キ又ハ兩邊＝1ヲ加ヘ

$$\frac{-5}{x-3}-\frac{-5}{x-4}=\frac{-1}{x+8}-\frac{-1}{x+3}$$

$$\frac{-5}{(x-3)(x-4)}=\frac{-5}{(x+8)(x+3)}$$

$$(x-3)(x-4)-(x+8)(x+3)=0$$

之ヨリ $x=-\frac{2}{3}$ ヲ得.

〔7〕 $\frac{2x-3}{x-1}-2-\left(\frac{3x-8}{x-2}-3\right)+\frac{x+3}{x-3}-1=0$

$$\frac{-1}{x-1}-\frac{-2}{x-2}+\frac{6}{x-3}=0$$

分母ヲ拂ヒ整頓スレバ $7x^2-21x+12=0$

之ヨリ $x=\frac{21\pm\sqrt{105}}{14}$

〔8〕 $x+\frac{1}{x}=y$ トセバ $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$

故＝所題ノ方程式ハ $y^2+y-6=0$

之ヨリ $y=2$ 或ハ -3

依テ $x+\frac{1}{x}=2$ ヨリ $x=1$

又 $x+\frac{1}{x}=-3$ ヨリ $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ ヲ得.

2. 〔1〕 x^2 ヲ消去シテ $4y=19x-63$ …………(3)

(2) ＝入レ整頓スレバ $x^2-11x+30=0$

之ヨリ $x=5$ 或ハ 6

依テ (3) ヨリ夫々 $y=8$ 或ハ $\frac{51}{4}$

〔2〕 (1) 及ビ (2) ヨリ括弧ヲ解キ簡約シテ

$$4xy-2x-4y+1=0 \text{ ……………………(3)}$$

及ビ $-12xy+8x-12y+4=0$ ……………………(4)

xy ヲ消去シテ $2x=24y-7$ ……………(5)

之ヲ (3) ＝入レ $24y^2-21y+4=0$

$$\therefore \quad y=\frac{21\pm\sqrt{57}}{48}$$

ヲ得 (5) ヨリ $x=\frac{7\pm\sqrt{57}}{4}$ ヲ得.

但シ復號ハ同順トス.

〔3〕 (1) ヨリ $y=a+b-x$ ……………………(3)

(2) ノ分母ヲ拂ヒ (3) ヲ入レ簡約スレバ

$$x^2-(3a-b)x+a(2a-b)=0$$

之ヨリ $x=a$ 或ハ $2a-b$

依テ (3) ヨリ夫々 $y=b$ 或ハ $2b-a$ ヲ得.

〔4〕 (1)+(2)×2 $(x+y)^2+2(x+y)-120=0$

之ヨリ $x+y=10$ 或ハ -12

依テ $x+y=10$ トセバ (2) ヨリ $xy=24$ ヲ得ル故,

$$x=4,\ y=6 \text{ 或ハ } x=6,\ y=4$$

又 $x+y=-12$ トセバ (2) ヨリ $xy=46$ ヲ得ル故,

$x=-6\pm\sqrt{-10},\ y=-6\mp\sqrt{-10}$ (復號同順)ヲ得.

〔5〕 (1) ヲ用キテ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=25-2xy,$

$$x^3+y^3=(x+y)\{(x+y)^2-3xy\}=5(25-3xy)$$

ヲ得ル故, 之ヲ (2) ＝入レ xy ＝就テ整頓スレバ

$$6x^2y^2-125xy+534=0$$

之ヨリ　$xy=6$ 或ハ $\frac{89}{6}$ ヲ得.

依テ　$xy=6,\ x+y=5$ ヨリ

$x=2,\ y=3$ 或ハ $x=3,\ y=2$

又 $xy=\frac{89}{6},\ x+y=5$ ヨリ

$x=\frac{15\pm\sqrt{-309}}{6},\ y=\frac{15\mp\sqrt{-309}}{6}$ (複號同順) ヲ得.

[6] (1) ヲ $(x+y)^2+(x+y)-30=0$ トシ

之ヨリ　$x+y=5$ 或ハ -6 ヲ得.

又 (2) ヲ $(x-y)^2-2(x-y)-15=0$ トシ

之ヨリ　$x-y=5$ 或ハ -3 ヲ得.

依テ　$x+y=5,\ x-y=5$ ヨリ $x=5,\ y=0$

$x+y=5,\ x-y=-3$ ヨリ $x=1,\ y=4$

$x+y=-6,\ x-y=5$ ヨリ $x=-\frac{1}{2},\ y=-\frac{11}{2}$

$x+y=-6,\ x-y=-3$ ヨリ $x=-\frac{9}{2},\ y=-\frac{3}{2}$

ヲ得.

[7] (2)×2 ヲ (1) ニ邊々加ヘ又ハ減ジテ

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\pm6$$

及ビ　$\frac{a}{x}-\frac{b}{y}=\pm2$ ヲ得.

依テ

$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=6,\ \frac{a}{x}-\frac{b}{y}=2$ ヨリ $x=\frac{a}{4},\ y=\frac{b}{2}$

$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=6,\ \frac{a}{x}-\frac{b}{y}=-2$ ヨリ $x=\frac{a}{2},\ y=\frac{b}{4}$

$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=-6,\ \frac{a}{x}-\frac{b}{y}=2$ ヨリ $x=-\frac{a}{2},\ y=-\frac{b}{4}$

$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=-6,\ \frac{a}{x}-\frac{b}{y}=-2$ ヨリ $x=-\frac{a}{4},\ y=-\frac{b}{2}$

ヲ得.

[8] $(1)\times12-(2)$　$5x^2-26xy+32y^2=0$

之ヨリ　$x=2y$ 或ハ $5x=16y$

依テ　$x=2y$ ト (1) ヨリ $y=\pm1,\ x=\pm2$ (複號同順)

及ビ $5x=16y$ ト (1) ヨリ $y=\pm\frac{5}{\sqrt{91}},\ x=\pm\frac{16}{\sqrt{91}}$ (同上)

ヲ得.

[9] (1) ヨリ　$\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{xy}=\frac{9}{2}$ ....(3)

(2) ヨリ　$x+y=3$ .... (4)

(3) ニ (4) ヲ入レ　$2x^2-5xy+2y^2=0$

之ヨリ　$y=2x$ 或ハ $x=2y$ ヲ得.

依テ　$y=2x$ ト (4) ヨリ $x=1,\ y=2$

及ビ　$x=2y$ ト (4) ヨリ $y=1,\ x=2$ ヲ得,

或ハ (1) ヨリ　$\frac{(x+y)\{(x+y)^2-3xy\}}{xy}=\frac{9}{2}$

(2) ヲ代入シテ $xy=2$ ヲ得シメ (4) ト組合スベシ.

[10] $(1)^2-(2)$　$2a^2x^2-abxy-b^2y^2=0$

之ヨリ　$by=ax$ 或ハ $by=-2ax$

依テ　$by=ax$ ヲ (1) ニ入レ $(x-b)^2=0$

$\therefore\ x=b$ 從テ $y=a$

又 $by=-2ax$ ヲ (1) ニ入レ $2x^2+2bx-b^2=0$

之ヨリ $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}b$

從テ $y=(1\mp\sqrt{3})a$ (復號同順) ヲ得.

[11] 邊々掛合セテ $(x+y)^2=25$ ∴ $x+y=\pm5$

依テ $x+y=5$ トセバ (2) ヨリ $xy=6$ ヲ得ル故

$$x=2,\ y=3 \text{ 或ハ } x=3,\ y=2$$

又 $x+y=-5$ トセバ (2) ヨリ $xy=-6$ ヲ得ル故

$$x=1,\ y=-6 \text{ 或ハ } x=-6,\ y=1$$ ヲ得.

[12] (2) ヨリ $2x^2-3xy-2y^2=0$

之ヨリ $x=2y$ 或ハ $x=-\frac{1}{2}y$

又 (1) ト (2) ヨリ邊々相除シテ $x^2+y^2=5$ ヲ得ル故,

$x=2y,\ x^2+y^2=5$ ヨリ

$y=\pm1,\ x=\pm2$ (復號同順)

及ビ $x=-\frac{1}{2}y,\ x^2+y^2=5$ ヨリ

$y=\pm2,\ x=\mp1$ (復號同順) ヲ得.

[13] 分母ヲ拂ヒ $xy+zx=1,\ yz+xy=1,\ zx+yz=1$

加ヘ合セテ $xy+yz+zx=\frac{3}{2}$

依テ引キ算ヲ行ヒ $xy=\frac{1}{2},\ yz=\frac{1}{2},\ zx=\frac{1}{2}$

掛合セテ $xyz=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$

依テ $xyz=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ トセバ割リ算ニヨリ

$$x=y=z=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

又 $xyz=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ トセバ $x=y=z=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ得.

[14] $(2)^2$ $x^2+z^2+2xz=361-38y+y^2$

之ニ (1) ト (3) ヲ入レ $38y=228$ ∴ $y=6$ ヲ得

之ヲ (1), (2) ニ入レ $xz=36$ 及ビ $x+z=13$ ヲ得

之ヲ解キテ $x=4,\ z=9$ 或ハ $x=9,\ z=4$ ヲ得.

[15] $(2)-(3)\times2$ $(x-y)^2-z^2=16$

(1) ヨリ $x-y=z+2$

故ニ $(z+2)^2-z^2=16$ 之ヨリ $z=3$ ヲ得.

依テ (1) ヨリ $x-y=5$

之ト (3) ナル $xy=6$ ヨリ

$x=6,\ y=1$ 或ハ $x=-1,\ y=-6$ ヲ得.

[16] $(1)-(2)$ $y+z-yz=1$

之ヨリ $(y-1)(z-1)=0$ ∴ $y=1$ 或ハ $z=1$

依テ $y=1$ トセバ (2) ト (3) ヨリ $x+z=\frac{10}{3},\ xz=1$

之ヲ解キテ $x=3,\ z=\frac{1}{3}$ 或ハ $x=\frac{1}{3},\ z=3$

又 $z=1$ トセバ $x+y=\frac{10}{3},\ xy=1$ ナル故

$x=3,\ y=\frac{1}{3}$ 或ハ $x=\frac{1}{3},\ y=3$ ヲ得.

別解. (2) ト (3) トヨリ $\left.\begin{matrix} x=3 \\ yz=\frac{1}{3} \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x=\frac{1}{3} \\ yz=3 \end{matrix}\right\}$

$x=3$ ヲ (1) ニ代入シ $y+z=\frac{4}{3}$ ヲ得 $yz=\frac{1}{3}$ ト組合セテ

$$\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=\frac{1}{3} \\ z=1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \\ z=\frac{1}{3} \end{array}\right\}$$ ヲ得.

$x=\frac{1}{3}$ ヲ (1) ニ代入シ $y+z=4$ ヲ得.

之ト $yz=3$ ト組合セテ

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ y=3 \\ z=1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ y=1 \\ z=3 \end{array}\right\}$$ ヲ得.

3. $u+5a=180$ ....(1)

$u^2++1000a=32400$ ....(2)

(1) ヨリ $5a=180-u$ ....(3)

(2) ニ入レテ整頓スレバ $u^2-200u+3600=0$

之ヲ解キテ $u=100\pm80=180$ 或ハ 20

依テ (3) ヨリ夫々 $a=0$ 或ハ 32 ヲ得.

第八集 無理數及ビ虛數

1. 題式 $=\{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-2\}\{2-(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2\}$

$=(6+2\sqrt{15})(2\sqrt{15}-6)$

$=4(15-9)=24$

2. $\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+4x+1}=\sqrt{x^2+2x+1}=x+1$

3. 先ヅ所題ノ方程式ヨリ x ノ値ヲ求ムレバ

$$x=\frac{\sqrt{2}-1\pm\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2-(\sqrt{2}+1)(5\sqrt{2}-7)}}{\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2$$

$$\therefore\ \sqrt{x}+1=\sqrt{2}-1+1=\sqrt{2}$$

4. 題式 $=\left\{\frac{3}{x+1}-\frac{4x-6}{(2x-1)(x+1)}\right\}\div\frac{1}{x+1}$

$$=\frac{2x+3}{2x-1}=\frac{2\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}-1}=\frac{11+8\sqrt{2}}{7}$$

5. 題式 $=x^2\left\{\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\right\}=x^2\times\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2}$

$$=\frac{n-1}{n+1}\times\frac{\frac{2(n-1)}{n+1}+2}{\left(\frac{n-1}{n+1}-1\right)^2}$$

$$=\frac{n-1}{n+1}\times\frac{4n}{n+1}\times\frac{(n+1)^2}{4}=n(n-1)$$

6. $2x=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\therefore$ $4x=3\sqrt{2}$ ナル故

題式 $=\frac{\sqrt{16x^2-16}}{4x-\sqrt{16x^2-16}}=\frac{\sqrt{18-16}}{3\sqrt{2}-\sqrt{18-16}}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

7. 題式 $=\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^2+(x+\sqrt{x^2-1})^2}{x^2-(x^2-1)}$

$$=2x^2+2(x^2-1)=4x^2-2$$

$$=\frac{4(a+b)^2}{2(a-b)^2}-2=\frac{8ab}{(a-b)^2}$$

8. (1) 題式$=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{2}-1}=\frac{2\sqrt{2}+1}{7}$

(2) 題式$=\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{4+3\sqrt{3}}}+\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$

$$=\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}+1}+\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{3-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\{3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3})}{6}=\sqrt{2}$$

(3) 題式$=20+2\sqrt{100-51}=20+14=34$

9. 左邊$=\frac{3}{2}(4+2\sqrt{3})-2(\sqrt{2}-1)^2=3\sqrt{3}+4\sqrt{2}$

ナル故　(左邊)$^2=27+32+24\sqrt{6}=59+24\sqrt{6}$

10. 題式$=\frac{(1+x)(\sqrt{1+x}-1)}{x}+\frac{(1-x)(1+\sqrt{1-x})}{x}$

$$=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+x\sqrt{1+x}-x\sqrt{1-x}-2x}{x}$$

$$=\frac{2\sqrt{4+4x}+2\sqrt{4-4x}+2x\sqrt{4+4x}-2x\sqrt{4-4x}-8x}{4x}$$

$$=\frac{2\sqrt{4+2\sqrt{3}}+2\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{3}\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}$$

$$+\frac{-\sqrt{3}\sqrt{4-2\sqrt{3}}-4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2(\sqrt{3}+1)+2(\sqrt{3}-1)+\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{3}}$$

$$+\frac{-\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)-4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=1$$

或ハ　$1+x$, $\sqrt{1+x}$, $1-x$, $\sqrt{1-x}$ ノ値ヲ別々ニ計算スル方法ヲナサシムベシ.

11. 題式$=\frac{20}{6-\sqrt{6+2\sqrt{5}}}-\frac{\sqrt{20}+6}{4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

$$=\frac{20}{5-\sqrt{5}}-\frac{2\sqrt{5}+6}{3+\sqrt{5}}$$

$$=5+\sqrt{5}-2=3+\sqrt{5}=5.2360\ldots\ldots$$

12. $x=\pm\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{6\pm2\sqrt{5}}}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}\pm1}{2}$

$=\pm\frac{2.23\ldots\pm1}{2}=\pm1.61\ldots\ldots$ 或ハ $\pm0.61\ldots\ldots$

13. $x=\frac{-(2-\sqrt{3})\pm\sqrt{63-36\sqrt{3}}}{2(7-4\sqrt{3})}$

$$=\frac{-(2-\sqrt{3})\pm3(2-\sqrt{3})}{2(7-4\sqrt{3})}$$

$=\frac{2-\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}$ 或ハ $-\frac{2(2-\sqrt{3})}{7-4\sqrt{3}}$

$=2+\sqrt{3}$ 或ハ $-2(2+\sqrt{3})$

14. $i^2=-1$, $i^3=i^2\times i=-i$, $i^4=(i^2)^2=1$,

$i^5=i^4\times i=i$, …………

15. 題式$=45i\times56i\times6i\times35i=529200i^4=529200$

16. (1) $x^3=\dfrac{217\pm\sqrt{46225}}{16}=\dfrac{217\pm215}{16}=27$ 或ハ $\dfrac{1}{8}$

$\therefore\ x=3,\ 3\omega,\ 3\omega^2$ 或ハ $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\omega,\ \dfrac{1}{2}\omega^2$

(2) $x^4=1$ 或ハ 16

$\therefore\ x=\pm1,\ \pm i$ 或ハ $\pm2,\ \pm2i$

17. (1) 一根ガ 10 ナルコトヲ觀察ニテ求メシメ方程式ヲ $(x-10)(x^2-4x+19)=0$ ト變ゼシメ, 他ノ二根ハ $x^2-4x+19=0$ ヨリ $2\pm\sqrt{15}i$ ナルコトヲ知ル.

(2) $120=5\times4\times3\times2$ ナルコトニ着目セシメテ, $x-1=5$ 及ビ $x-4=-5$ トシテ二根 6 及ビ -1 ヲ知ラシメ (1) ノ如ク方程式ヲ

$(x-6)(x+1)(x^2-5x+16)=0$ ト變ゼシメ

他ニ $x^2-5x+16=0$ ノ根 $\dfrac{5\pm\sqrt{39}i}{2}$ アルヲ知ル.

別解. 左邊ヲ因數ニ分解シテ (第二集 1 ノ (7) 參照)

$$(x^2-5x-6)(x^2-5x+16)=0$$

ヨリ四根ヲ得シムルモ可ナリ.

18. x^2+y^2 ト $x-y$ トノ和ト積トヲ知ル故,

(1) $\begin{cases}x^2+y^2=29\\ x-y=3\end{cases}$ 或ハ (2) $\begin{cases}x^2+y^2=3\\ x-y=29\end{cases}$

(1) ヲ解キ $x=5,\ y=2$ 及ビ $x=-2,\ y=-5$ ヲ得.

(2) ヲ解キ $x=\dfrac{29\pm\sqrt{-835}}{2},\ y=\dfrac{-29\pm\sqrt{-835}}{2}$

(復號同順) ヲ得.

19. (1) ヲ (2) 及ビ (3) ニ入ルレバ

$4x+3y=0 \quad \therefore\ y=-\dfrac{4}{3}x$ ………………(4)

及ビ $3x^3+6x^2y+6xy^2+5y^3=167$ ………(5)

(4) ヲ (5) ニ入レ $-167x^3=167\times27$

$\therefore\ x^3=-27$

依テ實根ハ $x=-3$ 從テ $y=4,\ z=1$ ナリ.

20. x, y ガ共ニ實數ナル故, 所題ノ方程式ノ左邊ノ二項ハ一般ニ正數ナリ, 故ニ其ノ和ガ 0 ニ等シキハ二項ノ値ガ共ニ 0 ニ等シキトキニ限ル.

即チ $x^2+y^2-3xy=3$ ………………(1)

及ビ $2x^2+y^2=6$ ………………(2)

(1)×2−(2) $y(y-6x)=0$

$\therefore\ y=0$ 或ハ $y=6x$

依テ $y=0$ ナルトキハ (2) ヨリ $x=\pm\sqrt{3}$

又 $y=6x$ ナルトキハ

$x=\pm\sqrt{\dfrac{3}{19}},\ y=\pm6\sqrt{\dfrac{3}{19}}$ (復號同順) ヲ得.

21. 所題ノ方程式ヲ變形シテ

$(xy-2)^2+(2x-y)^2=0$ ヲ得ル故,

$xy-2=0,\ 2x-y=0$

之ヲ解カシメ $x=\pm1,\ y=\pm2$ (復號同順) ヲ得.

22. (1) 兩邊ヲ平方シ移項シテ

$$\sqrt{x+5}\sqrt{3x+4}=4x-4$$

更ニ平方シテ $13x^2-51x-4=0$

$\therefore\ x=4$ 或ハ $-\dfrac{1}{13}$

ヲ得レドモ $-\frac{1}{13}$ ハ無緣根ナリ.

〔2〕 分母ヲ拂ヘバ $5(a+x)+5\sqrt{a^2-x^2}=12a$

移項シテ $5\sqrt{a^2-x^2}=7a-5x$

兩邊ヲ平方シテ $25x^2-35ax+12a^2=0$

$$\therefore\quad x=\frac{3}{5}a \text{ 或ハ } \frac{4}{5}a \quad \text{ヲ得.}$$

〔3〕 移項シ兩邊ヲ平方スレバ

$$1-\sqrt{x-2}=2\sqrt{x-3}$$

更ニ兩邊ヲ自乘スレバ $-2\sqrt{x-2}=3x-11$

更ニ兩邊ヲ自乘スレバ $9x^2-70x+129=0$

之ヨリ $x=3$ 或ハ $\frac{43}{9}$ ヲ得レドモ $\frac{43}{9}$ ハ無緣根ナリ.

23. 〔1〕 (1) ヨリ $(2x+y+4)+6\sqrt{2x+y+4}-27=0$

之ヨリ $\sqrt{2x+y+4}=3$

$$\therefore\quad 2x+y+4=9 \quad \ldots\ldots\ldots(3)$$

又 (2) ヨリ $(2x+y)(2x-y-3)=0$

$$\therefore\quad 2x+y=0 \text{ 或ハ } 2x-y-3=0$$

依テ $2x=-y$ ヲ (3) ニ入レテ $4=9$ (不可能)

又 $2x=y+3$ ヲ (3) ニ入レテ $y=1$

從テ $x=2$ ヲ得.

〔2〕 (1) ノ根號ヲ去レバ $4xy-4ay+a^2=0$……(3)

(2) ノ根號ヲ去レバ $4xy-4by+b^2=0$…………(4)

(4)−(3) $4(a-b)y=a^2-b^2$ $\therefore\ y=\frac{a+b}{4}$

依テ (3) ヨリ $x=\frac{ab}{a+b}$ ヲ得.

〔3〕 (2) ノ根號ヲ去リ $y^2=16x-64$……………(3)

(1) ニ入レ $x^2+16x-105=0$ $\therefore\ x=5$ 或ハ -21

依テ $x=5$ トスレバ (3) ヨリ $y=\pm4$,

$x=-21$ トスレバ $y=\pm\sqrt{-400}=\pm20i$ ヲ得レドモ之ハ根ナラズ.

