{\text{哩}}=$ 日發三彈時與美機之距離

$= 995^{\text{哩}}$

$995 \div 100 =$ 三彈至美機所費之時間(爲秒數)

$= 9{\cdot}95$

而　$(1000 \div 100) - 9{\cdot}95 = {\cdot}05$

故開戰後 $10 + 1 + {\cdot}05 = 11{\cdot}05$ 秒爲三彈落下之時刻

由是可知兩世界作相對運動時,彼此觀測時間,甚非易事.且知時間不能離開距離而自行獨立之理.

設將砲彈進行比光線,則知觀測光速度,離發光體愈進愈難喻其大,縱離發光體甚遠,亦將因相對運動之故,捉摸不定,況光之速度原甚大耶.大者可以容小,速者可以伺慢.以跛者追慶忌,其不可乎.

時間既爲相對者,則動靜兩世界所測之永暫,不能混同.黃粱夢長,良宵苦短,物理界之時間,何曾異於是.

設由靜世界之 $(1, vt, o, o)$ 推測動世界

則
$$\bar{x} = o$$
$$\bar{t} = \beta\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$$

是即靜世界以一秒之時間,所測動世界之時間似若不及一秒也.將動視爲靜,靜視爲動,其理亦然.

若於靜世界自測之同時二事件一屬於 (t, x_1, o, o) 一屬於 (t, x_2, o, o).

則

$$t_1=\beta\left(t-\frac{v}{c^2}x_1\right)$$

$$t_2=\beta\left(t-\frac{v}{c^2}x_2\right)$$

$$t_2-t_1=\beta\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)$$

是卽靜世界發生之事件本爲同時,轉變入於動世界必有時差也.其時差以靜世界中事件發生之距離爲轉移.動世界若以爲同時者,則於靜世界亦有隨距離轉移之時差,意中事也.蓋動靜既爲相對者,彼此互測之時間與距離自必亦屬相對者,異地則皆然耳.

(二) 時間不能離空間而獨立,則測量距離亦不能摒棄時間之關係,顯而易知矣.在靜世界觀測距離者,常立於二點之中央,由二點發光爲信號,而同刻達於中央,於是決定觀測人在二處之中點無訛.不如此,將因相對運動發生謬誤矣.

例若靜世界觀測動世界中之距離,譬如立人於軌道之旁,以測車之長短,則其困難立現,而易生謬誤,無待言喻.何則,吾人所要求者在車上與地上由車頭車尾同時發信號,須同刻能達於車上之中點,並同刻能達於地上之中點而後可也.但由車頭車尾縱能同刻發信號至於車之中央,然在軌道之旁者未必亦卽以爲同時也.在軌道之旁者雖同刻得車頭車尾之信號,而在車之中央者,又未必以爲同時也.是以動靜兩世界互測距離決非易易.

（此處車身甚長速度甚大）

茲者僅就已成之公式以釋距離相對之理,實驗之事,姑不涉論.

前已設靜世界有同時二事件 (t, x_1, o, o) 與 (t, x_2, o, o)

今可得 $\overline{x}_1 = \beta(x_1 - vt)$

$\overline{x}_2 = \beta(x_2 - vt)$

則 $\overline{x}_2 - \overline{x}_1 = \beta(x_2 - x_1)$

可知由靜世界推測動世界中之距離頗似縮短若干者.

$$\frac{\overline{x}_2 - \overline{x}_1}{x_2 - x_1} = \beta > 1$$

即 $\overline{x}_2 - x_1 > x_2 - x_2$

反之以動爲靜以靜爲動其理亦然.

今設動世界內有剛體球而以動世界之原點爲中心隨諸 X 軸之方向亦以相對速度對於靜世界而運動.

令 $\overline{R} =$ 動世界內剛體球之半徑

則 $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2 = \overline{R}^2$

設於其時 $t = o$

所測之 $\overline{x} = \beta x$

$\overline{y} = y$

$\overline{z} = z$

則 $\beta^2 x^2 + y^2 + z^2 = \overline{R}^2$

$$\frac{x}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,R\right)^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1$$

於是知其爲靜世界所觀測似一橢圓體其主軸之長如次

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}R \quad 與 \quad R \quad 及 \quad R$$

故剛體球以等速度作直進之運動時,靜止者由其後觀測之,其運動方向之主軸,頗似縮短若干,其比例爲

$$1:\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

是以此類縮短之現象,視相對速度 v 之大小而定.v 益大,縮短現象益顯.設 v 之大,竟等於 c,則由靜世界觀測之,僅見一圓板前進而已.

同理由動世界觀測靜世界之剛體球,亦似橢圓體.蓋以動靜爲相對名詞之故耳.

剛體球者其實質大小不能受任何力以增減者也.所謂縮短現象,決非其物體有如受機械等壓力而縮小之謂也.不過主觀不同,因相對運動之故,自遠窺之,頗似收縮而已.否則身體健康之男子,不將因競走之故,腹背扁縮而如紙上之畫像乎.五尺軀幹,不將因乘昇降機之故而短縮不及三尺之侏儒乎.此豈近於理者.

(四) 據特別相對律,吾人已知速度及加速度皆爲相對者,然在靜世界測得之速度若爲定數,轉變到動世界仍保持爲定數.加速度則大異.

設 $$V_x = K = 定數$$

則 $$V_x = \frac{k-v}{1-\frac{v}{c^2}K} = 定數$$

設　$a_x = C =$ 定數

則　$$\overline{a_x} = \frac{C}{\beta^3\left(1-\frac{v}{c^2}V_x\right)^3}$$

上式中V_x未必爲定數,故靜世界之加速度雖已爲定數,轉變到動世界或爲變速度矣.

速度之合成,在未發現相對論時,頗難解釋光在流水之速度.今由特別相對律之速度合成法,其理甚爲顯明.

設　$n =$ 光對於水之屈折率

則　$\frac{c}{n} =$ 光透過流水對於流水之速度

令　$\frac{c}{n} = \overline{V_x}$

又　$v =$ 流水對於靜止觀測人之速度

$V_x =$ 光透過流水對於靜止觀測人之速度

代入　$$V_x = \frac{\overline{V_x}+v}{1+\frac{v}{c^2}\overline{V_x}}$$

$$= \frac{\frac{c}{n}+v}{1+\frac{v}{c^2}\times\frac{c}{n}}$$

$$= \frac{\frac{c}{n}+v}{1+\frac{v}{cn}} \times \frac{1-\frac{v}{cn}}{1-\frac{v}{cn}}$$

$$= \frac{\left(\frac{c}{n}+v\right)\left(1-\frac{v}{cn}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2n^2}}$$

但以 $\frac{v^2}{c^2 n^2} \doteqdot o$

∴ $V_x = \left(\frac{c}{n} + v\right)\left(1 - \frac{v}{cn}\right)$

$$= \frac{c}{n}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

又以 $\frac{v^2}{c^2} \doteqdot o$

得 $V_x = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

此與昔者測得之結果一致,是卽特別相對律之一佐證也.

速度合成法,可應用雙曲線幾何之三角式以演算.茲特舉例於此,以明物理空間屬於非歐幾何之義.

爲簡便故先取次式

$$V_x = \frac{\overline{V}_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}\overline{V}_x}$$

$$V_y = \frac{\overline{V}_y}{\beta\left(1 + \frac{v}{c^2}\overline{V}_x\right)}$$

$$V_z = \frac{\overline{V}_z}{\beta\left(1 + \frac{v}{c^2}\overline{V}_x\right)}$$

先令 $\overline{V}_x = o \qquad \overline{V}_y = o$

則 $V_x = v$

$$V_y = o$$

$$V_z = \frac{\overline{V}_z}{\beta}$$

又令 $$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \beta_x \quad \text{則}\ V_z = \frac{V_z}{\beta_x}$$

同法令 $$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_z^2}{c^2}}} = \beta_z = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\beta_x^2 V_z^2}{c^2}}}$$

又以 $$\beta_x \beta_z = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_x^2}{c^2}}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\beta_x^2 V_z^2}{c}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\beta_x^2}-\frac{V_z^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_x^2}{c^2}-\frac{V_z^2}{c^2}}}$$

應用Pythagoras平方定理令

$$V_x^2 + V_z^2 = V_\gamma^2$$

故可得 $$\beta_x \beta_z = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V_\gamma^2}{c^2}}} = \beta_\gamma$$

設 $$\beta_x = \cosh P_x$$

$$\beta_z = \cosh P_z$$

$$\beta_\gamma = \cosh P_\gamma$$

則與雙曲線直角三角三角公式無異矣.

即 $$\cosh P_\gamma = \cosh P_x \cosh P_z$$

且 $$\cosh P_x = \beta_x$$

$$\sinh P_x = \sqrt{\beta_x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{V_x^2}{c^2}}-1}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{V_x^2}{c^2}}{1-\frac{V_x^2}{c^2}}} = \beta_x \frac{V_x}{c}$$

則 $$\tanh P_x = \frac{V_x}{c}$$

同理 $$\tanh P_z = \frac{\overline{V}_z}{c}$$

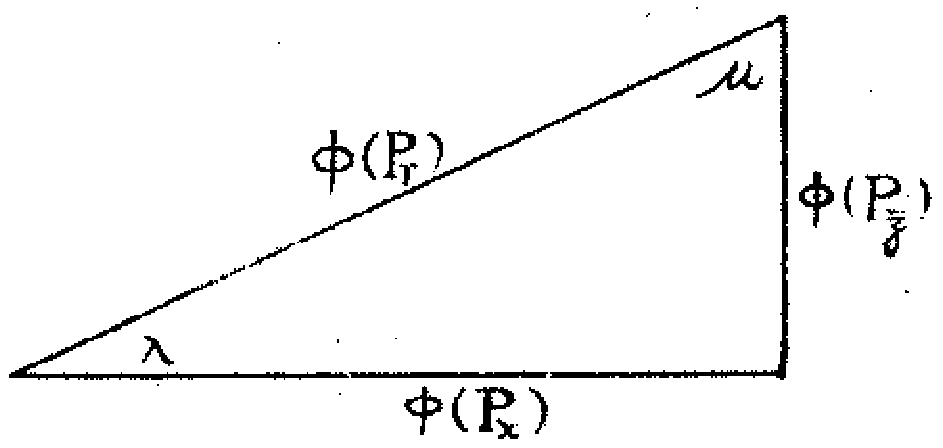
因得 $$\frac{\tanh P_z}{\sinh P_x} = \frac{\overline{V}_z}{c} \div \beta_x \frac{V_x}{c}$$

$$= \frac{\overline{V}_z}{\beta_x} \times \frac{1}{V_x}$$

$$= \frac{V_z}{V_x}$$

並令 $$\frac{\tanh P_z}{\sinh P_x} = \frac{V_z}{V_x} = \tan\lambda$$

是亦恰合於雙曲幾何學之直角三角形公式也.其三角形之圖如次.



由此應用 Napier 氏球面三角式之排列法可得一切之雙曲三角形之關係.總之此項計算,深合於理,殆亦宇宙間之神祕也歟.

(五) 相對論未發現以前,普通以爲質量爲絕對不變之值,今則有縱質量橫質量之別,既知由動靜相對之故質量以分縱橫,則質量之值隨諸相對速度而加減,自爲必然之理也.釋之於次.

設 $N=$ 靜世界測得一立方體之積

則 $N=xyz$

但於 $t=o$

$$\bar{x}=\beta x \qquad \bar{y}=y \qquad \bar{z}=z$$

故 $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}=\beta xyz$

即 $\bar{N}=\beta N$

但物質之密度爲理想之絕對值.令此處之密度爲 ϱ, 則 ϱ 在動靜世界,值常不變.

故 $\varrho\bar{N}=\bar{m}=\varrho\beta N=\beta m$

即 $\bar{m}=\beta m$

倣照上式於靜世界中某物體以速度 V 運動時其質量爲 m 其靜止時質量爲 m_o

則 $$\underline{m}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}m_o$$

再由次式可推得縱質量與橫質量.

$$\frac{d(mV)}{dt}=m\frac{dV}{dt}+V\frac{dm}{dt}=F$$

式中　V = 砲彈射出之速度

$\underline{m}$ = 砲彈射出後之質量

F_t = 砲彈射出之力

因　$F_t \parallel V$

故令　m_t = 縱質量

即

$$F_t = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{dV}{dt} + V\frac{d\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}m_o}{dV}\frac{dV}{dt}$$

$$= \frac{m_o}{\sqrt{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^3}}\frac{dV}{dt} = m_t\frac{dV}{dt}$$

是即縱質量為 $\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}m_o$ 也.

再令　m_o = 靜止滑車之質量

V = 滑車迴轉之速度

m = 滑車迴轉時之質量

F_t = 求心力

因　$F_t \perp V$

故令　m_t = 橫質量

則由

$$F_t = \underline{m}\frac{dV}{dt} + V\frac{d\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{dV}\frac{dV}{dt}$$

但求心力,只與半徑之方向相同,故只許加速度存在,其迴轉速度不能存在於求心力上.故 $V=o$

是以 $$F_t=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{dV}{dt}=m_t\frac{dV}{dt}$$

即橫質量爲 $\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}m_o$ 也.

電子之有縱質量與橫質量,已早發現,今據相對律以解釋之,更爲圓融矣.

總之,質量之變易,不外勢力之增減.其變易則又非時間空間之僅僅屬於皮相者.

由 $$\Delta E=\int F\,ds$$

應用 $$F=\frac{d(mV)}{dt}$$

∴ $$\Delta E=\int\frac{d(mV)}{dt}ds$$

$$=\int\frac{ds}{ds}\,d(mV)$$

$$=\int V\,d(mV)$$

但 $$m=\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$m^2=\frac{m_o^2}{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

則 $$V=c\sqrt{1-\frac{m_o^2}{m^2}}=\frac{c}{m}\sqrt{m^2-m_o^2}$$

∴ $$mV=c\sqrt{m^2-m_o^2}$$

然則　$d(mV)=\dfrac{cm}{\sqrt{m^2-m_o^2}}\,dm$

∴　$\Delta E=\int c^2\,dm=c^2\int dm$

設令　$\Delta m=$運動中增加之質量

則　$\Delta m=\int dm$

則　$\Delta E=c^2\Delta m$

可知物質運動時,質量之所以增加者,以勢力於茲有所增加之故也.宇宙間之物質,不生不滅,其變易惟隨諸勢力增減而已矣.今者測得一單位 gram 之質量,同於 9×10^{20} erg 之勢力,而與 $\cdot214\times10^{14}$ Calorie 之熱量相當.由二百二十五 gram 之銑一時之間發生 30240 Calorie 之實驗,亦可推知勢力與質量同爲一物之理,不亦奇乎.

(六)　設　$V=$對於靜世界合成之相對速度.

則　$V^2=\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2$

卽　$V^2\,dt^2=dx^2+dy^2+dz^2=R^2$

但由 Minkowski 四次元

$$ds^2=c^2\,dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$$

∴　$ds^2=c^2\,dt^2-V^2\,dt^2$

於此式設　$dt^2\fallingdotseq o$　則爲現在短時之表現.

則　$ds^2\fallingdotseq o$　恰合於原設之前提.

設　$dt^2<o$　則爲時間已去之表現.　$c>V$

而得　　$ds^2 > o$　則是事跡之延展過去世界之印象也.

設　　$dt^2 > o$　則爲時間之伸張.　　$c > V$

於　　$ds^2 > o$　則爲未來世界之表現.

倘設　　$ds^2 < o$　則 ds 爲虛數與現世界不相聯屬.因名此曰超然世界

又設　　$ds^2 > o$　則於 $dt \neq o$ 得 $c = V$

物體之速度竟同於光,名曰光世界,再分爲二部.

$dt < o$　名曰前圓錐,此指光世界爲靜者.

$dt > o$　名曰後圓錐,此指光世界爲動者.

由 $$ds^2 = -\frac{1}{1-\frac{2m}{\varrho}}\,d\varrho^2 - \varrho^2\,d\theta^2 - \varrho^2\sin^2\theta\,d\Phi^2 + \left(1-\frac{2m}{\varrho}\right)dt^2$$

設離太陽極遠或設一空點則 $m = o$

$$ds^2 = -\,d\varrho^2 - \varrho^2\,d\theta^2 - \varrho^2\sin^2\theta\,d\Phi^2 + dt^2$$

由極座標轉變爲垂直座標

即 $$ds^2 = -\,dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2$$

此時已令光速度等於一矣.

由此可知特別相對性與普遍相對性之界限及其關係矣.然而宇宙之偉大.豈區區所能窺其萬一者哉.東塗西抹,以遣歲月耳.

植物生理學史略

(續第二卷第二期)

張 珽

第四章

灰分問題之研究

含碳,氮,氫,氧間及磷硫之有機物質,爲構成植物體之重要材料.唯含此等有機物質外,植物體中尚有多種其他原質,以"無機態"結合存在.燃燒植物體時,水分及有機物質皆氣化飛散,獨此等物質則仍成固體之灰而殘存,故通常恆稱爲灰分 Ash constituentz, 或礦物質 Mineral matter.

灰分之研究,爲植物生理學上一重大問題.然歷來研究,皆無甚結果.緣其分量既少,其關係情形又甚爲繁複,故着手極形困難.在此四十年中,植物生理學各方面之研究,進步之紆徐,蓋以灰分問題爲最.除定性定量兩種結果,定出某種原質能在植物灰中求得,其分佈之分量約略如何而外,某一種原質究竟有何種特殊之功能的研究,直可謂爲毫無結果.此不獨植物生理學者所同攢眉蹙覗,卽在研究遙較完備之動物生理學方面,亦至今猶未能明定.一種原質之作用,往往涉及多方面;而生物本身之生活狀態,又在

在足以影響及於此特殊作用之表現.要之,吾人雖明知生物生命之長在適宜狀況中,此各原質之由關Correlation,實大有力量;然其各個各個之情形,則迄今猶未有適當之方法可以從事解決也.

第一節 灰分之吸收

灰分之吸收,與水之吸收爲相關而不可分離之現象.蓋普通植物與動物不同,決不能吸收固態養分,而必須溶之於水中;同時自然界亦決無不含雜質之純水,植物吸收水分時同時卽將其中所溶存之礦物質吸入多少矣.由是關於灰分吸收之機轉的研究,遂亦與水之吸收合一.

I. 選擇吸收之現象:

1. De Saussure之選擇吸收說 Selective Absorption, 以爲根具選擇力,能擇其所需要者吸收之.

2. Knop 1859, 1864 兩年; Wolff 1864年; Biedermann 1867 年對於此問題均有所研究.而尤以Wolff所得結果爲最關重要.据其研究所得結果,乃得推定:"各種能受吸收之鹽類,成溶液而涵濡於土壤中時,其受吸收之量與同時吸入之水量,不能恆成定比."若溶液之濃度大於植物之所需,則吸入之水較鹽爲多,結果餘存土中之液其濃度亦愈大;反之,若溶存濃度較小於植物之所需,則鹽之吸入多於水而餘液濃度益加淡.由是而選擇吸收之現象始得明定.

3. 從來學者卽已知,使某一種植物之根與某種環體液

接觸時,則其根自此液中所吸收之鹽類分量,初不與原存鹽類之滲透壓之大小成正比,而顯然有等差存在.此卽所謂定量選擇 Quantitative selection 之現象.其實證有:

a. Gödechen 1845 年就藻類分析之結果,知水生植物有選擇其特殊需要之一種鹽類,而作過剩的吸收,以堆積此鹽於其體中之特性.

b. Wolff 1871 年因 Gödechen 之研究引起而就陸生植物作分析,知陸生植物之吸收現象,亦有堆積特殊成分之特性,又各種植物所吸收之鹽類,其相互間之比例彼此不等.

c. Liebig 1876 年有同方向結果之研究.

d. König 1889 年更增益多種材料及證據.

II. 選擇吸收之機轉:

1. Liebig 以爲植物之根所分泌之有機酸,能溶解土壤之各種鹽類,以供給吸收;酸對於各種鹽類之溶解力不同,故其結果植物所能吸收之鹽類分量亦異.

2. Sachs 1865 年以磨光之石膏板能受根之腐蝕,證明 Liebig 之說.

Sachs 遂以爲植物根根毛能因外滲透 Exosmosis 而分泌有機酸,與當世正流行之滲透說相合.

3. Pfeffer 反對 Sachs 之解釋,其詳情見水之吸收章.

4. Mulder 以定量選擇力爲滲透壓與吸收後新陳代謝

率變化聯合作用之結果.

5. Wolff由植物體中存在之鹽類之性質分量上作種種研究,結果以爲選擇吸收爲植物本身情形與環體物質情況聯合作用之結果.

6. Czapek 1896 年證明植物根不能分泌有機酸惟有酸性鹽及碳酸 H_2CO_3 之生成,更根本推翻Sachs之說.

7. 近代多數學者,則以爲原形質本身有一種控制力,對於礦物質之透入於擴佈上,有重大影響,有時與外界之滲透力相輔並進,有時則加以限制與頡頏.

第二節 各種灰分之定量研究法

I. 直接法: 就自然界已成之物質作研究,以決定植物對於鹽分之需要,即所謂灰分分析 Ash Analysis.過去之研究,泰半屬於此方面.此四十年中,則以Wolff之績爲最大.自1868年迄於1880年,繼續有所發表,關於各種植物體中灰分之總量,及各種鹽類之配分等,俱有詳盡之研究.次之則 Grandeau 及 Bouton 1877年就寄生植物與其寄生之灰分分析之比較,闡明定量選擇之說者,亦極重要.

II. 間接法: 即以人工方法,限制某種灰分之供給量,以觀其對於植物生長之關係.其法爲將人工製備之各種鹽類混液,培養植物,而測定其生長情形,或更將此種栽培植物作灰分分析以決定推定之結論: 培養法計有三種:

A. 土培法: 1842 年 Wiegman 及 Polstorff 以鉑粉及矽為基質,加鹽液以培養植物. Salm-Horstmar, 1856 年改良兩氏之法,以不能溶解之人工土壤,為培養基,加鹽類溶液於其中以作實驗.所用人工土壤,為粉碎之石屑及炙糖而得之炭. Salm-Horstmar 由此種研究法所得結果,決定磷,硫,鉀,鈣,鎂,鐵,硅,錳為植物生長所必須之原質.氯之需要與否認為可疑;鈉則堅持其為不必要.

B. 砂培法: Hellriegel 1883 年改良 Salm-Horstmar 之土培法,以灼紅之石英砂,經硫酸煮過者,代替土壤,加試驗用之鹽液於其中.

C. 水培法: 即用純粹之水溶液以供培養:

1. Woodward 1699 年時即已用之.

2. De Saussure 1804 年時以鬼針草 Bidens 及水蓼屬 Polygonum 等水生植物栽培於鹽溶液中.

3. Sachs 始於 1860 年用鹽溶液以培養陸生植物.其溶液之配合為:

$MgSO_4$	0.5gr.
KNO_3	1.0gr.
$NaCl$	0.5gr.
$CaSO_4$	0.5gr.
$CaHPO_4$(粉末)	0.5gr.
$FeCl_3$	少量

4. Knop 同年之實驗,所用之溶液,即生理學上著名之Knop溶液,其配合爲:

$Mg\ SO_4$	0.25gr.
$Ca(NO_3)_2$	1.00gr.
$KH_2\ PO_4$	0.25gr.
KCl	0.12gr.
$FeCl_2$	痕跡

5. Birner及Lucanus 1866年之培養液:

$Mg\ SO_4$	約0.5gr.
$Ca(NO_3)_2$	1.5gr.
$KH_2\ PO_4$	1.0gr.
$Fe\ PO_4$	1.1gr.

第三節 各種灰分之作用

I. 必需原質之決定:

1. Senébier 1808 年, De Saussure 1804 年皆曾認定某數種礦物質爲植物所必需之材料. Liebig 1804 年更以雄辯爲此說樹聲援.此爲定出必需原質 Essential elementz 之始.

2. Salm-Horstmar 1856 年由土培法定出燕麥生長所必需之原質爲 Si, P, S, K, Ca, Mg, Fe, Ma. Cl 則存疑;Na之分佈雖廣,溶解亦易,然就非植物所必須之物.

3. 由 Sachs, Knop, Birner 及 Lucanus之水培研究,可知 Salm-Horstmar 所列舉之八種原質中,Si與Mn初非必需,其餘六

者則信不可少.

II. 必需原質之作用:

A. 磷及硫: 自發現磷及硫在構生物體質之蛋白質中爲重要成分後,兩者之爲必需原質遂無復還疑者.此外:

1. Boussingault 1860 年爲磷之存在與硝酸鹽之利用有關. Gibbert 及 Lawes 同年有同樣之證明.

2. Schimper 1890 年發現植物能吸收多量之磷酸硫酸根而儲之於體中,可以定性法檢查得之.至此兩種根之給源漸次銷減時,則儲存者旋卽變爲高級磷硫化合物而去,不復呈磷酸硫酸之反應.形成組織 Meristem 花粉粒,芽中之幼稚細胞,皆無硫酸磷酸而含硫及磷甚多.

3. Macallum 1898 年發見磷爲細胞核及細胞核仁之重要成分.

B. 鉀:

1. Nobbe, Schröder, Erdmann 1871 年發現無鉀鹽之存在時,葉綠體中不能生成澱粉.又不給 KCl 時則已成之澱粉粒亦積滯葉中,不能運出.

2. Lupke 1887 年發現不供給鉀鹽,植物體各部分之情形尙能保持平衡,唯全體呈侏儒狀態.

3. Schimper 1890 年之實驗,始將鉀鹽之功用試出.以極少量之鉀鹽供紫鴨跖草 Trades cantia 之生長,初時尙能保持

常態,及鉀之來源既竭,生長點 Growing point 之發育仍能持續,唯其幼葉漸生漸小漸薄,同時下面之老葉卽逐漸死亡,以輸其所含之鉀於幼葉.及至最後,新生之幼葉直無面積可言,宿存組織中之鉀亦復耗盡後,則生長點亦死亡.

4. Macallum 1900 年迄於 1904 年之實驗,發現:

a. 維管束之細胞壁常在鉀鹽之飽和中.

b. 綠色細胞中鉀鹽散在極多;唯核不含有.

c. 水綿 Spirogyra 之絲狀體中,葉綠塊 Chlorophore 傍近之細胞質含鉀鹽特富.

d. 問荊 Equisetum arvense 胞子發芽時,生成假根之細胞內,積有鉀鹽甚多,且將來假根突出之點,卽爲鉀鹽聚積最多之處.假根生長時,堆積之鉀鹽卽隨其內側細胞膜向外推移.

e. 百合 Lilium 之花粉管發芽時,情景正同.

f. 水綿行結合生植時其所發出之接合管亦有同一現象可以檢出.

由是 Macallum 遂作爲推論:

a. 鉀鹽與光合作用有關.

b. 鉀鹽與澱粉之異化或亦有關.

c. 鉀鹽與細胞膜之生成及生長有關.

C. 鈣:

1. Salm-Horstmar 1856 年以爲顯花植物之發育與鈣鹽有

關.

2. Böhm 1875 年則爲謂種子發芽時由種子中運養分至萌蘖植物中之作用與鈣鹽有關係.

3. Raumer 1883 年謂鈣鹽爲形成細胞膜之一種必要條件.

4. Benecke 1894 年至 1898 年之研究,證明菌類可以不需鈣鹽.唯水綿及綠氈 Vaucheria 之生長必須鈣鹽.

5. Molisch 1895 年至 1896 之研究亦證明菌類可以必不有鈣鹽;但水綿無鈣鹽之供給則不能生成橫隔細胞膜.

6. Stohmann 見用水培法栽培玉蜀黍 Zea may 時,若斷其鈣鹽之供給,則生長卽停止;於停止後再加入鈣鹽,則生長又可恢復.

7. Schimper 1890 年之發表.

a. 現象.

(一)植物生成新原形質處,鉀與鎂堆積之所,普通不見有鈣鹽,唯老成器官中含之甚多,葉爲尤富.

(二)紫鴨跖草在無鈣鹽之培養液中生長時,其葉初時亦能正常發育,無變小之傾向.然不久新葉卽漸起褐斑而死亡. Schimper 謂此褐斑爲蓚酸所引起之中毒現象.

b. 解釋: 由是 Schimper 乃推定謂鈣之作用,並不在積極的方面與新陳代謝有關,而在中和新陳代謝時所產生

之蓚酸$(COOH)_2$及蓚酸鉀$(COOK)_2$使成無害之蓚酸鈣$(COO)_2$ Ca沉澱.故鈣之功能實在消極的解毒作用一方面.

8. Pfeffer 見不能生成蓚酸鈣之植物,一遇蓚酸鉀,則受傷害,是不啻爲Schimper之說,作一强有力之證明.然Portheim 1901年發現在無鈣鹽之土壤中生長之豆類,雖亦起病態,第其體中絕不能檢出蓚酸或其他强游離酸,則Schimper之說,殆只能解釋某一方面個別之情形而非普通之現象也.

9. Palladin 1891年謂鈣鹽與葉之生長有關,由定量分析知黃化之葉,所含鈣量僅達普通葉之五之一.

10. Mangin 1892年謂鈣鹽殆與一種植物膠質酸Pecticacid結合而爲細胞膜之一部分.

11. Löew 1900年以鈣爲某種蛋白質之成分,此蛋白質爲構成葉綠素及細胞核時所絕不可少者.

D. 鎂:

1. Salm-Horstmar 謂鎂爲葉綠素之一主成分.經近代分析葉綠素所得結果爲之證明,知良不謬.

2. Schmiedeberg 1877年發見 Brazil-nut (Bertholletia excolsa) 中蛋白質結晶爲卵黃蛋白質 Vitellin 之鎂鹽.

3. Prübber 1881年見葫蘆Gourd中所含可以結晶之蛋白質亦含有鎂.

4. Raumer 1883年謂鎂與澱粉粒自葉綠體中移出之作用亦有關係.

E. 鐵:

(甲)鐵與葉綠素

1. E. Gris 遠在 1843 年卽已發現鐵與葉綠素生成間之關係.無鐵鹽之供給,顯花植物卽不能生成葉綠素,而起所謂黃萎病 Chlorosis 之現象,幼嫩部分逐漸變爲蒼黃,終以死亡.此時若再以鐵鹽供給之,卽又可漸次恢復健康狀態,已起黃萎病之葉,若其角皮爲可透性 Permeable 者,則更可直接以鐵鹽溶液敷布其上而挽回之.

2. Raulin 1869 年發現不含葉綠素之菌類,缺鐵鹽亦不能生活.

3. Hansen 1889 年由葉綠素與鐵鹽間之關係着想,以爲鐵必爲葉綠素之一種成分.

4. Schunck 1891 年自謂曾在葉綠素之崩解成績體 Phylloxanthin 中發現鐵分.

5. Gautier, Ernich 1892 年精細分析葉綠素,皆未得鐵.

6. Molische 1892 年一方面就分析法證明葉綠素不含鐵一方面更重行 Raulin 1869 年之實驗,無葉綠素之菌類亦不可缺少鐵分,反證鐵非葉綠素之成分.

7. Benecke 1895 年再就菌類實驗,結果與 Raulin 及 Molisch 相同.

8. Macallum 1891 年以微量檢定法在顯微鏡下檢查,亦未見葉綠素中有鐵.

9. Pfeffer 之斷案,則以爲鐵之作用,殆與鉀及鎂相同,在原形質之形成上有重大關係,缺鐵之所以引起黃萎病者,蓋營養不良後所起之附帶現象而已.

(乙)鐵鹽在細胞中及其他各處之檢出: Macallum 1891 年以後與其共同研究者利用 Macallum 所發明顯微鏡下微量檢量檢查法在美研究之成績:

1. Macallum 本人在卵珠 Ovule 之染色質 Chromatin 中發現有鐵.在細胞質,則小麥之糊粉粒細胞層細胞皆含有之.數種菌類之菌絲,胞子,細胞質及核中均有.惟染色質中之鐵,未必即自細胞質中得來.

2. Bensley 1891 年見瞿麥 Dianthus, 南瓜 Curcurbita, 水仙 Narcissus 之花粉細胞染色質中含鐵.在 Mitotic figure 之時期及由核中漸漸銷入細胞體內之擴散染色質 Diffuse chromatin 中均有之. 1893 年復在車前葉山慈姑 Erythronium 卵巢細胞核中見有鐵之反應.

3. Mckinzie 1891 年見之於藻,菌之胞子染色質中.

4. Petit 1892 年見鐵與核質 Nuclein 結合存在於大麥之種皮及胚中. 1893 年更見之於發芽大麥粒之幼根.

(丙)對於鐵鹽功用之推測:

1. Bracci 發現鐵鹽能促燕麥小麥種子之成熟,且能增加其度量.

2. Molisch, Benecke 之實驗,證明菌類之生長受鐵鹽之影

響甚大.

3. Gautier 及 Drouin 1888 見高氧化鐵 Fe_2O_3 能促進土壤細菌之固氮力.

4. Saccharoff 1902 年之新說,見其所著 Eisen als das thätige Prinzip der Enzyme und der lebendigen Substang (gena) 中. Saccharoff 因欲求晰知氧在細胞中之作用,思在各種生物體中覓得一種普遍存在之極易氧化其氧化物又極易還原或更進而起分解之物質.結果歸之於凡細胞中皆略有存在之鐵,而以為"原形質之各種生活現象,皆起自生活物質中所含微量之鐵之氧化及後此(甚或同時)所起之水解."

III. 灰分中必有之次要原質:

A. 氯:

1. Nobbe 1862 年發現蕎麥非有氯鹽之供給不能結實.

2. Leydheker 1865 年至 1866 年證明 Nobbe 之實驗.

3. Aschoff 1890 年發現豆類及玉蜀黍無氯化物之供給時:

a. 頂芽不能發達,且又不久即萎敗.

b. 澱粉粒堆積葉中,不能輸出.

B. 硅:

1. Salm-Horstmar 以硅為植物生長所必需.

2. Sachs 1862 年提出反對,謂在略無硅酸鹽之培養液中,玉蜀黍仍能正常生長.第 Sachs 之實驗,亦未盡屬可徵,蓋其

所用培養器之玻璃,所含硅酸鹽,多少必能溶解於培養液中,以供植物之吸收,故栽培結果所得植物經分析後,其灰分中仍有二氧硅 SiO_2 7.0 % 存在也.

3. Jodin 1883 年所作實驗,在水培中培養玉蜀黍至於四代,仍以未能將培養液中之硅酸鹽全部析除,故結果亦不正確.

4. Kreuzhage 及 Wolff 1883 年證明硅爲穀類及其他禾本科植物正常生長時所必不可少,因硅酸鹽能助成植物利用其他各種必需鹽類,且能促進種子成熟增加種子產量.

C. 錳:

1. Raulin 1869 年謂錳爲黴類所必不可缺者.

2. Bertrand 1897 年由實驗謂錳鹽與某數種植物體中之氧化作用有關.最著者如漆樹,次之如豆科之苜蓿 Medicagosativa 等. Bertrand 以錳爲氧化酵素中之一種成分.

IV. 重要原質之替代的研究: 在無機化學中最重要之一定律,卽爲所謂週期律 Law of Periodicity, 同族之原質,其化學性恆相似,往往可以相代.例如氫氧化鉀 KOH 可使氯化錳放出鹵氣,氫氧化鈉 Na OH, 氫氧化鋰 Li OH, 氫氧化銣 Rb OH, 氫氧鎧 Co OH 亦能之. CO_2 可使氫氧鈣 $Ca(OH)_2$ 發生沉澱,氫氧化鎂 $Mg(OH)_2$, 氫氧化鍶 $Sr(OH)_2$, 氫氧化鋇 $Ba(OH)_2$ 亦有同等作用.然此種相代現象,在灰之作用上,則決不能有.過去之研究,足以證明之:

A. 鉀: 週期表第一族甲類之原質,相似度極大;而鉀之與鈉,尤爲顯著.第在生物體中,則鉀之重要作用,竟非同族中之鋰鈉,銣,鏭所能代.鈉能略代鉀鹽之堆積的儲藏,然其限度極小.據 Benecke 1898 年之研究,藍藻所需之鉀可代以鈉,鋰.銣及鏭亦可使此等植物正常發育,唯絕無胞子形成.

B. 鎂: 同族(鹼土金族)之原質,不能相代.

C. 鈣: 鍶與鈣性質最相近,惟相代仍屬不可能.

1. Haselhoff 1893 年實驗知其不可能.

2. Benecke 1895 年見鍶對於菌類有毒害作用.

D. 鐵: 同族過度原質均不能相代.

V. 其他原質之作用:

1. A. 鋅 Zn

1. Raulin 1869 年發現加硫酸鋅 $Zn\ SO_4$ 於培養液中能促進菌類之生長.液中含硫酸鋅達 0.003 % 時,其生長量約可增大一倍.唯濃度再高則有害.

2. Richards 1897 年證明其說.

B. 大野 Ono 1900 年之實驗,知硝酸鋰 $Li\ NO_3$,亞砷酸鉀 $K_2\ As_2\ O_4$,氟化鈉 NaF 少量存在時對於藻類之生長有摧促作用.氯化高汞 $Hg\ Cl_2$ 及硫酸銅 $Cu\ SO_4$ 對於菌類亦能,唯此兩鹽於藻類則有劇毒.

C. 銅:

1. Nägeli 1893 年發蒸餾水對於水綿之毒,卽所謂微量中毒 Dil oligodynamischen Erchlinungen 作用,在於銅鹽之存在.

2. 服部 Hattori 發現豌豆能抵抗 0.00005 % 之銅,玉蜀黍能抵抗 0.000005 %,過此則均起中毒現象.

3. Aderhold 1899 年以爲硫酸銅及石灰之混合物(所謂 Bordeaux mixture) 所以能刺激葡萄及馬鈴薯之生長者,殆由於銅之作用,使鐵鹽之能力增强.

第 五 章

化 學 的 合 成

植物由無機物以製造有機物之作用,主爲兩途,一爲由 CO_2 及水以製成碳水化合物,再由此出發而製成其他種複雜有機物.此作用凡綠色植物皆能之,作用時,必需有葉綠素與光之存在,故曰光力的合成,一卽光合作用一(Photosynthesis). 另一方面之作用,則爲 1886 年以後新闢之途徑,卽少數之下等植物,能不藉葉綠素與光,兩別以他種勢能自簡單之無機物進行其合成作用.此卽所謂"化學的合成"(Chemosynthesis)是.

微生物之化學合成,直接固可以造成其體質,間接亦可以此而獲得其日後生活所必需儲藏之勢能,故在理論上實際上均當認爲與光力的合成同等之作用.依其作用物

質及作用方向,吾人可區化學的合成為三類:卽硝化,硫黃氧化,鐵氧化.微生物亦可依此標準而區分之為硝化細菌,硫黃細菌及鐵細菌之三羣.

第一節 硝化細菌之合成

硝化細菌之現象,作用情形之研究,已其見氮循環章.茲特將關於其生理上對於無機物有機物之性質之探討,約略述之:

1. Warington 之研究,關於亞硝酸微生物 Nitrous-organisms 之培養上的特性,已見前"氮之循環"一章.由 Warington 之研究,可知此等微生物極不易在普通有機物中生長.

2. Mumo 1886 年之研究,知此等微生物對於有機物有一種特殊之嫌惡.

3. Haraeus 同年以純無機物作培養基培養硝化微生物,結果生長極為暢達.其所用無機鹽,以硫酸錏 $(NH_4)_2SO_4$, 食鹽 Na Ce 及碳酸鎂 $Mg\ Co_3$ 之配合為最適.

4. Hüppe 次年亦有同一之研究,結果主要相同.

5. Winogradsky 由 Heraeus 及 Hüppe 之研究,引起興趣,乃更進作精進博大之實驗,用種培養基作培養.結果知液體培養基以 $(NH_4)_2\ SO_4$, $K_2\ Hp\ O_4$, $Mg_2\ CO_3\ (OH)_2$ 之混合溶液為最適.固體培養基,則以消毒過而含有少量 $Na_2\ CO_3$ 之 $(NH_4)_2\ SO_4$. $Mg\ SO_4$, $K_2\ SO_4$ 混合液,加注於膠硅砂中最為合用;微生物在此中生長特別蕃昌.所以必加碳酸鈉者,蓋以其硝化之結

果,能生成酸性甚强之硝酸,必藉此以中和之也.通常土壤中,恆有碳酸鈣存在,故可以使硝化作用暢行無阻.

Winogradsky復以1.5%寒天質之固體培養基,含有各種礦物者,培養此等生物,結果生長尤旺盛.且生長之結果,培養基中顯然有有機物之增加,竟可以定量法定出其總量;由是乃決知碳酸鹽除中和硝酸鹽外,尙有供給此等細菌所必需之碳化物之作用.但碳之給源,主要者仍當爲大氣中之CO_2;培裝時若不與大氣接觸,硝化作用卽無由起者,CO_2之供給實爲一重要決定因子也. Winogradsky 曾思以他種有機結合態碳供給硝化細菌之碳的需要,然結果均失敗,卽少量之酒石酸鉀 K-tartarate 亦足以阻其生長.據 Winogradsky 之研究,硝化細菌自 CO_2 以合成有機物,暗中與在明處,進行了無差別.由是可知此種化學合成所需之勢能,初非取給於日.就 Winogradsky 之假設,合成中之勢能,全得自錏鹽之氧化.故此種化學合成,與光力的合成在原理上並無差別,同爲吸收勢能,自低級碳化物以製造高級碳化物;所不同者,光力的合成之儲藏勢力,藉葉綠素之力而獲自日,硝化細菌則以氧化後所得勢能爲儲蓄能而已.

關於硝化細菌之化學的合成, Winogradsky 之研究迄於此等生物利用 CO_2 以製有機物之作用遂止,後此竟無復繼續前進者. Winogradsky 曾提出假說,謂此等生物或能自𨩃氣,CO_2, 以製成尿素,再由此進而建造他種複雜有機物,

但無實證,1887年 Hüppe, 1891年 Loew 均曾提出謂此等微生物所利用之 CO_2, 第一步或亦卽爲蟻醛之生成,第亦無事實上之根據可言.

6. Godlewski 1895 年更由實驗證明硝化細菌合成所需之碳,不能取之於碳酸鹽而必需大氣供給. $MgCO_3$ 受硝化所生成硝酸之崩解,雖亦放出 CO_2, 但其量太微,不足以應合成之需要.

第二節 硫黃細菌之合成

I. 白硫黃細菌羣:

1. Hoppe-Seyler 1886 年始說明顫硫黃線菌 Beggiotoa 之特殊生理作用,不在生成硫化氫 H_2S 而在氧化硫化氫使生出硫黃:

$$H_2S + O \longrightarrow H_2O + S \downarrow$$

2. Winogradsky 1887 年之著名 Ueber Schwefelbakterien 出問世,此問題遂得昭揭.據 Winogradsky, 之研究,天然界中顫硫黃線菌之生長,視水中硫化氫存在量之多寡爲定,硫化氫消盡時,此細菌亦隨而絕跡.

在培養時,有機物之培養基絕對不適用.通常培養方法,爲用台玻璃置含 H_2S 之水少許覆以蓋玻璃,而時時添加含 H_2S 之水;如此培養,不特不至死亡,且能獲得極旺之生長. H_2S 之量,有一定限度,過少固不能生長,過多亦大有損害.

在 H_2S 中,顫硫黃線菌能氧化硫化氫而將硫沉澱於體中.然此沉澱之硫,旋卽復氧化爲硫酸,硫酸與水中之 $CaCO_3$ 作用,使放出 CO_2 同時卽與 Ca 結合成 $CaSO_4$ 而溶出體外.唯氧化硫使成硫酸之作用,遙較 H_2S 之氧化爲遲,故此細菌體中恆見有多量之硫堆積存在.

顫硫黃線菌之生存,除需要 H_2S 外,實尙需少量之氮化物,第其量極微,普通溝水中所含之 NH_4 鹽 NO_3 鹽已足應其要求. Winogradsky 用 Langenbrücken 之溫泉以爲培養液,此水中尙含有有機物 0.0005 %,雖在分析上當視爲無足輕重之極微量,能供給此種細菌之生長生活,固已優裕矣.普通生物恆需以有幾物供呼吸,然後自其氧化中獲得勢能以供生命之活動.此種細菌則只需 H_2S 爲呼吸材料,卽可維持生活.

II. 紅色硫黃細菌羣: 此羣包擴 Chromatium, Lamprocystis 等諸屬.此羣細菌,體中含有菌紫素 Bacterio-purpurin,能生活於高濃度之 H_2S 中,不喜空氣,每避氧氣充足之地而覓氧量較稀薄處以蕃息.好光,每擇有光處羣集其間.

Winogradsky 1888 年發表謂此種紅色硫黃菌必與含葉綠素而能崩解 CO_2 以生成游離氧之微生物共棲,藉其氧以氧化 H_2S.

Engelmann 同年又提出假說,以爲紅色硫黃細菌之菌紫

素,實可行光合如葉綠素,故其羣聚每在光多之處.

第三節 鐵細菌

1. Cohn 1870 年始作關於鐵細菌之記載.

2. Winogradsky 以爲鐵細菌能氧化低鐵鹽使成高鐵鹽,從而獲得其生命所必需之勢能. (未完)

武昌鳥類名錄

黃 震

吾校新近採集鳥類標本七百三十餘個,已鑑定其名稱者二百五十八種.此七百三十餘個中,產於武昌者佔全數五分之二;來自稱福州者又五分之二;採自湖南及購買於滬漢市上之籠鳥,約爲五分之一.各地之鳥,品種大半雷同,唯武昌產之水鳥較多耳.前兩處之標本,已逐一測量其形態;並依據唐啓秀技師及其令嗣瑞昌君多年之實地觀察,參攷 La Touch. A Handbook of the Birds of Eastern China, Gray: Hand-List of Birds, A. H. Evans: Birds, Kuling Scientific Association: TwoHundred Common Birds of the Lower Yangtre Valley, The Royal Natural History Vols III and IV, Harmsworth Natural History Vols II and III,內田清之助之日本鳥類圖說,阿部正臣等之日本動物圖鑑,開時之揚子江下游常見的鳥類,任國榮之中國鳥類叢書第二集諸書,作較詳細之記載.他日如能逐一加以攝影,擬成中國鳥類圖說武昌及福州之部.湖南之鳥,同學蕭潔君極喜研究,留待蕭君整理.籠鳥多來自國外,無地理上之價值,姑且略之.茲者,時値春令,鳥語花香,正愛好自然者興緻勃發之期,適奉本校理科季刊集稿,爰先以武昌鳥類名錄付刊,冀

有以增同好者之興趣也.

Podicipedidae (鸊鷉科)

1.	Colymbus cristatus L	大鳳頭鸊鷉,積鸊鷉
2.	Colymbus philippensis Bonn.	東方小鸊鷉
3.	Otodytes nigricolis nigricolis Brehm	黑頸鸊鷉

Phalacrocoracidae (鸕鶿科)

4.	Phalacrocorax Capillatus T and S.	鸕鶿

Ardeidae (鷺科)

5.	Ardea cinerea L.	蒼鷺
6.	Ardea garzetta L.	白鷺
7.	Ardeola bacchus Bp	池鷺
8.	Ardetta sinneunomea L.	葭鳽
9.	Ardetta sinensis Gm	葦鳽
10.	Botaurus stellaris stellaris Buturlin	麻鳽
11.	Butorides japonicus Horsf.	小綠鷺
12.	Bubulcus Coromandus Baddart	黃頭鷺
13.	Dupetor flavicollis Lath	黃頸鷺
14.	Oxodrychus Cinnamomea Gm.	黃鳽,水駱駝
15.	Mareca penelope	赤頸鷺
16.	Nannocnus eurythmus Swinhoe	秋鳽
17.	Nycticorax nycticorax L.	黑頂夜鷺,五位鷺
18.	Phoyx manillensis Megen	紫鷺,

19.	Pyrrherodas purpurea L.	東方紫鷺

Anatidae (鴨科)

20.	Aix galericulata L.	鴛鴦
21.	Anas domestica L.	鶩,家鴨
22.	Anas platyrhynchos L.	鳬,綠頭鴨,大野鴨
23.	An as falcata Georgi	葭鴨,羅文鴨
24.	Anser albifrons Scop	雁
25.	Anser erythropus L.	小白額鴨
26.	Chanlelasmus streperus L.	漈鴨
27.	M arila fulegulal L.	澤鴨,鳳頭鴨子
28.	Marila baero Radde	白眼鴨
29.	Marila marila mariloides Viaors	紅頭鴨
30.	Mareca penelope L.	緋鳥鴨
31.	Mergus merganser L.	秋沙鴨
32.	Mergus serrator L.	海鷗
33.	Mergus albellus L.	鵜鴨
34.	Nettion creeca L.	小水鴨
35.	Nettion formosum Georgi	巴鴨
36.	Oidemia fusca L.	奇嘴鴨
37.	Querquedula querquedula L.	白眉鴨
38.	Spatula clyyeata L.	琵琶嘴鴨,廣味鳬
39.	Tadorna trdorna L.	白鴨

Falconidae (隼科)

40.	Falco haliaetus L.	隼
41.	Falco tinnumculus japonicus T and S.	茶隼

Buteonidae (鶚科或稱豹鷹科)

42.	Bulastur indicus Gm	灰面鷹
43.	Milvus melanotis Tand S	鴉鷹,老鷹
44.	Pandion haliaetus L.	鶚,魚鷹

Aquilinae (雕科)

45.	Acciptiter nisur L.	鷂
46.	Aguila Chrysantis L.	鷲
47.	Aguila Chaga pollas	大山鷲
48.	Arechibuteo lagopus Tmelin	
49.	Astur cuculoides Temm	
50.	Astur soloensis Hors	鴿子鷹
51.	Buteo vulgoris Leoch	鵟鵰
52.	Circus aeruginosus aeruginosus L.	大鵟
53.	Circus Cyaneus Swinhoe	灰鷹
54.	Cirous melanoleuotus Kanp	喜鵲鷹
55.	Circus spilonotus Kanp	白尾巴

Turnicidae (水鵪鶉科)

56.	Turnix blamfordi Blyth	水鵪鶉

Phasianidae (雉科)

57.	Bamleusicola thoracica Temm	竹鷄
58.	Coturnix Communis Bonnat	鵪鶉
59.	Francolinus chinensis Osbeck	鷓鴣
60.	Gallus domesticus Briss	家鷄
61.	Phasianus torquatus Gm.	雉,野鷄

Rallidae (秧鷄科)

62.	Amaurornis phoenicurus Penn	稻鷄,苦呀鳥
63.	Fulica atra L.	冬鷄,水姑丁
64.	Gallinula chloropus L.	黑冰鷄,鷭,江鷄
65.	Gallicrex cinereus Gm.	兜翁,魚凍鳥
66.	Porzana exquita Swinhoe	花秧鷄
67.	Porzana fusca L.	夏秧鷄,緋秧鷄
68.	Porzana pusilla Pallas	小秧鷄
69.	Rallus indicus Blyth	秧鷄,水鷄
70.	Rallina superciliaris	斑腹秧鷄

Charadriidae (鷸科)

71.	Actitis hypolencos L.	鯖鷸
72.	Capella gallinago raddei Buturlin	
73.	Charadrius dubius curonicus Gm	小鴴
74.	Charadrius fulvus	黑襟鴴
75.	Charadrius mongolicus	蒙古鷸
76.	Charadrius placidus Gray	劍鷸

77.	Cirrepidesmus mongolus pallas	纖嘴鴴
78.	Erythroscelus totanur eurhinus Oberhoker	
79.	Eurynorhynchus pygmaeus L.	方喙雉鷸
80.	Gallinago galinula	鷸
81.	Heamatopus Osculans Swinhoe	蠣鷸,都鳥
82.	Lobipes lobatus L.	水勃鳥
83.	Microsarcops Cinerens Blyth	
84.	Neospilura solitaria Hodgson	
85.	Numenius arquatus lineatus Cuvier	
86.	Phaeopus phaeopus Variegatus Scopoli	
87.	Pluvialis domincus fulvus Gm	
88.	Rostratula Capensis L.	彩鷸
89.	Rostratula benghalensis L.	青鷸
90.	Scolopax rusticola L.	山鷸,游鵟
91.	Totanus Calidris	赤足鷸
92.	Totanus glareola	鷹鷸
93.	Totanus hypoleucus	磯鷸
94.	Totanus incanus Brevepes	
95.	Totanus slagnolilis	澤鷸
96.	Totanus glottis	青足鷸
97.	Totanus terekius	反嘴鷸
98.	Tringa Aeuminata	鶉鷸

99.	Tringa alpina pacifica	濱鷸
100.	Tringa subarquata	滸鷸
101.	Tringa ruficollisp	雉鷸
102.	Vanellus Vulgaris Bechst	田凫

Jacanidae (蓮角科)

103.	Hydrophasianus Chirusgus Scopoli	啾咕,水山鷄

Laridae (海鷗科)

104.	Larus Canus L.	海鷗
105.	Larus Crassirostris Vieill	海貓,黑尾鷗
106.	Larus ridibundus ridibundus L.	赤咮鷗
107.	Sterna fuliginosa	烏領鷺
108.	Sterna hirundo L.	燕鷗
109.	Sterna longrpennis Nordmann.	黑咮燕鷗
110.	Thalasseus bergii cristatus Stephens	黃咮燕鷗
111.	Hydroprogne Caspia Pallas.	魚江郎

Columbidae (鳩鴿科)

112.	Turtur Chinesis T.	斑鳩,珍珠鳩
113.	Turtur humilis T.	紅鳩,火斑鳩
114.	Tutur Orientalis Lath	鳩,雉鳩
115.	Columba domestica Gmel.	家鴿
116.	Columba intermedia Strickl	野鴿

Cuculidae (杜鵑科)

117. Cuculus Canorus Linne 郭公,布穀

118. Cuculus poliocephalus Latham 杜鵑

Coracüdae (佛法僧科)

119. Eurystomus Orientalis L. 三寶鳥

Alcedinidae (翡翠科)

120. Alcedo bengalensis Gm 小翡翠,小翠鳥

121. Ceryle lugubris guttulata Stej 冠魚狗,水蔥花

122. Halcyon smyrnensis smyrnensis 翡翠,魚狗

123. Halcyon pileatus Bodd 山鴗,秦椒嘴

Upupidae (戴勝科)

124. Upupa epops Linn 戴勝

Strigidae (鴞科或稱梟鳥科)

125. Ninox scutulata Raffles 赤葉鴞

126. Otus scops rufipenunis 小耳鵂鶹

127. Strix Otus L. 虎鵂,角鴟,彪木兔

128. Strix Uraleusis hondoensis Clark.

129. Scops semitorques T and S. 鴟鵂,木兔

Caprimulgidae (夜鷹科)

130. Caprimulgus jotak J. and S. 夜鷹,蚊母鳥.鬼鳥

Micropodidae (雨燕科)

131. Cypselus pacificus Lath. 雨燕,白腰雨燕

Picidae (啄木鳥科)

132. Dendrocopus calanisi Malh 花啄木鳥

133. Gecinus Canus Gm 黑項青啄木

134. Iyngipicus sintilliceps Swinhoe 小鴷,小翠鳥

135. Iynx torquilla L 歪脖,蟻鴷

136. Picus guermi Malh 灰啄木鳥

Alaudidae (雲雀科)

137. Alanda Arvensis L. 雲雀,百靈,天鷚兒

Motacillidae (鶺鴒科)

138. Anthus japonicus T. and S. 水鷚兒

139. Anthus blakistoni Swin. 冰鷚兒

140. Motacilia boarula melenope Pallas 黃鶺

141. Motacilla Chinesie 鶺,鶺鴒

142. Motacilla lugens Kittlitz 白鶺鴒

Timeliidae (畫眉科)

143. Dryonastes perspicillatus perspicillatus 噪眉

144. Trochalopterum Canorum canorum 畫眉

Pycnonotidae (鵯科)

145. Hypupetes leucocephalus Gm. 白首黑鵯

146. Molpastes haemorshous Chrysorrhoides 高髻冠

147. Pycnynotus sinensis Gm. 鵯

148. Sturnus Cineraceus Temm. 白頭翁

Muscicapidae (鶲科)

149. Alseoncax latirostria Raffles 褐鶲
150. Muscicapa cyanomelaena Temm 竹林鳥,琉璃鳥
151. Muscicapa albicilla Pall 紅喉鶲
152. Muscicapa grisola L. 灰點鶲
153. Pratincola manra pall. 野鶲
154. Poliomyias Cyanomelaena Temm 白眉紫鶲
155. Terpsiphone Changshou 壽帶,魂膽鳥
156. Terpsiphone Chinesis T. 赭練鵲
157. Terpsiphone princeps Temm 紫練,三光鳥
158. Xanthopygia narcissina Temm 黃鶲

Turdidae (鶇科)

159. Calliope Calliope Pall. 紅喉鶇
160. Ianthia cyanura Pall
161. Merula eunomus Temm.
162. Merula Pallida Gm. 頳尾鶇
163. Monticola cyanus. Mull 岩鶇
164. Phoenicurus auroreus Pall
165. Saxicoda torquata steyneger Parrot
166. Turdus Cardis Temm 黑鶇
167. Turdus Chrysolaus Temm. 赤腹鶇
168. Turdus Obscurus Gm.
169. Turdus hortudorum Schlater

Troglodytidae (鷦鷯科)

170.	Anorthura fumigata J and S.	鷦鷯,山蜩蜩兒

Sylvidae (鶯科)

171.	Acrocephalus Orientalis T. S.	剖葦,葦濱雀
172.	Cettia Cantans T. S.	鶯,告春鳥
173.	Cettia ussuriana Seebhm	梭鶯
174.	Horornis Cantans Cantans T. S.	

