

題解中心

# 幾何學辭典

索引

亞書店印行

116  
31-61  
3

## 索引例言

●本辭典以問題解法爲中心，翻檢之時有待於靈便之索引，自屬必要。●但本辭典與他種辭典不同，帶有練習解題之性質，故全書順序，始自初步問題，逐步遞進，由淺入深，以期單用本書即能進窺堂奧，而無事他求。●是以爲使用本辭典者之便利計，注意於下列二事：●第一，所載各題，除至少數外，均各附圖，以檢索幾何學問題時，從圖形入手，實爲最妙之法也。●第二，另編索引，分冊裝訂，不附於卷末，俾檢索之時，得便宜使用，而免上下翻查之障礙。●索引之編製，一以問題之種類爲歸，分類之法詳於索引目次，讀者可辨明所查問題係屬何種性質，先就目次得其所屬，檢明頁數，再查索引本文，自能檢得所求之題。●本辭典所集問題達二千四百有餘，搜羅雖不可謂殆盡，而於中等程度以及較高程度需用之題，自信已屬至廣。●本書所漏列之題雖已於續幾何學辭典中補入，而其解法實多可藉本書所載問題稍加推考即可得之。●類別問題之際，有取假設中之主要者，有取終結中之主要者，均斟酌題意之所重輕而定，例如 24 題 [二對頂角之二等分線，成一直線] 依其假設而歸入 [角] 部；38 題 [一直線與他二直線交，若一組錯角相等，則後二直線平行] 則依其終結而歸入 [平行直線] 部。●有時節取題文，而仍以不妨原意爲限，例如平行四邊形 ABCD 之作  $\square ABCD$ ，在檢索上反形便利。●有時並用符號以代題文，例如 744 題可代以  $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$  是。



# 幾何學辭典索引

## 目次

### 第一 定理之部

1. 點...	1
2. 直線...	1
3. 角...	5
4. 直角...	7
5. 垂線及斜線...	7
6. 平行直線...	8
7. 二等邊三角形...	9
8. 正三角形...	12
9. 直角三角形...	13
10. 三角形...	17
11. 平行四邊形...	39
12. 菱形...	43
13. 矩形...	43
14. 正方形...	44
15. 梯形...	45
16. 四邊形...	46
17. 多角形...	50
18. 正多角形...	52
19. 射影...	55
20. 圓...	55
21. 等圓...	62
22. 對稱...	63
23. 二圓...	64
24. 同心圓...	68
25. 圓之弦...	68
26. 圓之弧...	70
27. 圓周角...	70
28. 內接形...	71
29. 外切形...	74

30.	三個以上之圓 ... ..	74
31.	切線 ... ..	75
32.	切圓 ... ..	77
33.	圓之方積 ... ..	79

### 第二 作圖題之部

1.	點 ... ..	79
2.	角 ... ..	83
3.	直線 ... ..	83
4.	切線 ... ..	87
5.	弦 ... ..	88
6.	三角形 [條件簡單者] ... ..	89
7.	直角三角形 ... ..	93
8.	二等邊三角形 ... ..	93
9.	正三角形 ... ..	94
10.	內接三角形 ... ..	94
11.	外接 [切] 三角形 ... ..	95
12.	三角形之雜題 ... ..	96
13.	四邊形 ... ..	96
14.	平行四邊形 ... ..	97
15.	矩形 ... ..	97
16.	菱形 ... ..	98
17.	正方形 ... ..	98
18.	梯形 ... ..	99
19.	多角形 ... ..	99
20.	正多角形 ... ..	100
21.	圓 ... ..	100

### 第三 軌跡之部

1.	等遠點之軌跡 ... ..	103
2.	定遠點之軌跡 ... ..	103
3.	等長線端之點之軌跡 ... ..	103
4.	定長線端之點之軌跡 ... ..	104
5.	中點之軌跡 ... ..	104
6.	定比分點之軌跡 ... ..	106
7.	令距離成定比之點之軌跡 ... ..	106
8.	交點之軌跡 ... ..	107
9.	頂點之軌跡 ... ..	108
10.	中心之軌跡 ... ..	110



# 幾何學辭典

## (索引)

### 第一 定理之部

#### 1. 點

- 四點最多得決定六直線. 又五點最多得決定十直線. 15
- 有四點, 聯結其任何二點之直線, 垂直於聯結他二點之直線, 則四點為何? ... .. 197
- 設 A, B, C, D 爲一平面上之四點, 且  $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2$ , 則此四點中, 聯結其任意二點之直線, 垂直於聯結他二點之直線. ... .. 799

#### 2. 直線

- 四直線最多得決定六點. 五直線再多得決定十點. 15
- 設直線 AB 之中點爲 M, P 爲內分點, 則  $PM = \frac{1}{2}(AP \sim BP)$ . 又設 Q 爲外分點, 則  $QM = \frac{1}{2}(AQ + BQ)$ . ... .. 34
- 設 A, B, C, 爲依次並列於一直線上之三點, BC, CA, AB 之中點, 分別爲 L, M, N, 則  $MN = \frac{1}{2}BC$ ,  $NL = \frac{1}{2}CA$ ,  $LM = \frac{1}{2} \times AB$ . ... .. 36
- 兩端在所設二點上之直線, 短於兩端在同二點上之折線. ... .. 148
- 設 A, B 爲在直線 CD 同側之二點, P 爲 CD 上之點, AP, BP 與 CD 成等角, Q 爲 CD 上之他任意點, 求證  $AP + BP < AQ + BQ$ . ... .. 173
- 設 A, B 爲在直線 CD 異側之二點, P 爲在 CD 上之點, AP, BP 與 CD 成等角, Q 爲 CD 上之他任意點, 求證  $AP \sim BP > AQ \sim BQ$ . ... .. 174
- 將三角形 ABC 之邊 AB, 向點 A 方延長, 在其上取與 AB 等長之  $AB'$ ; 又將邊 AC 向 A 方延長, 在其上取與 AC 等長之  $AC'$ , 聯結  $B'$  與  $C'$ , 則 BC,  $B'C'$  之各中點與頂點 A

- 在一直線上. ... .. 181
- 設三角形 ABC 之二邊 AB, AC 之中點, 分別爲 E, F, 在 CE 之延線上取 EG 等於 CE, 又在 BF 之延線上取 FH 等於 BF, 則 G, A, H 在一直線上. ... .. 182
- 由有限直線之兩端, 至他一直線引垂線, 則其垂足與此有限直線中點之距離相等. ... .. 281
- 由二點及聯結此二點之直線之中點, 至任意直線, 引三平行線, 則外二直線之和, 等於中間直線之二倍. ... 283  
[下列各題,  $a, b, c, \dots$  表線分,  $ab, ac, \dots$  表矩形,  $a^2, b^2, \dots$  表正方形].
- $a+b+c, \dots = x$ , 則  $xy = ay + by + cy + \dots$  ... 741
- $2a \cdot a = 2a^2$  ... .. 742
- $(2a)^2 = 4a^2$  ... .. 743
- $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$  ... .. 744, 745
- $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$  ... .. 746, 747
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ . ... .. 748, 749
- $(a+x)^2 + (a-x)^2 = 2a^2 + 2x^2$  ... .. 755, 756
- 試證 744 題 [二直線和上之正方形, 大於二直線上正方形之和者, 爲二直線所包矩形之二倍] 爲 751 題 [鈍角三角形中, 鈍角對邊上之正方形, 大於他二邊上之正方形之和者, 爲此二邊中之一邊, 與他邊投於此邊上之射影所包矩形之二倍] 中, 三角形 ABC 之角 C 爲平角時之極限結果. ... .. 757
- 試證 746 題 [二直線差上之正方形, 小於此二直線上正方形之和者, 爲此二直線所包矩形之二倍] 爲 752 題 [任意三角形中, 銳角對邊上之正方形, 小於他二邊上正方形之和者, 爲此二邊中之一邊, 與他邊投於此邊上之射影所包矩形之二倍] 中,  $\triangle BCD$  之角 C 爲零時之極限結果. ... .. 758
- 試證 755 題 [將一直線內分或外分於任意點, 則二部分上正方形之和, 二倍於此直線中分上之正方形及此直線中點與分點間部分上正方形之和] 爲 754 題 [三角形二邊上正方形之和, 二倍於半底上之正方形與至底所引中線上之正方形之和] 極限之結果. ... .. 759
- 將一直線 AB 二分於 C, 則  $AB \cdot AC = \overline{AC}^2 \pm AC \cdot BC$ .  
... .. 760
- 將一直線 AB 二分於 C, 則  $\overline{AB}^2 = AB \cdot AC \pm AB \cdot BC$ .  
... .. 761
- 一直線上之四點, 順次設爲 A, B, C, D, 則  $AC \cdot BD = AB \cdot CD$

- +BC·AD. ... .. 762
- 將直線 AB 二分之於 C, 或二等分之於 D, 則  $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2AC \cdot BC \pm \overline{CD}^2$ . ... .. 763
- 二直線 AB, CD 中,  $\overline{AB} + \overline{CD}^2 - \overline{AB} - \overline{CD}^2 = 4AB \cdot CD$ . 764
- $(a+b+c+\dots)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \dots + 2ab + 2ac + \dots + 2bc + \dots$  ... .. 765
- 將有限直線按任意比內分為二, 或按等比外之任意比外分為二, 其分點皆唯一. ... .. 950
- 試於定理有限直線 AB 內分於 P, 外分於 Q, 而 PA:PB 及 QA:QB 等於所設任意比 H:K, 如是之分點, 即 P 及 Q 唯一中, 設 K 初較 H 小甚, 漸漸增大而與 H 相等, 最後較 H 大甚, 而追跡 P 及 Q 位置之變化. ... .. 990
- 設 P, Q 對於 A, B 為調和共軛點, 則 A, B 對於 P, Q 亦為調和共軛點. ... .. 991
- 設 A, P, B, Q 成調和點列, M 為 AB 之中點, 則 MA 為 MP, MQ 之比例中項. ... .. 992
- 設 A, P, B, Q 成調和點列, 則 QA, QP, QB 成調和級數. 又 AP, AB, AQ 亦成調和級數. ... .. 993
- 設四直線成比例, 則其兩外項所包矩形, 等於其兩內項所包矩形. 反之, 設兩直線所包矩形, 等於他兩直線所包矩形, 則此四直線成比例, 而一矩形之二邊為兩內項. ... .. 1139
- 設三直線成比例, 則兩外項所包之矩形, 等於中項上之正方形. 反之, 設兩直線所包之矩形, 等於他一直線上之正方形, 則此三直線成比例, 而前二直線為兩外項, 後一直線為中項. ... .. 1140
- 設四直線成比例, 則其第一第二線上所作在相似位置之兩相似直線形, 與第三第四線上所作在相似位置之兩相似直線形成比例. 反之, 設四直線中, 第一線上所作之直線形與第二線上所作在相似位置之相似直線形之比, 等於第三線上所作直線形與第四線上所作在相似位置之相似直線形之比, 則此四直線成比例. ... .. 1144
- 四直線中, 兩兩之比之覆比, 等於其兩前項所包矩形與兩後項所包矩形之比. ... .. 1147
- 設 A, B, C, D 四點在一直線上, 在 AC, BD 上作任意相似三角形 AXC, BYD, 令其對應邊 AX 與 BY, CX 與 DY 平行, 命 O 為 YX, DA 之交點, 則矩形 OA·OD 等於矩形 OB·OC. ... .. 1158



- 二直線所包之矩形，爲各直線上正方形之比例中項  
... .. 1163
- 二直線不相等，則其和之半分，大於其比例中項。設二直線相等，則如何？ ... .. 1193
- 設  $O, A, B, C, D$  爲如 1158 題所述之點，直線  $OE$  上之正方形等於矩形  $OA \cdot OD$ ，以  $O$  爲中心， $OE$  爲半徑作圓， $P$  爲圓周上之任意點，則角  $APB, CPD$  相等。 ... .. 1206
- 在有限直線  $AB$  上取一點  $C$ ，令  $AC$  爲  $AB, BC$  之比例中項，則  $3AC^2 = AB^2 + BC^2$ 。 ... .. 1274
- 設  $A, B, C, D$  成調和點列，則  $\frac{2}{AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}$ 。又其逆定理如何？ ... .. 1275
- 一線分之中點唯一。 ... .. 358
- 二有限直線上正方形之和，等於此二直線和之半分以上正方形及其差之半分以上正方形之和之二倍；試由幾何學證之。又將一有限直線分爲二分，則其二分上正方形之和，等於此直線半分以上正方形之二倍，及分點與此直線中點間部分上正方形之二倍之和；試亦用幾何學證之。 846
- 設線分  $AB$  二等分於  $C$ ，又分爲不等之二分於  $D$ ，如圖作半圓，則  $P+S=Q+R$ 。但  $P$  爲半圓之瓣隙。 ... 1248
- 在定角  $XOY$  之二等分線上取一點  $P$ ，命過二點  $O, P$  之任意圓周與角之二邊  $OX, OY$  之交點分別爲  $A, B$ ，則線分  $OA, OB$  之和，一定不易。 ... .. 705
- 設分線分  $AB$  於  $C$ ，而  $AC^2 = 2CB^2$ ，則  $AB^2 + BC^2 = 2AB \cdot AC$ 。  
... .. 864
- 設  $O, B, C$  爲在一直線上之三點， $OB, OC$  之中點分別爲  $B', C'$ ，按  $m:n$  內分或外分  $BC$  之點爲  $M$ ，又  $OM$  之中點爲  $N$ ，則  $N$  按同比內分或外分  $B'C'$ 。 ... .. 1010
- 設  $S$  爲含調和點列  $A, C, B, D$  之直線外之一點，過  $C$  引  $SD$  之平行線，命其與  $SA, SB$  之交點分別爲  $G, H$ ，則  $GC, CH$  相等。 ... .. 1138
- 設  $P$  及  $P'$  內分及外分線分  $AB$  於中末比，求證 (1) 以  $BP$  [或  $BP'$ ] 爲底邊，作矩形  $BPCD$  [ $BP'C'D'$ ]，令其高等於  $AP$  [ $AP'$ ]，則  $AD$  [ $AD'$ ] 垂直於  $BC$  [ $BC'$ ]；(2) 以  $PP'$  爲直徑之圓，過以  $AB$  爲對角線之正方形之二角頂。 ... 1270
- 設二線分  $AB, CD$  在一直線上，則過  $A, B$  之圓與過  $C, D$  之圓之根軸，過一定點。 ... .. 1271

## 3. 角

- 凡周角皆相等. ... .. 1
- 由同一之點,引若干直線,則各直線與其下一直線所成各角之和,等於四直角. ... .. 2
- 凡平角皆相等. ... .. 3
- 同一之二邊  $AB, AC$  所夾之二平角相等. ... .. 4
- 等角之餘角亦等. ... .. 7
- 等角之補角亦等. ... .. 8
- 一直線立於他一直線上,其所成鄰角之和,等於二直角. ... .. 9
- 由一直線上之一點,就其一側引若干直線,則其依次所成各鄰角之和,等於二直角. ... .. 10
- 一直線與他二直線所成鄰角之和,若等於二直角,則後二直線成一直線. ... .. 11
- 二直線相交,其對頂角相等,及其逆定理. ... 12, 32
- 四直線交於一點,若不兩兩成一直線,則其二雙相對之角不等. ... .. 32
- 一點之周圍,有  $A, B, C, D$  四角:  $B$  2 倍於  $A, C$  3 倍於  $B, D$  等於  $C$ , 則各角為直角之幾分之幾? ... .. 13
- 過角之頂點,與此角之二等分線成直角之直線,與角之二邊成等角. ... .. 14
- 會於一點之四直線,設其所成之角皆為直角,則四直線成二直線. ... .. 17
- 一直線與他直線成二鄰角,各角之二等分線互為垂線. ... .. 18
- 二鄰角之二等分線,若互相垂直,則其所不共之二邊,成一直線. ... .. 20
- 前題中  $EBC$  與  $FBD$  互為餘角,  $ABE$  與  $DBE$  互為補角. ... .. 21
- 六直線會於一點,成六等角,則各角為一直角之三分之二. ... .. 22
- 二角  $AOB, COD$  公有一頂點  $O$ , 邊  $AO$  與邊  $BO$  分別垂直於邊  $CO$  與邊  $DO$ , 則  $AOB$  或等於  $COD$ , 或為其補角. 23
- 二對頂角之二等分線,成一直線. ... .. 24
- 相交二直線所成之四角, 其二等分線成互相垂直之二直線. ... .. 25
- 四直線會於一點,若不相鄰之角相等,則此等直線,兩兩成一直線. ... .. 26

- 二直線  $OB, OD$  與一直線  $AC$  會於同一點  $O$ , 若在  $AC$  異側之二角  $\angle AOB, \angle COD$  相等, 則  $BOD$  成一直線. ... 27
- 二等分對頂角之一之直線, 亦二等分他一對頂角. ... 28
- 二直線  $AO, BO$ , 在他直線  $CD$  之兩側, 而與  $CD$  交於同點  $O$ , 其所成角  $\angle AOC, \angle COB$  之和等於二直角. 引過  $O$  點之直線  $EOF$ , 則  $\angle AOF$  等於  $\angle BOE$ . ... 29
- 相鄰二角若互為餘角, 則各角二等分線間之角, 等於直角之半. ... 30
- 設  $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD$  為依次相隣之角, 而其度數則  $\angle AOB = 105^\circ 30'$ ,  $\angle BOC = 15^\circ 20'$ ,  $\angle COD = 69^\circ 10'$ , 問  $AO, OD$  成一直線否? ... 31
- 角之二邊, 與其二等分線之延線成等角. ... 33
- 設  $\angle AOB$  之二等分線為  $OM, ON$  為角內之一直線, 則  $\angle M\hat{O}N = \frac{1}{2}(\angle A\hat{O}N \sim \angle B\hat{O}N)$ . 又設  $ON'$  為  $\angle AOB$  外之一直線, 則  $\angle M\hat{O}N' = \frac{1}{2}(\angle A\hat{O}N' + \angle B\hat{O}N')$ . ... 35
- 二鄰角之度數, 分別為  $160^\circ$  及  $20^\circ$ , 則其二等分線所夾角之度數如何? ... 37
- 一直線與他二直線交, 若其所成之一組錯角相等, 或一組同位角相等, 或在前一直線同側之二內角互為補角, 則二組錯角相等, 四組同位角相等, 二組同側內角互為補角. ... 39
- 設頂點為  $A$  之角, 其一邊上有二點  $B, C$ , 他邊上有二點  $D, E$ , 而  $AB$  等於  $AD$ ;  $AC$  等於  $AE$ , 則  $BE$  等於  $CD$ . 試證之. ... 83
- 過角  $ABC$  之二等分線上之任意點  $O$ , 作  $CB$  之平行線, 與  $AB$  交於  $M$ , 則  $MBO$  為二等邊三角形. ... 113
- 由角  $BAC$  之二等分線上, 取任意點  $D$ , 且令  $AB$  等於  $AC$ , 則  $\angle A\hat{D}B = \angle A\hat{D}C$ . ... 114
- 由一角之二等分線上之一點, 向各邊引平行於他邊之直線, 則此二直線相等. ... 115
- 設  $O$  為距角  $BAC$  之二邊等遠之點, 則  $OA$  為角  $BAC$  之二等分線, 及其逆定理. ... 116, 117
- 通過角之二等分線上之一點, 且與此線成等角之二直線, 與角之二邊交, 則其夾於二邊間之部分相等. ... 118
- 一角之二邊, 分別垂直於他角之二邊, 則兩角或相等, 或互為補角. ... 126
- 設  $A, B$  為所設直線上之二定點,  $C, D$  為所設他直線上之二定點, 則  $\angle A\hat{D}C$  及  $\angle C\hat{B}A$  之二等分線所成之角, 等於  $\angle D\hat{A}B$  與  $\angle B\hat{C}D$  之和之半. ... 150. 183

- 二邊分別互相垂直之二角,其二等分線或互相垂直,或平行. ... .. 168
- 設兩角  $\angle ACB, \angle DCE$  公有頂點  $C$ , 且各角二等分線所成角之二等分線  $CO$ , 將  $\angle ACE$  或  $\angle BCD$  二等分, 則  $\angle ACB = \angle DCE$ .  
... .. 386
- 設二角之二邊, 分別平行, 則二角之二等分線或平行, 或垂直. ... .. 389
- 角內之某點上有一彈, 擊之使順次觸於二邊, 而返至原點, 則此彈所經之路徑如何? ... .. 391
- 位於角內一點上之彈, 欲擊之使順次觸及二邊, 反射至角內之他點, 則彈之路徑如何? ... .. 392
- 設  $AD$  及  $BC$  為二平行線,  $AB$  為其間之斜線,  $AC$  為  $BC$  之垂線, 引直線  $BE$ , 截  $AC$  於  $E$ , 令  $ED = 2AB$ , 則  $\angle DBC = \frac{1}{2} \times \angle ABC$ . ... .. 399
- 設角之頂點在圓外, 其一邊為割線, 他邊為切線, 則此角與其二邊所夾弧之中心角間, 有若何之關係? 又設二邊皆為切線, 則如何? ... .. 583
- 在直線  $AB$  上取二點  $C, D$ , 令  $AB, AC, AD$  成連比例, 由  $A$  至任意方向引直線  $AE$ , 令等於  $AC$ , 則  $BC$  及  $CD$  張等角於  $E$ . ... .. 1075
- 一角之二等分線唯一. ... .. 358
- 在角  $A$  之一邊  $AB$  上任取一點  $M$ , 由  $M$  至他邊  $AC$  引垂線  $MP$ , 則  $MP:AP, MP:AM, AP:AM$  之值恆一定. 1003

#### 4. 直 角

- 凡直角皆相等. ... .. 5
- 二直線相交, 其所成之四角, 若有一為直角, 則他三角亦為直角. ... .. 16
- 斜折書籍之一頁, 則其緣之二部分 [由一緣所折成之二部分] 所成角之二等分線, 與折痕成直角. ... .. 19

#### 5. 垂線及斜線

- 於一所設直線上之一所設點, 得引其線之一垂線, 而以一為限. ... .. 6
- 由一直線外之一點, 至此線得引唯一之垂線. 47, 67
- 一直線之垂線, 與同直線之斜線交. ... .. 51
- 與相交二直線分別垂直之二直線亦相交. ... .. 52
- 由所設直線外之所設點, 向此線所引之一切線中, 垂線最短, 而與垂線成等角之二線相等, 與垂線成大角者, 大於

- 與垂線成小角者. ... .. 73
- 由所設直線外之所設點,向此線所引之等直線,不多於二.  
... .. 74
- 由直線外之一點 A, 引此線之垂線 AB, 及斜線 AC, AD, AE,..... 於垂線之同側, 令  $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAE} = \dots\dots$ , 則  $BC < CD < DE < \dots\dots$  ... .. 185

## 6. 平行直線

- 一直線與他二直線交,若一組錯角相等,則後二直線平行. 及其逆定理. ... .. 38, 41
- 一直線與他二直線交,若 (1) 一組同位角相等,或 (2) 一組同側內角互為補角,則後二直線平行. 及其逆定理. ... .. 40, 44
- 一直線與二平行線交,且為其一之垂線,則亦必為他一之垂線. 及其逆定理. ... .. 42, 46
- 有多數直線,任取其二,皆相平行,則其一之垂線,亦必為其他之垂線. ... .. 43
- 平行於同一直線之各直線,亦互相平行. ... .. 45
- 由某點向二平行線引垂線,其二垂足與此點在一直線上. ... .. 48
- 與相交二直線之一平行之直線,與他一直線交. ... 49
- 與相交二直線分別平行之直線,亦必相交. ... .. 50
- 設二直線分別與他二直線平行,則前一雙直線所成之角,等於後一雙直線所成之角. ... .. 53
- 二直線平行,則與其成同向 [即角週轉之同向] 且相等之角之直線,亦必平行. ... .. 54
- 設有限直線 AB, CD 交互二等分於 O, 則 AC, BD 平行. ... .. 119
- 過距二平行直線等遠一點之二直線,皆二等分於此點,且由平行直線截取等長. ... .. 120
- 有全體平行之二組直線,與他直線交,設各組之二直線所截得之部分相等,則更與他任意直線交,各組所截得之部分亦相等. ... .. 229
- 三平行線與任意直線交,若其所截得之二部相等,則此三平行線與他任意直線交,其所截得之二部分亦相等. ... .. 230
- 設二直線 AB, CD 交於 O, 其夾於二平行線間之部分 AB, CD 相等,則  $OA = OC, OB = OD$ . ... .. 264
- 設二平行線與他一直線交,則切於此三直線之圓僅二,且

- 此二圓相等. ... .. 580
- 設任意二平行線公有一垂直二等分線，則此二平行線之四端，在一圓周上. ... .. 721
  - 三平行線自任意直線截得之二分之比，等於此三直線自他任意直線所截得之二分之比. ... .. 948
  - 二直線為諸平行直線所截，則一直線上二分之比，等於他直線上對應二分之比. ... .. 947, 972
  - 過直線  $AB$  上之點  $C$ ，引任意直線，則由  $A, B$  至此直線所引平行線之比一定. ... .. 1056
  - 設由一點所引之三直線與二平行線交於點  $A, B, C$  及  $A', B', C'$ ，則  $AB:BC = A'B':B'C'$ . ... .. 1079
  - 設兩平行線  $AB, A'B'$  分別按同比內分或外分於  $C$  及  $C'$ ，則  $AA', BB', CC'$  或平行，或過同點. ... .. 1080
  - 設三平行線  $AA', BB', CC'$  與不相交之二直線  $AC, A'C'$  相交，且  $AB:BC$ ，或  $A'B':B'C'$  等於所設比  $m:n$ ，則  $(m+n) \cdot BB' = nAA' + mCC'$ 。若  $AC, A'C'$  相交，則如何？ 1183
  - 由圓外一點引二直線，令其一切於圓，他一與圓交。由同點依任意方向引一直線，令其長等於切線，由此直線之端，至割線與圓周之交點引二直線，則此二直線所截弧之弦，與由  $A$  所引第三直線平行. ... .. 1226
  - 試述同一平面上之二直線相關之位置. ... .. 359
  - 二人相偕沿一直道步行，途中一人右折而成某角度，向前直行，若干時後，復作同前角度之左折，向前直行，此後二人無論步行若干時，決不相會。其故安在？ ... .. 360
  - 一直線截二直線時，若在此橫截線同側之二內角之和，小於二直角，則以後此二直線交於是側. ... .. 361
  - 試述平行於一直線之二直線相平行之逆定理，且證之. ... .. 362
  - 試證下定理之逆定理：與一組平行線交之二橫截線，為是等平行線分成比例. ... .. 1007

### 7. 二等邊三角形

[ $\triangle ABC$  中，假定  $AB=AC$ ].

- 若  $b=c$  則  $\hat{B}=\hat{C}$ 。及其逆定理. 57, 59, 86, 98, 103
- 延長  $AB, AC$ ，則其外角相等. ... .. 87
- 底之外角，大於任何內角. ... .. 88
- 設  $AC$  之延線為  $CD$ ，則  $\hat{BCD} + \hat{B} = 2\hat{A}$ . ... .. 89
- 設  $A$  之外角之二等分線為  $AE$ ，則  $AE \parallel BC$ . ... .. 90
- 由  $A$  向  $BC$  所引之垂線，將  $\hat{A}$  及  $BC$  二等分。及其逆定理.

- ... .. 91, 93, 94, 95, 102
- $\hat{A}$  之二等分線上之各點, 距 B, C 等遠. ... .. 92
- $\triangle ABC$  中, B, 及 C 之外角之二等分線之交點為 M, 而  $\triangle MBC$  為二等邊三角形, 則  $\triangle ABC$  亦為二等邊三角形. ... .. 96
- 由二等邊三角形 ABC 之底 BC 上之任意點  $x$ , 引 BC 之垂線, 與邊 AB, AC 或其延線交於 Y, Z, 則  $\triangle AYZ$  為二等邊. ... .. 97
- AC, BC 上之任意點分別為 D, E, 則  $BD > DE$ . ... .. 99
- 二等邊三角形頂角內之一點, 若不在頂角之二等分線上, 則距離底之兩端非等遠. ... .. 100
- 二等邊三角形之各底角為銳角. ... .. 101
- 二等邊三角形底邊隣角之兩二等分線與底邊, 亦成二等邊三角形. ... .. 104
- 由二等邊三角形底邊之兩端, 分別向其對邊之中點所引之直線相等. 及其逆定理. ... .. 105, 258
- 二等邊三角形 ABC 中, 設底邊 BC 之隣角 B, C 之二等分線, 分別與其對邊交於 E 及 D, 則 BE 等於 CD. ... 106
- 由二等邊三角形底邊之端, 向其對邊所引之垂線, 與底邊所成之角, 等於頂角之半. ... .. 107
- 設二等邊三角形之頂角 A, 為底角 B 或 C 之二倍, 則  $\hat{A}$  為直角. ... .. 108
- 設二等邊三角形之頂角 A, 為底角 B 或 C 之半分, 則此角等於直角之五分之二. 此三角形之兩底角之二等分線所成之角為若干? ... .. 109
- 就二等邊三角形 ABC 之等邊 AB, AC 上, 分別取 D 及 E 點, 命  $AD = AE$ , 且 BE, CD 之交點為 F, 則三角形 FBC, FDE, 皆為二等邊. ... .. 110
- 由二等邊三角形之頂點, 向各底角之二等分線所引之垂線相等. ... .. 111
- 設二等邊三角形 ABC 之頂點為 A, 底 BC 之中點為 D, 取 AM 等於 AD, 則 BM 小於 CD. ... .. 112
- 設 I 為二等邊三角形 ABC 之底邊 BC 之中點, M 為 AC 邊上之任意點, 則 |B, M| 之差, 小於 AB, AM 之差. ... 121
- 由二等邊三角形底之兩端向對邊所引之垂線相等. ... .. 129
- 二等邊三角形 ABC 中, 平行於底 BC, 引一直線, 命其與等邊之交點為 D 及 E, 則得二邊及一角相等之兩三角形 CDE, DCB. 又此兩三角形全等否? ... .. 191

- 設  $ABC, DBC$  爲兩二等邊三角形，其底同爲  $BC$ ，則  $\hat{A}BD = \hat{A}CD$ . ... .. 192
- 立於同底邊上之兩二等邊三角形，聯結其頂點之直線，或此直線之延線，將各頂角二等分，且將底邊垂直二等分. ... .. 193
- 由二等邊三角形底邊上之任意點，引分別平行於他二邊之直線，令與他邊相交，則此有限直線之和一定。若點在底邊之延線上，則如何？... .. 290
- 二等邊三角形底邊上之任意點，至他二邊之距離之和爲定長。點在底邊之延線上則如何？... .. 293
- 設圓之直徑爲二等邊三角形之一邊，則三角形之底爲圓周所二等分。... .. 475
- 於二等邊三角形之各頂點，引其外接圓之切線，則此三直線成二等邊三角形。又設此兩三角形皆非正三角形，則其頂角不相等。... .. 575
- 二等邊三角形中，其兩個等傍切圓之半徑，等於由三角形之頂點至底邊所引之垂線。... .. 576
- 聯結二等邊三角形內切圓之切點而得之三角形爲二等邊。... .. 652
- 過二等邊三角形之頂點，引平行於底邊之直線，切於三角形之外接圓。並證其逆定理。... .. 654
- 設二等邊三角形之頂角，等於正三角形之外角，則其外接圓之半徑，等於等邊。... .. 656
- 二等邊三角形  $ABC$  中，於其底  $BC$  或其延線上取一點  $D$ ，則  $AB, AD$  上正方形之差，等於矩形  $BD \cdot DC$ . ... 775
- 二等邊三角形中，底上之正方形，等於底投於一邊上之正射影與是邊所包矩形之二倍。... .. 793
- 過二等邊三角形  $OAB$  之頂點  $O$ ，引一直線，命其交底  $AB$  於  $P$ ，交外接圓周於  $Q$ ，則矩形  $OP \cdot OQ$  一定。... .. 898, 1209
- 兩二等邊三角形之頂角或底角相等，則相似。... 1033
- 設兩二等邊三角形之頂角相等，則其高之比等於底之比。... .. 1082
- 設以二等邊三角形  $ABC$  之底  $BC$  爲半徑， $B$  爲中心作圓，令與  $AC$  交於  $D$ ，則  $BC$  爲  $AC, CD$  之比例中項。 1083
- 設  $D$  爲二等邊三角形  $ABC$  之底  $BC$  或其延線上之一點，則三角形  $ABD, ACD$  之外接圓相等。... .. 1084
- 設  $OMN, OPQ$  爲二直線， $MP, NQ$  交於  $R$ ，而  $OM:MP=ON:NQ$ ，則三角形  $PQR$  爲二等邊。... .. 1087



- 二等邊三角形  $ABC$  中, 由底  $BC$  上之任意點  $D$ , 至  $AB, AC$  分別引直線  $DE, DF$ , 令與  $BC$  成等角, 交  $AB, AC$  於  $E, F$ , 則三角形  $BDF, CDE$  相等. ... .. 1169
- 設  $ABC$  為二等邊三角形,  $AC = 25BC$ , 由  $BA, AC$  分別取  $BD, EC$ , 令各等於  $BC$ , 命  $BE, CD$  之交點為  $F$ , 則  $AC = 25 \cdot CF$ . ... .. 1185
- 設二等邊直角三角形  $ABC$  中,  $D$  為斜邊  $BC$  上之任意點, 則  $2AD^2 = BD^2 + CD^2$ . ... .. 866
- 設  $ABC$  為二等邊三角形,  $A$  為頂點,  $CX$  為  $AB$  之垂線,  $XP$  為  $BC$  之垂線, 則  $AB^2 = PA^2 + PX^2$ . ... .. 868
- 設二等邊三角形  $ABC$  之兩底角為頂角  $A$  之二倍, 則  $AB^2 = BC^2 + AB \cdot BC$ . ... .. 1254

## 8. 正三角形

- $a = b = c$ , 則  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ . 及其逆定理. ... .. 58, 60
- 等邊三角形之各角, 為直角之三分之二. ... .. 128
- 由等邊三角形之頂點向對邊所引之三垂線相等. 130
- 由正三角形兩底角之二等分線之交點, 所引平行於二邊之二直線, 將底三等分. ... .. 131
- 兩端在正三角形二邊上之有限直線, 小於此三角形之一邊. ... .. 133
- 於正三角形之各邊上, 順次取距其一端等遠之一點, 聯結之, 則得正三角形. ... .. 134
- 以共有頂點之正三角形, 填充此點之周圍, 需正三角形若干? ... .. 158
- 由等邊三角形一邊上之任意點, 引他二邊之平行線, 其所得之平行四邊形之周一一定. ... .. 291
- 由正三角形內之一點, 至三邊之垂線之和, 恆相等. 若點在形外, 則三垂線間之關係如何? ... .. 294
- 由圓周上之一點  $P$ , 至內接正三角形一頂點之距離  $PA$ , 等於至他二頂點之距離  $PB, PC$  之和. 並證其逆定理. ... .. 508, 1197
- 圓之外切正三角形之邊, 等於其內接正三角形之邊之二倍. ... .. 653
- 於等邊三角形  $ABC$  之外接圓周上, 取一點  $M$ , 聯結  $M$  與各邊所對弧之中點, 則是等直線與各該邊之交點, 在一直線上. 此直線與三角形  $ABC$  關於  $M$  點之 Simson 氏線平行. ... .. 723

- 正三角形中，由一頂點至其對邊引垂線，則此垂線上之正方形，等於半邊上正方形之三倍。... 780
- 正三角形之內切圓，外接圓，傍切圓之半徑，成 1:2:3 之比。... 989
- 設 ABC 為正三角形，E 為 AC 上之一點，在 BC 之延長線上取 CD，CF，令分別等於 CA，CE。命 AF，DE 之交點為 H，則  $CH:CE=AC:AC+CE$ 。... 1081
- 設 P 為等邊三角形 ABC 之外接圓弧 BC 上之任意點，則 PA 上之正方形等於 BC 上之正方形與矩形 PB·PC 之和。... 1195
- 由圓之內接正三角形之各角頂，至此圓之任意直徑引垂線，則在此直徑一側之二垂線之和，等於在他側之一垂線。又是等垂足中，其在中心之一側者，至中心之距離，等於在他側之二距離之和。... 1279
- 圓之內接正三角形之各邊，自過對角頂之直徑，截取四分之一。... 1332
- 正三角形外接圓之直徑，等於內切圓直徑之二倍。... 1334
- 設 P 為正三角形外接圓周上之任意點，則  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$  一定。又若 ABCP，A'B'C'P' 為同心圓，ABC，A'B'C' 為正三角形，則  $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{A'P'}^2 + \overline{B'P'}^2 + \overline{C'P'}^2$ 。... 1347

## 9. 直角三角形

[△ABC 中，假定 C 為直角]

- 直角三角形斜邊 BC 兩端外角之二等分線，其所成之角 BDC 等於直角之半。... 123
- 直角三角形得分為兩二等邊三角形。據此，斜邊之中點距三角頂等遠。... 124, 248
- 設直角三角形 ABC 之直角為 A， $\hat{A}$  之二等分線為 AD，斜邊 BC 之中點為 M，而 MD 垂直於 BC，則 MA，MD 相等。... 125
- 設直角三角形之一銳角，等於他銳角之二倍，則斜邊等於最小邊之二倍。... 127
- 直角三角形之斜邊，大於他邊。... 135
- 兩直角三角形，若有一銳角及其隣邊，或一銳角及其對邊相等，則兩形全等。... 140
- 直角三角形 ABC 中，就其直角之二邊 AB，AC 上作正方形 ABDM，ACEN，由對直角頂 A 之角頂 D，E，引斜邊 BC 延

- 線之垂線  $DF, EG$ , 則 (1) 斜邊  $BC$  等於  $DF, EG$  之和, (2) 原三角形  $ABC$  等於兩三角形  $DFB, CEG$  之和. ... 395
- 共一斜邊之直角三角形, 其頂點在一圓周上. ... 486
- 直角三角形中, 以直角之一隣邊為直徑作圓, 於其與斜邊之交點引切線, 則此切線將直角之又一隣邊二等分. ... 574
- 由直角三角形之直角頂, 至斜邊引垂線, 將原三角形分成兩直角三角形, 則此三直角三角形內切圓之半徑和, 等於所引垂線. ... 584
- 以直角三角形夾直角之二邊  $AB, AC$  為直徑作圓, 則此二圓之周, 切於以斜邊  $BC$  之中點為中心, 以  $AB+AC$  為直徑之圓. ... 642
- 直角三角形中, 其內切圓之直徑與斜邊之和, 等於他二邊之和. ... 655
- 直角三角形  $ABC$  中, 由直角頂  $A$  至斜邊  $BC$  引垂線  $AD$ , 由  $D$  至他邊引垂線  $DE, DF$ , 則  $B, E, F, C$  在一圓周上. ... 716
- 直角三角形斜邊上之正方形, 等於他二邊上正方形之和及其逆定理. ... 750, 753, 927
- 直角三角形中, 由直角頂至對邊引一垂線, 將斜邊分為二分, 則其一分與斜邊所包之矩形, 等於此分隣邊上之正方形. ... 766
- 設以三個直角二等邊三角形之斜邊所作之三角形, 為直角三角形, 則原直角三角形之一, 等於他二形之和. 767
- 直角三角形中, 直角旁之一邊上之正方形, 等於他二邊之和與差所包之矩形. ... 769
- 直角三角形  $ABC$  中, 平行於斜邊  $BC$ , 引直線  $DE$  於他二邊之間, 則  $CD, BE$  上正方形之和, 等於  $DE, BC$  上正方形之和. ... 770
- 直角三角形中, 由一邊之中點, 至斜邊引一垂線, 則斜邊上為此垂線所分成之二分上正方形之差, 等於他一邊上之正方形. ... 771
- 設三角形  $ABC$  中,  $\hat{C}$  為直角, 則由  $C$  至斜邊所引垂線  $CD$  上之正方形, 等於矩形  $AD \cdot BD$ . ... 772
- 由直角三角形之一銳角頂, 至對邊引一直線, 則此直線上之正方形, 與此對邊上正方形之和, 等於此對邊上隣接直角之一分上之正方形與斜邊上正方形之和. ... 773
- 直角三角形中, 斜邊上之正方形, 與三角形面積四倍之和或差, 等於直角旁二邊之和或差上之正方形. ... 796

- 在直角三角形  $ABC$  之各邊上，作正方形如圖，又在  $HI$  上作  $\triangle HIL$ ，令全等於  $\triangle ABC$ ，且  $HL=BC$ ，聯結  $EF, DBG, BL$ ，則(1)  $\triangle EBF$  與  $\triangle ABC$  全等，(2) 四邊形  $GFED, GCAD, BCIL, LHAB$  全等，(3) 由此以證 Pythagoras 氏定理。... 800
- 直角三角形斜邊上之正三角形，等於他二邊上正三角形之和。... 837
- 設直角三角形  $ABC$  之直角頂為  $B$ ，三邊上之正方形為  $ABED, BCGF, CAHI$ ，求證：(1)  $AE, CF$  平行。(2)  $D, B, G$  在一直線上。(3)  $CD, BH$  互相垂直。(4) 三角形  $EFB$  與  $ABC$  全等， $GCI, DAH$  皆與  $ABC$  等積。(5) 在  $HI$  上作直角三角形  $ILH$ ，令全等於  $ABC$ ，而  $HL$  等於  $BC$ ，聯結  $BL$ ，則四邊形  $GFED, GCAD, BCIL, LHAB$  全等；且據此以證定理直角三角形二邊上正方形之和，等於斜邊上之正方形。(6)  $GI$  上之正方形，等於  $AB$  上之正方形與  $BC$  上正方形之四倍之和。(7)  $GI, DH$  上之正方形之和，等於  $AC$  上正方形之五倍。... 838
- 在所設直角三角形之邊上，就形外作正方形，則聯結其各角頂而得之全圖形面積，以何式表之？... 933
- 直角三角形中，由直角頂至斜邊所引之垂線，將三角形分成兩相似三角形，而此兩三角形，皆與原三角形相似。... 1024
- 前題中，直角三角形之各邊，為斜邊與斜邊上隣接於該邊之一分之比例中項，垂線為斜邊上二分之比例中項。... 1025
- 直角三角形  $ABC$  中，由直角頂  $A$  至斜邊引垂線  $AD$ ，又引角  $B$  之二等分線，令交  $AC, AD$  於  $E, F$ ，則  $DF:AF=AE:CE$ 。... 1052
- 設正方形  $DEGF$  為直角三角形  $ABC$  之內接四邊形，邊  $DE$  合於邊  $BC$ ，則正方形之一邊，為斜邊之二分  $BD, EC$  之比例中項。... 1101
- 設正方形  $DBEF$  內接於以  $B$  為直角之三角形  $ABC$ ，兩邊  $BD, BE$  與直角之二邊  $AB, BC$  相合，一角頂  $F$  在斜邊上，則正方形之一邊為  $AD, CE$  之比例中項。... 1102
- 設二等邊直角三角形中，角  $B$  之三等分線，與由直角頂  $A$  至斜邊  $BC$  所引垂線  $AMN$  交於  $M$  及  $N$ ，又  $CN$  之延線與  $AB$  交於  $E$ ，則  $EM$  平行於  $BN$ 。... 1106
- 直角三角形中，斜邊上所作之任意直線形，等於他二邊上所作與其相似位置之兩相似直線形之和。... 1149, 1155

- 定理直角三角形斜邊上之任意直線形，等於他二邊上與其相似且在相似位置之直線形之和中，設各邊上之直線形為矩形，試由直角頂向斜邊引一垂線，而將斜邊上之矩形分為二矩形，將此各矩形分別與他二邊上之矩形比較，以證明之。... 1156
- 直角三角形 ABC 中，由直角頂 A 至斜邊引垂線 AD，則連原直角三角形，共得三相似直角三角形。又試指出是等相似直角三角形之對應邊。又斜邊之二分之比，等於原直角三角形之二邊 AB, AC 之二乘比。... 1157
- 由直角三角形 ABC 之直角頂 B 至斜邊 AC 引垂線 BD，在 BD 上取 DE，令等於 BD, DC 之第三比例項，聯結 AE，則三角形 ADE, BDC 相等。... 1166
- 由直角三角形 ABC 之直角頂 A，至斜邊引垂線 AD，則三角形 ABC, ADB, ADC 比例於 BC, AB, AC 上之正方形。... 1167
- 設直角三角形 ABC 中，直角 B 之二等分線交斜邊於 F，外接圓周於 D，則矩形  $BD \cdot BF$  為直角三角形 ABC 之二倍。... 1194
- 由直角三角形 ABC 之直角頂 C，至斜邊引垂線 CD，命三角形 ACD, BCD 之內切圓半徑分別為 R, R'，則  $R'^2 + R^2 = (s-c)^2$ 。但 c 為斜邊，s 為三角形 ABC 之半周。1221
- 直角三角形 ABC 中，在其直角之一邊 AC 上，作正方形 ACKH，聯結 BH，命其與 AC 之交點為 P，由 P 引 CB 之平行線，命其與斜邊 AB 之交點為 Q，則  $CP = PQ$ 。1005
- 在直角三角形 ABC 之斜邊 BC 上取點 D，由 D 引 BC 之垂線，命其與邊 AB, AC，及外接圓之交點分別為 E, F, G，則線分 DG 為線分 DE, DF 之比例中項。... 1134
- 設直角三角形 ABC 之邊 AB 大於 AC，在斜邊 BC 上取  $BD = BA$ ，又設 DE 為二等分三角形之直線，則  $BE = DE = \frac{1}{2}BC$ 。... 861
- 直角三角形中，斜邊之垂直二等分線，將他一邊內分或外分，此二分上正方形之差，等於第三邊上之正方形。867
- 直角三角形中，由銳角頂點至對邊中點所引直線上之正方形，等於斜邊上之正方形，減去此對邊中分上正方形之三倍。... 870
- 由直角三角形 ABC 之斜邊 BC 之中點 O，引此邊之垂線，令其分別交他二邊或其延線於 E, F，聯結 AO，則  $AO^2 = OE \cdot OF$ 。... 919
- 設以直角三角形 ABC 之斜邊 AB 為底邊，命高 CD 為直徑