第九集　二次方程式ノ根ノ研究

1. 所設ノ方程式ノ分母ヲ拂ヒ整頓スレバ

$$(m+1)x^2-\{(a+b)m-(a-b)\}x+c(m-1)=0$$

二根ガ絕對値ヲ等シクシ，符號相反スルタメニハ其ノ和ガ 0 ナルコト必要ニシテ十分ナル故，

$$\frac{(a+b)m-(a-b)}{m+1}=0 \quad \therefore\quad m=\frac{a-b}{a+b} \quad \text{ヲ得.}$$

2. (1) ヨリ $by=1-ax$ ヲ出シ (2) ニ入ルレバ

$$(a^2d+b^2c)x^2-2adx-(b^2-d)=0$$

等根ヲ有スルタメニハ $a^2d^2+(a^2d+b^2c)(b^2-d)=0$

括弧ヲ解キ $a^2b^2d+b^4c=b^2cd$

兩邊ヲ b^2cd ニテ割リ $\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{d}=1$ ヲ得.

3. 相等シキ一組ノ根ヲ α, α トセバ

$$l\alpha+m\alpha+n=0 \quad \therefore\quad \alpha=-\frac{n}{l+m} \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

及ビ $A\alpha^2+B\alpha^2+C=0$ $\therefore\ (A+B)\alpha^2+C=0$…(2)

(1) ヲ (2) ニ入レ $n^2(A+B)+C(l+m)^2=0$ ヲ得.

4. (1) ヨリ $\frac{1}{y}=a-x$, (2) ヨリ $y=b-\frac{1}{x}$ ヲ出シ邊々相乘ズレバ $(a-x)\left(b-\frac{1}{x}\right)=1$

整頓スレバ $bx^2-abx+a=0$ ....(3)

等根ヲ有スルタメニハ $a^2b^2-4ab=0$

$\therefore\ ab=0$ 或ハ $ab=4$

然ルニ $ab=0$ トスレバ

$\begin{cases}a=0\\b\neq0\end{cases}$ $\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$ $\begin{cases}a\neq0\\b=0\end{cases}$

ノ何レカナラザルベカラズ.

$a=0,\ b\neq0$ ノ場合ハモトノ方程式ヲ解キ $x=0$ ヲ得, 之ハ其ノ分母ヲ0ナラシム.

$a\neq0,\ b=0$ ノ場合ハ $y=0$ ヲ得, 亦分母ヲ0ナラシム.

$a=0,\ b=0$ ノ場合ハモノトノ方程式ノ根ハ不定ナリ.

故ニ $ab=4$

依テ (3) ヨリ $\frac{4}{a}x^2-4x+a=0$

分母ヲ拂ヒ $4x^2-4ax+a^2=0$ $\therefore\ x=\frac{a}{2}$

依テ (2) ヨリ $y=b-\frac{2}{a}=b-\frac{b}{2}=\frac{b}{2}$ ヲ得.

5. y ヲ消去シテ $9x^2+2(3c-6)x+c^2=0$

等根ナルタメニハ $(3c-6)^2-9c^2=0$

之ヨリ $c=1$ ヲ得.

6. [1] 此ノ方程式ヲ y ニ就テ解クトキハ,

$$y=a\pm\sqrt{25-x^2}$$

故ニ此ノ二根相等シキトキハ $y=a$ ニシテ

$x^2=25$ $\therefore\ x=\pm5$ ナリ.

[2] 此ノ方程式ニ於テ $x=3$ トセバ

$$y^2-2ay+a^2-16=0$$

y ノ一根ガ0ナルタメニハ $a^2-16=0$

$\therefore\ a=\pm4$ ナリ.

7. 三項式 $ax^2+2bx+c$ ガ完全平方タルタメニハ此ノ式ヲ零ニ等シト置キタルトキ x ガ等根ヲ有スベク, 其ノ條件ハ $b^2-ac=0$ ナリ, 然ルニ $ax^2+2bx+c$ ガ $ax+b$ ニテ割リ切レル故, 剩餘定理ニヨリ $b^2-ac=0$ ナリ. サレバ與式ハ完全平方ナリ.

8. 前題ト同樣ノ考ニヨリ假設ヨリ

$(3a-2)^2-8(a^2-2)=0$ ヲ得.

之ヲ解キテ $a=2$ 或ハ 10 ヲ得.

9. 所設ノ式ヲ整頓スレバ

$$\frac{n^2-a^2l^2}{a^2n^2}x^2-\frac{2lm}{n^2}xy+\frac{n^2-b^2m^2}{b^2n^2}y^2$$

此ノ式ガ完全平方タルタメニハ前二問ト同樣ニ

$$\frac{l^2m^2}{n^4}-\frac{(n^2-a^2l^2)(n^2-b^2m^2)}{a^2b^2n^4}) =0$$

分母ヲ拂ヒ簡約スレバ $a^2l^2n^2+b^2m^2n^2=n^4$

兩邊ヲ n^2 ニテ除シ $a^2l^2+b^2m^2=n^2$ ヲ得.

0. 方程式ヲ $x^2+px+q=0$ トセバ, 甲ノ得タル根

ヨリ $p=-(3+9)$ 乙ノ得タル根ヨリ $q=24$ ナルコトヲ知ル故ニ方程式ハ $x^2-12x+24=0$ ナリ.

故ニ正シキ二根ハ $6\pm\sqrt{12}$ ナリ.

11. 二根ヲ $p\alpha,\ q\alpha$ トセバ,

$$(p+q)\alpha=-\frac{b}{a} \quad 及ビ \quad pq\alpha^2=\frac{b}{a}$$

依テ $\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{p}{q}}=\frac{p+q}{\sqrt{pq}}=\sqrt{\frac{(p+q)^2}{pq}}$

$$=\sqrt{\frac{(p+q)^2\alpha^2}{pq\alpha^2}}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\times\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{b}{a}}$$

12. 二根ヲ α,β トセバ

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{a^2}{16}-15 \quad ナル故$$

$$\frac{a^2}{16}-15=1 \qquad \therefore\ a=\pm16$$

或ハ二根ヲ $\alpha,\ \alpha+1$ トシテモ解カシムベシ.

13. 二根ヲ $\alpha, 5\alpha$ トセバ,

$$6\alpha=3(1+m) \qquad \therefore\ 2\alpha=1+m$$

及ビ $5\alpha^2=5+8m$ α ヲ消去シテ

$$5m^2-22m-15=0 \qquad \therefore\ m=5 \ 或ハ\ -\frac{3}{5}$$

$m=5$ トスレバ $x^2-18x+45=0$ ヨリ $x=3$ 或ハ 15

$m=-\frac{3}{5}$ トスレバ $5x^2-6x+1=0$ ヨリ $x=1$ 或ハ $\frac{1}{5}$ ヲ得.

14. 題意ニヨリ $p+q=\frac{2m}{14m-1}$ ……………………(1)

$$pq=\frac{1}{14m-1} \ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

及ビ $2p-q=3pq$ ……………………(3)

(2) ヲ (3) ニ入レ $2p-q=\frac{3}{14m-1}$ ……………(4)

(1) ト (4) ヨリ

$$p=\frac{2m+3}{3(14m-1)},\quad q=\frac{4m-3}{3(14m-1)}$$

(2) ニ入レテ $8m^2-120m=0$ ヲ得.

故ニ $m=0$ 或ハ 15

15. 題意ニヨリ $2a^2+2ab-3b^2=36$ ………………(1)

及ビ $10(a-b)^2=6\times30$ ………………(2)

(2) ヨリ $a^2-2ab+b^2=18$

之ト (1) ヨリシテ $6ab-5b^2=0$

$$\therefore\ b=0 \ 或ハ\ \frac{6}{5}a$$

依テ $b=0$ ナルトキハ $a^2=18$ 即 $a=\pm3\sqrt{2}$

又 $b=\frac{6}{5}a$ ナルトキハ (2) ヨリ $a=\pm15\sqrt{2}$

從テ $a=15\sqrt{2},\ b=18\sqrt{2}$

或ハ $a=-15\sqrt{2},\ b=-18\sqrt{2}$ ナリ.

16. 共有根ヲ α トセバ $x-\alpha$ ハ

$x^2+(m-3)x+2-(x^2+mx-1)$ 即チ $-3x+3$

ノ因數ナルベキヲ以テ $\alpha=1$ ナルコトヲ知ル.

依テ $x^2+mx-1=0$ ヨリ $x=1$ トシテ $m=0$ ヲ得.

依テ他ノ根ハ $x^2-3x+2=0$ 及ビ $x^2-1=0$ ヨリ 2 ト -1 ナルコトヲ知ル.

17. 第二方程式ノ二根ヲ α 及ビ β トセバ,

$\alpha+\beta=-p,\ \alpha+\beta+2=p^2$ ナル故

$p^2+p-2=0$ $\therefore\ p=1$ 或ハ -2 ヲ得,

18. 題意ニヨリ $-a=-b,\ -2a^2=c,\ -a=b-4$

第一ト第三ヨリ $-b=b-4$ $\therefore\ b=2=a$

之ヲ第二ニ入レ $c=-8$ ヲ得.

19. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=81-28=53$

$a^2-b^2=(a+b)\sqrt{(a+b)^2-4ab}=9\times5=45$ ナル故

$\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{53}{45}$ 但シ $a>b$ ナリトス.

20. 二根ヲ α,β トセバ

$$\alpha+\beta=\frac{-2(\sqrt{3}+1)}{2+\sqrt{3}}=-2(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})$$
$$=-2(\sqrt{3}-1)$$

$$\alpha\beta=\frac{-6}{2+\sqrt{3}}=-6(2-\sqrt{3})$$

$\therefore\ \alpha-\beta=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$ $(\alpha>\beta)$ トシテ

$$=\sqrt{4(\sqrt{3}-1)^2+24(2-\sqrt{3})}=\sqrt{64-32\sqrt{3}}$$
$$=4\sqrt{4-2\sqrt{3}}=4(\sqrt{3}-1)=2.928\ldots\ldots$$

21. 二根ヲ $\alpha,\ \alpha+1$ トセバ,

$(\alpha+1)^3-\alpha^3=19$ 之ヨリ $\alpha^2+\alpha-6=0$

$\therefore\ \alpha=2$ 或ハ -3

依テ $\alpha=2$ トセバ二根ハ 2 及ビ 3 ニシテ

$\alpha=-3$ トセバ二根ハ -3 及ビ -2 ナリ.

故ニ方程式ハ $x^2\mp5x+6=0$ ナリ.

22. 題意ニヨリ $\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=1$

及ビ $\gamma+\delta=-b,\ \gamma\delta=-1$

$$\therefore\ \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\delta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2}+\frac{(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta}{\gamma^2\delta}$$
$$=a^2-2+b^2+2=a^2+b^2$$

23. 題意ニヨリ $\alpha+\beta=-p,\ \alpha\beta=q$ ナル故,

$p+q=-(\alpha+\beta-\alpha\beta),\ pq=-\alpha\beta(\alpha+\beta)$

故ニ方程式ハ $x^2+(\alpha+\beta-\alpha\beta)x-\alpha\beta(\alpha+\beta)=0$ ナリ.

第十集　方程式應用問題

1. 一頂點ヨリ出ヅル三稜ノ長サヲ x 糎, y 糎, z 糎トセバ $xy=2366$ $yz=10647$ $zx=3042$

$=2\times7\times13^2,$ $=3^2\times7\times13^2,$ $=2\times3^2\times13^2$

之ヲ解キテ $z=13\times9=117$ (糎) $x=13\times2=26$ (糎) $y=13\times7=91$ (糎) (負根ハ取ラズ)

次ニ之ヲ分チテ得ベキ立方體ノ一邊ノ長サノ糎ノ數ハ上ノ三稜ノ最大公約數 13 ナルベキヲ以テ其ノ立方體ノ數ハ $9\times2\times7=126$ ナリ.

2. 求ムル箇數ヲ x トセバ總重量ハ $(3600+120x)$ 匁ニシテ其ノ中ニアル錫ノ重サハ $(3000+40x)$ 匁ナリ.

故ニ $\dfrac{3}{4}(3600+120x)=3000+40x$

之ヲ解キテ $x=6$ ヲ得.

3. 今年ノ一升ノ價ヲ x 錢トセバ, 三年前ノ一升ノ價ハ $\left(x-\dfrac{1560}{40}\right)$ 錢 即 $(x-39)$ 錢 ナリ.

故ニ $\dfrac{1600}{x-39}-\dfrac{1600}{x}=39$

$$\frac{1600\times 39}{x(x-39)}=39$$

之ヨリ $x^2-39x-1600=0$

$\therefore$ $x=64$ 或ハ -25 **答** 64 錢.

4. 上ヲ x 斤, 下ヲ $(x+5)$ 斤 買入レ其ノ一斤ノ價上ハ y 錢, 下ハ $(y-5)$ 錢ナリトセバ,

$$(x+5)(y-5)+xy=1800 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$(x+5)(y-5)-xy=240 \quad\cdots\cdots(2)$$

(2) ヨリ $y=x+53$ $\cdots\cdots(3)$

ヲ得 (1) ニ入レ $x^2+53x-780=0$

之ヲ解キ $x=12$ 或ハ -65

依テ $x=12$ トシテ $y=65$ ヲ得.

答 上 12 斤, 65 錢; 下 17 斤, 60 錢.

5. 人數ヲ x 人, 一人ノ出金額ヲ y 錢トセバ,

$$xy=(x+3)(y-50)=(x-2)(y+50)$$

之ヨリ $50x-3y=-150,\ 50x-2y=100$

之ヲ解キテ $x=12$ ヲ得. **答** 12 人.

6. 乙ガ一周スル時間ヲ x 時トシ池ノ周ヲ a トセバ, 甲, 乙 毎時間ノ速度ハ夫々 $\dfrac{a}{3}$ 及ビ $\dfrac{a}{x}$ ナリ.

故ニ兩人出會フマデニ甲ハ $\dfrac{4a}{x}$, 乙ハ $a-\dfrac{4a}{x}$ ヲ走レリ, 此ノ時間ノ等シキコトヲ方程式ニテ書キ表ハセバ

$$\frac{\dfrac{4a}{x}}{\dfrac{a}{3}}=\frac{a-\dfrac{4a}{x}}{\dfrac{a}{x}}$$

簡單ニスレバ $x^2-4x-12=0$

之ヲ解キテ $x=6$ 或ハ -2 ヲ得.

答 6 時間.

7. A地ヨリノ上リヲ x 里, 下リヲ y 里, 平地ヲ z 里トセバ $x+y+z=9.5$ $\cdots\cdots(1)$

$$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{1.5}=6 \quad\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{x}{2}+y+\frac{z}{1.5}=7.5 \quad\cdots\cdots(3)$$

(2)+(3) $\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2}y+\dfrac{4}{3}z=13.5$

$$9x+9y+8z=81 \quad\cdots\cdots(4)$$

(1)×9−(4) $z=4.5$

依テ (1) 及ビ (2) ヨリ $y=4,\ x=1$ ヲ得.

8. $NP=x$(里), $PM=y$(里), $MN=z$(里) トセバ,

$$mx+ny+pz=60(m+p-n)$$

$$my+nz+px=60(n+m-p)$$

$$mz+nx+py=60(p+n-m)$$

邊々相加ヘ $(m+n+p)(x+y+z)=60(m+n+p)$

$m+n+p\neq 0$ ナル故 $x+y+z=60$ **答** 60 里.

9. 乙ガ出發スルマデニ甲ハ既ニ $8(哩)\times 3\dfrac{1}{4}=26$ (哩) ヲ行ケリ, 此ノ時ヨリ x 時間ノ後乙ガ甲ニ追及スト

セバ,

甲ノ行程ハ $26+\frac{x}{2}\left\{17+(x-1)\times\frac{1}{2}\right\}$(里) ニシテ

乙ノ行程ハ $\frac{x}{2}\{15+(x-1)\times 1\}$(里) ナリ.

故ニ $26+\frac{x}{2}\left\{17+\frac{x-1}{2}\right\}=\frac{x}{2}(x+14)$

整頓スレバ $x^2-5x-104=0$

之ヲ解キ $x=13$ 或ハ -8 　答 13時間.

10. 出會マデニ甲 x 哩, 乙 $(x-63)$ 哩ヲ走レリトセバ 甲ノ毎時間ノ速度ハ $\frac{x-63}{4}$ 哩ニシテ乙ハ同ジク $\frac{x}{9}$ 哩ナリ, 依テ出會セシマデノ時間ヲ考ヘ

$$\frac{x}{\frac{x-63}{4}}=\frac{x-63}{\frac{x}{9}}$$

之ヨリ $4x^2=9(x-63)^2$

$\therefore\ 3(x-63)=2x$ ($-2x$ ハ不可能)

之ヨリ $x=189$ ヲ得.

依テ兩地間ノ距離ハ $(x+x-63)$(哩)$=315$(哩) ニシテ 甲, 乙ノ速度ハ夫々 $\frac{x-63}{4}$(哩)$=31.5$ (哩) 及ビ $\frac{x}{9}$ (哩)$=21$ (哩)ナリ.

11. 電車ノ長サヲ x 間, 速度ヲ毎分甲 y 間, 乙 z 間トセバ

$$\frac{2x}{y+z}=\frac{1}{60}\ \text{依テ}\ \frac{x}{y+z}=\frac{1}{120}\ \ldots\ldots(1)$$

$$\frac{2x}{y-z}=\frac{12}{60}\ \text{依テ}\ \frac{x}{y-z}=\frac{1}{10}\ \ldots\ldots(2)$$

$$\frac{2x}{y+12-z}=\frac{10}{60}\ \text{依テ}\ \frac{x}{y-z+12}=\frac{1}{12}\ \ldots\ldots(3)$$

(2)÷(3) ヨリ $y-z$ ノ値ヲ求メ $y-z=60\ \ldots\ldots(4)$

(4) ヲ (2) ニ入レ $x=6$

依テ (1) ヨリ $y+z=720\ \ldots(5)$

(4) ト (5) ヨリ $y=390,\ z=330$ ヲ得.

12. 初メノ速度ヲ毎時 x 哩トセバ, 故障後ノ速度ハ毎時 $\left(x+3\frac{1}{2}\right)$ 哩ナリ, 而シテ此ノ二ツノ速度ニテ (105−63) 哩ヲ走ル時間ノ差ガ 24 分ナル故,

$$\frac{42}{x+3\frac{1}{2}}=\frac{42}{x}-\frac{24}{60}$$

分母ヲ拂ヒ簡約スレバ $2x^2+7x-735=0$

之ヲ解キテ $x=\frac{35}{2}$ 或ハ -21 ヲ得.

答 毎時 17.5 哩

13. 毎時間ノ速度ヲ甲 x 里, 乙 $\left(x-\frac{1}{b}\right)$ 里トセバ,

$$\frac{a}{x}=\frac{a}{x-\frac{1}{b}}-c$$

之ヨリ $bcx^2-cx-a=0$

$$\therefore\ x=\frac{c\pm\sqrt{c^2+4abc}}{2bc}$$

依テ $x=\frac{c+\sqrt{c^2+4abc}}{2bc}$ (他ノ根ハ負數)

トシテ $x-\frac{1}{b}=\frac{\sqrt{c^2+4abc}-c}{2bc}$

14. 兩地間ノ距離ヲ x 哩, 速度ヲ毎時間 B ハ y 哩, A ハ $(y+21)$ 哩, C ハ $(y-9)$ 哩トセバ,

$$\frac{x}{y+21}=\frac{x}{y}-1\frac{1}{2} \quad 及ビ \quad \frac{x}{y}=\frac{x}{y-9}-\frac{54}{60}$$

分母ヲ拂ヒ簡約スレバ, $y^2+21y=14x$............(1)

及ビ $y^2-9y=10x$............(2)

x ヲ消去シテ $2y^2=168y$ $\therefore$ $y=84$

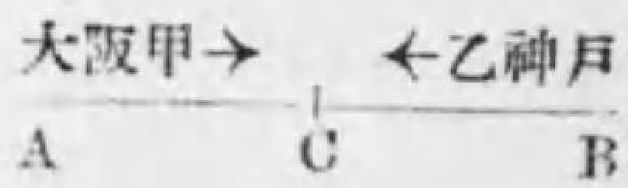
之ヲ (2) ニ入レ $x=630$ ヲ得. **答** 630哩.

15. 今ノ時刻ヲ十時過 x 分トスレバ, 今ノ時針ノ位置ハ十時ノ記點ヲ過グルコト $\frac{x}{12}$ 分ニシテ, 今ヨリ3分前ノ時針ノ位置ハソレヨリ $\frac{3}{12}$ 分ダケ手前ニアリテ今ヨリ6分後ノ分針トノ間ニ30分畫ノ距離ヲ有スルヲ以テ

$$10-\left(\frac{x}{12}-\frac{3}{12}\right)+x+6=30$$

之ヲ解キテ $x=15$ ヲ得. **答** 十時十五分.

16. A, B ヲ夫々大阪, 神戸トシ, 兩車ノ出會點ヲ C トシ, 乙ガ CA 間ヲ走ルニ要シタル時間ヲ a トセバ甲ガ CB 間ヲ走ル時間ハ $1.21a$ ナリ. 今 AB 間ノ距離ヲ c トシ乙ガ此ノ兩地間ヲ走ルニ要スル時間ヲ b トシ, 甲ガ要スル時間ヲ $b(1+x)$ トセバ乙, 甲ノ速度ハ夫々 $\frac{c}{b}$ 及ビ $\frac{c}{b(1+x)}$ ニテ表ハサル, 依テ甲, 乙ガ夫々 AC, BC ヲ走リシ時間ノ等シキコトヲ書ケバ



$$\frac{\dfrac{ac}{b}}{\dfrac{c}{b(1+x)}}=\frac{\dfrac{1.21ac}{b(1+x)}}{\dfrac{c}{b}}$$

簡單ニスレバ $1+x=\frac{1.21}{1+x}$ $\therefore$ $(1+x)^2=1.21$

之ヨリ $1+x=1.1$ (負根ハ棄ツ)

$\therefore$ $x=0.1$ **答** 0.1倍.

