廣西糧食問題

張培剛著

商務印書館發行

指數之編製與應用

唐啟賢著

中華書局印行

民國二十八年八月印刷
民國二十八年八月發行

大學用書

指數之編製與應用（全一冊）

◎ [illegible] 2.40

（郵運匯費另加）

著者　唐啓賢

發行者　中華書局有限公司
代表人　路錫三

印刷者　上海澳門路
美商永寧有限公司

總發行處　昆明
中華書局發行所

分發行處　各埠
中華書局

(一一三五九)

自序

宇宙間萬象彙呈,變態複雜:此長或彼落;此衰或彼興;進,退,損,益,成,敗,張,弛,因時因地,各異其趣.若欲尋究其一般趨勢;幾如辨途徑於五里霧中,求水平於萬頃濤內,——其爲不易,在昔殆爲當然之事實,迄後經學者之努力,始有指數之產物;而此種紛紜錯雜之現象,乃可明如燃犀,窺其大致.經濟社會機構之諸因素,若僅用統計法求得其總數,平均數,差異數,其爲用究屬有限,必須能比較各因素間之相互關係,始有重要之意義.此似於統計法上有所謂相關係數,消長係數等可以表示之;然欲同時能比較甚多不同性質而實際變動之數列,則最適宜之工具乃爲指數.以是,指數之創作不可謂非促進文明之一種助力,宜近世各國幾莫不有指數之編製,其國度愈昌明,國力愈充實者所刊行之指數愈多,各國著名經濟統計學者對於此種學術,亦多悉心研究,日有進步,已成專著宏篇,幾於目不暇接,我國居國際重要之地位,對於此種智識之介紹,自感殷切;著者爲應此種需要起見,乃廣徵博引,紬繹羣言,抉要鉤玄,裒[illegible]成帙,首釋指數編製之意義,次述其範圍與方法,然後及於實際應用之問題,——學者有此,融會而貫通之,可以獲其致用之道矣.

唐啓賢

民國二十五年十一月

凡　例

(一) 本書初稿,僅十一章,成於民國二十一年冬,時授指數編製法於中央政治學校計政學院;嗣後遇有暇時,輒事補充,益修整指數,插補法與指數圖三章,——此在一般指數之論著所不涉及,即有,亦寥寥數語,其實皆非指數編製者所可忽視.繼以指數應用之途徑頗多,其所發生之問題及編製方法未能一致,乃更闢各章,分別敍述特種指數之編製焉.

(二) 已有指數之著作,多數偏於物價方面,雖其名爲指數,毋寧稱爲物價指數;本書則先闡明一般指數編製之法則,繼分述特種指數之編製,物價指數僅爲特種指數內之一種.

(三) 今世研究指數之權威學者首推美人費霞及米乞爾兩教授,本書即取兩氏之著作,啓其潭奧,擷其菁華,以爲骨幹,而甄擇寶萊,戴靄懿,潘森,却篤克等統計學家之意見以附麗之.

(四) 本書名詞乃據撫各統計學家所通用者;外文名詞譯爲中文,則力求與中國統計學社名詞審查委員會二十三年所審定者相一致;至其未經譯,或雖譯有未盡其意,或所譯與原文之意雖相合,而今以原文之意且不甚確當者,則其他學者苟有適合之譯名,逕取用之,無已,則著者創譯之.

(五) 本文引用之名詞及其所下之定義,如譯自外國文字者,多附註原文,以便閱者尋繹.

(六) 指數之學術,今猶在萌芽時期,其有關之一般問題,雖於本書中詳爲介紹,然遺漏舛誤,仍恐不免,宇內學者,幸加匡正.

(七) 本書圖表多由謝君學序,馬君星閣,林君效山等繪製,並此誌謝.

指數之編製與應用

目　　錄

附　錄

指數之編製與應用

第一章　指數之意義

文明日進,人事愈繁,顧欲理亂解紛,執簡馭複,明其大略,審其趨勢,必有以綜合之,平均之;然而事至不齊,計數之單位不一,對於同樣單位計數之事項,可用綜合與平均之法以顯明其狀況,若不同單位計數之各種事項,則非僅用綜合或平均之法,即可以顯明其一般狀況,必先有以絜度而齊一之.於是以不同單位之實數合成公母數 (common denominator), 普通即百分數,因其互爲比較,可稱之爲百分比率,然後綜合或平均之,其結果乃可以顯明此各種事項之一般狀況.此種演變實數以爲比較,揭明事實狀況之數,即所謂指數.故可下一簡單定義,曰,指數者,即以各事項之實數合成公母數,普通即百分比率,綜合或平均之所得之結果也.雖然,公母數之決定當有一依據,例如公母數爲百分數,則所依據者即 100, 如爲千分數,則所依據者即1000, 此 100, 1000 等吾人常稱之爲基數 (base number); 遇各事項單位相同,欲併合比較,自可先爲綜合或平均,然後求比率;且編製指數之目的,大都爲比較各事項在空間或時間之一般狀況或其變動;是故指數者,更詳釋之,乃能以相同或不同單位之若干實數綜合的或平均的合成公母數,普通即百分數,因其互爲比較,可稱之爲百分比率,藉以表示事項之在空間或時間之一般關係或變動者也.於此吾人可知指數構成之要素有三:曰基數,例如百分數之

100，千分數之1000等;曰比率,普通爲百分比率;曰平均數或綜合數;缺此三者之一,其所定義自不能謂爲完善.例如英人寶萊(Arthur L. Bowley)謂:“指數乃用以測度若干數量之變動,此種變動爲吾人所不能直接觀察;爲吾人所知對於其他多種數量有一定之勢力;爲吾人所能觀察者,惟全體趨於增加或減少,其勢力固隱藏有多種原因所致不同方向的各種數量之動作也.”(Index numbers are used to measure the change in some quantity, which we cannot observe directly, which we know to have a definite influence on many other quantities, which we can so observe, tending to increase all, or diminish all, while this influence is concealed by the action of many causes effecting the separate quantities in various ways.) 此定義直說及指數之作用;而指數本身之爲何物,殆未說及.戴霭懿 (Edmund E. Day) 謂:“指數爲一種數目,用以表示一羣相關變量之相對變化或差異者也.” (An index number is a number designed to express the relative change or a difference of a group of related variables.)此直爲比率之定義.雖戴氏復註釋指數不可與比率混淆;然其分野,固未闡明.哈代及谷克斯 (Charles O. Hardy & Garfield V. Cox) 謂:“指數爲數列,其各項乃以任一項或各項平均爲基之百分數.” (Index numbers are series whose items have been reduced to percentages of some one item, or average of items, taken as a base.)此定義欠當,一如戴氏所下者.美人潘森 (Warren Milton Persons)則以“指數爲由實在經濟資料所計算之比率的平均數—— 但有一限制即負數,零,及無窮數的資料除外.” (We define an index number as an average of relatives, computed from actual economic data—a limitation which bars negative, zeroes and infinites). 此定義僅及比率的平均,而未及綜合數.雖潘氏聲明綜合法爲算術平均法之特殊一格,然只可屬於算術平均的比率.平均的比率,既未述及,則綜合之涵義未明;況在形式上,綜合法與平均法顯然有別,未加解釋,不無微疵.雷解(Robert Reigel)以"指數爲總數或平均數,用以顯示數的現象,屬於一時期者,着重其資料相對的而非絕對的比較."(Indexnumbers are totals or averages used to characterize numerical phenomena extending over a period of time with emphasis upon the relative rather than the absolute comparison of the data.)此定義雖已將綜合數、平均數、比率等意義列舉,然對於基數未加提示,且遺指數空間性之功用,固未盡能發揮指數之眞諦也.達菲士(George R. Davies)以"指數者乃絕對或相對數,用以測量一定狀況作比較者也."(By an index is meant a number, whether absolute or relative, which is used in comparisons to measure a given condition.)此定義甚爲含混,既未說及測量所用基數及平均數或綜合數,亦未及比較之方法,所謂相對者,卽以實數相對參差比較作解釋亦可.却篤克(Robert Emmet Chaddock)以"指數者乃統計上創作,藉以測量各種統計事項及變量差異之相對的變動者也."(Index numbers are statistical devices used in measuring relative changes or differences in the magnitude of statistical groups or aggregates of variables.)此定義對於統計事項及變量差異,在測量比較時,應求基數、比率、平均數、綜合數等事,皆未舉出.塞克類斯特(Horace Secrist)以"指數爲測量此時至彼時或此處至彼處

多數現象變動之一數列."(Index numbers are a series of numbers, by which changes in the magnitude of a phenomenon are measured from time to time or from place to place.)此定義之含混與前相同.羅斐特與賀芝克勞 (William Veruon Lovitt & Henry F. Holtzclaw) 以"指數爲一種統計上創作,藉以表示一羣有關係變量之平均變動,可逕稱之爲代表數." (An index number is a statistical device used to express the average change in the magnitude of a group of related variables. It is a representative number). 此定義雖述及平均比較;而未及綜合比較,基數之採取,與比率之計算.似此所介紹各種定義,無有能備指數之三要素,而不缺其一,故皆不能認爲滿意者也.然則指數必須以基數、比率及平均或綜合數鼎足構成.若此,則塞特克立夫 (William G. Sutcliffe) 所謂:"指數者,乃表徵同時期或不同時期各數列間一羣項數對於預定標準或基之變動程度之數,所謂預定標準或基之數值常爲100;" (An index number is the number which characterizes the degree of change, either over a period of time or between series at the same time, of a group of items, when measured from some predetermned standard or base, the base usually having a designated value of 100.);又"指數爲表徵有組合的一羣之數,可以數值 100 爲基之比率或以綜合數表示之;" (An index number is a number which characterizes a composite group, and may be expressed as a relative to a base which has a value of 100, or as an aggregative.) 及塞克類斯特所謂:"指數爲依基數計算之相對數,最普通爲比率的平均;"(As relative numbers calculated upon a base, and most generally as average of relatives.) 與此意較爲契合.惟何以名指數者,一以能指示各種不同單位之事物通盤比較;一以能變各種複雜之數爲簡單之數如百分率等,使如世所謂屈指可數也.至若指數曾於定義中說明可爲時間的亦可爲空間的比較;前者卽歷史的數列 (historical series), 以各種事物爲經過若干時間之縱的比較;後者卽次數的數列 (frequency series), 以各種事物爲同一時間之橫的比較.由此可知對於社會經濟之各種現象;如物價,生活費,運費與貨幣購買力之升降;工資與成本之漲落;生產消費與貿易量之消長;匯兌率與利率之起伏;在業與失業人數之增減;凡百事業之盛衰等;一皆可用指數以明其關係或其變化,於以鑒往知來,用此測彼,得處事途徑之指南,應變決策之工具.宜英人吉孛林(L. F. Giblin)謂:"測量一國之文明程度,應用指數尙較自動車爲當也."

第二章 指數之歷史

溯指數之編製,遠在1675年,有英人伏亨氏(Rice Vaughan)著硬幣及其鼓鑄論(A discourse of coin and coinage),以穀、家畜、魚、布、帛、皮革等編成物價表,取1352年與1650年物價相比較,闡明工資與物價之升漲乃由硬幣價值跌落之故,迄1738年,法人多篤(Dutot)就路意十二(Louis XII——1498至1515)及路意十四(Louis XIV—1661至1715)時代同樣物品之價格,比較其兩者之總數,此爲後世簡單綜合法之濫觴.1764年,意人卡里(G. R. Carli)研究美洲之發現於貨幣購買力之影響,嘗以1750年穀、酒、油之價各與其1500年之價相比,得三者之百分數,復相加而以三除之,此卽後世簡單算術平均法之發軔.1798年英人愛佛林旭克布夫(G. Shuckburgh Evelyn)亦以算術平均法平均各種物價以爲比較.1812年楊爾蒐(Arthur Young)採用愛佛林氏計算方法,並加權於物價.其後以拿破崙戰爭(Napoleonic Wars)影響紙幣之結果,更引起學者研究指數之興趣.如1822年英人羅威(Lowe)與1833年英人施克羅甫(Scrope)主張綜合法亦須加權.施克羅甫且謂權數須依對於各種貨物消費量之比例決定.1853年斯密士(J. Prince Smith)對於指數之計算介紹代數公式.1863年英人奇凴士(W. S. Jevons)倡用簡單幾何平均法,計算英國物價,追溯至1782年,編成指數,以闡明金價跌落由於1849年起金鑛開採量多之故;曾引起一般學者對於指數深切注意,厥功殊偉,故教授費霞(Professor Irving Fisher)稱彼爲指數之父(the father of index numbers).1864年,德國卜賽大學(University of Besel)教

授拉斯貝爾博士(Dr. E. Laspeyres)反對奇馮士之簡單幾何平均法,主張用加權綜合法.1869年倫敦經濟學報(Economist)發表二十二種物品價格編成之指數,此項指數批露,以迄於今,從未間斷,誠爲今世各國指數中歷史最悠久者,至其計算法則採用簡單算術平均公式,其基數非 100 而爲 2200,惟現在物品數已倍於前矣.1874年,德人貝許(Paaschi)主張加權綜合法,惟基期與擬算期之權數須交叉計算.1880年,意國經濟兼統計學家美賽達格禮亞(Messedaglia)開始研究平均數之性質在指數上之應用.1881年,美國造幣廠長布嘉德(H. C. Burchard)選取印於財政部長報告及登於紐約新聞報之市價,編一1824至1880年之物價指數,此爲美國第一指數.1886年英人叔崧克(Sauerbeck)投皇家統計學會(Royal Statistical Society)之論文,內編有一著名之指數,今仍續載於統計雜誌(Statist).1886年,德人瑣靄比(Adolph Soetbeer)亦從事指數之編製.1887年英人愛奇華士(F. G. Edgeworth)曾充分介紹指數計算之方法,如簡單算術平均,加權算術平均,簡單中數,簡單幾何平均等法.德人孔萊德(Conrad)之指數亦始於此時.1893年,美人福克勒(Roland P. Falkner)在美國參議院沃列渠報告中(Aldrich Report)發表一用簡單與加權算術平均法計算比較自1840至1891年物價之指數.1895年,英人溫德莫(W. S. Wetmore)於英國皇家殖民委員會(British Royal colonial commission)1894–5年之報告書中,登其所編之中國批發物價指數,起自1873年,迄於1892年,其材料取自中國之海關報告册,計算用簡單算術平均法,此爲中國有指數之始.繼起者則爲日本幣制調查委員會(Japanese commission for the

Investigation of Monetary Systems)所發表之中國批發物價指數,起迄之時各較溫德莫所編指數落後一年,即1874—1893.殆1896年,歐洲物價上升後,更激起物價指數之研究.1897年卜拉德週刊(Bradstreet's)開始刊布指數,其所用材料,爲每種物品以一磅計價,計算方法用簡單綜合公式,此指數繼續批露,迄未間斷,爲今日美國物價指數中之最老者.1900年初,有若干國家苦於生活費用之增高;復紛紛編物價指數,藉供測量物價高潮之用.1901年,美國編有鄧氏(Dun's)指數,追溯至1860年;美人瓦許(C. M. Walsh)於其所著之普通交換值之測量(Measurement of General Exchange-value)一書中,涉及指數之處頗多.1902年,美國勞工統計局(Bureau of Labor Statistics)開始編製批發物價指數.1907年,美國編有零售物價指數.其後則學者更多對於指數,發揮其宏見,例如1911年有教授費霞出其名著貨幣購買力(Purchasing Power of Money),內包含一章及一附錄,論指數甚詳;1912年澳洲統計學家泥不士(Knibbs)主張計算指數,用基期權數之加權綜合法甚力,特別謂其易於計算,並作數理的解述.歐戰發生,世界經濟甚異常態,於是關於物價等指數之編製,更有風起雲湧之勢.戰爭工業局(War Industries Board)之物價股嘗於其所刊布之戰時物價歷史(History of Prices During the War)一書中,刊布一指數數列.美人密却爾(W. C. Mitchell)對於物價指數曾作詳細之探討,於1915年,發表其關於批發物價指數之大作,內容極稱豐富.1918年美國聯邦準備局(Federal Reserve Board)以勞工統計局搜集之資料,編製指數,並作成國際比較之數列;糧食管理處(Food Administration)以有滋養價值之食物之

價格,編製指數;實業諮議局(National Industries Conference Board)編生活費指數;南滿鐵道株式會社經濟調查會編製大連批發物價指數.1919年美國勞工統計局更編有生活費指數.1920年中國財政部調查貨價局編製上海批發物價指數;教授皮果(Prof. A. C. Pigou)於其所著之幸福之經濟(Economics of Welfare)書中,發表後一年費霞所稱爲之"理想公式"(ideal formula).1923年法人呂襄馬克(Lucien March)發表其經濟統計指數研究之論文.1924年唐啓宇博士編製中國農產品及工藝品及一般平準物價指數.其後中國編行之指數乃如雨後春筍,蓬勃滋生.在1925年,江蘇省政府農工廳編製南京市農產品及日用品零售市價指數,廣東省政府農工廳編廣州批發物價指數,財政部駐滬調查貨價局更編有上海輸出入物價指數及上海輸入貨物關價指數.1927年,天津南開大學社會經濟研究委員會編華北批發物價指數及天津外匯指數;馮柳塘君編上海國外匯兌指數.1928年,工商部編中國輸出入物價物量物值指數;上海市政府社會局編上海國內匯兌指數;廣東省農工廳刊佈廣州各行各類工資指數,廣三廣九鐵路工資與廉江等十縣工資指數及龍門等十縣僱農工資指數;新華銀行信託部編新華內國債券指數.1929年南滿鐵路株式會社庶務科編大連中國人生活必需品零售物價指數,貨價調查局編上海生活費指數,河北省政府實業廳編河北各縣零售物價指數;工商部編南京零售物價指數.1930年,工商部編南京、漢口、青島及遼寧批發物價指數;遼東半島關東廳起編大連、旅順、營口、撫順、瀋陽、四平街、長春、安東等處零售物價指數;廣州市政府編廣州國外匯兌指數;南

開大學經濟學院刊布中國進出口物價、物量、物物交易率與調節指數,及天津工人生活費週指數月指數與年指數.1932年,上海市政府社會局編有上海市工人生活費指數.1933年湖南財政廳發表長沙等四縣躉售物價指數及長沙金融指數,陝西省政府發表長安等三十縣零售物價指數.1934年農村復興委員會發表上海農產品躉售物價指數及農產品輸出貿易指數.1935年國民政府主計處統計局發表中國每日物價指數,實業部發表青島零售物價指數及無錫工人生活費指數,江西省政府編有南昌零售物價指數.1936年實業部發表廣州工人生活費指數.此近代中國指數發達之大致情形.總之世界指數之發展已有逾兩世紀之歷史,其間可分為三時期:1869年前為一時期,1869至1900年為一時期,1900年後為一時期.在第一時期,指數大都為少數私人用過時已久之材料編製而成,不能按定期發表,其編製工作一視其有可獲指數材料之適當機會以定,故其所編之指數祇可供學者之研究,難為大衆之參考.在第二時期,已有按期現編之指數(current index numbers),由機關發表,其造端者即1869年經濟學報所刊布之指數;惟此時期之指數大都仍如1869年前為物價編成者,可稱為一般目的的物價指數(general-purpose price index numbers),蓋其除測度物價一般變動外,無其他目的也.第三時期因1900年百物昂貴,民生維艱,學者乃從事於生活費指數之編製,指數之應用較前為廣;歐戰後,世界社會經濟狀況極反常態,學者欲明其盈虛消長之情勢,於是編為各種目的之特種指數(special index numbers)以分別測度其大羣變量之關係或其程度,指數之質量益為改造,而美國統計

學家施尼德(Carl Snyder)所謂"指數時代" (index number age)已屆.

第三章 指數之種類

指數旣可為時間的數列,以比較各時間不同變量之一般變動;又可為空間的數列,以比較各位置不同變量之一般關係;因此得分為三類如下:——

(一)時間數列的指數　此類指數乃以時間為依據而求出

表 1　南京上海華北青島漢口及廣州躉售物價指數比較　民國十九年之物價=100

時期＼地名	*南京	†上海	△華北	*青島	*漢口	▽廣州
民國二十三年	80.6	84.6	79.7	86.8	89.0	93.0
一月	81.9	84.7	79.5	89.5	89.6	98.4
二月	81.4	85.4	79.9	89.1	89.8	99.0
三月	80.8	84.1	79.1	97.9	86.9	98.7
四月	76.5	82.4	77.4	83.1	86.9	97.2
五月	79.9	82.7	77.6	84.4	86.1	96.7
六月	77.7	83.4	77.7	84.6	86.0	91.2
七月	79.9	84.6	78.9	85.6	87.5	91.2
八月	82.7	86.9	82.3	86.7	94.4	93.3
九月	82.0	84.8	80.3	87.1	90.7	90.3
十月	81.5	83.7	80.1	87.3	89.6	89.1
十一月	81.2	85.6	80.8	88.2	88.4	85.8
十二月	81.5	86.2	82.5	88.7	91.6	85.0
二十四年	80.3	84.0	82.4	89.4	89.2	83.5
一月	82.6	86.6	83.5	89.3	92.1	85.2
二月	83.1	87.0	84.1	90.3	91.8	86.0

三 月	81.5	84.0	82.7	89.9	89.8	84.3
四 月	81.2	83.5	82.3	89.6	91.0	82.6
五 月	81.5	82.8	82.1	89.8	89.3	80.0
六 月	79.9	80.2	80.7	88.6	87.4	79.1
七 月	79.0	78.8	79.2	88.3	88.1	79.7
八 月	76.9	80.1	79.6	88.2	87.3	80.6
九 月	75.0	79.4	78.3	88.3	86.5	80.8
十 月	78.1	82.0	81.3	88.7	86.4	80.8
十一月	82.8	90.0	87.1	90.5	90.2	91.0
十二月	82.9	90.0	88.5	91.0	91.2	92.7
二十五年						
一 月	84.2	90.9	89.8	91.7	93.0	94.3
二 月	83.3	91.8	92.5	92.4	93.4	96.9
三 月	84.5	92.7	95.4	92.8	96.9	98.0
四 月	84.7	93.5	96.3	93.3	100.0	99.5
五 月	83.3	92.2	94.1	93.5	96.5	100.9
六 月	82.9	92.4	93.3	93.9	95.9	109.0
七 月	83.2	93.4	94.6	94.7	96.0	111.4
八 月	83.6	93.6	93.5	94.0	94.7	90.1
九 月	83.0	93.2	93.8	93.6	94.9	
十 月	85.8	95.6	96.3	93.4	99.4	
十一月						

材料來源 * 根據物價統計月刊,實業部編
† 根據上海物價月報,國定稅則委員會編
▲ 根據南開大學經濟研究所編送
▼ 根據金融物價月刊,廣東省調查統計局編

說 明 編製者: *實業部, † 國定稅則委員會, ▲ 南開大學經濟研究所, ▼ 廣東省調查統計局
原基期: * 1930, † 1926, ▲ 1926, ▼ 1926

者,例如表1所列之指數.計算此類指數,須先確定基期(base period),以此時期之數為基數.惟基期擬定之方法不能盡同,大別之有二:一則固定一時期,如一日、數日、一月、數月、一年、數年等為基期,此卽所謂定基 (fixedbase);一則以前一時期,如一日、一月、一年等為基期,依其數以計算後一時期,如一日、一月、一年等之比率,此處所謂基期卽鏈基 (chain base). 依前者編成之指數,曰定基指數(Fixed-base Index Numbers). 依後者編成之指數,曰鏈指數(Chain Index Numbers).

(二)地位數列的指數　此類指數乃以地位為依據而求出者,例如表2所列之指數.

表2　世界各國棉花生產量比較

1930

國名	生產量(以千包計)	指數 以中國產量為100
中國	1590	100.00
美國	13756	865.15
印度	4800	301.88
埃及	1661	104.46
蘇俄	1550	97.48
巴西	493	31.00
祕魯	240	15.09
墨西哥	169	10.62
其他各國	1045	65.72

材料來源:　美國農部 (Department of Agriculture)

(三)事項數列的指數　此類指數乃以事項為依據而求出

者,例如表 3 所列之指數.

表 3　四年來中國政府註冊公司投資額

1929——1932

業別	資本額（元）	指數 以工業投資額為100
工業	90,498,920	100.00
商業	204,204,460	225.64
礦業	35,345,300	39.05
農業	2,181,300	2.41
其他業	60,048,330	66.35

材料來源:　國民政府實業部

指數又可依材料之性質,如紀龍(Harry Jerome)氏所分者分以下三類:——

(一)物價指數 (Price Index Numbers)　物價數列可分普通的與特別的兩種:以前一種材料編成者,有如貨價指數(Index Numbers of Commodity Prices);以後一種材料編成者,有如工資指數(Index Numbers of Wages),證券及債券價格指數(Index Numbers of Stock and Bond Prices),運費率指數(Index Numbers of Freight Rates),匯兌率指數(Index Numbers of Exchange Rates)等是.

(二)物量指數(Quantity Index Numbers)　如生產消費量指數(Index Numbers of Physical Volume of Production and Consumption),貿易量指數(Trade Volume Index Numbers),證券交易量指數(Volume Indexes of Stocks)等.

(三)物值指數 (Value Index Numbers) 如價值的生產指數

(Indexes of Value Production), 輸出入價値指數 (Index Numbers of Export and Import Valuations), 生活費指數 (Cost of Living Index Numbers),成本指數 (Costing Index Numbers) 等.

指數若依編製者之不同,復可別爲四類,玆分舉其例如下:——

(一)政府　如中國之實業部與財政部國定稅則委員會,加拿大之大陸統計局(Dominion Bureau of Statistics)等編製之躉售物價指數 (Indices of Wholesale Prices);美國勞工統計局,英國貿易局 (Board of Trade), 法國一般統計局等之工業生產指數 (Indices of Industrial Production); 丹麥統計部 (Statistiske Department), 腦威與荷蘭之中央統計局 (Central Statistical Bureau),捷克斯洛伐克之統計局(Office de Statistique)等之實業股票市値指數 (Index of Market Value of Industrial Shares); 上海市政府社會局之工人生活費指數,日本商工省之工資指數等.

(二)企業機關　如中國新華銀行編製之內國債券指數與新豐洋行之上海內國債券與證券指數,日本銀行之躉售物價指數,美國聯邦準備局之工業生產指數,比利時與瑞士之國家銀行 (Banque Nationale) 之實業股票市値指數;日本東京株式取引所之證券價格指數等.

(三)學術團體　如中國南開大學經濟學院與國立中山大學經濟調查處及英國經濟學報社編製之躉售物價指數;美國哈佛大學經濟研究委員會 (Harvard University Committee on Economic Research), 卜勃森統計研究所

(Babson Statistical Organization)與布魯克羅爾經濟服務社(Brookmire Economic Service)之商情指數(Index Numbers of Business Conditions),中國中央研究院社會調查所之工人生活費指數,英國倫敦與劍布里治經濟服務處(London and Cambridge Economic Service)之實業股票市值指數與工資指數,上海社會經濟調查所之中國農產品輸出貿易指數等.

(四)私人　如唐啓宇所編之農產品與工藝品輸出入物價指數及馮柳塘與秦古溫之外匯指數,美人費霞與意人拔齊(Bachi)之躉售物價指數,支哥斯拉菲亞人梅威博士(Dr. K. Maiwaid)之工業生產指數,瑞典愛克門(Mr. Ackermann)之瑞典商情指數等.

第四章 指數編製之程序

編製指數初無一成不變之程序,其所應取者,當視所編指數屬於何種與材料供給之狀況以爲定;雖然,其一般程序大致有如下列五步驟:——

第一步 確定編製指數之目的 吾人編製指數必先確定編製之目的,目的既定,斯可採取適用之指數材料.例如編製之目的爲測量生活費之變化,於是取材於家庭所必需之食品、衣着、燃料、家具等物品之零售物價;如爲研究工人購買力之強弱,則搜集關於工人實際收入額之材料;如爲測驗貨幣購買力之大小,則取材於躉售物價;如欲測商情之變遷則當選取變化最早應變最速之物品而用其價格;如爲表示工業製造品成本之高下,則當搜集原料價格、工資、利率等材料;如欲明普通物價之變遷,則對於市場各類貨物,均須揀樣以作材料.設若編製指數之目的不定,則編製各指數應取何種材料,不得而知,如竟隨便搜集,必多不當.取材不當,則雖編成指數固未可代表事實相對變更情勢之眞相.

第二步 選擇合於編製指數之材料 編製指數之目的既定,即須選擇爲達到該目的所必需充分之材料.惟材料必如何始可敷用?此不可不加以研究.蓋取材太少,固屬掛一漏萬,不足以確示事實之一般狀況;過多,則搜集匪易,既費材力,更需技術,所得往往不償所失.於是有美國哥倫比亞大學教授米乞爾(Wesley C. Mitchell)對此問題,謀所以解答之,嘗取1890至1913年美國物價,編製指數六種,如表4所示,其所不同者,只在所選物品之數目與種類.表中第一行之指數乃

表 4　1890—1913年美國六種物價指數

1890—1899年平均價格＝100

年別＼物品數	242至261品	145品	50品	40品	25品	25品
1890	113	114	114	113	115	113
1891	112	113	114	114	112	118
1892	106	106	105	105	103	112
1893	106	105	105	101	103	107
1894	[illegible]6	96	94	93	92	96
1895	[illegible]4	93	94	95	95	93
1896	[illegible]0	89	87	88	88	85
1897	[illegible]0	89	89	89	90	84
1898	93	93	95	95	96	90
1899	102	103	103	108	107	103
1900	111	111	112	115	103	109
1901	109	110	109	116	111	107
1902	113	114	116	122	116	117
1903	114	114	115	118	118	117
1904	113	114	116	118	122	110
1905	116	116	118	122	123	115
1906	123	122	123	128	130	122
1907	130	130	132	138	132	132
1908	122	121	125	129	124	122
1909	125	124	132	135	133	128
1910	130	131	135	141	133	134
1911	126	130	129	135	129	131
1912	130	134	138	142	140	138
1913	130	131	138	139	142	133
1890—1899之平均	100	100	100	100	100	100
1900—1909之平均	118	118	120	124	122	118
1910—1913之平均	129	132	135	139	136	134

用1913年勞工統計局所調查二百四十以上物品之價格編成,其中以一物而列有數種不同之價者頗多,如燕麥粉有二種,革有四種,女衣類有六種,鋼具有十一種等是;第二行之指

數所選用之物品,因其同類者之價格,僅以一平均數代表之,故減至一百四十五;第三行之指數所選用之物品僅五十項;第四行之指數所採用物品僅四十項,代表物品二十種,因每物各有兩價,一為原料價,一為製品價,例如牛與牛肉,銅塊與銅絲,大麥與麥粉等是;第五及第六行之指數各依揀樣法任

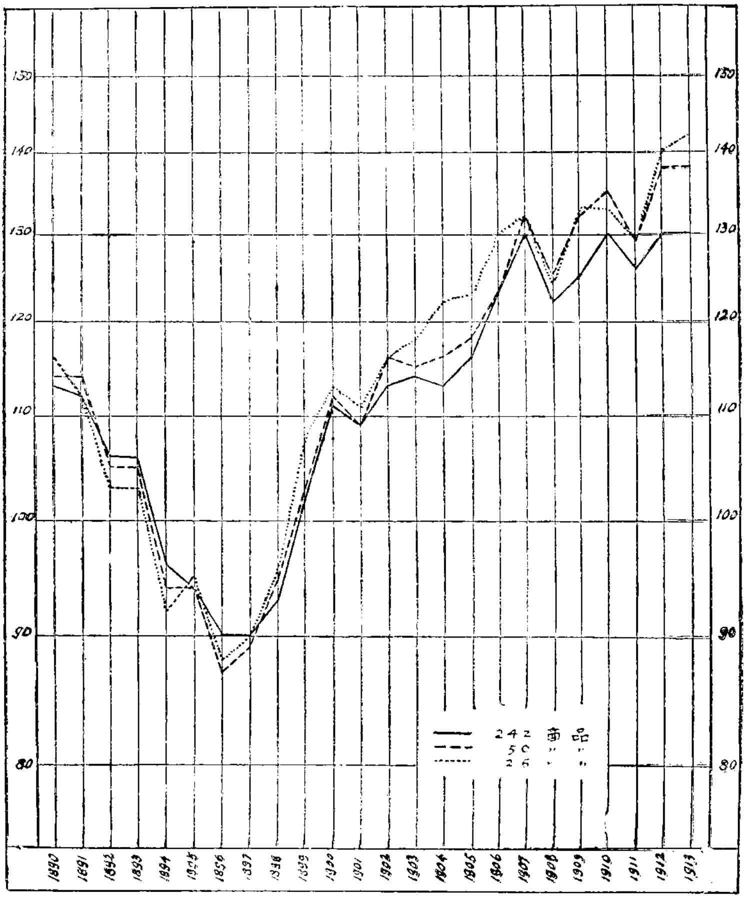


圖1 包含25、50及242商品之美國普通目的指數(按年,1890至1913)

取重要物品二十五種編成,但二者物品仍不相同;由此六行之指數視其變動無大差異.更有華爾街雜誌之指數 (Wall

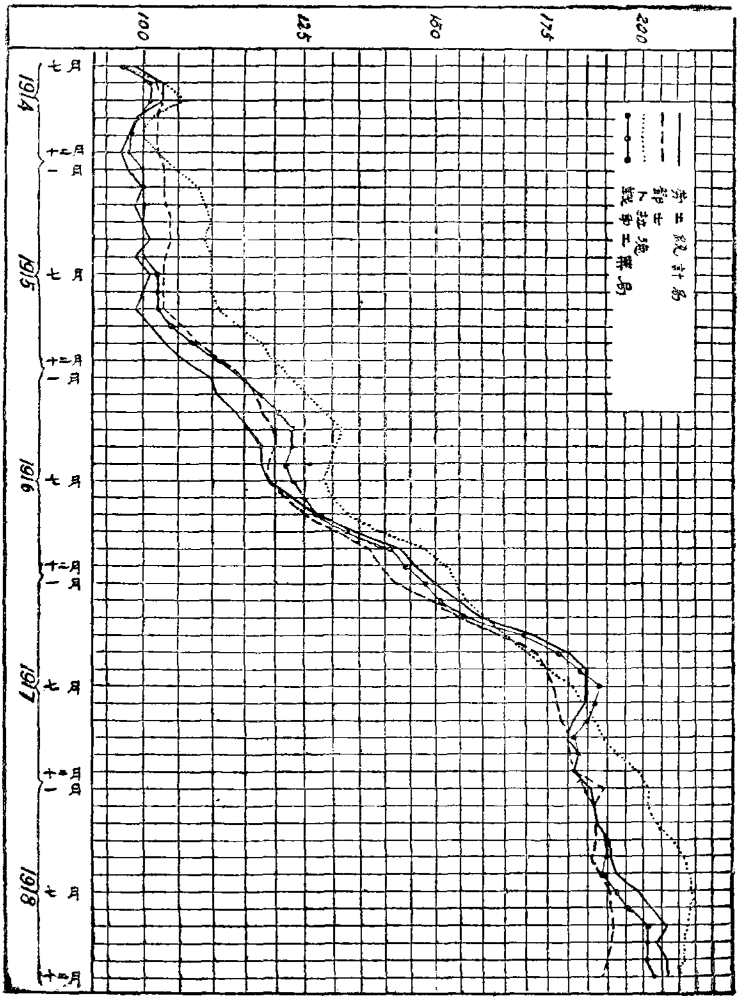


圖2 美國勞工統計局鄧士卜拉德及戰爭工業局之指數

(由1914年7月至1918年12月)

Street Journal's Indices),以1914年十月至1916年十月之十二種及二十種實業證券價格分別編成,兩者相差甚微;美戰爭工業局以1474種物價編成指數與勞工統計局以300種物價編成者亦微有不同.若用圖示法,則姑以美國不同商品數編成之數種指數相為比較,如圖1及圖2,可知其趨勢大致相同.此足證材料之多寡固未必妨礙其所編指數之正確程度.惟選擇材料,務賅且當.所謂賅者,即採用之材料,無論其為全體事實之一大部份,或一小部份,必須能代表全體,易言之,即取樣有充分代表性,使所取樣例本身之性質,彼此相差極遠,而其性質與未經採用者之性質相較極近;例如編製物價指數,須選用產銷甚旺而能代表各種性質之物品,其價格之變動,須能彼此無直接關係,而與未選用者相較,極有關係,如此行之,則選用之物可以代表全體.所謂當者,即選用之材料須能適合編製指數之目的,而材料之來源須極可靠也;例如欲編製指數以覘人民之生計,則須選用零售物價,而其來源乃在忠實之小商人,零售物品商店等處.

第三步　擇定關係點(point of reference)　指數之材料既經搜集齊全,將從事於計算之先,必須擇定全體數列關係之重心點,名之曰基(base).基為時間性者,曰基期(base period);為空間性者,曰基點(base point).基期應定何時?基點應定何所?可答之曰,均宜定於主要之部分.茲以基期應用之時較多,其確定之方法常為學者所爭論.用將其意見分為基期之種類及基期之確定兩項言之.

(一)基期之種類　基期有二種:即固定基期(fixed base period)與遞進基期(progressive base period)是也.前者又可分

爲兩種:一曰惟一固定基期 (one fixed base), 二曰擴大基期 (broadened base). 惟一固定基期定於一單位時期,如一年、一月等.擴大基期(此爲拉斯貝爾及瑣靄比所倡用)定於數單位時期,如六月、五年等.兩者時期單位雖多寡不同,而時期一定,即不輕易變更.至遞進基期則須隨時變換,譬以 1913 年之物價當爲 100, 以求 1914 年物價之百分比率,復以 1914 年之物價當爲 100, 以求 1915 年之百分比率,依次類推,年復一年,皆有爲基期之機會也.固定基期與遞進基期互有所不及.固定基期不如遞進基期能使各時期百分比率直接遞相比較.推進基期當推移計算百分比率時,偶有差誤,愈積愈多,不如固定基期,雖或發生差誤,其影響於全體頗微也.

(二)基期之確定　基期究定於何時爲宜?應爲去年或某一年或某數年或前一月或某數月乎?曰,皆可,但須注意下列四事:——

(1)基期宜定於一般社會經濟狀況穩定之時,不宜在社會經濟狀況變動劇烈之時.苟對於社會經濟狀況之穩定與否難以決定,宜用擴大基期,蓋其時期稍長,社會經濟狀況雖有劇烈變動,可以相銷而幾於常態.

(2)指數材料在基期如有異常變動,則據以計算之其他時期指數,亦將有相當之反動,例如編製物價指數,在基期之物價爲甚高或甚低,則於以計算之其他時期之指數反扭爲相當甚低或甚高,是故編製指數當視屬於何種,選擇基期,即在該種狀況平穩之時;譬如編製物價指數,則須採用物價平穩之時爲基期.至審定

表 5

年別／指數離中差／月別	1926		1927		1928		1929		1930		1931	
	米價	離中差	米價	離中差	米價	離中差	米價	離中差	米價	離中差	米價	離中差
一月	9.79	.21	10.32	.09	10.10	.04	10.17	.26	10.83	.60	11.97	.67
二月	9.90	.10	10.31	.10	10.22	.08	10.32	.11	11.13	.30	12.74	.10
三月	9.92	.08	10.47	.06	10.24	.10	10.41	.02	11.13	.30	12.61	.03
四月	9.94	.06	10.52	.11	10.29	.15	10.31	.12	11.12	.31	12.62	.02
五月	9.81	.19	10.41	.00	10.30	.16	10.26	.17	11.10	.33	12.75	.11
六月	9.79	.21	10.39	.02	10.17	.03	10.30	.13	11.75	.32	12.92	.28
七月	9.80	.20	10.45	.04	10.08	.06	10.34	.09	12.04	.61	12.74	.10
八月	9.79	.21	10.48	.07	9.98	.16	10.48	.05	11.96	.53	13.03	.39
九月	9.92	.08	10.62	.21	9.89	.25	10.66	.23	11.84	.41	12.92	.28
十月	10.30	.30	10.49	.08	10.12	.02	10.74	.31	11.54	.11	12.69	.05
十一月	10.53	.53	10.31	.10	10.14	.00	10.61	.18	11.41	.02	12.48	.16
十二月	10.55	.55	10.17	.24	10.16	.02	10.55	.12	11.36	.07	12.18	.46
總數	120.04	2.72	124.94	1.12	121.69	1.07	125.15	1.79	137.21	3.91	151.65	2.65
平均數	10.00	A. D. 0.23	10.41	A. D. .09	10.14	A. D. .09	10.43	A. D. .15	11.43	A. D. .33	12.64	A. D. .22

平穩時期,最好用客觀的方法,即根據求平均差或標準差差異係數之算式求之;因所謂平穩時期者即合於常軌或呈常態之一時期,凡一列變數呈常態者,其中平均差或標準差必小,非然者必大,是故一事實狀況平穩之時,即其所有變數之平均差或標準差最小之時.惟比較兩列以上變數平均差或標準差之大小,須用求平均差或標準差係數之方法,其法爲先測量每一列變數之次數分配之離中趨勢,而求平均差(A. D.)或標準差(σ),然後用公式 $\frac{A.D. \times 100}{M}$ 求平均差係數,或用公式 $\frac{\sigma \times 100}{M}$ 求標準差係數.求出差異係數,即可比較兩個以上之次數分配之差異程度而辨其大小.姑舉例以說明之,欲以某地米價編一指數,先選取代表性較大之某種米價,求出其離中差如表 5:

先求出每年十二個之平均米價,與該年各月米價相較,求出各月米價離中差,以其和除以12,其結果爲該年米價之平均差,然後以該年之平均米價除平均差,乘以 100, 即得該年平均差係數.各年米價之平均差係數,計算如下:——

V差異係數

$$V_{1926} = \frac{0.23}{100} \times 100 = 0.23$$

$$V_{1927} = \frac{0.09}{104.1} \times 100 = 0.09$$

$$V_{1928} = \frac{0.09}{101.4} \times 100 = 0.09$$

$$V_{1929}=\frac{0.15}{104.3}\times 100=.014$$

$$V_{1930}=\frac{0.33}{114.3}\times 100=0.29$$

$$V_{1931}=\frac{0.22}{126.4}\times 100=0.17$$

由上可知1926年後之米價差異係數,須以1927及1928年者最小,故此兩年比較可謂爲米價變動平穩之年.

若有時竟難決定一單位時距,如一日、一月或一年之狀況是否平穩,可擴大基期,蓋對於數單位時距之狀況加以平均,當較一特別年、月、日等之狀況合於常態.

(3)基期必爲一時間能供給十分正確之材料者.譬如調查時期正在施行調查,搜集材料未易準確,即不宜選爲基期.蓋在基期所選用之材料如不正確更何能希望根據此種材料算出之指數不生錯誤耶!

(4)基期宜定於較近之時期,蓋基期愈遠,據以計算指數,前後數字比較往往懸殊;且時移事遷,構成數列之資料宜於昔者,未必適於現在,若以甚遠之基期爲比較之重心,於以計算之全部數列,常減少其所含有之意義.是故紀龍謂:"一近基指數,使指數愈堪爲眞實代表."(A near base makes the index number more truly representative.)如美國勞工統計局之物價指數起於1902年,乃依據1890—1899年平均物價計算者,迄1918年,因人民鮮注意於1899年以前物價之改變,遂移基至1913年焉.

第四步　選定權數　編一指數;所取材料之各部分相對重要(relative importance)常不相同,而表示以一種數目即

爲權數.例如編工資指數所用之工資材料,往往分成若干等,得各等工資之工人數,大都互不相同,若求工資指數,僅以各等工資爲材料以供編製,則誤,必也以得各等工資之工人數爲權數,比表各等工資之相對重要.他如編躉售物價指數,則以物品銷售量爲權數;編農業生產指數,以各種收穫物平均年值爲權數;貿易量指數,以貨物交易或生產值爲權數;零售物價指數,以平均家庭年消費各種物品數量爲權數.惟編製指數有時必須加權,而權數材料不易徵集,則其自身之輕重未明,奚能爲權數之決定耶!因是有揀樣法,就全體材料之各部分依其相對重要之高下,選取充分適當比例之分量以爲權數.

權數,若受其影響之指數屬於時間性者,能始終如一乎!抑逐時變更乎!學者不一其說,主不變之說者,以爲欲測某事之變化,則當摒去其節外生枝之變化,權數若隨時變更,則指數至少有兩重變化:一爲事情之變化,一爲權數之變化,二者混結,不能分清,足以攪亂主要變化程度之準確.例如編製歷年物價指數,以測物價之變化,若逐年變更物品權數,則編成指數有兩重變化:一爲物價之變化,一爲權數之變化,因後者之變化,能使編製指數所欲測度物價之變化,失其準確之趨勢.然則權數須始終不變乎!主變更之說者以爲不可,謂權數經久不變,則其影響指數之正確程度甚大,蓋指數之有時代性者,所取之材料,有爲昔之所重,今之所輕,今之所重,昔之所輕,昔之所有,今之所無,今之所有,昔之所無,若權數固定,是使材料之重要性如一,以此種材料編成指數,必生錯誤;例如編製歷年物價指數,所選之物品,昔之所用者,今已不再製造,或

絕迹市場,昔之所無者,今已爲大宗買賣,昔之所棄如敝屣者,今已成爲時尚之品,其於指數之影響有前後軒輕之不同,能不變其權數耶!兩說各具理由,互有長短,乃有折衷之說,權數不必僅取材於一時期之數,可用若干時期之平均數爲之,蓋如此,則權數之差異數 (dispersion) 縮小,而減少偏誤.又有一法,卽每一長時期(如十年二十年等)將舊權數修改一次,而於銜接新舊權數之若干短時期(例如年)用新舊權數各自計算指數,則權數變更之結果,不難比較而知,故以此法編成指數,旣可免兩重變化之病,又可避加權時謬其輕重之稱,並可省每一短時期換算權數之麻煩,學者稱之.

