

Печатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.
Санктпетербургъ, 30 октября 1867 года.

Непремѣнный Секретарь, Академикъ *К. Веселовскій*.

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

(Вас. Остр., 9 лин., № 12.)

О НАИБОЛЬШИХЪ И НАИМЕНЬШИХЪ ВЕЛИЧИНАХЪ СУММЪ, СОСТАВЛЕННЫХЪ ИЗЪ ЗНАЧЕНІЙ ЦѢЛОЙ ФУНКЦІИ И ЕЯ ПРОИЗВОДНЫХЪ.

§ 1. Наибольшія и наименьшія величины интеграловъ опредѣляются помощію Варіаціоннаго Исчисленія только въ томъ случаѣ, когда видъ неизвѣстныхъ функцій, заключающихся въ интегралахъ, предполагается совершенно произвольнымъ; если же по свойству вопроса видъ неизвѣстныхъ функцій чѣмъ нибудь ограниченъ, опредѣленіе ихъ подъ условіемъ наибольшей и наименьшей величины интеграла или вообще какой либо суммы, составленной изъ ихъ значеній, требуетъ особенныхъ пріемовъ. Здѣсь мы займемся изслѣдованіемъ простѣйшаго изъ этихъ случаевъ, а именно: когда неизвѣстная функція предполагается цѣлою, данной степени, и черезъ эту функцію, ея производныя и независимую переменную всѣ члены разсматриваемой суммы выражаются цѣлою функціею даннаго вида. Случай этотъ особенно замѣчателенъ по своимъ приложеніямъ, такъ какъ имъ, между прочимъ, разрѣшается вопросъ о параболическомъ интерполированіи по способу наименьшихъ квадратовъ.

§ 2. Пусть будетъ

$$F(x, y, y', y'', \dots)$$

какая нибудь данная цѣлая функція независимой переменной x , неизвѣстнаго полинома

$$y = A_0 + A_1 x + \dots + A_l x^l + \dots + A_{m-1} x^{m-1}$$

и производныхъ его

$$y', y'', \dots$$

Изображая черезъ

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

рядъ какихъ нибудь величинъ независимой переменнѣнной x (для простоты будемъ предполагать всѣ эти величины x различными между собою) и черезъ

$$\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots)$$

сумму значеній функціи

$$F(x, y, y', y'', \dots)$$

при этихъ величинахъ переменнѣнной x , мы замѣчаемъ, что величина этой суммы будетъ зависѣть отъ коэффициентовъ

$$A_0, A_1, \dots, A_l, \dots, A_{m-1}$$

полинома

$$y = A_0 + A_1 x + \dots + A_l x^l + \dots + A_{m-1} x^{m-1},$$

и что значеніе этихъ коэффициентовъ, при которыхъ сумма

$$\sum F(x, y_i, y_i', y_i'', \dots)$$

имѣетъ *максимумъ* или *минимумъ*, опредѣляется по началамъ Дифференціального Исчисленія такими уравненіями:

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots)}{dA_0} = 0,$$

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots)}{dA_1} = 0,$$

.....

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots)}{dA_l} = 0,$$

.....

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', x_i'', \dots)}{dA_{m-1}} = 0.$$

А такъ какъ величины

$$A_0, A_1, \dots, A_{l-1}, \dots, A_{m-1}$$

въ выраженіи

$$\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots)$$

не находятся отдѣльно отъ функцій y, y', y'', \dots ; то, вообще, опредѣляя производную этого выраженія по A_l , мы получаемъ

$$\begin{aligned} \frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots)}{dA_l} &= \sum \frac{d F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots)}{dA_l} + \\ &\sum \frac{d F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots)}{dy_i} \frac{dy_i}{dA_l} + \sum \frac{d F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots)}{dy_i'} \frac{dy_i'}{dA_l} + \\ &\sum \frac{d F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots)}{dy_i''} \frac{dy_i''}{dA_l} + \dots \end{aligned}$$

По выраженію-же функціи

$$y = A_0 + A_1 x + \dots + A_l x^l + \dots + A_{m-1} x^{m-1}$$

и ея производныхъ

$$\begin{aligned} y' &= 1 \cdot A_1 + \dots + l A_l x^{l-1} + \dots + (m-1) A_{m-1} x^{m-2}, \\ y'' &= 1 \cdot 2 A_2 + \dots + l(l-1) A_l x^{l-2} + \dots + (m-1)(m-2) A_{m-1} x^{m-2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

мы находимъ, что

$$\frac{dy_i}{dA_l} = x_i^l, \quad \frac{dy_i'}{dA_l} = l x_i^{l-1}, \quad \frac{dy_i''}{dA_l} = l(l-1) x_i^{l-2}, \dots$$

Внося эти величины производныхъ

$$\frac{dy_i}{dA_l}, \quad \frac{dy_i'}{dA_l}, \quad \frac{dy_i''}{dA_l}, \dots$$

въ вышенайденное выраженіе производной

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots)}{dA_l}$$

и изображая, для сокращенія, значенія производныхъ

$$\frac{d F(x, y, y', y'', \dots)}{dy}, \frac{d F(x, y, y', y'', \dots)}{dy'}, \frac{d F(x, y, y', y'', \dots)}{dy''}, \dots,$$

при какомъ нибудь x , черезъ

$$M, N, P, \dots,$$

а при $x = x_i$, черезъ

$$M_i, N_i, P_i, \dots,$$

имѣемъ

$$\begin{aligned} & \frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots)}{dA_l} = \\ & = \sum M_i x_i^l + \sum l N_i x_i^{l-1} + \sum l(l-1) P_i x_i^{l-2} + \dots \end{aligned}$$

Выводя по этой формулѣ значеніе производной

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots)}{dA_l}$$

при

$$l = 0, 1, 2, \dots, m-1,$$

мы находимъ, что вышепоказанныя уравненія, опредѣляющія коэффициенты полинома

$$y = A_0 + A_1 x + \dots + A_{m-1} x^{m-1},$$

при которыхъ сумма

$$\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots)$$

имѣетъ *максимум* или *минимум*, приводятся къ слѣдующему:

$$\sum M_i x_i^0 = 0,$$

$$\sum M_i x_i + \sum 1 \cdot N_i x_i^0 = 0,$$

$$\sum M_i x_i^2 + \sum 2 N_i x_i + \sum 1 \cdot 2 P_i x_i^0 = 0,$$

.....

$$\sum M_i x_i^{m-1} + \sum (m-1) N_i x_i^{m-2} + \sum (m-1)(m-2) P_i x_i^{m-3} + \dots = 0.$$

§ 3. Полагая для сокращенія

$$(x - x_1) (x - x_2) (x - x_3) \dots (x - x_{m-1}) = \varphi(x)$$

и изображая черезъ

$$U, V, W, \dots$$

цѣлыя функціи, получаемыя при дѣленіи произведеній

$$M\varphi'(x), N\varphi'(x), P\varphi'(x), \dots$$

на $\varphi(x)$, мы замѣчаемъ, что дроби

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \dots,$$

по разложеніи на простѣйшія, представляются такъ:

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} = U + \sum \frac{M_i}{x-x_i}; \quad \frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)} = V + \sum \frac{N_i}{x-x_i};$$

$$\frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)} = W + \sum \frac{P_i}{x-x_i}; \dots;$$

гдѣ, по нашему закоположенію (§ 2),

$$M_i, N_i, P_i, \dots$$

означають величину функцій

$$M, N, P, \dots$$

при $x = x_i$; суммирование же распространяется на всѣ величины: $x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$. Опредѣляя по этимъ формуламъ значеніе выраженія

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{d}{dx} \frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \dots,$$

мы находимъ, что оно равняется слѣдующему:

$$U = \frac{dV}{dx} + \frac{d^2W}{dx^2} + \dots + \sum \left(\frac{M_i}{x-x_i} + \frac{N_i}{(x-x_i)^2} + \frac{2P_i}{(x-x_i)^3} + \dots \right);$$

гдѣ члены

$$U = \frac{dV}{dx} + \frac{d^2W}{dx^2} + \dots$$

представляютъ цѣлую функцію, а сумма

$$\sum \left(\frac{M_i}{x-x_i} + \frac{N_i}{(x-x_i)^2} + \frac{2P_i}{(x-x_i)^3} + \dots \right),$$

по разложеніи дробей

$$\frac{M_i}{x-x_i}, \frac{N_i}{(x-x_i)^2}, + \frac{2P_i}{(x-x_i)^3}, \dots$$

въ ряды

$$\begin{aligned} & \frac{M_i x_i^0}{x} + \frac{M_i x_i}{x^2} + \frac{M_i x_i^2}{x^3} + \dots, \\ & \frac{N_i x_i^0}{x^2} + \frac{2 N_i x_i}{x^3} + \frac{3 N_i x_i^2}{x^4} + \dots, \\ & \frac{1.2. P_i x_i^0}{x^3} + \frac{2.3 P_i x_i}{x^4} + \frac{3.4 P_i x_i^2}{x^5} + \dots \end{aligned}$$

.