17. 兩港間ノ航路ノ長サヲ x 海里トシ, 甲, 乙, 丙, 丁ナル船ノ速度ヲ毎時間夫々 a 哩, b 哩, c 哩, d 哩トスレバ, 甲ガ 120 海里ヲ行ク間ニ丙ハ $(x-120)$ 海里ヲ行クヲ以テ $\frac{120}{a}=\frac{x-120}{c}$ $\therefore$ $c=\frac{x-120}{120}a$

同樣ニ $\frac{140}{a}=\frac{x-140}{d}$ $\therefore$ $d=\frac{x-140}{140}a$

及ビ $\frac{126}{c}=\frac{x-126}{b}$ $\therefore$ $b=\frac{x-126}{126}c$

然ルニ $b=d$ ナル故,

$$\frac{x-126}{126}c=\frac{x-140}{140}a$$

從テ $\frac{x-126}{126}\times\frac{x-120}{120}a=\frac{x-140}{140}a$

兩邊ヲ a ニテ割リ且分母ヲ拂ヘバ,

$$(x-126)(x-120)=108(x-140)$$

整頓スレバ $x^2-351x+30240=0$

之ヨリ $x=210$ 或ハ 144 ヲ得.

答 2 0海里 或ハ 144海里.

第十一集　比及ビ比例

1. 假設ヨリ　$x=\dfrac{4}{3}y$ 或ハ $\dfrac{y}{2}$ ヲ得ル故,

$$題式=\frac{16+36+9}{16-36+9}=-\frac{61}{11}$$

或ハ　$$=\frac{1+6+4}{1-6+4}=-11$$

2. 二根ヲ $2a$, $3a$ トセバ,

$$5a=\frac{7m+6}{12},\quad 6a^2=\frac{3m^2-26}{24}$$

之ヨリ a ヲ消去シテ $13m^2-42m-343=0$ ヲ得

之ヲ解キテ $x=\dfrac{21\pm70}{12}=7$ 或ハ $-\dfrac{49}{13}$ ヲ得.

3. 寶石及ビ金ノ重サヲ夫々 x 瓦及ビ y 瓦トセバ,

$$x+y=9.1 \text{ 及ビ } 9.1-\left(\frac{x}{19}+\frac{y}{2.5}\right)=8.1$$

之ヲ解キテ　$x=7.6$, $y=1.5$ ヲ得.

注意. 比重ノ意義ヲ一層確實ニ會得セシムルニ本問等ヲ利用スベシ.

4. 題式ガ成立スルタメノ條件ヲ考究セシムベシ.

5. 題式ガ成立スルタメニハ

$$(a+b+c)(b+c-a)=(c+a-b)(a+b-c)$$

之ヨリ　$a^2=b^2+c^2$ (假設)　ヲ得.

6. 假設ヨリ $(a+b)^2(2c^2-3d^2)=(c+d)^2(2a^2-3b^2)$

括弧ヲ解キ簡約スレバ

$$5b^2c^2+4abc^2+6b^2cd=5a^2d^2+4a^2cd+6abd^2$$

之ヨリ　$(bc-ad)\{5(bc+ad)+4ac+6bd\}=0$

然ルニ a, b, c, d ハ正數ナル故 $\{\}$ 内ノ値ハ正數ナリ.

故ニ　$bc-ad=0$ 從テ $a:b=c:d$

7. 甲, 乙ノ毎時間ノ速度ヲ夫々 x, y トセバ, 兩地間ノ距離ハ mx 及ビ ny ニテ表ハサルヽ故,

$$mx=ny \qquad \therefore\ \frac{x}{y}=\frac{n}{m}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

又兩人出會後 進ミタル路程ハ夫々 ax 及ビ by ナル

故　$$\frac{ax}{y}=\frac{by}{x} \qquad \therefore\ \frac{x^2}{y^2}=\frac{b}{a}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

依テ (1) 及ビ (2) ヨリ　$a:b=m^2:n^2$ ヲ得.

8. 酒精ノ始メノ量ヲ x 合トセバ, 水ノ量ハ $(39-x)$ 合ナル故,

$$\frac{x+39\times2}{39-x}=\frac{40x}{39-x+39\times3}$$

分母ヲ拂ヒ簡約スレバ　$x^2-38x+312=0$

之ヲ解キテ　$x=12$ 或ハ 26 ヲ得.

答　1.2 升 或ハ 2.6 升.

9. 長兄, 中兄, 末弟ノ年齡ヲ夫々 x, y, z トセバ

$$x=yz\ \ldots\ldots(1),\quad y^2=xz\ \ldots\ldots(2)$$

及ビ　$$\frac{1}{z}=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(3) ヨリ　$xy=2yz+xz$ 之ニ (1) ヲ代入シテ

$$xy=2x+xz \qquad \therefore\ y=z+2\ \ldots\ldots(4)$$

又 (1)×(2)　$xy^2=xyz^2$　$\therefore\ y=z^2\ \ldots\ldots(5)$

$$\therefore\ z^2-z-2=0 \qquad \therefore\ z=2 \text{ 或ハ } -1$$

依テ　$z=2$ トシテ (4) ヨリ　$y=4$

依テ (1) ヨリ $x=8$ ヲ得.

10. 現今甲 x 歳, 乙 y 歳ナリトセバ

$$x+y=60,\quad \frac{x+10}{y+10}=\frac{5}{3}$$

之ヲ解キテ $x=40,\ y=20$ ヲ得.

從テ所要ノ年數ヲ z トセバ $40-z=5(20-z)$ ヨリ

$z=15$ ヲ得. 答 15 年前.

別解. 今ヨリ z 年前ニ甲ノ年齢ガ乙ノ年齢ニ 5 倍スト シ, 其ノ時ノ甲ノ年齢ヲ $5y$, 乙ノ年齢ヲ y トセバ, 今ノ年齢ハ $5y+z$ 及ビ $y+z$ ナル故

$$5y+z+y+z=60 \quad \text{.........................(1)}$$

及ビ $$\frac{5y+z+10}{y+z+10}=\frac{5}{3} \quad \text{.........................(2)}$$

(1) ヨリ $z+3y=30$, (2) ヨリ $z-5y=-10$ ヲ得.

之ヲ解キテ $z=15$ ヲ得. 答 15 年前.

11. 甲, 乙兩病院ノ患者數, 死亡數, 退院數ヲ夫々 $Ax,\ Bx;\ ay,\ by;\ cz,\ dz$ トスレバ,

$$ay+cz=Ax \quad 及ビ \quad by+dz=Bx$$

x ヲ消去シテ $$\frac{y}{z}=\frac{Ad-Bc}{aB-Ab}$$

故ニ所要ノ比ハ甲ニ於テハ $$\frac{ay}{cz}=\frac{a(Ad-Bc)}{c(aB-Ab)}$$

ニシテ乙ニ於テハ $$\frac{by}{dz}=\frac{b(Ad-Bc)}{d(aB-Ab)}$$ ナリ.

12. 放置セシ村ニ於ケル全快率ハ $\frac{1}{4}$ ニシテ醫藥ヲ用キシ村ニ於ケル全快率ハ $\frac{7}{10}$ ナリ.

依テ其ノ差 $\left(\frac{7}{10}-\frac{1}{4}=\frac{9}{20}\right)$ ガ放置シテ死スベキモノ $\left(\frac{3}{4}\right)$ ニ對スル比ハ $\frac{9}{20}:\frac{3}{4}=\frac{60}{100}$ ナリ.

答 60 人.

13. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$ トセバ

$c=dk,\ b=dk^2,\ a=dk^3$ ナル故

$$\frac{a}{b-d}=\frac{k^3d}{k^2d-d}=\frac{k^3}{k^2-1},\quad \frac{c^3}{c^2d-d^3}=\frac{k^3d^3}{k^2d^3-d^3}=\frac{k^3}{k^2-1}$$

14. 假設ヨリ

$$\frac{x^2}{l^2}=\frac{y^2}{m^2}=\frac{z^2}{n^2}=\frac{ax^2+by^2+cz^2}{al^2+bm^2+cn^2}=\frac{1}{al^2+bm^2+cn^2}$$

又 $$=\frac{x^2+y^2+z^2}{l^2+m^2+n^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{1}$$

$$\therefore\ \frac{1}{al^2+bm^2+cn^2}=x^2+y^2+z^2$$

$$\therefore\ (al^2+bm^2+cn^2)(x^2+y^2+z^2)=1$$

15. (1) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{xyz}{x+y+z}=k$ トスレバ

$x=ak,\ y=bk,\ z=ck$ ナル故, 之ヲ

$\frac{xyz}{x+y+z}=k$ ニ代入シテ

$$\frac{abck^3}{k(a+b+c)}=k,\quad \therefore\ k=\frac{a+b+c}{abc}$$

$$\therefore\ x=\frac{a+b+c}{bc},\ y=\frac{a+b+c}{ca},\ z=\frac{a+b+c}{ab}$$

〔2〕 加比ノ理ニヨリ $\dfrac{x+y+z}{2(x+y+z)}=x+y+z$

$$\therefore\ x+y+z=\frac{1}{2}\ \cdots\cdots(1)$$

故ニ $\dfrac{x}{y+z+a}=\dfrac{y}{z+x}=\dfrac{z}{x+y-a}=\dfrac{1}{2}$

之ヨリ $2x-y-z=a\ \cdots\cdots(2)$

$$x+z=2y\ \cdots\cdots(3)$$

$$x+y-2z=a\ \cdots\cdots(4)$$

(1) ト (3) ヨリ $y=\dfrac{1}{6}$

依テ (1) ヨリ $x+z=\dfrac{1}{3}$

(2) ヨリ $2x-z=a+\dfrac{1}{6}$

之ヲ解キテ $x=\dfrac{2a+1}{6}$, $z=\dfrac{-2a+1}{6}$ ヲ得.

〔3〕 $\dfrac{x+2y}{3}=\dfrac{3y+4z}{5}=\dfrac{5z+6x}{7}$

$$=\frac{3(x+2y)+3y+4z+5z+6x}{3\times3+5+7}$$

$$=\frac{9(x+y+z)}{21}=1$$

$\therefore\ x+2y=3,\ 3y+4z=5,\ 5z+6x=7$

之ヲ解キテ $x=\dfrac{17}{21}$, $y=\dfrac{23}{21}$, $z=\dfrac{3}{7}$ ヲ得.

16. 三人ニテ一日ニ全業ノ $\dfrac{1}{13}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{7}=\dfrac{362}{819}$ ヲナス故，此ノ業ヲ三人ニテ交互ニ働クトキハ甲ハ 3日即チ全業ノ $\dfrac{3}{13}$，乙ハ2日ト全業ノ $\dfrac{32}{819}$，丙ハ 2日働キテ成就スルナリ，故ニ三人ガナシタル仕業ノ量ノ比ハ $\dfrac{3}{13}:\left(\dfrac{4}{9}+\dfrac{32}{819}\right):\dfrac{2}{7}=189:396:234$

$$=21:44:26$$

ナリ．依テ 16圓38錢ヲ此ノ比ニ配分シテ三人ノ所得甲 3圓78錢，乙7圓92錢，丙4圓68錢ヲ得.

17. 假設ヨリ $c(x-y)+ay-az+bz-bx=0$

$$c(x-y)-b(x-y)+(a-b)y-(a-b)z=0$$

$$(c-b)(x-y)+(a-b)(y-z)=0$$

$$\therefore\ \frac{x-y}{a-b}=\frac{y-z}{b-c}$$

同様ニ $\dfrac{y-z}{b-c}=\dfrac{z-x}{c-a}$

$$\therefore\ \frac{x-y}{a-b}=\frac{y-z}{b-c}=\frac{z-x}{c-a}$$

18. $a(y-z)=b(z-x)=c(x-y)=k$ トセバ

$$y-z=\frac{k}{a},\ z-x=\frac{k}{b},\ x-y=\frac{k}{c}$$

邊々相加ヘテ $k\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=0$

之ヨリ $ab+bc+ca=0$

故ニ $a(b+c)=-bc,\ b(c+a)=-ca,\ c(a+b)=-ab$

$\therefore\ \dfrac{y-z}{a(b+c)}=\dfrac{k}{-abc},\ \dfrac{z-x}{b(c+a)}=\dfrac{k}{-abc},$

$$\frac{x-y}{c(a+b)}=\frac{k}{-abc}$$

19. $a(by+cz-ax)=b(cz+ax-by)=c(ax+by-cz)=k$

トセバ

$$by+cz-ax=\frac{k}{a},\quad cz+ax-by=\frac{k}{b},\quad ax+by-cz=\frac{k}{c}$$

邊々相加ヘテ $\quad ax+by+cz=k\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

之ヨリ

$$x=\frac{k(b+c)}{2abc},\quad y=\frac{k(c+a)}{2abc},\quad z=\frac{k(a+b)}{2abc}$$

$$\therefore\quad \frac{y+z-x}{a}=\frac{k(2a)}{a(2abc)}=\frac{k}{abc}$$ 等ナリ.

20. $\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-zx}{y(1-zx)}=k$ トセバ

$$x^2-yz=kx-kxyz\text{......}(1)$$

及ビ $\quad y^2-zx=ky-kxyz\text{......}(2)$

邊々相減ジ $\quad x^2-y^2+z(x-y)=k(x-y)$

$$\therefore\quad k=x+y+z\text{......}(3)$$

兩邊ニ z ヲ掛ケ $\quad kz=xz+yz+z^2$

$$\therefore\quad z^2-xy=kz-xy-xz-yz\text{......}(4)$$

又 (1) ヨリ $\quad x^2-yz=x^2+xy+xz-kxyz$

$$\therefore\quad -yz-xy-xz=-kxyz\text{......}(5)$$

(4) ニ入レテ $\quad z^2-xy=kz-kxyz$

$$\therefore\quad \frac{z^2-xy}{z(1-xy)}=k$$

又 (5) ヨリ $k=\frac{yz+xz+xy}{xyz}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

或ハ先ヅ $\quad k=x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ ヲ得バ

$$k=\frac{z(x+y+z)}{z}=\frac{yz+zx+xy}{xyz}$$

$$=\frac{z(x+y+z)-(yz+zx+xy)}{z-xyz}=\frac{z^2-xy}{z(1-xy)}$$

ヲ得ルモ可ナリ.

21. 題意ニヨリ $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{k}{x-y}$ (k ハ常數) ナル故

$$(x-y)^2=-kxy$$

$$\therefore\quad x^2+y^2=(2-k)xy$$

$$\therefore\quad xy=\frac{x^2+y^2}{2-k}$$

然ルニ $\quad (x+y)^2=x^2+y^2+2xy$

$$=x^2+y^2+\frac{2(x^2+y^2)}{2-k}=\frac{4-k}{2-k}(x^2+y^2)$$

ニシテ $\frac{4-k}{2-k}$ ハ常數ナル故 $(x+y)^2\propto x^2+y^2$

22. $A=kx,\ B=\frac{k'}{x}$ トセバ,

$A+B=y$ ナル故 $\quad kx+\frac{k'}{x}=y\text{......}(1)$

$x=4,\ y=10$ トシテ $\quad 16k+k'=40$

$x=1,\ y=-5$ トシテ $\quad k+k'=-5$

之ヨリ $\quad k=3,\ k'=-8$ ヲ得 (1) ニ入レテ

$$3x-\frac{8}{x}=y$$ ヲ得.

23. 望見シ得ベキ距離ヲ x 哩トシ, 眼高ヲ h 尺トセバ

$$x=k\sqrt{h}$$

$x=3,\ h=6$ トシテ $k=\dfrac{3}{\sqrt{6}}$ ヲ得,

依テ $h=216$ トシテ $x=\dfrac{3}{\sqrt{6}}\times\sqrt{216}=18$ ヲ得.

答 18哩.

24. 戰鬪力ヲ P, 陸軍兵員ノ數ヲ N, 軍艦噸數ヲ T トセバ $P=kNT^2$

今 N ヲ $\frac{4}{3}$N トシ T ヲ T′ トシテ 3P ノ戰鬪力ヲ得ントスルヲ以テ $3P=k\times\frac{4}{3}NT'^2$

前式ト邊々相除シテ

$$3=\frac{4}{3}\times\frac{T'}{T}$$

此ノ式ニ T=10 トシテ T′=15 ヲ得.

答 5萬噸.

第十二集 等差級數

1. 公差ハ $\dfrac{b-a}{n+1}$ ナル故, 所要ノ項ハ

$$a+\frac{p-1}{n+1}(b-a) \text{ ナリ.}$$

2. 初項ヲ a, 公差ヲ d トセバ,

$$a+(m-1)d=\alpha,\quad a+(n-1)d=\beta$$

之ヨリ $d=\dfrac{\alpha-\beta}{m-n}$, $a=\dfrac{-n\alpha+m\beta+\alpha-\beta}{m-n}$ ヲ得ル

故ニ所要ノ項ハ

$$a+(m+n-1)d$$

$$=\frac{-n\alpha+m\beta+\alpha-\beta+(m+n-1)(\alpha-\beta)}{m-n}$$

$$=\frac{m\alpha-n\beta}{m-n} \text{ ナリ.}$$

3. 初項ヲ a, 公差ヲ d トセバ題意ニヨリ

$$a+5d=3a \qquad \therefore\ d=\frac{2}{5}a$$

今求ムル項ヲ第 n 項トセバ $a+(n-1)d=9a$

ナルベキニヨリ $a+\dfrac{2(n-1)}{5}a=9a$

兩邊ヲ $a(a\neq0)$ ニテ除シ $n=21$ ヲ得.

4. 初項ヲ a, 公差ヲ d トセバ假設ヨリ

$$\frac{p\{2a+(p-1)d\}}{2}=\frac{q\{2a+(q-1)d\}}{2}$$

之ヨリ $(p-q)\{2a+(p+q-1)d\}=0$

$p\neq q$ ナル故, $2a+(p+q-1)d=0$

故ニ第 $(p+q)$ 項マデノ和ハ

$$\frac{p+q}{2}\{2a+(p+q-1)d\}=0$$

5. $\pi(1+1.5+2+\cdots\cdots)=100$ トシ, 項數ヲ n トスレバ,

$$\frac{n\pi\left\{2+(n-1)\frac{1}{2}\right\}}{2}=100$$

之ヨリ $\pi n^2+3\pi n-400=0$

$$\therefore\ n=\frac{-3\pi\pm\sqrt{9\pi^2+1600\pi}}{2\pi}$$

$$=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{400}{\pi}}$$

$$=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{2.25+127.32\ldots\ldots}$$

$$=-1.5\pm11.3\ldots\ldots=9.8 \text{ 或ハ } -12.8$$

答 10箇.

6. 正三角形ノ一邊ニ列ブ碁石ノ數ヲ x, 矩形ノ二邊ヲ x 箇及ビ $(x-3)$ 箇トセバ,

$$\frac{x(x+1)}{2}+4=x(x-3)$$

之ヨリ $x^2-7x-8=0$ $\therefore$ $x=8$ 或ハ -1

依テ $x=8$ トシテ碁石ノ數ハ 36 ナルヲ知ル.

7. 第 n 群ノ最後ノ數ハ最初ノ數 (2) ヨリ數ヘテ

第 $2+3+4+\ldots\ldots+(n+1)=\dfrac{n(n+3)}{2}$ 番目ノ數ナリ

故ニ其ノ數ハ $2+\left\{\dfrac{n(n+3)}{2}-1\right\}\times2=n^2+3n$ ナリ.

依テ第 n 群ノ數ハ n^2+3n ヲ初項トシ, 公差ヲ -2, 項數ヲ $n+1$ トスル等差級數ニテ其ノ和ハ

$$\frac{(n+1)\{2n^2+6n-2n\}}{2}=n(n+1)(n+2)$$

8. 第一級數ノ第 p 項ガ第二級數ノ第 q 項ニ等シトセバ, $2+(p-1)\times3=2+(q-1)\times5$

$$\therefore\quad 5q=3p+2$$

之ヨリ $p=6,\ q=4$ ヲ得ル故第一級數ハ 5 項, 第二級數ハ 3 項宛ニ區分シテ其ノ初メノ項ガ夫々合致スルヲ知ル, 然ルニ此ノ兩級數ノ項數ハ夫々 67 及ビ 41 ナル故相合致スル項ハ總テニテ 14 項ナルヲ知ル, 而シテ此ノ合致スル項ハ 2 ヲ初項トシ 15 ヲ公差トスル等差級數ナル故其ノ和ハ

$$\frac{14\times(4+13\times15)}{2}=1393 \text{ ナリ.}$$

9. 初項ヲ a, 公差ヲ d トセバ,

$$P=a+(p-1)d,\ Q=a+(q-1)d,\ R=a+(r-1)d$$

ナル故 $P(q-r)+Q(r-p)+R(p-q)$

$$=a(q-r+r-p+p-q)+d\{p(q-r)+q(r-p)$$
$$+r(p-q)-(q-r+r-p+p-q)\}=0$$

10. $(s-a)^2,\ (s-b)^2,\ (s-c)^2$ ガ等差級數ヲナスタメニハ $2(s-b)^2=(s-a)^2+(s-c)^2$

従テ $-4sb+2b^2=-2s(a+c)+a^2+c^2$

ナルコト必要ニシテ十分ナリ, 兩邊ノ $2s=a+b+c$ ヲ代入シ, 簡約スレバ $2ca=ab+bc$ トナル.

然ルニ假設ヨリ $\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}$ $\therefore$ $2ca=ab+bc$

ヲ得ル故, 問題ハ證明セラレタリ.

11. 假設ヨリ $\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{b},\ \dfrac{1}{c},\ \dfrac{1}{d}$ ハ等差級數ヲナス故,

$$3\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{a}-\frac{1}{d} \text{ 及ビ } \frac{1}{c}-\frac{1}{d}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$$

即チ $\dfrac{3(b-a)}{ab}=\dfrac{d-a}{ad}$ 及ビ $\dfrac{d-c}{cd}=\dfrac{c-b}{bc}$

邊々相乘ジテ $3(b-a)(d-c)=(c-b)(d-a)$ ヲ得.

第十三集 等比級數

1. 二數ヲ $x,\ y$ トセバ $\dfrac{x+y}{2}=n\sqrt{xy}$

兩邊ヲ平方シテ $x^2-2(2n^2-1)xy+y^2=0$

之ヨリ $\dfrac{x}{y}=2n^2-1\pm2n\sqrt{n^2-1}$ ヲ得.

2. 初項ヲ a, 公比ヲ r トセバ.

