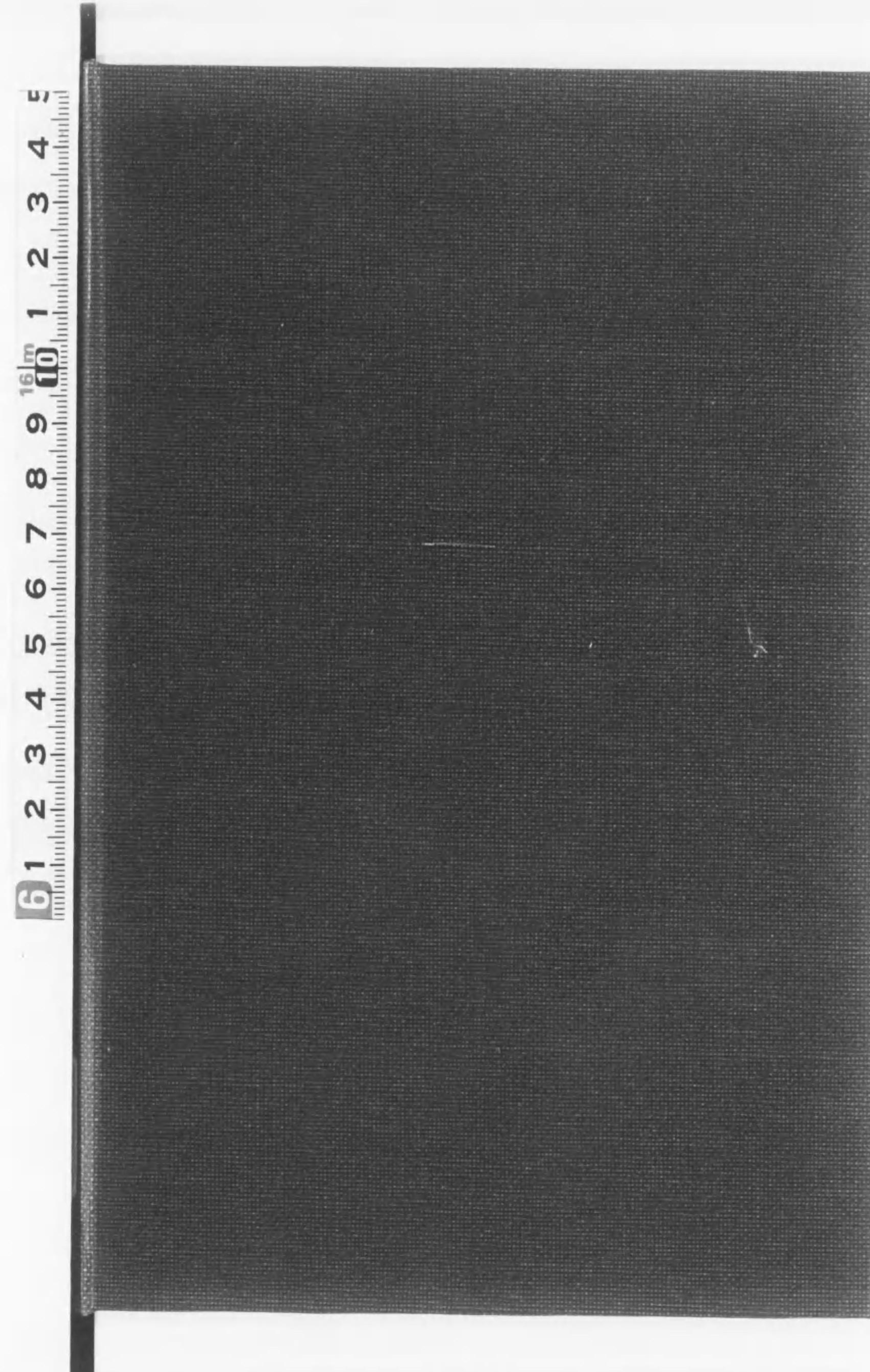
始



數學叢書

第十三編

順列論

~~理學博士~~
~~理學士~~　林　鶴一　著

東京
大倉書店

序

順列組合セノ問題ガ極メテ趣味アルコトハ既ニ讀者ノ知ラルヽ所ナラン. 而シテ其問題ノ中極メテ易ナルモノモアリト雖,又極メテ難ナルモノアリ. 其易ナルモノモ少シク之ヲ變形シタルガ爲頗難ナルモノトナルコトアリ. 其難ナリト云フハ多クハ所題ノ意ニ適スル總テノ場合ヲ重複モナク遺漏モナク拾ヒ上グル點ニ存ス. 人ノ腦力ノ鋭鈍ヲ判ツニ最善キ試金石ハ順列組合セノ問題ナリト云フモ不可ナシ. 余ハ今此趣味アル,—— 讀者ハ既ニ本叢書第六編公算論ヲ讀ンデ順列組合セノ理論ノ應用ノ甚面白キモノナルコトヲ知レルナラン —— 而シテ多クハ難解ナリトセラルヽ問題ヲ序ヲ逐ヒテ説述セントス.

歐洲ニハ既ニ此種ノ問題ヲ説述セル專門ノ書アリ. 我邦亦此書ナカルベカラズ. 但本書ニ載スル所ガ既ニ發見セラレタル諸定理又ハ解明セラレタル諸問題ヲ盡セルニハアラズ. 然レドモ本書ニ載スル所ニヨリテスラモ我邦ノ數學界ハ多少ノ利益ヲ受クベシト信ズ. 讀者ハ本書所載ノ問題ヲ翫味シ自ラ之ヲ變形シテ諸種ノ新問題ヲ作リ其解答ヲ作ルコトヲ試ミラルベシ.

正ノ整數ヲ指數トスル二項定理及多項定理ハ元來順列組合セノ理論ノ應用ナリ. 故ニ本編中ニ於テ之ヲ論ズ. 他ノ數ヲ指數トスル場合ハ他編ニ於テ之ヲ論ゼン.

順列組合セナル二語ニ就キテハ平常甚面白カラズト思ヒテ之ヲ改メント欲スレドモ今ハ唯我邦ニ廣ク行ハルル所ニ從ヒテ此二語ヲ使用スルコトヽセリ.

本編ヲ作ルニハ愛知縣第二師範學校教諭佐藤充君ノ補助ヲ得タルコト多シ. 茲ニ記シテ其勞ヲ謝ス.

明治四十四年六月十七日

林　鶴　一　識ス

目次

初等數學叢書編述目次

(算 術)

(代 數 學)

(幾何學)

(三角法)

數學叢書

第十三編

順列論

第一章 緒論

1. 原素.

今玆ニ數個ノ事物ヲ考ヘ,之ヲ表スニ文字 $a, b, c, \cdots, l$ ヲ以テス. 但玆ニ事物ト稱スルハ, 吾人ノ思考シ得ベキアラユル事件及物象ヲ指シ,日常目撃スル物體, 數値, 幾何學的圖形等ハ皆其中ニ含マルルモノナリ. 而シテ此等ノ事物ヲ原素*ト云フ.

2. 總順列.

數個ノ原素ヨリ成ル一定ノ群アリ. 但其中ニハ相等シキモノアルヲ妨ゲズ. 此群中ノ原素ハ種々ノ順序ニアリト考フルコトヲ得ベシ. 而シテ其順序ハ原素ヲ代表スル文字ヲ一直線上ニ列ベテ表示スルコトヲ得. 例ヘバ a, b, c ヲ以テ表サルヽ三個ノ原素アリトシ, a ノ表ス原素ヲ第一番, c ノ表ス原素ヲ第二番, b ノ表ス原素ヲ第三番ニアリト考フルトキニハ, 其順序ハ acb ヲ以テ表示セラルヽガ如シ. 斯クノ如ク數個ノ原素アリテ其原素ヲ代表スル總テノ文字ヲ一直線上ニ列ベ, 以テ順序ヲ表示シタルモノヲ此等ノ原素ノ總順列**ト云フ.

偖上述ノ如ク, 原素元來ノ意味ハ文字ニアラズシテ, 文字ニヨリテ代表セラルヽ事物其レ自身ナリ.***然レドモ斯ク原素ト文字トヲ離シテ考フルハ陳述ニ不便ナルノミナラズ思考上不經濟ナルヲ以

* 本叢書第七編行列式ニ於テハ原素ガ數ナル場合ノミヲ取リタリ
本叢書第七編行列式ニ於テハ總順列ノコトヲ單ニ列ト稱セリ
** 但初ヨリ文字其レ自身ノ順序ヲ考フルトキモアルベシ

テ以後文字ヲ原素ト考フベシ.

3. 組合セ.

玆ニ若干ノ原素 $a, b, c, \cdots\cdots, l$ アリ. 但其中ニハ相等シキモノアルヲ妨ゲズ. 此等ノ原素ヨリ若干ノ原素ヲ選擇スルニハ種々ノ方法アリ. 例ヘバ a, b, c ナル三個ノ原素ヨリ二個ヲ選擇スルニハ, a ト b トヲ取ルカ, a ト c トヲ取ルカ, 或ハ b ト c トヲ取ルカニシテ, 總テニ於テ三通リノ方法アリ. 斯ノ如ク若干ノ原素ヨリ若干ヲ選擇スルトキハ其選擇セラレタル各組ヲ組合セト云フ. 前例ニ於テハ a ト b, b ト c, c ト a ハ各一ツノ組合セナリ. 而シテ n 個ノ原素ヨリ r 個ヲ選擇スル場合ニハ, 其組合セヲ n 個ノ原素ヨリ r 個ヲ取リタル組合セト云フ.

$_nC_r$

組合セモ原素ヲ一直線ニ列ベテ之ヲ表ス. 然レドモ組合セハ次節ニ述ブル順列ト異ナリ, 何レノ原素ヲ先ニ選擇スルカハ問フ所ニ非ザルヲ以テ, 原素ヲ如何ナル順序ニ書クモ可ナリ. 例ヘバ前例ニ於テハ ab ト書クトモ ba ト書クトモ同一ノ組合セヲ表スガ如シ.

4. 順列.

組合セノ一ツヲ取リテ考フルニ, 其中ノ原素ハ又種々ノ順序ニ列ブルコトヲ得. 例ヘバ前節ノ例ニ於テ, 組合セ ab ハ ab トモ又 ba トモ列ブルコトヲ得. 他ノ組合セ bc, ca ニ就テモ亦同樣ナリ. 換言スレバ各組合セ中ノ原素ヲ各一群ノ原素ト考ヘコレヨリ總順列ヲ作ルコトヲ得. 斯ノ如キ各總順列ヲ單ニ順列ト云フ. 原素ノ數ガ n ニシテ斯ノ如キ各總順列中ノ原素ノ數ガ r ナル場合ニ於テハ各總順列ヲ n 個ノ原素ヨリ r 個ノ原素ヲ取リタル順列ト云フ.

第2節ニ於テ述ベタル總順列ハ n ガ r ニ等シキ場合ニ於ケル順列ノ特段ナルモノニ過ギザルヲ以テ總順列ヲモ込メテ順列ト云フコトアリ.

5. 互ニ相異ナル或ハ相等シキ原素.

第1節ニ於テ述ベタルガ如ク, 吾人ガ原素ト云ヘルハ, 吾人ガ思惟シ得ベキアラユル事物ヲ指スモノナルガ, 其中ニテ數値, 幾何學的圖形ノ如ク抽象的ノ事物ニアリテハ, 全ク相等シキ二ツ或ハ三ツ以上ノ原素ヲ考ヘ得ベシト雖, 日常目擊スル物體ノ如ク具體的實在物ニアリテハ, 全ク相等シキ原素ノ存在スルコトハ不可能ナリ. 然レドモ順列組合セノ應用問題ヲ論ズルニ當リテハ, 譬ヘ全ク相等シキ原素ニアラザル場合ニ於テモ, 相等シキ原素ト見做シテ論ズルヲ至當トスル場合ニハ, 相等シキ原素トシテ取扱フハ勿論實際之ヲ相等シキ原素ト云フベシ. 故ニ相等シキ原素ト云ヘル場合ニモ必シモ實際全ク相等シキ場合ノミニ限ラザルコトニ注意スベシ.

順列組合セノ應用問題ヲ解クニ當リ, 所設ノ原素ヲ相等シキモノト見做スカ或ハ異ナルモノト見做スカハ解答者ノ常ニ困難ヲ感ズル所ナリ. 例ヘバ玆ニ「梨二個桃一個アリ之ヲ一直線上ニ列ブルニハ其順序幾通アリヤ」ト云フ問題アリトセン. 今若二個ノ梨ヲ相等シキ原素ト見做シ梨ヲ表スニ a, 桃ヲ表スニ b ヲ以テスルトキハ次ノ如キ3通リノ列ベ方アリ.

$$aab,\quad aba,\quad baa.$$

然レドモ實際ノ場合ヲ考フルニ梨ニハ大小種類アリテ相等シキモノトシテ取扱ハレザル場合アリ. 故ニ二ツノ梨ヲ異ナル原素トシ之ヲ a_1, a_2 ニテ表ストキハ次ノ如キ6通リノ列ベ方アリ.

$$a_1a_2b,\quad a_1ba_2,\quad a_2a_1b,\quad a_2ba_1,\quad ba_1a_2,\quad ba_2a_1.$$

故ニ順列組合セノ應用問題ヲ解クニ當リテハ題意ノ解釋ニ特ニ注

意ヲ要ス. 而シテ若問題ノ陳述ニ不足ノ點アラバ解答者ハ自己ノ立脚點ヲ明瞭ニシテ後解答スベキナリ.

6. 順列或ハ組合セノ數.

若干ノ順列或ハ組合セヲ一團トシテ考フル場合ニハ之ヲ順列群或ハ組合セ群ト云フ.

若干ノ原素ヨリ作ラルヽアラユル順列又ハ組合セノ數ハ, 各無限ニアラザルコトハ明ナリ. 本編ニ於テハ此等ノ順列又ハ組合セノ相異ナルモノヲ一ツモ殘サズ, 卽遺漏ナク, 又相同ジキモノヲ一度ヨリ多ク取ルコトナク, 卽重複ナク, 取リテ作レル順列或ハ組合セノ群ヲ考フルコト屢〻アリ. 斯ノ如キ場合ニ其群中ノ順列又ハ組合セノ數ヲ, 單ニ其順列又ハ組合セノ數ト云フコトアリ. 例ヘバ原素 a, b, c ヨリ作ラルヽ總順列ヲ遺漏ナク又重複ナク取リテ作ラルヽ順列群ハ,

$$abc,\quad acb,\quad bac,\quad bca,\quad cab,\quad cba$$

ナリ. 而シテ此群中ニハ 6 個ノ順列アリ. 故ニ原素 a, b, c ヨリ作ラルヽ總順列ノ數ハ 6 ナリト云フ.

7. 基本定理.

次ニ述ブル二ツノ定理ハ以後屢〻用ユルモノナリ.

既ニ述ベタルガ如ク, 原素ヲ選擇スルコト及原素ヲ列ベルコトハ本編ニ於テ論ズル主要ナル目的ナリ. 原素ヲ斯ノ如ク取扱フコトヲ作用ト云フベシ.

定理 I 或一ツノ作用 P_1 ガ p_1 通リノ方法ニテ施コサルヽコトヲ得. 之ガ任意ノ一ツノ方法ニテ施コサレタル後, 他ノ作用 P_2 ガ p_2 通リノ方法ニテ施コサルヽコトヲ得, 此等ノ二ツノ作用ガ任意ノ一ツノ方法ニテ施コサレタル後, 他ノ作用 P_3 ガ p_3 通リノ方法ニテ施コサルヽコトヲ得. 以下同樣ニシテ作用 P_n ガ p_n 通リノ方法ニテ施コサルヽコトヲ得ルトキハ, 作用 $P_1, P_2, P_3, \cdots\cdots, P_n$ ヲ同時ニ施コス方法ハ $p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots\cdots \times p_n$ 通リアリ.*

證明. P_1 ナル作用ヲナスニ p_1 通リノ方法アリ. 而シテ其各方法ヲ施コシタル後 P_2 ナル作用ヲ施コスニ p_2 ノ方法アリ. 故ニ P_1 ト P_2 トヲ同時ニ施コスニハ $p_1 \times p_2$ 通リノ方法アリ. 次ニ作用 P_1 ト P_2 トヲ一ツノ作用ト見做ストキハ前ト同樣ニシテ作用 P_1, P_2, P_3 ヲ同時ニ施コスニハ $p_1 \times p_2 \times p_3$ 通リノ方法アルヲ知ル. 以下同樣ニ進ミテ本定理ヲ得.

二ツノ順列群或ハ組合セ群ノ全ク相同ジキコトニ就テ次ノ定理アリ.

定理 II. 二ツノ順列群 P_1 及 P_2 アリ. P_1 中ノ任意ノ順列ハ P_2 ニ含マレ, 逆ニ P_2 中ノ任意ノ順列ハ P_1 中ニ含マレ且各順列群中ニ相等シキ順列ナキトキハ P_1 ト P_2 トハ全ク相同ジ. 二ツノ組合セノ群ニ就テモ亦同樣ナリ.

證明. P_1 中ノ任意ノ順列ハ P_2 ニ含マレ P_1 中ニハ相等シキ順列ナシ. 故ニ P_1 ハ P_2 ニ含マル. 同理ニヨリ P_2 ハ P_1 ニ含マル. 故ニ P_1 ト P_2 トハ全ク相同ジカラザルベカラズ.

* 第 12 節ヲ參照セバ此作用ノ意義ヲ了解シ得ベシ.

第二章　總順列

8. 總順列ノ作リ方．其一．

原素ノ數ガ極メテ少ナキ場合ニ於テハ，其原素ヨリ作リ得ベキアユル順列ヲ，重複モナク且遺漏モナク書キ下スコトハ容易ナルベシト雖，原素ノ數ガ多キ場合ニ於テハ，之ヲ書キ下スコトハ一定ノ法則ニ據ルニアラザレバ，頗困難ノコトニシテ殆成シ難キコトナルベシ．次ニ之ヲ作ルーツノ方法ヲ說明セントス．

簡單ノ爲ニ四ツノ原素 a, b, c, d ニテ說明スベシ．先四ツノ原素中最初ノ二ツ卽 a, b ヲ取リテ順列ヲ作ル．其順列ハ

$$ab, \qquad ba \tag{1}$$

ノ二ツナルコト明ナリ．次ニ(1)ノ順列ニ c ヲ附ケ足ス．偖 c ヲ附ケ足スニハ順列(1)中ノ原素ノ間ニ足スカ，又ハ其左右兩端何レカニ足スカニスレバヨシ．而シテ此以外ニ附ケ足ス仕方ナシ．故ニ原素 a, b, c ニテ作ラルヽ順列ハ次ノ如シ．

ab ニ c ヲ附ケ足シテ得ラルモヽノ	abc,	acb,	cab.	(2)
ba ニ c ヲ附ケ足シテ得ラルモヽノ	bac,	bca,	cba.	

更ニ順列(2)ニ d ヲ附ケ足シテ原素 a, b, c, d ヨリ成ルアラユル順列ガ得ラル．而シテ其附ケ足シ方ハ前ト同様ナリ．卽

abc ニ d ヲ附ケ足シテ得ラルヽモノ	$abcd$,	$abdc$,	$adbc$,	$dabc$.
acb ニ d ヲ附ケ足シテ得ラルヽモノ	$acbd$,	$acdb$,	$adcb$,	$dacb$.
cab シテ得ラルヽモノ	cabd	cadb	cdab	dcab
bac ニ d ヲ附ケ足シテ得ラルヽモノ	$bacd$,	$badc$,	$bdac$,	$dbac$.
bca ニ d ヲ附ケ足シテ得ラルヽモノ	$bcad$,	$bcda$,	$bdca$,	$dbca$.
cba ニ d ヲ附ケ足シテ得ラルヽモノ	$cbad$,	$cbda$,	$cdba$,	$dcba$.

以上四ツノ原素ニテ說明シタルガ，斯ノ如ク同様ニ進ムトキハ原素ノ數ニ拘ラズ，總テノ順列ヲ重複ナク且遺漏ナク書クコトヲ得．

9. 總順列ノ數ヲ求ムル方法．其一．

相異ナル n 個ノ原素 $a, b, c, \cdots, k, l$ アリ．之ヲ以テ作リ得ベキ順列ノ數ヲ表スニ ${}_nP_n$ * ヲ以テスベシ．例ヘバ，原素ノ數ガ三ツナル場合ニハ，其順列ノ數ハ既ニ知レルガ如ク 6 ナルヲ以テ，${}_3P_3=6$ ナルガ如シ．今次ニ，n ガ正ノ整數ナラバ其値ノ如何ニ拘ラズ，${}_nP_n$ ノ値ヲ表シ得ル公式ヲ求ムルコトヲ考究スベシ．

前節ノ方法ニヨリ，n 個ノ原素ノ中ノ最初ノ二ツヨリ始メ，次第ニ一ツ宛增シテ順列ヲ作リ，遂ニ $n-1$ 個ノ原素 $a, b, c, \cdots\cdots, k$ ヨリ成ル順列ヲ重複ナク且遺漏ナク作リ得タリトセヨ．然ラバ其數ハ ${}_{n-1}P_{n-1}$ ヲ以テ表サル．

今此順列ノ各ニ l ヲ附ケ足シ，n 個ノ原素ヨリ成ル順列ヲ作ルコトヲ考フルニ，原ノ順列ハ皆 $n-1$ 個ノ原素ヨリ成ルヲ以テ，l ヲ附ケ足スベキ場處ハ二原素ノ間ナル $n-2$ 個ノ場處ト，順列ノ左右兩端ナル 2 個ノ場處トニテ，合セテ n 個ノ場處ナリ．依テ原ノ順列一個ヨリ n 個ノ新シキ順列ヲ作ラル．從テ ${}_{n-1}P_{n-1}$ 個ノ順列ヨリ $n\,{}_{n-1}P_{n-1}$ 個ノ順列ガ作ラル．而シテ之ガ ${}_nP_n$ ニ等シカラザルベカラズ．卽

* 本叢……蓋茲ニ ${}_nP_n$ トセルハ，今後 n 個ノ
モノヨリ……${}_nP_r$ ヲ以テ
シメンガ……

$$ {}_{n}P_{n} = n.\ {}_{n-1}P_{n-1} $$

ナル關係ヲ得. 而シテ此等式ハ, n ガ如何ナル正ノ整數ナルモ成立スベキヲ以テ, n ニ順次ニ 2, 3, 4 等ノ値ヲ置キ換ヘ行クトキハ次ノ諸式ヲ得.

$$ {}_{2}P_{2} = 2\cdot{}_{1}P_{1} = 1\cdot 2, $$
$$ {}_{3}P_{3} = 3\cdot{}_{2}P_{2} = 1\cdot 2\cdot 3, $$
$$ {}_{4}P_{4} = 4\cdot{}_{3}P_{3} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4, $$

等ナリ. 一般ニハ

$$ {}_{n}P_{n} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots n. \quad = n! = \underline{|n} $$

1 ヨリ始メテ n ニ至ル總テノ自然數ノ乘積卽 $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots n$ ヲ n ノ階乘ト云ヒ, $n!$ ヲ以テ表ス. 時トシテハ $\underline{|n}$ ヲ以テ表スコトアレドモ印刷ニ不便ナルヲ以テ之ヲ採ラズ.*

10. 總順列ノ作リ方. 其二.

本節ニ於テハ, 第 8 節ニ述ベタル方法ト少シク異ナル方法ニテ總順列ヲ作ルコトヲ考究スベシ. 先二個ノ原素 a, b, ニテハ前ノ如ク唯二個ノ順列ヲ得ルノミ. 卽

$$ ab, \qquad ba. $$

三個ノ原素 a, b, c ニテハ a ガ左端ニアリテ他ノ二個ガ其右ニアルモノト, b ガ左端ニアリテ他ノ二個ガ其右ニアルモノト, c ガ左端ニアリテ他ノ二個ガ其右ニアルモノトノ三種アリ. 左端ニアルモノガ a, b, c ノ中何レカニ定マルモノトスレバ其右ニアルベキ二個ノ原素ハ夫々二個ノ順列ヲ生ズベキヲ以テ次ノ六個ノ順列ヲ得.

* ナルコトハ本叢書第五編公算論第17節ヲ參照スベシ. 30! ハ
有スル大數ナリ.

a b c

a ノ左端ニアルモノ	abc,	acb,
b ノ左端ニアルモノ	bac,	bca,
c ノ左端ニアルモノ	cab,	cba.

今若 a ガ b, c ノ左ニアリテ b, ガ c ノ左ニアルヲ自然ノ順序ト云フナラバ, 先 a ガ左端ニアリテ b, c ガ自然ノ順序ニアル順列 abc ヲ作リ, 次ニ b ガ左端ニアリテ a, c ガ自然ノ順序ニアル順列 bac ヲ作リ, 次ニ c ガ左端ニアリテ a, b ガ自然ノ順序ニアル順列 cab ヲ作リ, 此三個ノ順列ヲ基礎ノ順列ト考ヘ, 次ニ左端ニアルモノヲ除キ其右ニ於テ自然ノ順序ニアル原素ヲ列ベ換ヘテ總テノ順序ヲ作ルベシ. 四個ノ元素 a, b, c, d ニテハ a ガ b, c, d ノ左ニ, b ガ c, d ノ左ニ, c ガ d ノ左ニアルヲ以テ自然ノ順序トナスベキニヨリ

a ガ左端ニアル基礎ノ順列	$abcd$,
b ガ左端ニアル基礎ノ順列	$bacd$,
c ガ左端ニアル基礎ノ順列	$cabd$,
d ガ左端ニアル基礎ノ順列	$dabc$.

此各基礎ノ順列ニ於テ, 右ニアル三個ノ元素ヲ種々ノ順序ニ列ベ換フルトキハ夫々六個ノ結果ヲ生ズ. 以上五個六個等ノ原素ニ就テモ同様ナリ.

注意. 原素ガ文字ナルトキハ $a, b, c, \cdots\cdots$ ノ順序, 數字ナルトキハ $1, 2, 3, 4, \cdots\cdots$ ノ順序ヲ自然或ハ原素本來ノ順序ト云フベシ.

11. 總順列ノ數ヲ求ムル方法. 其二.

互ニ相異ナル n 個ノ原素 $a, b, c, d, \cdots\cdots, l$

用シテ新

順列ヲ

a ガ左端ニアル基礎ノ順列 $abcd\cdots\cdot kl,$

b ガ左端ニアル基礎ノ順列 $bacd\cdots\cdot kl,$

……………………………………

……………………………………

l ガ左端ニアル基礎ノ順列 $labcd\cdots\cdot k.$

此各基礎ノ順列ニ於テ右ニアル $n-1$ 個ノ原素ヲ種々ノ順序ニ列ベ換フルトキハ所要ノ順列ガ得ラル．而シテ各基礎ノ順列ヨリハ(基礎ノ順列ヲモ込メテ)${}_{n-1}P_{n-1}$ 個ノ順列ガ得ラレ，基礎ノ順列ハ其數 n 個アルヲ以テ，求ムル順列ノ數ハ $n\cdot{}_{n-1}P_{n-1}$ ナラザルベカラズ．故ニ

$${}_nP_n = n\cdot{}_{n-1}P_{n-1}.$$

之ヨリ第9節ト同樣ニシテ

$${}_nP_n = n!.$$

12. 總順列ノ數ヲ求ムル方法． 其三．

右圖ニ示スガ如ク，一直線ニ列ベル

1	2	3	4	5	6	7	8	n

n 個ノ場處アリトスレバ，n 個ノ原素ヨリ相異ナル總順列幾何ヲ作リ得ベキカト云フ問題ハ，上ノ n 個ノ場處ニ夫々相異ナル n 個ノ原素ヲ入レテ總テノ場處ヲ充タスニ幾何ノ方法アリヤト云フト同一ナリ．

今便利ノ爲此等ノ場處ニ番號 $1, 2, 3, \cdots\cdot, n$ ヲ附シ，之ヲ充タス方法ガ幾ツアルカヲ考フルニ，先1ノ場所ヲ充タスニハ a ヲ以テス……異ナル方法アリ．今或一……場處ヲ……異ナル

方法アリ．同樣ニ $b, c, \cdots\cdot, l$ ノ中ノ何レヲ以テ1ノ場所ヲ充タシタルトキニモ2ノ場所ヲ充タスニ $n-1$ 通リノ方法アリ．故ニ1ト2トノ場處ヲ充タスニハ $n(n-1)$ 通リノ方法アリ(定理 I．今或二ツノ原素例ヘバ a ト b トヲ以テ夫々1ト2トノ場處ヲ充タシタリトセヨ，然ラバ3ノ場處ヲ充タスニハ $n-2$ 通リノ方法アリ．然ルニ1ト2トノ場處ヲ充タスニハ $n(n-1)$ 通リノ方法アルヲ以テ $1, 2, 3$ ノ場處ヲ充タスニハ $n(n-1)(n-2)$ 通リノ方法アリ．斯ノ如クシテ次第ニ進ムトキハ，n 個ノ場處ヲ充タスニハ $n(n-1)(n-2)\cdots\cdot 2.1$ 卽 $n!$ 通リノ方法アルコトヲ知ル．依テ所要ノ總順列ノ數ハ $n!$ ナリ．

13. 例題．

(1). ${}_5P_5$ ヲ求ム．

解． ${}_5P_5 = 5.4.3.2.1 = 120.$

(2). 數字 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ヲ用ヒテ6桁ノ數幾何ヲ作リ得ベキカ．

解． ${}_6P_6 = 6.5.4.3.2.1 = 720.$ 6!

(3). $\dfrac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdot(2n-2)}{(n-1)!} = \dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!^2}$ ナルコトヲ證明セヨ．

解． $$\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdot(2n-2)}{(n-1)!} = \frac{1.2.3\cdots(n-1)n(n+1)\cdots(2n-2)}{1.2.3\cdots\cdot(n-1)(n-1)!}$$

$$= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}.$$

(4) $(2n)! = n!\,2^n\{1.3.5\cdots\cdots(2n-1)\}$ +

解. $(2n)! = 1.2.3.4.5 \cdots 2n$

$$= \{1.3.5.7 \cdots (2n-1)\} \times \{2.4.6.8 \cdots 2n\}$$

$$= \{1.3.5.7 \cdots (2n-1)\} \times \{(2.1)(2.2)(2.3)\cdots(2.n)\}$$

$$= \{1.3.5.7 \cdots (2n-1)\} \cdot 2^n (1.2.3.4 \cdots n)$$

$$= n!\,2^n\{1.3.5.7 \cdots (2n-1)\}.$$

(5). $(n+1)(n+2)(n+3)\cdots\cdots$[因數ノ數 n] $= 2.6.10.14 \cdots$[因數ノ數 n].

ナルコトヲ證明セヨ.

解. $(n+1)(n+2)(n+3)\cdots$[因數ノ數 n]

$$= (n+1)(n+2)(n+3)\cdots 2n$$

$$= \frac{1.2.3 \cdots n\,(n+1)(n+2)\cdots 2n}{1.2.3 \cdots n}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!}$$

$$= 2^n\{1.3.5 \cdots (2n-1)\} \qquad \text{[例 4]}$$

$$= 2.6.10 \cdots (4n-2)$$

$$= 2.6.10 \cdots \text{[因數ノ數 } n\text{]}.$$

(6). ${}_nP_n = 5040$ ナルトキ n ノ値如何.

解. ${}_nP_n = n! = 1.2.3 \cdots n$. 故ニ 5040 ヲ次第ニ 1,2,3 …… ニテ割レバ最後ノ商ハ n ノ値ナリ. 故ニ $n=7$.

14. 若干ノ原素ガ定マレル位置ニ在ル總順列ノ數.

n 個ノ原素中, p 個ガ定マレル位置ニ在ル總順列ヲ作ルニハ, 其 p …… レタル位置ニ置キ, 他ノ原素ヲ出來ル丈相異ナル方法ニ …… 故ニ其順列ノ數ハ ${}_{n-p}P_{n-p}$ ナリ.

…… 2, 3, 4 ヲ用ヒテ 5 桁ノ數幾何ヲ作リ得ベキカ.

…… 作ラルベキ順列ノ數ハ ${}_5P_5$ ナリ. 然レド

モ 0 ガ左端ニアルモノハ 5 桁ノ數トナラズ. 故ニ所要ノ數ハ ${}_5P_5$ ヨリ 0 ガ左端ニ來ルベキ順列ノ數ヲ減ジタルモノナリ. 而シテ 0 ガ左端ニ來ル順列ノ數ハ ${}_4P_4$ ナリ. 故ニ

$$\text{所要ノ數} = {}_5P_5 - {}_4P_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96.$$

(2). 文字 triangle ヨリ幾何ノ順列ガ作ラルヽカ. 又其中 t ヲ以テ初マリ e ヲ以テ終ルモノ幾何ナリヤ.

解. 文字ノ位置ニ制限ナキ場合ニハ順列ノ數ハ 8! 即 40320 ナリ. t ト e トガ或定マリタル位置ヲ占ムルトキハ殘リノ 6 個ノ文字ヲ 6! 即 24 通リニ排列スルコトヲ得.

(3). 數字 1,2,5,8 ヲ以テ幾何ノ奇數ヲ作リ得ベキカ.

解. 或數ガ奇數ナルガ爲ニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ其一ノ位ノ數字ガ奇數ナルコトナリ. 故ニ與ヘラレタル四ツノ數字ヲ以テ作ラルベキ數ノ中, 1 又ハ 5 ガ一ノ位ニアルモノハ奇數ナリ. 而シテ斯クノ如キ數ハ各 3! ナリ. 故ニ求ムル數ハ $3! \times 2$ 即 12 ナリ.

(4). 與ヘラレタル四ツノ相異ナル父音ト與ヘラレタル三ツノ相異ナル母音トヲ一列ニ列ブルニ母音ト母音トハ相接セズ且母音ガ首ニアラザル樣ニスルトキハ列方幾通リアルカ.

解. 四ツノ父音ヲ列ブル仕方ノ數ハ 4! ニシテ, 其中一ツノ順列ヲ考フレバ三ツノ母音ヲ挿入シ得ル場處ハ四ツノ父音ノ間ト末端トニテ四ツアリテ之ヲ挿入スル仕方ノ數ハ ${}_4P_3$ ナリ. 故ニ

$$\text{所要ノ數} = 4!\,{}_4P_3 = 576.$$

(5). 數字 123456 ヲ以テ作ラルベキ數中 5 ニテ割リ切ラルルモノ幾何アリヤ. 又 25 ニテ割リ切ラルルモノ幾何アリヤ.

解. 所設ノ數字中 5 ガ一ノ位ニ在ル……

ラレ他ノ數字ガ一ノ位ニ在ルトキハ5ニテ割リ切ラレズ．故ニ所要ノ數ハ此等ノ數字ヲ排列シテ作ラルヽ順列中5ガ最後ニ在ルモノ數ニ等シ．故ニ

$$所要ノ數 = {}_5P_5 = 5! = 120.$$

又 25, 50, 75, 100 ヲ以テ終ル數ハ 25 ニテ割リ切ラレ，其外ニハ 25 ニテ割リ切ラルヽ數ナシ．而シテ，所設ノ數字ニテハ 75, 50 又ハ 100 ガ最後ニアル數ヲ構成スルヲ得ズ．故ニ所要ノ數ハ 25 ヲ以テ終ルモノヽ數ニ等シ．故ニ

$$所要ノ數 = {}_4P_4 = 4! = 24.$$

(6). 端艇ノ右舷ノミ漕ギ得ル者四人ト，左舷ノミ漕ギ得ルモノ四人トヲ，八人乘リノ端艇ニ載スルニ幾通リノ方法アリヤ．

解．右舷ノ四人ハ ${}_4P_4$ 卽 4! 通リニ配列スルコトヲ得，其各配置ニ就イテ左舷ノ四人ヲ ${}_4P_4$ 卽 4! 通リニ配置スルコトヲ得．故ニ

$$所要ノ數 = \boxed{4! \times 4!} = 576.$$

(7). 文字 [illegible] ヲ以テ初メヨリ偶數番目ノ位置ニ母字ガ在ルヤウナル語幾何ヲ作リ得ルカ．

解．母字ハ三ツノ場處ニ置クコトヲ得ベク子字ハ殘リノ四ツノ場處ヲ占ム．故ニ母字ノ排列ノ仕方ハ 3! ニシテ子字ノ排列ノ仕方ハ 4! ナリ．故ニ

$$所要ノ數 = 3!\cdot 4! = 144.$$

(8). 數字 1,2,3,4 ヲ列ベテ作ラルヽ總テノ數ノ和ヲ求ム．

解．1 ガ一ノ位ニ在ル數ハ ${}_3P_3$ 卽6個ナリ．同樣ニ 2, 3, 及 4 ガ一ノ位ニ在[illegible]數モ 6 個ナリ．故ニ

$$[illegible]和 = (1+2+3+4)\times 6 = 60.$$

$$同樣ニ \quad 十ノ位ノ數ノ和 = (10+20+30+40)\times 6 = 600,$$

$$百ノ位ノ數ノ和 = (100+200+300+400)\times 6 = 6000.$$

$$故ニ \quad 所要ノ數 = 60+600+6000 = 6660.$$

(9). 若干ノ數字ヲ列ベテ作ラルベキ數ノ和ハ此等ノ數ノ和ニテ割リ切ラルヽコトヲ證明セヨ．又其和ハ作ラレタル數ノ桁數ダケ1ヲ連續シテ書キタル數ニテ割リ切ラルヽコトヲ證明セヨ．

解．所設ノ n 個ノ數字ヲ $a, b, c, \cdots\cdots, l$ トス．然ラバ此數字ヲアラユル仕方ニテ列ベテ作ラルヽ數ノ和ハ前例題ニ述ベシ如ク

$$(a+b+c+\cdots\cdots+l)(n-1)!+(a+b+c+\cdots\cdots+l)\cdot 10(n-1)!+\cdots\cdots$$

$$=(a+b+c+\cdots\cdots+l)(1+10+100+\cdots\cdots)(n-1)!$$

$$=(a+b+c+\cdots\cdots+l)(n-1)!\,1111\cdots\cdots1.$$

此第一ノ因數ハ所設ノ數字ノ和ニシテ，第三ノ因數ハ作ラレタル數ノ桁數ダケ1ヲ列ベテ書キタルモノナリ．故ニ問題ハ證明セラレタリ．

15. 若干ノ原素ガ定マレル順序ニ在ル總順列ノ數．

n 個ノ相異ナル原素 $a, b, c, \cdots\cdots,$ [illegible] ノ總順列中 $a, b, \cdots\cdots$ ナル r_1 個ノ原素ガ或一定ノ順序ニ在リ，$c,$ [illegible] ナル r_2 個ノ原素ガ又或一定ノ順序ニ在リ，以下同樣ニ $r_3, r_4,$ [illegible] 個ノ原素ガ各或一定ノ順序ニ在ル總順列ノ數ヲ求ムベシ．

所要ノ數ヲ N トセヨ．而シテ此 N 個ノ順列ノ中一ツヲ取リテ其中ノ r_1 個ノ原素，$a, b, \cdots\cdots$ ヲ出來得ルダケ異ナル仕方ニテ排列スルトキハ，其一ツノ順列ヨリ [illegible]

ニ N 個ノ順列ヨリハ [illegible]

來得ルダケ異ナル仕方ニテ排列スルトキハ，原ノ順列モ共ニ込メテ，$N\cdot r_1!\,r_2!$ 個ノ順列ガ得ラル．以上同樣ニシテ次第ニ $r_3, r_4, \cdots\cdots, r_p$ 個ノ原素ヲ出來得ルダケ異ナル仕方ニテ排列スルコトニヨリ，原ノ順列モ共ニ込メテ $N\cdot r_1!\,r_2!\,r_3!\cdots\cdots r_p!$ 個ノ順列ガ得ラル．而シテ之ガ $n!$ ニ等シカラザルベカラズ．故ニ

$$N\cdot r_1!\,r_2!\,r_3!\cdots\cdots r_p! = n!$$

故ニ
$$N = \frac{n!}{r_1!\,r_2!\cdots\cdots r_p!}.$$

注意． 此結果ヨリ $n!$ ニ關スル次ノ性質ガ知ラル．

$r_1, r_2, r_3, \cdots\cdots, r_p$ ノ和ガ n ヨリ大ナラザルトキハ $n!$ ハ $r_1!\,r_2!\,r_3!\cdots\cdots r_p!$ ニテ割リ切ラル．

例題 (1). equation ナル語ヲ形成スル文字ヲ以テ語ヲ作ルニ子字ノ順序ヲ變ゼザルトキ其方法幾通リアリヤ．

解． 作ラルベキ語ニ於テハ子字ハ q, t, n ニシテ此順序ニアルヲ要ス

故ニ
$$\text{所要ノ數} = \frac{8!}{3!} = 672.$$

(2). 數字 $1, 2, 3, \cdots\cdots, 9$ ヲ排列シテ得ラルベキ數ノ中，偶數ヲ表ス數字ハ左ヨリ右ニ至ルニ從ヒ次第ニ大ナルヤウニ排列セラレ，奇數ヲ表ス數字ハ左ヨリ右ニ至ルニ從ヒ次第ニ小ナルヤウニ排列セラルルモノ幾何アリヤ．

[illegible]偶數ヲ表スモノハ 4 個，奇數ヲ表スモノハ 5 個ニシ[illegible]リ．

$$[illegible]\text{數} = \frac{9!}{5!\,4!} = 126.$$

(3). N 個ノ端艇倶樂部アリ．夫々 $a, b, c, 1, 1, \cdots\cdots, 1$ 艘ノ端艇ヲ所有ス．而シテ端艇 2 艘以上ヲ有スルモノハ之ニ第一號第二號等ノ番號ヲ附シアリ．今此等ノ總テノ端艇ヲ一線ニ排列スルニ，何レノ倶樂部ノ第一號艇モ第二號艇ノ先ニアリ，第二號艇ハ第三號艇ノ先ニアルヤウニシ，以下同樣ニセバ排列ノ仕方幾何アルカ．

解． 本節ニ得タル公式ニヨリ直ニ所要ノ數ハ

$$\frac{(N+a+b+c-3)!}{a!\,b!\,c!}$$

ナルコトヲ知ル．

16. 若干ノ原素ガ隣接セル總順列ノ數．

n 個ノ原素ガ夫々 $r_1, r_2, r_3, \cdots\cdots, r_p$ 個ヨリ成ル p 個ノ組ニ分タレ各組ノ原素ガ互ニ隣接シテ存在スル順列ノ數ヲ求ムベシ．

先夫々 $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_p$ 個ノ原素ヨリナル各組ヲ一ツノ原素ト考ヘ之ヲ排列スルトキハ $p!$ 個ノ相異ナル方法ニテ排列スルコトヲ得．其中ニ於テ r_1 個ノ原素ヲ出來得ルダケ異ナル仕方ニテ排列スルトキハ原ノ順列ト合セテ $p!\,r_1!$ 個ノ順列ガ得ラル．又其中ニ於テ r_2 個ノ原素ヲ出來得ルダケ異ナル仕方ニテ排列スルトキハ原ノ順列ト合セテ $p!\,r_1!\,r_2!$ 個ノ順列ガ得ラル．以下同樣ニシテ $r_3, r_4, \cdots\cdots, r_p$ 個ヨリナル各組ノ中ノ原素ヲ出來得ルダケ異ナル仕方ニテ排列スルトキハ $p!\,r_1!\,r_2!\cdots\cdots r_p!$ 個ノ順列ガ得ラル．之所要ノ數ナリ．

例題 (1). 一部 3 冊ヨリ成ル書 2 部，一部 2 冊ヨリ成ル書 2 部ア[illegible]スルニ同ジ部ノ書ハ互ニ離レザルヤウニスルニ[illegible]．

[illegible]全體トシテ考ヘテ排列スルトキハ [illegible] 通リノ方

法アリ. 而シテ更ニ同一部ノ書ハ各冊ノ互ノ位置ヲ換ヘテ排列スルコトヲ得ルヲ以テ

$$所要ノ數 = 4!\times 3!\times 3!\times 2!\times 2! = 3456.$$

(2). n 冊ノ書籍ヲ書棚ニ排列スルニ, 其中ノ或二冊ガ隣接セザルヤウニスルニハ幾通リノ方法アルカ.

解. 或 2 冊ガ互ニ隣接スルヤウナル排列ノ仕方ハ $(n-1)!2!$ ナリ. 故ニアラユル排列ノ仕方ノ數 $n!$ ヨリ之ヲ減ズレバヨシ. 故ニ

$$所要ノ數 = n!-(n-1)!2! = (n-1)!(n-2).$$

(3).* 文字 a, b, c, d, e ヲ排列スルニ, 何レノ文字モ,「アルファベット」ノ順序ニ排列シタル位置ヨリ, 一ツヨリ多ク位置ヲ右ニ移スコトヲ許サヾルトキハ其方法幾何アリヤ.

解. 第五位 (左端ヨリ數ヘテ) ニ置キ得べキ文字ハ d, e 二個, 第四位ニ置キ得べキ文字ハ c, d, e ノ三個, 第三位ニ置キ得べキ文字ハ b, c, d, e ノ四個, 第二位又ハ第一位ニ置キ得べキ文字ハ a, b, c, d, e ノ五個ナリ. 故ニ第五位ヲ充タスニハ 2 通リノ仕方アリ. 其中何レカノ方法ニテ第五位ヲ充タストキハ第四位ヲ充タスニ 2 通リノ方法ア
以下第三位第二位ニ就テモ同樣ニシテ第一位ヲ充タスニハ唯 1 通リノ方法アリ. 故ニ

$$所要ノ數 = 2\times 2\times 2\times 2\times 1 = 16.$$

17. 順列ヲ列ベルーツノ方法.

是迄吾人ハ相異ナル n 個ノ原素ヨリ作リ得べキ總順列及其數ニ就テ考究シタリ. 然レドモ此等ノ總順列ヲ如何ニ排列スべキカニ就テハ未少シモ考究セズ. 次ニ之ヲ考究セン.

*本例ハ本節ノ應用ニアラザレドモ便宜此處ニ挿入セリ.

辭書ニ於テ語ヲ排列スル方法ハ, 先其初ノ文字ニ就テ $a, b, c, \cdots\cdots$ ノ順序ニ排列シ, 初ノ文字ノ同ジキモノハ其次ノ文字ニ就テ $a, b, c, \cdots\cdots$ ノ順序ニ排列シ, 以下ノ文字ニ就テモ亦同樣ニシテ排列ス. 順列ノ原素ガ文字ニテ表サルヽ場合ニハ之ヲ排列スルニ此方法ニヨルガ便利ナルコトアリ. 之ヲ便利ノ爲**辭書的順序**ト云フベシ.

原素ヲ表スニ文字ヲ用キズシテ數字ヲ用フル場合ニハ, 其順列ヲ其儘ニテ十進法ニヨリテ記サレタル數ト見做シタルトキ (例ヘバ順列 132 ヲ百三十二ト見做スガ如シ), 小ナル數ガ最初ニアリテ後ニ至ルニ從ヒ, 次第ニ大ナル數ガ在ルヤウニ排列スルガ便利ナルコトアリ. 便利ノ爲斯ノ如キ排列ヲ**數列的順序**ト云フベシ.

18. 順列ヲ辭書的順序ニ列ベルコト.

第 8 節及第 10 節ニ於テ述ベタル方法ニヨリテ作ラレタル總順列ハ其儘ニテハ辭書的順序ニ排列セラレズ. 本節ニ於テハ作ラレタル總順列ガ其儘ニテ辭書的順序ニ排列セラルヽヤウニ作ル方法ヲ述ベントス. 而シテ簡單ノ爲四ツノ原素 a, b, c, d ヲ以テ之ヲ說明スベシ.

先最後ノ原素 d ヲ書キ, 左ノ如ク直線ヲ以テ其左側及下側ヲ圍ム. 次ニ其直線ノ外側ニ於テ d ノ左及下ニ最後ヨリ第二番目ノ原素卽 c ヲ書キ, 左下ノ隅ノ方ニハ d ヲ書ク. 斯クノ如クシテ得タルモノヲ横列ニ從ツテ見ルトキハ, c 及 d ヨリ成ル順列卽 cd 及
、明ニ辭書的順序ニ排列セラ

a	b	c	d
a	b	d	c
a	c	b	d
a	c	d	b
a	d	b	c
a	d	c	b
b	a	c	d
b	a	d	c
b	c	a	d
b	c	d	a
b	d	a	c
b	d	c	a
c	a	b	d
c	a	d	b
c	b	a	d
c	b	d	a
c	d	a	b
c	d	b	a
d	a	b	c
d	a	c	b
d	b	a	c
d	b	c	a
d	c	a	b
d	c	b	a

次ニ前ト同樣ニ其左側及下側ヲ直線ヲ以テ圍ミ，左側ニハ最後ヨリ第三番目ノ原素卽 b ヲ書ク．然ラバ b, c, d ヲ以テ構成セラレ得ヘキ順列ノ中，b ガ第一位（左端ヨリ數ヘテ）ニ在ルモノヽ總テガ得ラル．其中ニ於テ第一ノ原素卽 b ト第二ノ原素卽 c トヲ交換シタルモノヲ作リ，之ヲ前ノ上下ノ順序ヲ變ヘズニ其上ニ作リシ順列ノ下ニ書ク．詳言スレバ，先順列 bcd ニ於テ b ト c トヲ交換シ cbd トナシ，bdc ノ下ニ書キ，bdc ニ於テ b ト c トヲ交換シ cdb トナシテ更ニ其下ニ書ク．然ラバ今書キシ二ツノ順列ハ b, c, d ヲ以テ作ラルベキ順列ノ中 c ガ最初ニアルモノヽ總テナリ．斯ノ如クシテ新ニ得タルモノニ於テ c ト d トヲ交換シ其上下ノ順序ヲ變ヘズシテ之ヲ前ノ順列ノ下ニ書ク．然ラバ今書キシ二ツノ順列ハ b, c, d ヲ以テ構成シ得ベキ順列ノ中 d ガ第一位（左端ヨリ數ヘテ）ニ在ルモノヽ總テナリ．

更ニ直線ヲ以テ順列ノ左側及下側ヲ圍ミ，左ニハ橫列每ニ次ノ原素 a ヲ書ク．然ラバ a, b, c, d ニテ構成セラルベキ順列ノ中 a ガ第一位ニ在ルモノヽ總テガ得ラル．其中ニ於テ a ト b トヲ交換シタルモノ，又新ニ得タルモノヽ中ニ於テ b ト c トヲ交換シタルモノ，更ニ又新ニ得タルモノヽ中ニ於テ c ト d トヲ交換シタルモノヲ順次ニ下ニ記ス．然ルトキハ所要ノ順列ノ排列ガ得ラル．

此方法ハ原素ノ數ノ如何ニ拘ラズ用ヒラル．

19．辭書的或ハ數列的順序ニ於テ所設ノ順列ノ占ムベキ位置ヲ決定スルコト．

辭書的或ハ數列的順序中ニ於テ，所設ノ順列ノ占ムベキ位置ヲ決定スル方法ハ次ノ如シ．

[illegible]ノ順序ニ於テハ，初ノ $(n-1)!$ 個ノ順列ハ原素本來ノ順序（ア

ルファベット」ノ順序或ハ數ノ大サノ順序）ニ於ケル第一番ノ原素ヲ以テ始マルモノニシテ，次ノ $(n-1)!$ 個ノ順列ハ原素本來ノ順序ニ於ケル第二番ノ原素ヲ以テ始マルモノナリ．以下同樣ナリ．例ヘバ a, b, c, d ヨリ成ル順列ヲ辭書的順序ニ排列スレバ（前節ノ表ヲ見ヨ）初ノ $3!$ 卽 6 個ノ順列ハ第一番ノ原素 a ヲ以テ始リ，次ノ 6 個ハ第二番ノ原素 b ヲ以テ始ル等ノ如シ．

今所設ノ順列ヲ P トシ，P ハ原素本來ノ順序ニ於ケル第 k_1 番 $(k_1=1, 2, 3, \cdots\cdots, n)$ ノ原素ヲ以テ始ルモノトス．然ラバ所題ノ順序中ニ於テハ，P ヨリ前ニ，第 k_1 番ヨリ前ノ原素ヲ以テ始ル $(k_1-1)\cdot(n-1)!$ 個ノ順列アリ．從テ初ヨリ $(k_1-1)(n-1)!+1$ 番目ノ順列ハ第 k_1 番ノ原素ヲ以テ始ル最初ノモノナリ．

次ニ P ノ第二ノ原素ハ n 個ノ原素ノ中ヨリ P ノ最初ノ原素ヲ取リ去リタル殘リヲ原素本來ノ順序ニ從フテ排列シタルトキノ第 k_2 番 $(k_2=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$ ノモノナリトスレバ，前ト同樣ノ理由ニ基キ所題ノ順序中ニ於テハ P ノ前ニ少クトモ

$$(k_1-1)(n-1)!+(k_2-1)(n-2)!$$

個ノ順列在ラザルベカラズ．而シテ

$$(k_1-1)(n-1)!+(k_2-1)(n-2)!+1$$

番目ノ順列ハ P ト初メノ二ツノ原素ヲ同フセル順列中最初ニ顯ハルヽモノナリ．斯ノ如クシテ $k_3, k_4, \cdots\cdots, k_{n-1}$ ヲ以テ P ノ第三，第四，等第 $n-1$ 番ノ原素ニ相當スル k_1, k_2 ト同樣ノ數トスレバ，P ノ番號ヲ表スベキ數 N ハ次ノ式ヲ以テ表サル．

$$N=(k_1-1)(n-1)!+(k_2-1)(n-2)!+\cdots\cdots+(k_{n-1}-1)1!+1$$

$$(k_1 \leqq n, k_2 \text{[illegible]} \leqq 2).$$

依テ P ノ位置ヲ決定スルコトヲ得.

而シテ最後ノ順列ニ於テハ $k_1, k_2, \cdots\cdots, k_{n-1}$ ハ夫々 $n, n-1, \cdots\cdots 2$ ニ等シク, 而シテ第 $n!$ 番目ニ在リ. 故ニ次ノ等式ヲ得.

$$n! = (n-1)(n-1)! + (n-2)(n-2)! + \cdots\cdots + 1\cdot 1! + 1.$$

例題 (1). 原素 a, b, c, d, e ヨリ成ル順列ヲ辭書的順序ニ排列スレバ $ceadb$ ハ其中ノ幾番目ニ在ルベキカ.

解. 本節ノ公式ニ於テ $n=5, k_1=3, k_2=4, k_3=1, k_4=2$ ト置ケバヨシ. 卽

$$\begin{aligned} N &= (3-1)(5-1)! + (4-1)(5-2)! + (1-1)(5-3)! + (2-1)(5-4)! + 1 \\ &= 2\times 4! + 3\times 3! + 1! + 1 \\ &= 68. \end{aligned}$$

(2). 原素 1, 2, 3, 4, 5, 6 ヨリ成ル順列ヲ數列的順序ニ排列スルトキハ 231465 ハ幾番目ニ在ルベキカ.

解. 本節ノ公式ニ於テ $n=6, k_1=2, k_2=2, k_3=1, k_4=1, k_5=2$ ト置ケバヨシ. 卽

$$\begin{aligned} N &= (2-1)(6-1)! + (2-1)(6-2)! + (1-1)(6-3)! \\ &\quad + (1-1)(6-4)! + (2-1)(6-5)! + 1 \\ &= 5! + 4! + 1! + 1 \\ &= 146. \end{aligned}$$

(3). 數字 1, 2, 3, 4, 5 ヲ種々ニ列ベテ作ラルベキ五桁ノ數ノ中 23154 ヨリ大ナルモノ幾ツアリヤ.

解. 先順列 23154 ガ, 1, 2, 3, 4, 5 ニテ作ラルベキ總順列ヲ數列的順序ニ排列スルトキ, 初ヨリ幾番目ニ在ルカヲ求ムルヲ要ス. 之ガ爲ニハ本節ノ公式ニ於テ $n=5, k_1=2, k_2=2, k_3=1, k_4=2$ ト置ケバヨシ. 卽

$$\begin{aligned} N &= (2-1)(5-1)! + (2-1)(5-2)! + (1-1)(5-3)! + (2-1)(5-4)! + 1 \\ &= 4! + 3! + 1! + 1 \\ &= 32. \end{aligned}$$

故ニ第 32 番目ニアリ. 故ニ 23154 ヨリ大ナル數ハ $5!-32$ 卽 88 個アリ.

20. 辭書的或ハ數列的順序ニ於テ所設ノ位置ヲ占ムベキ順列ヲ決定スルコト.

本節ニ於テハ前節ニ於テ論ジタル問題ノ逆, 卽第 18 節ノ順序中ニ於テ所設ノ位置ヲ占ムベキ順列ヲ決定スルコトヲ論ズベシ.

所設ノ位置ガ所題ノ順序中初ヨリ第 N 番目ノモノナリトスレバ, 當面ノ問題ハ次ノ條件

$$N = (k_1-1)(n-1)! + (k_2-1)(n-2)! + \cdots\cdots + (k_{n-1}-1)1! + 1$$
$$(k_1 \leqq n, k_2 \leqq n-1, \cdots\cdots, k_{n-1} \leqq 2)$$

ヲ滿足スベキ $k_1, k_2, \cdots\cdots, k_{n-1}$ ヲ決定スルニアリ.

惟前節ニ於テ得タル結果ニヨレバ

$$n! \geqq (k_1-1)(n-1)! + (k_2-1)(n-2)! + \cdots\cdots + (k_{n-1}-1)1! +$$
$$(k_1 \leqq n, k_2 \leqq n-1, \cdots\cdots k_{n-1} \leqq 2)$$

但等式ハ $k_1=n, k_2=n-1, \cdots\cdots k_{n-1}=2$ ナル場合ニ於テ成立ヘルモノナリ.

此等式ニヨリ先所設ノ數 N ガ意味アルガ爲ニハ, $n!$ ヨリ大ナルベカラザルコト明ナリ. 若 $N=n!$ ナルトキハ (1) ニヨリ

$$n! = (n-1)(n-1)! + (n-2)(n-2)! + \cdots\cdots + 1\cdot 1! + 1$$

ナルヲ以テ直ニ所要ノ順列ヲ決定スルコトヲ得. 卽所要ノ順列ハ原

素本來ノ順序ヲ轉倒シテ得ラルベキ順列ナリ.

若 $N < n!$ ナラバ $(n-1)!$ ヲ以テ N ヲ割レ. 然ラバ割リ切ラルヽコトモアレバ然ラザルコトモアルベシ. 假ニ割リ切ラレザルモノトスルトキハ, 商トシテ n ヨリ小ナル數ヲ得. 之ヲ k_1-1 トス. 又殘リトシテ $(n-1)!$ ヨリ小ナル數ヲ得. 之ヲ N_1 トセヨ. 然ラバ

$$N=(k_1-1)(n-1)!+N_1.$$

次ニ N_1 ヲ $(n-2)!$ ニテ割リ, 割リ切ラレザルモノトスレバ商トシテ $n-1$ ヨリ小ナル數 k_2-1 ヲ得, 殘リトシテ $(n-2)!$ ヨリ小ナル數 N_2 ヲ得. 故ニ

$$N=(k_1-1)(n-1)!+(k_2-1)(n-2)!+N_2.$$

斯ノ如クシテ次第ニ進ミ, 其各ノ割リ算ガ割リ切レザルモノナルトキハ遂ニ

$$N=(k_1-1)(n-1)!+(k_2-1)(n-2)!+\cdots\cdots+2\cdot1+1 \qquad (2)$$

$$(k_1 \leqq n, k_2 \leqq n-1, \cdots, k_{n-1} \leqq 2)$$

ナル條件ヲ滿足スベキ $k_1, k_2, \cdots\cdots, k_{n-1}$ ガ決定セラル. 從テ所要ノ順列ガ決定セラル.

次ニ若上ノ方法ニヨリ

$$N=(k_1-1)(n-1)!+(k_2-1)(n-2)!+\cdots\cdots+(k_p-1)(n-p)!+N_p,$$

$$N_p < (n-p)!$$

マデ進ミ, 次ニ N_p ヲ $(n-p-1)!$ ニテ割ルトキ丁度割リ切ラレ商トシテ k_{p+1} ヲ得タリトセヨ. 卽

$$N_p=k_{p+1}(n-p-1)!$$

トセヨ. 然ラバ $k_{p+1} < n-p$ ナルコト明ナリ. 斯ノ如キ場合ニ於テハ

$$N_p=(k_{p+1}-1)(n-p-1)!+(n-p-1)!$$

トスレバ, (1) ニヨリ

$$(n-p-1)!=(n-p-2)(n-p-2)!+(n-p-3)(n-p-3)!+\cdots\cdots+2\cdot1!+1$$

ナルヲ以テ,

$$n-p-1=k_{p+2},\ n-p-2=k_{p+3},\cdots\cdots\cdots\cdots$$

トスルトキ

$$k_1 \leqq n, k_2 \leqq n-1, \cdots\cdots, k_{p+1} < n-p, k_{p+2}=n-p-1, \cdots\cdots, k_{p-1}=2$$

トナリ之ニ依テ所要ノ順列ヲ決定スルコトヲ得.

偖玆ニ得タル k, p, n ノ關係ヲ觀ルニ, k_{p+1} ヨリ左ニ於テハ等式ガ成立スルカ或ハ不等式ガ成立スルカハ不定ナリ. k_{p+1} ニ於テハ必不等式ガ成立シ, 是ヨリ右ニ於テハ等式ガ成立ス. 今之ヲ k ノ意味ニ立返リテ考フルニ, $k_{p+1} < n-p$ ト云フコトハ所要ノ順列 P ノ第 k_{p+1} 番ノ原素ハ, 本來ノ順序ニ排列セラレタル n 個ノ原素中ヨリ, P ノ第 1 番ヨリ第 k_p 番迄ヲ取去リタル殘リノ最後ニ位セズト云フコトナリ. 又 $k_{p+2}=n-p-1$ ナリト云フコトハ, P ノ第 k_{p+2} 番ノ原素ハ本來ノ順序ニ排列セラレタル n 個ノ原素中ヨリ, P ノ第 k_{p+2} 番マデヲ取去リタル殘リニ於テ最後ニ位スト云フコトナリ. 故ニ P ニ於テハ第 k_{p+2} 番以下ノ原素ハ原素本來ノ順序トハ全ク逆ノ順序ニ排列セラル. 依テ N ガ, 其第 k_{p+2} 番以下ノ原素ハ本來ノ順序ト全ク逆ノ順序ヲ有
(本来ノ順序)
シ, 其以上ニ於テハ然ラザルガ如キ順列 P ノ位置ヲ表ス爲ニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ, N ガ $(n-1)!, (n-2)!, \cdots\cdots, (n-p)!$ ニテ割リ切ラレズシテ $(n-p-1)!$ ニテ割リ切ラルヽコトナリ.

以上論ジタル所ニヨリ, N ヲ分解スル方法ノ唯一樣ナルコトハ略想像スルコトヲ得ベシト雖, 更ニ次ノ如クシテ之ヲ證明スルコトヲ得.

N ガ更ニ又次ノ如ク分解セラレタリト假定セヨ.

$$N = (l_1-1)(n-1)!+(l_2-2)(n-2)!+\cdots\cdots+(l_{n-1}-1)\cdot 1!+1$$

$$(l_1 \leqq n,\ l_2 \leqq n-1, \cdots\cdots l_{n-1} \leqq 2).$$

然ラバ

$$(k_1-l_1)(n-1)!+(k_2-l_2)(n-2)!+\cdots\cdots\cdots+(k_{n-1}-l_{n-1})1! = 0 \quad (3)$$

$$|\, k_\alpha - l_\alpha \,| \leqq n-\alpha+1$$

ナラザルベカラズ. 而シテ若 $k_1 \neq l_1$ ナラバ第一項ノ絶對値ハ $(n-1)!$ ヨリ大ナリ. 而シテ (1) ニヨリ第二項以下ノ和ハ $(n-1)!$ ヨリ大ナラズ. 故ニ此等式ノ左邊ハ 0 ナルコトヲ得ズ. 之假定ニ反ス. 故ニ $k_1-l_1=0$ 卽 $k_1=l_1$ ナラザルベカラズ. 從テ

$$(k_2-l_2)(n-2)!+\cdots\cdots+(k_{n-1}-l_{n-1}) = 0$$

ナラザルベカラズ. 而シテ之ト同樣ノ論法ヲ繰返セバ $k_2 = l_2$ ナラザルベカラズ. 次第ニ斯ノ如ク二進ムトキハ, 同ジ添數ヲ有スル k ト l トハ相等シカラザルベカラズ. 故ニ N ノ分解ハ唯一樣ニ限ル.

例題 (1). 原素 a, b, c, d, e, f ヨリ成ル順列ノ辭書的順序中ニ於テ初メヨリ第 585 番目ニ在ル順列ヲ決定セヨ.

解. $585 = 5!\times 4+105$, 故ニ $k_1-1 = 4$, $k_1 = 5$.

$105 = 4!\times 4+\ \ 9$, 故ニ $k_2-1 = 4$, $k_2 = 5$.

$9 = 3!\times 1+\ \ 3$, 故ニ $k_3-1 = 1$, $k_3 = 2$.

$3 = 2!\times 1+\ \ 1$, 故ニ $k_4-1 = 1$, $k_4 = 2$.

$1 = 1!\times 0+\ \ 1$, 故ニ $k_5-1 = 0$, $k_5 = 1$.

故ニ所要ノ順列ハ $efbcad$ ナリ.

(2). 前例題ノ順序中ニ於テ初ヨリ第 192 番目ニ在ル順列ヲ決定セヨ.

解. $192 = 5!\times 1+72$, 故ニ $k_1-1 = 1$, $k_1 = 2$.

$72 = 4!\times 2+ 4!$, 故ニ $k_2-1 = 2$, $k_2 = 3$.

$4! = (4-1)(4-1)!+(4-2)(4-2)!+(4-3)(4-3)!+1.$

故ニ所要ノ順列ハ $bdfeca$ ナリ.

21. 辭書的或ハ數列的順序ニ於テ所設ノ順列ノ次ニ在ル順列ヲ求ムルコト.

原素本來ノ順序ニ於テ原素 x ガ w ノ左ニ在ルベキモノニシテ, 之ガ xw ノ如ク順列中ニ起ルトキハ此二ツハ順接スト云ヒ, wx ノ如ク起ルトキハ逆接スト云フベシ.

所設ノ順列ノ P ノ右端ヨリ左ニ進ミ初メテ到達スル順接ヲ xw トシ, x ヨリ左ニ在ル P ノ部分 (x ヲ含マズ) ヲ表スニ A ヲ以テシ, x ヨリ右ニ在ル P ノ部分 (x ヲ含マズ) ヲ表スニ B ヲ以テスレバ,

$$P = A.x.B$$

ナル形ニ書クコトヲ得. 卽 B 中ニハ一ツモ順接ヲ含マズトス.

偖 P ノ次ニ來ルベキ順列 P_1 ヲ作ルニハ, 先 B 中ヨリ本來ノ順序ニ於テ x ノ右ニ在リ且之ニ最近キ原素 z ヲ求ム. 但斯ノ如キ原素 z ハ必 B 中ニ在リ. 何トナレバ少クトモ w ハ x ノ右ニ在ル原素ナレバナリ. 次ニ x ト z トヲ交換ス. 而シテ B ハ變ジテ B_1 トナリタリトス. B_1 中ノ原素ヲ本來ノ順序ニ排列シタルモノヲ B' トスレバ,

$$P_1 = A.z.B'.$$

上ニ述ベタル方法ノ起ル理由ヲ說明スル爲ニ, 便宜上原素ハ數字ヲ以テ表サルヽモノトナスベシ. 然ラバ P ヨリ P_1 ヲ作ルコトハ, P 中ノ數字ノ位置ヲ變ジ P ヨリ大ナル數ノ中最小ナル數ヲ作ルコトナリ. B ハ假定ニヨリ, 其中ノ何レノ相隣レル二ツノ數ヲ取レモ左

ニ在ル數ハ右ニ在ルモノヨリ大ナリ. 從テ相隣ラザル任意ノ二ツノ數ヲ取ルモ左ニ在ルモノハ右ニ在ルモノヨリ大ナリ. 故ニ B 中ノ何レノ二ツノ數字ヲ交換スルモ, P ヨリ小ナル數ヲ得ルノミニシテ之ヨリ大ナル數ヲ得ルコトナシ. 次ニ x ト z トヲ交換シテ得ラルベキ數 $\mathrm{A}z\mathrm{B}_1$ ハ x ト B 中ノ原素トヲ交換シテ得ラルベキ P ヨリ大ナル數ノ中最小ナルモノナリ. 而シテ之ニ於テ B_1 中ノ數字ノ位置ヲ如何ニ變ズルモ矢張 P ヨリ大ナルコトハ變ラズ. 而シテ斯ノ如キ數ノ中ニテ $\mathrm{A}z\mathrm{B}'$ ガ最小ナルコト明ナリ.

最後ニ A 中ノ原素ハ皆 z ヨリ上位ニアルヲ以テ其中ノ或原素ヲ P 中ノ他ノ原素ニテ置換ヘテ得ベキ P ヨリ大ナル數ハ P_1 ヨリ大ナリ. 故ニ P_1 ハ所要ノ順列ナリ.

例題 (1). 辭書的順序中ニ於テ *fdaecb* ノ次ニ來ルベキ順列ヲ求メヨ.

解. $\mathrm{A} = fd$, $\mathrm{B} = ecb$, $\mathrm{B}_1 = eca$, $\mathrm{B}' = ace$.

故ニ所要ノ順列ハ *fdbace* ナリ.

(2). 數列的順序中ニ於テ, 3417652 ノ次ニ來ルベキ順列ヲ求メヨ.

解. $\mathrm{A} = 34$, $\mathrm{B} = 7652$, $\mathrm{B}_1 = 7651$, $\mathrm{B}' = 1567$.

故ニ所要ノ順列ハ 3421567 ナリ.

22. 原素中ニ同ジキモノヽアル場合.

n 個ノ原素ガ悉相異ナルモノニアラズシテ, 其中ニ相同ジキモノノアル場合ニハ, 之ヲ以テ作レル順列ノ數ハ第 9 節ニ於テ得タル $n!$ ニアラザル[illegible]容易ニ想像スルコトヲ得ベシ. 例ヘバ原素 a, a, b ヲ以テ作[illegible]ハ

$$aab, \quad aba, \quad baa$$

ニシテ其數ハ 3 ナリ.

今 k 個ノ a, l 個ノ b,・・・・ヨリ成ル, 總テニテ n 個ノ原素ヨリ作ラルヽ相異ナル順列ノ數 N ヲ考究スベシ. 斯ノ如キ順列ハ何レモ k 個ノ a ヲ含ム. 故ニ今其順列ノ一ツヲ取リ, 其中ノ a ニ代フルニ, 互ニ相異ナル原素 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_k$ ヲ以テシ, 且其位置ヲ出來得ル限リ變ズルトキハ, 原ノ一ツノ順列ヨリ $k!$ 個ノ相異ナル順列ヲ得(原ノ順列ハ入レズ. 以下同樣ナリ). 故ニ N 個ノ順列ヨリ $\mathrm{N}.k!$ 個ノ順列ガ得ラル. 次ニ斯クシテ得タル順列ノ一ツヲ考フルニ其中ニハ l 個ノ b アリ. 今之ニ代フルニ互ニ相異ナル原素 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_l$ ヲ以テシ, 其位置ヲ出來得ル限リ變ズルトキハ一ツノ順列ヨリ $l!$ 個ノ順列ガ得ラル. 故ニ $\mathrm{N}.k!$ 個ノ順列ヨリ $\mathrm{N}.k!l!$ 個ノ順列ガ得ラル. 以下同樣ニシテ他ノ相同ジキ原素ニハ相異ナル原素ヲ置キ換ヘ同樣ノ方法ニテ順列ヲ作リ行クトキ最後ニ得ラルベキ順列ノ數ハ n 個ノ相異ナル原素ヲ以テ作ラルベキ順列ノ數卽 $n!$ ニ等シカラザルベカラズ. 故ニ

$$\mathrm{N}.k!l!\cdots\cdots = n!$$

故ニ

$$\mathrm{N} = \frac{n!}{k!\,l!\cdots\cdots}.$$

例題 (1). *missippi* ナル語ノ文字ノ順列ノ數ヲ求メヨ.

