二乘比ニ等シイコトヲ知ル。

問題五十八

1, △ABC ト △DBA トニ於イテ

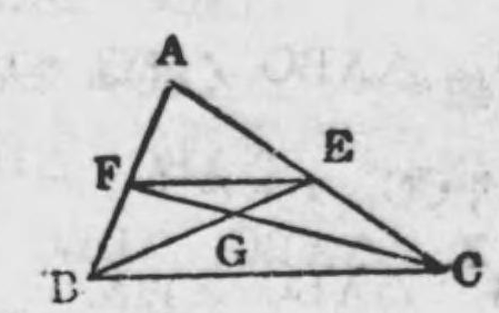
$\angle BAC=\angle BDA,\quad \angle ABC=\angle DBA$

故ニ　△ABC : △DBA　依ツテ　$\triangle ABC:\triangle DBA=AB^2:DB^2$

然ルニ　△DBA ニ於イテ $\angle B=\frac{2}{3}\angle R$ デアルカラ AB=2BD デアル。

故ニ　$\triangle ABC:\triangle DBA=4:1$　デアル。

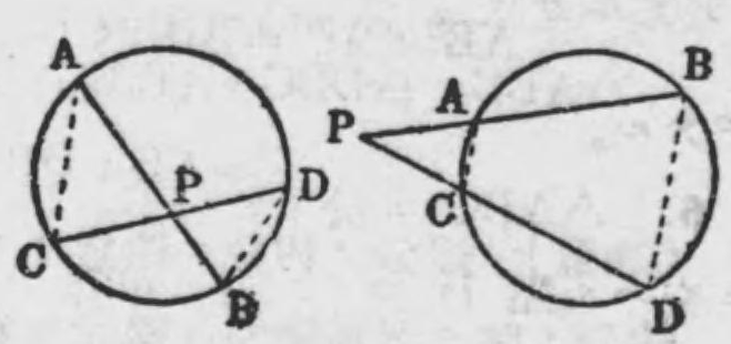
2. △BGC∽△EGF, 且ツ G ガ重心デアルカラ對應邊ノ比ハ



$BG:GF=2:1$

故ニ　$\triangle BGC:\triangle EGF=4:1$　デアル。

3. △APC, △DPB ニ於イテ



$\angle CAP=\angle PDB$

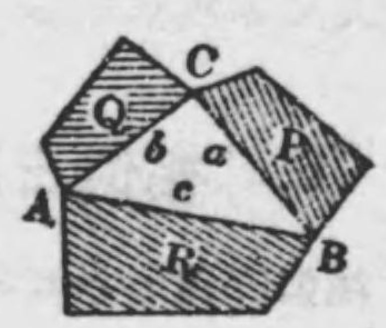
∠P ハ共通

故ニ　△APC∽△DPB

依ツテ　$\triangle APC:\triangle DPB=AC^2:DB^2$

4, 直角三角形 ABC ノ直角ヲ夾ム二邊ヲ a, b トシ斜邊ヲ c トスル。a, b, c ノ各邊ヲ對應邊トスル相似多角形ノ面積ヲ夫々 P, Q, R トスレバ

$$\frac{P}{R}=\frac{a^2}{c^2},\quad \frac{Q}{R}=\frac{b^2}{c^2}$$



ぴたごらすノ定理ニヨツテ $a^2+b^2=c^2$ デアルカラ

$$\frac{P+Q}{R}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{C^2}{C^2}=1$$

故ニ　P+Q=R　デアル。

［注意］　本題ハぴたごらすノ定理ノ擴張デアル。コノ關係ハ各邊上ノ圖形ガ相似多角形ト限ラズ相似デアレバ曲線形デモ成立スル。

補　充　問　題

1. 圓 O 外ノ一點 P カラコノ圓ニ引イタ二ツノ切線ヲ PA, PB トスレバ

$$\triangle APB:\triangle AOB=AP^2:AO^2$$

デアル。

2. 三角形ノ三中線ヲ三邊トスル三角形ハ元ノ三角形ノ面積ノ $\frac{3}{4}$ ニ等シイ。

3. 甲, 乙 二ツノ相似三角形ガアル。ソノ對應邊ノ比ハ 3 : 4 ニシテ甲ノ面積ハ 135 平方糎デアルナラバ乙ノ面積ヲ求メヨ。　答　240 平方糎

4. △ABC ノ三邊 AB, BC, CA 上ニ夫々ソノ邊ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シク AA′, BB′, CC′ ヲトルトキハ △A′B′C′ ノ面積ハ △ABC ノ面積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイ。

5. △ABC ノ頂點 A ニ於イテ外接圓ニ引ケル切線ガ BC ノ延長ト交ハル點ヲ D トスレバ

$$AB^2:AC^2=BD:CD$$

デアル。

6. △ABC ニ於イテ AB=2AC トスル。頂角 A ノ二等分線ガ底邊 BC ニ交ハル點 D ヨリ二邊ニ平行ニ DE, DF ヲ引キ邊 AB, AC ト夫々 E, F ニ於イテ交ハラシメ, EF, BC ノ延長ノ交點ヲ G トスレバ

①　EF=FG　　②　$\triangle FCG=\frac{1}{9}\triangle ABC$

デアル。

第五章 圓ニ關スル計算

本章ニ於イテハ圓周ノ長サ及ビ圓ノ面積ノ公式ヲ教示スルノガ主眼デアル。

圓周及ビ圓ノ面積ニ關シテハ第一篇第四章ニ於イテ一通リ實驗的ニ學ンデキル故コレト聯絡ヲトル。

ナホ圓周率ニ關シテハ本教授參考資料 26 頁ヲ參照セラレタイ。

77. 圓周ノ長サ (229 頁)

圖 圓周ハ常ニソノ內接正多角形ノ周ヨリハ大デアルガ外接正多角形ノ周ヨリハ小デアル。コレハ公理トスル。

一ツノ圓ニ內接及ビ外接スル正 n 角形ノ周チ考ヘルト圓周ノ長サハコレ等ノ間ニアル。

而シテソノ邊數 n チ限リナク增セバ內接形ノ周ハ次第ニ大トナリ，外接形ノ周ハ次第ニ小トナツテ，何レモ共通ナ值ニ限リナク近迫スル。

コノ共通ナ值ガ圓周ノ長サデアル。

一般ニ，一變數チ次第ニ一定數ニ近ヅカシメルトキ，ソノ一定數トノ差ノ絕體值ガ如何程小ナル數ヨリモ更ニ小トナラシメルコトガ出來ルナラバ，ソノ一定數チソノ變數ノ極限トイフ。

極限トイフ語チ用ヒルト上ノ事實ハ次ノヤウニ述ベルコトガ出來ル。

圓周ハ內接正多角形又ハ外接正多角形ノ邊數チ限リナク增シタトキノコノ多角形ノ周ノ極限デアル。

[**注意 1**] 極限ノ存在及ビ比ノ極限ハ極限ノ比ニ等シク比ガ一定ナラバ極限モ一定デアルコト等ノ證明チ要スルモココデハコレチ默認セザルチ得ナイ。

[**注意 2**] 變量ノ極限トハ一ツノ定量ニ對シテ如何程デモコレニ接近セシメ得ルモ，決シテコレニ等シクナルコトノ出來ヌ量デアル。

例ヘバ正 n 角形ノ一內角ハ $\left(2-\dfrac{4}{n}\right)$ 直角デアルカラ n チ增セバコレハ 2 直角ニ接近ハスルガ，2 直角ニ等シクナルコトガ出來ナイ。

又矩形ガ一定ノ面積チ有スルトキ，二隣邊ノ增減ニ於イテ一方チ增セバ他ハ減少スルガ決シテ O トナルコトガ出來ナイ。

前者ニ於イテハ正多角形ノ一內角ノ極限ハ 2 直角デ，後者ハ定量チ有スル矩形ノ一邊ノ極限ハ零デアルトイヒ得ル。

然シ菱形ノ一角チ何程デモ直角ニ近ヨラシムレバ如何程デモコノ菱形ハ正方形ニ接近スルガ，コレニ等シクナリ得ルカラコノ場合ハ正方形ハ菱形ノ極限トハ云ハヌ。

[**注意**] 多角形ノ周チ P デ表ハスノハ Perimeter ノ頭字カラデ圓周チ C デ表ハスハ Circumference ノ頭字カラデアル。

78. 圓ノ面積 (233 頁)

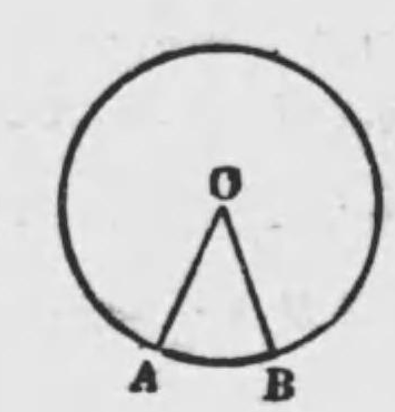
圓ノ面積ノ教授ニ關シテ第一篇第四章第 21 節ト聯絡チトル。

第一篇ニ於イテハ，圓ノ面積ノ公式チ實驗的ニ求メタニ對シ本節ニ於イテハ極限ノ思想チ用ヒ理論的ニ誘導スルニアル。

ナホ定理十二ノ系チ授ケルニ際シテハ第一篇第四章第 21 節問 7 チ回顧セシメ扇形ノ定義扇形ニ關スル公式チ想起セシメルガヨイ。

扇形ニ於イテ兩半徑ノナス角チ扇形ノ角トイフコトモ本節ニ於イテ教示サレタイ。

定理十二ノ系 同圓又ハ等圓ニ於イテ中心角ガ等シイ扇形ハ合同デアルカラ今半徑 r デアル圓 O ノ扇形 OAB ノ弧ノ長サチ l トスルト



圓 O ノ面積ガ扇形 OAB ノ有理數倍ナルトキハ即チ

圓 O：扇形 OAB$=m:n$ (m, n ハ共ニ整數)

ナルトキハ弧 AB チ m 等分シ O 圓ノ周チ n 等分シ中心 O ト分點トチ結ベバ各部分ノ弧ハ相等シク又コレニ對スル扇形モ相等シイ。

即チ　$2\pi r$：弧 AB$=m:n$

又　圓 O：扇形 OAB$=2\pi r$：弧 AB

故ニ弧 AB チ l トシ扇形 OAB ノ面積チ S トスルト

$$\pi r^2 : S = 2\pi r : l$$

故ニ　$S=\frac{\pi r^2 l}{2\pi r}=\frac{lr}{2}$

圓 O ノ面積ガ扇形 OAB ノ無理數倍ナルトキモ同一ノ結果ガ得ラレルガ，カヤウナ場合ノ證明ハ第五篇第二章第 69 節ノ定理一ノ證明ヲ本敎授資料デナシテアル故ソレヲ參照サレタイ。

［注意］ 定理十二ノ系ヲ證明スルニ豫備トシテ次ノ定理ヲ敎示シ後授ケルモヨイ。

定理一 同圓又ハ等圓ニ於イテ二ツノ中心角ノ比トコレ等ニ對スル弧ノ比ハ相等シイ。

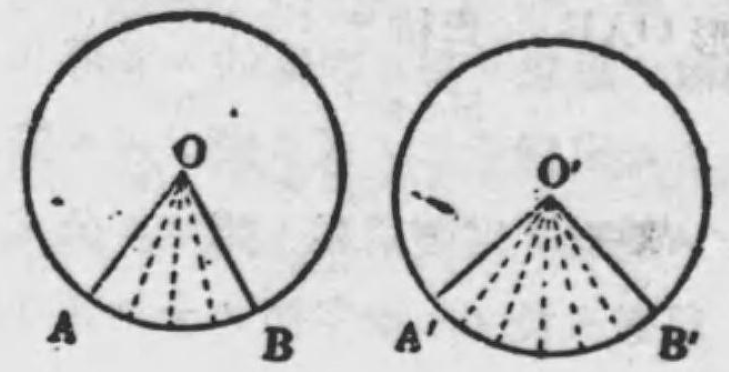
證明 半徑 r ナル等圓 O, O′ トシ，弧ヲ夫々 AB, A′B′ トスル。

〔1〕 弧 AB, 弧 A′B′ ニ公約量ガアル場合。

弧 AB ガ圓 O ノ周ノ $\frac{n}{m}$, 弧 A′B′ ガ $\frac{n}{m}$ トスレバ

弧 $AB=2\pi r\times\frac{n}{m}$, 弧 $A'B'=2\pi r\times\frac{n'}{m}$

故ニ弧AB：弧$A'B'=\frac{n}{m}:\frac{n'}{m}=n:n'$



弧 AB, A′B′ ヲ m 等分シ中心ト夫々結ブト　$\angle AOB:\angle A'O'B'=n:m'$

故ニ　弧AB：弧$A'B'=\angle AOB:A'O'B'$

〔2〕 弧 AB, 弧 A′B′ ニ公約量ガナイ場合。

m, n ヲ整數トスレバ $\angle AOB$ ト $\angle A'O'B'$ トノ比ガ $m:n$ トスルコトハ出來ナイガ，m 及ビ n ハ共ニ整數デ n ハ如何程デモ大キクスルコトノ出來ル數トスレバ

$$\frac{m}{n}<\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}<\frac{m+1}{n}$$

トスルコトガ出來ル。

次ニ $\angle A'O'B'$ ヲ n 等分シタト考ヘ $\angle AOB$ 內ニソノ部分（$\angle A'O'B'$ ノ n 分ノ一）ヲ出來得ルダケ多ク容レタト考ヘルト $\angle AOB$ ハソノ部分 m 箇トソノ部分ヨリ小ナル殘餘ノ角ヲ含ミ從ツテ弧 A′B′ ハ弧 AB ノ n 分ノ一ニ等シイ弧ヲ m 箇トソノ一部分ヨリ小サイ弧一箇ヲ含有スル。

故ニ　$\frac{m}{n}<\frac{\text{弧}AB}{\text{弧}A'B'}<\frac{m+1}{n}$

故ニ　$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}\sim\frac{\text{弧}AB}{\text{弧}A'B'}<\frac{1}{n}$

ココニ $\frac{1}{n}$ ハ如何程デモ零ニ接近セシメルコトガ出來ル。

故ニ一定ノ値ヲ有スル二ツノ比ノ差ハ亦一定ニシテコレガ零ニ如何程デモ近迫セシメ得ラレル數ヨリ更ニ小デアラネバナラヌ。

故ニ　$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}\sim\frac{\text{弧}AB}{\text{弧}A'B'}=0$　即チ　$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{\text{弧}AB}{\text{弧}A'B'}$

定理二 二ツノ圓ニ於ケル扇形ノ面積ノ比ハコレニ屬スル弧ノ長サノ比ニ等シイ。

證明略スル。

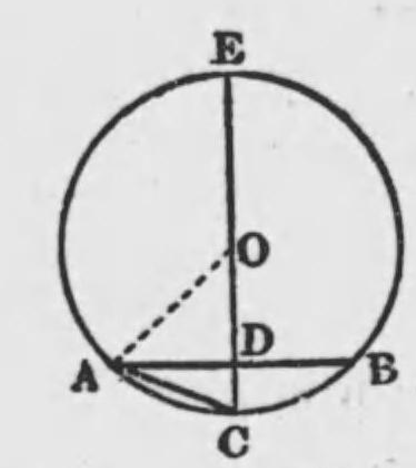
故ニ上ノ二ツノ定理カラ扇形ヲ OAB トシ，ソノ弧ノ測度 l, 半徑ヲ r, 扇形 OAB ノ面積ヲ S トスレバ

$S:\pi r^2=l:2\pi r$

故ニ　$S=\frac{\pi r^2\times l}{2\pi r}=\frac{lr}{2}$

問題五十九

1. AB ヲ圓 O ノ內接正多角形ノ一邊トシ，コレニ垂直ナル直徑 CE ヲ引クト弦 AC ハ 2 倍邊數ノ內接正多角形ノ一邊デアル。



弧 BC＝弧 AC

故ニ　$\angle ACD=\angle AEC$

故ニ AC ハ圓 ADE ニ切スル。

故ニ　$AC^2=E\cdot CD$

ココニ　$CE=2r$,　$CD=r-OD$

及ビ　$OD^2=OA^2-AD^2=OC^2-\frac{1}{4}AB^2$　　故ニ　$OD=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$

故ニ　$a'^2=\left(r-\sqrt{r^2-\frac{1}{4}a^2}\right)\times 2r$

依ツテ　$a'=\sqrt{r(2r-\sqrt{4r^2-a^2})}$

2. 與ヘラレタ二ツノ圓ノ半徑ヲ夫々 r, r' $(r>r')$ トシ周ノ和及ビ差ヲ周トスル求メル圓ノ半徑ヲ夫々 R, R′ トスレバ

$$2\pi R=2\pi r+2\pi r' \quad 及ビ \quad 2\pi R'=2\pi r-2\pi r'$$

故ニ　$R=r+r'$　及ビ　$R'=r-r'$

依ツテ兩圓ノ半徑ノ和及ビ差ヲ半徑トスル圓周ガ求メル圓周デアル。

3. 半徑 r, 中心角 $x°$ デアル扇形ノ弧ノ長サヲ l トシ，ソノ面積ヲ S トスレバ同圓又ハ等圓ニ於イテ中心角ノ比ハコレニ對スル弧ノ比ニ等シイカラ

$$l:2\pi r=x°:360° \qquad 故ニ \quad l=\frac{\pi r x°}{180°}$$

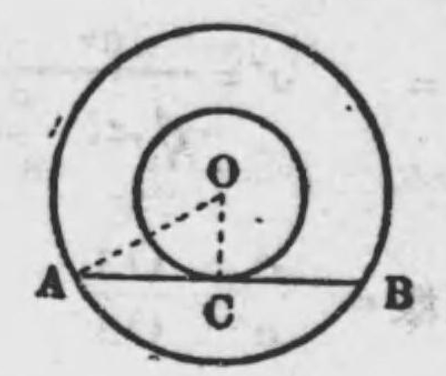
又　$$S=\pi r^2=x°:360° \qquad 故ニ \quad S=\frac{\pi r^2 x°}{360°}$$

4. 內圓ニ點 C ニ於イテ切スル弦ヲ AB トシ，OA, OC ヲ結ブト

$$AC^2=OA^2-OC^2 \qquad (1)$$

然ルニ圓環ノ面積ハ

$$\pi OA^2-\pi OC^2=\pi(OA^2-OC^2) \qquad (2)$$



(1), (2) カラ　圓環ノ面積$=\pi AC^2$

即チ AB ヲ直徑トシタ圓ノ面積ハ同心圓ノ間ニ夾マレル圓環ノ部分ノ面積ニ等シイ。

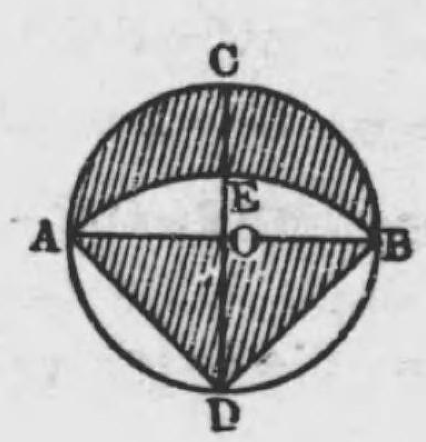
補　充　問　題

1. 二ツノ圓ノ面積ノ比ハコレニ內接又ハ外接ス同邊數ノ正多角形ノ相似比ノ自乘比ニ等シイ。

2. 半徑 r ナル四分圓ニ內接スル圓ノ半徑ヲ表ハス公式ヲ作レ。

$R=(\sqrt{5}+1)r$

3. 圓 O ニ於イテ互ニ垂直ナル直徑ヲ AB, CD トスル。D ヲ中心トシテ DA ヲ半徑トスル弧 AEB ヲ畫クトキハ新月形 ACBE ハ △ADB ト等積デアル。



4. 半徑 r ナル圓ニ於イテ 120° ノ角ヲ含ム弓形ノ面積ヲ求メヨ。

弓形$=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

5. 半徑ガ r デアル圓ニ內接又ハ外接スル同邊數ノ正多角形ノ一邊ヲ夫々 a, a' トスレバ

$$① \quad a'=\frac{ar}{\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}} \qquad ② \quad a=\frac{a'r}{\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}}$$

證明　AB ヲ內接正多角形ヲ一邊トシ，コレニ垂直ナル半徑 OCC′ ヲ引キ，C′ ニ於ケル切線ヲ引キ OA, OB ノ延長トノ交點ヲ夫々 A′, B′ トスレバ A′, B′ ハ同邊數ノ內接正多角形ノ一邊デアル。

ココニ　$AB=a$, $A'B'=a'$, $OA=r$

$$\triangle A'CB' \backsim \triangle AOB \quad カラ \quad \frac{a'}{a}=\frac{r}{OC}$$

然ルニ　$OC^2=OA^2-AC^2=r^2-\frac{a^2}{4}$

故ニ　$$a'=\frac{ar}{\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}}$$

同樣ニ　$\frac{a}{a'}=\frac{OA}{OA'}$　カラ　$a=\frac{a'r}{\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}}$

6. 半徑 r ナル圓ノ內接正八角形ノ周圍ハ $8\sqrt{2-\sqrt{2}}R$ デアル。

第六章　鋭角三角函數

本書デハ三角函數ノ中デモ特ニ鋭角ノ三角函數ダケヲ授ケ，三角形ノ解法モ直角三角形ニ就イテノミ授ケル。

本章ニ於イテハ相似三角形ニ關スル定理及ピぴたごらすノ定理等ノ應用トシテ三角函數ノ基本概念ヲ授ケ，測量上ヘノ應用ハ勿論理論數學ノ基礎タラシメルノガ主眼デアル。

困難ナ恒等式ノ證明等ハ要求セズ三角函數ノ眞數表ノ利用，直角三角形ノ解法ニ基ヅク實際問題ノ研究ニ力ヲ入レル。

教授時間ノ關係モアラウガナルベク教科書ニアル問題解法ダケニ止マラズ，とらんしつとノ使用法ヲ授ケル他，實地測量等ヲ課スガヨイ。

ナホ三角函數ノ重要ナル點ハ代數學ト幾何學トヲ融合シコレ等ノ智識ヲ總括スル役目ヲナスコトデアル。

又函數思想ノ養成ノ上ニモ輕視ヲ許サヌモノガアル。

79.　三角函數 (233 頁)

三角函數ノ起原ハ希臘ノ天文學者ぴつぱるこす (Hipparchus; B.C. 190—125) ガ鼻祖デアルト云ハレテキルガ，三角法ノ研究デハ印度人モばびろにや人モ天文學研究ノ道具トシテ古クカラ價値ヅケラレタノデアル。

ぴつぱるこすハ觀測ヲ基礎ニシテ天文學上ノ現象ヲ解釋シ，太陽，月ノ運動ヲ研究シ球面三角法デモ研究シタ人デアル。

即チ倍弧ノ弦ノ半分ガソノ弧ニ立ツ中心角ノ正弦デアルコトカラ始マリ，初メ圓ノ倍弧ノ弦ニ就イテ研究シタヤウデアル。

正弦ノ起原ハ甚ダ古ク弦ヲ婆羅門ノ言葉デ jyâ 或イハ jiua ト呼ンダコトカラ起ル。

あらびや人ハコレ等ノ語ヲ Dschiba ト譯シ，後ニハコレニ類字ノ文字 Dschaib ニ置キ換ヘラレタ。カヤウニ變ツテちうおりノぷらとーニヨツテ

Sinus (灣曲ノ意) ト譯サレ今日ノ Sine トナツタノデアル。

又 Cosine ハ Complementary Sine 即チ餘角ノ正弦ノ意味デアツテ正切ト共ニ古ク印度ニ於イテ用ヒラレタコトヲ知ル。

問 1.　$\triangle ABC$, $\triangle AB'C'$, $\triangle AB''C''$ ハ互ニ相似デアルカラ對應邊ノ比ヲ求メルト題意ノ通リノ式ヲ得ル。

本題ニ於イテ $\angle A$ ガ一定デアレバコレ等ノ比ノ値モ一定デ $\angle A$ ガ變レバ比ノ値モ變ハルコトヲ注意スルガヨイ。

［注意 1］　コノ比ヲ $\angle A$ ノ**三角比**トモイフ。

［注意 2］　角 A ノ三角函數トハ通常次ノ六ツヲ云フ。

$\sin A$(正弦)，　$\cos A$(餘弦)，　$\tan A$(正切)，　$\cot A$(餘角)，　$\sec A$(正割)，　$\operatorname{cosec} A$(餘割)

本書デハ $\sin A$, $\cos A$, ton A, $\cot A$ ダケヲ示シテアル。

問 2.　次ニ主要ナル角ノ三角函數ノ値ヲ示ス。

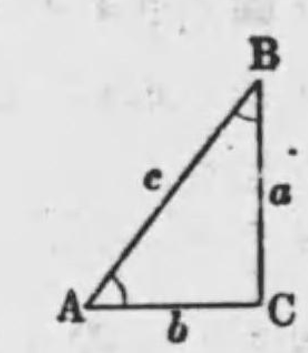
函數＼角	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

問 3.　C ヲ直角ノ頂點トスル直角三角形 ABC ノ三邊ヲ a, b, c トスルト

① $\sin A=\dfrac{a}{c}=\cos B=\cos(90°-A)$

② $\cos A=\dfrac{b}{a}=\sin B=\sin(90°-A)$

③ $\tan A=\dfrac{a}{b}=\cot B=\cot(90°-A)$



(1), (2), (3) カラ夫々次ノヤウニ變形出來ル。

④ $\sin(45^\circ+\alpha)=\cos\{90^\circ-(45^\circ+\alpha)\}=\mathrm{soc}(45^\circ-\alpha)$

⑤ $\cos(45^\circ+\alpha)=\sin\{90^\circ-(45^\circ+\alpha)\}=\sin(45^\circ-\alpha)$

⑥ $\tan(45^\circ+\alpha)=\cot\{90^\circ-(45^\circ+\alpha)\}=\cot(45^\circ-\alpha)$

⑦ $\cot(45^\circ-\alpha)=\tan\{90^\circ-(45^\circ+\alpha)\}=\mathrm{ton}(45^\circ-\alpha)$

[注意] 以上ノ各題ハ定理トシテ記憶スルトヨイ。

問 4.