$a+ar+ar^2=26$ 卽チ $a(1+r+r^2)=26$ ....(1)

及ビ $ar^4+ar^5+ar^6=2106$

卽チ $ar^4(1+r+r^2)=2106$ ....(2)

(2) ヲ (1) ニテ割リ $r^4=81$ $\therefore$ $r=3$

依テ (1) ヨリ $a=2$ ヲ得.

依テ級數ハ 2, 6, 18,............ナリ.

3. 三數ヲ $\dfrac{a}{r}$, a, ar トセバ,

$$a\left(\frac{1}{r}+r+1\right)=21 \quad ....(1)$$

及ビ $\dfrac{a}{r}\times a\times ar=216$ ....(2)

(2) ヨリ $a=6$ ヲ得 (1) ニ入レテ $r=2$ 或ハ $\dfrac{1}{2}$ ヲ得

依テ三數ハ 3, 6, 12 ナリ.

4. 甲, 乙, 丙ノ所得ヲ夫々 x 圓, xy 圓, xy^2 圓 トセバ

$$x+xy+xy^2=760 \quad ....(1)$$

及ビ $xy-xy^2=\dfrac{2}{3}(x-xy)$ ....(2)

(2) ヨリ $y=1$ 或ハ $\dfrac{2}{3}$ ($y=1$ ハ不可)

依テ $y=\dfrac{2}{3}$ トシテ (1) ニ入レ $x=360$ ヲ得.

依テ三人ノ所得ハ甲 360 圓, 乙 240圓, 丙 160圓ナリ.

5. 初項ヲ a, 公比ヲ r トセバ

$$ar=\frac{2}{3} \text{ 及ビ } ar^4=\frac{9}{4}$$

邊々相除ジ $r^3=\dfrac{27}{8}$ $\therefore$ $r=\dfrac{3}{2}$

依テ第一方程式ヨリ $a=\dfrac{4}{9}$ ヲ得.

故ニ所要ノ總和ハ $\dfrac{4}{9}\times\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^7-1}{\frac{3}{2}-1}=\dfrac{2059}{144}$ ナリ.

6. 級數ヲ $a, ar, ar^2, \ldots\ldots, ar^{2n}$ トセバ,

$$p=a\times\frac{1-r^{2n+1}}{1-r},\quad q=a\times\frac{1+r^{2n+1}}{1+r}$$

$$\therefore\ pq=a^2\times\frac{1-r^{4n+2}}{1-r^2}$$

而シテ各項ヲ平方シタルモノヽ和ハ

$a^2\times\dfrac{1-(r^2)^{2n+1}}{1-r^2}$ ニ等シ.

7. $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ ガ公比 r ナル等比級數ナルトキハ,

$\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \dfrac{1}{a_3}, \ldots\ldots$ ハ公比 $\dfrac{1}{r}$ ナル等比級數ナリ.

而シテ $S=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$, $S'=\dfrac{\frac{1}{a_1}\left(1-\frac{1}{r^n}\right)}{1-\frac{1}{r}}=\dfrac{(1-r^n)r}{a_1r^n(1-r)}$

ナル故, $\dfrac{S}{S'}=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}\times\dfrac{a_1r^n(1-r)}{(1-r^n)r}$

$$=a_1\times a_1r^{n-1}=a_1a_n$$

8. 初項ヲ a, 公比ヲ r トセバ,

$$A=\frac{a(1-r^n)}{1-r},\quad B=\frac{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{r^n}\right)}{1-\frac{1}{r}}=\frac{(1-r^n)}{ar^{n-1}(1-r)}$$

$$C=a^n r^{1+2+3+\cdots+(n-1)}=a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}$$ ナル故,

$$B^n C^2=\frac{(1-r^n)^n}{a^n r^{n(n-1)}(1-r)^n}\times a^{2n}r^{n(n-1)}$$

$$=\frac{a^n(1-r^n)^n}{(1-r)^n}=A^n$$

9. 初項ヲ a, 公比ヲ r トセバ第 n 項ハ ar^{n-1} ニシテ第 $(n+1)$ 項ヨリノ n 項ノ和ハ

$$\frac{ar^n(1-r^n)}{1-r}=ar^{n-1}\times\frac{r-r^{n+1}}{1-r}$$

ナリ.

然ルニ $r>0$ ナル故, $r-r^{n+1}<r$, 又 $r<\frac{1}{2}$ ナル故,

$$1-r>r$$

故ニ $r-r^{n+1}<1-r$ 從テ $\frac{r-r^{n+1}}{1-r}<1$

$\therefore$ $a>0$ ナラバ, $ar^{n-1}>\frac{ar^n(1-r^n)}{1-r}$ ナリ.

但シ $a<0$ ナラバ其ノ反對ナリ.

10. 公比ヲ r トセバ

$\left(\frac{a}{1-r}\right)^2=\frac{b}{1-r}$ ヨリ $r=\frac{b-a^2}{b}$ ヲ得.

11. (1) $S=a+a^2+a^3+\cdots\cdots+a^n$

$$-(b+2b+3b+\cdots\cdots+nb)$$

$$=\frac{a(1-a^n)}{1-a}-\frac{nb(1+n)}{2}$$

(2) $S=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\cdots\cdots$

$$\cdots\cdots+\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}$$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+n+1}=\frac{n}{(x+1)(x+n+1)}$$

(3) $2n(2n+2)=4(n^2+n)$ ナル故

$$S=4\{(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)$$
$$+(1+2+3+\cdots\cdots+n)\}$$

$$=4\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$

$$=\frac{4}{3}n(n+1)(n+2)$$

(4) $(2n-1)^2=4n^2-4n+1$ ナル故

$$S=\frac{4}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{4}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{n}{3}(4n^2-1)$$

(5) $S=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots\cdots\cdots$ トセバ

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots\cdots\cdots$$

ナル故, 邊々相減ジ

$$\frac{1}{2}S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$$

$$=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{2^{n+1}-2-n}{2^n}$$

$$\therefore\ S=\frac{2^{n+1}-2-n}{2^{n-1}}$$

若シ級數ガ無限級數ナラバ $S=4$ ナリ.

12. 損失ノ合計ハ

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{2^2\times3}+\frac{a}{2^3\times3^2}+\cdots\cdots=\frac{a}{2}\div\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{3a}{5}$$

利益ノ合計ハ

$$\frac{a}{2\times3}+\frac{a}{2^2\times3^2}+\frac{a}{2^3\times3^3}+\cdots\cdots=\frac{a}{6}\div\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{a}{5}$$

ナルヲ以テ所要ノ極限ハ

$$a+\frac{1}{5}a-\frac{3}{5}a=\frac{3}{5}a \text{（圓）}$$ ナリ.

13. 假設ヨリ公比ヲ r トセバ $y=rx,\ z=r^2x,\ w=r^3x$

及ビ $xw=yz,\ xz=y^2,\ yw=z^2$ ナル故,

(1)　$(y-z)^2+(z-x)^2+(w-y)^2$

$$=y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2+w^2-2wy+y^2$$

$$=r^2x^2-2xw+2r^4x^2-2r^2x^2+x^2+w^2-2r^4x^2+r^2x^2$$

$$=x^2-2xw+w^2=(x-w)^2$$

(2)　左邊 $=x^2+y^2+z^2+w^2+2xy+2xz+2xw$

$$+2yz+2yw+2zw$$

$$=x^2+2xy+y^2+z^2+2zw+w^2$$

$$+2(xz+xw+yz+yw)$$

$$=(x+y)^2+(z+w)^2+2(y^2+2yz+z^2)$$

$$=(x+y)^2+(z+w)^2+2(y+z)^2$$

14. 二數ヲ x,y トセバ,

$$\sqrt{xy}=5\cdots\cdots(1),\qquad \frac{2xy}{x+y}=4\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) ヨリ $xy=25$ (1) ヲ (2) ニ入レ $x+y=\frac{25}{2}$ ヲ得.

之ヲ解キテ　$x=10,\ y=\frac{5}{2}$ 或ハ $x=\frac{5}{2},\ y=10$

ヲ得.

何レニシテモ二數ハ 10 ト $\frac{5}{2}$ ナリ.

15. 題意ニヨリ

$$\frac{ax+by}{x+y}=\frac{x+y}{2}\cdots\cdots(1)\qquad \left(\frac{ax+by}{x+y}\right)^2=ab\cdots\cdots(2)$$

(1) ヨリ $(x+y)^2=2(ax+by)$ ヲ得, (2) ト邊々相除シ

$$ax+by=2ab\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3) ヲ (1) ニ入レ　$x+y=2\sqrt{ab}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3) ト (4) ヨリ $x=\dfrac{2\sqrt{a}\,b(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}=\dfrac{2\sqrt{a}\,b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$$y=\frac{2a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$ ヲ得.

又 (4) ヲ　$x+y=-2\sqrt{ab}$ トスレバ

$$x=\frac{2\sqrt{a}\,b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}},\quad y=\frac{-2a\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$ ヲ得.

16. 題意ニヨリ　$2b=a+c\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

及ビ　$a^2=bc\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(1) ノ兩邊ニ a ヲ乘ジ (2) ヲ入ルレバ

$$2ab=bc+ac\qquad\therefore\ c=\frac{2ab}{a+b}$$

17. $a-\frac{b}{2},\ \frac{b}{2},\ c-\frac{b}{2}$ ガ等比級數ヲナスタメニハ

$\dfrac{b^2}{4}=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)\left(c-\dfrac{b}{2}\right)$ 從テ $b=\dfrac{2ac}{a+c}$ ナルコト

必要ニシテ十分ナリ.

18. 題意ニヨリ次ノ一組ノ方程式ヲ得.

$$\mathrm{B}^2=\mathrm{AC}\ \dots\dots\dots\dots(1)$$

$$2\mathrm{C}=\mathrm{B}+\mathrm{D}\ \dots\dots\dots\dots(2)$$

$$\mathrm{A}+\mathrm{D}=14\ \dots\dots\dots\dots(3)$$

$$\mathrm{B}+\mathrm{C}=12\ \dots\dots\dots\dots(4)$$

(4) ヨリ $\mathrm{B}=12-\mathrm{C}\dots\dots\dots\dots(5)$

(2) ヨリ $\mathrm{D}=2\mathrm{C}-\mathrm{B}=3\mathrm{C}-12\ \dots\dots(6)$

(3) ヨリ $\mathrm{A}=14-\mathrm{D}=26-3\mathrm{C}\ \dots\dots(7)$

(5) ト (7) ヲ (1) ニ入レ $(12-\mathrm{C})^2=\mathrm{C}(26-3\mathrm{C})$

之ヨリ $2\mathrm{C}^2-25\mathrm{C}-72=0$

$\therefore\ \mathrm{C}=8$ 或ハ $\dfrac{9}{2}$

依テ $\mathrm{C}=8$ トセバ $\mathrm{A}=2,\ \mathrm{B}=4,\ \mathrm{D}=12$

又 $\mathrm{C}=\dfrac{9}{2}$ トセバ $\mathrm{A}=\dfrac{25}{2},\ \mathrm{B}=\dfrac{15}{2},\ \mathrm{D}=\dfrac{3}{2}$ ヲ

得.

19. 假設ヨリ $2b=a+c,\quad x^2=ab,\quad y^2=bc$

$\therefore\ x^2+y^2=b(a+c)=2b^2$ ナリ.

20. 第一假設ヨリ $a+b=x+y\dots\dots\dots\dots(1)$

第二假設ヨリ r ヲ公比トセバ,

$x=c^3r,\ y=c^3r^2,\ d^3=c^3r^3$ 從テ $d=cr$

故ニ (1) ニ入レ

$$a+b=c^3r+c^3r^2=c(cr)(c+cr)=cd(c+d)$$

21. 第一假設ヨリ公比ヲ r トシテ $b=ar,\ c=ar^2$,

第二假設ヨリ $2x=a+b,\ 2y=b+c$ ヲ得ル故,

$$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=\frac{2a}{a+b}+\frac{2c}{b+c}=\frac{2a}{a+ar}+\frac{2ar^2}{ar+ar^2}$$

$$=\frac{2}{1+r}+\frac{2r}{1+r}=\frac{2(1+r)}{1+r}=2$$

22. 等差級數ノ初項ヲ a, 等比級數ノ初項ヲ b トセバ,

$$\frac{5(2a+12)}{2}+\frac{b(2^5-1)}{2-1}=148$$

簡單ニシテ $5a+31b=118\dots\dots\dots\dots(1)$

及ビ $\dfrac{10(2a+27)}{2}+\dfrac{b(2^{10}-1)}{2-1}=3254$

簡單ニシテ $10a+31\times33b=3119\dots\dots\dots\dots(2)$

a ヲ消去シテ $31\times31b=2883\quad\therefore\ b=3$

依テ (1) ヨリ $a=5$ ヲ得.

第十四集 指數ノ擴張

1. 普通ノ方法ニヨラシムベシ, 答 $x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}$

2. (1) 題式 $=\dfrac{a^{mn}a^{qr}}{\left(b^{\frac{n}{q}}b^{\frac{r}{m}}\right)^{mq}}\times\dfrac{b^{qr}}{a^{qr}}$

$$=\frac{a^{mn}a^{qr}}{b^{mn}b^{qr}}\times\frac{b^{qr}}{a^{qr}}=\frac{a^{mn}}{b^{mn}}$$

(2) 題式 $=\dfrac{-2}{x^{\frac{2}{3}}-1}+\dfrac{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-1}=\dfrac{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}-2}{x^{\frac{2}{3}}-1}$

$$=\frac{\left(x^{\frac{2}{3}}+2\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-1\right)}{x^{\frac{2}{3}}-1}=x^{\frac{2}{3}}+2$$

〔3〕 題式$=\dfrac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}$

$$+\frac{(ab-a^{-1}b-ab^{-1}+a^{-1}b^{-1})(ab-a^{-1}b^{-1})}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}$$

$$=\frac{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}=1$$

〔4〕 題式$=\left[16+\left\{\dfrac{2(x+a)}{x-a}-\dfrac{2(x-a)}{x+a}\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}$

$$=\left[16+\left(\frac{8ax}{x^2-a^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{16(x^2+a^2)^2}{(x^2-a^2)^2}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{4(x^2+a^2)}{x^2-a^2}$$

〔5〕 題式$=\dfrac{1}{(4x^3-3x)^2}-\dfrac{(1-x^2)(4x^2-1)^2}{x^6}\times\dfrac{x^4}{(4x^2-3)^2}$

$$=\frac{1}{(4x^3-3x)^2}-\frac{-16x^6+24x^4-9x^2+1}{x^4(4x^2-3)^2}$$

$$=\frac{(4x^3-3x)^2}{(4x^3-3x)^2}=1$$

3. $p=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)=\dfrac{x-y}{2\sqrt{xy}}$ ナル故,

$$(1+p^2)^{\frac{1}{2}}=\left\{1+\frac{(x-y)^2}{4xy}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\frac{(x+y)^2}{4xy}\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}$$

4. 〔1〕 $2^{x+4}=y$ トセバ所題ノ方程式ハ

$y^2-2y+1=0$　　$\therefore\ y=1$

$\therefore\ 2^{x+4}=1$　　$\therefore\ x+4=0$　　$\therefore\ x=-4$

〔2〕 $2^{-\frac{x}{2}}=y$ トセバ所題ノ方程式ハ

$2y^2-\dfrac{33}{4}y+1=0$　従テ　$8y^2-33y+4=0$

之ヲ解キテ　　$y=4$ 或ハ $\dfrac{1}{8}$

依テ　$2^{-\frac{x}{2}}=2^2$ 或ハ 2^{-3}　　$\therefore\ x=-4$ 或ハ 6

〔3〕 $-x$ ヲ右邊へ移シ兩邊ヲ立方シテ,

$x^2+8x+15=0$　　$\therefore\ x=-3$ 或ハ -5

而シテ此ノ二ツノ値ハ共ニ原方程式ニ適ス.

〔4〕 兩邊ヲ三乘シテ

$$3(a+x)^{\frac{1}{3}}(b+x)^{\frac{1}{3}}\{(a+x)^{\frac{1}{3}}-(b+x)^{\frac{1}{3}}\}=0$$

故ニ $a+x=0,\ b+x=0$ 之ヨリ $x=-a$ 或ハ $-b$

ヲ得, $(a+x)^{\frac{1}{3}}-(b+x)^{\frac{1}{3}}=0$ ニハ根ナシ,

而シテ　$-a,\ -b$ ハ所題ノ方程式ニ適ス.

〔5〕 所題ノ方程式ハ

$$x^{\frac{2a}{a^2-b^2}\times\frac{a^2-b^2}{a}}+(a^2-b^2)=2ax^{\frac{a+b}{a+b}}$$

即チ　$x^2-2ax+a^2-b^2=0$　　$\therefore\ x=a\pm b$

〔6〕 (1) ヲ y^x ニ就テ解キ　$y^x=9$………………(3)

(2) ノ兩邊ヲ x 乘シテ (3) ヲ入ルレバ

$(3^x)^x=81$　　$\therefore\ x^2=4$　　$\therefore\ x=\pm 2$

$x=2$　トセバ (3) ヨリ　　$y=\pm 3$

$x=-2$ トセバ　　　$y=\pm\dfrac{1}{3}$ ヲ得.

〔7〕 (2) ヨリ　$2^{3x}=2^{5x+2}$ 之ヨリ $3x=5x+2$

$$\therefore \quad x=-1$$

依テ (1) ヨリ $z^{-1}=y^{-2}$ $\therefore \quad z=y^2$ …………(3)

及ビ (3) ヨリ $y+z=12$ ………(4)

(4) ニ (3) ヲ入レ $y^2+y-12=0$ $\therefore \quad y=3$ 或ハ -4

依テ (3) ヨリ $y=3$ トスレバ $z=9$

$y=-4$ トスレバ $z=16$ ヲ得,

[8] (2) ノ兩邊ヲ4乘シテ $(y^4)^{x+y}=x^4$

(1) ヲ入レテ $(x^{x+y})^{x+y}=x^4$ $\therefore \quad (x+y)^2=4$

之ヨリ $x+y>0$ ナルコトニ注意シテ

$x+y=2$ …………………………(3)

依テ (2) ニ入レ $y^2=x$ …………………………(4)

(4) ヲ (3) ニ入レ $y^2+y-2=0$ $\therefore \quad y=1$ 又ハ -2

依テ $y=1$ トシテ (4) ヨリ $x=1$ ヲ得.

第十五集 對 數

1. $\log(\sqrt{10}+3)-\log(\sqrt{10}-3)=\log\dfrac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}-3}$

$$=\log(\sqrt{10}+3)^2=2\log(\sqrt{10}+3)$$

2. $\log x-\log y=\log y-\log z=$ ………… ナル故

$$\log\frac{x}{y}=\log\frac{y}{z}=\text{…………}$$

$\therefore \quad \dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z}=$ ………… ナルヲ以テナリ。

3. 題式 $=\log\left\{\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}\right\}$

$$=\log\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\log\sqrt{10}=\frac{1}{2}$$

4. [1] 題式 $=\log\left(\dfrac{280}{33}\times\dfrac{35}{1}\times\dfrac{99}{98}\times\dfrac{1}{3}\right)$

$$=\log 100=2$$

[2] 題式 $=\log\dfrac{\sqrt{27}\times 8}{\sqrt{1000}}\div\log 1.2$

$$=\log\left(\frac{12}{10}\right)^{\frac{3}{2}}\div\log\frac{12}{10}=\frac{3}{2}$$

別解. 題式 $=\dfrac{\dfrac{3}{2}\log 3+3\log 2-\dfrac{3}{2}}{\log 3+\log 4-1}$

$$=\frac{\dfrac{3}{2}(\log 3+2\log 2-1)}{\log 3+2\log 2-1}=\frac{3}{2}$$

[3] 題式 $=2-1-3\log 2+2\log 5+\log 3-\log 13+1$

$$+\log 104-\log 3+2\log 2$$

$$=2+2\log 5+2\log 2=2+2\log 10=4$$

別解. 題式 $=\log\dfrac{100\times 75\times 104\times 4}{80\times 1.3\times 3}=\log 10000=4$

5. $\log\left(\dfrac{50}{49}\right)^{100}=100\log\left(\dfrac{100}{2\times 7^2}\right)$

$$=100(2-\log 2-2\log 7)=100(2-1.991)$$

$$=100\times 0.009=0.9<\log 10$$

$$\therefore \quad \left(\frac{50}{49}\right)^{100}<10$$

6. 所要ノ數ヲ n トセバ

$$2^1\times 2^3\times 2^5\times\ldots\ldots\times 2^{2n-1}>10^{10}$$

$$2^{\frac{n(2n)}{2}} > 10^{10}$$

$$n^2 \log 2 > 10$$

$$n^2 > \frac{10}{0.3010}$$

$$n^2 > 33.\cdots\cdots\cdots$$

$\therefore\ n \geqq 6$　　　答 6箇.

7. $\log_{25} 200 = x$ トセバ　$25^x = 200$ ヨリ

$x \log\left(\frac{100}{4}\right) = \log 200$ ヨリ　$x(2 - 2\log 2) = \log 200$

$$\therefore\ x = \frac{2.3010}{2 - 0.6020} = \frac{2.3010}{1.3980} = 1.646(約)$$

8. $\log_{100} \sqrt[3]{147} = x$ トセバ　$100^x = (3 \times 7^2)^{\frac{1}{3}}$ ヨリ

$$6x = \log 3 + 2\log 7 = 2.16732$$

$$\therefore\ x = 0.36122\ (約)$$

9. 所設ノ方程式ヨリ

$$\log x = -1 \pm \sqrt{11} = 2.3166 \text{ 或ハ } -4.3166$$

依テ　$\log x = 2.3166$ ヨリ $x = 207.3$ ヲ得.

又　$\log x = -4.3166$ ヨリ

$$\log\left(\frac{1}{x}\right) = \log 4.3166 \quad \therefore\ \frac{1}{x} = 20728$$

之ヨリ　$x = \frac{1}{20728} = 0.00004824$ ヲ得.

10. [1] 所題ノ方程式ヲ $3(\log x)^2 - 5\log x - 12 = 0$

之ヨリ　$\log x = 3$ 或ハ $-\frac{4}{3}$

依テ　$\log x = 3$ ヨリ $x = 1000$ ヲ得.

