洋算例題微分篇

洋算例題續々第二編巻之一

陸軍大尉福田半編輯

微分術總論

微分術ハ高等の算法にして最少微数の増損を推策する法にして其最要なるハ器械の學課及ひ諸般運動の作用等諸術に關係するその最も多し

微分の数ハ二種にわかつ一定して微分ハ為し能はさる物を常数と云ひ増損して微分を得る物を変数と云ふ変数ハ u v x y z 等を以て示し常数ハ a b c d 等を以て記す

左の直線式の如きハ a b ハ皆な常数にして変せ

ハxyヲ変数ナリ故ニ之ヲ微分スル時ハ括弧ヲ作リ函数ト為ス更ニ〔二〕ノ如シfハ函数ノ記号ナリ又yハxノ函数ナリ又xヲ自変数トシyヲ因変数ト云フxノ数ニ因テyノ数変スレハナリ

$$y = ax + b$$

$$〔二〕\ y = f(ax + b)$$

上式ノ如ク両変数アルモノハ亦前例ノ如ク括弧ヲ作リ函数ノ記号ヲ記シ〔二〕ノ如クス即チvハxyノ函数ナリ又vヲ指シテxyノ因変数トシ変数及ヒ常数一定シテ同数ノ函数ヲ成シ顕明ナル式

$$v = ay + bx^2$$

$$〔二〕\ v = f(xy)$$

$$y = ax^2 + b$$

ヲ陽函数ト云フ尋常ノ如シ変数及常数雑糅ヲ成シ未タ函数ノ明ナラサル者

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0$$

陰函数ト云フ此ノ如キハyノ項ヲ移シテxノ函数ト成シ変化シ陽函数ト成シテ微分ヲ施サヾ得シ

○函数ニ増損ノ二種アリ増函数ハ変数増セハ函数モ亦増シ変数損スレハ函数モ亦損スル者云フ左ノ

如き直線式を試むる与しxの数増せしむれバyも亦増し
x損ずれバyも亦損ずるなり

$$y=5x+2$$

直線式

$x=1$	$y=7$
$x=2$	$y=12$
$x=3$	$y=17$
$x=4$	$y=22$

損函数とハ変数増せバ函数却て損し変数損ずれバ
函数却て増るを云ふ左の如き平円式を試むにx
の数増せバy却て損しx損ずれバy却て増るなり

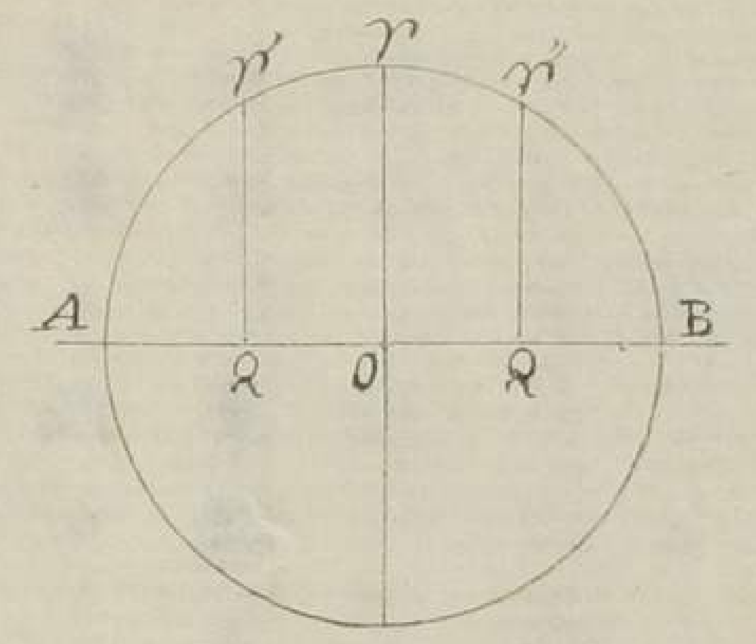
$$y=\sqrt{36-x^2}$$

平円式

$x=1$	$y=5,9$
$x=2$	$y=5,6$
$x=3$	$y=5,1$
$x=4$	$y=4,4$

右の二式皆なxを自変数としyを因変数となせり蓋
しxの変ずれバyも之に因て変ずるが故なり
○変数ニ限り有り変数漸々ニ近づくとも無限ニ到る
能ハずして其限ニ止まりて過る能ハざるを限と云
假令バ圓の内ニ等辺三角形を作り次々辺数を倍し
て六角形を作れバ六角形の面積ハ三角形の面積
より稍大なり次ニ又之を倍して十二角形を作れ
バ其面積ハ亦六角形より稍大なり此の如く漸次
ニ辺数を倍して千万辺形ニ至れバ其面積ハ次第
ニ増して漸々平円積ニ近づくと雖ども未だ千万
辺の較積ありて全く平円積ニ同しき事能ハざる

が如し然れとも無数の多辺形に至れば全く圓周
と相同じくして其積も亦円積と相同じ故に円積
は多辺積の限なり
又右圖に依て平円式の限を示す



$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$x = AO$
$x = RO$
$x = 0$
$x = OR$
$x = OB$

$y = 0$
$y = r'R$
$y = rO$
$y = r'R'$
$y = 0$

r′漸々Aを離れrに近づくれはy漸々大にして
rに至れは半径と等しく r′漸々短にしてBに至
れは0に等しく故に半径をyの限とし又xの限
とは必らす之を越過きす

○又分数を設けて其限を示す

$$\frac{1}{9} = 0,1111111\cdots\cdots$$

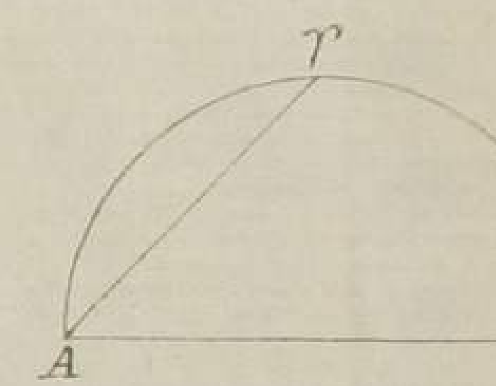
即ち

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots\cdots$$

此の如く奇零を推て多位に至れ
ば其和は漸々$\frac{1}{9}$に近づくも必ずし
之に過ぐることを能はず故に分数を
總和の限とす

○兩數相俱に漸々變化すれは或は相等しき限に向
ひ或は別比例の限に向ふ

P定点Aに向ふて進むを弧APおよび通弦AP倶に漸小しPA点に至れば弧および通弦倶に思想の如くならざる最少の相等しき限に向ふ然れどもP未だAに至らざる中間は最小の数必しも相等しからず



別比例の限なり

又

$1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{21}$

$1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{25} \quad \frac{1}{36}$

此両級数倶に漸次に漸小なれども之を比例して函級漸大の級数を得ることあり次の如し

$1 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{9}{6} \quad \frac{16}{10} \quad \frac{25}{15} \quad \frac{36}{21}$