解. $n = 8$, $k = 3$ (i ノ數), $l = 2$ (s ノ數), $m = 2$ (p ノ數) トスレバヨシ.

故ニ

$$\text{所要ノ數} = \frac{8!}{3!\ 2!\ 2!} = 1680.$$

(2). 數字 2, 3, 0, 3, 4, 2, 3 ヲ以テ作ラルベキ數ノ中百萬ヨリ大ナルモノ幾何アリヤ.

解. 所設ノ 7 個ノ數字ヲ排列スル方法ハ $\frac{7!}{2!\,3!}$ 通リナリ. 而シテ其中ニハ 0 ガ左端ニ在ルモノガ $\frac{6!}{2!\,3!}$ 通リアリテ此等ノ表ス數ハ百萬ヨリ小ナリ. 又然ラザルモノヽ表ス數ハ百萬ヨリ大ナリ. 故ニ

$$\text{所要ノ數} = \frac{7!}{2!\,3!} - \frac{6!}{2!\,3!} = 360.$$

(3). 8 個ノ文字アリ. 其中若干ハ同一ノ文字ニシテ他ハ皆相異ナル文字ナリ. 此等ノ文字ヲ以テ異ナル語 336 ヲ作リ得ベシト云フ. 同一ノ文字幾何アリヤ.

解. 同一ノ文字ノ數ヲ n トスレバ

$$\frac{8!}{n!} = 336.$$

故ニ $$n! = \frac{8!}{336} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5.$$

故ニ $$n = 5.$$

(4). i. *consonant* ナル語中ノ總テノ文字ヲ排列シテ相異ナル語幾何ヲ作リ得ベキカ.

ii. 其語ノ中二ツノ *o* ガ相隣レルモノハ幾何アリヤ.

iii. 又 3 ツノ *n* ヲ以テ始マルモノ幾何アリヤ.

解. i. *consonant* 中ニハ文字ガ 9 個, 其中 *n* ガ 3 個, *o* ガ 2 個アリテ他ハ皆相異ナル文字ナリ, 故ニ之ヲ排列シテ得ラルヽ相異ナル語數ハ $\frac{9!}{3!\,2!}$ 即 30240 個ナリ.

ii. 二ツノ *o* ガ一ツノ文字ヲ成スト考フルトキハ總テニテ文字ガ[illegible]個ナリ. 故ニ所要ノ數ハ $\frac{8!}{3!}$ 即 6720 個ナ

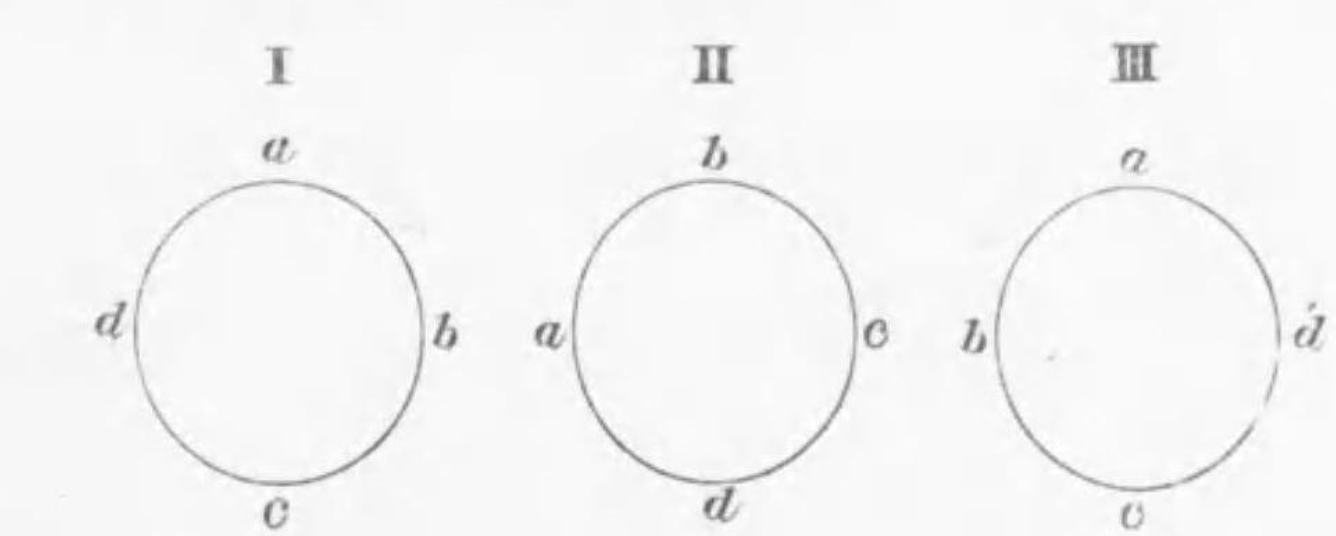
リ.

iii. 三ツノ *n* ヲ以テ始マルモノヽ數ハ *c, o, s, o, a, t* ノ總順列ノ數ニ等シ. 故ニ所要ノ數ハ $\frac{6!}{2!}$ 即 360 個ナリ.

23. 圓形順列或ハ環狀順列.

是迄吾人ノ順列ト稱セシモノハ原素ヲ一直線上ニ排列シタルモノナリキ. 然レドモ原素ヲ一圓周上ニ排列シタルモノヲモ順列ト云ヒ, 特ニ之ヲ圓形或ハ環狀順列 * ト云フ.

同ジ原素ヨリ成ル二ツノ圓形順列アリ. 其一ツノ中ノ或原素ヨリ始メ, 一定ノ廻リ方 (時計ノ針ノ廻リ方ト同ジ廻リ方又ハ反對ナル廻リ方) ニ從テ廻ルトキ, 次第ニ現レ來ル原素ノ順序ガ, 他ノ順列中ノ同ジ原素ヨリ始メ, 同ジ廻リ方ニ從テ廻ルトキ, 次第ニ現レ來ル原素ノ順序ト全ク相同ジキトキハ, 此二ツノ圓形順列ハ相同ジト



云ヒ, 然ラザレバ相同ジカラズト云フ. 例ヘバ圖ニ於テ I ト II トハ相同ジキ圓形順列ナレドモ, 此等ト III トハ相同ジカラズ.

24. 圓形順列ノ數.

* 一ツノ圓形順列ヲ作レル原素ハ皆相異ナルモノトス. 其中ニ相同ジキモノヽアル場合ヲ一般ニ取扱フコトハ困難ナルヲ以テ本編ニ於テハ之ヲ述ヘズ. 東京物理學校雜誌卷七第七十四號ニ於ケル余ノ論文ヲ參照スベシ. 圓形順列或ハ環狀順列ニ對シテ通例ノ順列ヲ線狀順列ト云フ.

第一證明法. 相異ナル n 個ノ原素ヨリ作ラルベキ相異ナル圓形順列ノ數ヲ求ムルコトヲ考フベシ. 前節ノ定義ニ從ヘバ, 二ツノ圓形順列ガ相同ジキカ相同ジカラザルカハ, 原素ガ實際占ムベキ位置ニ關セザルガ故ニ, 相異ナル總テノ圓形順列ヲ重複モナク且遺漏モナク作ラントスル場合ニハ, 或一ツノ原素ハ一定ノ位置ニ固定スルモノト考フルモ差支ナカルベシ. 從テ殘リノ $n-1$ 個ノ原素ヲ出來得ルダケ異ナル仕方ニテ排列スレバ相異ナル總テノ圓形順列ガ得ラル. 依テ所要ノ數ハ $(n-1)!$ ナリ.

或圓形順列ニ對應シテ必之ト廻リ方ノミ異ナル圓形順列アリ. 故ニ若廻リ方ノミ相異ナルモノヲ同一ノ圓形順列ト見做ストキハ相異ナル圓形順列ノ數ハ總テニテ $\dfrac{(n-1)!}{2}$ ナリ.

第二證明法. 一ツノ圓形順列ヲ, 或原素ト原素トノ間ヨリ切リ離シテ一直線上ニ排列スルトキハ, 一ツノ順列ガ得ラル. 而シテ其切リ離ス處ノ異ナルニ從ツテ異ナル順列ガ得ラル. n 個ノ原素ヨリ成ル圓形順列ニアリテハ原素ト原素トノ間ガ n 個アルヲ以テ, 上述ノ方法ニヨリ, 一ツノ圓形順列ヨリ n 個ノ順列ガ得ラル. 故ニ相異ナル n 個ノ原素ノ圓形順列ノ數ハ同ジ原素ヲ以テ作リ得ベキ總順列ノ數卽 $n!$ ノ $\dfrac{1}{n}$ 卽 $(n-1)!$ ナリ.

例題 (1). 5人ノ小供ガ手ヲ引キ合ヒテ環ヲ作リ教師ヲ周リテ遊戲スルアリ. 5人ノ順列ノ數如何.

解. 所要ノ數 $=4!=24$

(2). 七色ノ珠七個ヲ絲ニテ繫ギ念珠ヲ作ル仕方ノ數如何.

解. 所要ノ數 $=6!\div 2=360.$

是念珠ハ裏返ヘスコトモナシ得ルモノナレバ左廻リト右廻リトニ於テ同ジ順序ニ繫ギタル順列ハ裏返ヘスコトニヨリテ同ジ順列トナルニヨリ2ニテ除スルナリ.

(3). 7人ノ貴婦人ト, 7人ノ紳士トガ, 圓卓子ノ周圍ニ著席スルニハ幾通リノ仕方アルカ. 但2人ノ貴婦人ハ隣接シテ著席セザルコトヲ要ス. 又本問題ニ於テハ, 著席ノ場處ニ著目セズ唯順序ニノミ著目スルモノトス.

解. 先7人ノ貴婦人ガ一ツヅツ席ヲ隔テヽ圓形ニ著席スル仕方ハ $6!$ 通リナリ. 今或仕方ニテ貴婦人ガ著席シタリトスレバ其間ニ紳士ヲ著席セシムルニ $7!$ 通リノ方法アリ. 故ニ總テニテ $6!.7!$ 卽 2628800 ナリ.

(4). 5人ノ大人ト5人ノ小兒トガ一ツノ圓卓ノ周リニ坐セントス. 其坐ル仕方ノ數如何. 但何レノ小兒モ相隣ルコトヲ許サズ.

解. 所要ノ數 $=4!\cdot 5!=2880.$

(5). 6人ガ圓卓ノ周リニ坐セントスルニ中二人ハ親子ナル爲ニ相隣ルコトヲ要スト云フ. 其坐ル仕方ノ數如何.

解. 先子ヲ坐セシメズトスレバ坐ル仕方ノ數ハ $4!$ ナリ. 而シテ後子ヲ坐セシムルニ親ノ左或ハ右ノ中何レカニ坐セシムルコトヲ得. 故ニ

$$所要ノ數 =4!\times 2=48.$$

(6). 7箇ノ球ヲ絲ニテ貫キ環ヲ作ラントス. 但其中特別ナル3箇ノ間ニ他ノモノノ挾マルルヲ許サズ. 作リ方ノ數如何.

解. 特別ナル3箇ヲ縛シ一箇ト見做サバ作リ方ノ數 $(5-1)!$ 卽 24 ナリ. 後3箇ノ縛ヲ解キテ種々ニ列ブルニ其仕方ノ數 $3!$ 卽 6 ナリ. 故ニ

所要ノ數 $= \frac{24\times 6}{2} = \frac{144.}{2} = 72$

(7). 7人ガ圓卓ノ周リニ坐セントスルニ中~~三人ハ子二人ヲ供ヘル親ナル~~爲親ガ中央ニ子ガ其兩脇ニ坐ル必要アリ. 坐リ方ノ數如何.

解. 子ハ後ヨリ坐ラシムルモノト思ハバ

所要ノ數 $= 4! \times 2 = 48.$

第三章　互ニ相異ナル n 個ノ原素ヨリ r 個ヲ採ル組合セ.

25. 互ニ相異ナル n 個ノ原素ヨリ r 個ヲ採ル組合セ

相異ナル n 個ノ原素 $a, b, c, \cdots\cdots, l$ 中ヨリ r 個 $(r \leqq n)$ ヲ取リテ總テノ組合セヲ作リ, 其數ヲ ${}_nC_r$ ニテ表ス.* 次ニ其値ヲ求メンス.

今此 ${}_nC_r$ 個ノ組合セ中, 或一ツノ原素, 例ヘバ a ヲ含ムモノハ總テハ所設ノ原素ヨリ a ヲ去リタル殘リノ $n-1$ 個ノ原素ヨリ $r-1$ 個ヲ選ビ, 之ニ a ヲ附ケ足シタルモノナリ. 故ニ其數ハ ${}_{n-1}C_{r-1}$ ニ等シ. 同様ニ $b, c, \cdots\cdots, l$ ヲ含ムモノハ其數各 ${}_{n-1}C_{r-1}$ ナリ.

斯ノ如クシテ

a ヲ含ム總テノ組合セ　　(第一群)

b ヲ含ム總テノ組合セ　　(第二群)

……………………………

……………………………

l ヲ含ム總テノ組合セ　　(第 n 群)

ヲ別々ニ作リタルトキハ, 此等ノ群中ニアル組合セハ總テニテ $n \cdot {}_{n-1}C_{r-1}$ ナリ. 而シテ各組合セハ r 個ノ原素ヲ含ムヲ以テ, 今考ヘツヽアル ${}_nC_r$ 個ノ組合セノ群中ニハ r 度現レザルベカラズ. 例ヘバ $abc\cdots\cdots$ ハ第一群ニモ, 第二群ニモ, 又第三群ニモ含マレザルベカラズト云フガ如[illegible] C [illegible] ナラザルベカ

* 又 $\left(\frac{n}{r}\right)$ ヲ以テ[illegible]ハ之ヲ採用セリ. 又 ${}^nC_r$ ヲ以テ表ス[illegible]

ラズ．故ニ

$$r\cdot{}_nC_r = n\,{}_{n-1}C_{r-1}$$

ナル關係ガ得ラル．而シテ此等式ハ n ト r トガ共ニ正ノ整數ニシテ $r \leqq n$ ナルトキニハ如何ナル場合ニモ成立スルガ故ニ，n ノ代リニ $n-1, n-2, \cdots\cdots$ ト置クト同時ニ，r ノ代リニ $r-1, r-2, \cdots\cdots$ ト置クトキハ等式

$$(r-1)\,{}_{n-1}C_{r-1} = (n-1)\,{}_{n-2}C_{r-2},$$

$$(r-2)\,{}_{n-2}C_{r-2} = (n-2)\,{}_{n-3}C_{r-3},$$ r=2

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\,{}_{n-r+2}C_2 = (n-r+2)\,{}_{n-r+1}C_1$$ (n-r+1)

ガ得ラル．偖 ${}_{n-r+1}C_1 = n-r+1$ ナルコトニ注意シ，此等ノ等式ト前ノ等式トヲ合セテ邊々相乘ズルトキハ，

n=22
r=20

$$r!\,{}_nC_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1),$$

故ニ
$${}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}$$ n!

$${}_nC_r = \frac{n(n-1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

注意． n ト r トノ値ガ與ヘラレタルトキ ${}_nC_r$ ノ値ヲ求ムルニハ，$\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}$ ナル式ノ方ヲ用ユルヲ便利トスルコト多シ．而シテ此式ヲ書キ下スニハ分母子ガ共ニ r 個ノ因數ノ積ナルコトニ注意スルヲ便利トスルコトアリ．

26. 0! ナル記號．

第9節ニ述ベシガ如ク，$n!$ ハ 1 ヨリ n マデノ正ノ整數ヲ悉掛ケ合

セタル乘積ヲ表スモノニシテ，$n=0$ ナル場合ニハ全ク無意味ナルモノナリ．然ルニ今前節ニ得タル公式ヲ $r=n$ ナル場合ニモ適用セントスレバ，右邊ハ $\dfrac{n!}{n!\,0!}$ ナル形ヲ取ルベシ．而シテ吾人ハ此公式トハ獨立ニ ${}_nC_n = 1$ ナルヲ知ル．故ニ $0! = 1$ ト定ムルトキハ前節ニ得タル公式ハ $r=n$ ナル場合ニモ適用セラルヽノ便利アリ．故ニ以後 $0! = 1$ ナリト定ムベシ．* 0!=1.

27. $\boxed{{}_nC_r = {}_nC_{n-r}.}$

第25節ノ公式ニ於テ r ノ代リニ $n-r$ ト置クトキハ n-r

$${}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

トナリ右邊ノ値ハ變ズルコトナシ．故ニ

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r}.$$

此事ハ又次ノ如クニ考フルコトヲ得．

n 個ノ原素ヨリ r 個ヲ採ルトキハ，其跡ニ $n-r$ 個ノ原素ガ殘ル，卽 r 個ノ原素ヨリ成ル組合セ一ツヲ作ル毎ニ $n-r$ 個ノ原素ヨリ成ル組合セ一ツガ得ラル．故ニ n 個ノ原素ヨリ r 個ヲ選擇スル仕方ノ數ハ，n 個ノ原素ヨリ $n-r$ 個ヲ選擇スル仕方ノ數ニ等シ．是卽上ニ得タル結果ナリ．

逆ニ n 個ノ物ヨリ p 個ヅツ取リタル組合セガ n 個ノ物ヨリ q 個ヅツ取リタル組合セニ等シキトキハ $p=q$ ナルカ然ラザレバ $p+q=n$ ナリ．

何トナレバ初ノ組合セノ數ハ ${}_nC_p$ 卽 $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ ニシテ後ノ組合セ $\dfrac{n!}{q!\,(n-q)!}$ ナリ．故ニ $p!(n-p)! = q!\,(n-q)!$ ナラザ

…バ意味ナシ．然レドモ $1! = 1$ ナリト定ム．

ルベカラズ.

(i) $p=q$ ナレバ此等式ハ明ニ成立ス.

(ii) $p>q$ ナレバ $(n-p)<(n-q)$ ニシテ, $\dfrac{p!}{q!}=\dfrac{(n-q)!}{(n-p)!}$ ナラ

ザルベカラザルヲ以テ, $p(p-1)(p-2)\cdots(q+1)=(n-q)(n-q-1)$ $(n-q-2)\cdots(n-p+1)$ ナラザルベカラス. 此等式ノ兩邊ノ因數ハ夫々正ノ連續數ニシテ且其因數ノ數ハ相等シ. 何トナレバ各邊ニ於ケル因數ノ數ハ夫々初ノ因數ヨリ終リノ因數ヲ減ジタル差ニ1ヲ加ヘタルモノニシテ左邊ノ數ハ $p-(q+1)+1$ 卽 $p-q$ ニシテ右邊ノ數ハ $(n-q)-(n-p+1)+1$ 卽 $p-q$ ナレバナリ. 故ニ此等式ガ成立スルニハ兩邊ノ初ノ因數ガ相等シカラサルベカラズ. 故ニ $p=n-q$, 故ニ $p+q=n$.

(iii) $p<q$ ナレバ $(n-p)>(n-q)$ ニシテ, $\dfrac{q!}{p!}=\dfrac{(n-p)!}{(n-q)!}$ ナラザルベカラザルヲ以テ前ノ場合ト同樣ニ $p+q=n$ ヲ得.

注意. 本節ニ得タルコトニヨリ計算ノ手數ヲ省キ得ルコトアリ. 例ヘバ ${}_{22}C_{20}$ ノ如キハ ${}_{22}C_2$ トシテ計算スルヲ便利ナリトス.

例題 (1). ${}_nC_{12}={}_nC_8$ ナルトキ ${}_{22}C_n$ ノ値ヲ求ム.

解. $12+8=n$ ナラザルベカラズ. 故ニ

$${}_{22}C_n={}_{22}C_{20}={}_{22}C_2=\frac{22\cdot 21}{1\cdot 2}=231.$$

$n(n-1)(n-2)$

$r!$

(2). ${}_{18}C_r={}_{18}C_{r+2}$ ナルトキ ${}_rC_5$ ノ値ヲ求ム.

解. $r+r+2=18$. 故ニ $r=8$. 故ニ ${}_rC_5={}_8C_5={}_8C_3=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}=56.$

$r!$

(3). ${}_{4n}C_{2n}:{}_{2n}C_n=\{1\cdot 3\cdot 5\cdots(4n-1)\}:\{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\}^2$ ナルコトヲ證明セヨ.

解. ${}_{4n}C_{2n}:{}_{2n}C_n=\dfrac{(4n)!}{(2n)!^2}:\dfrac{(2n)!}{n!^2}$

$r!$

$$=\frac{2^{2n}(2n)!\{1\cdot3\cdot5\cdots(4n-1)\}}{(2n)!2^n n!\{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\}}:\frac{n!2^n\{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\}}{n!^2}$$

$$=\{1\cdot3\cdot5\cdots(4n-1)\}:\{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\}^2.$$

(4). ${}_{2n}C_3:{}_nC_2=44:3$ ナルトキ n ヲ求メヨ.

解. $$\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1\cdot2\cdot3}=\frac{44}{3}\cdot\frac{n(n-1)}{1\cdot2}$$

n, $n-1$ ハ兩邊ニ共通ノ因數ナル故 $n=0$, $n=1$ ハ此方程式ノ根ナリ. 然レドモ此 n ノ値ニテハ ${}_{2n}C_3$ ガ無意味ナルヲ以テ本題ニ適セズ. 次ニ此因數ヲ去リテ $2n-1=11$. 故ニ $n=6$. 是所要ノ値ナリ.

(5). ${}_{28}C_{2r}:{}_{24}C_{2r-4}=225:11$ ナルトキ r ノ値如何.

解. $$\frac{28!}{(2r)!(28-2r)!}\times\frac{(28-2r)!(2r-4)!}{24!}=\frac{225}{11}.$$

故ニ $$\frac{28\cdot27\cdot26\cdot25}{2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)}=\frac{225}{11}.$$

故ニ $$2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)=24024.$$

故ニ $$(2r^2-3r)(2r^2-3r+1)=6006.$$

故ニ $2r^2-3r=x$ ト置クトキハ

$$x(x+1)=6006.$$

此方程式ヲ解キテ $x=77$ 或ハ -78 ヲ得.

故ニ $$2r^2-3r=77$$

ト置キテ $$r=7\text{ 或ハ }-\frac{11}{2}$$

ヲ得. 然ルニ $-\dfrac{11}{2}$ ハ此問題ニ適合セザルガ故ニ 7 ガ所要ノ r ノ値ナリ.

又 $$2r^2-3r=-78$$

ト置ケバ r ノ虛數値ヲ得.

故ニ所要ノ r ノ値ハ 7 ノミナリ.

(6). ${}_nC_r$ ト ${}_nC_{r-1}$ トノ比ヲ求メヨ.

解. 第25節ニヨリ.

$$ {}_nC_{r-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(r-1)}, $$

及
$$ {}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(r-1)r}. $$

故ニ
$$ {}_nC_r = \frac{n-r+1}{r}\times{}_nC_{r-1}. $$

注意. 此式ニヨリ ${}_nC_1, {}_nC_2, {}_nC_3, \cdots\cdots, {}_nC_n$ ノ中ノ何レカガ其隣リノモノニ對スル比ヲ求ムルコトヲ得.

(7). ${}_nC_r : {}_nC_{r-1} = 9:2$, ${}_nC_{4r-1} = {}_nC_{r+1}$ ナルトキ n 及 r ノ値ヲ求ム.

解. 第二方程式ヨリ $n = (4r-1)+(r+1) = 5r$.

第一方程式ヨリ
$$ \frac{n-r+1}{r} = \frac{9}{2}. $$

故ニ
$$ r = 2, \quad n = 10. $$

(8). 五十六人ダケ乘リ得ベキ列車ニ乘ラント欲スル者六十人アリ. 列車ニ乘リ込ム組合セハ幾組アリ得ベキカ. 又或一人ガ其中ノ幾組ニ加ハルベキカ.

解. 前部ノ答ハ明ニ ${}_{60}C_{56}$ 即 ${}_{60}C_4$ 即 $\dfrac{60\cdot59\cdot58\cdot57}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$ 即 487635 ナリ.

後部ノ答ハ其一人ヲ除キタル五十九人中ヨリ五十五人ヲ選出シテ得タル組合セニ其一人ヲ加フルト考フレバ ${}_{59}C_{55}$ 即 ${}_{59}C_4$ 即 $\dfrac{59\cdot58\cdot57\cdot56}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$ 即 455126 ナリ. 又此一人ノ加ハラザル組合セハ ${}_{59}C_{56}$ 即 ${}_{59}C_3$ 即 $\dfrac{59\cdot58\cdot57}{1\cdot2\cdot3}$ 即 32509 ナルガ故ニ 487635−32509 即 455126 ナリト云フモ可ナリ.

(9). 50人ノ中5人ハ教員ナリ. 之ヨリ5人ヲ選ブニ其中ニ少ナ

クトモ1人ハ教員ナルヤウニスルトキハ選ビ方ニ幾通リノ方法アリヤ.

解. 50人ヨリ5人ヲ選ブ異ナル仕方ハ ${}_{50}C_5$ ナリ. 又教員ヲ1人モ含マザルヤウニ5人ヲ選ブ仕方ハ ${}_{45}C_5$ ナリ.

故ニ　　所要ノ數 $= {}_{50}C_5 - {}_{45}C_5 = 897001.$

(10). $2n$ 個ノモノヨリ n 個ヲ選ブ組合セノ中, 或一ツノモノヲ含ムモノヽ數ハ之ヲ含マザルモノヽ數ニ等シキコトヲ證明セヨ.

解. 或一ツノモノヲ含ム組合セノ數ハ ${}_{2n-1}C_{n-1}$ ニシテ, 之ヲ含マザルモノヽ數ハ ${}_{2n-1}C_n$ ナリ. 然ルニ $n+n-1 = 2n-1$ ナルヲ以テ ${}_{2n-1}C_{n-1} = {}_{2n-1}C_n$ ナリ.

(11). $3n$ 個ノモノヨリ n 個ヲ選ブ組合セノ中, 或一ツノモノヲ含ムモノヽ數ハ之ヲ含マザルモノヽ數ノ半ナルコトヲ證明セヨ.

解. 或一ツノモノヲ含ム組合セノ數ハ ${}_{3n-1}C_{n-1}$ ニシテ之ヲ含マザルモノヽ數ハ ${}_{3n-1}C_n$ ナリ.

然ルニ
$$ {}_{3n-1}C_n = \frac{(3n-1)-n+1}{n}\,{}_{3n-1}C_{n-1} $$
$$ = 2\times{}_{3n-1}C_{n-1}. $$

(12). 9人ヨリ7人ヲ選ブニ, (i) 2人ノ特殊ノ人ヲ常ニ含ムヤウニスルカ, (ii) 2人ノ特殊ノ人ガ同時ニ含マレザルヤウニセントス. 各幾通リノ方法アリヤ.

解. (i) 2人ノ特殊ノ人ヲ常ニ含ムヤウニ [illegible]ツノ2人ヲ除キ殘リノ7人中ヨリ5人ヲ選ビ, [illegible]ケ加フレバヨシ. 故ニ其方法ハ ${}_7C_5$ 即 21 通リ[illegible]

(ii) 2人ガ同時ニ含マレザル組合セハ9人中[illegible]ヨリ, 2人ヲ同時ニ含ム組合セヲ引キタルモノナ[illegible]

故ニ　　　$\text{所要ノ數} = {}_9C_7 - {}_7C_5 = 15.$

(13). p 個ノ $(+)$ ト q 個ノ $(-)$ トヲ一直線上ニ排列スルニ，二個ノ $(-)$ ガ隣ラザルヤウニスルニハ幾何ノ排列ノ仕方アルカ．但 $p+1 \geqq q$ ナリ．

解． 先 p 個ノ $(+)$ ヲ一直線上ニ排列シ，次ニ其間及兩側ニ $(-)$ ヲ置クコトヲ考フルニ，$(+)$ ト $(+)$ トノ間ハ其數 $p-1$ ナリ．之ニ兩側ヲ足ストキハ $(-)$ ヲ置クベキ場處ハ $p+1$ ナリ，而シテ2個ノ $(-)$ ガ隣接セザルヤウニセザルベカラザルヲ以テ其一ツノ場所ニ同時ニ2個以上ノ $(-)$ ヲ置クベカラズ，故ニ所要ノ數ハ $p+1$ 個ヨリ q 個ヲ選ブ仕方ノ數ニ等シ，即 ${}_{p+1}C_q$ ナリ．

(14). 日本人7人ト英人4人中ヨリ6人ノ委員ヲ擇ブニ，

(i)　6人ノ委員中2人ハ英人ニシテ殘リハ日本人ナルトキ，

(ii)　少ナクトモ2人ガ英人ナルトキ，　4

選出ノ方法ニ幾通リアルカ．

解． (i)　英人ヲ選出スル仕方ノ數ハ ${}_4C_2$ ナリ．而シテ日本人ヲ選出スル仕方ノ數ハ ${}_7C_4$ ナリ．故ニ

$$\text{所要ノ數} = {}_4C_2 \cdot {}_7C_4 = \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7!}{2!\,2!\,3!} = 210.$$

(ii)　委員中ニハ2人，3人若クハ4人ノ英人アリ．故ニ英人ノ2人ナル場合，3人ナル場合，4人ナル場合ヲ別々ニ計算シテ其和ヲ求ムレバヨシ．故ニ

$$\begin{aligned}\text{所要ノ數} &= {}_4C_2 \cdot {}_7C_4 + {}_4C_3 \cdot {}_7C_3 + {}_4C_4 \cdot {}_7C_2 \\ &= \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{7!}{4!\,3!} + \frac{4!}{3!} \cdot \frac{7!}{3!\,4!} + 1 \cdot \frac{7!}{2!\,5!} \\ &= 210 + 140 + 21 = 371.\end{aligned}$$

(15). 10人ノ將校，12人ノ下士，18人ノ兵卒ヨリ，5人ノ將校，8人ノ下士，10人ノ兵卒ヨリ成ル隊ヲ編制スルニ幾通リノ方法アリヤ．

解． 10人ノ將校ヨリ5人ヲ選ブ仕方ノ數ハ ${}_{10}C_5$ ナリ．其一ツノ選ビ方ニ對シテ12人ノ下士ヨリ8人ヲ選ブニ ${}_{12}C_8$ 個ノ方法アリ．故ニ將校ト下士トヲ選ブニハ ${}_{10}C_5 \cdot {}_{12}C_8$ 個ノ方法アリ．其一ツノ選ビ方ニ對シテ兵卒ヲ選ブニハ ${}_{18}C_{10}$ 個ノ方法アリ．故ニ總テニテ ${}_{10}C_5 \cdot {}_{12}C_8 \cdot {}_{18}C_{10}$ 個ノ方法アリ．

(16). 互ニ相異ナル子字7個，互ニ相異ナル母字4個ヲ以テ，子字3個母字2個ヨリ成ル語幾何ヲ作ルコトヲ得ベキカ．

解． 3個ノ子字ヲ選ブ方法ハ ${}_7C_3$，2個ノ母字ヲ選ブ方法ハ ${}_4C_2$ ナリ．故ニ此等ノ子字及母字ヲ選ブ方法ハ ${}_7C_3 \cdot {}_4C_2$ ナリ．而シテ斯ク選バレタル各群ハ $5!$ 個ノ方法ニテ排列スルコトヲ得．故ニ

$$\text{所要ノ數} = {}_7C_3 \cdot {}_4C_2 \cdot 5! = \frac{7!}{3!\,4!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} \cdot 5! = 5 \cdot 7! = 25200.$$

(17). 相異ナル母字5個ト相異ナル子字15個トヲ用ヒ，母字3個子字2個ヨリ成ル語幾何ヲ作リ得ベキカ．

解． 互ニ相異ナル母字5個中ヨリ3個ヲ選ブ方法ノ數ハ ${}_5C_3$，互ニ相異ナル子字15個中ヨリ2個ヲ選ブ方法ノ數ハ ${}_{15}C_2$ ナルヲ以テ所設ノ文字ヨリ母字3個ト子字2個トヲ選ブ方法ハ ${}_5C_3 \times {}_{15}C_2$ ナリ．而シテ選バレタル各組合セハ ${}_5P_5$ 個ノ方法ニテ排列スルコトヲ得．故ニ

$$\text{所要ノ數} = {}_5P_5 \times {}_5C_3 \times {}_{15}C_2 = 126000.$$

(18). 互ニ相異ナル子字10個及互ニ相異ナル母字5個ヨリ，5個ノ異ナル文字ヨリ成ル語幾何ヲ作ルコトヲ得ベキカ．但 a ハ5個ノ母字中ノ一ツニシテ作ラルベキ語ハ常ニ之ヲ含ミ又少クトモ2個

ノ子字ヲ含ムコトヲ要ス.

解. 作ラルベキ語ハ(i)2個ノ子字, a 及2個ノ他ノ母字ヨリ成ルカ,(ii)3個ノ子字, a 及他ノ1個ノ母字ヨリ成ルカ,(iii)4個ノ子字ト a ヨリ成ルカナリ. 故ニ

$$所要ノ數 = {}_{10}C_2 \times {}_4C_2 \times 5! + {}_{10}C_3 \times {}_4C_1 \times 5! + {}_{10}C_4 \times 5! = 115200.$$

(19). 獨逸書7冊, 英書3冊アリ. 其中ヨリ獨逸書4冊, 英書1冊ヲ選ビ, 英書ガ眞中ニ在ルヤウニ書棚ニ排列スルニハ幾通リノ方法アリヤ.

解. 獨逸書ヲ選ブニハ ${}_7C_4$ 通リノ方法アリ. 又英書ヲ選ブニハ ${}_3C_1$ 通リノ方法アリ. 而シテ選バレタル5冊ヲ排列スルニ英書ノ位置ハ定マレルヲ以テ $4!$ 通リノ方法アリ. 故ニ

$$所要ノ數 = {}_7C_4 \times {}_3C_1 \times 4! = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} \times 3 \times 4! = 2520.$$

(20). 18人ヨリ8人乘ノ端艇ノ乘組ヲ作ルニ, 7人ハ右舷ノミ, 8人ハ左舷ノミ, 他ハ何レノ側ヲモ漕ギ得ルトキハ幾通リノ乘組ヲ作ルコトヲ得ベキカ.

解. 何レノ側ヲモ漕ギ得ル人ハ3人ナリ. 故ニ今考ヘントスル乘組ハ次ノ如ク分ツコトヲ得.

I. 此3人ノ中ノ1人モ右舷ニ乘ラザルモノ,

II. 此3人ノ中ノ1人ハ必右舷ニ乘ルモノ,

III. 此3人ノ中ノ2人ハ必右舷ニ乘ルモノ,

IV. 此3人ガ總テ右舷ニ乘ルモノ.

Iヲ作ルニハ, 7人ノ中ヨリ4人, 11人ノ中ヨリ4人ヲ選ベバヨシ. 故ニ其數ハ ${}_7C_4\cdot{}_{11}C_4$ ナリ.

IIヲ作ルニハ, 3人ノ中ヨリ1人ヲ選ビ右舷ニ乘ラシム. 其選ビ方ニハ ${}_3C_1$ 通リアリ. 次ニ7人ノ中ヨリ3人ヲ選ブ. 其選ビ方ニハ ${}_7C_3$ 通リアリ. 故ニ此場合ニハ右舷ノ人ヲ選ブニ ${}_3C_1\cdot{}_7C_3$ 通リノ仕方アリ. 而シテ此各ノ選ビ方ニ對シテ左舷ノ人ヲ選ブニ ${}_{10}C_4$ ノ仕方アリ. 故ニ此場合ノ乘組ノ數ハ ${}_3C_1\cdot{}_7C_3\cdot{}_{10}C_4$ ナリ.

III, IV ノ場合ハ之ト同樣ニシテ其數ハ夫々 ${}_3C_2\cdot{}_7C_2\cdot{}_9C_4$ 及 ${}_3C_3\cdot{}_7C_1\cdot{}_8C_4$ ナリ. 故ニ

$$所要ノ數 = {}_7C_4\cdot{}_{11}C_4 + {}_3C_1\cdot{}_7C_3\cdot{}_{10}C_4 + {}_3C_2\cdot{}_7C_2\cdot{}_9C_4 + {}_3C_3\cdot{}_7C_1\cdot{}_8C_4 = \cdots\cdots$$

(21). $n-1$ 組ノ生徒アリ. 夫々 $2a, 3a, \cdots, na$ 人ヨリ成ル. 此第一ノ組ヨリ a 人, 第二ノ組ヨリ $2a$ 人, 第三ノ組ヨリ $3a$ 人等ト選ブ仕方ハ $\dfrac{(na)!}{(a!)^n}$ ナルコトヲ證セヨ.

解. $2a$ 人ヨリ a 人ヲ選ブ仕方, $3a$ 人ヨリ $2a$ 人ヲ選ブ仕方, $4a$ 人ヨリ $3a$ 人ヲ選ブ仕方等ハ

$${}_{2a}C_a \text{ 卽 } \frac{(2a)!}{(a!)^2},$$

$${}_{3a}C_{2a} \text{ 卽 } \frac{(3a)!}{a! \times (2a)!},$$

$${}_{4a}C_{3a} \text{ 卽 } \frac{(4a)!}{a! \times},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

等ナリ. 故ニ

$$所要ノ數 = {}_{2a}C_a \times {}_{3a}C_{2a} \times {}_{4a}C_{3a} \times \cdots\cdots = \frac{(na)!}{(a!)^n}.$$

(22). $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ ヲ n 箇ノ相異ナレル正數トシ, 此等ヨリ r 箇ヲ選出シテ其相乘平均ヲ作リ, 其總和ヲ ${}_nG_r$ ニテ表シ

$$\frac{{}_nG_r}{{}_nC_r}$$

ヲ K_r ニテ表サバ

$$K_1 > K_2 > K_3 > \cdots\cdots > K_n$$

ナリ．之ヲ證明セヨ．

解.* $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_{r+1}$ ナル $r+1$ 箇ノ正數ヨリ r 箇ヲ選出シテ其相乘平均ヲ作レバ，其數ハ ${}_{r+1}C_r$ 卽 $r+1$ 箇ニシテ，其總乘積ヲ $\Pi({}_{r+1}G_r)$ ニテ表シ，其總和ヲ $\Sigma({}_{r+1}G_r)$ ニテ表セバ

$$a_1 a_2 \cdots\cdots a_{r+1} = \Pi({}_{r+1}G_r).$$

故ニ數多ノ正數ノ相加平均ハ其相乘平均ヨリ小ナルコトナシトノ定理**ニヨリ

$$\sqrt[r+1]{a_1 a_2 \cdots\cdots a_{r+1}} < \frac{\Sigma({}_{r+1}G_r)}{r+1}.$$

故ニ ${}_nG_{r+1}$ ハ $\dfrac{\sqrt[r]{a_1 a_2 \cdots\cdots a_r}}{r+1}$ ナル形ヲ有スル項ヲ $(r+1).{}_nC_{r+1}$ 箇ダケ加ヘタル和ヨリ大ナルコトナシ．然ルニ此ノ如キ形ノ項ハ所設ノ n 箇ノ正數ヨリ唯 ${}_nC_r$ 箇ダケ得ルノミ．

而シテ $\qquad (r+1).{}_nC_{r+1} = (n-r).{}_nC_r.$

故ニ

$${}_nG_{r+1} < \frac{n-r}{r+1}.{}_nG_r.$$

故ニ

$$\frac{{}_nG_r}{{}_nC_r} > \frac{{}_nG_{r+1}}{{}_nC_{r+1}}.$$

卽 $\qquad K_r > K_{r+1}.$

注意. 此定理ニ對應シテ次ノ定理アリ．

$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ ヲ n 箇ノ相異ナレル正數トシ，此等ヨリ r 箇ヲ

* 東京物理學校雜誌卷七第七十三號ニ於ケ余ノ證明セシ所ナリ．

** 本叢書第三編不等式第三章ヲ參照スベシ．

ヲ選出シテ其相加平均ヲ作リ，其總乘積ヲ ${}_nA_r$ ニテ表シ．

$$({}_nA_r)^{\frac{1}{{}_nC_r}}$$

ヲ L_r ニテ表サバ

$$L_1 < L_2 < L_3 < \cdots\cdots < L_n$$

ナリ．

此定理ハ次ニ證明セントスル定理ト一見異ナルガ如シト雖其實ハ同一物ナリ．

(23). $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ ヲ相異ナレル n 箇ノ正數トシ，此等ヨリ r 箇ヲ選出シテ作レル和ノ總乘積ヲ ${}_nS_r$ ニテ表ストキ此等ノ和ノ數ハ ${}_nC_r$ ナルヲ以テ

$$\frac{({}_nS_r)^{\frac{1}{{}_nC_r}}}{r}$$

ハ此等ノ n 箇ノ正數ノ平均ト見ルコトヲ得．此平均ヲ N_r ニテ表ストキハ

$$N_1 < N_2 < \cdots\cdots < N_r < N_{r+1} < \cdots\cdots < N_n$$

ナリ．之ヲ證明セヨ．

解.* n 箇ノ正數ニ向ツテ

$$\frac{({}_nS_r)^{\frac{1}{{}_nC_r}}}{r} < \frac{({}_nS_{r+1})^{\frac{1}{{}_nC_{r+1}}}}{r+1} \qquad (r \leqq n-1) \qquad (1)$$

ガ眞ナリト假定セヨ．此不等式ニ於テ順次 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$ ヲ a_{n+1} ニテ置キ換ヘ，得ル所ノ不等式ト此等式トヲ邊々相乘ズレバ

$$\frac{(\Pi\,{}_nS_r)^{\frac{1}{{}_nC_r}}}{r^{n+1}} < \frac{(\Pi\,{}_nS_{r+1})^{\frac{1}{{}_nC_{r+1}}}}{(r+1)^{n+1}} \qquad (r \leqq n-1)$$

* 東京物理學校雜誌卷十三第百四十六號ニ於ケル余ノ論文ヲ參照スベシ．

ヲ得. 然ルニ $\Pi\,{}_n\mathrm{S}_r$ ハ $(n+1)\,{}_n\mathrm{C}_r$ 箇ノ因數ヲ含ミ又此モノハ ${}_{n+1}\mathrm{S}_r$ ノ因數ヲ含ミテ其各因數ノ數ハ ${}_{n+1}\mathrm{C}_r$ 箇ナリ. 故ニ

$$\Pi\,{}_n\mathrm{S}_r=({}_{n+1}\mathrm{S}_r)^{\frac{(n+1)\,{}_n\mathrm{C}_r}{{}_{n+1}\mathrm{C}_r}},$$

同樣ニ

$$\Pi\,{}_n\mathrm{S}_{r+1}=({}_{n+1}\mathrm{S}_{r+1})^{\frac{(n+1)\,{}_n\mathrm{C}_{r+1}}{{}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}}}.$$

故ニ

$$\frac{({}_{n+1}\mathrm{S}_r)^{\frac{n+1}{{}_{n+1}\mathrm{C}_r}}}{r^{n+1}}<\frac{({}_{n+1}\mathrm{S}_{r+1})^{\frac{n+1}{{}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}}}}{(r+1)^{n+1}}$$

故ニ

$$\frac{({}_{n+1}\mathrm{S}_r)^{\frac{1}{{}_{n+1}\mathrm{C}_r}}}{r}<\frac{({}_{n+1}\mathrm{S}_{r+1})^{\frac{1}{{}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}}}}{r+1}\qquad(r\leqq n-1).$$

而シテ $r=n$ ナルトキ此不等式ハ明ニ成立ス.

又 $n=2$ ナルトキ (1) ハ明ニ成立ス. 故ニ數學的歸納法ニヨリテ (1) ハ n ガ任意ノ値ヲ取ルトキニ一般ニ成立ス.

別解.* $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ ヲ相異ナレル n 箇ノ正數トシ, 此等ヨリ r 箇ヲ選出シテ作レル和ノ總乘積ヲ ${}_n\mathrm{S}_r$ ニテ表シ又此等ノ和ノ總和ヲ ${}_n\mathrm{T}_r$ ニテ表セバ次ノ不等式ノ正シキコト明ナリ.

$$({}_n\mathrm{S}_r)^{\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_r}}<\frac{{}_n\mathrm{T}_r}{{}_n\mathrm{C}_r}.$$

又此 ${}_n\mathrm{T}_r$ ハ $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ ノ幾倍カニ當ルモノニシテ, 其倍數ハ $\frac{r}{n}\cdot{}_n\mathrm{C}_r$ ナルコト明ナリ. 卽

$${}_n\mathrm{T}_r=\frac{r}{n}\cdot{}_n\mathrm{C}_r\,(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n).$$

今 $r=n-1$ 卽 $n=r+1$ トセバ

* 此解ハ加藤孝重郎氏ノ得ラレタルモノナリ.

$$({}_{r+1}\mathrm{S}_r)^{\frac{1}{{}_{r+1}\mathrm{C}_r}}<\frac{r}{r+1}\,(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{r+1})$$

ヲ得.

次ニ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 中ヨリ $r+1$ 箇ヅツ選出シテ ${}_n\mathrm{C}_{r+1}$ 箇ノ組合セヲ作リ, 其各組合セヨリ ${}_{r+1}\mathrm{S}_r$ ヲ作リ, 其乘積ヲ

$$\Pi\,({}_{r+1}\mathrm{S}_r)$$

ニテ表シ, 又 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 中ヨリ $r+1$ 箇ヅツ選出シテ ${}_n\mathrm{C}_{r+1}$ 箇ノ組合セヲ作リ, 其和ノ總乘積ヲ

$$\Pi\,(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{r+1})$$

ニテ表サバ, 前ノ不等式ヨリ

$$\{\Pi({}_{r+1}\mathrm{S}_r)\}^{\frac{1}{{}_{r+1}\mathrm{C}_r}}<\left(\frac{r}{r+1}\right)^{{}_n\mathrm{C}_{r+1}}\Pi\,(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{r+1}).$$

固ヨリ $\Pi\,(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{r+1})$ ハ ${}_n\mathrm{S}_{r+1}$ ノコトナリ. 故ニ

$$\Pi\,({}_{r+1}\mathrm{S}_r)<\left(\frac{r}{r+1}\right)^{{}_n\mathrm{C}_{r+1}}{}_n\mathrm{S}_{r+1}.$$

而シテ

$$\Pi\,({}_{r+1}\mathrm{S}_r)$$

ハ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ノ對稱式ニシテ ${}_n\mathrm{S}_r$ ノ或整數乘冪ニ等シキコト明ナリ. 而シテ ${}_{r+1}\mathrm{C}_r\cdot{}_n\mathrm{C}_{r+1}$ 箇ノ因數ヲ含メルコトモ明ナリ. 然ルニ ${}_n\mathrm{S}_r$ ハ ${}_n\mathrm{C}_r$ 箇ノ因數ヲ含ムガ故ニ

$$\{\Pi\,({}_{r+1}\mathrm{S}_r)\}^{{}_n\mathrm{C}_r}=({}_n\mathrm{S}_r)^{{}_{r+1}\mathrm{C}_r\cdot{}_n\mathrm{C}_{r+1}}$$

故ニ

$$\{\Pi\,({}_{r+1}\mathrm{S}_r)\}^{\frac{1}{{}_{r+1}\mathrm{C}_r}}=({}_n\mathrm{S}_r)^{\frac{{}_n\mathrm{C}_{r+1}}{{}_n\mathrm{C}_r}}.$$

故ニ

$$({}_n\mathrm{S}_r)^{\frac{{}_n\mathrm{C}_{r+1}}{{}_n\mathrm{C}_r}}<\left(\frac{r}{r+1}\right)^{{}_n\mathrm{C}_{r+1}}\cdot{}_n\mathrm{S}_{r+1}.$$

故ニ

$$\frac{({}_nS_r)}{r}^{\frac{1}{{}_nC_r}} < \frac{({}_nS_{r+1})}{r+1}^{\frac{1}{{}_nC_{r+1}}}.$$

注意. 讀者ハ又次ノ定理ヲ證明シ得ベシ.

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ ヲ n 箇ノ相異ナレル正數トシ其中ヨリ r 箇ヲ選出シテ其乘積ヲ作リ, 其總和ヲ ${}_nR_r$ ニテ表シ,

$$\sqrt[r]{\frac{{}_nR_r}{{}_nC_r}}$$

ヲ M_r ニテ表サバ

$$M_1 > M_2 > M_3 > \cdots > M_n$$

ナリ.*

28. n ガ定マルトキノ ${}_nC_r$ ノ最大値.

第25節ノ等式ニヨリ

$${}_nC_r = {}_nC_{r-1}\frac{n-r+1}{r}.$$

故ニ $n-r+1 \gtreqless r$ 卽 $r \lesseqgtr \frac{1}{2}(n+1)$ ナルニ從ツテ ${}_nC_r \gtreqless {}_nC_{r-1}$ ナリ.

卽 ${}_nC_r$ ハ r ガ $\frac{1}{2}(n+1)$ ヨリ小ナル間ハ r ガ增スト共ニ增ス. 故ニ n ガ偶數ナルトキハ, $r=\frac{n}{2}$ ナルトキ ${}_nC_r$ ハ最大ナリ. 卽 ${}_nC_{\frac{n}{2}}$ ハ ${}_nC_r$ 中ノ最大値ナリ. 又若 n ガ奇數ナルトキハ, $r \leqq \frac{1}{2}(n+1)$ ナルニ從ツテ ${}_nC_r \geqq {}_nC_{r-1}$ ニシテ, $r=\frac{1}{2}(n+1)$ ナルトキハ, ${}_nC_r = {}_nC_{r-1}$ ナリ. 故ニ ${}_nC_{\frac{1}{2}(n+1)}$ 及 ${}_nC_{\frac{1}{2}(n+1)-1}$ 卽 ${}_nC_{\frac{1}{2}(n-1)}$ ガ相等シクシテ ${}_nC_r$ 中ノ最大値ナリ.

29. ${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$. 第一證明法.

第25節ノ公式ニヨリ

* 此定理ハちゆらんノ得タルモノナリ.

$$\begin{aligned}{}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1} &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(\overline{n-1}-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots r} \\ &\qquad + \frac{(n-1)(n-2)\cdots(\overline{n-1}-\overline{r-1}+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots(r-1)} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-r)+(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)r}{1\cdot2\cdot3\cdots r} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots r} \\ &= {}_nC_r.\end{aligned}$$

第二證明法.

既ニ第25節ニ於テ述ベタルガ如ク相異ナル n 個ノ原素 $a, b, c, \cdots\cdots, l$ ヨリ r 個ヲ取リテ作ラルヽ組合セノ中, 或特殊ノ原素, 例ヘバ a ヲ含ムモノヽ總テヲ作ルニハ n 個ノ原素ヨリ a ヲ除キ置キ殘リノ $n-1$ 個ノ原素中ヨリ $r-1$ 個ヲ取リテアラユル組合セヲ作リ, 之ニ a ヲ附ケ足セバヨシ. 故ニ其數ハ ${}_{n-1}C_{r-1}$ ナリ. 又 a ヲ含マザル組合セヲ作ルニハ a 以外ノ原素卽 $b, c, \cdots\cdots, l$ 中ヨリ r 個ヲ取リテ組合セヲ作レバヨシ. 故ニ其數ハ ${}_{n-1}C_r$ ナリ. 而シテ n 個ヨリ r 個ヲ取リテ作レル總テノ組合セノ數ハ, a ヲ含ムモノヽ數ト, 含マザルモノノ數トノ和ニ等シ.

故ニ

$${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}.$$

30. ${}_nC_0$ ナル記號.

${}_nC_r$ ハ本來 n 個ノ相異ナル原素中ヨリ, r 個ノ原素ヲ取リテ總テノ組合セヲ重複モナク且遺漏モナク取リタルトキノ數ヲ表ス記號ナルヲ以テ $r=0$ ナルトキハ全ク無意味ノモノナリ. 然レドモ $r=0$ ナルトキニハ 1 ヲ表スモノト規約スルヲ便利ナリトス. 例ヘバ斯ク

如ク定ムルトキハ前節ノ公式ハ $r=1$ ナルトキニモ成立ス．依テ今ノ後 ${}_{n}C_{0}$ ハ n ノ如何ニ係ラズ1ナリト定ムベシ．

31. $${}_{n}\mathbf{C}_{r}={}_{n-1}\mathbf{C}_{r}+{}_{n-2}\mathbf{C}_{r-1}+\cdots\cdots+{}_{n-r}\mathbf{C}_{1}+{}_{n-r-1}\mathbf{C}_{0}$$

及 $${}_{n+1}\mathbf{C}_{r+1}={}_{n}\mathbf{C}_{r}+{}_{n-1}\mathbf{C}_{r}+{}_{n-2}\mathbf{C}_{r}+\cdots\cdots+{}_{r+1}\mathbf{C}_{r}+{}_{r}\mathbf{C}_{r}.$$

第29節ニ得タル公式

$${}_{n}C_{r}={}_{n-1}C_{r}+{}_{n-1}C_{r-1}$$

ニ於テ r ノ代リニ $r-1, r-2, \cdots\cdots, 2, 1$ ヲ置クト同時ニ，n ノ代リニ $n-1, n-2, \cdots\cdots, n-r+2, n-r+1$ ヲ置クトキハ次ノ等式ヲ得．

$${}_{n}C_{r}={}_{n-1}C_{r}+{}_{n-1}C_{r-1},$$
$${}_{n-1}C_{r-1}={}_{n-2}C_{r-1}+{}_{n-2}C_{r-2},$$
$${}_{n-2}C_{r-2}={}_{n-3}C_{r-2}+{}_{n-3}C_{r-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$${}_{n-r+2}C_{2}={}_{n-r+1}C_{2}+{}_{n-r+1}C_{1},$$
$${}_{n-r+1}C_{1}={}_{n-r}C_{1}+{}_{n-r}C_{0}.$$

此等ノ等式ヲ邊々相加フルトトキハ

$${}_{n}C_{r}={}_{n-1}C_{r}+{}_{n-2}C_{r-1}+\cdots\cdots+{}_{n-r}C_{1}+{}_{n-r}C_{0}.$$

然ルニ ${}_{n-r}C_{0}=1={}_{n-r-1}C_{0}$ ナルヲ以テ

$${}_{n}C_{r}={}_{n-1}C_{r}+{}_{n-2}C_{r-1}+\cdots\cdots+{}_{n-r}C_{1}+{}_{n-r-1}C_{0}.$$

次ニ第29節ニ得タル公式ニ於テ n ノ代リニ $n+1$ ヲ入レ r ノ代リニ $r+1$ ヲ入ルヽトキハ

$${}_{n+1}C_{r+1}={}_{n}C_{r+1}+{}_{n}C_{r}.$$

此等式ノ n ノ代リニ順次 $n-1, n-2, \cdots\cdots, r+1$ ヲ置換フルトキハ

$${}_{n}C_{r+1}={}_{n-1}C_{r+1}+{}_{n-1}C_{r},$$

$${}_{n-1}C_{r+1}={}_{n-2}C_{r+1}+{}_{n-2}C_{r},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$${}_{r+2}C_{r+1}={}_{r+1}C_{r+1}+{}_{r+1}C_{r}.$$

然ルニ又　　${}_{r+1}C_{r+1}={}_{r}C_{r}.$

此等ノ等式ヲ邊々相加フレバ

$${}_{n+1}C_{r+1}={}_{n}C_{r}+{}_{n-1}C_{r}+{}_{n-2}C_{r}+\cdots\cdots+{}_{r+1}C_{r}+{}_{r}C_{r}$$

ヲ得．

32. $n<r$ **ナルトキノ** ${}_{n}C_{r}$ **ノ意味．**

${}_{n}C_{r}$ ハ n 個ノ相異ナル原素ヨリ r 個ヲ取リテ作レル組合セノ數ヲ表スモノニシテ，其組合セノ中ニハ，同ジ原素ヲ幾度カ繰返シテ取ルコトヲ許サヾルヲ以テ，n 個ノ原素ヨリ，n 個ヨリモ多クノ原素ヲ組合セテ作ルコト能ハズ．故ニ $n<r$ ナルトキ ${}_{n}C_{r}$ ハ全ク無意味ナリ．然レドモ此場合ニ ${}_{n}C_{r}=0$ ナリト規約スルヲ便利トスルヲ以テ今後ハ斯ノ如ク定ムベシ.*

33. $${}_{p+q}\mathbf{C}_{m}={}_{p}\mathbf{C}_{m}\cdot{}_{q}\mathbf{C}_{0}+{}_{p}\mathbf{C}_{m-1}\cdot{}_{q}\mathbf{C}_{1}+{}_{p}\mathbf{C}_{m-2}\cdot{}_{q}\mathbf{C}_{2}$$
$$+\cdots\cdots\cdots+{}_{p}\mathbf{C}_{1}\cdot{}_{q}\mathbf{C}_{m-1}+{}_{p}\mathbf{C}_{0}\cdot{}_{q}\mathbf{C}_{m}.$$

n 個ノ相異ナル原素ヨリ，m 個ヲ取リ組合セヲ作ルニ次ノ如クス．

先 n 個ノ原素ヲ p 個ト q 個トノ二ツノ部分ニ分チ，

p 個ノ中ヨリ m 個ヲ取リ q 個ノ中ヨリハ一ツモ取ラズ，

p 個ノ中ヨリ $m-1$ 個ヲ取リ q 個ノ中ヨリ1個ヲ取ル，

p 個ノ中ヨリ $m-2$ 個ヲ取リ q 個ノ中ヨリ2個ヲ取ル，

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

* 故ニ $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}=0$ トス．故ニ $(n-r)!=\infty$ トスト思ヘバ可ナリ．

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

p 個ノ中ヨリ 2 個ヲ取リ q 個ノ中ヨリ $m-2$ 個ヲ取ル,

p 個ノ中ヨリ 1 個ヲ取リ q 個ノ中ヨリ $m-1$ 個ヲ取ル,

p 個ノ中ヨリ一ツモ取ラズ q 個ノ中ヨリ m 個ヲ取ル.

斯ノ如クスルトキハ n 個ノ原素ヨリ m 個ヲ取レル組合セノ總テガ,遺漏モナク又重複モナク得ラルヽコト明ナリ. 但 $p<m$ ニシテ $p=m-r$ ナルトキハ實際ハ p 個ヨリ $m-r$ 個ヲ取リ q 個ヨリ r 個ヲ取ル場合ヨリ始ムルモノトス. 又 $q<m$ ニシテ $q=m-s$ ナルトキハ,p 個ヨリ s 個ヲ取リ q 個ヨリ $m-s$ 個ヲ取ル場合ニ終ルモノトス. 斯ノ如キ場合ガアルニモ係ラズ前節ノ規約ニヨリ p 個ヨリ t 個ヲ取リテ作レル組合セノ數ハ常ニ ${}_pC_t$ ニテ表サレ,q 個ヨリ $m-t$ 個ヲ取リテ作レル組合セノ數ハ常ニ ${}_qC_{m-t}$ ニテ表サル. 故ニ p 個ヨリ t 個,q 個ヨリ $m-t$ 個ヲ取ル組合セノ數ハ ${}_pC_t\cdot{}_qC_{m-t}$ ナリ. 故ニ

$$ {}_nC_m={}_pC_m\cdot{}_qC_0+{}_pC_{m-1}\cdot{}_qC_1+{}_pC_{m-2}\cdot{}_qC_2+\cdots\cdots+{}_pC_1\cdot{}_qC_{m-1}+{}_pC_0\cdot{}_qC_m. $$

34. r ガ 1 ヨリ n マデノ値ヲ取ル場合ノ組合セヲ作ルコト.

互ニ相異ナル n 個ノ原素 $a, b, c, \cdots\cdots, l$ ヨリ $1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ 個ヲ採ル組合セハ,次ノ表ニ示ス如クニシテ作ルコトヲ得.

$a,$

$b,\ ab,$

$c,\ ac,\ bc,\ abc,$

$d,\ ad,\ bd,\ cd,\ abd,\ acd,\ bcd,\ abcd,$

$e,\ ae,\ be,\ ce,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\ abcde,$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

此表ヲ作ルニハ,先第一ノ原素 a ヲ書キ,其下ニ第二ノ原素 b ヲ書ク. 次ニ a ノ右ニ b ヲ添ヘタルモノ卽 ab ヲ b ノ右側ニ書ク. 次ニ b ノ下ニ第三ノ原素 c ヲ書キ,其右ニ其時迄ニ作リシ組合セノ右ニ c ヲ添ヘタルモノ,卽 ac, bc, abc ヲ書ク. 斯ノ如ク總テ新ナル列ヲ書クニハ,先新シキ原素ヲ書キ,其右ニソレヨリ以前ニ作リシ總テノ組合セノ右ニ新シキ原素ヲ添ヘタル組合セヲ書ケバヨシ.

斯クシテ得タルモノヽ全體ハ所要ノ組合セナルコト明ナリ.

35. 前節ノ組合セノ數. 第一證明法.

前節ノ表ニ於テハ,第一列ニハ 1 個ノ組合セアリ,第二列ニハ 2 個,第三列ニハ 4 個卽 2^2 個,第四列ニハ 8 個卽 2^3 個ノ組合セアリ. 然ラバ第 $k+1$ 列ニハ 2^k 個ノ組合セガアルベシトハ何人モ想ヒ到ルコトナルベシ. 吾人ハ次ニ其事ノ眞ナルコトヲ數學的歸納法ヲ用ヒテ證明セントス.

先 k 列マデハ此法則ガ成立スルモノト假定セヨ. 然ラバ第 k 列マデニ在ル組合セノ數ハ

$$ 2^0+2^1+\cdots\cdots\cdots+2^{k-1}=2^k-1. $$

而シテ第 $k+1$ 列ハ新シキ原素及其時マデニ作リタル組合セ卽 2^k-1 個ノ組合セノ右ニ新シキ原素ヲ添ヘタルモノヨリ成ル. 故ニ,其中ニハ

$$ 2^k-1+1 \quad 卽 \quad 2^k $$

個ノ組合セアリ. 然ルニ $k=2, k=3$ ノ場合ニ就テ此法則ノ眞ナルコトハ明ナリ. 故ニ k ノ値ノ如何ニ拘ラズ第 $k+1$ 列ニハ 2^k 個ノ組合セアリ.

偖前節ノ表ニヨリ n 個ノ原素ヨリ選擇シテ作ラルヽアラユル組合セヲ作ルトキハ,n 個ノ列ヲ得ルコト明ナリ. 故ニ上ニ證明シタル

所ニヨリ其中ノ組合セノ數ハ

$$1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{n-1} \text{ 卽 } 2^n-1$$

ナルコトヲ知ル.

第二證明法

互ニ相異ナル n 個ノ原素 $a, b, c, \cdots\cdot, l$ ヨリ任意ノ個數ダケノ原素ヲ選擇スルニ當リ,各原素ハ其選ニ入ルカ漏ルヽカ必二途アリ. 換言スレバ選擇ナル作用ハ, 一ツノ原素ニ就テハ二通リノ方法ニテ成サル. 而シテ或原素ニ其二通リノ作用ノ中一通リガ施サレタル後ニハ, 他ノ一ツノ原素ニ又二通リノ作用ガ施サル, 卽選擇スルカ或ハ選擇セザルカナリ. 故ニ第7節定理Iノ注意ニヨリ, 此二ツノ原素ヲ選擇スルコトハ (2×2) 通リノ方法ニテ成サル. 但此中ニハ二ツガ共ニ選擇セラレザル場合ヲモ含ム. 例ヘバ一ツノ原素 a ヲ考フルニ, 此原素ハ選擇セラルヽカ然ラザルカノ二途アリ. 其中ノ一ツガ成サルルトキハ b ハ又選擇セラルヽカ否カノ二途アリ. 故ニ a ト b トヨリ任意ノ數ノ原素ヲ選擇スルニハ 2×2 卽4通リノ方法アリ. 但其中ニハ a, b ガ共ニ選擇セラレザル場合ヲモ含ム. 更ニ第三ノ原素ヲ考フルトキハ其中ヨリ任意ノ數ノ原素ヲ選擇スルニハ $2\times2\times2$ ノ方法アリ. 但其中ニハ三ツガ共ニ選擇セラレザル場合ヲモ含ム. 以下同樣ニシテ次第ニ一ツノ原素ヲ附ケ足シテ考フルトキハ遂ニ n 個ノ原素ヨリ任意ノ數ノ原素ヲ選擇スルコトハ $2\times2\times2\times\cdots\cdot$ (因數 n 個) 卽 2^n 通リノ仕方ニテナサルヽコトヲ知ル. 然レドモ此中ニハ n 箇ガ共ニ選擇セラレザル場合ヲモ含ム. 此場合ハ所題ノ條件ニ適合セザルヲ以テ之ヲ除クトキハ, 所要ノ數ガ 2^n-1 ナルコトヲ知ル.

例題 (1). 梨3箇, 桃4個, 蜜柑2個ヲ入レタル籠ノ中ヨリ菓物ヲ

取リ出スニ幾通リノ方法アリヤ. 但一度ニ各種ノ菓物少クトモ一ツ取リ出スモノトス.

解. 梨ノ取出シ方ハ 2^3-1 卽7通リ, 桃ノ取出シ方ハ 2^4-1 卽15通リ, 蜜柑ノ取リ出シ方ハ 2^2-1 卽3通リナリ. 故ニ

$$\text{所要ノ數} = 7\times15\times3=315.$$

(2). 文字 a, b, c, d, e ヲ以テ相異ナル乘積幾何ヲ作リ得ルカ.

解. 5個ノ相異ナル文字ヨリ一ツ或ハ二ツ以上選擇スルニ相異ナル仕方ハ (2^5-1) 通リアリ. 然レドモ其中ニハ文字ヲ一ツ取ルコトヲモ含ミテ之ハ題意ニ適合セザルヲ以テ其場合ヲ除クトキハ 2^5-1-5 卽26ノ相異ナル乘積ヲ作ルコトヲ得.

36. $_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdot+{}_nC_n=2^n.$

此等式ハ前節ノ結果ヲ應用シテ證明セラル. 何トナレバ n 個ノ原素ヨリ選擇シテ作ラルヽアラユル組合セハ

n 個ノ原素ヨリ1個ヲ取リタルモノ,

n 個ノ原素ヨリ2個ヲ取リタルモノ,

……………………………

……………………………

n 個ノ原素總テヲ取リタルモノ

ノ和ニ等シ. 而シテ此等ノ組合セノ數ハ夫々, $_nC_1$, $_nC_2$, $\cdots\cdot$, $_nC_n$ ニ等シ. 然ルニ前節ノ結果ニヨレバ其和ハ 2^n-1 ナリ. 故ニ

$$_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n=2^n-1.$$

故ニ $1={}_nC_0$ ト置クトキハ

$$_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n=2^n.$$

37. $_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots\cdot\pm{}_nC_n=0.$

第34節ノ表ニ於テ，第二列以下各列中，奇數個ノ原素ヨリ成ル組合セト偶數個ノ原素ヨリ成ル組合セト，其數相等シ．而シテ此事ノ一般ニ眞ナルコトハ數學的歸納法ニヨリテ證明セラル．何トナレバ第k列マデ此事ガ正シトスレバ，第2列ヨリ第k列マデニ在ル組合セニ於テ奇數個ノ原素ヨリ成ルモノト偶數個ノ原素ヨリ成ルモノト其數相等シカラザルベカラズ．然ルニ第$k+1$列ノ組合セハ此等ノ組合セニ新ラシキ原素ヲ附ケ加ヘタルモノ，aニ新シキ原素ヲ附ケ加ヘタルモノ卽偶數個ノ原素ヨリ成ル組合セ及新シキ原素卽奇數個ノ原素ヨリ成ル組合セナリ．故ニ第$k+1$列ニ於テモ，其中ノ奇數個ノ原素ヨリ成ル組合セノ數ハ偶數個ノ原素ヨリ成ル組合セノ數ニ等シ．従テ，第二列以下ニ在ル總テノ組合セニ於テ，奇數個ノ原素ヨリ成ルモノト偶數個ノ原素ヨリ成ルモノト其數相等シ．而シテ，前者ノ數ハ

$$_nC_1-1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots\cdots$$

ニシテ後者ノ數ハ

$$_nC_2+{}_nC_4+{}_nC_6+\cdots\cdots\cdots$$

ナリ．故ニ

$$_nC_1-1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots\cdots={}_nC_2+{}_nC_4+{}_nC_6+\cdots\cdots$$

$1={}_nC_0$ト置キ且總テノ項ヲ一邊ニ集ムルトキハ

$$_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots\cdots=0$$

トナル．

38. rガ1ヨリnマデ變ズルトキ總テノ組合セノ群中或一ツノ原素ノ現ハルヽ度數．

$a, b, c, \cdots\cdots, l$ヲn個ノ相異ナル原素トシ，之ヨリ$1, 2, \cdots\cdots, n$個ヲ選擇シテアラユル組合セヲ作リ，其中ニ於テ或一ツノ原素例ヘバaノ現ハルヽ度數ヲ求ムベシ．同一ノ原素ハ同一ノ組合セ中唯一度ダケヨリ多ク含マレザルヲ以テaノ現ハルヽ度數ハaヲ含ム組合セノ數ニ等シ．而シテaヲ含ム總テノ組合セハa以外ノ原素ノアラユル組合セニaヲ附ケ足シタルモノトa自身トナリ．而シテ前者ノ數ハ$2^{n-1}-1$ナリ．故ニ所要ノ數ハ2^{n-1}ナリ．

例． 50瓦，20瓦，10瓦，5瓦ノ分銅ヲ以テ幾通リノ重サガ作ラルルカ．又作ラレシ重サノ總計ハ幾何トナルカ．

解． 四個ノ分銅ヨリ一ツ或ハ二ツ以上選ブ方法ノ數ハ2^4-1卽15ナリ．而シテ其何レノ二ツモ相等シカラズ．故ニ15通リノ重サガ作ラル．又各ノ分銅ガ用ヒラレシ度數ハ2^3卽8ナリ．故ニ

$$\text{重サノ總計}=(50\text{瓦}+20\text{瓦}+10\text{瓦}+5\text{瓦})\times 8=680\text{瓦}.$$

39. $1.{}_nC_1+2.{}_nC_2+3.{}_nC_3+\cdots\cdots+n.{}_nC_n=n.2^{n-1}$.

所題ノ等式ハ前節ノ結果ヲ應用シテ證明スルコトヲ得．何トナレバn個ノ相異ナル原素ヨリ$1, 2, \cdots\cdots, n$個ヲ選擇シテ作レルアラユル組合セ中ニ或一ツノ原素ノ現ハルヽ度數ハ2^{n-1}ニ等シキヲ以テ，總テノ組合セ中ニ現ハルヽ原素ノ總數ハ$n.2^{n-1}$ナリ．然ルニ他方ヨリ考フレバ此總テノ組合セ中ニハ1個ノ原素ヨリ成ルモノ$_nC_1$個，2個ノ原素ヨリ成ルモノ$_nC_2$個，$\cdots\cdots$，n個ノ原素ヨリ成ルモノ$_nC_n$個アルヲ以テ其各種ノ組合セ中ニ含マルヽ原素ノ總數ハ夫々$1.{}_nC_1, 2.{}_nC_2, \cdots\cdots, n.{}_nC_n$ナリ．従テ總テノ組合セ中ニ含マルヽ原素ノ總數ハ此等ノ和ニ等シ．故ニ

$$1.{}_nC_1+2.{}_nC_2+3.{}_nC_3+\cdots\cdots+n.{}_nC_n=n.2^{n-1}.$$

第四章　互ニ相異ナル n 個ノ原素ヨリ r 個ヲ採ル順列

40. 互ニ相異ナル n 個ノ原素ヨリ r 個ヲ採ル順列ノ數.