- 之圓與二邊 AC, CB 之交點分別為 E, F, 而 BF, AE, BC 及 AC 分別表以  $x, y, a$  及  $b$ , 則  $x:y=a^2:b^2$ . ... 1012
- 直角三角形 ABC 中, 由直角頂 C, 至斜邊 BC 引垂線 CD, 則  $\overline{AC}^2:\overline{BC}^2=AD:BD$ . ... 1253

### 10. 三 角 形

- [ $\triangle ABC$  中, 假定  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  之對邊分別為  $a, b, c, s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ].
- $\triangle ABC, \triangle DEF$  中,  $AB=DE, AC=DF, \hat{A}=\hat{D}$ , 則  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ . ... 55
- $\triangle ABC, \triangle DEF$  中,  $\hat{B}=\hat{F}, \hat{C}=\hat{E}, BC=EF$ , 則  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ . ... 56
- $\triangle ABC, \triangle DEF$  中, 三邊分別相等, 則  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ . 77
- $\triangle ABC, \triangle DEF$  中,  $\hat{B}=\hat{E}, \hat{C}=\hat{F}, AB=DE$ , 則  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ . ... 78
- $\triangle ABC, \triangle DEF$  中,  $AB=DE, AC=DF, \hat{B}=\hat{E}$ , 則  $\hat{C}=\hat{F}$ . [斯時  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ], 或  $\hat{C}+\hat{E}=2\hat{R}$ . 若  $\hat{B}, \hat{E}$  均為直角, 或均為鈍角, 以及  $\hat{C}, \hat{F}$  均為銳角, 或均為鈍角, 或一為直角, 而  $AC < AB$  [DF 當然不大於 DE], 則  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ . ... 79, 80, 81, 82
- 延長三角形之任何一邊, 其外角大於任一內對角. ... 61, 84
- 三角形任意二角之和, 小於二直角. ... 62
- 延長三角形之一邊, 其所生之外角, 等於二內對角之和, 而三角形三內角之和, 等於二直角. ... 63
- $\hat{A}=\hat{R}$ , 或  $\hat{A} > \hat{R}$ , 則  $\hat{B} < \hat{R}, \hat{C} < \hat{R}$ . ... 64
- $\triangle ABC, \triangle DEF$  中,  $\hat{A}=\hat{D}, \hat{B}=\hat{E}$ , 則  $\hat{C}=\hat{F}$ . ... 65
- 各三角形至少有二銳角, 且直角三角形中, 二銳角互為餘角. ... 66
- $b > c$ , 則  $\hat{B} > \hat{C}$ , 等. 及其逆定理. ... 68, 69
- $b+c > a$ , 等. ... 70
- $b \sim c < a$ , 等. ... 71
- 設 D 為三角形內之一點, 則  $DB+DC < b+c, \hat{BDC} > \hat{A}$ , 等. ... 72
- $\triangle ABC, \triangle DEF$  中,  $AB=DE, AC=DF, \hat{A} > \hat{D}$ , 則  $BC > EF$ . 及其逆定理. ... 75, 76
- 三角形得有唯一直角或鈍角. ... 85
- 三角形 ABC 中, B 及 C 之外角之二等分線, 其所夾之角等

- 於他—外角之半分. ... .. 122
- 由三角形之一頂點,向其對邊所引之一直線,小於他二邊中之大者.若此二邊相等,則小於此二邊中之任一邊. ... .. 132
- 將三角形 ABC 之底邊 BC, 依由 B 至 C 之方向, 延長至 D, 令 CD 等於 AB, 則 AD 大於 BC. ... .. 136
- 設 O 為三角形 ABC 內之一點, 則  $\hat{B}O\hat{C} = \hat{B}A\hat{C} + \hat{A}B\hat{O} + \hat{A}C\hat{O}$ . ... .. 137
- 設  $\hat{A} > \hat{R}$ , 則  $a > b$  (或  $c$ ). ... .. 138
- 設三角形 ABC 中, 二等分角 A 之直線, 與邊 BC 交於 D, 則 BA 大於 BD, CA 大於 CD. ... .. 139
- 設三角形 ABC 之最大角為 A, 則於 AB, AC 上分別取任意點 D, E 時,  $DE < BC$ . ... .. 141
- 設三角形 ABC 之邊 BC 延長至 D, 角 ACB 之二等分線與邊 AB 之交點為 E, 過 E 引平行於 BC 之直線, 命其與邊 AC 及角 ACD 之二等分線之交點分別為 F, G, 則  $EF = FG$ . ... .. 142
- 設 D 為三角形 ABC 邊 BC 之中點, 邊 AB 小於邊 AC, 則角 ADC 為鈍角. 及其逆定理. ... .. 143, 144
- 設三角形 ABC 中,  $AB > BC < CA$ , 則最大角及最小角若何? ... .. 145
- 三高之和, 小於  $a + b + c$ . ... .. 146
- 設 D 為三角形 ABC 之邊 BC 上之一點, 而 AB 不大於 BD, 則 AC 大於 CD. ... .. 147
- 定理一直線與他二直線交, 若其所成之錯角等, 則此二直線平行, 其對定理包含於定理三角形之外角, 大於其各內對角中, 試說明之. ... .. 149
- 設  $a$  之中點為 D, 則  $AD < \frac{1}{2}(b + c)$ ,  $AD > \frac{1}{2}(b + c - a)$ . ... .. 151
- 設 AD 為中線, 而  $b > c$ , 則  $\hat{B}A\hat{D} > \hat{C}A\hat{D}$ . ... .. 152
- 設 O 為形內之點, 則  $a + b + c > AO + BO + CO > \frac{1}{2}(a + b + c)$ . ... .. 153
- $\hat{A} < \hat{B} + \hat{C}$ , 從而  $\hat{A} < \hat{R}$ . ... .. 154
- 設 AD 為中線, 則隨  $AD < \frac{1}{2}a$ , 而  $\hat{A} < \hat{R}$ . 及其逆定理. ... .. 155, 190, 223
- 三角形 ABC 之邊 BC 延長至 D, 命  $\hat{B}A\hat{C}$  之二等分線 AE 與 BC 之交點為 E, 則  $2\hat{A}E\hat{D} = \hat{A}B\hat{D} + \hat{A}C\hat{D}$ . ... .. 156
- 由銳角三角形之二頂點向其對邊所引之二垂線間之角, 為其餘頂點中一角之補角. ... .. 157

- 設三角形之一角，等於他二角之和，則最大邊等於由其中點至對角頂之距離之二倍。... 159
- 於三角形  $ABC$  中，過其各角頂引直線  $AD, BE, CF$ ，令  $D\hat{A}B = E\hat{B}C = F\hat{C}A$ 。若此三直線不交於一點，則其所成之三角形，與原三角形有分別相等之角。... 160
- 設  $c > b$ ，在  $c$  上，取  $AD = b$ ，則  $E\hat{C}D = \frac{1}{2}(\hat{C} - \hat{B})$ 。... 161
- 三角形  $ABC$  中，設  $AC > AB$ ，由  $A$  向  $BC$  引垂線  $AD$ ，則  $D\hat{A}C > D\hat{A}B$ ， $DC > DB$ 。... 162
- 設三角形  $ABC$  中， $\hat{A}$  之二等分線與對邊交於  $D$ ， $AB > AC$ ，則  $BD > CD$ 。... 163
- 三角形中，一角之二等分線，與由其頂點向對邊所引之垂線所成之角，等於他二角之差之半。... 164
- 在三角形  $ABC$  中角  $A$  之二等分線上任取一點，則由此點至  $B, C$  之距離之差，小於  $AB, AC$  之差。... 165
- 三角形  $ABC$  中，設  $AD$  為中線， $AE$  為角  $A$  之二等分線，則  $AE < AD$ 。... 166
- 三角形  $ABC$  中，設角  $B$  之二等分線與角  $C$  之外角之二等分線交於  $E$ ，則  $B\hat{E}C$  等於  $\hat{A}$  之半。... 167
- 三角形  $ABD$  中，設  $\hat{A} < \hat{B}$ ，對於  $AB$  在  $D$  之同側，取一點  $C$ ，令  $CA = CB = \frac{1}{2}(AD + DB)$ ，命  $CB$  與  $AD$  之交點為  $E$ ，則  $EA > EB$ ，又  $EC > ED$ 。... 169
- 於三角形  $ABC$  之外側，就各邊上作正三角形  $B\hat{C}D, CAE, ABF$ ，則  $AD = BE = CF$ 。正三角形作於內側則如何？ 170
- 三角形中，垂直於一角之二等分線之直線，(甲)與此角之二邊所成之角，各等於他二角之和之半，(乙)與第三邊所成之角，等於他二角之差之半。... 171
- 在  $b, c$  或其延線上，取  $AE = c, AD = b$ ，命  $a$  與  $DE$  之交點為  $F$ ，則  $AF$  將  $\hat{A}$  二等分。... 172
- 過  $A$ ，垂直於  $\hat{A}$  之二等分線，作直線  $XY$ 。設  $M$  為  $XY$  上之一點，則  $\triangle BMC$  之周，大於  $a + b + c$ 。... 175
- 在三角形  $ABC$  中，引直線  $AD$ ，令其與  $AB$  成等於角  $C$  之角，又引直線  $AE$ ，令其與  $AC$  成等於角  $B$  之角，則三角形  $DAE$  為二等邊。... 176
- 在  $AB$  及其延線上，按  $AD = AE = AC$  取  $D, E$ ，則  $A\hat{E}C = \frac{1}{2}\hat{A}$ ， $D\hat{C}E = \hat{A}$ 。... 177
- 過三角形各邊之中點，作此各邊之垂線，則此三直線過同點，且此點距三角形三頂點等遠。... 178
- 三角形各角之二等分線過同點，且此點距各邊等遠。... 179



- ①  $\hat{A}$  之二等分線與  $\hat{B}, \hat{C}$  之外角之二等分線過同點，且此點距三邊等遠。... 180  
 ② 三角形之三垂線交於一點。... 195, 722  
 ③ 三角形之三中線過同點，此點至各頂點之距離，等於其中線之三分之二。... 256, 929  
 ④ 三角形 ABC 角 A 之外角之二等分線與底邊所夾之角，等於  $\hat{B}, \hat{C}$  之差之半。... 184  
 ⑤ 三角形 ABC 中，設 AC 不小於 AB，聯結邊 BC 上之一點 D 與 A，則  $\hat{ADB}, \hat{ADC}$  皆大於  $\hat{ACB}$ 。... 186  
 ⑥ 設兩三角形 ABC, DBC 在同底邊 BC 上，聯結其頂點之直線 AD，與 BC 平行。若 ABC 為二等邊三角形，則其周小於三角形 DBC 之周。... 187  
 ⑦ 設三角形 ABC 中，各角之二等分線交於 O，由 O 向邊 AB 引垂線 OF，則 AF 等於三角形之半周與邊 BC 之差。又設 OD 為 BC 之垂線，則 BD 及 CD 各與何相等？... 188, 729  
 ⑧ 由切於  $a$  之傍切圓中心 O，至  $a, b, c$  所引之垂線，分別設為 OD, OE, OF，則  $AE=AF=s$ 。又試以  $s$  與  $a, b, c$  表 BD, CD 之值。... 189, 729  
 ⑨ 過 A, B, C，分別引平行於  $a, b, c$  之線，則合  $\triangle ABC$  共得四個等三角形。... 194, 250  
 ⑩ 設 O 為三角形 ABC 之垂心，則四點 O, A, B, C 中，任何一點，為由他三點所成三角形之垂心。... 196  
 ⑪ 兩三角形中，二邊與中線分別相等，則兩形相等 [有二款]。... 198  
 ⑫ 設三角形 ABC 中， $\hat{B}, \hat{C}$  之二等分線交於 O，過 O 作 BC 之平行線，與 AB 交於 M，與 AC 交於 N，則 MN 等於 MB 與 NC 之和。此題中  $\hat{B}, \hat{C}$  之二等分線，代以  $\hat{B}, \hat{C}$  外角之二等分線則如何？又代以  $\hat{B}$  之二等分線及  $\hat{C}$  外角之二等分線則如何？... 199  
 ⑬ 三角形大角之二等分線，小於小角之二等分線。... 200  
 ⑭ 設三角形 ABC 之內心為 O，則  $\hat{BOC} = \frac{1}{2}\hat{A} + \hat{R}$ ,  $\hat{COA} = \frac{1}{2}\hat{B} + \hat{R}$ ,  $\hat{AOB} = \frac{1}{2}\hat{C} + \hat{R}$ 。... 201  
 ⑮ 設三角形 ABC 之外心為 O，則  $\hat{BOC} = 2\hat{A}$ ,  $\hat{COA} = 2\hat{B}$ ,  $\hat{AOB} = 2\hat{C}$ 。... 202  
 ⑯ 兩個等角三角形，若其一之二邊，分別與他之一之二邊平行，則其餘一邊，亦必平行。... 203  
 ⑰ 兩個等角三角形，若其一之二邊，分別垂直與他之一之二邊，則第三邊亦必互相垂直。... 204

- ① 過三角形一邊之中點，引平行於他邊之直線，此直線必過第三邊之中點。及其逆定理。... 231, 232
- ② 聯結三角形二邊中點之直線，平行於第三邊，且等於其半分。... 232
- ③ 由三角形之一角頂至對邊所引之直線，為聯結他二邊中點之直線所二等分。... 246
- ④ 在三角形  $ABC$  之底  $AC$  上取任意點  $D$ ，設  $AD, DC, AB, BC$  之中點分別為  $E, F, G, H$ ，則  $EG$  與  $FH$  平行且相等。... 247
- ⑤ 聯結三角形各邊之中點，則將原三角形分為四個全等三角形。... 249
- ⑥ 三角形  $ABC$  中，由底  $BC$  之中點  $D$ ，引平行於邊  $BA, CA$  之直線，命其分別交  $AC, AB$  於  $E, F$ ，則  $EF$  平行於  $BC$ 。... 251
- ⑦ 聯結三角形  $ABC$  之重心  $G$  與頂點  $A$ ，並延長之，取  $GH$ ，令與  $AG$  等長，以三點  $B, G, H$  為頂點，作三角形  $BGH$ ，則其三邊分別為三角形  $ABC$  中線之三分之二。... 257
- ⑧ 三角形中，過大邊中點之中線，小於過小邊中點之中線。... 259, 778
- ⑨ 由三角形大角之頂點所引之中線，小於由小角之頂點所引之中線。... 260
- ⑩ 三角形之垂心  $H$ ，重心  $G$ ，外心  $O$  在一直線上，且  $GH$  等於  $OG$  之二倍。... 261, 1100
- ⑪ 三角形三中線之和，小於三角形之周，而大於周之四分之三。... 262
- ⑫ 向過三角形  $ABC$  之角頂  $A$  之任意直線，引垂線  $BP, CQ$ ，設  $BC$  之中點為  $M$ ，則  $MP = MQ$ 。... 282
- ⑬ 由三角形之三頂點，至不交其邊之任意直線之距離之總和，等於由三角形之重心，至同直線之距離之三倍。設直線交三角形之邊，則如何？又過重心則如何？... 284
- ⑭ 設三角形  $ABC$  中， $BE, CD$  為二中線，平行於  $BE$ ，引  $DF$ ，平行於  $AB$ ，引  $EF$ ，令交於  $F$ ，聯結  $CF$ ，則三角形  $CDF$  之三邊，表三角形  $ABC$  之三中線。... 287
- ⑮ 三角形  $ABC$  中  $B$  及  $C$  之外角之二等分線所夾之角，等於  $A$  之外角之半分。... 325
- ⑯ 設三角形  $ABC$  之垂心為  $H$ ，則  $\hat{BHC}$  為  $\hat{BAC}$  之補角。... 328
- ⑰ 聯三角形  $ABC$  之各頂點於其外心，並由各頂點平行於所聯之直線，各引二直線，則得一六角形。此六角形之邊皆相

- 等,其角兩兩相等,且等於三角形各項角之二倍 336
- 三角形之周,小於其三中線和之二倍. ... 387
- 設  $O$  為三角形  $ABC$  各角二等分線之交點,延長  $AO$ , 令交  $BC$  於  $D$ , 由  $O$  引  $BC$  之垂線  $OE$ , 則  $\widehat{BOD} = \widehat{COE}$ . ... 388
- 設三角形  $ABC$  中, 一底角  $B$  為他底角  $C$  之二倍, 則底邊之中點與由頂點  $A$  向底邊所引垂線之足之距離, 等於邊  $AB$  之半. ... 390
- 三角形任意二中線之和, 大於第三中線. ... 394
- 設三角形兩角之二等分線, 其止於對邊之部分相等, 則三角形為二等邊. ... 402
- 就三角形  $ABC$  之二邊  $AB$  及  $AC$  上向三角形之外側, 作正方形  $ABFG$ ,  $ACHK$ , 則此兩正方形中對角線之交點, 與  $BC$  及  $GK$  之中點, 為另一正方形之四頂點. ... 403
- 設銳角三角形  $ABC$  之外接圓中心為  $O$ , 則角  $BOC$ ,  $COA$ ,  $AOB$  分別為角  $A$ ,  $B$ ,  $C$  之二倍. ... 476
- 在三角形  $ABC$  之外接圓中, 由中心  $O$  至三角形之一邊  $BC$ , 引垂線  $OD$ , 則角  $BOD$  或等於角  $A$ , 或為其補角. 480
- 以三角形之二邊為直徑所作之圓, 其圓周交於第三邊或其延線上. ... 488
- 設等弦  $AB$ ,  $CD$  交於圓內或圓外之點  $E$ , 則三角形  $AEC$ ,  $DEB$  等角. 三角形  $AED$ ,  $CEB$  亦然. ... 492
- 三角形頂點上外角之二等分線, 若交外接圓之圓周於他點, 則此點距底邊之兩端等遠. ... 507
- 由三角形之任意角頂至垂心之距離, 等於由其對邊至外心之距離之二倍. ... 509
- 由三角形之垂心, 至一邊所引之垂線, 延長至外接圓周時, 此線分為是邊所二等分. ... 510
- 作三角形之外接圓, 將此三角形外之三弓形, 以各邊為界, 而一一對折之, 則三弧形之弓交於同點. ... 511
- 設三角形內切圓之中心為  $I$ , 外接圓之中心為  $S$ , 則 (1) 若  $I$  與  $S$  相合, 則三角形為等邊, (2) 若  $I$  與  $S$  在過一角頂之一直線上, 則三角形為二等邊, (3) 聯結任意角頂與  $I$ ,  $S$  之二直線所成之角, 等於他二角差之半. ... 512
- 由三角形之各角頂, 至其對邊引垂線, 聯結其垂足而成之三角形, 曰垂足三角形. 垂足三角形之任何二邊, 與原三角形中過此二邊交點之垂線成等角, 且又與原三角形之邊成等角. ... 518
- 設  $O$  為三角形  $ABC$  之外心,  $H$  為其垂心. 在  $AB$  上取  $AD$  等於  $AH$ ,  $AC$  上取  $AE$  等於  $AO$ , 則  $DE$  等於外接圓之半徑.

- ... .. 520
- 在三角形外接圓之周上,取任意點 P,由 P 至三邊或其延線引三垂線,則其垂足 D, E, F 在一同直線上. 又試證其逆定理. ... .. 521
  - Simson 氏定理中,延長 PD, PE, PF, 令再交圓周於 X, Y, Z, 則 AX, BY, CZ 各平行於 Simson 氏線. ... 523
  - 在三角形 ABC 之邊 BA 之延線上取 AD 等於 AC, 則  $\widehat{BAC}$  之二等分線,切於過 C, A, D 三點之圓周. ... 566
  - 作一圓,過三角形 ABC 之頂點 A, 內心 I, 且切 AB 於 A, 令其與 BC 之交點為 D, E, 則 IC 將弧 DE 二等分. 586
  - 設三角形 ABF, ACE 中, A 為對頂角. 今作各三角形之外接圓, 命其他一交點為 P, 則由 P 至 AC, AE, CE, BF 所引四垂線之足,在一直線上. ... .. 632
  - 於三角形 ABC 之外側,就其各邊上作正三角形 DBC, ECA, FAB, 則三正三角形之外接圓過同點, AD, BE, CF 亦過同點,而此點即三外接圓之交點.三正三角形之外心,為一正三角形之頂點.又設三外接圓之交點為 O, 則  $AD = BE = CF = OA + OB + OC$ . ... .. 643
  - 由三角形 ABC 之頂點 B 及 C, 至其對邊引垂線 BD, CE, 則角 BCE, BDE 相等. ... .. 651
  - 設一三角形之一邊,等於他三角形之一邊,且對此各邊之角亦等,則此兩三角形之外接圓恆等. .... 658
  - 設三角形 ABC 內切圓之中心為 O, 過 O 及三角形之頂點 A 引一直線,命其與三角形外接圓之交點為 D, 則 DB, DO, DC 相等. ... .. 673
  - 設三角形 ABC 中, D 為外心, O 為內心,  $O', O'', O'''$  分別為在角 A, B, C 內之傍切圓之中心,則(1)外接圓過  $OO', OO'', OO'''$  之中點,(2)四點 O, B,  $O', C$  在一圓周上.其中心在圓 D 之周上. ... .. 674
  - 設 O 為三角形 ABC 之內心, 內切圓與邊 AB, AC 之切點, 分別為  $C', B'$ , AO 與內切圓交於 P,  $P'$ , 則 P 為三角形  $AB'C'$  之內心,  $P'$  為其傍心. ... .. 675
  - 設 I 為三角形 ABC 之外心, Q, R, S 為由頂點至對邊所引垂線之足,則 IA, IB, IC 分別為 RS, SQ, QR 之垂線. 676
  - 命 D, E, F 為由三角形 ABC 之頂點至對邊所引垂線之足. 設三角形 ABC 之垂心 O 在形內 [即三角形 ABC 為銳角時], 則 O 為  $\triangle DEF$  之內心, A, B, C 為其傍心. 又設三角形 ABC 為鈍角或直角,則如何? ... .. 677
  - 設由三角形 ABC 之頂點 A, B 及 C 至對邊所引之垂線交

- 於  $E$ ,  $BD$  爲外接圓之直徑, 則  $AE$  等於  $CD$ , 而  $AC$ ,  $ED$  互相二等分. ... 678
- 設三角形  $AEC$  之外心爲  $D$ , 弧  $BC$  之中點爲  $M$ , 則角  $AMD$  等於角  $B$ ,  $C$  之差之半. ... 679
- 設三角形  $ABC$  內接於圓, 由弧  $BC$  之中點  $D$ , 作  $AB$  之垂線  $DE$ , 則  $AE = \frac{1}{2}(AB + AC)$ ,  $BE = \frac{1}{2}(AB - AC)$ . 又由弧  $BAC$  之中點  $D'$  至  $AB$  作垂線  $D'E'$ , 則  $AE' = \frac{1}{2}(AB - AC)$ ,  $BE' = \frac{1}{2}(AB + AC)$ . ... 680
- 設  $A'B'C'$  爲三角形  $ABC$  內接之三角形, 則三圓  $AB'C'$ ,  $BA'C'$ ,  $CA'B'$  過同點. ... 683
- 在三角形之二邊上作正方形, 又以第三邊爲對角線, 作正方形, 則此三正方形之外接圓過同點. ... 685
- 過三角形  $ABC$  之二頂點  $B$ ,  $C$  及內心, 與切於邊  $BC$  之傍切圓之中心, 得作一圓. ... 688
- 三角形之二傍心及二頂點在一圓周上. ... 689
- 銳角三角形  $ABC$  中, (1) 垂足三角形  $DEF$  之各角  $FDE$ ,  $DEF$ ,  $EFD$  分別爲  $2\hat{A}$ ,  $2\hat{B}$ ,  $2\hat{C}$  之補角, (2)  $\triangle DEC$ ,  $\triangle AEF$ ,  $\triangle DBF$  互相等角, 且與  $\triangle ABC$  亦等角. ... 694
- 於中心爲  $O$  之圓外, 取一點  $A$ , 以  $O$  爲中心, 以前圓半徑之二倍爲半徑作圓, 截  $A$  爲中心,  $AO$  爲半徑之圓於  $B$ ,  $C$ ,  $OB$ ,  $OC$  截前圓於  $D$ ,  $E$ , 則  $AD$ ,  $AE$  爲前圓之切線. 709
- 設  $O$  爲三角形  $ABC$  之垂心, 則三角形  $ABC$ ,  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCA$  有同一九點圓. ... 711
- 有同垂心及同外接圓之一切三角形, 有同九點圓. 712
- 設  $O$  爲三角形  $ABC$  之垂心, 且在形內, 則  $O$  爲聯結垂線  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  之垂足所成三角形  $DEF$  之內心,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  則爲其傍心, 又設  $O$  在形外, 則如何? ... 714
- 聯結三角形二傍心之直線過一頂點, 而垂直於聯結內心與第三傍心之直線. ... 717
- 設  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  爲  $\triangle ABC$  之三垂線, 則由  $D$  至  $AB$ ,  $AC$ ,  $BE$ ,  $CF$  所引垂線之足, 在一直線上. ... 719
- 由三角形  $ABC$  之垂心, 至內外  $A$  角之二等分線引垂線, 則其垂足與邊  $BC$  之中點, 在一直線上. ... 720
- 設三角形  $ABC$  之垂心爲  $O$ ; 邊  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  之中點分別爲  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ;  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  之中點分別爲  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ; 則  $PFDR$ ,  $PQDE$  皆爲矩形, 其公有之對角線交點爲三角形  $ABC$  之九點圓中心. ... 724
- 三角形之垂心  $O$  與外接圓周上任意點  $P$  聯結之直線, 爲三角形關於  $P$  點之 Simson 氏線所二等分. ... 726

- 圓之內接三角形中，設各角之二等分線交於  $O$ ，又  $AO, BC, CO$  之延線，分別截圓周於  $A', B', C'$ ，則  $D$  為三角形  $A'B'C'$  之垂心。... 728
- 作三角形  $ABC$  之內切圓及三個傍切圓，命其切於邊  $BC$  之點，如圖所示，邊  $BC, CA, AB$  分別表以  $a, b, c$ ，且  $s = \frac{1}{2} \times (a+b+c)$ ，則  $BD'' = CD''' = s$ ， $BD''' = CD'' = s - a$ ， $BD = CD' = s - b$ ， $BD' = CD = s - c$ ， $DD''' = D''D' = b$ ， $DD'' = D'D' = c$ ， $DD' = b - c$ ， $D''D' = b + c$ 。又此四圓中心所決定之六直線，各為  $\triangle ABC$  之外接圓所二等分，其分點各為六個四邊形  $BOCO', COAO'', AOBO'''$ ， $ABO'O''$ ， $BCO'O'''$ ， $CAO''O'$  之外接圓之中心。又設外接圓之半徑為  $R$ ，內切圓之半徑為  $r$ ，傍切圓之半徑分別為  $r', r'', r'''$ ，由外接圓之中心至三邊所引之垂線，分別為  $p', p'', p'''$ ，延長此垂線，命其在邊與外接圓周間之部分為  $q', q'', q'''$ ，則  $r' + r'' + r''' = 4R + r$ ， $p' + p'' + p''' = R + r$ ， $q' + q'' + q''' = 2R - r$ 。... 729
- 與所設三角形全等之三角形中，設其二邊分別過二定點，則第三邊切於定圓。... 730
- 與所設三角形全等之三角形中，設其二邊分別切於二定圓，則第三邊亦切於定圓。... 731
- 三角形等於與其等底等高矩形之半。... 735
- 同底或等底及等高之兩三角形相等。... 736
- 同底或等底上之兩等積三角形，其高相等。... 737
- 同底且在其同側之兩等積三角形，或在同直線上，等底且在直線同側之兩等積三角形，其頂點聯結之直線，平行於底或含底之直線。... 738
- 鈍角三角形中，銳角對邊上之正方形，大於他二邊上正方形之和者，為此二邊中之一邊，與他邊投於此邊上之射影所包矩形之二倍。及其逆定理。... 751, 753, 840, 841
- 任意三角形中，銳角對邊上之正方形，小於他二邊上正方形之和者，為一邊與他邊投於此邊上之射影所包矩形之二倍。及其逆定理。... 752, 840, 753, 927
- 三角形二邊上正方形之和，二倍於底之半分之上之正方形，與至底所引中線上正方形之和。... 754
- 由三角形之頂點，至底引一垂線，將底分為二分，則他二邊上正方形之差，等於此二分上之正方形之差。... 774
- 由三角形之頂點至底邊引垂線，則他二邊上正方形之差，等於此垂線之垂足與底邊中點間之部分與底邊所包矩形之二倍。... 776

- 在三角形 ABC 之邊 AB 上，於 C 之異側，作正方形 AEFB，則 CE, CF 上正方形之差，等於 AC, BC 上正方形之差。  
... .. 777
- 三角形 ABC 中，中線 AD 上正方形之四倍，小於 AB, AC 上正方形和之二倍者，為 BC 上之正方形。 ... .. 779
- 三角形中，各邊上正方形和之三倍，等於各中線上正方形和之四倍。 ... .. 781
- 設 P 為三角形 ABC 之邊 BC 上之點，CP 為 BP 之二倍，則 AB 上正方形之二倍，與 AC 上正方形之和，等於六倍 BP 上之正方形與三倍 AP 上正方形之和。 ... .. 782
- 設三角形 ABC 之重心為 G，任意點為 M，則  $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + 3\overline{MG}^2$ 。 ... .. 783
- 三角形 ABC 中，設角 B 為半直角，AB 之中點為 D，由 C 至 AB 引垂線 CE，則 AC 上之正方形，等於 AD, DE 上正方形和之二倍。 ... .. 784
- 設三角形 ABC 之重心為 G，則 (1)  $\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 = 3(\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2)$ 。(2)  $\overline{BC}^2 + 3\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2 + 3\overline{BG}^2 = \overline{AB}^2 + 3\overline{CG}^2$ 。 ... .. 785
- 三角形 ABC 中，角 C 等於正三角形之一角，則 AB 上之正方形，等於 AC, CB 上正方形之和，減去矩形 AC·CB。若角 C 等於正三角形之外角，則如何？ ... .. 794
- 設三角形 ABC 中，各邊上之正方形分別為 ABDE, ACFG, BCHK，聯結 EG, FH, KD，則成六角形；此六角形各邊上正方形之和，為三角形三邊上正方形和之四倍。若  $\widehat{BAC}$  為直角，則六角形各邊上正方形之和，等於斜邊 BC 上正方形之八倍。 ... .. 798
- 試由定理證二等積三角形立於同底邊上，或同直線上之等底邊上，且在<sup>11</sup>同側，則聯結二頂點之直線，平行於底。以證聯結三角形二邊中點之直線，平行於第三邊。 802
- 由三角形之各頂點至其對邊所引之垂線與此對邊所包之矩形皆相等。 ... .. 803
- 設三角形 ABC 之重心為 G，則三角形 GAB, GBC, GCA 等積。 ... .. 804
- 三角形之三中線，將三角形之面積六等分。 ... .. 805
- 設兩等積三角形共一底，而在其異側，則聯結其頂點之直線，為底邊或其延線所二等分。並證其逆定理。 ... 806
- 兩三角形中，二邊分別相等，其夾角互為補角，則此兩三角形等積。 ... .. 807

- 聯結三角形各邊中點而成之三角形，爲本形之四分之一。  
... .. 812
- 以聯結三角形各邊中點之直線爲底，作平行四邊形，令其他底在三角形之底邊上，則此平行四邊形等於三角形之半。  
... .. 813
- 設三角形  $ABC$  之底  $BC$  之中點爲  $D$ ， $BE$  過  $AD$  之中點，交  $AC$  於  $E$ ，則三角形  $BEC$  等於  $ABE$  之二倍。  
... .. 820
- 設三角形  $ABC$  之邊  $AC$  之中點爲  $D$ ，引任意平行線  $BE$ ， $DF$ ，令分別交  $AC$ ， $AB$  或其延線於  $E$ ， $F$ ，則三角形  $EAF$  等於三角形  $ABC$  之半。  
... .. 821
- 在三角形之各邊上取  $AA'$ ， $BB'$ ， $CC'$ ，令分別等於各邊之三分之一，則三角形  $A'B'C'$  之面積，等於三角形  $ABC$  面積之三分之一。  
... .. 822
- 由三角形  $ABC$  之  $B$  及  $C$ ，於底  $BC$  之同側，引垂線  $BD$ ， $CE$ ，令等於三角形高之二倍，設  $F$  及  $G$  分別爲  $AB$ ， $AC$  之中點，則視角  $ABC$ ， $ACB$  之是否皆爲銳角，而三角形  $ABC$  等於三角形  $BDF$ ， $CEG$  之和或差。  
... .. 824
- 在三角形  $ABC$  之各邊上，作正方形  $ABDE$ ， $BCFG$ ， $ACHI$  於其外側，則三角形  $AEI$ ， $BEG$ ， $CFH$  等積。  
... .. 825
- 以三角形  $ABC$  之二邊  $AB$ ， $AC$  爲底，作平行四邊形  $ABDE$ ， $ACFG$ ，命  $DE$ ， $FG$  之交點爲  $M$ ，又以  $BC$  爲底，以平行於  $MA$  且與其等長之直線爲他邊，作平行四邊形，則  $AB$ ， $AC$  上平行四邊形之和，等於  $BC$  上之平行四邊形。  
... .. 826
- 設兩等高三三角形共一底，或其等底在一直線上，則底之平行線，爲此三角形之邊所截者相等。  
... .. 832
- 三角形二邊間平行於底之直線，爲由頂點至底邊所引之中線二等分。  
... .. 834
- 兩三角形之底，面積，及頂角相等，則此兩三角形全等。  
... .. 836
- 三角形中，一邊與他邊投於此邊上之正射影所包之矩形，等於第二邊與第一邊投於此邊上之正射影所包之矩形。  
... .. 839
- 三角形中，銳角對邊上之正方形，小於他二邊上正方形之和；鈍角對邊上之正方形，大於他二邊上正方形之和；而兩者之中，其差皆等於夾此角之一邊與他一邊投於此邊上之正射影所包矩形之二倍。試於各邊上作正方形以證之。  
... .. 840
- 設兩三角形共底且立於其同側，則聯結其邊之兩兩中點，得平行四邊形，而其面積等於兩三角形差之半。  
842



- 三角形之面積，等於其周與內切圓之半徑所包矩形之半  
分。 ... .. 882
- 在三角形 ABC 之底上，取二點 D, E, 設由 B 及 C 所引圓  
ADE 之切線相等，則 BD, CE 亦相等。 ... .. 901
- 設 ABC 為任意三角形，在邊 AB, AC 上作任意形狀大小之  
平行四邊形 AD, AF, 命其外邊 DE, FG 之交點為 M, 聯結  
MA, 在 BC 上作平行四邊形 BK; 令其邊 BH 等於且平行  
於 MA, 則平行四邊形 BK 等於平行四邊形 AD, AF 之和。  
又試由是導出 Pythagoras 氏定理。 ... .. 928
- 任意三角形 ABC 中，設 BC 投於 AB 上之射影為 BE, 又  
BC 投於 AC 上之射影為 CD, 則  $BC^2 = BA \cdot BE + CA \cdot CD$ 。 ...  
... .. 932
- 設 ABC 為任意三角形，在其各邊上就形外作正方形 BCDE,  
CAFG, ABHK, 命其外心 [兩對角線之交點] 為 X, Y, Z, 完  
成平行四邊形 FAKL, EBHM, DCGN, 命由 B 至 AE, HC 所  
引之垂線分別為 Ba, Bc, 又 AE 及 CH 之交點為 O, 則 (1)  
 $\triangle FAK = \triangle HBE = \triangle DCG = \triangle ABC$ ; (2) LA, MB, NC 分別垂  
直於 BC, CA, AB; (3) LA, MB, NC 交於同點; (4) 由  $\triangle ABC$   
之 A, B, C 所引之中線，分別垂直於 KF, HE, DG, 且是等中  
線之二倍，分別等於 KF, HE, DG; (5) BLAE, CLAD, 等為平  
行四邊形; (6) 設 AV 垂直於 BC, 且 BC 兩端之延線分別  
交 HM, GN 於 S, T, 則  $SB = CT = AV, GT = CV, SH = BV$ ;  
(7) HC 及 AE 直交於 O, GB, AD 亦直交，因而  $HS \perp LB, GS$   
 $\perp LC$ ; (8) CH, BG, LA 交於一點; (9) BO 將角 HOE 二等分;  
(10) BOY 成一直線; (11) KOD 成一直線; (12)  $BaOc$  為  
正方形; (13)  $XacZ$  為 BOY 之垂線; (14) AX, BY, CZ 交  
於同點; (15) X, Y, Z 分別為 MN, NL, LM 之中點。 936
- 設三角形之二邊，為底之平行線所截，則其一邊之二分之  
比，等於他邊之二分之比。及其逆定理。 ... ..  
... .. 974, 951, 949
- 等高三三角形之比，等於其底之比。 ... .. 953
- 等底之三角形，比例於其高。 ... .. 995
- 設兩三角形 ABC, BCD 共邊 BC, 角 ACB, BCD 相等，則兩  
三角形之比等於 AC:CD。 ... .. 997
- 三角形之內心與各項點聯結，則其所成之三角形面積，分  
別比例於原三角形之邊。 ... .. 998
- 設三角形 ABC 內之任意點為 O, 聯結 OA, OB, OC, 命 OA  
之延線與邊 BC 之交點為 X, 則  $\triangle AOB : \triangle AOC = BX : CX$ 。  
... .. 999

- 兩三角形中，其各角分別相等，則此兩三角形相似，等角之對邊為比例之對應項。 ... .. 1017
- 兩三角形中，一角相等，夾此角之邊成比例，則兩三角形相似，而對應邊之對角相等。 ... .. 1018
- 兩三角形中，其順次所取各邊成比例，則兩三角形相似，而對應邊之對角相等。 ... .. 1019
- 兩三角形中，一角相等，夾他一角之邊成比例，而等角之對邊為對應項，則兩三角形之第三角或相等，或互為補角；相等時兩三角形相似。 ... .. 1020
- 前題中，有以下三條件之一，則兩三角形相似。(1)等角為直角或鈍角，(2)他一組對應邊之對角俱為銳角，俱為鈍角，或其一為直角。(3)各三角形中，等角之對邊，不小於他所設邊。 ... .. 1021
- 由三角形之任意角頂，引底之垂線，則三角形外接圓之直徑，為垂線與三角形夾該角之二邊之第四比例項。 ... .. 1026
- 二等分三角形之頂角或其外角之直線，與底之交點，將底按三角形他二邊之比內分或外分。反之，三角形中，按二邊之比內分或外分底邊之點與頂點聯結之直線，將頂角或其外角二等分。 ... .. 1027
- 設三角形 ABC 之邊 AC 為邊 BC 之二倍，角 C 及其外角之二等分線與 AB 及其延線之交點為 D, E, 則三角形 CBD, CAD, CAB, CDE 之比，如 1, 2, 3, 4 之比。 ... .. 1030
- 銳角三角形 ABC 中，由 A 及 B 至對邊引垂線 AD, BE, 則三角形 CDE, ABC 相似。 ... .. 1031
- 聯結三角形三邊中點而得之三角形，與原三角形相似。 ... .. 1032
- 設 CA, CB 為圓中互相垂直之半徑，DE 為任意弦，BD, BE 分別與 AC 交於 F, G, 則三角形 BFG, BDE 相似。 1036
- 過一三角形之邊，分別平行或垂直於他三角形之邊，則兩三角形相似。 ... .. 1038
- 設三角形之三邊與他三角形之三邊，依同向交於等角，則兩三角形相似。 ... .. 1039
- 三角形 ABC 中，引邊 AB, AC 之垂線 BD, CD, 又由 C 引 AD 之垂線 CE, 命其與 AB 之交點為 E, 則三角形 ABC, ACE 相似。 ... .. 1048
- 由相似三角形對應角之頂點至對邊所引垂線之比，等於對應邊之比。 ... .. 1049
- 由相似三角形之對應角頂引直線，令與對應邊所成之角

- 相等，且與邊交，則是等線之比，等於三角形各對應邊之比。 ... .. 1050
- 相似三角形內切圓或外接圓半徑之比，等於三角形各對應邊之比。 ... .. 1051
- 設兩三角形  $ACB, ADB$  共底  $AB$ ；由  $AB$  上之點  $E$ ，引  $AC, AD$  之平行線，令與  $BC, BD$  分別交於  $F, G$ ，則  $FG$  平行於  $CD$ ，但上定理中，假定兩三角形在公底  $AB$  之兩側，若在一側如何？ ... .. 1053
- 設兩等底三角形在同平行線間，平行於底引任意直線，則此直線自兩三角形截得之三角形相等。 ... .. 1054
- 設兩等積三角形共底，且在底之同側，則平行於底之直線，在各三角形二邊間之部分相等。 ... .. 1055
- 試由定理三角形一角之二等分線，分對邊於他二邊之比，且其逆定理亦成立，以證三角形各角之二等分線過同點。 ... .. 1058
- 試由定理三角形中一角外角之二等分線，外分對邊於他二邊之比，以證二等邊三角形頂角外角之二等分線，平行於底。 ... .. 1059
- 在三角形  $ABC$  之二邊  $AB, AC$  上取相等之  $BD, CE$ ，命  $DE, BC$  之交點為  $F$ ，則  $AB:AC=EF:DF$ 。 ... .. 1064
- 在三角形  $ABC$  之一邊  $AC$  上取一點  $A'$ ，在  $CB$  之延線上取  $BS'=AA'$ ，則  $A'B'$  為  $AB$  所截成之二分之比，等於  $CB$  與  $CA$  之比。 ... .. 1065
- 設三角形  $ABC$  角  $A$  之二等分線與底邊之交點為  $D$ ，命底邊之中點為  $O$ ，則  $OB:OD=AB+AC:AB \sim AC$ 。 ... 1066
- 作同底同側之兩等積三角形  $ACB, ADB$ ，由  $AC, BD$  之交點  $O$ ，平行於  $AD, BC$ ，分別引  $OE, OF$ ，命其與  $AB$  延線之交點分別為  $E, F$ ，則  $AE, BF$  相等。 ... .. 1067
- 1027 題 [三角形之頂角或頂角外角之二等分線與底之交點，按三角形之邊之比，將底內分或外分] 中，若三角形之二邊相等，則如何？ ... .. 1077
- 設由三角形之頂點至底邊所引之垂線在形內，且為底邊二分之比例中項，則此三角形為直角三角形。 ... 1085
- 兩三角形中，一角相等，他一角互為補角，則第三角之二邊成比例。 ... .. 1086
- 分三角形之二邊於同比之直線，將由頂點至底邊所引一切直線分於同比。 ... .. 1088
- 在三角形  $ABC$  之二邊  $AB, AC$  上，分別取二點  $D, E$ ，分  $AB, AC$  成比例，則  $BE, CD$  之交點，在由  $A$  所引之中線上。 ...