第五步　計算指數　指數之材料已經搜集,基期及權數均已確定,乃須從事於指數之計算.惟指數計算之方法頗多,公式逾百,計算時詎能一一應用,只可用其中之最適當者.然此適當者何由辨別,此則不能不先通盤研究,俾明何者適用於何時,至應用時乃不致臨事張皇,應付失當.然而指數之計算法極多,研究其法之運用乃爲指數編製程序中問題最複雜之一步,故吾將另章述之.

第五章 指數之計算方法

吾人已知指數構成之要素有三:即基數、比率與平均數或綜合數.是則,從事指數之計算,必須求基數,比率,與平均數或綜合數.求基數之法甚易;蓋基數吾人欲以爲何數,斯卽何數,例如欲以基數爲 100 可,欲如澳洲尼不士 (G. H. Knibbs) 等以基數爲1000,亦可,欲如經濟學報以基數爲2200,亦未嘗不可.惟一般指數大都以 100 爲基數,以其簡明,便於計算耳.求比率,卽以擬算數合成當基數之比數,其法亦甚易,先以基數之原實數爲除數,擬算數爲被除數,求得商數,乘以基數,結果卽擬算數當基數之比率;例如基數之原實數爲25,擬算數爲30,設以基數爲 100, 則擬算數合成基數之比率爲 120, 卽30除以25復乘以 100 之結果也.至若求平均數,卽取普通統計上所應用之算術平均,調和(倒數)平均及幾何平均法,有時可取中數及範數(衆數)以代平均數.求綜合數卽將基期或基點所有實數相加之和,與擬算期或擬算點所有實數相加之和作比較也.計算指數時,卽將三要素併合,其法大別之有三:一曰綜合比率法 (Ratio of Aggregates), 二曰比率的平均法 (Average of Relatives Ratios), 三曰平均的比率法 (Ratio of Averages),此三方法又各分簡單(unweighted)與加權(weighted)二種:所謂簡單者,卽視所編指數表示之各項於其全體中之相對重要爲一致,而無分軒輊於其間;所謂加權者,卽依指數表示之各項於其全體中所占勢力之重輕,而以數目,卽所謂權數,表示之,務使事項之重要者占適當之勢力.綜合比率法,比率的平均法及平均的比率法,既各分簡單與加權二種,益

以平均法方面有算術,調和與幾何三式,遂成基本公式十四.至若中數及範數之求法:一則將比率或實數依大小之次序排列,如其項數為偶,則取中間二項之算術平均數或幾何平均數,如為奇,則取中間一項,以代表所有比率或實數,然後計算指數;一則取所有比率或實數發現次數最多之一項,以計算指數.此二種代表數頗缺乏敏銳性 (intensive), 而為任性 (freakish), 蓋僅抽取全體材料之一部份,其兩極端比率或實數有劇烈變動,幾無所感;而中間一二數改變,反影響甚大,致其數較其他平均數或高或低,無一定之方向;是故指數編製者鮮用之以求指數也.現只將所謂十四公式分舉於下:

一、 綜合比率法　以此法求出之指數,卽所謂綜合的指數,(Aggregative Index Numbers).此種指數乃以擬算期或擬算點所有實數之總和,除以基期或基點所有實數之總和而得一種比率,如欲以基數為 100 或1000,則更乘以 100 或1000, 於是求出擬算實數總和當基實數總和之百分比率或千分比率,尤便於比較矣.求綜合的指數所依據公式如下:

1. 簡單的

$$\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0} \text{ 或 } \frac{P_1{}' + P_1{}'' + P_1{}''' + \cdots\cdots}{P_0{}' + P_0{}'' + P_0{}''' + \cdots\cdots}$$

P_0或 $P_0{}', P_0{}'', P_0{}''', \cdots\cdots$為基期或基點之各項實數

P_1或 $P_1{}', P_1{}'', P_1{}''', \cdots\cdots$為擬算期或擬算點之各項實數

在 P 字右上角之記號為實數之項別

在 P 字右下角之記號"0"代表基期或基點

在 P 字右下角之記號"1"代表擬算期或擬算點

Σ 讀如雪格瑪 (sigma) 爲各數量相加之符號

2. 加權的

$$\frac{\Sigma P_1 W}{\Sigma P_0 W} \text{ 或 } \frac{P_1'W' + P_1''W'' + P_1'''W''' + \cdots\cdots}{P_0'W' + P_0''W'' + P_0'''W''' + \cdots\cdots}$$

W 或 W′ W″ W‴………代表各項權數

二、　比率的平均法　此法乃將擬算期或擬算點之各項實數,以基期或基點之各項實數分別除之,求得比率,復併合而平均之,或爲比率之算術平均數 (the arithmetic mean of relatives),或爲比率之調和平均數(the harmonic mean of relatives),或爲比率之幾何平均數 (the geometric mean of relatives),或代平均數以比率之中數(the median of relatives)及比率之範數(the mode of relatives),如當基數爲 100 或 1000 則更乘以 100 或 1000,求出百分比率或千分比率,此卽指數.其種類則因計算法之不同,而別爲算術平均指數 (Arithmetic Index Number), 調和平均的指數 (Harmonic Index Number), 幾何平均指數 (Geometric Index Number), 中數的指數 (Median Index Number), 及範數的指數 (Mode Index Number). 中數及範數之求法前已言之;至求比率中數或範數的指數,卽將各比率求出,然後取其中數或範數,以爲指數.若其他關於比率的平均各公式,則分舉如下:

(一)算術平均的指數

1. 簡單的

$$\frac{\Sigma\frac{P_1}{P_0}}{N} \quad 或 \quad \frac{\frac{P_1'}{P_0'}+\frac{P_1''}{P_0''}+\frac{P_1'''}{P_0'''}+\cdots\cdots}{N}$$

N 爲比率項數之和

2. 加權的

$$\frac{\Sigma\frac{P_1}{P_0}W}{\Sigma W} \quad 或 \quad \frac{\frac{P_1'}{P_0'}W'+\frac{P_1''}{P_0''}W''+\frac{P_1'''}{P_0'''}W'''+\cdots\cdots}{W'+W''+W'''+\cdots\cdots}$$

(二)調和平均的指數

1. 簡單的

$$\frac{N}{\Sigma\frac{P_0}{P_1}} \quad 或 \quad \frac{N}{\frac{P_0'}{P_1'}+\frac{P_0''}{P_1''}+\frac{P_0'''}{P_1'''}+\cdots\cdots\frac{P_0^N}{P_1^N}}$$

2. 加權的

$$\frac{\Sigma W}{\Sigma\frac{P_0}{P_1}W} \quad 或 \quad \frac{W'+W''+W'''+\cdots\cdots}{\frac{P_0'}{P_1'}W'+\frac{P_0''}{P_1''}W''+\frac{P_0'''}{P_1'''}W'''+\cdots\cdots}$$

(三)幾何平均的指數

1. 簡單的

$$\sqrt[n]{\pi\frac{P_1'}{P_0}} \quad 或 \quad \sqrt[n]{\frac{P_1}{P_0'}\times\frac{P_1''}{P_0''}\times\frac{P_1'''}{P_0'''}\times\cdots\cdots\times\frac{P_1^N}{P_0^N}}$$

用上列公式,計算頗煩,可將上列公式改成對數式如下:

$$\frac{\Sigma\log\frac{P_1}{P_0}}{N} \quad 或 \quad \frac{\log\frac{P_1'}{P_0'}+\log\frac{P_1''}{P_0''}+\log\frac{P_1'''}{P_0'''}+\cdots\log\frac{P_1^N}{P_0^N}}{N}$$

2. 加權的

$$\sqrt[\Sigma W]{\pi\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^W}$$

$$或 \quad \sqrt[W'+\cdots\cdots+W^n]{\left(\frac{P_1'}{P_0'}\right)^W\cdots\cdots\times\left(\frac{P_1^N}{P_0^N}\right)^{W^N}}$$

可改成對數式如下:

$$\frac{\Sigma W\log\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma W}$$

或 $$\frac{W'\log\frac{P_1'}{P_0'}+W''\log\frac{P_1''}{P_0''}+'''W\log\frac{P_1'''}{P_0'''}+\cdots\cdots W^N\log\frac{P_1^N}{P_0^N}}{W'+W''+W'''+\cdots\cdots\cdots\cdots W^N}$$

三、平均的比率法　所謂平均的比率者,即兩平均數之比率也(one ratio of two averages).先將基期或基點之各項實數併合平均,再將擬算期或擬算點之各項實數併合平均,然後以前者之平均數除後者之平均數算出比率,如以基數爲 100 或1000,則更乘以 100 或1000,以求平均的比率指數(Ratio-of-Average Index Numbers).此指數因在併合平均時,亦可用算術、調和與幾何三種方法或以中數及範數代之,故似比率的平均法,亦可分爲五種但求中數或範數的比率之指數,須先將基數之中數或範數求出,再將擬算數之中數或範數求出,然後以前者除後者,如以基數爲 100, 則更乘以 100, 得百分比率,此即指數,是法甚簡,不必再加贅述.現只將關於各種平均數之比率的公式分舉於下:

(一)算術平均的指數

1. 簡單的

$$\frac{\frac{\Sigma P_1}{N}}{\frac{\Sigma P_0}{N}} \quad 或 \quad \frac{\frac{P_1'+P_1''+P_1'''+\cdots\cdots P_1^N}{N}}{\frac{P_0'+P_0''+P_0'''+\cdots\cdots P_0^N}{N}}$$

2. 加權的

$$\frac{\dfrac{\Sigma P_1 W}{\Sigma W}}{\dfrac{\Sigma P_0 W}{\Sigma W}} \text{或} \frac{\dfrac{P_1'W'+P_1''W''+P_1'''W'''+\cdots\cdots+P_1^N W^N}{W'+W''+W'''+\cdots\cdots+W^N}}{\dfrac{P_0'W'+P_0''W''+P_0'''W'''+\cdots\cdots+P_0^N W^N}{W'+W''+W'''+\cdots\cdots+W^N}}$$

(二)調和平均的指數

1. 簡單的

$$\frac{\dfrac{N}{\Sigma\dfrac{1}{P_1}}}{\dfrac{N}{\Sigma\dfrac{1}{P_0}}} \text{或} \frac{\dfrac{N}{\dfrac{1}{P_1'}+\dfrac{1}{P_1''}+\dfrac{1}{P_1'''}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{P_1^N}}}{\dfrac{N}{\dfrac{1}{P_0'}+\dfrac{1}{P_0''}+\dfrac{1}{P_0'''}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{P_0^N}}}$$

2. 加權的

$$\frac{\dfrac{\Sigma W}{\Sigma\dfrac{W}{P_1}}}{\dfrac{\Sigma W}{\Sigma\dfrac{W}{P_0}}} \text{或} \frac{\dfrac{W'+W''+W'''+\cdots\cdots\cdots\cdots}{\dfrac{W'}{P_1'}+\dfrac{W''}{P_1''}+\dfrac{W'''}{P_1'''}+\cdots\cdots\cdots\cdots}}{\dfrac{W'+W''+W'''+\cdots\cdots\cdots\cdots}{\dfrac{W'}{P_0'}+\dfrac{W''}{P_0''}+\dfrac{W'''}{P_0'''}+\cdots\cdots\cdots\cdots}}$$

(三)幾何平均的指數

1. 簡單的

$$\frac{\sqrt[n]{\pi P_1}}{\sqrt[n]{\pi P_0}} \text{或} \frac{\sqrt[n]{P_1'\times P_1''\times P_1'''\times\cdots\cdots\times P_1^N}}{\sqrt[n]{P_0'\times P_0''\times P_0'''\times\cdots\cdots\times P_0^N}}$$

可改爲對數式如下:

$$\frac{\dfrac{\Sigma\log P_1}{N}}{\dfrac{\Sigma\log P_0}{N}} \text{或} \frac{\dfrac{\log P_1'+\log P_1''+\log P_1'''+\cdots+\log P_1^N}{N}}{\dfrac{\log P_0'+\log P_0''+\log P_0'''+\cdots+\log P_0^N}{N}}$$

2. 加權的

$$\frac{\sqrt[\Sigma w]{\pi P_1^W}}{\sqrt[\Sigma w]{\pi P_0^W}} \text{或} \frac{\sqrt[w'+w''+\cdots]{P_1'^{W'}\times P_1''^{W''}\times P_1'''^{W'''}\cdots}}{\sqrt[w'+w''+\cdots]{P_0'^{W'}\times P_0''^{W''}\times P_0'''^{W'''}\cdots}}$$

可改爲對數式如下:

$$\frac{\frac{W \log P_1}{\Sigma W}}{\frac{W \log P_0}{\Sigma W}} \quad 或 \quad \frac{\frac{W' \log P_1' + W'' \log P_1'' + W''' \log P_1''' \cdots\cdots}{W' + W'' + W''' + \cdots\cdots}}{\frac{W' \log P_0' + W'' \log P_0'' + W''' \log P_0''' \cdots\cdots}{W' + W'' + W''' + \cdots\cdots}}$$

茲以1930年及1933年八月南京市零售物價及工人家庭消費值之資料,應用上列各公式,求出指數.

表 6 南京市零售物價及工人家庭消費值

物名 \ 價與值	單位	一九三〇年平均價（以元計）	一九三三年八月之價（以元計）	工人家庭消費值比例
蘿菠	斤	.040	.026	8
青菜	斤	.032	.016	43
青芹菜	斤	.027	.023	9
黃芽菜	斤	.048	.024	3
黃豆芽	斤	.035	.029	7
菠菜	斤	.049	.032	6
猪肉	斤	.331	.278	67
牛肉	斤	.246	.186	9
母鷄（生）	斤	.364	.356	4
鴨肉（熟）	斤	.526	.387	10
小鯽魚	斤	.383	.185	6
青魚	斤	.277	.176	3
鰱子魚	斤	.249	.162	5
豆油	斤	.266	.205	47
猪油	斤	.420	.369	4
醬油	斤	.083	.134	22

蔴油	斤	.259	.197	5
高粱酒	斤	.323	.327	8
紹興酒	斤	.208	.201	8
茶葉	兩	.025	.029	7
洋糖	斤	.132	.207	2
鹽	斤	.111	.093	16
鴨蛋	个	.032	.020	1
燒餅	塊	.010	.010	10
豆腐	塊	.010	.010	19
河水	擔	.067	.043	1
上等白米	升	.145	.083	37
中等白米	升	.133	.066	321
下等白米	升	.122	.060	26
苞蘆麵	斤	.064	.050	4
切麵	斤	.082	.061	9
單鞋	雙	1.500	1.117	3
棉紗襪	雙	.240	.243	3
膠鞋	雙	1.155	1.083	4
綠玄	雙	.250	.250	2
白通州布	尺	.064	.057	3
黑老布	尺	.130	.177	2
花旗洋布	尺	.160	.133	4
花貢呢	尺	.325	.268	2
條子布	尺	.132	.143	2
毛葛	尺	.292	.350	4
棉花	斤	.485	.453	5

山柴	擔	1.085	.777	20
蘆柴	擔	1.141	.725	29
黑腐炭	擔	.360	.283	10
碎煤	擔	1.000	.780	17
鷹牌洋油	斤	1.510	.117	17
幸福牌洋油	斤	.150	.111	6
釣魚牌洋火	盒	.007	·010	1
梳頭油	斤	.566	.367	4
錫箔	塊	.192	.537	7
羅香	古	.030	.020	3
蠟燭	對	.007	.007	4
衛生烟	兩	.046	.047	4
香烟	盒	.074	.069	26
皂	塊	.050	.047	2
草紙	刀	.054	.042	3
傘	把	.500	.483	1

以一九三〇年爲基期,基價作爲100,用各種簡單的公式,求南京市一九三三年八月之零售物價指數;若更加工人家庭消費値爲權數,則可用各種加權的公式,以求生活費指數.今爲便於計算起見,列一計算表(閱附錄甲),然後用各種公式,分別計算指數如下,以資比較.

I. 零售物價指數

$$\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}\times 100=\frac{12.746}{15.245}\times 100=83.61$$

$$\frac{\Sigma \frac{P_1}{P_0}}{N}\times 100=\frac{5145.867}{58}=88.722$$

$$\frac{N}{\Sigma\frac{P_0}{P_1}}\times 100=\frac{58}{72.3289}\times 100=80.19$$

$\sqrt[n]{\pi\frac{P_1}{P_0}\times 100}$ 改用對數式計算如下:

$$\frac{\Sigma\log\frac{P_1}{P_0}\times 100}{N}=\frac{111.50415}{58}=1.922485$$

anti log 1.922485 = 83.65

$$\frac{\frac{\Sigma P_1}{N}}{\frac{\Sigma P_0}{N}}\times 100=\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}\times 100=83.61$$

$$\frac{\frac{N}{\Sigma\frac{1}{P_1}}}{\frac{N}{\Sigma\frac{1}{P_0}}}\times 100=\frac{\Sigma\frac{1}{P_0}}{\Sigma\frac{1}{P_1}}\times 100=\frac{1042.717}{1176.606}\times 100=88.62$$

$$\frac{\sqrt[n]{\pi P_1}}{\sqrt[n]{\pi P_0}}\times 100=\sqrt[n]{\pi\frac{P_1}{P_0}}\times 100=84.16$$

II.生活費指數

$$\frac{\Sigma P_1 W'}{\Sigma P_0 W}\times 100=\frac{155.76}{215.88}\times 100=72.15$$

$$\frac{\Sigma\frac{P_1}{P_0}W}{\Sigma W}\times 100=\frac{64921.867}{915}=70.95$$

$$\frac{\Sigma W}{\Sigma\frac{P_0}{P_1}W}\times 100=\frac{915}{1438.48638}\times 100=63.61$$

$\sqrt[\Sigma W]{\pi\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^W}\times 100$ 改用對數式計算如下

$$\frac{\Sigma\left(W\log\left(\frac{P_1}{P_0}\times 100\right)\right)}{\Sigma W}=\frac{1668.74132}{915}=1.823761$$

逆對數 1.823761 = 66.64

$$\frac{\frac{\Sigma P_1 w}{\Sigma W}}{\frac{\Sigma P_0 W}{\Sigma W}}\times 100=\frac{\Sigma P_1 W}{\Sigma P_0 W}\times 100=72.15$$

$$\frac{\frac{\Sigma W}{\Sigma\frac{W}{P_1}}}{\frac{\Sigma W}{\Sigma\frac{W}{P_0}}}\times 100=\frac{\Sigma\frac{W}{P_0}}{\Sigma\frac{W}{P_1}}\times 100=\frac{11339.776}{16101.937}\times 100=70.43$$

$$\frac{\sqrt[\Sigma w]{\pi(P_1)^W}}{\sqrt[\Sigma w]{\pi(P_0)^W}}\times 100=\sqrt[\Sigma w]{\pi\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^W}\times 100=66.64$$

第六章 基數之變化

基數現已普遍為100,雖嘗有以他數為基數者;如倫敦濟經學報之批發物價指數用2200,南非聯邦及澳洲之批發物價指數用1000,今則相率改用100矣.惟基數顧名思義,似宜一定.若以時間性的材料而言,卽定一日、一月、一年、數月、數年等之數為基數:例如美國茂狄(Moody)經濟通訊社,日本東洋經濟新報社及中國國民政府主計處統計局所發表之每日物價指數;分別以一九三一年十二月三十一日,一九三一年十二月十日及一九三四年十月十四日之物價為基價;日本銀行發表之東京倫敦及紐約躉售物價指數以一九一四年七月之物價為基價;中國財政部駐滬調查貨價局所編躉售物價指數嘗用一九一三年二月之物價為基價;國際聯盟發表之各國工業生產指數以一九二八年及各國虛名工資指數以一九二九年之實數為基數;世界食料及工業原料以一九二五至一九二九年之實數平均為基數等皆是.雖然,比較之基據亦有不盡一致,可步步為基,以作比較,稱為"逐步制"(Step by Step System);復可繫結若鏈,稱為"鏈制"(Chain System).譬如以時間性的材料而言,則將前一時期之數為依據以求後一時期之比數,如此遞推,卽"逐步制,"以其如環之相接,稱之曰環比(link relatives);苟確定一重心基期,以其數與他時期之各環比相為比較,使如環之相繫成鏈,故稱其制曰"鏈,"名其中包含之比數,曰鏈比(chain relatives).此鏈(chain)之名詞首見於費霞之貨幣購買力(Purchasing Power of Money)一書,而其制則為教授馬莎(Professor

Alfred Marshall)及奇華士所主張用者;茲舉例如下以說明之.

表 7　1913—1921 年支加哥各種紙臺物價

(平均每百磅之價格)

列	紙之種類	等級	平均價格(美元)								
			1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921
1	新聞紙	1	3.25	3.25	3.25	5.07	6.56	5.60	6.31	11.94	8.19
2	包裹紙	2	4.53	4.27	4.24	7.52	9.90	9.92	9.56	14.56	10.53
3	書籍紙	6	6.60	6.61	6.70	9.75	11.28	12.08	13.16	19.54	14.50
4	優等紙	11	10.81	10.90	11.29	15.38	17.98	19.93	22.85	29.51	24.49
5	紙板	4	4.75	4.75	4.73	6.42	7.73	8.72	9.58	12.55	9.72
6	他種紙	3	9.12	9.19	9.49	13.99	16.97	18.66	20.85	27.26	23.30

若以一九一三年平均物價爲基數,作爲 100, 則計算其他各年之比數,在此卽"價比"(price relatives),須以基價分別除各年之價;譬如新聞紙在一九一六年每百磅平均價爲美金 5.07 元,一九一三年平均價爲 3.25 元,則一九一六年之價比,卽以 3.25 除 5.07 之商數乘以 100 得 156; 他種紙在一九二〇年之價比,卽以 9.12 元除 27.26 元之商數,乘以 100 得 229; 其他各價比均依此類推.求出結果復綜合平均之(參閱表 8), 其得數卽所謂定基指數.

表 8　支加哥各種紙之價比及其指數

列	紙之種類	等級	百分數或比數 1913=100								
			1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921
1	新聞紙	1	100	100	100	156	202	172	194	367	252
2	包裹紙	2	100	94	94	166	219	219	211	321	232
3	書籍紙	6	100	100	102	148	171	183	199	296	220

4	優等紙	11	100	101	104	142	166	184	211	273	227
5	紙板	4	100	100	100	135	163	184	202	264	205
6	他種紙	3	100	101	104	153	186	205	229	299	255
7	綜合數		600	596	604	900	1107	1147	1246	1820	1391
8	算術平均		100	99	101	150	185	191	208	303	232
9	中數		100	100	101	151	179	184	207	298	230
10	幾何平均		100	99	101	150	183	191	207	303	231

若以每一年之平均物價為基數,作為 100, 以計算隨後一年之價比,則須以每一年之平均物價除隨後一年之平均物價,乘其商數以 100. 例如包裹紙在一九一三年之平均價為 4.53 元,在一九一四年為 4.27 元,求一九一四年之價比,即以 4.53 除 4.27 之商數,乘以 100 得 94;在一九一五年之平均價為 4.24 元,求一九一五年之價比,即以 4.27 除 4.24 之商數,乘以 100, 得 99;如此類推,求出各比數,此即環比.苟再將每各時期之環比相乘,即得每最後一時期對於最初環比當為基期之數之鏈比.可參閱表 9.

表 9 之鏈比乃得自環比平均數,例如一九一四年對於一九一三年之鏈比 99,得自一九一三年之 100 乘以一九一四年對於一九一三年之環比 99 之結果;一九一五年對於一九一三年之鏈比 100, 得自一九一三年之 100, 一九一四年對於一九一三年之環比 99,一九一五年對於一九一四年之環比 101, 相乘之結果;一九一六年對於一九一三年之鏈比 150, 得自一九一三年之 100, 一九一四年對於一九一三年之環比 99,一九一五年對於一九一四年之環比 101, 一九一六年對於一九一五年之環比 150, 相乘之結果;餘可類推.此

表 9 支加哥各種紙躉售價環比與鏈比

紙之種類	以前一年爲基期計算之百分數或比數								
	1913	1914 1913=100	1915 1914=100	1916 1915=100	1917 1916=100	1918 1917=100	1919 1918=100	1920 1919=100	1921 1920=100
新聞紙	100	100	100	156	129	85	113	189	69
包裹紙	100	94	99	177	132	100	96	152	72
書籍紙	100	100	101	146	116	107	109	149	74
優等紙	100	101	104	136	117	111	115	129	83
紙板	100	100	100	136	120	113	110	131	77
他種紙	100	101	103	147	121	110	112	131	85
環比平均	100	99	101	150	123	104	109	147	77
鏈比 1913=100	100	99	100	150	185	192	209	307	236

種計算鏈比之方法,似尙麻煩,可易以簡法,即以前一時期之鏈比乘以本時期之環比,求本時期之鏈比:例如以一九一四年對於一九一三年之鏈比99,乘以一九一五年之環比 101,求一九一五年對於一九一三年之鏈比 100; 以一九一五年對於一九一三年之鏈比 100, 乘以一九一六年之環比 150,求一九一六年對於一九一三年之鏈比 150 等等.可演明之如下式:

環比	100	99	101	150	123	104	109	147	77
鏈比	100	99	100	150	185	192	209	307	236

此種鏈比既能將表示變量平均年復年變動 (average year-to-year changes)依據年年基期(year-to-year base)之比率復化爲以一定時期爲依據者,其結果應與定基比率爲一致.今姑以代數式證明如下:

設以　　1910 年之數爲 P_0

1911 年之數爲 P_1

1912 年之數爲 P_2

以後各年類推

則

$$\frac{P_1}{P_0}\times\frac{P_2}{P_1}=\frac{P_2}{P_0}$$

$$\frac{P_1}{P_0}\times\frac{P_2}{P_1}=\frac{P_3}{P_2}=\frac{P_3}{P_0}$$

若試之於平均法與綜合法,則知

1. 幾何平均

1911 年對於 1910 年環比之平均

$$=\sqrt[n]{\frac{P_1{}'}{P_0{}'}\times\frac{P_1{}''}{P_0{}''}\times\cdots\cdots\times\frac{P_1{}^{n}}{P_0{}^{n}}}$$

1912 年對於 1911 年環比之平均

$$=\sqrt[n]{\frac{P_2'}{P_1'}\times\frac{P_2''}{P_1''}\times\cdots\cdots\times\frac{P_2^n}{P_1^n}}$$

求 1912 年對於 1910 年之鏈指數(Chain index number),須將 1911 年對於 1910 年及 1912 年對於 1911 年兩個環比平均數相乘,其式如下:

$$\sqrt[n]{\frac{P_1'}{P_0'}\times\frac{P_1''}{P_0''}\times\cdots\cdots\times\frac{P_1^n}{P_0^n}}\times\sqrt[n]{\frac{P_2'}{P_1'}\times\frac{P_2''}{P_1''}\times\cdots\cdots\times\frac{P_2^n}{P_1^n}}$$

$$=\sqrt[n]{\frac{P_1'}{P_0'}\times\frac{P_1''}{P_0''}\times\cdots\cdots\times\frac{P_1^n}{P_0^n}\times\frac{P_2'}{P_1'}\times\frac{P_2''}{P_1''}\times\cdots\cdots\times\frac{P_2^n}{P_1^n}}$$

$$=\sqrt[n]{\frac{P_2'}{P_0'}\times\frac{P_2''}{P_0''}\times\cdots\cdots\times\frac{P_2^n}{P_0^n}}$$

此最後演成之式與 1912 年比 1910 年之定基指數求法相同.

2.簡單綜合

1911 年對於 1910 年之綜合環比 $=\frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0}$

1912 年對於 1911 年之綜合環比 $=\frac{\Sigma p_2}{\Sigma p_1}$

求 1912 年對於 1910 年經 1911 年之鏈指數,須將 1911 年對於 1910 年及 1912 年對於 1911 年兩個綜合環比相乘,其式如下:

$$\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}\times\frac{\Sigma P_2}{\Sigma P_1}=\frac{\Sigma P_2}{\Sigma P_0}$$

此演成之式與 1912 年比 1910 年之定基指數求法相同.

雖然,以同樣材料計算之鏈與定基指數不盡相同,蓋鏈的比數(chain relatives)與定基的比數 (fixed-base relatives)之

演算有時不能吻合也.舉例如下:

I. 有若干數,其任一數較所有各數之平均數為多,則此一數若有增減,其所生之影響,在用定基法計算者較用環比法計算者為大.

表 10　(甲)

定基		以前年為基
第一年	第二年	第二年
240 160 2|400 200	300 160 2|460 230	125 100 2|225 112.5
百分數改變………………+15		百分數改變……………+12.5

表 11　(乙)

定基		以前年為基
第一年	第二年	第二年
240 160 2|400 200	180 160 2|340 170	75 100 2|175 87.5
百分數改變………………−15		百分數改變…………−12.5

II. 有若干數,其任一數較所有各數之平均數為少,則此一數若有增減,其所生之影響在用定基法計算者較用環比法計算者為小.

表 12　　(丙)

定基		以前年爲基
第一年	第二年	第二年
240 160 2|400 200	240 200 2|440 220	100 125 2|225 112.5
百分數改變……………+10		百分數改變…………+12.5

表 13　　(丁)

定基		以前年爲基
第一年	第二年	第二年
240 160 2|400 200	240 120 2|360 180	100 75 2|175 87.5
百分數改變……………−10		百分數改變…………−12.5

以上乙丙兩種情形較甲丁兩種情形之遭遇可能性爲大,蓋一數列之各數皆趨向於平均變動,已離自平均數者復回之向心力較更遠之離心力爲大;故在平均數上各項之數降落次數常較遠昇者爲多,而在平均數下各項之數上昇次數常較劇落者爲多,是則鏈的比數較定基的比數上昇爲多,降落爲少.例如物價上昇時,鏈的價比較定基的價比爲大,物價降落時,鏈的價比較定基的價比爲小是也.

綜上所述,得因基數之變化,指數可分三種:即定基指數(Fixed-base Indexes),環比指數(Link Relative Indexes)及鏈指數(Chain Indexes).三者名雖異而實相連.鏈指數乃由遞推基期鎔爲固定基期者,可以與定基指數一致,固具定基指數之長者也.定基指數之長如何?即在重心固定,比較變量有不移之標準,欲使各時期能互爲比較,甚宜用之.然其所短亦如定基指數,遇所定基不適宜時,欲修正指數,手續頗煩;更有定基指數所無之弊,即自環比演算爲鏈指數,若有一環比發生錯誤,則鏈指數將同歸於錯誤,若環比之求法,未能適當,則因之以求鏈比指數,將生累積之錯誤(cumulative error),譬以算術平均法求鏈指數則累積向上偏.是則鏈指數苟非用合於循環試驗之公式(閱第八章),其權數爲經常不變者,如用固定權數的幾何平均或綜合公式,終爲定基指數未可信賴之代替物.至若環比指數之短長則與定基指數相反,因其基數時時變動,使人加以研究,輒易目標,未能獲一貫之概念;然其優點則在所代表事實之變化,較定基爲集中,修正指數,變易新基,殊爲便利;至欲以某期與僅前一期比較,可選用之,無惑焉.此定基指數,環比指數與鏈指數之大較也.其實吾人若並欲發揮定基指數與環比指數之特長,甚宜兩種指數兼用.

更有一問題,即吾人對於已編成之指數,欲易新基,將重行計算乎?抑有其他簡易之法乎?若必重行計算,極爲麻煩;最好即以所須改爲基數之原指數除其他指數,此法甚簡,舉例如下:

原以 1913 年之數爲基數 100, 今改以 1918 年之數爲基數 100, 其算法爲

	1913	1917	1918	1919	1920
206.2	100	214.7	206.2	244.4	286.2
	48.5	104.1	100	118.5	138.8

又如A物品之價在1932年爲1元,至1933年則爲2元.B物品之價在1932年爲1元,至1933年則爲5角.用幾何平均法求出指數如下:

以1932年之價格爲100

1932	1933
100	200
100	50

指數$=\sqrt{100\times100}=100$　　指數$=\sqrt{200\times50}=100$

改以1933年之指數爲基數100, 用簡法求1932年之指數,只須以1933年之指數除1932年之指數,乘其商數以100.

$$\frac{100}{100}\times100=100$$

若以1933年之指數爲基數100, 重行計算如下:

1932	1933
50	100
200	100

指數$=\sqrt{50\times200}=100$　　指數$=\sqrt{100\times100}=100$

移基之簡法雖甚便易,然有如比率的算術平均數、中數等法卽不適用.姑仍取上例說明比率的算術平均法之所以不能適用情形如下:

以1932年之價格爲100

	1932	1933
	100	200
	100	50
	2|200	2|250
指數	100	125

改以1933年之指數爲100, 用簡法求1932年之指數,只須以1933年之指數除1932年之指數乘其商數以100.

$$\frac{100}{125}\times 100=80$$

若以1933年之數爲基數100，重行計算如下：

	1932	1933
	50	100
	200	100
	2|250	2|200
指數	125	100

上舉之例一經移基，則知新舊基數計算結果之矛盾矣。

移基之功用，在使指數常適合重心變更之時代需要，爲編製指數者不可避免之事。故移基指數之計算法亟宜講求，期能以最簡便之方法而不生謬誤之結果；一則爲節省時間與勞力，一則以指數所根據之資料，或爲他人所有，未經刊布，不能任意藉供移基計算之需要也。

第七章　權數之變化

指數公式原可不分簡單與加權兩種.蓋所謂簡單者,卽視指數材料之各項爲同樣重要,其權數固一致,乃可省去.有時性質相同之材料,苟項數多選,則等於對此種材料較爲重視,無意中多加成分,此卽所謂"暗指權數"(Implicit weights),例如美國卜拉德之躉售物價指數所包含之物品,其認爲重要者,卽有兩種以上之市價;沃列渠(Aldrich)之指數乃選取二十五種不同皮夾與小刀之價格,若與麥、穀、煤、比較,項數較多八倍,此種加權亦可稱爲重價加權法(multiple quotation system of weighting).似此所求出指數雖爲簡單者,幾無異加權數.若以各種事項之相對重要旣不相同,對於每種事項須加以顯明不同之成分以別其重要程度,此卽所謂"明指權數"(Explicit weights).此種權數,初有爲任意擬定者,如楊爾葸以大麥之重要兩倍於煤鐵或羊毛,食料之重要四倍之,小麥五倍之,似此所加之權數,僅以臆定,未可信賴;繼乃對於事項加以完全或抽樣調查,以尋出各事項之相對重要性,而以實數或百分數表示之,例如生活費指數以物品消費値或百分數爲權數,批發物價指數以物品列於市場之數或國民總消費量或貨物之生產値消費値或交易値爲權數,此卽明指權數,較爲合理者也.此種權數有爲持常不變者,曰常權數(Constant weight),拉斯貝爾等主張用之加此種權數編製指數,其所示事項之變動乃單純的,而不混雜有權數之變化.至若常權數選取亦卽所謂固定加權(fixed weighting)之範圍,則爲一單位時距或事項或地點,或數單位時距或事項或地點,茲

舉例以明之.

設 Σ爲相加之符號

P_0爲基數

P_1爲擬算數

q_0爲基數之權數

q_1爲擬算數之權數

w 爲任意選取之常權數

b 爲擴大權數

演成公式如下:

I (1) $\frac{\Sigma P_1 w}{\Sigma P_0 w}$ (2) $\frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0}$ (3) $\frac{\Sigma P_1 b}{\Sigma P_0 b}$

II (1) $\frac{\Sigma \frac{P_1}{P_0} w}{\Sigma w}$ (2) $\frac{\Sigma \frac{P_1}{P_0} q_0}{\Sigma q_0}$ (3) $\frac{\Sigma \frac{P_1}{P_0} b}{\Sigma b}$

III (1) $\frac{\Sigma w}{\Sigma \frac{P_0}{P_1} w}$ (2) $\frac{\Sigma q_0}{\Sigma \frac{P_0}{P_1} q_0}$ (3) $\frac{\Sigma b}{\Sigma \frac{P_0}{P_1} b}$

IV (1) $\sqrt[\Sigma w]{\pi\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{w}}$ (2) $\sqrt[\Sigma P_0]{\pi\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{q_0}}$

(3) $\sqrt[\Sigma b]{\pi\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{b}}$

所以用數單位時距或事項或地點者,因權數取自一單位時距或事項或地點,往往有所偏,若加以擴大,則事項之劇變與反常者互相抵銷,可求出相對重要代表性較大之權數.雖然,事物之重要,因時間、空間之別而有不同.昔爲人所必需者,今或棄若敝屣.昔爲人所不經意者,今或爲時代所尚.此處視如珍寶者,他處或視如贅疣.例如燭爲昔人所重視,今人則多忽略,膠皮之輪在兩世紀前,幾無所聞,今則爲陸路交通之

重要工具.鄉村之人重視耕犂,而城市之人忽之.是權數若固定不變,實不足以確示事項之相對重要.於是若干學者如貝許等主張代之以可變加權(variable weighting),即以擬算數爲主體,隨時間空間之變而異其權數,此種權數,曰變動權數(flucatuating weights),例如下列公式中之權數是也.

I $$\frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1}$$

II $$\frac{\Sigma \frac{P_1}{P_0} q_1}{\Sigma q_1}$$

III $$\frac{\Sigma q_1}{\Sigma \frac{P_0}{P_1} q_1}$$

IV $$\sqrt[\Sigma q_1]{\pi\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{q_1}}$$

擬算數之權數既隨時間或空間而變,其所編成之指數乃不能單純的表示指數所欲表示事項之變化,而所欲表示事項之變化,實混雜有權數之變化,是則指數所欲表示者失其眞相矣.因此有所謂併合或交叉權數(combined or crossed weights),以屬於基數及擬算數之權數交叉爲之,或稱爲重複加權(double weighting),德魯比煦(Drobisch)等主張用之.蓋以指數之計算方法不外每基數或擬算數兩數列之綜合的比率或比率的平均或平均的比率,若用交叉權數,則指數所包含事項在基數與擬算數方面之相對重要,可兼相顧及,求出之指數自較能表示事項變化之實況.以交叉權數演成之公式如下.——

I $$\frac{\Sigma P_1 \sqrt{q_0 q_1}}{\Sigma P_0 \sqrt{q_0 q_1}}$$

II　$$\frac{\Sigma P_1\frac{q_0+q_1}{2}}{\Sigma P_0\frac{q_0+q_1}{2}} \quad 或 \quad \frac{\Sigma P_1(q_0+q_1)}{\Sigma P_0(q_0+q_1)}$$

III　$$\frac{\Sigma P_1\left(\frac{2}{\frac{1}{q_0}+\frac{1}{q_1}}\right)}{\Sigma P_0\left(\frac{2}{\frac{1}{q_0}+\frac{1}{q_1}}\right)} \quad 或 \quad \frac{\Sigma P_1\frac{q_0q_1}{q_0+q_1}}{\Sigma P_0\frac{q_0q_1}{q_0+q_1}}$$

IV　$$\frac{\frac{\Sigma P_1q_0}{\Sigma P_0q_0}+\frac{\Sigma P_1q_1}{\Sigma P_0q_1}}{2}$$

V　$$\frac{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0}\right)\sqrt{q_0q_1}}{\Sigma\sqrt{q_0q_1}}$$

VI　$$\frac{\Sigma\sqrt{q_0q_1}}{\Sigma\left(\frac{P_0}{P_1}\right)\sqrt{q_0q_1}}$$

VII　$$\sqrt[\Sigma\sqrt{p_0p_1}]{\pi\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\sqrt{q_0q_1}}}$$

VIII　$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Sigma P_1q_0}{\Sigma P_0q_0}+\frac{\Sigma P_1q_1}{\Sigma P_0q_0}\right)$$

IX　$$\sqrt{\frac{\Sigma P_1q_0}{\Sigma P_0q_0}\times\frac{\Sigma P_1q_1}{\Sigma P_0q_1}}$$

交叉權數既可免不能順應事變之弊,又可減輕權數累變之勢,似可折衷於固定權數及變動權數之間;惟計算仍覺麻煩.於是更有一折衷之說,卽應用如前所謂擴大權數法,將權數範圍擴大,而使其中過與不及太甚之變化,得以調劑歸於平穩,此種權數旣可以代表較長時間或較廣空間各種事項之相對重要,而求出之指數亦不致雜有權數之變化.至關於時間性之指數數列,若恐過長,則所表示事項輕重之勢殊

異,權數雖經擴大,當不能代表事項永遠不變之相對重要,儘可越一長時期如費霞,却篤克等主張之十年十五年等易一權數;惟於新舊權數銜接之若干短時間,如修改權數之前後數年,用新舊權數各自計算指數,以便比較,則權數固定及應變之利可以兼收矣.

至若權數材料之採取,當視所編製指數之目的而定.例如編製零售物價指數,其目的乃測量消費者必需品價格之變動,自不宜用物品生產量或交易值,而須用消費值為權數;編製躉售物價指數,其目的在顯示一般物價之變動,自不宜用家庭消費值,而須用物品銷售量或交易值為權數;編製農產物價指數,其目的在研究農人貨幣收入之變動,自宜用得自各農產物之貨幣收入比例額為權數.若權數材料之本身,則必須可靠,否則寧不加權.蓋加權指數與簡單指數差異原徵,姑以科斯(R. H. Coats)發表之加拿大物價指數及美國勞工統計局物價指數證明,列表如下:

表 14　加拿大物價指數表

(算術平均　1890—1899之平均物價=100)

年	加權指數	簡單指數	差數	年	加權指數	簡單指數	差數
1890········	112.0	110.3	1.7	1902········	109.6	109.0	.6
1891········	111.3	108.5	2.8	1903········	190.7	110.5	.8
1892········	104.9	102.8	2.1	1904········	110.6	111.4	.8
1893········	103.9	102.5	1.4	1905········	113.8	113.8	········
1894········	97.2	97.2	········	1906········	120.1	120.0	.1
1895········	95.6	95.6	········	1907········	129.2	126.2	3.0
1896········	90.6	92.5	1.9	1908········	125.1	120.8	4.3
1897········	89.9	92.2	2.3	1909········	126.3	121.2	5.1
1898········	95.5	96.1	.6	1910········	128.0	124.2	3.8
1899········	99.0	100.1	1.1	1911········	131.1	127.4	3.7
1900········	105.8	108.2	2.4	1912········	143.9	134.4	9.5
1901········	106.0	107.0	1.0	1913········	139.6	135.5	4.1

表15 美國勞工統計局之物價指數

(算術平均 1890－1899之平均價＝100)

年別	13 農產品			37 食物			14 金屬產品		
	簡單的	以1909年每種物品估計消費爲權數	差數	簡單的	以1909年每種物品估計消費爲權數	差數	簡單的	以1909年每種物品估計消費爲權數	差數
1890	113	109	4	114	114	0	128	131	3
1891	124	117	7	116	114	2	118	116	2
1892	112	105	7	105	103	2	110	107	3
1893	106	107	1	112	111	1	102	98	4
1894	96	94	2	99	97	2	88	84	4
1895	93	95	2	95	94	1	88	88	0
1896	78	86	8	83	86	3	93	91	2
1897	84	93	9	87	90	3	82	80	2
1898	97	97	0	93	96	3	83	81	2
1899	99	98	1	98	96	2	124	124	0
1900	109	109	0	108	100	8	124	123	1
1901	117	115	2	110	102	8	114	113	1
1902	130	129	1	114	108	6	114	114	0
1903	120	120	0	110	104	6	114	113	1
1904	130	128	2	113	110	3	105	102	3
1905	125	123	2	110	109	1	116	113	3
1906	122	124	2	115	106	9	131	130	1
1907	139	136	3	120	112	8	138	140	2
1908	135	135	0	122	119	3	103	108	5
1909	150	154	4	124	126	2	109	107	2
1910	161	165	4	129	127	2	111	108	3
1911	166	150	16	128	125	3	111	103	8
1912	173	164	9	137	137	0	120	114	6
1913	152	161	9	133	127	6	119	115	4

況權數者,藉以顯明事項之相對重要;苟選取失當,則不足以代表事項之相對重要,反掩蔽事項之眞況,且加計算之麻煩,誠無補於事.是故費霞教授謂選取最佳指數公式一問題,復包含有兩個問題:一卽選用最佳公式,二卽採用最佳權數也.

第八章 三大還元試驗

(Three Great Reversal Tests)

計算指數之各種公式,所得結果不能盡同,且其差異有甚爲懸遠者.據費霞教授以一九一三年爲基期,一九一八年爲擬算期,用同種貨價,以一百三十八種不同公式計算指數,最大者爲 243.67, 最小者爲 165.15, 相差 78.52;依本書第五章應用各公式計算之指數,最大者爲 88.72,最小者爲 63.61,相差 25.11.此兩差異數均不可謂小,至其間各公式計算之結果,雖差異較微,然甚少絕無差異也.此各種公式計算,既有不同之結果,顧皆爲正確耶!非也.蓋用同樣材料,以甲公式計算之結果爲正確,則以乙丙丁等公式計算與其差異之結果,卽不能視之爲正確.然若差異極微,猶可謂甲爲正確,而其他則近於正確.今差異甚大,則其差誤未可諱言.此種差誤或爲上向偏.(upward bias), 如以比率的簡單算術平均,及加擬算期權數之算術平均、中數、衆數等公式計算之指數是;或爲下向偏(downward bias), 如以比率的簡單調和平均,及加基期權數之調和平均、中數、範數等公式計算之指數是;或爲易變(freakish), 如中數、衆數、加擬算期權數之比率的調和平均等公式計算之指數是.惟此何以辨別,則須依指數上所謂三大還元試驗:一、基位還元試驗(Base Reversal Test);二、因數還元試驗(Factor Reversal Test); 三、循環試驗(Circular Test).此三種試驗乃根據自處處他之理論以定,易言之,卽將指數所基之時間與空間地位互易,而視其影響之程度,依以判明指數公式之優劣.茲分述於後.

