意味ハ題意ニ反カナイカ否カヲ決定スルコトガ肝要デアル。

虚數ノ根ハ問題ガ不能ノ場合デアル。

例一　矩形ノ土地アリ、其縦ハ横ヨリ五間長ク、而シテ面積ハ四百十四坪アリト云フ、縦横各々ノ長サヲ問フ。

解　此問題デハ縦カ横カヲ一ツノ未知數トス、今 x ヲ以テ横ノ長サヲ表ハセバ、矩形ノ面積ハ横ト縦トノ相乘積デアルカラ $x(x+5)=414$ トナル、此方程式ハ次ノ形トナル、即チ左邊ノ積ヲ作レバ

$$x^2+5x-414=0$$

次ヲ解クニ　$x=-\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　ノ公式ヲ

使用スレバ　$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2+4\times 414}}{2}$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{1681}}{2}=\frac{-5\pm 41}{2}=\begin{cases}18\\-23\end{cases}$$

是ニヨリ x ハ 18. -23 ノ二ツトナル、長サニ於テハ此場合デハ負數ヲユルサナイカラ 18 ヲ以テ横トス、是ニヨリ縦ハ $18+5=23$

答　横十八間　縦二十三間

例二　或村ニ於テ金四百五拾圓ヲ罹災窮民若干人ニ分配スルニ、若シ窮民ノ數今ヨリ五人多キトキハ一人ノ配當金壹圓ヲ減ズルト云フ、窮民ノ數ヲ問フ。

解　窮民ノ數ヲ x 人トスレバ、一人ノ配當額 $\dfrac{450}{x}$ 圓ト $\dfrac{450}{x+5}$ 圓トハ壹圓ノ差ガアル。

$$\therefore\quad \frac{450}{x}=\frac{450}{x+5}+1$$

右邊ヲ纏メテ　$\dfrac{450}{x}=\dfrac{450+x+5}{x+5}$

或ハ　$450(x+5)=(455+x)x$　　$x^2+5x-2250=0$

$$x=-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{5^2+2250\times 4}}{2}=-\frac{5}{2}\pm\frac{95}{2}=45 \text{ 或ハ } -50$$

然レドモ人數ハ正數デナクテハナラナイ、故ニ四十五人ヲ以テ答トス。

例題

(1)　長サ十五間ノ矩形ノ土地アリテ、之ヨリ横ニ等シキ邊ヲ有スル

正方形二ツヲ切リトレバ十八坪殘ルト云フ、横ハ幾間ナルカ。

答　一間半　六間

註　横ヲ x 間トスレバ次ノ方程式ガ成立ツ　$15x-2x^2=18$

(2)　二數ノ和ハ三十五ニシテ其積ハ三百〇六ナリト云フ、二數ヲ求メヨ。　**答**　四十二　三十八

(3)　或ル堂ノ床ノ瓦ヲ敷クニ正方形ノ瓦二百枚ヲ要セリ、其後之ヲ改築セシ際ニハ各邊トモ舊瓦ヨリハ一寸ヅツ長キ瓦ヲ用ヒシニヨリ百二十八枚ニシテ足レリト云フ、新舊瓦ノ大サヲ問フ。

答　舊瓦四寸四角　新瓦五寸四角

(4)　金百四拾四圓ヲ若干人ニ等分スルニ、人數ヲ今ヨリ四人増セバ、一人ノ所得ハ參圓ヲ減ズルト云フ、人數ヲ問フ。　**答**　十二人

第二節　二次方程式解法ニヨッテ解キ得ル方程式

88 準二次方程式　二次ヨリ次數ノ高イ方程式例ヘバ三次方程式、四次方程式ノ内デ、或特別ナルモノハ二次方程式ノ解法ニヨリテ解クコトガ出來ル、是等ノ方程式ヲ準二次方程式ト云フ。

例一　$x^4-10x^2+9=0$ ヲ解ケ。

解　$x^2=y$ トスレバ所題ノ方程式ハ　$y^2-10y+9=0$

$\therefore\ y=1$ 或ハ 9　　$\therefore\ x=\pm 1$ 或ハ ± 3

例二　$x^4-2x^2-8=0$ ヲ解ケ。

$x^2=y$ トスレバ　$y^2-2y-8=0$

$\therefore\ y=4$ 或ハ -2　　$\therefore\ x=\pm 2$ 或ハ $\pm\sqrt{-2}$

89 1 ノ立方根　1 ノ立方根ハ矢張リ 1 デアルト云ヘバソレ迄ダガ代數學デハ虚數ト云フコトヲ習ツタカラヨクシラベテ見ルト面白イ、1 ノ立方根ヲ求メルト云フコトハ即チ $x^3=1$ ト云フ方程式ヲ解クコトト同ジデアル、今 1 ヲ左邊ニ移シテ　$x^3-1=0$

公式　ニヨリ此左邊ヲ因數ニ分解スレバ方程式ハ

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

トナル、此方程式ノ意味ハ $x-1$ ト x^2+x+1 トノ積ガ零ニ等シイト云フコトデアルカラ、此積ガ零ニ等シイタメニハ $x-1=0$ カ或ハ $x^2+x+1=0$ ニナレバヨイ、故ニ今此二ツノ方程式ヲ解ケバ

$x-1=0$ ヨリ $x=1$

$x^2+x+1=0$ ヨリ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ トナリテ

都合三ツノ根ガアル、即チ1ノ立方根ハ三ツアル、但シ其内一ツハ1ニシテ他ノ二ツハ虚數デアル。

第三節 聯立二次方程式

90 聯立二次方程式ノ解法 二次方程式ヲ含ム聯立方程式ハ、一般ニ解クコトハ出來ナイガ、場合ニヨレバ解クコトガ出來ル、今次ニ二三ノ例ヲ示セバ。

例一 $\begin{cases} 2x-y=1 & (1) \\ x^2-3xy-y^2-3y=4 & (2) \end{cases}$

ヲ解ケ。

解 (1)ヨリ $y=2x-1$ (3)

ヲ得、コレヲ(2)ニ代入スレバ $x^2+3x(2x-1)-(2x-1)^2-3(2x-1)=4$

括弧ヲ解キ簡約スレバ $3x^2-5x-2=0$

之ヲ解キテ $x=2$ 或ハ $-\dfrac{1}{3}$ ヲ得、依ツテ $x=2$ トスレバ (3) ヨリ $y=3$ 及 $x=-\dfrac{1}{3}$ トスレバ $y=-\dfrac{5}{3}$

之ニヨリ答ハ次ノ二組トナル $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{3} \\ y=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$

例二 $\begin{cases} x-y=7 & (1) \\ xy=10 & (2) \end{cases}$ ヲ解ケ

解 前ノ例ノ様ニシテモ解ケルガ、此問題ハ特別ノ解法ガアル、

即チ (1)ノ平方ヨリ(2)ノ四倍ヲ引ケバ、

$$\begin{array}{l} x^2+2xy-y^2=49 \\ \underline{\qquad 4xy=40} \\ x^2-2xy+y^2=9 \\ (x-y)^2=9 \\ x-y=\pm 3 \qquad (3) \end{array}$$

(1)ト(3)トノ和ヲ作レバ、

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=7 \\ x-y=-3 \end{cases}$$

$$2x=10 \qquad 2x=4$$

$$x=5 \qquad x=2$$

此二ツノ x ノ値ヲ(1)ニ代入シテ $y=52.y=5$ ノ二ツヲ得，即チ

$\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$

例題 次ノ各聯立方程式ヲ解ケ。

(1) $x-y=2.$ $3x^2-2xy=5$ (2) $x+y=8.$ $x^2+y^2=34$

(3) $x+y=7.$ $xy=-12$

答 (1) $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-5 \\ y=-7 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=3 \\ 7=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$

91 聯立二次方程式應用問題ノ解法。

例一 矩形ノ土地アリテ、各邊ヲ何レモ一間ヅツ増ストキハ，其面積百二十六坪トナリ，若モ一間ヅツ減ラストキハ其面積八十四坪トナルト云フ，二邊ノ長サヲ問フ。

解 矩形ノ二邊ヲ x,y 間トスレバ題意ニヨリ次ノ方程式トナル。

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)=126 \\ (x-1)(y-1)=84 \end{cases}$$

各々左邊ヲ計算スレバ、

$$\begin{cases} xy+x+y+1=126 \\ xy-(x+y)+1=48 \end{cases}$$

即チ $\begin{cases} xy+x+y=125 & (1) \\ xy-(x+y)=83 & (2) \end{cases}$

(1)ニ(2)ヲ加ヘテ $2xy=208$ $\therefore\ xy=104$ (3)

(1)ヨリ(2)ヲ引キテ $2(x+y)=42$ $\therefore\ x+y=21$ (4)

此(3)ト(4)トノ聯立方程式ヲ解ケバ $\begin{cases} x=13 \\ y=8 \end{cases}$ 或ハ $\begin{cases} x=8 \\ y=13 \end{cases}$ トナル、此二組ノ答ハ x ト y トガ互ニ反對ニナッテキル、ソレハサモアルベキコトデアル，何故カト云ヘバ $x.y$ ヲ何レガ横トモ縦トモ決定シテ置カナカッタカラデアル，偖テ此二組ノ答ハ互ニ反對デアルカラ、一組ヲトレバ可イガ、横ハ縦ヨリモ矩カイカラ、横八間、縦十三間ヲ以テ答トスル。

例題

(1) 矩形アリ、長サヲ三寸ヲ増シ、幅ヲ二寸減ズレバ其面積變更セズ、若シ長サ五寸,幅六寸ヲ増ストキハ其面積ハ元ノ二倍トナルト云フ、

長サ及幅ヲ問フ。 答 長サ一尺五寸 幅一尺二寸

(2) 矩形ノ地アリ、縦ヨリ三間ヲ減ジ、横ニ二間ヲ增ストキハ、其面積ハ變更セズシテ、若シ縦ヨリ九間、横ヨリ四間ヲ減ゼバ其面積ハ元ノ半分トナルト云フ、各邊ヲ問フ。 答 縦二十七間 横十六間

(3) 百五十哩ノ鐵道アリ、其兩端ノ停車場ヨリ相向ツテ同時ニ發シタル列車ガ相會シテヨリ、一ツハ四時間半ヲ經テ一ツハ二時間ヲ經テ終點ニ着セリト云フ、兩列車ノ速度ヲ問フ。 答 二十哩 三十哩

第四節 無理方程式

92 無理方程式 根號ノアル方程式ニ於テ、其根號ノ下ニ未知數ガアルトキハ之ヲ無理方程式又ハ根數方程式ト云フノデアル。

例ヘバ $\sqrt{16x^2}=2$ $x-\sqrt{x}+3=0$ 等ノ如シ。

93 方程式ノ兩邊ヲ自乘スルコト。

例ヘバ $2x-5=x$ (1)

ノ兩邊ヲ自乘スレバ $4x^2-20x+25=x^2$

即チ $3x^2-20x+25=0$ (2)

トナル。

サテ (1) ノ根ハ $x=5$ ダケナルガ、

(2) ノ根ハ $x=5$ 及 $\dfrac{5}{3}$ ノ二ツデアル。

コレ(2)ハ(1)ノ外ニ $2x-5=-x$ (3)

ノ根ヲモ含ムカラデアル、何トナレバ(3)モ兩邊ヲ自乘スレバ(2)トナルカラデアル。

94 無緣ノ根 斯樣ニ方程式ノ兩邊ヲ自乘スレバ、得ル所ノ新方程式ハ元ノ方程式ノ根ノ外ニ尙一般ニ其他ノ根ヲモツテキル。

此餘計ナル根ヲ元ノ方程式ニ對シテ無緣根ト云フノデアル。

95 無理方程式ノ解法 無理方程式ヲ解クニハ根號ヲ去ルガタメニ、兩邊ヲ自乘スルヲ以テ、所得ノ根ハ一々之ヲ原方程式ニ代入シテ其適否ヲ驗セネバナラヌ。

例一 $x-\sqrt{x}-6=0$ ヲ解ケ。

解 $\sqrt{x}$ ヲ右邊ニ移セバ $x-6=\sqrt{x}$ (1)

兩邊ヲ平方シテ整頓スレバ $x^2-13x+36=0$

之ヨリ $x=4$ 或ハ 9 ヲ得レドモ、此中 $x=9$ ハ原方程式ニ適スレ

ドモ、$x=4$ ハ適シナイ、故ニ所要ノ根ハ 9 ダケデアル。

注意 $x=4$ ハ $x-6=-\sqrt{x}$ ノ根デアル。

例二 $x-\sqrt{25-x^2}=1$ ヲ解ケ。

解 原式ヲ置キ換ヘテ $-\sqrt{25-x^2}=1-x$

之ヲ平方シテ $25-x^2=1-2x+x^2$

即チ $2x^2-2x-24=0$

2 ニテ約シテ $x^2-x-12=0$

此根ハ 4 ト -3 トノ二ツガ出タ。

驗 今 4 ヲ原式ニ代入シテ見レバ $4-\sqrt{25-16}=1$ トナリテ 4 ハ所題ノ方程式ノ根デアル、而シテ -3 ヲ代入シテ見レバ、$-3-\sqrt{25-9}=-7$ トナリテ 1 ニ等シクナイカラ -3 ハ無緣ノ根デアル、ソシテ -3 ハ方程式 $x+\sqrt{25-x^2}=1$ ノ根デアル。

第十章 比及比例

第一節 比

96 比 或數 a ノ他ノ數 b ニ對スル比トハ a ハ b ノ幾倍ナルカ、又 a ハ b ノ幾分ノ幾ツナルカノ關係デアル。

此關係ハ a ヲ b ニテ除シタル商ヲ知レバ定マル、此商ヲ a ノ b ニ對スル比ト云フノデアル。

故ニ a ノ b ニ對スル比(比ノ値)トハ a ヲ b ニテ除シタル商デアル。

a ノ b ニ對スル比ヲ $\dfrac{a}{b}$ 又ハ $a:b$ ト記ス。

a. b ヲ比ノ項ト云ヒ、a ヲ前項 b ヲ後項ト云フ。

比ノ兩項ハ正ノ數ノミニ限ラナイ、負ノ整數、或ハ分數 或ハ無理數デモヨイ、依ツテ比ノ値モ亦然リデアル。

97 反比 或比ト其兩項ヲ交換シテ成レル比トヲ互ニ反比又ハ逆比ト云フノデアル。

例ヘバ $a:b$ ト $b:a$ トハ互ニ反比デアル。

又 $a=b$ ト $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}$ トハ互ニ反比デアル。

98 複比 若干ノ比ノ前項ノ積ガ後項ノ積ニ對スル比ヲ夫等ノ比ノ複比ト云フ。

例ヘバ $abc:def$ ハ $a:d$, $b:e$, $c:f$ ノ複比デアル。

99 二乘比、三乘比 相等シイ二ツノ比ノ複比ヲ其各比ノ二乘比ト云ヒ、相等シイ三ツノ比ノ複比ヲ其各比ノ三乘比ト云フ。

例ヘバ $a^2:b^2$ ハ $a:b$ ノ二乘比ニシテ、$a^3:b^3$ ハ $a:b$ ノ三乘比デアル。

100 比ノ性質 比 $a:b$ ハ分數 $\frac{b}{a}$ ニ等シイカラ、分數ニ關スル性質ハ其儘比ニ當テハメルコトガ出來ル、次ノ定理ハ其中最重要デアル。

比ノ兩項ニ同數ヲ乘ズルモ、又ハ兩項ヲ同數ニテ除スルモ其比ハ變ラナイ。

即チ　$a:b=ma:mb$　　又　$a:b=\frac{a}{m}:\frac{b}{m}$

101 量ノ比 二ツノ量ノ比ノ定義及説明ハ數ノ比ノ場合ト同ジデアル。

注意一 同種ノ量デナクテハ比ハ成立タナイ。

注意二 二量ノ比(比ノ値)ハ不名數デアル。

第二節　比　例

102 比例 a ノ b ニ對スル比ガ c ノ d ニ對スル比ニ等シイトキ、此等ノ四數ハ比例スルト云ヒ、且ツ此四數ヲ比例數ト云フノデアル。

例ヘバ　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

ハ比例ニシテ、$a.b.c.d$ ハ比例數デアル。

上ノ式ヲ亦比例式ト云ヒ、之ヲ $a:b=c:d$ 又ハ $a:b::c:d$ トモ記ス。

a ト d トヲ比例ノ外項ト云ヒ、b ト c トヲ其内項ト云フ。又 a ト c ト及 b ト d トハ互ニ相對應スルト云フ。

103 比例中項 $a.b.c$ ガ $a:b=b:c$ ナル比例ヲナストキハ、此三數ハ比例スルト云ヒ、b ヲ a ト c ノ比例中項ト云フノデアル。

104 比例ノ定理 比例ノ外項ノ積ハ其内項ノ積ニ等シイ。

證明 $a.b.c.d$ ガ比例ヲスルトキハ　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

ナル故、兩邊ニ bd ヲ乘ズレバ　$ad=bc$

上ノ定理カラ次ノ事項ガ成立スル。

二數ノ比例中項ハ其積ノ平方根デアル。

即チ　$a:b=b:c$ ナルトキハ $b=\pm\sqrt{ac}$ ナリ。

本定理ニヨリ比例式中ニ一ツノ未知數ヲ含ムトキ其未知數ノ値ヲ定

ムルコトヲ得、

若シ $a:b=c:d$ デアルトキニハ、次ノ理ガ成立スル。

反轉ノ理　$b:a=d:c$

合比ノ理　$a+b:b=c+d:d$

分比ノ理　$a-b:b=c-d:d$

分合比ノ理　$a+b:a-b=c+d:c-d$

更迭ノ理　$a:c=b:d$

加比ノ理　若シ　$a:b=c:d=e:f$ …………

ナルトキハ　$a+c+e+\cdots\cdots:b+d+f+\cdots\cdots=a:b$

如何トナレバ　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$　ナルトキ此各比ヲ r ニ等シトスレバ　$a=br.\ c=dr.\ e=fr.\ g=hr$

$\therefore\ a+c+e+g=(b+d+f+h)r$

$\therefore\ \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=r=\frac{a}{b}=\cdots\cdots$

又今迄ノ定理ニヨリテ $a:b=c:d=e:f$ ノトキハ次ノ理ガ成立スル。

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots=\frac{pa+qc+re+\cdots\cdots}{pb+qd+rf+\cdots\cdots}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots=\sqrt[n]{\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots\cdots}}$$

例題

(1) $14+x:18-x$ ノ値ガ $\frac{1}{3}$ トナルニハ x ノ値ヲ如何ニシテヨキカ。

答 -1

(2) $5:9$, $7:12$, $8:15$ ヲ大サノ順ニ列ベヨ。

答 $7:12.\ 5:9.\ 8:15$

(3) $7:8.\ 4x:9y.\ 15ay^2:14bx^2$ ノ複比ヲ問フ。

答 $5ay:12bx$

(4) $x:45=5:x$ ノ x ノ値ヲ問フ。　**答** ±15

(5) $a^3.\ ab^3.$ ノ比例中項ヲ求メヨ。　**答** $\pm a^2b$

第十一章　級　數

第一節　等差級數

105　等差級數　俵ヲ杉ナリニ積上ゲタルトキノ各段ノ俵數ヲ順ニ考ヘレバ或段ト直グ其上ノ段トノ俵數ノ差ハ一定（此場合ニハ1）デアル。

箇樣ニ列デキル一群ノ數ガアツテ、其各ガ夫々其前ニアル俵數ニ一定ノ數ヲ加ヘタルモノデアルトキハ、此等ノ諸數ヲ等差級數又ハ算術級數ト云ヒ、其加ヘタル一定ノ數ヲ公差ト云フ，而シテ各數ヲ級數ノ項ト云ヒ最初ノ項ヲ初項最後ノ項ヲ末項ト云フ。

例ヘバ俵ヲ積ムダトキハ公差ハ1デアル，又1.3.5.……………99ハ初項ガ1.公差ガ2.末項ガ99ナル等差級數デアル，

等差級數ノ諸項ハ，公差ガ正數ナレバ次第ニ增大シ、公差ガ負數ナレバ次第ニ減少スル。

初項及公差ヲ知レバ等差級數ハ決定スル。

106　等差級數第n番目ノ項ヲ求メル公式　初項ヲa公差ヲdトスレバ、等差級數ノ諸項ハ　$a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.$………………ナリ。

故ニ其第n番目ノ項ハ　$a+(n-1)d$.デアル。

但nハ任意ノ正ノ整數トス，

此式ニ於テnヲ次第ニ　1. 2. 3. 4. トスレバ，第一項，第二項，第三項等スベテノ項ヲ得。

項數ガnナルトキハ此項ハ即チ末項デアル。

依テ末項ヲlニテ表セバ　$l=a+(n-1)d$.　　　(1)

例ヘバ初項2公差3ナル等差級數ノ第十番目ノ項ハ

$$a+(n-1)d=2+(10-1)\times 3=29$$

107　等差中項　三數ガ等差級數ヲナストキハ、中間ノ數ヲ他ノ二數ノ等差中項ト云フ。

等差中項ヲ算術平均又ハ相加平均トモ云フ。

$a.\ A.\ b$ ヲ等差級數トスレバ　$A-a=b-A$　デアルカラ

$$A=\frac{a+b}{2}\qquad(2)$$

108　等差級數ノ總和ヲ求メル公式　初項a公差dナル等差級數ノn項ノ總和ヲSトスレバ、

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots\cdots\cdots+(l-d)+l$$

又　$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots\cdots\cdots+(a+d)+a$

邊々相加ヘレバ、

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)+(a+l)$$
$$=n(a+l)$$
$$\therefore\quad S=\frac{n(a+l)}{2}\qquad(3)$$

又lノ代リニ　$a+(n-1)d$　ヲ入レレバ、

$$S=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}\qquad(4)$$

例一　初メノ自然數 1.2.3…………n 個ノ和ハ

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

例二　7.12.17……ナル級數 10 項ノ和ヲ求メヨ。

解　$a=7.\ d=5.\ n=10$　トシテ公式(4)ヨリ

$$S=\frac{10\times(14+9\times 5)}{2}=5\times 59=295$$ ヲ得。

注意　公式(1).(3)及(4)ハ$a.\ d.\ n.\ l$及sノ内四ツヲ連結シタモノデアルカラ、其内任意三ツヲ知レバ殘リノ一ツヲ決定スルコトガ出來ル。

例三　5, 9, 13……ノ幾項ノ和ガ 275 トナルカ。

解　$a=5.\ d=4.\ S=275$　トシテ公式(4)ヨリ、

$$\frac{n\{10+(n-1)\times 4\}}{2}=275$$

4　2　6

簡約スレバ　$3n^2+7n=550$

是ヲ解キテ　$n=11$　或ハ　$-12\frac{1}{2}$

依ッテ正ノミヲトリテ 11 ヲ以テ答トス。

例題

(1)　等差級數 2.9.16……ノ第十三項ヲ問フ。　　答　86

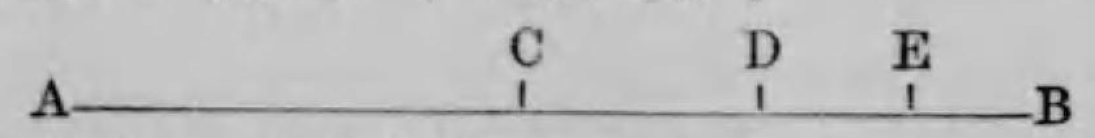
(2)　3.7.11……ノ十三項ノ和ヲ問フ。　　答　351

(3)　初項ハ 12 末項ハ 17 項數ハ十六ナル等差級數ノ和ヲ求メヨ。　　答　232

(4)　$\frac{7}{6}.\frac{4}{3}.\frac{3}{2}$……ノ第何項ガ 14 トナルカ。　　答　78

第二節　等比級數

109 等比級數 例ヘバ一尺ノ絲(AB)ヨリ先ヅ其半分(AC)ヲ切リ取リ、次ニ殘リノ半分(CD)ヲ切リ取リ、



次ニ又其殘リノ半分(DE)ヲ切リ取ルトイフ樣ニ順次殘リノ半分ヅツ切リ取レバ、切リ取ツタ長サハ順次$\frac{1}{2}$尺、$\frac{1}{4}$尺、$\frac{1}{8}$尺、…………ニシテ此例中デ一ツノ長サノ其直グ前ノ長サニ對スル比ハ一定(此場合ニハ$\frac{1}{2}$)デアル、箇樣ニ列ンデキル一群ノ數ガアツテ其各ト、夫々其前ニアル數トノ比ガ一定デアルトキニハ、之等ヲ等比級數ト云ヒ、其一定ノ比ヲ公比ト云フ。

即チ今ノ例デハ$\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{8}$……等比級數デ公比ハ$\frac{1}{2}$デアル、又例ヘバ2.4.8.16.32ハ2ヲ初項トシ、2ヲ公比トシ、32ヲ末項トシタ等比級數デアル。

注意 等比級數ノ各項ノ絕對値ハ、公比ガ1ヨリ大キイトキハ次第ニ增加シ、公比ガ1ヨリ小サイトキハ次第ニ減少スル。

又公比ガ正數ノトキハ各項皆同符號デアルケレドモ、公比ガ負數ノトキハ隣ノ項ハ符號ヲ異ニスル。

110 等比級數第n番目ノ項ヲ求メル公式 初項ヲa公比ヲrトスレバ等比級數ノ諸項ハ $a.ax.ar^3.ar^3$……………………デアル。

故ニ其第n項ハ ar^{n-1} デアル。

依ツテ項數ガnノトキ、末項ヲlトスレバ　$l=ar^{n-1}$　　(1)

例　初項1公比2ナルトキ、第十項ハ $l=1\times2^{10-1}=512$

111 等比中項 三ツノ數ガ等比級數ヲナストキハ、中間ノ數ヲ他ノ二數ノ等比中項ト云フ。

等比中項ヲ幾何平均又ハ相乘平均トモ云フコトガアル。

三數 $a.G.b$ ガ等比級數ヲナストキハ

$$\frac{G}{a}=\frac{b}{G}\qquad\therefore\ G=\sqrt{ab}\qquad(2)$$

二數ノ等比中項ハ即チ其二數ノ比例中項デアル。

112 等比級數ノ總和ヲ求メル公式 初項a公比rナル等比級數n項ノ總和ヲSニテ表ハストキハ、

$$S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+ar^{n-1}$$

依テ　$Sr=\quad ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n$

邊々相減ズレバ　$(1-r)S=a-ar^n$

$$\left.\begin{aligned}S&=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\\&=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

例　9+3+1+……ノ第六項迄ノ和ハ

$$S=\frac{9\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^6-1\right\}}{\frac{1}{3}-1}=13\frac{13}{27}$$

113 無限等比級數ノ總和ヲ求メル公式 項數ノ無限ナル等比級數

$$S=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ニ於テ $r=1$ ナルトキハSノ値ハ如何樣ニモ增スコトガ明ラカデアル。

又 $r>1$ ナルトキモ　$S=a\times\frac{r^n-1}{r-1}$　ニシテ、r^n ハ n ガ大キクナルニ從ツテ如何樣ニモ大トナルカラSノ値モ亦增シテクル。

然ルニ $r<1$ ナルトキハ

$$S=a\times\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$$ ニシテ、

n ガ大キクナルニ從ツテ r^n ノ値ハ次第ニ減少シ、r ガ無限ニ增大スルトキハ甚ダシク0ニ近ヨル、從ツテSノ値ハ甚ダシク$\frac{a}{1-r}$ニ近ヨリ、其差ヲ如何程ニテモ小サクスルコトガ出來ル。

即チ此事ヲ次ノ樣ニ記ス。

$$Ss=\frac{a}{1-r}\qquad(4)$$

例一　無限等比級數 $1,\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{8}$……ノ和ハ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

例二　循環小數 0.12135135……ノ値ヲ求ム。

此循環級數 $=\frac{12}{100}+\frac{135}{100000}+\frac{135}{100000000}+\cdots\cdots$ ニシテ此第二項以下ヲ

考ヘレバ $a=\frac{135}{100000}$, $r=\frac{1}{1000}$ 故ニ和ハ $\dfrac{\frac{135}{100000}}{1-\frac{1}{1000}}$ 即チ $\frac{1}{740}$ トナル、

故ニ此循環小數 $=\frac{12}{100}+\frac{1}{740}=\frac{449}{3700}$

例題

（1）　等比級數　6. 12. 24　ノ初メノ九項ノ和ヲ求メヨ。

答　3066

（2）　等比級數　18. 6. 2　ノ初メノ六項ノ和ヲ求メヨ。

答　$26\frac{26}{27}$

（3）　等比級數　18. 6. 21　ノ第十項ヲ求メヨ。　答　$\frac{2}{2187}$

（4）　3. $2.\frac{4}{3}$ (無限)ノ和ヲ求メヨ。　答　9

第十二章　對數ト其應用

第一節　對　數

114　對數　一ツノ等比級數ト一ツノ等差級數、例ヘバ

$1.\ r.\ r^2.\ r^3.\ r^4.$…………………(等比級數)　(1)

0. 1. 2. 3. 4.…………………(等差級數)　(2)

ヲトツタトキニ此(2)ノ各ノ項ハ(1)ニ於テ對應シテ居ル項ノ對數ト稱ヘ、對數 1 ニ對應スル數、即チ上ノ例ノ r ヲ對數ノ底ト云フ。

115　常用對數　10 ヲ底トシタ對數ヲ常用對數ト云フ、即チ次ノ(2)ノ各項ハ夫々對應セル(1)、各項ノ對數デアル。

………… .001, .01, .1, 1, 10, 100, 1000, ……………………(1)

………−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ……………………(2)

例ヘバ 100 ハ 10 ヲ底トスレバ $100=10^2$ デアルカラ 100 ノ對數ハ 2 デアル。

又0.1 ハ 10 ヲ底トスレバ $0.1=\frac{1}{10}=10^{-1}$ デアルカラ 0.1 ノ對數ハ −1

デアル。

以下常用對數ノコトヲ單ニ對數ト云フコトニスル。

此規約ニ從ヘバ或數ノ對數トハ其數ニ等シイ 10 ノ羃指數デアル。

116　對數ノ書キ表ハシ方　一般ニ x ガ a ノ對數デアルコトヲ示スニハ次ノ樣ニ記ス。

$x=\log a$

例ヘバ上ノ例ニヨリ $2=\log 100$　又　$\log 0.1=-1$

注意一　log トハ對數(Logarithm)ノ初ノ三字ヲトツタノデ之ヲ「ロッグ」ト讀ム。

一般ニ $\log(10^n)=n$ デアル。

但シ n ハ正若クハ負ノ數デアル。

又 a ヲ對數 x ノ眞數ト云フ。

例ヘバ 100 ハ對數 2 ノ眞數ニシテ、0.1 ハ對數 −1 ノ眞數デアル。

注意二　$10^x=a$ ト $x=\log a$ トハ同ジコトデアル。

但シ x ハ正數或ハ負數デアルケレドモ、a ハ決シテ負數デハナイ。

注意三　總テ正ノ數ノ對數ハ一ツアル、而シテ唯一ツニ限ル、而シテ負ノ數ニハ對數ハナイ。

注意四　大キイ數ノ對數ハ小サイ數ノ對數ヨリ大キイ。

117　對數ノ定理。

（1）　10 ノ對數ハ 1 デアル、　即チ $\log 10=1$

（2）　1 ノ對數ハ 0 デアル、　即チ $\log 1=0$

（3）　積ノ對數ハ其因數ノ對數ノ和ニ等シ。

證明　$x=\log a$　$y=\log b$　トスレバ、

$a=10^x$　$b=10^y$　デアルカラ、

$ab=10^x\times 10^y=10^{x+y}$

故ニ　$\log(ab)=x+y=\log a+\log b$

同樣ニ　$\log(abc)=\log a+\log b+\log c$

尙因數ノ數ハ幾ツアルモ同樣デアル。

（4）　商ノ對數ハ實ノ對數ヨリ法ノ對數ヲ減ジタル差ニ等シ。

證明　$x=\log a$　$y=\log b$　トスレバ

$a=10^x$　$b=10^y$　デアルカラ

$\frac{a}{b}=\frac{10^x}{10^y}=10^{x-y}$

故ニ $\log\left(\frac{a}{b}\right)=x+y=\log a-\log b$

(5) 或數ノ羃ノ對數ハ其數ノ對數ニ指數ヲ乘ジタル積ニ等シ。

證明 $x=\log a$ トスレバ、$a=10^x$ デアルカラ $a^n=10^{nx}$

故ニ $\log(a^n)=nx=nloya$

(6) 或數ノ羃根ノ對數ハ其數ノ對數ヲ根指數ニテ除シタル商ニ等シ。

說明 $x=\log a$ トスレバ、$a=10^x$ デアルカラ

$$\sqrt[n]{a}=10^{\frac{x}{n}}$$

故ニ $\log(\sqrt[n]{a})=\frac{x}{n}=\frac{1}{n}\log a$

(7) 或數ノ對數ト其數ト唯小數點ノ位置ノミヲ異ニスル他ノ數ノ對數トノ差ハ整數デアル。

說明 一ツノ數ヲ a トスレバ、之ト唯小數點ノ位置ノミヲ異ニスル數ハ $a\times10^n$ 或ハ $a\div10^n$ デアル。

但シ n ハ正ノ整數デアル。

故ニ $\log(a\times10^n)=\log a+\log(10^n)=\log a+n$

及 $\log(a\div10^n)=\log a-\log(10^n)=\log a-n$

此定理ニヨツテ、或數ノ對數ヲ知レバ、其數ト唯小數點ノ位置ノミヲ異ニスル他ノ數ノ對數ヲ知ルコトガ出來ル。

例ヘバ $\log3$ ヲ知ルトキハ

$\log30=\log3+1$　$\log300=\log3+2$

$\log30000=\log3+4$　$\log0.3=\log3-1$

$\log0.003=\log2-3$　等デアル。

依ツテ若シ $\log3=0.4771$ デアルトキハ、

$\log30=1.4771.$ $\log300=2.4771.$ $\log30000=4.4771$

ニシテ $\log0.3=0.4771-1.$ $\log0.003=0.4771-3$ デアル、

而シテ此終リノ二ツハ夫々之ヲ

$\log0.3=\bar{1}.4771.$ $\log0.003=\bar{3}.4771$

ト記スコトトシ、其小數部分ヲ正數ニシテオク。

118 對數ノ指標及假數 10. 100. 1000 或ハ 0.1, 0.01, 0.001 ナドノ如ク 10 ノ羃ノ對數ハ正或ハ負ノ整數デアルガ、ソレラノ間ノ數ノ對數ハ不盡數デアル、是等ハ其小數若干位(其下ハ四捨五入ス)マデヲ知ツテ

使用スル。

例ヘバ $\log2=0.3010.$ $\log3=0.4771$ 等ノ如シ、依ツテ前項ニ述ベタ樣ニ、$\log20=1.3010$　$\log30=1.4771$

$\log200=2.3010$　$\log300=2.4771$

$\log0.2=\bar{1}.3010$　$\log0.3=\bar{1}.4771$

$\log0.02=\bar{2}.3010$　$\log0.03=\bar{2}.4771$　等デアル。

即チ對數ハ正或ハ負ノ整數部ト正ノ小數部トカラ成ル、而シテ對數ノ整數部ヲ指標ト云ヒ、小數部ヲ假數ト云フ,但シ假數ハ必ズ正數トスル。

119 指標ノ法則。

例ヘバ $\log273.6$ ノ指標ヲ求メンニ、$100<273.6<1000$ デアルカラ、

$2<\log356.7<3$

依ツテ $\log273.6$ ハ 2 ト或小數トノ和ニ等シイ, 故ニ其指標ハ 2 デアル, 一般ニ次ノ法則ガアル。

(法則一) 1 ヨリ大キイ數ノ對數ノ指標ハ、其數ノ整數部分ノ桁數ヨリ 1 ヲ減ジタルモノデアル。

次ニ例ヘバ $\log0.341$ ノ指標ヲ求メンニ $10^{-1}<0.341<10^0$ デアルカラ

$-1<\log0.341<0$

依ツテ $\log0.341$ ハ -1 ト或小數トノ和ニ等シイ、故ニ其指標ハ -1 デアル。

同樣ニ $10^{-3}<0.00341<10^{-2}$ デアルカラ $\log0.00341$ ハ -3 ト或小數トノ和ニ等シイ、故ニ其指標ハ -3 デアル, 一般ニ次ノ法則ガアル。

(法則二) 1 ヨリ小サイ數ノ對數ノ指標ハ負數ニシテ、其絕對値ハ小數點ト初メノ有効數字トノ間ニアル零ノ數ニ 1 ヲ加ヘタルモノデアル。

法則一及二ヨリ直チニ次ノコトヲ知ル。

或數ノ對數ノ指標ガ正ノ數 n デアルトキハ、其數ノ整數部ハ $(n+1)$ 桁デアル。

若シ指標ガ零デアレバ整數部分ハ一桁デアル。

又指標ガ負ノ數 $-n$ デアレバ、其數ハ小數點ト初メノ有効數字トノ間ニ $(n-1)$ 個ノ零ヲモツテ居ル。

第二節　對數表ノ使用法

120 對數表　連續シテキル整數ノ對數ヲ列記シタ表ヲ對數表ト云フ、對數表ハ各數ノ對數ヲ小數點以下四桁迄ニ止メタモノ，(其以下ハ四捨五入)、或ハ五桁或ハ七桁ノモノナドガアル、此表ノ中ニアル數ノ對數ハ直チニ見出スコトガ出來テ、表ノ中ニナイモノデモ計算シテ見出スコトガ出來ル、本書デハ四桁對數ノミヲ用ヒルコトニスル。

注意　對數表ハ別册ニシテ書籍店デ賣ツテキル。

今對數ノ引キ方(附錄參照)ヲ示ス。

121　其數ガ表ノ中ニアル場合ノ對數ノ引キ方。

例一　28 ノ對數ヲ求メルコト。

表中數ト記シテアル行ニ於ケル 28 ノスグ右ニアル數 4472 ガ 28 ノ對數ノ假數デアル、而シテ其指標ハ 1 デアルカラ　$\log 28=1.4472$

例二　0.426 ノ對數ヲ求メルコト。

數ノ行ニ於テ 42 ト記シテアル列ト最上欄ニ 6 ト記シテアル行トノ交叉點ニアル數 6294 ガ 426 ノ對數ノ假數デアル、而シテ 0.426 ノ對數ノ指標ハ -1 デアルカラ、　$\log 0.426=\bar{1}.6294$

例三　6 ノ對數ヲ求メルコト。

數ノ行ニ於ケル 60 ノスグ右ニアル數 7782 ガ 60 ノ對數ノ假數、即チ 6 ノ對數ノ假數デアル、而シテ 6 ノ對數ノ指標ハ 0 デアル。

$$\therefore\ \log 6=0.7782$$

122　其數ガ表ノ中ニナイ場合ノ對數ノ引キ方。

例四　1234 ノ對數ヲ求メルコト。

表ニヨリテ
$$\begin{array}{rr} \log 1230=3.0899 \\ \log 1240=3.0934 \\ \hline \text{差}\qquad\qquad 35 \end{array}$$

故ニ數ニ 10 ノ差アレバ對數ニハ小數第四位ノ 35(即チ 0.0035 デアル、サレド以下對數ノ差ハ常ニ小數第四位ヲ單位トシ表ハスモノトス)ノ差ガ(之ヲ表差トイフ)アル、然ルニ與ヘラレタル數 1234 ト 1230 トノ差ハ 4 デアル、故ニ數ノ差ト其對數ノ差ト比例スルモノトシテ

$$10:4=35:x \qquad x=\frac{4\times 35}{10}=14$$

故ニ　$\log 1234=3.0899+0.0014=3.0913$

注意　實際ニハ上ノ樣ニ一々比例式ヲ作ツテ對數ノ差ヲ求メル手數ヲ省クタメ表ノ中比例部分ト稱スル處ニ表差ノ各ニツイテ之ニ 01, 0.2, ……0.9 ヲ掛ケタ結果ヲ記シテアルカラ、之ニヨツテ計算スルモノトス、即チ次ノ樣ニスル

$$\begin{array}{r} \log 1230=3.0899 \\ 4\cdots\cdots\cdots 14 \\ \hline \log 1234=3.0913 \end{array}$$

例五　$\log o.1234$ ヲ求メルコト。

$\log 1234=3.0913$ デアル、然ルニ $\log 0.1234$ ノ假數ハ $\log 1234$ ノ假數ニ同ジ、故ニ　$\log 0.1234=\bar{1}.0913$

例題　表ニ依リテ次ノ諸數ノ對數ヲ求メヨ。

(1) 38	(2) 603	(3) 500	(4) 6907
(5) 35.28	(6) 3.025	(7) 0.0508	(8) 0.0035
(9) 0.003125	(10) 0.82764		

答

(1) 1.5798	(2) 2.7803	(3) 2.6990	(4) 3.8393
(5) 1.5475	(6) 1.4807	(7) $\bar{2}.7059$	(8) $\bar{3}.5441$
(9) $\bar{3}.4949$	(10) $\bar{1}.9178$		

123　對數ガ與ヘラレタルトキ其數ヲ求メルコト（其對數ガ表ノ中ニアル場合)。

例一　$\log x=1.5391$ ナルトキ x ヲ求メルコト、

表ノ中ニ於テ假數ガ 5391 ナルモノヲ求メ、其列ノ左ノ方ニアル數ノ行ノ數ヲ求ムレバ 34 ヲ得、又 5391 ノ行ニ於テ最上欄ノ數ヲ求ムレバ 6 デアル、故ニ 5391 ヲ對數ノ假數トスル數ノ數字ノ並ビ方ハ 346 デアル、然ルニ指標ハ 1 デアルカラ整數部ノ桁數ハ 2 デアル　$\therefore\ x=34.6$

例二　$\log y=\bar{2}.7059$ ヨリ y ヲ求メルコト。

表ニヨリテ對數ノ假數ガ 0.7059 ナル數ハ 508 デアル、然ルニ指標ハ $\bar{2}$ デアルカラ、　$y=0.0508$

124　對數ガ與ヘラレタルトキ其數ヲ求メルコト（其對數ガ表ノ中ニナイ場合)。

例三　$\log x=3.5545$ ヨリ x ヲ求メルコト。

表ノ中ニハ之ニ相當スル假數ハナイ、サレド

$$\log 3580=3.5539 \qquad \log 3590=3.5551$$

デアルカラ x ハ 3580 ト 3590 ノ間ニアルコトヲ知ル。

サテ數ノ差 10 ニ對シ對數ノ差 12（小數第四位）デアル、然ルニ與ヘラレタル對數 3.5545 ト $\log 3580$ 即チ 3.5539 トノ差ハ小數第四位ノ 6 デアル。

$$\therefore\quad 12:6=10:y \qquad y=\frac{6\times 10}{12}=5$$

$$\therefore\quad x=3580+5=3585$$

注意　實際ニ於テハ此場合ニモ亦比例部分ヲ利用スルモノトス、即チ表差ハ 12 デアルカラ、比例部分ノ欄ニ 12 ト記シテアル處ニ於テ對數ノ差 6 ニ應ズル數ヲ求ムレバ 5 トアル、ソコデ次ノ樣ニ演算ヲスル。

$$\log 3580=3.5539 \qquad \begin{array}{r} 5\cdots\cdots\cdots\cdots 6 \\ \hline \log 3585=3.5545 \end{array}$$

例題　表ニ依リテ次ノ諸數ヲ對數トスル數ヲ有効數字四位マデ求メヨ。

(1)　2.8633	(2)　2.6794	(3)　1.5038	(4)　0.4771
(5)　$\bar{1}.9582$	(6)　$\bar{1}.4320$	(7)　4.5319	(8)　$\bar{3}.7000$

答　(1) 730　(2) 478　(3) 31.9　(4) 3
(5) 0.9082　(6) 0.2704　(7) 34030　(8) 0.005012

125　對數ヲ用ヒテ實地計算ヲスルコト、 或數ノ積ヲ計算スル場合ニ各數ノ數字ノ數ガ多イトキニハ非常ニ面倒デアル、此場合ニハ對數ニヨリテ計算スル、初メノ內ハ對數ノ引キ方ガ下手デアルカラ對數計算ハ却ツテ六ケ敷イ樣デハアルガ慣レレバ實際上多クノ數字ノアル計算ハ對數ノ方ガ早イ、即チ對數ノ定理ヲヨク呑ミ込ムデ居レバタヤスイ事デアル例ヘバ

定理(3)　$\log(abc)=\log a+\log b+\log c$ ノ應用トシテ $a.b.c$ ノ積ヲ作ル場合ニハ $a.\ b.\ c$ ノ對數ヲ求メテ其和ヲ作レバ $a.b.c$ ノ積ノ對數トナルカラ、$a.\ b.\ c$ ノ積ノ對數ヨリ其眞數ヲ引ケバ即チ $a.\ b.\ c$ ノ積トナル。

例一　$x=90.84\times 0.0539\times 3.117$ ヲ計算スルコト、

$$\log x=\log 90.84+\log 0.0539+\log 2.117$$

サテ對數表ニヨリ

$$\begin{array}{r} \log 90.84\ =1.9583 \\ \log 0.0539=\bar{2}.7316 \\ \log 2.117\ =0.3257 \\ \hline \log x=1.0156 \\ \log 10.3=1.0128 \\ \hline 28 \\ 7\cdots\cdots\cdots 294 \\ \hline x=10.37 \end{array} \qquad \begin{array}{r} lob\ 90.8\ =1.9581 \\ 4\cdots\cdots\cdots 2 \\ \hline \log 90.48=1.9583 \\ \\ \log 2.11\ =0.3243 \\ \\ 7\cdots\cdots\cdots 14 \\ \hline \log 2.117=0.3257 \end{array}$$

注意　四桁ノ對數表ヲ用ヒテ計算スル場合ニハ最後ノ答ヲ五桁以上求メテモ五桁目以後ノ數字ハ當テニナラヌカラ四桁マデニ止メル。

定理(4)　$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$ ノ應用トシテ、

例一　$x=63.58\div 2.997$ ヲ求メルコト、

$$\begin{array}{r} \log 63.58=1.8034 \\ \log 2.997=0.4767 \\ \hline \log x=1.3267\ (- \\ \log 21.2=1.3263 \\ \hline 4 \\ 2\cdots\cdots 42 \\ \hline x=21.22 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \log 63.5\ =1.8028 \\ 8\cdots\cdots\cdots 6 \\ \hline \log 63.58=1.8034 \\ \log\ 2.99=0.4757 \\ 7\cdots\cdots\cdots 10 \\ \hline \log 2.997=0.4767 \end{array}$$

例二　769 ノ逆數ヲ求メルコト、

$$\log\frac{1}{769}=\log 1-\log 769=0-\log 769=-\log 769$$

故ニ一數ノ逆數ノ對數ハ原數ノ對數ノ符號ヲ變ヘタルモノニ等シイ、

サテ　$\log 769=2.8859$

$$\therefore\quad -\log 769=-2.8859=-2-0.8859=-2-1+(1+0.8859)$$
$$=-(2+1)+0.1141\cdots\cdots\cdots\cdots(A$$

$$\therefore\quad \log\frac{1}{769}=\bar{3}.1141 \qquad \begin{array}{r} 1\cdots\cdots\cdots 34 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log 0.00130=\bar{3}.1139 \\ \hline 2 \end{array} \qquad \therefore\quad \frac{1}{769}=0.001301$$

注意　$a\div b=a\times\frac{1}{b}$ 即チ一數デ割ルコトハ其逆數ヲ掛ケルコトト同

ジデアルカラ、商ノ對數ヲ求メル場合ニハ法ノ對數ヲ引ク代リニ法ノ逆數ノ對數ヲ加ヘル方ガ實地計算ニハ便利デアル、而シテ一ツノ數ノ對數ヲ知レバ其逆數ノ對數ノ指標及假數ハ(A)ニ示シタ様ニ直ニ之ヲ求メルコトガ出來ル、即チ指標ハ原ノ指標ニ1ヲ加ヘタモノノ符號ヲ變ヘタルモノデ、又假數ハ原ノ假數ヲ1ヨリ引イタルモノニ同ジデアル、例ヘバ　$log\,0.759=\bar{1}.8802$

$$\therefore\quad log\frac{1}{0.759}=-log0.759=-(\bar{1}+1)+(1-0.8802)=0.1198$$

定理(5)　$log(a^n)=nloga$ ノ應用トシテ、

例 (5)　$(0.987)^7$ ヲ求メルコト、

$$log(0.987)^7=7log\ 0.987 \qquad log\,x=\bar{1}.9601$$

$$log\,0.987=\begin{array}{r}\bar{1}.9943\\ \hline 7\end{array} \qquad log.912=\begin{array}{r}\bar{1}.9600\\ \hline 1\end{array}$$

$$log\,x=\bar{1}.9601 \qquad \begin{array}{r}2\cdots\cdots1\\ \hline x=0.9122\end{array}$$

定理(6)　$log(\sqrt[n]{a})=\frac{1}{n}loga$ ノ應用トシテ

例一　$\sqrt[5]{74.9}$ ヲ求メルコト、

$$log\sqrt[5]{74.9}=\frac{1}{5}log\ 74.9$$

$$log\,74.9=1.8745$$

$$\therefore\quad log\sqrt[5]{74.9}=0.3749 \qquad \begin{array}{r}1\cdots\cdots\cdots19\\ \hline \sqrt[5]{74.9}=2.371\end{array}$$

$$log\,2.37=\begin{array}{r}0.3747\\ \hline 2\end{array}$$

例二　$\sqrt[4]{0.683}$ ヲ求メルコト、　$log\,0.683=\bar{1}.8344$

故ニ　$\sqrt[4]{0.683}$ ノ對數ハ此對數ヲ4デ割ッタモノニ等シイ、然レドモ負ノ指標 -1 ハ4デハ割リ切レナイ、カカル場合ニハ次ノ様ニ變形シテ負ノ指標ガ割リ切レル様ニスル、即チ

$log\,0.683=-4+3.8344$　デアルカラ

$$\frac{1}{4}log\,0.683=-1+0.9586 \qquad \therefore\quad log\sqrt[4]{0.683}=\bar{1}.9586$$

$$log\,0.909=\bar{1}.9586 \qquad \sqrt[4]{0.683}=0.909$$

126 込ミ入リタル式ノ計算ノ例

例　$x=\sqrt[3]{\frac{8.309^2\times43}{3080}}$ ヲ計算スルコト、

$$log\,x=\frac{1}{3}(2log8.309+log43-log3080)$$

$$\begin{array}{rl}2log\,8.309&=1.8392\\ log43&=1.6335\\ -log\,3080&=\bar{4}.5114\\ \hline &\bar{1}.9841\ (+\\ &=\bar{3}+2.9841\\ \therefore\ log\,x&=\bar{1}.9947\\ log\,0.987&=\bar{1}.9943\\ \hline &4\\ &8\cdots\cdots\cdots4\\ \hline &x=0.6878\end{array} \qquad \begin{array}{rl}log\,8.30&=0.9191\\ &9\cdots\cdots\cdots5\\ \hline log\,8.309&=0.9196\\ &2\\ \hline &1.8392\end{array}$$

例題　對數表ヲ用ヒテ次ノ式ヲ計算セヨ。

(1)　$8.709\times63.8\times0.035$　　(2)　$\frac{413\times8.17\times3184}{915\times728\times0.7854}$

(3)　0.497^3　　(4)　$0.786^2\times2.265\times3.1416$

(5)　$\frac{3.14\times0.52^3}{5\times2.53}$　　(6)　$\sqrt[4]{0.0086}$

(7)　$\sqrt{\frac{120.28\times0.07069}{0.00357}}$　　(8)　$3.3\times\sqrt[3]{\frac{2.58^2\times6.15}{4.9^2\times2.7}}$

答　(1) 19.45　(2) 20.54　(3) 0.1238　(4) 4.395
(5) 0.0349　(6) 0.3045　(7) 48.8　(8) 2.831

第三節　對數計算ノ應用

127　複利ノ計算　複利法ハ已ニ算術ニ於テ述ベタガ、尙ホ之ニ關スル計算ニシテ對數ノ助ケヲ借ルベキモノガアルカラ玆ニ此等ニ付テ論ズルコトニスル。

複利法ニ於テ元金(P)、年利率(R)、期間數(n)、元利合計(M)、利息(I)ノ關係ヲ説明セン、但シ一期間每ニ利息ヲ元金ヘ加入スルコトトシテ計算スル。

第一期ノ終リニ於テ利息ハ PR ナリ、故ニ元利合計ハ P+PR 即チ P(I+R) デアル、即チ元金ニ (I+R) ヲ掛ケレバ一期間後ノ元利合計トナルノデアル。

故ニ第二期末ノ元利合計ハ $P(1+R)^2$ トナル、第三期末ノ元利合計ハ $P(1+R)^3$ トナル、逐テ斯ノ如クナルカラ期間數ガ n アルトキ即チ第 n

期ノ元利合計ハ

$$M=P(I+R)^n \qquad (1)$$

$$I=M-P \qquad (2)$$

$$=P\{(1+R)^n-1\} \qquad (3)$$

故ニ複利法ノ計算ハ對數ニ由ルガ便利デアル、且ツ n 即チ期間ヲ索メル場合ノ如キハ對數ヲ必要トスル。

此計算ハ對數ノ定理ニヨツテ。

$$\log M=\log P+n\log(1+R) \qquad (4)$$

又 $$n=\frac{\log M-\log P}{\log(1+R)} \qquad (5)$$

注意 複利ヲ計算シタ結果其他之ニ類似ノモノノ表ハ附錄ニアル。

例 年利五分ニテ金百圓ノ百箇年間ノ元利合計ヲ求メヨ、但シ利息ハ三箇月毎ニ元金ニ繰リ込ムモノトス。

解 所要ノ元利合計ヲ M トスレバ公式(3)ニヨリ

$M=100\times\left(1+\frac{0.05}{4}\right)^{400}$ 一年ヲ四期ニ分ツカラ一期ノ利率ハ $\frac{0.05}{4}$ トナリ期間ハ $4\times100=400$ トナル。

$$M=100\times\left(1+\frac{5}{400}\right)^{400}=100\times\left(\frac{81}{80}\right)^{400}$$

$$\therefore \quad \log M=\log100+400(\log81-\log80)$$

100 ノ對數ハ 2 ニシテ、81 ト 80 トノ對數ヲ表ニヨリテ引ケバ、

$$\log M=2+400\times(1.9085-1.9031)=4.16$$

次ニ此 416 ニ相當スル眞數ヲ見出セバ答ヲ得

128 複利法ニヨル現價 n 年ノ後ニ拂フベキ金 M 圓ノ現價ヲ P トスル。

然ルトキハ P ヲ元金トセバ n 年ノ後ノ元利合計ハ M トナルト云フコトト同ジデアルカラ、公式(3)ニヨリ、

$$P=\frac{M}{(1+R)^n} \qquad (6)$$

$$\therefore \quad \log P=\log M-n\log(1+R) \qquad (7)$$

ニヨツテ對數計算ヲスル。

例 四年後ニ拂フベキ金五百圓ノ現價ヲ求メヨ。

但シ利率ハ年五分トスル。

解 $$P=\frac{M}{(1+R)^n}=\frac{500}{(1+0.05)^4}=\frac{500}{(1.05)^4}$$

$$\therefore \quad \log P=\log500-4\log(1.05)=2.6990-4\times0.0212=2.6142$$

$$\therefore \quad P=411.^{円}35$$

129 定期年金ノ積高 每年同一ノ金額ヲ積ミ立テルトキ其元利合計ヲ複利法ニヨリ計算スルコト。

年金ヲ A トシ、積ミ立テル年數ヲ n トシ、年利率ヲ R トシ、蓄積高(即チ總體ノ元利合計)ヲ M トス。

第一年ノ年金ハ第二年ヨリ利息ヲ生ズルカラ

元利合計 $A(1+R)^{n-1}$ トナル。

第二年ノ年金ハ第三年ヨリ利息ヲ生ズルカラ

元利合計 $A(1+R)^{n-2}$ トナル。

餘モ之ニ倣フ、

故ニ $$M=A(1+R)^{n-1}+A(1+R)^{n-2}+\cdots A(1+R)^2+A(1+R)+A$$

$$=A\{1+(1+R)+(1+R)^2+\cdots\cdots+(1+R)^{n-1}\}$$

$$=A\frac{(1+R)^n-1}{(1+R)-1}=A\frac{(1+R)^n-1}{R}$$

130 定期年金ノ現價 若干年間繼續スル年金ノ現價ヲ複利法ニヨリ計算スルコト。

年金ヲ A トシ、繼續スベキ年數ヲ n トシ、年利率ヲ R トシ、現價ヲ P トス。

一年後ニ拂ハルベキ年金 A ノ現價ハ $\frac{A}{1+R}$ デアル、

二年後ニ拂ハルベキ年金 A ノ現價ハ $\frac{A}{(1+R)^2}$ デアル、

三年後ニ拂ハルベキ年金 A ノ現價ハ $\frac{A}{(1+R)^3}$ デアル、

餘ハ之ニ準ズル、

$\therefore \quad P=\frac{A}{1+R}+\frac{A}{(+R)^2}+\frac{A}{(1+R)^3}+\cdots\cdots n$ 項ニ至ル、之ハ無限等比級數ノ和デアルカラ、

$$P=\frac{A}{1+R}\times\frac{1-\frac{1}{(1+R)^n}}{1-\frac{1}{1+R}}=\frac{A}{R}\left\{1-\frac{1}{(1+R)^n}\right\}$$

据置定期年金ノ現價 m 年ノ後 n 年間繼續スル年金ノ現價、

$$=\frac{A\{(1+R)^n-1\}}{R(1+R)^{m+n}}$$

131 永續年金ノ現價 今後無究ニ每年 A 圓ヅツ受取ルベキ權利ノ現今ニ於テノ價即チ永續年金ノ現價ハ一年ニ A 圓ノ利息ヲ生ズル所ノ元金ニ等シクナケレバナラヌ、故ニ

$$永續年金ノ現價=\frac{A}{R}$$

此式ハ又前節ノ n 項ノ等比級數ニ於テ項ヲ限リ無ク取ル（即チ n ヲ無限大ニスル）トシテモ得ラル。

附記 定記年金及永續年金ノ如キヲ(生命年金ニ對シテ)確實年金ト稱ヘルコトガアル。

132 年賦償還 何年間カ每年同一ノ金額ヲ返シテ元利ヲ償還スル法ヲ年賦均等分償法ト云フ或ハ單ニ年賦償還トモ云フノデアル。

元金ヲ P トシ年賦償還額ヲ A トシ第一回ノ償還期ハ貸借時ヨリ滿一年後トスレバ第 130 項ト同樣ノ算式トナル、

$$P=\frac{A}{1+R}+\frac{A}{(1+R)^2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{A}{(1+R)^n}=A\frac{(1+R)^n-1}{R(1+R)^n}$$

$$故ニ\quad A=\frac{PR(1+R)^n}{(1+R)^n-1}$$

初メニ m 年間ノ据置アルトキハ(即チ据置ナル m 年間經過シタ後滿一年ノ終リニ第一回ノ償還アルトス、

$$P=\frac{A}{(1+R)^{m+1}}+\frac{A}{(1+R)^{m+2}}+\cdots\cdots\cdots+\frac{A}{(1+R)^{m+n}}=$$

$$\frac{A\{(1+R)^n-1\}}{R(1+R)^{m+n}}\qquad 故ニ\quad A=\frac{PR(1+R)^{m+n}}{(1+R)^n R1}$$

例題

(1) 年利率五分ノ複利法ヲ以テセバ元金千圓十八年間ノ元利合計ヲ問フ。 **答** 貳千四百七圓

(2) 年六分ノ複利法ニテ貸シタル金ハ幾年ニシテ元金ノ二倍トナルカ。 **答** 十一年十一箇月(約)

(3) 年四分八厘ノ複利法ニテ金七百圓ヲ預ケタルトキハ幾年ニシテ壹千六百圓トナルカ。 **答** 十七年八箇月(約)

(4) 十四年後ニ拂ハルベキ金參千六百圓ノ現價ヲ年六分五厘ノ複利

法ニテ計算セヨ。 **答** 千四百九拾壹圓

(5) 千六百圓ガ複利法ニ從ツテ三十五年後ニ貳萬五千圓トナルニハ年利率ヲ幾何ト定ムベキカ。 **答** 八分一厘七毛

(6) 百圓ノ年金ニ年五分ノ複利ヲ附スルトキハ十五年間ニ幾何蓄積スルカ。 **答** 貳千百五拾八圓

(7) 每年六拾圓ヅツ二十二年蓄積スルトキハ元利合計如何但シ複利率年四分トス。 **答** 貳千五拾四圓

(8) 年利率四分五厘ナルトキハ二十年間續クベキ八拾圓ノ年金ノ現價ヲ問フ。 **答** 千〇四拾壹圓

(9) 今ヨリ五年ノ後每年貳百圓ヅツ十一年間領收スルコトヲ得ル權利ノ現價如何。(但シ四分二厘ノ年利率) **答** 千百拾壹圓

(10) 金壹萬貳千圓ヲ借リ十年間ニ均等分償セント欲ス、年賦償還額ヲ問フ、但シ年利率八分。 **答** 千七百八拾八圓

(11) 金壹萬圓ヲ借リ七年間据置キ其後十二年間ニ均等分償セント欲ス、年賦償還額ヲ問フ、但シ年利率七分 **答** 貳千貳拾貳圓

第三編　初等幾何學 平面之部

第一章　總說

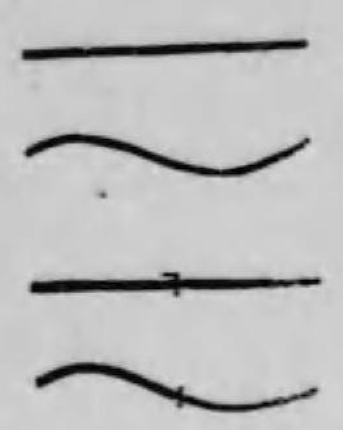
1 **幾何學** 幾何學ハ物ノ形チ、大サ及位置ニ關スル眞理ヲ研究スル學問デアル。

2 **線** 白イ紙ノ一部分ヲ黑ク染メルトキハ、白イ部分ト黑イ部分トヲ區別スル界ガアル。

此界ニハ長サガアッテ太サハナイ、此場合ニ紙ノ白イ部分ト黑イ部分トノ界ヲ線ト云フ、即チ線ニハ位置及長サアリテ太サナシ。

線ハ太サガナイケレドモ、之ヲ書キ表ハスニハ鉛筆ヤペンノ様ナモノデ細クシテ且ツ一様ナ痕迹ヲ用ヒル。

3 **點** 線ヲ二ツニ折ルトキハ、此二ツノ部分ヲ區別スル界ガアル、



此場合ニ此界ヲ點ト云フ、此界ニハ長サモ太サモナイ、即チ點ニハ位置アリテ太サナシ。

一般ニ二ツ線ガ切リ合フ位置ハ點ニシテ、一ツノ線ノ兩端ハ何レモ點デアル。

線ハ點ノ運動シタ通路デアルト考ヘルコトガ出來ル。

點ハ位置ガアルバカリデ太サモ長サモ形モナイガ之ヲ圖デ表ハスニハ十字字ヤ、小サイ丸星ナドヲ用ヒル。

4 **直線** 線ノ兩端ヲ强ク引キ張レバ(切レナイ範圍ニ)其線ハ眞直トナル、此場合ニ線ノ形ハ直線デアルト云フ。二ツノ點ノ間ニ引キ張ル線ハ幾條デモアルガ皆相一致スルモノヲ考ヘルコトガ出來ル、是ト同樣ニ直線ニ就イテハ次ノ事項ヲ眞ト認メルコトガ出來ル。

二ツノ點ヲ通過シテ唯一ツノ直線ヲ引クコトヲ得。

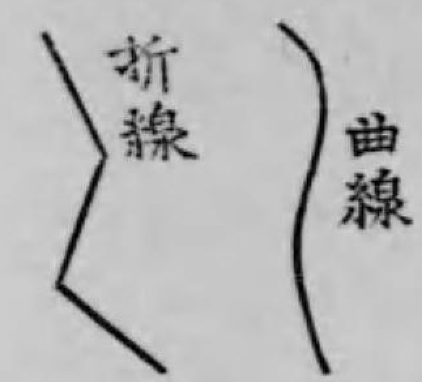
換言スレバ二ツノ點ヲ共有スル數多ノ直線ハ皆合一スル、之ヲ略シテ二點ハ一直線ヲ決定スルト云フ。

直線ノ長サハ限リガナイ、然レドモ其一部ヲ考ヘルトキハ之ヲ有限直線又ハ線分ト云ヒ、之ニ對シテ元ノ直線ヲ無限直線ト云フ。

例ヘバ無限直線 XY ノ上ノ二點ヲ AB トスレバ AB ハ有限直線デアル。

有限直線ノ長サ AB ヲ點 AB ノ距離ト云フ。

而シテ無限直線XYノ部分 BY ヲ有限直線 AB ノ延長ト云ヒ、AX ヲ AB ノ延長ト云フ。



5 **折線及曲線** 異ナッタ方向ヲモッテ居ル若干ノ連續シタ有限直線カラ成ッテキル線ヲ折線ト云ヒ、各々ノ有限直線ヲ其邊ト云フ。

曲線トハ何レノ部分モ直線デナイ線デアル。

6 **平面** 平カナ板ノ上ニ定規ノ緣ヲ接スレバ其位置ニ關ラズ、定規ノ緣ト板ノ表面トハ全ク密接シテ少シモ間隙ハナイ、此場合ニ板ノ表面ハ平面デアルト云フ、即チ平面ノ上ニ在ル任意ノ二ツノ點ヲ通過スル直線ハ全ク其平面ノ上ニ在ルモノトス。

7 **圓** 有限直線ノ一端ヲ平面上ノ一點ニ固定シ、此線ヲ其平面ヲ離レヌ樣ニ廻轉シテ、元ノ位置ニ復ヘラシメルトキハ、他ノ端ハ一ツノ曲線ヲ書ク。

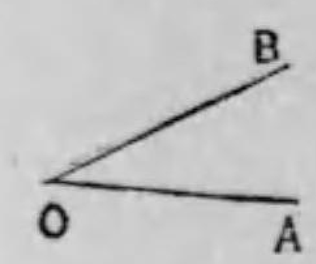
此曲線ヲ圓ト云ヒ、定點ヲ其中心ト云フ。

圓ノ中心ヨリ其圓ノ上ニ在ル總テノ點ニ至ル距離ハ皆相等シ。

圓ノ中心ヨリ其上ニ在ル任意ノ一點ニ至ル線分ヲ其圓ノ半徑ト云フ、一ツノ圓ノ半徑ハ皆相等シイ。

圓ヲ書クニハ兩脚規ヲ用ヒル。

8 **角** 同一點カラ出ル二ツノ直線ハ其點ニ於テ角ヲ夾ム又ハ角ヲ作ルト云ヒ、其點ヲ角ノ項點ト云イ、二ツノ直線ヲ角ノ邊ト云フ、例ヘバ



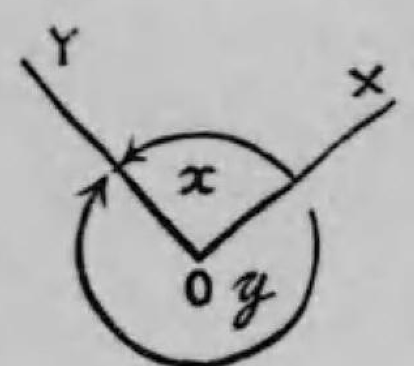
圖ノ二直線 OA.OB ハ角ヲ作リ O ハ項點ニシテ OA.OB ハ其角ノ邊デアル。

此角ヲ AOB 角、或ハ BOA 角又ハ角 AOB 角 BOA 或ハ單ニ角 O ト呼ブ。而シテ角ヲ表ハスニ符號 $\angle$ ヲ用ユ、例ヘバ AOB 角ヲ $\angle AOB$ ト書キ O 角ヲ $\angle O$ ト書ク。

直線 OX ノ一端 O ヲ固定シテ此直線ヲシテ平面上ヲ廻轉セシメ OY

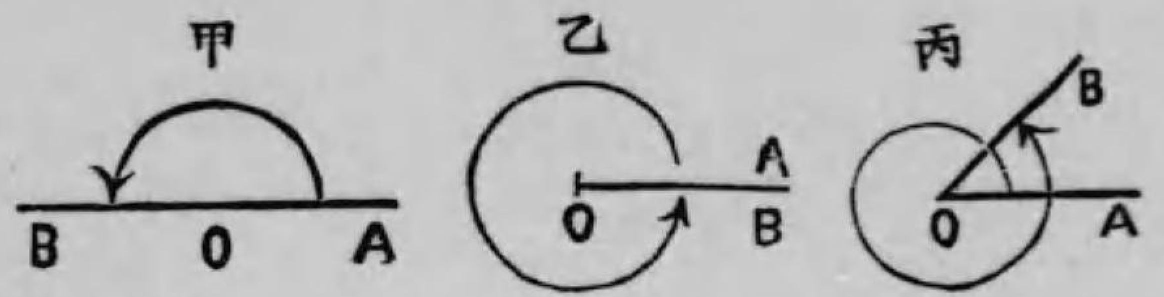
ノ位置ニ至ラシメル仕方ハ二通リアル、即チ左ニ廻レバ角 x ヲ生ジ右ニ廻レバ角 y ヲ生ズ。

小サイ角 x ヲ劣角ト云ヒ大キイ角 y ヲ優角ト云フ。



以後單ニ角ト云フノハ劣角ノコトデアル。

直線 OA ヲ一方ヘ廻轉スレバ絶エズ増大スル所ノ角ヲ生ズ、今原ノ位置ト反對ノ方向ニ來テ一直線トナリ、OB ノ位置ニ達シタトキ角 AOB ヲ平角或ハ二直角ト云フ。(甲圖)



次ニ此廻轉ヲ續ケテ原ノ位置ニ復ッタトキ角 AOB ヲ周角或ハ四直角ト云フ。(乙圖)

尙此廻轉ヲ續ケルトキハ周角ト劣角トノ和ニ等シイ角 AOB ヲ生ズ。

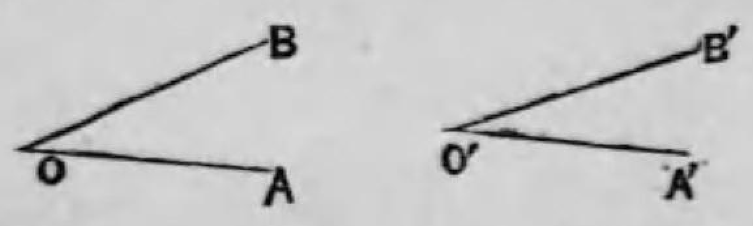
次第ニ此樣ニスレバ如何ナル大キイ角デモ作ルコトガ出來ル、故ニ

角ノ大サニハ際限ナシ。

9 圖形 點、線、面又ハ此等ノ集合ヲ圖形ト云フ、而シテ圖形ノ中ニテ、其總テノ部分ガ同一ノ平面ノ上ニアルモノヲ平面圖形ト云フ。

10 圖形ノ相等 幾何學ニ於テハ常ニ圖形ノ位置ヲ變ヘテモ其形ヤ大サハ變ラナイ樣ニスルコトガ出來ルモノト考ヘラレル、即チ圖形ハ其大小及形狀ヲ變ズルコトナク、任意ニ其位置ヲ變ズルコトヲ得。

今此考ニヨッテ有限直線 a ヲ取リ之ヲ他ノ有限直線 b ノ上ニ重ネ合スコトガ出來ルトキハ此二ツノ有限直線ハ相等シイト云ヒ、$a=b$ ト記ス。

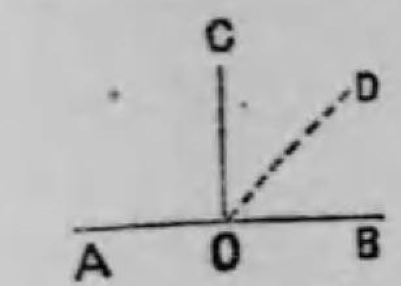


一ツノ角 AOB ヲ取リ之ヲ他ノ角 A′O′B′ ノ上ニ置キ、頂點ト二邊トヲ夫々相合スコトガ出來レバ此二角ハ相等シイト云ヒ、之ヲ $\angle AOB=\angle A'O'B'$ ト記ス。

注意 角ノ等シキヲ云フトキハ邊ノ長サハ無關係デアル、一般ニ或ル圖形 A ガ他ノ圖形 B ノ上ニ全ク重ネ合ハスコトガ出來ル場合ニハ A ハ B ト全等形デアルト云フテ $A \equiv B$ ト記ス。

附記 一般ニ A ガ B ヨリ大キイト云フコトヲ書キ表ハスニハ $A>B$ ト記シ、A ガ B ヨリ小サイト云フコトハ $A<B$ ト記ス、例ヘバ角 AOB ハ角 AOC ヨリ大キイトキニハ $\angle AOB < \angle AOC$ ト記シ、線 XY ガ XZ ヨリ短カイトキハ $XY<XZ$ ト記ス。

11 垂線 一ツノ直線 OC ガ他ノ直線 AB ト點 O ニ於テ交ッテ作ル二ツノ角 AOC. BOC ガ相等シイトキハ、直線 OC ハ點 O ニ於テ直線 AB ニ垂直デアルト云ヒ、又直線 OC ヲ直線 AB ノ垂線ト云フ。



直線 AB 上ニ在ル點 O ニ於ケル垂線ヲ OC トシ O ヲ通過シテ OC ト異ッタ直線ヲ OD トス。

OD ガ角 BOC ノ内ニ在ルトキハ角 AOD ハ角 AOC ヨリ大キク、角 BOD ハ角 BOC ヨリ小サイ。

然ルニ角 AOC ト角 BOC トハ等シイ、故ニ角 AOD ハ角 BOD ヨリ大キイ。

同樣ニ OD ガ角 AOC ノ内ニ在ルトキハ

角 AOD ハ角 BOD ヨリ小サイ。

即チ何レノ場合ニ於テモ二ツノ角 AOD. BOD ハ相等シクナイ、從テ OD ハ AB ニ垂直デナイ、故ニ

一ツノ直線ノ上ニ在ル一ツノ點ヨリ其直線ニ唯一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得。

12 直角 角ノ一ツノ邊ガ他ノ邊ニ垂直デアルトキハ、其角ヲ直角ト云フ。

直角ヲ表スニハ R∠ ト云フ符號ヲ用ヒル。

二ツノ角 ABC. DEF ガ何レモ直角デアルトキニハ、角 DEF ノ頂點 E ヲ角 ABC ノ頂點 B ニ重ネ、邊 ED ヲ邊 BA ニ重ネ、邊 EF ヲシテ BA ニ對シテ BC ト同一ノ側ニ置ク、然ルトキハ EF ハ B ニ於テ BA ニ垂直トナル、然ルニ BC ハ BA ニ垂直デアルカラ、故ニ EF ハ BC ニ重ナル、從テ二ツノ角 ABC. DEF ハ相等シイ、故ニ總テノ直角ハ相等シ。

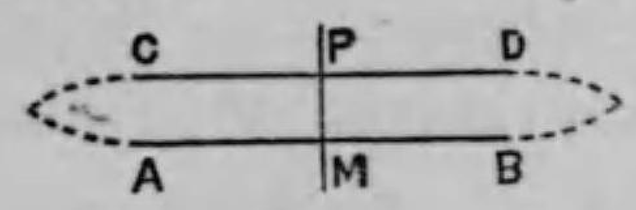
而シテ直角ハ二直角ノ半分デアル。

直角ヨリモ小サイ角ヲ銳角ト云ヒ、直角ヨリモ大キクシテ二直角ヨリモ小サイ角ヲ鈍角ト云フ。

實用上ニ於テ角ヲ測ルニハ度、分、秒ヲ單位トス、一度ハ直角ノ九十分ノ一、一分ハ一度ノ六十分ノ一、一秒ハ一分ノ六十分ノ一ニ等シイ、即チ直角ハ九十度デアル。

13 平行線 同一ノ平面上ニ在ル二ツノ直線ガ決シテ相交ラナイトキハ、此二ツノ直線ハ互ニ平行デアルト云ヒ、又二ツノ直線ヲ平行線ト云フ。

平行線ヲ表スニハ ‖ 又ハ // ト云フ符號ヲ用フ。



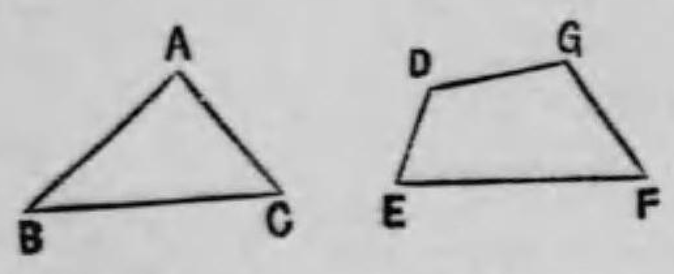
二ツノ直線AB. CDガ何レモ直線MPニ垂直トシ、MPニ沿フテ平面ヲ折リ返ストキハPDハPCニ重ナリ、MBハMAニ重ナル、從テ若シAB. CDガMPノ一方（例ヘバ右方）ニ於テ交ルナラバ、他方（例ヘバ左方）ニ於テモ交ルコトトナル、即チAB, CDハ二ツノ點ヲ共有スルカラ全ク相一致スベキ筈デアル、然ルニAB, CDハ同一ノ直線デナイカラ、AB.CDハ決シテ相交ラナイ、即チ平行(AB ‖ CD)デアル。

是ニヨリテ一ツノ直線ABノ外ニ在ル一點Pヲ通過シテ其直線ニ一ツノ平行線CDガアルコトハ明デアル。

吾人ハ經驗上カラ次ノ事項ヲ眞ト認メルコトガ出來ル。

一ツノ點ヲ通過シテ一ツノ直線ニ唯一ツノ平行線ヲ引クコトヲ得。

14 多角形 一ツノ平面ノ上ニ在ル三ツノ直線ハ一般ニ三ツノ點デ相交ル、此交點ヲA. B. Cトスルトキハ、三ツノ線分AB. BC. CAハ一ツノ三角形ABCヲ作ルト云フ。



一般ニ、數多ノ線分ガ順次ニ首尾相接續シテ平面ノ一部分ヲ圍ムトキハ、此等ノ線分ハ一ツノ多角形又ハ多邊形ヲ作ルト云フ。

三角形ハ最モ簡單ナ多角形ニシテ、線分ノ數ガ四ナラバ四角形又ハ四邊形ト云ヒ、五ナラバ五角形又ハ五邊形ト云フ、其他之ニ準ジテ、nナラバn邊形ト云フ。

多角形ヲ作ル線分ヲ其邊ト云ヒ、相隣ル邊ニ共通ナ點ヲ其頂點ト云ヒ、相隣ル邊ノ夾ム角ニシテ多角形ノ内ニ在ルモノヲ其角又ハ内角ト云フ。

上ノ圖ニ於テAB.BC.CAハ三角形ABCノ邊、點A.B.Cハ其頂點、角A.B.Cハ其角デアル、又DE.EF.FG.GDハ四邊形DEFGノ邊、點D.E.F.Gハ其頂點、角D.E.F.Gハ其角デアル。

15 命題 定義、命題トハ一ツノ事項ヲ述ベタ文デアル、例ヘバ「甲

ハ乙ニ等シ」ト云フノハ一ツノ命題デアル、定義トハ一ツノ事項ノ意味ヲ定メルコトデアル、即チ其語ハ何ヲ指シ、何ヲ表ハスカヲ陳ベルモノデアル。

16 公理 推理ノ基礎トナル事項ヲ公理ト云フ、公理ハ吾々ガ經驗上カラ眞デアルト認ムルモノデアツテ、何故ソレガ眞デアルカト說明ハ出來ナイモノデアル、公理ヲ別チテ普通公理、幾何學公理ノ二ツトスル、普通公理ハ各種ノ量ニ關シタモノデ、幾何學公理ハ特ニ幾何學デ論ズル所ニ關係スルモノデアル、幾何學デ用ヒラレル主ナ普通公理ヲ次ニ掲グル。