$\log x = -\frac{4}{3}$ ヨリ　$x = 10^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10^4}}$ ヲ得.

[2] 兩邊ノ對數ヲ取リテ

$$(\log x)^2 - \frac{5}{2}\log x + 1 = 0$$

之ヨリ　$\log x = 2$ 或ハ $\frac{1}{2}$

依テ　$\log x = 2$ ヨリ $x = 100$,

$\log x = \frac{1}{2}$ ヨリ　$x = \sqrt{10}$ ヲ得.

11. [1] 所題ノ方程式ヨリ　$2(10^{3x})^2 - 10^{3x} - 10 = 0$

之ヨリ　$10^{3x} = \frac{5}{2}$ 或ハ -2 (不可能)

依テ　$10^{3x} = \frac{5}{2}$ ヨリ　$3x = \log\frac{5}{2}$

$$\therefore\ x = \frac{1 - 2\log 2}{3} \text{ ヲ得.}$$

[2] 分母ヲ拂ヒ整頓スレバ, $(1-b)a^x = (1+b)a^{-x}$

之ヨリ　$a^{2x} = \frac{1+b}{1-b}$

$$\therefore\ x = \frac{\log(1+b) - \log(1-b)}{2\log a}$$

[3] (1) ヨリ　$(9 - x^2)^y = 100$

(2) ト見合ハセ　$9 - x^2 = 8x$　即チ　$x^2 + 8x - 9 = 0$

之ヨリ　$x = 1$ 或ハ -9 [(2) ニ適セズ]

依テ $x = 1$ トシテ (2) ヨリ　$y = \log_8 100 = \frac{2}{\log 8}$

12. [1] 兩邊ノ對數ヲ取リ整頓スレバ

$$(9\log 2 + \log 3 - 2)x = -1 + \log 2 - \log 3$$

$1.18639x = -1.17609$　$\therefore\ x = -0.9912(約)$

(2) 6^x ニ就キテ整頓スレバ

$$3(6^x)^2-10(6^x)+3=0$$

$$\therefore\quad 6^x=3 \text{ 或ハ } \frac{1}{3}$$

$$\therefore\quad x=\frac{\log 3}{\log 6} \text{ 或ハ } \frac{-\log 3}{\log 6}$$

$$=\pm\frac{0.47712}{0.30103+0.47712}$$

$$=\pm\frac{0.47712}{0.77815}=\pm 0.613 \text{ (約)}$$

第十六集 歩合算

1. 始メノ水液ヲ x 瓦トスレバ其ノ中ニアル鹽分ハ $\frac{4x}{100}$ 瓦ニシテ，此ノ中ヨリ水分ヲ蒸發セシメタル後ノ水液ノ量ハ $\frac{4x}{100}\div\frac{10}{100}=\frac{2x}{5}$ (瓦) ナリ.

又後ニ加ヘタル鹽水 300 瓦中ニ含マルヽ鹽分ノ量ハ $300\times\frac{4}{100}=12$ (瓦) ナル故,

$$\frac{\frac{4x}{100}+12}{\frac{2x}{5}+300}=\frac{64}{1000} \quad \text{即チ} \quad \frac{5(x+300)}{2x+1500}=\frac{8}{5}$$

之ヨリ $9x=1500\times3$ $\therefore$ $x=500$(瓦) ヲ得.

2. 將校ヲ x 人，下士卒ヲ y 人トセバ第二戰ノ終リニ於ケル生存者ノ數ハ將校 $(x-72)$ 人，下士卒 0.9^2y 人ナル故

$$\frac{x-72}{0.9^2y}=\frac{2}{3}\times\frac{x-36}{0.9y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

又第三戰ノ終リニ於ケル生存者ノ數ヲ考ヘ

$$0.9^3y=(x-72)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1) ノ兩邊ニ 0.9^2y ヲ乗ジ簡單ニシテ遂ニ $x=126$ ヲ得.

依テ (2) ニ入レテ $y=4000$ ヲ得.

3. 外割歩合ハ甚ダ好マシカラザルモノナレドモ，坊間マヽ用キラルヽヲ以テ今日ノ所矢張リ其ノ知識ハ與ヘ置クヲヨシトス.

4. 内割2割ヲ外割 x ニ等シトセバ，

$$\frac{x}{1+x}=\frac{2}{10} \text{ ヨリ } x=0.25 \text{ ヲ得.}$$

答 外2割5分

又外割2割ハ内割ニテハ $\frac{2}{12}=0.1666\ldots\ldots$ ナリ.

5. 所要ノ金額ヲ x 圓トセバ其ノ内6歩引ノ結果ハ $0.94x$ 圓ニシテ外6分引ノ結果ハ

$$x\left(1-\frac{0.06}{1.06}\right)=\frac{x}{1.06} \text{ (圓) ナリ.}$$

故ニ $\frac{x}{1.06}-0.94x=1.02$

之ヨリ $36x=102\times106$ $\therefore$ $x=300$(圓) ヲ得.

6. $x=125\times1.024^{25}$ ヨリ

$$\log x=\log 125+25\log 1.024$$

$$\begin{aligned}\log 125 &= 2.09691\\ 25\log 1.024 &= 0.2575\\ \hline \log x &= 2.35441\end{aligned}$$

$$\log 125=\log\frac{1000}{8}=3-3\log 2=2.09691$$

$\therefore$ $x=226.2$ (約)

$$\log 1.024=\log\frac{2^{10}}{1000}=3.0103-3=0.0103$$

答 226圓20錢(約).

7. 211 節ノ公式ニヨラシムベシ. 即チ

$$S=\frac{100\times1.05\times(1.05^{11}-1)}{0.05}=2000\times(1.05^{12}-1.05)$$

$$=2000\times0.74586=1491.72(\text{圓})$$

8. 前問ノ通リ

$$S=\frac{180\times1.05\times(1.05^{8}-1)}{0.05}=180\times21\times(1.4775-1)$$

$$=180\times21\times0.4775=1805(\text{圓})\ \text{約}$$

9. 求ムル所ノ金額ヲ x 圓トシ銀行割引法ニヨレバ,

$$x+x(1-0.02)+x(1-0.04)+x(1-0.06)=300$$

之ヨリ $x\times3.88=300$ $\therefore\ x=77.32(\text{圓})$ ヲ得.

嚴格ニ理論的ニ考フレバ次ノ如ク計算スルヲ至當トス. $[\{(300-x)\times1.02-x\}\times1.02-x]\times1.02-x=0$

之ヨリ $x(1+1.02+1.02^2+1.02^3)=300\times1.02^3$

$$x\times4.121608=318.3624$$

$$\therefore\ x=77.24(\text{圓})\text{强}$$

サレド普通ハ前解ノ通リ銀行割引ニヨル.

10. 求ムル所ノ金額ハ

$$2600000\times(1+0.87+0.87^2+\dots\dots+0.87^9)$$

$$=2600000\times\frac{1-0.87^{10}}{1-0.87}$$

今 $0.87^{10}=y$ トセバ

$$\begin{aligned}\log y&=10\log0.87\\&=10(\bar{1}.93952)\\&=\bar{1}.3952\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}215\dots\dots2484\\ \underline{\quad5\dots\dots\dots\dots3}\\ y=0.24843\end{array}$$

故ニ上ノ金額ハ $2600000\times\dfrac{0.75157}{0.13}$

$$=200\times75157=15031400(\text{圓})\ \text{約}$$

第十七集　雜　　題

數及ビ代數式

1. 308607, 36.2107

2. $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}+2\sqrt[3]{b}$

3. 所要ノ値ヲ求ムルニハ次ノ如ク先ヅ $\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3^2},\ \dfrac{1}{3^3}$ ……ノ値ヲ求メ, ソレヨリ順次ニ所設級數ノ各項ヲ計算シ (共ニ小數六位マデ) 其ノ和ヲ求メシムベシ.

$\frac{1}{3}$	1.000000	
	0.333333………	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3^2}$	111111	
	55555……	$\frac{1}{2\times3^2}$
$\frac{1}{3^3}$	037037	
	12345……	$\frac{1}{3\times3^3}$
$\frac{1}{3^4}$	012345	
	3086……	$\frac{1}{4\times3^4}$
$\frac{1}{3^5}$	004115	
	823……	$\frac{1}{5\times3^5}$
$\frac{1}{3^6}$	001371	
	228……	$\frac{1}{6\times3^6}$
$\frac{1}{3^7}$	000457	
	66……	$\frac{1}{7\times3^7}$
$\frac{1}{3^8}$	000152	
	19……	$\frac{1}{8\times3^8}$
$\frac{1}{3^9}$	000050	
	5……	$\frac{1}{9\times3^9}$
$\frac{1}{3^{10}}$	000016	

0.3333	33
0.0555	55
0.0123	45
0.0030	86
0.0008	23
0.0002	28
0.0000	66
0.0000	19
0.0000	05
0.4054	60

(答)

4. $8-6=6-4$ ナル故,

$$(\sqrt{8}-\sqrt{6})(\sqrt{8}+\sqrt{6})=(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+\sqrt{4}$$

然ルニ明カニ $\sqrt{8}+\sqrt{6}>\sqrt{6}+\sqrt{4}$

$$\therefore\ \sqrt{8}-\sqrt{6}<\sqrt{6}-2$$

別解. $\sqrt{8}-\sqrt{6}-(\sqrt{6}-2)=\sqrt{8}-2\sqrt{6}+2$

$=2(\sqrt{2}+1-\sqrt{6})$ ナルヲ以テ

$\sqrt{8}-\sqrt{6}$ ト $\sqrt{6}-2$ ノ大小ハ $\sqrt{2}+1$ ト $\sqrt{6}$ トノ大小ニ伴フ. 然ルニ $\sqrt{2}+1$ ト $\sqrt{6}$ トノ大小ハ $3+2\sqrt{2}$ ト 6 トノ大小ニ伴ヒ

從テ $2\sqrt{2}$ ト 3 〃

從テ 8 ト 9 トノ大小ニ伴フ

故ニ $\sqrt{8}-\sqrt{6}<\sqrt{6}-2$ ナリ.

5. (1) 求ムル所ノ値ヲ x トセバ

$$x^2=18\sqrt{6}+6\sqrt{6}=24\sqrt{6}$$

$$\therefore\ x=\sqrt{24\sqrt{6}}=2\sqrt{6\sqrt{6}}=2\sqrt[4]{216}$$

(2) $x=\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i}$ トセバ

$$x^2=6+2\sqrt{9+16}=16 \qquad \therefore\ x=4$$

注意. 嚴密ニ解クトキハ

$$\sqrt{3+4i}=\pm(2+i),\ \sqrt{3-4i}=\pm(2-i)$$

ナルヲ以テ答解ハ四ツアレドモ中等教育ニ於テハ上ノ一解ニ止ムルモ可ナラン.

(3) 題式 $=\{(x+\sqrt{x^2-1})^2+(x-\sqrt{x^2-1})^2\}$

$$\times\{(x+\sqrt{x^2-1})^2-(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})$$

$$+(x-\sqrt{x^2-1})^2\}$$

$$=2(2x^2-1)(16x^4-16x^2+1)$$

$$=64x^6-96x^4+36x^2-2$$

6. $a+i$

7. 題式 $=(y+z)^3+2(y^3+z^3)+6(y+z)yz$

$$=3(y+z)^3=3\times4=12$$

8. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}=\dfrac{2\sqrt[3]{9}}{3}=\dfrac{\sqrt[3]{72}}{3}=\dfrac{4.160\ldots}{3}=1.386\ldots\ldots$

9. $(\sqrt[3]{3}-1)^3=3-3\sqrt[3]{3^2}+3\sqrt[3]{3}-1$

$=2-3\sqrt[3]{3^2}+3\sqrt[3]{3}$ ナルヲ以テ

$$a^3+3a\sqrt[3]{3}+2=a^3+(\sqrt[3]{3}-1)^3+3a\sqrt[3]{3}$$

$$+3\sqrt[3]{3^2}-3\sqrt[3]{3}$$

$$=a^3+(\sqrt[3]{3}-1)^3+3\sqrt[3]{3}(a+\sqrt[3]{3}-1)$$

故ニ所要ノ商ハ $a^2-a(\sqrt[3]{3}-1)+(\sqrt[3]{3}-1)^2+3\sqrt[3]{3}$

$=a^2-(\sqrt[3]{3}-1)a+\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1$ ナリ.

10. $a^3b-ab^3=ab(a+b)(a-b)$ ナル故,

a 又ハ b ガ 3 ノ倍數ナラバ此ノ式ノ値ハ 3 ノ倍數ナルコト明カナリ.

若シ然ラズトセバ a 及ビ b ハ $3m\pm1$ ナル數 (m ハ正ノ整數) ナルヲ要ス, 依テ $a+b$ 又ハ $a-b$ ガ必ズ 3 ノ倍數トナル.

未定係數法

11. $4x^4-12x^3+25x^2+ax+16\equiv(2x^2+\alpha x+\beta)^2$ トシ兩邊ニ於ケル x ノ同ジ乘冪ノ係數ヲ比較スレバ

$4\alpha=-12,\ \alpha^2+4\beta=25,\ 2\alpha\beta=a$ ヲ得.

之ヨリ $\alpha=-3,\ \beta=4$ ヲ得依テ $a=-24$ ヲ得.

12. $Ax^4+Bx^3+1\equiv(x-1)^2(Ax^2+ax+1)$ トセバ,

$a-2=0,\ 1-2a+A=0,\ a-2A=B$ ヲ得ル故,

$a=2,\ A=3,\ B=-4$ ヲ得.

13. 三根ヲ α, α, β トセバ

$$2\alpha+\beta=19 \quad 依テ \quad \beta=19-2\alpha \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\alpha^2+2\alpha\beta=119 \quad \dots\dots\dots(2)$$

及ビ $$\alpha^2\beta=-C \quad \dots\dots\dots(3)$$

(1) ヲ (2) ニ入レ $3\alpha^2-38\alpha+119=0$

之ヨリ $\alpha=7$ 或ハ $\dfrac{17}{3}$ ヲ得.

依テ (1) ヨリ夫々 $\beta=5$ 或ハ $\dfrac{23}{3}$ ヲ得.

從テ (3) ヨリ $C=-245$ 或ハ $-\dfrac{6647}{27}$ ナリ.

14. 與ヘラレタル等式ヲ

$Ax^3-Bx^2-29x-12\equiv(2x+1)(x-4)(\alpha x+\beta)$ トセバ

$Ax^3-Bx^2-29x-12$

$$\equiv 2\alpha x^3+(2\beta-7\alpha)x^2-(4\alpha+7\beta)x-4\beta$$

之ヨリ $A=2\alpha,\ B=7\alpha-2\beta,\ 4\alpha+7\beta=29,\ 4\beta=12$

故ニ順次 $\beta=3,\ \alpha=2,\ A=4,\ B=8$ ヲ得.

15. 此ノ式ハ $(2x-3)(Ax^2+Bx+C)-3$

又ハ $(2x^2-5x+3)(3x+4)+R$ トシテ表ハスコトヲ得ル故此ノ兩式ヲ相等シト置キ前ノ如ク

$2A=6,\ 2B-3A=-7,\ 2C-3B=-11,\ -3C-3=12+R$

ヲ得ル故順次ニ $A=3,\ B=1,\ C=-4,\ R=-3$ ヲ得.

依テ此ノ式ハ $6x^3-7x^2-11x+9$ ナリ.

16. 商ヲ $x+m$ トセバ

$$ax^3+3bx^2+3cx+d\equiv(ax^2+2bx+c)(x+m)$$

之ヨリ $3b=2b+am,\ 3c=c+2mb,\ d=cm$ ヲ得.

$\therefore\ b=am,\ c=bm=am^2,\ d=am^3$

故ニ $ax^3+3bx^2+3cx+d$

$$=a(x^3+3mx^2+3m^2x+m^3)=\{\sqrt[3]{a}(x+m)\}^3$$

及ビ $ax^2+2bx+c=a(x^2+2mx+m^2)=\{\sqrt{a}(x+m)\}^2$

17. 初項ヲ a, 公差ヲ d トセバ,

$$\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=n(5n-1)$$

之ヨリ $(d-10)n+(2a-d+2)=0$ ヲ得,

此ノ式ガ n ノ値ノ如何ニ關セズ成立スルヲ以テ

$$d-10=0 \quad 及ビ \quad 2a-d+2=0$$

$$\therefore\ d=10 \quad 及ビ \quad a=4 \quad ヲ得.$$

對稱式及ビ交代式

18. 題式ノ各項ノ第二因數ノ括弧ヲ解キ, x^2, x ノ係數ヲ考フレバ共ニ 0 ナルコトヲ知ル,

故ニ 題式$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$$=-(b-c)(c-a)(a-b)$$

19. (1) 題式$=-\dfrac{bc(b-c)+ca(a-b)+ab(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}$

$$=-\frac{-(b-c)(c-a)(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{1}{abc}$$

(2) 題式 $=-\dfrac{a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)}{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)}$

$$=-\frac{-(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)}{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)}=1$$

(3) 題式 $=\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

$=1$ [問題 49 ノ 7(206頁)]

(4) 分子 $=-\dfrac{a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)}{a^2b^2c^2}$

$$=\frac{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)}{a^2b^2c^2}$$

分母 $=-\dfrac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{a^2b^2c^2}$

$$=\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2b^2c^2}$$

∴ 題式 $=\dfrac{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$

$$=(b+c)(c+a)(a+b)$$

(5) 題式 =

$$-\frac{(b-c)(x-b)(x-c)+(c-a)(x-c)(x-a)+(a-b)(x-a)(x-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$=-\frac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$=\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$=\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

20. 題式 $=\dfrac{2x^3-(a+b+c)x^2+abc}{abc}=\dfrac{2x^3-2x^3+abc}{abc}=1$

方 程 式

21. (1) ヲ $(x-\sqrt{x})+(y-\sqrt{y})=5$ トスレバ之ト (2) ヨリ

$$(a)\begin{cases}x-\sqrt{x}=2\\ y-\sqrt{y}=3\end{cases}\quad \text{及ビ}\ (b)\begin{cases}x-\sqrt{x}=3\\ y-\sqrt{y}=2\end{cases}$$

(a) ヨリ $x=4$ 或ハ 1, $y=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{2}$ ヲ得ル故

$$x=4,\ y=\frac{1}{2}(7+\sqrt{13});\quad x=4,\ y=\frac{1}{2}(7-\sqrt{13});$$

$$x=1,\ y=\frac{1}{2}(7+\sqrt{13});\quad x=1,\ y=\frac{1}{2}(7-\sqrt{13})$$

ヲ得, 而シテ (b) ヨリ得ル根ハ上ノ根ニ於テ x, y ノ値ヲ交換シタルモノナリ.

22. 所題ノ方程式ハ $(2x^2+3x)^2-(4x+5)^2=0$

從テ $(2x^2+7x+5)(2x^2-x-5)=0$

依テ $2x^2-x-5=0$ ヨリ $x=\dfrac{1\pm\sqrt{41}}{4}$ ヲ得.

$2x^2+7x+5=0$ ヨリハ正根ヲ得ズ.

答 $x=\dfrac{1+\sqrt{41}}{4}$

23. (1) $3x^3+3-5x^2-5x=0$

左邊ヲ因數ニ分解シテ $(x+1)(3x^2-8x+3)=0$

∴ $x=-1$ 或ハ $\dfrac{1}{3}(4\pm\sqrt{7})$

注意. $\dfrac{1}{\frac{1}{3}(4-\sqrt{7})}=\dfrac{3}{4-\sqrt{7}}=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$ ナリ.

(2) 左邊ヲ因數ニ分解シテ

$$(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)=0$$

$$\therefore\quad x=-1,\ \frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3}),\ \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})$$

注意. $$\frac{1}{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})}=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}),$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$$

(3) 問題 51 ノ 1 ノ (4) ヲ參照セシムベシ.

兩邊ヲ x^2 ニテ除シ

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0$$

$x+\dfrac{1}{x}=y$ トシテ

$6y^2+5y-50=0$　　$\therefore\ y=\dfrac{5}{2}$ 或ハ $-\dfrac{10}{3}$

依テ　$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$ ヨリ　$x=2$ 或ハ $\dfrac{1}{2}$ ヲ得.

$x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{10}{3}$ ヨリ　$x=-3$ 或ハ $-\dfrac{1}{3}$ ヲ得.

24. $(x+3)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=0$ ヨリスルカ, 或ハ問題 49 ノ 4 (206 頁) ヲ應用シテ求ムル所ノ方程式ハ

$$x^3+\left(3-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(-3\times\frac{2}{3}-3\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)x-(-3)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

即チ　$x^3+\dfrac{11}{6}x^2-\dfrac{19}{6}x+1=0$

分母ヲ拂ヒ　$6x^3+11x^2-19x+6=0$ ナルコトヲ知ル.

25. x ノ値ヲ正トセバ　x^3+ax^2+bx+c ノ各項皆正ナルヲ以テ其ノ和零トナルコト能ハザレバナリ.