и по соединеніи подобныхъ членовъ приводится къ такому ряду:

$$\frac{\sum M_i x_i^0}{x} + \frac{\sum M_i x_i + \sum N_i x_i^0}{x^2} + \frac{\sum M_i x_i^2 + \sum 2N_i x_i + \sum 1.2 P_i x_i^0}{x^3} + \dots$$

Откуда видно, что суммы

$$\begin{aligned} & \sum M_i x_i^0, \\ & \sum M_i x_i + \sum N_i x_i^0, \\ & \sum M_i x_i^2 + \sum 2 N_i x_i + \sum 1.2 P_i x_i^0, \\ & \dots \end{aligned}$$

$$\sum M_i x_i^{m-1} + \sum (m-1) N_i x_i^{m-1} + \sum (m-1)(m-2) P_i x_i^{m-3} + \dots,$$

равняются коэффициентамъ при

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots \dots \frac{1}{x^m}$$

въ разложеніи выраженія

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{d \frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx} + \frac{d^2 \frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2} - \dots$$

по нисходящимъ степенямъ переменнѣйной x ; а такъ какъ эти суммы, по § 2, составляютъ первую часть уравненій, опредѣляющихъ значенія коэффициентовъ полинома

$$y = A_0 + A_1 x + \dots + A_{m-1} x^{m-1},$$

при которыхъ сумма

$$\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots)$$

имѣетъ *maximum* или *minimum*, мы заключаемъ, что эти уравненія сводятся на обращеніе въ нуль коэффициентовъ при

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots \dots \frac{1}{x^m}$$

въ разложеніи выраженія

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{d \frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx} + \frac{d^2 \frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2} - \dots$$

по нисходящимъ степенямъ переменнѣйной x , и слѣд., приводятся къ такому условію:

Выраженіе

$$(1) \dots \frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{d \frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx} + \frac{d^2 \frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2} - \dots,$$

съ точностію до степеней x^{-m} включительно, равняется функ-

ии итьлой. Здѣсь, какъ видѣли (§ 2), M, N, P, \dots суть производныя функціи $F(x, y, y', y'', \dots)$ по y, y', y'', \dots .

§ 4. До сихъ поръ мы предполагали, что коэффициенты полинома

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{m-1} x^{m-1}$$

были совершенно произвольны; теперь мы рассмотримъ тотъ случай, когда выборъ этихъ коэффициентовъ ограниченъ нѣсколькими уравненіями такого вида:

$$\sum f_1(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots) = \alpha_1,$$

$$\sum f_2(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots) = \alpha_2,$$

.....,

гдѣ

$$f_1(x, y, y', y'', \dots), f_2(x, y, y', y'', \dots), \dots$$

какія нибудь цѣлыя функціи независимой переменнѣй x , полинома y и его производныхъ y', y'', \dots . Мы предположимъ сначала, что здѣсь всѣ суммированія распространяются на тѣ-же величины переменнѣй

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1},$$

какъ и сумма

$$\sum f_0(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots),$$

которой ищется *максимум* или *минимум*.

По свойству *наибольшихъ* и *наименьшихъ величинъ относительныхъ*, значенія количествъ

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_{m-1},$$

которыя даютъ *максимум* или *минимум* суммы

$$\sum_0 f(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots)$$

ПОДЪ УСЛОВІЯМИ

$$(2) \dots \dots \dots \begin{cases} \sum_1 f_1(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots) = \alpha_1, \\ \sum_2 f_2(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots) = \alpha_2, \\ \dots \dots \dots \end{cases},$$

КАКЪ ИЗВѢСТНО, ОПРЕДѢЛЯЮТСЯ ТѢМЪ, ЧТО ОНИ ОБРАЩАЮТЬ ВЪ НУЛЬ ПРОИЗВОДНЫЯ ПО $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$ СУММЫ

$$\sum_0 f_0(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots) + \lambda_1 \sum_1 f_1(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots) + \lambda_2 \sum_2 f_2(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots) + \dots \dots \dots,$$

ГДѢ $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ПОСТОЯННЫЕ МНОЖИТЕЛИ. Сумма-же эта приводится къ виду

$$\sum \left[f_0(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots) + \lambda_1 f_1(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots) + \lambda_2 f_2(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots) + \dots \right],$$

что можно представить такъ :

$$\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots),$$

полагая здѣсь

$$F(x, y, y', y'', \dots) = f_0(x, y, y', y'', \dots) + \lambda_1 f_1(x, y, y', y'', \dots) + \lambda_2 f_2(x, y, y', y'', \dots) + \dots$$

А потому, на основаніи показаннаго въ §§ 2 и 3 относительно уравненій

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots)}{dA_0} = 0,$$

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots)}{dA_1} = 0,$$

.

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \dots)}{dA_{m-1}} = 0,$$

мы заключаемъ, что въ настоящемъ случаѣ уравненія, опредѣляющія коэффициенты полинома

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{m-1} x^{m-1},$$

приведутся также къ условію, выведенному въ концѣ § 3, и что въ этомъ случаѣ за функцію

$$F(x, y, y', y'', \dots)$$

должны взять сумму

$$\int_0 (x, y, y', y'', \dots) + \lambda_1 \int_1 (x, y, y', y'', \dots) + \\ \lambda_2 \int_2 (x, y, y', y'', \dots) + \dots,$$

гдѣ $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ неизвѣстные постоянные множители. Опредѣляя по этому условію коэффициенты полинома

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{m-1} x^{m-1},$$

мы найдемъ ихъ выраженія въ функціи множителей $\lambda_1, \lambda_2, \dots$; внося-же эти выраженія коэффициентовъ полинома y въ условія (2), мы получимъ столько уравненій, сколько множителей $\lambda_1, \lambda_2, \dots$; откуда и найдется ихъ величина.

§ 5. Переходимъ теперь къ тому случаю, когда требуется сдѣлать *maximam* или *minimam* сумму

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \dots)$$

распространенную на величины

$$x = a_1, a_2, a_3, \dots,$$

а выборъ коэффициентовъ полинома

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{m-1} x^{m-1}$$

ограничивается условіями

$$\sum \Phi_1 (x, y, y', y'', \dots) = \alpha_1,$$

$$\sum \Phi_2 (x, y, y', y'', \dots) = \alpha_2,$$

..... ,

гдѣ суммы распространяются на величины x

$$x = b_1, b_2, b_3, \dots,$$

$$x = c_1, c_2, c_3, \dots,$$

различныя и между собою и съ величинами

$$x = a_1, a_2, a_3, \dots$$

Чтобы свести этотъ случай на случай, рассмотрѣнный въ предыдущемъ параграфѣ, мы замѣняемъ всѣ вышепоказанныя суммы, распространенныя на различныя величины переменнѣй x , суммами, распространенными на однѣ и тѣ-же величины переменнѣй. Для этого, полагая

$$(x - a_1) (x - a_2) (x - a_3) \dots = \Phi_0 (x),$$

$$(x - b_1) (x - b_2) (x - b_3) \dots = \Phi_1 (x),$$

$$(x - c_1) (x - c_2) (x - c_3) \dots = \Phi_2 (x),$$

..... ,

и

$$\Phi_0(x) \Phi_1(x) \Phi_2(x) \dots =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - a_1) (x - a_2) (x - a_3) \dots (x - b_1) \\ (x - b_2) (x - b_3) \dots (x - c_1) (x - c_2) \\ (x - c_2) \dots \end{array} \right\} = \Phi (x),$$

опредѣляемъ цѣлыя функціи

$$S_0, S_1, S_2, \dots,$$

$$T_0, T_1, T_2, \dots,$$

удовлетворяющія уравненіямъ

$$(3) \dots \dots \dots \begin{cases} \varphi'(x) S_0 = \varphi(x) T_0 + \varphi_0'(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) \dots \dots \dots, \\ \varphi'(x) S_1 = \varphi(x) T_1 + \varphi_1'(x) \varphi_0(x) \varphi_2(x) \dots \dots \dots, \\ \varphi'(x) S_2 = \varphi(x) T_2 + \varphi_2'(x) \varphi_0(x) \varphi_1(x) \dots \dots \dots, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Эти уравненія будутъ имѣть рѣшеніе; ибо, по положенію, корни уравненія $\varphi(x) = 0$, равные $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots$, всѣ различны между собою, а потому функція $\varphi(x)$ не имѣетъ общаго множителя съ своею производною $\varphi'(x)$. На основаніи этихъ уравненій не трудно показать, что суммы

$$\sum S_0 \Phi_0(x, y, y', y'', \dots), \sum S_1 \Phi_1(x, y, y', y'', \dots), \\ \sum S_2 \Phi_2(x, y, y', y'', \dots), \dots \dots \dots,$$

распространенныя на всѣ величины x

$$x = a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots, c_1, c_2, c_3, \dots,$$

приведутся къ суммѣ

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \dots),$$

распространенной только на $x = a_1, a_2, a_3, \dots$, — къ суммѣ

$$\sum \Phi_1(x, y, y', y'', \dots),$$

распространенной только на $x = b_1, b_2, b_3, \dots$, — къ суммѣ

$$\sum \Phi_2(x, y, y', y'', \dots),$$

распространенной только на $x = c_1, c_2, c_3 \dots$. Чтобы показать это относительно суммы

$$\sum S_0 \Phi_0(x, y, y', y'', \dots),$$

мы замѣчаемъ, что по уравненію

$$\Phi'(x) S_0 = \Phi(x) T_0 + \Phi_0'(x) \Phi_1(x) \Phi_2(x) \dots$$

и составу функцій

$$\Phi(x), \Phi_0(x), \Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots,$$

функція S_0 будетъ обращаться въ нуль при $x = b_1, b_2, b_3, \dots, c_1, c_2, c_3, \dots$, корняхъ общихъ уравненіямъ

$$\Phi(x) = 0$$

и

$$\Phi_1(x) \Phi_2(x) \dots = 0;$$

такъ какъ при этихъ величинахъ переменнѣй x производная $\Phi'(x)$ не будетъ нулемъ; ибо, по замѣченному выше, функціи $\Phi(x)$ и $\Phi'(x)$ не имѣютъ общаго множителя.