① $\sin 45^\circ \cos 30^\circ+\cos 45^\circ \sin 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\underline{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}$

② $\sin 60^\circ+\cos 30^\circ+\tan 60^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\underline{\frac{1+3\sqrt{3}}{2}}$

③ $\frac{\tan 30^\circ+\tan 45^\circ}{1+\tan 30^\circ \tan 45^\circ}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\times 1}=\underline{1}$

④ $\cot 30^\circ+\cot 60^\circ=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\underline{\frac{4}{\sqrt{3}}}$

80. 三角函數ノ眞數表 (239 頁)

各函數ノぐらふヲ畫カセテソノ變化ノ模樣ヲ研究セシメルコトハ望マシイコトデアル。(本教授資料 200 頁參照)

問 題 六 十

1. $(\sin A)^2$, $(\cos A)^2$, $(\tan A)^2$ ヲ夫々 $\sin^2 A$, $\cos^2 A$, $\tan^2 A$ ト記スコトヲ授ケル。

① 直角三角形 ABC ノ三邊ニぴたごらすノ定理ヲ應用スルト

$$a^2+b^2=c^2$$

コノ兩邊ヲ夫々 C^2 デ割レバ $\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$

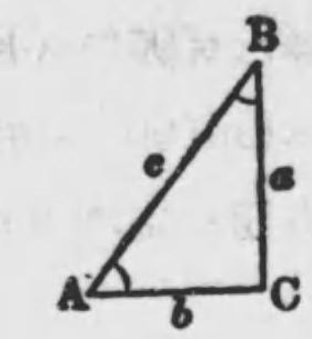
故ニ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$

同樣ニ b^2 デ割ルト $\left(\frac{a}{b}\right)+1=\left(\frac{c}{b}\right)^2$

故ニ $\tan^2 A+1=\sec^2 A$

② $\sin A=\frac{A}{C}$, $\cos A=\frac{b}{c}$ デアルカラ

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{\sin A}{\cos A}$$



③ 上ノ.②ト同樣ニ

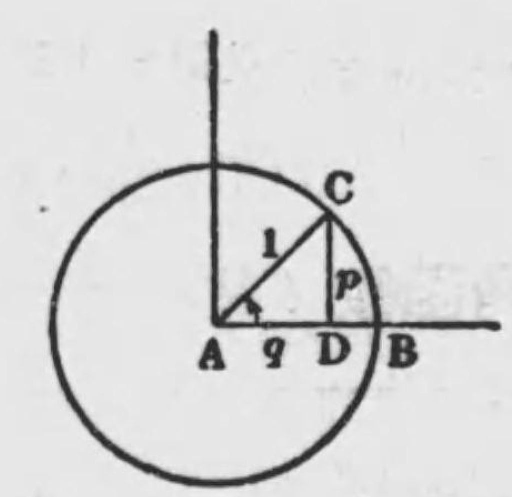
$$\cot A=\frac{b}{a}=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=\frac{\cos A}{\sin A}$$

2. ① $\sin A$, $\cos A$ ノ變化。

角 A ノ頂點 A ヲ中心トシテ單位ノ長サヲ半徑シトスル圓(**單位圓**トイフ)ヲ畫キ角ノ二邊トノ交點ヲ B, C トシ C ヨリ垂線 CD ヲ引クト

$$\sin A=\frac{CD}{AC}=\frac{p}{1}=p$$

$$\cos A=\frac{AD}{AC}=\frac{q}{1}=q$$

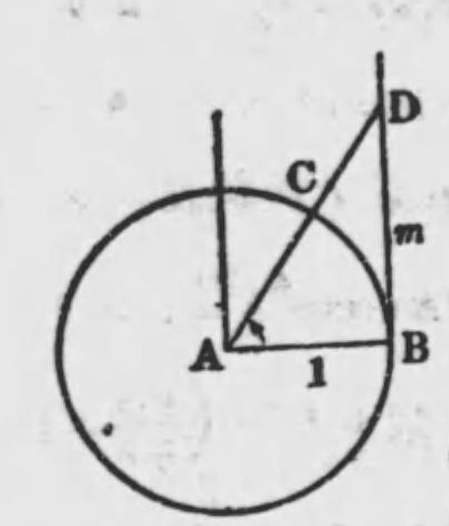


依ツテ ∠A ガ 0° カラ 90° マデ次第ニ增大スレバ p ハ零カラ次第ニ增大シ 1 ニ近ヅク，コレニ伴ツテ q ハ次第ニ減少シ零ニ近ヅク。

② $\tan A$ ノ變化。

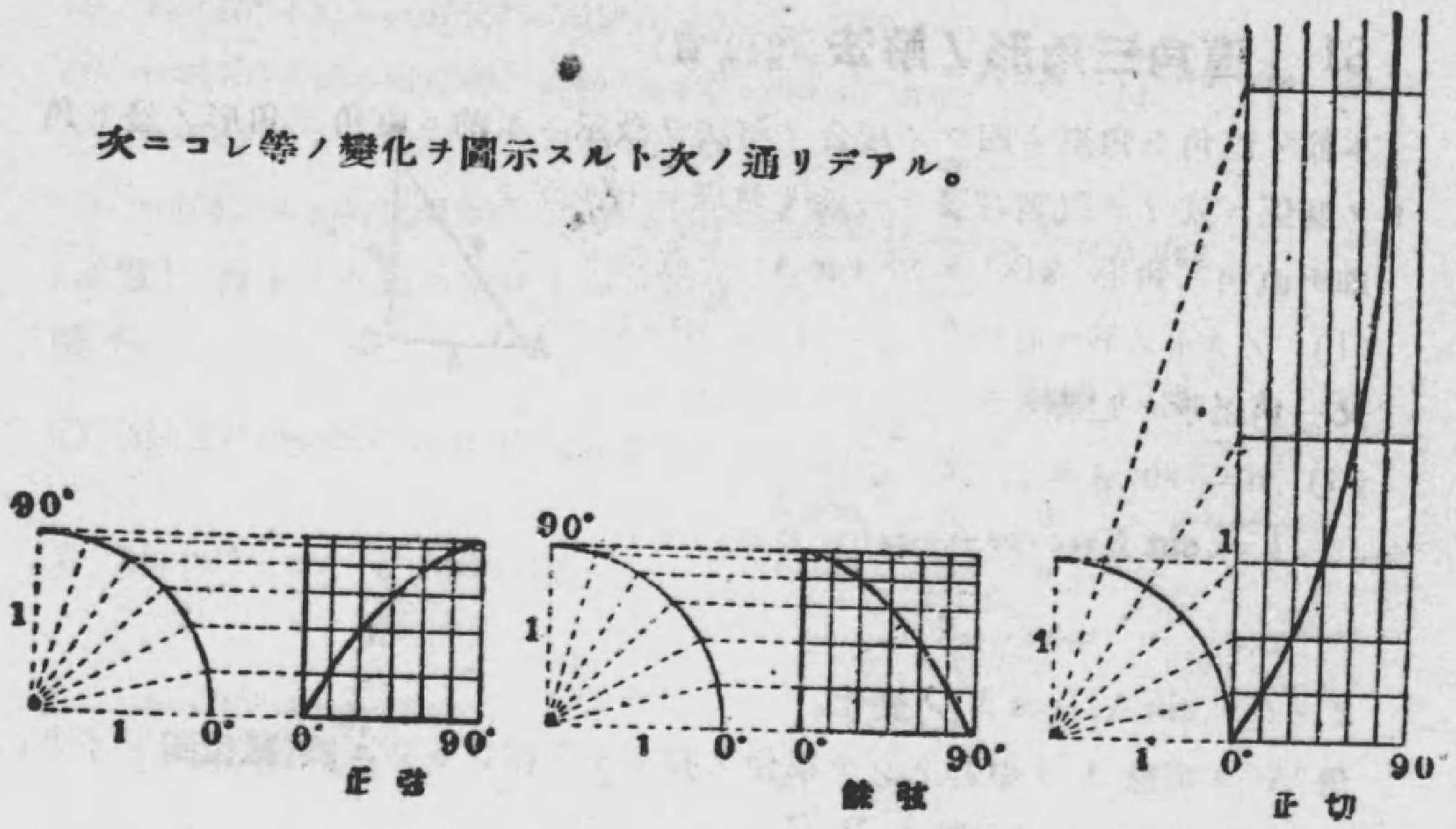
上ノ ① ト同樣ニ單位圓ヲ畫キ圖ノ如ク $BD=m$ トスレバ

$$\tan A=\frac{BD}{AB}=\frac{m}{1}=m$$



依ツテ ∠A ガ 0° カラ 90° マデ次第ニ增大スレバ m ハ O カラ次第ニ增大シ 90° ニ近ヅクニ伴ツテ如何程デモ大トナル。即チ ∞ トナル。

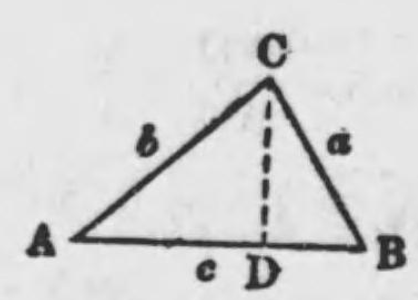
次ニコレ等ノ變化ヲ圖示スルト次ノ通リデアル。



3. 頂點 C カラノ垂線ヲ CD トスルト $\mathrm{CD}=b\sin\mathrm{A}$ デアルカラ

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\mathrm{AB.CD}=\frac{1}{2}c\times b\sin\mathrm{A}$$

$$=\frac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}$$



他モ同樣デアル。

4. ① $\sin x=\frac{7}{15}$ ヨリ

$\sin x=0.466\cdots\cdots\cdots$

故ニ三角函數ノ眞數表カラ　$x=27.\cdots\cdots$

答 $28°$

② $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ヨリ

$\cos x=0.866\cdots\cdots\cdots$

故ニ三角函數ノ眞數表カラ　$x=30°$

答 $30°$

③ $\tan x=\frac{\sqrt{10}}{2}$ ヨリ

$\tan x=\frac{316225.}{2}\cdots\cdots=1.58112\cdots\cdots$

故ニ三角函數ノ眞數表カラ　$x=57°$

答 $57°$

81. 直角三角形ノ解法 (242 頁)

本節ノ直角三角形ノ四ツノ場合ノ解法ヲ教示スル前ニ直角三角形ノ邊ト角トノ關係ニ就イテ既習智識ヲ一通リ整理サセルガヨイ。

即チ直角三角形 ABC ニ於イテ C ヲ直角トスルト

〔1〕 $\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{B}=$直角　　〔2〕 $a^2+b^2=c^2$

又三角函數ノ定義カラ次ノコトガワカル。

〔3〕 $a=c\sin\mathrm{A}=l,\quad c\cos\mathrm{B}=l\tan\mathrm{A}=b\cos\mathrm{B}$

$b=c\sin\mathrm{B}=c\cos\mathrm{A}=a\tan\mathrm{B}=a\cot\mathrm{A}$

$$c=\frac{a}{\sin\mathrm{A}}=\frac{a}{\cos\mathrm{B}}=\frac{b}{\sin\mathrm{B}}$$

問題六十一

1. ① $\mathrm{A}=25°,\ \mathrm{C}=5m$ ナル故

$\angle\mathrm{B}=90°-25°=\underline{75°}$

$a=c\sin\mathrm{A}=5\times\sin 25°=5\times0.4226=\underline{2.113}$

$b=c\sin\mathrm{A}=5\times\cos 25°=5\times0.9\text{.}63=\underline{4\ 5315}$

答 $\mathrm{B}=75°,\ a=2.11(m),\ b=4.53(m)$

② $c=20(m),\ n=4(m)$ ナル故

$\sin\mathrm{A}=\frac{a}{c}=\frac{4}{20}=0.2$　コレヨリ　$\mathrm{A}=\underline{12°}$

$\mathrm{B}=96°-\mathrm{A}=\underline{78°}$

$b=c\cos\mathrm{A}=20\times\cos 12^2=20\times0.9781=\underline{19.562}$

答 $\mathrm{A}=12°,\ \mathrm{B}=78°,\ b=19.56(m)$

③ $a=8(m),\ b=10(m)$ ナル故

$\tan\mathrm{A}=\frac{a}{b}=\frac{8}{10}=0.8$ ヨリ $\mathrm{A}=\underline{39°}$

$\mathrm{B}=90°-\mathrm{A}=\underline{51°}$

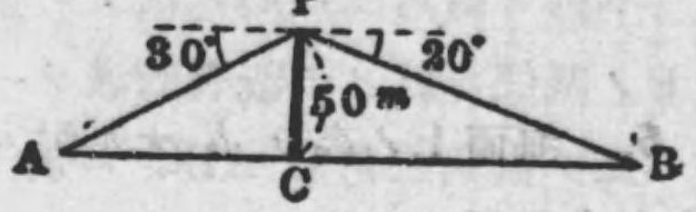
$\mathrm{C}=\frac{a}{\sin\mathrm{A}}=\frac{8}{\sin 39°}=\frac{8}{0.6293}=\underline{12.71}$

答 $\mathrm{A}=39°,\ \mathrm{B}=51°,\ \mathrm{C}=12.71(m)$

2. 燈臺ヲ PC トシ俯角ガ夫々 30°, 20° ナル二船ヲ A, B トスルト

$AC = PC \times \tan\angle APC = 50 \times \tan 60°$

$= 50 \times \sqrt{3}$



$BC = PC \times \tan\angle BPC = 50 \times \tan 70°$

$= 50 \times 2.7475$

故＝　$AB = 50 \times \sqrt{3} + 50 \times 2.7475 = 50 \times 4.4975 = 22.4875 \cdots\cdots$

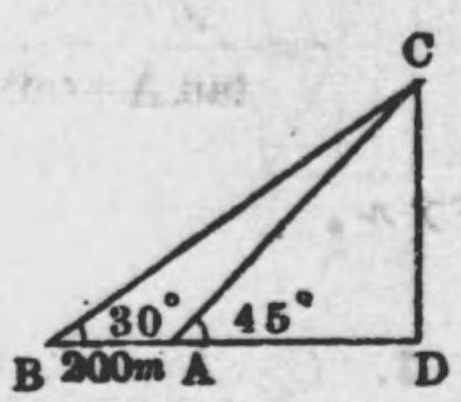
答　約 22.5m

3. CD ナル塔ノ頂點ヲ C トシ 45°, 30° ノ仰角ヲ示ス二地點ヲ夫々 A, B トスルト

$AB = 200(m)$,　$AD = CD \cot 45°$

$BD = CD \cot 30° - CD \cot 45°$

故＝　$AB = CD \cot 30° - CD \cot 45°$



依ツテ　$CD = \dfrac{200}{\cot 30° - \cot 45°} = \dfrac{200}{\sqrt{3}-1}$

$= \dfrac{200(\sqrt{3}+1)}{2} = 273.2 \cdots\cdots$

答　約 273(m)

［注意］建物ノ屋根又ハ坂道ノ傾斜ノ度合ヲノ＝示ス勾配ナル言葉ヲ用ヒコトガアル。

傾斜線ガ水平線トノナス角ノ正弦ヲソノ傾斜線ノ勾配トイフ。

例ヘバ鐵道線路等＝於イテ $\dfrac{1}{60}$ ノ上リ勾配トハ 60m ノ線路＝對シ 1m ノ割＝上ルコトヲ云フ。

補　充　問　題

1. 次ノ關係ヲ證明セヨ。

① $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$　　② $\cot A = \dfrac{1}{\tan A}$

2. $\sin A = \dfrac{3}{4}$ 及ビ $\tan B = \dfrac{4}{3}$ ナル角 A 及ビ角 B ヲ作圖セヨ。

3. 次ノ各式＝適スル角 x ヲ求メヨ。

① $\sin x = \cos 60°$　　② $\cos x = \sin 45°$

③ $\tan 8x = \cot 7x$

4. 直角三角形＝於イテ $A = 60°$, $b = 9(m)$ ナルトキコノ三角形ヲ解ケ。

答　$a = 9\sqrt{3}$,　$c = 18(m)$,　$B = 30°$

5. 海面上ノ高サ h ナル點＝於イテ俯角ヲ θ トスレバ地球ノ半徑 r ハ次ノ式デ示サレル。

$$r = \frac{h\cos\theta}{1-\cos\theta}$$

6. $\angle C = 90°$ ナル △ABC ＝於イテ A, B, C ノ對邊ヲ夫々 a, b, c トスレバ

$$\tan A + \tan B = \frac{c^2}{ab}$$

デアル。

雜 題 五

1. BP : PC=AB : AC=c : b

故ニ $\frac{BP}{c}=\frac{PC}{b}=\frac{BP+PC}{c+b}=\frac{a}{c+b}$

依ツテ $PC=\frac{ab}{c+b}$ (1)

又 BQ : QC=AB : AC=c : b

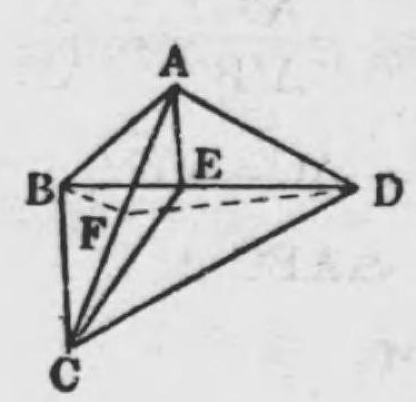
依ツテ $\frac{BQ}{c}=\frac{CQ}{b}=\frac{BQ-CQ}{c-b}=\frac{a}{c-b}$ ($c>b$ トス)

故ニ $CQ=\frac{ab}{c-b}$ (2)

(1), (2) ヨリ $PQ=PC+CQ=\frac{ab}{c+b}+\frac{ab}{c-b}=\frac{2abc}{c^2-b^2}$

2. 四邊形 ABCD ノ ∠A, ∠C ノ二等分線ガ對角線 BD 上ノ點 E ニ於イテ交ハルトスルト

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BE}{ED}=\frac{AD}{CD}$$



故ニ $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}$

∠B ノ二等分線ガ AC ト交ハル點ヲ F トスレバ

$\frac{AB}{BC}=\frac{AF}{FC}$ 故ニ $\frac{AD}{DC}=\frac{AF}{FC}$

依ツテ ∠D ノ二等分線ハ F ヲ通ル。即チ ∠B, ∠D ノ二等分線ハ AC 上ノ一點ニ於イテ相交ハル。

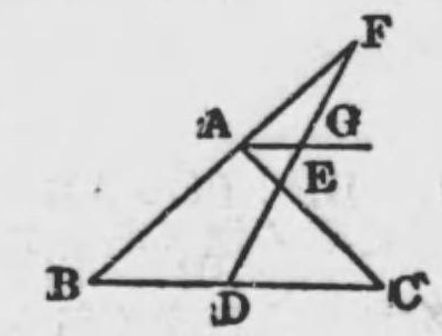
3. 四點 B, C, D, E ハ BC ヲ直徑トスル圓周上ニアル。

依ツテ △ADE, △ABC ニ於イテ

∠B=∠ADE, ∠A ハ共通

故ニ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$ デアル。

4. AG ∥ BC デアルカラ $\triangle AEG \backsim \triangle CED$



故ニ EG : ED=AG : CD (1)

又 △BDF ニ於イテ AG ∥ BD デアルカラ

FG=FD=AG : BD (2)

(1), (2) カラ EG : ED=FG : FD デアル。

5. OO′⊥AD デアル。故ニ ∠ABD=∠AOO′

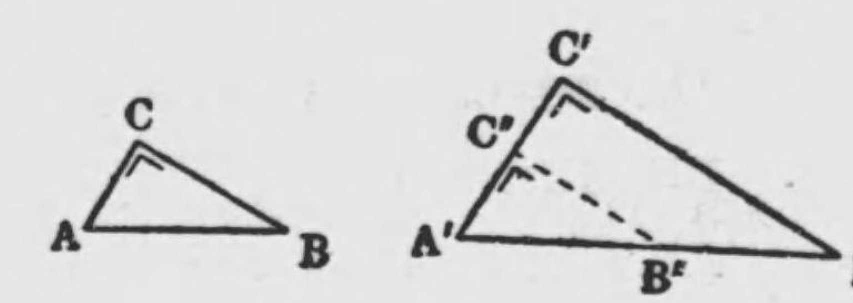
又 ∠ACD=∠AO′O, △AOO′, △ABC ハ二角夫々相等シイ。

依ツテ $\triangle AOO' \backsim \triangle ABC$ デアル。

6. △A′B′C′ ノ邊 A′C′ 上又ハソノ延長上ニ A′C″=AC ナル C″ ヲトリ C″ ヨリ B′C′ ニ平行ニ C″B″ ヲ引クト

$\triangle A'B'C' \backsim \triangle A''B''C''$

$\frac{A'C''}{A'B''}=\frac{A'C'}{A'B}$



又 $\frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'}$

故ニ $\frac{A'C''}{A'B''}=\frac{AC}{AB}$

然ルニ AC=A′C″ デアルカラ A′B″=AB デアル。

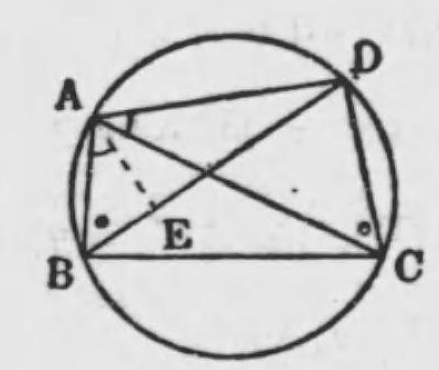
故ニ △ABC ト △A′B′C″ トハ共ニ直角三角形デ斜邊ト他ノ一邊ガ夫々相等シイ。

故ニ △ABC≡△A′B″C″

依ツテ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ デアル。

7. 圓ニ內接スル四邊形ヲ ABCD トシ, BD 上ニ一點 E ヲトリ ∠CAD=∠BAE ナラシメルト

$\triangle BAE \backsim \triangle CAD$



故ニ AB : BE=AC : CD

故ニ AB : CD=AC : BD

又 $\triangle ABC \backsim \triangle AED$

故ニ BC : CA=ED : DA

故ニ BC : DA=AC : ED

依ツテ $AB.CD+BC.DA=AC.BE+AC.ED$

$$=AC(BE+ED)$$
$$=AC.BD$$

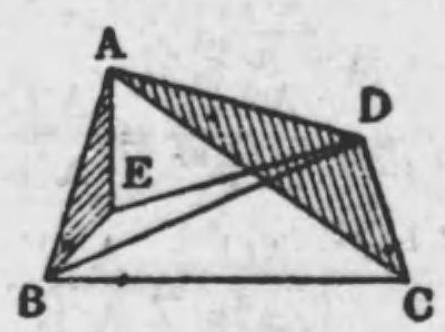
本定理ノ逆モ眞デアル。即チ

四邊形ノ對邊ノ包ム二ツノ矩形ノ和ガ對角線ノ包ム矩形ニ等シケレバコノ四邊形ハ圓ニ内接スル。

コノ證明トシテソノ對偶デアル次ノ事實ヲ證明スレバヨイ。

圓ニ内接セザル四邊形ノ對邊ノ包ム矩形ノ和ハ對角線ノ包ム矩形ニ等シクナイ。

證明 $\triangle ACD$ ニ相似ナ三角形 ABE ヲ圖ノ如ク作レバ $\angle ABD$ ト $\angle ACD$ トハ等シクナイカラ E ハ BD 上ニナイ。



上ト同樣ニシテ

$$AB.CD+BC.DA=AC(BE+ED)$$

然ルニ $BE+ED>BD$

故ニ $AB.CD+BC.DA>AC.BD$

[注意] 本題ノ應用トシテ雜題四ノ 3 及ビ次ノ問題等ヲ證明ナセルガヨイ。

圓ニ内接スル四邊形ノ對角線ガ直交スルトキハソノ四邊形ノ面積ハ二組ノ對邊ノ包ム矩形ノ和ノ半ニ等シイ。

等脚梯形 ABCD ノ兩底ヲ AD, BC トスレバ

$$AC^2=AB^2+AD.BC$$

デアル。

正五邊形 ABCD ノ外接圓ノ弧 EA 上ノ任意ノ一點ヲ P トスレバ

$$PA+PC+PE=PB+PD$$

[註] 四邊形 PABD, PBDE, PBCD ニとれみーノ定理ヲ用ヒル。

[注意] とれみー (Ptalemy; 85—165) ハ埃及ノ有名ナ天文學者デ紀元135年ニハあれきさんどりあニ活動シタ人デアル。

彼ハ Almagest ト Geograpbica トノ二書ヲ著シタ。Almagest ハ十三卷ヨリナリ三角法等ニ關シテモ論ジこぺるにかす (Copernicus; 1473–1543) ノ天文學ノ基礎ヲナシタモノデアル。

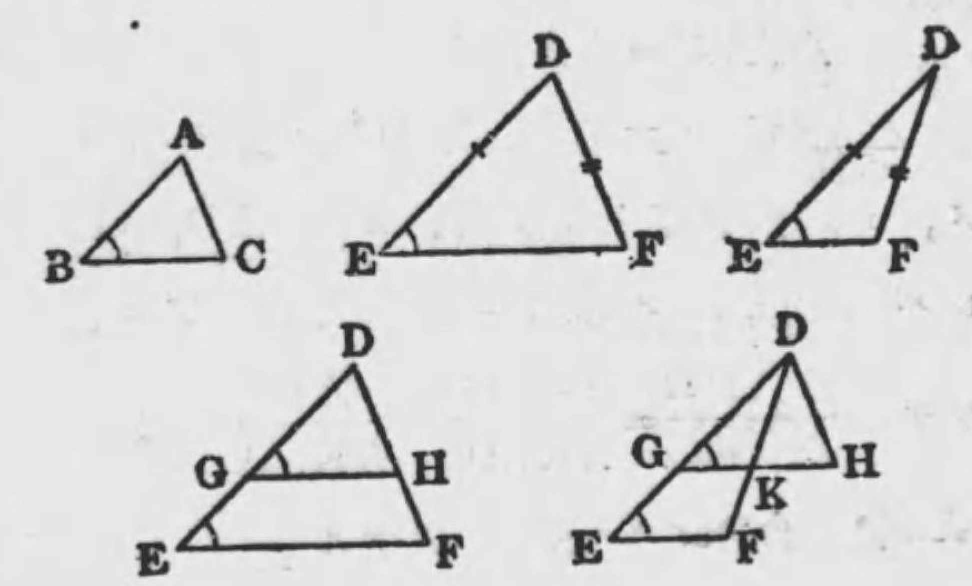
ナホ彼ハ Euclid ノ幾何學, Apollonius ノ圓錐曲線論, Nicomachus ノ算術等ニ關シテ各系統ヅケタ他, 數學ノ應用方面及ビ音樂等ニ就イテモ研究ヲナシタ。

8. とれみーノ定理ノ應用デアル。

上ノ 7 ヲ參照セラレタイ。

9. $\triangle ABC$ ヲ $\triangle DEF$ ノ上ニ重ネルニ AB ヲコレニ對應スル DE ニ合セシメ, A ト D トヲ重ネ, F ト C トハ DE ニ關シテ同ジ側ニ落チルヤウニスル。

然ルトキハ B ノ落チル位置ヲ G トスルト $\angle B=\angle E$ デアルカラ $BC \parallel EF$ トナル。



① 點 C ガ DF 上 (又ハ延長) ニ落チル場合。

C ガ落チル位置 H ガ DF 上ニアレバ

$$\angle C=\angle F$$

トナル。

② 點 C ガ DF 上 (又ハ延長) ニ落チナイ場合。

C ガ落チル位置 H ガ DF 上デナイ場合ハ GH 又ハソノ延長ト DF ノ交點ヲ K トスレバ $GK \parallel EF$ デアルカラ

$$\frac{DG}{DE}=\frac{DK}{DF} \qquad (1)$$

$$\frac{DG}{DE}=\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF} \qquad (2)$$

(1), (2) カラ $\dfrac{DK}{DF}=\dfrac{AC}{DF}$ 故ニ $DK=AC$

依ツテ $DK=DH$

故ニ $\triangle DKH$ ハ二等邊三角形デ $GK \parallel EF$ デアルカラ

$$\angle DHK+\angle DKG=\angle DHK+\angle DFE=2\angle R$$

依ツテ $\angle C+\angle F=2\angle R$ デアル。

[注意 1] $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於イテ $\angle B=\angle E$ ニシテ $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DE}{DF}$, H.