26. (1) $\sqrt[3]{x}=y$　トセバ　$y^2-7y+6=0$

$\therefore\ y=1$ 或ハ 6　　$\therefore\ x=1$ 或ハ 216

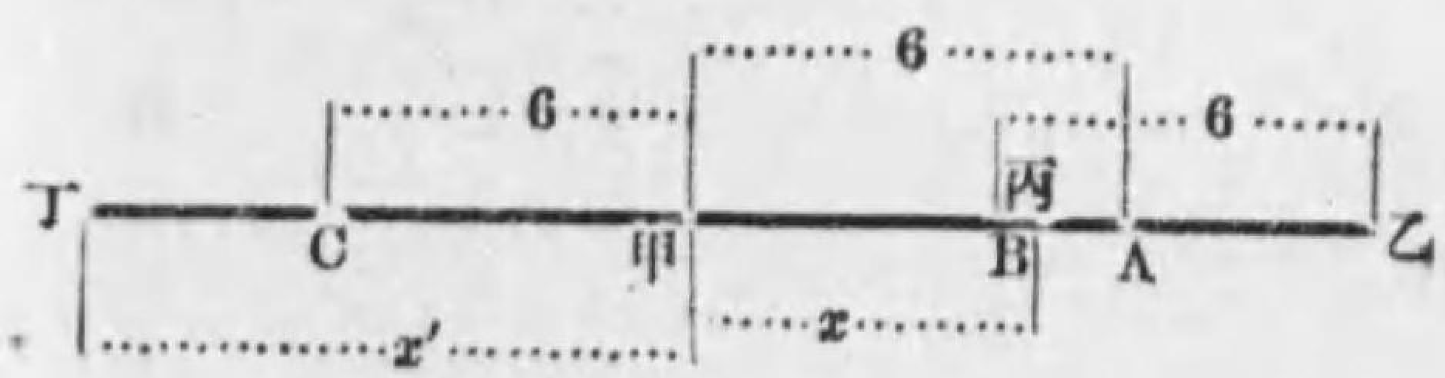
(2) $-\sqrt[3]{x}$ ヲ右邊ヘ移シ兩邊ヲ三乘シテ

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-12=0$$

之ヨリ　$\sqrt[3]{x}=3$ 或ハ -4　$\therefore\ x=27$ 或ハ -64

27. 求ムル所ノ地點ヲ甲乙ノ間ニテ丙, 乙ヨリ甲ニ向テ乙甲ノ延長線上ニ於テ丁トシ, 炭一俵ノ價ヲ乙ニ於テ y 錢, 甲ニ於テ $(y-30)$ 錢トス, 又甲乙ノ間ニ二點 A, B ヲ取リ甲トAトノ距離及ビ乙トBトノ距離ヲ共ニ 6 里トス.

又乙ヨリ甲ノ方ニ乙甲線ノ延長上ニ一點 C ヲ取リ甲トCトノ距離ヲ 6 里トス.



先ヅ A, B, C ニ於ケル甲, 乙ノ炭一俵ノ價ヲ見ルニ

	A	B	C
甲ノ炭	$y-30+120$ $=y+90$(錢)	$y=30+80$ $=y+50$	$y-30+120$ $=y+90$
乙ノ炭	$y+40$ (錢)	$y+60$	$y+60+50$ $=y+110$

故ニ丙ハAトBトノ間ニアリテ丁ハ甲C線ノ延長上ニアルヲ要ス. 依テ甲丙ノ距離ヲ x 里, 甲丁ノ距離ヲ x' 里トセバ,

$$y-30+20x=y+10(10-x)$$

及ビ $y-30+120+10(x'-6)=y+60+5(x'+4)$

ヨリ夫々 $x=\frac{13}{3}$ 及ビ $x'=10$ ヲ得.

而シテ甲ヨリ乙ノ方ヘ甲乙ノ延長上ニ求ムル點ナキコトハ明カナリ.

消去法

28. (2)ノ兩邊ヲ15乘シ(1)ト邊々相除スレバ

$$\frac{b^{60}}{a^{1\cdot5}}=\frac{a^{4\cdot5}}{x^{1\cdot2}} \qquad \therefore\ x=\frac{a^5}{b^{50}} \quad \text{ヲ得.}$$

29. (2)ノ各項ニ順次夫々(3)ノ各項ヲ乘ズレバ

$$x-p+y-q+z-r=0 \qquad \therefore\ x+y+z=p+q+r$$

$$\therefore\ p+q+r=0 \quad \text{ヲ得.}$$

30. 二根ヲ $m\alpha$, $n\alpha$ トセバ

$$m\alpha+n\alpha=-\frac{3}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

及ビ $mn\alpha^2=2\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

(1)ヨリ $\alpha=-\frac{3}{2(m+n)}$ ヲ得 (2)ニ入レ

$$9mn=8(m+n)^2 \quad \text{ヲ得.}$$

31. 題意ニヨリ $\alpha+\beta=-\frac{2q}{p}$, $\alpha\beta=\frac{r}{p}$ …………(1)

及ビ $\alpha+k+\beta+k=-\frac{b}{a}$, $(\alpha+k)(\beta+k)=\frac{c}{a}$ …(2)

(1)及ビ(2)ヨリ各 $(\alpha-\beta)^2$ ノ値ヲ求メ之ヲ等シク置ケバ

$$\frac{4q^2}{p^2}-\frac{4r}{p}=\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a} \quad \text{從テ} \quad \frac{4(q^2-pr)}{p^2}=\frac{b^2-4ac}{a^2}$$

ヲ得.

32. 公約數ヲ $x-\alpha$ トセバ,

$$\alpha^3+2p\alpha+2r=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

及ビ $\alpha^2+p=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

(1)−(2)×α $\quad p\alpha+2r=0 \quad \therefore\ \alpha=\frac{-2r}{p}$

之ヲ(2)ニ入レ $\frac{4r^2}{p^2}+p=0$ 從テ $p^3+4r^2=0$

ヲ得.

33. 題意ニヨリ

$$ad^2+bd+c=0 \text{ 及ビ } a'd^2+b'd+c'=0$$

之ヲ d^2 及ビ d ニ就キ解キ

$$d^2=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\quad d=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$$

$$\therefore\ \frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}=\left(\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}\right)^2$$

分母ヲ拂ヒ $(bc'-b'c)(ab'-a'b)=(ca'-c'a)^2$ ヲ得.

34. 共通根ヲ d トシ前問ノ解ト同法ヲ用ユベシ.

35. 共通根ヲ α トセバ,

$$\alpha^2-7\alpha+k=0 \text{ 及ビ } \alpha^2-9\alpha+2k=0$$

k ヲ消去スレバ $\alpha^2-5\alpha=0$

$\therefore\ a=0$ 或ハ 5

依テ $a=0$ トセバ $k=0$ 依テ他ノ根ハ 7 及ビ 9 ニシテ

$a=5$ トセバ $k=10$ 依テ他ノ根ハ 2 及ビ 4 ナリ.

36. $\dfrac{a^2-b^2-c^2}{b-c}=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{c+a}=k$ トセバ

$a^2-b^2-c^2=bk-ck$ 及ビ $c^2+a^2-b^2=ck+ak$

邊々相加ヘ $2a^2-2b^2=(a+b)k$ $\quad\therefore\ 2(a-b)=k$

邊々相減ジ $2c^2=(a-b)k+2ck$

$$\therefore\ 4c^2=k^2+4ck$$

$$\therefore\ k^2+4ck-4c^2=0$$

之ヨリ $k=-2c\pm\sqrt{8}\,c=2(\pm\sqrt{2}-1)c$ ヲ得.

37. (1) ヨリ $x=-\dfrac{a(a+2b)}{a+b}$ $\quad\therefore\ \dfrac{1}{x}=-\dfrac{a+b}{a(a+2b)}$

(2) ヨリ $y=-\dfrac{a(a+2c)}{a+c}$ $\quad\therefore\ \dfrac{1}{y}=-\dfrac{a+c}{a(a+2c)}$

之ヲ (3) ニ入レ分母ヲ拂ヒ簡約スレバ

$$-a(a+b+c)=0$$

然ルニ $a\neq0$ $\therefore\ a+b+c=0$ ヲ得.

38. (1) 及ビ (2) ヨリ

$$\frac{x}{ab-c^2}=\frac{y}{bc-a^2}=\frac{z}{ca-b^2}=k \text{ トシ}$$

$x=k(ab-c^2),\ y=k(bc-a^2),\ z=k(ca-b^2)$ トシ,

(3) ニ入ルレバ $-k(a^3+b^3+c^3-3abc)=0$

然ルニ $k\neq0$ $\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$

條件附恒等式

39. $a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}=\dfrac{1}{e+\sqrt{1+e^2}}=-e+\sqrt{1+e^2}$

40. 假設ヨリ $b=a^{\frac{b}{a}}$ ヲ得ル故,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=\left(\frac{a}{a^{\frac{b}{a}}}\right)^{\frac{a}{b}}=\left(a^{1-\frac{b}{a}}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a}{b}-1}$$

41. $y+\dfrac{1}{z}=1$ ヨリ $yz+1=z$ ヲ得之ヲ

$$z+\frac{1}{x}=1 \text{ ニ入ルレバ } yz+1+\frac{1}{x}=1$$

分母ヲ拂ヒ $xyz+1=0$ ヲ得.

42. 題式ガ成立スルタメニハ

$(b+c)^2-a^2=a^2-(b-c)^2$ 從テ $b^2=a^2-c^2$ ナルコト

必要ニシテ十分ナリ.

別解. $(b+c)^2=b^2+2bc+c^2=a^2+2bc$

$(b-c)^2=b^2-2bc+c^2=a^2-2bc$

ナル故 $(b+c)^2-a^2=a^2-(b-c)^2$

$$\therefore\ (b+c+a)(b+c-a)=(a+b-c)(a-b+c)$$

$$\therefore\ \frac{a+b+c}{a-b+c}=\frac{a+b-c}{b+c-a}$$

43. 右邊ノ括弧ヲ解キ, 且 $abc=1,\ bc=\dfrac{1}{a},\ ca=\dfrac{1}{b}$

$ab=\dfrac{1}{c}$ ナルコトヲ利用シ

$$\text{右邊}=abc+\frac{ca}{b}+\frac{bc}{a}+\frac{c}{ab}+\frac{ab}{c}+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{1}{abc}$$

$$=1+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}+c^2+\frac{1}{c^2}+a^2+b^2+1$$

$$=1+\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2+\left(b-\frac{1}{b}\right)^2+2+\left(c-\frac{1}{c}\right)^2+2+1$$

$$=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+\left(b-\frac{1}{b}\right)^2+\left(c-\frac{1}{c}\right)^2+8$$

44. $a+b+c=0$ ヨリ兩邊ヲ自乘シテ移項シ

$$a^2+b^2+c^2=-2(bc+ca+ab)$$

更ニ兩邊ヲ自乘シテ $a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$$=4[a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)]$$

$$=4[a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2]$$

$$\therefore\ a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

別解 $a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$$=(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2$$

$$=\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$$

$$=(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)=0$$

ナレバナリ.

45. 假設ヨリ $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=-z^{\frac{1}{3}}$

兩邊ヲ三乘シテ $x+y+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})=-z$

$$\therefore\ x+y+z=3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore\ (x+y+z)^3=27xyz$$

46. $\dfrac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)=\dfrac{-a}{bc}\{b^2+(c+a)(c-a)\}$

$$=\frac{-ab}{bc}(b-c+a)=\frac{2abc}{bc}=2a$$

同樣ニ $\dfrac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2)=2b,$

$$\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)=2c$$

故ニ 題式$=2(a+b+c)=0$

47. 題意ニヨリ $p^2-4q=q^2-4p$

依テ $(p-q)(p+q+4)=0$

$$\therefore\ p=q \text{ 或ハ } p+q+4=0$$

48. 共通根ヲ α トセバ

$$\alpha^2+p\alpha+q=0 \text{ 及ビ } \alpha^2+q\alpha+p=0$$

邊々相減ジ $(p-q)\alpha+q-p=0 \quad \therefore\ \alpha=1$

故ニ第一方程式ヨリ他ノ根ハ $-p-1$ 及ビ q ニ等シキヲ要ス. 故ニ $-p-1=q \quad \therefore\ p+q=-1$

49. 共通根ヲ α トセバ

$$p\alpha^2+2q\alpha+r=0,\quad a\alpha^2+2b\alpha+c=0$$

ヨリ $\alpha=\dfrac{cp-ar}{2(aq-bp)}$ ヲ得.

然ルニ p,q,r,a,b,c ハ皆有理數ナルヲ以テ α ハ有理數ナリ, 故ニ兩方程式ノ他ノ根モ有理數ナリ.

從テ q^2-pr モ b^2-ac モ有理數ナリ.

50. 所設ノ式ヲ整頓スレバ,

$3x^2+2(a+b+c)x+bc+ca+ab$ トナル, 此ノ式ガ完全平方ナルタメニハ

$(a+b+c)^2-3(bc+ca+ab)=0$ ナリ.

之ヨリ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ ヲ得.

然ルニ a,b,c ハ實數ナルヲ以テ

$$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$$

從テ $a=b=c$ ナルヲ要ス.

51. 假設ヲ變化シテ

$$(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0$$

トナシ $a, b, c, d,$ ガ實數ナルコトヨリ

$$a^2=b^2,\ c^2=d^2 \text{ 及ビ } ab=cd$$

而シテ a, b, c, d ガ皆正數ナルコトヨリ

$a=b,\ c=d,\ b=c$ 從テ $a=b=c=d$ ヲ得.

52. 假設ノ兩邊ヲ平方シスベテノ項ヲ一邊ニ集メ

$(am-bl)^2+(an-cl)^2+(bn-cm)^2=0$ ヲ得.

之ヨリ $am-bl=0,\ an-cl=0,$ 及ビ $bn-cm=0$

從テ $\dfrac{a}{l}=\dfrac{b}{m},\ \dfrac{a}{l}=\dfrac{c}{n}$ 及ビ $\dfrac{b}{m}=\dfrac{c}{n}$ ヲ得.

53. 假設ヨリ $(bc+ca+ab)(a+b+c)=abc$

之ヨリ $a^2b+a^2c+ab^2+2abc+ac^2+b^2c+bc^2=0$

$$(b+c)(a^2+ab+ac+bc)=0$$

$$(b+c)(a+b)(a+c)=0$$

$\therefore\ b+c=0$ 或ハ $a+b=0$ 或ハ $a+c=0$

54. $\dfrac{x+y}{a^2}=\dfrac{y+z}{b^2}=\dfrac{z+x}{c}=2k$ トセバ

$$x+y=2a^2k,\ y+z=2b^2k,\ z+x=2c^2k$$

$$\therefore\ x+y+z=(a^2+b^2+c^2)k$$

$$\therefore\ x=(-a^2+b^2+c^2)k,\ y=(a^2-b^2+c^2)k,$$

$$z=(a^2+b^2-c^2)k$$

之ヲ $xy+yz+zx=0$ ニ入ルレバ

$$-k(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2)=0$$

$$\therefore\ (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=0$$

$\therefore\ a\pm b\pm c=0$ ヲ得.

55. (1) 及ビ (2) ヨリ x 及ビ y ヲ求ムレバ,

$$x=\frac{a^2}{a+b}=\frac{a^2}{k},\quad y=\frac{b^2}{a+b}=\frac{b^2}{k}$$

$$\therefore\ x^{\frac{1}{2}}=\frac{a}{k^{\frac{1}{2}}},\quad y^{\frac{1}{2}}=\frac{b}{k^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore\ x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=\frac{a+b}{k^{\frac{1}{2}}}=\frac{k}{k^{\frac{1}{2}}}=k^{\frac{1}{2}}$$

56. $a(by+cz-ax)=b(cz+ax-by)=c(ax+by-cz)=k$

トセバ $by+cz-ax=\dfrac{k}{a}$ ....(1)

$cz+ax-by=\dfrac{k}{b}$ ....(2)

$ax+by-cz=\dfrac{k}{c}$ ....(3)

邊々相加ヘ $ax+by+cz=k\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

夫々 (1), (2), (3) ヲ引キ $2ax=k\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{-ak}{bc}$

$$\therefore\ x=-\frac{k}{2bc}$$

同樣ニ $y=-\dfrac{k}{2ca},\ z=-\dfrac{k}{2ab}$

$$\therefore\ x+y+z=-\frac{k(a+b+c)}{2abc}=0$$

57. 題意ノ如ク代入ヲ行ヘバ

x'^2 ノ係數ハ $ap^2+2bpr+cr^2=\mathrm{A},$

$x'y'$ ノ係數ハ $2apq+2b(ps+qr)+2crs=2\mathrm{B},$

y'^2 ノ係數ハ $aq^2+2bqs+cs^2=\mathrm{C}$ ナル故

$$B^2-AC=\{apq+b(ps+qr)+crs\}^2$$
$$-(ap^2+2bpr+cr^2)(aq^2+2bqs+cs^2)$$

括弧ヲ解キ b^2 及ビ $-ac$ ヲ括リ出セバ

$$B^2-AC=b^2(p^2s^2-2pqrs+q^2r^2)$$
$$-ac(p^2s^2-2pqrs+q^2r^2)$$
$$=(b^2-ac)(ps-qr)^2$$

58. 三數ヲ x, y, z トセバ,

$$x+y+z=6,\ x^3+y^3+z^3=9,\ xyz=3$$

$\therefore\ x^3+y^3+z^3-3xyz=0$

$\therefore\ (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)=0$

$\therefore\ x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=0$

$\therefore\ x^2+y^2+z^2=yz+zx+xy$

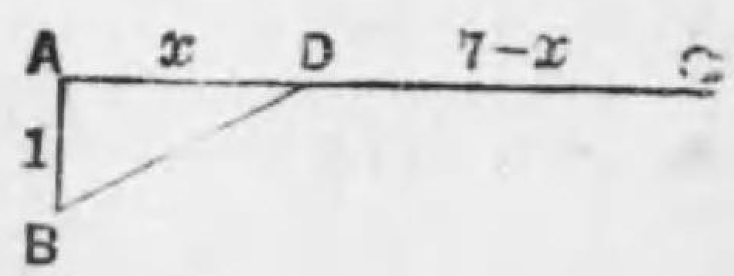
然ルニ $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(yz+zx+xy)$

ナル故 $36=3(yz+zx+xy)$

$$\therefore\ yz+zx+xy=12$$
$$\therefore\ x^2+y^2+z^2=12$$

幾何學上ノ問題

59. 船ノ位置ヲ B, 目的地ヲ C, 上陸點ヲ D トシ, A ヨリ C ノ方ヘ A, D ノ距離ヲ x 町トセバ,



$BD=\sqrt{x^2+1}$ (町), $DC=(7-x)$ 町 ナル故,

$$\sqrt{x^2+1}+\frac{7-x}{2}=5$$

之ヨリ $2\sqrt{x^2+1}=x+3$

兩邊ヲ自乘シ, 整頓スレバ

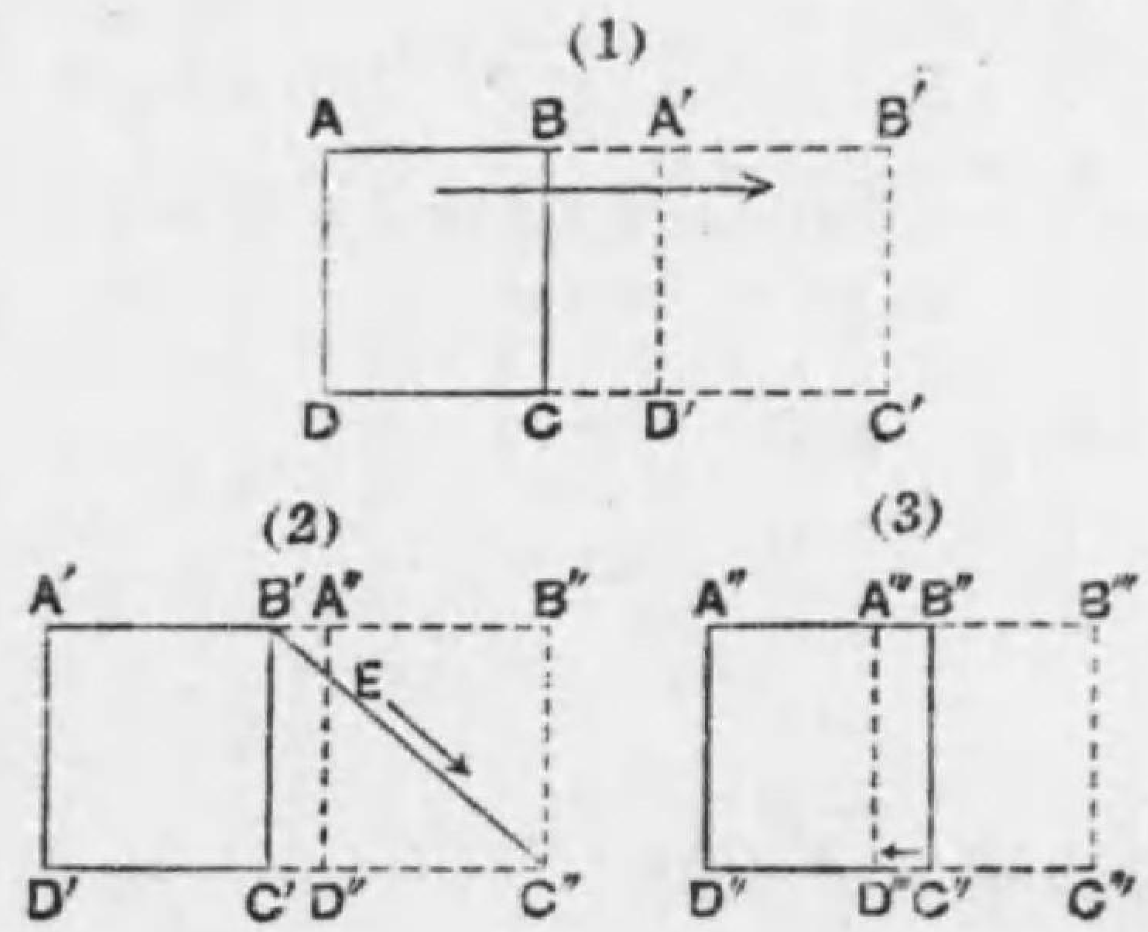
$$3x^2-6x-5=0$$
$$\therefore\ x=\frac{3\pm\sqrt{24}}{3}$$

負根ハ答數タラザル故正根(上ノ方程式ニ適ス)ヲ取リ

$$x=\frac{3+\sqrt{24}}{3}=\frac{3+4.89\ldots}{3}=\frac{7.89\ldots}{3}=2.63\ldots\ldots$$

答 A ヨリ目的地ノ方ヘ 2.6 町强ノ處.

60. 正方形ノ一邊ヲ a トセバ, E ハ 45 分間ニ $a+45v$ ヲ走ルヲ以テ $a+45v=45u$ ……………………(1)



又 E ハ 15 分間ニ $15v$ ト a トヲ直角ノ二邊トスル直角三角形ノ斜邊ダケヲ走ルヲ以テ

$$a^2+(15v)^2=(15u)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1) ヨリ $a=45(u-v)$ ……………………(3)

ヲ得 (2) ニ入レ簡約スレバ

$$4u^2-9vu+5v^2=0$$

從テ $u=v$ 又ハ $4u=5v$ ヲ得.

依テ $u=v$ トセバ (3) ヨリ $a=0$ トナル故, 之ヲ棄テ $4u=5v$ ヨリ $u:v=5:4$ ヲ得.

