大學叢書

方程式論

布仙特 班登著
徐仙椿譯

商務印書館

大學叢書委員會

委　員

大學叢書

方程式論

布沙特 班登著
幹仙椿譯

商務印書館發行

馬序

余夙愛武林山水.環湖名勝.遊覽殆遍.常於青峯碧澗間.獲識幹子仙椿.此君欣賞自然.別具興趣.數子身臨極巔上.叱咤縱橫.夷然自得.余初以爲運動健兒也.今夏此君攜其舊譯方程式論.託余介紹.余始奇之.爲之瀏覽一週.其書理論精深.內容豐富.與余在北洋大學習鑛學時所讀者迥異.至其措詞之工.譯筆之明.敍述之愼詳.結構之嚴密.尤非坊間淺薄浮飾之作所可擬.後將原本與譯本對閱.始知原書之艱深.絕非吾國學子所能洞曉.此君有鑑於此.乃爲之批卻導窾.鈎玄抉微.觸類引伸.旁徵博採.此後學者讀之.即無良師益友.亦得頭頭是道.興味盎然.恍如置身三竺六橋間.大有左顧右盼掉臂遊行之樂.余嘉此君譯述之勤.且信此書必有益於世也.乃爲之向書館介紹.俾早刊行.公諸同好.余因之有感焉.吾國自有譯書事業以來.金裝燦爛.蔚然成帙.炫耀於吾人之眼簾者夥矣.但理蘊淵深.不合普通程度之書.每致無人迻譯.今幹君以明暢之筆.發幽深之理.推陳出新.曲折入微.極文字之能事.以宣揚此海外之鴻祕.庶幾莘莘學子.得以升堂入室.一窺全豹.其在數學上之貢獻.豈曰小補之哉.幹君嘗言.今後將以其畢生精力.闡述近代名著.謀吾國數學上之基本建設.於此可知幹君之

抱負爲何如.其所以日馳騁乎崇山峻嶺之間.嘘氣成雲.揮汗如雨.歷盡艱辛而不已者.其目的蓋別有在矣.本書將於明春貢諸世.余雖未曾專攻數學.竊幸閱君之書.樂君有志竟成.而喜爲士林道也.於是乎序.

嵊縣馬寅初識於杭州

(二十二年十二月十日)

馮序

昔孔德常稱代數學之目的.惟在分析方程式.其言固不盡當.而方程式論之重要可見矣.近百年來.歐西疇人類多殫精竭慮.求解高次代數方程式.雖未大奏厥功.而近世代數之二大支羣論及不變論於焉發軔.遂使今日之代數學在數學上所佔地位.得與幾何學函數論諸大宗派相埒.則方程式論之重要.不尤可見歟.近百年來.西哲論方程式之書.無慮數十百種.然擇精語詳.要推班布二氏之所著作.余曩主講杭州優級師範學校.嘗迻譯爲漢文.印作講義.惜原稿散佚.未能公諸同好.今歲幹君仙椿又取是書譯之.披讀一過.見其頗能以明暢之筆.達幽深之旨.原書之艱澀難讀者.均疏通而證明之.其闕略不備者.又博採羣書而補苴之.其於是書之用力.可謂勤矣.幹君將以其譯本付剞劂.爰識數語.弁諸簡端.

杭州馮祖荀

胡　序

幹子仙椿嘗從余遊.尤好治數理之學.鈎微索隱.務窮其竅今春出其迻譯之方程式論.索序於余.余嘉其纂輯之勤.且信此書之必有裨於世也.即爲之循覽一過.其書能通曉 William Snow Burnside 與 Arthur William Panton 二氏之艱奥.博採 Bertrand, Salmon, Clebsch 諸氏之菁華.視他書之菲簿浮飾.耑資沽譽者.蓋有間矣.仙椿久欲付棗.亟請於余.余雖不文.然無以謝之.聊綴數語.弁諸簡端.是爲序.

慈谿胡濬濟

目　錄

8

方程式論

緒論

1. 定義 數或代表數之文字.以各種算術運算記號連結之.稱爲數學式.式中含有之文字,如能變化.則稱變數.否則稱常數.變數變化時,數學式全體亦隨之變化.此數學式稱爲變數之函數.本書所討論只限於一變數之函數.

代數函數之數學式.所有之運算記號,只限於加減乘除冪開方六種.有理代數函數,只限於加減乘除冪五種.以下簡稱爲有理函數.整代數函數,以其所含之變數不在一分數中分母之位置爲限.以下簡稱爲整函數.令 n 爲正整數. $a, b, c, \cdots\cdots k, l$ 爲常數. x 爲變數.則

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots\cdots + kx + l$$

爲變數 x 之有理整函數.式中之常數係數 $a, b, c, \cdots\cdots$ 不論爲分數或無理數,上式仍爲有理整函數.

變數 x 之函數.一般以 $F(x), f(x), \phi(x), \psi(x) \cdots\cdots$ 等類之記號表之.

表有理整函數之式,稱爲有理整式.或曰多項式.以等號連結二多項式所成之式,稱爲方程式.若變數 x 之一值能適合此方程式,則稱此值爲方程式之根.若欲將此方程式完全解

開.即謂須將其所有之根一一定出.