- ... .. 1090
- 設三角形  $ABC$  之底  $BC$  之中點為  $D$ , 角  $ADC, ADB$  之二等分線與  $AC, AB$  之交點為  $E, F$ , 則  $EF$  平行於  $BC$ . 又設  $DE, DF$  之延線與  $AB, AC$  之延線之交點為  $E', F'$ , 則  $E'F'$  平行於  $BC$ . ... .. 1092
  - 設直線  $DEF$  與三角形之邊  $BC, CA, AB$  分別交於  $D, E, F$ , 且與  $AB, AC$  成等角, 則  $BD:CD=BF:CE$ . ... .. 1093
  - 設  $D$  為三角形  $ABC$  之底  $BC$  上之點, 則三角形  $ABD, ACD$  之外接圓直徑之比等於  $AB:AC$ . 設  $D$  在  $BC$  之延線上, 則如何? ... .. 1094
  - 設  $D$  為三角形  $ABC$  之邊  $AC$  上之點,  $E$  為他邊  $AB$  上之點,  $BD, CE$  按  $4:1$  之比互分於其交點, 則  $D, E$  分別按  $1:3$  之比分  $AC, AB$ . ... .. 1095
  - 三角形  $ABC$  中, 作角  $A$  之二等分線之平行線, 命其與  $BC, CA, AB$  之交點, 分別為  $D, E, F$ , 則  $BD$  與  $CD$  之比等於  $FB$  與  $EC$  之比. ... .. 1096
  - 作三角形  $ABC$  之外接圓, 過  $B$  點引  $A$  點上切線之平行線, 命交  $AC$  於  $D$ , 則  $AB$  為  $AC$  與  $AD$  之比例中項. 1097
  - 設三角形  $ABC$  中, 角  $A$  及其外角之二等分線, 分別與邊  $BC$  及其延線交於  $D, D'$ , 又與外接圓周交於  $E, E'$ , 則  $BE$  為  $EA$  與  $ED$  之比例中項,  $BE'$  為  $E'A$  與  $E'D'$  之比例中項. ... .. 1098
  - 在三角形  $ABC$  之邊  $BC$  上作正方形  $BCDE$ , 聯結  $AD, AE$ , 命其與  $BC$  之交點分別為  $P, Q$ , 則  $PQ$  為  $ABC$  之內接正方形之一邊. ... .. 1099
  - 作一羣三角形, 令第一三角形之中線, 分別等於第二三角形之三邊, 第二三角形之中線, 分別等於第三三角形之三邊, 以下仿此, 則由是等三角形中, 一間一取得者相似. ... .. 1111
  - 設  $ABC$  為圓之內接三角形,  $A$  上之切線  $AD$  與  $BC$  之延線交於  $D$ , 則三角形  $ABD, ACD$  之外接圓直徑之比, 等於  $AD, CD$  之比. ... .. 1121
  - 兩三角形或兩平行四邊形中, 一角相等, 則其面積之比, 等於此角兩側各邊之比之複比. ... .. 1145
  - 兩三角形或兩平行四邊形之比, 等於其底之比及高之比之複比. ... .. 1148
  - 設三角形各角之大小一定, 其一角頂在定點, 他一角頂恆在定直線上, 則其餘一角頂亦恆在定直線上. 若第二角頂恆在一圓周上, 則第三角頂亦恆在一圓周上. ... 1125

- 相似三角形之比，等於其對應邊之二乘比 ... 1141
- 試由定理兩三角形中，一角相等，則兩三角形之比，等於兩形中等角夾邊之比之複比，並仿此定理之證法，以證定理兩平行四邊形中，一角相等，則兩平行四邊形之比，等於兩形中等角夾邊之比之複比。 ... 1151
- 一角相等之兩三角形相等，則兩形中夾等角之一邊之比，等於他邊之反比，試先直接證之，復由定理兩三角形中，一角相等，則兩形之比，等於兩形中等角夾邊之比之複比證之。 ... 1152
- 下定理之逆定理如何：一角相等之兩平行四邊形之比，等於兩形中等角夾邊之比之複比。 ... 1153
- 定理一角相等之兩平行四邊形相等，則兩形中夾等角之二邊，其一之比等於他一之反比之逆定理有二，試述之。又何者為真。 ... 1154
- 設三角形 ABC 中，由 A, B, C 分別至對邊所引之垂線是為 D, E, F，命此三垂線之交點為 O，則 DO, DA 所包之矩形，等於 DE, DF 所包之矩形。 ... 1160
- 設三角形 ABC 之二邊 BC, AC 之中點為 E, F，命 AE, BF 之交點為 G，試比較三角形 AGB, EGF 之面積。 ... 1161
- 設三角形 ABC 中，角 C 為直角，BC 為 AC 之三倍，則 AB 上之正三角形等於 AC 上之正三角形之十倍。 ... 1162
- 設兩三角形 [或平行四邊形] 相等，則其高之比，等於底邊之比之反比。 ... 1164
- 由三角形之二頂點至對邊所引垂線之比，等於此對邊之比之反比。 ... 1165
- 相似三角形之比，等於由對應頂點至其對邊所引垂線之二乘比。 ... 1170
- 設三角形 ABC 中，由各角頂至對邊所引垂線之足聯結而成之三角形為 DEF，則三角形 ABC: 三角形 DBF 等於 AB:BD 之二乘比，四邊形 AFDC: 三角形 BFD 等於 AD:BD 之二乘比。 ... 1172
- 以三角形 ABC 之一角 A，或其補角作頂角，以等於 AB, AC 比例中項之直線為二邊，作二等邊三角形，則此形與原三角形等積。 ... 1173
- 設兩三角形 ABC, BCD 公有頂點 C 及邊 CB，角 ACB, BCD 相等，且邊 BD 與 BC，邊 BA 與 AC 相垂直，則三角形 ABC 與 DBC 之比，等於 CA 與 CD 之比。 ... 1174
- 在三角形 ABC 之三邊上，分別取 D, E, F 三點，命 AD:DB

- $=BE:EC=CF:FA=1:2$ , 則三角形  $ABC$  與  $DEF$  之比如何?  
 ... .. 1175
- 設直線  $AD$  將三角形  $ABC$  之角  $A$  二等分, 與邊  $BC$  交於  $D$ , 直線  $DE, DF$  分別將角  $ADB, ADC$  二等分, 且交  $AB, AC$  於  $E, F$ . 求證三角形  $BEF$  與三角形  $CEF$  之比, 等於  $BA$  與  $AC$  之比. ... .. 1176
- 共底邊之兩三角形之比, 等於聯結其頂點之直線為底邊所分二分之比. ... .. 1177
- 設兩三角形  $ABC, ABF$  在同底  $AB$  上, 其比為  $2:1$ , 又設  $AF, BF$  之延線, 分別交  $BC, AC$  於  $D, E$ , 在  $FB$  上取  $FG$ , 令等於  $FE$ , 命  $BG$  之中點為  $O$ , 則  $BO:BE=DF:DA$ . ... 1182
- 由三角形之三頂點及重心, 至不截三角形之某一直線, 引四平行直線, 則由重心所引直線之三倍, 等於他三直線之和. 若直線截三角形, 則如何? ... .. 1184
- 引一直線, 令交三角形  $ABC$  之邊  $BC, CA, AB$  或其延線於  $A', B', C'$ , 則三比  $AB':B'C, CA':A'B, BC':C'A$  之複比為等比. 又其逆定理如何? ... .. 1186
- 由三角形  $ABC$  之各頂點至對邊引直線  $AA', BB', CC'$ , 令交於一點, 則  $AB':B'C, CA':A'B, BC':C'A$  之複比為等比. 又其逆定理如何? ... .. 1187
- 設兩三角形  $ABC, A'B'C'$  中, 頂點與頂點聯結之直線  $AA', BB', CC'$  過同點, 則對應邊之交點  $P, Q, R$  在一直線上. 反之, 設兩三角形邊之交點  $P, Q, R$  在一直線上, 則聯結對應頂點之直線過同點. ... .. 1188
- 三角形各外角之二等分線, 與邊之三交點在一直線上. ... .. 1189
- 設三角形  $ABC$  中, 角  $A$  外角之二等分線與底之延線交於  $D$ , 外接圓周交於  $E$ , 則矩形  $AB \cdot AC$  等於矩形  $AE \cdot AD$ . ... .. 1196
- 相似三角形之比, 等於其內切圓或外接圓半徑之比之二乘比. ... .. 1198
- 由三角形  $ABC$  之邊  $BC$  上之一點  $D$ , 平行於  $AB, AC$  引  $DF, DE$ , 則  $AB \cdot AE + AC \cdot AF = \overline{AD}^2 + DB \cdot DC$ . ... .. 1200
- 三角形外接圓直徑及內切圓半徑所包之矩形, 等於外接圓中過內切圓中心之弦上二分[中心所分者]所包之矩形. ... .. 1203
- 以銳角三角形  $ABC$  之邊  $BC$  為直徑作圓, 在邊  $AB$  上取  $AD$ , 令等於由  $A$  所引之切線, 又引  $DE$ , 令垂直於  $AB$ , 命其與  $AC$  延線之交點為  $E$ , 則三角形  $ABC, ADE$  等積. ... ..

- ... .. 1204
- 設兩三角形  $ABC$ ,  $A'B'C'$  內接於同圓, 且等積, 則矩形  $AB \cdot AC$ : 矩形  $A'B' \cdot A'C' = B'C':BC$ . ... .. 1205
- 設三角形  $ABC$  中, 角  $A$  之二等分線交外接圓周於  $D$ , 聯結  $BD$ , 則  $AD \cdot BC = BD(AB + AC)$ . ... .. 1210
- 設三角形  $ABC$  中, 角  $A$  [或其外角] 之二等分線交  $BC$  於  $P$ , 則  $AP$  上之正方形, 等於矩形  $AB \cdot AC$  與矩形  $PB \cdot PC$  之差. ... .. 1211
- 由三角形  $ABC$  之頂點  $A$  至底  $BC$ , 引直線  $AD$ , 又引外接圓之弦  $AE$ , 令角  $BAD$ ,  $CAE$  相等, 則矩形  $AB \cdot AC$  等於矩形  $AD \cdot AE$ . ... .. 1212
- 由圓之內接三角形  $ABC$  之頂點  $A$ , 平行於  $B$  及  $C$  上之切線, 分別引  $AD$ ,  $AE$ , 令交底邊  $BC$  於  $D$  及  $E$ , 則矩形  $BD \cdot CE$ , 等於  $AD$  或  $AE$  上之正方形,  $BD:CE$  等於  $AB:AC$  之二乘比. ... .. 1213
- 設  $AE$  為三角形  $ABC$  外接圓之直徑, 則矩形  $AB \cdot AC$  與三角形  $ABC$  二倍之比, 等於  $AE$  與  $BC$  之比. ... 1215
- 設三角形  $ABC$  內接於圓, 邊  $BC$  之延長交  $A$  上之切線於  $D$ , 則  $CD:BD$  等於  $CA:BA$  之二乘比. ... .. 1216
- 三角形之內切圓與三邊之切點, 分別與其對角頂點聯結之三直線過同點. ... .. 1217
- 設三角形  $ABC$  之內切圓中心為  $O$ , 則  $\overline{AO}^2:AB \cdot AC = s - a$ . ... .. 1222
- 設三角形傍切圓之半徑, 等於內切圓半徑之三倍, 則此三角形之三邊, 成等差級數. ... .. 1277
- 設三角形  $ABC$  中, 由各頂點至對邊所引之三直線  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$  交於形內之一點  $O$ , 則  $\frac{Oa}{Aa} + \frac{Ob}{Bb} + \frac{Oc}{Cc} = 1$ . 又設  $O$  在形外, 則如何? ... .. 1281
- 由三角形  $ABC$  內之一點  $O$  至三邊, 引三直線  $Oa$ ,  $Ob$ ,  $Oc$ , 由各角頂分別平行於是等直線, 引直線  $Aa'$ ,  $Bb'$ ,  $Cc'$ , 則  $\frac{Oa}{Aa'} + \frac{Ob}{Bb'} + \frac{Oc}{Cc'} = 1$ . 又設點  $O$  在形外, 則如何? ... 1282
- 三角形之二邊與底邊上之中線, 及過頂點之底之平行線, 將同平面上之一切直線, 分於調和. ... .. 1287
- 命三角形之外接圓及內切圓之半徑分別為  $R$ ,  $r$ , 其中心分別為  $O$ ,  $I$ , 則  $OI^2 = R^2 - 2Rr$ . 又此題中內切圓代以中心為  $E'$ , 半徑為  $r_1$  之傍切圓, 則  $\overline{OE'}^2 = R^2 + 2Rr_1$ . 1283

- ①由定直線外之一定點至此直線，引斜線及垂線，則諸斜線中，其足至垂足之距離等者，其線亦等，其距離大者，大於距離小者。試證之；並證其逆定理。... 205
- ②由二等邊三角形之頂點，至底上任意點所引之線分，小於等邊，至底之延線上之任意點所引之線分，大於等邊。... 206
- ③距二定點 A, B 等遠之點，在線分 AB 之垂直二等分線上。... 207
- ④設 O 為有限直線 AB 之中點，OC 為 AB 之垂線，P 為 OC 上之點，則 PA = PB。試證之。... 208
- ⑤由三角形 ABC 之角頂 A，向底邊所引之垂線 AD，若將底邊二等分，則其三角形為二等邊。... 209
- ⑥設三角形頂角之二等分線，將底二等分，則其二邊相等。... 210
- ⑦設三角形 ABC 中，邊 AB 等於邊 AC，M 為邊 AC 上之任意點，則 MB 大於 MC。... 211
- ⑧一已知直線上，距已知二點等遠之點，大概唯一。212
- ⑨試由以下二法，證明三角形三角之和，等於二直角。
- (1) 過頂點引平行於底之直線。
- (2) 聯結頂點與底上任意點。... 213
- ⑩三角形 ABC 中，角 A 及角 B 之二等分線所成之角 AOB 恆大於直角。試證之。... 214
- ⑪由三角形 ABC 邊 AB 上之一點 D，引直線 DEF，命與 BC 交於 E，與 AC 之延線交於 F，則  $\hat{A}BE$  及  $\hat{A}DE$  之二等分線所成之二角等於  $\hat{A}CE$  及  $\hat{A}FE$  之二等分線所成之二角。... 215
- ⑫三角形二角之二等分線，必交於形內。... 216
- ⑬設二等邊三角形之一角，等於正三角形之一角，則此三角形為正三角形。... 217
- ⑭在二等邊三角形 ABC 之等邊 AB, AC 上，取相等之線分 AD, AE，引線分 DE，則 DE 平行於底 BC。... 218
- ⑮設三角形 ABC 角 A 之二等分線與邊 BC 之交點為 D，而角 B 大於角 C，則角 ADB 為銳角，角 ADC 為鈍角。又若角 B, C 相等，則如何？... 363
- ⑯設三角形 ABC 角 A 之二等分線與邊 BC 之交點為 D，而邊 AC 大於邊 AB，則角 ADC 為鈍角。反之，若角 ADC 為鈍角，則 AC 大於 AB。... 364
- ⑰設兩二等邊三角形之底角，互為餘角，則頂角互為補角。... 365



- 設三角形  $ABC$  之三邊  $BC, CA, AB$  之中點，分別爲  $D, E, F$ ；由  $E, F$ ，在三角形外，分別引  $AC, AB$  之垂線  $EG, FH$ ，令其分別等於  $AC, AB$  之半，則三角形  $DEG, DFH$  全等，且角  $GDH$  爲直角。... 366
- 設兩三角形  $ABC, ADE$  公有一頂角，且  $AD = AE = \frac{1}{2}(AB + AC)$ ，則三角形  $ADE$  之底邊  $DE$ ，將三角形  $ABC$  之底邊  $BC$  二等分。... 367
- 三角形  $ABC$  中，設  $A$  爲直角，角  $B$  之二等分線與邊  $AC$  之交點爲  $E$ ，又由  $A$  至斜邊  $BC$  所引之垂線與  $BE$  之交點爲  $O$ ，則  $AO, AE$  相等。... 368
- 在一角之一邊上取任意點，由此至他邊引垂線，復由其足至前邊引垂線，則此二垂線所成角之二等分線，在其同側與二邊成等角。... 369
- 直角三角形直角之二等分線，將由同角頂所引垂線與中線所成之角二等分。... 370
- 由三角形之二角頂，向對邊所引之直線，不能互相二等分。... 371
- 所設二直線爲橫截線所截時，在橫截線同側之二內角之二等分線，交於所設二直線所成角之二等分線上。... 372
- 設三線分  $AA', BB', CC'$  交於一點  $O$ ，且  $O$  爲各線分之中點，則兩三角形  $ABC, A'B'C'$  全等。又設三點  $A, B, C$  在一直線上，則  $A', B', C'$  亦在一直線上。... 373
- 設三角形  $ABC$  中，由二角頂  $B, C$  至對邊所引之垂線爲  $BE, CF$ ，則聯結  $EF$  之中點與  $BC$  中點之直線，垂直於  $EF$ 。... 374
- 設三角形  $ABC$  之各外角二等分線所成之三角形爲  $DEF$ ，三角形  $DEF$  各外角之二等分線所成之三角形爲  $A'B'C'$ ，則角  $A'$  之大在角  $A$  與  $\frac{1}{2}\pi$  之間。... 375
- 設三角形  $ABC$  中，邊  $AB$  之中點爲  $D$ ，在邊  $AC$  上取線分  $AE$ ，令爲  $AC$  之三分之二；命  $CD, BE$  之交點爲  $O$ ，則  $OE$  爲  $BE$  之四分之一。... 376
- 設三角形  $ABC$  之角  $C$  爲  $60^\circ$ ，則  $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 - AC \cdot CB$ 。... 347
- 設三角形  $ABC$  之角  $C$  爲  $120^\circ$ ，則  $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + AC \cdot CB$ 。... 348
- 兩三角形等高等積，則必等底。... 349
- 設兩等積三角形  $ACB, ADB$  共底，且在其同側，由  $AC, BD$  之交點  $O$ ，平行於  $DA, CB$ ，引二直線，命其與  $AB$  之交點，

- 分別爲 E, F, 則  $AE=BF$ . ... .. 853
- 設由三角形之二頂點至對邊之垂線相等, 則三角形爲二等邊. ... .. 854
- 設三角形 ABC 之邊 AB, AC 之中點, 分別爲 X, Y, 又 BY, CX 之交點爲 O, 則三角形 AXO 爲三角形 XOY 之三倍. ... .. 855
- 折一紙角, 又再折之, 令兩折痕平行, 所折紙角在第二折痕上, 則第一折痕所截去之三角形, 爲兩折痕間面積之三分之一. ... .. 856
- 設兩三角形 ABC, A'B'C' 中, 角 A 與角 A' 相等, 角 B 與角 B' 互爲補角, 則 BC 與 B'C' 之比, 等於 AC 與 A'C' 之比. ... .. 1006
- 設 O 爲三角形 ABC 內之一點, 角 BOC, COA, AOB 之二等分線與邊 BC, CA, AB 之交點分別爲 P, Q, R, 則  $(BP:PC)(CQ:QA)(AR:RB)=1$ . ... .. 1008
- 設三角形 ABC 之底 BC 之中點爲 D, 過 D 引一直線, 令交邊 AB, AC 或其延線於 E, F, 又交過 A 平行於 BC 之直線於 G, 則點 E, F 將直線 DG 分於調和. ... .. 1009
- 設三角形 ABC 中, 角 B 及角 C 之二等分線與其對邊 AC, AB 之交點爲 D 及 E, 線分 DE 平行於底 BC, 則三角形爲二等邊. ... .. 1128
- 由三角形 ABC 之各頂點至其對邊 [或其延線], 引直線 AA', BB', CC', 令其長皆等於所設長 l. 更由三角形內之任意點 O, 平行於 AA', BB', CC', 分別引 Oa, Ob, Oc, 命其與 BC, CA, AB 之交點爲 a, b, c, 則 Oa, Ob, Oc, 之和, 等於所設長 l. ... .. 1130
- 設三角形 ABC 之重心爲 G, 又 BC, CA 之中點爲 E, F, 試比較  $\triangle ABC$ ,  $\triangle GEF$  之面積. ... .. 1239
- 由三角形 ABC 之底 BC 上之點 P, 引邊 AB, AC 之平行線, 命其與 AC, AB 之交點分別爲 N, M, 則三角形 AMN 爲三角形 BPM, PCN 之比例中項. ... .. 1241
- 設三角形 ABC 中, 角 A 之二等分線與邊 BC 之交點爲 D, 與外接圓之交點爲 E, 則  $AB \cdot AC = AD \cdot AE$ . ... .. 1243
- 設銳角三角形 ABC 中, BD, CE 分別爲由 B, C 至對邊所引之垂線, F 爲邊 BC 之中點, 則角 FED, EDF 各等於角 A. ... .. 542
- 三角形之底邊與頂角有定大時, 由兩底角之頂點至對邊所引垂線之足聯結之直線有定長. ... .. 543
- 設過三角形 ABC 之二角頂 B, C 之圓周與二邊 AB, AC 之

- 交點爲  $B', C'$ , 則聯結  $B', C'$  之直線, 恆平行於定直線  
 ... .. 544
- 設  $B, C$  爲在一線分  $AD$  異側之二點,  $AD$  之中點爲  $M$ , 則  $\triangle MBC$  之面積, 爲兩三角形  $ABC, DBC$  差之半, 或和之半. ... .. 859
- 在三角形  $ABC$  各邊之延線上, 取  $CD, AE, BF$ , 令分別等於各邊, 則三角形  $DEF$  等於三角形  $ABC$  之 7 倍. ... 863
- 設三角形  $ABC$  之邊  $BC$ , 三等分於  $D, E$ , 則  $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2$ . ... .. 871
- 設三角形  $ABC$  中,  $AC$  大於  $BC$ , 由角頂  $A, B$  至對邊引垂線  $AD, BE$ , 則  $AC \div BE$  大於  $BC + AD$ . ... .. 1011
- 聯結三角形  $ABC$  之角頂  $A$  及底邊上之點  $D$ , 命  $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ADC$  之重心分別爲  $G, G', G''$ , 則  $G$  按  $BD, CD$  之反比內分  $G'G''$ . ... .. 1013
- 三角形  $ABC$  中, 由邊  $AB$  上之一點  $P$ , 平行於邊  $BC$  引直線  $PQ$ , 命其與邊  $AC$  之交點爲  $Q$ ; 復由  $Q$  平行於邊  $AB$  引直線  $QR$ , 命其與邊  $BC$  之交點爲  $R$ ; 復由  $R$  平行於邊  $CA$  引直線, 若此直線過點  $P$ , 則  $P$  爲  $AB$  之中點. ... 1014
- 設三角形  $ABC$  之邊  $BC, CA, AB$  之長, 分別表以  $a, b, c$ , 按比  $m:n$  內分邊  $BC$  於  $D$ , 假定  $CD = x, BD = y [x:y = n:m]$ ,  $AD = z$ , 則  $mb^2 + nc^2 = mx^2 + ny^2 + (m+n)z^2 = \frac{mn}{m+n}a^2 + (m+n)z^2$ . ... .. 1015
- 三角形  $ABC$  中, 過邊  $BC$  之中點  $D$  引一直線, 命其與邊  $AC, AB$  或其延線之交點分別爲  $E, F$ , 則  $AE : CE = AF : BF$ .  
 ... .. 1135
- 平行於三角形  $ABC$  之底邊  $BC$ , 引直線  $DE$ , 命其與  $AB, AC$  之交點分別爲  $D, E$ ; 聯結  $DC$  及  $BE$ , 命其交點爲  $F$ ; 聯結  $AF$ , 延長之, 令交  $DE$  及  $BC$  於  $H$  及  $K$ , 則  $A, F, H, K$  成調和點列. ... .. 1136
- 在三角形  $ABC$  之中線  $AD$  上取點  $O$ , 聯結  $OB, OC$ , 命其與邊  $AB, AC$  之交點, 分別爲  $E, F$ , 則  $EF$  平行於  $BC$ . 1137
- 在三角形  $ABC$  之邊  $AB$  上取點  $D$ , 在  $AC$  之延線上取點  $E$ , 平行於  $AB$  引  $CP$ , 令交  $DE$  於點  $P$ , 而  $AB : BD = AD : CP$ , 則三角形  $ADE$  等於三角形  $ABC$ . ... .. 1255
- 設三角形  $ABC$  中, 頂角  $A$  之二等分線, 與底邊  $BC$  交於點  $P$ , 又頂角  $A$  之外二等分線與  $BC$  之延線交於點  $Q$ , 命  $PQ$  之中點爲  $O$ , 則 (1)  $OB \cdot OC = \overline{OA}^2$ , (2)  $OB : OC = \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2$ .

- ... .. 1258
- 設三角形  $ABC$  之垂心為  $H$ , 外心為  $O$ , 角頂  $A, B, C$  之對邊之中點, 分別為  $A', B', C'$ , 則兩三角形  $HAB, OA'B'$  相似, 其相似比為  $2:1$ ; 重心  $G$  在  $OH$  上,  $OG$  等於  $OH$  之三分之一. ... .. 1259
- 三角形  $ABC$  中, 平行於邊  $BC$  引一直線, 令交  $AB, AC$  於  $D, E$ , 則  $BE$  為直徑之圓與  $CD$  為直徑之圓之根軸, 為由  $A$  至  $BC$  所引之垂線. ... .. 1272

## 11. 平行四邊形

- 平行四邊形中, 相隣二角互為補角, 相對二角相等. 220
- 平行四邊形之一角, 若為直角, 則他角皆為直角. ... 221
- 平行四邊形之二組對邊各相等, 且其各對角線分四邊形為二全等三角形. ... .. 222
- 設兩平行四邊形中, 其一之二隣邊, 分別等於他一之二隣邊, 且其間之角亦等, 則此二平行四邊形全等. ... 224
- 設四邊形之二對邊相等且平行, 則此四邊形為平行四邊形. ... .. 226
- 四邊形之隣角皆為補角, 則此四邊形為平行四邊形. ... .. 233
- 四邊形之各對角, 分別相等, 則四邊形為平行四邊形. ... .. 234
- 設四邊形之二雙對邊各相等, 則此四邊形為平行四邊形. ... .. 235
- 聯結平行四邊形對邊中點之直線, 將對角線二等分. ... .. 236
- 平行四邊形之對角線, 互相二等分. 及其逆定理. ... .. 239, 240
- 在平行四邊形  $ABCD$  之對角線  $AC$  上, 取二點  $E, F$ , 令  $AE = CF$ , 則  $BEDF$  亦為平行四邊形. ... .. 243
- 由平行四邊形  $ABCD$  之對角線  $AC$  上, 取  $AA' = CC'$ , 又由  $BD$  取  $BB' = DD'$ , 則  $A'B'C'D'$  亦為平行四邊形. ... 244
- 設平行四邊形之一對角線, 等於本形之一邊, 則他對角線大於各邊. ... .. 263
- 設平行四邊形  $ABCD$  之對邊  $AD, BC$  之中點為  $E, F$ , 則二直線  $BE, DF$  將  $AC$  三等分. ... .. 269
- 設過平行四邊形對角線交點  $O$  之直線與角之對邊分別交於  $E$  及  $F$ , 則  $O$  為  $EF$  之中點, 又  $EF$  將平行四邊形分為二個相等四邊形. ... .. 270

- 設二直線過平行四邊形對角線之交點，則聯結其與各邊之交點而得之四邊形，為平行四邊形。... 271
- 過平行四邊形對角線之交點，引互相垂直之二直線，聯結其與各邊之交點，則所生之四邊形為菱形。... 272
- 二對角線及其夾角相等之兩平行四邊形全等。... 273
- 平行四邊形  $ABCD$  之對邊  $AD$  及  $BC$  之中點，與其對邊之兩端聯結而得之四直線，成平行四邊形。... 274
- 在平行四邊形  $ABCD$  之各邊  $AB, BC, CD, DA$  上，取  $K, L, M, N$  點，令  $AK=BL=CM=DN$ ，則  $KLMN$  為平行四邊形。... 275
- 在平行四邊形  $ABCD$  之對邊  $AB, CD$  上，依反對方向，任取等長之  $AE$  及  $CF$ ，又在對邊  $AD, BC$  上依反對方向，任取等長之  $AH, CG$ ，則  $EGFH$  為平行四邊形。此二平行四邊形之中心在同點。... 288
- 設一平行四邊形之各角點，在他平行四邊形之各邊上，則二平行四邊形之對角線，交於同點。... 289
- 欲決定平行四邊形，須知邊與角若干？... 340
- 由平行四邊形各角之二等分線所成之四邊形為矩形，其兩對角線與本形之各邊平行，而等於本形之兩隣邊之差。... 342
- 在平行四邊形之各邊上，向外方作直角二等邊三角形，則其各直角頂為一正方形之各角頂。... 404
- 設  $ABCD$  為平行四邊形，過  $A, B$  之圓與  $AD$  及  $BC$  分別交於  $E$  及  $F$ ，則外接於四邊形  $EFCD$ ，得作一圓。... 660
- 設外接於一平行四邊形得作一圓，則此四邊形為矩形。... 661
- 圓之內接或外切平行四邊形，其對角線過圓之中心。... 662
- 立於同底上，且同在三平行線間之平行四邊形相等。... 732
- 平行四邊形等於與其等底等高之矩形。... 733
- 等底等高之平行四邊形相等，而等高之二平行四邊形中，底之大者較大，等底之二平行四邊形中，高之大者較大。... 734
- 任意平行四邊形中，餘形相等。... 740
- 平行四邊形中，各邊上正方形之和，等於兩對角線上正方形之和。... 788
- 平行四邊形之二對角線，分平行四邊形為四等積三角形。... 815

- ① 在平行四邊形  $ABCD$  之對角線  $AC$  上取點  $E$ , 聯結  $EB, ED$ , 則兩三角形  $ECB, ECD$  等積. 又設  $E$  在  $AC$  上, 則三角形  $EAB, ECD$  之和, 等於三角形  $EAD, EBC$  之和, 而各為平行四邊形之半. 若  $E$  在  $AC$  之延線上, 則和變為差. ... 816
- ② 過平行四邊形  $ABCD$  之角頂  $A$ , 引任意直線, 命其與  $BC, DC$  或其延線之交點為  $P, Q$ , 則兩三角形  $ABQ, ADP$  相等. ... 818
- ③ 設平行四邊形  $ABCD$  之對角線交點為  $O$ , 三角形  $OAB$  內之任意點為  $P$ , 則三角形  $APB, CPD$  之差, 等於三角形  $APC, BPD$  之和. ... 819
- ④ 設平行四邊形為  $ABCD$ , 任意點為  $O$ , 則三角形  $OAB, OCD$  之和或差, 等於平行四邊形之半. ... 823
- ⑤ 平行四邊形  $ABCD$  中, 引對角線  $AC$ , 過三角形  $ABC$  內之點  $P$ , 引各邊之平行線, 命其與  $AB, CD$  之交點為  $Q, R$ , 與  $AD, BC$  之交點為  $S, T$ , 則平行四邊形  $QT$  小於  $RS$ . 又設  $QR, ST$  分別與  $AC$  交於  $M, N$ , 則平行四邊形  $QT, RS$  之差, 等於三角形  $QNR$ , 或  $SMT$  之二倍. ... 828
- ⑥ 在平行四邊形  $ABCD$  內取點  $K$ , 引各邊之平行線  $HKG, EKf$ , 若餘形  $BK =$  餘形  $DK$ , 則  $K$  在對角線  $AC$  上. 924
- ⑦ 平行四邊形  $ABCD$  中, 平行於其二隣邊  $AB, BC$ , 引二直線  $EF, GH$ , 則四個平行四邊形中, 二對角線  $EH, GF$  與  $ABCD$  之對角線交於一點. ... 925
- ⑧ 設  $P$  為平行四邊形  $ABCD$  平面上之一點, 則三角形  $PBD$  為兩三角形  $PAB, PBC$  之和或差. ... 930
- ⑨ 等高平行四邊形之比, 等於其底之比. ... 953
- ⑩ 等底之二平行四邊形, 比例於其高. ... 995
- ⑪ 平行四邊形中, 沿對角線之平行四邊形, 與原形相似, 又自身相似. ... 1042
- ⑫ 兩平行四邊形中, 一角相等, 一雙隣邊成比例, 則兩形相似. ... 1043
- ⑬ 由平行四邊形  $ABCD$  之一角頂  $D$  引一直線, 命交  $AB$  於  $E$  及  $CB$  之延線於  $F$ , 則  $EA:AD=AB:CF$ . ... 1072
- ⑭ 設兩平行四邊形相似, 公有一角, 在相似之位置, 則過其公角頂之對角線, 在一直線上. ... 1103
- ⑮ 設  $AEKH, KFCG$  為沿平行四邊形之對角線  $AC$  之平行四邊形, 則  $EF, AC, GH$  相平行, 或過同點. ... 1105
- ⑯ 兩平行四邊形中, 一角相等, 則其面積之比, 等於此角兩側各邊之比之複比. ... 1145
- ⑰ 兩平行四邊形之比, 等於其底之比及高之比之複比. ...

- ... .. 1148
- 一角相等之兩平行四邊形相等，則兩形中夾頂角之一邊之比，等於他邊之反比。試先直接證之，復由定理兩平行四邊形中，一角相等，則兩形中之比，等於兩形中等角夾邊之比之複比。證之。... .. 1152
  - 下定理之逆定理如何：一角相等之兩平行四邊形之比，等於兩形中等角夾邊之比之複比。... .. 1153
  - 定理一角相等之兩平行四邊形相等，則兩形中夾等角之二邊，其一之比等於他一之反比之逆定理有二，試述之。又何者為真？... .. 1154
  - 設兩平行四邊形相等，則其高之比，等於底邊之比之反比。... .. 1164
  - 在平行四邊形 ABCD 之對角線 AC [或 AC 之延線] 上取任意點 P，過 P 引一直線，令交 AB 於 M，BC 於 N，AD 於 M'，CD 於 N'，則矩形 PM·PN 等於矩形 PM'·PN'。1179
  - 設 P，Q 為分別在平行四邊形 ABCD 之二邊 AD，CD 上之定點，由 P，Q 依任意方向引平行線，命其與 AB，BC [或其延線] 之交點為 M，M'，則矩形 AM·CM' 一定不易。... .. 1180
  - 由平行四邊形中一雙對角之各頂點，至其對角傍二邊之中點引直線，是等直線組成一平行四邊形，而等於原平行四邊形之三分之一。... .. 1181
  - 設過平行四邊形 ABCD 之一角頂 A 之圓周，交 AB，AD，AC 於 F，H，G，則矩形 AB·AF，AD·AH 之和，等於矩形 AC·AG。... .. 1280, 1199
  - 由線分 AB 之兩端，依反對方向，引相等且平行之二線分 AC，BD，則線分 CD 與 AB 之交點，為 AB 之中點。295
  - 在角 A 之一邊 AB 上取任意點 D，由 D 平行於 AC 且等於線分 AD，引線分 DE，則直線 AE 將角 A 二等分。296
  - 一直線與二平行線交而生四內角，此四內角之二等分線，成一矩形。... .. 297
  - 二等邊梯形之對角線相等。反之，對角線相等之梯形為二等邊。... .. 298
  - 梯形中平行於底且二等分他一邊之直線，亦必二等分其餘一邊。... .. 299
  - 在正方形 ABCD 之邊 CD 上，取一點 P，令  $AP = PC + CB$ ，Q 為 CD 之中點，則  $\hat{B}AP = 2\hat{Q}AD$ 。... .. 300
  - 設平行四邊形 ABCD 中，在邊 AB 之平行線上取二點 P，Q，

- 命線分 PA, QB 之交點為 R, 線分 PD, QC 之交點為 S, 則直線 RS 平行於 AD. ... .. 1132
- 平行四邊形 ABCD 中, 由角頂 D 引任意直線 DEF, 令與邊 BC 交於 E, 與 AB 之延線交於 F, 則兩三角形 ABE, CEF 等積. ... .. 860
- 以三角形之各邊為對角線, 以所設二直線之平行線為邊, 作三平行四邊形, 則是等四邊形之他對角線, 交於一點. ... .. 865
- 設平行四邊形 ABCD 中, 由各角頂引直線 AE, BF, CG, DH, 令  $AE=DH$ ,  $BF=CG$ , 則圖中之四個三角形 M, N, P, Q 間, 有以下之關係:  $M+N=P+Q$ . ... .. 873
- 平行四邊形 ABCD 中, 由角頂 A, B, C, D 至對角線引垂線, 命其足分別為 E, F, G, H, 則二四邊形 EFGH 與 ABCD 相似. ... .. 1256
- 平行四邊形 ABCD 中, 過角頂 A 引一直線, 令交對角線 BD 及邊 BC, CD 於 E, F, G, 則 AE 為 EF, EG 之比例中項. ... .. 1257

## 12. 菱形

- 平行四邊形之隣邊相等, 則其各邊皆等, 即為菱形. 223
- 菱形之二對角線互為垂線, 且將其所過之角二等分. ... .. 252
- 平行四邊形之對角線, 若互為垂線, 則此平行四邊形為菱形. ... .. 253
- 設平行四邊形之對角線將角二等分, 則平行四邊形為菱形. ... .. 254
- 菱形得以一角與一邊決定之. ... .. 340
- 以菱形之各邊為直徑所作之四圓過同點. ... .. 494
- 設菱形 ABCD 外切於圓, 任意切線 MN 與邊 AB, AD 分別交於 M, N, 則矩形 BM·DN 一定不易. ... .. 1214
- 菱形之面積, 等於其二對角線所包矩形之半. ... .. 851

## 13. 矩形

- 兩矩形中, 設其一之相隣二邊, 分別等於他一之相隣二邊, 則兩矩形全等. 又兩正方形中, 若其一之一邊, 等於他一之一邊, 則兩正方形全等. ... .. 225
- 矩形之對角線相等. ... .. 237
- 平行四邊形之對角線相等, 則此四邊形為矩形. ... .. 238
- 四邊形之兩對角線相等, 且互二等分, 則此四邊形為矩形.



- ... .. 241
- 順次聯結矩形四邊中點而生之四邊形爲菱形. ... 268
  - 矩形之對角線,大於兩邊間之任意直線. ... 277
  - 矩形得以相異二邊決定之. ... 340
  - 各角之二等分線,組成正方形. ... 342
  - 設矩形之彈子臺上有二彈,今欲擊其一,使觸四邊後復至原位置,則當取若何之路徑?又欲令至他彈之位置,則當取若何之路徑? ... 393
  - 外接於矩形得畫一圓. ... 465
  - 設 ABCD 爲矩形, O 爲三角形 ABC 之內心,引 AD, DC 之垂線 OE, OF, 則矩形 OEDF 等於全形之半分. ... 835
  - 固定矩形之一角頂,令他二角頂移動於一定之圓周上,則他一角頂移動於與前圓同心之圓周上. ... 911
  - 矩形 ABCD 中, 設 E 爲 BC 上之任意點, F 爲 CD 上之任意點,則矩形 ABCD 等於三角形 AEF 之二倍與矩形 BE·DF 之和. ... 1159, 923
  - 以矩形之二隣邊爲邊,作二正方形,則矩形之面積,等於此二正方形對角線所包矩形之半分. ... 1276, 934
  - 等高矩形之比,等於其底之比. ... 975, 952
  - 等底二矩形之比,等於其高之比. ... 994
  - 設兩矩形之高相等, 則其和等於底之和與公高所包之矩形. ... 844
  - 設 O 爲矩形 ABCD 內之任意點, 則  $\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OD}^2$ . ... 850
  - 設 ABCD 爲矩形, DE 等於 DC, 而爲 DA 之一部分. 引 AD 之垂線 EF, 令交中心 A 半徑 AD 之圓周於 F, 則 DF 等於與矩形等積之正方形之對角線. ... 857

#### 14. 正方形

- 欲填充一點之周圍,需幾個正方形之角? ... 245
- 正方形之對角線相等否?其夾角之大小如何? ... 255
- 沿正方形對角線之平行四邊形爲正方形. ... 276
- 在正方形 ABCD 之對角線 BD 上,取 BE=BC, 由 E 引 BD 之垂線,命其與 CD 之交點爲 F, 則 DE, EF, FC 相等. ... 286
- 正方形得以一邊決定之. ... 340
- 平行於正方形 ABCD 之對角線 AC, 引 DE, 令 AE 等於 AC, 命 AE, CD 之交點爲 G, 則 CGE 爲二等邊三角形. 397
- 平行於正方形 ABCD 之對角線 AC 引 BE, 在 BE 上取 F

- 令  $AF=AC$ , 而成菱形  $CAFE$ , 則  $AE$  及  $AF$  將  $\hat{BAC}(=\hat{A})$  三等分. ... 398
- 設  $ABCD$  爲正方形, 過  $A$  引直線  $AXY$ , 截  $DC$  於  $X$ , 截  $BC$  之延線於  $Y$ , 則  $AX$  及  $AY$  之和, 大於  $AC$  之二倍. 400
- 過正方形對角線上之任意點, 引邊之平行線, 則此線與邊之交點, 皆在以對角線交點爲中心之圓周上. ... 429
- 在正方形之外接圓周上取任意點, 則以此點爲角頂之角, 其對正方形最近一邊之角, 等於對其他各邊之角之三倍. ... 659
- 設正方形  $ABCD$  之對角線交點爲  $O$ , 任意點爲  $P$ , 則  $PA, PB, PC, PD$  上正方形之和, 等於  $OA, OP$  上正方形和之四倍. ... 786
- 正方形內之一點, 與各角頂聯結, 復由此點至各邊引垂線, 則是等聯結直線上正方形之和, 等於是等垂線上正方形和之二倍. ... 787
- 正方形等於其對角線上正方形之半. ... 827
- 由正方形之各角頂, 至任意一直線引垂線, 則由相對二角頂所引垂線上正方形之和, 大於由他相對二角頂所引垂線所包矩形之二倍者, 爲正方形之面積. ... 935
- 設  $ABCD$  爲正方形,  $P$  爲其外接圓之弧  $AB$  上之一點, 則矩形  $PC \cdot PD$  等於矩形  $PA \cdot PB, PB \cdot PC, PD \cdot PA$  之和. ... 1219
- 設正方形  $ABCD$  之邊  $AB, BC, CD, DA$  分別按同比分於  $E, F, G, H$ , 聯結  $EF, FG, GH, HE$ , 則  $EFGH$  爲內接正方形. ... 1237
- 引線分  $OA, OA_1$ , 令互相垂直, 且等於定正方形之邊. 在  $OA_1$  之延線上, 取  $OA_2$ , 令等於  $AA_1$ ;  $OA_3$ , 令等於  $AA_2$ ;  $OA_4$ , 令等於  $AA_3$ ; 則  $OA_2, OA_3, OA_4$  爲邊之正方形之面積, 等於定正方形面積之 2 倍, 3 倍, 4 倍. ... 852

### 15. 梯 形

- 二等邊梯形中, 底之兩端之角相等. ... 266
- 依次聯結二等邊梯形四邊中點而生之四邊形爲菱形. ... 268
- 梯形之不平二邊相等, 則對角互爲補角. ... 267
- 聯結梯形不平二邊中點之直線, 平行於底, 且等於其和之半. ... 279
- 梯形不平二邊之中點, 及二對角線之中點, 在平行於二平行邊之一直線上; 四點之內, 兩端二點之距離, 等於二

- 底之和之半分，中間二點之距離，等於二底之差之半分。  
 ... .. 280
- 有二梯形，若依同順序所取之四邊相等，則兩形全等。 ...  
 ... .. 285
- 欲決定梯形，須知邊與角若干？ ... .. 340
- 設梯形之不平行二邊相等，則得內接於圓。 ... .. 664
- 梯形等於以其平行二邊和之半分為底，以其平行二邊間之垂直距離為高之矩形。 ... .. 739
- 梯形中，兩對角線上正方形之和，等於不平行二邊上之正方形，加平行二邊所包矩形之二倍。 ... .. 790
- 設梯形中不平行二邊相等，則其一邊上之正方形與二邊所包矩形之和，等於一對角線上之正方形。 ... .. 795
- 設梯形之不平行二邊  $BA, CD$  交於  $H$ ，則兩三角形  $HAC, HDB$  等積。 ... .. 808
- 以梯形中不平行之一邊為底，以其對邊中點為頂點之三角形，等於梯形之半分。 ... .. 810
- 過梯形  $ABCD$  對角線之交點  $O$ ，引底  $BC$  之平行線，命其與二邊  $AB, CD$  之交點分別為  $E, F$ ，則  $OE$  與  $OF$  相等。 ...  
 ... .. 833
- 設梯形之平行二邊中，一邊為他邊之二倍，則兩對角線交於互相三等分之一點。 ... .. 1062
- 過梯形對角線之交點，引底之平行線，則此直線在形內之部分為交點所二等分。 ... .. 1089
- 梯形二邊延線之交點，對角線之交點，及二底之中點在一直線上。 ... .. 1081
- 梯形中兩對角線上正方形之差與不平行二邊上正方形之差之比，等於平行二邊之和與差之比。 ... .. 1286
- 在梯形  $ABCD$  之不平行二邊  $AB, CD$  上，取點  $P, Q$ ，令線分  $AP$  對線分  $PB$  之比，等於線分  $DQ$  對線分  $QC$  之比，則線分  $PQ$  平行於底。 ... .. 1004
- 梯形  $ABCD$  之對角線  $AC, DB$  之交點  $P$ ，分  $AC, DB$  於同比。 ... .. 1129

## 16. 四邊形

- 四邊形內角之和等於四直角。 ... .. 219
- 順次聯結四邊形隣邊之中點，則成平行四邊形，其周等於原四邊形對角線之和；而原四邊形為矩形或菱形，則所成者為菱形或矩形。 ... .. 265
- 任意四邊形中，聯結二雙對邊中點之直線，交於聯結兩對

- 角線中點之直線之中點. ... .. 278
- 設四邊形之相對二邊相等，則是等之邊與聯結他二邊中點之直線成等斜度. ... .. 292
- 四邊形對邊中點聯結之直線，若垂直於此各邊，則他二邊相等. ... .. 312
- 設四邊形四角之二等分線過同點，則一雙對邊之和，等於他雙對邊之和. ... .. 324
- 由四邊形 ABCD 外角之二等分線所成之四邊形中，對角互為補角. ... .. 326
- 四邊形相隣二角之二等分線所夾之角，等於他二角和之半，相對二角之二等分線所夾之角，等於他二角之差之半. ... .. 327
- 設四邊形 ABCD 中， $\hat{A}BC = \hat{B}CD$ ， $AB = CD$ ，則  $AC = BD$ . ... .. 329
- 四邊形之二雙對邊等，則二雙對角亦等. ... .. 330
- 設四邊形 ABCD 中，邊 AD 最大，邊 BC 最小，則  $\hat{B}CD$  大於  $\hat{B}AD$ ， $\hat{A}BC$  大於  $\hat{A}DC$ . 試證之. ... .. 331
- 四邊形之任意一邊，小於他三邊之和. ... .. 332
- 四邊形之周大於二對角線之和，而小於其和之二倍. ... .. 333
- 四邊形二對角線之和，小於由二對角線交點以外之點，至四頂點所引直線之和. ... .. 334
- 一四邊形之三邊，分別等於他四邊形中依同順序所取之三邊；又其角亦分別相等，則兩四邊形全等. ... .. 338
- 延長四邊形 ABCD 之對邊 AB, CD, 令交於 E, 及延長 DA, CB, 令交於 F, 則  $\hat{E}, \hat{F}$  之二等分線所成之角，等於  $\hat{A}, \hat{C}$  和之半. ... .. 341
- 四邊形各角之二等分線，相交而生第二四邊形，其兩對角之和為二直角. ... .. 342
- 過四邊形各對角線之兩端，引平行於他對角線之直線，則是等直線所成之平行四邊形，為原四邊形之二倍. 並由此定理，證兩四邊形中，若二對角線及其所夾角相等，則兩四邊形之面積亦等. ... .. 396
- 設四邊形 ABCD 中，二邊 AB, CD 互相平行，且其和等於 BC, 則  $\hat{A}BC, \hat{B}CD$  之二等分線交於 AD 上. ... .. 401
- 設四邊形之對角線互相垂直，則一雙對邊上正方形之和，等於他雙對邊上正方形之和. ... .. 768
- 四邊形各邊上正方形之和，大於對角線上正方形之和者，為聯結對角線中點之直線上正方形之四倍. ... .. 789