依テ (3) ヨリ $a=45\times\frac{1}{5}u=9u$ ヲ得.

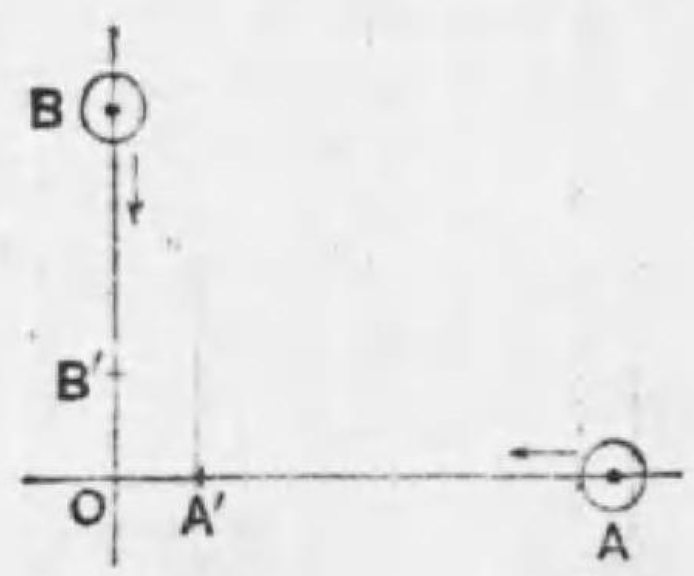
依テ今 E ガ C ヨリ D ニ至ル時間〔(3)圖ノ C″ D‴ 間ヲ走ル時間ヲ〕x 分トセバ

$$a-vx=ux$$

從テ $9u-\frac{4}{5}ux=ux$ ∴ $x=5$ (分) ヲ得.

而シテ D ヨリ A ニ至ル時間ハ先キニ B ヨリ C ヘ至ル時間ニ等シク卽チ 15 分ナリ.

61. 二球ノ始メノ中心ノ位置ヲ A, B トシ, 其ノ相衝突スルトキノ中心ノ位置ヲ夫々 A′, B′ トセバ



$$AA':BB'=3:2$$

ニシテ $A'B'=2.5\times2=5$ (糎) ナリ.

今 $OA'=x$ (糎), $OB'=y$ (糎) トセバ, 上ノ二式ハ

$$33-x:24-y=3:2 \;\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及ビ $x^2+y^2=25 \;\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

トナル. (1) ヨリ $y=\frac{2x+6}{3} \;\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

ヲ得, (2) ニ入レ整頓スレバ,

$$13x^2+24x-189=0$$

之ヲ解キテ $x=3$ 或ハ $-\frac{63}{13}$ ヲ得.

依テ $x=3$ トシテ $y=4$ ヲ得.

62. 三邊ヲ x, y, z (斜邊) トセバ

$$2y=x+z \;\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x^2+y^2=z^2 \;\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) ニ (1) ヲ入レ $5x^2+2xz-3z^2=0$

之ヨリ $\frac{x}{z}=\frac{3}{5}$ 或ハ -1 ヲ得.

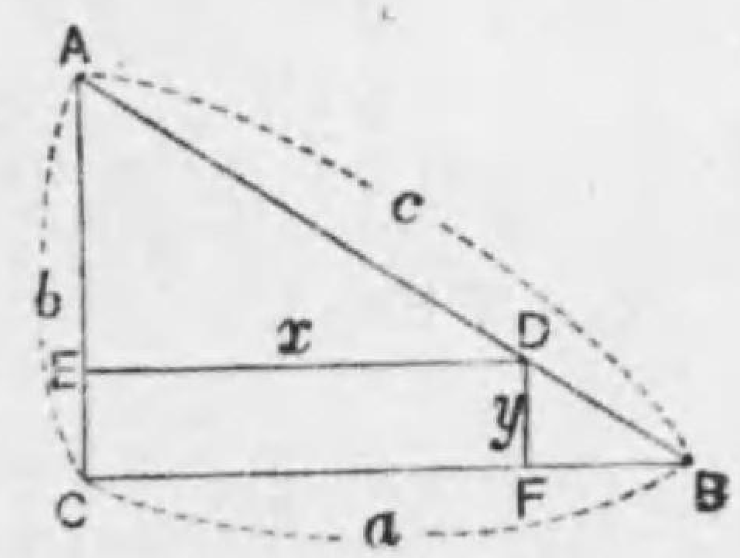
依テ $\frac{x}{z}=\frac{3}{5}$ トシテ (1) ヨリ $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$ ヲ得.

∴ $x:y:z=3:4:5$ ナリ.

若シ最短邊ガ 24 糎ナラバ $x=24$ トシテ

$y=32$ (糎), $z=40$ (糎) ナリ.

63. △ABC ヲ C=90° ナル直角三角形トシ, 其ノ三邊 BC, CA, AB ヲ夫々 a, b, c トシ, 所設ノ條件ニ適スル點ヲ D トシ, D ト二邊 AC, BC トノ距離ヲ夫々 x, y トセバ



$$xy=\frac{1}{8}ab \;\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及ビ $\frac{x}{a}=\frac{b-y}{b} \;\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(2) ヨリ $bx=ab-ay \;\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

ヲ得，(1) ニ入ルレバ $(ab-ay)y=\frac{1}{8}ab^2$

卽 $y^2-8by+b^2=0$

之ヨリ $y=4b\pm\sqrt{15}b=(4\pm\sqrt{15})b$ ヲ得.

之ニヨリテD點ノ位置ヲ定ムルヲ得.

別解. $AB=c$ トシ，$AD=x'$ トセバ，

$$\frac{x'}{c}=\frac{DE}{a} \qquad \therefore\ DE=\frac{ax'}{c}$$

又 $$\frac{c-x'}{c}=\frac{DF}{b} \qquad \therefore\ DF=\frac{b(c-x')}{c}$$

而シテ $DE.DF=\frac{1}{8}ab$ ナル故

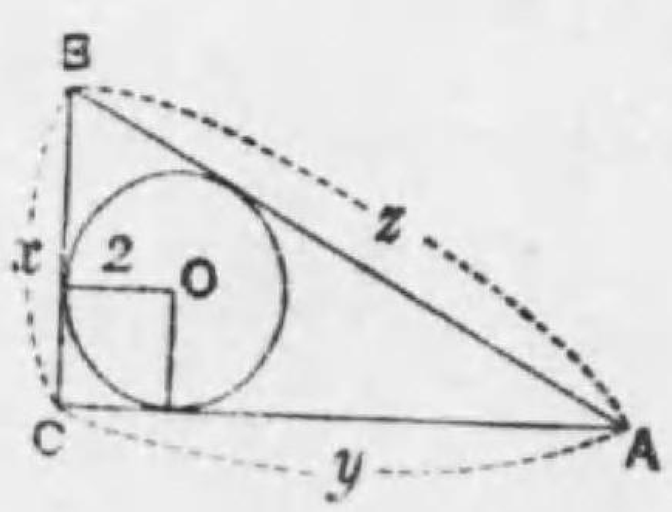
$$\frac{abx'(c-x')}{c^2}=\frac{1}{8}ab$$

$$8x'(c-x')=c^2$$

$$8x'^2-8cx'+c^2=0$$

$$x'=\frac{4c\pm2\sqrt{2}c}{8}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}c$$

64. △ABC ノ三邊 BC, CA, AB (斜邊) ヲ夫々 x 寸，y 寸，z 寸トセバ，



$$x+y+z=28 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x^2+y^2=z^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$x+y-4=z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1) ト (3) ヨリ $z=12$ ヲ得.

故ニ $x^2+y^2=144$

$x+y=16$

從テ $xy=56$

依テ x ト y トハ方程式 $l^2-16l+56=0$

ノ根 $8\pm\sqrt{8}$ ニ等シ.

答 $8-\sqrt{8}$ 寸，$8+\sqrt{8}$ 寸，12 寸.

65. 所要ノ長サヲ x 尺トセバ

$$x^2=(x-18)^2+30^2$$

之ヨリ $x=34$ (尺) ヲ得.

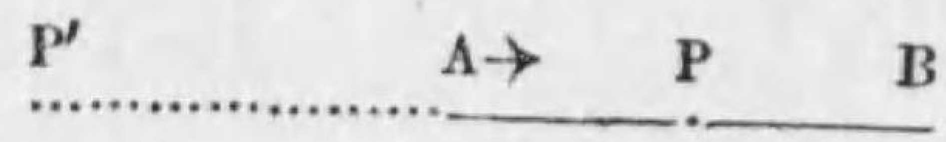
66. 所要ノ道幅ヲ x 尺トセバ，堀リ出シタル土ノ體積ト盛上ゲタル道路ノ體積トノ等シキコトヨリ

$$\{\pi(x+72)^2-\pi\times72^2\}\times9=\pi\times72^2\times16$$

之ヨリ $9\times(x+72)^2=25\times72^2$

$\therefore\ 3(x+72)=5\times72 \qquad \therefore\ x=48$

67. AP (A ヨリ B ノ方ヘ) $=x$ 尺 トセバ $PB=(2-x)$ 尺ナル故，



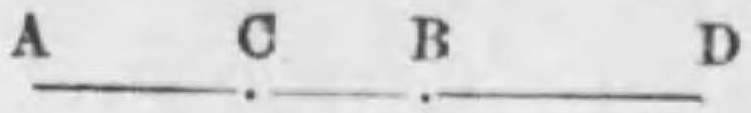
$$x^2=2(2-x)$$

卽チ $x^2+2x-4=0$

之ヲ解キテ $x=-1\pm\sqrt{5}=\sqrt{5}-1$ 或ハ $-(1+\sqrt{5})$ ニシテ此ノ負ノ値ハ A ヨリ P ト反對ノ方ヘノ BA ノ延長卽チ圖ニ於ケル AP' ノ長サヲ表ハ

シ AB ノ外分點 P′ ヲ與フルモノナリ.

68.



$$AB=a,\quad \frac{AC}{BC}=\frac{AD}{DB}=k \quad トセバ$$

$$AC=kBC=k(a-AC)=ak-kAC \quad ナル故,$$

$$\frac{1}{AC}=\frac{1+k}{ak}$$

又 $AD=kBD=k(AD-a)=kAD-ak$ ナル故

$$\frac{1}{AD}=\frac{k-1}{ak}$$

$$\therefore\ \frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2k}{ak}=\frac{2}{a}=\frac{2}{AB}$$

故ニ $\frac{1}{AC}$, $\frac{1}{AB}$, $\frac{1}{AD}$ ハ A.P. ヲナス.

從テ AC, AB, AD ハ H.P. ヲナス.

別解. 題意ニヨリ $\frac{BC}{AC}=\frac{BD}{AD}$

故ニ
$$\frac{AB-AC}{AC}=\frac{AD-AB}{AD}$$

$$\therefore\ \frac{AB-AC}{AC.AB}=\frac{AD-AB}{AD.AB}$$

$$\therefore\ \frac{1}{AC}-\frac{1}{AB}=\frac{1}{AB}-\frac{1}{AD}$$

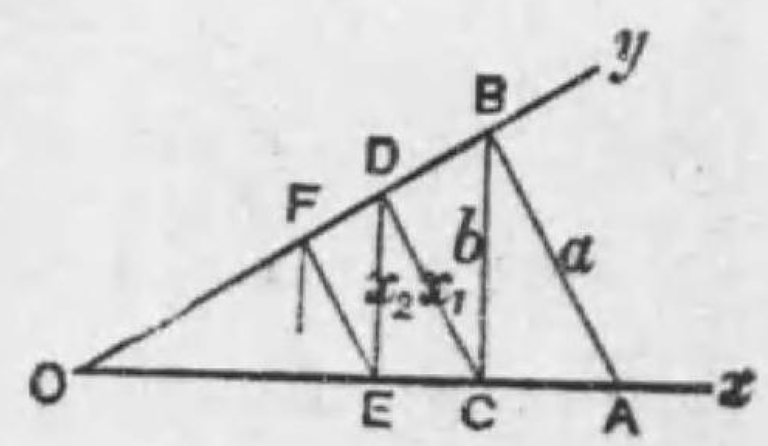
69. 第三, 第四…………

ノ垂線ノ長サヲ夫々

x_1, x_2………トセバ

$\triangle BCD \backsim ABC$

ナルヲ以テ



$$\frac{x_1}{b}=\frac{b}{a}\qquad \therefore\ x_1=\frac{b^2}{a}$$

同樣ニ
$$x_2=\frac{x_1{}^2}{b}=\frac{b^3}{a^2}=x_1\times\frac{b}{a}$$

…………………………

而シテ $b=a\times\frac{b}{a}$ ナルヲ以テ

順次ノ垂線ハ a ヲ初項トシ $\frac{b}{a}$ ヲ公比トスル等比級數ヲナス, 而シテ $a>b$ ナル故 $\frac{b}{a}<1$

故ニ其ノ和ハ $\dfrac{a}{1-\frac{b}{a}}=\dfrac{a^2}{a-b}$ ナリ.

次ニ AC, CE, EG,…………ノ長サハ

夫々 $\sqrt{a^2-b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}\times\frac{b^2}{a^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}\times\frac{b^4}{a^4}$,……

ニシテ

BC, DE, FG,……ノ長サハ夫々 b, $b\times\frac{b^2}{a^2}$, $b\times\frac{b^4}{a^4}$,……

ナルヲ以テ所要ノ面積ハ

$$\frac{1}{2}\left[b\sqrt{a^2-b^2}+b\times\frac{b^2}{a^2}\times\sqrt{a^2-b^2}\times\frac{b^2}{a^2}+\cdots\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[b\sqrt{a^2-b^2}+b\sqrt{a^2-b^2}\times\frac{b^4}{a^4}+\cdots\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{1-\frac{b^4}{a^4}}=\frac{a^4b\sqrt{a^2-b^2}}{2(a^4-b^4)}\quad ナリ.$$

不　等　式

70. $(a+b+c)^2-\{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\}$

$$=a^2+b^2+c^2>0 \quad \text{ナルヲ以テ}$$

$$(a+b+c)^2>a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)$$

但シ a, b, c ハ皆實數ナリトス.

71. 所設ノ方程式ヲ整頓スレバ

$$3x^2-2(a+b+c)x+bc+ca+ab=0$$

=シテ　$(a+b+c)^2-3(bc+ca+ab)$

$$=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$$

$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}>0 \quad \text{ナル故,}$$

此ノ方程式ノ根ハ常ニ實數ナリ.

而シテ若シ $a=b=c$ ナラバ上ノ最後ノ式ノ値ハ 0 トナルヲ以テ此ノ場合ニハ此ノ方程式ハ等根ヲ有ス.

72. 分母ヲ拂ヒ整頓スレバ

$$3x^2-2(a+b+c)x+bc+ca+ab=0$$

トナル故此ノ方程式ノ根ハ實數ナリ(前問).

而シテ二根ノ和ハ　$\frac{2}{3}(a+b+c)$　ニシテ

二根ノ積ハ　$\frac{1}{3}(bc+ca+ab)$　ナリ.

然ルニ a, b, c ガ共ニ正數ナル故, 二根ノ和モ積モ共ニ正數ナリ, 故ニ二根ハ共ニ正數ナリ.

73. 問題 52 ノ (7) ノ特例ナリ.

74. $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=y$　トセバ

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2-y=0$$

x ノ値ハ勿論實數ナルベキヲ以テ

$$(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2(c^2-y)\geqq 0$$

即チ　$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2+4b^2y\geqq 0$

之ヨリ

$$y\geqq\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2}$$

然ルニ a, b, c ガ三角形ノ三邊ヲ表ハストキハ右邊ノ分子ノ各因數ハ皆正數ナリ.

故ニ　$y>0$

別解. 題式 $=b^2\left\{x^2+\frac{b^2+c^2-a^2}{b^2}x+\frac{c^2}{b^2}\right\}$

$$=b^2\left\{\left(x+\frac{b^2+c^2-a^2}{2b^2}\right)^2+\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2}\right\}$$

$$=b^2\left\{\text{正數}+\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2}\right\}$$

=正數{正數+正數}=正數

75. 所題ノ不等式ハ　$7(x-5)(x-10)<0$　ト書クヲ得ル故,　$5<x<10$　ナリ.

故ニ所要ノ値ハ　6, 7, 8, 9　ノ四ツナリ.

76. 所設ノ不等式ハ次ノ如ク書クヲ得.

$$\frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x+3)}<0$$

依テ x ノ値ノ變化ニ伴フ右邊ノ各項ノ符號ノ變化ヲ考ヘ以テ右邊ノ符號ヲ定ムレバ次ノ表ヲ得,

x ノ値	………3	………2	………1	…… −3	……
$x-3$ ノ符號	+	−	−	−	−
$x-2$ ノ 〃	+	+	−	−	−
$x-1$ ノ 〃	+	+	+	−	−
$x+3$ ノ 〃	+	+	+	+	−
左邊ノ 〃	+	−	+	−	+

依テ左邊ヲ負數タラシムル x ノ値ヲ取リテ

$$3>x>2 \quad 及ビ \quad 1>x>-3$$

ヲ以テ所要ノ解答トス.

77. 題式 $=(x^2-3x-10)(x^2-3x-18)+20$

$$=(x^2-3x)^2-28(x^2-3x)+200$$

$$=(x^2-3x-14)^2+4>0$$

78. 大ナル部分ヲ x トセバ小ナル部分ハ $73-x$ ナル故, 題意=ヨリ次ノ二ツノ不等式ヲ得.

(1) $3x>5(73-x+8)$ (2) $3(x-8)<7(73-x)$

(1) ヨリ $x>50\frac{5}{8}$ (2) ヨリ $x<53\frac{1}{2}$

ヲ得ル故 x ノ整數値ハ 51, 52, 53 ノ三ツナリ.

79. 初項 1000, 公差 -3 ナル故

$$1000+(n-1)(-3)<0$$

=適スル n ノ最小値 (正ノ整數) ヲ求ムレバ

$$n>334\frac{1}{3} \quad ヨリ \quad n=335 \quad ナリ.$$

故=所要ノ項ハ第 335 番目ノ $1000+334\times(-3)=-2$ ナリ.

80. 此ノ方程式ノ根ガ虛數ナルタメノ條件ハ

$$(p+1)^2-(6p+5)<0$$

之ヨリ $p^2-4p-4<0$

從テ $\{p-(2+2\sqrt{2})\}\{p-(2-2\sqrt{2})\}<0$

$\therefore \ 2+2\sqrt{2}>p>2-2\sqrt{2}$ ヲ得.

81. (1) 及ビ (2) ヨリ $x=\dfrac{b+ca}{1-c^2}, y=\dfrac{a+bc}{1-c^2}$ ヲ得.

之ヲ (2) =代入スレバ $a^2+b^2+c^2+2abc=1$ ヲ得.

次=此ノ式ヨリ a ノ値ヲ求ムレバ

$$a=\frac{-bc\pm\sqrt{b^2c^2-b^2-c^2+1}}{2}$$

$$=\frac{-bc\pm\sqrt{(b^2-1)(c^2-1)}}{2}$$

故= a ガ實數ナルコトヨリ $(b^2-1)(c^2-1)\geqq 0$

然ル=上ノ x, y ノ値ヨリ $c^2-1\neq 0$ ナル故,

b^2-1 ハ 0 ナルカ又ハ c^2-1 ト同符號ナルヲ要ス,

同樣= b ガ實數ナルコトヨリシテ

a^2-1 ハ 0 ナルカ又ハ c^2-1 ト同符號ナルヲ知ル,

故= $b^2=1$, $a^2=1$ ナル場合ノ外ハ

a^2, b^2, c^2 ハ共= 1 ヨリ大ナルカ又ハ共= 1 ヨリ小ナリ.

82. 甲ノ速度ハ乙ノ速度ヨリ大ナルヲ以テ甲ガ乙ヲ追ヒ其ノ距離ノ 180 間ガ漸々減少シテ甲ガ或頂點=來リタルトキ其ノ距離ガ 60 間又ハ之ヨリ小ナルトキ兩人ハ始メテ此ノ正方形ノ同一邊=來ルナリ.