ツ ∠B, ∠E ガ共ニ鈍角ノ場合ニハコノ兩三角形ハ相似デアル。

[注意 2] 本題ノ特別ノ場合トシテ次ノ定理ヲ得ル。

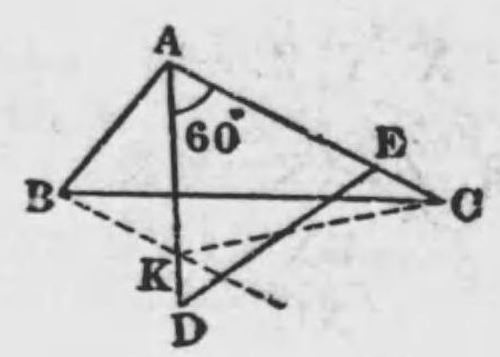
一ツノ三角形ノ二邊ガ他ノ三角形ノ二邊ト夫々相等シク且ツソノ一双ノ相等シイトキ他ノ邊ニ對スル角ガ相等シイ邊ニ對スル角ハ相等シイカ又ハ互ニ補角ヲナス。

10. 本題ノ豫備トシテ與ヘラレレ三角形ニ等積ナ二等邊三角形ノ作圖ヲ解カセルトヨイ。

與ヘラレタ三角形ヲ ABC トスル。

邊 AC ノ一端 A ヨリ B ト同ジ側ニ AC ト 60° ノ角ヲナス直線 AD ヲ引キ, B ヨリ AC ニ平行ナル直線 BK トノ交點ヲ K トスレバ

$$\triangle ABC=\triangle AKC$$



次ニ △AKC ノ二邊 AK, AC ノ比例中項ヲ求メ, コレヲ半徑トシテ A ヨリ AD, AE ヲトレバ △ADE ハ求ムル正三角形デアル。

依ツテ $\frac{\triangle ADE}{\triangle AKC}=\frac{AD.AE}{AK.AC}=\frac{AD^2}{AK.AC}=1$

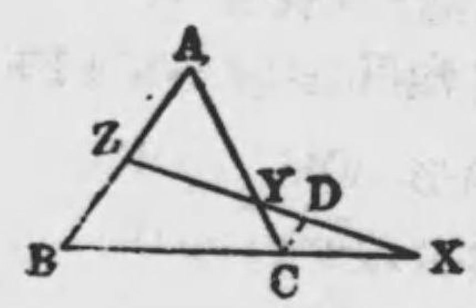
故ニ $\triangle ADE=\triangle AKC$ デアル。

[注意] 面積ニ關スル比例ノ作圖問題ハ屢比例中項ニ歸セラレル。

11. C ヲ通リ AB ニ平行線 CD ヲ引クト

$$\frac{BX}{XC}=\frac{BZ}{CD}$$

$$\frac{CY}{YA}=\frac{CD}{AZ}$$



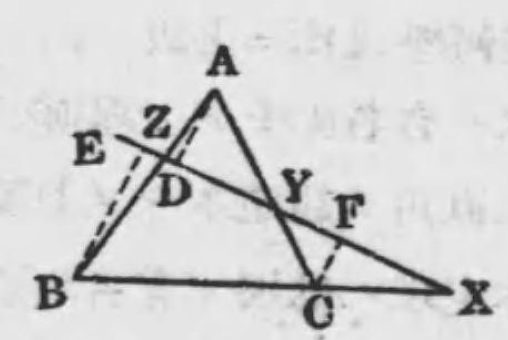
故ニ $\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=\frac{BZ}{CD}\cdot\frac{CD}{AZ}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$

別證 各頂點カラ截線ニ垂線ヲ引キ (平行線デヨイ) 各比ヲ線ノ比ニ移シテモヨイ。

即チ各頂點カラノ垂線ヲ AD, BE, CF トスレバ

$$\frac{BX}{XC}=\frac{BE}{CF},\quad \frac{CY}{YA}=\frac{CE}{AD}$$

$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{AD}{BE}$$



故ニ $\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=\frac{BE}{CF}\cdot\frac{CF}{AD}\cdot\frac{AD}{BE}=1$

本題ニ於イテ截線ハ共ニ三邊ヲ外分スルカ, 二邊ダケヲ內分シ他ヲ外分スルカデアル。

總テ延長上ヲ截ル場合ノ證明モ問フガヨイ。

次ノ 12 番ニ就イテモ同樣デアル。

ナホ分點ト比ノトリ方ニ就イテ注意ヲ與ヘラレタイ。

めねらうすノ定理ノ逆

. △ABC ノ三邊 BC·CA·AB (又ハ延長) 上ニ夫々 XYZ ヲトリ

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

ナラバ X, Y, Z ハ同一直線上ニアル。

證明 ZY (又ハ延長上) ガ AB ト Z′ デ交ハルトスレバ, 本定理ニヨリ

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ'}{Z'B}=1$$

然ルニ $\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$

故ニ $\frac{AZ'}{Z'B}=\frac{AZ}{ZB}$　　故ニ Z′ ハ Z ト合スル。

逆ノ應用トシテ次ノ問題等ヲ與ヘラルガヨイ。

三角形 ABC ノ ∠A ノ外角ノ二等分線ガ對邊ト交ハル點ヲ X, ∠B, ∠C ノ二等分線ガ對邊ト交ハル點ヲ夫々 Y, Z トスレバ, 三點 X, Y, Z ハ一直線上ニアル。

[注意] めねらうす (Menelaus) ハ紀元 100 年頃ニ生存シタ希臘ノ天文學者兼數學者デアル。

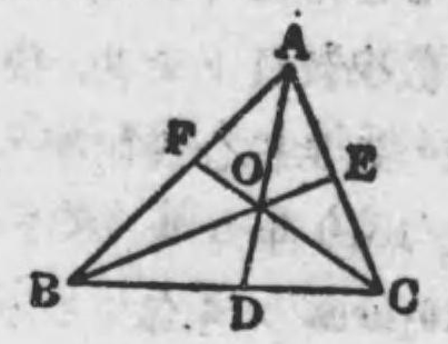
幾何學及ビ三角法ニ關スル著書ガアル。特ニ球面三角法ノ幾何學的性質ノ研究ハ有名ナモノデ球面三角形ノ三邊ノ和ハ大圓ヨリ小サルコト, 三角ノ和ハ二直角ヲ超過スルコト等ガアル。

本定理ハ佛國ノ有名ナ數學者かるのー (Carnot; 1753—1823) ガ近世綜合幾何學ノ基礎定理ノ一ツトシタモノデアル。

12. AD, BE, CF ノ交點ヲ O トスレバ

$$\frac{BD}{DC}=\frac{\triangle ABD}{\triangle ACD}=\frac{\triangle OBD}{\triangle OCD}$$

故ニ $$\frac{BD}{DC}=\frac{\triangle AOB}{\triangle AOC} \quad (1)$$



同樣ニ $$\frac{CE}{EA}=\frac{\triangle BOC}{\triangle AOB} \quad (2)$$

$$\frac{AF}{FB}=\frac{\triangle AOC}{\triangle BOC} \quad (3)$$

(1), (2), (3) ヲ邊々相乘ズレバ

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

ちえばーノ定理ノ逆

△ABC ノ三邊 BC, CA, AB (又ハ延長上) ニ夫々 D, E, F ヲトルトキ

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

ナラバ三點 D, E, F ハ同一點ニ集交スル。

證明 AD, BE ノ交點ヲ O トシ, CO ガ AB ト交ハル點ヲ F′ トスレバ本定理ヨリ

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF'}{F'B}=1$$

然ルニ $$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

故ニ $$\frac{AF'}{F'B}=\frac{AF}{FB}$$

依ツテ $AF'=AF$

故ニ F′ ハ F ト合スル。

逆ヲ應用シテ次ノ問題等ヲ與ヘルガヨイ。

圓ニ外接スル三角形ノ各邊ノ切點ト對角頂トヲ結ブ直線ハ同一ノ點ニ於イテ相交ハル。

コノ交點ヲソノ三角形ノ **Gergonne 點**トイフ。

[注意] ちえばー (Ceva; 1648—1736) ハ伊太利ノ幾何學者デ, 初メ水力機

關士デアツタガ後經濟學者トシテ知ラレ, 數學上ノ著書ガアル。

1678 年ニ公ニシテ書中ニ本定理ガ含マレテヰル。

ぜるごんぬ (Gergonne; 1771—1859) ハ佛國ノ數學者デ砲兵中尉ヨリ中學校ノ數學教員トナリ, 後ニもんぺりえーノ教授ニナツタ。

彼ハ近世綜合幾何學ニ貢獻スルトコロ多イ。

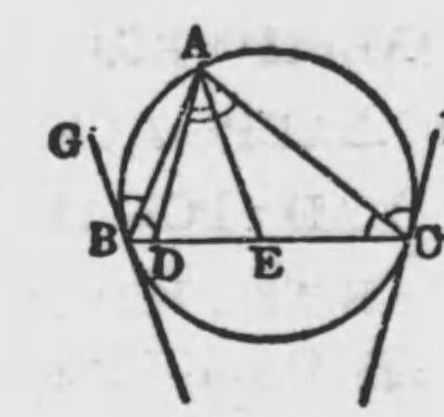
又 1810 年ヨリ 1831 年マデ數學雜誌 Annales des mathematigues et appliquees ノ主筆トシテ數學史上ニ知ラレテヰル。

13. B 及ビ C ニ於ケル切線ヲ夫々 BG 及ビ CH トスルト

△ABE ト △CAD トニ於イテ

$$\angle ABE=\angle ACH=\angle CAD$$
$$\angle BAE=\angle ABG=\angle ACB$$

故ニ $\triangle ABE \backsim \triangle CAD$



故ニ $$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{\triangle ABE}{\triangle CAD}$$

然ルニ兩三角形ハ等高デアルカラ

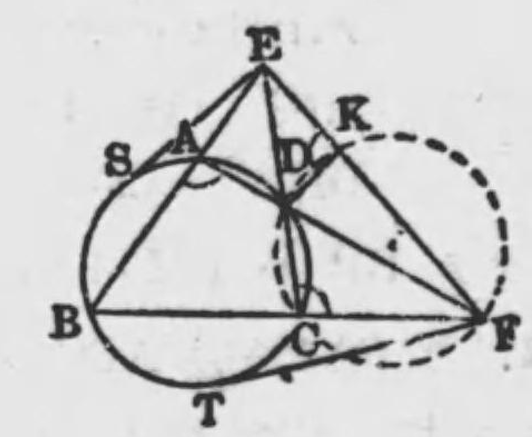
$$\frac{\triangle ABE}{\triangle CAD}=\frac{BE}{CD}$$

依ツテ $\dfrac{BE}{CD}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$ デアル。

14. △CDF ノ外接圓ガ EF ト交ハル點ヲ K トスレバ

$$\angle BAD=\angle DCF=\angle DKE$$

依ツテ四點 A, D, K, E ハ同一圓周上ニアル。



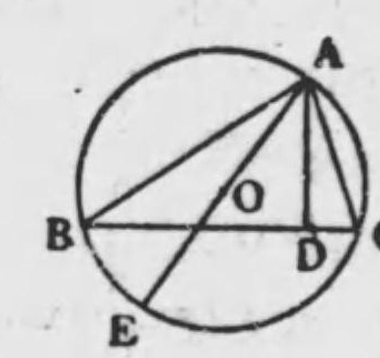
$$ES^2=ED\cdot EC=EK\cdot EF$$

又 $$FT^2=FD\cdot FA=FK\cdot FE$$

故ニ邊々加ヘテ

$$ES^2+FT^2=EK\cdot EF+FK\cdot FE$$
$$=EF(EK+FK)=EF^2$$

15. △ABC ノ外接圓ヲ O トシ AD ヲ高サ, AE ヲ直徑トスレバ



$$\triangle ABE \backsim \triangle ADC$$

故ニ $AB:AD=AE:AC$

故＝ $AB : AC = AD : AE$ デアル。

［注意］ 定理トシテ記憶サセルガヨイ，ナホ本題ノ應用トシテ次ノ問題ヲ與ヘルガヨイ。

① 定圓周上ノ定點 A ヲ中心トシ圓ヲ畫キ，コノ圓ニ切スル元ノ圓ノ弦 BC ヲ引ケバ BC ノ方向ニ關セズ弦 AB, AC ノ包ム矩形ノ面積ハ定量デアル。

② △ABC ノ邊 BC (又ハ延長) 上ノ點ヲ D トスレバ △ABD, △ACD ノ外接圓ノ直徑ノ比ハ $AB : AC$ ＝等シイ。

16. 15 ノ定理ノ應用デアル。

圓ノ直徑ヲ d トシ，A, C ヨリ對角線 BD ＝夫々垂線 AE, CF ヲ引クト

$$AB \cdot AD = d \cdot AE$$
$$BC \cdot CD = d \cdot CF$$

故＝ $AB \cdot AD : BC . CD = d \cdot AE : d \cdot CF = AE : CF$

然ル＝ $\triangle AEP \backsim \triangle CFP$ ヨリ

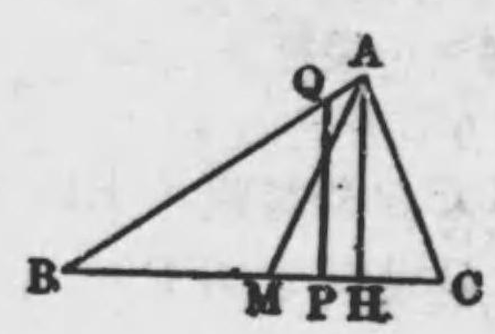
$$AD : PC = AE \quad CF$$

故＝ $AB \cdot AD : BC \cdot CD = AP : PC$ デアル。

17. BC ＝垂直ナル所要ノ直線ヲ PQ トシ A ヨリ垂線，中線ヲ夫々 AH, AM トスレバ $(AB>AC)$

$$\frac{\triangle BPQ}{\triangle BHA} = \frac{BP^2}{BH^2}$$

$$\frac{\triangle BAM}{\triangle BHA} = \frac{BM}{BH} = \frac{BM \cdot BH}{BH^2}$$



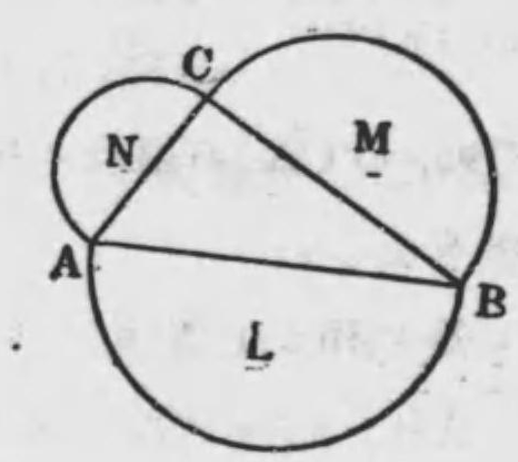
故＝ $\dfrac{BP^2}{BH^2} = \dfrac{BM \cdot BH}{BH^2}$ 故ニ $BP^2 = BM \cdot BH$ デアル。

依ツテ BP ハ BM ト BH トノ比例中項トシテ求メ得ル。

18. 直角三角形 ABC ノ AB ヲ斜邊トシ三邊 AB, BC, CA ヲ夫々直徑トスル半圓ノ面積ヲ L, M, N トスル。

$AC^2 + BC^2 = AB^2$ デアルカラ

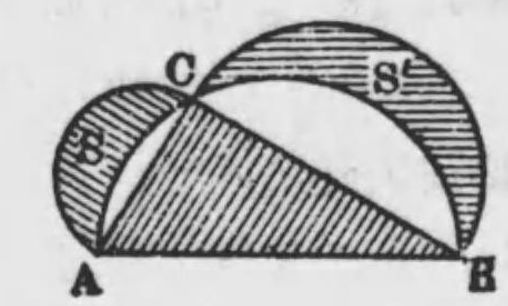
$$N+M = \frac{1}{8}\pi AC^2 + \frac{1}{8}\pi BC^2$$
$$= \frac{\pi}{8}(AC^2 + BC^2)$$



又 $N+M = \dfrac{\pi}{8} AB^2$

［注意］ 本題カラ直チニ次ノ定理ガ證明出來ル。

直角三角形 ABC ノ三邊上ニ圖ノヤウニ半圓ヲ畫クトキ新月形 S, S′ ノ和ハ △ABC ＝等シイ。



コレヲひぽくらてす (Hipppocrates) ノ定理ト云フ。彼ハ紀元 440年頃ノ希臘ノ數學者デアル。

彼ハ詭辨學派ノ研究ノ焦點デアツタ有名ナ三問題ノ中一ツデアル「立方倍積問題」ヲ研究シ，與ヘラレタ立方體ノ體積ヲ a トシ a ト $2a$ トノ間ニ二ツノ等比中項 x, y ヲ挿入スルコトニヨツテ倍量正方形ノ一邊ガ x ガ求メラルト論定シタ。

即チ $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{2a}$ ヨリ $x^2 = ay,\ y^2 = 2ax$

コレヨリ $x^3 = 2a^3$ ヲ得タ。

然シコノ幾何學的ノ作圖ハ求メラレナカツタ。

彼ハコノ結果ヲ圓積問題即チ圓ノ平方化ニ應用シヤウトシ成功シナカツタガ新月形ノ平方化ヲ解決シタ。

其他圓ニ關スル幾何學ニ大ナル貢献ヲナシタ人デアル。

19. 與ヘラレタ二圓 O, O′ ノ半徑ヲ夫々 r, r' トスレバ求メル圓ノ半徑 x ハ，和ノ場合ハ

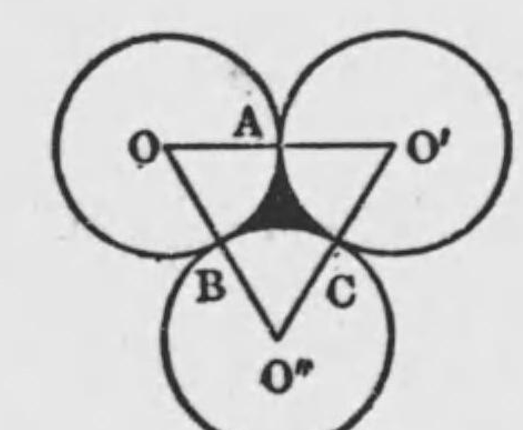
$$\pi x^2 = \pi r^2 + \pi r'^2 \quad ヨリ \quad x^2 = r^2 + r'^2 \quad 即チ \quad x = \sqrt{r^2 + r'^2}$$

差ノ場合ハ

$$\pi x^2 = \pi r^2 - \pi r'^2 \quad (r > r' トス)$$

ヨリ $x^2 = r^2 - r'^2$ 即チ $x = \sqrt{r^2 - r'^2}$

20. 三ツノ等圓ノ中心ヲ夫々 O, O′, O″ トシ切點ヲ A, B, C トスレバ正三角形 OO′O″ ノ面積ハ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}r^2$, 又扇形 OAB, O′BC, O′CA ハ扇形ノ角ガ何レモ 60° デ合同デアル。



故ニコレ等ノ和ハ半徑 r ナル圓ノ面積ニ等シイ。

即チ πr^2 デアル。

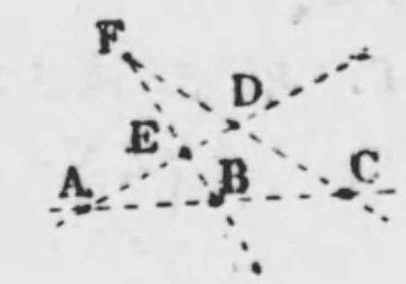
故ニ求メル曲線形ノ面ヲ S トスレバ

$$S=\pi r^2-\frac{\sqrt{3}}{4}r^2=\frac{4-\sqrt{3}}{4}\pi r^2$$

トナル。

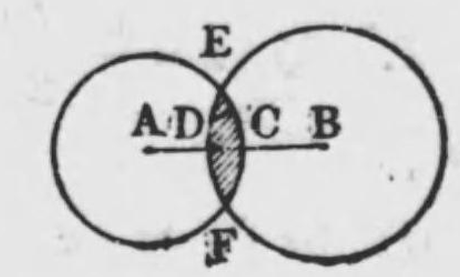
補 充 問 題

1. 幾何圖形



1. 一直線上ノ三點 A, B, C ヲトリ, B ヲ通ル他ノ直線ヲ畫キソノ上ニ二點 E, F ヲトリ. AE, FC ヲ通ル直線ノ交點ヲ D トスレバヨイ。

2. 8*cm* ノ線分 AB ヲ畫キ, ソノ端 A ヨリハ 5*cm*, B ヨリハ 6*cm* デアル二點ヲ夫々 C, D トスル。



A ヲ中心トシテ AC ヲ半徑トスル圓周ヲ畫キ, B ヲ中心トシテ BD ヲ半徑トシテ圓周ヲ畫キ二圓ノ交點ヲ E, F トスレバ, 曲線形 EDFC ハ求メル區域デアル。

3. 線分ノ中點ヲ求メル練習問題デアル。

L, M, N ハ一點ニ集交スル。

4. 360° ハ直角ノ四倍デアルカラコレヲ直角ヨリモ大キイ角ニ等分スルニハ, 三等分, 二等分等ノ外ハナシ得ナイ。

故ニ最モ多ク鈍角ニ等分スレバソノ數ハ三箇デアル。

又鋭角ニ等分スルニハ五等分, 六等分, …… 等デ四等分以下ニハ出來ナイ。

故ニ最モ少ク等分スレバソノ數ハ五箇デアル。

前者ノ一角ハ 120°, 後者ノ一角ハ 62° デアル。

5. $\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC$ デアルカラ

コノ式ニ

$$\angle AOB=1\frac{1}{2}\angle BOC,\qquad \angle AOC=\frac{2}{3}\angle R$$

ヲ代入スルト

$$\frac{2}{3}\angle R=1\frac{1}{2}\angle BOC+\angle BOC$$

コレヲ解イテ

$\angle BOC=\frac{4}{15}\angle R$, 依ツテ $\angle AOB=\frac{8}{45}\angle R$

答 $\angle BOC=\frac{4}{15}\angle R$, $\angle AOB=\frac{8}{45}\angle R$

6. 甲, 乙, 丙三ツノ角ヲ夫々 $\angle X$, $\angle Y$, $\angle Z$ デ表ハスト

$$\begin{cases}\angle X+\angle Y=180^\circ & (1)\\ \angle Y+\angle Z=90^\circ & (2)\\ \angle X+\angle Y+\angle Z=240^\circ & (3)\end{cases}$$