互ニ相異ナル n 個ノ原素 $a, b, c, \cdots\cdots, l$ ヨリ r 個ヲアラユル方法ニテ選擇シ，其各ノ組合セヲアラユル方法ニテ排列スルトキハ，n 個ノ相異ナル原素ヨリ r 個ヲ取リテ作ラルヽアラユル順列ガ得ラル．斯ノ如クシテ作リタル順列ノ數ヲ表スニ ${}_nP_r$ ヲ用ユ.* 次ニ其値ヲ求メントス．

第一法. ${}_nP_r$ ノ値ハ之ヲ作リシ方法ヨリ考フルトキハ容易ニ知ルコトヲ得．先 n 個ノ原素ヨリ r 個ヲ選擇スルニハ ${}_nC_r$ 個ノ方法アリ．而シテ其各ノ組合セヨリ ${}_rP_r$ 即 $r!$ 個ノ順列ガ作ラル．故ニ

$$所要ノ順列ノ數 = {}_nC_r \times r! = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \times r!$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1).$$

故ニ
$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$
$$= n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1).$$

注意 1. $0!=1$ トスルトキハ此公式ハ $n=r$ ナルトキニモ成立スルコトヲ知ル．

注意 2. n ト r トノ値ガ知ラレタルトキ ${}_nP_r$ ノ値ヲ計算スルニハ $n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)$ ノ値ヲ求ムル方ガ便利ナルコト多シ．

而シテ此積ヲ書キ下スニハ其因數ノ數ガ r ナルヲ以テ與ヘラレタ

* 之ヲ ${}^nP_r$ ニテ表ス著者モアリ．

ル n ノ値ヨリ始メ之ヨリ次第ニ 1 ヲ減ジタル數ヲ r 個ダケ書クカ，豫メ $n-r+1$ ヲ計算シ置キ與ヘラレタル n ノ値ヨリ $n-r+1$ マデノ整數ヲ悉ク書ケバヨシ．

注意 3. 順列ノ場合ニハ組合セノ場合ト異ナリ ${}_nP_r = {}_nP_{n-r}$ ナル等式ノ成立セザルコトヲ注意スベシ．

第二法. 今考ヘントスル順列群中ノ順列ハ次ノ如クニ分チテ考フルコトヲ得．

a ガ左端ニ在ルモノ　（第一群），
b ガ左端ニ在ルモノ　（第二群），
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
l ガ左端ニ在ルモノ　（第 n 群）．

而シテ此第一群中ノ順列ハ，n 個ノ原素中ヨリ a ヲ除キ，殘リノ $n-1$ 個ノ原素 $b, c, \cdots\cdots, l$ 中ヨリ $r-1$ 個ヲ取リテアラユル順列ヲ遺漏モナク又重複モナク作リ，其各ノ左端ニ a ヲ附ケ加ヘタルモノナリ．故ニ第一群ニ含マルヽ順列ノ數ハ ${}_{n-1}P_{r-1}$ ナリ．同樣ニ第二群ニ含マルヽモノ，第三群ニ含マルヽモノ等ノ數ハ各 ${}_{n-1}P_{r-1}$ ナリ．故ニ次ノ等式ガ得ラル．

$${}_nP_r = n \cdot {}_{n-1}P_{r-1}.$$

偖此等式ハ n ト r ガ正ノ整數ニシテ $r \leqq n$ ナルトキハ常ニ成立スルガ故ニ其中ノ n ノ代リニ $n-1, n-2, \cdots\cdots, n-r+2$ ト置クト同時ニ r ノ代リニ $r-1, r-2, \cdots\cdots, 2$ ト置クトキハ，次ノ等式ガ得ラル．

$${}_{n-1}P_{r-1} = (n-1)\,{}_{n-2}P_{r-2},$$
$${}_{n-2}P_{r-2} = (n-2)\,{}_{n-3}P_{r-3},$$

$${}_{n-2}P_{r-2} = (n-2)\,{}_{n-3}P_{r-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$${}_{n-r+2}P_2 = (n-r+2)\,{}_{n-r+1}P_1.$$

此等ノ等式ヲ前ノ等式ト共ニ邊々相乘ズルトキハ

$${}_nP_r = n(n-1)\cdots\cdots(n-r+2)\,{}_{n-r+1}P_1$$

トナル. 然ルニ明ニ ${}_{n-r+1}P_1=n-r+1$ ナルヲ以テ

$${}_nP_r = n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1).$$

第三法.

右ノ圖ニ示スガ如ク, 一直線上ニ排列セラレタル r 個ノ場處アリト

1	2	3				r

想像シ, 之ニ $1, 2, 3, \cdots\cdots, r$ ノ番號ヲ附ス. 此等ノ場處ノ各ニ夫々一ツ宛原素ヲ入レテ總テノ場處ヲ充タスベキ相異ナル方法ノ數ハ ${}_nP_r$ ナリ. 故ニ其方法ガ幾何ナルカヲ考究シテ ${}_nP_r$ ヲ求ムベシ.

今吾人ノ考究セル n 個ノ原素ハ悉ク相異ナレルヲ以テ, r 個ノ場處ノ1ノ場處ヲ充タスニハ n 個ノ相異ナル方法アリ. 今 n 個ノ原素ノ中ノ一ツヲ1ノ場處ニ入レタリトセヨ. 然ラバ後ニハ $n-1$ 個ノ相異ナル原素ガ殘ルヲ以テ, 2ノ場處ヲ充タスニハ $n-1$ 個ノ方法アリ. 故ニ1ト2トヲ充タスニハ $n(n-1)$ 個ノ方法アリ. 其中ノ或方法ヲ以テ1ト2トノ場處ヲ充タシタリトスレバ3ノ場處ヲ充タスニハ $n-2$ 個ノ方法アリ. 故ニ 1, 2, 3 ノ場處ヲ充タスニハ $n(n-1)(n-2)$ 個ノ方法アリ. 以下同樣ニシテ r 個ノ場處ヲ充タスニハ $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$ 個ノ方法アルコトヲ知ル. 故ニ

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1).$$

例題 (1). ${}_{11}P_r = 990$ ナルトキハ r ノ値如何.

解. $11\times10\times\cdots\cdots\times(11-r+1) = 990.$

故ニ $11\times10\times\cdots\cdots(\text{因數 } r \text{ 個}) = 11\times10\times9.$

故ニ $r = 3.$

(2). ${}_{2n}P_3 = 44\times{}_nP_2$ ナルトキハ n ノ値ヲ求メヨ.

解. $2n(2n-1)(2n-2) = 44n(n-1).$

此方程式ヨリ $n=0$, $n=1$, $n=6$ ナル値ヲ得. $n=0$, $n=1$ ナルトキハ ${}_nP_2$ ハ無意味ナリ. 故ニ 6 ヲ以テ答トス.

(3). ${}_nP_4=20\times{}_nP_2$ ナルトキ n ノ値ヲ求メヨ.

解. $n(n-1)(n-2)(n-3)=20n(n-1).$

$n\neq0$, $n\neq1$ ナルヲ以テ

$$(n-2)(n-3) = 20.$$

故ニ $n^2-5n-14=0.$

故ニ $n = 7$ 或ハ $-2.$

n ハ正ナラザルベカラザルヲ以テ -2 ハ取ルコトヲ得ズ. 故ニ所要ノ數ハ7ナリ.

(4). ${}_{3n}P_4 = \frac{126}{5}\cdot{}_{2n}P_3$ ナルトキ n ノ値如何.

解. $3n(3n-1)(3n-2)(3n-3) = \frac{126}{5}\,2n(2n-1)(2n-2).$

先 n ト $n-1$ トハ兩邊ニ共通ノ因數ナルヲ以テ $n=0$, $n=1$ ハ此方程式ノ根ナリ. 然レドモ此二ツノ n ノ値ハ本題ニ適合セズ. 故ニ此二ツノ因數ヲ去リテ

$$9(3n-1)(3n-2) = \frac{126}{5}\,4(2n-1).$$

故ニ $45n^2-157n+66=0.$

故ニ $n=3$ 或ハ $\frac{22}{45}.$

然レドモ此後ノ値ハ問題ニ適合セズ．故ニ所要ノ n ノ値ハ3ナリ．

(5). ${}_{56}P_{r+6} : {}_{54}P_{r+3} = 30800 : 1$ ナルトキ r ノ値如何．

解. $$\frac{56.\,55.\,54\cdots(52-r)(51-r)}{54.\,53.\,52\cdots(52-r)} = 30800.$$

故ニ $$56.\,55.(51-r) = 30800.$$

故ニ $$r = 41.$$

(6). ${}_nP_r = 720,\ {}_nC_r = 120$ ナルトキ r ノ値如何．

解. ${}_nP_r = r!\,{}_nC_r$ 故ニ $720 = r!\,120$. 故ニ $r! = 6 = 1.2.3.$ 故ニ $r = 3.$

(7). 數字 0,1,2,3 ヲ用ヒテ作リ得ベキ數ハ幾何アリヤ．但同ジ數字ヲ重複シテ用フルコトヲ許サズ．

解. 此等ノ數字ヲ以テ作リ得ベキ四桁，三桁，二桁，一桁ノ數ハ夫々 ${}_4P_4 - {}_3P_3,\ {}_4P_3 - {}_3P_2,\ {}_4P_2 - {}_3P_1,\ {}_3P_1$ ナリ．故ニ

$$所要ノ數 = ({}_4P_4 - {}_3P_3) + ({}_4P_3 - {}_3P_2) + ({}_4P_2 - {}_3P_1) + {}_3P_1 = 48.$$

(8). 6 個ノ旗アリテ其色皆異ナレリ．其總テ或ハ其中ノ若干ヲ長ク繫ギ合セテ信號ヲ作ラントス．幾通リノ信號ガ作ラルベキカ．

解. 總テノ旗ヲ用ユルトキハ ${}_6P_6$ 通リノ信號ヲ作ルコトヲ得．5, 4, 3, 2, 1 個ノ旗ヲ用ユルトキハ夫々 ${}_6P_5,\ {}_6P_4,\ {}_6P_3,\ {}_6P_2,\ {}_6P_1$ ノ信號ガ作ラル．故ニ

$$所要ノ數 = {}_6P_6 + {}_6P_5 + {}_6P_4 + {}_6P_3 + {}_6P_2 + {}_6P_1 = 1956.$$

(9). 數字 7, 6, 5, 4, 3, 2 ヲ排列シテ作ラルベキ數ノ中1000ト10000トノ間ニアルモノ幾何アリヤ．

解. 作ラルベキ數ハ 1000 ト 10000 トノ間ノ數ナルヲ以テ四桁ノ數ナリ．故ニ所設ノ 6 個ノ數字ヨリ 4 個ヲ取リテ作ラルベキ順列ノ數ヲ求ムレバヨシ．故ニ

$$所要ノ數 = {}_6P_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360.$$

(10). 數字 1, 2, 3, 4, 5, 6 ノ中ヨリ四ツヲ取リテ作ラルヽ數ノ中 25 ニテ割リ切ラルヽモノ幾何アリヤ．

解. 終リノ2位ガ 25, 50, 75, 00 ナル數ハ 25 ニテ割リ切ラレ此外ニ 25 ニテ割リ切ラルヽ數ナシ．然レドモ此四ツノ場合ノ中後ノ三ツハ本題ニ於テ許スコトヲ得ズ．故ニ條件ニ適スル數ハ 25 ニテ終ル數ナラザルベカラズ．從テ十ノ位及一ノ位ノ數ヲ定ムル異ナル方法ヲ考フレバヨシ．其數ハ ${}_4P_2$ 卽 12 ナリ．

(11). 數字 1, 2, 3, ……, 9 ヲ各一度ヅヽ取リテ排列シテ作ラルベキ數ノ中，終リノ二ツノ數字ガ偶數ヲ表ス數字ニシテ，且其中ノ奇數ヲ表ス數字ハ左ヨリ右ニ至ルニ從ヒ次第ニ小ナルヤウニナリ居ルモノ幾何アリヤ．

解. 終リノ二ツノ偶數ノ置キ方ハ ${}_4P_2$ 通リナリ．其中ノ或方法ニテ終リノ二ツノ數字ヲ定メタルトキニハ殘リノ數字ノ置キ方ハ此上何等ノ制限ナキトキニハ 7! ナリ．然ルニ奇數ヲ表ス數字ハ大ナルモノヨリ次第ニ小ナルヤウニナサヾルベカラザルヲ以テ作ラルベキ數字ノ數ハ ${}_4P_2 \cdot \dfrac{7!}{5!}$ 卽 504 ナリ．

(12). n 個ノモノヽ中ヨリ r 個ヲ取リテ作レル順列中，p 個 $(p<r)$ ノ特別ナルモノヲ含ムモノヽ數ハ幾何アリヤ．

解. 先 n 個ノモノヨリ p 個ノモノヲ除キ置キ，殘リノ $n-p$ 個ヨリ $r-p$ 個ヲ取リテ順列ヲ作レバ，其數ハ ${}_{n-p}P_{r-p}$ ナリ 其一ツニ p 個ノモノヽ中ノ一ツヲ附ケ加フル仕方ノ數ハ $r-p+1$ ナリ．從テ p 個ノ中ノ一ツヲ附ケ加ヘタルトキ ${}_{n-p}P_{r-p} \times (r-p+1)$ 個ノ順列ガ得ラル．其一ツニ p 個ノ中ノ他ノモノヲ附ケ加フルニハ，$r-p+2$ 個

ノ方法アリ. 從テ總テノ順列ニ附ケ加フルコトニヨリテハ, ${}_{n-p}P_{r-p}\times(r-p+1)(r-p+2)$ 個ノ順列ガ得ラル. 以下同樣ニシテ p 個ノモノヲ附ケ加フルコトニヨリ,

$${}_{n-p}P_{r-p}\times(r-p+1)(r-p+2)\cdots\cdot r \quad 即 \quad {}_{n-p}P_{r-p}\times{}_rP_p$$

個ノ順列ガ得ラル.

別解. n 個ノモノヨリ r 個ヲ取ル組合セノ中特別ナル p 個ヲ含ムモノヽ數ハ ${}_{n-p}C_{r-p}$ ナリ. 而シテ其組合セニ特別ノ p 個ノモノヲ足シテ r 個トナシ之ヲ排列スルトキハ所要ノ順列ガ得ラル. 而シテ其排列ノ仕方ハ $r!$ 通ナリ. 故ニ

$$所要ノ數={}_{n-p}C_{r-p}\times r! = \frac{(n-p)!\,r!}{(r-p)!\,(n-r)!}$$

(13). いろはにほへとノ七字中ヨリ種々ニ三字ヲ取リテ結ビ付ケタルモノヲいろはノ順ニ竝ブルトキハにほへト云フモノハ其何番目ニナルベキカ.

解. 第一ノ文字ガい, ろ, はナル順列ハ皆にほへニ先ダツベシ. 而シテ此等ノ數ヲ求ムルニ第一ノ文字ガいナルモノモ, ろナルモノモ, 又はナルモノモ皆夫々 ${}_6P_2$ ナリ. 故ニ其總數ハ $3\times{}_6P_2$ 即 90 ナリ.

次ニ第一ノ文字ガにナル順列ニテモ第二ノ文字ガい, ろ, はノ來タルモノハ竝ベ替ヘラレタル後ニハにほへニ先ダツベシ. 而シテにい, にろ, にはニテ始マル順列ハ其數夫々 ${}_5P_1$ ナリ. 故ニ其總數ハ $3\times{}_5P_1$ 即 15 ナリ.

次ニ第一ノ文字ガにニシテ第二ノ文字ガほナル順列ニテモ第三ノ文字ガい, ろ, はナルモノハ亦竝ベ換ヘラレタル後ニハにほへニ先ダツベシ. 而シテ其數ハ明ニ3ナリ.

此外ニ先ダツモノナシ.

故ニ $90+15+3$ 即 108 ハにほへニ先ダツ順列ノ數ニシテ之ニ1ヲ加ヘタルモノガにほへノ番目ノ數ナリ. 故ニにほへハ第109番目ニアリ.*

(14). 7個ノ母字ト5個ノ子字トヲ以テ, 4個ノ母字ト3個ノ子字トヨリナル語ヲ作ルニ, (i) 文字ノ排列ニ就テ何等ノ制限モナキ場合, (ii) 二ツノ子字ガ相隣ラザルヤウニナス場合, 夫々幾通リノ仕方アルカ.

解. 7個ノ母字ヨリ4個ヲ選ブ仕方ハ ${}_7C_4$ 通リナリ. 今或方法ニテ母字ヲ選ビタリトスレバ, 之ニ對シテ子字ヲ選ブニハ ${}_5C_3$ 通リノ仕方アリ. 故ニ文字ヲ選ブニ ${}_7C_4\cdot{}_5C_3$ 個ノ仕方アリ. 而シテ此7個ノ文字ヲ排列スルニ當リ,

(i) ノ場合ニ於テハ, 一ツノ組合セヨリ ${}_7P_7$ 通リノ語ヲ作ルコトヲ得. 故ニ

$$所要ノ數={}_7C_4\cdot{}_5C_3\cdot{}_7P_7=\frac{7.6.5}{3.2.1}\cdot\frac{5.4}{2.1}.7.6.5.4.3.2.1$$
$$=1764000.$$

(ii) ノ場合ニ於テハ, 先4個ノ母字ヲアラユル仕方ニテ排列スルニ其數ハ ${}_4P_4$ 通リナリ. 其一ツノ排列ニ於テ母字ノ間ト兩端トノ5個ノ場處ニ3個ノ子字ヲ置ク方法ヲ考フルニ其數ハ ${}_5P_3$ 通リナリ. 故ニ一ツノ組合セヨリ, ${}_4P_4\cdot{}_5P_3$ 個ノ語ガ作ラル. 故ニ

$$所要ノ數={}_7C_4\cdot{}_5C_3\cdot{}_4P_4\cdot{}_5P_3=\frac{7.6.5}{3.2.1}\cdot\frac{5.4}{2.1}\cdot4.3.2.1.5.4.3=504000.$$

(15). 6人ノ中ヨリ5人ヲ選出シテ環狀順列ヲ作ラントス. 其作リ方幾通リナルカ.

* 此問題ヲ一般ニ擴張スルコトハ興味アル問題ナリ.

解. 所要ノ數 $= \dfrac{{}_6P_5}{5} = \dfrac{6.5.4.3.2}{5} = 144.$

(16). 7人ノ紳士ト5人ノ貴婦人トガ圓卓ノ周リニ坐セントス. 何レ2人ノ貴婦人モ相隣ルコトヲ得ズ. 坐リ方ノ數如何.

解. 7人ノ紳士ノ坐ル仕方ノ數ハ $(7-1)!$ 卽 $6!$ ナリ. 而シテ紳士ノ間ノ數ハ7箇ナルヲ以テ貴婦人ノ坐ル仕方ノ數ハ紳士ノ坐リ方ノ定マリシトキニ於テ ${}_7P_5$ ナリ. 故ニ

$$所要ノ數 = 6!\cdot{}_7P_5 = 1814400.$$

(17). 前題ニ於テ特別ナル1人ノ貴婦人ハ或特別ナル1人ノ紳士ノ脇ニ坐スルコトヲ欲スト云フ. 坐リ方ノ數如何.

解. 7人ノ紳士ノ坐ル仕方ノ數ハ $6!$ ナリ. 次ニ特別ナル1人ノ紳士ノ一側ヲ除キ他ノ6個ノ席ニ, 特別ナル1人ノ貴婦人ヲ除キタル他ノ4人ヲ坐ラシムル仕方ノ數ハ ${}_6P_4$ ナリ. 而シテ特別ノ紳士ノ側ハ勿論2個ナリ. 故ニ

$$所要ノ數 = 6!\cdot{}_6P_4\cdot 2 = 518400.$$

第五章 重複組合セ

41. 二ツノ場合ノ區別.

是迄論ジタル組合セハ, 之ヲ構成スル原素ガ皆相異ナルモノナリキ. 本章ニ於テハ, 原素中相同ジキモノヽアル場合ヲ論ゼントス. 所設ノ原素中, α_1 個ハ a_1, α_2 個ハ a_2, ‥‥, α_m 個ハ a_m ナリトシ, 之ヨリ r 個ヲ取レル組合セヲ考フルニ, 一ツノ組合セニ含マルベキ原素ノ總數ハ r ニシテ, 從テ一ツノ組合セニ含マルベキ同ジ原素ノ數ハ多クトモ r ナルヲ以テ, 譬ヘ同ジ原素ガ r 個ヨリ幾ツ多クアリトモ, 作ラルベキ組合セノ數ハ其原素ガ r ナル場合ト同一ナリ. 故ニ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots, \alpha_m$ ハ總テ r ヨリ大ナラザルモノト考フルコトヲ得ベシ.

例ヘバ, $\alpha_1=3$, $\alpha_2=4$, $\alpha_3=3$ ニシテ, $r=2$ ナルトキ作ラルベキ組合セハ

$$a_1a_1,\quad a_1a_2,\quad a_1a_3,\quad a_2a_2,\quad a_2a_3,\quad a_3a_3$$

ノ六個ニシテ, $\alpha_1=2, \alpha_2=2, \alpha_3=2$ ナル場合ト異ナルコトナシ. 然レドモ, 同ジ原素ノ數ガ r ヨリ小ナル場合ハ, r ナル場合ト同一ニアラズ.

例ヘバ, $\alpha_1=2$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=2$ ニシテ, $r=2$ ナル場合ニ於テハ, 作ラルベキ組合セハ,

$$a_1a_1,\quad a_1a_2,\quad a_1a_3,\quad a_2a_3,\quad a_3a_3$$

ノ五個ニシテ, 前ノ場合トハ異ナレリ.

故ニ吾人ハ, 此種ノ組合セヲ論ズルニ當リ, 次ノ如ク區別ヲナスヲ便利トス.

I. $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_m$ ハ皆rヨリ大ナラズ，其中ニ少ナクトモ一ツrヨリ小ナルモノヽアル場合.

II. $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_m=r$ ナル場合.

此二ツノ場合中，Iノ場合ガ一般ナルモノニシテ，IIノ場合ハ其特別ナルモノト考フルコトヲ得.

42. 無制限重複組合セ及制限附重複組合セ.

所設ノ原素中ノ同ジモノガ幾ツモアル場合ハ，又次ノ如ク考フルコトヲ得. 卽所設ノ原素中ニハ同ジモノ無ク，皆相異ナルモノナレドモ，之ヨリ組合セヲ作ルニ當リ，同ジ原素ヲ幾度モ繰返シテ取ルコトヲ得トスルニアリ. 例ヘバ原素 $a_1, a_2, a_2, a_2, a_3, a_3$ ヨリ，二ツヲ取ル組合セヲ作ルト云フコトハ又原素 a_1, a_2, a_3 ヨリ a_1 ハ1度，a_2 ハ3度，a_3 ハ2度繰返シテ取ルコトヲ許シテ，二ツヲ取ル組合セヲ作ルト云フガ如シ.

斯ノ如キ考ノ下ニハ，前節ニ述ベタル組合セヲ重複組合セト云フ. 而シテ前節Iノ場合ハ，或一ツノ組合セヲ作ルニ當リ或原素ヲ反覆スル度數ニ制限ノアル場合ニシテ，IIノ場合ハ制限ナキ場合ナリ. 故ニ前ノモノヲ，制限附重複組合セ，後ノモノヲ無制限重複組合セト云フ. 次ニ先無制限重複組合セニ就キテ論ゼン.

43. 無制限重複組合セヲ作ルコト.

一ツノ組合セ中ニ含マルヽ原素ノ數ガ1ナル場合ヨリ始メ，其數ガ2, 3, ・・・・ナル組合セヲ作ル一ツノ方法ハ次ノ如シ.

先所設ノ n 個ノ原素ヲ $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ トスレバ之ヨリ一ツヲ取ル無制限重複組合セハ明ニ

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots\cdots,\ a_n \qquad (1)$$

ナリ. 次ニ此等ノ n 個ノ原素ヨリ二ツヲ取ル無制限重複組合セヲ作ルニハ

(1)ノ總テノ原素ノ左側ニ a_1 ヲ附ケタルモノ　$a_1a_1,\ a_1a_2,\ a_1a_3, \cdots\cdots, a_1a_n$

(1)ノ a_2 以下(a_2 ヲ含ム)ノ原素ノ左側ニ a_2 ヲ附ケタルモノ　$a_2a_2,\ a_2a_3, \cdots\cdots, a_2a_n$

(1)ノ a_3 以下(a_3 ヲ含ム)ノ原素ノ左側ニ a_3 ヲ附ケタルモノ　$a_3a_3, \cdots\cdots, a_3a_n$　(2)

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

(1)ノ a_{n-1} 以下(a_{n-1} ヲ含ム)ノ原素ノ左側ニ a_{n-1} ヲ附ケタルモノ　$a_{n-1}a_{n-1},\ a_{n-1}a_n$

(1)ノ最後ノ原素 a_n ニ a_n ヲ附ケタルモノ　a_na_n

ヲ作レバ此等ヲ總テノ組合セハ卽所要ノ組合セナリ. 次ニ n 個ノ原素ヨリ3個ヲ取ル無制限重複組合セヲ作ルニハ(2)ノ中ノ總テノ組合セノ左側ニ a_1 ヲ附ケタルモノ，a_2 ヲ以テ始マルモノ及其以後ノ總テノ組合セノ左側ニ a_2 ヲ附ケタルモノ等ヲ書ケバヨシ. 卽

$$a_1a_1a_1,\ a_1a_1a_2,\ a_1a_1a_3, \cdots, a_1a_2a_2, \cdots, a_1a_2a_3, \cdots, a_1a_{n-1}a_n,\quad a_1a_na_n,$$

$$a_2a_2a_2, \cdots, a_2a_3a_3, \cdots, a_2a_{n-1}a_n,\quad a_2a_na_n,$$

$$a_3a_3a_3, \cdots, a_3a_{n-1}a_n,\quad a_3a_na_n,$$

・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・

$$a_na_na_n.$$

以下四ツヲ取ルモノ，五ツヲ取ルモノ等モ同樣ニシテ作ラル.

例. 原素 a, b, c, d ヲ以テ上ニ示セル方法ニヨリ原素ヲ一ツ取ル場合，二ツ取ル場合，三ツ取ル場合ノ無制限重複組合セヲ作レ.

解.　$a, b, c, d,$

$aa,\ ab,\ ac,\ ad,\ bb,\ bc,\ bd,\ cc,\ cd,\ dd,$

$aaa,\ aab,\ aac,\ aad,\ abb,\ abc,\ abd,\ acc,\ acd,\ add,$

$bbb,\ bbc,\ bbd,\ bcc,\ bcd,\ bdd,$

$ccc,\ ccd,\ cdd,$

$ddd.$

44. 無制限重複組合セノ數ヲ求ムルコト.

n個ノ相異ナル原素ヨリr個ヲ取リテ作レル總テノ無制限重複組合セ數ヲ表ハスニ ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$ ヲ以テス.* 次ニ其値ヲ求メントス.

第一證明法.

前節ニ於テ考究シタル結果ニヨレバ

$$ {}_{n}\mathrm{H}_{1} = n = {}_{n}\mathrm{C}_{1}, $$

$$ {}_{n}\mathrm{H}_{2} = n+(n-1)+\cdots+1 = \frac{n(n+1)}{2} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{2} $$

ナリ. 此等ノ等式ヨリ考フレバ ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$ ハ一般ニ等式

$$ {}_{n}\mathrm{H}_{r} = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r} \qquad (1) $$

ニテ其値ノ表サルベキニアラズヤトハ何人モ想ヒ到ル所ナルベシ. 吾人ハ次ニ此等式ノ一般ニ眞ナルコトヲ數學的歸納法ニヨリテ證明スベシ.

先等式(1)ハrガ$1, 2, \cdots, \rho-1$ナル場合ニ眞ナリト假定ス. 偖 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ヨリρ個ヲ取リテ作レル總テノ組合セハ次ノ如ク分チテ考フルコトヲ得. 卽,

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ ヨリ $\rho-1$ 個ヲ取リタル無制限重複組合セニ a_1 ヲツケ加ヘタルモノ,

$a_2, a_3, \cdots, a_n$ ヨリ $\rho-1$ 個ヲ取リタル無制限重複組合セニ a_2 ヲツケ加ヘタルモノ,

* n個ノ文字 $a, b, \cdots, l$ ニテ作ラルベキr次ノ乘積又ハ乘羃ノ數卽r次ノ同次乘積ノ數ハ無制限重複組合セノ數ニ等シ(本節ノ終端例題參照).

$a_3, \cdots, a_n$ ヨリ $\rho-1$ 個ヲ取リタル無制限重複組合セニ a_3 ヲツケ加ヘタルモノ

………………………………………………

………………………………………………

a_n ヨリ $\rho-1$ 個ヲ取リタル無制限重複組合セニ a_n ヲツケ加ヘタルモノ.

トスルコトヲ得, 而シテ此各部分ノ數ハ假定ニヨリ夫々 ${}_{n+\rho-2}\mathrm{C}_{\rho-1}$, ${}_{n+\rho-3}\mathrm{C}_{\rho-1}$, ${}_{n+\rho-4}\mathrm{C}_{\rho-1}$, $\cdots\cdots$, ${}_{\rho-1}\mathrm{C}_{\rho-1}$ ナリ. 故ニ

$$ {}_{n}\mathrm{H}_{\rho} = {}_{n+\rho-2}\mathrm{C}_{\rho-1} + {}_{n+\rho-3}\mathrm{C}_{\rho-1} + {}_{n+\rho-4}\mathrm{C}_{\rho-1} + \cdots + {}_{\rho-1}\mathrm{C}_{\rho-1}. $$

然ルニ第29節ニヨリテ

$$ {}_{n+\rho-2}\mathrm{C}_{\rho-1} = {}_{n+\rho-1}\mathrm{C}_{\rho} - {}_{n+\rho-2}\mathrm{C}_{\rho}, $$

$$ {}_{n+\rho-3}\mathrm{C}_{\rho-1} = {}_{n+\rho-2}\mathrm{C}_{\rho} - {}_{n+\rho-3}\mathrm{C}_{\rho}, $$

$$ {}_{n+\rho-4}\mathrm{C}_{\rho-1} = {}_{n+\rho-3}\mathrm{C}_{\rho} - {}_{n+\rho-4}\mathrm{C}_{\rho}, $$

………………………………

………………………………

$$ {}_{\rho}\mathrm{C}_{\rho-1} = {}_{\rho+1}\mathrm{C}_{\rho} - {}_{\rho}\mathrm{C}_{\rho}, $$

$$ {}_{\rho-1}\mathrm{C}_{\rho-1} = {}_{\rho}\mathrm{C}_{\rho}. $$

此等ノ等式ヲ邊々相加フレバ

$$ {}_{n}\mathrm{H}_{\rho} = {}_{n+\rho-1}\mathrm{C}_{\rho}. $$

故ニ等式(1)ハrガρナルトキニモ眞ナリ. 然ルニ $r=1, r=2$ ナルトキハ既ニ此等式ガ眞ナルヲ知ル. 故ニ此等式(1)ハ一般ニ眞ナリ. 換言スレバn個ノ原素ヨリ無制限ニ重複スルコトヲ許シテr個ヲ取ル組合セノ數ハ, $n+r-1$個ノ原素ヨリ重複ヲ許サズシテr個ヲ取ル組合セノ數ニ等シ.

第二證明法.

此證明ニ於テハ,便宜ノ爲原素トシテ數字 $1,2,3,\cdots\cdots,n$ ヲ用フ.今此等ノ原素ヲ以テ r 個ヲ取リタル無制限重複組合セノ群ヲ作リ之ヲHトシ其中ノ各ノ組合セノ中ノ原素ヲ,數ノ大サノ順序ニ從ヒテ排列シ(最小ナル數ヲ左端ニ置キ,右ニ進ムニ從ヒテ大ナル數ガアルヤウニシ),其第一,第二,$\cdots\cdots$,第 r 番目ノ原素ニ夫々 $0,1,2,\cdots\cdots,r-1$ ナル數ヲ加フ.而シテ斯クシテ得タル組合セノ總テヲ表スニAヲ以テスベシ.然ラバA中ノ組合セハ,1ヨリ $n+r-1$ マデノ原素(1ヨリ $n+r-1$ マデノ原素ヲ悉ク含ムヤ否ヤハ問題外トシ)ヨリ成リ,且一ツノ組合セ中ニハ同ジ原素アルコトナシ.何トナレバ,原ノ組合セ中ニアル一ツ原素ハ,其右ニ在ルモノト等シキカ或ハソレヨリ小ナリ.而シテAヲ作ルニハ,或原素ニハ其右ニ在ル原素ニ加フル數ヨリハ小ナル數ヲ加ヘシヲ以テ,A中ノ組合セニ於テハ或原素ハ常ニ其右ニ在ル原素ヨリ小トナリ居レバナリ.又A中ニハ同一ノ組合セナシ.何トナレバ若同一ノ組合セアルトキハ,其相等シキ組合セノ第一,第二,$\cdots\cdots$,第 r 番目ノ原素ヨリ夫々 $0,1,2,\cdots\cdots,r-1$ ヲ減ズルトキハ矢張同一ノ組合セガ得ラレ,而シテ此二ツノ組合セハ共ニHニ屬セザルベカラズ.之假定ニ反ス.故ニA中ニハ同一ノ組合セアルコトナシ.

今別ニ原素 $1,2,3,\cdots,n+r-1$ ヨリ r 個ヲ取ル重複ヲ許サヾル組合セ總テヲ作リ,其群ヲBト名ヅケ,AトBトヲ比較スベシ.A中ノ任意ノ一ツノ組合セヲ取リテ考フルニ,其中ノ原素ハ1ヨリ $n+r-1$ マデノ數ニシテ其一ツノ組合セニ含マルヽ原素ノ數ハ r 個ナリ.而シテ原素中ニハ同ジモノ二ツ以上ナシ.故ニ其組合セハBニ屬ス.

而シテA中ニハ同一ノ組合セナシ.逆ニB中ニ任意ノ組合セヲ取リ,其中ノ原素ヲ數ノ大サノ順序ニ排列シ(左端ノ數ヲ最小ニシテ右ニ進ムニ從ヒテ大ナルヤウニナシ置キ),其第一,第二,$\cdots$,第 r 番目ノ原素ヨリ,夫々 $0,1,2,\cdots\cdots,r-1$ ヲ減ゼヨ.然ラバ其各ノ殘リハ1ナルカ或ハ1ヨリ大ナリ.何トナレバB中ノ組合セハ,1ヨリ $r+n-1$ マデノ原素ヨリ成リ,且此等ノ原素ハ數ノ大サノ順序ニ排列セラレアルヲ以テ,左ヨリ第 r 番目ノ原素ハ少ナクトモ r ナリ.而シテ之ヨリ $r-1$ ヲ減ズルヲ以テ其殘リハ1ナルカ或ハ1ヨリ大ナリ.故ニ斯クシテ得タル一ツノ組合セハ,1ヨリ n マデノ原素ヨリ成リ原素ノ數ハ r ナリ.從テ其組合セハHニ屬セザルベカラズ.從テ引キ算ヲナサヾル前ノ組合セハAニ屬セザルベカラズ.而シテB中同一ノ組合セハ一ツヨリ多クアルコトナシ.依テ第7節定理2ニヨリAトBトハ全ク同一ナラザルベカラズ.然ルニAノ中ノ組合セノ數ハHノ中ノ組合セノ數ニ等シ.故ニ

$$ {}_{n}H_{r} = {}_{n+r-1}C_{r}. $$

第三證明法.

原素 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_n$ 中ヨリ r 個ヲ取リテ作レル重複組合セノ各ニ,原素 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_n$ ノ總テヲ附ケ足ストキハ組合セノ數ハ變ズルコトナク,斯クシテ得タル組合セノ各ニハ各原素ヲ少クトモ一度含ム.而シテ一ツノ組合セハ $n+r$ 個ノ原素ヨリ成ル.故ニ所題ノ組合セノ數ハ n 個ノ原素中ヨリ $n+r$ 個ヲ取ル無制限重複組合セ中各ノ原素ヲ少ナクトモ一度含メルガ如キ組合セノ數ニ等シ.斯ノ如キ組合セノ數ヲ求ムルニハ次ノ如クスルヲ便トス.先 $n+r$ 個ノ1ヲ一直線上ニ列ブ.然ルトキハ其相互ノ間隔ノ數ハ $n+r-1$ 個アリ.而

シテ此等ノ間隔ニ $n-1$ 個ノ分割線ヲ如何樣ニカ排置ス(一ツノ間隔ニ二ツ又ハ二ツヨリ多クノ分割線ヲ置クヲ許サズ)ルコトニヨリテ之ヲ n 個ノ部分ニ分ツコトヲ得. 例ヘバ

$$1,1,1,|1,1,|1,|1,1,1,1,1,|1,|1,1,\cdots\cdots$$

ノ如シ. 偖是ニ於テ最初ノ部分ノ 1 ヲ a_1 ニテ置キ換ヘ,第二ノ部分ノ 1 ヲ a_2 ニテ置キ換ヘ,以下同樣ニナストキハ n 個ノ原素ノ各ヲ少クトモ一ツ組合セテ

$$a_1a_1a_1|a_2a_2|a_3|a_4a_4a_4a_4a_4|a_5|a_6a_6\cdots\cdots$$

ガ得ラル. 而シテ第一ノ部分,第二ノ部分,$\cdots\cdots$ ニ夫々 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ ヲ置キ換フルモノト定メ置クトキハ分割線ノ異ナル排置ハ異ナル組合セヲ生ズ. 故ニ所要ノ組合セノ數ハ分割線ノ排置ノ仕方ノ數ニ等シ. 而シテ其數ハ $n+r-1$ 個ノ間隔ヨリ $n-1$ 個ヲ選ブ仕方ノ數ナリ. 故ニ

$${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_{n-1} = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r.$$

第四證明法.

所題ノ組合セノ各ニ $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ ヲ附ケ足シ $n+r$ 個ノ原素ヨリ成ル組合セヲ作ルマデハ前證明法ト同樣ナリ. 此組合セノ數ヲ求ムルニ次ノ如クス.

組合セ中ノ原素ヲ自然ノ順序ニ列ベ同ジ原素ハ其最初ノモノヽ外ハ皆 s ヲ以テ置キ換フ. 例ヘバ $a_1a_1a_1a_2a_2a_3a_3\cdots\cdots$ ハ $a_1ssa_2sa_3s\cdots\cdots$ トナスガ如シ. 然ラバ各ノ組合セハ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ナル n 個ノ原素ト r 個ノ s ヨリ成ル. 故ニ $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ ト r 個ノ s トヨリ成リ前者ハ自然ノ順序ニアリ. 而シテ a_1 ガ最初ニアル順列ヲ作ルトキニハ其一ツハ必前ノ組合セノ一ツニ對應ス. 故ニ所要ノ組合セノ

數ハ第 15 節及第 22 節ニヨリ

$${}_n\mathrm{H}_r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!}.$$

注意 1. ${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_{n-1}$ ガ $r=0$ ナル場合ニモ成立スルモノトスルトキハ ${}_n\mathrm{H}_0 = {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} = 1$ ナルヲ以テ $r=0$ ナルトキ ${}_n\mathrm{H}_r$ ハ 1 ナリト定ムベシ.

注意 2. ${}_n\mathrm{C}_r$ ニ於テ $n<r$ ナルトキハ其値ハ零ナリト定メタリ. 又 ${}_n\mathrm{P}_r$ ニ於テ $n<r$ ナルトキハ無意味ナリ. 然レドモ ${}_n\mathrm{H}_r$ ニ於テハ $n<r$ ナル場合ニ於テモ零ニアラズ又無意味ニアラザルコトヲ注意スベシ.

例題 (1). 積 $(a+b+c)^7$ ヲ計算スルトキハ異ナル項幾何ガ得ラルルカ.

解. 所要ノ數ハ a, b, c ヨリ 7 個ヲ取リテ作ラルベキ無制限重複組合セノ數ニ等シ. 故ニ

$$\text{所要ノ數} = {}_3\mathrm{H}_7 = {}_{3+7-1}\mathrm{C}_7 = {}_9\mathrm{C}_7 = {}_9\mathrm{C}_2 = 36.$$

(2). 十錢銀貨,五錢白銅貨及一錢銅貨各 5 個宛アリ. 其中ヨリ 5 個ヲ取ル方法ハ幾何アリヤ.

解. 所要ノ數ハ 3 個ノ原素ヨリ 5 個ヲ取ル無制限重複組合セノ數ニ等シ. 故ニ

$$\text{所要ノ數} = {}_3\mathrm{H}_5 = {}_{3+5-1}\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_2 = 21.$$

(3). 試驗官ガ試驗答案ヲ採點スルニ 6 問題ニ對シテ 50 點ヲ與フルニ幾何ノ方法アリヤ. 但各ノ問題ニ對シテハ 5 點以上ニシテ 1 未滿ノ端數ヲ有セザル點ヲ附スルモノトス.

解. 所要ノ數ハ $50-4\times6$ 卽 26 ヲ六ツニ分ツ仕方ノ數ニ等シ. 今 26 個ノ 1 ヲ一直線上ニ列ブルトキハ其相互ノ間隔ノ數ハ $26-1$

本問ノ解ナラズ

即25ナリ．故ニ26ヲ六ツニ分ツニハ25個ノ間隔ニ如何樣ニカシテ五個ノ分割線ヲ排置スレバヨシ．故ニ

$$\text{所要ノ數} = {}_{25}C_5 = 53130.$$

(4). n個ノ骰子ノ投グレバ顯ハルヽ點數ノ排列幾通リアリヤ．

解． 本題ハ6個ノ原素ヨリn個ヲ取ル無制限重複組合セナリ．故ニ

$$\text{所要ノ數} = {}_6H_n = {}_{6+n-1}C_n = {}_{n+5}C_n = {}_{n+5}C_5$$
$$= \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{5!}.$$

(5). $1-{}_nC_1\cdot{}_nH_1+{}_nC_2\cdot{}_nH_2-{}_nC_3\cdot{}_nH_3+\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n\cdot{}_nH_n=0$ ナルコトヲ證明セヨ．

解． $${}_nC_r\cdot{}_nH_r = \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}\cdot\frac{n(n+1)\cdots\cdots(n+r-1)}{r!}$$
$$= \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots\cdots(n^2-\overline{r-1}^2)}{1^2\cdot2^2\cdot3^2\cdots\cdots n^2}$$

ナルヲ以テ，本題ハ

$$1-\frac{n^2}{1}+\frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2\cdot2^2}-\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2\cdot2^2\cdot3^2}+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^n\frac{n^2(n^2-1^2)\cdots\cdots(n^2-\overline{n-1}^2)}{1^2\cdot2^2\cdots\cdots n^2}=0$$

ナルコトヲ證明スルコトニ歸ス．偖此式ノ左邊ニ於テ

第一項ト第二項トノ和ハ $\quad -\dfrac{n^2-1^2}{1^2},$

第一項ヨリ第三項マデノ和ハ $\quad +\dfrac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2\cdot2^2},$

第一項ヨリ第四項マデノ和ハ $\quad -\dfrac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{1^2\cdot2^2\cdot3^2},$

……………………………………………

第一項ヨリ第n項マデノ和ハ $(-1)^n\dfrac{(n^2-1)(n^2-2^2)\cdots\cdots(n^2-n^2)}{1^2\cdot2^2\cdots\cdots n^2}$

而シテ最後ノ和ハ明ニ0ナリ．

45. 無制限重複組合セノ中各原素ヲ少クトモ一度含ムモノノ數．

n個ノ原素ヨリ$n+r$個ノ原素ヲ取ル重複組合セ中各原素ヲ少クトモ一度含ム組合セノ數ヲ表スニ ${}_nM_{n+r}$ ヲ以テスルトキハ前節第三證明法ニ於テ論ジタル所ニヨリ

$${}_nM_{n+r} = {}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r.$$

此等式ニ於テ $n+r=p$ ト置クトキハ

$${}_nM_p = {}_nH_{p-n} = {}_{p-1}C_{p-n} = {}_{p-1}C_{n-1}.$$

例． 歩騎砲工各兵科十名ノ將校アリ．之ヨリ十名ヲ選擇スルニ幾通リノ選ビ方アリヤ．但各兵科ノ將校ハ少クトモ一人選ブヲ要ス．而シテ同一兵科ニ屬スル將校ハ皆同ジ原素ト見做ス．

解． $$\text{所要ノ數} = {}_4M_{10} = {}_{10-1}C_{4-1} = {}_9C_3 = 84.$$

46. 前節ノ一般ノ場合．

n個ノ原素 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ヨリr個ヲ取ル無制限重複組合セ中 a_1 ハ少クトモ α_1度，a_2ハ少クトモα_2度，……，a_nハ少クトモα_n度現ハルヽ組合セノ數ヲ求ムルコトハ前節ノ場合ニ歸スルコトヲ得．何トナレバ斯ノ如キ組合セヨリ a_1 ヲ α_1-1, a_2 ヲ α_2-1, ……, a_n ヲ α_n-1 ダケ取リ去ルトキハ殘リノ組合セハ $r+n-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n)$ 個ノ原素ヲ含ミ而シテ各ノ原素ヲ少クトモ一度含ムモノトナル．故ニ $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n=s$ トスレバ所要ノ組合セノ數ハ

$${}_nM_{r+n-s} \quad \text{即} \quad {}_{r+n-s-1}C_{n-1}$$

ナリ．

例． 歩騎砲工各十人ノ將校アリ．之ヨリ十人ヲ選ブニ歩兵ハ少クトモ二人，騎兵砲兵ヨリハ少クトモ一人，工兵ヨリハ少クトモ三人ヲ選バントス．幾通リノ方法アリヤ．但同一兵科ニ屬スル將校ハ同ジ

原素ト見做ス．

解． $s=2+1+1+3=7$ ナルヲ以テ

$$\text{所要ノ數} = {}_{10+4-7-1}C_{4-1} = {}_6C_4 = 15.$$

47. $\mathbf{{}_nH_r = {}_{n-1}1H_r + {}_{n-1}H_{r-1}}$.

第44節ニヨリ

$${}_{n-1}H_r = {}_{n+r-2}C_r,$$

又
$${}_{n-1}H_{r-1} = {}_{n+r-2}C_{r-1},$$

故ニ
$$\begin{aligned} {}_{n-1}H_r + {}_{n-1}H_{r-1} &= {}_{n+r-2}C_r + {}_{n+r-2}C_{r-1} \\ &= {}_{n+r-1}C_r \\ &= {}_nH_r. \end{aligned}$$

此事ハ又次ノ如クニモ考フルコトヲ得．

n 個ノ原素ヨリ r 個ヲ取ル無制限重複組合セハ，或特別ノ原素，例ヘバ a ヲ含ムモノト然ラザルモノトニ分ツコトヲ得．而シテ前者ハ n 個ノ原素ヨリ其特別ナル原素 a ヲ除キタル他ノ $n-1$ 個ノ原素ヨリ $r-1$ 個ヲ選擇セル無制限重複組合セニ a ヲ附ケ足セバ得ラル．故ニ其數ハ ${}_{n-1}H_{r-1}$ ナリ．又後者ハ n 個ノ原素ヨリ a ヲ除キタル殘リノ $n-1$ 個ノ原素ヨリ r 個ヲ取ル無制限重複組合セニ等シ．故ニ其數ハ ${}_{n-1}H_r$ ナリ．從テ

$${}_nH_r = {}_{n-1}H_r + {}_{n-1}H_{r-1}.$$

48. $\mathbf{{}_nC_1 \cdot {}_{n+r-2}C_{r-1} - {}_nC_2 \cdot {}_{n+r-3}C_{r-2} + {}_nC_3 \cdot {}_{n+r-4}C_{r-3} - \cdots\cdots = {}_{n+r-1}C_r}$.

此等式ハ無制限重複組合セヲ利用シテ證明スルコトヲ得．而シテ之ヲナスニ當リ便利ノ爲ニ原素 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ ヨリ r 個ヲ取リタル無制限重複組合セヲ重複モナク且遺漏モナク取リタル組合セノ群ヲ表スニ

$${}_nH_r[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n] \qquad \text{(A)}$$

ヲ以テスベシ．偖今(A)ナル組合セノ群ヲ考フルニ之ニ屬スル組合セ中 a_1 ヲ含ムモノハ皆 ${}_nH_{r-1}[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n]$ ニ a_1 ヲ附ケ足シタルモノナリ．一般ニ a_i ヲ含ム組合セハ皆 ${}_nH_{r-1}[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n]$ ニ a_i ヲ附ケ足シタルモノナリ．今之ヲ表スニ $a_i\,{}_nH_{r-1}[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n]$ ヲ以テシ，次ノ如キ組合セノ群ヲ作ル．

$$a_1\,{}_nH_{r-1}[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n],\ a_2\,{}_nH_{r-1}[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots, a_n\,{}_nH_{r-1}[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n] \qquad (1)$$

此群ノ全體ヲ考フルニ(A)ハ明ニ此群中ニ含マル．但(1)ト(A)トガ全然同一ナリト云フニアラズ．次ニ(A)中ノ組合セガ(1)ノ中ニ如何樣ニ含マルヽカヲ考究スベシ．(A)ナル群ニ屬スル組合セ中唯一ツノ原素ヨリ成ルモノハ(1)中ニ唯一度含マル．例ヘバ a_i ノミヨリ成ル組合セハ $a_i\,{}_nH_{r-1}[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 中ニ唯一度含マルヽノミナリ．又二種ノ原素ヨリ成ルモノハ二度現ハル．例ヘバ a_i ト a_j トヨリ成ルモノハ $a_i\,{}_nH_{r-1}[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n]$ ト $a_j\,{}_nH_{r-1}[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n]$ トノ中ニ各一度現ハル．

今別ニ

$$a_1a_2\,{}_nH_{r-2}[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n],\ a_1a_3\,{}_nH_{r-2}[a_1, a_2, \cdots\cdots a_n],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots, a_{n-1}a_n\,{}_nH_{r-2}[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n] \qquad (2)$$

ヲ考フルニ此中ニハ唯一種ノ原素ヨリ成ル組合セナク，二種ノ原素ヨリ成ルモノハ唯一度現ハル．例ヘバ a_i ト a_j トヨリ成ルモノハ $a_ia_j\,{}_nH_{r-2}[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n]$ 中ニ唯一度現ハルヽノミナリ．故ニ(1)ヨリ(2)ヲ減ジタル殘リ(三種以上ノ原素ヨリ成ルモノハ暫ク措キ)ニ於テハ一種ノ原素ヨリ成ルモノト二種ノ原素ヨリ成ルモノトハ唯一度

現ハルヽノミナリ.

次ニ三種ノ原素ヨリ成ルモノヲ考フルニ (1) ノ中ニハ三度現ハル例ヘバ a_i, a_j, a_k ヨリ成ル組合セハ $a_i\,{}_nH_{r-1}[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n]$, $a_j\,{}_nH_{r-1}[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 及 $a_k\,{}_nH_{r-1}[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 中ニ各一度現ハル. 又斯ノ如キ組合セハ (2) ノ中ニモ三度現ハル. 例ヘバ a_i, a_j, a_k ヨリ成ル組合セハ $a_ia_j\,{}_nH_{r-2}[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n]$, $a_ia_k\,{}_nH_{r-2}[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n]$ 及 $a_ja_k\,{}_nH_{r-2}[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n]$ 中ニ各一度現ハル. 故ニ (1) ヨリ (2) ヲ減ジタル殘リノ中ニハ三種ノ原素ヨリ成ル組合セハ一ツモナシ. 次ニ

$$a_1a_2a_3\,{}_nH_{r-3}[a_1, a_2, \cdots, a_n],\ a_1a_2a_4\,{}_nH_{r-3}[a_1, a_2, \cdots, a_n], \cdots \quad (3)$$

ヲ考フルニ此中ニハ一種ノ原素ヨリ成レル組合セ及二種ノ原素ヨリ成レル組合セハ一ツモ無シ. 而シテ三種ノ原素ヨリ成ル組合セハ唯一度現ハル. 例ヘバ a_i, a_j, a_k ヨリ成ル組合セハ唯

$$a_ia_ja_k\,{}_nH_{r-3}[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n]$$

中ニ一度現ハルヽノミナリ. 故ニ (1) ヨリ (2) ヲ減ジ (3) ヲ加フレバ ((1) − (2) + (3) ト記スベシ) 其中ニハ一種ノ原素ヨリ成ルモノ, 二種ノ原素ヨリ成ルモノ及三種ノ原素ヨリ成ルモノハ各一度現ハル.

斯ノ如ク (1), (2), (3) 等ノ如キ組合セノ群ヲ次第ニ作リ行キ ν 個ノ群ヲ作リ得タリトセヨ. 而シテ ν 個ノ異ナル原素ヨリ成ル組合セヲ考フルニ斯ノ如キ組合セハ (1) ノ中ニハ各 ${}_\nu C_1$ 度, (2) ノ中ニハ ${}_\nu C_2$ 度, $\cdots\cdots$, (ν) ノ中ニハ ${}_\nu C_\nu$ 度現ハル. 然ルニ

$${}_\nu C_1 - {}_\nu C_2 + {}_\nu C_3 - \cdots\cdots \pm {}_\nu C_\nu = 1.$$

故ニ

$$(1) - (2) + (3) - \cdots\cdots \pm (\nu)$$

ナル組合セノ群ヲ作ルトキハ其中ニハ原素ノ種類ノ數ガ $1, 2, 3, \cdots, \nu$

ナル組合セハ各一度現ハル. 故ニ (1), (2), $\cdots\cdots$, (r) ナル組合セノ群ヲ作リ

$$(1) - (2) + (3) - \cdots\cdots \pm (r)$$

ヲ作ルトキハ其結果ハ (A) ナリ. 而シテ (1), (2), $\cdots\cdots$, (r) ナル組合セノ群中ノ組合セノ數ハ夫々 ${}_nC_1\cdot{}_nH_{r-1}$, ${}_nC_2\cdot{}_nH_{r-2}$, ${}_nC_3\cdot{}_nH_{r-3}$, $\cdots\cdots$, ${}_nC_r\cdot{}_nH_0$ ニシテ (A) ノ中ノ組合セノ數ハ ${}_nH_r$ ナリ. 故ニ

$${}_nC_1\cdot{}_nH_{r-1} - {}_nC_2\cdot{}_nH_{r-2} + {}_nC_3\cdot{}_nH_{r-3} - \cdots\cdots = {}_nH_r.$$

從テ

$${}_nC_1\cdot{}_{n+r-1}C_{r-1} - {}_nC_2\cdot{}_{n+r-2}C_{r-2} + {}_nC_3\cdot{}_{n+r-3}C_{r-3} - \cdots\cdots = {}_{n+r-1}C_r.$$

卽所題ノ等式ヲ證明シ得タリ.

注意. 本節ノ如クシテ所要ノ順列或ハ組合セノ群ヲ作ル方法ヲ**取捨法**ト云フ.

49. 制限附重複組合セノ數ヲ求ムルコト. 第一法.

原素 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ヲ夫々 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ ヨリ多ク取ルコトヲ許サヾル制限附重複組合セノ數ヲ表スニ ${}_nH_r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n)$ ヲ以テス*

偖上述ノ如キ制限ノモトニ成ル組合セハ次ノ如ク分ツコトヲ得.

a_1 ヲ一ツモ含マザルモノ　${}_{n-1}H_r(\alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots, \alpha_n)$ 個,

a_1 ヲ一ツ含ムモノ　${}_{n-1}H_{r-1}(\alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots, \alpha_n)$ 個,

a_1 ヲ二ツ含ムモノ　${}_{n-1}H_{r-2}(\alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots, \alpha_n)$ 個,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

a_1 ヲ α_1 個含ムモノ　${}_{n-1}H_{r-\alpha_1}(\alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots, \alpha_n)$ 個.

* 組合セ自身ヲ表スニハ前節ノ如ク ( ) ヲ用ヒ, 組合セノ數ヲ表スニハ本節ノ如ク [ ] ヲ用フ.

故ニ $${}_{n}\mathrm{H}_{r}(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n) = \sum_{q_1=0}^{\alpha_1} {}_{n-1}\mathrm{H}_{r-q_1}(a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n).$$

然ルニ又同様ニ

$${}_{n-1}\mathrm{H}_{r-q_1}(a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n) = \sum_{q_2=0}^{\alpha_2} {}_{n-2}\mathrm{H}_{r-q_1-q_2}(a_3, \cdots\cdots, a_n).$$

故ニ

$${}_{n}\mathrm{H}_{r}(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n) = \sum_{q_1=0}^{\alpha_1}\sum_{q_2=0}^{\alpha_2} {}_{n-2}\mathrm{H}_{r-q_1-q_2}(a_3, \cdots\cdots, a_n).$$

次第ニ斯ノ如クシテ進ムトキハ遂ニ

$${}_{n}\mathrm{H}_{r}(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n) = \sum_{q_1=0}^{\alpha_1}\sum_{q_2=0}^{\alpha_2}\cdots\cdots\sum_{q_{n-1}=0}^{\alpha_{n-1}} {}_{1}\mathrm{H}_{r-q_1-q_2-\cdots-q_{n-1}}(a_n)$$

ナル等式ヲ得．而シテ此等式ハ所題ノ組合セノ數ガ不定方程式

$$q_1+q_2+q_3+\cdots\cdots+q_{n-1}+q_n=r,$$

$$q_\rho=0, 1, 2, \cdots\cdots, \alpha_\rho\,;\ \rho=1, 2, \cdots\cdots, n$$

ノ解ノ數ニ等シキコトヲ示ス．

例題 (1). ${}_{n}\mathrm{H}_{2}(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)\ [1 \leqq \alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n \leqq 2]$ ニ於テ r 個ノ α ガ 1 ニ等シキトキノ値ヲ求ム．

解． 不定方程式

$$q_1+q_2+\cdots\cdots+q_n=2$$

ハ q ガ正ノ整數ナリト云フ外何等ノ制限ガナケレバ ${}_{n}\mathrm{C}_1+{}_{n}\mathrm{C}_2$ 個ノ解アリ．何トナレバ一ツノ q ガ 2 ニシテ他ノ q ガ總テ零ナル場合ハ ${}_{n}\mathrm{C}_1$ ニシテ，二ツノ q ガ各 1 ニシテ他ノ q ガ皆零ナル場合ハ ${}_{n}\mathrm{C}_2$ ナレバナリ．然レドモ本題ニ於テハ r 個ノ q ガ 2 トナルコトヲ得ザルヲ以テ不定方程式ハ

$${}_{n}\mathrm{C}_2+{}_{n}\mathrm{C}_1-r$$

個ノ解ヲ有ス．故ニ之ヲ以テ答トス．

(2). *therefore* ナル語ノ文字ヨリ 4 字ヲ選ブニ幾通リノ方法アリヤ．

解． 所設ノ語ノ中ニ含マルヽ文字ハ $e, e, e\,;\, r, r\,;\, t\,;\, h\,;\, f\,;\, o$ ニシテ 6 種ナリ．故ニ本節ニ於テ得タル不定方程式ハ

$$q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6=4,$$

$$q_1=0,1,2,3\,;\ q_2=0,1,2\,;\ q_3=0,1\,;\ q_4=0,1\,;\ q_5=0,1\,;\ q_6=0,1$$

トナル．故ニ此不定方程式ニ幾通リノ解アルカヲ見出セバヨシ．偖之ヲ見出スニハ先 q ノ取リ得ベキ最大ナル値ニ著目スルヲ便トス．卽此場合ニハ q_1 ノ取リ得ベキハ 3 ナリ．今 q_1 ガ 3 ナル値ヲ取リタリトスレバ q_2, q_3, q_4, q_5, q_6 ノ中ノ何レカ一ツガ 1 ニシテ他ハ 0 ナレバヨシ．故ニ $q_1=3$ ナル場合ノ解ハ ${}_{5}\mathrm{C}_1$ 卽 5 個ナリ．次ニ $q_1=2$ ノ場合ヲ考フルニ q_2 ヲ 2 トスルカ或ハ q_2, q_3, q_4, q_5, q_6 ノ中ノ二ツヲ 1 他ヲ 0 トスルカナリ．而シテ前者ハ唯一ツノ解アリテ後者ハ ${}_{5}\mathrm{C}_2$ 卽 10 個ノ解アリ．故ニ $q_1=2$ ナルトキノ解ハ 11 ナリ．次ニ q_2 ヲ 2 トシテ q_1, q_3, q_4, q_5, q_6 中ノ何レカ二ツヲ 1 トシ他ヲ 0 トスル解ハ ${}_{5}\mathrm{C}_2$ 卽 10 個ナリ．最後ニ $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ 中ノ何レカ四ツヲ 1 トシ他ヲ 0 トスル解ハ ${}_{6}\mathrm{C}_4$ 卽 15 個ナリ．故ニ

$$\text{所要ノ數}=5+11+10+15=41.$$

別解． 本題ハ又本節ノ公式ニ據ラズ次ノ如ク解スルモヨシ．但問題ヲ解ク上ヨリ云フトキハ前ノ解法ヨリモ寧次ノモノガ便利ナリ．

先作ラルベキ組合セノ原素ノ數 4 ニ著目ス．而シテ四個ノ文字ヲ取ルニハ次ノ如キ場合アリ．卽

(i). 三個同種ニシテ一個ハ異種,

(ii). 二個同種ニシテ他ノ二個モ同種,

(iii). 二個同種ニシテ他ノ二個ハ異種,

(iv). 總テ異種.

而シテ(i)ノ場合ハ $_5C_1$ 個ノ仕方ニテナスコトヲ得. 卽三ツノ e ト r, t, h, f, o ノ中ノ何レカヲ選ブ仕方ノ數ナリ. (ii)ノ場合ハ唯1ツノ方法アリ. 卽二個ノ e ト二個ノ r トヲ取ル仕方ナリ. (iii)ノ場合ハ $2\times{}_5C_2$ 個ノ仕方アリ. 卽二個ノ e ト r, t, h, f, o ヨリ何レカ一ツヲ選ブ仕方及二個ノ r ト e, t, h, f, o ノ中ヨリ何レカ一ツヲ選ブ仕方ナリ. (iv)ノ場合ニハ $_6C_4$ 個アルコト明ナリ. 故ニ

$$\text{所要ノ數} = {}_5C_1+1+2\times{}_5C_2+{}_6C_4 = 5+1+20+15 = 41.$$

(3). *proportion* ト云フ語ヲ形成スル文字ヨリ四ツヲ取ル組合セノ數ヲ求ム.

解. 所設ノ語ニ含マルヽ文字ハ $o, o, o; p, p; r, r; t; i; n$ ナリ. 前題ノ後ノ方法ノ如ク四ツノ場合ニ分チ考フレバ(i)ノ場合ハ $_5C_1$, (ii)ノ場合ハ $_3C_2$, (iii)ノ場合ハ $3\times{}_5C_2$, (iv)ノ場合ハ $_6C_4$ 個ナリ. 故ニ

$$\text{所要ノ數} = {}_5C_1+{}_3C_2+3\times{}_5C_2+{}_6C_4 = 5+3+30+15 = 53.$$

(4). 50錢銀貨4個, 10錢銀貨2個, 5錢白銅貨1個, 2錢銅貨1個ヲ入レタル袋ヨリ3個ノ貨幣ヲ取リ出スニ幾何ノ方法アリヤ.

解. 3個ノ貨幣ヲ取リ出ス仕方ハ次ノ場合ニ分ツコトヲ得. 卽

(i). 3個總テ同種,

(ii). 2個ハ同種, 1個ハ異種,

(iii). 3個總テ異種.

(i)ノ場合ハ唯50錢銀貨ヲ取リ得ルノミナリ. 故ニ其仕方ハ唯一ツナリ. (ii)ノ場合ハ同種ノモノ2個ハ 50錢銀貨トモ又10錢銀貨トモナスコトヲ得. 而シテ其各ニ對シ他ノ一個ヲ選擇スル仕方ハ

$_3C_1$ ナリ. 故ニ總テニテ $2\times{}_3C_1$ ナリ. (iii)ノ場合ハ $_4C_3$ ナリ. 故ニ

$$\text{所要ノ數} = 1+2\times{}_3C_1+{}_4C_3 = 1+6+4 = 11.$$

50. 制限附重複組合セノ數ヲ求ムルコト. 第二法.

今 n 個ノ原素ヨリ r 個ヲ取ル制限附重複組合セヲ作ルニ當リ, 所設ノ原素中 n_r 個ハ r 度重複スルコトヲ得, n_{r-1} 個ハ $r-1$ 度或ハ r 度重複スルコトヲ得, n_{r-2} 個ハ $r-2$ 度或ハ $r-1$ 度以上重複スルコトヲ得ルモノトシ, 以下同樣ニシテ n_1 個ハ1度現ハルヽカ或ハ2度以上重複スルコトヲ得ルモノトス. 然ラバ

$$n_r \leqq n_{r-1} \leqq \cdots\cdots\cdots \leqq n_1 \tag{1}$$

ニシテ $n_1=n$ ナリ.

斯ノ如キ制限ノモトニ, r 個ノ原素ヨリ成ル組合セノ數ヲ求ムル準備トシテ, 一ツノ組合セ中ノ原素ガ r 個ナルコトヲ度外ニ置キ, 唯 $k_1, k_2, \cdots\cdots, k_r$ 個ノ原素ガ夫々 $1, 2, 3, \cdots\cdots, r$ 度重複シテ現ハルヽ組合セノ數ヲ求ムベシ. 但此等ノ k ハ皆0ト異ナル正ノ整數ニシテ, 斯ノ如キ組合セノ中ニ含マルヽ原素ノ總數ハ

$$k_1+2k_2+\cdots\cdots+rk_r \tag{2}$$

ナルコト勿論ナリ. 偖斯ノ如キ組合セヲ作ルニハ, n_r 個ノ原素ヨリ k_r 個ヲ選擇セザルベカラズ. 而シテ其方法ハ $_{n_r}C_{k_r}$ 個アリ. 今或方法ニテ k_r 個ヲ選擇シタリトスレバ, 次ノ k_{r-1} 個ヲ選擇スルニハ $_{n_{r-1}-k_r}C_{k_{r-1}}$ 個ノ方法アリ. 以下同樣ニシテ進ムトキハ k_1 ヲ選擇スル方法ハ $_{n_1-k_2-\cdots-k_r}C_{k_1}$ 個アリ. 故ニ組合セノ數ハ

$${}_{n_r}C_{k_r}\cdot{}_{n_{r-1}-k_r}C_{k_{r-1}}\cdots\cdots{}_{n_1-k_2-\cdots-k_r}C_{k_1} \tag{1}$$

ナリ.

是ニ於テ, 作ラルベキ組合セノ一ツニ含マルヽ原素ノ數ガ r ナルコ

トヲ條件ニ入ルヽトキハ k ハ次ノ如キ條件

$$k_1+2k_2+\cdots\cdots+rk_r=r \tag{2}$$

ヲ滿足セザルベカラズ. 從テ k ノ中ニハ 0 ナルモノアラザルベカラズ. 故ニ (1) ヲ得タル論法ハ其儘之ヲ適用スルヲ得ズト雖, ${}_nC_0=1$ $(n>0)$ ナルコトヲ注意スレバ, 此場合ニモ (1) ハ (2) ノ條件ニ適合スル k ニ對スル組合セノ數ヲ表スコトヲ知ルベシ. 故ニ所要ノ組合セノ數ハ

$$\sum {}_{n_r}C_{k_r}\cdot{}_{n_{r-1}-k_r}C_{k_{r-1}}\cdot\cdots\cdots{}_{n_1-k_2-\cdots-k_r}C_{k_1}$$

ナリ.

例題 (1). 三度重複スルコトヲ得ル原素ガ n_3 個, 二度或ハ三度重複スルコトヲ得ル原素ガ n_2 個, 一度現ハルヽカ或ハ二度以上重複スルコトヲ得ル原素ガ n_1 個アルトキ此等ノ原素ヨリ三個ヲ選擇スルニハ幾種ノ方法アリヤ.

解. 本節ノ不定方程式 (2) ハ次ノ如クナル

$$k_1+2k_2+3k_3=3.$$

而シテ其解ハ次ノ如シ

$$\left.\begin{array}{l}k_1=0,\\k_2=0,\\k_3=1.\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}k_1=1,\\k_2=1,\\k_3=0.\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}k_1=3,\\k_2=0,\\k_3=0.\end{array}\right\}$$

故ニ所要ノ組合セノ數ハ

$${}_{n_3}C_1+{}_{n_2}C_1\cdot{}_{n_1-1}C_1+{}_{n_1}C_3$$

ナリ.

(2). *examination* ナル語中ノ文字ヨリ三字ヲ取ル組合セハ幾何アリヤ.

解. 所設ノ文字ハ $a,a;i,i;n,n;e;o;m;t;x$ ナリ. 卽 2 度重複シ得ルモノ 3 箇, 1 度現ハルヽカ或ハ 2 度以上重複シ得ルモノ 8 箇ナリ. 故ニ求メラレタル組合セノ數ハ

$$k_1+2k_2=3 \tag{1}$$

ナル制限ノモトニ

$$\sum {}_3C_{k_2}\cdot{}_{8-k_2}C_{k_1} \tag{2}$$

ヲ求ムレバヨシ. 偖 (1) ノ解ハ

$$\left.\begin{array}{l}k_1=1,\\k_2=1,\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}k_1=3,\\k_2=0\end{array}\right\}$$

ノ二ツナリ. 故ニ

$$所要ノ數={}_3C_1\cdot{}_7C_1+{}_3C_0\cdot{}_8C_3=77.$$

(3). *notation* ヲ成ス文字ヨリ四字ヲ選擇スル方法幾何アリヤ.

解. 所設ノ語ノ中ノ文字ハ $o,o;n,n;t,t;a;i$ ナリ. 卽 2 度重複シ得ルモノ 3箇, 1 度現ハルヽカ或ハ 2 度重複シ得ルモノ 5 箇ナリ. 故ニ所要ノ數ハ

$$k_1+2k_2=4 \tag{1}$$

ナル制限ノモトニ

$$\sum {}_3C_{k_2}\cdot{}_{5-k_2}C_{k_1} \tag{2}$$

ナリ. 而シテ (1) ノ解ハ

$$\left.\begin{array}{l}k_1=4,\\k_2=0,\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}k_1=2,\\k_2=1,\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}k_1=0,\\k_2=2\end{array}\right\}$$

ノ三通リナリ. 故ニ

$$所要ノ數={}_3C_0\cdot{}_5C_4+{}_3C_1\cdot{}_4C_2+{}_3C_2\cdot{}_3C_0=26.$$

(4). 前例ニ於テ選擇スベキ文字ノ數ヲ 5 トスルトキハ如何.

解. 前例ト同様ニ所要ノ數ハ

$$k_1+2k_2=5 \qquad (1)$$

ナル制限ノモトニ

$$\sum {}_3\mathrm{C}_{k_2}\cdot{}_{5-k_2}\mathrm{C}_{k_1} \qquad (2)$$

ナリ. 而シテ (1) ノ解ハ

$$\left.\begin{matrix}k_1=5,\\ k_2=0,\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}k_1=3,\\ k_2=1,\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}k_1=1,\\ k_2=2\end{matrix}\right\}$$

ノ三通リナリ. 故ニ

$$所要ノ數={}_3\mathrm{C}_0\cdot{}_5\mathrm{C}_5+{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_1=22.$$

51. 制限附重複組合セノ數ヲ求ムルコト. 第三法.

本節ニ於テハ簡單ナル場合ヨリ始メ次第ニ複雜ナル場合ノ制限附重複組合セノ數ヲ求ムベシ.