此の如く逐級毎に漸々増大すれども其数二に過ぐることは能はず故に前二級の向ふ処の比例の限は二なり

此の変数平変を以て漸大し他の変数此変数及び常数に因て変じ或は平変し或は増損の変を為す其例揭示す

直線式

$y = 2x + 3$

$x = 1$
$x = 2$
$x = 3$
$\cdots\cdots$

$y = 5$
$y = 7$
$y = 9$
$\cdots\cdots$

右式xを平変漸大しyを亦平変漸大なり

抛物線式

$$y=\sqrt{4x}$$

$x=1$
$x=2$
$x=3$
$x=4$
……

$y=2{,}000$
$y=2{,}828$
$y=3{,}464$
$y=4{,}000$
……

右式x平変漸大しyを損変漸大なり

面積式

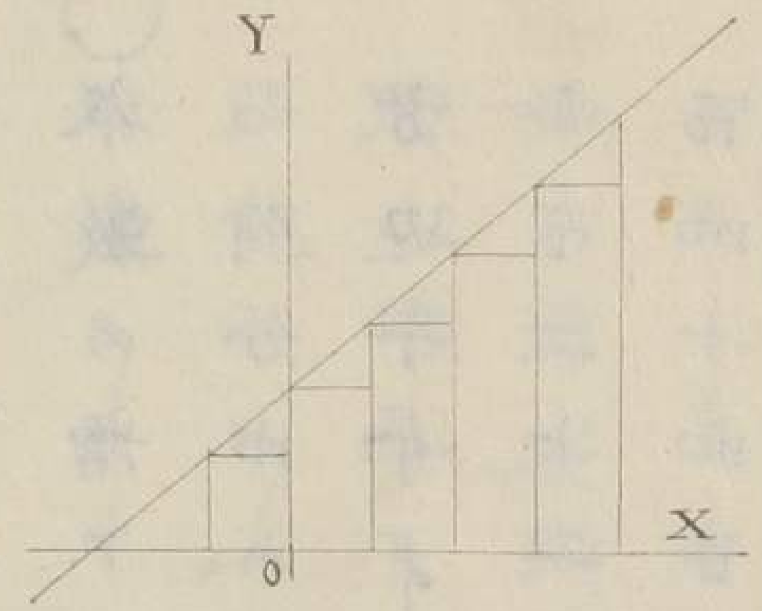
$$y=x^2$$

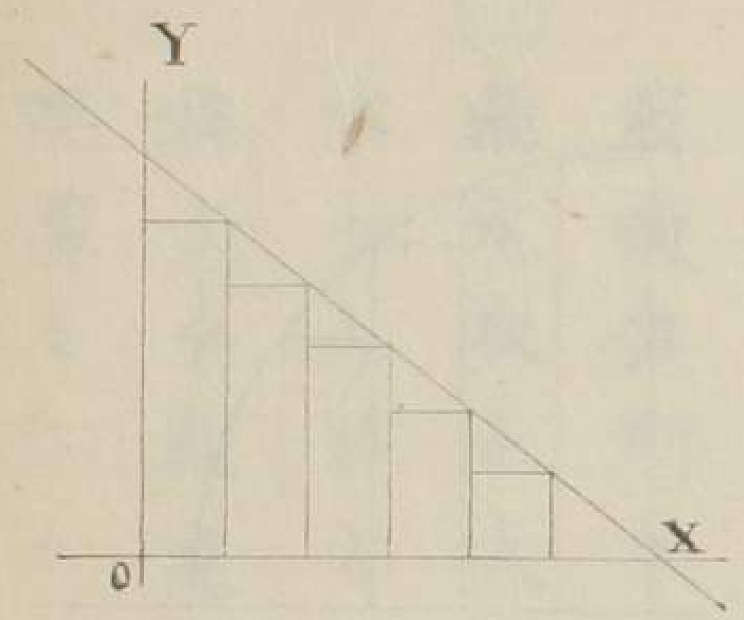
$x=10$
$x=11$
$x=12$
$x=13$
……

$y=100$
$y=121$
$y=144$
$y=169$
……

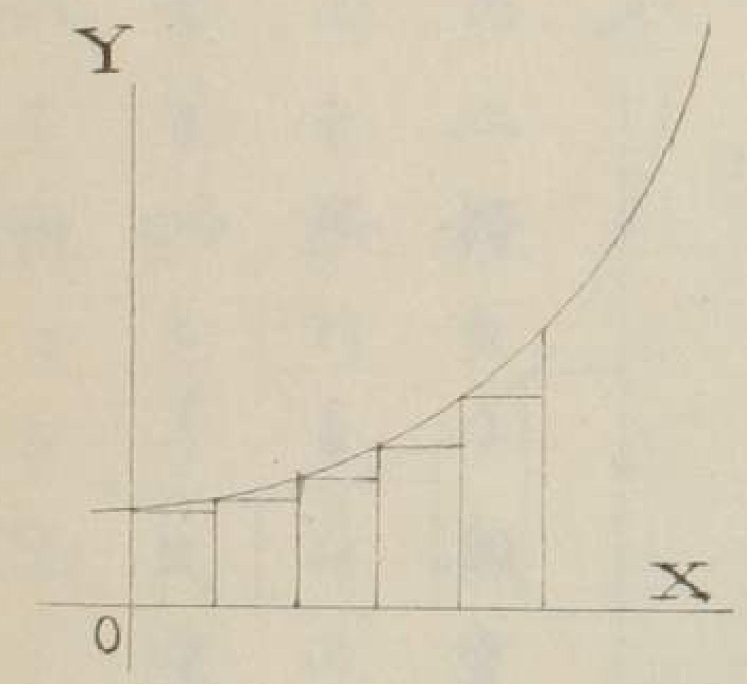
右式x平変漸大しyを増変漸大なり

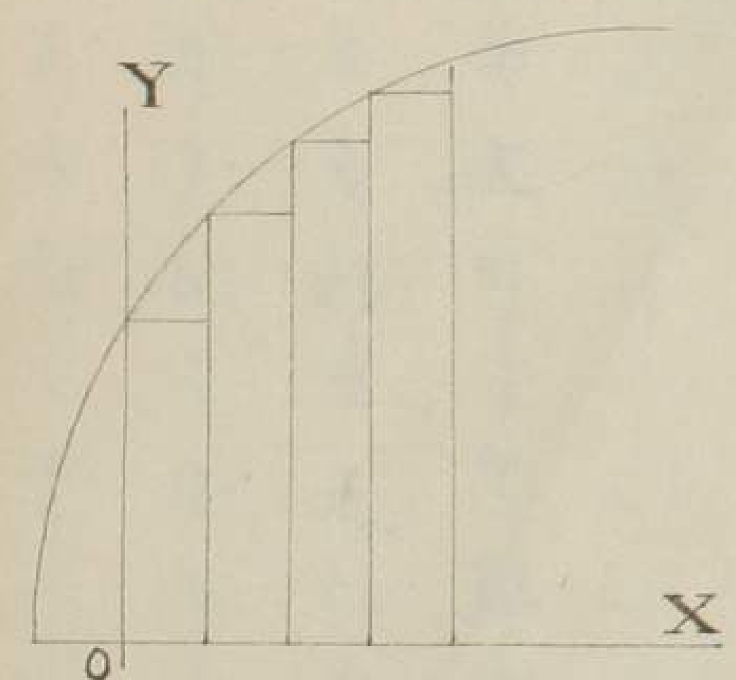
更に図を作り漸変の理を示すこと左の如し

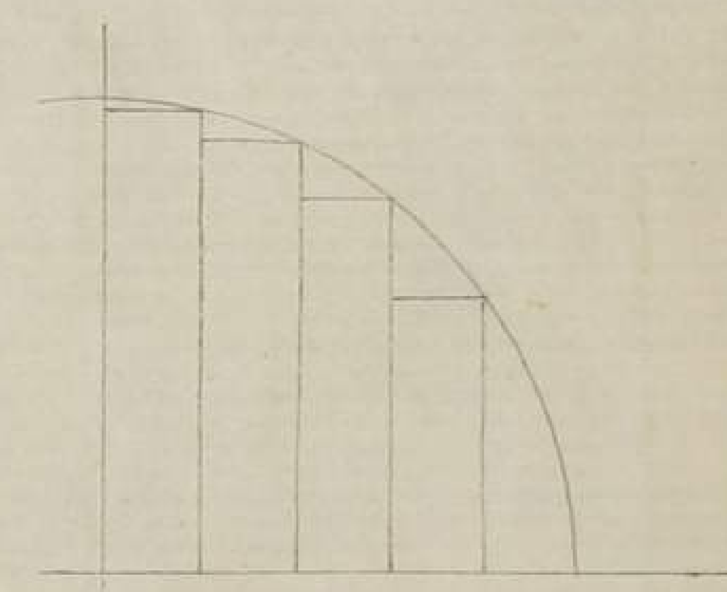


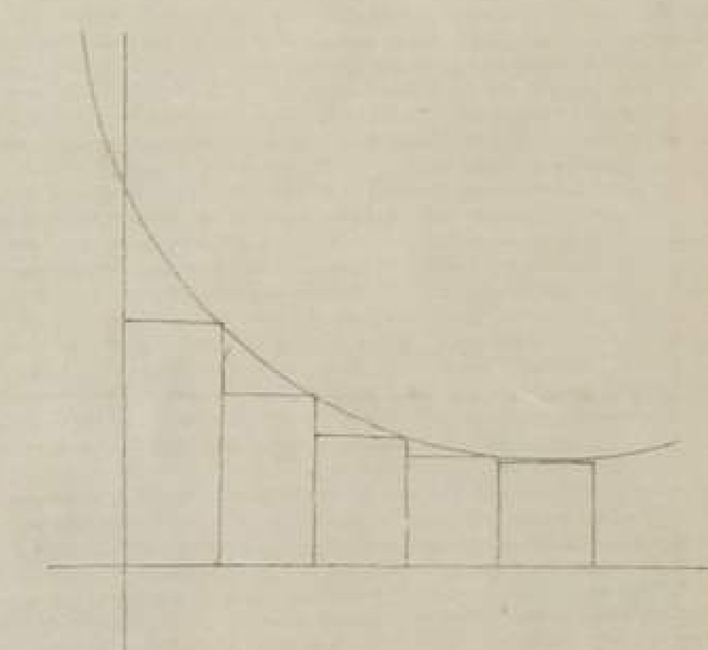


xを漸大に平変しyを亦漸大に平変す





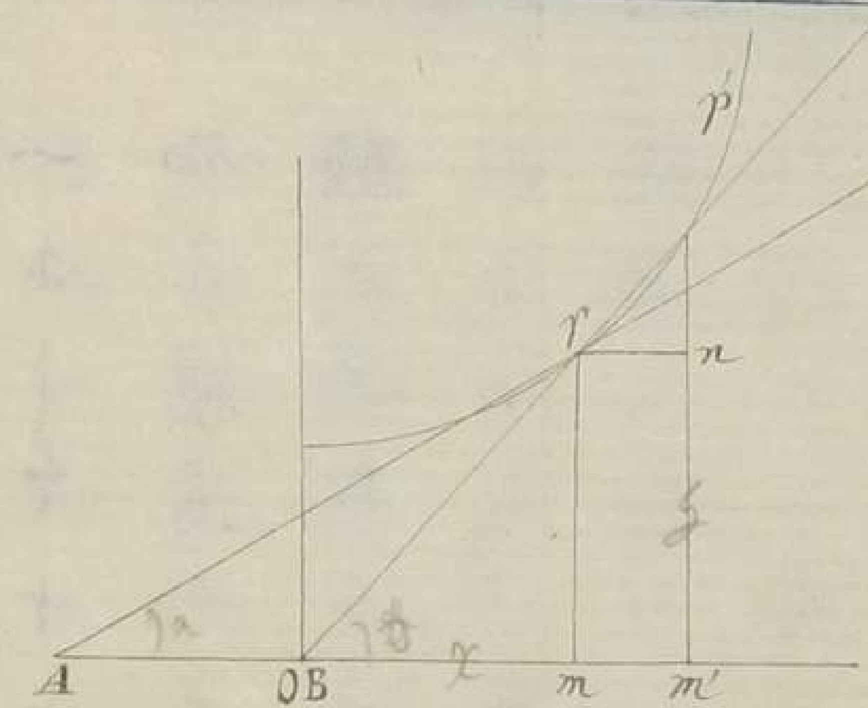




○本數の増と増の比例と同しからされ増の比例は最小時分中の増を所の若干を以テ率と為ス假令平方辺十寸より増て十一寸に至れは其面は百寸なり百二十一に至り又増て十二寸に至れは其面は百四十四に至る其増積十より十一に至るは二十一にして十一より十二に至れは二十三なり此の如く増変漸大なるか故に此二十三を以て十一の時の増率に比れは大にして十二の時の増率に比れは小なり即ち二十三は十一より十二に至るの増積にして之を本數の増と云増の比例とは其中間時々一點の増率を云ふなり此増率を求むる法を微分術と云ふ

○無究數に大小の二種あり無究に大にして想像を述へからされとも限りあるものとまれは之れを假稱して無究と号す∞とす又究まりなく小にして想像を述へからされとも限りあるものとし之を

零と云ひ0とれ
変数増数の符号に二種あり思想の及ふべき微長数の符号には⊿を用ひ又思想の及ばざる微分極数の符号には∂を用ゆ
微長数と微分数との理を説明するは左の如し



$$\frac{r'n}{rn} = tang\, b \quad (一)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tang\, b \quad (二)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = tang\, a \quad (三)$$

$Om = x$
$rm = m'n = y$
$m'm = rn = \Delta x$
$r'n = \Delta y$
$mAr = a$
$mBr = b$

Δxはxの微長数なりΔyはyの微長数なり∂xは思想の及ばざる最微数にしてxの微分なり∂yも亦思想の及ばざる最微数にしてyの微分なり右図に依てxがΔxと成る時はArなる触線動きてBrr'の切線と一置す即ちb角の正切を得ること一二式の如し云に因て極まるか$\frac{\partial y}{\partial x}$は其点に引ける切線と横軸との交角の正切なり茲に於て此Δxを思想ふべからざる最微数となる時はBrr'なる切線をArに接近してb角を殆んとa角に等しく$b-a$をa角に対し最微と成るが故に$\frac{\Delta y}{\Delta x}$が$\frac{\partial y}{\partial x}$に改むること三式の如し因て$\frac{\partial y}{\partial x}$は其点に引ける触線と横軸と乃

交角の正切と云れども式に依りては必らずしも正切に成るにあらず唯之を微係数と名づく

微分術第一十則

第一則 常数に微分なし常数変数相加減せる微分を求むれハ其常数顕れず