Hirundinidae (燕科)

175.	Hirundo alpestris nipalensis J.	赤腰燕
176.	Hirundo rustica guthuralis Scop	家燕

Dicruridae (秋鳥科或稱魚尾燕科)

177.	Buchanga atra cathveca Swinhoe	黑魚尾燕
178.	Buchanga leucogenys	白頰捲尾
179.	Dicurus lencophaes hopwoodi	灰魚尾燕

Laniidae (鵙科或稱伯勞科)

180.	Lanius bucephalus T. S.	公牛頭伯勞
181.	Lanius excubitor L.	灰鵙
182.	Lanius magnirostris Lesson.	虎鵙,粗嘴伯勞
183.	Lanius schach L.	紅背伯勞

Paridae (山雀科或稱四十雀科)

184.	Parus minor T. and S.	荏雀,小灰山雀
185.	Parus palustris L.	泥澤山雀

Oriolidae (黃鳥科)

186. Oriolus indicus Jerdon 黃鳥,黃鶯

Corvidae (鴉科)

187. Coloeus dauuricus Pallas. 燕烏

188. Coloeus neglectus Schlegel 慈烏

189. Corvus frugilegus pastinator Gould. 山烏,禿鼻烏鴉

190. Corvus macrohynchus levaillanti Less. 大嘴烏

191. Corvus torquatus Less. 白頸烏

192. Cyanopica cyanus Swinhoe Hartert 藍膀鵲,灰鵲

193. Pica pica sericea Gould. 喜鵲

194. Urocissa erythrorhyncha erythrorhyncha 山鵲,藍鵲

Sturnidae (椋鳥科或稱八哥科)

195. Aethiopsar cristatellus L. 八哥,鸜鵒

196. Sturnia sinensis Gm. 椋鳥,噪林鳥

Zosteropibae (繡眼兒科)

197. Zosterops simplex Swinhoe 繡眼兒

Fringillidae (雀科)

198. Acrocephalus Orientalis 葦雀

199. Chrysomitris spinus L. 鶸,金翅雀

200. Coccothraustes vulgaris japenicus T. S. 蠟嘴

201. Emberiza cioides cioides Bonaparte 草地雀

202. Emberiza fucata Pall. 赤鶸

203.	Emberiza Chrysophrys Pall.	金眉雀
204.	Emberiza pusilla Pall.	小鵐
205.	Fringilla montifr ngilla L.	花鷄
206.	Pyrrhula griseiventris Lafr	鷽,東方鷽,拙老婆
207.	Passer montanus L.	麻雀,樹雀
208.	Passer rutilans Temm	黃雀,山麻雀

中國境內有蹄類(Ungulte)總目錄及其地理分佈大概情形

任 國 榮

自 序

巴黎博物館之鳥類研究室與哺乳類研究室比隣,余因與哺乳類研究室中教授,助教時有往還,不以門外漢自慚,嘗質以關於哺乳類學之問題種種,彼等不特不引爲煩瑣,且津津樂爲解釋並導余遊觀動物園,以實地觀察其習性,遂引起余研究哺乳類之興趣.雖余所致力者鳥類學,無多暇刻以兼顧,惟不願入寶山而空返,乃每週抽一日以爲之.長此以往,雖不敢盼有所成,最低限度,對於我國哺乳類之全體,亦有相當認識.今之着手于有蹄類者,以其體大而易別,且巴黎博物館中之中國哺乳類標本,又以此類爲最富也.如鳥類研究有相當結束時,當再從事於食肉類,嚙齒類等等.此種工作,雖有不專不精之誚,想亦未始不爲嗜斯道者萬一之助也.

本文以文獻爲主,以標本爲副,此六十四種及亞種中,除有若干可見於巴黎博物館外,其餘則以文獻所記載者補足之.又因以我國境內品類爲限,故境外品類如長頸鹿(麒麟? Giraffa, 非洲),河馬 (Hippopotamus, 非洲),象, (Elephas, 非洲種爲 E. africanus; 亞洲種爲 E. maximus, 分佈於印度,亞森母,錫蘭,暹羅,交趾支那,馬來半島,婆羅洲之北部等處), 獏 (Tapirus, 非洲), 犀 (Rhinoceros, 非洲種有雙角,印度種只有一角)等,吾人雖習聞其名,以範圍所不及,皆不論列,而非洲之四不相兩種 (Connochaetes gnu; C. taurinus), 亦無記載,又研究分類學者概以野生種爲對象,馴養者以經人工故,變化紛紜,無從考究,故概從略,本文亦自非例外.

石聲漢先生所研究中國哺乳類有年,除曾爲譯歐人華北探險採集報告

外,對於兩廣品類尤有特別心得.余因欲本文所用之漢名與彼所用者一致,乃請其校閱一週,又恐搜集之不完,乃再懇其抽暇為文以補不足,特申謝忱於此.

一九二三年四月一日
誌於巴黎博物館
鳥類研究室

Bovidae 牛科

1. Bos grunniens mutus Przewalski. 西藏犂牛

形態:——體大;成長之雄,肩高約 $5\frac{1}{2}-6$ 呎.肩部突起極顯著,背部則頗平直.喙及耳頗小;無頸下之垂皮;四肢短健;蹄闊大.成長之雄,其角之基部稍爲緊縮,始則向外上方灣,再則向前,終向內上方,其角尖常向後揉.頭及上體之毛短而滑,腰及下體之毛則甚長;腮部有長毛一束,有時肩部突起亦有之;尾之末段被長毛,長可達膝關節之下.野生及純血種體色黑褐,喙側白,老者之頭及面雜灰色,多年之雄牛,背帶銹色.

分佈:——西藏及甘肅.

2. Ovis ammon ammon (Linn.). 阿爾泰山灣角綿羊.

形態:——肩高可達48吋.角大,下行之部向面之兩側而灣揉,角尖轉向外方,全角成一周圈而有餘;角長約 59–62

吋,角圍約 18–20 吋.喉部無鬚環(ruff).頭,頸體部及四肢皆棕褐而帶灰(冬季),面,頸之上方及肩則灰色較盛;下體棕色較盛;尾之表面虎黃;臀部白塊斑或有或無,無白塊斑者則臀之下方較淺色.夏季毛較短,色較淺淡,有白塊斑.

分佈:——— 阿爾泰山.

3. Ovis ammon mongolica Severtzow. 蒙古灣角綿羊.

形態:——角之形式似前種而有喉部之鬚環.角長 41–50$\frac{1}{2}$ 吋,角圍 16$\frac{1}{2}$–18 吋.此乃 ammon 與 hodgsoni 之中間種.

分佈:——— 蒙古大沙漠.

4. Ovis ammon hodgsoni Blyth. 西藏灣角綿羊.

形態:——形體較小於 O. a. ammon, 角之尖端灣探較淺,其下行之部幾垂直而不趨向面之兩例,全角僅可成一周圈;角長 48$\frac{1}{2}$–57 吋;角圍 17–19 吋.喉部有鬚環,頸有鬃.上體褐而下體較淺;臀斑,臀,喉,腮,下體,足之內方皆白;鬃及諸足所附帶之毛束皆近黑色.老雄背部雜有白色致此部呈灰色.尾上方有一深色塊斑.雌者無鬃及鬚環,白色之部及臀斑皆較不顯著.冬季色彩或較淺淡,與標準種不同.

分佈:——— 西藏.

5. Ovis ammon littledalei. Lydekker. 天山灣角綿羊.

形態:——角成一周圈而略有餘,長 55—58 吋,圍 17 吋.頭褐灰,喙則幾淨白;喉部鬚環淺虎黃,上體爲鮮明之棕虎黃色,背中部色彩較深,足與背同;無淺色之臀部塊斑;尾淺虎黃而帶白;前足之前方灰白,膝部有一黃塊斑;後足之前方亦灰白,蹄之上方淺虎黃;喉部鬚環與尾同色.

分佈:———天山.

6. Ovis ammon karelini Severtzow. 加連尼瀏角綿羊.

形態:——角與 littledalei 相似而較大,長 $45\frac{1}{2}-49\frac{1}{2}$ 吋,圍 $14\frac{3}{4}-16\frac{1}{4}$ 吋.前頭及頰淺虎黃,喙則轉白,喉部鬚環白而帶灰;體色淺褐,尾部較淺幾爲灰白色;脊線明顯,脇帶斑寬闊;腰部白塊斑頗小,腿之後面白,其前面及兩側則漸轉爲虎黃;前足之前方以至膝關節,及後足之側線,皆淺虎黃;下體白而帶黃.

分佈:——— 阿爾泰山,(及Alatau, Semirechensk).

7. Ovis ammon humei Lydekker. 欽氏瀏角綿羊.

形態:——角與 littledalei 同式,但成長者其角前方外沿圓,角長47吋,圍 $13\frac{1}{4}$ 吋.頭之上方及兩側灰褐,面部則多着白色;背灰褐,無脊線,無顯著之脇部帶斑;下體,四肢,臀部塊斑及尾皆淨白.雌者冬季有一脊線自後頸以至尾根.

分佈:——— 天山.

8. Capra sibirica fasciata Noack. 阿爾泰山長角羊.

形態:——上體黃褐,下唇近口角處有一深色之大點斑;前足下方有寬闊之橫帶斑;後足之後方有一淺色之塊斑,其外側有毛叢一;耳大而圓,頗能轉動;虹彩赤褐.

分佈:———阿爾泰山東北部.

9. Capra sibirica hagenbecki Noack 戈壁長角羊.

形態:——體色深黃褐;膝部有一胼胝.

分佈:———蒙古戈壁大沙漠.

10. Capra sibirica almasyi Larenz 天山長角羊.

形態:——體色黃白,而略帶灰或褐;頭部較深,但前頭及耳與眼之中間部則較淺淡;唇有白緣;鬚灰褐而長;脊線深色而寬闊.頸部常有較淺色之塊斑;足後方色彩淺淡,有時且近白色.夏季體色虎黃而在赤褐,頭較灰,有淺色之頸部及臀部塊斑;足之後方白.角長 54 – 58 吋,圍可 $10\frac{1}{4}$ – $11\frac{3}{4}$ 吋.角尖相互距離 $24-44\frac{1}{2}$ 吋.

分佈:———天山.

11. Capar sibirica merzbacheri Leisewitz. 淺色天山長角羊.

形態:——與上種較,一般體色較為淺淡,角較短而節結

較多.

分佈:——— 天山中部.

12. Capricornis sumatrensis milne-edwardsi David. 花鬃山羊.

形態:——形體中等.角起自顏面附近,有橫走之稜紋,亦有縱行之線紋.脛棕黃而上體黑褐;鬃灰黑相雜,下體汙褐.

分佈:——— 滇平,四川,雲南及緬甸.

13. Capricornis argyrochaetes Heude. 白鬃山羊.

形態:——最大之標本,肩高44吋.一般體色與上種相若,但鬃較發達而純為灰白色,腿與足鮮銹赤.頭骨狹長,鼻亦然.

分佈:——— 浙江,甘肅,四川.

14. Nemorhaedus griseus (Milne-Edwards). 褐石羊.

形態:——尾短而毛叢極發達,尾之末端,表底兩面皆黑;體部之毛頗短;喉部塊斑帶黃;前足前方之黑條紋,止於膝關節而轉向脛部外例下行,直至距毛(Fetlock).一般體色灰或黃褐,有顯明之脊線;足白或銹色.

分佈:——— 滇平,四川,緬甸,雲南,宜昌,陝西.

15. Nemorhaedus caudatus (Milne-Eolwards) 黑尾石羊.

形態:——外被(卽體部所被之毛)長而柔軟,頗類羊毛;尾之末端有一長毛叢,色黑,較深於尾基部;尾下面兩側白;無喉部之黃塊斑;足自膝關節下,其前方及外側皆虎黃色.一般體色黃褐而帶灰,脊部較深暗.

分佈:———北京,四川,陝西.

16. Nemorhaedus radcleanus (Heude) 阿穆爾石羊.

形態:——與上種相似,但足部自膝關節以下較暗褐,與白色之部分別明顯;尾之上面全部非黑而與背部同色;尾下方之白緣較寬闊;喉部塊斑白色.

分佈:———亞穆爾,高麗,蒙古,中國北部.

17. Budocras tibetana Lydekker. 金羊.

形態:——一般體色,夏季金黃而冬季則灰,但雖在夏季,而常雜鐵灰,四肢鐵灰而帶黑,體之後部亦然;雌者灰而非黃;自肩至尾,有一黑脊線;尾,耳,圍眼部,顏面之下前方及腮之上方皆黑.角弱而頗灣.

分佈:———漠平,四川,雲南.

18. Budorcas bedfordi Chomas. 太白山金羊.

形態:——一般體色金鷄黃,雄者較赭而雌者較近乳脂色,面與背同其色彩,背部亦不深暗於他部,四肢只於膝及

裸關節部微雜暗色之毛;尾成叢狀,有時微雜暗色之毛,甘肅梗本,體色橙褐.

分佈:——— 陝西太白山及甘肅.

19. Saiga tartarica (L.). 韃靼沙羊.

形態:—— 體如普通之大綿羊,肩高30吋,一般體色,夏季幽黃而喉部與面部斑紋則帶白色;冬季毛較長,全體白色.耳短而毛甚厚,尾亦短.頭骨底部長$9\frac{1}{2}$吋.(角長12-14吋,)基部角圍約$4\frac{1}{2}-5\frac{1}{4}$吋,角尖距離$2-5\frac{7}{8}$吋.

分佈:———歐洲南部及亞洲西北部可直至戈壁沙漠西部.

20. Pantholops hodgsoni (Abel)西藏長角沙羊.

形態:——肩高31-32吋;外被厚密而卷曲;一般體色淺虎黃而參雜赭色或粉紅,以脇部爲最顯著,下體則漸轉爲白色;雄者顏面黑,頭頂白;耳短而尖,白色;四肢白而帶淺灰,雄者肢之前部有一黑條紋;尾與腰大抵同色,頭角基底長$10\frac{1}{4}$吋.角長$24-27\frac{3}{4}$吋,基圍$4\frac{3}{4}-6\frac{1}{8}$吋,角尖距離$11-18\frac{1}{4}$吋.

分佈:——— 西藏高原 12,000-18,000 呎.

21. Gazella picticaudata (Hodgson). 西羚羊.

形態:——肩高約24-25吋;角頗纖長,稜紋極顯;外被冬季

厚密,夏季較短;一般體色,冬季淺虎黃,後方色彩較深,近臀斑處幾爲赭色;臀部塊斑白,環繞尾之基部,尾短;夏季體色石板灰;耳狹短而尖,被毛甚厚;下體白;足白或淺虎黃.頭骨頗寬闊,基底長約$6\frac{1}{2}$吋.角長 12 – $14\frac{1}{8}$ 吋,基圍 $3\frac{1}{2}-4\frac{3}{4}$ 吋,角尖距離 2 – $3\frac{3}{4}$ 吋.

分佈:——— 西藏高原,甘肅,陝西.

22. Gazella przewalskii Büchner. 蒙古羚羊.

形態:——與上種相似而稍大.角短而猛向後灣,其尖端向內上方灣;外被冬季厚於夏季;一般體色冬季灰虎黃而夏季則深虎黃;頸例及鼻尖,夏季褐色;有一虎黃色之條紋,自背貫白臀斑而至尾之表面;四肢之前方帶褐色.頭骨似前種而硝大,基底長約 7 吋.角長 $10\frac{1}{4}$ 吋,基圍$4\frac{3}{8}$吋,角尖距離$2\frac{3}{8}$吋.

分佈:——— 新彊,戈壁沙漠及甘肅.

23. Gazella gutturosa gutturosa (gmelin). 蒙古大羚羊.

形態:——體遙大於前二種,肩高30吋.角比較上稍短,棱紋甚密;冬季外被厚密,赭鵝黃或灰虎黃色;面之前方石板褐;臀斑小,色汙白;下體,尾,足之內方及腮亦汙白;耳尖而被密毛;夏季外被較短,色黃.頭骨狹長,基底長約$9\frac{1}{4}$吋.角長 13 – $15\frac{3}{4}$ 吋;基圍$3\frac{1}{8}-5$吋;角尖距離$4\frac{1}{4}-7\frac{1}{4}$吋.

分佈:———蒙古之西北,經貝加爾湖及蒙古之北部及東部以至阿穆爾及甘肅.

24. Gazella gutturosa altaica (Hollister). 阿爾泰大羚羊.

形態:——與上種之區別,在其夏季外被虎黃之部較發達,頭骨較寬,臼齒較大,角之距離較寬.

分佈:———阿爾泰山.

25. Gazella yarkandensis Blanford. 新疆羚羊.

形態:——肩高約29吋,一般體色淺棕褐,或深虎黃;面部之黑條紋,上行至前頭而終於角之基部;面之大部及喙與背皆虎黃.角長13－17吋;角圍$4\frac{1}{2}-5$吋;角尖距離$3-7\frac{3}{4}$吋.

分佈:———新疆.

Cervidae. 鹿科

26. Moschus moschiferus sifanicus Büchner 麝

形態:——肩高約20吋,臀部高22吋.一般體色濃褐而雜灰,下體與四肢之內面則較淺;腮及腿之內方近白色;耳或

全黑或基部黑而尖端黃,其上緣有黑或褐帶斑,內緣時雜黃色之毛;頭骨大,鼻狹長.

分佈:——— 甘肅南部,四川,宜昌.

27. Muntiacus muntjak subsp.

形態:——與婆羅洲及馬來半島諸種相似而體較大,色較赭,現尚未定亞種名.

分佈:——— 海南,

28. Muntiacus lacrymans lacrymans (Milne-Edward) 麂.

形態:——肩高約 19 吋.一般體色赭褐;顏面下方或赭或帶黑色.頭骨底長約 7 吋.

分佈:——— 四川.

29. Muntiacus lacrymans sclateri (Swinhoe). 小麂.

形態:——與上種相似而較小,頭骨基底長 $6\frac{1}{4}$ 吋上列顴齒長 2 吋.

分佈:——— 安徽,寧波.

30. Muntiacus lacrymans teesdalei Lydekker. 黑面麂.

形態:——顏面下部全爲黑褐色.體較小,頭骨底長 $5\frac{7}{8}$ 吋;上列顴齒長 $1\frac{7}{8}$ 吋.

分佈:——揚子江域之大通(Zatung).

31. Muntiacus reevesi reevesi (Ogilby) 黃麂.

形態:——一般體色栗赤而徵雜灰黃,前頭玉桂色而耳之上方則帶黑,後頸常有一黑條紋;腿黑褐;雌者耳背及前頭之大部黑.肩高約16吋.頭骨基底長$5\frac{3}{4}$吋,上列顎齒長$1\frac{7}{8}-1\frac{15}{16}$吋.

分佈:——寧波,福州,廈門,廣州.

32. Muntiacus reevei pingshiangicus (Hilzheimer). 萍鄉黃麂.

形態:——與上種相似,但前頭黑綫之間,爲純革褐色而不參雜赭色.雌者耳背全黑而雄者則只有黑條紋;腮喉及頸之下方白而帶黃;下體褐灰.

分佈:——萍鄉(Pingshiang)及安徽(Feng Luang Shan).

33. Muntiacus sinensis (Hilzheimer). 花頭麂.

形態:——肩高19吋.一般體色黑褐而雜黃;前頭,後頭及耳背基部之三分二,雄者革黃而雌者帶黑色;前頭之黑帶斑,會合於耳後,再後行而成爲後頸之帶紋.頭骨基底長$5\frac{1}{4}$吋;上列顎齒長$1\frac{5}{8}$吋.

分佈:——安徽,九江.

34. Muntiacus crinifrons (Sclater). 鬣麂.

形態:—— Muntiacus 一屬中,以此種爲最大,肩高$24\frac{1}{2}-25$吋.前頭及頭頂有長毛一束.耳短而圓;尾長 9 吋.一般體色黑褐而帶紫,背部微雜棕色;頸部冠毛,耳,前頭及顴部橙栗色;腿之內方及尾之底面白;尾之表面及由尾至臀之條紋皆黑.

分佈:——— 寧波.

35. Elaphodus cephalophus cephalophus Milne-Edward. 麞.

形態:——肩高 22–23 吋.一般體色者古律褐;頭頸之毛,其先端有一白輪,肩以下之毛則無之;前頭冠毛,叢集成馬蹄形,色黑,其兩側,沿眼之上方,有一灰帶斑;耳之內方帶白色,尖端之內外兩方,皆有一淨白之塊斑;尾之兩側及下面,臀與腿之內方皆白.頭骨基底長$7-7\frac{1}{4}$吋;鼻部長 $2\frac{9}{16}-2\frac{3}{16}$吋;上列齒輪$2\frac{1}{2}-2\frac{1}{4}$ 吋.

分佈:——— 西藏之東及四川.

36. Elaphodus cephalophus michianus (Swinhoe). 寧波麞.

形態:——與上種相似而一般體色較淺,尾之白色部較少.頭骨基底長$6\frac{3}{4}$ 吋;鼻部長$2\frac{1}{4}$ 吋;上列顴齒$2\frac{3}{8}$ 吋.

分佈:———寧波.

37. Elaphodus cephalophus fociensis Lydekker. 福建麞.

形態:——稍大於寧波種而體色稍深,耳上方之兩側,白色之部較發達,前頭後部之隆起度極小而淚骨與前顴骨則較平闊.頭骨基底長 $6\frac{3}{4}$ 吋;鼻部 $2\frac{1}{2}$ 吋;上列顴齒 $2\frac{5}{16}$ 吋.

分佈:———福健 (Fing-liug).

38. Elaphodus cephalophus ichangensis Lydekker. 宜昌麞.

態形:——大小與寧波種相若而頭骨較短闊,基底長 $6\frac{3}{8}$ 吋.一般體色深褐,四肢則漸轉爲黑色;尾之尖端全白,尾上面近基部三分之二色彩深暗.鼻部長 $2\frac{1}{8}$ 吋;上列顴齒長 $2\frac{5}{16}$ 吋.

分佈:———宜昌.

39. Cervus unicolor dejeani (Pousagues). 四川褐鹿.

形態:——形體大,肩高五呎餘.角長壯,成 V 字形,支角不發達.一般體色黑褐而帶赤,頭及耳黃褐而帶赤;下黃體色彩亦深暗,惟腿之內方及足皆褐黃或黃而帶白;尾叢狀而色黑.角長 $30\frac{1}{2}$ 吋,基圍 $5\frac{1}{2}$ 吋.

分佈:——四川.

40. Cervus schomburgki Blyth. 暹羅多枝褐鹿.

形態:——肩高三呎五吋.冬季外被頗厚密.一般體色純

褐,鼻與尾之表面色彩最深,額及脇則最淺;下體,尾之下面及下唇皆近白色;上唇,頭項及四肢則帶棕色;前足下部之前方,毛長如縱;角大而平滑,分歧甚多,各股大小頗相若.角長 27－33 吋;基圍 4½－6 吋,角尖距離 9½－28⅜ 吋.

分佈:———暹羅及雲南.

41. Cervus eldi siamensis Lydekker. 黃鹿.

形態:——肩高三呎九吋.冬季毛較粗,雄者頸部之毛尤為粗厚.角圓而多縐.一般體色赤虎黃,沿背之中央有白點斑,有時體側亦有之.角長約 34－42 吋;基圍 4－6½ 吋;角尖距離 21¼－31½ 吋.

分佈:———暹羅之南,柬甫寨及海南.

42. Cervus nippon nippon Zemminck. 北梅花鹿.

形態:——肩高 32－34 吋.夏季一般體色鮮棕栗,有白點斑,冬季為茶褐色;肩部有一淺栗色之塊斑;上唇兩側及下唇之全部皆白;尾之大部皆白,上面有一黑條紋,有時尾之尖端亦近黑色.臁部之叢毛白,甚為發達;耳之內面及外面之基部,密佈白毛.角長 21－26½ 吋;基圍 3½－5 吋;角尖距離 12－20¼ 吋.

分佈:———日本及中國(牛莊).

43. Cervus nippon mantchuricus Swinhoe. 關東梅花鹿.

形態:——稍大於前種,肩高達39吋;尾之白色部極不發達;冬季雌鹿後體四分之一,仍保存其白色之點斑及赤色色彩;其餘無別標準種.

分佈:———中國北部.

44. Cervus hortulorum hortulorum Swinhoe. 烏蘇里梅花鹿.

形態:——肩高三呎七吋;外被終年皆有白點斑;冬季,差近成長之雄,體色栗褐;頸基部灰而帶藍,有一黑項環,其後則為栗色,點斑亦顯著;顏面灰而帶藍;腿及前足灰褐;下體灰白;尾頗短,色白,有一黑中綫,其臀部常有一黑帶紋與尾之白色部相接;夏季體色者古律褐而點斑較為明顯.角長 $27-34\frac{1}{2}$ 吋;基圍 $4\frac{1}{8}-5\frac{3}{4}$ 吋;角尖相距 $18\frac{1}{2}-34\frac{1}{2}$ 吋.

分佈:——— 北京之Summer Palace花園及烏蘇里.

45. Cervus hortulorum kopschi Swinhoe. 江西梅花鹿.

形態:——與上種相似,但脊綫極發達,頸上方之點斑較不明顯,且不若標準種之散佈於肩後及腿部.

分佈:——— 安徽,江西(贛閩交界處).

46. Cervus wallichi wallichi Cuvier. 華利鹿.

形態.——肩高約四呎三四吋;尾短;角分五股;一般體色

土褐,有白臀斑耳尖長;喙及腮則黑色.

分佈:——西藏之西.

47. Cervus wallichi offinis Hodgson. 錫金華利鹿.

形態:——與上種相似.一般體色淺虎黃而非土褐;臀斑較小,有一帶黑色之中綫,有時,斑之前部有一深褐色帶斑圍繞之.

分佈:——錫金,不丹,西藏之查里(Tsari)縣及拉薩附近.

48. Cervus macneilli macneilli Lydekker. 四川灰鹿.

形態:——雌者一般體色灰,背部較深,頭部更深,尾之上方黑.雄者尙未經發見.

分佈:——四川與西藏交界地.

49. Cervus macneilli kansuensis Pocock. 甘肅麥尼鹿.

形態:——一般體色褐,尾表面有一蜿蜒不規則之中線.角長 $43\frac{1}{4}$ 吋;基圍 $5\frac{1}{2}$ 吋;角尖距離37吋.

分佈:——甘肅及雲南.

50. Cervus albirostris Prewalshi. 白喙鹿.

形態:——肩被散鬣;喙腮,下顎之底面及耳之內方皆白;此二者,皆爲認識本種之好特徵.角頗扁,色近白,長約四十

餘寸,基圍約五寸餘,共分三股.

分佈:——— 西藏之南山及拉薩之北.

51. Elaphurus davidianus Milue-Edward. 大衛氏鹿.

形態:——肩高三呎九吋.頭大,耳眼俱小,喙狹長;四股壯健;外被短而平滑,腮中部及下體之毛則較長,於頸及喉部,成爲長鬚一列;一般體色鹿黃而帶赤,並稍稍染着灰色;頸,腮及喉之下方暗褐;頸及上背有一縱行之黑褐條紋,另有一條,則在腮部;臀及腿側白而帶黃;足之內部及下部全部灰黃而帶白;尾末端之毛叢黑褐,餘部與背同色;顏面褐,有一黑褐之眼圈.雌與雄相似而體色較淺.幼者赤褐而渲染黃色,初時多着白點斑.角長 $28-35\frac{5}{8}$ 吋;基圍 $28-35\frac{5}{8}$ 吋;角尖距離 $13\frac{5}{8}-27\frac{1}{4}$ 吋.

分佈:——— 北京 Summer Palace.

52. Capreolus bedfordi befordi Chomas. 北福氏鹿.

形態:——肩高二十六七吋.頭骨基底長六吋餘.耳狹,外面黑或灰黑;角不甚大;一般體色,冬季淺土黃而夏季則灰或橄欖灰.幼者有點斑.

分佈:——高麗,滿洲,山西.

53. Capreolus bedfordi melanotis Miller. 甘肅黑耳鹿.

形態:——雌者夏季體色較赤.耳背深黑.與其餘體部判然不同.雄者冬季體雜灰色,耳尖之黑色甚顯著.

分佈:——甘肅.

54. Capreolus pygargus pygargus (Pallas).北刮古鹿.

形態:——肩高 28–34 吋;耳短闊而被毛頗厚;冬季外被粗厚;背黑褐與灰褐相雜,黑斑較盛;有白臀斑,成 V 字形而伸延至於脇部;夏季外被鮮棕黃而色彩頗淺.角之最長度爲 $15\frac{1}{2}$ 吋.

分佈:——平時居西伯利亞,冬季遷移可至滿洲及高麗.

55. Capreolus pygargus tianschanicus Satunin. 天山灰鹿.

形態:——與上種相似而角較重大,最大之長度爲 $17\frac{3}{4}$ 吋,且分歧亦較多.

分佈:——天山.

56. Hydropotes inermis Swinhoe. 獐.

形態:——肩高約二十吋;一般體色淺棕栗色而雜黑色小點斑,頭,背,耳三部之棕色最顯著;若專就一毛言之,其基部大半灰白,次則黑褐,其末端乃淺栗色,所謂黑色之小點斑,乃毛之黑褐部所呈現出來也;頸之色彩較淺於背;肩,四

肢及尾褐栗色;下體,腿之前部,腮,喉,喙上之一小帶斑,眼上方之點斑及耳之內方皆白色.

分佈:——— 自揚子江流域以至高麗.

Camelidae. 駱駝科.

57. Camelus bactrianus Linn. 雙峯駱駝.

形態:——— 一般形態,無待贅述,因其背有雙峯,乃與非洲之單峯駱駝 (Camelus dromedarius) 別爲兩種.

分佈:——— 新疆及蒙古.

附記:——野生之駱駝,只見於蒙古之戈壁沙漠中,其餘概係馴養者.

Suidae 猪科.

58. Sus scrofa moupinensis Milne-Edward. 漠平野猪.

形態:——— 無再贅述.

分佈:——— 四川漠平.我國南部各省之野猪,大概當屬

此種.

附記:——南羣島之品類,佔全體之大半而有餘.

Equsidae. 馬科

59. Equus caballus caballus Linn. 原馬.

本種之標準地爲Scandinavia,據哺乳類學家之考證,特錄之以備考耳.

60. Equus caballus przewalskii Poliakow.蒙古野馬.

發見於蒙古戈壁大漠之東部,據許多學者之推測,謂或係家馬之逃出而恢復其野生狀態者云云.

61. Equus kiang Moorcroft. 西藏野馬.

居西藏及Ladak.

62. Equus Hemionus Pallas. 阿爾泰山野馬.

居阿爾泰山.

63. Equus onager castaneus Lydekker. 西蒙古野馬.

分佈於蒙古西部.

64. Equus asinus asinus Pocock. 驢.

本種之標準地爲亞洲.

附記:——本文採用三名法,但爲簡便計,分類系統以科爲本位,科以下卽爲該動物之拉丁名,至於科以上之羣,亞羣,類,亞類科以下之亞科,屬以下亞屬皆不詳焉.

書 評

調和函數之重要書籍

1. 吾人已知依馬克羅麟(Maclaurin)定理,可展開任意之 x 之函數,爲 x 之昇羃級數.又依傅利(Fourier)定理,可展開任意之週期函數,爲獨立變數之倍數之正弦及餘弦之級數.以式列之如下:

卽依馬氏定理得

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots$$

依傅氏定理得

$$f(x) = a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots\cdots$$
$$+ b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \cdots\cdots$$

此式謂之傅利級數,其應用對於物理學之各部極廣,如力學,熱學,光學,電學,磁學,音學,以及天體力學,海港內潮浪,引力及位勢諸現象,無一不賴此得以明白表出,而生理學研究聽覺時,尤對之別饒興趣.蓋在實際上,任何種類之樂音,如出自手彈之豎琴(Harp)者,或以手拉之提琴(Violin)者,或以手按之風琴(Piano)者,均可分解爲單獨之音調,而此等音調之各個,適相當於一個基本調及其分支調也.故音波者,乃調和振動之表現.因此得以調和二字命名焉.

今設在上列傅利級數中,予各項以一個名稱,命 $a_1 \sin x$ 曰基本調和,亦曰第一調和,$a_2 \sin 2x$ 曰第二調和,$a_3 \sin 3x$ 曰第三調和,其餘類推,對於 $b_n \cos nx$ 諸項亦然.於是可將級數分解爲多種調和.如此之法謂之調和解析 (Harmonic Analysis).反之若將各個調和,合併成一級數,則謂之調和綜合 (Harmonic Synthesis).

關於調和解析,可用器具以求之.此等器具,謂之調和解析器 (Harmonic Analyzer).即由實驗所得之曲線如爲傅利級數,則可用是器以決定其各項係數.此器之最古者爲克爾文 (Lord Kelvin) 所發明.嗣後游爾 (G. U. Yule) 及邁克爾孫 (A. A. Michelson) 更改良而研究之.其用法詳於下列各書:

Napier Tercentenary Meeting: Modern Instruments and Methods of Calculation, Bell & Sons.

(那波爾三世紀紀念會: 近世算具及計算法)

W.F. Franklin: Electric Waves, Macmillan Co., New York.

(法蘭克林: 電波)

J. Thomson and Wm. Thomson: Proceeding of the Royal Society, Vol. XXIV.

(湯姆孫: 皇家學會進行報第二十四卷)

J. N. Le Conte: Physical Review, Vol. VII.

(勒康特: 物理學報第七卷)

A. A. Michelson: Light Waves and Their Uses, University of Chicago

Press, Chicago.

(邁克爾孫:　光波及其用途)

惟所謂調和者,其普通之意義如次:

若一個函數,在一定之區域內,爲單値而連續的,復含有第一第二微分,且在該區域內之各點,均滿足於其方程式時,則此函數謂之在該區域內爲調和的.至於通常所謂調和函數者,卽具有此等性質而滿足於下列拉普拉斯(Laplace)方程式

$$\nabla^2 V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = o$$

或　$$\nabla^2 V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = o$$

之一切解答之函數也.

憶當傅利開始展開任意函數爲三角級數時,理論初未臻完善.繼起而研究者,則有黎曼(Riemann) 科厓(Cauchy)諸氏.隨後又有狄里勒(Dirichlet)嚴格討論級數之收斂.迄至拉普拉斯,更進而展開兩個或多個變數之級數.他若引出調和函數以擴張級數之理論者,可謂自勒戌德(Legendre)肇其端.此皆讀者應知之事實也.

2.　調和函數,德人高斯(Gauss)稱曰球函數(Kugelfunktionen),法文亦稱球函數(Functions sphériques),英人湯姆孫(Wm. Thomson)及泰特(Tait)稱曰球調和(Spherical Harmonics),何輝爾(Whewell)稱曰拉普拉斯函數(Laplace's Functions),又或

稱位置函數(Potential Functions).其重要性質,可略述數種於次:

(1) 一個偏微分方程式,含有無窮數之特別解答,其各解答爲幾個單變數函數之乘積,且乘積中各因子所含之變數不相同時,則該方程式,謂之調和方程式,而其解答,謂之調和解答.

(2) 若函數爲調和的,且在單一閉合曲線(或曲面)之上或內無有特殊性時,則其沿曲線(或曲面)之法線微分之線積分必爲零. 逆之,若一個函數爲連續的,復含有第一第二偏微分,而在一個區域內沿各個閉合曲線(或曲面)之線積分(或面積分)爲零時,則函數必爲調和的.

(3) 一個調和函數,在圓周(或球面)之上之平均值,必等於其在中心之値.

(4) 一個調和函數,在一定區域之內無有特殊性時,則在區域內之任一點,必不能有極大之値或極小之値.

(5) 一個調和函數,在一定區域之內無有特殊性,且在其境界上爲常數時,則遍在區域內各處亦必爲常數.

(6) 兩個調和函數,在一個閉合界線之上有恆等之値,且在區域內無有特殊性時,則遍在包圍區域之各處必爲恆等.

(7) 若一個函數之法線微分爲調和的,而在已知界線上或內之各點無有特殊性,又在界線之上恆等於零時,

則此函數必爲常數.

(8) 一個調和函數之無有特殊性者,不僅依其在一個界線上之値,可決定之,卽依其在一個界線上法線微分之値,亦可決定之.(但所加之常數除外)

玆姑以三個變數 x, y, z 爲坐標,略示球函數之各類於次:

3. 凡滿足於拉普拉斯方程式

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=o$$

之任何函數而爲 x, y, z 之齊次式者,謂之球體函數(Spherical Solid Harmonic).此拉氏方程式之普通解答,雖不能爲有窮之項數.但若令 n 爲任意正整數,而 V_n 爲 x, y, z 之 n 次齊次函數,則 V_n 可以滿足拉氏方程式而爲其特解.在特例時之球體函數如下:

o 次球體函數: 任意之常數, $\tan^{-1}\frac{y}{x}$, $\frac{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2}$,

-1 次球體函數: $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{x}{x^2+y^2}$,

-2 次球體函數: $\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

1 次球體函數: x, $ax+by+cz$,

2 次球體函數: $2z^2-x^2-y^2$, x^2-y^2,

4. 若將拉氏方程式,用球坐標或極坐標 (r, θ, Φ) 變換之,卽以 $r\cos\theta\cos\Phi$ 代 x, 以 $r\sin\theta\sin\Phi$ 代 y, 以 $r\cos\theta$ 代 z, 則得

$$\nabla^2 V\equiv\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{\cot\Theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \theta}+\frac{\csc^2\Theta}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \Phi^2}=o$$

設 $V_n = r^n U_n$，而 U_n 僅為含有兩個獨立變數 θ 與 ϕ 之函數，則得

$$\nabla^2 V \equiv r^{n-2}\left\{\frac{\partial^2 U_n}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial U_n}{\partial\theta}+\csc^2\theta\frac{\partial^2 U_n}{\partial\phi^2}+n(n+1)U_n\right\}=0$$

$$i.\ e.\quad \frac{\partial^2 U_n}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial U_n}{\partial\theta}+\csc^2\theta\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2}+n(n+1)U_n=0$$

式中之 U_n 謂之 n 次球面函數(Spherical Surface Harmonic)，卽通常所稱之 n 次拉普拉斯係數也。

今書 $\cos\theta\equiv\mu$，則球面函數之方程式變為

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial U_n}{\partial\mu}\right\}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 U_n}{\partial\phi^2}+n(n+1)U_n=0$$

如令 $U_n=\Theta\,\Phi$，但 Θ 僅為 θ 之函數，Φ 僅為 ϕ 之函數，則 Φ 滿足於方程式

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{dU_n}{d\mu}\right\}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right\}U_n=0$$

所謂勒戎德聯合方程式 (Legendre's Associated Equation) 是也。此式可有 $2n+1$ 個解答如下:

$$P_n(\mu);$$

$$\cos\Phi\cos\theta\frac{dP_n(\mu)}{d\mu},\quad \cos 2\Phi\sin^2\theta\frac{d^2P_n(\mu)}{d\mu^2},\ \cdots\cdots,\ \cos n\Phi\sin^n\theta\frac{d^nP_n(\mu)}{d\mu^n},$$

$$\sin\Phi\sin\theta\frac{dP_n(\mu)}{d\mu},\quad \sin 2\Phi\sin^2\theta\frac{d^2P_n(\mu)}{d\mu^2},\ \cdots\cdots,\ \sin n\Phi\sin^n\theta\frac{d^nP_n(\mu)}{d\mu^n}$$

此等式可表之為下形:

$$A_m\cos m\Phi\sin^m\theta\frac{d^mP_n(\mu)}{d\mu^m}\equiv A_m\cos m\Phi\,P_n^m(\mu)$$

及 $$B_m\sin m\Phi\sin^m\theta\frac{d^mP_n(\mu)}{d\mu^m}\equiv B_m\sin m\Phi\,P_n^m(\mu)$$

(式中 A_m 及 B_m,乃表示與 θ 與 Φ 無關之任意數量.)

又或書之爲

$$A_m \cos m\Phi(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m} \equiv A_m \cos m\Phi P_n^m(\mu)$$

$$B_m \sin m\Phi(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m} \equiv B_m \sin m\Phi P_n^m(\mu).$$

$P_n^m(\mu)$ 或 $T_n^m(\mu)$,謂之 n 次 m 階之方塊面函數 (Tesseral Surface Harmonics of the degree n and order m). 但 P_n^m 與 T_n^m 之關係式爲 $P_n^m(\mu)=e^{\pm m\pi i}T_n^m(\mu)$. 如當 $m=n$ 時,則謂之扇形面函數 (Sectorial Surface Harmonics), 此時之 $\frac{d^n P_n(\mu)}{d\mu^n}$, 乃爲一個常數.是以扇形面函數者,僅含有 θ 而爲

$\sin^n\theta$ 或 $(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}$

之形也.又若以 n 次之方塊面函數及扇形面函數,乘之以 r^n, 則得 n 次之方塊體函數及扇形體函數.

此 $P_n^m(\mu)$,乃滿足於勒戎德聯合方程式之第一類函數.此外尙有第二類方塊函數或扇形函數,亦滿足於該方程式,而以 $Q_n^m(\mu)$ 表之,卽 $Q_n^m(\mu)$ 滿足於下列之式:

$$Q_n^m(\mu)=\frac{(-1)^m(\mu^2-1)^{\frac{m}{2}}}{2^{n+1}}\cdot\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}\cdot\frac{1}{\mu^{n+m+1}}$$

$$XF\left(\frac{n+m+1}{2},\ \frac{n+m+2}{2},\ n+\frac{3}{2},\ \frac{1}{\mu^2}\right)$$

{式中之 F,乃表示超比函數 (Hypergeometric Function)}

在特例時,命 $t=\cosh\theta$, 則 $P_{n-\frac{1}{2}}^m(t)$ 及 $Q_{n-\frac{1}{2}}^m(t)$ 謂之圈輪函數 (Ring Functions).

5. 若在球面函數之方程式中,當 ϕ 爲常數時,則 U_n 僅爲一個變數 θ 之函數,因是該方程式化簡爲

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dU_n}{d\theta}\right)+n(n+1)U_n=o$$

i. e. $$\frac{d^2U_n}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{dU_n}{d\theta}+n(n+1)U_n=o$$

或 $$(1-\mu^2)\frac{d^2U_n}{d\mu^2}-2\mu\frac{dU_n}{d\mu}+n(n+1)U_n=o$$

此式稱曰勒戎德方程式.其解答爲不含有 ϕ 之函數,謂之球帶面函數 (Zonal Surface Harmonics), 亦曰勒戎德函數,常以 $P_n(\mu)$ 或 $P_n(\cos\theta)$ 表示之者,謂之 n 次球帶面函數.其最初十一次之球帶面函數,列之如下:

$$P_o=1$$

$$P_1=\mu$$

$$P_2=\frac{1}{2}(3\mu^2-1)$$

$$P_3=\frac{\mu}{2}(5\mu^2-3)$$

$$P_4=\frac{1}{8}(35\mu^4-30\mu^2+3)$$

$$P_5=\frac{\mu}{8}(63\mu^4-70\mu^2+15)$$

$$P_6=\frac{1}{16}(231\mu^6-315\mu^4+105\mu^2-5)$$

$$P_7=\frac{\mu}{16}(429\mu^6-693\mu^4+315\mu^2-35)$$

$$P_8=\frac{1}{128}(6435\mu^8+12012\mu^6+6930\mu^4-1260\mu^2+35)$$

$$P_9=\frac{\mu}{128}(12155\mu^8-25740\mu^6+18018\mu^4+4620\mu^2+315)$$

$$P_{10}=\frac{1}{256}(46189\mu^{10}-109395\mu^8+90090\mu^6-30030\mu^4+3465\mu^2-63)$$

惟球帶面函數之方程式中,應有二個解答,上述之 $P_n(\mu)$ 乃其第一解答,稱曰第一類球帶面函數.此外尚有第二類解答,稱曰第二類球帶面函數,常以 $Q_n(\mu)$ 表之即爲下列之函數:

$$Q_n(\mu)=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(n+1)}{2^{n+1}\Gamma(n+\frac{3}{2})}\,\frac{1}{\mu^{n+1}}\,F\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{n}{2}+1,\ n+\frac{3}{2},\ \frac{1}{\mu^2}\right)$$

又如將球帶面函數之方程式變換之得

$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+r\frac{\partial^2(rU)}{\partial r^2}=o$$

則此式中之解答 $U=r^n P_n(\mu)$, 謂之球帶體函數 (Zonal Solid Harmonics).

由上所述,可知方塊函數爲球函數之特例,而球帶函數又爲方塊函數之特例.如云球帶面函數 $P_n(\mu)$ 者,乃 n 次 o 階之方塊面函數 $T^0_n(\mu)$ 是也.

6. 若將拉氏方程式,用圓柱坐標變換之,即以 $r\cos\Phi$ 以 x, 以 $r\sin\Phi$ 代 y, 以 r^2 代 x^2+y^2, 以 $\tan\Phi$ 代 $\frac{y}{x}$,則得

$$\nabla^2 V\equiv\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\Phi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=o$$

在此方程式中,令 $V=R\Phi Z$, 此 R 僅爲 r 之函數,Φ 僅爲 Φ 之函數,Z 僅爲 z 之函數,再以 $R\Phi Z$ 除之,則得

$$\frac{1}{R}\,\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{rR}\,\frac{dR}{dr}+\frac{1}{r^2\Phi}\,\frac{d^2\Phi}{d\Phi^2}+\frac{1}{Z}\,\frac{d^2Z}{dz^2}=o$$

此式之其初三項不含有 z, 故末項亦必不含有 z 而爲一個常數,命之爲 k^2,得

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=k^2$$

由是 $Z=c_1e^{kz}+c_2e^{-kz}$

代入上式得

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}+k^2r^2=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\Phi^2}$$

此式之左邊各項不含有 Φ,故右邊之項亦不含有 Φ, 而爲一個常數,命之爲 m^2,得

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\Phi^2}=m^2$$

由是 $\Phi=c_3\cos m\Phi+c_4\cos m\Phi$

故得 $r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}+(k^2r^2-m^2)R=o$

在此式中,命 $kr=x$, 則變爲

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}+(x^2-m^2)R=o$$

此式謂之柏塞(Bessel)方程式,其解答謂之圓柱函數 (Cylindrical Harmonics), 亦曰柏塞函數.當 m 爲零時,則謂之傅利方程式.當 m 爲分數時,則得

$$R=c_5J_m(x)+c_6J_{-m}(x)$$

當 m 爲整數時,則此

$$R=c_5J_m(x)+c_6Y_m(x)$$

此 J_m 謂之第 m 階第一類圓柱函數,Y_m 謂之第 m 階第二類

圓柱函數,亦曰紐曼函數(Neumann's Function).

但因 $V=R\Phi Z$, 故上述任意之 R, Φ, Z 之各值,均爲 V 之解答,而此等值之總和亦爲其解答.在特例時,設 k 爲一定之常數,m 爲正數,則拉氏圓柱坐標方程式之解答爲

$$V=\sum_{m=0}^{m=\infty}\left[e^{kz}(A_m\cos m\Phi+B_m\cos m\Phi)+e^{-kz}(C_m\cos m\Phi+D_m\sin m\Phi)\right]J_m(kr)$$

茲示第 0 階及第 1 階之第一類圓柱函數之數式於次:

$$J_0(2x)=1-x^2+\frac{x^4}{(2!)^2}-\frac{x^6}{(3!)^2}+\frac{x^8}{(4!)^2}-\frac{x^{10}}{(5!)^2}+\cdots\cdots$$

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^4(2!)^2}-\frac{x^6}{2^6(3!)^2}+\cdots+(-1)^r\frac{x^{2r}}{2^{2r}(r!)^2}-\cdots\cdots$$

$$J_0(2\sqrt{x})=1-x+\frac{x^2}{(2!)^2}-\frac{x^3}{(3!)^2}+\frac{x^4}{(4!)^2}-\frac{x^5}{(5!)^2}+\cdots\cdots$$

$$J_1(2x)=x\left(1-\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot2\cdot3}-\frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots\right)$$

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^3\cdot2!}+\frac{x^5}{2^5\cdot2!3!}-\frac{x^7}{2^7\cdot3!4!}+\cdots+(-1)^r\frac{x^{2r+1}}{2^{2r+1}\cdot r!(r+1)!}+\cdots\cdots$$

$$J_1(2\sqrt{x})=\sqrt{x}\left(1-\frac{x}{1!2!}+\frac{x^2}{2!3!}-\frac{x^3}{3!4!}+\cdots\cdots\right)$$

第二類圓柱函數 Y_m,亦常爲 G_m 之名,或爲 K_m 之名,其各式間之關係,有下列各式:

$$Y_m(x)=\frac{\pi}{2\sin m\pi}\left\{J_{-m}(x)-\cos m\pi\cdot J_m(x)\right\}$$

$$G_m(x)=\frac{\pi}{2\sin m\pi}\left\{J_{-m}(x)-e^{-im\pi}J_m(x)\right\}$$

$$K_m(ix)=-\frac{i\pi}{2}e^{-\frac{im\pi}{2}}\left\{J_m(x)-iY_m(x)\right\}$$

此式中之函數 $e^{-\frac{im\pi}{2}}J_m(ix)$, 常以 $I_m(x)$ 表之,乃滿足於下列微

分方程式

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}-(x^2+m^2)R=o$$

之解答也.

此外尙有第三類圓柱函數,亦曰韓克爾函數 (Hankel's Function), 常以 H_m 表之,謂之第 m 階第三類圓柱函數,其中再細分爲兩種如下:

$$H_m^{(1)}(x)=J_m(x)+iY_m(x)$$
$$H_m^{(2)}(x)=J_m(x)-iY_m(x)$$

7.　若滿足於微分方程式

$$x^2\frac{d^2S}{dx^2}+x\frac{dS}{dx}+(x^2-m^2)S=2x\sin^2\tfrac{1}{2}m\pi+2m\cos^2\tfrac{1}{2}m\pi$$

之特別解答 S_n,而有關係式

$$S_{n-1}(x)-S_{n+1}(x)=2S'_n(x)$$

及　$S_1(x)=-S_o'(x)$

者,謂之半圓柱函數(Hemi-cylindrical Functions).

8.　若滿足於韋柏(Weber)方程式

$$\frac{d^2D_n(x)}{dx^2}+(n+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}x^2)D_n(x)=o$$

之解答爲

$$D_n(x)=2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4},-\frac{1}{4}}(\tfrac{1}{2}x^2)$$

則謂之抛物柱函數 (Parabolic Cylinder Function). 其中之 W_{km}, 乃黎曼方程式

$$\frac{d^2W}{dx^2}+\left\{-\frac{1}{4}+\frac{k}{x}\ \frac{\frac{1}{4}-m^2}{x}\right\}W=o$$

之解答也.

9. 設 $F(\xi)$ 及 $G(\eta)$ 各滿足於兩個馬替 (Mathieu) 微分方程式:

$$\frac{d^2F(\xi)}{d\xi^2}+\left(\frac{h^2p^2}{c^2}\cosh^2\xi-A\right)F(\xi)=o$$

$$\frac{d^2G(\eta)}{d\eta^2}-\left(\frac{h^2p^2}{c^2}\cos^2\eta-A\right)G(\eta)=o$$

令 $x+iy=h\cosh(\xi+i\eta)$, 變更其獨立變數,則均成爲下形:

$$\frac{d^2u}{dz^2}+(a+16q\cos 2z)u=o$$

此式之解答爲

$$u=F(\xi)G(\eta)$$

而 $F(\xi)G(\eta)e^{mi\phi}$ 則亦爲拉普拉斯方程式之特別解答.此 $F(\xi)$ 及 $G(\eta)$ 謂之馬替函數,亦曰橢圓柱函數(Elliptic cylinder Functions).

10. 今若取橢球

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

及任意同焦點之二次式

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}=1 \qquad (\theta=常數)$$

試書

$$\frac{x^2}{a^2+\theta_p}+\frac{y^2}{b^2+\theta_p}+\frac{z^2}{c^2+\theta_p}-1\equiv\Theta_p$$

則 $\Pi(\Theta)\equiv\prod_{p=1}^{m}(\Theta_p)$, 謂之第一款橢球調和 (Ellipsoidal Harmonic), $x\Pi(\Theta)$, 或 $y\Pi(\Theta)$, 或 $z\Pi(\Theta)$ 謂之第二款橢球調和, $yz\Pi(\Theta)$

或 $zx\Pi(\Theta)$,或 $xy\Pi(\Theta)$ 謂之第三款橢球調和,$xyz\Pi(\Theta)$ 謂之第四款橢球調和.

於此將 Θ_p 中諸項表示爲點 (x, y, z) 之同焦點坐標 (λ, μ, ν),則任意之橢球調和,可書爲 $\Lambda M N$ 之形,其中之 Λ 僅爲 λ 之函數,M 僅爲 μ 之函數,N 僅爲 ν 之函數,此函數 ΛMN 亦爲拉普拉斯方程式之解答,卽

$$V = \Lambda M N,$$

而 Λ 則滿足於微分方程式

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2} = \left\{n(n+1)\wp(u) + B\right\}\Lambda$$

此微分方程式,謂之拉梅 (Lamé) 方程式,而書爲魏士特氏(Weierstrass)之形式者也.此式中含有魏氏橢圓函數 $\wp(u)$, 其 B 與 C 均爲常數,相聯成爲次之關係式:

$$B + \tfrac{1}{3}n(n+1)(a^2 + b^2 + c^2) = C$$

於此若取 $\wp(u)$ 爲一個新變數,命之爲 ξ, 則拉梅方程式可變爲代數之形式:

$$\frac{d^2\Lambda}{d\xi^2} + \left\{\frac{\frac{1}{2}}{\xi - e_1} + \frac{\frac{1}{2}}{\xi - e_2} + \frac{\frac{1}{2}}{\xi - e_3}\right\}\frac{d\Lambda}{d\xi} = \frac{\left\{n(n+1)\xi + B\right\}\Lambda}{4(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3)}$$

此式有特殊性在 e_1, e_2, e_3 處,其解答有 $2n+1$ 個,表之爲

$$E_n^m(\xi) \qquad m = (1, 2, \cdots, 2n+1)$$

謂之第一款(或第二,第三,第四款)第一類 n 次之橢球函數,亦曰拉梅函數.

又有 $2n+1$ 個解答,表之爲

$F_n^m(\xi)$

謂之第二類橢球函數.

11. 若以 (r, θ, Φ) 表示扁球坐標,令

$$x = c(r^2+1)^{\frac{1}{2}} \sin\theta \cos\Phi$$

$$y = c(r^2+1)^{\frac{1}{2}} \sin\theta \sin\Phi$$

$$z = c\,r\cos\theta$$

則

$$P_n^m(ir)\,P_n^m(\cos\theta)\cos m\Phi$$

$$P_n^m(ir)\,P_n^m(\cos\theta)\sin m\Phi$$

謂之內扁球函數(Internal Spheroidal Harmonics).

$$Q_n^m(ir)\,P_n^m(\cos\theta)\cos m\Phi$$

$$Q_n^m(ir)\,P_n^m(\cos\theta)\sin m\Phi$$

謂之外扁球函數(External Spheroidal Harmonics).

12. 設取圓錐坐標系:

$$x^2+y^2+z^2=r^4$$

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=o$$

$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}=o$$

此時拉普拉斯方程式變爲

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\beta^2}+(\mu^2-\nu^2)\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)=o$$

若 $V=U\cdot R$, 則上式分解爲

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=m(m+1)R$$

及 $\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2}+m(m+1)(\mu^2-\nu^2)U=o$

其解答各爲

$$R=Ar^m+Br^{-m-1}$$

$$U=E_m^p(\mu)\,E_m^p(\nu)$$

故拉氏方程式之解答爲

$$V=Ar^m\,E_m^p(\mu)\,E_m^p(\nu)$$

卽拉氏方程式以圓錐坐標表之,得 $V=Ar^m\,Y(\mu,\Phi)$, 謂之圓錐函數(Conical Function).