Съ другой стороны, при

$$x = a_1, a_2, a_3, \dots,$$

корняхъ общихъ уравненіямъ

$$\Phi(x) = 0, \Phi_0(x) = 0,$$

мы находимъ, что производная

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \frac{d \Phi_0(x) \Phi_1(x) \Phi_2(x) \dots}{dx} = \\ &= \Phi_0'(x) \Phi_1(x) \Phi_2(x) \dots + \Phi_1'(x) \Phi_0(x) \Phi_2(x) \dots + \\ &\quad \Phi_2'(x) \Phi_0(x) \Phi_1(x) \dots + \dots \end{aligned}$$

приводится къ $\varphi_0'(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) \dots$, и вслѣдствіе того, по уравненію

$$\varphi'(x) S_0 = \varphi(x) T_0 + \varphi_0'(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) \dots,$$

при такихъ величинахъ переменнѣй x , получится

$$S_0 = 1.$$

Откуда ясно, что сумма

$$\sum S_0 \Phi_0(x, y, y', y'', \dots),$$

распространенная на всѣ величины переменнѣй x

$$x = a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots, c_1, c_2, c_3, \dots,$$

приводится къ суммѣ

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \dots),$$

распространенной только на

$$x = a_1, a_2, a_3, \dots$$

Подобнымъ образомъ находимъ, что суммы

$$\sum S_1 \Phi_1(x, y, y', y'', \dots), \sum S_2 \Phi_2(x, y, y', y'', \dots), \dots,$$

распространенныя на однѣ и тѣ-же величины переменнѣй x

$$x = a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots, c_1, c_2, c_3, \dots,$$

приводятся къ суммѣ

$$\sum \Phi_1(x, y, y', y'', \dots),$$

распространенной на

$$x = b_1, b_2, b_3, \dots,$$

— къ суммѣ

$$\sum \Phi_2(x, y, y', y'', \dots),$$

распространенной на

$$x = c_1, c_2, c_3, \dots,$$

и т. д.

Замѣняя на основаніи вышесказаннаго суммы

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \dots),$$

$$\sum \Phi_1(x, y, y', y'', \dots),$$

$$\sum \Phi_2(x, y, y', y'', \dots),$$

.....,

распространенныя на различныя величины переменнѣй x , суммами

$$\sum S_0 \Phi_0(x, y, y', y'' \dots),$$

$$\sum S_1 \Phi_1(x, y, y', y'', \dots),$$

$$\sum S_2 \Phi_2(x, y, y', y'', \dots),$$

.....,

распространенными на однѣ и тѣ-же величины переменнѣй x , опредѣляемыя уравненіемъ

$$\varphi(x) = 0,$$

мы заключаемъ, что въ настоящемъ случаѣ коэффициенты полинома

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{m-1} x^{m-1}$$

опредѣлятся по сказанному въ предыдущемъ параграфѣ, когда въ формулахъ этого параграфа за функціи

$$f_0(x, y, y', y'', \dots), f_1(x, y, y', y'', \dots), f_2(x, y, y', y'', \dots), \dots$$

примемъ произведенія

$$S_0 \Phi_0(x, y, y', y'', \dots), S_1 \Phi_1(x, y, y', y'', \dots), S_2 \Phi_2(x, y, y', y'', \dots), \dots$$

и слѣд., они найдутся по условію, выведенному въ концѣ параграфа 3-го, когда положимъ тамъ

$$F(x, y, y', y'', \dots) = S_0 \Phi_0(x, y, y', y'', \dots) + \lambda_1 S_1 \Phi_1(x, y, y', y'', \dots) + \lambda_2 S_2 \Phi_2(x, y, y', y'', \dots) + \dots$$

Здѣсь $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ постоянные неизвѣстные множители.

Опредѣляя для этой величины функции $F(x, y, y', y'', \dots)$ выраженіе производныхъ

$$\begin{aligned} M &= \frac{dF(x, y, y', y'', \dots)}{dy}, \\ N &= \frac{dF(x, y, y', y'', \dots)}{dy'}, \\ P &= \frac{dF(x, y, y', y'', \dots)}{dy''}, \\ &\dots \end{aligned}$$

и изображая производныя функцийъ

$$\Phi_0(x, y, y', y'', \dots), \Phi_1(x, y, y', y'', \dots), \Phi_2(x, y, y', y'', \dots), \dots$$

по

$$y, y', y'', \dots$$

черезъ

$$\begin{aligned} &M_0, M_1, M_2, \dots, \\ &N_0, N_1, N_2, \dots, \\ &P_0, P_1, P_2, \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

находимъ

$$\begin{aligned} M &= S_0 M_0 + \lambda_1 S_1 M_1 + \lambda_2 S_2 M_2 + \dots, \\ N &= S_0 N_0 + \lambda_1 S_1 N_1 + \lambda_2 S_2 N_2 + \dots, \\ P &= S_0 P_0 + \lambda_1 S_1 P_1 + \lambda_2 S_2 P_2 + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

и выраженіе (1), которое для искомаго значенія полинома

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{m-1} x^{m-1}$$

по § 3, должно равняться, съ точностію до степеней x^{-m} включительно, функции цѣлой, въ этомъ случаѣ напишется такъ:

$$(4) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{S_0 M_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_1 \frac{S_1 M_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_2 \frac{S_2 M_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \dots \\ \frac{d \left\{ \frac{S_0 N_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_1 \frac{S_1 N_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_2 \frac{S_2 N_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \dots \right\}}{dx} \\ + \frac{d^2 \left\{ \frac{S_0 P_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_1 \frac{S_1 P_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_2 \frac{S_2 P_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \dots \right\}}{dx^2} \\ - \dots \end{array} \right.$$

Но по уравненіямъ (3), опредѣляющимъ функции S_0, S_1, S_2, \dots , мы находимъ

$$\begin{aligned} \frac{S_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} &= T_0 + \frac{\varphi'_0(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) \dots}{\varphi(x)}, \\ \frac{S_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} &= T_1 + \frac{\varphi'_1(x) \varphi_0(x) \varphi_2(x) \dots}{\varphi(x)}, \\ \frac{S_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} &= T_2 + \frac{\varphi'_2(x) \varphi_0(x) \varphi_1(x) \dots}{\varphi(x)}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots ; \end{aligned}$$

по вставкѣ же во вторыя части этихъ равенствъ произведенія $\varphi_0(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) \dots$ на мѣсто $\varphi(x)$ получаемъ

$$\begin{aligned} \frac{S_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} &= T_0 + \frac{\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)}, \\ \frac{S_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} &= T_1 + \frac{\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)}, \\ \frac{S_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} &= T_2 + \frac{\varphi'_2(x)}{\varphi_2(x)}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Откуда видно, что функціи

$$\frac{S_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad \frac{S_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad \frac{S_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad \dots$$

и

$$\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}, \quad \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)}, \quad \frac{\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)}, \quad \dots$$

разнятся между собою только цѣлыми частями; а потому, замѣняя первыя послѣдними въ выраженіи (4), мы измѣнимъ только цѣлую часть этого выраженія; степень-же точности, съ которою это выраженіе представляетъ функцію цѣлую, останется безъ измѣненія; и слѣд. оно по прежнему будетъ служить для опредѣленія полинома

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{m-1} x^{m-1}.$$

Дѣлая такую перемѣну въ выраженіи (4), мы получаемъ слѣдующую формулу:

$$\begin{aligned} & \frac{M_0 \varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1 \frac{M_1 \varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2 \frac{M_2 \varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)} + \dots \\ & \frac{d \left\{ \frac{N_0 \varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1 \frac{N_1 \varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2 \frac{N_2 \varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)} + \dots \right\}}{dx} \\ & + \frac{d^2 \left\{ \frac{P_0 \varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1 \frac{P_1 \varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2 \frac{P_2 \varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)} + \dots \right\}}{dx^2} \\ & - \dots \dots \dots \end{aligned}$$

которая, по вышесказанному, съ точностію до степеней x^{-m} включительно, должна привести къ функціи цѣлой, если полиномъ

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{m-1} x^{m-1},$$

имѣетъ тѣ коэффициенты, съ которыми сумма

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \dots)$$

подъ условіями

$$\sum \Phi_1 (x, y, y', y'', \dots) = \alpha_1,$$

$$\sum \Phi_2 (x, y, y', y'', \dots) = \alpha_2,$$

.....,

имѣть *наибольшую* или *наименьшую* величину. Мы это вывели, предполагая, что въ рядахъ

$$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

$$b_1, b_2, b_3, \dots,$$

$$c_1, c_2, c_3, \dots,$$

.....

нѣтъ одинакихъ членовъ; но по способу предѣловъ это легко распространяется и на тотъ случай, когда въ этихъ рядахъ есть общіе члены.

§ 6. Въ предыдущихъ параграфахъ мы показали условіе, опредѣляющее то значеніе полинома y данной степени, съ которымъ сумма

$$\sum \Phi_0 (x, y, y', y'', \dots)$$

достигаетъ *наибольшей* или *наименьшей* величины. При этомъ мы предполагали, что коэффициенты его или совершенно произвольны или должны удовлетворять уравненіямъ такого вида:

$$\sum \Phi_1 (x, y, y', y'', \dots) = \alpha_1,$$

$$\sum \Phi_2 (x, y, y', y'', \dots) = \alpha_2,$$

.....,

Въ послѣднемъ случаѣ, условіе, опредѣляющее искомый полиномъ y содержитъ неизвѣстныя постоянныя $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Величина этихъ постоянныхъ найдется по вышеприведеннымъ уравненіямъ, которымъ долженъ удовлетворять искомый полиномъ y и которыхъ столько-же, какъ и неизвѣстныхъ количествъ $\lambda_1, \lambda_2, \dots$.