一、基位還元試驗　基位還元試驗爲潘森戴霭懿等採用之名詞.亦有若干學者如費霞教授等稱爲時間還元試驗(Time Reversal Test).其實此種試驗固不僅施之於時間數列也.基位還元試驗者何?乃以兩時期或地點或事項互爲基位向前及向後計算指數,其結果卽謂爲向前指數(Forward Index Number)及向後指數(Backward Index Number),以兩者相乘,視其積爲1與否,超過之爲上向偏,不及爲下向偏.蓋指數之向前計算者當爲向後計算者之倒數,例如一九三三年物價指數倍於一九二三年,卽一九二三年之指數爲一九三三年者二分之一,兩者相乘其積應爲1,又如米價去年平均每石十元,今年十五元,去年麥價每袋三元,今年一元五角,以去年爲基期,去年之價作爲100,向前計算,則今年米之價比爲150,麥之價比爲50,改以今年爲基期,今年之價作爲100,向後計算,則去年米之價比爲66.67,麥之價比爲200,茲將米麥價比用算術及幾何平均法分別計算如下:

表16　去年爲基期

年別＼平均數	算術平均數	幾何平均數
去年	$\frac{100+100}{2}=100$	$\sqrt{100\times100}=100$
今年	$\frac{150+50}{2}=100$	$\sqrt{150+50}=87$

表17　今年爲基期

年別＼平均數	算術平均數	幾何平均數
去年	$\frac{200+66.67}{2}=133.3$	$\sqrt{200\times 66.67}=115.5$
今年	$\frac{100+100}{2}=100$	$\sqrt{100\times 100}=100$

對於算術平均法加以試驗如下:

$$\frac{100}{100}\times\frac{133.3}{100}=1.33$$

因 1.33 與 1 之差數當 1 之 33%,此差數匪小,且逾於 1,故算術平均法爲上向偏,不適合基位還元試驗.

對於幾何平均法加以試驗如下:

$$\frac{87}{100}\times\frac{115.5}{100}=1.005$$

因 1.005 與 1 之差數當 1 之 $\frac{5}{1000}$,且此千分之 5 爲計算上偶有之錯誤,故幾何平均法無所偏,適合於基位還元試驗.

幾何及算術平均法之能否適合基位還元試驗可用代數式演明如下:

設以　　“0”及“1”爲兩個時間地點或事項之記號

I_{01} 代表向前計算之指數

I_{10} 代表向後計算之指數

對於比率的幾何平均公式加以試驗

簡單的公式

$$I_{01}=\sqrt[n]{\frac{P_1'}{P_0'}\cdot\frac{P_1''}{P_0''}\cdot\frac{P_1'''}{P_0'''}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{P_1^n}{P_0^n}}$$

$$I_{10}=\sqrt[n]{\frac{P_0'}{P_1'}\cdot\frac{P_0''}{P_1''}\cdot\frac{P_0'''}{P_1'''}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{P_0^n}{P_1^n}}$$

$$I_{01}\times I_{10}=1$$

加權的公式

$$I_{01}=\sqrt[\Sigma w]{\left(\frac{P_1'}{P_0'}\right)^{w'}\cdot\left(\frac{P_1''}{P_0''}\right)^{w''}\cdot\left(\frac{P_1'''}{P_0'''}\right)^{w'''}\cdot\cdots\cdot\left(\frac{P_1^n}{P_0^n}\right)^{w^n}}$$

$$I_{10}=\sqrt[\Sigma w]{\left(\frac{P_0'}{P_1'}\right)^{w'}\cdot\left(\frac{P_0''}{P_1''}\right)^{w''}\cdot\left(\frac{P_0'''}{P_1'''}\right)^{w'''}\cdot\cdots\cdot\left(\frac{P_0^n}{P_1^n}\right)^{w^n}}$$

$$I_{01}\times I_{10}=1$$

對於比率的算術平均公式加以試驗

簡單的公式

$$I_{01}=\frac{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0}\right)}{n}$$

$$I_{10}=\frac{\Sigma\left(\frac{P_0}{P_1}\right)}{n}$$

$$I_{01}\times I_{10}>1$$

加權的公式

$$I_{01}=\frac{\Sigma\frac{P_1}{P_0}w}{\Sigma w}$$

$$I_{10}=\frac{\Sigma\frac{P_0}{P_1}w}{\Sigma w}$$

$$I_{01}\times I_{10}>1$$

何以知$I_{01}\times I_{10}>1$,可證明之如下:

有二數焉,除皆等於 1 或任一數等於 0 外,任一數若小於 1,則其倒數必大於 1;反之任一數若大於 1,則其倒數必

小於1.今假設互爲倒數之二數爲 $1+a$(a 爲正數)與 $\frac{1}{1+a}$,前項代表其較大者,後項代表其較小者.須先證明:

$$\frac{1+a+\frac{1}{1+a}}{2}>1.$$

$$\frac{1+a\frac{1}{1+a}}{2}=\frac{(1+a)\times(1+a+\frac{1}{1+a})}{(1+a)\times 2}=\frac{1+2a+a^2+1}{2+2a}$$

$$=\frac{2+2a+a^2}{2+2a}=1+\frac{a^2}{2+2a}$$

此得數顯較1爲大,而 $1+a+\frac{1}{1+a}$ 當逾2.

再將各項比率及其倒數之算術平均數相乘如下:

$$\frac{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0}\right)}{n}\times\frac{\Sigma\left(\frac{P_0}{P_1}\right)}{n}$$

$$=\frac{\left(\frac{P_1'}{P_0'}+\frac{P_1''}{P_0''}+\cdots\cdots+\frac{P_1^n}{P_0^n}\right)\times\left(\frac{P_0'}{P_1'}+\frac{P_0''}{P_1''}+\cdots\cdots+\frac{P_0^n}{P_1^n}\right)}{n^2}$$

$$=\frac{1}{n^2}\left(\frac{P_1'}{P_0'}\times\frac{P_0'}{P_1'}+\frac{P_1'}{P_0'}\times\frac{P_0''}{P_1''}+\cdots+\frac{P_1'}{P_0'}\times\frac{P_0^n}{P_1^n}+\frac{P_1''}{P_0''}\times\frac{P_0'}{P_0'}+\frac{P_1''}{P_0''}\times\right.$$

$$\left.\cdots\cdots+\frac{P_0''P_1''}{P_1''P_0''}\times\frac{P_0^n}{P_1^n}+\frac{P_1^n}{P_0^n}\times\frac{P_0'}{P_1'}+\frac{P_1^n}{P_0^n}\times\frac{P_0''}{P_1''}+\cdots+\frac{P_1^n}{P_0^n}\times\frac{P_0^n}{P_1^n}\right)$$

一數及其倒數相加之和既在2以上,則依上式,可知每相乘之兩數,或互爲倒數,或其積卽爲另兩數相乘之積之倒數,此互爲倒數之二數相乘爲1,而兩數相乘之積及另兩數相乘之積之倒數相加之和必在2以上.但分子相乘,分母亦應相乘,分子兩兩相乘之項數等於分母項數自乘之積,項數雖不變,而兩兩相乘之各項結果或爲1,或每兩項合計之結果在2以上;是分子之數必大於分母,故知用算術平均法向

前計算及向後計算之結果相乘之積必逾1,並可謂算術平均公式爲偏於向上.此外,尙有一事實,使算術平均之結果益偏於向上,卽較大之數較較小者加於平均結果之影響爲大,蓋非零,負與無窮大之數,如爲整數,最小爲1,而可大至數十百千萬也.

算術平均公式旣偏於向上,其相反者,調和平均公式自偏於向下,以故兩者俱不適合基位還元試驗.至適合基位還元試驗者,除簡單幾何平均公式外,尙有簡單綜合的比率,交叉加權的綜合比率,費霞所謂"理想公式"等不適合時間還元試驗者,除算術及調和平均公式外,尙有加常權數之綜合的比率等公式.玆用代數法演明之如下:

簡單綜合的比率

$$I_{01}=\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}$$

$$I_{01}=\frac{\Sigma P_0}{\Sigma p_1}$$

$$I_{10}\times I_{10}=1$$

交叉加權之綜合的比率

$$I_{01}=\frac{\Sigma P_1(q_0+q_1)}{\Sigma P_0(q_0+q_1)}$$

$$I_{10}=\frac{\Sigma P_0(q_1+q_0)}{\Sigma P_1(q_1+q_0)}$$

$$I_{01}\times I_{10}=1$$

理想公式

$$I_{01}=\sqrt{\frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0}\times\frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1}}$$

$$I_{10}=\sqrt{\frac{\Sigma P_0 q_1}{\Sigma P_1 q_1}\times\frac{\Sigma P_0 q_0}{\Sigma P_1 q_0}}$$

$$I_{01} \times I_{10} = 1$$

中數

$$a < b < c$$

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$$

$$b \times \frac{1}{b} = 1$$

範數　以一數列比率之有最多次數者爲指數,另一數列比率之有最多次數者亦爲指數,此兩範數的指數向前計算與向後計算者相乘,其積爲 1.

加權的綜合比率

$$I_{01} = \frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0}$$

$$I_{10} = \frac{\Sigma P_0 q_1}{\Sigma P_1 q_1}$$

$$I_{01} \times I_{10} \neq 1$$

此結果不合基位還元試驗,且偏上偏下不定,故用 $\neq$ 符號.

若基位之權數與擬算數之權數同,則可適合基位還元試驗,其式如下:

$$\frac{\Sigma P_1 w}{\Sigma P_0 w} \times \frac{\Sigma P_0 w}{\Sigma P_1 w} = 1$$

由上各公式,可知爲基位還元試驗時,須將比較之時間或地點或事項之記號調換,例如以“0”及“1”代表兩時間,在原公式爲 0,作另一同樣公式,須將 0 改爲 1,原爲 1 者,須改爲 0.至對於加權指數公式向前及向後計算,欲使合於基位還元試驗,權數宜固定不變.

二、 因數還元試驗　因數還元試驗者,卽某事項數值爲其因子數值相乘之積;而欲辨明某事項指數之正確程度,

卽視其能否合於其因子指數之積以爲斷.譬如物值之因數爲物價與物量,物值比(value ratio)卽物價比(price ratio)與物量比相乘之結果,工值之因數爲工資率與作工數,工值比卽工資比率與作工比數相乘之結果.姑舉數事以述明之,設某物之價在1930年爲2元,1935年減爲1元,其交易量各爲5磅,則計算物值比爲$\frac{1\times5}{2\times5}=\frac{1}{2}$,而物價比爲$\frac{1}{2}$,物量比爲$\frac{1}{1}$.兩者相乘亦爲$\frac{1}{2}$,又設豬肉在1932年之價倍於1923年,橡皮之價兩年相同,豬肉之銷售量在1932年者當1923年之半,橡皮之銷售量於兩年亦相同;是豬肉之銷售,價倍增而量減半,其值在1932年與1923年者顯爲一致,橡皮之銷售,價與量兩年不變,其值亦應兩年一致,則並計兩種物品之值,以比較其兩年之變動,亦當相同.又設1930年,麵包之價二倍於1920年,其銷售量則爲三倍,銷售值自應爲六倍;1930年牛酪油之價三倍於1920年,其銷售量則爲二倍,銷售值亦應爲六倍;若併合而平均之,亦應爲六倍,凡此苟經一度計算,則可知因果兩相適合,卽謂爲合於因數還元試驗.惟此種試驗果能施之各種公式而無誤耶!固不能也,如簡單比率的算術平均卽屬不能.例解如下:——

設"0"爲基期之符號,"1"爲擬算期之符號,"01"卽由基期向擬算期計算之意.

P_{01}爲物價比.

Q_{01}爲物量比.

V_{01}爲物值比.

(a)應用上舉第二實例,而以一九一三年爲基期,計算其

簡單比率的算術平均之結果.

$$P_{01}=\frac{\frac{200}{100}+\frac{100}{100}}{2}=\frac{150}{100}$$

$$Q_{01}=\frac{\frac{50}{100}+\frac{100}{100}}{2}=\frac{75}{100}$$

$$V_{01}=P_{01}\times Q_{01}=\frac{150}{100}\times\frac{75}{100}=\frac{11250}{10000}=\frac{112.5}{100}$$

但 V_{01} 依據實例應爲百分之 100, 今爲百分之112.5, 此與物値指數相差百分之 12.5, 可視爲差誤,此種差誤當爲物價與物量指數所共有者.

(b)應用上舉第三實例,而以一九二〇年爲基期,計算其簡單比率的算術平均之結果.

$$P_{01}=\frac{\frac{200}{100}+\frac{300}{100}}{2}=\frac{250}{100}$$

$$Q_{01}=\frac{\frac{300}{100}+\frac{200}{100}}{2}=\frac{250}{100}$$

$$V_{01}=P_{01}\times Q_{01}=\frac{250}{100}\times\frac{250}{100}=\frac{625}{100}$$

物之銷售値依據實例,應增進 6 倍,照上式之結果,竟增進 6.25 倍,此 25 之差異當亦爲物價與物量指數所共有之差誤.

此簡單比率的算術平均法,可用代數式以證明其不合因數還元試驗.

因 $$\frac{\Sigma P_1q_1}{\Sigma P_0q_0}=V_{01}$$

則 $$P_{01}=\frac{\Sigma\frac{P_1}{P_0}}{n}$$

$$Q_{01}=\frac{\Sigma\frac{q_1}{q_0}}{n}$$

$$\left(\frac{\Sigma\frac{P_1}{P_0}}{n}\times\frac{\Sigma\frac{q_1}{q_0}}{n}\right)\neq\frac{\Sigma P_1q_1}{\Sigma P_0q_0}$$

即 $(P_{01}\times Q_{01})\neq V_{01}$

他如簡單綜合的比率,比率的幾何平均、中數、範數等與加權綜合的比率等公式,亦不合因數還元試驗.茲略舉數種,亦用代數式以證明之.

簡單綜合的比率

$$\because\quad P_{01}=\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}$$

$$Q_{01}=\frac{\Sigma q_1}{\Sigma q_0}$$

$$\frac{\Sigma P_1\times\Sigma q_1}{\Sigma P_0\times\Sigma q_0}\neq\frac{\Sigma P_1q_1}{\Sigma P_0q_0}$$

$$\therefore\quad P_{01}\times Q_{01}\neq 1$$

簡單比率的幾何平均

$$\therefore\quad P_{01}=\sqrt[n]{\pi\left(\frac{P_1}{P_0}\right)}$$

$$Q_{01}=\sqrt[n]{\pi\left(\frac{q_1}{q_0}\right)}$$

$$\sqrt[n]{\pi\left(\frac{P_1}{P_0}\right)\times\pi\left(\frac{q_1}{q_0}\right)}=\sqrt[n]{\pi\left(\frac{P_1q_1}{P_0q_0}\right)}$$

$$\therefore\quad P_{01}\times Q_{01}\neq V_{01}$$

但若以 $V_{01}=\sqrt[n]{\pi\left(\frac{P_1q_1}{P_0q_0}\right)}$

則 $P_{01}\times Q_{01}=V_{01}$

加權綜合的比率

$$\because \quad P_{01}=\frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q}$$

$$Q_{01}=\frac{\Sigma q_1 P_0}{\Sigma q_0 P_0}$$

$$\therefore \quad P_{01}\times Q_{01}\neq V_{01}$$

$$\text{又} \quad \because \quad P_{01}=\frac{\Sigma P_1(q_0+q_1)}{\Sigma P_0(q_0+q_1)}$$

$$Q_{01}=\frac{\Sigma q_1(P_0+P_1)}{\Sigma q_0(P_0+P_1)}$$

$$\therefore \quad P_{01}\times Q_{01}\neq V_{01}$$

至“理想公式”能否合因數還元試驗,亦以代數法演明如下:

$$\therefore \quad P_{01}=\sqrt{\frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0}\cdot\frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1}}$$

$$Q_{01}=\sqrt{\frac{\Sigma q_1 P_0}{\Sigma q_0 P_0}\cdot\frac{\Sigma q_1 P_1}{\Sigma q_0 P_1}}$$

$$\sqrt{\frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0}\cdot\frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1}}\times\sqrt{\frac{\Sigma q_1 P_0}{\Sigma q_0 P_0}\cdot\frac{\Sigma q_1 P_1}{\Sigma q_0 P_1}}=\frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_0}$$

$$\therefore \quad P_{01}\times Q_{01}=V_{01}$$

由上各公式,可知爲因數還元試驗時,須將公式中因數記號調換;例如以“P”與“q”代表兩因數,在原公式爲 P 者,作另一同樣公式,將 P 改爲 q,原爲 q 者,則改爲 P.

三、 循環試驗　循環試驗者,乃演繹基位還元試驗而成,對於任一公式所求出之三個以上之指數,爲一種間接的或環形的試驗也.例如以甲地爲基本地點,求各地物價指數,結果甲地指數當爲 100, 乙地指數爲 130, 丙地指數爲 150, 若比較甲乙兩地之物價,則爲 $\frac{130}{100}$, 合乙地指數130爲100以與丙地指數比較,則爲 $\frac{\frac{150}{130}\times 100}{100}$ 或 $\frac{115.38}{100}$.夫以甲地

與丙地指數直接相較爲100:150,苟用甲乙兩地指數比與乙丙兩地指數比,間接的演算亦應得甲地與丙地物價指數之比爲 100:150; 如此卽謂爲合於循環試驗,否則不合.今姑以 $\frac{130}{100}\times\frac{115.38}{100}$ 得數爲15,卽丙地物價當甲地之 1.5 倍,如以甲地物價爲 100, 則丙地物價爲 150, 故此種算法確合循環試驗.又設乙地工資指數倍於甲地,丙地工資指數較乙地高百分之五十,卽三倍於甲地,易言之則甲地指數確當丙地指數三分之一,若爲一循環之計算,可復原狀,使甲乙丙互爲演算之比率可以相乘爲 1,其式如下:

$$\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}=1$$

若以 I 爲指數,A、B及C分別爲 1, 2 及 3 三時期之平均物價,I之右下角之兩數字:前者代表基期,後者代表擬算期,則

$$I_{12}=\frac{B}{A}$$

$$I_{23}=\frac{C}{B}$$

$$I_{31}=\frac{A}{C}$$

$$I_{12}\times I_{23}\times I_{31}=\frac{B}{A}\times\frac{C}{B}\times\frac{A}{C}=1$$

以上數例皆可謂爲合於循環試驗.合於此種試驗之指數公式,有如幾何平均,綜合等法.若加權公式,則幾何平均、綜合等法,但須用固定權數.茲說明於下:——

不合循環試驗

設 p_1,p_2,p_3,爲三時期之物價.

q_1,q_2,q_3,爲三時期之物量,用作權數.

則
$$\pi\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{q_1}\times\pi\left(\frac{p_3}{p^2}\right)^{q_2}\times\pi\left(\frac{p_1}{p_3}\right)^{q_3}\neq 1$$

$$\frac{\Sigma p_2q_1}{\Sigma p_1q_1}\times\frac{\Sigma p_3q_2}{\Sigma p_2q_2}\times\frac{\Sigma p_1q_3}{\Sigma p_3q_3}\neq 1$$

合循環試驗

設以 w 爲常權數

則
$$\pi\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{w}\times\pi\left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{w}\times\pi\left(\frac{p_1}{p_3}\right)^{w}=1$$

$$\frac{\Sigma p_2w}{\Sigma p_1w}\times\frac{\Sigma p_3w}{\Sigma p_2w}\times\frac{\Sigma p_1w}{\Sigma p_3w}=1$$

至公式之所以應合於循環試驗者,或謂可譬之以路程,由甲地至丙地必經過乙地,甲乙兩地相距路程爲A,乙丙兩地相距路程爲B,甲丙兩地距離之長當爲A+B,固不能因由甲至丙之路程分兩部分計算,然後合併,卽與甲丙直接相距之路程不同也.或以此非明確之論,謂,循環試驗頗不合理.譬如甲乙丙三地用同類貨物十五種編成物價指數,貨物之中有木材五種,棉五種,紙五種,假定木材在甲乙兩地同爲重要之商品,棉在乙丙兩地同爲重要之商品,紙在甲丙兩地同爲重要之商品,則甲乙兩地之物價指數常爲木材所支配,而使有一致之趨勢,因棉在甲地之重要程度不如乙丙兩地,紙在乙地之重要程度,不如甲丙兩地,輕重之勢固可相銷也.依此類推,棉之勢力可以支配乙丙兩地之物價指數,而使有一致之趨勢,紙之勢力可以支配甲丙兩地之物價指數,而使有一致之趨勢.按照數學定理,設甲等於乙,乙等於丙,則甲必等於丙;今甲乙兩地物價有一致之趨勢,乙丙兩地物價有一致之趨勢,則甲丙兩地之物價亦有一致之趨勢,惟其一致果係相等耶!僅因各受其重要貨物同等勢力支配而相等,固非物價趨勢

之眞相等也.然則循環試驗本身,已有缺點,故對於一大羣變量,應用最佳公式以併合之,平均之,求出之指數亦不必能適合此種試驗.例如費霞皮果瓦許楊愛連(Allyn Young)等所盛稱之理想公式,費霞曾加以此種試驗,卽不能完全適合,其計算方法,乃以一九一三至一九一八年之美國物價材料,先求出一九一四年直接比一九一三年之數爲 100.12, 卽一九一四年物價較一九一三年高百分之.12,復自一九一三年經過一九一五等年,間接求出一九一四年之比率,所得結果,在一九一四年之物價較一九一三年者或高或低,竟難一致,其數字列表如下:——

表 18

年	1913	1914
眞的或直接的比較	100	100.12
間接的經過　1915	100	99.77
1916	100	100.21
1917	100	100.34
1918	100	99.94

以上間接的經過之數字,雖以"居中年"之影響,不能得與兩年直接比較相同之結果,然其差異殊微,此種差異卽所謂"循環的裂罅"(Circular gap). 據教授費霞謂:凡能合於時間及因數還元試驗之公式,更爲0—1, 1—2, 2—0, 之循環試驗,例如應用公式以一九一三年(0)爲基,向一九一四年(1)計算,復以一九一四年(1)爲基向一九一五年(2)計算,更以一九一五年爲基轉向一九一三年卽出發點計算,將三次計算之結

果相乘,其裂罅約爲基數百分之一之三分之一,此爲循環試驗之合法差異,公式有此極微之差異,可毋以爲玷.蓋公式之加權者,其權數若非經常不變,經循環試驗,自不能不因權數之變化而計算還元,毫無差異.惟差異甚巨,如對於比率的算術平均數、調和平均數等加以循環試驗之結果,則不能掩其爲誤;若竟毫無差異,如對於簡單比率的範數,綜合的比率等加以循環試驗之結果,亦不能謂爲非謬.至若加權的指數公式用任意選取之常權數,雖可適合循環試驗;但人情、氣候、風土、習尚等因時因地而有不同,以致各種事項之相對重要.今日異於昔日,此處異於他處,苟表示相對重要之權數,經久不變,或所在一律,殊達事實,故加常權數之公式亦未必邀學者之通用也.此外合循環試驗者有簡單幾何平均式,以此奇馮士瓦拉士 (Walras) 佛勒克斯 (Flux) 馬渠 (Malrch) 等嘗盛稱之.

循環試驗之形式有爲三角者,有爲四角者,亦有爲五角、六角及其以上多角者,其實任一公式除適合基位還元試驗外,能合於三角形之試驗,則未有不合於其他多角形者;故循環試驗又稱爲三角形試驗 (Triangular Test), 今可以代數式證明之如下:——

設 P 爲指數

P之右下角之兩個數字,各代表一時期或地點,以前者爲基向後者計算.

證明 $P_{12}\times P_{23}\times P_{34}\times P_{41}=1$

$P_{12}\times P_{23}\times P_{34}\times P_{45}\times P_{51}=1$ 等等.

已知 $P_{12}\times P_{23}\times P_{31}=1$

或 $$P_{34}\times P_{41}\times P_{13}=1$$

因 $$P_{13}=\frac{1}{13}$$

則 $$P_{34}\times P_{41}\times \frac{1}{P_{31}}=1$$

$$P_{34}\times P_{41}=P_{31}$$

依照上式,故 $P_{12}\times P_{23}\times P_{34}\times P_{41}=1$. 若用同一計算方法求出 $P_{45}\times P_{51}=P_{41}$, 則可得 $P_{12}\times P_{23}\times P_{34}\times P_{45}\times P_{51}=1$. 若求出 $P_{56}\times P_{61}=P_{51}$, 則可得 $P_{12}\times P_{23}\times P_{34}\times P_{45}\times P_{56}\times P_{61}=1$ 等等.

綜合言之,三大還元試驗中須以基位還元爲最要,故自一八九六年教授皮爾生(Professor N. G Person)創用後,一九〇一年瓦許卽承認其重要,一九一一年費霞教授更闡明其意義.雖然,基位還元試驗亦不可認爲試驗公式之惟一標準,蓋合於此試驗者不必皆爲優良之公式,不合此試驗者,亦不必皆爲不良之公式,如中數及衆數之簡單公式,雖合於此試驗,仍無補於其任性之弱點,簡單綜合法雖合於此試驗,而無救於其"無定"(erratic)之弊.另一方面拉貝二氏公式雖不合於此試驗,而仍可屬於優良公式之列.次於基位還元試驗者,爲因數還元試驗;蓋因數至少有兩個,欲爲其試驗,先須以兩個以上因數之材料分別計算指數,例如物價與物量,須分別求出指數,然後乘之,始可視其能否合於物值指數也.若循環試驗又其次;蓋各種公式以能否合於前兩試驗定其優劣,而對於循環試驗不必求其滿意,惟視循環裂罅之大小以定公式之良否,宜創此名詞之瓦許亦謂此種試驗,爲消極的指摘謬妄,而不能證定指數,教授費霞僅稱前兩試驗爲指數之兩個基本試驗(basic tests.)也

第九章 指數之偏誤

指數常因計算方法不同及材料選取不當,有若干偏誤.所謂偏者即爲一定方向之差異,譬如對於指數加以時間還元試驗,其結果逾於 1 者爲偏於向上,少於 1 者爲偏於向下.偏之所以生,由於計算方面者二:一爲應用有偏之公式,一爲採取有偏之權數,前者所致之偏曰公式偏 (Type Bias), 後者所致之偏曰權數偏 (Weight Bias). 以算術平均及調和平均公式計算之指數或偏向上,或偏向下,此無疑爲公式偏.若權數偏則費霞教授嘗謂擬算期之權數輒偏於向上,基期之權數輒偏於向下.若由於材料方面者,則視其分配狀況,如差異頗大,其偏往往較大.所謂誤者即方向不定之差異,其所以發生,由於計算方面者,譬如指數公式不能合時間還元與因數還元試驗,爲時間還元試驗,則向前指數與向後指數相乘之積非 1;爲因數還元試驗,則物價比與物量比相乘之積不等於物值比;此所致之差誤若屬於時間還元試驗之結果,究由於向前指數抑向後指數,屬於因數還元試驗之結果,究由於物價比抑物量比,此固未可肯定,故當由兩者共任之,可名此種差誤爲公共差誤 (Joint errors). 由於材料方面者,則因選取材料,有時所揀樣例不足以代表全體,此所致之差誤,曰選樣差誤 (errors of sampling). 凡此偏誤,屬於各種指數公式者,及其計算之方法,可分別述之於後.各種指數公式偏之程度,教授費霞嘗別之爲五級,似叉分五股,遂稱爲"五股叉形"(five-tined fork), 表示之如下:

表 19　五股叉形

<table>
<tr><th rowspan="2">叉　股</th><th colspan="4">公　式</th></tr>
<tr><th>算術的</th><th>調和的</th><th>幾何的</th><th>綜合的</th></tr>
<tr><td>重向上偏 (2+)</td><td>7,9</td><td>14,16</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>僅向上偏 (1+)</td><td>1003</td><td>1014</td><td>24,26,27,29</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">無偏 (0)</td><td>3=6=(L)
4=5=(P)</td><td>17=20=(L)
18=19=(P)</td><td></td><td>53=60=(L)
54=59=(P)</td></tr>
<tr><td colspan="2">107,108, 109,110,
1103, 1104,</td><td>123,124,125,
126,1123,1124</td><td>1153,1154</td></tr>
<tr><td>207,209</td><td>213,215</td><td>223,225,
227,229,</td><td>2153 2154
3153 3154
4153 4154</td></tr>
<tr><td>203=205=</td><td>217=219=</td><td rowspan="2">323,325,
1323</td><td rowspan="2">153=154=
253=259=
353=$\sqrt{L \times P}$
1353
2353 3353
4353 5307
5323 6053
7053 8053
8054</td></tr>
<tr><td colspan="2">103=104=105=106=
303=305=($\sqrt{L \times P}$)
307,309,1303</td></tr>
<tr style="display:none"></tr>
<tr><td>僅向下偏 (1−)</td><td>1004</td><td>1013</td><td>23,25,28,30</td><td></td></tr>
<tr><td>重向下偏 (2−)</td><td>8,10</td><td>13,15</td><td></td><td></td></tr>
</table>

公式行之數字爲教授費雪所定各公式之記號,可參閱附錄乙.

L 代表拉斯貝爾公式 (Laspeyres' Formulae)

P 代表貝許公式 (Poasche's Formulae)

由上表,可知有公式偏與權數偏二者之一,則爲僅偏;若兼有之,則爲重偏.上向偏與下向偏各有僅偏與重偏兩種,合無偏者,共爲五級.至若材料之差異對於偏之影響,苟欲明其程度,可先求出差異指數(Dispersion Index),此種指數卽用以表示相對數互相分歧之程度者也.差異指數求出後,更求公式所致之偏,然後尋兩者之關係.其演算法如下:

設　d 爲差異指數.

r 與 r′ 爲兩種同重要貨物之價比,而 r 較大於 r′.

D 爲物價比間之總差異數.

使
$$1+D=\frac{r}{r'}$$

但　選取各種貨物價比自其平均數之差異,而幾何平均之,得平均差異數,以 d 代表之,在此處之平均差異數卽當總差異數之幾何的一半.

則
$$1+D=(1+d)^2$$

$$1+d=\sqrt{1+D}=\sqrt{\frac{r}{r'}}=\frac{r}{\sqrt{rr'}}=\frac{\sqrt{rr'}}{r'}$$

$$\frac{1}{1+d}=\frac{1}{\sqrt{1+D}}=\sqrt{\frac{r'}{r}}=\frac{r'}{\sqrt{rr'}}=\frac{\sqrt{rr'}}{r}$$

$$r=(1+d)\sqrt{rr'}$$

$$r'=\left(\frac{1}{1+d}\right)\sqrt{rr'}$$

因　僅有兩比數 r 與 r′,其算術平均(A)與調和平均(H)式如下:

$$A=\frac{r+r'}{2}$$

$$H=\frac{2}{\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}}$$

則

$$A=\frac{\left(1+d+\frac{1}{(1+d)}\right)\sqrt{rr'}}{2}$$

$$H=\frac{2\sqrt{rr'}}{(1+d)+\left(\frac{1}{1+d}\right)}$$

$$\frac{A}{H}=\left(\frac{(1+d)+\frac{1}{1+d}}{2}\right)^2$$

$$A=\frac{(1+d)+\frac{1}{(1+d)}}{2}$$

$$H=\frac{2}{(1+d)+\frac{1}{(1+d)}}$$

又設　B爲算術平均之向前指數及向後指數之公共偏(joint bias).

b 爲算術平均之向前或向後指數之偏.

A 爲算術平均的指數向前計算者.

H 爲調和平均的指數向前計算者.

因　算術平均向前的指數 $=\frac{\Sigma\frac{P_1}{P_0}}{n}$

算術平均向後的指數 $=\frac{\Sigma\frac{P_0}{P_1}}{n}$

調和平均向前的指數 $=\frac{n}{\Sigma\frac{P_0}{P_1}}$

則

$$\frac{\Sigma\frac{P_0}{P_1}}{n}=\frac{1}{\frac{n}{\Sigma\frac{P_0}{P_1}}}$$

算術平均的向前指數×算術平均的向後指數$=A\times\frac{1}{H}$

$$1+B=A\times\frac{1}{H}=\frac{A}{H}$$

$$(1+b)^2=1+B$$

$$1+b=\sqrt{\frac{A}{H}}=\frac{A}{\sqrt{AH}}$$

$$\frac{1}{1+b}=\frac{H}{\sqrt{AH}}$$

是故
$$1+b=\frac{(1+d)+\frac{1}{(1+d)}}{2}$$

用此公式即可尋出偏(b)與差異指數(d)之關係.偏隨差異增加頗速.當差異爲0,偏亦爲0;差異爲百分之5,偏幾可忽視;差異爲百分之50,偏即爲百分之8.34,可參閱表20.

偏與差異相當之數

表20　　百分數

差異指數 (d)	偏 (b)
5	.12
10	.45
20	1.67
30	3.46
40	5.72
50	8.34
100	25.00

以上求差異指數之公式乃假定爲兩個比數演算者.若比數有兩個以上則計算差異指數,常用標準差(standard deviation),此標準差之求法,即取各比數之離中差之平方之平

均數而開方之,離中差可起自算術平均數或幾何平均數,惟後者較前者爲宜,因算術平均牽上之勢甚於扯下,而幾何平均則無此弊也.雖然,無論偏與差異之程度何若,離自算術平均數與幾何平均數之標準差,頗相脗合,可參閱教授費霞所作之各年之物價標準差表如下:

物價之標準差

表 21　　百分數

基　　期	1914	1915	1916	1917	1918
定基					
算術的標準差	10	16	20	33	24
幾何的標準差	11	17	21	39	33
鏈基					
算術的標準差	10	11	21	21	18
幾何的標準差	11	12	22	22	22

雖差異項數甚多,吾人固可化爲兩項假想的比數:一則居於(幾何)平均數之上,以代表在平均數上之全體比數;一則居於(幾何)平均數之下,以代表在平均數下之全體比數,其一項離平均數之比數爲 $1+d$,兩項當爲 $(1+d)^2$. 惟似此以幾何的或對數的方法決定標準差的差異指數與依原適用於兩項比數之公式 $1+b=\dfrac{1+d+\frac{1}{1+d}}{2}$ 求出之偏(b)關係如何.亦可答之曰,甚切.蓋吾人若演明 d 與 A 及 H 之關係,則 b 及差異指數(d)在任若干量數情形下之關係可以了然.至 d 與 A 及 H 之關係.演式如下:

因 $$1+b=\frac{(1+d)+\left(\frac{1}{1+d}\right)}{2}$$

$$1+b=\frac{A}{\sqrt{AH}}$$

則 $$\frac{(1+d)+\left(\frac{1}{1+d}\right)}{2}=\frac{A}{\sqrt{AH}}$$

$$(1+d)+\left(\frac{1}{1+d}\right)=2\cdot\frac{A}{\sqrt{AH}}$$

$$(1+d)^2+1=2\cdot\frac{A}{\sqrt{AH}}\cdot(1+d)$$

$$(1+d)^2-2\cdot\frac{A}{\sqrt{AH}}\cdot(1+d)+1=0$$

依二項定理 $ax^2+bx+c=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

則 $a=1,\quad b=-2\cdot\frac{A}{\sqrt{AH}},\quad c=1,\quad x=(1+d)$

故 $$1+d=\frac{2\cdot\frac{A}{\sqrt{AH}}\pm\sqrt{\left(2\cdot\frac{A}{\sqrt{AH}}\right)^2-4}}{2}$$

$$=\frac{2\frac{A}{\sqrt{AH}}\pm\sqrt{4\frac{A}{H}-4}}{2}$$

$$=\frac{2\left(\frac{A}{\sqrt{AH}}\pm\sqrt{\frac{A}{H}-1}\right)}{2}$$

$$=\frac{A}{\sqrt{AH}}\pm\sqrt{\frac{A}{H}-1}$$

$$=\frac{A}{\sqrt{AH}}\pm\frac{\sqrt{\frac{A}{H}-1}\cdot\sqrt{AH}}{\sqrt{AH}}$$

$$=\frac{A\pm\sqrt{\frac{A}{H}\cdot AH-AH}}{\sqrt{AH}}$$

$$=\frac{A\pm\sqrt{A^2-AH}}{\sqrt{AH}}$$

上舉公式如改用調和的方法演算亦可,惟須將1+d變為$\frac{1}{1+d}$,而 d 本身固猶是也.

至以 A 及 H 卽原材料求出之特別的差異指數(d)與幾何的(用對數法計算)標準差密切之情形,教授費霞嘗列一表如下,以表示之.

三十六種簡單的貨物特別的差異指
數與對數法計算的標準差之比較

表 22　　百分數

	特別的	標準的
1914	11.5	11.5
1915	17.3	17.2
1916	21.5	21.4
1917	39.2	38.7
1918	33.7	33.1

若所採取之材料須加權數,則計算方法與前稍異.其演式如下:

設以 A′ 及 H′為加權的算術與調和平均的指數,

則
$$1+b=\frac{A'}{\sqrt{A'H'}}=\frac{(1+d)+\left(\frac{1}{1+d}\right)}{2}$$

$$1+d=\frac{\sqrt{A'^2-A'H'}+A'}{\sqrt{A'H'}}$$

以此公式求出之特別的差異指數與以對數法計算的標準差亦頗相近,教授費霞嘗列一表以表示之(此表所用之

權數爲 $\sqrt{P_0q_0P_1q_1}$ 如下:

三十六種加權的貨物之特別的差異指數與以對數法計算的標準差之比較.

表 23　　百分數

	特別的	標準的
1914	8.3	7.7
1915	15.3	15.1
1916	19.2	19.2
1917	39.1	38.9
1918	26.2	26.5

以上所述乃關於簡單或加適中的權數之算術或調和的公式偏;現須研究各種加權方法之權數偏.

假設有如前之兩貨物,其價比爲

$$\frac{P_1'}{P_0'} \text{ 及 } \frac{P_1''}{P_0''} \text{ 卽 } 1+d \text{ 及 } \frac{1}{1+d}\cdot$$

P_0' 及 P_0'' 爲百分之100或1

則　P_1' 爲 $1+d$

P_1'' 爲 $\frac{1}{1+d}$

又假設　權數爲 $q_0'\ q_1'\ q_0''\ q_1''$.

$q_0'=q_1'$

$q_0''=q_1''$

以 q' 代表 q_0' 及 q_1'

q'' 代表 q_0'' 及 q_1''

使兩年兩價比之平均權數相等.

$$\sqrt{P_0'q_0'P_1'q_1'}=\sqrt{P_0''q_0''P_1''P_1''}$$

則 $$\sqrt{(1+p)q_0''q_1''}=\sqrt{\frac{1}{(1+q)}q_0''q_1''}$$

可化簡爲 $$\sqrt{(1+d)q'^2}=\sqrt{\frac{q''^2}{1+d}}$$

$$(1+d)q'^2=\frac{q''^2}{1+d}$$

$$(1+d)^2q'^2=q''^2$$

$$(1+d)^2=\frac{q''^2}{q'^2}$$

$$1+d=\frac{q''}{q'}$$

以 $q'=1$　　則 $q''=1+d$

吾人可代入各種指數公式之有上列記號者,其各記號所代表之數,爲明瞭起見,復列舉如下:

$$P_0'=1,\quad P_0''=1,\quad q_0'=1,\quad q_0''=1+d,\quad P_1'=1+d$$

$$P_1''=\frac{1}{1+d},\quad q_1'=1,\quad q_1''=1+d$$

公式 $$\frac{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0}\right)\sqrt{P_0q_0P_1q_1}}{\Sigma\sqrt{P_0q_0P_1q_1}}$$ 此卽費霞所定公式 1003

因 $$1+b=\frac{\left(\frac{P_1'}{P_0'}\right)P_0'q_0'P_1'q_1'+\left(\frac{P_1''}{P_0''}\right)P_0''q_0''P_1''q_1''}{P_0'q_0'P_1'q_1'+P_0''q_0''P_1''q_1''}$$

$$=\frac{\left[\frac{(1+d)}{1}\right]\times1\times1\times(1+d)\times1+\frac{\left(\frac{1}{(1+d)}\right)}{1}\times1\times(1+d)\times\frac{1}{(1+d)}\times(1+d)}{1\times1\times(1+d)\times1+1\times(1+d)\times\frac{1}{(1+d)}\times(1+d)}$$

$$=\frac{\frac{(1+d)^2}{1}+1}{(1+d)+(1+d)}=\frac{(1+d)^2+1}{2(1+d)}=\frac{(1+d)+\frac{1}{(1+d)}}{2}$$

$$2(1+b)=(1+d)+\frac{1}{(1+d)}=\frac{(1+d)^2+1}{(1+d)}$$

$$2b=\frac{1+2d+d^2+1-2-2d}{1+d}=\frac{d^2}{1+d}$$

故　$$b=\frac{d^2}{2(1+d)}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

公式　$$\frac{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0}\right)P_1q_1}{\Sigma P_1q_1}$$ 此卽費霞所定公式 9

因　$$1+b=\frac{\left(\frac{P_1'}{P_0'}\right)P_1'q_1'+\left(\frac{P_1''}{P_0''}\right)P_1''q_1''}{P_1'q_1'+P_1''q_1''}$$

$$=\frac{\left(\frac{(1+d)}{1}\right)\times(1+d)\times 1+\left(\frac{\frac{1}{(1+d)}}{1}\right)\times\frac{1}{(1+d)}\times(1+d)}{(1+d)\times 1+\frac{1}{(1+d)}\times(1+d)}$$

$$=\frac{(1+d)^2+\frac{1}{(1+d)}}{(1+d)+1}=\frac{\frac{(1+d)^3+1}{(1+d)}}{(1+d)+1}=\frac{(1+d)^3+1}{(1+d+1)(1+d)}$$

用析因數法　$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

則　$$(1+d)^3+1=(1+d+1)\{(1+d)^2-(1+d)+1)\}$$

$$\frac{(1+d)^3+1}{(1+d+1)(1+d)}=\frac{(1+d)^2-(1+d)+1}{(1+d)}=\frac{(1+d)^2}{(1+d)}-\frac{(1+d)}{(1+d)}+\frac{1}{(1+d)}$$

$$=(1+d)+\frac{1}{(1+d)}-1$$

故　$$b=d-1+\frac{1}{(1+d)}=\frac{d^2}{(1+d)}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

公式　$$\sqrt[\Sigma P_1q_1]{\pi\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{P_1q_1}}$$ 此卽費霞所定公式 29

因　$$1+b=\sqrt[P_1'q_1'+P_1''q_1'']{\left(\frac{P_1'}{P_0'}\right)^{P_1'q_1'}\times\left(\frac{P_1''}{P_0''}\right)^{P_1''q_1''}}$$

$$=\sqrt[(1+d)\times 1+\frac{1}{(1+d)}\times(1+d)]{\left[\frac{(1+d)}{1}\right]^{(1+d)\times 1}\times\left(\frac{\frac{1}{(1+d)}}{1}\right)^{\left[\frac{1}{(1+d)}\right]\times(1+d)}}$$

$$=\sqrt[(1+d)+1]{\left[\frac{(1+d)}{1}\right]^{(1+d)}\times\frac{1}{(1+d)}}$$

$$=\sqrt[(1+d)+1]{(1+d)^{(1+d)}\times\frac{1}{1+d}}$$

$$=\sqrt[(1+d)+1]{\frac{(1+d)^{(1+d)}}{(1+d)}}$$

$$=\sqrt[(1+d)+1]{(1+d)^{(1+d)-1}}$$

$$=\sqrt[2+d]{(1+d)^{d}}=(1+d)^{\frac{d}{2+d}}$$

二項展開法則

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)}{\lfloor n-2}x^{n-2}+nx^{n-1}+x^n$$

則

$$1+b=1+\frac{d}{2+d}d+\frac{\frac{d}{2+d}\left(\frac{d}{2+d}-1\right)}{\lfloor 2}d^2$$

$$+\frac{\frac{d}{2+d}\left(\frac{d}{2+d}-1\right)\left(\frac{d}{2+d}-2\right)}{\lfloor 3}d^3+\cdots\cdots$$

自第三項向右各項愈趨愈小姑略而不論

得

$$1+b=1+\frac{d^2}{2+d}+\cdots\cdots$$

故

$$b=\frac{d^2}{2+d}+\cdots\cdots,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

公式

$$\sqrt[\Sigma\sqrt{P_0q_0P_1q_1}]{\pi\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\sqrt{P_0q_0P_1q_1}}}$$

此卽費霞所定公式 1123

因

$$1+b=\sqrt{P_0'q_0'P_1'q_1'}+\sqrt{P_0''q_0''P_1''q_1''}$$

$$\sqrt{\left(\frac{P_1'}{P_0'}\right)\sqrt{P_0'P_0'P_1'P_1'}\times\left(\frac{P_1''}{P_0''}\right)\sqrt{P_0''q_1''P_0''q_1''}}$$

$$=\sqrt{1\times1\times(1+d)\times1}+\sqrt{1\times(1+d)\times\frac{1}{(1+d)}\times(1+d)}$$

$$\sqrt{\left(\frac{(1+d)}{1}\right)\sqrt{1\times1\times(1+d)\times1}}$$

$$\times\quad\times\left(\frac{\frac{1}{(1+d)}}{1}\right)\sqrt{1\times(1+d)\times\frac{1}{(1+d)}\times(1+d)}$$

$$=\sqrt[\sqrt{1+d}+\sqrt{1+d}]{(1+d)\sqrt{1+d}\times\left(\frac{1}{(1+d)}\right)\sqrt{1+d}}$$

$$=\sqrt[2\sqrt{1+d}]{\left(\frac{1+d}{1+d}\right)\sqrt{1+d}}=\sqrt{\frac{1+d}{1+d}}=1$$

故 $$b=0 \tag{4}$$

等式(1) 求出僅偏的算術之偏.而僅偏的調和之偏亦可反其式以求之.