普通公理

公理 (1) 全量ハ其部分ヨリ大ナリ。

公理 (2) 全量ハ其總テノ部分ノ和ニ等シ。

公理 (3) 同ジ量ニ等シキ量ハ相等シ。

公理 (4) 相等シキ量ニ相等シキ量ヲ加フレバ、其和ハ相等シ。

公理 (5) 相等シキ量ヨリ相等シキ量ヲ減ズレバ、其殘リハ相等シ、

公理 (6) 相等シカラザル量ニ相シキ量ヲ加フレバ、其和ハ相等シカラズ、其大ナル方ヘ加ヘタル和ガ他ヨリ大ナリ。

公理 (7) 相等シカラザル量ヨリ相等シキ量ヲ減ズレバ、其殘リハ相等シカラズ、其大ナル方ヨリ減ジタル殘リガ他ヨリ大ナリ。

公理 (8) 相等シキ量ノ同ジ倍數ノ量ハ相等シ。

公理 (9) 相等シキ量ノ同ジ分數ノ量ハ相等シ。

幾何學公理 今迄ニ述ベタ主ナル幾何學ノ公理ハ、

一、二ツノ點ヲ過ツテ唯一ツノ直線ヲ引クコトヲ得。

二、一ツノ點ヲ過ツテ一ツノ直線ニ唯一ツノ平行線ヲ引クコトヲ得。

三、圖形ハ其大小及形狀ヲ變ズルコトナク、任意ニ其位置ヲ變ズルコトヲ得。

17 定理 定義ヤ公理ヲ基トシテ專ラ推理ニヨツテ、圖形ノ性質ヲ研究シ而シテ箇樣デアルト斷定シタ事項ヲ述ベタモノヲ定理ト云フ。

而シテ定理カラ推シテ他ノ事項ノ眞デアルコトヲ直チニ知ルトキハ、之ヲ其定理ノ系ト云フ。

定理ハ二ツノ部分カラ成リ立ツ、即チ假設、終結ノ二部分デアル、假設

トハ假ニコウデアルトスルコトニシテ、終結トハ假設カラ起ツテ來ルト主張スルトコロノコトデアル、例ヘバ「甲ガ乙ナレバ丙ハ丁ナリ」ト云フ命題ノ「甲ガ乙ナレバ」ハ假設ニシテ「丙ハ丁ナリ」ハ終結デアル、之ニヨリ定理ハ假設、終結ヲ以テ完結シテ居ル。

甲、乙二ツノ定理アリテ、甲ノ定理ノ假設ガ乙ノ定理ノ終結ニシテ、甲ノ定理ノ假設ガ乙ノ定理ノ終結デアルトキニハ此各々ノ定理ヲ他ニ對シテ逆定理ト云フ。

18　作圖題　作圖題トハ與ヘラレタル條件ヲ滿足スル處ノ圖形ヲ畫クコトヲ求メル問題デアル。

初等幾何學ノ作圖題ニ於テ用フルコトヲ許サレタ器械ハ定木及ビ兩脚器ニ限ル。

而シテ定木ハ直線ヲ引クタメニ用ユルモノデ兩脚器ハ圓ヲ畫イタリ又ハ距離ヲ移ス爲メニ用フルモノデアル。

次ノ三箇條ハ最初カラ出來得ルモノトシテ承認サレテ居ル、而シテ此三箇條ヲ作圖ノ公法ト名ヅケル。

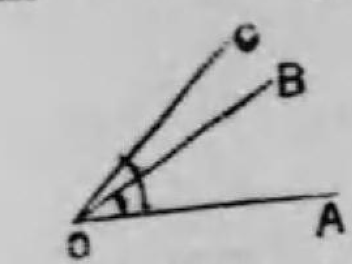
（1）　二點間ニ直線ヲ引クコト。
（2）　有限直線ヲ任意ニ延引スルコト。
（3）　一點ヲ中心トシテ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫クコト。

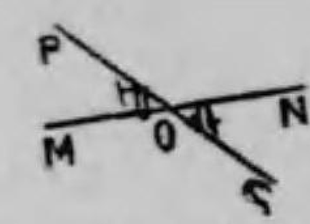
第二章　直線形及角

第一節　直線ト角トニ關セル定理

19　接角及對頂角　二ツノ角ガ頂點及一邊ヲ共有シ、此共通邊ノ兩側ニ一ツヅツ在ルトキハ、此二ツノ角ヲ互ニ接角ト云フ。

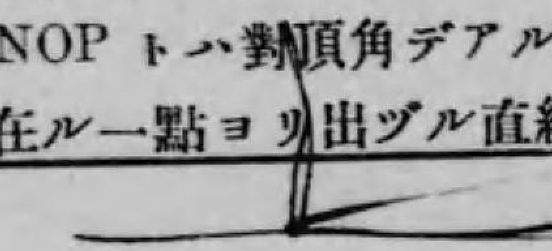
二ツノ角ガ頂點ヲ共有シ、一ツノ角ノ二邊ガ他ノ角ノ二邊ノ延長線ノ上ニ一ツヅツ在ルトキハ、此二ツノ角ヲ互ニ對頂角ト云フ。

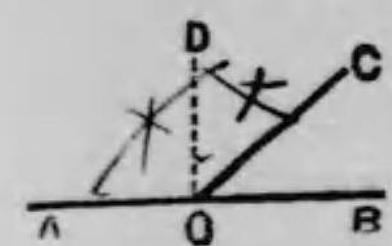




圖ニ於テ、角 AOB ト角 BOC トハ接角ニシテ、角 MOP ト角 NOQ 及角 MOQ ト角 NOP トハ對頂角デアル。

20　定理　(1)　一ツノ直線ト其上ニ在ル一點ヨリ出ヅル直線トノ作ル二ツノ接角ノ和ハ二直角ニ等シ。





說明　直線ABノ上ニ在ル一點Oヨリ出ヅル直線OCガABト作ル二ツノ接角ヲ AOC. BOC トシ、Oニ於テABニ垂線ODヲ引ク、然ルトキハ

$\angle AOC=\angle AOD+\angle DOC$　$\angle BOC=\angle BOD-\angle DOC$

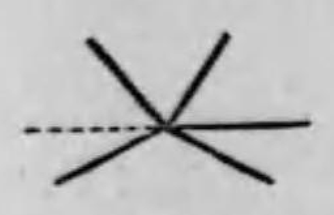
故ニ　$\angle AOC+\angle BOC=\angle AOD+\angle BOD$

然ルニ　$\angle AOD=\angle BOD=R\angle$

因テ　$\angle AOC+\angle BOC=2R\angle$

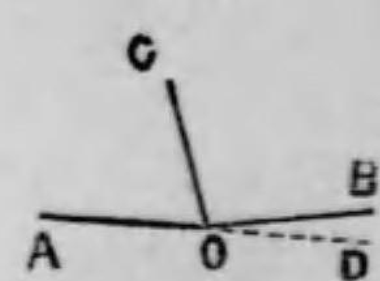
卽チ二ツノ接角 AOC. BOC ノ和ハ二直角ニ等シイ。

注意　R∠ハ直角ノ符號デアル。



系　一ツノ點ヨリ出ヅル數多ノ直線ノ各ガ其次ノ直線ト作ル總テノ接角ノ和ハ四直角ニ等シ。

21　定理　(2)　二ツノ接角ノ和ガ二直角ニ等シキトキハ、其共通ナラザル二邊ハ一直線ヲナス。



說明　二ツノ接角 AOC. COB ノ和ハ二直角ニ等シトシ、邊AOヲ延長シテ點Dニ至ラシム。

然ルトキハ　$\angle AOC+\angle COD=2R\angle$　(1)

然ルニ假定ニヨツテ　$\angle AOC+\angle COB=2R\angle$

故ニ　$\angle AOC+\angle COD=\angle AOC+\angle COB$

即チ　$\angle COD=\angle COB$

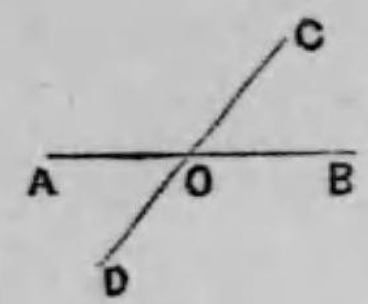
因テ　OD ト OB トハ相重ナル。

然ルニ　AO. OD ハ一直線デアル。

故ニ　AO. OB ハ一直線デアル。

注意 (1) ト記シタノハ定理一ニヨルコトヲ示シタノデアル、以下之ニ準ズ。

22 定理 (3) 二ツノ直線ガ交リテ作ル對頂角ハ相等シ、



證明 二ツノ直線AB. CD ガ點 O ニ於テ相交リテ作ル對頂角ヲ AOC ト BOD 及 COB ト DOA トシ、先ヅ直線 OC ガ直線 AB ノ上ニ在ル一點 O ヨリ出ルト考ヘルトキハ

$$\angle AOC + \angle COB = 2R\angle \qquad (1)$$

次ニ直線 OB ガ直線 CD ノ上ニ在ル一點O ヨリ出ルト考ヘルトキハ

$$\angle COB + \angle BOD = 2R\angle$$

故ニ　$\angle AOC + \angle COB = \angle COB + \angle BOD$

即チ　$\angle AOC = \angle BOD$

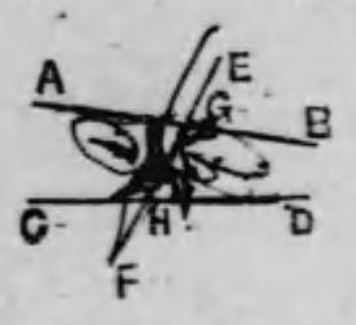
同様ニ　$\angle AOC + \angle COB = 2R\angle$

$\angle DOA + \angle AOC = 2R\angle$

故ニ　$\angle COB = \angle DOA$

即チ對頂角 AOC ト BOD 及 COB ト DOA ハ相等シイ。

23 截線　內角、外角、錯角、同位角、一ツノ直線ガ他ノ二ツノ直線ト交ルトキ、此最初ノ直線ヲ後ノ二ツノ直線ノ截線ト云フ。



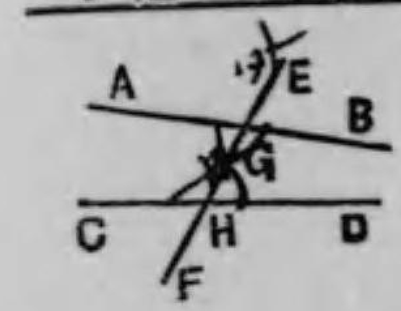
圖ニ於テ直線 EF ハ二ツノ直線 AB. CD ノ截線デアル、截線 EF ト直線 AB. CD トノ交ル點ニハ八ツノ角ガアル、此中デ AB.CD ノ間ニ在ルモノヲ內角ト云ヒ、其外ニ在ルモノヲ外角ト云フ、角 AGH 角 BGH 角 CHG 角 DHG ハ何レモ內角ニシテ、角 AGE 角 BGE 角 CHF 角 DHF ハ何レモ外角デアル。

截線ノ兩側ニ一ツヅツ在ツテ頂點ヲ共有シナイ二ツノ內角又ハ二ツノ外角ヲ錯角ト云フ、角 AGH ト角 DHG 角 BGH ト角 CHG 角 CHF ト角 BGE 角 DHF ト角 AGE トハ何レモ錯角デアル。

截線ノ同側ニ在ツテ頂點ヲ共有シナイ內角ト外角トヲ同位角ト云フ、角 AGE ト角 CHG 角 BGE ト角 DHG 角 CHF ト角 AGH 角 DHF ト角

BGH トハ何レモ同位角デアル。

24 定理 (4) 截線ガ二ツノ直線ト作ル一雙ノ錯角ガ相等シキトキハ、他ノ三雙ノ錯角モ亦相等シ。



證明 截線 EF ガ二ツノ直線 AB. CD ト作ル一雙ノ錯角 AGH. DHG ハ相等シトス、

$$\angle AGH + \angle BGH = 2R\angle \qquad (1)$$

$$\angle CHG + \angle DHG = 2R\angle$$

然ルニ　$\angle AGH = \angle DHG$

故ニ　$\angle BGH = \angle CHG$

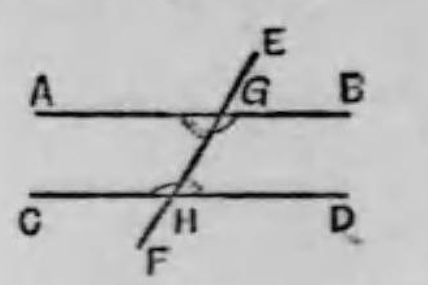
又　$\angle AGH = \angle BGE,\quad \angle DHG = \angle CHF \qquad (3)$

故ニ　$\angle BGE = \angle CHF$

同様ニ　$\angle AGE = \angle DHF$

系 截線ガ二ツノ直線ト作ル一雙ノ錯角ガ相等シキトキハ、四雙ノ同位角ハ各相等シク截線ノ同側ニ在ル二雙ノ內角ノ和又ハ外角ノ和ハ各二直角ニ等シ。

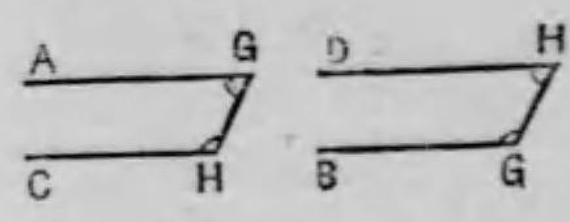
25 定理 (5) 截線ガ二ツノ直線ト作ル一雙ノ錯角ガ相等シキトキハ、二ツノ直線ハ互ニ平行ナリ。



證明 截線 EF ガ二ツノ直線 AB. CD ト作ル一雙ノ錯角 AGH. DHG ハ相等シトス、

然ルトキハ　$\angle BGH = \angle CHG \qquad (4)$

今截線 EF ニ沿ウテ圖形ヲ二ツニ切リ離シ、下ノ圖ノ如ク排列ス。



次ニ右ノ圖形ヲ移シテ、其 HG ヲ左ノ圖形ニ於ケル GH ニ重ネルトキハ

$$\angle AGH = \angle DHG.\ \angle CHG = \angle BGH$$

デアルカラ　HD ハ GA ニ. GB ハ HC ニ重ナル、

故ニ若シ GA ト HC トガ相交ルナラバ、HD ト GB トモ亦相交ラネバナラナイ、即チ元ノ圖ニ於テ、若シ AB. CD ガ EF ノ一方ニ於テ交ルナラバ又他ノ方ニ於テモ交ラネバナラナイ。

二ツノ直線 AB. CD ガ EF ノ右ニ於テモ左ニ於テモ相交ルナラバ、此二ツノ直線ハ二點ヲ共有スルカラ全ク一ツノ直線トナル、

然ルニ AB. CD ハ同一ノ直線デハナイ。

二ツノ直線 AB. CD ガ一ツノ直線トナルト云フ結論ハ GA ト HC トガ相交ルト云フ假定カラ出タモノデアル。

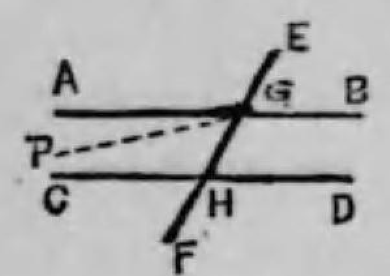
故ニ GA ト HC トハ相交ルコトハナイ、從テ HD ト GB トモ亦相交ルコトハナイ。

因テ AB ト CD トハ平行デアル。

系 1. 截線ガ二ツノ直線ト作ル一雙ノ同位角ガ相等シキトキ、又ハ截線ノ同側ニ在ル一雙ノ内角ノ和若クハ外角ノ和ガ二直角ニ等シキトキハ、二ツノ直線ハ互ニ平行ナリ。

系 2. 同一ノ直線ニ垂直ナル二ツノ直線ハ互ニ平行ナリ。

26 定理 (6) 截線ガ二ツノ平行線ト作ル錯角ハ相等シ。



證明 截線 EF ガ二ツノ平行線 AB. CD ト作ル一雙ノ錯角 AGH. DHG ハ等シクナイト假定シ、角 DHG ニ等シク角 HGP ヲ作ル

然ルトキハ　　GP ∥ CD　　(5)

然ルニ　　GA ∥ CD

因テ直線 GA ト直線 GP トハ同一ノ點G ヲ通過シテ同一ノ直線 CD ニ平行デアル。

然ルニ定ツタ直線ノ外ニ在ル定點ヲ通過シテ其直線ニ平行ナル直線ハ唯一ツデアル。

故ニ直線GA ト直線GP トハ重ナラネバナラナイ。

因テ　　$\angle AGH = \angle DHG$

從テ定理 4 ニヨツテ他ノ三雙ノ錯角ハ各相等シイ。

系 截線ガ二ツノ平行線ト作ル同位角ハ相等シク、截線ノ同側ニ在ル内角ノ和又ハ外角ノ和ハ二直角ニ等シ。

27 三角定規ノ直角ノ正シキヤ否ヤヲ驗スコト。

三角定規ノ直角ノ一邊ヲ一ツノ直線 AB ニ接セシメ他ノ一邊ニ沿ウテ直線 CD ヲ引キ、次ニ定規ヲ裏返シ前ト同様ニシテ直線 CE ヲ引ク。

CD.CE ガ一致スルトキハ定理 1 ニヨリ、角 ACD 及角 BCE ノ和、即チ角 ACD ノ二倍ハ二直角ニ等シイ、從テ角 ACD 即チ定規ノ角ハ直角デアル。

CD. CE ガ一致シナイトキハ、角 ACD 及角 BCE ノ和、即チ角 ACD ノ二倍ハ二直角ニ等シクナイ、從テ角 ACD 即チ定規ノ角ハ直角デナイ。

故ニ CD.CE ノ一致スルトシナイトニヨツテ、定規ノ角ノ正シキカ否カヲ知ルコトガ出來ル。

問題

(1) 一ツノ角ノ二等分線ノ延引ハ對項角ヲ二等分スルコトヲ證明セヨ。

(2) 一點ニ於テ出合フ四直線アリテ次ギ次ギニ作ル四ツノ角ガ一ツオキニ相等シケレバ此四直線ハ二ツ宛同一直線ノ上ニアルコトヲ證明セヨ。

(3) 二直線 OB. OD ガ他ノ一直線 AC ト同一點 O ニ於テ交リ、其反對ノ側ニアル二角 AOB. COD ガ相等シケレバ OB. OD ハ一直線ヲナスコトヲ證明セヨ。

(4) 二ツノ平行線ノ一ツニ垂直ナル直線ハ又他ノ線ニ垂直ナルコトヲ證明セヨ。

(5) 同一ノ直線ニ垂直ナル二ツノ直線ハ互ニ平行スルコトヲ證明セヨ。

(6) 二ツノ角ノ二邊ガ夫々平行ナルトキハ其二ツノ角ハ相等キカ、又ハ合シテ二直角ニ等シキコトヲ證明セヨ。

(7) 二ツノ角ノ二邊ガ夫々垂直ナルトキハ其二ツノ角ハ相等シキカ又ハ合シテ二直角ニ等シキコトヲ證明セヨ。

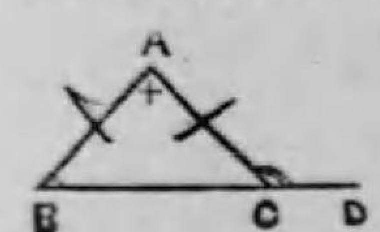
第二節　三角形ノ角及邊ニ關スル定理

28 各種三角形 三角形ノ一ツノ邊ト他ノ一ツノ邊ノ延長線トノ夾ム角ヲ三角形ノ外角ト云ヒ、外角ノ接角デナイ二ツノ内角ヲ其外角ノ内對角ト云フ。

三角形ノ中デ、二邊ガ相等シイモノヲ二等邊三角形ト云ヒ、三邊ガ相等シイモノヲ等邊三角形又ハ正三角形ト云ヒ、一ツノ角ガ直角デアル三角形ヲ直角三角形ト云フ。

二等邊三角形ニ於テ、等邊ノ夾ム角ヲ其頂角ト云ヒ、頂角ニ對スル邊ヲ其底邊ト云フ。

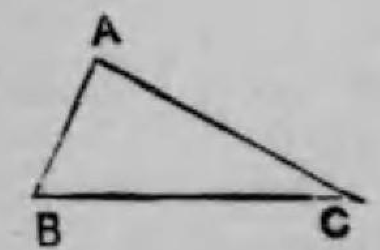
直角三角形ニ於テ、直角ノ對邊ヲ其斜邊ト云フ。



圖ニ於テ角 ACD ハ三角形 ABC ノ外角ノ一ツニシテ、角 A 及 B ハ其内對角デアル、又二邊 AB.AC ガ相等シイトキハ、角 A ハ二等邊三角形 ABC ノ頂角ニ

シテ、邊 BC ハ其底邊デアル、角 A ガ直角デアルトキハ、BC ハ直角三角形 ABC ノ斜線デアル。

29 定理 (7) 三角形ノ任意ノ一邊ハ他ノ二邊ノ和ヨリ小ナリ。

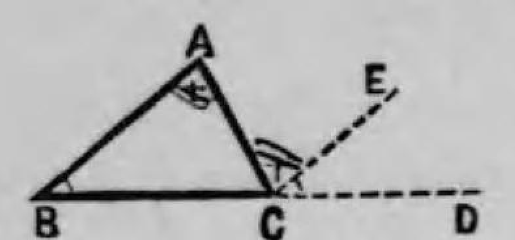


證明 $\triangle ABC$ ニ於テ BC ヲ最大キイ邊トス，今此 BC ヲ考フルニ BC ハ二點 BC ノ間ノ最短距離デアル，故ニ ABC 即チ $AB+AC$ ヨリ小サイ、他ノ邊ニ就テモ亦同樣デアル。

系 三角形ノ一邊ハ他ノ二邊ノ差ヨリ大ナリ、

其故ハ $AB+AC>BC$ デアルカラ兩邊ヨリ AC ヲ引ケバ、$AB>BC-AC$ トナル、他ノ場合モ亦同樣デアル。

30 定理 (8) 三角形ノ三ツノ內角ノ和ハ二直角ニ等シ。



證明 三角形 ABC ノ一邊 BC ヲ延長シテ點 D ニ至ラシメ、頂點 C カラ邊 BA ニ平行線 CE ヲ引ク、然ルトキハ角 A ト角 ACE トハ截線 AC ガ平行線ノ BA.CE トナス錯角ニシテ、角 B ト角 DCE トハ截線 BC ガ平行線ノ BA.CE トナス同位角デアルカラ

$$\angle A=\angle ACE.\quad \angle B=\angle ECD \qquad (6)$$

故ニ $\angle A+\angle B+\angle C=\angle BCA+\angle ACE+\angle ECD$

然ルニ $\angle BCA+\angle ACE+\angle ECD=2R\angle$ (1)

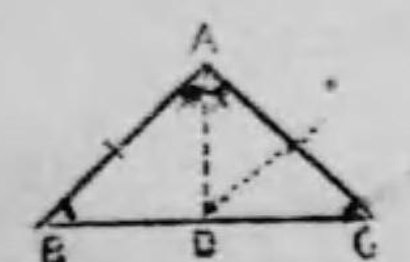
故ニ $\angle A+\angle B+\angle C=2R\angle$

系 1. 三角形ノ外角ハ其內對角ノ和ニ等シ。

系 2. 三角形ノ一ツノ角ガ直角又ハ鈍角ナルトキハ、他ノ二ツノ角ハ鋭角ナリ。

系 3. 定直線ノ外ニ在ル定點ヨリ其直線ニ唯一ツナ垂線ヲ引クコトヲ得。

31 定理 (9) 三角形ノ二邊ガ相等シキトキハ、其邊ニ對スル角モ亦相等シ。



證明 三角形 ABC ニ於テ、二邊 AB. AC ハ相等シトシ、角 A ノ二等分線ト邊 BC トノ交點ヲ D トシ，線分 AD ニ沿ウテ圖形ヲ折リ返シ，三角形 ACD ヲ三角形 ABD ノ上ニ置ク。

然ルトキハ　$\angle BAD=\angle CAD.\ AB=AC$

デアルカラ　頂點 C ハ頂點 B ニ重ナル

從テ　邊 CD ハ邊 BD ニ重ナル

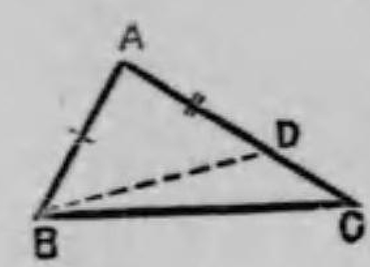
即チ角 C ノ二邊ハ全ク角 B ノ二邊ニ重ナル

故ニ　$\angle B=\angle C$

系 1. 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ二等分シ、且之ニ垂直ナリ。

系 2. 等邊三角形ノ角ハ皆相等シ。

32 定理 (10) 三角形ノ二邊ガ等シカラザルトキハ、大ナル邊ニ對スル角ハ小ナル邊ニ對スル角ヨリモ大ナリ。



證明 三角形 ABC ニ於テ、邊 AC ハ邊 AB ヨリモ大キイトシ、AC ノ上ニ AB ニ等シク線分 AD ヲ取リ線分 BD ヲ引ク。

然ルトキハ三角形 ABD ニ於テ、邊 AB ト邊 AD トハ相等シイカラ。

$$\angle ABD=\angle ADB \qquad (9)$$

然ルニ角 ADB ハ三角形 BCD ノ外角デアルガ故ニ。

$$\angle ADB=\angle BCD+\angle CBD \qquad (8)$$

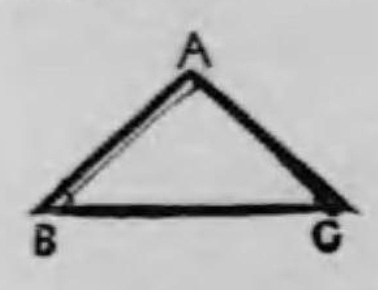
從テ　$\angle ABD=\angle BCD+\angle CBD$

因テ　$\angle ABD+\angle CBD=\angle BCD+2\angle CBD$

即チ　$\angle B=\angle C+2\angle CBD$

故ニ　$\angle B>\angle C$

33 定理 (11) 三角形ノ二角ガ相等シキトキハ、其角ニ對スル邊モ亦相等シ。



證明 三角形 ABC ニ於テ、二角 B.C ハ相等シトシ、其二邊 AB.AC ノ間ニハ次ノ關係ノ中、何レカ一ツハ必ズ成立セネバナラナイ。

$$AB=AC.\quad AB>AC.\quad AB<AC$$

若シ $AB>AC$ ナラバ　$\angle C>\angle B$ (10)

又 $AB<AC$ ナラバ　$\angle C<\angle B$

然ルニ此二ツノ結論ハ共ニ假定ニ反ス、

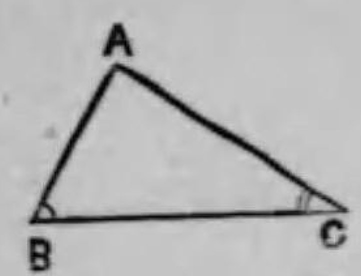
故ニ　$AB=AC$

系 1. 三角形ノ三ツノ角ガ相等シキトキハ、其三ツノ邊モ亦相等

シ。

系 2. 定直線ノ外ニ在ル定點ヨリ其直線ニ至ル線分ノ中ニテ、垂線ト相等シキ角ヲ作ルモノハ相等シ。

34 定理 (12) 三角形ノ二角ガ等シカラザルトキハ、大ナル角ニ對スル邊ハ小ナル角ニ對スル邊ヨリモ大ナリ。



證明 三角形ABCニ於テ、角Bハ角Cヨリモ大キイトシ、其二邊AB.ACノ間ニハ次ノ關係ノ中、何レカ一ツハ必ズ成立セネバナラナイ。

$$AB=AC.\ AB>AC.\ AB>AC$$

若シ $AB=AC$ ナラバ $\angle B=\angle C$ (9)

又 $AB>AC$ ナラバ $\angle B<\angle C$ (10)

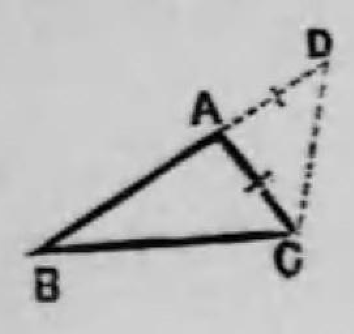
然ルニ此二ツノ結論ハ共ニ假定ニ反ス、

故ニ $AB<AC$

系 定直線ノ外ニ在ル定點ヨリ其直線ニ至ル線分ノ中ニテ、垂線ガ最小ニシテ、垂線ト作ル角ノ大ナルモノハ其小ナルモノヨリモ大ナリ。

35 點ト直線トノ距離 定直線ノ外ニ在ル定點カラ其直線ニ至ル垂線ノ長サヲ其點ト其直線トノ距離ト云フ。

36 定理 (13) 三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリモ大ナリ。



證明 三角形ABCニ於テ、其一邊BAヲ延長シテ其上ニ邊ACニ等シク線分ADヲ取リ、線分CDヲ引ク。

然ルトキハ三角形ACDニ於テ、AC.ADハ相等シイカラ

$\angle ACD=\angle ADC$ (9)

然ルニ $\angle BCD=\angle BCA+\angle ACD$

故ニ $\angle BCD>\angle ADC$

三角形ACDニ於テ角BCDハ角BDCヨリモ大キカラ

$BD>BC$ (12)

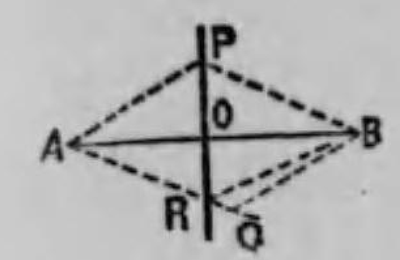
然ルニ $BD=BA+AD=BA+AC$

故ニ $BA+AC>BC$

同樣ニ $CB+BA>CA.\ AC+CB>AB$

系 三角形ノ二邊ノ差ハ他ノ一邊ヨリモ小ナリ。

37 作圖 與ヘラレタル有限直線ノ中點ニ垂線ヲ立ツルコト。



與ヘラレタル線分ヲABトシ、先ヅ其中點Oヲ通過シテ之ニ垂直ナル直線ヲ得タリト假定シテ、其上ニ任意ノ點Pヲ取リ、線分PA.PBヲ引ク。

然ルトキハ $OA=OB.\ \angle POA=\angle POB=R\angle$

故ニOPニ沿ウテ圖形ヲ折リ返ストキハ、線分OBハ線分OAニ、線分PBハ線分PAニ重ナル、因テ $PA=PB$

次ニ垂線ノ外ニ在ル一點ヲQトシ、線分QA.QBヲ引クトキハ、其一ツ例ヘバQAハ必ズ垂線ニ交ル、其點ヲRトス。

然ルトキハ $RA=RB$

然ルニ $QR+RB>QB$ (12) (13)

又 $QR+RB=QR+RA=QA$

故ニ $QA>QB$

即チ線分ABノ中央垂線ノ上ニ在ル點ハ其兩端A.Bヨリ等距離ニ在ッテ、其外ニ在ル點ハA.Bヨリ等距離デナイ。

故ニ線分ABノ中點ニ垂線ヲ引クニハ、其兩端A及Bヲ中心トシ、適宜ニ相等シイ半徑ノ二ツノ圓ヲ畫キ、其交點ヲPトシ、次ニ同一ノ點ヲ中心トシテ、他ノ適宜ノ相等シイ半徑ヲ以テ二ツノ圓ヲ畫キ、其交點ヲRトシ、直線PRヲ引ク。

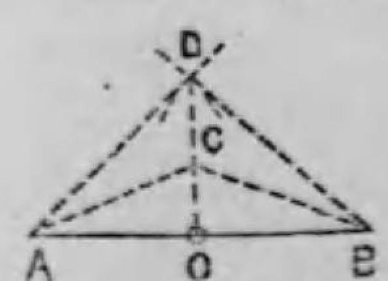
然ルトキハ $PA=PB.\ RA=RB$

故ニP及Rハ即チ中央垂線ノ上ニ在ル二點デアル、然ルニ二點ハ一直線ヲ決定スルモノニシテ、且有限直線ノ中點ノ垂線ハ唯一ツデアルコトハ明デアル、故ニPRハ即チ求ムル垂線トナル。

注意 二點P.Rハ二ツトモABノ同ジ側ニ在ラシメ、又ハ一ツヅツ其兩側ニ在ラシメルコトガ出來ル、又後ノ場合ニハ前ノ圓ノ半徑APト後ノ圓ノ半徑ARトヲシテ相等シクスルコトガ出來ル。

此問題カラ次ノ重要ナル問題ノ解ヲ導クコトガ出來ル。

38 作圖 與ヘラレタル有限直線ノ中點ヲ求ムルコト。

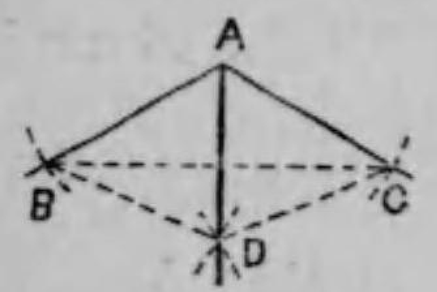


與ヘラレタル線分ヲABトシ、其兩端ヨリ等距離ニ在ル二點C.Dヲ求メ、直線CDトABトノ交點ヲOトス。

然ルトキハOハ線分ABノ中央垂線ノ上ニ在ルカ

ラOハ即チ求ムルトコロノ中點デアル。

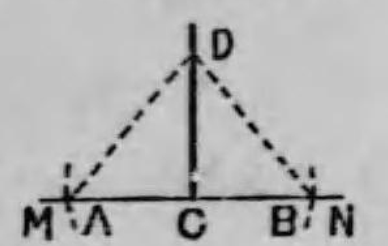
39 作圖 與ヘラレタル角ヲ二等分スルコト。

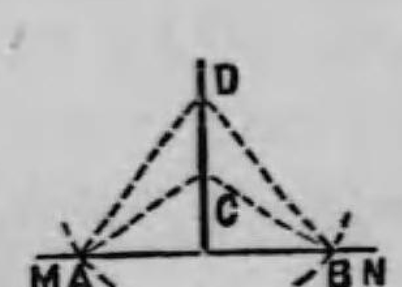


與ヘラレタル角ヲAトシ、其二邊ノ上ニ相等シイ線分AB.ACヲ取リ、B及Cヨリ等距離ニ在ル一點Dヲ求メ、直線ADヲ引ク。

然ルトキハ二點A.Dハ線分BCノ兩端カラ等距離ニ在ルガ故ニADハBCノ中央垂線デアル、從テADニ沿ウテ折リ返ストキハ、CハBニ重ナリ、ACハABニ重ナル、即チ角BAD角CADハ相等シイ、即チADハ角Aヲ二等分スル。

40 與ヘラレタル直線ノ上又ハ其外ニ在ル定點ヨリ其直線ニ垂線ヲ引クコト。





與ヘラレタル直線ヲMN定點ヲCトシ、Cヲ中心トシテ適宜ナル半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ、此圓トMNトノ交點ヲA.Bトシ、A及Bヨリ等距離ニ在ル一點Dヲ求メ、直線CDヲ引ク。

然ルトキハCDハC點ヲ通過シ且線分ABノ中央垂線デアルカラ即チ求ムルトコロノ垂線デアル。

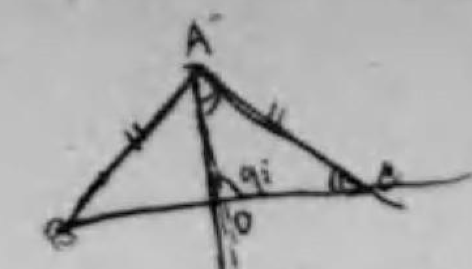
41 軌跡 或ル圖形ノ上ニ在ル點ハ何レモ一定ノ要件ヲ滿足シ、其圖形以外ノ點ハ之ヲ滿足シナイトキハ其圖形ヲ此要件ヲ滿足スル點ノ軌跡ト云フ。

例ヘバ圓ノ上ニ在ル點ハ何レモ其中心カラ其半徑ニ等シイ距離ニ在ツテ、圓ノ上デナイ點ハ其中心カラ距離ハ其半徑ニ等シクナイ、(或ハ中心カラ其半徑ニ等シイ距離ニ在ル點ハ其圓ノ上ニ在ル)。故ニ

一ツノ定點ヨリ一定ノ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ其點ヲ中心トシ其距離ヲ半徑トスル圓デアル。

又線分ノ中央垂線ノ上ニ在ル點ハ何レモ其線分ノ兩端カラ相等シイ距離ニ在ツテ，中央垂線ノ上ニナイ點ハ線分ノ兩端カラ相等シイ距離ニナイ.(或ハ線分ノ兩端カラ相等シイ距離ニ在ル點ハ其線分ノ中央垂線ノ上ニ在ル)。故ニ

二ツノ定點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ハ其二點ヲ兩端トスル線分ノ中央垂線デアル。



一般ニ一ツノ圖形ガ一定ノ要件ヲ滿足スル點ノ軌跡デアルコトヲ決定スルニハ。

其上ニ在ル點ハ何レモ其要件ヲ滿足シ、且其上ニナイ點ハ其要件ヲ滿足シナイコト。

ヲ證明スルカ、或ハ

其上ニ在ル點ハ何レモ其要件ヲ滿足シ、且其要件ヲ滿足スル點ハ必ズ其上ニ在ルコト。　$\angle B > \angle C$

ヲ證明スレバ以テ十分デアル。

問題

(1) 二等邊三角形ABCニ於テB角トC角トヲ相等シトシ、A角ハ是等ノ角ノ二倍ナルトキハ各ノ角ノ度邊ハ如何。(但シ直角ハ90°)

答 $\angle A=90^\circ$　$\angle B=\angle C=45^\circ$

(2) △ABCニ於テB角ハC角ヨリモ大トシ、此二角ノ二等分線ノ交點ヲDトセバ、DBトDCトハ何レガ長キカ。　答 DCノ方長イ

(3) 次ニ記セル長サノ直線ヲ邊トスル三角形ハ有リ得ベキカ。

イ	5尺	4尺	3尺	答 イ 出來ル
ロ	9尺	7尺	18尺	ロ 出來ナイ
ハ	10間	15間	25間	ハ 出來ナイ

(4) 正三角形ノ一角ハ何度ナルカ。　答 六十度

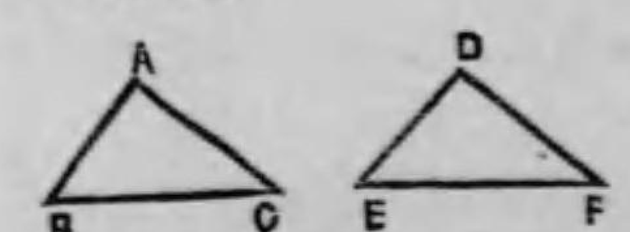
(5) 二等邊三角形ノ頂角ニ隣レル外角ノ二等分線ハ底ニ平行スルコトヲ證明セヨ。

第三節　二ツノ三角形ニ關スル定理

42 對應角 二ツノ相等シイ多角形ニ於テ、重ネ合ハスコトガ出來ル邊ヲ對應邊ト云ヒ、相隣レル對應邊ノ夾ム角ヲ對應角ト云フ。

相等シイ多角形ノ對應邊及對應角ハ相等シイ。

二ツノ相等シイ三角形ニ於テ、相等シイ角ト相等シイ邊トハ夫々相對シテ居ル。



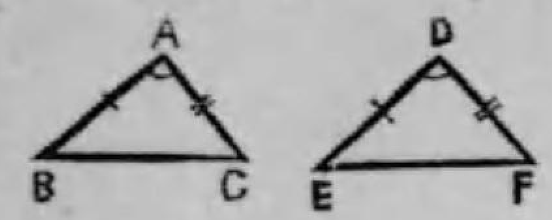
圖ニ於テ二ツノ三角形ABC.DEFハ相等シク、ABトDE. BCトEF. CAトFDハ對應邊ニシテ、AトD. BトE. CトFハ對應角デアル。

故ニ　AB=DE. BC=EF. CA=FD

$\angle A=\angle D.\ \angle B=\angle E.\ \angle C=\angle F$

注意　以後三角形ヲ表スニ△ト云フ符號ヲ用フルコトガアル、例ヘバ△ABC. △DEFノ如シ。

43 定理　(14)　一ツノ三角形ノ二邊ガ他ノ三角形ノ二邊ニ夫々相等シク、此二邊ノ夾ム角モ亦相等シキトキハ、二ツノ三角形ハ相等シ。



證明　二ツノ三角形 ABC. DEF ニ於テ、

$AB=DE.\ AC=DF.\ \angle A=\angle D$

デアルトシ、三角形 DEF ヲ移シテ、其邊 DE ヲ三角形 ABC ノ邊 AB ニ重ネ、頂點 F ヲシテ AB ニ對シテ頂點 C ト同ジ側ニ在ラシム。

然ルトキハ　　$\angle A=\angle D.\ AC=DF$

デアルカラ　　邊 DF ハ邊 AC ニ重ナル。

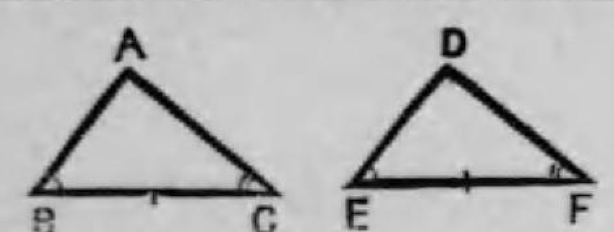
又頂點 E ハ頂點 B ニ、頂點 F ハ頂點 C ニ重ナルカラ

邊 EF ハ邊 BC ニ重ナル。

故ニ　　$\triangle ABC=\triangle DEF$

系　二ツノ直角三角形ニ於テ、直角ヲ夾ム二邊ガ夫々相等シキトキハ、二ツノ三角形ハ相等シ。

44 定理　(15)　一ツノ三角形ノ二角ガ他ノ三角形ノ二角ニ夫々相等シク、此二角ニ接スル邊モ亦相等シキトキハ、二ツノ三角形ハ相等シ。



證明　二ツノ三角形 ABC. DEF ニ於テ、

$BC=EF.\ \angle B=\angle E.\ \angle C=\angle F$

デアルトシ、三角形 DEF ヲ移シテ其邊 EF ヲ三角形 ABC ノ邊 BC ニ重ネ頂點 D ヲシテ BC ニ對シテ頂點 A ト同ジ側ニ在ラシム。

然ルトキハ　　$\angle B=\angle E.\ \angle C=\angle F$

デアルカラ ED ト BA. 及 FD ト CA ハ同ジ方向ヲ取ル、從テ頂點 D ハ頂點 A ニ重ナルガ故ニ

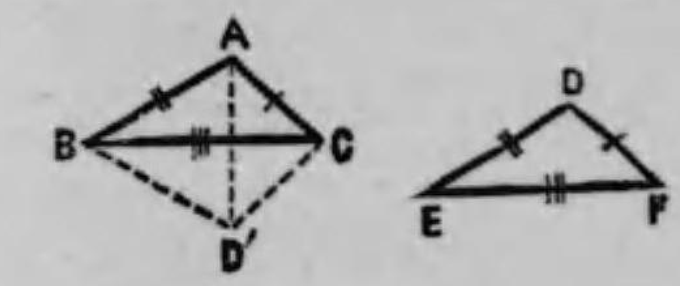
邊 ED ハ邊 BA ニ、邊 FD ハ邊 CA ニ重ナル。

故ニ　　$\triangle ABC=\triangle DEF$

系　二ツノ直角三角形ニ於テ、斜邊ハ相等シクー一ツノ鋭角モ亦相等シキトキハ、二ツノ三角形ハ相等シ。

45 定理　(16)　一ツノ三角形ノ三邊ガ夫々他ノ三角形ノ三邊ニ相等

シキトキハ、二ツノ三角形ハ相等シ。



證明　二ツヲ三角形 ABC. DEF ニ於テ、

$AB=DE.\ BC=EF.\ CA=FD$

デアルトシ、三角形 DEF ヲ移シテ其最大邊 EF ヲ三角形 ABC ノ最大邊 BC ニ重ネ、頂點 D ヲシテ邊 BC ニ對シテ頂點 A ノ反對ノ側ニ在ラシメ、之ヲ D′ トシ、線分 AD′ ヲ引ク。

然ルトキハ　　$AB=BD'.\ CA=CD'$

從テ　　$\angle BAD'=\angle BD'A.\ \angle CAD'=\angle CD'A$　　(9)

故ニ　　$\angle BAC=\angle BD'C$

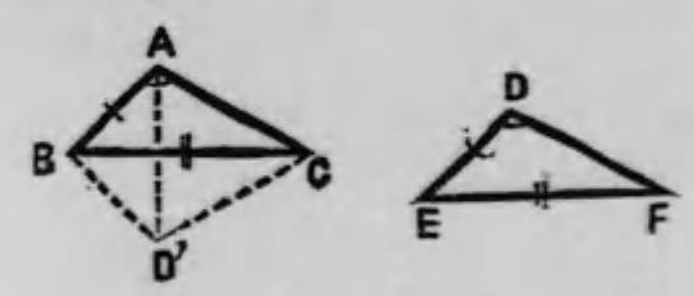
然ルニ　　$\angle BD'C=\angle EDF$

故ニ　　$\angle BAC=\angle EDF$

因テ　　$AB=DE.\ AC=DF.\ \angle ABC=\angle EDF$

故ニ　　$\triangle ABC=\triangle DEF$　　(14)

46 定理　(17)　一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々他ノ三角形ノ二邊ニ相等シク、其中ニテ大ナル邊ニ對スル角モ亦相等シキトキハ、二ツノ三角形ハ相等シ。



證明　二ツノ三角形 ABC. DEF ニ於テ、

$AB=DE.BC=EF.BC>AB.$

$EF>DE.\angle A=\angle D$

トシ、三角形 DEF ノ邊 EF ヲ三角形 ABC ノ邊 BC ニ重ネ、頂點 D ヲシテ邊 BC ニ對シテ頂點 A ノ反對ノ側ニ在ラシメ、之ヲ D′ トシ、線分 AD′ ヲ引ク。

然ルトキハ　　$AB=BD'$

故ニ　　$\angle ABD'=\angle BD'A$　　(9)

從テ　　$\angle CAD'=\angle CD'A$

故ニ　　$CA=CD'$　　(11)

然ルニ　　$CD'=FD$

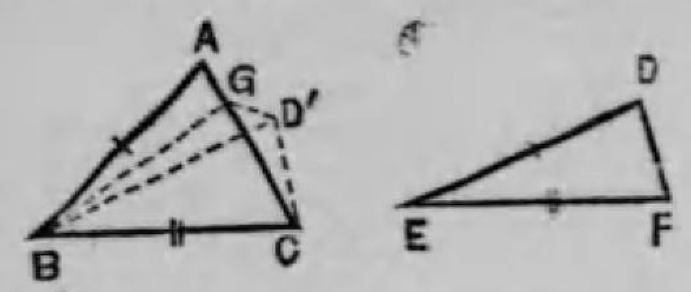
因テ　　$AB=DE.\ BC=EF.\ CA=FD$

故ニ　　$\triangle ABC=\triangle DEF$　　(16)

系　二ツノ直角三角形ニ於テ、斜邊ハ相等シク、他ノ一邊モ亦相等シ

キトキハ、二ツノ三角形ハ相等シ。

47 定理 (18) 一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々他ノ三角形ノ二邊ニ等シク、其二邊ノ夾ム角ガ相等シカラザルトキハ、大ナル夾角ニ對スル邊ハ小ナル夾角ニ對スル邊ヨリモ大ナリ。



證明 二ツノ三角形 ABC. DEF ニ於テ、

$AB=DE.\ BC=EF.\ \angle B>\angle E$

トシ、三角形 DEF ヲ移シテ其邊 EF ヲ三角形 ABC ノ邊 BC ニ重ネ，頂點 D ヲシテ邊 BC ニ對シテ頂點 A ト同ジ側ニ在ラシメ、之ヲ D' トス。

然ルトキハ角 B ハ角 E ヨリモ大キイカラ D' ハ必ズ角 ABC ノ内ニ在リテ、邊 AC ノ上ニ落チルカ或ハ其外ニ落チル。

若シ D' ガ AC ノ上ニ落チレバ

$$AC>D'C$$

然ルニ $D'C=DF,$

故ニ $AC>DF,$

又 D' ガ BC ノ外ニ落チレバ、角 ABD' ノ二等分線ヲ引キ、AC トノ交點ヲ G トシ、線分 GD' ヲ作ル。

然ルトキハ二ツノ三角形 ABG. D'BG ニ於テ、

$AB=D'B,\ \angle ABG=\angle D'BG,$ BG ハ共通,

故ニ $\triangle ABG=\triangle D'BG$ (14)

從テ $AG=GD'$

又 $AC=AG+GC$

即チ $AC=D'G+GC.$

然ルニ三角形 CGD' ニ於テ、

$D'G+GC>D'C,$ (13)

因テ $AC>D'C$

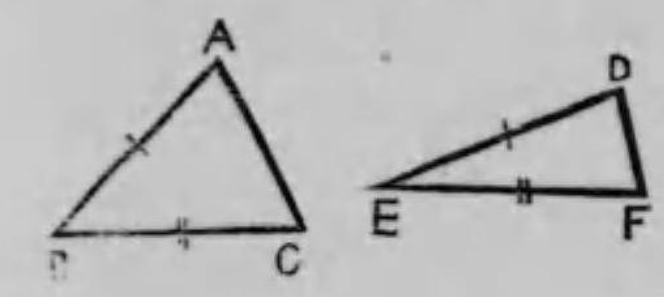
故ニ $AC>DF.$

即チ D' ガ BC ノ上ニ落チル場合ニモ其外ニ落チル場合ニモ共ニ

$$BC>DF.$$

48 定理 (19) 一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々他ノ三角形ノ二邊ニ等シク、第三邊ガ相等シカラザルトキハ、大ナル第三邊ニ對スル角ハ小ナル

第三邊ニ對スル角ヨリモ大ナリ。



證明 二ツノ三角形 ABC, DEF ニ於テ、

$AB=DE,\ BC=EF,\ AC>DF$

デアルトシ、角 B 及角 E ノ間ニハ次ノ關係ノ中、何レカ一ツハ必ズ成立タネバナラナイ。

$$\angle B=\angle E,\ \angle B<\angle E,\ \angle B>\angle E.$$

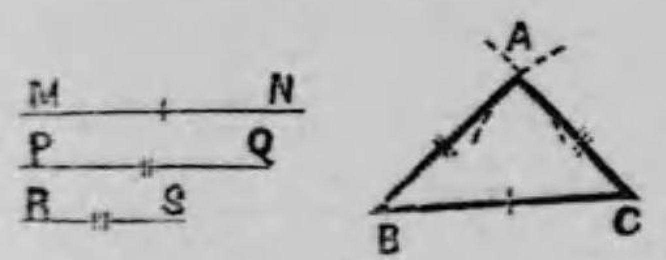
若シ $\angle B=\angle E$ ナラバ $AC=DF,$ (14)

又 $\angle B<\angle E$ ナラバ $AC<DF.$ (18)

然ルニ此二ツノ結論ハ共ニ假定ニ反ス、

故ニ $\angle B>\angle E$

49 作圖 與ヘラレタル三ツノ有限直線ニ等シキ三邊ヲモツ三角形ヲ畫クコト。



三ツノ線分 MN. PQ. RS ニ等シイ三邊ヲモツ三角形ヲ畫クニハ、此線分ノ一ツ、例ヘバ MN ニ等シク線分 BC ヲ引キ、B ヲ中心トシテ他ノ一ツノ線分，例ヘバ PQ ニ等シイ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ、次ニ C ヲ中心トシテ RS ニ等シイ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ、二ツノ圓ノ交點ヲ A トシ、線分 AB. AC ヲ作ル。

然ルトキハ $BC=MN.\ AB=PQ\ AC=RS$

故ニ三角形 ABC ノ三邊ハ三ツノ有限直線ニ等シイ。

然ルニ定理(15)ニヨリ三邊ガ有限直線ニ等シイ三角形ハ唯一ツデアルコトガ明デアル，故ニ ABC ハ即チ求ムル三角形トナル。

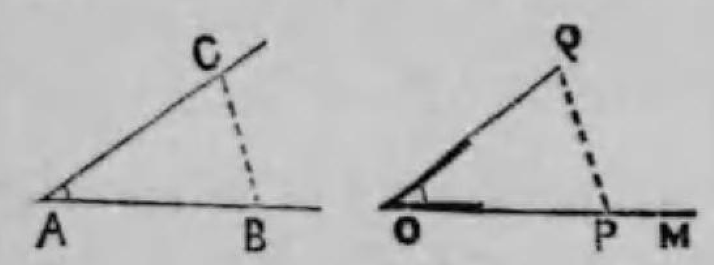
注意 定理(7)ニヨリ三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリモ大キイカラ、此問題ニ於テ、三ツノ與ヘラレタル線ノ中、何レノ二ツヲ取ルトモ、其和ハ必ズ他ノ一ツヨリモ大キイモノデナクテハ三角形ハ成立タナイ。

若シ二ツノ有限直線ノ和ガ他ノ一ツノ有限直線ヨリモ大キクナイ場合ニ、上ノ方法ヲ用フレバ二ツノ圓ハ相交ラナイ、從テ三角形ヲ作ルコトハ出來ナイ。

此問題ヨリ次ノ重要ナル問題ノ解ヲ導クコトヲ得。

50 作圖 與ヘラタル點ヲ頂點トシ、其點ヲ通過スル定直線ヲ一邊ト

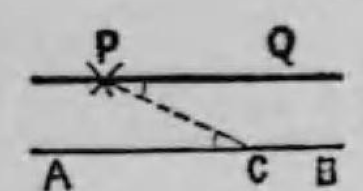
シテ與ヘラタル角ニ等シキ角ヲ作ルコト。



定點ヲO定直線ヲOM定角ヲAトシ、角Aノ二邊ノ上ニ適宜ナル二點B.Cヲ取リテ三角形ABCヲ作リ、次ニ此三角形ニ等シク三角形OPQヲ作リ、三角形ABCノ一邊ABノ對應邊OPヲシテOMノ上ニ在ラシメル。

然ルトキハ二ツノ相等シイ三角形ノ對應角ハ相等シイカラ、角Aノ對應角Oハ即チ求ムル角デアル。

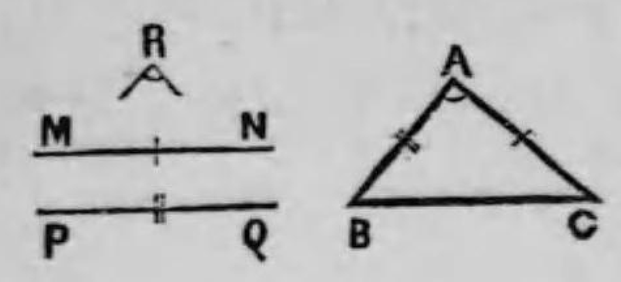
51 作圖 與ヘラレタル點ヲ通過シテ與ヘラレタル直線ニ平行線ヲ引クコト。



定直線ヲAB與ヘラレタル點ヲPトシ、Pヨリ適宜ニ直線ヲ引キ、此直線トABトノ交點ヲCトシ、角ACPニ等シク角CPQヲ作リ、直線PQヲ引ク。

然ルトキハPQハPヲ通過シ且ABニ平行デアルカラ、PQハ即チ求ムル直線デアル。

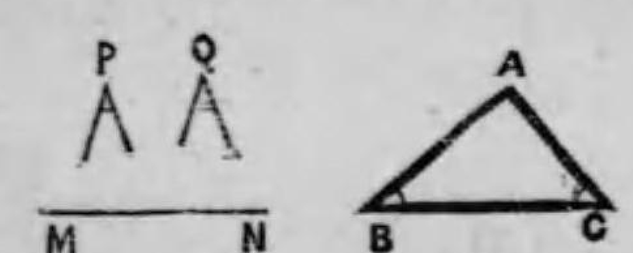
52 作圖 二邊ガ二ツノ與ヘラレタル有限直線ニ等シク、此二邊ノ夾ム角ガ與ヘラレタル角ニ等シキ三角形ヲ作ルコト。



與ヘラレタル有限直線ヲMN.PQ與ヘラタル角ヲRトシ、先ヅRニ等シク角Aヲ作リ、其一邊ノ上ニMNニ等シク線分ACヲ取リ、次ニ他ノ一邊ノ上ニPQニ等シク線分ABヲ取リ、線分BCヲ引ク。

然ルトキハ三角形ABCノ二邊AB.ACハ二ツノ與ヘラレタル有限直線ニ等シク、且其夾ム角Aハ與ヘラレタル角ニ等シイカラ、ABCハ即チ求ムル三角形デアル。

53 作圖 二角ガ二ツノ與ヘラレタル角ニ等シク、此二角ニ接スル一邊ガ與ヘラレタル有限直線ニ等シキ三角形ヲ作ルコト。



與ヘラタル有限直線ヲMN與ヘラレタル角ヲP.Qトシ先ヅMNニ等シク線分BCヲ引キ、Pニ等シク角CBAヲ作リ、又Qニ等シク角BCAヲ作リ、直線BA.CAヲ引ク。

然ルトキハ三角形ABCノ二角B.Cハ二ツノ與ヘラレタル角ニ等シク、且之ニ接スル邊BCハ定線分ニ等シイカラ、ABCハ即チ求ムル三角形デアル。

注意 三角形ノ內角ノ和ハ二直角ニ等シイカラ、此問題ニ於テ、二ツノ定角ノ和ハ二直角ヨリモ小サイコトヲ要ス、然ラザレバ三角形ハ成立シナイ。

問題

(1) 三角形ABCニ於テDヲBCノ中點トシ、ADB角ガADC角ヨリモ大ナレバ、邊ABトACトハ何レガ大ナルカ。

答 ABガ大

(2) 三角形ABCニ於テ邊ABハ邊ACヨリモ大ナルトキBCノ中點ヲDトセバ角ADBハ角ADCヨリモ大ナルコトヲ證明セヨ。

(3) 正三角形ハ何レノ邊ヲ底邊ト見做スモ其頂點ヨリ底邊ニ下セル垂線ハ相等シキコトヲ證明セヨ。

(4) 二等邊三等邊ノ底邊ノ兩端ヨリ對邊ニ引ケル垂線ハ相等シキコトヲ證明セヨ。

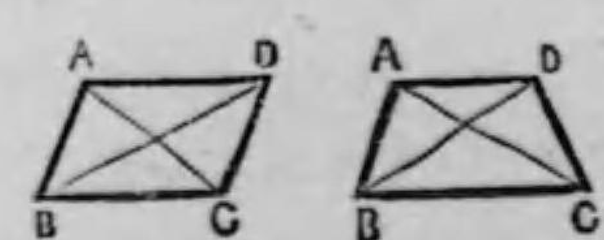
(5) 一點ヨリ一直線ニ引ケル直線中、垂線ハ最モ短カキコトヲ證明セヨ。

第四節 四邊形ノ角、邊、及對角線ニ關スル定理

54 四邊ノ特別ナルモノ 多角形ノ一邊ト他ノ一邊ノ延長線トノ夾ム角ヲ多角形ノ外角ト云ヒ、而シテ隣デナイ二ツノ頂點ヲ兩端トスル線分ヲ多角形ノ對角線ト云フ。

四邊形ニ於テ隣リデナイ二邊ヲ其對邊ト云ヒ、又隣リデナイ二角ヲ其對角ト云フ。

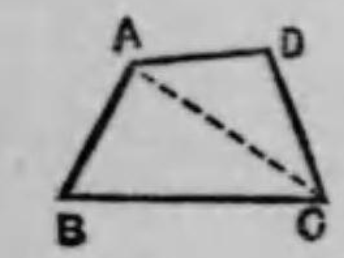
四邊形ノ中ニテ、二雙ノ對邊ガ平行デアルモノヲ平行四邊形ト云ヒ、一雙ノ對邊ガ平行デアルモノヲ梯形ト云ヒ、四邊ガ皆相等シイモノヲ菱形ト云ヒ、四角ガ皆直角デアルモノヲ矩形ト云ヒ、四邊ガ相等シイ矩形ヲ正方形ト云フ。



圖ニ於テ、左ハ平行四邊形、右ハ梯形ニシテ、ABトCD及BCトADハ其對邊、AトC及BトDハ其對角又AC.BD

ハ其對角線デアル。

55 定理 (20) 四邊形ノ內角ノ和ハ四直角ニ等シ。



證明 四邊形 ABCD ニ於テ對角線 AC ヲ引クトキハ、此線ニヨッテ二ツノ三角形 ABC. ACD ガ出來ル。此二ツノ三角形ニ於テ、

$\angle BAC+\angle B+\angle BCA=2R\angle$ (8)

$\angle CAD+\angle ACD+\angle D=2R\angle$

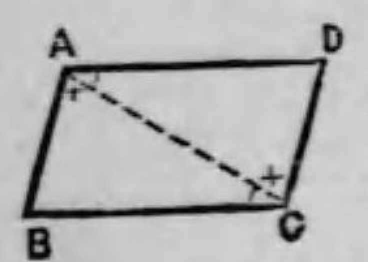
故ニ $\angle BAC+\angle CAD+\angle B+\angle BCA+\angle ACD+\angle D=4R\angle$

即チ $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4R\angle$

系 邊數ガ n デアル多角形ノ內角ノ和ハ $2n-4$ 直角ニ等シク、各邊ヲ順次ニ延長シテ得タ外角ノ和ハ四直角ニ等シイ。

注意 多角形ノ角ニハ二直角ヨリモ大キイモノガアル場合ガアル、以下單ニ多角形ト云フハ其角ガ何レモ二直角ヨリモ小サイモノトス。

56 定理 (21) 平行四邊形ノ對邊及對角ハ相等シ。



證明 平行四邊形 ABCD ニ於テ、其對邊 AB. CD 及 BC. AD ハ平行デアルカラ、對角線 AC ヲ引クトキハ、二ツノ三角形 ABC. CDA ニ於テ、

$\angle BAC=\angle DCA.\ \angle BCA=\angle DAC.$ AC ハ共通

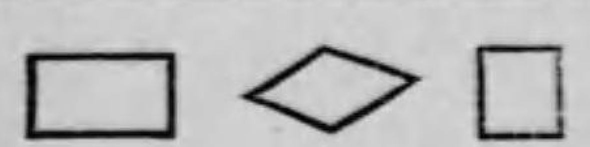
故ニ $\triangle ABC=\triangle CDA$ (15)

從テ $AB=CD.\ BC=DA.\ \angle B=\angle D$

又 $\angle BAC=\angle DCA.\ \angle BCA=\angle DAC$

故ニ $\angle A=\angle C$

系 1. 平行四邊形ニ於テ、一ツノ角ガ直角ナルトキハ、四ツノ角ハ皆直角ナリ、即チ四邊形ハ矩形ナリ、二ツノ隣邊ガ相等シキトキハ、四

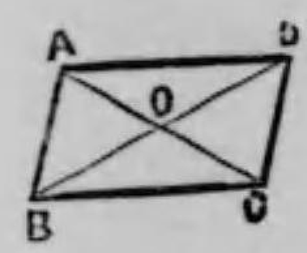


ツノ邊ハ皆相等シ、即チ四邊形ハ菱形ナリ、又二ツノ隣邊ガ相等シクシテ一ツノ角ガ直角ナルトキハ、四ツノ邊ハ皆相等シク、四ツノ角ハ皆直角ナリ、即チ四邊形ハ正方形ナリ。

系 2. 二ツノ平行線ノ一ツノ上ニ在ル一點ヨリ他ノ直線ニ至ル垂線ノ長サハ其點ガ直線ノ上ノ何レニ在ルモ相等シ。

57 平行線ノ距離 二ツノ平行線ニ垂直ナル直線ノ其平行線ノ間ニ在ル部分ノ長サヲ此二ツノ平行線ノ距離ト云フ。

58 定理 (22) 平行四邊形ノ對角線ハ互ニ二等分ス。



證明 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC. BD ノ交點ヲ O トスルトキハ、二ツノ三角形 OAB. OCD ニ於テ、

$AB=CD$

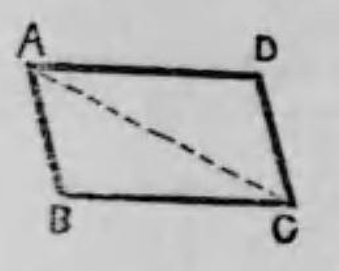
$\angle OAB=\angle OCD.\ \angle OBA=\angle ODC$

故ニ $\triangle OAB=\triangle OCD$ (15)

從テ $OA=OC.\ OB=OD$

系 菱形ノ對角線ハ互ニ垂直ニシテ且二等分ス。

59 定理 (23) 四邊形ニ於テ、對角ガ二雙共ニ相等シキトキ、又ハ對邊ガ二雙共ニ相等シキトキ、又ハ一雙ノ對邊ガ相等シク且平行ナルトキハ、其四邊形ハ平行四邊形ナリ。



證明 四邊形 ABCD ニ於テ、

1. $\angle A=\angle C.\ \angle B=\angle D$

然ルトキハ $\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$

$\angle A+\angle D=\angle B+\angle C$

然ルニ $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4R\angle$ (20)

故ニ $\angle A+\angle B=2R\angle.\ \angle A+\angle D=2R\angle$

2. $AB=CD.\ BC=DA$

然ルトキハ二ツノ三角形 ABC. CDA ニ於テ、

$AB=CD.\ BC=DA.$ AC ハ共通

故ニ $\triangle ABC=\triangle CDA$ (16)

從テ $\angle BAC=\angle DCA.\ \angle BCA=\angle DAC$

3. $AB=CD.\ AB \parallel CD$

從テ $\angle BAC=\angle DCA$

然ルトキハ二ツノ三角形 ABC. DCA ニ於テ、

$AB=CD.\ \angle BAC=\angle DCA.$ AC ハ共通、

故ニ $\triangle ABC=\triangle CDA$ (14)

從テ $\angle BCA=\angle DAC$

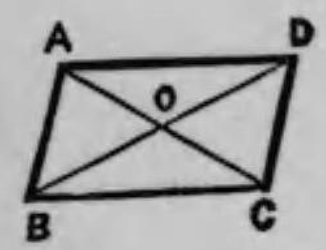
即チ第一ノ場合ニハ二雙ノ對邊ガ他ノ一邊ト作ル內角ノ和二直角ニ等シク、其他ノ場合ニハ、對角線ト作ル錯角ガ相等シイ。因テ何レノ場合

ニ於テモ、

$$AB \parallel CD. \ BC \parallel AD \qquad (6)$$

故ニ四邊形 ABCD ハ平行四邊形デアル。

60 定理 (24) 四邊形ノ對角線ガ互ニ二等分スルトキハ、其四邊形ハ平行四邊形ナリ。



證明 四邊形 ABCD ノ對角線 AC. BD ガ點 O ニ於テ相交リ、線分 OA ハ線分 OC ニ等シク、線分 OB ハ線分 OD ニ等シトス。

然ルトキハ二ツノ三角形 OAB. OCD ニ於テ、

$OA=OC.\ OB=OD.\ \angle AOB=\angle COD$

故ニ $\triangle OAB=\triangle OCD$ (14)

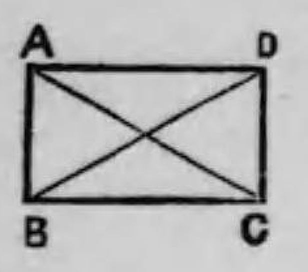
從テ $AB=CD.\ \angle OAB=\angle OCD$

因テ $AB=CD.\ AB \parallel CD$

故ニ四邊形 ABCD ハ平行四邊形デアル。 (23)

系 四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ニシテ且二等分スルトキハ、其四邊形菱形ナリ。

61 定理 (25) 矩形ノ對角線ハ相等シ。



證明 矩形 ABCD ニ於テ對角線 AC. BD ヲ引ク。

然ルトキハ二ツノ直角三角形 ABC. DCB ニ於テ、

$AB=DC.$ BC ハ共通

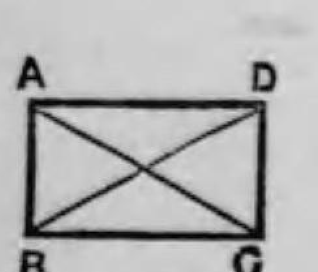
故ニ $\triangle ABC=\triangle DCB$ (17)

因テ $AC=DB$

系 1. 正方形ノ對角線ハ相等シク且互ニ垂直ナリ。

系 2. 直角三角形ノ直角ノ頂點ヨリ斜邊ノ中點ニ至ル線分ハ斜邊ノ半ニ等シ。

62 定理 (26) 平行四邊形ノ對角線ガ相等シキトキハ、其平行四邊形ハ矩形ナリ。



證明 平行四邊形 ABCD ニ於テ對角線 AC. BD ハ相等シトス。

然ルトキハ二ツノ三角形 ABC. DCB ニ於テ、

$AB=CD.\ AC=DB.$ BC ハ共通

故ニ $\triangle ABC=\triangle DCB$ (16)

從テ $\angle ABC=\angle DCB$

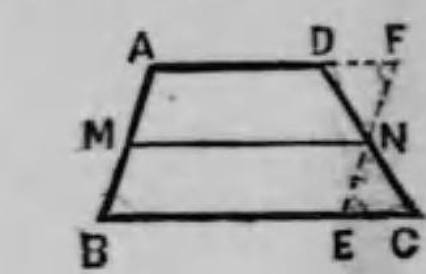
然ルニ $\angle ABC+\angle DCB=2R\angle$ (6)

因テ $\angle ABC=\angle DCB=R\angle$

故ニ四邊形 ABCD ハ矩形デアル。

系 平行四邊形ノ對角線ガ相等シク且互ニ垂直ナルトキハ、其平行四邊形ハ正方形ナリ。

63 定理 (27) 梯形ノ平行セザル二邊ノ一ツヲ二等分シ、平行邊ニ平行ナル直線ハ、他ノ一邊ヲ二等分ス。



證明 梯形 ABCD ノ平行シナイ邊ノ一ツデアル、AB ノ中點ヲ M トシ、M ヲ通過シテ平行邊ニ平行デアル直線ト邊 CD トノ交點ヲ N トシ、N ヲ通過シテ AB ニ平行スル直線ヲ引キ、此直線ト邊 BC 及邊 AD ノ延長線トノ交點ヲ夫々 E. F トス。

然ルトキハ二ツノ四邊形 AMNF 及 MBEN ハ其二雙ノ對邊ガ平行デアルカラ何レモ平行四邊形デアル。

故ニ $EN=FN$

從テ二ツノ三角形 CNE. DNF ニ於テ、

$EN=FN.\ \angle CEN=\angle DFN.\ \angle CNE=\angle DNF$

故ニ $\triangle CNE=\triangle DNF$ (15)

從テ $CN=DN$

系 1. 三角形ノ一邊ノ中點ヲ通過シ、他ノ一邊ニ平行ナル直線ハ第三邊ヲ二等分ス。

系 2. 梯形ノ平行セザル二邊ノ中點ヲ兩端トスル線分ハ平行邊ニ平行ニシテ、其和ノ半ニ等シ。

系 3. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ兩端トスル線分ハ他ノ一邊ニ平行ニシテ、其半ニ等シ。

64 作圖 有限直線ヲ若干ニ等分スルコト。

有限直線 AB ヲ n 等分スルニハ、其一端例ヘバ A ヨリ適宜ニ直線ヲ引キ、其上ニ相等シイ間隔ヲ以テ n 個ノ線分 AD. DE. EF. FG. GH. HC 等ヲ置キ、最後ノ線分ノ末端 C ヨリ B ニ至ル線分ヲ作リ、次ニ D. E. F. G. H 等ヨリ BC ニ平行スル直線ヲ引キ、此直線ト AB トノ

交點ヲ P. Q. R. S. T 等トス。

然ルトキハ定理(27)ニヨリ

$$AP=PQ.\ PQ=QR.\ QR=RS.\ RS=ST.\ ST=TB$$

故ニ AP. PQ. QR. RS. ST. TB 等ハ何レモ線分 AB ノ n 分ノ一ニ等シイ線分デアル。

問題

(1) 平行四邊形ノ相隣レル二ツノ角ノ和ハ二直角ニ等シキコトヲ證明セヨ。

(2) 平行四邊形ノ相隣レル二邊ノ和ハ四邊ノ和ノ半分ナルコトヲ證明セヨ。

(3) 平行四邊形ノ相對スル二ツノ角ガ $30°$ ナルトキハ他ノ相對スル角ハ何度ナルカ。 **答** $150°$

(4) 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC. BD ノ交點ヲ O トスレバ △ABO ハ △CDO ニ等シク、又 △BCO ハ △DAO ニ等シキコトヲ證明セヨ。

(5) 平行四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビツケテナル四邊形ハ平行四邊形ナルコトヲ證明セヨ。

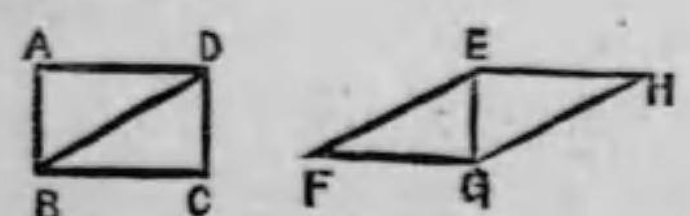
又如何ナル場合ニ此四邊形ハ矩形トナリ、或ハ菱形トナリ、或ハ正方形トナルカ。

第五節 面積ノ定理

65 面積 平面圖形ガ平面ノ一部分ヲ圍ムトキハ、其部分ノ廣サヲ其平面圖形ノ面積ト云フ。

二ツノ相等シキ即チ重ネ合ハスコト出來ル圖形ノ面積ハ相等シイ。

一般ニ二ツノ圖形ノ面積ヲ比較シ、其大小ヲ定メルニハ、各圖形ノ面積ヲ若干ノ部分ニ分チ、各部分ガ夫々相等シイトキハ二ツノ面積ハ相等シト云ヒ、第一ノ面積ノ一部分ガ第二ノ面積ニ等シイトキハ、第一ノ面積ハ第二ノ面積ヨリモ大キイト云ヒ、第二ノ面積ハ第一ノ面積ヨリモ小サイト云フ。



圖ニ於テ、三角形 BCD ハ三角形 EFG ニ等シク、三角形 ABD モ亦三角形 EGH ニ等シイ、故ニ二ツノ四邊形 ABCD. EFGH ノ面積ハ相等シク、又四邊形ノ面積ハ何レモ三角形 ABD 又ハ

EFG ノ面積ヨリモ大キイ。

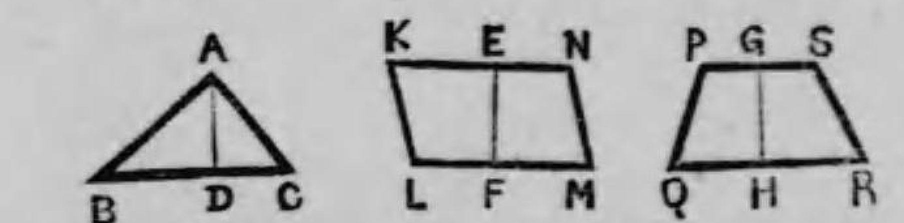
又上ノ場合ニ於テ、四邊形ノ面積ハ何レモ二ツノ三角形ノ面積ノ和ニ等シト云ヒ、一ツノ三角形ノ面積ハ四邊形及他ノ三角形ノ面積ノ差ニ等シト云フ。

66 底邊、高サ、 多角形ノ任意ノ一邊ハ之ヲ底邊ト稱ヘルコトガ出來ル。

三角形ノ底邊ト之ニ對スル頂點トノ距離ヲ三角形ノ高サト云ヒ、底邊ニ對スル角ヲ頂角ト云ヒ、頂角ノ頂點ヲ單ニ三角形ノ頂點ト云フ。

平行四邊形ノ底邊ト之ニ對スル邊トノ距離ヲ平行四邊形ノ高サト云フ。

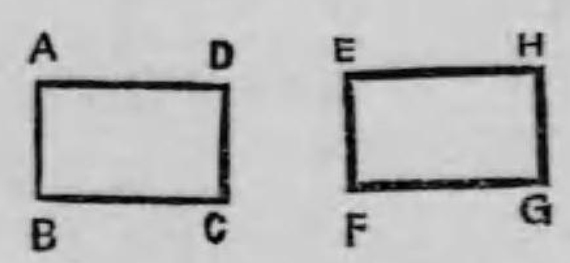
梯形ノ二ツノ平行邊ノ距離ヲ梯形ノ高サト云フ。



圖ニ於テ BC. AD ハ三角形 ABC ノ底邊及高サニシテ、LM. EF ハ平行四邊形 KLMN ノ底邊及高サデアル、又 GH ハ梯形 PQRS ノ高サデアル。

以下矩形、平行四邊形、正方形ヲ表スニ夫々 ▭、▱、□ ヲ用フルコトガアル、例ヘバ ▭ABCD ノ如シ。

67 定理 (28) 二ツノ矩形ガ相等シキ高サ及相等シキ底邊ヲ有スルトキハ、其面積相等シ、



證明 二ツノ矩形 ABCD. EFGH ニ於テ、其高サ AB. EF ハ相等シク、其底邊 BC. FG モ亦相等シトシ、EFGH ノ邊 EF ヲ ABCD ノ邊 AB ニ重ネ、邊 GH ヲシテ AB ニ對シテ邊 CD ト同ジ側ニ在ラシム。

然ルトキハ $\angle ABC=\angle EFG.\ \angle BAD=\angle FEH$

デアルカラ FG ハ BC ニ EH ハ AD ニ重ナル

從テ GH ハ CD ニ重ナル

故ニ ▭ABCD=▭EFGH

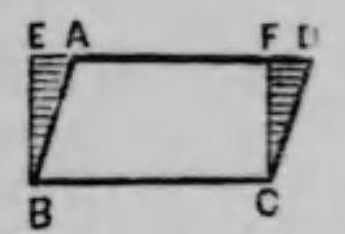
因テ (▭ABCD ノ面積)=(▭EFGH ノ面積)

系 1. 二ツノ矩形ノ一邊ガ相等シク、其面積モ亦相等シキトキハ、他ノ一邊ハ相等シ。

系 2. 相等シキ高サヲ有スル矩形ノ面積ノ和ハ其高

サヲ高サトシ、各ノ底邊ノ和ヲ底邊トスル矩形ノ面積ニ等シ。

68 定理 (29) 平行四邊形ノ面積ハ之ト同ジ底邊及高サヲ有スル矩形ノ面積ニ等シ。



證明 平行四邊形 ABCD ノ底邊 BC ノ兩端 B.C ヨリ對邊又ハ其延長線ニ垂線 BE.CF ヲ引ク。

然ルトキハ EBCF ハ ABCD ト同ジ底邊及高サヲ有スル矩形ニシテ

$AB=CD.\ BE=CF.\ \angle AEB=\angle DFC=R\angle$

故ニ　$\triangle ABE=\triangle DCF$　(17)

従テ　(△ABE ノ面積)=(△DCF ノ面積)

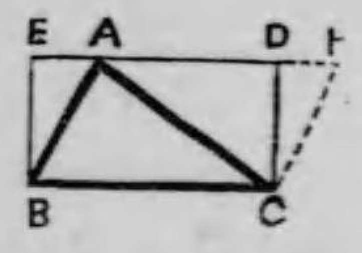
然ルニ　(△ABE ノ面積)+(▭ABCD ノ面積)
=(△DCF ノ面積)+(▭EBCF ノ面積)

故ニ　(▱ABCD ノ面積)=(▭EBCF ノ面積)

系 1. 相等シキ底邊及高サヲ有スル平行四邊形ノ面積ハ相等シ。

系 2. 梯形ノ面積ハ之ト等シキ高サ及平行邊ノ和ノ半ニ等シキ底邊ヲ有スル矩形ノ面積ニ等シ。

69 定理 (30) 三角形ノ面積ハ之ト同ジ底邊及高サヲ有スル矩形ノ面積ノ半ニ等シ。



證明 三角形 ABC ノ底邊 BC ノ兩端 B.C ヨリ A ヲ通過シテ BC ニ平行スル直線ニ垂線 BE.CD ヲ引キ、又 C ヨリ邊 BA ニ平行スル線分 CF ヲ引ク。

然ルトキハ EBCD 及 ABCF ハ ABC ト同ジ底邊及高サヲモツ矩形及平行四邊形ニシテ

$\triangle ABC=\triangle CFA$

故ニ　(△ABC ノ面積)=(△CFA ノ面積)

即チ　(△ABC ノ面積)=$\frac{1}{2}$(▱ABCF ノ面積)

然ルニ　(▱ABCF ノ面積) = (▭EBCD ノ面積)　(29)