- 聯結四邊形各邊之中點，作四邊形，則原四邊形各對角線上正方形之和，等於新四邊形各邊上正方形和之二倍。... 791
- 四邊形對角線上正方形之和，二倍於聯結二雙對邊中點之直線上正方形之和。... 792
- 四邊形  $ABCD$  中，設  $CD$  及  $DA$  分別平行於原位置而移動至  $C'B$  及  $BA'$ ，則  $\square AA'C'C$  中，具以下各條件：(1)由  $B$  至  $\square AA'C'C$  之各角頂之距離，等於四邊形  $ABCD$  之各邊。(2)  $B$  周之各角，分別等於四邊形  $ABCD$  之各角。(3)  $\square AA'C'C$  之各邊，等於四邊形  $ABCD$  之對角線。(4)  $\square AA'C'C$  之各角，等於四邊形  $ABCD$  兩對角線間之角。(5)  $\square AA'C'C$  之各邊與由  $B$  至其各角頂所引直線間之角，等於四邊形之各邊與對角線間之角。(6)  $\square AA'C'C$  之面積，等於四邊形  $ABCD$  面積之二倍。... 801
- 設四邊形  $ABCD$  之對角線  $AC$ ， $BD$  之交點為  $O$ ，兩三角形  $AOB$ ， $BOC$  等積，則  $AB$  平行於  $CD$ 。... 809
- 設四邊形之一對角線，將他對角線二等分，則前對角線將四邊形二等分。... 811
- 依次聯結四邊形各邊之中點而得之四邊形，為原形之半。... 814
- 設四邊形之一雙對邊平行，則聯結此二邊中點之直線，將本形二等分。... 817
- 過四邊形  $ABCD$  對角線  $BD$  之中點  $E$ ，引他對角線  $AC$  之平行線  $FEG$ ，命其與二邊之交點為  $F$ ， $G$ ，則  $AG$  將本形二等分。... 829
- 四邊形，與以其二對角線為二邊，以其交角為夾角之三角形等積。... 830
- 對角線分別相等，且成等角之四邊形等積。... 831
- 過四邊形各對角線之中點，引他對角線之平行線，則由其交點至各邊中點之四直線，將本形四等分。... 841
- 設四邊形  $ABCD$  對邊之交點為  $P$ ， $Q$ ，對角線  $AC$ ， $BD$  之中點為  $G$ ， $H$ ，則三角形  $PGH$  及  $QGH$  皆為四邊形  $ABCD$  之四分之一。又  $AC$ ， $BD$ ， $PQ$  之中點，在一直線上。... 843
- 完全四邊形三對角線之中點，在一直線上。... 926
- 四邊形為其二對角線所分成之四個三角形成比例。996
- 設四邊形  $ABCD$  兩對角線之交點為  $O$ ，則  $\triangle ABD$ ， $\triangle BCD$  之比，等於  $AO$ ， $CO$  之比。... 1028
- 設四邊形  $ABCD$  之對角線  $AC$ ，二等分他對角線  $BD$ ，則  $AC$  二等分四邊形。... 1029

- 設一四邊形之三角，分別等於他四邊形之三角，且等角之一邊夾邊成比例 [等角之隣邊相對應]，則兩四邊形相似。  
... .. 1040
- 兩四邊形之各邊，同順序成比例，則兩四邊形相似否？ ...  
... .. 1041
- 由圓之直徑 AB 之兩端引二弦 AF, BG, 令交於 E, 過 E 引 AB 之垂直弦 CED, 命其與圓周之交點為 C, D, 則四邊形 CFDG 之二隣邊之比等於他二隣邊之比。 ... .. 1060
- 設四邊形 ABCD 中，角 A, C 之二等分線交於對角線 BD 上，則角 B, D 之二等分線亦交於對角線 AC 上。 1104
- 四邊形二對角線所包之矩形，通常小於二組對邊所包矩形之和；但若此四邊形內接於圓，則二對角線所包之矩形，等於二組對邊所包矩形之和。 ... .. 1150
- 設四邊形 ABCD 之邊 AB, 平行於邊 CD, 其二對角線之交點為 O, 則矩形 AO·OD 等於矩形 BO·OC。 ... 1178
- 由四邊形內之一點，至四頂點所引之直線，普通不能分四邊形為四個等積三角形。 ... .. 845
- 設四邊形 ABCD 移動，而不變形，且其相隣二邊 AB, AD 分別恆過定點 M, N, 則對角線 AC 亦恆過定點。 ... 545
- 四邊形中，聯結其一組對邊中點之線分，若將四邊形分為二等積部分，則此一組對邊平行。 ... .. 858
- 設由四邊形 ABCD 之各角頂，引所設直線之平行線，命其與不過此角頂之對角線之交點，分別為 A', B', C', D', 則四邊形 ABCD, A'B'C'D' 等積。 ... .. 862
- 四邊形中，設對邊上正方形之和相等，則二對角線互相垂直。 ... .. 869
- 設四邊形 ABCD 中，聯結對邊中點之直線，交於點 G, 而 P 為任意點，則  $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + DG^2 + 4PG^2$ 。 ... .. 872
- 設四邊形 ABCD 中，一對角線 BD 為二邊 AB, BC 之比例中項，且二等分此二邊所成之角，命此對角線與他對角線 AC 之交點為 E, 則二線分 AE, CE 之比，等於二邊 AD, CD 之二乘比。 ... .. 1260
- 試證以下求四邊形 ABCD 面積之圖解法。聯結 BD, 由 C 引 BD 之平行線，命其與 AB 延線之交點為 E. 以 E 為中心，以單位長度之二倍為半徑作圓，由點 A 引圓之切線 AX, 令交過 D 平行於 AB 之直線於 X. 於是表線分 AX 之數，即表 ABCD 面積之數。又試假定 BD=2 寸, AB=1.6 寸, BC=1.8 寸, CD=1.6 寸, DA=1.3 寸，而計算面積，並

與依上法所求得之結果比較. ... .. 1273

## 17. 多 角 形

- 任意凸多角形中,一切內角與四直角之和,等於多角形邊數二倍之直角 ... .. 301
- 試聯結多角形之一頂點與其他各頂點,以證定理多角形各內角之和,較邊數二倍之直角少四直角. ... .. 302
- 任意凸多角形之各邊,順次延長而生之外角之和,等於四直角. ... .. 303
- 試依據一點周圍各角之和等於四直角,以證定理順次延長凸多角形之邊而生之外角之和,等於四直角. ... 304
- 多角形之內角中,銳角數不多於三. ... .. 305
- 多角形內角之和為十六直角,求其邊數. ... .. 310
- 五角形中,得引對角線若干?又 $n$ 邊多角形中如何? ... .. 313
- 一多角形,對角線數為20,求其邊數. ... .. 314
- 延長凸五角形之各邊,其相交而生之五角之和,等於二直角. ... .. 322
- 延長 $n$ 邊凸多角形之各邊,其相交而生之 $n$ 個角之和等於 $2(n-4)$ 直角. ... .. 323
- 多角形之周,小於外圍之任意多角形之周. ... .. 335
- 設 $n$ 邊多角形之 $n-1$ 邊與 $n-2$ 個夾角,分別等於他 $n$ 邊多角形中依同順序所取之 $n-1$ 邊與 $n-2$ 個夾角,則此兩形全等. ... .. 339
- 欲決定 $n$ 邊多角形,須知邊與角若干? ... .. 340
- 設一直線形各邊之垂直二等分線,皆過同點,則過此直線形之一切頂點,得作一圓. ... .. 670
- 設一直線形之邊數為偶數,其邊皆切於同圓,則一周一所取各邊之和相等. ... .. 671
- 設直線形各角之二等分線過同點,則得作此直線形之內切圓. ... .. 682
- 由多角形平面上之一點,引各邊之垂線,將各邊分為二分,則一周一所取各分上正方形之和相等. ... .. 797
- 同直線形之二相似直線形相似. ... .. 1016
- 設兩相似直線形之對應邊,互相平行,則其一之各角頂與他一之各對應角頂聯結之直線,或平行,或交於一點,而由此點沿任意直線至其與兩形對應邊交點之距離之比,等於兩形之對應邊之比. ... .. 1022

- 兩相似直線形，得分爲同數之相似三角形。及其逆定理。  
... .. 1023, 1047
- 設兩相似直線形中，一雙對應之邊，分別平行，則其他一切對應邊，皆分別平行。... .. 1044
- 設任意點  $O$ ，與直線形之角頂  $A, B, C, \dots$  聯結，在  $OA, OB, OC, \dots$  上分別取點  $a, b, c, \dots$ ，若  $Oa:OA = Ob:OB = Oc:OC = \dots$ ，則直線形  $abc, \dots$  與原直線形  $ABC, \dots$  相似。... .. 1045
- 設  $ABCD, \dots, abcd, \dots$  爲二直線形， $Aa, Bb, Cc, \dots$  過同點  $O$ ，且  $AB, BC, CD, \dots$  分別平行於  $ab, bc, cd, \dots$ ，則兩直線形相似。... .. 1046
- 相似直線形之周之比，等於其對應邊之比。... 1078
- 設三相似直線形之對應邊相平行，則其每二者之相似中心，在一直線上。... .. 1127
- 兩相似直線形面積之比，等於其對應邊之二乘比。... .. 1142
- 兩相似直線形之比，等於其對應邊上所作兩正方形之比。... .. 1143
- 相似多角形之比，等於其周或對應對角線之二乘比。... .. 1171
- 在所設直線上作各直線形，令與所設直線形相似，則所作之一切直線形中，最大者與最小者之比，等於最大邊與最小邊之二乘比。... .. 1285
- 設六角形之三組對邊，平行而相等，則其三對角線交於同點。... .. 343
- 設四角形之二隣邊相等，且對角線將其夾角二等分，則他二邊亦等。... .. 344
- 將二雙關於一點爲對稱之點聯結之二直線，亦關於此點爲對稱。又此二直線平行且相等。... .. 345
- $n$  邊正多角形各內角之大小如何？... .. 346
- 設某多角形內角之和，等於其外角之和，則此多角形之邊數若何？... .. 347
- 設點  $H$  爲三角形  $ABC$  之垂心，則角  $BHC, CHA, AHB$  分別等於角  $A, B, C$ ，或爲其補角。... .. 348
- 在三角形  $ABC$  之邊  $BC, CA, AB$  上，分別取點  $L, M, N$ ，令三個三角形  $ANM, NBL, MLC$  [角對應於此文字之順序] 互爲等角，則是等三角形又與三角形  $ABC, LMN$  互爲等角。... .. 349
- 一多角形之邊，雖順次一一等於他多角形之邊，或一多角



- 形之角，雖順次一一等於他多角形之角，而二多角形不必相等。... 350
- 等邊多角形，即等角多角形否？又等角多角形，即等邊多角形否？... 351
- 二雙直線關於一點為對稱，則其交點關於此點亦為對稱。... 352
- 二雙直線關於一直線為對稱，則其交點關於此直線亦為對稱。... 353
- 一直線投於他直線上之正射影，不大於原直線。... 354
- 四邊形對角之二等分線平行或一致時，則他二角相等。... 355
- 二等邊梯形中，聯結兩底中點之直線，垂直於底邊，兩對角線及不平行二邊之延線，皆交於此直線上。... 353
- 在四邊形  $ABCD$  之各邊上，以各邊為一邊，作正方形，命其各對角線之交點為  $L, M, N, P$ ，則  $PM$  與  $LN$  相等，且垂直。... 357
- 非三角形之多角形，雖等角，不必相似。... 1131
- 設若干直線形與一直線形相似，而前者之邊，分別為後者之 2 倍，3 倍，4 倍……，則前者之面積，分別為後者之幾倍？... 1240

## 18. 正多角形

- 正六角形之各角，為四直角之三分之一。... 306
- 共一頂點之三個正六角形，得填充頂點之周圍。... 307
- 某正多角形之內角，等於外角之三倍，求此正多角形之邊數。... 308
- 正五角形之各角，為直角之幾分？... 309
- 正五角形與正十角形之各內角之比為 3:4。試證之。... 311
- 某正多角形之一外角，等於正十角形一內角之十二分之五，求其邊數。... 315
- 某正多角形之外角，各等於正三角形之內角，則此正多角形之邊數若何？... 316
- 以正方形，正六角形，正十二角形之各頂角，得填充一點之周圍，試證之。又以正方形，正五角形及正二十角形則如何？... 317
- 以正六角形之二角，及正三角形之二角，得填充一點之周圍否？... 318
- 二正八角形與一正方形，得共一頂點以填充其周圍。又以

- 正八角形與正方形之紙張貼於天花板之法如何? 319
- 以六個正三角形,得合成一正六角形. ... 320
- 以同正多角形之紙,裱糊天花板,其法有幾? ... 321
- 在正多角形之各邊上,順次依同向取距頂點等遠之點,而順次聯結之,則得邊數同前之第二正多角形. ... 337
- 分全圓周為若干等分,則引是等分點間之弦而得之內接形為正多角形,又由各分點引切線而得之外切形亦為正多角形. ... 1294
- 正多角形各角之二等分線,交於同點,此點距各角頂等遠,距各邊亦等遠. ... 1295
- 同邊數之正多角形相似. ... 1296
- 同邊數正多角形周之比,等於其外接圓半徑之比,又等於其內切圓半徑之比. 而其面積則等於是等半徑上正方形之比. ... 1297
- 圓之外切等角多角形,皆為正多角形. ... 1298
- 圓之外切等邊多角形,若邊數為奇數,則為正多角形. ... 1299
- 正多角形視其邊數之為偶為奇而定有無對稱中心. ... 1300
- $n$  邊正多角形,有  $n$  個對稱軸. ... 1301
- 引由圓之中心至外切正多角形各角頂之直線,又順次聯結是等直線與圓周之交點,則得正多角形. ... 1302
- 設正多角形  $ABCD\cdots$  之中心為  $O$ ,將邊  $BC$  旁之二邊  $AB$ ,  $CD$  延長,令交於  $E$ ,則四邊形  $AECO$  內接於圓. 1303
- 設  $DA$  為圓之內接正六角形之一邊,由  $A$  至弧  $AD$  之異側引切線  $AB$ ,令其長等於  $AD$ ,命  $C$  為中心,  $BO$ ,  $BC$  與圓之交點為  $E$ ,  $F$ ,則  $AE$ ,  $EF$  分別為圓之內接正十二角形及正二十四角形之一邊. ... 1304
- 正五角形之各對角線,平行於一邊. ... 1305
- 以正五角形之一角頂為中心,以其對角線為半徑作圓,則五角形之一邊,等於此圓內接正十角形之一邊. 1306
- 設三角形之二角,各為第三角之二倍,則過此三角形三邊中點之圓,自二邊所截得之弦,各為內接正五角形之邊. ... 1307
- 正五角形五對角線所成之五角形,亦為正五角形. ... 1308
- 紙之邊緣,兩兩平行,則可折之成正五角形. ... 1309
- 圓之內接正十二角形之面積,等於半徑上正方形之三倍. ... 1310

- 已知圓之內接  $n$  邊正多角形之周及外切  $n$  邊正多角形之周, 求同圓之  $2n$  邊外切及內接正多角形之周 1311
- 已知正多角形之半徑及邊心距, 求二倍邊數之等周正多角形之半徑及邊心距. ... 1312
- 圓之內接正多角形之邊數無限增大, 則其邊心距以圓之半徑為極限而無限趨近. ... 1314
- 由  $n$  邊正多角形內之任意點, 至各邊之距離之和, 等於邊心距之  $n$  倍. 若任意點在形外, 則如何? ... 1323
- 由  $n$  邊正多角形之各角頂, 至不截此多角形之任意直線所引垂線之和, 等於由此多角形之中心至同直線所引垂線之  $n$  倍. ... 1324
- 由圓之內接  $n$  邊正多角形之各角頂至切圓周於任意點之切線, 引垂線, 則是等垂線之和, 等於半徑之  $n$  倍. ... 1325
- 由正多角形之各角頂至外接圓之任意直徑, 引垂線, 則在此直徑一方之垂線之和, 等於他方之垂線之和. 1326
- 正六角形之周, 等於其外接圓直徑之三倍. ... 1327
- 試由圓之內接正六角形與外切正方形, 以證  $\pi$  之值在 3 與 4 之間. ... 1328
- 正六角形 ABCDEF 之對角線 AC, BD 按何比互分? ... 1329
- 設正五角形 ABCDE 內接於一圓, P 為弧 AB 之中點, 則 AP 及圓之半徑之和, 等於 PC. ... 1330
- 正五角形中, 不過同頂點之對角線, 按中末比互分. ... 1331
- 設正三角形及正六角形內接於同圓, 則兩形邊上正方形之比如何? ... 1333
- 所設圓之內接正三角形, 正方形, 正六角形分別為同圓之外切正三角形, 正方形, 正六角形之四分之一, 二分之一, 四分之三. ... 1336
- 圓之內接正六角形, 等於同圓之內接正三角形之二倍. ... 1337
- 圓之內接正六角形與同圓之外切正三角形面積之比如何? ... 1338
- 圓之內接正六角形為同圓之內接正三角形與外切正三角形之比例中項. ... 1339
- 圓之內接正五角形一邊上之正方形, 等於內接正十角形一邊上之正方形及半徑上正方形之和. ... 1340
- 圓之半徑分於中末比時, 其較大之分等於內接正十角形

- 之一邊 ... .. 1341
- 設中心為  $O$  之圓中，二直徑  $AB, CD$ ，互相垂直，以  $OC$  之中點  $E$  為中心， $EA$  為半徑作圓，令交  $CD$  於  $F$ ，則  $OF$  等於內接正十角形之一邊， $AF$  等於內接正五角形之一邊。  
... .. 1342
- 設中心為  $O$  之圓中，半徑  $OA$  按  $OA:OB=OB:AB$  內分，引弦  $AC$  令等於  $OB$ ，過三點  $O, B, C$  作圓，令交前圓於  $D$ ，則  $OB, BC, CD$  為第二圓中內接正五角形之三邊。... 1343
- 等角多角形得內接於圓否？ ... .. 1346
- 圓之內接正八多角形等於內接正方形及外切正方形之邊所包之矩形。 ... .. 1349
- 圓之內接正十二角形之面積，等於半徑上正方形之三倍。  
... .. 1350
- 正多角形之一內角，與其一邊所對之中心角互為補角。 ... .. 1366
- 內接正多角形之半徑，為邊心距及相似外切正多角形半徑之比例中項。 ... .. 1367
- 正多角形之邊數無限增大，則其一內角及一外角之極限如何？ ... .. 1368
- $n$  邊之正多角形中，由一頂點至他諸頂點引對角線，則是等對角線間之角如何？ ... .. 1369
- 半圓之內接正方形與全圓內接正方形之面積之比，為  $2:5$ 。 ... .. 1370
- 三角相等之等邊五角形，為正五角形。 ... .. 546

## 19. 射影

- 設二直線相等且平行，則此二直線在他任意直線上之射影相等。反之，二直線平行，且在他任意直線上之射影相等，則此二直線相等。 ... .. 227
- 二直線相等，且在他直線之射影亦相等，則前二直線與後一直線，或平行，或成等角。 ... .. 228

## 20. 圓

- 由圓之中心至某點之距離，視其點在圓內，在圓周上，或在圓外，而小於，等於，或大於半徑。及其逆定理。 ... .. 411, 412
- 圓之任意直徑，將圓分成全等之二部。 ... .. 413
- 圓中互相垂直之二直徑，將此圓分成全等之四部。 414
- 一圓之中心唯一。 ... .. 419

- 過二所設點之圓，其中心在聯結此二點之直線之垂直二等分線上。... 420
- 由圓內之一點，在過此點之直徑之兩側，引二直線至圓周，令其與直徑之夾角相等，則此二直線相等。... 421
- 過一所設點，且中心在一所設直線之上之圓周，皆過他一定點。... 422
- 圓之半徑大者，大於半徑小者。... 423
- 圓之一弧，等於其共軛弧，則此弧若何？又設一弧等於其共軛弧之半，則如何？... 425
- 所設曲線是否為圓之弧，當如何定之？... 426
- 聯結所設點與所設圓周上諸點之直線，其中點皆在一定圓周上。... 430
- 在定圓外取一點，設由中心至此點之距離，小於半徑之三倍，則得由此點引一直線，令此線在圓內之部分，等於圓周與此點間之部分。... 431
- 一直線與圓周之交點，不多於二。... 443
- 過不在同一直線之三點，得作唯一之圓。... 444
- 兩圓之周，若公有三點，則此兩圓全合。... 445
- 不相合二圓之周，公有之點不能多於二。... 446
- 由圓內之一點，向圓周引直線，若等長者多於二，則其點為中心。... 447
- 同時為圓之弓形及扇形者為何？... 464
- 由一點若得引三等直線於圓周，則此點為圓之中心。... 468
- 設  $P$  為圓弧  $APB$  上之任意點，則角  $APB$  之外角之二等分線恆過一定點。... 483
- 設  $AB$  為一圓之定弦， $P$  為圓周上之任意點，則角  $APB$  之二等分線，恆過二定點之一。... 484
- 同弓形中之一切弓形角，其二等分線過同點。... 485
- 在中心為  $O$  之圓周上，取任意點  $A$ ，由  $A$  至二定半徑引垂線  $AB, AC$ ，則聯結其足  $B, C$  之直線有定長。... 487
- 設  $AOB, COD$  為互相垂直之二直徑，在  $OA$  上任取  $OE$ ，在  $OD$  上取等於此之  $OF$ ，延長  $BF$ ，則為  $DE$  之垂線。又設  $BF, DE$  之延長，交圓周於  $K, L$ ，則弧  $KL$  為圓周之四分之一。... 513
- 設一直徑過弦之一端，一切線過弦之他端，又由前端引切線之垂線，則此垂線與直徑之夾角，為弦所二等分。564
- 由海岸瞭望直航於海中之船，其距離益遠，則船身之隱沒，隨而益速，何故？... 581

- 過一直線上之三點得作一圓否? ... .. 713
- 在圓之直徑上,取距中心等遠之兩點,則由圓周上之任意點,至此二點之距離上正方形之和一定. ... .. 885
- 由圓之直徑  $OA$  之一端  $O$ ,引任意直線  $OPQ$ ,令其交圓周於  $P$ ,交過  $A$  之  $OA$  之垂線於  $Q$ ,則矩形  $OP \cdot OQ$  一定. ... .. 896
- 由圓外之一點,引二直線,令其一直交圓之直徑,他一截圓,則垂線上之正方形,隨此垂線內分或外分直徑,而等於割線全部與其圓外部分所包矩形及直徑之二分所包矩形之和或差. ... .. 903
- 作各圓,令過二所設點,並交所設圓,則其公弦之交點唯一,且在過二所設點之直線上. ... .. 910
- 設有限直線  $AB$  之位置一定,  $CD$  為定圓之動弦,而平行於  $AB$ ,聯結  $AC$  及  $BD$ ,令分別截圓於  $E, F$ ,則  $EF$  截  $AB$  於定點. ... .. 912
- 由圓外之點  $A$ ,引割線  $ABC, ADE$ ,令與圓周交於  $B, C$  及  $D, E$ ,則三角形  $ABD, AEC$  相似. ... .. 1035
- 由半圓直徑  $AB$  上之任意點  $C$ ,引  $AB$  之垂線  $CD$ ,令交圓周於  $D$ ,聯結中心  $O$  及  $D$ ,由  $C$  至  $OD$  引垂線  $CE$ ,則  $DE$  為  $AO, DC$  之第三比例項. ... .. 1074
- 在象限  $OAB$  之半徑  $OA$  上,作半圓  $ODA$ ,於  $A$  引切線  $AE$ ,由  $O$  引任意直線  $ODFE$ ,令交兩圓周於  $D, F$ ,交切線於  $E$ ,引  $OA$  之垂線  $DG$ ,則  $OE, OF, OD, OG$  成連比例. 1076
- 設  $ABD$  為半圓  $ACD$  之直徑,  $ABC$  為直角,聯結  $B$  與  $AC$  上之任意點  $E$ ,由  $C$  至  $AB$  引直線  $CF$ ,令其與  $AB$  交於  $F$ ,且角  $BCF$  等於角  $ABE$ ,則  $AE:EC=BF:BD$ . ... 1107
- 由直線  $AB$  之  $A$  端,引此線之垂線  $AD$ ,令其等於  $AB$ ,延長  $BA$  至  $O$ ,令  $AO$  等於  $AB$  之半分,以  $O$  為中心,  $OD$  為半徑作圓,命其與  $AB$  及  $AB$  延線之交點為  $C$  及  $C'$ ,則  $AB$  按中末比分於  $C$  及  $C'$ . ... .. 1110
- 設  $APB$  為中心為  $C$ ,直徑為  $AB$  之半圓,  $N$  為  $CB$  上之一點,在  $AB$  之延線上取點  $T$ ,令  $CT:AC=AC:CN$ ,由  $T$  引切線  $TP$ ,則角  $CNP$  為直角. ... .. 1112
- 由一點  $A$  至中心為  $O$  之圓,引割線  $AMN$ ,命  $N$  關於過點  $A$  之直徑  $AB$  之對稱點為  $N'$ ,聯結  $N'$  與  $M$ ,命其與直徑之交點為  $D$ ,則  $D$  與三點  $A, B, C$  成調和點列. 1113
- 由圓周上之任意點  $M$ ,至任意弦所引之垂線,為由  $M$  至此弦兩端上之切線所引垂線之比例中項. ... 1114
- 命  $O$  為所設點,  $P$  為所設圓周上之任意點,在  $OP$  上取點

- Q, 令  $OQ:OP$  等於所設比, 則 Q 恆在定圓周上. 1123
- 命 O 爲所設點, P 爲所設圓周上之點. 設 OQ 與 OP 成所設角, 且兩者之比等於所設比, 則 Q 恆在二定圓周之一上. ... 1126
- 設二直線 AB, CD, 或其延線交於 E, 且  $EA:EC=ED:EB$ , 則 A, B, C, D 在一圓周上. ... 1191
- 由圓周上之點 P, 引弦 PA, PB, PC, ... 令分別交 P 上切線之平行線於 A', B', C', ... 則矩形 PA·PA', PB·PB', PC·PC', ... 皆相等. ... 1192
- 由圓周上之點 A 引一直線, 令交圓周於 D, 又垂直於過 A 之直徑引一直徑, 令交 AD 於 C, 則矩形 AC·AD 等於半徑上正方形之二倍. ... 1207
- 在 BC 爲直徑之半圓周上任取點 A, 由 BC 上之任意點 D, 引 BC 之垂線, 令與直線 BA, CA 及半圓周分別交於 E, F, G, 則 DG 爲 DE, DF 之比例中項. ... 1208
- 設 AC 爲半圓之直徑, 在其周上取點 B, 令 BC 等於半徑, 則 AB 爲 BC 與 BC+CA 之比例中項. ... 1218
- 圓之直徑爲任意切線及過切點且垂直於直徑之直線分於調和. ... 1224
- 以 AB 爲直徑作半圓, 命二弦 AD, BC 之交點爲 P, 則 AB 上之正方形等於矩形 AD·AP 與矩形 BC·BP 之和. ... 1225
- 設一圓周上之點 P, 爲他圓之中心, 命第二圓之切線與第一圓周之交點爲 M, N, 則矩形 PM·PN 一定不易. ... 1230
- 凡過所設二點, 且交所設圓周之圓, 其公弦皆過一定點. ... 1231
- 設 OA, OB 爲圓中互相垂直之半徑, M 爲弧 AB 上之任意點, M 上之切線與 OA, OB 延線之交點爲 S, T, 命由 M 至 OA 所引垂線之足爲 P, 則三角形 AOB 等於三角形 SOT, OMP 之比例中項. ... 1233
- 設 ABD 爲半圓 ACD 之直徑, ABC 爲直角. E 爲弦 AC 上之任意點, 聯結 BE, 作角 BCF, 令等於角 ABE, 命 CF, AD 之交點爲 F, 則  $AE:EC=BF:BD$ . ... 1234
- 由圓周上之點 A, 引弦 AB, AC, 在過 A 直徑之他端引圓之切線, 令交 AB, AC 延切線於 D, E, 則三角形 AED, ABC 相似. ... 1235
- 設點 P 在中心爲 O 之圓周上, 延長 OP. 取  $PQ=n·OP$ , 由 Q 引切線 QR, 聯結 PR, 則三角形 PQR 外接圓之直徑, 等

- 於 PR 之  $n+1$  倍. ... 1236
- 由所設點 O 引任意直線, 令交所設圓周於 P, Q, 在 PQ 上取點 R, 令  $OQ:OP=RQ:PR$ , 則 R 在定直線上. 1284
- 有一圓臺, 供打彈子之用; 今欲自臺上之某點擊彈子, 使兩度觸邊後, 仍歸原處, 則彈子之路徑若何? ... 1288
- 過所設圓周上之點 M, 引二弦 MA, MB; 作一圓, 命內切於所設圓, 且切 MA, MB 於 C, D. 設 A, B 爲定點, M 在圓周上移動, 則直線 CD 恆切於定圓. ... 1292
- 圓之弧較圓繞此弧且與其公有兩端之任意線小. 1313
- 圓之內接及外切正多角形之邊數無限增大, 則多角形之周以圓周爲極限, 面積以圓面積爲極限. ... 1315
- 二圓周之比, 等於其半徑之比, 面積之比, 等於半徑平方之比. ... 1316
- 二圓周之比, 等於其直徑之比; 面積之比等於直徑平方之比. ... 1317
- 兩相似弧之比, 等於其半徑之比; 兩相似扇形面積之比, 等於其半徑平方之比. ... 1318
- 圓周與其直徑之比一定, 卽一切圓中皆同. ... 1319
- 圓之面積等於其圓周與半徑之積之半. ... 1320
- 圓面積等於半徑之平方與常數  $\pi$  之積. ... 1321
- 圓之扇形之面積, 等於其弧與半徑之積之半. 1322
- 設一圓周內切於半徑爲二倍之圓周, 且不使滑動而運轉, 則其周上之點, 所經之路, 爲大圓之直徑. ... 1344
- 在象限 OAHB 之二半徑 OA, OB 上, 作二半圓 OEDA, OFDB, 則 A, B, D 在一直線上. 又 OFDA, OEDB 之面積, 各等於 OA 上正方形之四分之一. ... 1345
- 圓周介乎其內接及外切二多角形周之間. ... 1348
- 一扇形之角等於他扇形之角, 則二扇形之比, 等於半徑之二乘比. 聯結弧之兩端所生弓形之比, 亦等於半徑之二乘比. ... 1351
- 兩圓之弧相等, 則其所對中心角之比, 等於半徑之反比. ... 1352
- 在直角二等邊三角形 ABC 之斜邊 BC 上, 作半圓 BDAEC, 又以 A 爲中心, AB 爲半徑, 作弧 BFC, 則弓形 BFC 等於二弓形 BDA, CEA 之和. ... 1353
- 設 O 爲圓之中心, AB 爲圓之弦, 過弦之一端, 以 AO 爲直徑作圓, 則二圓爲弦 AB 所分之弓形之比, 等於 4:1. ... 1354
- 直角三角形 ABC 中, 由直角頂至斜邊引垂線 AD, 則兩直



- 角三角形  $ADB$ ,  $ADC$  之內切圓面積之比, 等於此兩三角形之比. ... 1355
- 由半圓直徑  $AB$  上之點  $C$ , 引  $AB$  之垂線, 令交圓周於  $D$ , 又以  $AC$ ,  $BC$  爲直徑, 在所設半圓之內部, 作二半圓周, 則由三半圓周所成齒線形之面積, 等於以  $CD$  爲直徑之圓面積. ... 1357
- 半徑不同之圓中, 若扇形角之比等於半徑平方比之反比, 則扇形等積. ... 1358
- 由中心爲  $O$  之弧  $AB$  之一端  $A$ , 至  $OB$  引垂線, 命其足爲  $C$ , 在弧  $AB$  上取與  $AC$  等長之弧  $AD$ , 作  $AB$  及  $OD$ , 則弓形  $ADB$  與扇形  $DOB$  等積. ... 1359
- 設中心爲  $O$  之圓中, 互相垂直之二直徑爲  $AB$ ,  $CD$ , 以  $D$  爲中心,  $DA$  爲半徑作弧  $AEB$ , 則新月形  $ACBE$  與三角形  $DAB$  等積. ... 1360
- 設中心爲  $O$  之圓中, 互相垂直之二半徑爲  $OA$ ,  $OC$ , 在弧  $AC$  上取點  $B$ ,  $D$ , 令弧  $AB$ ,  $CD$  相等, 由  $B$ ,  $D$  至  $OC$  引垂線, 命其足爲  $E$ ,  $F$ , 則圖形  $BEFD$  與扇形  $BOD$  等積. ... 1361
- 設  $OA$  爲圓  $O$  之半徑, 在  $OA$  上取  $M$ ,  $N$ , 令  $AM = MN = NO$ , 以  $AO$  爲直徑, 在其上作半圓, 由  $M$ ,  $N$  引  $AO$  之垂線  $MP$ ,  $NQ$ . 今交半圓周於  $P$ ,  $Q$ . 求證以  $O$  爲中心,  $OP$ ,  $OQ$  爲半徑之圓周, 將原圓之面積三等分. ... 1362
- 圓面積爲其外切多角形, 及他一相似多角形其周等於此圓周者之比例中項. ... 1363
- 設圓之直徑  $AB$   $n$  等分於  $P_1, P_2, \dots$ , 在  $AB$  之同側, 以  $AP_1, AP_2, \dots$  爲直徑作半圓, 又在異側以  $BP_1, BP_2, \dots$  爲直徑作半圓, 則圖形  $AP_{m-1}BP_m$  之周, 等於所設圓周, 其面積等於圓之  $n$  分之一. ... 1364
- 設圓  $O$  之直徑  $AB$  二分於  $C$ , 以  $AC$ ,  $BC$  爲直徑, 分別在  $A$ ,  $C$  之兩側, 作半圓  $ADC$ ,  $CEB$ , 則二半圓周所成之線  $ADCEB$  按直徑上二線分之比, 分圓爲二部. ... 1365
- 過圓之弦  $AB$  之中點  $E$ , 所引  $AB$  之垂線, 將此弦所分之二弧二等分. ... 528
- 將弦所分之二弧二等分之直線, 過中心, 且二等分弦. ... 529
- 圓關於其中心及任意直徑爲對稱. ... 530
- 設  $AB$ ,  $AC$  爲圓中之等弦, 則角  $BAC$  之二等分線過中心. ... 531
- 弦  $AB$  所分之共軛弧中, 其一之中點與中心聯結之直線

- 將弦垂直二等分. ... 532
- 設半徑  $OD$ , 平行於弦  $AC$ , 則此弦與直徑  $AB$  間之弧  $BC$ , 為半徑  $OD$  所二等分. ... 533
- 設圓之第一弦為第二弦二等分, 第二弦為第三弦二等分, 第三弦為第四弦二等分, 以下仿此, 則是等分點, 依次趨近中心. ... 534
- 設三角形之各角皆為銳角, 則外心, 垂心, 皆在形內. 設為鈍角三角形或直角三角形, 則如何? ... 535
- 由三角形之二頂點  $A, B$ , 分別至其對邊引垂線  $AD, BE$ , 由  $B$  至直線  $DE$  引垂線  $BF$ , 則角  $FBD$  等於角  $EBA$ . 536
- 立於圓之弦上, 且在其一方之諸角中, 大於圓周角者, 其頂點在圓內, 等於圓周角者, 其頂點在圓周上, 小於圓周角者, 其頂點在圓外. ... 537
- 由圓之任意直徑之兩端, 至定長之弦引二垂線, 則其和或差一定. ... 538
- 圓之內接四邊形中, 與其一雙對邊成等角之直線, 與其餘一雙對邊及兩對角線亦成等角. ... 539
- 設  $AB$  為中心  $O$  之四分圓之弦, 引弦  $MN$ , 令平行於  $AB$ , 截半徑  $OA, OB$  於  $P, Q$ , 則  $PM^2 + PN^2 = AB^2$ . ... 913
- 試述定理過圓內所設點之弦, 其二分所包之矩形, 等於二等分於此點之弦半徑上之正方形之逆定理, 並證之. ... 914
- 設三圓兩兩相交, 則其公弦交於一點. 又設公弦為公切線, 則如何? ... 915
- 設  $A, B$  為圓周上之定點,  $P$  為弧  $AB$  上之任意點, 由  $A, B$  至  $P$  上之切線引垂線  $AX, BY$ , 由  $P$  引弦  $AB$  之垂線  $PC$ , 則  $AX \cdot BY = PC^2$ . ... 1244
- 設圓之中心為  $O, P$  為  $O$  以外之點, 由  $P$  至圓周上二點  $A, B$  之距相離等, 則過  $P$  之直徑將角  $AOB, APB$  二等分, 將  $AB$  垂直二等分. ... 540
- 將圓之直徑  $BA$ , 延長至  $P$ , 令  $AP$  等於半徑. 於  $A$  引切線  $AED$ , 由  $P$  引切線  $PEC$  [ $C$  為切點], 命此二切線之交點為  $E$ . 聯結  $B$  與  $C$ , 延長之令交  $AED$  於  $D$ , 則  $CDE$  為正三角形. ... 541
- 設三角形  $ABC$  之內心為  $O$ , 傍心為  $O', O'', O'''$ , 傍切圓  $O', O'', O'''$  與邊  $BC, CA, AB$  之切點分別為  $D, E, F$ , 則  $O'D, O''E, O'''F$  過同點  $M$ . 點  $M$  為三角  $O'O''O'''$  之外心,  $OM$  之中點為三角形  $ABC$  之外心. ... 706

- 設切線割線，垂直相交，則由切點至割線與圓周之二交點之距離上正方形之和，之於直徑上等正方形。 ... 917
- 有兩同心圓，由內圓周上之定點 P，引任意弦 PA，垂直於 PA，引外圓之弦 BPC，則  $PA^2 + PB^2 + PC^2$  及  $AB^2 + BC^2 + CA^2$  皆一定。又設  $\triangle ABC$  之重心為 G，則線分 GP 亦一定。 ... 918
- 設 A, B 為二定點，過 A 之任意直線，截定圓於 M, N，則三角形 BMN 之外接圓，除 B 外尚過一定點。 ... 920
- 由半圓周上之一點 C，至直徑 AB 引垂線 CD；作一圓，令切 BD 於點 E，切 CD 於點 F，切半圓周於點 G，則 A, F, G 在一直線上，且  $AE = AC$ 。 ... 921
- 設三角形 ABC 之三邊為  $a, b, c$ ，其和之半分為  $s$ ，內切圓之半徑為  $r$ ，切於邊  $a, b, c$  之傍切圓半徑，分別為  $r_1, r_2, r_3$ ，則  $rr_1 = (s-b)(s-c)$ ， $\Delta^2 = rr_1s(s-a)$ 。 ... 922
- 由圓外之一點，引圓之二切線，及一割線，則二切點各與割線之二交點聯結而成之四邊形中，二雙對邊所包之矩形相等。 ... 1261
- 聯結直徑 AB 上之點 C 及圓周之任意點 M，過 M 引 CM 之垂線，令交 A, B 之切線於 E, F。則角 ECF 為直角，矩形  $AE \cdot BF$  一定。 ... 1262
- 命所設圓周上之弧 AB 之中點為 C，其共軛弧上之任意點為 P，則比  $(AP+BP):PC$  一定。若  $\triangle ABC$  為正三角形，則此比如何？ ... 1263
- 在正方形 ABCD 之外接圓弧 AD 上，取任意點 P，則比  $PC + PA:PB$  及  $PC - PA:PD$  皆一定。 ... 1264

## 21. 等 圓

- 半徑相等之二圓全等。 ... 415
- 設兩圓相合，則以公有之中心為樞，將一迴轉任意之角，而兩圓恆可相合。 ... 416
- 等圓之半徑相等。 ... 424
- 同圓或等圓中，等中心角立於等弧上；中心角不等，則大中心角立於大弧上。 ... 432
- 同圓或等圓中，等角之二扇形相等，不等角之二扇形中，角大者形亦大。 ... 433
- 同圓或等圓中，等弧張等中心角，不等弧中，大者張大中心角。 ... 434
- 同圓或等圓中，等扇形有等角，不等扇形中，大者有大角。

- ... .. 435
- 同圓或等圓中，等弧張等弦，不等之二劣弧中，大者張大弦。 ... .. 436
  - 同圓或等圓中，二優弧不等，則大弧張小弦。 ... .. 437
  - 同圓或等圓中，等弦張等劣弧，及等優弧，二弦不等，則大弦張大劣弧及小優弧。 ... .. 438
  - 同圓或等圓中，等弦距中心等遠，不等弦則大者距中心較近。 ... .. 448
  - 同圓或等圓中，距中心等遠之弦等長，距中心不等遠之弦，則距中心近者大。 ... .. 449
  - 等圓中，設一中心角為他中心角之二倍，則對第一角之弧或扇形，亦為對第二角之弧或扇形之二倍。 ... .. 459
  - 等圓中，設一中心角為他中心角之  $n$  倍，則對前者之弧或扇形，分別為對後者之弧或扇形之  $n$  倍。 ... .. 460
  - 試直接證明定理同圓或等圓中，對等弧之中心角相等，對不等弧之中心角中，對大弧者亦大。 ... .. 461
  - 試直接證明定理等圓中，距中心等遠之弦相等，距中心非等遠之弦中，近中心者大。 ... .. 462
  - 試將兩圓相疊，而證等圓中等弦距中心等遠。 ... .. 463
  - 試證明下之定理及其逆定理：同圓或等圓中，對等弧之圓周角相等。又對應於此之弦亦相等。 ... .. 466
  - 設等圓中，一弧為他弧之二倍，則對前者之弦，小於對後者之弦之二倍。 ... .. 470
  - 等圓中，一弦為他弦之二倍，則對前者之弧，大於對後者之弧之二倍。 ... .. 472
  - 二圓相等，則聯結其中心之直線之平行線，為二圓所截得之部分相等。 ... .. 608
  - 設兩等圓之中心，互在他圓周上，則其公弦上之正方形，等於半徑上正方形之三倍。 ... .. 879
  - 設  $A, B$  為兩等圓之中心， $O$  為圓外之定點。今以  $A$  為中心， $OB$  為半徑作圓，則由  $O$  至此三圓所引之切線，等於直角三角形之三邊。 ... .. 880
  - 同圓或等圓中，中心角及扇形，比例於其所立之弧。 ... .. 954, 976

## 22. 對 稱

- 二等圓三角形頂角之二等分線，為其對稱軸。 ... 377
- 設二點  $A, B$ ，關於  $XY$  分別為  $A', B'$  之對稱點，則直線  $AB$

- 等於直線  $A'B'$ . ... .. 378
- 二直線  $AB, AC$  所成之角  $CAB$ , 等於此二線關於直線  $XY$  之對稱直線  $A'B', A'C'$ , 所成之角  $C'A'B'$ . ... .. 379
- 平行四邊形中具有關於其對角線交點之點對稱. 380
- 設四邊形關於其對角線之交點為對稱, 則此四邊形為平行四邊形. ... .. 381
- 菱形關於其各對角線為對稱. ... .. 382
- 設四邊形關於其各對角線為線對稱, 則四邊形為菱形. ... .. 383
- 平行四邊形關於其對角線之一為線對稱, 則此平行四邊形為菱形. ... .. 384
- 關於互相垂直之二直線為對稱之平面圖形, 關於此二直線之交點為對稱. ... .. 385
- 一直線為圓之對稱軸, 則此直線為直徑. ... .. 427
- 設一線關於過所設點之各直線成線對稱, 則此線為以所設點為中心之圓周. ... .. 428

### 23. 二 圓

- 設二圓相交, 則此二圓不能同心. ... .. 418
- 兩圓不能共一弧 ... .. 469
- 有互相在外之二圓, 其一雙外公切線之切點, 分別為  $A, B$  及  $C, D$ , 又一雙內公切線與  $AB, CD$  之交點, 分別為  $P, Q$  及  $R, S$ , 則  $AB=CD=PQ=RS$ . ... .. 528
- 設二圓之一交點, 不在聯結兩中心之直線上, 則二圓必交於第二點, 而此二圓相交; 且聯結兩交點之直線, 將聯結兩中心之直線垂直二等分; 又聯結二中心之直線, 大於二半徑之差, 而小於其和. ... .. 593
- 設二圓之交點唯一, 則此點在聯結二圓中心之直線上. ... .. 594
- 二圓之交點, 若在聯結其中心之直線上, 則此二圓不更交於他點, 而外切或內切; 其兩中心間之距離, 外切時等於二半徑之和, 內切時等於二半徑之差. ... .. 595
- 二圓相交, 則其交點不在聯結二中心之直線上. ... 596
- 二圓互相內切或外切, 則聯結其中心之直線過切點. ... .. 597
- 二圓相切時, 有切於其切點之一公切線. ... .. 598
- 設二圓之周不相遇, 則各圓全在他圓之外時, 其中心間之距離, 大於二半徑之和; 一圓全在他圓之內時, 此距離小

- 於半徑之差. ... .. 599
- 設二圓中心間之距離, (1) 大於半徑之和, 或 (2) 等於其和, 或 (3) 小於其和而大於其差, 或 (4) 等於其差, 或 (5) 小於其差, 則二圓 (1) 各在他之外, 或 (2) 外切, 或 (3) 相交, 或 (4) 內切, 或 (5) 一在他之內. 試據轉換法及由直接法幾何學證之. ... .. 600
- 以下各款中, 兩圓之公切線有幾? (甲) 一圓全在他圓外, (乙) 二圓外切, (丙) 二圓相交, (丁) 二圓內切, (戊) 一圓全在他圓內. ... .. 601
- 切於相交之二定圓, 作任意圓, 則由其中心至二定圓中心之距離之和或差為定長. ... .. 603
- 設二圓不相交, 則其二雙公切線之交點, 在聯結各圓中心之直線上. ... .. 604
- 設  $A, B$  為二圓周之交點, 由一圓周上之任意點  $C$ , 引二直線  $CA, CB$ , 命其延長與他圓周之交點分別為  $D, E$ , 則弦  $DE$  之長一定不易. ... .. 607
- 過二圓之交點, 引一直線, 設其端在各圓周上, 則聯結各圓中心之直線, 投於此直線上之正射影, 等於其半徑. 609
- 過二圓之各交點, 引平行割線, 則其於圓周間之部分相等. ... .. 610
- 設二圓與一公切線之切點為  $A, B$ , 聯結二圓中心之直線交二圓周於點  $C, D$ , 則由  $A, B$  分別向  $C, D$  所引之直線  $AC, BD$  平行. ... .. 611
- 設二圓相交, 以其一交點為一端, 作各圓之直徑, 則聯結此二直徑之他端之直線, 過他一交點. ... .. 612
- 設二圓交於  $A, B$ ,  $AC, AD$  為各圓之切線, 與他圓周交於  $C, D$ , 則角  $ABD, ABC$  相等. ... .. 613
- 設兩等圓公弦  $AB$ , 於其一圓中引等於  $AB$  之弦  $AC$ , 若其延長過他圓之中心, 則公弦等於各圓之半徑. ... 614
- 設二圓交於  $A, B$ , 過  $A$  引二直線, 令與  $AB$  成等角, 命二圓周與一直線之交點為  $P, Q$ , 與他直線之交點為  $R, S$ , 則  $PQ, RS$  相等. ... .. 615
- 設兩圓內切, 引大圓之弦, 令切於小圓, 則聯結二圓之切點與此弦二端之直線, 與聯結二切點之直線成等角. 616
- 設兩圓交於  $A, B$ , 於其一圓周上取任意點  $P$ , 由  $P$  引直線  $PAC, PBD$ , 命其與他圓周之交點為  $C$  及  $D$ , 則弦  $CD$  平行於點  $P$  上之切線. ... .. 623
- 過二圓之交點  $A, B$ , 引直線  $PAQ, RBS$ , 命其與圓周之交點為  $P, Q, R, S$ , 則  $PR, QS$  兩弦平行. ... .. 624

