Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 51

Übungsaufgaben

AUFGABE 51.1. Betrachte den Beweis zu Lemma 51.1 mit der dortigen Notation. Begründe die folgenden Aussagen.

(1) Eine eigentliche Isometrie mit zwei Fixachsen ist die Identität.
(2) G ist die Vereinigung aller G_H.
(3) Sei $g \neq \mathrm{Id}$. Das Element g kommt in genau zwei der G_H vor. In welchen?
(4) Die Halbachsenklasse K_i enthält n/n_i Elemente.

AUFGABE 51.2. Überprüfe die Formel

$$2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{n_i}\right)$$

für den Oktaeder, den Dodekaeder und den Ikosaeder.

AUFGABE 51.3. Es sei $G \subseteq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ eine endliche Untergruppe der Gruppe der eigentlichen, linearen Isometrien des $\mathbb{R}^3$, die nur eine Halbachsenklasse K besitze. Welche numerische Beziehung würde zwischen $\#(G)$, $\#(K)$ und $\#(G_H)$ $(H \in K)$ bestehen? Folgere, dass es eine solche Symmetriegruppe nicht geben kann.

AUFGABE 51.4. Zeige, dass die Gleichung

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

in $\mathbb{N}$ bei $a, b \leq n$ nur die Lösungen $n = a = b$ besitzt.

AUFGABE 51.5.*

Zeige, dass die Gleichung

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

in $\mathbb{N}$ auch Lösungen $a \neq b$ besitzt.

AUFGABE 51.6. Finde eine nichttriviale ganzzahlige Lösung für das Gleichungssystem $ab = c$ und $(a-1)d = c-1$.

Aufgabe 51.7. Es sei $G \subseteq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ eine endliche Untergruppe der Gruppe der eigentlichen, linearen Isometrien des $\mathbb{R}^3$ mit einer fixierten Halbachsenklasse K. Bestimme den Kern des Gruppenhomomorphismus

$$G \longrightarrow \mathrm{Perm}(K),\ g \longmapsto \sigma_g : H \mapsto g(H).$$

Aufgabe 51.8. Es sei $G \subseteq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ eine endliche Untergruppe der Gruppe der eigentlichen, linearen Isometrien des $\mathbb{R}^3$ mit drei Halbachsenklassen und es sei K eine davon. Zeige, dass der Gruppenhomomorphismus

$$G \longrightarrow \mathrm{Perm}(K),\ g \longmapsto \sigma_g : H \mapsto g(H),$$

injektiv ist. Zeige, dass dies nicht stimmt, wenn es nur zwei Halbachsenklassen gibt.

Aufgabe 51.9. Bestimme die Winkel zwischen den Halbachsen (der Symmetriegruppen) der platonischen Körper.

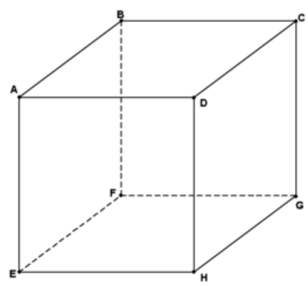
Aufgabe 51.10. Es seien zwei Halbachsen H_1 und H_2 im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Bestimme die Menge der Drehachsen und der Drehwinkel, die H_1 in H_2 überführen.

Aufgabe 51.11. Betrachte ein gleichseitiges Dreieck in der x, y-Ebene mit $(0, 0)$ als Mittelpunkt und mit $(1, 0)$ als einem der Eckpunkte. Betrachte darüber die doppelte Pyramide D mit oberer Spitze $(0, 0, 2)$ und unterer Spitze $(0, 0, -2)$. Bestimme die Matrizen der (eigentlichen) Bewegungen, die D in sich überführen, ihre Drehachsen und erstelle eine Verknüpfungstabelle für diese Bewegungen.

Beschreibe ferner, was unter diesen Bewegungen mit den drei Eckpunkten des zugrundeliegenden Dreiecks geschieht.