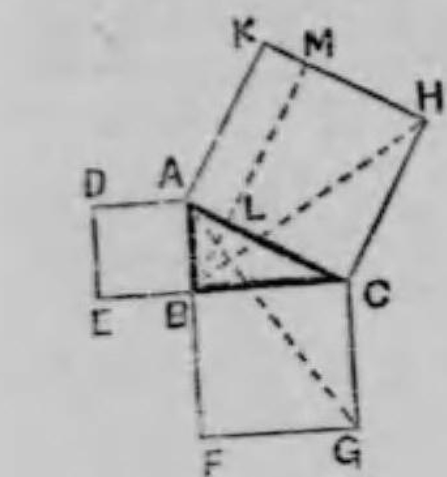
故ニ　(△ABC ノ面積)=$\frac{1}{2}$(▭EBCD ノ面積)

系 1. 三角形ノ面積ハ之ト等シキ底邊及高サヲ有スル平行四邊形ノ面積ノ半ニ等シ。

系 2. 相等シキ底邊及高サヲ有スル三角形ノ面積ハ相等シ。

70 定理 (31) 直角三角形ノ斜邊ヲ底邊トスル正方形ノ面積ハ他ノ

二邊ノ各ヲ底邊トスル正方形ノ面積ノ和ニ等シ。(ピタゴラスノ定理)



ピタゴラス
(Pythagoras)
ハギリシヤノ
數學者

證明 直角三角形 ABC ニ於テ、斜邊 AC ヲ底邊トスル正方形 CHKA 及他ノ二邊 AB.BC ノ各ヲ底邊トスル二ツノ正方形 ADEB. BFGC ヲ作リ、頂點 B ヨリ AC ニ垂線ヲ引キ、此垂線ト AC トノ交點ヲ L. KH トノ交點ヲ M トシ、又線分 AG. BH ヲ作ル。

然ルトキハ二ツノ三角形 CAG. CHB ニ於テ

$CA=CH.\ CG=CB$

$\angle ACG=\angle ACB+R\angle=HCB$

故ニ　$\triangle CAG=\triangle CHB$　(14)

従テ　(△CAG ノ面積)=(△CHB ノ面積)

又　$\angle ABC=\angle CBF=R\angle$

従テ AB. BF ハ一直線上ニアッテ CG ニ平行デアル。

因テ三角形 CAG ト正方形 BFGC トハ同ジ底邊及高サヲモツテヰル。

故ニ　(△CAG ノ面積)=$\frac{1}{2}$(□BFGC ノ面積)　(30)

同様ニ　(△CHB ノ面積)=$\frac{1}{2}$(▭CHML ノ面積)

因テ　(▭CHML ノ面積)=(□BFGC ノ面積)

同様ニ　(▭LMKA ノ面積)=(□ADEB ノ面積)

然ルニ　(▭CHML ノ面積)+(▭LMKA ノ面積)
=(□CHKA ノ面積)　(28)

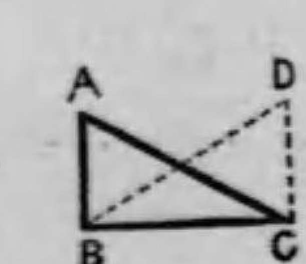
故ニ　(□CHKA ノ面積)
=(□ADEB ノ面積)+(□BFGC ノ面積)

上ニ得タル結果ヲ簡單ニ表スガ爲メニ、線分 AB ヲ一邊トスル正方形ノ面積ヲ表スニ $\overline{AB}^2$ ト云フ記號ヲ用フルコトト定メレバ、次ノ式ヲ得。

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$$

此ニ AC ハ直角三角形 ABC ノ斜邊、AB. BC ハ他ノ二邊ヲ表スモノトス。

71 定理 (32) 三角形ノ一邊ヲ底邊トスル正方形ノ面積ガ他ノ二邊ノ各ヲ底邊トスル正方形ノ面積ノ和ニ等シキトキハ、此二ツノ邊ハ互ニ垂直ナリ。



證明 三角形 ABC ニ於テ、

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$$

ナリトシ、C ヨリ邊 BC ニ垂直ニ且邊 AB ニ等シク線分 CD ヲ引キ、線分 BD ヲ作ル。

然ルトキハ $\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2$ (31)

然ルニ $\overline{CD}^2=\overline{AB}^2$

故ニ $\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

因テ BD=AC

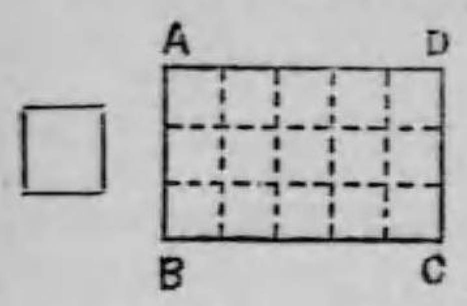
二ツノ三角形 ABC. DCB ニ於テ

AB=DC. AC=DB. BC ハ共通

故ニ $\triangle ABC=\triangle DCB$ (16)

因テ $\angle ABC=\angle DCB=R\angle$

72 應用 矩形ノ面積ヲ計算スルコト。



單位ノ長サニ等シイ線分ヲ a トシ、矩形 ABCD ノ二邊 AB.BC ガ其整數倍デアル場合、例ヘバ AB ハ a ノ m 倍ニシテ、BC ハ其 n 倍デアルトキニハ AB ヲ m 等分シ、BC ヲ n 等分シテ、其等分點ヲ通過シ兩邊ニ平行線ヲ引ク。

然ルトキハ矩形 ABCD ハ a ヲ一邊トスル正方形ノ mn 個ヲ含ム。

故ニ長サノ單位ニ等シイ邊ヲ有スル正方形ノ面積ヲ面積ノ單位トシテ、矩形 ABCD ノ面積ヲ表ス數ハ其兩隣邊ノ長サヲ表ス數ノ積ニ等シイ。

又 AB.BC ガ a ノ整數倍デナイ場合例ヘバ AB ハ其 $\frac{p}{q}$ 倍ニ等シク BC ハ其 $\frac{r}{s}$ 倍ニ等シイトキニハ、兩隣邊ガ pa 及 ra ニ等シイ矩形ヲ考ヘレバ、此矩形ノ面積ヲ表ス數ハ pr デアル。

然ルニ後ノ矩形ノ一邊ハ前ノ矩形ノ對應邊ノ q 倍ニシテ他ノ一邊ハ其對應邊ノ s 倍デアルカラ後ノ矩形ノ面積ハ前ノ矩形ノ面積ノ qs 倍デアル。

因テ前ノ矩形ノ面積ハ

$$\frac{pr}{qs}=\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}$$

即チ此場合ニモ亦面積ヲ表ス數ハ兩隣邊ヲ表ス數ノ積ニ等シイ。

一般ニ長サノ單位ニ等シイ邊ヲ有スル正方形ノ面積ヲ面積ノ單位トシテ、

矩形ノ面積ヲ表ス數ハ兩隣邊ヲ表ス數ノ積ニ等シ。

此結果ニヨリ、定理(29)及定理(30)ヲ參照スルトキハ、次ノ關係ガアルコトヲ知ル。

三角形ノ面積ヲ表ス數ハ、其底邊及高サヲ表ス數ノ積ノ半ニ等シ。

平行四邊形ノ面積ヲ表ス數ハ其底邊及高サヲ表ス數ノ積ニ等シ。

梯形ノ面積ヲ表ス數ハ二ツノ平行邊ノ和及高サヲ表ス數ノ積ノ半ニ等シ。

問題

(1) 同ジ直線ノ上ニ立チ其直線ニ平行ナル一直線上ニ頂點ヲ有スル三角形ノ面積ハ相等シキコトヲ證明セヨ。

(2) 面積ノ相等シキ二ツノ三角形ガ同一直線ノ上ノ相等シキ（又ハ同ジキ）底邊ノ上ニ立ツトキハ直頂點ヲ結ブ直線ハ底邊ニ平行ナルコトヲ證明セヨ。

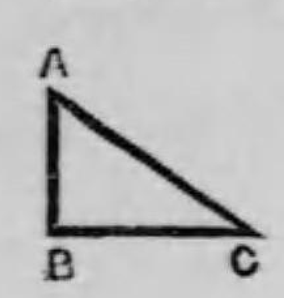
(3) 三角形ノ一ツノ頂點ヨリソレニ對スル邊ノ中點ヲ結ブ直線（此直線ヲ中線ト云フ）ハ此三角形ノ面積ヲ三等分スルコトヲ證明セヨ。

(4) 相等シキ底邊ヲ有スル二ツノ四邊形ニ於テ高サノ大ナルモノガ他ヨリ其面積ノ大ナルハ何故ナルカ。

(5) 直角三角 ABC ニ於テ

AB=3 尺

BC=4 尺



ナルトキハ AC ノ長サハ何程ナルカ。

解 ピタゴラスノ定理ニヨリ $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

$=3^2+4^2=9+16=25$

$\therefore\ AC=\sqrt{25}=5$ **答** 5 尺

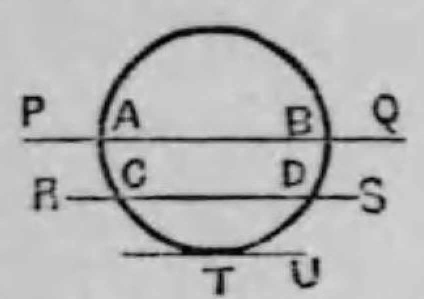
第三章　圓

第一節　圓ト弦、割線、及切線トニ關スル定理

73 弦、切線、割線、圓ノ上ニ在ル二ツノ點ヲ兩端トスル直線ヲ弦ト云ヒ、中心ヲ通過スル弦ヲ直徑ト云フ、一ツノ圓ノ直徑ハ半徑ノ二倍デアルカラ故ニ皆相等シイ。

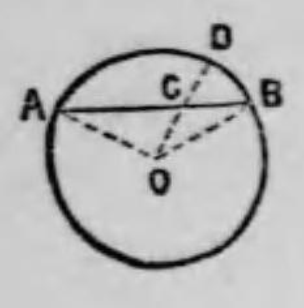
直線ト圓トガ二ツノ點ヲ共有スルトキハ、此直線ヲ其圓ノ割線ト云フ、割線ノ此二ツノ點ノ間ニ在ル部分ハ即チ弦デアル。

直線ト圓トガ唯一ツノ點ヲ共有スルトキハ、此直線ヲ其圓ノ切線ト云ヒ、其共通點ヲ切點ト云フ。



圖ニ於テ、PQ. RS ハ圓ノ割線、AB. CD ハ其弦、又 TU ハ點 T ニ於ケル切線ニシテ、T ハ其切點デアル。

74 定理 (33) 圓ノ弦ハ全ク其圓ノ內ニ在リ。



證明 圓ノ任意ノ弦 AB ノ上ニ在ル任意ノ點ヲ C トシ、中心 O ヨリ半徑 OA. OB ヲ引ク。

然ルトキハ　$OA=OB$

三角形 OAB ハ二等邊三角形デアルカラ

$$\angle OAC=\angle OBC \qquad (9)$$

然ルニ　$$\angle OCA=\angle OBC+\angle BOC \qquad (8)$$

故ニ　$$\angle OCA>\angle OAC$$

因テ三角形 OAC ニ於テ　$OA>OC$　(12)

線分 OC ハ半徑 OA ヨリモ小サイカラ、其延長線ハ圓ト交ル、從テ點 C ハ圓ノ內ニ在ルコトガ明デアル。

任意ノ弦ノ上ニ在ル任意ノ點ハ圓ノ內ニ在ルガ故ニ、弦ハ全ク圓ノ內ニ在ル。

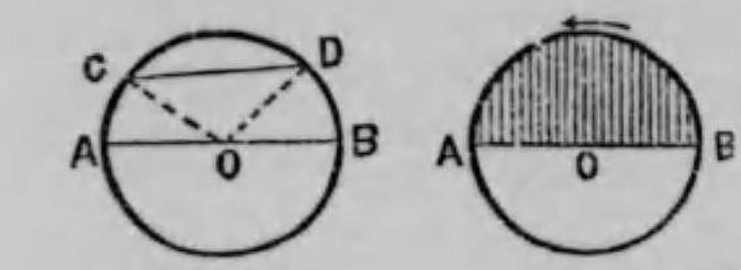
系 直線ト圓トハ三點以上ヲ共有セズ。

75 定理 (34) 圓ノ直徑ハ其圓ノ最大弦ニシテ且圓ヲ二等分ス。

證明 圓ノ中心ヲ O 直徑ヲ AB 任意ノ弦ヲ CD トシ、半徑 OC. OD ヲ引ク。

然ルトキハ三角形 OCD ニ於テ

$$OC+OD>CD \qquad (13)$$



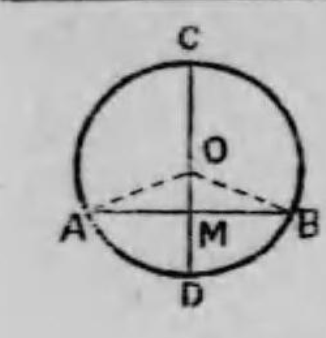
然ルニ　$$OA=OB=OC=OD$$

從テ　$$OC+OD=AB$$

故ニ　$$AB>CD$$

次ニ AB ニ沿ウテ圖形ヲ切斷シ、上ノ部分ヲ中心 O ノ周リニ廻轉シ、其半徑 OB ヲ下ノ部分ノ半徑 OA ノ上ニ至ラシムレバ、上ノ部分ノ半徑 OA ハ下ノ部分ノ半徑 OB ニ重ナル然ルニ圓ノ上ノ點ハ何レモ中心ヨリ等距離ニ在ルカラ、圓ノ二ツノ部分ハ全ク相重ナル、即チ二ツノ部分ハ相等シイ、故ニ直徑ハ圓ヲ二等分ス。

76 定理 (35) 圓ノ弦ニ垂直ナル直徑ハ其弦ヲ二等分ス、又弦ヲ二等分スル直徑ハ其弦ニ垂直ナリ。



證明 圓ノ弦 AB ト直徑 CD トノ交點ヲ M トシ中心 O ヨリ半徑 OA. OB ヲ引ク。

(1) AB. CD ガ垂直ナルトキハ、二ツノ直角三角形 OAM. OBM ニ於テ

$OA=OB$. OM ハ共通

故ニ　$$\triangle OAM=\triangle OBM \qquad (17)$$

從テ　$$AM=BM$$

(2) AM. BM ガ相等シキトキハ、二ツノ三角形 OAM. OBM ニ於テ

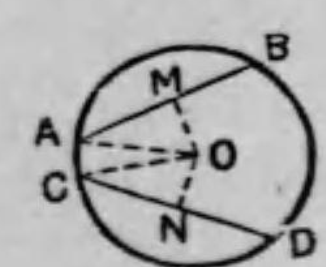
$OA=OB$. $AM=BM$. OM ハ共通

故ニ　$$\triangle OAM=\triangle OBM \qquad (16)$$

從テ　$$\angle OMA=\angle OMB=R\angle$$

系 弦ノ中央垂線ハ其圓ノ中心ヲ通過ス。

77 定理 (36) 相等シキ弦ハ中心ヨリ相等シキ距離ニ在リ、又中心ヨリ相等シキ距離ニ在ル弦ハ相等シ。



證明 圓ノ二ツノ弦ヲ AB.CD トシ、中心 O ヨリ之ニ垂線 OM. ON 及半徑 OA. OC ヲ引ク。

然ルトキハ　$AM=MB$. $ON=ND$　(35)

從テ二ツノ三角形 OAM. OCN ハ直角三角形デアル。

(1) AB. CD ガ相等シイトキハ

$AM=CN$. $OA=OC$

故ニ　$$\triangle OAM=\triangle OCM \qquad (17)$$

従テ　$OM=ON$

(2) OM. ON ガ相等シイトキハ

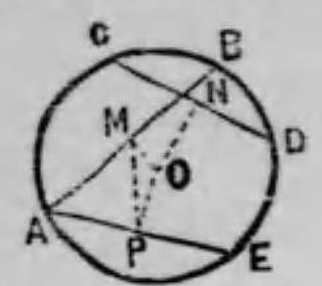
$$OM=ON.\ OA=OC$$

故ニ　$\triangle OAM=\triangle OCN$　(17)

従テ　$AM=CN$

因テ　$AB=CD$

78 定理　(37)　大ナル弦ハ小ナル弦ヨリモ中心ニ近シ、又中心ニ近キ弦ハ遠キ弦ヨリモ大ナリ。



證明　二ツノ弦ヲ AB. CD トシ、點 A ヨリ CD ニ等シイ弦 AE ヲ中心 O ニ對シテ AB ノ反對ノ側ニ引キ、又 O ヨリ AB. CD. AE ニ垂線 OM. ON. OP ヲ引ク。

然ルトキハ　$ON=OP$　(36)

$$AM=BM.\ CN=DN.\ AP=EP \quad (35)$$

(1) AB ガ CD ヨリモ大キイトキハ、三角形 AMP ニ於テ

$$AM>AP$$

従テ　$\angle APM>\angle AMP$　(10)

然ルニ　$\angle OPA=\angle OMA=R\angle$

故ニ　$\angle OPM<\angle OMP$

因テ三角形 OMP ニ於テ

$$OM<OP \quad (12)$$

故ニ　$OM<ON$

(2) OM ガ ON ヨリモ大キイトキハ三角形 OMP ニ於テ

$$OM<OP$$

従テ　$\angle OMP>\angle OPM$　(10)

然ルニ　$\angle OMA=\angle OPA=R\angle$

故ニ　$\angle AMF<\angle APM$

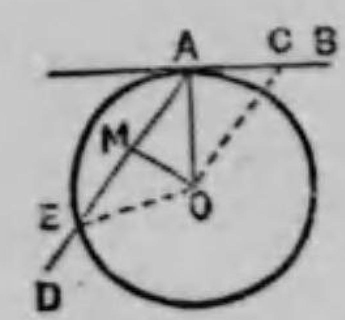
因テ三角形 AMP ニ於テ

$$AM>AP \quad (12$$

即チ　$AB>AE$

故ニ　$AB>CD$

79 定理　(38)　圓ノ上ニ在ル一點ヲ通過シ、其點ニ於ケル直ナル直線ハ切線ニシテ、半徑ニ垂直ナラザル直線ハ割線ナ



證明　圓ノ上ニ在ル點 A ヲ通過シ、半徑 OA ニ垂直ナル直線ヲ AB トシ、中心 O ヨリ AB ノ上ニ在ル任意ノ點 C ニ至ル線分 OC ヲ引ク。

然ルトキハ　$OA<OC$　(12)

即チ點 C ハ圓ノ外ニ在リ、従テ直線 AB ハ再ビ圓ニ交ラナイ、故ニ AB ハ切線デアル。

次ニ點 A ヲ通過シ、半徑 OA ニ垂直デナイ直線ヲ AD トシ、中心 O ヨリ垂線 OM ヲ引ク。

然ルトキハ　$OM<OA$　(12)

即チ點 M ハ圓ノ内ニ在ル、因テ直線 AD ノ上ニ線分 MA ニ等シク線分 ME ヲ取リ、線分 OE ヲ作ルトキハ、二ツノ三角形 OAM. OEM ハ相等シイ。

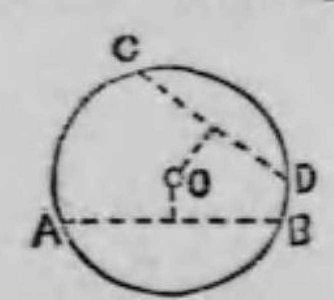
従テ　$OA=OE$

即チ點 E ハ圓ノ上ニ在ル、故ニ AD ハ割線デアル。

系 1.　圓ノ上ニ在ル一點ヲ通過シテ其圓ニ唯一ツノ切線ヲ引クコトヲ得。

系 2.　圓ノ中心ヨリ切線ニ至ル距離ハ半徑ニ等シク、割線ニ至ル距離ハ半徑ヨリモ小ナリ。

80 作圖　與ヘラレタル圓ノ中心ヲ求ムルコト。



與ヘラレタル圓ノ中心ヲ求ムルニハ、任意ノ平行シナイ二ツノ弦 AB. CD ヲ引キ、其各ノ中央垂線ヲ作ル。

然ルトキハ此二ツノ垂線ハ必ズ一點デ交ル、然ルニ定理(35)ニヨリ弦ノ中央垂線ハ其圓ノ中心ヲ通過スルカラ AB. CD ノ中央垂線ノ交點 O ハ即チ求ムル中心デアル。

此方法ヲ用ヒルニハ、必ズシモ圓ノ全部ヲ知ラナクテモ可イ、唯其一部分ノ弧ヲ知レバ十分デアル。

問題

(1)　同一ノ點ヲ中心トスル二ツノ圓(之ヲ同心圓ト云フ)ヲ一ツノ直線ガ切ルトキハ二ツノ圓ノ間ニ切リトラレタル部分ハ相等シキコトヲ證明セヨ。

(2)　圓ノ中心ヨリ一ツノ弦ニ引ケル垂線ハ、其弦ニ平行ナル凡テノ弦ヲ直角ニ二等分スルコトヲ證明セヨ。

(3) 圓ノ中心ヨリ全ク其圓ノ外ニアル直線ニ至ル距離ハ圓ノ半徑ヨリモ大ナルコトヲ證明セヨ。

(4) 圓ノ二ツノ平行弦ヲ二等分スル直線(或ハ其延長)ハ圓ノ中心ヲ通ルコトヲ證明セヨ。

(5) 與ヘラレタル二點ヲ過ギル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

(6) 二ツノ與ヘラレタル點ヲ通過シテ與ヘラレタル直線ノ上ニ中心ヲモツ圓ヲ畫ケ。

第二節　弧、中心角、及圓周角ニ關スル定理

81 中心角、圓周角　圓ノ一部分ヲ弧ト云ヒ、二ツノ半徑ノ夾ム角ヲ中心角ト云ヒ、圓ノ上ニ在ル一點ヲ共有スル二ツノ弦ノ夾ム角ヲ圓周角ト云フ。

中心角及圓周角ハ各其二邊ノ間ニ在ル弧ノ上ニ立ツト云ヒ、又中心角及圓周角ト各其二邊ノ間ニ在ル弧トハ相對スト云フ。

弧ト其兩端ノ間ニ在ル弦トハ相對スト云フ。

弦形、弦及之ニ對スル弧ヨリ成ル圖形ヲ弓形ト云ヒ、弓形ノ弧ノ上ニ頂點ヲ有シ、二邊ガ其弦ノ兩端ヲ通過スル角ヲ弓形ニ於ケル角ト云フ。

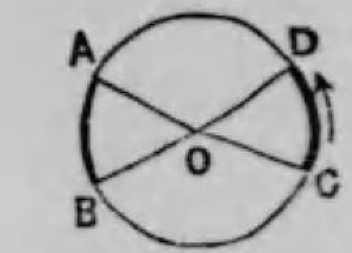
圖ニ於テ、O ハ圓ノ中心、角 AOB ハ弧 AB ノ上ニ立ツ圓心角、角 ACB ハ弧 AB ノ上ニ立ツ一ツノ圓周角、又角 ACB ハ弓形 ACB ニ於ケル角デアル。

82 弧及弓形ノ優劣　直徑デナイ弦ハ圓ヲ二ツノ相等シクナイ弧ニ分ツ、此二ツノ弧ヲ共軛弧ト云ヒ、大キイ弧ヲ優弧、小サイ弧ヲ劣弧ト云フ。

弓形ノ弧ガ優弧デアルトキハ其弓形ヲ優弓形ト云ヒ、劣弧デアルトキハ劣弓形ト云フ。

半圓、扇形、直徑ト之ニ對スル弧トヨリ成ル弓形ヲ半圓ト云ヒ、二ツノ半徑ト其間ニ在ル弧トヨリ成ル圖形ヲ扇形ト云フ。

83 定理 (39)　同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ中心角ハ相等シキ弧ノ上ニ立ツ、又相等シキ弧ノ上ニ立ツ中心角ハ相等シ。



證明　圓ノ中心ヲ O 弧 AB 及弧 CD ノ上ニ立ツ中心角ヲ各 AOB 及 COD トシ、半徑OC. OD ニ沿ウテ扇形 COD ヲ切リ離シ、O ノ周リニ廻轉シテ、點 C ヲ點 A ニ重ネル。

(1) 二ツノ角 AOB. COD ガ相等シイトキニハ、半徑 OC ハ半徑 OA ニ重ナリ、半徑 OD ハ半徑 OB ニ重ナル、然ルニ弧 AB ノ上ニ在ル點及弧 CD ノ上ニ在ル點ハ何レモ中心 O ヨリ等距離ニ在ルカラ弧 CD ハ全ク弧 AB ニ重ナル。

故ニ　　弧 AB=弧 CD

(2) 二ツノ弧 AB. CD ガ相等シイトキニハ、點 D ハ點 B ニ重ナル、從テ半徑 OC ハ半徑 OA ニ、半徑 OD ハ半徑 OB ニ重ナル。

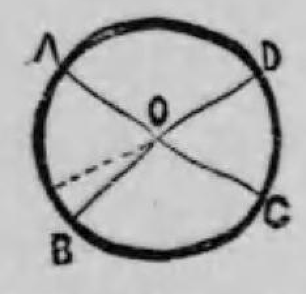
即チ角 COD ノ二邊ハ全ク角 AOB ノ二邊ニ重ナル。

故ニ　　$\angle AOB = \angle COD$

系 1.　同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ中心角ニ對スル弦ハ相等シ、又相等シキ弦ニ對スル中心角ハ相等シ。

系 2.　同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ弦ニ對スル劣弧(優弧)ハ相等シ、又相等シキ劣弧(優弧)ニ對スル弦ハ相等シ。

84 定理 (40)　同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ大ナル中心角ニ對スル弧ハ小ナル中心角ニ對スル弧ヨリモ大ナリ、又大ナル弧ニ對スル中心角ハ小ナル弧ニ對スル中心角ヨリモ大ナリ。



證明　圓ノ中心ヲ O 弧 AB 及弧 CD ニ對スル中心角ヲ各 AOB. COD トシ、扇形 COD ヲ O ノ周リニ廻轉シテ、點 C ヲ點 A ニ重ナラシム。

(1) 角 AOB ガ角 COD ヨリモ大キケレバ半徑 OC ハ半徑 OA ニ重ナリ、半徑 OD ハ角 AOB 内ニ落チル。

故ニ　　弧 AB>弧 CD

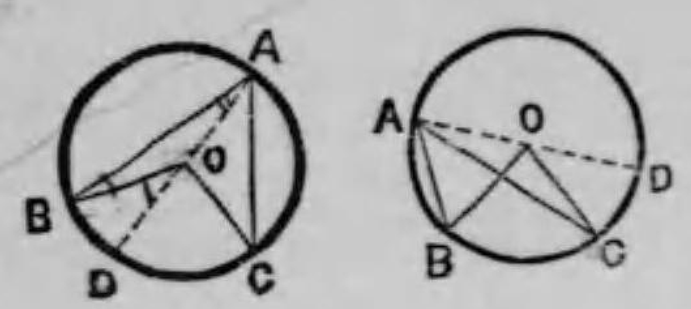
(2) 弧 AB ガ弧 CD ヨリモ大キイトキハ、點 D ハ弧 AB ノ上ニ在ル、從テ半徑 OC ハ半徑 OA ニ重ナリ、半徑 OD ハ角 AOB ノ内ニ在ル。

故ニ　　$\angle AOB > \angle COD$

系 1.　同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ大ナル中心角ニ對スル弦ハ小ナル中心角ニ對スル弦ヨリモ大ナリ、又大ナル弦ニ對スル中心角ハ小ナル弦ニ對スル中心角ヨリモ大ナリ。

系 2. 大ナル弦ニ對スル劣弧(優弧)ハ小ナル弦ニ對スル劣弧(優弧)ヨリモ大(小)ナリ、又大ナル劣弧(優弧)ニ對スル弦ハ小ナル劣弧(優弧)ニ對スル弦ヨリモ大(小)ナリ。

85 定理 (41) 圓周角ハ之ニ對スル弧ノ上ニ立ツ中心角ノ半ニ等シ。



證明 弧 BC ノ上ニ立ツ圓周角ヲ BAC 同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角ヲ BOC トシ、直徑 AD ヲ引ク。

然ルトキハ二等邊三角形 OAB ニ於テ、

$$\angle OAB=\angle OBA \qquad (9)$$

又 $$\angle OAB+\angle OBA=\angle BOD \qquad (8)$$

故ニ $$\angle OAB=\frac{1}{2}\angle BOD$$

同樣ニ $$\angle OAC=\frac{1}{2}\angle COD$$

因テ直徑 AD ガ角 BAC ノ一邊ニ一致スルトキハ、

$$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$$

直徑 AD ガ角 BAC ノ內ニ在ルトキハ、

$$\angle BAC=\angle OAB+\angle OAC=\frac{1}{2}(\angle BOD-\angle COD)=\frac{1}{2}\angle BOC$$

又直徑 AD ガ角 BAC ノ外ニ在ルトキハ、

$$\angle BAC=\angle OAB-\angle OAC=\frac{1}{2}(\angle BOD-\angle COD)=\frac{1}{2}\angle BOC$$

故ニ直徑ガ角ノ一邊ト一致スルトキモ、其內ニ在ルトキモ、其外ニ在ルトキモ、共ニ次ノ關係トナル。

$$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$$

系 1. 同一ノ弧ノ上ニ立ツ圓周角又ハ同一ノ弓形ニ於ケル角ハ相等シ。

系 2. 優弓形ニ於ケル角ハ鋭角、劣弓形ニ於ケル角ハ鈍角ニシテ、半圓ニ於ケル角ハ直角ナリ。

系 3. 弓形ノ弦ニ對シテ弓形ト同側ニ在ル點ヲ頂點トシ、弦ノ兩端ヲ通過スル直線ヲ邊トスル角ハ、其頂點ガ弓形ノ內ニ在ルトキハ弓形ニ於ケル角ヨリモ大ニシテ、外ニ在ルトキハ弓形ニ於ケル角ヨリモ小ナリ。

86 定理 (42) 切線ト其切點ヲ通過スル弧トノ作ル角ハ此二ツノ直線ノ間ニ在ル弦ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ。

證明 圓ノ上ニ在ル點 A ニ於ケル切線ヲ BC 其點ヲ通過スル一ツノ弦ヲ AD トシ、直徑 AE ヲ引ク。

然ルトキハ BC. AE ハ互ニ垂直デアルカラ

$$\angle CAD+\angle DAE=R\angle$$

然ルニ角 ADE ハ半圓ニ於ケル角ニシテ直角デアル。

故ニ三角形 ADE ニ於テ

$$\angle DAE+\angle AED=R\angle \qquad (8)$$

故ニ $$\angle CAD=\angle AED$$

次ニ弧 AFD ノ上ニ點 F ヲ取リ、FA. FD. FE ヲ作ル。

然ルトキハ $$\angle BAE=R\angle \quad \angle AFE=R\angle$$

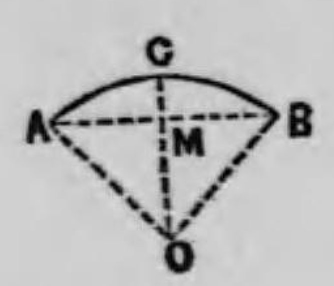
又同ジ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シイカラ

$$\angle DAE=\angle DFE \qquad (41)$$

故ニ $$\angle BAE+\angle DAE=\angle AFE+\angle DFE$$

即チ $$\angle BAD=\angle AFD$$

87 作圖 與ヘラレタル弧ヲ二等分スルコト。



與ヘラレタル弧ヲ AB トシ、弦 AB ノ中央垂線 MC ヲ作リ、弧トノ交リヲ C トス。

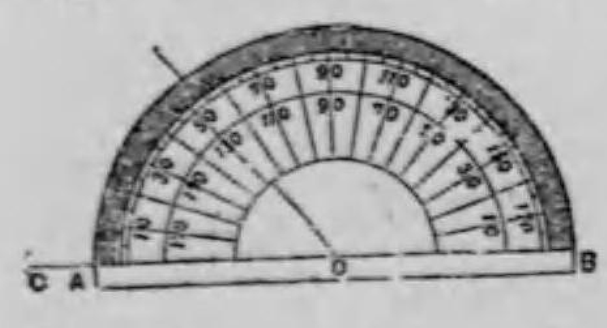
然ルトキハ、MC ハ弦ノ中央垂線デアルカラ圓ノ中心 O ヲ通過ス、從テ二ツノ角 AOC. BOC ハ相等シイ。

故ニ 弧 AC＝弧 BC

即チ直線 MC ハ弧 AB ヲ二等分ス。

88 分度器ヲ用ヒテ角ヲ測ルコト。

分度器ハ半圓形ノ器ニシテ、其縁ニ度ヲ盛ツテアル、而シテ半圓弧ヲ百八十ニシテアル。



中心 O ヨリ各分點ニ半徑ヲ引クトキハ、定理(39)ニヨリ此一ツノ弧ニ對スル中心角ハ皆相等シ。

然ルニ此一ツノ弧ハ半圓弧ノ百八十分ノ一デアルカラ、各ノ角ハ一度ニ等シ。

故ニ此器ヲ用ヒテ角ヲ測ルニハ、此器ノ中心ヲ角ノ頂點ニ重ネ、其直

徑 AB ヲ角ノ一邊例ヘバ OC ニ重ネルトキハ、他ノ一邊 OD ガ示ス度ハ即チ角ノ大サデアル。

此方法ニ依リ、角ノ大小ヲ比較シ、其和又ハ差ヲ作リ、或ハ必要ナ大サヲモツテキル角ヲ畫クコトガ出來ル。

問題

(1) 平行ナル二ツノ弦 AB. CD ハ圓周ヨリ相等シキ弧 AC. BD ヲ切リトルコトヲ證明セヨ。

(2) 二等邊三角形ノ相等シキ邊ノ一ツヲ直徑トシテ畫ケル圓ハ底ノ中點ヲ通ル。

(3) 同ジ弓形ノ角ヲ二等分スル直線ハ皆同一ノ點ヲ過ギル。

第三節　二ツノ圓ニ關スル定理

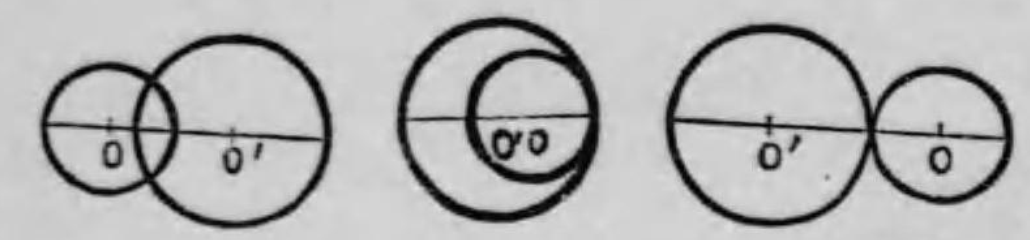
89 內接圓、外接圓　二ツノ圓ガ唯二ツノ點デ出會フトキニハ、二ツノ圓ハ相交ルト云フ。

二ツノ圓ガ唯一ツノ點デ出會フトキニハ、二ツノ圓ハ相切スト云ヒ、其共通點ヲ切點ト云フ。

二ツノ相切スル圓ノ中心ガ切點ノ兩側ニ一ツヅツ在ルトキハ、二ツノ圓ハ外切スト云ヒ、同ジ側ニ二ツトモ在ルトキハ、內切スト云フ。

而シテ外切シテキル場合ニ一方ヲ他ニ對シテ外接圓ト云ヒ、內接シテ居ル場合ニハ中ノ圓ヲ外ノ圓ノ內接圓、外ノ圓ヲ中ノ圓ノ外接圓トス。

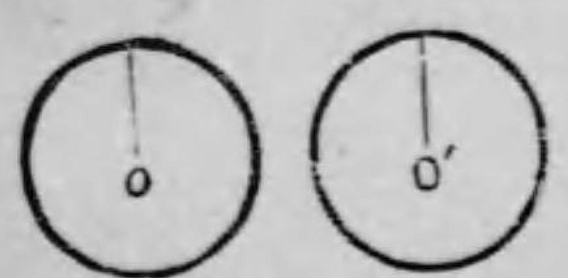
二ツノ圓ノ中心ヲ通過スル直線ヲ中心線ト云フ。



圖ニ於テ、左ノ二ツノ圓ハ相交リ、中ノ二ツノ圓ハ內切シ、右ノ二ツノ圓ハ外切ス。

何レノ場合ニ於テモ中心 O. O′ ヲ通過スル直線ハ中心線デアル。

90 定理　(43)　相等シキ半徑ヲ有スル二ツノ圓ハ相等シ、又相等シキ二ツノ圓ノ半徑ハ相等シ。



證明　相シイ半徑ヲモツテキル二ツノ圓ノ中心ヲ O. O′ トシ、右ノ圓ヲ移シテ其平面ヲ左ノ圓ノ平面ニ重ネ、中心 O′ ヲ中心 O ノ上ニ置ク。

然ルトキハ二ツノ圓ノ上ニ在ル點ハ何レモ重ネタ中心カラ等距離ニ在

ルカラ二ツノ圓ハ全ク相重ナル。

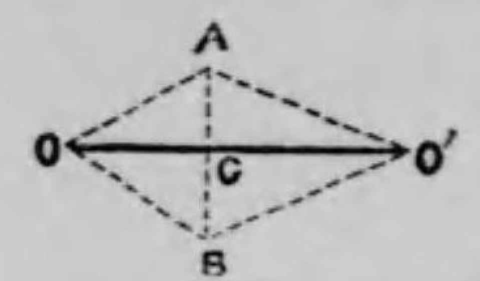
故ニ相等シイ半徑ヲモツテキル二ツノ圓ハ相等シイ。

次ニ相等シイ二ツノ圓ノ一ツヲ他ノ圓ニ重ネ合ハストキハ、一ツノ圓ハ明カニ唯一ツノ中心ヲ有ツカラ二ツノ圓ノ中心ハ相重ナル。

故ニ相等シイ二ツノ圓ノ半徑ハ相等シイ。

系　相等シキ半徑ヲ有スル二ツノ圓ノ面積ハ相等シ。

91 定理　(44)　二ツノ圓ガ中心線ノ外ニ在ル一點ヲ共有スルトキハ中心線ノ他ノ側ニモ亦一點ヲ共有ス。



證明　中心線ノ外ニ在ル一點 A ヲ共有スル二ツノ圓ノ中心ヲ O. O′ トシ、A ヨリ O O′ ニ垂線 AC ヲ引キ、之ヲ延長シテ AC ニ等シク CB ヲ取リ、線分 OA. OB. O′AOB ヲ作ル。

然ルトキハ二ツノ直角三角形 AOC. BOC ニ於テ

$$AC = BC.\ OC \text{ ハ共通}$$

故ニ
$$\triangle AOC = \triangle BOC \qquad (14)$$

從テ
$$OA = OB$$

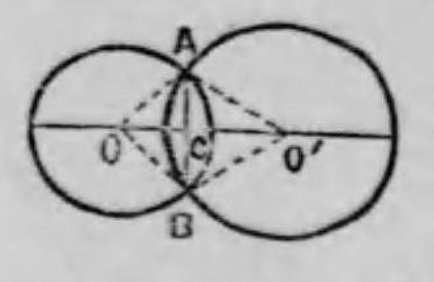
同様ニ
$$OA' = OB'$$

故ニ點 B ハ O ヲ中心トスル圓及 O′ ヲ中心トスル圓ノ上ニ在リ、即チ二ツノ圓ハ點 B ヲ共有ス。

系　二ツノ圓ガ中心線ノ上ニ在ル一點ヲ共有スルトキハ、其他ニハ共通點ヲ有セズ。

92 定理　(45)　二ツノ相交ル圓ノ中心線ハ共通ナル弦ヲ二等分シ且之ニ垂直ナリ。

證明　二ツノ相交ル圓ノ中心ヲ O. O′ トシ、中心線 OO′ ト共通ナル弦 AB トノ交點ヲ C トシ、半徑 OA. O′A. OB. O′B ヲ引ク。



然ルトキハ二ツノ三角形 OAO′. OBO′ ニ於テ、

$$OA = OB.\ O'A = O'B.\ OO' \text{ ハ共通、}$$

故ニ
$$\triangle OAO' = \triangle OBO' \qquad (16)$$

從テ
$$\angle AOC = \angle BOC$$

因テ二ツノ三角形 OAC. BOC ニ於テ、

$$OA = OB.\ \angle AOC = \angle BOC.\ OC \text{ ハ共通、}$$

故ニ
$$\triangle AOC = \triangle BOC \qquad (14)$$

従テ $AC=BC.\ \angle ACO=\angle BCO=R\angle$

系 1. 二ツノ相一致セザル圓ハ三點以上ヲ共有セズ。

系 2. 二ツノ相切スル圓ノ中心線ハ切點ヲ通過シ、且其點ニ於ケル切線ニ垂直ナリ。

系 3. 二ツノ相切スル圓ハ切點ニ於テ共通ナル切線ヲ有ス。

93 定理 (46) 二ツノ圓ノ中心間ノ距離ハ、

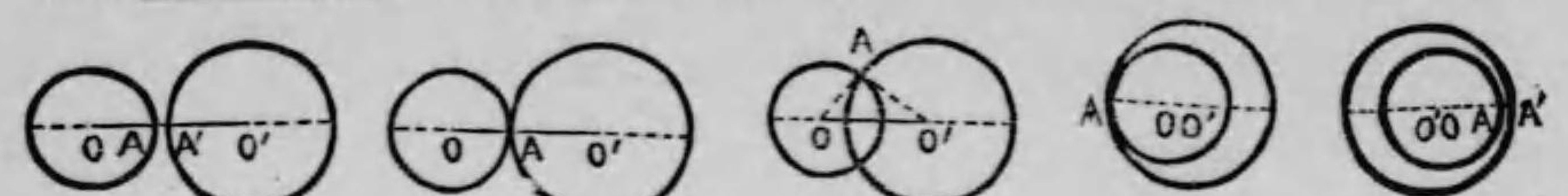
(1) 一ツノ圓ガ他ノ圓ノ外ニ在ルトキハ、半徑ノ和ヨリモ大ナリ。

(2) 二ツノ圓ガ外切スルトキハ、半徑ノ和ニ等シ。

(3) 二ツノ圓ガ相交ルトキハ、半徑ノ和ヨリモ小ニシテ、其差ヨリモ大ナリ。

(4) 二ツノ圓ガ内切スルトキハ、半徑ノ差ニ等シ。

(5) 一ツノ圓ガ他ノ圓ノ内ニ在ルトキハ、半徑ノ差ヨリモ小ナリ。



證明 二ツノ圓ノ中心 O.O′ ノ距離ヲ l トシ、小サイ圓ノ半徑ヲ r 大キイ圓ノ半徑ヲ r' トス。

(1)一ツノ圓ガ他ノ圓ノ外ニ在ルトキ、中心線ト小サイ圓及大キイ圓トノ交點ヲ A A′ トスレバ、

$$OO'=OA+O'A'+AA'$$

故ニ $$l<r+r'$$

(2) 二ツノ圓ガ外切スルトキ、切點ヲ A トスレバ、

$$OO'=OA+O'A$$

故ニ $$l=r+r'$$

(3) 二ツノ圓ガ相交ルトキ、交點ヲ A トスレバ、

$$OO'<OA+O'A.\ OO'>O'A-OA$$

故ニ $$l<r+r'.\ l>r'-r$$

(4) 二ツノ圓ガ内切スルトキ、切點ヲ A トスレバ、

$$OO'=O'A-OA$$

故ニ $$l=r'-r$$

(5) 一ツノ圓ガ他ノ圓ノ内ニ在ルトキ、中心線ト小サイ圓及大キイ圓

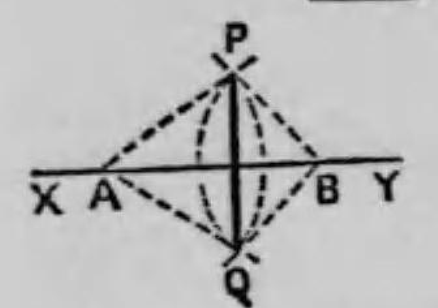
トノ交點ヲ A.A′ トスレバ、

$$OO'=O'A'-OA-AA'$$

故ニ $$l<r'-r$$

系 二ツノ圓ノ中心ノ距離ガ半徑ノ和ヨリモ大ナルトキハ一ツノ圓ハ他ノ圓ノ外ニ在リ、半徑ノ和ニ等シキトキハ二ツノ圓ハ外切シ、半徑ノ和ヨリモ小ニシテ其差ヨリモ大ナルトキハ二ツノ圓ハ相交リ、半徑ノ差ニ等シキトキハ二ツノ圓ハ内切シ、半徑ノ差ヨリモ小ナルトキハ一ツノ圓ハ他ノ圓ノ内ニ在リ。

94 作圖 與ヘラレタル直線ノ外ニ在ル定點ヨリ其直線ニ垂線ヲ引クコト。



與ヘラレタル直線 XY ノ外ニ在ル定點 P ヨリ XY ニ垂線ヲ引ク一法ハ、XY ノ上ニ在ル適宜ノ二點A. B ヲ中心トシ、AP. BP ヲ半徑トシテ二ツノ相交ル圓ヲ畫キ、其共通弦 PQ ヲ引ク。

然ルトキハ定理(45)ニヨリ二ツノ圓ノ中心線 XY ハ共通弦 PQ ニ垂直デアル。

故ニ PQ ハ即チ求ムル直線トナル。

第 四 節 内接多角形及外切多角形ニ關スル定理

95 外角形ト接圓 多角形ノ頂點ガ悉ク一ツノ圓ノ上ニ在ルトキハ、其多角形ヲ内接多角形ト云ヒ、其圓ヲ外接圓ト云フ。

多角形ノ邊ガ悉ク一ツノ圓ニ切スルトキハ、其多角形ヲ外切多角形ト云ヒ、其圓ヲ内接圓ト云フ。

多角形ノ各邊ガ皆等シクシテ、角モ亦相等シイトキハ、其多角形ヲ正多角形ト云フ。

96 多角形ノ角ノ値 邊數ガ n アル正多角形ノ角ハ $\frac{2n-4}{n}$ 直角ニ等シイ。

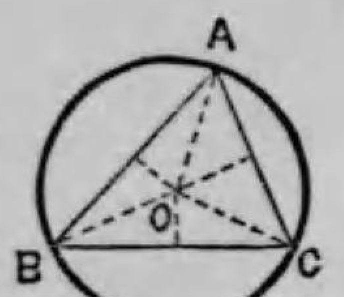
圖ニ於テ、A ハ内接正五角形ト外接圓、B ハ外切正六角形ト内切圓ニシテ、正五角形ノ角ハ 108^0 ニ等シク、正六角形ノ角ハ 120^0 ニ等シイ。

何故カト云ヘバ正五角形ノ邊數ハ5デアルカラ $\frac{2\times5-4}{5}=\frac{6}{5}$直角

$=\frac{6}{5}\times90^\circ=108^\circ$

正六角形ハ $\frac{2\times6-4}{6}=\frac{4}{3}$直角$=\frac{4}{3}\times90^\circ=120^\circ$

97 定理 (47) 三角形ニハ唯一ツノ外接圓及内接圓ヲ畫クコトヲ得。



證明 三角形ABCノ二邊AB,BCノ中央垂線ノ交點ヲOトシ、線分OA,OB OCヲ引ク。

然ルトキハOハABノ中央垂線ノ上ニ在ルカラ OA=OB

又 OハBCノ中央垂線ノ上ニ在ルカラ OB=OC

從テ OA=OB=OC 即チ點Oハ三ツノ頂點カラ等距離ニ在ル。

故ニ點Oヲ中心トシ、線分OAヲ半徑トスル圓ハ三角形ABCノ外接圓デアル。

注意 此Oヲ外心ト云フ。

次ニ三角形ABCノ二角 A.B ノ二等分線ノ交點ヲO'トシ、O'ヨリ三邊AB.BC.CAニ各垂線O'L.O'M.O'Nヲ引ク。

然ルトキハ二ツノ直角三角形BO'L.BO'Mニ於テ、

$\angle O'BL=\angle O'BN$. O'Bハ共通、

故ニ $\triangle BO'L=\triangle BO'M$ (15)

從テ $O'L=O'M$

同樣ニ $O'M=O,N$

即チ點O'ハ三邊ヨリ等距離ニ在ル。

故ニ點O'ヲ中心トシ、線分O'Lヲ半徑トスル圓ハ三角形ABCノ内切圓デアル。

注意 此O'ヲ内心ト云フ。

外接圓ノ中心ハ三角形ノ三頂點ヨリ、又内切圓ノ中心ハ三角形ノ内ニ於テ其三邊ヨリ、各等距離ニナクテハナラナイ、然ルニ此ノ如キ點ハO及O'ノ外ニハ存在シナイ、故ニ定マッタ三角形ニ畫キ得ル外接圓及内切圓ハ各唯一ツアル。

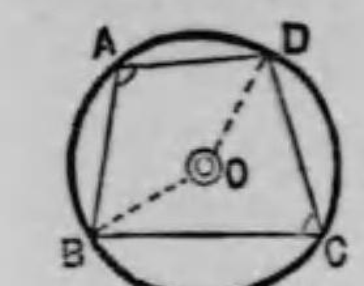
系 1. 同一ノ直線上ニ在ラザル三定點ヲ通過シテ唯一ツノ圓ヲ畫クコトヲ得。

系 2. 三角形ノ三邊ノ中央垂線及三角ノ二等分線ハ各々一點ニ於テ相會ス。

系 3. 三角形ノ一邊ト他ノ二邊ノ延長線トニ切シテ一ツノ圓ヲ畫クコトヲ得。

此圓ヲ傍切圓ト云フ。

98 定理 (48) 内接四邊形ノ對角ノ和ハ二直角ニ等シ。



證明 内接四邊形ABCDニ於テ、其外接圓ノ中心ヲOトシ、半徑OB.ODヲ引ク。

然ルトキハ弧BCDノ上ニ立ツ圓周角BADハ同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角BODノ半ニ等シク、又弧BADノ上ニ立ツ圓周角BCDハ同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角BODノ半ニ等シ。(41)

故ニ $\angle BAD+\angle BCD=\frac{1}{2}$(優角BOD)$+\frac{1}{2}$(劣角BOD)

然ルニ 優角BOD+劣角BOD$=4R\angle$ (1)

故ニ $\angle BAD+\angle BCD=2R\angle$

同樣ニ $\angle ABC+\angle ADC=2R\angle$

系 1. 四邊形ノ對角ノ和ガ二直角ニ等シキトキハ此四邊形ニ外接圓ヲ畫クコトヲ得。

系 2. 内接四邊形ノ一ツノ外角ハ之レト頂點ヲ共有スル内角ニ對スル内角ニ等シ。

99 定理 (49) 正多角形ニハ唯一ツノ外接圓及内切圓ヲ畫クコトヲ得。

證明 正多角形ABCDEFニ於テ、角A及角Bノ二等分線ノ交點ヲOトシ、線分OC.OD.OE.OFヲ作ル。

然ルトキハ $AB=BC\ \angle OAB=\angle OBA=\angle OBC$

故ニ $\triangle AOB=\triangle BOC$ (14)

從テ $OA=OB=OC$

同樣ニ $OC=OD=OE=OF$

故ニ點Oヲ中心トシ、線分OAヲ半徑トスル圓ハ正多角形ABCDEFノ外接圓デアル。

次ニ點Oヨリ邊AB. BC. CD. DF. EF. FA ニ垂線OP. OQ. OR. OS. OT. OUヲ引ク。

然ルトキハ　$OA=OB$　$\angle OAP=\angle OBQ$

故ニ　$\triangle AOP=\triangle COQ$　(15)

從テ　$OP=OQ$

同様ニ　$OQ=OR=OS=OT=OU$

故ニ點Oヲ中心トシ，線分OPヲ半徑トスル圓ハ正多角形ABCDEFノ内切圓デアル。

外接圓ノ中心ハ正多角形ノ各頂點ヨリ、又内切圓ノ中心ハ其各邊ヨリ等距離ニナクテハナラナイ。

然ルニ此ノ如キ點ハOノ外ニハ存在シナイ。

故ニ定メラレタル正多角形ニ畫キ得ル外接圓及内切圓ハ各唯一ツアルバカリデアル。

系 1. 邊數ガnナル正多角形ノ面積ハ其一邊ヲ底邊トシ、其外接圓ノ中心ヲ頂點トスル三角形ノ面積ノn倍ニ等シ。

系 2. 邊數ガnナル正多角形ノ外接圓ノ中心ニ於テ一邊ニ對スル角ハ$\frac{4}{n}$直角ニ等シ。

100 定理 (50) 圓ニハ内接正多角形及外切正多角形ヲ畫クコトヲ得。

證明 定圓ヲ任意ノ數ニ等分スル點ヲ A. B. C. D……トシテ多角形ABCD……ヲ作リ、又點A.B.C.D……ニ於テ切線ヲ引キ、其交點ヲ P. Q. R. S……トス。

然ルトキハ弧 AB. BC. CD……ハ皆相等シイ。

故ニ　$AB=BC=CD=\cdots\cdots$　(39)

又角 A. B. C. D……ハ全圓カラ弧 AB. BC. CD……ノ中二ツヲ引キ去ツタ弧ノ上ニ立ツ。

故ニ　$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\cdots\cdots$　(40)

因テ多角形ABCD……ハ各邊相等シクシテ各ノ角モ亦相等シイカラ正多角形デアル。

次ニ三角形 APB. BQC. CRD……ニ於テ

$AB=BC=CD=\cdots\cdots$

又角 PAB 角 PBA 角 QBC 角 QCB……ハ皆弧 AB ノ上ニ立ツ圓周

角ニ等シイ。

故ニ　$\triangle APB=\triangle BQC=\triangle CBD=\cdots\cdots$　(16)

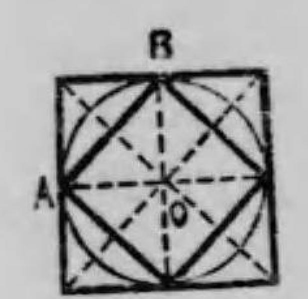
從テ　$\angle P=\angle Q=\angle R=\cdots\cdots$

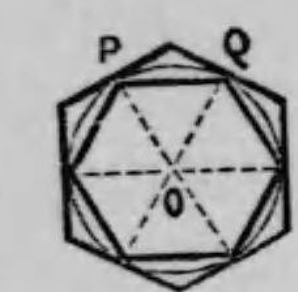
又　$PA=PB=QB=QC=RC=RD=\cdots\cdots$

即チ　$PQ=QR=\cdots\cdots$

因テ多角形 PQR……ハ各邊相等シク、各ノ角モ亦相等シイカラ正多角形デアル。

101 作圖 與ヘラレタル圓ニ内接又ハ外切正方形及正六角形ヲ畫クコト。





與ヘラレタル圓ノ中心ヲOトシ之ニ内接スル正方形ノ一邊ヲABトシ、半徑OA. OBヲ作ル。

然ルトキハ　$\angle AOB=\frac{1}{4}4R\angle=90^{\circ}$

故ニ互ニ垂直ナル二ツノ直徑ヲ引キ、其端ノ間ニ弦ヲ作レバ内接正方形ヲ得、又其端ニ於テ切線ヲ引ケバ外切正方形ヲ得。

次ニ内接正六角形ノ一邊ヲPQトシ、半徑OP.OQヲ作ル。

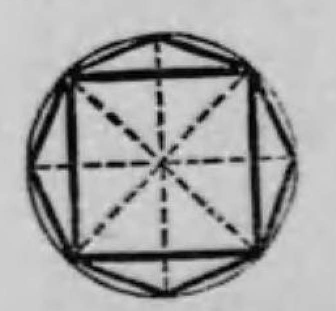
然ルトキハ　$\angle POQ=\frac{1}{6}4R\angle=60^{\circ}$

從テ　$\angle OPQ=\angle OQP=60^{\circ}$

即チ三角形POQハ等邊三角形デアル。

故ニ半徑ニ等シイ弦ヲ六同續ケテ置ケバ内接正六角形ヲ得、又其頂點ニ於テ切線ヲ引ケバ外切正六角形ヲ得。

102 圓周ヲ算出スルコト 圓ニ一ツノ内接正多角形、例ヘバ内接正四角形ヲ畫キ、次ニ其各邊ニ對スル弧ヲ二等分シテ、内接正八角形ヲ畫キ、次ニ内接正十六角形ヲ畫キ，順次同様ニ多角形ノ邊數ヲ二倍スルトキハ、終ニ多角形ノ邊ノ長サハ限リナク減少シ、其邊數ハ限リナク增大シ、多角形ト圓トハ限リナク相接近スルデアラウ。



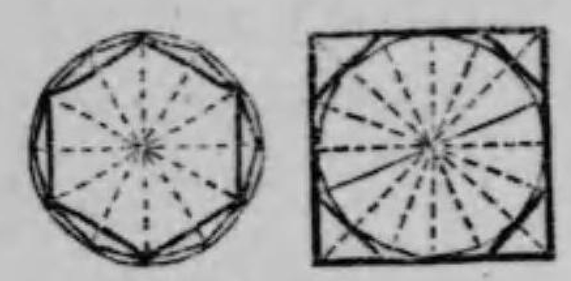
然ルニ内接正多角形ノ邊ノ和ハ其邊數ガ增大スルニ從ヒ、次第ニ增大シ、終ニ直徑ノ約3.14159倍ニ近ヅクコトヲ見ル、此長サヲ圓周ト云フ。

又約3.14159又ハ約$\frac{355}{113}$ニ等シイ數ヲ圓周率ト云ヒ、πト云フ記號ヲ以テ之ヲ表ス、故ニ

圓周ヲ表ス數ハ半徑ノ長サヲ表ス數ト圓周率ノ二倍トノ積ニ等シ。

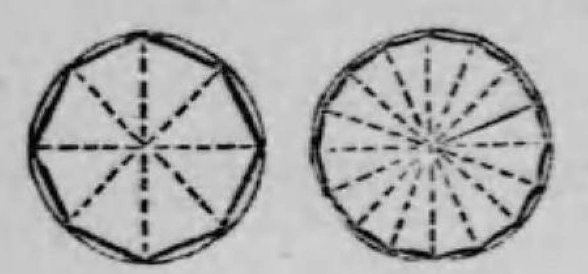
或ハ圓ノ半徑ヲ r トスルトキハ、其圓周ハ $2\pi r$ ニ等シ。

右ノ結果ヲ得ルニハ必ズシモ、內接正四角形ニ限ラナイ、例ヘバ內接正六角形ヨリ始メテ順次ニ內接正十二角形、內接正二十四角形等ヲ作ッテ其邊ノ和ヲ求メルモ亦同一デアル。



尙ホ內接正多角形ノ代リニ、外切正多角形ヲ畫イテ、順次ニ其邊數ヲ二倍スルトキハ、其邊ノ和ハ次第ニ減少シ、終ニ又同一ノ結果トナル。

103 圓ノ面積ヲ算出スルコト 圓ノ內接正多角形ノ面積ハ其邊數ヲ增スニ從ヒ、次第ニ圓ノ面積ニ近ヅキ、終ニ邊數ガ限リナク增ストキハ多角形ノ面積ト圓ノ面積トハ限リナク相接近スル。



今內接正多角形ノ邊數ヲ n 一邊ノ長サヲ l 圓ノ中心カラ一邊ノ上ニ至ル垂線ヲ p トスルトキハ定理(49)ニヨリ

$$\text{正多角形ノ面積}=\frac{nlp}{2}$$

n ガ限リナク增ストキハ、p ハ限リナク圓ノ半徑ニ近ヅキ、nl ハ限リナク圓周ニ近ヅク、故ニ

圓ノ面積ヲ表ス數ハ圓周ヲ表ス數ト半徑ノ長サヲ表ス數トノ積ノ二分ノ一ニ等シ。

然ルニ圓ノ半徑ヲ r トスルトキハ、圓周ハ $2\pi r$ ニ等シイカラ、圓ノ面積ハ πr^2 デアル。

此結果ハ內接正多角形ノ代リニ、外切正多角形ヲ畫イテ、順次ニ其邊數ヲ二倍シテ其面積ヲ求メテモ亦同ジコトデアル。

問題

(1) 一直線ガ二ツノ平行線ト交レバ、此三直線ノ各ニ切スル圓ハ二ツアリ、而シテ唯二ツニ限ルコトヲ證明セヨ。

(2) 三角形ノ二ツノ傍心及二ツノ頂點ハ同一圓周ノ上ニアリ、又內心、一ツノ傍心及二ツノ頂點ハ同一圓周上ニアルコトヲ證明セヨ。

(3) 圓ニ內接スル平行四邊形ハ必ズ矩形ナルコトヲ證明セヨ。

(4) 圓ニ內接スル四邊形ノ相對スル角ガ相等シキトキハ、其頂點ヲ通ラザル對角線ハ直徑ナルコトヲ證明セヨ。

(5) 三角形 ABC ノ頂點 A.B.C ヨリ邊 BC・CA.AB 又ハ其延長ニ

下シタル垂線ノ足ヲ夫々 D.E.F トシ、ソレ等ノ三ツノ垂線ノ交點ヲ H (垂心)トスレバ、次ノ四ツノ點ヲ通ル圓ノアルコトヲ證明セヨ。

(イ) H.F.B.D　(ロ) H.D.C.E　(ハ) F.B.C.E

(ニ) D.C.A.F　(ホ) H.E.A.F　(ヘ) E.A.B.D

(6) 圓ニ內接スル等邊多角形及等角多角形ハ正多角形ナルヤ否ヤ。

(7) 正六邊形ノ一邊ハ、其外接圓ノ半徑ニ等シキコトヲ證明セヨ。

(8) 圓ノ直徑ヲ d トスレバ圓周ハ πd ナルコトヲ證明セヨ。

(9) 圓ノ直徑ヲ d トスレバ圓ノ面積ハ $\frac{\pi d^2}{4}$ ナルコトヲ證明セヨ。

第四章 比例及相似形

第一節 比例線

104 比例 四ツノ量 A.B.C.D アリテ、A ノ B ニ對スル比ガ C ノ D ニ對スル比ニ等シキトキハ四ツノ量ハ比例ヲナスト云ヒ、之ヲ次ノ如ク表ス。

$$A:B=C:D$$

又ハ

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

A.D ヲ比例ノ外項ト云ヒ、B.C ヲ其內項ト云フ、又 D ヲ A.B.C ノ第四比例項ト云フ。

比例ノ內項 B.C ガ相等シイ場合、即チ A:B=B:D ノトキ B ヲ比例中項ト云ヒ、D ヲ A.B ノ第三比例項ト云フ。

又二ツノ量 A.B ガ第三ノ量 K ノ丁度若干倍ニ當ルトキハ K ヲ A.B ノ公度ト云ヒ、A.B ヲ通約スベキ量ト云フ。

四ツノ數 $a.b.c.d$ アリテ $a:b=c:d$ ナルトキハ $ad=bc$

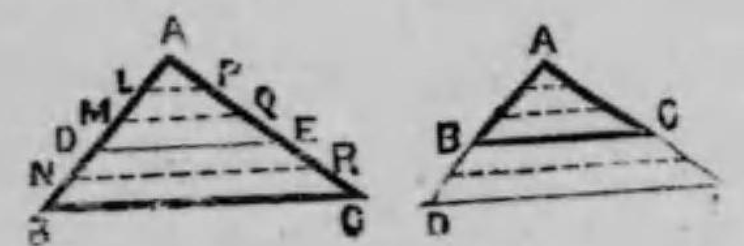
又 $a:b=b:c$ ナルトキハ $b^2=ac$

故ニ四ツノ有限直線ガ比例ヲナストキハ、外項ノ矩形ハ內項ノ矩形ニ等シク、又二ツノ有限直線ノ作ル矩形ハ比例中項ノ正方形ニ等シイ。

尙

$$a:b=c:d$$
$$a:c=b:d$$
$$b:a=d:c$$
$$a+b:b=c+d:d$$
$$a-b:b=c-d:d$$
$$a+b:a-b=c+d:c-d$$

105 定理 (51) 三角形ノ一邊ニ平行ナル直線ハ他ノ二邊（或ハ二邊延長）ヲ相等シキ比ニ分ツ。



證明 三角形 ABC ノ一邊 BC ニ平行ナル直線ガ他ノ二邊 AB. AC 又ハ其延長線ト相交ル點ヲ夫々 D 及 E トス。

(1) AD. DB ガ公度ヲモツテキル場合。

AD ハ一定ノ線分ノ m 倍，DB ハ其 n 倍デアルトシ、AD ヲ m 等分シ、DB ヲ n 等分シテ、等分點 L. M. N 等ヨリ BC ニ平行線ヲ引キ、此直線ト AC トノ交點ヲ P. Q. R 等トス。

然ルトキハ　AP＝PQ. PQ＝QE. QE＝ER. ER＝RC　(27)

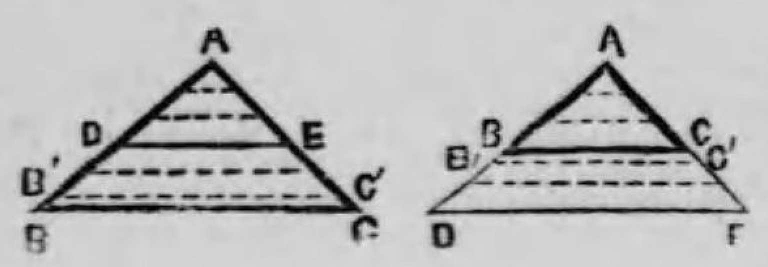
即チ　AE : EC＝m : n

然ルニ　AD : DB＝m : n

故ニ　AD : DB＝AE : EC

注意 AB. AC 延長線上ノ DE ニ於テ比ニ分タレタコトヲ外分セラレタト云ヒ、之ニ對シテ AB. AC ノ内デ比ニ分タレタコトヲ内分セラレタト云フ。

(2) AD. DB ガ公度ヲモタナイ場合。



AD ハ一定ノ線分ノ m 倍、DB ハ其 n 倍ニ等シキ DB′ ト其線分ヨリモ小サイ B′B ヨリ成ルモノトシ、AD ヲ m 等分シ、DB′ ヲ n 等分シテ、等分點ヨリ BC ニ平行線ヲ引ク。

然ルトキハ AD ト DB′ トハ公度ヲモツテキルカラ

　BA : DB′＝AE : EC′

今公度トシテ取ツタ線分ヲ小サクスルトキハ、B′B ハ之ニ從テ小サクナル、線分ヲ限リナク小サクスルトキハ B′ ハ限リナク B ニ近ヅキ、從テ C′ ハ限リナク C ニ近ヅクデアラウ。

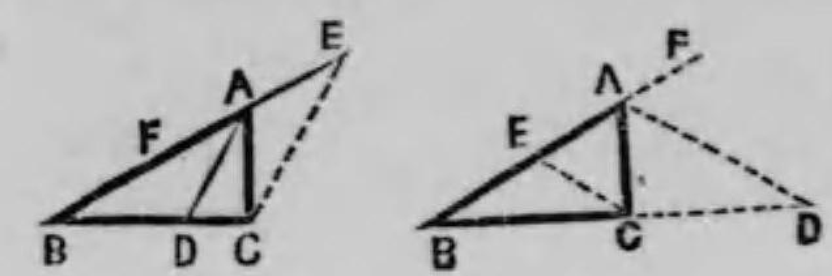
故ニ　AD : DB＝AE : EC

系 1. 三角形ノ二邊ヲ相等シキ比ニ内分又ハ外分スル直線ハ他ノ一邊ニ平行ナリ。

系 2. 三角形ノ一邊ニ平行線ヲ引クトキハ、他ノ二邊ノ對應スル部分ノ比ハ其二邊ノ比ニ等シ。

系 3. 數多ノ平行線ガ二ツノ直線ニ交ルトキハ、此二直線ノ對應スル部分ノ比ハ皆相等シ。

106 定理 (52) 三角形ノ一ツノ角ノ二等分線ハ其對邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ内分シ、其角ニ隣ル外角ノ二等分線ハ其對邊ヲ同一ノ比ニ外分ス。



證明 三角形 ABC ノ角 A 又ハ其外角 CAF ノ二等分線ト邊 BC トノ交點ヲ D トシ、點 C ヨリ線分 AD ニ平行線ヲ引キ、此直線ト邊 BA ノ延長線又ハ BA トノ交點ヲ E トス。

然ルトキハ AD. EC ハ平行デアルカラ

　BD . DC＝BA : AE　(51)

然ルニ　∠FAD＝∠AEC. ∠DAC＝∠ACE　(6)

又　∠FAD＝∠DAC

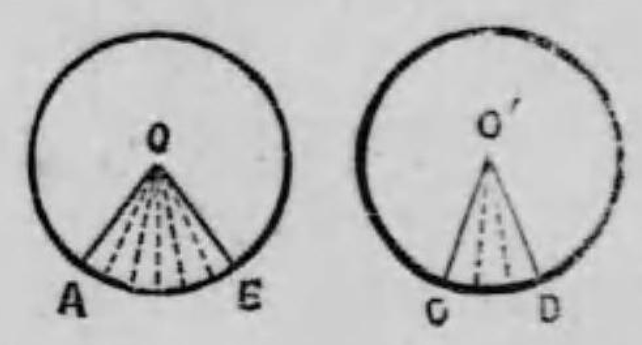
因テ　∠AEC＝∠ACE

從テ三角形 ACE ハ二等邊三角形ニシテ

　AC＝AE

故ニ　BD : DC＝BA : AC

107 定理 (53) 一ツノ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ中心角ノ比ハ之ニ對スル弧ノ比ニ等シ。



證明 二ツノ相等シイ圓ニ於テ弧 AB ハ一定ノ弧ノ m 倍、CD ハ其 n 倍デアルトシ、弧 AB ヲ m 等分シ、弧 CD ヲ n 等分シテ、中心ヨリ等分點ニ半徑ヲ引ク。

然ルトキハ相等シイ弧ニ對スル中心角ハ相等シイカラ、角 AOB ハ一定ノ角ノ m 倍、角 CO′D ハ其 n 倍ニ當ル。

故ニ　∠AOB : ∠CO′D＝m : n

然ルニ　弧AB : 弧CD＝m : n

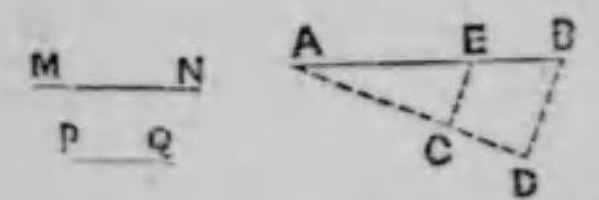
故ニ　∠AOB : ∠CO′D＝弧AB : 弧CD

二ツノ弧ガ公度ヲモタナイ場合ニモ亦同樣ニ之ヲ證明スルコトヲ得。

系 一ツノ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ扇形ノ面積ノ比ハ其弧ノ比ニ等シ。

108 作圖 與ヘラレタル有限直線ヲ一定ノ比ニ分ツコト。

與ヘラレタル有限直線 AB ヲ二ツノ線分 MN. PQ ノ比ニ分ツニハ、



先ヅ AB ノ一端、例ヘバ A ヨリアル方向ニ任意ニ直線ヲ引キ、其上ニ MN ニ等シク線分 AC ヲ取リ、次ニ PQ ニ等シク線分 CD ヲ取リテ線分 BD ヲ作リ、點 C ヨリ BD ニ平行線ヲ引キ、此直線ト AB トノ交點ヲ E トス。

然ルトキハ BD.EC ハ平行デアルカラ

$$AE : EB = AC : CD \qquad (51)$$

即チ

$$AE : EB = MN : PQ$$

故ニ點 E ハ AB ヲ MN.PQ ノ比ニ分ツ。

問題

(1) 與ヘラレタル一ツノ有限直線ヲ與ヘラレタル多クノ有限直線ニ比例スル様ニ分テヨ。

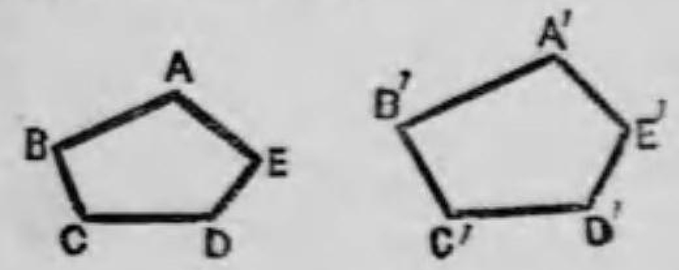
(2) 二ツノ三角形 ACB. ADB ノ共通邊 AB 上ノ一點 E ヲ通リテ AC AD ニ平行線ヲ引キ、之ガ夫々 BC.BD ト交ハル點ヲ F 及 G トスレバ FG ハ CD ニ平行ナルコトヲ證明セヨ。

(3) 與ヘラレタル三點ニ至ル距離ガ 1:2:3 ナル如キ點ヲ求メヨ。

第二節 相似多角形ニ關スル定理

109 相似 一ツノ多角形ノ角ガ他ノ多角形ノ角ニ一ツヅツ順次ニ相等シイトキハ、二ツノ多角形ハ等角デアルト云ヒ，其相等シイ角ヲ對應角、相隣レル對應角ニ接スル邊ヲ對應邊ト云フ。

二ツノ多角形ガ等角ニシテ且ツ對應邊ノ比ガ皆相等シイトキハ、二ツノ多角形ハ相似デアルト云フ。



圖ノ二ツノ五角形 ABCDE. A'B'C'D'E' ニ於テ、

$$\angle A=\angle A'.\angle B=\angle B'.\angle C=\angle C'.\angle D=\angle D'.\angle E=\angle E'$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}=K$$

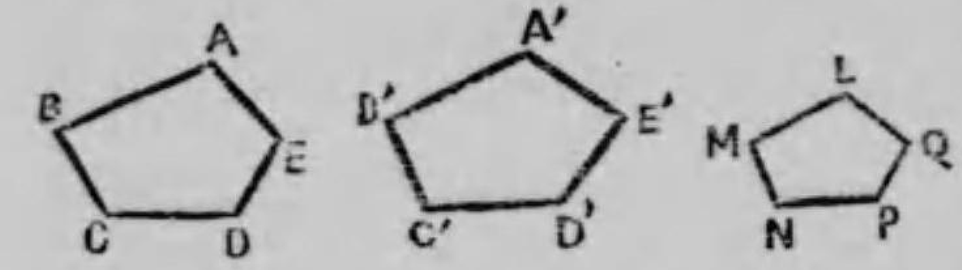
ナルガ故ニ、二ツノ五角形ハ相似デアル。

而シテ K ヲ相似比ト云フ。

二ツノ相似多角形ニ於テ相似比ガ 1 ノトキハ二ツノ多角形ハ相等シ。

邊數ガ相等シイ正多角形ハ何レモ相似デアル。

110 定理 (45) 同一ノ多角形ニ相似ナル多角形ハ何レモ互ニ相似ナリ。



證明 二ツノ多角形 ABCDE. A'B'C'D'E' ハ何レモ多角形 LMNPQ ニ相似デアル。

然ルトキハ $\angle A=\angle L.\angle A'=\angle L$

故ニ $\angle A=\angle A'$

同様ニ $\angle B=\angle B'.\angle C=\angle C'.\angle D=\angle D'.\angle E=\angle E'$

又 $\dfrac{AB}{LM}=\dfrac{BC}{MN} \qquad \dfrac{A'B'}{LM}=\dfrac{B'C'}{MN}$

故ニ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$

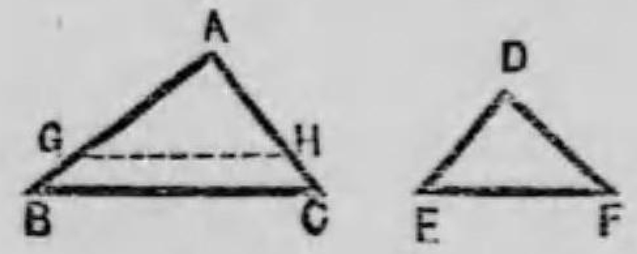
同様ニ $\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{DE}{D'E'}=\dfrac{EA}{E'A'}$

故ニ 二ツノ多角形 ABCDE. A'B'C'D'E ハ相似デアル。

系 1. 一ツノ多角形ニ相似ナル多角形ト同一ノ多角形ニ等シキ多角形トハ互ニ相似ナリ。

系 2. 相似多角形ノ邊ノ和ノ比ハ對應邊ノ比ニ等シ。

111 定理 (55) 二ツノ三角形ガ等角ナルトキハ、二ツノ三角形ハ相似ナリ。



證明 二ツノ三角形 ABC. DEF ニ於テ $\angle A=\angle D \quad \angle B=\angle E \quad \angle C=\angle F$ トシ、邊 AB ノ上ニ邊 DE ニ等シク AG ヲ取リ、又邊 AC ノ上ニ邊 DF ニ等シク AH ヲ取リ、GH ヲ引ク。

然ルトキハ $\angle A=\angle D.\ AG=DE.\ AH=DF$

故ニ $\triangle AGH=\triangle DEF \qquad (14)$

從テ $\angle AGH=\angle DEF=\angle ABC$

因テ $GH \parallel BC \qquad (5)$

線分 GH ハ三角形 ABC ノ底邊ニ平行デアルカラ。

$$AG : AB = AH : AC \qquad (51)$$

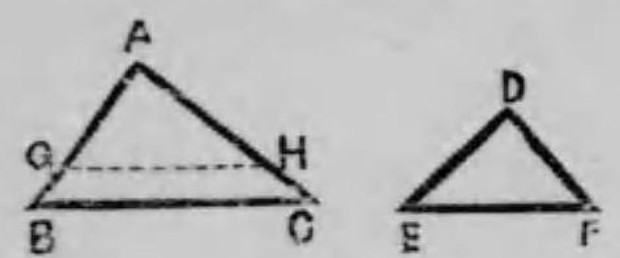
即チ $DE : AB = DF : AC$

同様ニ $EF : BC = DF : AC$

因テ　$DE:AB=EF:BC=DF:AC$

故ニ　二ツノ三角形 ABC.DEF ハ相似形デアル。

112 定理 (56) 二ツノ三角形ニ於テ一ツノ角ハ相等シク且ツ之ヲ夾ム二邊ガ比例ヲナストキハ二ツノ三角形ハ相似ナリ。



證明　二ツノ三角形 ABC.DEF ニ於テ、$\angle A=\angle D$,　$AB:DE=AC:DF$ トシ、邊 AB ノ上ニ邊 DE ニ等シク AG ヲ取リ、又邊 AC ノ上ニ邊 DF ニ等シク AH ヲ取リ、GH ヲ引ク、

然ルトキハ　$\angle A=\angle D$,　$AG=DE$,　$AH=DF$

故ニ　$\triangle AGH=\triangle DEF$　(14)

然ルニ　$AB:DE=AC:DF$

故ニ　$AB:AG=AC:AH$

線分 GH ハ三角形 ABC ノ二邊ヲ相等シイ比ニ分ツ

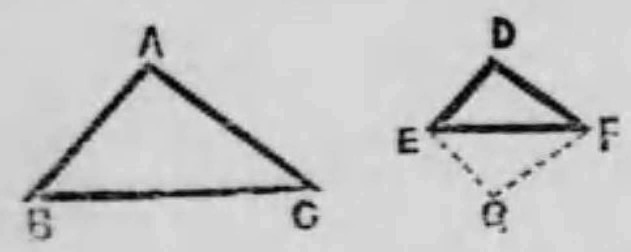
故ニ　$GH \parallel BC$　(51.系1)

從テ　$\angle B=\angle AGH=\angle E$,　$\angle C=\angle AHG=\angle F$,　$\angle A=\angle D$

即チ　二ツノ三角形 ABC.DEF ハ等角デアル。

故ニ　二ツノ三角形 ABC.DEF ハ相似形デアル。　(55)

113 定理 (57) 二ツノ三角形ニ於テ三邊ガ順次ニ比例ヲナストキハ二ツノ三角形ハ相似ナリ。



證明　二ツノ三角形 ABC.DEF ニ於テ $AB:DE=BC:EF=AC:DF$ トシ、邊 EF ニ對シテ頂點 D ノ反對ノ側ニ角 B ニ等シク角 FEG ヲ作リ、又角 C ニ等シク角 EFG ヲ作リ、邊 EG ト邊 FG トノ交點ヲ G トス。

然ルトキハ二ツノ三角形 ABD.GEF ハ等角デアルカラ相似デアル。

從テ　$AB:GE=BC:EF=AC:GF$

然ルニ　$AB:DE=BC:EF=AC:GF$

因テ　$GE=DE$. $GE=DF$

故ニ　$\triangle DEF=\triangle GEF$　(16)

然ルニ　二ツノ三角形 ABC.GEF ハ相似形、

故ニ　二ツノ三角形 ABC.DEF ハ相似形デアル。　(54)