(1), (2), (3) ヲ解イテ

$\angle X=150^\circ$, $\angle Y=30^\circ$, $\angle Z=60^\circ$　　答 50°, 30°, 60°

7. ① $x=\frac{a+b+c}{2}$ デアルカラ求メル長サ x ハ a, b, c ノ和ノ半分デアル。

② $3x+b=x+a$ ヨリ $x=b-a$

故ニ x ハ b ト a トノ差デアル。

③ $4x-a=2b+c$ ヨリ $x=\frac{1}{4}(a+2b+c)$

故ニ x ハ $a, 2b, c$ ノ和ヲ四等分シタ一ツデアル。

8. 布等一定ノ巾ノモノヲ等分スルニ利用シ甚ダ便利デアル。
物指ヲ用ヒル場合ハソノ目盛ノ利用ニ就イテ適宜注意ヲ與ヘラレタイ。
但シ等分ニ用ヒル器具ハ必ズシモ物指デアルコトヲ要シナイ。

9. 作圖ノ練習ニアル。
生徒各自ニ種々ノ圖案ヲ考案サセルトヨイ。

10. $BC=r-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q$, $AD=r+\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q$

11. 各角ヲ $\angle x$, $\angle y$ トスレバ ($\angle x>\angle y$ トスル)

$$\begin{cases}\angle x-\angle y=10^\circ & (1)\\ \angle x+\angle y=90^\circ & (2)\end{cases}$$

(1), (2) ヲ解イテ　$\angle x=50^\circ$, $\angle y=40^\circ$　　答 50°, 40°

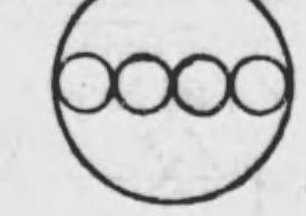
12. 45° ノ角ハ直角ヲ二等分スルコトニヨツテ求メラレル。

分度器, 三角定木ノ一角ヲ利用サセルモヨイ。

13. 田 51500 平方米, 畑 9000 平方米, 山 12000 平方米

14. 半徑 3*cm* ナル圓ノ面積ハ 9π 平方糎デ四ツノ小圓ノ面積ノ和ハ

$\left(\frac{3}{4}\right)^2\pi\times4=\frac{9}{4}\pi$



即チ $\frac{9}{4}\pi$ 平方糎デアル。

故ニ四ツノ圓ノ面積ノ和ハ元ノ圓ノ $\frac{1}{4}$ ニアタル。

15. 扇形ヲ截リ取ツタ殘リノ部分ノ面積ヲ S トスルト

$S=3^2\pi\times\frac{300}{360}=7.5\pi$　　答 7.5π 平方糎

16. 種々ノ圖案ヲ創作サセルガヨイ。

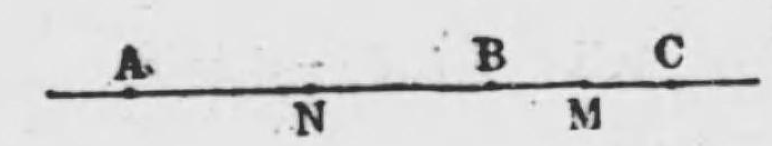
2. 直線圖形

1. ① $AM=AB+BM$

$$=\frac{AB}{2}+\frac{AB}{2}+\frac{BC}{2}$$
$$=\frac{AB}{2}+\frac{AC}{2}$$
$$=\frac{AB+AC}{2}$$

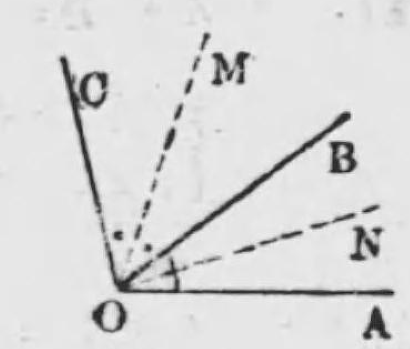
② $MN=BN+BM$

$$=\frac{AB}{2}+\frac{BC}{2}$$
$$=\frac{AB+BC}{2}$$
$$=\frac{AC}{2}$$



2. ① $\angle AOM=\angle AOB+\angle BOM$

$$=\frac{\angle AOB}{2}+\frac{\angle AOB}{2}+\frac{\angle BOC}{2}$$
$$=\frac{\angle AOB}{2}+\frac{\angle AOC}{2}$$
$$=\frac{\angle AOB+\angle AOC}{2}$$



② $\angle MON=\angle BON+\angle BOM$

$$=\frac{\angle AOB}{2}+\frac{\angle BOC}{2}$$

$$=\frac{\angle AOB+\angle BOC}{2}=\frac{\angle AOC}{2}$$

3. $\angle A>\dfrac{\angle A+\angle B+\angle C}{3}$　故ニ　$\angle A>60^\circ$　デアル。

又 $\triangle ABC$ ハ鋭角三角形デアルカラ　$\angle A<\angle B+\angle C$

然ルニ　$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$　デアルカラ

$\angle B+\angle C>90^\circ$

ココニ　$\angle B>\angle C$ デアルカラ　$\angle B>45^\circ$　デアル。

次ニ　$\angle A>\angle B>\angle C$ デアルカラ

$\angle C<\dfrac{\angle A+\angle B+\angle C}{3}$　故ニ　$\angle C<60^\circ$　デアル。

故ニ　$\angle A>60^\circ$, $\angle B>45^\circ$, $\angle C<60^\circ$　デアル。

4. 題意ニヨリ AB ガ最大デ CD ガ最小デアルカラ

$\triangle ABD$ ニ於イテ　$\angle ABD<\angle ADB$

$\triangle BCD$ ニ於イテ　$\angle CBD<\angle BDC$

故ニ　$\angle ABC<\angle ADC$

即チ　$\angle B<\angle D$　デアル。

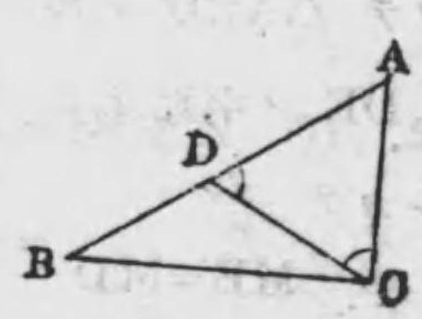
同様ニシテ　$\angle A<\angle C$　デアルコトヲ知ル。

5. ① $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ ニ於イテ $\angle A$ ガ共通デアルカラ

$\angle ADC+\angle ACD=\angle ABC+\angle ACB$

AD=AC　デアルカラ

$2\angle ACD=\angle ABC+\angle ACB$



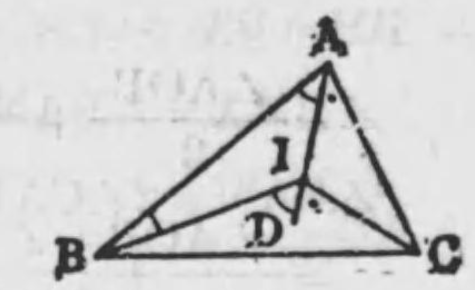
故ニ　$\angle ACD=\dfrac{\angle ABC+\angle ACB}{2}$

② $\angle BCD+\angle ABC=\angle ADC=\angle ACB-\angle BCD$

故ニ　$2\angle BCD=\angle ACB-\angle ABC$

依ツテ　$\angle BCD=\dfrac{\angle ACB-\angle ABC}{2}$

6. AI ノ延長ニツノ上ノ一點ヲ D トスルト



$\angle BID=\angle BAI+\angle ABI$

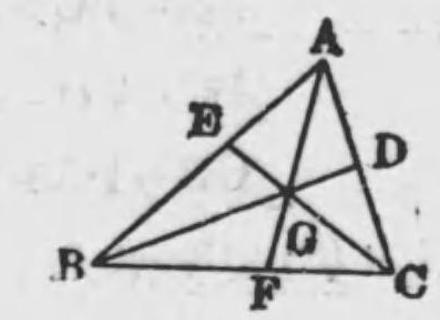
$\angle CID=\angle CAI+\angle ACI$

故ニ　$\angle BIC=\angle A+\dfrac{\angle B}{2}+\dfrac{\angle C}{2}$

$$=\frac{\angle A+\angle B+\angle C}{2}+\frac{\angle A}{2}$$

$$=90^\circ+\frac{\angle A}{2}$$

7. $\triangle AFB$, $\triangle AFC$ ニ於イテ



BF=CF,　AF ハ共通,　AB>AC

故ニ　$\angle BFA>\angle CFA$

又 $\triangle BGF$, $\triangle CGF$ ニ於イテ

BF=CF, GF ハ共通,　$\angle BFG>\angle CFG$

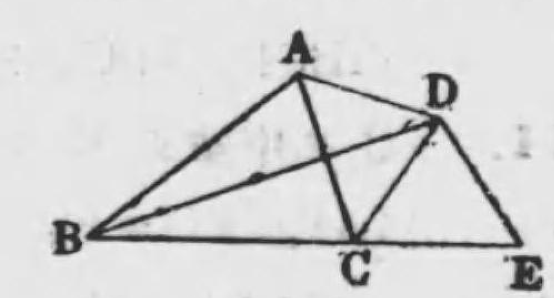
故ニ　BG>CG　　故ニ　BD>CE　デアル。

8. BC ノ延長上ニ CE=AC ナル E ヲトルト $\triangle ACD\equiv\triangle ECD$ カラ

AD=ED

BC+CA=BE　　(1)

BD+DA=BD+DE　　(2)



又 $\triangle BDE$ カラ

BE<BD+DE

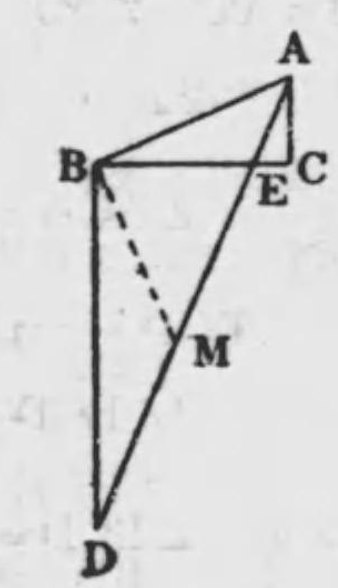
故ニ (1), (2) カラ

BC+CA<BD+DA　故ニ　AB+BC+AC>AB+BD+DA

依ツテ $\triangle ABD$ ノ周ハ $\triangle ABC$ ノ周ヨリ大デアル。

9. DE ノ中點ヲ M トスレバ $\triangle BDE$ ハ直角三角形

デアルカラ



MB=MD

故ニ　$\angle BMA=2\angle ADB$　　(1)

又 BD∥AC デアルカラ

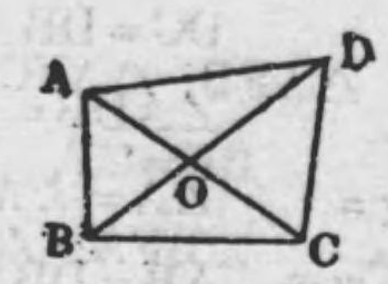
$\angle ADB=\angle CAD$　　(2)

(1), (2) カラ

　　$\angle BMA=2\angle CAD$
然ルニ　$BM=BA$ デアルカラ
　　$\angle BMA=\angle BAM$
故＝　$\angle BAM=2\angle CAD$
故＝　$\angle DAC=\frac{1}{3}\angle BAC$　デアル。

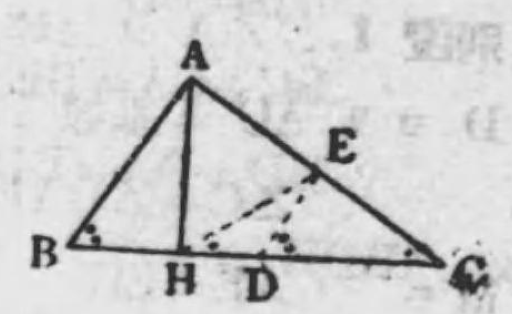
[注意] 與ヘラレタ任意ノ角ヲ機械的ニ三等分スル一ツノ方法デアル。

10. 四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ交點ヲ O トスルト



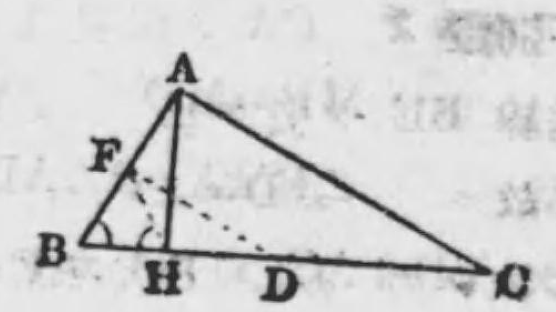
$AB+BC>AC$　(1)
$BC+CD>BD$　(2)
$CD+DA>CD$　(3)
(1)+(2)+(3) カラ
$2(AB+BC+CA)>2(AC+BD)$　即チ　$AB+BC+CA>AC+BD$
次＝　$AB<AO+BO$　(1)　　$BC<BO+CO$　(2)
　　$CD<CO+DO$　(3)　　$DA<DO+AO$　(4)
　　$AB<AO+BO$　(5)
(1)+(2)+(3)+(4)+(5)　カラ
　　$AB+BC+CD+DA<2(AC+BD)$

11. AC ノ中點ヲ E トスレバ



　　$AE=EH=EC$
故＝　$\angle EHC=\angle C$　(1)
又 $AB \parallel DE$ デアルカラ
　　$\angle EDC=\angle B=2\angle C$　(2)
故＝ (1), (2) カラ $\angle EDC=2\angle EHC$ デアルカラ三角形 DEH ハ二等邊三角形デアル。
又 $2DE=AB$ デアルカラ $2DH=AB$ デアル。

別證 AB ノ中點 F ヲ求メ，FH ヲ結ブト

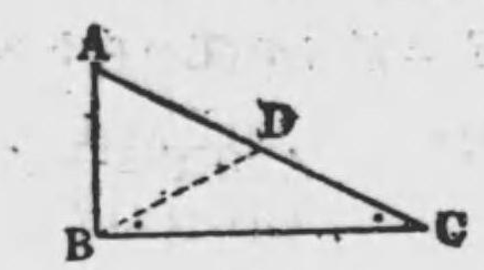


　　$HF=\frac{1}{2}AB$,　$FD \parallel AC$
故＝　$\angle FDH=\angle C$
又　$FH=FB$ デアルカラ

　　$\angle FHB=\angle B=2\angle C$
故＝　$\angle HFD=\angle FHB-\angle FDH=2\angle C-\angle C=\angle C$
故＝　$\angle HFD=\angle FDH$
故＝　$2DH=2HF=AB$　デアル。

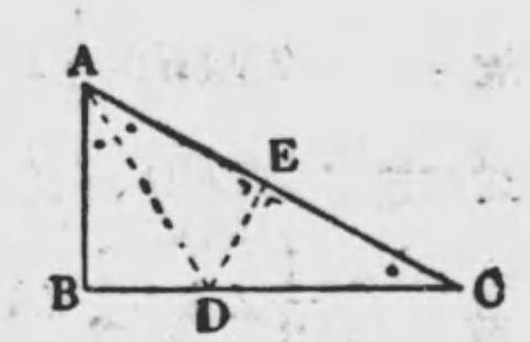
12. $\triangle OBC$ ニ於イテ $BO>OC$ デアルカラ
　　$\angle OBC<\angle OCB$
故＝　$\angle ABO>\angle ACO$　デアル。

13. $\angle C$ ニ等シク $\angle CBD$ ヲ作リ BD ト AC トノ交點ヲ D トスルト
　　$DC=DB$　(1)
又　$\angle ADB=\angle DBC+\angle C=2\angle C$
故＝　$\angle A=\angle ADB$
依ツテ　$AB=DB$　(2)



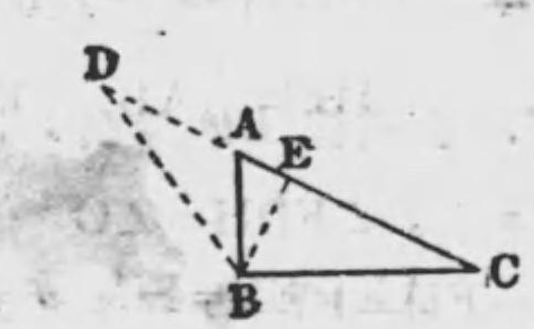
(1), (2) カラ　$AB=DC$
然ルニ假設ヨリ $AC=2AB$ デアルカラ
故＝　$AD=DC=BD$
故＝三角形 ABC ハ直角三角形デアル。

別證 1. $\angle A$ ノ二等分線 AD ヲ引キ對邊 BC トノ交點ヲ D トスル。D ヨリ AC ニ垂線 DE ヲ引クト
　　$\angle C=\angle DAE$
故＝　$AE=EC$
$\triangle ABD$, $\triangle AED$ ニ於イテ



　$AD=AE$, $\angle BAD=\angle EAD$, AD ハ共通
故＝　$\triangle ABD\equiv\triangle AED$
依ツテ　$\angle B=\angle AED=\angle R$
即チ三角形 ABC ハ直角三角形デアル。

別證 2. CA ノ延長上ニ $AB=AD$ ナル如ク D ヲトリ，B ヨリ CD ニ垂線 BE ヲ引クト　$\angle BAE=2\angle ADB$
故＝　$\angle D=\angle C$,



依ツテ　$DE=EC$, $AC=2AB$　デアルカラ
　　$AE=\frac{1}{2}AB$

故ニ　$\angle A=60°$, $\angle ABE=30°=\angle C$

故ニ　$\angle B=90°$

依ツテ三角形 ABC ハ直角三角形デアル。

[注意]　比例其ノ他ノ定理ヲモ用ヒルト五十種以上ノ證明法ガアル。

14.　本問題集 6 カラ直チニ證明サレル。

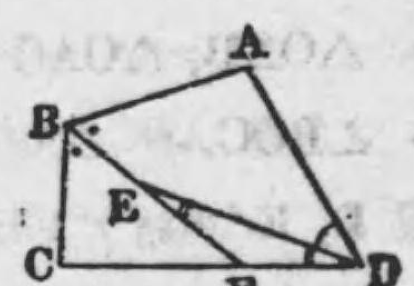
15.　$\angle AEB=2\angle R-\left(\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle B}{2}\right)$

$$=\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle B}{2}+\frac{\angle C}{2}+\frac{\angle D}{2}-\left(\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle B}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\angle C+\angle D)$$

[注意]　相對スル角 B, D ノ二等分線ノ交點ヲ E トシ, BE ノ延長ガ CD ト F ニ於イテ交ハルトスレバ

$\angle DEF=\frac{1}{2}(\angle A-\angle C)$　トナル。



證明　△DEF ニ於イテ

$\angle DEF+\angle EFD+\frac{1}{2}\angle D=2\angle R$

然ルニ　$\angle EFD=\frac{1}{2}\angle B+\angle C$

故ニ　$\angle DEF+\frac{1}{2}\angle B+\angle C+\frac{1}{2}\angle D=2\angle R$　　(1)

又四邊形 ABCD ニ於イテ

$\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C+\frac{1}{2}\angle D=2\angle R$　　(2)

(1), (2) カラ　$\angle DEF+\frac{1}{2}\angle C=\frac{1}{2}\angle A$

故ニ　$\angle DEF=\frac{1}{2}(\angle A-\angle C)$

16.　對角線 BD ヲ引クト E 及ビ F ハ夫々 △ABD 及ビ △CBD ノ重心デアル。

故ニ　AE=EF=FC　デアル。

17.　$\angle A=\angle R$ ニシテ AB>AC ナル三角形ヲ ABC トスル。

頂點 A カラノ高サ, 中線, 二等分線ヲ夫々 AH, AM, AD トスルト

$\angle CAH=\angle ABC=\angle BAM$

又　$\angle BAD=\angle CAD$

故ニ AD ハ ∠HAM ヲ二等分スル。

[注意]　本題ヲ授ケラレタ後ニ次ノ一般ノ場合ニ就イテモ教示サレタイ。コノ場合邊ノ不等ヲ明示スルコトヲ注意スル。

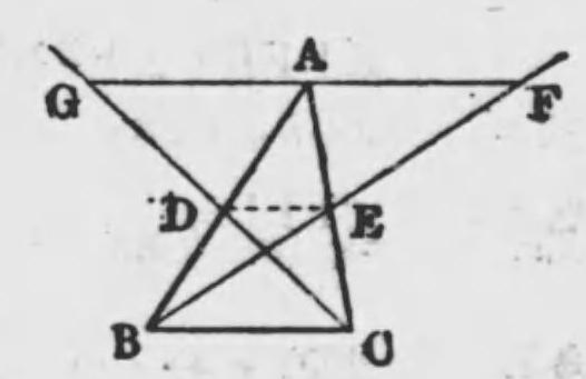
任意ノ三角形 ABC ノ ∠A ノ二等分線及ビ A カラ BC ヘノ垂線, 中線ヲ夫々 AD, AH, AM トスルト, 二邊 AB, AC ノ間ニ AB>AC ナラバ ∠BAM>∠CAM デアルカラ AM ハ AB ト AD トノ間ニアル。

又垂線ト斜線トノナス角ハ大ナル斜線ハ小ナル斜線ヨリ大デアルカラ AH ハ AD ト AC トノ間ニアル。

依ツテ二等分線ハ垂線ト中線トノ間ニアル。

18.　△OAB, △OAC ハ何レモ二等邊三角形デアルカラコレ等ノ外角ノ和デアル ∠BOC ハ ∠A ノ 2 倍デアル。

19.　D, E ヲ結ブト △CAG, △BAF ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分デアルカラ



AG ∥ DE,　　AF ∥ DE

依ツテ G, A, F ハ一直線上ニアル。

20.　BQ⊥PR, CR⊥PQ, AP⊥QR デアルカラ I, P, Q, R ノ中一ツハ他ノ三ツヲ頂點トスル三角形ノ垂心デアル。

21.　AE 上ニ AB ニ等シク AF ヲトレバ

△ABM≡△AFM

故ニ　$\angle MFE=\angle R=\angle C$

故ニ　△MFE, △MCE ニ於イテ MC=MB=MF デ MC ハ共通

故ニ　△MFE≡△MCE デアル。

22.　△ABC≡△EFC≡△DBF　ヨリ

EF=AB=AD　　(1)

又　FD=CA=EA　　(2)

(1), (2) カラ四邊形 ADFE ハ平行四邊形デアル。

23. 一般ニ直線ガ $\triangle ABC$ ヲ圖ノヤウニ截ル場合ヲ考ヘルニ A ヨリノ中線ヲ AD トシ，重心 G ト A トノ距離ノ中點ヲ E トスル。

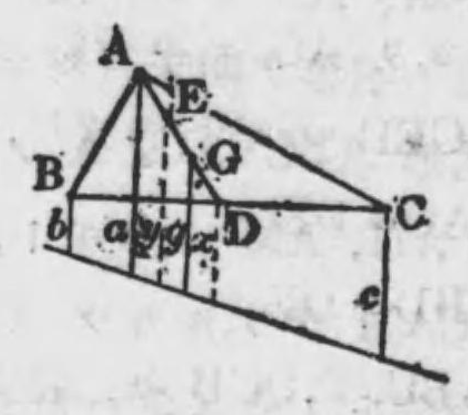
D 及ビ E ヨリ直線マデノ垂線ノ長サヲ夫々 x, y トスレバ

$$b+c=2x, \quad a-g=2y$$

邊々相減ズレバ

$$b+c-a+g=2(x-y)$$
$$=2\times 2g$$

故ニ　$b+c-a=3g$



特ニ直線ガ重心ヲ通ル場合ニハ

$$b+c=2x, \quad a=2y, \quad x=y$$

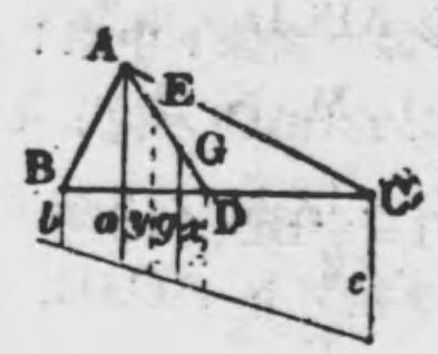
ナル故ニ　$b+c=a$　トナル。

24. 前題ト同様ニシテ

$$b+c=2x, \quad a+g=2y$$

邊々加ヘテ

$$a+b+c+g=2(x+y)$$
$$=2\times 2g$$



故ニ　$a+b+c=3g$

即チ　$g=\dfrac{1}{3}(a+b+c)$　デアル。

25. $\triangle CEF$ ニ於イテ　$\angle ECF=45°$

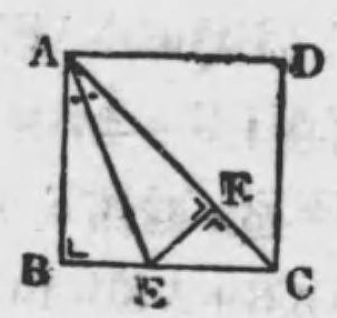
故ニ　$\angle CEF=90°-\angle ECF=45°$

故ニ　$\angle ECF=\angle CEF$　依ツテ　$EF=FC$

又ニ　$\triangle ABE, \triangle AFE$ ニ於イテ

AE ハ共通，　$\angle BAE=\angle FAE$

$\angle ABE=\angle R=\angle AFE$



故ニ　$\triangle ABE\equiv\triangle AFE$

故ニ　$BE=EF$

依ツテ　$BE=EF=FC$　デアル。

26. 梯形 ABCD トシ上底ノ兩端 A 及ビ D ヨリ下底 BC 又ハソノ延長上ニ夫々垂線 AA', DD' ヲ引クト $\triangle AA'C, \triangle DD'B$ ニ於イテ