(一) $y = a + x^3$ (二) $y = a + \phi(x)$

(三) $y + \Delta y = a + (x + \Delta x)^3$

(四) $y + \Delta y = a + x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$

(五) $\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$

(六) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$

(七) $\frac{\partial y}{\partial x} = 3x^2$ (八) $\partial y = 3x^2\partial x$

原式を視て微分を施さば変数を函数と成し両変数に微長数を加へ點吊し五式を得Δxを以て各切除き六式と成る之に因て接さるにΔxを最も微数なるものと切要す因てΔxを帯るものを皆な之を捨つ

と皆な之を捨つべし又捨て無き程の微数なる時
と $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ を $\frac{\partial y}{\partial x}$ に変せし故に之を換書し改むる時
と一則の如し

第二則 常数を以て乗除せる変数の微分と其変数の微分を常数を以て乗除せるものに等し

$$y = ax^4 \qquad y = af(x)$$

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^4$$

$$\Delta y = 4ax^3\Delta x + 6ax^2\Delta x^2 + 4ax\Delta x^3 + a\Delta x^4$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4ax^3$$

$$\partial y = 4ax^3\partial x$$

又

$$\partial y = 4\times\frac{1}{a}x^3\partial x = \frac{4x^3\partial x}{a}$$

第三則 数個の変数和較の微分と各変数微分の和較に等し

$$v = x + y + z$$

$$v + \Delta v = x + \Delta x + y + \Delta y + z + \Delta z$$

$$\partial v = \partial x + \partial y + \partial z$$

第四則

$$v = xy$$

$$v + \Delta v = (x + \Delta x)(y + \Delta y)$$

$$\partial v = x\partial y + y\partial x$$

又

$$v = xyz$$

$$\partial v = xz\partial y + xy\partial z + yz\partial x$$

第四則 諸変数相乗の微分を各変数の微分に他の変数を乗じ相併ぶるに等し

第五則　変数に或は正或は負の指数を有する微分は其指数より一個を減じ指数とし成る変数に本来の指数と其微分を乗ずるに等し

$$y=x^n \quad y=f(x) \quad y+\Delta y=(x+\Delta x)^n$$

$$y+\Delta y=x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1,2}x^{n-2}\Delta x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\ 2\ 3}x^{n-3}\Delta x^3+\cdots$$

$$\Delta y=\frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\ 2}x^{n-2}\Delta x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1,2,3}x^{n-3}\Delta x^3+\cdots$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=nx^{n-1}$$