等式(2) 求出重偏的算術之偏.而重偏的調和之偏亦可反其式以求之.

等式(3) 求出僅偏的幾何之偏.

等式(4) 無偏.

以上有偏之等式俱爲上向偏,但須調換 $1+b$ 爲 $\frac{1}{1+b}$, 顯可得下向偏.等式 1 爲平均權數之算術的公式,其偏則較等式 2 爲小,蓋等式 2 有重偏,除公式偏外復有權數偏也.等式 3 之幾何平均公式之偏當爲權數偏,此偏之程度顯大於前兩等式任一之單一偏,其所以較大者,因分母少一 d 及加以他項之故.介於等式 1 求出之算術指數的偏與等式 3 求出之加權幾何的偏之間,似生出極不同之結果;但教授費霞曾以三十六種貨價計算,求出兩者之結果,各合於標準差(d)之偏(b)極相類似.可參閱表 24.

表24 百分數

d	b	b
	等式1之結果	等式3之結果
5	.12	.12
10	.45	.45
20	1.67	1.67
30	3.46	3.48
40	5.72	5.77
50	8.33	8.45
100	25.00	25.99

至經時間還元及因數還元試驗所發現之公共差誤如何?費霞亦嘗用二十八種所謂原始公式(primary formulae)計算一九一三年與各年間之物價與物量指數,加以試驗,譬以一公式計算1917比1913年之指數,復計算1913比1917年之指數,而為時間還元試驗;又計算各年比1913年之物價指數及物量指數,而為因數還元試驗,其結果如下:

表25 每種公式向前及向後應用之公共差誤

(時間還元試驗)

物價指數

例 第一數字,+1.19之求法如下:

向前指數×向後指數(兩者計算均用公式1)

=96.32%×105.06%=101.19%,與眞數100%比較,其差誤為+1.19%

公式記號	1914 百分數	1915 百分數	1916 百分數	1917 百分數	1918 百分數
1	+1.19	+2.56	+3.83	+11.34	+ 8.68
3	−0.39	−0.43	−0.24	+ 0.63	+ 0.25
5	+0.39	+0.43	+0.24	− 0.63	− 0.25
7	+0.90	+3.73	+6.08	+24.53	+12.07
9	+1.68	+4.51	+6.56	+22.78	+11.03
11	−1.17	−2.50	−3.69	−10.17	− 7.99
13	−1.65	−4.39	−6.15	−18.55	− 9.93
15	−0.90	−3.60	−5.73	−19.70	−10.77
17	−0.39	−0.43	−0.24	+ 0.63	+ 0.25
19	+0.39	+0.43	+0.24	− 0.63	− 0.25
21	0	0	0	0	0
23	−1.01	−2.42	−3.28	− 9.60	− 4.99
25	−0.26	−1.59	−2.80	−10.75	− 5.53
27	−0.26	+1.62	−2.88	+12.05	+ 5.85
29	+1.02	+2.48	+4.32	+10.62	+ 5.26
31	0	0	0	0	0
33	−0.41	−0.58	−1.75	− 4.71	− 5.04
35	−0.13	−0.24	−1.29	− 2.23	−10.15
37	−0.13	+0.24	+1.30	+ 2.29	+11.30
39	+0.41	+0.58	+1.78	+ 4.95	+ 5.31
41	0	0	0	0	0
43	0±	0±	0±	0±	0±
45	0±	0±	0±	0±	0±
47	0±	0±	0±	0±	0±
49	0±	0±	0±	0±	0±

51	0	0	0	0	0
53	−0.39	−0.43	−0.24	+0.63	+ 0.25
59	+0.39	+0.43	+0.24	−0.63	− 0.25

註：　公式記號係教授費霞所擬定，可參閱附錄乙。

表26　每一公式之物價及物量應用之公共差誤

(因數還元試驗)

向前的指數

舉例　第一數字，−3.85 求法如下：

物價指數×物量指數(兩者計算均用公式 1)
=96.32%×99.27%=95.617%，與眞值比 99.45 % 比較，其差誤當眞的 99.45 百分之 3.85.

公式記號	1914 百分數	1915 百分數	1916 百分數	1917 百分數	1918 百分數
1	−3.85	+2.19	+12.73	+15.08	+ 5.40
3	−0.39	−0.43	− 0.24	+ 0.63	+ 0.25
5	+0.39	+0.43	+ 0.24	− 0.63	− 0.25
7	+1.55	+4.53	+ 5.67	+18.44	+11.92
9	+2.26	+5.53	+ 6.47	+16.62	+10.58
11	−8.01	−5.66	+ 3.27	− 8.27	−29.50
13	−2.51	−4.46	− 4.96	−12.58	−11.18
15	−1.67	−3.80	− 4.81	−14.02	−11.90
17	−0.39	−0.43	− 0.24	+ 0.63	+ 0.25
19	+0.39	+0.43	+ 0.24	− 0.63	− 0.25
21	−5.84	−1.86	+ 7.79	+ 2.95	− 7.22
23	−1.40	−2.57	− 2.76	− 6.53	− 5.22

25	−0.61	−1.79	− 2.46	− 7.81	− 5.61
27	+0.60	+1.87	+ 2.51	+ 8.74	+ 5.91
29	+1.35	+2.81	+ 3.19	+ 7.40	+ 5.08
31	−0.66	−3.55	+ 2.41	+ 1.02	+ 4.02
33	−0.85	−5.04	− 8.85	− 5.69	− 7.05
35	−0.49	−4.42	− 8.72	− 3.21	− 7.15
37	+0.04	−2.37	− 6.83	+ 3.80	+ 4.74
39	+0.23	−1.78	− 6.65	+ 2.46	− 1.23
41	−5.77	−9.26	−13.60	−19.16	+ 3.83
43	−1.94	−5.66	−18.18	−16.33	− 6.67
45	−1.94	−5.66	−18.18	−16.33	− 6.67
47	−1.94	−5.66	−18.18	−16.33	− 6.67
49	−1.94	−5.66	−18.18	−16.33	− 6.67
51	−1.28	−0.92	− 5.98	− 7.41	+ 4.61
53	−0.39	−0.43	− 0.24	+ 0.63	+ 0.25
59	+0.39	+0.43	+ 0.24	− 0.63	− 0.25

註: 公式記號係教授費實所擬定,可參閱附錄乙.

由上兩表可知適合時間還元試驗者,只有簡單幾何平均、中數、範數與綜合比率,即公式21、31、41與51.其他皆有若干之差誤,有六公式(3, 5, 7, 19, 53, 59)爲無定,九公式(1, 7, 9, 27,29, 37, 39, 47, 49)爲上向偏,九公式(11, 13, 15, 23, 25, 33, 35, 43, 45)爲下向偏.若因數還元試驗,則無一能適合,其差誤自 0% 至約 30% (以簡單調和平均法求 1918 年物價指數,經因數還元試驗之結果,爲差誤百分之 29.50). 公式 7、9、13、15 等之差誤較大.公式 3、5、17、19、53、59 等較小.此二十八種公式無一能完全避免此兩種公共差誤者.至還樣之差誤可用標準差誤(standrd error)之計算公式求之.其式如下:

$$標準差誤=\frac{S}{\sqrt{n}}$$

S 為標準差,n 為選取材料之項數.

設引用機遇率(Laws of Probabilities),則標準差誤應乘以三分之二,結果即離平均數之或然差異,普通稱為概誤(Probable Error),例如某項指數為 132,其標準差誤為 6,即該指數之結果與若用全體材料求出之指數相差,或高或低,應不逾 6(即 138 與 126(132±6)),倘用概誤,則指數為 136 或 128(132±$\frac{2}{3}$×6).尚有一法為美人凱萊(Truman L. Kelley)所主張用以計算概誤者,乃先將全體材料平分為兩部分,用同樣公式分別求出其指數,曰分指數(sub-indices),介於兩分指數間求其相關 r,然後求其可靠的係數(co-efficient) R,即 $\frac{2r}{1+r}$,再分別求每一分指數之標準差,復相加而平均之,代表以 σ,由此可用公式 $\sigma'=\sigma\sqrt{\frac{1+r}{2}}$ 求原指數之標準差,R 及 σ' 既經求出,即可從而求出原材料之概誤,其式如下:——

$$P.E.=.6745\sigma'\sqrt{1-R}$$

例如 200 種貨物,先分為兩組,每組 100,求出 A 之標準差 0.0344 及 B 之標準差 0.0351,兩者平均為 0.03475,r 為 0.790,則 σ' 為 0.0329,R 為 0.883,而 P.E.=0.008;此即以 200 種貨物為樣例所求出指數,與以理想的全體貨物所求出者之差異也.惟計算物價指數,用凱萊所主張之方法求其概誤,據凱萊本人云:“在市價變動時間距離太近時,不宜.必須陸續編製之指數,時間距離較遠,蓋如此,則包含之物價始足以保其相對的獨立也;是則指數之時間距離甚近,如三個月以下,此法應摒去不用.”

第十章　公式之矯正

指數既有若干之偏誤,吾人自應究其癥結之所在,有以矯正之.一方面須慎選材料,精密計算;一方面可修正公式或其權數.前者屬於一般統計技術與數學程度,固不置議,而後者特關於指數之計算,當有以解說之.

矯正一公式,可用與有關係成對立的其他公式.此對立的公式,可矯正原公式使合於時間還元試驗者,曰"時間對偶"(Time Antithesis),此名詞乃沿用費霞教授所規定者,其實與時間還元試驗同樣不限於時間性變動之計算;可矯正原公式使合於因數還元試驗者,曰因數對偶(Factor Antithesis).求時間對偶,第一步即依時間還元試驗之方法調換時間以求指數,第二步乃以第一步之結果除1;譬以 P_{01} 代表時間"1"比時間"0"之指數,P_{10} 代表時間"0"比時間"1"之指數,此即調換前一指數所依據之時間,重編成者,以之除1,即為時間對偶,舉例演明如下:——

設　P_0 為基期之物價

P_1 為擬算期之物價

n 為物價項數

原公式　$$P_{01}=\frac{\Sigma\frac{P_1}{P_0}}{n}$$

調換時間改變為　$$P_{10}=\frac{\Sigma\frac{P_0}{P_1}}{n}$$

原公式之時間對偶即 $$\frac{1}{P_{10}}=\frac{1}{\frac{\Sigma\left(\frac{P_0}{P_1}\right)}{n}}=\frac{n}{\Sigma\left(\frac{P_0}{P_1}\right)}$$

一公式之時間對偶仍可用同樣手續還元.例如 P_{01} 爲由時間"0"向"1"計算之指數,依兩種手續,第一步調換時間求出指數 P_{10},第二步顚倒之爲 $\frac{1}{P_{10}}$,此卽 P_{01} 之時間對偶;若用同樣手續由指數 $\frac{1}{P_{10}}$ 求其時間對偶,則第一步調換時間求出指數 $\frac{1}{P_{01}}$,第二步顚倒之爲 P_{01},此卽 $\frac{1}{P_{10}}$ 之時間對偶,固原起計算之公式也.然則一公式爲另一公式之時間對偶,則另一公式亦爲此一公式之時間對偶,易言之,卽一公式與其時間對偶之公式實互爲時間對偶者也.適所舉之例爲原公式簡單比率的算術平均與其對偶簡單比率的調和平均,卽費霞所定公式 1 與 11(參閱附錄乙),若更加權,演成公式如下:

以　q_0 爲基期物量

q_1 爲擬算期物量

P_0q_0 爲基期物值

P_1q_1 爲擬算期物值

$$P_{01}=\frac{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0}\right)P_0q_0}{\Sigma P_0q_0}$$

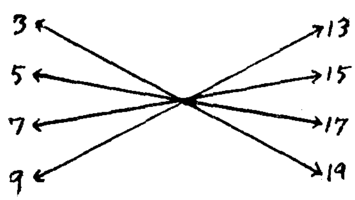
$$P_{10}=\frac{\Sigma\left(\frac{P_0}{P_1}\right)P_1q_1}{\Sigma P_1q_1}$$

$$\frac{1}{P_{10}}=\frac{\Sigma P_1q_1}{\Sigma P_1q_1\left(\frac{P_0}{P_1}\right)}$$

此處 P_{01} 與其對偶 $\frac{1}{P_{10}}$ 兩公式,卽費霞所定公式 3 與 19;以此類推,費霞教授編成一表如下:

表 27

公式			費雪所擬公式記號	
			算術的	調和的
簡單			1 ←———→ 11	
加	I	$P_0 \quad q_0$		
	II	$P_0 \quad q_1$		
	III	$P_1 \quad q_0$		
權	IV	$P_1 \quad q_1$		



←———→　此為互為時間對偶之符號

至綜合的比率及比率的幾何平均,中數,範數等公式均可用同上手續求時間對偶,玆依次述之如下:

$$P_{01}=\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}$$

$$P_{10}=\frac{\Sigma P_0}{\Sigma P_1}$$

$$\frac{1}{P_{10}}=\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}$$

$\frac{1}{P_{10}}$與 P_{01} 之結果一致;故謂簡單綜合的比率公式可合於時間還元試驗,蓋其時間對偶卽其本身也.若加權的綜合式則不然,其式可演明如下:——

$$P_{01}=\frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0}$$

$$P_{10}=\frac{\Sigma P_0 q_1}{\Sigma P_1 q_1}$$

$$\frac{1}{P_{10}}=\frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1}$$

P_{01} 與 $\frac{1}{P_{10}}$ 公式,卽費霞所謂公式53與59,是則綜合的比率之時間對偶可以一線連結之如下:——

表 28

綜合的比率		費霞所擬公式記號
簡單		51)
加權	q_0	53 }
	q_1	59 }

$$P_{01}=\sqrt[n]{\frac{P_1'}{P_0'}\times\frac{P_1''}{P_0''}\times\frac{P_1'''}{P_0'''}\times\cdots\cdots}$$

$$P_{10}=\sqrt[n]{\frac{P_0'}{P_1'}\times\frac{P_0''}{P_1''}\times\frac{P_0'''}{P_1'''}\times\cdots\cdots}$$

$$\frac{1}{P_{10}}=\sqrt[n]{\frac{P_1'}{P_0'}\times\frac{P_1''}{P_0''}\times\frac{P_1'''}{P_0'''}\times\cdots\cdots}$$

$\frac{1}{P_{10}}$ 與 P_{01} 之結果一致,故謂簡單比率的幾何平均亦可合時間還元試驗,但加權的則不然,茲將幾何平均的時間對偶,以線連結如下:——

表 29

幾何平均			費霞所擬公式記號
簡單			21)
加權	I	P_0 q_0	23 }
	II	P_0 q_1	25 }
	III	P_1 q_0	27 }
	IV	P_1 q_1	29 }

簡單比率的中數與範數之時間對偶,亦各爲其本身.惟有須注意者,卽比率的項數如爲偶數時,須以中間二項之幾何平均數爲中數.關於中數與範數之時間對偶以線連結如

下:——

表 30

費霞所定	31)
中數公式	33, 35, 37, 39
記號	

表 31

費霞所定	41)
範數公式	43, 45, 47, 49
記號	

求因數對偶亦可分兩步.例如有關於物價者:則第一步,將物價易為物量,求物量比;第二步,以物量比除物值比.其求出之結果苟仍為物價比,卽合於因數還元試驗,否則為因數對偶.今且用代數式演明如下:——

設　P_{01} 為向前物價比

Q_{01} 為向前物量比

V_{01} 為向前物值比

1　$$P_{01} = \frac{\Sigma \frac{P_1}{P_0}}{n}$$

(1)　易 P 為 q　$$Q_{01} = \frac{\Sigma \frac{q_1}{q_0}}{n}$$

(2)　除 V 或 $\frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_0}$　$$\frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_0} \div \frac{\Sigma \frac{q_1}{q_0}}{n}$$

11　$$P_{01} = \frac{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0}\right) P_1 q_0}{\Sigma P_1 q_1}$$

(1)　易 P 為 q　$$Q_{01} = \frac{\Sigma\left(\frac{q_1}{q_0}\right) q_1 P_0}{\Sigma q_1 P_0}$$

(2)　除 $\frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_0}$　$$\frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_0} \div \frac{\Sigma\left(\frac{q_1}{q_0}\right) q_1 P_0}{\Sigma q_1 P_0}$$

111　　$P_{01}=\frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0}$

(1)　易 P 為 q　　$Q=\frac{\Sigma q_1 P_0}{\Sigma q_0 P_0}$

(2)　除$\frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_0}$　　$\frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_0}\div\frac{\Sigma q_1 P_0}{\Sigma q_0 P_0}=\frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1}$

以上三公式皆不能合因數還元試驗,因各自之因數對偶非其本身也.至$\frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0}$即學者習知之拉斯貝爾公式,費霞定為公式53;$\frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1}$即學者習知之貝許公式,費霞定為公式59;與53為一致者,有費霞所謂公式 3、6、17、20、60 等,可稱之為拉派公式(Type L);與59為一致者,有費霞所謂公式 4、5、18、19、54 等,可稱之為貝派公式(Type P).此兩派公式在算術平均、調和平均及綜合比率法中皆可尋出,兩方各任擇一,互為因數對偶.茲將兩派公式列表如下:

表 32

算術的	綜合的	調和的
3L	53L	17L
4P	54P	18P
5P	59P	19P
6L	60L	20L

對於各種公式既能求出其時間對偶或因數對偶,則以互為對偶之公式求出之指數,有一不合時間或因數還元試驗,其他亦必不合時間或因數還元試驗.各不合試驗之差異確為相反,故苟發現一公式不適合時間還元試驗,可演成時間對偶之公式以矯正之;不適合因數還元試驗,則演成因數對偶之公式以矯正之.矯正之法即交叉互為對偶之兩公式

而平均之,平均之法當以幾何的公式為最宜,蓋算術平均與調和平均法有公式偏,而交叉之公式僅以兩部分數字結果構成,無從求其中數與衆數也.惟對偶公式何以交叉後,能適合其所不能合之還元試驗,茲演式述明如下:

設　P_{01} 為向前指數

P_{10} 為向後指數

P_{01} 與其時間對偶 $\frac{1}{P_{10}}$ 交叉為 $\sqrt{P_{01}\times\frac{1}{P_{10}}}$, 此式必合於時間還元試驗,因 P_{10} 與其時間對偶 $\frac{1}{P_{01}}$ 交叉為 $\sqrt{P_{10}\times\frac{1}{P_{01}}}$,而兩交叉公式相乘卽 $\sqrt{P_{01}\times\frac{1}{P_{10}}}\times\sqrt{P_{10}\times\frac{1}{P_{01}}}$, 則 P_{01} 與 P_{10} 各有其倒數相銷,使結果為 1.

又設　P_{01} 為向前物價比

Q_{01} 為向前物量比

P_0q_0 為基期物值

P_1q_1 為擬算期物值

P_{01} 與其因數對偶交叉為 $\sqrt{P_{01}\times\frac{\Sigma P_1q_1}{\Sigma P_0q_0}\div Q_{01}}$, 此式必合於因數還元試驗,因 Q_{01} 與其因數對偶交叉為 $\sqrt{Q_{01}\times\frac{\Sigma P_1q_1}{\Sigma P_0q_0}\div P_{01}}$. 兩交叉公式相乘卽 $\sqrt{P_{01}\times\frac{\Sigma P_1q_1}{\Sigma P_0q_0}\div Q_{01}}$

$\times\sqrt{Q_{01}\times\frac{\Sigma P_1q_1}{\Sigma P_0q_0}\div P_{01}}$, 結果為 $\frac{\Sigma P_1q_1}{\Sigma P_0q_0}$.

例如自 1917 年向 1918 年計算之指數當 1917 年者百分之 110.11, 自 1918 年向 1917 年計算之指數當 1918 年者百分

之94.46,兩者相乘,其積非1,固不能合時間還元試驗,然若以二者任一,譬如百分之94.46,除1或百分之100,得百分之105.86,此為百分之110.11之時間對偶,乘百分之105.86以百分之94.46,將得百分之100,即1;又如以1913年為基期,計算1917年之簡單算術的指數為百分之175.79,其時間對偶,簡單調和的指數,同時期為百分之157.88,此兩數無一能合時間還元試驗,然若交叉之,得百分之166.60,即可適合時間還元試驗,因其調換時間,計算結果為百分之60.02也;又如以1913年為基期求出1917年之簡單比率的算術平均物價指數當1913年物價平準百分之175.79,而1917年以同樣方法平均的物量指數當1913年物量平準百分之125.84,此兩數之積,超過物值比百分之192.23,必有一太大,今若除192.23以物量指數125.84,求新物價指數152.76,此為原物價指數175.79之因數對偶,苟乘此因數對偶以物量指數,即可求出真值比百分之192.23,或除真值比以物價指數百分之175.79得百分之109.35,此即物量指數百分之125.84之因數對偶,若乘之以原物價比百分之175.79,即得真值比百分之192.23.

交叉兩時間對偶公式使合於時間還元試驗,除普通用幾何平均法外,尚可用綜合法,惟限於交叉兩幾何的或綜合的時間對偶之公式耳.例如兩幾何的時間對偶,

$$\frac{\Sigma P_0 q_0 \sqrt{{P_1}'^{\,{P_0}'{q_0}'} \times {P_1}''^{\,{P_0}''{q_0}''} \times \cdots\cdots}}{\Sigma P_0 q_0 \sqrt{{P_0}'^{\,{P_0}'{q_0}'} \times {P_0}''^{\,{P_0}''{q_0}''} \times \cdots\cdots}}$$

及

$$\frac{\Sigma {P_1}'{q_1}' \sqrt{{P_1}'^{\,{P_1}'{q_1}'} \times {P_1}''^{\,{P_1}''{q_1}''} \times \cdots\cdots}}{\Sigma {P_1}'{q_1}' \sqrt{{P_0}'^{\,{P_1}'{q_1}'} \times {P_0}''^{\,{P_1}''{q_1}''} \times \cdots\cdots}},$$

以綜合法併合之,卽加兩分子爲一新分子,加兩分母爲一新分母,又兩綜合的時間對偶,$\frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0}$及$\frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1}$,亦以綜合法併合之,卽成爲$\frac{\Sigma P_1 q_0+\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_0+\Sigma P_0 q_1}$;此兩綜合的交叉結果,均能適合於時間還元試驗也.

一公式與其時間或因數對偶交叉,既可合時間或因數還元試驗,則互爲時間對偶之兩公式各自之因數對偶交叉,亦必合時間還元試驗.例如物價指數 P_{01} 與$\frac{1}{P_{10}}$互爲時間對偶,用與計算物價指數相同之公式求出之物量指數 Q_{01} 與$\frac{1}{Q_{10}}$互爲時間對偶,則前兩者之因數對偶爲$\frac{\Sigma P_1 q}{\Sigma P_0 q_0}\div Q_{01}$與$\frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_0}\div\frac{1}{Q_{10}}$,此顯然爲時間對偶,因互易任一公式之"0"與"1",並將公式顚倒,卽可變爲其他公式也.互爲因數對偶之兩公式各自之時間對偶交叉,亦必合因數還元試驗.例如以 P_{01} 與 Q_{01} 分別代表物價與物量指數,$\frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_0}$代表物値比,則 P_{01} 與$\frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_0}\div Q_{01}$互爲因數對偶,其各自時間對偶卽$\frac{1}{P_{10}}$與 $Q_{10}\div\frac{\Sigma P_0 q_0}{\Sigma P_1 q_1}$,顯然互爲因數對偶也.若互爲因數對偶之公式與其各自之時間對偶交叉,或互爲時間對偶之公式與其各自之因數對偶交义,幾何平均之,卽可合時間與因數還元兩種試驗.

公式有所偏,致不能合時間或因數還元試驗,可取其時間或因數對偶與原公式交叉以矯正之.權數有所偏,當亦可將兩比較數之權數交叉以矯正之;例如

$$\frac{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0}\right)\sqrt{P_0 q_0 P_1 q_1}}{\Sigma\sqrt{P_0 q_0 P_1 q_1}}$$

及 $\Sigma\sqrt{P_0q_0P_1q_1}$ $\sqrt{\pi\left(\frac{P_1}{P_0}\right)\sqrt{P_0q_0P_1q_1}}$ 此兩公式之權數均爲基期與擬算期之物值交叉,幾何平均求得之數.權數交叉,不僅可用幾何平均法,且可用算術及調和平均法,例如 $\frac{\Sigma P_1\frac{q_0+q_1}{2}}{\Sigma P_0\frac{q_0+q_1}{2}}$ 及 $\frac{\Sigma P_1\left\{\frac{2}{\frac{1}{q_0}+\frac{1}{q_1}}\right\}}{\Sigma P_0\left\{\frac{2}{\frac{1}{q_0}+\frac{1}{q_1}}\right\}}$ 之權數是也.此三種交叉方法,據教授費霞謂,須以算術平均較優.彼並謂一公式之權數既經交叉,即可減少甚大差誤,蓋任兩權數雖相差百倍,交叉後,求出之指數鮮有逾百分之五之差,若偏的加權,例如

表 23 擴大算術——調和組

原始公式		交叉公式				交叉加權公式及其交叉				
算術的	調和的	合試驗 I	合試驗 II		合試驗 I II	算術的	調和的	算和術的及交調叉	其交叉	307及309交叉
1	11	101	201	211	301					
2	12	102								
——	13	——	——	213	——	1003	1013	1103	1303	
——	14	——				1004	1014	1104		
——	15	——	——	215	——					
——	16	——								
7	——	107	207	——	307					5307
8	——	108								
9	——	109	209	——	309					
10	——	110								

註: 本表及以下四表之數字爲費霞所定公式記號(可參閱附錄乙)

以基期或擬算期之數爲權數,雖其相差不及兩倍,求出之指數常有百分之八至十之差.由是可知兩個偏的權數雖微有不同,足以致差異頗巨之結果,如不偏,雖極不同,結果差異殊微,矯正公式與權數偏,除以兩公式或兩權數合併平均外,並可擴大至兩個以上之公式或權數.關於公式及其權數交叉,費霞常列成簡表如上:——

試驗 I　代表時間還元試驗

試驗 II　代表因數還元試驗

——　表示有其他公式可以代之

3=53	17=53	103=353	203=353	303=353
4=54	18=54	104=353	205=353	305=353
5=54	19=54	105=353	217=353	
6=53	20=53	106=353	219=353	

表 34　擴大幾何組

原始	交叉公式			交叉加權公式及其交叉		323及325
公式	合試驗 I	合試驗 II	合試驗 I 及 II	交叉加權公式	其交叉	交叉
——	121	——	321			
——	122					
23	123	223	323	1123	1323	5323
24	124			1124		
25	125	225	325			
26	126					
27		227				
28						
29		229				
30						

21=121　　22=122　　221=321

表 35　　擴大中數組

原始公式	交叉公式			交叉加權公式及其交叉		333及335
	合試驗 I	合試驗 II	合試驗 I 及 II	交叉加權公式	其交叉	交叉
- - -	131	—	331			
——	132					
33	133	233	333	1133	1333	5333
34	134			1134		
35	135	235	335			
36	136					
37		237				
38						
39		239				
40						

31 = 131　　32 = 132　　231 = 331

表 36　　擴大範數組

原始公式	交叉公式			交叉加權公式及其交叉		343及345
	合試驗 I	合試驗 II	合試驗 I 及 II	交叉加權公式	其交叉	交叉
- - -	141	—	341			
——	121					
43	143	243	343	1143	1343	5343
44	144			1144		
45	145	245	345			
46	146					
47		247				
48						
49		249				
50						

41 = 141　　42 = 142　　241 = 341

表37 擴大綜合組

原始公式	交叉公式			交叉加權公式及其交叉	
	合試驗 I	合試驗 II	合試驗 I II	交叉加權公式	其交叉
——	151	——	351		
——	152				
53	——	——	353	1153	1353
54	——			1154	

重複 除59,60,259,省去外用"——"表示

51＝151　153＝353　251＝351

52＝152　154＝353　253＝351

59＝53　259＝351

60＝54

權數交叉與公式交叉之公式求出之結果相近,惟後者因全部公式矯正之故,常較前者為正確耳.

公式與權數偏,不僅各可以其反對方向之公式與權數偏分別矯正,例如有上向偏之算術平均公式,矯正以下向偏之調和平均公式,有下向偏之基期權數,矯正以上向偏之擬算期權數;且可互為矯正,例如有上向的公式偏之算術平均公式矯正以有下向的權數偏之基期權數,有下向的公式偏之調和平均公式,矯正以有上向的權數偏之擬算期權數;而上向重偏之公式亦可用下向重偏之公式矯正之,兩者交叉,竟成為無偏之最佳公式也.

第十一章　指數之特性

指數因選取材料、定基、加權及計算方法之不同,而異其性質.材料爲物價也,則所編者物價指數;爲工資也,則所編者工資指數;爲生活費也,則所編者生活費指數.若材料頗多,其分子本身性質彼此相差極遠,而與未經採用者之性質相差極近,則對於全體事實代表性較大;材料誠足以代表一事實之全體,則所編指數乃可以顯示此一事實之眞情勢,非然者,將誤指數之目的.若基數固定,則所編指數有比較之中心;基數而隨時變更,則所編指數易於修正.至若權數以屬於基數或擬算數而有下向與上向偏之分;苟經常不變,則編成指數僅顯明其所欲揭示事項之變化,而不混雜有權數之變化,苟因時而變,則可以順適事項相對重要隨時之變動.指數旣以其所揭示事項之相對重要,欲有所影響而加權數,則與未加權者即簡單指數計算方法當有不同;益以併合材料之方法有三,即綜合的比率、平均的比率與比率的平均法;平均又分算術、調和、幾何三種,或代之以中數、範數等法;更交相推演,遂成公式逾百;然窮本探源,固僅少數簡單與加權併合平均之法耳.是故吾人欲公式爲適宜應用,先須明其由來各種方法之特性,其果能滿足下列數項者,則演成之公式最適宜於應用

1. 正確(accuracy)
2. 速度(speed)
3. 簡單(simplicity)
4. 易解(intelligibility)

茲將各種方法概述如下:

一、綜合比率法　在指數之各種計算方法中,以綜合比率法只須將實數相加,然後求比率,可謂最簡單,易解,因此計算速度亦極高,而其簡單者竟在公式中首屈一指;費霞教授嘗證之以事實,將三十六種物價與物量之材料,用各種公式計算指數,結果以簡單綜合法求出之定基指數需時56秒,其他方法所需時間竟無較少者.彼為便於比較起見,即以簡單綜合法求出定基指數所需時間為1,令當同樣材料用他方法計算之時間(參閱附錄丙).

綜合法除簡單,易解與計算迅速外,且其簡單者能合時間還元試驗,此其所長.而其所短,則受制於計數所依據單位之大小,若定單位較小時,則其所計之數影響於指數較微,若對於同種事物定單位較大時,則其所計之數影響於指數較大.譬如米價在1929年每石十元,1930年增為16元;小麥價在1929年每升七角,1930年為9角;豬肉價在1929年為每斤三角,1930年為三角五分;若以1929年為基期,其物價為100,用綜合法求1930年之物價指數,則為

$$\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}\times 100=\frac{16+.9+.35}{10+.7+.3}\times 100=156.8$$

此結果為正確乎?未也.蓋三種物量單位不相同,一為石,一為升,一為斤,而以其價相加,苟物量單位一易,結果即隨之而異.例如將米每石之價改為每斗之價,即現在價格當前價格十分之一.茲計算1930年物價指數如下:

$$\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}\times 100=\frac{1.6+.9+.35}{1+.7+.3}\times 100=142.5$$

因物品單位一變,指數亦隨之而變,其實指數所示之物價固未變也,此其謬誤,彰彰明甚.設若將不同性質之事物,以同一單位計其變數,例如卜拉德週刊社之躉售物價指數所取材料,勉強將各種貨物以一磅爲單位計價,以各種事物之重要原有軒輊,乃強用一種單位,殊有伸不重要事物而抑重要事物之嫌.是則雖稍異於前之不同單位者,而單位改變所致之弱點依然存在.雖然,若指數所示之事項單位原來相同,例如加權工資指數所取工資材料爲每人計算同樣單位之貨幣工資,則綜合法將不致蒙不同單位之影響.若用加權綜合法,加合宜之權數,則計數依據不同單位之差誤,或不致發生,則綜合法之缺點可以彌補.故自1864年貝齊等提倡及澳洲政府統計師泥不士(G. H. Knibbs)推用後;英國皇家統計會議(British Imperial Statistical Conference)並通過一議案,卽甯贊成綜合法,而拒絕算術平均法;美國勞工統計局戰備工業局等機關均相繼應用此法以計算批發物價矣.

二、平均的比率法　此法如爲算術平均者,與綜合法同樣可受事項不同單位之影響.例如銀價以盎斯計,改以噸計;煤價以噸計,改以公斤計;單位一變,計算結果卽不相同.若爲簡單算術平均的比率,亦與簡單綜合的比率同樣可合於時間還元試驗.惟所有平均的比率法,加權或不加權,其簡單、易能及計算速度有遜於加權或簡單的綜合比率法.譬仍用求綜合比率的指數之原例,計算算術平均的指數如下:——

$$\frac{\frac{\Sigma P_1}{n}}{\frac{\Sigma P_0}{n}}\times 100=\frac{\frac{16+.9+.35}{3}}{\frac{10+.7+.3}{3}}\times 100=156.8$$

復以米之計量單位爲斗,計算指數爲

$$\frac{\frac{\Sigma P_1}{n}}{\frac{\Sigma P_0}{n}}\times 100=\frac{\frac{1.6+.9+.35}{3}}{\frac{1+.7+.3}{3}}=142.5$$

此式固可改爲綜合的比率式,其利弊當可與綜合的比率相同;然以多加一層除法之手續,遂不如綜合法之便利.若調和平均,幾何平均等,則不能改爲綜合的比率,除因事項單位之不同,可影響其正確程度外,亦因實數併合,繼以平均,使計算上增加手續,其簡單易解與計算速度皆不如綜合的比率法也.至中數與範數的比率計算,雖屬簡單,有時以排列之麻煩,殊費時力;且更有其他平均法所無之缺點,卽基數與擬算數之中數或範數所代表事項未必一致,例如以一九一三年爲基期,求一九一八年之物價指數,先須將一九一三及一九一八年物價分別依次排列,各求其中數卽中位物價(the median price),其結果在一九一三年爲大麥價每蒲式耳美金 0.6263 元及橡皮價每磅 0.8071 元之幾何平均數 0.711 元,而在一九一八年則爲大麥價每蒲式耳 1.4611 元及羊毛價每磅 1.66 元之幾何平均數 1.5574 元,是若以一九一三年之價爲 100, 乘之以前一幾何平均數除後一幾何平均數之比率,求出一九一八年之物價指數,此實謬誤,又如一九一三年之範數爲棉花之價,一九一八年之範數爲小麥之價,以前者除後者,求一九一八年之物價指數,亦爲謬誤.

然則就平均的比率法全部言之,殊不宜於應用也.

三、比率的平均法 此法計算之速度不如前兩法,然以其能除去前兩法致命之弱點,卽將各種不同單位之實數化爲公母數,使可合於等量試驗(commensurability test),所謂合於等量試驗者,卽指數不爲材料之單位變動所影響也.是故指數之正確程度較前兩法爲高,教授費霞嘗謂眞的指數卽比率的平均(All true index numbers are average of ratios.). 他種方法苟能合成比率的平均,其求出指數之正確當與比率的平均相同,例如幾何平均的比率可化爲比率的幾何平均是.雖然,比率的算術平均與調和平均一則有上向偏,一則有下向偏,且不能如簡單比率的幾何平均、中數、範數等能合於時間還元試驗,並各呈矛盾之結果,此比率的平均法一部分之缺陷也.茲舉例以明之,在一九二九年,米每石價八元,麵粉每袋價四元,在一九三〇年,米每石十六元,麵粉每袋二元,則以一九二九年之物價爲基數 100, 求出一九三〇年之算術與調和平均之向前物價指數;復以一九三〇年之物價爲基數 100, 求出一九二九年之算術與調和平均之向後物價指數如下:

$$\text{算術平均的向前指數}=\frac{\Sigma\frac{P_1}{P_0}}{n}\times 100=\frac{\frac{16}{8}+\frac{2}{4}}{2}\times 100=125$$

$$\text{算術平均的向後指數}=\frac{\Sigma\frac{P_0}{P_1}}{n}\times 100=\frac{\frac{8}{16}+\frac{4}{2}}{2}\times 100=125$$

$$\text{調和平均的向前指數}=\frac{n}{\Sigma\left(\frac{P_0}{P_1}\right)}\times 100=\frac{2}{\frac{8}{16}+\frac{4}{2}}\times 100=80$$

調和平均的向後指數 $= \frac{n}{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0}\right)} \times 100 = \frac{2}{\frac{16}{8}+\frac{2}{4}} \times 100 = 80$

由上式則知每種平均之向前與向後指數相同,易言之以一九二九年爲基期求出之一九三〇年指數卽以一九三〇年爲基期求出之一九二九年指數,此其悖理爲何如耶!蓋若指數所示之事實在甲年者果高於乙年,則以任何計算方法,均不應違其原來之趨勢,今用算術與調和平均法,僅移動基期,卽變其趨勢,其方法之不正確殆無疑義.宜此兩法雖爲多數人所熟知,而現則爲人摒棄,如澳大利亞政府美國勞工統計局加拿大勞工統計部前嘗用算術平均法者,均捨之矣.若比率的幾何平均不僅無算術與調和平均之上下偏,且適介於其中.蓋幾何平均以比例差異爲依據,而算術與調和平均以實數差異爲依據,致同等比例之變化得對於幾何平均授以同等之影響,而對於算術與調和平均則否.例如有兩數50及200,其算術平均爲125,幾何平均爲100;以200倍於100,而100倍於50,上下於100者比例相同,100乃爲50與200之幾何平均數;然50與200離100之差數不同,一則較少50,一則較多100,故50與200之算術平均數非100,而爲較100爲多之125.又有兩數10與1000,其幾何平均數亦爲100,因10與1000離開100之比例差異相同,卽上下於100者同爲十倍也;但1000較100與100較10之實數差異不相同,且前者較後者爲多,故算術平均之結果較100爲多.更有兩數1與10000,其幾何平均仍爲100,因1與10000離開100之比例差異

亦相同,卽上下於 100 者同爲一百倍也;但10000較 1 之於 100 實數差異爲巨,故算術平均之結果遠過於 100. 由是可知幾何平均數加於小量之勢力多於算術平均數,而加於大量之勢力少於算術平均數,因宜其小於算術平均數也.再者,各量數之倒數之幾何平均之倒數(G)與各量數之倒數之算術平均之倒數卽調和平均數(H)相較如何?則於下式可以知之:

$$G=\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}\times\frac{1}{c}\times\cdots}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a\times b\times c\times\cdots}}}=\sqrt[n]{a\times b\times c\times\cdots}$$

$$H=\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\cdots\cdots\right)}=\frac{n}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\cdots\cdots}$$

各量數之倒數之幾何平均之倒數仍如實數之幾何平均數.而調和平均數卽不能如原來實數之算術平均數.調和平均數不僅不能與算術平均數相同,且較算術平均數爲小,並較幾何平均數爲小,而其較小於幾何平均數與幾何平均數較小於算術平均數之比例差異竟相同.例如50與 200 之幾何平均數爲 100, $\frac{1}{50}$ 與 $\frac{1}{200}$ 之幾何平均之倒數仍爲 100; 而50與 200 之算術平均數爲 125, $\frac{1}{50}$ 與 $\frac{1}{200}$ 之算術平均之倒數卽調和平均數爲80

80較 100 小 $\frac{1}{5}$, 100 較 125 亦小 $\frac{1}{5}$, 其比例實相同.

$$80:100=100:125$$

似此幾何平均數適介於算術與調和平均數之中,且算術與調和平均數之幾何平均確可等於原實數之幾何平均也.譬以 a 及 b 代表兩數演式如下:

$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\times\left(\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)}=\sqrt{a\times b}$$

幾何平均既介於算術與調和平均之間,足以減少量數變動較劇之勢,而生正平之結果.故學者多主用之,其最著者有如英人奇馮士德人蕃斯特格德(Westerguard)等;他如美國哈佛經濟調查委員會(Havard Commitee on Economic Research)等著名之學術機關亦用此法計算指數.雖然,編製指數苟爲測量事項之平均比例的變化,固以幾何平均法爲最合用,蓋其許相等影響於相等比例之改變,例如物價之增一倍與減一半影響程度視同一律也.但若爲測量事項之平均實數的變化,例如家庭用費實在幣額之增減,與其用幾何平均,毋甯用算術平均.况幾何平均計算手續較繁,卽利用對數表查算,往往所費時間仍較其他公式爲多,且其意義亦較深奧,致非一般人所習用焉.他若比率的中數及範數亦無顯著之偏,計算尚簡便,惟對於全體事實感應欠靈敏,猶鐘上之時針,不與使其轉動之輪密切連絡,致其性質爲易變與無定(indeterminate).所謂易變與無定者,卽指數因一二量數或權數之緊懈無常(spasmodic)或不規則,儘可變動,而其結果所發生之差異則常無一定之方向也.此種現象在事項愈少時亦愈甚,而範數較中數尤甚,蓋兩者雖同樣對於全體事實感應遲鈍,然中數尙能與其鄰近事項發生較深之關係,範數對於其他事項幾完全忽視,若事項愈少,範數愈難決定,例如有一團兵士,身長各不相同,其一爲5.9呎,遽視爲模範身長,此眞能代表全體之身

長乎?果能也,則其他身長亦可任取爲範數,是其易變非若中數尙有一中間之範圍也.中數與範數既易爲變,故教授費霞稱爲易變式 (freakish type),與簡單指數稱爲易變加權(freakish weighting)並名.雖然,有時事項繁雜,計算指數只欲粗獲結果,與其用其他公式,毋甯求中數或範數.譬如美人米切爾在戰備工業局公報第一卷(Bulletin No. 1 of the War Industries Board)登其所作之戰時物價史略 (Summary of the History of Prices During the War) 載有以 1437 種物品之價格,取戰前一年爲基期,求出一九一八年之價比;內 2 項物價當戰前百分之 30—49, 4 項當百分之 50—69, 17 項當百分之 70—80, 以後每間百分之 20 有各項數,即 61 項,64, 130, 212, 219, 164, 135, 104, 76, 54, 42, 30, 31, 16, 13, 77, 8, 4, 4, 4, 5, 3, 4, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 等,最後一價比爲當戰前百分之890—909, 範數應在有最多次數即 219 之部分,此部分即介於百分之 170 與 189 之間,故範數的指數爲百分之170—189, 若用圖示法,則於次數最高之一點可尋出範數的指數 173. 又如簡單中數的指數,米切爾白萊愛奇華士等嘗加贊許,依費霞教授根據實例計算之結果,與理想公式求出之指數近似,故指數所示事項之材料雖多而權數材料缺乏時,不能用加權的理想公式,亦可求出簡單中數以代之.