次ノ乘積

$$(1+a_1x+a_1^2x+\cdots\cdots+a_1^{\alpha_1}x^{\alpha_1})(1+a_2x+a_2^2x+\cdots\cdots+a_2^{\alpha_2}x^{\alpha_2})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots(1+a_nx+a_n^2x^2+\cdots\cdots+a_n^{\alpha_n}x^{\alpha_n}) \qquad (1)$$

ヲ求ムルトキハ x^r ノ係數ハ原素 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ヨリ成ル

$${}_n\mathrm{H}_r(a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n)$$

個ノ組合セノ總和ナルコトハ容易ニ知ラレ得ベシ. 從テ $a_1=a_2=\cdots$ $\cdots=a_n=1$ トスルトキハ其係數ハ

$${}_n\mathrm{H}_r(a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n)$$

トナルベシ. 今便利ノ爲メ之ヲ單ニ ${}_n\mathrm{H}_r$ ヲ以テ表セバ

$$\frac{(1-x^{\alpha_1+1})(1-x^{\alpha_2+1})\cdots\cdots(1-x^{\alpha_n+1})}{(1-x)(1-x)\cdots\cdots\cdots(1-x)}$$
$$=1+{}_n\mathrm{H}_1x+{}_n\mathrm{H}_2x^2+{}_n\mathrm{H}_3x^3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{H}_rx^r+\cdots\cdots$$

ナリ. 從テ

$$(1+{}_n\mathrm{H}_1x+{}_n\mathrm{H}_2x^2+\cdots\cdots)(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{\alpha_{n+1}})$$
$$=1+{}_{n+1}\mathrm{H}_1x+{}_{n+1}\mathrm{H}_2x^2+{}_{n+1}\mathrm{H}_3x^3+\cdots\cdots+{}_{n+1}\mathrm{H}_rx^r+\cdots\cdots$$

此兩邊ノ x ノ同次ノ項ノ係數ヲ比較シテ次ノ等式

$$\left.\begin{aligned}1+{}_n\mathrm{H}_1&={}_{n+1}\mathrm{H}_1\\ 1+{}_n\mathrm{H}_1+{}_n\mathrm{H}_2&={}_{n+1}\mathrm{H}_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 1+{}_n\mathrm{H}_1+{}_n\mathrm{H}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{H}_r&={}_{n+1}\mathrm{H}_r\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ガ得ラル. 故ニ今計算ノ便利ノ爲ニ次ノ如キ表ヲ書キ

$$\left.\begin{array}{r}1,\ {}_n\mathrm{H}_1,\ {}_n\mathrm{H}_2,\ {}_n\mathrm{H}_3,\cdots\cdots\cdots,\ {}_n\mathrm{H}_r,\ \cdots\cdots,\\ 1,\ {}_n\mathrm{H}_1,\ {}_n\mathrm{H}_2,\cdots\cdots\cdots,\ {}_n\mathrm{H}_{r-1},\cdots\cdots,\\ 1,\ {}_n\mathrm{H}_1,\cdots\cdots\cdots,\ {}_n\mathrm{H}_{r-2},\cdots\cdots,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\} \qquad (3)$$

各行別々ニ加フルトキハ, 夫々

$$1,\ {}_{n+1}\mathrm{H}_1,\ {}_{n+1}\mathrm{H}_2,\ \cdots\cdots\cdots,\ {}_{n+1}\mathrm{H}_r$$

ガ得ラル.

次ニ所設ノ原素ガ a^5 (a, a, a, a, a ヲ畧記シテ a^5 トス. 以下同様ナリ) $a^5b^4, a^5b^4c^3, a^5b^4c^3d^2$ ナル場合ニ就テ例示スベシ.

次表ニ於テ, 原素ト同列ニ太ク書キタル數ハ, 其直上ニアル一ツノ組合セ中ニ含マルベキ原素ノ數ニ對スル組合セノ數ナリ. 例ヘバ a^5 ヨリ $0, 1, 2, 3, \cdots\cdots, 4, 5$ 箇ヲ取ル組合セノ數ハ何レモ 1 ナリ. 又 a^5b^4 ヨリ $0, 1, 2, 3, \cdots\cdots, 8, 9$ 箇ヲ取ル組合セノ數ハ夫々 $1, 2, 3, 4, \cdots\cdots, 2,$ 1 ナリ. 以下同様ナリ. 偖此表ヲ作ルニハ, 先 a^5 ノ右ニ 1 ヲ 6 箇列

原素	一ツノ組合セニ含マルヽ原素ノ數														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9					
a^5	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**									
		1	1	1	1	1	1								
			1	1	1	1	1	1							
				1	1	1	1	1	1						
					1	1	1	1	1	1					
a^5b^4	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**					
		1	2	3	4	5	5	4	3	2	1				
			1	2	3	4	5	5	4	3	2	1			
				1	2	3	4	5	5	4	3	2	1		
$a^5b^4c^3$	**1**	**3**	**6**	**10**	**14**	**17**	**18**	**17**	**14**	**10**	**6**	**3**	**1**		
		1	3	6	10	14	17	18	17	14	10	6	3	1	
			1	3	6	10	14	17	18	17	14	10	6	3	1
$a^5b^4c^3d^2$	**1**	**4**	**10**	**19**	**30**	**41**	**49**	**52**	**49**	**41**	**30**	**19**	**10**	**4**	**1**

ベテ書ク. 何トナレバ a^5 ヨリ $0, 1, 2, \cdots\cdots, 5$ ヲ取ル組合セノ數ハ皆 1 ナレバナリ. 次ニ a^5b^4 ヨリ取リテ作ラルヽ組合セノ數ヲ求ムルニハ, 前ニ書キシ 1 ノ列ト次第ニ一行ヅツ右ノ方ニ送リ新ニ新ナル原素ノ數ダケノ列卽四列ヲ書キ, 其各行ノ和ヲ a^5b^4 ノ右ニ書ク.

然ラバ之所要ノ組合セノ數ナルコト (3) ニヨリテ明ナリ. 其以下ニ就テモ同樣ナリ.

注意. ${}_nH_r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n)$ 個ノ組合セヲ作ルニ當リ, a_1 ヲ α_1 度, a_2 ヲ α_2 度重複シ得ルト考ヘズニ, a_1 ガ α_1 箇, a_2 ガ α_2 箇, $\cdots\cdots$ 在ルト考フルトキハ原素ノ總數ハ $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n$ 箇ナリ. 之ヨリ r 箇ノ原素ヨリ成ル組合セヲ一ツ作ルトキハ其後ニハ $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots\alpha_n-r$ 箇ノ原素ガ殘ル. 而シテ之レ一ツノ組合セナリ. 依テ ${}_nH_r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n)$ ハ

${}_nH_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n-r}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n)$ ニ等シ. 此事ハ前表ヲ見ルモ明ナリ. 之ニ依リ若 ${}_nH_r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n)$ ヲ計算スルニ當リ

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots\cdots+\alpha_n-r<r$$

ナルトキハ ${}_nH_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n-r}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n)$ ヲ求ムルヲ便利ナリトス.

例題 (1). 本節ノ方法ニヨリ *examination* 中ノ文字ヨリ三ツヲ取ル組合セノ數ヲ求メヨ.

解. 所設ノ原素ハ $a^2i^2n^2emotx$ ナリ. 故ニ表ヲ作レバ次ノ如シ.

原素	一ツノ組合中ノ原素ノ數			
	0	1	2	3
a^2	1	1	1	
		1	1	1
			1	1
a^2i^2	1	2	3	2
		1	2	3
			1	2
$a^2i^2n^2$	1	3	6	7
		1	3	6
$a^2i^2n^2e$	1	4	9	13
		1	4	9
$a^2i^2n^2em$	1	5	13	22
		1	5	13
$a^2i^2n^2emo$	1	6	18	35
		1	6	18
$a^2i^2n^2emot$	1	7	24	53
		1	7	24
$a^2i^2n^2emotx$	1	8	31	77

卽所要ノ數ハ 77 ナリ.

(2). 本節ノ方法ニヨリ *notation* ナル語ヲ成ス文字ヨリ四ツヲ選擇スル方法及五ツヲ選擇スル方法各幾種アルカ.

解. 所設ノ原素ハ $o^2n^2t^2ai$ ニシテ其總數ハ 8 ナリ. 而シテ $8-5$ ハ 3 ナルヲ以テ 5 ヲ選擇スル代リニ 3 ヲ選擇スレバヨシ. 依テ表ヲ作レバ次ノ如シ.

原素	一ツノ組合セニ含マルヽ原素ノ數				
	0	1	2	3	4
o^2	1	1	1		
		1	1	1	
			1	1	1
o^2n^2	1	2	3	2	1
		1	2	3	2
			1	2	3
$o^2n^2t^2$	1	3	6	7	6
		1	3	6	7
$o^2n^2t^2a$	1	4	9	13	13
		1	4	9	13
$o^2n^2t^2ai$	1	5	13	22	26

卽所要ノ數ハ 26 及 22 ナリ.

(3). 步兵將校 5 人騎兵將校 4 人砲兵將校 3 人ヨリ 4 人ノ將校ヲ選ブニ幾種ノ方法アリリヤ. 但同一兵科ニ屬スル將校ハ同ジ原素トシテ取扱フベシ.

解. 步兵, 騎兵, 砲兵將校各 1 人ヲ表スニ夫々 a, b, c ヲ以テスルトキハ所設ノ原素ハ $a^5b^4c^3$ ナリ. 依テ表ヲ作レバ次ノ如シ.

原素	一ツノ組合中ニ含マルヽ原素ノ數				
	0	1	2	3	4
a^5	1	1	1	1	1
		1	1	1	1
			1	1	1
				1	1
					1
a^5b^4	1	2	3	4	5
		1	2	3	4
			1	2	3
				1	2
$a^5b^4c^3$	1	3	6	10	14

卽所要ノ數ハ 14 ナリ.

52. 制限附重複組合セヲ無制限重複組合セニ導キ得ル場合.

制限附重複組合セノ數 ${}_nH_r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ ニ於テ $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)-r$ ガ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 中ノ最小ノモノヨリ小ナラザル場合ニハ

$$ {}_nH_r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = {}_nH_{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)-r} $$

ナリ. 何トナレバ $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 箇ノ原素ヨリ r 箇ヲ選擇スルトキハ後ニ $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)-r$ 箇ノ原素ガ殘ル. 故ニ所要ノ組合セノ數ハ所設ノ原素ヨリ $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)-r$ 箇ヲ取ル組合セノ數ニ等シ. 而シテ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ハ何レモ $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)-r$ ヨリ小ナラザルヲ以テ無制限重複組合セナリ.

例題. $a, a, a; b, b; c, c$ ヨリ五ツヲ取ル組合セノ數ヲ求ム.

解. 前節ノ方法ニテ計算スレバ次ノ如シ.

原素	一ツノ組合セ中ニ含マルヽ原素ノ數					
	0	1	2	3	4	5
a^3	1	1	1	1		
		1	1	1	1	
			1	1	1	1
a^3b^2	1	2	3	3	2	1
		1	2	3	3	2
			1	2	3	3
$a^3b^2c^2$	1	3	6	8	8	6

卽6ナリ.

然ルニ此場合ニハ $3+2+2=7,\ 7-5=2$ ナルヲ以テ無制限重複組合セニ導クコトヲ得. 故ニ

$$所要ノ數 = {}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

ニシテ前ノ結果ト相一致スルヲ見ル.

53. 無制限重複組合セヲ制限附重複組合セノ特別ノ場合トシテ取扱フコト.

第44節ニ於テハ, 無制限重複組合セヲ獨立ノ問題トシテ取扱ヒタリ. 然レドモ又之ヲ制限附重複組合セノ特別ノ場合トシテ取扱フコトヲ得. 次ニ之ヲ示サン.

第49節ニ於テ得タル制限附重複組合セノ數ヲ求ムル不定方程式ヲ n 箇ノ原素ヨリ r 箇ヲ選擇スル無制限重複組合セノ場合ニ適用スレバ次ノ如シ.

$$\left.\begin{array}{l} q_1+q_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+q_n = r, \\ q_\rho = 0, 1, 2, \cdots\cdots, r\,;\ \rho = 1, 2, 3, \cdots\cdots, n \end{array}\right\}$$

然ルニ此不定方程式ノ解ノ數ハ整數 r ヲ n 箇及 $n-1$ 箇以下ノ部分ニ分ツ (分タレタル部分ガ少クトモ1ナルヤウニ) 方法ノ數ニ等シ. 而シテ r ヲ斯ノ如ク分ツ總テノ數ハ一部分ガ零ナルコトヲ許シテ r ヲ n 箇ノ部分ニ分ツ方法ノ數ト同一ナリ. 而シテ一部分ガ零ナルコトヲ許シテ n 箇ニ分ツ方法ノ數ハ一部分ガ零ナルコトヲ許サズシテ $r+n$ ヲ n 箇ニ分ツ方法ノ數ト同一ナリ. 故ニ此解法ハ第44節第三證明法ニ取扱ヒシモノト同問題ニ歸著ス.

54. 制限附重複組合セノ特段ノ場合.

制限附重複組合セ ${}_nH_r(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$ ノ最特段ナル場合ハ

$$a_1 = a_2 = \cdots\cdots\cdots\cdots = a_n = 1,$$

$$a_1 = a_2 = \cdots\cdots\cdots\cdots = a_n = r$$

ナル二ツナリ. 此中ノ前ノ場合ハ, 重複スルコトヲ許サヾル組合セニシテ, 後ノ場合ハ無制限重複組合セナリ. 而シテ此等ノ組合セノ性質ハ既ニ考究シタリ. 是ヨリ此等ノ場合ヨリハ少シク一般ノ場合卽 ${}_nH_r(q, q, \cdots\cdots, q)\ (1 < q < r)$, 換言スレバ n 箇ノ原素ヨリ r 箇ヲ選擇スルニ當リ, 各ノ原素ガ何レモ q 度ヨリ多ク反覆スルコトヲ許サヾル場合ニ就テ論ゼン. 而シテ便利ノ爲其數ヲ表スニ ${}_nH_r(q)$ ヲ以テスベシ*. 斯ノ如キ組合セヲ一樣制限附重複組合セト云フ.

先

$${}_nH_r(q) = {}_nH_{nq-r}(q) \qquad (1)$$

ナルコト明ナリ. 何トナレバ此式ノ左邊ニ對スル組合セ一ツヲ作ル毎ニ右邊ニ對スル組合セ一ツガ得ラルレバナリ.

所題ノ組合セハ又次ノ如ク分ツコトヲ得.

* ${}_nH_r(1) = {}_nC_r,\quad {}_nH_r(r) = {}_nH_r$ ナリ

全ク a_1 ヲ含マザルモノ　(第一群),

a_1 ヲ1ッ含ムモノ　(第二群),

a_1 ヲ2ッ含ムモノ　(第三群),

………………………

a_1 ヲ q 箇含ムモノ　(第 $q+1$ 群).

而シテ此等ノ群ニ屬スル組合セノ數ハ夫々

$$ {}_{n-1}\mathrm{H}_r(q),\ {}_{n-1}\mathrm{H}_{r-1}(q),\ {}_{n-1}\mathrm{H}_{r-2}(q),\cdots\cdots,\ {}_{n-1}\mathrm{H}_{r-q}(q) $$

ナリ. 故ニ

$$ {}_n\mathrm{H}_r(q) = {}_{n-1}\mathrm{H}_r(q)+{}_{n-1}\mathrm{H}_{r-1}(q)+{}_{n-1}\mathrm{H}_{r-2}(q)+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{H}_{r-q}(q). \quad (2) $$

又 n 箇ノ原素ヲ u 箇及 v 箇 $(u+v=n)$ ニ分チテ考フルトキハ所題ノ組合セ中 u 箇ノ原素ヲ一ツモ含マザルモノハ ${}_v\mathrm{H}_r(q)$ 箇アリ. u 箇中ノ原素ヲ一ツ含ムモノハ ${}_u\mathrm{H}_1(q)\cdot{}_v\mathrm{H}_{r-1}(q)$ 箇アリ. 同樣ニ u 箇中ノ原素ヲ二ツ含ムモノハ ${}_u\mathrm{H}_2(q)\cdot{}_v\mathrm{H}_{r-2}(q)$ 箇アリ. 一般ニ u 箇ノ原素ヲ ν 箇含ムモノハ ${}_u\mathrm{H}_\nu(q)\cdot{}_v\mathrm{H}_{r-\nu}(q)$ 箇アリ. 而シテ此等ノ和ハ ${}_{u+v}\mathrm{H}_r(q)$ 箇ニ等シ. 故ニ

$$ \begin{aligned} {}_{u+v}\mathrm{H}_r(q) &= {}_u\mathrm{H}_0(q)\cdot{}_v\mathrm{H}_r(q)+{}_u\mathrm{H}_1(q)\cdot{}_v\mathrm{H}_{r-1}(q)+{}_u\mathrm{H}_2(q)\cdot{}_v\mathrm{H}_{r-2}(q) \\ &\qquad +\cdots\cdots+{}_u\mathrm{H}_r(q)\cdot{}_v\mathrm{H}_0(q) \\ &= \sum_{\alpha=0}^{r} {}_u\mathrm{H}_\alpha(q)\cdot{}_v\mathrm{H}_{r-\alpha}(q). \end{aligned} $$

コレ第33節ノ公式ノ一般ナルモノナリ.

55. 一樣制限附重複組合セノ數ヲ求ムルコト.

${}_n\mathrm{H}_r(q)$ 箇ノ組合セノ各ノ中ニハ, r 箇ノ原素ヲ含ムヲ以テ, ${}_n\mathrm{H}_r(q)$ 箇ノ組合セ中ノ原素ノ總數ハ $r\cdot{}_n\mathrm{H}_r(q)$ ナリ. 而シテ其中ニアル各ノ原素ノ數ハ相等シカラザルベカラズ. 故ニ或一種ノ原素ノ總數ハ $\dfrac{r}{n}\times{}_n\mathrm{H}_r(q)$ ナリ.

然ルニ或一種ノ原素ノ總數ハ又次ノ如クニシテ數フルコトヲ得. 即既ニ述ベシ如ク, 所題ノ組合セハ或一種ノ原素例ヘバ a_1 ヲ一ツモ含マザルモノ, 二ッ含ムモノ, $\cdots$, q 箇含ムモノニ分ツコトヲ得. 而シテ a_1 ヲ一ツモ含マザル組合セノ群中ニハ a_1 ハ一ツモナシ. a_1 ヲ1箇含ム組合セノ數ハ ${}_{n-1}\mathrm{H}_{r-1}(q)$ ニシテ其各ノ組合セ中ニ a_1 ガ1箇含マレ居ルヲ以テ其群中ノ a_1 ノ數ハ $1\cdot{}_{n-1}\mathrm{H}_{r-1}(q)$ ナリ. a_1 ヲ2箇含ム組合セノ數ハ ${}_{n-1}\mathrm{H}_{r-2}(q)$ ナリ. 而シテ其各ノ組合セ中ニ a_1 ガ2箇含マレ居ルヲ以テ此群中ノ a_1 ノ總數ハ $2\cdot{}_{n-1}\mathrm{H}_{r-2}(q)$ ナリ. 以下同樣ニシテ a ヲ q 箇含ム組合セノ數ハ ${}_{n-1}\mathrm{H}_{r-q}(q)$ ナリ, 從テ其群中ノ a_1 ノ總數ハ $q_{n-1}\mathrm{H}_{r-q}(q)$ ナリ. 而シテ $\dfrac{r}{n}{}_n\mathrm{H}_r(q)$ ハ此等ノ和ニ等シカラザルベカラズ. 故ニ

$$ \frac{r}{n}{}_n\mathrm{H}_r(q) = 1\cdot{}_{n-1}\mathrm{H}_{r-1}(q)+2\cdot{}_{n-1}\mathrm{H}_{r-2}(q)+\cdots\cdots+q_{n-1}\mathrm{H}_{r-q}(q) $$

即
$$ \frac{r}{n}{}_n\mathrm{H}_r(q) = \sum_{\alpha=1}^{q} \alpha\,{}_{n-1}\mathrm{H}_{r-\alpha}. \quad (1) $$

然ルニ第54節ノ公式(2)ニヨレバ

$$ {}_n\mathrm{H}_r(q) = \sum_{\alpha=0}^{q} {}_{n-1}\mathrm{H}_{r-\alpha}(q). $$

此兩邊ニ r ヲ乘ジテ

$$ r\,{}_n\mathrm{H}_r(q) = r\sum_{\alpha=0}^{q} {}_{n-1}\mathrm{H}_{r-\alpha}(q). $$

之ヲ(1)ニ代入スレバ

$$ n\sum_{\alpha=0}^{q} \alpha\,{}_{n-1}\mathrm{H}_{r-\alpha}(q) = r\sum_{\alpha=0}^{q} {}_{n-1}\mathrm{H}_{r-\alpha}(q). $$

即
$$ \sum_{\alpha=0}^{q} (n\alpha-r)\,{}_{n-1}\mathrm{H}_{r-\alpha}(q) = .0 $$

従テ
$$-r_{n-1}\mathrm{H}_r(q)+\sum_{\alpha=1}^{q}(n\alpha-r)_{n-1}\mathrm{H}_{r-\alpha}(q)=0.$$

今 $n-1$ ノ代リニ n ト置キ移項スルトキハ
$$r\,{}_n\mathrm{H}_r(q)=\sum_{\alpha=1}^{q}(n\alpha+\alpha-r)\,{}_n\mathrm{H}_{r-\alpha}(q) \tag{2}$$

此等式ニヨリ次第ニ ${}_n\mathrm{H}_r(q)$ ヲ計算スルコトヲ得.

例題 (1). ${}_n\mathrm{H}_3(2)$ ヲ求メヨ.

解. 本節ノ公式(2)ニ於テ $r=1,\ q=2$ ト置クトキハ
$$1\cdot{}_n\mathrm{H}_1(2)=\sum_{\alpha=1}^{2}(n\alpha+\alpha-1)\,{}_n\mathrm{H}_{1-\alpha}(2)$$
$$=n\,{}_n\mathrm{H}_0(2)=n.$$

故ニ
$${}_n\mathrm{H}_1(2)=n. \tag{1}$$

又 $r=2,\ q=2$ ト置クトキハ,
$$2\,{}_n\mathrm{H}_2(2)=\sum_{\alpha=1}^{2}(n\alpha+\alpha-2)\,{}_n\mathrm{H}_{2-\alpha}(2)$$
$$=(n-1)\,{}_n\mathrm{H}_{2-1}(2)+2n\,{}_n\mathrm{H}_0(2)$$
$$=(n-1)n+2n. \qquad [(1)\text{ニヨリ}]$$
$$=n(n+1).$$

故ニ
$${}_n\mathrm{H}_2(2)=\frac{n(n+1)}{2}. \tag{2}$$

又 $r=3,\ q=2$ ト置クトキハ
$$3\,{}_n\mathrm{H}_3(2)=\sum_{\alpha=1}^{2}(n\alpha+\alpha-3)\,{}_n\mathrm{H}_{3-\alpha}(q)$$
$$=(n-2)\,{}_n\mathrm{H}_2(2)+(2n-1)\,{}_n\mathrm{H}_1(2)$$
$$=\frac{(n-2)n(n+1)}{2}+(2n-1)n \qquad [(1)\text{及}(2)\text{ニヨリ}]$$
$$=\frac{n(n^2+3n-4)}{2}$$

$$=\frac{(n-1)n(n+4)}{2}.$$

故ニ
$${}_n\mathrm{H}_3(2)=\frac{(n-1)n(n+4)}{2\cdot 3}.$$

即所要ノ値ヲ表ス.

(2). 桃, 柿, 梨, 蜜柑各2箇アリ. 之ヨリ三箇ヲ選ブニ幾通リノ方法アリヤ. 但同種ノ果物ハ皆同ジ原素トス.

解. 前題ノ結果ニ於テ $n=4$ ト置ケバヨシ.

故ニ
$$\text{所要ノ數}={}_4\mathrm{H}_3(2)=\frac{3\cdot4\cdot8}{2\cdot3}=16.$$

注意. 本節ノ公式(2)ニヨリ次第ニ ${}_n\mathrm{H}_r(q)$ ヲ計算スルニ $r\leqq q$ ナル間ハ無制限重複組合セナルヲ以テ特ニ計算スルニ及バズ第44節ノ公式ヲ用ユレバ可ナリ.

56. 一樣制限附重複組合セノ數ヲ表ハス一般ノ公式.

本節ニ於テハ ${}_n\mathrm{H}_r(q)$ ノ値ヲ表ス一般ノ公式ヲ求ムベシ. 簡單ノ爲ニ
$$\alpha(n+1)-(r-\beta)=\mathrm{B}_{\beta,\alpha}$$
ト置キ第55節ノ公式(2)即
$$r\,{}_n\mathrm{H}_r(q)=\sum_{\alpha=1}^{q}(n\alpha+\alpha-r)\,{}_n\mathrm{H}_{r-\alpha}(q)$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{q}[\alpha(n+1)-r]\,{}_n\mathrm{H}_{r-\alpha}(q)$$
ニ於テ r ノ代リニ $r, r-1, r-2, \cdots\cdots$ ト置クトキハ等式
$$0=\mathrm{B}_{0,0}\,{}_n\mathrm{H}_r(q)+\mathrm{B}_{0,1}\,{}_n\mathrm{H}_{r-1}(q)+\mathrm{B}_{0,2}\,{}_n\mathrm{H}_{r-2}(q)+\cdots\cdots+\mathrm{B}_{0,q}\,{}_n\mathrm{H}_{r-q}(q)$$
$$0=\mathrm{B}_{1,0}\,{}_n\mathrm{H}_{r-1}(q)+\mathrm{B}_{1,1}\,{}_n\mathrm{H}_{r-2}(q)+\cdots\cdots+\mathrm{B}_{1,q}\,{}_n\mathrm{H}_{r-q-1}(q)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \qquad B_{r-2,1}\,{}_nH_2(q) + B_{r-2,2}\,{}_nH_1(q)$$

$$0 = \qquad B_{r-1,0}\,{}_nH_1(q) + B_{r-1,1}\,{}_nH_0(q)$$

ヲ得. 今此等ノ等式ヲ, ${}_nH_r(q)$, ${}_nH_{r-1}(q)$, ····· ヲ未知數トスル聯立方程式ト見做シ ${}_nH_r(q)$ 以外ノ未知數ヲ消去スルトキハ次ノ行列式ガ得ラル.*

$$
{}_nH_r(q) = \frac{(-1)^r}{r!}\begin{vmatrix}
B_{0,1} & B_{0,2} & B_{0,3} & \cdots & B_{0,r} & 0 & 0\cdots\cdots 0 & 0 \\
B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,q-1} & B_{1,q} & 0\cdots\cdots 0 & 0 \\
0 & B_{2,0} & B_{2,1} & \cdots & B_{2,q-2} & B_{2,q-1} & B_{2,q}\cdots 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\cdots B_{r-2,1} & B_{r-2,2} \\
0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\cdots B_{r-1,0} & B_{r-1,1}
\end{vmatrix}
$$

是即 ${}_nH_r(q)$ ヲ表ス一般ノ公式ナリ.

例題. ${}_nH_3(2)$ ヲ求メヨ.

解.

$$
{}_nH_3(2) = \frac{(-1)^3}{3!}\begin{vmatrix}
B_{0,1} & B_{0,2} & 0 \\
B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} \\
0 & B_{2,0} & B_{2,1}
\end{vmatrix}.
$$

然ルニ $\qquad B_{0,1} = n-2,\ B_{0,2} = 2n-1,$

$$B_{1,0} = -2,\ B_{1,1} = n-1,\ B_{1,2} = 2n,$$

$$B_{2,0} = -1,\ B_{2,1} = n.$$

故ニ

$$
{}_nH_3(2) = \frac{(-1)^3}{3!}\begin{vmatrix}
n-2 & 2n-1 & 0 \\
-2 & n-1 & 2n \\
0 & -1 & n
\end{vmatrix}
$$

$$= \frac{(n-1)n(n+4)}{3!}.$$

* 本叢書第七編行列式第62節ヲ參照セヨ.

57. 原素中相同ジキモノヽアル場合ノ組合セノ總數.

原素中 l 箇, m 箇, n 箇, ····ハ夫々互ニ相同ジク, r 箇ハ互ニ相異ナルモノナルトキ, 此等ノ原素ヨリ作ラルベキ組合セノ總數ヲ求メントス. 先 l 箇ノ原素ヨリ選擇スル仕方ハ, 其中ノ一箇ヲ採ルカ二箇ヲ採ルカ, ······, l 箇ヲ採ルカナルヲ以テ其選擇ノ仕方ノ數ハ l ナリ. 然レドモ今論ズル組合セ中ニハ l 箇中ノ原素ヲ一箇モ含マザルモヨキヲ以テ l 箇ノ原素ニ就テ施シ得ベキ作用ノ數ハ $l+1$ ナリ. 同様ニ $m, n,$ ····· ノ原素ニ就テ施シ得ベキ作用ノ數ハ夫々 $m+1$, $n+1$, ·····ナリ. 故ニ $l, m, n,$ ·····箇ノ原素ニ施シ得ベキ作用ノ數ハ $(l+1)(m+1)(n+1)\cdots$ ナリ. 次ニ相異ナル r 箇ノ原素ノ一ツニ就テ施シ得ベキ作用ノ數ハ之ヲ選擇スルカ然ラザルカノ二ツナルヲ以テ, r 箇ノ原素ニ施シ得ベキ作用ノ數ハ 2^r ナリ. 故ニ所設ノ原素ノ總テニ施シ得ベキ作用ノ數ハ $(l+1)(m+1)(n+1)\cdots 2^r$ ナリ. 然レドモ此中ニハ原素ヲ一ツモ採ラザル場合ヲ含ムヲ以テ所要ノ數ハ

$$(l+1)(m+1)(n+1)\cdots\cdots 2^r-1$$

ナリ.

第六章　重複順列

58. 無制限重複順列及制限附重複順列.

互ニ相異ナル n 箇ノ原素 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ ヨリ r 箇ヲ取リタル無制限重複組合セ中ノ原素ノ位置ヲ出來得ル限リ異ナル仕方ニテ交換スルトキハ r 箇ノ原素ヨリ成ル一群ノ順列ヲ得ベシ. 斯ノ如キ順列ヲ n 箇ノ原素ヨリ r 箇ヲ取ル無制限重複順列ト云フ.

又同ジ原素ヨリ, r 箇ヲ取リタル制限附重複組合セ中ノ原素ノ位置ヲ出來得ル限リ異ナル仕方ニテ交換スルトキハ矢張 r 箇ノ原素ヨリ成ル一群ノ順列ヲ得ベシ. 斯ノ如キ順列ヲ制限附重複順列ト云フ.

前章ニ於テ重複組合セニ就テ述ベタルガ如ク重複順列ハ原素ヲ重複スル代リニ與ヘラレタル原素中ニ同ジモノガアルト考フルモヨシ

59. 無制限重複順列ノ數ヲ求ムルコト. 第一法.

n 箇ノ原素ヨリ r 箇ヲ取リテ作ラルベキ無制限重複順列ノ數ヲ求ムベシ.

先茲ニ一直線上ニ列ベル r 箇ノ場處アリト想像セヨ. 然ラバ其第一ノ場處ヲ充タスニハ n 箇ノ方法アリ. 今其中ノ何レカノ方法ニヨリ第一ノ場處ヲ充タシタリトスレバ第二ノ場處ヲ充タスニ又 n 箇ノ方法アリ. 故ニ第一及第二ノ場處ヲ充タスニハ $(n\times n)$ 箇ノ方法アリ. 同樣ニ第三, 第四, $\cdots$ ノ場處ヲ充タスニ各 n 箇ノ方法アルヲ以テ此等ノ r 箇ノ場處ヲ充タスニハ n^r 箇ノ方法アリ. 而シテ之所要ノ順列ノ數ナリ. 故ニ ${}_n\mathrm{K}_r$ ヲ以テ求ムル順列ノ數ヲ表セバ

$${}_n\mathrm{K}_r = n^r.$$

第二法.

次ニ數學的歸納法ニヨリテ證明スベシ.

先 n 個ノ原素 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ヨリ一箇ヲ取ル順列ハ

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots\cdots,\ a_n \qquad (1)$$

ナルコト明ナリ. 次ニ此 n 個ノ原素ヨリ 2 個ヲ採ル無制限重複順列ヲ作ルニハ (1) ノ各ノ順列ノ一定ノ側(例ヘバ右側)ニ n 個ノ原素ノ各ヲ添フレバヨシ. 卽

$$\left.\begin{array}{l} a_1a_1,\ a_1a_2,\ a_1a_3,\ \cdots\cdots,\ a_1a_n \\ a_2a_1,\ a_2a_2,\ a_2a_3,\ \cdots\cdots,\ a_2a_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_na_1,\ a_na_2,\ a_na_3,\cdots\cdots,\ a_na_n \end{array}\right\} \qquad (2)$$

而シテ此順列ノ數ハ n^2 ナルコト明ナリ. 卽

$${}_n\mathrm{K}_2 = n^2.$$

一般ニ茲ニ n 個ノ原素ヨリ $r-1$ 個ヲ採リタル無制限重複順列アリトスレバ其順列ノ一定ノ側(例ヘバ右側)ニ n 個ノ原素ノ各ヲ書キ添フルトキハ此等ノ原素ヨリ r 個ヲ採リタル無制限重複順列ガ得ラル. 卽 $r-1$ 個ヲ採リタル無制限重複順列ノ群ヲ P_{r-1}, 其中ノ各順列ノ右側ニ n 個ノ原素ノ各ヲ書キ添ヘタル群ヲ Q, n 個ノ原素ヨリ r 個ヲ採リタル無制限重複順列ノ群ヲ P_r トスレバ Q ト P_r トハ全ク同一ナリ. 何トナレバ Q ノ中ノ任意ノ順列ハ其原素ノ數 r ナルヲ以テ P_r ニ屬ス. 而シテ P_{r-1} ノ中ニハ同ジ順列アルコトナシ. 故ニ Q ノ中ニハ同ジ順列アルコトナシ. 從テ Q ハ P_r ニ屬ス. 逆ニ P_r 中ノ任意ノ一ツノ順列ヲ取リ其右端ノ原素ヲ一ツ取リ去ルトキハ殘リシ

モノハ $r-1$ 個ヨリ成ル順列ナルヲ以テ之ハ P_{r-1} ニ屬ス. 從テ右端ノ一ツノ原素ヲ取リ去ラザリシモノハ Q ニ屬ス. 而シテ P_r 中ニハ相等シキ順列ナシ. 故ニ P_r ハ Q ニ屬ス. 依テ第7節定理 II ニヨリ P_r ト Q トハ全ク相同ジ.

借令

$$ {}_{n}K_{r-1} = n^{r-1} \tag{3}$$

ナリト假定シ, 其中ノ各順列ノ一定ノ側ニ n 個中ノ各原素ヲ附ケ添フルトキハ其各順列ヨリ n 個ノ順列ガ得ラルヽヲ以テ新ニ得ラルヽ順列ノ數ハ $n^{r-1}\times n$ 卽 n^r ナリ. 故ニ

$$ {}_{n}K_{r} = n^{r}. \tag{4}$$

而シテ此等式ハ $r=1$, $r=2$ ナルトキ眞ナルコトハ既ニ知ル所ナリ. 故ニ此等式 (4) ハ一般ニ眞ナリ.

注意. 公式 (4) ニヨリ

$$\sum_{r=\mu}^{\mu+\nu-1} {}_{n}K_{r} = n^{\mu} + n^{\mu+1} + \cdots\cdots + n^{\mu+\nu-1} = n^{\mu}\frac{n^{\nu}-1}{n-1}. \tag{5}$$

例題 (1). 文字 a, b, c, d ノ總テヲ符號 + 及 − ニテ連結シテ幾何ノ相異ナル代數式ガ得ラルヽカ. 但文字ノ順序ノミ異ナルモノハ同一ノ代數式ト見做ス.

解. 各文字ハ其前ニ + ヲ取ルカ, − ヲ取ルカ二ツノ仕方アリ. 故ニ所要ノ數ハ $2\times2\times2\times2$ 卽 16 ナリ.

(2). 同ジ原素ガ互ニ隣接スルコトヲ許サズシテ n 個ノモノヨリ r 個ヲ取ル無制限重複順列ノ數ハ $n(n-1)^{r-1}$ ナルコトヲ證明セヨ.

解. 一直線上ニ排列セラレタル r 個ノ場處アリト想像セヨ. 然ラバ第一ノ場處ヲ充タスニハ n 個ノ異ナル方法アリ. 次ニ第二ノ場處ヲ充タスニハ第一ノ場處ニ入レタル原素ト同ジ原素ヲ用ユルコトヲ許サヾルヲ以テ其方法ハ $n-1$ 個ナリ. 故ニ第一, 第二ノ場處ヲ充タスニハ $n(n-1)$ 個ノ方法アリ. 第三ノ場處ヲ充タスニハ第二ノ場處ニ入レタル原素ト同ジ原素ヲ用ユルヲ許サヾルヲ以テ其方法ノ數 $n-1$ 個ナリ. 以下ノ場處ニ就テモ同樣ナリ. 故ニ所要ノ數ハ $n(n-1)^{r-1}$ ナリ.

(3). 通常ノ記數法ニヨリテ記サレタル四位ノ數ハ幾何アリヤ.

解. 最高位ノ數字ハ 0 ヲ除ク外何レノ數字ニテモヨシ. 他ノ位ノ數ハ 10 個ノ數字ノ何レニテモヨシ. 故ニ四位ノ數ノ數ハ $9\times10\times10\times10$ 卽 9000 ナリ.

注意. 四位ノ數ガ 9000 アルコトハ又他ノ方法ニヨリ知ラル. 何トナレバ四位ノ數ハ 1000 ヨリ 9999 マデノ數ナレバ明ニ其間ニハ 9000 個ノ數アレバナリ.

(4). 數字 0, 1, 2, 3, 4 ヲ以テ桁數 20 ヨリ多カラザル數幾何ヲ作リ得ベキカ.

解. 數字 0, 1, 2, 3, 4 ヲ 20 個取ル無制限重複順列ノ數ハ 5^{20} ナリ. 而シテ其中左ノ r 個ニ 0 ノアルモノハ之ヲ取リ去リ桁數ガ $20-r$ ナル數ト考フルコトヲ得ルヲ以テ若 0 ヲ所題ノ數ノ中ニ入ルヽトキハ所要ノ數ハ 5^{20} ニシテ 0 ヲ入レザルトキハ $5^{20}-1$ ナリ.

(5). 數字 7, 8, 9 ヲ用ヒ重複スルコトヲ許シテ作ラルベキ數ノ中桁數ガ 4 ヨリ多カラザルモノ幾何アリヤ.

解. 作ラルベキ數ハ 1 桁ヨリ 4 桁マデノモノナリ. 故ニ其數ハ $3+3^2+3^3+3^4$ 卽 $3\times\dfrac{3^4-1}{3-1}$ 卽 120 ナリ.

(6). 數字 1, 2, 3 ヲ用ヒ, 重複スルコトヲ許シテ作ラルベキ數ノ

中，桁數ノ4ヨリ多カラザルモノヽ和ヲ求ム．

解． 數字1ガ作ラルベキ數ノ第一位ニ在ル度數ハ 1,2,3 ヨリ二ツヲ取ル無制限重複順列ノ數卽 ${}_3\mathrm{K}_2$ 卽 3^2 ナリ．2,3 ガ1位ニ來ル度數モ各之ト等シ．故ニ一ノ位ノ數ノ和ハ

$$(1+2+3)\times 3^2$$

ナリ．又 1,2,3 ガ十ノ位及百ノ位ニ來ル度數モ 3^2 ナリ．

故ニ
$$\begin{aligned}\text{所要ノ數} &= (100+10+1)\times(1+2+3)\times 3^2\\ &= 111\times 6\times 3^2\\ &= 5994.\end{aligned}$$

(7). 9個ノ有效數字ニテ作レル三桁ノ整數ハ幾個アルカ．

解． 所要ノ數$=9^3=729$.

(8). 5本ノ書狀ヲ3個ノ郵便函ニ投入スル仕方ハ幾通アルカ．

解． 各書狀ヲ投函スル仕方ハ各三種アリ．故ニ第一，第二ノ書狀ヲ投函スル仕方ハ 3×3 卽 3^2 通リアリ．之ト第三ノ書狀ヲ投函スル仕方トヲ結合スレバ，3本ニテ 3^3 通リアリ．同樣ニ4本ニテ 3^4, 5本ニテ 3^5 卽243通リアリ．

60. $n^r-(n-1)^r\,{}_n\mathrm{C}_1+(n-2)^r\,{}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots\pm 1^r\,{}_n\mathrm{C}_{n-1}=0\ (r<n).$

此等式ハ無制限重複順列ヲ用ヒ取捨法ニヨリテ證明セラル．

本節ニ於テハ便宜ノ爲原素 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ヨリ r 個ヲ取ル無制限重複順列ヲ表スニ ${}_n\mathrm{K}_r[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n]$ ヲ以テス．今 n 個ノ原素 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 中ノ a_1 ヲ除キタル殘リノ $n-1$ 個ノ原素ヨリ r 個ヲ取ル無制限重複順列ヲ作リ，其順列ノ群自身ヲ表スニ $\mathrm{P}_1^{(1)}$ ヲ以テス．同樣ニ a_2 ヲ除キテ作レルモノヲ $\mathrm{P}_2^{(1)}$ トス．以下同樣ニシテ $\mathrm{P}_3^{(1)}, \mathrm{P}_4^{(1)}, \cdots\cdots, \mathrm{P}_n^{(1)}$ ヲ作リ，此等ノ全體ヲ $\mathrm{P}^{(1)}$ ニテ表シ次ノ如クス

$$\mathrm{P}^{(1)}=\mathrm{P}_1^{(1)}+\mathrm{P}_2^{(1)}+\cdots\cdots\cdots+\mathrm{P}_n^{(1)}. \qquad (1)$$

偖 $\mathrm{P}^{(1)}$ 中ノ順列ハ ${}_n\mathrm{K}_r[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n]$ 中ニ含マルヽコト明ナリ．又 $r<n$ ナルヲ以テ後者ハ前者ノ中ニ含マル．但其含マルヽ度數ハ考究スルヲ要ス．若 $\mathrm{K}_r[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n]$ 中一ツノ順列ガ $n-1$ 個ノ相異ナル原素ヨリ成リ，其原素ハ n 個ノ原素ヨリ a_i ヲ除キタルモノナルトキハ，其順列ハ $\mathrm{P}^{(1)}$ 中ノ $\mathrm{P}_i^{(1)}$ 中ニ唯一度含マルヽノミニシテ他ニハ含マレズ．又 ${}_n\mathrm{K}_r[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n]$ ニ屬スル順列ニシテ，$n-2$ 個ノ相異ナル原素ヨリ成ルモノハ $\mathrm{P}^{(1)}$ 中ニハ二度含マル．何トナレバ今其 $n-2$ 個ノ相異ナル原素ガ n 個ノ原素ヨリ a_i ト a_j トヲ除キタル殘リナラバ，其順列ハ $\mathrm{P}_i^{(1)}$ ト $\mathrm{P}_j^{(1)}$ トニ各一度含マルレバナリ．一般ニ ${}_n\mathrm{K}_r[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n]$ 中ニ屬スル順列中 $n-p$ 箇ノ相異ナル原素ヨリ成ルモノハ $\mathrm{P}^{(1)}$ 中ニ p 度含マル．何トナレバ $n-p$ 箇ノ原素ガ n 箇ノ原素中ノ $a_i, a_j, \cdots\cdots, a_l$ ヲ除キタル殘リナルトキハ其順列ハ $\mathrm{P}_i^{(1)}, \mathrm{P}_j^{(1)}, \cdots\cdots, \mathrm{P}_l^{(1)}$ 中ニ各一度宛含マルレバナリ．

次ニ n 箇ノ原素中ノ a_1 ト a_2 トヲ除キ殘リノ $n-2$ 箇ノ原素ヨリ r 箇ヲ取リテ無制限重複順列ヲ作リ其順列ノ群自身ヲ表スニ $\mathrm{P}_{1,2}^{(2)}$ ヲ以テス．同樣ニ a_1 ト a_3 トヲ除キ殘リノ原素ヨリ r 箇ヲ取リテ作レル無制限重複順列ヲ表スニ $\mathrm{P}_{1,3}^{(2)}$ ヲ以テス．斯ノ如クシテ n 箇ノ原素ヨリ出來得ル限リ異ナル方法ニテ二箇ノ原素ヲ除キ其各ノ殘リヨリ r 箇ヲ取ル無制限重複順列ヲ作ルトキハ ${}_n\mathrm{C}_2$ 箇ノ順列ノ群ヲ得．其總テヲ表スニ $\mathrm{P}^{(2)}$ ヲ以テス．然ラバ

$$\mathrm{P}^{(2)}=\mathrm{P}_{1,2}^{(2)}+\mathrm{P}_{1,3}^{(2)}+\cdots\cdots+\mathrm{P}_{n-1,n}^{(2)} \qquad (2)$$

然ラバ $\mathrm{P}^{(2)}$ 中ノ各順列ハ ${}_n\mathrm{K}_r[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n]$ 中ニ含マル．又 ${}_n\mathrm{K}_r[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n]$ 中ノ順列中 $n-2$ 箇ノ相異ナル原素ヨリ成ルモノ

ハ $P^{(2)}$ 中ニ唯一度, $n-3$ 箇ノ相異ナル原素ヨリ成ルモノハ ${}_3C_2$ 度, 一般ニ $n-p$ 箇ノ相異ナル原素ヨリ成ルモノハ ${}_pC_2$ 度含マルヽコトハ容易ニ知ラレ得ベシ.

次ニ $P^{(1)}, P^{(2)}$ ト同樣ニ, $P^{(3)}, P^{(4)}, \cdots\cdots, P^{(\nu)}, \cdots\cdots, P^{(n-1)}$ ヲ作ルトキハ ${}_nK_r[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n]$ ノ中 $n-p$ 箇ヨリ成ル順列ハ $P^{(\nu)}$ 中ニハ ${}_pC_\nu$ 度含マル.

今

$$P^{(1)}-P^{(2)}+P^{(3)}-\cdots\cdots(-1)^{\nu+1}P^{\nu}\pm\cdots\cdots \qquad (3)$$

ナル式ヲ作ルトキハ其中ニハ ${}_nK_r[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n]$ 中 $n-p$ 箇ノ原素ヨリ成ル順列ハ

$${}_pC_1-{}_pC_2+{}_pC_3-\cdots\cdots\pm(-1)^{\nu+1}{}_pC_\nu\pm\cdots\cdots \qquad (4)$$

度含マル. 然ルニ第 **37** 節ニヨリテ (4) ハ 1 ニ等シ. 故ニ

$${}_nK_r[a_1, a_2, \cdots\cdots, a_r] = P^{(1)}-P^{(2)}+P^{(3)}-\cdots\cdots(-1)^{\nu+1}P^{(\nu)}\pm\cdots\cdots$$

然ルニ $P^{(2)}$ ハ ${}_nC_\nu$ 個ヨリ成リテ各項中ニ含マルヽ順列ノ數ハ $(n-\nu)^r$ ナリ. 故ニ

$$n^r=(n-1)^r{}_nC_1-(n-2)^r{}_nC_2+\cdots\cdots+\pm1^r{}_nC_{n-1} \qquad (r<n).$$

即 $$n^r-(n-1)^r{}_nC_1+(n-2)^r{}_nC_2-\cdots\cdots\pm1^r{}_nC_{n-1}=0 \qquad (r<n).$$

61. 制限附重複順列ノ數ヲ求ムルコト. 第一法.

實際制限附重複組合セヲ作リ, 其各ヨリ作ラルヽ順列ノ數ヲ計算シテ所要ノ數ヲ求ムルコトヲ得. 次ニ之ヲ例示スベシ.

例題 (1). *atlantean* ヲ形成スル文字ヨリ 6 字ヲ取リテ幾何ノ順列ガ作ラルヽカ.

解. 所設ノ原素ノ數ハ $a, a, a; t, t; n, n; l, e$ ナリ. 故ニ次表ノ如シ.

順列ヲ構成スル文字	組合セノ數	順列ノ數
(1) 3 個ガ同種, 2 個ガ同種, 他ノ 1 個ガ異種ナルモノ [3 個ノ a, 2 個ノ t ト n, l, e 中ノ何レカ一ツ ; 3 個ノ a ト 2 個ノ n ト t, l, e 中ノ何レカ一ツ]	$1\times2\times3$ 卽 6	$6\times\frac{6!}{3!2!}$ 卽 360
(2) 3 個ガ同種, 他ノ 3 個ハ悉異種ノモノ [3 個ノ a ト t, n, l, e 中ノ何レカ 3 個]	$1\times{}_4C_3$ 卽 4	$4\times\frac{6!}{3!}$ 卽 480
(3) 2 個同種, 2 個同種, 更ニ他ノ 2 個同種ノモノ [$a, a; t, t; n, n$]	1	$1\times\frac{6!}{2!2!2!}$ 卽 90
(4) 2 個同種, 2 個同種, 他ノ 2 個異種ノモノ [2 個ノ a, 2 個ノ t ト n, l, e 中ノ何レカ二ツ ; 2 個ノ a, 2 個ノ n ト t, l, e 中ノ何レカ二ツ]	${}_3C_2\times{}_3C_2$ 卽 9	$9\times\frac{6!}{2!2!}$ 卽 1620
(5) 2 個ガ同種, 他ノ 4 個悉ク異種 [2 個ノ a ト t, n, l, e ; 2 個ノ n ト a, t, l, e ; 2 個ノ t ト a, n, l, e]	3	$3\times\frac{6!}{2!}$ 卽 1080
合 計	23	3630

(2). *examination* ヲ構成スル文字ヨリ 3 字ヲ取リ幾何ノ語ガ作ラルヽカ.

解. 所設ノ原素ハ $a, a; i, i; n, n; e; m; o; t; x$ ナリ. 故ニ所要ノ順列ノ數ハ次表ノ如シ.

順列ヲ構成スル文字	組合セノ數	順列ノ數
(1) 2 個同種, 1 個異種 [a, a ト i, n, e, m, o, t, x ノ中ノ一ツ i, i ト a, n, e, m, o, t, x ノ中ノ一ツ n, n ト a, i, e, m, o, t, x ノ中ノ一ツ]	${}_3C_1\times{}_7C_1$ 卽 21	$21\times\frac{3!}{2!}$ 卽 63
(2) 3 個悉ク異種 [a, i, n, e, m, o, t, x ノ中ノ何レカ三ツ]	${}_8C_3$ 卽 56	$56\times3!$ 卽 336
合 計	77	399

62. 制限附重複順列ノ數ヲ求ムルコト. 第二法.

次ニ第 **50** 節ニ用ヒタル方法ニヨリ制限附重複順列ノ數ヲ求メントス.

第 **50** 節ト同樣ニ所設ノ n 箇ノ原素中 n_1 箇ハ r 度重複スルコトヲ

得, n_{r-1} 箇ハ $r-1$ 度或ハ r 度重複スルコトヲ得. 以下同樣ニシテ n 箇ハ 1 度或ハ 2 度以上重複スルコトヲ得ルモノトシ, 之ヨリ r 箇ヲ取ル順列ノ數ヲ求ムベシ.

第50節ニ論ジタル所ニヨリ斯ノ如キ制限ノモトニ作ラルヽ組合セノ數ハ

$$\sum {}_{n_r}C_{k_r}\cdot{}_{n_{r-1}-k_r}C_{k_{r-1}}\cdot\cdots\cdots{}_{n_1-k_2-\cdots\cdots-k_r}C_{k_1}$$
$$(k_1+2k_2+\cdots\cdots+rk_r=r)$$

ナリ. 而シテ此各ノ組合セ中ニハ $k_2, k_3, \cdots\cdots, k_r$ 箇ノ原素ガ夫々 $2, 3 \cdots\cdots, r$ 度重複セラルヽヲ以テ一ツノ組合セヨリ

$$\frac{r!}{(2!)^{k_2}(3!)^{k_3}\cdots\cdots(r!)^{k_r}}$$

箇ノ順列ガ作ラル. 故ニ順列ノ總數ハ

$$\sum\frac{r!}{(2!)^{k_2}(3!)^{k_3}\cdots\cdots(r!)^{k_r}}{}_{n_r}C_{k_r}\cdot{}_{n_{r-1}-k_r}C_{k_{r-1}}\cdots\cdots{}_{n_1-k_r-\cdots-k_2}C_{k_1}$$
$$(k_1+2k_2+\cdots\cdots+rk_r=r)$$

ナリ.

例題 (1). *expression* ヲ構成スル文字中ノ四箇ヲ取リテ幾何ノ文字ガ作ラルヽカ.

解. 所設ノ原素ハ $e, e; s, s; i; n; o; p; r; x$ ナリ. 卽本節ノ公式ニ於テ $r=4, n_2=2, n_1=8$ ト置ケバヨシ. 故ニ所要ノ數ヲ求ムルニハ

$$\sum\frac{4!}{(2!)^{k_2}}{}_2C_{k_2}\cdot{}_{8-k_2}C_{k_1}$$
$$(k_1+2k_2=4)$$

ヲ計算スレバヨシ. 而シテ此不定方程式ノ解ハ

$$\left.\begin{array}{l}k_1=0,\\k_2=2,\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}k_1=2,\\k_2=1,\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}k_1=4,\\k_2=0\end{array}\right\}$$

ナリ. 故ニ

$$\text{所要ノ數}=\frac{4!}{(2!)^2}{}_2C_2\cdot{}_{8-2}C_0+\frac{4!}{(2!)^1}{}_2C_1\cdot{}_{8-1}C_2+\frac{4!}{(2!)^0}{}_2C_0\cdot{}_{8-0}C_4$$
$$=4!\times\left(\frac{1}{2^2}{}_2C_2\cdot{}_6C_0+\frac{1}{2}{}_2C_1\cdot{}_7C_2+\frac{1}{1}{}_2C_0\cdot{}_8C_4\right)$$
$$=4!\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times2\times21+70\right)$$
$$=2190.$$

(2). *portion* ト云フ語ヲ形成スル文字ト p, r トヨリ四ツヲ取リテ作ラルベキ順列ノ數ヲ求ム.

解. 所設ノ原素ハ $o, o; p, p; r, r; i; n; t$ ナリ. 故ニ本節ノ公式ニ於テ $r=4, n_2=3, n_1=6$ ト置ケバヨシ. 故ニ

$$\text{所要ノ數}=\sum\frac{4!}{(2!)^{k_2}}{}_3C_{k_2}\cdot{}_{6-k_2}C_{k_1}$$
$$(k_1+2k_2=4).$$

而シテ此不定方程式ノ解ハ

$$\left.\begin{array}{l}k_1=0,\\k_2=2,\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}k_1=2,\\k_2=1,\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}k_1=4,\\k_2=0\end{array}\right\}$$

ナリ. 故ニ

$$\text{所要ノ數}=\frac{4!}{(2!)^2}{}_3C_2\cdot{}_{6-2}C_0+\frac{4!}{(2!)^1}{}_3C_1\cdot{}_{6-1}C_2+\frac{4!}{(2!)^0}{}_3C_0\cdot{}_{6-0}C_4$$
$$=4!\times\left(\frac{1}{2^2}{}_3C_2\cdot{}_4C_0+\frac{1}{2}{}_3C_1\cdot{}_5C_2+\frac{1}{1}{}_3C_0\cdot{}_6C_4\right)$$
$$=4!\times\left(\frac{1}{4}\times3+\frac{1}{2}\times3\times10+15\right)$$
$$=18+360+360$$
$$=738.$$

(3). 馬 3 頭牛 4 頭羊 2 頭アリ. 之ヲ五箇ノ檻ニ入ルヽニ (總テヲ入レズ) 各檻ニ一頭宛入ルヽトキハ幾通リノ入レ方アリヤ.

解. 所設ノ原素ヨリ5箇ヲ取ル順列ノ數ヲ求ムレバヨシ. 故ニ本節ノ公式ニ於テ $r=5, n_4=1, n_3=2, n_2=3, n_1=3$ ト置ケバヨシ. 故ニ

$$\sum \frac{5!}{(2!)^{k_2}(3!)^{k_3}(4!)^{k_4}} {}_1C_{k_4}\, {}_{2-k_4}C_{k_3}\, {}_{3-k_4-k_3}C_{k_2} \cdot {}_{3-k_4-k_3-k_2}C_{k_1}$$

$$(k_1+2k_2+3k_3+4k_4=5)$$

ヲ計算スレバヨシ. 然ルニ此不定方程式ノ解ハ

$$\left.\begin{array}{l} k_1=5, \\ k_2=0, \\ k_3=0, \\ k_4=0, \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} k_1=3, \\ k_2=1, \\ k_3=0, \\ k_4=0, \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} k_1=2, \\ k_2=0, \\ k_3=1, \\ k_4=0, \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} k_1=1, \\ k_2=2, \\ k_3=0, \\ k_4=0, \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} k_1=1, \\ k_2=0, \\ k_3=0, \\ k_4=1, \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} k_1=0, \\ k_2=1, \\ k_3=1, \\ k_4=0 \end{array}\right\}$$

ナリ. 故ニ

$$\begin{aligned} \text{所要ノ數} &= \frac{5!}{(2!)^0(3!)^0(4!)^1}{}_1C_0\,{}_2C_0\,{}_3C_0\,{}_3C_5 + \frac{5!}{(2!)^1(3!)^0(4!)^0}{}_1C_0 \cdot {}_2C_0 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_3 \\ &+ \frac{5!}{(2!)^0(3!)^1(4!)^0}{}_1C_0\,{}_2C_1\,{}_2C_0\,{}_2C_2 + \frac{5!}{(2)^{\cdot}(3!)^0(4!)^0}{}_1C_0\,{}_2C_0\,{}_3C_2\,{}_1C_1 \\ &+ \frac{5!}{(2!)^0(3!)^0(4!)^1}{}_1C_1 \cdot {}_1C_0 \cdot {}_2C_0 \cdot {}_2C_1 + \frac{5!}{(2!)^1(3)!^1(4!)^{\prime}}{}_1C_0\,{}_2C_1\,{}_2C_1\,{}_1C_0 \\ &= 180. \end{aligned}$$

63. 一様制限附重複順列.

n 箇ノ原素 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ヨリ, r 箇ヲ取ル順列ヲ作ルニ當リ, 何レノ原素モ $q(\leqq r)$ 箇重複スルコトヲ許シ其ヨリ多ク重複スルコトヲ許サヾル場合ニハ, 前節ノ公式(3)ハ少シク簡單ナル形トナル. 卽

此場合ニ於テハ $n_q=n_{q-1}=\cdots\cdots=n_1=n$ ナルヲ以テ所要ノ公式ハ

$$\sum \frac{r!}{(2!)^{k_2}(3!)^{k_3}\cdots q!)^{k_q}} {}_nC_{k_q} \cdot {}_{n-k_q}C_{k_{q-1}} \cdot {}_{n-k_q-k_{q-1}}C_{k_{q-2}} \cdots {}_{n-k_q-\cdots-k_2}C_{k_1}$$

卽 $$\sum \frac{r!}{(2!)^{k_2}(3!)^{k_3}\cdots(q!)^{k_q}} \frac{n!}{k_q!(n-k_q)!} \cdot \frac{(n-k_q)!}{k_{q-1}!(n-k_q-k_{q-1})!}$$

$$\cdots\cdots \frac{(n-k_q-\cdots\cdots-k_2)!}{k_1!(n-k_q-\cdots-k_2-k_1)!}$$

卽 $$\sum \frac{r!}{(2!)^{k_2}(3!)^{k_3}\cdots(q!)^{k_q}} \frac{n!}{k_q!k_{q-1}!\cdots k_1!} \cdot \frac{1}{(n-k_q-\cdots-k_2-k_1)!}$$

卽 $$n!r! \sum \frac{1}{k_1!k_2!\cdots k_q!(n-k_q-\cdots-k_2-k_1)!(2!)^{k_2}(3!)^{k_3}\cdots(q!)^{k_q}}.$$

故ニ今此種ノ順列ノ數ヲ表スニ ${}_nK_r(q)$ ヲ以テスルトキハ

$${}_nK_r(q) = n!r! \sum \frac{1}{k_1!k_2!\cdots k_q!(n-k_q-\cdots-k_2-k_1)!(2!)^{k_2}(3!)^{k_3}\cdots(q!)^{k_q}} \text{*}$$

$$(k_1+2k_2+\cdots\cdots+qk_q=r).$$

例題. 數字 1, 2, 3, 4 ヲ用ヒ各3度マデ重複スルコトヲ許シテ4桁ノ數幾何ガ作リ得ラルヽカ.

解. 本節ノ公式ニ於テ $n=4, q=3, r=4$ ト置ケバヨシ. 卽

$${}_4K_4(3) = 4!4! \sum \frac{1}{k_1!k_2!k_3!(n-k_3-k_2-k_1)!(2!)^{k_2}(3!)^{k_3}}.$$

$$(k_1+2k_2+3k_3=4).$$

然ルニ此不定方程式ノ解ハ

$$\left.\begin{array}{l} k_1=4, \\ k_2=0, \\ k_3=0, \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} k_1=2, \\ k_2=1, \\ k_3=0, \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} k_1=1, \\ k_2=0, \\ k_3=1, \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} k_1=0, \\ k_2=2, \\ k_3=0 \end{array}\right\}$$

ナリ. 故ニ

* 若 $n<k_q-\cdots-k_2-k_1$ ナルトキハ $(n-k_q-\cdots-k_2-k_1)!$ ヲ無限大ナリトスベキコト第32節ヲ參照スベシ.

$$
{}_4\mathrm{K}_4(3) = (4!)^2\left\{\frac{1}{4!\,0!\,0!\,0!(2!)^0(3!)^0} + \frac{1}{2!\,1!\,0!(4-3)!(2!)^1(3!)^0}\right.
$$
$$
\left. + \frac{1}{1!\,0!\,1!(4-2)!(2!)^0(3!)^1} + \frac{1}{0!\,2!\,0!(4-2)!(2!)^2(3!)^0}\right\}
$$
$$
= 288.
$$

故ニ所要ノ數ハ 288 ナリ.

64. 無制限重複順列中ノ特別ナルモノ.

原素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ヨリ r 箇ヲ採ル無制限重複順列中何レカ一ツノ原素ガ少クトモ $q (\leqq r)$ 度含マルヽモノヽ數ヲ求メントス. 斯ノ如キ順列ハ所設ノ原素ヨリ r 箇ヲ取リタル無制限重複順列ノ總テノ中ヨリ各原素ヲ $q-1$ 箇ヨリ多ク重複ヲ許サヾル總テノ順列ヲ取リ去リタルモノナリ. 故ニ今 n 箇ノ各原素ヲ $q-1$ 度ヨリ多ク重複スルコトヲ許サズシテ r 箇ヲ取ル總テノ順列ノ數ヲ表スニ ${}_n\mathrm{K}_r(q-1)$ ヲ以テスルトキハ, 所要ノ數ハ

$$
n^r - {}_n\mathrm{K}_r(q-1)
$$

ナルコトヲ知ル. 而シテ ${}_n\mathrm{K}_r(q-1)$ ハ前節ノ方法ニヨリテ計算スルコトヲ得.

例題. 桃柿梨各四箇上以アリ. 之ヲ四人ノ小供ニ與フルニ各人ニ其何レカ一箇ヲ與ヘ一箇ヨリ多ク與ヘズ且少クトモ三人ニ同種ノ果物ヲ與フルヤウニスルニハ幾通リノ與ヘ方アルカ.

解. 桃柿梨アルトキ之ヲ或小供ニ一箇宛與フル仕方ハ總テニテ 3^4 卽 81 通リナリ. 而シテ各ノ果物ヲ二箇ヨリ多ク用ヒザル與ヘ方ハ前節ノ方法ニヨリ ${}_3\mathrm{K}_4(2)$ 卽

$$
3!\,4! \sum_{(k_1+2k_2=4)} \frac{1}{k_1!\,k_2!(2!)^{k_2}(3-k_2-k_1)!}
$$

ナリ. 然ルニ此不定方程式ノ解ハ

$$
\left.\begin{aligned} k_1 &= 4, \\ k_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} k_1 &= 2, \\ k_2 &= 1, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} k_1 &= 2, \\ k_2 &= 0 \end{aligned}\right\}
$$

ナリ. 故ニ此値ヲ上ノ式ニ入ルヽトキハ

$$
3!\,4!\left\{0 + \frac{1}{2!\,1!\,2!\,0!} + \frac{1}{0!\,2!(2!)^2(3-2)!}\right\}
$$

卽 54 ヲ得. 故ニ所要ノ數ハ 81－54 卽 27 ナリ.

注意. 本題ハ必ズシモ果物全部ヲ與フルノ意ニアラズ.

第七章　二項定理及多項定理

65. **$x+a$ ナル形ヲ有スル二項式ノ乘積.**

乘法ノ計算ヲ實行シテ次ノ結果ヲ得.

$$(x+a_1)(x+a_2)=x^2+(a_1+a_2)x+a_1a_2,$$

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)=x^3+(a_1+a_2+a_3)x^2$$
$$+(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)x+a_1a_2a_3,$$

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)=x^4+(a_1+a_2+a_3+a_4)x^3$$
$$+(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4)x_2$$
$$+(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_2a_3a_4)x+a_1a_2a_3a_4.$$

此等ノ結果ヨリ今

s_1 ヲ以テ $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ ノ和,

s_2　〃　〃　〃　〃 中ノ二箇宛ノ乘積ノ和,

s_3　〃　〃　〃　〃 中ノ三箇宛ノ乘積ノ和,

....

s_r　〃　〃　〃　〃 中ノ r 箇宛ノ乘積ノ和,

....

s_n　〃　〃　〃　〃 ノ總テノ乘積

ヲ表ストキハ次ノ等式

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\cdots\cdots(x+a_n)$$
$$=x^n+s_1x^{n-1}+s_2x^{n-2}+s_3x^{n-3}+\cdots\cdots+s_rx^{n-r}+\cdots\cdots+s_n$$

ガ成立スルナラントハ自然ニ想ヒ至ル所ナルベシ. 今次ニ之ヲ證明セン.

第一證明法.

乘積.

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\cdots\cdots(x+a_n)$$

ノ中ニアル項ハ此 n 箇ノ因數ノ各ヨリ一ツノ文字ヲ取リテ掛ケ合セタルモノニシテ所要ノ乘積ハ斯ノ如キ總テノ組合セノ和ニ外ナラズ.

偖 x^n ヲ含ム項ハ各因數ヨリ x ヲ取リテ掛ケ合セテ得ラレ其仕方ハ唯一通リノ外ナシ. 故ニ x^n ノ係數ハ 1 ナリ.

x^{n-1} ヲ含ム項ハ n 箇ノ因數ノ中ノ一ツヨリ a ヲ取リ殘リノ因數ヨリ x ヲ取リテ掛ケ合セテ得ラル. 故ニ x^{n-1} ノ係數ハ a ノ和卽 s_1 ナリ.

x^{n-2} ヲ含ム項ハ何レカ二ツノ因數ヨリ a ヲ取リ殘リノ因數ヨリ x ヲ取リテ掛ケ合セテ得ラル. 故ニ x^{n-2} ノ係數ハ a ノ中二ツ宛ノ乘積ノ和卽 s_2 ナリ.

一般ニ x^{n-r} ヲ含ム項ハ r 箇ノ因數ヨリ a ヲ取リ殘リノ因數ヨリ x ヲ取リテ掛ケ合セテ得ラル. 故ニ x^{n-r} ノ係數ハ a ノ中 r 箇宛ノ乘積ノ和卽 s_r ナリ.

最後ニ x ヲ含マザル項ハ總テノ a ヲ掛ケ合セテ得ラル. 故ニ x ヲ含マザル項ハ總テノ a ノ乘積卽 s_n ナリ.

第二證明法.

之ハ又數學的歸納法ニヨリテ證明スルコトヲ得. 先因數ガ n 箇ノ場合ニ次ノ式

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\cdots(x+a_n)$$
$$=x^n+s_1x^{n-1}+s_2x^{n-2}+s_3x^{n-3}+\cdots\cdots+s_rx^{n-r}+\cdots\cdots+s_n,$$

但
$$\left.\begin{aligned} s_1 &= a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n, \\ s_2 &= a_1a_2+a_1a_3+\cdots\cdots+a_2a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}a_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_n &= a_1a_2\cdots\cdots a_n \end{aligned}\right\}$$

ガ成立スルモノトス. 此兩邊ニ $x+a_{n+1}$ ヲ乘ズルトキハ

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\cdots\cdots(x+a_n)(x+a_{n+1})$$
$$=x^{n+1}+(s_1+a_{n+1})x^n+(s_2+s_1a_{n+1})x^{n-1}+\cdots+(s_r+s_{r-1}a_{n+1})x^{n-r+1}$$
$$+\cdots\cdots+s_na_{n+1}$$

トナル. 而シテ今 s'_r ヲ以テ $n+1$ 箇ノ a 中ノ r 箇ヲ取リテ掛ケ合セタル乘積ノ和ヲ表セバ

$$s_1+a_{n+1}=s_1',\ s_2+s_1a_{n+1}=s_2',\cdots\cdots,\ s_r+s_{r-1}a_{n+1}=s'_r,\cdots\cdots,\ s_na_{n+1}=s'_n$$

ナルコト明ナリ. 卽因數ガ n 箇ノ場合ニ眞ナリト假定スレバ $n+1$ 箇ノ場合ニモ亦同樣ノ形ノ等式ガ眞ナリ. 而シテ $n=2,3$ ナル場合ニハ實際掛ケ算ヲ實行シテ其眞ナルコトヲ證明セリ. 故ニ此等式ハ一般ニ眞ナリ.

例題 (1). $(x+2)(x+5)(x+7)(x+8)$ ニ於テ x^3 ノ係數ヲ求メヨ.

解. $2+5+7+8=22.$

(2). $(x-3)(x-5)(x+7)(x-2)$ ニ於テ x^2 及 x ノ係數ヲ求メヨ.

解. x^2 ノ係數 $=(-3)\times(-5)+(-3)\times7+(-3)\times(-2)+(-5)\times7$
$$+(-5)\times(-2)+7\times(-2)$$
$$=15-21+6-35+10-14$$
$$=-39.$$

x ノ係數 $=(-3)\times(-5)\times7+(-3)\times(-5)\times(-2)$
$$+(-3)\times7\times(-2)+(-5)\times7\times(-2)$$
$$=105-30+42+70$$
$$=187.$$

(3). 乘積 $(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$ ノ展開式中ノ x^{n-2} 及 x^{n-3} ノ係數ヲ求メヨ.

解. 先 x^{n-2} ノ係數ハ數列 $1,2,3,\cdots\cdots,n$ 中ヨリ相異ナレル任意ノ二箇ヲ取リテ作レルアラユル乘積ノ和ニ等シ. 此係數ヲ A トスレバ

$$\mathrm{A}=\Sigma ab \qquad (a,b=1,2,3,\cdots\cdots,n)$$

ナリ. 然ルニ

$$(\Sigma a)^2=\Sigma a^2+2\Sigma ab.$$

故ニ
$$\mathrm{A}=\frac{1}{2}\left\{(\Sigma a)^2-\Sigma a^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$$
$$=\frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}.$$

次ニ x^{n-3} ノ係數ハ數列 $1,2,3,\cdots\cdots,n$ 中ヨリ相異ナレル任意ノ三箇ヲ取リテ作レルアラユル乘積ノ和ニ等シ. 此係數ヲ B トスレバ

$$\mathrm{B}=\Sigma abc \qquad (a,b,c=1,2,3,\cdots\cdots,n)$$

ナリ. 然ルニ

$$\Sigma ab\cdot\Sigma a=\Sigma a^2b+3\Sigma abc.$$

故ニ

$$\mathrm{B}=\frac{1}{3}\left\{\Sigma ab\cdot\Sigma a-\Sigma a^2b\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\mathrm{A}\cdot\Sigma a-(\Sigma a^2\Sigma a-\Sigma a^3)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{(n-1)n^2(n+1)^2(3n+2)}{48}-\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}+\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right\}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2(n^2-3n+2)}{48}.$$

(4). 乘積 $(x+q)(x+q^2)\cdots\cdots(x+q^n)$ ノ展開式中ノ x^{n-2} 及 x^{n-3} ノ係數ヲ求メヨ.