$$\partial y=nx^{n-1}\partial x$$

又

$$\partial y=-nx^{-n-1}\partial x$$

右に準ずれは正分、負分に拘らず指数あるものは皆な前則に帰すべし即ち左の如し

$$y=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$$

$$\partial y=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\partial x$$

$$\partial y=\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}\partial x$$

$$\partial y=\frac{1}{n}\partial x\sqrt[n]{x^{n-1}}$$

$$\partial y=\frac{1}{n}\partial x\sqrt[n]{\frac{x}{x^n}}$$

$$\partial y=\frac{\partial x}{nx}\sqrt[n]{x}=\frac{\partial x\sqrt[n]{x}}{nx}$$

第六則　変数某開方なるもの、微分は其開方数を係数とせる変数を以て変数某開方に変数の微分を乗じたるものを除くに等し

第七則　変数平方根の微分ハ変数の微分ヲ変数開方根の二倍ヲ以て除くに等し

$$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$$

$$\partial y=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\partial x$$

$$\partial y=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\partial x$$

$$\partial y=\frac{\partial x}{2\sqrt{x}}$$

第八則　分母ニ置ける変数の微分ハ其変数の自乗ヲ以て分子ヲ係とせる変数の微分ヲ除きたる負号ニ等し

$$y=\frac{b}{x}$$

$$y=bx^{-1}$$

$$\partial y=b\times-1\times x^{-2}\partial x$$

$$\partial y=-\frac{b\partial x}{x^{2}}$$

第九則　変数相除くの微分ハ分子の微分ニ分母ヲ乗したるものより分母の微分ニ分子ヲ乗したるヲ減し其差ヲ分母の自乗ヲ以て除くに等し

$$y=\frac{v}{x}=vx^{-1}$$

$$\partial y=v\partial x^{-1}+x^{-1}\partial v$$

$$\partial y=-1\times vx^{-2}\partial x+x^{-1}\partial v$$

$$\partial y=\frac{-v\partial x}{x^{2}}+\frac{\partial v}{x}$$

$$\partial y=\frac{x\partial v-v\partial x}{x^{2}}$$

第十則 多項數に指數を有するもの、微分は其指數を係數と為し指數より一个を減したるを多項數の乘數と為し之に多項數の微分を乘ずるものに等し

$$y=(ax+x^2)^n$$

$$\partial y=n(ax+x^2)^{n-1}\partial(ax+x^2)$$

$$\partial(ax+x^2)=a\partial x+2x\partial x$$

$$\partial y=n(ax+x^2)^{n-1}(a+2x)\partial x$$

右録する所の十則は和較相乘指數三法の外に出でず能く之を推準し而して後の設題を考究すべし

設題

一オ 平方邊の變數と平方面の變數の比例は一と倍邊の比の如し其證如何

二オ 立方邊變と體變の比例は一と辺平方三段の比の如しと云其證如何

三オ 若し $y=x^4$ なれば其微係數は $\frac{\partial y}{\partial x}=4x^3$ となるなり 其證は如何

沖四 沖五 沖六

x平変大毎秒増さしと二寸x六寸の時 $y=2x^2$ の変大比例何程なるか試

x平変大毎秒増三寸若しx十寸ニ至れハ $y=4x^3$ 式の変大比例何程なるか試

x平変大毎秒増五寸x四寸ニ至る時 $y=2x^4$ 式の変大比例何程なるか試

七 $y=5ax^3$

八 $y=\frac{a}{b}x^2+b$

九 $y=3x^5$

十 $y=7a^2x^6+b$

十一 $y=4ab^2x^5-c$

十二 $y=3a^3cx^9-d$

十三 $y=x^3+x^2+x+1$

十四 $y=ax^2-cx$

十五 $y=3ax^3-bx^4$

十六 $y=6x^4-5x^3-2x$

十七 $y=5x^3-3x^2+6x+2$

十八 $y=a^6+3a^4x^2+3a^2x^4+x^6$

十九 $y=7x^5+6x^3-5ax^2+3x-6$

廿 $y=xz^2$

二十一 $y=x^2z^2$

二十二 $y=ax^2z^3$

二十三 $y=ax^3(x^2+2b)$

二十四 $y=x(a+x)(a^2+x^2)$

二十五 $y=(x+a)(x+b)$

二十六 $y=(x^2+a)(2x+b)$

二十七 $y=(x^3+a)(3x^2+b)$

二十八 $y=x(1+x^2)(1+x^3)$

二十九 $y=(a+bx)^2(m+nx)^3$

三十 $y=(a+bx)^3(c+ex^4)^5$

三十一 $u=x^2y^2z^3$

三二 $u = axy^3z^3$

三三 $u = x(x^2+a)(x+2b)$

三四 $u = xy^2z$

三五 $u = ax^2(x^3+a)(x+3b)$

三六 $y = \frac{x^2}{u^3}$

三七 $y = \frac{a}{x^n}$

三八 $y = \frac{c}{ax^3}$

三九 $y = \frac{x}{1-x}$

四〇 $y = \frac{1+x^2}{1+x^2}$

四一 $y = \frac{a^2+x^2}{b^2-x^2}$

四二 $y = ax^{n+1}$

四三 $u = \sqrt{1+x^2}$

四四 $u = (a+\sqrt{x})^3$

四五 $y = \frac{a}{b}x^{\frac{1}{n}} + c$

四六 $y = ab^2x^{\frac{2}{3}}$

四七 $y = bx^{\frac{2}{5}}$

四八 $u = x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$

四九 $y = cx^{-3}$

五〇 $y = x^2y^{\frac{1}{2}}z^3$

五一 $u = \frac{a+x}{\sqrt{(a-x)}}$

五二 $u = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$

五三 $y = \sqrt{ax^3}$

五四 $y = \sqrt{abx^7}$

五五 $y = \sqrt{ax^5}$

五六 $y = a\sqrt{x} - \frac{x}{3}$

五七 $y = \sqrt{ax} + \sqrt{c^2x^3}$

五八 $y = \sqrt{a+bx^2}$

五九 $y = (ax^2+x^3)^3$

六〇 $y = \sqrt{ax+bx^2+cx^3}$

六一 $y = (ax-x^2)^5$

六二 $y = (a+bx^2)^{\frac{5}{4}}$

六三 $y = (a+x^2)^{\frac{1}{n}}$

六四 $y = \frac{a+x}{a+x^2}$

六五 $y = \sqrt{x^2+a\sqrt{x}}$

六六 $y = \frac{(b+x)^2}{x}$

六七 $y = \frac{x^2}{(a+x^3)^2}$

六八 $y = \frac{1}{(a+x^2)^n}$

六九 $u = \frac{x}{x+\sqrt{1-x^2}}$

七〇 $u = a + \frac{4\sqrt{x}}{3+x^2}$

七一 $y^4 = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$

七二 $u = \frac{a^2-x^2}{a^4+a^2x^2+x^4}$

七三 $u = (a-x)\sqrt{a^2+x^2}$

七四 $u = (a^2-x^2)\sqrt{a+x}$

七五 $u = (2ax+x^2)^n$

七六 $u = \frac{x^4-1}{x^4+1}$

七七 $u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

七八 $u = \frac{x^2-2}{3}\sqrt{1+x^2}$

七九 $u = x^{\frac{1}{3}}\sqrt{x^2+1}$

八〇 $u = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}$

八一 $u = \frac{x^4-x^2+1}{x^4+x^2+1}$

八二 $u = x^3(1-x^6)^{-\frac{1}{2}}$

八三 $u = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$

八四 $u = \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x-1}}$

八五 $u = \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

八六 $u = \frac{1+2x}{\sqrt{1+x+x^2}}$

八七 $u = \frac{\sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt{1+x+x^2}}$

八八 $u = \frac{ay}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$

八九 $u = (2a^2+3x^2)(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$

九〇 $u = \frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$

九一 $u = \frac{a+2bx}{(a+bx)^2}$

九二 $y = \frac{x^n}{(1+x)^n}$

九三 $y = (a+x)^m(b+x)^n$

九四 $y = \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}$

九五 $y = \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}$

九六 $y = \left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^n$

九七 $y = \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$

九八 $x=\sqrt{a+x+\sqrt{a+x+\sqrt{a+x}}}$

九九 $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$　一〇〇 $x=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