Aufgabe 51.12.*

Betrachte den Würfel



Es sei α diejenige Drehung am Würfel um die Achse durch die Eckpunkte A und G, die den Eckpunkt B auf D schickt, und es sei β die Halbdrehung um die vertikale Achse (also die Gerade, die durch den Mittelpunkt der Seitenfläche A, B, C, D und den Mittelpunkt der Seitenfläche E, F, G, H läuft).

a) Man gebe eine Wertetabelle für die Permutationen auf der Eckpunktmenge $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, die durch $\alpha, \beta, \alpha\beta$ und $\beta\alpha$ bewirkt werden.

b) Bestimme die Drehachse von $\alpha\beta$ und von $\beta\alpha$ sowie die Ordnung dieser Drehungen.

c) Man gebe die Zykeldarstellung der von α^2 bewirkten Permutation auf der Eckpunktmenge an. Was ist α^{1001}?

d) Man betrachte die Permutation σ, die auf der Eckpunktmenge durch die Wertetabelle

x	A	B	C	D	E	F	G	H
$\sigma(x)$	B	C	D	A	G	H	E	F

gegeben ist. Gibt es eine Drehung des Würfels, die diese Permutation bewirkt? Berechne das Signum von σ.

Aufgabe 51.13. Sei G eine Gruppe, M eine Menge und

$$G \longrightarrow \mathrm{Perm}\,(M),\ g \longmapsto \sigma_g,$$

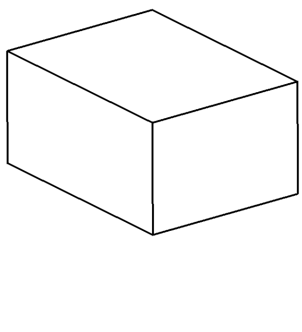
ein Gruppenhomomorphismus in die Permutationsgruppe von M. Zeige, dass dies in natürlicher Weise einen Gruppenhomomorphismus

$$G \longrightarrow \mathrm{Perm}(\mathfrak{P}\,(\mathrm{M}))\,,\ g \longmapsto (N \mapsto g(N)),$$

in die Permutationsgruppe der Potenzmenge induziert.

Aufgabe 51.14.*

(1) Zeige, dass die Gruppe $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ nicht die eigentliche Symmetriegruppe einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^3$ ist.
(2) Zeige, dass man die Gruppe $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ als Untergruppe der vollen Isometriegruppe $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ realisieren kann.
(3) Betrachte die eigentliche Symmetriegruppe eines Quaders mit drei verschiedenen Seitenlängen. Bei ihm ist zu jeder Geraden durch gegenüberliegende Seitenmittelpunkte die Halbdrehung um diese Achse eine Symmetrie. Widerspricht dies nicht Teil (1)?



Aufgabe 51.15. Zeige, dass sich jede endliche Gruppe als Untergruppe der $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ realisieren lässt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 51.16. (4 Punkte)

Es seien A_1, A_2, A_3 und A_4 vier Geraden im $\mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt mit der Eigenschaft, dass keine drei davon in einer Ebene liegen. Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine lineare, eigentliche Isometrie mit $f(A_i) = A_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$. Zeige, dass f die Identität ist. Man gebe ein Beispiel an, dass diese Aussage ohne die Ebenenbedingung nicht gilt.

Aufgabe 51.17. (5 Punkte)

Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ Drehungen um die x-Achse, die y-Achse und die z-Achse mit den Ordungen ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 (φ_1 ist also eine Drehung um den Winkel $360/\ell_1$ Grad um die x-Achse, etc.). Es sei $1 \leq \ell_1 \leq \ell_2 \leq \ell_3$. Für welche Tupel (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) ist die von diesen drei Drehungen erzeugte Gruppe endlich?

Aufgabe 51.18. (3 Punkte)

Es sei G eine Gruppe und seien U, V Untergruppen von G. Zeige folgende Aussagen.

(1) $UV = \{uv \mid u \in U, v \in V\}$ ist genau dann eine Gruppe, wenn $UV = VU$ gilt.
(2) Ist G endlich, so gilt $\#(UV) = \#(U) \cdot \#(V)/\#(U \cap V)$.
(3) Sind U und V echte Untergruppen von G, so gilt $U \cup V \neq G$.

Aufgabe 51.19. (3 Punkte)

Zeige: Keine der alternierenden Gruppen A_n besitzt eine Untergruppe vom Index zwei.

Aufgabe 51.20. (4 Punkte)

Zeige, dass die Gruppe $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(4)$ nicht die eigentliche Symmetriegruppe einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^3$ ist.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Snijden kruisen evenwijdig.png , Autor = Benutzer MADe auf nl.wikipedia, Lizenz = cc-by-sa 3.0 3
Quelle = Cuboid diagonal-orthogonal.png , Autor = Benutzer Tomruen auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 4