問題

(1) 二ツノ平行四邊形ハ如何ナル場合ニ相似ナルカ。

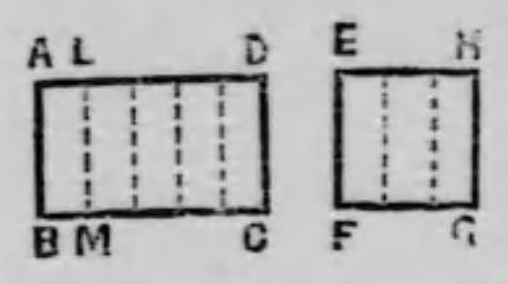
(2) 三角形ノ三邊ノ中點ヲ結ビツケテナル三角形ハ原ノ三角形ト相似ナルコトヲ證明セヨ。

(3) 頂角或ハ底角ガ互ニ相等シキ二ツノ二等邊三角形ハ相似ナルコトヲ證明セヨ。

(4) 相似多角形ノ凡テノ對角線ノ和ノ比ハ對應邊ノ比ニ等シキコトヲ證明セヨ。

第三節　面積ニ關スル定理

114 定理 (58) 二ツノ矩形ガ相等シキ高サヲ有スルトキハ、其面積ノ比ハ其底邊ノ比ニ等シ。



證明　二ツノ矩形 ABCD.EFGH ニ於テ、其高サ AB.EF ハ相等シトス。

(1) 底邊 BC.FG ガ公度ヲモツテキル場合。

BC ハ定線分 BM ノ m 倍、FG ハ其 n 倍デアルトシ、BC ヲ m 等分シ、FG ヲ n 等分シテ、各等分點ヨリ底邊ニ垂線ヲ引キ、此ニ數多ノ相等シイ小矩形ヲ得。

然ルトキハ

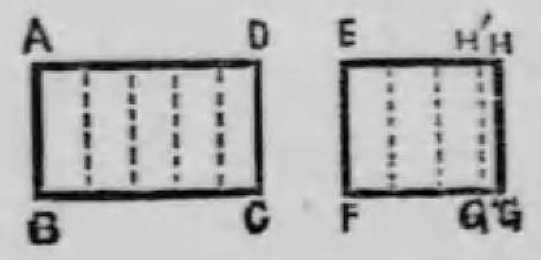
$$(\square ABCD\ ノ面積)=m(\square ABML\ ノ面積)$$

$$(\square EFGH\ ノ面積)=n(\square ABML\ ノ面積)$$

然ルニ　$BC=mBM$. $FG=nBM$

故ニ　$$\frac{\square ABCD\ ノ面積}{\square EFGH\ ノ面積}=\frac{BC}{FG}$$

(2) 底邊 BC.FG ガ公度ヲモツテキル場合。



BC ハ定線分ノ m 倍、FG ハ其 n 倍ニ等シイ FG' ト其線分ヨリモ小サイ G'G ヨリ成ルモノトシ、BC ヲ m 等分シ、FG' ヲ n 等分シテ、等分點ヨリ BC 及 FG ニ垂線ヲ引ク。

然ルトキハ BC ト FG' トハ公度ヲモツテキルカラ

$$\frac{\square ABCD\ ノ面積}{\square EFG'H'\ ノ面積}=\frac{BC}{FG'}$$

今公度トシテ取ツタ線分ヲ小サクスルトキハ、G'G ハ之ニ從テ小サク

ナリ、線分ヲ限リナク小サクスルトキハ G' ハ限リナク G ニ近ヅキ，從テ $EFG'H'$ ノ面積ハ限リナク EFGH ノ面積ニ近ヅク。

$$故ニ\ \frac{\square ABCD\ ノ面積}{\square EFGH\ ノ面積}=\frac{BC}{FG}$$

系 二ツノ三角形又ハ二ツノ平行四邊形ガ相等シキ高サヲ有スルトキハ、其面積ノ比ハ其底邊ノ比ニ等シ。

問題

(1) 等シキ底邊ヲ有スル矩形又ハ三角形ノ面積ノ比ハ其高サノ比ニ等シキコトヲ證明セヨ。

(2) 四邊形ABCD ノ對角線ノ交點ヲ E トス。

$\triangle AEB=4$ 平方寸、$\triangle BEC=7$ 平方寸、$\triangle CED=6$ 平方寸ナルトキ、$\triangle DEA$ ノ面積ヲ求メヨ。

第四編 初等幾何學 立體之部

第一章 平面及直線

第一節 總說

1 立體 スベテノ物體ハ空間ノ一部分ヲ占領シテ居ル、故ニ之ヲ構成スル物質ノ外ニ位置ヤ、各々特有ナ形ヲモツテヰル。

物體ヲ其位置ヤ、大サノミニツイテ考ヘルトキ之ヲ立體ト云フ、即チ立體ハ空間ノ一部分デアルトイフコトガ出來ル。

立體ハ位置アリテ、長サ，幅，厚サヲ有ス。

2 面點線 立體ノ境ヲ面ト云フ、面ニハ位置ヤ長サヤ幅ガアツテ厚サハナイ。

面ノ一部分ト他ノ部分トノ境ヲ線ト云フ，線ニハ位置ト長サトガアツテ幅ヤ厚サハナイ。

線ノ一部分ト他ノ部分トノ境ヲ點ト云フ，點ニハ位置ガアツテ太サハナイ。

線ノ中デ，其何レノ一部分デモトツテ、之ヲ他ノ一部分ノ上ニ如何樣ニ置クトモ全ク相重ナルモノヲ直線ト云フ。直線ハ限リナク長イモノトス。

面ノ中デ、其上ニアル何レノ二ツノ點ヲ取ルトモ、此二ツノ點ヲ通過スル直線ガ全ク其面ノ上ニアルモノヲ平面ト云フ。

平面ハ限リナク廣イモノトス，之ヲ圖ニ表スニハ通例平行四邊形ヲ用キル。

3 直線ト直線トノ位置ノ關係 空間ニ於ケル二ツノ直線ノ關係ノ位置ニ就テハ次ノ區別ガアル。

(1) 二ツノ直線ハ二ツノ點ヲ共有スルコトガ出來ル，此場合ニハ定義ニヨリ二ツノ直線ハ全ク相一致ス。

(2) 二ツノ直線ハ唯一點ヲ共有スルコトガ出來ル，此場合ニハ二ツノ直線ハ相交ルト云フ。

(3) 二ツノ直線ハ一點ヲモ共有シナイコトモ出來ル、此場合ニ於テ二ツノ直線ガ同一ノ平面ノ上ニ在ルトキハ，二ツノ直線ハ互ニ平行デアルト云フ。

一般＝二ツノ相一致シナイ直線ハ相交ラナイ、又互＝平行デナイ、従テ同一ノ平面ノ上＝ハナイ。

4　直線ト平面トノ位置ノ關係。

（1）　直線ト平面トハ二ツノ點ヲ共有スルコトガ出來ル、此場合＝ハ直線ハ全ク平面ノ上＝在ル、直線ガ全ク平面ノ上＝在ルトキハ、其平面ハ其直線ヲ含ムト云フ。

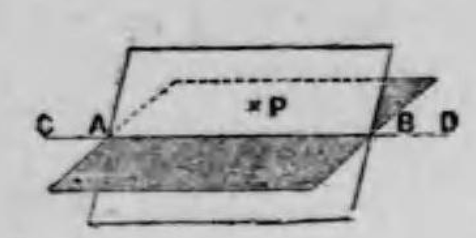
（2）　直線ト平面トハ唯一點ヲ共有スルコトガ出來ル、此場合＝ハ直線ト平面トハ相交ルト云フ。

直線ト平面トガ相交ルトキハ，直線ノ一部分ハ平面ノ一方＝在ツテ、他ノ部分ハ他ノ一方＝在ル。

（3）　直線ト平面トハ一點ヲモ共有シナイコトガ出來ル、此場合＝ハ直線ト平面トハ互＝平行デアルト云フ。

5　平面ノ位置　一ツノ平面ノ上＝任意ノ二點 A. B ヲ取リ、平面ヲ移シテ此二點ヲ一ツノ直線 CD ＝接シルトキハ、第4＝ヨリ、CD ハ全ク此平面ノ上＝在ル、因テ CD ヲ軸トシテ此平面ヲ廻轉セシメルトキハ、平面ハ限リナク多クノ異ツタ位置ヲ取ル、故＝

一ツノ直線ヲ含ム平面ノ數ハ限リナシ。



次＝ CD ノ外＝一點 P ヲ考ヘルトキハ，此廻轉スル平面ガ必ズ一度此點ヲ通過スルコトガアルダラウ、然ラバ平面ノ位置ハ此＝於テ定マツテ、平面ヲ此位置ヨリ何程僅デモ廻轉セシメルトPハ此平面ノ上＝ハナイ、故＝

一ツノ直線ト其外＝在ル一ツノ點トヲ通過スル平面ハ唯一ツアリ。

同様＝、同一ノ直線ノ上＝ナイ三ツノ點、又ハ二ツノ相交ル直線、又ハ二ツノ平行線ハ各々一ツノ平面ヲ定メル、故＝

同一ノ直線上＝在ラザル三ツノ點、又ハ二ツノ相交ル直線、又ハ二ツノ平行線ヲ通過スル平面ハ各唯一ツアリ。

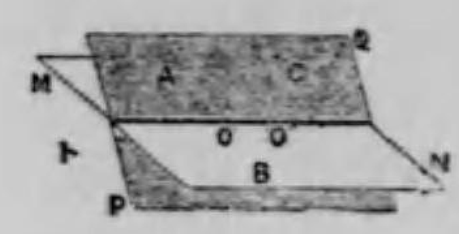
6　平面ト平面トノ位置ノ關係。

（1）　二ツノ平面ハ同一ノ直線ノ上デナイ三ツノ點ヲ共有スルコトガ出來ル、此場合＝ハ第5＝ヨツテ二ツノ平面ハ全ク相一致スル。

（2）　二ツノ平面ハ一ツノ直線ヲ共有スルコトガ出來ル、此場合＝於テ、二ツノ平面ガ相一致シナイトキハ、二ツノ平面ハ相交ルト云フ。

今二ツノ平面 MN. PQ ガ二ツノ點 A. B ヲ共有スルトシ、直線 AB ヲ引クトキハ、第4＝ヨリ、MN. PQ ハ何レモ AB ヲ含ム、即チ二ツノ平面ハ直線 AB ヲ共有スル。

又二ツノ平面 MN. PQ ガ唯一ツノ點 O ヲ共有スルトシ、O ヲ通過シテ PQ ノ上＝直線 AB ヲ引キ、次＝ MN ＝對シテ點 A ト同ジ側＝在ル一點 C ヲ PQ ノ上＝取リ、直線 BC ヲ引クトキハ BC ハ必ズ MN ＝交ル、其點ヲ O′ トスルトキハ O′ ハ MN. PQ ＝共通デアル、従テ二ツノ平面ハ直線 OO′ ヲ共有スル。



尙二ツノ平面ガ其交線ヨリ外ノ點ヲ共有スルトキハ二ツノ平面ハ全ク相一致セネバナラヌ、故＝

二ツノ相一致セザル平面ガ二ツ又ハ一ツノ點ヲ共有スルトキハ、其平面ハ其點ヲ通過スル直線＝於テ相交リ、其他ノ點ヲ共有セズ。

（3）　二ツノ平面ハ一點ヲモ共有シナイコトガ出來ル、此場合＝ハ二ツノ平面ハ互＝平行デアルト云フ。

問題

（1）　二ツノ平行線ト此各＝交ル一直線トハ同一ノ平面上＝アルコトヲ證明セヨ。

（2）　相交ル二直線ト其交點以外＝於テ交ル直線ハ其二直線ノ定ムル平面上＝アルコトヲ證明セヨ。

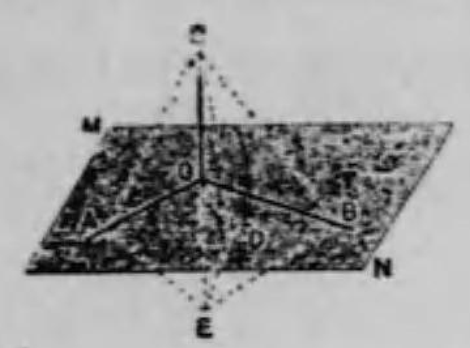
（3）　何レノ三ツモ同一直線上＝アラザル四ツノ點ハ幾ツノ平面ヲ決定スルカ。

（4）　二ツノ平行線ノ一ツ＝交ル平面ハ必ズ他ノ一ツ＝定ルコトヲ證明セヨ。

第二節　直線ト平面トニ關スル定理

7　垂線　一ツノ直線ガ其直線ト一ツノ平面トノ交點ヲ通過シテ其平面上ニ在ル總テノ直線ニ垂直デアルトキハ、此直線ト平面トハ互ニ垂直デアルト云ヒ、此直線ヲ其平面ノ垂線ト名ヅケル。

8　定理 (1)　二ツノ直線ノ交點ニ於テ其各ニ垂直ナル一ツノ直線ハ此二ツノ直線ヲ含ム平面ニ垂直ナリ。



證明　二ツノ直線 OA. OB ノ交點 O ニ於テ其各ニ垂直ナル直線ヲ OC トシ、OA. OB ヲ含ム平面 MN ノ上ニ任意ノ直線 OD ヲ引キ，又 MN ノ上ニ在ル他ノ任意ノ直線ト OA. OB. OD トノ交點ヲ各 A. B. D トシ，次ニ CO ヲ延長シテ OE ヲ CO ニ等シカラシメ、直線 CA. CB. CD. EA. EB. ED ヲ作ル。

然ルトキハ二ツノ三角形 AOC. AOE ニ於テ，

OC＝OE,　∠AOC＝∠AOE＝R∠, ∠OA ハ共通

故ニ　△AOC≡△AOE

從テ　AC＝AE

同樣ニ　BC＝BE

故ニ三角形 ABC ハ AB ノ周リニ同轉シテ三角形 ABE ニ重ナラシムルコトヲ得。

從テ　CD＝ED

因テ二ツノ三角形 COD. EOD ニ於テ、

OC＝OE. CD＝ED. OD ハ共通

故ニ　△COD＝△EOD

從テ　∠COD＝∠EOD

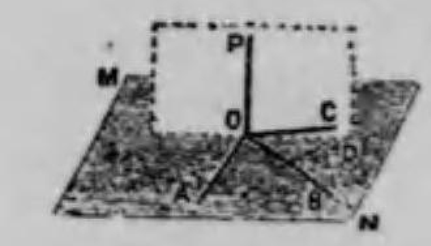
即チ OC ハ O ヲ通過シテ MN ノ上ニ在ル任意ノ直線 OD ニ垂直デアル。

故ニ OC ハ平面 MN ニ垂直デアル。　（前節ニヨリ）

系　一ツノ定點ヲ通過シテ一ツノ平面ニ垂直ナル直線ハ唯一ツナリ。

9　定理 (2)　直線上ノ一點ニ於テ其直線ニ垂直ナル直線ハ何レモ同一ノ平面上ニ在リ。

證明　直線 OP ノ上ニ在ル一點 O ニ於テ OP ニ垂直ナル三ツノ直線ヲ OA. OB. OC トシ、OA. OB ヲ含ム平面及 OP. OC ヲ含ム平面ノ交線



ヲ OD トス。

然ルトキハ、OP ハ OA. OB ニ垂直デアルカラ、

∠POD＝R∠

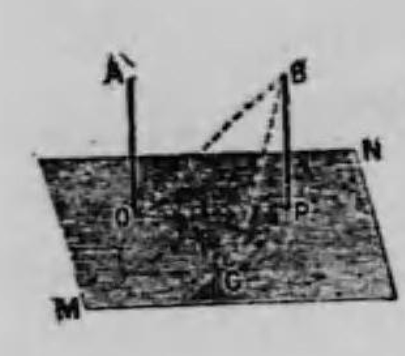
然ルニ　∠POC＝R∠

因テ OC. OD ハ同一ノ平面上ニ在ツテ O ニ於テ OP ニ垂直デアルカラ互ニ一致セネバナラナイ。

故ニ OC ハ OA. OB ヲ含ム平面ノ上ニ在ル。

系　一ツノ定點ヲ通過シテ一ツノ直線ニ垂直ナル平面ハ唯一ツナリ。

10　定理 (3)　二ツノ平行線ノ一ツニ垂直ナル平面ハ他ノ一ツニモ垂直ナリ。



證明　二ツノ直線 OA. PB ガ平行ニシテ、OA ハ平面 MN ニ垂直デアルトシ、OA. PB ヲ含ム平面ト MN トノ交線ヲ OP トスルトキハ、

∠AOP＝R∠. ∠OPB＝R∠

PB ノ上ニ一點 B ヲ取リ、MN ノ上ニ OP ニ垂直ニ OC ヲ引キ、PB. OC ヲ相等シクスレバ、

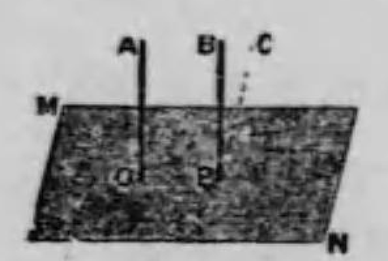
△OPB＝△POC

從テ　OB＝PC

因テ　△BPC＝△COB

然ルニ OC ハ OA. OP ヲ含ム平面ニ垂直デアルカラ又 OB ニモ垂直デアル、從テ PB ハ PC ニ垂直デアル、即チ PB ハ OP. PC ニ垂直デアルカラ平面 MN ニ垂直デアル。

11　定理 (4)　一ツノ平面ニ垂直ナル、直線ハ互ニ平行ナリ。



證明　二ツノ直線 OA. PB ハ各點 OP ニ於テ平面 MN ニ垂直デアルトシ、OA 及 P ヲ含ム平面ニ於テ P ヨリ OA ニ平行ニ直線 PC ヲ引ク。

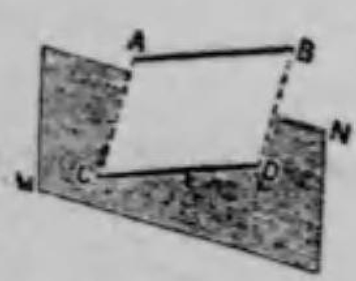
然ルトキハ OA. PC ハ互ニ平行ニシテ OA ハ MN ニ垂直デアルカラ PC モ亦之ニ垂直デアル。　(3)

然ルニ PB ハ MN ニ垂直ニシテ、且一ツノ點ヨリ一ツノ平面ニ唯一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得ルカラ、PB ト PC トハ互ニ一致セネバナラナイ、

故ニ OA . PB ハ互ニ平行デアル。

系　同一ノ直線ニ平行ナル直線ハ互ニ平行ナリ。

12 定理 (5) 二ツノ平行線ノ一ツヲ含ム平面ハ他ノ直線ニ平行ナリ。



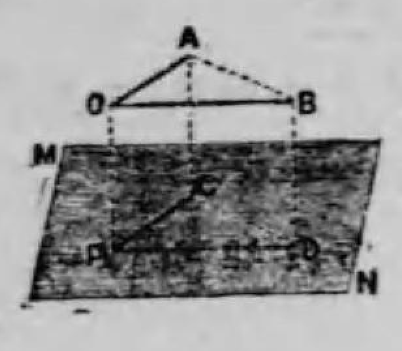
證明 二ツノ平行線 AB.CD ノ一ツデアル CD ヲ含ム平面ヲ MN トシ、AD.CD ヲ含ム平面ヲ作ルトキハ、CD ハ此平面ト MN トノ交線デアル。

故ニ若シ AB ガ MN ニ交ルナラバ、其交點ハ必ズ CD ノ上ニナクテハナラナイ、然ルニ AB.CD ハ平行デアルカラ互ニ相交ルコトハナイ。

故ニ AB ハ MN ニ平行デアル。

系 一ツノ直線ニ平行ナル平面ト其直線ヲ含ム平面トノ交線ハ其直線ニ平行ナリ。

13 定理 (6) 同一ノ平面上ニ在ラザル二ツノ角ノ邊ガ互ニ平行ニシテ且同一ノ方向ナルトキハ、二ノ角ハ相等シ。



證明 二ツノ角 AOB.CPD ニ於テ、OA ト PC.OB PD トハ互ニ平行ニシテ且同一ノ方向デアルトシ、直線OP ヲ引キ

$$OA=PC.\ OB=PD$$

ト取ルトキハ、OACP.OBDP ハ各平行四邊形デアル。

故ニ $$OP=AC=BD.\ OP \parallel AC \parallel BD \qquad (4)$$

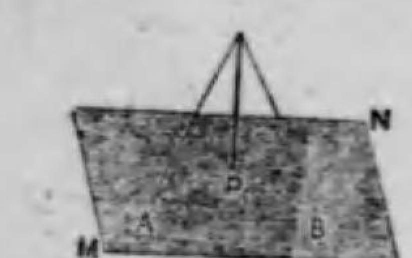
從テ ABDC ハ又一ツノ平行四邊形ニシテ、

$$AB=CD$$

故ニ $$\triangle AOB=\triangle CPD$$

從テ $$\angle AOB=\angle CPD$$

14 定理 (7) 平面外ニ在ル一點ヨリ其平面ニ至ル線分中ニテ、垂線最モ小ニシテ、垂線ト相等シキ角ヲ作ルモノハ相等シ。



證明 平面 MN ノ外ニ在ル一點 O ヨリ MN ニ至ル垂線ヲ OP 他ノ線分ヲ OA トシ、線分 AP ヲ引クトキハ $\angle OPA=R\angle$

OA ハ直角三角形ノ斜邊デアルカラ、

$$OA>OP$$

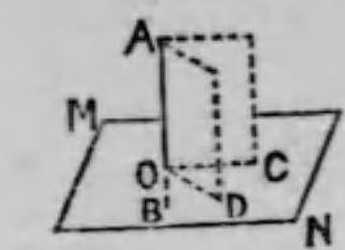
又 O ヨリ MN ニ至ル二ツノ線分ヲ OA.OB トシ、角 AOP.角 BOP

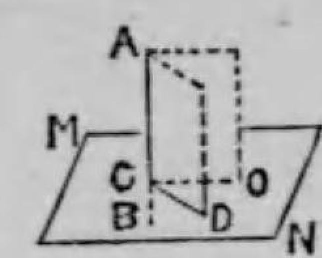
ガ相等シイトキハ、二ツノ直角三角形 AOP.BOP ハ等シイ。

故ニ $$OA=OB$$

15 點ト平面トノ距離 平面外ニ在ル一點カラ其平面ニ至ル垂線ノ長サヲ其點ト其平面トノ距離ト云フ。

16 作圖 與ヘラレタル點ヲ通過シテ與ヘラレタル直線ニ垂直ナル平面ヲ作ルコト。

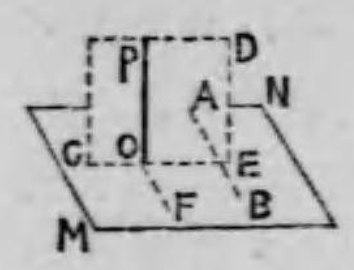


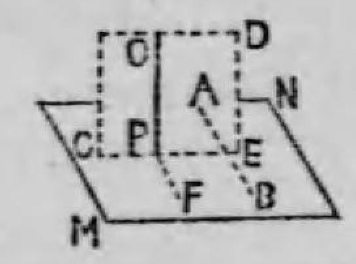


與ヘラレタル直線ヲ AB 與ヘラレタル點ヲ O トシ、O ガ AB ノ上ニ在ルトキハ、AB ヲ含ム二ツノ任意ナル平面ヲ考ヘ、其各平面ノ上ニ於テ AB ニ垂直ニ直線 OC.OD ヲ引クトキハ、OC.OD ヲ含ム平面ハ O ヲ通過シ且定理 (1) ニヨツテ AB ニ垂直デアルカラ即チ求ムル平面デアル。

O ガ AB ノ外ニ在ルトキハ、AB 及 O ヲ含ム平面上ニ於テ AB ニ垂線 OC ヲ引キ、又 AB ヲ含ム任意ノ平面上ニ於テ AB ニ垂線 CD ヲ引クトキハ、OC.CD ヲ含ム平面ハ O ヲ通過シ且ツ AB ニ垂直デアルカラ即チ求ムル平面デアル。

17 作圖 與ヘラレタル點ヲ通過シテ與ヘラレタル平面ニ垂線ヲ引クコト。





與ヘラレタル點ヲ O 與ヘラレタル平面ヲ MN トシ、先ヅ MN ノ上ニ任意ノ一ツノ直線 AB ヲ引キ、O ヲ通過シテ此直線ニ垂直ナル平面 CD ヲ作リ、MN.CD ノ交線ヲ CE トシ、平面 CD ノ上ニ於テ、O ヨリ CE ニ垂線 OP ヲ引クトキハ、OP ハ即チ求ムル垂線デアル。

之ヲ證明スルニハ、O ガ MN ノ上ニ在ル場合ニハ其平面上ニ於テ O ヨリ CE ニ垂線 OF ヲ引ク。

然ルトキハ OF ハ AB ニ平行ニシテ且ツ AB ハ CD ニ垂直デアルカラ、定理 (3) ニヨツテ OF モ亦 CD ニ垂直デアル、從テ OF ハ OP ニ垂直デアル。然ルニ OP ハ又 CE ニ垂直即チ OP ハ OE.OF ニ垂直デアルカラ、OE.OF ヲ含ム平面 MN ニ垂直デアル。

O ガ MN ノ外ニ在ルトキモ亦之ト同様デアル。

問題

(1) 平面外ノ一ツノ定點ヨリ引ケル相等シキ斜線ノ足ハ其點ヨリ引ケル垂線ノ足ヨリ相等シキ距離ニアルコトヲ證明セヨ。

(2) 一ツノ定點ヨリ與ヘラレタル平面ヘ引ケル直線ノ中垂線ト等シキ角ヲナスモノハ相等シク、之ト大ナル角ヲナスモノハ之ト小ナル角ヲナスモノヨリモ大ナルコトヲ證明セヨ。

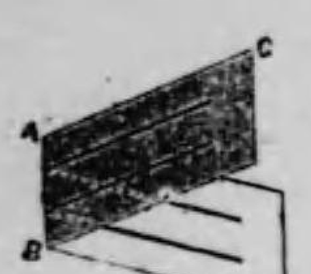
(3) 一ツノ直線及平面ガ他ノ直線ニ垂直ナルトキハ此等ノ二ツハ平行ナルコトヲ證明セヨ。

(4) 二ツノ定點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ一ツノ平面ナルコトヲ證明セヨ。

(5) 直線ト平面トガ互ニ平行ナルトキ、其直線上ニ於ケル任意ノ點ヨリ其平面ニ至ル間ノ平行直線ハ何レモ相等シキコトヲ證明セヨ。

第三節　平面ト平面トニ關スル定理

18 二面角 二ツノ平面ガ相交ルトキ、此二ツノ平面ハ一ツノ二面角ヲ作ルト云ヒ、其平面ヲ二面角ノ面ト云ヒ其交線ヲ二面角ノ稜ト云フ。

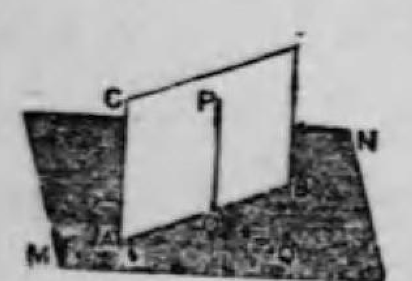


圖ニ於テ二ツノ平面 ABC. ABD ハ一ツノ二面角ヲ作ル、之ヲ二面角 AB ト云フ。

二面角ノ稜 AB ノ上ニ在ル一點ヲ通過シテ、其各面ノ上ニ於テ稜ニ垂直ナル直線ヲ引クトキハ，此二ツノ直線ノ作ル角ノ大サハ定理(6)節ニヨリ點ノ位置ニ係ハラズ恒ニ一定ス、此角ヲ二面角ノ平面角ト云ヒ、之ヲ以テ二面角ノ大サヲ測ルモノトス。

二ツノ平面ノ作ル二面角ノ平面角ガ直角デアルトキハ、二ツノ平面ハ互ニ垂直デアル。

19 定理 (8) 一ツノ平面ノ一ツノ垂線ヲ含ム平面ハ其平面ニ垂直ナリ。



證明 平面 MN ノ一ツノ垂線 OP ヲ含ム平面 BC ト MN トノ交線ヲ AB トシ、點 O ヲ通過シテ MN ノ上ニ AB ニ垂線 OQ ヲ引ク。

然ルトキハ OP ハ平面 MN ニ垂直デアルカラ垂線ノ定義ニヨリ AB ニ垂直ニシテ且ツ平面 BC ノ上ニ在ル。

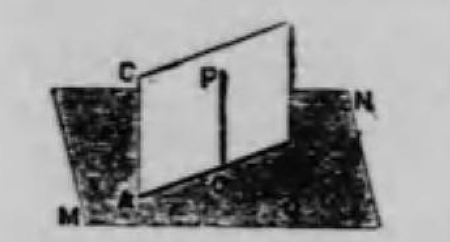
故ニ角 POQ ハ二ツノ平面 MN. BC ノ夾ム二面角ノ平面角デアル。

然ルニ直線 OP ハ平面 MN ニ垂直デアルカラ OQ ニモ亦垂直デアル。

即チ二ツノ平面 MN. BC ノ平面角ガ直角デアルカラ二ツノ平面 MN. BC ハ互ニ垂直デアル。 (17)

系 一ツノ平面ノ上又ハ其外ニ在ル一ツノ點ヲ通過シテ其平面ニ垂直ナル平面ハ無數ナリ。

20 定理 (9) 二ツノ平面ガ互ニ垂直ナルトキハ、其一ツノ上ニ在リテ交線ニ垂直ナル直線ノ他ノ平面ニ垂直ナリ。



證明 互ニ垂直デアル二ツノ平面 MN. BC ノ交線 AB ニ垂直ニシテ且ツ平面 BC ノ上ニ在ル直線ヲ OP トシ、O ヲ通過シテ MN ノ上ニ直線 AB ニ垂線 OQ ヲ引ク。

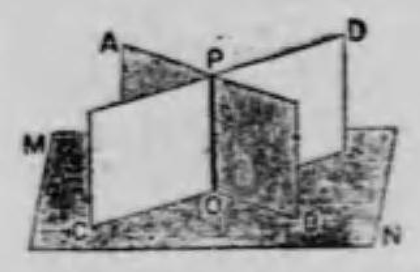
然ルトキハ角 POQ ハ二面角 AB ノ平面角ニシテ、二ツノ平面 MN. BC ハ互ニ垂直デアルカラ OP ハ OQ ニ垂直デアル。

然ルニ OP ハ又 OA ニ垂直。

故ニ OP ハ OA. OQ ヲ含ム平面 MN ニ垂直デアル。 (1)

系 一ツノ平面ニ垂直ナラザル直線ヲ含ミテ其平面ニ垂直ナル平面ハ唯一ツナリ。

21 定理 (10) 二ツノ相交ル平面ガ各第三ノ平面ニ垂直ナルトキハ、其交線モ亦第三ノ平面ニ垂直ナリ。



證明 二ツノ平面 AB. CD ハ直線 OP ニ於テ相交リ且ツ第三ノ平面 MN ニ垂直デアルトシ、AB ト MN 及 CD ト MN ノ交線ヲ各 OB. OC トス。

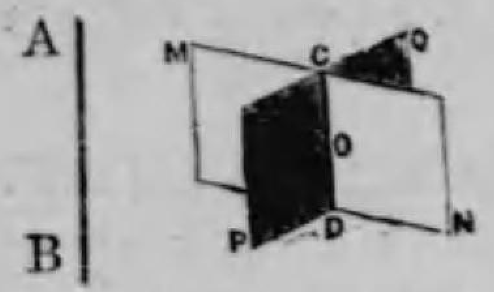
平面 AB ノ上ニ在ツテ點 O ヲ通過シ OB ニ垂直ナル直線ハ平面 MN ニ垂直デアル、又平面 CD ノ上ニ在ツテ點 O ヲ通過シテ OC ニ垂直ナル直線モ亦 MN ニ垂直デアル。 (9)

然ルニ點 O ニ於テ MN ニ垂直ナル直線ハ唯一ツニシテ、二ツノ平面 AB. CD ノ交線モ亦唯一ツデアル。

故ニ二ツノ平面 AB. CD ノ交線 OP ハ即チ平面 MN ニ垂直デアル。

22 定理 (11) 二ツノ相交ル平面ガ各同一ノ直線ニ平行ナルトキ

ハ、其交線モ亦其直線ニ平行ナリ。



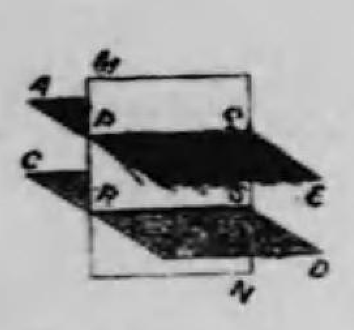
證明 二ツノ平面 MN. PQ ハ同一ノ直線 AB ニ平行ナリトシ、其交線 CD ノ上ニ於ケル任意ノ一點ヲ O トス。

直線 AB 及 O ヲ含ム平面ト平面 MN トノ交線ハ AB ニ平行ニシテ、又此平面ト平面 PQ トノ交線モ亦 AB ニ平行デアル。 (5)

然ルニ O ヲ通過シテ AB ニ平行ナル直線ハ唯一ツニシテ、二ツノ平面ノ交線モ亦唯一ツデアル。

故ニ二ツノ平面 MN. PQ ノ交線 CD ハ即チ直線 AB ニ平行デアル。

23 定理 (12) 二ツノ平行ナル平面ト第三ノ平面トノ交線ハ互ニ平行ナリ。



證明 二ツノ平行ナル平面 AB. CD ト第三ノ平面 MN トノ交線ヲ各 PQ. RS トス。

若シ此二ツノ直線 PQ. RS ガ相交ルナラバ、其交點ハ平面 AB ノ上ニモ、又平面 CD ノ上ニモナクテハナラナイ。

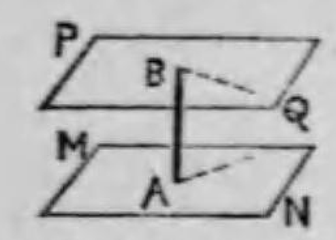
即チ交點ハ AB. CD ノ交線ノ上ニナクテハナラナイ。

然ルニ AB. CD ハ平行デアルカラ相交ルコトハナイ。

故ニ二ツノ直線 PQ. RS ハ相交ハラズシテ且ツ同一ノ平面 MN ノ上ニ在ルカラ、PQ. RS ハ互ニ平行デアル。

系 二ツノ平行ナル平面ノ間ニ在ル平行線ノ部分ハ相等シ。

24 定理 (13) 同一ノ直線ニ垂直ナル二ツノ平面ハ互ニ平行ナリ。



證明 直線 AB ニ垂直ナル二ツノ平面ヲ MN. PQ トシ、AB ト MN. PQ トノ交點ヲ各 A.B トス。

若シ此二ツノ平面 MN. PQ ガ相交ルナラバ、其交線ノ上ニ任意ノ一點 C ヲ取リ、直線 AC. BC ヲ引クトキハ、AB ハ MN ニ垂直デアルカラ其平面上ニ在ル直線 AC ニ垂直デアル。

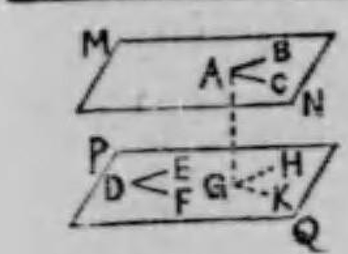
同様ニ AB ハ BC ニモ亦垂直デアル。

即チ AC. BC ハ何レモ點 C ヲ通過シテ、直線 AB ニ垂直デアル。

然ルニ同一ノ點ヲ通過シテ同一ノ直線ニ垂直ナル直線ハ唯一ツデアル。

故ニ二ツノ平面 MN. PQ ハ相交ルコトハナイ，即チ互ニ平行デアル。

25 定理 (14) 二ツノ相交ル直線ガ他ノ二ツノ相交ル直線ニ各平行ナルトキハ、前ノ一雙ヲ含ム平面ハ後ノ一雙ヲ含ム平面ニ平行ナリ。



證明 直線 AB ハ直線 DE ニ，又直線 AC ハ直線 DF ニ平行ナリトシ、A ヨリ DE. DF ヲ含ム平面 PQ ニ垂線 AG ヲ引キ、DE ニ平行ニ GH. 又 DF ニ平行ニ GK ヲ引ク。

然ルトキハ $\angle AGH = R\angle$. $\angle AGK = R\angle$

又 AB. DE ハ平行ニシテ、DE. GH ハ平行デアルカラ、

AB. GH ハ平行デアル。 (4)

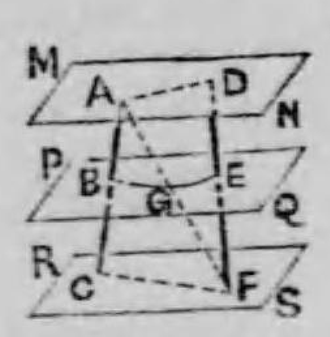
従テ $\angle BAG = R\angle$

同様ニ $\angle CAG = R\angle$

即チ AG ハ AB. AC ヲ含ム平面 MN ニ垂直デアル。

然ルニ AG ハ又 PQ ニ垂直デアルガ故ニ MN. PQ ハ互ニ平行デアル。 (13)

26 定理 (15) 三ツノ平行ナル平面ノ間ニ在ル二ツノ直線ノ部分ハ互ニ比例ヲナス。



證明 二ツノ直線ト三ツノ平行ナル平面 MN. PQ. RS トノ交點ヲ各 A.B.C 及 D.E.F トシ、直線 AC. AF ヲ含ム平面ト PQ. RS トノ交線ヲ各 BG. CF トス。

然ルトキハ BG. CF ハ二ツノ平行ナル平面ト第三ノ平面トノ交線デアルガ故ニ互ニ平行デアル。 (12)

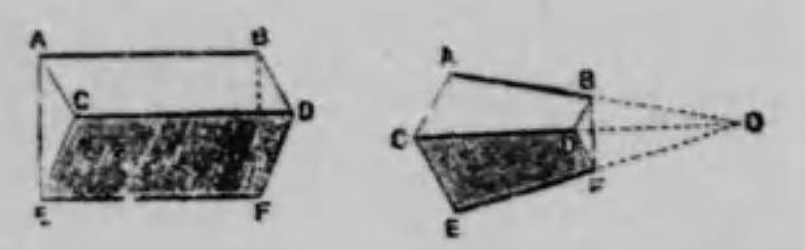
又 AF. FD ヲ含ム平面ト MN. PQ トノ交線ヲ各 AD. GE トスルトキハ、AD. GE ハ互ニ平行デアル。

故ニ $\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GF}$. $\frac{AG}{GF} = \frac{DE}{EF}$

従テ $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

27 定理 (16) 三ツノ平面ノ交線ハ互ニ平行スルカ又ハ一點ニ於テ相交ル。

證明 二ツノ平面 AD. CF ノ交線ヲ CD トシ、CF. EB ノ交線ヲ EF トシ、EB. AD ノ交線ヲ AB トスル。



若シ AB. CD ガ平行ナラバ, AB ヲ含ム平面 EB ト CD ヲ含ム平面 CF トハ何レモ AB 又ハ CD ニ平行ナル直線ニ平行デアル。 (5)

従テ EB. CF ノ交線ハ又此直線ニ平行デアル。 (11)

故ニ AB. CD. EF ハ互ニ平行デアル。 (4)

故ニ若シ AB. CD ガ一點 O ニ於テ相交ルナラバ、O ハ AB ノ上ニ在ルガ故ニ、二ツノ平面 AD. EB ニ共通デアル、又 O ハ CD ノ上ニ在ルガ故ニ二ツノ平面 AD. CF ニモ共通デアル、即チ O ハ二ツノ平面 EB. CF ニ共通デアル、然ルニ此二ツノ平面ノ交線ハ EF デアルカラ O ハ必ズ EF ノ上ニ在ル。

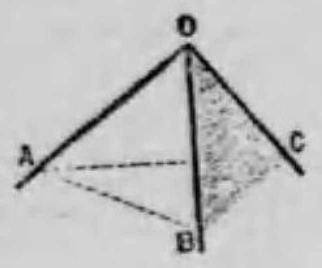
故ニ AB. CD. EF ハ一點ニ於テ相交ル。

此特別ナル場合トシテ、二ツノ交線ガ一致スルトキニハ第三ノ交線モ亦之ニ一致スル、即チ三ツノ平面ハ一直線ニ於テ相交ルコトニナル。

系 二ツノ平行線ノ各ヲ含ム平面ノ交線ハ此平行線ニ平行ナリ。

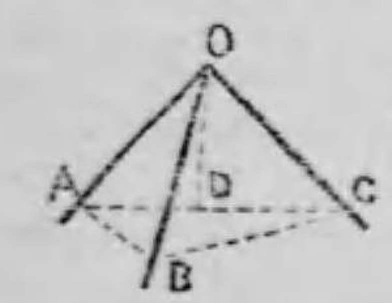
28 多面角 三ツ又ハ三ツ以上ノ平面ガ一點ニ於テ相交ルトキハ、此等ノ平面ハ一ツノ多面角ヲ作ルト云ヒ、其點ヲ角ノ頂點ト云ヒ、各平面ヲ角ノ面ト云ヒ、平面ノ交線ヲ角ノ稜ト云ヒ、各稜ガ其次ノ稜ト作ル角ヲ多面角ノ平面角ト云フ。

多面角ヲ作ル平面ノ數ガ三ツナラバ之ヲ三面角ト云ヒ、四ツナラバ四面角ト云フ, 其他之ニ準ズ。



圖ニ於テ、三ツノ平面ガ點 O ニ於テ一ツノ三面角ヲ作ル、之ヲ三面角 O-ABC ト云フ。角 AOB. 角 BOC. 角 COA ハ各其平面角デアル。

29 定理 (17) 三面角ノ二ツノ平面角ノ和ハ他ノ一ツノ平面角ヨリモ大ナリ。



證明 三面角 O-ABC ニ於テ最大ナル平面角ヲ AOC トシ、角 AOB ニ等シク角 AOD ヲ取リ、稜 OA. OC ニ交ル直線 AC ト OD トノ交點ヲ D トシ、OD ニ等シク OB ヲ取リ、線分 AB. BC ヲ作ル。

然ルトキハ二ツノ三角形 AOB. AOD ニ於テ、

$\angle AOB=\angle AOD.\ OB=OD.$ OA ハ共通、

故ニ $\triangle AOB=\triangle AOD$

従テ $AB=AD$

然ルニ $AB+BC>AC$

故ニ $BC>CD$

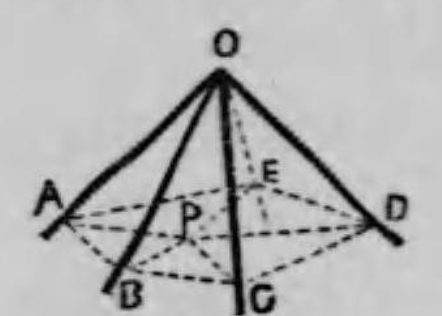
又二ツノ三角形 BOC. DOC ニ於テ、

$OB=OD$, OC ハ共通、$BC>CD$

故ニ $\angle BOC>\angle COD$

従テ $\angle AOB+\angle BOC>\angle AOC$

30 定理 (18) 多面角ノ總テノ平面角ノ和ハ四直角ヨリモ小ナリ。



證明 一ツノ平面ガ多面角 O-ABCDE ノ各ノ稜ト A. B. C. D. E ニ於テ交リテ作ル多角形ヲ ABCDE トシ、其内ニ一點 P ヲ取リ、線分 PA. PB. PC. PD. PE ヲ作ル。

然ルトキハ點 A ハ三面角 A-OBE ノ頂點デアルカラ、

$\angle OAB+\angle OAE>\angle PAB+\angle PAE$ (17)

他ノ頂點 B. C. D. E ニ就テモ同様デアル。

故ニ點 O ヲ頂點トスル三角形 OAB. OBC 等ノ總テノ底角ノ和ハ點 P ヲ頂點トスル三角形 PAB. PBC 等ノ總テノ底角ノ和ヨリモ大キイ。

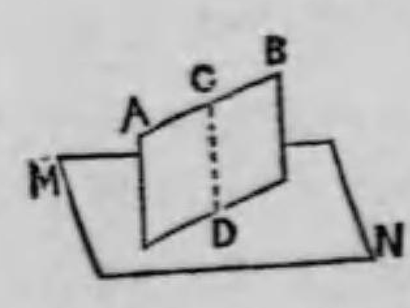
然ルニ二組ノ三角形ノ數ハ相等シイカラ其内角ノ和ハ相等シイ。

従テ $\angle AOB+\angle BOC+\cdots\cdots<\angle APB+\angle BPC+\cdots\cdots$

$\angle APB+\angle BPC+\cdots\cdots=4R\angle$

故ニ $\angle AOB+\angle BOC+\cdots\cdots<4R\angle$

31 作圖 與ヘラレタル直線ヲ含ミテ與ヘラレタル平面ニ垂直ナル平面ヲ作ルコト。



與ヘラレタル直線ヲ AB 與ヘラレタル平面ヲ MN トシ、AB ノ上ニ在ル任意ノ一點 C ヨリ MN ニ垂線 CD ヲ引キ、次ニ AB. CD ヲ含ム平面ヲ作ルトキハ、此平面ハ垂線 CD ヲ含ムガ故ニ定理 (8) ニヨリ MN ニ垂直ニシテ、即チ求ムル平面デアル。

問題

(1) スベテノ邊ガ同一平面上ニアラザル四邊形(ゴーシュ四邊形)ノ相隣レル邊ノ中點ヲ結ビツクルトキハ一ツノ平行四邊形ヲナスコトヲ證

明セヨ。

(2) 一ツノ平面ニ垂直ナル平面ニ平行ナル直線ハ其平面ニ垂線ナルコトヲ證明セヨ。

(3) 二ツノ平行ナル平面ノ間ニアル垂線ノ長サハ一定ナルコトヲ證明セヨ。

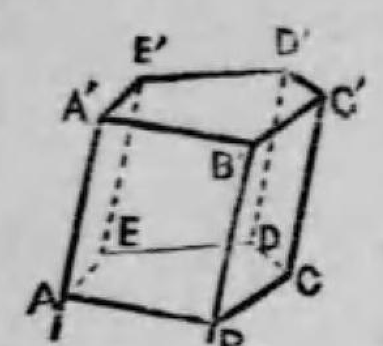
(4) 同一ノ平面ニ平行ナル多クノ平面ハ互ニ平行ナルコトヲ證明セヨ。

第二章 多面體

第一節 多面體ニ關スル定理

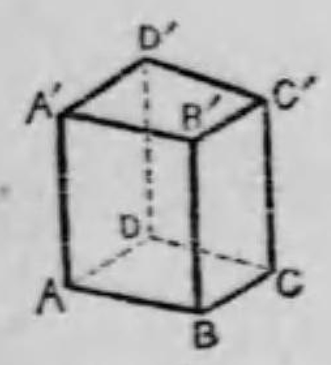
32 角壔 或一ツノ直線ニ平行ナル若干ノ平面ト此等ノ平面ニ交リ且ツ互ニ平行ナル二ツノ平面トニテ圍マレタル多面體ヲ角壔ト云フ。

角壔ノ兩端ニ在リテ互ニ平行ナル面ヲ底面ト云ヒ、二ツノ底面ノ間ニ在ル面ヲ側面ト云ヒ、側面ノ交線ヲ側稜ト云フ。



圖ニ於テ、ABCDE-A'B'C'D'E' ハ一ツノ角壔ニシテ、ABCDE. A'B'C'D'E' ハ其底面, ABB'A'. BCC'B' 等ハ何レモ XY ニ平行ナル側面、又 AA'. BB'. 等ハ其側稜デアル。

33 定理 (19) 角壔ノ側面ハ平行四邊形ヲナシ、其底面ハ相等シキ多角形ヲナス。



證明 角壔 ABCD-A'B'C'D' ニ於テ、平面 AB'.BC'.CD'.DA' ハ何レモ同一ノ直線ニ平行デアルカラ，其交線 AA'.BB'.CC'.DD' モ亦其直線ニ平行ニシテ、互ニ平行デアル。 (11)(4)

又 AB ト A'B'.BC ト B'C'.CD ト C'D'.DA ト D'A' ハ二ツノ平行ナル平面 AC.A'C' ト各側面トノ交線デアルカラ互ニ平行デアル。 (12)

故ニ ABB'A'.BCC'B'.CDD'C'.DAA'D' ハ何レモ平行四邊形デアル。

又二ツノ多角形 ABCD. A'B'C'D' ニ於テ

$$AB=A'B'.\ BC=B'C'.\ CD=C'D'.\ DA=D'A'$$

$$AB \parallel A'B'.\ BC \parallel B'C'.\ CD \parallel C'D'.\ DA \parallel D'A'$$

從テ $\angle A=\angle A'.\ \angle B=\angle B'.\ \angle C=\angle C'.\ \angle D=\angle D'$ (6)

故ニ二ツノ多角形 ABCD. A'B'C'D' ハ相等シイ。

系 1. 角壔ノ側稜ハ相等シ。

系 2. 角壔ト其底面ニ交ラザル二ツノ平行ナル平面トノ交線ハ相等シキ多角形ヲナス。

34 直角壔、斜角壔 角壔ハ其底面ガ三角形,四角形等ヲナスニ從ヒ、之ヲ各三角壔、四角壔等ト云フ。

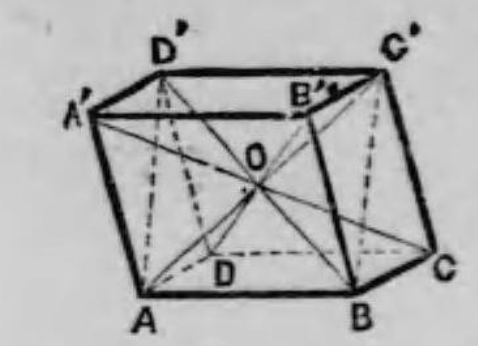
角壔ノ中ニテ、側稜ガ底面ニ垂直ナルモノヲ直角壔ト云ヒ、垂直デナイモノヲ斜角壔ト云フ。

35 平行六面體 直角壔ニ於テハ、側面ハ何レモ直方形デアル、角壔ノ中デ、其底面ガ平行四邊形ノモノヲ平行六面體ト云ヒ、平行六面體ノ中デ側稜ガ底面ニ垂直ナルモノヲ直平行六面體ト云フ。

直平行六面體ノ中デ、其各ノ面ガ何レモ矩形デアルモノヲ直六面體ト云ヒ，其各面ガ何レモ正方形デアルモノヲ立方體ト云フ。

平行六面體ノ頂點ノ中ニテ同一ノ平面ノ上ニナイ二ツヲ兩端トスル線分ヲ其對角線ト云フ。

36 定理 (20) 平行六面體ノ相對スル面ハ相等シク、其對角線ハ同一ノ點ニ於テ相交ル。



證明 平行六面體 ABCD-A'B'C'D' ニ於テ、其面ハ何レモ平行四邊形ニシテ AB ト DC.BB' ト CC' ハ相等シク且ツ平行デアル，從テ角 ABB'. 角 DCC' ハ相等シイ。

故ニ ABB'A'.DCC'D' ハ相重ヌルコトヲ得，即チ相等シイ。

同樣ニ BCC'B' ト ADD'A'.ABCD ト A'B'C'D' ハ相等シイ。

故ニ相對スル面ハ相等シイモノデアル。

次ニ AB.C'D' ハ互ニ平行ニシテ且ツ相等シイカラ ABC'D' ハ一ツノ平行四邊形デアル，從テ其對角線 AB'.BD' ハ各ノ中點ニ於テ相交ル。

同樣ニ BD' ト CA'.AC' ト DB' ハ何レモ各ノ中點ニ於テ相交ル。

故ニ四ツノ對角線ハ同一ノ點ニ於テ相交ル。

37 角錐 同一ノ點ヲ通過スル若干ノ平面ト此等ノ平面ニ交リ且ツ其點ヲ通過シナイ一ツノ平面トニテ圍ムダ多面體ヲ角錐ト云フ。

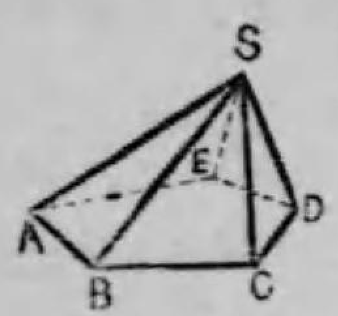
同一ノ點ヲ共有スル面ヲ角錐ノ斜面ト云ヒ、斜面ニ交ル他ノ一ツノ面ヲ底面ト云ヒ、斜面ノ交線ヲ斜稜ト云ヒ、斜稜ノ交點ヲ頂點ト云ヒ、頂

點ヨリ底面ニ至ル距離ヲ角錐ノ高サト云フ。

角錐ノ斜面ハ何レモ三角形デアル。

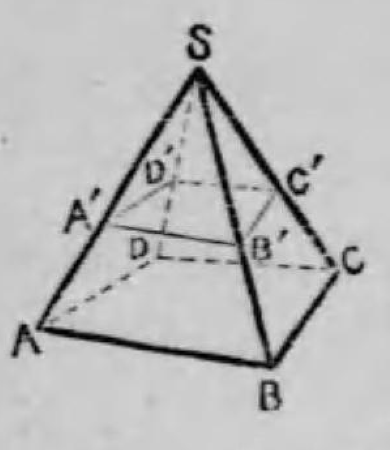
角錐ハ其底面ガ三角形、四角形等ヲナスニ從ヒ、之ヲ各三角錐、四角錐等ト云フ。

38 直角錐 角錐ノ底面ガ正多角形ヲシテ，其頂點ヨリ下シタ垂線ガ多角形ノ外接圓ノ中心ヲ通過スルモノヲ直角錐ト云フ、直角錐ノ斜面ハ相等シイ二等邊三角形ニシテ、其高サヲ直角錐ノ斜高ト云フ。



圖ニ於テ、S–ABCDE ハ五角錐ニシテ、S ハ其頂點、ABCDE ハ其底面、SAB. SA ハ各其斜面及斜稜デアル。

39 定理 (21) 角錐ト其底面ニ平行ナル平面トノ交線ハ底面ノ多角形ト相似ナル多角形ヲナス。



證明 角錐 S–ABCD ノ底面 ABCD ニ平行ナル平面ト角錐トノ交線ヲ A'B'C'D' トスルトキハ、二ツノ多角形 ABCD. A'B'C'D' ニ於テ、AB ト A'B'.BC ト B'C'. CD ト C'D'.DA ト D'A' ハ二ツノ平行ナル平面ト他ノ平面トノ交線デアルカラ互ニ平行デアル。 (12)

從テ $\angle A=\angle A'.\angle B=\angle B'.\angle C=C'.\angle D=D'.$ (6)

又 AB ト A'B'.BC ト B'C' ハ互ニ平行デアルカラ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{SB}{SB'} \qquad \frac{BC}{B'C'}=\frac{SB}{SB'}$$

即チ
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$$

同様ニ
$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}$$

即チ二ツノ多角形 ABCD, A'B'C'D' ニ於テ

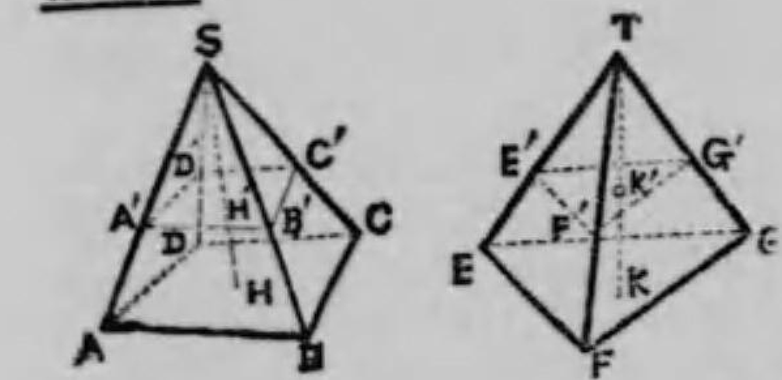
$$\angle A=\angle A'.\ \angle B=\angle B'.\ \angle C=\angle C'.\ \angle D=\angle D'.$$
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}$$

故ニ二ツノ多角形ハ相似デアル。

系 角錐ノ底面ニ平行ナル平面ハ斜稜及高サヲ同一ノ比ニ分ツ。

40 定理 (22) 高サ及底面ノ面積ガ相等シキ二ツノ角錐ヲ頂點ヨリ

等距離ニシテ且ツ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ、其截面ノ面積ハ相等シ。



證明 二ツノ角錐 S–ABCD. T–EFG ニ於テ、其高サ SH. TK ガ相等シク、其底面 ABCD. EFG ノ面積モ亦相等シトシ、頂點 S 及 T ヨリ等距離ニシテ且ツ各底面ニ平行ナル平面ト角錐トノ交線ヲ各 A'B'C'D'. E'F'G' トシ、SH. TK ト平面 A'B'C'D'. E'F'G' トノ交點ヲ各 H'.K' トス。

然ルトキハ ABCD ト A'B'C'D'. EFG ト E'F'G' ハ各相似多角形デアル。……(21)

故ニ
$$\frac{\text{ABCD ノ面積}}{\text{A'B'C'D' ノ面積}}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$$
$$\frac{\text{EFG ノ面積}}{\text{E'F'G' ノ面積}}=\frac{\overline{EF}^2}{\overline{E'F'}^2}$$

又
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{SA}{SA'}=\frac{SH}{SH'} \qquad \frac{EF}{E'F'}=\frac{TE}{TE'}=\frac{TK}{TK'}$$

即チ
$$\frac{\text{ABCD ノ面積}}{\text{A'B'C'D' ノ面積}}=\frac{\overline{SH}^2}{\overline{SH'}^2}$$
$$\frac{\text{EFG ノ面積}}{\text{E'F'G' ノ面積}}=\frac{\overline{TK}^2}{\overline{TK'}^2}$$

然ルニ SH=TK SH'=TK'

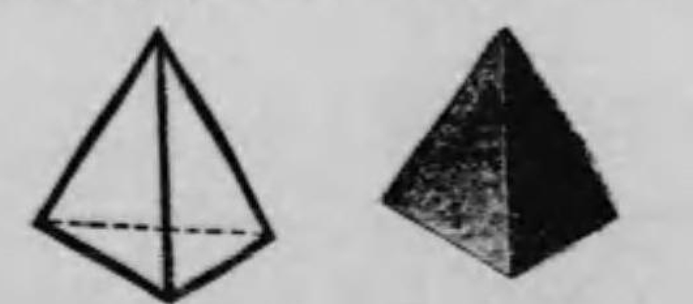
(ABCD ノ面積)=(EFG ノ面積)

故ニ (A'B'C'D' ノ面積)=(E'F'G' ノ面積)

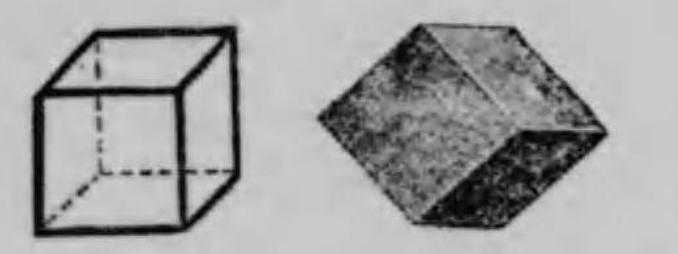
系 角錐ヲ其底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ、其截面ト底面トノ面積ノ比ハ頂點ヨリ其各平面ニ至ル距離ノ平方ノ比ニ等シ。

41 正多面體 多面體ノ各ノ面ガ相等シイ正多角形デアッテ、其多面角ガ皆相等シイトキニハ、其多面體ヲ正多面體ト云フ。

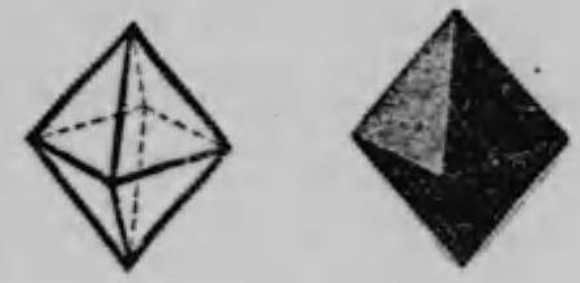
正多面體ニハ次ノ五種ガアルモノトス。



(1) 各ノ面ガ相等シイ正三角形カラナル正四面體。

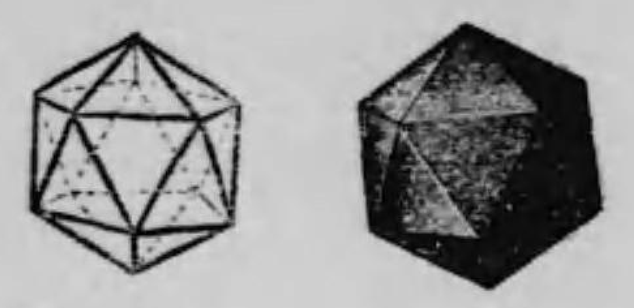


(2) 各ノ面ガ相等シイ正方形カラナル正六面體。



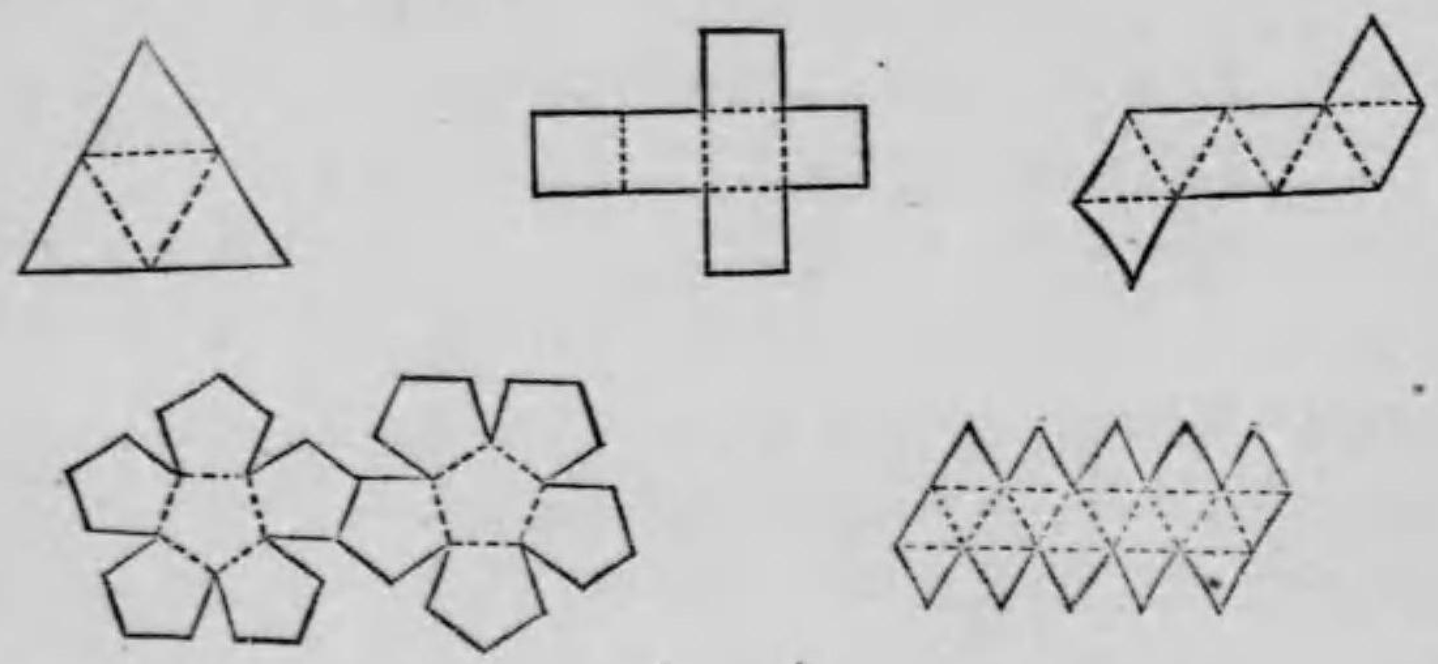
(3) 各ノ面ガ相等シイ正三角形カラナル正八面體。

(4) 各ノ面ガ相等シイ正五角形カラナル正十二面體。

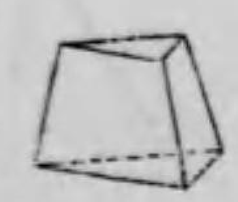


(5) 各ノ面ガ相等シイ正三角形カラナル正二十面體。

以上五種ノ正多面體ハ次ノ圖ノ樣ニ厚紙ヲ截リ點線ニ沿ウテ折リ曲ゲテ之ヲ作ルコトガ出來ル。



42 角錐臺 角錐ノ斜面、底面及底面ニ平行ナル截面ニテ圍ムダ多面體ヲ截頭角錐又ハ角錐臺ト云ヒ、底面ト截面トヲ其底面ト云ヒ、其間ノ距離ヲ其高サト云ヒ、截頭直角錐ニ於



テ、斜面ノ平行ナル二邊ノ距離ヲ其斜高ト云フ。

問題

(1) 直六面體ノ對角線ハ皆相等シキコトヲ證明セヨ。

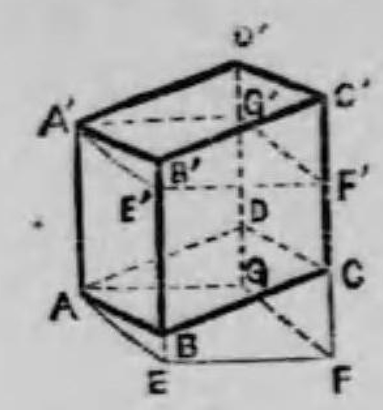
(2) 四面體ノ相對スル稜ノ中點ヲ結ブ直線ハ一點ニ會シテ互ニ他ヲ二等分スルコトヲ證明セヨ。

(3) 直六面體ノ長サ a 寸、幅 b 寸、厚サ c 寸ヲ知ツテ其對角線ヲ計算セヨ。

第二節　角壔、角錐ノ體積

43 角壔ノ高サ 角壔ノ二ツノ底面ノ距離ヲ其高サト云ヒ、側稜ニ垂直ナル平面ニテ角壔ヲ截ルトキ、其截斷面ヲ直截面ト云フ。

44 定理 (23) 斜角壔ノ體積ハ其直截面ヲ底面トシ、其側稜ニ等シキ高サヲ有スル直角壔ノ體積ニ等シ。



證明 斜角壔 ABCD-A'B'C'D' ノ側稜 AA' 上ノ點 A 及 A' ヲ通過シテ AA' ニ垂直ナル平面ヲ作リ、斜角壔ノ各側面又ハ其延長面ニ交ラシメルトキハ此ニ二ツノ直截面 AEFG. A'E'F'G' ガ出來ル。

AEFG-A'E'F'G' ハ直角壔ニシテ、其底面ハ相等シイ。

$$AA'=BB'=CC'=DD'. \qquad (19)$$

又

$$AA'=FE'=FF'=GG'$$

故ニ

$$EB=E'B'.\ FC=F'C'.\ GD=G'D'$$

又 BE. CF. DG ハ何レモ直截面 AEFG ニ垂直ニシテ、B'E'. C'F'. D'G' ハ何レモ直截面 A'E'F'G' ニ垂直デアルカラ多面體 A'E'F'G'-B'C'D' ハ多面體 AEFG-BCD ニ重ネルコトガ出來ル、從テ此二ツノ體積ハ相等シイ。

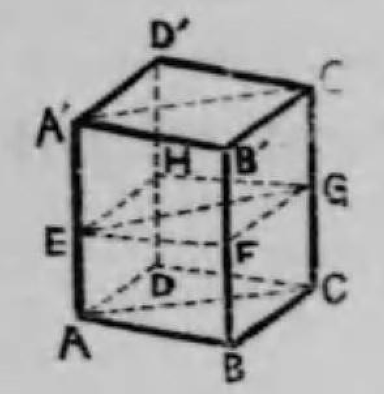
今多面體 ABCD-A'E'F'G' ニ多面體 A'E'F'G'-B'C'D' ヲ加ヘルトキハ斜角壔 ABCD-A'B'C'D' トナル、又多面體 AEFG-BCD ヲ加ヘルトキハ直角壔 AEFG-A'E'F'G' トナル。

故ニ斜角壔 ABCD-A'B'C'D' ノ體積ハ其直截面 AEFG ヲ底面トシ、其側稜 AA' ニ等シイ高サヲモツ直角壔 AEFG-A'E'F'G' ノ體積ニ等シイ。

系 平行六面體ノ體積ハ其直截面ヲ底面トシ其側稜ニ等シキ高サヲ有

スル直平行六面體ノ體積ニ等シ。

45 定理 (24) 平行六面體ノ相對スル稜ヲ含ム平面ハ之ヲ相等シキ體積ヲ有スル二ツノ三角壔ニ分ツ。



證明 平行六面體 ABCD-A′B′C′D′ ノ側稜ハ互ニ平行デアルカラ，其相對スル側稜 AA′. CC′ ヲ含ム平面ヲ作ルトキハ、二ツノ多面體 ABC-A′B′C′. ABD-A′B′D′ トナル。

三ツノ平面 ABB′A′. BCC′B′. CAA′C′ ハ何レモ一ツヅツ側稜ヲ含ムガ故ニ側稜 DD′ ニ平行デアル。(5)

又底面 ABCD. A′B′C′D′ ハ互ニ平行デアル。

故ニ ABC-A′B′.C′ ハ一ツノ三角壔デアル。

同樣ニ ACD-A′C′D′ モ亦一ツノ三角壔デアル。

次ニ側稜 AA′ ニ垂直ナル平面ヲ作リ、此平面ト平行六面體トノ交線ヲ EFGH トスレバ EFG ハ三角壔 ABC-A′B′C′ ノ直截面ニ シテ EHG ハ三角壔 ACD-A′C′D′ ノ直截面デアル。

故ニ三角壔ABC-A′B′C′ ノ體積ハ EFG ヲ底面トシ AA′ ヲ高サトスル直角壔ノ體積ニ等シク、又三角壔 ACD-A′C′D′ ノ體積ハ EHG ヲ底面トシ、AA′ ヲ高サトスル直角壔ノ體積ニ等シイ。 (23)

然ルニ EF ト GH. EH ト FG ハ何レモ平面 EFGH ト二ツノ平行ナル平面トノ 交線デアルカラ 互ニ平行 ニシテ，從テ EG ハ平行四邊形 EFGH ノ對角線デアル。

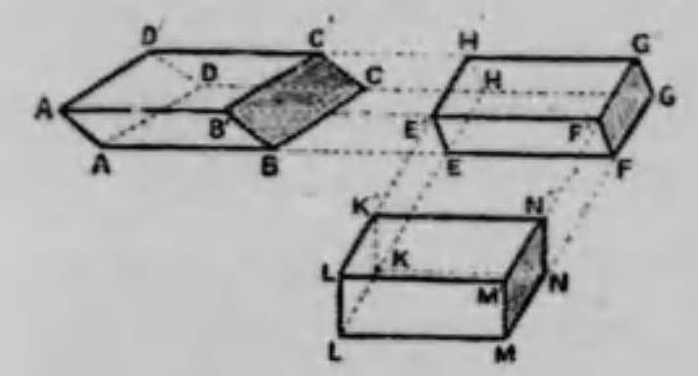
故ニ二ツノ三角形 EFG. GHE ハ相等シイ。

因テ AA′ ヲ高サトシ、EFG ヲ底面トスル直三角壔ト AA′ ヲ高サトシ、EHG ヲ底面トスル直三角壔トハ相重ネルコトガ出來ル、即チ其體積ハ相等シイ。

故ニ二ツノ三角壔 ABC-A′B′C′. ACD-A′C′D′ ノ體積ハ相等シイ、即チ平行六面體 ABCD-A′B′C′D′ ノ相對スル稜 AA′. CC′ ヲ含ム平面ハ之ヲ相等シイ體積ヲモツテ居ル二ツノ三角壔 ABC-A′B′C′.ACD-A′C′D′ ニ分ツ。

46 定理 (25) 平行六面體ノ體積ハ高サガ其高サニ等シク、底面ノ底邊及高サガ其底面ノ底邊及高サニ等シキ直六面體ノ體積ニ等シ。

證明 平行六面體 ABCD-A′B′C′D′ ノ側稜 AB 及之ニ平行ナル側稜ヲ



延長シテ AB ニ等シク EF ヲ取リ E 及 F ヨリ EF ニ垂直ナル平面ヲ作ルトキハ、此ニ一ツノ平行六面體 EFGH-E′F′G′H′ ガ出來ル。

此平行六面體ノ側稜 EF ハ AB ニ等シク又其底面 EE′H′H ハ ABCD-A′B′C′D′ ノ側稜 AB ニ垂直ナル直截面ニ等シイ。

然ルニ EFGH-E′F′G′H′ ハ側稜 EF ガ底面 EE′H′H ニ垂直デアルカラ直平行六面體デアル。

從テ平行六面體 ABCD-A′B′C′D′ ノ體積ハ直平行六面體 EFGH-E′F′G′H′ ノ體積ニ等シイ。 (23)

次ニ HE 及之ニ平行ナル側稜ヲ延長シテ HE ニ等シク KL ヲ取リ、K 及 L ヨリ KL ニ垂直ナル平面ヲ作ルトキハ、此ニ又一ツノ平行六面體 KLMN-K′L′M′N′ ガ出來ル。

此平行六面體ノ側稜 KL ハ HE ニ等シク、又其底面 KNN′K′ ハ EFGH-E′F′G′H′ ノ側稜 HE ニ垂直ナル直截面ニ等シイ。

然ルニ KLMN-K′L′M′N′ ハ明カニ直六面體デアル、從テ EFGH-E′F′G′H′ ノ體積ハ直六面體 KLMN-K′L′M′N′ ノ體積ニ等シイ。(23)

故ニ ABCD-A′B′C′D′ ノ體積ハ KLMN-K′L′M′N′ ノ體積ニ等シイ。

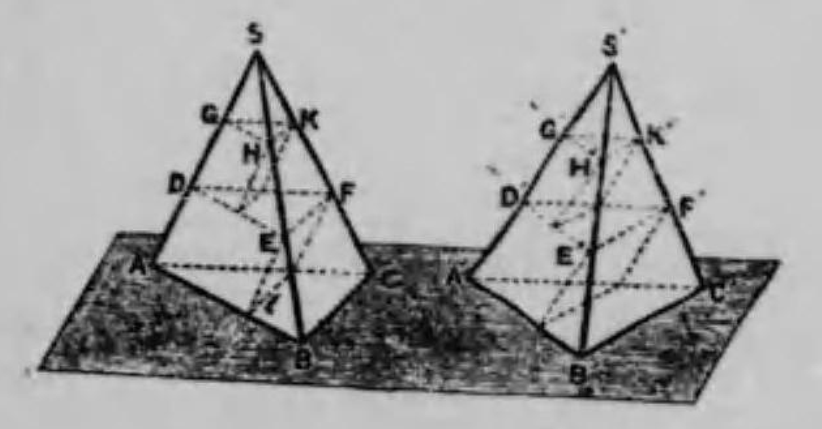
今此三ツノ六面體ノ底面ヲ各 BECD. EFGH. KLMN ト考ヘルトキハ、此三ツノ平行四邊形ノ底邊及高サハ各相等シク又此三ツノ六面體ノ高サモ亦相等シイカラ平行六面體 ABCD-A′B′C′D′ ノ體積ハ之ト相等シキ底邊及高サノ底面 KLMN 及相等シキ高サ KK′ ヲ有スル直六面體 KLMN-K′L′M′N′ ノ體積ニ等シイ。

系 1. 二ツノ平行六面體ノ高サガ相等シク、底面ノ底邊及高サモ亦相等シキトキハ、其體積相等シ。

系 2. 二ツノ三角壔ノ高サガ相等シク、底面ノ底邊及高サモ亦相等シキトキハ、其體積相等シ。

47 定理 (26) 二ツノ三角錐ノ高サガ相等シク、底面ノ底邊及高サガ相等シキトキ、其體積ハ相等シ。

證明 二ツノ三角錐 S-ABC. S′-A′B′C′ ニ於テ、其高サガ相等シク、且ツ其底面 ABC. A′B′C′ ノ底邊及高サガ各相等シトシ、底面ヲ同一ノ平面



ノ上ニ置イテ、斜稜 SA ヲ若干ニ等分シ、各ノ分點ヲ通過シテ底面ニ平行ナル平面ヲ作ルトキハ、此ニ三角錐 S-ABC ノ截面 DEF. GHK 等及三角錐 S′-A′B′C′ ノ截面 D′E′F′. G′H′K′ 等ガ出來ル。

相對應スル截面 DEF ト D′E′F′. GHK ト G′H′K′ 等ハ其底及高サ各相等シイ。……………………………………………………(21)

EF. HK 等ヲ含ミテ斜稜 SA ニ平行ナル平面ヲ作リ、又 E′F′. H′K′ 等ヲ含ミテ斜稜 S′A′ ニ平行ナル平面ヲ作ルトキハ、三角壔 A-DEF. D-GHK. A′-D′E′F′. D′-G′H′K′ 等ヲ得。

二ツノ三角壔 A-DEF. A′-D′E′F′ ニ於テ其高サ相等シク且ツ其底面 DEF. D′E′F′ ノ底邊及高サガ各相等シイカラ從テ其體積モ相等シイ。
(25)

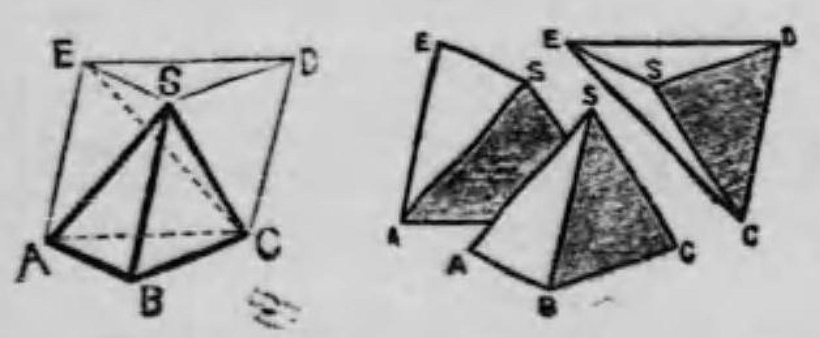
同樣ニ三角壔 D-GHK. D′-G′H′K′ 等ノ體積モ亦各相等シイ。

故ニ上ノ如クシテ三角錐ノ內ニ作ッタ三角壔ノ體積ハ二ツヅツ相等シク、其數モ亦相等シイカラ，其體積ノ和ハ相等シイ。

今底面ニ平行ナル截面ノ數ヲ增ストキハ、三角錐ノ內ニ在ル三角壔ノ數モ亦增シテ、其高サハ減ル、從テ平面ノ數ガ限リナク增大スルトキハ三角壔ノ數モ亦限リナク增大シ、三角壔ノ體積ノ和ハ限リナク三角錐ノ體積ニ近ヅク。

故ニ二ツノ三角錐 S-ABC. S′-A′B′C′ ノ體積ハ相等シイ。

48 定理 (27) 三角錐ノ體積ハ之ト相等シキ高サ及底面ヲ有スル三角壔ノ體積ノ三分ノ一ニ等シ。



證明　三角壔 ABC-ESD ヲ平面 SAC. 及 SCE ニテ截ルトキハ、此ニ三ツノ三角錐 S-ABC. S-ACE. S-CDE ヲ得。

二ツノ三角錐 SACE. SCDE ニ於テ、其底面 ACE. CDE ハ相等シク且ツ其高サハ何レモ頂點 S ヨリ平面 ACDE ニ至ル距離デアルカラ相等シイ、從テ二ツノ三角錐ノ體積ハ相等シイ。………………………………………………(26)

又二ツノ三角錐 S-ABC. S-CDE ニ於テ、其底面 ABC. SDE ハ相等シク且ツ其高サハ何レモ二ツノ平面 ABC. SDE ノ距離デアルガ故ニ相等シイ、從テ二ツノ三角錐ノ體積ハ相等シイ。　(26)

此三ツノ三角錐 S-ABC. S-ACE. S-CDE ノ體積ノ和ハ三角壔 ABC-ESD ノ體積ニ等シ、然ルニ各三角錐ノ體積ハ各相等シイカラ、三角錐 S-ABC ノ體積ハ之ト相等シキ高サ及底面ヲ有スル三角壔 ABC-ESD ノ體積ノ三分ノ一ニ等シイ。