Опредѣленіе полинома y подѣ условіемъ *наибольшей* или *наименьшей* величины суммы

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \dots),$$

имѣеть аналогію съ рѣшеніемъ подобныхъ вопросовъ въ Варіаціонномъ Исчисленіи, и въ частномъ случаѣ, когда эта сумма приводится къ интегралу, полиномъ y , опредѣляемый по вышесказанному, можетъ быть разсматриваемъ, какъ приближенное выраженіе той функціи, которую находятъ помощію варіацій. Но въ Варіаціонномъ Исчисленіи искомая функція, опредѣляясь дифференціальнымъ уравненіемъ, получается интегрированіемъ его по извѣстнымъ способамъ; здѣсь-же опредѣленіе искомага полинома y требуетъ особенныхъ пріемовъ; такъ какъ онъ опредѣляется условіемъ, которое не приводится къ уравненіямъ какого либо изъ извѣстныхъ видовъ. Чтобы показать какъ могутъ быть опредѣляемы полиномы на основаніи такихъ условій, мы разсмотримъ теперь тотъ простѣйшій случай, когда функціи

$$\Phi_0(x, y, y', y'', \dots),$$

$$\Phi_1(x, y, y', y'', \dots),$$

$$\Phi_2(x, y, y', y'', \dots),$$

.

содержать y въ степеняхъ не выше второй, а производныя его

$$y', y'', \dots$$

въ степени не выше первой и съ коэффициентами, зависящими только отъ переменнѣй x . Въ этомъ случаѣ производныя

$$M_0 = \frac{d \Phi_0(x, y, y', y'', \dots)}{dy}, \quad M_1 = \frac{d \Phi_1(x, y, y', y'', \dots)}{dy}, \quad \dots$$

не заключаютъ y', y'', \dots и содержатъ y только въ первой степени; производныя-же

$$N_0 = \frac{d \Phi_0(x, y, y', y'', \dots)}{dy'}, \quad N_1 = \frac{d \Phi_1(x, y, y', y'', \dots)}{dy'}, \quad \dots,$$

$$P_0 = \frac{d \Phi_0(x, y, y', y'', \dots)}{dy''}, \quad P_1 = \frac{d \Phi_1(x, y, y', y'', \dots)}{dy''}, \quad \dots,$$

не содержать совсѣмъ y, y', y'', \dots ; а потому выраженіе

$$\begin{aligned} & \frac{M_0 \varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1 \frac{M_1 \varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2 \frac{M_2 \varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)} + \dots \\ & \frac{d \left\{ \frac{N_0 \varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1 \frac{N_1 \varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2 \frac{N_2 \varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)} + \dots \right\}}{dx} \\ & + \frac{d^2 \left\{ \frac{P_0 \varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1 \frac{P_1 \varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2 \frac{P_2 \varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)} + \dots \right\}}{dx^2} \\ & - \dots \end{aligned}$$

которое по § 5, съ искомымъ полиномомъ

$$y = A_0 + A_1 x + \dots + A_{m-1} x^{m-1},$$

вѣрно до степеней x^{-m} включительно, должно равняться цѣлой функціи, приведется къ двучлену

$$u y - v,$$

гдѣ u, v функціи одной независимой переменнѣй x . Слѣд. въ этомъ случаѣ задача наша объ опредѣленіи полинома

$$y = A_0 + A_1 x + \dots + A_{m-1} x^{m-1}$$

подъ условіемъ наибольшей или наименьшей величины суммы

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \dots)$$

приводится къ опредѣленію полинома y степени $m-1$, съ котрымъ разность

$$u y - v,$$

вѣрно до степеней x^{-m} включительно, равняется функции цѣлой. Полиномы-же, представляющіе такое свойство, какъ мы покажемъ, легко получаются при помощи ряда, даннаго въ Мемуарѣ нашемъ подъ заглавіемъ: *Разложеніе функций въ ряды при помощи непрерывныхъ дробей.* (*)

§ 7. Въ вышеупомянутомъ Мемуарѣ мы показали, что разлагая какую нибудь функцию u въ непрерывную дробь

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}},$$

опредѣляя ея подходящія дроби

$$\frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \frac{P_3}{Q_3}, \dots$$

и изображая черезъ

$$R_1, R_2, R_3, \dots$$

разности

$$u Q_1 - P_1, \quad u Q_2 - P_2, \quad u Q_3 - P_3, \dots,$$

а черезъ

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$$

цѣлыя функции, получаемыя по формулѣ

$$\omega_n = (-1)^{n-1} E_{q_n} (Q_n v - E Q_n v),$$

для разложенія функции v по величинамъ

$$R_1, R_2, R_3, \dots$$

имѣемъ такой рядъ:

$$(5) \dots v = E v + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \omega_3 R_3 + \dots (**)$$

(*) IV томъ Записокъ Императорской Академіи Наукъ.

(**) Знакомъ E обозначаемъ цѣлую часть функций.

При этомъ предполагается, что функции u и v способны разлагаться по цѣлымъ нисходящимъ степенямъ переменнѣй x .

Приступая къ опредѣленію при помощи этого ряда полинома

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{m-1} x^{m-1},$$

съ которымъ разность

$$u y - v,$$

вѣрно до членовъ степени x^{-m} включительно, приводится къ функции цѣлой, положимъ, что

$$Q_\mu$$

есть послѣдній изъ знаменателей подходящихъ дробей

$$\frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \frac{P_3}{Q_3}, \quad \dots,$$

котораго степень ниже m , и что

$$F_\mu, F_{\mu-1}, \dots, F_2, F_1,$$

$$r_\mu, r_{\mu-1}, \dots, r_2, r_1$$

суть частныя и остатки, получаемые при дѣленіи полинома y на Q_μ , перваго остатка r_μ на $Q_{\mu-1}$, втораго остатка $r_{\mu-1}$ на $Q_{\mu-2}$, и т. д. Приравнивая дѣлимья произведенія частнаго на дѣлителя, сложеннымъ съ остаткомъ, мы получаемъ такой рядъ уравненій:

$$y = F_\mu Q_\mu + r_\mu, \quad r_\mu = F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + r_{\mu-1}, \dots,$$

$$r_3 = F_2 Q_2 + r_2, \quad r_2 = F_1 Q_1 + r_1.$$

Исключая изъ этихъ уравненій остатки

$$r_\mu, r_{\mu-1}, \dots, r_3, r_2$$

и замѣчая, что послѣдній остатокъ r_1 , получаемый при дѣленіи на $Q_1 = 1$, есть нуль, мы находимъ, что

$$y = F_\mu Q_\mu + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + \dots + F_2 Q_2 + F_1 Q_1.$$

Искомый полиномъ

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{m-1} x^{m-1},$$

будеть во всякомъ случаѣ степени не выше $m - 1$, а потому функція F_μ , получаемая при дѣленіи y на Q_μ , будетъ степени не выше чѣмъ

$$\frac{x^{m-1}}{Q_\mu}$$

и слѣд. степени ниже

$$\frac{Q_{\mu+1}}{Q_\mu};$$

такъ какъ $Q_{\mu+1}$, по положенію, будетъ степени выше $m - 1$. Функціи-же

$$F_{\mu-1}, F_{\mu-2}, \dots, F_2, F_1$$

будутъ степеней ниже чѣмъ

$$\frac{Q_\mu}{Q_{\mu-1}}, \frac{Q_{\mu-1}}{Q_{\mu-2}}, \dots, \frac{Q_3}{Q_2}, \frac{Q_2}{Q_1};$$

такъ какъ онѣ получаются при дѣленіи остатковъ

$$r_\mu, r_{\mu-1}, \dots, r_2, r_1$$

на

$$Q_{\mu-1}, Q_{\mu-2}, \dots, Q_2, Q_1,$$

а эти остатки, получаясь отъ дѣленія на

$$Q_\mu, Q_{\mu-1}, \dots, Q_2, Q_1,$$

будутъ степеней ниже чѣмъ

$$Q_\mu, Q_{\mu-1}, \dots, Q_2, Q_1.$$

Для опредѣленія множителей

$$F_\mu, F_{\mu-1}, \dots, F_2, F_1$$

въ разложеніи искомага полинома y по формулѣ

$$(6) \dots\dots\dots y = F_\mu Q_\mu + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + \dots + F_2 Q_2 + F_1 Q_1,$$

мы замѣчаемъ, что разность

$$uy - v,$$

по внесеніи въ нее этого выраженія y и величины v по формулѣ (5), представляется такъ:

$$uy - v = F_\mu Q_\mu u + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} u + \dots + F_2 Q_2 u + F_1 Q_1 u \\ - \mathbf{E} v - \omega_1 R_1 - \omega_2 R_2 - \omega_3 R_3 \dots\dots\dots,$$

что по вставкѣ величинъ

$$Q_\mu u, Q_{\mu-1} u, \dots, Q_2 u, Q_1 u,$$

получаемыхъ изъ равенствъ

$$R_\mu = Q_\mu u - P_\mu, R_{\mu-1} = Q_{\mu-1} u - P_{\mu-1}, \dots\dots\dots,$$

приводится къ такому виду:

$$uy - v = - \mathbf{E} v + F_1 P_1 + F_2 P_2 + \dots + F_{\mu-1} P_{\mu-1} + F_\mu P_\mu \\ + (F_1 - \omega_1) R_1 + (F_2 - \omega_2) R_2 + \dots\dots\dots + \\ (F_{\mu-1} - \omega_{\mu-1}) R_{\mu-1} + (F_\mu - \omega_\mu) R_\mu - \omega_{\mu+1} R_{\mu+1} - \dots$$