13. 設取圓環坐標系:

$$\frac{2ax}{\sinh\alpha}=\frac{x^2+y^2+a^2}{\cosh\alpha}$$

$$\frac{2ay}{\sin\beta}=\frac{x^2+y^2-a^2}{\cos\beta}$$

此時拉普拉斯方程式爲

$$\frac{\partial^2(V\sqrt{r})}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2(V\sqrt{r})}{\partial\beta^2}+\frac{1}{\sinh^2\alpha}\frac{\partial^2(V\sqrt{r})}{\partial\gamma^2}-V\left\{\frac{\partial^2(\sqrt{r})}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2(\sqrt{r})}{\partial\beta^2}\right\}=o$$

若 $U=V\sqrt{r}$, 則上式變爲

$$\sinh^2\alpha\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\beta^2}\right)+\frac{\partial^2 U}{\partial\gamma^2}+\frac{1}{4}U=o$$

其解答爲

$$U=\left\{A\cos(m+\tfrac{1}{2})\gamma+B\sin(m+\tfrac{1}{2})\gamma\right\}(A_1\cos n\beta+B_1\sin n\beta)\operatorname{csch}^2\alpha\frac{d^n P_m(\operatorname{ctnh}\alpha)}{(d\operatorname{ctnh}\alpha)^n}$$

此式中之

$$\frac{1}{i^{\frac{n}{2}}}P_m^n(\operatorname{ctnh}\alpha)=\operatorname{csch}^n\alpha\frac{d^n P_m(\operatorname{ctnh}\alpha)}{(d\operatorname{ctnh}\alpha)^n}$$

謂之圓環函數(Toroidal Harmonic).

14. 除上所述外,尙有其他種種調和函數.由此可知此等函數,變化莫測,種類極夥.若欲詳細硏究,自非備有專書不可.茲略舉其重要之書籍於次:

甲. 關於傅利級數者.

H.S. Carslaw: Fouries'r Series and Integrals, 3rd ed., Macmillan & Co., London, 1930.

(卡斯羅: 傅利級數及積分)

是書爲英文書中之傑作.其新版搜集有近代材料,尤爲硏究者所必需之品也.

H. Lebesgue: Le çons, sur les Séries Trigonométriques, Paris.

(雷柏士革: 三角級數論)

是書爲法文三角級數論之專書.

U. Dini: Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale, Pisa.

(狄尼: 傅利級數於實變數函數之解析表示)

是書爲義大利文中最流行之著作.

W. Rogosinski: Fouriersche Reihen, ss. 135, 1930.

(羅哥辛士吉: 傅利級數)

此爲論傅利級數之德文新書.

Beau: Analytische Untersuchungen im Gebiete der trigonometrischen

Reihen und der Fourier'schen Integrale, Halle.

(比烏: 三角級數及傅利積分變域中之解析研究)

此爲研究解析方面者必備之德文書.

H. Burkhardt: Entwicklungen nach oscillirenden Functionen. Jahresber. D. Math. Ver., Bd. X, Heft. II, Leipzig.

(柏克哈: 顫動函數之發展)

此爲德文之名著.

E.W. Hobson: The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series, Cambridge.

(霍浦孫: 實變數函數論及傅利級數論)

是書爲英文實變數函數論之最良本.

N. Wiener: The Fourier Integral and Its Applications, 1932.

(魏尼: 傅利積分及其應用)

此乃最新出版之小册.

P. Terebesi: Rechenschablonen für harmonische Analyse und Synthese, nach C. Runge, 1930.

(特勒柏西: 調和解析與綜合之算法)

此爲研究調和解析與綜合最近出版之專書.

G.A. Carse and G. Shearer: A course in Fourier's Anahysis and Periodogram Analysis,(Edinburgh Mathematical Tracts, No. 4)Edniburgh.

(卡斯及社累: 傅利解析及週期圖示解析)

是書爲研究傅利解析之精本.

A. Eagle: Fourier's Theorem and Harmonic Analysis; Longman, Green & Co.

(伊格爾: 傅利定理及調和解析)

本書敍述簡明,饒有興趣.

H. H. Turner: Tables for Harmonic Analysis, Oxford University Press.

(武湼: 調和解析表)

是表極便檢查.

乙. 關於球函數者.

E. W. Hobson: Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics, pp. 500, 1931.

(霍蒲孫: 球及橢球調和理論)

是書爲最新之傑作.

G. Prasad: Treatise on Spherical Harmonics and the Functions of Bessel and Lamé,

Part I, 1931; Part II, 1932.

(普拉薩: 球調和及柏塞拉梅函數論)

是書爲貝拿勒斯印度大學 (Benares Hindu Universiry) 教授之新著.

W.E. Byerly: Fourier's Series and Spherical, Cylindrical and Ellipsoidal Harmonics, Boston.

(拜力: 傅利級數及球,圓柱,橢球調和論)

是書名聞各國,用解析方法,以討論關於物理學之偏微分方程式.

E. T. Whittaker and G. N. Watson: Modern Analysis, 4ed., Cambridge.

(輝塔克及瓦特孫: 近世解析論)

爲在任何種文字同類書籍中僅有之作品,細論各重要函數之性質,尤注意於應用數學方面.

A. Gray and G.B. Mathews: A Treatise on Bessel Functions, 2ed., Macmillan & Co., London, 1931.

(格雷及馬條茲: 柏塞函數論)

是書乃格馬二氏名著之新版.

I. Todhunter: The Functions of Laplace, Lamé and Bessel.

(托德罕忒: 拉普拉斯拉梅及柏塞函數論)

全書凡三十六章,可分之爲四部分,自第一章至第十二章爲第一部分,討論僅含一個變數之函數,表示之以勒戎德函數.自第十三章至第二十章爲第二部分,討論含有兩個變數之函數,表示以拉普拉斯函數.自第二十一章至第二十九章爲第三部分,討論拉梅函數,乃拉普拉斯函數之擴張.自第三十章至第三十六章爲第四部分,討論柏塞函數.

T.M. Mac Robert: Spherical Harmonics, Methuen & Co., London.

(馬克羅伯: 球調和論)

爲球調和理論之善本.讀者僅須先具微積分之知識,不必賴用界綫積分(Contour Integration)或近世實變數理論,卽可

讀之.書中復含有柏塞函數,傅利級數,及各種數理物理之應用,如熱之傳導,繩之振動,與吸力等篇.

N.M. Ferrers: Spherical Harmonics, Macmillan & Co., London.

(斐勒茲:　球調和論)

本書敘述球調和函數之性質及其應用,篇幅不多,而大致完備.

H. Bateman: Partial Differential Equations of Mathematical Physics, 1932.

(巴提曼:　數理物理之偏微分方程式)

乃以偏微分方程式討論物理問題之新書.著者對於此科,素擅專長.抑有志研究者,不可不手執一篇也.

A. G. Webster: Partial Differential Equations of Mathematical Physics, B.G. Teubner, Leipzig.

韋白斯特:　數理物理之偏微分方程式)

是書爲在德國來比錫出版,用英文所著偏微分方程式之良本.

H. Weber: Die Partiellen Differential-Gleichungen der Mathematischen Physik, Bd. I, 2 Aufl., Leipzig.

(韋柏:　數理物理之偏微分方程式)

是書乃黎曼所著"偏微分方程式及其應用於物理問題"(Riemann: Partielle Differential-gleichungen und deren Anwendungen auf physikalischen Fragen, Braunschweig)講義之第五版而改訂者,

可稱偏微分方程式中之精良課本.

H. E. Heine: Handbuch der Kugelfunktionen, 2 Aufl., Berlin.

(解奈: 球函數讀本)

此為球函數中極有價值之著作,乃專攻是科者必讀之書. 其中以幻數代變數之部分,則屬於純粹解析學方面者也.

L. Schläfli: Ueber die zwei Heine'schen Kugelfunktionen, Bern.

(史拉夫利: 論二解奈氏球函數)

著者為瑞士之球函數學家,其名貴自不待言.

F. Neumann: Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen.

(紐曼: 位勢理論及球函數)

紐曼法蘭(Franz E. Neumann)及其子紐曼卡爾(Karl Neumann),均為研究球函數之數學物理學家.是書乃法蘭之重要作品也.

F. Neumann: Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen.

(紐曼: 球函數理論述略)

是書乃有益於球函數之作也.

K. Neumann: Ueber die Entwickelung einer Funktion nach den Kugelfunktionen, Halle.

(紐曼: 論球函數之發展)

讀是書可明瞭球函數之概略.

K. Neumann: Theorie der Bessel'schen Funktionen, Leipzig.

(紐曼: 柏塞函數理論)

是書爲德文柏塞函數論中特出之著作.

K. Neumann: Über die nach Kreis-, Kugel-, und Cylinder-Funktionen fortschreitenden Entwickelungen, Leipzig.

(紐曼: 論圓球柱諸函數之進展)

讀是書可窺探各調和函數之一班.

K. Neumann: Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential.

(紐曼: 對數及牛頓位勢函數之研究)

是書亦屬名著之一.

J. Frischauf: Vorlesungen nach Kreis-und Kugel-Funktionen Reihen, Leipzig,

(佛里紹夫: 圓球函數級數讀本)

是書爲奧國格拉齊(Graz)人之著作.

N. C. Schmit: Recherches sur les Fonctions de Legendre, Bruxelles.

(史密特: 勒戎德函數之研究)

是書刊行於比利士京城,乃討論勒戎德函數之小册也.

G. Sidler: Die Theorie der Kugelfunktionen, Bern.

(錫德勒: 球函數理論)

全書不過七十一面,刊行於瑞士,乃初學者之良本也.

A. Wangerin: Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen.

(汪基靈: 位勢理論及球函數)

是書亦德文書中之名著.

R. Olbricht: Studien über die Kugel-und Cylinder-funktionen, Halle.

(奧爾布立: 球與柱函數之研究)

是書爲德文書中之要本.

E. Haentzschel: Stüdien uber die Reduktion der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen.

(赫懸爾: 常微分方程式中位勢化簡之研究)

爲研究微分方程式應用部分之良書.

F. C. Klein: Vorlesungen über die Potentialtheorie.

(克來因: 位勢理論)

讀是書對於應用數學,饒有興趣.

F. C. Klein: Vorlesungen über Lamé'schen Funktionen.

(克來因: 拉梅函數論)

是爲研究拉梅函數論者必讀之書.

R. Clausius: Die Potentialfunktion und das Potential.

(克勞修司: 位勢函數及位勢)

是書爲攻位勢論者之良好作品.

A. Harnack: Grundlagen der Theorie logarithmischen Potentiales.

(哈那克: 對數位勢理論之基礎)

是書簡明得當.

B. O. Peirce: Newtonian Potential Function, Ginn & Co., Boston.

(皮耳士: 牛頓位勢函數理論)

此爲研究位勢函數之善本,并搜集有各種實用問題.

E. Grimsehl: Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandluug.

(格臨色: 賦有位勢理論之淺說)

是書可供初學者之用.

N. Nielsen: Théorie des fonctions métasphériques, Paris.

(尼爾森: 變球函數理論)

此爲法文書中對於該類函數之專著.

N. Nielsen: Handbuch der Theorie des Cylinderfunktionen, Leipzig.

(尼爾森: 柱函數理論手篇)

此爲治該科書籍中之德文讀本.

G. Lamé: Leçons sur les Fonctions Inverses des Transcendantes et les Surfaces Isothermes, Paris

(拉梅: 超越反函數論及同溫面)

通常所稱拉梅函數者,當以是書爲鼻祖.

G. Lamé: Leçons sur les Coordonnées Curvilignes et leurs Diverses Applications, Paris.

(拉梅: 曲線坐標法及其各種用途)

拉梅創立曲線坐標法,以研究物理學問題.於解析方面闢生一個新穎途徑,是書卽其嚆矢也.

G. N. Watson: Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press.

(瓦特孫: 柏塞函數理論)

是書含具二目的,其一爲顯出複實變數函數之應用,其二爲搜羅各種物理數學理論之結果,乃柏塞函數論中之鉅製也.

E. Lommel: Studien über die Bessel'schen Funktionen, Lipzig.

(羅麥: 柏塞函數之研究)

著者乃德國慕尼克(Munich)地方柏塞函數論之專家,是書久爲世間所歡迎.

P. Schafheitlin: Theorie der Besselchen Funktionen, Leipzig.

(薩夫海林: 柏塞函數理論)

是書繁簡適宜,便於讀者.

K. Hayashi: Tafeln der Besselschen, theta-, Kugel-, und anderer Funktionen, 1930.

(林氏: 柏塞,狄達,及球函數等之算表)

是表可供參攷之用.

丙. 關於物理學方面者.

J. Fourier: Théorie Analytique de la Chaleur, Paris.

(傅利: 熱之解析理論)

此爲論傅利級數之原本,乃著者最重要之著作.書中說明一個變數之任何函數,不論其爲連續與否,恆可展開爲變數之倍數之正弦級數.可謂在數理物理中開一新紀元也.

J. Fourier: Analyticshe Theorie der Wärme, Deutsche Ausgabe von B.

Weinstein, Berlin.

(傅利: 熱之解析理論)

此爲上書之德數譯本.

J. Fourier: Analytic Theoiy of Heat, translated by A. Freeman, Cambridge.

(傅利: 熱之解析理論)

此爲上書之英文譯本.

H. S. Carslaw: Mathmatical Theory af Conduction of Heat in Solids, Macmillan & Co., London.

(卡斯羅: 熱在固體中傳導之數學理論)

是書與著者之'傅利級數及積分'二書,均可遺留久遠.

Wm. Thomson and P.G. Tait: Natural Philosophy, 2 ed.

(湯姆孫及退特: 自然哲學)

此爲物理學中有名之著作.

G. Lamé: Leçons sur la Théorie analytique de la Chaleur, Paris.

(拉梅: 熱之解析理論)

是書爲法文之名著.

J. Boussinesq: Théorie analytique de la Chaleur.

(勃辛涅: 熱之解析理論)

是書亦法文中有數之著作.

D' Amicis: Introduzione alla teoria matematica della propagazione del calore, Turino,

(達米息: 熱之傳播之數學理論)

是書爲義大利文特出之著作.

P.S. Laplace: Mécanique Céleste, 5 volumes.

(拉普拉斯: 天體力學)

是書爲拉氏不朽之名著,并有英文譯本.

J. H. Poincaré: Théorie Analytique de la Propagation de la Chaleur, Paris.

(龐卡累: 熱傳播之解析理論)

此爲研究熱學與解析方面者不可少之書也.

J.H. Poincaré: Théorie du Potentiel Newtonien.

(龐卡累: 牛頓位勢理論)

是書亦龐氏之名著.

S. D. Poisson: Théorie Mathématique de la Chaleur, Paris.

(波松: 熱之數學理論)

此書中含有各種重要假設,以討論熱之分布及地心熱等.

S. D. Poisson: Traité de Mécanique, 2e éd., Paris

(波松: 力學)

是書亦波氏有名之作品.

A. Dronke: Einleitung in die analytische Theorie der Wärmeverbreitung, Nach A. Beer und J.Plücker) Leipzig.

(德琅克: 具熱之解析理論初篇)

是書可供解析者之參考.

Kirsch: Die Bewegung der Wärme in der Cylinderwandungen der Dampfmaschine, Leipzig.

(克希: 熱在汽機柱層內之運動)

此書乃是科之專著也.

P. Mathieu: Cours de Physique Mathématique.

(馬替: 數理物理課本)

是書堪爲研究數理物理者之參攷.

P. Mathieu: Théorie du Potential et des Applications à l'Électrostatique et au Magnétisme.

(馬替: 位勢理論與電磁學之應用)

讀是書對於位勢論及其應用方面,可明瞭其概略.

W. Schell: Théorie der Bewegung und der Kräfte, Leipzig.

(謝爾: 動與力之理論)

此書爲理論力學之善本.

F. A. Tarleton: The Mathematical Theory of Attraction.

(塔爾吞: 引力之數學理論)

是書可作引力論之數學參攷書籍.

A. B. Basset: Treatise on Hydrodynamics and Sound, 2vols., 2 ed., Cambridge.

(陸甫: 水力學及音學)

此乃便於初學者之優良著作也.

A. E. H. Love: Mathematical Theory of Elasticity, 3ed., Cambridge.

(陸甫: 彈性之數學理論)

是書爲以數學解釋彈性之精深鉅作.

Lord Rayleigh: Theory of Sound, 2 vols., 2 ed., Macmillan & Co., London.

(累力: 音之理論)

是書爲數理音學中之鉅製.同於是類之書籍,在任何文字中無有出其右者.

H. Lamb: Dynamical Theory of Sound, Arnold.

(拉穆: 音之力學理論)

是書對於研究音之力學者,極有裨益.

J.C. Maxwell: Treatise on Electricity and Magnetism, 2 vols., 3 ed., Clarendon Press.

(馬克斯威: 電磁學)

是書用數學之言語,解釋法拉第之實驗,乃科學界最重要著作之一也.

J. C. Maxwell: Traite d'Électricité et de Magnétisme, tradiut sur la 2e Édition anglaise par G. Séligmann-Lui.

(馬克斯: 威電磁學)

是書爲上書之法文譯本.

H. Bateman: Electical and Optical Wave-motion.

(貝提曼: 電與光波之運動)

是書爲研究波動者必具之書.

昭安

國立武漢大學理科季刊投稿簡章

一・本季刊登載關於數學物理化學生物地質等學科之稿件海內外人士惠賜大作一律歡迎

二・投寄稿件不拘文言白話但須依本季刊形式一律橫書每面二十二列每列二十三字繕寫清楚并加新式標點符號

三・稿件題目之下請署姓名如係譯稿須註原著者姓名或雜誌書報之名稱及其出版時期地點

四・稿中如有插畫或圖表請另用白厚紙繪畫或製成照片或附寄原圖

五・本刊稿件依照數學物理化學生物地質等學科之順序登載

六・來稿如未登載除預先聲明者外恕不退還

七・稿件登載後本刊略備薄酬以答雅意

八・稿件內容本刊得酌量增删但不願意者請預先聲明

九・來稿請寄武昌國立武漢大學理科季刊委員會

國立武漢大學理科季刊第二卷第一期目錄

國立武漢大學理科季刊第二卷第二期目錄

國立武漢大學文哲季刊第二卷第二號目錄

國立武漢大學社會科學季刊第二卷第三號目錄

民國六年創刊 的雜誌 **學藝** 奇數號載社會科學論文
介紹科學藝術 偶數號載自然科學論文

第十一卷第十號目錄

價　目

每冊售洋弍角弍分全年十冊計洋弍元

發行者

上海法租界愛麥虞限路四十五號

中　華　學　藝　社

植物生態學　張鏡澄、董爽秋共著

（發售處武昌武漢大學生物室及廣州中山大學生物室）

（定價大洋三元　特價大洋貳元　外埠函購另加郵費貳角）

逕啓者輓近科學界最大之進步，卽爲各種學術之分工，蓋分工愈小，則研究愈精，於芥子能見須彌，斯乃眞知識也，十九世紀中葉以前，植物生態與生理兩者，猶統爲一科，迨前三十年頃，生態學始自生理學中分出，爲獨立之一支，三十年來，經各國名學者努力研究，乃得蔚成大觀，而尤以德國學者輩出。績業更冠於一時，武漢大學植物學教授張鏡澄先生，曾於十四年前，采輯諸賢既成之說，裒爲植物生態學講義一巨帙，俾教授時，學者得有所參攷，十四年中，增輯修訂者，前後亦既七八次，今歲中山大學植物學教授董爽秋博士，因教授參攷，復取張教授原書，博徵最近德國諸學者之專門著述，廣爲參訂，歷時六月，乃得定稿，舉凡最近諸種新學說，新發現，搜羅漸盡，既得張教授同意，遂於七月中付梓公世。

是書編輯之初，原預備有兩方面之應用，增訂之際，亦還以此兩點爲依歸，在專門讀者，如大學生物學系，地理學系，地質學系，農林系學等，得之固可圭臬當時，利用宏溥。而一般讀者，披誦之餘，知天然球現象之奇妙絢耀，有匪吾人瞻瞻一瞥中，所及想見其萬一者。「一花一世界」固可見眞理之無所不在，無所不涵；卽平日旅行之際，燕居之頃，涉趣豐草長林，俯視芸芸衆卉，有生生之機，卽有生生之理；默想天然，而以得諸是編者，與所見所識，一一印證。至於中等學校自然科學教師，手此一編，一方面足以增進其一己研究興趣，一方面與諸生研讀，尤足以補救教材枯窘之弊，是故此書取材則務期新穎正確，敘述則力求簡淨明晰，卽就插圖一項言，選擇配置，已費時三閱月他可知矣。

環顧海內，關於植物生態之專著，猶未有所聞，玆卷之出，已爲空前。內容種種，未敢自詡，以買夸誕之名，但創始維艱，不顧絡陋，謹敘其緣起，以告海內諸君子。

國立武漢大學生物學系
國立中山大學生物學系　仝啓

中等算學月刊

第一卷第一期要目

第一卷第二期要目

此外尙有問題欄，書評，戲劇，小說等名目繁多不及備載

定價： 零售每月一册一角五分

（郵票通行不折不扣）

定閱全年十二册一元五角

郵費： 免加

出版處： 中等算學研究社

發行所： 武昌珞珈山國立武漢大學內

中等算學月刊社

國立武漢大學理科季刊

第二卷第三期

價	目	郵	費
全年四册 價銀二圓		訂購全年 本國及日本不加郵費 其他地域加郵費六角	
每期零售 價銀五角		函購零本 本國及日本加郵費五分 其他地域郵費一角五分	

本刊以九月十二月三月及六月爲出版期

費須先惠空函不覆

各地代售處零售概不另加郵費

編輯者　國立武漢大學理科季刊委員會

發行者　國立武漢大學出版部

印刷者　中國科學公司

代售處　商務印書館

總發行所　武昌 國立武漢大學出版部

中華民國二十一年三月發行

1932年

第2卷

第4期

國立武漢大學
理科季刊

第二卷第四期

QUATERLY JOURNAL OF SCIENCE

WU-HAN UNIVERSITY, WUCHANG, CHINA

Vol. II No. 4 June 1932

本 期 目 錄

中華民國二十一年六月發行

國立武漢大學理科季刊委員會編印

中華郵政局特准掛號認為新聞紙類

國立武漢大學理科季刊

第二卷第四期目錄

頁數

國立武漢大學理科季刊

第三卷第一期目錄預告

義大利對於近代數學之貢獻(註一)

義大利羅馬 波丕尼(Enrico Bompiani)著

程 綸 譯

今請言義大利對於近代數學之貢獻,余雖知此爲煩重之工作,而頗樂於從事也,此論題之廣大,難確定其範圍.今以此文之簡陋,而欲由歷史之觀點及其內容,以求一確切之分類,似不可能.故僅以關於此類貢獻之各問題及其結果,加以充分注意而已.

首先須確定者爲所論列之時間之起迄.如敘拉古之阿基米得(Archimedes of Syracuse)及伊列之芝諾(Zeno of Elea)對於近代數學亦有貢獻.前者曾有關於微數微積分之方法與問題.後者曾創造連續性與非連續性之邏輯的討論,直引入近代之點組論.(Theory of point-sets)此皆不必提及者.

而批薩諾(Leonardo Pisano)及其著作Liber Abbaci使亞利伯之計算方法輸入義大利,則有述之之必要.蓋此書在歐洲之傳播,雖亦政局之結果,然遂成爲近代算術與代數創造之先機.

十六世紀之初波倫亞之數學派發現三次及四次方程

(註一) 此文爲一九三〇年美國數學聯合會於R. I.省之第十四次暑期會之講演稿.

式之解法,為科學界之新光.與此發現有關係者,尚有費羅,(Scipione del Ferro)斐拉里,(Ludovico Ferrari)波柏力(Bombelli)布里西亞峽之達塔大隆,(Tartaglia of Brescia)米蘭之卡丹諾,(Cardano of Milan)諸氏.而米第那之魯飛尼(Palo Ruffini of Modena)復於一七九九年先亞伯爾(Abel)而解決任何次代數方程式是否能求解法之間題,證明高於四次之方程式之代數解法為不可能,同時使有窮替換羣論獲得最初之種子.隨此方向而發展者,厥為葛洛華.(Galois)

純算術與代數之討論,比時在義大利,仍然活躍.俾安歧(Bianchi)對於模羣之研究,狄利勒及赫密提方式(Dirichlet's and Hermitian forms)論之研究,及有理整係數之四元二次方式之研究,皆足以證之;奇坡拉(Cipolla)對於近似術算之研究,與史可紮(Scorza)塞栖尼(Cecioni)對於代數之研究,亦可以為證.(註一)

十七世紀為發明解析幾何及微數微積分之顯著時代.卡發利里(Cavalieri)之不可分法"Methodus indivisibilim"至今仍引用於近代論文中.托里拆利(Torricelli)之任何次拋物線與雙曲線之各種求積法,不只證明其有天才,且能知牛頓(Newton)及來布尼茲(Leibniz)之符號系統化之環境,於茲已成熟矣.

無限算法之發現,亦屬於此時期內.如連分數,(卡塔爾

(註一) 參看G. Scorza之傑作Corpi numerici e algebre (Principots, Messina, 1922).

第(Cataldi)得其繼續聚性之計算公式及最確近似法之定理)無窮級數,及對數是也.波倫亞之孟哥利(Mengoli)曾有極限定義於級數求和法中(註一)各種可能性之極確切之概念,布魯納西(Brunacci)於一八〇四年得其著名之變形法.今謂之布亞兩氏定理,(Theorem of Brunacci-Abel)爲級數求值法之用.至近代之西沙羅(Cesaro)爲一有創造天才之數學家也.彼將此概念擴充至非聚性級數之和.至波勒爾(Borel)更爲之彰明之.薩尼(G. Saannia)於納普耳證明包銳爾之加法,僅多數方法中之一特例,而級數可求和性所須者爲不健全之條件.最近皮科涅(Picone)於那不勒斯又將所有求和法作一總論,摒除只拘於可能應用之限制.其門人曼馬那(Mammana)於加格拉里(Cagliari)以各種方法研究級數求和之代數演算,仍以應用爲重要,然知之者甚鮮.

斐浙(Féjer)以西沙羅之方法應用於三角多項式表實函數之近似表示法,遂成顯著之效果.

自十七及十八兩世紀之大發現而後,數學知識所根據之原則之必須修正,遂成爲增進之條件.此種新潮與幾何原理之分析,共進同流.直至十九世紀初葉,其出路遂爲非歐幾何之創設.(波耶 Bolyai,,羅巴瑟斯啓 Lobatchewski, 高斯 Gauss, 黎曼 Rieman 諸氏)而此各種幾何之先驅者,則爲義

(註一)　Ettore Bortolotti 之論文,其關於此時期內義大利數學之發達者,大都收集於"Studi e rEcerche sulla Sto ia della Matematica in Italia nei secoli XVI e XVII"書中.(Zanichelli, Bologna, 1928)

大利之教徒薩析里(Saecheri).彼於其著作"Enclidis alsourni nalvo vindicatus"中努力於歐幾里得假定之引證,不意其結果竟成爲各種非歐幾何之順理而初步之最先端倪.最著者柏拉密(Beltrami)以其新義貢獻定曲率曲面之確切解釋.此種創制(其目的已完全達到)之興趣減低以後;在愛明兩氏時空中(Space-time Einstein-Minkowski)受相對論影響之幾何,繼之而起.

韋羅涅塞(Veronese)著作之大半,雖迄晚年,皆努力於幾何原則之修正,彼爲最先將假定列成次第之第一人,亦最先得非阿基米得幾何之例題者,此卽以後復爲希柏特(Hilbert)所得者.在義大利與韋羅涅塞齊名者,尙有柏拉里福替(Burali-Forti)及皮黎,(Pieri)曾設有與韋羅涅塞不同之基本概念.

微數微積分基礎之相似修正,始於玻紮諾(Bolzano)及科犀(Cauchy)至十九世紀之末葉,遂成堅確之理論.此事之完成義大利與有力焉.狄尼(Dini)對於一實變數函數及傅利級數之著作,傳播甚遠.遂認爲造成近代解析學基礎之第一人.亞斯科利(Ascoli)及亞濟拉(Arzelà)(註一)對於曲線系之研究遂得微分方程式及函數方程式之存在定理之堅强基礎.皮諾(Peano)及其學派中之瓦拉替(Vailati)發卡(Vacca)柏拉里福替,皮黎,及帕多(Padoa)得有算術原則之舊公式.

(註一) Arzela 曾引用函數之法線族之概念,後爲 Montel 所重發現者.

而最有價值者,則符號邏輯之創作也.

於解析學之新潮澎湃中有功者,爲韋他利(Vitali),而其基本之結果,今已視爲舊物矣.於非連續函數之積分問題之最近貢獻爲東納立(Tonelli)及卡奇波立(Caccippoli).彼曾用皮科湼所得極限之新概念也.(註一)

由舊作之抽引而獲得存在條件之決定及所產生之通常微分方程式求積之惟一性,則歸之於瓦爾得拉,(Volterra)皮諾(其方法近來復爲佩綸(Perron)所得而擴充之於偏微分方程式)亞濟拉,尼可勒替(Nicolletti)及其他;於某一間隙內解答是否有惟一性,李希茲(Lipschitz)之答案,只假定一條件,似太嫌窄狹.最近余有兩微分方程式間之求積式之比較通則,由此可推出奧茲谷(Osgood)及塔茂金(Tamarkine)之惟一性之定理.唐理立,佩綸復以其他方法爲此定理之引證.近代於此範圍內之研究,皆屬於皮科湼學派.其幼年門人辛美諾(Cimmino),柯琉西(Coluscci)及更幼者史可紮,及卡奇波利,皆極力擴充其知識於此範圍者.卡奇波利用極簡單之函數空間之位置幾何學之討論以創立函數方程式中範圍廣寬之惟一性與存在性之定理.雖此爲貝克和夫(Birkhoff)及刻羅格(Kellogg)所曾引用之概念,而彼固未之知也.

(註一)　參看其著作"Lezioni di Analisi Infinitesimale"(一九二三年Circolo Matematico di Catania, Catania出版)書中收有舊理論之新說.

十九世紀初葉最著名之傑作,厥爲由托利諾 (Torino) 而成之拉格牢査(Lagraugia) 解析力學.彼以其原理熔成應用力學中廣博無涯之著作,僅此範圍內之結果,卽限於義大利者亦難述其梗概.(註一) 今僅述利未,奇徽塔 (Levi-Civita) 之硏究及其三學派畢斯康西尼(Bisconcini)辛諾立尼 (Signorini) 亞美里尼 (Armellini) 三物體間題之硏究,遂爲孫德孟(Sundmann)結果之基礎.古力學亦屬於增減不定之變質物體運動之問題.利未,奇徽塔用效果之獨立性與統計迷向性兩自然假定之基礎以爲引證,以爲古方學之原理之應用並不能導出蘭格倫方程式(質量乘加速等於力)而能導出運動量之定理. (運動質量變動速度等於運動量). 其對於特種相對論仍然真確.利未,奇徽塔之結論,由其門人佛郎西紐 (Vranceanu)應用於兩個變質物體問題.此問題亞美里尼亦曾用高等解析法以硏究之.利未,奇徽塔復以斷熱性之假定 (亞美里尼之解答不須此) 以硏究之,並於天文學上爲極重要之應用.復能指示在旋轉物體時極小能力之條件.此卽利未,奇徽塔所發展之略徽爾 (Liouville) 微分系統之斷熱不變式理論.此中已有季布 (Gibb) 赫芝(Hertz)及步革士(Burgers)定理之初步.吉伯 (Geppert) 於利未,奇徽塔指導之下擴充斷熱不變式之理論於更普通之微分系統.

(註一) Levi-Civita 及 Amaldi 關於解析力學最豐富之著作,已由 Casa Zanichelli, Bologna 出版.

於古代解析力學範圍內之貢獻乃谷吉諾(Gugino)彼曾於物質系統(無阻力之限制,又與時間無關)引一新量於動力學之效果,並於一系統之自然運動與其他適合同一條件之可能運動相較而得動力學之效果爲極大,以爲事實之例證.

於應用數學問題柏提(Betti)(註一)有精强之貢獻.彼之著名對極定理影響於博學深思於彈性者;如柏拉密,狄尼,俾安歧(Bianchi)亞濟拉,勞里西(Lauricella)塞露梯(Cerruti)孫米格力納(Somigliana)馬可蘭哥(Marcolango)鐵多涅(Tedone)巴咖替(Burgatti)亞耳曼西(Almansi)波喬(Boggio)皆是也.瓦爾得拉更以論著推廣黎曼方法於彈性之顫動物件,瓦爾得拉又創有彈性互結物體之折撓理論.[特拉巴奇(Trabacchi)與柯賓諾(Corbino)曾以實驗證明此理論之結果]此種研究工作中堪足稱者,有瓦爾得拉之內部循環運動,亞耳曼西之沙之平衡,辛諾立尼之增堅凝土.

對於應用數學,利未,奇微塔復於波動學有著名之論文,與研究平面水動力學者以新影響.(引用解析函數)西索替,(Cisotti)辛諾立尼,柯倫涅替(Colonnetti)芬戚(Finzi)匹斯托勒西(Pistolesi)馬索替(Masotti)及其他人亦參與之.直形管中不變式之進波之 Airy 問題與吉伯之圓形管之擴充理論,(須待證實)馬索替於非平面地層中所成完備液體之運動

(註一) Betti 爲位置解析學始祖之一,引用"Betti 數"實始於彼.

之研究,以及勒利之白諾利(Bernorelli of Lelli)勻和黏質液體定理之擴充.利未,裔徽塔皆有精強之解答.

尙有須簡略敍述之諸氏,則有喬基 (Giorgi) 及馬基之於其原理之解析學;亞美里尼,及巴咖替之於行星分佈定律,馬可蘭哥,波喬,及柏拉里福替引用向量解析之符號爲各種應用中之最合理而最方便者,此卽義大利人對於應用數學與解析力學之貢獻之大概也.(註一)

於經濟現象之研究中發現與古代力學相似之方程式.統計此現象之創始者乃由 Genoa 而至之帕累托 (Pareto). 其著作流傳於義大利.又由亞摩羅梭(Amoroso)及史可紮推廣至動力學.

應用數學上之問題與幾何學相同,於最先之起始,卽引起偏微分方程式與解析函數之研究.實則凡前所述之各種研究皆可認爲對於此類之貢獻.戴狄利勒之著名問題引起微分方程式,在所與有界條件之下,其惟一性與存在性之最重要之點.黎曼自信已解決此問題.但多數之批評,證其方法不能完備,牛滿 (Newmann) 士發次 (Schwarz) 及傍卡勒(Poincaré)各用他法以解此題.但最先與黎曼概念以强固之基礎者乃亞濟拉.(一八九七年)此種嘗試經過本世紀希柏特,利未 (B. Levi) 佛賓尼 (Fubini) 雷柏士革 (Lebesgue) 紮棱巴 (Zaremba) 諸人之著述,始克成功.佛賓尼減縮數序

(註一) 可參考"Analisi Vettoriale"論文,(Zanichelli, Bologna 出版)

之方法最近始由庫藍特(Courant)及格丁根學派所採用.

二級微分方程式之存在問題及與積分方程式及積微分方程式之關係.尼可勒替,塞非利尼 (Severini), 利未,皮科湼,曼馬那,辛美諾及特里可米(Tricomi)諸氏均有著述,而皮科湼之基本恆等式能應用於其他問題.鮑瑟(Bôcher)稱之爲皮科湼恆等式.特里可米亦曾考察積分式之性質及在拋物線內不定係數之二次方程式解答之惟一性之條件.

此問題不僅其結果有用,物理學家及工藝學家更須用其解答之數值計算.因此皮科湼及其門人所研究之結果,頗足稱述之.如拋出物抖擻運動之有理公式(大氣壓力之物理條件與動力條件之變動,及地球之轉動與曲度等,皆須計及)橢圓型及拋物型之二級一次方程式及數理物理中高於二次之方程式,其解答所成立之主值公式(對於用以決定一解答之有界條件有顯著之效果)以及上述諸方程式近以解答中錯誤之計算,而此計算之成立,實賴於其解答及導來式之示性數及示效數之近似値之知識.

由此遂發生示性數定値之重要問題.皮科湼在那不勒斯時,曾發表其新得有效之方法.

在二變數之調和函數理論中,皮科湼有牛滿問題中之任意有關領域之存在定理.且皮科湼及亞斯科利對於此函數之異點之研究,亦有貢獻.

前所論者皆關於實變數函數之研究.今再論函數式微

積分.但欲知歷史之發展須先述及解析函數論.

與魏士特氏(Weierstrass)及密塔勒福勒(Mittag-Leffler)之著作有密切關係者,有品瑟勒(Pincherle)之著名研究.但柏提於魏士特氏未得其普通定理之前,已有無窮積中整函數之展開式.摩勒拉(Morera)對於著名之科厔定理之轉變及卡索拉替(Casorati)對於本性異點之最先定質定理,尙在皮伽,蘭都(Picard-Landau)定理之先也.韋凡替(Vivanti)定理對於無負係數之級數之聚性圓周上異點之決定法,即其中之一種.繼之以弗拉孟(Phragmen)林德洛夫(Lindelöf)孟德卜羅(Mandelbrojt)之研究,以迄輓近義大利少年明涅替(Minetti)爲.

對於解析函數中各類之理論,如橢圓函數,亞伯爾函數,模數函數,自形函數等,則有卡索拉替,布里士奇(Brioschi)巴斯噶(Pascal)稻徵帶(D'ovidio)俾安歧,品瑟勒,佛賓尼,恩里魁(Enriques),塞非利(Severi),波涅拉(Bognera),德弗郎歧(De Franchès),史可紫,柯美薩替(Comessatti)羅薩替(Rosati)及西判品納托(Spampinato)等之貢獻.視代數函數爲解析函數之理論而以幾何爲觀點在義大利尤爲盛行.以後將論及之.

對於多個複變數之解析函數之研究,雖有魏士特氏,傍卡勒,奧茲谷,及卡拉帖多黎(Carathéodory)各人之重要結果,仍只爲發端而已.其重要之論文,則有利未對於此函數之界限之種類之研究.利未,奇徵塔對於單徵商方程式特徵

曲面之研究,及輓近塞非利之研究.

義大利對於解析學之分支所謂函數式微積分者,有極大之貢獻.品瑟勒創作分配演算之微積分,近日謂之直線函數式者,於其著作中可見其理論中所採用之概念及名辭.(註一)喬基特發展赫微賽地 (Heaviside) 之符號微積分,並於動電學之問題,有重要之應用;其貢獻發表於托現托 (Toronto) 數學會中.(一九二四年)

但以函數式微積分爲解析學之創造的分枝,起於瓦爾得拉之著作.於物理學之問題中,彼所引出之函數觀念,不僅賴一個或多個參數之值,並有賴於其他函數.以幾何學名辭言之,卽不只於一點或多點之函數,但爲直線,曲面等之函數.故最近以函數式爲代表直線函數之稱.

瓦爾得拉於此中著述之精詳及其門人(丕勒,雷維 P. Lévy, 范塔四 Fantappiè) 之詮釋,此處不能具論.然足資紀述者,有積分方程式及積微分方程式含有函數方程式之重要種類,皆與瓦爾得拉,佛勒德和 (Fredholm) 希柏特,皮伽,諸人有關.又有穆爾 (E.N. Moore) 及弗勒歧 (Fréchet) 於普通解析學之更普遍之研究.總之當今數學之著作受瓦爾得拉之影響者,實難以枚舉也.

此種具有普遍性及抽象性之研究於數理經濟學上及

(註一) 參看 Pincherle and Amaldi 之 "Le operazioni distributive" (Zanichelli, Bologna)

其所從出之物理學範圍內得有具體之應用.瓦爾得拉有遺傳現象之數理論,謂一系統之現今形象並不賴於現今之環境而賴於已往之歷史.

最近瓦爾得拉以能力之解釋爲其遺傳現象理論之例證.謂使一系統之一形象變至他形象所須外力之工作恆大於此系統之現今形象所賴之某函數式之演變;而所耗之工作可以一系統回至初形時之外力計算之.(註一)

於此點瓦爾得拉最近復發表其對於數理生物學之研究.其結果已爲海洋中之搜集所證實.(註二)

他方面之例證.如積分方程式及積微分方程式顯有實用上之最大可能.如其門人伊文思(Evans)及羅士(Roos)首以此法加於專利制度中之經濟現象之研究.又如卡推利(F. P. Cantelli)用之於確率微積分學及數理統計學之各種問題.關於概率微積分之宏論厥爲卡斯特琉諾.(Casteluno)(註三)彼於其基本之修正,有嚴密批評之貢獻也.

瓦爾得拉對於函數式之研究.大概關於實域者.而品瑟勒之分配演算,則擴充至複域.最近數年范塔匹專事研究函數式之分類.以爲解析函數式即包含品瑟勒一次範形爲其特例,並即相似於解析函數複變數之引用使此類函

(註一) 參看 Atti del Congesso Internazionale dei Matematici a Bologna, 1928.

(註二) 參看 "Scientia" 中之一節.(Bologna Zanichelli,1926).

(註三) 參看第二版兩册.(Zanichelli, Bologna)

數式之性質成為整個的調和.范塔匹以為必能得一關係此類函數式之理論與解析函數之理論相連絡.遂得相似於科犀之定理及其級數之展開式,較瓦爾得拉及弗勒歧者更普遍.又研究此類函數式之多道式(Polydromy)

最後喬基及范塔匹領悟函數式解析學及波動力學之關係.

解析學之又一分枝為關於函數式微積分之問題.變分學是也.其最先之通論起於蘭格倫.於第一論文發表後,不久瓦爾得拉創立變分學有關於函數式解析學之說.實則函數之極大極小問題相當於函數式之極大極小問題卽含有變分學之理論.瓦爾得拉所用之概念,亞濟拉復採用之,但未能成其全功,實因以變分學所代表之函數式之自身大半非連續者.而亞濟拉之門人東納立及品慈勒則克竟全功.東納立之方法全賴於此類函數式之半連續性,卽相似於貝累(Baire)所用之半連續函數之概念.

變分學問題之研究,舊說有關於歐拉(Euler)之微分方程式,東納立之理論則不關於微分方程式論,而極端性之存在能適合已知之條件為極端存在之結果已有直接之引證.(註一)

關於蘭格倫之舊說之貢獻,則有利末,彼以為一個極處之充分條件不賴於極端性之任何領域之認識,又於魏士

(註一) L. Tonelli, "Fundamenti di Calcolo delle Varizioni"(Zanichelli, Bologna.)

特氏對於二重積分之極處必要條件,得有簡單之證明;巴能哥(Burnengo)則等周問題之相似結果.皮科涅得其勒戎德(Legendre)及雅科俾(Jacobi)條件之新證法亦可應用於變分學之二變數者,及第三變分之新式.

關於變分學問題中多度因次者,東納立之研究有曲面之面積,絕對連續及有界變分之兩實變數函數之概念.此概念與韋他利,及雷柏士革所述者不同.此概念可於雙重傅利級數理論中顯有效用,因於其聚性及均一聚性,東納立均有更簡之準則也.(註一)

最後卡奇波立,拿里(Nalli)及安累力(Andreoli)引用有界變分時 n 個變數函數之 n 重之新概念,及史泰哲 (Stieltjes) 之多重積分此重要不僅於前述之問題,更爲多個複變數函數之積分之定義也,對于有界變分多個變數函數之概念之擴充,卡奇波立最近有賴於任意個函數以任何次之多個直線函數式之簡單解析代表法而成功,(即弗勒歧所討論之雙直線函數式之問題).

德國幾何學家曾謂義大利爲幾何學之祖國矣.今且一視其幾何學之發展.

十九世紀之初,法國逢塞勒(Poncelet 一八二一年)射影幾何學之著作實由於意大利藝術家立納西門托 (Rinascermento) 透視規則之探索而成.

(註一) 參看其所著之 Fourier's series (Zanichelli, Bologna.)

法德英諸國於此類幾何之猛進,在義大利遂有格里摩拿(Livgi Cremona)之優秀以集大成.

而於歐州之其他各國,則此思潮不振,探討無成.義大利則分為精強之兩派.一為泛空射影幾何,一為雙有理幾何卽格里摩拿變形法.

射影幾何者乃對於一次變形羣之代數方式之不變式理論之綜合法也.對此理論之貢獻則有裴立,(Belli)柏拉密,稻徵帶,俾安歧,卡珀力(Capelli)塞波地(Serboddi).專用綜合法則有柏丁尼(Bertini)得佩佐(Del Pezzo)西格里(Segre)柏佐蘭尼(Berzolani)卡斯特琉諾,恩里魁,塞非利,史可紮,柯美薩替,羅薩替及其他人.諸氏研究之結果或有搜集於柏丁尼所著泛空射影論概要"Introduction to the projective theory of hyperspaces"書中.最近已有德文杜徵克(Duschek)之譯本出版,此派之幾何學將於微分範圍內論之.

格里摩拿創立其變形法之基礎,相當於高等曲線及直線(並非如射影幾何之直線)此變形法復成為研究代數曲線或曲面之幾何解析之新工具.

射影意義與格里摩拿意義之熔合,遂成燦爛之結果.可於西格里及卡斯特琉諾書中見之.彼將對於雙有理幾何為不變式之性質轉變為泛空型之射影性質.如此則射影幾何有更廣之領域與更闊之含義矣.

黎曼對於亞伯爾積分之研究.布理爾(Brill)及諾忒(Noether)轉變至代數範圍,在義大利特成優異之基礎與考察之新法.柏丁尼,西格里,卡斯特琉諾,恩里魁,及塞非利之著作中,凡二變數有理函數之理論之有關於代數方程式者,即有關於代數曲線之幾何者,至此已臻完善矣.至於代數曲線間之代數的相應理論及代數學,與解析學之多層關係,其顯著主要之貢獻,則有史可紫,羅薩替,托累力(Torelli)及最近之柯美薩替及契西尼.(Chisini)

意大利學派所習見之幾何方法,成效有據.當一八九〇年左右卡斯特琉諾及恩里魁始研究代數曲面之嶄新領域,即謂三變數之有理函數論與代數方程式之關係.(註一)於其研究之初,發現驚人之結果.當彼擴充曲線分類之定義於曲面時對於曲面之雙有理變形法下為不變式,發現兩種不同之數:即幾何類及算術類,此二類彼此各不相同,於是曲面亦有兩種不同之區別,有定則曲面(兩類相等)及無定則曲面(兩類不等).此兩種對於其所含之代數曲線之連續系統有顯明互異之性質.

同時法國皮伽及洪伯特(Humbert)將黎曼為代數曲線所創立之亞伯爾積分理論擴充至於曲面.而與第二種簡單互異之亞伯爾積分之數與曲面無定則性(即兩類不等者)有關,其確定之結果,悉由於卡斯特琉諾及塞非利在此

(註一)　參看一九二八年 Atti del Con,resso Internazionale dei Matematici a Bologna 第一冊,G. Castelnuovo 之報告.

時期內研究之結論.

塞非利又創立曲面上代數曲線之基本理論.顯明組成此基本代數曲線之數與第三種積分理論中皮伽所引用之不變數完全相同.柯美薩替及亞爾本尼士(Albanese)則有貢獻於多度因次之疊形之基本理論.

今再論微分幾何學.

定量微分幾何學在最初卽與曼尼地(Maniardi)及柯達濟(Codazzi)有關,彼創有高斯理論及柏拉密理論之基本方程式並有物理上之應用.

在義大利此派數學之著名代表者俾安歧.其影響廣佈於國內,並以其名著傳播於國外.(註一) 俾安歧及其門人(註二)(利末,佛賓尼,皮科湼,卡拉索 Calapso)之貢獻廣博無涯,難以彙述.姑舉數種;則有假球形曲面變形法之理論;及其著名之排列定理;曲面之漸近變形法及二次曲面變形法之理論.此僅其炫耀結果中之小部份而已.

對於黎曼幾何李奇(Ricci)有新穎有力之動機至相對論創立後,始完全顯著其價值,而其算法之發展,則以絕對微分學或李奇微積分之名而益著.此方法有時謂之"相對論之數學."李奇,利末,奇微塔,亞馬地(Amadi)帕拉丁尼(Palatini)諸人常用之於昔日力學及相對論之力學中,

(註一) "Lezioni di Geometria Differenziale" 第三版(Zanichelli, Bologna.)

(註二) 參看 Annali di Matematica (1928—29) 中 G. Fubini 及 Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (1930) 中 O. Scorza 之報告.

對於黎曼空間幾何之重要貢獻爲一九一七年利未,奇微塔所用平行移位之概念.此概念之內容與結果,於義大利國內則由波托羅提 (Erea Bortolotti) 及余二人爲之顯明;於國外者則由叔騰,(Schouten) 歲爾,(Weyl) 厄丁頓,(Eddington) 卡坦,(Cartan) 衛騰澤 (Wirtengar) 白瓦得 (Berwald) 諸人.在美國領導者則爲艾森哈 (Eisenhart) 及威布倫 (Veblen) 二人.

於定量微分幾何學之評論中,於高斯及黎曼之詮義,余及韋他利分兩方敍述之.余專論泛空內曲面之變形法(或稱疊形)此空間內不僅含有預定級之一次元素,且有曲線之曲率,此種高度空間之變形法理論,卽爲偶數級微分式系之不變式性質.韋他利擴充李奇微積分,能創立與黎曼相似之幾何以應用於無限度因次之定量空間,卽希柏特空間.(註一)

於上世紀之後十年及此世級之前數年,微分幾何有一新發展,爲數學之主要部份,卽射影微分幾何學是也.

泛空內微分性質,當代及已往之發展,旣如上述.而於一九〇一年及一九一〇間威爾戚斯克(Wilczynski)於尋常空間內(註二)內得有曲線及曲面之微分幾何之對稱理論.此爲余必先敍及者也.

以射影羣用微分方程式以成代表曲線之概念,則由於

(註一) 參看其著作"Geometria degli-spazi hilbertiani" (Zanichelli, Bologna).

(註一) 或云三度射影空間 S_3.

哈爾胼(Halphen)(由佐拉利 Berzolari 擴充至泛空內)威爾戚斯克於尋常空間內用代表其上漸近曲線能存在之兩偏微分方程式,(其普通積式賴於任意常數與哈爾胼者同)以爲曲線之射影表示法.

佛賓尼於一九一五年起再以不變微分或(兩個二次一個三次)從事於尋常空間內射影微分幾何之研究.此方法之優點有二.第一,如此可得對於前所述羣(或對於佛賓尼所發明之射影適用性之更普遍之羣)爲不變式之曲面表示法.第二可利用李奇微積分之用處,故能得曲面之不變式,協變式,逆變式之推演.

佛賓尼形式之原式甚爲煩雜.余已顯明如何由威爾戚斯克方程式(此方程式表一著名初等事件)以推廣出佛賓尼形式.余並將此直至如今未加解釋之形式,述以幾何之意義.

若求以尋常易知之範圍內,得一新概念以表示近數年發明之新量之概念非不可能之事也.佛賓尼及栖喜(Cech)(註一)之論文內頗述有此理論.余今不須多贅矣.

泛空之射影微分幾何因是而探討益深,領域益廣.第一步之研究爲得佩佐.約於一八八六年遂以綜合法深究泛空內曲面上或疊形上.(高於一次之點者)之鄰位之性質.彼復由此於代數領域內得顯著之效果.而由一九〇六年

(註一)　"Lezioni di Geometria Proiettiva Disferenziale" (Zanichelli, Bologna.)

至一九一〇年當西格里以適當之解析表示法,從事於一次空間所生之疊形及以其點爲拉普拉斯(Laplace)方程式之座標解答之曲面之研究時,早已不記及此研究矣.

於此新領域內余與武拉西尼(Terracini)着手工作,無事得知,而無事不知.於前十五年之研究武拉西尼(註一)得有精確之完成.余卽不述此特例之結果.然於余則以爲別辨前述之研究與新潮之特性爲重要之事.

在尋常空間內曲面之研究中,漸近曲線之二重系統占最高位置.實則此二重系統之曲面必須屬於三度空間:此卽威爾威斯克之普遍方程式何以僅賴於任意常數也.

若擴充泛空內曲面或疊形之討論,則必須求此曲面上由射影性所定之曲線系其存在可定此曲面所屬空間之因次性.因此余引用類似漸近曲線,此曲線乃由曲線之擺性空間(r級)與曲面(在尋常漸近線,S=1, r=2)之擺性空間(S級)之交線之適當條件而定.此卽在任何有限度空間內構成曲面之普通理論之幾何的最初步驟.由此條件之解析式得此曲面適合之微分方程式.其積分條件之推算,協變式及不變式皆自然之事.尙有更佳者,如所引用(如余所已指出之S_5中之曲面)之不變式能得曲面之不變式表示法,並能應用李奇微積分.又一步驟則須用幾何巧技爲此種不變式之幾何解釋也.

(註一) 參看Fubini及Cech之論文附錄三.

由此問題之敍述,上所論列可引出一次偏微分方程式系而其普通積分式僅類於數個任意常數.(其個數由曲面所屬空間之因次性而決定)

然於論及偏微分方程式之問題,並非必須決定因次性,反之,於某種問題中並須於未知數中消去之.其實欲使拉普拉斯方程式能以四元論求積分,則余所得消去因次性之結果爲幾何方面之充要條件.至達波(Darboux)所提出之問題與古爾薩(Goursat)之結果有衝突.至今尙待解決也.

由此可得此種幾何之最普遍而豐富之觀念,並不須以兩變數之一次偏微分方程式系之特種解答羣,而此方程式之普遍積分,或則賴於任意常數如表示曲面焉.任何組之函數(其數或有限或無限)或能適合或不能適合之微分方程式系,其普通積分式仍可賴於任意函數者,皆代表曲面之點.而空間之因次性(亦可非爲有限者)反無甚重要,(若已知方程式系內並未定出)反而言之,空間因次性之含有曲面之點之各級鄰位者,余謂之擺性空間.則又甚爲重要.且於此空間內(恆爲有限因次性而不須在隣境內)射影幾何學亦能成立.故可直達到一次偏微分方程式(並非其特種範式或某種解答)之射影幾何學及更普遍之任何組之一次獨立函數.

此種曲面(或疊形)雖如此普遍而能得點與點之對應理論.如余於一九二八年在波倫亞萬國數學會中曾報告其

大綱.又能得途徑幾何學及射影之平行移位理論之作圖意義.余於美國諸大學中亦曾有此講演也.

討論至此,可告結束矣.此篇雖嫌沉長,然對此廣大論題,反覺簡略.但望讀者諸君能於此拙筆澀語之間,得知義大利國正從事於人類智識之進步,爲世界之真能攜手共進者,則幸甚矣.

譯者附識:

本篇中之譯名悉依科學名詞審查會之算學名詞表,其表中未載者,則參酌含義,暫譯今名,失當之處,祈讀者教之.

此文原文載美國數學聯合會主編之美國數學月刊(The American Mathematical Monthly)一九三一年二月號.

篇中之括弧,亦皆依原文所註.

曲線之特殊性

曾 琙 益

1. 在原點之特殊性(Singularities).

普通 n 次曲線之卡氏坐標方程式爲

$$\begin{aligned}
&a_0\\
&+b_1x+c_1y\\
&+d_2x^2+e_2xy+f_2y^2\\
&+g_3x^3+h_3x^2y+i_3xy^2+j_3y^3\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+p_nx^n+q_nx^{n-1}y+\cdots\cdots+s_nxy^{n-1}+t_ny^n=o \qquad (1)
\end{aligned}$$

亦可書爲

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_r+\cdots\cdots+u_n=o \qquad (2)$$

式中 u_0 爲常數,u_r 爲 x 與 y 之二元 r 次方式.

若用極坐標法,以 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ 代入之,又可書爲

$$\begin{aligned}
&a_0\\
&+\rho(b_1\cos\theta+c_1\sin\theta)\\
&+\rho^2(d_2\cos^2\theta+e_2\cos\theta\sin\theta+f_2\sin^2\theta)\\
&+\rho^3(g_3\cos^3\theta+h_3\cos^2\theta\sin\theta+i_3\cos\theta\sin^2\theta+j_3\sin^3\theta)\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\rho^n(p_n\cos^n\theta+q_n\cos^{n-1}\theta\sin\theta+\cdots\cdots+t_n\sin^n\theta)=o \qquad (3)
\end{aligned}$$

i. 當(1)中 $a_o = o$, 卽(2)變爲 $u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n = o$ 時,則曲線必通過原點.

而 $b_1 \cos\theta + c_1 \sin\theta = o$, 卽 $b_1 x + c_1 y = o$, 亦卽 $u_1 = o$, 爲在原點之切線.