系 1. 三角壔ハ之ヲ互ニ相等シキ體積ヲ有スル三ツノ三角錐ニ分ツコトヲ得。

系 2. 角錐ノ體積ハ之ト相等シキ高サ及底面ヲ有スル角壔ノ體積ノ三分ノ一ニ等シ。

問題

(1) 底面積ノ相等シキ角壔ト角錐トアリテ角錐ノ高サガ角壔ノ高サノ三倍ナルトキハ其体積ハ相等シキコトヲ證明セヨ。

(2) 相等シキ高サヲ有スル二ツノ角壔又ハ二ツノ角錐ノ體積ノ比ハ底面積ノ比ニ等シキコトヲ證明セヨ。

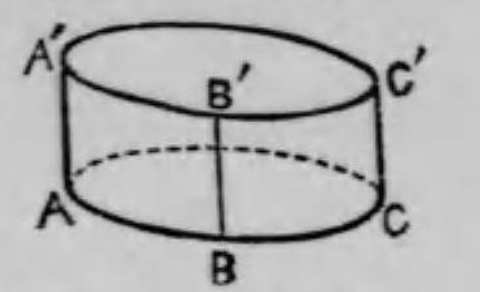
(3) 正四面體ノ積ノ長サヲ知リテ體積ヲ計算スル公式ヲ作レ。

第三章　曲面體

第一節　圓壔、圓錐ニ關スル定理

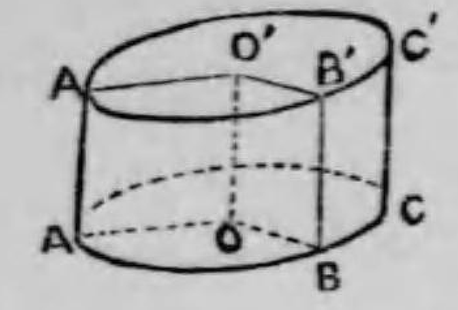
49 圓壔　一定ノ直線ニ平行デアル直線ガ之ト同一ノ平面ノ上デナイ定マッタ圓ノ上ノ點ヲ順次ニ通過シテ一周スルトキ出來ル曲面ト、此圓ノ平面及之ニ平行デアル他ノ平面トデ圍ムダ圖形ヲ圓壔ト云フ。

一定ノ直線ニ平行デアル直線ヲ圓壔ノ母線トヒ、圓壔ノ兩端ニ在ッテ相平行セル面ヲ其底面ト云ヒ、二ツノ底面ノ距離ヲ其高サト云フ。



圖ニ於テ、BB′ ハ圓壔 ABC–A′B′C′ ノ母線、ABC. A′B′C′ ハ其底面デアル。

50 定理 (28)　圓壔ノ底面ハ相等シキ圓形ヲナス。



證明　圓壔 ABC–A′B′C′ ニ於テ ABC ハ圓ニシテ其中心ヲ O トシ、O 及一ツノ母線 AA′ ヲ含ム平面ノ上ニ於テ O ヨリ AA′ ニ平行ニ引イタ直線ト底面 A′B′C′ トノ交點ヲ O′ トス。

OO′ ト AA′ トハ平行ニシテ從テ OA ト O′A′ トハ二ツノ平行平面ト、第三ノ平面トノ交線デアルガ故ニ又互ニ平行デアル。

因テ　　　OA＝O′A′

次ニ OO′ ハ AA′ ニ平行デアルガ故ニ又他ノ任意ノ母線 BB′ ニ平行デアル、從テ OO′ 及 BB′ ヲ含ム平面ト底面トノ交線ヲ OB, O′B′ トスルトキハ

　　　OB＝O′B′

然ルニ　　OA＝OB

故ニ　　O′A′＝O′B′

即チ A′B′C′ ハ O′ ヲ中心トシ、OA ニ等シイ半徑ヲモッテキル圓デアル。

系 1. 圓壔ノ底面ニ平行ナル截面ハ底面ニ等シキ圓形ヲナス。

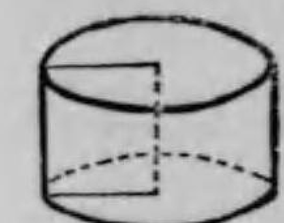
系 2. 圓壔ノ底面ニ平行ナル截面ノ中心ハ何レモ底面ノ中心ヲ通過スル直線ノ上ニ在リ。

51 直圓壔　圓壔ノ二ツノ底面ノ中心ヲ通過スル直線ヲ圓壔ノ軸ト云フ。

圓壔ノ母線ハ恒ニ其軸ニ平行デアル。

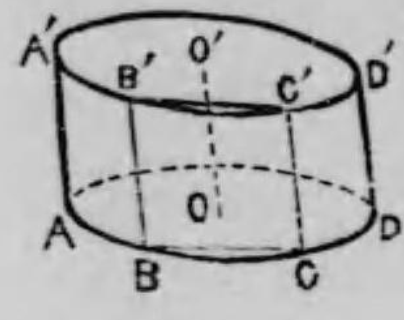
母線ガ底面ニ垂直デアル圓壔ヲ直圓壔ト云フ。

直圓壔ノ軸ハ又底面ニ垂直デアル。



直圓壔ハ直方形ガ其一邊ヲ軸トシテ廻轉スルトキ、他ノ三邊ガ作ル面デ圍ムダ圖形デアルト考ヘラレル。

52 定理 (29)　圓壔ト其軸ニ平行ナル平面トノ交線ハ平行四邊形ヲナス。



證明　圓壔 ABCD–A′B′C′D′ ノ軸 OO′ ニ平行ナ平面ト底面 ABCD トノ交線ヲ BC トシ、B 點カラ OO′ ニ平行ニ BB′ ヲ引ク。

圓壔ノ母線ハ OO′ ニ平行ニシテ、B ヲ通過シテ OO′ ニ平行ナ直線唯一ツデアルカラ BB′ ハ圓壔ノ母線デアル、又 BB′ ハ B ヲ通過シテ OO′ ニ平行ナ平面ノ上ニ在ル、故ニ BB′ ハ圓壔ト此平面トノ交線デアル。

同樣ニ C ヨリ OO′ ニ平行ニ CC′ ヲ作ルトキハ、CC′ モ亦圓壔ト此平面トノ交線デアル。

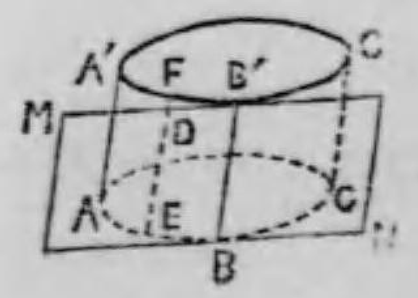
此平面ト二ツノ底面トノ交線 BC. B′C′ ハ明カニ平行線デアル。

故ニ圓壔 ABCD–A′B′C′D′ ト其軸 OO′ ニ平行ナ平面トノ交線 BCC′B′ ハ平行四邊形デアル。

系　圓壔ト其一ツノ母線ヲ含ム平面トノ交線ハ平行四邊形ヲナス。

53 圓壔ノ切平面　平面ガ圓壔ノ唯一ツノ母線ヲ含ムデ他ノ點ヲ共有シナイトキハ、其平面ヲ圓壔ノ切平面ト云ヒ、此母線ノ上ノ一點ヲ通リテ、切平面ノ上ニ在ル直線ヲ其切線ト云フ。

54 定理 (30)　圓壔ノ一ツノ母線ト此母線ノ端ニ於ケル底面ノ切線トヲ含ム平面ハ切平面ナリ。



證明　圓壔ノ母線 BB′ 及底面 ABC ノ切線 BN ヲ含ム平面ヲ MN トシ、若シ MN ガ BB′ ノ外ニアル一點 D ヲ圓壔ト共有スルナラバ、D ヲ通過シテ母線 EF ヲ引ク、然ルトキハ EF ハ MN ノ上ニ

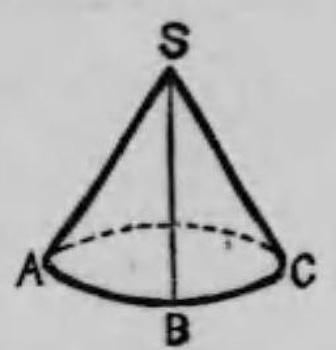
アリ、依テ切線 BN ハ E ニ於テ再ビ圓 ABC ニ交ルコトトナル。

故ニ MN ハ BB′ ヨリ外ノ點ヲ圓壔ト共有スルコトハナイ。

即チ MN ハ切平面デアル。

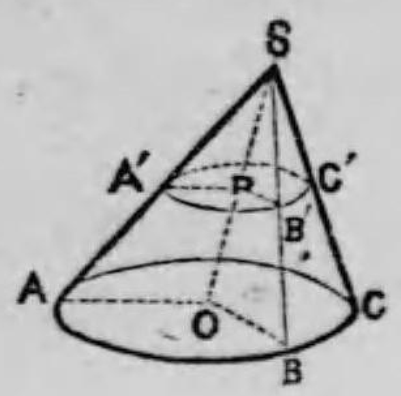
55 圓錐 一ツノ定點ヲ通ル直線ガ之ト同ジ平面ノ上デナイ定マッタ圓周ノ上ノ點ヲ順次ニ通リテ一周スルトキニ出來ル曲面ト此圓ノ平面トデ圍ムダ圖形ヲ圓錐ト云フ。

定マッタ點ヲ通過スル直線ヲ圓錐ノ母線ト云ヒ、一定ノ點ヲ其頂點ト云ヒ、母線ノ通過スル定マッタ圓ノ面ヲ其底面ト云ヒ、頂點ト底面トノ距離ヲ其高サト云フ。



圖ニ於テ SB ハ圓錐 S–ABC ノ母線、S ハ其頂點、ABC ハ其底面デアル。

56 定理 (31) 圓錐ノ底面ニ平行ナル截面ハ圓形ヲナス。



證明 圓錐 S–ABC ニ於テ、一ツノ母線 SA 及底面ノ中心 O ヲ含ム平面ト底面トノ交線ヲ OA 底面ニ平行ナル截面トノ交線ヲ PA′ トス。

然ルトキハ OA′ PA′ ハ二ツノ平行ナル平面ト第三ノ平面トノ交線デアルカラ互ニ平行デアル。

因テ $$\frac{OA}{PA'}=\frac{OS}{PS}$$

次ニ O ト他ノ任意ノ母線 SB トヲ含ム平面ト底面トノ交線ヲ OB 截面 A′B′C′ トノ交線ヲ PB′ トスルトキハ

$$\frac{OB}{PB'}=\frac{OS}{PS}$$

故ニ $$\frac{OA}{PA'}=\frac{OB}{PE}$$

然ルニ $$OA=OB$$

故ニ $$PA'=PB'$$

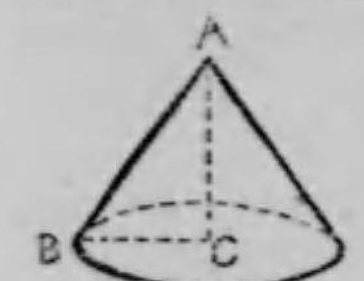
即チ A′B′C′ ハ P ヲ中心トスル圓デアル。

系 1. 圓錐ノ底面ニ平行ナル截面ノ中心ハ何レモ其頂點ノ中心ト底面トヲ通過スル直線ノ上ニ在リ。

系 2 圓錐ノ底面ニ平行ナル截面ハ母線及高サヲ同一ノ比ニ分ツ。

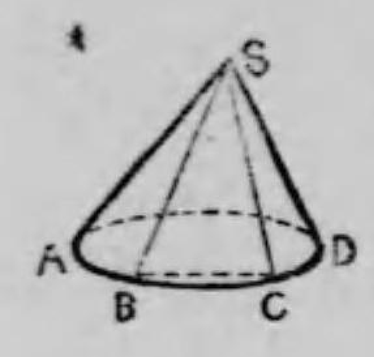
57 直圓錐 圓錐ノ頂點ト底面ノ中心トヲ通ル直線ヲ圓錐ノ軸ト云フ。軸ガ底面ニ垂直デアル圓錐ヲ直圓錐ト云フ。

直圓錐ニ於テハ母線ノ長サハ皆相等シイ、之ヲ其斜高ト云フ。



直圓錐ハ直角三角形 ABC ガ其直角ノ一邊 AC ヲ軸トシテ廻轉スルトキ、他ノ二邊ガ作ル面デ圍マレタ圖形ト考ヘルコトガ出來ル。

58 定理 (32) 圓錐ト其頂點ヲ通過スル平面トノ交線ハ三角形ヲナス。



證明 圓錐 S–ABCD ノ頂點 S ヲ通過スル平面ト底面 ABCD トノ交線ヲ BC トシ，直線 SB ヲ引ケバ，SB ハ明カニ平面 SBC ノ上ニ在ッテ、且ツ圓錐ノ一ツノ母線デアルカラ、SB ハ此平面ト圓錐トノ交線デアル。

同様ニ直線 SC ヲ作ルトキハ SC モ亦此平面ト圓錐トノ交線デアル。

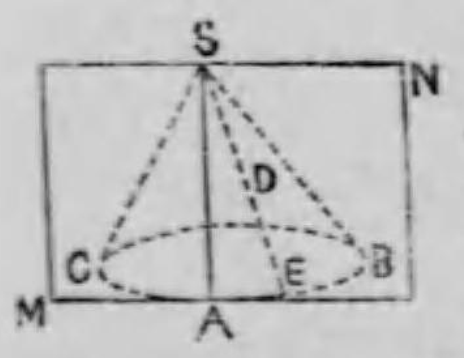
故ニ圓錐 S–ABCD ト頂點 S ヲ通過スル平面トノ交線ハ三角形ヲ作ル。

系 1. 圓錐ト其一ツノ母線ヲ含ム平面トノ交線ハ三角形ヲナス。

系 2. 直圓錐ト其頂點ヲ通過スル平面トノ交線ハ二等邊三角形ヲナス。

59 圓錐ノ切平面 平面ガ圓錐ノ唯一ツノ母線ヲ含ムデ、他ノ點ヲ共有シナイトキハ、其平面ヲ圓錐ノ切平面ト云ヒ、此母線ノ上ノ一點ヲ通過シテ、切平面ノ上ニ在ル直線ヲ其切線ト云フ。

60 定理 (32) 圓錐ノ一ツノ母線ト此母線ノ端ニ於ケル底面ノ切線トヲ含ム平面ハ切平面ナリ。

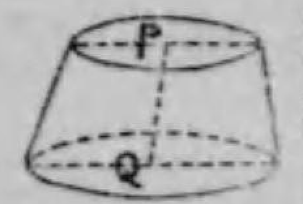


證明 圓錐ノ母線 SA 及底面 ABC ノ切線 AM ヲ含ム平面ヲ MN トシ 若シ MN ガ SA ノ外ノ一點 D ヲ圓錐ト共有スルナラバ、D ヲ通過シテ母線 SE ヲ引ク、然ルトキハ SE ハ MN ノ上ニ在ル，從テ切線 AM ハ E ニ於テ再ビ圓 ABC ニ交ルコトトナル，

故ニ MN ハ SA 外ノ點ヲ圓錐ト共有スルコトハナイ。

即チ MN ハ切平面デアル。

61 圓錐臺 圓錐ノ曲面、其底面及底面ニ平行ナ截面デ圍ムダ圖形ヲ



截頭圓錐又ハ圓錐臺ト云ヒ、截面(上底)ト底面(下底)トヲ其底面ト云ヒ、其間ノ距離ヲ其高サト云ヒ、截頭直圓錐ノ底面ノ間ニ在ル母線ノ部分ノ長サヲ其斜高ト云フ。

問題

(1) 直圓壔ト其軸ニ平行ナル平面トノ截口ハ矩形ナルコトヲ證明セヨ。

(2) 直圓錐ト其軸ヲ含ム平面トノ截口ハ二等邊三角形ナルコトヲ證明セヨ。

(3) 直圓錐臺ト其二ツノ底面ノ中心ヲ含ム平面トノ交リハ梯形ナルコトヲ證明セヨ。

第二節　球ニ關スル定理

62 球 一ツノ曲面ノ上ノ總テノ點ガ一ツノ定マッタ點カラ相等シイ距離ニ在ルトキ、此曲面カラ成ル圖形ヲ球ト云ヒ、定マッタ點ヲ其中心ト云フ。

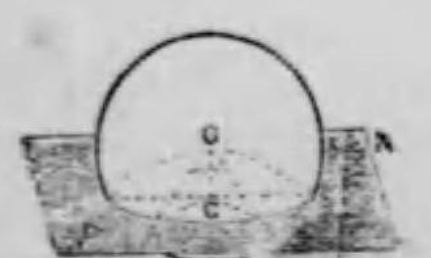
球ノ中心ヨリ其球ノ上ニ在ル點ニ至ル有限直線ヲ球ノ半徑ト云フ、一ツノ球ノ半徑ハ皆相等シイ。

球ノ中心ヲ通リテ球ノ上ニ兩端ヲ有スル有限直線ヲ球ノ直徑ト云フ、一ツノ球ノ直徑ハ其球ノ半徑ノ二倍ニ等シイ、從テ一ツノ球ノ直徑モ亦相等シイモノデアル。

球ノ中心ヲ通ル平面ト球トノ交線上ノ點ハ何レモ中心カラ相等シキ距離ニ在リ、故ニ此交線ハ一ツノ圓デアル、之ヲ大圓ト云フテ一ツノ球ノ大圓ハ皆相等シイ。

球ハ又半圓弧ガ其直徑ヲ軸トシテ廻轉スルトキ出來ル曲面デアルト考ヘルコトガ出來ル。

63 定理 (34) 球ト平面トノ交線ハ圓ナリ。



證明 球ノ中心ヲ O 平面ヲ P トシ O ガ P ノ上ニ在ルトキハ球ト平面トノ交線ハ大圓デアル。

次ニ O ガ P ノ外ニ在ルトキハ O ヨリ P ニ垂線 OC ヲ引キ、球ト平面トノ交線上ニ任意ノ二點 A, B ヲ取リ、OA. OB. CA. CB ヲ作ル。

然ルトキハ二ツノ直角三角形 OAC. OBC ニ於テ斜邊 OA. OB ハ球ノ半徑デアルカラ相等シク OC ハ共通デアル、因テ二ツノ三角形ハ相等シク、從テ AC. BC ハ相等等シイ。

故ニ交線上ノ點ハ何レモ C カラ相等シイ距離ニ在ル、即チ交線ハ C ヲ中心トスル圓デアル。

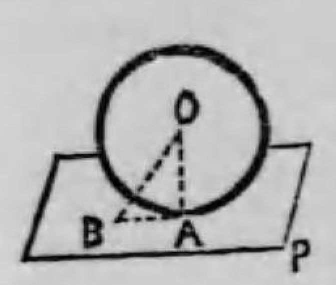
球ト其中心ヲ通ラナイ平面トノ交線ヲ小圓ト云フ。

系 1. 球ノ中心ヲ通過シ小圓ノ平面ニ垂直ナル直線ハ其圓ノ中心ヲ通過ス。

系 2. 球ノ中心ヨリ相等シキ距離ニ在ル平面ガ作ル小圓ハ相等シク、中心ニ近キ平面ガ作ル小圓ハ遠キ平面ガ作ルモノヨリモ大ナリ。

64 球ノ切平面 球ト唯一ツノ點ヲ共有スル平面ヲ其切平面ト云ヒ、其點ヲ切點ト云ヒ、切點ヲ通リテ切平面ノ上ニ在ル直線ヲ其切線ト云フ。

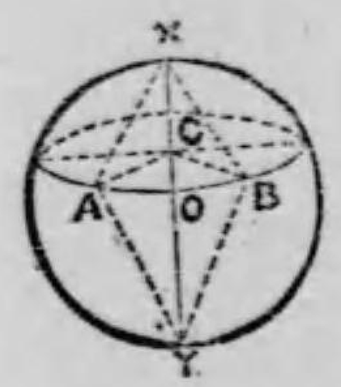
65 定理 (35) 球ノ半徑ノ端ヲ通過シ、之ニ垂直ナル平面ハ切平面ナリ。



證明 球ノ中心ヲ O 半徑 OA ノ端 A ヲ通リテ之ニ垂直ナル平面ヲ P トシ O ヨリ P ニ任意ノ有限直線 OB ヲ引クトキハ斜線 OB ハ垂線 OA ヨリモ大キイ、從テ B ハ球ノ外ニ在ル、故ニ P ハ A ノ外ノ點ヲ球ト共有スルコトハナイ、即チ切平面デアル。

66 極 球ノ大圓又ハ小圓ノ平面ニ垂直ナル直徑ヲ其圓ノ軸ト云ヒ軸ト球トノ交點ヲ其圓ノ極ト云フ。

67 定理 (36) 球ノ大圓又ハ小圓上ノ點ハ其圓ノ同一ノ極ヨリ相等シキ距離ニ在リ。



證明 球ノ中心ヲ O 圓 AB ノ極ヲ X, Y トスルトキハ、XY ハ此圓ノ軸デアルカラ圓ノ平面ト圓ノ中心 C ニ於テ相交ル。

圓ノ上ニ任意ノ二點 A. B ヲ取リ XA. XB. YA. YB. CA. CB ヲ作ルトキハ、二ツノ直角三角形 ACX. BCX ニ於テ CA. CB ハ相等シク、CX ハ共通デアルガ故ニ二ツノ三角形ハ相等シク、從テ XA. XB ハ相等シイ。

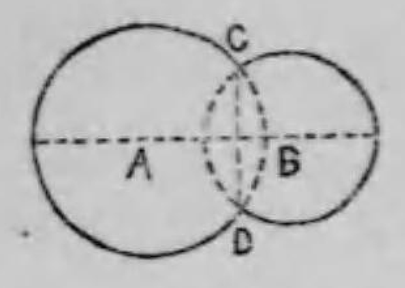
故ニ此圓ノ上ノ點ハ何レモ X ヨリ相等シイ距離ニ在ル、同樣ニ Y ヨリモ亦相等シイ距離ニ在ル。

68　二ツノ球ノ位置　一ツノ球ノ一部分ガ他ノ球ノ内ニ在ツテ、一部分ガ外ニ在ルトキハ二ツノ球ハ相交ルト云フ。

二ツノ球ガ唯一ツノ點ヲ共有スルトキハ、二ツノ球ハ相切スト云ヒ、其共通點ヲ切點ト云フ。

二ツノ相切スル球ノ中心ガ切點ノ兩側ニ一ツヅツ在ルトキハ、二ツノ球ハ外切スト云ヒ、同ジ側ニ二ツトモ在ルトキハ内切スト云フ。

69　定理　(37)　二ツノ球ノ交線ハ圓ナリ。



證明　二ツノ球ノ中心ヲ A.B トシ、二ツノ球ニ共通ニシテ、AB ヲ通ル直線外ノ一點ヲ C トシ、C ト AB トヲ含ム平面ニテ此二球ヲ截リ、此ニ C ニ於テ相交ル二ツノ圓ヲ得。

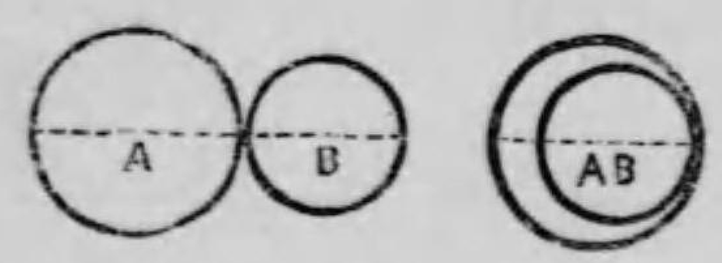
C 點ハ中心線 AB ノ外ニ在ルガ故ニ二ツノ圓ハ必ズ他ノ一點 D ヲ共有シ、直線 CD ハ AB ニ垂直デアル。

今直線 AB ヲ軸トシテ全圖形ヲ廻轉スルトキハ、二ツノ圓ハ元ノ球ヲ畫キ、點 C ハ CD ヲ直徑トスル圓ヲ畫ク。

故ニ此二ツノ球ノ交線ハ一ツノ圓デアル。

系　二ツノ球ガ相交ルトキ、其交線ナル圓ノ平面ハ球ノ中心ヲ通過スル直線ニ垂直ニシテ、其中心ハ其直線ノ上ニ在リ。

70　定理　(38)　二ツノ球ノ切點ハ中心ヲ通過スル直線ノ上ニ在リ。

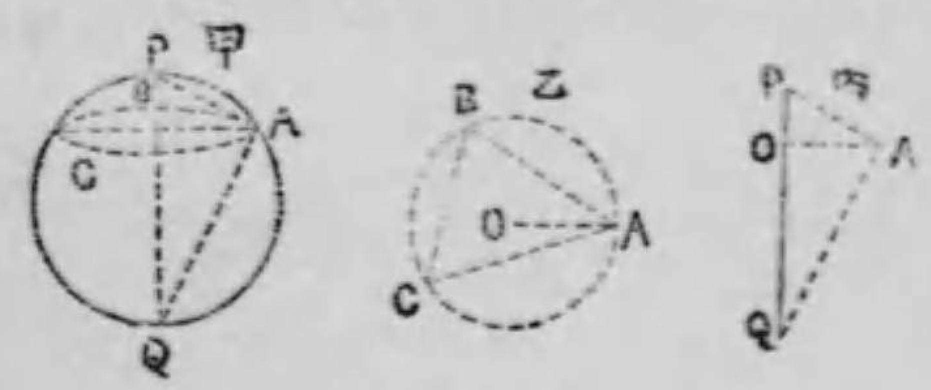


證明　二ツノ球ノ中心 A.B 及切點ヲ含ム平面デ此二球ヲ截レバ、此ニ二ツノ相切スル圓ヲ得。

二ツノ相切スル圓ノ中心線ハ切點ヲ通過スルカラ、中心線 AB ヲ軸トシテ全圖形ヲ廻轉スルトキハ、二ツノ圓ハ元ノ球ヲ畫キ、切點ハ明カニ其中心ヲ通ル直線ノ上ニ在ル。

系　二ツノ相切スル球ハ切點ニ於テ共通ナル切平面ヲ有ス。

71　充實セル球ノ半徑ヲ求ムルコト。



球面ノ上ニ任意ノ一點 P ヲ取リ、兩脚器ノ一脚ノ尖端ヲ P ニ固定シテ、球ノ上ニ一ツノ圓 ABC ヲ畫キ(甲)、次ニ此圓ノ上ニ任意ノ三點 A. B. C ヲ取リ、

AB. BC. CA ヲ測ツテ三角形 ABC ヲ畫キ(乙)其外接圓ヲ作リ、其中心 O ヲ求メルトキハ OA ハ明カニ球面ノ上ニ畫イタ圓 ABC ノ半徑ニ等シイ。

次ニ丙圖ノ樣ニ AP ヲ斜邊トシ OA ヲ他ノ一邊トスル直角三角形ヲ畫キ PO ノ延長線ト PA ニ垂直ナル直線 AQ トノ交點ヲ Q トスルトキハ PAQ ハ又一ツノ直角三角形ニシテ、球面上ノ點 A 及直徑 PQ ノ兩端ヲ頂點トスル三角形ニ等シイ。

故ニ PQ ノ半ハ即チ求ムルトコロノ球ノ半徑デアル。

問題

(1)　球ノ最大ナル截面ハ何カ。

(2)　球ノ中心ヨリ相等シキ距離ニアル二ツノ小圓ハ相等シキコトヲ證明セヨ。

第五編 求積

求積ノ問題ハ既ニ算術ニ於テ其要用ナルモノノミヲ掲ゲテ置イタガ，特ニ此編ヲ設ケテ幾何學的及代數學的知識ヲカリテ種々ノ場合ヲ一々例題ヲ擧ゲテ計算ノ方法ヲ示スコトニスル。

注意 三角形 ABC ニ於テハ常ニ其角ノ大サヲ表ハスニ，其角ノ頂點ニ於ケル文字 A.B.C ヲ以テシ，之ニ對スル邊ノ長サヲ表ハスニハ $a.b.c$ ヲ以テスルコトニ規定シテ置ク。

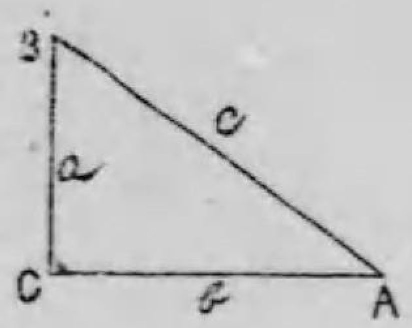
第一章 三角形ニ於ケル長サノ計算

第一節 直角三角形(ABC).ニ於ケル計算

但シ C ヲ直角トシ A ハ B ヨリ小トス。

定理 (1) 直角三角形 ABC ニ於ケル三邊 $a.b.c$ ノ關係ハ，

$\underline{a^2+b^2=c^2}$(ピタゴラスノ定理)



故ニ $a.b.c$ ヲ互ニ、計算スル公式ハ

$$c=\sqrt{a^2+b^2} \cdots\cdots (1)$$
$$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{(c+b)(c-b)} \cdots\cdots (2)$$
$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c+a)(c-a)} \cdots\cdots (3)$$

例 (1) 直角三角形 ABC ニ於テ a ハ三寸 b ハ四寸ノトキ c ハ何寸ナルカ。

算法 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(3^2+4^2)}=5$ 　**答** c ハ五寸

例 (2) 直角三角形 ABC ニ於テ c ハ五寸 b ハ四寸ノトキ a ハ何寸ナルカ。

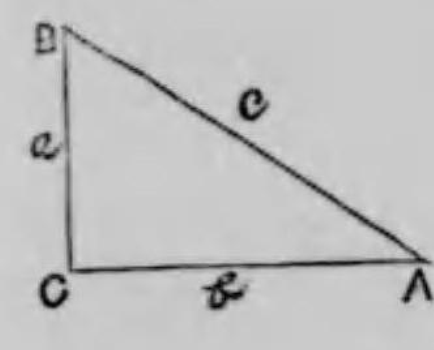
算法 $\underline{a=\sqrt{(c+b)(c-b)}}=\sqrt{(5+4)(5-4)}=3$ 　**答** a ハ三寸

例 (3) 直角三角形 ABC ニ於テ c ハ五寸 a ハ三寸ナリト云フ b ハ何寸ナルカ。

算法 $\underline{b=\sqrt{(c+a)(c-a)}}=\sqrt{(5+3)(5-3)}=4$ 　**答** b ハ四寸

定理 (2) 直角三角形 ABC ニ於ケル二邊 $a.b$ ノ和 s ト其差 d ト斜邊 c トノ關係ハ，

$\underline{s^2+d^2=2c^2}$



故ニ $s.d.c$ ヲ互ニ、計算スル公式ハ、

$$\begin{cases} s=\sqrt{2c^2-d^2} \cdots\cdots (1) \\ d=\sqrt{2c^2-s^2} \cdots\cdots (2) \\ c=\sqrt{\frac{1}{2}(s^2+d^2)} \cdots\cdots (3) \end{cases}$$

而シテ $a=\frac{1}{2}(s-d)$ ニシテ $b=\frac{1}{2}(s+d)$

例 (4) 直角三角形 ABC ニ於テ、二邊 $a.b$ ノ和ハ四尺一寸ニシテ斜邊 c ハ二尺九寸ノトキ，二邊 $a.b$ ハ各々何程ナルカ。

答 a ハ二尺 b ハ二尺一寸

算法 $s=\sqrt{(2c^2-d^2)}=\sqrt{(2\times29^2-1^2)}=41.$

$a=\frac{1}{2}(s-d)=\frac{1}{2}(41-1)=20.\ b=\frac{1}{2}(s+d)=\frac{1}{2}(41+1)=21$

例 (5) 直角三角形 ABC ニ於テ、二邊 $a.b$ ノ差ハ一寸ニシテ斜邊 c ハ二尺九寸ノトキ、二邊 $a.b$ ハ各々何程ナルカ。

答 a ハ二尺 b ハ二尺一寸

算法 $s=\sqrt{(2c^2-d^2)}=\sqrt{(2\times29^2-1^2)}=41$

$a=\frac{1}{2}(s-d)=\frac{1}{2}(41-1)=20.$ 　$b=\frac{1}{2}(s+d)=\frac{1}{2}(41+1)=21$

例 (6) 直角三角形 ABC ニ於テ、其周圍即チ $a.b.c$ ノ和ハ七尺ニシテ斜邊 c ハ二尺九寸ナルトキ，二邊 $a.b$ ハ各々何程ナルカ。

答 a ハ二尺 b ハ二尺一寸

解 周圍即チ $a.b.c$ ノ和ヨリ斜邊 c ヲ引クトキハ、二邊 $a.b$ ノ和 s ヲ求メルコトガ出來ル、故ニ、此問題ノ算法ハ例題(4)ノ算法ニ同ジ。

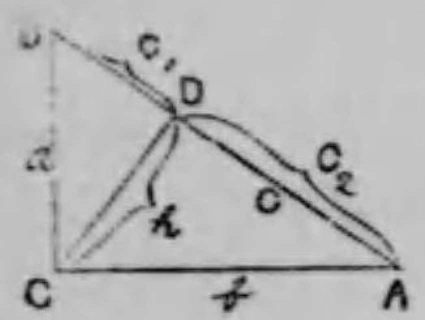
$$s=(a+b+c)-c=70-29=41$$
$$d=\sqrt{(2c^2-s^2)}=\sqrt{(2\times29^2-41^2)}=1$$
$$a=\frac{1}{2}(s-d)=\frac{1}{2}(41-1)=20.\ b=\frac{1}{2}(s+d)=\frac{1}{2}(41+1)=21$$

3 定理 (3) 直角三角形 ABC ニ於テ三邊 abc ト直角ノ頂點 C ヨリ斜邊 AB ヘ引ケル垂線 CD トノ關係、及此垂線ノ足 D ニテ分タレタル斜邊ノ二ツノ部分 BD. DA トノ關係ハ，

$$h:a=b:c \qquad c_1:h=h:c_2$$
$$c_1:a=a:c \qquad c_2:b=b:c$$

但シ h ハ CD. c_1 ハ BD. c_2 ハ DA ノ長サヲ示スモノトス。

故ニ $h.c.a.b.c_1.c_2$ ヲ互ニ計算スル公式ハ、



$$\begin{cases} h=\dfrac{ab}{c} \cdots\cdots (1_a) \\ c=\dfrac{ab}{h} \cdots\cdots (1_b) \\ a=\dfrac{hc}{b} \cdots\cdots (1_c) \\ b=\dfrac{hc}{a} \cdots\cdots (1_d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h=\sqrt{c_1c_2} \cdots\cdots (2_a) \\ c_1=\dfrac{h^2}{c^2} \cdots\cdots (2_b) \qquad c_2=\dfrac{h^2}{c^1} \cdots\cdots (2_c) \\ a=\sqrt{cc_1} \cdots\cdots (3_a) \\ c=\dfrac{a^2}{c_1} \cdots\cdots (3_b) \qquad c_1=\dfrac{a_2}{c} \cdots\cdots (3_c) \\ b=\sqrt{cc_2} \cdots\cdots (4_a) \\ c=\dfrac{b^2}{c^2} \cdots\cdots (4_a) \qquad c_2=\dfrac{b_2}{c} \cdots\cdots (4_c) \end{cases}$$

例 (7) 直角三角形 ABC ニ於テ a ハ三寸 b ハ四寸ナリト云フ、直角ノ頂點 C ヨリ斜邊 AB ヘ引ケル垂線 h ハ何寸ナルカ、又、此垂線ノ足 D ニテ分タレタ斜邊ノ二ツノ部分 $c_1.c_2$ ハ何寸ナルカ。

答 h ハ二寸四分 c_1 ハ一寸八分 c_2 ハ三寸二分

解 先ヅ例題(1)ノ算法ニ依テ c ヲ求メ、而シテ後ニ $h.c_1.c_2$ ヲ求メル。

算法 $c=\sqrt{(a^2+b^2)}=\sqrt{(3^2+4^2)}=5$

$c_1=\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{3^2}{5}=1.8$ ニシテ $c_2=\dfrac{b^2}{c}=\dfrac{4^2}{5}=3.2$

例 (8) 直角三角形 ABC ニ於テ、一邊 a ハ三寸、斜邊 c ハ五寸ニシテ、直角ノ頂點 C ヨリ斜邊 AB ヘ引ケル垂線 h ハ二寸四分ナリト云フ、他ノ一邊 b ハ何寸ナルカ。　　答 b ハ四寸

算法 $b=\dfrac{hc}{a}=\dfrac{2.4\times5}{3}=4$

例 (9) 直角三角形 ABC ニ於テ、直角ノ頂點 C ヨリ斜邊 AB ヘ引ケル垂線 CD ノ足ニテ分タレタル斜邊ノ二ツノ部分即チ c_1 ハ一寸八分ニシテ c_2 ハ三寸二分ナリト云フ、三邊ノ長サ $a.b.c$ ト直角ノ頂點 C ヨリ斜邊 AB ヘ引ケル垂線 h トハ各々何寸ナルカ。

答 a ハ三寸 b ハ四寸 c ハ五寸 h ハ二寸四分

算法 $c=c_1+c_2=1.8+3.2=5$

$a=\sqrt{c_1c}=\sqrt{1.8\times5}=3$ ニシテ $b=\sqrt{c_2c}=\sqrt{3.2\times5}=4$

$h=\sqrt{c_1c_2}=\sqrt{1.8\times3.2}=2.4$

4 定理 (4) 直角三角形 ABC ニ於ケル二邊 $a.b$ ノ和 s ト其差 d ト斜邊 c ト直角ノ頂點 C ヨリ斜邊 AB ヘ引ケル垂線 h トノ關係ハ

$s^2=c^2+2.h.c$ ニシテ $d^2=c^2-2.h.c$

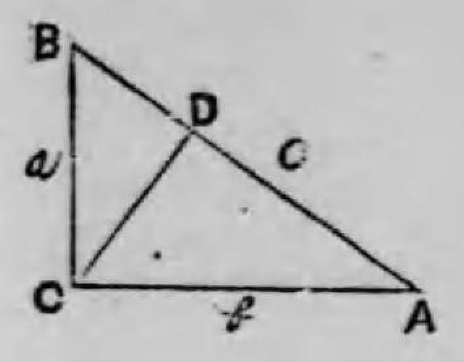
hc ハ三角形 ABC ノ積ノ二倍ニ等シ、故ニ、此積ヲ△ニテ示ストキハ $2hc=4\triangle$

故ニ $s.d.h.c$ ヲ互ニ計算スル公式ハ、

$$\begin{cases} s=\sqrt{(c_2+2.h.c)}=\sqrt{c(c+2h)} \cdots\cdots (1) \\ d=\sqrt{(c^2-2.h.c)}=\sqrt{c(c-2h)} \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

而シテ　$a=\dfrac{1}{2}(s-d)$ ニシテ

$b=\dfrac{1}{2}(s+d)$



$$\begin{cases} h=\dfrac{s^2-c^2}{2c} \cdots\cdots (3_a) \\ c=\sqrt{(s^2+h^2)}-h \cdots\cdots (3_b) \\ h=\dfrac{s^2-d^2}{2c} \cdots\cdots (4_a) \\ c=\sqrt{(d^2+h^2)}+d \cdots\cdots (4_b) \end{cases}$$

例 (10) 直角三角形 ABC ニ於テ、斜邊 c ハ五寸ニシテ直角ノ頂點 C ヨリ斜邊 AB ヘ引ケル垂線 h ハ二寸四分ナリト云フ、二邊 $a.b$ ノ長サ各々何寸ナルカ。　　答 a ハ三寸 b ハ四寸

算法 $s=\sqrt{c(c+2h)}=\sqrt{5\times(5+2\times2.4)}=7$

$d=\sqrt{c(c-2h)}=\sqrt{5\times(5-2\times2.4)}=1$

$a=\dfrac{1}{2}(s-d)=\dfrac{1}{2}(7-1)=3$ ニシテ $b=\dfrac{1}{2}(s+d)=\dfrac{1}{2}(7+1)=4$

例 (11) 直角三角形 ABC ニ於テ、一邊 a ハ三寸ニシテ直角ノ頂點 C ヨリ斜邊 AB ヘ引ケル垂線 h ハ二寸四分ナリト云フ、斜邊 c ト他ノ一邊 b トハ各々何寸ナルカ。　　答 c ハ五寸ニシテ b ハ四寸

解 先ヅ問題(1)ノ算法ニ依テ c_1 ヲ求メ而シテ後ニ $c.b$ ヲ求メル。

算法 $c_1=\sqrt{a^2-h^2}=\sqrt{3^2-2.4^2}=1.8$ 但シ $c_1=BD$

$c=\dfrac{a^2}{c_1}=\dfrac{3^2}{1.8}=5$ ニシテ $b=\dfrac{hc}{a}=\dfrac{2.4\times5}{3}=4$

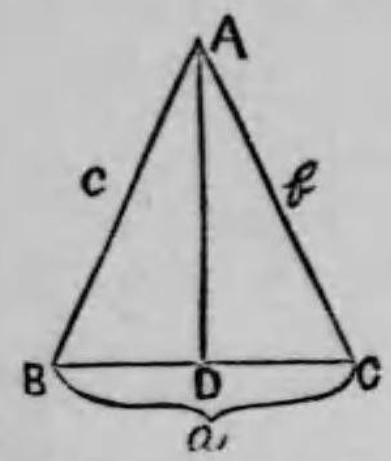
注意 $\overset{*}{h}c$ ハ三角形 ABC ノ積ノ二倍ニ等シ、故ニ此積ヲ △ ニテ示ストキハ $2hc=4\triangle$

第 二 節　二等邊三角形(ABC)ニ於ケル計算

但シ A ヲ頂點トス、即チ $b=c$

二等邊三角形ハ其高サニ依テ二ツニ分ツトキハ、二ツノ直角三角形ヲ得、從テ、其計算ハ殆ンド直角三角形ニ於ケル計算ニ同ジ、故ニ、其問題ノミヲ揭ゲテ其應用ヲ示スコトニスル。

例 (1) 二等邊三角形 ABC ニ於テ、底邊 a ハ一尺ニシテ相等シキ兩邊 $b.c$ ハ各々一尺三寸ナルトキ、其高サハ何程ナルカ。



答 h ハ一尺二寸

解 此問題ヲ解クニハ定理(1)ノ公式(2)ヲ用ヒル。

算法 $h=\sqrt{c^2-(\frac{1}{2}a)^2}=\sqrt{13^2-(\frac{1}{2}\times 10)^2}=12$

例 (2) 二等邊三角形 ABC ニ於テ、底邊 a ハ一尺ニシテ、高サ h ハ一尺二寸ナルトキ、相等シキ兩邊 $b.c$ ハ各々何程ナルカ。

答 $b.c$ ハ何レモ一尺三寸

解 此問題ヲ解クニハ定理(1)ノ公式(1)ヲ用ヒル。

算法 $b=c=\sqrt{h^2+(\frac{1}{2}a)^2}=\sqrt{12^2+(\frac{1}{2}\times 10)^2}=13$

例 (3) 二等邊三角形 ABC ニ於テ、相等シキ兩邊 $b.c$ ハ各々一尺三寸ニシテ其高サ h ハ一尺二寸ナルトキ、底邊 a ハ何程ナルカ。

答 a ハ一尺

解 此問題ヲ解クニハ定理(1)ノ公式(3)ヲ用ヒル。

算法 $a=2\sqrt{c^2-h^2}=2\sqrt{13^2-12^2}=10$

例 (4) 二等邊三角形 ABC ニ於テ、周圍即チ $a.b.c$ ノ和ハ三尺六寸ニシテ高サ h ハ一尺二寸ナルトキ、三邊 $a.b.c$ ハ各々何程ナルカ。

答 a ハ一尺 $b.c$ ハ何レモ一尺三寸

解 此問題ヲ解クニハ定理(3)ノ公式(2)ヲ用ヒル。

算法 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)=36\div 2=18$　　$(s=b+\frac{1}{2}a)$

$d=\frac{h^2}{s}=\frac{12^2}{18}=8$　　$(d=b-\frac{1}{2}a)$

第 三 節　一般ナル三角形ニ於ケル計算

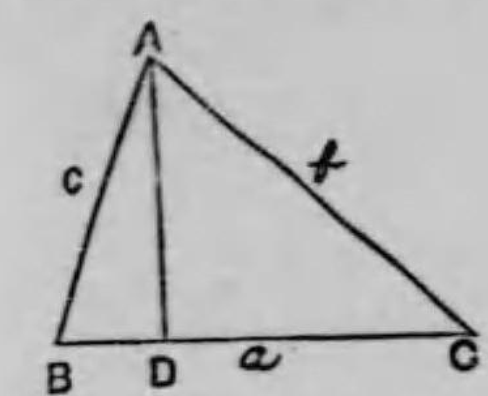
5 **定理** (5) 三角形ABCニ於ケル三邊 $a.b.c$ ト底邊 a ガ頂點Aヨリ引ケル垂線 AD ノ足ニテ分カタレタル二ツノ部分 BD. DC トノ關係。

注意 〜ノ符號ハ差ト云フコトデアル。

$$(a^2+c^2)\sim b^2=2aa_1.\ (a^2+b^2)\sim c^2=2aa_2.\ c^2\sim b^2=a_1^2\sim a_2^2$$

但シ a_1 ハ BD ヲ示シ a_2 ハ CD ヲ示スモノトス。

故ニ、$a.b.c.a_1.a_2$ ヲ互ニ計算スル公式ハ、



$$\begin{cases} a_1=\dfrac{(a^2+c^2)\sim b^2}{2a}\cdots\cdots(1) \\ a_2=\dfrac{(a^2+b^2)\sim c^2}{2a}\cdots\cdots(2) \\ a_2=\sqrt{(a_1^2+b^2-c^2)}\cdots(3) \\ a_1=\sqrt{(a_2^2+c^2-b^2)}\cdots(4) \end{cases}$$

例 (1) 三角形 ABC ニ於テ a ハ四尺 b ハ三尺七寸 c ハ一尺三寸ナルトキ、底邊 a ガ頂點 A ヨリ底邊ヘ引ケル垂線 AD ノ足ニテ分カタレタ二ツノ部分 $a_1.a_2$ ハ各々何程ナルカ。

答 a_1 ハ五寸 a_2 ハ三尺五寸

算法 $a_1=\frac{(a^2+c^2)\sim b^2}{2a}=\frac{(40^2+13^2)\sim 37^2}{2\times 40}=5$

$a_2=\frac{(a^2+b^2)\sim c^2}{2a}=\frac{(40^2+37^2)\sim 13^2}{2\times 40}=35$

例 (2) 三角形 ABC ニ於テ a ハ三尺 b ハ三尺七寸 c ハ一尺三寸ナルトキ 底邊 a ガ頂點 A ヘ引ケル垂線 AD ノ足ニテ分カタレタル二ツノ部分 $a_1.a_2$ ハ各々何程ナルカ。

答 a_1 ハ五寸 a_2 ハ三尺五寸

算法 $a_1=\frac{(a^2+c^2)\sim b^2}{2a}=\frac{(30^2+13^2)\sim 37^2}{2\times 30}=5$

$a_2=\frac{(a^2+b^2)\sim c^2}{2a}=\frac{(30^2+37^2)-13^2}{2\times 30}=35$

注意 問題(1)ノ如ク$(a^2+c^2)>b^2$ ナルトキハ、頂點Aヨリ底邊 BC ヘ引イタ垂線 AD ノ足ハ底邊 BC ヲ內分シ、從テ∠B ハ銳角デアル、而シテ、問題(2)ノ如ク$(a^2+c^2)<b^2$ ナルトキハ、頂點 A ヨリ底邊 BC ヘ引イタ垂線 AD ノ足ハ底邊 BC ヲ外分シ、從テ∠B ハ鈍角トナル。

例 (3) 三角形 ABC ニ於テ b ハ五寸四分 c ハ二寸六分ニシテ頂點

A ヨリ引ケル高サ h_a ハ二寸四分ナレバ a ハ何程ナルカ。

答 a ハ八寸若クハ六寸

解 此問題ヲ解クニハ定理(1)ノ公式(2)ヲ用ヒル。

算法 ∠B ハ鋭角ナルトキハ、

$$a=\sqrt{(b^2-h_a^2)}+\sqrt{(c^2-h_a^2)}=\sqrt{(5.4^2-2.4^2)}+\sqrt{(2.6^2-2.4^2)}=8$$

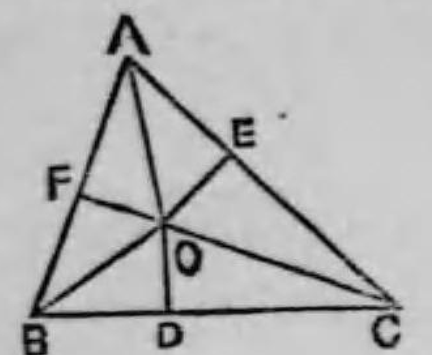
∠B ハ鈍角ナルトキハ、

$$a=\sqrt{(b^2-h_a^2)}-\sqrt{(c^2-h_a^2)}=\sqrt{(5.4^2-2.4^2)}-\sqrt{(2.6^2-2.4^2)}=6$$

6 定理 (6) 三角形ABCニ於ケル三邊 $a.b.c$ ト各ノ頂點A.B.Cヨリ夫々之ニ對スル邊 BC. CA. AB ヘ引ケル垂線 AD. BE. CF トノ關係ハ、

$a.h_a=b.h_b=c.h_c=2.\Delta$ 但シ $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

但シ h_a ハ AD. h_b ハ AE. h_c ハ CF. S ハ $\frac{1}{2}(a+b+c)$ ヲ示シ、而シテ Δ ハ三角形ノ積ヲ示スモノトス。



故ニ $h_a.h_b.h_c.a.b.c$ ヲ互ニ計算スル公式ハ、

$$\begin{cases} h_a=\dfrac{2.\Delta}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots(1_a) \\ h_b=\dfrac{2.\Delta}{b}\cdots\cdots\cdots\cdots(1_b) \\ h_c=\dfrac{2.\Delta}{c}\cdots\cdots\cdots\cdots(1_c) \end{cases}$$

注意 一邊ヘ引ケル高サ唯一ツヲ計算スルニハ、先ヅ、其高サノ足ニテ分カタレタル底邊ノ二ツノ部分ノ一ツヲ求メ而シテ後ニ直角三角形ノ解キ方ニヨツテ計算シテモヨイ、即チ其公式ハ、

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}, & h_a=\sqrt{(c^2-a_1^2)}\cdots\cdots\cdots\cdots(2_a) \\ b_1=\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2b}, & h_b=\sqrt{(a^2-b_1^2)}\cdots\cdots\cdots\cdots(2_b) \\ c_1=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2c}, & h_c=\sqrt{(b^2-c_1^2)}\cdots\cdots\cdots\cdots(2_c) \end{cases}$$

又 Δ ヲ $1\div4\sqrt{s'(s'-a')(s'-b')(s'-c')}$ ノ様ニ變化スルトキハ次ノ公式ヲ得、但シ $a'=1\div h_a.\ b'=1\div h_b.\ c'=1\div h_c$ ニシテ $s'=\frac{1}{2}(a'+b'+c')$ デアル。

$a=\dfrac{2.\Delta}{h_a}=2.\Delta.a'\cdots\cdots(3_a)$　　$b=\dfrac{\Delta 2.}{h_b}=2.\Delta.b'\cdots\cdots(3_b)$

$$c=\frac{2.\Delta}{h_c}=2.\Delta c'\cdots\cdots\cdots(3_c)$$

例 (4) 三角形 ABC ニ於テ a ハ四尺 b ハ三尺七寸 c ハ一尺三寸ナリト云フ、各ノ頂點 A. B. C ヨリ夫々之ニ對スル邊 $a.b.c$ ヘ引ケル垂線 $h_a.h_b.h_c$ ハ各々何程ナルカ。

答 h_a ハ 12 寸 h_b ハ $12\frac{36}{37}$ 寸 h_c ハ $36\frac{12}{13}$ 寸

解 此問題ヲ解クニハ、定理(6)ノ公式$(1_a).(1_b).(1_c)$ヲ用ヒル。

算法 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)=(40+37+13)\div2=45$

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{45(45-40)(45-37)(45-13)}=240$$

$$h_a=\frac{2.\Delta}{a}=\frac{2\times240}{40}=12$$

$$h_b=\frac{2.\Delta}{b}=\frac{2\times240}{37}=12\frac{36}{37}$$

$$h_c=\frac{2.\Delta}{c}=\frac{2\times240}{13}=36\frac{12}{13}$$

解 又、定理(6)ノ公式$(2_a).(2_b).(2_c)$ヲ用ヒルトキハ、

算法 $a_1=\dfrac{(a^2+c^2)\backsim b^2}{2a}=\dfrac{40^2+13^2-37^2}{2\times40}=5$

$$h_a=\sqrt{(c^2-a_1^2)}=\sqrt{(13^2-5^2)}=12$$

$$b_1=\frac{(b^2+a^2)\backsim c^2}{2b}=\frac{37^2+40^2-13^2}{2\times37}=\frac{1400}{37}$$

$$h_b=\sqrt{(a^2-b_1^2)}=\sqrt{\left[40^2-\left(\frac{1400}{37}\right)^2\right]}=12\frac{36}{37}$$

$$c_1=\frac{(c^2+b^2)\backsim a^2}{2c}=\frac{13^2+37^2-40^2}{2\times13}=\frac{31}{13}$$

$$h_c=\sqrt{(b^2-c_1^2)}=\sqrt{\left[37^2-\left(\frac{31}{13}\right)^2\right]}=36\frac{12}{13}$$

例 (5) 三角形 ABC ニ於テ、各ノ頂點 A. B. C ヨリ之ニ對スル邊 $a.b.c$ ヘ引ケル垂線 $h_a.h_b.h_c$ ハ 24 寸 $25\frac{35}{37}$ 寸 $73\frac{11}{13}$ 寸ナリト云フ、三邊 $a.b.c$ ハ各々何程ナルカ。

答 a ハ八尺 b ハ七尺四寸 c ハ二尺六寸

解 此問題ヲ解クニハ、定理(6)ノ公式$(3_a).(3_b).(3_c)$ヲ用ヒル。

算法 $a_1=1\div h_a=1\div24=\frac{1}{24}$

$$b'=1\div h_b=1\div 25\frac{35}{37}=\frac{37}{960}$$

$$a'=1\div h_c=1\div 37\frac{11}{13}=\frac{13}{960}$$

$$s'=\frac{1}{2}(a'+b'+c')=\left(\frac{1}{24}+\frac{37}{960}+\frac{13}{960}\right)\div 2=\frac{3}{64}$$

$$2\Delta=1\div 2\sqrt{s'(s'-a)(s'-b')(s'-c')}$$

$$=1\div 2\sqrt{\frac{3}{64}\left(\frac{3}{64}-\frac{1}{24}\right)\left(\frac{3}{64}-\frac{37}{960}\right)\left(\frac{3}{64}-\frac{13}{960}\right)}=1920$$

$$a=2.\Delta.a'=1920\times\frac{1}{24}=80$$

$$b=2.\Delta.b'=1920\times\frac{37}{960}=72$$

$$c=2.\Delta.c'=1920\times\frac{13}{960}=26$$

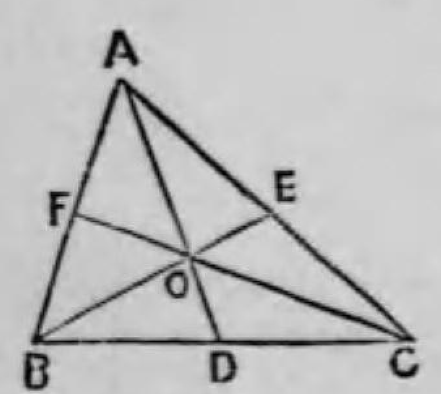
注意 此定理ノ第二ノ公式ニ由テ一ツノ高サヲ算出シタ後ニ他ノ高サヲ求メルニハ $ah_a=ch_b=ch_c$ ナル定理ニ由ルヲヨシトス、即チ $a=40.b=37.c=13$ ニ於テ h_a ヲ 12 ト算出シタ後ハ次ノ如クニスル。

$$h_b=\frac{ah_a}{b}=\frac{40\times 12}{37}=11\frac{36}{37}\qquad h_c=\frac{ah_a}{c}=\frac{40\times 12}{13}=36\frac{12}{13}$$

7 定理 (7) 三角形 ABC ニ於ケル三邊 $a.b.c$ ト内接圓ノ半徑 r トノ關係及内心 O ヨリ各ノ頂點 A. B. C マデノ距離 $b'_A.b'_B.b'_C$ トノ關係ハ、

$$\Delta=s.r \text{ 但シ } \Delta=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ ニシテ } s=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$b'^2_A=r^2+(s-a)^2.\ b'^2_B=r^2+(s-b)^2.\ b'^2_C=r_2+(s-c)^2$$



故ニ $r.b'_A.b'_B.b'_C$ ヲ計算スル公式ハ、

$$r=\Delta\div s$$

$$=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)\div r}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$b'_A=\sqrt{r^2+(s-a)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2_a)$$

$$b'_B=\sqrt{r^2+(s-b)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2_b)$$

$$b'_C=\sqrt{r^2+(s-c)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2_c)$$

例 (6) 三角形 ABC ニ於テ a ハ 40 寸 b ハ 37 寸 c ハ 13 寸ナリト云フ、内接圓ノ半徑 r ト内心ヨリ各ノ頂點マデノ距離 b'_A, b'_B, b'_C トハ各々何程ナルカ。

答 r ハ $10\frac{2}{3}$ 寸、b'_A ハ $\frac{1}{3}\sqrt{1249}$ 寸、b'_B ハ $13\frac{1}{3}$ 寸、b'_c ハ $10\frac{2}{3}\sqrt{10}$ 寸、

解 先ヅ、定理(7)ノ公式(1)ニ由テ内接圓ノ半徑 r ヲ求メ、而シテ同定理(7)ノ公式$(2_a).(2b).(2c)$ニ由テ $b'_A.b'_B.b'_C$. ヲ求メル。

算法 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(40+37+13)=45$

$$r=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)\div s}=\sqrt{(45-40)(45-37)(45-13)\div 45}=10\tfrac{2}{3}$$

$$b'_A=\sqrt{r^2+(s-a)^2}=\sqrt{(10\tfrac{2}{3})^2+(45-40)^2}=\frac{1}{3}\sqrt{1249}$$

$$b'_B=\sqrt{r^2+(s-b)^2}=\sqrt{(10\tfrac{2}{3})^2+(45-37)^2}=13\frac{1}{2}$$

$$b'_C=\sqrt{r^2+(s-c)^2}=\sqrt{(10\tfrac{2}{3})^2+(45-13)^2}=10\frac{2}{3}\sqrt{10}$$

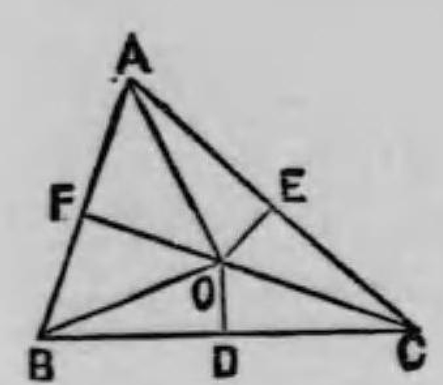
8 定理 (8) 三角形 ABC ニ於ケル三邊 $a.b.c$ ト外接圓ノ半徑 R トノ關係及外心 O ヨリ各ノ邊 $a.b.c$ マデノ距離 $d_a.d_b.d_c$ トノ關係ハ、

$$b:h_c=2R:c.\ c:h_b=2R:a.\ a:h_c=2R:b$$

$$R^2=d_a^2+(\tfrac{1}{2}a)^2.\ R^2=d_b^2+(\tfrac{1}{2}b)^2\ R^2=d_c^2+(\tfrac{1}{2}c)^2$$

故ニ $R.d_a.d_q.d_c$ ヲ計算スル公式ハ、

$$R=\frac{bc}{2h_a}\cdots\cdots\cdots\cdots(1_a)$$



$$R=\frac{cb}{2h_a}\cdots\cdots\cdots\cdots(1_b)$$

$$R=\frac{ab}{2h_c}\cdots\cdots\cdots\cdots(1_c)$$

$$d_a=\sqrt{R^2-(\tfrac{1}{2}a)^2}\cdots(2_a)$$

$$d_b=\sqrt{R^2-(\tfrac{1}{2}b)^2}\cdots(2_b)$$

$$d_c=\sqrt{R^2-(\tfrac{1}{2}c)^2}\cdots(2_c)$$

例 (7) 三角形 ABC ニ於テ a ハ 39 寸 b ハ 40 寸 c ハ 25 寸ナルトキ、外接圓ノ半徑 R ト外心ヨリ各ノ邊 $a.b.c$ マデノ距離 $d_a.d_a.d_c$ トハ各々何程ナルカ。

答 R ハ $20\frac{5}{6}$ 寸 d_a ハ $7\frac{1}{3}$ 寸 d_b ハ $4\frac{1}{6}$ 寸 d_c ハ $16\frac{2}{3}$ 寸

解 例題(4)ノ如クニシテ h_a ヲ求メ次ニ、定理(8)ノ公式(1_a)ニ由テ外接圓ノ半徑 R ヲ求メ、而シテ後ニ同定理(8)ノ公式$(2_a).(2_b).(2_c)$ニ由テ $d_a.d_b.d_c$ ヲ求メル。

算法 $a_1=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}=\frac{39^2+25^2-40^2}{2\times 39}=7$

$$h_a=\sqrt{(c^2-a_1^2)}=\sqrt{(25^2-7^2)}=24$$

$$R=\frac{bc}{2h_a}=\frac{40\times 25}{2\times 24}=20\frac{5}{6}$$

$$d_a=\sqrt{\left[R^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2\right]}=\sqrt{\left[\left(20\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\times 39\right)^2\right]}=7\frac{1}{3}$$

$$d_b=\sqrt{\left[R^2-\left(\frac{1}{2}b\right)^2\right]}=\sqrt{\left[\left(20\frac{5}{6}\right)^2-\right)\frac{1}{2}\times 40\Big)^2\right]}=4\frac{1}{6}$$

$$d_c=\sqrt{\left[R^2-\left(\frac{1}{2}c\right)^2\right]}=\sqrt{\left[\left(20\frac{5}{6}\right)^2-\right)\frac{1}{2}\times 25\Big)^2\right]}=16\frac{2}{3}$$

9 定理 (9) 三角形 ABC ニ於ケル三邊 $a.b.c$ ト三ツノ中線 $m_a.m_b.m'_c$ トノ關係及重心 O ヨリ各ノ頂點 A.B.C マデノ距離 $m'_a.m'_b.m'_c$ ト各ノ邊 $a.b.c$ マデノ距離 $d_a.d_b.d_c$ トノ關係ハ、

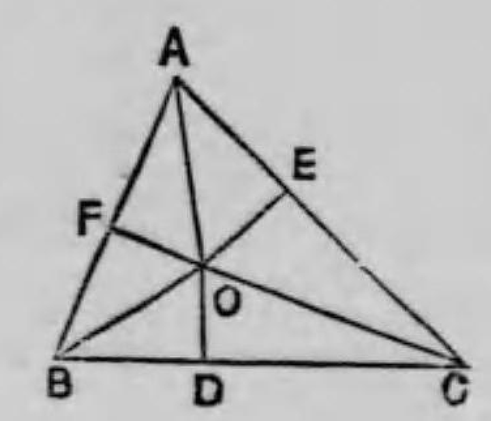
$$b^2+c^2=\frac{1}{2}a^2+2m_a^2.\quad c^2+a^2=\frac{1}{2}b^2+2m_b^2.\quad a^2+b^2=\frac{1}{2}c^2+2m_c^2$$

$$m_a=3m'_b.\quad m'_b=3m'_b.\quad m=3m'_c$$

$$m'^2_a=d_a^2+(\tfrac{1}{3}h_a)^2.\quad m'^2_b=d_b^2+(\tfrac{1}{3}h_b)^2.\quad m'^2_c=d_c^2+(\tfrac{1}{3}h_c)^2$$

故ニ $m_a.m_b.m_c.m'_a.m'_b\ m'_c.\ d_a.d_b.d_c$ ヲ計算スル公式ハ、

$$\begin{cases} m_a=\frac{1}{2}\sqrt{\{2(b^2+c^2)-a^2\}} \cdots(1_a) \\ m_b=\frac{1}{2}\sqrt{\{2(c^2+a^2)-b^2\}} \cdots(1_b) \\ m_c=\frac{1}{2}\sqrt{\{2(a^2+b^2)-c^2\}} \cdots(1_c) \\ m'_a=\frac{2}{3}m_a \cdots\cdots\cdots\cdots(2_a) \\ m'_b=\frac{2}{3}m_b \cdots\cdots\cdots\cdots(2_b) \\ m'_c=\frac{2}{3}m_c \cdots\cdots\cdots\cdots(2_c) \\ d_a=\frac{1}{3}h_a\cdots\cdots(3_a)\quad d_b=\frac{1}{3}h_b\cdots\cdots(3_b)\quad d_c=\frac{1}{3}h_c\cdots\cdots(3_c) \end{cases}$$



例 (8) 三角形 ABC ニ於テ a ハ 39 寸 b ハ 40 寸 c ハ 25 寸ナリト云フ、三ツノ中線ト重心ヨリ各ノ頂點 A. B. C マデノ距離 $m'_a.m'_b.n'_c$. ト各ノ邊 $a.b.c$ マデノ距離 $d_a.d_b.d_c$ トハ各々何程ナルカ。

$$答\begin{cases} m_a\ ハ\ \frac{1}{2}\sqrt{2929}\ 寸\ m_b\ ハ\ \sqrt{673}\ 寸\ m_c\ ハ\ \frac{1}{2}\sqrt{5617}\ 寸 \\ m'_a\ ハ\ \frac{1}{3}\sqrt{2929}\ 寸\ m'_b\ ハ\ \frac{2}{3}\sqrt{673}\ 寸\ m'_c\ ハ\ \frac{1}{3}\sqrt{5617}\ 寸 \\ d_a\ ハ\ 8\ 寸\ d_b\ ハ\ 7.8\ 寸\ d_c\ ハ\ 12.48\ 寸 \end{cases}$$

解 先ヅ、定理(9)ノ公式 $(1_a).(1_b).(1_c)$ ニ由テ $m_a.m_b.m_c$ ヲ求メ $(2_a).(2_b).(2_c)$ ニ由テ $m'_a.m'_b.m'_c$ ヲ求メ次ニ、例題(4)ノ如クニ $h_a.h_b.h_c$ ヲ求メ定理(9)ノ公式 $(3_a).(3_b).(3_c)$ ニ由テ $d_a.d_b.d_c$ ヲ求メル。

算法 $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{\{2(b^2+c^2)-a^2\}}=\frac{1}{2}\sqrt{\{2(40^2+25^2)-39^2\}}=\frac{1}{2}\sqrt{2929}$

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{\{2(c^2+a^2)-b^2\}}=\frac{1}{2}\sqrt{\{2(25^2+39^2)-40^2\}}=\sqrt{673}$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{\{2(a^2+b^2)-c^2\}}=\frac{1}{2}\sqrt{\{2(39^2+40^2)-25^2\}}=\frac{1}{2}\sqrt{5617}$$

$$m'_a=\frac{2}{3}m_a=\frac{1}{3}\sqrt{2929}.\quad m'_b=\frac{2}{3}m_b=\frac{2}{3}\sqrt{673}$$

$$m'_c=\frac{2}{3}m_c=\frac{1}{3}\sqrt{5617}$$

$h_a=24.\ h_b=23.4.\ h_c=37.44$ ノ如クニ算ス(算法ハ例題(4)ニアルカラ之ヲ略ス。

$$d_a=\frac{1}{3}h_a=24\div 3=8$$

$$d_b=\frac{1}{3}h_b=23.4\div 3=7.8$$

$$d_c=\frac{1}{3}h_c=37.44\div 3=12.48$$

10 定理 (10) 三角形 ABC ニ於ケル三邊 $a.b.c$ ト三ツノ角 A.B.C ノ二等分線 $b_A.b_B.b_C$ トノ關係ハ次ノ如シ。

但シ、三角形 ABC ニ於テ AD. BE. CF ヲ夫々三ツノ角 A. B. C ヨリ引ケル二等分線トセバ AD ヲ b_A. BE ヲ b_B. CF ヲ b_C ニテ示シ、而シテ BD ヲ a_1. DC ヲ a_2. CE ヲ b_1. EA ヲ b_2. AF ヲ c_1. FB ヲ c_2 ニテ示ス。

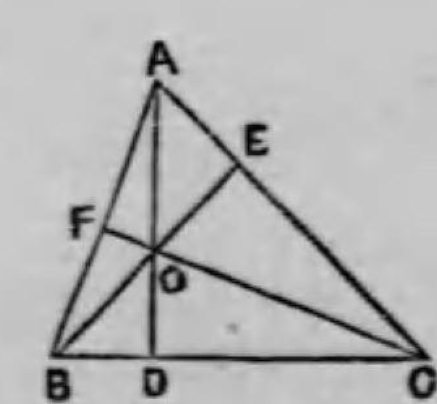
$$bc=b_A^2+a_1a_2.\quad a_1:a_2:a=c:b:c+b$$

$$ca=b_B^2+b_1b_2.\quad b_1:b_2:b=a:c:a+c$$

$$ab=b_C^2+c_1c_2.\quad c_1:c_2:c=b:a:b+a$$

故ニ $b_A.b_B.b_C$ ヲ計算スル公式ハ、

$$\begin{cases} b_A=\dfrac{\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}}{b+c}\cdots(1) \\ b_B=\dfrac{\sqrt{ca(c+a+b)(c+a-b)}}{c+a}\cdots(2) \\ b_C=\dfrac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}\cdots(3) \end{cases}$$



例 (9) 三角形 ABC ニ於テ a ハ 39 寸 b ハ 40 寸 c ハ 25 寸ナルトキ、三ツノ中線 $b_A. b_B. b_C$ ハ各々何程ナルカ。

答 b_A ハ $8\sqrt{10}$ 寸 b_B ハ $24\frac{3}{8}$ 寸 b_C ハ $11\frac{67}{79}\sqrt{10}$ 寸

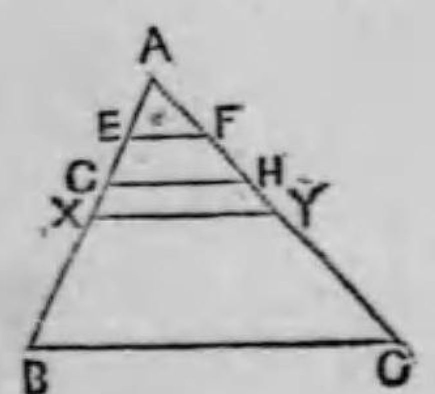
算法
$$b_A=\frac{\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}}{b+c}$$
$$=\frac{\sqrt{40\times 25(40+25+39)(40+25-39)}}{40+25}=8\sqrt{10}$$
$$b_B=\frac{\sqrt{ca(c+a+b)(c+a-b)}}{c+a}$$
$$=\frac{\sqrt{25\times 39(25+39+40)(25+39-40)}}{25+39}=24\frac{3}{8},$$
$$b_C=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$$
$$=\frac{\sqrt{39\times 40(39+40+25)(39+40-25)}}{39+40}=11\frac{67}{79}\sqrt{10}.$$

11 定理 (11) 三角形 ABC ニ於ケル底邊 a ト之ニ平行スル$(n-1)$個ノ直線ニテ此三角形ヲ n 等分スル此直線 $a_1. a_2. a_3 \cdots\cdots a_{n-1}$ ト頂點 A ヨリ分點マデノ距離 $b_1. b_2. b_3 \cdots\cdots b_{n-1}$ ト $c_1. c_2. c_3 \cdots\cdots c_{n-1}$ トノ關係ハ、

$$na_1^2=a^2.\ na_2^2=2a^2.\ na_3^2=3a^2 \cdots\cdots na_{n-1}^2=(n-1)a^2$$
$$nb_1^2=b^2.\ nb_2^2=2b^2.\ nb_3^2=3b^2 \cdots\cdots nb_{n-1}^2=(n-1)b^2$$
$$nc_1^2=c^2.\ nc_2^2=2c^2.\ nc_3^2=3c^2 \cdots\cdots nc_{n-1}^2=(n-1)c^2$$

但シ a_1 ハ頂點 A ヨリ第一ノ直線 a_2 ハ第二ノ直線ヲ示シ從テ a_{n-1} ハ終リノ直線ヲ示スモノナリ。

又 b_1 ハ邊 b ニ於ケル頂點 A ヨリ第一ノ分點マデノ距離 b_2 ハ第二ノ分點マデノ距離ヲ示シ、從テ b_{n-1} ハ終リノ分點マデノ距離ヲ示スモノナリ $c_1. c_2 \cdots\cdots c_{n-1}$ モ亦同樣故ニ $a_1. a_2. a_3 \cdots\cdots a_n$ 等ヲ計算スル公式ハ、



$$a_1=a\sqrt{\frac{1}{n}} \cdots\cdots\cdots\cdots [1]$$
$$a_2=a\sqrt{\frac{2}{n}} \cdots\cdots\cdots\cdots [2]$$
$$a_3=a\sqrt{\frac{3}{n}} \cdots\cdots\cdots\cdots [3]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n-1}=a\sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdots\cdots\cdots [4]$$

$b_1. b_2. b_3 \cdots\cdots b_{n-1}$. $c_1. c_2. c_3 \cdots\cdots c_{n-1}$ 等ヲ計算スル公式モ亦之ニ準ズ。

此圖ニ於テハ a_1 ハ EF. a_2 ハ GH $\cdots\cdots a_{n-1}$ ハ XY. b_1 ハ AF. b_2 ハ AH $\cdots\cdots b_{n-1}$ ハ AY ニシテ c_1 ハ AC. c_2 ハ AG $\cdots\cdots c_{n-1}$ ハ AX ナリ。

例 (10) 三角形 ABC ニ於テ a ハ 7 寸ナリト云フ、底邊 a ニ平行スル二ツノ直線ニテ此三角形ノ積ヲ三等分スルトキハ其二ツノ直線 a_1, a_2 ハ各々何程ナルカ。

答 a_1 ハ $2\frac{1}{3}\sqrt{3}$ 寸 a_2 ハ $2\frac{1}{3}\sqrt{6}$ 寸。

算法
$$a_1=a\sqrt{\frac{1}{3}}=7\times\sqrt{\frac{1}{3}}=2\frac{1}{3}\sqrt{3}$$
$$a_2=a\sqrt{\frac{2}{3}}=7\times\sqrt{\frac{2}{3}}=2\frac{1}{3}\sqrt{6}$$

第二章 四邊形ニ於ケル長サノ計算

第一節 平行四邊形ニ於ケル計算

平行四邊形ハ其對角線ニ依テ二ツニ分ケレバ全ク相等シイ二ツノ三角形トナル、從テ、平行四邊形ニ於ケル計算ハ殆ンド三角形ニ於ケル計算ニ同ジデアル、依テ二三ノ問題ヲ掲ゲテ其應用ヲ示スコトニスル。

例 (1) 平行四邊形 ABCD ニ於テ、一邊 AB ハ二尺五寸、他ノ一邊 BC ハ三尺九寸ニシテ其對角線 AC ハ四尺ナルトキ、他ノ對角線 BD ハ何程ナルカ、但シ AB ヲ a. BC ヲ b. AC ヲ d DB ヲ d'. トス。

答 d' ハ $2\sqrt{673}$ 寸

解 此平行四邊形 ABCD ヲ AC ニ依テ二ツニ分ケルトキハ BD ノ半分ハ三角形 ABC ノ中線ニ相當ス、故ニ定理 9 ノ公式〔1〕ニ由テ次ノ如クニ解ク。

算法 $d'=\sqrt{\{2(a^2+b^2)-d^2\}}=\sqrt{\{2(25^2+39^2)-40^2\}}=2\sqrt{673}$

例 (2) 平行四邊形 ABCD ニ於テ、一邊 AB ハ 25 寸、他ノ一邊 BC ハ 39 寸ニシテ、其對角線 AC ハ 40 寸ナルトキ BC ヲ底邊トナス高サ h ト AB ヲ底邊トナス高サ h' トトハ各々何程ナルカ。

答 h ハ 24 寸 h' ハ 37.44 寸

解 平行四邊形 ABCD ニ於テノ高サハ三角形 ABC ニ於ケル高サニ同ジ、故ニ定理(6)ノ公式[1]ニ由テ次ノ如クニ解ク。

$$s=\frac{1}{2}(a+b+d)=\frac{1}{2}(25+39+40)=52$$

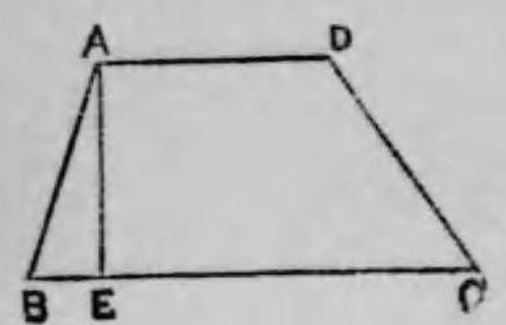
算法 $\square=2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}=2\sqrt{52(52-25)(52-39)(52-40)}$

$h=\square\div39=24.\quad h'=\square\div25=37{\cdot}44$

第二節 梯形ニ於ケル計算

梯形ニ於ケル計算ハ殆ンド三角形ニ於ケル計算ニ同ジクシテ異ナルモノハ甚ダ容易デアルカラ其問題ニ依テ算法ダケヲ示ス。

例 (3) 梯形 ABCD ニ於テ平行ナル二邊 AD ハ 5 寸 BC ハ 45 寸ニシテ、他ノ二邊 AB ハ 25 寸 DC ハ 39 寸ナルトキ、其高サ h 即チ AD. BC ノ距離ハ何程ナルカ。



答 h ハ 23·4 寸

解 求ムル所ノ高サハ AB. DC ヲ二邊 $c.b$ トシ(BC−AD)ヲ底邊 a トナス三角形ノ高サニ同ジデアルカラ、定理(6)ノ公式[1]ニ由テ次ノ如クニ解ク。

算法 $a=\mathrm{BC}-\mathrm{AD}=45-5=40$

$$\mathrm{BE}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}=\frac{40^2+25^2-39^2}{2\times40}=8{\cdot}8$$

$$h=\sqrt{(c^2-\mathrm{BE}^2)}=\sqrt{(25^2-8{\cdot}8^2)}=23{\cdot}4$$

例 (4) 梯形 ABCD ニ於テ平行ナル二邊 AD ハ 5 寸 BC ハ 45 寸ニシテ他ノ二邊 AB ハ 25 寸 DC ハ 39 寸ナリト云フ、二ツノ對角線 AC. DB ハ各々何程ナルカ。

答 AC ハ $2\sqrt{462}$ 寸 DB ハ $3\sqrt{82}$ 寸

解 前ノ例題(3)ノ如クニ BE ヲ求メ而シテ直角三角形ノ解法ニ由テ AC. DB ヲ求メル。

算法 $a=\mathrm{BC}-\mathrm{AD}=45-5=40$

$$\mathrm{BE}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}=\frac{40^2+25^2-39^2}{2\times40}=8{\cdot}8$$

$$\mathrm{AC}=\sqrt{c_2-\mathrm{BE}^2+(\mathrm{BC}-\mathrm{BE})^2}=\sqrt{25^2-8{\cdot}8^2+(45-8{\cdot}8)^5}=2\sqrt{462}$$

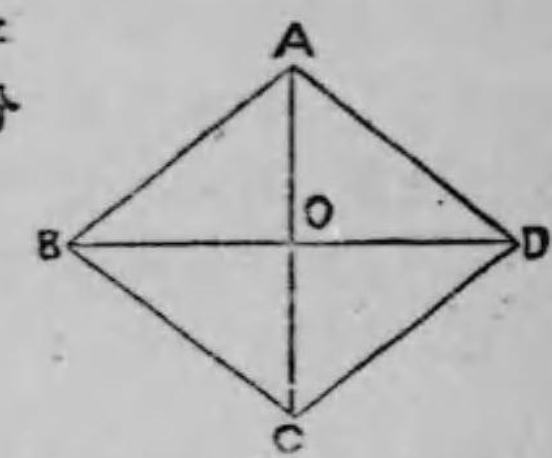
$$\mathrm{DE}=\sqrt{c^2-\mathrm{BE}^2+(\mathrm{BE}+\mathrm{AD})^2}=\sqrt{25^2-8{\cdot}8^2+(8{\cdot}8+5)^2}=3\sqrt{82}$$