綜上所述,則吾人可略窺指數公式應用之途徑矣.設編製指數之目的爲測量事項比例的變化,宜用幾何平均,數.若測量事項實數的變化,甯用算術平均數.當指

數所示事實本身之材料尙足敷用只權數材料缺乏之時,爲慎重加權計,惟有不顧事實之相對重要而迫於爲簡單指數之計算,於此當以簡單幾何平均及簡單比率的中數爲最宜,若事實本身與權數材料均告缺乏,不欲極端事項有反常或不當之影響時,則宜用簡單比率的中數.若權數材料未必爲適當之時,爲阻止不重要事項極反常或不當影響,藉牘阻止重要事項適當影響之懲起見,亦宜用簡單比率的中數.若權數材料缺乏,而事實本身之材料極爲充分,欲全體有敏銳之感應,則宜用簡單的幾何平均法.至若所示事實本身與適當權數之材料均堪敷用,則宜採取加權幾何平均法.其次若材料之單位相同,可用加權的綜合比率法,若僅有粗估計或假定之單位相同之權數,可用能求出所謂簡便指數(rough-and-ready index numbers)之加常權的綜合比率法;若不重要事項極反常,而重要事項則否,與其用幾何平均法,以擴張影響於此種不重要事項之過甚的反常,反使擲出中途,不如用加權比率的中數.雖然,此所舉較宜實用之公式果有一能合於最完善公式之條件而適用於任何已有充分材料情況之下者乎?未也.謂此各公式計算迅速,簡明,易解,或無異言,謂其極臻可.苟有兼此四者,斯爲完善之公式,而費霞所謂指數確度標正確則不準之"理想公式"有焉.故瓦許(C. M. Walsh)稱爲指數公式之王 (the king of all index number formulae),戴靄德謂,在某種情形下可當爲指數之標準公式 (standard type of index number),皮果(A. C. Pigou),馬克萊 (Frederick R. Malcaulay) 楊靄連 (Allyn A. Young),達菲士寶萊等皆贊許之.此種公式因其爲拉斯貝爾與貝許公式之交叉,能合於時間及

因數還元試驗.時間還元試驗可以修正偏,因數還元試驗可以修正易變,故得免於偏及易變,而其概誤尙不及百分之一之百分之一;因其爲拉斯貝爾公式與貝許公式之交叉,則拉派公式與貝派公式亦可任便各取其一以爲代表合併以成;因其所交叉者爲兩時間對偶亦因數對偶,對於時間及因數還元試驗,只須合一種即合另一種,其他合於兩種試驗之加權的公式如 307, 309, 323, 325, 1303, 1323, 1353, 2353, 3353, 4353, 5307, 5323,(此皆費霞所擬公式號數參閱附錄乙)等無如此者,故在合於兩種試驗之加權的公式中爲最簡單;因其爲加基期權數之綜合的比率與加擬算期權數之綜合的比率交叉,綜合的比率式在各種指數公式中最易領會,計算迅速,故"理想公式"在合於兩種試驗之加權的公式中較爲易解而速於計算.再者費霞嘗以 134 種公式所求出之指數分爲七等:一日無價值,二日劣,三日中等,四日優,五日最優,六日卓越,七日至上,而理想公式求出之指數在各種公式內最爲適中,七等指數分別平均之結果,亦近於理想指數(可參閱附錄丁),足審各種指數皆傾向於"理想指數"也.

然而"理想公式"有幾何平均之手續,計算時仍覺麻煩.乃有愛奇華士及馬莎兩氏復介紹一公式,學者即稱爲"愛奇華士一馬莎公式"(Edgeworth–Marshall formula).其式如下:

$$\frac{\Sigma P_1(q_0+q_1)}{\Sigma P_0(q_0+q_1)}$$

應用此式求出之指數與理想指數極近,比較理想指數約少 $\frac{1}{2500}$,可稱爲費霞的變形指數 (Fisher's Modified index), 其概誤僅在百分之一之四分之一之間,而簡單,易解及計算速度足使其在實用方面爲上乘;故費霞稱爲能普遍實用之最佳

公式 (the best practical all-round formula). 除理想公式及愛奇華士一馬涉公式外,據費霞教授謂尚有由46原始公式elect取之大收成,計共27種優良公式,依次排列如下(可參閱附錄乙):

2353, 5323, 1353, 1323, 8053, 8054, 325, 323,
2154, 1153, 1154, 125, 123, 126, 124, 1123,
1124, 3353, 4353, 3153, 3154, 4153, 4154, 1303,
5307, 307, 309,

此各種公式中有合時間及因數還元兩種試驗者,有合於一種試驗者,亦有如8053, 8054, 不合任一試驗者,然其正確程度幾難判別,其所求出之指數鮮有過於"理想指數"百分之一之二分之一,故由正確方面視之,似均可代"理想公式"以應用於各種目的而竟不常實用者,即簡單、易解與計算速度不僅遜於"愛奇華士一馬涉公式",且不及"理想公式"也.

第十二章　修整指數

(Adjusted Indexes)

指數乃以時間數列爲最習見.時間數列變動之因素有四:卽長期趨向(Secular Trend),時節變化 (Seasonal Variation),循環波動(Cyclical Fluctuation)及意外變動 (Accidental Movements);指數之變動遂亦常受其影響.今欲明瞭指數所表示事實變動之眞象,對於其例有變動之因素,必須剔除之,其結果卽修整指數.此四種因素,除意外變動,以其事之發生常出於吾人控制能力範圍以外,無一定測量之方法;其餘皆有計算剔除之方法.玆分述之於後.

長期趨向

決定長期趨向需要之材料,須掩有悠長之時期,其起止所顯示者,宜爲同樣狀態.譬如起爲繁盛,終亦繁盛.易言之卽至少掩有一完全循環之週期.雖然,時期太長,漫無限制,亦非所宜,蓋如此統計數列或由於整理編製方法之改變,或由於一般經濟狀況異常變動之機會較多,其趨勢難於一致也.

對於趨向測量之方法有比較簡單而可獲不甚正確之結果者,亦有較煩難而能得比較精確之結果者.玆分舉於後:

1. 隨手畫法 (Free-hand Method)　　先依一數列之原來各項,繪一多邊形次數曲線以表示之.然後經此曲線,繪一直或曲而平滑之中線(median line).或放置一小繩於曲線各部位,依勢漸漸拉直,使曲線於其上下之面積約

相等,或正與負的差異能相等(閱圖3).復依據圖之量尺,

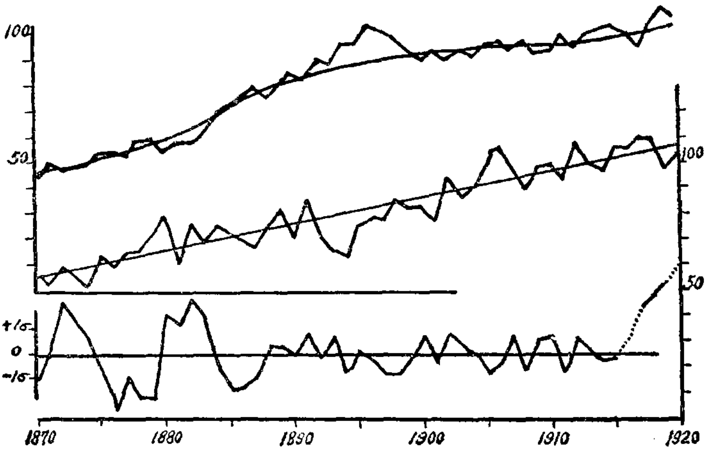


圖3　趨向及循環

檢視此假定趨向線 (line of trend) 兩端之數值,而取其間之差異,除以月數,求趨向線上按月增加數(amount of the monthly increment).

若欲取消趨向之影響,更須續求趨向縱距(ordinates of trend),即如自第一縱距依次遞加月增加數所得之各月數值;除每月實在數以同月趨向縱距,即得原數列經改正趨向者.在習慣上,爲欲消去小數位起見,或更乘此比率以 100 (可參閱表 50).

苟欲表示一幾何平均的趨向,可畫曲線及趨向線於半對數紙上(semi-logarithmetic paper).

此法甚簡便,善於繪圖者輒用以決定長期趨向.惟此僅可爲趨向粗率的測量,有時用爲初步窺測之目的.苟欲爲精確的測量,求得趨向經過之客觀數值,則非此

法所可勝任.且依此法,幾無兩繪圖者得畫一致之平滑曲線(參閱圖4),亦其缺點也.

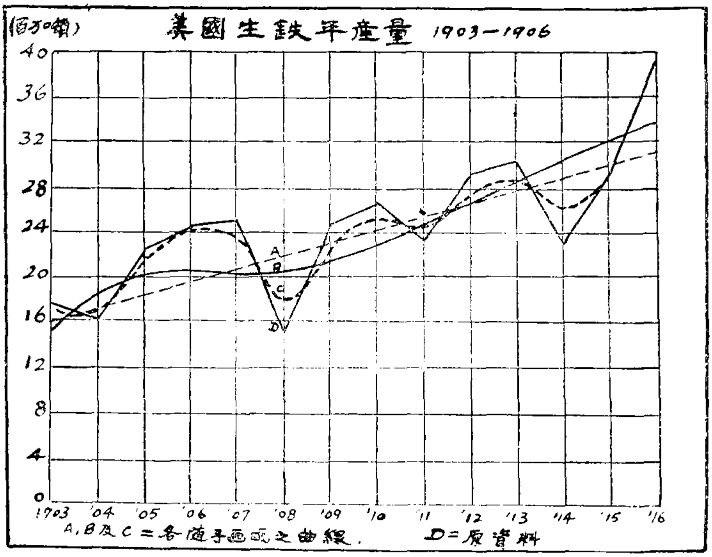


圖 4

2. 平均數列法 (Method of A Series of Averages) 此法乃將一長時期數列分成數相等部分,各求一平均數,以一點表示之,畫一線平滑經過此所有代表平均數之各點(參閱圖5).譬如一長時期數列掩有二十年,可分為四部分,即於第一期五年求一平均數,第二期第三期及第四期各五年亦求一平均數.每一平均數以一點表示之,經過此各點,畫一曲線.以不同之繪圖者對於同樣材料,畫此種曲線,至少於此四點相合;但此顯為一部分的解決,全線掩有各時距單位之較可信賴之數值,仍不可盡獲也.

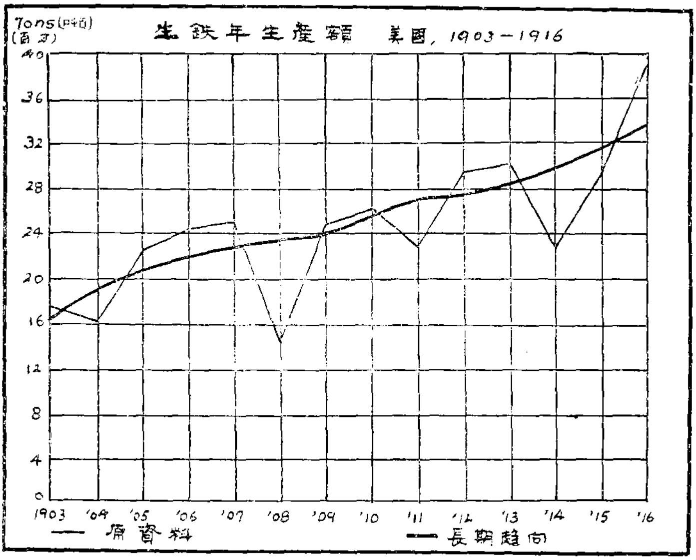


圖 5

3. 半平均法(Method of Semi-averages) 將一長時期數列截成兩相等部分,每部分計算一平均數,在第一半及第二半時期之中點,各作一縱距以表示之,趨向線即繪過其頂端兩點.此法嘗有用於表示生產趨向者,與以後有所謂最小自乘法求出之結果近似.

4. 百分數差異法(Method of Dispersion per centum) 此法爲牛門斯把那特 (M. Neumann Spallat) 於 1887 年國際統計學會 (International Statistical Institute) 第一次會議所建議者,即須求出第一年至最後一年增加之百分數.惟此只宜適用於每年增加率大略相同之數列.若一數列非有規則的逐年增加如移民等,則須求出全數列之平均值,然後計算各年離開此平均值差異之數.此

法頗似瑞典貿易局編製經濟測變表(Economic Barometer)採用之計算方法,蓋其包含之各數列亦為每月實值當全時期平均值之比率也.

此法屬於第一種,僅決於第一數及最後一數;若此兩數為非常性質,或其間各數增減程度至為不齊,則不足以顯示正確之長期趨勢;苟屬於第二種,則以數列變動,上下參差,長期趨向不能顯明,故非測量長期趨向堪稱滿意之方法.

5. 移動或遞進平均法 (Method of Moving Averages or Progressive Means)　有已知表示一循環波動之時間數列,取其所包含各數每繼續若干項一組求一平均數(亦有求中數者),當為趨向數字(trend figure),或遞由若干項

表 38

年	生產指數	三年移動平均	五年移動平均
1910	100		
1911	95	101	
1912	108	101	100
1913	100	102	101
1914	98	101	104
1915	106	103	104
1916	106	107	105
1917	109	108	106
1918	108	105	105
1919	99	103	
1920	103		

減去其最前一項而增入緊後一項,仍保持相同項數,以求平均數,如此遞移計算;例如求五個月移動平均數,先取一至五月之平均數,次取二至六月之平均數,依此類推;若自1910年計算五年移動平均數,則取 1910—1914, 1911—1915等各時期之平均數(閱表38).平均數置於其所屬時期之中間,例如1909,1910及1911年之平均數置於1910年之旁,而1910,1911及1912年之平均數列於1911年之旁.移動平均集中之勢愈大,若以一線表示之,則愈平滑.此線名曰移動趨向線(Line of Moving Averages).

此法雖易於了解,如拔不生統計機關(Babson Statistical Organization)等且嘗用以決定生產指數之趨向;但計算麻煩,移動趨向線可依計算平均數根據之時距單位數或所選擇遞移項數之多寡,而有長短高低不同之情勢(閱圖6),當不能決其表示正確之趨向.

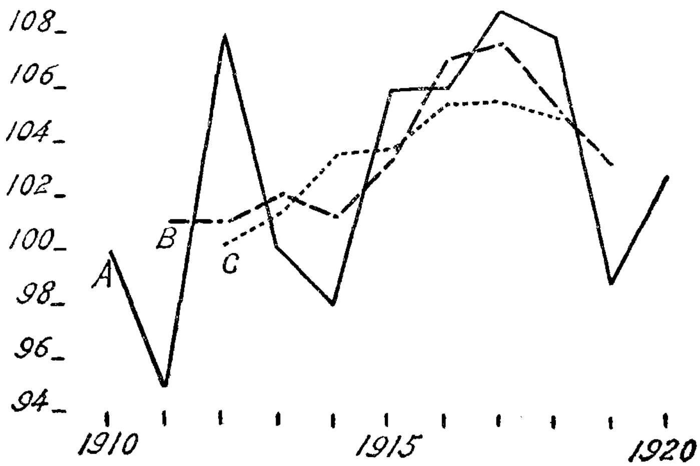


圖6 移動平均數

6. 最小自乘法(Method of Least Squares)　此法嘗爲哈佛經濟研究委員會(Harvard Committee on Economic Research)於編製其商情指數及貿易指數須測定長期趨向時所採用.名以"最小自乘"者,蓋依其方程式所繪趨向線上之各點與原有材料同時期各點離差平方之和爲最小也.(The sum of the squares of the deviations of the original data from the line is a minimum.) 以此法求出之數列,若繪示之以一直線者,又曰直線法 (Straight Line Method). 此直線普通非繪於對數紙上爲同一比率演進者,而爲繪於縱橫軸——即 y 軸與 x 軸——爲同樣測量單位之同格紙(Coordinate paper)上有相同絕對數歷時增加者(可參閱圖7).至其演算方法,則先須獲一長時期若干年各月合用之數字材料.若其所包含之

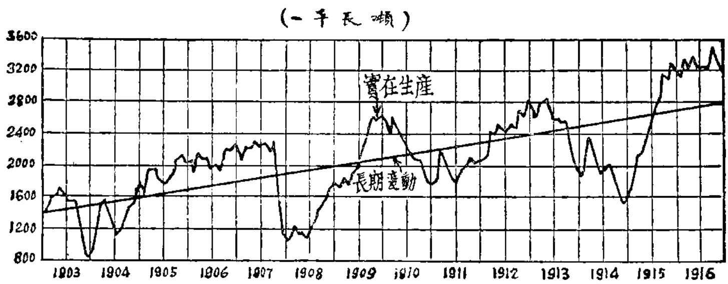


圖 7　1903 至 1916 年美國表示實在生鐵生產之圖及表示長期趨向之一線

年或月數爲奇,須尋出其中間一年或一月當爲中點,以零表示之,其以前各年或月距數爲相繼的負數如 − 6、−5、−4 等,稱之爲負的時間因素(individual negative time factors);以後各年或月距數爲相繼的正數,如 4、5、6 等,

稱之爲正的時間因素(individual positive time factors).若時期中所包含之年或月數爲偶,以在數列之中間非單獨一項,欲時期起點發自中間,必須假定於最中間兩項,或將中間兩項,每一項單位時距分開,每一移動爲半單位時距,易言之在起點兩邊各項爲$\frac{1}{2}$與$-\frac{1}{2}$,$1\frac{1}{2}$與$-1\frac{1}{2}$,$2\frac{1}{2}$與$-2\frac{1}{2}$等或變爲1與-1,例如以年爲時距單位之數列,則六個月代一年在正負方面各爲一時距單位,3與-3卽正負各爲三個六月的時距,5與-5卽正負各爲五個六月的時距.殆時間因素皆經確定,復將全時期之原資料計算一平均數,以其居於所求趨向時距之中間位置,故稱爲"直線中央縱距"(central ordinate)之數值,然後求逐一時距單位趨向縱距高度之變化,稱爲"增長率"(increment-rate).吾人知時距以年計,其數爲偶(例如1902－1913),則每一時距可以爲半年,其數爲奇(例1902－1914),則每一時距爲一年,是若以m代表增長率,則前者每年增加數(annual increment)爲2m,而月增加數(monthly increment)爲$\frac{m}{6}$,後者每年增加數爲m,而月增加數爲$\frac{m}{12}$,是則增長率求出,卽"最小自乘線"(Line of Least Squares)之斜向或其角之正切(slope or tangent of its angle)決定,中央縱距與經常增長率爲推測長期趨向所依據之兩個重要數值,既皆求出,則長期趨向可以推定.今以最小自乘法求直線趨向之公式排列如下:

$$y=mx+b$$

y爲倚變數(dependent variable),在此爲任一趨向縱距,卽趨向線上任一點之數值.

x 爲自變數 (independent variable) 在此爲離自用於決定趨向之時期中心之測量單位.

m 爲趨向線之斜度,即在 x 一單位改變時, y 變動之數值. b 爲配合之攔截線.

此求 y 之公式中僅 m 與 b 爲未知數,求其數值之法,曰力率法 (method of moments). 此法有兩方程式如下:——

$$\Sigma y = m\Sigma x + nb$$

$$\Sigma xy = m\Sigma x^2 + b\Sigma x$$

因　Σx 應等於 0, 故上兩式可改爲

$$\Sigma y = nb$$

$$\Sigma xy = m\Sigma x^2$$

則

$$b = \frac{\Sigma y}{n}$$

$$m = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$$

$\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$ 所求出之斜度亦即消長線 (Line of Regression) 之斜度,蓋消長線演算之公式爲

$b_1 = r \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$,式中 b_1 爲線之斜度即 y 數列依 x 數列消長之係數, r 爲相關係數, σ_y 爲 Y 數列之標準差, σ_x 爲 X 數列之標準差,若爲時間數列.則 X 代表

時間,其演式如下:——

因

$$r = \frac{\Sigma xy}{n\sigma_x\sigma_y}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}}$$

故

$$r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\Sigma xy}{n\sigma_x\sigma_y} \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\Sigma xy}{n\sigma_x^2} = \frac{\Sigma xy}{n\frac{\Sigma x^2}{n}} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$$

舉例如下,以說明直線趨向方程式之演算:

表39　美國生鐵生產量(單位百萬長噸)

1904——1914

I	II	III	IV	V
年	原來各項 (y)	自中點之時間單位離差 (x)	離差乘原來項 (xy)	離差自乘 (x^2)
	(1)	(2)	(3)	(4)
1904	16.50	−5	−82.50	25
1905	22.99	−4	−91.96	16
1906	25.31	−3	−75.93	9
1907	25.78	−2	−51.56	4
1908	15.94	−1	−15.94　−317.89	1
1909	25.80	0		0
1910	27.30	1	27.30	1
1911	23.65	2	47.30	4
1912	29.73	3	89.19	9
1913	30.97	4	123.88	16
1914	23.33 $\Sigma y=267.30$	5	116.65　404.32 $\Sigma xy=86.43$	25 $\Sigma x^2=110$

1909年居於全時期之中,用為起點,易言之即以此點之x為0,其以外各年,較前者為負數,較後者為正數,表示於表52之x行;y行各數之和為267.30,則b等於$\frac{267.30}{11}$即24.30,此即"中央值"(central value),由xy及x^2行求得m等於$\frac{86.43}{110}=0.7857$.於是得生鐵生產量自1904至1914年直線趨向方程式,

$$y=0.7857x+24.30$$

其意卽在時期中間之1909年生產鐵24.30百萬噸,每進退一年卽增或減0.7857百萬長噸.例如1913年之 x 爲 4,其 y 值——趨向之縱距——可表示以 $.7887\times4+24.30=27.45$,卽27.45百萬長噸;1914年之 x 爲 -5,其 y 值可

表40 美國生鐵每月生產量 (單位:千噸)

1903－1916

1	2	3		4		5	
年	月生產量	時間起點之離差 x		自乘X之離差 x^2		離差乘原來各項 xy	
X	Y	A	B	A	B	A	B
1903	1452	−6.5	−13	42.25	169	−9438.0	18876
1904	1344	−5.5	−11	30.25	121	−7392.0	14784
1905	1882	−4.5	−9	20.25	81	−8469.0	16938
1906	2066	−3.5	−7	12.25	49	−7231.0	14482
1907	2109	−2.5	−5	6.25	25	−5272.5	10545
1908	1302	−1.5	−3	2.25	9	−1953.0	3906
1909	2116	−.5	−1	.25	1	−1058.0	2116
1910	2237	.5	1	.25	1	1118.5	2237
1911	1944	1.5	3	2.25	9	2916.0	5382
1912	2448	2.5	5	6.25	25	6120.0	12240
1913	2560	3.5	7	12.25	49	8960.0	17920
1914	1921	4.5	9	20.25	81	8644.5	17239
1915	2472	5.5	11	30.25	121	13596.0	27192
1916	3252	6.5	13	42.25	169	21138.0	42276
總計	29105	0	0	227.50	910	21679.5	43359
				Σx^2		Σxy	

表示以 $.7887\times(-5)+24.30=20.37$ 卽20.37百萬長噸.由是求出任兩時間之值,足可資以決定趨向線.惟m值爲正,線爲上向傾斜,如爲負,則爲下向傾斜,求月增加數,則以m除以12.

若時間數列掩有之年數爲偶,則計算直線趨向數值普通有二法:——

(甲)爲以時間起點分爲兩半年合成一年,其餘則每一進退時距,卽爲一年(閱表40之x行A部分),趨向縱距之求法可參閱表40各行之A部分,得等式如下:

$$b=\frac{29105}{14}=2078.93$$

$$m=\frac{21679.5}{227.5}=95.29$$

$$\therefore\ y=95.29x+2078.93$$

(此處x時距單位爲一年,95.29爲年增加數,$\frac{95.29}{12}$爲月增加數.)

(乙)爲避免小數計算麻煩起見,將前一法所有各離中時距倍之(閱表53之x行B部分).對於趨向縱距之求法可參閱表40各行之B部分,得等式如下:

$$b=\frac{29105}{14}=2078.93$$

$$m=\frac{43359}{910}=47.65$$

$$\therefore\ y=47.65x+2078.93$$

(此處x時距單位爲六個月,時間起點爲1910年一月,一日.)

求月增加數爲 $m\div6=47.65\div6=7.94$

若求年增加數則為 $2m=47.65\times2=95.3$

或

$$m=\frac{\frac{43359}{910}}{2}=95.29$$

(此處之 m 為年增加數而月增加數為 $\frac{m}{12}$)

$$\therefore y=95.29x+2078.93$$

(此處 x 時距單位仍為一年.)

表 41　A 對於年數為奇之材料之計算

1	2	3	4	5	6
年	平均價(分) y	x	x^2	yx	
				−	+
1902	788	−6	36	4728	
1903	794	−5	25	3970	
1904	792	−4	16	3168	
1905	810	−3	9	2430	
1906	842	−2	4	1684	
1907	890	−1	1	890	
1908	801	0	0		
1909	852	1	1		852
1910	899	2	4		1798
1911	871	3	9		2613
1912	919	4	16		3676
1913	921	5	25		4605
1914	890	6	36		5340
總計	11069		182	−16870	18884

淨總數 = +2014

$$b=\frac{11069}{13}=851.46 \qquad m=\frac{2014}{182}=11.07$$

表42 B對於年數爲奇之材料之計算

年	1	年	2	3	4	5	6
	y_{-x}		y_x	y_x-y_{-x}	x	$x(y_x-y_{-x})$	$\frac{y_x-y_{-x}}{x}$
1908	801	········	········	········	0	········	········
1907	890	1909	852	−38	1	−38	−38
1906	842	1910	899	57	2	114	29
1905	810	1911	871	61	3	183	20
1904	792	1912	919	127	4	508	32
1903	794	1913	921	127	5	635	25
1902	788	1914	890	102	6	612	17
	5717		5352 5717			2052 −38	
			11069			2014	
			$b=\frac{11069}{13}=851.46$			$m=\frac{2014}{182^*}=11.07$	

*此數可查自附錄戊

在m式中有除 910 以 2 之一手續,蓋以原數列之每一單位時距應爲一年,乃以年數爲偶,致時間之中點居 1909 至 1910 年間之半途,中間兩年離自中點各爲0.5,其他時距爲 1.5、2.5 等,爲避免小數起見,皆以 2 乘之,得 1,3,5 等,其各項自乘結果之和卽 Σx^2,較原時距各項自乘之和,增加四倍,而各項已改整數後與原實數相乘之結果之和卽 Σxy,較各項已改整數前與原實數相乘之結果之和則增加二倍,若欲改變之數還元,則 Σx^2 須除

以 4, 而 Σxy 須除以 2,爲化簡計算,故只將 Σx^2 除以 2,而 Σxy 不必再有除 2 之手續.

求直線趨向尚有較簡之方法,姑舉卜拉德物價材料爲例,用以前方法(以 A 代之)及現所謂簡法(以 B 代之)分別計算,以資比較如表 41、42、43 及 44.

表 43　A 對於年數爲偶之材料之計算

1	2	3	4	5	6
年　份	平均價(分) y	x	x^2	xy −	xy +
1902	788	−11	121	8668	
1903	794	− 9	81	7146	
1904	792	− 7	49	5544	
1905	810	− 5	25	4050	
1906	842	− 3	9	2526	
1907	890	− 1	1	890	
1908	801	1	1		801
1909	852	3	9		2556
1910	899	5	25		4495
1911	871	7	49		6097
1912	919	9	81		8271
1913	921	11	121		10131
總　計	10179		572	−28824	+32351

淨總數 = +3527

$d=\frac{10179}{12}=848.25$　　$m=\frac{3527}{572}=6.17$

以 4, 而 Σxy 須除以 2,為化簡計算,故只將 Σx^2 除以 2,而 Σxy 不必再有除 2 之手續.

求直線趨向尚有較簡之方法,姑舉卜拉德物價材料為例,用以前方法(以 A 代之)及現所謂簡法(以 B 代之)分別計算,以資比較如表 41、42、43 及 44.

表 43　A 對於年數為偶之材料之計算

1	2	3	4	5	6
年份	平均價(分) y	x	x^2	xy −	xy +
1902	788	−11	121	8668	
1903	794	−9	81	7146	
1904	792	−7	49	5544	
1905	810	−5	25	4050	
1906	842	−3	9	2526	
1907	890	−1	1	890	
1908	801	1	1		801
1909	852	3	9		2556
1910	899	5	25		4495
1911	871	7	49		6097
1912	919	9	81		8271
1913	921	11	121		10131
總計	10179		572	−28824	+32351

淨總數 = +3527

$$d=\frac{10179}{12}=848.25 \qquad m=\frac{3527}{572}=6.17$$

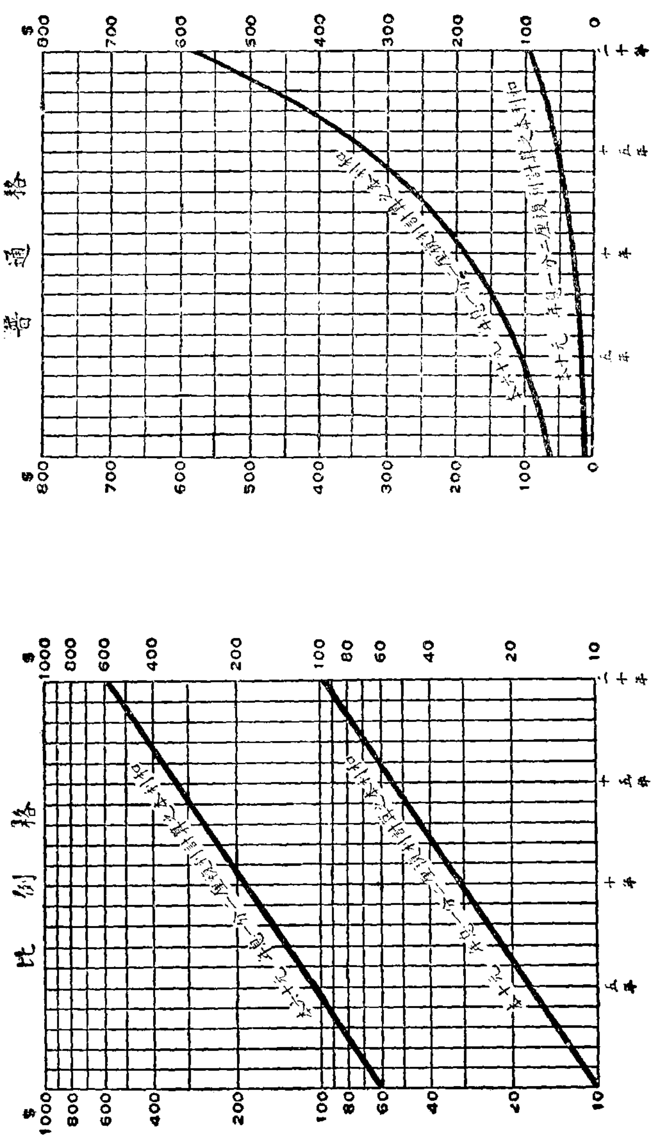


圖 8　複利率下本利和之遞昇

$$\log y = .0641x + .7509$$

$$\therefore y = (1.158)^x (5.636)$$

表45　雪茄烟年生產量(單位:百萬支)

1901—1913

年	生產量	對數 y	自起點之時距單位離差 x	對數乘離差 xy		離差自乘 x^2
	(a)	(b)	(c)	(d)		(e)
1901	2.72	.4346	−6	−2.6076		36
1902	2.96	.4654	−5	−2.3270		25
1903	3.36	.5263	−4	−2.1052		16
1904	3.43	.5353	−3	−1.5759		9
1905	3.67	.5647	−2	−1.1294		4
1906	4.50	.6532	−1	−.6532	−10.3983	1
1907	5.26	.7210	0			0
1908	5.74	.7589	1	.7589		1
1909	6.82	.8338	2	1.6676		4
1910	8.64	.9365	3	2.8095		9
1911	10.47	1.0199	4	4.0796		16
1912	13.17	1.1196	5	5.5980		25
1913	15.56	1.1920	6	7.1520	+22.0656	36
		9.7612			+11.6673	182

普通表示長期趨向,除直線及複利曲線外,尚有一種曲線作拋物狀者(可參閱圖9),曰拋物線(parabola),並多為數學上所謂第二次拋物線(parabola of the second order).哈佛經濟服務處(Harvard Economic Service)之開礦指數所依據石油生產數量及紐約聯邦準備銀行

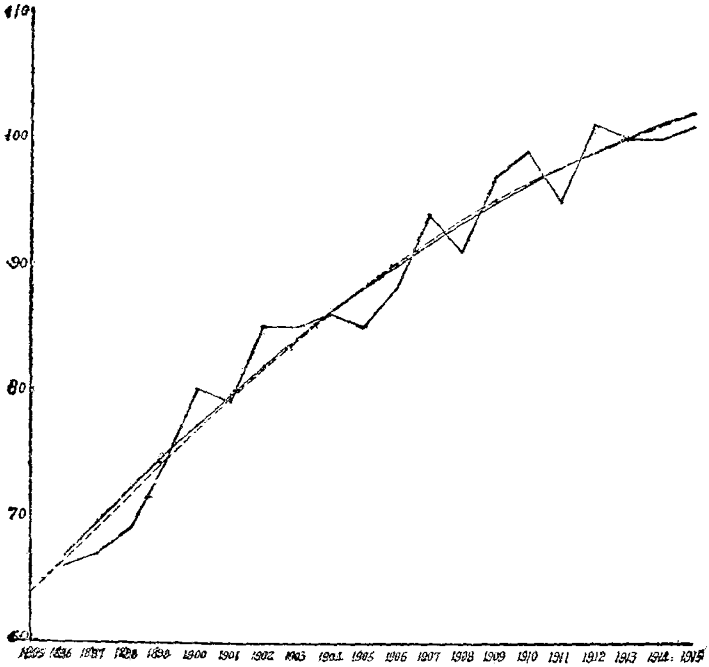


圖 9

之工業生產指數所掩有若干數列即以此線形示其趨向.計算此線所用之方程式如下:——

$$y=a+bx+cx^2$$

y 爲拋物線所經過一數列各時期之變數

x 爲離自起點之時距

a、b 及 c 爲常數而 c 不等於 0

譬以美國勞工統計局躉售物價指數之材料繪製一圖,卽如圖 9,其多邊形曲線表示物價指數漲落之情形,復經過此曲線勾一平滑曲線,作拋物狀,在圖 9 上卽

平滑之點線,假定其起點在1895年,卽 $x=0$, 則中點在1905,卽 $x=10$, 終點在1915,卽 $x=20$, 視此各點在拋物線上落於1895年之數值爲64,落於1905年爲86,落於1915年爲102,於是可以演式如下:——

$$\because 64=a$$
$$88=a+10b+100c$$
$$102=a+20b+400c$$
$$\therefore 88=64+10b+100c$$
$$102=64+20b+400c$$
$$88-64=24=10b+100c$$
$$102-64=38=20b+400c$$
$$24\times 2-38=(10b+100c)\times 2-(20b+400c)$$
$$=-200c$$
$$c=\frac{10}{-200}=-.05$$
$$10b=88-a-100c=88-64-(-5)=29$$
$$b=\frac{29}{10}=2.9$$

將a、b及c之數值代入求趨向之方程式,

$$y=64+2.9x-0.5x^2$$

趨向線上每時期之數值可依上式求出,再由此各時期趨向值減去相當時期之原實數,所得正負離差理應相等,卽其和應爲零;但以拋物線初爲假定者,不免若干錯誤,致有差異,故須加以修正,其法乃將離差之和 ΣD, 除以項數N,其商數自每一個離差減去,則不應有之差誤去矣(可參閱表46)。

表46　根據美國勞工統計局之物價指數求出之趨向及循環離差

(起點　1895)

趨向方程式　y＝64＋2.9x－.05x

改正方程式　y＝63.825＋2.9x－.05x²

年	物價指數	x	趨向 y	D	D 集中	D²	循環 D/σ
1896	66	1	66.85	－.85	－.68	.4624	－.33
1897	67	2	69.60	－2.60	－2.42	5.8564	－1.17
1898	69	3	72.25	－3.25	－3.08	9.4864	－1.49
1899	74	4	74.80	－.80	－.62	.3844	－.30
1900	80	5	77.25	2.75	2.92	8.5264	1.41
1901	79	6	79.60	－.60	－.42	.1764	－.20
1902	85	7	81.85	3.15	3.32	11.0224	1.60
1903	85	8	84.00	1.00	1.18	1.3924	.57
1904	86	9	86.05	－.05	.12	.0144	.06
1905	85	10	88.00	－3.00	－2.82	7.9524	－1.36
1906	88	11	89.85	－1.85	－1.68	2.8224	－.81
1907	94	12	91.60	2.40	2.58	6.6564	1.25
1908	91	13	93.25	－2.25	－2.08	4.3264	－1.00
1909	97	14	94.80	2.20	2.38	5.6644	1.15
1910	99	15	96.25	2.75	2.92	8.5264	1.41
1911	95	16	97.60	－2.60	－2.42	5.8564	－1.17
1912	101	17	98.85	2.15	2.32	5.3824	1.12
1913	100	18	100.00	0	.18	.0324	.09
1914	100	19	101.05	－1.05	－.88	.7744	－.43
1915	101	20	102.00	－1.00	－.82	.6724	－.40
				16.40 －19.90 20)－3.50 K＝－.175	17.92 －17.92 0	20)85.9880 σ²＝4.2994 σ＝2.07	8.66 －8.66 0

最小自乘法爲測定長期趨向比較常用之計算方法,惟有一缺點,卽以其計算結果,往往不能確示最長時期之趨向,蓋時期甚長,可包含趨向不同之時期,例如美國躉售物價指數由1870至1915實包含兩個趨向不同之時期(閱圖10),若不分別研究此兩時期指數之趨向,而逕以最小自乘法求1870至1915全時期之趨向,則誤矣.雖然全數列所掩有之時期固不宜過長,亦不宜過短,例如屬於循環之一部分繁盛期或衰落期,則數列之趨勢向上或向下並非長期趨向之眞況也.

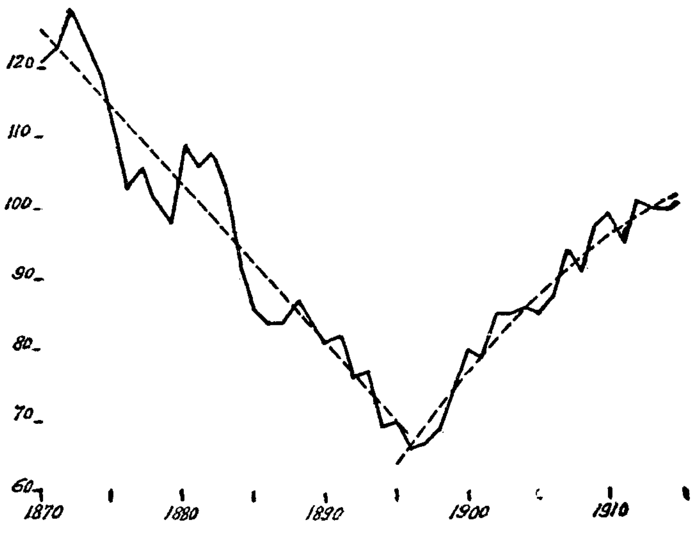


圖10 美國躉售物價指數及趨向

趨向縱距既經求出,若欲於所研究數列剔除其影響,可自原各項數分別減其相當時間之縱距(參閱表47),求其差數,或合此差數當趨向縱距之百分數或以此趨向縱距爲100,

表50 美國生鐵月生產量

(以千長噸為單位)

年	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	平均
1903	1472	1390	1590	1608	1713	1673	1546	1571	1553	1425	1039	846	1452
1904	921	1205	1447	1555	1534	1292	1106	1167	1352	1450	1486	1616	1344
1905	1781	1597	1936	1922	1963	1793	1741	1843	1899	2053	2014	2045	1882
1906	2068	1904	2155	2073	2098	1976	2013	1926	1960	2196	2187	2235	2066
1907	2205	2045	2226	2216	2295	2234	2255	2250	2183	2336	1828	1234	2109
1908	1045	1077	1228	1149	1165	1092	1218	1348	1418	1563	1577	1740	1302
1909	1801	1703	1832	1738	1880	1929	2101	2246	2385	2600	2547	2635	2116
1910	2608	2397	2617	2483	2390	2265	2148	2106	2056	2093	1909	1777	2237
1911	1759	1794	2188	2065	1893	1787	1793	1926	1977	2102	1999	2043	1944
1912	2057	2100	2405	2375	2512	2440	2410	2512	2463	2689	2630	2782	2448
1913	2795	2586	2763	2752	2822	2628	2560	2543	2505	2546	2233	1983	2560
1914	1885	1888	2348	2270	2093	1918	1958	1995	1883	1778	1518	1516	1921
1915	1601	1675	2064	2116	2263	2381	2563	2780	2853	3125	3037	3203	2472
1916	3185	3087	3338	3228	3351	3212	3226	3204	3202	3509	3312	3171	3252
總計	27183	26448	30137	29550	29972	28620	28638	29417	29689	31465	29316	28826	29105
平均	1942	1889	2153	2111	2141	2044	2046	2101	2121	2248	2094	2059	2079
時節指數	93.41	90.86	103.56	101.54	102.98	98.32	98.41	101.06	102.02	108.13	100.72	99.04	100.00

材料來源: Review of Economic Statistics, Prel. vol. I p.67

七月	49	0	0	0	56.0	− 7.0
八月	54	1	54	1	56.8	− 2.8
九月	59	2	118	4	57.6	+ 1.4
十月	64	3	192	9	58.4	+ 5.6
十一月	74	4	296	16	59.2	+14.8
十二月	81	5	405	25	60.0	+21.0
1919						
一月	75	6	450	36	60.8	+14.2
二月	51	7	357	49	61.6	−10.6
三月	48	8	384	64	62.4	−14.4
四月	49	9	441	81	63.2	−14.2
五月	53	10	530	100	64.0	−11.0
六月	54	11	594	121	64.8	−10.8
七月	57	12	684	144	65.6	− 8.6
八月	60	13	780	169	66.4	− 6.4
九月	63	14	882	196	67.2	− 4.2
十月	72	15	1080	225	68.0	+ 4.0
十一月	81	16	1296	256	68.8	+12.2
十二月	90	17	1530	289	69.6	+20.4

材料來源　美國勞工統計局公報 270 號 62—65 頁

求出原來各數當其百分數,例如 1904 年三月美國生鐵生產爲 14470000 噸,在 1908 年二月爲1077000噸,在 1918 年十二月爲 3434000 噸,而相當各時期之趨向線縱距爲 1528000 噸,1901000 噸及2932000噸,則實際生產對於常態生產(normal production)之比率爲百分之95,百分之57及百分之 117; 更舉一較詳之例見表 48 及表 49 如下:

表 48　美國卜拉德物價之趨向縱距

(單位: 1 分)

月	1906	1907	1908	1909	1910
一　月		835.9	848.2	860.5	
二　月		836.9	849.3	861.6	
三　月		837.9	850.3	862.6	
四　月		839.0	851.3	863.6	
五　月		840.0	852.3	864.7	
六　月		841.0	853.4	865.7	
七　月		842.0	854.4	866.7	
八　月		843.1	855.4	867.7	
九　月		844.1	856.4	868.8	
十　月		845.1	857.5	869.8	
十一月		846.2	858.5	870.8	
十二月		847.2	859.5	871.9	

表 49　卜拉德物價改正趨向

年與月	原有各項 (1)	趨向縱距 (2)	原有各項對縱距之相對數 (3)
……	……	……	……
……	……	……	……
十　月	856	832.8	103
十一月	875	833.8	105
十二月	890	834.8	107
1907			
一　月	892	835.9	107
二　月	900	836.9	108
三　月	913	837.9	109
四　月	896	839.0	107
五　月	894	840.0	106
六　月	899	841.0	107
七　月	904	842.0	107
八　月	893	843.1	106
九　月	883	844.1	105
十　月	885	845.1	105
十一月	875	846.2	103
十二月	852	847.2	101
1908			
一　月	829	848.2	98
二　月	813	849.2	96
……	……	……	……
……	……	……	……

對於一數列經改正長期趨向後之變動,欲有以顯明之,可繪一百分線(100 per cent line),依趨向縱距求出原各項數之百分數繪一曲線(參閱圖11),以示其波動情形.

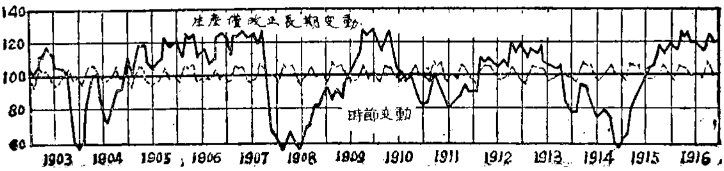


圖 11　生鐵生產 1903—1916 數字,改正長期趨向(百分數)

時節變化

時節變化有二種:一爲特別的時節變化(Specific Seasonal Variation),一爲通常的或型範的時節變化(Normal or Typical Variation),現所研究剔除之時節變化即屬於後者,蓋其年年每屆同一時期,即有方向相同,程度近似之變化也(可閱圖12).

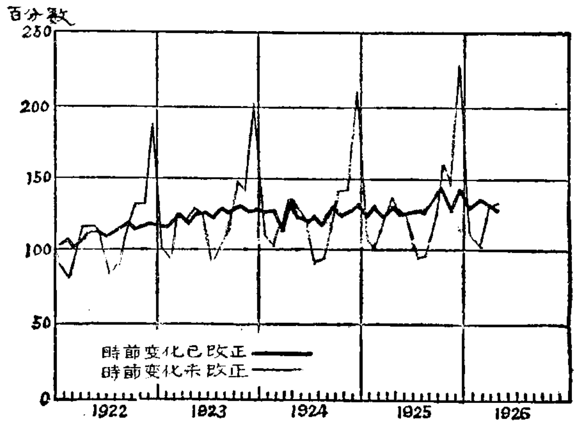


圖 12　美國聯邦準備局之百貨商店銷售指數

至此所謂同一時期大都以月爲範圍,故以下所舉計算方法均以月爲時間單位.時節變化之計算方法,概別之,有四種:—

1. 月平均法 (Method of Monthly Averages)　此法嘗爲倫敦與劍橋經濟服務處(London and Cambridge Economic Service)於編製普通商情指數時用以剔除其所包含之物價在業失業運輸銀行清算業數列之時節變化,加拿大統計局(Dominion Bureau of Statistics)修整其生產指數亦採用之,固測量時節變動極簡之方法也.應用此法,至少宜有十年以上各月數字,先將研究時期包含各年所有一月各項之數計算一算術平均數,所有二月各項之數計算一平均數,依此類推,直至將十二個月每月平均數均經算出,復計算每一平均數當十二個月之平均數之百分數,稱爲時節指數(Seasonal Indexes),或時節變化指數(Indexes of Seasonal variation).可參閱表50.再除每月原有數以該月之時節指數:例如所有一月之原有數分別除以一月時節指數,所有二月之原有數分別除以二月時節指數,此求出結果之數列,卽爲經修整時節變化者,易言之,卽時節變化已經剔除.

