**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2022**

# Analysis II

## Arbeitsblatt 50

### Übungsaufgaben

Wenn in den folgenden Aufgaben nach Extrema gefragt wird, so ist damit gemeint, dass man die Funktionen auf (isolierte) lokale und globale Extrema untersuchen soll. Zugleich soll man, im differenzierbaren Fall, die kritischen Punkte bestimmen.

Aufgabe 50.1. Untersuche die Addition

$$+ \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x+y,$$

und die Multiplikation

$$\cdot \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x \cdot y,$$

auf kritische Punkte und auf Extrema.

Aufgabe 50.2. Untersuche die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2 - y^2,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.3. Untersuche die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2 - y^4,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.4. Untersuche die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto 2x^2 + 3y^2 + 5xy,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.5. Untersuche die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto 2x^2 + 3y^2 + 4xy,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.6. Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto 4x^2 - xy + 5y^2,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.7.*

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto 3x^2 - 2xy - y^2 + 5x,$$

und entscheide, ob in diesen kritischen Punkten ein lokales Extremum vorliegt.

Aufgabe 50.8.*

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y,z) \longmapsto \frac{xz}{x^2+y^2},$$

(es ist also $y > 0$).

a) Berechne die partiellen Ableitungen von $f$ und stelle den Gradienten zu $f$ auf.

b) Bestimme die isolierten lokalen Extrema von $f$.

Aufgabe 50.9.*

Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto -3x^2 + 2xy - 7y^2 + x,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.10. Man untersuche die Funktion

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^y,$$

auf Extrema (vergleiche Beispiel 50.4), indem man die Funktion als Hintereinanderschaltung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $(x,y) \mapsto (\ln x, y)$, $(u,v) \mapsto (uv)$, $z \mapsto e^z$ auffasst und Aufgabe 46.19 und Aufgabe 46.20 heranzieht.

Aufgabe 50.11.*

Wir betrachten die Funktion

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,\, y,\, z) \longmapsto xyz.$$

(1) Bestimme die Jacobi-Matrix zu $\varphi$ in einem Punkt $(x, y, z)$.
(2) Bestimme die kritischen Punkte von $\varphi$.
(3) Bestimme die Hesse-Matrix zu $\varphi$ in einem Punkt $(x, y, z)$.
(4) Bestimme die Eigenräume der Hesse-Matrix zu $\varphi$ im Punkt $(1, 1, 1)$.
(5) Bestimme den Typ der Hesse-Form zu $\varphi$ im Punkt $(1, 1, 1)$ mit Hilfe des Eigenwertkriteriums.

Aufgabe 50.12.*

Wir betrachten die Determinante für $2 \times 2$-Matrizen als Funktion

$$\det\colon \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \longmapsto xw - zy.$$

(1) Bestimme die Jacobi-Matrix zu det und die kritischen Punkte.
(2) Untersuche det auf lokale Extrema. Bestimme insbesondere den Typ der Hesse-Matrix im Nullpunkt.
(3) Finde einen zweidimensionalen Untervektorraum

$$U \subseteq \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R}),$$

auf dem die (Einschränkung der) Determinante ein lokales Minimum besitzt.

Aufgabe 50.13. Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $P \in \mathbb{R}^n$ ein kritischer Punkt. Es sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor zur Hesse-Matrix in $P$ mit einem positiven Eigenwert. Zeige, dass $f$ in $P$ kein lokales Maximum besitzt.

Aufgabe 50.14. Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy^2 - x^3y,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.15.*

Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + xy - 6y^2 - y,$$

auf kritische Punkte und Extrema.

AUFGABE 50.16.*

Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion mit

$$f(P) = f(-P)$$

für alle $P \in \mathbb{R}^n$.

a) Zeige, dass $f$ in 0 einen kritischen Punkt besitzt.

b) Man gebe ein Beispiel für eine solche Funktion, die in 0 ein isoliertes lokales Maximum besitzt.

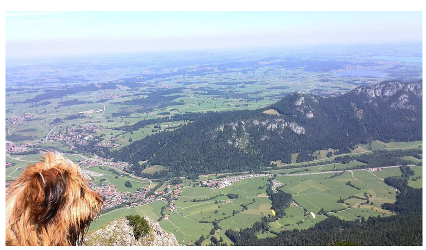
c) Man gebe ein Beispiel für eine solche Funktion, die in 0 kein Extremum besitzt.