解. 先 x^{n-2} ノ係數ハ數列 $q, q^2, \cdots\cdots, q^n$ 中ヨリ相異ナレル任意ノ二箇ヲ取リテ作レルアラユル乘積ノ和ニ等シ. 此係數ヲ A トスレバ

$$\mathrm{A}=\Sigma ab, \qquad (a, b=q, q^2, \cdots\cdots, q^n).$$

ナリ. 然ルニ

$$(\Sigma a)^2=\Sigma a^2+2\Sigma ab.$$

而シテ

$$\Sigma a=q+q^2+\cdots\cdots+q^n=\frac{q(q^n-1)}{q-1},$$

及

$$\Sigma a^2=q^2+q^4+\cdots\cdots+q^{2n}=\frac{q^2(q^{2n}-1)}{q^2-1}.$$

故ニ

$$\mathrm{A}=\frac{1}{2}\left\{\frac{q^2(q^n-1)^2}{(q-1)^2}-\frac{q^2(q^{2n}-1)}{q^2-1}\right\}$$

$$=\frac{q^3(q^{n-1}-1)(q^n-1)}{(q-1)(q^2-1)}.$$

次ニ x^{n-3} ノ係數ハ數列 $q, q^2, \cdots\cdots, q^n$ 中ヨリ相異ナレル任意ノ三箇ヲ取リテ作レルアラユル乘積ノ和ニ等シ. 此係數ヲ B トスレバ前題ノ如クシテ

$$3\mathrm{B}=\mathrm{A}\cdot\Sigma a-\Sigma a^2\Sigma a+\Sigma a^3.$$

然ルニ

$$\mathrm{A}\cdot\Sigma a=\frac{q^4(q^{n-1}-1)(q^n-1)^2}{(q-1)^2(q^2-1)},$$

及

$$\Sigma a\cdot\Sigma a^2=\frac{q^3(q^n-1)(q^{2n}-1)}{(q-1)(q^2-1)},$$

及

$$\Sigma a^3=q^3+q^6+\cdots\cdots+q^{3n}=\frac{q^3(q^{3n}-1)}{q^3-1}.$$

此等ヲ代入シテ簡約スレバ

$$\mathrm{B}=\frac{q^6(q^{n-2}-1)(q^{n-1}-1)(q^n-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)}.$$

別解.

$$f(x)=(x+q)(x+q^2)\cdots\cdots(x+q^n)$$

ト置キ x ノ代リニ $\dfrac{x}{q}$ ヲ入ルレバ

$$f\left(\frac{x}{q}\right)=\frac{(x+q^2)(x+q^3)\cdots\cdots(x+q^{n+1})}{q^n}.$$

兩邊ニ $q^n(x+q)$ ヲ乘ズレバ

$$q^n(x+q)f\left(\frac{x}{q}\right)=(x+q^{n+1})f(x). \qquad (1)$$

整式 $f(x)$ ノ展開式中ノ x^r 及 x^{r-1} ノ係數ヲ夫々 c_r 及 c_{r-1} トスレバ豫等式 (1) ノ兩邊中ノ x^r ノ係數ヲ相等シトスルコトニヨリテ

$$q^n\left(\frac{c_{r-1}}{q^{r-1}}+q\frac{c_r}{q^r}\right)=c_{r-1}+q^{n+1}c_r.$$

故ニ

$$c_{r-1}=\frac{q^{n+1}-q^{n-r+1}}{k^{n-r+1}-1}c_r.$$

r ノ代リニ順次 $n, n-1, n-2$ ヲ代入スレバ明ニ $c_n=1$ ナルニヨリ

$$c_{n-1}=\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$$

$$c_{n-2}=\frac{q^{n+1}-q}{q-1}\cdot\frac{q^{n+1}-q^2}{q^2-1}.$$

$$c_{n-3}=\frac{q^{n+1}-q}{q-1}\cdot\frac{q^{n+1}-q^2}{q^2-1}\cdot\frac{q^{n+1}-q^3}{q^3-1}.$$

一般ニ

$$c_{n-k}=\frac{q^{n+1}-q}{q-1}\cdot\frac{q^{n+1}-q^2}{q^2-1}\cdots\cdots\frac{q^{n+1}-q^k}{q^k-1}.$$

注意. 同樣ニ乘積 $(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\cdots\cdots(1+q^nx)$ ノ展開式中ノ任意ノ係數ヲ求ムルヲトヲ得.

66. 二項定理.

前節ニ於テ得タル結果

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots\cdots(x+a_n)=x^n+s_1x^{n-1}+s_2x^{n-2}+\cdots\cdots+s_rx^{n-r}+\cdots+s_n$$

ニ於テ s_r ハ n 箇ノ a ノ中ヨリ r 箇宛取リテ作レル乘積ノ和ナルヲ以テ其中ノ項ノ 數ハ ${}_n\mathrm{C}_r$ ナリ. 故ニ今 $a_1=a_2=\cdots=a_n=a$ トスレバ

$$s_r={}_n\mathrm{C}_ra^r$$

トナルコト明ナリ.

故ニ

$$(x+a)^n=x^n+{}_n\mathrm{C}_1ax^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2a^2x^{n-2}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^rx^{n-r}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_na^n.$$

此結果ヲ**二項定理**ト云フ.*

若 ${}_n\mathrm{C}_1$, ${}_n\mathrm{C}_2$, $\cdots\cdots$ ${}_n\mathrm{C}_r$, $\cdots\cdots$ ノ代リニ夫々其値ヲ置クトキハ

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2x^{n-2}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots r}a^rx^{n-r}+\cdots\cdots+a^n.$$

67. 二項定理ニ關スル定義及注意. ぱすかるノ三角形.

或數ヲ級數ノ和ニテ表スコトヲ其數ヲ展開スト云フ. 例ヘバ前節ノ結果ニ於テ x, a ノ代リニ夫々 a, b ヲ置キ換ユルトキハ

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r+\cdots\cdots+nab^{n-1}+b^n. \quad (1)$$

ニシテ $(a+b)^n$ ハ展開セラレタリト云ハレ右邊ノ級數ヲ a ノ降冪(或ハ b ノ昇冪)ニ列ベラレタル $(a+b)^n$ ノ**展開式**或ハ**二項展開式**ト云フ. 此展開式ノ係數ノ列ヲ**二項係數**ト云フ.

上ノ展開式ニ於テ初ヨリ第 $r+1$ 番目ノ項(第 r 番目ノ項ニアラザルコトヲ注意スベシ)

* 二項式定理ト云フコトモアリ.

$$\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r$$

或ハ

$${}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$$

ヲ**一般項**ト云フ. 他ノ總テノ項ハ一般項ノ r ニ特殊ノ値ヲ與フルコトニヨリテ得ラル. 例ヘバ第二項ハ $r=1$, 第三項ハ $r=2$ ト置ケバ得ラルヽガ如シ. 但第一項ヲ求ムルトキニハ $0!=1$ ナルコトヲ注意スルヲ要ス.

$(a+b)^1$, $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, 等ノ展開式中ノ係數ノミヲ次ノ如ク書キタリトス.

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

然ラバ兩端ニハ常ニ 1 アリテ他ノ數ハ何レニテモ其上ノ列中ニ於テ斜ニ左及右ニアル二數ノ和ニ等シキコトヲ見ル. 故ニ一列ヲ書キ下シタル後ニハ其下ノ列ヲ容易ニ書キ下スコトヲ得. 即 $(a+b)^n$ ノ係數

$$1, \ {}_n\mathrm{C}_1, \ {}_n\mathrm{C}_2, \ {}_n\mathrm{C}_3, \ {}_n\mathrm{C}_4, \cdots\cdots, \ {}_n\mathrm{C}_{n-1}, \ 1$$

ヲ書キ下シタル後ニハ其次ノ $(a+b)^{n+1}$ ノ係數ハ

$$1+{}_n\mathrm{C}_1={}_{n+1}\mathrm{C}_1, \ {}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2={}_{n+1}\mathrm{C}_2, \ {}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3={}_{n+1}\mathrm{C}_3, \cdots\cdots$$

ニヨリテ容易ニ書キ下スコトヲ得. 何トナレバ一般ニ

$${}_n\mathrm{C}_r+{}_n\mathrm{C}_{r+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$$

ナレバナリ(第29節參照).

上ノ如キ二項係數ノ排列*ヲぱすかるノ三角形ト云フ.

又上ノ展開式(1)ニ就テハ次ノ點ニ注意スルヲ要ス.

(i)　一般項 ${}_nC_r a^{n-r} b^r$ ニ於テハ b ノ指數ハ C ノ右ノ添數ト同一ニシテ a ノ指數ト C ノ右ノ添數トノ和ハ n ニ等シ.

(ii)　$\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots r}a^{n-r}b^r$ ニ於テ分母ノ最後ノ數ハ b ノ指數ニ等シク, a ト b トノ指數ノ和ハ n ナリ.

(iii)　公式(1)ニ於テ $a=1,\ b=x$ ト置クトキハ

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots\cdots+x^n \quad (2)$$

トナル. 此等式ハ屡二項定理ノ基本ノ形トセラル. 之ヲ基本トシテ(1)ヲ誘出スルニハ次ノ如クス.

$$\begin{aligned}(a+b)^n&=\left\{a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right\}^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\\&=a^n\left\{1+n\frac{b}{a}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\frac{b^2}{a^2}+\cdots\cdots+\frac{b^n}{a^n}\right\}\\&=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+b^n.\end{aligned}$$

故ニ(2)ガ(1)ヨリ誘出セラルヽト同時ニ(1)ハ(2)ヨリ誘出セラル.

(iv)　$(1-x)^n$ ノ展開式ハ $(1+x)^n$ ノ展開式中ノ x ノ代リニ $-x$ ト置キテ得ラル. 卽

$$\begin{aligned}(1-x)^n=\{1+(-x)\}^n&=1+n(-x)+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}(-x)^2\\&\quad+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}(-x)^3+\cdots\cdots+(-x)^n.\end{aligned}$$

故ニ

$$(1-x)^n=1-nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots\cdots+(-x)^n$$

ナリ. 故ニ $(1+x)^n$ ノ展開式ト異ナルハ初ヨリ偶數番目ノ項ガ負號

* 支那ニ於テ餘程古ク此ノコトヲ知リ居タルガ如シ.

ヲ有スルコトナリ.

(v)　$(x+a)^n$ ノ展開式ニ於テ初ト終ヨリ同番目項(等距離ニアル項トモ云フ)ノ係數ハ相等シ. 何トナレバ $(x+a)^n$ ノ初ヨリ第 $r+1$ 番目ノ項ノ係數ハ ${}_nC_r$ ニシテ, 終ヨリ第 $r+1$ 番目ノ項卽 初ヨリ第 $n-r+1$ 番目ノ項ノ係數ハ ${}_nC_{n-r}$ ナリ. 然ルニ ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ ナリ.

此事ハ又 $(a+x)^n=(x+a)^n$ ナルコトヨリ知ラル.

上ニ述ベタル所ニヨリ*二項定理ノ展開式ノ係數ハ最初ヨリ讀ムモ最後ヨリ讀ムモ同一ナリ. 又此定理ニヨリ $(x+a)^n$ ノ展開式ヲ實際書クニ當リ其眞中ヨリ後ノ係數ハ新ニ求ムルニ及バズ. 初ヨリ眞中マデノ係數ヲ逆ニ繰リ返シテ書ケバヨシ.

(vi)　$(x+a)^n$ ノ展開式ノ項ノ數ハ $n+1$ 箇ナルヲ以テ n ガ奇數ナルカ偶數ナルカニ從ヒテ項ノ數ハ偶數ナルカ奇數ナルカナリ. 從テ n ガ偶數ナルトキハ中央ノ一項アリ. n ガ奇數ナルトキハ係數ノ相等シキ中央*ノ二項アリ.

例題 (1).　$(a+b)^5$ ヲ展開セヨ.

解.

$$\begin{aligned}(a+b)^5&=a^5+5a^4b+\frac{5\cdot4}{1\cdot2}a^3b^2+\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}a^2b^3\\&\quad+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}ab^4+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}b^5\\&=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.\end{aligned}$$

(2).　$(3x-y)^3$ ヲ展開セヨ.

解.

$$\begin{aligned}(3x-y)^3&=[3x+(-y)]^3=(3x)^3+3(3x)^2(-y)\\&\quad+\frac{3\cdot2}{1\cdot2}(3x)(-y)^2+\frac{3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3}(-y)^3\\&=27x^3-27x^2y+9xy^2-y^3.\end{aligned}$$

* 此語當ラズト雖通例斯ク云フ.

＊ 和蘭に於て古代より知り居れるが如し. 帝大理学部. K.

(3). $\left(3x-\frac{1}{3x}\right)^{2r}$ ノ展開式ニ於テ x ニ關係ナキ項ヲ求メヨ.

解. 所題ノ展開式ニ於テ最初ヨリ第 $p+1$ 番目ノ項ハ

$${}_{2r}C_p(3x)^{2r-p}\left(-\frac{1}{3x}\right)^p \text{ 卽 } (-1)^p{}_{2r}C_p3^{2r-2p}x^{2r-2p}$$

ナリ. 而シテ x ニ無關係ナル項ノ x ノ指數ハ 0 ナラザルベカラザルヲ以テ $2r-2p=0$ 卽 $p=r$ ナラザルベカズ. 故ニ所要ノ項ハ

$$(-1)^r{}_{2r}C_r3^0x^0 \text{ 卽 } (-1)_{2r}C_r \text{ 卽 } (-1)_r\frac{(2r)!}{(r!)^2}$$

ナリ.

(4). $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ ノ展開式ノ中央ノ項ハ $(-2)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{n!}$ ナルコトヲ證明セヨ.

解. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ ノ展開式ノ中央ノ項ハ初ヨリ第 $n+1$ 番目ノ項ナリ.

故ニ

$$\begin{aligned}
\text{所要ノ項} &= {}_{2n}C_nx^n\left(-\frac{1}{x}\right)^n\\
&=(-1)^n{}_{2n}C_n\\
&=(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}\\
&=(-2)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{n!}.
\end{aligned}$$

(5). $\left(a^2-\frac{x}{a^3}\right)^{10}$ ノ展開式中ニハ a^{12} ヲ含ム項ナキコトヲ證明セヨ.

解. 所題ノ展開式中ニ於テ初メヨリ第 $r+1$ 番目ノ項ハ ${}_{10}C_r a^{2r}\times\left(-\frac{x}{a^3}\right)^{10-r}$ 卽 $(-1)^{10-r}{}_{10}C_ra^{5r-30}x^{10-r}$ ナリ. 故ニ a^{12} ヲ含ム項アリトスレバ $5r-30=12$, 從テ $r=8.4$ ナラザルベカラズ. 然ルニ r ハ整數ナラザルベカラザルヲ以テ斯ノ如キ項ノアラザルヲ知ル.

(6). $\frac{1}{3}(n-2r)$ ガ正ノ整數ニアラザルトキハ $(x+x^{-2})^{n-3}$ ノ展開式

中ニ x^{2r} ヲ含ム項ナキコトヲ證明セヨ.

解. 偖 $(x+x^{-2})^{n-3}=(x^{-2}+x)^{n-3}$. 而シテ $(x^{-2}+x)^{n-3}$ ノ展開式ニ於テ初メヨリ第 $p+1$ 番目ノ項ハ ${}_{n-3}C_p(x^{-2})^px^{n-3-p}$ 卽 ${}_{n-3}C_px^{n-3-3p}$ ナリ. 故ニ x^{2r} ヲ含ム項ノアルガ爲ニハ

$$2r = n-3-3p$$

ナル等式ヲ滿足セシムル p ノ正ノ整數ノ値アラザルベカラズ. 卽

$$p=\frac{n-2r}{3}-1.$$

故ニ $\frac{n-2r}{3}$ ガ整數ナラザルトキハ斯ノ如キ p ノ値ナク, 從テ x^{2r} ヲ含ム項ナシ.

(7). $\left(x^2+\frac{a^3}{x}\right)^5$ ノ展開式ニ於ケル x ノ係數ヲ求ム.

解. 偖 $\left(x^2+\frac{a^3}{x}\right)^5=\frac{(x^3+a^3)^5}{x^5}$. 故ニ此問題ハ $(x^3+a^3)^5$ ノ展開式中ニ於テ x^6 ノ係數ヲ求ムルコト卽 $(X+a^3)^5$ ノ展開式中ノ X^2 ノ係數ヲ求ムルコトニ歸ス. 依テ

$$\text{所要ノ係數} = {}_5C_2(a^3)^2 = 10a^6.$$

(8). $(a+b)^{20}$ ノ展開式ノ初ヨリ第 $3r$ 番目ノ項ノ係數ガ第 $r+2$ 番目ノ項ノ係數ニ等シト云フ. 其係數ノ値ヲ問フ.

解. 第 $3r$ 番目ノ係數ハ ${}_{20}C_{3r-1}$ ニシテ第 $r+2$ 番目ノ係數ハ ${}_{20}C_{r+1}$ ナリ. 而シテ ${}_{20}C_{3r-1}={}_{20}C_{r+1}$ ナルガ爲ニハ第 **27** 節ニヨリテ $3r-1=r+1$ ナルカ然ラザレバ $(3r-1)+(r+1)=20$ ナリ. 先 $3r-1=r+1$ トスレバ $r=1$ ナリ. 然レドモ此トキニハ第 $3r$ 番目モ又第 $r+2$ 番目モ共ニ第 3 番目ノコトユヘ二ツノ係數ガ相等シトハ云ハザルベシ. 故ニ $(3r-1)+(r+1)=20$ ナリトス. 然ラバ $r=5$. 故ニ

所要ノ係數 $= {}_{20}C_{r+1} = {}_{20}C_6 = \dfrac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 38760.$

(9). 等式

$$(1-x)^n = (1+x)^n - 2nx(1+x)^{n-1} + \frac{2n(2n-2)}{1\cdot2}x^2(1+x)^{n-2} - \cdots\cdots$$

ガ眞ナルコトヲ證明セヨ.

解. $(1-x)^n = \left\{(1+x)-2x\right\}^n$

$$= (1+x)^n - 2nx(1+x)^{n-1} + \frac{2n(2n-2)}{1\cdot2}x^2(1+x)^{n-2} - \cdots\cdots$$

(10). n ガ正ノ整數ナルトキハ

$$1 - n\frac{1+x}{1+nx} + \frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot\frac{1+2x}{(1+nx)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1+3x}{(1+nx)^3} + \cdots\cdots = 0$$

ナリ. 之ヲ證明セヨ.

解.

$$左邊 = 1 - n\frac{1}{1+nx} + \frac{n(n-1)}{1\cdot2}\frac{1}{(1+nx)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{(1+nx)^3} + \cdots$$

$$-\frac{nx}{1+nx}\left\{1 - \frac{(n-1)}{1!}\cdot\frac{1}{1+nx} + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{(1+nx)^2} - \cdots\cdots\right\}$$

$$= \left(1-\frac{1}{1+nx}\right)^n - \frac{nx}{1+nx}\left(1-\frac{1}{1+nx}\right)^{n-1}$$

$$= \left(1-\frac{1}{1+nx}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1}{1+nx}-\frac{nx}{1+nx}\right)$$

$$= 0.$$

68. $(1+x)^n$ ノ展開式中ノ最大係數.

$(1+x)^n$ ノ展開式中ノ第 $r+1$ 番目ノ項ノ係數ハ ${}_nC_r$ ニシテ第 r 番目ノ項ノ係數 ${}_nC_{r-1}$ ニ $\dfrac{n-r+1}{r}$ ヲ乘ズレバ得ラル. 故ニ若

$$\frac{n-r+1}{r} > 1$$

ナルトキハ第 $r+1$ 番目ノ項ノ係數ハ第 r 番目ノ項ノ係數ヨリ大ナリ. 而シテ分數 $\dfrac{n-r+1}{r}$ ハ r ガ增セバ分母ガ增大シ分子ガ減小スルヲ以テ此分數ノ値ハ r ガ增スト共ニ小トナル. 故ニ r ノ或値ニ對シテ此不等式ガ成立スルトキハ初項ノ係數ヨリ第 $r+1$ 番目ノ項ノ係數マデ次第ニ增大スルコトヲ知ル.

又 $$\frac{n-r+1}{r} = 1$$

トナリシ場合ニアリテハ初メヨリ第 r 番目ノ項ノ係數ト第 $r+1$ 番目ノ項ノ係數トハ相等シ.

次ニ $$\frac{n-r+1}{r} < 1$$

ナルトキハ第 $r+1$ 番目ノ項ノ係數ハ第 r 番目ノ項ノ係數ヨリ小ナリ. 而シテ分數 $\dfrac{n-r+1}{r}$ ノ値ハ r ノ增大スルトキニ減小スルヲ以テ r ノ或値ニ對シテ此不等式ガ成立スルトキハ第 r 番目ノ項ヨリ最後ノ項マデハ其係數ガ次第ニ減小スルコトヲ知ル.

故ニ $(1+x)^n$ ノ展開式ニ於テ其係數ニハ唯一ツノ極大アルノミナリ.

偖第 $r+1$ 番目ノ項ガ極大ナル爲ニハ其項ハ第 r 番目ノ項ヨリ小ナルベカラズ, 即

$$\frac{n-r+1}{r} \geqq 1.$$

故ニ $$n-r+1 \geqq r.$$

故ニ $$\frac{n+1}{2} \geqq r. \qquad (1)$$

又第 $r+1$ 番目ノ項ハ第 $r+2$ 番目ノ項ヨリ小ナルベカラズ, 即

$$\frac{n-(r+1)+1}{r+1} \leqq 1.$$

故ニ $n-r \leqq r+1$.

故ニ $\frac{n-1}{2} \leqq r$. (2).

故ニ第 $r+1$ 番目ノ項ガ極大ナル爲ニハ r ハ (1) ナル等式ト不等式トノ中ノ何レカ一ツト (2) ナル等式ト不等式トノ中ノ何レカ一ツトヲ同時ニ滿足セザルベカラズ.

若 n ガ偶數ナラバ $\frac{n}{2}$ ハ整數ニシテ且 r モ整數ナルベキヲ以テ (1) 及 (2) ヲ

$$\frac{n}{2}+\frac{1}{2} \geqq r \quad 及 \quad \frac{n}{2}-\frac{1}{2} \leqq r$$

ナル形ニ變化シテ考フレバ $r=\frac{n}{2}$ ナラザルベカラザルヲ知ル. 而シテ項數ハ $n+1$ ナルヲ以テ此場合ニ於テ第 $\frac{n}{2}+1$ 番目卽中央ノ項ノ係數ガ最大ニシテ其前及其後ノ項ノ係數ハ何レモ之ヨリ小ナリ.

次ニ n ガ奇數ナルトキハ $\frac{n+1}{2}$ 及 $\frac{n-1}{2}$ ハ共ニ整數ニシテ $r=\frac{n-1}{2}$ 及 $r=\frac{n+1}{2}$ ナル値ハ共ニ (1) 及 (2) ヲ同時ニ滿足ス. 卽此場合ニ於テハ第 $\frac{n-1}{2}+1$ 番目ノ項ノ係數ト第 $\frac{n+1}{2}+1$ 番目ノ項ノ係數トハ相等シク其値最大ナリ.

69. $(1+x)^n$ ノ展開式中ニ於テ絶對値ノ最大ナル項.

$(1+x)^n$ ノ展開式中初メヨリ第 r 番目ノ項ハ

$$\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(r-1)}\cdot x^{r-1}$$

ニシテ第 $r+1$ 番目ノ項ハ

$$\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(r-1)r}\cdot x^r$$

ナリ. 故ニ第 $r+1$ 番目ノ項ハ第 r 番目ノ項ニ

$$\frac{n-r+1}{r}x \quad 卽 \quad \left(\frac{n+1}{r}-1\right)x$$

ヲ乘ジテ得ラル. 從テ $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)|x|$ ガ 1 ヨリ大ナルカ, 1 ニ等シキカ或ハ 1 ヨリ小ナルカニ從ヒテ第 $r+1$ 番目ノ項ノ絶對値ハ第 r 番目ノ項ノ絶對値ヨリ大ナルカ, 之ニ等シキカ或ハ之ヨリ小ナリ. 而シテ條件

$$\left(\frac{n+1}{r}-1\right)|x| \geqq 1$$

ハ條件

$$r \leqq \frac{(n+1)|x|}{|x|+1}$$

ト同一ナルガ故ニ, r ガ $\frac{(n+1)|x|}{|x|+1}$ ヨリ小ナルカ, 之ニ等シキカ或ハ之ヨリ大ナルカニ從ヒテ第 $r+1$ 番目ノ項ハ第 r 番目ノ項ヨリ大ナルカ, 之ニ等シキカ或ハ之ヨリ小ナリ.

故ニ $\frac{(n+1)|x|}{|x|+1}$ ガ或整數 p ニ等シキ場合ニ於テハ初項ヨリ第 p 番目ノ項マデハ次第ニ其絶對値ガ增シ第 p 番目ノ項ト第 $p+1$ 番目ノ項トハ相等シク第 $p+1$ 番目ノ項ヨリ末項マデハ其絶對値ガ次第ニ減ズ. 故ニ第 p 番目及第 $p+1$ 番目ノ項ガ最大ナリ.

又 $\frac{(n+1)|x|}{|x|+1}$ ガ整數ニアラザルトキハ其整數部分ヲ q トスレバ初項ヨリ第 $q+1$ 番目ノ項マデハ次第ニ其絶對値ガ增シ之ヨリ後ハ次第ニ減ズ. 故ニ第 $q+1$ 番目ノ項ガ最大ナリ.

注意 1. $\frac{(n+1)|x|}{|x|+1}$ ガ 1 ヨリ小ナル場合卽 $|x|<\frac{1}{n}$ ナル場合ニアリテハ初項ガ最大ナリ. 又 $\frac{(n+1)|x|}{|x|+1}$ ガ n ヨリ大ナル場合卽 $|x|>n$ ナル場合ニアリテハ末項ガ最大ナリ.

注意 2. $(x+a)^n$ ノ展開式中ノ最大項ヲ求ムルニハ $x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$ トナシ $\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$ ナル最大項ヲ求メ然ル後 $|x^n|$ ヲ乘ズレバヨシ.

例題 (1). $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$ ナルトキ $(a+b)^{300}$ ノ展開式中ニ於ケル最大項ヲ求メヨ.

解.

$$(a+b)^{300}=a^{300}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{300}$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^{300}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{300}.$$

故ニ $\left(1+\frac{1}{2}\right)^{300}$ ノ展開式中ニ於ケル最大項ヲ求メ之ニ $\left(\frac{2}{3}\right)^{300}$ ヲ乘ズレバ可ナリ. 然ルニ

$$\frac{(300+1)\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{301}{3}=100+\frac{1}{3}.$$

故ニ $\left(1+\frac{1}{2}\right)^{300}$ ノ展開式中第 $100+1$ 項卽第 101 項ガ最大ナリ. 而シテ其項ノ數値ハ

$${}_{300}C_{100}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

ナリ. 故ニ $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$ ナルトキ $(a+b)^{300}$ ノ展開式中ニ於ケル最大項ハ其展開式ノ第 101 項ニシテ其數値ハ

$${}_{300}C_{100}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{300}\quad 卽\quad \frac{300!}{100!200!}\cdot\frac{2^{200}}{3^{300}}$$

ナリ.

(2). $(1+x)^n$ ノ展開式中絕對値ノ最大ナル項ガ最大ナル係數ヲ有スル爲ノ條件ヲ求メヨ.

解 (i). n ガ偶數ナル場合ニ於テハ ${}_nC_{\frac{1}{2}n}$ ガ最大係數ナルヲ以テ

${}_nC_{\frac{1}{2}n}|x^{\frac{1}{2}n}|$ ガ絕對値ノ最大ナル項ナラザルベカラズ. 故ニ二ツノ不等式

$${}_nC_{\frac{1}{2}n}|x^{\frac{1}{2}n}|>{}_nC_{\frac{1}{2}n-1}|x^{\frac{1}{2}n-1}|$$

及 $${}_nC_{\frac{1}{2}n}|x^{\frac{1}{2}n}|>{}_nC_{\frac{1}{2}n+1}|x^{\frac{1}{2}n+1}|$$

ガ同時ニ成立セザルベカラズ. 故ニ

$$\frac{n-\frac{1}{2}n+1}{\frac{1}{2}n}|x|>1 \quad 及 \quad \frac{n-(\frac{1}{2}n+1)+1}{\frac{1}{2}n+1}|x|<1,$$

故ニ $$|x|>\frac{\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}n+1} \quad 及 \quad \frac{\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}n+1}|x|<1,$$

故ニ $$|x|>\frac{n}{n+2} \quad 及 \quad |x|<\frac{n+2}{n}.$$

故ニ $|x|$ ハ $\frac{n}{n+2}$ ト $\frac{n+2}{n}$ トノ間ニ在ラザルベカラズ.

(ii). n ガ奇數ナル場合ニ於テハ最大係數ハ ${}_nC_{\frac{1}{2}(n-1)}$ 及 ${}_nC_{\frac{1}{2}(n+1)}$ (此二ツハ相等シ) ナリ. 故ニ ${}_nC_{\frac{1}{2}(n-1)}|x^{\frac{1}{2}(n-1)}|$ 若クハ ${}_nC_{\frac{1}{2}(n+1)}|x^{\frac{1}{2}(n+1)}|$ ガ最大ナラザルベカラズ. 故ニ

$$\frac{n-\frac{1}{2}(n-1)+1}{\frac{1}{2}(n-1)}|x|>1 \quad 及 \quad \frac{n-\{\frac{1}{2}(n+1)+1\}+1}{\frac{1}{2}(n+1)+1}|x|<1.$$

之ヨリ前ト同樣ニシテ $|x|$ ハ $\frac{n-1}{n+3}$ ト $\frac{n+3}{n-1}$ トノ間ニ在ラザルベカラザルヲ知ル.

(3). $(1+x)^n$ ノ展開式ノ相接續セル三項ノ係數ガ 6, 15, 20 ナルコトヲ知リテ n ヲ求メヨ.

解. 三ツノ相接續セル項ヲ第 r 番目第 $r+1$ 番目及第 $r+2$ 番目トス. 然ラバ

$${}_nC_{r-1}=6,\quad {}_nC_r=15,\quad {}_nC_{r+1}=20.$$

故ニ
$$\left.\begin{aligned}\frac{{}_nC_r}{{}_nC_{r-1}}&=\frac{n+1}{r}-1=\frac{15}{6}=\frac{5}{2},\\ \frac{{}_nC_{r+1}}{{}_nC_r}&=\frac{n+1}{r+1}-1=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}.\end{aligned}\right\}$$

故ニ
$$\left.\begin{aligned}\frac{n+1}{r}&=\frac{7}{2},\\ \frac{n+1}{r+1}&=\frac{7}{3}.\end{aligned}\right\}$$

邊々相除スレバ $\frac{r+1}{r}=\frac{3}{2}$, 故ニ $r=2$. 從テ $n=6$ ナリ.

(4). $\dfrac{n+1}{\left|\frac{a}{x}\right|+1}$ ノ整數部分ヲ r トスルトキ $(a+x)^n$ ノ展開式ニ於テ第 $r+1$ 番目ノ項ノ絕對値ガ最大ナルコトヲ證明セヨ.

解. 注意2ニヨリテ容易ニ證明スルコトヲ得.

(5). $(a+x)^m$ ノ展開式中第 p 番目ノ項ノ絕對値ガ最大ニシテ $(a+x)^n$ ノ展開式中第 q 番目ノ項ノ絕對値ガ最大ナルトキハ $(a+x)^{m+n}$ ノ展開式中絕對値ノ最大ナル項ハ第 $p+q$ 番目或ハ第 $p+q-1$ 番目ニ在リ. 之ヲ證明セヨ.

解. 前題ニヨリテ $p-1$ ハ $\dfrac{m+1}{\left|\frac{a}{x}\right|+1}$ ノ整數部分ニシテ $q-1$ ハ $\dfrac{n+1}{\left|\frac{a}{x}\right|+1}$ ノ整數部分ナリ. 故ニ $p+q-2$ ハ $\dfrac{m+1}{\left|\frac{a}{x}\right|+1}+\dfrac{n+1}{\left|\frac{a}{x}\right|+1}$ 卽 $\dfrac{m+n+2}{\left|\frac{a}{x}\right|+1}$ ノ整數部分ニ等シキカ或ハ之ヨリ1ダケ小ナリ. 若之ニ等シトセバ $p+q-2$ ハ $\dfrac{m+n+1}{\left|\frac{a}{x}\right|+1}+\dfrac{1}{\left|\frac{a}{x}\right|+1}$ ノ整數部分卽 $\dfrac{m+n+2}{\left|\frac{a}{x}\right|+2}$ ノ整數部分ニ等シ. 故ニ前題ニアリテ $(a+x)^{m+n}$ ノ展開式中第 $p+q-1$ 番目ノ項ハ最大ナル絕對値ヲ有ス. 又 $p+q-2$ ガ $\dfrac{m+n+2}{\left|\frac{a}{x}\right|+1}$ ヨリ

1ダケ小ナルトキハ $p+q-1$ ハ $\dfrac{m+n+1}{\left|\frac{a}{x}\right|+1}+\dfrac{1}{\left|\frac{a}{x}\right|+1}$ ノ整數部分卽 $\dfrac{m+n+1}{\left|\frac{a}{x}\right|+2}$ ノ整數部分ニ等シ. 故ニ前題ニヨリ $(a+x)^{m+n}$ ノ展開式中第 $p+q$ 番目ノ項ガ最大ナル絕對値ヲ有ス.

(6). n 箇ノ文字ヲ排列セル一ツノ順列アリ, 其文字ノ位置ヲ原位置ヨリ數ヘテ一ツヨリ遠ク動カサザルトキハ, 此順列ヨリ得ル順列ノ數如何.

解. 所設ノ順列ヲ

$$abcd\cdots\cdots\cdots kl$$

トス. 所要ノ順列ノ數ヲ $f(n)$ トス. 此順列ヲ二ツノ部分

$$ab,\qquad cd\cdots\cdots kl$$

ニ分ツニ此第二ノ部分ヲ所題ノ條件ニ從ヒテ列ベ變ユル仕方ノ數ハ $f(n-2)$ ニシテ之ニ ab 若クハ ba ヲ添エテ得ラルヽ順列ノ數ハ $2f(n-2)$ ナリ. 而シテ ab ノ中ノ b ト $cd\cdots kl$ ノ中ノ c トヲ交換シテ所題ノ條件ニ從ヒテ作レル順列ノ數ハ $f(n-3)$ ナリ. 故ニ

$$f(n)=2f(n-2)+f(n-3).$$

同樣ニ

$$f(n-2)=2f(n-4)+f(n-5),$$
$$f(n-3)=2f(n-5)+f(n-6),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(5)=2f(3)+f(2),$$
$$f(4)=2f(2)+f(1).$$

故ニ順次代入スルコトニヨリテ $f(n)$ ヲ $f(3), f(2), f(1)$ ニテ表ス

コトヲ得. 而シテ

$$f(3)=3,\quad f(2)=f(1)=1$$

ナリ. 故ニ $f(n)$ ヲ求ムルコトヲ得.

故ニ本題ハ關係規準ガ

$$u_n-0.u_{n-1}-2.u_{n-2}-u_{n-3}=0$$

ナル循環級數ノ一般項ヲ見出スコトヽナル. 然ルニ

$$(a+bx+cx^2)=(1+px+qx^2+rx^3)(u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots+u_nx^n+\cdots)$$

トスレバ係數ノ比較ニヨリテ

$$u_0=a,$$

$$u_1+pu_0=b,$$

$$u_2+pu_1+qu_0=c,$$

$$u_3+pu_2+qu_1+ru_0=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n+pu_{n-1}+qu_{n-2}+ru_{n-3}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故ニ

$$\frac{u_0+(u_1+pu_0)x+(u_2+pu_1+qu_0)x^2}{1+px+qx^2+rx^3}=u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots+u_nx^n+\cdots$$

故ニ函數

$$\frac{u_0+(u_1+pu_0)x+(u_2+pu_1+qu_0)x^2}{1+px+qx^2+rx^3}$$

ヲ x ノ昇冪ノ順ニ於テ級數ニ展開スルトキハ其展開式ノ係數ハ

$$u_n+pu_{n-1}+qu_{n-2}+ru_{n-3}=0$$

ニヨリテ連結セラレ u_n ハ x^n ノ係數ナリ.

本題ニ於テハ

$$p=0,\quad q=-2,\quad r=1$$

ナリ. 故ニ所要ノ順列ノ數 $f(n)$ ハ

$$\frac{f(1)+f(2)x+\{f(3)-2f(1)\}x^2}{1-2x^2-x^3}$$

卽

$$\frac{1+2x+x^2}{1-2x^2-x^3}$$

卽

$$\frac{1+x}{1-x-x^2}$$

ノ展開式中ノ x^{n-1} ノ係數ナリ. 然ルニ

$$\frac{1+x}{1-x-x^2}=(1+x)(1-x-x^2)^{-1}$$

$$=(1+x)\{1+x(1+x)+x^2(1+x)^2+x^3(1+x)^3+\cdots\cdots\}$$ *

$$=(1+x)+x(1+x)^2+x^2(1+x)^3+x^3(1+x)^4+\cdots\cdots$$

故ニ x^{n-1} ハ

$$\cdots\cdots\cdots+x^{n-3}(1+x)^{n-2}+x^{n-2}(1+x)^{n-1}+x^{n-1}(1+x)^n$$

ノ中ニ含マレ, 其係數ハ

$$\cdots\cdots\cdots+{}_{n-3}C_3+{}_{n-2}C_2+{}_{n-1}C_1+1$$

ナリ. 故ニ

$$\text{所要ノ數}={}_nC_0+{}_{n-1}C_1+{}_{n-2}C_2+{}_{n-3}C_3+\cdots\cdots$$

70. 二項係數間ノ關係.

本節ニ於テハ二項定理ニヨリ二項係數ノ關係ヲ求メントス.

便利ノ爲ニ二項定理ノ展開式ノ係數 ${}_nC_r$ ノ n ヲ略シテ次ノ如ク記ス.

$c_0-c_1x+c_2x\cdots\cdots(-1)^rc_rx^r\cdots+c_nx^n\cdots\cdots$

$$(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_rx^r+\cdots\cdots+c_nx^n. \tag{1}$$

* 指數ガ負ノ整數ナル二項定理ハ本編ノ關スル所ニアラザレドモ今之ヲ使用スルコトヲ許スモノトス.

日大理科 M

(i). (1) ニ於テ $x=1$ ト置クトキハ

$$2^n=c_0+c_1+c_2+\cdots\cdots+c_r+\cdots\cdots c_n.$$

即 $(1+x)^n$ ノ展開式ニ於ケル係數ノ和ハ 2^n ニ等シ. 是既ニ第 **36** 節ニ於テ獨立ニ證明シタル所ナリ.

(ii). (1) ニ於テ $x=-1$ ト置クトキハ

$$0=c_0-c_1+c_2-\cdots\cdots\cdots+(-1)^n c_n$$

故ニ $$c_0+c_2+c_4+\cdots\cdots=c_1+c_3+c_5+\cdots\cdots$$

即 $(1+x)^n$ ノ展開式ニ於テ初項ヨリ奇數番目ノ項ノ係數ノ和ハ偶數番目ノ項ノ係數ノ和ニ等シ. 是亦既ニ第 **37** 節ニ於テ獨立ニ證明シタル所ナリ.

(iii). $c_r=c_{n-r}$ ナルヲ以テ,

$$(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_rx^r+\cdots\cdots+c_nx^n,$$

$$(1+x)^n=c_n+c_{n-1}x+c_{n-2}x^2+\cdots\cdots+c_{n-r}x^r+\cdots\cdots+c_0x^n.$$

此二等式ヲ邊々相乘ジ兩邊中 x^n ノ係數ヲ相等シト置クトキハ

$$\frac{(2n)!}{n!n!}=c_0^2+c_1^2+c_2^2+\cdots\cdots+c_n^2.$$

即 $(1+x)^n$ ノ展開式ノ係數ノ自乘ノ和ハ $\frac{(2n)!}{n!n!}$ ニ等シ.

同樣ニ x^r ノ係數ヲ比較スレバ次ノ等式

$$c_0c_r+c_1c_{r+1}+\cdots\cdots+c_{n-r}c_n=\frac{(2n)!}{(n+r)!(n-r)!}$$

ガ證明セラル.

(iv). (iii) ト同樣ニ

$$(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_nx^n,$$

$$(1-x)^n=c_n-c_{n-1}x+c_{n-2}x^2+\cdots\cdots+(-1)^nc_0x^n.$$

此二等式ヲ邊々相乘ジ兩邊中ノ x^n ノ係數ヲ相等シト置クトキハ

$$c_0^2-c_1^2+c_2^2-\cdots\cdots+(-1)^nc_n^2=0 \quad (n\ ガ奇數ナルトキ),$$

$$=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{n!}{\left[\left(\frac{1}{2}n\right)!\right]^2} \quad (n\ ガ偶數ナルトキ).$$

(v). 次ノ等式

$$\left.\begin{aligned}1&={}_0C_0,\\ 1+x&={}_1C_0+{}_1C_1x,\\ (1+x)^2&={}_2C_0+{}_2C_1x+{}_2C_2x^2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (1+x)^n&={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ノ左邊ヲ相加フルトキハ

$$1+(1+x)+(1+x)^2+\cdots\cdots+(1+x)^n=\frac{(1+x)^{n+1}-1}{x}.$$

然ルニ此右邊ノ $(1+x)^{n+1}$ ヲ二項定理ニヨリテ展開スルトキハ

$$\frac{(1+x)^{n+1}-1}{x}={}_{n+1}C_1+{}_{n+1}C_2x+\cdots\cdots+{}_{n+1}C_{n+1}x^n$$

此右邊ト (2) ノ右邊ノ和トヲ比較シテ x ノ同乘冪ノ項ノ係數ヲ相等シト置クトキハ

$$ {}_0C_0+{}_1C_0+{}_2C_0+\cdots\cdots\cdots+{}_nC_0={}_{n+1}C_1,$$

$$ {}_1C_1+{}_2C_1+\cdots\cdots\cdots+{}_nC_1={}_{n+1}C_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$ {}_nC_n={}_{n+1}C_{n+1}.$$

即一般ニ

$$ {}_rC_r+{}_{r+1}C_r+\cdots\cdots\cdots+{}_nC_r={}_{n+1}C_{r+1}.$$

(vi). (v) ノ等式 (2) ノ兩邊ニ夫々次ノ數

$$ {}_nC_0,\quad -{}_nC_1,\quad {}_nC_2,\ \cdots\cdots,\ (-1)^n{}_nC_n$$

ヲ乘ジ相加フルトキハ左邊ハ

$$ {}_nC_0 - {}_nC_1(1+x) + {}_nC_2(1+x)^2 - \cdots\cdots + (-1)^n {}_nC_n(1+x)^n = [1-(1+x)]^n $$
$$ = (-x)^n $$

是ニ於テ左右兩邊ノ x ノ同乘冪ノ項ノ係數ヲ相等シト置クトキハ

$$ 0 = {}_0C_0 \cdot {}_nC_0 - {}_1C_0\,{}_nC_1 + {}_2C_0 \cdot {}_nC_2 - \cdots\cdots + (-1)^n {}_nC_0\,{}_nC_n, $$
$$ 0 = \qquad -{}_1C_1\,{}_nC_1 + {}_2C_1\,{}_nC_2 - \cdots\cdots + (-1)^n {}_nC_1\,{}_nC_n. $$
$$ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots $$
$$ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots $$
$$ \pm 1 = \qquad (-1)^n {}_nC_n\,{}_nC_n $$

ナル等式ヲ得. 此等式ニ於テ ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ ト置クトキハ

$$ 1 = {}_nC_0\,{}_nC_0, $$
$$ 0 = {}_nC_1\,{}_nC_0 - {}_{n-1}C_0\,{}_nC_1, $$
$$ 0 = {}_nC_2 \cdot {}_nC_0 - {}_{n-1}C_1\,{}_nC_1 + {}_{n-2}C_0\,{}_nC_2, $$
$$ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots $$
$$ 0 = {}_nC_n\,{}_nC_0 - {}_{n-1}C_{n-1}\,{}_nC_1 + {}_{n-2}C_{n-2}\,{}_nC_2 - \cdots \pm (-1)^n {}_0C_0 \cdot {}_nC_n $$

トナル.

例題 (1). 次ノ級數ノ和ヲ求メヨ.

$$ \frac{{}_nC_1}{1} + 2\frac{{}_nC_2}{{}_nC_1} + 3\frac{{}_nC_3}{{}_nC_2} + \cdots + n\frac{{}_nC_n}{{}_nC_{n-1}} $$

解. $r\dfrac{{}_nC_r}{{}_nC_{r-1}} = n-r+1$ ナルヲ以テ所題ノ級數ノ和ハ

$$ n + (n-1) + (n-2) + \cdots\cdots + 1 \quad 卽 \quad \frac{n(n+1)}{2} $$

ナリ.

(2). 等式

$$ {}_nC_1 - 2 \cdot {}_nC_2 + 3\,{}_nC_3 - \cdots\cdots + (-1)^{n-1} n\,{}_nC_n = 0 $$

ヲ證明セヨ.

解. 此等式ノ左邊ヲ書キ直スコトニヨリテ

$$ 左邊 = n - 2 \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + 3 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \cdots + (-1)^{n-1} n $$
$$ = n\left\{1 - (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} - \cdots + (-1)^{n-1}\right\} $$
$$ = n(1-1)^{n-1} = n \times 0 = 0. $$

(3). 等式

$$ {}_nC_1 - \frac{1}{2}\,{}_nC_2 + \frac{1}{3}\,{}_nC_3 - + \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}\,{}_nC_n $$
$$ = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} $$

ヲ證明セヨ.

解. $n=1$ トセバ此等式ハ眞ナリ. 此等式ガ n ノ或値ニ向ツテ眞ナリト假定シ其値ヨリモ 1 ダケ大ナル値ニ向ツテモ眞ナルコトヲ證明セントス. 假定ニヨリテ

$$ n - \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - + \cdots\cdots \pm \frac{n}{n-1} \mp \frac{1}{n} $$
$$ = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} $$

ハ眞ナリ. 此トキ等式

$$ (n+1) - \frac{1}{2}\,\frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3}\,\frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - + \cdots\cdots \mp \frac{n+1}{n} \pm \frac{1}{n+1} $$
$$ = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n+1} $$

ガ眞ナルガ爲ニハ此兩等式ヲ邊々相減ズルコトニヨリテ得タル等式

$$ 1 - \frac{n}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - + \cdots\cdots \mp 1 \pm \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} $$

ガ眞ナレバ可ナリ. 然ルニ此等式ノ兩邊ニ $n+1$ ヲ乘ジテ總テノ項ヲ右邊ニ移セバ

$$0=1-(n+1)+\frac{(n+1)n}{1\cdot 2}-\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdot\ \pm(n+1)\mp 1$$

ナリ. 而シテ此等式ノ右邊ハ明ニ $(1-1)^{n+1}$ ノ展開式ナリ. 故ニ所題ノ等式ガ n ノ或値ニ向ツテ眞ナルトキハ其値ヨリモ1ダケ大ナル値ニ向ツテモ亦眞ナリ. 故ニ數學的歸納法ニヨリテ所題ノ等式ハ眞ナリ.

71. 例題.

(1). I 及 F ヲ以テ夫々 $(5\sqrt{2}+7)^{2n+1}$ ノ整數部分及純小數部分ヲ表セバ $F(I+F)=1$ ナルコトヲ證明セヨ. 但 n ハ正ノ整數ナリトス.

解. $(5\sqrt{2}+7)^{2n+1}=(5\sqrt{2})^{2n+1}+{}_{2n+1}C_1(5\sqrt{2})^{2n}\cdot 7$

$$+{}_{2n+1}C_2(5\sqrt{2})^{2n-1}\cdot 7^2+{}_{2n+1}C_3\cdot(5\sqrt{2})^{2n-2}\cdot 7^3+\cdots\cdot$$

又.

$$(5\sqrt{2}-7)^{2n+1}=(5\sqrt{2})^{2n+1}-{}_{2n+1}C_1(5\sqrt{2})^{2n}\cdot 7\cdot$$

$$+{}_{2n+1}C_2(5\sqrt{2})^{2n-1}\cdot 7^2-{}_{2n+1}C_3(5\sqrt{2})^{2n-2}\cdot 7^3+\cdots\cdot$$

此二式ヲ邊々相減ズルトキハ

$$(5\sqrt{2}+7)^{2n+1}-(5\sqrt{2}-7)^{2n+1}=2\{{}_{2n+1}C_1 50^n\cdot 7+{}_{2n+1}C_3 50^{n-1}\cdot 7^3+\cdots\cdot\}$$

ニシテ偶數ナリ. 今之ヲ表スニ $2m$ ヲ以テシ $(5\sqrt{2}-7)^{2n+1}$ ヲ表スニ G ヲ以テスレバ

$$I+F-G=2m.$$

故ニ $$F-G=2m-I.$$

然ルニ F 及 G ハ1ヨリ小ナル正ノ數ニシテ其差ハ整數ナルコト能ハズ. 故ニ $F=G$ ナリ. 而シテ $F=G$ ナルトキハ

$$F(I+F)=G(I+F)=(5\sqrt{2}+7)^{2n+1}\times(5\sqrt{2}-7)^{2n+1}$$

$$=(50-49)^{2n+1}=1.$$

(2). n ガ1ヨリ大ナル正ノ整數ナルトキハ $3^{3n}-26n-1$ ハ 676 ニテ割リ切ラルヽコトヲ證C明セヨ.

解. $3^{3n}=27^n=(1+26)^n$

$$=1+26n+{}_nC_2 26^2+{}_nC_3 26^3+\cdots\cdot+26^n$$

故ニ $3^{3n}-26n-1={}_nC_2 26^2+{}_nC_3 26^3+\cdots\cdot+26^n$

$$=26^2\{{}_nC_2+{}_nC_3 26+\cdots\cdot+26^{n-2}\}$$

$$=26^2\times\text{整數}$$

$$=676\times\text{整數}.$$

(3). n ガ1ヨリ大ナル正ノ整數ナルトキハ $(3+\sqrt{7})^n$ ノ整數部分ハ奇數ナルコトヲ證明セヨ.

解. $(3+\sqrt{7})^n$ ノ整數部分ヲ I, 純小數部分ヲ F トス. 然ラバ

$$I+F=3^n+{}_nC_1 3^{n-1}\sqrt{7}+{}_nC_2 3^{n-2}\cdot 7+\cdots\cdots \qquad (1)$$

ナリ. 又 $3-\sqrt{7}$ ハ1ヨリ小ナル正ノ數ナリ. 從テ $(3-\sqrt{7})^n$ モ亦1ヨリ小ナル正ノ數ナリ. 今之ヲ表スニ G ヲ以テスレバ

$$G=(3-\sqrt{7})^n=3^n-{}_nC_1 3^{n-1}\sqrt{7}+{}_nC_2 3^{n-2}\cdot 7-\cdots\cdots \qquad (2)$$

(1) ト (2) トヲ邊々相加フルトキハ

$$I+F+G=2\{3^n+{}_nC_2 3^{n-2}\cdot 7+{}_nC_4\cdot 3^{n-4}\cdot 7^2+\cdots\cdot\}$$

ニシテ此右邊ハ偶數ナリ. 今之ヲ $2m$ トスレバ

$$\therefore\ F+G=2m-I.$$

然ルニ $F<1$, $G<1$ ナルヲ以テ $F+G<2$ ニシテ且整數ナラザルベカラズ. 故ニ $F+G=1$. 故ニ

$$I=2m-1$$

依テ I ハ奇數ナラザルベカラズ.

(4). $1+2{}_nC_1+3{}_nC_2+\cdots\cdot+(n+1){}_nC_n=2^{n-1}(2+n)$ ナルコトヲ證

明セヨ.

解. $1+2{}_nC_1+3{}_nC_2+\cdots+(n+1){}_nC_n$

$$=1+2n+3\frac{n(n-1)}{1\cdot2}+4\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots$$

$$=\left\{1+n+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots\right\}$$

$$+\left\{n+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+3\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\{1+1\}^n+n\left\{1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot2}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\{1+1\}^n+n\{1+1\}^{n-1}=2^n+n2^{n-1}=2^{n-1}(2+n).$$

(5). 二項係數ヲ $c_0, c_1, c_2, \cdots\cdots$ トスルトキハ

$$c_0+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}+\frac{c_3}{4}+\cdots\cdots=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

解. $c_0=1,\ c_1=n,\ c_2=\frac{n(n-1)}{1\cdot2},\ c_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3},\cdots\cdots$

故ニ $c_0+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}+\frac{c_3}{4}+\cdots\cdots$

$$=1+\frac{n}{2!}+\frac{n(n-1)}{3!}+\frac{n(n-2)(n-3)}{4!}+\cdots\cdots$$

$\frac{1}{n+1}$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{(n+1)+\frac{(n+1)n}{2!}+\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!}+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{1+(n+1)+\frac{(n+1)n}{2!}+\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}+\cdots\cdots-1\right\}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{(1+1)^{n+1}-1\right\}$$

$$=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

(6). $(1+x)^n$ ノ展開式ノ各項ニ初項 a, 末項 l, 項數 $n+1$ ナル等差

級數ノ各項ヲ乘ジタルモノノ和ヲ求メヨ.

解. 等差級數ノ公差ヲ d トスレバ

$$d=\frac{l-a}{n}.$$

故ニ

$$所要ノ和=a+n(a+d)x+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}(a+2d)x^2+\cdots\cdots$$

$$=a\left\{1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^2+\cdots\cdots\right\}$$

$$+d\left\{nx+2\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^2+3\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots\cdots\right\}$$

$$=a(1+x)^n+dnx\left\{1+(n-1)x+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot2}x^2+\cdots\cdots\right\}$$

$$=a(1+x)^n+(l-a)x(1+x)^{n-1}$$

$$=(1+x)^{n-1}(a+ax+lx-ax)$$

$$=(1+x)^{n-1}(a+lx).$$

(7). n ガ正ノ整數ナルトキ次ノ等式

$$\frac{c_0}{x}-\frac{C_1}{x+1}+\frac{C_2}{x+2}-\cdots\cdots(-1)^n\frac{C_n}{x+n}=\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

ヲ證明セヨ.

解. 等式

$$\frac{1}{x}-\frac{{}_nC_1}{x+1}+\frac{{}_nC_2}{x+2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{{}_nC_n}{x+n}=\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\quad(1)$$

ガ n ノ或特別ナル値及 x ノ任意ノ値ニ對シテ眞ナリトセヨ.

x ノ代リニ $x+1$ ト置クトキハ

$$\frac{1}{x+1}-\frac{{}_nC_1}{x+2}+\frac{{}_nC_2}{x+3}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{{}_nC_n}{x+n+1}$$

$$=\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}\quad(2)$$

(1) ヨリ (2) ヲ減ズルトキハ

$$\frac{1}{x}-\frac{{}_n\mathrm{C}_1+1}{x+1}+\frac{{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_1}{x+2}-\cdots\cdot+(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r+{}_n\mathrm{C}_{r-1}}{x}+\cdots\cdot$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{1}{x+n+1}=\frac{(n+1)!}{x(x+1)\cdots(x+n+1)}.$$

然ルニ

$${}_n\mathrm{C}_r+{}_n\mathrm{C}_{r-1}={}_{n+1}\mathrm{C}_r.$$

故ニ

$$\frac{1}{x}-\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_1}{x+1}+\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_2}{x+2}-\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}{x+n+1}=\frac{(n+1)!}{x(x+1)\cdots(x+n+1)}.$$

即所題ノ等式ガ n ノ或特別ノ値ニ對シテ成立スルトキハ之ヨリモ 1 ダケ大ナル n ノ値ニ對シテ成立ス. 而シテ $n=1$ ナルトキニ(1)ハ x ノ値ノ如何ニ拘ラズ成立ス. 故ニ (1) ハ一般ニ眞ナリ.

(8). $(x+a)^n$ ノ展開式ノ諸項ヲ $p_0, p_1, p_2, \cdots\cdot$ トスルトキハ

$$(p_0-p_2+p_4-\cdots\cdot)^2+(p_1-p_3+p_5-\cdots\cdot)^2=(x^2+a^2)^n$$

ナルコトヲ證明セヨ.

解 $i=\sqrt{-1}$ トスレバ

$$(x+ai)(x-ai)=x^2+a^2$$

ナルヲ以テ

$$(x+ai)^n(x-ai)^n=(x^2+a^2)^n$$

ナリ. 然ルニ

$$(x+ai)^n=p_0-p_2+p_4-\cdots\cdot+(p_1-p_3+p_5-\cdots\cdot)i$$

$$(x-ai)^n=p_0-p_2+p_4-\cdots\cdot-(p_1-p_3+p_5-\cdots\cdot)i$$

故ニ邊々相乘ズルトキハ

$$(x^2+a^2)^n=(p_0-p_2+p_4-\cdots\cdot)^2+(p_1-p_3+p_5-\cdots\cdot)^2.$$

(9). 等式

$$c_0a-c_1(a-1)+c_2(a-2)-c_3(a-3)+\cdots\cdot+(-1)^nc_n(a-n)=0,$$

$$c_0a^p-c_1(a-1)^p+c_2(a-2)^p-c_3(a-3)^p$$

$$+\cdots\cdots\cdot+(-1)^nc_n(a-n)^p=0 \qquad (n\geqq p)$$

ノ成立スルコトヲ證明セヨ.

解. n ガ正ノ整數ナルトキハ

$$1-n+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdot+(-1)^n=0. \qquad (1)$$

又 $n\geqq1$ ナルトキハ

$$1-(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot2}-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3}-\cdots+(-1)^n=0. \quad (2)$$

(1) ニ a ヲ乘ジ (2) ニ n ヲ乘ジテ邊々相加フルトキハ

$$a-n(a-1)+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}(a-2)-\cdots\cdot+(-1)^n(a-n)=0. \qquad (3)$$

但 $n\geqq1$ ナルコトニ注意スルヲ要ス.

次ニ a ヲ $a-1$ ニ, n ヲ $n-1$ ニ變ズ. 但 $n\geqq2$ ナルヲ要ス. 然ルトキハ

$$a-1-(n-1)(a-2)+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot2}(a-3)-\cdots\cdot+(-1)^n(a-n)=0. \quad (4)$$

(3) ニ a ヲ, (4) ニ n ヲ乘ジテ邊々相加フルトキハ

$$a^2-n(a-1)^2+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}(a-2)^2-\cdots\cdot+(-1)^n(a-n)^2=0.$$

斯ノ如ク進ムトキハ終ニ

$$a^p-n(a-1)^p+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}(a-2)^p-\cdots\cdot+(-1)^n(a-n)^p=0.$$

但 p ハ正ノ整數ニシテ $n\geqq p$ ナルヲ要ス.

72. ゔぁんでるもんどノ定理.

x ニ關スル n 箇ノ二項式ノ乘積

$$(x-1)(x-2)\cdots\cdot(x-n+1)$$

ヲ表スニ x_n ヲ以テスルトキハ等式

$$(x+y)_n = x_n + nx_{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x_{n-2}y_2 + \cdots\cdots + \frac{n!}{r!(n-r)!}x_{n-r}y_r + \cdots\cdots + y_n \qquad (1)$$

ガ成立ス. 之ヲゔぁんでるもんどノ定理ト云フ.

第一證明法.

x ガ正ノ整數ナルトキハ ${}_xC_n = \frac{x_n}{n!}$ ナリ. 故ニ x 及 y ガ正ノ整數ニシテ $x+y \geqq n$ ナルトキハ第83節ニヨリ

$$\frac{(x+y)_n}{n!} = \frac{x_n}{n!} + \frac{x_{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{y_1}{1!} + \frac{x_{n-2}}{(n-2)!}\cdot\frac{y_2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x_{n-r}}{(n-r)!}\cdot\frac{y_r}{r!} + \cdots\cdots + \frac{y_n}{n!} \qquad (2)$$

ナリ. 此兩邊ニ $n!$ ヲ乘ズルトキハ

$$(x+y)_n = x_n + nx_{n-1}y_1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x_{n-2}y_2 + \cdots\cdots + \frac{n!}{r!(n-r)!}x_{n-r}y_r + \cdots + y_n \qquad (3)$$

トナル. 此式ハ x ト y トガ正ノ整數ニシテ $x+y > n$ ナルトキハ常ニ成立スルヲ以テ, y ニ n ヨリ大ナル或正ノ整數値ヲ與フルトキハ x ノ總テノ正ノ整數ニ對シテ成立ス. 而シテ此等式ノ左右兩邊ハ何レモ n 次ノ有理整式ナリ. 然ルニ二ツノ x ノ n 次ノ有理整式ノ値ガ n 箇ヨリ多クノ異ナル x ノ値ニ對シテ相等シキトキハ x ノ總テノ値ニ向ヒテ相等シ. 故ニ等式 (3) ハ y ガ n ヨリ大ナル正ノ整數値ヲ取ルトキハ x ノ總テノ値ニ向ヒテ成立ス. 更ニ x ノ或値ト y ノ n ヨリ大ナル正ノ整數値ニ向ヒテ成立スルヲ以テ x ガ其値ヲ取ルトキハ此等式ハ y ノ n 箇ヨリ多キ正ノ整數値ニ向ヒテ成立ス. 故ニ y ノ總テノ値ニ向ヒテ成立ス. 故ニ x ト y トノ總テノ値ニ向ヒテ成立ス.

第二證明法.

x ト y トノ總テノ値及 n ノ或値ニ對シテ等式 (1) ガ成立スルトシ $x+y-n$ ヲ其兩邊ニ乘ズ. 然ルトキハ左邊ハ $(x+y)_{n+1}$ トナル. 又右邊ニハ之ヲ次ノ如キ形

$$\{(x-n)+y\},$$
$$\{(x-n+1)+(y-1)\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\{(x-n+r-1)+(y-r+1)\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

トナシ, 此順序ニ從ヒテ夫々第一項, 第二項, $\cdots\cdots$, 第 r 項, $\cdots\cdots$ ニ乘ズ. 然ルトキハ

$$(x+y)_{n+1} = x_n\{(x-n)+y\} + nx_{n-1}y_1\{(x-n+1)+(y-1)\} + \frac{n(n-1)}{2!}x_{n-2}y_2\{(x-n+2)+(y-2)\} + \cdots\cdots + \frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!}x_{n-r+1}y_{r-1}\{(x-n+r-1)+(y-r+1)\} + \frac{n!}{(n-r)!r!}x_{n-r}y_r\{(x-n+r)+(y-r)\} + \cdots\cdots + y_n\{x+(y-n)\}.$$

然ルニ

$$x_n\{(x-n)+y\} = x_{n+1} + x_ny_1,$$

$$nx_{n-1}y_1\{(x-n+1)+(y-1)\} = n(x_ny_1 + x_{n-1}y_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!}x_{n-r+1}y_{r-1}\{(x-n+r-1)+(y-r+1)\} = \frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!}(x_{n-r+2}y_{r-1} + x_{n-r+1}y_r),$$

$$\frac{n!}{(n-r)!r!}x_{n-r}y_r\{(x-n+r)+(y-r)\} = \frac{n!}{(n-r)!r!}(x_{n-r+1}y_r + x_{n-r}y_{r+1}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n\{x+(y-n)\}=x_1y_n+y_{n+1}.$$

故ニ

$$\begin{aligned}(x+y)_{n+1}&=x_{n+1}+(1+n)x_ny_1+\cdots\cdot\\&\quad+\left(\frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!}+\frac{n!}{(n-r)!r!}\right)x_{n+1-r}y_r+\cdots\cdot+y_{n+1}\\&=x_{n+1}+(n+1)x_ny_1+\cdots+\frac{(n+1)!}{(n+1-r)!r!}x_{n+1-r}y_r+\cdots+y_{n+1}.\end{aligned}$$

卽等式 (1) ガ n ノ或値ニ對シテ成立スルトキハ之ヨリ 1 ダケ大ナル値ニ對シテモ成立ス. 然ルニ $n=1, n=2$ ナルトキハ實際計算スルコトニヨリテ (1) ガ成立スルヲ知ル. 故ニ n ノ値ノ如何ニ拘ラズ (1) ハ成立ス.

73. あーべるノ定理.

あーべるハ二項定理ヲ擴張シテ等式

$$\begin{aligned}(x+\alpha)^n=x^n&+{}_n\mathrm{C}_1\alpha\cdot(x+\beta)^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2\alpha\cdot(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{n-2}\\&+{}_n\mathrm{C}_3\alpha(\alpha-3\beta)^2(x+3\beta)^{n-3}+{}_n\mathrm{C}_4\alpha(\alpha-4\beta)^3(x+4\beta)^{n-4}+\cdots\cdot\\&+{}_n\mathrm{C}_1\alpha(\alpha-\overline{n-1}\beta)^{n-2}(x+\overline{n-1}\beta)+\alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}\qquad(1)\end{aligned}$$

ノ成立スルコトヲ證明セリ. 但式中 β ハ任意ノ數ニシテ $\beta=0$ ト置クトキハ二項定理トナル. 次ニ數學的歸納法ニヨリ此等式ノ眞ナルコトヲ證明スベシ.

先 $$\begin{aligned}(x+\alpha)^{n+1}=x^{n+1}&+\mathrm{A}_1(x+\beta)^n+\mathrm{A}_2(x+2\beta)^{n-1}+\cdots\cdot\\&+\mathrm{A}_n(x+n\beta)+\mathrm{A}_{n+1}\qquad(2)\end{aligned}$$

ト置ク. 但式中 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n, \mathrm{A}_{n+1}$ ハ未定係數ナリ. 今此等式ノ左右兩邊ノ各項ヲ二項定理ニヨリテ展開シ x ノ同乘冪ノ項ノ係數ヲ相等シト置ケバ次ノ等式ヲ得.

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{A}_1&&={}_{n+1}\mathrm{C}_1\alpha,\\&{}_n\mathrm{C}_1\beta\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2&&={}_{n+1}\mathrm{C}_2\alpha^2,\\&{}_n\mathrm{C}_2\beta^2\mathrm{A}_1+{}_{n-1}\mathrm{C}_1(2\beta)\mathrm{A}_2+\mathrm{A}_3&&={}_{n+1}\mathrm{C}_3\alpha^3,\\&{}_n\mathrm{C}_3\beta^3\mathrm{A}_1+{}_{n-1}\mathrm{C}_2(2\beta)^2\mathrm{A}_2+{}_{n-2}\mathrm{C}_1(3\beta)\mathrm{A}_3+\mathrm{A}_4&&={}_{n+1}\mathrm{C}_4\alpha^4,\\&{}_n\mathrm{C}_4\beta^4\mathrm{A}_1+{}_{n-1}\mathrm{C}_3(2\beta)^3\mathrm{A}_2+{}_{n-2}\mathrm{C}_2(3\beta)^2\mathrm{A}_3+{}_{n-3}\mathrm{C}_1(4\beta)\mathrm{A}_4+\mathrm{A}_5&&={}_{n+1}\mathrm{C}_5\alpha^5,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}(3)$$

倘今 (1) ヲ眞ナリト假定シ, 其中ニ於テ $x=0$ ト置クトキハ

$$\begin{aligned}\alpha^n={}_n\mathrm{C}_1\alpha\beta^{n-1}&+{}_n\mathrm{C}_2\alpha(\alpha-2\beta)(2\beta)^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_3\alpha(\alpha-3\beta)^2(3\beta)^{n-3}\\&+{}_n\mathrm{C}_4\alpha(\alpha-4\beta)^3(4\beta)^{n-4}+\cdots\cdots\\&+{}_n\mathrm{C}_1\alpha(\alpha-\overline{n-1}\beta)^{n-2}(n-1)\beta+\alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}.\qquad(4)\end{aligned}$$

是ニ於テ $n=1, 2, 3, 4, \cdots\cdot$ ノ値ヲ與フルトキハ次ノ等式ヲ得

$$\left.\begin{aligned}&\alpha={}_1\mathrm{C}_1\alpha,\\&\alpha^2={}_2\mathrm{C}_1\alpha\beta+{}_2\mathrm{C}_2\alpha(\alpha-2\beta),\\&\alpha^3={}_3\mathrm{C}_1\alpha\beta^2+{}_3\mathrm{C}_2\alpha(\alpha-2\beta)(2\beta)+{}_3\mathrm{C}_3\alpha(\alpha-3\beta)^2,\\&\alpha^4={}_4\mathrm{C}_1\alpha\beta^3+{}_4\mathrm{C}_2\alpha(\alpha-2\beta)(2\beta)^2+{}_4\mathrm{C}_3\alpha(\alpha-3\beta)^2(3\beta)+{}_4\mathrm{C}_4\alpha(\alpha-4\beta)^3,\\&\alpha^5={}_5\mathrm{C}_1\alpha\beta^4+{}_5\mathrm{C}_2\alpha(\alpha-2\beta)(2\beta)^3+{}_5\mathrm{C}_3\alpha(\alpha-3\beta)^2(3\beta)^2\\&\qquad\qquad+{}_5\mathrm{C}_4\alpha(\alpha-4\beta)^3(4\beta)+{}_5\mathrm{C}_5\alpha(\alpha-5\beta)^4,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}(5)$$

此等ノ等式ノ左邊ニ夫々 ${}_{n+1}\mathrm{C}_1, {}_{n+1}\mathrm{C}_2, {}_{n+1}\mathrm{C}_3, \cdots\cdot$ ヲ乘ズルトキハ (3) ノ右邊ヲ得. 而シテ其値ハ夫々次ノ値ニ等シ.

$$\begin{aligned}&{}_{n+1}\mathrm{C}_1\alpha,\\&{}_{n+1}\mathrm{C}_2[{}_2\mathrm{C}_1\alpha\beta+\alpha(\alpha-2\beta)],\\&{}_{n+1}\mathrm{C}_3[{}_3\mathrm{C}_1\alpha\beta^2+{}_3\mathrm{C}_2\alpha(\alpha-2\beta)(2\beta)+\alpha(\alpha-3\beta)^2],\\&{}_{n+1}\mathrm{C}_4[{}_4\mathrm{C}_1\alpha\beta^3+{}_4\mathrm{C}_2\alpha(\alpha-2\beta)(2\beta)^2+{}_4\mathrm{C}_3\alpha(\alpha-3\beta)^2(3\beta)+\alpha(\alpha-4\beta)^3],\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

之ヨリ $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots$ ヲ計算スレバ次ノ如シ.

$$A_1 = {}_{n+1}C_1 \alpha,$$

$$A_2 = {}_{n+1}C_2 \alpha(\alpha - 2\beta),$$

$$A_3 = {}_{n+1}C_3 \alpha(\alpha - 3\beta)^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此値ヲ (2) ニ入ルヽトキハ

$$(x+\alpha)^{n+1} = x^{n+1} + {}_{n+1}C_1 \alpha(x+\beta)^n + {}_{n+1}C_2 \alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{n-1}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots + {}_{n+1}C_1 \alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}(x+n\beta) + A_{n+1} \qquad (6)$$

但 A_{n+1} ハ未定マラザル定數ナリ. 之ヲ定ムル爲ニ (1) 及 (6) ニ於テ $x = -(n+1)\beta$ ト置クトキハ

$$(\alpha - \overline{n+1}\beta)^n = (-1)^n\Big\{(n+1)^n\beta^n - \alpha \cdot n^n\beta^{n-1} + \frac{n}{2!}\alpha(\alpha-2\beta)(n-1)^{n-1}\beta^{n-2}$$
$$- \frac{n(n-1)}{3!}\alpha(\alpha-3\beta)^2(n-2)^{n-2}\beta^{n-3} + \cdots\cdots\Big\},$$

$$(\alpha - \overline{n+1}\beta)^{n+1} = (-1)^{n+1}\Big\{(n+1)^{n+1}\beta^{n+1} - {}_{n+1}C_1 \alpha n^n\beta^n$$
$$+ {}_{n+1}C_2 \alpha(\alpha-2\beta)(n-1)^{n-1}\beta^{n-1} - {}_{n+1}C_3 \alpha(\alpha-3\beta)^2(n-2)^{n-2}\beta^{n-2} + \cdots\Big\} + A_{n+1}$$

初ノ等式ノ兩邊ニ $\beta(n+1)$ ヲ乘ジ後ノ等式ニ加フルトキハ

$$A_{n+1} = (\alpha - \overline{n+1}\beta)^n(n+1)\beta + (\alpha - \overline{n+1}\beta)^{n+1}$$
$$= \alpha(\alpha - \overline{n+1}\beta)^n.$$

故ニ (2) ノ中ノ未定係數ハ完全ニ決定セラレタリ. 而シテ其結果ハ (1) ノ n ノ代リニ $n+1$ ト置キタルモノニ等シ. 換言スレバ (1) ガ n ノ或値ニ對シテ成立スルモノト假定スルトキハ又 n ガ 1 ダケ增シタルトキニモ成立ス. 然ルニ n ガ 1, 2 ナル場合ニハ實際計算スルコトニヨリテ (1) ガ成立スルヲ知ル, 依テ等式 (1) ハ一般ニ眞ナリ.

74. あーべるノ定理ノ擴張.*

前節ニ述ベタルあーべるノ定理ハ尙更ニ擴張セラル. 之ヲ述ブルニ當リ先記號ノ意味ヲ說明シ置クヲ便トス.