$AA'=DD', \quad AC=BD$

$\angle AA'C=\angle R=\angle DD'B$

故ニ　$AA'C\equiv\triangle DD'B$　依ツテ　$BA'=CD'$

又ニ　$\triangle AA'B, \triangle PD'C$ ニ於イテ

$BA'=CD', \quad AA'=DD', \quad \angle AA'B=\angle R=\angle DD'C$

故ニ　$\triangle AA'B\equiv\triangle DD'C$　依ツテ　$AB=DC$

故ニ梯形 ABCD ハ等脚梯形デアル。

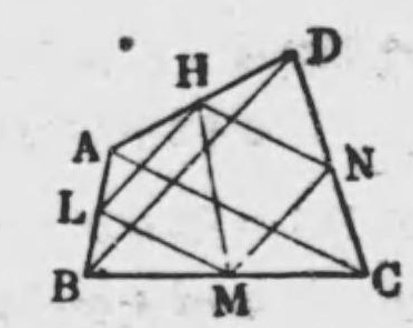
別證 D ヨリ AC ニ平行線 DE ヲ引キ BC ノ延長トノ交點ヲ E トスレバ四邊形 ACED ハ平行四邊形デアルカラ

$AC=DE$

故ニ　$BD=DE$

又ニ　$\triangle ABC, \triangle DCB$ ハ二邊トソノ夾角ノ理ニヨツテ合同トナリ $AB=DC$ トナル。

27. 四邊形 ABCD ノ兩對線 AC, BD ガ相等シイトシ，AB, BC, CD, DA ノ中點ヲ夫々 L, M, N, H トスレバ



①　$LH=\dfrac{1}{2}BD, \quad MN=\dfrac{1}{2}BD$

$LM=\dfrac{1}{2}AC, \quad HN=\dfrac{1}{2}AC$

デアル。故ニ四邊形 LMNH ハ四邊皆相等シイカラ菱形デアル。

②　① カラ $\triangle LMH$ ハ二等邊三角形デ且ツ

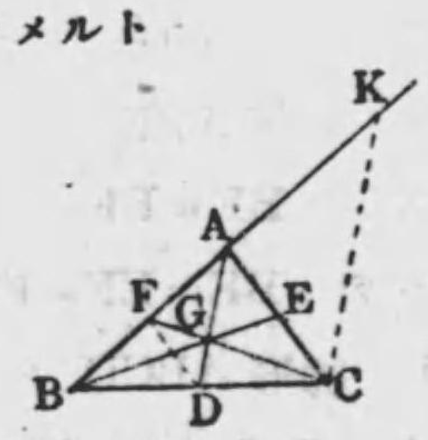
$LM \parallel AC, \quad LH \parallel BD$

デアルカラ HM ハ對角線 AC, BD ト等角ヲナス。

即チ MH ト AC, BD ハ二等邊三角形ヲ作ル。

28. ①　$\triangle ABC$ ニ於イテ $AB\geqq AC$ トスル。

BA ノ延長上ニ一點 K ヲトリ $AK=AB$ ナラシメルト $\triangle ABC$ ノ三邊ノ關係ヨリ



$AB+AK-BC<KC$

即チ　$AB+AC-BC<2AD$

故ニ　$AD>\dfrac{1}{2}(AB+AC-BC)$

② DF ヲ結ブト △DFG ノ三邊ノ關係ヨリ

$$DG+GF>DF$$

即チ $\frac{1}{3}AD+\frac{1}{3}CF>\frac{1}{2}AC$ (1)

同樣ニシテ $\frac{1}{3}BE+\frac{1}{3}AD>\frac{1}{2}AB$ (2)

$\frac{1}{3}CF+\frac{1}{3}BE>\frac{1}{2}BC$ (3)

(1)+(2)+(3) ヨリ

$$AD+BE+CF>\frac{3}{4}(AB+BC+CA)$$

29. △ABC ノ邊 BC 上ニ B ヨリ與ヘラレタ線分 l ニ等シク BD ヲトリ D ヨリ AB ニ平行線 DN ヲ引キ AC トノ交點ヲ N トスル。

N ヨリ BC ニ平行ニ MN ヲ引キ AB トノ交點ヲ M トスレバ, MN ハ求メル線分デアル。

吟味 與ヘラレタ線分 l ガ BC ヨリ小ナラバ M, N ハ邊 AB, AC 上ニアル。

l ガ BC ニ等シケレバ B, C ト一致スル。

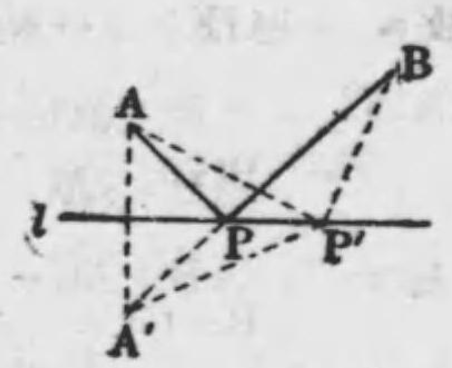
l ガ BC ヨリ大ナレバ MN ハ夫々 AB, AC ノ延長上ニアル。

l ハ CB ノ延長上ニモ取リ得ルカラコノ場合モ採用スルト解答ノ數ハ常ニ二ツアル。

30. 與ヘラレタ二點 A, B ノ中一點 A ノ定直線 l ニ關スル對稱ノ點 A′ ヲ求メ, コレト他ノ點 B トヲ結ブ直線 A′B ト l トノ交點 P ハ求メル點デアル。

何トナレバ l 上ニ P 外ノ任意ノ一點 P′ ヲトリ, P′A, P′B, P′A′ ヲ結ブト A ト A′ トハ l ニ關シテ對稱デアルカラ

$$PA=PA',\quad P'A=P'A'$$



故ニ $AP+BP=A'P+PB=A'B$

$AP'+BP'=A'P'+P'B$

$A'B<A'P'+P'B$

故ニ $AP+BP<AP'+BP'$ トナルカラデアル。

[注意 1] 與ヘラレタ二點 A, B ガ直線 l ノ兩側ニアレバ, 二點 A, B ヲ結ブ直線ト直線 l トノ交點ガ求メル點 P デアル。

[注意 2] 本題ハ最大, 最小ニ關スル基礎問題デアル。

最大, 最小ハ次ノ二ツノ定理

① 二點間ノ最短距離ハソノ二點ヲ結ブ線分デアル。

② 一直線外ノ一點ヨリコノ直線ニ引ケル諸線分ノ中, 垂直ナルモノハ最短デアル。

ニ歸着セシメ得ルト云フテモ過言デナイ。

ソレ故コレヲ念頭ニ置キ, コレニ歸着セシメヤウトスレバヨイ。ソノ方法ニハ與ヘラレタ點ノ對稱點ヲ利用スルコト, 又ハ適當ノ位置ニ平行移動スル等ハヨク用ヒラレテヰル方法デアル。

證明ニ關シテハ求メ得ラレタ特定ノ點ト任意ノ點ヲ考ヘ, コレト比較スルコトニヨツテソノ最大又ハ最小ト斷定シテ宜シイコトヲ了解サセルガヨイ。

[注意 3] 本題ニ於イテ AP∼BP ヲ最大ナラシメルニハ直線 l ニ關シテ B ノ對稱點 B′ ヲトリ, AB′ ト直線 l トノ交點ヲ求メレバヨイ。

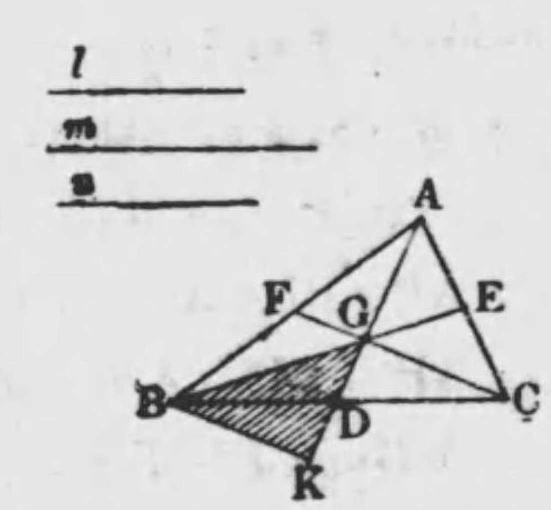
モシ二點 A, B ガ XY ノ同ジ側ナラバ AB ト直線 l トノ交點ガ求メル點デアル。

31. 與ヘラレタ一邊ト兩對角線ノ半分ヲ三邊トスル三角形ヲ畫クコトニヨツテ作圖シ得ラレルコトニ導ク。

而シテ作圖ノ可能, 不可能及ビ解答ノ數ハコノ三角形ノ作圖ノ可能, 不可能等ニヨツテ定マル。

32. 解析 所要ノ三角形ヲ ABC トシ中線 $AD=l$, $BE=m$, $CF=n$ トシ AD ヲ延長シ DK=GD ナラシメルト

$$\triangle\triangle GDC=\triangle BDK$$



故ニ $GK=AG=\frac{2}{3}l$

$BG=\frac{2}{3}m$

$B=GC=\frac{2}{3}n$

故ニ △GBK ノ三邊ヲ知ル故コレヲ作圖スルコトガ出來ル。

從ツテ KG=GA, BD=DC カラ A 及ビ C ヲ定メルコトヲ得ル。

作圖 △GBK ヲ畫キ $GK=\frac{2}{3}l$ $GB=\frac{2}{3}m$, $KC=\frac{2}{3}n$ ナラシメ GK ノ中點 D ヲ求メテ BD ヲ延長シテ BD ニ等シク DC ヲトル。

次ニ KG ヲ A マデ延長シ GA=GK トシテ AB, AC ヲ結ベバ △ABC ハ求メル三角形デアル。

證明 BC, GK ハ互ニ中點ニ於イテ交ハルカラ GBKC ハ平行四邊形デアル。

故ニ　　$GE \parallel CK$,　　$GF \parallel BK$

G ハ AK ノ中點デアルカラ E, F ハ夫々 AC, AB ノ中點デアル。

故ニ BE, CF 及ビ AD ハ △ABC ノ中線デアル。

又　　$AG=GK=\frac{2}{3}l$,　　故ニ　$AD=AG+GD=l$

$$GE=\frac{1}{2}CK=\frac{1}{2}GB=\frac{1}{3}l$$

故ニ　　$BE=BG+GE=m$

$$GF=\frac{1}{2}BK=\frac{1}{3}m,\quad GC=BK=\frac{2}{3}n$$

故ニ　　$CF=n$

依ツテ △ABC ハ要件ニ適ス。

[注意] 上ノ作圖ニ於イテ點 A ヲ定メル仕方ハ種々アル。

然シ證明シ易イ方法ガヨイ。

例ヘバ BG, CG ヲ夫々ソノ半分ニ等シク延長シテ BF, CE ノ交點トシテモヨク, 又 E ヲ求メ CE=EA トシテモヨイ。

中線ガ與ヘラレタトキノ三角形ノ作圖ハ多ク三邊ヲ知ツテソノ三角形ヲ畫クコトニ歸着サセ得ル。

33. 所要ノ四邊形 ABCD ガ求メラレタト

$$AB=l,\quad BC=m,\quad CD=n,\quad DA=r,\quad \angle B=\angle x$$

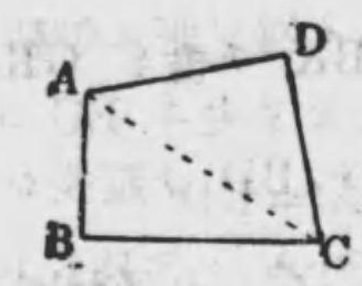
トスル。

對角線 AC ヲ引ケバ △ABC ハ二邊トソノ夾角ガ既知デアル。

故ニコレヲ作圖スルコトガ出來ル。

次ニ AC ノ長サガ求メラレルト △ACD ノ三邊ガワカル。

依ツテ次ノ作圖法ヲ得ル。



作圖 △ABC ヲ畫キ

$$AB=l,\quad BC=m,\quad \angle B=\angle x$$

トスル。

次ニ AC ヲ一邊トシ

$$AD=r,\quad CD=n$$

ナル三角形 ADC ヲ畫ク。

然ルトキハ四邊形 ABCD ハ所要ノモノデアル。

[注意] 本題ハ ∠x ノ大イサ, 四邊ノ長サ等ニヨツテ種々ノ場合ヲ生ズル。

∠A=∠x ナルトキハ對角線 BD ヲ利用スルトヨイ。

3. 面　　積

1. AB=2BC, AC=BC 故ニ $AB\cdot AC=2BC\cdot BC=2BC^2$ デアル。

2. △PAC, △PAB ニ於イテ, AP ヲ共通ノ底邊ト考ヘ頂點 B, C カラノ垂線ヲ夫々 BE, CF トスレバ

$$\triangle BDE \equiv \triangle CDF \qquad 故ニ \quad BE=CF$$

依ツテ　△PAC, △PAB ハ同底同高デアル。

故ニ　　△PAB=△PAC デアル。

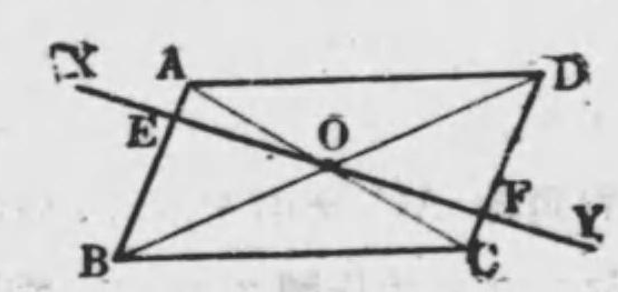
3. △AOB, △BOC ハ AO=OC デ B カラノ高サガ共通デアル。

依ツテ　△AOB=△BOC

同樣ニ　△AOD=△COD,　△AOB=△DOA

故ニ　　△AOB=△BOC=△COD=△DOA デアル。

4. ▱ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トスル。O ヲ通ル任意ノ截線ヲ XY トシ邊 AB, CD トノ交點ヲ夫々 E, F トスルト



二ツノ梯形 AEFD, CFEB ニ於イテ

$$AE+DF=CF+BE$$

又平行線間ノ距離ハ一定デアルカラ BE, CF 及ビ DF, AE 間ノ距離, 即チ兩梯形ノ高サハ等シイ。

依ツテ兩梯形ハ等積デアル。

5. BC 上ノ同ジ側ニ等積ナ二ツノ三角形ヲ ABC, DBC トスル。

A 及ビ D ヨリ夫々 BC ニ垂線 AA′, DD′ ヲ引クト，等積デアルカラ

$AA'=DD'$

依ツテ AA′D′D ハ平行四邊形（矩形）ヲ作ル。

故ニ $AA' \parallel BC$ デアル。

6. 同ジ底 BC ノ兩側ニ等積ナ二ツノ三角形ヲ ABC, DBC トスル。

A 及ビ D ヨリ BC ヘ垂線 AA′, DD′ ヲ引クトキ，AD ト BC トノ交點ヲ O トスレバ

△AA′O, △DD′O ニ於イテ

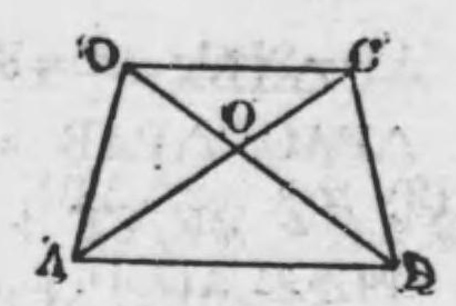
$\angle AA'O=\angle R=\angle DD'O,\quad \angle AOA'=\angle DOD'$

又 BC ガ共通デ △ABC=△DBC デアルカラ AA′=DD′ デアル。

依ツテ $\triangle AA'O \equiv \triangle DD'O$

故ニ AO=OD デアル。

7. △AOD=△BOC ノ兩邊ニ △AOB ヲ加ヘルト



$\triangle ADB=\triangle ACB$

依ツテ 5 ヨリ $AB \parallel DC$ デアル。

8. 兩底ガ夫々相等シク，且高サモ相等シイ故等積デアル。

9. 同一ノ底 BC 上ノ同ジ側ノ二ツノ三角形ヲ ABC, DBC トシ頂點 A, D ヲ結ブ線分ノ中點ヲ M トスル。

A, D 及ビ M ヨリ BC ニ垂線ヲ下シ，ソノ長サヲ夫々 h, h' 及ビ M トスルト $m=\frac{1}{2}(h+h')$

故ニ
$$\triangle ABC+\triangle DBC=\frac{1}{2}BC\cdot h+\frac{1}{2}BC\cdot h'$$
$$=\frac{1}{2}BC(h+h')$$
$$=\frac{1}{2}BC\times 2m=2\triangle MBC$$

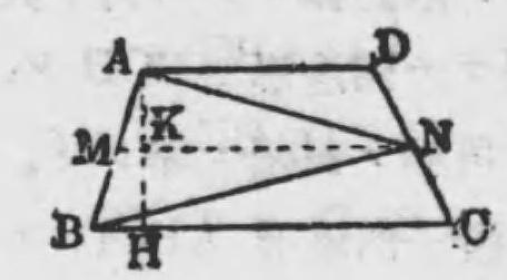
10. 梯形 ABCD ニ於イテ，A ヨリノ高サヲ AH トシ底デナイ二邊 AB,

CD ノ中點ヲ夫々 M, N トスル。

MN ト AH トノ交點ヲ K トスレバ

$AK=KH$

故ニ
$$\triangle ABN=\triangle AMN+\triangle BMN$$
$$=\frac{1}{2}MN\cdot AK+\frac{1}{2}MN\cdot KH$$
$$=\frac{1}{2}MN\cdot AH$$



又 梯形 ABCD=MN·AH

故ニ (1), (2) ヨリ

2△ABN=梯形 ABCD

別證 N ヲ通リ AB ニ平行線ヲ引キ BC 及ビ AD ノ延長トノ交點ヲ夫々 E, F トスルト

梯形 ABCD=平行四邊形 AF　(1)

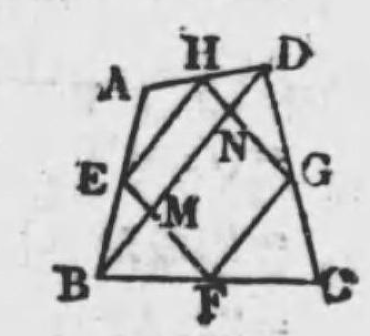
△ABN=$\frac{1}{2}$×平行四邊形 AF　(2)

(1), (2) ヨリ　2△ABN=梯形 ABCD

11. 四邊形 ABCD ノ AB, BC, CD, DA ノ各邊ノ中點ヲ夫々 E, F, G, H トシ，對角線 BD ト FF, GH ノ交點ヲ夫々 M, N トスルト

平行四邊形 EMNH=$\frac{1}{2}$△ABD

平行四邊形 FGNM=$\frac{1}{2}$△CBD

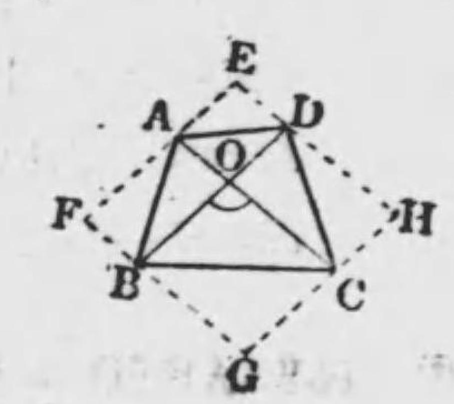


邊々相加ヘテ

平行四邊形 EG=$\frac{1}{2}$△ABD+$\frac{1}{2}$△CBD=$\frac{1}{2}$×(四邊形 ABCD)

12. 四邊形ヲ ABCD トシ對角 AB, BC ノ交角ヲ α トスル。

頂點 A, C ノ各ヲ通リ對角線 BD ニ平行線ヲ引キ他ノ二頂點 B, D ヲ通リ對角線 BD ニ平行線ヲ引キ，圖ノ如ク平行四邊形 EFGA ヲ作ルト



△ABO=△ABF,　△BCO=△BCG

△CDO=△CDH,　△DAO=△DAE

故ニ平行四邊形 ABCD ハ四邊形 EFGH ノ半分ニ等シイ。

又　　$EF=BD,\ EH=AC,\ \angle FEH=\angle BOC$

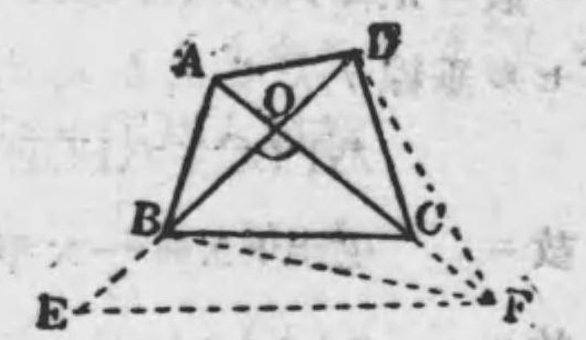
故ニ平行四邊形 EFGH ハ四邊形 ABCD ノ兩對角線ヲ二隣邊トシ，ソノ夾角ガソノ兩對角線ノナス角ニ等シイ。故ニコノ平行四邊形ハ兩對角線ヲ二邊トシ兩對線ノナス角ヲ夾角トスル三角形ノ面積ノ 2 倍ニ等シイ。

依ツテ四邊形 ABCD ハ AC, BD ヲ二邊トシ兩對角線ノナス角ヲ夾角トスル三角形ノ面積ニ等シイ。

別證　四邊形 ABCD ノ兩對角線ノ交點ヲ O トシ，AC, DB ヲ圖ノヤウニ延長シテ $CF=AO,\ BE=OD$ トスルト

$\triangle OEF$ ハ對角線 AC, BD ニ等シイ二邊ヲ有シ，ソノ夾角ガ兩對角線ノナス角ト同ジデアル。

故ニ四邊形 ABCD ガ $\triangle OEF$ ニ等シイコトヲ證明スレバヨイ。



即チ　　$\triangle BOA=\triangle BCF$　〔$AO=CF$〕

　　　　$\triangle DOA=\triangle DCF$　〔$AO=CF$〕

又　　　$\triangle FOD=\triangle FBE$　〔$DO=BE$〕

故ニ四邊形 ABCD $=\triangle OEF$ デアル。

13.　① $\triangle BPD$ 及ビ $\triangle CPD$ ハ $BD=DC$ デアルカラ等底等高デアル。

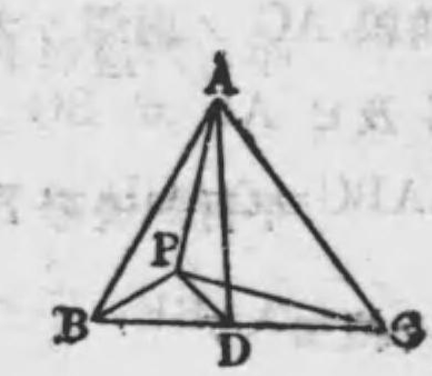
故ニ　$\triangle BPD=\triangle CPD$　デアル。

②　$\triangle ACP-\triangle ABP$

　　$=(\triangle ACP+\triangle PCD)-(\triangle ABP+\triangle BPD)$

　　$=$四邊形 APDC $-$ 四邊形 APDB

　　$=2\triangle APD$



14.　第三篇問題三十三ノ 3 參照。

15.　正三角形 ABC ノ一邊ノ長サヲ l トシ內部ノ任意ノ一點 P ヨリ三邊 BC, CA, AB マデノ距離ヲ夫々 $a,\ b,\ c$ トスル。

$\triangle ABC$ ノ面積ヲ S トスルト

$$\triangle PBC+\triangle PCA+\triangle PAB=S$$

故ニ　　$al+bl+cl=2S$

故ニ　　$a+b+c=\dfrac{2S}{l}=$一定

P ガ $\triangle ABC$ ノ外部ニアル場合。

①　P ガ角 A 內ニアルトキハ

$$\triangle PAB+\triangle PCA-\triangle PBC=\triangle ABC$$

故ニ　　$bl+cl-al=2S$

故ニ　　$b+c-a=\dfrac{2S}{l}=$一定

②　P ガ角 A ニアルトキハ

$$\triangle PBC-\triangle PAB-\triangle PCA=\triangle ABC$$

故ニ　　$al-bl-cl=2S$

故ニ　　$a-b-c=\dfrac{2S}{l}=$一定

一般ニ正多角形 ABCDE……H 內ノ任意ノ一點ヲ P トシ，P ヨリ各邊ニ下セル垂線ヲ夫々 $a,\ b,\ c,\ d,\ \cdots\cdots n$ トシ，面積ヲ S，一邊ノ長サヲ l トスレバ

$$\triangle PBC+\triangle PCD+\triangle PDE+\triangle PHA=\text{正多角形 ABCDE……H}$$

故ニ　　$al+bl+cl+\cdots\cdots+nl=2S$

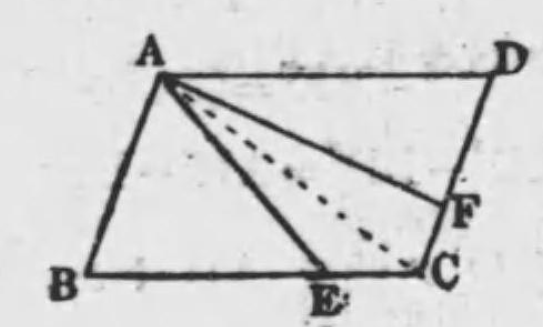
故ニ　　$a+b+c+\cdots\cdots\cdots+n=\dfrac{2S}{l}=$一定