AUFGABE 50.17.*

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ definierten Funktion

$$f\colon B(0,1) \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2 + y^3 - y^2 - y.$$

AUFGABE 50.18.*



Prof. Knopfloch, Dr. Eisenbeis und Vorli machen Urlaub in den Bergen. Das Gebirge wird in einer geeigneten Umgebung durch die Funktion (alles in Meter)

$$f(x,y) = 3000 - \frac{1}{1000}x^2 - \frac{1}{1000}y^2 + \frac{1}{100}x$$

beschrieben.

(1) In welchem Punkt (welchen Punkten) besitzt das Gebirge einen Gipfel? Wie hoch ist es in den Gipfeln?
(2) Vorli hat Höhenangst und möchte nicht auf den Gipfel. Deshalb wählen sie einen Rundgang, der zum Punkt $(0,0)$ konstant den Grundabstand 1000 besitzt. Bestimme die größte und die niedrigste Höhe, die die drei auf ihrer Wanderung erreichen.

Aufgabe 50.19. Bestimme für die Funktion

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto xy\sqrt{3-x^2-y^2},$$

den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und untersuche die Funktion auf Extrema.

Aufgabe 50.20. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto 1-t^2.$$

Für welches $x \in [0,1]$ besitzt die zugehörige zweistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu $f$ den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

Aufgabe 50.21.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto 1-t^2.$$

Für welche $x,y \in [0,1]$, $x < y$, besitzt die zugehörige dreistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu $f$ den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

Aufgabe 50.22.*

Wir betrachten die Funktion

$$[1,2] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto g(t) = \frac{1}{t}.$$

(1) Beschreibe den Flächeninhalt zur unteren maximalen Treppenfunktion zu $g$ zur Intervallunterteilung $1 \leq x \leq y \leq 2$ in Abhängigkeit von $x$ und $y$.
(2) Bestimme das Punktepaar $(x,y)$ zwischen 1 und 2, für das der Flächeninhalt zur unteren maximalen Treppenfunktion zu $g$ zur Intervallunterteilung $1 \leq x \leq y \leq 2$ maximal wird. Welchen Wert hat dieser Flächeninhalt?

Aufgabe 50.23. Sei $V$ ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen, und $P \in G$. Man gebe ein Beispiel von zwei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$f,g\colon\ G \longrightarrow \mathbb{R}$$

an derart, dass ihre quadratischen Approximationen in $P$ übereinstimmen, und die eine Funktion ein Extremum in $P$ besitzt, die andere nicht.

Aufgabe 50.24. Es sei $V$ ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,

$$\dim(V) \geq 2\,,$$

$G \subseteq V$ offen, und $P \in G$. Man gebe ein Beispiel von zwei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$f,g\colon\, G \longrightarrow \mathbb{R}$$

an derart, dass ihre quadratischen Approximationen in $P$ übereinstimmen, und die eine Funktion ein Extremum in $P$ besitzt, die andere nicht.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 50.25. (4 Punkte)

Untersuche die Funktion

$$f\colon\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2+9y^2+6xy,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.26. (4 Punkte)

Sei $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Untersuche die Funktion

$$f\colon\, I \times I \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \frac{\cos x}{\cos y},$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.27. (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon\, [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto t^2.$$

Für welche $x, y \in \left]0,1\right[$, $x < y$, besitzt die zugehörige dreistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu $f$ den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

Aufgabe 50.28. (5 Punkte)

Sei

$$h\colon\, \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und betrachte

$$f\colon\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto h(x^2+y^2).$$

Zeige, dass $f$ allenfalls im Nullpunkt $(0,0)$ ein isoliertes lokales Extremum besitzen kann, und dass dies genau dann der Fall ist, wenn $h$ in $0$ ein isoliertes lokales Extremum besitzt.

Aufgabe 50.29. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und es sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein isolierter Punkt, d.h. es gebe eine offene Umgebung $P \in U$ derart, dass $\varphi(Q) \neq \varphi(P)$ ist für alle $Q \in U$, $Q \neq P$. Zeige, dass dann $\varphi$ in $P$ ein isoliertes lokales Extremum besitzt.

# Abbildungsverzeichnis