於此,若 $b_1 = o$, 則軸 x 爲切線.若 $c_1 = o$, 則軸 y 爲切線.

ii. 當(1)中 $a_o = b_1 = c_1 = o$, 卽(2)變爲 $u_2 + u_3 + \cdots + u_n = o$ 時,則曲線在原點必相交,該點名曰重點(Double point, Point double, Doppelpunkt),意謂有兩點相重疊於該處也.

而 $d_2 \cos^2\theta + e_2 \cos\theta \sin\theta + f_2 \sin^2\theta = o$, 卽 $d_2 x^2 + e x y + f_2 y^2 = o$, 亦卽 $u_2 = o$, 爲在重點之兩個切線.

若(2)變爲 $x y + u_3 + u_4 + \cdots + u_n = o$, 則原點爲結點 (Node, Crunode, Noeud, Knoten), 兩軸 x 及 y 爲在結點之兩個切線,名曰結切線(Nodal tangents).

若(2)變爲 $(b_1 x + c_1 y)^2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n = o$, 則原點爲尖點 Cusp, Spinode, Stationary point, Point de rebroussement, Spitze, Rückkehrpunkt), 而 $b_1 x + c_1 y = o$ 爲尖切線 (Cuspidal tangent).但若(2)變爲 $x^2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n = o$, 則原點爲尖點,而軸 y 爲尖切線.若(2)變爲 $y^2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n = o$, 則原點爲尖點,而軸 x 爲尖切線.

若(2)變爲 $u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_n = o$, 其中之 u_2 僅能劈爲兩個一次虛因子時則原點爲虛結點(Acnode), 亦曰孤點(Isolated point, Point isolé, Isolierter punkt),又此點可視爲兩個虛曲線相

交之惟一實點,故亦名相配點(Conjugate point).

iii. 當(1)中 $b_1\cos\theta + c_1\sin\theta$ 爲 $d_2\cos^2\theta + e_2\cos\theta\sin\theta + f_2\sin^2\theta$ 之因子,或曰 $b_1x + c_1y$ 爲 $d_2x^2 + e_2xy + f_2y^2$ 之因子,亦卽(2)變爲 $u_1 + vu_1 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n = o$ 時,則曲線在原點有三點相疊合,名曰彎點(Point of inflexion, Point d'inflexion, Wendepunkt),亦曰反曲點(Point of contrary flexure).

而 $b_1\cos\theta + c_1\sin\theta = o$, 卽 $b_1x + c_1y = o$, 亦卽 $u_1 = o$, 爲在彎點之切線,名曰彎切線(Inflexional tangent),亦曰逗留切線(Stationary tangent),又曰三點相切之切線(Tangent of three-point contact).

iv. 當(1)中 $b_1\cos\theta + c_1\sin\theta$ 爲 $d_2\cos^2\theta + e_2\cos\theta\sin\theta + f_2\sin^2\theta$ 之因子,亦爲 $g_3\cos^3\theta + h_3\cos^2\theta\sin\theta + i_3\cos\theta\sin^2\theta + j_3\sin^3\theta$ 之因子,或曰 $b_1x + c_1y$ 爲 $d_2x^2 + e_2xy + f_2y^2$ 及 $g_3x^3 + h_3x^2y + i_3xy^2 + j_3y^3$ 之因子,亦卽(2)變爲 $u_1 + vu_1 + wu_1 + u_4 + u_5 + \cdots + u_n = o$ 時,則曲線在原點有四點相疊合,名曰波重點(Point of undulation, Point d'ondulation, Undulationspunkt).

而 $b_1\cos\theta + c_1\sin\theta = o$, 卽 $b_1x + c_1y = o$, 爲在波重點之切線,亦曰四點相切之切線(Tangent of four-point contact).

V. 當(1)中 $a_0 = b_1 = c_1 = d_2 = e_2 = f_2 = o$, 卽(2)變爲 $u_3 + u_4 + \cdots + u_n = o$, 亦卽曲線方程式最低項之次數爲三時,則曲線在原點有三支通過之,名曰三重點(Triple point, Point triple, Dreifacher punkt).

而三次項 $g_3\cos^3\theta + h_3\cos^2\theta\sin\theta + i_3\cos\theta\sin^2\theta + j_3\sin^3\theta = o$, 卽 $g_3x^3 +$

$h_3x^2y+i_3xy^2+i_3y^3=o$ 爲在三重點之三個切線.

vi. 當曲線方程式中最低項之次數爲 k, 即(2)變爲 $u_k+u_{k+1}+\cdots+u_n=o$ 時,則曲線在原點有 k 支通過之,名曰 k 重點 (Multiple point of order k, Point multiple, Mehrfacher punkt). 而令 k 次項等於零,即 $u_k=o$ 時,則爲在 k 重點之 k 個切線.

但一個 k 重點,可視爲 $\frac{1}{2}k(k-1)$ 個重點之結合.因取一曲線含有 k 支,設不通過一公共點時,則各兩支相交均成重點,而 k 支互相交時,共成 $\frac{1}{2}k(k-1)$ 個重點,若當 k 支通過同一公共之點時,則所有之重點均相疊合,而變爲一個 k 重點.

2. 相切之階數 (Order, Order, Ordnung).

兩曲線彼此相交於 $r+1$ 個疊合點,謂之 $r+1$ 點之相切,亦曰 r 階之相切.

因是通過重點之任意直線,在重點有一階之相切,在重點之切線,有二階之相切.通過三重點之任意直線,在三重點有二階之相切,在三重點之切線,有三階之相切.通過 k 重點之任意直線有 $k-1$ 階之相切,在 k 重點之切線有 k 階之相切.又在彎點之切線有二階之相切.在波重點之切線有三階之相切.

又曲線在某點有三點之相切者謂之吻切 (Osculate). 兩曲線在兩相異點有一階之相切者謂之重切(Double contact).

通常謂在曲線上之切線相交於兩個疊合點者,僅對於二次曲線而言.蓋因通過重點之任意直線,皆有一階之相切.而在重點之兩個切線,各爲二階之相切.故謂在曲線上任意點之切點者,應稱爲在該點與曲線有可能相切之階數之直線,方爲正確.

3.　在曲線上一點之性質.

設 n 次曲線之卡氏方程式爲 $f(x, y)=o$,

又設通過已知點 (x_o, y_o) 之直線

$$\frac{x-x_o}{l}=\frac{y-y_o}{m}=\varrho$$

與曲線相交.此時在直線上任意點之坐標爲

$$\begin{cases} x=x_o+l\varrho \\ y=y_o+m\varrho \end{cases}$$

以此式代入原式,乃表示坐標之雙重變換.蓋既將曲線之坐軸平行移動,使通過點 (x_o, y_o),復改變爲極坐標也.

今若此點在原曲線上,則得

$$f(x_o+l\varrho, y_o+m\varrho)=o.$$

此式依戴勞氏定理(Taylor's Theorem)展開之,得

$$f(x_o, y_o)+\varrho\left(l\frac{\partial f}{\partial x_o}+m\frac{\partial f}{\partial y_o}\right)+\frac{\varrho^2}{2!}\left(l^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_o^2}+2lm\frac{\partial^2 f}{\partial x_o\partial y_o}+m^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_o^2}\right)+\cdots\cdots=o$$

即　$$f(x_o, y_o)+\varrho\left(l\frac{\partial}{\partial x_o}+m\frac{\partial}{\partial y_o}\right)f+\frac{\varrho^2}{2!}\left(l\frac{\partial}{\partial y_o}+m\frac{\partial}{\partial y_o}\right)^2 f+\cdots+\frac{\varrho^n}{n!}\left(l\frac{\partial}{\partial x_o}+m\frac{\partial}{\partial y_o}\right)^n f+\cdots=o\cdots(4)$$

式中 $\frac{\partial f}{\partial x_o}$, $\frac{\partial f}{\partial y_o}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_o^2}$ ⋯,謂求得 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ⋯之後而以 $x=x_o$, $y=y_o$ 代入之也.

此式猶如(1),可同樣討論之.

i. 當(4)中 $f(x_0, y_0)=0$ 時,則曲線必通過點 (x_0, y_0). 於此若 $l:m$ 之値,由方程式

$$l\frac{\partial f}{\partial x_0}+m\frac{\partial f}{\partial y_0}=0$$

決定之,則切線之方向可知,

而

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0}+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y_0}=0$$

爲通過點 (x_0, y_0) 之切線.

ii. 當(4)中 $f(x_0, y_0)=\frac{\partial f}{\partial x_0}=\frac{\partial f}{\partial y_0}=0$ 時,則點 (x_0, y_0) 爲在曲線上之重點.

於此若 $l:m$ 之値,由方程式

$$l^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}+2lm\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}+m^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}=0$$

決定之,則通過點 (x_0, y_0) 與曲線相交於三個毘連點之兩直線之方向可知.

而

$$(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}+2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}+(y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}=0$$

爲在重點之兩個切線.

iii. 當(4)中 $f(x_0, y_0)=\frac{\partial f}{\partial x_0}=\frac{\partial f}{\partial y_0}=\frac{\partial f}{\partial x_0^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}=\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}=0$

時,則點 (x_0, y_0) 爲在曲線上之三重點.

而

$$(x-x_o)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x_o^3}+3(x-x_o)^2(y-y_o)\frac{\partial^3 f}{\partial x_o^2\partial y_o}+3(x-x_o)(y-y_o)^2\frac{\partial^3 f}{\partial x_o\partial y_o^2}+(y-y_o)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y_o^3}=o$$

爲在三重點之三個切線.

iv. 當(4)中 $f(x_o, y_o)$ 以至 $r-1$ 階之偏微係數均爲 o 時,則點 (x_o, y_o) 爲在曲線上之 k 重點.

而

$$(x-x_o)^r\frac{\partial^r f}{\partial x_o^r}+r(x-x_o)^{r-1}(y-y_o)\frac{\partial^r f}{\partial x_o^{r-1}\partial y_o}+\cdots+(y-y_o)^r\frac{\partial^r f}{\partial y_o^r}=o$$

爲在 k 重點之 k 個切線.

但若曲線上任一點之坐標爲 (x_o, y_o),將曲線之原點移於此點,則原方程式 $f(x,y)=o$ 變爲 $f(x+x_o, y+y_o)=o$, 而方程式(4)變爲

$$f(x_o, y_o)+\left(x\frac{\partial f}{\partial x_o}+y\frac{\partial f}{\partial y_o}\right)+\frac{1}{2!}\left(x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_o^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x_o\partial y_o}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_o^2}\right)+\cdots\cdots=o \quad\cdots\cdots(5)$$

在此時,

若(5)中 $f(x_o, y_o)=o$ 時,則點 (x_o, y_o) 在曲線之上.而 $x\frac{\partial f}{\partial x_o}+y\frac{\partial f}{\partial y_o}=o$ 爲在該點之切線.

若(5)中 $f(x_o, y_o)=\frac{\partial f}{\partial x_o}=\frac{\partial f}{\partial y_o}=o$ 時,則點 (x_o, y_o) 爲重點.而 $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_o^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x_o\partial y_o}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_o^2}=o$ 爲在重點之兩個切線.

餘類推之.

4. 重點.

設曲線 $f(x,y)=o$ 上一點 (x_o, y_o) 爲重點,則

$$f(x_o, y_o)=\frac{\partial f}{\partial x_o}=\frac{\partial f}{\partial y_o}=o,$$

其在重點兩個切線之方程式爲

$$(x-x_o)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_o^2}+2(x-x_o)(y-y_o)\frac{\partial^2 f}{\partial x_o\partial y_o}+(y-y_o)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_o^2}=o.$$

命 θ 爲兩個切線間之夾角,則

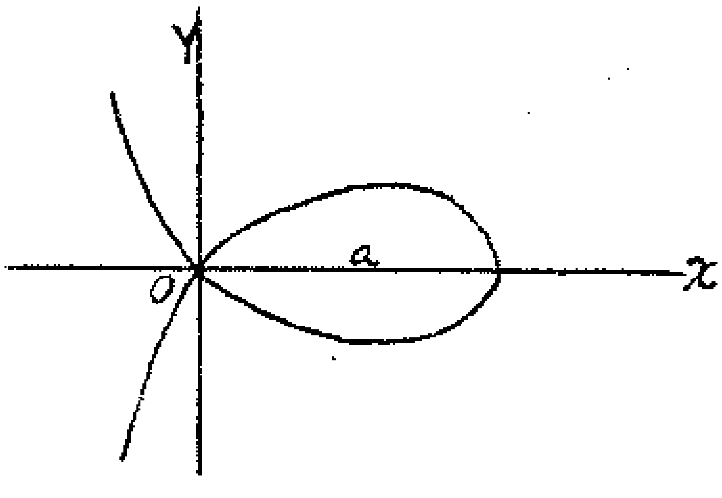
$$\tan\theta=\frac{2\sqrt{\frac{\partial^2 f}{\partial x_o\partial y_o}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_o^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_o^2}}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x_o^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y_o^2}}$$

此式當其分母 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_o^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y_o^2}=o$ 時,則兩切線相交成爲直角.又其分子可依下列三種情形討論之,即

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_o\partial y_o}\gtreqless\frac{\partial^2 f}{\partial x_o^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_o^2}$$

i. 當 $f=\frac{\partial f}{\partial x_o}=\frac{\partial f}{\partial x_o}=o$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_o\partial y_o}>\frac{\partial^2 f}{\partial x_o^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_o^2}$ 時,則曲線通過點 $(x_o\ y_o)$ 有兩實支,而在該點之切線,爲兩實線,各自分離,此時之重點 (x_o, y_o) 謂之結點.

例 1. $a\,y^2=x^2(a-x)$



此曲線當 $x=o$ 及 $x=a$ 時,
則 $y=o$,
若 x 之值爲 $o<x<a$,則 y 有兩個相等而異號之值,
若 $x>a$, 則 y 爲虛數,
故原點爲一個結點.
在原點之兩個切線爲 $x\pm y=o$.

茲依上法討論之.

因 $f(x, y) \equiv a y^2 - a x^2 + x^3 = o$

此時

$$f(x_o, y_o) \equiv f(o, o) = o$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_o} \equiv -2 a x_o + 3 x_o^2 = o$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_o} \equiv 2 a y_o = o$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_o \partial y_o} = o$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_o^2} \equiv -2a + 6x_o = -2a$$

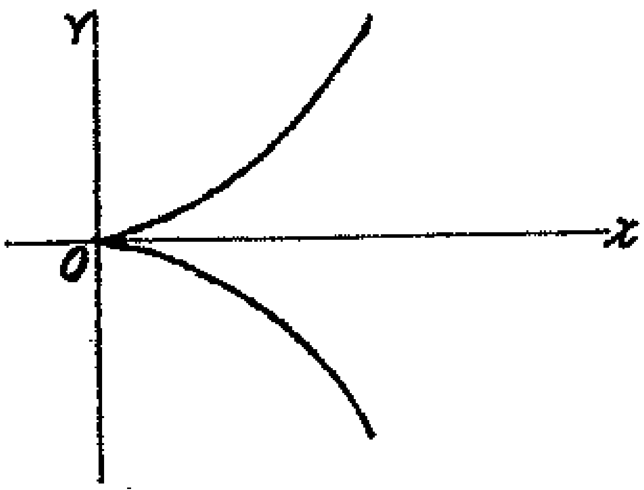
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_o^2} = 2a$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_o \partial y_o} > \frac{\partial^2 f}{\partial x_o^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_o^2}$$

ii. 當 $f = \frac{\partial f}{\partial x_o} = \frac{\partial f}{\partial y_o} = o$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_o \partial y_o} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_o^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y_o^2}$時,則曲線在點$(x_o, y_o)$有兩實支相切.而在該點之切線,爲兩實線互相疊合.此時之重點,謂之尖點.

惟曲線兩支在尖點相切,有時在切線之同側與異側之不同.故尖點可分爲兩類(Species)如下;

I. 曲線之兩支在尖點相切於切線之異側者,謂之第一類尖點,亦曰角尖點(Keratoid cusp)



例 2. $y = x^{\frac{3}{2}} + x^2$

在原點之切線爲軸 x,卽 $y = o$.

當 x 爲負値時,y 爲虛數.但 x 爲正値時,y 有雙値.試將 x^2 項略去,則近於原點處,y 有相等而異號之兩値.

故原點為一個角尖點.

茲依上法討論之.

因 $f(x,y)\equiv y^2-2x^2y-x^3+x^4=o$

此時

$$f(x_o,y_o)\equiv f(o,o)=o$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_o}\equiv -4x_oy_o-3x_o^2+4x_o^3=o$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_o}\equiv 2y_o-2x_o^2=o$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_o\partial y_o}\equiv -4x_o=o$$

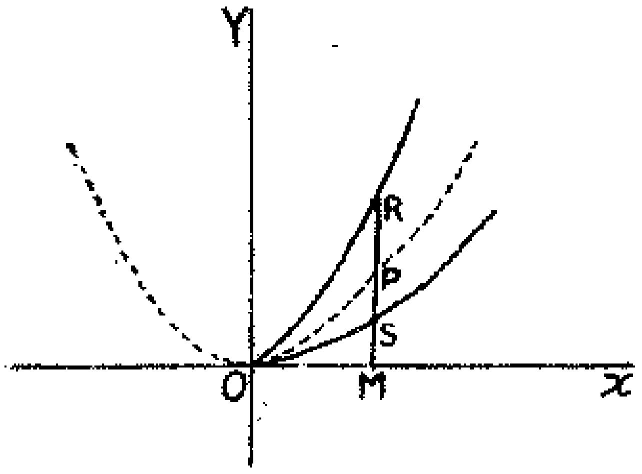
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_o^2}\equiv -4y_o-6x_o+12x_o^2=o$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_o^2}=2$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_o\,\partial y_o}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_o^2}\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_o^2}$$

II. 曲線之兩支,在尖點相切於切線之同側者,謂之第二類尖點,亦曰嘴尖點 (Rhamphoid cusp).

例 3. $y=x^2+x^{\frac{5}{2}}+x^3$.



在原點之切線為軸 x, 卽 $y=o$. 近於原點之曲線為 $y=x^2$ 乃拋物線之一部,如圖中所示虛線 OP. 試取更近似值 $y=x^2\pm x^{\frac{5}{2}}$.令 $OM=x$, 過 M 作 $RM\parallel OY$, 與曲線相交於 R, S. 與拋物線相交於 P. 則

$PR = PS$, 均等於 $x^{\frac{5}{2}}$ 之值.此時 R, S 雖各在拋物線之異側,但均在軸 $o\ x$ 上.蓋因 x 取甚小之値時, $x^2 > x^{\frac{5}{2}}$, 是以 y 恆爲正數.

故原點爲一個嘴尖點.

茲依上法討論之.

因　$f(x, y) \equiv y^2 - 2x^2 y - 2x^3 y + x^4 + x^5 + x^6 = o$

此時

$$f(x_o, y_o) \equiv f(o, o) = o$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_o} \equiv -4x_o y_o - 6x_o^2 y_o + 4x_o^3 + 5x_o^4 + 6x_o^5 = o$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_o} \equiv 2y_o - 2x_o^2 - 2x_o^3 = o$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_o \partial y_o} \equiv -4x_o - 6x_o^2 = o$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_o^2} \equiv -4y_o - 12x_o y_o + 12x_o^2 + 20x_o^3 + 30x_o^4 = o$$

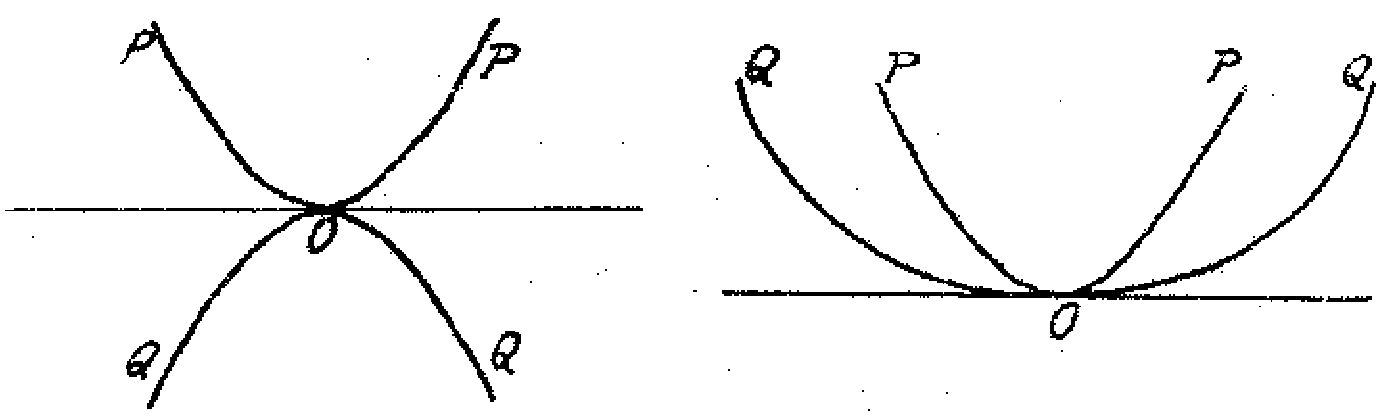
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_o^2} = 2$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_o \partial y_o} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_o^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y_o^2}$$

以上兩類之尖點,統稱曰單尖點 (Single cusp)

但有時曲線在尖點之兩支,不惟向切線之一端伸長,并向兩端伸長,如是所成之尖點,可視爲兩尖點之結合,謂之雙尖點 (Double cusp).然亦可視爲兩結點同切於直線之一點,故亦稱切結點 (Tacnode). 如圖兩結點 A, B 始相分離,當其合併後,則成切結點 T. 又可視爲曲線兩支相吻切於四點,

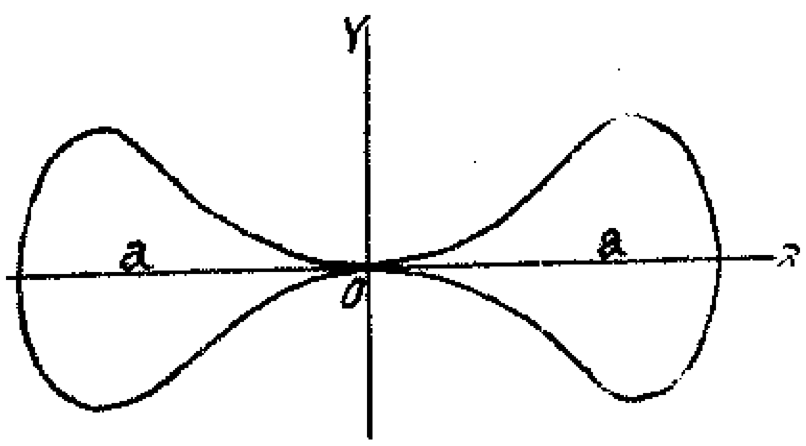
故又稱吻切點(Point of osculation, Osculating point). 如圖曲線兩支P, Q相吻切於吻切點O.實際上,在如此切線上之該點



爲沿曲線上之四個疊合點,卽在各支上均爲二點也.

因在切線上雙尖點兩端之曲線.有時均爲第一類,或均爲第二類.又或一端爲第一類,他端爲第二類.因之雙尖點可分爲兩族(Classes). 凡三種.

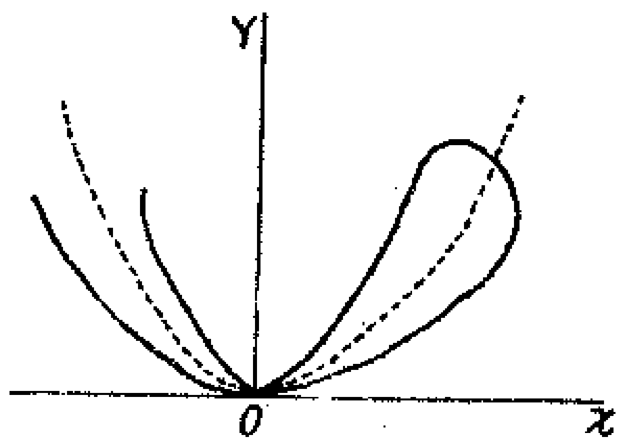
例 4. $a^4y^2 = x^4(a^2 - x^2)$.



此曲線對於軸爲x對稱,在原點之切線爲軸x, 卽$y = o$.
曲線在原點右方之正軸x上爲角尖點.在原點左方之負軸x上亦爲尖角點.

故原點爲兩個第一類尖點之結合,謂之第一種雙尖點.

例 5. $(y-x^2)^2 = x^6 - {}^7$.



由原式得 $y - x^2 = \pm x^3 (1-x)^{\frac{1}{2}}$

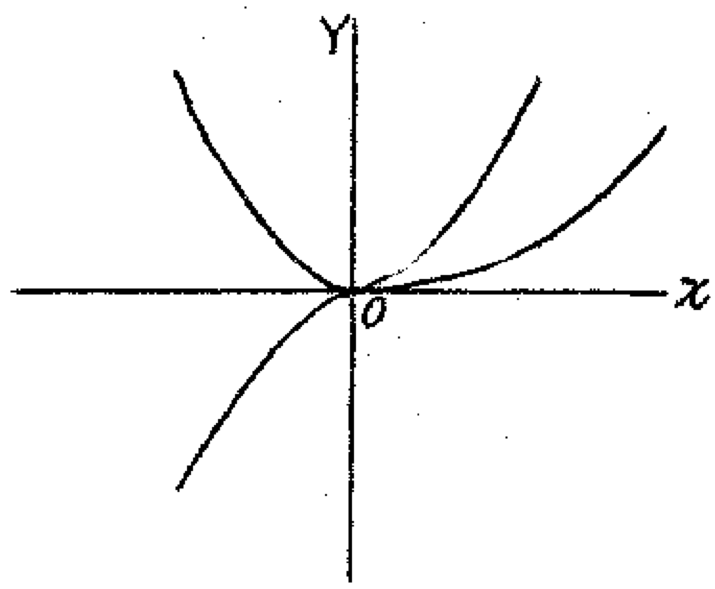
$$= \pm x^3 (1 - \tfrac{1}{2}x + \cdots)$$

在原點之切線爲軸 x,卽 $y=o$.

近於原點之曲線爲拋物線 $y = x^2$, 卽圖中所示之虛線.

試取近似值 $y = x^2 \pm x^3$, 則 x 可爲正數亦可爲負數.此時曲線可在拋物線之異側,但均在軸 $o\ x$ 上.蓋因取甚小之値時, $x^2 > x^3$, 是以 y 恆爲正數.故原點爲兩個第二類尖點之結合,謂之第二種雙尖點.

例 6. $y^2 - x^2 y + x^5 = o$.



由原式得 $y = \dfrac{x^2}{2} \pm \dfrac{x^2}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^2}{2}(1-2x+\cdots)$$

在原點之切線爲軸 x, 卽 $y=o$,

近於原點有二個近似値如下:

卽 $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{2}(1-2x) = x^2 - x^3 \doteq x^2$, 乃表示拋物線,

及 $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^2}{2}(1-2x) = x^3$, 乃表示立方拋物線.

由是曲線在原點右方正軸 x 上爲嘴尖點,在原點左方負

軸 x 上為角尖點.

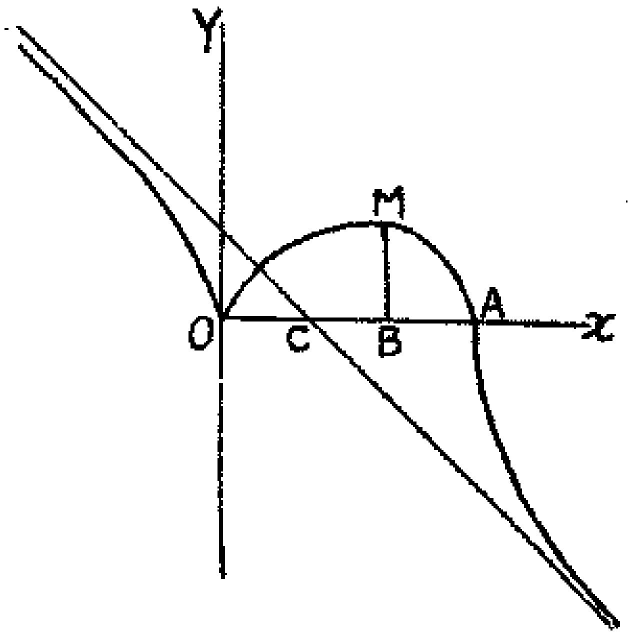
故原點為第一類與第二類尖點之結合,謂之第三種雙尖點.然亦可視為曲線一支之彎點與他支相吻切者,故亦稱吻彎點(Point of oscul-inflexion).

設欲決定尖點屬於何種類,則有次述二法則:

第一法. 攷察曲線兩支之凸凹.

試求 $\frac{d^2y}{dx^2}$(或 $\frac{d^2x}{dy^2}$)之兩值.若近於尖點具有不同之符號,則曲線之兩支對於軸 x,一向下凸,一向下凹,此時之尖點必為角尖點.若近於尖點具有相同之符號,則曲線之兩支對於軸 x,均向下凸或均向下凹,此時之尖點必為嘴尖點.如例 2,因 $y=x^{\frac{3}{2}}+x^2$,得 $\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{3}{4\sqrt{x}}+2$,此時 x 取甚小之正數,$\frac{d^2y}{dx^2}$ 得不同符號之兩值.故原點為角尖點.

然若原點雖為角尖點,軸 y 為切線時,則近於尖點之曲線兩支,對於軸 x,均向下凸,或均向下凹.但 $\frac{d^2x}{dy^2}$ 仍得不同符號之兩值.故上述法則,依然可用.舉例如下:



例 7. $y^3=2ax^2-x^3$

圖中 $OA=2a$, $OB=\frac{4}{3}a$,

M 為極大點, A 為彎點.

漸近線之方程式為 $y=-x+\frac{2}{3}a$.

由原式 $y=x^{\frac{2}{3}}(2a-x)^{\frac{1}{3}}$

得 $$\frac{dy}{dx}=\frac{4ax-3x^2}{3y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-8a^2}{9x^{\frac{4}{3}}(2a-x)^{\frac{5}{3}}}.$$

於此 x 取甚小之正數及負數,得 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 恆爲負數.

但 $$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{24a^2y}{x^{\frac{2}{3}}(4a-3x)}$$

此時 y 取甚小之正數及負數,得 $\frac{d^2x}{dy^2}$ 爲不同符號之兩數值.故原點爲角尖點.

第二法. 攷察附近點至尖切線之垂直線.

試將原點移於尖點,得變換方程式

$$(b_1x+c_1y)^2+u_3+u_4+\cdots\cdots+u_n=o$$

設 p 爲曲線上一點 $(x,\ y)$ 至尖切線 $b_1x+c_1y=o$ 之垂直線之長,則

$$p=\frac{b_1x+c_1y}{\sqrt{b_1^2+c_1^2}}$$

由此式與變換方程式以消去 y,則得 p 之值,可以 x 表出之.

今取在曲線上之點附近於原點者之兩個垂直線.僅研究 p^2,而捨去 p 之高次冪以及 p^2x, p^2x^2, …等.於是得一個 p 之二次方程式.在此時 x 取甚小之值,若二根爲虛數,則通過原點之曲線不能有實支,故原點爲一個孤點.若二根爲實數,且符號相反,則兩垂直線在尖切線之異側,故原點爲角

尖點.若二根爲實數,且符號相同,則兩垂直線在尖切線之同側,故原點爲嘴尖點.又由其根之正負,更可決定曲線在尖切線之何側.

又用此法,亦可決定其點爲單尖點或雙尖點.卽攷察 p 之二次方程式之根.若須選擇 x 之正號或負號始可得實根者,其點必爲單尖點.若不論 x 爲正號或負號,恆可得實根者,其點必爲雙尖點.再雙尖點在切線兩端究屬於何種,亦可用前法探求之.

在實際上應用此法,儘可令 $p=b_1x+c_1y$, 而棄去其分母 $\sqrt{b_1^2+c_1^2}$, 尤覺簡便,因可以與垂直線之長成比例者之值,代其垂直線之長也.舉例如次:

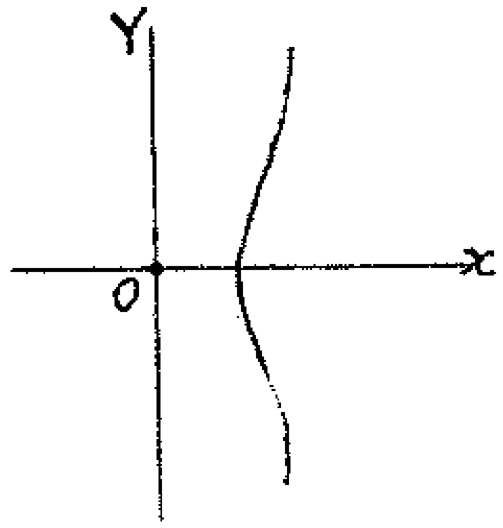
例 2.(圖見前) $y=x^{\frac{3}{2}}+x^2$ 卽 $y^2-2x^2y-x^3+x^4=o$.

令 $p=y$ 代入之,得 p 之二次式 $p^2-2x^2p-x^3+x^4=o$, 此式當 $4x^4-4(-x^3-x^4)>o$, 卽 $x^3>o$ 時, p 爲實數,故 x 應取正數.卽曲線僅在軸 y 之右方成爲單尖點.又二根之積爲 $-x^3+x^4=-x^3$, 其符號爲負,故原點爲角尖點.

例 6.(圖見前) $y^2-x^2y+x^5=o$.

令 $p=y$ 代入之,得 p 之二次式 $p^2-x^2p+x^5=o$, 此式當 $x^4-4x^5\doteqdot x^4>o$ 時, p 爲實數.於此 x 可取正數亦可取負數,故原點爲雙尖點.又二根之積爲 x^5, 當 x 取正數時,其符號爲正,卽軸 y 之右方爲嘴尖點.當 x 取負數時,其符號爲負,卽軸 y 之左方爲角尖點.

例 8. $y^2+x^2-x^3=o.$



令　$p=y$，得 $p^2+x^2-x^3=o.$

於此　$p=\sqrt{-x^2+x^3}\doteq\sqrt{-x^2}$

此式無論 x 爲正數或負數，p 恆得虛數.

在原點之切線爲二虛線 $y\pm x\sqrt{-1}=o.$ 故原點爲孤點.

iii.　當 $f=\frac{\partial f}{\partial x_0}=\frac{\partial f}{\partial y_0}=o.$　$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}<\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}$時,則曲線在點$(x_0, y_0)$雖孤獨存在,但其隣近處再無實點.如此之重點,謂之孤點.

例 8.(圖見前)　$y^2+x^2-x^3=o$　此式之原點爲孤點.

茲依上法討論之.

此時

$$f(x_0, y_0)=f(o,o)=o$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}\equiv 2x_0-3x_0^2=o$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_0}\equiv 2y_0=o$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}\equiv 2x_0-3x_0^2=o$$

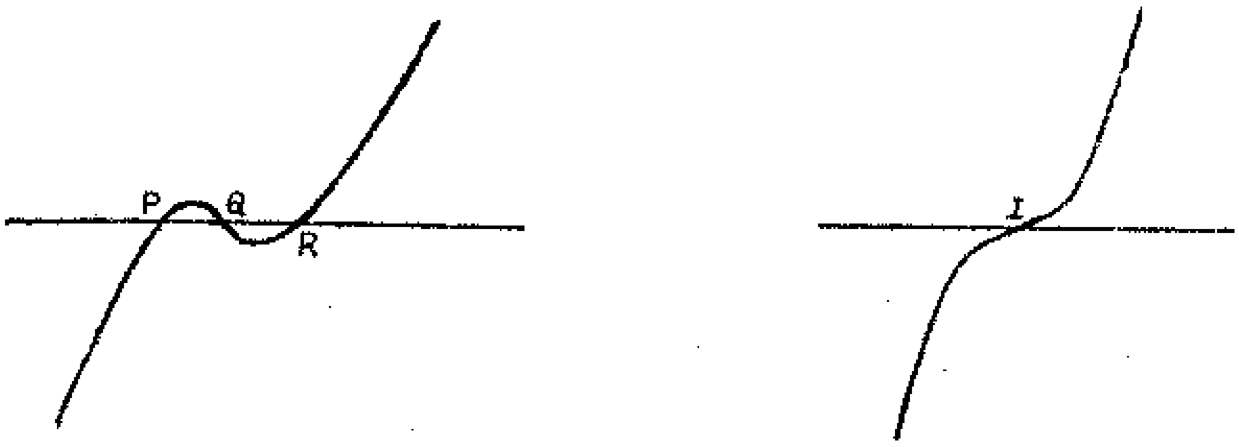
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\equiv 2-6x_0=2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}=2$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}<\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}$$

5.　彎點

設曲線之切線,通過曲線上三個毘連點 P, Q, R,若此三點互相疊合,成爲一點 I 時,則該點謂之彎點.如斯在彎點前後之曲線,必各在其切線之異側.卽曲線在彎點前,對於



軸 x 係向上凸(或下凹)者,在彎點後,對於軸 x 必變爲向上凹(或下凸). 反之亦然.

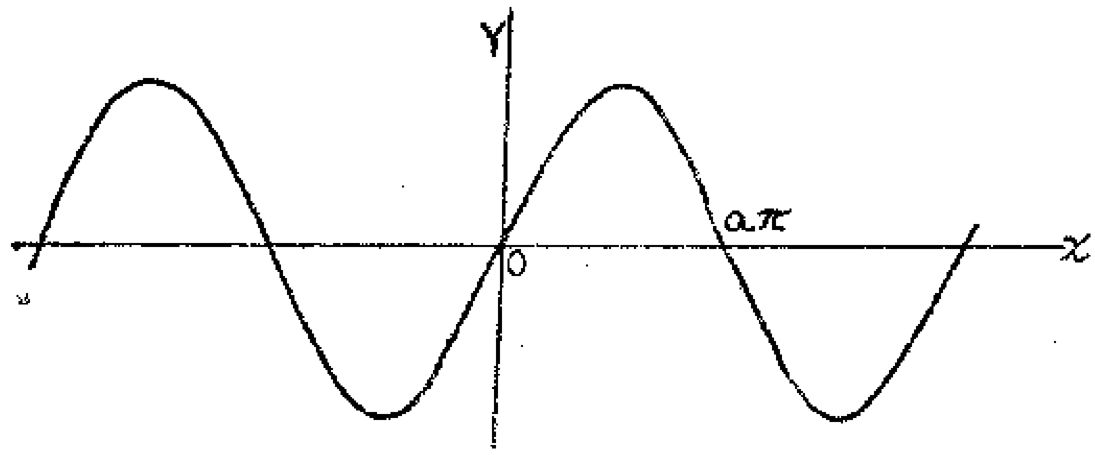
今設曲線之方程爲 $y=f(x)$. 若 x 增加時,第一微係數 $\frac{dy}{dx}$ 亦增加,則曲線對軸 x 係向上凹.若 x 增加時,$\frac{dy}{dx}$ 反減少,則曲線係向下凹.但當 x 爲某特別值,$\frac{dy}{dx}$ 從增加函數變爲減少函數,或從減少函數變爲增加函數,則曲線上必有一彎點.此亦謂導來函數 $\frac{dy}{dx}$ 有極大或極小值之時也.因此欲決定曲線上之彎點,僅須求導來函數之極大及極小值.故對於彎點之必要且充分之條件,乃獨立變數 x 經過某特別值,而第二微係數之符號生有變化之時也.惟第二微係數之符號如生變化,必須經過 o 或 ∞. 是以欲求彎點之坐標,祇須解出次之方程式:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=o \quad 或 \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\infty$$

求得其實根.再令諸根各取略較大及略較小之值,代入於

$\frac{d^2y}{dx^2}$中,得不相同之符號,卽是.

例 9. 正弦曲線 $y = b\sin\frac{x}{a}$.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}\cos\frac{x}{a}$$

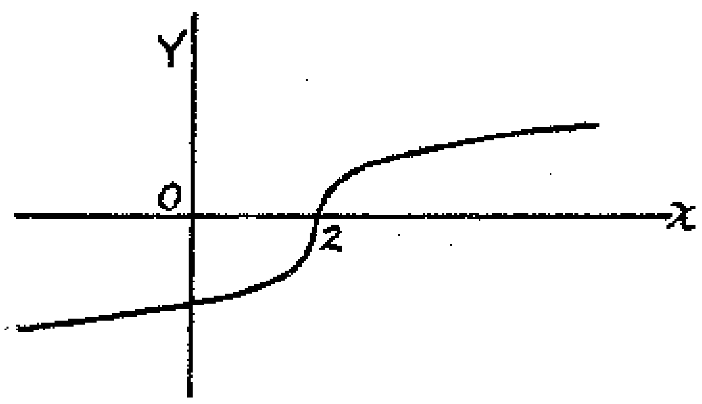
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2}\sin\frac{x}{a}$$

令 $\frac{d^2y}{dx^2} = o$, 得 $x = o,\ a\pi,\ 2a\pi,\ 3a\pi, \cdots\cdots$

玆僅討論其一值.設 $x = o$, 則當 $x < o$ 時, $\frac{d^2y}{dx^2} > o$, 卽曲線係向上凹.當 $x > o$ 時, $\frac{d^2y}{dx^2}$卽曲線係向下凹.

故 $(o, o), (a\pi, o), (2a\pi, o), \cdots\cdots$, 均爲彎點.

例 10. $y = (x-2)^{\frac{1}{3}}$.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3(x-2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9(x-2)^{\frac{5}{3}}}$$

令 $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$, 得 $x = 2$.

當 $x < 2$ 時, $\frac{d^2y}{dx^2} > o$, 卽曲線向上凹.

當 $x > 2$ 時, $\frac{d^2y}{dx^2} < o$, 卽曲線向下凹.

故點 $(2, 0)$ 爲彎點.

一般言之.若以 (x_0, y_0) 代入諸微係數中,得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=o,\quad \frac{d^4y}{dx^4}=o,\cdots,\frac{d^{2m}y}{dx^{2m}}=o,\quad \frac{d^{2m+1}y}{dx^{2m+1}}\neq o$$

卽第二階以至任意偶數階之微係數均爲零,其後再高一階之奇數階微係數不爲零時,則點 (x_0, y_0) 必爲彎點.但若第二階以至任意奇數階之微係數均爲零,其後再高一階之偶數階微係數不爲零時則否.

又若第二階以至任意偶數階之微係數均爲無窮大,其後再高一階之奇數階微係數不爲無窮大時,則點 (x_0, y_0) 亦必爲彎點.

設用極坐標法以求彎點.命曲線之方程式爲 $\varrho=f(\theta)$, p 爲自極點至曲線上一點之切線之垂直距離.若 ϱ 增加時,p 亦增加,則 $\frac{dp}{d\varrho}$ 爲正數,卽曲線係凹向極點.若 ϱ 增加時,p 反減少,則 $\frac{dp}{d\varrho}$ 爲負數,卽曲線係凸向極點.因此曲線上如有彎點時,p 必爲極大或極小之値.是以欲求彎點之坐標,祇須解次之方程式:

$$\frac{dp}{d\varrho}=o \quad 或 \quad \frac{dp}{d\varrho}=\infty$$

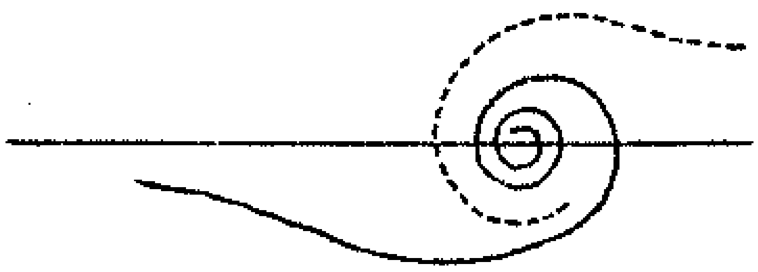
求得此式之根,再令諸根各取略較大及略較小之値,代入於 $\frac{dp}{d\varrho}$ 中,得不相同之符號,卽是.

又因 $\frac{dp}{d\varrho}=\frac{\left(u+\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)p^3}{\varrho^2}$,　式中 $u=\frac{1}{\varrho}$

故求彎點之坐標,亦卽得次之方程式:

$$u+\frac{d^2u}{d\theta^2}=o \quad 或 \quad u+\frac{d^2u}{d\theta^2}=\infty$$

例 11.　卜杖螺線 (Lituus or Trumpet)　$\varrho^2\theta = a^2$.



此時

$$\frac{dp}{d\varrho}=\frac{2a^2(4a^4-\varrho^4)}{(4a^4+\varrho^4)^{\frac{3}{2}}}$$

令 $\frac{dp}{d\varrho}=o$,　得　$\varrho = a\sqrt{2}$.

當 $\varrho<a\sqrt{2}$ 時, $\frac{dp}{d\varrho}>o$, 卽螺線凹向極點.

當 $\varrho>a\sqrt{2}$ 時, $\frac{dp}{d\varrho}<o$, 卽螺線凸向極點.

故在螺線上之點$(a\sqrt{2}, 28°38')$爲一個彎點.

再者設曲線上有彎點,則其曲率圓可通過在同一直線上相毘連之三點.卽曲率曲徑必爲無窮大且變其符號.但因曲率半徑可書爲下列各式:

(i)　$r=\frac{ds}{d\tau}$

式中爲 r 曲率半徑, τ 爲坐標軸與切線之交角, s 爲曲線之長度.

(ii)　$$\frac{1}{r}=-\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}=\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dx}{ds}}$$

(iii)　$$\frac{1}{r^2}=\left(\frac{d^2x}{d^2s}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$

(iv)　$$r=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

(v) $r = \text{Lim}\ \dfrac{x^2}{2y}$

(vi) $r = \rho\dfrac{d\rho}{dp}$

(vii) $r = \dfrac{\left\{u^2 + \left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{u^3\left(u + \dfrac{d^2u}{d\theta^2}\right)}$

(viii) $r = \dfrac{\left\{\rho^2 + \left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho\dfrac{d^2\rho}{d\theta^2}}$

(ix) $r = p + \dfrac{d^2p}{d\tau^2}$

故曲線上有彎點之條件,爲上列任何一式中之 $r=\infty$,或卽解下列各式:

由 (i) 得 $\dfrac{d\tau}{ds} = o$

由 (ii) 得 $\dfrac{d^2y}{ds^2} = o$

由 (iv)得 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = o$

由 (vi)得 $\dfrac{dp}{d\rho} = o$

由(vii)得 $u + \dfrac{d^2u}{d\theta^2} = o$

由(viii)得 $\rho^2 + 2\left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho\dfrac{d^2\rho}{d\theta^2} = o$

除上所述外,研究曲線上之彎點,尙可應用次之諸定理:

(a) 若原點爲曲線上之彎點,則曲線方程式之最低項爲一次式,且其二次項必含有一次項爲因子,卽

$$u_1 + v\,u_1 + u_3 + u_4 + \cdots\cdots + u_n = o$$

(b)　若原點爲曲線上之彎點,則亦必爲其一切極曲線(Polar curves)　上之彎點.

(c)　若曲線上有彎點(或重點),則彎點(或重點)之極錐(Polar conic),必分解爲兩個直線.

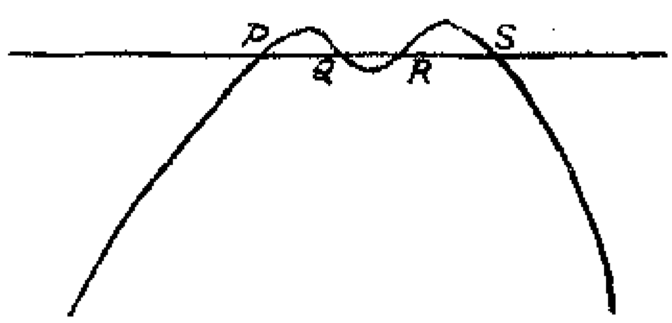
(d)　曲線上之彎點(或重點),必在其赫氏曲線(Hessian) $H=O$ 之上.

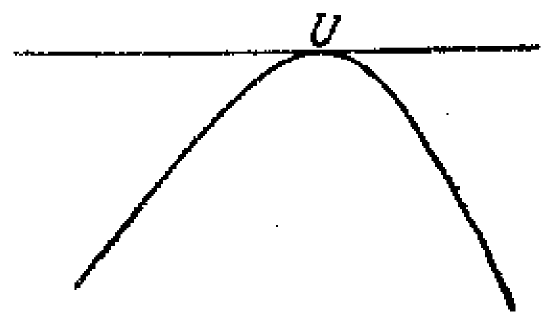
但　$$H\equiv\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_0\,\partial x_0} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}\end{vmatrix}=o,$$ 式中 (x_0, y_0) 爲彎點.

(e)　原曲線之彎點,必爲曲線與其赫氏曲線之交點.

6.　波重點.

設曲線之切線,通過曲線上四個毘連點 P, Q, R, S. 若此

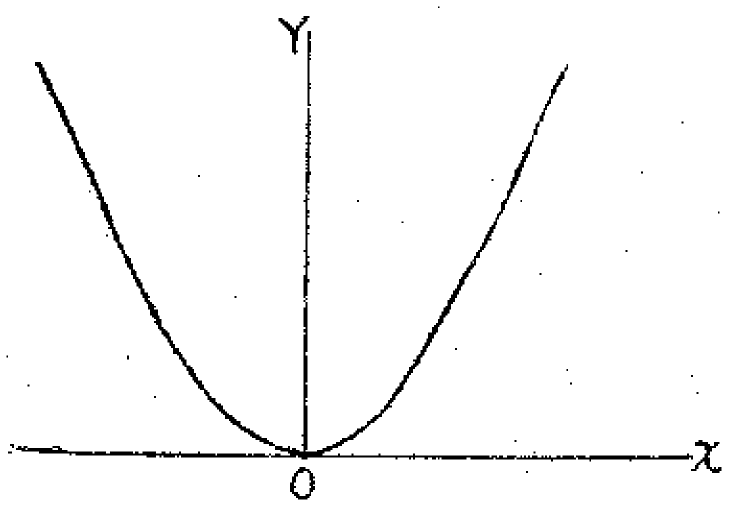




四點互相疊合成爲一點 U 時,則謂之波重點.如此之點,可視爲兩個彎點之結合.但非三重點也.其切線與曲線有三階之相切.因此知四次以下之曲線,必不能有如此之點.且曲線在此點隣近部分,僅居切線之一側.

若曲線有大於四之偶數個點,互相疊合成爲一點,其切線在曲線之一側時,則該點謂之高次波重點 (Pint of undulation of higher order, Point de serpentement). 其切線謂之高次多重切線 (Multiple tangents of higher order). 又若曲線有大於三之奇數個點互相疊合成為一點,其切線橫過曲線時,則該點謂之高次彎點.其切線謂之高次彎切線.但所謂高次波重點者,僅曲線方程式中所含之次數有別.其外觀上用目力視察之,并不異於尋常之點.

例 12. $y=x^4$.



因 x 無論取正數或負數, y 恆得正數,卽曲線應在軸 x 之上.

又 x 之指數為 4, 卽軸 x 與曲線相遇於原點為四個疊合點,而以軸 x (卽 $y=o$) 為曲線之切線.

故原點為波重點.

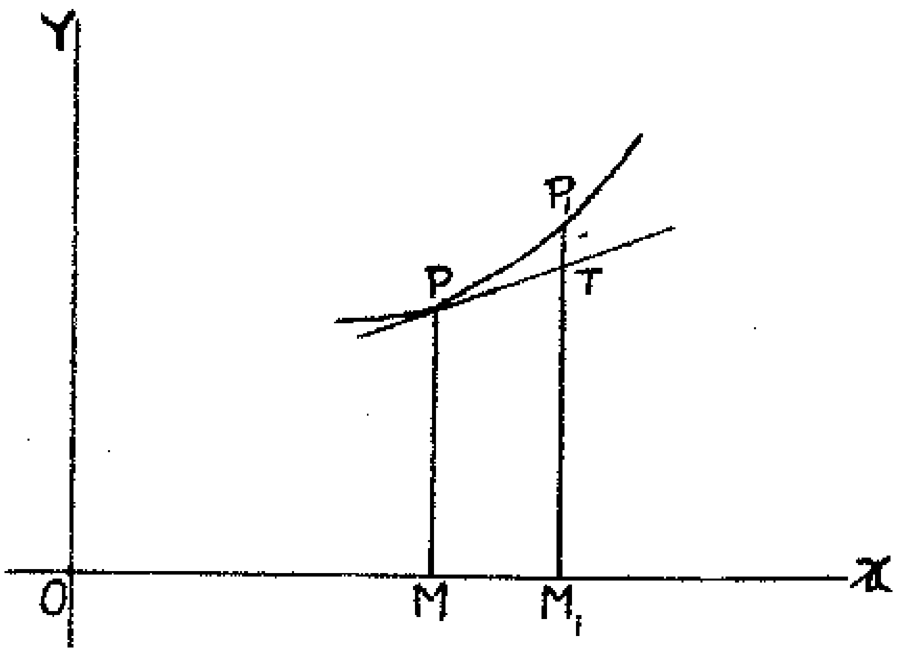
茲述曲線上具有彎點或波重點之辨別法如次:

設曲線之方程式為 $y=f(x)$, 曲線上一點為 P, 其隣近一點為 P_1,在 P 之切線為 PT,

點 P 之坐標,

$$OM=x, \quad PM=y,$$

點 P_1 之坐標,



$OM_1=x+h,\quad P_1M_1=f(x+h).$

但依戴勞定理

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^3}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\cdots\cdots$$

又在 P 之切線之方程式爲

$$Y-y=f'(x)(X-x).$$

令　$X_1=x+h,$

則　$Y=y+hf'(x)=f(x)+hf'(x)$

此卽 TM_1 之値也.

由是

$$P_1T=P_1M_1-TM_1=\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\cdots\cdots$$

觀察此式,知 P_1T 符號之正負,恆視 $f''(x)$ 符號之正負而定.卽當 $f''(x)>o$, 曲線對軸 x 係向上凹.當 $f''(x)<o$, 曲線對軸 x 係向下凹.

若 $f''(x)=o$, 則 $P_1T=\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{iv}(x)+\cdots\cdots$.此式 P_1T 之符號,由 $f'''(x)$ 決定之.卽當 $f'''(x)>o$ 時,曲線沿 P 之前後,對於軸 x 係由向上凸變爲向上凹.當 $f'''(x)<o$ 時反是.故點 P 必爲彎點.

若 $f'''(x)=o$, 則 $P_1T=\frac{h^4}{4!}f^{iv}(x)+\frac{h^5}{5!}f^{v}(x)+\cdots$. 此式 P_1T 之符號,由 $f^{iv}(x)$ 決定之.即曲線對於軸 x 恆向上凹,或恆向下凹.故點 P 必爲波重點.

又設曲線之方程式爲 $y=A_1(x-a)^{2m+2}(x-b)^{2m+3}\cdots\cdots$, 若求微分後得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=A(x-a)^{2m}(x-b)^{2m+1}\cdots\cdots$$

此式當 $x=a$ 或 $x=b$ 時,則 $\frac{d^2y}{dx^2}=o$.

式中 $x-a$ 之因子爲偶數個,故曲線經過該點,不變更其符號.因之當 $m=1$ 時,該點爲波重點.當 $m=2, 3, 4,\cdots\cdots$ 之任意整數時,該點爲高次波重點.

又式中 $x-b$ 之因子爲奇數個,故曲線經過該點,必變更其符號.因之當 $n=o$ 時,該點爲彎點.當 $n=1, 2, 3,\cdots\cdots$ 之任意整時,該點爲高次彎點.

7.　三重點.

設曲線之三支共通過一點時,則該點謂之三重點.如斯之點可視爲三個結點之結合.而通過該點與曲線相交之任一直線,在該點爲三個疊合點.又通過該點與曲線相切之三個切線,在該點爲四個疊合點.

因在三重點具有三個切線.故視三切線均爲實線或含有虛線之不同,可分爲二類如下:

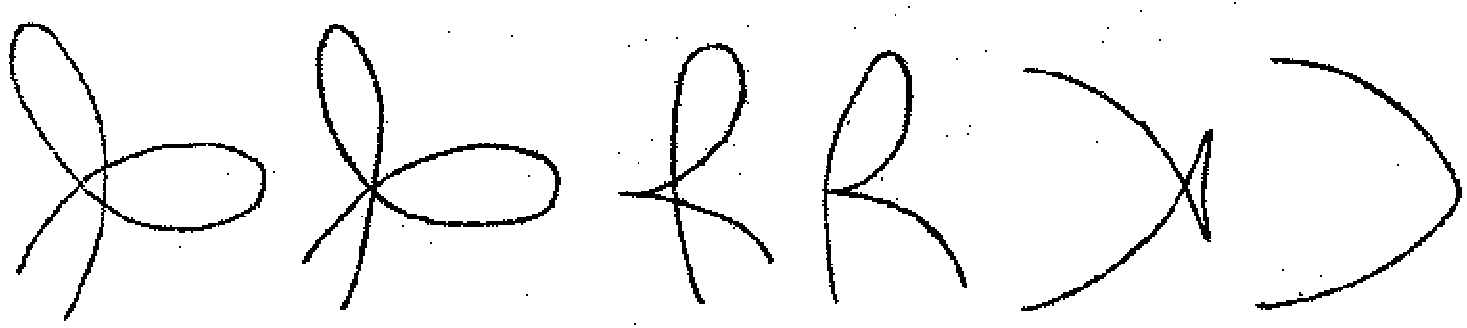
I.　三個切線均爲實線者.此類再分爲三種如次:

i.　三個切線不相同者.

ii.　二個切線相疊合者.

iii.　三個切線相疊合者.