16.　**解析**　平行四邊形 ABCD ノ一頂點 A ヲ通ル二ツノ直線 AE, AF ニヨツテ面積ガ三等分サレタトスレバ $\triangle ABC=\triangle ACD$ デアルカラ AE, AF ハ對角線 AC ノ兩側ニナケレバナラナイ。

AE 及ビ AF ガ BC 及ビ CD ト夫々 E 及ビ F ニ於イテ交ハルトスレバ $\triangle ABC=\triangle ACD$ デアルカラ

$$\triangle ABE=\frac{2}{3}\triangle ABC$$

$$\triangle ADF=\frac{2}{3}\triangle ACD$$



故ニ　$BE=\dfrac{2}{3}BC,\ DF=\dfrac{2}{3}CD$ デアラネバナラヌ。

作圖　平行四邊形 ABCD ノ邊 BC, CD ヲ夫々三等分シ C ニ近イ點ヲ夫々 E, F トスル。

AE, AF ヲ結ブトコレハ求メル二直線デアル。

別解 1.　平行四邊形 ABCD ノ D ヲ通リ AC ニ平行線 DH ヲ引キ BC

ノ延長トノ交點ヲ H トシ BH ヲ三等分スル。

ソノ分ノ中 B ニ近イ點 E ト A トヲ結ブト AE ハ求メル直線ノ一ツデアル。

他モ同様ニシテ求メラレル。

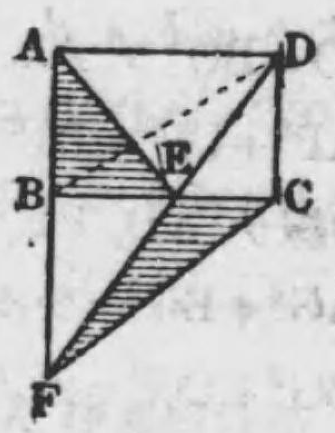
別解 2. 平行四邊形 ABCD ノ BC ヲ M, N デ三等分シ，ソノ分點ヲ通リ對角線 AC ニ平行線ヲ引キ BC 及ビ CD トノ交點ヲ E, F トスレバ，AE, AF ハ求メル二直線デアル。

17. AD ノ中點ヲ P トシ BP, CP ヲ結ベバヨイ。

何トナレバ AD ハ中線デアルカラ △ABD=△ACD，故ニ AD ヲ共通ナ底ト考ヘルト B 及ビ C カラノ高サハ相等シイ。故ニ AP=PD ヨリ

△ACP=△BDP

トナルカラデアル。



18. 對角線 BD ヲ引クト

△DBF=△CBF

コノ兩邊カラ △BEF ヲ引クト

△DBE=△CEF

然ルニ　△ABE=△DBE

故ニ　△ABE=△CEF

AC ヲ結ビ △ACD=△ABC=△DCF ナルコトヲ考ヘテモヨイ。

19. ぴたごらすノ定理ニヨリ AC>CB デアルカラ

$$AD^2-BD^2=(AC^2+CD^2)-(CB^2+CD^2)=AC^2-CB^2$$

$$AE^2-BE^2=(AC^2+CE^2)-(CB^2+CE^2)=AC^2-CB^2$$

故ニ　$AD^2-BD^2=AE^2-BE^2$ デアル。

20. 圓 O ノ弦ヲ AB トシ，ソノ中點ヲ M トスルト

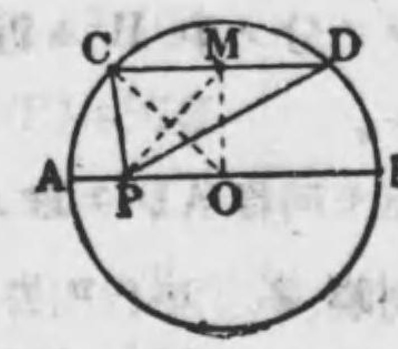
△OAM ハ直角三角形デアルカラぴたごらすノ定理ニヨツテ

$$AO^2=AM^2+OM^2$$

即チ　$r^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+a^2$

故ニ　$a^2=4(r^2-a^2)$ デアル。

21. CD ノ中點ヲ M トスルト



OM⊥CD,　OM⊥AB

故ニ　$PC^2+PD^2=(PM^2+CM^2)$

$$=2\{(OP^2+OM^2)+(OC^2-OM^2)\}$$

$$=2(OP^2+OC^2)$$

$$=2(OA^2+OP^2)$$

又　$PA^2+PB^2=(OA-OP)^2+(OB+OP)^2$

$$=(OA-OP)^2+(OA+OP)^2$$

$$=2(OA^2+OP^2)$$

故ニ　$PC^2+PD^2=PA^2+PB^2=2(OA^2+OP^2)$

22. 對角線 AC, BD ノ交點ヲ O トシ，OP ヲ結ブト

$$AP^2+CP^2=2(PO^2+AO^2),\quad BP^2+DP^2=2(PO^2+BO^2)$$

然ルニ AO=BO デアルカラ

$$AP^2+CP^2=BP^2+DP^2$$

23. 三中線ヲ AD, BE, CF トスレバ

$$AG^2+BG^2=2AF^2+2GF^2 \qquad (1)$$

$$BG^2+CG^2=2BD^2+2GD^2 \qquad (2)$$

$$CG^2+AG^2=2CE^2+2GE^2 \qquad (3)$$

(1)+(2)+(3) ヨリ

$$2(AG^2+BG^2+CG^2)=2(AF^2+BD^2+CE^2)+(GF^2+GD^2+GE^2)$$

兩邊ヲ二倍シテ

$$4(AG^2+BG^2+CG^2)=AB^2+BC^2+CA^2+(CG^2+AG^2+BG^2)$$

故ニ　$AB^2+BC^2+CA^2=3(AG^2+BG^2+CG^2)$

別證　$AB^2+AC^2=2AD^2+2BD^2$ デアルカラ

$$2AB^2+2AC^2=9AG^2+BC^2 \qquad (1)$$

同樣ニ　$2BC^2+2BA^2=9BG^2+CA^2$　(2)

$$2CA^2+2CB^2=9CG^2+AB^2 \qquad (3)$$

(1)+(2)+(3) ヨリ結果ガ得ラレル。

[注意]　P ヲ任意ノ一點トスルト

$$AP^2+BP^2+CP^2=AG^2+BG^2+CG^2+3PG^2$$

デアル。

略證 AG ノ中點ヲ M トスルト

$2PM^2+2PD^2=4PG^2+4GM^2$ (1)

$BP^2+CD^2=2PD^2+2BD^2$ (2)

$AD^2+DO^2=2PM^2+2OM^2$ (3)

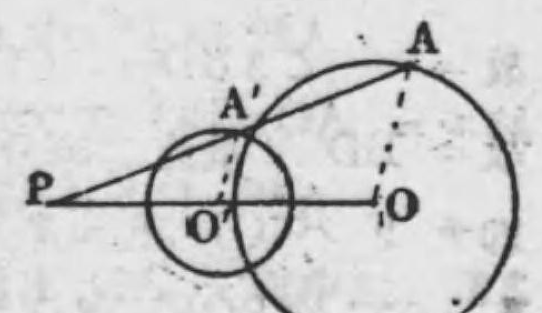
(1)+(2)+(3) ヨリ

$AP^2+BP^2+CP^2=3PG^2+AG^2+2BD^2+2GD^2$

故ニ $AP^2+BP^2=AG^2+BG^2+CG^2+3PG$

4. 圓

1. 定點ヲ P, 定圓ヲ O トシ, O 圓周上ノ任意ノ一點ヲ A トスル。PO, PA ノ中點ヲ夫々 O′, A′ トスレバ



$O'A'=\frac{1}{2}OA$

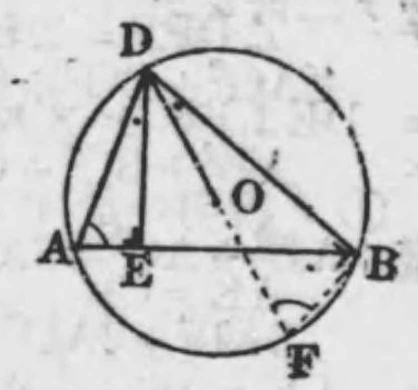
故ニ A′ ハ O′ ヲ中心トシ $\frac{1}{2}OA$ ヲ半徑トスル圓周上ニアル。

2. 圓 O 內ノ中心 O ト一致セザル一點 M ヲ通ル二弦 AB, CD ガ, モシ互ニ二等分サレタトスレバ

$AB\perp OM,\quad CD\perp OM$

即チ同一ノ直線 OM 上ノ一點 M ヲ通リ二ツノ垂線ガ引キ得タコトニナル。コレ不合理デアル。

3. DO ノ延長ト交ハル點ヲ F トスルト, △ADE, △FDB ニ於イテ

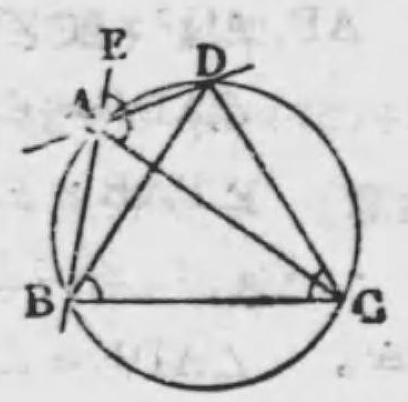


$\angle DAE=\angle DFB$

$\angle AED=\angle R=\angle FBD$

故ニ $\angle ADE=\angle BDO$ デアル。

4. BA ノ延長上ニ一點 E ヲトルト四邊形 ABCD ハ圓ニ內接シテヰルカラ



$\angle DAE=\angle DCB$

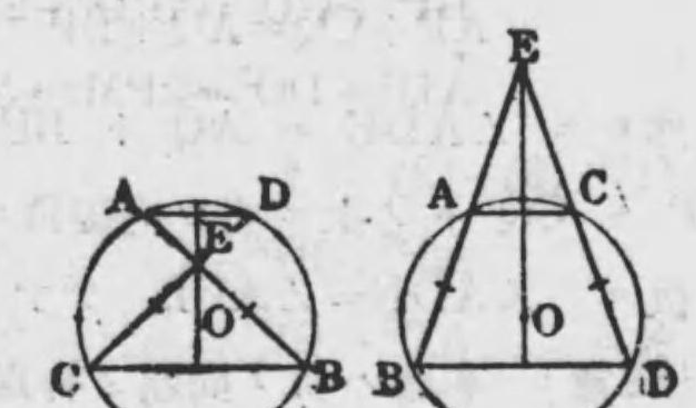
又 $\angle DAC=\angle DCB$

然ルニ AD ハ ∠CAE ヲ二等分スルカラ

$\angle DCB=\angle DBC$

故ニ BD=DC デアル。

5. ① AB=CD デアルカラ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$ デアル。



故ニ $\angle ABC=\angle DCB$

故ニ △ECB ハ二等邊三角形デアル。

又 BC∥AD デアル。

故ニ $BC\perp EO,\ AD\perp EO$ デアル。

② AD, BC ノ交點ヲ F トスル。

AB=CD デアルカラ

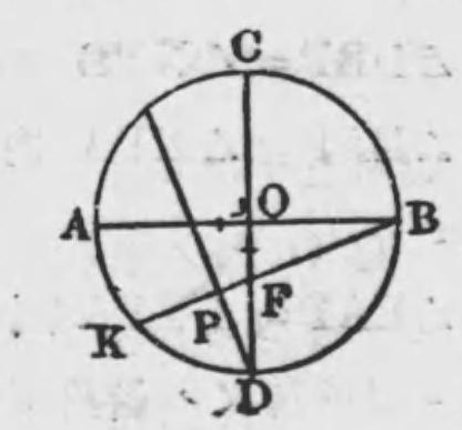
$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ 及ビ $\overset{\frown}{BAC}=\overset{\frown}{ACD}$

故ニ $\angle ABD=\angle CDB,\ AC\parallel BD,\ \angle CBD=\angle ADB$

故ニ BD ノ垂直二等分線ハ E 及ビ F ヲ通ル。

即チ F ハ OE 上ニアル。

6. ① △BOF, △DOE ニ於イテ



$OE=OF,\quad OB=OD$

$\angle BOF=\angle R=\angle DOE$

故ニ $\triangle BOF\equiv\triangle DOE$

故ニ $\angle OBF=\angle ODE$

依ツテ △DFP, △BFO ニ於イテ二角夫々相等シイカラ第三角モ等シイ。

即チ $\angle DPF=\angle BOF=\angle R$

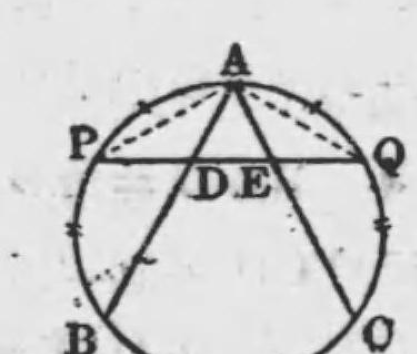
故ニ $DE\perp BF$ デアル。

② ① ノ證明ニ於イテ $\angle OBF=\angle ODE$ ナルヲ以テ

$\overset{\frown}{AK}=\overset{\frown}{CL}$

故ニ $\overset{\frown}{LK}=\overset{\frown}{AC}=\frac{1}{4}$圓周 デアル。

7. AP, AQ ヲ結ブト



$\angle ADE=\angle PAB+\angle APQ$ デアルカラ

$\angle PAB+\angle ADQ=\angle AQP+\angle QAC$

$=\angle AED$

故ニ $\angle ADE=\angle AED$

依ツテ △ADE ハ二等邊三角形デアル。

別證 PC, QB ヲ結ブト

$$\widehat{AP}+\widehat{CQ}=\widehat{AQ}+\widehat{BP}$$

然ルニ ∠ADE ハ $\widehat{AQ}$ ト $\widehat{BP}$ トノ上ニ立ツ内接角ニ等シク，∠ADE ハ $\widehat{AP}$ ト $\widehat{CQ}$ トノ上ニ立ツ内接角ニ等シイ。

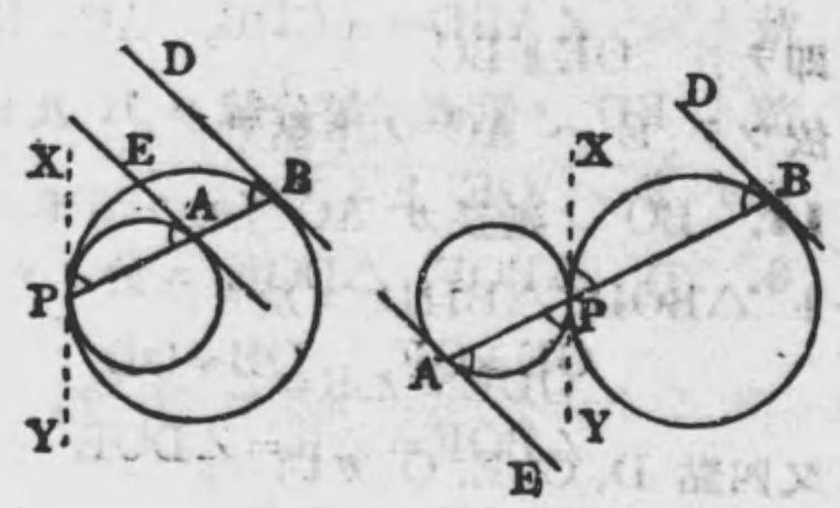
故ニ ∠ADE=∠AED デアル。

[注意] 本題ハ次ノ問題ノ特別ノ場合デアル。

一ツノ圓ノ二ツノ弧ノ中點ヲ結ブ直線ハ，ソレ等ノ弧ニ對スル弦ト等角ヲナス。

8. 二圓 O, O′ ガ P ニ於イテ切スルトシ，P ヲ通ル直線ガ圓 O, O′ トノ交點トヲ夫々 A, B トスル。

A, B 及ビ P ニ於ケル切線ヲ夫々 AE, BD 及ビ XY トスルト



∠DBP=∠XPB

∠EAP=∠XPA (内接ノ場合)

又ハ

∠EAP=∠YPA (外接ノ場合)

故ニ同位角又ハ錯角ガ相等シイ。

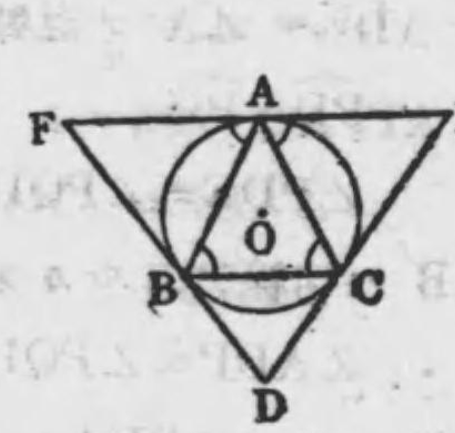
依ツテ AE∥BP デアル。

[注意 1] 二圓ガ單ニ切スルトイフ場合ニハ内切ト外切トノ二ツノ場合ノアルコト及ビ二圓ガ切スルトキハソノ補助線トシテ共通切線ヲ引クコトノ有効ナコト等ヲ注意スルガヨイ。

[注意 2] 本題ハ次ノ問題ト聯絡ヲトルガヨイ。

二ツノ圓ガ互ニ切スルトキ，切點ヲ通ル二ツノ割線ガ各ノ圓カラ夾ミトル弧ニ對スル弦ハ平行デアル。

9. 二等邊三角形 ABC ニ於イテ AC=AB トスル。



頂點 A, B, C ヲ通ル外切圓 O ノ切線ガ作ル三角形ヲ DEF トスレバ

△ABF, △ACE

ハ共ニ二等邊三角形デアル。

且ツ ∠BAF=ACB=∠ABC=∠CAE

故ニ △ABF≡△ACE

故ニ ∠E=∠F

依ツテ △DEF ハ二等邊三角形デアル。

別證 BC∥EF, OA⊥EF

故ニ AO⊥BC

依ツテ AO ノ延長ハ D ヲ通ル。

且ツ ∠BDO=∠CDO デアルカラ垂線 AD ト等角ヲナス斜線 DE, DF ハ相等シイ。

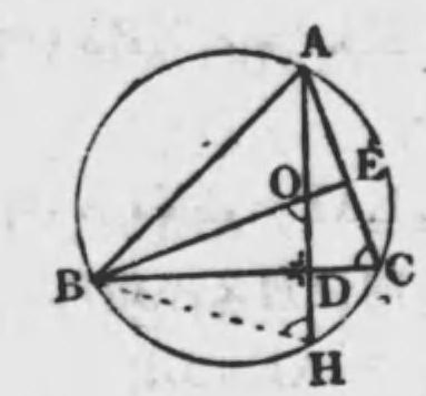
10. OE ヲ結ブト

∠OAE=∠R, OE⊥AD

即チ OE∥BC

依ツテ E ハ AC ノ中點デアル。

11. BO ノ延長ガ AC ト交ハル點ヲ E トシ AH, BC ノ交點ヲ D トスルト △BOD, △BHD ニ於イテ



∠ODB=∠R=∠HDB, BD ハ共通

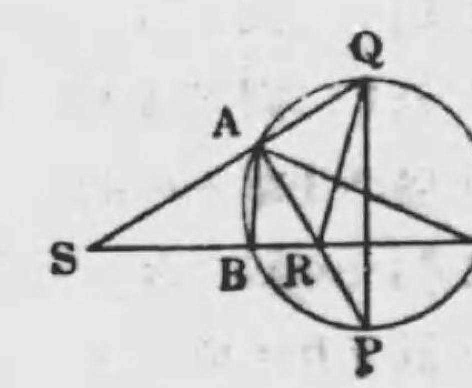
又四點 D, C, E, O ガ同一圓周上ニアルカラ

∠BOD=∠C=∠H

故ニ △BOD≡△BHD

故ニ OD=DH デアル。

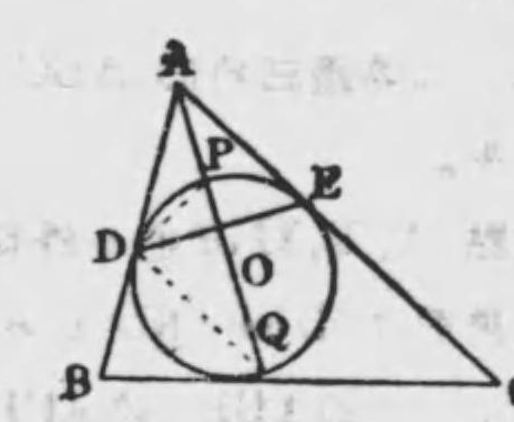
12. P ハ弧 BC ノ中點デ



∠PAQ=∠R 故ニ BC⊥PQ

△PQR ニ於イテ QA⊥PR, BC⊥PQ デアルカラ S ハ △PQR ノ垂心デアル。

13. AD ハ ∠A ノ二等分線デアル。



次ニ $\widehat{PD}=\widehat{PE}$

故ニ ∠PDE=∠PQD (1)

又 AB ハ切線デアルカラ

∠ADP=∠PQP (2)

(1), (2) ヨリ ∠PDA=∠PDE

故ニ PD ハ ∠ADE ノ二等分線デアル。

故ニ P ハ △ADE ノ内心デアル。

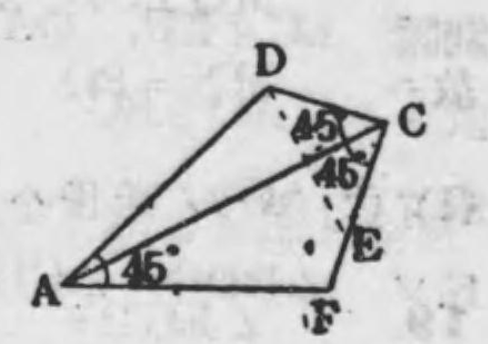
次ニ PD⊥DQ デアルカラ DQ ハ △ADE ノ D ニ於ケル二等分線デアル。

故ニ Q ハ △ADE ノ傍心デアル。

14. D ヨリ AC ニ垂線 DE ヲ引キ BC トノ交點ヲ E トスル。

$\angle ACB=45^\circ,\ \angle ACD=45^\circ,\ AC\perp DE$

故ニ △CDE ハ直角二等邊三角形デアル。



依ツテ $\angle DAB=45^\circ=\angle DEC$

故ニ四點 A, B, E, D ハ圓ニ内接スル。

對角線 AC ハ弦 DE ヲ垂直ニ二等分スルカラ △ABD ノ外心ハ AC 上ニアル。

15. 四點 A, B, D, E ハ圓周上ニアリ ∠B=∠C=∠R デアルカラ AD ガ BC ヲ二等分スルナラバ

$AB\perp BC$

故ニ AB=AC デアル。

16. △ABC ニ於イテ AC>AB トスル。

$\angle ACE+\angle ACB=\angle ABC-\angle ABE$

然ルニ $\angle ABE=\angle ADE=\angle ACE$

故ニ $\angle ADE+\angle ACB=\angle ABC-\angle ADE$

故ニ $2\angle ADE=\angle ABC-\angle ACB$

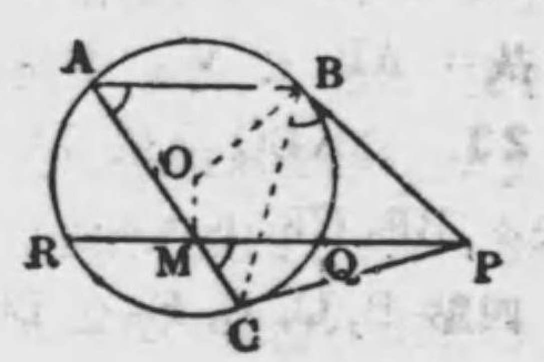
依ツテ $\angle ADE=\frac{1}{2}(\angle ABC-\angle ACB)$ デアル。

17. AB∥PR ナル故 $\angle A=\angle PMC$

又 PB ガ切線ナル故 $\angle A=\angle PBC$

故ニ $\angle PMC=\angle PBC$

故ニ四點 P, B, C, M ハ同一圓周上ニアル。



故ニコノ兩圓ハ三點 P. BC ヲ共有スル故一致スル。

故ニ $\angle PMO=\angle PCO=\angle R$

依ツテ M ハ QR ノ中點デアル。

18. AC=PC, BD=PD　故ニ AC+BD=PC+PD

四邊形 ABCD ハ梯形デアルカラ

$AC+DB=2MN$

故ニ $MN=\frac{1}{2}(PC+PD)$ (1)

次ニ四邊形 MNPQ ニ於イテ

$MQ\perp CD,\ PN\perp CD,$ 又 $MN\perp AB,\ PQ\perp AB$

故ニ $MN=PQ$ (2)