- 設二圓交於 A, P, 過 P 引 PA 之垂線, 令與各圓周交於 B, C, 延長 BA, CA, 令再交各圓於 Q 及 R, 則 AP 將  $\widehat{QPR}$  二等分. ... 631
- 設二等圓之周, 各過他圓之中心, 則過其一交點之直線與各圓周之交點及圓之他—交點, 爲正三角形之頂點. ... 633
- 相交二圓所成之二角相等. ... 634
- 設二圓直交, 則各圓交點上之切線, 過他圓之中心. 635
- 設二等圓直交, 則其公弦等於中心距離. ... 636
- 設二等圓交於 A, B, 過 A 之一直線與各圓周交於 C, D, 聯結 BC, BD, 則  $\triangle BCD$  爲二等邊三角形. ... 637
- 設二等圓交於 A, B, 以 A 爲中心, 任意長爲半徑作圓, 令與前圓各交於 C 及 D, 則 B, D, C 在一直線上. ... 638
- 設相交二圓中, 一圓過他圓之中心, 則第一圓過交點之切線, 與公弦所成之角, 爲第二圓過同交點之半徑所二等分. ... 639
- 設二圓相交, 過其一交點引任意直線, 聯結圓之他—交點與所引直線交於各圓周之點, 則此聯結之二直線所成之角, 一定不易, 而等於圓之交角, 即各圓於其交點上之切線所成之角. ... 640
- 過二圓之交點 A, 引二直線 MAN, M'AN', 令與圓周交於 M, N, 及 M', N', 則 MM' 及 NN' 之延線之夾角, 一定不易, 又於 M 及 N 上之圓周之切線所成之角, 亦一定不易. 若此二割線合爲一直線, 則如何? ... 641
- 設兩圓周相交, 則其公弦之切線, 將公切線切點間之部分二等分. ... 894
- 由相交二圓公弦延線上之任意點, 至兩圓所引之切線相等. ... 895
- 設兩圓周之交點爲 A, B, 過 A 之任意直線與圓周之交點爲 C, D, 則 BC:BD 一定. ... 1070
- 設 A 及 B 爲兩圓之交點, 於 A 引各圓之切線, 命其與各圓周之交點爲 C 及 D, 聯結 CB, BD, 則 BD 爲 CB, BA 之第三比例項. ... 1071
- 以圓 ABE 周上之任意點 A 爲中心, 任意長爲半徑作圓, 令交前圓於 B 及 C, 又由 A 引任意直線 AFE, 令之公弦 BC 於 F, 交圓周 BDC, ABE 於 D, E, 則 AD 爲 AF, AE 之比例中項. ... 1073
- 兩圓二雙公切線之交點, 各按半徑之比, 內分及外分中心線. ... 1116

- 一圓之切線，若過兩圓之相似中心，則又切於他圓。 ...  
... .. 1117
- 設一直線過兩圓之平行半徑之端，則又過兩圓之相似中心。 ... .. 1118
- 設兩圓相交，在其公弦上取任意點  $X$ ，過  $X$  在各圓內引弦  $AB, CD$ ，則矩形  $AX \cdot XB$ ，等於矩形  $CX \cdot XD$ 。 ... 1227
- 由相交二圓之公弦延線上之點，至二圓所引之切線相等。 ... .. 1228
- 設  $C$  為相交二圓公弦上之一點，過  $C$  引一直線，令交一圓周於  $A, D$ ，他圓周於  $B, E$ ，則  $AB:BC=DE:CD$ 。 1229
- 由兩圓之相似中心  $O$ ，引任意直線，令交一圓於  $R, R'$ ，他圓於  $S, S'$  [ $R$  與  $S, R'$  與  $S'$  分別對應，即若  $OR < OR'$ ，則  $OS < OS'$ ]，則矩形  $OR \cdot OS'$  及矩形  $OR' \cdot OS$  相等。 1232
- 過兩圓之相似中心  $O$ ，引任意直線，令交一圓於  $P, P'$ ，他圓於  $Q, Q'$  [若  $OP$  小於  $OP'$ ，則  $OQ$  小於  $OQ'$ ]，則  $P$  與  $Q$  [或  $P'$  與  $Q'$ ] 分別與其圓之中心聯結之半徑相平行，命二圓公切線之切點，分別為  $T, T'$ ，則  $PT$  平行於  $QT'$ ，又  $P'T$  平行於  $Q'T'$ 。命過  $O$  之他任意直線交二圓周於  $R, R'$ ，及  $S, S'$ ，則四點  $P, Q, R, S'$  在一圓周上。又如是之四點有幾組？ ... .. 1291
- 外切於一圓之兩個等邊三角形，相交而成六角形，此六角形雖恆為等邊，而不恆為等角。 ... .. 592
- 試由圓之對稱關係，以證二圓相交，則其中心線將公弦垂直二等分。 ... .. 644
- 設平行四邊形  $ABCD$  之對角線交點為  $O$ ，則三角形  $AOB, COD$  之外接圓相切於  $O$ 。 ... .. 645
- 設兩圓之切點為  $A$ ，公切線與中心線之交點為  $S$ ，公切線與兩圓之切點為  $P, Q$ ，則線分  $SA$  為線分  $SP, SQ$  之比例中項。 ... .. 1133
- 二圓之根軸將公切線二等分。 ... .. 1249
- 過一定點之圓周與一定圓周之根軸，與過此二定點之直線，或交於同點，或相平行。 ... .. 1250
- 二圓之外公切線與內公切線之四交點，在過二圓中心之一圓周上。 ... .. 647
- 設兩圓內切於  $A$ ，大圓之弦  $BC$ ，切小圓於  $D$ ，聯結  $AB, AC$ ，命其與小圓之交點分別為  $P, Q$ ，則  $DC \cdot DP = DB \cdot AQ$ ， ... .. 1266
- 設兩圓相切，則過切點之直線所分之優弓形或劣弓形面積之比，等於半徑平方之比。 ... .. 1268



- 過圓兩相似中心之直線，爲各圓周所截取而成之弦之比，等於半徑之比。... 1269

## 24. 同心圓

- 半徑不等之同心圓，決不相交。... 417
- 設一直線交兩同心圓之圓周，則此直線夾於二圓周間之二部分相等。... 418
- 由同心圓之中心  $O$ ，引任意直線  $OB$ ，命其交內圓周於  $A$ ，令  $OB$  三倍於  $OA$ ，以  $AB$  爲直徑作圓，命其與外圓周之交點爲  $C$ ，由  $C$  引外圓之弦  $CAE$ ，則此弦爲內圓周所三等分。... 499
- 二同心圓中，由一圓周上之任意點至他圓周之距離相等。... 646
- 設兩同心圓之公直徑爲  $ABCD$ ，外圓周上之任意點爲  $P$ ，內圓周上之任意點爲  $Q$ ，則  $PB$ ， $PC$  上正方形之和，等於  $QA$ ， $QD$  上正方形之和。... 888
- 有兩同心圓，由外圓周上之一點  $A$ ，引內圓之切線  $AD$ ， $AE$ ，聯結切點  $D$ ， $E$ ，延長  $ED$ ， $AD$ ，命其與外圓周之交點分別爲  $B$ ， $C$ ，則 (1)  $\triangle ABE \sim \triangle BCD$ ，(2)  $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 = BE : BD$ 。... 1267
- 二同心圓間之面積，等於以大圓周中切小圓周之弦爲直徑所作圓之面積。... 1356

## 25. 圓之弦

- 由圓之中心，向其弦之中點所引之直線，垂直於其弦。及其逆定理。... 439, 440, 441
- 弦之兩端點即弦上之點，皆在圓內，弦之延長線上之點，皆在弦外。... 442
  - 圓之直徑爲最大之弦。... 450
  - 設  $A$ ， $B$ ， $C$ ， $A'$ ， $B'$ ， $C'$  爲順次在同一圓周上之點，且弦  $AB$ ， $AC$  分別平行於弦  $A'B'$ ， $A'C'$ ，則弦  $BC$  等於弦  $B'C'$ 。... 467
  - 弦之垂直二等分線，將弦所分之弧二等分。... 471
  - 試由定理三角形二邊之和，大於他一邊以證圓之直徑爲最大之弦。... 473
  - 平行弦由圓周截得之弧相等。... 474
  - 圓之相交二弦不過中心者，不能互相二等分。... 477
  - 設  $PQ$  爲  $O$  圓中之任意弦，直徑  $AB$  平行於  $PQ$ ，則弦  $QA$  及  $QB$  將角  $PQO$  及其外角二等分。... 478

- 設圓之中心為  $C$ ，弦為  $AB$ ，由圓周上之一點引弦之垂線為  $DE$ ，求證  $\widehat{ADE}$  等於  $\widehat{BDC}$ 。... 481
- 設  $O$  為圓之中心， $AB$  為所設之弦，延長  $AB$ ，取  $BC$  等於半徑，聯結  $CO$ ，延長之令與圓周交於  $D$ ，則  $\widehat{BDC}$  等於  $\widehat{DOA}$  之三分之一。... 485
- 由直徑之兩端，至任意弦或其延線所引垂線之足，距圓之中心等遠。... 497
- 設  $A, B, C$  為圓周上之三點，弧  $AB, AC$  之中點分別為  $D, E$ ，直線  $DE$  與弦  $AB, AC$  之交點為  $F, G$ ，則  $AF=AG$ 。500
- 同圓中聯結等弧端之二弦，非平行，即相等。... 501
- 設相交之二弦，與過其交點之直徑成等角，則此二弦相等。... 502
- 由弦之中點，在弦之同側，引二直線，令與此弦成等角，且與圓周相交，則此二直線相等。... 503
- 將弦三等分，由中心過此分點引半徑，則分弧為三部分，其兩端之部分相等，而小於中央之部分。... 504
- 圓之直徑，將不過中心之一弦二等分，則平行於此弦之一切弦，皆為此直徑所二等分。... 505
- 由圓中相等二弦或其延線之交點，至各弦兩端之距離，兩兩相等。... 514
- 設  $AB, CD$  為圓之等弦，分別延長至  $E, F$ ，令  $BE=DF$ ，則  $EF$  之垂直二等分線過圓之中心。... 515
- 設任意弦  $PQ$  垂直於圓之直徑  $AB$ ，在圓周上取任意點  $R$ ，則角  $PRQ$  及其外角之二等分線，各過  $A$  或  $B$ 。... 516
- 設  $AB, CD$  為平行之弦，其長不等，則  $AC, BD$ ，或  $AD, BC$  之交點，在垂直於  $AB$  及  $CD$  之直徑或其延線上，而與直徑成等角。又設  $AB, CD$  相等，則如何？... 517
- 設  $AB$  為圓  $APQB$  之所設弦， $PQ$  為同圓之弦，而其長一定，令  $AP, BQ$  之交點為  $R$ ，則不論  $PQ$  之位置若何， $R$  恆在定圓周上。... 519
- 設  $AB, CD$  為圓  $O$  中之二平行弦， $F$  為  $CD$  之中點。又設過  $A, O, F$  之圓與前圓交於  $G$ ，則  $G, F, B$  在一直線上。681
- 由弧  $CD$  之中點  $M$ ，引二弦  $MA, MB$ ，令與弦  $CD$  交於  $E, F$ ，則四點  $A, B, F, E$  在一圓周上。... 687
- 設圓之二等弦  $AB, CD$  交於圓內或圓外，則其交點  $I$  所分之二部分，分別相等。... 707
- 設六點  $A, B, C, D, E, F$  在一圓周上，弦  $AB, BC$  分別平行於  $ED, EF$  則  $FA, DC$  亦平行。... 710
- 設兩弦  $AB, CD$  直交於  $O$ ，則其四分上正方形之和，等於直

- 徑上之正方形。又設圓之中心為  $M$ ，則  $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 8AM^2 - 4R^2$ 。... 881
- 設圓之弦  $CD$ ，平行於直徑  $AB$ ，命  $P$  為  $AB$  上之任意點，則  $CP, DP$  上正方形之和，等於  $AP, BP$  上正方形之和。889
- 由半圓直徑  $AB$  之兩端，引二弦  $AD, BE$ ，則  $AC \cdot AD + BC \cdot BE = \overline{AB}^2$ 。... 899
- 由圓之直徑之兩端，引任意弦或其延長之垂線，則由弦之一端，至此二垂足之距離所包之矩形，等於二垂線所包之矩形。... 900
- 設圓之弦  $AB, CD$  分別向  $B$  及  $D$  之一方延長，令交於  $E$  點，過  $E$  平行於  $AD$  引直線  $EF$ ，令交  $CB$  之延長於  $F$ ，則  $FB:EF = EF:FC$ 。若  $AB, CD$  交於圓內則如何？... 1063
- 設  $AC$  為半圓之直徑， $B$  為半圓周上之點，而  $BC$  等於半圓之半徑，則  $AB$  為  $BC$  及  $BC+CA$  之比例中項。1245
- 設圓之弦  $AB$ ，以半直角交所設直徑於  $P$ ，則不問弦之位置如何， $AP, PB$  上正方形之和，恆等於半徑上正方形之二倍。... 916

## 26. 圓之弧

- 設  $AB, CD$  為一圓之弦，其夾角一定，則不問二弦之位置若何，二弧  $AC, BD$  之和或差恆相等。... 493
- 設二弓形  $ACB, ADB$  立於同弦  $AB$  之上，在弧  $ACB$  上取任意點  $C$ ，聯結  $CA, CB$ ，命  $CA, CB$  或其延長交弧  $ADB$  於點  $D, E$ 。求證弧  $DE$  之大小，一定不易。... 496
- 設圓之二弦  $AB, CD$  直交，則弧  $AC +$  弧  $BD =$  弧  $AD +$  弧  $BC$  [雙方各等於半圓周]。又設其延長直交於圓外，則如何？... 506
- 過關於三角形之下列九點，得作一圓。(A) 各邊之中點。(B) 由各頂點至對邊所引垂線之足 (C) 各頂點與垂心連線之中點。[此圓曰九點圓]。而外心，垂心，重心及九點圓之中心在一直線上，九點圓之中心在外心與垂心之中央。又九點圓之半徑為外接圓半徑之半。... 524
- 在圓  $O$  中，引與半徑等長之弦  $AD$ ，於  $A$  引此圓之切線，由其對於  $OA$  在  $AD$  異側之部分，截取  $AB$ ，令等於半徑，聯結  $BD$  及  $BO$ ，命其與圓周之交點分別為  $E, F$ ，則弧  $AE$  等於圓周之  $\frac{1}{2}$ ，弧  $EF$  等於之周之  $\frac{1}{4}$ 。... 547

## 27. 圓周角

- 圓周角等於立於同弧中心角之半。... 451

- 同弓形中之弓形角相等. ... .. 452
- 由與弓形在同一平面之一點至弓形之弦之兩端, 引二直線, 此二直線間之角, 若點在弓形外, 則大於弓形角, 若點在弓形內 [但與弓形在弦之同側], 則小於弓形角. 453  
弓形角之大小, 視弓形之大於, 或等於, 或小於半圓, 而小於, 或等於, 或大於直角. 及其逆定理. ... 454, 455
- 設二弦  $AB, CD$  交於圓內一點  $E$ , 求證角  $AEC$  等於弧  $AC, BD$  所對中心角之和之半. ... .. 489
- 設  $AB, CD$  爲圓內不交之二弦, 延長之令交於圓外之一點  $E$ , 則角  $AEC$  等於弧  $AC$  及  $BD$  所對中心角之差之半. ... .. 490
- 由圓周上一點引二弦, 其夾角之外角, 等於二弦所對弧之和所對之圓周角. 此外角之二等分線, 過等於此二弧和之弧之中點. ... .. 491

## 28. 內接形

- 內接於圓之四邊形, 其對角互爲補角. 及其逆定理. ... .. 456, 458
- 內接於圓之四邊形, 其對角互爲補角. ... .. 457
- 設四邊形  $ABCD$  內接於一圓, 延長其二邊  $AB, DC$  令交於點  $E$ , 又延長其他二邊  $BC, AD$ , 令交於  $F$ , 此時若過  $B, E, F, D$  得畫一圓, 則  $AC$  爲前圓之直徑,  $EF$  爲後圓之直徑. ... .. 479
- 圓之內接六角形中, 相間各角之和等於  $4R$ , 內接八角形中, 相間各角之和等於  $6R$ . 普偏言之, 圓之內接  $2n$  角形中, 相間各角之和等於  $(2n-2)R$ . ... .. 482
- 設  $ABCD$  爲圓之內接四邊形, 則以三角形  $ABC, BCD, CDA, DAB$  之垂心爲頂點之四邊形, 全等於原四邊形. ... 522
- 圓之內接四邊形中, 延長其二組對邊而得二角, 此二角之二等分線直交. ... .. 525
- 圓之內接四邊形中, 若兩對角線直交, 則由其交點至任意一邊所引垂線, 依反對方向延長時, 將對邊二等分. 526
- 設圓之內接四邊形中, 兩對角線直交, 則由其交點至各邊所引垂線之足, 與各邊之中點, 其數凡八, 同在一圓周上. ... .. 527
- 試證定理圓之內接四邊形之對角, 互爲補角. 但得引二對角線及引用定理同弓形中之弓形角相等. ... .. 648
- 試藉內接四邊形之二頂點趨近而達極限, 以證定理切線

- 與過切點之弦之夾角；等於此弦上在其他側之圓周角  
 ... .. 649
- 試由定理圓之內接四邊形之對角，互為補角，以證切線與過切點之弦之夾角，等於此弦上在其他側之圓周角。  
 ... .. 650
- 設圓之內接四邊形中，一雙對邊相等，則他雙對邊平行。  
 ... .. 663
- 在圓之內接四邊形中，作其一外角之二等分線，令交於圓周，則聯結此交點與此外角內對角之頂點之直線，將其內角二等分。 ... .. 665
- 圓之內接六邊形中，對角不能互為補角。〔六邊形中之對角或對邊，係相隔二角或二邊之角或邊〕。 ... .. 666
- 圓之內接六邊形中，若相隣二邊分別平行於其對邊，則他二邊亦互相平行。 ... .. 667
- 圓之內接六邊形中，不相隣三角之和為幾直角？又設普偏言之，對於邊數為偶數之一圓內接多角形如何？ ... 668
- 設圓之內接直線形之角皆相等，則其邊相間相等。又此直線形如何則為等邊？ ... .. 669
- 圓之內接等邊直線形為等角。又圓之內接等角直線形必為等邊否？ ... .. 672
- 延長圓之內接四邊形  $ABCD$  之四邊，命  $AB$  與  $CD$  之交點為  $P$ ， $BC$  與  $AD$  之交點為  $Q$ ，作三角形  $PBC$ ， $QCD$  之外接圓，命其圓周除  $C$  外復交於點  $R$ ，則三點  $P$ ， $Q$ ， $R$  在一直線上。 ... .. 684
- 設二弦  $AB$ ， $AC$  交於圓周上之點  $A$ ，又他一弦平行於  $A$  點上之切線，且截前二弦於  $E$ ， $D$ ，則四邊形  $BCDE$  內接於圓。  
 ... .. 686
- 圓之內接四邊形中，過對角線之交點引一直線，令垂直於一雙對邊之交角之二等分線，則此直線將對角線之交角二等分。 ... .. 690
- 圓之內接四邊形中，與一雙對邊成等角之直線，與他一雙邊及二對角線亦成等角。 ... .. 691
- 過圓之內接四邊形之對角線交點及其二頂點作圓，則此圓在該交點上之切線，平行於四邊形之一邊。 ... 692
- 設一四邊形內接於一圓，外切於他圓，則內切圓之相對切點聯結之直線，互相垂直。 ... .. 693
- 設四邊形  $ABCD$  內接於圓，過其對角線之交點  $O$ ，引弦  $EF$ ，令於此點二等分，且命其與  $AB$ ， $CD$  之交點分別為  $M$ ， $N$ ，與  $BC$ ， $AD$  延線之交點分別為  $P$ ， $Q$ ，則  $MN$  及  $PQ$  皆二等

- 分於  $O$ . ... .. 695
- 設  $ABCD$  爲圓之內接四邊形，則三角形  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ACD$ ,  $BCD$  內切圓之中心  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  爲矩形之頂點. ... 727
- 設圓之任意內接四邊形中，四邊之長一定，則不問其邊之順序如何，四邊形之面積一定，又角之大小，隨邊之順序變化而變化. ... .. 884
- 設圓之內接四邊形中，二對角線互相直交，則其二雙對邊所包矩形之和，等於四邊形面積之二倍，因而等於兩對角線所包之矩形. ... .. 931
- 設圓之內接四邊形中，兩對角線直交，則二組對邊所包矩形之和，等於四邊形面積之二倍. ... .. 1201
- 設圓之內接四邊形  $ABCD$  中，對角線交點爲  $O$ ，則矩形  $AB \cdot AD$ ,  $BC \cdot CD$  之比，等於  $AO$ ,  $CO$  之比. ... .. 1202
- 設圓之內接四邊形  $ABCD$  中，邊  $BC$ ,  $CD$  相等，則矩形  $AB \cdot AD$  與  $BC$  上正方形之和，等於  $AC$  上之正方形. ... 1220
- 圓之內接四邊形二對角線之比，等於其兩端旁二邊所包矩形之和之比. ... .. 1223
- 由圓周上之任意點  $P$ ，至內接四邊形之一雙對邊所引垂線所包之矩形，等於至對角線所引垂線所包之矩形。又試證其逆定理. ... .. 1238
- 圓之內接六邊形中，各雙對邊延線之交點，在一直線上. ... .. 1290
- 設二等邊三角形  $ABC$  中，底  $BC$  之平行線，截他二邊於  $D$ ,  $E$ ，則  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  在一圓周上. ... .. 696
- 於所設角  $XOY$  之二邊  $OX$ ,  $OY$  上，分別取任意長  $OA$ ,  $OB$ ，由  $OA$  之中點  $A'$  引  $OA$  之垂線，令與  $OY$  交於  $C$ ，又由  $OB$  之中點  $B'$  引  $OB$  之垂線，令與  $OX$  交於  $D$ ，命此二垂線之交點爲  $E$ ，則  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  在一圓周上. ... .. 697
- 由圓之直徑  $AB$  之一端  $A$ ，引弦  $AP$ ,  $AQ$ ，延長之令分別交  $B$  上之切線於  $R$ ,  $S$ ，則  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  在一圓周上. ... 698
- 有四點，各爲他三點所成三角形之垂心，則此四點中，過其任何三點之圓相等. ... .. 699
- 設四圓之弦成圓之內接四邊形，則此四圓之交點，在一圓周上. ... .. 701
- 設四邊形  $ABCD$  內接於圓，對角線  $AC$ ,  $BD$  之交點爲  $E$ ，則  $\frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DC} = \frac{BE}{ED}$ . ... .. 1242
- 設兩多角形相似，且爲內接多角形，則其周之比，等於二外接圓半徑之比，其面積之比，等於以半徑爲底之二正方形

- 面積之比 ... .. 1247
- 設  $ABC$  爲銳角三角形, 其外接圓之直徑爲  $AD$ , 則  $BAD$ ,  $CAD$  角分別爲角  $ACB$ ,  $ABC$  之餘角. ... .. 704
- 設一圓之內接四邊形  $ABCD$  中, 一雙對邊  $AB$ ,  $CD$  之延長, 交於點  $P$ , 則  $PB \cdot AC = PC \cdot AD$ . ... .. 1252

### 29. 外切形

- 設四邊形之各邊切於同圓, 則其對邊之和相等. 並證明其逆定理. ... .. 562
- 四邊切於同圓之平行四邊形爲菱形. ... .. 563
- 設十字四邊形[一雙對邊相等者]之邊皆切於同圓, 則其一雙對邊之差, 等於他雙對邊之差. ... .. 567
- 作圓之外切四邊形, 則其兩對邊所對中心角之和, 等於二直角. ... .. 657
- 圓之外切多角形, 等於其周與圓之半徑所包矩形之半. ... .. 883
- 設  $ABCD$  爲外切於圓之四邊形, 過圓之中心  $O$  引直線  $EOF$ , 令其與二邊  $AB$ ,  $DC$  成等角, 且與其交於  $E$ ,  $F$ , 則  $AE:EB = CF:FD$ . ... .. 1108
- 三角形之二傍切圓相等, 則此三角形爲二等邊. ... 700
- 設四邊形  $ABCD$  外切於圓, 則三角形  $ABD$ ,  $BCD$  之內切圓互相外切. ... .. 702
- 等邊多角形得外切於圓否? 又等角多角形得外切於圓否? ... .. 703

### 30. 三個以上之圓

- 設三圓相等且相切, 則其中心爲正三角形之頂點, 三切點亦然. ① ... .. 625
- 設三等圓過同點  $O$ , 他交點爲  $B$ ,  $C$ ,  $A$ , 則  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  四點中, 任何一點皆爲他三點所成三角形之垂心. ... 627
- 以若干等圓, 始得圍切一與其相等之所設圓? ... 703
- 由四直線所成四個三角形之四外接圓過同點, 且此點與四圓之中心在一圓周上. ... .. 718
- 設四圓各切於不過同點亦不平行之三直線, 則任意二圓中心線上正方形, 與他二圓中心線上正方形之和, 等於過任意三圓中心之角中直徑上之正方形. ... .. 890
- 設無數圓周過二所設點, 過其一點引任意二直線, 令與是等圓周交, 則其夾於圓周之對應部分成比例. ... 1109
- 設兩定圓不相交, 作一圓, 令內切於定圓之一面外切於他

一,則聯結其切點之直線,恆過一定點. ... .. 1265

### 31. 切線

- 過圓周上一點之諸直線中, 其與過同點之半徑相垂直者, 不復交圓周於他點; 其餘直線則有第二交點. ... 548
- 切圓於所設點之直線唯一. ... .. 549
- 圓之任意切線, 為過其切點之半徑之垂線. ... .. 550
- 圓之中心, 在任意切線之垂線上, 但垂足為切點. 及其逆定理. ... .. 551, 552
- 設一直線截圓, 或切於圓, 或不與圓交, 則由此直線至圓之中心之距離, 小於, 或等於, 或大於半徑. ... .. 554
- 由圓外之一點, 得引圓之二切線, 而限於二. ... 555
- 由圓外之一點所引之切線相等, 而與聯結是點及中心之直線成等角. ... .. 556
- 圓之切線與由切點所引弦之夾角, 等於此弦上在他側之圓周角. 及其逆定理. ... .. 557, 559
- 平行於切線之弦所截之弧, 為切點所二等分. ... 558
- 設圓之中心為  $O$ ,  $A$  為圓外之一點, 由  $A$  引圓之二切線  $AB$ ,  $AC$ , 則  $OA$  將聯結二切線之弦  $BC$  垂直二等分. ... 560
- 一圓之等弦, 皆切於此圓之一同心圓. ... .. 561
- 設  $AB$ ,  $AC$  為由圓周上一點  $A$  所引之二弦, 平行於  $A$  點上之切線, 引  $BD$ , 令交  $AC$  於  $D$ , 則圓  $BCD$  切於  $AB$ . 565
- 設  $A$  為圓之直徑上之一點,  $B$  為垂直於此直徑之半徑之端, 聯結  $BA$ , 延長之令圓周於  $P$ , 於  $P$  點引切線, 命其與直徑延長之交點為  $C$ , 則  $CA=CP$ . ... .. 568
- 將圓之弦  $AB$ , 向雙方延長, 取相等之  $AC$ ,  $BD$ , 則由  $C$  及  $D$  所引之二切線相等. ... .. 569
- 設一圓之中心為  $O$ , 半徑為  $R$ , 以此圓外之一點  $A$  為中心,  $OA$  為半徑, 作弧  $B'OC'$ , 又以  $O$  為中心,  $2R$  為半徑作弧, 命其與前弧之交點為  $B, C$ , 聯結  $OB, OC$ , 命其與原圓之交點為  $E, D$ , 則二直線  $AE, AD$  切於原圓. ... .. 570
- 兩圓公切線上切點間之長相等. ... .. 571
- 由圓周上之一點, 引圓之切線及弦, 則與切線在弦之同側之弧之中點, 距切線及弦等遠. ... .. 572
- 由所設圓之中心  $O$ , 至所設直線  $AB$ , 引垂線  $OB$ , 又由  $O$  引任意直線, 命其與圓周之交點為  $C$ , 於  $C$  引切線, 則此切線與  $AB$  之夾角, 等於角  $COB$ . ... .. 573
- 作二邊切於圓之角, 及凸向此角頂之弧某點之切線, 則此切線與角之二邊所成之三角形, 其周一定; 且所作之切線,



- 張定角於中心。若所作之切線，切於凹角頂之弧，則如何？... 577
- 由圓外之點  $P$  引切線  $PA, PB$ ，及割線  $PCD$ ，又由  $A$  平行於  $CB$  引弦  $AE$ ，則  $EB$  將弦  $CD$  二等分。... 578
- 將弦  $AB$  向雙方延長至  $C$  及  $D$ ，令其長相等。由  $C, D$  至反對之弧上引切線  $CE, DF$ ，則  $EF$  將  $AB$  二等分。... 579
- 以  $O$  為中心作圓，以其周上之點  $G$  為中心作第二圓，截前圓於  $B, C$ 。又以第二圓周上之一點  $I$  為中心，作切於  $BC$  之第三圓。則由  $B, C$  至第三圓所引他二切線，交於第一圓周上。... 585
- 由所設圓之中心  $O$ ，至任意直線  $XY$  上作垂線，過其垂足  $A$  作割線，令與圓周交於  $B$  及  $C$ ，在  $B, C$  作圓之切線，則此切線與  $XY$  之二交點，距  $A$  點等遠。... 715
- 引二圓之切線，復於一直徑之兩端引二切線，令截前切線，則其截得之部分上為切點所分成之二分所包之矩形，等於半徑上之正方形。... 886
- 由有限直線  $AB$  延線上之一定點，至過  $A, B$  之任意圓所引之切線皆相等。... 897
- 由圓之直徑上之一點  $P$ ，至圓周上之點  $Q$  上之切線，引垂線  $PT$ ，則矩形  $PT \cdot AB$  等於矩形  $AP \cdot PB$  及  $PQ$  上正方形之和。... 904
- 在中心為  $O$  之圓周上，取二點  $A, B$ ，於  $A, B$  上引切線，命其交點為  $D$ ，則為弦  $AB$  二等分之諸弦，其兩端上之切線之交點，在  $OD$  為直徑之圓周上。... 907
- 設一圓周過他圓之中心，由前圓周上之任意點，至後圓引二切線，則聯結其切點之直線，為公弦所二等分。... 908
- 設  $O$  為圓  $C$  外之點， $OA, OB$  為由  $O$  所引圓  $C$  之切線， $PQ$  為過  $AB$  中點  $D$  之任意弦，則  $OC$  將角  $POQ$  二等分。又引任意割線  $OP'Q'$ ，命其與圓周之交點為  $P', Q'$ ，則  $AB$  將角  $P'DQ'$  二等分。... 909
- 由所設點  $A$  至所設圓引切線  $AB$ ，及割線  $ACD$ ，則三角形  $ABC, ABD$  相似。... 1034
- 設直徑  $AB$  兩端上之切線為  $AC, BD$ ，命任意點  $E$  上之切線與上二切線之交點分別為  $C, D$ ，又命  $AD, BC$  之交點為  $P$ ，則  $PE$  平行於  $AC$ 。... 1057
- 過圓之直徑  $AB$  之  $A$  端引切線，在切線上取點  $C$ ，由  $C$  引第二切線  $CD$ ，由切點  $D$  至  $AB$  引垂線  $DE$ ，則  $DE$  為  $CB$  二等分。... 1115
- 設兩平行線  $AE, BF$  分別切圓於  $A, B$ ，又交他切線於  $E, F$ ，

- 則圓之半徑為切線 EF 上切點所分二部之比例中項。  
 ... .. 1120
- 設 OA, OB 切中心為 C 之圓於 A, B, 由 C 引任意割線, 令交圓周於 P, Q, 交 AB 於 R, 則 O, R 分 PQ 於調和。1283
- 延長圓中互相垂直之二直徑, 令其與任意切線交, 由其交點分別向圓引他切線, 則所引二切線平行。... 587
- 於圓 O 之任意直徑 CD 之兩端, 引二切線, 令分別交他切線於 A, B, 則角 AOB 為直角。... 588
- 設由圓之中心, 至圓外一點之距離, 等於圓之直徑, 則由此點至圓所引二切線間之角度如何? ... 589
- 由圓外之一點, 至圓所引二切線之夾角, 若其點距中心遠, 則小, 距中心近, 則大。... 590
- 由圓外之點 P, 至此圓引切線 PA, PB 及割線 PCD, 又由 A 引平行於 CD 之弦 AE, 則 EB 將弦 CD 二等分。591
- 由圓外定直線上之任意點, 引二切線, 則聯結二切點之弦, 過一定點。... 1251

### 32. 切 圓

- 設二定圓外切, 今作切此二圓之任意圓; (1) 二定圓在其外方, (2) 二定圓包含其內; (3) 一定圓在外, 一定圓在內; 則在此三情形下, 由外切圓之中心至二定圓中心之距離之差, 等於定圓半徑之差或和。設二定圓內切, 則如何? ... 602
- 設二圓外切於 E, 一直線分別切二圓於 A, B, 則以 AB 為直徑之圓過 E, 且切於聯結原圓中心之直線, 而 AEB 為直角。... 605
- 設中心為 C, C' 之二圓, 外切於 A, 引此二圓之公切線, 命其切點為 P, Q, 則角 PCA, QC'A 之二等分線垂直相交於 PQ 上之一點。... 606
- 設二圓相切, 則過切點之任意直線, 由圓所截得之弓形, 含等弓形角。... 617
- 過二外切圓之切點, 作一直線, 在此直線與二圓圓周之交點, 作各圓之切線, 則此二切線平行。... 618
- 設二圓外切, 引切於各圓之切線, 令其切點在聯結中心直線之異側, 且令其互相平行, 則二切線之切點, 與圓之切點在一直線上。... 616
- 聯結相切二圓之平行直徑 AB, CD 之端與端 [外切時, 取在中心線之異側者; 內切時, 取在中心線之同側者] 之直線過切點。... 620

- 作一圓，令切他圓於 D，切一直線 BC 於 K，命後圓垂直於 BC 之直徑之一端為 A，則 A, D, K 在一直線上... 621
- 設二圓相切，過其切點引二任意直線，則其由二圓周所截弧之弦平行。... 622
- 設二圓相切於 E 點，AB, CD 為各圓之直徑，而相平行，則直線 AD, BC 交於 E 點。... 628
- 設一圓之半徑，即他圓之直徑，則二圓內切，且由切點 B，至外圓周所引之直線，二等分於內圓周。... 629
- 設二圓相切，過其切點引任意直線，則此直線與各圓周之交點，與各該圓之中心聯結之二半徑平行。... 630
- 設二圓相切於 P 點，一任意直線截二圓於四點 A, B, C, D，則  $\widehat{APB} = \widehat{CPD}$ ... 725
- 設兩圓相切於點 O，過切點引兩公割線 POP', QQQ'，令互相垂直，命中心線與二圓之交點為 A, A'，則 PP', QQ' 上正方形之和，等於 AA' 上之正方形。... 887
- 設兩圓外切，則其公切線上之正方形，等於二圓直徑所包之矩形。... 891
- 過兩外切圓之切點引二直線，令其端在各圓之圓周上，聯結各圓周上之二端，則得以切點為頂點之二相似三角形。... 1037
- 設兩圓內切，則由切點所引外圓之一切弦，其為內圓周所分成之二部分，皆成比例。... 1068
- 設兩圓相切，過切點引任意直線，則兩圓由此直線所截得之弦之比，等於其半徑之比。... 1069
- 設兩圓外切，則其公切線在切點間之部分，為各圓直徑之比例中項。... 1119
- 設兩圓內切於 O，一直線切內圓於 C，交外圓於 A, B，聯結 OA, OB，令分別交內圓於 P 及 Q，則  $OP:OQ = AC:CB$ 。... 1122
- 設兩圓相切，過切點 A 引各圓之弦 AB, AC，令相垂直，則過 B 點與 C 點之直線，過一定點。... 1124
- 設兩圓內切於 A，由外圓周上之任意點 P，至內圓周引切線 PM，則 PA:PM 一定。... 1278
- 設二圓 A, B 外切於 C，取點 P，令角 APC, BPC，相等由 P 引二圓之切線 PD, PE，則 PC 上之正方形等於矩形 PD·PE。... 1289
- 兩圓相切，過切點引一直線，則所得之優弓形或劣弓形面積之比，等於半徑平方之化。... 1246

33. 圓之方積

- 將圓之弦內分或外分，則此二分所包矩形，等於半徑上之正方形與聯結所設點及圓之中心之直線上正方形之差。  
... .. 874
- 過圓之平面上之一所設點，引任意弦，則此各弦為所設點分成二分，其所包之矩形相等。及其逆定理。 875, 905
- 若所設點在圓內，則過此點之任意弦為此點所分之二分所包之矩形，等於二等分於此點之弦半分上之正方形。 ... 876
- 若所設點在圓外，則過此點之任意弦為此點所分之二分所包之矩形，等於由此點至圓所引切線上之正方形。及其逆定理。 ... 877, 878
- 設過圓內一點之弦，其二分所包之矩形，等於過此點之他弦一分上之正方形，則第二弦二等分於此點。 ... 892
- 由圓周上之一點至直徑所引垂線上之正方形，等於其垂足所分直徑之二分所包之矩形。 ... 893
- 試用定理四直線成比例，則其外項所包之矩形，等於內項所包之矩形及其逆定理設二直線所包包矩形，等於他二直線所包之矩形 則此四直線成比例，而一矩形之二邊為內項 [或外項]，他矩形之二邊為內項 [或外項]，以證定理過圓內或圓外之所設點引二弦，則一弦上二分所包之矩形，等於他弦上二分所包之矩形。 -- ... 1190

第二 作圖題之部

1. 點

- 二等分所設有限直線。 ... .. 1663
- 求距不在一直線上之所設三點等遠之點。 ... 1671
- 設所設三直線兩兩相交，求距此三直線等遠之點。 ... .. 1672
- 設 O 為所設點，AB 為所設直線，求距 O 為 H，距 AB 為 M 之點。 ... .. 1673
- 設所設兩直線相交，求距此二直線分別為所設遠之點。 ... .. 1674
- 設一平面上有二無限直線及二點，求距此二直線等遠，距此二點亦遠等之點。 ... .. 1675

- 求至所設二直線具所設等距離之點,如是之點有若干?...  
... .. 1676
- 求對於所設三圓之視角相等之點. ... .. 1677
- 有三發光點,求其平面上受同光度之點. ... .. 1678
- 試在一所設直線上求一點,令其至所設他直線之距離,等於所設距離. ... .. 1688
- 試在定直線上求一點,令由此點至在定直線同側之二定點所引之二直線,與定直線所成之角相等. ... 1699
- 試在定直線上求一點,令由此點至在定直線異側之二定點所引之二直線,與定直線所成之角相等. ... 1700
- 試在一所設直線上,求距他二所設直線等遠之點. ... .. 1705
- 試在三角形  $\triangle ABC$  之邊  $AB$  上取一點  $P$ ,令  $P$  與  $AC$  之距離,等於線分  $BP$ . ... .. 1708
- 試在三角形  $ABC$  之一邊  $AC$  上求一點  $P$ ,令由此所引  $AB$ ,  $BC$  之平行線分別交  $BC$ ,  $AB$  於  $X$ ,  $Y$ ,而  $AX=PY$ . 1709
- 在所設二平行線上,各取一點,令距所設點等遠,且所取二點聯結之直線,與所設直線平行. ... .. 1716
- 設  $A$  為所設直線上之所設點,  $P$  為此直線外之所設點,設在此直線上求一點  $X$ ,令  $AX$  與  $XP$  之和等於所設長  $m$ .  
... .. 1723
- 試在定直線上求各點,令距定點之遠等於定距離. ... .. 1734
- 試在一定直線上求各點,令距他定直線等於定距離. ... .. 1735
- 設三無限直線相交而成三角形,試在一直線上求各點,令距他二直線等遠. ... .. 1736
- 設兩直線  $AB$ ,  $AC$  相交於  $A$ ,試在  $AB$  上取一點  $P$ ,令由  $P$  至  $AC$  引垂線  $PQ$ ,而  $AP$ ,  $AQ$  之和,等於有限直線  $m$ . ... .. 1740
- 試在所設角  $BAC$  之一邊  $AB$  上取一點  $P$ ,令由  $P$  至他邊  $AC$  所引之垂線  $PQ$  與  $AP$  之和等於定長  $m$ . ... 1741
- 在所設角  $BAC$  之一邊  $AB$  上取一點  $P$ ,令由  $P$  點至他邊  $AC$  所引之垂線  $PQ$  與  $AP$  之差等於定直線  $m$ . 1742
- 二等分所設弧. ... .. 1799
- 求所設圓或所設弧之中心. ... .. 1800
- 在所設直線上求一點,令他直線張於此點之角等於所設角. ... .. 1820
- 延長圓之已知弦,在其上求一點,令由此點至圓所引之切

- 線,等於已知長. ... .. 1838
- 將所設弧分為二部,令此二部所對弦之和等於所設長. ... .. 1852
- 有所設點 A, B 及過 B 點之所設直線,試在此直線上取兩點 X, Y, 令距 B 點等遠, 且 A 點對於 XY 之視角等於所設角. ... .. 1853
- 在無限直線 XY 之同側,有所設圓 O 及所設點 A, 試在 XY 上求一點 M, 令由此點至圓周所引之切線及 MA 與 XY 所成之角等. ... .. 1854
- 在所設直線上求一點, 令由此點至二所設圓周所引之切線, 與此直線成等角. ... .. 1855
- 在三角形 ABC 之底 BC 上取二點 D, E, 令由 B 及 C 至三角形 ADE 之外接圓所引之切線相等. ... .. 1858
- 在三角形 ABC 內求一點 O, 令引 AO, BO, CO, 而角 OBC, OCA, OAB 相等. ... .. 1861
- 試將直線 AB 按中末比分於 C 及 C'. ... .. 1940
- 設一已知點 D 在三角形 ABC 之邊 BC 或其延線上, 試在 AB 或其延線上取點 E, 令  $\triangle EBD = \triangle ABC$ . ... 1943
- 試在三角形內求一點, 令由此點至各角頂所引之三直線, 將原形分成三個等三角形. ... .. 1947
- 二分所設直線 AB 於 C, 令  $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = m^2$ . ... .. 1959, 1962
- 試延長所設直線 AB 至 C, 令  $\overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2$ . ... 1960
- 二分所設直線 AB 於 C, 令  $\overline{AC}^2 = \frac{1}{2}\overline{AB}^2$ . ... .. 1961
- 試內分或外分一所設直線為二, 令其二分上正方形之差, 等於所設正方形. ... .. 1963
- 分已知直線 AB 於 C, 令  $\overline{AC}^2 = 2\overline{CB}^2$ . ... .. 1964
- 試在所設三角形 ABC 之底 CB 之延線上取一點 E, 令  $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BE}$ . ... .. 1965
- 試延長一直線 AB 至 C, 令  $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AC} \cdot \overline{BC}$ . 1966
- 延長所設直線 AB 至 C, 令  $2\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$ . 1967
- 二分所設直線 AB 於 C, 令  $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{CB}^2$ . ... 1968
- 試在所設三角形 ABC 之底 BC 之延線上取一點 P, 令  $\overline{PA}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{PC}$ . .. ... 1970
- 試在所設圓外求一點, 令由此點至此圓周所引之二切線之和, 等於由此點過圓之中心所引割線之全體. 1971
- 將一所設直線內分或外分為二, 令其二分所包矩形, 等於所設正方形. ... .. 1974

- 分所設直線  $AB$  於  $C$ , 令  $AB \cdot BC = m\overline{AC}^2$ . ... 1977
- 有二所設點  $A, B$ , 在定直線  $XY$  之同側, 試在此直線上取一點  $P$ , 令  $\widehat{APX} = 2\widehat{BPY}$ . ... 1978
- 試在三角形之底邊上求一點, 令由此點至頂點所引直線上之正方形等於底上二分所包之矩形. ... 1988
- 將有限直線,  $AB$  向兩方延長, 令其全線為原有限直線之各端所分二分所包之矩形, 分別等於所設正方形. 2000
- 試按已分直線上各分之比, 分一直線. ... 2002
- 試按所設比內分或外分一直線. ... 2003
- 分已知直線  $AB$  於  $C$ , 令由  $A, B$  至過  $C$  之任意直線所引之二垂線, 等於已知比  $m:n$ . ... 2010
- 命一直線上之三點, 依次為  $A, B, C$ , 試在此直線上求他一點  $O$ , 令  $OB$  為  $OA, OC$  之比例中項. ... 2011
- 求點, 令其至所設三直線之距離之比, 等於所設比. ... 2013
- 試在所設直線上求一點, 令此點距他所設直線及所設點等遠. ... 2041
- 試在所設直線上求一點, 令由此點至他所設直線及所設點之距離, 有所設比  $m:n$ . ... 2042
- 在定直線上求一點, 令其至線外二定點之距離相等. ... 2143
- 在所設圓周上, 求距定直線定遠之點. ... 2144
- 求距二平行直線等遠之點. ... 2146
- 距一直線上之三點等遠之點如何? ... 2147
- 求一點, 令其距一定點定遠, 距他二定點等遠. ... 2149
- 已知四邊形三邊中點之位置, 求第四邊中點之位置. ... 2161
- 求一點, 令所設二有限直線張於此點之角, 分別等於所設角. ... 2171
- 求一點, 令其對於所設二圓之視角, 分別等於所設角. ... 2172
- 求一點, 令由此點至二所設圓所引之切線, 分別等於所設長. ... 2185
- 試在所設圓周上求一點, 令由此點至二所設直線之距離和為最小. ... 2186
- 求對於三角形三邊之視角相等之點. 又有不可能之時否? ... 2196
- 設  $AB, BC, CD$  為一直線之上三線分, 求對於此三線分之視角相等之點. ... 2211