一〇一 今正方面平変大にして一秒中十分方寸之一を増せ面百方寸となる時辺の変大比例何程なる哉

一〇二 今正方體平変大にして一秒中體積一寸を増す體積一尺となる時辺の変大比例何程なる哉

一〇三 今x平変大にして一秒中百分寸の一ヅヽ増すx九寸に至るとすれば $y=(1+x)^2$ 式の変比例何程なる哉

一〇四 今円金版あり火を得て変大し一秒中径線百分寸之一を増す径二寸となる時其面の変比例如何

一〇五 今円金版変大し其面毎秒五十分寸之一ヅヽ増すあり面積一方寸となる時径の変比例如何

一〇六 今一童子六十尺の高臺上にあり一童子遠方平地ゟり之に向て近づくに毎秒行くこと五里究なり臺趾を離るゝ事八十尺の時に両童子漸近の比例如何

一〇七 今等三角形あり其辺平変大にして毎秒毎辺半寸を増す辺八寸に至る時其中垂線の変比例如何

一〇八 今円錐変大して中底径毎秒十分寸之一を増す但し其高さは常に一尺二寸にして変せず底径十寸の時体積変比例如何

一九　今肥皂汁(ビイル)を以て泡を吹くに其径毎秒十分寸之一を増して径二寸に至る時体積の変比例如何

二〇　今金球変大し其径毎秒十分寸之一を増して体積の変比例五立寸の時に當りて其径の長さ何程なる哉

洋算例題續々篇巻之二

陸軍大尉福田半編輯

畳微分

凡ソ微分中尚ヲ変數アラバ再ヒ其微分ヲ求ムルコトヲ得ヘシ之ヲ二次微分ト云二次微分中尚変數アラハ復タ其微分ヲ求ルヿヲ得ベシ之ヲ三次微分ト云以上之ニ倣ヒ変數ノ盡ルニ至ルコトヲ得ベシ

第二次第三次第四次ノ微分ヲ示スニハ $\partial^2 y$ $\partial^3 y$ $\partial^4 y$ ノ記号ヲ用ヒ又微分自乗ヲ示スニハ ∂x^2 ∂x^3 ∂x^4 ノ記号ヲ用ヿ宜シク明辨シテ混乱スルヿ無ルベシ

例 ax^3 ノ疊微分ヲ求ル術ヲ左ニ示ス

$$y = ax^3$$

第一次 $\partial y = 3ax^2\partial x$

第二次 $\partial(\partial y) = \partial^2 y = 6ax\partial x^2$

第三次 $\partial\{\partial(\partial y)\} = \partial^3 y = 6a\partial x^3$

各次微分ヲ變シテ各次微係數ヲ得ル左ノ如シ

第一次微係數 $\dfrac{\partial y}{\partial x} = 3ax^2$

第二次微係數 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 6ax$

第三次微係數 $\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 6a$

凡ソ函數ノ疊微分ヲ求ル術

皆右ニ準ズベシ

設題

(1) 假令 $y = ax^4$ アリ 各次微係數ヲ求ム

(2) 假令 $y = ax^2 + bx^3 + cx^4$ アリ 各次微係數ヲ求ム

(3) 假令 $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ アリ 各次微係數ヲ求ム

(4) 假令 $y=\frac{1}{x}$ アリ各次微係數ヲ求ム

(5) 假令 $y=\frac{x^2}{1-x}$ アリ各次微係數ヲ求ム

(6) 假令 $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}$ アリ各次微係數ヲ求ム

(7) 假令 $y=(x+a)^4$ アリ各次微係數ヲ求ム

馬氏捷術

馬拾老臨(マクラフリン)トイヘル人獨変數ヲ詳ニシテ級數ヲ作ルコトヲ発明ス其次例ノ如シ

例 y ヲ x ノ函數トシ之ヲ詳ニス

$$y=\varphi(x)$$

シハ x ノ諸正方ニ準シテ級數ヲ得コト左ノ如シ

$$y=(y)+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)x+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)x^2+\frac{1}{2.3}\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)x^3+\frac{1}{2.3.4}\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right)x^4 + \cdots\cdots$$

其ノ證次ノ如シ

$$y = f(x)$$

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \cdots\cdots$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + \cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 2.3D + 2.3.Ex + \cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 2.3.4E + \cdots\cdots$$

$x = 0$ トスレハ

$$y = A$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = B$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2C$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 2.3D$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 2.3.4E$$

故

$$A = (y) \qquad B = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \qquad C = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) \qquad D = \frac{1}{2.3}\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right) \qquad E = \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right)$$

即チ

$$y = (y) + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)x^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)x^3 + \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right)x^4 + \cdots\cdots$$

ナリ

(8) 假令 $y=(a+x)^n$ アリ級数ヲ詳ニス如何

(9) 假令 $y=\sqrt{2x-1}$ アリ級数ヲ詳ニス如何

(10) 假令 $y=\sqrt{a^2+x^2}$ アリ級数ヲ詳ニス如何

(11) 假令 $y=\frac{1}{a+x}$ アリ級数ヲ詳ニス如何

(12) 假令 $y=(a^5+a^4x-x^5)^{\frac{1}{5}}$ アリ級数ヲ詳ニス如何

(13) 假令 $y=\frac{1}{1-x}$ アリ級数ヲ詳ニス如何

(14) 假令 $y=\sqrt{(a+x)}$ アリ級数ヲ詳ニス如何

(15) 假令 $y=\frac{1}{(a-x)^2}$ アリ級数ヲ詳ニス如何

(16) 假令 $y=\frac{1}{(a+x)^2}$ アリ級数ヲ詳ニス如何

(17) 假令 $y=\frac{1}{\sqrt{(b^2-x^2)}}$ アリ級数ヲ詳ニス如何

(18) 假令 $y=(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}$ アリ級數ヲ詳ニス如何

(19) 假令 $y=\frac{1}{\sqrt[4]{a^4+x^4}}$ アリ級數ヲ詳ニス如何

若シ $x=0$ トシテ函數ノ微係數無窮數トナレハ馬氏ノ術之ヲ詳ニスルコトヲ得ス、

$y=\log x$ $y=\cot x$ $y=\frac{1}{x}$ ノ如キハ皆 $x=0$ トスレハ無窮數ヲ生ス又 $y=ax^{\frac{1}{2}}$ ノ如キ

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}}=\frac{a}{2\sqrt{x}}$$

故 $x=0$ トスレハ亦無窮トナルナリ

戴氏新術

戴労(タイラ)トイヘル人両変数和較ノ函数ヲ詳ニシテ級数ト為スコトヲ発明ス其法次ノ両例是ニ

例 凡リx y両変数和較ノ函数或ハx変シテy変セズ或ハy変シテx変セズ其微係数相同シト云其證左ノ如シ

$$u=(x+y)^n$$

ハx変シテy変セサレハ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=n(x+y)^{n-1}$$

ハy変シテx変セサレハ

$$\frac{\partial u}{\partial y}=n(x+y)^{n-1}$$

故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

例 凡リ両変数和ノ函数ヲ詳ニシテ級数トスレハ其式即チ左ノ如シ

$$u'=\phi(x+y)$$

$$u'=(u)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)y+\frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)y^2+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)y^3+\frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)y^4+\cdots\cdots$$

ナリ證次ノ如シ

$$u' = \varphi(x+y)$$

yノ諸乗方ニ準ヒテ之ヲ詳ニスレハ即チ

$$u' = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \cdots\cdots \quad (1)$$

上式中A BCDE等ハxト原函数中ノ諸常数ニテ成レル数ナリ y変セサレハ其微分下式ノ如シ

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x}y + \frac{\partial C}{\partial x}y^2 + \frac{\partial D}{\partial x}y^3 + \frac{\partial E}{\partial x}y^4 + \cdots\cdots$$

y変ニテx変セザレハ其微分下式ノ如シ

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3 + \cdots\cdots$$

拠ル前例 $\dfrac{\partial u'}{\partial x} = \dfrac{\partial u'}{\partial y}$

故ニ

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x}y + \frac{\partial C}{\partial x}y^2 + \frac{\partial D}{\partial x}y^3 + \frac{\partial E}{\partial x}y^4 + \cdots\cdots$$

$$= B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3 + \cdots\cdots$$

$$\frac{\partial A}{\partial x}=B \qquad \frac{\partial B}{\partial x}=2C \qquad \frac{\partial C}{\partial x}=3D \qquad \frac{\partial D}{\partial x}=4E \quad \cdots\cdots$$

$$A=v \qquad B=\frac{\partial v}{\partial x} \qquad C=\frac{\partial^2 v}{2\,\partial x^2} \qquad D=\frac{\partial^3 v}{2.3\,\partial x^3}$$

$$E=\frac{\partial^4 v}{2.3.4\,\partial x^4} \quad \cdots\cdots\cdots$$

以テ一式ヲ変シ下ノ如シ

$$v=(v)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)y+\frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)y^2+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)y^3+\frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}\right)y^4+\cdots\cdots$$