(1), (2) ヨリ $PQ=\frac{1}{2}(PC+PD)$

19. $\angle EGD=\angle R=\angle EFD$

依ツテ四點 D, E, G, F ハ同一圓周上ニアル。

同様ニ B, C, D, E モ同一圓周上ニアル。

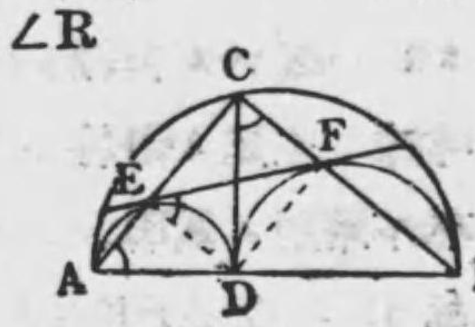
故ニ $\angle ADG=\angle AEF=\angle ABD=\angle BCE$

依ツテ BC∥GF デアル。

20. 半圓周ノ角ハ直角ナル故

$\angle ACB=\angle R,\ \angle AED=\angle R,\ \angle DFB=\angle R$

故ニ四點 E, D, F, C ハ同一圓周上ニアル。



故ニ $\angle BCD=\angle FED$

又 $\angle BCD=\angle CAD$

故ニ EF ハ圓 ADE ニ切スル。

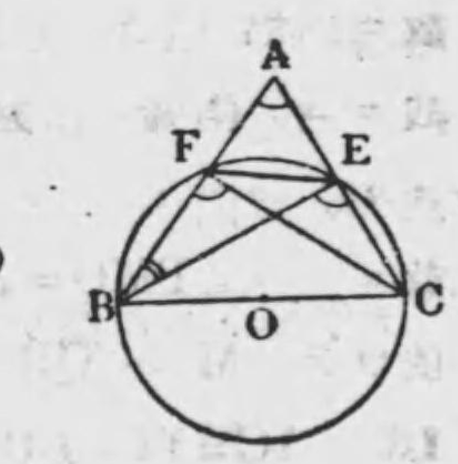
同様ニ EF ハ圓 BDF ニモ切スル。

21. 四邊形 AOBM ハ M ノ位置ニ關セズ常ニ圓ニ内接スル。而シテコノ圓ハ ∠OBM=∠R デアルカラ OM 即チ定圓 O′ 半徑ヲ直徑トスル圓周デアル。

又 ∠AOB=一定

故ニ AB ハ M ノ位置ニ關セズ一定デアル。

23. △ABC ノ底 BC ノ兩端カラ對邊ヘノ垂線ヲ夫々 BE, CF トスル。



四點 B, C, E, F ハ BC ヲ直徑トスル同一圓周 O 上ニアル。

而シテ直角三角形 △ABE ノ角ノ關係ヨリ

∠EBF=∠R−∠A=一定

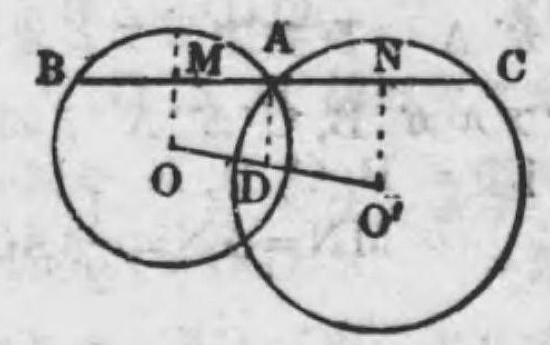
故ニ EF ハ定圓 O ニ於イテ定角 EBF ニ對スル弧ノ弦デアルカラ定長デアル。

24. 雜題四ノ3ヲ參照シ次ノ場合ノ作圖練習等モナサシムルガヨイ。

PQ=BP∼CP

25. 與ヘラレタ二點 A, B ノ垂直二等分線ガ定圓周 O トノ交點ヲ求メル圓ノ中心トスレバヨイ。

26. **解析** 二圓 O, O′ ノ交點ノ一ツ A ヲ通ル所要ノ直線 BC ガ作圖シ得タトシ, 弦 AB, AC 及ビ O, O′ ノ中點ヲ夫々 M, N 及ビ D トスルト



AM=AN 故ニ OM∥AD∥O′N

而シテ AB⊥MO デアルカラ

AD⊥BC

依ッテ次ノ作圖法ヲ得ル。

作圖 OO′ ノ中點 D ヲ求メ, DA ニ垂直ニ A ヲ通ル直線 BAC ヲ引ケバコレハ求メル直線デアル。

吟味 本題ノ解答ハ各交點ニ於イテ夫々一ツヅヽデアル。

本作圖題ニ關聯シテキル問題ヲ次ニ示ス。

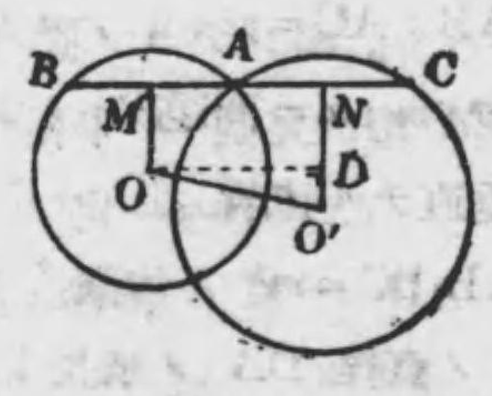
A, B ニ於イテ相交ハル二圓 O, O′ ノ交點ノ一ツヲ通ル直線ヲ引キ兩圓ニテ截リトラレル部分ヲ AB, AC トシタトキ

① AB+AC=m ナラシメヨ。

② AB∼AC=m ナラシメヨ。

③ AB:AC=$m:n$ ナラシメヨ。

④ AB·AC=m^2 ナラシメヨ。



等デアル。

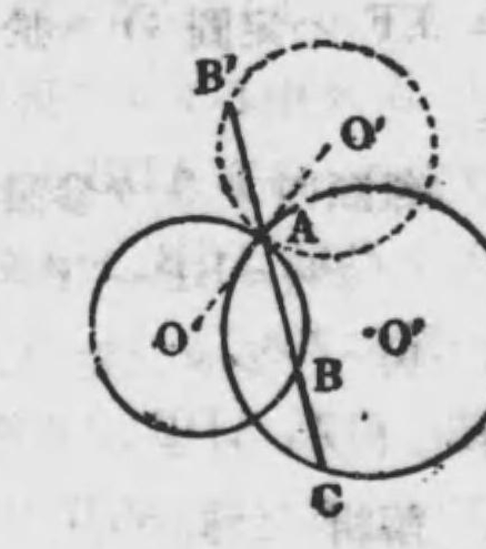
略解 ① AB+AC=m ノ作圖

〔i〕 B, C ガ A ノ反對側ニアル場合。

圓 O′ ガ圓 O ヨリ大トシ O′ ヲ中心トシテ $\frac{m}{2}$ ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ OO′ ヲ直徑トスル圓周トノ交點ヲ D, D′ トスル。

A ヲ通リ OD ニ平行線 BAC ヲ引ケバコレハ所要ノ一ツデアル。

〔ii〕 B, C ガ A ト同側ニアル場合。



回轉法ニヨリ次ノ如クスル。

OA ヲ延長シコレニ等シク O″ ヲトリ O″ ヲ中心トシテ O″A ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ 〔i〕 ヨリ

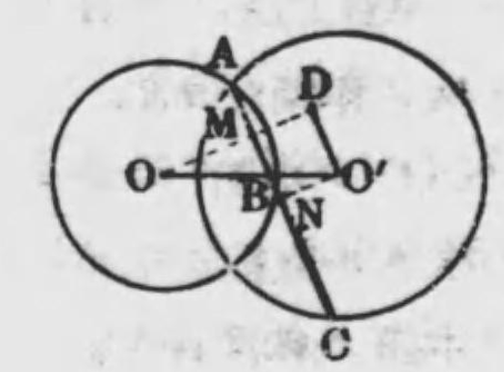
B′A+AC=m

ナル B′C ヲ引キ O 圓トノ交點ヲ B トスレバ ABC ハ所要ノモノデアル。

[注意] AB+AC=m ノ代リニ BC=l ナラシメルトスレバソノ作圖法ハ BC ガ A ノ反對側ニアル場合ハ ① ノ 〔i〕 ト同ジデアルガ B, C ガ A ト同側ニアル場合ニハ

$$MN=AN=\frac{1}{2}(AC\sim AB)$$

$$=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$$



從ッテ圖ニ於イテ O′D=$\frac{1}{2}l$ トナル。

② AB∼AC=m ノ作圖。

〔i〕 B, C ガ A ノ同側ニアル場合。

コノ場合ハ上ノ ① ノ注意ニ述ベテアルヤウニスレバヨイ。

〔ii〕 B, C ガ A ノ反對側ニアル場合。

コレハ上ノ場合 ① ノ 〔ii〕 ニヨリ回轉ニヨレバヨイ。

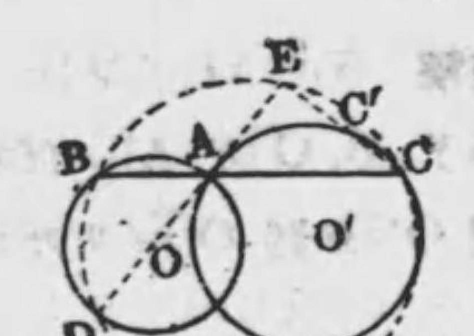
③ AB:AC=$m:n$ ナル場合。

OO′ ヲ $m:n$=問題 26 ノ圖ニ於イテ OO′ ヲ OD:DO′=$m:n$ ナラシメ AD ニ垂直ナル直線 BC ヲ引ケバヨイ。

④ AB·BC=m^2 ノ作圖。

圓 O ノ直徑 DA ノ延長上ニ一點 E ヲトリ,

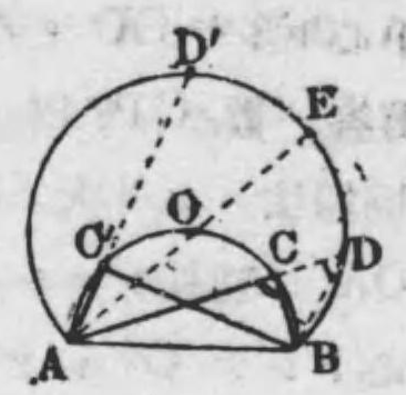
ADAE=m^2 ナラシメ, E ヨリ DE ニ垂線 EC ヲ引キ O′ 圓トノ交點 C トスル。



CAB ハ所要ノ一ツデアル。

27. 與ヘラレタ線分ヲ m トスル。

弓形 ACB ノ角ノ半分ノ大イサノ角ヲ有スル弓形 AOB ヲコレト同ジ側ニ同ジ弦ヲ有スルヤウニ畫ク。



次ニ A ヲ中心トシテ與ヘラレタ長サ m ノ半徑デ圓周ヲ畫キ，弓形 ADB トノ交點ノ一ツヲ D トスル。

AD ト弓形 ACB トノ交點ヲ C トスレバ C ハ求ムル一點デアル。

吟味 弓形 ADB ノ直徑ヲ AOE トシ中心ヲ O トスレバ O ハ弓形 ACB 上ニアリ，且ツ弧 ACB ノ中點デアル。

1. $m<\mathrm{BE}$ ナラバ D, D′ ノ二點ヲ得ル故求メル點ハ C, C′ ノ二ツトナル。

コノ場合 $\mathrm{AD}=\mathrm{AD'}$ ナル故 $\angle\mathrm{EAD}=\angle\mathrm{EAD'}$，依ツテ $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{ABC'}$，$\angle\mathrm{BAC'}=\angle\mathrm{ABC}$ トナツテ $\triangle\mathrm{ARC}\equiv\triangle\mathrm{BAC'}$ トナル。

2. $m=\mathrm{BE}$ ナレバ解答ハ一ツ。

3. $m>\mathrm{BE}$ ナレバ解答ハナイ。

28. 1. 外接ノ場合。

$\triangle\mathrm{ABC}$ ノ內接圓ガ三邊 BC, CA, AB ニ切スル點ヲ夫々 D, E, F トシ A, B, C ヲ夫々中心トシテ AE, BD, CE ヲ半徑トスル圓周ヲ畫ケバ互ニ外接スル求メル三ツノ圓ヲ得ル。

2. 內接ノ場合。

$\triangle\mathrm{ABC}$ ノ角 A 內ノ傍切圓ガ三邊 BC, CA, AB ニ切スル點ヲ夫々 D, E, F トシ上ト同樣ニ作圖スレバ一ツハ他ノ二ツヲ包ム三ツノ圓ヲ得。

吟味 作圖ハ常ニ可能デアル。

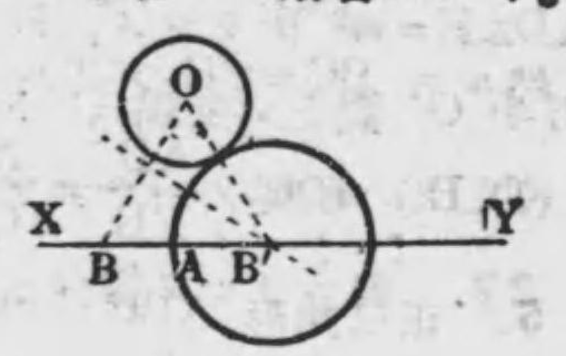
解答ノ數ハ外接ノ場合一種，內接ノ場合三種アル。

29. AB ノ垂直二等分線ヲ引ク。

次ニ定圓ノ中心 O ヨリ定直線 L ニ垂直線ヲ引キコレ等ノ直線ノ交點 O′ ヲ中心トシ A 又ハ B マデノ半徑デ圓周ヲ畫ケバコノ圓ハ求メル圓デアル。

吟味 定圓 O ノ半徑ヲ r，OA ノヲ r'，O′O ノ長サヲ d トスレバ三線分 r, r', d ガ三角形ヲ作ル場合ニハ解答ガアルガ然ラザル場合ニハ解答ガナイ。

30. 圓 O ノ半徑ニ等シク X, Y 上ニ A ノ兩側ニ B 及ビ B′ ヲトル。



B 及ビ B′ ヲ O ト結ブ線ノ垂直二等分線ヲ引キ XY トノ交點ヲ P 及ビ P′ トシ，P 及ビ P′

ヲ中心トシテ A マデノ半徑デ圓周ヲ畫ケバ所要ノ圓ヲ得ル。

解答ノ數ハ P, P′ ノ數ニヨル。

5. 比及ビ比例

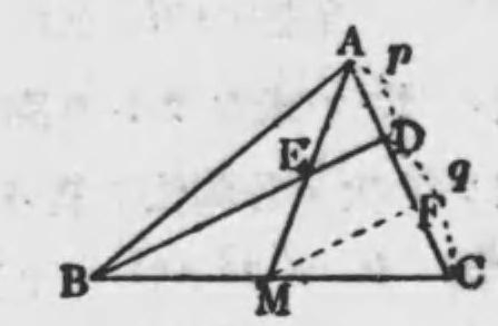
1. $\mathrm{AB}\parallel\mathrm{PE},\quad \mathrm{BC}\parallel\mathrm{PF}$

故ニ $\mathrm{DE}:\mathrm{DA}=\mathrm{DP}:\mathrm{DB}=\mathrm{DF}:\mathrm{DC}$

故ニ $\triangle\mathrm{DOA}$ ニ於イテ $\mathrm{DE}:\mathrm{DA}=\mathrm{DF}:\mathrm{DC}$ デアルカラ $\mathrm{AC}\parallel\mathrm{EF}$ デアル。

2. M ヲ通リ BD ニ平行ナル直線ト AC トノ交點ヲ F トスレバ，$\triangle\mathrm{AMF}$ ニ於イテ $\mathrm{ED}\parallel\mathrm{MF}$ デアルカラ

$$\mathrm{AE}:\mathrm{EM}=\mathrm{AD}:\mathrm{DF}=\mathrm{P}:\mathrm{DF}$$



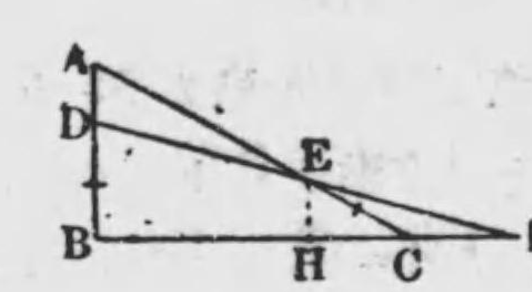
又 F ハ DC ノ中點デアル故 $\mathrm{DF}=\dfrac{q}{2}$ デアル。

故ニ $\mathrm{AE}:\mathrm{EM}=\mathrm{P}:\mathrm{DF}=p:\dfrac{q}{2}=2p:q$

3. E ヲ通リ AB ニ平行ナル直線ガ，邊 BC ト交ハル點ヲ H トスルト

$$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{EHC}$$

故ニ $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{EH}}=\dfrac{\mathrm{DB}}{\mathrm{EH}}$ 〔BD=CE〕



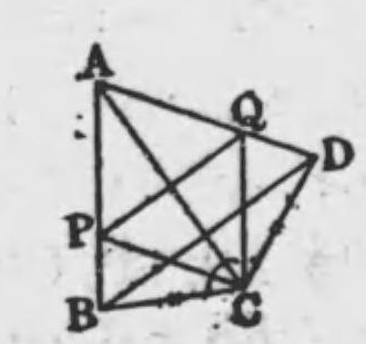
又 $\triangle\mathrm{FDB}\backsim\triangle\mathrm{FEH}$

故ニ $\dfrac{\mathrm{DB}}{\mathrm{EH}}=\dfrac{\mathrm{DF}}{\mathrm{EF}}$

依ツテ $\dfrac{\mathrm{DF}}{\mathrm{EF}}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$

4. $\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{PB}}=\dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}$ (1)

$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QD}}=\dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CD}}$ (2)



然ルニ BC=CD デアルカラ

(1), (2) ヨリ $\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{PB}}=\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QD}}$

5. 正三角形 ABC ノ內心ヲ I，角 A 內ノ傍心ヲ O トスレバ

$\triangle ABC \equiv \triangle OBC$

故ニ BC ハ AO ヲ垂直ニ二等分スル。

故ニ傍切圓ノ半徑ハ $\triangle ABC$ ノ A ヨリ高サニ等シイ。

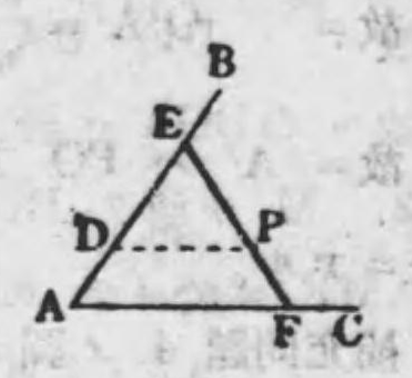
又 $\triangle ABC$ ハ正三角形デアルカラ內心, 外心, 重心ハ皆一致スル。

故ニ內切圓, 外切圓, 傍切圓ノ半徑ヲ夫々 r, s, t トスルト

$$r : s : t = 1 : 2 : 3$$

デアル。

6. **解析** P ヲ通ル直線 EPF ガ求メラレタトシ, 角ノ二邊 AB, AC トノ交點ヲ夫々 E, F トシ P ヨリ AC ニ平行線ヲ引キ AB トノ交點ヲ D トスレバ



$$EP : PF = ED : DA = m : n$$

故ニ D ハ求メラレル點デアル。

依ッテ次ノ作圖法ヲ得ル。

作圖 P ヨリ AC ニ平行線 PD ヲ引キ, AB トノ交點ヲ D トシ

$$AD : DE = m : n$$

ナル點 E ヲ AD ノ延長上ニトリ EP ヲ結ブ直線 EPF ヲ引ク。

7. 弦 AB ヲ $m : n$ ノ比ニ內分シ, 分點ヲ D トスル。

共軛弧 AB ノ中點ヲ M トシ, MD ヲ結ブ直線ト弧 AB トノ交點ヲ C トスレバ, C ハ求メル點デアル。

證明 $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$ デアルカラ

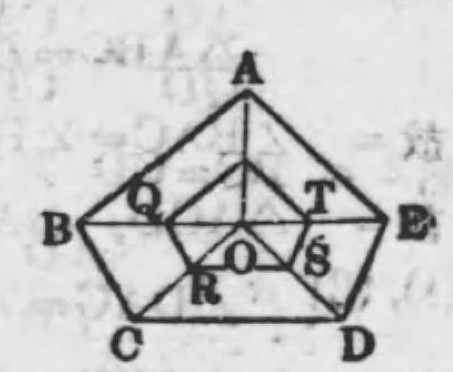
$$AC : BC = AD : DB$$

然ルニ $AD : DB = m : n$ デアルカラ

$AC : CB = m : n$ デアル。

[注意] AB ヲ $m : n$ ニ外分スル點ヲ D′ トシ, MD′ ガ共軛弧ト交ハル點ヲ C′ トスレバ $AC' : C'B = m : n$ デアル。

8. P カラ邊 AB, BC, CD, DE ニ平行ナル直線ヲ順次ニ引キ OB, OC, OD, OE トノ交點ヲ夫々 Q, R, S, T トスレバ



$$\frac{OP}{OA} = \frac{OQ}{OB} = \frac{OR}{OC} = \frac{OS}{OD} = \frac{OT}{OE}$$

故ニ $\dfrac{OP}{OA} = \dfrac{CT}{OD}$ デアルカラ $AE \parallel TP$ デアル。

9. 定點ヲ P トシ, 定圓ヲ O トスル。

圓周上ノ一點ヲ A トシ, PA 及ビ PO ヲ $m : n$ ニ分ツ點ヲ夫々 A′ 及ビ O′ トスルト

$$O'A' \parallel OA, \quad 故ニ\ O'A' : OA = PO' : PO = m : n$$

故ニ $O'A' = \dfrac{m}{n} OA =$ 一定

故ニ A′ ハ PO ヲ $m : n$ ニ分ツ點ヲ中心トシ, $\dfrac{m}{n}OA$ ヲ半徑トスル圓周上ニアル。

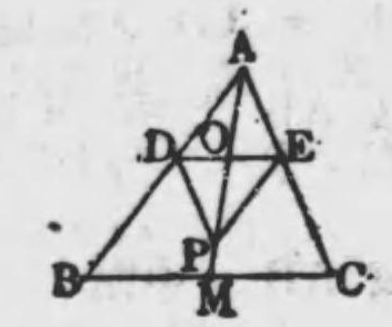
補充問題 4 ノ圖ノ 1 參照。

10. AP ヲ結ビ, コレト BC 及ビ DE トノ交點ヲ M′ 及ビ O トスルト四邊形 ABPE ハ平行四邊形デアルカラ DO=OE, 又 $\triangle ADO \backsim \triangle ABM'$ デアルカラ

$$\frac{BM'}{DO} = \frac{AO}{AM'} \qquad (1)$$

同樣ニ

$$\frac{CM'}{EO} = \frac{AO}{AM'} \qquad (2)$$



(1), (2) ノ右邊相等シイカラ

$$\frac{BM'}{DO} = \frac{CM'}{EO}$$

然ルニ DO=OE デアルカラ BM′=CM′

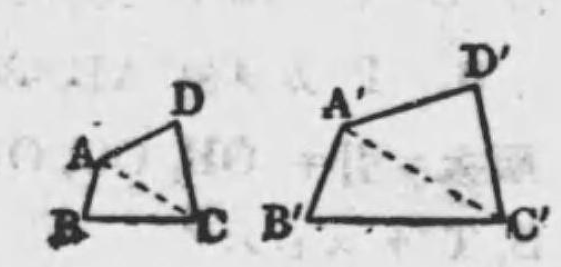
故ニ BC ノ中點 M ト A, P ハ同一直線上ニアル。

11. ① 二ツノ四邊形 ABCD, A′B′C′D′ ニ於イテ

$$\angle A = \angle A', \quad \angle B = \angle B', \quad \angle C = \angle C'$$

$AB : BC = A'B' : B'C'$ トスルト

$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$



故ニ $\angle BAC = \angle B'A'C', \quad \angle ACB = \angle A'C'B'$

故ニ $\triangle ACD, \triangle A'C'D'$ ニ於イテ

$$\angle DAC = \angle D'A'C', \quad \angle ACD = \angle A'C'D'$$

故ニ $\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$

依ツテ四邊形 ABCD, A′B′C′D′ ハ角ガ皆相等シク

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}$$

デアルカラ相似形デアル。

② 四邊形 ABCD, A′B′C′D′ ニ於イテ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'},\quad \angle B=\angle B',\quad \angle D=\angle D'$$

トスルト △ABC, △A′B′C′ ニ於イテ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'},\quad \angle B=\angle B'$$ デアル。

故ニ　△ABC∽△A′B′C′

依ツテ　∠BAC=∠B′A′C′,　∠ACB=∠A′C′B′

同樣ニ　△ACD∽△A′C′D′

依ツテ　∠DAC=∠D′A′C′,　∠ACD=∠A′C′D′

故ニ四邊形 ABCD, A′B′C′D′ ハ角ガ皆相等シイ。

依ツテ相似デアル。

12. B ヲ通リ共通弦 AB ニ垂直ナル割線 C′BD′ ヲ引キ圓 ABC, ABD トノ交點ヲ夫々 C′, D′ トスレバ

∠C=∠C′,　∠D=∠D′

故ニ　△ACD∽△AC′D′,　AC : AD=AC′ : AD′

然ルニ C′D′⊥AB デアルカラ AC′, AD′ ハ何レモ直徑デアル。

故ニ AC, AD ノ比ハコノ二圓ノ直徑ノ比ニ等シイ。

13. BC∥MN デアルカラ

$$\frac{ME}{BC}=\frac{AM}{AB} \qquad (1)$$

又 $$\frac{EN}{BC}=\frac{DN}{DC} \qquad (2)$$

然ルニ $\frac{AM}{AB}=\frac{DN}{DC}$ デアルカラ (1), (2) ノ左邊ハ相等シイ。

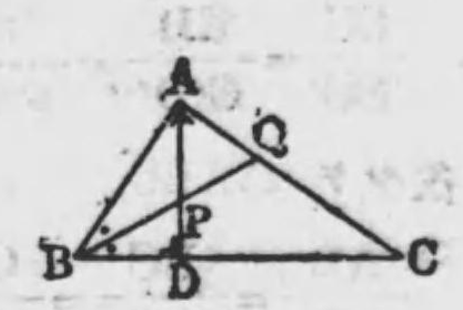
故ニ $\frac{ME}{BC}=\frac{EN}{BC}$　故ニ ME=EN デアル。