サテ甲ガ一邊ヲ廻ル時間ハ $\frac{60}{72}$ 分即チ $\frac{5}{6}$ 分ナルヲ以テ乙ハ此ノ間= $\left(67\times\frac{5}{6}\right)$ 間ヲ行ク, 故=甲ガ一邊ヲ廻ル毎=兩人ノ距離ハ $\left(60-67\times\frac{5}{6}\right)$ 間ヅヽ減少ス, 故=甲ガ乙ノ出發後一邊ヲ x 倍廻リタル後兩人同一邊=來ルモノトセバ

$$x\left(60-67\times\frac{5}{6}\right)\geqq 120$$

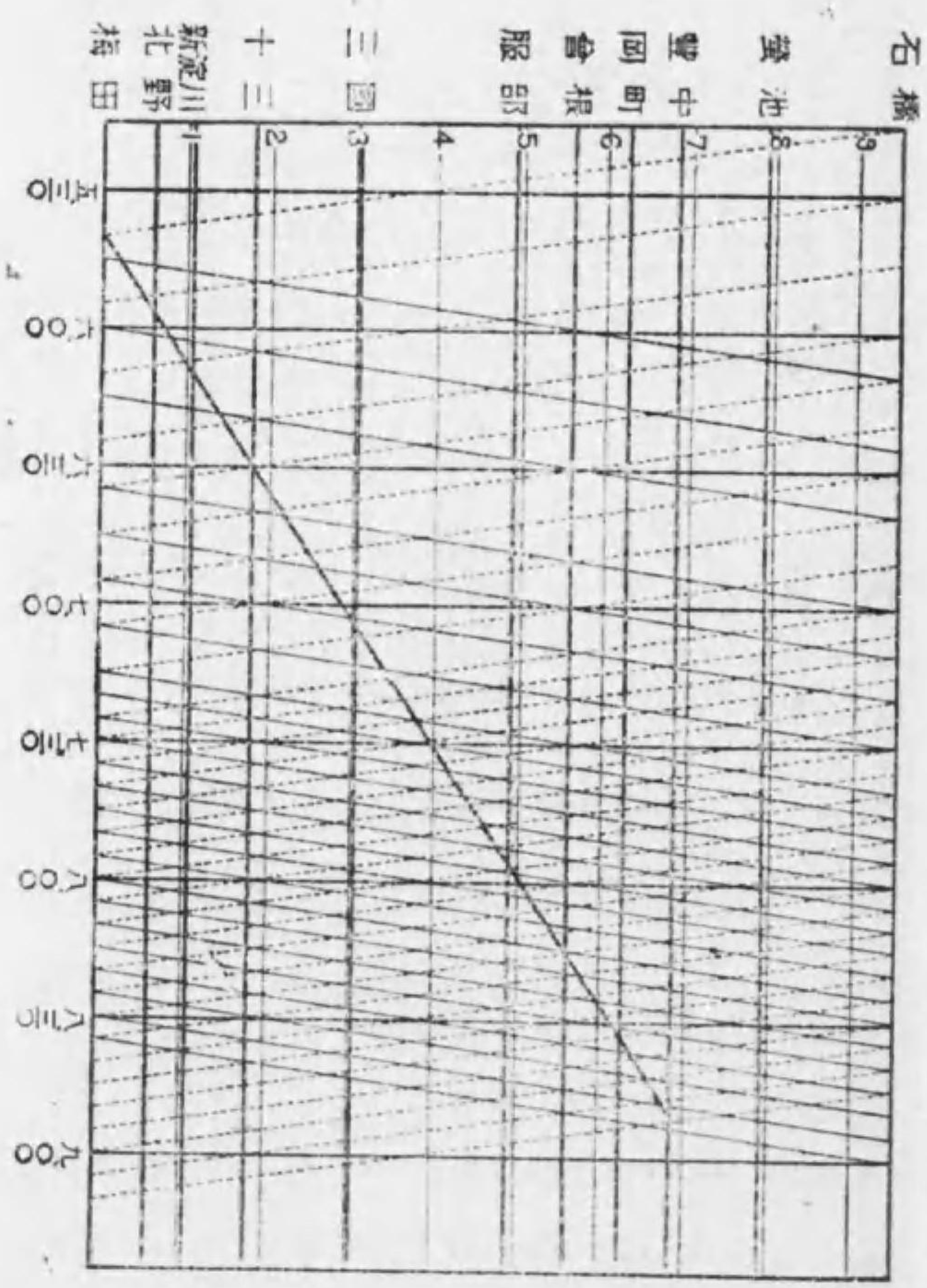
之ヨリ　　$x \geqq 28\frac{4}{5}$　　ヲ得.

$\therefore\ x=29$　　ナルヲ知ル.

故ニ所要ノ時間ハ $\frac{5}{6}$分$\times 29=24\frac{1}{6}$分ナリ.

函數ノ變化及ビ極大極小

83.



84. $2x^2-7x+11=2\left\{\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{39}{16}\right\}$

ナルヲ以テ此ノ式ハ $x=\frac{7}{4}$ ナルトキ最小値 $\frac{39}{8}$ ヲ取ル.

別解. $2x^2-7x+11=y$ トセバ

$2x^2-7x+11-y=0$ ヨリ x ノ實數ナルベキ條件トシテ　$49-8(11-y)\geqq 0$

之ヨリ　　$y \geqq \frac{39}{8}$　　ヲ得.

次ニ　$8-10x-x^2=8-(x+5)^2+25=33-(x+5)^2$

ナルヲ以テ此ノ式ハ $x=-5$ ナルトキ最大値 33 ヲ取ル.

別解. $8-10x-x^2=y$　トセバ

$x^2+10x+y-8=0$ ヨリ上ノ別解ト同法ニヨリ

$5^2-(y-8)\geqq 0$　　$\therefore\ y\leqq 33$　ヲ得.

85. 輸入税無キトキノ輸入額ヲ a 圓トセバ, p 割ノ輸入税ヲ課スルトキノ輸入額ハ $a\left(1-\frac{5}{10}p\right)$ 圓ナリ.

故ニ此ノトキノ税額ハ $\frac{ap}{10}\left(1-\frac{1}{2}p\right)$ 圓ナリ.

此ノ税額ハ $\frac{p}{10}\left(1-\frac{1}{2}p\right)$ ガ最大ナルトキ

從テ　$p(2-p)$ ガ最大ナルトキ最大ナリ.

然ルニ　$p(2-p)=2p-p^2=1-(p-1)^2$　ナルヲ以テ,

$p=1$ ナルトキ税額ハ最大ナリ.　　　答　1割.

86. 速度ガ一時間 x 哩ナルトキニ要スル石炭ノ價ヲ毎

時間 y 圓トスレバ

$$\frac{x^2}{16^2}=\frac{y}{40} \qquad \therefore \ y=\frac{5}{32}x^2$$

故ニ此ノ汽車ガ毎時 x 哩ノ速サヲ以テ或距離 a 哩ヲ走ルニ要スル費用ハ $\frac{a}{x}\left(\frac{5}{32}x^2+22.5\right)$ 圓ナリ.

故ニ此ノ値ガ最小ナルヤウニ x ノ値ヲ定ムレバ可ナリ.

依テ $\qquad \frac{a}{x}\left(\frac{5}{32}x^2+22.5\right)=\lambda \qquad$ トシ

分母ヲ拂ヒ整頓スレバ

$$5ax^2-32\lambda x+720a=0$$

$$\therefore \ x=\frac{16\lambda\pm\sqrt{16^2\lambda^2-5\times720a^2}}{5a}$$

x ノ値ハ勿論實數ナルベキヲ以テ

$$(16\lambda)^2-5\times720a^2\geqq0$$

従テ $\qquad (16\lambda)^2\geqq5\times720a^2$

λ モ a モ正數ナル故 $\quad \lambda\geqq\frac{15}{4}a$

故ニ λ ノ最小値ハ $\quad \lambda=\frac{15}{4}a \quad$ ナリ.

故ニ λ ノ最小値ニ對スル x ノ値ハ

$$x=\frac{16\lambda}{5a}=12\,(\text{哩}) \qquad \text{ナリ.}$$

別解. 所要ノ速度ヲ毎時間 x 哩トスレバ 16 哩ノ速度ニテ 1 時間ヲ要スル路程ハ x 哩ノ速度ニテハ $\frac{16}{x}$

時間ヲ要ス. 而シテ 1 時間ニ 16 哩ヲ走ルトキ 40 圓ノ石炭ヲ費スナラバ 1 時間ニ x 哩走ルトキハ $\frac{40x^2}{16^2}$ 圓ノ石炭ヲ要ス.

故ニ此ノ汽車ガ毎時間 x 哩ノ速度ヲ以テ $\frac{16}{x}$ 時間ダケ走ル間ニ要スル總費用ハ

$$\left(\frac{40x^2}{16^2}\times\frac{16}{x}+22.5\times\frac{16}{x}\right)(\text{圓}) \ \text{即} \left(\frac{5}{2}x+\frac{360}{x}\right)(\text{圓})$$

ナリ. 今此ノ金額ヲ最小ナラシムル x ノ値ヲ求メンニ $\frac{5}{2}x$ ト $\frac{360}{x}$ トノ積ハ x ノ値ニ關セズ一定ナルヲ以テ, 此ノ和ノ最小ナルハ $\frac{5}{2}x=\frac{360}{x}$ ナルトキ

従テ $x^2=144$ 従テ $x=12$ (x ハ正數)ナルトキナリ.

附錄第二

順列，組合セ及ビ二項定理

第一章 順列及ビ組合セ

2. **問 1.** $7\times5=35$

問 2. $9\times8=72$

問 3. $8\times7=56$

問 4. $3\times2=6$

4. ${}_nP_r$ ノ公式.

問. ${}_5P_3=5\times4\times3=60$

6. 重複順列.

問. $9^3=729$

例問. $3^5=243$

7. 悉クハ異ナラザル物ヲ總テ取リタル順列ノ數.

例問. $\dfrac{9!}{2!}=181440$

11. ${}_nC_r$ ノ公式.

問 1. ${}_{25}C_{23}={}_{25}C_2=\dfrac{25\times24}{1\times2}=300$

問 2. ${}_{20}C_5=15504$

此ノ中或同ジ一人ガ加ハルハ ${}_{19}C_4=3876$(組) ナリ.

例一問 1. 12 箇ノ點ガ其ノ何レノ三ツモ同一直線上ニアラザトキハ ${}_{12}C_3=220$ 箇ノ三角形ヲ生ズレドモ五ツノ點ガ同一直線上ニアルヲ以テ其ノ五ツヨリ作ラルヽ三角形 ${}_5C_3=10$ 箇ダケ消失ス.

故ニ所要ノ三角形ノ數ハ 210 箇ナリ.

問 2. ${}_nC_2-n=\dfrac{n(n-1)}{1.2}-n=\dfrac{1}{2}n(n-3)$

例二問. 選擧ノ方法ハ ${}_{30}C_4$ 通リアリ，此ノ中或特別ナル二人ガ含マルヽ組數ハ ${}_{28}C_2$ ナリ.

故ニ所要ノ確率ハ $\dfrac{{}_{28}C_2}{{}_{30}C_4}=\dfrac{2}{145}$ ナリ.

問 題 1

1. (1) $n(n-1)(n-2)(n-3)=(n+1)n(n-1)$

ヨリ $n^2-4n+5=0$ $\therefore$ $n=5$ 或ハ 1 ヲ得レドモ 1 ハ題意ニ適セズ.

(2) $n^2-5n-6=0$ ヨリ $n=6$ 或ハ -1 ヲ得レドモ -1 ハ不可ナリ.

(3) $2n^2-19n+24=0$ ヨリ $n=8$ 或ハ $\dfrac{3}{2}$ ヲ得レドモ $\dfrac{3}{2}$ ハ不可ナリ.

〔4〕 ${}_{20}C_n={}_{20}C_{20-n}$ ナル故,

$20-n=n-10$ ヨリ $n=15$ ヲ得.

2. ${}_5P_5=120$ (通)

3. ${}_{50}C_3=19600$ (通)

4. 先ヅ議長ヲ選ムニ 8 通リアリ, 而シテ其ノ一人ノ議長ニツキ副議長ヲ選ムニ 7 通リアルヲ以テ, 兩人ヲ選ム仕方ハ $8\times7=56$ (通) アリ.

5. ${}_5P_1+{}_5P_2+{}_5P_3+{}_5P_4+{}_5P_5=325$ (通)

6. 0 ヲ有セザル數 $9^2=81$ 箇アリ, 此ノ外ニ一ノ位ニ 0 ヲ有スル數 9 箇アリ. **答** 90 箇.

別解. 10^2-10 (十ノ位ニ 0 ヲ有スル數ノ數) $=90$

7. 最上位ニ 0 ヲ有スル數ハ除去スベキコトニ注意シテ

末位ニ 3 ヲ有スル數ハ $(5!-4!)$ 箇アリ

末位ニ 5 ヲ有スル數ハ $\left(\frac{5!}{2!}-\frac{4!}{2!}\right)$ 箇 アリ

依テ總テノ奇數ハ $5!-4!+\frac{5!}{2!}-\frac{4!}{2!}=144$ 箇アリ.

8. $4!\times2=48$ 箇

9. 左端ニ 2, 3, 5 ノ何レカヲ置クヲ要スルヲ以テ, 答數ハ $\frac{5!}{2!}\times3=180$ ナリ.

10. (AB) ヲ一文字ノ如ク取扱ヘバ其ノ排列ノ方法ハ 4! 通リニシテ其ノ各ハ A ト B トノ交點ニヨリ各二通リトナスヲ得ルヲ以テ所要ノ答數ハ $4!\times2=48$ ナリ.

又 A, B ヲ相隣ラザラシメントセバ, 先ヅ無條件ノ排列ノ方法ノ數 5! ヨリ其ノ隣レル排列ダケノ數ヲ減ズレバヨシ. **答** $120-48=72$

或ハ A ダケヲ除キ殘リ四文字ヲ排列スレバ, 其ノ排列法 24 通リアリ, 而シテ其ノ各ニ A ヲ加ヘル方法ハ (B ノ兩隣リヲ避ケ) 3 通リアルヲ以テ所要ノ排べ方ハ $24\times3=72$ 通リアリ.

11. 母音ノ選ミ方 ${}_5P_2$ 通リ, 子音ノ選ミ方 ${}_2P_2$ 通リアル故, 此ノ各ヨリ一ツ宛取リテ組合セテ一ツ宛ノ語ヲ作リ得ルヲ以テ所要ノ語數ハ ${}_5P_2\times{}_6P_2=600$ アリ. 又同文字ノ重用ヲ許ストキハ語數 $5^2\times6^2=900$ アリ.

12. ${}_{21}C_3\times{}_5C_2\times5!=1596000$

13. 大人ノ順列 4! アリ, 其ノ各ニ子供ヲ入ルルニ ${}_5P_5$ ヅヽノ方法アリ, 故ニ答數ハ $4!\times{}_5P_5=2880$ ナリ.

14. 一列ニ排ブル方法ハ $6!=720$ 通リアリ.

又二列ニ排ブル方法ハ 上ノ各ヲ折半シテ之ヲ二列トスレバ可ナル故其ノ排列ノ數上ニ同ジ.

或ハ前列ノ選ミ方ハ ${}_6P_3$ ニシテ 其ノ各ニ對スル後列ノ排べ方ガ 3! 通リアルヲ以テ答數ハ ${}_6P_3\times3!=6!$ ナリト解スルモ可ナリ.

15. 〔1〕 前問ノ如クスベシ.

〔2〕 $14\times{}_{13}C_2=1092$

〔3〕 $13!=6227020800$

〔4〕 此ノ三名ノ中二名ヲ除外シ他 12 人ヲ排ブル方法ノ數ハ $12!=479001600$ ナリ.

而シテ此ノ各ニ除キタル中ノ一人ヲ加フル方法

$13-2=11$ (通) アリ.

カクシテ得ル順列ニ最後ノ一人ヲ加フルニ各

$14-4=10$ (通) アリ

故ニ答數ハ $479001600\times176=84304281600$

故ニ列ベ方ノ數ハ $12!\times11\times10=52690176000$ ナリ.

16. 着座ノ總數ハ $9!$ ナリ.

女兒二人相列ビテ坐スル方法ハ $7!\times8\times2$ (通) ナリ.

故ニ所要ノ確率ハ $\dfrac{7!\times8\times2}{9!}=\dfrac{8\times2}{9\times8}=\dfrac{2}{9}$ ナリ.

17. ${}_8C_3=56$ (通)

18. ${}_{10}C_5\div2=126$ (通)

19. $3^2=9$ (通)

20. 交點ハ二直線ニテ一ツ生ズルヲ以テ, 所要ノ交點ノ數ハ ${}_nC_2=\dfrac{1}{2}n(n-1)$ ナリ.

別解. 所要ノ數ヲxトセバ交點ハ各直線ノ上ニ$(n-1)$箇ヅヽアルヲ以テ總テニテ $n(n-1)$ 箇アリ.

然レドモ此ノ各交點ハ二直線ノ共通點ナルヲ以テ

$$x=\frac{1}{2}n(n-1) \quad ナリ.$$

第二章　二項定理

12. 問. $(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

$(5m-3n)^4$

$$=625m^4-1500m^3n+1350m^2n^2-540mn^3+81n^4$$

$(1-2x)^6=1-12x+60x^2-160x^3+240x^4-162x^5+64x^6$

問　題 2

1. [1] $(x+y)^7=x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4$

$$+21x^2y^5+7xy^6+y^7$$

[2] $64x^{12}-192x^{10}+240x^8-160x^6+60x^4-12x^2+1$

[3] $(1+x+x^2)^3=\{(1+x)+x^2\}^3$

$=(1+x)^3+3(1+x)^2x^2+3(1+x)x^4+x^6$

$=1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$

[4] ハ次ノ如クスルモ可ナリ.

題式 $=[(a+\sqrt{b})^2+(a-\sqrt{b})^2]^2$

$$-2(a+\sqrt{b})^2(a-\sqrt{b})^2$$

$=4(a^2+b)^2-2(a^2-b)^2$

$=2a^4+12a^2b+2b^2$

[5] $2+20(1-x^2)+10(1-x^2)^2$

$=32-40x^2+10x^4$

2. ${}_{15}C_{11}(a^2x)^4(b^2y)^{11}=1365a^8b^{22}x^4y^{11}$

3. 中央項ハ第8項ナルヲ以テ其ノ項ハ

$${}_{14}C_7\left(-\frac{x^2}{3}\right)^7=-\frac{1144}{729}x^{14} \quad ナリ.$$

4. 一般項ノ公式ニ於テ x ヲ x^2 ニ, a ヲ $-ax^{-1}$ ニ, n ヲ 20 ニ變ヘテ

$${}_{20}C_r(-ax^{-1})^r(x^2)^{20-r}={}_{20}C_r(-a)^r x^{40-3r}$$

依テ $40-3r=7$ トシテ $r=11$ ヲ得.

從テ所要ノ項ハ第十二項ナリ.

5. 一般項ノ公式ニ於テ x ヲ $3x$ ニ, a ヲ $-2y$ ニ, r ヲ 3 ニ, n ヲ 7 ニ變ヘテ

$${}_7C_3(3x)^4(-2y)^3=-22680x^4y^3$$

ヲ得ル故, 第一ノ答數ハ -22680 ナリ.

次ニ $\left(3x-\dfrac{1}{3x}\right)^{25}$ 中ノ x^{15} ヲ含ム項ハ

$${}_{25}C_r(3x)^{25-r}\left(\frac{-1}{3x}\right)^r={}_{25}C_r\times 3^{25-2r}x^{25-2r}$$

ヨリ $25-2r=15$ トシテ $r=5$ ヲ得ル故,

x^{15} ノ係數ハ ${}_{25}C_5\times 3^{25-10}\times(-1)=-53130\times 3^{15}$

ナリ.

6. 前問ト同様ニスベシ.

7. x^p ノ係數ハ公式ニ於テ $r=p$ トシテ ${}_{p+q}C_p$

又 x^q ノ係數ハ ${}_{p+q}C_q$ ナレバナリ.

8. $(ax+b)^{2n}$ ニ於ケル x^n ノ項ハ

$${}_{2n}C_n(ax)^n b^n={}_{2n}C_n\times a^n b^n x^n$$ ニシテ

$(bx+a)^{2n+1}$ ニ於ケル x^n ノ項ハ

$${}_{2n+1}C_{n+1}(bx)^n a^{n+1}={}_{2n+1}C_{n+1}\times b^n a^{n+1}x^n$$

ナルヲ以テ

$${}_{2n}C_n\times a^n b^n={}_{2n+1}C_{n+1}a^{n+1}b^n$$

即 $$\frac{2n!}{n!\,n!}=\frac{(2n+1)!}{(n+1)!\,n!}a$$

依テ $$1=\frac{2n+1}{n+1}a$$

$$\therefore\ a=\frac{n+1}{2n+1}$$

9. $$1.05^{10}=\left(1+\frac{5}{100}\right)^{10}$$

$$=1+10\times\frac{5}{100}+45\times\frac{25}{100^2}+120\times\frac{125}{100^3}$$

$$+210\times\frac{625}{100^4}+252\times\frac{3125}{100^5}$$

$$+210\times\frac{15625}{100^6}+\cdots\cdots$$

$$=1+0.5+0.1125+0.015+0.0013125$$

$$+0.00067875+0.000000328+\cdots\cdots$$

$$=1.62889\cdots\cdots$$

10. $3128=5^5+3$ ナルヲ以テ

$$\sqrt[5]{3128}=\sqrt[5]{5^5+3}=5\left(1+\frac{3}{5^5}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$=5\left[1+\frac{1}{5}\times\frac{3}{5^5}+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{1.2}\times\left(\frac{3}{5^5}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)}{1.2.3}\times\left(\frac{3}{5^5}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=5\left[1+\frac{3}{5^6}-\frac{2\times 9}{5^{12}}+\frac{2\times 3^4}{5^{18}}+\cdots\cdots\right]$$

而シテ此ノ〔 〕内ノ第四項ハ $\dfrac{2^{19}\times 91}{10^{18}}$ ＝等シク，

且 $2^{19}<8^7$ 從テ $2^{19}<10^7$ 從テ $2^{19}\times 91<10^9$ ナル故

此ノ項ハ $\dfrac{1}{10^{11}}$ ヨリ小ナリ，而シテ第五項以下ノ項

ノ絕對値ハ尙小トナルヲ以テ，第四項以下ヲ捨ツル

モ答數ヲ求ムル上ニハ差支ナシ．

$$故= \sqrt[5]{3128}=5\left[1+\frac{3}{5^6}-\frac{2\times 9}{5^{12}}\cdots\cdots\cdots\right]$$

$$=5\left[1+\frac{3\times 2^6}{10^6}-\frac{2^{13}\times 9}{10^{12}}\cdots\cdots\cdots\right]$$

$$=5\left[1+\frac{192}{10^6}-\frac{73728}{10^{12}}\cdots\cdots\cdots\right]$$

$$=5[1+0.000192-0.000000073\cdots\cdots]$$

$$=5\times 1.00019192\cdots\cdots\cdots$$

$$=5.000959\cdots\cdots\cdots$$

11. $(1+x)^n$ ノ展開式ニ於テ $x=1$ トスベシ．

12. $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots\cdots+C_nx^n$

及ビ $(1+x)^n=C_n+C_{n-1}x+C_{n-2}x^2+\cdots\cdots+C_0x^n$

ヲ邊々相乘ジ其ノ兩邊ニ於ケル x^n ノ係數ヲ比較ス

レバ $\quad {}_{2n}C_n=C_0^2+C_1^2+C_2^2+\cdots\cdots+C_n^2$

ヲ得ル故，

$$C_0^2+C_1^2+C_2^2+\cdots\cdots+C_n^2=\frac{2n!}{n!\,n!}$$

——（終）——

此ノ書ハ大正十四年度版ノ中等數
育代數學敎科書（下卷）ニ適用ス

中等數育
代數學敎科書
敎授資料
〔下卷〕
【非賣品】

大正五年五月二十五日 印刷
大正五年五月二十八日 發行
大正十五年四月二十二日 再版印刷
大正十五年四月二十五日 再版發行

著作者 林鶴一

東京市小石川區小日向水道町84
發行兼印刷者 株式會社東京開成館
代表者 松本繁吉

發行所 株式會社東京開成館

大倉印刷所

終