Разсматривая это выраженіе разности

$$uy - v,$$

мы замѣчаемъ, что здѣсь члены

$$- \mathbf{E} v + F_1 P_1 + F_2 P_2 + \dots + F_{\mu-1} P_{\mu-1} + F_\mu P_\mu$$

составляютъ функцію цѣлую; остальные-же, какъ не трудно убѣдиться, всѣ степеней отрицательныхъ и степени ихъ идутъ понижаясь. Въ самомъ дѣлѣ, по нашему знакоположенію

$$R_1 = Q_1 u - P_1, R_2 = Q_2 u - P_2, \dots, R_{\mu-1} = Q_{\mu-1} u - P_{\mu-1},$$

$$R_\mu = Q_\mu u - P_\mu, R_{\mu+1} = Q_{\mu+1} u - P_{\mu+1}, \dots;$$

а эти разности, по свойству подходящихъ дробей, однихъ степеней съ дробями

$$\frac{1}{Q_2}, \frac{1}{Q_3}, \frac{1}{Q_4}, \dots, \frac{1}{Q_\mu}, \frac{1}{Q_{\mu-1}}, \frac{1}{Q_{\mu-2}}, \dots;$$

по сказанному-же въ предыдущемъ параграфѣ относительно функций

$$F_1, F_2, F_3, \dots, F_{\mu-1}, F_\mu$$

и въ вышеупомянутомъ Мемуарѣ относительно функций

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{\mu-1}, \omega_\mu, \omega_{\mu+1}, \dots$$

видно, что въ членахъ

$$(F_1 - \omega_1)R_1 + (F_2 - \omega_2)R_2 + \dots + (F_{\mu-1} - \omega_{\mu-1})R_{\mu-1} +$$

$$(F_\mu - \omega_\mu)R_\mu - \omega_{\mu+1}R_{\mu+1} - \dots,$$

множителями при

$$R_1, R_2, R_3, \dots$$

стоятъ цѣлыя функции степеней ниже чѣмъ

$$\frac{Q_2}{Q_1}, \frac{Q_3}{Q_2}, \dots, \frac{Q_\mu}{Q_{\mu-1}}, \frac{Q_{\mu+1}}{Q_\mu}, \frac{Q_{\mu+2}}{Q_{\mu+1}}, \dots;$$

а потому первый членъ степени ниже чѣмъ $\frac{Q_2}{Q_1} \cdot \frac{1}{Q_2} = \frac{1}{Q_2}$, и не ниже $\frac{1}{Q_2}$, второй членъ степени ниже чѣмъ $\frac{Q_3}{Q_2} \cdot \frac{1}{Q_3} = \frac{1}{Q_2}$ и не ниже чѣмъ $\frac{1}{Q_3}, \dots$, членъ $\omega_{\mu+1} R_{\mu+1}$ степени ниже чѣмъ $\frac{Q_{\mu+2}}{Q_{\mu+1}} \cdot \frac{1}{Q_{\mu+2}} = \frac{1}{Q_{\mu+1}}$ и не ниже чѣмъ $\frac{1}{Q_{\mu+2}}$ и т. д.

Откуда видно, что въ вышенайденномъ выраженіи разности

$$u y - v$$

дробная часть представляется рядомъ

$$(F_1 - \omega_1)R_1 + (F_2 - \omega_2)R_2 + \dots + (F_{\mu-1} - \omega_{\mu-1})R_{\mu-1} + \\ (F_\mu - \omega_\mu)R_\mu - \omega_{\mu+1}R_{\mu+1} - \dots;$$

гдѣ степени членовъ идутъ понижаясь, а потому степень точности, съ которою эта разность приводится къ функціи цѣлой, опредѣлится степенью перваго изъ членовъ его, не обращающагося въ нуль.

На основаніи этого не трудно найти значеніе функцій

$$F_1, F_2, \dots, F_{\mu-1}, F_\mu,$$

входящихъ въ выраженіе (6) искомага полинома или убѣдиться въ невозможности его.

Члены

$$(F_1 - \omega_1)R_1, (F_2 - \omega_2)R_2, \dots, (F_{\mu-1} - \omega_{\mu-1})R_{\mu-1},$$

какъ видѣли, будутъ степеней не ниже чѣмъ

$$\frac{1}{Q_2}, \frac{1}{Q_3}, \dots, \frac{1}{Q_\mu},$$

и слѣд. не ниже чѣмъ

$$x^{-m+1};$$

ибо по нашему знакоположенію въ ряду знаменателей

$$Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_\mu$$

ни одинъ не будетъ степени выше $m-1$; а потому разность

$$uy - v$$

можетъ привести къ функціи цѣлой съ точностію до x^{-m} только въ томъ случаѣ, когда всѣ эти члены сокращаются, что предполагаетъ такія уравненія:

$$F_1 - \omega_1 = 0, F_2 - \omega_2 = 0, \dots, F_{\mu-1} - \omega_{\mu-1} = 0$$

изъ которыхъ мы находимъ

$$(7). \dots \dots \dots F_1 = \omega_1, F_2 = \omega_2, \dots \dots \dots, F_{\mu-1} = \omega_{\mu-1}.$$

При этихъ величинахъ функцій

$$F_1, F_2, \dots \dots \dots F_{\mu-1}$$

вышенайденное выраженіе дробной части разности

$$u y - v$$

приводится къ ряду

$$(F_\mu - \omega_\mu) R_\mu - \omega_{\mu+1} R_{\mu+1} - \omega_{\mu+2} R_{\mu+2} - \dots \dots \dots ;$$

гдѣ, какъ видѣли, члены

$$\omega_{\mu+1} R_{\mu+1}, \omega_{\mu+2} R_{\mu+2}, \dots \dots \dots$$

степеней ниже чѣмъ

$$\frac{1}{Q_{\mu+1}}, \frac{1}{Q_{\mu+2}}, \dots \dots \dots,$$

и слѣд. ниже чѣмъ

$$x^{-m};$$

ибо, по нашему знакоположенію, знаменатели

$$Q_{\mu+1}, Q_{\mu+2}, \dots \dots \dots$$

степеней не ниже m . А потому, чтобы привести найденное выраженіе разности

$$u y - v$$

къ функціи цѣлой съ точностію до степеней x^{-m} включительно, необходимо и достаточно, давши функціямъ

$$F_1, F_2, \dots \dots \dots, F_{\mu-1}$$

вышенайденныя значенія (7), сдѣлать степень члена

$$(F_\mu - \omega_\mu) R_\mu$$

ниже $-m$.

Но, съ другой стороны, чтобы искомый полиномъ y , опредѣляемый формулою

$$y = F_1 Q_1 + F_2 Q_2 + \dots + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + F_{\mu} Q_{\mu},$$

оставался, согласно съ требованіемъ задачи, степени не выше m , необходимо и достаточно, при F_1, F_2, \dots, F_{μ} вышенайденныхъ (7), сдѣлать членъ $F_{\mu} Q_{\mu}$ степени не выше $m-1$; ибо остальные члены, какъ не трудно убѣдиться, будутъ степеней ниже $m-1$. Въ самомъ дѣлѣ, по замѣченному выше множителю

$$F_1 = \omega_1, F_2 = \omega_2, \dots, F_{\mu-1} = \omega_{\mu-1}$$

будутъ степеней ниже

$$\frac{Q_2}{Q_1}, \frac{Q_3}{Q_2}, \dots, \frac{Q_{\mu}}{Q_{\mu-1}},$$

а потому произведенія

$$F_1 Q_1, F_2 Q_2, \dots, F_{\mu} Q_{\mu}$$

будутъ степеней ниже чѣмъ

$$Q_2, Q_3, \dots, Q_{\mu},$$

и слѣд. ниже чѣмъ

$$x^{m-1};$$

такъ какъ по нашему знакоположенію всѣ эти знаменатели подходящихъ дробей u степеней ниже $m-1$.

На основаніи этого мы заключаемъ, что искомый полиномъ y найдется по формулѣ

$$y = F_1 Q_1 + F_2 Q_2 + \dots + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + F_{\mu} Q_{\mu},$$

гдѣ

$$F_1 = \omega_1, F_2 = \omega_2, \dots, F_{\mu-1} = \omega_{\mu-1},$$

а множитель F_{μ} есть цѣлая функція, опредѣляемая такими условіями:

Степень произведенія $F_\mu Q_\mu$ не выше $m-1$, а степень произведенія $(F_\mu - \omega_\mu) R_\mu$ не выше $m-1$.

Такъ какъ по нашему знакоположенію

$$R_\mu = Q_\mu u - P_\mu,$$

а по свойству подходящихъ дробей разность

$$Q_\mu u - P_\mu$$

будетъ одной степени съ дробью

$$\frac{1}{Q_{\mu+1}};$$

то при опредѣленіи по вышесказанному множителя F_μ можно взять эту дробь вмѣсто R_μ ; вслѣдствіе чего условія, опредѣляющія множитель F_μ , можно представить такъ:

Степень произведенія $F_\mu Q_\mu$ не выше $m-1$, а степень частного $\frac{F_\mu - \omega_\mu}{Q_{\mu+1}}$ не выше $m-1$.