- 求一點，令其至定四邊形二對邊之距離和，等於所設長  $l$ ，至他二對邊之距離比，等於所設比  $m:n$ . ... .. 2212
- 求一點，令距所設角之頂點等於所設長，且距其二邊有所設比. ... .. 2218
- 設  $A, B, C$  為三角形之頂點，求  $P$  點，令  $PA:PB:PC=m:n:p$ . ... .. 2221
- 設  $A, B, A', B'$  為依次排列在一直線上之四點，試在此直線上取一點  $P$ ，令 (1)  $AP:PB=A'P:PB'$ ，(2)  $AP:PB=B'P:A'P$ . ... .. 2241
- 有三角形  $ABC$ ，試在一邊  $BC$  上求點  $P$ ，令由  $P$  所引平行於  $AB, AC$  之二直線，其所圍之平行四邊形面積，等於三角形  $ABC$  之  $\frac{1}{2}$ . ... .. 2242
- 試在三角形  $ABC$  內求一點  $P$ ，令  $\triangle BCP, \triangle CAP, \triangle ABP$  之面積，比例於所設三線分. ... .. 2250

## 2. 角

- 二等分所設角. ... .. 1660
- 在所設直線上之所設點，作等於所設角之角. ... 1664
- 四等分所設角. ... .. 1679
- 三等分直角. ... .. 1681
- 作  $45^\circ, 135^\circ, 60^\circ, 30^\circ$  之角. ... .. 1682
- 將等於直角半分之角六等分. ... .. 1683
- 過定點引一直線，令與定直線成所設角. ... .. 1687
- 過所設點引一直線，令與所設二直線成等角. ... 1712
- 設  $A$  為已知角之一邊上之已知點，試在他邊上求二點  $B, C$ ，令  $BC$  等於已知線分，且  $\hat{BAC}$  等於直角. ... 1713
- 由定角  $BAC$  之一邊  $AB$  上之定點  $P$ ，至  $AC$  引一直線  $PQ$ ，令  $\hat{APQ}$  等於  $\hat{AQP}$  之三倍. ... .. 1720
- 試在二直線  $AB, AC$  上分別取  $P, Q$  令  $AP$  及  $PQ$  之和等於他有限直線  $m$ ，且  $\hat{APQ}$  等於所設角  $B$ . ... 1737
- 將已知圓分成二弓形，令其一所含之弓形角，等於他一所含弓形角之二倍. ... .. 1818
- 試由所設點  $P$ ，至二所設直線引等直線  $PC, PE$ ，令其所成之角等於所設角. ... .. 2081
- 三等分正五角形之外角. ... .. 2112
- 五等分一直角. ... .. 2114

## 3. 直線

- 由所設直線上之所設點，引此線之垂線. ... .. 1661



- 由所設直線外之所設點,引此線之垂線. ... .. 1662
- 過所設點,引所設直線之平行線. ... .. 1665
- 作所設有限直線之垂直二等分線. ... .. 1684
- 引一平行線,令至所設直線之距離,等於所設距離. ... .. 1685
- 過所設點  $P$ ,引一直線,令在其所設二平行線  $AB, CD$  間之部分,等於所設長  $m$ . ... .. 1689
- 試在相交二直線間,置已知長之直線,令平行於他已知直線. ... .. 1690
- 在定三角形中,平行於底邊引一直線,令其在兩邊間之部分,等於定直線. ... .. 1691
- 將所設直線,等分為  $n$  分. ... .. 1692
- 有限直線之三等分法. ... .. 1693
- 過角  $BAC$  內之定點  $O$ ,引直線  $BOC$ ,令  $BO$  等於  $OC$ . ... .. 1694
- 設點  $O$  為所設角  $BAC$  外之所設點,試由  $O$  引直線  $BOC$ ,令  $OB$  等於  $BC$ . ... .. 1695
- 設  $O$  為所設角  $BAC$  內之所設點,試過  $O$  引直線  $EOC$ ,令  $EO$  為  $CO$  之二倍. ... .. 1696
- 設  $O$  為所設角  $BAC$  外之所設點,由  $O$  引直線  $BOC$ ,令  $OB$  為  $BC$  之二倍. ... .. 1697
- 由某任意閉合曲線內部之一點,至其外部之定直線引一直線,令為此曲線所二等分. ... .. 1698
- 在二等邊三角形  $ABC$  中,引底邊  $BC$  之平行線  $DE$ ,令  $DE=BD$ . ... .. 1701
- 在三角形  $ABC$  中,平行於底邊  $BC$  引直線  $PQ$ ,令交  $AB, AC$  於  $P, Q$ ,且 (1)  $PQ=BP$ , (2)  $PQ=PB+CQ$ , (3)  $PQ=PB-CQ$ . ... .. 1702
- 在平行四邊形中,聯結  $A$  點,與  $CD$  上之  $X$  點,令  $AX=AB+XD$ . ... .. 1704
- 有過同一點之三所設直線,試引一直線,令其在此三線間之二部分相等. ... .. 1706
- 由一點引所設長之三直線,令其外側兩直線之末端,距中央直線之末端等遠,且三末端在一直線上,又試玩索問題之可能與不可能. ... .. 1707
- 設  $a, b$  二直線平行,  $A$  為  $a$  上之所設點,試過平行線外之所設點引一直線令截  $a$  於  $X, b$  於  $Y$ ,而  $AX, AY$  相等. ... .. 1710
- 設二直線不平行,而未相交,試不延長而求其夾角之二等

- 分線. ... .. 1711
- 過所設點引一直線,令距他二所設點等遠. ... 1714
- 引一直線,令距三定點等遠. ... .. 1715
- 過一定點引一直線,令達於二定直線之交點,但交點為未知. ... .. 1717
- 有甲乙二對平行線,其交點順次為 A, B, C, D, 試由一點 P 引一直線,令其在各對平行線間之部分相等. 1718
- 設 A 及 B 分別為二所設平行線上之所設點,試過他所設點 O 引一直線,令截平行線於 X, Y, 且 AX, BY 之和等於所設長. ... .. 1721
- 設 ABC 為一直角三角形,  $\hat{C}$  為直角, 試在直角之二邊 AC, BC 或其延線上分別取點 P, Q, 令 PQ 之中點適在斜邊 AB 上, 且 PQ 平行於他所設直線 m. ... .. 1743
- 設  $\hat{BAC}$  為所設角, 試過定點 P 引一直線, 令  $AB+AC$  等於定長 k. ... .. 1794
- 由一已知點引一直線, 令由他已知點至此直線所引之垂線等於已知長. ... .. 1821
- 設有相切且相等之二圓, 試作直線, 令其兩端及兩個三等分點, 俱在此二圓之周上. ... .. 1843
- 有由一點 O 所引之三直線 OA, OB, OC, 試引一所設長之直線 ABC, 令  $AB=BC$ . ... .. 1859
- 試由直線之一端, 引此線之垂線, 但不許延長此直線過此端. ... .. 1933
- 試由三角形一邊上之已知點引一直線, 將三角形二等分. ... .. 1944
- 試由已知三角形一邊上之已知點引二直線, 將三角形三等分. ... .. 1945
- 試以過所設點之直線, 二等分所設平行四邊形. 1948
- 試由平行四邊形 ABCD 之一角頂 A, 引二直線 AE, AF, 將本形等分為三. ... .. 1949
- 試由四邊形之一角頂引一直線, 將本形等分為二. 1950
- 試由所設平行四邊形一邊上之所設點引二直線, 將本形等分為二. ... .. 1951
- 試由四邊形一邊上之所設點引一直線, 將此四邊形等分為二. ... .. 1952
- 試由所設五邊形之一角頂引一直線, 將本形等分為二. ... .. 1986
- 試由所設直線截取其若干等分之一. ... .. 2004
- 求一直線, 令為所設三直線之第四比例項. ... 2005

- ① 求一直線，令爲所設二直線之比例中項。... 2006  
 ② 試過所設點 P 引一直線，令交角 O 之二邊於 A 及 B，而 OA:OB 等於所設比。... 2009  
 ③ 有交於一點之三直線，試引一直線，令其爲此三直線所截得之二分有所設比。... 2015  
 ④ 試由三角形一邊之中點引二直線，令分全形爲三分，其比爲 1:2:3。... 2018  
 ⑤ 試過所設點 P 引一直線，交二所設直線 AX, AY 而成三角形 AX'Y'，令其面積等於所設面積。... 2051  
 ⑥ 試過所設點引一直線，將所設三角形等分爲二。 2052  
 ⑦ 有 A, B, C 三點，試過 A 引一直線，令由 B, C 至此直線所引垂線之足與 A 之距離，有所設比  $m:n$ 。... 2057  
 ⑧ 有兩三角形及一點，試過此點引一直線，令由兩三角形之頂點至此直線距離之和，有所設比  $m:n$ 。... 2058  
 ⑨ 試在三角形 ABC 中，平行於所設直線，引一直線，令截 AB 於 X, BC 於 Y，而 XY 與 YA 之和等於所設直線。 2044  
 ⑩ 作一有限直線，令其對一所設有限直線之比，等於他所設二有限直線上正方形之比。... 2065  
 ⑪ 有三直線交於一點，試引一直線，令其爲前三直線所截得之二分，等於所設長。... 2075  
 ⑫ 有一所設點 A 及一所設角，試過 A 引一直線，令交角之二邊於 B, C，而 BA:CA 等於所設比。... 2071  
 ⑬ 試引三角形一邊之垂線，等分三角形爲二。... 2078  
 ⑭ 試平行於三角形之一邊引一直線，將其面積等分爲二。又普遍之，試平行於三角形之一邊，引若干直線，令按所設直線之比，分三角形爲二，或三以上。... 2083  
 ⑮ 引梯形底之平行線，等分梯形之面積爲任意個部分。... 2084  
 ⑯ 在三角形 ABC 之底 BC 上取任意點 D，引截三角形之一直線，令以此直線爲界，而對折三角形時，A, D 二點相合。... 2145  
 ⑰ 由定三角形之一頂點引  $n-1$  條直線，將三角形  $n$  等分。... 2163  
 ⑱ 過梯形之一平行邊之中點，引一直線，將梯形二等分。... 2164  
 ⑲ 過定點引一直線，截所設三角形之二邊，令其二截點與第三邊之兩端在一圓周上。... 2170  
 ⑳ 試在二定圓間引一直線，令平行於中心線，且等於定線分。... 2183

- 過定點引一直線，令交所設圓，且其交點至一所設直線之距離和，等於所設長。... 2184
- 試引一直線，令切一已知圓，交他已知圓，而為第二已知圓所截得之弦，等於已知長。... 2200
- 平行於矩形 ABCD 之邊 AB 引一直線，命其與邊 AD, BC 之交點分別為 E, F, 令矩形 ABFE 與原矩形相似。 2208
- 有不在一直線上之三定點，試過其一點引一直線，令他二點至此直線之距離有所設比  $m:n$ 。... 2209
- 有一圓形之彈子臺，其同直徑上有二球，今欲擊其一，令由圓周反射至他球，則當依何方向擊之。... 2210
- 引二直線，令有二所設比之複比。... 2215
- 平行於三角形之底，引一直線，令其所截得之三角形與原三角形之比，等於底與一邊之比。... 2219
- 設 A, B 分別為所設二平行線上之定點，試過他定點 P, 引一直線，截上述二平行線於 M, N, 令 AM, BN 有所設比。... 2222
- 平行於定直線引一直線，截所設三角形 ABC 之二邊 AB, AC 於 B', C', 令 BB', CC' 相等。... 2226
- 引一直線，令直交一定直線於 A, 且交他二定直線〔或一直線與一圓，或二圓〕於 B, C, 而 A 為 BC 之中點。 2229
- 過定點引一直線，截定角之二邊，令由是所生三角形之周，等於所設長。... 2232
- 過所設點引直線，截所設圓周，令直線與圓周之交角，等於所設角。... 2233
- 設兩圓互相內切於 P, 試引直線 PXY, 令交二圓於 X, Y, 而 XY 等於所設線分。... 2234
- 過四邊形之一角頂，引等分四邊形為三之二直線。... 2238
- 平行於對角線，引二直線，將平行四邊形等分為三。... 2244

## 4. 切 線

- 在所設圓周上之所設點，引一切線。... 1801
- 由所設圓外之一點，至此圓引一切線。... 1802
- 引所設二圓之公切線。... 1805
- 引所設圓之切線，令平行於所設直線。... 1822
- 引直線，令切所設圓，且與所設直線成所設角。 1835
- 法不求中心，而引切圓於所設點之切線。... 1850
- 有一點 O 及二圓，試引各圓之切線，令相平行，且由 O 至

- 此切線之距離之比，等於所設比  $m:n$ . ... 2016
- 試證：依下法，可不求圓之中心，而由圓周上之定點 A 引圓之切線。(1) 由定點引任意弦 AB，命弧 AB 之中點為 D，引直線 AE，令角 DAE 等於角 BAD。(2) 由定點 A 引任意等弦 AB, AC，由 A 引弦 BC 之平行線。... 2190
- 引所設圓之切線，令其與一定直線之交點至切點之距離等於定長。... 2193

## 5 弦

- 設圓周上有二點，試過各點引一弦，令所引二弦平行，且其比為所設比。... 2014
- 過相交二圓之交點引一倍弦，令其二弦之比為所設比  $m:n$ . ... 2056
- 過圓外之所設點，引此圓之割線，令其圓內之長等於圓外之長，又令圓外之長  $n$  倍於圓內之長。... 2067
- 平行於所求直線，引一直線，分所設圓周於比 3:5. ... 2017
- 過所設點引一直線，分所設圓周為二，令其比為 3:7. ... 2110
- 在所設圓內引一所設長之弦，令過所設點。... 1819
- 平行於所設直徑引所設長之弦。... 1840
- 過圓周上之二點，作三平行弦，令其和等於所設長，又令其差等於所設長。... 1842
- 過相交二圓之一交點，引一倍弦，令其長等於兩圓之公弦。... 1844
- 過相交二圓之一交點引倍弦，令其二等分於此交點。... 1845
- 有二圓相外切，試過其切點引所設長之直線，令其兩端在二圓周上。... 1846
- 設  $O, O'$  為兩所設圓，A 為圓 O 周上之所設點，PA 為圓 O 之弦，Q 為 PA 之延線與圓  $O'$  之交點，今欲令  $PA=AQ$ ，則 PA 之位置如何？... 1847
- 在所設圓中引弦，令其等於所設長，且為所設弦所二等分。... 1856
- 引所設二圓之割線，令其為各圓所截取之弦，分別等於所設長。... 1857
- 試過相交二圓之一交點，引一割線，令其在此二圓間之二弦所包之矩形，等於所設正方形  $m^2$ . ... 1996
- 過圓外二定點，至此圓引二割線，令相交於圓周，且聯結其

- 與圓周之他交點之弦, 平行於所設直線. ... .. 1999
- 過圓外之所設點 P, 試引圓之割線, 令交圓於 A, B, 而圓內之部分為全線 PB 與圓外部分 PA 之比例中項. ... .. 1220
- 在所設圓內引一弦, 令其長等於中心至此弦之距離之二倍. ... .. 2169
- 圓之一直徑中有二所設點, 試過此各點引弦, 令共一端且等長. ... .. 2245
- 試由定圓周上之一定點, 引互相垂直之二弦, 令其和等於所設長. ... .. 2246

### 6. 三 角 形

[條件簡單者]

[三角形 ABC 中, 在頂點 A, B, C, 之角, 分別以  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  表之, 其對邊分別以  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , 表之, 由 A, B, C 所引之中線分別以  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  表之, 命其長分別為  $m_a$ ,  $m_b$ ,  $m_c$ , 又命垂線  $AD=h_a$ ,  $BE=h_b$ ,  $CF=h_c$ , 命二等分線  $AM_a=w_a$ ,  $EM_b=w_b$ ,  $CM_c=w_c$ . 又外心表以 O, 內心表以 I, 三傍上表以  $l_a$ ,  $l_b$ ,  $l_c$ , 而外接圓, 內切圓, 三傍切圓之半徑分別表以  $r$ ,  $\rho$ ,  $\rho_a$ ,  $\rho_b$ ,  $\rho_c$ , 垂心表以 H, 重心表以 G.]

已知以下各件, 求作三角形.

- $a, b, c$ . ... .. 1666
- $\hat{A}, b, c$ . ... .. 1667
- $\hat{B}, b, c$ . ... .. 1668
- $\hat{B}, \hat{C}, a$ . ... .. 1669
- $\hat{A}, \hat{B}, a$ . ... .. 1670
- $\hat{B}, a, h_a$ . ... .. 1750
- $\hat{A}, a, h_a$ . ... .. 1751
- $B, \hat{C}, h_a$ . ... .. 1756
- $\hat{B}, a, b+c$ . ... .. 1760
- $\hat{A}, h_a, w_a$ . ... .. 1762
- $a, b+c, h_b$ . ... .. 1763
- $h_c, m_a$ , 及  $a=2b$ . ... .. 1764
- $a, h_b, m_a$ . ... .. 1765
- $h_c, m_a, b$ . ... .. 1766
- $\hat{B}, h_a, h_b$ . ... .. 1767
- $\hat{A}, a, b+c$ . ... .. 1768
- $\hat{B}, a, b \sim c$ . ... .. 1769
- $\hat{B} \sim \hat{C}, a, b+c$ . ... .. 1770

● $\hat{B} \sim \hat{C}, a, b \sim c.$ ... ..	1771
● $\hat{B} \sim \hat{C}, c, w_a.$ ... ..	1772
● $a, b, m_c.$ ... ..	1773
● $m_a, m_b, m_c.$ ... ..	1774
● $a, m_b, (m_b, b).$ ... ..	1775
● $\hat{B}, \hat{C}, a+b+c.$ ... ..	1776
● $a$ (及位置), $b \sim c$ , $AG$ 或 $AB$ 上之定點. ... ..	1781
● 三邊之中點. ... ..	1785
● 一邊, 二中線. ... ..	1786
● $\hat{B}, \hat{C}, b+c.$ ... ..	1788
● $a, b+c$ , $AM_a$ 平行於定直線. ... ..	1789
● $A, b+c, BE+EC.$ ... ..	1795
● 底邊所在之直線, 頂點所在之直線, 及應與全等之三角形. ... ..	1796
● $\hat{B}, h_a, CM_c$ 與 $B$ 之距離. ... ..	1797
● 各邊上在外方所作 $\square ABDE, \square ACFG, \square BCHK$ , 及 $EG, FH, KD.$ ... ..	1798
● $a, h_a, m_a.$ ... ..	1864
● $a, h_b, h_c.$ ... ..	1865
● $\hat{A}, a$ , 頂點所在之直線. ... ..	1866
● $a, h_a, r.$ ... ..	1867
● $\hat{A}, a, m_a.$ ... ..	1869
● $\hat{B}, a, (m_b, \hat{b}).$ ... ..	1870
● $b, m_b, (m_a, \hat{a}).$ ... ..	1871
● $\hat{A}, a, b \sim c.$ ... ..	1872
● 一中線, 二垂線. ... ..	1873
● 一角, 一垂線, 周. ... ..	1874
● 二角, 一垂線. ... ..	1874
● $h_a, m_a, r.$ ... ..	1875
● $a, h_b, r.$ ... ..	1876
● $\hat{B}, a, \rho.$ ... ..	1877
● $\hat{A}, a, \rho.$ ... ..	1878
● $\hat{A}, u_a, \rho.$ ... ..	1879
● $\hat{A}, b \sim c, BD \sim CD.$ ... ..	1880
● $\hat{A}, a, m_b.$ ... ..	1881
● 二邊, 一垂線. ... ..	1882
● 一邊, 二垂線. ... ..	1882
● 一邊, 一垂線, $r.$ ... ..	1882
● $\hat{B} \sim \hat{C}, h_a, r.$ ... ..	1883

● $\hat{A}_1, r, a+b+c.$ ... ..	1885
● $\hat{A}, w_a, a+b+c.$ ... ..	1886
● $\hat{A}$ 之位置, BC 上之一點, 周.	1887
● $\hat{A}, \rho, a+b+c.$ ... ..	1888
● $x, \rho, b+c.$ ... ..	1889
● $a, \rho, b \sim c.$ ... ..	1890
● $a, \rho_b, \rho_c.$ ... ..	1891
● $\rho_b, \rho_c, b+c.$ ... ..	1892
● $\rho_b, \rho_c, \hat{B} \sim \hat{C}.$ ... ..	1893
●G 與 A 之位置, B 與 C 所在之二線 (直線或圓周).	1894
●D, E, F 之三個位置.	1895
● $\hat{A}$ 及內切圓之切點將底邊所分之二分.	1898
● $\hat{A}, BM_a, CM_a.$ ... ..	1899
●在所設角之二邊間, 置一所設直線, 令由是所得之三角形, 有所設周.	1900
●二邊, 由一項點至一中線所引之垂線.	1901
● $\hat{B} \sim \hat{C}, b, c.$ ... ..	1902
●三邊, 各邊上之一點.	1905
● $a, h_a, \hat{B} \sim \hat{C}.$ ... ..	1907
● $\hat{A}, a, BB'$ 及 C 之距離.	1908
● $\hat{A}, a, AA'$ 及 B 之距離.	1909
● $b, c, (m_b, a).$ ... ..	1910
● $m_a, w_a, h_a.$ ... ..	1911
● $m_c, h_a, h_b.$ ... ..	1912
● $h_a, m_a, m_b.$ ... ..	1913
● $h_a, h_c, m_b.$ ... ..	1914
● $h_a, m_b, m_c.$ ... ..	1915
● $\hat{A}, h_a, m_a.$ ... ..	1916
● $\hat{A}, h_a, m_b.$ ... ..	1917
● $\hat{B}, m_b, m_c.$ ... ..	1918
● $m_a, m_c, (m_b, a).$ ... ..	1919
● $h_b, h_b, (m_a, b).$ ... ..	1920
● $a, h_a, (m_b, c).$ ... ..	1921
●二邊, AB, AC 應過之二點, $AM_a$ 應切之圓.	1926
● $\hat{A}, b \sim c, \rho.$ ... ..	1927
● $\hat{B} \sim \hat{C}, b \sim c, \rho.$ ... ..	1928
● $m_a, m_b, (m_c, c).$ ... ..	1929
●二邊, 面積.	1942



● $\hat{A}$ , $a$ , 面積. ... ..	1979
● $\hat{A}$ , $a$ , $b^2 \sim c^2$ . ... ..	1980
● $a$ , $h_a$ , $b^2 + c^2$ . ... ..	1981
● $\hat{A}$ , $a$ , $b^2 + c^2$ . ... ..	1985
● $\hat{B}$ , $a$ , 面積. ... ..	1988
● $\hat{A}$ , $a$ , $BF \cdot BA$ . ... ..	1990, 2030
● $m_a$ , $(m_b, m_c)$ , 面積. ... ..	1991
● $B \sim \hat{C}$ , $m_a$ , $b \times c$ . ... ..	1992
● $\hat{B} \sim \hat{C}$ , $h_a$ , $b \times c$ . ... ..	1993
● $m_a$ , $(m_a, a)$ , $b^2 \sim c^2$ . ... ..	1994
● $w_a$ , $AB - BM_a$ , $AC - CM_a$ . ... ..	1995
●二角, 面積. ... ..	2017
●二角, 一線(中線, 高, 周等). ... ..	2025
● $b$ , $c$ , $u_a$ . ... ..	2026
● $a$ , $m_c$ , $b:c$ . ... ..	2027
● $h_a$ , $m_a$ , $a:b$ . ... ..	2028
● $a$ , $h_a$ , $b:c$ . ... ..	2029
● $a$ , $w_a$ , $b \pm c$ . ... ..	2031
●三邊分別按三所設比之分點. ... ..	2032
● $\hat{A}$ , $a$ , $b:c$ . ... ..	2033
● $\hat{B}$ , $a$ , $b:c$ . ... ..	2034
● $\hat{A}$ , $h_a$ , $BD:DC$ . ... ..	2035
● $h_a$ , $h_b$ , $h_c$ . ... ..	2036
● $\hat{A}$ , $a$ , $c + nb$ . ... ..	2038
● $\hat{B}$ , $a$ , $b - h_a$ . ... ..	2045
● $\hat{A}$ , $a \sim c$ , $BE + CE$ . ... ..	2046
● $\hat{A}$ , $b + c$ , $a + c$ . ... ..	2047
● $w_a$ , $\rho$ , $\rho_a$ . ... ..	2048
● $b \sim c$ , $\rho$ , $\rho_a$ . ... ..	2049
●周, $h_a$ , $\rho$ . ... ..	2050
● $h_a$ , $b + c$ , $h_b:hc$ . ... ..	2054
● $h_a$ , $m_a$ , $hc:b$ . ... ..	2055
● $\hat{A}$ , $m_b$ , $mc:a$ . ... ..	2066
●二角, $HO$ . ... ..	2068
●二角, $IO$ . ... ..	2069
● $\hat{A}$ , $a$ , 令 $a^2 = b \times c$ . ... ..	2073
● $c$ , 令 $b:a = a:c$ . ... ..	2074
●二邊, 中線. ... ..	2156
● $l_a$ , $l_b$ , $l_c$ . ... ..	2159

● $a$ (及位置), $l$ 之位置. ... ..	2160
● $a$ (及位置), $H$ 之位置. ... ..	3160
● $a$ (及位置), $G$ 之位置. ... ..	3160
● 過所設角一邊上之定點, 引一直線, 令過所設角之二邊, 而成與已知三角形等積之三角形. ... ..	2165
● $\rho$ , 一傍切圓半徑, 面積. ... ..	2225
● 二傍切圓半徑, 面積. ... ..	2225
● 作三角形, 令其頂角等於所設角, 一邊等於所設有限直線; 且一底角等於他底角之三倍. ... ..	2228
● 一角頂, 一邊之中點, 及 $H$ 之位置. ... ..	2235
● 底邊, 高, 及他二邊之和. ... ..	2247
● 已知一邊與高之和, 求作正三角形. ... ..	2248
● 一邊, 及其角, $\rho$ . ... ..	2249

### 7. 直角三角形

[ $\triangle ABC$  中命  $C$  爲直角]

● 直角頂之位置, 他二角頂所在之二平行線. ... ..	1722
● $\hat{B}$ , $b$ . ... ..	1752
● $c$ , $a$ . ... ..	1753
● $c$ , $b = a$ . ... ..	1754
● 斜邊, $\hat{A} = 2\hat{B}$ . ... ..	1755
● 斜邊上之二點, 他二邊上之一點, $h_c$ . ... ..	1761
● $a + b + c$ , 命 $a = b$ . ... ..	1777
● $c - a$ , $b$ . ... ..	1782
● $c$ , $a + b$ . ... ..	1783
● $c$ , $a \sim b$ . ... ..	1784
● $c$ , $h_c$ . ... ..	1868
● $\hat{B}$ , 一邊應過之點, 令內接於所設圓. ... ..	1884
● 斜邊與他一邊之差, 及一銳角, 求作本形. ... ..	2157

### 8. 二等邊三角形

[ $\triangle ABC$  中命  $AB = AC$ ]

● 底邊, 二等邊之和. ... ..	1759
● 令 $\hat{B} = \frac{1}{2}\hat{A}$ . ... ..	1780
● $\hat{A}$ , $B$ 與 $C$ 所在之圓周, $A$ 之位置. ... ..	1816
● $\rho$ . ... ..	1897
● 令 $\overline{BC}^2 = 3\overline{AB}^2$ . ... ..	1972
● $a$ , 應與等積之他三角形. ... ..	1984

- $\hat{A}$ ,  $h_a + a$ , 或  $h_a \sim a$ . ... .. 2021
- $h_b, m_b$ . ... .. 2023
- $\hat{A}$ , 等積三角形. ... .. 2070
- 令  $\hat{A} = 3\hat{B}$ . ... .. 2111
- 內接於所設三角形, 令有所設高, 且其底邊平行前三角形之一邊. ... .. 1758
- 內接平行四邊形, 令各角等於所設角, 一頂點在平行四邊形之一頂點上. ... .. 2090
- 內接於圓, 高底之和. ... .. 2022
- 高與頂角. ... .. 2148
- 令頂角為各底角之四倍. ... .. 2158
- 底邊及頂角. ... .. 2166

### 9. 正三角形

- 在所設底邊上作等邊三角形. ... .. 1680
- 作一正三角形, 令其各角頂距所設點分別等於所設距離. ... .. 1719
- 已知高, 作正三角形. ... .. 1778
- 設過二定點引二直線, 令與定位置之直線成等邊三角形. ... .. 1779
- 在正方形內作正三角形, 但其一角頂須在 (1) 正方形一邊之中點上, (2) 正方形之一角頂上, (3) 正方形一邊之任意所設點上. ... .. 2092, 1787
- 過一定點引一直線, 令達於二定直線之交點. ... 1717
- 作正三角形, 令其頂點分別在所設三同心圓周上. ... .. 1931
- 作正三角形, 令其頂點分別在所設三平線行上. 1932
- 作正三角形令等於所設正方形. ... .. 2079
- 試作所設平行四邊形之內接正三角形, 令一頂點為四邊形一邊上之所設點. ... .. 2091
- 作正三角形, 令與所設正六角形等積. ... .. 2109

### 10. 內接三角形

- 內接於所設三角形作一三角形, 令其二邊分別等於二所設直線, 一頂點在前三角形一邊上之所設點. ... 1757
- 在所設圓內作一三角形, 令與所設三角形等角. 1809
- 內接於所設三角形 ABC 作三角形, 令與他所設三角形全等. ... .. 1903
- 內接於所設三角形, 作一三角形, 令其二邊有所設方向, 第

- 三邊有所設長. ... .. 1904
- 已知一邊,及至他一邊所引之中線,求作三角形,令內接於所設圓,且其重心在所設直徑上. ... .. 1906
- 已知三角形之邊所對弧之中點,試內接於圓,作此三角形. ... .. 1922
- 已知一邊之方向,對角之二等分線,及此二等分線所過之一點,求作三角形,令內接於所設圓. ... .. 1923
- 作所設圓之內接三角形,令其一邊平行且等於所設直線,並令此邊對角之二等分線過所設點. ... .. 1924
- 已知一邊,試作圓之內接三角形,令此邊上之中線過所設點且有所設方向. ... .. 1935
- 作所設圓之內接三角形,令其底邊平行於所設直線,他二邊過此設直線上之所設二點. ... .. 1930
- 作所設圓之內接三角形,令其底邊平行於所設直線,他二邊分別過所設二點. ... .. 1997
- 作所設圓之內接三角形,令其三邊分別過所設三點. ... .. 1998
- 內接於三角形 ABC, 試作三角形 A'B'C', 令其各邊分別平行於所設三直線. ... .. 2024
- 試作圓之內接三角形,令與所設三角形相似,且一邊過一所設點. ... .. 2037
- 作所設三角形之內接三角形,令與他所設三角形相似,且一邊過所設點. ... .. 2087
- 作所設三角形之內接三角形,令與他所設三角形相似,且重心在第一所設三角形之一中線上. ... .. 2088
- 作所設四邊形之內接三角形,令與所設三角形相似,一頂點為四邊形一邊上之所設點,他二頂點在四邊形之他二邊上. ... .. 2089
- 作所設弓形之內接三角形,令與所設三角形相似,一頂點為弓形弦上之所設點. ... .. 2093
- 作所設三角形之內接三角形,令與他所設三角形相似,且一頂點為第一所設三角形一邊上之所設點. ... .. 2094
- 作三角形,令三角頂在三所設直線上,且與所設三角形全等. ... .. 2095

### 11. 外接〔切〕三角形

- 外切於所設圓作一三角形,令與所設三角形等角. ... .. 1810
- 設三角形 ABC 中,已知角 A, 內接正方形〔其二頂點在 BC

- 上]之一邊,及此正方形在 AB 上之頂點,將 DB 所分二分所包之矩形,求作此三角形. ... .. 1989
- 作所設三角形之外接三角形,令與他所設三角形等角. ... .. 2198

### 12. 三角形之雜題

- 作三角形 OBC, 令其一頂點 O 在所設角 BAC 內之所設點 O 上,他二頂點在  $\widehat{BAC}$  之二邊上,且 OB, OC 之和等於  $m$ ,  $\widehat{BO} = \widehat{CO}$ . ... .. 1793
- 試作一三角形,令其底邊與已知三角形 ABC 之底邊在一直線上,又其頂點在平行於 AB 之定直線上,且其面積等於 ABC. ... .. 1946
- 有一四角形 ABCD, 試作一三角形, 令其底邊與 AB 在一直線上,其頂點為 CD 上之定點 P, 且其面積等於原四邊形. ... .. 1955
- 作一三角形,令等於二或三個相似三角形之和,且與諸相似三角形相似. ... .. 2019
- 作所設三角形之相似三角形,令其一角頂在定點上,他二角頂分別在二所設直線上. ... .. 2080

### 13. 四邊形

- 已知四邊形之各邊,及其對角線之一. ... .. 1724
- 已知四邊形之三邊及其各對角線. ... .. 1725
- 已知四邊形之各邊及其一角. ... .. 1726
- 已知四邊形各邊中點之位置及一邊. ... .. 1730
- 已知四邊形之各邊及聯結一雙對邊中點之直線. ... .. 1898
- 作所設圓之外切四邊形,令與所設四邊形等角. 1740
- 已知四邊形之一邊,此邊兩端之角,及二對角線. 2150
- 四邊形 ABCD 中,已知 AC,  $\widehat{CAB}$ ,  $\widehat{ACD}$ , CD, 及 DB. ... .. 2151
- 四邊形 ABCD 中,已知 AB, BC, BD,  $\widehat{A}$  及  $\widehat{B}$ . ... 2152
- 四邊形 ABCD 中,已知邊 AB, AC 角 A, D, 及 C. 2153
- 四邊形 ABCD 中,已知 AB, AC, CD,  $\widehat{BAC}$ , 及  $\widehat{ABD}$ . ... .. 2154
- 已知四邊形之一雙對邊,二對角線及其夾角. ... 2162
- 四邊形 ABCD 中,已知 AB, BC, AC, BD, 及  $\widehat{D}$ . ... 2173
- 圓之內接四邊形中,已知一角,此角之一邊及二對角線. ... .. 2174

- 圓之內接四邊形 ABCD 中, 已知 AB, BC, CA, 及兩對角線之交角. ... .. 2175
- 圓之內接四角形 ABCD 中, 已知外接圓之半徑  $r$ , 對角線 AC, BD, 及二邊 AB, BC 之和或差. ... .. 2176
- 圓之內接四邊形 ABCD 中, 已知  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ , AC, 及 BD. ... .. 2177
- 圓之內接四邊形 ABCD 中, 已知邊 AB, BC, 對角線 AC, 及他二邊 AD, CD 之和或差. ... .. 2178
- 圓之內接四邊形 ABCD 中, 已知  $AB \pm BC$ , DA, BD, 及  $\hat{A}$ . ... .. 2179

### 14. 平行四邊形

- 已知二邊及其夾角. ... .. 1727
- 已知二對角線及一邊. ... .. 1728
- 已知二對角線及其夾角. ... .. 1729
- 內接於定三角形, 且以其內之一定點爲對角線之交點, 作一平行四邊形. ... .. 1739
- 作一平行四邊形, 令與所設三角形等積, 且其一角等於所設角. ... .. 1935
- 在所設底邊上作平行四邊形, 令與所設三角形等積, 且其一角等於所設角. ... .. 1936
- 作一平行四邊形, 令與所設直線形等積, 且其一角等於所設角. ... .. 1937
- 作所設三角形之內接平行四邊形, 令與所設平行四邊形相似. ... .. 2059
- 作所設三角形之內接平行四邊形, 令有所設面積, 且玩索之. ... .. 2061
- 已知平行四邊形之二隣邊, 及一對角線. ... .. 2155
- 已知一對角線及一邊, 求作平行四邊形, 令其一角爲他角之二倍. ... .. 2181
- 作已知三角形之內接平行四邊形, 令其兩對角線之交點爲形內之已知點. ... .. 2227

### 15. 矩形

- 試在已知底上作矩形, 令等於已知正方形. ... 1941
- 試作一矩形, 令與所設直線形等積, 且其二邊之和等於所設直線. ... .. 1975
- 試作一矩形, 令與所設直線形等積, 且其二邊之差, 等於所設直線. ... .. 1976

- 設三角形之二底角俱為銳角，試剖此三角形為三部分，俾得集成一矩形，其底邊等於原三角形之底邊。... 1983
- 內接於正方形，作所設面積之矩形。... 2062
- 作矩形，等令於所設正方形，且相隣二邊有所設比  $m:n$ 。  
... .. 2076
- 已知底高之和，作所設半圓之內接矩形。... 2082
- 過定點引一直線，設所設角之二邊，令所引直線為此點所分二線分所包之矩形，等於所設正方形。... 2207
- 內接於定圓作一矩形，令其面積等於定正方形之面積。...  
... .. 2220

## 16. 菱形

- 已知二對角線，作一菱形。... 1703
- 試在平行四邊形內作一菱形，但其一角頂須在一邊之定點上。... 1738
- 試作一菱，形令與所設平行四邊形等底等高。... 1953

## 17. 正方形

- 在定直線上作正方形。... 1686
- 已知一對角線作一正方形。... 1703
- 試在菱形 ABCD 內作一正方形。... 1744
- 已知一對角線與一邊之和，作正方形。... 1745
- 已知一對角線與一邊之差，作一正方形。... 1746
- 設二直線 AB CD 直交於 O，試作一正方形，令其兩邊在此二直線上，他兩邊交於他所設直線 EF 上。... 1747
- 作正方形，令內接於所設三角形。... 1748
- 作一正方形，令其二邊過二所設點，他二邊交於他所設點。  
... .. 1896
- 設兩等圓相交，試作一正方形，令內接於此二圓，而二雙頂點分別在二圓周上。... 1934
- 作正方形，令與所設直線形等積。... 1938
- 內接於所設正方形，作與他所設正方形等積之正方形。...  
... .. 1956
- 作一正方形，令等於所設二正方形之和。... 1957
- 作一正方形，令等於所設二正方形之差。... 1958
- 試將正方形等分為五，令其四為直角三角形，他一為正方形。  
... .. 1973
- 作一正方形，令等於若干所設正方形之和。... 1987
- 作已知正方形之內接正方形，令其面積等於已知正方形

- 面積之四分之三. ... .. 2020
- 作所設三角形之內接正方形. ... .. 2053
- 作二正方形,令其比等於所設二直線之比. 又若已知二正方形一邊之和或差,則如何? ... .. 2063
- 作  $n$  個正方形,令其比為所設  $n$  條直線之比. ... 2064
- 作所設正三角形之外接正方形,令兩形公有一頂點. ... .. 2101
- 有四所設點 E, F, G, H, 試作一正方形,令四邊分別過此四點. ... .. 2102
- 作所設扇形之內接正方形. ... .. 2103
- 作正方形,令其相對二頂點在一所設直線上,他二頂點分別在所設二圓周上. ... .. 2104
- 作半圓之內接正方形. ... .. 2217
- 作正方形,令與所設正六角形等積. ... .. 2108
- 作正方形,令其面積等於定正方形面積之半. 2206
- 作一正方形,令等於所設二正方形之比例中項. 2240

### 18. 梯 形

- 已知四邊,作梯形. ... .. 1731
- 有一四邊形 ABCD. 試以 AB 為一邊,過邊 CD 上之所設點且平行於 AB 之直線為他邊,作第二四邊形,令與原四邊形等積. ... .. 1954
- 已知二對角線及不平行二邊, 作梯形. ... .. 2060
- 已知梯形之兩對角線及其夾角,與兩隣邊之和,求作本形. ... .. 2167
- 梯形中,已知二對角線,一角,及一平行邊,求作本形. ... .. 2180

### 19. 多 角 形

- 作一多角形,令關於一所設點與所設多角形對稱. ... .. 1732
- 作一多角形,令關於一定直線與所設多角形對稱. ... .. 1733
- 已知五邊形各邊之中點,作其形. ... .. 1791
- 邊數為奇數之多角形,其各邊中點之位置為已知 求作本形. ... .. 1792
- 試作一直線形,令與所設直線形等積,然較其少一邊 並由此推定作與所設直線形等積之三角形法. ... 1939
- 作一直線形,令與一所設直線形等積,且與他所設直線形



- 相似. ... .. 2008
- 作一多角形, 令與所設多角形相似且周等於所設長. ... .. 2072
- 作與所設直線形相似之直線形, 令二者之比等於所設比. ... .. 2077
- 作一多角形, 令與定多角形相似, 但面積爲其二倍. ... .. 2214
- 作所設三角形之相似多角形, 令有所設周. ... .. 2223
- 作一多角形, 令與一定多角形等積, 他定多角形相似. ... .. 2224

## 20. 正多角形

- 內接或外切於所設圓, 作邊數爲四, 八, 十六, 三十二等之正多角形. ... .. 2097
- 內接或外切於所設圓, 作邊數爲三, 六, 十二, 二十四等之正多角形. ... .. 2098
- 作圓之內接正十角形. 又據此以作圓之外切正十角形圓之內接或外切五邊, 二十邊, 四十邊, 八十邊等正多角形. ... .. 2099
- 作圓之內接正十五角形, 並據此以作圓之外切正十五角形, 圓之內接及外切三十邊, 六十邊, 百二十邊等正多角形. ... .. 2100
- 作所設正  $n$  邊形之外接正  $n$  邊形, 令等於他所設正  $n$  邊形. ... .. 2105
- 以所設有限直線爲一邊, 作正五角形. ... .. 2106
- 作正六角形 ABCDEF, 令對角線 AC 等於所設長. 2113
- 試在所設有限直線上作正八角形. ... .. 2205

## 21. 圓

- 在所設直線上, 作含所設角之弓形. ... .. 1803
- 由所設圓截取含所設角之弓形. ... .. 1804
- 過不在一直線上之三點, 作一圓. ... .. 1806
- 設三所設直線不交於一點, 而兩兩相交, 試作切於此三直線之圓. ... .. 1807
- 設一直線與二平行線交, 則切此三直線之圓, 可作兩個. ... .. 1808
- 過所設二點作一圓. ... .. 1811
- 試二等分所設扇形. ... .. 1812
- 試三等分半圓. ... .. 1813

- 試三等分一象限. ... .. 1814
- 試三等分定圓周. ... .. 1815
- 過所設點, 切所設直線於所設點, 作一圓. .... 1823
- 作一圓, 令其中心在所設直線上, 且切他所設直線於所設點. ... .. 1824
- 作所設半徑之圓, 令切於所設直線, 且其中心在他所設直線上. ... .. 1825
- 作一圓, 令切所設直線, 且切所設圓於所設點. ... 1826
- 過二所設點作一圓, 令其中心在所設直線上. ... 1827
- 作所設半徑之圓, 令其中心在所設直線上, 且切所設圓. ... .. 1828
- 作一圓, 令切所設直線於所設點, 且切所設圓. ... 1829
- 以所設半徑作圓, 令切所設圓於所設點. ... .. 1830
- 以所設半徑作圓, 令切於二所設圓. ... .. 1831
- 以所設半徑作各圓, 令分別適合以下之條件: (1) 過所設點, 且切所設直線; (2) 過所設點, 且切所設圓; (3) 切所設二圓周. ... .. 1832
- 以所設點為中心, 作切所設圓之圓. ... .. 1833
- 過所設點作一圓, 令切所設圓於所設點. ... .. 1834
- 作已知半徑之圓, 令切於已知二直線. ... .. 1836
- 作一圓, 令其自所設三直線  $L, M, N$  所截得之弦各等於所設長. ... .. 1837
- 作已知扇形之內切圓. ... .. 1839
- 以已知半徑作切已知直線及已知圓之圓. ... 1841
- 以所設三點為中心, 作兩兩相切之三圓. ... .. 1849
- 作距所設四點等遠之圓周. ... .. 1851
- 過所設點作一圓, 令直交所設圓於其周上之所設點. ... .. 1860
- 作一圓, 令切所設二直線, 且距他所設直線等於所設距離. ... .. 1862
- 過二所設點作切所設直線之圓. ... .. 1863
- 設  $O$  為所設點,  $P$  為所設直線  $AB$  上之所設點, 試以  $O$  為中心作圓, 令交  $AB$  於  $M, N$ , 而矩形  $PM \cdot PN$  等於所設面積. ... .. 1969, 2039
- 過所設點  $A$ , 且切交於  $O$  之二所設直線作圓. 2040
- 過所設點作一圓, 令其中心在所設直線上, 且其為他所設直線所截之弧, 其所對之中心角等於所設角. ... 2043
- 試以所設圓之同心圓周, 分所設圓於所設比. ... 2085
- 試以所設圓之同心圓周, 等分所設圓為三. ... 2086

- 試作成比例之四圓周，令最大圓等於其他三圓面積之和，且全體圓周之和及面積之和，分別等於所設圓周及所設圓面積。... 2096
- 作三等圓，令相切且內切所設正三角形。... 2115
- 作三等圓，令相切，且內切所設圓。... 2116
- 作一圓，令其面積等於所設二個或多個圓之面積和。... 2117
- 作若干個圓，令其半徑之比，等於同個數之所設直線之比，且其面積之和等於所設圓面積。... 2118
- 過二點且切一直線作一圓。... 2374
- 過二點且切一圓作圓。... 2376
- 切二圓且過一點作圓。... 2377
- 過一點，且切一直線及一圓作圓。... 2378
- 作切二直線且切一圓之圓。... 2379
- 作切二圓及一直線之圓。... 2380
- 作切三圓之圓。... 2381
- 過所設二點作所設半徑之圓。... 2168
- 作一圓，令切直角三角形之斜邊，過直角頂，且中心在一邊上。... 2182
- 設三直線平行，或過同點，則不能作得切是等直線之圓。... 2187
- 作定半徑之圓，令切定圓及其直徑或直徑之延線。... 2188
- 作所設菱形之內切圓。... 2189
- 有三定點 A, B, C, 及過點 A 之一定直線。試過 A, B 作一圓，令交定直線於 D, 而 DC 為圓之切線。... 2191
- 以所設點為中心作一圓，令為所設直線所截弓形之角等於已知角。... 2192
- 試以所設圓外之一所設點為中心作圓，令由所設圓所截得之弦等於所設長。... 2194
- 作切平行線且過所設點之圓。... 2195
- 作一圓，令切一所設直線，且切他所設直線於所設點。... 2197
- 作一圓，令其中心在所設直線上，圓周至他二所設直線之距離，分別等於所設長。... 2199
- 有互相外切之三等圓，試作切此三等圓之圓。... 2201
- 作一圓，令切一所設圓，並切他所設圓於所設點。... 2202
- 試在定正方形內作四等圓，令各外切他二圓，且切正方形之一邊於其中點。... 2203

- ① 作內切定圓之六等圓，令各外切他二圓。... .. 2204
- ② 作一圓，令直交三所設圓。... .. 2213
- ③ 過二定點作一圓，令由他二定點至此圓所引切線之長相等。... .. 2230
- ④ 以所設點為中心作一圓，令二等分所設圓周。... 2231
- ⑤ 作一圓，令切所設圓，中心在所設直線上，且過此直線上之一所設點。... .. 2236
- ⑥ 過所設二點作圓，令交所設圓，且公弦平行於所設直線。... .. 2237
- ⑦ 過二定點作一圓，令由定直線截取所設長之弦。 2239
- ⑧ 設  $OQ$  為過點  $O$  之所設直線， $P$  為不在此直線上之所設點，試過點  $P$  作一圓，令其中心在  $OQ$  上，截  $OQ$  於  $S, T$ ，而  $OS$  與  $OT$  之比等於所設比。... .. 2243

### 第三 軌跡之部

#### 1. 等遠點之軌跡

- ① 求距所設二點等遠之點之軌跡。... .. 1507
- ② 求距相交二直線等遠之點之軌跡。... .. 1508
- ③ 求距平行二直線等遠之點之軌跡。... .. 1634

#### 2. 定遠點之軌跡

- ① 設自某點至所設點有一定距離，則某點之軌跡若何？... .. 1505
- ② 設自某點至所設直線有一定距離，則某點之軌跡若何？... .. 1506
- ③ 距所設圓周定遠之點之軌跡如何？... .. 1514
- ④ 設依一定方向，距一圓形  $F$  之各點  $A$  定遠之點為  $A'$ ，則  $A'$  之軌跡為與  $F$  同向全等之圓形  $F'$ 。... .. 1643

#### 3. 等長線端之點之軌跡

- ① 設  $P$  為圓弧  $APB$  上之任意點，延長  $AP$ ，取  $PQ=PB$ ，則  $Q$  之軌跡為一圓弧。... .. 1548
- ② 設圓  $O$  為定圓， $P$  為其周上之動點， $PC$  為由  $P$  至定直徑  $AOB$  所引之垂線，在  $OP$  上取  $OQ$ ，令等於  $OC$ ，則  $Q$  點之軌跡如何？... .. 1554
- ③ 設  $AB$  為所設圓之所設直徑，過其一端  $B$  引任意弦  $BQ$ ，在其延線上取點  $P$ ，令  $PQ$  之長，等於由  $P$  至  $A$  上之切線

- AR 所引垂線 PN, 求點 P 之軌跡. ... .. 1555
- 設  $AOA'$  爲所設圓  $ABA'$  之定直徑 OB 爲動半徑, 由其端 B 至  $AOA'$  引垂線 BC, 在 OB 上取  $OM=BC$ , 則點 M 之軌跡如何? ... .. 1559
- 有一定圓及同平面上之定點 A, 過 A 引割線 ABC, 由弦 BC 之中點 I, 垂直於 BC 引  $IM=IA$ , 則 M 點之軌跡如何? ... .. 1561
- 設 A 爲兩所設圓周之一交點, 過 A 引一直線, 截二圓於 B, C, 在此直線上取 AP, 令等於 AB, AC 之和, 求點 P 之軌跡. ... .. 1563
- 設 AB 爲所設圓之所設弦, 作三角形 ABC, 令其頂點 C 在圓周上, 命 BC 之中點爲 M, 在直線 AM 之延線上取點 P, 令  $AM=MP$ , 則 P 點之軌跡如何? ... .. 1566
- 設 ABC 爲正三角形, 聯結三角頂 A, B, C 於一點 P, 令  $PA=PB+PC$ , 求 P 點之軌跡. ... .. 1568
- 設 ABCD 爲所設矩形, 求 P 點之軌跡, 令  $PA+PC=PB+PD$ . ... .. 1600

#### 4. 定長線端之點之軌跡

- 設平行四邊形 ABCD 之周一固定, A 點固定, 兩隣邊 AB, AC 之方向一定, 則 D 點之軌跡如何? ... .. 1524
- 求一軌跡, 令其上各點至所設二平行線之距離之和或差等於所設長. ... .. 1529
- 設兩直線相交, 由各直線至一點之距離之和 [或差], 等於所設長, 求此點之軌跡. ... .. 1531
- 求一軌跡, 令由其各點至所設圓所引之切線等於所設長. ... .. 1538

#### 5. 中點之軌跡

- 設定長直線之兩端, 分別在直交之二直線上運動, 則此直線中點之軌跡如何? ... .. 1515
- 設一梯倚於壁, 今其下端沿水平之地面滑下, 則此梯中點之軌跡若何? ... .. 1516
- 由所設點至所設直線之一切直線, 其中點之軌跡如何? ... .. 1520
- 設 AB 爲已知直線, AX 爲由 A 至過 B 之任意直線所引之垂線, 則 AX 中點之軌跡如何? ... .. 1525
- 圓中平行諸弦之中點之軌跡如何? ... .. 1532
- 設圓中諸弦之長一定, 則其中點之軌跡爲一同心圓. ...