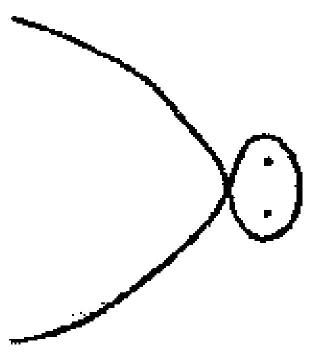
但一個三重點,可視爲三個重點之結合.如下各圖,卽示三個重點如何結合之形.圖(a)示三個結點未結合前,(a')示其結合後之形.圖(b)示兩個結點一個尖點未結合前,(b')示其結合後之形.圖(c)示一個結點兩個尖點未結合前,(c')示其結合後之形.惟此時已結合後之三重點在曲線上觀之,幷不異於尋常之點.

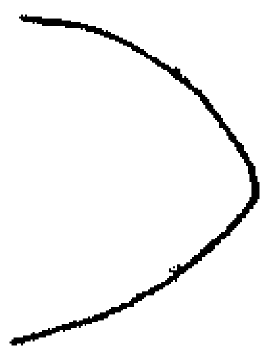


(a)　(a')　(b)　(b')　(c)　(c')

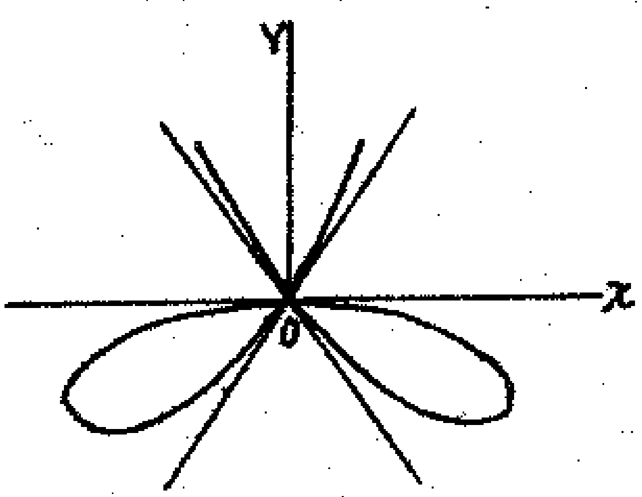
II.　一個切線爲實線,二個切線爲虛線者.

此時之三重點,爲兩個虛結點(卽孤點)與一個結點之結合.卽通過虛結點有曲線上實支之謂也.如斯之三重點,外觀上亦不異於尋常之點.如下圖(d)乃示兩個虛結點與一個結點未結合前,(d')示其已結合後之形.


(d)


(d')

例13. $x^4+2ax^2y-ay^3=o.$ 令 $f(x,y)\equiv x^4+2ax^2y-ay^3=o.$



$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3+4axy,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2ax^2-3ay^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=4ax,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}=12x^2+4ay,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6ay,$$

使上列諸偏微分均爲零,得

$$\begin{cases} x=o \\ y=o \end{cases}$$

即原點爲一個三重點.

再求曲線上任意一點之傾斜 $\frac{dy}{dx}$,由上列兩式 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 求之,得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3+4axy}{3ay^2-2ax^2}$$

以 $x=o$, $y=o$ 代入此式中,幷簡書 $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=p'$, 則

$$\frac{dy}{dx}=p=\frac{4x^3+4axy}{3ay^2-2ax^2}=\frac{o}{o}$$

以$\begin{cases} x=o \\ y=o \end{cases}$代入所得

$$=\frac{12x^2+4ay+4axp}{6ayp-4ax}=\frac{o}{o}$$ 以$\left\{\begin{array}{l}x=o\\y=o\end{array}\right.$代入所得

$$=\frac{24x+8ap+4axp'}{6ap^2+6ayp'-4a}$$

$$=\frac{8ap}{6ap^2-4a}$$ 以$\left\{\begin{array}{l}x=o\\y=o\end{array}\right.$代入所得

$$\therefore\quad p(6ap^2-4a)=8ap$$

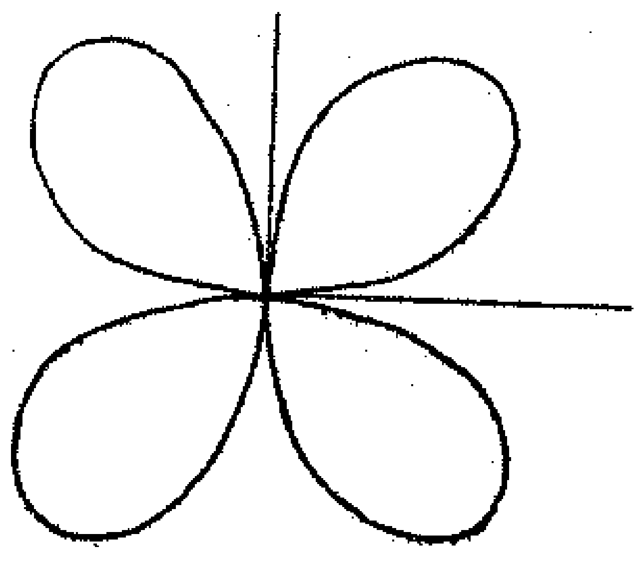
$$\therefore\quad p=\frac{dy}{dx}=o,\quad +\sqrt{2},\quad -\sqrt{2},$$

由是知原點爲三重點時.在該點之三個切線,與軸 x 所成之角度爲 o, $\tan^{-1}\sqrt{2}$, $\tan^{-1}(-\sqrt{2})$.

8. 四重點 (Quadruple point).

設曲線之四支共通過一點時,則該點謂之四重點.如此之點,可視爲六個結點之結合.而通過該點與曲線相交之任一直線,在該點爲四個疊合點.又通過該點與曲線相切之四個切線,在該點爲五個疊合點.

例 14. 四瓣玫瑰線 $\rho=a\sin 2\theta$



此式若用卡氏坐標表之,則得

$$(x^2+y^2)^3-4a^2x^2y^2=o$$

爲一個六次方程式.

其原點有曲線之四支通過之,爲一個四重點.

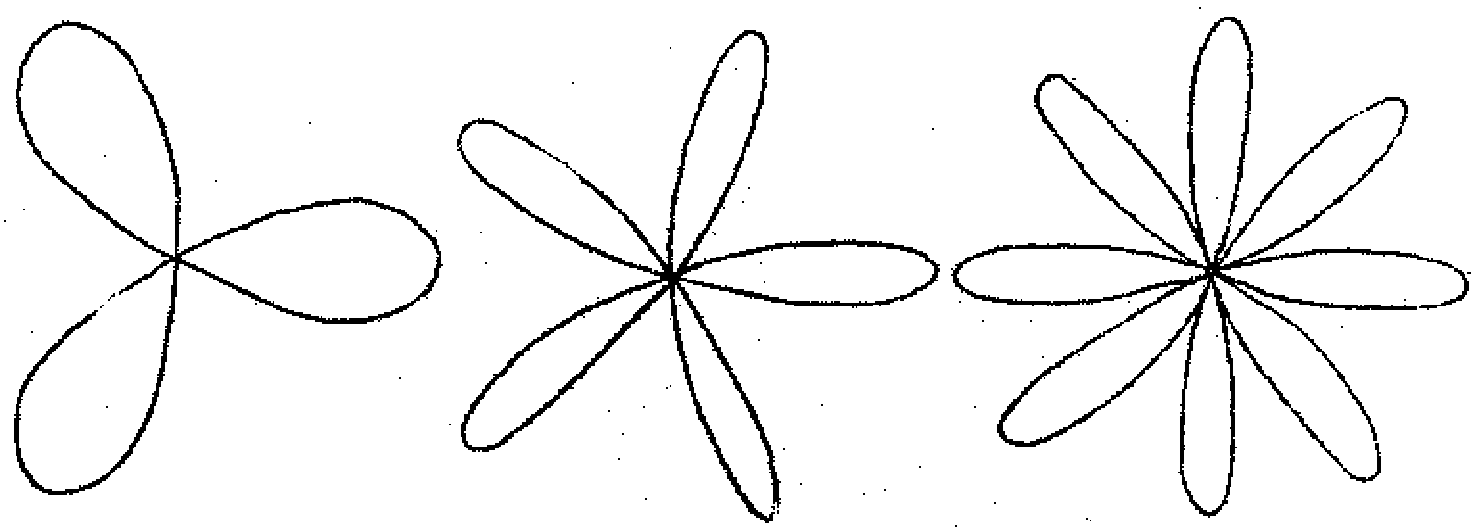
9. 多重點.

設曲線之 k 支共通過一點時,則該點謂之 k 重點.如斯

之點可視為$\frac{k(k-1)}{2}$個結點之結合.而通過該點與曲線相交之任一直線,在該點為 k 個疊合點,即與曲線有 $k-1$ 階之相切.又通過該點與曲線相切之 k 個切線,在該點為 $k+1$ 個疊合點,即與曲線有 k 階之相切.

例 15. 多瓣玫瑰線 $\varrho = a\cos k\theta$ 或 $\varrho = a\sin k\theta$.

此式當 k 為奇數時,其原點為一個 k 重點.當 k 為偶數時,其原點為一個 $2k$ 重點.



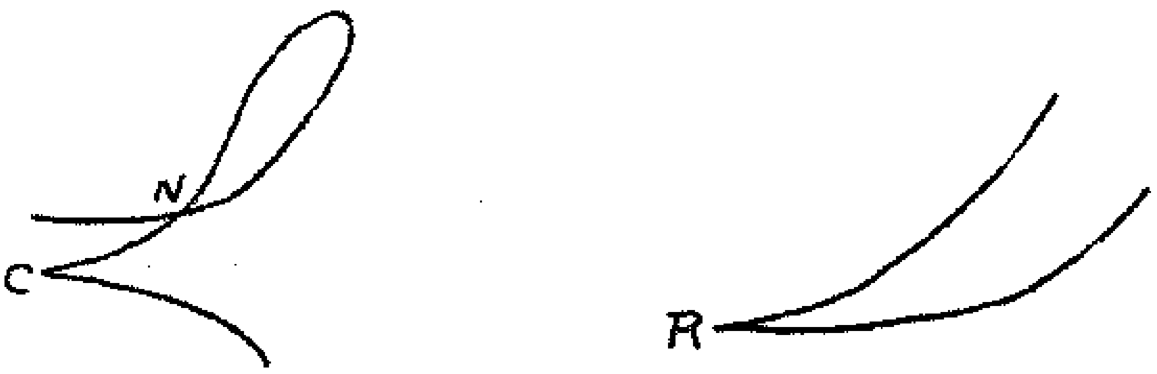
$\varrho = a\cos 3\theta$ 或 $\varrho = a\sin 3\theta$　　$\varrho = a\cos 5\theta$ 或 $\varrho = a\sin 5\theta$　　$\varrho = a\cos 4\theta$ 或 $\varrho = a\sin 4\theta$

10. 切結點 (Tacnode).

此種點為兩個結點之結合,亦可視為兩個尖點之結合.在該點之切線,有曲線之兩支同切於其點,即切結點之切線與曲線有三階之相切.而此切線則為兩個相疊合之雙切線 (Bitangant) 也.此種點於前論尖點時已述及之.其圖則如例 4 與例 5 是也.

11. 結尖點 (Node cusp).

此種點爲一個結點與一個尖點之結合.如圖 N 爲結點,C 爲尖點,當此兩點互相疊合,則成一點 R,謂之結尖點.此



種點之外觀上,與角尖點無異,因亦稱曰角尖點.惟在結尖點之切線,應視爲兩個相疊合之切線.蓋就結點言之,爲一個雙切線,就尖點言之,爲一個逗留切線,兩者互相疊合成爲一個尖切線也.

12. 㔩結點 (Oscnode).

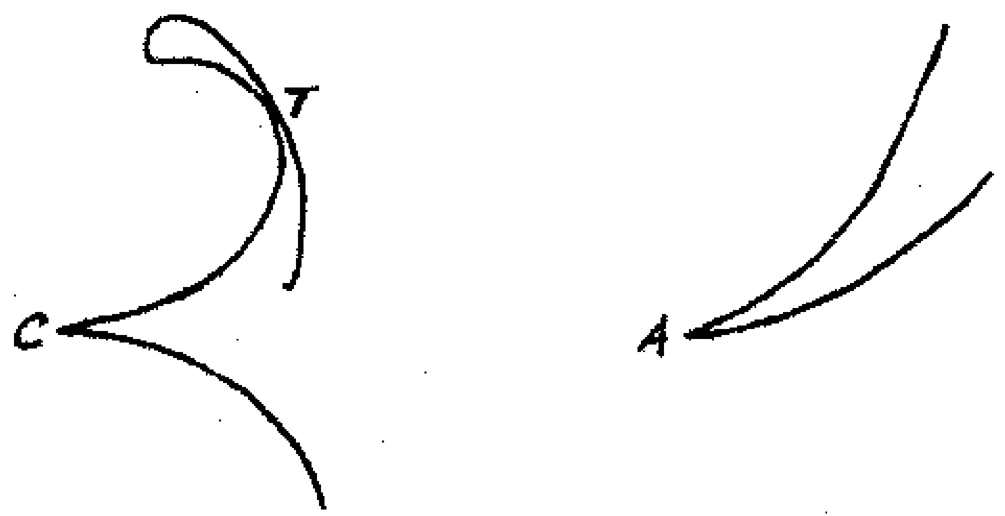
此種點爲一個切結點與一個結點之結合,亦卽三個結

點相結合,而不成爲一個三重點之時也.在該點之兩支曲線,有二階之相切,亦稱㔩切.如圖 T 爲切結點,N 爲結點,此二點旣結合後,則成一點 O,謂之㔩結點.在㔩結點之切線,爲三個相疊合之雙切線.蓋就切結點言之,爲兩個雙切線,就結點言之,爲一個雙切線.此三個雙切線互相疊合,卽爲

胁結點之切線.

13. 切結尖點(Tacnode-cusy).

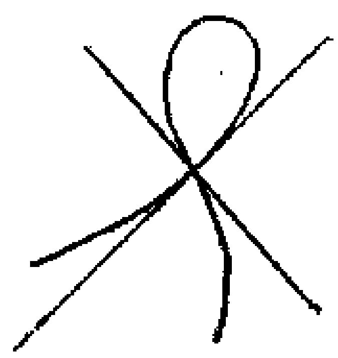
此種點爲一個切結點與一個尖點之結合,亦卽兩個結點與一個尖點之結合,而不成爲一個三重點之時也.如圖



T 爲切結點,C 爲尖點,當此兩點互相疊合,則成一點 A,謂之切結尖點.在切結尖點之切線,爲兩個相疊合之雙切線.或一個尋常之逗留切線.

14. 彎結點(Flecnode).

設結點爲曲線上一支之彎點時,則謂之彎結點.此種點亦可視爲一個結點與一個彎點之結合.其在彎結點之切線,必有一個爲逗留切線.



令命曲線之方程式爲

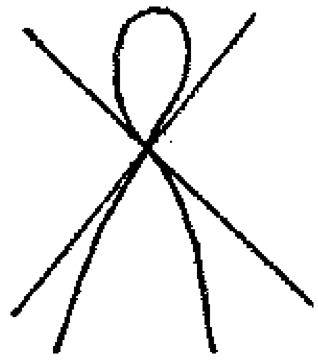
$$a_0+(b_1x+c_1y)+(d_2x^2+e_2xy+f_2y^2)+\cdots\cdots$$
$$\equiv u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n=0$$

若此曲線之原點爲一個彎結點,則上式變爲

$$(ax+by)(lx+my)+(ax+by)(dx^2+exy+fy^2)+u_4+\cdots+u_n=o,$$

卽式中之二次項與三次項,必含有一個公共之一次因子 $ax+by$. 而 $ax+by=o$, 乃表示彎結切線(Flecnode tangent)之方程式.此切線與曲線有四點之相切,亦卽有三階之相切也.

15. 雙彎結點(Biflecnode).



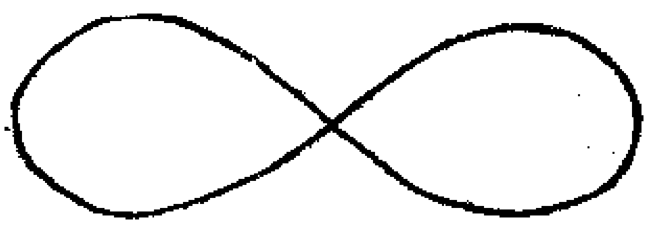
設結點爲曲線上兩支之彎點時,則謂之雙彎結點.此種點亦可視爲兩個彎點與一個結點之結合.其在該點之兩個切線,均爲逗留切線.

由上式,若曲線之原點爲雙彎結點,則得

$$(ax^2+2bxy+cy^2)+(ax^2+2bxy+cy^2)(lx+my)+u_4+\cdots+u_n=o,$$

卽式中之三次項,必含有二次項爲因子.

例 16. 雙紐線 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$



此式若用卡氏坐標表之,則得

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

其原點爲一個雙彎結點.

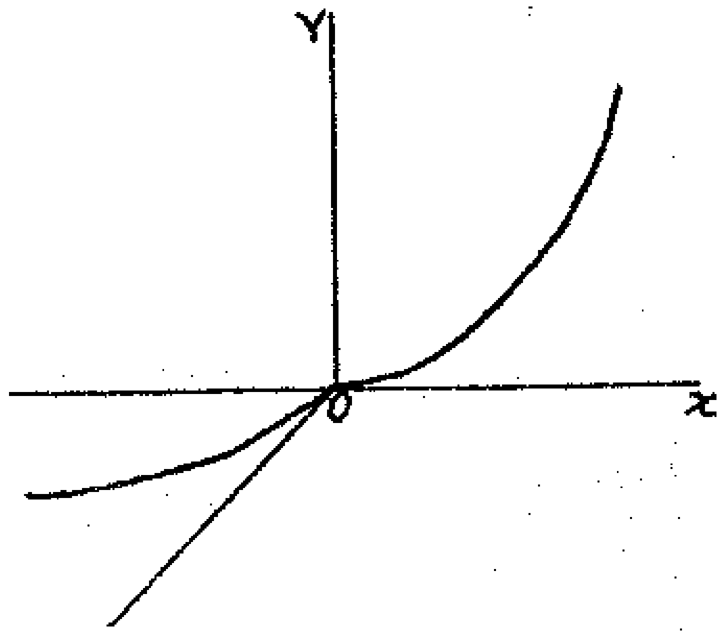
16. 多彎結點(Multiple flecnode).

設曲線上具有多重點,而通過該點之切線與曲線之支,有二階以上之相切時,如斯之點,謂之多彎結點.

17. 角折點 (Salient point, Shootmg point, Point saillant, Eck-punkt).

設曲線有兩支或多支於某點相合,但切線之方向各異.則該點謂之角折點.如斯之點,不能見於代數方程式中.

例 17. $y = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$



當 $x > o$ 時, $y > o$.

當 $x < o$ 時, $y < o$.

當 $x = o$ 時, $y = o$.

在原點之兩切線,一為軸 x,一為與負軸 x 下方相交成 45°之角之直線.

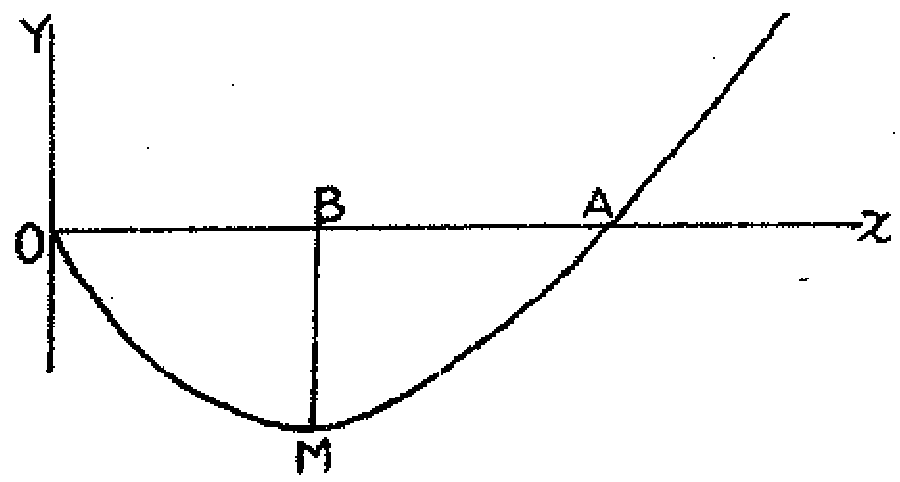
故原點為角折點.

18. 終止點 (Stop point, End point, Terminating point, Point d'arrêt, Endpunkt).

設曲線之一支至某點而終止,則該點謂之終止點.如此之點,不能見於代數方程式中.

例 18. $y = x \log x$.

因負數無實對數,故 x 不能為負數,即此曲線僅能在軸 y 之右方.



當 x 為正數時, y 恆有一個實數.

當 $x < 1$ 時, $y < o$.

當 $x > 1$ 時, $y > o$.

當 $x = 1$ 時, $y = o$.

由是曲線與軸 x 相交於點 A, 而 $OA=1$. 其在點 A 之切線與軸 x 相交成45°之角.

又 $OB=\frac{1}{e}=\frac{1}{2\cdot718\cdots\cdots}$, $BM\perp OX$,

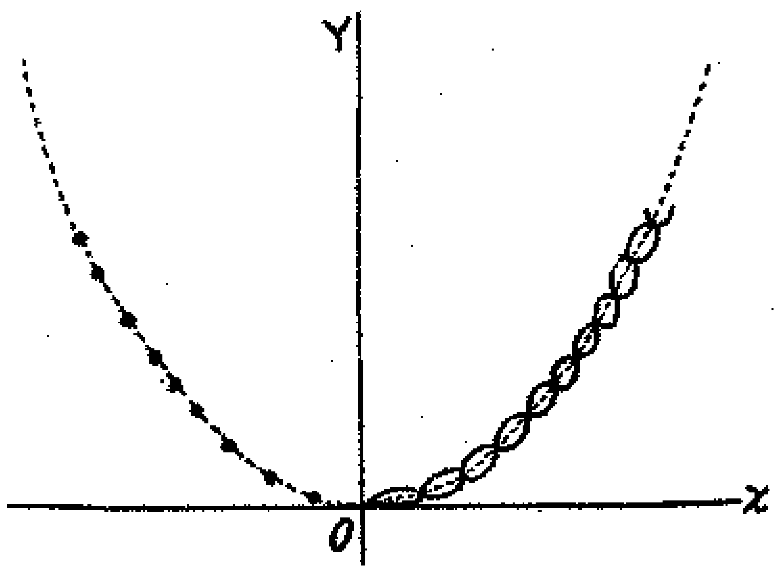
BM 與曲線相交於點 M, 此點 M 爲極小點.

當 $x=o$ 時, $y=o$. 故原點爲終止點.

19. 點串 (Branches pointillée).

若一個曲線有無窮數之相配點.如斯之諸點,名之曰點串.

例 19. $y=ax^2\pm\sqrt{bx}\sin x$.



當 x 取任意之正數時, y 有兩個值,即應有二點.

但當 $\sin x=o$ 時,則兩點相疊合成爲一點.

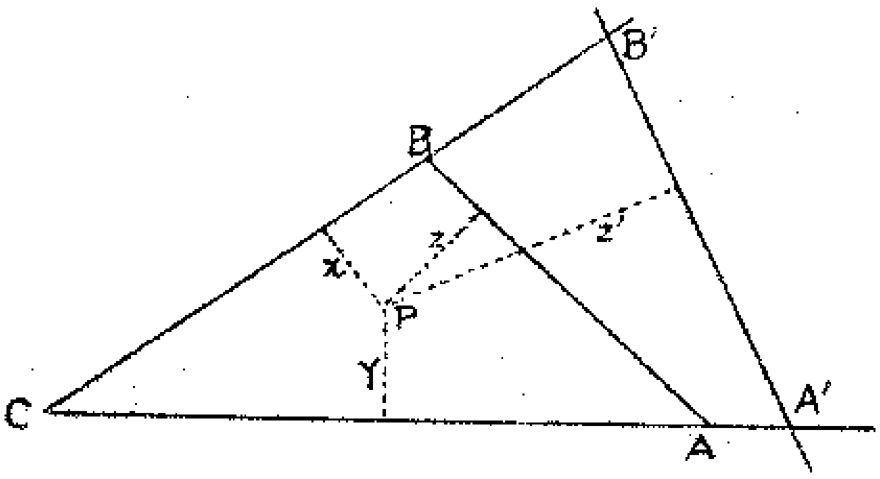
以此諸點所作之圖,成爲環節,如鏈鎖狀.以拋物線 $y=ax^2$ 爲其徑曲線.

設 x 取正數,則當 $x=o$ 或 π 之倍數時,各環與拋物線相交,設 x 取負數,則 y 爲虛數,惟當 $\sin x=o$ 時,則 $y=ax^2$. 因是在軸 y 左邊,有無窮數之相配點在拋物線上,與右邊之各重點相對,而成爲點串.

20. 在無窮遠處之特殊點.

研究曲線在無窮遠之特殊點,以用三線坐標法爲便.

設 ABC 為標準三角形.任意直線 $A'B'$ 與 CA 及 CB 各交於 A' 及 B'.任一點 P 對於 ΔABC 之三線坐標為



(x, y, z), 對於 $\Delta A'B'C$ 之三線坐標為 (x, y, z'), 當 $z'=o$ 時乃表示對於 ΔABC 之直線 $A'B'$ 之方程式.

若曲線在 A' 或 B' 有特殊點時,卽可用常法研究之.

今若將 $A'B'$ 移於無窮遠,變為無窮遠線,則其方程式變為

$$I \equiv ax + by + cz = o.$$

由是曲線在無窮遠點 A' 或 B' 為特殊點時,可先依常法,研究曲線在尋常點 A' 或 B' 時,有特殊點之性質,然後改 $A'B'$ 為無窮遠線 $I=o$, 以討論之.

1. 求一個曲線之方程式,在直線 CA 上之無窮遠點為一個重點者.

一曲線在 A 為重點之普通方程式可書為

$$u_2 x^{n-2} + u_3 x^{n-3} + \cdots\cdots + u_n = o.$$

式中 u_n 為 y 與 z 之二元 n 次方式今若在此方程式中,改 z 為 I, 則得無窮遠點 A' 為重點之曲線方程式為

$$u'_2 x^{n-2} + u'_3 x^{n-3} + \cdots\cdots + u'_n = o.$$

式中u'_n爲I與y之二元n次方式

又如欲求一個曲線之卡氏方程式,在軸x之無窮遠點爲重點者,則僅須假定角C爲直角,令$z=I=$已常數,又令$u'_2=ay^2+bIy+cI^2$,卽得.此時方程式變爲

$$(ay^2+bIy+cI^2)x^{n-2}+U_3x^{n-3}+\cdots\cdots+U_n=o.$$

式中U_n爲一個含y爲n次者之多項式.

而　$ay^2+bIy+cI^2=o$

乃表示在重點之兩個切線.此重點究爲結點,尖點,或孤點,則依$b^2\gtreqless 4ac$決定之.若$a=o$時,則無窮遠線爲在重點之一個切線.若$a=b=o$時,則重點爲一個尖點,而無窮遠線爲尖切線.

ii.　求一個曲線之方程式,在直線CA上之無窮遠點爲一個彎點者.

一曲線在A爲彎點之普通方程式爲

$$u_1(lx+my+nz)x^{n-2}+u_3x^{n-3}+\cdots\cdots+u_n=o.$$

式中u_n爲y與z之二元n次方式.今若在此方程式中,改z爲I,則得無窮遠點A'爲彎點之曲線方程式爲

$$u'_1(lx+my+nI)x^{n-2}+u'_3x^{n-3}+\cdots\cdots+u'_n=o.$$

式中u'_n爲I與y之二元n次方式.

又如欲求一個曲線之卡氏方程式,在軸x之無窮遠點爲彎點者,則僅須假定角C爲直角,令$z=I=$常數,又令$u'_1=aI+by$,卽得.此時方程式變爲

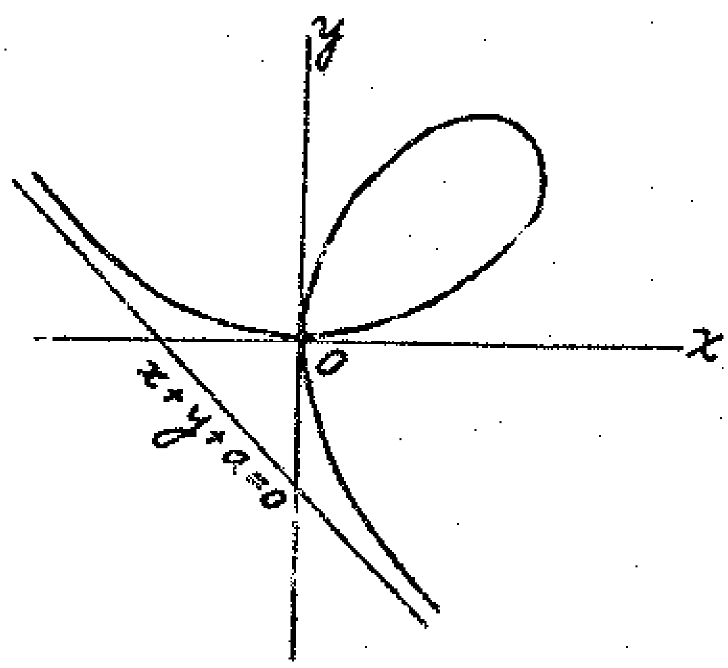
$$(aI+by)(lx+my+nI)+U_3x^{n-3}+\cdots\cdots+U_n=o.$$

式中U_n爲一個含 y 爲 n 次者之多項式.

而 $aI+by=o$

乃表示在彎點之彎切線.此彎切線與軸 x 平行,但當 $b=o$ 時,則變爲無窮遠線.

例 20. 求證卡氏葉形線 $x^3+y^3=3axy$ 有一個結點爲無窮遠點.



此曲線如左圖所示,以

$$x+y+a=o$$

爲其漸近線.

今以 $\frac{x}{z}$代 x, 以 $\frac{y}{z}$ 代 y, 變原式爲齊次坐標,得

$$f(x,y\,z)\equiv x^3+y^3-3axyz=o$$

令無窮遠點之坐標爲 $(x_0,y_0,z_0)=(-1,1,o)$, 代入之適合.故知曲線必通過無窮遠點 $(-1,1,o)$.

試求其諸偏微分如下:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}=6x_0=-6,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}=6y_0=6,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_0^2}=o\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial y_0}=-3az=o,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_0\partial z_0}=o,\qquad \frac{\partial f}{\partial x_0\partial z_0}=-3ay=-3a$$

代入切線方程式

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}+z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z_0^2}+2yz\frac{\partial^2 f}{\partial y_0\partial z_0}+2xz\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\partial z_0}+2yx\frac{\partial^2 f}{\partial y_0\partial x_0}=o$$

中,得方程式

$$6y^2-6x^2=o,\ \text{即}\ y^2-x^2=o.$$

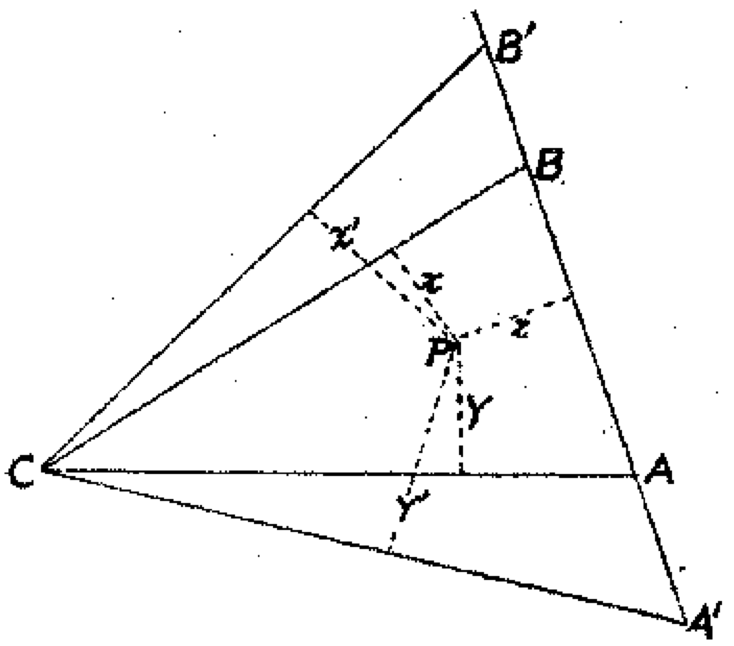
分解之得

$$y-x=o\ \text{及}\ x+y=o.$$

因此兩切線均爲實線各自分離.故該切點必爲結點.但切點 $(-1,\ 1,\ o)$ 爲無窮遠點.故卡氏葉形線 $x^3+y^3=3axy$, 有一個結點爲無窮遠點.

21. 虛特殊點.

設 $A\ B\ C$ 爲標準三角形.在 $A\ B$ 上任取兩點 A', B'. 今有一點 P 對於 $\Delta\ A\ B\ C$ 之三線坐標爲 $(x,\ y,\ z)$, 對於 $\Delta\ A'\ B'\ C$ 之三線坐標爲 $(x'\ y'\ z)$, 則 $x'=o$, $y'=o$ 對於 $\Delta\ A\ B\ C$ 之直線 $B'\ C$, $A'\ C$, 之方程式,而爲 x 與 y 之一次函數.



今若有同類之特殊點在 A', B'. 試將曲線書爲一個對於 $\Delta\ A'\ B'\ C$ 之三線坐標方程式,而有特殊點在 A', B' 者.若此特殊點 A' 及 B' 爲虛點,則直線 $A'\ C$ 及 $B'\ C$ 必爲虛線.但因曲線爲實線,故 $A'\ C$, $B'\ C$ 必爲相配虛線,即其方程式必爲 $x+iky=o$ 與 $x-iky=o$ 之形.此式中之 k 爲一個實常數.

因是若以 x', y' 之值代入曲線方程式中.而以新實常數

代替虛常數,則結果方程式必為一個實曲線,而在直線AB或$z=o$之上,有一對相配虛特殊點.

又若欲求一個曲線之卡氏方程式,則可書

$$z=Ax+By+C.$$

由是其結果方程式,必有一對虛特殊點,在下書直線之上,

$$Ax+By+C=o.$$

於此若虛特殊點,為無窮遠點,則可改書z為I. 但$I=o$即無窮遠線也.

吾人常遇有趣之例.卽無窮遠之虛特殊點,為無窮遠之虛圓點.於此若曲線之卡氏方程式中,有一對虛圓點在點A及B時,則可書x為$x+iy$, y為$x-iy$, I為常數,卽得.

22. 特殊直線.

關於直線之特殊性,有結切線,尖切線,逗留切線,重切線(卽雙切線), 多重切線等.茲不具論.

無理數之理論

蕭文燦

I. 緒論

1. 無理數發展之歷史. 在距今二千餘年前西臘之 Pythagorus 氏(約紀元前 582-500)已知無理數之存在.惟西臘時代之數學家皆視無理數爲無可理解之數而摒除於算術之外.但在印度之 Bhaskara(紀元 1114)其視無理數已不如西臘之嚴加區別,從實驗上已知其服從有理數之計算規律.歐氏幾何原本第五卷論一般比之理論第十卷論不可通約量 (Incommensurable Magnitudes) 卽論無理數.然歐氏所論僅限於兩不可通約綫分之比,蓋卽僅用規尺所能作得者亦卽僅限於平方根也.平方根不足以括盡無理數是不待言.惟以後千餘年皆將數認爲兩種之比.卽 Newton 氏(1642-1727)於其 Arithmetica Universalis 中所下數之定義仍爲兩任何量之比.蓋十六世紀之數學家其所知於無理數者並不比有理數爲多.其認爲無理數者開方根之某種及由歐氏幾何中之法則所得之極限位置.而一部分人士則相信整數之 n 次根而在兩繼續整數之 n 次根間者,非有理數.截至十六世紀其關於無理數之知識,只此而已,

自1637年Decartes氏發明解析幾何學,1684-7年Leibniz與Newton兩氏發明微積分學.數學家對此問題另得一綫曙光.蓋數之能應用於量爲解析幾何之一根本假定.而'數與量遂爲數學研究之兩不可分之對象,認爲有其數必有其量,有其量必有其數.'[1] 然此僅等於一假定,固未嘗加以證明.十七八世紀爲數學之昌明時期,而對於無理數之理論仍屬漠然.蓋自微積分發明以來,其同時及繼起之人,大都驚眩於其發展與應用,而未遑顧及其基礎.迄十八世紀末十九世紀初,風氣稍變.Euler,(瑞1707-1783) Lagrange(法1736-1813)時代數學有長足之進展,對於其基礎亦有重新估價之要求.其後學者輩出Gauss(德1777-1855) Cauchy(法1789-1857) Abel(挪1802-1829) Dirichlet(德1805-1859) Riemann(德1826-1866)諸氏繼起,數學基礎次第鞏固.Abel於1826年與Hansteen之書[2]有曰:"予將集中精力對於今日解析中流行之黑暗擴而淸之,……在高等解析中,僅有少數命題,嚴格證明,其餘多由特殊情,加以擴充.此種方法,誠屬驚人之詭辨."氏又於他處[3],有言:"在無限級數中僅有少數論證無須反對.二項定理卽無嚴格之證明.Taylor氏展開式,微積分之全般基礎亦然."此可見當時解析基礎之欠固而學者致力之勤.然對於癥結所在之無理數之理論猶未觸及也.

(1) 參觀Rusell, Principles of Mathematics (1903) Ch. XIX, 417.

(2) Abel, Œuvres, 2ᵉd, Vol, 2. p263 (3) abel, 前書257.

直至十九世紀中葉,1859年Weierstrass(德1815-1897)在柏林大學講授解析函數對於無理數之嚴格理論始有啓示.1871年Cantor[1]氏(德1845-1918),1872年Dedekind氏[2](1831-1916)各發表其關於無理數之論文,無理數之理論始明,而解析之基礎始固,Hein[3]與Méary[4]兩氏對於無理數雖亦有理論上之修正.然其功固未能與前三人比也.

然此諸人之動機如何?何以獨着眼於無理數之理論,其中經過亦可得而述.蓋微積分最初組織缺乏嚴格已如前敍.Canchy氏導入極限之概念與連續之概念,微積始趨於嚴密.其後Riemann氏發明其著名之積分概念;解析學乃得以嚴格之方法研究.然說明全解析學基礎之極限概念非藉助於幾何學的概念不爲功.夫取幾何概念以爲說明解析之助,未嘗不可.惟專賴於此,是豈非解析之基礎欠固之徵.吾人若一讀Dedekind氏於其'連續性與無理數'論文中之緒言,則其致思卽可見矣.蓋氏於Zürich之工業學校教授微積分之際,發現微積分之基礎甚非科學的.其言曰:當予說明變量之逼近於一定値之極限之概念時,特證明次之定理:

(1) Mathematische Annalen, 5 (1872) 127.

(2) Dedekind, Sbetigkeit und irrationale Zahlen (Braunschweig 1872)
英譯爲 Dedekind, Essays on Number (Checago 1901).

(3) Crell's Iaurnal, Vol LXXIV (1872).

(4) Nauvean Précis d'Analyse infinitesimale, Paris, 1872.

變數之不絕的連續增加而又不能超過一定值時,必趨於一極限.

惟其說明全用幾何的事實.對於初學者利用幾何的直觀固屬收効異常;爲時間經濟計亦未嘗不可偶用此法.然如此引入而構成之微積分決非科學的要求,而令人難以滿意者也. ………… 微積分學取連續之値之處,非常之多,而對於連續性之解釋則付缺如.最嚴密之微積分學講義於定理之證明須置其基礎於連續概念之上.然此則或暗示以幾何或逕用幾何之定理,而決未建立於純算術之上.如上述之定理或其同價値之定理皆爲微積分學之科學基礎.須不藉幾何而用純算術之證明,其基礎乃顚撲不破.……」

觀氏之言,可見前世紀末葉之算學家,對於無理數能構成其嚴密之理論,其動機乃在於'如何使微積學能脫離幾何而獨立'及'如何使數之連續性之概念不須直觀亦得說明'也.其方法雖異,用意與結果皆相同. Weierstrass 與 Cantor 兩氏乃將數視同一極限.不過 Cantor 氏係用滿足於 Cauchy 氏收斂條件之敍列以代 Weierstruss 無窮元素之混合其計算較便宜,雖 Cantor 之理論亦包含於 Weierstrass 理論之中.然 Cantor 實將 Weiestrass 者加以修正而更較便利者也. Dedekind 氏所論爲又一形式係用切斷(secation)之概念然兩者二而一一而二也.

2. 計算常能之要求與數之系統之推廣. 數之起源

乃由於該計一羣物體之個數.由一而二,二而三,繼續增一以至無窮,而自然數亦卽正整數生焉.有正整數則其間不能無結合.兩數相併是爲加,累加同數是爲乘,累乘同數是爲羃,由此諸種結合而得之結果仍爲正整數.換言之在正整數之系統中此諸種計算皆常常可能也.然有此結合其還原之要求必生.於是而有逆計算焉.加法之逆爲減,加法常能而減法不常能.卽 $a=x+b$ 之式必 $a>b$ 始能解.若 $a<b$ 則正整數系統中卽無此 x 存在.欲求此式恆成立,非另立一新數不爲功.於是負數生焉.乘法之逆爲除.乘法常能而除法不常能,卽 $a=bx$ 之方程式必 a 爲 b 之倍數乃能解,若 a 非 b 之倍數則整數中卽無此 x 存在.欲求此式常能解而分數生焉.合分數與整數組成有理數之系統.在有理數系統中,加減乘除四計算,無有不能之時也.羃法之逆卽爲開方爲對數,其所得之數不盡屬有理數卽方程式 $x^b=a$ 與 $a^x=b$ 非常常可解.今試舉一簡例而論,卽見有理數系統中無有是數.而開方在有理系統中非常常可能:

設求一非平方數之正整數 m 之平方根.此卽在有理數系統中無有此數.今若有,卽

設 $\sqrt{m}=p/q$ (p/q 最簡分數). 則 $p^2-mq^2=0$.

而合于 $\lambda^2<m<(\lambda+1)^2$ 之正整數 λ 必常存在.

則得 $\lambda q<p<(\lambda+1)q$.

今考次之恆等式:

$$(mq-\lambda p)^2-m(p-\lambda q)^2=(\lambda^2-m)(p^2-mq^2)=o$$

則可見 m 爲有理數 $(mq-\lambda p)/(p-\lambda q)$ 之平方根,然其分母小於 q. 是卽與 p/q 爲簡分數之假設相矛盾.可見有理數中無此數存在也.是不能不成一新數.卽無理數是也.惟無理數非完全皆爲不盡根數,凡超越數與大部分之對數皆屬焉.合無理數與有理數而統名之曰實數,則除負數開偶次方而外,在實數系統中加減乘除與乘方開方皆屬可能.

如此將數之領域.漸漸擴張使計算常常可能而變爲普遍性.是包含一原則名曰形式不變之原則 (principle of the permanence of forms) 爲 Peacock 氏首先所指出[(1)],而 Hankel 氏又從而詳論[(2)]之者也.卽數之概念之擴張須合於次列之四個要求.

(1) 某種計算所表之式卽含有未經擴張之新類之數,此新數不指定其意義,此式卽爲不可能.而所指定之意義卽須合於原式表示者.

(2) 依據(1)下一新類之數之定義.仍舊包含舊類之數於其中.

(3) 須證明舊類之數所有之計算規律,在新類之數仍舊成立.

(4) 在此新領域中須下一大小相等之定義,仍如原

(1) British Association Report for 1834; 又 Symbolical Algebra, Cambridge.

(2) 見氏之Theorie der komplexen Zahlsysteme, Leipzig,1867.

來之意義.

以下卽就無理數理論之各種分述之.

II.　有理數之性質.

1.　<u>有理數爲有序之集合.</u>　卽 a 與 b 兩有理數間必有下列之關係存在而只能有一存在。

$$a<b,\qquad a<b.\qquad a=b.$$

關於次序之性質包含有次之定律:

1.　$a=a.$

2.　$a=b.$ 則 $b=a.$

3.　$a=b,\ b=c,$ 則 $a=c.$

4.　$a\leqq b,\ b<c,$ 或 $a<b,\ b\leqq c$ 則 $a<c.$

2.　<u>算術之基本定律.</u>

(I) 加法.　1.　凡一對之數 $a,\ b.$ 有其對應之唯一第三數 c 名曰和者存在以 $a+b$ 表之.

2.　$a=a',\ b=b'$ 則 $a+b=a'+b'.$

3.　$a+b=b+a$ (交換律)

4.　$(a+b)+c=a+(b+c)$　(結合律).

5.　$a<b.$ 則 $a+c<b+c.$　(單調律).

(II) 減法.　凡一對之數 a 與 b 有其對應之唯一第三數 c 合於　$a+c=b.$

(III)乘法.　1.　凡一對數 $a,\ b$ 有其對應之唯一第

三數 c 名曰積者存在以 ab 表之.

2.　$a=a'$, $b=b'$ 則 $ab=a'b'$.

3.　$ab=ba$　(交換律).

4.　$(ab)c=a(bc)$　(結合律).

5.　$(a+b)c=ac+bc$　(分配律).

6.　$a<b$, 且 $c>o$ 則 $ac<bc$　(單調律)

(IV)除法. 凡 a, b 一對數若 a 不爲零則必有其對應之唯一第三數合于 $ac=b$.

(V)歸納法則. 此雖僅爲正整數之法則然亦計算之基本法則之一卽:

凡有關於正整數 n 之命題,若:(a)在此命題中所述之性質於 $n=p$ 時爲真,(b) $n=p$, $p+1$,… k 時皆爲真則凡一切之正整數皆真.

(VI) Eudoxus之定理. 亦稱 Archimedes 公理:若兩正有理數 a, b 必有一正整數 n 存在使合于 $nb>a$.

3.　有理數之稠密性. 卽兩有理數 a, b 之間有無窮多之有理數存在.由上節(VI)可得 $\frac{b-a}{n+1}=\delta$ 之正有理數 δ.則 n 個有理數

$$a+\delta,\quad a+2\delta,\ \cdots\cdots,\quad a+(n-1)\delta,\quad a+n\delta$$

皆在 a, b 之間.諸數之大于 a 固不待言.而其最大之數 $a+n\delta$ 亦必小於 b.　因

$$b-(a+n\delta)=b-a-\frac{n(b-a)}{n+1}=\frac{b-a}{n+1}>o.$$

也.然 n 為任意之正整數故其間之數實有任意之多,何况其 a, 與 $a+\delta$, … 之間又有任意之多乎?故兩有理數間所含之有理數實異常稠密.

吾人若將有理數與直綫上之點比較.任取一長為單位,由定點 O 量起,向右為正,向左為負凡量得綫分之長卽相當於有理數,其所在之點卽謂之有理點.如是則凡一有理數綫上卽有其相當之點.其稠密之性卽横敝綫上之有理點,異常稠密.任何極短之區間,其點數皆無窮之多.然此無窮稠密之點卽足以構成直綫乎?是又不然如前舉之 m 之平方根所相當之點卽非有理點.故完全有理點,不能組成一直綫.有理點間雖屬稠密而罅隙無窮.必將此無窮之罅隙充滿則不能成一直綫.合有理點與無理點乃構成一直綫.乃能謂凡數必相當於直綫上之點,凡直綫上之點必相當於一數也.

III Dedekind 氏之無理數理論.

1. 有理數之切斷. 有理數為有序之集合,已如前述.故任取一有理數 N,可將全有理數分成兩類(Class)卽下類 R_1 與上類 R_2.凡比 N 小之數皆置於 R_1 類中,凡比 N 大之數皆置於 R_2 類中,如是則凡在 R_1 類中之數皆小於 R_2 中者;凡在 R_2 中之數皆大於 R_1 中者.至於 N 之自身則令其屬於 R_1 或 R_2 均可.如屬於 R_1 則卽為下類中之最大數而此時上類

無最小數.蓋假令有最小數 γ_2 則 N 與 γ_2 間皆尙有無窮多之有理數.此等有理數皆比 N 大,應屬 R_2,而皆比 γ_2 小,故 γ_2 實非最小之數.如 N 屬於 R_2 則爲 R_2 中之最小數,此時 R_1 無最大數.凡將有理數分成如是之兩類,名曰切斷 (secation).而吾人可謂凡一有理數必有其對應之切斷存在.此切斷卽將有理數分成兩類,在第一類之數皆比第二類中者小,在第二類中之數皆比第一類者大.若第一類有最大數則第二類無最小數如第一類無最大數.則第二類有最小數.

然尙有有理數集之切斷其性質不同於上述者乎?例如將非平方數之正整數 m 之平方根作成切斷.卽將有理數分成兩類.凡其平方比 m 小之有理數以及 o 與負數令其屬於第一類.凡其平方比 m 大之有理數令其屬於第二類.則第一類無最大數而同時第二類無最小數.蓋若

令
$$y=\frac{x(x^2+3m)}{3x^2+m}$$

則
$$y-x=\frac{2x(m-x^2)}{3x^2+m}$$

及
$$y^2-m=\frac{(x^2-m)^3}{(3x^2+m)^2}.$$

若假定 x 爲屬於 R_1 之正數,則 $x^2<m$ 因而 $y>x$ 而又 $y^2<m$ 故 y 亦屬於 R_1.但若假定 x 屬於 R_2 則 $x^2>m$ 因而知 $y^2<x$, $y>o$, 而又 $y^2>m$. 故 y 亦屬於 R_2.所以如此之切斷並非相當於有理數.

於是得一新集合名曰實數,可定義如次:

凡有理數集 R 之切斷 (R_1, R_2), 其數 R 不屬於 R_1 必屬於 R_2 不屬於 R_2 卽屬於 R_1 而凡在 R_1 中之數常小於 R_2 中之數,在 R_2 中之數常小於 R_1 中之數.如此之切斷對應於一實數.

含於 R_1 中之數無有最大者,含於 R_2 之數無有最小者,對應於如斯切斷之實數名曰無理數.

R_1 中之數有最大數,或 R_2 中之數有最小之數如斯之切斷所對應之實數曰有理數.

然有 R_1 類有最大數而同時 R_2 類有最小數之切斷乎?是可決定其無.蓋設 R_1 之最大數爲 γ_1 而 R_2 之最小數 γ_2, 則 γ_1 與 γ_2 間有無窮多之有理數存在,此等數旣不屬於 R_1 又不屬於 R_2 是卽不合於凡數不屬於此類卽屬於彼類之假設.故決無是種之切斷.

2. 實數之大小. 依 Dedekind 方法所定義之實數集有次序之性質.卽每一實數在其集中有一定之級(rank).有兩實數於此可決定其級孰高孰低.硏究此種次序性卽以有理數之次序集爲基礎.今設有兩任意實數 n, n' 各爲兩切斷 (R_1, R_2), (R_1', R_2') 所決定.則有下之情形出現:

(1) 若凡在 R_1 中之數卽屬於 R'_1,而凡在 R_2 中之數卽屬於 R'_2.反之亦如之.則 (R_1, R_2) 與 (R'_1, R'_2) 爲全同,而 n, n' 恆等;卽 $n=n'$.

(2) 次設有唯一之有理數 $\gamma_1=\gamma_2'$ 係含於 R_1 中,但不含於 R'_1,故必含於 R'_2,則凡在 R'_1 中之數皆小於 γ_2',因而知凡在

R'_1中之數皆在R_1中.若γ_1爲含在R'_2中而大於R_1中其他之數之數惟一之數,則爲(R_1, R_2)所定之n卽爲有理數γ_1或γ'_2. R'_1中一切之數皆含於R_1中而又皆小於γ'_2,而凡在R'_2之中數除γ'_2而外皆大於γ'_2,因而知切斷(R'_1, R'_2)所定義之實數$n'=n$卽對應於有理數$\gamma'_2=\gamma_1$.此兩切斷實完全相同,其所異者僅$\gamma_1=\gamma'_2$之一數,蓋γ_1視爲(R_1, R_2)切斷中R_1之最大數,而γ'_2則視爲$(R'_1\ R'_2)$中屬於R'_2之最小數也.

(3)若有兩不同之數屬於R_1而不屬於R'_1,則卽有無窮多之數亦屬於R_1而不屬於R'_1,蓋兩有理數之間尙有無窮多之有理存在也.此時則(R_1, R_2)所定義之n小於(R'_1, R'_2)所定義之n'.若有兩不同之數屬於R_2而不屬於R'_2,則n大於n'.

吾人更不難證明$n>n'$及$n'>n''$則$n>n''$.故實數排列之次序實同於有理數.而前在II, I,中所舉有理數次序之定律皆可用於實數之全體.

3.　實數之性質.

(1)若$\alpha>\beta$,而$\beta>\gamma$則$\alpha>\gamma$.

(2)任兩實數間必有無窮多之實數存在.今分論如次:

(a)兩實數α, α'間有無窮多之有理數.　若α與α'爲兩有理數,固不待言.今假定α爲有理數α'爲無理數,且設$\alpha>\alpha'$.設α'爲(A'_1, A'_2)所定義之數,則有理數α必在A'_2之中,而A'_2無最小數,故必有無窮多小於α之數存在.此無窮多

之數卽在 α' 與 α 之間.若無理數 α' 大於有理數 α 亦同樣證之.

若 α 與 α' 皆爲無理數.設 α 爲 (A_1, A_2) 所定義.α' 爲$(A'_1A'_2)$ 所定義.且設 $\alpha>\alpha'$.則 A_1 中有無窮多之數含於 A'_2.此等數皆小於 α 而大於 α'.

(b)兩實數間有無窮多之無理數. 設 α 與 α' 爲兩實數且設 $\alpha<\alpha'$. 任取兩理數 β 與 β', 使如 $\alpha<\beta<\beta'<\alpha'$. 若吾人能證 β 與 β 間有一無理數則此定理卽證明矣.設 i 爲一無理數,若其不在 β 與 β' 之間.吾人能取得兩有理數 m 與 n 使如 $m<i<n$ 而又 $(n-m)<(\beta'-\beta)$. 如此 $\beta-m+i$ 爲無理數而又在 β 與 β' 之間矣.

(3)若 α 爲固定之實數.則能將全實數分成兩類 $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ 使 $\bar{R}_1$ 中所含之一切實數皆小於 α, 而 $\bar{R}_2$ 中所含之一切實數皆大於 α. 至 α 之自身或令其屬於 $\bar{R}_1$, 或 $\bar{R}_2$. 如爲前者則爲 $\bar{R}_1$ 之最大數,爲後數者則爲 $\bar{R}_2$ 中之最小數.

(4)若將實數集分成 $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ 兩類,使凡任 $\bar{R}_1$ 中之數皆小於 $\bar{R}_2$ 中者,凡在 $\bar{R}_2$ 中之數皆大於 $\bar{R}_1$ 中者.則此切斷產生一實數,亦只能產生一實數.

此不難證明.吾人易見實數集之切斷 $(\bar{R}_1, \bar{R}_2)$ 卽有理數集所定之切斷 (R_1, R_2).蓋只須凡屬於 $\bar{R}_1$ 中之有理數令其全屬於 R_1 凡屬於 $\bar{R}_2$ 中之有理數令其全屬於 R_2 卽得也.

設 N 爲切斷 (R_1R_2) 所定義之實數,而 N' 乃異於 N 之實數

爲切斷 (R'_1, R'_2) 所定者.則必有一數 n 僅屬於 R_1 或 R'_1.如 $N' < N$ 則 n 屬於 R_1 故其對應之實數 n 亦屬於 R_1.因 $N' < n$ 故 N' 亦屬於 R_1.同樣若 $N' > N$, 能證明 N' 屬於 R_2.由是可知凡異於 N 之數不屬於 R_1 卽屬於 R_2.蓋依其小於 N 則屬於 R_1, 大於 N 則屬於 R_2 也.如是則 N 或爲 R_1 之最大數或爲 R_2 之最小數.而 (R_1, R_2) 之切斷僅得此一數也明甚.