便宜ノ爲

$$\{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n\}^m$$

ヲ以テ

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n)^m$$

ヲ展開シタル式中ニ於テ

$$a_1^{k_1} a_2^{k_2} a_3^{k_3} \cdots\cdots a_n^{k_n}$$

ナル形ヲ有スル總テノ項ノ和ヲ表スベシ. 但 k ハ次ノ條件

$$\left.\begin{aligned} k_2 + k_3 + k_4 + \cdots\cdots\cdots + k_n &\leqq m-1, \\ k_3 + k_4 + \cdots\cdots\cdots + k_n &\leqq m-2, \\ k_4 + \cdots\cdots\cdots + k_n &\leqq m-3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ k_n &\leqq m-n+1 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ヲ滿足スル正ノ整數トス. 例ヘバ

$$(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2$$

ニ於テハ $n=2$ ナリ. 今 $m=2$ トスルトキハ (2) ナル條件ハ $k_2 \leqq 1$ ナルヲ以テ.

$$\{a_1 + a_2\}^2 = a_1^2 + 2a_1a_2.$$

又 $m=1$ トスレバ (2) ナル條件ハ $k_2 \leqq 0$ ナルヲ以テ $k_2 = 0$. 故ニ

$$\{a_1 + a_2\}^1 = a_1^2.$$

同樣ニ

* 此擴張ハぶるぐ及けいりーノ工夫シタルモノナリ.

$$\{a_1+a_2+a_3\}^1=a_1^3,$$

$$\{a_1+a_2+a_3\}^2=a_1^3+3a_1^2a_2,$$

$$\{a_1+a_2+a_3\}^3=a_1^3+3a_1^2a_2+3a_1^2a_3+3a_1a_2^2.$$

次ニ (1) ニ於テ $m=n$ ナル特別ナル場合卽

$$\{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots+a_n\}^n \tag{1'}$$

ニ就テ少シク詳細ニ考究シ置クヿ必要アリ. 此場合ニハ (2) ナル條件ハ

$$\left.\begin{aligned} k_2+k_3+k_4+\cdots\cdots\cdots+k_n &\leqq n-1, \\ k_3+k_4+\cdots\cdots\cdots+k_n &\leqq n-2, \\ k_4+\cdots\cdots\cdots+k_n &\leqq n-3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ k_n &\leqq 1 \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

トナル. 然ルニ (1′) ノ中ノ各項ハ何レモ n 次ナリ. 卽

$$k_1+k_2+k_3+\cdots\cdots\cdots+k_n=n.$$

之ト (2′) トニヨリ次ノ不等式ガ得ラル.

$$\left.\begin{aligned} k_1 &\geqq 1, \\ k_1+k_2 &\geqq 2, \\ k_1+k_2+k_3 &\geqq 3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ k_1+k_2+\cdots\cdots+k_n &\geqq n-1. \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

換言スレバ (1′) 中ノ各項ハ少クトモ a_1 ヲ一ツ含ム. 故ニ

$$\{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n\}^n=a_1\mathrm{A}$$

ト置クコトヲ得. 但 A ハ $a_1^{k_1-1}a_2^{k_2}\cdots\cdot a_n^{k_n}$ ノ如キ形ヲ有スル項ノ和ニシテ, 此 k ハ條件 (3′) ヲ滿足スルモノナリ.

偖本節ニ於テ證明セントスルあーべるノ定理ノ擴張セラレタルモノトハ次ノ如シ.

$$\left.\begin{aligned} x^n=(x+a_1)^n &-{}_n\mathrm{C}_1\{a_1\}^1(x+a_1+a_2)^{n-1} \\ &+{}_n\mathrm{C}_2\{a_1+a_2\}^2(x+a_1+a_2+a_3)^{n-2} \\ &-{}_n\mathrm{C}_3\{a_1+a_2+a_3\}^3(x+a_1+a_2+a_3+a_4)^{n-4} \\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\pm{}_n\mathrm{C}_n\{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n\}^n. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

先此等式ガ n ノ或特殊ナル値ニ對シテ成立スルモノト假定スルトキハ, $n+1$ ナル場合ニモ亦成立スルコトヲ證明スベシ.

吾人ハ次ノ如ク置クコトヲ得.

$$\begin{aligned} x^{n+1}=(x+a_1)^{n+1}-\mathrm{A}_1(x+a_1+a_2)^n+\mathrm{A}_2(x+a_1+a_2+a_3)^{n-1} \\ -\mathrm{A}_3(x+a_1+a_2+a_3+a_4)^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\pm\mathrm{A}_{n+1}. \end{aligned} \tag{5}$$

但 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \cdots\cdot, \mathrm{A}_{n+1}$ ハ未定係數ニシテ之ヨリ定メント欲スルモノナリ. 此等式ノ右邊ノ各項ヲ展開シ, 左右兩邊ニ於ケル x ノ同乘羃ノ項ノ係數ヲ相等シト置クトキハ次ノ一連ノ等式ヲ得.

$$\left.\begin{aligned} &{}_{n+1}\mathrm{C}_1a_1-\mathrm{A}_1 &&=0, \\ &{}_{n+1}\mathrm{C}_2a_1^2-{}_n\mathrm{C}_1(a_1+a_2)\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2 &&=0, \\ &{}_{n+1}\mathrm{C}_3a_1^3-{}_n\mathrm{C}_2(a_1+a_2)^2\mathrm{A}_1+{}_{n-1}\mathrm{C}_1(a_1+a_2+a_3)\mathrm{A}_2-\mathrm{A}_3 &&=0, \\ &{}_{n+1}\mathrm{C}_4a_1^4-{}_n\mathrm{C}_3(a_1+a_2)^3\mathrm{A}_1+{}_{n-1}\mathrm{C}_2(a_1+a_2+a_3)^2\mathrm{A}_2 && \\ &\qquad-{}_{n-2}\mathrm{C}_1(a_1+a_2+a_3+a_4)\mathrm{A}_3+\mathrm{A}_4 &&=0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

此第一ノ等式ヨリ

$$\mathrm{A}_1={}_{n+1}\mathrm{C}_1a_1={}_{n+1}\mathrm{C}_1\{a_1\}.$$

從テ第二ノ等式ヨリ

$$ {}_{n+1}\mathrm{C}_2 a_1^2 - {}_{n}\mathrm{C}_1\,{}_{n+1}\mathrm{C}_1\{a_1\}(a_1+a_2) + \mathrm{A}_2 = 0. $$

故ニ

$$ -\mathrm{A}_2 = {}_{n+1}\mathrm{C}_2 a_1^2 - {}_{n}\mathrm{C}_1\,{}_{n+1}\mathrm{C}_1\{a_1\}(a_1+a_2) $$
$$ = {}_{n+1}\mathrm{C}_2\Big[a_1^2 - 2\{a_1\}(a_1+a_2)\Big]. $$

然ルニ (4) ニ於テ $x=0, n=2$ ト置クトキハ

$$ 0 = a_1^2 - 2\{a_1\}(a_1+a_2) + \{a_1+a_2\}^2. $$

依テ

$$ \mathrm{A}_2 = {}_{n+1}\mathrm{C}_2\{a_1+a_2\}^2. $$

A_1 及 A_2 ヲ (6) ノ第三ノ等式ニ入ルヽトキハ

$$ {}_{n+1}\mathrm{C}_3 a_1^3 - {}_{n}\mathrm{C}_2\,{}_{n+1}\mathrm{C}_1\{a_1\}(a_1+a_2)^2 $$
$$ + {}_{n-1}\mathrm{C}_1\,{}_{n+1}\mathrm{C}_2\{a_1+a_2\}^2(a_1+a_2+a_3) - \mathrm{A}_3 = 0. $$

故ニ

$$ \mathrm{A}_3 = {}_{n+1}\mathrm{C}_3\Big[a_1^3 - 3\{a^1\}(a_1+a_2)^2 + 3\{a_1+a_2\}^2(a_1+a_2+a_3)\Big]. $$

然ルニ (4) ニ於テ $x=0, n=3$ ト置クトキハ，

$$ 0 = a_1^3 - 3\{a_1\}(a_1+a_2)^2 + 3\{a_1+a_2\}^2(a_1+a_2+a_3) - \{a_1+a_2+a_3\}^3. $$

依テ

$$ \mathrm{A}_3 = {}_{n+1}\mathrm{C}_3\{a_1+a_2+a_3\}^3. $$

同樣ニ $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4, \mathrm{A}_5, \cdots, \mathrm{A}_n$ ニ對シ次ノ如キ形ノ等式ガ得ラル.

$$ \mathrm{A}_k = {}_{n+1}\mathrm{C}_k\{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_k\}^k \quad (k=1,2,3,\cdots,n) \tag{7} $$

故ニ (5) ノ中ノ未定係數中 A_{n+1} ヲ除ク外總テ決定セラレタリ.

偖 A_{n+1} ニ就テハ，若 (4) ニ於テ $x=0$ ト置キタルモノ卽

$$ \begin{aligned} 0 &= a_1^n - {}_{n}\mathrm{C}_1\{a_1\}^1(a_1+a_2)^{n-1} \\ &+ {}_{n}\mathrm{C}_2\{a_1+a_2\}^2(a_1+a_2+a_3)^{n-2} - {}_{n}\mathrm{C}_3\{a_1+a_2+a_3\}^3(a_1+a_2+a_3+a_4)^{n-3} \\ &+ \cdots\cdots \pm {}_{n}\mathrm{C}_n\{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\}^n \end{aligned} \tag{8} $$

ガ，n ガ $n+1$ トナリタルトキニモ成立スレバ前ト同樣ニ

$$ \mathrm{A}_{n+1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n+1}\}^{n+1} \tag{9} $$

ガ得ラル. 故ニ (9) ヲ證明スルニハ，(8) ガ，n ガ $n+1$ トナリタル場合ニモ成立スルコトヲ證明スレバヨシ.

偖二項定理ニヨリテ，

$$ \begin{aligned} (a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{q-1}+a_q)^t &= (a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{q-1})^t \\ &+ {}_{t}\mathrm{C}_1 a_q(a_1+a_2+\cdots+a_{q-1})^{t-1} \\ &+ {}_{t}\mathrm{C}_2 a_q^2(a_1+a_2+\cdots+a_{q-1})^{t-2} + \cdots \end{aligned} \tag{10} $$

ナリ. 而シテ右邊ハ $cst.\, a_1^{\varkappa_1}a_2^{\varkappa_2}\cdots a_{q-1}^{\varkappa_{q-1}}a_q^{\varkappa_q}$ * ノ如キ形ノ項ヨリ成リ，其中ヨリ次ノ條件

$$ \left.\begin{aligned} \varkappa_2+\varkappa_3+\cdots\cdots+\varkappa_q &\leqq t-1, \\ \varkappa_3+\cdots\cdots+\varkappa_q &\leqq t-2, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ \varkappa_q &\leqq t-q+1 \end{aligned}\right\} \tag{11} $$

ヲ滿足スル總テノ項ヲ取ルトキハ

$$ \{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{q-1}+a_q\}^t $$

ガ得ラル. 而シテ此中ニ於テ a_q ヲ一ツモ含マザルモノハ唯 (10) ノ右邊ノ第一項ヨリ得ラルヽモノニシテ，(11) ニ於テ $\varkappa_q=0$ トナシタルモノ，卽

$$ \begin{aligned} \varkappa_2+\varkappa_3+\cdots\cdots+\varkappa_{q-1} &\leqq t-1, \\ \varkappa_3+\cdots\cdots+\varkappa_{q-1} &\leqq t-2, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ \varkappa_{q-1} &\leqq t-q+2 \end{aligned} $$

ナル條件ヲ滿足スルモノヲ總テ取リタルモノナリ. 故ニ其全體ハ $\{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{q-1}\}^t$ ニテ表サル. 次ニ a_q ヲ一ツ含ミ其以上 a_q ヲ

* cst ハ定數ノ因數ヲ表ス.

含マザルモノハ(10)ノ右邊ノ第二項ヨリ得ラルヽモノニシテ，其各項ハ(11)ノ中ニ於テ $\kappa_q=1$ トナシタルモノ，卽

$$\kappa_2+\kappa_3+\cdots\cdots+\kappa_{q-1}\leqq t-2,$$

$$\kappa_3+\cdots\cdots+\kappa_{q-1}\leqq t-3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\kappa_{q-1}\leqq t-q+1$$

ナル條件ヲ滿足スル總テノモノヲ取リタルモノナリ．故ニ其全體ハ ${}_tC_1a_q\{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{q-1}\}^{t-1}$ ニテ表サル．以下同樣ナリ．故ニ

$$\begin{aligned}\{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_q\}^t=&\{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{q-1}\}^t\\&+{}_tC_1a_q\{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{q-1}\}^{t-1}\\&+{}_tC_2a_q^2\{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{q-1}\}^{t-2}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+{}_tC_{q-1}a_q^{t-q+1}\{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{q-1}\}^{q-1}\end{aligned}\tag{12}$$

ナル等式ガ得ラル．此等式ニ於テ，$q=n,\ t=n$ トスレバ

$$\begin{aligned}\{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n\}^n=&\{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}\}^n\\&+{}_nC_1a_n\{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}\}^{n-1}.\end{aligned}$$

故ニ(8)ノ終ノ二ツノ項ハ次ノ如クナル．

$$\begin{aligned}&\mp{}_nC_{n-1}\{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\}^{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\pm\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}^n\\&=\mp\Big[n\{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}\}^{n-1}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)\\&\qquad-\{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}\}^n-na_n\{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}\}^{n-1}\Big]\\&=\mp\Big[n\{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\}^{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})\\&\qquad+na_n\{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\}^{n-1}-\{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\}^n\\&\qquad-na_n\{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\}^{n-1}\Big]\\&=\mp\Big[n\{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\}^{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})-\{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\}^n\Big].\end{aligned}$$

卽(8)ハ其終ノ二項ニ於テハ外觀上 a_n ヲ含メドモ實ハ互ニ相消シテ之ヲ含マズ．吾人ハ之ヲ基礎トシ數學的歸納法ニヨリ(8)ノ右邊ノ文字ハ互ニ相消スコトヲ證明スベシ．

其爲ニ(8)ノ右邊ニ於テハ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{q+1}$ ハ互ニ相消スモノト假定スベシ．然ルトキハ $a_n=a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_{q+1}=0$ ト置クモ差支ナシ．斯ノ如ク置クトキハ(8)ノ右邊ハ

$$\begin{aligned}\{a_1+\cdots\cdots+a_q\}^n-{}_nC_1&\{a_1+\cdots\cdots+a_q\}^{n-1}(a_1+\cdots\cdots+a_q)\\&+{}_nC_2\{a_1+\cdots\cdots+a_q\}^{n-2}(a_1+\cdots\cdots+a_q)^2-\cdots\cdots\\&\pm{}_nC_{q-1}\{a_1+\cdots\cdots+a_q\}^{q-1}(a_1+\cdots\cdots+a_q)^{n-q+1}\end{aligned}$$

トナル．此式中ノ括弧 $\{\ \}$ ニ包マレタルモノヲ(12)ニヨツテ展開シ $(a_1+\cdots+a_q)^\mu$ ノ如キモノヲ $(\overline{a_1+\cdots\cdots+a_{q-1}}+a_q)^\mu$ トシテ二項定理ニヨツテ展開スルトキハ

$$(-1)^\lambda\{a_1+\cdots\cdots+a_q\}^{n-\kappa}(a_1+\cdots\cdots+a_q)^{\kappa-\lambda}a_q^\lambda$$

ノ係數ハ

$${}_{\lambda}C_{\lambda}\cdot{}_nC_{\lambda}\cdot{}_{n-\lambda}C_{\kappa-\lambda}-{}_{\lambda+1}C_{\lambda}\cdot{}_nC_{\lambda+1}\cdot{}_{n-\lambda-1}C_{\kappa-\lambda-1}+{}_{\lambda+2}C_{\lambda}\cdot{}_nC_{\lambda+2}\cdot{}_{n-\lambda-2}C_{\kappa-\lambda-2}-\cdots\cdots$$

トナル．然ルニ

$${}_nC_{\lambda+\alpha}\cdot{}_{n-\lambda-\alpha}C_{\kappa-\lambda-\alpha}={}_nC_{\kappa}\cdot{}_{\kappa}C_{\lambda+\alpha}$$

ナルヲ以テ

$$\begin{aligned}&{}_nC_{\kappa}\Big[{}_{\lambda}C_{\lambda}\cdot{}_{\kappa}C_{\lambda}-{}_{\lambda+1}C_{\lambda}\cdot{}_{\kappa}C_{\lambda+1}+{}_{\lambda+2}C_{\lambda}\cdot{}_{\kappa}C_{\lambda+2}-{}_{\lambda+3}C_{\lambda}\cdot{}_{\kappa}C_{\lambda+3}+\cdots\cdots\Big]\\&={}_nC_{\kappa}\Big[{}_{\kappa}C_{\lambda}-{}_{\lambda+1}C_1\cdot{}_nC_{\lambda+1}+{}_{\lambda+2}C_2\cdot{}_{\kappa}C_{\lambda+2}-{}_{\lambda+3}C_3\cdot{}_{\kappa}C_{\lambda+3}+\cdots\cdots\Big].\end{aligned}\tag{13}$$

然ルニ第33節ニヨリ

$${}_mC_0\cdot{}_nC_{n-k}+{}_mC_1\cdot{}_nC_{n-k+1}+{}_mC_2\cdot{}_nC_{n-k+2}-\cdots\cdots={}_{m+n}C_k.$$

此式ニ於テ

$$m=-\lambda-1,\ n=\kappa,\ k=\kappa-\lambda,\ \text{從テ}\ n-k=\lambda$$

ト置クトキハ

$$ {}_{\varkappa}C_{\lambda} - {}_{\lambda+1}C_{1} \cdot {}_{\varkappa}C_{\lambda+1} + {}_{\lambda+2}C_{2} \cdot {}_{\varkappa}C_{\lambda+2} - \cdots\cdots = {}_{\varkappa-\lambda-1}C_{\varkappa-\lambda}. $$

而シテ $\varkappa=\lambda=0$ ナラザルトキハ ${}_{\varkappa-\lambda-1}C_{\varkappa-\lambda}=0$ ナリ. 從テ(13)ハ $\lambda \neq 0$ ナルトキハ成立シ (8) ハ a_q ニハ無關係ナリ. 然ルニ $a_2=a_3=\cdots=0$ ナルトキ (8) ガ成立スルコト明ナリ. 故ニ公式 (4) ハ一般ニ眞ナリ.

75. 多項定理.

等式

$$ (a+b+c+\cdots\cdots)^n = \sum \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\cdots} a^\alpha b^\beta c^\gamma \cdots\cdots \qquad (1) $$

ニテ表サルヽコトヲ多項定理ト云フ. 但 Σ ハ $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$ ガ正ノ整數ニシテ

$$ \alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots = n \qquad (2) $$

ナル條件ヲ滿足スル總テノ値ニ對シテ和ヲ求ムルコトヲ示ス.

此定理ハ數學的歸納法ニヨリテ證明セラル. 先此等式ガ $r-1$ 箇ノ文字ニ就テ眞ナリトシ

$$ u = b+c+\cdots\cdots $$

ト置ク. 然ラバ二項定理ニヨリ

$$ (a+u)^n = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\nu!} a^\alpha u^\nu \qquad (3) $$

但 α ト ν トハ正ノ整數ニシテ Σ ハ

$$ \alpha+\nu = n $$

ナル條件ヲ滿足スル總テノ値ニ對シテ其和ヲ求ムルコトヲ示ス. 然ルニ假定ニヨリ

$$ u^\nu = \sum \frac{\nu!}{\beta!\,\gamma!\cdots} b^\beta c^\gamma \cdots\cdots $$

但 $\beta, \gamma, \cdots\cdots$ ハ正ノ整數ニシテ Σ ハ

$$ \beta+\gamma+\cdots\cdots = \nu $$

ナル條件ヲ滿足スル總テノ値ニ對シテ其和ヲ求ムルコトヲ示ス. 故ニ (2) ト (3) トニヨリテ

$$ \begin{aligned} (a+u)^n &= (a+b+c+\cdots\cdots)^n \\ &= \sum\left(\frac{n!}{\alpha!\,\nu!} a^\alpha \sum \frac{\nu!}{\beta!\,\gamma!\cdots} b^\beta c^\gamma \cdots\cdots\right) \qquad (4) \end{aligned} $$

$$ \alpha+\nu = n, \quad \beta+\gamma+\cdots\cdots = \nu \qquad (5) $$

然ルニ $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$ ガ條件 (5) ヲ滿足スルト云フコトハ (2) ヲ滿足スルト全ク同一ナリ. 故ニ (4) ハ全ク (1) ト同一ナリ. 故ニ (1) ナル等式ガ $r-1$ 箇ノ文字ニ就テ眞ナリト假定スルトキハ此等式ハ文字ノ數ガ r ナル場合ニモ眞ナリ. 然ルニ文字ノ數ガ 2 ナル場合ニハ等式 (1) ハ二項定理トナリテ眞ナリ. 故ニ等式 (1) ハ一般ニ眞ナリ

76. 例題.

(1). $(a-b-c)^7$ ノ展開式ニ於テ $a^2b^3c^2$ ノ係數ヲ求ム.

解. $a-b-c=a+(-b)+(-c)$ ナルヲ以テ前節ノ公式 (1) ニ於テ $n=7, \alpha=2, \beta=3, \gamma=2$ トシ且 b 及 c ノ代リニ夫々 $-b$ 及 $-c$ ト置ケバ其一般項ハ

$$ \frac{7!}{2!3!2!} a^2(-b)^3(-c)^2 \text{ 卽 } -210a^2b^3c^2 $$

トナル. 故ニ所要ノ係數ハ -210 ナリ.

(2). $(1+x+x^2)^8$ ノ展開式中ニ於テ x^5 ノ係數ヲ求メヨ.

解. x^5 ヲ含メル諸項ノ和ハ前節ノ公式ニヨツテ

$$ \sum \frac{8!}{\alpha!\beta!\gamma!} 1^\alpha \cdot x^\beta \cdot x^{2\gamma} $$

ニシテ, α, β, γ ハ二ツノ條件

$$ \alpha+\beta+\gamma = 8, \qquad \beta+2\gamma = 5 $$

ヲ滿足セシムル總テノ正ノ整數ナリ. 故ニ

$$\alpha=\gamma+3, \qquad \beta=5-2\gamma.$$

故ニ γ ハ 0, 1, 或ハ 2 ナリ. 故ニ之ニ應ジテ α, β ハ夫々 $\alpha=3$, $\beta=5$, 或ハ $\alpha=4, \beta=3$, 或ハ $\alpha=5, \beta=1$ ナリ. 故ニ所要ノ係數ハ

$$\frac{8!}{3!5!0!}+\frac{8!}{4!3!1!}+\frac{8!}{5!1!2!} \quad 卽 \quad 504$$

ナリ.

注意. 本題及次題ハ例題 (5) ノ格段ナルモノナリ.

(3). $(1-2x+3x^2)^5$ ノ展開式中ニ於ケル x^7 ノ係數ヲ求ム.

解. x^7 ヲ含メル諸項ノ和ハ前節ノ公式ニヨリテ

$$\sum \frac{5!}{\alpha!\beta!\gamma!} 1^\alpha \cdot (-2)^\beta \cdot 3^\gamma x^{\beta+2\gamma}$$

ニシテ α, β, γ ハ二ツノ條件

$$\alpha+\beta+\gamma=5, \qquad \beta+2\gamma=7$$

ヲ滿足セシムル總テノ正ノ整數ナリ. 故ニ

$$\alpha=\gamma-2, \qquad \beta=7-2\gamma.$$

故ニ γ ハ 2 或ハ 3 ナリ. 故ニ之ニ對スル α, β ハ夫々

$$\alpha=0,\ \beta=3 \quad 及 \quad \alpha=1,\ \beta=1$$

ナリ. 故ニ所要ノ係數ハ

$$\frac{5!}{3!\,2!}\cdot(-2)^3\cdot 3^2+\frac{5!}{3!}\cdot(-2)\cdot 3^3 \quad 卽 \quad -1800$$

ナリ.

(4). $(a+bx+cx^2)^m$ ノ展開式ニ於ケル x^n ノ係數ヲ求ムル方法ヲ述ベヨ. 但 m ハ正ノ整數ナリ.

解. n モ亦正ノ整數ナルコト明ナリ. x^n ヲ含メル諸項ノ和ハ前節ノ公式ニヨリテ

$$\sum \frac{m!}{\alpha!\beta!\gamma!} a^\alpha \cdot (bx)^\beta \cdot (cx^2)^\gamma$$

卽

$$\sum \frac{m!}{\alpha!\beta!\gamma!} a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \cdot \boxed{x^{\beta+2\gamma}}$$

ニシテ α, β, γ ハ二ツノ條件

$$\alpha+\beta+\gamma=m, \qquad \beta+2\gamma=n$$

ヲ滿足セシムル總テノ正ノ整數ナリ. 故ニ

$$\alpha=\gamma+(m-n), \qquad \beta=n-2\gamma.$$

此二ツノ等式中後ノモノヨリ β ガ正ノ整數, 或ハ 0 ナル範圍ニ於テ γ ヲ順次 0, 1, 2, ... ナラシメ, 之ニ對應スル正ノ整數 α ヲ初ノ等式ヨリ, 正ノ整數 β ヲ後ノ等式ヨリ求メ, 依リテ所要ノ係數

$$\sum \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma$$

ヲ求ムルコトヲ得. 但 γ ハ $\frac{m}{2}$ ヨリ大ナルコトヲ得ザルヲ以テ, α, β, γ ノ組數ハ有限ナリ.

(5). $(a+bx+cx^2+dx^3)^4$ ノ展開式ニ於テ x^8 ヲ含ム項ヲ求ム.

解. 所要ノ項ハ

$$\sum \frac{4!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta x^8 \tag{1}$$

但 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ハ正ノ整數ニシテ Σ ハ

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma+\delta &= 4 \\ \beta+2\gamma+3\delta &= 8 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ナル條件ヲ滿足スル總テノ値ニ對シテ和ヲ求ムルコトヲ示ス. 偖(2)ヲ滿足スル $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ノ値ヲ求ムルニハ次ノ如ク進ムヲ便利ナリトス.

(i). (2)ノ第二ノ不定方程式ヲ滿足スル a, β, γ, δ ノ總テノ値ヲ求ム. 之ガ爲ニハ先其左邊ノ最大係數ヲ有スル項卽此問題ニ於テハ 3δ ニ著目シ δ ノ取リ得ベキ最大値ヲ求ムレバ2ナリ. 從テ δ ノ取リ得ベキ値ハ 2, 1, 0 ナルコトヲ知ル. 次ニ此 δ ノ各ノ値ヲ不定方程式ニ入レテ他ノ新ナル不定方程式ヲ作ル. 卽

$\delta = 2$ ナルトキハ　$\beta + 2\gamma = 2,$

$\delta = 1$ ナルトキハ　$\beta + 2\gamma = 5,$

$\delta = 0$ ナルトキハ　$\beta + 2\gamma = 8.$

此新ナル不定方程式ニ就テモ前ト同樣ニ左邊ノ最大係數ヲ有スル項卽此場合ニハ 2γ ニ著目シ γ ノ取リ得ベキ最大値ヲ求メ從テ其取リ得ベキ總テノ値ヲ求ム. 最後ニ此等ノ値ニ對スル β ノ値ヲ求ム. 卽

$\delta = 2$ ナルトキ $\begin{cases} \gamma = 1, & \text{從テ} & \beta = 0. \\ \gamma = 0, & ,, & \beta = 2. \end{cases}$

$\delta = 1$ ナルトキ $\begin{cases} \gamma = 2, & ,, & \beta = 1. \\ \gamma = 1, & ,, & \beta = 3. \\ \gamma = 0, & ,, & \beta = 5. \end{cases}$

$\delta = 0$ ナルトキ $\begin{cases} \gamma = 4, & ,, & \beta = 0. \\ \gamma = 3, & ,, & \beta = 2. \\ \gamma = 2, & ,, & \beta = 4. \\ \gamma = 1, & ,, & \beta = 6. \\ \gamma = 0, & ,, & \beta = 8. \end{cases}$

此等ノ値ヲ表ニテ示セバ次ノ如シ.

δ	γ	β	$\delta+\gamma+\beta$
2	1	0	3
2	0	2	4
1	2	1	4
1	1	3	5*
0	4	0	4
0	3	2	5*
0	2	4	6*
0	1	6	7*
0	0	8	8*

(ii). (i)ニ於テ求メ得タル δ, γ, β ノ値中 (2) ノ第一條件ニ適合セザルモノ,詳言スレバ $\delta+\gamma+\beta > 4$ ナルモノ(表ニ於テハ * ヲ附セリ)ヲ去リ其殘リノ値ニ就キ其各ニ對スル a ノ値ヲ求メテ次ノ表ヲ作ル

δ	γ	β	a
2	1	0	1
2	0	2	0
1	2	1	0
0	4	0	0

(iii). 前表ノ a, β, γ, δ ノ値ヲ (1) ニ入ルヽトキハ

$$4!\left(\frac{acd^2}{2!} + \frac{b^2d^2}{2!2!} + \frac{bc^2d}{2!} + \frac{c^4}{4!}\right)x^8$$

$$= (12acd^2 + 6b^2d^2 + 12bc^2d + c^4)x^8$$

是卽所要ノ結果ナリ.

(6). $\{x^2 + (a+b)x + ab\}^n$ ノ展開式ニ於テ x^n ノ係數ハ

$$a^n + {}_nC_1^2 a^{n-1}b + {}_nC_2^2 a^{n-2}b^2 + \cdots\cdots + b^n$$

ナルコトヲ證明セヨ.

解. $\{x^2+(a+b)x+ab\}^n$

$$=(x+a)^n(x+b)^n$$

$$=(x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}a+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}a^2+\cdot\cdot)(x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}b^2+\cdot\cdot)$$

此右邊ニ於テハ x^n ノ係數ハ

$$a^n+{}_n\mathrm{C}_1^2a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2^2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+b^n$$

ナリ.

(7). $(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^m)^n$ ノ展開式ノ始ト終トヨリ同番目ノ項ノ係數ガ相等シキコトヲ證明セヨ.

解. 今

$$(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^m)^n=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots\cdots+p_{mn}x^{mn} \qquad (1)$$

トシ x ノ代リニ x^{-1} ト置クトキハ

$$(1+x^{-1}+x^{-2}+\cdot\cdot+x^{-m})^n=p_0+p_1x^{-1}+p_2x^{-2}+\cdot\cdot+p_{mn}x^{-mn} \qquad (2)$$

(2) ニ x^{mn} ヲ乘ズレバ

$$(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^m)^n=p_0x^{mn}+p_1x^{mn-1}+p_2x^{mn-2}+\cdots+p_{mn} \qquad (3)$$

(1) ト (3) トノ右邊ニ於テ x ノ同乘冪ノ係數ハ相等シカラザルベカラズ. 故ニ

$$p_0=p_{mn},\quad p_1=p_{mn-1},\quad p_2=p_{mn-2},\ \cdots\cdots$$

(8). $(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^m)^n=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots\cdots+p_{mn}x^{mn}$

ナルトキハ

(i). $p_0+p_1+p_2+\cdots\cdots+p_{mn}=(m+1)^n$,

(ii). $p_1+2p_2+3p_3+\cdots\cdots+mn\cdot p_{mn}=\dfrac{1}{2}mn(m+1)^n$

ナルコトヲ證明セヨ.

解. (i) ハ $x=1$ ト置ケバ直ニ得ラル.

(ii) ヲ證明スルニハ x ノ代リニ $x+1$ ト置ク. 然ルトキハ所題ノ

等式ハ

$$\{1+(x+1)+(x+1)^2+\cdots\cdots+(x+1)^m\}^n$$

$$=p_0+p_1(x+1)+p_2(x+1)^2+\cdots\cdots+p_{mn}(x+1)^{mn} \qquad (1)$$

トナル. 此等式ノ左邊ノ括弧內ノ各項ヲ二項定理ニテ展開スレバ

$$1\quad=1,$$

$$1+x\quad=1+x,$$

$$(1+x)^2=1+2x+x^2,$$

$$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots+x^m.$$

此等ノ等式ノ右邊ヲ加フルトキハ

$$m+1+\frac{m(m+1)}{2}x+\mathrm{Q}$$

トナル. 但 Q ハ x ノ二次以上ノ項ノ和ヲ表ス. 然ラバ所題ノ等式ノ左邊ハ

$$\left\{(m+1)+\frac{m(m+1)}{2}x+\mathrm{Q}\right\}^n \text{卽}\quad (m+1)^n\left\{1+\frac{m}{2}x+\frac{\mathrm{Q}}{m+1}\right\}^n$$

$$\text{卽}\quad (m+1)^n\left\{1+\frac{mn}{2}x+\mathrm{R}\right\} \qquad (2)$$

但 R ハ x ノ二次以上ノ項ノ和ヲ表ス.

此式ノ x ノ係數ト (1) ノ右邊ノ x ノ係數トヲ相等シト置クトキハ

$$p_1+2p_2+3p_3+\cdots\cdots+mn.p_{mn}=\frac{1}{2}mn(m+1)^n.$$

(9). $(1+x+x^2)^n$ ノ展開式ノ各項ノ係數ヲ $p_0, p_1, p_2, \cdots$ トスレバ

$$p_0^2-p_1^2+p_2^2-p_3^2+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}p_{n-1}=\frac{1}{2}p_n\left\{1-(-1)^np_n\right\}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

解. $p_0=p_{2n},\ p_1=p_{2n-1},\ \cdots\cdots$ ナルヲ以テ

$$(1+x+x^2)^n=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots\cdots+p_nx^n+\cdots\cdots$$
$$+p_2x^{2n-2}+p_1x^{2n-1}+p_0x^{2n}. \qquad (1)$$

此式ノ兩邊ノ x ノ代リニ $-x$ ト置クトキハ

$$(1-x+x^2)^n=p_0-p_1x+p_2x^2-\cdots\cdots(-1)^np_nx^n$$
$$\pm\cdots\cdots+p_2x^{2n-2}-p_1x^{2n-1}+p_0x^{2n}. \qquad (2)$$

(1) ト (2) トノ左邊ヲ相乘ズルトキハ

$$(1+x+x^2)^n(1-x+x^2)^n=(1+x^2+x^4)^n.$$

而シテ此展開式ニ於ケル x^{2n} ノ係數ハ p_n ナリ. 又右邊ノ乘積ニ於ケル x^{2n} ノ係數ハ

$$p_0^2-p_1^2+p_2^2-p_3^2+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}p_{n-1}^2+(-1)^np_n^2$$
$$+(-1)_{n-1}p_{n-1}^2+\cdots\cdots-p_3^2-p_2^2-p_1^2+p_0^2$$

卽 $\quad 2\{p_0^2-p_1^2+p_2^2-p_3^2+\cdots+(-1)^{n-1}p_{n-1}^2\}+(-1)^np_n^2.$

此二ツノ係數ヲ相等シト置クトキハ

$$2\{p_0^2-p_1^2+p_2^2-p_3^2+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}p_{n-1}^2\}+(-1)^np_n^2=p_n.$$

故ニ $\quad p_0^2-p_1^2+p_2^2-p_3^2+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}p_{n-1}^2=\frac{1}{2}p_n\left\{1-(-1)^np_n\right\}.$

(10). 前題ノ假定ノ下ニ

$$p_0+p_3+p_6+\cdots=p_1+p_4+p_7+\cdots=p_2+p_5+p_8+\cdots=3^{n-1}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

解. 1 ノ立方根卽 $1,\ \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ヲ表スニ $1, \omega, \omega^2$ ヲ以テシ

$$(1+x+x^2)^n=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots\cdots \qquad (1)$$

ノ x ノ代リニ ω ヲ置キ換フルトキハ

$$(1+\omega+\omega^2)^n=p_0+p_1\omega+p_2\omega^2+p_3+\cdots\cdots \qquad (2)$$

又 x ノ代リニ ω^2 ヲ置クトキハ

$$(1+\omega^2+\omega)^n=p_0+p_1\omega^2+p_2\omega+p_3+\cdots\cdots \qquad (3)$$

又 (1) ニ於テ $x=1$ ト置ケバ

$$3^n=p_0+p_1+p_2+p_3+\cdots\cdots \qquad (4)$$

(4), (2), (3) ヲ邊々相加フルトキハ $1+\omega+\omega^2=0$ ナルヲ以テ

$$3^n=3(p_0+p_3+p_6+\cdots\cdots)$$

故ニ $\quad p_0+p_3+p_6+\cdots\cdots=3^{n-1}.$

又 (4), (2), (3) ニ夫々 $1, \omega^2, \omega$ ヲ乘ジテ相加フルトキハ

$$p_1+p_4+p_7+\cdots\cdots=3^{n-1}.$$

又 (4), (2), (3) ニ夫々 $1, \omega, \omega^2$ ヲ乘ジテ相加フルトキハ

$$p_2+p_5+p_8+\cdots\cdots=3^{n-1}$$

(11). 前題ノ假定ノ下ニ

$$p_r-np_{r-1}+{}_nC_2\,p_{r-2}-\cdots\cdots+(-1)^r{}_nC_r\,p_0=0$$

ナルコトヲ證明セヨ. 但 r ハ 3 ノ倍數ニアラザル數ナリトス.

解. $\quad (1+x+x^2)^n=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots\cdots+p_rx^r+\cdots\cdots$

$\quad (1-x)^n=1-nx+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+(-1)^r{}_nC_rx^r+\cdots\cdots$

此兩等式ノ右邊ヲ相乘ジ其中ノ x^r ノ係數ヲ求ムレバ

$$p_r-np_{r-1}+{}_nC_2\,p_{r-2}-\cdots\cdots+(-1)^r{}_nC_r\,p_0$$

ナリ.

又 $(1+x+x^2)^n(1-x)^n$ 卽 $(1-x^3)^n$ ノ展開式ニ於テハ x ノ指數ハ皆 3 ノ倍數ニシテ r ガ 3 ノ倍數ニアラザレバ x^r ナル項ハ存在セズ. 故ニ

$$p_r-np_{r-1}+{}_nC_2\,p_{r-2}-\cdots\cdots(-1)^r{}_nC_r\,p_0=0.$$

(12). 前題ノ假定ノ下ニ

$$p_0p_1-p_1p_2+p_2p_3-\cdots\cdots=0$$

ナルコトヲ證明セヨ.

解. $$(1+x+x^2)^n=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots\cdots$$

及 $$(1-x+x^2)^n=p_0-p_1x+p_2x^2-\cdots\cdots$$

故ニ

$$(1+x+x^2)^n(1-x+x^2)^n=(1-x^2+x^4)^n$$
$$=(p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots)(p_0-p_1x+p_2x^2-\cdots\cdots).$$

此右邊ニ於テ x^{2n-1} ノ係數ハ

$$p_0p_1-p_1p_2+p_2p_3-\cdots\cdots$$

ナリ. 然ルニ左邊ノ展開式ニ於テハ x ノ奇數羃ヲ含マザルヲ以テ

$$p_0p_1-p_1p_2+p_2p_3-\cdots\cdots=0.$$

(13). $(1+x+x^2)^n$ ノ展開式ニ於テ x^n ノ係數ハ

$$1+\frac{n(n-1)}{1^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1^2\cdot2^2}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1^2\cdot2^2\cdot3^2}+\cdots\cdots$$

ナルコトヲ證明セヨ

解. $(1+x+x^2)^n=\{1+x(1+x)\}^n$

$$=x^n(1+x)^n+nx^{n-1}(1+x)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^{n-2}(1+x)^{n-2}+\cdots\cdots$$

此右邊ニ於ケル $1+x$ ノ乘羃ヲ夫々二項定理ニテ展開シテ x^n ノ係數ヲ求ムベシ.

(14). $(1+x)(1+x+x^2)\cdots\cdot(1+x+x^2+\cdots\cdot+x^n)$ ノ展開式ニ於テ初ト終トヨリ同番目ノ項ハ相等シ. 又初ヨリ奇數番目ノ項ノ係數ノ和ト偶數番目ノ項ノ係數ノ和ト相等シ. 之ヲ證明セヨ.

解. $(1+x)(1+x+x^2)\cdots\cdot(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n)$

$$=p_0+p_1x+\cdots\cdots+p_{\frac12n(n+1)}x^{\frac12n(n+1)} \qquad (1)$$

トス. 此式ニ於テ x ノ代リニ x^{-1} ヲ置クトキハ

$$(1+x^{-1})(1+x^{-1}+x^{-2})\cdots\cdot(1+x^{-1}+x^{-2}+\cdots\cdots+x^{-n})$$
$$=p_0+p_1x^{-1}+\cdots\cdots+p_{\frac12n(n+1)}x^{-\frac12n(n+1)}. \qquad (2)$$

(2) ニ $x^{\frac12n(n+1)}$ ヲ乘ズルトキハ

$$(1+x)(1+x+x^2)\cdots\cdot(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n)$$
$$=p_{\frac12n(n+1)}+\cdots\cdots+p_0x^{\frac12n(n+1)}.$$

故ニ $$p_0=p_{\frac12n(n+1)},\quad p_1=p_{\frac12n(n+1)-1},\ \cdots\cdots$$

又(1)ニ於テ $x=1$ トシ且初メヨリ奇數番目ノ項ノ係數ノ和ヲ P, 偶數番目ノ項ノ和ヲ Q トスレバ

$$2\cdot3\cdot4\cdots\cdot(n+1)=\mathrm{P}+\mathrm{Q}.$$

又 $x=-1$ トスレバ

$$0=\mathrm{P}-\mathrm{Q}.$$

故ニ $$\mathrm{P}=\mathrm{Q}=\frac{(n+1)!}{2}.$$

(15). 多項式 $(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_m)^n$ ノ展開式中ノ最大係數ヲ求メヨ.

解. 條件

$$x+y+z+w+\cdots\cdots=n$$

ノ下ニ $$\frac{n!}{x!y!z!w!\ \cdots}$$

ヲ極大ナラシムレバ可ナリ.

然ルニ條件

$$x+y=n$$

ノ下ニ $$\frac{n!}{x!y!}$$

ヲ極大ナラシムルニハ x ト y トヲ成ルベク相等シカラシムベキコト

ヲ見タリ(第68節參照).

故ニ今 $z, w, \cdots\cdots$ ヲ一時確定シタリト考フレバ* x ト y トヲ成ルベク相等シカラシメタルトキ

$$\frac{n!}{x!y!z!w!\cdots\cdots}$$

ハ極大ナリ.

同樣ニ $x, w\cdots\cdots$ ヲ一時確定シタリト考フレバ y ト z トヲ成ルベク相等シカラシメタルトキ

$$\frac{n!}{x!y!z!w!\cdots\cdots}$$

ハ極大ナリ.

他モ亦同樣ナリ.

故ニ $x, y, z, \cdots\cdots$ ノ中成ルベク多ク相等シキモノヲ作リタルトキ所要ノ極大ヲ得. 故ニ n ヲ m ニテ除シ其商及殘リヲ夫々 q, r トシ

$$n=qm+r$$

ナラシメ, $r=0$ ナルトキハ $x, y, z, \cdots\cdots$ ノ總テヲ q トスベシ. 然ラバ所要ノ極大ハ $\frac{n!}{(q!)^m}$ ナリ. 又 $r\neq 0$ ナルトキハ

$$n=q(m-r)+(q+1)r$$

ナルヲ以テ $x, y, z, \cdots\cdots$ ノ中 $m-r$ 箇ヲ q ナラシメ, 他ノ r 箇ヲ $q+1$ トスベシ. 然ラバ所要ノ極大ハ

$$\frac{n!}{(q!)^{m-r}\{(q+1)!\}^r} \quad 卽 \quad \frac{n!}{(q!)^m(q+1)^r}$$

ナリ. 後ノ場合ノ結果ハ前ノ場合ノ結果ヲ包含ス. 何トナレバ後者ニ於テ $r=0$ トスレバ前者ヲ得レバナリ.

* 一時確定法ハ本叢書第九編初等幾何學極大極小問題ニ於テ詳述シタリ. 本節ノ如キ場合ニモ亦適用セラル.

第八章　分解分配及定和ノ組合セト順列

77. 分解及分配.

n 箇ノ原素ヲ r 組ニ分ツコトヲ分解ト云ヒ其仕方ノ數ヲ表スニ ${}_n\varDelta_r$ ヲ以テスベシ. 例ヘバ四箇ノ原素 a, b, c, d ヲ三組ニ分ツ仕方ハ

$$\begin{array}{lll} a,\ b,\ cd & b,\ c,\ ad & c,\ d,\ ab \\ a,\ c,\ bd & b,\ d,\ ac & \\ a,\ d,\ bc & & \end{array}$$

ナリ. 故ニ ${}_4\varDelta_3=6$ ナリ.

n 箇ノ原素ヲ r 組ニ分チ其各部分ヲ原素ト見做シテ順列ヲ作ルコトヲ n 箇ノ原素ヲ r 組ニ分配スト云フ. 例ヘバ四箇ノ原素 a, b, c, d ヲ三組ニ分配スル仕方ハ

$$\begin{array}{llll} a,\ b,\ cd & b,\ a,\ cd & cd,\ a,\ b & cd,\ b,\ a, \\ a,\ c,\ bd & c,\ a,\ bd & bd,\ a,\ c & bd,\ c,\ a, \\ a,\ d,\ bc & d,\ a,\ bc & bc,\ a,\ d & bc,\ d,\ a, \\ b,\ c,\ ad & c,\ b,\ ad & ad,\ b,\ c & ad,\ c,\ b, \\ b,\ d,\ ac & d,\ b,\ ac & ac,\ b,\ d & ac,\ d,\ b, \\ c,\ d,\ ab & d,\ c,\ ab & ab,\ c,\ d & ab,\ d,\ c \end{array}$$

ナリ. n 箇ノ相異ナル原素ヲ r 組ニ分チ分配スル仕方ノ數ヲ表スニ ${}_n\mathrm{D}_r$ ヲ用フ. 例ヘバ ${}_4\mathrm{D}_3=24$ ナリ.

注意. 吾人ハ第44節第三證明法ニ於テ一直線上ニ排列セラレタル $n+1$ 箇ノ1ノ間ニ r 箇ノ分割線ヲ施スニ幾通リノ方法アルカヲ考究シタリ. 是互ニ相同ジキ $n+1$ 箇ノ原素ヲ r 組ニ分配スルト同樣ナリ.

78. $p+q$ 個ノ原素ヲ p 個ト q 個トノ二組ニ分解スル方法及分配スル方法.

$p+q$ 箇ノ原素ヨリ p 箇ヲ選擇スルトキハ跡ニ q 箇ガ殘ル. 故ニ所要ノ數ヲ求ムルニハ $p+q$ 箇ノ原素ヨリ p 箇ノ原素ヲ選擇スル方法ノ數ヲ求ムレバヨシ. 依テ $p+q$ 箇ノ原素ガ皆互ニ相異ナルモノナルトキハ

$$所要ノ數={}_{p+q}C_p={}_{p+q}C_q=\frac{(p+q)!}{p!\,q!}. \tag{1}$$

又 $p+q$ 箇ノ中ニ相同ジキ原素ノアル場合ニハ第五章ノ方法ニヨリテ其數ヲ求ムルコトヲ得.

注意. $p=q$ ナルトキ卽分タレタル二ツノ部分ノ原素ノ數ガ相等シキ場合ニ於テハ所要ノ數ハ $\frac{(2p)!}{p!p!2!}$ ニシテ (1) ニ於テ $p=q$ ト置キタルモノヲ更ニ $2!$ ニテ除スルヲ要ス. 何トナレバ或方法ニテ $2p$ 箇ノ原素ヨリ p 箇ヲ選擇シタルトキニ殘ル p 箇ノ原素ガ必或他ノ場合ニ於テ選擇セラルベキ p 個ノ原素トナルベシ. 而シテ此二ツノ場合ハ $2p$ 箇ノ原素ヨリ p 箇ヲ選擇スト云フ見地ヨリセバ相異ナル二ツノ方法ナレドモ二等分スルト云フ見地ヨリセバ全ク相同ジ方法ナレバナリ.

一ツノ方法ニヨリテ分タレタル二ツノ部分ハ之ヲ $2!$ ノ方法ニテ列ブルコトヲ得. 從テ分配ノ數ハ

$$\frac{(p+q)!2!}{p!\,q!}$$

ナリ. 又 $p=q$ ナルトキハ

$$\frac{(2p)!}{p!\,p!}$$

ナリ.

例題 (1). 8人ノ新兵ヲ3人ト5人トニ分チ之ヲ二ツノ中隊ニ編入スルニハ幾通リノ方法アリヤ.

解. 8人ヲ3人ト5人トニ分配スル仕方ノ數ヲ求ムレバヨシ. 然ルニ

$$\frac{8!\,2!}{5!\,3!}=112.$$

卽所要ノ數ハ 112 ナリ.

(2). 8人ガ8人乘リノ端艇ニ乘ルニ, 其中ノ2人ハ右舷ノミ, 1人ハ左舷ノミヲ漕ギ得ルトキハ漕手ヲ排置スルニ幾通リノ方法アリヤ. *

解. 何レノ側モ漕ギ得ルモノハ5人ナリ. 此5人ヲ2人ト3人トノ二ツニ分チ其2人ヲ右舷, 3人ヲ左舷ニ排置スルトキハ各ノ側ニ4人ヅツ排置セラル. 而シテ此分チ方ノ數ハ $\frac{5!}{3!2!}$ ナリ. 更ニ又各ノ側ノ人ハ夫々 $4!$ 通リニ排置スルコトヲ得. 故ニ

$$所要ノ數=\frac{5!}{3!2!}\times 4!\times 4!=5760.$$

(3). 11人ヨリ9人乘リノ端艇ノ乘組ヲ作ルニ, 3人ハ舵手タルコトヲ得レドモ漕手タルコトヲ得ズ. 殘リノモノハ漕手タルコトヲ得レドモ舵手タルコトヲ得ズ. 而シテ更ニ其中2人ハ左舷ノミ漕ギ得ルトキハ此等ノ人ヲ此端艇ニ乘ラシムルニハ幾通リノ方法アリヤ.

解. 漕手タルコトヲ得ル人ハ8人アリ. 其中何レノ側ヲモ漕ギ得ル人ハ6人ナリ. 故ニ此6人ヲ2人ト4人トノ二ツニ分チ其2人ヲ左舷ニ, 4人ヲ右舷ニ排置スレバヨシ. 而シテ其分チ方ノ數ハ $\frac{6!}{4!2!}$ ナリ. 又舵手ノ選ビ方ハ3通リアリ. 各ノ側ヲ $4!$ 通リニ排置スルコトヲ得ルヲ以テ

* 實際ノ場合ト合ハザレドモ舵手ナキモノトス.

$$\text{所要ノ數} = 3 \times \frac{6!}{4!2!} \times 4! \times 4! = 25920.$$

(4). 步兵5人騎兵4人砲兵3人アリ．之ヲ9人ト3人トノ二組ニ分ツニハ幾通リノ方法アリヤ．但同一ノ兵科ニ屬スル兵ハ同ジ原素トシテ取扱フベシ．

解. 所設ノ原素ヨリ3人ヲ選擇スル方法ノ數ヲ求ムレバヨシ．而シテ何レノ種類ノ原素ノ數モ3ヨリ小ナラザルヲ以テ其數ハ無制限重複組合セニヨッテ求メラル．故ニ

$$\text{所要ノ數} = {}_3H_3 = {}_5C_3 = 10.$$

(5). 前題ノ所設ノ原素ヲ7人ト5人トノ二組ニ分ツニハ幾通リノ仕方アリヤ．

解. 此場合ニハ制限附重複組合セノ數ヲ求ムル方法ニヨルノ外ナシ．今步兵，砲兵，騎兵一人ヲ表スニ夫々 a, b, c ヲ用ヒ第**51**節ノ方法ニヨリ計算スレバ次ノ如シ

原素	一ツノ組合セ中ニ含マルヽ原素ノ數					
	0	1	2	3	4	5
a^5	1	1	1	1	1	1
		1	1	1	1	1
			1	1	1	1
				1	1	1
					1	1
$a^5 b^4$	1	2	3	4	5	5
		1	2	3	4	5
			1	2	3	4
				1	2	3
$a^5 b^4 c^3$	1	3	6	10	14	17

故ニ所要ノ數ハ17ナリ．

(6). 前題ノ所設ノ原素ヲ二等分シ二ツノ隊ニ編入スルニハ幾通リノ方法アリヤ．

解. 先所設ノ原素ヨリ6人ヲ選擇スル方法ガ幾通リアルカヲ求ムレバ其數ハ前題ト同樣ニシテ18ナルコトヲ知ル．故ニ

$$\text{所要ノ數} = \frac{18}{2!} \times 2! = 18.$$

79. n個ノ相異ナル原素ヲ二組ニ分解スル方法及分配スル方法.

n 箇ノ原素ヨリ r 箇ヲ取リタル組合セヲ作ルトキハ跡ニハ $n-r$ 箇ノ原素ガ殘ルヲ以テ，之ハ n 箇ノ原素ヲ r 箇ト $n-r$ 箇トノ二組ニ分解スルコトニ對應ス．而シテ ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ ナルヲ以テ * 所題ノ分解ノ數 ${}_n\Delta_2$ ハ

$${}_n\Delta_2 = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=n-1} {}_nC_r.$$

然ルニ第**36**節ニヨリ

$$\sum_{r=1}^{r=n} {}_nC_r = 2^n - 1.$$

故ニ

$$\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=n-1} {}_nC_r = 2^{n-1} - 1.$$

從テ

$${}_n\Delta_2 = 2^{n-1} - 1.$$

又一ツノ分解ヨリ2!箇ノ分配ガ得ラルヽヲ以テ

$${}_nD_2 = (2^{n-1} - 1)2!.$$

例題 (1). 5種ノ果物各1箇アリ．之ヲ2人ノ兒童ニ分チ與フルニハ幾通リノ方法アリヤ．

解. 5箇ヲ2組ニ分配スル仕方ノ數ヲ求ムレバヨシ．然ルニ

$${}_5D_2 = (2^{5-1} - 1) \times 2! = 15 \times 2! = 30.$$

---

* n ガ偶數ナルトキハ ${}_nC_{\frac{n}{2}}$ ニ對スルモノナシ然レドモ前節注意ヲ參照スルトキハ此場合ニモ本節ノ公式ガ眞ナルコトガ知ラルベシ.

故ニ所要ノ數ハ 30 ナリ.

(2). 桃 4 箇柿 3 箇梨 2 箇ヲ二ツニ分ツニ幾通リノ方法アリヤ.

解. 分タレタルーツノ部分ハ 1 箇ヨリ 8 箇マデナリ. 故ニ先所設ノ原素ヨリ 1, 2, ····, 8 箇ヲ選擇スル方法ヲ考究スレバ其數ハ

$$\sum_{r=1}^{8} {}_3\mathrm{H}_r(4,3,2)$$

ナリ. 然ルニ此中ニハーツノ分解ハ 2 度ニ數ヘラレアルヲ以テ

$$\text{所要ノ數} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{8} {}_3\mathrm{H}_r(4,3,2) = \sum_{r=1}^{4} {}_3\mathrm{H}_r(4,3,2)$$

ナリ.

今之ヲ計算スレバ次ノ如シ.

$$\begin{aligned} {}_3\mathrm{H}_1(4,3,2) &= {}_3\mathrm{C}_1 = 3, \\ {}_3\mathrm{H}_2(4,3,2) &= {}_4\mathrm{C}_2 = 6, \\ {}_3\mathrm{H}_3(4,3,2) &= 9, \\ {}_3\mathrm{H}_4(4,3,2) &= 11. \end{aligned}$$

故ニ　　　所要ノ數 $= 3+6+9+11 = 29.$

(3). 前題ノ所設ノ果物ヲ二人ノ兒童ニ分配スルニハ幾通リノ方法アリヤ.

解. 分解ノ數ハ前ニ得タルガ如ク 29 ナリ. 而シテ二ツノ部分ガ相等シキ分解ハーツモナシ. 故ニーツノ分解ヨリハ必 2! 箇ノ分配ガ得ラル.

故ニ　　　所要ノ數 $= 2! \times 29 = 58.$

80. $p+q+r$ 個ノ原素ヲ p 個, q 個, r 個ノ三組ニ分解スル方法.

$p+q+r$ 箇ノ原素ヲ p 箇ト $q+r$ 箇ニ分解スル仕方ノ數ハ前節ニ於テ述ベタル所ニヨリ $\dfrac{(p+q+r)!}{p!(q+r)!}$ ナリ. 今或ーツノ方法ニテ分チタ

リトスレバ其一部分ナル $q+r$ 箇ヲ q 箇ト r 箇トニ分ツ仕方ハ $\dfrac{(q+r)!}{q!r!}$ ナリ. 故ニ $p+q+r$ 箇ノ原素ヲ p 箇, q 箇, r 箇ニ分ツニハ

$$\frac{(p+q+r)!}{p!(q+r)!}\cdot\frac{(q+r)!}{q!r!} \quad \text{即} \quad \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$$

通リノ仕方アリ.

注意. 上式ニ於テ $q=r$ ト置クトキハ $\dfrac{(p+2q)!}{p!q!q!}$ トナル. 然レドモ此中ニハ 2! 箇ヅツ相同ジキ分チ方アルヲ以テ異ナル分チ方ノ數ハ $\dfrac{(p+2q)!}{p!q!q!2!}$ ナリ. 又 $p=q=r$ ト置クトキハ $\dfrac{(3p)!}{p!p!p!}$ トナル. 然レドモ其中ニハ 3! 箇ヅツ相同ジキ分チ方アリ. 故ニ相異ナル分チ方ノ數ハ $\dfrac{(3p)!}{p!p!p!3!}$ ナリ.

例題. mn 箇ノ互ニ相異ナルモノヲ n 箇ニ等分スル仕方ハ幾何アリヤ.

解. 本節ノ注意ニ從ヒ

$$\text{所要ノ數} = \frac{(mn)!}{m!m!\cdots n!} = \frac{(mn)!}{(m!)^n n!}.$$

81. 互ニ相異ナル n 個ノ原素ノ總テヲ r 個ノ場處ニ入ルヽ方法.

吾人ガ次節ニ於テ前三節ニ於テ論ジタルモノヽ一般ナル場合, 即互ニ相異ナル n 箇ノ原素ヲ r 組ニ分解スルコト及分配スルコトヲ論ズル準備トシテ互ニ相異ナル n 箇ノ原素ノ總テヲ r 箇ノ場處ニ任意ノ仕方ニテ入ルヽトキ, 其仕方ニ幾通リアルカヲ考究セントス. 但玆ニ任意ノ仕方ト云フハ r 箇ノ中ノーツノ場處ニ幾ツ入ルヽトモヨク又ーツモ入レズトモヨシト云フ意ニシテ n 箇ノ原素ハーツモ殘スコトヲ許サズ.

先 n 箇ノ原素ヲ $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ トス. 而シテ r 箇ノ場處ニ此等ノ原素ヲ入ルヽト考フル代リニ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ニテ表ハサルヽ n 箇

ノ場處アリトシ．原素 $1, 2, \cdots, r$ ヲ無制限ニ

a_1	a_2	a_3				a_n

重複スルコトヲ許シテ，一ツ宛此 n 箇ノ場處ニ入レ，其入レラレタル原素ノ表ス番號ノ原ノ場處（卽所題ノ場處）ニ上ニ記セル原素ヲ入ルルモノトスルモノト考フ．例ヘバ今右ノ如ク a_1 ト a_2 トニハ 1, a_3 ニハ 2, a_4 ニハ $3, \cdots, a_n$ ニハ $r-1$ ヲ入レタル

a_1	a_2	a_3	a_4			a_n
1	1	2	3			$r-1$

場合ニハ原ノ 1 ノ場處ニハ a_1 ト a_2, $2, 3, \cdots, r-1$ ニハ夫々 $a_3, a_4, \cdots, a_n$ ヲ入ルヽモノトス．然ラバ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ノ場處ハ必 $1, 2, \cdots, r$ ノ總テニテ充タサル，卽 n 箇ノ原素ハ必總テ r 箇ノ場處ニ入レラルヽコトヽナル．依テ此一ツノ入レ方ハ所題ノ入レ方ト對應ス．而シテ此入レ方ハ第59節ニヨリ其數 r^n ナリ．卽所要ノ數ハ r^n ナリ．

例題 (1). 一直線上ニ排列セラレタル r 箇ノ場處アリ．之ニ n 箇ノ文字ヲ入ルヽニ各場處中ノ文字ノ順序ヲモ考フルトキハ幾通リノ仕方アルカ．但一ツモ文字ヲ入レザル場處アリテ可ナリ．

解. 所設ノ n 箇ノ原素ヲ $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ トシ r 箇ノ場處ヲ $1, 2, 3, \cdots, r$ トス．n 箇ノ原素中ノ一ツ a_1 ノ入レ方ハ r 通リアリ．或一ツノ方法ニテ（例ヘバ 1 ニ）入レタリトス．然ラバ a_2 ヲ入ルヽ

1	2	3	4		r

仕方ハ 1 ノ中ニ入ルニハ a_1 ノ左ニ入ルヽカ右ニ入ルヽカノ二通リアリ．$2, 3, \cdots, r$ ニハ各一通リノ仕方ニテ入ルヽコトヲ得．故ニ a_2 ノ入レ方ノ數ハ $r+1$ ナリ．今之ヲ 1 ニ入レタリトセヨ．然ラバ a_3 ノ入レ方ハ 1 中ニ 3 通リ，他ノ場處ニ $r-1$ 通リ，總計 $r+2$ 通リナリ．又 a_2 ヲ 1 以外（例ヘバ 2）ニ入レタリトセヨ．然ラバ a_3 ヲ入

ルヽニ 1 ニ 2 通リ，2 ニ 2 通リ，他ニ $r-2$ 通リ，總計 $r+2$ 通リナリ．卽 a_2 ヲ何處ニ入レアルモ a_3 ノ入レ方ハ $r+2$ ナリ．以下同樣ニシテ $a_4, a_5, \cdots, a_n$ ヲ入レ行クトキハ，其入レ方ハ夫々 $r+3, r+4, \cdots, (r+n-1)$ 通リナルヲ知ル．故ニ總テノ入レ方ハ

$$r(r+1)(r+2)\cdots\cdots(r+n-1)$$

ナリ．

(2). 前題ニ於テ空場處ノアルコトヲ許サヾルトキハ其入レ方幾何アリヤ．但此場合ニ於テハ $n \geqq r$ ナルコト勿論ナリ．

解. 前題ノ入レ方ノ數ヲ E_n, 本題ノ入レ方ノ數ヲ F_n トセヨ．F_n ニ屬スル或入レ方ニ於テ各ノ場處ヨリ各一ツ宛原素ヲ取リ去ルトキ（其原素ヲ $b_1, b_2, \cdots, b_r$ トス）ハ E_{n-r} ニ屬スル一ツノ入レ方 D ガ得ラル．然レドモ $b_1, b_2, \cdots, b_r$ ハ n 箇ノ原素ヨリ $\frac{n!}{(n-r)!}$ 通リニ選擇シテ排列スルコトヲ得ルヲ以テ F_n ニ屬スル $\frac{n!}{(n-r)!}$ 箇ノ入レ方ヨリ同一ノ入レ方ガ得ラル．故ニ

$$F_n = \frac{n!}{(n-r)!} E_{n-r} = \frac{n!(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}.$$

82. 互ニ相異ナル n 個ノ原素ヲ r 組ニ分配スル仕方ノ數.

今茲ニ一直線上ニ竝ベル r 箇ノ場處アリト想像セヨ．此等ノ場處ノ各ニ，n 箇ノ原素中ノ少クトモ一ツヲ入レテ總テノ場處ヲ充タス一ツノ方法ハ n 箇ノ原素ヲ r 箇ニ分配スル一ツノ方法ト見做スコトヲ得．故ニ斯ノ如キ方法ガ幾ツアルカヲ考究シテ所題ノ分配ノ數ヲ求メントス．

r 箇ノ場處中ノ或 p 箇ヲアケ置キ殘リノ $r-p$ 箇ノ場處ニ n 箇ノ原素ヲ入ルヽトスレバ其方法ハ ${}_nD_{r-p}$ ナリ．但何レノ場所ニモ少クト

モ一ツノ原素ヲ入ルヽモノトス. 今p箇ノ場所ガ初ヨリ定メラレズ何レノp箇ノ場處ヲアケ置クモヨシトスレバn箇ノ場處ヨリp箇ヲ選ブ仕方ノ數ハ${}_nC_p$ナルヲ以テ其入レ方ノ數ハ${}_nC_p\cdot{}_nD_{r-p}$ナリ. 從テr箇ノ場所ノ中一ツモアケ置カズ, 或ハ$1, 2, \cdots, n-1$箇アケ置キテ入ルヽ仕方ノ總數ハ

$$\sum_{p=0}^{r-1} {}_nC_p\cdot{}_nD_{r-p}$$

ナリ. 然ルニ斯ノ如クシテn箇ノ原素ヲr箇ノ場所ニ入ルヽコトハn箇ノ原素ヲアラユル方法ニテr箇ノ場處ニ入ルヽニ等シ. 故ニ其數ハ前節ノ結果ニヨリr^nナリ. 依テ

$$\sum_{p=0}^{r-1} {}_rC_p\cdot{}_nD_{r-p}=r^n$$

或ハ

$${}_rC_0\cdot{}_nD_r+{}_rC_1\cdot{}_nD_{r-1}+{}_rC_2\cdot{}_nD_{r-2}+\cdots\cdots+{}_rC_{r-1}\cdot{}_nD_1=r^n. \qquad (1)$$

此式ニ於テ$r=2, r=3, \cdots\cdots$ト置クトキハ, 次第ニ${}_nD_2, {}_nD_3, \cdots\cdots$ヲ計算スルコトヲ得. 然レドモ亦次ノ如クシテ${}_nD_r$ヲ$n$ト$r$トヲ以テ表スコトヲ得.

先(1)中ノrノ代リニ$r-1$ト置ク. 然ラバ

$${}_{r-1}C_0\cdot{}_nD_{r-1}+{}_{r-1}C_1\cdot{}_nD_{r-2}+{}_{r-1}C_2\cdot{}_nD_{r-3}$$
$$+\cdots\cdots+{}_{r-1}C_{r-2}\cdot{}_nD_1=(r-1)^n \qquad (2)$$

(1)ト(2)トヲ邊々相減ズルトキハ

$${}_rC_0\cdot{}_nD_r+({}_rC_1-{}_{r-1}C_0){}_nD_{r-1}+({}_rC_2-{}_{r-1}C_1){}_nD_{r-2}$$
$$+\cdots\cdots+({}_rC_{r-1}-{}_{r-1}C_{r-2}){}_nD_1=r^n-(r-1)^n.$$

然ルニ $${}_rC_{r-\nu}-{}_{r-1}C_{r-\nu-1}={}_{r-1}C_{r-\nu}$$

ナルヲ以テ此式ハ

$${}_rC_0\cdot{}_nD_r+{}_{r-1}C_1\cdot{}_nD_{r-1}+{}_{r-1}C_2\cdot{}_nD_{r-2}+\cdots+{}_{r-1}C_{r-1}\cdot{}_nD_1=r^n-(r-1)^n \qquad (3)$$

又此式ニ於テrノ代リニ$r-1$ト置クトキハ

$${}_nD_{r-1}+{}_{r-2}C_1\cdot{}_nD_{r-2}+{}_{r-2}C_2\cdot{}_nD_{r-3}+\cdots\cdots+{}_{r-2}C_{r-2}\cdot{}_nD_1$$
$$=(r-1)^n-(r-2)^n. \qquad (4)$$

(3)ト(4)トヲ邊々相減ズルトキハ

$${}_nD_r+{}_{r-2}C_1\cdot{}_nD_{r-1}+{}_{r-2}C_2\cdot{}_nD_{r-2}+\cdots\cdots+{}_{r-2}C_{r-2}\cdot{}_nD_2$$
$$=r^n-2(r-1)^n+(r-2)^n. \qquad (5)$$

(5)ヲ(3)ト同様ニ取扱フトキハ

$${}_nD_r+{}_{r-3}C_1\cdot{}_nD_r+{}_{r-3}C_2\cdot{}_nD_{r-3}+\cdots\cdots+{}_{r-3}C_{r-3}\cdot{}_nD_3$$
$$=r^n-3(r-1)^n+3(r-2)^n-(r-3)^n.$$

斯ノ如クシテ次第ニ進ムトキハ

$${}_nD_r=r^n-{}_rC_1(r-1)^n+{}_rC_2(r-2)^n-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}{}_rC_{r-1}1^n$$
$$=r^n-\frac{r}{1!}(r-1)^n+\frac{r(r-1)}{2!}(r-2)^n-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{r}{1!}\cdot1^n.$$

是卽吾人ノ目的トシタル等式ナリ.

次ニ一ツノ分解ヨリ$r!$箇ノ分配ガ得ラルヽヲ以テ

$${}_n\Delta_r=\frac{{}_nD_r}{r!}$$
$$=\frac{1}{r!}\left\{r^n-\frac{r}{1!}(r-1)^n+\frac{r(r-1)}{2!}(r-2)^n-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{r}{1!}1^n\right\}.$$

83. 互ニ相異ナルn個ノ原素各r個アルトキ之ヲr個宛ニ分配スル仕方.

互ニ相異ナルn箇ノ原素$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ガ各$r$箇アリ. 此等ノ原素ヲ$r$箇宛ノ$n$組ニ分配スル方法幾何アルカヲ求メントス. 今所設ノn箇ノ原素一ツ宛ヲ取リ之ヲアラユル方法ニテ排列スルトキハ

${}_nP_n$ 卽 $n!$ 通リノ順列ヲ得。此順列ヲ表スニ $A_1, A_2, \cdots, A_{n!}$ ヲ以テス. 今此等ノ $n!$ 箇ノ順列ヨリ重複スルコトヲ許シテ r 箇 $A_\alpha, A_\beta, \cdots\cdots, A_\lambda$ ヲ選ビ之ヲ次ノ表ノ如ク排列シ

$$\begin{array}{ll} A_\alpha & a_{\alpha_1}\, a_{\alpha_2}, \cdots\cdots, a_{\alpha_n}, \\ A_\beta & a_{\beta_1}\, a_{\beta_2}, \cdots\cdots, a_{\beta_n}, \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A^\lambda & a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2} \cdots\cdots a_{\lambda_n}, \end{array}$$

其第一行, 第二行, ‥‥ ニ在ル原素卽 $a_{\alpha_1} a_{\beta_1} \cdots a_{\lambda_1};\ a_{\alpha_2} a_{\beta_2} \cdots a_{\lambda_2}; \cdots$ ヲ夫々第一組, 第二組, ‥‥‥ ト見做ストキハ此等ノ組ノ一ツハ所設ノ原素ノ分配ノ一ツヲ表スト考フルコトヲ得. 然ラバ當面ノ問題ハ相異ナル $n!$ 箇ノ原素 $A_1, A_2, \cdots, A_{n!}$ ヨリ重複スルコトヲ許シテ r 箇ヲ採ル組合セ幾何アリヤト云フコトヽナル. 而シテ其數ハ既ニ述ベタルガ如ク

$${}_{n!}H_r \quad 卽 \quad {}_{n!+r-1}C_r$$

ナリ.

例. 步兵, 騎兵, 砲兵各 5 人アリ, 之ヲ 5 人宛三ツノ隊ニ編入スルニハ幾通リノ方法アリヤ. 但同一ノ兵科ニ屬スル者ハ同ジ原素ト見做ス.

解.　　所要ノ數 $= {}_{3!}H_5 = {}_{3!+5-1}C_5 = 252.$

84.　定和ノ組合セ及順列.

原素ガ數ナル場合ニハ, 此等ノ原素ニテ作ラレタル組合セ或ハ順列中, 其中ノ原素ノ和ガ或與ヘラレタル數ニ等シキモノヽアルコト在ルベシ. 斯ノ如キ組合セ又ハ順列ヲ定和ノ組合セ或ハ定和ノ順列ト云フ. 例ヘバ原素 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ヨリ 3 箇ヲ取ル重複ヲ許サヾル組合セノ中

129, 138, 147, 156, 237, 246, 345

ハ何レモ其和 12 ニシテ此以外ニ和ガ 12 ナル組合セナシ. 卽此 7 箇ノ組合セハ原素 $1, 2, 3, \cdots\cdots, 9$ ヨリ 3 箇ヲ取ルトキ其和ガ 12 ナル組合セノ總テナリ.