- ... .. 1534
- 過所設圓中或外之所設點引弦，則是等弦之中點之軌跡成圓周 ... .. 1536
- 由圓周上之二定點 A, B, 引平行線 AP, BQ, 令交圓周於 P, Q, 則 PQ 中點之軌跡成一同心圓. ... .. 1537
- 由定點至定圓所引一切直線之中點，在一圓周上. ... .. 1545
- 由一所設點至諸同圓心引切線，則是等切線中點之軌跡如何? ... .. 1547
- 定圓周上之任意點 M, 與同圓周上之二定點 A, B 聯結，在 AM 上取 AC, 令等於定長 m, BM 上取 BD, 令等於定長 n, 則 CD 中點之軌跡如何? ... .. 1556
- 設一三角形內接於定圓，而欲令其垂心為一定點，則其各邊中點之軌跡為圓. ... .. 1558
- 過二圓 O, O' 之交點 A, 引倍弦 ACQ, 求其中點 M 之軌跡. ... .. 1560
- 設三角形 ABC 中， $\hat{A}$  = 定角 K, 底 BC 亦一定. 今在 AB, AC 上，就形外作正三角形. ... .. 1565
- 設角 BAC 在一定之位置，在二邊 AB, AC 上分別取 B, C, 令 AB 與 AC 之和 [或差] 等於所設長，聯結 B, C, 則  $\triangle ABC$  之外接圓中心之軌跡如何? 又底 BC 中點之軌跡如何? ... .. 1570
- 設一定圓之弦，張直角於圓內或圓外之定點，則此弦中點之軌跡為圓. 但其中心為定圓中心及定點間之中點. ... .. 1592
- 設圓周上之一定點 C, 與弦 AB 之兩端聯結之直線 CA, CB 之平方和  $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2$  為定量，則弦 AB 中點之軌跡如何? ... .. 1599
- 三角形底邊之平行線為他二邊所截得之部分，其中點之軌跡如何? ... .. 1605
- 設 AB 為所設直線，過 B 引任意直線，由 A 至此直線引垂線 AX, 求 AX 中點之軌跡. ... .. 1635
- 設定長線分 AB 過定點 P, 且其方向一定，以 AP, PB 為底邊作兩正三角形於同側，聯結其頂點，則此聯結線分中點之軌跡如何? ... .. 1650
- 設定長線分 AB 過定點 P, 且 AP, PB 之長皆一定，今在此二線分上各就同側作正三角形而聯結其頂點，則此聯結線分中點之軌跡如何? ... .. 1651

## 6. 定比分點之軌跡

- 設所設圓中之一切等弦，分於所設比，求其分點之軌跡。  
... .. 1595
- 由  $O$  點引任意直線，在其上取二點  $P, Q$ ，令  $OP:OQ$  等於所設比，若  $P$  點之軌跡為直線  $AP$ ，則  $Q$  點之軌跡，為與其平行之直線。  
... .. 1608
- 設  $O$  為一定點， $MN$  為不過  $O$  之一所設直線；引  $OA$ ，令交  $MN$  於  $A$ ；引  $OP$ ，令與  $OA$  成所設角，且  $OA:OP$  為定數；然則因  $A$  點在  $MN$  上運動而生之  $P$  點之軌跡如何？  
... .. 1612
- 過所設點  $O$ ，至所設圓周引任意直線  $OA$ ，又引  $OP$ ，令與  $OA$  成所設角，且  $OA:OP$  等於所設比。若  $A$  點在此圓周上運動，則  $P$  點之軌跡如何？  
... .. 1613
- 設  $\angle AOB$  為直角，由其一邊  $OB$  上之定點  $B$ ，引任意直線  $BP$ ，令交他邊  $OA$  於  $E$ ，且由  $P$  至  $OA$  引垂線  $PF$ ，聯結  $PO$ ，而  $PO:PE=OE:EF$ ，則  $P$  點之軌跡如何？  
... .. 1614
- 設由所設點  $O$  引直線  $OP$ ，其一端  $P$  之軌跡為一圓周，則按所設比分  $OP$  之點  $Q$  之軌跡，亦為圓周。  
... .. 1616
- 設直角三角形  $ABC$  之斜邊  $BC$  之中點為  $O$ ，在  $AB$  之延線上取點  $M$ ，令  $\triangle MBC$  與  $\triangle ABC$  等積。命  $MO$  與  $AC$  之交點為  $E$ ，在直線  $BE$  上取點  $H$ ，令  $BH$  與  $HE$  之比等於定比  $m:n$ ，若  $A$  點移動，則  $H$  點之軌跡如何？  
... .. 1625
- 過所設圓  $ABT$  之周上之一定點  $A$ ，引任意弦  $AB$ ，在  $AB$  之延線上取點  $P$ ，令  $PA$  與由  $B$  所引之切線  $PT$  之比，恆等於定比  $l:m$ ，求  $P$  點之軌跡。  
... .. 1631
- 由二定點  $A, B$  依一定之方向，引二直線  $AX, BY$ ，令  $AX:BY$  恆等於所設比  $m:n$ ，聯結  $X, Y$ ，在  $XY$  上取點  $P$ ，令  $PX:PY$  等於所設比  $a:b$ 。求  $P$  點之軌跡。  
... .. 1632
- 過兩圓周之交點之一倍弦，按所設比而分時，其分點之軌跡若何？  
... .. 1659

## 7. 令距離成定比之點之軌跡

- 求軌跡，令其上之各點，與二平行線之距離，等於所設比  $l:m$ 。  
... .. 1601
- 設一點距相交二直線有所設比，求此點之軌跡。  
1602
- 求軌跡，令其上之各點與所設二點之距離有所設比 [非等比]。  
... .. 1603

8. 交點之軌跡

- 設各平行四邊形與三角形  $ABC$  共角  $A$ , 其對於角  $A$  之頂點在  $BC$  上, 則是等平行四邊形之對角線交點之軌跡如何? ... .. 1521
- 設  $AB$  為一圓之定直徑,  $CD$  為其平行弦,  $CB, DA$  交於  $M$ , 又  $CA, BD$  交於  $N$ , 今  $CD$  恆平行於  $AB$  而移動, 則  $M$  及  $N$  之軌跡如何? ... .. 1533
- 在所設圓  $ABC$  中, 引等於所設長之弦  $AB$ , 命其兩端上之切線之交點為  $P$ , 則  $P$  之軌跡如何? ... .. 1539
- 設有二直線過一所設有限直線之兩端, 今此二直線同時由  $AB$  之方向始, 以  $AB$  之兩端為中心, 在同平面依順時計向而迴轉, 但一直線之速度為他直線之二倍, 則此二直線交點之軌跡如何? ... .. 1544
- 設所設圓之直徑  $AB$  一定,  $C$  為圓周上之一點,  $CD$  為  $C$  上之切線,  $BD$  為  $CD$  之垂線,  $P$  為  $AC, BD$  延線之交點, 若  $C$  在圓周上運動, 則  $P$  之軌跡如何? ... .. 1546
- 由所設直線  $AB$  之兩端, 依任意方向引平行線  $AP, BQ$ , 則  $\widehat{PAB}, \widehat{QBA}$  之二等分線交點  $R$  之軌跡如何? ... .. 1549
- 有不相交之二圓, 其中心一定, 半徑變動, 求其公切線交點之軌跡. ... .. 1552
- 定圓中直徑之兩端, 與定長弦之兩端聯結, 令聯結之二直線相交, 則其交點之軌跡如何? ... .. 1553
- 設  $AB$  為定圓之定弦,  $AX$  為同圓之動弦. 以  $AB, AX$  為二隣邊作平行四邊形, 則其對角線交點之軌跡如何? 又由  $A$  所引最長對角線之位置如何? ... .. 1557
- 由一定點至同平面上之所設圓周引一割線, 在其與圓周之二交點上引切線, 則得一三角形. 設過定點之割線運動, 則三角形垂心之軌跡如何? ... .. 1562
- 設所設三角形  $ABC$  中,  $A$  為直角, 引  $BC$  之垂線  $EF$ , 命其與  $AB$  之交點為  $D$ , 與  $AC$  之交點為  $F$ , 又命  $BF, CD$  之交點為  $P$ . 若  $E$  點在直線  $BC$  上運動, 則  $P$  點之軌跡如何? ... .. 1564
- 設兩所設圓  $APB, BCQ$  相交,  $B$  為交點之一,  $BA$  及  $BC$  分別為兩圓中過  $B$  之所設弦. 引過  $B$  之任意弦  $PBQ$ , 令交二圓於  $P, Q$ , 求  $AP, QC$  之交點  $R$  之軌跡. ... .. 1571
- 在所設直線  $AB$  上取任意點  $C$ , 以  $AC, BC$  為一邊, 就同側分別作正三角形  $ACD, BCE$ , 聯結  $DB, AE$ , 則其交點  $R$  之軌跡如何? ... .. 1575



- 設一定直線之兩端，恆在所設角之二邊上，以兩端為垂足，分別引角之二邊之垂線，則其交點之軌跡如何？ 1577
- 由圓外之定點 P，引二切線，命其切點為 A, B，過 A 引任意弦 AQ，平行於 AQ 引 PR，命其與 QB 之交點為 R，求 R 之軌跡。 ... .. 1578
- 設矩形之一角頂在一定點，其相隣二角頂沿一所設圓周移動，求此矩形對角線交點之軌跡。 ... .. 1590
- 設 AB 為定圓 O 中之所設弦，引為 AB 所二等分之弦 XY，命其兩端上之切線 XP, YP 之交點為 P，則 P 之軌跡如何？ ... .. 1598
- 在三角形之二邊間，引平行於底之甚多直線，而作梯形，則由三角形之頂點至底之中點所引之直線，為是等梯形對角線交點之軌跡。 ... .. 1606
- 設 AB 為所設直線，CD 為 AB 之平行線而有所設長者，命 AC, BD 之交點為 O，則 CD 沿其自身而變位時，O 之軌跡為 AB 之平行線。 ... .. 1607
- 引一任意直線，令裁三角形 ABC，分別交 A, B, C 之對邊 [必要時其延線] 於 X, Y, Z，求三角形 AZY, CXY 外接圓他交點之軌跡。 ... .. 1619
- 過圓內之定點 P 引任意弦 AB，在 A, B 上引切線，命其交點為 X，則 X 之軌跡如何？ ... .. 1630
- 由圓中互相垂直之二任意半徑之端，分別平行於互相垂直之二定直線引二直線，其交點之軌跡，為過中心之一直線。 ... .. 1655

## 9. 頂點之軌跡

- 以所設有限直線為斜邊作直角三角形，則直角頂之軌跡如何？ ... .. 1511
- 設一正方形之二邊，在直交之二定直線上，則此正方形他二邊所成角之頂點之軌跡如何？ ... .. 1512
- 設各三角形與一定三角形全等，且其底邊在一直線上，則是等三角形頂點之軌跡若何？ ... .. 1513
- 求立於所設底邊上之二等邊三角形頂點之軌跡。 1519
- 設三角形之底及面積為一定，且底之位置亦為一定，則其頂點之軌跡如何？ ... .. 1523
- 設兩三角形共一頂點，各三角形之底，底之位置，及面積之和一定，則其頂點之軌跡若何？ ... .. 1526
- 設三個三角形 ABC, ADE, AMN 共一頂點，其底之大小與位置，及其面積之和一定，求公頂點 A 之軌跡。 1524

- 設兩三角形  $ABC$ ,  $ADE$  共一頂點, 其底之大小, 位置一定, 其面積之差亦一定, 求公頂點之軌跡. ... 1528
- 設所設直角三角形  $ABC$  之斜邊  $AC$  之兩端, 分別在直交之二直線  $OX$ ,  $OY$  上而移動, 則直角頂  $B$  之軌跡如何? ... 1530
- 設三角形  $ABC$  之底  $BC$ , 及由  $B$  所引之中線  $BE$ , 分別等於所設長, 則頂點  $A$  之軌跡如何? ... 1541
- 設三角形之底一定, 他二邊上正方形之和亦一定, 則其頂點之軌跡如何? ... 1583
- 設矩形之一角頂在一定點, 其相隣二角頂沿一所設圓周移動, 求其餘一角頂之軌跡. ... 1589
- 設以所設二有限直線  $AB$ ,  $CD$  爲二底邊, 以一點  $P$  爲公頂點之兩三角形等積, 則此頂點之軌跡如何? ... 1604
- 與所設三角形相似之三角形中, 其一頂點爲一定點, 他一頂點恆在所設直線上, 則第三頂點之軌跡爲一直線. ... 1609
- 設三角形  $ABC$  恆相似於一所設三角形, 其垂心之位置一定,  $A$  點在定直線上移動, 則  $B$  及  $C$  點之軌跡如何? ... 1610
- 設一三角形與一已知形狀之三角形相似, 其中一角之頂點固定, 他一角之頂點循一定圓周運動, 求第三角頂點之軌跡. ... 1611
- 由所設圓外之所設點至圓周, 引一直線, 以此直線爲邊作正方形, 則正方形他二角頂之軌跡若何? ... 1615
- 設三角形之底爲所設直線, 頂角之外二等分線與底之延線之交點爲定點, 求此三角形頂點之軌跡? ... 1617
- 設相交二直線  $X$ ,  $Y$  成角  $60^\circ$ , 一正三角形之二角頂, 分別在  $X$ ,  $Y$  上, 則其第三角頂之軌跡如何? ... 1645
- 設二直線  $X$ ,  $Y$  交於直角, 一正方形之相對二角頂, 分別在  $X$ ,  $Y$  上, 則其他二角頂恆在兩定直線上. ... 1646
- 設正方形之一角頂在定點  $P$  上, 其對角頂在定直線  $X$  上, 求他二角頂之軌跡. ... 1648
- 由定點至定直線引甚多直線, 在此諸直線上作正三角形, 則其頂點之軌跡如何? 若定直線易以定圓周, 則如何? ... 1649
- 設  $OX$ ,  $OY$  爲由一點  $O$  所引之二定直線, 正方形之一邊在  $OX$  上, 一角頂在  $OY$  上, 求其餘角頂之軌跡. ... 1657
- 設一三角形之三邊, 各具定方向, 二頂點分別在二定直線上運動, 求第三頂點之軌跡. ... 1658

## 10. 中心之軌跡

- 設各圓過一定點,且其半徑等於所設直線,則此圓中心之軌跡如何? ... .. 1509
- 設各圓過二定點,則此各圓中心之軌跡如何? ... 1510
- 設三角形之頂角  $A$  及底邊  $BC$  一定,求以下二款中三角形內心之軌跡:(1)  $BC$  之位置不變,  $A$  點運動;(2) 角  $A$  之位置不變,  $BC$  運動. ... .. 1550
- 設三角形之底邊一定,頂角之大小亦一定.求以下各點之軌跡.(1) 倅心,(2) 垂心,(3), 重心,(4) 九點圓之中心. ... .. 1551
- 設  $A, B$  分別為圓  $O', O''$  周上之定點,  $O'P, O''P$  成定角,則  $\triangle AQB$  之內心及  $\triangle QCD$  之外心之軌跡如何? 1569
- 設角  $BAC$  在一定之位置,在二邊  $AB, AC$  上分別取  $B, C$ ,令  $AB$  與  $AC$  之和 [或差] 等於所設長,聯結  $B, C$ ,則  $\triangle ABC$  之外接圓中心之軌跡如何? ... .. 1570
- 設一圓直交所設圓於其周上之所設點,則前圓中心之軌跡如何? ... .. 1576
- 由定圓中半徑之端至所設直徑,引一垂線而成三角形,若半徑運動,則三角形內心之軌跡如何? ... .. 1579
- 由所設圓周  $ABC$  上之任意點  $P$ ,平行於所設二直線引弦  $PA, PB$ ,聯結  $AB$ ,則三角形  $PAB$  內心之軌跡如何? ... .. 1580
- 設一等半徑之圓,以所設角交所設圓,則前圓中心之軌跡如何? ... .. 1585
- 設一圓過二所設點,而直交一所設圓周,求前圓中心之軌跡. ... .. 1586
- 設一等半徑圓與所設圓相交,而後圓之周為交點所二等分,求前圓中心之軌跡. ... .. 1587
- 設一圓二等分所設二圓之圓周,求此圓中心之軌跡. ... .. 1588
- 切所設直線於所設點之圓,其中心之軌跡如何? 1636
- 有所設半徑,切於所設直線之圓,其中心之軌跡如何? ... .. 1637
- 切所設圓於所設點之圓,其中心之軌跡如何? ... 1640
- 設  $AB$  為定長線分,其兩端分別在定角  $XOY$  之二邊上運動,求三角形  $OAB$  外心之軌跡. ... .. 1653

## 11. 令成等積之點之軌跡

- 設由一點至二圓周之方積相等,則此點之軌跡如何? ...

- ... .. 1584
- 由一點至二等邊三角形之等邊引垂線，若此垂線所包之矩形，等於由同點至底邊所引垂線上之正方形，則此點之軌跡，為切等邊於底邊之端之圓周。... .. 1624
  - 設 ABCD 為圓之內接四邊形，由一點 P 至其各雙對邊所引之二垂線所包之矩形相等，則 P 點之軌跡如何？... .. 1626
  - 設 ABCD 為圓之內接四邊形，由一點 P 至一雙對邊所引之二垂線所包之矩形，等於由同點至二對角線所引垂線所包之矩形，則 P 點之軌跡若何？... .. 1627

### 12. 令成定積之點之軌跡

- 由所設二點至一點之距離上正方形之和，等於前二點間之距離上之正方形，求後一點之軌跡。... .. 1581
- 設由一動點 P 至二定點 A, B 之距離上正方形之差一定，則 P 點之軌跡如何？... .. 1582
- 設由一點至所設四邊形各頂點之距離之平方和一定，則此點之軌跡為圓周。... .. 1591
- 過所設圓周上之一點 O，引任意弦 OA，內分及外分此弦於 P，令  $OA \cdot OP$  等於定量  $k^2$ ，則因此弦位置之變動而生之 P 點之軌跡如何？... .. 1593
- 在所設圓中引弦 AB，內分及外分之於 P，令  $PA \cdot PB$  等於所設量  $k^2$ ，若弦 AB 之位置變動，則 P 點之軌跡如何？... .. 1594
- 設由一點至所設三角形三頂點之距離之平方和，等於所設平方和，則此點之軌跡如何？... .. 1596
- 設由一點至所設正多角形各角頂之距離之平方和，等於所設平方，則此點之軌跡如何？... .. 1597
- 設 A 為定點，XY 為定直線，聯結 XY 上之任意點 P 與 A，二分於 M，令  $AP \cdot AM$  之值等於定數，則 P 點之軌跡如何？若 XY 非直線而為圓周，則如何？... .. 1620
- 設一圓之弦二分於一點，其二分所包矩形之面積一定，則此點之軌跡如何？... .. 1641

### 13. 張等角之點之軌跡

- 一直線上相隣且相等之二部分張於一動點之角相等，則此點之軌跡若何？... .. 1572
- 設一直線 ABCD 之不相隣部分 AB, CD 相等，取一點 P，令  $\hat{APB} = \hat{CPD}$ ，則 P 點之軌跡如何？... .. 1573

- 正方形之二邊，張於一動點之角相等，則此點之軌跡若何？ ... .. 1574
- 由一平坦之原野，可望見二塔頂。今有一人，行於此原野，其望此二塔頂之仰角恆相等，則此人所行之路為一圓周。 ... .. 1618
- 設三點  $A, B, C$  在一直線上，求視  $AB$  與  $BC$  之角相等之點之軌跡。 ... .. 1621
- 求對於所設二圓周之視角相等之點之軌跡。 ... 1622
- 設  $A, B, C, D$  為在一直線上之四所設點，求對於  $AB, CD$  之視角相等之點之軌跡。 ... .. 1628

#### 14. 雜題

- 設兩等圓恆相切，且分別與直交之二所設直線之一相切而運動，則兩圓切點之軌跡如何？ ... .. 1517
- 設兩相等之銅幣，置入矩形箱中，各切於箱邊，且相切而運動，則銅幣切點之軌跡如何？ ... .. 1518
- 設平行四邊形之二隣邊張於一動點之鄰角，互為補角，則此點之軌跡若何？ ... .. 1522
- 設一有限直線  $AB$ ，張定角於點  $P$ ，求點  $P$  之軌跡。 ... .. 1535
- 過所設圓周上之任意點  $A$ ，平行於所設直線  $l$ ，引  $AB$ ，令等於所設長  $a$ ，若  $A$  在此所設圓周上運動，則  $B$  點之軌跡如何？ ... .. 1540
- 求一軌跡，令由其各點至所設三角形之三邊所引垂線之足成一直線。 ... .. 1542
- 設三角形底之大小及位置一定，(1) 他二邊之和一定，求由底之兩端，至頂角之外二等分線所引垂線之足之軌跡。(2) 他二邊之差一定，求由底之兩端至頂角之二等分線所引垂線之足之軌跡。 ... .. 1543
- 設圓  $ABC$  為定圓，圓  $OPD$  為以定圓之半徑為直徑之圓，今小圓  $OPD$  內切於大圓而迴轉，則小圓上一點  $P$  之軌跡如何？ ... .. 1567
- 由定點  $O$  至圓引任意割線，令截圓於  $P, Q$ ，設  $R$  對於  $P, Q$  為  $O$  之調和共軛點，則  $R$  之軌跡如何？ ... 1623
- 設平面上有二發光點，求此平面上光度相等之點之軌跡。 ... .. 1629
- 設定三角形之一外接三角形，始終相似而移動，則其平面內一點 [至各角之距離之比一定] 之軌跡如何？ 1633
- 設由一點至相夾二直線之距離之和或差等於所設長，則

- 此點之軌跡，在和時爲一矩形之邊，在差時爲是等邊延線之部分。今之在某條件之下，以距離之和差爲代數和，則軌跡如何？ ... 1638
- 由同點至兩引二切線，若其交角爲一定，則此點之軌跡若何？ ... 1639
- 由一定點至無數之同心圓，引切線，其切點之軌跡如何？ ... 1642
- 聯結定點  $O$  與圖形  $F$  之各點  $A$ ，以  $O$  爲中心，令  $OA$  依同方向迴轉一定之角度，而至  $OA'$  之位置，則  $A'$  之軌跡爲與  $F$  全等之圖形  $F'$ 。 ... 1644
- 聯結定點  $O$  與定直線上之任意點  $M$ ，由  $M$  引一直線，令與  $MO$  成定角，由  $O$  至此直線引垂線  $OP$ ，則  $P$  之軌跡爲直線。 ... 1647
- 分別切二定直線於定點之二圓，設又相外切，則其切點之軌跡如何？ ... 1652
- 設一圓之半徑一定，其中心在所設圓周上運動，則其定方向切線之切點軌跡如何？ ... 1654
- 設  $O$  爲定點， $AX, AY$  爲定直線， $XOY$  爲定角，其邊  $OX, OY$  與定直線  $AX, AY$  之交點爲  $X, Y$ ，聯結  $XY$ ，由  $O$  至  $XY$  引垂線，令其足爲  $P$ ，則  $XOY$  以  $O$  爲中心而迴轉時， $P$  之軌跡通常爲一圓周，但若  $XOY$  與  $XAY$  互爲補角，則爲一直線。 ... 1658

## 第四 計算問題之部

### 1. 求線分之長

- 作  $\triangle FOQ$ ，令其相似於  $\triangle PAX$ ，且令頂點  $O, Q$  分別在其邊  $PA, PX$  上，設  $AP=200$  尺， $OP=20$  尺， $OQ=32$  尺，求  $AX$ 。 ... 1371
- 作  $\triangle ABC$ ，令其相似於  $\triangle AXY$ ，且令頂點  $B, C$  分別在其邊  $AX, AY$  上，設  $AX=4$  里， $AB=200$  尺， $BC=225$  尺，求  $XY$ 。 ... 1372
- 直角三角形中，設直角旁二邊之長爲  $a, b$ ，則斜邊之四等分點與直角頂聯結之三直線，各長幾何？ ... 1455
- 設線分  $AB$  之長爲 3 吋，在其上取  $BQ$ ，令等於 0.3 吋。由點  $B, C$ ，引  $BA$  之二垂線於  $AB$  之同側，於二垂線上分別取  $X, Y$ ，令  $BX=2.5$  吋， $CY=2.2$  吋，命直線  $XY$  與  $AB$  之交點爲  $Z$ ，則  $AZ$  之長如何？ ... 1467

- 設三角形 ABC 之三邊 AB, BC, CA 之長, 分別為 1 尺 2 寸, 7 寸, 9 寸, 又角 BAC 及其外角之二等分線, 分別交對邊及其延線於 P, Q, 則 PQ 之長如何? ... 1473
- 設梯形 ABCD 之平行二邊 AB, CD 分別延長至 H, K, 而 BH=CD, DK=AB, 聯結 H, K, 命 AB, CD 之中點為 E, F, 聯結 E, F, 令交 HK 之延線於 G. 設 AB=7, CD=9, EF=8, 則 EG 之長如何? ... 1474
- 設 ABCD 為各邊長 5 寸之正方形, 今在對角線 AC 之延線上取 CE, 令等於 CB, 由 E 至 AB 之延線引垂線 EF, 則線分 EF, BE 之長各如何? ... 1476
- 設三角形 ABC 中 C 為直角, 角 A 之二等分線與對邊 BC 之交點為 D, 且已知此三角形之面積為 6 平方寸, 邊 AC 之長為 4 寸, 求直線 AB 及 AD 之長. ... 1477
- 設互相外切二圓之直徑, 一為 18 尺, 一為 8 尺, 則此二圓外公切線切點間部分之長如何? ... 1490
- 求以下二款中兩圓公切線之長.
  - (1)  $OO'$  (中心間之距離) = 15 (寸), 半徑為 9 寸及 4.5 寸.
  - (2)  $OO' = 3.4$  (尺), 半徑為 2.7 尺及 1.5 尺. ... 1491
- 設圓之內接四邊形之四邊, 分別長 2 呎, 3 呎, 4 呎, 5 呎, 求兩對角線之長. ... 1493
- 設 PQRS 為圓之內接四邊形,  $a, b, c, d$  分別為表 PQ, QR, RS, SP 之數,  $x, y$  為表對角線 PR, QS 之數,  $z$  為表二弧 PQ, RS 之和所對弦之數. 求證  $xy=ac+bd$ ,  $zx=ad+bc$ ,  $yz=ab+cd$ , 且由是求  $x, y, z$ . ... 1494

## 2. 求邊之長

- 求外切及內接於半徑為  $r$  之圓之正三角形之邊, 由是更求外切及內接正六角形, 正十二角形, 正二十四角形, ... 之邊. ... 1384
- 求半徑為  $r$  之圓之外切及內接正方形之邊, 更由是求外切及內接正八角形, 正十六角形, ... 之邊. ... 1385
- 求半徑為  $r$  之圓中內接及外切正十角形之邊, 更由是求內接及外切正五角形, 正二十角形, ... 之邊. ... 1386
- 求半徑為  $r$  之圓中內接正十五角形之一邊. ... 1387
- 設圓之半徑為  $r$ , 其內接正多角形之邊為  $a$ , 同邊數外切正多角形之邊為  $a'$ , 則  $a' = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$ ,  $a = \frac{2a'r}{\sqrt{4r^2 + a'^2}}$ . ... 1396
- 設圓之半徑為  $r$ , 其內接  $n$  邊正多角形之邊為  $a$ , 內接  $2n$

邊正多角形之邊為  $a'$ ，則成立以下二式： $a'^2 = r\{2r - \sqrt{(4r^2 - a'^2)}\}$ ， $a^2 = \frac{a'^2(4r^2 - a'^2)}{r^2}$ 。 ... .. 1397

- 設圓之半徑為 5 尺，求內接正八角形及正十二角形之一邊。 ... .. 1403
- 已知三角形之三高  $h, h', h''$ ，求其三邊。 ... .. 1430
- 設直角三角形之三邊，已知為三連續整數，求是等三邊。 ... .. 1433
- 已知等邊三角形之面積  $S$ ，求一邊  $a$  及高  $h$ 。 ... 1434
- 設一正八角形之四邊，分別在所設正方形之四邊上，求正八角形一邊之長。 ... .. 1437
- 設三角形  $ABC$  中，由  $A$  所引之中線為  $AG$ ，邊  $AB=3$  寸， $AC=4$  寸，又  $AG=3$  寸，求底邊  $BC$  之長。 ... .. 1451
- 設三角形  $ABC$  中， $AC=2$  吋， $BC=3$  吋， $AC$  投於  $BC$  上之正射影為  $0.5$  吋，則  $AB$  之長若何？ ... .. 1452
- 設圓之半徑為  $r$ ，其內接矩形之面積為  $a^2$ ，求矩形二邊之長。 ... .. 1459
- 設正三角形之面積為 120 萬方尺，則其一邊如何？... .. 1465
- 設一正方形之面積，等於一邊長 1 寸及 2 寸之二正方形面積之和，求此正方形一邊及對角線之長。 ... 1469
- 設三角形  $ABC$  中，角  $A$  之二等分線  $AD$  與對邊  $BC$  之交點為  $D$ ，而  $BD$  為  $CD$  之三倍，則邊  $AB$  為邊  $AC$  之幾倍？ ... .. 1470
- 三角形三邊之比為 13:14:15，面積為 1 平方呎，求各邊之長。 ... .. 1479
- 三角形之二邊長 4 浬及 4.5 浬，則第三邊之長若何？但三角形之面積為 7 平方浬。 ... .. 1481
- 設三角形  $ABC$  中，底邊  $BC$  為 5 寸， $AB \cdot AC$  為 8 平方寸，命角  $A$  之二等分線與  $BC$  之交點為  $D$ ，而  $AD$  為 2 寸，則  $AB, AC$  之長各幾何？ ... .. 1482
- 設四邊形  $ABCD$  中， $\hat{A}=30^\circ$ ， $AD=AB=2.5$  尺， $\hat{B}=\hat{D}=\hat{C}$ ，求  $CD, BC$ ，及對角線  $BD, AC$  之長。 ... .. 1501
- 設兩圓之半徑為 1.5 浬及 0.8 浬，中心間之距離為 3 浬，求以此二圓為傍切圓之三角形各邊之長。 ... 1502

### 3. 求直徑，半徑之長

- 設圓穹之高為 18 尺，闊為 60 尺，則其曲率之半徑如何？若洪水氾濫，此圓穹被浸於水者深達 14 尺，則其闊減為



- 若干? ... .. 1375
- 設在闊 60 尺之車道及其兩側各闊 10 尺之人行道上，建一圓穹，其在車道人行道界線上之高為 10 尺，求此圓穹之曲率半徑。 ... .. 1376
- 設眼距湖水面 6 呎，適可望見相距 6 哩高於水面 6 呎之燈光，求地球直徑之哩數。 ... .. 1378
- 在正六角形之各邊上，就其外側作正方形，聯結其不屬於正六角形之頂點，則得正十二角形。設已知正六角形之一邊，求此正十二角形外接圓之半徑。 ... .. 1393
- 設正多角形之半徑為  $R$ ，邊心距為  $r$ ，又周與其相等，邊數為其二倍之他正多角形中，半徑為  $R'$ ，邊心距為  $r'$ ，則  $r' = \frac{1}{2}(R+r)$ ， $R' = \sqrt{R \times r}$ 。 ... .. 1394
- 設  $R, r, r_1, r_2, r_3$  分別為三角形外接圓、內切圓，及三傍切圓之半徑， $d, d_1, d_2, d_3$  分別為外接圓中心與他圓中心之距離，則  $R^2 = d^2 + 2Rr = d_1^2 - 2Rr_1 = d_2^2 - 2Rr_2 = d_3^2 - 2Rr_3$ ， $R^2 = \frac{1}{2}(d^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)$ 。 ... .. 1398
- 設三角形  $ABC$  內切圓之半徑為  $r$ ，頂點  $A, B, C$  所對傍切圓之半徑分別為  $r_1, r_2, r_3$ ，則  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$ 。 ... .. 1402
- 設正三角形之一邊為  $a$ ，其內切且互切之三個等圓之半徑如何? ... .. 1490
- 設直角三角形之二邊為  $a, b$ ，一圓之中心在斜邊上，且切於他二邊，則此圓之半徑若何? ... .. 1415
- 設圓之半徑為  $r$ ，在此圓中作三個等圓，令相外切且內切於原圓，則此三個等圓之半徑若何? ... .. 1418
- 設二同心圓之半徑分別為  $a, b$ ，作內切於此二圓之間，及內切於外圓外切於內圓之圓，求所作二圓之半徑。 ... .. 1419
- 設相切之四個等圓，內切於一邊為  $a$  之正方形，求等圓之半徑。 ... .. 1423
- 設相切之  $m$  個等圓內切於所設圓，求等圓之半徑。但所設圓之半徑為  $a$ ，其圓周之  $m$  分之一所對之弦為  $d$ 。 ... .. 1427
- 設一圓內切於半徑為  $r$  之象限，求此圓之半徑。 1458
- 一點距圓之中心 4 吋，由此點至圓所引切線之長為 3 吋，求圓之半徑。 ... .. 1460
- 設弦  $AB, CD$  直交於  $O$ ， $AO = OB = 2$  吋， $CO = 1.5$  吋，求圓之半徑。 ... .. 1461

- 一圓中相平行之二弦，各長一吋，相距 1.2 吋，求圓之半徑。 ... .. 1462
- 有一定點及一定直線，相距 3 吋。今欲以此定點為中心，作一圓，令其由定直線所截得之弦長 8 吋，則圓之半徑當若何？ ... .. 1464
- 設一半圓之中心，在直角三角形 ABC 之斜邊 BC 上，且切於他二邊，則半圓之半徑 R 如何？但  $AB=4$  吋， $AC=5$  吋。 ... .. 1483
- 已知同圓之內接正六角形及正方形之差，求圓之半徑。 ... .. 1487
- 欲闢面積為 6 分之圓地，其直徑須幾尺？不滿 1 尺之數，四捨五入，圓周率作 3.1416 計。 ... .. 1495
- 有半徑為 10 吋及 7 吋之同心圓，及與此二圓之周所圍圓輪等積之圓，求第三圓之直徑至吋之小數第三位。 ... .. 1499
- 甲乙二圓，甲之面積為 150 平方吋，乙之面積為 120 平方吋，然則甲圓之直徑當乙圓直徑之幾倍？求之至小數第四位。 ... .. 1500
- 設三角形 ABC 之三邊 BC, CA, AB 分別為 10 呎，12 呎，7.2 呎，以角頂 B 及 A 為中心所作之圓之半徑，分別為 1.2 呎，0.8 呎，求內切於圓 A，外切於圓 B，且切於 BC 之圓之半徑。 ... .. 1503
- 設三角形 ABC 之邊 BC, CA, AB 分別長 6.4 吋，5 吋，及 8 吋，以角頂 B, C 為中心所作圓之半徑，分別長 2 吋及 1 吋，則過點 A 且切於二圓 B, C 之第三圓之半徑如何？ ... .. 1504

4. 求高，距離，弦之長

- 設在闊 60 尺之車道及其兩側各闊 10 尺之人行道上，建一圓穹，其在車道人行道界線上之高為 10 尺，求此圓穹之高。 ... .. 1376
- 設二同心圓之半徑為  $a, b$ ，一梯形與此二圓周間之環等積，而梯形之底等於二圓周之長，求梯形之高。 ... 1414
- 設有兩山，各高 1350 呎，則欲互相望見，最遠可相距若干？ ... .. 1377
- 設眼距湖水面 6 尺，適可望見相距 6 哩高於水面 6 呎之燈光，而  $h$  為眼高於海面之呎數， $d$  為視線所經海面距眼之哩數，試由以上之已知各項，以證  $d = \sqrt{\frac{1}{2}h}$ 。 1378
- 設燈塔之燭光，高於海面 96 呎，則此光所照之海面，最遠

- 可至幾哩? 又設眼高於海面 24 呎, 則最遠可由若干距離, 望見此燭光? ... 1379
- 求半徑為  $r$  之圓之內接正三角形, 正六角形, 正方形, 正八角形, 正五角形, 正十角形之邊心距. ... 1388
- 二等邊三角形中, 重心與垂心之距離  $d = \pm m \left( \frac{2\delta}{h} - \frac{2}{3} \right)$ , 或  $d = m \left( \frac{2\delta}{h} + \frac{2}{3} \right)$ , 但  $m$  為底之中點上之中線,  $h$  為由底之一端至等邊所引之垂線,  $\delta$  為垂心與等邊之距離. 求證. ... 1392
- 設正多角形之半徑為  $R$ , 邊心距為  $r$ , 又周與其相等, 邊數為其二倍之他正多角形中, 半徑為  $R'$ , 邊心距為  $r'$ , 則  $r' = \frac{1}{2}(R+r)$ ,  $R' = (R \times r')$ . ... 1394
- 在圓  $O$  之直徑  $AB$  上, 作正三角形  $ABC$ ,  $n$  等分  $AB$ , 聯結角頂  $C$  及第二分點  $D$ , 延長  $CD$ , 令交圓周於  $F$ , 求弦  $AF$  之長. 設  $n=3, n=4, n=6$ , 則  $AF$  之長各如何? 1426
- 設二等邊三角形中, 二等邊各為 10 吋, 底邊為 7 吋, 求高及面積. ... 1453
- 設一圓之半徑為 2 尺 1 寸, 點  $P$  距圓周 3 尺 5 寸, 由  $P$  引圓之二切線, 求聯結切點之弦之長. ... 1457
- 設  $ABCD$  為各邊長 2 吋之正方形,  $E$  為  $BC$  之中點, 命過  $A, E, D$  之圓周與  $DC$  之交點為  $F$ , 則  $DF$  之長若何? ... 1463
- 設河岸邊一點  $P$  上, 植有一樹, 一人立於正對岸之  $A$  點, 由是沿岸行 40 步, 止於  $B$  點, 更與  $PB$  成直角, 而前進 50 步, 則達線  $PA$ , 求此河之闊. 但一步之長為 75 裡. 1466
- 設三角形  $ABC$  之邊  $AC, AB, BC$  之長, 分別為 51 寸, 52 寸, 53 寸, 今以  $BC$  為直徑作圓, 令交  $AB, AC$  於  $D, E$ , 則  $DB, DC$ , 及  $DE$  之長各如何? ... 1475
- 一腳踏車, 前輪之直徑為 3 尺, 後輪之直徑為 2 尺, 今行若干距離, 前後輪之迴轉數共為 2450 回, 求距離. ... 1496

### 5. 求面積

- 正八角形之面積為  $2r^2\sqrt{2}$ . 但  $r$  為外接圓之半徑. ... 1383
- 求半徑為  $r$  之圓中, 內接正三角形, 正方形, 正五角形, 正六角形, 正八角形, 正十角形之面積. ... 1389
- 設圓之半徑為  $r$ , 求其內接正十二角形之面積. 1390

- 設 AB, CD 爲相平行之弦, AB 爲內接正六角形之一邊, CD 爲內接正三角形之一邊, 求圖形 ABDC 之面積. 1391
- 在正六角形之各邊上, 就其外側作正方形, 聯結其不屬於正六角形之頂點, 則得正十二角形. 設已知正六角形之一邊, 求此正十二角形之面積. ... 1393
- 設三角形 ABC 之邊爲  $a, b, c$ , 面積爲  $S$ , 外接圓之半徑爲  $R$ , 則  $S = abc/4R$ . ... 1399
- 三角形之面積, 等於外接圓之半徑與垂足三角形周之半分所包之矩形. ... 1400
- 設三角形 ABC 之三邊爲  $a, b, c$ , 其和之半分爲  $s$ , 內切圓之半徑爲  $r$ , 頂點 A, B, C 所對傍切圓之半徑分別爲  $r_1, r_2, r_3$ , 則三角形之面積, 得以下列各式之一表之?  $sr, r_1 \times (s-a), r_2(s-b), r_3(s-c)$ . ... 1401
- 設三角形 ABC 內切圓之半徑爲  $r$ , 頂點 A, B, C 所對傍切圓之半徑分別爲  $r_1, r_2, r_3$ , A, B, C 之對邊爲  $a, b, c$ , 及  $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ , 三角形之面積爲  $S$ , 則  $S = \sqrt{\{(s-a)(s-b)(s-c)\}}$ , 或  $S = \sqrt{rr_1r_2r_3}$ . ... 1402
- 設圓之半徑爲 5 尺, 求內接正八角形及十二角形之一邊, 並計算其面積. ... 1403
- 由四邊形 ABCD 之角頂 C, D 及對角線之交點至邊 AB 引垂線 CF, DG, EH, 則四邊形之面積爲  $\frac{1}{2}AB \cdot \frac{CF \cdot DG}{EH}$ . ... 1404
- 設  $a, b, c, d$  表四邊形之邊,  $m, n$  表對角線,  $S$  表面積, 則  $S = \frac{1}{4}\sqrt{(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2)(2mn-a^2+b^2-c^2+d^2)}$ . 若四邊形內接於圓, 命  $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ , 則  $S = \sqrt{\{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)\}}$ . 若四邊形外切於一圓, 且內接於他圓, 則  $S = \sqrt{abcd}$ . ... 1405
- 聯結三角形各邊之中點, 作第二內接三角形, 復聯結此第二三角形各邊之中點, 作第三內接三角形, 如是作無限之內接三角形, 則是等內接三角形和之極限如何? 1406
- 按內接於所設正方形, 作第二正方形之法, 內接於第二正方形, 作第三正方形, 如是作無限之正方形, 則 (1) 內接正方形和之極限如何? (2) 欲令此和等於所設面積, 則內接正方形之作法如何? ... 1407
- 設圓之半徑爲 10 尺, 一弧所對之圓周角等於直角之三分之二, 求此弧及其弦所成弓形之面積. ... 1410
- 設正方形之一邊爲  $a$ , 以邊爲直徑, 就形內在各邊上作半圓, 則得四形如葉, 求此四葉之面積, ... 1411