4.　實數之四則.　實數之性質既明從而得定義其加減乘除之意義.而此等定義,實將有理數之加減乘除包括於其中,其一切之定律仍然得以實用.

設二實數 α 與 β 乃下之有理數之切斷所定義:

$$\alpha = (A_1, A_2), \quad \beta = (B_1, B_2). \tag{1}$$

設屬於 A_1, A_2, B_1, B_2 之有理數各爲 a_1, a_2, b_1, b_2 則依切斷之性質能得

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 < a_2, & a_2 - a_1 > \frac{\delta}{2} \\ b_1 < b_2, & b_2 - b_1 > \frac{\delta}{2} \end{array}\right\} (\delta \text{ 爲任意小}) \tag{2}$$

由此可見

$$a_1 + b_1 < a_2 + b_2 \tag{3}$$

$$(a_2 + b_2) - (a_1 + b_1) < \delta \tag{4}$$

由(3)可知凡在 A_1 之有理數與在 B_1 之有理數所配合之和,之 $A_1 + B_1$ 集比在 A_2 之有理數與在 B_2 之有理數所配合之和之 $A_2 + B_2$ 集小而由(4)又可知在 $A_1 + B_1$ 集中與在 A_2+B_2

集中之有理數其差可小至於任何小.由是實能作成一切斷 $(A_1+B_1,\ A_2+B_2)$ 此切斷卽可定義爲(1)所表之 α 與 β 之和.故

$$\alpha+\beta=(A_1+B_1,\ A_2+B_2) \tag{5}$$

依上之論究,乘法之定義實可定爲

$$\alpha\beta=(A_1 B_1,\ A_2 B_2) \tag{6}$$

蓋

$$a_1 b_1 < a_2 b_2 \tag{3'}$$

之成立不難自明.而在 $A_1, A_2, B_1, B_2,$ 中容易選得 a_1, a_2, b_1, b_2 使

$$b_1(a_2-a_1)<\frac{\delta}{2} \quad 與 \quad a_2(b_2-b_1)<\frac{\delta}{2}$$

之關係成立.則由

$$a_2(b_2-b_1)+b_1(a_2-a_1)<\delta$$

而知

$$a_2 b_2 - a_1 b_1 < \delta \tag{4'}$$

能成立.由(3')與(4')則 $(A_1 B_1,\ A_2 B_2)$ 之切斷成立也甚明.而此切斷卽爲乘積 $\alpha\beta$.

由此定義之加法乘法,對於前在 II 中所舉之定律皆能成立,不難證驗.蓋組織 A_1+B_1, 與 A_2+B_2, 與 $A_2 B_2$ 皆爲有理數此等定律固對於有理數成立者也.

加法與乘法之定義旣下.今進而論其逆計算之減法與除法.減法之意義爲

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$$

故只須將 $-\beta$ 之定義作成則減法卽變爲加法矣.

因　$b_1 < b_2$　則　$-b_2 < -b_1$

故$-\beta$實可視為切斷$(-B_2, -B_1)$所定義.因得

$$-\beta=(-B_2, -B_1) \tag{6}$$

由是即可將$\alpha-\beta$定義為

$$\alpha-\beta=(A_1-B_2, A_2-B_1) \tag{7}$$

又因　　$b_1<b_2$　則　$\frac{1}{b_2}<\frac{1}{b_1}$

故$\frac{1}{\beta}$之定義可下如

$$\frac{1}{\beta}=\left(\frac{1}{B_2}, \frac{1}{B_1}\right) \tag{8}$$

設α, β俱為正則因

$$\alpha\div\beta=\alpha\times\frac{1}{\beta}$$

故得除法之定義

$$\alpha\div\beta=\alpha\times\frac{1}{\beta}$$

$$=(A_1, A_2)\times\left(\frac{1}{B_2}, \frac{1}{B_1}\right)$$

$$\alpha\div\beta=\left(\frac{A_1}{B_2}, \frac{A_2}{B_1}\right) \tag{9}$$

IV.　Cantor氏之無理數理論.

1.　正則敍列. Cantor氏無理數理論乃賴於無限昇集合(Infinite ascending aggrregates)或收斂敍列(Convergent sequence)之使用.故將正則敍列(regular sequence)之定義與其重要之性質先敍於下:

定義1.　若有有理數之無限集合

$$a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots, a_n$$

其元素與正整數有一一對應之關係者名曰敍列,簡記為

$\{a_n\}$.

定義2. 有理數敍列 $\{a_n\}$ 若任意指定一正數 ε, 而有正整數m存在,使凡於 $n>m$ 時

$$|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon, \qquad p = 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

之關係成立者,則謂 $\{a_n\}$ 爲收斂.收斂叙列亦名曰正則叙列.

定義3. 叙列各元素其絕對值不能超過於定值者謂之爲有界叙列 (bound sequence).

定義4. 若叙列 $\{a_n\}$ 常常 $a_n \geqq a_{n+1}$ 或 $a_n \leqq a_{n+1}$ 則謂爲單調叙列. (Monotonic sequence).

定理1. 凡收斂叙列必能選得一任意正數 ε 使凡於 $n>m$ 時 $|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon \qquad p=1, 2, 3\cdots\cdots$

定理2. 凡收斂叙列只能收斂於一極限.

定理3. 凡正則叙列爲有界.

定理4. 凡正則叙列不收斂於零則其元素自某個而後必皆爲正,或負.

定理5. 凡有界單調叙列皆收斂.

上之定理爲節省篇幅計,未能一一證明.然其證明皆甚簡.

2. Cantor 之實數定義. Cantor 氏理論之要素,乃假定每一有理數之正則叙列,必能決定唯一之物,名曰實數者存在.即凡一有理數之正則叙列,皆决定一實數,而此實

數卽可視爲此叙列所表示.故實數集中之任何元素,皆不過視爲表示收斂叙列之一符號而已.實數集中含有一羣之物其性質與有理數之次序集相類似.每一有理數皆對應於某一實數;而在有理數集中兩有理數之次序關係,與其在新集合實數集中兩對應實數之次序關係實相同.

然一正則叙列固僅決定一數,而一數則有許多之叙列可以表示之如正則叙列 $1, 1, 1, 1, \cdots\cdots$

與叙列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots\cdots\cdots$

實皆定義 1 也.又有理數之正則叙列其決定之實數,不僅爲有理數,尚有非有理數之新數含於其中,今將前舉非平方數之正整數 m 之平根之數爲例以釋之.吾人甚易求得合於

$$a_1^2 < m < (a_1+1)^2$$

之正整數 a_1. 由

$$a_1+\frac{1}{10}, \quad a_1+\frac{2}{10}, \quad a_1+\frac{3}{10}, \cdots\cdots, a_1+\frac{9}{10}$$

九數中將其平方小於 m 之數,而其次一數之平方卽大於 m 之數表爲 a_2. 設

$$a_2=a_1+\frac{\alpha_1}{10} \quad 則 \quad a_2^2<m<\left(a_2+\frac{1}{10}\right)^2.$$

再由 $a_2+\frac{1}{10^2}, \quad a_2+\frac{2}{10^2}, \cdots\cdots, \quad a_2+\frac{9}{10^2}$

諸數中取其平方小於 m 其次一數之平方大於 m 者爲 a_3.

設 $a_3=a_2+\frac{\alpha_2}{10^2}$ 則 $a_3^2<m<\left(a_3+\frac{1}{10^2}\right)^2.$

如斯繼續求之可得一有理數之無限叙列

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\quad a_n$$

此無限敘列 $\{a_n\}$ 爲有界單調增加敘列.依定理 5 必收斂,故爲一正則敘列.此正則敘列即作爲表示 m 之平方根之數.然此數並非有理數已如前證.故視凡正則敘列皆表一數.此數之概念非加擴充不可,即非加入一新類之數不可.此新數即名曰無理數.合無理數與有理數統稱曰實數.如此所定義之實數實包有理數於其中.其性質及大小可得而論.惟有理數與無理數之區別不如 Dedekind 氏之理論之易爲判明.

3. 實數之大小. 設 $\alpha=\{a_n\}$, $\beta=\{b_n\}$ 若於

$$n>m \text{ 時 } \quad |a_{n+p}-b_{n+p}|<\varepsilon, \qquad p=1, 2, 3, \cdots\cdots$$

亦即 $\lim(a_n-b_n)=o$ 時,

謂爲相等.如記 $\alpha=\beta$.

若於 $n>m$ 之一切值而得

$$a_{n+p}-b_{n+p}>M>o, \quad p=1, 2, 3, \cdots\cdots$$

謂 α 大於 β. 如記 $\alpha>\beta$.

若於凡 $n>m$ 之時而得

$$b_{n+p}-a_{n+p}>M>o$$

或 $$a_{n+p}-b_{n+p}<-M$$

則謂 $\alpha<\beta$.

由此易見若三實數 $\alpha<\beta$, $\beta<\gamma$ 則 $\alpha<\gamma$. 而關於 II 中所述之次序定律在實數系統中皆能應用.故實數亦爲次序集

合.

4. 實數之四則. (i) 加法. 設 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots\cdots)$, $\beta=(b_1, b_2, \cdots\cdots$ 則加法可定義爲:

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,\quad a_2+b_2\cdots\cdots). \tag{1}$$

此只須證明 $\quad a_1+b_1,\quad a_2+b_2,\quad a_3+b_3, \cdots\cdots a_n+b_n, \cdots\cdots \quad (2)$

爲正則敘列則足矣,因 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 皆 正則敘列.則

$$\text{凡 } n>m \text{ 之時}\quad |a_n-a_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{2}\quad \varepsilon>o\quad p=1,2,3,\cdots\cdots(3)$$

$$u>m\qquad |b_n-b_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{2}\quad \varepsilon>o\quad p=1,2,3,\cdots\cdots(4)$$

(3)(4)兩式中之 m 若取得甚大則可同時成立,不難明瞭.

今

$$\begin{aligned}|(a_n+b_n)-(a_{n+p}+b_{n+p})| &= |(a_n-a_{n+p})+(b_n-b_{n+p})| \\ &\leqq |a_n-a_{n+p}|+|b_n-b_{n+p}| \\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

故(2)爲正則敘列也甚明.此定義如 α 與 β 爲有理數亦能合用自不待言.而凡在 II 中所舉加法之定律皆能成立亦不難證驗.今僅舉一例以概其餘.

若 $\quad\beta>\gamma$ 則 $\alpha+\beta>\alpha+\gamma$.

因 $\quad\beta>\gamma$ 則必有正有理數 γ 合於下式者存在:

$$b_n>c_n+\gamma. \qquad n>m$$

兩邊加 a_n 則 $\quad a_n+b_n>a_n+c_n+\gamma$

$$\therefore\quad (a_n+b_n)-(a_n+c_n)>\gamma$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta>\alpha+\gamma.$$

至於若 $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$ 則 $\beta=\gamma$. 等等自易推得.

(ii) 減法. 減法爲加法之逆即求滿足於

$$\alpha=\beta+\xi \tag{5}$$

之 ξ 是也.此至多只能有一 ξ 如有第二數

$$\alpha=\beta+\eta$$

則因 $\beta+\xi=\beta+\eta$ 而知 $\xi=\eta$.

吾人今將減法定義爲

$$\xi=\alpha-\beta=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3,\ \cdots\cdots) \tag{6}$$

蓋如前不難證明叙列

$$a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3,\ \cdots\cdots$$

爲正則叙列,且又易證滿足於(5).

因

$$\beta+\xi=(b_1,\ b_2,\ b_3,\cdots)+(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\cdots)$$

$$=(b_1+a_1-b_1,\ b_2+a_2-b_2,\ b_3+a_3-b_3,\cdots)$$

$$=(a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots)=\alpha.$$

(iii) 乘法. 今將 α 乘 β 之積定義爲

$$\alpha\beta=(a_1b_1,\ a_2b_2,\ a_3b_3,\cdots\cdots). \tag{7}$$

此亦只須證明 $a_1b_1,\ a_2b_2,\ a_3b_3\cdots\cdots\cdots$ (8)

爲正則收斂叙列卽足.

設 ε 爲任意小之正數由 §1.定理 3. 可知

$$|a_n|,\ |b_n|<M,\qquad n>m$$

又因 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 爲正則叙列故能得

$$n>m, \qquad |a_n-a_{n+p}|, \qquad |b_n-b_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

令 $$d_n=a_n b_n-a_{n+p} b_{n+p}=a_n(b_n-b_{n+p})+b_{n+p}(a_n-a_{n+p})$$

$$\therefore \quad d_n \leqq |a_n|\,|b_n-b_{n+p}|+|b_{n+p}|\,|a_n-a_{n+p}|$$

$$<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\frac{\varepsilon}{2M}.$$

$$\therefore \quad d_n<\varepsilon.$$

因而知(8)爲正則敘列.

至於關於乘法之諸定律之成立自易檢證.

(iv) 除法. 以 β 除 α 之商乃合於

$$\alpha=\beta\xi \tag{9}$$

之 ξ. 此時 β 不能爲 o. 因 o 不能爲除數也.

今先證明 $$\frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_2}{b_2}, \quad \frac{a_3}{b_3}, \quad \cdots\cdots \tag{10}$$

爲正則敘列.

因 $$\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+p}}{b_{n+p}}=\frac{a_n(b_{n+p}-b_n)+b_n(a_n-a_{n+p})}{b_n\, b_{n+p}}$$

但 $$|a_n|<M, \qquad n>m$$

$$A<|b_n|<B \qquad n>m$$

故 $$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+p}}{b_{n+p}}\right| \leqq \frac{|a_n|\,|b_{n+p}-b_n|+|b_n|\,|a_n-a_{n+p}|}{|b_n|\,|b_{n+p}|}$$

$$<\frac{M\,|b_{n+p}-b_n|+B\,|a_{n+p}-a_n|}{A^2}$$

$$<\varepsilon.$$

蓋因 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 爲正則敘列故能得

於 $n>m$ 時 $$|a_{n+p}-a_n|<\frac{\varepsilon A^2}{2B}, \quad |b_{n+p}-b_n|<\frac{\varepsilon A^2}{2M},$$

將此等値代入上式卽求得其結果.

(10)既爲正則叙列故能定義一數

$$\xi=\left(\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ \cdots\cdots\cdots\right)$$

因

$$\beta\cdot\xi=(b_1,\,b_2,\,b_3,\,\cdots\cdots)\left(\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ \cdots\cdots\cdots\right)$$

$$=(a_1,\,a_2,\,a_3,\,\cdots\cdots)=\alpha.$$

故將除法之定義定爲

$$\xi=\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ \cdots\cdots\cdots\right) \tag{10}$$

加減乘除之定義既定,由此可引申而論其乘方,等等.

Cantor 氏之理論與Dedekind氏之理論其形雖異其實則同今於證明其相同之先再述另一形式之理論於次.

V. 應用Weierstrass氏分割定理之無理數理論.

1. Weierstrass氏之分割定理. 此處之理論係用 Weierstrass 氏分割定理以代 Cantor 氏理論中之叙列與Dedekind氏理論中之切斷.Weierstrass之分割定理係一節段分割成一組小節段,而次一節段卽包含於前一節段之中.如斯一個包一個以至無窮,其終只含一點.此實含有兩單調叙列,一爲增加者一爲減少者.今爲叙述方便特引下列一名詞:

定義: 設有單調增加叙列(x_n)與單調減少叙列(y_n)於每n皆滿足於 (i) $x_n<y_n$ 且 (ii) $y_n-x_n=d_n\to o$ 則謂爲組成一節段層(A Nest intervals).* 其第n個節段乃由x_n至y_n其長爲d_n,此節

* 德文爲 Intervallenschtelung. 凡一組同類之物較小者包於較大者中卽謂形成一 nest. 此處之 nest 一字且又加入容量漸漸縮小而最終小至於零之意,今暫譯爲節段層,然實不能合此諸義.

段層之自身以(J_n)或$(x_n|y_n)$表之.如(x_n), (y_n)之元素皆爲有理値則名爲有理値之節段′.

定理. 所設任一節段層至多只有一s點屬之.卽滿足於不等式　$x_n \leqq s \leqq y_n$　只有一s.

此卽Weierstrass之分割定理.

證明. 設s之外尙有一不同之數s'則

$$x_n \leqq s \leqq y_n, \qquad x_n \leqq s' \leqq y_n \ (\text{於每 } n)$$

皆同時成立.但

$$-y_n \leqq -s' \leqq -x_n$$

則　$$-d_n \leqq s-s' \leqq d_n \quad \text{或} \quad |s-s'| \leqq d_n$$

但因$d_n \longrightarrow o$　故　s不能異於s'.

節段層旣有此性質,故吾人可視數s爲(J_n)層所定義.卽(J_n)與s可視爲相等之兩符號書如

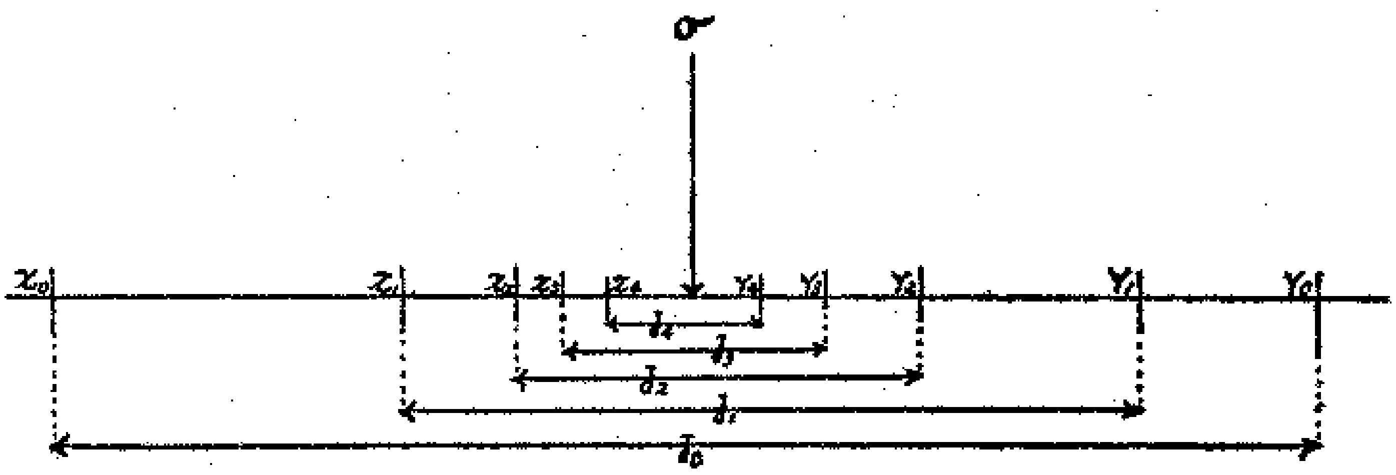
$$(J_n)=s \qquad \text{或} \qquad (x_n \mid y_n)=s.$$

故不僅謂"(J_n)定義一數s"且可視"(J_n)爲數s之又一記號."或逕謂"(J_n)爲數s"猶之乎0.333……與$\frac{1}{3}$實表示一數之兩種記法而已.

此種(J_n)所定義之數如在前章所論不難驗證其非盡屬有理數.如用有理數不能表$x^2=2$之x之眞値而用(J_n)卽可以表其眞値此眞値自非有理數.特名之曰無理數.(J_n)或$(x_n|y_n)$不僅表示無理數,其能表示有理數自不待言.故(J_n)所定義之數實爲實數.

在 Cantor 理論中用正則敘列以定義實數其中無理數與有理數之分別頗難辨明.而用 $(x_n|y_n)$ 以定義實數則有理數與無理數之分別易見.蓋若 $(x_n|y_n)$ 所定義者爲無理數則因 (x_n) 與 (y_n) 之元素吾人皆用有理數之故.一切之 x_n 與 y_n 皆不能洽取得 $(x_n|y_n)$ 所表之數之真値.若 $(x_n|y_n)$ 所表之數爲有理數則 x_n 或 y_n 之元素必有取得其真值者.

又此種理論其用有理敘列 (x_n) 與 (y_n) 實同於 Cantor 氏之理論而 $x_n\leqq y_n$ 之性質又同於 Dedekind 氏之理論也.今將 (J_n) 之圖示表於次.再將由此理論所下之大小及四則之定義依次述之則此諸種理論間之關係自易見也.



2.　實數之大小.

等: *A*.　定理.　若 $(x_n|y_n)=s$ 與 $(x'_n|y'_n)=s'$ 爲兩有理値之節段層.則若且僅若,於一切之 n, 有

$$x_n\leqq y_n \quad 及 \quad x_n'\leqq y'_n$$

而外又有

$$x' \leqq y_n \quad 及 \quad x_n\leqq y'_n$$

之關係者,則 $s = s'$.

以此定理爲基礎可下相等之定義如下:

B. 定義. 設任兩節段層 $\sigma=(x_n|y_n)$ 與 $\sigma'=(x'_n|y'_n)$ 若,且僅若(於每一 n)

$$x_n \leqq y'_n, \quad x' \geqq y_n$$

則謂爲相等.

不等: A. 定理. 若 $(x_n|y_n)=s$ 及 $(x'_n|y'_n)=s'$ 爲兩有理值之節段層,若且僅若

$x_n \leqq y'_n$ (於每 n) 但不 $x'_n \leqq y_n$ (於每 n)

卽至少有一 m $y_m < x'_m$. 則 $s < s'$.

B. 定義. 設任兩節段層 $\sigma=(x_n|y_n)$ 及 $\sigma'=(x'_n|y'_n)$ 若 $x_n \leqq y'_n$ (於每 n) 但不 $x'_n \leqq y_n$ (於每 n) 卽至少有一 m, $y_m < x'_m$, 則謂 $\sigma > \sigma'$.

3. 實數之四則.

加法: A 定理. 若 $(x_n|y_n)=s$, 及 $(x_n|y'_n)=s'$ 爲兩有理值之節段層.則 $(x_n+x'_n, y_n+y'_n)$ 亦爲一有理值之節段層且決定一數 $s+s'$.

B. 定義. 若 $(x_n|y_n)=\sigma$, 及 $(x'_n|y'_n)=\sigma'$ 爲兩節段層而 σ'' 乃表由此而引出之節段層 $(x_n+x'_n|y_n+y'_n)$, 則書如

$$\sigma'' = \sigma + \sigma'$$

而謂 σ'' 爲 σ 與 σ' 之和.

減法 A 定理. 若 $(x_n|y_n)=s$ 爲一有理值之節段層

則 $(-y_n|-x_n)$ 亦然,且決定一數 $-s$.

B 定義. 若 $\sigma=(x_n|y_n)$ 爲任一節段層而 σ' 表 $(-y_n|-x_n)$ 之節段層則書爲

$$\sigma' = -\sigma$$

而謂 σ' 爲 σ 之逆 (opposite).——兩節段層之差卽可視爲第一與第二之逆之和.

乘法. A. 定理. 若 $(x_n|y_n)$ 與 $(x'_n|y'_n)$ 爲任兩節段層且凡每節段之終點皆爲正(或至少有不爲負者),則 $(x_n x'_n|y_n y'_n)$ 亦一節段層;若前者爲有理値者且各等於 s, s', 則後者亦一有理値者而決定一數 $s s'$.

B. 定義. 若 $(x_n|y_n)=\sigma$ 與 $(x'_n|y'_n)=\sigma'$ 爲任兩正節段層卽其終點皆爲正者,且 σ'' 表由此而導出之節段層 $(x_n x'_n|y_n y'_n)$, 則書

$$\sigma'' = \sigma. \sigma'$$

而名 σ'' 爲 σ 與 σ' 之積.

吾人若將此定義稍加修正, σ 與 σ' 有爲負或零之乘法定義亦不難下得.

除法: A. 定理. 若 $(x_n|y_n)$ 爲節段之終點皆爲正之有理値的正節段層,則 $\left(\frac{1}{y_n}\middle|\frac{1}{x_n}\right)$ 亦然,如前者等於 s 則後者卽決定一數 $\frac{1}{s}$.

B. 定義. 若 $(x_n|y_n)=\sigma$ 爲一正節段層而 σ 表 $\left(\frac{1}{y_n}\middle|\frac{1}{x_n}\right)$, 則書

$$\sigma' = \frac{1}{\sigma}$$

而 σ' 為 σ 之倒數. 除法即可視為第一數與第二數之倒數之積.

至於負節段層之除法亦可定義.惟第二數須不為零.

由此結果可見由有理節段層所導出之數之定義實合於次序之性質,而其結合之加減乘除及其定律.在此新定義之數亦同於有理數且有理數亦包括於此新領域中.故此種無理數之理論與前兩者其結果相同.

4. 三種理論之完全相等. 無理數理論雖有上述三種形式.然其所定義之數實同一物.且皆由有理數引申而出,蓋所用以切斷者為有數數之切斷,叙列為有理數之叙列,節段層為有理值之節段層.故其結果能補足有理數集之不足,而將有理數數之系統擴張成實數之系統.且亦能服從有理數之次序性及其四則與定律,且將有理數包括於實數中.其在實數中不同於有理數之新數,即無理數.

至於三種形式所定義之物何以皆相同.吾人若一回溯上述之理論不難明瞭.蓋節段層 $(x_n \mid y_n)$ 為叙列單調增加叙列 (x_n) 與單調減少叙列 (y_n) 所組成.而又 $x_n < y_n$. 換言之無論 (x_n) 或 (y_n) 皆正則叙列也.同一正則叙列只能收斂於一極限.故 $(x_n \mid y_n)$ 所定義之數 s,實與正則叙列 (x_n) 或 (y_n) 所定義之 s 為同一數.反之或有正則叙列 $\{a_n\}$ 決定一數 s 吾人不難作得一節段層 $(a_n \mid b_n)$ 使其所表為一數.故節段層所

定義者實與正則敘列所定義之數同一物也.

節段層 $(x_n|y_n)$ 之性質 (i) 爲 $x_n<y_n$, (ii) 爲 $y_n-x_n=d_n\longrightarrow o$. 故實際卽表一切斷而切斷所表之性質亦自能組成一節段層.故二者實二而一,一而二也.

節段層 $(x_n|y_n)$ 所表之數卽卽同於正則敘列 $\{a_n\}$ 所表之數.又 $(x_n|y_n)$ 所表之數又同於切斷 (R_1, R_2) 所表之數,則正則敘列所表之數與切斷所表之數必爲同一數,不煩待言而明.

VI. 實數之表示.

1. 以小數或根分數(radix-fraction)表實數. 表示實數常見之形爲小數或根分數.依 Cantor 氏之理論無盡小數(nonterminating decimal)可以有理數之收斂敘列表之.例如 π 以敘列

$$(3,\ 3{\cdot}1,\ 3{\cdot}141,\ 3{\cdot}1415,\ 3{\cdot}14159,\ 3{\cdot}141592,\cdots)$$

表之是也.至於用根分數表數則有下之一般定理.

凡非有理之正實數只能以一種根分數 n 之無盡級數表之,其根 γ 爲 $\geqq 2$ 之任何整數.

數 $o, \gamma, 2\gamma, 3\gamma, \cdots\cdots$ 其中小於 γN 之最大一數爲 $c_o\gamma$ (此自可爲 o). 如此則

$$\gamma N>c_o\gamma,\quad 而\quad <(c_o+1)\gamma,$$

由是
$$N=c_o+\frac{N_1}{\gamma}$$

其中之 N_1 乃小於 γ 之一正數.

同法能得

$$N_1 = c_1 + \frac{N_2}{\gamma}, \qquad N_2 = c_2 + \frac{N_3}{\gamma}, \cdots\cdots\cdots, \quad N_3 = c_n + \frac{N_{n+1}}{\gamma},$$

其中之 $N_2, N_3, \cdots\cdots N_{n+1}$ 皆 $<\gamma$. 所以

$$N = c_0 + \frac{c_1}{\gamma} + \frac{c_2}{\gamma^2} + \frac{c_3}{\gamma^3} + \cdots\cdots + \frac{c_n}{\gamma_n} + \frac{N_{n+1}}{\gamma_{n+1}},$$

其中之 $c_0, c_1, c_2 \cdots\cdots c_n$ 皆爲正整數或 O. 而 $o < N_{n+1} < \gamma$.

因 $$N - \left(c_0 + \frac{c_1}{\gamma} + \frac{c_2}{\gamma^2} + \cdots\cdots + \frac{c_n}{\gamma^n}\right) < \frac{1}{\gamma^n}$$

且 $\frac{1}{\gamma^n}$ 之極限爲零.故此敘列之第 n 個元素

$$c_0 + \frac{c_1}{\gamma} + \frac{c_2}{\gamma} + \frac{c_3}{\gamma_2} + \cdots + \frac{c_n}{\gamma^n},$$

爲收斂.卽表示實數 N. 卽

$$N = c_0 + \frac{c_1}{\gamma} + \frac{c_2}{\gamma^2} + \cdots + \frac{c_n}{\gamma^n} + \cdots\cdots\cdots$$

此卽 N 以無盡根分數表之.

若 N 爲有理數 $\frac{a}{b}$.(最簡分數). 則 $a = \alpha_0 b + \beta_0$, $\beta_0 < b$; 又 $\gamma\beta_0 = \alpha_1 b + \beta_1$, $\beta_1 < b$; $\gamma\beta_1 = \alpha_2 b + \beta_2, \cdots\cdots\cdots, \gamma\beta_{n-1} = \alpha_n b + \beta_n$ 其中之 $\beta_1\ \beta_2, \cdots\cdots \beta_n$ 皆小於 b.

若 β 之一爲 o 卽如 β_n 爲零.則

$$N = \frac{a}{b} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\gamma} + \frac{\alpha_2}{\gamma^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\gamma^n};$$

由此可知表 N 者爲有盡根分數,但此 β 僅含 γ 之一質因數.又吾人能以不盡之循環根分數代替此根分數之有盡級數.因若用 $\alpha_n - 1$ 以代 α_n 則

$$\gamma\beta_{n-1} = (\alpha_n - 1)b + b$$

以 b 代 β_n 之零,而

$$\gamma b=(\gamma-1)b+b;$$

如此則 β_n, β_{n+1}, …… 皆等於 b; 而 α_{n+1}, α_{n+2}, …… 皆等於 $\gamma-1$. 由是表 N 爲

$$N\equiv\frac{a}{b}=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{\gamma^1}+\frac{\alpha_2}{\gamma^2}+\cdots\quad+\frac{\alpha_n-1}{\gamma^n}+\frac{\gamma-1}{\gamma^{n+1}}+\frac{\gamma-1}{\gamma^{n+2}}+\cdots\cdots$$

故有理數在其最簡形之時,分母僅含 γ 之質因數者,能有兩種表示法.卽(1)根分數之有盡級數,(2)在某項之後其分子皆爲 $\gamma-1$ 之根分數之無盡級數.

在 β_1, β_2, …… β_n 無有一爲零之時此等數不出 $1, 2, 3, \cdots\cdots, b-1$ 之外.故必有重復之時.設 $\beta_n=\beta_{n+m}$ 則 $\beta_{n+1}=\beta_{n+m+1}$, $\beta_{n+2}=\beta_{n+m+2}$,

2. 以連分數表實數. 實數又可以無窮連分數表之.此分數可視爲其元素爲有盡連分數之集合.以無窮連分數表數乃 Legendre 所發明. 卽以

$$\frac{a_1}{b_1\pm}\ \frac{a_2}{b_2\pm}\ \frac{a_3}{b_3\pm}\ \cdots\cdots\frac{a_n}{b_n\pm}\ \cdots\cdots,$$

表數亦卽 n 個元素爲

$$\frac{a_1}{b_1\pm}\ \frac{a_2}{b_2\pm}\ \frac{a_3}{b_3\pm}\cdots\cdots\frac{a_n}{b_n}$$

之集合表數.若正整數 a_n, b_n 於每 n 皆 $b_n-a_n\geqq 1$ 時表示無理數.但於 $n\geqq m$ (m 爲定數)時 $b_n-a_n=1$ 有例外.卽凡在 $n>m$ 前之 $\frac{a_n}{b_n}$ 皆爲負則 $m=1$ 時此連分數收斂於 1, $m>1$ 時收斂於一有理數.

凡 e^x, $\tan x$, $\log x$, $\tan^{-1}x$, π 在 x 爲有理數時,爲無理,用此定

理卽能證明.

3. Cantor 氏之實數表示法. 若 $b, b', b'', \cdots\cdots$ 爲一組之正整數,而 q 乃任意擇定之數.若叙列 $1, b, bb', bb'b'', \cdots\cdots$ 由某項及其後之項數皆能用 q 整除則任一數 N 表成唯一之形如:

$$I+\frac{\lambda}{b}+\frac{\mu}{bb'}+\frac{\nu}{bb'b''}+\cdots\cdots$$

其中之 I 爲一整數 $\lambda, \mu, \nu, \cdots\cdots$ 乃合於

$$\lambda \leqq b-1, \quad \mu \leqq b'-1, \quad \nu \leqq b''-1, \cdots\cdots$$

之整數.且 N 若爲有理數則需由某項及其後之項凡 $\lambda, \mu, \nu \cdots\cdots$ 諸數皆須取可能之最高値.如此條件不滿足則 N 爲無理數.

例如. e 表爲

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots\cdots\cdots$$

卽無理數也.

此種表示之又一形其中之整數叙列 $b, b', b'', \cdots\cdots$ 由某特別元素而上爲週期的. 此時

$$\frac{\beta}{b}+\frac{\beta'}{bb'}+\frac{\beta''}{bb'b''}+\cdots\cdots$$

係表有理數之充要條件爲:叙列 $\beta, \beta' \beta''$ 自某項及其後之項爲週期的.此定理卽以根分數表數之一般者.

若 $b=2, \quad b'=3, \quad b''=4, \cdots\cdots$ 則吾人得一定理.卽能以

$$\frac{c_1}{2!}+\frac{c_2}{3!}+\frac{c_3}{4!}+\cdots\cdots \quad +\frac{c_n}{n!}+\cdots\cdots$$

表數.其中 $c_n \leqq n-1$. 若於由 n 之特値起,而爲 $c_n=n-1$ 則係

表有理數.

4. 以乘積表數. 此亦 Cantor 所與者. 若 $N>1$ 則能表成

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\left(1+\frac{1}{d}\right)\cdots\cdots$$

之形.其中之 a, b, c, 爲整數且合於下式者.

$$b\geqq a^2,\quad c\geqq b^2,\quad d\geqq c^2,\ \cdots\cdots$$

a 爲 $\frac{N}{N-1}$ 之整數部分之數. 若 $\frac{Na}{a+1}=B$, b 爲 $\frac{B}{B-1}$ 之整數部分;若 $\frac{Bb}{b+1}=C$, c 爲 $\frac{C}{C-1}$ 之整數部分

例如 $\sqrt{2}$ 表爲

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{17}\right)\left(1+\frac{1}{577}\right)\left(1+\frac{1}{665857}\right)\cdots\cdots$$

其中之 $17=2\cdot3^2-1$, $577=2\cdot17^2-1$, $665857=2\cdot577^2-1\cdots\cdots$

至於 N 爲有理與無理亦如下決定也.

設一數表爲

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdots\cdots$$

其中之 $c\geqq a^2$, $c\geqq b^2,\cdots\cdots$

而其 $a, b, c\cdots\cdots$ 皆爲正整數若敍列 $a, b, c,\cdots\cdots$ 由某項及其後之項每數皆爲前一數之平方者爲有理數.否則爲無理數.

VII 實數之連續

若 a_1, b_1 爲兩實數而 $a_1>b_1$,則必有兩實數 $a_2<b_2$ 在 a_2 與 b_1 之間而其差可至於任何小.即 $b_2-a_2<\varepsilon$, ε 表任意小之數.在 a_2, b_2 之間亦有 a_3, b_3 在其間,而 $a_3-b_3>\varepsilon'$.如此可繼續無窮,此

乃實數之一性質. Contor 氏命之曰連接 (connex). 即任兩數間有無窮之數存在即II前中所述之稠密性也.實數之集合亦有此連接之性故謂實數集無論何處皆稠密.

然此性質有理集既有之.則此兩種集合——有理與無理——其區別何在?

若 a_n 與 b_n 之差以 ε_n 表之.則敘列 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots \varepsilon_n, \cdots$ 其在某項之後必能小於任意小之 η. 則必有一實數 x 存在.此 x 乃大於 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$, 而小於 $b_1, b_2, \cdots$. 且此 x 為敘列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n \cdots)$ 或 $(b_1, b_2, \cdots, b_n \cdots)$ 之極限.故此即定義一切斷亦即形成一節段層.

若吾人限於有理數之領域如上述之 a, b 皆為有理,則上述之 x 即不能必其存在.

在實數之領域中.(a) 每一收斂敘列有一極限此極限即為屬於其領域中之一數.(b) 每一數皆為屬於其領域中之數所選成之敘列之極限.實數之領域即賦有 (a), (b) 之兩性質.特謂之曰完備性 (perfect) 故實數集為完備的.

有理數之領域有 (a) 性質但無 (b) 性質.故有理數集為不完備.

由 Dedekind 氏理論之觀點.實數集之完備性其所表之事實即凡實數之切斷只能對應於一實數,而一實數只能有一切斷對應之.換言之,由有理數之切斷對應於有理數之外,尚有對應於實數者.而實數之切斷,除對應於實數之外,

不能再有新種之數.故有理數集乃不完備的.

凡集合賦有稠密與完備兩性質者特名之曰連續統(Continuum).連續統一字在解析中常用之.實數集卽形成一連續統.與有理數集之重要區別卽有理數集不能形成之連續統.蓋重要之兩性質缺一故也.

故實數集特謂爲實數之連續統,或曰數連續 (Arithmatic Continuum).

數連續有其重要之連接與完備兩性質.在後一性質乃異常重要.蓋有此性質則在解析中適宜組成一計算之域.如在實變數函數論中,雖然連接性亦重要.然有連接性者固不僅實變數也.在昔卽因不將此性質重視故許多問題卽欠完滿之解決.

蓋自實數集爲連續統之理論明.夫然後連續之觀念乃得用數的解釋.吾人對於連續之概念多得之於直覺.時間乃連續的進行,空間爲連續的展開.以物體之墜下,河水之流行,無一不足助成連續之觀念.然連續之對於數之意義爲何?數對於連續之量之關涉如何?皆費幾多先哲之思慮.自連續統之概念組成.則凡連續之量皆可以數表之.如直綫,是也.蓋凡在直綫上之點皆對應於一數;而凡數皆對應於直綫上之點.而解析幾何中之基本假定乃成立.

參 考 書:

Habson, Theory of Functions of a Real Variable. I Ch. I.

Pierpont, Theory of Functions of a Real Variable I. Ch. I.

Townsend, Functions of Real Variables. Ch. I.

Carslaw, Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals. Ch. I.

Knopp, Theory and Applications of Infinite Series. Ch. I.

Bromwich, Theory of Infinite Series. App. I.

Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen; English translation in Dedekind's Essays on Number.

Cantor, Transfinite Numbers.

Pringsheim, Irrationalzahlon u. Knovergeng unendlicher Prozesse, Ene d, math, Wiss Bd I. Tl. I.

De La Vallée Poussin, Cours d'Analyse, 1, Introduction, 31.

Dini, Fondamenti per la Tevica delle Funzioni di Variabili Reali, §§1-9.

Goursat, Cours d'Analye, 1 (4° éd,) Ch. I.

Pringsheim, Vorlesungen über Zahlen-und Funktionenlebre, I. Absch. I Kap. I-III.

Stolz v. Gmeiner, Theoretische Arithmetik, Abth II. Absch VII.

Tannery, Introduction à la Théorie des Fonctions, 1 (2e ed) Ch. I.

Mangoldt, Einfuhrung in die höhere Mathematik, Vol. I. 2end ed.

Kowalewski, Grundzüge der Differential-und-Integralrechung.

A. Loewy, Lehrbuch der Algebra, Part 1.

Fine, College Algebra, Part 1.

林鶴一， 數之概念.

竹內端三， 極限論. 第一章

田島正一， 極限論， 第一章

中國麻去皮及膠之化學方法

魏 文 悌

中國麻之製成.為數千年相傳之舊法.其法可分為三步.(一)將麻幹割收.麻纖維從麻幹撕下.(二)黏着麻纖維上之粗皮用鈍刀刮去.(三)麻纖維上之膠質浸之於水.使其溶去.然後於日光下漂白.則得潔白之麻纖維.

自此項麻纖維傳入歐美後.歐美諸國紡織界各企業家.以麻為根生植物之一種,其種法及長成均甚易,且此項植物,不如棉等,易受虫傷害,其幹直長無枝,收獲量極佳,且收割之法甚簡單,便於使用機器,而其纖維卽存在於粗皮之下面,之各種長點.引其特別注意.然其結果,則麻纖維幾絕跡於紡織工業上所用之纖維.其理由則因積所研究之結果.製麻纖維去皮及膠不能使用機械.如用手工法.則以其工人之工資過高製成麻纖維,則必昂貴.而不能與較價廉之棉纖維或亞麻Linen纖維相競爭也.

但麻纖維,從麻幹撕下之手術甚為簡捷.如其去皮與膠能適用化學方法,則製麻纖維工業當能成功.而將來麻纖維將於織物界用纖維textile fiber 佔重大位置.

麻纖維對於普通酸類及普通鹽基類作用.極易損害.而

至於不可用.故以極淡之酸溶液或極淡之鹽基溶液與麻於普通氣壓煮之,則不獨皮及膠不能消去.同時麻纖維已傷損.如中性養化溶液,如以鹽酸溶液或硝酸溶液,或苛性鈉溶液等能使麻纖維變碎易折.又如碳酸鈉溶液或不變氫氧負電子之氫氧化鈣溶液 buffered solution of calcium hydroxide 能使麻纖維軟弱而失去伸引力.經許多之試驗麻去皮及膠.大約趨於化學方法不可能之結果.

但據 G. L. Carter 氏在 Louisiana State University 研究之結果.於本年四月報告美國化學會之纖維化學組,之所謂化學方法去麻皮及膠之可能.

Carter 氏作成一能抵壓之浸漬器 digester, 將於空氣內已乾之麻(皮及膠仍黏於纖維上)與安母尼亞溶液同置於器內煮之.雖在高溫及高壓之煮沸.而麻纖維不受若何之傷損.但其去皮之功用亦甚微.如於此安母尼亞液中加用鈉之化合物,如次硫酸鈉則其結果極佳今將其結果表之: (表載下頁).

麻纖維煮溫在百度以上.而煮液中有氫氧負電子存在.如使其試驗稍偏於氧化環境.則麻纖維受傷害矣.故煮液能完全使麻去皮而同時纖維又不受損者,厥爲如表中試驗號數 8 之情形爲極適宜.依試驗 8 所得之麻纖維於煮後.從浸漬器中取出.其皮已完全脫去.用水洗盡其凝附之液.然後置中性肥皂水中沸之.則麻纖維上所黏之膠質.經

此肥皂水煮沸後.完全溶去.如此所得之纖維再用重次氯酸鈉之稀溶液漂之則得潔白之麻纖維.而其纖維之引伸力.tensile strength 雖經此各項化學作用毫未受毫末傷害也.每百分重未去皮膠之乾麻可得六十分重之潔白麻纖維.如以每畝能產 1600 磅乾麻計當可製成 960 磅潔白麻纖維.故如Carter 氏法能適用於工業上則將來麻纖維必在纖維中佔重要部云.

Carter 氏試驗結果報告表

試驗號	用麻量	煮液量	煮液之成分	煮時	煮壓 lb/inch	結果
1	50 gm	2000gm	1% NH_3; 0.5% Na_2SO_3	1.5	60	皮不能完全溶去
2	50 gm	2000gm	1% NH_3 0.5% Na_2SO_3	4	60	同 上
3	50 gm	2000gm	2% NH_3; 2% Na_2SO_3	4	60	皮可完全溶消
4	50 gm	2000gm	1% NH_3; 2% Na_2SO_3	4	60	皮可完全溶消
5	50 gm	2000gm	2% NH_3; 1% Na_2SO_3	4	60	皮可完全溶消
6	50 gm	由試驗 4 遺下之液		4	60	同 上
7	50 gm	由試驗 5 遺下之液		4	60	同 上
8	50 gm	2000gm	2% NH_3; 0.5% Na_2SO_3	4	60	同 上
9	50 gm	2000gm	2% NH_3; 0.5% Na_2SO_3	4	60	皮不能完全消去
10	50 gm	2000gm	2% NH_3; 0.25% Na_2SO_3	6	60	皮不能完全消去
11	50 gm	2000gm	1% NH_3; 0.75% Na_2SO_3	4	60	皮不能完全消去
12	50 gm	2000gm	1% NH_3; 0.75% $(NH_4)_2SO_3$	4	60	皮毫不溶消

13	50 gm	2000gm	1% NH_3; 0.75% Na_2CO_3	4	60	皮能溶消但纖維受傷
14	50 gm	2000gm	1% NH_3; 0.75% $Na\ Cl$	4	60	皮毫不溶消
15	50 gm	2000gm	0.75% Na_2SO_3	4	60	皮毫不溶消
16	50 gm	2000gm	0.13% NH_3; 0.75% Na_2SO_3	4	60	皮不完全溶消
17	322gm	2000gm	1% NH_3; 0.75% Na_2SO_3	4	60	皮能完全溶消
18	17煮過之麻	2000gm	1% NH_3; 0.75% Na_2SO_3	4	60	皮能完全溶消

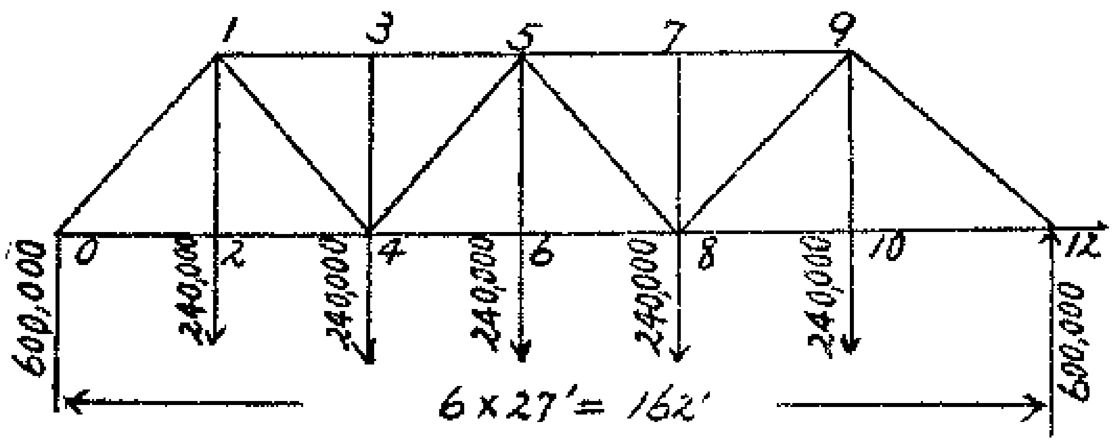
橋樑各點移動的尺寸的新算法

俞　忽

橋樑承載重量的時候,他的各點多離開原位.求各點移動的尺寸有二種方法.一種方法是算學的每求一點的移動的尺寸須算一遍.還有一種是圖解的方法,須畫 Williot-Mohr 圖,但是這個圖畫好之後,所有各點的移動的尺寸都可以從圖上量得.第一法比較麻煩,但是要精確一點.第二法却比較省事.故此從前要把各點移動的尺寸都算出的時候,總是用第二法.但是第二法要畫圖器械,沒有畫圖器械就不能動手.那麼我們可以不可以把第一法改良一下教他不要那們麻煩呢?可以的.因為要省說幾句話起見,我們就拿一個實例來算給大家看.大家跟着看下去之後,我們的方法也就明瞭了.

我們所用的實例是在 "Hool and Kinnes's Stresses in Framed Structures" 第 363 頁上面得來的.這個橋的尺寸和他所承的重量如第一圖.

我們先果設 0 點和 0-1 線是固定不能移動的,那麼我們須想像這個橋是在 0 和 1 這兩點上面生根的,仿佛是一座懸臂橋,在那右端的反動力(Reaction) 600,000 磅仿佛是在



第 一 圖

這座懸臂的右端的一個外力依照結構學原理,無論那一點 A 在無論那一個方向 A B 裏面移動的尺寸都可用下面的方程式求得;

$$\Delta=\Sigma\frac{Sl}{AE}u, \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

在這個方程式裏,

Δ = 移動的尺寸,

S = 各部份原有的緊張力,

l = 各部份的長度

A = 各部份的橫截面的面積

E = 各部份製成的材料的 Young 氏彈性係數

u = 各部份因在 A 點的 A B 方向裏面加了一個單位的力之後發生的緊張力,

Σ 是把所有各部份乘積 $\frac{Sl}{AE}u$ 加在一起的符號.現在如果要求得 1 至 12 點的向左移動和向下降落的尺寸,我們須在各點用一個單位向左的橫力,和向下的垂直力,然後把

各部份的 u 的數値求得再代入方程式(1)就得.各部份的 u 的數値見第一表.

我們把第一表仔細考査一下,就可發現 u 的數値有兩種,一種是獨有的,如3−4部份只在3點有垂直力的時候有一個等於 −1 的緊張力.一種是公有的,如4−5 部份在 6 點有垂直力的時候就有一個等於$-\frac{5}{4}$的緊張力,以後在 6 點的右方無論那一點有垂直力的時候,這個緊張力依舊存在.公有的緊張力又有兩種,一種是不增加的,如 4−5 部份上面的緊張力是;一種是增加的,如1 − 2 部份上面的緊張力是.現在我們拿 u_1 來代表增加的公有緊張力, u_2 來代表不增加的公有緊張力,u' 來代表獨有的緊張力.那麼各點的移動的尺寸都可用第二表算出.在這個表內,第二行和第八行都是從Hool and Kinne的書的裏面抄下來的.第三行,和第九至第十行是從第一表得來的.把第四行的數値一個一個的加起來就得第五行.把第十二行的數値一個一個的加起來就得第十三行.把第十三行和第十四行的數値一個一個的加起來以後再把第十五行的數値在相當的地方加入就得第十六行.第五行和第十六行的數値用 $1000/E$ 乘一乘就是各點向左移動和向下降落的尺寸.

但是從第二表得到的各點向左移動和向下降落的尺寸,只是和 ∘ 點與0-1線相對的尺寸.12 點實在是始終和 ∘ 點在一個水平面上面的,故此12 點向下降落的尺寸實等

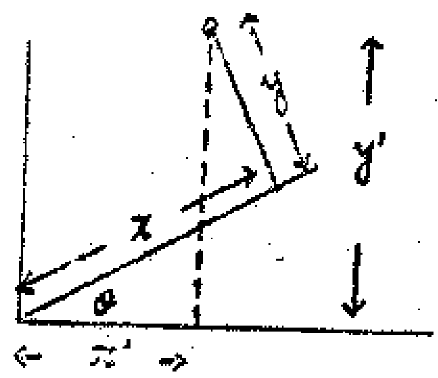
第一表　u 的數値

部份	一單位橫力的用力點											一單位垂直力的用力點									
	2	4	6	8	10	12	1	3	5	7	8	4	6	8	10	12	1	3	5	7	9
0−2	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0	0	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-2\times\frac{3}{4}$	$-3\times\frac{3}{4}$	$-4\times\frac{3}{4}$	$-5\times\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	$-2\times\frac{3}{4}$	$-3\times\frac{3}{4}$	$-4\times\frac{3}{4}$
2−4	0	+1	+1	+1	+1	+1	0	0	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-2\times\frac{3}{4}$	$-3\times\frac{3}{4}$	$-4\times\frac{3}{4}$	$-5\times\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	$-2\times\frac{3}{4}$	$-3\times\frac{3}{4}$	$-4\times\frac{4}{3}$
4−6	0	0	+1	+1	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-2\times\frac{3}{4}$	$-3\times\frac{3}{4}$	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-2\times\frac{4}{3}$
6−8	0	0	0	+1	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-2\times\frac{3}{4}$	$-3\times\frac{3}{4}$	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-2\times\frac{4}{3}$
8−10	0	0	0	0	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	0	0	0	0	0
10−12	0	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	0	0	0	0	0
1−3	0	0	0	0	0	0	0	+1	+1	+1	+1	0	$+\frac{3}{4}$	$+2\times\frac{3}{4}$	$+3\times\frac{3}{4}$	$+4\times\frac{3}{4}$	0	0	$+\frac{3}{4}$	$+2\times\frac{3}{4}$	$+3\times\frac{3}{4}$
3−5	0	0	0	0	0	0	0	0	+1	+1	+1	0	$+\frac{3}{4}$	$+2\times\frac{3}{4}$	$+3\times\frac{3}{4}$	$+4\times\frac{3}{4}$	0	0	$+\frac{3}{4}$	$+2\times\frac{3}{4}$	$+3\times\frac{4}{3}$
5−7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1	+1	0	0	0	$+\frac{3}{4}$	$+2\times\frac{3}{4}$	0	0	0	0	$+\frac{3}{4}$
7−9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1	0	0	0	$+\frac{3}{4}$	$+2\times\frac{3}{4}$	0	0	0	0	$+\frac{3}{4}$
0−1	0	0	0	0	0	0	$+\frac{5}{3}$	$+\frac{5}{3}$	$+\frac{5}{3}$	$+\frac{5}{3}$	$+\frac{5}{3}$	$+\frac{5}{4}$	$+2\times\frac{5}{4}$	$+3\times\frac{5}{4}$	$+4\times\frac{5}{4}$	$+5\times\frac{5}{4}$	0	$+\frac{5}{4}$	$+2\times\frac{5}{4}$	$+3\times\frac{5}{4}$	$+4\times\frac{5}{4}$
1−2	0	0	0	0	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	−2	−3	−4	−5	−6	−1	−2	−3	−4	−5
1−4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$+\frac{5}{4}$	$+\frac{5}{4}$	$+\frac{5}{4}$	$+\frac{5}{4}$	$+\frac{5}{4}$	0	$+\frac{5}{4}$	$+\frac{5}{4}$	$+\frac{5}{4}$	$+\frac{5}{4}$
3−4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0
4−5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	0	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$
5−6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0
5−8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$+\frac{5}{4}$	$+\frac{5}{4}$	$+\frac{5}{4}$	0	0	0	$+\frac{5}{4}$	$+\frac{5}{4}$
7−8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0
8−9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	0	0	0	0	$-\frac{5}{4}$
9−10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
9−12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{5}{4}$	0	0	0	0	0

第二表　各點和0點與0—1線相對的移動的尺寸

左偏的尺寸						降下的尺寸										
部份	$\frac{Sl}{A}$ 千磅英寸	u_2	$\frac{Sl}{A}u_2$ 千磅英寸	$\Sigma\frac{Sl}{A}u_2$ 千磅英寸	地點	部份	$\frac{Sl}{A}$ 千磅英寸	u_1	u_2	u'	$\frac{Sl}{A}u_1$ 千磅英寸	$\Sigma\frac{Sl}{A}u_1$ 千磅英寸	$\frac{Sl}{A}u_2$ 千磅英寸	$\frac{Sl}{A}u'$ 千磅英寸	$\Sigma\frac{Sl}{A}u$ 千磅英寸	地點
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)
0–2	+3,080	1	+3,080	+ 3,080	2	1–2	+4,610	−1			−4,610	−4,610			−4,610	1
2–4	+3,080	1	+3,080	+ 6,160	4	0–1	−4,820	$+\frac{5}{4}$			−6,025					
4–6	+3,150	1	+3,150	+ 9,310	6	0–2	+3,080	$-\frac{3}{4}$			−2,310					
6–8	+3,150	1	+3,150	+12,460	8	2–4	+3,080	$-\frac{3}{4}$			−2,310	−15,235				
8–10	+3,080	1	+3,080	+15,540	10	1–4	+5,125		$+\frac{5}{4}$				+6,406		−13,459	4
10–12	+3,080	1	+3,080	+18,620	12	3–4	0			−1				0	−13,459	3
						1–3	−3,380	$+\frac{3}{4}$			−2,535					
						3–5	−3,380	$+\frac{3}{4}$			−2,535	−20,325				
						4–5	−2,680		$-\frac{5}{4}$				+3,350		−30,434	5
						5–6	+4,610			+1				+4,610	−25,824	6
0–1	−4,820	$+\frac{5}{3}$	−8,033			4–6	+3,150	$-\frac{3}{4}$			−2,363					
1–2	+4,610	$-\frac{4}{3}$	−6,147	−14,180	1	6–8	+3,150	$-\frac{3}{4}$			−2,363	−25,051				
1–3	−3,380	1	−3,380	−17,560	3	5–8	−2,680		$+\frac{5}{4}$				−3,350		−58,835	8
3–5	−3,380	1	−3,380	−20,940	5	7–8	0			−1				0	−58,835	7
5–7	−3,380	1	−3,380	−24,320	7	5–7	−3,380	$+\frac{3}{4}$			−2,535					
7–9	−3,380	1	−3,380	−27,700	9	7–9	−3,380	$+\frac{3}{4}$			−2,535	−30,121				
						8–9	+5,125		$-\frac{5}{4}$				−6,406		−95,362	9
						9–10	+4,610			+1				+4,010	−90,752	10
						8–10	+3,080	$-\frac{3}{4}$			−2,310					
						10–12	+3,080	$-\frac{3}{4}$			−2,310	−34,741				
						9–12	+4,820		$+\frac{5}{4}$				−6,025		−136,128	12

於零.我們要得到各點移動的實在尺寸,須把全橋拿0點做中心向上旋轉一下等到12點轉到0點的水平面上面的時候纔算.譬如我們須轉過一個θ角方纔可以得到這種成績,那麼橋上無論那一點,如果他和0點的橫距離與縱距離在沒有旋轉以前是x與y在旋轉以後是x'與y'



的話,x與y和x'與y'有下列的關係

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta.$$

這一點因旋轉的緣故向左移動和向下降落的尺寸是$x'-x$和$y-y'$,或$\left\{-x(1-\cos\theta)-y\sin\theta\right\}$和$\left\{-x\sin\theta+y(1-\cos\theta)\right\}$.但$\theta$角很小,因此$(1-\cos\theta)$差不多就等於零,故此這一點向左移動和向下降落的尺寸簡直可說是$-y\sin\theta$和$-x\sin\theta$.