第三節 菱形ニ於ケル計算

菱形ニ於ケル計算 菱形ハ二ツノ對角線ニ依テ四ツニ分ケルトキハ四ツノ直角三角形ヲ得、從テ菱形ニ於ケル計算ハ直角三角形ニ於ケル計算ニ同ジデアル、故ニ、其問題ニ依テ其應用ダケヲ示ス。

例 (5) 菱形 ABCD ニ於テ二ツノ對角線 BD ハ八寸ニシテ AC ハ六寸ナルトキ、各ノ邊 AB. BC. CD. DA ハ何程ナルカ。

答 AB. BC. CD. DA ハ各五寸



解 二ツノ對角線 AC, BD ハ交點ヲ O トセバ AOB ハ直角三角形ニシテ AO ハ AC ノ半分 BO ハ BD ノ半分デアルカラ次ノ如クニ解ク。

算法 $\mathrm{AO}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}=6\div2=3$

$\mathrm{BO}=\frac{1}{2}\mathrm{BD}=8\div2=4$

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(\mathrm{AO}^2+\mathrm{BO}^2)}=\sqrt{(3^2+4^2)}=5$$

例 (6) 菱形 ABCD ニ於テ各ノ邊 AB. BC. CD. DA ハ何レモ五寸ニシテ對角線ノ一ツ即チ BD ハ八寸ナルトキ、他ノ對角線 AC ハ何程ナルカ。

答 AC ハ六寸

算法 $\mathrm{AC}=\sqrt{(2\mathrm{AB})^2-\mathrm{BD}^2}=\sqrt{(2\times5)^2-8^2}=6.$

第三章　正多角形ト圓ニオケル長サノ計算

第一節　正多角形ニ於ケル計算

正多角形ニ於ケル計算ハ、重ニ、內接圓ノ半徑ト外接圓ノ半徑トヲ計算スルニ止ツテ其解法ハ甚ダ六ケ敷イ、故ニ、之ヲ計算スル率ノミヲ揭ゲテ、問題ニ依テ其用法ヲ示スコトニスル。

唯正三角形其他二三ノモノノミハ直角三角形ノ解法ニ由テ容易ニ計算スルコトガ出來ルカラ、先ヅ是等ノ問題ヲ揭ゲテ其算法ヲ示ス。

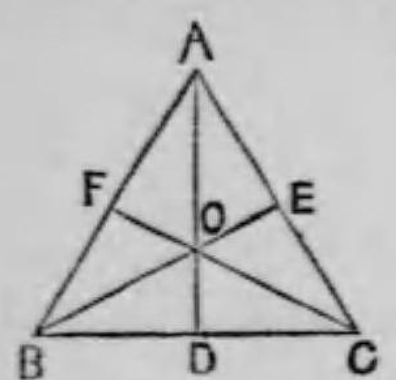
注意　正多角形ニ內接スル圓ノ中心ト外接スル圓ノ中心トハ同一デアル、之ヲ正多角形ノ中心ト稱ヘル、正多角形ニ於テハ、簡略ニ內接圓ノ半徑ヲ內半徑ト云ヒ、外接圓ノ半徑ヲ外半徑ト云フ。

例　(1)　正三角形ニ於テ、各ノ邊ハ二寸ナリト云フ、其高サ h ト內半徑 r ト外半徑 R トハ各々何程ナルカ。

答　h ハ 1·732 寸 r ハ 0·577 寸 R ハ 1·154 寸

解　正三角形 ABC ニ於テ AD ヲ頂點 A ヨリ底邊 BC ヘ引イタ垂線、即チ、高サヲ h トシ、O ヲ正三角形ノ中心トス。

然ルトキハ、OD ハ內半徑 OA ハ外半徑ニシテ ABD ハ直角三角形デアルカラ次ノ如クニ計算スル。



算法　$h=\sqrt{a^2-(\frac{1}{2}a)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=1.732$

$r=\frac{1}{3}h=\frac{1}{3}\sqrt{3}=0{\cdot}577$

$\mathrm{R}=\frac{2}{3}h=\frac{2}{3}\sqrt{3}=1{\cdot}154$

例　(2)　正三角形ニ於テ、高サ h ハ 3 寸ナリト云フ、各々ノ邊 a ハ何程ナルカ。　**答**　a ハ 3·464 寸

算法　$a=\frac{2}{\sqrt{3}}h=\frac{2}{\sqrt{3}}\times 3=3{\cdot}464.$

例　(3)　正方形ニ於テ、一邊 a ハ 1 寸ナリト云フ、對角線 t ハ何程ナルカ。　**答**　t ハ 1·414

算法　$t=\sqrt{(a^2+a^2)}=\sqrt{2}.a=\sqrt{2}\times 1=1{\cdot}414$

注意　$\sqrt{2}$ ハ一邊ヲ以テ對角線ヲ求ムル率デアル。

例　(4)　正方形ニ於テ、對角線 t ハ 2 寸ナリト云フ、一邊 a ハ何程ナルカ。　**答**　a ハ 1.414 寸

算法　$a=\frac{t}{\sqrt{2}}=2\div\sqrt{2}=1.414$

數 邊	內半徑率
3.	0.8886
4.	0.5000
5.	0.6882
6.	0.8660
7.	1.0720
8.	1.2375
9.	1.3737
10.	1.5388
11.	1.7428
12.	1.8660

邊 數	外半徑率
3.	0.5774
4.	0.7071
5.	0.8507
6.	1.0000
7.	1.1826
8.	1.3344
9.	1.4619
10.	1.6180
11.	1.8640
12.	1.9819

例　(5)　正五邊形ニ於チ一邊 a ハ二寸ナリト云フ、內半徑 r ト外半徑 R トハ各々何程ナルカ。　**答**　r ハ 1.3764 寸 R ハ 1.7014寸

算法　$r=0.6882a=0.6882\times 2=1.3764$

$\mathrm{R}=0.8507a=0.8507\times 2=1.7014$

例　(6)　正五邊形ニ於テ、內半徑 r ハ 1.5 寸ナリト云フ、一邊 a ハ何程ナルカ。　**答**　a ハ 2.18 寸

算法　$a=r\div 0.6882=1.5\div 0.6882=2.18$

例　(7)　正五邊形ニ於テ、外半徑 R ハ 2.6 寸ナリト云フ、一邊 a ハ何程ナルカ。　**答**　a ハ 3.05 寸

算法　$a=\mathrm{R}\div 0.8507=2.5\div 0.8507=3.05$

例　(8)　正六邊形ニ於テ、一邊 a ハ二寸ナリト云フ、內半徑 r ト外半徑 R トハ各々何程ナルカ。　**答**　r ハ 1·7320 寸 R ハ2 寸

算法　$r=0.8660a=0.8660\times 2=1.7320$

$\mathrm{R}=a=2$

例　(9)　正六邊形ニ於テ、內半徑 r ハ 1.5 寸ナリト云フ、一邊 a ハ何程ナルカ、　**答**　1.73 寸

算法　$a=r\div 0.8660=1.5\div 0.8660=1.73$

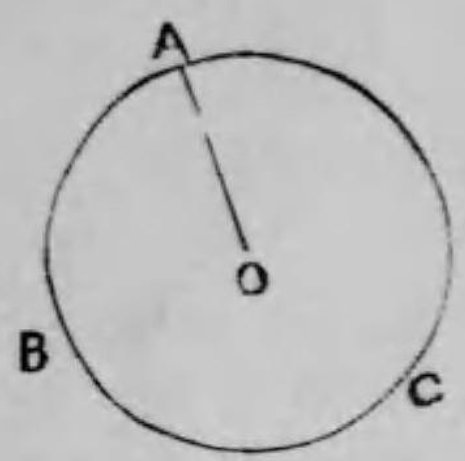
例　(10)　正六邊形ニ於テ、外半徑 R ハ 2.6 寸ナリト云フ、一邊 a

ハ何程ナルカ。 答 a ハ 2.6 寸

算法 $a=R=2.6$

此他ノ正多角形ニ於ケル計算モ亦此正五邊形正六邊形ニ於ケル計算ト同樣ニ率ヲ用ヒテ計算スル。

第二節 圓ニ於ケル計算



(1) 半徑ヲ以テ圓周ヲ計算スルトキ

算法 半徑ニ 2π ヲ乘ズ, 但シ $\pi=3.1416$

公式 圓周ヲ s ニテ示シ半徑ヲ r ニテ示ストキハ、

$$s=2.\pi.r.$$

例 (1) 圓ニ於テ、半徑ハ 4 寸ナリト云フ、圓周ハ何程ナルカ。 答 25.1328 寸

算法 $s=2.\pi.r=2\times3.1416\times4=25.1328$

(2) 圓周ヲ以テ半徑ヲ計算スルトキ、

算法 圓周ニ $\frac{1}{2\pi}$ 即チ $\frac{113}{2\times355}$ ヲ乘ズ。

公式 圓周ヲ s ニテ示シ半徑ヲ r ニテ示ストキハ、

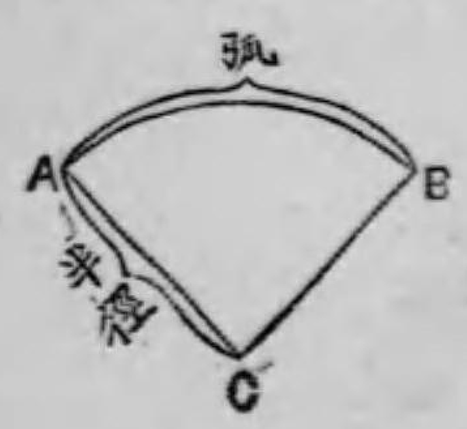
$$r=\frac{1}{2.\pi}s.$$

例 (2) 圓ニ於テ、圓周ハ八寸ナリト云フ、半徑ハ何程ナルカ。

算法 $r=\frac{1}{2.\pi}s=\frac{113}{2\times355}\times8=1.273$ 答 1.273 寸

注意 π ノ二十桁マデノ近似數ハ 3.14159265358979323846 ニシテ、之ヲ四桁ニ略シタルモノガ 3·1416 又之ヲ分數ニ略シタルモノハ $\frac{133}{355}$ 倘之ヲ略シタルモノハ $\frac{22}{7}$ 故ニ $\frac{1}{4\pi}$ ニハ $\frac{133}{4\times355}$ ヲ用ヒルガ便利デアル。

256 **扇形** 下ノ圖ノ如ク圓周ノ一部分(即チ弧)ト其兩端ニ引ケル二ツノ半徑トニテ圍マレル形ヲ扇形トイフ、此二ツノ半徑ガナス角ヲ此弧ノ上ニ立ツ中心角或ハ單ニ扇形ノ角トイフ。



定理 スベテ扇形ノ弧ト圓周トノ比ハ扇形ノ角ト 360 度ノ角トノ比ニ等シ。

ソコデ扇形ノ角ノ度數ヲ表ハス數ヲ K トスレバ

扇形ノ弧 : 圓周 $=K:360$

即チ $(\text{扇形ノ弧})=\text{圓周}\times\frac{K}{360}=(\text{半徑}\times2)\times\pi\times\frac{K}{360}$

$$=(\text{半徑})\times\pi\times\frac{K}{180}$$

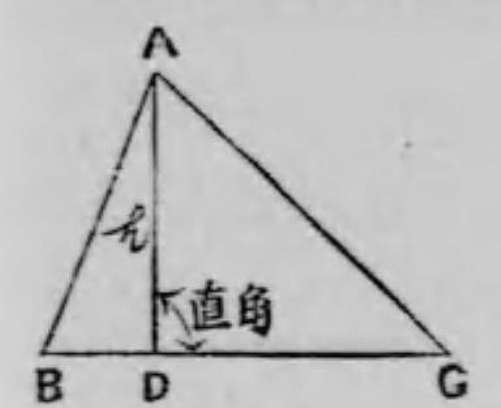
例 (1) 半徑四寸二分ナル圓ニ於テ 54° ノ中心角ニ對スル弧ノ長サ如何、但シ π ヲ 3.14 トシテ計算セヨ。 答 一尺二寸六分

算法 $42\times3.14\times\frac{54}{180}=12.6$

第四章 平面形ニ於ケル面積ノ計算

第一節 三角形ノ面積

(1) 底邊ト高サトヲ以テ其面積ヲ計算スルトキ、



算法 底邊ト高サトヲ掛ケ合セタルモノヲ二等分スル。

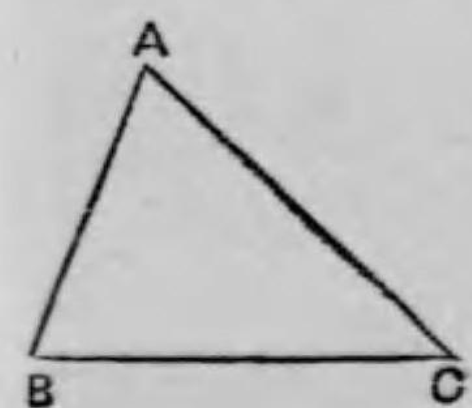
公式 三角形ノ積ヲ $\varDelta$ ニテ示シ、而シテ底邊ヲ b 高サヲ h ニテ示ストキハ、

$$\varDelta=\tfrac{1}{2}.h.b$$

例 (1) 三角形 ABC ニ於テ底邊 BC ハ五寸ニシテ、其高サ AD ハ四寸ナリト云フ、其面積ハ幾平方寸ナルカ、

算法 $\varDelta=\frac{1}{2}.h.b=\frac{1}{2}\times4\times5=10$ 答 十平方寸

(2) 三邊ヲ以テ其面積ヲ計算スルトキ、



算法 三邊ノ和ノ半分ニ、其和ノ半分ト各々ノ邊トノ差ヲ段々ニ掛ケタルモノヲ平方ニ開ク。

公式 三角形ノ三邊ヲ $a.b.c.$ ニテ示シ、其和ノ半分ヲ示ストキハ、

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$\varDelta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

例 (2) 三角形 ABC ニ於テ、各々ノ邊 $a.b.c$ ハ夫々七寸三分、五寸

二分、三寸五分ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。

答　八平方寸四

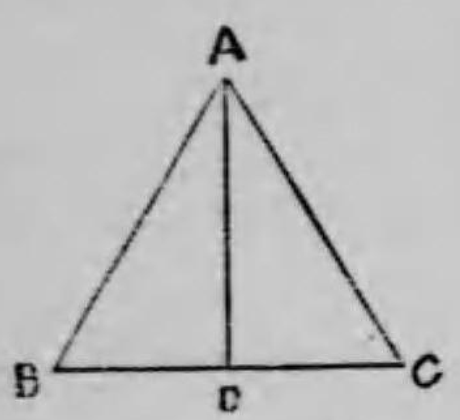
算法　$s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(7.3+5.2+3.5)=8$

$\varDelta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{8(8-7.3)(8-5.2)(8-3.5)}=8.4$

(3)　一邊ヲ以テ正三角形ノ面積ヲ計算スルトキ、

算法　一邊ヲ二乘シ、之ニ $\frac{1.732}{4}$ ヲ掛ケル。



公式　一邊ヲ a ニテ示ストキハ、

$\varDelta=\frac{1.732}{4}a^2$.　精密ニハ　$\triangle=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

例 (3)　正三角形ニ於テ、一邊 a ハ 2寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。

答　1.732 平方寸

算法　$\varDelta=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=1.732$

(4)　高サヲ以テ正三角形ノ面積ヲ計算スルトキ、

算法　高サヲ二乘シ、之ニ $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ヲ乘ズ。

公式　高サヲ h ニテ示ストキハ、

$\varDelta=\frac{1}{3}\times 1.732\times h^2$.

例 (4)　正三角形ニ於テ、高サ h ハ、三寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。　答　五平方寸一九六

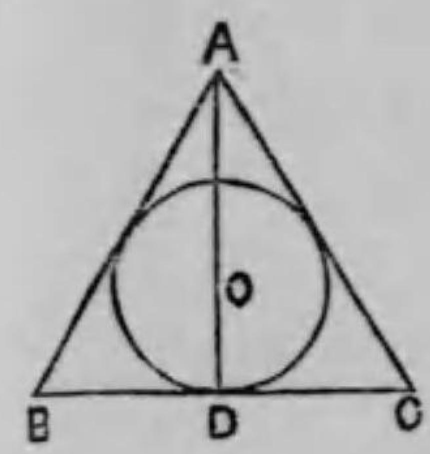
算法　$\varDelta=\frac{1}{3}\times 1.732\times h^2=\frac{1}{3}\times 1.732\times 3^2=5.196$

(5)　内接圓ノ半徑ヲ以テ正三角形ノ面積ヲ計算スルトキ、

算法　内接圓ノ半徑ヲ二乘シ、之ニ 5.196 ヲ掛ケル。

公式　内接圓ノ半徑ヲ r ニテ示ストキハ、

$\varDelta=5.196r$



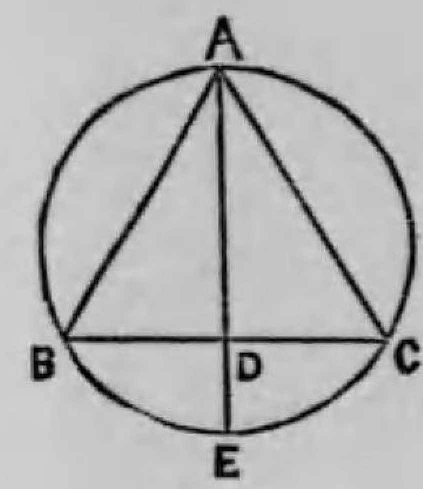
例 (5)　正三角形ニ於テ内接圓ノ半徑一寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。

答　五平方寸一九六

算法　$\varDelta=3\sqrt{3}.r^2=3\sqrt{3}\times 1^2=5.196$

$\varDelta=5.196\times r^2=5.196\times 1=5.196$

(6)　外接圓ノ半徑ヲ以テ正三角形ノ積ヲ計算スルトキ、



算法　外接圓ノ半徑ヲ二乘シ、之ニ 1.299 ヲ掛ケル。

公式　外接圓ノ半徑ヲ R ニテ示ストキハ、

$\varDelta=1.299\times R^2$

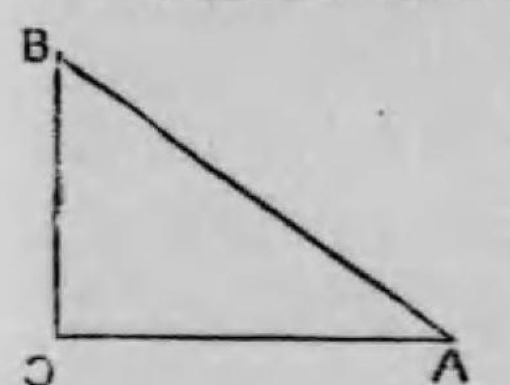
例 (6)　正三角形ニ於テ、外接圓ノ半徑ハ二寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。

答　五平方寸一九六

算法　$\varDelta=\frac{3}{4}\sqrt{3}.R^2=\frac{3}{4}\sqrt{3}\times 2^2=5.196$

$\varDelta=1.299\times R^2=1.299\times 2^2=5.196$

(7)　斜邊ト一邊トヲ以テ直角三角形ノ面積ヲ計算スルトキ、



算法　斜邊ト一邊ノ和ト差トヲ相乘ジタルモノヲ平方ニ開イテ他ノ一邊ヲ求メ、之ヲ一邊ニ乘ジテ二等分スル。

公式　斜邊ヲ c ニテ示シ、一邊ヲ a ニテ示ストキハ、

$b=\sqrt{(c+a)(c-a)}$　　$\varDelta=\frac{1}{2}ab$

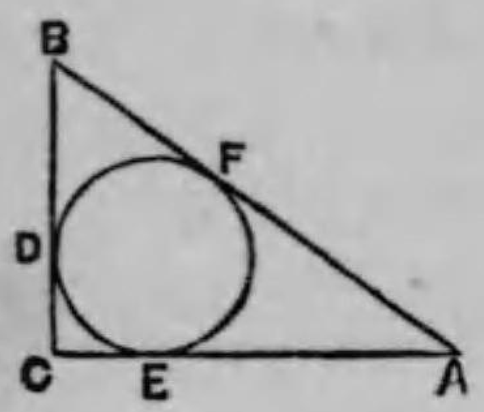
例 (7)　直角三角形ニ於テ、斜邊ハ三寸九分ニシテ一邊ハ一寸五分ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。　答　二平方寸七

算法　$b=\sqrt{(c+a)(c-a)}=\sqrt{(3.9+1.5)(3.9-1.5)}=3.6$

$\varDelta=\frac{1}{2}a.b=\frac{1}{2}\times 1.5\times 36=2.7$

(8)　斜邊ト内接圓ノ半徑トヲ以テ直角三角形ノ面積ヲ計算スルトキ、

算法　先ヅ、斜邊ニ内接圓ノ半徑ヲ加ヘテ三角形ノ周圍ノ半分ヲ求メ之ヲ内接圓ノ半徑ニ乘ジテ二等分スル。



公式　斜邊ヲ c. 內接圓ノ半徑ヲ r ニテ示シ、三角形ノ周圍ノ半分ヲ s ニテ示ストキハ、

$$\underline{s=c+r}\qquad \underline{\Delta=\tfrac{1}{2}r.s}$$

例　(8)　直角三角形ニ於テ、斜邊ハ五寸ニシテ內接圓ノ半徑ハ一寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。

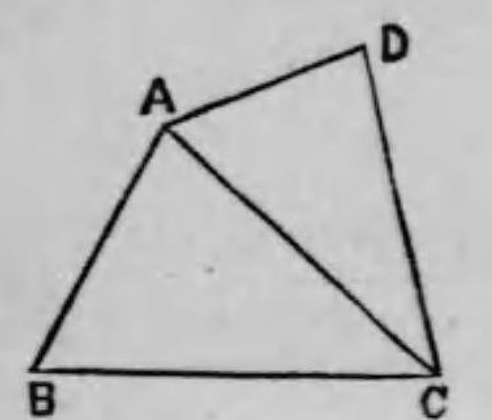
答　六平方寸

第二節　四邊形ノ面積

(1)　四邊ト一ツノ對角線トヲ以テ四邊形ノ面積ヲ計算スルトキ、

算法　已知ノ對角線ニテ二ツノ三角形ニ分チ、而シテ、此二ツノ三角形ノ積ヲ求メテ之ヲ加ヘル。

公式　四邊形 ABCD ニ於テ各々ノ邊 AB. BC. CD. DA 夫々 $a.b.c.d$ ニテ示シ、而シテ一ツノ對角線ヲ l ニテ示ストキハ、



$$s=\tfrac{1}{2}(a+b+l)\qquad \text{(175頁參照)}$$

$$\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-l)}$$

$$s'=\tfrac{1}{2}(c+d+l)$$

$$\triangle CDA=\sqrt{s'(s'-c)(s'-d)(s'-l)}$$

$$\square ABCD=\triangle ABC+\triangle CDA$$

例　(1)　四邊形 ABCD ニ於テ、各々ノ邊 AB. BC. CD. DA ハ夫々 13 寸 37 寸 36 寸 25 寸ニシテ一ツノ對角線 AC ハ 40 寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。　**答**　709 平方寸

算法　△ABC ノ積ヲ求ムル算法ハ、

$$s'=\tfrac{1}{2}(a+b+l)=\tfrac{1}{2}(13+37+40)=45$$

$$\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-l)}=\sqrt{45(45-13)(45-37)(45-40)}$$
$$=240$$

△CDA ノ積ヲ求ムル算法ハ、

$$s'=\tfrac{1}{2}(c+d+l)=\tfrac{1}{2}(39+25+40)=25$$

$$\triangle CDA=\sqrt{s(s-c)(s-d)(s-l)}=\sqrt{52(52-39)(52-25)(52-40)}$$
$$=468$$

$$\square ABCD=\triangle ABC+\triangle CDA=240+468=708$$

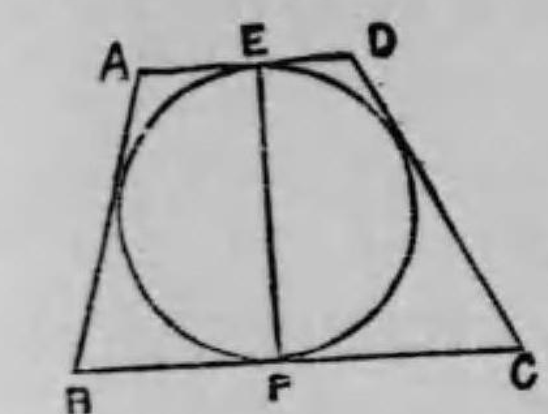
(2)　相對スル兩邊ノ和ト內接圓ノ半徑トヲ以テ四邊形ノ面積ヲ計算スルトキ、

算法　相對スル兩邊ノ和ニ內接圓ノ半徑ヲ掛ケル。

公式　相對スル兩邊ノ和ヲ s 內接圓ノ半徑ヲ r ニテ示シ其積ヲ□ニテ示ストキハ、

$$\underline{\square=s.r}$$

注意　圓ニ外接スル四邊形ノ相對スル兩邊ノ和ハ其周圍ノ半分ニ等シイ。

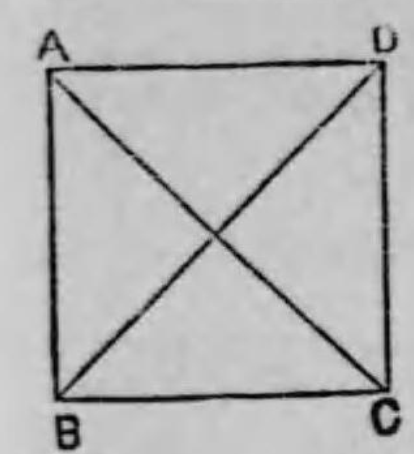


例　(2)　半徑二寸ナル圓ニ外接スル四邊形ノ相對スル兩邊ハ三寸八分ト五寸二分ナリト云フ、此四邊形ノ面積ハ何程ナルカ。

答　十八平方寸

算法　$\square=s.r=(3.8+5.2)\times2=18$

(3)　一邊ヲ以テ正方形ノ面積ヲ計算スルトキ、



算法　一邊ヲ二乘スル。

公式　一邊ヲ a ニテ示シ、其積ヲ□ニテ示ストキハ、

$$\underline{\square=a^2.}$$

例　(3)　正方形ニ於テ、一邊ハ五寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。　**答**　二十五平方寸

算法　$\square=a^2=5^2=25$

(4)　對角線ヲ以テ正方形ノ面積ヲ計算スルトキ、

算法　斜邊ノ二乘ヲ二等分スル。

公式　斜邊ヲ d ニテ示ストキハ、

$$\underline{\square=\tfrac{1}{2}d^2.}$$

例　(4)　正方形ニ於テ、對角線ハ六寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。

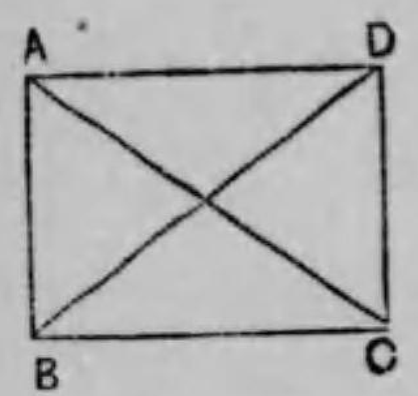
答　十八平方寸

算法　$\square=\tfrac{1}{2}d^2=6^2\div2=36\div2=18$

(5)　二邊ヲ以テ矩形ノ面積ヲ計算スルトキ、

算法　二邊ヲ掛ケ合ス。

公式　二邊ヲ a,b ニテ示ストキハ、



$\square = a.b.$

例　(5)　矩形ニ於テ、一邊ハ三寸ニシテ他ノ一邊ハ七寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。

答　二十一平方寸

算法　$\square = a.b = 3 \times 7 = 21$

(6)　一邊ト對角線トヲ以テ矩形ノ面積ヲ計算スルトキ、

算法　對角線ノ二乘ヨリ一邊ノ二乘ヲ引キ其餘ヲ平方ニ開イテ他ノ一邊ヲ求メ、之ニ一邊ヲ掛ケル。

公式　一邊ヲ a ニテ示シ、對角線ヲ d ニテ示ストキハ、

$$\square = \sqrt{(d^2 - a^2)}.a$$

例　(6)　矩形ニ於テ一邊ハ三寸ニシテ對角線ハ五寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。

答　十二平方寸

算法　$\square = \sqrt{(d^2 - a^2)}.a = \sqrt{(5^2 - 3^2)} \times 3 = 12$

(7)　周圍ト對角線トヲ以テ矩形ノ面積ヲ計算スルトキ、

算法　周圍ノ半分ノ二乘ヨリ對角線ノ二乘ヲ引キ、其餘ヲ二等分スル、

公式　周圍ノ半分ヲ s ニテ示シ、對角線ヲ d ニテ示ストキハ、

$$\square = \tfrac{1}{2}(s^2 - d^2).$$

例　(7)　矩形ニ於テ、其周圍ハ七寸ニシテ對角線ハ二寸五分ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。

答　三平方寸

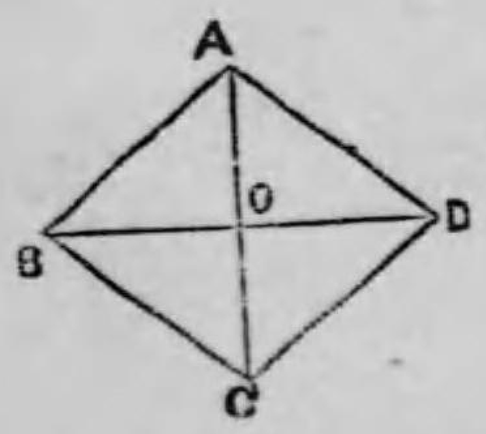
算法　$\square = \frac{1}{2}(s^2 - d^2) = \frac{1}{2}[(\frac{1}{2} \times 7)^2 - 2.5^2] = 3$

(8)　二ツノ對角線ヲ以テ菱形ノ面積ヲ計算スルトキ、

算法　二ツノ對角線ヲ掛ケ合セテ二等分スル。

公式　二ツノ對角線ヲ夫々 $b.c$ ニテ示ストキハ、

$$▱ = \tfrac{1}{2}b.c$$



例　(8)　菱形ニ於テ二ツノ對角線ノ一ツハ三寸ニシテ他ノ一ツハ四寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。

答　六平方寸

算法　$▱ = \frac{1}{2}b.c = 3 \times 4 \div 2 = 6$

(9)　一邊ト一ツノ對角線トヲ以テ菱形ノ面積ヲ計算スルトキハ、

算法　一邊ノ二乘ヨリ一ツノ對角線ノ半分ノ二乘ヲ引キ其餘ヲ平方ニ開イテ他ノ一ツノ對角線ノ半分ヲ求メ、之ニ一ツノ對角線ヲ掛ケル。

公式　一ツノ對角線ヲ b. 他ノ一ツノ對角線ヲ c ニテ示シ、一邊ヲ a ニテ示ストキハ、

$$\tfrac{1}{2}c = \sqrt{[a^2 - (\tfrac{1}{2}b^2)]} \qquad \diamond = \tfrac{1}{2}c.b$$

例　(9)　菱形ニ於テ、一邊ハ二寸五分ニシテ一ツノ對角線ハ四寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。

答　六平方寸

算法　$\frac{1}{2}c = \sqrt{[a^2 - (\frac{1}{2}b)^2]} = \sqrt{[2.5^2 - (\frac{1}{2} \times 4)^2]} = 1.5$

$\diamond = \frac{1}{2}c.b = 1.5 \times 4 = 6$

注意　一邊ハ周圍ノ四分ノ一ニ等シイカラ此公式ハ周圍ト一ツノ對角線トヲ以テ菱形ノ面積ヲ算スル公式ニ用フルコトヲ得、即チ、其公式ハ、

公式　一ツノ對角線ヲ b. 他ノ一ツノ對角線ヲ c ニテ示シ、周圍ヲ s ニテ示ストキハ、

$$\tfrac{1}{2}c = \sqrt{[\tfrac{1}{4}\ )^2 - (\tfrac{1}{2}b)^2]} \qquad \diamond = \tfrac{1}{2}c.b$$

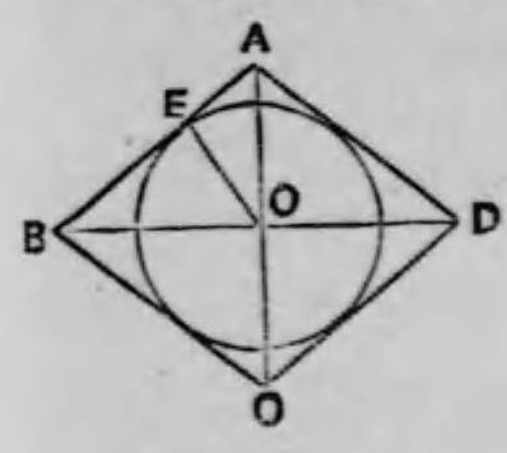
例　(10)　菱形ニ於テ、周圍ハ二尺六寸ニシテ一ツノ對角線ハ一尺二寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。

答　三十平方寸

算法　$\frac{1}{2}c = \sqrt{[(\frac{1}{4}s)^2 - (\frac{1}{2}b)^2]} = \sqrt{[(\frac{1}{4} \times 26)^2 - (\frac{1}{2} \times 12)^2]} = 2{\cdot}5$

$\diamond = \frac{1}{2}c.b = 2{\cdot}5 \times 12 = 30$

(10)　一邊ト內接圓ノ半徑トヲ以テ菱形ノ面積ヲ算スルトキ、



算法　一邊ト內接圓ノ半徑トヲ掛ケ合セテ二倍スル。

公式　一邊ヲ a. 內接圓ノ半徑ヲ r ニテ示ストキハ、　$\diamond = 2.r.a.$

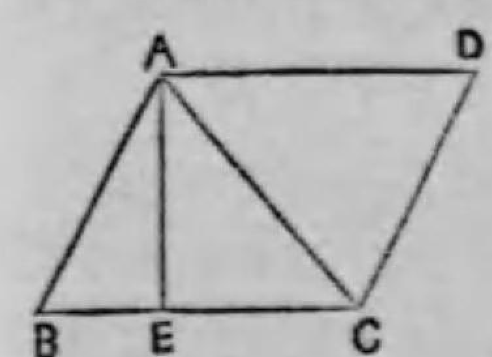
注意　周圍 s ト、內接圓ノ半徑 r トヲ以テ菱形ノ面積ヲ算スル公式ハ、$\diamond = \frac{1}{2}s.r$

例　(11)　菱形ニ於テ、一邊ハ五寸ニシテ內接圓ノ半徑ハ二寸四分ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。

答　二十四平方寸

算法　$\diamond = 2.r.a = 2 \times 2{\cdot}4 \times 5 = 24$

(11)　底邊ト高サ〔此底邊ト之ニ平行スル邊トノ距離〕トヲ以テ平行四邊形ノ面積ヲ計算スルトキ、

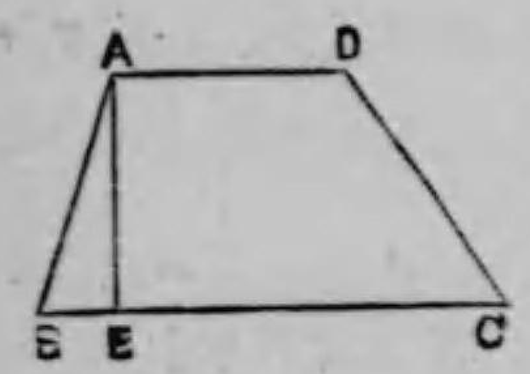


算法　底邊ト高サトヲ掛ケ合ス。

公式　底邊ヲ b. 高サヲ h ニテ示ストキハ、

$$▱ = h.b$$

(12)　平行セル二邊ト高サ〔此二邊ノ距離〕トヲ以テ梯形ノ面積ヲ計算スルトキ、



公式 平行セル二邊ヲ $a.b$ ニテ示シ、高サヲ h ニテ示ストキハ、

$$\square=\tfrac{1}{2}(a+b).h$$

例 (13) 平行セル二邊ノ一ツハ三寸、他ノ一ツハ七寸ニシテ高サハ五寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。 **答** 二十五平方寸

算法 $\square=\frac{1}{2}(a+b).h=\frac{1}{2}(3+7)\times5=25$

(13) 四ツノ邊ヲ以テ梯形ノ面積ヲ計算スルトキ、

算法 平行セル二邊ノ差ト平行シナイ二邊トニテ圍ミタル三角形ノ高サ即チ梯形ノ高サヲ求メテ、之ニ平行セル二邊ノ和ノ半分ヲ乘ズ。

公式 平行セル二邊ヲ $a.b$ 平行シナイ二邊ヲ $c.d$ ニテ示シ、而シテ高サヲ h ニテ示ストキハ、

$$e=a\sim b.\quad f=\frac{e^2+c^2-d^2}{2e}.\quad h=\sqrt{(c^2-f^2)}$$

$$\square=\tfrac{1}{2}h(a+b)$$

例 (14) 梯形ニ於テ、平行セル二邊ハ五寸ト四尺五寸ニシテ平行シナイ二邊ハ一尺三寸ト三尺七寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。

答 三百平方寸

算法 $e=a\sim b=5\sim45=40$

$$f=\frac{e^2+c^2-d^2}{2e}=\frac{40^2+13^2-37^2}{2\times40}=5$$

$$h=\sqrt{(c^2-f^2)}=\sqrt{(13^2-5^2)}=12$$

$$\square=\tfrac{1}{2}h.(a+b)=\tfrac{1}{2}\times12\times(5+45)=300$$

第三節 正多角形ノ面積

邊數	積率
3.	0.4330127
4.	1.0000000
5.	1.7204774
6.	2.5980762
7.	3.6339124
8.	4.8284271
9.	6.1818242
10.	7.6942088
11.	9.3656404
12.	11.1951524

(1) 一邊ヲ以テ正多角形ノ面積ヲ計算スルトキハ、

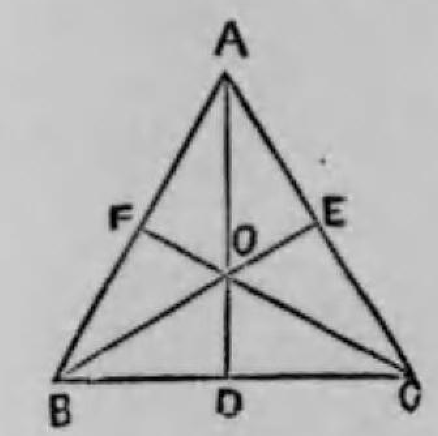
算法 一邊ノ二乘ニ邊積率ヲ乘ズ。

公式 正多角形ノ積ヲ A_r. 一邊ヲ a ニテ示シ、邊積率ヲ k ニテ示ストキハ、$A_r=a^2.k$

注意 k ハ邊數ニ從テ用ヒル。

即チ次ノ問題ノ算法ノ如シ。

例 (1) 正三角形ニ於テ、各ノ邊ハ二寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ、但シ小數點以下四位ヨリ四捨五入セヨ。 **答** 一平方寸七三二

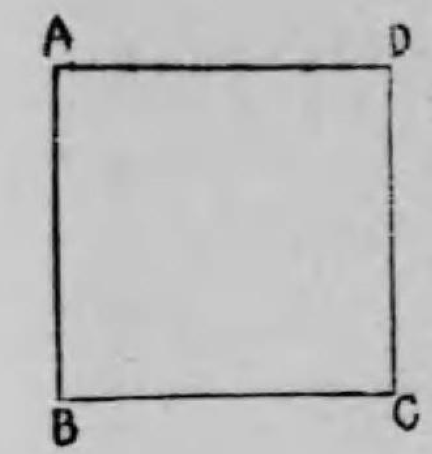


算法 $A_r=a^2.k=2^2\times0.4330127=1.732$

例 (2) 正四邊形〔正方形〕ニ於テ各々ノ邊ハ二寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。

答 四平方寸

算法 $A_r=a^2.k=2^2\times1=4$



例 (3) 正五邊形ニ於テ、各々ノ邊ハ二寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ、但シ、小數點以下四位ヨリ四捨五入セヨ。 **答**六平方寸八八一九

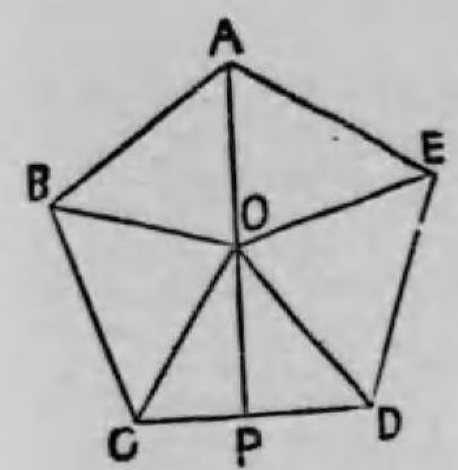
算法 $A_r=a^2.k=2^2\times1.7204774=6.8819$

(2) 周圍ヲ以テ正多角形ノ面積ヲ計算スルトキハ、

算法 周圍ヲ邊數ニテ除シタルモノノ二乘ニ積率ヲ掛ケル。

公式 周圍ヲ s ニテ示ストキハ、

$$A_r=\left(\frac{1}{n}\right)^2.k$$



例 (4) 正六邊形ニ於テ、周圍ハ一尺二寸ナリト云フ、其面積何程ナルカ、但シ、小數點以下五位ヨリ四捨五入セヨ。

答 十平方寸三九二三

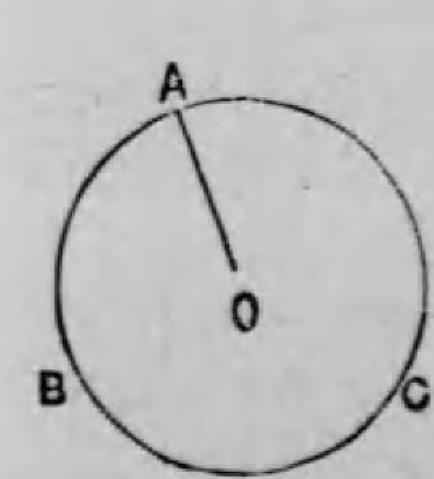
算法 $A_r=(\frac{1}{6}s)^2.k=(\frac{1}{6}\times12)^2\times2.5980762=10.39230$

例 (5) 正七邊形ニ於テ、周圍ハ一尺四寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ、但シ小數點以下五位ヨリ四捨五入セヨ。

答 十四平方寸五三五六

算法 $A_r=(\frac{1}{7}s)^2.k=(\frac{1}{7}\times14)^2\times3.6339124=14.5356$

第四節 圓ノ面積



(1) 半徑ヲ以テ圓ノ面積ヲ計算スルトキ、

算法 半徑ノ二乘ニ π 即チ 3.1416 ヲ掛ケル。

公式 圓ノ面積ヲ⊙ニテ示シ、其半徑ヲ r ニテ示ストキハ、 $\odot=\pi r^2.$

例 (1) 圓ニ於テ、其半徑2寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。 **答** 12.5664 平方寸

算法 $\odot=\pi r^2=3.1416\times 2^2=12.564$

(2) 圓周ヲ以テ圓ノ面積ヲ計算スルトキ、

算法 圓周ノ二乘ニ $\frac{1}{4\pi}$ 即チ $\frac{113}{4\times 355}$ ヲ掛ケル。

公式 圓周ヲ s ニテ示ストキハ、

$$\odot=\frac{1}{4\pi}.s^2$$

例 (2) 圓ニ於テ、圓周四寸ナリト云フ、其面積ハ何程ナルカ。

答 1.273 平方寸

算法 $\odot=\frac{1}{4\pi}.s^2=\frac{113}{4\times 355}\times 4^2=1.273$

第五章 立體ニ於ケル積ノ計算

第一節 直角壔ノ積

(1) 直角壔ノ傍面積ヲ計算スルトキ、

算法 底面ノ周圍ニ高サヲ乘ズ。

公式 底面ノ周圍ヲ s. 若クハ一邊ヲ a. 高サヲ h ニテ示ストキハ、

傍面積 $=s.h=n.a.h.$ 但シ n ハ邊數

(2) 直角壔ノ表面積ヲ計算スルトキ、

算法 傍面積ト底面積ノ二倍トヲ加ヘル。

公式 底面ノ周圍ヲ s. 若クハ一邊ヲ a 高サヲ h ニテ示シ、底面積積率ヲ k ニテ示ストキハ、

面積 $=s.h+2k.a^2=n.a.h+2k.a^2$ 但シ n ハ邊數

(3) 直角壔ノ體積ヲ計算スルトキ、

算法 底面積ニ高サヲ乘ズ。

公式 底面ノ一邊ヲ a. 其積率ヲ k ニテ示シ、高サヲ h ニテ示ストキハ、 體積 $=k.a^2h$

例 (1) 底面ガ正三角形ナル直角壔ニ於テ、其底面ノ各々ノ邊ハ二寸ニシテ高サハ五寸ナリト云フ、傍面積ト面積ト體積トハ各々何程ナルカ。

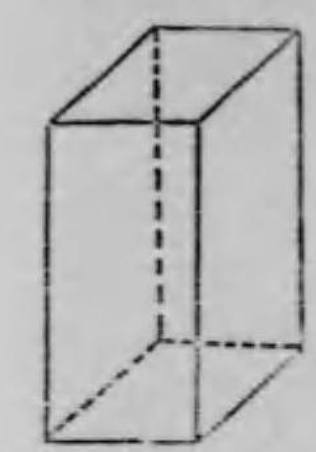
答 傍面積ハ 30 平方寸
面積ハ 33·464 平方寸
體積ハ 8·660 立方寸

算法 傍面積 $=n.a.h=3\times 2\times 5=30$

面 積 $=n.a.h+2\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=3\times 2\times 5+2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=33.464$

體 積 $=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.h=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times 5=8.660$

例 (2) 底面ガ正方形ナル直角壔ニ於テ、其底面ノ各々ノ邊ハ2寸ニシテ高サハ5寸ナリト云フ、傍面積ト面積ト體積トハ各々何程ナルカ。

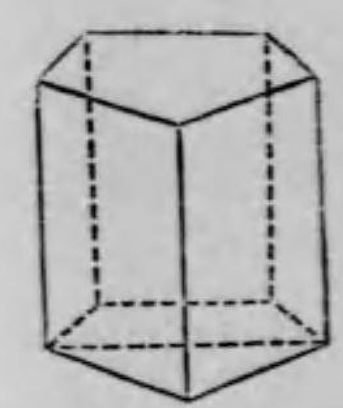


答 傍面積 40 平方寸
面 積 48 平方寸
體 積 20 立方寸

算法 傍面積 $=n.a.h=4\times 2\times 5=40$

面 積 $=n.a.h+2a^2=4\times 2\times 5+2\times 2^2=48$

體 積 $=a^2.h=2^2\times 5=20$



例 (3) 底面ガ正五邊形ナル直角壔ニ於テ、其底面ノ各々ノ邊ハ2寸ニシテ高サハ5寸ナリト云フ、傍面積ト面積ト體積トハ各々何程ナルカ。

答 傍面積 50 平方寸
面 積 59.764 平方寸
體積ハ 34.4095 立方寸

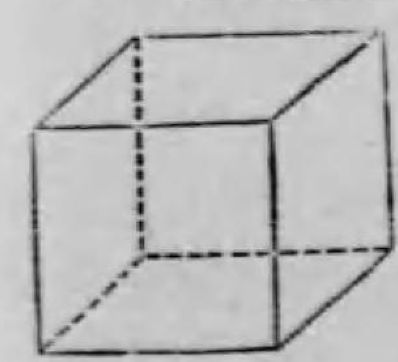
算法 傍面積 $=n.a.h=5\times 2\times 5=50$

面 積 $=n.a.h+2.k.a^2=5\times 2\times 5+2\times 1.7204774\times 2^2=59.7638$

體 積 $=k.a^2.h=1.7204774\times 2^2\times 5.=34.4095$

第二節 立方體積

(1) 立方體ノ面積ヲ計算スルトキ、



算法 一邊ノ二乘ヲ六倍スル。

公式 一邊ヲ a ニテ示ストキハ、

面積 $=6a^2$

(2) 立方體ノ體積ヲ計算スルトキ、

算法 一邊ヲ三乘スル。

公式 一邊ヲ a ニテ示ストキハ、

體積 $=a^3$.

例 (4) 立方體ニ於テ一邊ハ 2 寸ナリト云フ、面積ト體積トハ何程ナルカ、

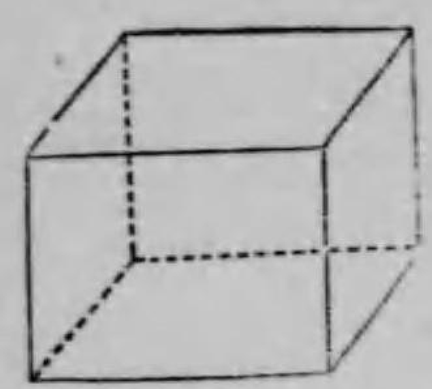
答 面積ハ 24 平方寸、體積ハ 8 立方寸

算法 面積 $=6a^2=6\times 2^2=24$

體積 $=a^3=2^3=8$

第三節 矩形ノ積

(1) 矩形體ノ面積ヲ計算スルトキ、



算法 底面ノ相隣レル二邊ト高サトヲ二ツ宛掛ケ合セタルモノノ和ヲ二倍スル。

公式 底面ノ相隣レル二邊ヲ a,b ニテ示シ、高サヲ c ニテ示ストキハ、

面積 $=2(a+b)c$

(2) 矩形體ノ體積ヲ計算スルトキ、

算法 底邊ノ二邊ヲ掛ケ合セ、之ニ高サヲ乘ズ。

公式 底邊ノ二邊ヲ $a.b$ ニテ示シ、高サヲ c ニテ示ストキハ、

體積 $=a.b.c$

例 (5) 矩形體ニ於テ底面ノ一邊ハ 2 寸、他ノ一邊ハ 3 寸ニシテ高サハ 4 寸ナリト云フ、面積ト體積トハ各々何程ナルカ。

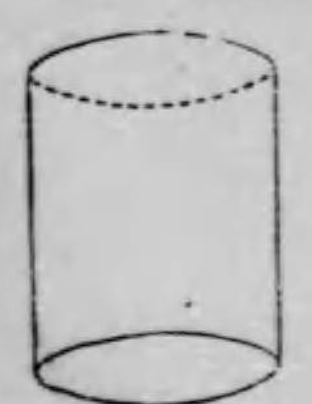
答 面積ハ 52 平方寸、體積ハ 24 立方寸

算法 面積 $=(a.b+c.a+b.c)=2(2\times3+2\times4+3\times4)=52$

體積 $=a.b.c=2\times3\times4=24$

第四節 圓壔ノ積

(1) 圓壔ノ曲面積ヲ計算スルトキ、



算法 半徑ノ二倍ニ π 即チ 3·1416 ヲ乘ジ高サヲ乘ズ。

公式 半徑ヲ r ニテ示ストキハ、

曲面積 $=2\pi.r.h$

(2) 圓壔ノ表面積ヲ計算スルトキ、

算法 曲面積ニ底面積ノ二倍ヲ加ヘル。

公式 半徑ヲ r ニテ示ストキハ、

圓壔 $=2\pi.r.h+2.\pi r^2=2\pi.r(h+r)$

(3) 圓壔ノ體積ヲ計算スルトキ、

算法 曲面積ニ高サヲ乘ズ。

公式 半徑ヲ r. 高サヲ h ニテ示ストキハ、

體積 $=\pi.r^2.h$

例 (1) 圓壔ニ於テ底面ノ半徑ハ 2 寸ニシテ高サハ 5 寸ナリト云フ、曲面積ト面積ト體積トハ各々何程ナルカ。

答 曲面積ハ 62.832 平方寸、面積ハ 43.982 平方寸
體　積ハ 62.832 立方寸

算法 曲面積 $=2.\pi.r.h=2\times3.1416\times2\times5=62.832$

面　積 $=2.\pi.r(h+r)=2\times3.1416\times(5+2)=43.982$

體　積 $=\pi.r^2.h=3.1416\times2^2\times5=62.832$

第五節 直角錐ノ積

(1) 直角錐ノ傍面積ヲ計算スルトキ、

算法 底面ノ周圍ニ斜高ヲ乘ジテ二等分スル。

公式 底面ノ周圍ヲ s. 錐高ヲ h' ニテ示ストキハ、

傍面積 $=\frac{1}{2}s.h'$

注意 底面ノ邊ヲ a. 內半徑率ヲ k. 邊數ヲ n ニテ示シ、高サヲ h ニテ示シ而シテ、一邊ト高サトヲ以テ計算スル公式ニ改メレバ。

$$傍面積=\frac{n}{2}a\sqrt{h^2+(ka)^2}. \qquad h'=\sqrt{h^2+(ka)^2}$$

(2) 直角錐ノ全面積ヲ計算スルトキ、

算法 傍面積ニ底面積ヲ加ヘル。

公式 底面ノ周圍ヲ s 內半徑率ヲ k ニテ示シ、斜高ヲ h' ニテ示ストキハ、

$$面積=\frac{1}{2}s.h'+\frac{k}{2n}s^2=\frac{1}{2n}s(nh'+ks)$$

注意 一邊ト高サトヲ以テ計算スル公式ニ改ムルトキハ、

$$面積=\frac{n}{2}a\sqrt{h^2+(ka)^2}+\frac{n}{2}ka^2=\frac{n}{2}a\left[\sqrt{h^2+(ka)^2}+ka\right]$$

(3) 直角錐ノ體積ヲ計算スルトキ、

算法 底面積ニ高サヲ乘ジテ三等分スル。

公式 底面ノ一邊ヲ a. 其積率ヲ p ニテ示ストキハ、

體積 $=\frac{1}{3}p.a^2.h$

注意 積率 p ヲ用ヒズ內半徑率 k 用フルトキハ、

$$體積=\frac{n}{6}k.a^2.h$$

例 (1) 底面ガ正三角形ナル直角錐ニ於テ、其底面ノ各々ノ邊ハ2寸ニシテ高サハ5寸ナリト云フ、傍面積ト面積ト體積トハ各々何程ナルカ。

答 $\begin{cases} \text{傍面積ハ} & 15.100 \text{ 平方寸} \\ \text{面　積ハ} & 16.836 \text{ 平方寸} \\ \text{體　積ハ} & 2.887 \text{ 立方寸} \end{cases}$

算法 傍面積$=\frac{n}{2}a\sqrt{h^2+(ka)^2}$

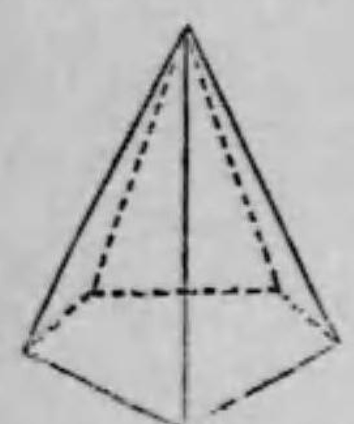
$$=\frac{3}{2}\times 2\sqrt{5^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\times 2\right)^2}=15.100$$

面　積$=\frac{n}{2}a\left[\sqrt{h^2+(ka)^2}+ka\right]$

$$=\frac{3}{2}\times 2\left[\sqrt{5^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\times 2\right)^2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\times 2\right]=16.836$$

體　積$=\frac{1}{3}p.a^2.h=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times 2^2\times 5=2.887$

例 (2) 底面ガ正五邊形ナル直角錐ニ於テ、其底面ノ各々ノ邊ハ2寸ニシテ高サハ5寸ナリト云フ、傍面積ト面積ト體積トハ各々何程ナルカ。



答 $\begin{cases} \text{傍面積ハ} & 25.9405 \text{ 平方寸} \\ \text{面　積ハ} & 32.8225 \text{ 平方寸} \\ \text{體　積ハ} & 11.4698 \text{ 立方寸} \end{cases}$

算法 傍面積$=\frac{n}{2}a\sqrt{h^2+(ka)^2}$

$$=\frac{5}{2}\times 2\sqrt{5^2+(0{\cdot}6882\times 2)^2}=25.9405$$

面　積$=\frac{n}{2}a\left[\sqrt{h^2+(ka)^2}+ka\right]$

$$=\frac{5}{2}\times 2\left[\sqrt{5^2+(0{\cdot}6882\times 2)^2}+0.6882\times 2\right]=32.8225$$

體　積$=\frac{1}{3}p.a^2.h=\frac{1}{3}\times 1.7205\times 2^2\times 5=11.4698$

第六節　圓錐ノ積

此算法ト公式ハ殆ンド角錐ノ算法ト公式ハ同ジデアルカラ、其問題ノミヲ掲ゲル。

例 (1) 圓錐ニ於テ、底面ノ半徑ハ3寸ニシテ高サハ4寸ナリト云フ、曲面積ト面積ト體積トハ各々何程ナルカ。

答 $\begin{cases} \text{曲面積ハ} & 47.124 \text{ 平方寸} \\ \text{面　積ハ} & 65.974 \text{ 平方寸} \\ \text{體　積ハ} & 37.699 \text{ 立方寸} \end{cases}$

算法 曲面積$=\pi.r\sqrt{h^2+r^2}$

$$=3{\cdot}1416\times 3\times\sqrt{4^2+3^2}=47{\cdot}124$$

全表面積$=\pi.r.(\sqrt{h^2+r^2}+r)=3.1416\times 3\times(\sqrt{4^2+3^2}+3)$

$$=65.974$$

體　積$=\frac{1}{3}\times\pi.r^2.h=\frac{1}{3}\times 3.1416\times 3^2\times 4=37.699$

第七節　角錐臺ノ積

(1) 角錐臺ノ傍面積ヲ算スルトキ

算法 兩底面ノ周圍ノ和ノ半分ニ斜高ヲ乘ズ。

公式 兩底面ノ周圍ヲ夫 $s.s'$ ニテ示シ、斜高ヲ h' ニテ示ストキハ、

$$\text{傍面積}=\tfrac{1}{2}(s+s')h'.$$

注意 兩底面ノ一邊ヲ夫々 $a.a'$ 其内半徑率ヲ p ニテ示シ、高サヲ h ニテ示シ而シテ一邊ト高サトヲ以テハ算スル公式ニ改ムルトキハ、

傍面積$=\frac{n}{2}(a+a')\sqrt{h^2+[p(a+a')]^2}$　但シ $h'=\sqrt{h^2+[p(a\sim a')]^2}$

(2) 角錐臺ノ全表面積ヲ計算スルトキ、

算法 傍面積ニ兩底面積ヲ加ヘル。

公式 兩底面ノ周圍ヲ夫々 $s.s'$ 其内半徑率ヲ p ニテ示ストキハ、

$$\text{面積}=\frac{1}{2}(s+s')h'+\frac{p}{2n}(s^2+s'^2)$$

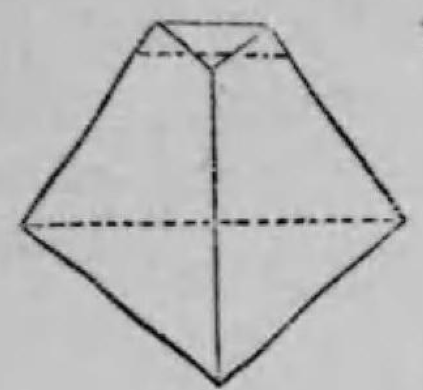
(3) 角錐臺ノ體積ヲ計算スルトキ、

算法 兩底面積ト兩底面積ノ相乘ヲ平方ニ開イタルモノトノ和ニ高サヲ乘ジテ三等分スル。

公式 兩底面ノ周圍ヲ夫々 $s.s'$ ニテ示シ高サヲ h ニテ示ストキハ、

$$\text{體積}=\frac{p}{n}(s^2+s.s'+s'^2)h$$

例　(1)　角錐臺ニ於テ兩底邊ハ何レモ正三角形ニシテ其一邊ハ夫々4寸、2寸、高サハ5寸ナリト云フ、傍面積ト面積ト體積トハ各々何程ナルカ。



答 {傍面積ハ　45.2991 平方寸
　 {面　積ハ　55.9593 平方寸
　 {體　積ハ　4.0415 立方寸

算法　$\text{傍面積}=\frac{n}{2}(a+a')\sqrt{h^2+[p(a\sim a')}$

$$=\frac{3}{2}(4+2)\sqrt{5^2+\left[\frac{\sqrt{3}}{6}(4-2)\right]^2}=45.2991$$

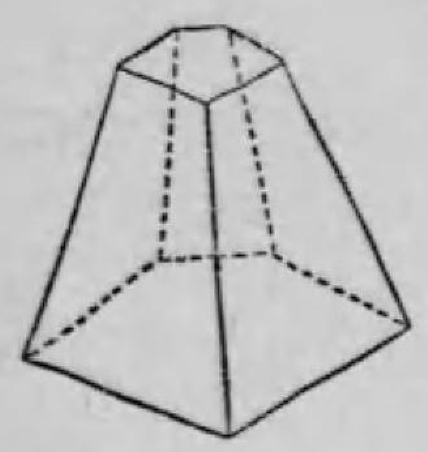
$$\text{面　積}=\frac{n}{2}(a+a')\sqrt{h^2+[p(a\sim a')]^2}+k(a^2+a'^2)$$

$$=\frac{3}{2}(4+2)\sqrt{5^2+\left[\frac{\sqrt{3}}{6}(4-2)\right]^2}+\frac{\sqrt{3}}{4}(4^2+2^2)$$

$$=53{\cdot}9593$$

$$\text{體　積}=\tfrac{1}{3}k(a^2+aa'+a'^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}(4^2+4\times2+2^2)=4.0415$$

例　(2)　截頭角錐ニ於テ、兩底面ハ何レモ正五邊形ニシテ其一邊ハ夫々4寸2寸、高サハ5寸ナリト云フ、傍面積ト面積ト體積トハ各々何程ナルカ。



答 {傍面積ハ　77.784 平方寸
　 {面　積ハ　112.194 平方寸
　 {體　積ハ　75.622 立方寸

算法　$\text{傍面積}=\frac{n}{2}(a+a')\sqrt{h^2+[p(a\sim a')]^2}$

$$=\frac{5}{2}(4+2)\sqrt{5^2+[0.6882(4-2)]^2}=77.784$$

$$\text{面　積}=\frac{n}{2}(a+a')\sqrt{5^2+[p(a\sim a')]^2}+k(a^2+a'^2)$$

$$=\frac{5}{2}(4+2)\sqrt{5^2+[0.6882(4-2)]^2}+1.7205(4^2+2^2)$$

$$=112.194$$

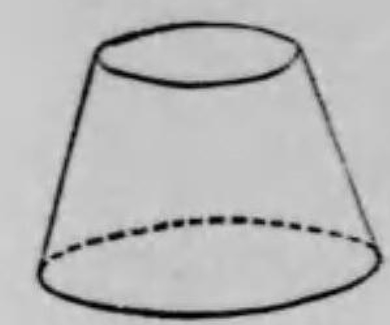
$$\text{體　積}=\tfrac{1}{3}k(a^2+aa'+a'^2)h=\tfrac{1}{3}\times1{\cdot}7205(4^2+4\times2+2^2)\times5$$

$$=75{\cdot}622$$

第八節　圓錐臺ノ積

此算法ト公式ハ截頭角錐ノ算法ト公式ニ殆ンド同ジデアル、故ニ其問題ノミヲ掲ゲルコトニスル。

例　(3)　截頭角錐ニ於テ、兩底面ノ半徑ハ夫々2寸8寸ニシテ高サハ4寸ナリト云フ、傍面積ト面積ト體積トハ各々何程ナルカ。



答 {傍面積ハ　157.08 平方寸
　 {面　積ハ　370.71 平方寸
　 {體　積ハ　351.86 立方寸

算法　$\text{傍面積}=\pi(r+r')\sqrt{h^2+(r\sim r')^2}$

$$=3{\cdot}1416(8+2)\sqrt{4^2+(8-2)^2}=157.08$$

$$\text{全表面積}=\pi(r+r')\sqrt{h^2+(r\sim r')^2}+\pi(r^2+r'^2)=370.71$$

$$=3.1416(8+2)\sqrt{4^2+\tfrac{1}{2}(8-2)}+3.1416(8^2+2^2)$$

$$\text{體　積}=\tfrac{1}{3}\pi(r^2+r.r'+r'^2)h=3.1416(8^2+8\times2+2^2)\times4=351.86$$

第九節　球ノ積

(1)　球ノ表面積ヲ計算スルトキ、

算法　球ノ半徑ノ平法ニ圓周率(π)ノ四倍ヲ乘ズ。

公式　半徑ヲ r. トスレバ

球ノ表面積$=4\pi r^2$

例　(1)　半徑5寸ナル球ノ表面積ハ何程ナルカ。

算法　表面積$=4\pi r^2=4\times3.1416\times25=314$ 平方寸

(2)　球ノ體積ヲ計算スルトキ、

公式　球ノ體積$=\frac{4}{3}\pi r^3$　　但シ r ハ半徑

例　(2)　直徑七寸ナル球ノ體積ハ何程ナルカ。

算法　$\text{體積}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\times3\ 1416\times\left(\frac{7}{2}\right)^3=179.5$ 立方寸强

第六編 簡易測量

第一章 總說

1 測量ノ意味 測量トハ地面上ニ於ケル諸點ノ位置土地ノ擴延及ビ其形狀ヲ測ル術ヲイフノデ、之レニ關係シテ居ル事柄ヲ敎ヘル學問ヲ測量學トイフノデアル。

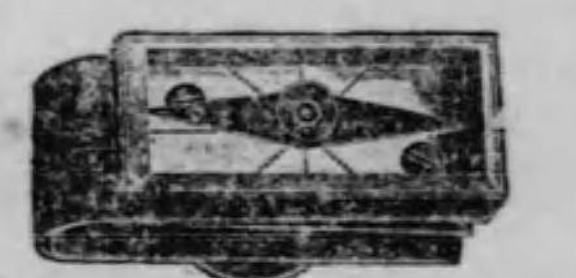
2 測量ノ種類 測量ニハ陸上測量ト海上測量トガアル、ソシテ陸上測量ヲ高等測量ト普通測量トノ二ツニ大別スルコトガ出來ル，高等測量トハ地面ヲ曲面トシテ測量スルモノデ我國デハ陸地測量部デ現今行ツテ居ルガ、コノ測量ハ頗ル高尙ナル學識ヲ要スルモノデアルカラ玆デハ述ベナイ，普通測量トハ地面ヲ平面ト見做シテ測量スルモノデ十平方里以內ノ地面ヲ測量スルニハ普通コノ測量法ニヨツテ居ル、海上測量ハ海ノ深淺ナドヲ測ル測量デ海軍水路部デ實測シテ居ル。

3 普通測量 ハ又コレヲ平面測量、高低測量ノ二ツニ區別スル、サテ地上ニハ山岳河川ナドアツテ高下凸凹一樣デナイカラ土地ノ測量ヲスルニハ水平面上ニ於ケル位置トソノ高低トヲ知ルコトガ必要デアル、水平面上ニ於ケル二點ノ位置及其距離ヲ測ルヲ平面測量トイヒ、二點ノ高低ヲ測ルヲ高低測量トイフ、スベテ測量ノ結果ハ野帳ニ記載シテ製圖及計算等ノ材料トナルモノデアルカラ十分注意ノ上作業ヲシテ誤リノナイ様ニシナケレバナラヌ。

4 測量實施上ノ順序 測量スベキ地面ハ豫メ實地踏査スルノガ通例デアル、先ヅ地形ヲ調ベテ見取圖ヲ畫キ測量スル順序方法ヲ考ヘルガヨイ、見取圖ヲ畫クニハ見取圖板ヲ携帶スレバ便利デアル、見取圖板ハ素人デモ薄イ板或ハ

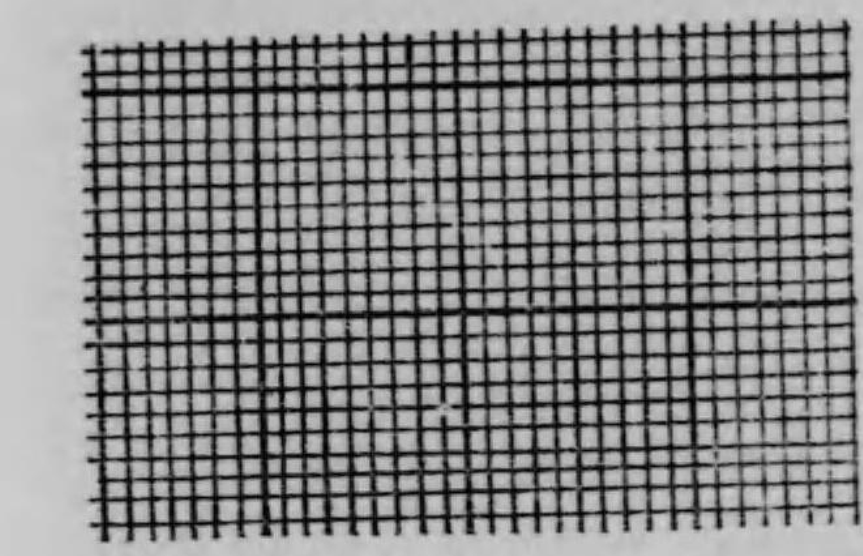
見取圖板
Sketch Tables.

見取圖板用磁石
Sketch Compasses.

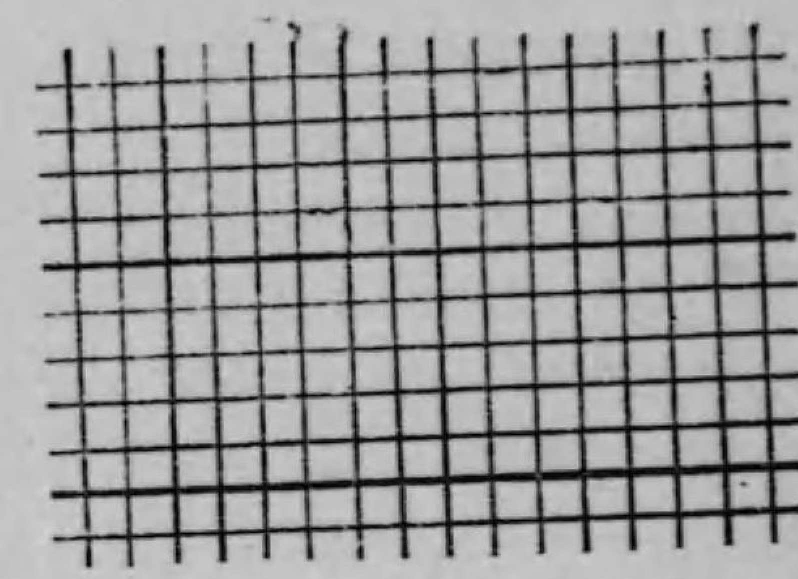


方眼紙類
Cross Secnon Papers.

五厘目方眼紙



壹分目方眼紙



馬糞紙ヲ以テ作ルコトガ出來ル，見取圖ヲ畫クニハ方眼紙ヲ用フレバ都合ヨクコレ又素人デ方眼ヲ書クコトガ出來ル、見取圖板ノ隅ニハ磁石ヲツケテ方向ヲ定メル。

5 平面測量 コノ測量ヲ距離測量、照準儀測量ノ二ツニ分ケル、スベテ測量ハ何測量デモ必ズ測器ヲ以テ實地ニ其地面ニツイテ行フモノデアル、平面測量ハ二點間ノ距離ヲ測器シテ其距離ヲ適宜ノ縮尺ニ改算シ、多クノ測點ヲ連結シテ地面ノ形狀ヲ製圖シ、且ツ其面積ヲ計算スルモノデアル。

6 土地丈量ニ關スル法令 土地測量法ニツイテ注意スベキ地租條例第五條同施行細則第三條五條六條及七條ヲ次ギニ抄錄シテ讀者ノ參考ニスル。

地租條例第五條 土地ノ丈量ハ曲尺ヲ用ヒ六尺ヲ間ト爲シ方一間ヲ以テ步ト爲シ三十步ヲ畝ト爲シ十畝ヲ段ト爲シ十段ヲ一町ト爲ス、但市街宅地ハ方一間ヲ以テ坪ト爲シ坪ノ十分ノ一ヲ合ト爲シ合ノ十分ノ一ヲ勺ト爲ス。

地租條例施行細則第三條 條例第五條ノ丈量ヲ爲スニ當リ尺度ノ用法ハ次ノ如シ。

一間未滿ノ尺度ハ、六尺ノ十分ノ一ヲ分ト爲シ、分ノ十分ノ一ヲ厘ト爲シ、丈量ノ際、端尺三寸ヨリ五尺七寸迄三寸ヲ增ス毎ニ六除ノ數ニ適セザルモノハ之ヲ切捨テ五厘ニ止メ、其積算上ニ於テ一步未滿ヲ切捨ツベシ、且一筆ノ土地ニシテ一步未滿ナルモノハ勺位迄ヲ用フ。

市街宅地ノ丈量ハ、厘未滿ヲ切捨テ厘位ニ止メ、其積算上ニ於テ一勺未滿ヲ切捨テ勺位ニ止ム。

同第五條　地盤ヲ丈量スルニハ三斜法ヲ用フ、但山林, 原野等ハ其地形ニ因リ適宜ノ方法ヲ以テ丈量スルコトヲ得。

同第六條　田畑ハ，畦畔際ヨリ、宅地ハ境界線ヨリ丈量ス。

同第七條　田畑ノ畦畔ニシテ、其所有主自由ニ變更スベキモノハ之ヲ本地ニ量入シ、其常ニ變更セザルモノハ之ヲ除却シ其步數ヲ外書トス。

畑宅ノ一筆地ノミニ通ズル道路, 及一筆內ニシテ其所有主便宜ニ設クル小逕ノ類ハ總ベテ本地ニ量入ス。

崖高ノ地、其崖脚中ノ鍬入ニ必要ナル土地ハ、之ヲ本地ニ量入シ、其崖脚ニシテ相當ノ收入アルモノハ、之ヲ本地ニ量入シ若シクハ別ニ一筆地トス。

田、畑宅地內ニ別地目ノ些少ナルモノ孕在スルトキハ、之ヲ本地ニ量入シ、內書トス。

第二章　距離測量

7　距離測量　トハ地面上ノ或距離ヲ測ル法ヲイフノデ、コレニ直接測量ト間接測量トノ二ツガアル、直接測量トハ測量スベキ二點間ニ河、沼、建物ナドノ障碍物ノナイトキニ行フ方法デ, 障碍物ガアルトキ行フ方法ヲ間接測量トイフノデアル。

8　距離測量ニ用フル器械及其使用法　コノ測量ニ用フル器械ハ測鎖、測針、間繩、卷尺、間竿、標桿。直角規ナドデアル。

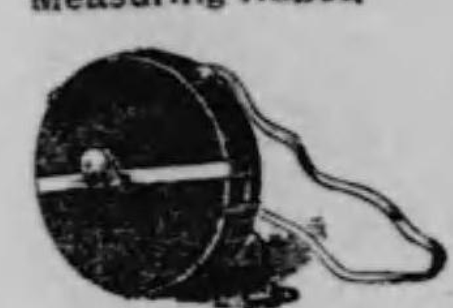
(イ)　測鎖、鐵線ヲ以テ作リ其長サハ百フイート、六十六フイート、又ハ二十米突ナド種々アルケレドモ我國ノ測量ニハ大抵十間ノモノヲ使フ、十間ノ長サノモノハ其全長ヲ十分シテ其一分卽チ一間每ニ金屬製ノ板片ヲツケ、之レニ1. 2. 3. 4. 等ノ數字ヲ刻ンデ其兩方ノ端カラノ距離ヲ簡便ニ知ルコトガ出來ル、ソシテ兩端ニハ大キイ環ヲツケテ取扱ヒニ便利ニシテアル、測鎖ハ實測中地上ノ障碍物ノタメニ時々曲リテ長サニ誤リヲ生ズルカラ每日使用スル前ニ長サヲシラベルコトガ必要デアル、其法ハ豫メ平カナル地面ニ正シク測鎖ト同ジ長サニ

測　鎖　類
Chains.

間繩類

布卷尺
TamayasLinenMeasuringTapes

Measuring Ropes.