此法雖易解,便於計算;然僅能對於時節變化爲粗的描寫.若所測量之事實有一定之長期趨向,則用此法計算之結果,仍包含有長期趨向之因數;譬如長期趨勢向上,每十二月之數將較高於同年一月,時節變化未必如此.且求平均數用算術平均法,以此法求出之結果受異常較大變動之影響爲多,此固非時節變化之原因也.以是月平均法不能爲時節變化合於科學的測量.

表50 美國生鐵月生產量

(以千長噸爲單位)

年	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	平均
1903	1472	1390	1590	1608	1713	1673	1546	1571	1553	1425	1039	846	1452
1904	921	1205	1447	1555	1534	1292	1106	1167	1352	1450	1486	1616	1344
1905	1781	1597	1936	1922	1963	1793	1741	1843	1899	2053	2014	2045	1882
1906	2068	1904	2155	2073	2098	1976	2013	1926	1960	2196	2187	2235	2066
1907	2205	2045	2226	2216	2295	2234	2255	2250	2183	2336	1828	1234	2109
1908	1045	1077	1228	1149	1165	1092	1218	1348	1418	1563	1577	1740	1302
1909	1801	1703	1832	1738	1880	1929	2101	2246	2385	2600	2547	2635	2116
1910	2608	2397	2617	2483	2390	2265	2148	2106	2056	2093	1909	1777	2237
1911	1759	1794	2188	2065	1893	1787	1793	1926	1977	2102	1999	2043	1944
1912	2057	2100	2405	2375	2512	2440	2410	2512	2463	2689	2630	2782	2448
1913	2795	2586	2763	2752	2822	2628	2560	2543	2505	2546	2233	1983	2560
1914	1885	1888	2348	2270	2093	1918	1958	1995	1883	1778	1518	1516	1921
1915	1601	1675	2064	2116	2263	2381	2563	2780	2853	3125	3037	3203	2472
1916	3185	3087	3338	3228	3351	3212	3226	3204	3202	3509	3312	3171	3252
總計	27183	26448	30137	29550	29972	28620	28638	29417	29689	31465	29316	28826	29105
平均	1942	1889	2153	2111	2141	2044	2046	2101	2121	2248	2094	2059	2079
時節指數	93.41	90.86	103.56	101.54	102.98	98.32	98.41	101.06	102.02	108.13	100.72	99.04	100.00

材料來源: Review of Economic Statistics, Prel. vol. I p.67

表 51　以表50之美國生鐵產量用月中數法求其時節指數

比較數	年	一　月	二　月	三　月	四　月	五　月	六　月	七　月	八　月	九　月	十　月	十一月	十二月
每月產量當其所屬之年平均月產量之百分數	1903	101.38	95.73	109.50	110.74	117.98	115.22	106.47	108.20	106.96	98.14	71.56	58.26
	4	68.53	89.66	107.66	115.70	114.14	96.13	82.29	86.83	100.60	107.89	110.57	120.24
	5	94.63	84.86	102.87	102.13	135.19	95.27	92.51	97.93	100.90	109.09	107.01	108.66
	6	100.10	92.16	104.31	100.34	101.55	95.64	97.43	93.22	84.87	106.29	105.86	108.18
	7	104.55	96.97	105.55	105.07	108.82	105.93	106.92	106.69	103.51	11.760	86.68	58.51
	8	80.26	82.72	94.32	88.25	89.48	83.87	93.55	103.53	108.91	120.05	121.12	133.64
	9	85.11	80.48	86.58	82.14	88.85	91.16	99.29	106.14	111.28	122.87	120.37	124.53
	10	116.58	170.15	121.41	111.00	106.84	101.25	96.02	94.14	91.91	93.56	85.34	79.44
	11	90.48	92.28	112.55	106.22	97.38	91.92	92.23	99.07	101.70	108.13	102.83	105.09
	12	84.03	85.78	98.24	97.02	102.61	99.67	98.45	102.[illegible]1	100.61	109.84	107.43	113.64
	13	109.18	101.02	107.93	107.50	110.23	102.66	100.00	99.34	97.85	99.45	87.23	77.46
	14	98.13	98.28	122.23	118.17	108.95	99.84	101.93	103.85	98.02	92.56	79.02	78.92
	15	64.77	67.76	83.50	85.60	91.55	96.32	103.68	112.46	115.41	126.31	122.86	129.57
	16	97.94	94.93	102·64	99.26	103.04	98.77	99.20	98.52	98.46	107.90	101.85	97.51
依大小次序排列		116.58	107.15	122.23	118.17	135.19	115.22	106.92	112.46	115.41	126.31	122.86	133.64
		109.18	101.02	121.41	115.70	117.98	105.93	106.47	108.20	111.28	122.87	121.12	129.57
		104.55	98.28	112.55	111.00	114.14	102.60	103.68	106.99	108.91	120.05	120.37	124.53
		101.38	96.97	109.50	110.74	110.23	101.25	101.93	106.14	106.96	110.76	110.57	120.24
		100.10	95.73	107.93	107.50	108.95	99.84	100.00	103.85	103.51	109.84	107.43	113.64
		98.13	94.93	107.66	106.22	108.82	99.67	99.29	103.53	101.70	109.09	107.01	108.66
		97.94	92.28	105.55	105.07	106.84	98.77	99.20	102.61	100.90	108.13	105.86	108.18
		94.63	92.16	104.31	102.13	103.04	96.32	98.45	99.34	100.61	107.90	102.83	105.09
		90.48	89.66	102.87	100.34	102.61	96.13	97.43	99.07	100.60	107.89	101.85	97.51
		85.11	85.78	102.64	99.26	101.55	95.64	96.02	98.52	98.46	106.29	87.23	79.44
		84.03	84.86	98.24	97.02	97.38	95.27	93.55	97.93	98.02	99.45	86.68	78.92
		80.26	82.72	94.32	88.25	91.55	91.92	92.51	94.14	87.85	98.14	85.34	77.46
		68.53	80.48	86.58.	85.60	89.48	91.16	92.23	93.22	91.91	93.56	79.02	58.51
		64.77	67.76	83.50	82.14	88.85	83.87	82.29	86.83	84.87	92.56	71.56	58.26
中　數		96.29	92.22	104.93	103.60	104.94	97.55	98.83	100.98	100.76	108.02	104.35	106.64
總計及平均		十二個月中數總計為 1219.11 平均為 101.59											
時節指數		94.78	90.78	103.29	101.98	103.30	96.02	97.28	99.40	99.18	[illegible]	[illegible]	[illegible]

(指數之編製與應用一四四頁之次)

表 51　以表50之美國生鐵產量用月中數法求其時節指數

比較數 \ 年 \ 月	年	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
每月產量當其所屬之年平均月產量之百分數	1903	101.38	95.73	109.50	110.74	117.98	115.22	106.47	108.20	106.96	98.14	71.56	58.26
	4	68.53	89.66	107.66	115.70	114.14	96.13	82.29	86.83	100.60	107.89	110.57	120.24
	5	94.63	84.86	102.87	102.13	135.19	95.27	92.51	97.93	100.90	109.09	107.01	108.66
	6	100.10	92.16	104.31	100.34	101.55	95.64	97.43	93.22	84.87	106.29	105.86	108.18
	7	104.55	96.97	105.55	105.07	108.82	105.93	106.92	106.69	103.51	11.760	86.68	58.51
	8	80.26	82.72	94.32	88.25	89.48	83.87	93.55	103.53	108.91	120.05	121.12	133.64
	9	85.11	80.48	86.58	82.14	88.85	91.16	99.29	106.14	111.28	122.87	120.37	124.53
	10	116.58	170.15	121.41	111.00	106.84	101.25	96.02	94.14	91.91	93.56	85.34	79.44
	11	90.48	92.28	112.55	106.22	97.38	91.92	92.23	99.07	101.70	108.13	102.83	105.09
	12	84.03	85.78	98.24	97.02	102.61	99.67	98.45	102.61	100.61	109.84	107.43	113.64
	13	109.18	101.02	107.93	107.50	110.23	102.66	100.00	99.34	97.85	99.45	87.23	77.46
	14	98.13	98.28	122.23	118.17	108.95	99.84	101.93	103.85	98.02	92.56	79.02	78.92
	15	64.77	67.76	83.50	85.60	91.55	96.32	103.68	112.46	115.41	126.31	122.86	129.57
	16	97.94	94.93	102.64	99.26	103.04	98.77	99.20	98.52	98.46	107.90	101.85	97.51
依大小次序排列		116.58	107.15	122.23	118.17	135.19	115.22	106.92	112.46	115.41	126.31	122.86	133.64
		109.18	101.02	121.41	115.70	117.98	105.93	106.47	108.20	111.28	122.87	121.12	129.57
		104.55	98.28	112.55	111.00	114.14	102.60	103.68	106.99	108.91	120.05	120.37	124.53
		101.38	96.97	109.50	110.74	110.23	101.25	101.93	106.14	106.96	110.76	110.57	120.24
		100.10	95.73	107.93	107.50	108.95	99.84	100.00	103.85	103.51	109.84	107.43	113.64
		98.13	94.93	107.66	106.22	108.82	99.67	99.29	103.53	101.70	109.09	107.01	108.66
		97.94	92.28	105.55	105.07	106.84	98.77	99.20	102.61	100.90	108.13	105.86	108.18
		94.63	92.16	104.31	102.13	103.04	96.32	98.45	99.34	100.61	107.90	102.83	105.09
		90.48	89.66	102.87	100.34	102.61	96.13	97.43	99.07	100.60	107.89	101.85	97.51
		85.11	85.78	102.64	99.26	101.55	95.64	96.02	98.52	98.46	106.29	87.23	79.44
		84.03	84.86	98.24	97.02	97.38	95.27	93.55	97.93	98.02	99.45	86.68	78.92
		80.26	82.72	94.32	88.25	91.55	91.92	92.51	94.14	87.85	98.14	85.34	77.46
		68.53	80.48	86.58	85.60	89.48	91.16	92.23	93.22	91.91	93.56	79.02	58.51
		64.77	67.76	83.50	82.14	88.85	83.87	82.29	86.83	84.87	92.56	71.56	58.26
中數		96.29	92.22	104.93	103.60	104.94	97.55	98.83	100.98	100.76	108.02	104.35	106.64
總計及平均		十二個月中數總計爲 1219.11 平均爲 101.59											
時節指數		94.78	90.78	103.29	101.98	103.30	96.02	97.28	99.40	99.18	106.33	102.72	104.97

（指數之編製與應用一四四頁之次）

2.　月中數法(Method of Monthly Medians)　此法則先須計算每月事項對於其所屬年各月事項平均之比率,然後尋出所研究時期每月若干比率數之中數,——卽所有一月者,所有二月者,依此類推,——再計算各月中數當其平均數之百分數,卽時節指數(可參閱表51).此法因用中數,故不致如前法受異常事項擾亂影響之甚.

3.　趨向循環標準離差法(The Typical Deviation from Trend-cycle Method)　先用隨手畫法或移動平均法繪一最

表52　求出表50所載美國生鐵產量九個月移動平均數

(單位:　千長噸)

年＼月	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
1903	1537	1544	1539	1559	1568	1563	1524	1442	1365	1309	1284	1285
4	1210	1252	1216	1230	1287	1345	1377	1395	1420	1427	1499	1590
5	1678	1727	1759	1799	1831	1861	1907	1919	1935	1929	1969	1950
6	2034	2043	2038	2029	2019	2033	2065	2074	2088	2083	2110	2133
7	2174	2204	2211	2218	2212	2227	2203	2295	1962	1827	1715	1592
8	1472	1350	1226	1173	1193	1251	1306	1363	1547	1496	1578	1636
9	1695	1751	1800	1886	1957	2046	2140	2229	2326	2383	2460	2502
10	2517	2504	2453	2404	2341	2282	2230	2136	2056	1990	1981	1972
11	1949	1919	1886	1887	1909	1947	1970	1954	1938	1937	1960	2029
12	2174	2226	2260	2317	2364	2412	2493	2535	2581	2590	2648	2686
13	2698	2716	2702	2692	2662	2634	2595	2508	2412	2308	2277	2245
14	2198	2133	2064	2038	2026	2015	1973	1881	1807	1760	1776	1805
15	1813	1868	1955	2106	2255	2425	2576	2702	2821	2913	3019	3093
16	3156	3196	3207	3226	3226	3262	3287	3268	3262	3257	3291	3288

可能代表一數列變動歷程之曲線.所謂移動平均法,或用算術平均,或用中數,其移動包含之時期可以爲七個月,爲九個月,甚爲十二個月.譬爲九個月的移動平均,將一月至九月各項之數加以平均或取其中數,置於五月一項之旁,以爲一月至九月各項之代表數;繼將二月至

表53　將表50之數字逐月除以表52之數字所得之百分數及每月所有百分數之中數與其修整

年＼月	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
1903	96	90	103	103	109	107	101	109	114	109	81	66
4	76	96	119	126	119	96	80	84	95	102	99	102
5	106	92	110	107	107	96	91	96	98	106	102	105
6	102	93	106	102	104	97	97	93	94	105	104	105
7	101	93	101	100	104	100	102	98	111	128	107	78
8	71	80	100	98	98	87	93	99	92	104	100	106
9	106	97	102	92	96	94	98	101	103	109	104	105
10	104	96	107	103	102	99	96	99	100	105	96	90
11	90	93	116	109	99	92	91	99	102	109	102	101
12	95	94	106	102	106	101	97	99	95	104	99	104
13	104	95	102	102	106	100	99	101	104	110	98	88
14	86	89	114	111	103	95	99	106	104	101	85	84
15	88	90	106	100	100	98	99	103	101	107	101	104
16	101	97	104	100	104	98	98	98	98	108	101	96
中數	98.5	93	106	102	104	97.5	97.5	99	100.5	106.5	100.5	101.5
調正總數1206.5爲1200	98	93	105	102	103	97	97	98	100	106	100	101

十月各項之數,以同樣方法求得一代表數置於六月一項之旁;依此類推(可參閱表52).若月數為偶,例如十二個月,則每十二個月計算一平均數,此所有平均數各列於每居中兩月之間,惟以推算月令變動之故,復須將介於各居中兩月間之數加以平均,以其結果列於相當月份之旁,俟移動平均數皆已求出,遂據以繪一曲線,曲線繪成後,乃計算每月實數當線上該月之數之百分數,再於同月所有百分數間取其中數,計得十二個中數,將此十二中數修整為1200(參閱表53),選定一年為基期,求出該時期實數之月平均數,分別以每月中數乘之,其結果為時節基數 (Seasonal Base Numbers). 以各月時節基數分別除所研究時期內各月之實數,即可求出"時節變化修整指數"(Seasonal Adjusted Index Numbers).可參閱表54.

表54　以1913年為基期依據表50及53之

材料計算時節變化修整指數

1913年產量平均每月為2560千長噸		一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
時節基數		2509	2381	2688	2611	2637	2483	2483	2509	2560	2714	2560	2586
時節變化修整指數	1904	37	51	54	60	58	52	44	46	54	53	58	62
	1905	71	67	72	74	74	72	70	73	74	76	79	79
	1906	82	80	80	79	79	80	81	77	76	81	85	86
	1907	88	86	83	85	87	90	91	90	85	86	71	48
	1908	42	45	46	44	44	44	49	54	55	57	62	57

此法因用移動平均與隨手畫法,以平滑曲線削去角度,抵銷劇變,而減少商業循環波動之影響,尙爲研究時節變化之近於合理者,故美國聯邦準備局嘗用以修整其刊布之基本貨物(basic commodities)生產指數之時節變化。梁友生君亦嘗用以修整其所編之生產品消費品耐久品與非耐久品之生產指數.惟此法亦有其缺點,卽如用移動平均數,則因移動所掩有之時期愈長,使演算結果所成之數列乃愈縮減,雖有補苴之法,終欠正確也.

4. 環比法(Link-relative Method)或中環比法(The Median-Link-Relative Method) 此法剏於教授潘森博士(Dr. Warren M. Persons).彼爲決定一般商情趨勢,嘗費甚大之勞力,應用此法,分析經濟數列,美國聯邦準備局嘗用以修整其所編在業指數,加拿大統計局及波蘭商情變動與物價作成研究會(Institute of Research on General Business Movements and on Price Formation)亦用以修整其生產指數,可認爲研究時節變化最適當滿意者也.其計算方法乃先搜集一長時期至少包含十年各月數字之資料,然後將各月數字按時期先後排齊,以求環比,卽除每月之數以緊前一月之數,求得按月比數,例如由$\frac{\text{一月之數}}{\text{十二月之數}}$得一月之比數,由$\frac{\text{二月之數}}{\text{一月之數}}$得二月之比數,由$\frac{\text{三月之數}}{\text{二月之數}}$得三月之比數,依此類推,直至全數列皆經演算過爲止(可參閱表50及表55).環比既皆求出,遂作一環比複次數表(multiple frequency table of link relatives),其形如表

表55　美國各月生鐵產量環比

1903——1916

月＼年	1903	1904	1905	1906	1907	1908	1909	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916
1月/12月		109	110	101	99	85	103	99	99	101	100	95	106	100
2月/1月	94	131	90	92	92	103	95	92	101	102	92	100	105	97
3月/2月	114	120	121	113	109	114	107	109	122	114	107	124	123	108
4月/3月	101	107	99	96	100	94	95	95	94	99	100	97	102	97
5月/4月	106	99	102	101	104	101	108	96	92	106	103	92	107	104
6月/5月	98	84	91	94	97	94	103	95	95	97	93	92	105	96
7月/6月	92	86	97	102	101	112	109	95	100	99	97	102	108	99
8月/7月	102	106	106	96	100	112	107	98	107	104	100	102	108	99
9月/8月	99	116	103	102	97	104	106	98	103	98	99	94	103	100
10月/9月	92	107	108	112	107	111	109	102	106	109	102	94	110	110
11月/10月	73	102	98	100	78	101	98	91	95	98	88	85	97	94
12月/11月	81	109	102	102	67	110	103	93	102	106	89	100	105	96

材料來源：Review of Economic Statistics. Prel. Vol. I. p.67 並見本書表50

(指數之編製與應用一九〇頁之次)

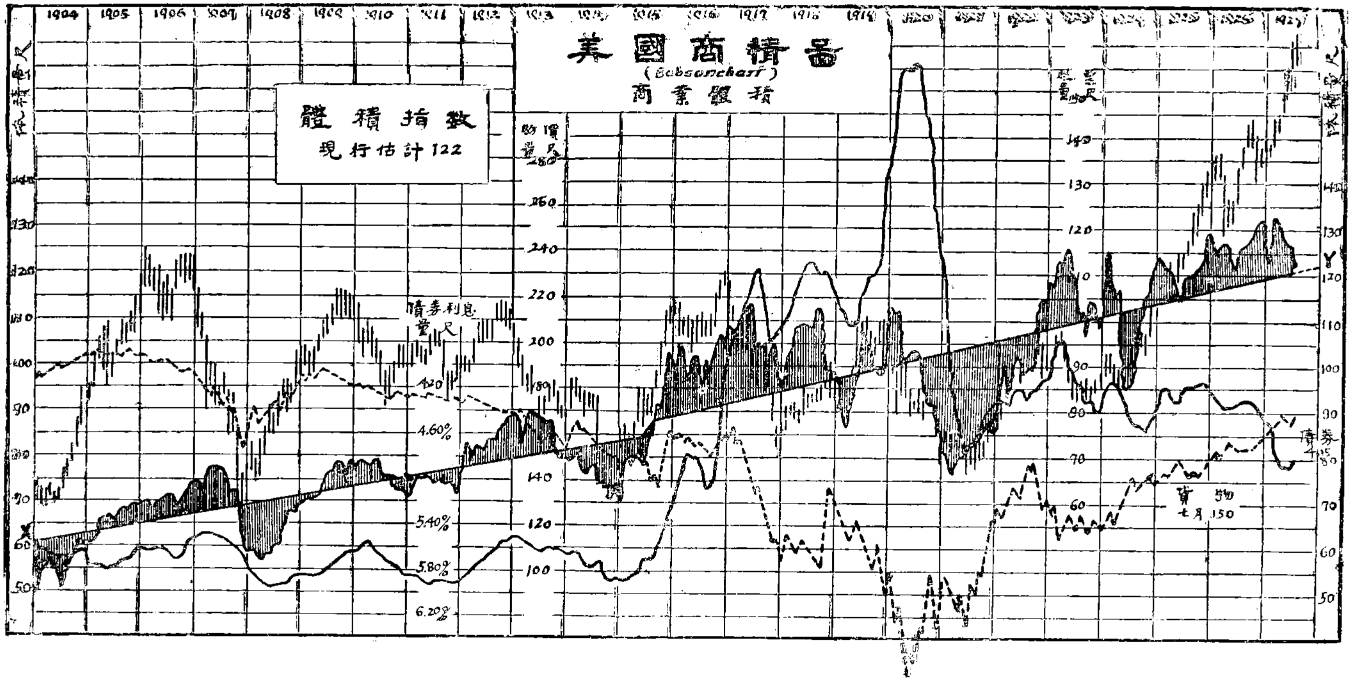


圖 22　豎線表示40種股票(鐵路20種工業20種)按月平均金陣測量數字在1923年下.

…………點線爲20種債劵平均利息之紀錄關於此線之數字在1911年下(倒轉量尺)

* 在付印之前最後之市價.

—— 一未破線是除食料外平均躉售物價之紀錄,測量數字是在1923年下.

表56　表55所有各環比次數分配

比率＼月	一月/十二月	二月/一月	三月/二月	四月/三月	五月/四月	六月/五月	七月/六月	八月/七月	九月/八月	十月/九月	十一月/十月	十二月/十一月
125以上		丨										
125												
124			丨									
123			丨									
122			丨									
121			丨									
120			丨									
119												
118												
117												
116									丨			
115												
114			丨丨丨*									
113			丨									
112							丨	丨		丨		
111										丨		
110	丨									丨丨		丨
109	丨		丨丨				丨			丨丨		丨
108			丨		丨		丨	丨		丨		
107			丨丨	丨	丨			丨丨		丨丨*		
106	丨				丨丨			丨丨	丨	丨		丨
105		丨				丨						丨
104					丨丨			丨	丨			

103	|	|			|*	|		*	|||			|
102		|		|	|		||	||	|	||	|	|||*
101	||	|		|	||		|		*		|	
100	||*	|		||			||*	||	|		|	|
99	|||			||	|		|	|	||			
98				*		|		|	||		|||	
97		|		||		||	||		|		|	
96		*		|	|	|		|			*	|
95	|	|		||		||*	|				|	
94		|		||		||			|	|	|	
93						|						|
92		||||			||	|	|			|		
91						|					|	
90		|										
89													|
88												|	
87													
86							|					
85	|											|	
84						|						
83													
82													
81													|
80													
80以下												||	|
*中環比	100.0	96.0	114.0	98.0	102.5	95.0	100.0	103.0	101.0	107.5	96.0	102.0

56.由左至右,按月之次序列十二行,由下至上排置百分量尺,即依百分數大小次序,分成若干欄,於是構成若干格,遇同月同百分數之環比有若干次,則畫若干短直線於同一格內,以表示之,於每月所有環比中選取一中數,曰中環比,求中環比不必如普通中數之求法,即項數爲奇,則取中間一項,如爲偶,則取中間兩項之平均數,亦可於中間三項,四項,五項,甚至六項,七項之環比計算其平均數,惟視數列掩有時期之長短,與項數奇偶以爲定,當項數爲奇時,取中間三項或五項或七項之算術平均數,當項數爲偶時,取中間四項或六項或八項之算術平均數,總之,使所求出之環比平均數儘足爲各月環比之儀型.然何以不用衆數?以衆數有時有兩個以上,無一定集中位置,若項數甚少,往往不能尋出衆數.何以不求所有各項之算術平均數或幾何平均數?以其難免受極端變數之影響,此種影響固常由於非時節的原因也.各月中環比旣皆求出,於是遞進相乘,煅合爲一連續數列,即以某一月——大都爲十二月或一月——爲基之鏈比數列:其求法在以十二月爲基者,則以十二月之中環比爲基數 100, 與一月之中環比相乘得一月之鏈比;以一月之鏈比乘以二月之中環比,得二月之鏈比;如此類推,直至最後用十一月之鏈比乘以十二月之中環比復求十二月之鏈比爲止.又如以一月爲基,則以一月之中環比爲基數 100, 與二月之中環比相乘,得二月之鏈比;以三月之中環比乘二月之鏈比,得三月之鏈比;如此類推,直至最後以一月之中環比乘十二月之鏈比,復求一月之

鏈比爲止.鏈比數列已成,遂使各月中環比得依一普通基據之關係表示時節變化.惟此鏈比數列若確能表示時節變化,則最前一月之數爲 100, 以後復求同前一月之數亦應爲 100; 乃事實上不盡如此(可參閱表57),或多於 100, 或少於 100, 此則由於時令變化以外,更有他項變動因素,—— 其大部分爲長期趨向 —— 攪亂之影響,多於 100 者,常由於長期趨勢向上,少於 100 者,常由於長期趨勢向下,此種影響所致之差異,應有以修整之,其法乃將此差數,用算術平均或幾何平均法分配於十二個月之鏈比內.前者卽除差數以12,其結果假定爲 d;則修整之二月鏈比,卽以原鏈比加 $(d\times1)$;修整之三月鏈比,卽以原鏈比加 $(d\times2)$;依此類推,直至最後一月之鏈比加 $(d\times12)$爲止(閱表57).後者則以差數等於 $(1+d)^{12}$,此處之 d 姑稱爲差誤率,欲修整各月鏈比,若以正月者爲基數 100, 則除二月鏈比以 $(1+d)$,求二月之修整鏈比;除三月鏈比以$(1+d)^2$,求三月之修整鏈比;除四月之鏈比以 $(1+d)^3$,求四月之修整鏈比;如此類推,直至除最後重見正月之鏈比以 $(1+d)^{13}$,求其修整鏈比使爲100, 以與最初正月之 100 相合:此種與複利同樣計算之方法,演算較爲煩難,宜改用對數法爲之,先將鏈比改爲對數,使可如算術的計算差誤,修整鏈比對數,然後合對數爲眞數(閱表57);或先化合環比爲對數,設以一月爲基求鏈比對數,則將二月之環比對數加一月之鏈比對數以求二月之鏈比對數,將三月之環比對數加二月之鏈比對數以求三月之鏈比對數,依此類推,直至復取一月

表57 計算表50所載各月生鐵產量之時節指數

月	中環比	鏈比(以一月為基＝100) 未修整者	鏈比 對數	算術的 修整數	算術的 修整鏈比平均＝101.00	算術的 時節指數 平均＝100	幾何的 修整數	幾何的 修整鏈比平均＝101.07 對數	幾何的 修整鏈比平均＝101.07 眞數	幾何的 時節指數 平均＝100
一月	100.0	100.0	2.00000	——	——	99.0	——	2.00000	100.0	98.9
二月	96.0	96.0	1.98227	1.19	94.81	93.9	.00484	1.97743	94.9	93.9
三月	114.0	109.4	2.03902	2.38	107.02	106.0	.00968	2.02934	107.0	105.9
四月	98.0	107.4	2.03019	3.58	103.62	102.6	.01451	2.01568	103.7	102.6
五月	102.5	109.9	2.04100	4.77	105.13	104.1	.01935	2.02165	105.1	104.0
六月	95.0	104.4	2.01870	5.96	98.44	97.5	.02419	1.99451	98.7	97.7
七月	100.0	104.4	2.01870	7.15	97.25	96.3	.02903	1.98967	97.6	96.6
八月	103.0	107.5	2.03141	8.34	99.16	98.2	.03386	1.99755	99.5	98.4
九月	101.0	108.6	2.03583	9.53	99.07	98.1	.03870	1.99713	99.3	98.3
十月	107.5	116.8	2.06744	10.73	106.07	105.0	.04354	2.02390	105.6	104.5
十一月	96.0	112.1	2.04961	11.92	100.18	99.2	.04838	2.00123	100.3	99.2
十二月	102.0	114.3	2.05805	13.11	101.19	100.2	.05321	2.00484	101.1	100.0
一月	100.0	114.3	2.05805	14.30	100.00	99.0	.05805	2.00000	100.0	98.9

表58　計算紐約市銀行清算額之時節指數

月	環比	環比對數	月	以一月爲基之鏈比對數(一月＝1.00)	修整因數之對數 平均＝.00515	以一月爲基修整鏈比之對數	以一月爲基(100)修整鏈比 平均＝91.7	時節變化指數 平均＝100
	(a)	(b)		(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
1月/12月	1.06	0.0253	1月	0.0000	0.0000	0.0000	100.0	109
2月/1月	.94	9.9731	2月	9.9731	0.0052	9.9679	92.9	102
3月/2月	1.05	0.0212	3月	9.9943	0.0103	9.9840	96.4	105
4月/3月	1.02	0.0086	4月	0.0029	0.0154	9.9875	97.2	106
5月/4月	.99	9.9956	5月	9.9985	0.0206	9.9779	95.0	104
6月/5月	.89	9.9494	6月	9.9479	0.0258	9.9221	83.6	91
7月/6月	.97	9.9868	7月	9.9347	0.0309	9.9038	80.1	87
8月/7月	.94	9.9731	8月	9.9078	0.0360	9.8718	74.4	81
9月/8月	1.16	0.0645	9月	9.9723	0.0412	9.9311	85.3	93
10月/9月	119.5	0.0774	10月	0.0497	0.0464	0.0033	100.8	110
11月/10月	99.5	9.9978	11月	0.0475	0.0515	9.9960	99.1	108
12月/11月	97.5	9.9890	12月	0.0365	0.0566	9.9799	95.5	104
1月/12月	106	0.0253	1月	0.0618	0.0618	0.0000	100.0	

*負對數上之一"10"省略未寫

表59 計算美國紐約省死於腸窒扶斯者之時節基數

病死者	年 \ 月	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	一月
人	1910	91	92	97	74	66	72	100	142	185	174	168	136	
	11	97	90	94	80	78	75	116	167	154	148	117	104	
	12	109	64	69	71	83	73	77	121	138	143	86	73	
	13	53	46	52	45	64	48	72	105	126	168	121	99	
	14	70	56	53	62	63	45	70	74	114	117	94	66	
	15	51	37	45	36	43	50	52	89	97	101	77	87	
	16	60	39	33	33	33	39	41	61	72	82	67	51	
	17	41	47	39	37	40	34	46	65	86	63	55	36	
	18	28	21	34	29	42	31	53	58	75	140	35	33	
	19	24	21	22	16	26	14	34	44	58	49	30	36	
數	20	16	12	13	30	17	23	43	49	68	48	27	33	
	21	28	15	27	17	16	26	34	42	52	60	34	35	

環	1910		1.01	1.05	.76	.89	1.04	1.39	1.42	1.30	.94	.97	.81	
	11	71	.93	1.04	.85	.97	.96	1.55	1.44	.92	.96	.79	.89	
	12	1.05	.59	1.06	1.03	1.17	.88	1.05	1.57	1.14	1.04	.60	.85	
	13	.73	.87	1.13	.87	1.42	.75	1.50	1.46	1.20	1.33	.72	.82	
	14	.71	.80	.95	1.17	1.02	.71	1.55	1.06	1.54	1.03	.80	.70	
	15	.77	.73	1.21	.80	1.19	1.16	1.04	1.71	1.09	1.04	.76	1.13	
	16	.69	.65	.85	1.00	1.00	1.18	1.05	1.49	1.58	1.14	.82	.76	
	17	.80	1.15	.83	.95	1.08	.85	1.35	1.41	1.32	.73	.87	.65	
	18	.78	.75	1.02	.85	1.45	.74	1.71	1.09	1.29	1.87	.25	.94	
	19	.73	.88	1.05	.73	1.62	.54	2.42	1.29	1.32	.84	.61	1.20	
比	20	.44	.78	1.08	2.31	.57	1.35	1.87	1.14	1.39	.71	.56	1.22	
	中　數	.73	.80	1.05	.87	1.08	.88	1.50	1.42	1.29	1.03	.76	.85	.73
鏈比(一月＝1.00)		1.000	.860	.840	.731	.789	.695	1.042	1.479	1.908	1.965	1.493	1.269	.926
按月修整長期趨向 .006		....	.006	.012	.018	.025	.031	.037	.043	.049	.055	.062	.068	.074
修整鏈比		1.000	.806	.852	.749	.814	.726	1.071	1.522	1.957	2.020	1.555	1.337	1.000
時節指數（以平均數 1.2014爲基）		.833	.671	.704	.624	.678	.604	.898	1.267	1.629	1.682	1.295	1.113	
時節基數 (1920平均死者31.58)		26	21	22	20	21	19	28	40	51	53	41	35	

材料來源: U. S. Census Bureau, Mortality Statistics.

之環比對數加十二月之鏈比對數以求一月之鏈比對數爲止,然後視最後與最前一月鏈比對數之差異,仍用算術的平均差誤法分配於各鏈比對數,復求其眞數,即修整鏈比(閱表58).如此用幾何的方法而以對數計算,亦甚簡易,復以差誤爲複利的增加,較算術平均累積的增加爲合理,故若干學者如潘森等頗主用之.

表 60　計算支加哥銀行清算額自逐月環比中數至時節基數

A	B	C	D	E	F	G
月	中環比	鏈　　比	長期趨向之月的修整 (－.0041)	修整鏈比 (一月＝100)	修整鏈比 (年平均＝1.00[a])	時節基數 (1890 平均＝1.00[b])
一　月	.97½	1.000	....	1.000	1.035	353
二　月	.86	.860	－.004	.856	.886	302
三　月	1.17	1.006	－.008	.998	1.033	352
四　月	.96	.966	－.012	.954	.988	337
五　月	1.05	1.014	－.016	.998	1.033	352
六　月	.97	.984	－.020	.964	.998	340
七　月	.99	.974	－.025	.949	.982	335
八　月	.96	.935	－.029	.906	.938	320
九　月	1.02	.954	－.033	.921	.953	325
十　月	1.12	1.068	－.037	1.031	1.067	364
十一月	.96	1.025	－.041	.984	1.019	347
十二月	1.05	1.076	－.045	1.031	1.067	364
一　月	.97½	1.049	－.049	1.000	....	....

a. 在 E 行十二個月之平均爲 .966

b. 1890 年平均月清算額爲 341 百萬美元

鏈比雖經修整,而以一月爲基,仍有偏重之嫌,故須改以全年十二個月鏈比之平均數即鏈比總數十二分之一爲基,當爲 100, 計算各月比數即時節指數(可參閱表 57 及 58),若以之分別乘原材料基年十二個月平均實數,即可得時節基數(閱表 59 及 60).以各月之時節指數分別除相當月各項原實數;例如以二月之時節基數除二月之任一原實數,以三月之時節基數除三月之任一原實數,求出結果,即時節修整指數(閱表 61).

表 61　用環比法計算支加哥銀行清算額時節變化修整指數之一部分紀錄

A	B	C	D	E
年及月	淸算額(以百萬美元爲單位)	環比	時節基數	時節變化修整指數 (B÷D)×100
1890				
一月	296	....	353	84
二月	253	.85	302	84
三月	305	1.21	352	87
四月	324	1.06	337	96
五月	375	1.16	352	107
六月	359	.96	340	106
七月	351	.98	335	105
八月	342	.97	320	107
九月	360	1.05	325	111
十月	406	1.13	364	112
十一月	364	.90	347	105

十二月	359	.99	364	99
1891				
一　月	346	.96	353	98
二　月	293	.85	302	97
三　月	334	1.14	352	95
四　月	348	1.04	337	103
五　月	391	1.12	352	111
六　月	375	.96	340	110
七　月	363	.97	335	108
八　月	362	1.00	320	113
九　月	398	1.10	325	122
十　月	422	1.06	364	116
十一月	402	.95	347	116
十二月	424	1.05	365	116

若時間數列之長期趨向縱距求出,則可按月由原來實數對於趨向縱距之百分比率,減去同月時節指數(閱表63),亦可除去時節變化之影響,而反映商情循環之狀態.

由上所述,可知中環比法精神之所在,乃以環比為其計算之基礎,使離開長期趨勢及循環之影響,復取環比之中數以為每月與前一月關係之模型,化中環比數列為鏈比數列,加以修整求其平均數,使各月鏈比有比較之中心,於以求出時節變化修整指數,其能盡剔除時節變化影響之功能,自為最可滿意者也.

5. 實數比縱距法(Ratio-actual-to-ordinate Method) 應

用此法,須先求出長期趨向之各月縱距(ordinates),然後求出各月各項實數對於縱距之比例,即當縱距之百分數,再將所有一月各項百分數成一次數分配,所有二月者成一次數分配,依此類推,至將所有十二月者成一次數分配爲止.在每次數分配之居中各項,計算一平均數,共得十二個粗可代表之時節比數(seasonal relatives)即時節指數,復各除以其平均數,計算當平均數之百分數,以爲依比較正常狀態之時節變化之測量(可參閱表62).

表62　美國大鐵路之毛收入

	I	II	III	IV	V	VI	VII
年及月	實數 *	趨向縱距 *	實數對趨向之比較數	時節指數	百分差異改正 III－IV	修整比較數 III÷IV	循環 †
....	....	....	....	....	....	....	....
十一月	574	540.8	106	106	0	100	0.0
十二月	533	543.2	98	102	－4	96	－.7
1908							
一月	469	545.7	86	93	－7	93	－1.2
二月	426	548.1	78	87	－9	91	－1.5
三月	487	550.6	88	99	－11	89	－1.8
四月	470	553.0	85	96	－11	89	－1.8
五月	458	555.5	82	97	－15	85	－2.5
六月	469	557.9	84	97	－13	87	－2.2
七月	459	560.4	82	98	－16	84	－2.7
八月	525	562.9	93	106	－13	87	－2.2
九月	552	555.3	99	107	－9	91	－1.5

十月	581	567.8	102	112	−10	90	−1.7
十一月	550	570.2	96	106	−10	90	−1.7
十二月	534	572.7	93	102	− 9	91	−1.5
1909							
一月	490	575.1	85	93	− 8	92	−1.3
二月	467	577.6	81	87	− 6	94	−1.0
三月	542	580.0	93	99	− 6	94	−1.0
四月	517	582.5	89	96	− 7	93	−1.2

註: * 單位 $100,000 † 單位一標準差 5.98%

此法雖較環比法有省環比費力計算之利益,但其計算須以長期趨向縱距值爲基據,似環比法以每一轉期變動如每進一月者爲基據,故其結果不若後者足以顯示時節變化之影響,學者鮮用之焉.

時節變化尙有由於月令大小之不同者,苟欲消除此種影響,宜將每月數字平均爲每日數字.其計算方法:有如德國景氣研究所(Institut für Konjunktus forschung)之生產指數及梁友生君所編生產品消費品耐久品與非耐久品產量指數之除各曆月之生產量以工作日數;有如美國地質調查所(U. S. Geological Survey)之供給電力生產月數字除以該月內包含之曆日數;有如美國聯邦準備局之百貨商店銷售指數及商部各月自動車生產數字曾經除之原有數以商業日(business days)數等.

尙有一法,可以同時消除月令不等及他種原因所數時節變化之影響.其法乃將每月之數字以基期相當月之數字爲根據計算指數;例如奧大利景氣研究所(Osterreichisches Institut für Konjunkturforschung) 智利統計處(Direction de Estadistica)等所編之生產指數,瑞典工業聯合會(Federation of Industries)之工人在業指數,澳大利亞之錫乃(Sydney)銀行清算額指數,及荷蘭農業局(Board of Agriculture)之農產物價指數所包含番薯牛奶鷄蛋等數列皆用此法調正時節變化.

循環波動

每一循環包含復興、擴張、回落及收縮之狀態,(Each cycle includes a phase of revival, expansion, recession and contraction.)即自一峯至次一峯,或自一溝至次一溝,測量之單位.其時期之長固不一定,以最常研究之商情循環言之,有若干國家須經過六年至十餘年,而美國則於歐洲大戰前,一整個循環所掩有時期不過三四年而已.循環能表示一時期盛衰盈絀往復之現象,故在商業方面有稱爲商情指示者(indicator of business condition). 至循環所包含之四時期,各呈何種現象,應能明瞭,茲依社會一般人士之立場,各舉其較爲顯著者如下:

(一)復興期或復元(recovery)期

1. 奢侈浪費之習慣逐漸擯除.
2. 企業較爲活動,漸可樂觀.
3. 建築工程增加.
4. 人民購買力增加.
5. 存貨劇減.
6. 物價停止跌落.
7. 失業之勞動者減少.
8. 輸出對輸入比率增進.

9. 運輸增加.
10. 營業之利益平穩.
11. 金融市場鬆動.
    a. 利率與貼現率降低.
    b. 放款條件不苛,款額增加.
    c. 銀行清算額增加.
    d. 銀行儲金增多.
    e. 債券價格上昇.
12. 商業失敗減少.

(二)擴張期或繁盛(prosperity)期

1. 企業活躍.
2. 貨物推銷加速.
3. 運輸數量增加.
4. 企業利益高而失敗少.
5. 新事業增加.
6. 工作機會頗多.
7. 製造者加工出品.
8. 生產平準昇高.
9. 工資增加.
10. 浪費增加
11. 物價飛漲.
12. 生活費上昇.
13. 依薪金生活之被雇用者及小投資者受物價騰漲之痛苦.
14. 信用擴漲.

15. 銀行清算額增加.
16. 放款甚至不問其用途.
17. 利率增進.
18. 股票市場顯示高度活動.
19. 投機極盛.
20. 領袖商人表示對於商情旺好之樂觀.

(三)回落期或降落 (decline) 期

1. 企業擴張似已至最高峯,逡巡不進.
2. 生產追逾消費.
3. 物品在高價方面之利益不能維持,急轉降落.
4. 物價停止上昇,開始跌落,由原料起直至全分配體系趨於同樣途徑.
5. 疑慮將來之發展及自身之能力.
6. 金融與證券市場緊張.
7. 利率提高.
8. 借款不易.
9. 銀行清算減少.
10. 有通貨缺乏之呼聲.
11. 信用緊縮.
12. 結欠延宕.
13. 運輸減少.
14. 堆棧存貨甚多.
15. 投資者裹足不前.
16. 輸出對輸入之比率降落.

(四)收縮期或衰微 (depression) 期

1. 貿易遲滯.
2. 業務經營之利益甚微,損過於益者多.
3. 運輸減色.
4. 生產體積收縮.
5. 工作機會凝結.
6. 失業人數增加.
7. 物價狂跌.
8. 工資低落.
9. 罷工減少.
10. 企業失敗增加.
11. 無力償欠者日增.
12. 股票價格慘落.
13. 信用緊縮,銀行之放款、存款減少.
14. 借款之條件苛刻.
15. 銀行清算額減少.
16. 利率及貼現率上昇.
17. 生產技術力求改良.
18. 企業家注意集中經濟力量.
19. 工作場所之衞生安全設備,事業宣傳之廣告及其他非生產之活動減省.
20. 經濟狀況預測引起人民極端之注意.