現在12點的x數值是162英尺12點經過這兩次移動之後仍逗遛在原來的水平面上面,既沒有上陞,也沒有下降,故此我們有

$$-162\times 12\sin\theta - 136,128\times\frac{1,000}{E} = o$$

或

$$-\sin\theta = 136,128\times 1,000/(162\times 12\times E)$$

第三表　各點實在移動的尺寸

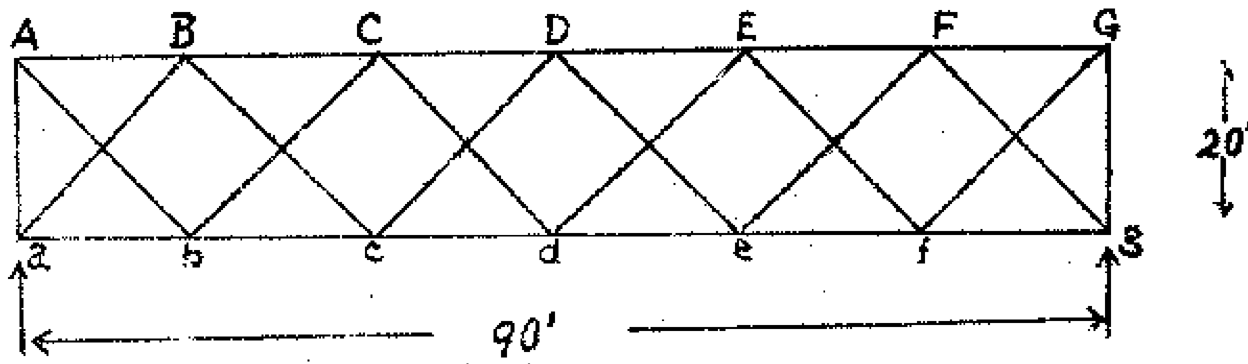
地點	相對的左偏尺寸 $\times\frac{E}{1,000}\frac{磅}{英寸^2}$	$-y\sin\theta$ $\times\frac{E}{1,000}\frac{磅}{英寸}$	實在的左偏尺寸 $\times\frac{E}{1,000}\frac{磅}{英寸^2}$	相對的降下尺寸 $\times\frac{E}{1,000}\frac{磅}{英寸}$	$-x\sin\theta$ $\times\frac{E}{1,000}\frac{磅}{英寸^2}$	實在的下降尺寸 $\times\frac{E}{1,000}\frac{磅}{英寸^2}$
2	＋ 3,080	0	＋ 3,080	0	22,688	22,688
4	＋ 6,160	0	＋ 6,160	－ 13,457	45,376	31.917
6	＋ 9,310	0	＋ 9,310	－ 25,824	68,064	42 240
8	＋12,460	0	＋12,460	－ 58,835	90,752	31,917
10	＋15,540	0	＋15,540	－ 90,752	113,128	22,688
12	＋18,620	0	＋18,620	－136,128	136,440	0
1	－14,180	＋30,250	＋16,070	－ 4,610	22,688	18,078
3	－17,560	＋30,250	＋12,690	－ 15,459	45,376	31,917
5	－20,940	＋30,250	＋ 9,310	－ 30,434	68 046	37,630
7	－24,320	＋30,250	＋ 5,930	－ 58,835	90,752	31,917
9	－27,700	＋30,250	＋ 2,550	－ 95,362	113,440	18,078

$\sin\theta$ 的數值求得之後,各點移動的實在尺寸都可在第三表內算出來了.照講這座橋樑的結構和他所承的重量兩邊都是相同的他的兩邊各點移動的尺寸也必一定相同,我們儘可假定 6 點和5-6線是一個固定點和一根固定線把一邊的各點移動的尺寸求得,其餘一邊各點移動的尺寸就也求得了.不過我們在上面所用的方法却是普遍適用的罷了.

贅餘部份的緊張力的算法

俞　忽

Johnson, Boyan and Turneaure's Modern Framed Structures 第一本第 341 頁有一座橋樑,他的結構是和第第一圖表示的那



第　一　圖

樣.這個橋的各部份的緊張力是不能全用靜力學求得的.但是我們如果把 Aa 線去掉,那麼這個橋的各部份的緊張力都可用靜力學求得了.不過我們如果當真把 Aa 線去掉,我們須把 Aa 的緊張力 S' 當做兩個相反外力,一個外力放在 A 點,一個外力放 a 點,然後再求其餘各部份的緊張力,不然是不能得到各部份的真正的緊張力的.故此我們要求得各部份的緊張力,須先把 Aa 的緊張力 S' 求得.這個緊張力的求法如下.

把 Aa 線去掉,在 A 點加一向下的單位垂直力,把橋的各

部份的交點如,B, C, b, c 等的下降的尺寸求得.譬如這些交點中間無論那一個交點的下降的尺寸是 Δ，那麼依照 Maxwell 的原理,這個交點有一個向下的單位垂直力的時候,A 點下降的尺寸也等於Δ.現在如果Aa部份的長度是 l,橫截面面積是 A, Young 氏彈性係數是 E 的話;A 點下降的尺寸是 $-\frac{S'l}{AE}$,故此我們有

$$\Delta=-\frac{S'l}{AE},$$

或

$$S'=-\frac{AE}{l}\Delta$$

如果在這個交點的重量是 P,那麼

$$S'=-\frac{AE}{l}P\Delta$$

倘或各個交點都有重量的話,那麼

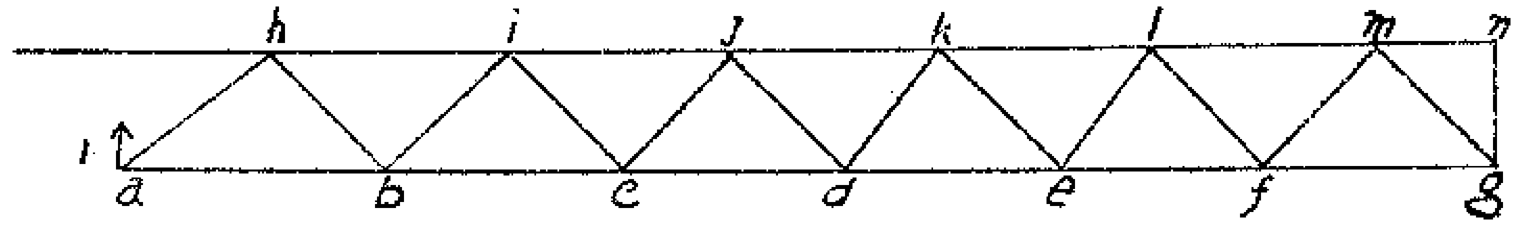
$$S'=-\frac{AE}{l}\Sigma P\Delta.$$

這裏 Σ 是把各點的重量和他下降的尺寸的乘積加在一起的符號.

可見得要求得Aa的緊張力須先把各交點下降的尺寸 Δ 求得.求這些尺寸的的時候如果用普通的方法當然是很麻煩的.現在有一個比較簡便的方法如下.

這個橋的上下兩半部完全是相同的.在 A 點加一個向下的單位力的時候,a 點就發生一個向上的單位反動力,故此這個橋上下兩半部所受的外力也是完全相同的,那麼這橋上半部的各點上陞的尺寸也必定和這橋下半部

的各點下降的尺寸完全相同了.因爲這個道理,我們只須把下半部各點下降的尺寸求得,橋的上半部各點下降的尺寸也就同時求得了.第二圖表示橋的下半部和上半部



第 二 圖

分開後的形狀. h, i, j, k, l, m 是各斜線的交點.因爲這橋上下兩半部的結構和所受的外力都是完全相同的緣故,這些交點始終是在一根直線上面的,故此我們可以假定連接這些交點的直線是一根固定線,這半部橋彷彿是在這根線上面,生根的.但是 h, i 等各交點雖然始終是在這根直線上面,各交點中間的距離却不必是始終不變的,故此這根直線和這橋的下半部中間只有垂直力防避各點離開這根直線,却不可有橫力阻止各點向左右移動.

現在我們可以開始把各點下降的尺寸算起來了.我們先把各部份因 a 點的向上單位力發生的緊張力 S 求得.以後要求無論那一點下降的尺寸就在那一點加一個向下的單位力,把各部份因這個單位力發生的緊張力 u 算出,再把各部份的 $\frac{Sul}{AE}$ 乘積加起來就得. S 和 u 的數值都列在第一表內.各點的 $\Sigma\frac{Sul}{A}$ 數值都在第二表內算出.這些數

第一表　S和u的數值

部份	S	向下的單位力的用力點						
		g	f	e	d	c	b	a
gn	−1	+1	−1	+1	−1	1	−1	1
fg	−0.75	0	−1.75	+0.75	−0.75	+0.75	−0.75	+0.75
fm	+1.25	0	+1.25	−1.25	+1.25	−1.25	+1.25	−1.25
gm	+1.25	0	+1.25	−1.25	+1.25	−1.25	+1.25	−1.25
ef	+0.75	0	0	−0.75	+0.75	−0.75	+0.75	−0.75
el	−1.25	0	0	+1.25	−1.25	+1.25	−1.25	+1.25
fl	−1.25	0	0	+1.25	−1.25	+1.25	−1.25	+1.25
de	−0.75	0	0	0	−0.75	+0.75	−0.75	+0.75
dk	+1.25	0	0	0	+1.25	−1.25	+1.25	−1.25
ek	+1.25	0	0	0	+1.25	−1.25	+1.25	−1.25
cd	+0.75	0	0	0	0	−0.75	+0.75	−0.75
cj	−1.25	0	0	0	0	+1.25	−1.25	+1.25
dj	−1.25	0	0	0	0	+1.25	−1.25	+1.25
bc	−0.75	0	0	0	0	0	−0.75	+0.75
bi	+1.25	0	0	0	0	0	+1.25	−1.25
ci	+1.25	0	0	0	0	0	+1.25	−1.25
ab	+0.75	0	0	0	0	0	0	−0.75
ah	−1.25	0	0	0	0	0	0	+1.25
bh	−1.25	0	0	0	0	0	0	+1.25

值每經過一點就改變他的加減號一次,因為u的數值就是這們樣子的.這個表的第二行是從 Johnson, Bryan and

第二表　各點的 $\Sigma\frac{Sul}{A}$ 數值

部　份	$\frac{Sl}{A}$	u	$\frac{Sul}{A}$	$\Sigma\frac{Sul}{A}$	地　點
gn	−20	1	−20	−20	*g*
fg	−22.5	+0.75	−16.88		
fm	+31.25	−1.25	−39.06		
gm	+31.25	−1.25	−39.06	+115	*f*
ef	+22.5	−0.75	−16.88		
el	−31.25	+1.25	−39.06		
fl	−31.25	+1.25	−39.06	−210	*e*
de	−16.88	+0.75	−12.66		
dh	+62.5	−1.25	−78.13		
eh	+62.5	−1.25	−78.13	378.91	*d*
cd	+16.88	−0.75	−12.66		
cj	−62.5	+1.25	−78.13		
dj	−62.5	+1.25	−78.13	−547.81	*c*
bc	−22.5	+0.75	−16.88		
bi	+31.25	−1.25	−39.06		
ci	+31.25	−1.25	−39.06	+642.81	*b*
ab	+22.5	−0.75	−16.88		
ah	−31.25	+1.25	−39.06		
bh	−31.25	+1.25	−39.06	−737.81	*a*

Turneaure 的書裏面得來的.

但是 a, g 兩點實在仍逗遛在原來的水平面上面,既沒

第三表　各點的實在 $\Sigma\frac{Sul}{A}$ 數值和 Aa 的緊張力 S'

地　點	求得的 $\Sigma\frac{Sul}{A}$ 數值	增加數值	實在的 $\Sigma\frac{Sul}{A}$ 數值	S'
A	+737.81	+737.81	+1,475.62	−1
B	−642.81	+618.18	− 24.63	+0.0167
C	+547.81	+498.54	+1,046.35	−0.7091
D	−378.91	+378.91	0	0
E	+210.00	+259.27	+ 469.27	−0.3180
F	−115.00	+139.64	+ 24.64	−0.0167
G	+20.00	+20.00	+ 40.00	−0.0271
b	+642.81	+618.18	+1,260.99	−0.8546
c	−547.81	+498.54	− 49.27	+0.334
d	+378.91	+378.91	+ 757.82	−0.5136
e	−210.00	+259.27	+ 49.27	−0.0334
f	+115.00	+139.64	+ 254.64	−0.1725

有下降,也沒有上陞故此第二表內的 $\Sigma\frac{Sul}{A}$ 數值都須修改一下.譬如 a 與 g 的距離和 c 點與 g 點的距離是 6 和 4 之比,那麼 c 點的 $\Sigma\frac{Sul}{A}$ 數值須增加

$$20+\frac{4}{6}(737\cdot81-20)=48\cdot54$$

各點的實在的 $\Sigma\frac{Sul}{A}$ 數值和各點有一單位的重量的時候在 Aa 上面發生的緊張力 S' 都在第三表內算出.

這裏有一點須要特別注意,就是依照第二表,g 點是向上陞的,f 點是向下降的,這兩點一上陞一下降的結果是

fm 部份加長一點, gm 部份縮短一點.不過這一部份加長的尺寸如果是 x, 那一部份縮短的尺寸也是 x, 故此這兩部份對於各點下降的尺寸發生的影響是 $-1.25x$ 和 $+1.25x$ 剛好可以互相抵消了.倘若他們的 u 數值不是同樣的話,那就成問題了.

最近之法國生物家

(續第二卷第一期)

何春喬

Cuénot 氏學說

生物的起原

生物種類繁賾,千態百狀,於是引起學者間之種種疑問:地球上生命之起原如何?如此繁賾之物種如何育成?古代許多生物種類,何以滅亡?生物何以各適應於其環境?適應之機制又如何?凡此皆生物學上之重大問題,爲全體生物學者所日夕研討,而欲究其奥義者也.

歷來有許多學說,來解答這些困難問題.但此解答之中,或亦有根據而尙嫌不足.或脫爲空論謬誷神創.證據不足,自然不足以饜學者之心;而超自然之謬說,尤不足取.人類思想,原不能超出自然之外;今以不能超自然之思想,而斷定生物爲超自然之所生,其臆斷之誣更不待言.其他有自信爲科學上之論斷,實則反覆辯釋,終不過文字上之爭論,雖累千言,無補實際,其與神造之謬說,同無根本之區別.

關於生命起原的問題,解答最多.我們可以講,至今還完全不能知道.因爲生命起原的直接證據,惟有求之於古生物學中;但是現代所得最古之化石,已屬複雜之生物.其再下之地層,雖可推斷其必含有較幼稚之生物,足以爲生命

起原問題解決之資料,但久經變化,岩質業已變性:其中所含化石,完全破壞,無復有供生物學家之參證者.

關於物種之育成,尚有可以捉摸之點.因爲物種育成,卽在現在,亦必尚未停止.例如地理的隔離,每爲物種育成之主因.大陸之隅,每脫離而獨立成島.英吉利三島,卽於第四紀始行脫離歐洲大陸.又或一帶長河,足以阻止陸地動物之轉徙;一條地峽,足以妨礙兩海之交通.因之,地理的隔離,每爲物種分化之原因.例如,原來與大陸混存之某種,自經隔離後,其個體所含之原胚型 (genotype), 或與大陸之各個體不同,於是得單獨發展其特殊之胚型,不會有與大陸各個體混交之弊,積久乃成爲新種或新品種,又或因地理隔離,環境亦異,於是產生新的體變 (Somation), 或新的突變, (mutation) 相加而成新種之觀.

試舉巴拿馬地峽爲證.南北美洲,原來分離.中新紀(miocene) 之末,纔有地峽之成立.於是太平洋與大西洋之水,便不能從此處相交通.但因爲隔離較遲,所以卽在未開鑿前之巴拿馬,東西動物相,仍極其類似.

歐亞大陸與北美洲,向亦連接,所以古代生物極多相同.至分離以後,乃有今日之差別,此最可以證明地理隔離爲生物分化之原因者.然歐洲海狸 (Castor fiber) 與北美海狸 (Castor canadensis),雖係各別之兩種,但彼此相當,似可推證其同出於一源.

又蘇彝士運河,雖經開鑿,但因爲中間隔着許多鹽分過多之苦水湖,仍足以妨止紅海與地中海生物之混合.開鑿後三十年,經學生調查,溝通兩海之魚,爲數不過八種.

地理的隔離之外,生理學的隔離,亦物種分化之原因.例如環蟲類中,有同一種類之各個體,或營自由生活,或營寄生生活,而寄生之中,又或寄主各異,凡此皆足以爲物種分化之原因.豆科植物中,有名叫刺毬花者,原產美洲;千六百零一年,法國植物學家 Robin 始移植於歐洲,因此命名爲 Robinier.千八百七十九年頃,有人注意到這種植物上,有一種臙脂蟲寄生,自是遂爲此植物之大害.千八百九十年,匈牙利昆蟲學家 Harvath 氏乃寄此標本於當代介殼蟲學家泰斗 Douglas 鑑定,命名爲 Lecanium robiniarum, 認爲新出之種.

但此蟲不見於美洲當然不是從美洲帶來.千九百零八年,Marchal 試以寄生於桃樹上之一種介殼蟲,移植於上述之刺毬花上,此蟲忽大變其色澤與大小,竟成爲 Lecanium robiniarum. 始知後種,實導源於前種但試以後種再返諸桃樹,却不能復原,於此可見其不僅爲體變之表現.

生理學隔離之效力,方面至夥.例如某種生物,原係龐雜之組合體,平常彼此交雜,故混而不顯.一旦因習慣岐分,無交雜之機會!或性態變更,彼此交避,如學者所稱之心理的隔離,亦無交雜之可能;其他或因生殖細胞之成熟有先後,

如德國產之兩種青蛙,一名 Rana esculenta, 一名Rana ridibunda, 以及某種魚類 (Corrégones), 便是如此.有時生殖器官有了改變,以至不能與他羣之個體交配,亦爲隔離之原因.又或雖能交配,而異羣之個體,或竟不能生殖,則雖同居一處,亦無形隔離.

總之新種之形成,兩個條件必不可少;

1: 任何一種隔離的形式,使同種中之兩羣,無交雜之可能;

2: 更需要有突變發生,突變發生之原因,或係偶然的,或係有線索可尋的.

這兩個條件,或同時成立,或先後發生,結果都可以造成新種.

適應之機制

動物與其周圍之情境必發生關係.此關係間,每可看出奇異之符合,學者謂之適應.魚類之游泳水中者,不特色青如水不易辨識,亦且體軀構造,皆適於游泳之用.其扁伏於水底者,則變更其體形,且色如棲處之泥沙.昆蟲或效木葉,或似樹枝,不僅顏色相似,形狀亦不易區別.鼴鼠螻蛄,穴居土中,前肢兩側開張,大而力強,形如鋤鏟.深洞動物,雙目不明,肢長若盲人之探丈;海底動物,每發光燭行於黑暗之中.

適應之現象,不勝枚舉;其原因何在呢?向來有三個解釋:

一,是乃理化之力,卽直係環境之力,有以鑄成之.環境之

熔鑄生物成體,正如雕刻師之捏造粘土成像.蓋生活物質,亦如粘土,具有充分之可熔鑄性,能隨環境而變遷.這個學說叫作外力陶鑄說,意即生物其所以適應其所居之環境,乃各該環境之力,陶鑄以成也.

二,需要促進嘗試,其結果則嘗試之部分,屢在興奮與使用之中.使用某一器官,必足以發展該器官,或甚至可以改移該氣官.需要失去則使用截止.使用截止,則足以使某器官退化或消失.這是拉馬克的用不用說.

三,個體之最適應其環境者,必有較多之生存的機會與生殖的機會,其他之不甚適宜者,"自然"乃予裁減之."自然" 有此選擇之力,累代而下,乃有奇特之適應現象成立.這是達爾文的選擇說.

上列三說前兩說,完全立脚在後天遺傳的原則上面;便是達爾文的學說,也默認後天遺傳爲可能,

但是 Cuénot 的學說則異是.他所持的論調,可稱爲先適學說,此說除 Cuénot 外, Davenport 及 Mogan 亦倡導之.

Cuénat 氏以爲動物不是環境可以陶鑄而成功,物種亦不因自然選擇以鍊成.動物之侵入於某一個新的環境也,若能生存,必先具有與此環境適合之性質;有時亦因爲先具有此性質,纔侵入於此新的境地.此新地之各種情形,作用如篩;其透過此篩孔者,必先具有適應之性質;否則擱拒於外,便無透過之機會.

自然界空地之被移植,應用此理,最易解釋:或新成之渠,或適開之洞,或工廠附近之貯滓,或餘熱初熄之火山,以及新出現之溫泉,硫黃泉等.生物欲生活於此新成立之場所中,便非有先適之條件不可.此與人們之插足社會,正復相同.設想某市新成立一個化驗所,備鑑別食料之用;又或欲創辦一所神經病院,爲治療及容納精神病者之用.吾輩苟欲在此新度之環境中,謀得一枝之棲,必先有各該種專門學識,乃得勝此職務.卽必先精化學,乃得任化驗所之職務,必先對於神經病有過硏究,乃得任神經病院之職務.總之,必有先適之技能,乃得參加此新成立之環境.

此事之擇人,但人亦擇事.必自量有某種技術,然後擇成某種職業.並不是職業創造技術,乃先有了某種技術,乃指導其選擇某種職業.

但是職業不能鍛鍊技術,使其繼長增高麼?

在職業方面是時常有的.在生物學方面,亦有環境反響到生物體的事實麼?有許多學者以爲這是必有不能否認的. Cuénot 氏對於此點,不曾十分闡發.他以爲便是極其適應之例,也似與其所處之環境,絕無因果之關係.

Cuénot 氏先適(Préadaptatiou)之說,卽先定 (Prédétermination)之意.不過先定之意,在 Cuénot 之所意想含意至廣.這個名詞用來,每遭人疑忌,而予 Cuénot 以不幸之批評.

例如巢魚(pinoche) 原產淡水,但是法國 Lorraine 沿海之鹹

水小池,亦爲巢魚所棲止.然則巢魚亦先適於鹹水麼; Cuénot 氏謂其實不然.因爲巢魚乃泛鹽性(Euryhalinité)之動物,所以由淡水轉棲鹹水中,亦不覺有甚麼不適.凡此似不能謂爲先適.因爲巢魚之居於鹹水,與居於淡水並不感覺有甚麼差別.試以甘油混水,或百分之十的糖水,以巢魚入之亦自由生活無恙.我們似不能說巢魚乃先適於鹹水,與不能說巢魚乃先適於甘油水及糖水若相同.

又例如泛食(Polyphage)之蟲,如鬼面蛾(Archerontia atropos)者,產於亞爾吉爾(Algérié)地方的,便寄生於橄欖樹,產於歐洲的,便寄生於紫丁香及素馨樹;其他各地產生者,或寄生於酸漿,或寄生於馬鈴薯,或寄生於煙草.如果說鬼面蛾之所以能寄生此各種植物,乃因其先適於此各種植物,便未免失當而徒起紛爭.其實乃因鬼面蛾之食料無所選擇.不受限制,或可以說是一種"生物學的無差性"(Indifférence biologique).或亦可稱爲"生理學的柔馴性"(Souplesse physiologique).又例如某種動物,對於溫度之高低,不甚感覺,卽所謂泛溫性(Eurytherme)者,當其由低溫移轉於高溫也,似亦不得謂之先適,僅可稱爲一種"生物學的無差性"而已.

所以先適這個名詞,應用失當,每爲 Cuénot 學說之大害.因爲這個名詞的關係,於是有人謂 Cuénot 之說,乃目的論之主張.其實他的學說,乃正與目的論居於極相反之地位.他的學說,其實可以叫作純粹的偶然說.他主張生物之形

態與性質,對於其所在之環境,絕無因果之關係,意卽適應乃偶然湊成,所以不含絲毫目的論之意味.

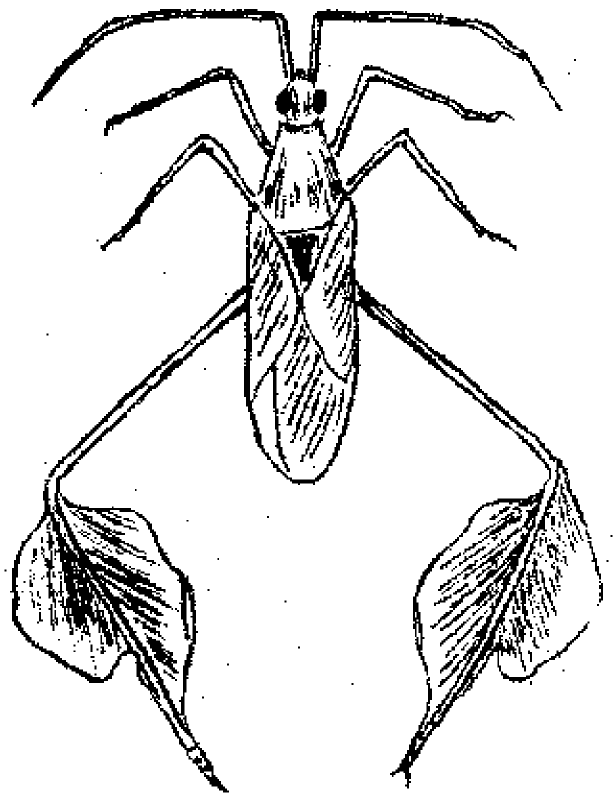
但無論適應之起原如何,生物學者之談進化總認定新種之成立,必於適應現象中求得其祕密.生物學者認定現存之生物,皆適應之生物,蓋生物必與其環境十分調和乃有生存之可能.其實此乃片面的,過火的觀察與解釋.這個見解,仍不脫神造世界,調和無缺之思想.其實自然果係自然,不由神造,則調和者固多,不調和者亦不必無.生死苦樂,無所不有;矛盾現象,到處可見;調合之說,實不足以概括全體.

"我們對於打字機,誠驚賞其精巧無倫矣.自來水筆,則瞠乎其後.至於尋常之鋼筆,幾無適應之可言.但尋常之鋼筆,反爲吾輩使用最多". 適應之意義與標準,誠至難定也. Cuénot 鑑於世人多忽視自然界不甚適應或甚至有害之例,因於其所著"適應論"一書中特闢一章,縷舉自然界不甚適應或甚至有害之例甚夥;玆限於篇幅,恕不具錄.僅略譯其結論之大意如下:

試檢驗某一生物,就大體上講必甚適應於各該環境.因爲該生物既已生存於該環境中,自非有相當之適應不可.然不得因此便謂該生物體一切細微之搆造或性質皆直接有用.在"必要的與已夠的適應"器官之外,必同時具有無用之器官.此無用或甚至有害之器官,祇要不妨礙其生

存,仍得與適應之器官,長期共存.昆蟲之翅,有時因排列不當,竟終生不見有飛翔之機會,但亦存在於自然界.又如葉之形態,岐異萬狀,雖每為種之表徵.但不必各有特殊之意義.又或某部之過於發展以及發展到失却效力(見下圖).

Bocidium globularce
頭角過於發展之例



Ansisocelis phyllopus
足雖擬葉但身軀仍難避敵害之眼

皆不僅證明生物體之器官,有不適應且足以證明類似之適應者,亦屬偶然.便是脾臟,尾腺,魚鰾以及許多神經血管等,都在有用無用之間,不如前人設想之重要.蓋其已具者,固有學者為之誇張贊許,神奇其效力,而偶然失却者,亦依然無恙,並存於宇宙之間.

又如直生(Ortheno genese)之例,某性質或某器官之初發也,若絕無作用,久之,效乃大著.當其尚未發達到有効之時,

蓋與退化之器官,無甚區別,其不適應也無疑,凡此皆可以證明選擇說與一切皆屬有用說之誣.

"凡是存在的便都是有用的",這個先入的見解,在生物學界誠然建立了不小的功勳.原來有許多被人忽視之器官,如甲狀腺,下生體,胸腺,腎上胞,卵巢中的黃體,膵臟中的 Langerhans 氏島等,皆本此成見,向前搜討,居然得到很多有價值的發現.

但是這個成見的危害,亦不可勝言.這是一個宿命的見解,大背於科學的精神,而且於無可理解之中,苦心附會,因之得到許多可笑之結論.例如雪鼬 (Hermines) 全體白色,尾端獨留黑點, Bernardin de Sannt-Pierre 便為之解釋曰: "自然有意將西北利亞之雪鼬,污染尾端一點黑色,因為這些小小動物,全身白毛,其奔走於積雪之上也,些許爪迹,亦不能留得;有了這一點黑色,乃能於極北長夜漫漫之中,借雪光之反射,彼此識別,相隨不散". 此種彫鑿之談,有損科學精神無論矣.乃不料著名生物學名家,如 Wallace, Weismann 輩,亦每倡導此種論調,影響所及,遺害後學,是不可以不為之辯!

Wallace 對於兔尾白點之現象完全竊取 de Saint-Pierre 之故智,而為之說曰: "此黃昏竄出之兔羣,當其遭危迫而逃逸入穴也,便藉此尾端一點白毛,留諸穴外,乃給其同羣中較遠較弱及較幼小之伴侶,以標識與警示之用;其先後潛

伏警示之結果,於是各得於短期間,尋得一較安適之處而藏匿”.

Weismann之解釋怪頭蛾(Smerinthus ocellata)也,亦有下列之句云:“當此蛾休息時,下翅之眼點爲上翅所掩蓋;但如驟遇害敵而驚駭;此蛾乃將四翅,上下展開,兩個眼點,以其藍色與黑色出現於下翅紅色之背景上,髣髴巨獸之頭,突然出現,因以駭走其害敵”.

此等滑稽之論調,皆“一切存在者皆必有用”之成見所招致.且大不脫“人相觀”(Anthropomorphisme)之遺毒.須知生物雖亦屬自然界產生之機件,究與人爲機件,迥不相同.人爲機件,的確是凡存在者皆屬有用.一輪齒也,一螺旋也,形式大小,各有其意義與目的,生活之機器則不然.每一個生物,各有其複雜之歷史.其度過此複雜之歷史也,又常在改進之中,但其改進也,不能如機器之可以暫時停止,專事修理之工作.卽生物之自身改進,必寓改進於生活之中.因之,不能作澈底之改造,其舊有之機件,不免有些形同贅瘤;甚至有些機件,竟多少妨礙工作;祇要妨礙的程度,不至於根本使機器停止,自然亦可准其存在,因之,生物體之各部,不能謂爲全體適應.又或向之不適者,因生物之移轉居處,又可以變爲適者.例如前述之巢魚,細胞之性質,平昔備有所謂泛鹽性,此於巢魚之在淡水時,因無所謂用途;向使巢魚永無離開淡水之機會,則泛鹽性質,等於虛有,不得謂之適

應.但一旦有了意外之變轉移到鹽水中,同來朝宗之伴侶,皆委頓以死,而巢魚僅賴此性以獨活,此偶然之勝利,不得謂預料其將入海,而先備有此性質也.又如有一種細小之貝,名叫 Dreissensia polymorpha, 殼形彎曲,生有强韌之貝絲(Byssus); 尋常生長於靜水中,不見有用也.但自有自來水以來,居然賴此而固着於激流之自來水管中,成爲大適應之器官.此貝非預料世間將有自來水管而備有此絲也,亦非入管後因需要而發生也.是乃以從前無用之物,忽因入於新環境而適應.此例可以證明不必一切器官皆屬有用,同時又可了解先適活用之真諦.

凡空地之出現,必由鄰近先適之生物以占據之.河口略帶鹹味之水,其生物則來源於大洋之種,淡水生物,則又來源於河口之種.濕潤之土地,則以耐旱之水族生物補充之,再依次移轉於地下,深洞,最後乃達於陸上.每經一次移轉,便經一次淘汰.非先適者,不得透過此自然之篩具.海水生物之豐饒,人所盡知.淡水生物,則僅有魚類,甲殼類,軟體動物中之腹足類與雙殼類,輪蟲類,外肛類,寡毛類.蛭類等,以與海產生物比,其複雜簡單,相差實大.至於陸地,則僅節足動物肺生腹足類,以及脊椎動物而已(專就動物言).

Cuénot 氏更謂吾輩苟細心推玩 Darwin 與 Lamarck 所舉之例,實皆先適之例.Lamarck 謂水棲鳥類,因游泳而發生蹼膜,是該鳥類已有相當游泳之技能矣 Darwin 謂鼴鼠入地

而盲目,是已先適於地下矣.蹼是否因游泳而生,目是否因入地而盲,尙屬問題,卽令如此,亦必假定先已適應於水與先適應於地下,而後有推論之餘地,是此兩位進化論大師,皆不能不立足在先適的默認點上.最近法國之著名拉馬克派領袖 Houssay 氏,謂魚形,魚鱗,魚鰭等,皆當魚速行於水中時,動力之所形成;夫魚旣已能速行於水中,是亦已魚也,更何必作如何成魚之推闡?

結論

Cuénot 氏之說,不能謂毫無缺點,而尤以論直生現象,不能解釋到圓滿無遺.關於直生的事實, Cuénot 氏並不否認.他確切承認了當生物進化之中,有些器官或性質,髣髴是預定了一個方向,續續前進,以至達到可驚的程度.他敍述直生現象時,有這樣一段可以注意的文句.他講:當某生物體之某一部分,正走上直生的路上時,其餘的部分偏都十分固定,不隨之而俱進.例如鹿族,便是頭上的角,單獨走上了直生的路,而在馬族,則又僅限於脚下的蹄,走上了直生的路.髣髴是身體的大部分,都達到進化的止境,僅還有某一兩部分,特別富於"可塑性" (Plasticite), 所以單獨在變化之中,成爲直生之狀. Cuénot 氏這幾句話,頗耐人尋味,可惜不能達到令人滿意的境地.他自己也十分知道,所以他說,我們雖然否認了 Lamarck 與 Darwin 的解釋,但我們解釋直生,

也不能十分圓滿.我們十分相信必尙有進化的因子,不曾爲我們捉得.這個因子,或在生物體之內,或在生物體之外(注意此處 Cuenot 氏不免要承認外因了!)我們尙不得而知.這個因子,必係生物變異之控制者或調整者 (Regulatem).當我們推究複雜器官,如眼,電器官.海底魚之燐燈以及孔雀身上羽毛之鮮豔等之如何形成.更感覺有此調整因子存在之必要.此調整因子之發現,當可期諸最近之將來云.

Cuénot 氏此說,似漸涉神祕.但我們要知道 Cuénot 氏對於生物學上的最大功績,在打破神祕.他的學說之大體,最不帶宿命論的色彩.他揭明了物種形態與機能之出現與維持,不借用不用的學說,也可以解釋.他講"常在演化中之器官,其所以向前變化,不關於該器官之使用,乃完全胚種內自發之性質.便是直生現象,也從此出發".他又講:"何以如此變化,眼前我們雖不能指明其原因,但決與該器官之使用與否或有利與否無關".他以爲生物之進化,偶然兩字,關係最大,所以他的全部學說可以叫作"偶然學說".

地殼的觀念

李四光

人們都以爲我們住在地球的表面,實際上我們并非住在地面,却住在地中.我們的頭上還有一層空氣壓着我們,包着我們.這層氣殼的厚度,大致在三四百公里以上.不過愈向上走,氣殼的密度愈小,壓力也愈小.高到四五十公里的地方,氣壓已經比一糎水銀柱的壓力還小.我們住在氣殼底下,正和許多海洋生物住在海底,亦或蚯蚓之類住在土中相類.氣殼的組成,并非上下一致的.下部養氣較多,所以生物得以生活.愈往上走,淡氣愈多,到一百公里以上,幾乎完全是淡氣.再上氦氣(He),更上輕氣(H)成了主要的成分,嚴格的講起來,這一圈大氣,要算是地球的皮表;要算是地殼,但是因爲流質的關係,普通不認他是地殼.我們不獨不認大氣層爲地殼,連那海洋也不認爲地殼的一部份.

實際上所謂地殼者,雖無嚴密的定義,然大致可說是指地球上部由普通岩石組成者而言.普通人所見者,祇是岩石層的表面.地質家所見者,也不過從最新的地層到最老的地層以及各種所謂火成岩,一名凝結岩.那些極新的地層到極老的地層在一個地域總共的厚度,至多也不過二

十餘公里.然則我們怎樣知道地下還有類似地表的岩石?又怎樣知道這些岩石往下伸展到一定的厚度?更怎樣知道地下是固質或液質抑或氣質造成的?這些問題如果都是懸案我們有何理由說出地殼的名詞.

然而地殼的名詞,久已被人用了. 地殼的人們,不見得對于地殼有極明顯的了解.祇是揣想着地下的材料總和在地表露出的材料不同.這種觀念的發動,大約一面受了星雲學說的影響,一面又因爲火成岩和地溫的分配,似乎地下愈到深處,溫度愈高,若溫度超過一定的限度,一切的固質,不免變爲流質.火山爆裂,岩流迸出,驟然一看,似乎都可以作流質地球的證據;而所謂地殼者,正如卵殼包着卵白卵黃.可是天體力學者告訴我們,這樣鷄蛋式的地球,是不能成立的.如果地球簡直像鷄蛋式的構造,他早已受不起旋轉和日月吸引的力量,他決不能成現在這樣的形狀.

傳統思想,如此的混沌.因之,對於地殼這一個名詞,我們不敢任意接受.我們如若還想利用這一個名詞,不能不作進一步的追求.且看我們能否替他找出相當的意義,地殼的命運,就決在這裏.我們沒有方法去打極深的地洞,看裏面的情形.現在世界上用人工鑿出最深的地洞,也不過兩千多公尺.地球如此之大,就是再鑿穿兩千公尺,也算不了一回事,況且愈到深處,工作的困難,增加愈多.我們還要知世界上有許多的事物,我們儘管能看見,能直接的感觸,我

們不見得就能認識,就能了解.觀察是一回事.了解又是一回事.所以要看地球內部的情形,不能用肉眼,祇能用智眼,不能直接的檢查,祇好用間接的方法探視.間接的方法,可分爲下列幾項,當然,僅就重要者而言.

(一) 地溫

從開鑛的經驗看來,愈到地下,溫度愈增.地溫增加的情形,各地不同;同在一地,又隨深淺不同.溫度每增加一度,必須往下降的深度,名地溫增加率.據 R. A. Daly, 氏的調查[1],世界各處地溫增加率,現今已有記錄者如次表:

歐洲			北美洲		
地點	最大深度(米達)	地溫增率	地點	最大深度(米達)	地溫增率
Richmond	407	28.3	Columbus, Ohio	785	40.4
Searle	609	37.8	Louisville, Ken.	636	41.1
Rochefort	857	27.4	St. Louis, Miss.	923	42.9
Creuzot	816	28,5	St. John, Ill.	1138	45.8
Pont-à-Mousson	1556	30,2	Bay-city, Mich.	1053	37.5
Martincourt	1200	31.0	McDonald, Penns.	2126	41.2
Ratum (Holland)	1309	34.0	West Elizabeth, Penns.	1524	40.2
Maris (Holland)	1300	27.7	Wheeling, W. Virg.	1359	45.5
Spereberg	1066	33.7	Chelyan, W. Virg.	1596	40.2
Schladebach	1748	35'7	Mannington, W. Virg. (六處平均數)	603-983	53.7
Sennewitz bei Halle	1084	36.5	Bridgeport, W. Virg.	2198	38.4
Lieth bei Altona	1259	35.0	Pricketts Creek, W. Virg.	2286	35,7
Sudenberg bei Magdeburg	509	32,3			
Paruschowitz	2003	31.8	西Vrig州十五處之平均數		
Czuchow	2249	31.8			43.2

1. Daly, R. A.—The Earth's Crust and its Stability; American Journal of Science, Series V, Vol. 5, pp. 349-356, 1923.

就上表而言,歐洲的地溫增加率較速,北美的地溫增加率平均較緩.在最上2.5公里範圍內,歐洲大致每深100米達增加3度,而美洲僅增加2.5度.此乃就平均數目而言,若詳細考察,也可以知道地溫增加率往下變更的情形.關於這一點,R. A. Daly 氏也曾有相當的調查,其結果如次表:

地 點	深度(m)	地溫增加率	深度(m)	地溫增加率
Volcano In. W. Va.	152-305	49.2	1143-1265	28.8
Grantsville, W. Va.	610-914	43.2	1067-1341	35.1
Valley Falls, W. Va.	305-610	42.7	1981-2286	39.1
Bridgeport, W. Va.	610-914	43.1	1829-2198	26.8
西Virginia州四處之平均數		44.5		33.2
Bay City, Michigan	397-546	44.7	894-1053	41.8
Schladebach	36-336	37.5	936-1236	35.8
Paruschowitz	99-502	40.3	1556-1959	28.2
St. John del Rey, Brazil	1228-1503	74.1	1685-1871	54.7
Hamburg*	0-250	36.4	950-1040	29.2

深井中溫度的測驗,困難甚多.有泉水流通的關係,有氣質升降的關係,還有其他種種困難.前列各地之選擇,都有相當的考慮,大致可謂不差.照此表看來,似乎愈到深處,溫度有增加愈速的趨勢.美國地質調查所所員 Van Orstrand 氏曾經檢查數百深井的溫度,他所得的結果,也大致如是.不過這種往下增加的趨勢,祇能限於深到兩個半公里的地方.再往下走我們未曾實際測驗,不敢斷定.但是愈到深處,溫度愈高,却沒有多少疑問.

*B. Gutenberg. 氏新近添加的數目

我們雖然沒有直接測地下深處的溫度,然而火山爆裂,岩流迸出的時候,給我們一個測驗的機會.據 A. L. Day 和 Shepherd 二氏檢查[2]檀香山 Kilauea 岩流的結果,溫度由 1070° 至 1185° 不等,其所以溫度不等,大約是岩流流出的時候,發生化學變化所致.普通火山流出岩石的平均熔點大致 1100°, 維蘇維亞(Vesuvia)火山吐出岩質的熔度,從 1150° 到 1180°, 士特倫波里(Stromboli)火山噴出物的熔度 1100° 到 1150°. 還有許多侵入的火成岩,他們的平均熔度在 1000°-1200°. 由此可想見地下不到很深的地方,溫度已經很高.地面上所見的岩石,在此高溫度之下,已經要成流質.一遇裂縫,簡直成岩流流出來了.假如以每 100 m. 溫度增加 3 度計算,祇要往下走四十公里,溫度可到 1200°.在 1200° 熱度之下,普通的火山岩流固不必論,就是其他許多的侵入岩,也就要變成流質.然則這四十公里的岩層要算是地殼了.

但是問題不是如此的簡單.從地面下去,溫度固然增加,壓力也隨着增加.在四十公里深度的壓力,大致有 12,000 氣壓.據 Vogt 的研究[3],壓力增加 1,000 氣壓能使玄武岩的熔點增加 5°.普通的玄武岩,在大氣壓之下,熔點不到 1200°.所以熔點卽令與壓力成正比例增加,在深四十公里的地方,

2. Day and Shepherd—Bull. Geol. Soc. America, Vol. 24, p. 573, 1913.
3. Vogt, J. H. L.—Videnskabs-Selskabets Skrifter, math. naturv. Kl. No. 1, Christiania, 1904, p. 210; Journal of Geology, Vol. 30, p. 614, 1922.

玄武岩的熔點不過增加 60°. 這個數目比較甚小,沒有多大的關係.其他各種氣質或水汽對于岩石的熔點也許有相當的影響.可是影響何如,至今還不明瞭.據最近 Vogt 的研究,水汽對于花崗岩的結晶,并沒有多大的關係,大出於前人意料之外.無論如何,化學的影響,比較的有限.最困難的就是要決定每 100 米達增加 3 度的數目,究竟是否可靠.從這一方面研究地溫增加的情形,至此已經到了絕境了.

現在我們要從另一方面看去.原來岩石中含着若干放射元質,這些放射元質,不斷的爆烈,發出 α, β, γ, 等線;同時又發出熱量.他們的放射,依着一定的規程,發熱也有一定的分量.最重要的是鈾(U)質和鉒(Th)質兩大系統.普通最有名的鐳(Ra)質,便是屬于鈾質的系統.其他還有許多不安定的元質,都是由這些放射質,一期一期破裂而成的.據可靠的測驗,每一格蘭的鈾質連他同統系的各種放射質,每年可發生 0.79 加羅里(Cal.)的熱量,即每一小時 9.0×10^{-5} cal.的熱量.又每一格蘭的鉒質和其同系統的放射質,每年可發生 0.23 加羅里的熱量,即每一小時 2.6×10^{-5} cal. 的熱量.祇要我們能測驗各種岩石含放射元質的分量,便可以知道一定時間發出的熱量. Strutt, Joly, Poole, Lawson, Holmes 諸氏,關于各種岩石含放射元質的分量,近年來頗有研究.據他們研究的結果,酸性岩石,如花崗岩之類,含放射質較

多;基性岩石,如玄武岩之類,含放射質較少.近來知道鉀(K)銣(Rb)二元質也有放射性,不過他們的放射性較弱.但是鉀質在岩石中,尤其在火成岩中,佔重要的成分,所以就總量而言,其所發生的熱量,幷不在鈾釷二系之下.銣質在岩石中分量甚少,無重大的關係.從各方面統計的結果.Holmes 氏得了幾個平均的數目,列表如下[4]:

放射元質	U	Th	K
每一格蘭花崗岩平均所含放射元質(以格蘭爲單位)	9×10^{-6}	20×10^{-6}	$34{,}000\times10^{-6}$
每一格蘭花崗岩平均每年所發熱量(以cal.爲單位)	7.1×10^{-6}	4.6×10^{-6}	4.2×10^{-6}
每一格蘭花崗岩平均所含放射元質(以格蘭爲單位)	2.2×10^{-6}	5×10^{-6}	$8{,}000\times10^{-6}$
每一格蘭花崗岩平均每年所發熱量(以cal.爲單位)	1.7×10^{-6}	1.2×10^{-6}	1.0×10^{-6}

這些數目,雖不十分精確,總算大致不差.現在我們祇要知道各種岩石在地下分配的情形,便可計算每年發熱的總量.說到此處,問題可就複雜了.據Strutt氏的計算,在地球全體質量中,祇要每一格蘭含着0.06×10^{-12}格蘭的鐳質,便夠低消由輻射失去的熱量.實際上地表的岩石中所含的鐳質,平匀有2×10^{-12}至2.5×10^{-12}格蘭.照這樣看來,有兩種可

4. Holmes, A and Lawson, R. A.—The Radioactivity of Potassium and its geological significance; Philosophical Magazine, Vol. ii, Dec. pp. 1218-1233, 1926.

參攷 J. Joly—Surface History of the Earth, 1930.

能;或者地下放射質的分布從地面至地心,平均不變;或者放射質的分布,愈下愈少.在前一項假定之下,地球不獨不漸漸冷下去,而且自有地球以來,漸漸的熱起來了.如果熱起來的時間甚久,整個的地球恐怕早已熔成了流質.雖然有若干人(如M.P. Rudzki[5], F. Nölke[6])相信地球是漸漸的熱起來了的.究竟無論如何,不能到那種程度.其次假定放射質愈到地深處愈少,與事實較近.但是如何的少法,却又成了問題.關于這個問題,意見紛歧,Gutenberg 氏曾扼要討論[7].在此無須詳述.現在祇舉出 Rayleigh 的意見,作我們的參考.前已說過,在近地面的地溫增加率,平均一公里 30°. 每一秒鐘從地面每一平方公寸 (cm^2) 吐出的熱量,等于地溫增加率的反數乘傳熱率.經種種的測驗,我們知道岩層的傳熱率大致在0.008左右.所以每秒鐘每一平方公寸地面吐出的熱量有 2.4×10^{-6} cal. 這些熱量,大部分是由放射元質供給,其餘應該有小部分是地球本身固有的熱,否則地球不會漸漸的冷却.現在假定這些熱都是由岩石中的放射質供給,也祇要有十八公里厚的花崗岩就夠了.據各方面精細的測驗,各種重要火成岩的發熱量,頗有差別,平均起來,

5. Rudzki, M. P.—Physik der Erde, 1911.
6. Nölke, F.—Geotectonische Hypothesen, 1924.
7. Gutenberg, B.—Aufbau der Erde, pp. 54-59, 1925.
Gutenberg, B.—Lehrbuch der Geophysik, p. 476, 1929.

花崗岩 (Granite)	每一立方公寸每秒鐘發出	$1,3\times10^{-12}$cal.
閃長岩 (Diorite)	,,	$0,83\times10^{-12}$,,
玄武岩 (Basalt)	,,	$0,50\times10^{-12}$,,
高原玄武岩 (Plateau Basalt)	,,	$0,36\times10^{-12}$,,
丹泥岩 (Dunite)	,,	$0,13\times10^{-2}$,,
榴輝角閃岩 (Eclogite)	,,	$0,17\times10^{-2}$,,

這些岩石,都是由岩下流出來的.他們發熱最少的,祇能佔花崗岩發熱量十分之一.所以地下如若除花崗岩外,其他基性的岩石,還佔着重要的地位,那末,放射質分配的範圍,決不止十八公里的深度.然而總共也不能超過幾十公里.

以上的計算法,含着一個根本的假定.這就是假定地球表面已經到了熱平衡的狀況.換言之,地球表面所失的熱,和他表面所發生的熱,兩相抵消.原來地球表面的溫度,全靠太陽的輻射熱而定.與地中發出來的熱似乎沒有多大的關係.現在太陽送到地面的熱,平均每一平方公寸 (cm.) 每秒鐘有 7×10^{-2} cal. 這些輻射熱,一到地面,隨即反射掉了.祇是一種皮表的現象,不能直接使地球內部的溫度有何變更.如果地球內部發生的熱,比他吐出的熱還多,恐怕地球的上部,根本就不會凝結.然而從地震的波動觀察(詳後),地球的上部決無流質的存在.所以前述的假定,確有相當的理由,可以成立.

如若要再進一步,從地溫方面,研究地球上部的組成(就是地殼的組成)那就不能不涉及地球最初的歷史,地球最初的狀況,確實不容易推測.拉勃拉斯(Laplace)的星雲學說,現在已經爲許多人所否認.微星集合說[8] (Planetesmal hypothesis) 雖然有一般美國學者極力的鼓吹,雖然有若干點勝過拉氏的學說,然而也有許多的困難.最近又有人主張潮汐說[9] (Tidal Theory) 雖然是由微星集合說托胎出來的,然而他立論的要點,却與微星集合說大不同了.將來也許還有更新的學說出現.無論那種學說,似乎都離不了假定最初的地球是一團熱質經過冷却,然後結成現在所謂地殼.地殼逐漸冷却,纔成立現在的地溫增加率.

從冷却的地球出發,我們可以推測到地殼的組成.就固體傳熱的情形而論,下列微分方程式儘可適用.

$$\rho c\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial v}{\partial z}\right)+P$$

式中 v 是溫度,ρ 密度,c 比熱,k 傳熱率,P 爲單位時間單位容積所產生的熱量.假如冷却的厚度,比較地球的半徑甚小,比較含放射元質岩層甚大,則傳熱的情形,大致與無限厚平板傳熱的情形相若,於是前式可簡單寫爲

$$c\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v}{\partial x}\right)+P \quad\cdots\cdots(1)$$

8. Chamberlin—Astrophysical Journal, 14, 1901, pp. 17-40; Moulton—Astrophysical Journal, 22, 1905, 165-81.
9. Jeffreys, H.—M. N. R. A. S. 78, 1918, 424-41.

依放射元質分配的情形不同,上式有種種的解法像 Jeffreys的意見[10],地下從三十公里到一千二百公里的深度之間,其組成的質料物理的性質,沒有多大差異,從地震波動的情形判斷,確是如此,依此理由, Jeffreys 氏假定在地下深處 k, ϱ, c 皆為恆數,當地殼初凝結的時候,全殼上下溫度,應該稍有差別,因為愈往下去,壓力愈大,壓力增加,岩石的熔點也隨之增加.如果在常壓力之下,岩石的熔度為 S,則在 x 深度之處,熔點變為 $S+mx$. m 代表每單位深度熔點增加的度數.假如我們用當時表面的溫度,當作溫度的零度,則深到 x 處的溫度可寫為

$$V = mx \qquad \text{式中 } V \text{ 為溫度}$$

在表面附近,可以說

$$k\frac{\partial v}{\partial x} = k_1 m$$

上式中 k_1 為深處的傳熱率.從此可得

$$V_1 = k_1 m \int_0^x \frac{dx}{k} + \text{恆數}$$

如果要使上式可適用於放射層以下,則上式中的恆數可由下式定奪—

$$V = mx + m\int_x^\infty \left(1 - \frac{k_1}{k}\right) dx = V_1 \cdots \cdots \cdots (2)$$

假如我們還要顧到 P 項,則(1)式的解答,不關時間,可由下

10. Jeffreys, H.—The Earth, Its Origin, History and Physical Constitution. 2nd Edition, pp. 148-151, 1929.

式定之

$$k\frac{\partial v}{\partial x}=\int_{x}^{\infty}P\,dx$$

由此得 $V=\int_{o}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{x}^{\infty}P\,dx\,dx=V_2$ ……………………(3)

於是(2)式與(3)式的和,可以作(1)的完全的解答,但是還不能滿足最初的條件.假如令 $V=V_1+V_2+V_3$,

因為 $\varrho\, c\,\frac{\partial v_3}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)$

所以 $t=o$ 時, $V_3=S-m\int_{x}^{\infty}\left(1-\frac{k_1}{k}\right)dx-\int_{o}^{x}\frac{1}{k}\int_{x}^{\infty}P\,dx\;\;dx$ ……………(4)

(4)式中的第三項,在放射層下,為一恆數.因為在放射層以下 $\int_{x}^{\infty}Pdx$ 等于零;全值變為 $\int_{o}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{x}^{\infty}Pdx\,dx=S_o$. 至于第二項,在放射層以下,完全為零.所以在最初時,

$$V_3=S-S_o+\alpha$$

α 為一種數量,僅在放射層中不等于零.照前定的溫度零點說, $x=o$ 時, $V=o$, V_2 消失,故

$$V_3=-V_1=-m\int_{o}^{\infty}\left(1-\frac{k_1}{k}\right)dx=S_1$$

α 的影響甚小,因為上部放射層中所發生的熱,隨卽傳到表面消失了.然則在放射層中,可以說

$$k\,\frac{\partial v_4}{\partial x}=\text{恆數}=k_1\,\beta$$

如果放射層祇佔全冷却層的一小部分,則

$$V_3 = S_1 + \int_0^x \frac{k_1\beta}{k}\, dx$$

$$= S_1 + \beta x - \beta\int_0^x \left(1 - \frac{k_1}{k}\right) dx \quad \cdots\cdots(5)$$

從(2),(3),(5)三式,可求出地球上部各層的溫度.不過地球上部各層的溫度,對于我們現在的問題,沒有直接的關係.我們所要的,祇是表面的地溫增加率和各層深淺的關係.對于這一點, Jeffreys 作了一番計算,給我們一個公式如下:—

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=o} = m\frac{k_1}{k} + \frac{1}{k}\int_0^\infty P dx + \frac{k_1}{k}(S - S_c - S_1)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{h_1 t^{\frac{1}{2}}} \quad \cdots\cdots(6)$$

式中 $h_1 = \sqrt{\frac{k}{\varrho c}}$, h_1 僅就下層而論; t 為地球開始冷却到現在的時間.