定和ノ組合セ及順列ニアリテモ是迄論ジタルガ如ク各重複ヲ許サザルモノト重複ヲ許スモノト二ツノ區別アリ. n 箇ノ原素 $1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ ヨリ r 箇ヲ重複ヲ許サズシテ取リ, 其和ガ m ナル組合セ及順列ノ數ヲ表スニ夫々記號

$${}_nC_r\left(\int m; 1, 2, 3, \cdots\cdots, n\right) \quad 及 \quad {}_nP_r\left(\int m; 1, 2, 3, \cdots\cdots, n\right)$$

ヲ以テス. 又組合セ及順列ソレ自身ヲ表スニ夫々記號

$${}_nC_r\left[\int m; 1, 2, 3, \cdots\cdots, n\right] \quad 及 \quad {}_nP_r\left[\int m; 1, 2, \cdots\cdots, n\right]$$

ヲ用フルコトアリ.

重複組合セ及重複順列ニ就テモ上ノ記號ニ對應シテ夫々次ノ記號

$${}_nH_r\left(\int m; 1, 2, \cdots\cdots, n\right), \qquad {}_nH_r\left[\int m; 1, 2, \cdots\cdots, n\right],$$

$${}_nK_r\left(\int m; 1, 2, \cdots\cdots, n\right), \qquad {}_nK_r\left[\int m; 1, 2, \cdots\cdots, n\right]$$

ヲ用フ.

原素ガ限リナク接續セル整數ナル場合ニアリテハ C, P, H 或ハ K ノ左ノ下ニ附セル n ヲ略スルコトアリ. 又必要ナラザルトキハ括弧 ( ) 或ハ [ ] ノ中ノ原素ヲ略スルコトアリ.

本編ニ於テハ原素ガ限リナク接續セル整數ナル場合ノミヲ論ズ. 此場合ニ於テ原素ガ 1 ヨリ始マルトキハ和ガ m ナル r 箇ヲ取ル重

複組合セハ m 箇ノ 1 ヲ r 箇ニ分ツ分解ト見做スコトヲ得ベシ. 又同ジ條件ノ下ニ於ケル重複順列ハ m 箇ノ 1 ヲ r 箇ニ分ツ分配ト見做スコトヲ得ベシ. 而シテ其數ヲ求ムル方法ハ既ニ第 **44** 節ニ論ジタリ. 次ニ他ノ一二ノ方法ヲ述ベン.

85. 定和ノ重複順列ノ數ヲ求ムルコト.

原素 $1, 2, 3, \cdots\cdots$ ヨリ r 箇ヲ取リ其和ガ m ナル順列ノ數ヲ求メントス. 斯ノ如キ順列ハ 1 ヲ以テ始マルモノ, 2 ヲ以テ始マルモノ, 3 ヲ以テ始マルモノ等ニ分ツコトヲ得. 而シテ

1 ヲ以テ始マルモノハ原素 $1, 2, 3, \cdots\cdots$ ヨリ $r-1$ 箇ヲ取リ其和ガ $m-1$ ナル順列ノ左ニ 1 ヲ附ケ足シタルモノ,

2 ヲ以テ始マルモノハ原素 $1, 2, 3, \cdots\cdots$ ヨリ $r-1$ 箇ヲ取リ其和ガ $m-2$ ナル順列ノ左ニ 2 ヲ附ケ足シタルモノ,

3 ヲ以テ始マルモノハ原素 $1, 2, 3, \cdots\cdots$ ヨリ $r-1$ 箇ヲ取リ其和ガ $m-2$ ナル順列ノ左ニ 3 ヲ附ケ足シタルモノ,

以下同樣ナリ, 卽 α ヲ以テ始マルモノヽ數ハ

$$\mathrm{K}_{r-1}\left(\int m-\alpha ; 1, 2, 3, \cdots\cdots\right)$$

ナリ. 從テ

$$\mathrm{K}_{r}\left(\int m ; 1, 2, 3, \cdots\cdots\right)=\sum_{\alpha=1}^{\alpha} \mathrm{K}_{r-1}\left(\int m-\alpha ; 1, 2, 3, \cdots\cdots\right). \quad (1)$$

然ルニ

$$\mathrm{K}_{1}\left(\int m ; 1, 2, 3, \cdots\cdots\right)=1.$$

故ニ

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_{2}\left(\int m ; 1, 2, 3, \cdots\right)&=\mathrm{K}_{1}\left(\int m-1 ; 1, 2, 3, \cdots\right)\\&\quad+\cdots\cdots+\mathrm{K}_{1}\left(\int 1 ; 1, 2, 3, \cdots\right)=m-1={}_{m-1}\mathrm{C}_{1}. \quad (2)\end{aligned}$$

從テ

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_{3}\left(\int m ; 1, 2, 3, \cdots\right)&=\mathrm{K}_{2}\left(\int m-1 ; 1, 2, 3, \cdots\right)+\cdots+\mathrm{K}_{2}\left(\int 1 ; 1, 2, 3, \cdots\right)\\&={}_{m-2}\mathrm{C}_{1}+{}_{m-3}\mathrm{C}_{1}+\cdots\cdots+{}_{1}\mathrm{C}_{1}\\&={}_{m-1}\mathrm{C}_{2}. \quad (3)\end{aligned}$$

今若

$$\mathrm{K}_{r-1}\left(\int m ; 1, 2, 3, \cdots\cdots\right)={}_{m-1}\mathrm{C}_{r-2}$$

ト假定スルトキハ (1) ニヨリ

$$\mathrm{K}_{r}\left(\int m ; 1, 2, 3, \cdots\cdots\right)={}_{m-1}\mathrm{C}_{r-1} \quad (4)$$

トナル. 然ルニ此等式ガ $r=2, r=3$ ノ場合ニ成立スルコトハ (1), (2) ニヨリ既ニ證明セラレタリ. 故ニ等式 (2) ハ一般ニ成立ス. 詳言スレバ, 原素 $1, 2, 3, \cdots\cdots$ ヨリ r 箇ヲ取リ其和ガ m ナル重複順列ノ數ハ $m-1$ 箇ノ異ナル原素ヨリ重複ヲ許サズシテ $r-1$ 箇ヲ取ル組合セノ數ニ等シ. 等式 (4) ニ於テ $r=1, 2, 3, \cdots\cdots, m$ ト置キ其右邊ノ和ヲ求ムルトキハ第 **36** 節ニヨリテ 2^{m-1} トナル. 卽原素 $1, 2, 3, \cdots\cdots, m$ ヨリ成リテ其和ガ m ニ等シキ重複順列ノ數ハ 2^{m-1} ニ等シ.

例題 (1). 有效數字ヨリ成ル 5 位ノ數ニシテ數字ノ和ガ 8 ナル數ハ幾何アリヤ.

解. 所要ノ數 $=\mathrm{K}_{5}\left(\int 8 ; 1, 2, 3, \cdots\cdots\right)={}_{8-1}\mathrm{C}_{5-1}=35.$

(2). 有效數字ヨリ成リ其數字ノ和ガ 4 ナル數ハ幾何アリヤ.

解. 所要ノ數 $=\mathrm{K}\left(\int 4\right)=2^{4-1}=8.$

(3). 同一ノ文字 n 箇ヲ r 箇ノ場處ニ入ルヽニ幾通リノ方法アリヤ. 但一ツモ文字ヲ入レザル場處ナキヤウニス.

解. 所要ノ數 $={}_{n}\mathrm{K}_{r}\left(\int n\right)={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}.$

(4). 前題ニ於テ空キタル場所ヲ許ストキハ如何.

解. 總テノ場處ニ原素ヲ一ツヅツ入レテ考フルトキハ

$$所要ノ數 = K_r\left(\int n+r\right) = {}_{n+r-1}C_{r-1}.$$

(5). 前題ニ於テ何レノ場處ヘモ p 箇ヨリ少ナク入レザルヤウニスルトキハ如何.

解. 所要ノ數ハ

$$K_r\left(\int n\,;p,p+1,\cdots\cdots\right)$$

ナリ. 今各原素ヨリ $p-1$ ヲ減ズルトキハ原素ノ和ハ $n-r(p-1)$ トナリ. 而シテ順列ノ數ハ變ルコトナシ. 故ニ

$$所要ノ數 = K_r\left(\int n-r(p-1)\right) = {}_{n-1-r(p-1)}C_{r-1}.$$

(6). 試驗者ガ8箇ノ問題ニ對シテ30點ヲ與フルニ幾通リノ與ヘ方アルカ. 但一問ニ2點以下ノ點ヲ與ヘザルモノトス.

解. 所要ノ數ハ $K_8\left(\int 30\,;2,3,\cdots\cdots\right)$ ナルコト明ナリ. 然ルニ今此各原素ヨリ1ヲ減ズルトキハ原素ノ和ハ $30-8$ 卽 22 トナリ, 順列ノ數ハ變ルコトナシ. 故ニ

$$所要ノ數 = K_8\left(\int 30;2,3,\cdots\right) = K_8\left(\int 22;1,2,\cdots\right) = {}_{21}C_7 = 116280.$$

(7). 白球 m 箇, 黑球 n 箇アリ. 之ヲ一直線上ニ排列スルニ, 白ト黑トノ接觸點ガ $2r-1$ 箇アルヤウニスルニハ幾何ノ排列ノ仕方アリヤ.

解. m 箇ノ白球ヲ先一直線上ニ排列ス. 次ニ n 箇ノ黑球ヲ r 組ニ分解シ一ツノ組ヲ白球ノ何レカノ端ノ側ニ置キ殘リノ $r-1$ 組ヲ夫夫一組ヅツ白球ノ間ニ置クトキハ, 白球ト黑球トノ接觸點ハ $2r-1$ 箇ナリ. 而シテ斯ノ如キ黑球ノ置キ場處ノ選ビ方ノ數ハ $2\,{}_{m-1}C_{r-1}$ ナリ. 次ニ此中ノ或方法ニテ黑球ヲ置キテ場處ヲ定メタリトスレバ n

箇ノ黑球ヲ r 組ニ分解シ此 r 個ノ場處ニ置ク仕方ノ數ハ $K_r\left(\int n\right)$ 卽 ${}_{n-1}C_{r-1}$ ナリ. 故ニ

$$所要ノ數 = 2\,{}_{m-1}C_{r-1}\cdot{}_{n-1}C_{r-1}.$$

86. 定和ノ重複組合セノ數.

原素 $1,2,3,\cdots\cdots$ ヨリ r 箇ヲ採リ其和ガ m ナル重複組合セノ數ヲ求メントス. 重複組合セニ於テ, 原素ガ常ニ左ヨリ右ニ進ムニ從ヒ小ナラザルヤウニ排列セラルヽモノトスルトキハ總テノ組合セハ1ヲ以テ始マルモノ, 2ヲ以テ始マルモノ, 3ヲ以テ始マルモノ等ノ群ニ分ツコトヲ得. 而シテ此等ノ組合セノ群ハ夫々

$$\left.\begin{array}{l}
H_{r-1}\left[\int m-1\,;1,2,\cdots\cdots\right] ノ左ニ1ヲ附ケ足シタルモノ, \\
H_{r-1}\left[\int m-2\,;2,3,\cdots\cdots\right] ノ左ニ2ヲ附ケ足シタルモノ, \\
H_{r-1}\left[\int m-3\,;3,4.\cdots\cdots\right] ノ左ニ3ヲ附ケ足シタルモノ, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
H_{r-1}\left[\int m-\mu;\mu,\mu+1,\cdots\right] ノ左ニ\mu ヲ附ケ足シタルモノ, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
H_{r-1}\left[\int m-p;p,p+1,\cdots\right] ノ左ニp ヲ附ケ足シタルモノ
\end{array}\right\}\quad(1)$$

ナリ. 但 p ハ正ノ整數ニシテ $m=2p$, 或ハ $m=2p+1$ ナル關係ヲ有シ μ ハ1ト p トノ間ニアル正ノ整數ナリ. 而シテ r ト m トノ關係ニヨリ此等ノ組合セノ群中全ク成立セザルモノアリ.

偖所題ノ組合セハ此等ノ群ニ屬スルモノヲ總テ集メタルモノナルヲ以テ次ノ等式ガ得ラル.

$$H_r\left(\int m\,;1,2,3,\cdots\cdots\right) = H_{r-1}\left(\int m-1\,;1,2,3,\cdots\cdots\right)$$
$$+ H_{r-1}\left(\int m-2\,;2,3,\cdots\cdots\cdots\right)$$

$$+\mathrm{H}_{r-1}\left(\int m-3\,;3,4,\cdots\cdots\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\mathrm{H}_{r-1}\left(\int m-\mu\,;\mu,\mu+1,\cdots\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\mathrm{H}_{r-1}\left(\int m-p\,;p,p+1,\cdots\right). \qquad (2)$$

然ルニ $\mathrm{H}_{r-1}\left[\int m-\mu\,;\mu,\mu+1,\cdots\cdots\right]$ 中ノ組合セハ原素 $\mu,\mu+1,\cdots\cdots$ 中ノ $r-1$ 箇ヨリ成リ其原素ノ和ハ $m-\mu$ ナリ. 今各組合セノ各原素ヨリ $\mu-1$ ヲ減ズルトキハ組合セヲ構成スル原素ハ $1,2,3,\cdots\cdots$ トナリ, 其和ハ $(\mu-1)(r-1)$ ダケ減小シテ $m-\mu-(\mu-1)(r-1)$ トナル. 故ニ

$$\mathrm{H}_{r-1}\left(\int m-\mu\,;\mu,\mu+1,\cdots\right)=\mathrm{H}_{r-1}\left(\int m-\mu-(\mu-1)(r-1)\,;1,2,3,\cdots\right).$$

故ニ原素 $1,2,3,\cdots\cdots$ ヲ略シテ書クトキハ

$$\mathrm{H}_{r}\left(\int m\right)=\mathrm{H}_{r-1}\left(\int m-1\right)+\mathrm{H}_{r-1}\left(\int m-r-1\right)+\mathrm{H}_{r-1}\left(\int m-2r-1\right)$$
$$+\cdots\cdots+\mathrm{H}_{r-1}\left(\int m-\mu-(\mu-1)(r-1)\right)+\cdots\cdots$$
$$+\mathrm{H}_{r-1}\left(\int m-p-(p-1)(r-1)\right). \qquad (3)$$

偖既ニ述ベシ如ク(1)ノ群中ニハ全ク組合セノ成立セザルモノアリ. 從テ上ノ等式ノ右邊ノ項中, 其成立セザル組合セノ群ニ對應スルモノハ零ナラザルベカラズ. 故ニ何レノ項ガ零ナルカヲ考究セン. 其爲ニハ

$$\mathrm{H}_{r-1}\left[\int m-\mu-(\mu-1)(r-1)\,;1,2,3,\cdots\cdots\right]$$

ガ μ ノ如何ナル値ニ向ツテ成立スルカヲ吟味スレバヨシ.

先

$$m-\mu-(\mu-1)(r-1)>0 \qquad (4)$$

ナラザルベカラズ. 又原素 $1,2,3,\cdots$ ヲ重複スルコトヲ許シテ $r-1$ 箇ヲ取リテ作レル組合セ中, 其原素ノ和ノ最小ナルモノハ 1 ヲ $r-1$ 度取リタルモノニシテ其原素ノ和ハ $r-1$ ナリ.

故ニ $$m-\mu-(\mu-1)(r-1)\geqq r-1 \qquad (5)$$

ナラザルベカラズ. (4) ヲ變化スルトキハ

$$\mu<\frac{m+r-1}{r}=\frac{m}{r}+\frac{r-1}{r}. \qquad (4')$$

又(5)ヲ變化スルトキハ

$$\mu\leqq\frac{m}{r} \qquad (5')$$

トナル. 故ニ (5′) ハ (4) ト (5) トヲ滿足スル十分ナル條件ナリ. 今 $\mathrm{E}\left(\frac{m}{r}\right)$ ヲ以テ $\frac{m}{r}$ 中ニ含マルヽ最大ノ整數トスルトキハ此整數ハ μ ノ取リ得ベキ最大ノ値ナリ.

偖 $p=\mathrm{E}\left(\frac{m}{r}\right)$ ナルヲ以テ $r=2$ ナルトキハ常ニ $p=\mathrm{E}\left(\frac{m}{r}\right)$ ニシテ $r>2$ ナルトキハ $p\geqq\mathrm{E}\left(\frac{m}{r}\right)$ ナリ. 故ニ(3)ノ右邊ニ於テハ μ ガ $\mathrm{E}\left(\frac{m}{r}\right)$ ヨリ大ナル値ヲ取ル項ハ零ニシテ從テ之ニ對應スル(1)ノ中ノ組合セハ成立セザルナリ. 故ニ (3) ハ次ノ如ク書クコトヲ得.

$$\mathrm{H}_{r}\left(\int m\right)=\sum_{\mu=1}^{\mathrm{E}\left(\frac{m}{r}\right)}\mathrm{H}_{r-1}\left(\int m-\mu-(\mu-1)(r-1)\right).^{*} \qquad (6)$$

此式ニヨリ次第ニ重複組合セノ値ヲ計算スルコトヲ得.

今(6)ニ於テ $r=2$ ト置クトキハ

$$\mathrm{H}_{2}\left(\int m\right)=\sum_{\mu=1}^{\mathrm{E}\left(\frac{m}{2}\right)}\mathrm{H}_{1}\left(\int m-\mu-(\mu-1)\right).$$

然ルニ $$\mathrm{H}_{1}\left(\int m-\mu-(\mu-1)\right)=1.$$

* 此公式ハすてるんノ得タルモノナリ.

故ニ
$$H_2\left(\int m\right)=E\left(\frac{m}{2}\right).$$

例題. (1). 15 ヲ 3 組ニ分ツニハ幾通リノ方法アリヤ.

解. 15 ヲ 3 組ニ分ツ方法ノ數ハ $H_3\left(\int 15\right)$ ナリ. 然ルニ(6)ニヨリ

$$H_3\left(\int 15\right)=\sum_{\mu=1}^{E\left(\frac{15}{3}\right)} H_2\left(\int 15-\mu-(\mu-1)2\right).$$

然ルニ

$$H_2\left(\int 15-\mu-(\mu-1)2\right)=E\left(\frac{15-\mu-(\mu-1)2}{2}\right).$$

故ニ

$$\begin{aligned}H_3\left(\int 15\right)&=\sum_{\mu=1}^{E\left(\frac{15}{3}\right)} E\left(\frac{15-\mu-(\mu-1)2}{2}\right)\\&=E\left(\frac{15-1}{2}\right)+E\left(\frac{15-2-2}{2}\right)+E\left(\frac{15-3-2\times2}{2}\right)\\&\quad+E\left(\frac{15-4-3\times2}{2}\right)+E\left(\frac{15-5-4\times2}{2}\right)\\&=E\left(\frac{14}{2}\right)+E\left(\frac{11}{2}\right)+E\left(\frac{8}{2}\right)+E\left(\frac{5}{2}\right)+E\left(\frac{2}{2}\right)\\&=7+5+4+2+1\\&=19.\end{aligned}$$

(2). 15 ヲ 4 組ニ分ツニ幾通リノ方法アリヤ.

解. 15 ヲ 4 組ニ分ツ方法ノ數ハ $H_4\left(\int 15\right)$ ナリ. (6) ニ於テ $r=4$ ト置クトキハ

$$\begin{aligned}H_4\left(\int 15\right)&=\sum_{\mu=1}^{E\left(\frac{15}{4}\right)} H_3\left(\int 15-\mu-(\mu-1)3\right)\\&=\sum_{\mu=1}^{3} H_3\left(\int 15-4\mu+3\right)\\&=H_3\left(\int 14\right)+H_3\left(\int 10\right)+H_3\left(\int 6\right).\end{aligned}$$

然ルニ

$$\begin{aligned}H_3\left(\int 14\right)&=\sum_{\mu=1}^{E\left(\frac{14}{3}\right)} E\left(\frac{14-\mu-(\mu-1)2}{2}\right)\\&=\sum_{\mu=1}^{4} E\left(\frac{14-3\mu+2}{2}\right)\\&=E\left(\frac{13}{2}\right)+E\left(\frac{10}{2}\right)+E\left(\frac{7}{2}\right)+E\left(\frac{4}{2}\right)\\&=6+5+3+2\\&=16.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_3\left(\int 10\right)&=\sum_{\mu=1}^{E\left(\frac{10}{3}\right)} E\left(\frac{10-3\mu+2}{2}\right)\\&=\sum_{\mu=1}^{3} E\left(\frac{10-3\mu+2}{2}\right)\\&=E\left(\frac{9}{2}\right)+E\left(\frac{6}{2}\right)+E\left(\frac{3}{2}\right)\\&=4+3+1\\&=8.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_2\left(\int 6\right)&=\sum_{\mu=1}^{E\left(\frac{6}{3}\right)} E\left(\frac{6-3\mu+2}{2}\right)\\&=\sum_{\mu=1}^{2} E\left(\frac{6-3\mu+2}{2}\right)\\&=E\left(\frac{5}{2}\right)+E\left(\frac{2}{2}\right)\\&=2+1\\&=3.\end{aligned}$$

故ニ　　所要ノ數 $=16+8+3=27.$

87. 重複ヲ許サヾル定和ノ組合セノ數ヲ求ムルコト.

原素 $1, 2, 3, \cdots\cdots$ 中ヨリ重複ヲ許サズシテ r 箇ヲ取リタル組合中，原素ノ和ガ m ナルモノヽ數卽 $\mathrm{C}_r\left(\int m; 1, 2, 3, \cdots\cdot\right)$ ノ値ヲ求メントス．今原素 $1, 2, 3, \cdots\cdot$ ヨリ重複ヲ許シテ r 箇ヲ取リ其和ガ m ナル組合セ卽 $\mathrm{K}_r\left[\int m; 1, 2, 3, \cdots\cdot\right]$ ニ屬スル組合セ中ノ原素ヲ，其表ス數ノ大サノ順序ニ列ベ置キ，其第一，第二，$\cdots\cdots$，第 r ノ原素ニ夫々 $0, 1, 2, \cdots\cdots, r-1$ ヲ加フルトキハ，斯クシテ得タル組合セハ其數及ー ツノ組合セ中ノ原素ノ數ハモトト變ルコトナク，而シテ原素ノ和ハ

$$m+1+2+3+\cdots\cdot+(r-1)\quad 卽\quad m+\frac{r(r-1)}{2}$$

トナル．而シテーツノ組合セ中ニハ相同ジキ原素ヲ含ムコトナシ．故ニ斯クシテ得タル組合セハ

$$\mathrm{C}_r\left[\int m+\frac{r(r-1)}{2}\right]$$

ナリ．故ニ

$$\mathrm{C}_r\left(\int m+\frac{r(r-1)}{2}\right)=\mathrm{H}_r\left(\int m\right).$$

今 m ノ代リニ $m-\dfrac{r(r-1)}{2}$ ト置クトキハ

$$\mathrm{C}_r\left(\int m\right)=\mathrm{H}_r\left(\int m-\frac{r(r-1)}{2}\right).$$

然ルニ此右邊ハ前節ニ述ベタル方法ニヨリ其値ヲ求ムルコトヲ得．從テ所題ノ數ヲ求ムルコトヲ得．

例題． 原素 $1, 2, 3, \cdots\cdot$ ヨリ重複ヲ許サズシテ 4 箇ヲ取リタル組合セ中，原素ノ和ガ 17 ナルモノヽ數ヲ求ム．

解．
$$\mathrm{C}_4\left(\int 17\right)=\mathrm{H}_4\left(\int 17-\frac{4(4-1)}{2}\right)$$
$$=\mathrm{H}_4\left(\int 11\right)$$

$$=\sum_{\mu=1}^{\mathrm{E}\left(\frac{11}{4}\right)}\mathrm{H}_3\left(\int 11-\mu-(\mu-1)3\right)$$
$$=\sum_{\mu=1}^{2}\mathrm{H}_3\left(\int 11-4\mu+3\right)$$
$$=\mathrm{H}_3\left(\int 10\right)+\mathrm{H}_3\left(\int 6\right).$$

然ルニ
$$\mathrm{H}_3\left(\int 10\right)=\sum_{\mu=1}^{\mathrm{E}\left(\frac{10}{3}\right)}\mathrm{E}\left(\frac{10-3\mu+2}{2}\right)$$
$$=\mathrm{E}\left(\frac{9}{2}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{6}{2}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$=4+3+1$$
$$=8.$$

$$\mathrm{H}_3\left(\int 6\right)=\sum_{\mu=1}^{\mathrm{E}\left(\frac{6}{3}\right)}\mathrm{E}\left(\frac{6-3\mu+2}{2}\right)$$
$$=\mathrm{E}\left(\frac{5}{2}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{2}{2}\right)$$
$$=2+1$$
$$=3.$$

故ニ　　所要ノ數 $=\mathrm{C}_4\left(\int 17\right)=8+3=11.$

88. 重複ヲ許サヾル定和ノ順列ノ數.

定和ノ順列ニ就テモ重複ヲ許サヾル場合ニアリテハ次ノ等式

$$\mathrm{P}_r\left(\int m\right)=r!\,\mathrm{C}_r\left(\int m\right)$$

ノ成立スルコト明ナリ．故ニ前節ノ公式ニヨリ

$$\mathrm{P}_r\left(\int m\right)=r!\,\mathrm{H}_r\left(\int m-\frac{r(r-1)}{2}\right).$$

例題． 數字 $1, 2, 3, \cdots\cdot, 10$ ヲ記セル 10 本ノ籤アリ．之ヲ一本宛

三本連續シテ引キ(三本ヲ引キ終ルマデハ引キタルモノヲモトヘ返サズ), 引キ終リシ毎ニモトニ返ストキ, 籤ニ記サレタル數ノ和ガ 9 ナルヤウニ引クニハ幾通リノ引キ方アルカ.

解. 所要ノ數ハ $P_3\left(\int 9\right)$ ナリ. 然ルニ

$$
\begin{aligned}
P_3\left(\int 9\right) &= 3!\,H_3\left(\int 9-\frac{3\times 2}{2}\right) \\
&= 3!\,H_3\left(\int 6\right) \\
&= 3!\sum_{\mu=1}^{E\left(\frac{6}{3}\right)} E\left(\frac{6-3\mu+2}{2}\right) \\
&= 3!\left\{E\left(\frac{5}{2}\right)+E\left(\frac{2}{2}\right)\right\} \\
&= 3!(2+1) \\
&= 18.
\end{aligned}
$$

第九章 特種ノ順列

89. おいらーノ問題.

おいらーハ相異ナル n 箇ノ原素ヨリ成ル總順列ノ中何レノ原素モ原ノ位置ヲ占メザルモノヽ數ヲ求ムルコトヲ考究セリ.

今 n 箇ノ相異ナル原素 $1, 2, 3, 4, \cdots\cdots, n$ ヲ數ノ大サニ列ベタル位置ヲ各原素ノ原ノ位置トシ, 所要ノ順列ノ數ヲ表スニ $P_n^{(0)}$ ヲ以テス. 玆ニ右上ニ添數 (0) ヲ附シタルハ次節ニ於テ n 箇ノ原素ノ中 r 箇ガ原ノ位置ヲ占ムルモノヽ數ヲ表スニ $P_n^{(r)}$ ヲ以テスルニ對セシメンガ爲ナリ.

上ニ述ブルガ如キ順列ヲ作ルニハ圖ノ如ク先 n 箇ノ原素ヲ自然ノ順序ニ列ベ其下ニ n 箇ノ原素ヲ同一ノ原素ガ同行ニ來ラザルヤウニ列ブルコトヲ考フレバ其列ベ方ノ數ハ所要ノ數ナルコト勿論ナリ. 偖之ヲナスニハ先 1 ノ下ニハ $2, 3, 4, \cdots, n$ ノ何レカ一ツヲ置クコトヲ得. 而シテ何レヲ置クモ理論ノ道筋ニ於テハ同様ナルヲ以テ今 2 ヲ置キタリトス. 然ラバ殘リノ $1, 3, 4, \cdots\cdots, n$ ノ原素ハ $2, 3, 4, \cdots\cdots, n$ ノ下ニ置クコトヽナル. 其置キ方ハ上ノ列ノ 2 ノ下ニ下ノ列ノ 1 ガ在ル場合ト然ラザル場合トニ區別スルヲ得. 而シテ後ノ場合ハ同ジ原素ガ同行ニ來ラズト云フ制限ノモトニ $2, 3, 4, \cdots\cdots, n$ ノ下ニ $2, 3, 4, \cdots\cdots, n$ ヲ列ベ下ノ列ノ 2 ヲ 1 ニテ置キ換フレバ得ラル. 其數ハ $P_{n-1}^{(0)}$ ナリ. 又前ノ場合ハ之ト同ジ制限ノモトニ $3, 4, \cdots\cdots n$ ノ下ニ殘リノ $3, 4, \cdots\cdots, n$ ヲ列ブレバヨシ. 其數ハ $P_{n-2}^{(0)}$ ナリ. 即 $2, 3, 4, \cdots\cdots, n$ ナル

$$
\begin{array}{l}
1\ 2\ 3\ 4 \cdots\cdots\cdots n \\
2\ 3\ 4\ 1 \cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

$n-1$ 箇ノ原素ノ中ノ一ツヲ上ノ列ノ 1 ノ下ニ置クコトニ對シ殘リノ $n-1$ 箇ノ原素ノ列べ方ニ $P^{(0)}_{n-1}+P^{(0)}_{n-2}$ 通リノ仕方アリ．故ニ第 7 節定理 I ニヨリ

$$P^{(0)}_{n}=(n-1)\left[P^{(0)}_{n-1}+P^{(0)}_{n-2}\right]. \qquad (1)$$

此公式ニヨリ次第ニ $P^{(0)}_{n}$ ノ値ヲ計算スルコトヲ得．

$P^{(0)}_{1}$ ヨリ順次ニ $P^{(0)}_{7}$ マデヲ計算セバ次ノ如シ．先 $P^{(0)}_{1}=0$, $P^{(0)}_{2}=1$ ナルコト明ナリ．從テ

$$\begin{aligned} P^{(0)}_{3}&=2(1+0)=2,\\ P^{(0)}_{4}&=3(2+1)=9,\\ P^{(0)}_{5}&=4(9+2)=44,\\ P^{(0)}_{6}&=5(44+9)=265,\\ P^{(0)}_{7}&=6(265+44)=1854. \end{aligned}$$

公式 (1) ヨリ又他ノ公式ヲ誘出スルコトヲ得．

(1) ニ於テ n ノ代リニ $n-1$ ヲ置クトキハ

$$P^{(0)}_{n-1}=(n-2)P^{(0)}_{n-2}+(n-2)P^{(0)}_{n-3}. \qquad (2)$$

(1) ヨリ (2) ヲ減ズルトキハ

$$P^{(0)}_{n}=nP^{(0)}_{n-1}+P^{(0)}_{n-2}-(n-2)P^{(0)}_{n-3} \qquad (3)$$

又 (1) ニ於テ n ノ代リニ $n-2$ ヲ置クトキハ

$$P^{(0)}_{n-2}=(n-3)P^{(0)}_{n-3}+(n-3)P^{(0)}_{n-4} \qquad (4)$$

(3) ト (4) トヲ邊々相加フルトキハ

$$P^{(0)}_{n}=nP^{(0)}_{n-1}-P^{(0)}_{n-3}+(n-3)P^{(0)}_{n-4}.$$

同樣ニシテ進ムトキハ

$$\begin{aligned} P^{(0)}_{n}&=nP^{(0)}_{n-1}+P^{(0)}_{n-4}+(n-4)P^{(0)}_{n-5}\\ &=nP^{(0)}_{n-1}-P^{(0)}_{n-5}+(n-5)P^{(0)}_{n-6} \end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$=nP^{(0)}_{n-1}+(-1)^{n-2}+2P^{(0)}_{1}.$$

然ルニ $P^{(0)}_{1}=0$ ナルヲ以テ

$$P^{(0)}_{n}=nP^{(0)}_{n-1}+(-1)^{n}. \qquad (5)$$

此公式 (5) ヲ用ヒテ $P^{(0)}_{1}$ ヨリ順次ニ $P^{(0)}_{7}$ マデヲ計算スレバ次ノ如シ．

$$\begin{aligned} P^{(0)}_{3}&=3\times 1-1=2,\\ P^{(0)}_{4}&=4\times 2+1=9,\\ P^{(0)}_{5}&=5\times 9-1=44,\\ P^{(0)}_{6}&=6\times 44+1=265,\\ P^{(0)}_{7}&=7\times 265-1=1854. \end{aligned}$$

卽公式 (1) ニヨリテ計算シタルモノト一致ス．

吾人ハ (1) ト (5) トニヨリ $P^{(0)}_{n}$ ハ $n-1$ ニテ割リ切ラレ，n ニテ割リ切ラレザルコトヲ知ル．

$P^{(0)}_{n}$ ノ値ヲ直接ニ計算シ得ル公式ハ次節ニ於テ之ヲ求ムベシ．

90. おいら｜ノ問題ニ對スル直接公式ヲ求ムルコト．

第一法．

n 箇ノ相異ナル原素ヨリ成レル總順列中唯 r 箇ノ原素ノミ原ノ位置ヲ占メ其以外ノモノハモトノ位置ヲ占メザル順列ノ數ヲ表スニ $P^{(r)}_{n}$ ヲ以テスベシ．而シテ或特殊ナル r 箇ノ原素ヲ原ノ位置ニ置クトキハ殘リノ $n-r$ 箇ノ原素ハ $P^{(0)}_{n-r}$ 通リニ排列スルコトヲ得．故ニ

$$P^{(r)}_{n}=P^{(0)}_{n-r}\cdot{}_{n}C_{r}. \qquad (1)$$

而シテ總テノ總順列卽 $n!$ 箇ノ總順列ハ何レノ原素モ原ノ位置ヲ占メザルモノ，唯何レカ一ツガ原ノ位置ヲ占ムルモノ，唯何レカ二ツガ原ノ位置ヲ占ムルモノ等ノ數ノ和ニ等シ．故ニ

$$
\begin{aligned}
n! &= \mathrm{P}_n^{(0)} + {}_n\mathrm{C}_1\mathrm{P}_{n-1}^{(0)} + {}_n\mathrm{C}_2\mathrm{P}_{n-2}^{(0)} + {}_n\mathrm{C}_3\mathrm{P}_{n-3}^{0} + \cdots\cdots \\
(n-1)! &= \qquad \mathrm{P}_{n-1}^{(0)} + {}_{n-1}\mathrm{C}_1\mathrm{P}_{n-2}^{(0)} + {}_{n-1}\mathrm{C}_2\mathrm{P}_{n-3}^{0} + \cdots\cdots \\
(n-2)! &= \qquad\qquad \mathrm{P}_{n-2}^{(0)} + {}_{n-2}\mathrm{C}_1\mathrm{P}_{n-3}^{(0)} + \cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

此等ノ等式ノ兩邊ニ夫々 ${}_n\mathrm{C}_0, -{}_n\mathrm{C}_1, {}_n\mathrm{C}_2, -{}_n\mathrm{C}_3, \cdots\cdots$ ヲ乘ジテ邊々相加ヘ第 **37** 節ノ公式ヲ適用スルトキハ

$$\mathrm{P}_n^{(0)} = n! - {}_n\mathrm{C}_1(n-1)! + {}_n\mathrm{C}_2(n-2)! - {}_n\mathrm{C}_3(n-3)! + \cdots\cdots$$

卽

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}_n^{(0)} &= n!\left[1 - 1 + \frac{1}{1\cdot2} - \frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \cdots\cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right] \\
&= n!\left[\frac{1}{1\cdot2} - \frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \cdots\cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right] \\
&= n!\sum_{\rho=2}^{n}(-1)^\rho\frac{1}{\rho!}.
\end{aligned}
$$

注意. $\mathrm{P}_n^{(0)}$ ヲ表スニ $\underline{|n}$ 又ハ $n¡$ ヲ用フルコトアリ.

第二法.

先 n 箇ノ原素ノ總テノ總順列中少クトモ一ツノ原素ガ原ノ位置ニ在ルモノヽ數ヲ求ムベシ. 或一ツノ原素例ヘバ 1 ヲ原ノ位置ニ定メ置キ殘リノ原素ヲ出來得ルダケ異ナル仕方ニテ列ブルトキハ $(n-1)!$ 箇ノ順列ガ得ラル. 他ノ何レノ原素ヲ原ノ位置ニ定メ置クモ同樣ナリ. 故ニ斯ノ如ク別々ニ得タルモノヽ數ノ和ヲ求ムレバ其數ハ

$${}_n\mathrm{C}_1(n-1)! \quad 卽 \quad n! \tag{1}$$

ナリ. 然レドモ此中ニ二ツノ原素ガ同時ニ原ノ位置ヲ占ムルモノガ二度數ヘラレ居レリ. 故ニ所要ノ數ヲ求ムルニハ先二ツノ原素ガ原ノ位置ヲ占ムルモノヽ數ダケヲ減ズルヲ要ス. 而シテ二ツノ原素ヲ原ノ位置ニ定メ置キ殘リノ $n-2$ 箇ヲ出來得ルダケ異ナル仕方ニテ

排列スルトキハ $(n-2)!$ 箇ノ順列ガ得ラル. 而シテ原ノ位置ニ定メ置クベキ二ツノ原素ヲ選ブ仕方ハ ${}_n\mathrm{C}_2$ ナリ. 故ニ斯ノ如クシテ別々ニ作ラレタルモノヽ和ハ

$${}_n\mathrm{C}_2(n-2)! \quad 卽 \quad \frac{n!}{2} \tag{2}$$

ナリ. 而シテ此中ニハ唯二ツノ原素ノミガ原ノ位置ニ在ルモノハ一ツトシテ數ヘラレ居ルヲ以テ (1) ヨリ (2) ヲ減ジタルモノ卽

$$n! - \frac{n!}{2} \tag{3}$$

ノ中ニハ唯一ツノ原素ガ原ノ位置ニ在ルモノ及唯二ツノ原素ガ原ノ位置ニ在ルモノハ各一度ヅツ數ヘラレ居ルコトヽナル. 然レドモ三ツノ原素ガ同時ニ原ノ位置ニ在ルモノハ (1) ニ於テハ各 ${}_3\mathrm{C}_1$ 度數ヘラレ (2) ニ於テハ各 ${}_3\mathrm{C}_2$ 度數ヘラル. 而シテ ${}_3\mathrm{C}_1 - {}_3\mathrm{C}_2 = 0$ ナルヲ以テ (3) ニ於テハ數ヘラレ居ラズ. 今何レカ三ツノ原素ヲ原ノ位置ニ定メ置キ他ノ原素ヲ出來得ルダケ異ナル仕方ニテ排列スルトキハ $(n-3)!$ 箇ノ順列ガ得ラル. 而シテ原ノ位置ニ置カルベキ三ツノ原素ハ ${}_n\mathrm{C}_3$ 箇ノ仕方ニテ選ブコトヲ得ルヲ以テ斯ノ如クシテ別々ニ作リタル順列ノ數ノ和ハ

$${}_n\mathrm{C}_3(n-3)! \quad 卽 \quad \frac{n!}{3} \tag{4}$$

ナリ. 此中ニハ唯三ツノ原素ノミガ原ノ位置ニ在ル順列ハ各一ツトシテ數ヘラレ居ルヲ以テ之ヲ (3) ニ加ヘ

$$n! - \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} \tag{5}$$

トスルトキハ此中ニハ唯一ツノ原素, 唯二ツノ原素, 唯三ツノ原素ガ原ノ位置ニ在ルモノハ各一ツトシテ數ヘラル. 以下同樣ニシテ進ミ且 ${}_p\mathrm{C}_1 - {}_p\mathrm{C}_2 + {}_p\mathrm{C}_3 - \cdots\cdots \pm {}_p\mathrm{C}_p = 1$ ナルコトニ注意スルトキハ

$$n!\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]$$

ハ少クトモ一ツノ原素ガ原ノ位置ニ在ル順列ノ數ヲ表スコトヲ知ル. 故ニ之ヲ總順列ノ總數 $n!$ ヨリ減ズルトキハ前ト同ジ結果ガ得ラル.

第三法.

或定マリタル r 箇ノ原素ガ原ノ位置ヲ占ムル順列ノ數ハ $(n-r)!$ ナリ. 故ニ或定マリタル r 箇ノ原素ノ中若干ガ原ノ位置ヲ占ムルコトアルモ總テガ同時ニ原ノ位置ヲ占メザル順列ノ數ハ

$$n!-(n-r)!$$

ナリ. 而シテ此順列ハ次ノ如クニ分ツコトヲ得.

(i). r 箇ノ原素ガ一ツモ原ノ位置ヲ占メザルモノ $P_n^{(r)}$ 箇.

(ii). r 箇ノ原素ノ中ノ何レカ一ツガ原ノ位置ヲ占メ他ノモノハ原ノ位置ヲ占メザルモノ ${}_rC_1\cdot P_n^{(r-1)}$ 箇,

(iii). r 箇ノ原素中二ツガ原ノ位置ヲ占メ他ノモノハ原ノ位置ヲ占メザルモノ ${}_rC_2\cdot P_n^{(r-2)}$ 箇,

以下同様ナリ.

故ニ

$$n!-(n-r)!=P_n^{(r)}+{}_rC_1P_{n-1}^{(r-1)}+{}_rC_2P_{n-2}^{(r-2)}+\cdots\cdots+{}_rC_{r-1}P_{n-r+1}^{(1)}. \quad (1)$$

此式ニ於テ n ノ代リニ $n-1$, r ノ代リニ $r-1$ ト置クトキハ

$$(n-1)!-(n-r)!=P_{n-1}^{(r-1)}+{}_{r-1}C_1P_{n-2}^{(r-2)}$$
$$+{}_{r-1}C_2P_{n-3}^{(r-3)}+\cdots\cdots+{}_{r-1}C_{r-2}P_{n-r+1}^{(1)}. \quad (2)$$

(1) ト (2) トヲ邊々相減ズルトキハ

$$n!-(n-1)!=P_n^{(r)}+{}_{r-1}C_1P_{n-1}^{(r-1)}$$
$$+{}_{r-1}C_2P_{n-2}^{(r-2)}+\cdots\cdots+{}_{r-1}C_{r-1}P_{n-r+1}^{(1)}. \quad (3)$$

此等式ヲ第82節(3)ト全ク同様ニ取扱フトキハ $P_n^{(r)}$ ヲ表ス公式ヲ得ベシ. 是ニ於テ $r=0$ ト置クトキハ前ノ式ガ得ラル.

第四法.

或一ツノ原素例ヘバ1ガ占メ得ル位置ハ $2,3,4,\cdots\cdots,n$ ノ $n-1$ 箇ノ位置ナリ. 今1ガ第 k 位ヲ占メタリトスレバ原素 k ノ占ムベキ位置ハ1位ナルカ或ハ1位以外ナリ. 而シテ原素 k ガ1位ヲ占メタリトスレバ他ノ $n-2$ 箇ノ原素ヲ原ノ位置ヲ占メザルヤウニ排列スル仕方ノ數ハ $P_{n-2}^{(0)}$ ナリ. 又原素 k ガ1位ヲ占メズ他ノ $n-2$ 箇ノ原素モ原ノ位置ヲ占メザル排列ノ仕方ノ數ハ $P_{n-1}^{(0)}$ ナリ. 故ニ所題ノ順列數中1ガ第 k 位ヲ占ムルモノヽ數ハ $P_{n-1}^{(0)}+P_{n-2}^{(0)}$ ナリ. 而シテ1ハ $2,3,\cdots\cdots,n-1,n$ ノ $n-1$ 箇ノ位置ヲ占ムルコトヲ得.

故ニ $$P_n^{(0)}=(n-1)(P_{n-1}^{(0)}+P_{n-2}^{(0)}).$$

故ニ $$P_n^{(0)}-nP_{n-1}^{(0)}=-\{P_{n-1}^{(0)}-(n-1)P_{n-2}^{(0)}\}.$$

同様ニ $$P_{n-1}^{(0)}-(n-1)P_{n-2}^{(0)}=-\{P_{n-2}^{(0)}-(n-2)P_{n-3}^{(0)}\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_3^{(0)}-3P_2^{(0)}=-\{P_2^{(0)}-2P_1^{(0)}\}.$$

然ルニ $$P_2^{(0)}=1 \qquad P_1^{(0)}=0$$

ナルコト明ナリ. 故ニ上ノ諸式ヨリ

$$P_n^{(0)}-nP_{n-1}^{(0)}=(-1)^n.$$

從テ $$\frac{P_n^{(0)}}{n!}-\frac{P_{n-1}^{(0)}}{(n-1)!}=(-1)^n\frac{1}{n!}$$

同様ニ $$\frac{P_{n-1}^{(0)}}{(n-1)!}-\frac{P_{n-2}^{(0)}}{(n-2)!}=(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!},$$

$$\frac{P_{n-2}^{(0)}}{(n-2)}-\frac{P_{n-3}^{(0)}}{(n-3)!}=(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{P^{(0)}_2}{2!}-\frac{P^{(0)}_1}{1!}=(-1)^2\frac{1}{2!}.$$

此等ノ諸式ヲ邊々相加フルトキハ

$$P^{(0)}_n=n!\left\{\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right\}.$$

例題. $m+n$ 箇ノ物ノ或順列アリ. 其 m 箇ノ物ハ位置ヲ變ゼシメ他ノ n 箇ノ物ハ位置ヲ變ゼシメザルモノトス. 所得ノ順列ノ數幾何ナルカ.

解. $m+n$ 箇ノ物ヨリ位置ヲ變ゼシムベキ m 箇ノ物ヲ選定スル仕方ノ數ハ ${}_{m+n}C_m$ ニシテ, 其選定セラレタル m 箇ノ物ノ位置ヲ變ズル仕方ノ數ハ $m!$ ナリ. 故ニ

$$所要ノ數={}_{m+n}C_m\cdot m!=\frac{(m+n)!m!}{m!n!}.$$

91. 前節ノ結果ヲ行列式ニ應用スルコト.

次ノ行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\cdots\cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ノ展開式トハ其主對角線(左上隅ヨリ右下隅ニ至ル對角線)ニ沿ヘル原素ノ乘積

$$a_{11}a_{22}a_{33}\cdots\cdots\cdots a_{nn}$$

ニ於テ二ツノ添數ノ中何レカ一方(假ニ第一添數トス)ヲ其儘ニナシ置キ他ノ添數ノ順列ヲ作リ其順列ノ偶奇ニ從ヒ此乘積ノ前ニ正負ノ符號ヲ附シタルモノヽ和ヲ云フ.* 行列式ヲ構成スル何レノ原素モ零

* 本叢書第七編行列式第 30 頁ヲ參照セヨ.

ナラズ, 又展開シタル後ニ於テ同類項ヲ約スル等ノコトヲナサヾルトキハ其項ノ數ハ $n!$ ナルコト明ナリ.

偖此展開式ノ項ヲ成セル原素中, 其第二ノ添數ガ原ノ位置ニ在ル原素ハ主對角線中ノ原素ナリ. 故ニ $P^{(r)}_n$ ハ上ノ行列式ノ展開式ニ於テ主對角線ニ沿ヘル原素 r 箇ヲ含ムモノヽ數ヲ表ス.

例題 (1). 上ノ行列式ノ展開式ニ於テ或定マレル m 箇ノ主對角線ニ沿ヘル原素ヲ同時ニ含ミ主對角線ニ沿ヘル其他ノ原素ヲ含マザル項ノ數ヲ求ム.

解. 定マレル m 箇ノ原素ノ第二添數ハ其儘ニナシ置キ他ノ原素ノ第二添數ノ位置ヲ變ジ其中ノ何レノ添數モ原ノ位置ヲ占メザル順列ヲ作ルトキハ, 其數ハ

$$P^{(0)}_{n-m}=(n-m)!\sum_{\rho=2}^{n-m}(-1)^\rho\frac{1}{\rho!}$$

ニシテ是所要ノ數ナリ.

(2). 上ノ行列式ノ展開式ニ於テ任意ノ m 箇ノ主對角線ニ沿ヘル原素ヲ含ミ而シテ其レヨリ多ク含マザル項ノ數ヲ求ム.

解. 主對角線ニ沿ヘル n 箇ノ原素ヨリ m 箇ノ原素ヲ選ブニハ ${}_nC_m$ 通リノ仕方アリ. 故ニ

$$\begin{aligned}所要ノ數&={}_nC_mP^{(0)}_{n-m}\\&=\frac{n!}{(n-m)!m!}(n-m)!\sum_{\rho=2}^{n-m}(-1)^\rho\frac{1}{\rho!}\\&=\frac{n!}{m!}\sum_{\rho=2}^{n-m}(-1)^\rho\frac{1}{\rho!}.\end{aligned}$$

92. 或制限ヲ有スル組合セ.

原素 $1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ ヨリ $\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots$ 箇ヲ選擇スルニ α 箇, β

箇, γ 箇等ハ夫々接續セル原素ニシテ此等ノ組相互ニハ相接續セズ, 換言スレバ α 箇ト β 箇トノ間, β 箇ト γ 箇トノ間等何レノ二ツノ組ヲ取ルモ其二組ノ間ニハ少クトモ一ツノ原素ガ界在スルヤウニスルニハ其選擇ノ仕方幾通リアルベキカヲ考究セントス. 但原素1ハ原素 n ニ接續スルモノト見做ス. 吾人ハ斯ノ如キ組合セノ數ヲ表スニ $[\alpha,\beta,\gamma,\cdots\cdots]_n$ ヲ以テスベシ.

先

$$[\alpha]_n=n$$

ナルコトハ容易ニ知リ得ベシ. 何トナレバ α 箇ノ原素ハ相接續スルモノナルヲ以テ其主位ノ原素サヘ定ムレバ完全ニ定マル. 而シテ其主位ノ原素トシテ n 箇ノ何レニテモ選ブコトヲ得レバナリ.

次ニ $[\alpha,\beta]_n\ (\alpha\neq\beta)$ ノ値ヲ求ムベシ. 上ニ述ベシ如ク α 箇ヲ選ブニ n 通リノ方法アリ. 而シテ1ハ n ニ接續スルモノト考フル故ニ總テノ原素ハ皆同性質ヲ有シ; 從テ此 n 通リノ選擇モ亦同樣ノモノト考フルヲ得ベシ. 依テ先 α ノ接續原素ノ主位ヲ1ト定メタリトス. 然ラバ α ノ接續セル原素ノ外ニハ $\alpha+1$ 以下 $n-\alpha$ 箇アリ. 此中ヨリ β ハ接續セル原素ヲ選擇スルニ $\alpha+1$ ト n トハ選擇スルコトヲ得ザルヲ以テ選擇ノ異ナル仕方ハ $n-\alpha-\beta-1$ 通リナリ. 卽 α ノ接續セル原素ヲ或一ツノ仕方ニテ選擇スレバ β ノ接續原素ハ $n-\alpha-\beta-1$ ノ方法ニテ選擇スルコトヲ得. 故ニ

$$[\alpha,\beta]_n=n(n-\alpha-\beta-1).\qquad(\alpha\neq\beta)\tag{1}$$

例ヘバ $n=8,\ \alpha=1,\ \beta=2$ トスルトキハ次ノ如キ組合セヲ得.

1,34	1,45	1,56	1,67	2,45	2,56	2,67	2,78
3,56	3,67	3,78	3,81	4,67	4,78	4,81	4,12

5,78	5,81	5,12	5,23	6,81	6,12	6,23	6,34
7,12	7,23	7,34	7,45	8,23	8,34	8,45	8,56

然ルニ上ノ公式(1)ニ於テ n,α,β ヲ夫々 8, 1, 2 トスルトキハ

$$[1,2]_8=8\times4=32$$

トナリ實際ト符合スルヲ見ル.

若 $\alpha=\beta$ ナルトキハ $\alpha\neq\beta$ ナル場合ニ於ケル相異ナル二ツヅツノ組合セガ等シクナル. 故ニ

$$[\alpha,\alpha]_n=\frac{1}{2}n(n-2\alpha-1).\tag{2}$$

例ヘバ $n=8,\ \alpha=\beta=2$ トスレバ次ノ如キ組合セガ得ラル.

12,45	12,56	12,67	23,56	23,67	23,78
34,67	34,78	34,81	45,78	45,81	56,81.

又公式(2)ニ n,α ヲ夫々 8, 2 トスルトキハ

$$[2,2]_8=\frac{1}{2}\times8\times3=12$$

トナリ實際ト符合スルヲ見ル.

次ニ α,β,γ ノ何レノ二ツモ相等シカラザルトキ ($\alpha\neq\beta\neq\gamma$ ト書クベシ. $\alpha\neq\beta,\ \beta\neq\gamma$ ト同一ニアラザルコトヲ注意スベシ) $[\alpha,\beta,\gamma]_n$ ノ値ヲ求ムベシ. 先前ノ如ク α ノ接續原素ノ主位ノ原素ガ1ナルヤウニ α 箇ヲ選擇シタリトシ, 次ニ β ノ接續原素ヲ最モ α ノ接續原素ニ近ク詳言スレバ $\alpha+2$ ガ主位ニナルヤウニ定メタリトスレバ, β ノ接續原素ノ最後ノ原素ハ $\alpha+\beta+1$ ニシテ其以下ニハ $n-(\alpha+\beta+1)$ 箇ノ原素アリ. 此中ヨリ γ ノ接續原素ヲ選擇スルニ當リ $\alpha+\beta+2$ ト n トハ選擇スルコトヲ得ザルガ故ニ其仕方ハ $n-\alpha-\beta-\gamma-2$ 通リナリ. 次ニ β ノ接續原素ノ主位ヲ $\alpha+3$ トスレバ γ ノ接續原素ノ選擇

ノ仕方ハ $n-\alpha-\beta-\gamma-3$ 通リナリ．故ニ α 箇ノ接續原素ノ次ニ β 箇ノ接續原素ヲ選擇シ，其次ニ γ 箇ノ接續原素ヲ選擇スル仕方ハ

$$(n-\alpha-\beta-\gamma-2)+(n-\alpha-\beta-\gamma-3)+\cdots\cdots+1$$

$$\text{即}\quad \frac{(n-\alpha-\beta-\gamma-1)(n-\alpha-\beta-\gamma-2)}{1\cdot 2}$$

通リナリ．

次ニ β ト γ トノ順序ヲ逆ニシ γ ノ接續原素ヲ選擇シタル後 β ノ接續原素ヲ選擇スルトキハ矢張前ト同數ノ組合セガ得ラル．故ニ α ノ接續原素ヲ或一ツノ方法ニテ選擇スルトキハ β ト γ トノ接續原素ハ

$$(n-\alpha-\beta-\gamma-1)(n-\alpha-\beta-\gamma-2)$$

通リニ選擇スルコトヲ得．故ニ

$$[\alpha,\beta,\gamma]_n=n(n-\alpha-\beta-\gamma-1)(n-\alpha-\beta-\gamma-2)\quad(\alpha\neq\beta\neq\gamma).$$

$\beta=\gamma$ ナルトキハ

$$[\alpha,\beta,\beta]_n=\frac{n(n-\alpha-2\beta-\gamma-1)(n-\alpha-2\beta-2)}{2!}\quad(\alpha\neq\beta).$$

又 $\alpha=\beta=\gamma$ ナルトキハ

$$[\alpha,\alpha,\alpha]_n=\frac{n(n-3\alpha-1)(n-3\alpha-2)}{3!}.$$

同様ニシテ

$$[\alpha,\beta,\gamma,\delta]_n=n(n-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1)(n-\alpha-\beta-\gamma-\delta-2)$$
$$\times(n-\alpha-\beta-\gamma-\delta-3)\quad(\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\delta)$$

$$[\alpha,\beta,\gamma,\gamma]_n=\frac{1}{2!}n(n-\alpha-\beta-2\gamma-1)(n-\alpha-\beta-2\gamma-2)$$
$$\times(n-\alpha-\beta-2\gamma-3)\quad(\alpha\neq\beta\neq\gamma)$$

$$[\alpha,\beta,\beta,\beta]_n=\frac{1}{3!}n(n-\alpha-3\beta-1)(n-\alpha-3\beta-2)$$
$$\times(n-\alpha-3\beta-3)\quad(\alpha\neq\beta)$$

$$[\alpha,\alpha,\beta,\beta]_n=\frac{1}{2!2!}n(n-2\alpha-2\beta-1)(n-2\alpha-2\beta-2)$$
$$\times(n-2\alpha-2\beta-3)\quad(\alpha\neq\beta)$$

$$[\alpha,\alpha,\alpha,\alpha]_n=\frac{1}{4!}n(n-4\alpha-1)(n-4\alpha-2)(n-4\alpha-3).$$

例題 **(1).** 或順序ニ排列セラレタル n 箇ノ原素ヨリ 3 箇ヲ選擇スルニ其何レノ原素モモト接續スル原素ニアラザル様ニスルニハ幾通リノ仕方アリヤ．但最初ノ原素ハ最後ノ原素ニ接續スルモノトス．

解． $[\alpha,\alpha,\alpha]_n$ ノ公式ニ於テ $\alpha=1$ ト置ケバヨシ．然ルトキハ

$$\text{所要ノ數}=\frac{n(n-4)(n-5)}{6}.$$

(2). 本節ニ於ケル原素 1 ガ原素 n ニ接續セザルモノトスルトキハ如何．

解． 所要ノ組合セノ數ヲ表スニ $[\alpha,\beta,\gamma,\cdots\cdots]'_n$ ヲ以テスベシ．

先 $$[\alpha]'_n=n-\alpha+1.$$

次ニ $[\alpha,\beta]'_n$ $(\alpha\neq\beta)$ ノ値ヲ求ムベシ．之ヲ求ムルニハ α ノ接續原素ガ β ノ接續原素ノ前ニ在ル場合ト之ト順序ガ逆ナル場合トノ二ツニ分チテ考フルヲ要ス．前ノ場合ニ於テハ

α ノ接續原素ノ主位ガ 1 ナルトキハ

β ノ接續原素ノ選ビ方ハ $n-\alpha-\beta$,

α ノ接續原素ノ主位ガ 2 ナルトキハ

β ノ接續原素ノ選ビ方ハ $n-\alpha-\beta-1$,

……………………………………………

α ノ接續原素ノ主位ガ $n-\alpha-\beta$ ナルトキハ

β ノ接續原素ノ選ビ方ハ 1

ナリ．故ニ其和ハ

$$(n-\alpha-\beta)+(n-\alpha-\beta-1)+\cdots\cdots+1\quad\text{即}\quad\frac{(n-\alpha-\beta)(n-\alpha-\beta+1)}{2}$$

ナリ．又後ノ場合ハ前ノ場合ニ於テ α ト β トヲ交換スレバヨシ．而シ

テ上ニ得タル式ハ α ト β トヲ交換スルモ其値變ゼズ. 故ニ

$$[\alpha,\beta]'_n=(n-\alpha-\beta)(n-\alpha-\beta+1)\quad(\alpha\neq\beta)$$

若 $\alpha=\beta$ ナルトキハ組合セハ二ツ宛相同ジクナルヲ以テ

$$[\alpha,\alpha]_n=\frac{1}{2}(n-2\alpha)(n-2\alpha+1).$$

次ニ α,β,γ ノ何レノ二ツモ相等シカラザルトキ $[\alpha,\beta,\gamma]'_n$ ノ値ヲ求ムベシ. 此場合ニ於テハ α ノ接續原素ガ他ノ二ツノ接續原素ノ前ニ在ル場合, β 或ハ γ ノ接續原素ガ他ノ接續原素ノ前ニ在ル場合ノ三ツニ分チテ考フルヲ要ス. 此第一ノ場合ニ於テ α ノ接續原素ノ主位ヲ1トスルトキハ他ノ二ツノ原素トシテ選擇シ得ベキ原素ハ $n-\alpha-1$ ナリ. 故ニ其選ビ方ハ $(n-\alpha-1-\beta-\gamma)(n-\alpha-1-\beta-\gamma+1)$ 卽 $(n-\alpha-\beta-\gamma-1)(n-\alpha-\beta-\gamma)$ 通リナリ. 若 α ノ接續原素ノ主位ガ2ナルトキハ β,γ ノ接續原素ノ選ビ方ハ $(n-\alpha-\beta-\gamma-2)(n-\alpha-\beta-\gamma-1)$ 通リナリ. 以下同樣ナリ. 故ニ第一ノ場合ニ於ケル選ビ方ハ

$$(n-\alpha-\beta-\gamma-1)(n-\alpha-\beta-\gamma)$$
$$+(n-\alpha-\beta-\gamma-2)(n-\alpha-\beta-\gamma-1)+\cdots\cdots+1\cdot2$$

卽 $$\frac{1}{3}(n-\alpha-\beta-\gamma-1)(n-\alpha-\beta-\gamma)(n-\alpha-\beta-\gamma+1)$$

通リナリ. 第二第三ノ場合ニモ之ト同ジ結果ヲ得. 故ニ

$$[\alpha,\beta,\gamma]'_n=(n-\alpha-\beta-\gamma-1)(n-\alpha-\beta-\gamma)(n-\alpha-\beta-\gamma+1)\ (\alpha\neq\beta\neq\gamma).$$

$\beta=\gamma$ ナルトキハ

$$[\alpha,\beta,\beta]'_n=\frac{(n-\alpha-2\beta-1)(n-\alpha-2\beta)(n-\alpha-2\beta+1)}{2!}\quad(\beta\neq\gamma).$$

又 $\alpha=\beta=\gamma$ ナルトキハ

$$[\alpha,\alpha,\alpha]'_n=\frac{(n-3\alpha-1)(n-3\alpha)(n-3\alpha+1)}{3!}.$$

以下同樣ナリ.

(3). 或順序ニ排列セラレタル n 箇ノ原素ヨリ3箇ヲ選擇スルニ何レノ二ツモモト相接續スル原素ニアラザルヤウニスルニハ幾通リアリヤ.

解. 前題ノ $[\alpha,\alpha,\alpha]'_n$ ノ公式ニ於テ $\alpha=1$ ト置ケバヨシ. 故ニ

$$所要ノ數=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}.$$

92. てーとノ問題.

原素 $1,2,3,\cdots\cdots,n$ ノ總順列ヲ作ルニ當リ, 1ハ第1位及第2位ヲ占ムルコトヲ許サズ, 2ハ第2位及第3位ヲ占ムルコトヲ許サズ, 一般ニ r ハ第 r 位及第 $r+1$ 位ヲ占ムルコトヲ許サズ, n ハ最後ノ位置及最初ノ位置ヲ占ムルコトヲ許サザルトキハ總順列ノ數幾何ナルカヲ求ムベシ.

若原素ノ位置ニ就テ何等ノ制限モナキトキハ順列ノ數ハ $n!$ ナルヲ以テ此中ヨリ上ノ條件ニ反スルモノノ數ヲ取リ去ルトキハ所要ノ數ガ得ラル. 故ニ先上ノ條件ニ反スルモノヽ數ヲ計算スベシ.

借所設ノ條件ニ反スルモノヽ中ニハ唯一ツノ原素ノミガ此條件ニ反シ他ノモノハ皆適當ノ位置ニ在ルモノ, 例ヘバ $n=6$ ナルトキ3ノミガ此條件ニ反セルモノ卽 563124 ノ如キモノアルベシ. 斯ノ如キ順列ヲ假ニ第一種ノ順列ト名ケン. 又唯二ツノ原素ガ所設ノ此條件ニ反シ他ノモノハ適當ナル位置ニ在ルモノ, 例ヘバ3ト5トガ此條件ニ反セルモノ卽 243165 ノ如キモノアルベシ. 斯ノ如キモノヲ假ニ第二種ノ順列ト名ケン. 以下同樣ナリ. 然ラバ第一種, 第二種等ノ順列ノ數ノ和ハ所設ノ條件ニ反セルモノヽ數ヲ表ス.

今 n 箇ノ原素ノ中ノ一ツ a ヲ a ノ位置ニ固定シ他ノ $n-1$ 箇ノ原素ヲ出來得ルダケ異ナル仕方ニテ排列スルトキハ $(n-1)!$ 箇ノ順列ガ得ラル. a ガ $a+1$ ノ位置ニ在ルトキモ同樣ナリ. 故ニ a ガ條件ニ反セル順列ノ總數ハ $2(n-1)!$ ナリ. 其他ノ原素ニ就テモ同樣ナリ. 故ニ n 箇ノ各原素ニツキ別々ニ其原素ガ條件ニ反セル順列ヲ作ルトキハ

$$2n(n-1)!$$

箇ノ順列ヨリ成ル順列群ガ得ラル. 之ヲ P_1 トス. 此中ニハ第一種ノ順列ハ, 總テ一ツトシテ數ヘラレ居レリ. 然レドモ其他ノモノハ然ラズ.

二ツノ原素 a ト b トガ共ニ條件ニ反セル順列卽第二種ノ順列ハ P_1 ニ屬スル順列群ニ二度含マル. 又第三種ノモノハ三度, 一般ニ第 r 種ノ順列ハ r 度含マル.

次ニ a ト b トノ二ツノ原素ヲ考ヘ先 a ト b トハ本來ノ順序ニ於テハ相接續セザルモノ卽 $b \neq a\pm 1$ ナリトス. 然ラバ a ト b トガ共ニ條件ニ反セル場合ハ次ノ如ク四ツアリ

a ガ占ムベキ位置	a	$a+1$	a	$a+1$
b ガ占ムベキ位置	b	b	$b+1$	$b+1$

a ト b トガ此四ツノ場合ノ中何レカ一ツノ場合ニ當ルトキ a, b 以外ノ $n-2$ 箇ノ原素ハ $(n-2)!$ 箇ノ方法ニテ排列スルコトヲ得. 從テ四ツノ場合總テニテハ $4(n-2)!$ 通リナリ. 然ルニ斯ノ如キ a ト b トヲ選擇スル方法ハ前節ニ述ベタルガ如ク $[1,1]_n$ 通リナリ. 從テ總テノ原素ニ就テハ

$$4[1, 1]_n(n-2)!$$

通リノ順列アリ.

若 a ト b トガ接續セル原素例ヘバ $b=a+1$ ナルトキハ a ト b トガ共ニ條件ニ反セル場合ハ次ノ三通リアリ.

a ガ占ムベキ位置	a	a	$a+1$
b ガ占ムベキ位置	$a+1$	$a+2$	$a+2$

此中何レカ一ツノ位置ヲ占ムルトキハ他ノ $n-2$ 箇ノ原素ハ $(n-2)!$ 通リニ排列スルコトヲ得. 故ニ三ツノ場合總テニテハ $3(n-2)!$ 通リノ順列アリ. 然ルニ n 箇ノ原素ヨリ二ツノ相接續スル原素ヲ選ブ仕方ハ $[2]_n$ 通リナリ. 從テ總テノ原素ニ就テハ

$$3[2]_n(n-2)!$$

通リアリ.

依テ二ツノ原素ガ共ニ條件ニ反セルモノヲ上ノ如クシテ別々ニ作リ其全體ヲ一群トシ之ヲ P_2 トス. 然ルトキハ其中ノ順列ノ數ハ

$$(4[1, 1]_n+3[2]_n)(n-2)!$$

ナリ. 此順列群 P_2 中ニハ第一種ノ順列ハ一度モ含マレズ, 第二種ノ順列ハ各一度宛, 第三種ノ順列ハ ${}_3C_2$ 度, 一般ニ第 r 種ノ順列ハ ${}_rC_2$ 度含マル.

更ニ進ンデ三ツノ原素 a, b, c ヲ考フルニ三ツノ中何レノ二ツモ接續セザル場合, 二ツガ接續シ他ノ一ツガ接續セザル場合, 三ツ共ニ接續スル場合アリ.

第一ノ場合ニ於テ三ツガ共ニ條件ニ反セル位置ヲ占ムル場合ハ次ノ如シ

a ノ占ムル位置	a	a	a	a	$a+1$	$a+1$	$a+1$	$a+1$
b ノ占ムル位置	b	b	$b+1$	$b+1$	b	b	$b+1$	$b+1$
c ノ占ムル位置	c	$c+1$	c	$c+1$	c	$c+1$	c	$c+1$

a, b, c ガ上ノ何レカ一ツノ場合ノ位置ヲ占ムルトキハ他ノ $n-3$ 箇ノ原素ハ $(n-3)!$ 通リノ方法ニテ排列スルコトヲ得．依テ此場合ニ對シテハ $8(n-2)!$ ナリ．而シテ斯ノ如キ三ツノ原素ハ $[1,1,1]_n$ 通リニ選擇スルコトヲ得．依テ總テノ原素ニ就テハ

$$8[1,1,1]_n\,(n-3)!$$

通リナリ．

第二ノ場合卽 a ト b トガ接續シ c ハ此等ト接續セズトスルトキハ三ツノ原素ノ占ムル位置ニ就テハ次ノ六通リアリ．

a ノ占ムル位置	a	a	a	a	$a+1$	$a+1$
b ノ占ムル位置	$a+1$	$a+1$	$a+2$	$a+2$	$a+2$	$a+2$
c ノ占ムル位置	c	$c+1$	c	$c+1$	c	$c+1$

故ニ此場合ニハ

$$6[2,1]_n\,(n-3)!$$

ノ順列ガ得ラル．

第三ノ場合卽 a, b, c ガ相接續スルトキハ其位置ニ就テ次ノ通リノ場合アリ．

a ノ占ムル位置	a	a	a	$a+1$
b ノ占ムル位置	$a+1$	$a+1$	$a+2$	$a+2$
c ノ占ムル位置	$a+2$	$a+3$	$a+3$	$a+3$

故ニ

$$4[3]_n\,(n-3)!$$

ノ順列ガ得ラル．

以上第一，第二，第三ノ場合ニ就テ得タル順列ヲ集ムルトキハ

$$(8[1,1,1]_n+6[2,1]_n+4[3]_n)\cdot(n-3)!$$

ヨリ成ル順列群ガ得ラル．之ヲ P_3 トス．

然ラバ此順列群中ニハ第一種及第二種ノ順列ハ一ツモ含マレズ．第三種ノ順列ハ一ツ宛，第四種ノ順列ハ ${}_4C_3$ 卽4箇宛，一般ニ第 r 種ノ順列ハ ${}_rC_3$ 箇宛含マル．

以下同樣ニシテ順列群 $P_4, P_5, \cdots\cdot$ ヲ作ル．次ニ吾人ハ一般ニ P ナル群中ノ順列ノ數ヲ考ヘザルベカラズ．

順列群 P_l ヲ作ルニハ先 n 箇ノ原素中ヨリ l 箇ノ原素ヲ選擇セザルベカラズ．而シテ其 l 箇ノ原素ハ總テ接續セル場合モアルベク，又若干ハ接續シ若干ハ互ニ隔離セルコトアルベク，其異ナル場合ノ數ハ l ヲ整數ノ和ニ分解スル總テノ方法ノ數ニ等シ．例ヘバ $l=3+2+2+\cdots\cdot$ ナル方法ニテ分解シタリトスレバ l 箇ノ原素中3箇，2箇，2箇，$\cdots\cdot$ ノ各組中ノ原素ハ互ニ接續シ，或組ノ原素ト他ノ組ノ原素トハイヅレモ接續セザルモノト考フルコトヲ得ベシ．偖吾人ハ今或方法ニテ

$$l=\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots+\lambda$$

ナルベキ $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdot, \lambda$ ヲ決定シタリトシ $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdot, \lambda$ ハ各接續原素ノ各ノ組中ノ原素ノ數ヲ表スモノトス．然ラバ斯ノ如キ l 箇ノ原素ヲ n 箇ノ原素ヨリ選擇スルニハ $[\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdot, \lambda]_n$ 通リノ方法アリ．今其中ノ何レカ一ツノ方法ニテ之ヲ選擇シタリトシ，其 l 箇ノ原素ガ總テ條件ニ反セル位置ヲ占ムルニハ幾通リノ仕方アルカヲ考究スベシ．

先 α ノ接續原素ガ共ニ條件ニ反セル位置ヲ占ムル仕方ハ $\alpha+1$ 通リナリ．何トナレバ α 箇共ニ本來ノ位置ヲ占ムルカ，最後ノ原素ガ本來ノ位置ヨリ一位ダケ右ノ位置ヲ占メ，他ハ本來ノ位置ヲ占ムル

カ，最後ノ二ツノ原素ガ本來ノ位置ヨリ一位ダケ右ノ位置ヲ占メ，他ハ皆本來ノ位置ヲ占ムルカ等ナレバナリ．今 α ノ接續原素ガ其中ノ或仕方ニテ位置ヲ占メタリトスルトキハ β ノ接續原素ハ $\beta+1$ 箇ノ異ナル仕方ニテ條件ニ反セル位置ヲ占ムルコトヲ得，以下 $\gamma,\cdots\cdots,\lambda$ ニ就テモ同樣ナリ．故ニ l 箇ノ原素ガ共ニ條件ニ反セル位置ヲ占ムルニハ

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\cdots\cdots(\lambda+1)$$

通リノ方法アリ．其中何レカ一ツノ方法ニテ l 箇ノ原素ガ位置ヲ占メタリトスレバ殘リノ $n-l$ 卽 $n-\alpha-\beta-\cdots\cdots-\lambda$ 箇ノ原素ハ $(n-\alpha-\beta-\cdots\cdots-\lambda)!$ 通リノ方法ニテ位置ヲ占ムルコトヲ得．依テ P_l 中ニ含マルル順列ノ數ハ

$$\left(\sum(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\cdots(\lambda+1)[\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\lambda]_n\right)(n-\alpha-\beta-\gamma-\cdots-\lambda)!$$

ナリ．但 Σ ハ $\alpha,\beta,\gamma,\cdots\cdots,\lambda$ ノ零或ハ正ノ整數ニシテ $\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots+\lambda=l$ ナル條件ヲ滿足スベキ總テノ値ニ對シテ和ヲ求ムルコトヲ示ス．

偖 P_l ナル順列群中ニハ第1種，第2種，$\cdots\cdots$第 $l-1$ 種ノ順列ハ一ツモ含マレズ，第 l 種ノ順列ハ各1箇宛，一般ニ第 r 種ノ順列ハ ${}_rC_l$ 箇宛含ム．

以上論ジタル結果ヲ表示スレバ次ノ如シ

順列群	P_1	P_2	$P_3\cdots\cdots\cdots$	$P_l\cdots\cdots$
第1種ノ順列ノ含マルヽ度數	${}_1C_1$	0	$0\cdots\cdots\cdots$	0
第2種ノ順列ノ含マルヽ度數	${}_2C_1$	${}_2C_2$	$0\cdots\cdots\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
第 r 種ノ順列ノ含マルヽ度數	${}_rC_1$	${}_rC_2$	${}_rC_3\cdots\cdots\cdots$	${}_rC_l$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

然ルニ $\quad {}_lC_l-{}_{l+1}C_l+{}_{l+2}C_l-\cdots\cdots\pm{}_rC_l\pm\cdots\cdots=1.$

故ニ

$$P_1-P_2+P_3-\cdots\cdots\pm P_l\pm\cdots\cdots$$

ナル順列群ヲ作ルトキハ各種ノ順列ヲ遺漏モナク重複モナク含ム順列群ガ得ラル．[*] 而シテ其中ノ順列ノ數ハ

$$\begin{aligned}&2n(n-1)!-(2^2[1,1]_n+3[2]_n)(n-2)!\\&+(2^3[1,1,1]_n+3\cdot2[2,1]_n+2^2[3]_n)(n-3)!-\cdots\cdots\\&+(-1)^{l+1}(\Sigma(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\cdots(\lambda+1)[\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\lambda]_n)(n-\alpha-\beta-\cdots-\lambda)!\\&\pm\cdots\cdots\end{aligned}$$

從テ所要ノ數ハ

$$\begin{aligned}&n!-2n(n-1)!+(2^2[1,1]_n+3[2]_n)(n-2)!\\&-(2^3[1,1,1]_n+3\cdot2[2,1]_n+2^2[3]_n)(n-3)!+\cdots\cdots\\&+(-1)^l(\Sigma(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\cdots(\lambda+1)[\alpha,\beta,\gamma,\cdots\lambda]_n)(n-\alpha-\beta-\cdots-\lambda)!\\&\pm\cdots\end{aligned}$$

[**] ナリ．

93. 若干ノ共軛ノ原素ヲ含ム組合セノ數.