若欲爲循環之計算則宜先有若干年各月之資料,例如美國農部年鑑(Year-book of the Department of Agriculture)有自 1870 年至現在之每月農場平均穀價與年生產量;統計摘要(Statistical Abstract of the United States)有煤鐵各年生產

量,紐約上百萬金元之各銀行之清算額,失敗上百萬金元者之負債額與其他關於生產之資料;勞工統計局月報(Bureau of Labour Statistics Bulletin) 334 號有若干年各月平均零售物價,與 335 號有同樣物品之各月躉售物價等.採齊合用之資料後,即消除其長期趨向,若所研究事實之變動須受時節之影響者,並須剔除時節變化.兩者剔除可用下列方程式:

$$I_A = \frac{y}{s} \div Y$$

I_A　修整數字

y　原有各數

Y　長期趨向之各項縱距

S　時節指數

例如美國時事雜誌(Annalist)之商情活動指數所包含鋼鐵生產數列之修整數字,即用上列公式求出.復以其結果減 1,遂得循環離差,其計算法亦可演式如下:——

$$C = \frac{y}{Y} - S$$

C 代表循環變差

因離散度之大小,即所以表示數列變動範圍之廣狹,而測量離散度之通常單位(normal unit of variability)最適當者,則為標準差,故更除循環變差以數列之標準差,得循環變差以標

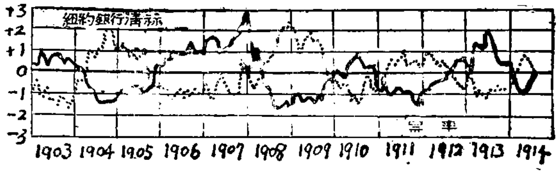


圖 13　紐約60－90日原始商業股票率及紐約清算銀行放款之循環波動之比較　1903年按月—1914年七月

表63 表示1903至1916年實在生鐵生產,趨向最小自乘的縱距,時節變化與循環變差及1903至1916年紐約60－90日商業票據利率循環變差

長期趨向: 在1903－16時期配合之直線

時節變化: 依據1903年一月至1907年一月之環比

1	2	3	4	5	6	7	8	9
年	月	生鐵生產						1903－1916紐約60－90日商業票據利率循環變差(單位標準差)
		生產量(千噸)	趨向(千噸)	趨向之百分數 3÷4;%	時節變化 %	循環變差 5－6;%	循環變差(單位標準差) 7÷σ =19.1	
1903	一月	1472	1416	104.0	98.9	5	.3	－.1
	二月	1390	1424	97.6	93.9	4	.2	.1
	三月	1590	1432	111.0	105.9	5	.3	.5
	四月	1608	1440	111.7	102.6	9	.5	.2
	五月	1713	1448	118.3	104.0	14	.7	－.1
	六月	1673	1456	114.9	97.7	17	.9	.5
	七月	1546	1463	105.7	96.6	9	.5	.4
	八月	1571	1471	106.8	98.4	8	.5	.5
	九月	1553	1479	105.0	98.3	7	.4	.3
	十月	1425	1487	95.8	104.5	－9	－.5	－.1
	十一月	1039	1495	69.5	99.2	－30	－1.6	.3
	十二月	846	1503	56.3	100.0	－44	－2.3	.0
	一月	921	1511	61.0	98.9	－38	－2.0	－.3
	二月	1205	1519	79.3	93.9	－15	－.8	.0
	三月	1447	1527	94.8	105.9	－11	－.6	－.3
	四月	1555	1535	101.3	102.6	－1	－.1	－.7
	五月	1534	1543	99.4	104.0	－5	－.3	－.8

1904	六　月	1292	1551	83.3	97.7	−14	− .8	−1.0
	七　月	1106	1559	70.9	96.6	−26	−1.4	−1.3
	八　月	1167	1567	74.5	98.4	−24	−1.3	−1.5
	九　月	1352	1575	85.8	98.3	−12	− .6	−1.4
	十　月	1450	1583	91.6	104.5	−13	− .7	−1.3
	十一月	1486	1591	93.4	99.2	− 6	− .3	−1.4
	十二月	1616	1598	101.1	100.0	1	.1	−1.4
1905	一　月	1781	1606	110.9	98.9	12	.6	−1.1
	二　月	1597	1614	98.9	93.3	5	.3	− .9
	三　月	1936	1622	119.4	105.9	13	.7	−1.0
	四　月	1922	1630	117.9	102.6	15	.8	− .8
	五　月	1963	1638	118.2	104.0	16	.8	− .7
	六　月	1793	1646	108.9	97.7	11	.6	− .8
	七　月	1741	1654	105.3	96.6	9	.5	− .7
	八　月	1843	1662	110.9	98.4	13	.7	−1.0
	九　月	1899	1670	113.7	98.3	15	.8	− .9
	十　月	2053	1678	122.3	104.5	18	.9	− .8
	十一月	2014	1686	121.1	99.2	20	1.0	.1
	十二月	2045	1694	120.7	100.0	21	1.1	.2
1906	一　月	2068	1702	121.5	98.9	23	1.2	.1
	二　月	1904	1710	111.3	93.9	17	.9	.4
	三　月	2155	1718	125.4	105.9	20	1.0	.5
	四　月	2073	1726	120.1	102.6	18	.9	.8
	五　月	2098	1733	121.1	104.0	17	.9	.8
	六　月	1976	1741	113.5	97.7	16	.8	.8
	七　月	2013	1749	115.1	96.6	18	.9	.8

	八月	1926	1757	109.6	98.4	11	.6	.9
	九月	1960	1765	111.0	98.3	13	.7	1.1
	十月	2196	1773	123.9	104.5	19	1.0	.8
	十一月	2187	1781	122.8	99.2	24	1.3	.9
	十二月	2235	1789	124.9	100.0	25	1.3	.8
1907	一月	2205	1797	122.7	98.9	24	1.3	1.3
	二月	2045	1805	113.3	93.9	19	1.0	1.4
	三月	2226	1813	122.8	105.9	17	.9	1.5
	四月	2216	1821	121.7	102.6	19	1.0	1.3
	五月	2295	1829	125.5	104.0	21	1.1	.9
	六月	2234	1837	121.6	97.7	24	1.3	1.2
	七月	2255	1845	122.2	96.6	26	1.4	1.1
	八月	2250	1853	121.4	98.4	23	1.2	1.3
	九月	2183	1861	117.3	98.3	19	1.0	1.5
	十月	2336	1868	125.1	104.5	20	1.1	1.7
	十一月	1828	1876	97.4	99.2	−2	−.1	2.2
	十二月	1234	1884	65.5	100.0	−34	−1.8	2.7
1908	一月	1045	1892	55.2	98.9	−44	−2.3	1.9
	二月	1077	1900	56.7	93.9	−37	−2.0	.6
	三月	1228	1908	64.4	105.9	−42	−2.2	1.0
	四月	1149	1916	60.0	102.6	−43	−2.2	−.2
	五月	1165	1924	60.6	104.0	−44	−2.3	−.5
	六月	1092	1932	56.5	97.7	−41	−2.1	−.7
	七月	1218	1940	62.8	96.6	−34	−1.8	−.9
	八月	1348	1948	69.2	98.4	−29	−1.5	−1.4
	九月	1418	1956	72.5	98.3	−26	−1.4	−1.5

	十　月	1563	1964	76.6	104.5	−25	−1.3	−1.3
	十一月	1577	1972	80.0	99.2	−19	−1.0	−1.2
	十二月	1740	1980	87.9	100.0	−12	− .6	−1.6
1909	一　月	1801	1988	90.6	98.9	− 8	− .4	−1.1
	二　月	1703	1996	85.3	93.9	− 8	− .4	− .9
	三　月	1832	2003	91.5	105.9	−14	− .8	−1.1
	四　月	1738	2011	86.4	102.6	−16	− .8	−1.0
	五　月	1880	2019	93.1	104.0	−11	− .6	−1.0
	六　月	1929	2027	95.2	97.7	− 3	− .2	−1.0
	七　月	2101	2035	103.2	96.6	7	.4	−1.2
	八　月	2246	2043	109.9	98.4	12	.6	− .9
	九　月	2385	2051	116.3	98.3	18	.9	−1.0
	十　月	2600	2059	126.3	104.5	22	1.1	− .3
	十一月	2547	2067	123.2	99.2	24	1.3	.0
	十二月	2635	2075	127.0	100.0	27	1.4	− .2
1910	一　月	2608	2083	125.2	98.9	26	1.4	.2
	二　月	2397	2091	114.6	93.9	20	1.1	.2
	三　月	2617	2099	124.7	105.9	19	1.0	.0
	四　月	2483	2107	117.8	102.6	15	.8	.4
	五　月	2390	2115	113.0	104.0	9	.5	.5
	六　月	2265	2123	106.7	97.7	9	.5	.8
	七　月	2148	2131	100.8	96.6	4	.2	1.1
	八　月	2106	2138	98.5	98.4	0	.0	.7
	九　月	2056	2146	95.8	98.3	− 3	− .2	.5
	十　月	2093	2154	97.2	104.5	− 7	− .4	.5
	十一月	1909	2162	88.3	99.2	−11	− .6	.8

	十二月	1777	2170	81.9	100.0	−18	− .9	− .5
1911	一　月	1759	2178	80.8	98.9	−18	− .9	− .6
	二　月	1794	2186	82.1	93.9	−12	− .6	− .2
	三　月	2188	2194	99.7	105.9	− 6	− .3	− .6
	四　月	2065	2202	93.8	102.6	− 9	− .5	− .7
	五　月	1893	2210	85.7	104.0	−18	− .9	− .6
	六　月	1787	2218	80.6	97.7	−17	− .9	− .4
	七　月	1793	2226	80.5	96.6	−16	− .8	− .6
	八　月	1926	2234	86.2	98.4	−12	− .6	− .6
	九　月	1977	2242	88.2	98.3	−10	− .5	− .5
	十　月	2102	2250	93.4	104.5	−11	− .6	− .8
	十一月	1999	2258	88.5	99.2	−11	− .6	−1.1
	十二月	2043	2266	90.2	100.0	−10	− .5	− .5
1912	一　月	2057	2273	90.5	98.9	− 8	− .5	− .6
	二　月	2100	2281	92.1	93.9	− 2	− .1	− .4
	三　月	2405	2289	105.1	105.9	− 1	− .1	− .1
	四　月	2375	2297	103.4	102.6	1	.1	− .1
	五　月	2512	2305	109.0	104.0	5	.3	.1
	六　月	2440	2313	105.5	97.7	8	.4	.1
	七　月	2410	2321	103.8	96.6	7	.4	.4
	八　月	2512	2329	107.9	98.4	9	.5	.5
	九　月	2463	2337	105.4	98.3	7	.4	.8
	十　月	2689	2345	114.7	104.5	10	.5	1.1
	十一月	2630	2353	111.8	99.2	13	.7	1.1
	十二月	2782	2361	117.8	100.0	18	.9	1.3
	一　月	2795	2369	118.0	98.9	19	1.0	.7

	二　月	2586	2377	108.8	93.9	15	.8	1.0
	三　月	2763	2385	115.8	105.9	10	.5	1.8
	四　月	2752	2393	115.0	102.9	12	.7	1.6
	五　月	2822	2401	117.5	104.0	14	.7	1.5
	六　月	2628	2408	169.1	97.7	11	.6	2.3
1913	七　月	2560	2416	106.0	96.6	9	.5	2.2
	八　月	2543	2424	104.9	98.4	6	.4	1.7
	九　月	2505	2432	103.0	98.3	5	.3	1.2
	十　月	2546	2440	104.4	104.5	0	.0	1.0
	十一月	2233	2448	91.2	99.2	− 8	− .4	1.0
	十二月	1983	2456	80.7	100.0	−19	−1.0	1.0
	一　月	1885	2464	76.5	98.9	−22	−1.2	.3
	二　月	1888	2472	76.4	93.9	−18	− .9	− .2
	三　月	2348	2480	94.7	105.9	−11	− .6	− .3
	四　月	2270	2488	1.29	102.6	−11	− .6	− .4
	五　月	2093	2496	83.9	104.0	−20	−1.0	− .1
	六　月	1918	2504	76.6	97.7	−21	−1.1	.1
1914	七　月	1958	2512	78.0	96.6	−19	−1.0	.4
	八　月	1995	2520	79.2	98.4	−19	−1.0	2.3
	九　月	1883	2528	74.5	98.3	−24	−1.3	2.4
	十　月	1778	2536	70.1	104.5	−34	−1.8	2.0
	十一月	1518	2543	59.7	99.2	−40	−2.1	1.1
	十二月	1516	2551	59.4	100.0	−41	−2.1	− .5
	一　月	1601	2559	62.6	98.9	−36	−1.9	− .4
	二　月	1675	2567	65.3	93.9	−29	−1.5	− .2
	三　月	2064	2575	80.2	105.9	−25	−1.3	− .8

1915	四月	2116	2583	81.9	102.6	−21	−1.1	−.4
	五月	2263	2591	87.3	104.0	−17	−.9	−.2
	六月	2381	2599	91.6	97.7	−6	−.3	−.1
	七月	2563	2607	98.3	96.6	2	.1	−.9
	八月	2780	2615	106.3	98.4	8	.4	−1.0
	九月	2853	2623	108.8	98.3	10	.5	−1.6
	十月	3125	2631	118.8	104.5	14	.7	−1.8
	十一月	3037	2639	115.1	99.2	16	.8	−1.8
	十二月	3203	2647	121.0	100.0	21	1.1	−1.8
1916	一月	3185	2655	102.0	98.9	21	1.1	−1.2
	二月	3087	2663	115.9	93.9	22	1.1	−.8
	三月	3338	2671	125.0	105.9	19	1.0	−1.0
	四月	3228	2678	120.5	102.6	18	.9	−.9
	五月	3351	2686	124.8	104.0	21	1.1	−.8
	六月	3212	2694	119.2	97.7	21	1.1	−.1
	七月	3226	2702	119.4	96.6	23	1.2	.1
	八月	3204	2710	118.2	98.4	20	1.0	−.6
	九月	3202	2718	117.8	98.3	20	1.0	−1.4
	十月	3509	2726	128.7	104.5	24	1.3	−1.5
	十一月	3312	2734	121.1	99.2	22	1.1	−1.1
	十二月	3171	2742	115.6	100.0	16	.8	−.8

準差為單位者(參閱圖13).茲以美國1903至1916年各月生鐵產額爲例,將其計算循環之程序與其結果,及紐約商業票據利率循環計算之結果並列於表63內,以明循環計算之方法.

哈佛經濟服務處於編製商情指數時,計算其所包含數列之循環變差,當先乘長期趨向之每月縱距值以相當月之

時節指數,繼以此乘積減自相當月之原有數,復除此結果以長期趨向縱距值,於是求出原有數自相當月已經修整時節變化之長期趨向縱距值之百分離差,以後仍與上例一致須求出循環變差之以標準差爲單位者,其實此法在以前之步驟演成代數式則爲 $\frac{y-YS}{Y}$,固與前例所用之公式 $\frac{y}{Y}-S$ 亦相等也.

至若遇所研究之事實僅有年數字,則不必有剔除時節變化之一舉;逕求長期趨向,而消除其影響,以推算循環波動可已.

第十三章 插補法

(Interpolation)

指數數列以搜集資料之煩難,編製需費之浩大,或特殊事變之發生,致有時不容繼續,而中斷者.苟無以彌補之,則於全事實之研究,或生窒礙.於是有所謂插補法;此非可以任便臆定,乃根據事實變動之"連續定理"(Principle of Continuity),或兩種以上現象之"相似"(Analogy)或"相關",推闡而成.蓋一事實演變,常循一定軌道進行,故在某一時距之變化,與其前及其後之變化,有相當關係,若昧然於某一時距之變化,只須明瞭其前後之狀況,不難由以測揆其未可知者;甲種現象與乙種現象如極相似,或相關程度頗高,對於甲種現象不明,而能洞悉乙種現象,未始不可準乙種現象以度量甲種現象也.插補指數計算之方法最普通者有三種:

一、算術級數(Arithmetic Progression) 將擬插補指數之時期之後一實有指數,減去前一實有指數,所得差數,除以兩端相距之時間單位數,求得結果,即每進一時間單位,加此結果一次.此種方法因須以一定絕對差數逐步加入,故謂爲算術級數.可演成公式如下:

$$y_x = y_o + x\left(\frac{y_n - y_o}{n}\right)$$

y_x 爲插補指數

y_o 爲擬插補時期之前一實有指數

y_n 爲擬插補時期之後一實有指數

x 代表y_o以後之時距單位數

n代表擬插補時期之前一時間與後一時間相離之時距單位數

譬如上海躉售物價指數,假設缺二十二年三月及四月之數字,吾人可由其前之二月數字107.6與其後之五月數字104.2推算插補指數如下:

$$\because y_0 = 107.6$$

$$y_n = 104.2$$

$$n = 3$$

$$\therefore y_1 = y_0 + 1 \times \left(\frac{y_n - y_0}{n}\right)$$

$$= 107.6 + 1 \times \left(\frac{104.2 - 107.6}{3}\right) = 107.6 + (-1.133)$$

$$= 106.5$$(即三月之插補指數)

$$y_2 = y_0 + 2 \times \left(\frac{y_n - y_0}{n}\right)$$

$$= 107.6 + 2 \times \left(\frac{104.2 - 107.6}{3}\right) = 107.6 + (-2.\dot{2}66)$$

$$= 105.3$$(即四月之插補指數)

二、 幾何級數(Geometric Progression) 先求擬插補指數時期之後一實有指數當前一實有指數之比率,再計算其於前後時間相離之時距單位數中之幾何平均,得每時距單位之增進比率,以之乘擬插補時期前一實有指數,得插補時期中第一時距單位之指數,用此結果,更乘以每單位時距之增進比率,得第二指數,以此類推.此種方法因依相同比率逐步增加,故謂爲幾何級數.可演成公式如下:

設以 r 爲每時距單位之增長率

則 $$y_n = y_0(1 + r)^n$$

$$(1+r)^n=\frac{y_n}{y_o}$$

$$1+r=\sqrt[n]{\frac{y_n}{y_o}}$$

$$y_x=y_o(1+r)^x=y_o\left(\sqrt[n]{\frac{y_n}{y_o}}\right)^x$$

仍用前舉之例,已知 y_n 爲 104.2, y_o 爲 107.6, n 爲 3, 則

$$y_1=y_o\left(\sqrt[n]{\frac{y_n}{y_o}}\right)^1=107.6\times\left(\sqrt[3]{\frac{104.2}{107.6}}\right)^1$$

$$=107.6\times0.989=106.5$$

$$y_2=y_o\left(\sqrt[n]{\frac{y_n}{y_o}}\right)^2=107.6\times\left(\sqrt[3]{\frac{104.2}{107.6}}\right)^2$$

$$=107.6\times(0.989)^2=105.3$$

上式因有自乘開方等計算之手續較煩,可改用對數法計算之,則簡便多矣,其式如下:

$$log\,y_n=log\,y_o+n\,log(1+r)$$

$$n\,log(1+r)=log\,y_n-log\,y_o$$

$$log(1+r)=\frac{log\,y_n-log\,y_o}{u}$$

則 $$log\,y_x=log\,y_o+x\,log(1+r)$$

$$=log\,y_o+x\frac{log\,y_n-log\,y_o}{n}$$

將上例物價指數代入公式:

$$log\,y_1=log\,y_o+1\times\left(\frac{log\,y_n-log\,y_o}{n}\right)$$

$$=log107.6+\left(\frac{log104.2-log107.6}{3}\right)$$

$$=2.03181+\left(\frac{2.01787-2.03181}{3}\right)$$

$$=2.03181+(-.00465)=2.02716=log106.5$$

三月之插補指數爲106.5

$$\log y_2 = \log y_0 + 2\times\left(\frac{\log y_n - \log y_0}{n}\right)$$

$$= \log 107.6 + 2\times\left(\frac{\log 104.2 - \log 107.6}{3}\right)$$

$$= 2.03181 + 2\times\left(\frac{2.01787 - 2.03181}{3}\right)$$

$$= 2.03181 + (-.0093) = 2.02251 = \log 105.3$$

四月之插補指數爲105.3

三、調合時節變化(Adjustment to Seasonal Variation)　此法乃依時節指數變動之比例,推算插補指數.其用途常限於月指數之計算.進行步驟大別爲三:——

第一步　向前計算　依擬插入指數時期前之一月指數,按照該月之時節指數與擬插入指數所屬各月之時節指數之比例,推算擬插入各月之數字.

第二步　向後計算　依擬插入指數時期後之一月指數,按照該月之時節指數與擬插入指數所屬各月之時節指數之比例,推算擬插入各月之數字.

第三步　平均　將前兩次計算之數字按月平均,以其結果當爲插補指數.

吾人仍取前例已知二月之實有指數爲107.6,五月之實有指數爲104.2;並須求出上海躉售物價之時節指數,若已知其結果在二月爲100.5,三月爲100.9,四月爲100.8,五月爲100.3.則可求三月及四月之插補指數如下:——

設x_1代表三月之插補指數

x_2代表四月之插補指數

向前計算

$$\because 107.6 : x_1 = 100.5 : 100.9$$

$$\therefore x_1 = \frac{100.9 \times 107.6}{100.5} = 108.0$$

$$\because 107.6 : x_2 = 100.5 : 100.8$$

$$\therefore x_2 = \frac{100.8 \times 107.6}{100.5} = 107.9$$

向後計算

$$\because 104.2 : x_1 = 100.3 : 100.9$$

$$\therefore x_1 = \frac{100.9 \times 104.2}{100.3} = 104.8$$

$$\because 104.2 : x_2 = 100.3 : 100.8$$

$$\therefore x_2 = \frac{100.8 \times 104.2}{100.3} = 104.7$$

平均

$$x_1 = \frac{108.0 + 104.8}{2} = \frac{212.8}{2} = 106.4$$

$$x_2 = \frac{107.9 + 104.7}{2} = \frac{212.6}{2} = 106.3$$

插補法除上舉三種外,尚有牛頓(Newton),斯透林(Sterling)拉格蘭(Lagrange)等諸氏之公式,其所求出之結果雖或比較精確,然與最前兩法計算之結果相差頗微,而費力特多,故編製指數者不恆用之.至上舉三法之比較,則以最前兩者應用最多,蓋其法與他種公式計算之結果既相差殊微,而調合時節變化法之用途又常限於月指數之插補,且遇異常事變,往往求出結果不近實情也.

第十四章　指數圖

(Index-number Chart)

指數數列往往連續甚長,或不止一種,人驟視之不易獲其概念;然苟能善用圖示方法,庶可以彌補此缺陷,使人於目力接觸之頃刻,可以洞燭其消長情形及一般趨向,並與人以比較對於表列數字爲深刻之印象.是則編製指數者烏可不明其致用之道歟!在統計法上圖形頗多,對於所有統計數列(Statistical Series)未必盡能合用,須視其屬於何種而選取適宜之圖形.據塞特克立夫氏分統計數列爲四種:其表示全體各部分之關係者,曰組合數列(Component Series);關於空間之位置者,曰,空間數列(Spatial Series);在一特定時期所測量事實變化之現象者,曰,次數數列 (Frequency Series); 一時期事實連續之現象者,曰時間數列(Time Series).表現組合數列,可用圓形 (pie), 直條 (bar), 百分直條 (100 per cent bar) 等圖;空間數列,可用地理 (map), 直條等圖;次數數列,可用累積曲線 (Cumulative curve), 羅倫曲線 (Lorenz curve), 垂直直條 (vertical bar), 比例 (ratio) 等圖;時間數列,可用直條,平滑曲線 (smoothed curve), 梯形 (Staircase), 比例等圖.各種圖形,要以線形用途最廣,爲其簡單;蓋簡單在若干著名統計學者如克倫(William Leonard Crum)卜登 (Alson Currie Patton) 等固謂爲圖示法最要特性之一(Simplicity is one of the most desirable properties of all graphic presentation.), 格法特(G. Irving Gavett)亦謂簡單形式最佳 (Simplicity form best) 也.指數數列大多爲時間數列,其次爲次數數列,故其圖示尤多爲曲線,曲線圖

亦可稱為線圖(Line Chart),其用以表示時間數列者,日歷史圖(Historigram);表示次數數列者,曰次數圖(Histogram),此又以形狀之不同,普通有所謂次數多邊形(Frequency Polygon),及矩形次數圖(Rectangular Histogram).曲線圖復可依其所表示者為絕對大小度(absolute magnitude)或改變總數(amount of change)或數量的改變(quantitative change),抑為相對大小度(relative magnitude)或改變率(rate of change)或相對的改變(relative change),而分為算術圖(Arithmetic Chart)及幾何圖(Geometric Chart).算術圖以繪於代表相等差數以相等距離之同格紙(ordinary coordinate paper)或長方格紙(rectilinear paper)之上,故又稱為差數圖(Difference Chart)或數量圖(Quantitative Chart).幾何圖以繪於代表相等比率以相等距離之比率紙(ratio paper)或對數紙(logarithmic paper)之上,故又稱為比率圖(Ratio chart)或對數圖(Logarithmic Chart).方格紙與對數紙均可購自書肆,惟欲繪製之圖甚大,則必須自製.方格紙繪法簡易,姑置不論,對數紙較為煩難,略加解述,其組織每十進為一間面(deck),或稱之曰一帶(zone),例如.001-.01, .01-.1, .1-1, 1-10, 10-100, 100-1000, 1000-10000;或2-20, 20-200, 200-2000, 2000-20000;或60-600, 600-6000, 6000-60000等.若每十進相等情形,可舉例如下:

1	60
2	120
3	180
4	240
5	300
6	360
7	420
8	480
9	540
10	600

自底線向上第一間面出發點若為1;則再向上第二間面因更進一單位,故出發點為10;再向上第三間面因已進兩單位,故出發點為100;依此類推(可參閱圖14).指數乃表示相對的

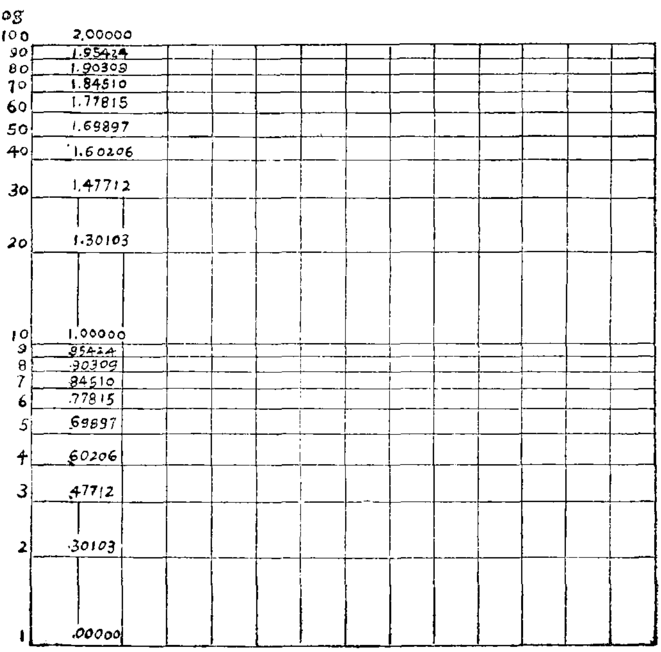


圖14 對數紙之形式

狀況之數列,而其所表示最多屬於經濟狀況,此則密切依從"有機生長律"(Law of Organic Growth)或複數律(Law of Compound Amount)者,故亟宜用比例圖呈現之.若比較兩個以上數列之增長率尤宜用比例圖.其最顯明之理由,即以同樣比例增長之不同數列呈現於算術圖不相同,而呈現於幾何圖則相似(閱圖8與圖15).信乎格法特之言,謂比較若干數列之增長率,差數圖幾無用也.況算術圖所比較之變量如差

異懸殊,常使圖幅擴大(閱圖16);而幾何圖以能減弱劇變量數之勢,雖其差異甚巨,亦可以較小之地位容納之(可參閱圖17).是故以指示人使易獲明確概念爲作用之指數圖示,在學者

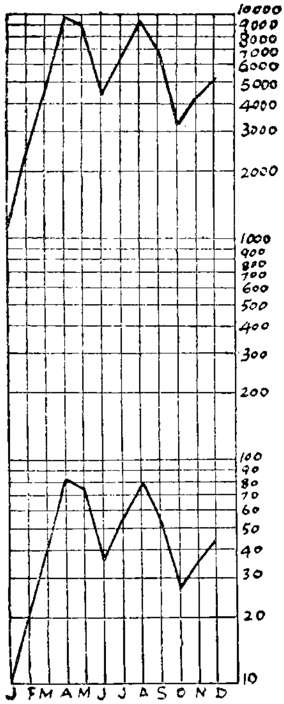


圖 15　一比例圖表示差異頗巨同比率之數量

如塞克類斯特等皆主張採用比例圖矣.至關於算術與幾何曲線圖繪製之普通步驟,分述如下:——

第一步　定原點(Origin or point of origin)　此點在算術圖常爲零點(zero point),在幾何圖則稱爲出發點(starting point),以全圖各線於以發原,故又稱爲縱橫線原點

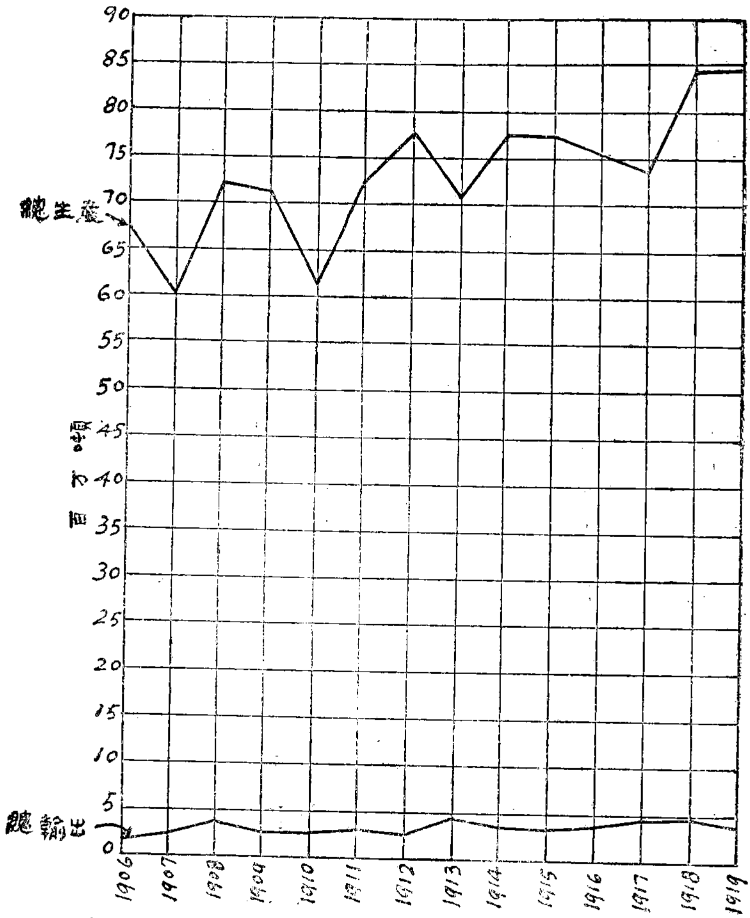


圖 16　白煤之生產與輸出比較1906—1919—算術圖比較差異頗巨之數量

(Origin of coordinates). 此點常居於紙之左下角(閱圖18),有時在紙之左部正中.

第二步　定基線(base line)　自起點向右平行一線,稱之為基線,在算術圖多數即為零或不變線(zero or no change

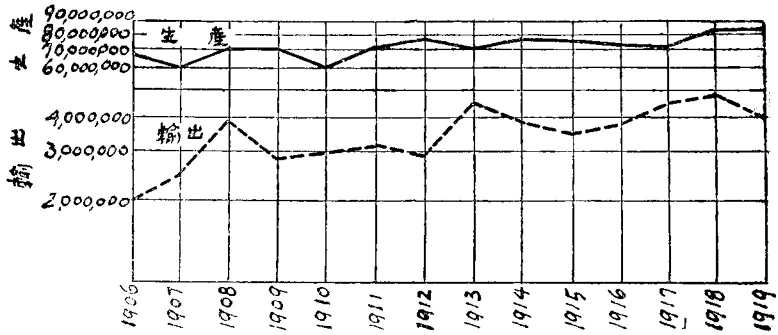


圖 17　白煤之生產與輸出比較1906—1919幾何圖比較差異頗巨之數量

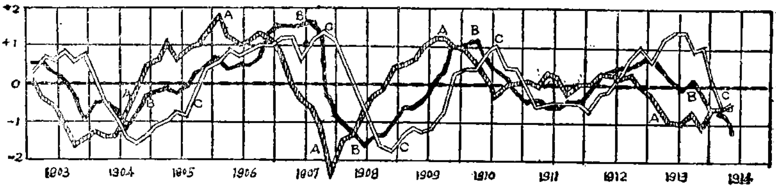


圖 18　一般商情指數1903—14

line),此線有時位於圖之正中,其上所表示者爲正數,其下所表示者爲負數(閱圖11).

第三步　決定量尺 (scale)　量尺有等分若干間距,代表相同差數前進者,曰自然量尺或算術量尺或均勻量尺(natural scale or arithmetic scale or uniform scale).有等分若干間距代表相同比率前進者,曰比率量尺(ratio scale),因常用對數表示之,故又曰對數量尺(logarithmic scale).無論爲算術圖抑幾何圖,至少每圖有兩量尺,其等分或爲同差數前進,或爲同比率前進,雖不必一致,然兩者之爲用固不相同;其一測度自變量,另一測度倚變量,前者因自左向右平行,故稱爲橫量尺(horizontal scale),後者

因自下向上成垂直形,故稱為縱量尺(vertical scale).各量尺之測量單位,如計時間以年月,雨量以吋,價值以元等必須註明,惟在橫量尺,多註其下,在縱量尺,多註其左.

第四步　畫軸(abscissae)　繪一橫量尺線,經過縱量尺之0(如比率的前進則為1),復繪一縱量尺線經過橫量尺之0如(比率的前進則為1),此兩線普通稱為縱橫軸(coordinate axes),分別之則前者為橫距軸(axis of abscissas or horizontal axis),又簡稱為X軸(X-axis),後者為縱距軸(axis of ordinates or vertical axis),又簡稱為Y軸(Y-axis).X軸因為測度自變量,在歷史曲線圖則配置時間單位,故有時稱為時間軸(time axis).Y軸因為測度倚變量,故又稱為變量軸(variable axis)或函數軸(function axis).

第五步　劃格線(ruling)　根據X軸測量之各單位分限點,引一垂直線,及Y軸測量之各單位分限點引一平行線,交相組織,遂成若干正方或長方格.此種組成之格線,不必定須依據所有測量單位,有時依據其一部分,要以便於閱者檢查圖示線上各部位所代表之數值為準.格線中有若干須人特加注意之線如百分線等,應較他線為粗(閱圖19).

第六步　定同位數(coordinates)　自X軸測量之距離曰縱距(ordinate),自Y軸測量之距離曰橫距(abscissa).縱橫距相交之點所代表X與Y軸兩種測量之數,曰同位數,若欲表明之,可將同位兩數先橫距,後縱距,書於一括弧內,而置一逗點介於其間,例如(3,4)吾人即知離開Y軸有橫測量三個單位,離開X軸有縱測量四個單位,但離

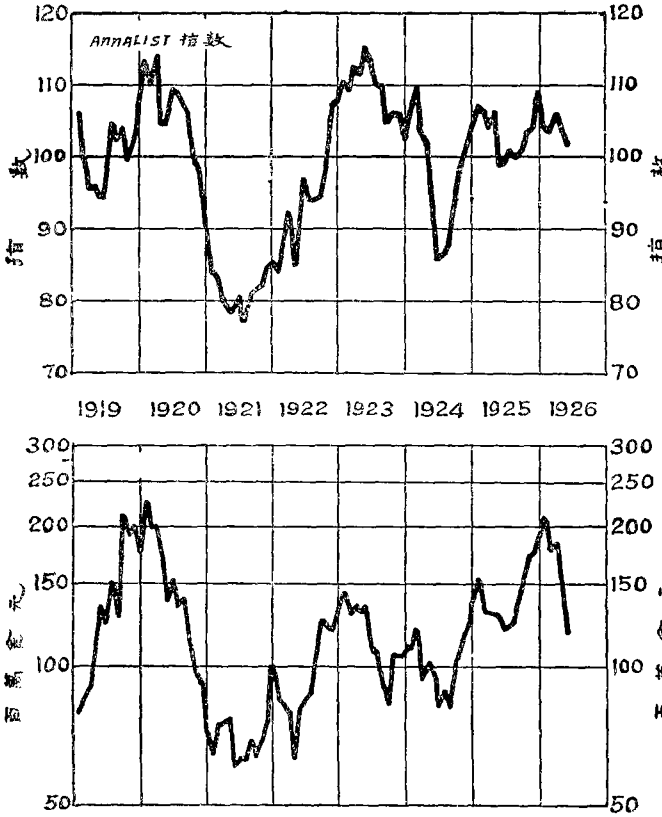


圖 19 為製造用生原料之輸入與Annalist商業活動指數比較(輸入改正季節變化)

開X軸與Y軸有時有正負縱距與橫距,在X軸之上者,為正縱距,而在下者為負縱距,在Y軸之右者為正橫距,而在左者為負橫距,若是則相遇者不必全為正數,其有為負者,應須註明,例如(－3,4)即離開Y軸向左有橫測量三個單位,而離開X軸向上有縱測量四個單位.

第七步 作成曲線(form a curve) 俟所欲繪示材料之各同位數位置皆經確定,各以一點表示之,連成一線,大都爲多邊形;若更欲察其一般趨勢,則以一平滑曲線或直線經過之.此種多邊形曲線或平滑曲線或直線應較格線爲粗.

以上爲繪線圖之慣常步驟,但其意仍有未盡者,證之美國機械工程學社圖示標準聯合委員會(The Joint Committee on Standards for Graphic Presentation of the American Society of Mechanical Engineers)於1915年發布之關於繪圖方法之初步報告,所定若干規則,及斯密士(William Henry Smith)所加以補充者,可以知矣.茲摘錄其規則如下:——

1. 普通圖之位置必須由左向右進行.
2. 在算術曲線圖,宜有零線顯示其上,若繪示之數量頗大,零線不便顯示時,則作圖之底線爲破裂狀(閱圖20).
3. 零線須與其他縱線顯然有別,常較粗.
4. 百分之100線或其他用作比較依據之線須顏色加重.
5. 圖上所繪之縱橫線不可過於引目力檢視圖形之需要.

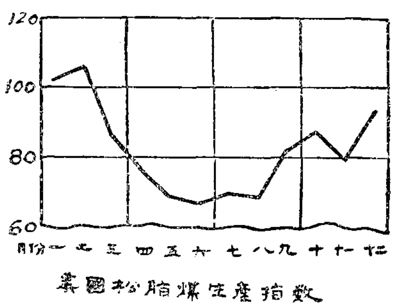


圖 20

6. 橫量尺之讀法須由左至右,而縱量尺則自底至頂.

7. 圖上量尺各部位之數字,在縱量尺常書於Y軸之左,在橫量尺則書於X軸之下.

8. 圖上曲線必須顯別於其他劃線.

9. 圖之名稱必須明晰,如為清楚起見,尙須副名稱或說明,亦可加入.

10. 圖上測量單位,儘可用於繪示曲線足已,不必超過需要.

11. 當圖幅甚長,除置縱量尺於左邊外,並宜置一縱量尺於右邊.

12. 掩有長時期距離之圖,其各時間單位,除註於圖之底線之下外,並須註於圖之頂線之上.

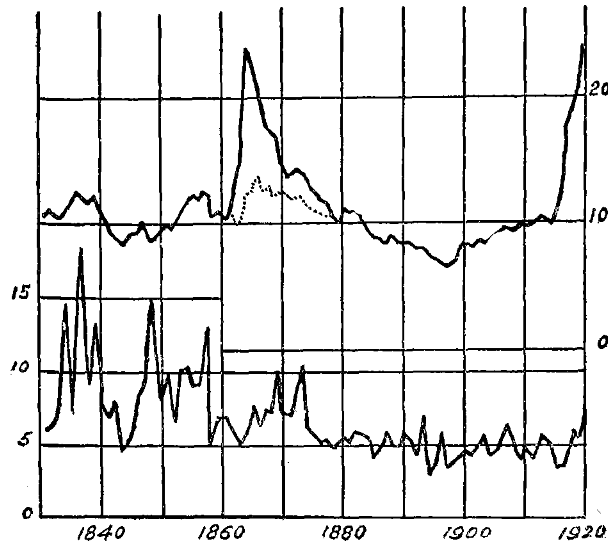


圖 21　美國商業票據平均利率(較低線)與批發物價指數(較高線)之比較

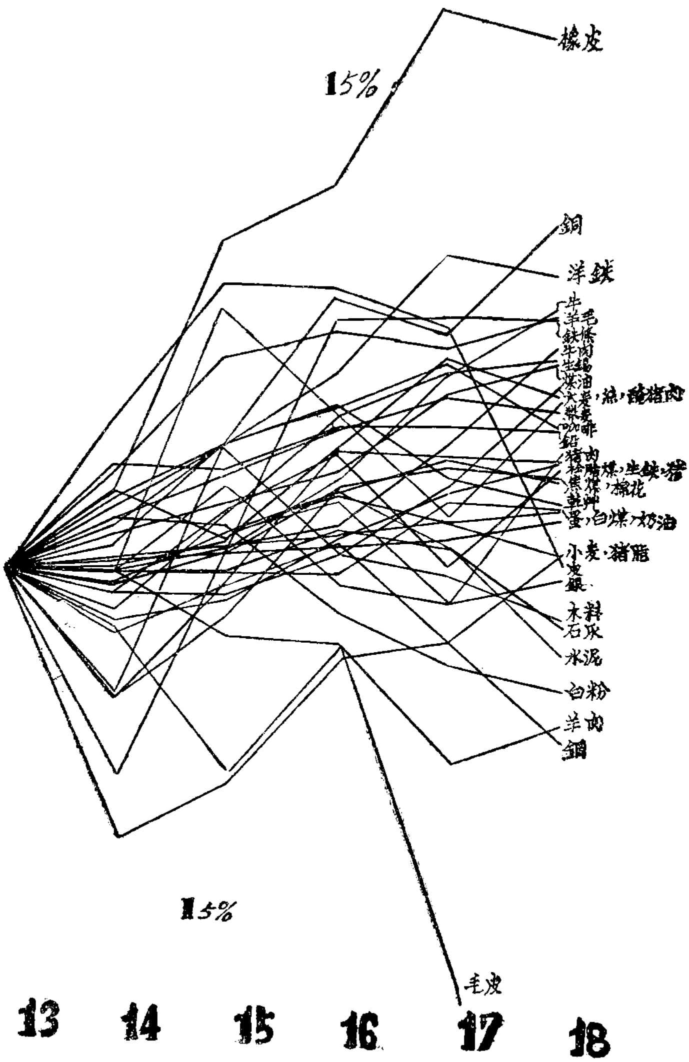


圖 23　若干曲線自 1913 年之分歧狀況

13.　當比較數量單位不同或差數甚大之不同事實時，可用重複之量尺(閱圖 21 及圖 22)。

14. 任何時欲比較增減率必須用比例圖.

除上列各規則外,尙有須知關於若干特種圖示之知識.譬如欲比較若干數列,而繪數線表示之於一圖,除重在表示分歧的變動(閱圖23)外,因其關係,不易顯明,究非所宜;最好依據相同測量單位,各繪於透明紙上,加一紙於另一紙,以視其關係,然若測量單位各不相同,則未便比較,雖以同樣材料,將見其顯示之狀況儼不相同(參閱圖24).又如欲繪一圖以表示一數列離常之狀況,可於圖中繪一常態線(normal line),普通卽百分線(閱圖19)或零線(閱圖25),視上下於此線之波動,可知此數列逾常與不及之情形.

總之,無論爲普通圖抑特種圖,有一須嚴格遵守之原則,卽以簡單而適能顯明所繪示事實爲尙,若徒取炫目美觀,使形過其失,則達繪圖之要旨矣.

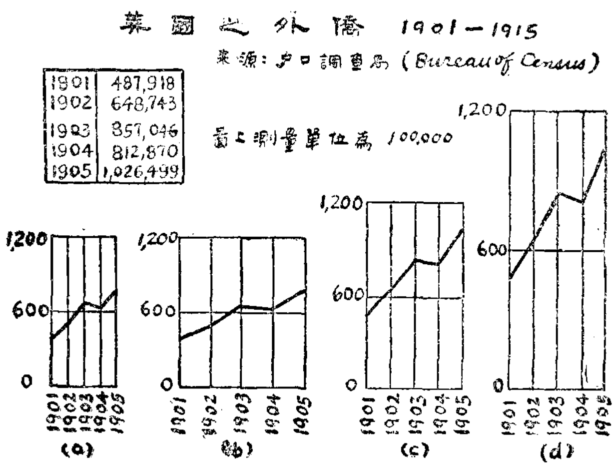


圖 24

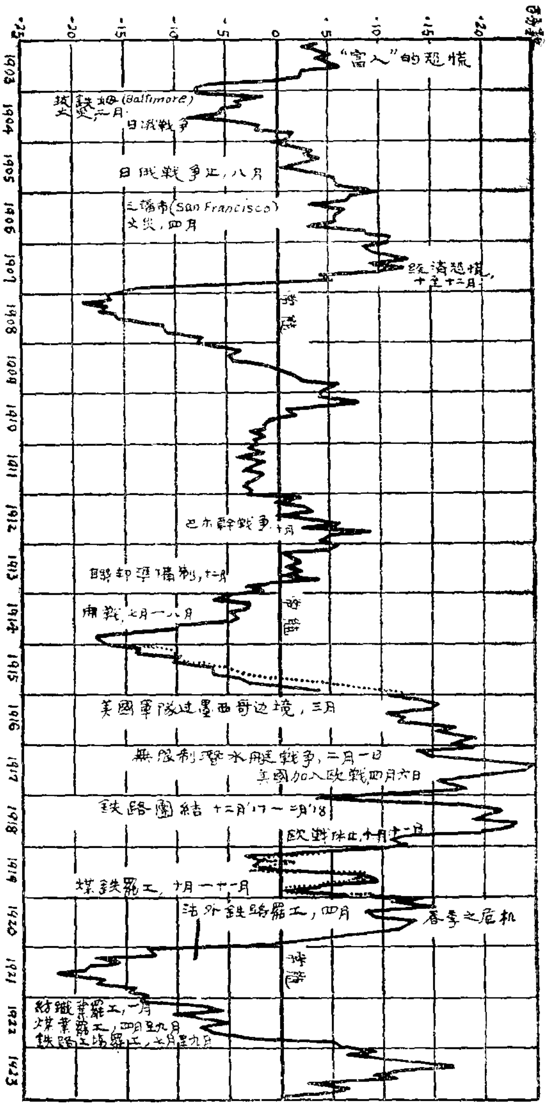


圖 25　哈佛貿易指數

(材料來源 Harvard Economic Service)

乙. 費霞物價指數公式表

1. 代表記號之鑰

P_0與Q_0代表在時間"0"之物價與物量,而P_1與Q_1則在時間"1".

P_0'與Q_0'代表在時間"0"之另一物價與物量,而P_1'與Q_1'則在時間"1".

P_0''與Q_0''代表在時間"0"之又另一物價與物量,而P_1''與Q_1''則在時間"1".

P_0'''與Q_0'''代表在時間"0"之更另一物價與物量而P_1'''與Q_1'''則在時間"1".

依此類推

時間"0"假定爲基期,時間"1"假定爲擬算期.