Что касается до функций

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots,$$

то онѣ, какъ замѣчено было въ предыдущемъ параграфѣ, вообще выражаются такъ:

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \mathbf{E} q_n (Q_n v - \mathbf{E} Q_n v)$$

Опредѣляя по этой формулѣ значеніе функций

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\mu-1}$$

и по (7) внося ихъ въ выраженіе искомага полинома y вмѣсто

$$F_1, F_2, \dots, F_{\mu-1},$$

мы для опредѣленія y находимъ такую формулу:

$$y = \omega_1 Q_1 + \omega_2 Q_2 + \dots + \omega_{\mu-1} Q_{\mu-1} + F_\mu Q_\mu,$$

гдѣ множитель F_μ долженъ быть выбранъ согласно съ вышепоказанными условіями. Опредѣленіемъ F_μ подѣ этими условіями мы и займемся въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 8. По нашему закоположенію

$$Q_\mu$$

есть послѣдній знаменатель въ ряду

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_\mu, Q_{\mu+1}, \dots$$

степени ниже m , а потому знаменатель

$$Q_{\mu+1}$$

будетъ или степени m или степени выше m . Въ первомъ случаѣ, какъ не трудно показать, вышенайденнымъ условіямъ, ограничивающимъ выборъ множителя F_μ , будетъ удовлетворять только одна такая величина F_μ :

$$F_\mu = \omega_\mu;$$

во второмъ-же случаѣ или ни одна величина F_μ не будетъ удовлетворять этимъ условіямъ, или имъ будетъ удовлетворять функція съ нѣсколькими произвольными коэффициентами.

Въ самомъ дѣлѣ, по условіямъ, опредѣляющимъ функцію F_μ , произведение $F_\mu Q_\mu$ должно быть степени не выше $m - 1$, а частное $\frac{F_\mu - \omega_\mu}{Q_{\mu+1}}$ степени не выше $-m - 1$. Но если знаменатель $Q_{\mu+1}$ степени m , то при дѣлимомъ $F_\mu - \omega_\mu$ цѣломъ, отличнымъ отъ нуля, частное

$$\frac{F_\mu - \omega_\mu}{Q_{\mu+1}}$$

будетъ всегда степени выше $-m - 1$. Слѣд. въ этомъ случаѣ необходимо принять

$$F_\mu - \omega_\mu = 0;$$

откуда выходитъ

$$F_{\mu} = \omega_{\mu}.$$

Такъ какъ функція ω_{μ} , по замѣченному выше, степени ниже чѣмъ

$$\frac{Q_{\mu+1}}{Q_{\mu}},$$

то при этой величинѣ F_{μ} произведеніе

$$F_{\mu} Q_{\mu}$$

будетъ степени ниже чѣмъ

$$\frac{Q_{\mu+1}}{Q_{\mu}} \cdot Q_{\mu} = Q_{\mu+1},$$

и слѣд. ниже чѣмъ x^m ; ибо въ рассматриваемомъ случаѣ знаменатель $Q_{\mu+1}$ степени m .

Изъ этого видно, что при $Q_{\mu+1}$ степени m можно взять

$$F_{\mu} = \omega_{\mu},$$

и что никакая другая величина множителя F_{μ} не можетъ удовлетворять условіямъ, выведеннымъ въ предыдущемъ параграфѣ.

Слѣд. въ этомъ случаѣ для искомага полинома y будетъ возможна одна только величина и она получится изъ вышенайденной формулы

$$y = \omega_1 Q_1 + \omega_2 Q_2 + \dots + \omega_{\mu-1} Q_{\mu-1} + F_{\mu} Q_{\mu},$$

когда примемъ въ ней

$$F_{\mu} = \omega_{\mu}.$$

Переходимъ къ тому случаю, когда знаменатель $Q_{\mu+1}$ степени выше m . По условіямъ, опредѣляющимъ множитель F_{μ} , произведеніе $F_{\mu} Q_{\mu}$ должно быть степени не выше $m - 1$, а частное $\frac{F_{\mu} - \omega_{\mu}}{Q_{\mu+1}}$ степени не выше $-m - 1$, или, что одно и то-же, множитель F_{μ} долженъ быть степени не выше чѣмъ $\frac{x^{m-1}}{Q_{\mu}}$, а разность

$F_\mu - \omega_\mu$ степени не выше $\frac{Q_{\mu+1}}{x^{m+1}}$, а это приводится къ такимъ уравненіямъ:

$$(8) \dots\dots\dots F_\mu = C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \dots\dots\dots,$$

$$(9) \dots\dots\dots F_\mu - \omega_\mu = C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1-1} + \dots\dots\dots,$$

гдѣ ν означаетъ степень функціи $\frac{x^{m-1}}{Q_\mu}$, ν_1 степень функціи $\frac{Q_{\mu+1}}{x^{m+1}}$, а $C_1, C_2, \dots, C', C'', \dots$ неопредѣленные коэффициенты.

Эти уравненія, по исключеніи F_μ , даютъ

$$\omega_\mu = C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \dots - C' x^{\nu_1} - C'' x^{\nu_1-1} \dots\dots\dots,$$

что не можетъ быть удовлетворено никакими величинами $C_1, C_2, \dots, C', C'', \dots$, если степень функціи ω_μ превосходитъ и показателя ν и показателя ν_1 . Откуда видно, что при ω_μ степени выше ν и ν_1 нельзя удовлетворить условіямъ, опредѣляющимъ множитель F_μ въ выраженіи искомага полинома, и слѣд. въ этомъ случаѣ рѣшеніе нашей задачи невозможно. Въ противномъ-же случаѣ, когда степень Q_μ не превосходитъ по крайней мѣрѣ одного изъ чиселъ: ν, ν_1 , значеніе множителя F_μ легко найдется, и, какъ не трудно замѣтить, оно будетъ опредѣляться или однимъ уравненіемъ (8) или однимъ уравненіемъ (9), смотря по тому будетъ-ли

$$\nu < \nu_1$$

или

$$\nu \text{ не } < \nu_1.$$

Въ самомъ дѣлѣ, взявши значеніе F_μ по уравненію (8) и внеся его въ уравненіе (9), мы находимъ, что послѣднее приводится къ слѣдующему:

$$C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \dots - \omega_\mu = C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1-1} + \dots\dots\dots$$

Если показатель ν меньше ν_1 , первая часть этого уравненія будетъ степени не выше чѣмъ вторая; ибо при $\nu < \nu_1$ степень

функции ω_μ не можетъ быть больше ν_1 ; такъ какъ иначе, въ противность положенія, она превосходила бы оба числа ν и ν_1 . А потому въ этомъ случаѣ всегда удовлетворится уравненіе

$$C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \dots - \omega_\mu = C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1-1} + \dots$$

приличнымъ выборомъ коэффициентовъ

$$C', C'', \dots$$

во второй части его, каковы бы ни были коэффициенты C_1, C_2, \dots въ первой части.

Точно также при ν не $< \nu_1$, взявши по (9)

$$F_\mu = \omega_\mu + C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1-1} + \dots,$$

и оставляя здѣсь всѣ коэффициенты произвольными, мы получаемъ значеніе F_μ , удовлетворяющее уравненію (8) при величинахъ C_1, C_2, \dots приличнымъ образомъ выбранныхъ.

Изъ этого видно, что всякій разъ, когда степень функции ω_μ не превосходитъ по крайней мѣрѣ одного изъ чиселъ ν, ν_1 (степеней функций $\frac{x^{\nu-1}}{Q_\mu}, \frac{Q_{\mu+1}}{x^{\nu_1-1}}$), значеніе множителя F_μ по условіямъ предыдущаго параграфа можетъ быть найдено, и что величина F_μ опредѣлится или формулою

$$F_\mu = C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \dots$$

или формулою

$$F_\mu = \omega_\mu + C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1-1} + \dots,$$

смотря по тому будетъ-ли $\nu < \nu_1$ или $\nu \geq \nu_1$. Коэффициенты-же

$$C_1, C_2, \dots,$$

$$C', C'', \dots$$

остаются произвольными.

§ 9. Для примѣра мы рассмотримъ теперь опредѣленіе полинома

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{m-1} x^{m-1}$$

подъ условіемъ наибольшей или наименьшей величины суммы

$$\sum \frac{1}{2} (y_i - f(x_i))^2 \theta(x_i),$$

распространенной на

$$x = x_1, x_2, x_3, \dots$$

Сначала мы предположимъ, что выборъ коэффициентовъ

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$$

искамаго полинома y ничѣмъ не ограниченъ, а потомъ мы перейдемъ къ тому случаю, когда дана величина одного изъ коэффициентовъ

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}.$$

Въ первомъ предположеніи, при x_1, x_2, x_3, \dots дѣйствительныхъ и функціи $\theta(x)$ не мѣняющей знака, мы получимъ известную уже формулу, которая рѣшаетъ вопросъ о параболическомъ интерполированіи ко способу *наименьшихъ квадратовъ* въ обыкновенныхъ случаяхъ; во второмъ предположеніи, при тѣхъ же значеніяхъ количествъ x_1, x_2, x_3, \dots и функціи $\theta(x)$, мы найдемъ формулу для параболическаго интерполированія по способу *наименьшихъ квадратовъ* въ тѣхъ исключительныхъ случаяхъ, когда одинъ изъ коэффициентовъ выраженія y долженъ имѣть требуемую величину.

Полагая въ формулахъ § 2

$$F(x, y, y', y'', \dots) = \frac{1}{2} (y - f(x))^2 \theta(x),$$

мы находимъ

$$M = \frac{d F(x, y, y', y'', \dots)}{dy} = (y - f(x)) \theta(x),$$

$$N = \frac{d F(x, y, y', y'', \dots)}{dy'} = 0,$$

$$P = \frac{d F(x, y, y', y'', \dots)}{dy''} = 0,$$

.