若シ $v=f(x-y)$ ノ詳数ヲ求メント欲スレハ斯同理ニ依テ級数ヲ得ル次ノ如シ

$$v=f(x-y)$$

$$v=(v)-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)y+\frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)y^2+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)y^3$$

$$+\frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}\right)y^4+\cdots\cdots\cdots$$

ナリ

(20) 假令 $u=\sqrt{(x+y)}$ アリ級數ヲ求ム如何

(21) 假令 $u=\sqrt[3]{(x+y)}$ アリ級數ヲ求ム如何

(22) 假令 $u=(x+y)^x$ アリ級數ヲ求ム如何

戴氏術ヲ用フレハ大抵両自変數和$(x+y)$ノ函數ノ級數ヲ得ベシト雖トモ係數若シ無窮トナル時ハ而之ヲ推スコトヲ得ズ

假令 $u=a+(b-x+y)^{\frac{1}{2}}$ ノ式ノ如キ $y=0$ トスレハ

$$u=a+(b-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{(b-x)^{-\frac{1}{2}}}{2}$$

$$=-\frac{1}{2(b-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{(b-x)^{-\frac{3}{2}}}{4}$$

$$=-\frac{1}{4(b-x)^{\frac{3}{2}}}$$

此式 $x=b$ トスレハ諸係數無窮トナルベシ

又 $u=a+(b-x+y)^{\frac{1}{2}}$ ノ n 整數ニシテ $x=b$ ナレハ諸係數マタ無窮トナルナリ

諸自変數ノ函數

u ヲ x y 両自変數ノ函數トス元ハ自変ト云トキハ此元他ノ元ニ因テ変スルモノニアラス他ノ元モ亦此元ニ因テ変スルモノニアラザレハ諱ラカニ二

微係ヲ解スベシ此ハxニ因テ
変シ他ハyニ因テ変スxニ因
テ変スルモノハyヲ視ルニ一
ニ常数ノ如シyニ因テ変スル
モノハxヲ視ルニ一ニ常数ノ
如シyヲ視ルニ一ニ常数ノ如
キ時ハ其微係数ヲ$\frac{\partial u}{\partial x}$トス$x$
ヲ視ルニ一ニ常数ノ如キモノ
ハ其微係数ヲ$\frac{\partial u}{\partial y}$トス即チ此
二微係数ヲ偏微係ト云一ハx
ノ偏微係トシ一ヲyノ偏微係
トメ而シテxノ偏微係ハxノ
微分ニ乗シ又yノ偏微係ハy
ノ微分ニ乗シテyノ偏微分ヲ
得ル$\frac{\partial u}{\partial x}\partial x$ハ$x$ノ偏微分ナリ

$\frac{\partial u}{\partial y}\partial y$ハ$y$ノ偏微分ナリ両偏微
分相併セテ函数ノ全微分ト為
ス $\partial u=\frac{\partial u}{\partial x}\partial x+\frac{\partial u}{\partial y}\partial y$ ナリ

三自乗ノ函数ハ三偏微係ヲ求
メ前條ノ如クシテ其微分ヲ得
ベシ

$$u=f(x.y.z)$$

$$\partial u=\frac{\partial u}{\partial x}\partial x+\frac{\partial u}{\partial y}\partial y+\frac{\partial u}{\partial z}\partial z$$

三自變數已上總テ同理ナリ
推シテ知ルヘシ

(23) 今勾股形アリ毎秒中。勾變大二一寸股變大二寸勾八寸股十二寸ニ至ル時面積ノ變比例如何

(24) 今勾股形アリ毎秒中。勾變大二寸股變小三寸勾十寸股八寸ニ至ル時面積ノ變比例如何

(25) 今楕円面アリ毎秒中長徑變大二寸短徑變大三寸長徑二十寸短徑十二寸ニ至ル時面積ノ變比例何程ナル哉

(26) 今円錐體アリ毎秒中其高變小三寸底徑變大一寸高十八寸底徑十寸ニ至ル時體積ノ變比例何程ナル哉

洋算例題續々篇巻之二終

洋算例題續々篇巻之三

陸軍大尉福田半編輯

越函數

凡そ變數函數相聯續の理代數常法を用ひて之を顯しえ難き者に之を代數函數と云變數函數相連續きるの理代數常法を以て顯をを得りざる者に之を越函數と云此巻ゐ論をる所の者是なり

越函數ハ數種あり

$y=\sin x$

$y=\tan x$

$y=\sec x$

等の如きに之を円函數と云

$y=\log x$ の如きを

對函數と云

$y=a^x$ の如きものハ指函數と云

指函數微分

第一則　元變せれして指數變をれは其函數の微分は積數に元の訥氏對數を乗して再ひ指數の微分を以て之は乗するに同し

$$y=a^x$$

$$y+\Delta y=a^{x+\Delta x}$$

$$=a^x a^{\Delta x}$$

$$\Delta y=a^x a^{\Delta x}-a^x$$

$$=a^x(a^{\Delta x}-1)$$

$$a=1+b$$

とすれは

$$a^{\Delta x}=(1+b)^{\Delta x}$$

$$a^{\Delta x}=1+\frac{\Delta x}{1}b+\frac{\Delta x(\Delta x-1)b^2}{1.2}+\frac{\Delta x(\Delta x-1)(\Delta x-2)b^3}{1.2.3}+\cdots\cdots$$

$$a^{\Delta x}=1+\left(\frac{b}{1}-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\cdots\cdots\right)\Delta x$$

$$\frac{b}{1}-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\cdots\cdots=k$$

故に

$$a^{\Delta x}=1+k\Delta x$$

$$a^{\Delta x}-1=k\Delta x$$

$$\Delta y=a^x k\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x k$$

$$a^x = 1 + \frac{k}{1}x + \frac{k^2}{1.2}x^2 + \frac{k}{1.2.3}x^3 +$$

$$+ \frac{k^4}{1.2.3.4}x^4 + \cdots\cdots$$

$$x = \frac{1}{k}$$

$$a^{\frac{1}{k}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= 2.718282 \cdots\cdots\cdots\cdots = e$$

$$a = e^k \qquad N \log a = k$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a^x k = a^x N . \log a$$

$$\partial y = \partial(a^x) = a^x N . \log a \, \partial x$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a^x k$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \partial(a^x k) = (a^x k) k = a^x k^2$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial y^3} = \partial(a^x k^2) = (a^x k^2) k = a^x k^3$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = a^x k^4$$

$$x = 0$$

川 と

ハ 支

$$y = 1 \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = k$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = k^2 \qquad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = k^3$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = k^4 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

對函數微分

第二則 凡そ數の對數微分は本數の微分に對數の根を乗し本數を以て之を除するに同し證式左の如し但し式中「m」は對數根なり

$$x = \log y$$

$$y = a^x$$

$$\partial y = a^x . \log a . \partial x$$

$$\partial x = \frac{\partial y}{a^x . \log a} = \frac{\partial y}{y} \times \frac{1}{\log a}$$

$$\frac{1}{\log a} = m$$

$$\partial x = \frac{m \partial y}{y}$$

なり

訥氏の對數表 $m=1$ に準すれは即ち $\partial(N.\log y) = \frac{\partial y}{y}$ なり

故に凡そ數の納氏對數の微分は本數の微分を本數にて除するに同し

余論 $y = z^x$ あり z 及ひ x は皆變數なり其微分を求む

其法左の如し

$$y = z^x$$

$$\log y = x \log z$$

$$\frac{\partial y}{y} = \log z \, \partial x, + x \times \frac{\partial z}{z},$$

$$\partial y = y \log z \, \partial x + yx \times \frac{\partial z}{z}$$

$$\partial y = \partial z^x$$

$$\partial y = z^x \log z \, \partial x, + x z^{x-1} \partial z$$

本巻及ひ前諸巻諸則を合して繁重の題を取れへし以後凡そ對數皆訥氏表を用ふ若し他表を用ひんと欲せは得る所の數ハ他表の根を乗すへし但し尋常對數表の根ハ〇四三四二九四なり

(1) 今真數九千六百五十一個あり尋常對數表の微分何程なるか試

(2) 今真數五千七百九十一個あり尋常對數の微分何程なるか試

(3) 今真數三千八百十令個あり尋常對數の微分何程なるか試

(4) 今 $y=\log\frac{a+x}{a-x}$ あり其微分を求む

(5) 今 $y=\log\frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$ あり其微分を求む

(6) 今 $y=\frac{a^x-1}{a^x+1}$ あり其微分を求む

(7) 今 $y=\frac{a^x}{x^x}$ あり其微分を求む

以下 $\frac{\partial y}{\partial x}$ $\frac{\partial v}{\partial x}$ $\frac{\partial z}{\partial x}$ $\frac{\partial v}{\partial v}$ 等を求む画し