假如下層為玄武岩或丹泥岩,則

$$h^2 = \frac{k}{\varrho c} = \frac{0.004}{3.3\times 0.020} = 0.006$$

地表平均地溫增加率,大致每一公里 32°C. 即 0.0032° 每一公寸(cm). 又從種種方面判斷, S = 1400°, t = 1.6x10⁹ 年[12] 即 5 x 10¹⁶ 秒.由此可得(6)式的第一項等于每一公里 2°.0 c., 其第三項比每一公里 2° 還小.所以全式的數值,完全決在 $\int P dx$ 項上.由岩層的分配和地震現象判斷,我們可以大致的說:地表停積岩層甚薄,沒有多大的關係;其下就是花崗

12. 前幾年我們祇知道地球的年齡不能過 1.0×10^9 年(參考李四光著地球的年齡,商務印書館)現在應改作 1.6×10^9

岩,再下是比較酸性較弱的岩石,更下是基性的岩石.花崗岩和其下的一層含放射質較豐.所以我們可以說,$\int P\,dx$ 熱量極大部分,是由這兩層放出來的.據 Jeffreys 的意見,花崗岩比其下的一層薄一半(從地震方面推測的結果),於是按前表所列的數目,得

$$\int_0^\infty P\,dx = 1.3\times 10^{-12}H + 0.36\times 10^{-12}\times 2H = 2\times 10^{-12}H$$

又

$$\int_0^\infty P\,dx = 0.008\times 28.0\times 10^{-5} = 2.24\times 10^{-6}$$

(每秒每平方公寸地面傳熱的總數)

故 $H = 11$ 公里

根據以上的計算,Jeffreys 氏以爲地殼上部爲花崗岩組成,他的厚度約在十一公里.其下爲基性岩組成,厚度約廿二公里.前定的數目,如 S＝1400 等,多少都有問題.因此,我們不能相信 Jeffreys 的結案完全可靠.可是他的方法,確實很有價值.將來經過詳細測驗,那些數目,也許多少有些變更,然而也不會差的很遠.爲簡單起見,Jeffreys 把各種岩石中所含的放射質量,無論在上在下,當做一個不變的數目,實際上說起來,并不如此簡單.上面的花崗岩和下面的花崗岩,其中所含的放射質,不見得相等.根據 Ingersoll 和 Zobel[11] 的方法,Holmes 主張放射質在地下的分配,按着指數的法

11. Ingersoll, Zobel—Mathematical Theory of Heat Conduction, 1913. Holmes—Geological Magazine, 1915, pp. 102-112.

則,卽

$$P = Ae^{-ax}$$

式的 A 及 a 爲二恆數,依此法則,再按(6)式計算岩層厚度,其結果,花崗岩層仍不能超過十五公里.從地溫的現狀來推測地殼的組成,現在所能辦到的,不過如此.

(二)　岩石的分配

在地球表面上我們遇見的岩石,種類極多,他們產生的情形,也很複雜.大致的講,可生爲兩大部份:一部分是由熔質凝結而成的,普通稱爲火成岩.還有一部分是漸漸堆積固結而成的,普通稱爲停積岩.停積岩是各地質時代已有的岩石毀壞之後再造之物,所以層次甚多,而質料則各時代大致相差不遠.這些停積而成的岩層,祇敷在地球的皮表.因爲迭次經過地殼的運動,往往破碎零亂不堪.在陸沉帶中(Geosyncline)有時厚到二十幾公里,但是這幾十公里岩石,幷非從上至下,平敷下去.有時簡直一寸都沒有.所以這樣浮泛的停積物,在地殼的組成上,幷算不了一回事.

停積岩的中間,往往有火成岩衝入.從他們產生的情形判斷,顯然是由地下流出來的.最古地層(玄古層)的底下,也常常露出花崗岩或類似花崗的變質岩.這些花崗岩中,常常夾着有玄武岩或其他基性岩石.足見得花崗岩底下,還有基性的岩石.花崗岩在大陸上的分布,固然很廣,同時玄

武岩和其他的基性岩石,上世界上分布也很廣,大批的基性岩流(如印度南部約佔一百萬平方公里),由地下較深的地方流出,毫無疑義.大洋中有許多火山,那火山島中的岩石大部分都是玄武岩.尤其是太平洋中的海島,幾乎無一個不是由玄武岩造成的.

依據前述的事實,我們可以推想到大陸的上部,是由花崗岩類組成,花崗岩層以下,恐怕就是玄武岩或其他類似的岩石.地質家告訴我們的情形是如此.

我們都知道,地球平均的質量是5.52.而花崗岩平均的質量不過2.7,玄武岩平均的質量2.9到3.0.[13] 假如這種的材料繼續到地心,無論如何壓縮,決不能湊成地球平均的質量.所以從重力的關係和地球平均質量着想,我們不能不想到地下不免有更重的物質存在.輕的在上,重的在下,是自然的趨勢.

地球是一個運行不息的天體.在現今運行速率之下,他有一定的惰勢 (Moment of Inertia). 各種質量的配合,與現在的惰勢也有相當的關係.從地球的惰勢,平均質量,地球的扁度 (ellipcity), 岩石的可壓性 (compressibility) 以及地震的現象着想, Adams 和 Williamson 二氏說地球是四大層作成的[14]. 第一層爲地殼,厚約六十公里.這層的上部,由酸性岩

13. Clarke, F. W.—Data of Geochemistry.
14. The Composition of Earth's Interior, Smithsonian Report 1923, 241-260.

石,如花崗岩之類組成,愈下酸性(卽矽質——SiO_2)愈減,到最底下的岩石,比輝長岩(Gabbro)的基性更甚.第二層的底在深到一千六百公里的地方.這一層由橄欖岩(Peridotite)組成其普通的比重爲3.3,其底部較重,大約4.35.第三層由鐵橄欖岩(Pallasite)組成,其成分爲鐵與橄欖石的混合物,也許含着若干鎳質(Ni).愈至下部鐵鎳二質的分量愈增.其底深到三千公里.最後一部分爲地球的核心.全由鐵鎳二質組成,其比重在10左右.

華盛頓氏[15] 的意見和前述的意見,大致相似.不過華氏分層更多,并謂各層之間,質料漸漸變更,無所謂不連續的現象.華氏把地殼下之組成,分爲鐵斑(Ferrosporic)殼和石斑殼(Lithosporic)兩大部分.鐵斑殼中主要質料爲矽化質,其中僅有若干分散的鐵鎳質;石斑殼中則主要質料爲鐵鎳質,其中僅有若干分散的矽化質.華氏所分的六層構造如下:—

A 層——卽地球的核心,由鐵鎳造成.其半徑約爲 3400 公里.其密度 10.

B 層——石斑殼,其中含有若干分散的矽化質,厚 700 公里.密度約 8.

15. Washington, H. S.—The Chemical Composition of the Earth, American Journal of Science Vol. 9, 1925, pp. 351-378;
The Interior of the Earth and its Crust. Journal Franklin Institute. 1925.

C 層——鐵斑殼,其中含若干分散的鐵鎳質,厚1600公里,密度約4.

D 層——橄欖岩殼,厚度1500至1600公里,密度約4.

E 層——玄武殼或輝長岩殼,厚約40公里,密度約3.2,漸漸變爲表殼.

F 層——表殼,由花崗岩或花崗閃長岩組成,厚15至20公里其密度約2.8.

至於皮表之停積岩層甚薄,華氏不曾計較.

據德里(Daly)氏的意見[16],地殼的上部由花崗岩類造成,可無疑問,稱爲上殼,上殼厚大約在55公里左右.上殼下根本就不應該有普通的岩石,不應該有結晶質.祇是有一種極熱而受强壓的玻璃質,其成分與普通的玄武岩相當.這種玄武岩質的玻璃質有相當的彈性,如果去掉壓力,他就會伸漲起來.地球的下殼,便是這種材料造成的.

以上都是岩石學家的意見.他們立論的根據,并非獨立的.因爲前已說過,岩石學家并沒有特別的本領,斷定地下各種岩石.他們一方面以各種岩石的密度和地球平均的密度爲張本,一方面依靠地震學家及其他方面研究的結果,逐步進取,纔得着上述各項結案.而這些結案,祇是較有價值的意見而已.所以我們敢大膽的說,關于地球構造的問題,岩石學家的意見,固然少不了,然他們單獨的決不能

16. Daly, R. A.—Our Mobile Earth, pp. 90-127, 1926.

解決這個問題.

(三) 地震

各種物質,都可以傳播波動,不過流質沒有彈性,祇能傳播疏密波.因爲疏密波進行的方向和他擺動的方向一致,故又名縱波.至於固質具有彈性,不獨能傳疏密波,且能傳扭轉波.因爲扭轉波擺動的方向并不與其進行的方向一致,故又名橫波.地震本爲地中發生的波動,從岩層中傳播於四方.所以波動力學的原則,大致都可以適用.每一次地震發生,除縱橫波以外還有所謂拉列 (Rayleigh) 那伏 (Love) 等波同時發生,這些波動的情形不同,速率也不同,所以在離震源稍遠的地方,他們到着的時候,也顯然不同.從理論上研究,我們可以知道縱橫波傳播的速率和他們所經過的媒體的彈性與密度有一定的關係.各種岩石的彈性係數和密度,比較的容易測驗,所以祇要知道波動在地下經過的路程和速率,我們便可以知道地下有那一類的岩石.

先說縱橫波傳播的速率,和傳播縱橫波的媒體的密度與其彈性係數的關係.假定傳波的媒體性質均一,且係異向同性 (isotropic), 可以省掉許多計算的麻煩.造岩的鑛物,大都是異向異性(anisotropic),今假定異向同性似與實際情形不同.但是鑛物在岩石中排列的情形,異常的紛亂,所以就岩石而言,簡直可以說和異向同性的物質一樣.

現在在媒體中任取一點,其未受波動時的坐標爲 x, y, z,既受波動,其 x, y, z 三方向地位的變遷(變位)爲 u, v, w,位置既變,卽發生彈力.爲便于計算起見,在 x, y, z 點的左近,取一極小的方塊,其容積爲 $dx\ dy\ dz$.單就 x 方向而言,此一方塊中因各質點發生比較的變位而引起的力必爲

$$dxdydz\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma xx}{\partial x}dxdydz+\frac{\partial\sigma xy}{\partial y}dydxdz+\frac{\partial\sigma xz}{\partial z}dzdxdy.$$

卽
$$\varrho\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma xx}{\partial x}+\frac{\partial\sigma xy}{\partial y}+\frac{\partial\sigma xz}{\partial z}\quad\cdots\cdots(7)$$

式中 ϱ 爲密度, t 爲時間, σxx 爲沿 x 向伸縮的彈力, σxy 爲沿 x 向而順着 xz 平面的扭彈力, σxz 爲沿 x 向而順着 xy 平面的扭彈力.其他還有類似上式的兩個方程式,一表示沿 y 向的彈力,一表示沿 z 向的彈力.這些彈力和發生的變位,有一定的關係.所謂關係者,就是用彈性係數表示.普通可以直接測驗的彈性係數有三種:(1)伸縮彈性係數,一名楊氏彈性係數(E),(2)體積彈性係數(K),(3)扭彈性係數(μ).用單位原形的變形乘彈性係數,卽可得彈力.凡彈性體受壓力以後,正面縮短,側面伸長,受牽力以後,正面伸長,側面縮短.兩方面單位長度伸縮的比例,名勃瓦生比(Poisson's ratio).一種物質的勃瓦生比,有一定的數目,尋常用 $\frac{1}{m}$ 表示.前述各種彈性係數彼此的關係,可由勃瓦生比決定.

利用前述種種關係,(7)式可寫爲

$$\varrho\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\delta}{m-2}\right)}{\partial x}+\frac{\partial u\ \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial y}+\frac{\partial \mu\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)}{\partial z}$$

其他還有兩個類似的方程式.式中

$$\delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

前式可簡寫為

$$\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=(\mu+\lambda)\frac{\partial\delta}{\partial x}+\mu\nabla^2(u)\cdots\cdots(8)$$

式中

$$\lambda=\frac{mE}{(m+1)(m-2)}$$

$$\nabla^2(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

其他還有兩個類似式的方程式,卽

$$\varrho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=(\mu+\lambda)\frac{\partial\delta}{\partial y}+\mu\nabla^2(v)\cdots\cdots(9)$$

$$\varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=(\mu+\lambda)\frac{\partial\delta}{\partial z}+\mu\nabla^2(w)\cdots\cdots(10)$$

假如把(8)(9)(10)三個部分微分方程式微分出來,再一齊加起來,卽得

$$\varrho\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\nabla^2(\delta)\cdots\cdots(11)$$

因為我們假定地震的波動是平面波,所以對于 y 和 z 的微分係數都等于零,于是 δ 變為 $\frac{\partial u}{\partial x}$.又 x 向的運動方程式為

$$\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdots\cdots(32)$$

如果 u 能適合于(12)式,則 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 必能適合于(11)式.又假如*

* 以下係採取 H. Jeffreys 的方法解釋,較尋常獃解微分方程式的方法為新頴而易于了解.
(參考 Jeffreys: The Earth, p. 85.).

$$\varrho V_p^2 = \lambda + 2\mu \quad \cdots\cdots(13)$$

則(12)式一般的解答爲

$$u = f(x - V_p t) + g(x + V_p t) \quad \cdots\cdots(14)$$

式中 f, g 爲任何二個函數.假定 g 爲零,若 t 增加 τ, x 亦增加 $V_p\tau$, 則 u 不致變更.在此種條件之下,我們可以知道 f 函數之項,代表一種變位,其變位的情形就是向 x 增加的方向,每經過 τ 時間後變位的距離爲 $V_p\tau$,一直繼續下去.也可說是代表一種波動,向增加的方向,以速率 V 前進.同樣,g 項也代表速率與前者相等而進行方向相反的波動.從此可見如果不是恆數,因之 δ 不爲零,則波動進行的速率必爲 V_p,即

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}} \quad \cdots\cdots(15)$$

其次, V, W 適合于下列方程式

$$\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(v, w) = \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}(v, w) \quad \cdots\cdots(16)$$

假如 $$\varrho V_s^2 = \mu \quad \cdots\cdots(17)$$

照前述的理由,可知 v, w, 的變位,乃根據于速率等于 V_s 而向 x 方向進行的波動所發生者.如若 $\delta = o$, v, w 不等于零則波動進行的速率必爲 V_s.即

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} \quad \cdots\cdots(18)$$

(15)式所代表的波動,擺向與進行向一致,可知爲縱波.(18)式所代表的波動,擺向與進行向垂直,可知爲橫波,若將(15)

式與(18)式比較,即見 $V_p > V_s$.所以縱波進行較速,橫波進行較緩.因此,地震儀上所接到的地震波動,普通都分爲幾段.最先到者,即縱波名曰初波 (Prima); 其次即橫波,名再波 (Seconda). 再波以後,波動的情形,較爲複雜,因爲有拉列,那伏等波混在一道.再加上反射波,情形更爲複雜,在此不能討論爲方便起見,(15)式可改寫爲

$$V_p = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}u}{\rho}} \qquad (19)$$

式中 K 爲體積彈性係數,亦名反壓縮性 (Incompressibility) 亦即壓縮性 (Compressibility) 的反數——壓縮性 $\frac{1}{k}$.

波動傳播的速率,在實驗室中測驗,不容易精密.普通測驗的方法,大都是直接測驗岩石的各種彈性係數,然後依(18)(19)二式再計算速率[17]. 最近有幾個法國人 (Maurain, Eblé, Labrouste), 在法國中部選了一個花崗麻岩的區域,用十噸和五噸的强烨藥在花崗麻岩中爆裂.又在附近的地方立了二個地震儀.這樣,傳波的速率,可以定到很準.據他們所得的結果,前述花崗麻岩傳縱波的速率平均每秒5,524米達.像這一類的實驗是極有價值的,可惜困難太多,不能隨便舉行.假如花崗麻岩的密度爲 2.65, 他的勃瓦生比爲 $\frac{1}{0.2244}$, 我們可根據(18)(19)二式求得(K)爲 0.425×10^{-12} c. g. s.

但是同一種岩石的體積彈性係數(K)是隨溫度和壓力

17. 吳磊朋 Experimental Determination of Young's Moduli of Rocks, 中央研究院地質研究所西文集刊第十號, 1930.

變更的.我們知道地下的溫度高,壓力也大,在地表測得的數目,地下未必能適用.關于溫度對于彈性係數的影響,祇是大概的可以說,溫度增高,彈性係數變小;然而至今還沒有詳細的研究.唯有壓力對于彈性係數的影響,曾經幾個美國人[18] (Bridgman, Adams, Williamson, Gibson, Coker 等)作過幾次試驗.從他們所得的結果看來,似乎壓力初加的時候,壓縮性頗大,到壓力增加甚大的時候,壓縮性漸減.壓力超過 2×10^9 c. g. s. 單位以上,壓縮性變更甚小.他們原來的計算,略有錯誤,經 Jeffreys 改正,列表如次:—

18. Franklin Institute, 195, 1923, 475-529; Proc. Nat. Acad. Sci. 12, 1926, 275-283; American Journ. Science (4) 22, 1906, 95-123; American Journ. Science 10, 1925, 359-367.

岩石種類	壓力 (c. g. s. 單位)	密度	$\frac{1}{K\times10^{-12}}$	$K\times10^{-12}$
花崗岩	2×10^{9} 10^{10}	2.61 2.66	2.10 1.86	0.476 0.538
花崗閃長岩	2×10^{9} 10^{10}	2.69 2.73	1.81 1.64	0.552 0.610
正長岩	2×10^{9} 10^{10}	2.61 2.66	1.85 1.66	0.540 0.602
閃長岩	2×10^{9} 10^{10}	2.74 2.78	1.60 1.47	0.605 0.680
輝長岩	2×10^{9} 10^{10}	3.05 3.08	1.18 1.15	0.847 0.870
輝石岩	2×10^{9} 10^{10}	3.40 3.44	1.01	0.990
橄欖岩	2×10^{9} 11^{10}	3.40 3.44	0.95	1.05
丹泥岩	2×10^{9} 10^{10}	3.29 3.32	0.84 0.79	1.19 1.27
橄鐵岩	$2\times10^{9}-10^{10}$	5.65	0.75	1.33
純鐵岩	$2\times10^{9}-10^{10}$	7.9	0.58	1.72
黑曜岩	$2\times10^{9}-10^{10}$	2.333	2.86	0.350
玄武岩玻璃	$2\times10-10$	2.851	1.45	0.690

前表中所舉2×10^{9} c. g. s. 單位的壓力,恰與地下七公里的壓力相當,10^{10} c. g. s. 單位的壓力,與33公里的壓力相當.注意依 Labrouste 試驗所得的K與從高壓力方法所得的K,數值相差,幾乎由百分之十到百分之二十.這也許是高

壓的結果.

以上是關于實驗一方面的話.現在我們要知道從地下各處傳來的波動,實際上速率何如.要測定地下傳波的速率,尋常常有兩種方法.第一法完全依靠同一次震動經過各地的時刻.第二法除傳波時間外,再以震幅大小的補助.地震學家已經造成專表,表示波線由發源地點至到着地點的角距離與傳波時間的關係.假如由震源作一直線到地心,又由地心作一直線到震波達到地表之點,則此二線的夾角,名曰震源和到達點的角距離.尋常用 Δ 表示.從理論上推測.可得下列關係:—

$$\Delta = 2\int_{pc}^{R} \frac{p\,dr}{r\left\{\frac{r^2}{c^2}-p^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \qquad (20)$$

式中 R 爲地球半徑, r 爲波線所經過地下某任一點至地心的距離, c 爲在此點波動傳播的速率

$$p = \frac{dT}{d\Delta}, \qquad (21)$$

T 爲傳波的時間. p 可由波線出射角定奪.從(20)及(21)的關係可得波線穿過的深度和速率的關係.即

$$\frac{dT}{d\Delta} = \frac{r}{c} \qquad (22)$$

前述的方法,假定震源在地面,或離地面不遠,又假定地球全體爲球形而依中心成對稱之組織.在理論上大致容或不差,然實際上測定時刻,頗不易精確.古天伯 (B. Gutenberg) 諸氏利用此種方法,加以震幅測驗的補助,分析各地地震,

迄今總算得了相當的結果.

地球各層傳波的速率如次表(據古天伯):—

深度(公里)	縱波速率(每秒若干公里)	橫波速率(每秒若干公里)
0 (表面結晶酸性岩石)	5.5	3.2 ?
約30	約 5.7	約 3.3
不連續		
約30	約 6.25	約 3.7
約45	6.3	約 3.7
不連續		
約45	7.9	4.4
60—70	8.0	約 4.5
不連續		
60—70	7.9	4.4
1,200	12.25	6.75
1,700	12.5	7.25
2,450	13.25	7.5
2,900	13.0	7.25
不連續		
2,900	8.5	?
6,370(中心)	11.0	?

前表中所舉表面結晶酸性岩石,乃指花崗岩類而言.所謂不連續者,即傳波的速率,忽然變更.因為速率忽然變更,我們可推測到傳波媒質的密度和彈性,忽然變異.這種的變異,當然是因為組成的質料不同.唯 Mohorovicic Conrad, Jeffreys, Gutenberg 諸氏,對于上部兩個不連續的深淺,意見稍有不同.關于此兩個不連續以上各層傳波的速率,意見也不一致,Jeffreys[19] 以為最上的不連續,不甚顯着,應該在 10-15 公里之間.此層傳波的速率,大約每秒5.6公里.其下一層的厚度與此大致相等,傳波的速率每秒6.2公里.到了45公里上下,速率驟然增加,上下不連續的情形,極為顯著.所以依地震得來的消息推測,地殼的厚,至多不過四十餘公里.就此四十餘公里的厚度,還可分為上下兩層,如果 Jeffreys 的意見可以採取,上層不過厚十五公里左右.可稱為表殼,恰與華盛頓的 *F* 層相當.從地球的熱况看來,這層與發熱最多的花崗岩層地位相當,厚度也大致相等 (詳前). 其下層可稱為裏殼與華盛頓的 *E* 層上部相當.

關于表殼的質料,大家一致承認是酸性岩石.但是那些酸性岩石,究竟是成結晶花崗岩,抑或是成玻璃質的黑曜岩,却有少許問題.發生這個問題的原因就是在表殼傳地震的速率,比花崗岩稍有不同,而與在高壓下的黑曜岩相近.可是我們要知道地下的溫度增高,花崗岩在此溫度下的體積彈性係數,當然要減少,如果壓力相等的話.就各方面的情形判斷,表殼為花崗岩組成,似無多大的疑問.

至于裏殼的組成,不能與花崗岩相差甚遠,因為通過裏殼的波動速率,和通過表殼的相差有限.或為玄武岩玻璃,

19. M. N. Roy. Ast. Soc. Geophys. Suppl., Vol. 1, No. 8, 1926, p. 385.

抑或爲閃長岩[20].表殼與裏殼之間,幷無明顯的界線.也許是由表殼的花崗岩漸變爲花崗閃長岩,再下變爲閃長岩或玄武岩玻璃.表裏兩殼總共的厚度,照現在的情形看來,總在30公里與45公里之間.

關于裏殼以下的組成,意見紛歧,爭執頗多.然大致都脫不了極基性的岩石.有人主張是玄武岩玻璃,有人主張是丹泥岩,亦有人主張是榴輝角閃岩.再下雖有種種推測,然尙無確實證據.到2,900公里以下,橫波不能通過,所以有許多人疑2,900公里以下,簡直是流質了.以上是從地震方面探討地球內部構造的結果.

(四) 均衡現象

假如地球是均一而不旋轉的物體,他的形狀,應該成球形.他如果均一而旋轉的物體,他的形狀,應該成扁球.照克列羅 (Clairaut) 的定理,他的扁度,可以離心力和重力定奪.今命在赤道的離心力爲 f,在兩極的重力爲 g_p,在赤道的重力爲 g_e,扁度爲 α,則

$$\alpha = \frac{5}{2}\frac{f}{g_e} - \frac{g_p - g_e}{g_e} \qquad (23)$$

若命 c 爲兩極的直徑,a 爲赤道的直徑,則

$$\alpha = \frac{a-c}{a} \qquad (24)$$

20. Holmes, A.—Some Problem of Physical Geology, Geol. Mag. Vol. LXIV, No. 756, 1927, p. 266; Nature, Oct. 1926, p. 586.

假如在任一緯度(Φ)的重力爲γ_o,則

$$\gamma_o = g_e(1+\beta \sin^2 \Phi) \quad \cdots\cdots (25)$$

於是

$$\alpha = \frac{5}{2} \cdot \frac{f}{g_e} - \beta$$

$$\alpha = \frac{1}{297} \quad \cdots\cdots (26)$$

前舉數值,爲現今最準確者.嚴格的講起來,地球并非理想的扁球.假如在大陸上掘了許多縱横的運河與大洋相通.這些運河的表面和大洋的表面聯絡起來所成的表面,名曰地球的公正面 (Geoid).公正面的形狀,與扁球相差極少.在美國相差不過十九米達在南美洲的安得士山及喜瑪那雅山一帶,相差大約在 100 米達以下.

(25)式祇是由理論得來的,參酌種種實際的情形, Helmert 于 1901 年曾作出一實用的公式, 1912 年 W.Bowie 又作了一個公式.就美國大地測量局所得的結果判斷,Bowie 的 1912 年公式,較爲合宜[21]. Bowie 的公式如次:—

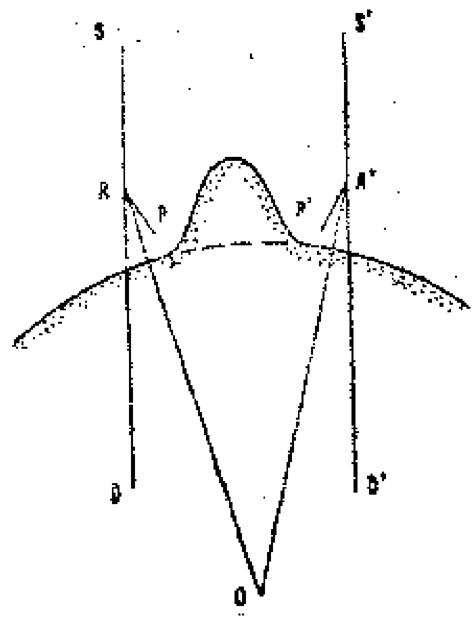
$$\gamma_o = 978.038(1+0.005302 \sin^2 \Phi - 0.000007 \sin^2 2\Phi) \quad \cdots\cdots (27)$$

每緯度一度,在地面上平均的距離,約有 69 英里此數測到很準的時候,其差誤可到 3 米達以下.因爲扁度的關係,各緯度在地面上的距離,并不相等.每一個緯度與其次一個緯度在地面距離的差,最大有 0.013 英里,此就平地而言.

21. U. S. Coast and Geodetic Survey, Speical Publication, No. 12, p. 25; Bowie, W., Isostasy, p. 121.

換言之,在比較平坦的地域,例如在大洋中,如在北半球,每往北極方面走過緯度一度,則與每一緯度相當的地面距離減少0.013英里;如在南半球,每往南極方面走過緯度一度,地面距離減短的情形亦如之.測量緯度的方法,都是以遠星和各處的垂直線爲標準.前者不因地面質量的分配不同而變更,後者却不能不受質量分配的影響.

假如在同一經度上兩點之間,有大山脈存在.這時候垂直線受了大山脈的側面吸引力,觀測者所見的垂直線,便不是當地真正的垂直線,乃是稍向山脈方面傾斜.因此,觀測的角度,較大于實際的角度.祇要知道山脈的質量,這種差誤,是可以糾正的,從前 Airy 和 Pratt 測量印度的時候,就感覺到在喜瑪那雅山南北所觀測的緯度,應該加以此項



糾正.其原則頗簡單.如圖 S D 及 S' D' 爲遠星的方向.因星甚遠,此兩線可視爲平行. A A' 爲山北與山南的兩點, A P 及 A' P' 爲在此兩點所見的垂直線.因山的側面吸引力,此兩線幷非實際的垂直線.其實際的垂直線應爲 A O, A' O. O 卽地球的中心.如地球的半徑爲 R, 則

$$\angle AOA' = \frac{AA'}{R}$$

$$\angle OAD + \angle OA'D' = \angle AOA' = \alpha$$

$\angle PAD$爲遠星在 A 的子午頂角距(Zenith distance)

$\angle P'A'D'A$ " A' "

此二角皆可實地觀測.假如命

$$\angle PAD+\angle P'A'D'=\beta$$

則 $$OAP+OA'P'=\beta-\alpha$$

假如山無吸引力,則 $\angle OAP+\angle OA'P'=O$. 由此可知 $\beta-\alpha$ 爲兩處垂直線傾斜度的和.命 δ 及 δ' 爲在 A 及 A' 點山吸力的水平加速率,于是在 A 點錘的傾斜爲 $\frac{\delta}{g}$, A' 點錘的傾斜爲 $\frac{\delta'}{g}$,故

$$\delta+\delta'=g(\beta-\alpha) \qquad (28)$$

g 爲當地的重力加速率. δ 及 δ' 可用精密的測量求出. β 至 α 可由觀測遠星得來.然此由觀測得來的數目,比從重力的定律計算得來的數目小多了.據 Pratt 在印度北部測量的結果[22],祇佔山吸力的影響的三分之一.甚至有人測量因山吸力所發生的傾斜,不僅爲零,且有時成負數[23],然則大山脈祇是空殼子,否則他們的質量到那裏去了?又如用(28)式定地球吸力的恆數,再用所得的恆數求地球平均的密度,所得的結果,比地球實際平均的密度小多了.再如用(28)式的關係,糾正緯度的觀測,則與緯度增加一度在地面應減小的距離又不符合.以上是在大山側面測量的結

22. Pratt, Phil. Trans. 145, 1855, 53-100.

23. Petit, Compt. Rendus, 29, 1849, 729-734.

果.

現在我們且看在山頂測量的情形何如.假如命地球的質量爲M,平均密度爲ϱ_0,半徑爲a,重力X恆數爲f,則重力的强度

$$g=\frac{fM}{a^2}=\frac{4}{3}\pi f\varrho_0 a$$

假如在空中高h處的重力强度爲g_h,則

$$g_h=\frac{fM}{(a+h)^2}=\frac{fM}{a^2}\left(1-\frac{2h}{a}\right)=g\left(1-\frac{2h}{a}\right)$$

h^2儘可省去,假如高h處不在空中,其下有山填滿,山的密度爲ϱ',則因此山而增加的吸力,可用Gauss的定理求得爲$2\pi\varrho' hf$. 假定山的面積甚大,于是在山頂總共的重力强度爲

$$g\left(1-\frac{2h}{a}\right)+2\pi\varrho' hf=g\left(1-\frac{2h}{a}+\frac{2\pi f\varrho' h}{g}\right)$$
$$=g\left(1-\frac{2h}{a}+\frac{3}{2}\frac{\varrho'}{\varrho_0}\frac{h}{a}\right)$$

由前列各式,可知無山的時候,高h點的重力强度,比海平面上的重力强度小$\frac{2gh}{a}$. 此數名曰海平糾正數,亦名斐氏(Faye)糾正數.然則有山時山頂重力的强度比無山時同高重力的强度大$g\left(\frac{3}{2}\frac{\varrho'}{\varrho_0}\frac{h}{a}\right)$.此數卽山的吸力,由此數中減去因山的高度而減少的吸力,應爲在山上的吸力大于海面的吸力,于是

$$g\left(\frac{3}{2}\frac{\varrho'}{\varrho_0}\frac{h}{a}\right)-\frac{2gh}{a}=\frac{2gh}{a}\left(\frac{3}{4}\frac{\varrho'}{\varrho_0}-1\right)$$
$$=-\frac{2gh}{a}\left(1-\frac{3}{4}\frac{\varrho'}{\varrho_0}\right)$$

前數名曰布革 (Bouguer) 糾正數.因 ϱ_0 常大于 ϱ', 故前數常爲負數.依布氏糾正數測算的結果,差誤甚大.實際上斐氏糾正數較爲合宜,卽 $-\frac{2gh}{a}$. 然則 ϱ'(卽山的密度)差不多要等于零,這樣,當然與事實不合.

所以無論就大山脈側面測量重力而言,抑或由山頂測量重力而言,山的質量,都非近于零,則結果不能適用.而山的質量,又決不能近于零.爲解釋此種矛盾的事實. Airy 和 Pratt 發表了他們的見解,說大山脈祇是浮在地上,好像一塊木頭浮在水上.這樣一來,這種矛盾的現象,自然冰釋.水頭的高度乘他的密度,在平衡的時候,非與他入水的高度乘水的密度相等不可.如是,山見在地面的高度和他入地下的深度乘他平均的密度,非與山落入地下的深度乘平地或低地的平均密度不可.達通 (C.E. Dutton) 氏稱此種現象爲勻衡現象 (Isostasy)[24]. 勻衡之所以能成立,是因爲抵消的關係 (Compensation).

關于抵消的情形,各家所見不同.大致可分爲兩派,一派假定山有根,如冰山浮在大洋中. Airy 就是如此主張.如果密度相等的質料,露出地面的高低不同,落入地下的深淺也不同.露出地面愈高者,插入地下愈深.另一派假定抵消到地下一定的水平面爲止.名曰抵消的基面 (base level of

24. Bull. Wash. Phil. Soc. 11, 1889, 51-64;
Journ. Wash. Acad. Sc. 15, 1925, 359-369.

compensation). Pratt 就是如此主張.現在最流行的意見,便是這一派的意見.照這一派的意見,高低各處往下的密度不等,所以在各深度的壓力也不等.到抵消基面,各處的壓力始完全相等.就此一派的意見而論,抵消在何層開始;在抵消層中,抵消如何分配,都是不易解決的問題.

現在假定有隆起的地方,他的厚度爲 k, 密度爲 ϱ'. 于是每單位面積增加的質量爲 $\varrho' k$.又假定在地下某水平面密度爲 ϱ_0. 此面上的質料,能向旁面流動,如果隆起的地面,往下落 $\frac{\varrho' k}{\varrho}$,則可以完全抵消(卽整塊的質量不變). 在此能向旁面流動層中,選一等壓平面,命前述之水平面旣下降後,離此等壓平面的距離爲 x, 此面此時的密度,必與未下降時,離等壓面 $x + \frac{\varrho' k}{\varrho_0}$ 處的密度相等.假如 ϱ 爲距等壓面 x 處原來的密度,則旣下降後距 x 處的密度必爲 $\varrho + \frac{\varrho' k}{\varrho_0} \frac{d\varrho}{dx}$. 密度愈到上面愈小,所以在任一抵消面密度的變更,卽爲 $\frac{\varrho' k}{\varrho} \frac{d\varrho}{dx}$, 爲一負數.如若 ϱ 與 x 爲正比例,則此數爲一恆數[25]. 假如抵消分配于 H 厚度,則每一單位深度應減少的密度應爲 $\frac{\varrho' h}{H}$. h 爲地面隆起的高度.

$$k = h + \frac{\varrho' k}{\varrho_0}, \quad h = k\left(1 - \frac{\varrho'}{\varrho_0}\right)$$

由前式可知如 H 爲無限大,則地下質料的密度不會變更,于是重力的變更,可依布革的公式計算.如 H 爲零,則所有

25. Hayford氏的假定是如此(參考 Figure of the Earth and Isostasy, 1909, 1910.)

的抵消都集中于表面.山有吸引的力量.這兩種的假定,都不能成立.唯有 $H=90-100$ 公里的時候,在抵消勻一分配假定之下,最與實際的觀察相近[26].

然而抵消究竟是否勻一分配,却大有疑問.據研究地震的結果,地下確有若干不連續的層.于是海士砍冷 (Heiskanen) 氏假定抵消祇限於一層.據海氏計算的結果,此層并不甚深.在美國約深50公里.高加索77公里,阿耳魄士山41公里.若與實際觀測重力變異的結果比較,此種假定,似乎比假定抵消勻一分配較爲合宜[27]. 海氏的見解,雖不無問題,然確有可取之點.

勻衡的現象,祇限於大地域,如大洋或大陸的一部分.海邊和深海相接的地方,或高山的附近,抵消往往不甚完全.現在世界上大地測量家正研究這個問題.抵消雖不甚完全,然而抵消的現象,已經成了科學上的事實.基于此事實,近年演出許多新學說,如貝革勒 (A. Wegener) 的大陸漂流說[28], 便是最好的一例.據這一類意見,大陸造成的材料較輕,名曰矽鋁層 (Sial). 浮在較重的矽鎂層 (Sima) 上面,本文中種種的討論,皆足以證明此種觀念可以成立.

26. Jeffreys, The Earth, p. 197, 1929. Bowie, Investigation of Gravity and Isostasy, U. S. Coast and Geodetic Survey, Sp. Pub. 40, 1917.

27. Veröff. d. Finn, Geodät. Inst. 1924, 1-96.

28. Entstehung der Kontinente und Ozeane, (英譯本 : Origin of Continents and Oceans).

(五) 結論

依前述種種觀測判斷,地球的表面,除了大氣層和海洋之外,確有較輕的岩石,造成地殼在大陸方面.地殼可分爲兩層,其間界限,不甚清楚.一名裏殼一名表殼.表殼由酸性岩石,如花崗岩之類造成.裏殼由基性岩石如玄武岩玻璃之類造成.在海洋方面,尤其是太平洋方面,似無表殼,祇有裏殼.大西洋爲比較的一個新成的海洋,所以情形稍有不同.

表殼的厚度,至少有15公里,也許到20公里以上.裏殼的厚度,大致與表殼相等.兩殼總共的厚度至少有30公里,也許厚到45公里.這是就普通的厚度而言.在特別的地方,他的厚薄,也許不是完全一致,不過不能超過此限太遠.地殼以下,便是極基性而且甚重的岩石,與造成地殼的材料,性質頗有差異.現在我們所知道的情形,如是而已.

書 評

The Queen of the Sciences.

E. T. Bell, Ballimore 著. 一三一九年 The Williams and Wilkins Company 出版,共 333 頁,價 $ 100.

此書爲世紀進步叢書 (A Centray of Progress Series) 之一.作者注重於不用專門名辭以表明數學之基本概念.

第一章略論數學之目的,而極力注重於數學爲創造的,蓋寧謂數學爲藝術而非爲其最後之用途也.

第二章敘述數學之著名定義,如羅素 (Russell) 皮耳士 (Peirce) 克萊因 (Klein) 及希柏特 (Hilbert) 諸氏者.

第三章討論代數所採用之假定方法. (postulational, method) 並敘及並行假定及羅巴瑟斯啓 (Lobachevsky) 及黎曼 (Riemaun) 幾何之特徵.

以後各章,則或論普通代數可依有理數,實數,及複數之分類而實現之;並可依變形法,羣,不變式,及縱橫式 (Matrix) 之記法以表出之.或論算術之無治領域 (Unruly domain) 內含數論中已證或未證之簡單定理.

最後一章述數學之存在性及對於數學思想之近代批評.

作者亦爲成名之小說家,故句語鬆動易讀.雖略誦一過亦可窺知數學精神之光芒萬丈,誠人人不可不讀之書也.

Applications of the Absolute Differential Calculus.

A. J. Mc Connell 著.一九三一年倫敦 Black and Son Company 出版.共 330 頁.價二十先令.

此書爲大學三四年級張量微積分之教本.書中含有多數之例證,並集有八百七十九個習題,其中四十一題已有解答,餘者留爲學者自習.其後部雖不甚難,但含有其他理論.此書完全採用近代符號,係一佳構.今將內容簡述如下.

第一部詳述張量代數之初等性質,包含克洛湼克與件 (Kronecker Data) 之行列式理論及聯合系統.

第二部爲"代數幾何"述圓錐圓錐曲線,及二次曲線等理論之應用.並用其他形式以表出吉布(Gibb)之向量解析.

第三部及第四部爲"微分幾何"乃本書主要部份,由一次變形法以及於普通變形法;由張量之代數性質以及於微分性質,皆備論之.又復述及協變式之微分法,平行易位,佛好納公式, (Frenet formula) 黎曼克里斯妥斐 (Riemann-Christoffel)張量,高斯曲率(Gaussian Curvature)及最短線,主要曲率等.

最後一部爲力學,電學,及特種相對論.其力學中之"分

子動力學"“固體動力學”及“連續媒體力學”數章略述初等理論內詳述基本方程式之張量公式.著者由張量之觀點述特種相對論,並及於普通理論之梗概,雖略而精.

然此書亦有少數之錯誤.敍述之誤有二,排印之誤有六.復有少數遺漏之誤,例如述極端曲線之微分方程式之由來而不及其基本補題.如此錯誤,雖無關宏旨,亦小疵也.

Internmidate Calculus.

Percey F. Mmith WilliamR. Longley 合著.一九三一年波士頓 Ginn Company 出版共 470 頁.價 $ 3.20.

在耶魯大學,曾有龍雷(Longley)及威爾遜(Wilson)合著之微積分概論 (An Introduction to the Calculus) 出版.一九二九年又有斯密司 (Smith) 及郎格來對於格蘭威 (Granville) 微積分之改正本出版.此兩書皆可爲本書之預習教本,可與此書參詳比較之.

第一章全爲公式之彙集.

第二章論解折幾何中之圓錐曲線第三章爲代數函數之微分第四章爲代數函數之積分.此三章皆複習.其微分及積分之方法,於前二書中已有,此處專論極大極小,曲線之描跡,速度,面積,旋轉固體之體積,壓勢,工作,及液體壓力.定積分求近似值之梯形規則及辛普孫 (Simpson) 規則皆

敍及之.

第五章及第六章述及超越函數,並詳論曲線描跡之應用及單和運動(Simple Hamanic Motion)第七章及第八章述未成標準形式之常用求積分法.此四章皆含有多數習題,使學者習熟於超越函數之微分及積分法.

在郎格來及威爾生書中未提及極座標,而略及襄變數方程式,故此書中首先及之.曲線皆描出之.旋輪線方程式之由來及微積分之應用皆指明之.代數方程式及超越方程式之圖解求近似根法及牛頓法(Newton's Method)皆論及之.又一章專論經驗方程式.

曲率章中之教材及習題與格蘭威及斯龍二氏書中相同,而刪去導來式之變形及漸伸線數節,却加入曲線運動中加速向量之正分力.

常微分方程式章中亦與此相同,而關於n級常係數之一次微分方程式之討論,則未述及.

最後一章論及多重積分中之二重積分,此亦與格蘭威及施郎二氏改正本相合.級數章及部分微分方程式章中只教材及習題之分佈,稍有不同.部分微分方程式章特爲嚴整.其應用有刪去者,而於部分微分方程式章前加空間解折幾何一章.

此書印刷及插圖均甚佳,其大小亦較一九二九年格蘭威本爲適用.書後附有積分簡表.凡已習過初等微積分者

再作較深詳之研究,此爲頗合宜之書矣.

程 綸

An Elementary Treatise on Theoretical Mechanics.

by J. H. Jeans, M. A. F. R. S. Ginn and Compahy, 1907

這本書的年代頗久,編制甚舊,其內容之須加改正者當然很多.但其不精密處,多爲初等力學課本共有的毛病;取這本書以作課本的也還不少;所以特別把其中重要的兩處錯誤提出來討論一下.

(I) "28. Parallelogram of Forces. Theorem. If two forces are represented in magnitude and direction by the two sides of a parallelogram, their resultant will be represented by the diagonal of the parallelogram."(第三十八頁).

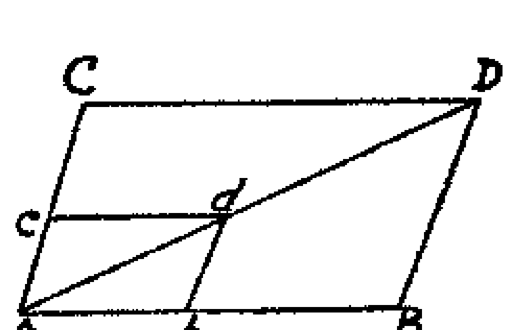
自相對論.量子力學出世以後,大家都注意到舊物理學,尤其注意到舊力學的基礎上去,舊力學的基礎沒有明瞭而要進一步的了解物理學,乾脆點說,是不可能的.所以初等力學中首先就應注意到這一點上邊所引的"力之平行四邊形定理",按他這本書的統系,並不是個定理(Theorem),不能僅用牛頓第二定律以證明的;它應該自已也是個公理(Axiom).

對于一適當的空間和一適當的時間要去觀察所有的加速度,把它們分起類來.在運動之每一類中消去各個運動所特具的個別常數,找出一個適當的式子,爲運動質點與其環境之物理的變數和幾何的變數的函數.這消去常數與分類,由作出加速度可以成功.這是經驗的事實.以相當的常數乘加速度$(m\vec{a})$就成功了力$(\vec{F})$,各屬於一類.所以力是關於一類的"質量加速度"(Massenbeschleunigung)的一個適當的式子.運動之實在的原因是旁的物理的或物質的現象,由力之觀念把它們綜歸于各類,所以力之平行四邊形法顯然不是一個向量之純數學的分解而爲力定律之綜合.力之平行四邊形公理所解答的問題是:

(F). 已知一力$\vec{F_1}$及旁一力$\vec{F_2}$所作爲條件的幾何的和物理的予料(data);設同時觀察出該兩類的予料,它們倆合起來也是不是一個力(力定律)所作爲條件的呢?並且是怎樣的呢?

現在再把Jeans的證明分析一下.他所根據的是牛頓第二運動定律:

"Law II. The rate of Change of momentum is proportional to the impressed force,.and takes place in the direciion of the straight line in which the force acts." (第二十六頁)



他作了一個圖(Fig 15)並且證明如下:

"Let AB, ABC represent two forces, and let Ab, Ac represent the accelerations they would produce if they acted on any particle separately."

我們要注意"separately"這個字它的意思是AB單獨作用在一質點上所生的加速度爲Ab, AC單獨作用在同一質點上所生的加速度爲Ac;卽兩力不同時作用在一質點上時兩力所生的加速度各爲Ab, Ac. 他接着說:

"Since, by second law of motion, the acceleration is proportional to the force, we must have

$$Ab : Ac = AB : AC."$$

這句話,除了根據牛頓第二運動定律外,都是幾何的問題,是對的.以下繼續着的是:

"Construct the parallelograms Abdc, ABDC. On account of the proportion just obtained, the two parallelograms will be similar so that Ad D will be a straght line, and we shall have

$$AD : Ad = AB : Ab."$$

這一段完全是幾何的問題.

"But Ad, the diagonal of the parallelogram of edges Ab, Ac, represents the resultant acceleration."

這句話的意思如果只是指加速度之純數學的分解與合成而於事實上怎樣發生,怎樣同時發生這兩個加速度無關,那才是對的;因爲他開始是假定兩力不同時作用在同一質點上各生一加速度,一爲Ab,一爲Ac,如果要這兩個加

速度是同時發生的,就先要解決問題(F).

"Since AB represents the force necessary to produce acceleration Ab, it follows from the proportion just obtained that AD will represent the force necessary to produce acceleration Ad."

這段話不錯,如果我們只把它當個幾何的問題看,AD儘可以是發生加速度Ad所必須的力而不一定要代表 AB, AC 同時存在時的合成效果,因為加速度 Ab, Ac 同時發生的問題還沒有解決照我們上邊所說的,要解決這個問題,只有根據力之平行四邊形公理,或與之相當的公理.那嗎只用Law II. 顯然不足以證明"力之平行四邊形定理".

(II). "The sum of the moments about any line L of all the internal forces is nil. for the mements of an action and reaction are equal and opposite." (第六十四頁).

他這一段話是根據牛頓第三定律以推出各內力關于任一直線的勢率(moment)之和等於零.要看他這一段話對不對,且先把他關于內力與勢率的定義及牛頓第三定律錄在下面.

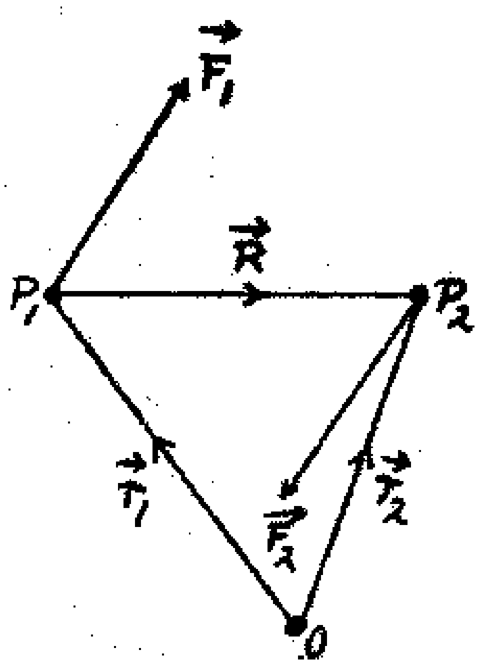
" Law III. To euery action there coresponds an equal and opposite reaction." (第二十六頁).

" 46. Definition. The moment of a force about a line at right angles to the line of action of the force is defined to be the product of the force and of the shortest distance between the two lines." (第六十頁).

"Definiton. The moment of a force about a line L which is not at right angles to the force is defined to be the same as the moment about L of the Component of the force in a plane perpendicular to L." (第六十頁).

"(b) internal forces, forces of interaction between the particle and the remaining particles of the system." (第六十三頁)

現在試據 Law III. 以證明他的話. the moments of an action and reaction are equal and oppsite). 設如圖質點 P_1 作用于質點 P_2 的力爲 $\vec{F}_2$, 依 Law III., P_2 作用于 P_1 的力必爲圖中的 $\vec{F}_1$, 而 $\vec{F}_2=-\vec{F}_1$. 又設一直線 L 垂直于 $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ 所定的平面,與該平面相交于 O 點. $\vec{F}$ 對于 L 的勢率爲



$\vec{\gamma}_1\times\vec{F}_1$　($\vec{\gamma}_1$ 爲由 O 到 P_1 的向量).

$\vec{F}_2$ 對于 L 的勢率爲

$\vec{\gamma}_2\times\vec{F}$　($\vec{\gamma}_2$ 爲由 O 到 P_2 的向量).

由圖知

$\vec{\gamma}_1+\vec{R}=\vec{\gamma}_2$　($\vec{R}$ 爲由 P_1 到 P_2 的向量).

于是得

$$\vec{\gamma}_2\times\vec{F}_2=(\vec{\gamma}_1+\vec{R})\times\vec{F}_2=\vec{\gamma}_1\times\vec{F}_2+\vec{R}\times\vec{F}_2,$$

但

$$\vec{F}_2=-\vec{F}_1,$$

所以

$$\vec{\gamma}_1\times\vec{F}_2=-\vec{\gamma}_1\times\vec{F}_1$$

而

$$\vec{\gamma}_1\times\vec{F}_1+\vec{\gamma}_2\times\vec{F}_2=\vec{\gamma}_1\times\vec{F}_1-\vec{R}_1\times\vec{F}_1+\vec{R}\times\vec{F}_2=\vec{R}\times\vec{F}_2,$$

但一般地

$$\vec{R}\times\vec{F}\neq O,$$

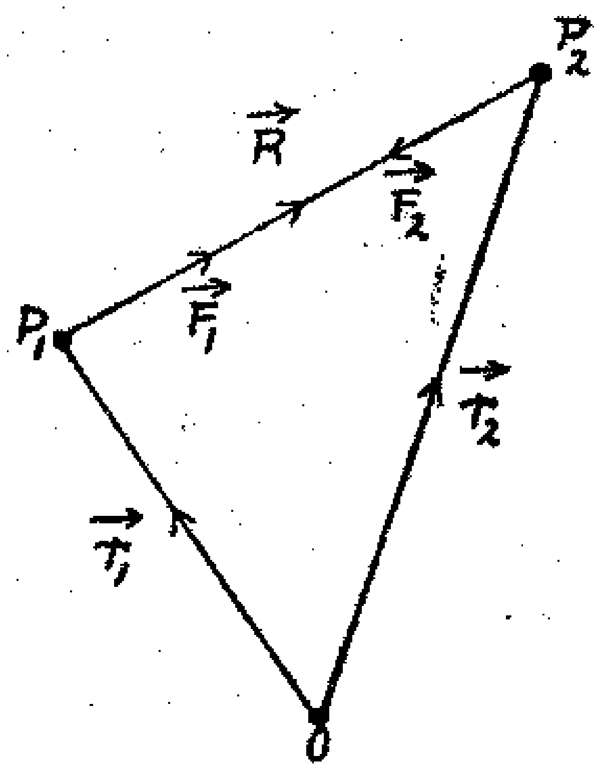
故一般地

$$\sum_{i=1}^{2}\vec{\gamma}_i\times\vec{F}_i\neq O.$$

這個結果同他的話不對.

假定

(H) 兩點互相作用的力之作用線均在該兩點的聯線上.設 $\vec{L}$ 不垂直于 F,而垂直于紙面;又 P_1 在紙面上,$\vec{R}$ 在空間之任一方向;$\vec{F}_1$ 在 $\vec{R}$ 的方向,$\vec{F}_2=-\vec{F}_1$,那嗎



$$\sum_{i=1}^{2}\vec{\gamma}_i\times\vec{F}_i=\vec{\gamma}_1\times\vec{F}_1+\vec{\gamma}_2\times\vec{F}_2$$

$$=\vec{\gamma}_1\times\vec{F}_1+(\vec{\gamma}_1+\vec{R})\times\vec{F}_2$$

$$=\vec{\gamma}_1\times\vec{F}_1-\vec{\gamma}_1\times\vec{F}_1+\vec{R}\times\vec{F}_2$$

$$=O.$$

令 $\vec{l}_o$ 表一在 L 上的單位向量,則 $\vec{F}_1,\vec{F}_2$ 對于 L 的勢率之和的數值爲

$$|\vec{l}_o\sum_{i=1}^{2}\vec{\gamma}_i\times\vec{F}_i|=O,$$

如 $\vec{R}\perp\vec{l}_o$,則兩力對于 L 的勢率之和當然也等于零.

由此可見僅用Law III. 不能證明作用與反作用對于任一直線的勢率之和等于零;必須另加一個公理(H)或與之相當的公理才能證明.

潘祖武

國立武漢大學理科季刊投稿簡章

一·本季刊登載關於數學物理化學生物地質等學科之稿件海內外人士惠賜大作一律歡迎

二·投寄稿件不拘文言白話但須依本季刊形式一律橫書每面二十二列每列二十三字繕寫清楚并加新式標點符號

三·稿件題目之下請署姓名如係譯稿須註原著者姓名或雜誌書報之名稱及其出版時期地點

四·稿中如有插畫或圖表請另用白厚紙繪畫或製成照片或附寄原圖

五·本刊稿件依照數學物理化學生物地質等學科之順序登載

六·來稿如未登載除預先聲明者外恕不退還

七·稿件登載後本刊略備薄酬以答雅意

八·稿件內容本刊得酌量增刪但不願意者請預先聲明

九·來稿請寄武昌國立武漢大學理科季刊委員會

國立武漢大學理科季刊第二卷第二期目錄

國立武漢大學理科季刊第二卷第三期目錄

國立武漢大學文哲季刊第二卷第二號目錄

國立武漢大學社會科學季刊第二卷第四號目錄

理科季刊委員會收到刊物誌謝

地質彙報……………北平西城兵馬司九號國立北平研究院地質學研究所

科學世界…………南京山西路國立編譯館內中華自然科學社

鐵路月刊……………浦口津浦鐵路局總務處編查課

文華圖書舘學專科學校季刊·武昌曇華林文華圖書館學專科學校

民大學報……………廣州荔枝灣國民大學出版委員會

學風……………………安慶舊藩署內安徽省立圖書館

東北月刊……………北平地安門外後海廣化寺東北月刊社

國立四川大學週刊成都國立四川大學

南華評論……………上海漢口路三另三號南華評論社

涇渭……………………蕪湖鳳凰山許宅經緯社

救國週報……………上海辣斐德路一二一九上海救國週報社

銳進……………………鎮江城內腰刀巷四號銳進社

國民週刊……………南京將軍廟龍倉巷九號國民週刊社

尙志周刊……………成都三台東街尙志週刊社

新社會…………………上海威海衛路一四二號新社會半月刊社

國立武漢大學理科季刊

第二卷第四期

價目	郵費
全年四冊 價銀二圓	訂購全年 本國及日本不加郵費 其他地域加郵費六角
每期零售 價銀五角	函購零本 本國及日本加郵費五分 其他地域郵費一角五分
本刊以九月十二月三月六月為出版期	
費須先惠空函不覆	
各地代售處零售概不另加郵費	

編輯者　國立武漢大學理科季刊委員會

發行者　國立武漢大學出版部

印刷者　中國科學公司

代售處　商務印書館

總發行所　武昌 國立武漢大學出版部

中華民國二十一年六月發行