При такихъ значеніяхъ функцій

$$M, N, P, \dots$$

и въ предположеніи, что нѣтъ никакихъ условій, ограничивающихъ выборъ коэффициентовъ полинома y , для опредѣленія его, по § 3, имѣемъ такое условіе:

Выраженіе

$$(y - f(x)) \theta(x) \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

гдѣ $\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots$, должно, съ точностію до степеней x^{-m} включительно, привести къ функціи цѣлой.

Изображая черезъ

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{\mu-1}(x), \psi_{\mu}(x), \psi_{\mu+1}(x), \dots$$

знаменателей подходящихъ дробей, получаемыхъ разложеніемъ выраженія

$$\frac{\theta(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

въ непрерывную дробь

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \dots + \frac{1}{q_{\mu-1} + \frac{1}{q_{\mu} + \frac{1}{q_{\mu+1} + \dots}}},$$

и полагая, что въ ряду

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{\mu-1}(x), \psi_{\mu}(x), \psi_{\mu+1}(x), \dots$$

послѣдняя функція степени ниже m есть

$$\psi_{\mu}(x),$$

мы, по параграфу 7, находимъ, что полиномъ

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{m-1} x^{m-1}$$

удовлетворяющій такому условію, опредѣляется формулою

$$y = \omega_1 \psi_1(x) + \omega_2 \psi_2(x) + \dots + \omega_{\mu-1} \psi_{\mu-1}(x) + F_{\mu} \psi_{\mu}(x),$$

гдѣ множители

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\mu-1}$$

найдутся по формулѣ

$$\omega_n = (-1)^{n-1} E q_n \left(\frac{\psi_n(x) f(x) \theta(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)} - E \frac{\psi_n(x) f(x) \theta(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)} \right);$$

а множитель F_{μ} , по параграфу 8, будетъ имѣть одну опредѣленную величину

$$F_{\mu} = \omega_{\mu},$$

если функція $\psi_{\mu+1}(x)$ степени m ; въ противномъ-же случаѣ, если только задача наша имѣетъ рѣшеніе, т. е. если сумма

$$\sum \frac{1}{2} \left(y_i - f(x_i) \right)^2 \theta(x_i)$$

имѣетъ *maximum* или *minimum*, множитель F_{μ} содержитъ нѣсколько произвольныхъ коэффициентовъ и найдется по одной изъ формулъ:

$$F_{\mu} = C_1 x^{\nu} + C_2 x^{\nu-1} + \dots,$$

$$F_{\mu} = \omega_{\mu} + C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1-1} + \dots,$$

гдѣ ν, ν_1 означаютъ степени функцій

$$\frac{x^{m-1}}{\psi_{\mu}(x)}, \quad \frac{\psi_{\mu+1}(x)}{x^{m+1}},$$

и первая изъ этихъ формулъ будетъ имѣть мѣсто при $\nu < \nu_1$, вторая при $\nu \geq \nu_1$. Что касается до признака, по которому мы узнаемъ, имѣетъ-ли наша задача рѣшеніе или нѣтъ, то, какъ видѣли (§ 8), множитель F_μ удовлетворяющій условіямъ нашей задачи, возможенъ только въ томъ случаѣ, когда степень функціи ω_μ не превосходитъ по крайней мѣрѣ одного изъ чиселъ ν , ν_1 .

Въ томъ случаѣ, когда величины

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

имѣютъ дѣйствительныя значенія и функція

$$\theta(x)$$

не мѣняетъ своего знака, непрерывная дробь, происходящая отъ разложенія выраженія

$$\frac{\theta(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

какъ извѣстно, будетъ такого вида:

$$q_0 + \frac{1}{A_1 x + B_1} + \frac{1}{A_2 x + B_2} + \dots,$$

гдѣ $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ величины постоянныя (*). Въ этомъ случаѣ функціи

$$q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$$

имѣютъ такія значенія:

$$q_1 = A_1 x + B_1, q_2 = A_2 x + B_2, \dots, q_n = A_n x + B_n, \dots$$

(*) См. Мемуаръ подъ заглавіемъ: *О непрерывныхъ дробяхъ*. (Ученыя записки Академіи, Томъ X). Въ этомъ-же мы убѣждаемся на основаніи того, что при x_1, x_2, x_3, \dots дѣйствительныхъ и $\theta(x)$ не мѣняющемъ знака, наша задача имѣетъ всегда одно рѣшеніе, каково бы ни было m ; такъ какъ это по § 8 предполагаетъ, что въ ряду $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ найдется всегда знаменатель степени m , и слѣд., что здѣсь найдутся знаменатели всѣхъ степеней, что возможно только при вышешоказанномъ видѣ непрерывной дроби.

а

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{m-1}(x), \psi_m(x), \psi_{m+1}(x), \dots,$$

знаменатели подходящихъ дробей выраженія

$$\frac{\theta(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

будутъ степеней

$$0, 1, \dots, m-2, m-1, m, \dots$$

Такъ какъ здѣсь послѣдній знаменатель степени ниже m есть $\psi_n(x)$, а слѣдующій за нимъ, $\psi_{m+1}(x)$, степени m , то, по выше-сказанному, искомый полиномъ въ разсматриваемомъ случаѣ найдется по формулѣ

$$y = \omega_1 \psi_1(x) + \omega_2 \psi_2(x) + \dots + \omega_{m-1} \psi_{m-1}(x) + \omega_m \psi_m(x).$$

Внося-же въ вышепоказанное (§ 7) выраженіе множителей

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-1}, \omega_m$$

величину $q_n = A_n x + B_n$, мы найдемъ, что они будутъ опредѣляться такъ:

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \mathbf{E} (A_n x + B_n) \left(\frac{\psi_n(x) f(x) \theta(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)} - \mathbf{E} \frac{\psi_n(x) f(x) \theta(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)} \right)$$

Изображая черезъ U цѣлую функцію, получаемую при дѣленіи произведенія

$$\psi_n(x) f(x) \theta(x) \varphi'(x)$$

на $\varphi(x)$, мы, по нашему законоположенію, имѣемъ

$$\mathbf{E} \frac{\psi_n(x) f(x) \theta(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)} = U,$$

II

$$\frac{\psi_n(x) f(x) \theta(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)} =$$

$$U + \frac{\psi_n(x_1) f(x_1) \theta(x_1)}{x-x_1} + \frac{\psi_n(x_2) f(x_2) \theta(x_2)}{x-x_2} + \dots$$

$$= U + \sum \frac{f(x_i) \theta(x_i) \psi_n(x_i)}{x-x_i},$$

что, для величины разности

$$\frac{\psi_n(x) f(x) \theta(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)} - \mathbf{E} \frac{\psi_n(x_i) f(x_i) \theta(x_i) \varphi'(x_i)}{\phi(x)},$$

даетъ

$$\sum \frac{f(x_i) \theta(x_i) \psi_n(x_i)}{x-x_i}.$$

Вслѣдствіе этого вышенайденное выраженіе множителя ω_n приводится къ слѣдующему:

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \mathbf{E} \left(A_n x + B_n \right) \sum \frac{f(x_i) \theta(x_i) \psi_n(x_i)}{x-x_i},$$

что иначе можно написать такъ:

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \mathbf{E} \left(A_n + \frac{B_n}{x} \right) \sum \frac{f(x_i) \theta(x_i) \psi_n(x_i)}{1 - \frac{x_i}{x}}$$

Выраженіе, стоящее здѣсь надъ знакомъ \mathbf{E} , есть нулевой степени, а потому, дѣлая $x = \infty$, мы получимъ цѣлую часть этого выраженія. Такимъ образомъ мы находимъ по предыдущей формулѣ, что

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \sum A_n f(x_i) \theta(x_i) \psi_n(x_i)$$

$$= (-1)^{n-1} A_n \sum f(x_i) \theta(x_i) \psi_n(x_i).$$

Опредѣляя по этой формулѣ значеніе множителей

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-1}, \omega_m$$

въ вышенайденномъ выраженіи искомага полинома y , мы получаемъ такую формулу:

$$y = A_1 \sum f(x_i) \theta(x_i) \psi_1(x_i) \cdot \psi_1(x) - A_2 \sum f(x_i) \theta(x_i) \psi_2(x_i) \cdot \psi_2(x) + \\ \dots + (-1)^{m-2} A_{m-1} \sum f(x_i) \theta(x_i) \psi_{m-1}(x_i) \cdot \psi_{m-1}(x) \\ + (-1)^{m-1} A_m \sum f(x_i) \theta(x_i) \psi_m(x_i) \cdot \psi_m(x).$$

Такъ опредѣляется полиномъ y степени $m - 1$, съ которымъ сумма

$$\sum \frac{1}{2} (y_i - f(x_i))^2 \theta(x_i),$$

распространенная на дѣйствительныя величины x , при множителѣ $\theta(x)$ не мѣняющемъ своего знака, имѣеть *максимум* или *минимум*. Эта формула и служить для параболическаго интерполированія по способу *наименьшихъ квадратовъ*, когда относительно коэффициентовъ искомага полинома нѣтъ никакихъ особенныхъ условій.

§ 10. Переходимъ теперь къ тому случаю, когда въ искомомъ полиномѣ

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{m-1} x^{m-1}$$

коэффициентъ при x^l , гдѣ l одно изъ чиселъ $0, 1, 2, \dots, m-1$, предполагается даннымъ.