(8) $v = \log(x + 1 + \sqrt{2x + x^2})$

(9) $v = \log \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}$

(10) $v = \log \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1+x}}$

(11) $v = (\log x)^n$

(12) $v = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$

(13) $v = x^x$

(14) $v = x \log x$

(15) $v = \dfrac{\log x}{x}$

(16) $v = \dfrac{x}{\log x}$

(17) $v = \log \left\{ \dfrac{x}{a + \sqrt{a^2 + x^2}} \right\}$

(18) $v = \log \left\{ \dfrac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2} - x} \right\}^{\frac{1}{2}}$

(19) $v = \log \left\{ \dfrac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} \right\}$

(20) $v = \log \left\{ \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} \right\}$

(21) $v = \dfrac{x^4 (\log x)^2}{4} - \dfrac{x^4 \log x}{8} + \dfrac{x^4}{32}$

(22) $v = \log \sqrt[3]{\dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}}$

(23) $v = x^{\frac{1}{n}}$

(24) $v = \log \dfrac{(x+2)^2}{\sqrt{x+1}\,(x+3)^{\frac{3}{2}}}$

(25) $v = a \log \left(\dfrac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{a^2 - x^2}$

(26) $v = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ 但〜 $\log e = \dfrac{1}{\log a} = m$

(27) $v = \log(e^x + e^{-x})$

(28) $v = \left(\dfrac{x}{a} \right)^{ax}$

(29) $v = x^{x^n}$

(30) $u=x^{x^x}$

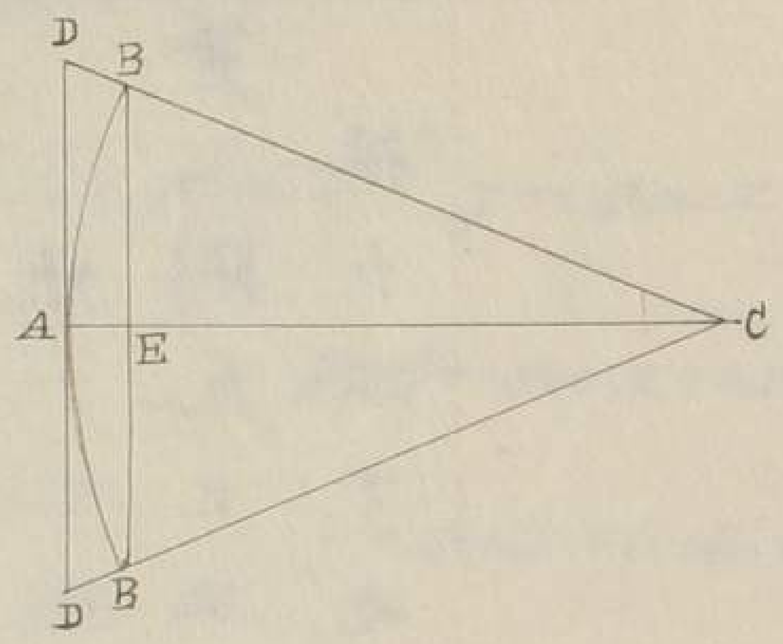
(31) $u=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(32) $u=e^x(1-x^2)$

円函数微分

凡そ平円上九十度以下の弧は必ず正弦より大にして正切より小なり

左図の如くABの弧九十度より小なれは其正弦BE正切ADなり今試にABの弧をABに等しく取り正弦B'E'を作れは通弦BB'を成す此線必すBAB'の弧線より短し故に弧は正弦より大なり又ABCの面積はADCの三角形内に容るゝ処のものなれは三角形の積必すABCの面積より大なり故に弧は正切より小なり正弦と弧の比例の限は一なり



$$\frac{\sin a}{\tan a}=\cos a$$

$a=0$ とすれは

$$\frac{\sin a}{\tan a}=1$$

なり

弧は正弦と正切の間に在り故に限に至れは亦一

$\frac{\sin a}{a} = 1$ なり

弧の通弦は恒に弧より小にして正弦より大なり限に至れは正弦と正切の比例一を得る故に通弦と弧の比例も亦必ず一を得べし

第三則 凡そ正弦の微分は餘弦に弧の微分を乗し半径を以て之を除きたるに同し其證左の如し

$\sin A - \sin B = \frac{2}{r} \sin \frac{1}{2}(A-B) . \cos \frac{1}{2}(A+B)$ $y = \sin x$

$A = x + \Delta x$ $B = x$ $y + \Delta y = \sin(x+\Delta x)$

$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$

八線法ニ準シ求レハ

$\sin(x+\Delta x) - \sin x =$

$\frac{2}{r} \sin \frac{1}{2}\Delta x . \cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x . \cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)}{\frac{1}{2}\Delta x \times r}$$

$\Delta x = 0$ $\frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} = 1$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\cos x}{r}$$

$$\partial y = \frac{\cos x . \partial x}{r}$$

設題

(32) 今弧より毎秒長ずること一分なり三十度に當る時

其正弦の微分幾何なる哉

(24) 今弧十度三十一分あり正弦の微分幾何なる哉

(25) 今弧六十度四十六分あり正弦の微分幾何なる哉

(26) 今弧八十度四十一分あり正弦の微分幾何なる哉

第四則 凡そ餘弦の微分は負なり而して正弦に弧の微分を乗じ半径を以て之を除きるに同じといふ

其證左の如し

$$y = \cos x$$

$$\partial y = \partial(\cos x) = \partial\{\sin(90-x)\}$$

$$\partial \sin(90-x) = \frac{\cos(90-x)\,\partial(90-x)}{r}$$

但し

$$\cos(90-x) = \sin x$$

$$\partial(90-x) = -\partial x$$

故に

$$\partial y = \partial \cos x = \frac{\sin x\,\partial x}{r}$$

設題

(27) 今弧六十五度十分あり餘弦の微分幾何なる哉

(28) 今弧三十五度八分あり餘弦の微分幾何なる哉

第五則九を正切の微分を半径の自乗に弧の微分を
乗じ餘弦の自乗を以て之を除るに同し

$$\tan x = \frac{r\sin x}{\cos x}$$

$$\partial \tan x = \frac{r.\cos x\,\partial\sin x - r\sin x\,\partial\cos x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)\,\partial x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{r^2\partial x}{\cos^2 x}$$

試題

今弧四十五度なり正切の微分幾何なるを試

今弧六十度十四分あり正切の微分幾何なるを試

今弧四十九度四十九分あり正切の微分幾何なるを試

第六則九を餘切の微分を負なり而して半径の自乗
に弧の微分を乗し正弦の自乗を以て之を除れる
に同し

$$\cot x = \tan(90-x)$$

$$\partial\cot x = \partial\tan(90-x)$$

$$\partial\tan(90-x) = \frac{r^2\partial(90-x)}{\cos^2(90-x)}$$

$$\partial(90-x) = -\partial x$$

$$\cos^2(90-x) = \sin^2 x$$

$$\therefore \partial\cot x = -\frac{r^2\partial x}{\sin^2 x}$$

設題

(42) 今弧三十五度六分あり餘切の微分幾何なる哉

(43) 今弧二十一度三十五分あり餘切の微分幾何

第七則凡そ正割の微分は弧の微分に半径及ひ正弦を乗し餘玄の自乗を以て之を除するに同しと知るべし

$$\sec x = \frac{r^2}{\cos x}$$

$$\partial \sec x = \frac{-r^2 \partial \cos x}{\cos^2 x},$$

$$= \frac{r.\sin x\, \partial x}{\cos^2 x}$$

設題

(44) 今弧一度五分あり正割の微分幾何なる哉

(45) 今弧三十〇度二十七分なり正割の微分幾何

第八則凡そ餘割の微分は負なり而して弧の微分に半径及ひ余玄を乗し正玄の自乗を以て之を除するに同し

$$\operatorname{cosec} x = \sec(90-x)$$

$$\partial \operatorname{cosec} x = \partial \sec(90-x)$$

$$\partial \sec(90-x) = \frac{r \sin(90-x)\, \partial(90-x)}{\cos^2(90-x)}$$

$$= \frac{-r \cos x\, \partial x}{\sin^2 x}$$

設題

(46) 今弧〇度五分あり餘割の微分數何なる哉

(47) 今弧八十八度三分あり餘割の微分數何なる哉

第九則 凡そ弧九十度より小なるは其正矢の微分は餘玄の微分を正とみるに同し

$$vers\, x = r - \cos x$$

$$\partial\, vers\, x = \partial(r - \cos x)$$

$$= \frac{\sin x\, \partial x}{r}$$

設題

(48) 今弧七十一度十七分あり正矢の微分數何なる哉

(49) 今弧八十度二十三分あり正矢の微分數何なる哉

(50) 今弧八十九度十七分あり正矢の微分數何なる哉

弦切諸線對數微分

第十則 凡そ正玄對數の微分は對數根と本弧の微分を乗し正切を以て之を除するに同し

$$\partial \log \sin x = \frac{m\, \partial \sin x}{\sin x}$$

$$\partial \sin x = \frac{\cos x\, \partial x}{r}$$

$$\partial \log \sin x = \frac{m \cos x\, \partial x}{r \sin x}$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