14. BP, BQ ハ夫々 △BAD, △BCA ノ ∠B ノ二等分線デアルカラ

$$\frac{AP}{PD}=\frac{BA}{BD} \qquad (1)$$

$$\frac{CQ}{QA}=\frac{BC}{BA} \qquad (2)$$

又 △BAD, △BCA ニ共ニ直角三角形ニシテ角 B ガ共通デアルカラ



△BAD∽△BCA

故ニ $\frac{BA}{BD}=\frac{BC}{BA}$

依ツテ (1), (2) ノ左邊ガ相等シイ。

即チ $\frac{AD}{PD}=\frac{CQ}{QA}$

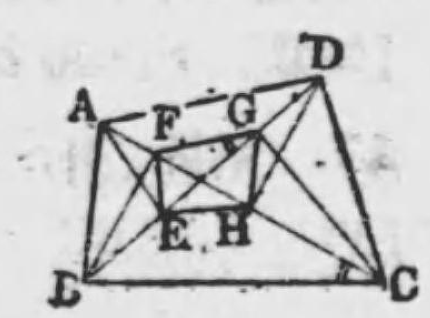
15. 本題ハ ABCD ガ平行四邊形デアル場合デモ成立スル。

次ニ任意ノ四邊形ニ就イテ證明ヲ示ス。

平行四邊形ノ場合ノ證明ハコレニ倣ヘバヨイ。

四邊形 ABCD ノ各頂點ヨリ對角線ヘ下セル垂線ノ足ヲ夫々 E, F, G, H トスレバ E, F 及ビ F, G ハ夫々 AB, BC ヲ直徑トスル圓周上ニアルカラ

∠BAC=∠FEG　及ビ　∠ACB=∠FGE



故ニ　△ABC∽△EFG

故ニ $$\frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FG}=\frac{AC}{EG} \qquad (1)$$

同樣ニ　△ADC∽△EHG

故ニ $$\frac{AD}{EH}=\frac{DC}{EG}=\frac{AC}{EF} \qquad (2)$$

(1), (2) ヨリ　$\frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FG}=\frac{AD}{EH}=\frac{DC}{HG}$

又三角形ノ相似カラ

∠BAD=∠FEH,　∠ABC=∠EFG

∠BCD=∠EGH,　∠ADC=∠GHE

故ニ二ツノ四邊形ハ相似デアル。

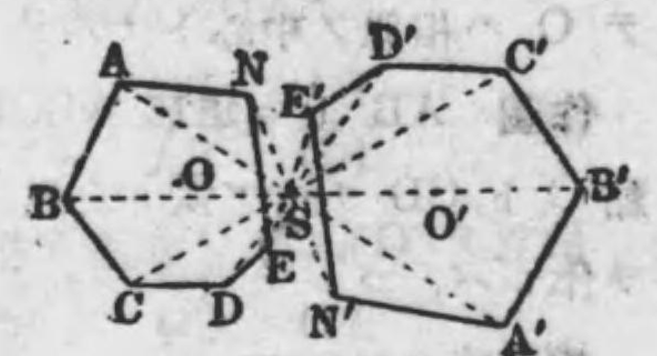
16. 二ツノ圓 O, O′ ノ切點ヲ S トスレバ

$$\triangle SAB \backsim \triangle SA'B',\quad \triangle SBC \backsim \triangle SB'C'$$
$$\triangle SCD \backsim \triangle SC'D',\ \cdots\cdots,\ \triangle SNA \backsim \triangle SN'A'$$

故ニ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{SB}{SB'},\quad \dfrac{SB}{SB'}=\dfrac{BC}{B'C'},\quad \dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{SC}{SC'}$

$$\frac{SC}{SC'}=\frac{CD}{C'D'}\cdots\cdots\frac{NA}{N'A'}=\frac{SA}{SA'}$$

依ツテ



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}\cdots\cdots=\frac{AN}{A'N'} \qquad (1)$$

又 $\angle ABS=\angle A'B'S',\quad \angle SBC=\angle SB'C'$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{故ニ} & \angle ABC=\angle A'B'C \\ \text{同樣ニ} & \angle BCD=\angle B'C'D' \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \angle NAB=\angle N'A'B' \end{array}\right\} \qquad (2)$$

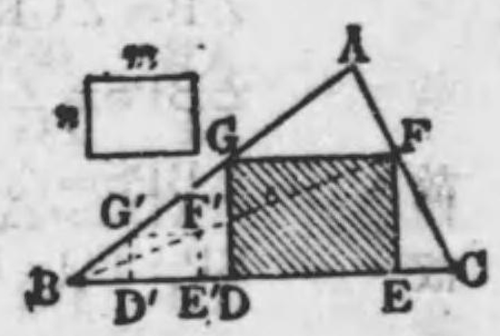
故ニ (1), (2) カラ

多角形 ABCD ……N ∽ 多角形 A′B′C′D′……N′

二圓ガ內切ノ場合モ同樣デアル。

[注意] S ハ兩多角形ノ相似ノ中心デアル。

17. 解析 與ヘラレタ矩形ノ二隣邊ヲ m, n トシ，コレト相似ナ矩形 DEFG ガ△ABC ニ圖ノ如ク內接シ得タトスル。



BF ヲ結ビ BD, BE, BF, BG ヲ同ジ比 $m:n$ ニ分ツ點ヲ夫々 D′, E′, F, G′ トスレバコノ四點ハ所要ノ矩形ト相似ナ矩形 D′E′F′G′ ヲ作ル。

從ツテ B ハコノ兩矩形ノ相似ノ中心トナル。

作圖 BC 上ノ任意ノ一點 D′ カラ BC ニ垂線 D′G′ ヲ立テ AB トノ交點ヲ G′ トスル。

D′G′ : D′E′ $= n : m$ ナル E′ ヲ BC 上ニトリ矩形 D′E′F G′ ヲ作ル。

次ニ BF′ ヲ延長シ AC トノ交點ヲ F トシ F, F′ ヲ對應頂點トスル矩形 DEFG ヲ畫ケバコレハ求メルモノデアル。

證明略ス。

18. 解析 所要ノ矩形 PQRS ガ畫カレタトシ，AB ノ中點 O ト P 及ビ S ヲ結ブト，△PQO ≡ △SRO デアルカラ OQ=OR デアル。

OP, OQ, OR, OS ヲ延長シ

$$\frac{OP}{OD}=\frac{OQ}{OA}=\frac{OR}{OB}=\frac{OS}{OC}$$

ナル如ク C, D ヲトリ矩形 ABCD ヲ作レバコレハ矩形 PQRS ト相似ニシテ O ハ相似ノ中心トナル。

作圖 AB 上ニ矩形 ABCD ヲ畫キ AB : AD $= m : n$ ナラシメ，AB ノ中點 O ト CD ヲ結ブ弧ト交點 SP ヨリ AB ニ垂線 SR, PQ ヲ下シ矩形 PQRS ヲ作レバ，コレハ求メルモノデアル。

證明略ス。

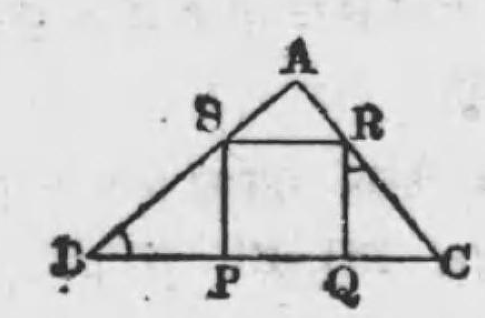
19. 菱形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トスレバ，O ハ內切圓ノ中心デアル。

內切圓 O ト邊 AB トノ交點ヲ E トスレバ對角線 AC, BD ハ直交スル故△AOB ハ直角三角形デ OE ハ頂角ノ頂點カラ斜邊 AB ヘノ垂線デアル。

故ニ $OE^2=AE \cdot EB$ デアル。(第三篇第二章定理五)

他モ同樣デアル。

20. △BPS, △RQC ニ於イテ



$$\angle B=\angle CRQ$$
$$\angle BPS=\angle RQC$$

故ニ $\triangle BPS \backsim \triangle RQC$

故ニ $BP : PQ=PQ : CQ$

21. 四邊形 ABDE, △AFDC, CEFB ハ何レモ圓ニ內接スル。

故ニ $AO \cdot OD=BO \cdot OE \qquad (1)$

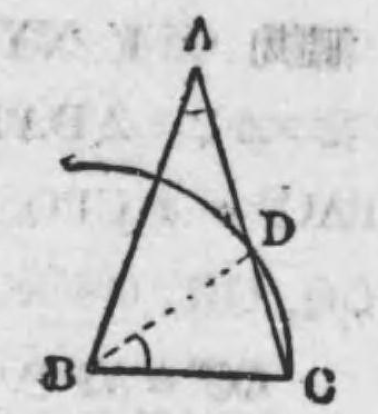
$BO \cdot OE=CO \cdot OF \qquad (2)$

(1), (2) カラ

$$AO \cdot OD=BO \cdot CE=CO \cdot OF$$

22. 問題五十四ノ 3 參照。

23. $\triangle ABC$, $\triangle DBC$ ハ共ニ等邊三角形デ $\angle C$ ガ共通デアルカラ　$\angle A = \angle CBD$



故ニ三角形 ABD ノ外接圓ハ BC ニ B 點ニ於イテ切スル。

故ニ　　$BC^2 = CD \cdot CA$

24. ①　$\triangle ABE$, $\triangle ADC$ ニ於イテ

$\angle BAE = \angle CAD$,　　$\angle E = \angle C$

故ニ　　$\triangle ABE \backsim \triangle ADC$

故ニ　　$AE \cdot AB = AC \cdot AD$

依ツテ　$AD \cdot AE = AB \cdot AC$

②　　$AD \cdot AE = AD^2 + AD \cdot DE$

故ニ　　$AD^2 = AB \cdot AC - AD \cdot DE = AB \cdot AC - BD \cdot DC$

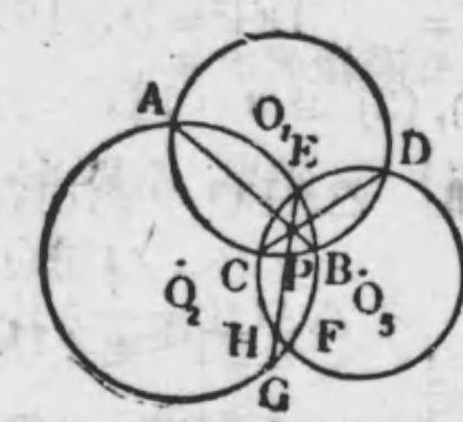
同樣ノ方法デ外角ノ二等分線ヲ AD′ トスレバ

$AD^2 = BD' \cdot D'C - AB \cdot AC$

デアルコトヲ證明サセルガヨイ。

［注意］ 本題ノ關係式ヲ用ヒテ三角形ノ三邊ノ長サヲ知ツテ角ノ二等分線ノ長サヲ計算スルコトガ出來ル。

25. 三ツノ圓 O_1, O_2, O_3 ガ一直線上ニアルトキハ共通弦ハ何レモ中心線ニ垂直デアルカラ互ニ平行デアル。



O_1, O_2, O_3 ガ同一直線上ニナイ場合ヲ考ヘル。

弦 AB, CD ノ交點ヲ P トシ，EP ノ延長ガ O_2, O_3 ト夫々 G, H ニ於イテ交ハルトスレバ

圓 O_1 ニ關シテ　　$PA \cdot PB = PC \cdot PD$　　(1)

圓 O_2 ニ關シテ　　$PA \cdot PB = PE \cdot PG$　　(2)

圓 O_3 ニ關シテ　　$PC \cdot PD = PE \cdot PH$　　(3)

(1), (2) ヨリ　　$PC \cdot PD = PE \cdot PG$　　(4)

(3), (4) ヨリ　　$PE \cdot PH = PE \cdot PG$

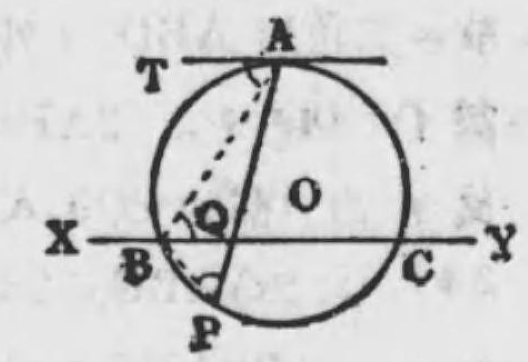
故ニ　　$PH = PG$

依ツテ G ト H トハ合シテ二圓ノ交點 F ト一致スル。

即チ三ツノ弦ハ AB, CD, EF ハ一點ニ合ス。

26. 圓周 O ト XY トノ交點ヲ B, C トシ，AB, BP ヲ結ブト

$\angle P = \angle BAT = \angle ABQ$



故ニ AC ハ $\triangle CPQ$ ノ外接圓ニ B 點ニ於イテ切スル。

故ニ　　$AC^2 = AP \cdot AQ$

依ツテ AC ハ AP ノ位置ニ關セズ一定デアル。

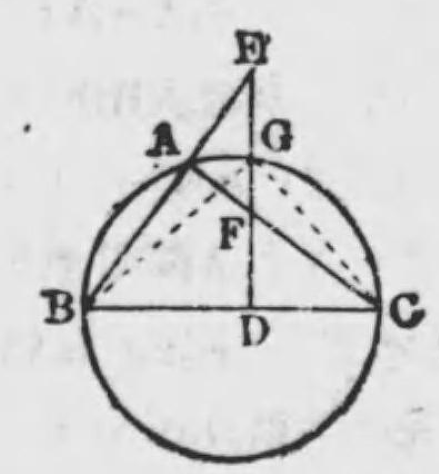
故ニ $AP \cdot AQ$ ハ定量デアル。

［注意］ 本題ハ幾何學的變換ノ一種デアル反轉ノ特別ナ場合ヲ表ハスモノデアル。

27. $\triangle BDE$, $\triangle FDC$ ニ於イテ四點 A, B, D, F ガ同一圓周上ニアルカラ

$\angle B = \angle CFD$

$\angle BDE = \angle R = \angle FDC$



故ニ　　$\triangle BDF \backsim \triangle FDC$

故ニ　　$\dfrac{DB}{DE} = \dfrac{DF}{DC}$　　故ニ　$DB \cdot DC = DE \cdot DR$

又 BC ガ直徑デアルカラ $\triangle GBC$ ハ直角三角形デアル。

故ニ　　$DG^2 = DB \cdot DC$

(1), (2) ヨリ　$DG^2 = DE \cdot DF$　即チ DG ハ DE, DF ノ比例中項デアル。

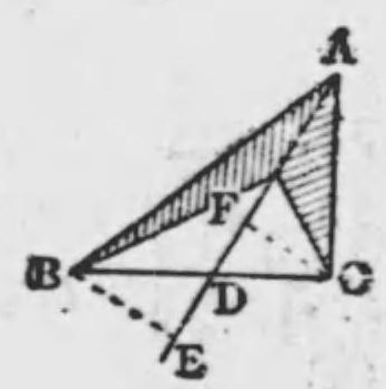
28. $\triangle ABC$ ノ内切圓又ハ傍切圓ノ半徑ヲ r トスレバ

$\triangle AOB = \dfrac{1}{2} AB \cdot r$,　$\triangle BOC = \dfrac{1}{2} BC \cdot r$,　$\triangle COA = \dfrac{1}{2} CA \cdot r$

故ニ　　$\triangle AOB : \triangle BOC : \triangle COA = AB : BC : CA$

29. $\triangle ABC$ ノ頂點 B 及ビ C ヨリ AD ニ垂線 BE, CF ヲ引クト

$\triangle AOB : \triangle AOC = BE : CF$　　(1)



又 $\triangle BDE \backsim \triangle ODF$ ヨリ

$BE : CF = BD : CD$　　(2)

故ニ (1), (2) ヨリ

$\triangle AOB : \triangle AOC = BD : DC$

30. 圓 O ノ直徑 AB ヲ n 箇ノ部分ニ分ケタ各部分ノ長サヲ $a, b, c, \cdots\cdots, p$

トスレバ

$$AB=a+b+c+\cdots\cdots+p$$

デアル。

圓Oノ周ハ　$2AB\pi$

又 n 箇ノ部分 $a, b, c, \cdots\cdots, p$ ヲ直徑トシタ圓ノ周ハ

$$2\pi a+2\pi b+2\pi c+\cdots\cdots+2\pi p$$

然ルニ $AB=a+b+c+\cdots\cdots+p$ デアルカラ

$$2AB\pi=2\pi a+2\pi l+2\pi c+\cdots\cdots+2\pi p$$

依ツテ元ノ圓周ハ n 箇ニ分ケラレタ直徑ノ各部分ヲ直徑トシタ圓ノ周ノ和ニ等シイ。

31. ① $\triangle ABC\backsim\triangle ABD\backsim\triangle ACD$ デアルカラ

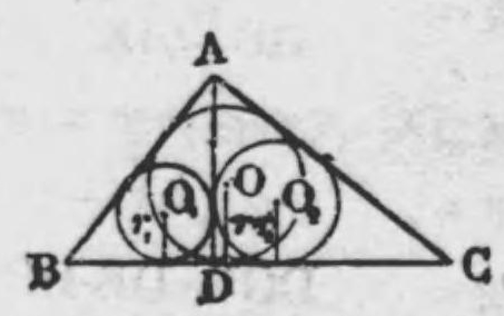
$$\triangle ABD:\triangle CAD=AB^2:AC^2 \qquad (1)$$

$$\triangle ABD:\triangle CAD=BD:DC \qquad (2)$$

(1), (2) ヨリ

$$AB^2:AC^2=BD:DC \qquad (3)$$

又　$r_1:r_2=AB:AC \qquad (4)$



故ニ (3), (4) ヨリ

$$r_1^2=r_2^2=BD:DC$$

② 上ノ①ノ(4) ヨリ

$$r_1^2+r_2^2:r_2^2=AB^2+AC^2:AC^2 \qquad (5)$$

$\triangle ABC\backsim\triangle DAC$ ヨリ

$$r^2:r_2^2=BC^2:AC^2 \qquad (6)$$

(5), (6) ヨリ

$$\frac{r_1^2+r_2^2}{r^2}=\frac{BC^2}{BC^2}=1 \qquad \text{故ニ} \quad r_1^2+r_2^2=r^2$$

32. 問題五十九ノ4參照。

33. 圓Oニ内接スル正三角形及ビ正六角形ヲABC及ビADBECFトシ外切スル正三角形ヲA′B′C′トスル。

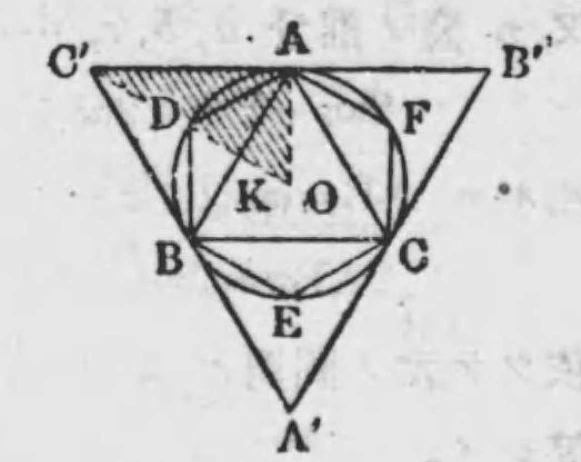
OC′ヲ結ブト D ハ弧ノ中點デアルカラソノ上ニアル。

OC′トABトノ交點ヲKトスレバ $\triangle AOK, \triangle AOD, \triangle AOC'$ ハ夫々 S, S_1, S_2 ノ $\frac{1}{6}$ ニアタル。

故ニ　正六角形 $ADBECF=2\triangle ABC \qquad (1)$

$\frac{1}{2}\triangle A'B'C'=$ 正六角形 $ADBECF \qquad (2)$

(1), (2) ヨリ



$$S_1=2S, \quad \frac{1}{2}S_2=S_1$$

故ニ　$S:S=1:2, \quad S_1:S_2=1:2$

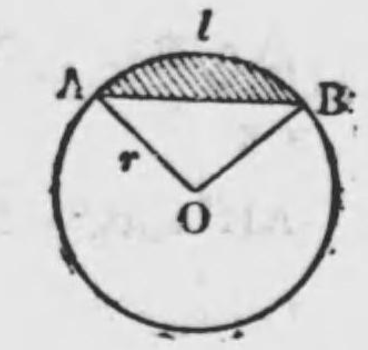
依ツテ　$S:S_1=S_1:S_2$ デアル。

34. $\triangle ACD, \triangle ABC$ カラ

$$CD=AO\sin A, \quad AC=AB\cos A$$

故ニ　$CD=AB\sin A=C\sin A\cos A$

35. 求メル弓形ノ面積ヲ S トスレバ



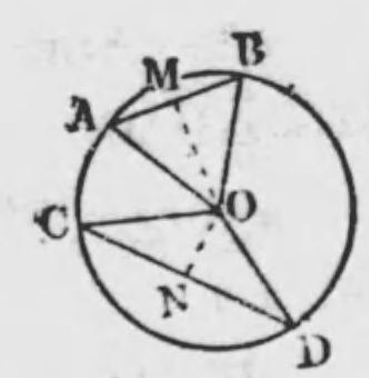
$$S=\text{扇形}\,AOB-\triangle OAB$$

$$=\frac{1}{2}lr-\frac{1}{2}r^2\sin\angle ACB$$

$$=\frac{1}{2}lr\left(l-r\sin\frac{180°l}{\pi r}\right)$$

36. 弦ABノ中點ヲMトスレバ, $MO\perp AB$ デアルカラ

$$AM=r\sin\angle AOM$$



故ニ　$AB=2r\sin\frac{\angle AOB}{2} \qquad (1)$

同様ニ　$CD=2r\sin\frac{\angle COD}{2} \qquad (2)$

故ニ (1), (2) カラ

$$AB:CD=\sin\frac{\angle AOB}{2}:\sin\frac{\angle COD}{2}$$

37. $\frac{AC}{CB}=\frac{\triangle ADC}{\triangle COB}=\frac{OA\cdot OC\sin\angle AOC}{OC\cdot OB\sin\angle COB} \qquad (1)$

又　$\frac{AD}{DB}=\frac{\triangle AOD}{\triangle DOB}=\frac{OA\cdot OD\sin\angle AOD}{OD\cdot OB\sin\angle DOB} \qquad (2)$

(1), (2) カラ

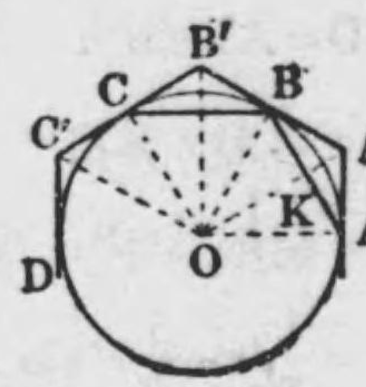
$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=\frac{OA\cdot OC\sin\angle AOC}{OA\cdot OB\sin\angle COB}:\frac{OA\cdot OD\sin\angle AOD}{OD\cdot OB\sin\angle DOB}$$

$$=\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle COB}:\frac{\sin\angle AOD}{\sin\angle DOB}$$

38. 半徑 r ナル圓ヲ O トシコレニ內接及ビ外接スル正 n 邊形ヲ ABC……, 及ビ A′B′C′…… トシ圖ノ如ク畫イタトスル。

$\angle AOB=\frac{360°}{n}$, $\angle A'OB=\frac{360°}{2n}$ デアルカラ

① $\frac{\frac{AB}{2}}{r}=\sin\frac{360°}{2n}$, 故ニ $AB=2r\sin\frac{180°}{n}$



依ツテ $L=2nr\tan\frac{180°}{n}$

② $\triangle AOB=\frac{1}{2}r^2\sin\frac{360°}{n}$

故ニ $S=\frac{1}{2}nr^2\sin\frac{360°}{n}$

$\triangle A'OB'=r\times r\tan\frac{180°}{n}=r^2\tan\frac{180°}{n}$

故ニ $S'=nr^2\tan\frac{180°}{n}$

③ $S:S'=\tan\frac{180°}{n}:\sin\frac{180°}{n}$

$=1:\cos\frac{180°}{n}$

依ツテ $(S'-S):S'=\left(1-\cos\frac{180°}{n}\right):1$

故ニ $S':S=S'\left(1-\cos\frac{180°}{n}\right)$

—(終リ)—

昭和九年十月二日印刷
昭和九年十月五日發行

著作權所有

(中等教育新制數學)
幾何
教授參考資料

非賣品

著作者　岡田良知

發行者　來島正時
東京市神田區神保町二丁目十番地

印刷者　小笠原秀雄
東京市神田區錦町三丁目十一番地

發行所　山海堂出版部
東京市神田區神保町二丁目十番地
電話九段1310番＊振替東京21691番

印刷所　秀好堂印刷所
東京市神田區錦町三丁目十一番地

山海堂出版部