- 作直角三角形之外接半圓周，又以直角之二邊為直徑，就三角形之外側作半圓周，求所得兩新月形之面積。但直角之二邊為  $a$  及  $b$ 。... 1412
- 設三弧之半徑相等，合成一三角狀之圖形，各弧之中心，為他二弧之交點，則此圖形之面積若何？但半徑為  $r$ 。... 1413
- 設三角形之三中線為  $\alpha, \beta, \gamma$ ，則其面積  $S = \frac{1}{3} \sqrt{(2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4)}$ 。... 1429
- 已知三角形之三高  $h, h', h''$ ，求其面積。... 1430
- 延長梯形之不平行之二邊，令交於一點，而視梯形為兩三角形之差，以求其面積。... 1435
- 已知梯形之高及底，求以此梯形為差之兩三角形之面積。... 1436
- 設以  $S$  表圓面積， $C$  表圓周，則  $S = C^2/4\pi$ 。... 1439
- 設互相外切之二個等圓，內切於定圓，且二中心在定圓之直徑上，則此二個等圓面積之和，等於定圓面積之半。... 1441
- 圓環之面積，等於以二圓周之長為底，以二半徑之差為高之梯形面積。... 1442
- 在直角三角形之三邊上，作半圓，令皆在三角形之內側，則直角之二邊所分弓形之和，減以斜邊所分之弓形而得之差，等於直角二邊上之半圓公有之部分。... 1443
- 一矩形，二邊之長為 10 寸及 8 寸，今以此矩形之四邊為底邊，就形外作四個等邊三角形，依次聯結此諸三角形之角頂，求所得四邊形之面積。... 1447
- 有長若干尺之繩，若以之為周邊作正方形，則正方形之面積為 324 平方尺，若以之為周邊作正六邊形，則正六邊形之面積若何？... 1449
- 邊長 1 尺之正方形之外接圓，與邊長 2 尺 4 寸之等邊三角形之內切圓孰大？... 1450
- 有一梯形，高 0.7 寸，小底 2 寸，不平行之二邊相等，各為 1 寸，求梯形之面積。... 1454
- 設圓之半徑為 6 寸，一點距中心 4 寸，則過此點所引任意弦上二分所包矩形之面積若何？... 1456
- 設兩相似多角形對應邊之比為 3:25，大者之面積為 1 平方尺，則小者之面積若何？... 1468
- 設 ABCD 為正方形，AP 將對角線 AC 與邊 AB 所成之角 BAC 二等分，P 為 AP 與 BC 之交點。由 P 至 AC 引垂線 PQ，由 Q 至 AB 引垂線 QR，則 QR 上之正方形，為原正

- 形之幾分? ... .. 1480
- 正方形內接於周為 22 徑之圓，求正方形之面積。 ...  
... .. 1486
- 設一圓形庭園之半徑為 8 丈，環繞庭園之草地小  $\frac{1}{2}$  丈，求  
草地之面積。但圓周率為 3.1416，不滿方丈之數四捨五  
入。 ... .. 1497

### 6. 求 比

- 有二球，及同高之二物體，此二物體在一球上可互相望見  
之最遠距離，為在他球上者之二倍，試比較此二球之直徑。  
... .. 1381
- 設一三角形之三中線，等於他三角形之三邊，求此兩三角  
形面積之比。 ... .. 1382
- 在半圓內引相等且切於半圓之二個等半圓，切於此三圓，  
引一小圓，則此小圓之半徑與等圓半徑之比為 2:3。 ...  
... .. 1416
- 在半圓內作相切且切於半圓之二個等圓，又切於此三圓  
作小圓，求小圓半徑與等圓半徑之比。 ... .. 1417
- 設相交於 A 點之二直線，夾一連順次相切之圓，且與之相  
切，A 至最遠圓中心之距離為 OA，最遠圓之半徑為 OB，求  
證諸圓之面積之和，與最遠圓 O 之面積之比為  $\frac{(OA+OB)^2}{4OA \cdot OB}$ 。  
... .. 1428
- 試計算圓周與其直徑之比。 ... .. 1431
- 在同圓之內接正方形及正六角形之一邊上，作正三角形，  
求此正三角形之比。 ... .. 1440
- 有二等邊三角形，底邊與高之比為 3:2，求高為內心所分  
二分之比如何? ... .. 1471
- 在三角形 ABC 之邊 BC 之延線上取 CD，令等於 BC，聯結  
點 D 與 AC 之中點 E，命 DE 之延線與 AB 之交點為 F，求  
FE 與 ED 之比。 ... .. 1472
- 在三角形 ABC 之二邊 AB, AC 上，分別按  $BD = \frac{1}{4}AB$ ,  $CE = \frac{1}{2}$   
 $\times AC$ ，取點 D, E。聯結 D, E，則三角形 ABC 與四邊形 BCED  
之面積之比如何? ... .. 1484
- 設兩相似三角形之面積，一為 1 平方尺，一為 110 平方寸，  
求其相似比。 ... .. 1485
- 設兩個等圓之中心，互在他圓周上，則其公弦上之正方形，  
等於半徑上正方形之三倍，試證之。且求二圓公有部分之  
面積及一圓面積之比。 ... .. 1489

## 7. 求邊數

- 設正多角形之一角爲  $162^\circ$  [ $\frac{5}{3}R$ ], 其邊數如何?... 1444
- 一凸多角形, 其內角成等差級數, 最小角爲  $120^\circ$ , 公差爲  $5^\circ$ , 求其邊數. ... .. 1445
- 有甲乙二正多角形, 甲之邊數, 爲乙之邊數之二倍, 甲之一角與乙之一角之比爲  $9:8$ , 求各多角形之邊數. 1446

## 8. 雜題

- 設三角形三邊之長爲 3 尺, 4 尺, 5 尺, 則其最大角如何? 又設三邊之長爲 12 尺, 13 尺, 20 尺, 則最大角大於直角抑小於直角? ... .. 1373
- 設有限直線 AB 按中末比內分及外分於 G 及 G', 而  $AB = 12$  寸, 則 BG 及 BG' 爲方程式  $x^2 + 12x = 144$  之根. ... .. 1374
- 在平原之道鐵上高  $13\frac{1}{2}$  呎之處, 置一標識, 今一火車, 由此駛向極遠之地, 速度爲每時 36 哩, 則車中人在幾分鐘後, 可見此標識在地平線上; 但眼高從略. ... 1380
- 設圓之半徑爲  $r$ , 求其內接正五角形之對角線. 1395
- 按內接於所設正方形, 作第二正方形之法, 內接於第二正方形, 作第三正方形, 如是作無限之正方形, 則 (1) 內接正方形和之極限如何? (2) 欲令此和等於所設面積, 作內接正方形之作法如何? ... .. 1407
- 一旗桿, 爲風吹折, 頂落於距根 20 尺之地, 修繕而重豎之, 又被吹折, 惟折處較前低 5 尺, 頂所落之地較前遠 10 尺. 求桿長. ... .. 1403
- 設圓之半周, 以其內接正方形之一邊及內接正三角形一邊之和表之, 其誤差如何? ... .. 1420
- 設圓之中心爲 O, 直徑爲 AB, 等於半徑之弦爲 AC. 由 O 引 AC 之垂線 OD, 延長之令交 A 上之切線於 E. 在此切線上, 由 E 依 EA 之方向取 EF, 令等於半徑 OA 之三倍, 聯結 FB, 以之代半圓周, 則其誤差如何? ... .. 1421
- 設圓之半徑爲  $r$ , 在直徑 AB 之延線 BX 上取  $BC = CD = DE = \frac{1}{2}r$ , 又在 A 上之切線 AY 上取  $AF = r$ ,  $AG = CF$ , 平行於 EF 引 GH. 命其與 BX 之交點爲 H, 則 AH 約等於圓周. ... .. 1422
- 設三角形之三邊爲  $a, b, c$ , 三高爲  $p, q, r$ , 三內接正方形之邊爲  $x, y, z$ , 三外接正方形之邊爲  $x', y', z'$ , 試證

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{p} + \frac{1}{a}, \frac{1}{y} = \frac{1}{q} + \frac{1}{b}, \frac{1}{z} = \frac{1}{r} + \frac{1}{c}, \frac{1}{x'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{a}, \frac{1}{y'} = \frac{1}{q} - \frac{1}{b}, \frac{1}{z'} = \frac{1}{r} - \frac{1}{c} \dots \dots \dots 1424$$

- 由三角形之外心，至各邊所引垂線之和，等於內切圓半徑與外接圓半徑之和。... 1425
- 設  $m, n$  為任意整數，表三角形三邊之數為  $m^2+n^2, m^2-n^2, 2mn$ ，則此三角形為直角三角形。又試順次定  $m, n$  之值，令表直角三角形三邊之數，皆為簡單之整數。... 1432
- Ahmes 曰，以直徑之九分之八為一邊所作之正方形，其面積略等於圓面積，此值為古代埃及人所知之  $\pi$  近似值，此值正確至小數第幾位？... 1438
- 一三角形之三角為  $60^\circ, 40^\circ, 80^\circ$ ，其外接圓周為 2 呎，求三角形之三邊所對各圓弧之長。... 1448
- 試將圓之面積及周分別與內接正六角形之面積及周比較。... 1488
- 設三角形 ABC 之邊 BC, CA, AB 之長，分別為 3 裡，4 裡，5 裡，一點 O 與三邊 BC, CA, AB 之距離之比為 3:4:5，求 O 之位置。... 1478
- 設三圓兩兩外切，其半徑分別為 1 寸，1.5 寸，及 2 寸，求其內公切線交點之位置，及兩兩之相似外心之位置，且證是等外心在一直線上。... 1492
- 一直徑 3 尺之鐵製圓輪，令其溫度較現在增高 300°F，則其周膨脹若干？試計算至釐位，但鐵之膨脹係數為 0.000067 (華氏每一度)。... 1498

## 第五 極大極小

- 分所設直線為二，則其各分上正方形之和，在二等分時為極小。... 2251
- 分所設直線為二，則其各分所包之矩形，在二等分時為極大。... 2252
- 有所設周之一切矩形中，以正方形之面積為極大。... 2253
- 設二直線所包之矩形一定，則此二直線之和，在此二直線相等時為極小。... 2254
- 有所設面積之一切矩形中，以正方形之周為極小。... 2255



- 設二直線上正方形之和一定，則此二直線之和，在二直線相等時爲極大。... 2256
- 設三角形之內接平行四邊形中，二邊在三角形之二邊上，一角頂在三角形之第三邊上，求證此平行四邊形面積之極大，在其頂點在第三邊之中點時，此時之面積爲所設三角形之半分。... 2257
- 聯結所設弓形弧上之一點與弦之兩端，則由是所生三角形之極大，在以弧之中點爲頂點時。... 2258
- 設三角形之底邊及頂角一定，則三角形在二等邊時爲極大。... 2259
- 設三角形之二邊一定，則在此二邊之夾角爲直角時，三角形之面積爲極大。... 2260
- 立於同底上之諸等周三角形中，極大者爲二等邊三角形。... 2261
- 以所設二定直線爲二邊，第三邊過一定點之諸三角形中，以定點爲第三邊之中點者極小。... 2262
- 三角形之頂角與高一定，則三角形之極小，在二等邊時。... 2263
- 設 A, B 爲二定點，XY 爲定直線，在 XY 上取 P，令 AP, BP 與 XY 所成之角等，則 (1) A, B 在 XY 之同側時，AP+BP 爲極小，(2) A, B 在 XY 之異側時，AP~BP 爲極大。... 2264
- 過所設角內之所設點，引一直線，令交所設角之二邊，則此直線之二分所包矩形之極小，在此直線與二邊成等角時。... 2265
- 設 A, B 爲所設圓外之定點，P 爲圓周上之點，則角 APB 在 (1) 過 A, P, B 之圓周外切所設圓於 P 時爲極大，(2) 內切於 P 時爲極小。... 2266
- 過兩所設圓之一交點引一直線，則其爲二圓所載取之弦所包之矩形，在此直線兩端上之切線相等時爲極大。... 2267
- 過兩所設圓之一交點引一倍弦，以此倍弦爲底邊，他交點爲頂點之諸三角形中，底邊垂直於公弦者爲極大。... 2268
- 過二圓交點之一，而終於二圓周之諸直線中，平行於中心線者爲極大，此直線爲中心線之二倍。... 2269
- 設 P, Q, R 爲不在一直線上之三所設點，ABC 爲所設三角形，在三角形 PQR 之外側，以 QR, RP, PQ 爲弦，作分別含角 A, B, C 之弓形，則 (1) 補足三弓形弧而得之三圓周，

- 過一定點；(2) 設任意直線 YPZ 之 Y 在過 P, R 之圓周上, Z 在過 P, Q 之圓周上, 且 YR, ZQ 交於 X, 則 X 在過 Q, R 之圓周上；(3) 角 XOY, YOZ, ZOY 一定；(4) 垂直於 PO 引 YPZ, 則 ZX, XY 分別垂直於 QO, RO；此時 XYZ 為三邊過 P, Q, R 且與 ABC 等角之極大三角形。 ... 2270
- 前題中若三角形 ABC 之邊 a, b, c 一定, O 為三圓之交點, 則  $a \cdot OP + b \cdot OQ + c \cdot OR$  較 O 在他位置時為極小。 ... 2271
- 設 A, B 為所設點, P 為在一定圓周上之點, 則比 PA:PB 之極大或極小；在 P 為定圓與過 A, B 之他圓之直交點時。 ... 2272
- 設 ABC 為定三角形, D 為 AB 上之定點, E 為 AB 延線上之定點, 以 D 為頂點, 底之延線過 E, 且內接於 ABC 之諸三角形中, 以由底之兩端所引 CA, CB 之平行線交於 AB 上者為極大。 ... 2273
- 若交截四邊形之四邊為所設邊, 則其兩三角形面積之差, 在四點為共圓點時極小。 ... 2274
- 若四邊形之四邊 a, b, c, d 為所設邊, 則其對角線間之銳角, 在此四邊形內接於圓時, (1) 若非交截四邊形, 為極大。(2) 若為交截四邊形, 為極小。但此處  $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \neq 0$ ；否則, 對角線直交, 面積為極小。 ... 2275
- 兩圓不交, 求其間最短及最長之距離。 ... 2276
- 所設圓之一切內接矩形中, 有極大面積者為正方形。 ... 2277
- 求內接於所設半圓之極大矩形。 ... 2278
- 所設圓之二定切線與一不定切線所圍三角形之面積, 在 不定切線二等分於切點時為極大或極小。 ... 2279
- 對角線為定量之平行四邊形中, 以菱形之面積為極大。 ... 2280
- 設四邊形之對角線為定量, 則其面積在此對角線直交時為極大。而此對角線不論互截於何點, 與面積完全無關。 ... 2281
- 所設正方形之內接正方形中, 有極小面積者, 乃等於原正方形之半分者。 ... 2282
- 命所設圓之中心為 C, 圓外之所設點為 A, 過 A 引直線 AX, 命其與圓之交點為 X, Y, 則三角形 CXY 極大時之位置如何? ... 2283
- 命所設圓之中心為 C, 此圓之弦為 XY, 垂直於 XY 引 CP, 則 (1) CP + XP, (2) CP · PX 在何時為極大? ... 2284

- 設  $A, B$  爲所設圓內之定點,  $P$  爲圓周上之動點, 則角  $APB$  爲 (1) 極大, (2) 極小時之  $P$  點位置如何? ... 2285
- 設  $A, B$  爲所設圓內之定點, 在此圓周上取一點  $P$ , 命  $PA, PB$  之延線與圓周之交點爲  $X, Y$ , 則弦  $XY$  爲極大時,  $P$  點之位置若何? ... 2286
- 設  $A$  爲所設半圓周上之定點,  $B$  爲定半徑上之中點,  $P$  爲同圓周上之任意點, 求  $AP+2BP$  之極小或極大值. ... 2287
- 設  $A, B$  爲在所設直線同側之二所設點, 試在此所設直線上求一點  $P$ , 令  $APB$  爲極大或極小. ... 2288
- 設  $P$  爲所設圓周上之動點,  $A, B$  爲二定點, 求  $P$  之位置, 令 (1)  $PA^2+PB^2$ , 或 (2)  $PA+PB$  爲極大或極小. 2289
- 試由所設直線上之一點至所設圓, 引最短之切線. ... 2290
- 有一定角及其二等分線上之一定點, 過此定點在定角內所引之直線中, 與角之二邊成等角者有極小之長, 且其所截得之三角形, 有極小之面積. ... 2291
- 與所設角之二邊交, 而成定面積三角形之一切直線中, 與角之二邊成等角者, 有極小之長. ... 2292
- 求所設圓之極大內接三角形. ... 2293
- 在一圓之直徑  $AB$  上取一點  $P$ , 引  $PQ$ , 令垂直於此直徑  $AB$ , 且交圓於  $Q$ , 則欲令  $AP \cdot PQ$  爲極大,  $P$  點之位置須如何? ... 2294
- 設  $TA, TB$  爲定圓之定切線,  $P$  爲此定圓周上之一點, 欲令 (1) 由  $P$  至  $TA, TB$  所引二垂線所包之矩形, (2) 由  $A, B$  至  $P$  上切線所引二垂線所包之矩形爲極大或極小, 則  $P$  點之位置當若何? ... 2295
- 有一圓及不交此圓而相直交之二直線, 試在此圓周上求一點, 令由此點至二直線之距離和爲極大或極小. ... 2296
- 設  $O$  爲圓之直徑延線上之定點, 試過  $O$  引一割線  $OPQ$ , 令由  $P$  及  $Q$  至直徑所引二垂線之差爲極大. ... 2297
- 命所設三角形爲  $ABC$ ,  $O$  爲邊  $CB$  延線上之定點, 由  $O$  引直線  $OXY$ , 令交  $AB, AC$  於  $X, Y$ , 然則由  $X, Y$  至邊  $BC$  所引二垂線之差爲極大時,  $OXY$  之位置若何? ... 2298
- 設  $ABC$  爲所設三角形,  $P$  爲其內之動點, 則 (1)  $\Sigma PA^2$ , (2)  $\Sigma PA$  爲極小時,  $P$  點之位置如何? ... 2299
- 設  $AB$  爲一半圓之直徑,  $P$  爲半圓弧上之點, 今設  $a, b$  爲所設完全數, 則  $a \cdot PA + b \cdot PB$  爲極大時,  $P$  之位置如何?

- ... .. 2300
- 設 A 及 B 爲二定點，分別在中心爲 C 之定圓之內部及外部，BC, AC 分別爲半徑之  $m, n$  倍，P, Q 爲定圓周上之二點。於是若此二點爲圓 ACB 與定圓之交點，則 (1)  $m \cdot PA + n \cdot PB$  爲極小，(2)  $m \cdot QA \sim n \cdot QB$  爲極大。但 C 與 P 在 AB 之異側，C 與 Q 在 AB 之同側。 ... .. 2301
  - 設 ABC 爲所設三角形，試在角 A 之二等分線上求一點 P，令  $\widehat{PBC}$  與  $\widehat{PCB}$  之差爲極大；並證極大時是等角之和等於角 BAC 之半。 ... .. 2302
  - 設邊數爲已知之多角形之各頂點，分別在與邊數同個數之定直線上，則此多角形周之極小，在此定直線皆將多角形之外角二等分時。 ... .. 2303
  - 邊數爲已知之等周多角形中，正多角形有極大之面積。 ... .. 2304
  - 多角形中，若除一邊外之其他各邊皆爲所設長時，則此多角形之極大，在內接於除外之一邊爲直徑之半圓時。又試由是導出，若多角形之一切邊爲所設長，則此多角形之極大，在內接於圓時。 ... .. 2305
  - 設多角形中，除一邊外，其他各邊皆爲定長，而除外一邊之兩隣邊相平行，然則此多角形何時爲極大？ ... 2306
  - (1) 圓之內接同邊數諸多角形中，以正多角形之面積及周爲極大。(2) 圓外之切同邊數諸多角形中，以正多角形之面積及周爲極小。 ... .. 2307
  - 設四邊形之一邊固定，其對邊恆過一定點，而不定頂點分別在所設二直線上，則此四邊形在何時爲極大？ 2308
  - 試在一所設直線上求一點，令由二所設點至此點之距離上正方形之和爲最小。 ... .. 2309
  - 試在正方形內求一點，令由此點至四頂點之直線上之正方形和爲最小。 ... .. 2310
  - 設 AB 爲圓中之定弦，XY 爲一任意弦，後弦之中點 Z 在前弦上，求 XY 之最大及最小者。又 Z 愈近 AB 之中點，則 XY 愈大，試證之。 ... .. 2311
  - 由所設點至所設圓周之最長及最短直線過中心。 2312
  - 設 A, B 爲圓外之二定點，試在圓周上求一點 P，令由 A, B 至 P 之距離和爲極大或極小。 ... .. 2313
  - 等周之平面形中，圓爲最大。 ... .. 2314
  - 有等面積之平面形中，周最小者爲圓。 ... .. 2315
  - 邊長分別相等之直線形中，內接於圓者爲最大。 2316
  - 有等周之三角形中，正三角形爲最大。 ... .. 2317

- 設三角形之各角,小於三分之四直角,試在此三角形內求一點,令由此點至各角頂之距離和為最小. ... 2318
- 等積之同邊數多角形中,正多角形之周為最小. 2319
- 等積三角形中,正三角形之周為最小. ... 2320
- 以定周作正多角形,則其邊數愈多,面積愈大. 2321
- 以定面積作正多角形,則其邊數愈多,周愈小. 2322
- 等角等周之平行四邊形中,菱形之面積為最大. 2323
- 設  $AB$  為圓之定弦,試由  $A$  引一弦  $AC$ ,令以  $AB, AC$  為二隣邊之平行四邊形中,由  $A$  所引之對角線為最大. ... 2324
- 設  $A$  及  $B$  為所設角  $XOY$  內之二所設點,試在  $OX$  [或  $OY$ ] 上取一點  $P$ ,在  $OY$  [或  $OX$ ] 上取一點  $Q$ ,令  $AP+PQ+QB$  之長為最小. ... 2325
- 試過三所設點,引三直線,作極大之正三角形. 2326
- 設  $XY, X'Y'$  為所設二平行線,  $A$  及  $B$  為此平行線外且在異側之二所設點,試在此平行線間,插入一有所設方向之直線  $MN$ ,令折線  $AMNB$  為最短. ... 2327
- 作三角形,令其一頂點在所設點上,他二頂點分別在相交二直線上,而其周為最小. ... 2328
- 銳角三角形之內接三角形中,周最小者為垂足三角形. ... 2329
- 設  $P$  為角  $BAC$  內之一定點,  $XPY$  為過  $P$  在角之二邊間所引之直線,  $D$  為由  $A$  至  $XPY$  所引垂線之足;求證  $XPY$  之最短,在此線由  $D$  至角之一邊之一部分  $DY$  等於此線由定點  $P$  至他邊之一部分  $PX$  時. ... 2330
- 有一矩形之彈子臺,彈子在臺面上之任意位置  $M$ ,打後歷觸臺之四緣而復歸原處,求證其所經之路徑,為由  $M$  順次聯結四邊上之任意點所得直線形周中之最小者. ... 2331
- 過圓內一定點之諸弦中,垂直於過此點之直徑者為最小,過中心者為最大. ... 2332
- 試在所設弓形之弧上求一點,令由此點至弦之兩端之距離和為最大. ... 2333
- 一底邊上之諸等積三角形中,其周以他二邊相等者為最小,試證之. ... 2334
- 頂角及其二邊之和一定不易之三角形中,以此二邊相等者為最大. ... 2335
- 求一點,令由此點至四定點之距離上正方形之和為最小. ... 2336

- 求所設三角形之最大內接矩形. ... .. 2337
- 在定直線之兩側,各有一定點,試過此二定點作一圓,令由此直線所截取之弦最小. ... .. 2338

## 第六 雜題

### I. 計算的作圖

#### 1. 代數式之作圖

- 作  $x=a+b$  之圖. ... .. 2119
- 作  $x=a-b$  之圖. ... .. 2120
- 作  $x=m/n$  之圖. ... .. 2121
- 作  $x=ab$  之圖. ... .. 2122
- 作  $x=bc/a$  之圖. ... .. 2123
- 作  $x=b^2/a$  之圖. ... .. 2124
- 作  $x=\sqrt{ab}$  之圖. ... .. 2125
- 作  $x=\sqrt{a^2+b^2}$  之圖. ... .. 2126
- 作  $x=\sqrt{a^2-b^2}$  之圖. ... .. 2127
- 作  $x=a\sqrt{2}$  之圖. ... .. 2128
- 作  $x=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$  之圖. ... .. 2129
- 作  $x=a\sqrt{5}$  之圖. ... .. 2130
- 作  $x=a\sqrt{m}$  之圖. ... .. 2131
- 作  $x=ab/\sqrt{a^2+b^2}$  之圖. ... .. 2132
- 作  $x=\sqrt{a^2+b^2-ab}$  之圖. ... .. 2133
- 作  $x=\sqrt{a^2+b^2+ab}$  之圖. ... .. 2134
- 作  $x=a\sqrt{19}$  之圖. ... .. 2135
- 方程式  $x^2-ax+b^2=0$  之根,試作圖示之. ... 2136
- 方程式  $x^2+ax+b^2=0$  之根,試作圖示之. ... 2137
- 方程式  $x^2-ax-b^2=0$  之根,試作圖示之. ... 2138
- 方程式  $x^2+ax-b^2=0$  之根,試作圖示之. ... 2139

#### 2. 代數幾何法例題

- 將所設直線  $a$  分爲二分,令其平方差等於其積. 2140
- 在所設正方形內作一等邊三角形,令與正方形公有一角頂,他二角頂在正方形之二邊上. ... .. 2141
- 試過所設點  $P$  至所設圓,引一割線,令其圓外之一分與圓內之一分相等. ... .. 2142

## II. 附錄(近世幾何)

## 1 共點性及共線性

- 設  $X, Y, Z$  分別為三角形  $ABC$  之邊  $BC, CA, AB$  上之點, 今過是等點引其所在邊之垂線, 若是等線為共點線, 則  $(BX^2 - CX^2) + (CY^2 - AY^2) + (AZ^2 - BZ^2) = 0$ . 其逆亦真. ... .. 2339
- 設由三角形  $ABC$  之頂點  $A, B, C$  所引之三直線  $AX, BY, CZ$  分別與對邊之交點為  $X, Y, Z$ , 若此三直線為共點線, 則  $(AZ:ZB)(BX:XC)(CY:YA) = 1$ . 其逆亦真. ... .. 2340
- 設分別在三角形  $ABC$  之三邊  $BC, CA, AB$  上之三點  $X, Y, Z$  為共線點, 則  $(AZ:ZB)(BX:XC)(CY:YA) = 1$ . 其逆亦真. ... .. 2341
- 設兩三角形中, 若聯結其對應頂點之直線為共點線, 則其對應二邊之交點為共線點, 其逆亦真. ... .. 2342
- 具四射線之一定束線, 為一橫截線所截時, 不問橫截線之位置如何, 其四截點之十字比不變. ... .. 2343
- 將束線  $AF, BF, CF, DF$  延長, 則此新束線之十字比, 與原束線之十字比有同值. ... .. 2344
- 設二束線有等十字比, 且三射線公有, 則第四射線亦公有. ... .. 2345
- 設一束線中之各角, 依次與他束線中之各角相等, 則是等束線之十字比相等. ... .. 2346
- 將一圓周上之四點, 與同圓周上之任意他點聯結, 則其所得束線之十字比為常數. ... .. 2347
- 設  $A, B, C, D, E, F$  為一圓周上之任意六點, 今將此六點依任意順序連續聯結之, 則如是所生之六直線內, 第一及第四之交點, 第二及第五之之點, 第三及第六之交點 [必要時, 是等直線延線之交點] 為共線點. ... .. 2348
- 設有不在一直線上之二組點列, 每組有四點, 其中一點公有; 若此二組有等十字比, 則聯結其對應點之直線為共點線. ... .. 2349
- 設有焦點相異之二組束線, 每組有四射線, 其中一射線公有, 若此束線有等十字比, 則其對應射線之交點為共線點. ... .. 2350

## 2. 相似中心

- 由兩圓之相似中心, 至此二圓中之一圓所引之切線, 亦必

- 切於他圓. ... .. 2351
- 聯結兩圓中平行半徑之端之直線, 若此二半徑在中心線之異側, 則過相似內心, 若此二半徑在中心線之同側, 則過相似外心. ... .. 2352
  - 過兩圓之相似中心, 引截兩圓之一直線, 則至此對應截點之二半徑相平行. ... .. 2353
  - 過二圓之相似中心, 引截兩圓之一直線, 其截點上之切線, 垂直於過此點之半徑, 且此四切線兩兩平行. ... 2354
  - 過兩圓之相似中心, 引截兩圓之一直線, 則由相似中心至不對應二點之二距離所包之矩形等於至他不對應二點之二距離所包之矩形, 且此二矩形各為常數. ... 2355
  - 有一動圓, 若切於二定圓, 則過其切點之直線, 過此二定圓之相似中心; 但此相似中心, 在二相切為同種類時, 則為外心, 在二相切為異種類時, 則為內心. ... .. 2356
  - 由二定成之相似中心, 至切此二圓之任意圓所引之切線有定長. ... .. 2357
  - 有三圓, 兩兩取之, 得六相似中心, 其位置之關係如次. (a) 聯結各圓中心與他二圓相似內心之三直線為共點線. (b) 三相似外心為共線點. (c) 一雙圓之相似外心與他二雙圓之二相似內心為共線點. ... .. 2358

### 3. 同 軸 圓

- 二圓之根軸, 乃至此二圓之切線相等之點之軌跡. ... .. 2359
- 設兩圓相交, 則其根軸為此兩圓之公弦. ... .. 2360
- 設有二任意圓, 則與其有同根軸之圓無數. ... 2361
- 由任意點至二圓引二切線, 此切線之平方差, 等於中心線與由此點至根軸所引之垂線所包矩形之二倍. 2362
- 前題中 P 若在根軸 RA 上, 則  $PV=PU$ . ... .. 2363
- 2362 題中若  $PU=0$ , 則  $\overline{PV}^2=2BC \cdot PN$ . ... .. 2364
- 2362 題中若  $FU=0, GV=0$ , 則  $\overline{PG}^2=2BC \cdot PN$ . 2365
- 2362 題中若  $PXX', PYY'$  為割線, 則  $PX \cdot PX' - PY \cdot PY' = 2BC \cdot PN$ . ... .. 2366
- 有中心不在一直線上之三圓, 兩兩取之, 則其根軸為共點線. ... .. 2367
- 設三圓同軸, 則由其一圓周上之一點至他圓所引切線之平方比, 等於由後二圓之中心至前一圓中心之距離之比. ... .. 2368
- 前題中若圓 B 縮小而為限點 L, 則  $\overline{PT}^2 : \overline{PL}^2 = CA : CL$ . 據



- 此,若  $L$  爲二圓之限點,  $PT$  爲由外圓周上之一點  $P$  至內圓所引之切線,則  $PT:PL$  爲定比. ... .. 2369
- 設  $ABC$  爲圓之內接三角形,  $AT, BT', CT''$  爲至他圓所引之切線,若三矩形  $BC \cdot AT, CA \cdot BT', AB \cdot CT''$  中,二者之和等於他一者,則二圓相切. ... .. 2370
- 三角形之九點圓與內切圓及傍切圓相切. ... .. 2371

## 4. 相切

- 過三所設點作一圓. ... .. 2372
- 切三所設直線作一圓. ... .. 2373
- 過二點且切一直線一圓. ... .. 2374
- 切二直線且過一點作一圓. ... .. 2375
- 過二點且切一圓作圓. ... .. 2376
- 切二圓且過一點作圓. ... .. 2377
- 過一點,且切一直線及一圓作圓. ... .. 2378
- 作切二直線且切一圓之圓. ... .. 2379
- 作切二圓及一直線之圓. ... .. 2380
- 作切三圓之圓. ... .. 2381

## 5. 倒形法

- 一直線之倒形爲過倒轉中心之一圓. ... .. 2382
- 一直線爲其倒形及倒轉圓之根軸. ... .. 2383
- 過倒轉中心之圓,其倒形爲一直線. ... .. 2384
- 不過倒轉中心之圓,其倒形爲一圓. ... .. 2385
- 前題中倒轉中心  $C$  爲此二圓之相似中心. ... .. 2386
- 2385 題中設  $CT$  爲圓  $A$  之切線,則(圓  $a$  之半徑):(圓  $A$  之半徑)  $= R^2 : \overline{CT}^2$ . ... .. 2387
- 二軌跡之交點,爲此二軌跡倒形交點之倒點. ... .. 2388
- 倒轉圓之動徑,與互爲倒形之二圓之交角互爲補角. ... .. 2389
- 二軌跡所成之角,等於其倒形所成之角. ... .. 2390
- 若二圓[或一直線及一圓]相切,則其倒形亦相切. ... .. 2391
- 若一軌跡及其交跡線倒轉,則其各倒形相交. ... .. 2392
- 設  $a, b, c, \dots$  分別爲任意點  $A, B, C, \dots$  之倒點,倒轉中心爲  $O$ , 則(1)就其中任二點  $A, B$  而言,  $ab:AB = R^2:OA \cdot OB$ ; (2)就其中任三點  $A, B, C$  而言,  $bc:ca = OA \cdot BC:OB \cdot CA$ ; (3)就任四點  $A, B, C, D$  而言,  $bc \cdot ad:ca \cdot bd = BC \cdot AD:CA \cdot BD$ . ... .. 2393

- 十字比對於其倒形不變. ... .. 2394
- 二點與其倒點為共圓點. ... .. 2395
- 設  $A, B$  為二點,  $a, b$  為其倒點, 倒轉中心為  $O$ , 則  $ab:AB$   
 =(由  $O$  至  $ab$  所引之垂線):(由  $O$  至  $AB$  所引之垂線). ...  
 ... .. 2396
- 過一組倒點之圓, 截倒轉圓之直徑於互為倒點之點 ...  
 ... .. 2397
- 圓中弦上之任意點與其倒點, 與 [關於此圓之] 中心及弦  
 之兩端為共圓點. ... .. 2398
- 過在倒轉中心同側之一對倒點之各圓, 與倒轉圓直交. ...  
 ... .. 2399
- 設一圓與他圓直交, 且前圓為後圓之倒轉圓, 則後圓為其  
 自身之倒形. 同理, 一圓以其弦之中點為倒轉圓之中心, 以  
 其弦之半分為倒轉圓之半徑而倒轉時, 其倒形即為自身.  
 ... .. 2400
- 二圓關於其逆相似之二圓, 互為倒形. ... .. 2401
- 直交之二圓, 各截他圓之直徑於互為倒點之點. 2402
- 設  $P, Q$  互為倒點, 其倒轉中心為  $C$ , 命  $X$  為倒轉圓周上  
 之一點, 則  $\overline{PX}^2:QX^2=PC:QC$ , 其逆亦真. ... .. 2403
- 前題中設  $L$  為以  $P, Q$  為對稱點之對稱軸, 則  $\overline{PX}^2=2PC$   
 $\cdot XL$ ,  $\overline{QX}^2=2QC \cdot XL$ . 其逆亦真. 但  $XL$  為  $L$  之垂線 ...  
 ... .. 2404
- 互為倒形之二圓, 與倒轉圓同軸. ... .. 2405
- 二圓得由其同軸圓周之各點, 倒形於等圓, 而其中心為此  
 同軸圓之相似中心. ... .. 2406
- 限點屬之同軸系圓中, 其二限點關於此系各圓互為倒形.  
 ... .. 2407
- 若共點屬之同軸系圓, 以其任一公有點為倒轉中心而倒  
 轉, 則其倒形為直線, 而公有他公有點之倒點. 2408
- 限點屬之同軸系圓, 關於任一限點而倒轉時, 則其倒形為  
 同心圓, 而以他一限點之倒點為中心. ... .. 2409

### 6 調和點列

- 設四點成調和點列, 則由其端之一點至其共軛點之距離,  
 等於由同點至他二點距離之調和中項. ... .. 2410
- 前題中  $AB(AX+AY)=2AX \cdot AY$ ,  $XY(AY+BY)=2AX \cdot BY$ .  
 反之, 若是等關係成立, 則四點  $A, X, B, Y$  成調和點列.  
 ... .. 2411
- 設  $X, Y$  為關於  $A, B$  之調和共軛點,  $M$  為  $AB$  之中點, 則

- $\overline{MA}^2 = \overline{MX} \cdot \overline{MY} = \overline{MB}^2$ . 其逆亦真. ... .. 2412
- 前題中 X 及 Y 依反方向而運動. ... .. 2413
- 設四射線組成一束線, 其與一橫截線之交點成調和點列, 則不論橫截線之位置如何, 其交點皆成調和點列. ... .. 2414
- 設以平行於一射線之直線截調和束線, 則其相隣接之三射線間之二部分等長. ... .. 2415
- 前題之逆亦真. ... .. 2416
- 一角之二邊, 與此角之內外兩二等分線成調和束線. 反之, 若一調和束線中, 有二射線直交, 則此二射線分別為他二射線所成角之內外兩二等分線. ... .. 2417
- 完全四邊形中, 延長聯結三對角線交點之直線, 則一切點列及束線為調和. ... .. 2418

## 7. 極及極直線

- 由極及極直線之定義, 可推得以下各事. (1) 極及極直線在中心之同側. (2) 二者之一趨近中心, 則他一離遠中心. 其逆亦真. (3) 若直線切圓, 則切點及切線為極及極直線. (4) 二切線之交點及切弦為極及極直線. (5) 聯結二極之直線張於中心之角, 等於其極直線間之角或補角. ... 2419
- 設一直線過一定點, 則此直線之極在定點之極直線上. 反之, 設一點在一定直線上, 則此點之極直線過定直線之極. ... .. 2420
- 聯結任意二點之直線, 為此二點極直線之交點之極直線. 反之, 二直線之交點, 為聯結此二直線之極所得直線之極. ... .. 2421
- 設一三角形之二頂點及其二對邊分別為極及極直線, 則第三頂點及對邊亦為極及極直線. ... .. 2422
- 自身共軛三角形中, 垂心為倒轉中心. ... .. 2423
- 以自身共軛三角形之各邊為直徑, 在其上所作之三圓, 與倒轉圓直交. ... .. 2424
- 設一直線截圓, 以其上之任意點為極, 則極直線與此直線之交點與極, 為關於此直線與圓之交點之調和共軛點. ... .. 2425
- 由圓之中心至二點之距離之比, 等於由各點至他點關於此圓之極直線之距離之比. ... .. 2426
- 設 ABCD 為圓之內接四邊形, AB, CD 之交點為 X, BC, AD 之交點為 Y, AC, BD 之交點為 Z, 則 XYZ 為自身共軛三角形. ... .. 2427

- 
- 引一圓之割線  $XBA$ ,  $XCD$ , 命  $BC$ ,  $AD$  之交點爲  $Y$ ,  $AC$ ,  $BD$  之交點爲  $Z$ , 則  $YZ$  爲  $X$  之極直線,  $XY$  爲  $Z$  之極直線.  
 ... .. **2428**

## 幾何學上應知之 算學家年表

【生卒之年，均用公元，第一數目表生年，第二數目表卒年，加頁號者爲公元前，加？號者爲約數。】

- 【Ahmes】(ä'mes). -1700? 埃及之僧。所著算學書爲世界上之最古者。
- 【Anaxagoras】(an-aks-ag'č-ras). -499, -428. 希臘之哲學家兼算學家。
- 【Archimedes】(är-ki-mě'děz). -287, -212. 西西利人。古代之算學及物理學大家。
- 【Aryabhata】(är-yä-bhä'ta). 476 生。古印度之算學家。著有代數學及幾何學。
- 【Boscovich】(bos'ko-vich). Roger Joseph. 1711, 1787. 意大利之算學家，星學家，物理學家。
- 【Bramagupta】(bräh-ma-göp'ta). 598 生。印度之算學家。印度最古著作家之一。
- 【Carnot】(kär-no), Lazare Nicholas Marguerite. 1753. 1823. 法國之算學家及物理學家。
- 【Cavalieei】(kä-vä-lē-ě'rē), Bonaventura. 1598, 1647. 意大利之有名算學家。
- 【Ceulen】(ko'len), Ludolph van. 1540, 1610. 荷蘭之幾何學家。
- 【Ceva】(chä'vä), Giovanni. 1648, 1737?. 意大利之幾何學家。
- 【Dase】(dä'ze), Zaharias. 1824, 1861. 德國之有名計算家。
- 【De Morgan】(dēmôr'gan), Augustus. 1803, 1871. 英國之算學家及物理學家。
- 【Descartes】(dä-kärt'), Rene. 1596, 1650. 法國之有名算學，物理學，哲學家。始創解析幾何學。

- 【Euclid】(ū'klid). -300? 埃及之有名幾何學著作家。
- 【Euler】(oi'ler), Leonhard. 1707, 1783. 瑞士人。近世算學大家之一。
- 【Fermat】(fer-mä), Pierre de. 1601, 1665. 法國之著名算學家。
- 【Gauss】(gous), Karl Friedrich. 1777, 1855. 德國人。近世算學大家之一。
- 【Henrici】(hen-rē-tsɛ), Olaus. 1840 生。幾何學之近世著作家。曾居於倫敦。
- 【Hero】(hēr'ō) of Alexandria. 或【Heron】(hē'ron). -110? 希臘之有名測量及機械學家。
- 【Hippocrates】(hi-pok'ra-tez) of Chios -470 生。幾何學最初教科書之著者。
- 【Jones】(jonz), William, 1675, 1749. 英國之教員。
- 【Kepler】(kep'ler), Johann. 1571, 1630. 德國之算學及物理學家，而尤以星學著名。
- 【Leibnitz】(lib'nits), Gollfried Willhelm. 1646, 1716. 德之著名哲學家兼算學家。始創微積分學者之一人。
- 【Lexell】(lex'el), Anders Johann. 1740, 1784. 瑞典之算學家。
- 【L'Huilier】(l'wē-ē-ā'), Simon Antoine Jean, 1750, 1840. 瑞士之算學家。
- 【Lindemann】(lin'de-man), Ferdinand. 1852 生。德國之教授。
- 【Menelaus】(men-e-lā'us). -100? 希臘之算學及星學家。三角法最初著者之一。
- 【Möbius】(mē'bē-ōs), August Ferdinand. 1790, 1868. 德國之算學及星學家。近世幾何學之一名著者。
- 【Monge】(mônzh), Gaspard. 1746, 1818. 法國人。始創畫法幾何學。巴黎百工學校創辦人之一。
- 【Mnopedes】(ē-nop'i-dēz). -465. 希臘古幾何學家。
- 【Pascal】(päs-käl'), Blaise. 1623, 1662. 法國之有名算學、物理學、及哲學家。
- 【Plato】(plā'tō). -429?, -348? 希臘之有名哲學家及幾何學家。
- 【Poncelet】(pōns-lā'), Jean Victor. 1788, 1867. 法國

之幾何學，物理學家，及陸軍技師。

【Pothenot】(pū-te-ni'), Laurent. 1732 卒。法國之教授。

【Ptolemy】(to'le-mī), Claudius Ptolemæus. 87, 165. 希臘星學，地理學，幾何學大家之一。

【Pythagoras】(pi-thag'o-ras). -580?, -501? 意大利人。古代算學先驅者之一。

【Richter】(rich'ter). 1854. 德國之計算家。

【Shanks】(shanks), William. 1882 卒。英國之計算家。

【Sylvester】(silves'ter), James Joseph. 1814 生。近世算學大家之一。

【Thales (thā'lēz) -640, -548. 希臘七賢之一。由埃及傳入幾何學於希臘者。

【Torricelli】(tor-rē-chel'lē), Evangelistā. 1608, 1647. 意大利之算學及物理學家。

【Viviani】(vē-vē-ā'nē), Vincenzo. 1622, 1703. 意大利之算學家。

# 題 解 中 心 算 學 辭 典

冊 數 五 巨 冊 各附索引一小冊  
 版口大小 長 20 公分 闊 13 公分  
 裝訂式樣 布面精裝 背脊金字  
 印刷用紙 上等米色桃林紙

分 冊 名	定 價	出 書 期
幾何學辭典	四 元	已 出
代數學辭典	五元五角	24年6月底
三角法辭典	五 元	24年10月底
續幾何辭典	四 元	25年2月底
算術辭典	五元五角	25年6月底

## 題 解 中 心 幾 何 學 索 引

[附入辭典, 不另售]

編 譯 者 薛 德 炯  
 吳 載 耀  
 發 行 者 陳 邦 楨  
 印 刷 者 新 亞 書 店  
 總發行所 新 亞 書 店  
 上海四馬路中市

中 華 民 國 二 十 四 年 四 月 初 版