In metallic case with spring

(タトヘバ十間)距離ヲシルシテオキ、コレニ測鎖ヲ張ツテ長サヲ較ベルノデアル、若シモ其長サニクルヒヲ生ジタ時ハ之レヲ直スカ或ハ測量後其クルヒニヨツテ測定ノ數ヲ改算シナケレバナラヌ。

(ロ)　測針、コレハ測鎖ノ附屬品デ長サ一尺計リノ鐵線デ作リ其一端ヲ尖ラシ他端ヲ輪ノ形ニシタモノデアル、測針ハ測量中ヨク紛失シヤスイカラ之レニ赤イ布ヲ結ビテ目印トスレバ便利デアル、一ツノ測鎖ニハ十本ノ測針ガツイテオルノガ普通デ尙コノ外ニ尖端ヲ圖ノ如ク太クシタモノガ一本附屬シテオルノモアル。

(ハ)　間繩、麻デ作ツテ大抵其長サハ三十間乃至六十間ノモノガ多イ、間繩ハノビチヂミヲスルカラ豫メ澁又ハ漆ナドヲ塗ツテ濕氣ヲ防ギ、且ツ一間每ニ又十間每ニ數字ヲツケテ測鎖ノ樣ニ距離ヲ知ルニ便利ニシタモノデアル。

(ニ)　卷尺　布製又ハ鋼鐵製デソノ長サハ米突法我國ノ尺度法或ハフイートニ目盛セルモノガアル、コレハ短イ長サヲ測ルトキ使フモノデ、用フル時ハ其捻レナイ樣ニシナケレバナラヌ。

(ホ)　素人デ出來ル簡便測長器、測鎖ハ曲ツテクルヒ易ク間繩ハノビチヂミヲシ且ツ其價ハ割合ニ高イカラ農地測量ナドニハ竹製ノ測長器ヲ用フルノガ便デアル、コレハ長イ竹ヲ巾六七分ニ割リ之レヲ繼ギ合セテ一間每ニ目ヲ盛リ其區間ヲ又一尺每ニ目盛ヲシタモノデアル、コノ測長器ノ特長ハ測鎖ノ樣ニ曲リテクルヒヲ生ズルコトナク、又間繩ノ樣ニノビチヂミモナク且ツ最モ經濟ナル點デアル。

(ヘ)　間竿　眞直ナ木製ノ棒デ普通ノモノハ長サ六七尺デアル、之レニ寸尺ヲ目盛シ其一端ニ金屬ノ環ヲツケテアル、コノモノハ測量線ノ左右ニ於ケル小距離ヲ測ルニ用フルモノデコレヲ以テ又間繩ナドノ伸縮ヲ檢査スルコトガ出來ル、カヽル器械ハ素人デ作ラレル。

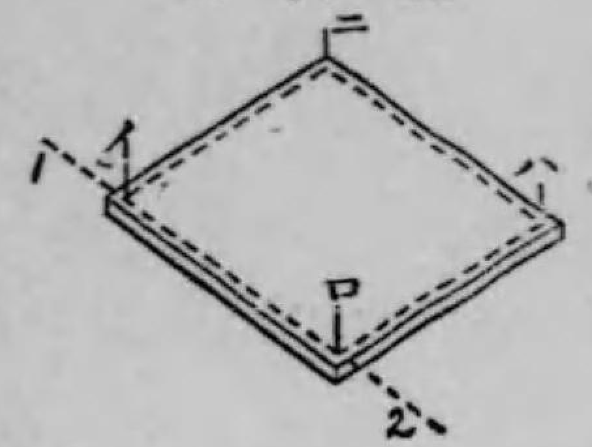
(ト)　標桿、測點ニ立テヽ其位置ヲ示ス器械デ圓形木製ノ棒デ作リ其長サハ一丈位デアル、其一端ハ尖ラシテ土中ニ挿込ムニ便利ニシ桿ハ一

標桿 POLSE

尺毎ニ赤白、交互ニ著色シテ見安イ様ニシタモノデアル、標桿ヲ測點ニ立テルニハ成ルベク眞直ニスルコトガ必要デ按摩ノ杖ヤ夜番ノ金棒ノ様ニ曲ゲテハナラヌ。

(チ) 直角規　直角ヲ測ルニ用フル器械デ其構造ハ數種アルケレドモ素人デ簡便ニ出來ルモノハ圖ノ如ク二尺四方位ノ板デアル、四隅ニ正シク正方形ニ針ヲ打チ込ミ**イロハニ**ノ様ニシ、今直線 1. 2 ニ垂線ヲ作ラウト思ヘバ、正方形ノ一邊**イ**、**ロ**ヲ 1. 2 ニ合セ置キ，直線 1. 2 ノ任意ノ一點ニ**イ**或ハ**ロ**ヲ置キ**イニ**、又ハ**ロハ**ニ沿ウテ直線ヲ引クトキハコノ直線ハ 1. 2 ニ直角ニナル、直角器ニハコノ外ニ鏡ニ光線ヲ當テテ其反射光デ直角ヲ測定スル器械モアルケレドモ素人ニハ使用六ヅカシイカラ省イテオク。

直角規

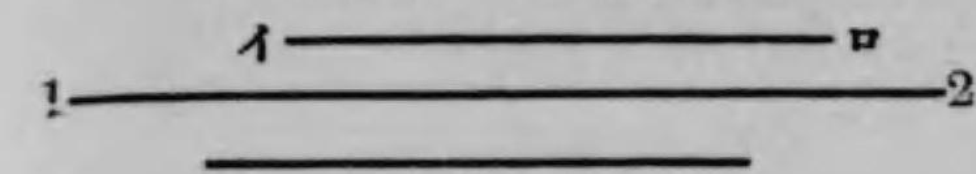


9　測點ノ標出及保存　測量シタ點ニハ杭ヲ打チ込ミ適當ニ番號ナドヲツケテオクコトガ必要デアル、モシ測點ヲ永遠ニ保存スルナラバ四寸角位ノ長方形ノ石ノ上端ニ十字線ヲ刻ミテ其所ニ埋メテ置カナケレバナラヌ，コノ石ヲ標石トイフノデ上端ノ十字線ノ交叉點ハ正シク測點ト一致スル様ニスルノデアル，標石ヲ埋メル場合ニハ土ト砂利ヲ混ジテ埋メヨク標石ノ周圍ヲ棒ヲ以テ搗キ固メ車馬ノ通行ヤ其他ノ故障ノタメニ動カヌ様ニシナケバナラヌ、一時的ノ測點デアルナラバ小サイ杭ヲ打チ込ミテソレデ十分デアル、又測點ハ地面上ニ表ハレテ居ル物體ノ或ル點ヲ用フルコトガアル、例ヘバ家屋ヤ垣ノ隅角、道路標、樹木ノ切株或ハ動カザル大キイ岩石ナドデアル。

10　直接ニ二點間ノ距離ヲ測ル法　コノ距離測量ニ二ツアル即チ地面ガ平カデアル場合ト凹凸アル場合トデアル、平地ナルトキ**イロ**ノ距離ヲ測ルニハ先ヅ測量技手ハ**イ**ニ止マリ鎖ノ一端ヲ握リ助手ヲシテ他ノ端ヲ持タシメ前方ニ行カシメ十分鎖ヲ引張ツテ地面ニツケル、コノトキ技手ハ助手ヲシテ**イ**カラ**ロ**マデノ一直線ノ中ニアル様ニ指圖ヲスル、モシ助手ノ位置ガコノ直線カラ右又ハ左ニカタヨル時ハ**イロ**間ノ距離ヲ長ク測ルカラデアル、ソレ故助手ガ正シク直線中ニ來タ時ハ技手ハ助手ヲシテ

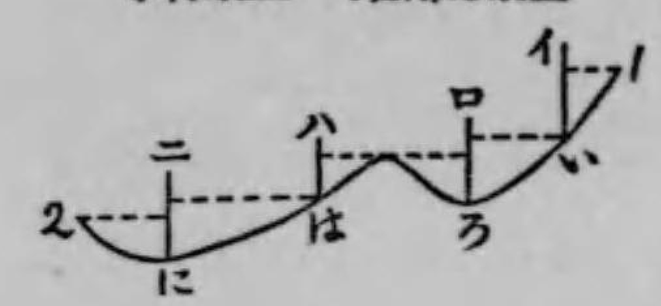
鎖ノ長サヲ讀マセル、コノ時誤讀及誤記ノナイ様ニ注意シナケバナラヌ。

平面上ノ距離測量



鎖

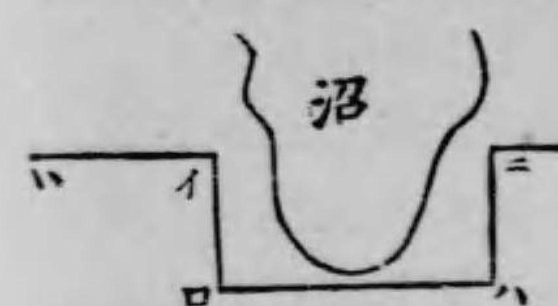
斜面上ノ距離測量



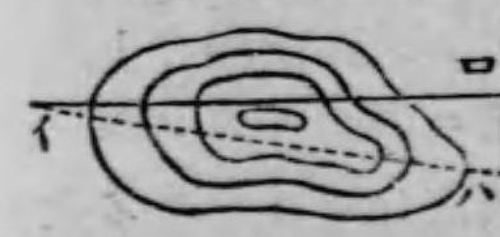
モシモ二點間ノ距離ガ鎖ヨリモ長イトキハ、鎖ノ前端ニ測針ヲ地面ニサシ、技手及助手ハ前進シ技手ガ測針ノトコロニ來テ鎖ガ十分正シク張ラレタ時技手ハ宜シト合圖ヲシ其測針ヲヌイテ、再ビ前進スルノデアル、カクシテ二點間ノ距離ヲ測定スルコトガ出來ル，斜面上ノ距離ヲ測ルニハ、例ヘバ 1.2 ノ距離ヲ測ルニハ 1.2 ノ間ヲ適當ニ分チ各部分ノ水平距離ヲ加ヘ合セレバヨイ、其方法ハ、**イ**、**ロ**、**ハ**、**ニ**ノ各ノ點ニ標桿ヲ垂直ニ立テ **1 イ**、**イロ**、等ノ水平距離ヲ鎖デ測ルノデアル、山林原野ナドハコノ方法デ測ルコトガ多イ、

11　間接ニ二點間ノ距離ヲ測ル法　中間ニ池沼、山丘、建物、森林ナドノ障碍物ガアツテ直接ニ測ルコトガ出來ナイトキ用フル方法デ、二點ガ互ニ見透スコトヲ得ル場合ト、互ニ見透スコトガ出來ナイ場合トアル。

イ　中間ニ池沼、河川ナドアル場合　中間ニ沼ナドガアツテ直接ニ**い**、**に**ノ距離ヲ測ルコトガ出來ナイトキハ、先ヅ**い**、**に**ノ直線上デ**いイ**ヲ測リ次ニ**イ**、**ロ**ヲ**いイ**ニ直角ニ測リ**ロ**ヨリ**イロ**ニ直角ニ**ハロ**ヲ測リ、**ハ**ヨリ**ロハ**ニ直角ニ且ツ**イロ**ニ等シイ長サ**ハニ**ヲ測リ、次ニ**ニ**ヨリ**ハニ**ニ直角ニ、**ニに**ヲ測ル、**いイ**、**ロハ**、**ニに**ノ距離ヲ加ヘ合セタモノハ明ニ**いに**ノ距離ニナル、川ノ幅ナドヲ測ルニハ別ニ方法ガアルケレドモ普通農地測量ナドニハ大キイ川ガナイカラ繩ヲ十分張ツテ其幅ヲ測定シテ大ナル誤リハナイ。



ロ　中間ニ森林、建物ナドアル場合　**イ**、**ハ**ノ距離ヲ測ルニ中間ニ森ナドガアツテ直接ニ測ルコトガ六ツカシイトキニハ標桿法ニヨル、コノ方法ハ測ラウトスル點カラ視透シノツク限リ一直線ニ標桿ヲ立テヽ其距離ヲ測リ、段々前進シテ終點ニ行ツテ止メ其全長ニヨツテ計算カラ求ムル方法デ圖ニ於テ**イ**ヨリ成ルベク視透シノツク**ロ**ニ標桿ヲ立テ、又**イ**



ロ直線中ニ標桿ヲ立テヽ**イロ**ノ距離ヲ測リ、次ニ**ハ**ヨリ**イロ**線ニ垂線**ハロ**ヲ下シテ其距離ヲ測ルトキハ**イロ**ノ距離ハ次ノ式デ計算シテ求ムルコトガ出來ル、即チピタゴラスノ定理（幾何學ノ部參照）ニヨツテ。

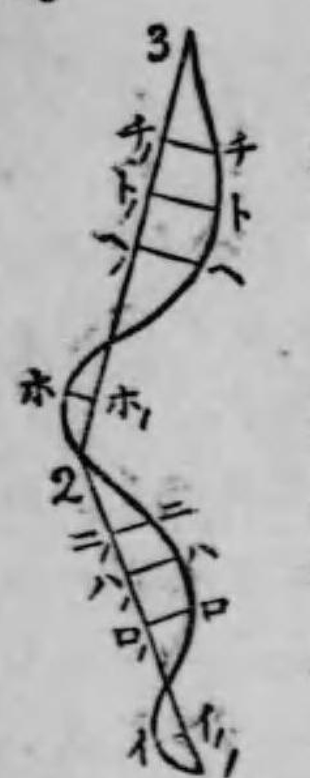
$$\overline{\text{イハ}}^2 = \overline{\text{イロ}}^2 + \overline{\text{ロハ}}^2$$
$$\overline{\text{イハ}} = \sqrt{\overline{\text{イロ}}^2 + \overline{\text{ロハ}}^2}$$

即チ**イハ**ノ長サハ**イロ**ノ平方ト**ロハ**ノ平方トノ和ノ平方根ヲ求ムレバヨシ。

例ヘバ**イロ**四間、**ロハ**三間ナレバ、

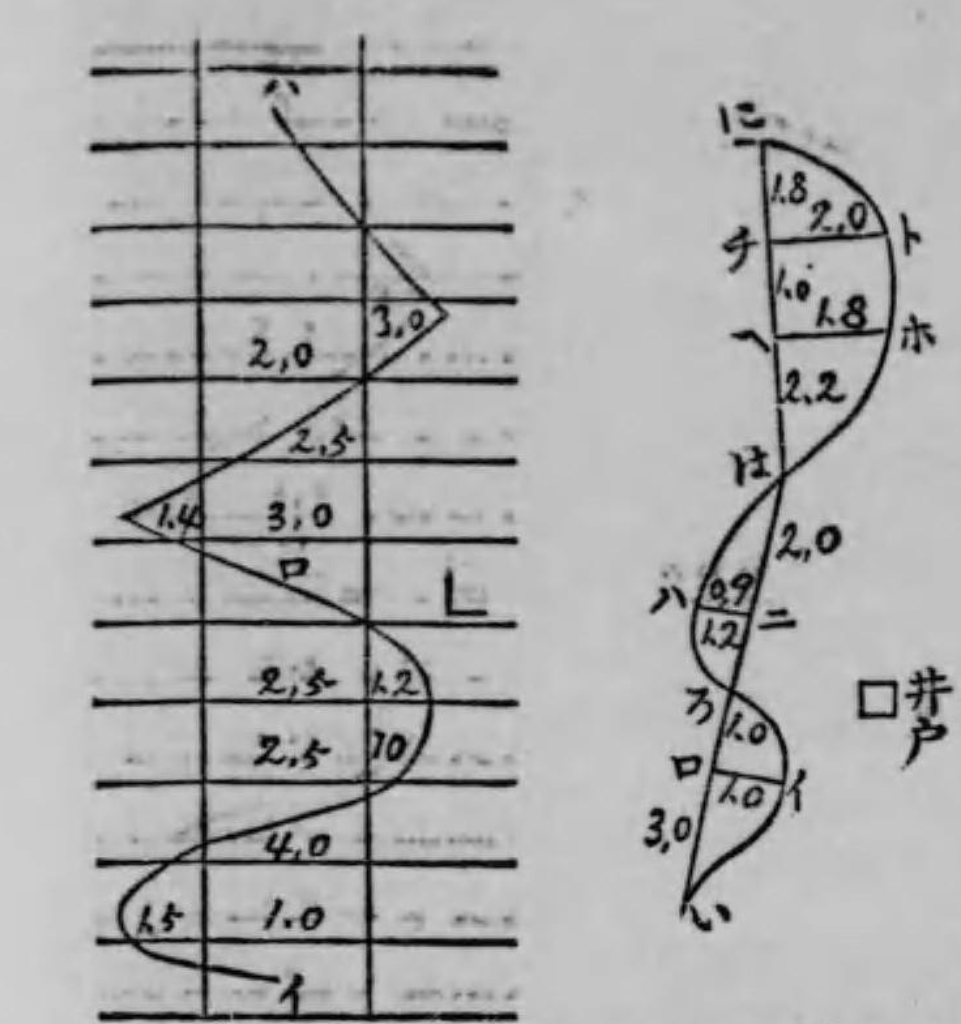
$$\text{イハ}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5\text{間}$$

標桿法ノ外ニ相似形法ナドアルケレドモ六ヅカシイカラ玆ニハ省イテオク。



12　枝距ノ測量　圖ニ於テ 1.2.3 ハ測線デ**イロハニホヘトチ**ハ地形デアル、今コノ**イロハニ**……等ノ各點カラ測線 1.2.3 ニ下シタ垂線**イイ**′、**ロロ**′、**ハハ**′、……等ヲ枝距ト稱ヘ枝距測量ハ地圖ヲ書クタメ、又地積ヲ計算スルタメニ必要ナモノデコノ測量ニハ間竿又ハ卷尺ト直角規ナドヲ使用スル、枝距極メテ短カイトキハ目測デ垂線ノ足點ヲ定メ間竿ノミデ測ルコトガ出來ル、測線ノ長サト枝距トヲ測量スルトキハ一々其測量シタ結果ヲ記載シナケレバナラヌ、コノ記載スベキノートヲ野帳トイフノデアル。

13　野帳　測量スル地面ノ見取圖ヲ野帳ニ書キ且ツ測點ノ位置ヲ入レテ測線ノ主ナルモノヲ引キ、第一ノ測點カラ始メテ段々測量シタ結果ヲ記入スル樣式ハ大體次ギノ雛形ニヨル、即チ測線上ノ長サヲ中央ニ書キ、枝距ハ其位置ニヨツテ右方又ハ左方ニ書クノデアル、又測線ガ或測點カラ右ニ曲ルトキハ其測點ノ右方ニ**L**ナル符號ヲツケ、又左ニ曲ルトキハコノ符號ヲツケテ曲リ方ヲ表ハスモノデアル、次圖ニ於テ**イ**カラ**ロ**ニ向ツテ測ルトキ**イ**カラ一間デ左方ニ一間半ノ枝距ヲ測定シタカラ**イ**ノ次ギノ行ニ 1.0 其左方ニ 1.5 ト記入スル、次ノ行ニ 4.0 トカイテ斜ナル曲線ヲ書キ段々 2.5 2.5 ト記入シテ其各右方ニ枝距ノ長サ **1.0** **1.2** トカキ



且ツ曲レル所ハ前ノ符號ヲツケテ測量シ建物ヤ井戸ナドハ其位置ニヨツテ左又ハ右ニ略圖ヲ記シ、尙其大サナドモ記入スルモノデアル、以下之ニ準ス。

又地形ガ狹クシテ且ツ曲リ方ガ少ナイトキハ見取圖ノ上ニ直チニ數字ヲ記入シテモヨイ、いろはに、ハ測線デ**イロハニ**…ハ枝距デアル、い**ロ**ハ三間ナルコトヲ示シ**イロ**ハ枝距デ一間、**ロ**ろ、ハ一間、ろ**ニ**、ハ一間二分デ枝距**ハニ**ハ一間九分ナルコトヲ示スノデアル、遂ウテ斯クノ如ク測定シ次ギニ製圖ヲスルノデアル。

14　距離測量ノ製圖　實測ガ終レバ野帳ニヨツテ紙面ニ正シク縮圖ヲ作ルコトガ出來ル、縮圖ヲ書ク紙ハ普通ケント、又ハワツトマン、或ハドサ引ノ紙ヲ使フノデアル。

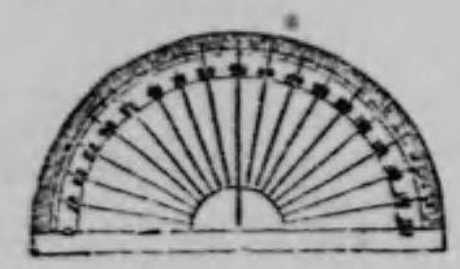
（**イ**）縮尺　縮圖ヲ書クニハ先ヅ以テ縮尺ヲ定メナケレバナラヌ、今六百分ノ一ノ縮圖ヲ書クニ一間ヲ一分ニ表ハセバヨイ、三百分ノ一ナラバ二分ニ、百分ノ一ナラバ六分ニ表ハセバヨイ、今コヽニ百分ノ一ノ縮圖アルトキ、コノ縮圖ヲ百枚ツギ合セレバ實際ノ地面ノ面積ト等シクナルカトイフニ、ソレハソーデナイ、コレハ大ナル間違ヒデアル、百分ノ一ノ地圖ハ百ノ百倍即チ一萬枚ヲツギ合セレバ實際ノ面積ト等シイ廣サニナル、一般ニ地形ト縮圖トハ相似形デ其面積ノ比ハ對應邊ノ平方ノ比ニナル、ソレ故三百分ノ一ノ地圖ノ面積ト實際ノ面積トノ比ハ三百ノ平方即チ九萬分ノ一トナルノデ、コノ縮圖ヲ九萬枚ツギ合セレバ實際ノ地積ノ廣サニ等シクナルノデアル。

即チ	縮圖ノ面積	實際ノ面積
	$\frac{1}{100}$ナレバ	$100^2 = 10000$
	$\frac{1}{300}$ナラバ	$300^2 = 90000$

トナル。

羊角製半圓分度儀類

Transparent Horn Protractors, Half Circle

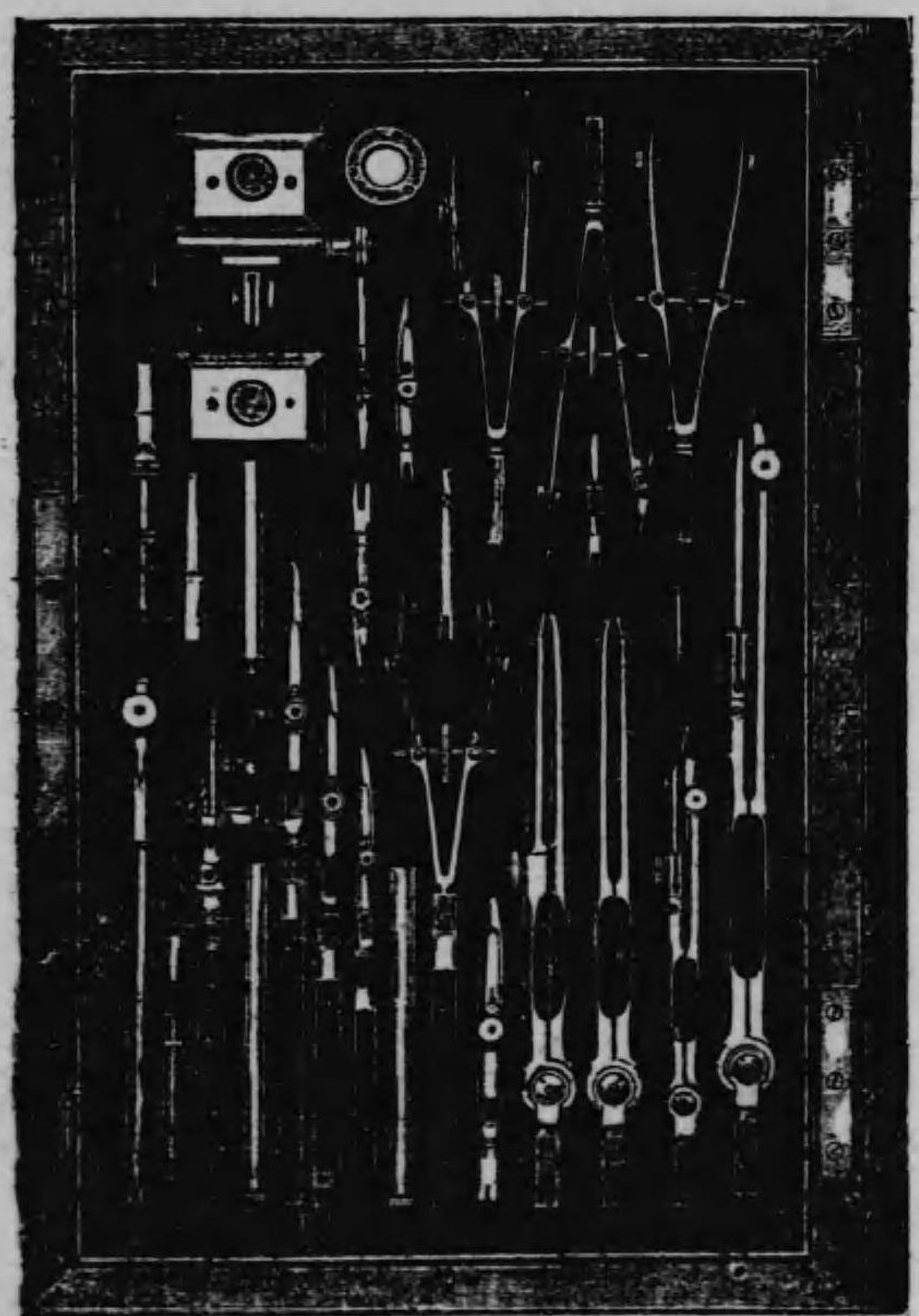


獨式 製圖器械 ニツケル製

Drawing Instruments.

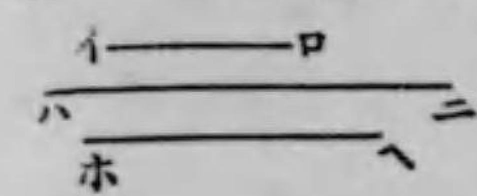
German Pattern.

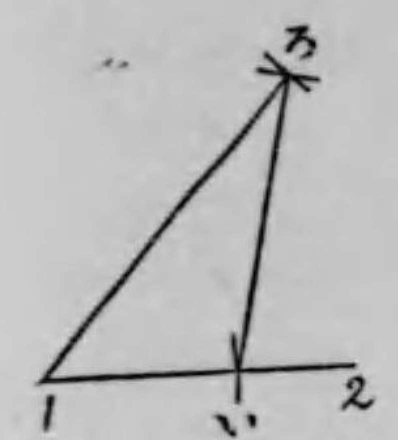
Made of Nickel. Extra Fine Finish.



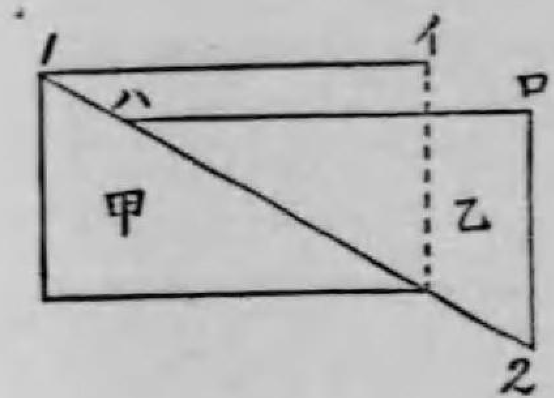
（ロ） 製圖器械及使用法　測量ガ終レバ製圖スル、製圖ニ使フ器械ハ定規、コンパス、物指、毛筆、雲形定規ナドデアル、定規ニハ三角定規、丁定規ガアツテ何レモ直線ヲ引クニ使フモノデアル、コンパスハ圓ヲ畫イタリ又ハ圖面上ノ距離ヲ他ニ寫ストキニ用ヒ、物指ハ距離ヲ測ルニ必要ナ器械デアル、鉛筆及烏口ハ共ニ直線ヲ引クタメニ用ヒ、毛筆ハ田畑、森林、原野、家屋、河川、道路、山岳、境界ナドヲ區別スルタメニ色ヅケヲスルノニ用フ、其他雲形定規ハ曲線ヲ畫クタメニ用ヒ、繪具、消シ護謨、鑢砂紙、製圖板、留針ナドモ必要ナモノデアル、次ギニ製圖器械ノ使用法ヲ述ベンニ直線ヲ定規デ引クコトヤ又コンパスデ圓ヲ畫クコト垂線ヲ作ルコトナドハ誰モ知ツテ居ルカラシテ玆ニハ三角形ヲ畫クコト、平行線ヲ

引クコトヲ說明スル、今**イロ**、**ハニ**、**ホヘ**、ノ三直線デ三角形ヲ畫クニハ



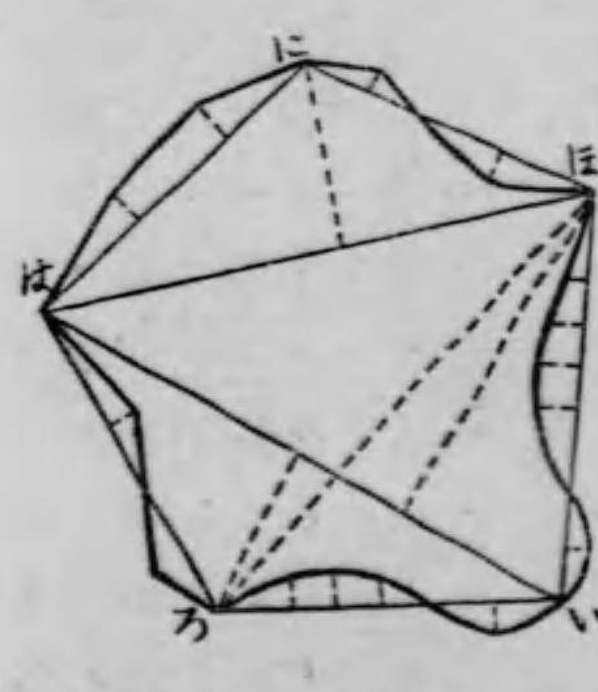


先ヅ任意ノ直線 1. 2 ヲ引キ次ギニコンパスデ**イロ**ニ等シイ長サヲトリ 1 ヲ中心トシテ圓弧ヲ畫キ 1. 2 ノ直線ヲ**い**、點デ切リ、次ニ又コンパスデ**ハニ**ニ等シイ長サヲトリ 1 ヲ中心トシテ圓弧ヲ畫キ最後ニコンパスヲ以テ**ホヘ**ニ等シイ長サヲトリ**い**點ヲ中心トシテ圓弧ヲ畫キ兩圓弧ノ交點ヲ**ろ**點トスレバ、1 **ろ**、**いろ**ヲ連結シテ三角形ヲ畫クコトガ出來ル、コレカラ推シテ四邊形ヤ五邊形モ三角形ニ分ツテ畫クコトガ出來ル。



又 1. **イ**ノ直線ニ平行線ヲ引クニハ、甲ノ定規ノ一邊ヲ 1. 2 ノ直線ニ一致セシメ乙ナル他ノ一ツノ定規ノ一邊ヲ甲ノ定規ノ一邊ニ密着セシメテ乙ノ定規ノ他ノ一邊ヲ 1 **イ**ニ一致セシメ、次ニ乙ノ定規ヲ上方又ハ下方ニ滑ラシテ前ノ邊ニ沿ウテ**ハロ**ナル直線ヲ引ケバ 1 **イ**ト**ハロ**トハ平行ニナル。

（ハ） 製圖　次ギノ形ノ樣ナ地面ヲ測量シテ縮圖ヲ製スルニ、先ヅ**いろ**、線ヲ以テ基線ト定メルトキハ紙面ノ一方ニ直線ヲ引イテ此ノ直線ノ上ニ適當ニ、**いろ**、ノ縮尺距離ヲトツテ第一ニ**いろ**二點ノ位置ヲキメル、次ギニ他ノ測點ノ位置ヲ紙上ニ決定スルノデアル、即チ野帳カラ、**ろは**、及**いは**、ノ距離ヲヲ見出シテ之レヲ縮尺ニ改メ、**い**、ニコンパスノ一脚ヲ立テ、其縮尺デ圓弧ヲ畫キ、次ニ、**ろ**、ニコンパスヲ立テヽ**ろは**ノ縮尺距離デ圓弧ヲ畫キ、コノ兩弧線ノ交點ヲ以テ、**は**、點ヲキメルノデアル、**は**點定マレバ、**ろは**、及**いは**ノ二直線ヲ引キ更ニ**いほ**及**はほ**ノ縮尺距離ヲ以テ**ほ**點ヲ決定スルコトハ前ト同ジデアル、**ほ**點ノ次ギニ、**に**點ヲ定メレバ各測點ハ圖上ニ定マルノデアル、誤リノアルカナイカヲ調ベルニハ、**ろ**ヲ中心トシテ、**ろほ**、ノ縮尺距離デ圓弧ヲ畫キ、コノ圓弧ガほ點ヲ通ルカ通ラヌカニヨツテ誤リガアルカ、ナイカガワカル、シカシ多少ノクルヒハアルモノ



デアルカラコノ誤差ヲ各邊ニ配當シテ製圖スルノデ誤差ガアマリ大キイトキハ再ビ測量スルカ或ハ製圖ヲ書キナホサナケレバナラヌ、次ニ枝距ノ縮尺ニヨツテ境界線ノ各點ヲ定メテ此ノ各點ヲ連結シテ縮圖ヲ書クノデアル。

（ニ）　圖上ノ記號　製圖シテ其圖上ニ官衙、學校、市街地ヤ神社、寺院、道路、沼川ナドヲ表スニハ普通次ギノ記號ヲ用フルモノデアル。

道路家屋ナドハ縮圖ト同ジ縮尺デ書クコトハ勿論デアル、中央部ノ高イモノ例ヘバ丘ヤ建物ナドノ輪廓線ハ光線ヲ受ケル方ヲ細イ線デ引キ、受ケナイ方ハ少シ太イ線デ引キ其割合ハ大抵一ト三トデアル、

又中央部ノ低イモノ例ヘバ沼ヤ河ナドノ輪廓線ハ光線ヲ受ケル方ヲ太

ク、受ケナイ方ヲ細クカクノデ圖ニ示ス通リデアル、建物ヤ市街地ナドノ廓內ハ成ルベク細イ直線デ上左方カラ下右方ニ向ツテ四十五度ノ角ヲ以テ斜ニ引クノガ普通デアル。

（ホ）　圖上ノ彩色　圖面ニハ普通左ノ彩色ヲ施シテ明瞭ニスルコトガ多イ。

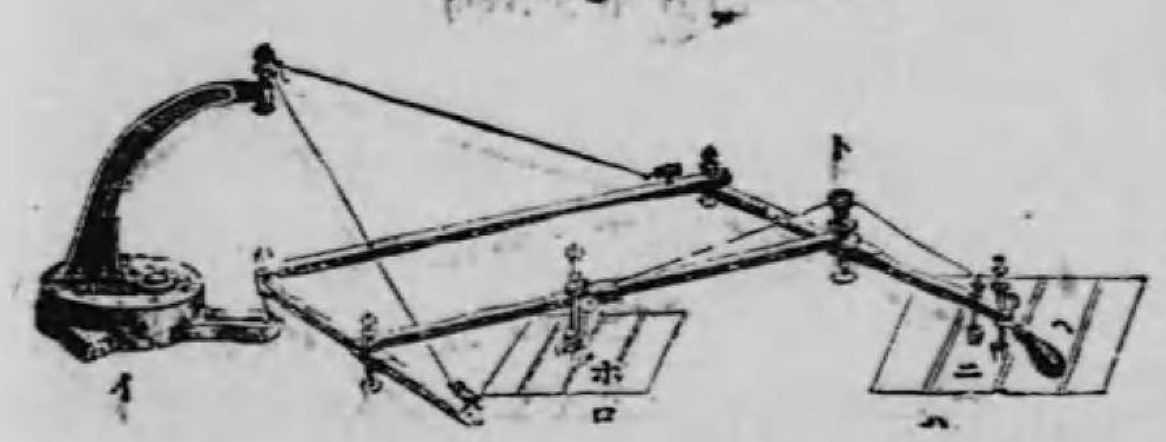
靑色	海、河、池、沼、等水ニ關係シタモノ。
綠色	原野、
深綠色	山林、
紅色	道路、神社佛閣、墓地。
樺色	宅地、

書キ損ジテ小刀デ削ツタ所ニハ着色前ニ明礬水ヲ塗ツテ置クガヨイ、又クロール石灰ヲ水ニ溶シタ液ヲ塗ツタ墨ヲ消スコトハ最モヨク夜店デ賣ルインキ消ノ藥ハ即チコノクロール石灰ノ水溶液デアル。

地圖ニハ必ズ方位ヲ矢ヲ以テ表ハシ且ツ縮尺ト面積トヲ記入スルモノデアル。

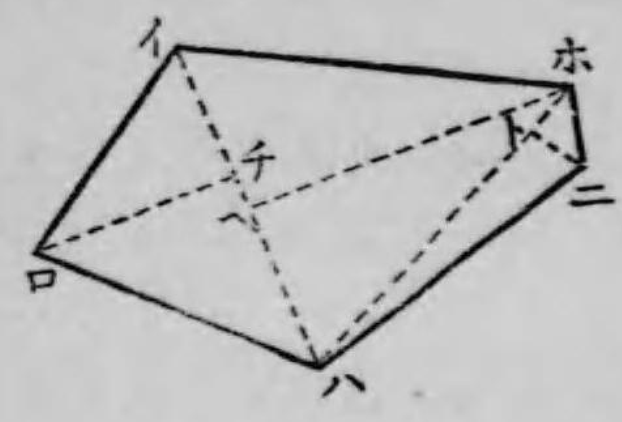
（ヘ）　縮圖器械　コノ器械ハ地圖ヲ何倍カニ大キクシタリ又何分ノ一カニ小サクスルタメニ用フルモノデ市中デ賣ツテ居ル肖像畫ナドヲ大キクシタリ小サクシタリスル器械ト原理ハ同ジデアル、圖ニ於テ**イ**ハ、重イ金屬製ノ臺デ、**ハ**ハ地圖即チ原圖デ**ロ**ハ、地圖ヲ縮少シテ書クベキ紙デアル、枠ハ帽子掛ノ樣ニ、蝶ツガヒデ動クコトガ出來ル樣ニナツテ居ル、コノ枠ノ二個所カラ糸ヲ張ツテ臺ニツケテ枠全部ハ動カスコトガ出來ル、今枠ノ一端**ヘ**ヲ握ツテ其傍ニアル針ノ尖端ヲ地圖ノ輪廓ニ接セシメテ移動スルトキハ、**ホ**ノ鉛筆ハ**ロ**ノ紙ニ地圖ヲ何分ノ一カニ縮少シタモノヲ畫ク、縮圖ヲ何倍ニスルトカ或ハ何分ノ一ニスルトカイフニハ、枠ノ上ニ盛ツテアル目盛ニヨツテ其位置迄**ホ**ノ鉛筆ヲヅラセルノデアル、肖像畫ノトキハ**ハ**ノ原圖ノカハリニ肖像畫ヲオケバ**ロ**ノ紙ニ任意ノ大イサ**イ**ノ肖像ヲ畫クコトガ出來ル。

Pantograph.



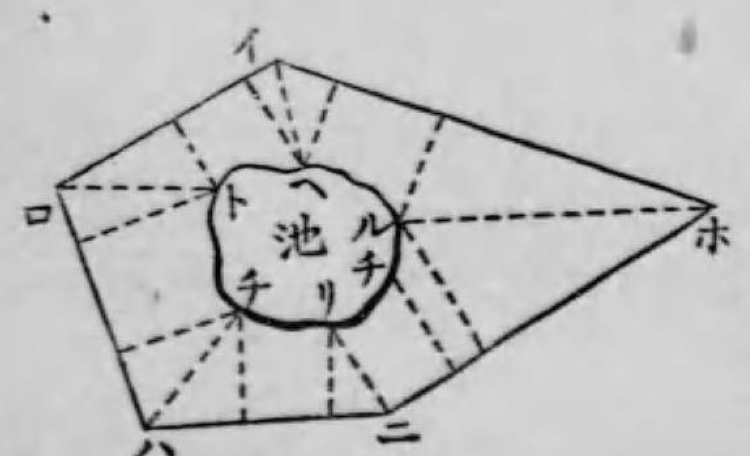
15　距離測量ニヨル地積ノ計算　地面ハ高低凹凸及斜面ナドガアル、昔ハ地面ノ表面ノ面積ヲ測ツタケレドモ、今ハ水平面上ニ於ケル面積ヲ測ルノデアル、ソレダカラ斜面ナドハ昔ノ方法デ測レバ今ノ方法デ測ルヨリモ坪數ハ多イコトニナル、昔ノ地積測量ハ甚ダ不完全ナ側リ方デ大抵六尺五寸四方ヲ坪トシタソーデ稅務署ノ臺帳ニ千坪トアルモノヲ實測シテ見レバ百坪位フエル所ガ多イトイフコトデアル、近來地價ガ高クナツテ殊ニ都會地ハ一坪數拾圓モスルカラ我國ノ地積測量ハ目下ノ急務デアル、現今獨逸ナドデハ數千人ノ測量手ガ地積測量ニ從事シテ居ルトノコトデアル，サテ地積測量ニハ地面ノ內部ニ碍障物アル場合ト障碍物ガナイ場合トガアルカラ次ギニコノ方法ヲ述ベル。

（イ） 内部ニ障碍物ナキ場合ノ地積測量　コノ方法ハ地形ヲ適當ニ多クノ三角形ニ分ツテ是等ノ三角形ノ一ツノ角點カラ垂線ヲ下シテ計算スルノデアル、



圖ニ於テ**イロハニホヘ**ノ内ノ地積ヲ**測**ルニハ**イロ、ロハ、ハニ、ニホ**，ノ水平距離ヲ測リコノ五邊形ヲ三ツノ三角形**イロハ**、**イホハ**、**ホハニ**、ニ分ツテ**ロ**、**ホ**、**ニ**ノ點カラ夫々、**イハ**、**ハホ**ノ直線ヘ、垂線**ロチ**、**ホヘ**、及**ニ**トノ垂線ヲ下シテ地積ヲ出スノデアル、三角形**イロハ**ノ面積ハ**イハ**ノ長サニ**ロチ**ノ長サヲ乘ジタ半分デアル、同樣ニ**イハホ**ノ三角形ノ面積及**ホハニ**ノ三角形ノ面積ヲ計算シテコノ三ツノ三角形ノ面積ヲ加ヘ合セタモノハ明カニ**イロハニホ**ノ地面ノ面積ニナル、三角形ノ面積ノ出シ方ハ求積デ述ベテ置イタ。

ロ　内部ニ障碍物アル場合ノ地積測量　内部ニ森林，池沼、建物ナドノアル場合ハ前ノ方法デ測ルコトハ出來ナイ、今コノ場合ノ方法ヲ例ニヨツテ述ベル、

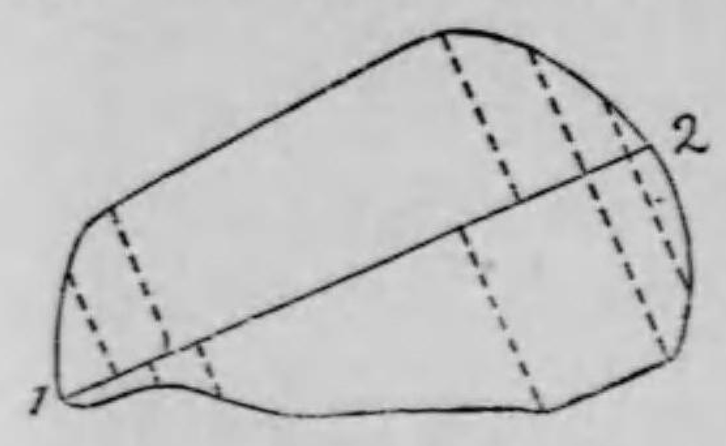


圖ニ於テ**イロハニホ**ハ地面デ其中ニ池ガアルトキ地積ヲ測ルニハ池ノ周圍ニ多クノ點ヲ設ケル，即チ其二點間ハ直線ト見做スコトガ出來ル樣ニ**ヘトチリヌル**等ヲトリ各邊ヘ垂線ヲ下シ又**イロハニホヘ**ノ角點ト結ビツケレバ多クノ三角形及ビ梯形ガ出來ル、梯形ハ又二ツノ三角形ニ分ケルコトガ出來ルカラコノ直角三角ニヨツテ各々ノ三角

形ノ面積ヲ計算スルコトガ出來ル、コノ各々ノ三角形ノ面積ヲ加ヘ合セタモノガ即チ求ムルトコロノ地積デアル、又地形ガ曲線ヲシテ居ルトキハ圖ノ樣ニ直線ヲ引イテ、地面ガコノ直線ノ外ニ出ダ面積ト內ニ這入ツタ面積トガ等シイト見做シテコノ直線形內ノ坪數ヲ表スコトガアル、例ヘバ圖ニ於テ**イ**ノ面積ト**ハ**ノ面積トヲ加ヘタモノガ**ロ**ノ面積ニ近クナル樣ニ直線ヲ引ク、

コレハ勿論精密ニ坪數ヲ計算スル方法デハナイガ，精密ヲ要シナイトキハコレデ十分デアル、又中間ノ密林ノミノ面積ヲ出スニハ先ヅ全體ノ地積カラ密林以外ノ地積ヲ引ケバヨイ、其密林以外ノ地積ノ出シ方ハ前ニ述ベタ通リデアル。

（ハ） 主線法ニヨル地積測量　コノ測リ方ハ内部ニ障碍物ノナイ場合ノ地積測量ト殆ンド同ジデ極メテ簡單デアルカラ、地形ニヨツテハコノ方法ニヨレバ便利ナコトガ多イ。



圖ニ於テ **1.2.** ハ地形ニヨツテ適當ニ撰ンダ線デ之レヲ主線トイフ、地面ノ周圍ニ多クノ點ヲ設ケルニハ其隣リノ二點間ハ直線ト見做シ得ル範圍內ニ於テスルノデアル、コノ各點カラ主線ニ垂線ヲ下シテ地面ヲ多クノ梯形ニ分ツテ計算スルコトハ前ノ通リデアル。

問題

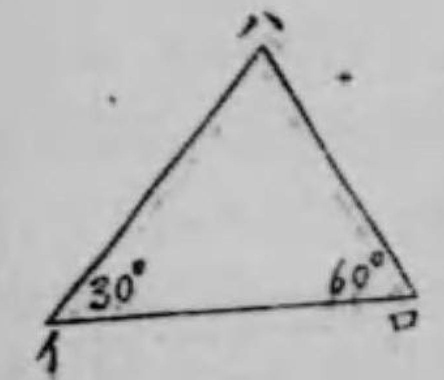
（一）　**イ**、**ロ**ノ二點間ノ距離ガ八十間ナラバ其百分ノ一及六百分ノ一ノ縮尺ハ何程デアルカ。　　**答**　百分ノ一ノ縮尺ハ、四尺八寸

答　六百分ノ一ノ縮尺ハ、八寸

（二）　六百分ノ一ノ縮尺ニ於テ一邊ノ長サガ五寸三分ナラバ實際ノ長サハ何程デアルカ。　　**答**　五十三間

（三）　二點間ノ距離ガ百間デ其各點カラ或他ノ點ヲノゾイタ角ガ三十度及六十度ナルトキ或他ノ點ハ如何ニシテ定メルカ。

解　二點間ノ距離ヲ適當ノ縮尺ニ定メテ之レヲ圖上ニ**イロ**ト表ハ



シ、分度器デ**イ**點ニ三十度ノ角ヲ作リ又**ロ**點デ六十度ノ角ヲ作リ**イハ**、**ロハ**、ノ直線ヲ引キ其兩直線ノ交點**ハ**ハ求ムル點デアル。

(四) 圖ノ如キ**イロハ**ノ直角三角形ノ地面アッテ**ハ**ノ角ガ直角デアル、今**イハ**ノ長サガ十五間**ロハ**ノ長サガ七間ナラバコノ地積ハ何程デアルカ。　**答**　五十二坪五合

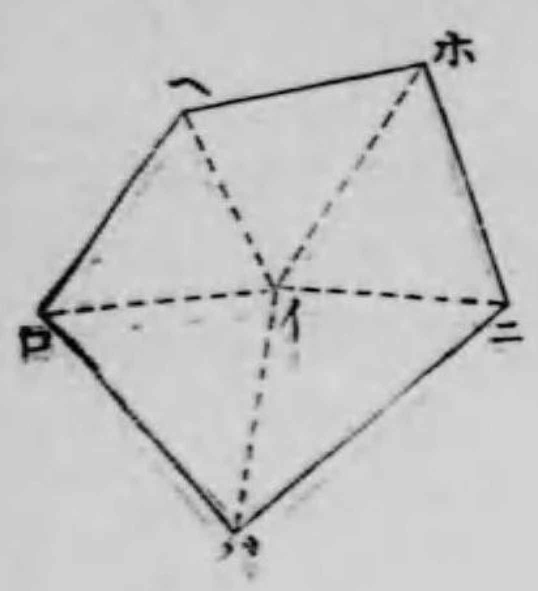
十五間ニ七間ヲ掛ケテ之レヲ二デ除スレバヨイ。

(五) 測鎖ノクルヒハ如何ニシテ檢定スルカ。

答　測鎖ノ部ヲ見ヨ

(六) 中央部ノ高イ地面ヲ測量シテ製圖スルトキ、何處ニ測點ヲ設ケレバヨイカ、又ドノ線長ヲ測量スレバヨイカ。

解　全體ノ地形ヲ見透スタメニ先ヅ最高部ニ一ツ測點ヲ設ケナレバナラナイ、又地面ノ境界ニ測點ヲ設ケテ各點間ノ距離ヲ測リ、且ツ中央ノ點カラ各測點ヘノ距離ヲ測レバコレニヨッテ縮尺ヲ定メ、コンパスデ製圖スルコトガ出來、又面積ヲモ計算スルコトガ出來ル。



(七) 讀者諸君ハ御自分ノ宅地ヲ測量シテ見ナサイ。

答　宅地ハ中間ニ障碍物ガアル場合ノ測量法デス

(八) 百分ノ一ノ地圖ニ於テ其圖上ノ面積ガ三勺ナルトキハ實際ノ地積ハ何程デアルカ。

解　百ノ平方即チ一萬ヲ三勺ニ掛ケレバヨイ。　**答**　三百坪

(九) 歩測トハ如何ナルコトヲイフノデアルカ。

解　歩測ハ歩行シテ其歩數ニヨッテ距離ヲ測ル方法デ、大人ノ一歩ハ大抵二尺二三寸デアル、コレハ各人ニヨッテ異ナルモノデアルカラ、歩測ニヨッテ距離測量ヲスルニハ豫メ一歩ノ距離ヲ知ラナケレバナラナイカラソレヲ自分デ測ルコトガ必要デアル。

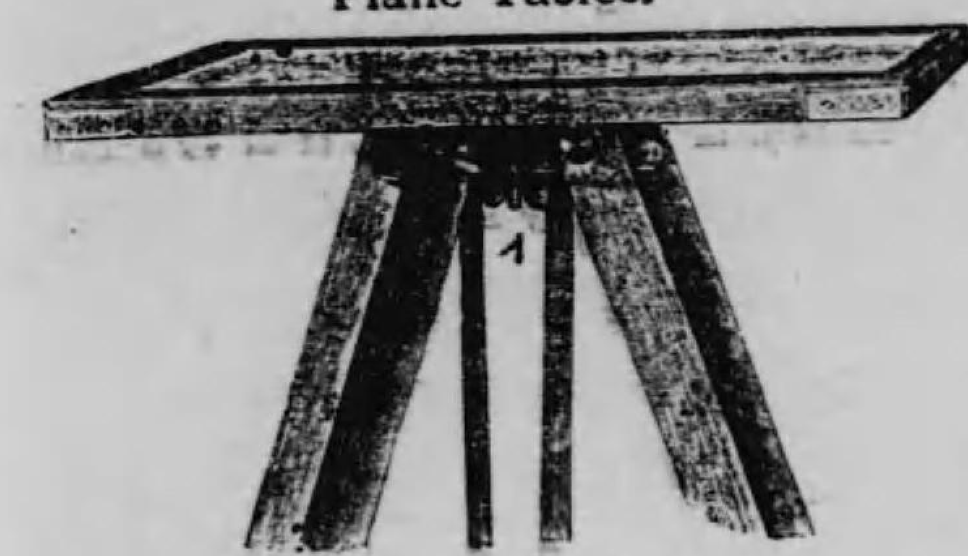
第三章　照準儀測量

16 照準儀測量　コノ測量ハ最モ簡便ナ方法デ實測スルト同時ニ又製圖スルコトモ出來、又角度ヲ測ルコトモイラナイ、且ツ内部ニ障碍物ガアッテモ地面ガ曲ッテ複雜デモコノ測量法ヲ行フコトガ出來ルカラ宅地ナドヲ簡便ニ測ルニハコノ方法ニヨルコトガ多イ。

17 照準測量ニ用フル器械及其使用法　照準儀測量ニ使フ器械ハ三脚架、測板、筐羅針、垂球、照準器ナドデアル。

(**イ**) <u>測板</u>、コレハ圖ノ樣ナ長方形ノ本板デ、表面ハ之レヲ平カニ且ツ滑カニシテ其上ニ圖紙ヲ張リツケルモノデアル、コノ板ハ曲ッテハ困ルカラシテ、ソレヲ防グタメニ周圍ヲ堅イ木材デ圍ンデ作ル、裏面ノ中央ニハ眞鍮製ノ方形ノ板ヲ固クツケ其中央ニ螺旋狀ノ孔ヲ穿ッテ三脚架ニ取リツケル、圖ノ**イ**ナル螺旋ニヨッテ測板ヲ固クシメタリ又ハ、ユルメルコトガ出來テ、板ノ四隅ニハ筐羅針ヲ取付ケル孔ヲアケテアル。

測　板
Plane Tables.



(**ロ**) <u>三脚架</u>、コレハ測板ヲ取リ付ケル脚デ自由ニ閉ヂ開キスルコトノ出來ル三ツノ同形同大ノ木製ノ脚ガアル、上端ハ蝶ツガヒデ圓イ板ニ固著シテ三脚ヲ適當ニ開閉シテ測板ヲ水平ニスエルコトガ出來ル、之レヲ運搬スルトキハ脚ヲ集合シテ携帶ニ便利ニシタモノデアル。

筐　羅　針
Declinatoires,
or Trough Compasses

(**ハ**) <u>筐羅針</u>，長方形ノ木ノ筐ノ中ニ磁針ヲトリツケタモノデ測量中測板ヲ常ニ同一ノ方向ヲトラシムルモノダ。

(**ニ**) <u>磁針ノ取扱法</u>，磁針ハ常ニ北ヲ指スノデアルケレドモ一日中ニ方向ヲ少シ變化スルモノデアル、シカシ其變化ハ甚ダ少ナイカラシテ宅地測量ナドニハ無視シテヨイ、唯注意スルコトハ磁石

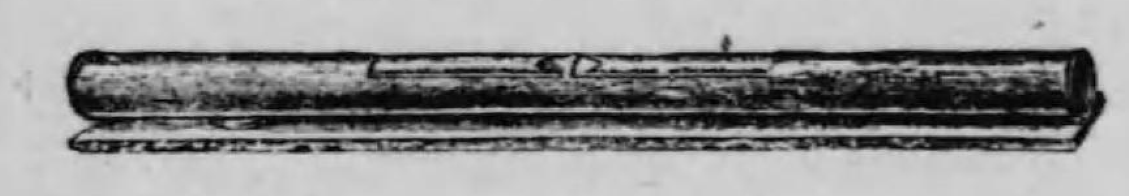
ハヨク鐵ニ引キツケラレルカラシテ測量スルトキハ洋傘ノ様ナ鐵ヲ含ンデオルモノヲ傍ニオイテハナラヌ、又鐵工場ノ附近ヤ鐵鑛山ナドヲ測量スルトキハ磁針ヲ使フ測量ヲ行フコトハ不能デアル、磁針ヲ振動シタリ熱シタリスルコトハ磁力ヲ弱メル原因ダカラ成ルベクカヽルコトヲシナイ様ニ注意シナケレバナラヌ磁力ガ弱クナツタ時コレヲ強クスルニハ大ナル磁石ノ一端例ヘバ南極デ磁針ノ一端ヲ其中央カラ端ニ向ツテ、コスリ又、磁石ノ北極ヲ以テ同様ニ磁針ノ他ノ端ヲコスレバ、磁針ハ強クナルモノデアル。

（ホ） 垂球、圖ノ如ク圓錐形ノ錘デ主ニ眞鍮デ作ツテアル、コレヲ糸デ三脚架ノ上端ニアル圓板ニ差込ンデアル螺旋カラ垂下シテ測板ノ中央ヲ示スモノデアル。

（ヘ） 水準器、水準器ハ水平ヲ見ル器械デ少シク曲ゲタ硝子管内ニアルコール或ハエーテルヲ入レ且コレニ一粒ノ氣泡ヲ入レテ作ルモノデアル、圖ハコノ硝子管ヲ金屬製ノ圓筒ニヲサメタ装置デ、水準器デ測板ヲ水平ニスルニハ其三脚ヲ案配シテ氣泡ヲ中央ニアル様ニシ次ニ水準器ヲ前ノ方向ト直角ノ方向ニオキ氣泡ガ矢張中央ニアレバ測板ハ水平デアル、若シ氣泡ガ一方ニカタヨルナラバ更ニ又三脚ヲ調整シテ氣泡ヲ中央ニ導キ、又前ト同様ニ水準器ノ方向ヲ直角丈變ジテ氣泡ガ中央ニ來ルカ來ナイカヲ檢査シナケレバナラヌ、之レヲ要スルニ脚ヲ固定シテ後何レノ方向ニ水準器ヲ置クモ常ニ其氣泡ガ中央ニ來ルナラバ測板ハ明ニ水平ニナツタノデアル。

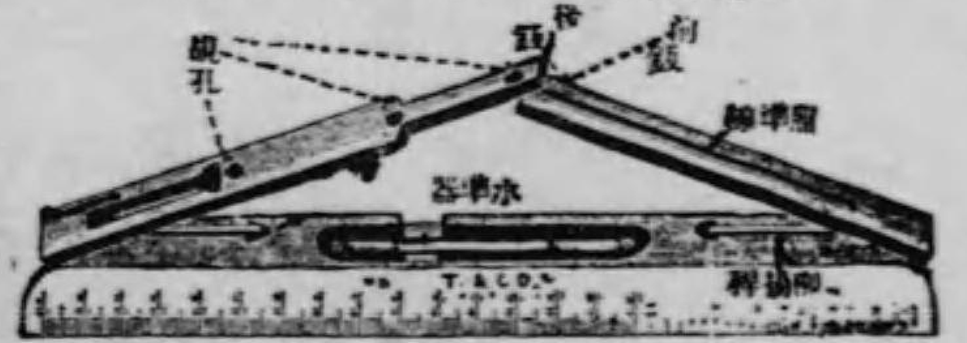
眞中製水平器

Rabones Brass Spirit Levels.



有構付アリダート

Alidades, With Sliding Sight.

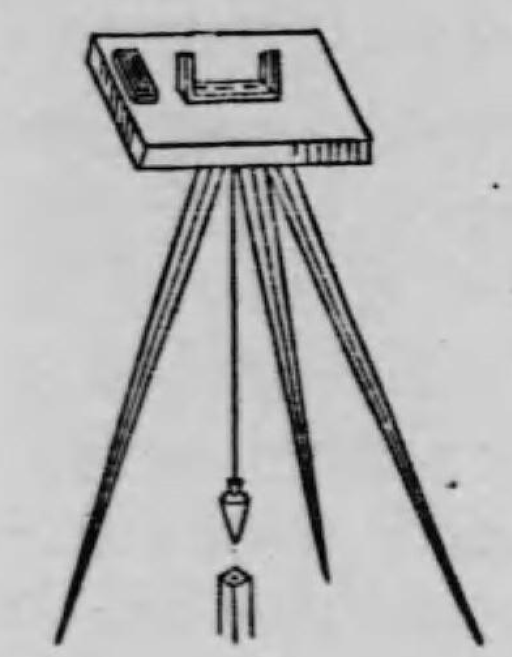


（ト） 照準儀（アリダート） コノ器械ハ方向ヲ覘ツタリ、測線ノ方向ヲ圖上ニ表ハシタリ又、傾斜ヲ測定スルタメニ使フモノデ其構造ハ圖ニ示ス通リデアル、下部ノ木材ノ盤ハ一方ヲ斜ニ削リ之レニ尺度

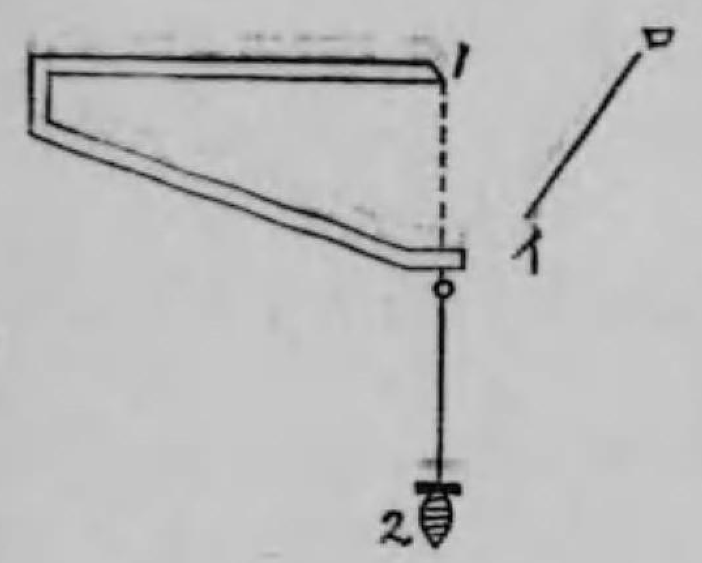
ヲ盛リ、測量シタ方向及線ヲ圖上ニ表ハスタメニ用ヒル、兩端ハ一箇ヅツノ金屬製ノ平鈑ガアツテ螺旋ト蝶鉸トニヨツテ木盤ノ兩端ニ固クツケラレ、自由ニ閉ヂ開キスルコトガ出來ル、使フ時ハ之レヲ起シテ垂直ニシ定規ヲ右ニスルノデアル、前鈑ハ中央ニ細長イ窓ガアツテ其中央ニ鉛直ニ細イ針金又ハ馬ノ毛ヲ張ル、コノ毛ヲ照準線ト稱ヘル、窓ノ左右ニハ分劃ヲ零カラ四十迄盛ツテ右方ハ下方ヲ零トシ左方ハ上方ヲ零トシ、其各分劃間ノ距離ハ前後兩平鈑間ノ距離ノ百分ノ一ニ等シク作ツテアル、後鈑ハ圖ノ如ク三ツノ孔ヲ等距離ニ一直線上ニホツテアルコノ孔ヲ覘孔トイフノデ測量スルトキ覘孔ニ目ヲ接シテ測ルベキ物ト照準線ト相重ナル様アリダートヲ動カシテ使フ、中央ノ水準器ハ水平ヲタメシ又抑揚桿ニヨツテ少シノ傾キヲナホシ定規ヲ水平ナラシムルノデアル。

（チ） 圖紙ノ貼リ方、測板上ニ圖紙ヲ貼ルニハ水ヲ以テ紙ノ裏面ヲ濕ホシテ板上ニ置キ紙ノ周圍ニノミ糊ヲツケテ之レヲ測板ニ張ル、此ノ際中央カラ手ノヒラヲ以テ圖紙ヲ四方ニ壓伸シ勉メテ其面ヲ平ニスルコトガ必要デアル、コレヲ乾スニハ日光ニアテナイ様ニスレバ尚ヨイ。

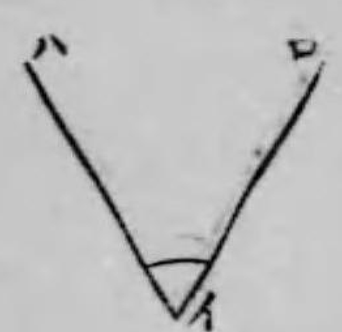
（リ） 測板ノ標定、測板ヲ水平ニシ且ツ圖形ニヨツテ方向ヲ定メ、コレヲ固定スルコトヲ測板ノ標定トイフノデ次ギノ順序ニヨツテ標定スル、先ヅ三脚架ヲ地上ニ立テ測板ヲ脚ノ螺旋デ固クトリツケル、次ニ筐羅針ヲ圖ノ通リニツケ、アリダートヲ測板上ニノセテ其水平ヲタメス、測板ヲ水平ニスルニハ前ニ述ベタ通リデアル、次ニ測量スル地形ヲ考ヘテ圖形ヲ畫クニ便宜ナ方向ニ測板ヲ廻轉シテ其位置ニ固定スル、測板ヲ廻轉シタリ固定シタリスルニハ三脚架ノ螺旋ニヨルノダ、實測中筐羅針ガ動イテ其方向ニクルヒヲ生ズルコトガアルトキハ原點ノ位置ヲ定メタ後筐羅針ノ周圍ニ沿ウテ鉛筆デ線ヲ引キ若シモソレガ動クコトヲ認メタトキハ筐羅針ヲ舊位置ニ復スルコトガ出來ル様ニスルモノデアル。



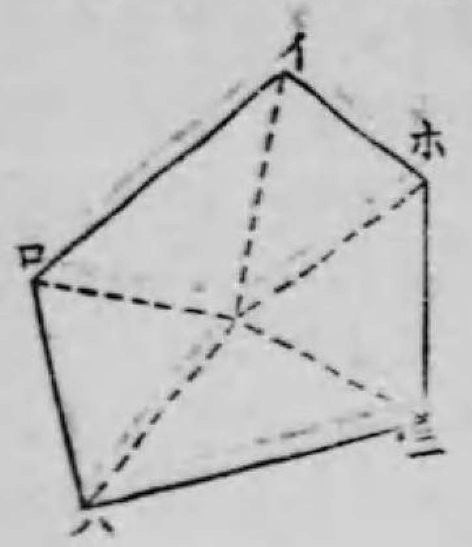
（ヌ） 測線及測角ノ寫取　アリダートヲ使用スルニハ先ヅ測線ノ寫取ヲシテソレカラ測角ノ寫取ヲスル、測板上ニ於テ或一點**イ**カラ**イロ**ノ方向ヘ測線ヲ引クニハ、測板ヲ**イ**點ニスエ、次ギニ垂球叉ノ**1**ヲ圖面上ノ



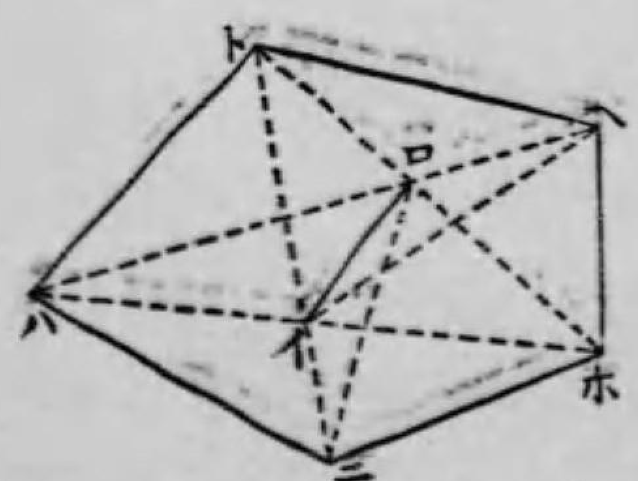
イ點ト一致セシメ測板ヲ水平ニシテ最後ニ**2**ヲ地面上ノ**イ**點ト一致セシムレバ明ニ地面上ノ點ト圖面上ノ點トガ一致スルノデアル、測線ヲ寫取ルニハ、**イ**點ニ針ヲ立テヽ針ニ沿ウテアリダートヲ動カシ覘孔カラノゾイテ照準線ト**ロ**點ニ立テタ標桿トガ一直線上ニ見エル樣ニスル、コレヲ照準ト稱ヘル、照準シタ後ハアリダートニ沿ウテ測線ヲ寫取ルコトガ出來ル、而シテ角ヲ寫シ取ルニハ先ヅ**ハロ**ニ標竿ヲ立テ**イ**ニ測板ヲスエツケルコトハ測線ノ寫取リノ樣ニシ先ヅ**イ**カラ**ロ**ヲ照準シテ其測線ヲ畫キ次ギニ又**イ**カラ**ハ**ヲ照準シテ測線ヲ畫ケバ圖面上ニ**イ**ノ角ヲ寫取ルコトガ出來ル。



18　實測及製圖　實測スルニハ先ヅ其地形ヲ踏査シテ其形狀大サ方向ナドヲ考ヘ何レノ點ヲ基本ノ點トスレバ全部ヲ測量スルニ便利デアルカヲ見定メルコノ基本トナルベキ點ヲ原點トイフノデアル、原點カラ測ラウトスル第二ノ方向ガ定ツタトキハ其距離ヲ測ッテコレヲ一定ノ縮尺ニ改算シアリダートノ定規ノ尺度ニヨッテ第二ノ點ヲ圖上ニ定メル、カクシテ見透シノツク限リ他ノ點ノ位置ヲ定メルコトガ出來ル、縮尺ノコトハ前ニ述ベテアル、アリダートデ測量スル方法ハ多クアルケレドモ其ウチ必要ナモノ數種ヲ述ベテ見ル。



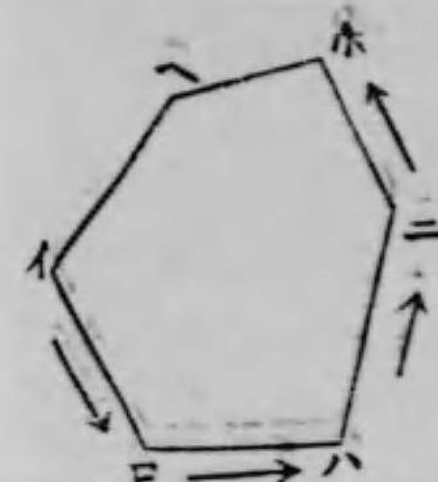
（イ）　射線法、**イロハニホ**ノ如キ地形ガアルトキ其中央ノ點カラ各ノ隅ノ點ヘ直線ヲ引イテ測量スル法デ測線及測角ヲ寫取リ縮尺ニヨッテ**イロハニホ**ノ各點ヲ決定シテ之レヲ結ビ付ケルノデアル。



（ロ）　交會法、コノ法ハ地面內ノ適當ノ所ニ基線**イロ**ヲ引キ**イ**ニ測板ヲ標定シ**ロ**ニ標桿ヲ立テヽ**イロ**ノ方向線ヲ引キ其長サヲ縮尺ニ改算シタ長サ**イロ**ヲ定メ次ギニ**イ**點カラ**ハニホヘ**ノ各點ヘ方向線ヲ引キ更ニ測

板ヲ**ロ**點ニ標定シ**ロ**點カラ**ハニホヘ**ノ各點ヘ方向線ヲ引キ**イ**カラノ方向線ト**ロ**カラノ方向線トノ交點ヲ結ベバ縮圖ヲ畫クコトガ出來ル、**イロ**ノ基線ガ六百分ノ一ナラバコノ縮圖ハ六百分ノ一デアル。

（ハ）　歩行法、コノ法ハ地形ノ周圍ニ沿ウテ歩行シナガラ邊ノ長サト角ノ大サトヲ測ル方法デ邊ノ數丈測板ヲスエツケナケレバナラヌ、圖ニ於テ**イ**ニ測板ヲ標定シテ**イロ**ノ方向線ヲ引キ次ギニ**イロ**ノ距離ヲ測定シテ其長サヲ縮尺ニ改算シテ圖面上ニ**ロ**點ヲ決定シ、次ギニ**ロ**點ニ測板ヲ標定シテ前ト同樣ノ方向ヲ繰リカヘシテ再ビ**イ**ニカヘルノデアル。



市街地ナドハ地形ナカナカ複雜デアルカラシテ以上數種ノ方法ヲ併用シテ測ラナケレバナラヌ。

19　誤差ノ配布及其有無ヲ檢スル法　如何ニ熟練ナ技師ガ測量シテモ少シノ誤差ハ免レナイカラ、コノ誤差ヲ全體ニ配布シテ製圖シ又計算シナケレバナラヌ、今或周圍ノ多角形ノ地面ヲ測量シタトキ第一回ニハ千間一尺五寸ト測リ第二回ニハ千間二尺ト測ッタナラバ其平均千間一尺七寸五分ヲ以テ周圍ト決定スルノデアル、角度ノ誤差ノ配布モ同樣ニスルモノデ、誤差ノ有無ヲタメスニハ同一ノ地面ヲ二回測量スルカ又ハ始メニ測ッタ方法ト別ノ方法デ測ルカ或ハ歩行法ノ測量ナドデ最後ニ大キイクヒチガ出來テ 線ガ合フカ 合ハナイカハ 皆誤差ノ有無ヲタメス 方法デアル、又交會法デハ一本ノ基線ノカハリニ　T字形ノ基線又ハ　コナル形ノ基線ヲ作ッテ線端ノ三點カラ測線ヲ出シテ他ノ點ヲ定メル方法デ若シモ誤差ガナカッタナラバ三線ガ一點デ會合シナケレバナラヌ、其他適當ノ方法デ誤差ヲ見出ス法ガ便利デアル。

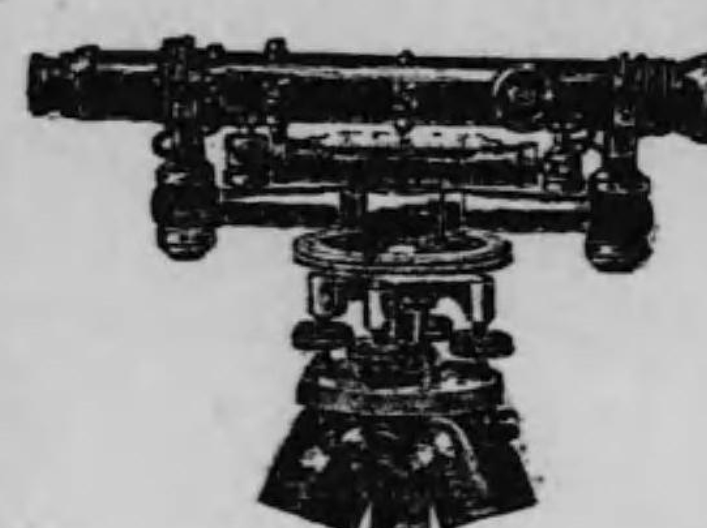
第四章　高低測量

20 高低測量　コノ測量ハ地面上ノ高低ヲ測ル測量デ直接ニ測リ得ル場合ト間接ニ測リ得ル場合トノ二ツノ方法ガアル。

21 高低測量ニ用フル器械及其使用法　高低測量ニ用フル器械ハ水準儀及標尺デアル、次ギニコノ器械ニツイテノベル。

（イ）素人デ作リ得ル高低測量器、水平ヲ見ル器械ハ圖ノ様ニ半圓形ノ輪ノ中央ヲ零トシテ目盛リ輪ノ兩端ヲ環ニシテ繩ヲ通ス様ニスル、圖ノ様ニ錘ヲ下シテ使フモノデ若シ繩ガ水平ニ張ラレヽバ錘ノ糸ハ零度ヲ示シ繩ガ傾ケバ錘ノ糸ハ或角度ヲ示ス、コノ角度ハ繩ノ水平面トナス角ヲ表ハスモノデコノ器械ハ又斜面ト水平面トガナス角度ヲモ測ルコトガ出來ル、標尺ヲ素人デ作ルニハ成ルベク堅イ木材ヲ十分乾カシ削リ尺度ヲコレニ盛レバヨイ、コノ二ツノ器械デ簡單ナ高低測量ハ十分ヤレル。

水　準　儀
American Y-Levels.