Условіе, что въ полиномѣ y коэффициентъ при x^l долженъ равняться какой нибудь данной величинѣ, можетъ быть представлено равенствомъ

$$\sum \Phi_1(x, y, y', y'', \dots) = \alpha_1,$$

если принять, что здѣсь сумма распространяется только на одну величину переменнѣй $x = 0$, и что функція

$$\Phi_1(x, y, y', y'', \dots)$$

приводится къ одному члену $y^l = \frac{d^l y}{dx^l}$. Въ этомъ случаѣ, по зна-
коположенію 5-го параграфа, будемъ имѣть

$$\varphi_1(x) = x; \quad \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{1}{x};$$

и всѣ производныя функціи

$$\Phi_1(x, y, y', y'', \dots) = y^l$$

по y, y', y'', \dots обратятся въ нуль, кромѣ производной по y^l , которая будетъ равна 1.

Предполагая-же, что сумма, которой желаютъ имѣть *maxi-*
тит или *minimit*, есть, по прежнему,

$$\sum \frac{1}{2} (y - f(x))^2 \theta(x)$$

и что она распространяется на величины

$$x_1, x_2, x_3, \dots,$$

мы, по знакоположенію параграфа 5, имѣемъ

$$\Phi_0(x, y, y', y'', \dots) = \frac{1}{2} (y - f(x))^2 \theta(x),$$

$$M_0 = \frac{d \Phi_0(x, y, y', y'', \dots)}{dy} = (y - f(x)) \theta(x),$$

$$N_0 = \frac{d \Phi_0(x, y, y', y'', \dots)}{dy'} = 0,$$

$$P_0 = \frac{d \Phi_0(x, y, y', y'', \dots)}{dy''} = 0,$$

.....

И

$$(x - x_1) (x - x_2) (x - x_3) \dots = \varphi_0(x).$$

При такихъ значеніяхъ функцій

$$M_0, N_0, P_0, \dots, \varphi_0(x), \varphi_1(x)$$

и по замѣченному выше относительно производныхъ функцій

$$\Phi_1(x, y, y', y'', \dots) = y^l$$

по $y, y', y'', \dots, y^l, \dots$, искомый полиномъ, на основаніи § 5, опредѣлится такимъ условіемъ:

Выраженіе

$$\frac{(y - f(x)) \theta(x) \varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} + (-1)^l \frac{d^l \frac{\lambda_1}{x}}{dx^l}$$

вѣрно до степеней x^{-m} включительно должно привести къ функціи целой.

Такъ какъ это выраженіе, по выполненіи дифференцированія и по раскрытіи скобки приводится къ разности

$$\frac{\theta(x) \varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} y - \left(\frac{f(x) \theta(x) \varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} - \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot l \cdot \lambda_1}{x^{l+1}} \right);$$

то по § 7, для опредѣленія полинома y , должно разложить въ непрерывную дробь выраженіе

$$\frac{\theta(x) \varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)}.$$

Ограничиваясь тѣмъ случаемъ, когда всѣ величины

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

дѣйствительныя и функція

$$O(x)$$

не мѣняетъ своего знака, мы, по замѣченному въ предыдущемъ параграфѣ, будемъ имѣть

$$\frac{\theta(x) \varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} = q_0 + \frac{1}{A_1x + B_1} + \frac{1}{A_2x + B_2} + \dots$$

гдѣ $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ постоянныя величины, и изъ этого разложенія выраженія

$$\frac{\theta(x) \varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)}$$

найдется рядъ подходящихъ дробей, которыхъ знаменатели

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{m-1}(x), \psi_m(x), \psi_{m+1}(x), \dots$$

будутъ степеней

$$0, 1, \dots, m-2, m-1, m, \dots$$

Такъ какъ здѣсь послѣдній знаменатель, степени ниже m , есть $\psi_m(x)$, и слѣдующій за нимъ, $\psi_{m+1}(x)$, степени $m+1$, то иско-
мый полиномъ

$$y = A_0 + A_1x + \dots + A_{m-1}x^{m-1}$$

представится по § 8 формулою

$$y = \omega_1 \psi_1(x) + \omega_2 \psi_2(x) + \dots + \omega_{m-1} \psi_{m-1}(x) + \omega_m \psi_m(x).$$

Замѣчая-же, что въ настоящемъ случаѣ

$$q_1 = A_1x + B_1, q_2 = A_2x + B_2, \dots,$$

$$Q_1 = \psi_1(x), Q_2 = \psi_2(x), \dots,$$

II

$$v = \frac{f(x) \theta(x) \varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} - \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot l \cdot \lambda_1}{x^{l+1}};$$

мы для опредѣленія множителей

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-1}, \omega_m$$

по § 7 находимъ такую формулу:

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \mathbf{E}(A_n x + B_n) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{f(x) \theta(x) \varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} - \frac{1 \cdot 2 \dots l \cdot \lambda_1}{x^{l+1}} \right) \psi_n(x) \\ - \mathbf{E} \left(\frac{f(x) \theta(x) \varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} - \frac{1 \cdot 2 \dots l \cdot \lambda_1}{x^{l+1}} \right) \psi_n(x) \end{array} \right\}$$

что иначе можетъ быть написано такъ:

$$\begin{aligned} \omega_n = & (-1)^{n-1} \mathbf{E}(A_n x + B_n) \left(\frac{f(x) \theta(x) \varphi'_0(x) \psi_n(x)}{\varphi_0(x)} - \mathbf{E} \frac{f(x) \theta(x) \varphi'_0(x) \psi_n(x)}{\varphi_0(x)} \right) \\ & - (-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \dots l \cdot \lambda_1 \mathbf{E}(A_n x + B_n) \left(\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} - \mathbf{E} \frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} \right). \end{aligned}$$

Но, по сказанному въ предыдущемъ параграфѣ, выраженіе

$$\mathbf{E}(A_n x + B_n) \left(\frac{f(x) \theta(x) \varphi'_0(x) \psi_n(x)}{\varphi_0(x)} - \mathbf{E} \frac{f(x) \theta(x) \varphi'_0(x) \psi_n(x)}{\varphi_0(x)} \right)$$

приведется къ

$$A_n \sum f(x_i) \theta(x_i) \psi_n(x_i).$$

Разлагая-же функцію $\psi_n(x)$ по Маклореновой строкѣ, мы находимъ, что

$$\begin{aligned} \frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} = & \frac{\psi_n(0)}{x^{l+1}} + \frac{1}{1} \frac{\psi'_n(0)}{x^l} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots l} \frac{\psi_n^{(l)}(0)}{x} + \\ & \frac{1}{1 \cdot 2 \dots l (l+1)} \psi_n^{(l+1)}(0) + \frac{x}{1 \cdot 2 \dots (l+1) (l+2)} \psi_n^{(l+2)}(0) + \dots, \end{aligned}$$

а потому

$$\mathbf{E} \frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots l (l+1)} \psi_n^{(l+1)}(0) + \frac{x}{1 \cdot 2 \dots (l+1) (l+2)} \psi_n^{(l+2)}(0) + \dots$$

и разность

$$\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} - \int \frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}}$$

приводится къ слѣдующему:

$$\frac{\psi_n^l(0)}{1.2\dots l} \frac{1}{x} + \frac{\psi_n^{l-1}(0)}{1.2\dots(l-1)} \frac{1}{x^2} + \dots$$

Умножая это на $A_n x + B_n$, и въ полученномъ произведеніи

$$\frac{A_n \psi_n^l(0)}{1.2\dots l} + \left(\frac{B_n \psi_n^l(0)}{1.2\dots l} + \frac{A_n \psi_n^{l-1}(0)}{1.2\dots(l-1)} \right) \frac{1}{x} + \dots$$

откинувъ члены съ отрицательными степенями переменнѣной x , мы находимъ, что

$$\int (A_n x + B_n) \left(\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} - \int \frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} \right)$$

имѣетъ такую величину:

$$\frac{A_n \psi_n^l(0)}{1.2\dots l}.$$

Вслѣдствіе этого предыдущее выраженіе множителя ω_n приводится къ такой формулѣ:

$$\omega_n = (-1)^{n-1} A_n \left(\sum f(x_i) \theta(x_i) \psi_n(x_i) - \lambda_1 \psi_n^l(0) \right).$$

Опредѣливши по этой формулѣ величину множителей

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-1}, \omega_m,$$

и внеся ихъ въ выраженіе искомаго полинома

$$y = \omega_1 \psi_1(x) + \omega_2 \psi_2(x) + \dots + \omega_{m-1} \psi_{m-1}(x) + \omega_m \psi_m(x),$$

мы находимъ, что оно приводится къ слѣдующему:

$$\begin{aligned} y = & A_1 \left(\sum f(x_i) \theta(x_i) \psi_1(x_i) - \lambda_1 \psi_1^l(0) \right) \psi_1(x) - \\ & A_2 \left(\sum f(x_i) \theta(x_i) \psi_2(x_i) - \lambda_1 \psi_2^l(0) \right) \psi_2(x) + \\ & \dots + \\ & (-1)^{m-1} A_m \left(\sum f(x_i) \theta(x_i) \psi_m(x_i) - \lambda_1 \psi_m^l(0) \right) \psi_m(x) \end{aligned}$$

гдѣ λ_1 постоянная неизвѣстная величина, которая опредѣляется тѣмъ, что здѣсь коэффициентъ при x' долженъ имѣть данную величину.

Подобнымъ образомъ найдется выраженіе полинома y и въ томъ случаѣ, когда дано нѣсколько изъ коэффициентовъ его, а остальные опредѣляются тѣмъ условіемъ, что сумма

$$\sum \frac{1}{2} (y - f(x))^2 \theta(x),$$

распространенная на данныя величины переменнѣй x , имѣетъ наибольшую или наименьшую величину.