$$\partial \log \sin = \frac{m\, \partial x}{r \tan x}$$

第十一則 允そ餘弦對數の微分を負にして對數根に正切及ひ弧の微分を乘し半巠の自乘を以て之を除するに同し

$$\partial \log \cos x = \frac{m \partial \cos x}{\cos x}$$

$$\partial \cos x = -\frac{\sin x \partial x}{r}$$

$$\partial \log \cos x = -\frac{m \sin x \partial x}{r \cos x}$$

$$= -\frac{m \tan x \partial x}{r^2}$$

第十二則 允そ正切對數及ひ餘切對數の微分を各對數根に半巠及ひ弧の微分を乘し正餘兩弦相乘を得て除するに同し

$$\partial \log \tan x = \frac{m \partial \tan x}{\tan x}$$

$$\partial \tan x = \frac{r^2 \partial x}{\cos^2 x}$$

$$\partial \log \tan x = \frac{m r^2 \partial x}{\cos^2 x \tan x}$$

$$= \frac{m r \partial x}{\cos x \sin x}$$

$$\partial \log \cot x = \frac{m \partial \cot x}{\cot x}$$

$$= \frac{-m r^2 \partial x}{\sin^2 x \cot x} = -\frac{m r \partial x}{\sin x \cos x}$$

設題

(51) 今弧あり毎秒一秒を長ず十分三十秒の時に當て正弦對數の微分幾何なる哉

(52) 今弧四度二十八分あり正弦對數の微分幾何

(53) 今弧六十七度三十分あり餘弦對數の微分幾何

(54) 今弧七十二度三十分あり餘弦對數の微分幾何

(55) 今弧八十九度三十分あり餘弦對數の微分幾何

(56) 今弧十分三十秒あり正切對數の微分幾何なる哉

(57) 今弧十度十六分あり其正切對數の微分幾何

弦切諸微分ハ弧の微分の函數なる故に之を變し
て弧を以て函數とし玄切諸線を以て自變數とし
微分を求むることを得べし

第十三則　正弦を自變數とし之を弧の微分ハ $\frac{r\partial y}{\sqrt{r^2-y^2}}$
なり

$$y = \sin z$$

$$\partial y = \frac{\cos z\,\partial z}{r}$$

$$\partial z = \frac{r\,\partial y}{\cos z}$$

但し

$$\cos^2 z + \sin^2 z = r^2$$

$$\cos z = \sqrt{r^2 - \sin^2 z} = \sqrt{r^2 - y^2}$$

故に

$$\partial z = \frac{r\,\partial y}{\sqrt{r^2-y^2}}$$

第十四則　餘弦を自變數とし之を弧の微分ハ $-\frac{r\partial y}{\sqrt{r^2-y^2}}$
なり

$$y = \cos z$$

$$\partial y = -\frac{\sin z\,\partial z}{r}$$

$$\partial z = -\frac{r\,\partial y}{\sin z}$$

$$= \frac{-r\,\partial y}{\sqrt{r^2-y^2}}$$

第十五則　正切を自變數とし之を弧の微分ハ $\frac{r^2\partial y}{r^2+y^2}$
なり

$$y = \tan z$$

$$\partial y = \frac{r^2\,\partial z}{\cos^2 z}$$

$$\partial z = \frac{\cos^2 z\,\partial y}{r^2}$$

$$= \frac{\partial y}{\sec^2 z}$$

$$= \frac{r^2\,\partial y}{r^2+y^2}$$

第十六則 正割を自変数とされる弧の微分は $\frac{r^2\partial y}{y\sqrt{y^2-r^2}}$

例

$$y=\sec z$$

$$\partial y=\frac{r\sin z\,\partial z}{\cos^2 z}$$

$$=\frac{\tan z\,\partial z}{\cos z}$$

$$=\frac{\tan z\sec z\,\partial z}{r^2}$$

$$\partial z=\frac{r^2\partial y}{\tan z\sec z}$$

$$=\frac{r^2\partial y}{y\sqrt{y^2-r^2}}$$

第十七則 正矢を自変数とされる弧の微分は $\frac{r\partial y}{\sqrt{2ry-y^2}}$

例

$$y=\mathrm{vers}\,z$$

$$=r-\cos z$$

$$\partial y=-\frac{\sin z\,\partial z}{r}$$

$$\partial z=\frac{r\partial y}{\sin z}$$

$$=\frac{r\partial y}{\sqrt{2ry-y^2}}$$

本巻に記載せる所の諸則に準して左に挙くる数件の題を了解すへし

設題

(58) 今 $y=\sin nx$ あり微分を問ふ

(59) 今 $y=\sin^2 x$ あり微分を問ふ

(60) 今 $y=\sin^x x$ あり微分を問ふ

(61) 今 $y=a^x$ あり微分を問ふ

(62) 今 $y=\sin 2x\cos x$ あり微分を問ふ

(63) 今 $y=(\cos x)^x$ あり微分を問ふ

(64) 今 $y=x-\sin x\cos x$ あり微分を問ふ

(65) 今 $y=\tan x-x$ あり微分を問ふ

(66) 今 $y=\tan^{x} x$ あり微分を求む

(67) 同 $y=\sqrt{\tan 2x}$ あり微分を求む

(68) 同 $y=\cot^{2} x$ あり微分を求む

(69) 同 $y=3\tan x+(\tan x)^{3}$ あり微分を求む

(70) 同 $y=\log\sin 8x$ あり微分を求む

(71) 同 $y=\log\sin^{2} x$ あり微分を求む

(72) 同 $y=\sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ あり微分を求む

(73) 同 $y=\log\sqrt{\sin x}$ あり微分を求む

(74) 同 $y=\sin^{-1} mx$ あり微分を求む

(75) 同 $y=\tan^{-1}\frac{x}{2}$ あり微分を求む

(76) 今 $y=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ あり微分を求む

(77) 今 $y=\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ あり微分を求む

(78) 今二物あり倶に円径の端より程を起し一は平速を以て円径を行き毎秒十尺を過ぐ一は不同速を以て円周を行き二物常に同一正弦上に在り円径の長四十尺あり円周を行き六十度に至る時其速率幾何

(79) 今二物あり同時円径の端より程を起し一は平速を以て切線を行き一秒時間十尺を過ぎ一は不同速を以て円周を行き二物常に同一割線上にあり円径五十尺あり円周を行きし四十五度に至る時は其速率

幾何ある哉

正餘諸線馬氏術を用ひて弧の諸級数と為さと成得べし

試に

$y = \sin x$ の級数を示ん

$$y = \sin x$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cos x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\sin x$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -\cos x$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \sin x$$

$$\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = \cos x$$

$$\cdots\cdots$$

右疊微分中 $x=0$ とおけば

$$y = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -1$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

$$\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = 1$$

$$\cdots\cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \cdots\cdots$$

即ち正弦の級数なり

設題

(80) 今 $y = \cos x$ の級数を得る如何

(81) 今 $y = \tan x$ の級数を得る如何

(82) 今 $y = \cot x$ の級数を得る如何

(83) 今 $y = \operatorname{versin} x$ の級数を得る如何

(84) 今 $y = \sec x$ の級数を得る如何

(85) 今 $y = \operatorname{cosec} x$ の級数を得る如何