（ロ）水準儀、コノ器械ハ精密ナ高低測量ヲ行フトキ用フルモノデ其主要部ハ水準器ト望遠鏡デアル、水準器ト望遠鏡トハ平行ニシ脚ニトリツケル、脚ニトリツケル軸ハ望遠鏡ノ視軸ニ直角ヲナシテ居ルモノデアル。

（ハ）標尺、圖ノ様ニ長形ノ尺度デ多クハ二個或ハ三個ヲ重ネテ出入スルコトガ出來ル様ニナツテ細長イ箱製デアル此器械ハ實測スルトキ地

上ニ立テヽ使フモノデ勿論垂直ニシナケレバナラヌ、垂直ニスルニハ錘ヲ下ゲルカ又ハ圓形ノ水準器ヲ裏面ニツケルノデアルガ普通ハ大抵目測デ垂直ニスル。

22 高低測量ノ野帳　野帳ノ書キ方ハ次ギノ例ニヨル、前視ノ行ト後視ノ行トノ數ヲ加ヘ合セ其差ヲ求ムレバ明カニ高低差ノ行ノ數ノ和ニ等シクナル、若シモ等シクナケレバ計算ニ誤リノアルモノデアル。

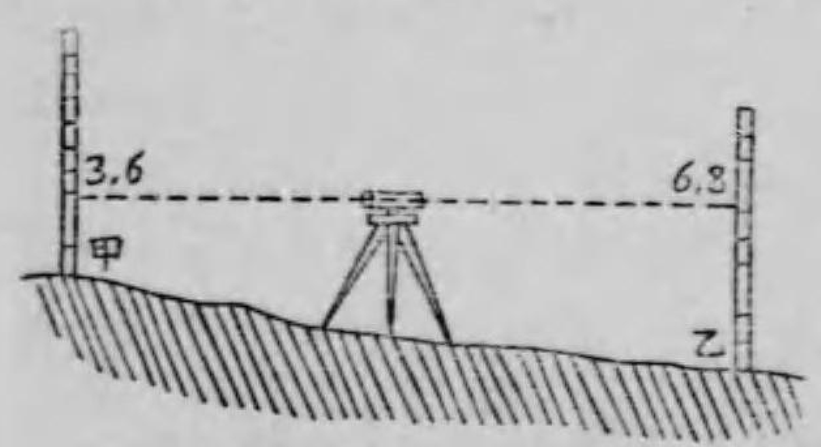
高低測量野帳

自何點　　何月何日　天候　晴無風
至何點　　観測者　氏　名

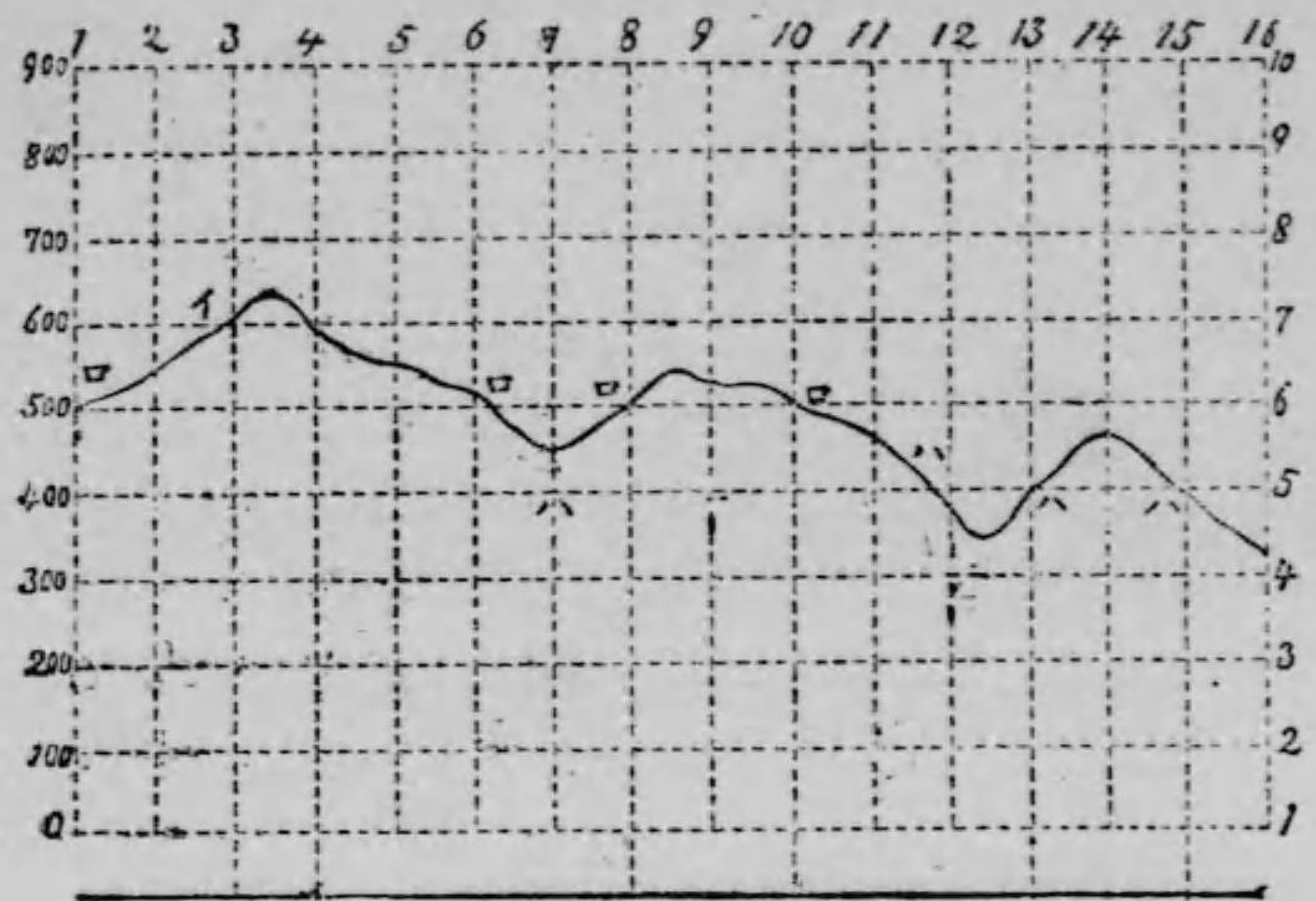
器械ヲ据エタ數	前視	後視	高低差 +	高低差 −	備考
1	尺 1.35	尺 2.10		0.75	
2	3.41	1.12	2.29		
3	1.05	2.04		0.99	
4	4.87	2.36	2.51		
5	1.20	1.11	0.09		
6	2.14	1.03	1.11		
7	3.06	2.06	1.00		
	17.08	11.82	7.00	1.74	
	11.82		1.74		
	5.26		5.26		

何點何點內ノ高低差　5.尺26

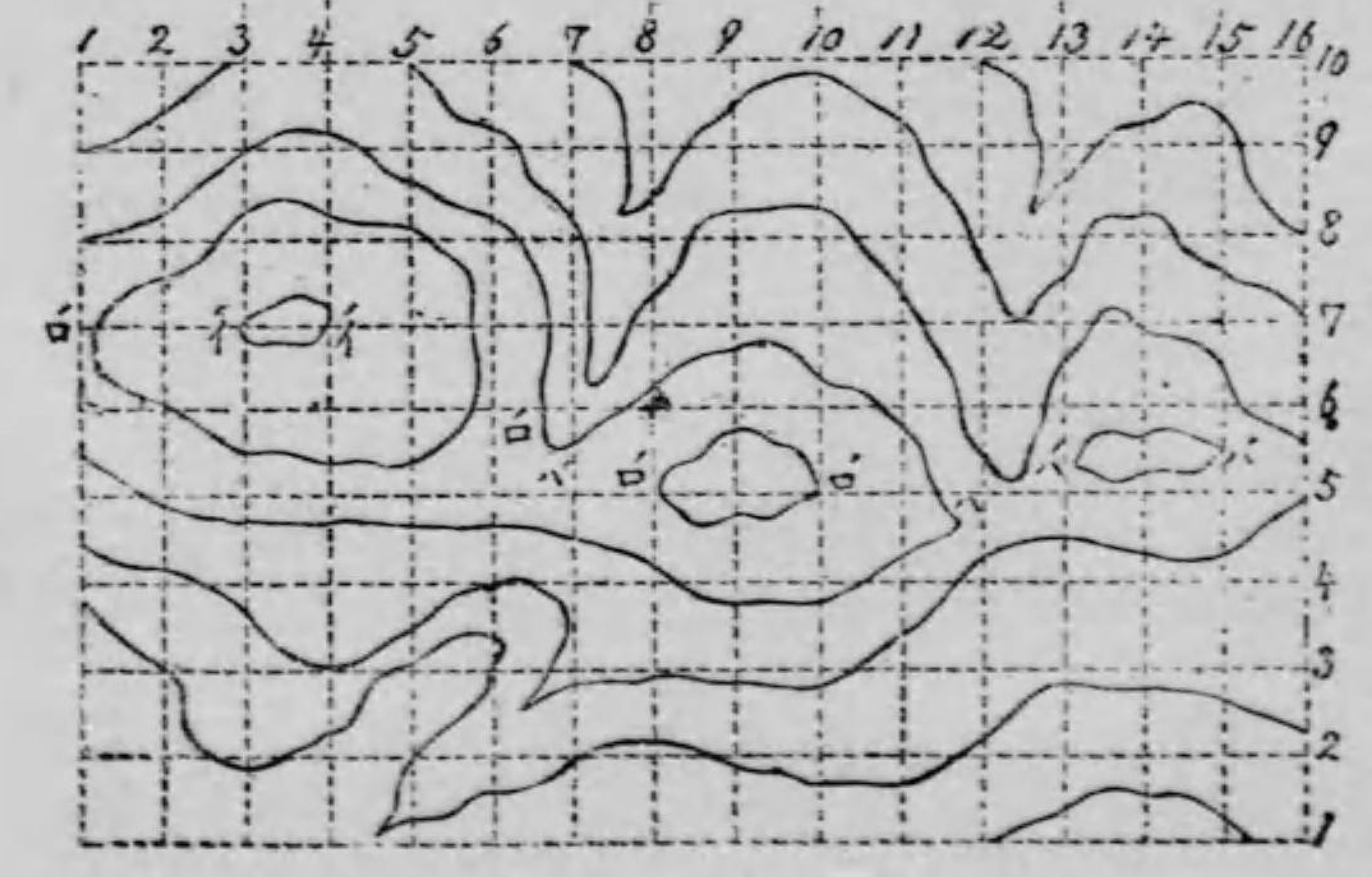
23 實測　高低測量ヲスルニハ水準儀ヲ二點間ノ中央ニ据エナケレバナラヌ若シ一方ニ偏シテ器械ヲスエレバ誤差ヲ大ナラシムル原因デアル、標尺ヲ二點ニ垂直ニ立テヽ水準儀ヲ中央ニ水平ニスエ先ヅ甲ノ標尺ヲ望遠鏡デノゾキ其內ニアル十字線ニヨツテ三尺六寸ト讀ミ次ギニ望遠鏡ヲ廻轉シテ乙ノ標尺ヲ讀ミ六尺八寸トスレバコノ數字ヲ野帳ニ記入スル、コノ測量ハ助手二名ヲ要ス、コヽニ注意スベキコトハ器械ヲ据エツケタ土地ガ軟カイタメニ體重ヲ右ノ足ニ託シタトキト左ノ足ニ託シタトキトニヨツテ水準器ノ氣泡ガ動ク様デハ大ナル誤差ヲ生ズルモノデ道路ナドヲ測量スルトキハ車馬ノ通行ヲトメテ地面ノ振動ヲ防ガナケレバナラヌ



24 高低測量ノ製圖　測量シタ高低差ハコレヲ圖上ニ表ハスコトガ必要デアル、測點ノ位置及高低差ヲ圖上ニ表スニハ測面圖平面圖ノ二ツガアル、先ヅ方眼紙ヲトリ線間ヲ百尺ノ縮尺トシテ圖形ヲ畫ケバ次ギノ圖ノ樣デ、甲ハ側面圖デ乙ハ平面圖デアル、側面圖ヲ表ハスニハ縱ノ線ヲ以テ表ハシ平行ナル縱線ノ長サニヨツテ高サヲ定メル、例ヘバ圖ニ於テロハ五百尺ヲ示シイハ六百尺ヲ示ス測點間ノ點ハ目分量デ畫クガ普通デアル。



甲圖



乙圖

平面圖ヲ表ハスニハ乙圖ノ樣ニスル、即チ甲圖ノイイヲ引キ下シタモノハ乙圖ノイ'イ'ノ圈トナリロロヲ引キ下シタモノハロ'ロ'トナル、コノ圈ヲコントルト稱ヘ昔ヘハ毛端ヲ以テ畫イタモノダ、カクスレバ甲圖ニ示シタ水平直線ハ乙圖ニ示シタ水平曲線トナル、コノ曲線上ノ點ハ皆同ジ高サヲ表ハス點デイ'イ'ノコントルハ六百尺、ロ'ロ'ノコントルハ五百尺ノ高サヲ示スノデアル、故ニ一見シテ高低山脈ノ方向及谷ノ有樣ヲ知ルコトガ出來ル、即チ水平曲線ノ接近スル所ハ山ハケハシク離レデル所ハ比較的ニ平カナ所デアル、コノ水平曲線ハ五十尺或ハ百尺毎ニ少シ太イ線ヲ以テ表セバ直チニ高度ナドヲ計算スルコトガ出來ル。

25 トンネルノ堀リ方　トンネルヲ堀ルニハ山ノ前面ト後面ノ二箇所カラ堀リ始メル、故ニコノ二箇所ノ高低及水平角ヲ測ラナケレバナラヌ、トンネルノ入口ノ附近ニ既ニ高サノ知レテ居ル水準標石アラバソレカラ測ツテモヨイガ若シナケレバ山ノ上ノ或點カラ兩方ノ入口迄ノ高低差及水平角ヲ測ツテ二箇所ノ入口ノ點ノ高低差ト其方向角ヲ定メナケレバナラヌ、又コノ二點ノ距離ヲ測ルコトモ必要ダ、二點ノ方向ト高低差トヲ知ツテ兩方カラ穴ヲ堀ツテモ途中デクヒチガヒガ出來ヌトモ限ラヌ、ソレ故山ノ前面ノ入口ノ穴ハ少シク右ニ曲ゲテ堀リ前面ノ入口ノ穴ハ左ニ少シク曲ゲテ堀リ途中デ少シ位ノクルヒガ出來テモ必ズ合フ樣ニスルノデアル。

第七編　實用測樹法

第一章　總　說

1　測樹法　測樹法トハ一本ノ樹又ハ澤山ノ樹ノ材積ヤ年齡及生長量ヲ測量スルノ方法ヲ云フノデアルガ是等ノ一般ノ事ハ林學專門ニ渡ッテ、高等數學ノ素養ガナクテハ充分ニ說明出來ナイ、此編デハ全ク高等數學ヲ用ヒナイデ主トシテ材積ノ測定法ヲ述ベテ置ク。

2　木材ノ容積及其單位　木材ノ容積即チ材積ニハ實積ト層積トノ二通リガアル、實積トハ一定ノ空間ヲ充タシテ居ル木材ノ體積ヲ云ヒ、層積トハ堆ミ重ネテアル木材ノ占領シテ居ル空間積（各木材間ノ空隙ヲモ含ム）ヲ云フ。我國ニ於テ使用シテ居ル材積ノ單位ハ地方ニヨッテ異ヘドモ、一般ニ實積ノ單位ハ尺〆又ハ才ニシテ用材ニ用ヒラレ、層積ノ單位ハ棚又ハ束ニシテ薪炭材ノ測定ニ用ヒラレル。

尺〆トハ算術ニテ旣ニ述ベテ置イタガ厚サ幅各々一尺長サ二間ノ方柱ノ體積ニ相當スル量即チ實積十二立方尺ノ義ニシテ才トハ一寸角二間即チ尺〆ノ百分ノ一ヲ云ヒ、實積百二十立方寸ニ相當スル。

棚トハ長サ三尺ノ木材ヲ高サ、幅各々六尺ニ堆ミ重ネテ居ル空間積ニ相當スル量即チ層積百〇八立方尺ノ義デアル。

束トハ薪炭材、粗朶材ニ對シテハ通常三尺繩締ヲ云ヒ、竹材ニ對シテハ胸高周圍ノ大サニヨリ一束ノ本數ヲ定メル。

尙此外ニ板ヤ杉皮、割竹ノ様ニ張ッテ使用スルモノハ便利ノタメニ坪ト云フ言葉ヲ用ユ、坪トハ六尺四方即チ三十六平方尺ノ面積デアル。

第二章　伐リ木ノ測定

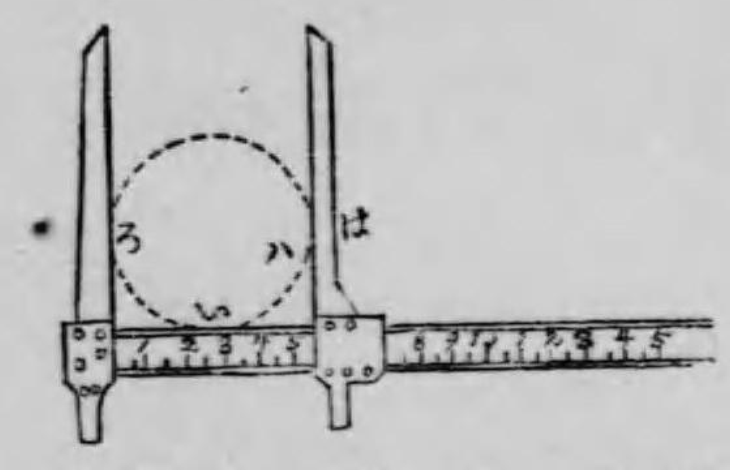
第一節　幹ノ斷面積計算法

3　幹材ノ體積ヲ求ムルニハ其長サ及ビ機斷面ヲ測ッテ、求積ノ公式ニ從ヒ算出セネバナラヌ、幹材ノ横斷面ハ殆ンド圓形デアルカラ通例之ヲ圓ト見做シ其直徑又ハ周圍カラ截口ノ面積ヲ計算スル、ソレダカラ結局幹材ノ體積ヲ算定スルニ必要ナ要素ハ長サ及直徑(或ハ周圍)ノ二ニ歸着スル。

長サノ測定ニハ測量ノ部デ述ベテ置イタ卷尺ヲ使用スルガ便利デアル、シカシ卷尺ガナケレバ繩ヲ用ヒテモアマリタイシタ變リハナイ、若モ新タニ卷尺ヲ買ッテ置クナラバ測樹用トシテハ長サ六十尺即チ十間ニシテ目盛リハ一面ニ尺ヲ單位トシタモノ、他ノ面ニハ間ヲ單位トシテ其十分ノ一迄讀メル様ナモノガヨイ。

長サノ測定ニハ卷尺ヲ使用スルヲ便トス、其長サハ六十尺ヲ適度トシ、一面ニハ尺ヲ單位トシ、他ノ面ニハ間ヲ單位トシテ其十分ノ一迄ヲ目盛シタルモノヲ可トス。

輪　尺



直徑ノ測定ニハ輪尺ヲ用フルガ便利デアル、輪尺ノ構造ニハ其種類ガ澤山アルケレドモ、最モ普通ニ使用シテ居ルモノハ、木材ヲ以テ作リ尺度(い)固定脚(ろ)及遊動脚(は)ノ三部カラナッテ居ル、固定脚ハ尺度ノ一端ニ於テ之ト直角ニ固定セラレ、遊動脚ハ尺度ニ沿フテ滑ラシ常ニ固定脚ニ平行ニナル、而シテ尺度ノ度盛ハ五分又ハ一寸ニシタモノヲ使フガ便利デアル。

輪尺ヲ以テ直徑ヲ測定スルニハ尺度ヲ幹ニ當テ兩脚ノ間ニ幹ヲ狹ミ、遊動脚ノ内測ニヨッテ限ラレタ尺度ノ度目ヲ讀メバ可イ、例ヘバ圖ニ於テ丸イ點線ガ木ノ幹デアッタナラバ此トキハ其幹ノ直徑ハ(は)ノ(ハ)ニヨッテ五寸五分デアル、而シテ測定ニ際シ注意スベキハ、

一　尺度ハ常ニ幹軸ニ直角ニ置クコト。

二　測定スベキ場所ニ在ル蔓苔ノ類ハ之ヲ除キ、瘤又ハ枝節ガ在ルトキニハ其部分ノ上ト下ヲ測ッテ其平均數ヲ以テ其點ノ直徑トスルコト。

三　樹幹ハ概ネ正シイ圓形デナイカラ精密ヲ要スルトキハ直角ノ方向ニ交叉スル二個ノ直徑ヲ測ルカ、尙精密ニ計ルニハ同ジ圓周ノ上ヲ三ケ所モ位置ヲ更ヘテ其平均數ヲトル。

周圍ヲ測定スルニハ卷尺ヲ以テ幹軸ニ直角ナル面ヲ通ジテ之ヲ測ル、而シテ周圍ニヨリテ斷面積ヲ算出スルハ直徑ニ依リテ之ヲ算出スルモノヨリ誤差ガ大キイカラ成ルベクハ直徑ヲ測定スル方ガ可イ何故カト云ヘバ周圍ヲ測定スルトキハ樹幹ニ不正ナ部分ガアツテモ之ヲ避ケルコトガ六ケ敷ク、又横斷面ガ扁圓形ノトキハ直徑測定ノ樣ニ其平均數ヲ求メル事ガ出來ナイ，又斜ニ測リ易イコトガアルカラデアル。

サテ幹ノ直徑カ若シクハ周圍ガ測ラレタナラバ。

4　幹ノ直徑ヨリ斷面積計算法　幹ノ直徑ヨリ幹ノ斷面積ヲ計算スルニハ直徑ノ平方ニ圓周率三、一四一六ヲ掛ケタモノヲ四デ割レバヨイ。

即チ其公式ヲ示セバ

$$\text{斷面積}=\frac{(\text{直徑})^2\times 3.1416}{4}$$

例ヘバ

例一　輪尺ニテ或ル幹ノ一箇所ノ直徑ヲ測リタルニ五寸五分アリシト云フ、然ラバ其部分ノ切口ノ面積ハ幾何ナルカ。

演算　$\frac{\overline{5.5^2}\times 3.1416}{4}=23.758$ 强平方寸

注意　實際ニハ是程叮嚀ニ計算スル必要ノナイトキガ多イ、唯ボンヤリト此切口ノ面積ハ幾何デアルカガ知リタイトキニハ 三、一四一六ナンカ掛ケルト役ニ立タナイ、總テ何デモダガ計算ニハ精密ノ結果ヲ望ムトキト、約ドノ位ト云フテ答ヲ早ク知リタイ場合トノ二ツガアル、多少デモ數學ヲ勉强シタナラバ、此點ニ最モ注意シテ計算スベキデアル、此點ヲ考ヘズニ實地問題ニ出合ツタラナバ便利ナ數學ガ却ツテ不便トナツテ折角ノ計算ハ役ニ立タナクナル、此事項ハヨク知ツテ居ル人デモ實際ニ於テハ活用シナイデ、往々勉强シタ人ガ却ツテアマリ勉强シナイ老人ニ敗ケルコトガアル。

次ニモ例題ヲ出スカラ計算ヲシテ見テ而シテ別ニ略算デ約ドノ位デアルカヲ諳算ニヨツテ練習シテホシイ。

例二　直徑一尺五寸ナル丸木ノ切口ノ面積ハ幾何ナルカ。

演算　$\frac{\overline{15^2}\times 3.1416}{4}=176.715$ 平方寸

例三　或丸木ニ於テ上ノ切口ノ直徑ハ七寸三分ニシテ下ノ切口ノ直徑ハ一尺二寸ナリト云フ、然ラバ中央ノ切口ノ面積ハ幾何ナルカ。

解　中央ノ切口ハ上底ト下底トノ面積ノ平均ト見テヨロシ、故ニ上底ノ面積ト下底ノ面積トノ和ヲ求メ是ヲ二デ割レバ中央ノ切口ノ面積ヲ算出スルコトガ出來ル、此計算ハ上底ト下底トノ面積ヲ別口ニ出シテ二デ割ルカハリニ次ノ式ニテ計算スレバ便利デアル、但シ此式ハ別ノモノデハナクシテ矢張同ジ事ヲマトメテ書イタノデアル。

演算　$\frac{(7.3+12)\times 3.1416}{4\times 2}=\frac{19.3\times 3.1416}{8}=7.676$ 弱平方寸

5　幹ノ周圍ヨリ幹ノ斷面積計算法　幹ノ周圍ヨリ幹ノ斷面積ヲ計算スルニハ、周圍ノ平方ヲ 三、一四一六ノ四倍デ割レバヨイ。

即チ其公式ハ

$$\text{斷面積}=\frac{(\text{周圍})^2}{4\times 3.1416}$$

例ヘバ

例一　周圍三尺八寸ナルトキ其切口ノ面積ヲ求ム。

演算　$\frac{38^2}{4\times 3.1416}=$ ……………………答　$114\frac{3572}{3927}$

例二　周圍四尺六寸三分ナルトキ其切口ノ面積ヲ求ム。

演算　$\frac{46.3^2}{4\times 3.1416}=$ ……………………答　$170\frac{18505}{31416}$

注意一　是等ノ面積ノ單位ハ平方寸デ計算シタガ平方尺ガ必要ノトキニハ小數點ヲ一桁上ノ位ニウツシテ後ニ計算スレバヨシ、又平方寸デ出タモノヲ平方尺デ表ハスニハ百デ割リ、平方尺デ出タモノヲ平方寸デ表ハスニハ百倍スレバヨシ。

注意二　斷面積ノ計算法ハ上ノ通リデアルガ若モ木材ノ賣買ノトキナドニハ一々計算シテ居テハ大ニ手間ドリ又誤算ヲシナイトモ限ラナイカラ是等ノ計算ガ實際ニ必要ナ場合ニハ半徑、直徑、又ハ周圍ニ對シテ其圓積ヲ表トシタモノ乃ハチ圓積表カラ斷面積ヲ求ムルガ便利デアル。

第二節　材積ノ計算法

6 材積ヲ算法スルハ前ニ述ベテ置イタ通リ、樹ノ長サト直徑（若シクハ周圍）トノ二ツノ要素ヲ知レバヨイ、而シテ材積ノ算出法ハ種々アルガ今最モ簡單ニシテ實用的ノモノヲ述ベル。

但シ次ノ式ハ何レモ同ジ單位ヲ以テ直徑及長サヲ示シ材積モ亦同ジ單位ヲ以テ示シタモノデアルカラ尺〆ニヨツテ示サウト思ヘバ直徑及長サノ單位ニ尺ヲ用ヒ其材積ヲ十二デ割ラネバナラヌ、(若モ長サノ單位ニ間ヲ使用スルトキニハ十二ノ代リニ二デ割ル)、又才數ニシテ幾ラアルカヲ計算セウト思ヘバ一才ハ一本(即チ一尺〆)ノ百分ノ一デアルカラ尺〆デ表ハサレタ數字ヲ百倍スレバヨイ、又直チニ才數デ表ハスニハ長サヤ直徑ノ單位ヲ寸ニシテ計算スレバ其材積ハ幾立方寸ト云フモノガ出ルカラ是ヲ百二十デ割レバ幾才ト云フコトガ知レル。

7 フーベル氏ノ公式 幹ノ中央斷面積ヲ求メ之ニ幹ノ長サヲ掛ケルトキハ其材積トナル、即チ

幹材積＝中央斷面積×幹材ノ長サ

例一　長サ二間ノ丸木アリ其中央ノ切口ハ一、二平方尺ナリト云フ、然ラバ此材積ハ幾尺〆ナルカ。

解　尺〆デ表ハスニハ、前ニ述ベタ樣ニ總テノ單位ヲ尺トスルガ便利デアルカラ長サモ尺ニテ表ハストフーベル氏ノ公式ニヨリ

材積＝1.2×12＝14.4平方尺

14.4÷12＝1.2本　答

即チ尺〆ニテハ一、二本トナル。

例二　長サ二丈ニシテ其中央ノ切口ハ二十二平方寸ナリト云フ、然ラバ材積ハ幾才ナルカ。

解　長サモ切口モ單位ヲ寸ニスレバフーベル氏ノ公式ニヨリ

200×22＝4400立方寸

4400÷120＝36.66…

＝36.7才(約)

即チ約三十六、七才トナル。

8 スマリアン氏ノ公式 幹材ノ末口及元口ノ斷面積ノ和ヲ二デ割リ之ニ幹材ノ長サヲ掛ケレバ其材積ヲ求メラレル即チ

$$幹材積＝\frac{末口斷面積＋元口斷面積}{2}×幹材ノ長サ$$

此法ハ前法ニ比ベテ手數多イバカリデナク結果モ亦不精密デアルカラ積ミ重ネテアル材木ノ樣ニ中央ノ直徑ヲ測ルコトガ出來ナイ場合ノ外ハ用イナイ方ガヨイ。

9 トリーケ氏ノ公式 幹材ノ末口及元口ノ斷面積ノ和ニ中央斷面積ノ四倍ヲ加ヘ幹材ノ長サヲ掛ケテ六ヲ以テ割ルトキハ材積トナル、即チ

$$幹材積＝\frac{(末口斷面積＋元口斷面積＋4×中央斷面積)×幹材ノ長サ}{6}$$

此法ハ三ツノ斷面積ヲ知ラネバナラヌカラ應用上稍不便デアルケレドモ其結果ハ甚ダ精密デアル。

而シテ以上ノ公式ハ必ズ斷面積ヲ知ラネバナラヌ、是等ノ公式ノ內デハフーベル氏ノ式ガ一番便利デアル。

次ニ直徑或ハ周圍カラ直チニ材積ヲ計算スル法ヲ述ベル、今迄ノ式デハ斷面積ノ計算ヲシタ上デナクテハナラヌカラ不便ダガ、次ノ公式ハ唯直徑ヲ測ルカ周圍ヲ計ツタ上デ長ササヘ測レバ後ノ計算ハ容易ニ出來ルカラ實際上便利デアル。

直徑法　$材積＝0.4×(中央直徑)^2×幹材ノ長サ$

周圍法　$材積＝\frac{(2×中央周圍)^2×幹材ノ長サ}{100}$

但シ此二法ニ於テハ中央直徑又ハ中央周圍ニハ寸ヲ單位トシ幹材ノ長サハ間ヲ單位トシ材積ハ才ヲ單位トスルモノデアル。

例一　長サ二間ニシテ中央ノ直徑二尺五寸ノ丸木ノ才數ヲ問フ。

解　$材積＝0.4×25^2×2＝500$才　答

例二　長サ一間ニシテ中央ノ周圍三尺ナル丸木ノ才數ヲ問フ。

解　$材積＝\frac{(2×30)^2×1}{100}＝\frac{3600}{100}＝36$才

10 フーベル氏ノ區分求積式 長イ幹材ヲ任意ノ長サニ區分シ各區分ニツキフーベル氏ノ公式ニヨリテ材積ヲ計算スレバ其總和ハ即チ全材ノ材積デアル、而シテ其ノ區分ノ仕方ハ普通一間又ハ二間ノ長サニ等分スルカラ各ノ區分ノ中央斷面積ノ總和ニ一區分ノ長サヲ掛ケテ其材積ヲ求ムレバヨイ、短イ材ニ於テハフーベル氏等ノ公式ヲ以テ計算スルガ可イケレドモ長イ材ニ於テハ此求積式ニヨツテ計算セネバ大キイ誤リヲ來ス

コトガアル。

11 角材ノ尺〆及才ノ計算法 今迄述ベタノハ幹即チ丸木ノ材積計算法デアッタガ此處デハ一應人工ヲ加ヘテ角材ニシタモノノ計算法ヲ示ス而シテ唯材積ガ幾立方尺デアルトカ又ハ幾立方寸デアルトカハ既ニ角柱ノ體積計算トシテ求積デ學ムデ居ルガ又此處ニ其次トシテ體積ヲ尺〆又ハ才デ表ハス方法ヲ述ベル。

注意 幾度モ同ジ事ヲ注意スル樣デハアルガ、尺メヲ算出スルニハ長サモ幅モ厚サモ其單位ハ尺デ表ハシ、才數ヲ計算スルニハ何レモ其單位ヲ寸デ表ハサネバナラヌ、而シテ又單位ヲ尺デ計算シテ尺〆ガ出タラバ其數ヲ百倍スレバ才數トナル、何故カト云ヘバ尺メノ百分ノ一ガ一才デアルカラデアル。

サテ角材ノ尺〆ヲ算出スルニハ厚サニ幅ヲ掛ケ、又ソレニ角材ノ長サヲ掛ケテ十二デ割レバヨイ、即チ

$$\text{角材ノ尺メ}=\frac{\text{厚サ}\times\text{幅}\times\text{長サ}}{12}$$

例一 厚サ一尺、幅二尺、長サ二間ノ角材ハ何本ナルカ、又其才數ハ如何。

解 $\text{尺〆}=\dfrac{1\times2\times\overset{\text{2間}}{12}}{12}=2\text{本}$ **答**

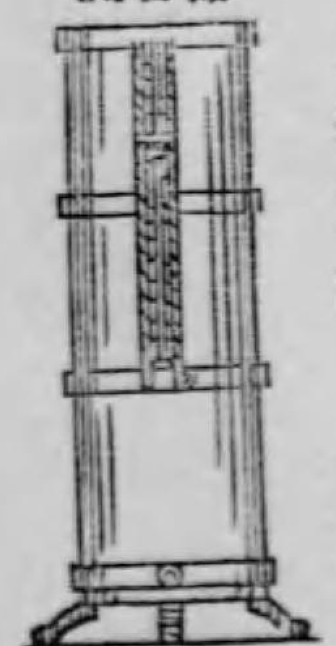
$2\times100=200\text{才}$ **答**

例二 厚サ二寸五分、幅四寸、長サ一間ノ尺メ及才數ヲ問フ。

解 $\text{尺メ}=\dfrac{0.25\times0.4\times6}{12}=0.05\text{本}$ **答**

$0.05\times100=5\text{才}$ **答**

測容器



12 根株、及枝ノ材積測定法 根株、枝條ソノ他、極メテ不規則ナル材片ノ實積ヲ査定スルニハ、通常、測容器ヲ用フ、コノ器ハ尺度ヲ有スル圓筒狀ノ水槽ニテ、槽內ノ水ヲ、槽壁ニ沿ヒタル硝子管ニ通ゼシメテ、水面ノ高低ヲ計ル樣ニシテキル。

今、コノ器ヲ用ヒテ、材片ノ體積ヲ測ラムトセバ、マヅコレヲ水平ニ安置シ、內容ノ約二分ノ一ニ達スルマデ水ヲ充タシ、ソノ水ノ靜止スルヲ待ッテ、硝子管側ノ度目ニヨリテ、水面ノ高サヲ測リオク、次ニ、測ラムトスル

材片ヲ取リテ、全ク水ノ中ニ沒ジ、ソノ昇リタル水面ノ高サヲ見ル。

箇樣ニシテ前後水面ノ高サノ差ヲ求メ、コレヲ圓筒ノ斷面積ニ掛ケルトキハ、材片ノ體積ガ計算出來ル、但シ硝子管ニ附ケテアル尺度ノ一度目ハ、尺メノ百分ノ一ヲ示ス樣ニ盛ッテオケバ、計算セズシテ、直チニソノ材積ヲ知ルコトガ出來ルカラ使用上甚ダ便利デアル。

モシコノ器ノ備ヘガナイトキニハ、一箇ノ桝ヲ用意シテ、ソノ上部ノ側壁ニ排水孔ヲ裝ヒ、コレヲ水平ニ安置シテ、ソノ中ニ水ヲ充タシ、次ニ測ラムトスル材片ヲ徐カニ沈メ、ソノ排出セラレタ水ヲ受器ニ流シ入レテ、ソノ容積ヲ量ルトキハ、材片ノ體積ヲ知ルコトガ出來ル。

測ラウト思フ材量ガ澤山デアルトキハ、マヅソノ全部ノ重サヲ測定シ、次ニソノ內カラ全部ノ標準トナスニ足ルベキ一部分ノ材ヲ取出ダシテソノ重量ヲ計リ、其後ニ前ノ方法ニヨッテ、材積ヲ求ムレバヨイ、ソウスレバ標準材ノ重サヲ以テ全部ノ重サヲ除シタル商ニ、標準材ノ材積ヲ乘ズルトキハ、全部ノ材積ガデル、コノ法ハ固ヨリ精密ナ方法デハナイケレドモ、應用上最モ便利デアル。

13 積木ノ棚數計算法 薪炭材ノ如キモノハ普通其層積ヲ測リ棚ヲ以テ單位トスルコトハ前ニ記シテ置イタ通リデアル、棚數ヲ測定スルニハ伐採シタ木材ヲ長サ三尺ニ切リ、之ヲ高サ幅共ニ六尺ニ積ム、之レ即チ一棚ニシテ百〇八立方尺ノ層積デアル、若シ木材ヲ任意ノ長サニ切リ任意ノ大サニ積ムダトキニハ其長サ、高サ及幅ヲ測リ(尺ヲ單位トシテ)之ヲ相乘ジテ、百〇八ヲ以テ除スレバ其棚數トナル。

14 積木ノ實積計算法 層積ハ木材間ノ空隙ヲモ含ムデキルカラ一棚ノ木材ト雖其實積ハ木材ノ長短、大小、曲直並ニ積ミ方ノ如何ニヨッテ甚ダシク異ナルモノデアル、ソレダカラ今少シク精密ニ材積ヲ知ラウト思ヘバ、既定ノ表カラ層積ト實積トノ割合ヲ求メ、之ヲ棚數ニ乘ジテ、其實積ヲ査定スレバヨイ、此表ヲ一棚ノ實積係數表ト云ッテ、各種ノ木材ニツキ精密ニ一棚ノ實積ヲ測リ之ヲ一棚ノ層積ニテ割ッタ數ノ平均ヲ示シタモノデアル。

今志賀林學博士ノ調査ニ係ルモノヲ示セバ次ノ通リデアル。

薪炭材(長サ三尺)實積係數表

末口直徑	一寸以下	一寸ヨリ二寸マデ	二寸ヨリ三寸マデ	三寸ヨリ四寸マデ	四寸ヨリ五寸マデ
係數	0.257	0.483	0.613	0.664	0.744

一棚ノ尺〆	2.313	4.347	5.517	5.975	6.696

例ハバ、長サ三尺末口直徑二寸ヨリ三寸マデノ薪炭材ヲ幅十二尺高サ六尺ニ積ムダモノガアレバ、前ニ掲ゲタ表ニヨリコノ實積ヲ計算スレバ、

堆積材ノ層積$=\frac{3\times6\times12}{108}=2$棚　$5.517\times2=11.034$ 尺〆(實積)

或ハ　$3\times6\times12=216$ 立方尺(層積)

$216\times0.613=132.408$ 立方尺(實積)

$132.408\div12=11.034$ 尺〆

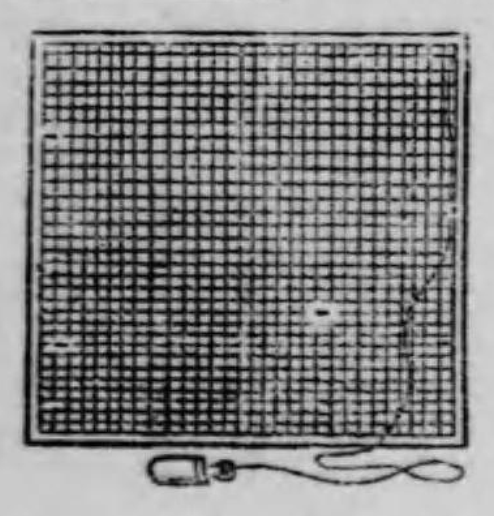
第三章　立木ノ測定

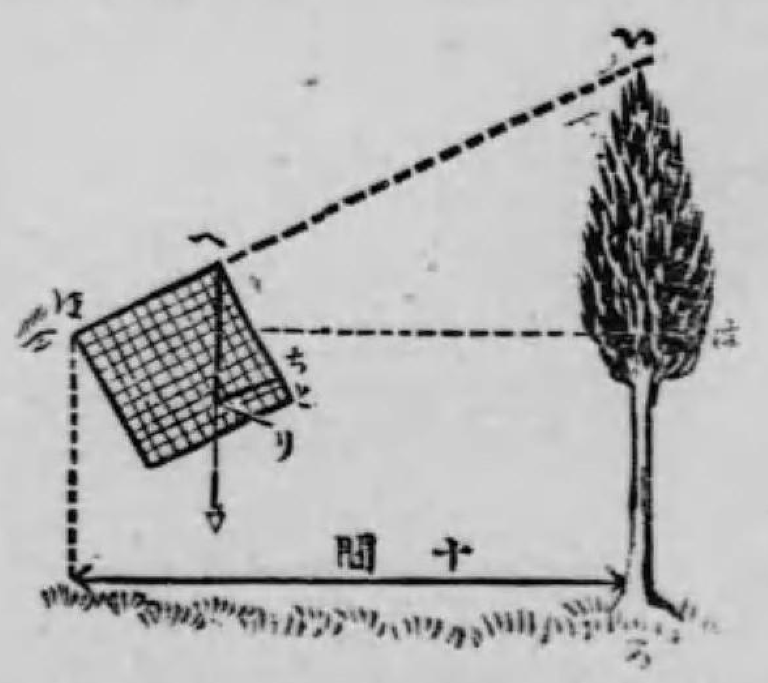
15　伐採木デハ、其直徑及長サヲ自由ニ測定ノ便ガアルケレドモ、立木ニアリテハ幹ノ下部ヲ除クノ外直接ニ測定スルコトガ六ケ敷イ、ソレダカラ其材積ヲ測定スルニモ大ニ其趣ヲ異ニシ、直徑又ハ周圍ハ通常胸高即チ地上四尺ノ點ニ於テ測定シ、高サハ器械ヲ用ヒテ間接ニ之ヲ測リ、既定ノ常數ヲ乘ジテ其材積ヲ算定スルノガ普通デアル。

16　立木ノ高サヲ測ル法　立木ノ胸高直徑ヲ測ルニハ前ニ記シタ輪尺ヲ用ヒ、高サヲ測ルニハ測高器ヲ用フ、測高器ノ構造ハ種々アルケレドモ、其最簡單ニシテ實用ニ適スルモノハケーニツヒ氏ノ測高器及ワイゼ氏ノ測高器デアル。

ケーニツヒ氏ノ測高器ハ圖ニ示スガ如ク、一邊ノ長サ五六寸ノ正方形ノ板面ニ二分位ノ間隔ニ四角網ヲ作リ、其一隅ニ垂ゲ鉛ヲ付ケタモノデアル、此器ヲ以テ樹ノ高サヲ測定スルニハ先ヅ樹ノ梢ト根株トガ見ヘル適當ノ地ヲ撰ビ、此點ト樹木トノ水平ノ距離

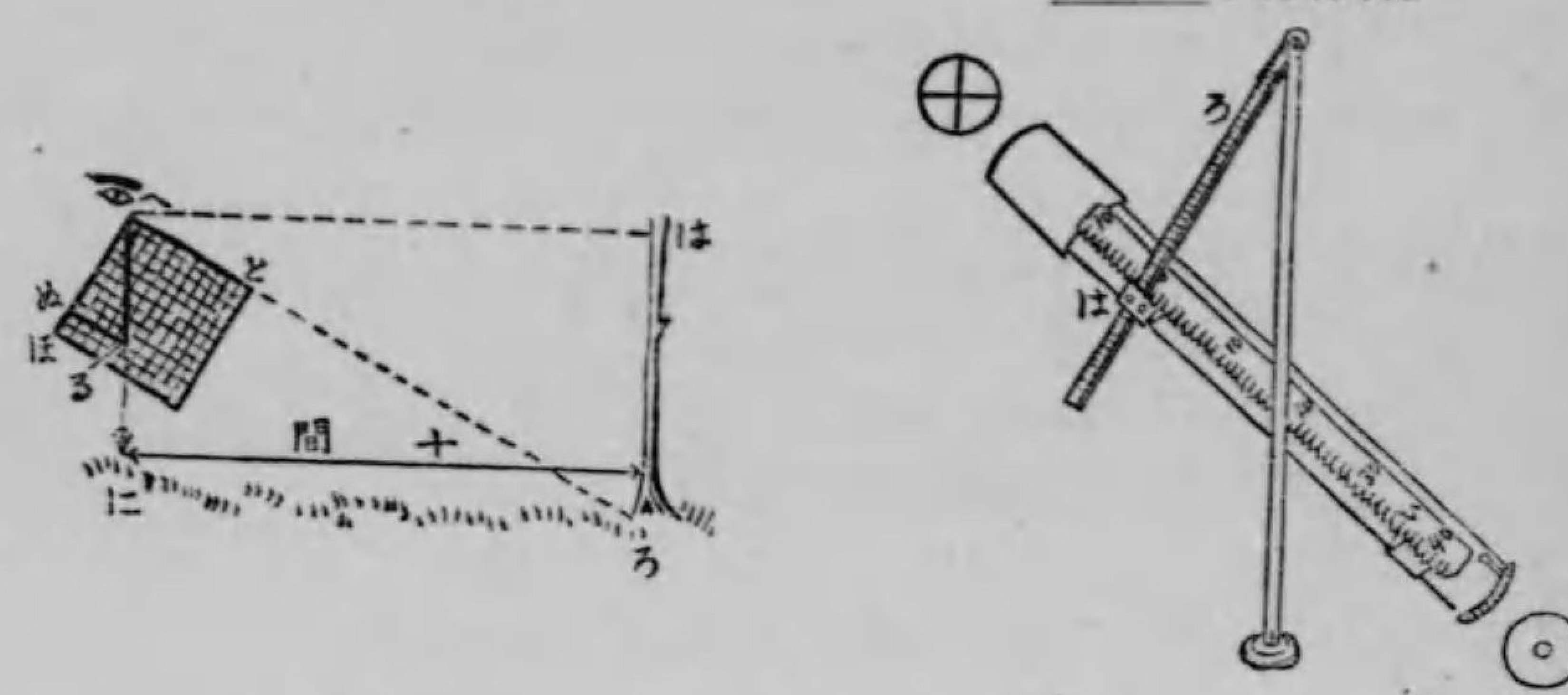
ケーニツヒ氏測高器





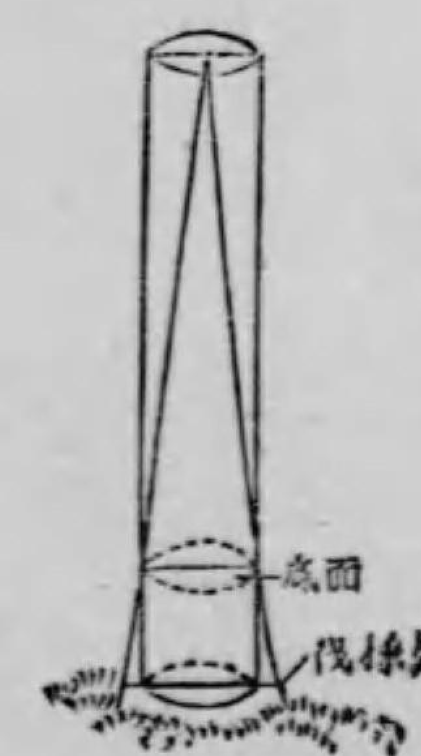
ヲ測ル、(假リニ距離ヲ十間トス) 次ニ此地點ニ立ツテ板面ヲ垂直ニ保チ**ほへ**線ニ沿フテ樹ノ端**い**ヲ見透シ、徐ニ板面ヲ左方ニ傾ケ垂ゲ鉛ノ

ワイゼ氏測高器



糸ヲ板ノ下線ニテ支ヘ、次ニ之ヲ指ノ先デ止メル、ソシテ支點カラ**へと**ノ方向ニ數ヘテ第十番目 (水平距離十間デアルカラ) ノ度目ニ相當スル横線ノ右端**ち**カラ垂ゲ鉛ノ糸トノ切合點**り**ニ至ル迄ノ度目數五ハ**いは**ノ間數ヲ示ス、次ニ**へと**ニ沿ヒ幹ノ下**ろ**ヲ見透シテ、前ノ如クスルトキハ、**ぬる**間ノ度目五ハ**はろ**ノ間數デアル、因ツテ右二回ノ結果ヲ加ヘタルモノ即チ十間ハ求ムル所ノ樹ノ高サデアル。

ワイゼ氏測高器ハ圖ニ示スガ如ク、直徑八分、長サ七寸五分ノ金屬製圓筒內ニ見透裝置ヲ作リ外壁ニハ鋸齒ノ樣ニ度目板(**い**)ヲ附ケ、三ト同一單位ニ度盛セラレタル垂ゲ鉛支柱(**ろ**)ヲ度目板ノ一部(**は**)ニ挿メ込ミテ、其上端ニ垂ゲ鉛ヲ付ケタモノデアル、此器ヲ以テ樹ノ高サヲ測ルニハ垂鉛支柱ノ長サヲ幹ト立脚點トノ水平距離ニ等クシテ、樹ノ先及幹ノ下部ヲ見透シテ垂ゲ鉛ガ度目板ニ示シタル數ヲ加ヘテ樹ノ高サヲ知ルコトガ出來ルモノデアル。



17　立木ノ底面積及高サヲ知リテ尺〆 (又ハ才數) 計算法　樹幹ノ根際ハ、形狀ガ不規則ニテ、體積計算ノ基本トシテハ、不適當デアルバカリデナク、コレガ測定ニモ亦不便デアルカラ立木ノ直徑ハ胸高、即チ地上四尺ノ點デコレヲ測定スルノガ通則デアル。

今一ノ樹幹ト底面積、(胸高直徑ニ對スル斷面積) 並ニ高サヲ等シクスル圓柱ガアルト想像スル

トキハ、コノ圓柱ノ體積ハ，通例樹幹ノ積體ヨリモ大キイコトハヨク知レテキルコトデ，コノ圓柱體積ニ對スル、幹材積ノ比ヲ、ソノ樹幹ノ形數トイフ、依テ形數ヲ知ツテ居レバ樹幹ノ體積ヲ算出スルコトハ甚ダ容易デアル，ソノ法ハ、マヅ底面積ニ，高サ(伐採點ヨリ梢端マデノ長サ)ヲ乘ジテ圓柱積ヲ求メ、コレニソノ形數ヲ乘ズレバヨイ。

$$\text{形數}=\frac{\text{樹幹材積}}{\text{想像圓柱體積}}=\frac{\text{樹幹材積}}{\text{底面積}\times\text{高}}\ (\text{想像圓柱體積}=\text{底面積}\times\text{高})$$

$$\therefore\ \text{樹幹材積}=\text{底面積}\times\text{高}\times\text{形數}$$

シカシ、形數トイフモノハ、タヾニ，樹ノ種類ニヨツテチガツテキルダケデナクシテ，同一ノ樹デモ、樹ノ高サ、年齡，產地，ナラビニ生育狀態等ニヨツテ、チガウモノデアルカラ，一ツノ樹幹ニツイテ調査シタ數ヲ以テ，直チニ他ノ樹幹ニ適用スルコトハ出來ナイモノデアル、但シ樹ノ種類ガ同一デアレバ樹ノ高サハ、形數ニ最モ大キイ關係ヲモツテキルカラ形數ノ近似値ヲ知ラフト思ヘバ、各々ノ樹ノ種類ニツイテ、樹高ト形數トノ關係ヲ調査シ，ソノ平均ノ値ヲ求メテオケバ實際ニ役ニ立ツ、歐洲デハ既ニ重要樹種ニツイテ，コノ種ノ形數表ガ調製サレテキルケレドモ，我邦デハ、未ダ，十分信用ノ出來ル形數表ガ調製サレテキナイノハ甚ダ遺憾デアル。

次ニ掲ゲル形數表ハ，秋田大林區署、ナラビニ林學士柴田榮吉君ガ、本邦重要樹種ニツイテ調査セラレタモノデアル、樹ノナニタルヲ問ハズ、タヾ高サ相等シキモノニハ、同一ノ形數ヲ適用スルモノデアルカラ、未ダ十分デハナイガ，應用ニ臨ンデ樹幹ノ完材、或ハ梢殺ヲ考ヘ，表示ノ數字ニ多少加減スルトキハ、殆ンド大シタ差ガナイソウデアル、(完材トハ、樹幹ノ上部ガ肥テ、下部ノ直徑ト差ガ少ナイモノヲイヒ、梢殺トハ、俗ニ、ウラゴケト稱ヘテ、上下直徑ノ差、著シキモノヲイフ)。

形數表 甲（秋田大林區署調査）

高(間)	形數	高(間)	形數	高(間)	形數
3	0.671	10	0.500	17	0.472
4	0.613	11	0.494	18	0.471
5	0.578	12	0.488	19	0.470
6	0.552	13	0.482	20	0.469
7	0.533	14	0.478	21	0.468
8	0.520	15	0.476	22	0.467
9	0.508	16	0.474		

備考　本表ハ，數式ニヨリテ、數十ノ形數ヲ算出シ、更ニ、杉、扁柏、樅、松等ノ種類、數十本ノ實驗トヲ參照シテ定メタモノデアル。

形數表 乙（林學士柴田榮吉氏調査）

高(間)	形數	高(間)	形數	高(間)	形數
3	0.60	10	0.50	17	0.47
4	0.56	11	0.49	18	0.46
5	0.55	12	0.49	19	0.46
6	0.54	13	0.49	20	0.45
7	0.53	14	0.48	21	0.44
8	0.51	15	0.47	22	0.42
9	0.50	16	0.47		

備考　本表ハ、松、杉、樅、扁柏、蝦夷松、椴、椨等、數種ノ形數ヲ平均シタモノデアル。

此等ノ形數、樹ノ高サ及底面積ヲ知リテ立木ノ材積ヲ計算スルニハ次ノ式ニヨル。

$$\text{樹幹材積}=\frac{\text{底面積}\times\text{高サ}\times\text{形數}}{12}$$

但シ是ハ底面積ハ平方尺、高サハ尺ヲ以テ單位トシタル場合ノ材積(尺〆單位)ニシテ底面積ニ平方尺、高サニ間ヲ單位トシタトキニハ其材積ハ(尺〆單位)次ノ式ニヨツテ算出スル。

$$\text{樹幹材積}=\frac{\text{底面積}\times\text{高サ}\times\text{形數}}{2}$$

而シテ才數デ表ハスニハ尺〆デ表ハサレタ數ヲ百倍スレバヨイ。

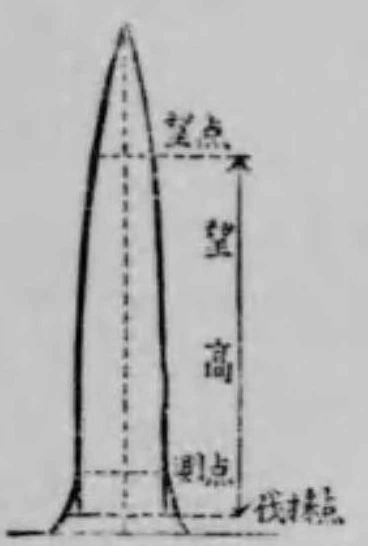
形數ハ一見シテ明カナル如ク、高サノ增大ニ伴ヒ、漸次ニ減少スルモノデアル、而シテ底面積ハ常ニ地上一定ノ高サデ測定スルカラ、樹木ノ高サガ高イトキハ底面ノ高サガ比較的ニ低ク、從ヒテ想像圓柱ノ體積ガ割合ニ大キクナツテ形數ハコレニ反シテ小サクナル。

形數表ガ無イ場合ニ樹幹ノ形數ヲ査定スルニハスツルチェリッキ氏ノ法ニ據ルガ便利デアル、即チ同氏ノ法ニ據レバ、樹幹ノ形數ハ、中央直徑(高サ二分ノ一ノ點ニオケル直徑)ヲ、胸高直徑ニテ除シ得タル數ニ、〇、七〇七(或ハ略シテ〇、七一)ヲ乘ジタモノデアル。

$$\text{形數}=\frac{\text{中央直徑}}{\text{胸高直徑}}\times 0.707$$

中央直徑ヲ査定スルニハ、器械ヲ用ヒテ、間接ニコレヲ測定スルコトガ出來ルガ、ナルベクハ目測デ、査定スルコトニ習熟シテオクベキデアル。

18 プレスレル氏望高法　幹ノ根際ノ不規則ナル部分ヲ避ケテ、胸高ノ所ノ直徑ヲ測定シ、コノ直徑底徑ノ二分ノ一ニ等シイ直徑ヲ有スル點



ヲ、コノ樹幹ノ望點トイヒ、伐採點ヨリ望點マデノ高サヲ、望高トイフ。

望高ニ、測點高ノ二分ノ一ヲ加ヘ、コレニ底面積(底徑ニ對スル斷面積)ヲ乘ジ、更ニ三分ノ二ヲ乘ズルトキハ、樹幹ノ材積ヲ得、コノ求積法ヲ、プレスレル氏ノ望高法トイフ。

$$\text{幹樹材積}=\text{底面積}\times\left(\text{望高}+\frac{\text{測點高}}{2}\right)\times\frac{2}{3}$$

例ヘバ一ツノ幹ガアツテ、伐ル點ノ上四尺ニオケル直徑ハ、一尺八寸ニテ、ソノ望高ハ、四十五尺ナリトスレバ、ソノ幹材積ハ

$$1.8^2\times0.7854\times\left(45\times\frac{4}{2}\right)\times\frac{2}{3}=79.7338\ \text{立方尺}$$
$$=6.6445\ \text{尺〆}$$

コノ法式ハ、幹全部ノ高サヲ知ルノ要ガナイカラ、樹木ノ鬱茂シテ、梢ノ明カニ認メ難イ場合ニ適用スルコトガ出來ル、マタ各樹幹固有ノ形狀ニ應ジテ、適當ナル材積ヲ知ル便ガアレドモ、幹ノ岐レテヰルモノニアリテハ、往々望點ヲ知ルコトガ出來ナイ場合ガアル。

望點ヲ定メルニハ、望管ト稱ヘル器械ガアレドモ、ソノ用法ハヤヽ複雜ニ渉ルカラ、實地ニ望ミテハ、ナルベク目測ヲ以テ定メルガヨイ。

19 立木ノ長サ及目通リノ周圍ヲ知リテ尺〆(又ハ才數)計算法 立木ノ長サヲ測ル方法ハ旣ニ述ベテ置イタ、目通リトハ、人ガ樹木ノ側ニ立テ其視線ト水平線ニ當ル所ノ箇所ヲ云フ。

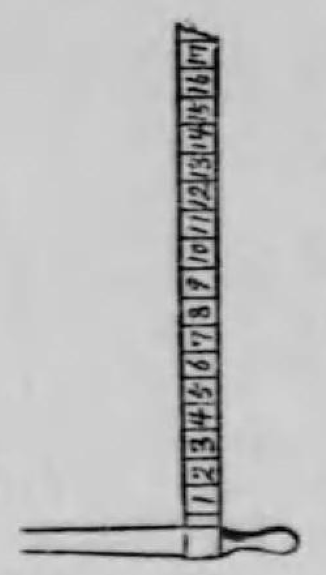
サテ材積ノ算出法ハ目通リノ周圍ヲ測リ、之ニ 三、一六ト云フ經數ヲ乘ジ、次ニ其木材ノ長イカ短カイカニヨツテ目通リノ下ニ長サ一間ゴトニ一寸ヲ加ヘ又目通リノ上ノ長サ一間每ニ一寸ヲ減ジ、コレヲ二ニテ除シタモノハ其木ノ平均徑デアル。次ニ之ヲ自乘シテ圓積率七分九厘(七分八厘九毛四絲デアルケレドモ七分九厘トシテモ大差ナシ)ヲ乘ジコレヲ十二ニテ除スレバ尺〆ヲ知ルコトガ出來ル、例ヘバ目通リノ周圍六尺、長サ十間ノ立木ニ就イテ尺〆ハ幾ラカト云ヘバ、先ヅ目通リノ周圍六尺ヲ 三、一六デ割ツタ數ハ直徑デアル、コレヲ二倍シテ一寸ヲ加ヘ九寸ヲ引キ二ニテ割レバ其得タル數ハ平均徑デアル、次ニ是ヲ自乘シテ圓積率七分九厘ヲ掛ケ、更ニ高サ十間即チ六十尺ヲ掛ケ、是ヲ十二立方尺ニテ割レバ八本八分八厘八毛ガ出ル、是レ即チ其立木ノ尺〆デアル。

而シテ才數ヲ出サウト思ヘバ尺〆デ表ハサレタ數ヲ百倍スレバヨイ。附錄第十七頁立木尺〆表ハ目通リノ周圍ニヨリテ尺〆ヲ計算シタ表デアル。

第四章　數多ノ立木ノ材積測定法

林立シテヰル數多ノ立木ノ材積ヲ査定スルニハ全林測定法及ビ標準地測定法ノ二通リガアル

20 全林測定法 此方法ハ先ヅ第一ニ數多ノ材木ノ直徑ヤ本數ヲ調査セネバナラヌ、數多ノ直徑ヲ調査スルニ當ツテハ、其寸法ヲ測ルニアリ精密ニシテハ直徑ノ階級ガ多クナルカラ勞多クシテ効ガ少イ、ソレデ一分トカ二分トカハ測ラズニ五分マタハ一寸ヲ單立トシテ其端數ハ切上ゲ又ハ切下ゲヲスル。(コノコトヲ括約ト云フ)



例ヘバ、一寸ヲ單位トシテ測定シヤウト思ヘバ、五分以上一寸五分以下ノモノハ、スベテコレヲ一寸トシ、一寸五分以上二寸五分以下ノモノハ、スベテコレヲ二寸トシ、二寸五分以上三寸五分以下ノモノハ、スベテコレヲ三寸トイフ樣ニスル。

實地ニ臨ンデ、一々端數ノ大小ヲ考ヘ、ソノ取捨ヲ決定スルトキハ、錯誤ヲ生ジ易イカラ括約尺度ヲ有テヰル輪尺ヲ使フガ便利デアル、上ノ圖ハ、一寸ヲ單位トシタ括約尺度ヲ示シタモノデ、固定脚カラ五分、即チ單位ノ二分ノ一ノ處ニ、第一ノ度目ヲ盛リ、ソレカラ順次一寸每ニ、度目ヲ盛ツタモノデアル、各度目間ノ數字ハ、遊動脚ガ、各ノ度目ノ間ニ來タトキニ、讀ムベキ直徑ヲ示シテアル。

皮剝器

モシ遊動脚ガ、恰モ度目ノ上ニ來タトキニハ、小サイ直徑ノ方ニ讀込ムガヨイ。直徑ヲ調査スルニハ、記帳者一人ニツイテ測手二人ノ割デ施行スルガヨイ、記帳者ハ、豫メ全林木ノ狀況ヲ査察シテ、最大オヨビ最小ノ直徑ハ、幾寸、尺デアルカヲ考察シテ、左記ノ樣式ニ傚ツテ、野帳ヲ整ヘテ置ク、而シテ測手ハ各輪尺オヨビ白墨、或ハ、皮剝器ヲ携ヘ、林ノ一端カラ測定ヲ始メ、一樹ヲ測ツタ度每ニ、ソ

ノ樹ノ名、オヨビ直徑ヲ讀ミ上ゲ、(同ジ種類ノ材木ノミデハ樹ノ名ヲ略ス,)記帳者ガ、コレヲ記入シテカラ進行スベ方向ノ樹皮面ニ,白墨(マタハ皮剝器)ヲ以テ、既測ノ印ヲ施ス、測手ガ樹ノ名オヨビ直徑ヲ讀上ゲタトキハ、記帳者ハ、コレニ相當スル直徑ノ横列，相當樹種ノ欄内ニ、線マタハ點一箇ヲ記入シテ、ソノ記號トスル、コノ線、マタハ點ヲ記入スルニハ、數ヘ易イタメニ、五箇ヲ一組ニスルガ便利デアル、測定ガ終レバ、各ノ欄ニ記入セラレタ線，マタハ點ヲ數ヘテ、各々ノ直徑ノ階級ニ屬シテヰル林木ノ本數ヲ知ルコトガ出來ル。

樹木ガ、測點ニテ著シク扁圓形ヲシテ、ソノ長短兩徑ノ方向、ヤヽ一致シテ居レバ、一列毎ニ、アルヒハ一樹毎ニ、ソノ直徑測定ノ方向ヲ、直角ニ變更スルガヨイ、又各々ノ樹木ニツイテ、二ツノ直徑ヲ測リ、恰モ二本ノ樹木ノ如クニ調査シテ體積ヲ求メタ上デ、ソノ結果ヲ二分スレバ精密デアル。

地上四尺ノ直徑(分)	樹種	本數
60	卌	5
65	卌 ||||	9
70	卌 卌 卌 卌	20
75	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌	35
50	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌	45
85	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 ||	37
90	卌 卌 卌 卌 卌	25
95	卌 卌 卌	15
100	卌 卌	10
計		201

（イ）　單級法　マヅ右ニ述ベタ方法デ直徑ノ種類ヲ出シヲ各々直徑階ニ對スル底面積ノ和ヲ求メ、コレヲ總計シテ、全林木ノ底面積ノ總計ヲ求メ、次ニコノ總計ヲ、林木總本數デ割レバ、全林木ノ平均底面積トナリコレニ、一•二七三ヲ掛ケテ、平方ニ開クトキハ、コノ底面積ニ對スル直徑トナル。

今、コノ直徑ニ近似ノ直徑ヲ持ツテヰテ、カツ高サヤ枝ノ茂ツテヰル度合ナド、全林木ヲ中庸ト認メラレル樹木，若干ヲ選定シテ、コレヲ伐採スル、コレ即チ樣木ト云フテ澤山ノ標本トモナルベキモノデアル、次ニコノ樣木ノ材積ヲ、普通ノ方法ニヨツテ、精密ニ測定シ、コレヲ合計シ、更ニ全林ノ底面積ノ總計ヲ、樣木ノ底面積ノ合計デ除シタ商ヲ、コレニ乘ズルトキハ、全林木ノ材積トナル。

$$全林木材積=\frac{全林木ノ底面積總計}{樣木底面積合計}\times 樣木ノ材積合計$$

次ニソノ計算ノ例ヲ示セバ

地上四尺ノ直徑(分)	本數	底面積合計(平方尺)	中央木
60	5	1,414	底面積 $=\frac{105,568}{201}$
65	9	2,987	
70	20	7,697	$=0,5252$
75	35	15,464	直徑 $=\sqrt{0,5252\times 1,273}$
80	45	22,620	$=81,76$分
85	37	22,996	$=82$ 分
90	25	15,904	
95	15	10,632	
100	10	7,854	
總計	201	105,568	

〔備考〕 一、中央木トハ、全林木ノ平均ノ體積ヲ有テヰル樹木ノ義ニテ、此法ニテハ、全林木ノ平均底面積ト中央木ノ底面積トハアヒ等シイモノト見做ス。

二、各々ノ直徑階ニ對スル底面積合計ハ、圓積表(附錄ニアリ)ニヨツテ、各々直徑ニ對スル底面積ヲ求メ、コレニ各階ニ屬スル

本數ヲ乘ジテ求メラレル。

三、中央木ノ底面積ニ對スル直徑ハ、圓積表ニヨツテ、ソノ略近値ヲ求メラレル。

右ノ計算ニ基イテ、直徑約八寸二分ヲ有テキル樣木四本ヲ選ビ出シ、カツコレヲ伐ツテ、ソノ材積ヲ測定シ、コレニヨリ、全林木ノ材積ヲ次ノ樣ニ算出スル。

樣木番號	地上四尺ノ直徑(分)	底面積(平方尺)	材積	
			幹(尺〆)	枝條(尺〆)
1	81.0	0,5153	1,580	0,250
2	82.0	0,5281	1,592	0,254
3	82.5	0,5346	1,597	0,260
4	83.2	0,5437	1,615	0,265
計		2,1217	6,384	1,029

$$\frac{105.568}{2,1217}=49,75$$

幹材積$=6,384\times49,75=317,604$ 尺〆

枝條材積$=1,029\times48,75=51,193$ 尺〆

總材積$=7,413\times49,75=368,797$ 尺〆

（ロ）階級法　此法ニテハ、直徑ノ大サニ從ッテ若干ノ階級ニ分チ、各階級ニ對シテ單級法ヲ行フモノニシテ比較的精密ナル結果ガ得ラレル而シテ此法ノ階級法ノ分チ方及ビ標準木ノ撰ビ方ニ三種類ガアル、即チ

一、ウーリッヒ氏法　此法ニ於テハ、全林木ノ本數ヲ豫メ定メタ階級ノ數デ除シ、各々ノ階級ガ此商ニ等シイ本數ヲ有ツ樣ニ直徑順ニ從ヒテ階級ヲ分チ、各級カラ若干ノ標準木ヲ撰ブ。

二、ハルチッヒ法　此法ニ於テハ各階級ニ屬スル林木ノ底面積ヲ等シクスル樣、直徑ニ順ニ從ヒテ階級ヲ分チ、各級カラ若干ノ標準木ヲ撰ブ。

三、ドラウト氏法　此法ニ於テハ、標準木ノ數ヲ豫定シ、次ニ總本數ニ對スル標準木ノ比ヲ求メ、此比ヲ各直徑ノ本數ニ乘ジテ各階カラ伐採スベキ本數ヲ求ム、而シテ此三法ノ中最簡單デアルノハウーリッヒ氏法ニテ、最精密ナノハドラウト氏ノ法デアル。

單級法及ビ階級法ニ於テハ、孰レモ標準木ヲ伐採シテ其材積ヲ求メ、之レニ依ッテ全林ノ材積ヲ計算セネバナラヌ、シカシ標準木ヲ伐採スルコトガ出來ナイ事情ガアレバ、其標準木トシテ高サ及ビ直徑ノ中庸デアル材木ヲ撰ミ、形數ニヨッテ其材積ヲ算出シ、之ニ依ッテ全林ノ材積ヲ測定セネバナラヌ、又林木ガソロハナイデ直徑及ビ高サノ差ガ著シキ場合ニハ階級法ニ準ジテ全林ヲ若干ノ階級ニ分チ、前ノ如クニシテ各級ノ材積ヲ求メ、之ヲ總計シテ全林ノ材積ヲ算出スル、今甲ノ場合ノ計算ノ例ヲ擧グレバ

地上四尺ノ直徑(分)	本數	底面積合計(平方尺)
60	5	1,414
65	9	2,987
70	20	7,697
75	35	15,464
80	45	22,620
85	37	20,996
90	25	15,904
95	15	10,632
100	10	7,854
計	201	105,598

今、全林木中デ、平均ノ高サヲモッテキルモノト認定シタ若干ノ樹木ニツイテ測高器(五二四頁)デコレヲ測リ、平均七十尺ヲ得タリトスレバ、コノ林木ノ形數ハ、第頁ノ形數表ニヨッテ〇、四九ヲ得、

故ニ、全林ノ幹材積ハ

$$105.568\times70\times0.49=3620.9824\text{ 立方尺}$$
$$=301.749\text{ 尺〆}$$

21　標準地測定法　廣大ナル森林ニ於テ各部ノ林相齊一デナイ場合ニハ其内部ニ於テ標準地ヲ撰定シ、此地ノ上ニ存在シテキル林木ニ就イテ、前ニ述ベタ方法デ其材積ヲ求メ、之ニ標準地ノ面積ヲ以テ全林ノ面積ヲ割ッタ商ヲ掛ケルトキハ全林ノ材積トナル、即チ

$$\text{全林材積}=\text{標準地ノ林木材積}\times\frac{\text{全林面積}}{\text{標準地面積}}$$

例ヘバ、面積八町二反歩ノ杉林ノ内ニ、面積五反歩ノ標準地ヲトリ、ソノ材積ヲ測リシニ、千二百尺〆ヲ得タリトスレバ、全林木ノ材積ハ

$$1200\times\frac{8.2}{0.5}=19680\text{ 尺〆}$$

此方法ハ簡單ニシテ正確ノ樣デハアルガ其撰定シタ標準地ガ全林ノ中デ標準ニナルモノデナクテハ大ニ不精密ナ結果ヲ示スモノデアル、又標準地ノ面積ガ狹キニ過ギルトキモ不精密ナ結果ヲ來ス、而シテ其大サハ林木ノ年齢並ニ狀況ノ如何ニヨッテ異ナルケレドモ幼林デハ一反歩乃至

二反歩、壯齡林デハ五反歩、老齡林デハ七八反歩、乃至一町歩ヲ最少限トシ、且ツ其標準地ノ面積ハ全林ノ面積ニ對シテ少ナクトモ百分ノ五以上デナクテハナラヌ。

第 五 章　樹ノ年齡查定法

22 一木ノ年齡查定法　一木ノ年齡ヲ查定スルニハ種々ノ方法ガアルケレドモ通常用フルモノハ幹ヲ根元カラ伐採シテ其年輪ヲ數ヘル、而シテ樹ノ種類ニヨリテ又時ニハ同一種類ノ樹デモ年輪ノ判然トシナイ場合ガアルル　斯樣ナ場合ニハ斷リ口ニ赤インキノ稀液ヲ塗リ、蟲目鏡ヲ用フレバ明カニ視ルコトガ出來ル、又樹木ハ毎年一個宛其年輪ヲ作ルケレドモ氣候ノ劇變又ハ風害、蟲害等ノ爲メニ、一年間ニ數個ノ年輪ノ樣ナモノガ出來ルコトガアル、之ヲ僞年輪ト云フ、僞年輪ハ其幅ガ狹ク、判明ヲ缺キ且ツ大低ハ完全ノ圓形デナイ、又他ノ年輪ト合スルコトガアルカラ、注意シテ觀レバ能ク其僞年輪デアルコトガ見別ケラレル。

又マツ、モミ、ミヅギ等ノ如キハ毎年輪生シタ側枝ヲ出スカラ之ヲ數ヘテ年齡ヲ查定スルコトガ出來ル、サレド此法ハ少數ノ樹種ニ限リ且ツ三十年乃至五十年生以上ノモノニハ用ヒ難イ。

23 一林ノ年齡查定法　森林ニハ、同齡林ト異齡林トノ別ガアル、同齡林トハ、森林ヲ組成スル各々ノ林木ノ年齡ガ同一デアルモノヲイヒ、異齡林トハ、各々ノ樹林ノ年齡ガ同一デナイモノヲイフ。

同齡林ノ年齡ハ前ニ述ベタ方法ヲ應用シテ容易ニ查定スルコトガ出來ルガ異齡林ノ年齡ニツイテハマヅ何ヲ標準トシテ定メルカ、コレハ疑問デアル、通例ノ說ニ從ヘバ現今一般ニ用ヒラレテキルノハ材積齡デアル、之ハ異齡林ガ有テキル材積ヲ同ジ土地ニ於テ、同ジ樹ノ類ノ同齡林ガ造出スタメニ要スル年齡ヲ以テ其中央年齡トスルモノデアル、例ヘバ材積二千五百尺〆ヲモツテキル異齡林ガアツテ、此土地ニ於テ同一ノ樹種カラ成ル同齡林ガ同ジ材積ヲ造出スル爲メニハ七十年ヲ要ストスレバ此異齡林ノ中央年齡ハ七十年トスル。

コノ意義ニ從ヒ、中央林齡ヲ算出スル方々ガ種々アル、中ニモ最モ簡單ニシテ實用ニ適スルハ、標準木ノ年齡ヲ算數的ニ平均スル法デアル、即チ林木ノ材積查定法ノ如ク單級法、アルヒハ階級法ニヨツテ選定シタ標準木若干本ニツイテ各々ノ木ノ年齡ヲ求メ、コレヲ合計シテ、標準木

ノ總本數デ除スレバ、求ムルトコロノ中央林齡トナル。

例ヘバ，單級法ニ從ヒ、樣木五本ヲ選出シテ、各木ノ年齡、二十五、二十六、二十七、二十八ヲ得タリトスレレバ、ソノ中央林齡ハ、

$\frac{25+26+27+27+28}{5}=26.6$ 即チ切上ゲテ、二十七年トナル。

第 六 章　樹ノ生長量ノ查定法

24 生長量　樹木ハ年ヲ經ルニ從ヒテ、其直徑及高サヲ增加シ、其結果トシテ體積モ亦漸次增大スルモノデアル，之ヲ樹木ノ生長ト云ヒ，其增加シタル量ヲ生長量ト稱ヘル、生長量ハ時期ニ關シテ次ノ如キ四種ノ別ガアル。

（1）　<u>連年生長量</u>　一年間ノ生長量ヲ云フ、例ヘバ昨年ノ材積ガ二尺〆デ本年ニ二、三尺〆トナツタトスレバ、コノ樹ノ昨年カラ本年ニ至ル連年生長量ハ 2.3−2=0.3 尺〆デアル。

（2）　<u>定期生長量</u>　二年以上若干年間即チ一定期間ノ生長量ヲ云フ、例ヘバ三年前一、二ノ樹木ガ本年二、三尺〆ニナツタトスレバ 2.3−1.2=1.2 尺〆ハ三年間ノ定期生長量デアル。

（3）　<u>總生長量</u>　樹木ノ成立セシ初年ヨリ或年齡ニ達スル迄毎年生長セシ量ノ總計ヲ云フ、例ヘバ一樹ガアツテソノ年齡三十五年ニシテ材積一、五尺〆 デアレバソノ樹木ノ三十五年間ノ總生長量ハ 一、五尺〆デアル。

（4）　<u>平均生長量</u>　或ル年限ノ間ノ生長量ヲ其年數デ除シタル商ヲ云フ、之レニ又定期平均生長量及總平均生長量ノ二種ガアル、定期平均生長量ハ定期生長量ヲ其期間ノ年數デ割ツタモノ、總平均生長量ハ總生長量ヲ其年齡デ割ツタモノデアル、例ヘバ、前例ノ三箇年間ノ生長量一、一ヲ三デ割ツタトキノ商、〇、三六七尺〆ハ、過去三箇年間ノ定期平均生長量トナリ、三十五年生ノ樹木ノ材積 一、五尺〆ヲ三十五ニテ除シタル商、〇、〇四三尺〆ハ、ソノ樹木ノ總平均生長量デアル、單ニ平均生長量トイヘバ，通例、總平均生長量ノコトデアル。

林木ノ伐期ニ於ケル總平均生長量ハ、特ニコレヲ<u>伐期平均生長量</u>ト稱ヘル。

生長量ハ，マタ過去ノ生長量、オヨビ將來ノ生長量ヲ區別ス、サテ將

來ノ生長量ヲ查定スルニハ、過去ノ生長量ヲ標準トシテ、推測ヲ下スヨリ外ハナイカラ、ココデハ、主トシテ過去生長量ノ查定法ヲ述ベルコトニスル。

25 一木ノ生長量ノ查定。

（1） 高サノ生長量　前既ニ述ベタル如ク、樹木ヲ地面ニ接シテ伐採シ、ソノ根株ニオケル年輪數ヲ數ヘレバ、ソノ樹木ノ年齡ヲ知ルコトガ出來ル、故ニ右ノ年輪數ハ、ソノ樹木ガ、現在ノ高サニ達スルマデニ費シタ年數ヲ示スモノデアル、更ニコノ幹ヲ、伐採點カラ、上ノ方若干尺ノ點デ截レバ、ソノ截リ口ノ年輪數ハコノ樹木ガ、ソノ點カラ梢ニ達スルマデニ要シタル年數ヲ示スモノデアル、ヨツテ、反對ニ根株ノ年輪數ト、右ノ點ノ年輪數トノ差ハ、ソノ樹木ガ、右ノ截口ノ高サニ達スルマデニ、費シタ年數ヲ示スコトトナル。

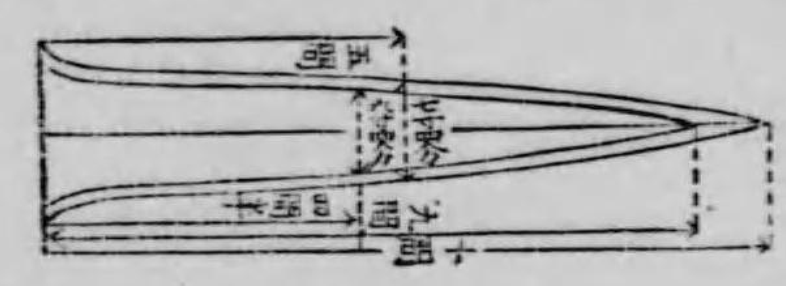
箇樣ニ樹幹ガ、アル高サカラ、若干尺ノ高サニ達スルマデニ貸シタ年數ハ、容易ニコレヲ求メルコトガ出來ルケレドモ逆ニ何ケ年カノ間ニ、幾何ノ生長ヲシタカヲ求メルノハ、頗ル困難ノ問題デアル、例ヘバ、一ノ幹ニツイテ、最近若干年間、タトヘバ、五年間ノ高サノ生長量ヲ知ラウト思ヘバ、マヅソノ幹ノ下ノ面ノ年輪數ヲ檢シテ、ソノ全部ノ生長ニ、ドレダケノ年數ヲ要シタルカヲ知リ、コレニヨツテ、最近五年間ニ、ドレダケノ生長ヲシタノデアルカヲ按ジ、然ル後、五年間ノ梢ノアルト思フタ點デ、幹ヲ截ル、モシソノ截口ニ、恰モ五箇ノ年輪ガアツタナラバ推測ノ正當デアルコトヲ證スルモノデアル、モシ前ノ推定ガ誤ツテ、右ノ截口ノ年輪數ガ六ツアラバ、サラニ前ノ法ヲ繰リ返シテ、五箇ノ年輪ヲ得ルニ至ツテヤメル、此樣ニスレバソノ點カラ上ハ、最近五箇年間ノ生長デアルト云フコトガ知レル。

但シ樹木ハ一年間ニ、數尺モ伸ビルコトガアルカラ箇樣ニシテ得タ年輪數ハ精密ニ五箇年前ノ梢ノ端ヲ示スモノトハ云ハレナイ、ヨツテナホ精密ナ結果ヲ求メントセバ、更ニ前ノ法ヲ繰リ返シテ、五箇ノ年輪ト、六箇ノ年輪トノ移リ行キノ點ヲ求メネバナラヌ。

（2） 直徑生長量（附斷面積生長量）　樹木ハ、年々ソノ外部ニ年輪ヲ作リ、ソノ直徑ヲ增々大キクスルモノデアルカラ、幹ガ或ル大サカラ、現在ノ大サニ達スルマデニ費シタ年數ハ、ソノ間ニアル年輪ノ數ヲ檢ベテ、容易ニコレヲ知ルコトガ出來ル。

反對ニ何年間カノ直徑生長量ヲ查定スルコトモ、マタ容易デアル、例ヘバ、過去五年間ノ直徑生長量ヲ查定セウ思ヘバ、材心ヲ通過シテ、一ノ直徑ヲ引キ、ソノ兩端カラ、五箇ノ年輪ヲ數ヘ，次ニソノ幅ヲ、右ノ直徑ニ沿ウテ測定シ、コレヲ加ヘレバ、過去五箇年間ノ直徑生長量ガアル、モシ更ニ精密ナル結果ヲ求メウトスレバ、右ノ直徑ト材心ニテ、直角ニ交ル他ノ直徑ヲ引キ、前ノ如クニシテ直徑ノ生長量求メ、ソノ結果ヲ平均スレバ可イ、例ヘバ一ノ截口ニツイテ、外部カラ五箇ノ輪ヲ數ヘ、上ノ圖ノ如ク、四箇處デ、ソノ幅ヲ測定シタル結果ガ、圖ニ示シタル如クデアリトスレバ、コノ截口ノ最近五年間ニ於ケル直徑生長量ハ、(12+11+10+11)÷2=11 分デアル。

直徑ノ生長量ヲ檢ベタルトキハ、コレニヨツテ、斷面積ノ生長量ヲ知ルコトモ、マタ容易デアル、即チマヅ樹ノ皮ヲ除イタ現在ノ直徑ヲ查定シテ、コレヨリ若干年間ノ直徑生長量ヲ減ズルトキハ、若干年前ノ直徑トナル、乃チコノ直徑ニ對對スル斷面積ヲ求メ、コレヲ現在直徑ニ對スル斷面積カラ引ケバ、過去若干年間ノ斷面積生長量ガデアル。



（3） 體積生長量　過去若干年間ノ材積生長量ヲ查定セウト思ヘバ、フーベル氏ノ公式（520頁）ニニヨリテ樹ノ皮ヲ除イタ現在ノ材積ヲ求メ、ナホ同ジ法ニヨツテ若干年前ノ材積ヲ測リ、更ニ前後材積ノ差ヲ求メレバ可イ、但シ若干年前ノ高サ、オヨビ中央直徑ヲ查定スルニハ、前節及前々節ニ述ベタ方法ニヨル。

例ヘバ、長サ十間、中央直徑七寸四分（樹皮ヲ除ク）ヲモツテキル幹材ガアツテ、ソノ十年前ノ長サ九間、中央直徑六寸四分トスレバ、過去十年間ノ生長ハ

$$現在ノ材積=\frac{0.74^2\times0.7854\times10}{2}=2.1504\ 尺〆$$

$$十年前ノ材積=\frac{0.64^2\times0.7854\times9}{2}=1.4476\ 尺〆$$

$$\therefore\ 十年間ノ生長量=2.1504-1.4476=0.7028\ 尺〆$$

ナホコノ方法ヲ簡單ニセウト思ヘバ前々節ノ方法ニヨツテ、若干年前ノ高サヲ求メ、次ニコノ高サノ二分ノ一ノ點ノ截口ノ面積生長量ヲ查定

シ、コレニ若干年前ノ高サヲ乘ズレバ、求ムルトコロノ生長量トナル。

26 一林ノ生長量ノ査定 一林ノ生長量ヲ査定スルコトハ、極メテ困難ノ問題デ、コレガ解説ハ非常ニ六敷イガ、實地ノ問題トシテ、伐採期ニ近ヅイタトキニハ一林ノ生長量ヲ査定スルノ必要ガ起ルカラ、特ニ右ノ場合ノ査定法ヲ述ベルコトニスル。

オヨソ林木ノ連年生長量ハ、年々ソノ大サヲ異ニスルモノデアルカラ殊ニ中年以下ニアツテハ、ソノ差ガ頗ル著シイモノデアルケレドモ、漸ク伐採期ニ近ヅイテ來レバ、年々ノ生長量ハ、殆ンド增減ナク、且ツマタソノ平均生長量ニ、極メテ近ヨツテ來ル。サレバ中年以上ノ林伐ニ對シテハ、ソノ年齡オヨビ總材積ヲ調査シテ、平均生長量ヲ求メ、コレヲ以テ、過去或ハ將來若干年間ニ對スル年々ノ生長量ト見做シテモ、大差ハナイ。

例ヘバ、年齡五十年、材積七百五十尺〆ノ松林ニツキ、將來五箇年間ニ對スル生長量ヲ求メウトシタナラバ、五十ヲ以テ七百五十ヲ除シ、更ニ五ヲ乘ズレバ可イ、即チ七十五尺〆トナル。

第八編 應用力學計算法

第一章 速度

1 速度ノ意味 物體ガ進行スルノニ、速イ遲イト云フ區別ガアル、即チ一定ノ時間中ニ進ム道程ガ多ケレバ速イノデ、ソレガ少ナケレバ遲イノデアル、コノヤウナ遲速ノ度合ヲ速サ、又ハ速度ト云フ、即チ

速度トハ時間ノ割ニ運動ノ道程ニ大小ノアルコトヲ表ス量デアル、換言スレバ運動ノ道程ヲ一定時間ニ對スル割合ニシテ表ス量デアル。

此様ニ速度ト云フモノハ、道程ト時間トヲ考ヘネバナラヌ、何故カト云ヘバ、一分間ニ六町飛ブ飛行機ト一時間ニ八里走ル汽車トガアツタトキニ單ニ汽車ノ速度ハ八里デアツテ飛行機ノ速度ハ六町デアルト云ヘバ、汽車ノ速度ハ非常ニ大キイ様デ、飛行機ノ速度ハ非常ニ小サクテ比ベモノニナラナイ、之ハ同ジ時間ニ對シテ行ク道程ヲ比ベナイカラデアル、實際兩方共ニ一定ノ時間ニ對シテ行ク道程ノ割合ヲ見ナクテハ速度トハ云ヘナイ。

速度ノ單位 速度ハ毎分、幾尺、或ハ幾呎、幾米、又ハ大キク、毎時、幾哩、或ハ幾里等、色々ト定メ方ガアルガ、工業上デハ時間ハ分トシテ道程ハ呎デ表シ、之ヲ呎分ト云フ。

呎分ト云フノハ一分間ノ速度ヲ呎デ計ツタコトノ意味デアルカラ百呎分ト云ヘバ一分間ニ百呎ノ道程ヲ動クト云フコトニナル。

2 線速度 線速度ト云フノハ、其物體ガ直線ノ處ヲ動イタ時ニ幾呎ヲ行クカト云フ、其速度ノコトデアルカラ丸イモノガ動ク時ノ速度ナドハ其儘デハ線速度幾呎分ト云フコトハ出來ナイガ、之ヲ直セバ線速度トスルコトガ出來ル。

3 角速度 角速度ハ速度ヲ表スニ呎分ヲ用ヒナイ、即チ長サヲ用ヒズシテ表スノデアル、例ヘバ次ノ圖ノ様ナプーリーガ回轉スル時ニ、直徑ガ一秒間ニイロノ位置カラ點線デ示シテアルハニノ位置ニ來タモノトスレバ、此ノ間ノ角度ガ即チ角速度デアル、故ニ角速度ヲ表スニハ角度ヲ以テス、即チ幾度秒又ハ幾度分ナドト云フノデアル。