$\frac{P_1}{P_0}, \frac{P_1'}{P_0'}, \frac{P_1'''}{P_0''''}$,……………爲物價比其平均數爲$P_{01}$

$\frac{Q_1}{Q_0}, \frac{Q_1'}{Q_0'}, \frac{Q_1'''}{Q_0''''}$,……………爲物量比其平均數爲$Q_{01}$

V代表$\frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_0}$

加權 I.　$P_1 Q_1, P_0' Q_0'$…………

加權 II.　$P_0 Q_1, P_0' Q_1'$…………

加權 III.　$P_1 Q_0, P_1' Q_0'$…………

加權 IV.　$P_1 Q_1, P_1' Q_1'$…………

2. 指數公式號數之鑰

原始公式(1—99)

公式號數		公式號數	
1	簡單算術	2	1之因數對偶
3[1]	加權 I 算術	4[2]	3之因數對偶
5[2]	加權 II 算術	6[1]	5之因數對偶
7	加權III算術	8	7之因數對偶
9	加權IV 算術	10	9之因數對偶
11	簡單調和	12	11之因數對偶
13	加權 I 調和	14	13之因數對偶
15	加權 II 調和	16	15之因數對偶
17[1]	加權III調和	18[2]	17之因數對偶
19[2]	加權IV 調和	20[1]	19之因數對偶

[1]可化爲公式53.　　[2]可化爲公式54.

公式號數		公式號數	
21[1]	簡單幾何	22[2]	21之因數對偶
23	加權 I 幾何	24	23之因數對偶
25	加權 II 幾何	26	25之因數對偶
27	加權III幾何	28	27之因數對偶
29	加權IV 幾何	30	29之因數對偶
31[3]	簡單中數	32[4]	31之因數對偶
33	加權 I 中數	34	33之因數對偶
35	加權 II 中數	36	35之因數對偶
37	加權III中數	38	37之因數對偶
39	加權IV 中數	40	39之因數對偶
41[5]	簡單範數	42[6]	41之因數對偶
43	加權 I 範數	44	43之因數對偶
45	加權 II 範數	46	45之因數對偶
47	加權III範數	48	47之因數對偶
49	加權IV 範數	50	49之因數對偶
51[7]	簡單綜合	52[8]	51之因數對偶
53	加權 I 綜合	54	53之因數對偶
59[9]	加權IV 綜合	60[10]	59之因數對偶

[1]與公式121同　　[5]與公式141同　　[9]與公式54同
[2]與公式122同　　[6]與公式142同　　[10]與公式53同
[3]與公式131同　　[7]與公式151同
[4]與公式132同　　[8]與公式152同

交叉公式使合於時間還原試驗(100—199)

(公式之交叉以幾何平均法)

101	交叉介於	1 與 11	102	101之因數對偶並交叉介於	2 與 12
103[1]	交叉介於	3　13	104[1]	103之因數對偶並交叉介於	4　14
105[1]	交叉介於	5　15	106[1]	105之因數對偶並交叉介於	6　16
107	交叉介於	7　17	108	107之因數對偶並交叉介於	8　18
109	交叉介於	9　19	110	109之因數對偶並交叉介於	10　20
121	交叉介於	21 與 21	122	121之因數對偶並交叉介於	22 與 22
123	交叉介於	23	124	123之因數對偶並交叉介於	24
125	交叉介於	25	126	125之因數對偶並交叉介於	26
		27			28
		29			30
131	交叉介於	31 與 31	132	131之因數對偶並交叉介於	32 與 32
133	交叉介於	33	134	133之因數對偶並交叉介於	34
135	交叉介於	35	136	135之因數對偶並交叉介於	36
		37			38
		39			40
141	交叉介於	41 與 41	142	141之因數對偶並交叉介於	42 與 42
143	交叉介於	43	144	143之因數對偶並交叉介於	44
145	交叉介於	45	146	145之因數對偶並交叉介於	46
		47			48
		49			50
151	交叉介於	51 與 51	152	151之因數對偶並交叉介於	52 與 52
153[1]	交叉介於	53	154[1]	513之因數對偶並交叉介於	54
		59			60

1 可化爲公式353

交叉公式使合於因數還原試驗(200—299)

201	交叉介於	1 與 2	231[3]	交叉介於	31 與 32
203[1]	交叉介於	3 與 4	233	交叉介於	33 與 34
205[1]	交叉介於	5 與 6	235	交叉介於	35 與 36
207	交叉介於	7 與 8	237	交叉介於	37 與 38
209	交叉介於	9 與 10	239	交叉介於	39 與 40
211	交叉介於	11 與 12	241[4]	交叉介於	41 與 42
213	交叉介於	13 與 14	243	交叉介於	43 與 44
215	交叉介於	15 與 16	245	交叉介於	45 與 46
217[1]	交叉介於	17 與 18	247	交叉介於	47 與 48
219[1]	交叉介於	29 與 10	249	交叉介於	49 與 50
221[2]	交叉介於	21 與 22	251[5]	交叉介於	51 與 52
223	交叉介於	23 與 24	253[6]	交叉介於	53 與 54
225	交叉介於	25 與 26	259[6]	交叉介於	59 與 60
227	交叉介於	27 與 28			
229	交叉介於	29 與 30			

1 可化爲公式353　　3 與公式331同　　5 與公式351同

2 與公式321同　　4 與公式341同　　6 可化爲公式353

交叉公式使合於時間及因數還原試驗(300—399)

301	交叉介於 1,11. 2,12	亦介於101與102	亦介於201與211
303[1]	交叉介於 3,19. 4,20	亦介於103與104	亦介於203與219
305[1]	交叉介於 5,17. 6,18	亦介於105與106	亦介於205與217
307	交叉介於 7,15. 8,16	亦介於107與108	亦介於207與215
309	交叉介於 9,13.10,14	亦介於109與110	亦介於209與213
321	交叉介於21,21.22,22	亦介於121與122	亦介於221與221
323	交叉介於23,29.24,30	亦介於123與124	亦介於223與229
325	交叉介於25,27.26,28	亦介於125與126	亦介於225與227
331	交叉介於31,31·32,32	亦介於131與132	亦介於231與231
333	交叉介於33,39.34,40	亦介於133與134	亦介於233與239
335	交叉介於35,37.36,38	亦介於135與136	亦介於235與237
341	交叉介於41,41.42,42	亦介於141與142	亦介於241與241
343	交叉介於43,49.44,50	亦介於143與144	亦介於243與249
345	交叉介於45,47.46,48	亦介於145與146	亦介於245與247
351	交叉介於51,51.52,52	亦介於151與152	亦介於251與251
353	交叉介於53,59.54,60	亦介於153與154	亦介於253與259

1 可化爲公式353

以上公式組成主要系列(main series);以下者則爲補充系列(supplementary series)

交叉權數之公式(1000—1999)

(交叉以幾何平均法)

1003及1013不合時間還原試驗;1100－1199間各公式合時間還原試驗而

1300－1399間各公式合時間及因數還原試驗

1003	交叉權數得自3與9;亦自5與7	1004	1003之因數對偶
1013	交叉權數得自13與19;亦自15與17	1014	1013之因數對偶
1103	交叉介於1003與1013	1104	1103之因數對偶
1123	交叉權數得自23與29;亦自25與27	1124	1123之因數對偶

1133	交叉權數得自33與39；亦自35與37	1134	1133之因數對偶
1143	交叉權數得自43與49；亦自45與47	1144	1143之因數對偶
1153	交叉權數得自53與59	1154	1153之因數對偶
1303	交叉介於1103與1104		
1323	交叉介於1123與1124		
1333	交叉介於1133與1134		
1343	交叉介於1143與1144		
1353	交叉介於1153與1154		

交叉權數之公式(2000—4999)

(交叉用幾何平均以外之方法)

2153 2353	交叉權數(算術的)得自53與54 交叉介於2153與2154	2154	2153之因數對偶
3153 3353	交叉權數(調和的)得自53與54 交叉介於3153與3154	3154	3153之因數對偶
4153 4353	交叉權數(Lehr's)得自53與54 交叉介於4153與4154	4154	4153之因數對偶

雜項公式(5000—9999)

交叉公式之交叉(5000—5999)			
5307	交叉介於307與309	5323	交叉介於323與325
5333	交叉介於333與335	5343	交叉介於343與345
擴大基期公式(6000—6999)			
6023 6053	除以兩年以上為基期外似23 除以兩年以上為基期外似53		
混合公式(7000—7999)			
7053	每年以353公式計算指數然後以年數平均之		
公式之算術及調和平均(8000—8999)			
8053 8054 8353[1]	53及54之簡單算術平均 53及54之簡單調和平均 (亦是8053之因數對偶) 8053與8054之交叉		

1 可化為公式353

3. 指數公式

$(V$ 代表 $\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0})$

算術平均

公式號數	符號	簡單與加權	公式	贊許者
1	A	簡單	$\frac{\Sigma \frac{p_1}{p_0}}{n}$	Carli Schuckburg-Evelyn Economist Saverbeck Staist Most others
2			$V \div \frac{\Sigma \frac{q_1}{q_0}}{n}$	
3*	AI	加權I	$\frac{\Sigma p_0 q_0 \frac{p_1}{p_0}}{\Sigma p_0 q_0}$	U.S.Bur Labor Statistics
4†			$V \div \frac{\Sigma q_0 p_0 \frac{q_1}{q_0}}{\Sigma q_0 p_0}$	
5†	AII	加權II	$\frac{\Sigma p_0 q_1 \frac{p_1}{p_0}}{\Sigma p_0 q_1}$	
6*			$V \div \frac{\Sigma q_0 p_1 \frac{q_1}{q_0}}{\Sigma q_0 p_1}$	
7	AIII	加權III	$\frac{\Sigma p_1 q_0 \frac{p_1}{p_0}}{\Sigma p_1 q_0}$	
8			$V \div \frac{\Sigma q_1 p_0 \frac{q_1}{q_0}}{\Sigma q_1 p_0}$	
9	AIV	加權IV	$\frac{\Sigma p_1 q_1 \frac{p_1}{p_0}}{\Sigma p_1 q_1}$	Palgrave
10			$V \div \frac{\Sigma q_1 p_1 \frac{q_1}{q_0}}{\Sigma q_1 p_1}$	

* 可化為 53　　† 可化為 54

調和平均

公式號數		簡單與加權	公式	贊許者
11	H	簡單	$\dfrac{n}{\Sigma\dfrac{p_0}{p_1}}$	Coggeshall
12			$V\div\dfrac{n}{\Sigma\dfrac{q_0}{q_1}}$	
13	HI	加權 I	$\dfrac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_0q_0\dfrac{p_0}{p_1}}$	
14			$V\div\dfrac{\Sigma q_0p_0}{\Sigma q_0p_0\dfrac{q_0}{q_1}}$	
15	HII	加權II	$\dfrac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_0q_1\dfrac{p_0}{p_1}}$	
16			$V\div\dfrac{\Sigma q_0p_1}{\Sigma q_0p_1\dfrac{q_0}{q_1}}$	
17*	HIII	加權III	$\dfrac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_1q_0\dfrac{p_0}{p_1}}$	
18†			$V\div\dfrac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_1p_0\dfrac{q_0}{q_1}}$	
19†	HIV	加權IV	$\dfrac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_1q_1\dfrac{p_0}{p_1}}$	
20*			$V\div\dfrac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_1p_1\dfrac{q_0}{q_1}}$	

* 可化為 53　　　† 可化為 54

幾何平均

公式號數		簡單與加權	公　　　式	贊許者
21*	G	簡單	$\sqrt[n]{\frac{p_1}{p_0}\cdot\frac{p'_1}{p'_0}\cdots\cdots}$	Jevons Westergaard Flux
22†			$V\div\sqrt[n]{\frac{q_1}{q_0}\cdot\frac{q'_1}{q'_0}\cdots\cdots}$	Nicholson Walsh
23	GI	加權I	$\sqrt[\Sigma p_0q_0]{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{p_0q_0}\left(\frac{p'_1}{p'_0}\right)^{p'_0q'_0}\cdots}$	
24			$V\div\sqrt[\Sigma q_0p_0]{\left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{q_0p_0}\left(\frac{q'_1}{q'_0}\right)^{q'_0p'_0}\cdots}$	
25	GII	加權II	$\sqrt[\Sigma p_0q_1]{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{p_0q_1}\left(\frac{p'_1}{p'_0}\right)^{p'_0q'_1}\cdots}$	
26			$V\div\sqrt[\Sigma q_0p_1]{\left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{q_0p_1}\left(\frac{q'_1}{q'_0}\right)^{q'_0p'_1}\cdots}$	
27	GIII	加權III	$\sqrt[\Sigma p_1q_0]{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{p_1q_0}\left(\frac{p'_1}{p'_0}\right)^{p'_1q'_0}\cdots}$	
28			$V\div\sqrt[\Sigma q_0p_0]{\left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{q_1p_0}\left(\frac{q'_1}{q'_0}\right)^{q'_1p'_0}\cdots}$	
29	GIV	加權IV	$\sqrt[\Sigma p_1q_1]{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{p_1q_1}\left(\frac{p'_1}{p'_0}\right)^{p'_1q'_1}\cdots}$	
30			$V\div\sqrt[\Sigma q_1p_1]{\left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{q_1p_1}\left(\frac{q'_1}{q'_0}\right)^{q'_1p'_1}\cdots}$	

* 與 121 同　　　　† 與 122 同

中　數

公式號數		簡單與加權	公　　式	贊許者
31*	Me	簡單	物價比之中間一項	Edgeworth Mitchell
32†			V÷(物量比之中間一項)	
33	MeI	加權I	物價比之中間加權者一項	
34			V÷(物量比之中間加權者一項)	
35	MeII	加權II	物價比之中間加權者一項	
36			V÷(物量比之中間加權者一項)	
37	MeIII	加權III	物價比之中間加權者一項	
38			V÷(物量比之中間加權者一項)	
39	MeIV	加權IV	(物價比之中間加權者一項)	
40			V÷(物量比之中間加權者一項)	

* 與 131 同　　† 與 132 同

範　數

公式號數		簡單與加權	公　　式	贊許者
41*	Mo	簡單	最普通之價比	
42†			V÷(最普通之量比)	
43	MoI	加權I	最大權數之價比	
44			V÷(最大權數之量比)	
45	MoII	加權II	最大權數之價比	
46			V÷(最大權數之量比)	
47	MoIII	加權III	最大權數之價比	
48			V÷(最大權數之量比)	
49	MoIV	加權IV	最大權數之價比	
50			V÷(最大權數之量比)	

* 與 141 同　　† 與 142 同

綜合比率

公式號數		簡單與加權	公式	贊許者
51*	Ag	簡單	$\frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0}$	Bradstreet Dutot
52†			$V \div \frac{\Sigma q_1}{\Sigma q_0}$	Drobisch Rawson-Rawson
53	AgI	加權I	$\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}$	Dun Fisher Knibbs Laspeyres U. S. Bur Lab Stat.
54			$V \div \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0}$	Fisher
59‡	AgIV	加權IV	$\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}$	Pasche
60§			$V \div \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}$	

* 與 151 同　　‡ 與 54 同
† 與 152 同　　§ 與 53 同

算術的與調和的公式交叉

(合於時間還原試驗)

公式號數	簡單與加權	公式	贊許者
	交叉的:		
101	簡單	$\sqrt{1\times 11}$	
102		$\sqrt{2\times 12\dagger}$	
103*	加權 AI與HIV	$\sqrt{3\times 19}$	
104*		$\sqrt{4\times 20\dagger}$	
105*	加權 AII與HIII	$\sqrt{5\times 17}$	
106*		$\sqrt{6\times 18\dagger}$	
107	加權 AIII與HII	$\sqrt{7\times 15}$	
108		$\sqrt{8\times 16\dagger}$	
109	加權 AIV與HI	$\sqrt{9\times 13}$	
110		$\sqrt{10\times 14\dagger}$	

*可化為353　†即緊前一公式之因數對偶其式為V÷緊前一公式惟須將p′等與q′等互異

幾何公式的交叉

（合於時間還原試驗）

公式號數	簡單與加權	公式	贊許者
	交叉的:		
121*	簡單	$\sqrt{21\times21}$	
122†		$\sqrt{22\times22}$‡	
123	加權 GI與GIV	$\sqrt{23\times29}$	
124		$\sqrt{24\times30}$‡	
125	加權 GII與GIII	$\sqrt{25\times27}$	
126		$\sqrt{26\times28}$‡	

* 可化為21　　　† 可化為22

‡ 即緊前一公式之因數對偶其式為V÷緊前一公式惟須將p′等與q′等互異

中數公式的交叉

（合於時間還原試驗）

公式號數	簡單與加權	公式	贊許者
	交叉的:		
131*	簡單	$\sqrt{31\times31}$	
132†		$\sqrt{32\times32}$‡	
133	加權 MeI與MeIV	$\sqrt{33\times39}$	
134		$\sqrt{34\times40}$‡	
135	加權 MeII與MeIII	$\sqrt{35\times37}$	
136		$\sqrt{36\times38}$‡	

* 可化為31　　　† 可化為32

‡ 即緊前一公式之因數對偶其式為V÷緊前一公式惟須將p′等與q′等互異

範數公式的交叉

（合於時間還原試驗）

公式號數	簡單與加權	公式	贊許者
	交叉的:		
141*	簡單	$\sqrt{41\times41}$	
142†		$\sqrt{42\times\overline{42}}$‡	
143	加權 MoI與MoIV	$\sqrt{43\times49}$	
144		$\sqrt{44\times50}$‡	
145	加權 MoII與MoIII	$\sqrt{45\times47}$	
146		$\sqrt{46\times48}$‡	

* 可化為41　　† 可化為42

‡ 即緊前一公式之因數對偶其式為V÷緊前一公式惟須將p'等與q'等互異

綜合比率公式的交叉

（合於時間還原試驗）

公式號數	簡單與加權	公式	贊許者
	交叉的:		
151*	簡單	$\sqrt{51\times51}$	
152†		$\sqrt{52\times52}$§	
153‡	加權 AgI與AgIV	$\sqrt{53\times59}$	
154‡		$\sqrt{54\times60}$§	

* 可化為 51　　† 可化為 52　　‡ 可化為 353

§ 即緊前一公式之因數對偶其式為V÷緊前一公式惟須將p'等與q'等互異

算術公式的交叉

（合於時間還原試驗）

公式號數	簡單與加權	公式	贊許者
	交叉的：		
201	簡單的 及其因數對偶	$\sqrt{1\times 2}$	
203*	加權的AI 及其因數對偶	$\sqrt{3\times 4}$	
205*	加權的AII 及其因數對偶	$\sqrt{5\times 6}$	
207	加權的AIII 及其因數對偶	$\sqrt{7\times 8}$	
209	加權的AIV 及其因數對偶	$\sqrt{9\times 10}$	

* 可化爲 353

調和公式的交叉

（合於時間還原試驗）

公式號數	簡單與加權	公式	贊許者
	交叉的：		
211	簡單的 及其因數對偶	$\sqrt{11\times 12}$	
213	加權的HI 及其因數對偶	$\sqrt{13\times 14}$	
215	加權的HII 及其因數對偶	$\sqrt{15\times 16}$	
217*	加權的HIII 及其因數對偶	$\sqrt{17\times 18}$	
219*	加權的HIV 及其因數對偶	$\sqrt{19\times 20}$	

* 可化爲 353

幾何公式的交叉

（合於因數還原試驗）

公式號數	簡單與加權	公式	贊許者
	交叉的:		
221	簡單的 及其因數對偶	$\sqrt{21\times22}$	
223	加權的GI 及其因數對偶	$\sqrt{23\times24}$	
225	加權的GII 及其因數對偶	$\sqrt{25\times26}$	
227	加權的GIII 及其因數對偶	$\sqrt{27\times28}$	
229	加權的GIV 及其因數對偶	$\sqrt{29\times30}$	

* 與 321 同

中數公式的交叉

（合於因數還原試驗）

公式號數	簡單與加權	公式	贊許者
	交叉的:		
231*	簡單的 及其因數對偶	$\sqrt{31\times32}$	
233	加權的MeI 及其因數對偶	$\sqrt{33\times34}$	
235	加權的MeII 及其因數對偶	$\sqrt{35\times36}$	
237	加權的MeIII 及其因數對偶	$\sqrt{37\times38}$	
239	加權的MeIV 及其因數對偶	$\sqrt{39\times40}$	

* 與 331 同

範數公式的交叉

（合於因數還原試驗）

公式號數	簡單與加權	公式	贊許者
	交叉的:		
241*	簡單的 及其因數對偶	$\sqrt{41\times42}$	
243	加權的MoI 及其因數對偶	$\sqrt{43\times44}$	
245	加權的MoII 及其因數對偶	$\sqrt{45\times46}$	
247	加權的MoIII 及其因數對偶	$\sqrt{47\times48}$	
249	加權的MoIV 及其因數對偶	$\sqrt{49\times50}$	

* 與 341 同

綜合公式的交叉

（合於因數還原試驗）

公式號數	簡單與加權	公式	贊許者
	交叉的:		
251*	簡單的 及其因數對偶	$\sqrt{51\times52}$	
253†	加權的AgI 及其因數對偶	$\sqrt{53\times54}$	
259†	加權的AgIV 及其因數對偶	$\sqrt{59\times60}$	

* 與 351 同　　† 可化為 353

算術及調和公式的交叉

（合於時間還元試驗）

公式號數	簡單與加權	公式	贊許者
	交叉的:		
301	簡單A與H 及其因數對偶	$\sqrt[4]{1\times2\times11\times12}$ 或 $\sqrt{101\times102}$ 或 $\sqrt{201\times211}$	
303*	加權AI與HIV 及其因數對偶	$\sqrt[4]{3\times4\times19\times20}$ 或 $\sqrt{103\times104}$ 或 $\sqrt{203\times219}$	
305*	加權AII與HIII 及其因數對偶	$\sqrt[4]{5\times6\times17\times18}$ 或 $\sqrt{105\times106}$ 或 $\sqrt{205\times217}$	
307	加權AIII與HII 及其因數對偶	$\sqrt[4]{7\times8\times15\times16}$ 或 $\sqrt{107\times108}$ 或 $\sqrt{207\times215}$	
309	加權AIV與HI 及其因數對偶	$\sqrt[4]{9\times10\times13\times14}$ 或 $\sqrt{109\times110}$ 或 $\sqrt{209\times213}$	

幾何公式的交叉

（合於時間因數還原試驗）

321†	簡單G 及其因數對偶	$\sqrt[4]{21\times22\times21\times22}$ 或 $\sqrt{121\times122}$ 或 $\sqrt{221\times221}$	
323	加權GI與GIV 及其因數對偶	$\sqrt[4]{23\times24\times29\times30}$ 或 $\sqrt{123\times124}$ 或 $\sqrt{223\times229}$	
325	加權GII與GIII 及其因數對偶	$\sqrt[4]{25\times26\times27\times28}$ 或 $\sqrt{125\times126}$ 或 $\sqrt{225\times227}$	

* 可化為 353　　† 可化為 221

中數公式的交叉

（合於時間及因數還原試驗）

公式號數	簡單與加權	公　　式	贊許者
	交叉的:		
331*	簡單Me 及其因數對偶	$\sqrt[4]{31\times32\times31\times32}$ 或 $\sqrt{131\times132}$ 或 $\sqrt{231\times231}$	
333	加權MeI與MeIV 及其因數對偶	$\sqrt[4]{33\times34\times39\times40}$ 或 $\sqrt{133\times134}$ 或 $\sqrt{233\times239}$	
335	加權MeII 與MeIII 及其因數對偶	$\sqrt[4]{35\times36\times37\times38}$ 或 $\sqrt{135\times136}$ 或 $\sqrt{235\times237}$	

範數公式的交叉

（合於時間及因數還原試驗）

341†	簡單Mo 及其因數對偶	$\sqrt[4]{41\times42\times41\times42}$ 或 $\sqrt{141\times142}$ 或 $\sqrt{241\times241}$	
343	加權MoI 與MoIV 及其因數對偶	$\sqrt[4]{43\times44\times49\times50}$ 或 $\sqrt{143\times144}$ 或 $\sqrt{243\times249}$	
345	加權MoII 與MoIII 及其因數對偶	$\sqrt[4]{45\times46\times47\times48}$ 或 $\sqrt{145\times146}$ 或 $\sqrt{245\times247}$	

* 可化為 231　　　　† 可化為 241

綜合公式的交叉

（合於時間及因數還原試驗）

公式號數	簡單與加權	公式	贊許者
	交叉的：		
351*	簡單Ag 及其因數對偶	$\sqrt[4]{51\times52\times51\times52}$ 或 $\sqrt{151\times152}$ 或 $\sqrt{251\times251}$	
353†	加權AgI與AgIV 及其因數對偶	"理想" $\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}}$	Fisher Pigou Walsh Allyn Young

* 可化爲251

† 與 103,104,105,106,153,154,203,205,217,219,253,259,303,305同。

以上公式組成主要系列；以下者則爲補充系列。

交叉加權的算術及調和的公式

（不合顚倒試驗）

公式號數	簡單與加權	公式	贊許者
	得自：		
1003	3與9或5與7 之交叉權數	$\frac{\Sigma\sqrt{p_0q_0p_1q_1}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)}{\Sigma\sqrt{p_0q_0q_1p_1}}$	
1004	1003之因數對偶	$V\div\frac{\Sigma\sqrt{q_0p_0q_1p_1}\left(\frac{q_1}{q_0}\right)}{\Sigma\sqrt{q_0p_0q_1p_1}}$	
1013	13與19或15與17 之交叉權數	$\frac{\Sigma\sqrt{p_0q_0p_1q_1}}{\Sigma\sqrt{p_0q_0p_1q_1}\left(\frac{p_0}{p_1}\right)}$	
1014	1013之因數對偶	$V\div\frac{\Sigma\sqrt{q_0p_0q_1p_1}}{\Sigma\sqrt{q_0p_0q_1p_1}\left(\frac{q_0}{q_1}\right)}$	

公式號數	簡單與加權	公 式	
	以前的交叉 （合於時間還原試驗）		
	交叉的:		
1103	交叉權數A與H	$\sqrt{1003\times1013}$	
1104	1103之因數對偶	$\sqrt{1004\times1014}$	

交叉權數的幾何、中數、範數及綜合公式

（合於時間還原試驗）

公式號數	簡單與加權	式	贊 許 者
	得自:		Walsh
1123	23與29或25與27之交叉權數	$\Sigma\sqrt{p_0q_0p_1q_1}\sqrt{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)\sqrt{p_0q_0p_1q_1}\cdots}$	
1124	1123之因數對偶	$V\div\Sigma\sqrt{q_0p_0q_1p_1}\sqrt{\left(\frac{q_1}{q_0}\right)\sqrt{q_0p_0q_1p_1}\cdots}$	
1133	33與39或35與37之交叉權數	物價比之中間交叉加權者一項	
1134	1133之因數對偶	V÷物量比之中間交叉加權者一項	
1143	43與49或45與47之交叉權數	最大交叉權數之價比	
1144	1143之因數對偶	V÷最大交叉權數之量比	
1153	53與59之交叉權數	$\frac{\Sigma\sqrt{q_0q_1p_1}}{\Sigma\sqrt{q_0q_1p_0}}$	Walsh
1154	1153之因數對偶	$V\div\frac{\Sigma\sqrt{p_0p_1q_1}}{\Sigma\sqrt{p_0p_1q_0}}$	Walsh

以前交叉權數的公式之交叉

（合於時間及因數還原試驗）

公式號數	公式	贊許者
1303	$\sqrt{1103\times1104}$	
1323	$\sqrt{1123\times1124}$	
1333	$\sqrt{1133\times1134}$	
1343	$\sqrt{1143\times1144}$	
1353	$\sqrt{1153\times1154}$	

交叉權數的綜合雜項公式

公式號數	名稱	公式	贊許者
		（合於時間還原試驗）	
2153*	算術交叉權數的綜合	$\dfrac{\Sigma\frac{q_0+q_1}{2}p_1}{\Sigma\frac{q_0+q_1}{2}p_0}$	Edgeworth Fisher Marshall Walsh
2154*	2153之因數對偶	$V\div\dfrac{\Sigma\frac{p_0+p_1}{2}q_1}{\Sigma\frac{p_0+p_1}{2}q_0}$	Walsh
		（合於時間及因數還原試驗）	
2353*	前兩者之交叉	$\sqrt{2153\times2154}$	

*可參閱表末"公式之變形"

公式號數	名稱	公式	贊許者
		（合於時間還原試驗）	
3153*	倒數交叉權數的綜合	$\dfrac{\Sigma\left(\dfrac{2}{\dfrac{1}{q_0}+\dfrac{1}{q_1}}\right)p_1}{\Sigma\left(\dfrac{2}{\dfrac{1}{q_0}+\dfrac{1}{q_1}}\right)p_0}$	
3154	3153之因數對偶	$V\div\dfrac{\Sigma\left(\dfrac{2}{\dfrac{1}{p_0}+\dfrac{1}{p_1}}\right)q_1}{\Sigma\left(\dfrac{2}{\dfrac{1}{p_0}+\dfrac{1}{p_1}}\right)q_0}$	
		（合於時間及因數還原試驗）	
3353	前兩者之交叉	$\sqrt{3153\times3154}$	
		（合於時間還原試驗）	
4153*	加權算術交叉權數的綜合	$\dfrac{\Sigma\dfrac{p_0q_0+p_1q_1}{p_0+p_1}p_1}{\Sigma\dfrac{p_0q_0+p_1q_1}{p_0+p_1}p_0}$	
4154	4153之因數對偶	$V\div\dfrac{\Sigma\dfrac{q_0p_0+q_1p_1}{q_0+q_1}q_1}{\Sigma\dfrac{q_0p_0+q_1p_1}{q_0+q_1}q_0}$	
		（合於時間及因數還原試驗）	
4353	前兩者之交叉	$\sqrt{4153\times4154}$	

*可參閱表末"公式之變形"

交叉的交叉公式

(合於時間及因數還原試驗)

公式號數	名稱	贊許者
5307	$\sqrt{307\times 309}$	
5323	$\sqrt{323\times 325}$	
5333	$\sqrt{333\times 335}$	
5343	$\sqrt{343\times 345}$	

幾何及綜合的擴大基期公式

(不合顚倒試驗)

公式號數	名稱	公式	贊許者
6023	幾何的擴大基期 1913－14	與23同 在0－1或'13－'14代替"0"後	Day Persons
6023	同 1913－16	與23同 在0－1－2－3或 '13－'14－'15－'16代替"0"後	Day Persons
6023	同 1913及1918	與23同 在0及5或'13及'18代替"0"後	Day Persons
6053	綜合的擴大基期 1913－14	與53同 在0－1或'13－'14代替"0"後	
6053	同 1913－14	與53同 在0－1－2－3或 '13－'14－'15－'16代替"0"後	
6053	同 1913－18	與53同 在0－1－2－3－4－5或 '13－'14－'15－16－'17－'18代替"0"後	

綜合指數之算術及調和平均

（不合顛倒試驗）

公式號數	名稱	公式	贊許者
7053	不同甚年之理想公式之算術平均	353('13)+353('14)+353('15)+353('16)+353('17)+353('18)÷6	
8053	綜合的算術平均	$\frac{53+54}{2}=\frac{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}+\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}}{2}$	Sidgwick Drobisch
8054	8053之因數對偶	$V\div\frac{\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0}+\frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1}}{2}=\frac{2}{\frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_1q_0}+\frac{\Sigma q_0q_1}{\Sigma p_1q_1}}$	
8353*		$\sqrt{8053\times8054}$	

* 可化爲 353

加常權數之指數公式

公式號數	名稱	公式	贊許者
	任加常數爲權數		
9001	算術的	$\frac{\Sigma w\frac{p_1}{p_0}}{\Sigma w}$　w 爲任定常權數	Dun Falkner Ar. Young
9011	調和的	$\frac{\Sigma w}{\Sigma w\frac{p_0}{p_1}}$　w 爲任定常權數	
9021	幾何的	$\sqrt[\Sigma w]{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^w\cdots}$　w 爲任定常權數	
9031	中數	物價比之中間加權一項	
9041	範數	最大權數之價比	
9051	綜合	$\frac{\Sigma wp_1}{\Sigma wp_0}$　w 爲任定度權數	Lowe Scrope

公式之變形

若干公式可改變爲前表所未舉之形式,在表脚註有指示變化者,如公式 3 爲公式53.固尚有其他如公式2153, 2154及 3153 至少各有五種變形,公式 2353 有二種變形,公式 4153有七種變形.其多數易於演算者皆未列入表中,例如最易計算之公式 2153 爲

$$\frac{\Sigma(q_1+q_0)p_1}{\Sigma(q_1+q_0)p_0}$$

2154 爲

$$\frac{1+\dfrac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}}{1+\dfrac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1}}$$

3153 爲

$$\frac{\Sigma p_1\dfrac{q_0q_1}{q_0+q_1}}{\Sigma p_0\dfrac{q_0q_1}{q_0+q_1}}$$

丙. 公式計算速度比較表

費霞所擬公式記號	以公式51計算定基指數之時間爲1合算之時間		計算速度之等級（定基）
	定基	鏈基	
5343	64.3	64.5	109
5307	62.1	62.2	108
5333	51.5	51.6	107
1300	45.3	45.5	106
345	44.6	44.6	105
5323	44.2	44.3	104
1343	42.7	42.8	103
4353	39.4	39.5	102
335	38.1	38.3	101
3353	37.8	37.9	100
7053	37.5	37.9	99
343	37.3	37.5	98
245	37.1	37.3	97
247	37.1	37.3	97
1333	36.3	36.4	96
307	35.5	35.6	95
1323	35.1	35.2	94
309	34.8	35.0	93
1353	34.5	34.7	92
235	33.9	34.0	91
237	33.9	34.0	91
225	31.9	32.0	90
227	31.9	32.0	90
207	31.7	31.8	89
215	31.7	31.8	89
126	31.6	31.7	88
325	31.5	31.6	87
323	31.3	31.4	86
333	30.9	31.0	85
146	29.7	29.8	84
108	29.3	29.4	83
243	29.2	29.0	82
1124	29.1	29.3	81
249	28.4	28.6	80
1123	28.0	28.1	79
1144	27.9	28.0	78
241=341	27.1	27.2	77
1143	26.6	26.8	76
136	26.5	26.6	75
125	26.1	26.5	74
233	26.0	25.8	73
1104	25.3	25.5	72
239	25.2	25.4	71
1004	24.9	25.0	70
1014	24.9	25.0	70
1134	24.7	24.8	69
145	24.3	24.4	68

費雪所擬公式記號	以公式51計算定基指數之時間為1合算之時間		計算速度之等級（定基）
	定基	鏈基	
1103	24.2	24.3	67
1154	24.1	24.3	66
107	23.8	24.0	65
1003	23.7	23.9	64
1013	23.7	23.9	64
229	23.6	23.8	63
1133	23.4	23.5	62
144	23.0	24.8	61
124	23.0	23.1	60
143	22.8	24.4	59
209	22.8	23.0	58
213	22.8	23.0	58
123	22.7	22.9	57
3154	22.7	22.9	57
26	22.5	22.6	56
28	22.5	22.6	56
223	21.4	22.5	55
46	21.1	21.3	54
48	21.1	21.3	54
135	21.1	21.2	53
301	21.0	21.2	52
4155	20.8	20.9	51
231=331	20.6	20.8	50
110	20.5	20.7	49
109	20.4	20.5	48
134	19.8	21.6	47
4153	19.6	19.8	46
133	19.5	21.2	45
36	19.5	19.7	44
38	19.5	19.7	44
1153	18.7	19.7	43
8	18.4	18.9	42
16	18.4	18.6	42
30	18.2	18.6	41
221=321	17.6	18.3	40
3153	17.3	17.6	39
25	17.0	17.4	38
27	17.0	17.9	38
29	17.0	17.9	37
44	16.9	17.2	36
50	16.9	17.0	36
6023('13—'16)	16.5	17.0	35
24	16.1	16.5	34
25	15.7	16.3	33
47	15.7	15.9	33
49	15.7	15.9	33
201	15.7	15.9	33
211	15.7	15.9	33
34	15.3	15.9	32
40	15.3	15.4	32
2353	14.9	15.4	31

費設所擬公式記號	以公式51計算定基指數之時間為1合算之時間 定基	鏈基	計算速度之等級（定基）
6023('13-'14)	14.6	15.1	30
6023('13&'18)	14.6	14.6	30
10	14.3	14.6	29
353*	14.3	14.4	29
8054	14.3	14.4	29
35	14.1	14.4	28
27	14.1	14.3	28
39	14.1	14.3	28
8053	14.1	14.3	28
2154	14.0	14.3	27
42=142	13.9	14.1	26
7	13.0	14.1	25
9	13.0	13.1	25
15	13.0	13.1	25
32=132	12.9	13.1	24
43	12.6	13.1	23
102	12.6	13.9	22
14	12.0	12.7	21
22=122	11.9	13.4	20
23	11.6	11.9	19
35	11.0	11.2	18
2	10.5	14.3	17
12	10.5	10.6	17
2153	9.6	10.6	16
54=4=5= 1 18=53=59	8.7	9.8	15
41=141	8.5	8.9	14
251=351	7.8	8.6	13
31=131	7.5	7.8	12
101	7.4	7.6	11
13	6.6	7.6	10
6053('13—'18)	6.5	13.1	9
21=121	6.4	6.5	8
6053('13—'16)	6.1	6.4	7
6053('13—'14)	5.6	6.1	6
52=152	5.5	5.6	5
53=3=6= 17=20=60	5.3	5.5 8.9	4
1	5.1	5.3	3
11	5.1	5.3	3
9051	2.0	2.0	2
51=151	1.0	1.0	1

公式記號所代表之公式可查閱附錄乙

*與103 104,105,106,153,154,203,205,217,219,253;259,303,305一致。

丁. 按照遠距理想公式(353)之次序排列之134種公式求出之定基物價指數

1913=100

費雪所設公式記號	公式級次	1914	1915	1916	1917	1918	反排次序
無價值							
12	S	103	101	115	172	244	119
44	M	103	106	132	196	180	118
46	M	103	106	132	196	180	118
48	M	103	106	132	196	180	118
50	M	103	106	132	196	180	118
144	M	103	106	132	196	180	118
146	M	103	106	132	196	180	118
1144	M	103	106	132	196	180	118
42=142	SM	104	108	125	167	183	117
41=141	SM	98	98	108	135	190	116
1	S	96	98	124	176	187	115
51=151	S	96	96	108	147	173	114
劣							
11	S	95	96	119	158	172	113
21=121	S	96	97	121	167	180	112
101	S	96	97	121	167	179	111
251=351	S	97	97	111	153	169	110
102	S	102	99	113	162	208	109
243	M	102	103	119	179	174	108
245	M	102	103	119	179	174	108
247	M	102	103	119	179	174	108
249	M	102	103	119	179	174	108
343	M	102	103	119	179	174	108
345	M	102	103	119	179	174	108
1343	M	102	103	119	179	174	108
5343	M	102	103	119	179	174	108
211	S	99	98	117	165	205	107
9	2	101	102	118	181	187	106
52=152	S	97	97	115	159	165	105
7	2	101	102	118	181	187	104
14	2	102	102	117	168	190	103
15	2	100	98	111	145	167	102
13	2	99	98	111	147	169	101
301	S	99	98	117	164	193	100
8	2	99	97	111	152	167	99
10	2	99	97	111	155	169	98
16	2	101	102	117	169	189	97

241=341	SM	101	103	116	150	186	96
22=122	S	102	99	113	162	194	95
31=131	SM	99	99	119	164	191	94
34	M	101	105	118	166	182	93
221=321	S	99	98	117	164	187	92
33	M	100	99	107	156	169	91
43	M	101	100	108	164	168	90
45	M	101	100	108	164	168	90
47	M	101	100	108	164	168	90
49	M	101	100	108	164	168	90
143	M	101	100	108	164	168	90
145	M	101	100	108	164	168	90
1143	M	101	100	108	164	168	90
36	M	101	104	118	165	182	89
201	S	98	97	116	164	182	88
37	M	101	100	119	164	188	87
35	M	100	99	107	160	169	86
2	S	100	96	110	153	177	85
			中　　等				
1134	M	101	103	118	163	182	84
1133	M	101	100	108	163	171	83
9051		102	103	114	160	182	82
134	M	101	103	117	163	181	81
29	I	101	101	116	170	182	80
23	I	100	99	112	154	173	79
133	M	101	100	108	160	174	78
136	M	101	103	117	162	181	77
231=331	SM	100	100	117	163	187	76
1003	I	100	101	116	171	183	75
24	I	101	101	116	165	183	74
25	I	100	99	113	152	172	73
1013	I	100	99	113	154	173	72
27	I	100	101	116	171	182	71
38	M	101	102	117	158	180	70
1014	I	101	101	116	165	183	69
30	I	99	98	113	159	174	68
135	M	101	100	108	162	178	67
1004	I	99	99	113	158	173	66
39	M	101	100	109	164	178	65
28	I	100	99	113	157	172	64
6023('13--'14)		100	100	112	154	173	63
32=132	SM	100	102	116	162	184	62
26	I	101	101	115	155	183	61
233	M	101	102	112	161	175	60
237	M	101	101	113	161	184	59
235	M	101	102	112	163	176	58
40	M	101	102	117	160	180	57
			優				
335	M	101	101	113	162	180	56
1335	M	101	101	113	163	176	55
5333	M	101	101	113	162	179	54
333	M	101	101	113	161	177	53

239	M	101	101	113	162	179	52
6023('13–'18)		99	99	114	160	180	51
6023('13&'16)		100	100	114	157	175	50
209	0	100	100	115	167	178	49
213	0	101	100	114	157	179	48
207	0	100	100	115	166	177	47
215	0	100	100	114	156	178	46
223	0	100	100	114	159	178	45
225	0	100	100	114	159	177	44
229	0	100	100	114	164	178	43
227	0	100	100	114	164	177	42
110	0	100	100	114	162	179	41
109	0	100	100	115	163	178	40
		最	優				
6053('13–'18)		99.8	99.9	114.0	161.6	177.9	39
54*	0	100.3	100.1	114.4	161.1	177.4	38
108	0	100.2	99.6	114.0	160.3	177.9	37
53†	0	99.9	99.7	114.1	162.1	177.9	36
6053('13–'16)		100.0	100.0	114.0	161.9	178 2	35
4153	0	100.1	100.0	114.4	162.4	178.3	34
309	0	100.2	99.9	114.3	162.3	178.4	33
107	0	100.1	99.9	114.4	161.8	176.6	32
4154	0	100.1	99.9	114.1	161.2	176.8	31
6053('13–'14)		100.1	100.1	113.9	161.3	177.7	30
123	0	100.1	99.9	114.3	162.1	177.8	29
3153	0	100.2	99.9	114.2	162.1	176.9	28
307	0	100.1	99.8	114.2	161.0	177.3	27
* 54=4,5,18,19,59				† 53=3,6,17,20,66			
		卓	越				
323	0	100.13	99.89	114.24	161.90	177.98	26
124	0	100.16	99.85	114.25	161.74	178.16	25
3353	0	100.14	99.90	114.35	161.94	177.36	24
7053	0	100.09	99.96	114.03	161.53	177.90	23
126	0	100.12	99.85	114.20	161.18	177.36	22
325	0	100.12	99.85	114.19	161.28	177.35	21
1104	0	100.15	99.84	114.18	161.58	177.92	20
5307	0	100.15	99.82	144.21	161.67	177.84	19
1103	0	100.13	99.91	114.26	161.93	177.72	18
125	0	100.12	99.87	144.19	161.37	177.34	17
4353	0	100.13	99.92	114.16	161.78	177.52	16
3154	0	100.12	99.92	114.28	161.77	177.78	15
1303	0	100.14	99.88	114.22	161.75	177.82	14
1123	0	100.14	99.89	114.17	161.62	177.87	13
1124	0	100.12	99.91	114.28	161.78	177.73	12

至　上							
5323	0	100.13	99.87	114.21	161.59	177.67	11
1323	0	100.13	99.90	114.23	161.70	177.80	10
1153	0	100.13	99.89	114.20	161.70	177.83	9
1353	0	100.12	99.89	114.22	161.71	177.79	8
1154	0	100.12	99.90	114.24	161.73	177.76	7
2154	0	100.14	99.90	114.21	161.69	177.72	6
2353	0	100.13	99.89	114.22	161.60	177.67	5
2153	0	100.12	99.89	114.23	161.52	177.63	4
8054	0	100.12	99.89	114.21	161.56	177.65	3
8053	0	100.12	99.89	114.21	161.56	177.65	2
353*	0	100.12	99.89	114.21	161.56	177.65	1

* 353＝103,104,105,106,153,154,203,205,217,219,253,259,303,305,

說明　公式記號　其所代表之公式，可查閱附錄乙。

級次記號　S代表簡單公式及其推衍者，M代表衆數及中數，S與M爲任性之二級，離開理想公式最遠；其次爲2級公式分2＋與2－，代表重偏性之二級，再其次爲1級公式，分1＋與1－代表僅偏性之二級；0則代表無偏性之一級，此級公式最適近於理想公式0

戊. 各時距增長率(m)之分母

時距長(年)	若干年之 ΣX^2		時距長(年)	若干年之 ΣX^2	
	奇數	偶數		奇數	偶數
6		70	19	570	
7	28		20		2,660
8		168	21	770	
9	60		22		3,542
10		330	23	1,012	
11	110		24		4,600
12		572	25	1,300	
13	182		26		5,850
14		910	27	1,638	
15	280		28		7,308
16		1,360	29	2,030	
17	408		30		8,990
18		1,938			

（終）