原素 $1, 2, 3,\cdots, n$ ニ於テ或原素 α ト $n-\alpha+1$ トハ互ニ共軛ナリト云フ．卽自然ノ順序ニ列ベタル原素列ニ於テハ二ツノ共軛ナル原素ハ左右兩端ヨリ同ジ番目ニ在リ．若 n ガ偶數卽 $n=2\nu$ ナルトキハ或原素ト其共軛原素トガ一致スルコトナシ．然レドモ若 n ガ奇數卽 $n=2\nu+1$ ナルトキハ原素 $\nu+1$ ハソレ自身ト共軛原素ヲナス．之ヲ自共軛原素ト云フ．

原素 $1,2,3,\cdots,n$ ヨリ m 箇ノ原素ヲ選ブニハ ${}_nC_m$ 通リノ方法アリ．此 ${}_nC_m$ 箇ノ組合セノ中ニ於テ α 組ノ共軛原素ヲ含ミ其外ニ共軛原素ヲ含マザル組合セアルベシ．此組合セノ數ヲ $[\alpha]_n^{(m)}$ ヲ以テ表スベシ．

[*] 本節モ亦取捨法ニヨリタリ．

[**] n ヲ 3, 4, 5, 6, 7 トスレバ所要ノ數ハ夫々 1, 2, 13, 80, 579 トナル．

例ヘバ原素 1, 2, 3, 4, 5, 6 ヨリ 3 箇ヲ採ル組合セ

123	(126)	(136)	(156)	236	256	356
124	(134)	145	(234)	(245)	(345)	456
(125)	135	(146)	(235)	246	(346)	

ノ中ニ於テ括弧( )ヲ施セル 11 箇ノ組合セハ何レモ一組ノ共軛原素ヲ含ミ其以上共軛原素ヲ含マズ. 故ニ

$$[1]_6^{(3)} = 11$$

ナリ. 又同ジ原素ヨリ 5 箇ヲ採ル組合セ

12345	12356	13456
12346	12456	23456

ハ何レモ二組ノ共軛原素ヲ含ミ其外ニ共軛原素ヲ含マズ. 故ニ

$$[2]_6^{(5)} = 6$$

ナリ.

n ガ奇數ナル場合ニアリテハ矢張 $[\alpha]_n^{(m)}$ ヲ以テ所設ノ原素ヨリ m 箇ヲ採リタル組合セ中ニ於テ α 組ノ共軛原素ヲ含ミ自共軛原素即 $\nu+1$ ヲ含マザルモノヽ數ヲ表スベシ. 又 $\left[\alpha+\dfrac{1}{2}\right]_n^{(m)}$ ヲ以テ同ジク ${}_nC_m$ 箇ノ組合セ中 α 組ノ共軛原素ノ外ニ自共軛原素即 $\nu+1$ ヲ含ムモノヽ數ヲ表スベシ. 例ヘバ原素 1, 2, 3, 4, 5 ヨリ 3 箇ヲ採ル組合セハ

123	(125)	[135]	[234]	(245)
(124)	134	(145)	235	345

ノ中括弧( )ヲ施セル 4 箇ノ組合セハ一組ノ共軛原素ヲ含ミ自共軛原素 3 ヲ含マズ. 故ニ

$$[1]_5^{(3)} = 4$$

ナリ. 又括弧[ ]ヲ施セル 2 箇ノ組合セハ自共軛原素 3 ヲ含ム. 故ニ

$$\left[1+\frac{1}{2}\right]_5^{(3)} = 2$$

ナリ.

吾人ハ次ニ $[\alpha]_n^{(m)}$ 及 $\left[\alpha+\dfrac{1}{2}\right]_n^{(m)}$ ノ値ヲ求メントス.

$\left[\alpha+\dfrac{1}{2}\right]_n^{(m)}$ ニ屬スル組合セハ必一ツノ自共軛原素ヲ含ムヲ以テ今此等ノ組合セヨリ自共軛原素ヲ取リ去ルトキハ 1, 2, 3, ····, ν, $\nu+2$, ···, n ナル $n-1$ 箇ノ原素中ノ $m-1$ 箇ヨリ成リ其中ニハ α 組ノ共軛原素ヲ含ム如キ組合セノ一群ヲ得ベシ. 斯ノ如クスルモ組合セノ數ハ變ルコトナシ. 更ニ此組合セノ群ニ屬スル組合セニ於テ $\nu+2$ 以上ノ原素ヨリハ各 1 ヲ減ジ斯クシテ得タル組合セノ群ヲ C トス. 然ラバ C ノ中ノ組合セノ數ハ $\left[\alpha+\dfrac{1}{2}\right]_n^{(m)}$ ニ等シキコト明ナリ. 今 C 中ノ任意ノ一ツノ組合セ c ヲ考フルニ 1, 2, 3, ····, $n-1$ 中ノ $m-1$ 箇ノ原素ヨリ其中ニハ α 組ノ共軛原素ヲ含ミ自共軛原素ヲ含マズ. 故ニ c ハ $[\alpha]_{n-1}^{(m-1)}$ ニ屬スル組合セナリ. 而シテ C 中ニハ同ジキ組合セナシ. 又 $[\alpha]_{n-1}^{(m-1)}$ 中ノ任意ノ組合セガ C 中ニ含マルヽコトモ容易ニ證明スルコトヲ得. 而シテ $[\alpha]_{n-1}^{(m-1)}$ ニ屬スル組合セニハ相同ジキモノナシ. 故ニ C ト $[\alpha]_{n-1}^{(m-1)}$ ニ屬スル組合セトハ全ク相同ジ. 從テ

$$\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]_n^{(m)} = [\alpha]_{n-1}^{(m-1)}.$$

故ニ吾人ハ n ガ偶數ナルトキ及奇數ナルトキノ $[\alpha]_n^{(m)}$ ノ値ヲ求ムレバヨシ.

先 $n=2\nu$ ナリトス. 然ラバ 1, 2, 3, ····, ν ナル各原素ニ對シテ必一ツノ共軛原素アリ. 故ニ n 箇ノ原素ヨリ α 組ノ共軛原素ヲ選擇スル仕方ノ數ハ 1, 2, 3, ······, ν ヨリ α 箇ノ原素ヲ選擇スル仕方ノ數

卽 ${}_\nu C_\alpha$ ニ等シ. 今或一ツノ方法ニテ α 組ノ原素ヲ選擇セヨ. 然ラバ跡ニハ $n-2\alpha$ 箇ノ原素ガ殘ル. 此中ヨリ $m-2\alpha$ 箇ノ原素ヲ選擇スル方法ガ幾ツアルカヲ考究セザルベカラズ. 且其組合セ中ニハ一組モ共軛原素ヲ含ムヲ許サズ. 吾人ハ斯ノ如キ選擇ノ方法ガ幾ツアルカヲ求メンガ爲ニ $n-2\alpha$ 中ノ原素ヨリ上ノ條件ニ適合スル $m-2\alpha$ 箇ヲ採ル順列幾ツアルカヲ考究スベシ.

$n-2\alpha$ 箇ノ原素ヨリ第一位ノ原素ヲ定ムル方法ハ $n-2\alpha$ 通リナリ. 其中何レカノ方法ニテ第一位ノ原素例ヘバ a ヲ定メタリトセヨ. 然ラバ第二位ノ原素トシテ a ト共軛ナル原素ヲ定ムルコトヲ得ザルガ故ニ第二位ノ原素ヲ定ムル方法ハ $n-2\alpha-2$ 通リナリ. 今第二位ノ原素 b ヲ定メタリトセヨ. 然ラバ第三位ノ原素トシテ a 或ハ b ノ共軛原素ヲ定ムルコトヲ得ザルガ故ニ第三位ノ原素ノ定メ方ハ $n-2\alpha-4$ 通リアリ. 以下同樣ナリ. 故ニ上述ノ順列ノ數ハ

$$(n-2\alpha)(n-2\alpha-2)\cdots\{n-2\alpha-2(m-2\alpha-1)\}$$

ナリ. 從テ組合セノ數ハ

$$\frac{(n-2\alpha)(n-2\alpha-2)\cdots(n-2m+2\alpha+2)}{(m-2\alpha)!}.$$

依テ

$$[\alpha]_{2\nu}^{(m)} = {}_\nu C_\alpha \frac{(2\nu-2\alpha)(2\nu-2\alpha-2)\cdots(2\nu-2m+2\alpha+2)}{(m-2\alpha)!}.$$

次ニ $n=2\nu+1$ ナルトキハ $\nu+1$ ハ α 組ノ共軛原素ヲ選擇スルトキニ之ヲ採ルコトヲ得ザルガ故ニ其選ビ方ハ ${}_\nu C_\alpha$ ナリ. 其中何レカ一ツノ方法ニテ 2α 箇ノ原素ヲ選ブトキハ $2\nu+1-2\alpha$ 箇ノ原素ガ殘ル. 然レドモ其中ノ $\nu+1$ ナル原素ハ選擇スルコトヲ得ザルガ故ニ其以下ノ取扱ハ $n=2\nu$ ナル場合ト同樣ナリ. 故ニ

$$[\alpha]_n^{(m)} = {}_\nu C_\alpha 2^{m-2\alpha}\,{}_{\nu-\alpha}C_{m-2\alpha} \qquad (n=2\nu \text{ 或ハ } 2\nu+1)$$
$$= 2^{m-2\alpha}\frac{\nu!}{\alpha!(m-2\alpha)!(\nu+\alpha-m)!}$$

94. 二ツノ對角線ニ沿フ原素ガ零ナル行列式ノ項數.

二ツノ對角線ニ沿フ原素ノ零ナル行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13}\cdots\cdots a_{1,n-1} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23}\cdots\cdots 0 & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3}\cdots\cdots a_{nn-1} & 0 \end{vmatrix}$$

ニ於テ對角線以外ノ原素ハ一モ零ナラザルトキ此展開式ノ項數ヲ求メントス.

既ニ述ベシ如ク一般ニ n 次ノ行列式トハ乘積 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ ニ於テ何レカ一方ノ添數ハ動カスコトナク他ノ添數ノ順列ヲ作リ其順列ノ偶奇ニ從テ其乘積ノ前ニ正負ノ符號ヲ附シタルモノノ和ナリ. 故ニ所題ノ行列式ニ於テハ添數ノ順列ニ於テ或原素 α ガ第 α 位或ハ第 $n+1-\alpha$ 位ニ在ルトキニハ其項ハ消失ス. 故ニ當面ノ問題ハ原素 $1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ ヨリ作ラルヽ順列ニ於テ或原素ガ其原素本來ノ位置或ハ之ト共軛ナル原素ノ位置ニ在ラザルモノヽ數ヲ求ムルコトニ歸ス. 吾人ハ此問題ヲ取捨法ニテ解カン.

先 n ヲ偶數卽 $n=2\nu$ ナリトス. 今 α ヲ第 α 位或ハ $n+1-\alpha$ 位ニ置キ他ノ原素ノ位置ヲアラユル仕方ニテ變ズルトキハ各ノ場合ニ向ヒテ $(n-1)!$ ノ順列ガ得ラル. 故ニ各ノ原素ニ於テ斯ノ如キ順列ヲ作ルトキハ

$$2n(n-1)! \tag{1}$$

箇ノ順列ガ得ラル.

次ニ二ツノ原素ガ共ニ其原素本來ノ位置或ハ其共軛原素本來ノ位置ニ在ル順列ヲ考究スベシ. 二ツノ原素 a ト b トヲ考ヘ此二ツハ共軛原素ニアラズトス. 然ルトキハ此二ツガ上述ノ位置ニ在ル異ナル場合ノ數ハ 4 卽 2^2 ナリ. 而シテ其各ノ場合ニ向ヒテ他ノ原素ハ $(n-2)!$ 箇ノ方法ニテ排列スルコトヲ得. 故ニ 2^2 通リノ場合ニ向ヒテハ $2^2(n-2)!$ ナリ. 而シテ斯ノ如キ二ツノ原素ハ $[0]_n^{(2)}$ 通リニ選擇スルコトヲ得. 而シテ其各ノ仕方ニ向ヒテ $2^2(n-2)!$ 通リノ順列アリ. 故ニ全體ニテハ $[0]_n^{(2)}2^2(n-2)!$ 通リノ順列ガ得ラル. 次ニ a ト b トガ互ニ共軛ナル原素ナルトキハ前ト類似ノ方法ニテ $2^1[1]_n^{(2)}(n-2)!$ 通リノ順列ガ得ラル. 二ツノ原素ガ共ニ其原素ノ本來ノ位置或ハ其共軛原素ノ本來ノ位置ニ在ル場合ノ組合セノ數ヲ別々ニ計算スルトキハ

$$(2^2[0]_n^{(2)}+2^1[1]_n^{(1)})\cdot(n-2)! \tag{2}$$

以下同樣ニシテ三ツノ原素, 四ツノ原素ニ就テハ夫々

$$(2^3[0]_n^{(3)}+2^2[1]_n^{(3)})\cdot(n-3)! \tag{3}$$

$$(2^4[0]_n^{(4)}+2^3[1]_n^{(4)}+2^2[2]_n^{(4)})\cdot(n-4)! \tag{4}$$

ナリ. 以下同樣ナリ. 而シテ r 箇ノ原素ガ共ニ原素本來ノ位置或ハ其共軛原素ノ本來ノ位置ニ在ル順列ハ (1), (2), (3), 等ニ屬スル順列ノ中ニ夫々 ${}_1C_r, {}_2C_r, {}_3C_r, {}_4C_r, \cdots\cdots$ 度含マル. 然ルニ

$${}_1C_r-{}_2C_r+{}_3C_r-\cdots\cdots=1.$$

故ニ所要ノ數ヲ Q トスレバ

$$\begin{aligned}Q = n! &- 2^1[0]_n^{(1)}(n-1)! + (2^2[0]_n^{(2)}+2^1[1]_n^{(2)})(n-2)!\\ &-(2^3[0]_n^{(3)}+2^2[1]_n^{(3)})(n-3)!\\ &+(2^4[0]_n^{(4)}+2^3[1]_n^{(4)}+2^2[2]_n^{(4)})(n-4)!-\cdots\cdots \quad (n=2\nu).\end{aligned}$$

同樣ニシテ $n=2\nu+1$ ナルトキハ

$$\begin{aligned}Q' = n! &-(2^1[0]_n^{(1)}+2^0[\tfrac{1}{2}]_n^{(1)})(n-1)!\\ &+(2^2[0]_n^{(2)}+2^1[\tfrac{1}{2}]_n^{(2)}+2^1[1]_n^{(2)})(n-2)!\\ &-(2^3[0]_n^{(3)}+2^2[\tfrac{1}{2}]_n^{(3)}+2^2[1]_n^{(3)}+2^1[1\tfrac{1}{2}]_n^{(3)})(n-2)!\\ &+\cdots\cdots \qquad (n=2\nu+1).\end{aligned}$$

第十章　順列及組合ノ幾何學的應用

95. 交點, 連結線等ノ數ニ關スル例題.

(1). 平面上ニ n 箇ノ點アリ, 其中 $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_k$ $(m_i>2, i=1, 2, \cdots, k)$ 箇ガ各々一直線上ニ在ルトキ,(一ツノ點ガ此等ノ直線ノ二ツ又ハ三ツ以上ノ交點ナルトキハ, 其點ハ之ヲ過グル何レノ直線ニモ屬スルモノトシテ $m_1, m_2, \cdots, m_k$ ヲ數フルモノトス) 此等ノ點ヲ連結スル直線ノ數ヲ求ム.

解. 若 n 箇ノ點ノ中何レノ三ツヲ取ルモ一直線上ニ在ラザルトキハ, 所要ノ數ハ ${}_nC_2$ ナルコト明ナリ. 今先斯ノ如キ n 箇ノ點アリトシ, 其位置ヲ變ジテ m_1 箇ヲ同一ノ直線上ニ在ラシムルトキハ, モト此等ノ m_1 箇ノ點ヲ連結セシ ${}_{m_1}C_2$ 箇ノ直線ハ唯1箇トナル. 即 ${}_{m_1}C_2-1$ 箇ダケ連結直線ノ數ガ減ズ. 次ニ此 m_1 箇以外ノ點ノ位置ヲ變ジ m_2 箇ヲシテ同一ノ直線上ニ在ラシムルトキハ, ${}_{m_2}C_2-1$ 箇ダケ連結直線ノ數ガ減ズ. 斯ノ如ク次第ニ $m_3, m_4, \cdots, m_k$ ヲ夫々同一ノ直線上ニ在ラシムルトキハ, 其連結直線ノ數ハ

$${}_nC_2-({}_{m_1}C_2+{}_{m_2}C_2+\cdots\cdots+{}_{m_k}C_2)+k$$

トナル. 是所要ノ數ナリ.

(2). 平面上ニ n 箇ノ直線アリ, 其中何レノ二ツモ平行ナラズ, 又 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_k$ 箇ハ夫々一ツノ點ニテ交ルトキハ (若一ツノ直線ガ此等ノ點ノ二ツ又ハ三ツ以上ノ點ヲ通過スルトキハ, 其直線ハ何レノ點ニモ屬スルモノトシテ $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_k$ ヲ數フルモノトス), 其交點ノ數ハ ${}_nC_2-({}_{m_1}C_2+{}_{m_2}C_2+\cdots\cdots+{}_{m_k}C_2)+k$ ナリ.

解. 之ヲ證明スル方法ハ全ク前題ノ方法ト同樣ナリ.

(3). 一直線上ニアラザル三ツノ點ノ各ヲ過ギ, 其平面上ニ m 箇ノ直線ヲ引キ此 $3m$ 箇ノ直線ノ中, 何レノ二ツモ平行ナラズ, 又何レノ二ツモ重ナルコトナキトキハ, 其交點ハ三點ノ外ニ幾何アルベキカ.

解. 例題(2)ニ得タル結果ニ於テ, $n=3m$, $m_1=m_2=\cdots\cdots=m_k=m$, $k=3$ ト置キ, 且所設ノ三點ハ除クベキヲ以テ其中ヨリ3ヲ減ズレバヨシ. 故ニ

$$所要ノ數={}_{3m}C_2-3{}_mC_2=3m^2.$$

(4). m 箇ノ邊ヲ有スル凸多角形ノ對角線ノ數ヲ求メヨ.

解. m 箇ノ頂點ヲ二ツ宛結ブ直線ノ數ハ ${}_mC_2$ 即 $\dfrac{m(m-1)}{1\cdot2}$ ナリ. 然レドモ其中ノ m 箇ハ多角形ノ邊ナリ. 故ニ

$$所要ノ數=\frac{m(m-1)}{1\cdot2}-m=\frac{m(m-3)}{2}.$$

(5). 一平面上ニ n 箇ノ點アリ, 其中何レノ三ツモ同一ノ直線上ニ在ラズ. 此等ノ二ツヅツヲ結ブ直線ノ何レノ二ツモ平行ナラズ. 又何レノ三ツモ n 點以外ノ一點ニテ交ラザルトキハ此等ノ點ヲ出來得ルタゲ異ナル仕方ニテ連結スルトキハ此等ノ直線ハ此 n 箇ノ點ノ外ニ幾何ノ點ニテ交ルベキカ.

解. 先直線ノ數ガ ${}_nC_2$ ナルコト明ナリ. 而シテ其中 $n-1$ 箇ヅツ n 箇ノ點ヲ通ル. 故ニ例題(2)ニヨリ

$$所要ノ數={}_{{}_nC_2}C_2-n\,{}_{n-1}C_2=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

(6). 平面上ニ n 箇ノ圓アリ, 何レノ二ツノ圓モ互ニ相交リ其中ノ $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 箇ハ夫々一點ヲ通過スルトキ (一ツノ圓ガ此等ノ

點ノ二ツ又ハ三ツ以上ノ點ヲ通過スルトキハ其圓ハ何レノ點ニモ屬スルモノトシテ $m_1, m_2, \cdots, m_k$ ヲ數フルモノトス)此等ノ圓ハ幾何ノ點ニテ交ルカ.

解. 若何レノ三ツノ圓ヲ取ルトモ一點ヲ通過スルコトナキトキハ, 其交點ノ數ハ $2{}_nC_2$ ナリ. 而シテ $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 宛ガ一點ヲ通過スルガ爲ニ其交點ノ數ハ夫々 ${}_{m_1}C_2-1,\ {}_{m_2}C_2-1, \cdots, {}_{m_k}C_2-1$ ダケ減ズ. 故ニ

$$所要ノ數 = 2{}_nC_2-({}_{m_1}C_2+{}_{m_2}C_2+\cdots+{}_{m_k}C_2)+k.$$

(7). 平面上ニ n 箇ノ點アリ, 其何レノ四點モ同一圓周上ニアラズ. 今此等ノ點ノ三ツ宛ヲ過リ, 出來得ルダケ多クノ圓ヲ畫キ, 其中何レノ三ツノ圓モ與ヘラレタル n 箇ノ點以外ノ同一點ニテ交ラザルトキハ, 此等ノ圓ハ n 箇ノ點以外ニ幾何ノ點ニテ交ルカ.

解. 圓ノ數ハ ${}_nC_3$ ナリ. 而シテ其中 ${}_{n-1}C_2$ ヅツガ n 箇ノ點ヲ通過ス. 故ニ例題(6)ニヨリ

$$所要ノ數 = 2{}_{{}_nC_3}C_2-n\,{}_{{}_{n-1}C_2}C_2$$

$$=\frac{1}{72}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(2n+1).$$

(8). 例題(5)ノ平面ヲ球面トシ, 直線ヲ大圓ノ周トスルトキハ如何. 但所設ノ n 箇ノ點ハ何レノ二ツヲ取ルモ互ニ對點ナラズトス.

解. 球面上ニ n 箇ノ點アリ, 其中何レノ三ツモ同一ノ大圓ノ周上ニアラザルヲ以テ大圓ノ數ハ ${}_nC_2$ ナリ. 而シテ二ツノ大圓ノ周ハ二點ニテ交ルヲ以テ若 ${}_nC_2$ 箇ノ大圓ノ何レノ三ツモ同一ノ點ヲ通過スルコトナクバ其交點ノ數ハ總テニテ $2{}_{{}_nC_2}C_2$ ナリ. 然ルニ本問題ニ於テハ $n-1$ 箇ヅツ n 箇ノ點ヲ通過ス. 故ニ所設ノ n 箇ノ點ノ對點ヲ

モ除クトキハ其交點ノ數ハ

$$2({}_{{}_nC_2}C_2-n\,{}_{n-1}C_2)\ 即\ \frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

ナリ. 然ルニ所設ノ n 點ノ對點モ亦新ナル大圓ノ交點ナルヲ以テ之ヲ加フルトキハ

$$\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)+n$$

ナリ.

(9). 空間中ニ n 箇ノ點アリ. 其中何レノ三ツモ一直線上ニ在ラズ. 又其中ノ $m_1, m_2, \cdots, m_k\ (>3)$ ガ同一ノ平面上ニ在ルトキ(若一ツノ點ガ此等ノ平面ノ二ツ又ハ三ツ以上ノ上ニアルトキハ其點ハ其何レノ平面ニモ屬スルモノトシテ $m_1, m_2, \cdots, m_k$ ヲ數フルモノトス)此等ノ點ヲ過ル平面ノ數ヲ求ム.

解. 例題(1)ト同樣ニシテ

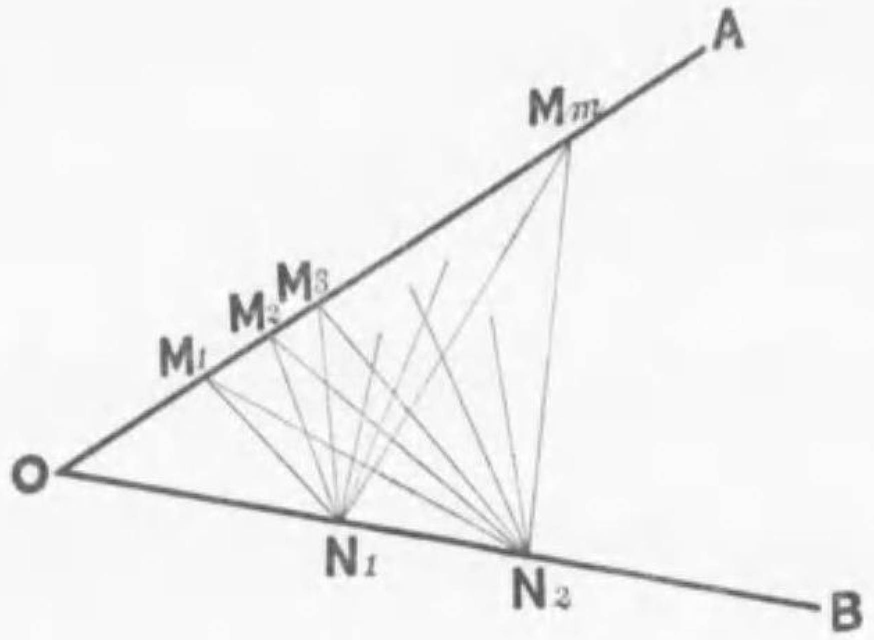
$$所要ノ數 = {}_nC_3-({}_{m_1}C_3+{}_{m_2}C_3+\cdots+{}_{m_k}C_3)+k.$$

(10). 空間中ニ m 箇ノ平面アリ. 其中何レノ二ツモ平行ナラズ, 又何レノ三ツモ同一ノ直線ニテ交ラズ, $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 箇ハ各同一ノ點ニテ交ルトキ (若一平面ガ此等ノ點ノ二ツ或ハ三ツ以上ヲ通過スルトキハ此平面ハ何レノ點ヘモ屬スルモノトシテ $m_1, m_2, \cdots, m_k$ ヲ數フルモノトス)其交點ノ數ハ ${}_nC_3-({}_{m_1}C_3+{}_{m_2}C_3+\cdots+{}_{m_k}C_3)+k$ ナリ.

解. 前題ト同樣ナリ.

(11). 角 AOB ノ一邊 AO 上ニ m 箇ノ點 $M_1, M_2, \cdots, M_m$ アリ, BO 上ニ 2 箇ノ點 N_1, N_2 在リ. 但何レノ點モ O ト合セザルモノトス. 今此等ノ點ヲ二ツヅツ此等ノ點ニテ終ル直線ニテ連結シ其直線ノ何レノ三ツモ一點ニテ交ラザルトキハ, 此等ノ直線ハ $m+2$ 箇ノ點以外ニ幾何ノ點ニテ交ルカ.

解. 點 $M_1, M_2, \cdots\cdots, M_m$ 及 N_1, N_2 ハ O ノ方ヨリ始マリ其添數ノ順序ニ從ヒテ邊上ニ在ルモノトシ其連結直線ヲ N_1 ヨリ射出スルモノ, N_2 ヨリ射出スルモノト考ヘ, 之ヲ表スニ夫々 N_1 線束, N_2 線束ナル語ヲ用ユベシ.



偖 N_2 束線ノ中ノ射線 N_2M_1 ハ N_1 線束中ノ射線 N_1M_1 以外ノ線ト夫夫所設ノ點以外ノ一點ニテ交ル故ニ其交點ハ $m-1$ 箇ナリ. 同様ニ $N_2M_2, N_2M_3, \cdots, N_2M_{m-1}$ ハ N_1 線束ト所設ノ點以外ニ於テ夫々 $m-2, m-3, \cdots\cdots, 1$ 箇ノ點ニテ交ル. 故ニ

$$\text{所要ノ點數} = (m-1)+(m-2)+\cdots\cdots+1 = \frac{m(m-1)}{2}.$$

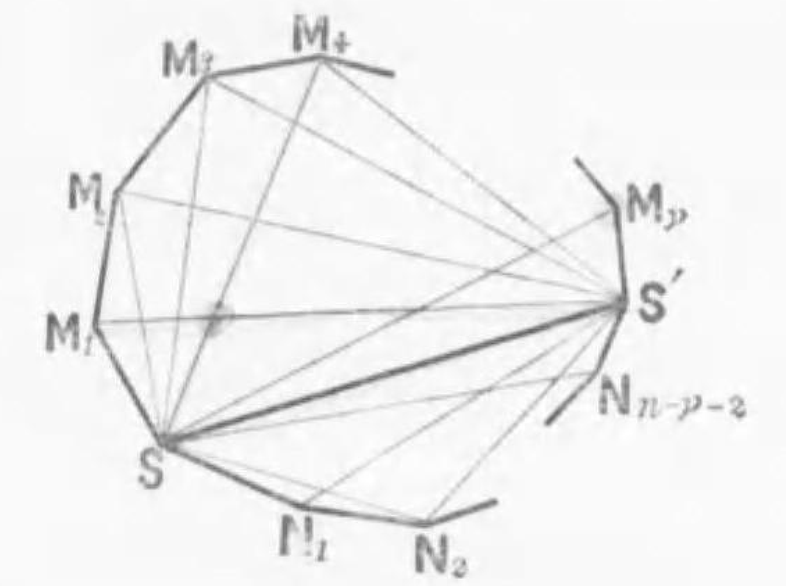
(12). 前題ヲ OB 上ニ $N_1, N_2, \cdots\cdots, N_n$ ナル n 箇ノ點ガ在ル場合ニ擴張セヨ.

解. $N_1, N_2, \cdots\cdots, N_n$ 線束中ヨリ二ツ宛組合セヲ作ルトキハ, 其數ハ ${}_nC_2$ ナリ. 而シテ此二ツノ組合セヲ考フル毎ニ前題ニテ證明セルガ如ク $\frac{m(m-1)}{2}$ 箇ノ點ヲ得. 故ニ

$$\text{所要ノ點數} = \frac{m(m-1)}{2}\,{}_nC_2 = \frac{m(m-1)n(n-1)}{4}.$$

(13). n 箇ノ邊ヲ有スル凸多角形ノ對角線ノ形內ニ於ケル交點ノ數ヲ求ム.

解. $SM_1M_2\cdots\cdots M_\nu S'\cdots\cdots N_1$ ヲ n 箇ノ邊ヲ有スル凸多角形トシ, 二ツノ頂點 SS' ヲ結ブ對角線ノ一方ノ側ニハ ν 箇ノ頂點 $M_1, M_2, \cdots\cdots, M_\nu$ アリトス. 然ラバ他ノ側ニハ $n-\nu-2$ 箇ノ頂點アリ. 之ヲ $N_1, N_2, \cdots\cdots, N_{n-\nu-2}$ トス. 然ラバ, S ト $M_2, M_3, \cdots\cdots, M_\nu$ トヲ結ブ對角線ハ SM_1 ト共ニ ν 箇ノ直線ヨリ成ル線束ト考フルコトヲ得ベシ. 同様ニ S' ト $M_1, M_2, \cdots\cdots$ トヲ連結スル對角線ハ $S'M_\nu$ ト共ニ ν 箇ノ直線ヨリ成ル線束ト考フルコトヲ得ベシ. 而シテ其交點ノ數ヲ求ムルニハ $M_1, M_2, \cdots\cdots, M_\nu$ ハ一直線上ニ在ル場合ト同様ニ取扱フコトヲ得ベク, 從ツテ其數ハ例題 (11) ニヨリ $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ ナリ. 同様ニ SS' ノ他ノ側ニ於ケル交點ノ數ハ $\frac{(n-\nu-2)(n-\nu-3)}{2}$ ナリ. 故ニ線束 S ト他ノ線束トノ交點ノ數ハ



$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-2}\frac{\nu(\nu-1)}{2} + \sum_{\nu=0}^{\nu=n-2}\frac{(n-\nu-2(n-\nu-3)}{2}$$

$$\text{卽}\quad \sum_{\nu=0}^{\nu=n-2}\nu(\nu-1)\quad \text{卽}\quad \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}$$

ナリ. 從テ他ノ頂點ヨリ出ヅル線束ト他ノ線束トノ交點ヲ別々ニ數フルトキハ總テニテ $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3}$ 箇ナリ. 然レドモ斯クスルトキハ其各交點ハ 8 度數ヘラル. 何トナレバ各交點ヲ通過スル二ツノ對角線ノ端ハ互ニ相對スルモノヽ外何レノ二ツニテモ其線束ノ頂點ト考フルコトヲ得レバナリ. 故ニ

$$\text{所要ノ數} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

96. 多角形及多邊形ノ數ニ關スル例題.

(1). 前節例題 (1) ニ於ケル點ニヨリテ作ラルベキ三角形ノ數ヲ求ム.

解. 若 n 箇ノ點ノ中何レノ三ツヲ取ルモ一直線上ニ在ラザルトキハ, 所要ノ數ハ ${}_nC_3$ ナルコト明ナリ. 今斯ノ如キ n 箇ノ點アリトシ, 其中ノ $m_1, m_2, \cdots, m_k$ ノ位置ヲ次第ニ變ジテ夫々一直線上ニ在ラシムルモノトシテ考フルトキハ

$$\text{所要ノ數} = {}_nC_3 - ({}_{m_1}C_3 + {}_{m_2}C_3 + \cdots + {}_{m_k}C_3)$$

ナルコトヲ知ル.

(2). 前節例題(2)ニ於ケル直線ニヨリテ作ラルベキ三邊形ノ數ハ

$${}_nC_3 - ({}_{m_1}C_3 + {}_{m_2}C_3 + \cdots + {}_{m_k}C_3)$$

ナリ.

解. 前題ノ如シ.

(3). 三直線 A, B, C 上ニ夫々 l, m, n 箇ノ點アリ. 其中何レノ點モ直線ノ交點ニ在ラズ. 又或直線上ノ一點ハ他ノ二直線上ノ二點ヲ連結スル直線ノ上ニアラザルトキ此等ノ $l+m+n$ 箇ノ點ヲ三ツヅツ連結スルトキハ幾何ノ三角形ガ作ラルベキカ.

解. 例題(1)ニ於テ n ノ代リニ $l+m+n$ ヲ入レ, $m_1=l$, $m_2=m$, $m_3=n$ トスレバヨシ. 故ニ

$$\begin{aligned}\text{所要ノ數} &= {}_{l+m+n}C_3 - {}_lC_3 - {}_mC_3 - {}_nC_3 \\ &= \frac{(l+m+n)(l+m+n-1)(l+m+n-2)}{1\cdot2\cdot3} \\ &\quad - \frac{l(l-1)(l-2)}{1\cdot2\cdot3} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3} \\ &= \frac{1}{2}(l+m)(m+n)(n+l) - mn - nl - lm.\end{aligned}$$

(4). 平面上ニ n 箇ノ點アリ. 其中何レノ三ツモ同一直線上ニ在ラザルトキ此等ノ點ニヨリテ作ラルベキ p 箇ノ邊ヲ有スル多角形ノ數ヲ求ム. 但茲ニ p 箇ノ邊ヲ有スル多角形ト稱スルハ直線ニテ p 箇

ノ點ヲ連結シタル圖形ニシテ其何レノ相隣レル三ツノ頂點モ一直線上ニ在ラザルモノナリ.

解. 題意ノ如キ條件ヲ滿足スル p 箇ノ點ニテ作ラルベキ多角形ノ數ハ p 箇ノモノヽ圓形順列ノ數ニ等シ. 何トナレバ p 箇ノ點ヲ $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_p$ トシ $A_1A_2A_3\cdots A_p$ ヲ其一ツノ多角形トスレバ $A_2A_3\cdots A_pA_1$, $A_3\cdots A_pA_1A_2$, $\cdots$, $A_p\cdots A_3A_2A_1$, $\cdots$ 等ハ同一ノ多角形ナレバナリ. 故ニ其數ハ $\frac{1}{2}\cdot{}_{p-1}P_{p-1}$ ナリ. 故ニ點ノ數ガ n 箇ナル場合ニハ $\frac{1}{2}{}_nC_p\cdot{}_{p-1}P_{p-1}$ ナリ.

97. 碁板目ノ市街ノ相對スル兩隅間ノ通路ノ數.

碁板ノ目ノ如キ市街アリ. 南北ニ通ズル町 m 條, 東西ニ通ズル町 n 條ナリ. 今市ノ西北隅ヨリ, ソノ東南隅ニ行クニ, 出來得ルダケ近キ道ヲ取ルトキハ幾何ノ通路アリヤ.

解. 右圖 ABCD ヲ以テ市街トシ(簡單ノ爲ニ $m=4$, $n=5$ トセリ) A ヨリ C ニ行クニ出來得ルダケ近キ道ヲ取ルトキノ通路ノ數ヲ求ムベシ. 便利ノ爲ニ圖ニ示スガ如ク, 東西ニ通ズル町ガ南北ニ通ズル町ニヨリテ分タレタル各部分ニ $1, 2, 3 \cdots$ ノ番號ヲ附シ, 南北ニ通ズル町ガ東西ニ通ズル町ニヨリテ分タレタル各部分ニ $1', 2', 3' \cdots$ ノ番號ヲ附ス. 然ラバ A ヨリ C ニ行クニハ必 $1, 2, 3, \cdots$ ヲ通過セザルベカラズ. 而シテ出來得ルダケ近キ道ヲ取ラザルベカラザルヲ以テ, 此等ノ何レヲモ一度以上通過スベカラズ. 從テ之ヲ通過スル順序ハ必 $1, 2, 3, \cdots$ ノ順序ナルヲ要ス. 同様ニ $1', 2', 3', 4', \cdots$ ヲ此順序ニ從テ通過スルヲ要ス. 而シテ斯ノ如キ通路

ノ長サハ何レモ相等シクＡヨリＣニ行ク最近キ道ナリ．故ニ問題ハ $1, 2, 3, \cdots\cdots, m-1; 1', 2', 3', \cdots\cdots, (n-1)'$ ナル $m+n-2$ ノ原素ノ順列ヲ作ルニ，其中ノ $m-1$ 箇及 $n-1$ 箇ダケ其順序ガ定マレルトキノ順列ノ數ヲ求ムルコトヽナル．故ニ第 15 節ニヨリ

$$\text{所要ノ數} = \frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!}.$$

98. 面及空間ノ分割ニ關スル例題.

(1). 一平面上ニ n 箇ノ直線アリ．其中ノ何レノ二ツモ平行ナラズ，又何レノ三ツモ同一ノ點ニテ交ラザルトキ，其平面ハ此等ノ直線ニヨリ幾何ノ部分ニ分タルヽカ．

解. 所要ノ平面ノ部分ノ數ヲ $F(n)$ トス．今先本問題ノ條件ヲ滿足スル $n-1$ 箇ノ直線アリトスレバ，之ニヨリテ分タレタル平面ノ部分ノ數ハ $F(n-1)$ ナリ．此上ニ問題ノ條件ヲ滿足スルヤウニ一直線ヲ引クトキハ其直線ハ前ノ $n-1$ 箇ノ直線ト $n-1$ 箇ノ點ニ於テ交ル．從テ此直線ハ此等ノ交點ニヨリテ n 箇ノ部分ニ分タル．而シテ，其各部分ハ前ノ $n-1$ 箇ノ直線ニヨリテ分タレタル部分ヲ二ツニ分ツ．從テ新ニ直線ヲ引キタル爲ニ n 箇ノ部分ヲ增ス．故ニ

$$F(n) = F(n-1) + n.$$

此 n ノ代リニ夫々 $n-1, n-2, \cdots\cdots, 2, 1$ ト置キ且又明ニ $F(1)=2$ ナルヲ以テ次ノ一連ノ等式ヲ得．

$$\begin{aligned} F(n-1) &= F(n-2)+n-1, \\ F(n-2) &= F(n-3)+n-2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F(2) &= F(1)+2, \\ F(1) &= 2. \end{aligned}$$

此等ノ等式ヲ邊々相加フルトキハ

$$F(n) = n+(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+2+2 = \frac{n(n+1)}{2}+1.$$

(2). 平面上ニ $m+n$ 箇ノ直線アリ，何レノ二ツモ平行ナラズ，其中 m 箇ハ一點Ｍヲ通過シ，n 箇ハ何レノ三ツヲ取ルモ一點ニ於テ交ラズ又何レモＭヲ通過セザルトキ，平面ハ此等ノ直線ニヨリテ幾何ノ部分ニ分タルヽカ．

解. 所要ノ數ヲ表スニ $F(m, n)$ ヲ以テスベシ．先初ニ n 箇ノ直線アリトスレバ平面ハ前ニ述ベシ如ク $F(n)$ 卽 $\frac{n(n+1)}{2}+1$ 箇ノ部分ニ分タル．次ニＭ點ヲ通過シテ問題ノ條件ヲ滿足スルヤウニ一直線ヲ引クトキハ，此直線ハ n 箇ノ直線ト n 箇ノ點ニテ交ルヲ以テ，此交點ニヨリテ $n+1$ 箇ノ部分ニ分タレ，從テ此直線ヲ引キタルガ爲ニ $n+1$ 箇ダケ平面ノ部分ノ數ヲ增ス．次ニ更ニＭ點ヲ通過スル一直線ヲ引クトキハ此直線ハ是迄アリシ直線ト $n+1$ 箇ノ點ニテ交リ，從テ之ヲ引キタルガ爲ニ $n+2$ 箇ダケ平面ノ部分ノ數ヲ增ス．之ヨリ後ハＭヲ通過スル一直線ヲ引ク每ニ $n+2$ ノ平面ノ部分ヲ增ス．故ニＭヲ通過スル m 箇ノ直線ヲ引クトキハ n 箇ノ直線ト共ニ平面ヲ

$$\frac{n(n+1)}{2}+1+m(n+2)-1$$

箇ニ分ツ．故ニ

$$F(m, n) = \frac{n(n+1)}{2}+m(n+2).$$

(3). 平面上ニ m_1+m_2 箇ノ直線アリ．其中 m_1 箇ハ一點 M_1 ヲ通過シ，m_2 箇ハ一點 M_2 ヲ通過シ何レノ二ツモ平行ナラズ又相重ナラザルトキ，平面ハ此等ノ直線ニヨリテ幾何ノ部分ニ分タルヽカ

解. 所要ノ數ヲ $F(m_1, m_2)$ トスルトキハ前例題ト同様ニ

$$F(m_1, m_2) = F(m_1) + m_2(m_1+2) - 1$$

ナリ. 而シテ $F(m_1) = 2m_1$ ナルヲ以テ

$$F(m_1, m_2) = 2m_1 + m_2(m_1+2) - 1$$
$$= m_1m_2 + 2m_1 + 2m_2 \cdot - 1.$$

(4). 空間中ニ n 箇ノ平面アリ. 其中何レノ二ツモ平行ナラズ. 何レノ三ツモ同一ノ直線ニテ交ラズ, 又何レノ四ツモ同一ノ點ニテ交ラザルトキ, 空間ハ此等ノ平面ニヨリテ幾何ノ部分ニ分タルヽカ.

解. 所要ノ數ヲ $F(n)$ トス. 今先問題ノ條件ヲ滿足スル $n-1$ 箇ノ平面アリトスルトキハ, 空間ハ此等ノ平面ニヨリテ $F(n-1)$ 箇ノ部分ニ分タル. 其上更ニ問題ノ條件ヲ滿足スルヤウニ一ツノ平面 P ヲ引クトキハ, 玆ニ出來タル n 箇ノ平面ハ假定ニヨリ其中何レノ三ツモ同一ノ直線ニテ交ラズ. 從テ平面 P ハ $n-1$ 箇ノ平面ノ交線ヲ含ムコトナキヲ以テ, 平面 P ハ $n-1$ 箇ノ平面ト $n-1$ 箇ノ直線ニテ交ル. 而シテ假定ニヨリ $n-1$ 箇ノ平面ノ中何レノ二ツモ平行ナラザルヲ以テ, 此 $n-1$ 箇ノ直線ノ中何レノ二ツモ平行ナラズ. 又假定ニヨリ n 箇ノ平面ノ中何レノ四ツモ同一ノ點ニ於テ交ラズ, 從テ P 平面ハ $n-1$ 箇ノ中ノ何レノ三ツノ平面ノ交點ヲモ過ルコトナキヲ以テ, 此 $n-1$ 箇ノ直線ノ中何レノ三ツモ同一ノ點ニテ交ラズ. 故ニ例題(1)ニヨリ, 此等ノ直線ハ此平面ヲ $\frac{n(n-1)}{2}+1$ 箇ノ部分ニ分ツ. 而シテ此平面ノ各部分ハ其部分ガ通過スル空間ノ部分ヲ二ツニ分ツ. 故ニ平面 P ヲ引キタルガ爲ニ空間ノ部分ハ $\frac{n(n-1)}{2}+1$ 箇ダケ增ス. 從テ

$$F(n) = F(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} + 1.$$

此式ニ於テ n ノ代リニ次第ニ $n-1, n-2, \cdots, 2, 1$ ト置クトキハ

$$F(n-1) = F(n-2) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1,$$

$$F(n-2) = F(n-3) + \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(2) = F(1) + \frac{2\cdot1}{2} + 1,$$

$$F(1) = 2.$$

此等ノ等式ヲ前ノ等式ト共ニ邊々相加フルトキハ

$$F(n) = \frac{1}{2}\Big[n(n-1) + (n-1)(n-2) + \cdots\cdots + 2\cdot1 + 1\Big] + n + 1$$
$$= \frac{1}{6}(n+1)n(n-1) + n + 1$$
$$\frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6).$$

(5). 球ノ中心ヲ通過スル n 箇ノ平面アリ. 其中何レノ三ツモ同一ノ直徑ヲ含マザルトキハ, 此等ノ平面ハ球ノ表面ヲ幾何ノ部分ニ分ツカ.

解. 所要ノ數ヲ $F(n)$ トス. 今問題ニ示ス如キ $n-1$ 箇ノ平面アリタリトスレバ, 此等ノ平面ハ球面ヲ $F(n-1)$ 箇ニ分ツ. 次ニ球ノ中心ヲ過リ問題ノ條件ヲ滿足スルヤウニ一平面ヲ引クトキハ, 此平面ト球面トノ交線ナル大圓ハ, $n-1$ 箇ノ平面ト球面トノ交線ナル大圓ト $2(n-1)$ 箇ノ點ニテ交ル. 從テ最後ノ平面ヲ引キタルガ爲ニ $2(n-1)$ 箇ノ球面ノ部分ノ數ガ增ス. 故ニ

$$F(n) = F(n-1) + 2(n-1).$$

此等式ノ n ノ代リニ $n-1, n-2, \cdots 2, 1$ ト置クトキハ

$$F(n-1) = F(n-2) + 2(n-2),$$

$$F(n-2)=F(n-3)+2(n-3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(2)=F(1)+2,$$

$$F(1)=2.$$

此等ノ等式ヲ邊々相加フルトキハ

$$\begin{aligned} F(n) &= 2\Big[(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots\cdots+1\Big]+2 \\ &= n^2-n+2. \end{aligned}$$

(6). 球ノ中心ヲ通過スル m_1+m_2 箇ノ平面アリ. 其中 m_1 箇ハ同一ノ直徑ヲ含ミ, m_2 箇ハ他ノ同一ノ直徑ヲ含ミ, 何レノ平面モ共ニ此二ツノ直徑ヲ含ムコトナキトキハ, 球ハ此等ノ平面ニヨリテ幾何ノ部分ニ分タルヽカ.

解. 所要ノ數ヲ $F(m_1, m_2)$ ニテ表ス. 最初 m_1 箇ノ平面ガアリタリトセヨ. 然ラバ $F(m_1)=2m_1$ ナルコト明ナリ. 今此上ニ問題ノ條件ヲ滿足スルヤウニ m_2 箇ノ中ノ一箇ノ平面ヲ引クトキハ, 此平面ハ先キノ m_1 箇ノ平面ト m_1 箇ノ直線ニ於テ交リ其 m_1 箇ノ直線ハ一點ヲ通過ス. 故ニ此平面ハ此等ノ交線ニヨリ $2m_1$ 箇ノ部分ニ分タル. 從テ球ノ部分ハ此平面ヲ引キタルガ爲ニ $2m_1$ ダケ其數ヲ增ス. 更ニ m 箇ノ平面ノ中ノ一ツヲ引クトキハ此平面ハ是迄ノ平面ト m_1+1 箇ノ一點ニ會スル直線ニテ交ルヲ以テ球ノ部分ノ數ハ $2(m_1+1)$ 箇ダケ增ス. 此上ハ m_2 箇ノ中ノ一ツヲ增ス每ニ $2(m_1+1)$ 箇ダケ球ノ部分ノ數ガ增ス. 故ニ

$$\begin{aligned} F(m_1, m_2) &= F(m_1)+2m_2(m_1+1)-2, \\ &= 2m_1+2m_2(m_1+1)-2, \\ &= 2(m_1m_2+m_1+m_2-1). \end{aligned}$$

(7). 前例題ヲ, 平面ノ數ガ $m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n$ ニシテ, 其各組ガ夫々一ツノ直徑ヲ含ム場合ニ擴張セヨ.

解. 前例題ト同樣ニシテ

$$\begin{aligned} F(m_1, m_2, \cdots\cdots, m_{n-1}, m_n) &= F(m_1, m_2, \cdots\cdots, m_{n-1}) \\ &\quad +2m_n(m_1+m_2+\cdots\cdots+m_{n-1}+1)-2, \\ F(m_1, m_2, \cdots\cdots m_{n-1}) &= F(m_1, m_2, \cdots\cdots, {}_{n-2}) \\ &\quad +2m_{n-1}(m_1+m_2+\cdots\cdots+m_{n-2}+1)-2, \end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(m_1, m_2)=F(m_1)+2m_2(m_1+1)-2,$$

$$F(m_1)=2m_1.$$

此等ノ等式ヲ邊々相加フルトキハ

$$F(m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n)=2\Big[\sum m_\mu m_\nu+\sum m_\lambda-(n-1)\Big].$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= 1, 2, 3, \cdots\cdots n \\ \mu &= 1, 2, 3, \cdots\cdots n \\ \nu &= 1, 2, 3, \cdots\cdots n \end{aligned}\right\}$$

(8). 一平面上ニ若干ノ閉曲線アリ. 何レモ自身ニ交ラズ. 又何レノ二ツモ互ニ相交ル. 今其交點中ノ n_r 箇ハ r 箇ノ曲線ガ通過スル點ナリトセバ, 曲線ヲ以テ圍マレタル平面ノ部分ノ數ハ

$$1+n_2+2n_3+\cdots\cdots+rn_{r+1}+\cdots\cdots \qquad (1)$$

ナルコトヲ證明セヨ.

解. 今何レカ曲線ヲ一ツ取去リテ考フ. 而シテ取去リタル後ニ於テ r 箇ノ曲線ガ通過スル點ノ數ガ n'_r ナリトス. 今問題ノ主張スル所ガ此場合ニ眞ナリト假定スルトキハ曲線ヲ以テ圍マレタル平面ノ部分ノ數ハ

$$1+n'_2+2n'_3+\cdots\cdots+rn'_{r+1}+\ \cdots \tag{2}$$

ナリ．次ニ前ニ取リ去リタル曲線ヲ引キタリトス．然ラバ其曲線ハソレ自身ニ交ラザルヲ以テ其曲線ト他ノ曲線トノ交點ノ數ハ其曲線ガ此等ノ交點ニヨリテ分レタル線分ノ數ト等シカラザルベカラズ．而シテ此等ノ線分一ツガ生ジタルガ爲ニ曲線ヲ以テ圍マレタル平面ノ部分ガ一ツ增ス．故ニ此曲線ヲ引キタルガ爲ニ增シタル平面ノ部分ノ數ハ此曲線上ニ在ル交點ノ數ニ等シ．從テ其曲線ハ其交點ヲ一ツ通過スル每ニ曲線ヲ以テ圍マレタル平面ノ部分ガ一ツ增スト考フルコトヲ得．今此曲線ガ r_1 箇ノ曲線ガ通過スル p_1 箇ノ點，r_2 箇ノ曲線ガ通過スル p_2 箇ノ點，$\cdots$，r_ν 箇ノ曲線ガ通過スル p_ν 箇ノ點 $(1\leqq r_1<r_2<\cdots<r_\nu)$ ヲ通過シタリトス．然ルトキハ平面ノ部分ノ數ハ

$$\begin{aligned}
&1+n'_2+2n'_3+\cdots\cdots\\
&\qquad+r_1n'_{r_1+1}+p_1+(r_1+1)n'_{r_1+2}+\cdots\cdots\\
&\qquad+r_2n'_{r_2+1}+p_2+(r_2+1)n'_{r_2+2}+\cdots\cdots\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad+r_\nu n'_{r_\nu+1}+p_\nu+(r_\nu+1)n'_{r_\nu+2}+\cdots\cdots\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\tag{3}$$

トナル．然ルニ此式ハ次ノ如ク書クコトヲ得．

$$\begin{aligned}
&1+n'_2+2n'_3+\cdots\cdots\\
&\qquad+r_1(n'_{r_1+1}-p_1)+(r_1+1)(n'_{r_1+2}+p_1)+\cdots\cdots\\
&\qquad+r_2(n'_{r_2+1}-p_2)+(r_2+1)(n'_{r_2+2}+p_2)+\cdots\cdots\\
&\qquad+r_\nu(n'_{r_\nu+1}-p_\nu)+(r_\nu+1)(n'_{r_\nu+2}+p_\nu)+\cdots\cdots\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\tag{4}$$

而シテ新ナル曲線ヲ引キタルガ爲メ r_1 箇ノ曲線ノ通過スル點，r_2 箇

ノ曲線ノ通過スル點，$\cdots$，r_ν 箇ノ曲線ノ通過スル點ハ夫々 p_1 箇，p_2 箇，$\cdots$ p_ν 箇減ジ，r_1+1 箇ノ曲線ノ通過スル點，r_2+1 箇ノ曲線ノ通過スル點，$\cdots$，$r_\nu+1$ 箇ノ曲線ノ通過スル點ハ夫々 p_1 箇 p_2 箇，$\cdots$，p_ν 箇增シ其他ノ點ニハ關係ナキ故

$$\begin{aligned}
&n'_1=n_1,\ n'_2=n_2,\ \cdots\ \cdots\cdots\\
&n'_{r_1}-p_1=n_{r_1},\ n_{r_1+1}+p_1=n_{r_1+1},\cdots\\
&n'_{r_2}-p_2=n_{r_2},\ n_{r_2+1}+p_2=n_{r_2+1},\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&n'_{r_\nu}-p_\nu=n_{r_\nu},\ n_{r_\nu+1}+p_\nu=n_{r_\nu+1}\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

ナラザルベカラズ，故ニ (1) モ亦眞ナリ．卽曲線ノ數若干ニ就テ本問題ニ述ブル所ガ眞ナリトセバ更ニ一箇ノ曲線ヲ其上ニ引クモ眞ナリ．然ルニ曲線ガ二箇或ハ三箇ノ場合ニ於テ本問題ノ眞ナルコトハ明ナリ．故ニ本問題ハ一般ニ眞ナリ．

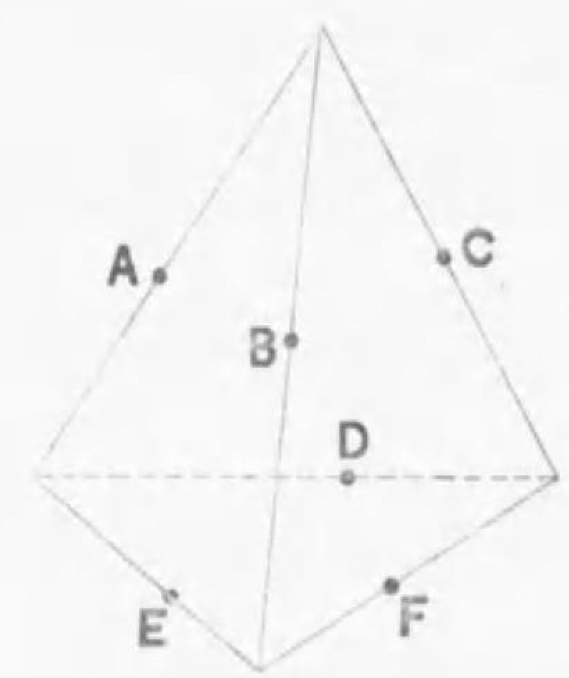
99. 四面體ノ數ニ關スル例題．

所設ノ六箇ノ點ヲ各稜ガ通過スル四面體ハ幾箇アリヤ．但所設ノ六箇ノ點中何レノ四箇ヲ取ルモ同一平面ニアラズシテ又其中三箇ノ點ニテ定マルベキ平面中何レノ二箇ヲ取ルモ平行ナラズ又一致セズシテ相交ルモノトス．

解．* 所設ノ六點 A, B, C, D, E, F ノ中何レカ三箇ヲ取リテ決定シ得ベキ平面ノ數ハ明ニ ${}_6C_3$ 卽 20 ナリ．此二十箇ノ平面中何レカ一ツ例ヘバ ABE ヲ取リテ四面體ノ第一面トス．

* 本題ノ諸解ハ泉清識君ノ得タルモノナリ．山下美一君等モ亦同樣ノ解ヲ得タリ．

次ニ第二面ヲ定ムルニ此第二面ハ A ヲ通過スルモノトス. 然ラバ之ヲ定ムル仕方ハ A ト他ノ五點中ノ何レカ二ツニ依ルベシト雖其中 B 或ハ E ヲ用フベカラズ. 何トナレバ若斯ノ如キ平面ヲ取レバ此平面ト第一平面 ABE トノ交線ガ直線 AB 或ハ AE トナリテ一稜



ガ所設ノ二點ヲ通過スルコトヽナレバナリ. 故ニ第二面ヲ定ムルニハ A ト C, D, F ノ中何レカ二ツトヲ通過スルモノヲ用キザルベカラズ. 故ニ其仕方ノ數ハ ${}_3C_2$ 即 3 ナリ. 此三箇ノ平面中何レカ一ツ例ヘバ ACD ヲ取リテ四面體ノ第二面トス.

次ニ第三面ヲ定ムルニ此第三面ハ B ヲ通過スルモノトス. 然ラバ此第三面ハ A 或ハ E ヲ通過スベカラズ又 C ト D トヲ同時ニ通過スベカラズ. 故ニ此第三面ハ BCF 或ハ BDF ニ他ナラズ. 故ニ之ヲ定ムル仕方ノ數ハ 2 ナリ. 此二箇ノ平面中例ヘバ BCF ヲ取リテ第三面トス.

終ニ第四面ヲ定ムルニハ最早 DEF ヲ取ルノ外途ナシ. 故ニ其定メ方ハ一通リナリ. 故ニ上ノ如クシテ四面體ヲ定ムル仕方ノ數ハ

$${}_6C_3 \times {}_3C_2 \times 2 \quad 即 \quad 120$$

ナリ. 然レドモ此百二十箇ノ四面體ノ中一箇ヲ取リテ考フルニ, 其四面中何レヲ第一面ト見ルモ可ナルヲ以テ百二十箇ノ中ニハ同ジ四面體ガ四箇ヅツ數ヘラレ居ルコトヽナル. 故ニ

$$所要ノ數 = \frac{120}{4} = 30.$$

別解. 所設ノ六點 A, B, C, D, E, F ノ中何レカ三箇ヲ取リテ決定

シ得ベキ平面ノ數ハ明ニ ${}_6C_3$ 即 20 ナリ. 此中 A 點ヲ通過スル平面ノ數ハ ${}_5C_2$ 即 10 ニシテ此十箇ノ平面ノ中ノ二ツヅツノ交線ハ皆 A 點ヲ通過スルコト勿論ニシテ其數ハ ${}_{10}C_2$ 即 45 ナリ. 此交線ヲ二種ニ分ツコトヲ得.

(i). A 點ノミヲ通過シ, 他ノ五點 B, C, D, E, F 中ノ何レヲモ通過セザルモノ 15 箇,

(ii). A 點ヲ通過シ且他ノ五點 B, C, D, E, F 中ノ何レカ一ツヲ通過スルモノ 30 箇.

何トナレバ AB ナル交線ハ, A, B ト他ノ一點トニヨリテ定メラルル平面四箇ノ中二箇ヲ取リタルトキニ得ラルヲ以テ, 其數ハ ${}_4C_2$ 即 6 ナリ. AB ノ外 AC, AD, AE, AF 皆同樣ナリ. 故ニ A ヲ通過シ且他ノ五點 B, C, D, E, F 中ノ何レカ一ツヲ通過スルモノハ 6×5 即 30 ナリ. 故ニ A 點ノミヲ通過シ他ノ五點 B, C, D, E, F 中ノ何レヲモ通過セザルモノヽ數ハ 45−30 即 15 ナリ.

故ニ四面體ノ稜トナシ得ル A ヲ通過スル交線ハ 15 ナリ. 此十五箇ノ交線中何レカ一ツ例ヘバ面 ABE ト ACD トノ交線ヲ取リタリトス.

次ニ B 點ヲ通過スル交線モ亦總テニ於テ十五箇アリト雖其中或者ハ之ヲ取ルベカラズ. 平面 ABE ハ既ニ第一面トナセルガ故ニ此面ト他ノ平面トノ交線中ヨリ B 點ヲ通過スル稜ヲ定メザルベカラズ. 即面 ABE トノ交線ニシテ, B ヲ通過シ A ヲ通過セザルモノハ B ト C, D E, F ノ中ノ何レカ二ツヲ取リテ定メラルヽ平面ニヨリテ定メザルベカラズ. 故ニ其數ハ ${}_4C_2$ 即 6 ナリ. 但其 BE ト一致スル三箇ノ交線及面 ABE, BCD ノ交線ハ取ルベカラズ. 何トナレバ此

等ノ交線ハ BE 若クハ CD ト一致スレバナリ. 故ニ B 點ヲ通過スル交線ノ中四面體ノ稜トナシ得ルモノハ唯二ツナリ (卽面 ABE, BCF ノ交線及面 ABE, BDF ノ交線). 此中何レカ一ツ例ヘバ面 ABE ト BCF トノ交線ヲ取リタリトス.

然ラバ最早 C 點ヲ通過スル稜ハ定マルベシ.

終ニ D, E, F ヲ通過スル交線ヲ稜トシテ定ムベキモ, 既ニ A, B, C ヲ通過スル稜ノ定マリタル上ハ, 面 DEF ト既ニ用ヒタル面トノ交線ヲ取ルノ外ナシ. 故ニ

$$所要ノ數 = 15 \times 2 = 30.$$

別解. 第二解法ニ於テ知レル A ヲ通過スル面十箇ノ中何レカ一ツヲ第一面トスルコトヲ得. 今之ヲ面 ABE トス.

次ニ A ヲ通過スル第二面ヲ定ムルニハ B 點及 E 點ヲ用ユベカラザルニヨリ三點 C, D, F ノ中ヨリ何レカ二點ヲ選ビ A 點トシテ之ヲ定メザルベカラズ. 卽其數ハ ${}_3C_2$ 卽 3 ナリ. 今其中面 ACD ヲ取ルトス.

次ニ第三面ヲ定ムル仕方ハ第一解法ト同様ニ二様アリ.

終ニ第四面ヲ定ムル仕方ハ一様ナリ.

故ニ所要ノ四面體ノ數ハ $10 \times 3 \times 2$ 卽 60 ナルガ如シト雖此中一箇ヲ取リテ考フルニ, 初ニ ABE ヲ第一面トシテ定ムル場合ト, 同ジク A 點ヲ通過スル ACD ヲ第一面トシテ定ムル場合トガ, 同ジ四面體ナルニ, 二箇ニ數ヘラレ居ルコトヽナルヲ以テ

$$所要ノ數 = \frac{10 \times 3 \times 2}{2} = 30.$$

著作者　林鶴

東京市日本橋區通一丁目十九番地
發行者　大倉保五郎

東京市京橋區築地三丁目十一番地
印刷者　野村宗十郎

東京市京橋區築地二丁目十七番地
印刷所　株式會社東京築地活版製造所

發行所　大倉書店
東京市日本橋區通一丁目十九番地
電話本局四一四番二四〇四番
振替貯金口座東京二三八番

數學叢書第十三編奥附
順列論
(正價金壹圓拾錢)

予ハ公私極メテ多忙ナル

讀ムニ到ル階梯タラシメントス．

多クハ我數學界ニ取リテハ稍高尚ニ過ギタリトモ云ヒ得ルモノ

初等數學ヲ研究シツヽアル諸君ニ向ヒテ，出來得ル限リ良好ナル參考書ヲ

ヲ認ム．現在ニ於テ初等數學ヲ研究シツヽアル諸君ハ多クハ中等學校ニ在籍セラル

予ハ此等ノ在籍者及ビ其ノ卒業者ノ爲ニ便セントテ初等數學叢書ノ公刊ヲ始ム．予自ラ斯ノ如キ必要ヲ認メタルノミナラズ，余ガ知レル全國ノ中等學校ノ教育ニ從事セル數人ノ教員諸君ハ，余ニ此ノ叢書ノ公刊ヲ勸奬シテ止マザリキ．余ハ終ニ其勸奬ニ動カサレタリ．

此初等數學叢書ヲ公刊スルニ當リテハ，中等學校ノ數學教育ニ堪能ナル諸氏ニ各編ノ著述ヲ依囑ス．著作者ハ學識上ニ於テモ又經驗上ニ於テモ讀者諸君ニ向ヒテ十分ノ滿足ヲ與フル人々ナルヲ疑ハズ．説述ノ體裁ハ其ノ苦心ノ結果ニシテ平素蘊蓄セル所ヲ披瀝シテ餘ス所ナキヲ期セラレタリ．間々挿入スル所ノ學生諸君ニ對スル注意ノ如キハ極メテ適切ナルヲ信ズ．

中等教育ヲ受ケツヽアル諸君ハ固ヨリ常ニ其教師ニ就キ其教科書ニ依リ，更ニ遺憾ナキガ如シト雖，他ノ教科ガ夫々好適ノ參考書ヲ有シ所謂課外讀物トシテ補助ヲ得ルニ便ナル書籍ヲ有セルニ係ハラズ，數學科ハ獨リ此種ノ參考書ヲ有セズ．教科書以外好適ノ參考書ナシト云フガ如キハ又數學科ノ成績ノ擧ガラザル所以ナラズンバアラズ．本叢書ハ最好最適ノ參考書ナリトハ自贊スルモノニ非ズ．然レドモ著作者ハ皆最好最適ノ參考書ナラシメント勉メラレタリ．

數學科ノ成績ガ常ニ思ハシカラズ，此學科ヲ諸君ガ平常ノ學科ノ中ニ第一ニ加ヘラルルガ如キ有樣ナルニモ係ハラズ參考書ノ好適ナルモノナク其ノ援助ヲ受クルニ由ナシト云フガ如キハ遺憾ナラズトセズ．本叢書ハ如何ナル教科書ト竝用スルモ些ノ不都合ヲ見ズ．通例教科書ノ中ニ記載セル條項ヲ頗ル丁寧ニ敷衍説明シ，易ヨリ難ニ入リ主要問題ヲ掲ゲテ後其應用ヲ試ミシメ，教師ガ教授時間ニ言及スル能ハザルモノヲモ説述シテ殘

カ　…ヲシツヽ愉快ニ學

レバ本叢書ハ初等數學獨習者ニモ亦極メテ適切ナルコト明白ナ
[illegible]ハ三十有餘編ヨリ成リテ算術代數學幾何學及ビ三角法ノ全部ニ渉ル．而
ク，著作者ガ共同一致シテ編述スルモノナルガ，著作者ガ夫夫各地ニ離レテ勤
ツヽアルヲ以テ編述ノ上ニ統一ヲ求ムルコト極メテ困難ナリ．各著作者ガ夫々其
ニスルヨリ勢ヒ甲編ト乙編ト其體裁ヲ異ニスルモノアルヲ免レズ．予ハ其間多少
ヲ試ミタリト雖モ著作者ノ意見ヲモ成ル可ク斟酌採用シタルヲ以テ完全ナル統一
ヲ望ム所ニアラズ．各編トリドリニ長所ヲ有スルナラン．教科書ナランニハ重
ガ爲ニ例ヘバ幾何學ノ某定理ヲ比例ノ部ニ置ケバ之ヲ圓ノ部ニ置カズト云フガ
アレドモ，本叢書ニ於テハ同一ノ定理ガ處々方々ニ相異ナレル方法ニテ解カレ
出サルヽトラン．斯ノ如キハ參考書トシテ寧ロ可ナルヲ信ズ．

明治四十四年二月　　理學士　林　鶴一

終