若將方程式中等號右端所有之項,一律移於左端.且依 x 之降冪排列之.則此方程式可書爲次之形狀.

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

因此方程式中 x 之最高方乘爲 n, 故稱之爲 n 次方程式.細檢此方程式中各項.其 x 之指數與其係數 a 下方所~~附數~~足碼字之和,常等於方程式之次數 n. 故知某項係數所附之數字,即能知其 x 之指數.

因方程式中各項,同以任一常數除之,此方程式之根不變.今以 a_0 除上式各項.則上之方程式可書爲次之形狀.

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0.$$

若 $p_1, p_2, \cdots\cdots p_n$, n 個係數皆不爲 0, 則稱此方程式爲完全方程式.否則稱爲不完全方程式.不含有 x 之項,稱爲方程式之絕對項,或常數項.若方程式各項之係數皆爲數字,則稱之爲數字方程式.若爲文字,則稱之爲代數方程式.

2. 數字方程式及代數方程式 在研究數學及物理學之問題中.其最後結果,常表現爲一方程式.且須定出此方程式之根.始能將原問題解決.根之重要旣若此.故治數學者咸從事於求任意次方程式之根所當遵守之法則.而方程論一學因之成立.即若方程式爲數字.則須求滿足此方程式之一數值或多數值.關於此節在數學上已有一大進步表現.至於發現數字方程式之根之精確值或近似值之法則.本書後當

特別說明.玆不贅.

至代數方程式則無此種等量進步.吾人已知二次代數方程式之根,能用其各項之係數表明,而成爲二次數字方程式中根之公式.即以後者各項之數字係數,代入公式內各相當文字係數中,即可將後者之根定出.至於代數三次方程式及四次方程式,雖能將其根之公式定出.然有時用於數字方程式,竟不能決定其根.以視二次方程式之公式.其用途又較狹隘矣.

至欲求五次或五次以上代數方程式之根.乃近世解析學上之問題.非如前述各種代數方程式,僅藉普通代數記號,便能以係數之項表根之價值也.

3. 多項式　由上述便知方程論之重要目的,在發見變數 x 能令多項式爲 0 之值.實行此計劃時,又當討論對於變數之每一值多項式所取之相應值.在次章便知變數 x 之值自 $-\infty$ 至 ∞ 連續變化時,多項式之相應值亦連續變化.此項研究,在多項式理論中甚佔重要.

解數字方程式,純用實驗方法.當檢查對於變數之某值多項式之相應值時.若此多項式爲 0. 則此變數之值卽此數字方程式之根.若此多項式不爲 0. 然吾人總能依此方法將根所在之位置定出.令此根在 a 與 b 二數之間.吾人又可依同一方法在 ab 二數間求出二數 a_1b_1. 使方程式之根在 a_1 與 b_1 之間.以下逐次如此.便可將根之近似值或其眞值定出.

第一章

多項式之普通性質

4. 討論對於變數之值之變化，多項式之相應值之變化時.須先討論對於變數之甚大及甚小值,多項式中何項關係較大.本節及以下諸節便爲此問題而設.

將多項式書之如次.

$$a_0x^n\left(1+\frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x}+\frac{a_2}{a_0}\frac{1}{x^2}+\frac{a_3}{a_0}\frac{1}{x^3}+\cdots\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{a_0}\frac{1}{x^n}\right),$$

自上式吾人便知當 x 之值與 ∞ 接近時,多項式之值與 a_0x^n 接近.次之定理能給吾人一數值.若將此數值或比此較大之數值代 x. 能令上式中 a_0x^n 一項比其餘各項之和大.

定理 於多項式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

之係數絕對值 $|a_1|\,|a_2|\cdots\cdots|a_n|$ 中,以 $|a_k|$ 爲最大時.若 x 之值等於或大於 $\frac{|a_k|}{a_0}+1$. 則第一項之值比其餘各項之和之絕對值大.

上式中第一項之係數 a_0 假定爲正.以下準此.

證 吾人之目的,在證明 x 之值等於或大於 $\frac{|a_k|}{a_0}+1$ 時,同時

$$a_0x^n>|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n|. \qquad (1)$$

今作不等式.

$$a_0x^n > |a_k|(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1). \tag{2}$$

因(2)式右端≧(1)式右端.故x之值若能滿足(2)式.則必能滿足(1)式.因(2)式右端括弧內爲一等比級數,其總和爲$\frac{x^n-1}{x-1}$.故(2)式得化之爲

$$1 > \frac{|a_k|}{a_0(x-1)}\frac{x^n-1}{x^n}. \tag{2'}$$

然x之值比1大.故x^n比x^n-1大.因之$\frac{x^n-1}{x^n}$當小於1.故

$$\frac{|a_k|}{a_0(x-1)} > \frac{|a_k|}{a_0(x-1)}\frac{x^n-1}{x^n}.$$

今作一不等式

$$1 \geqq \frac{|a_k|}{a_0(x-1)}. \tag{3}$$

故x之值若滿足(3)式.則x之值必滿足(2)式.因之能滿足(2)式.故終能滿足(1)式也.然自(3)式$x \geqq \frac{|a_k|}{a_0}+1$.故本定理能成立.

由本定理可知當x之值自$\frac{|a_k|}{a_0}+1$向∞處增長時,多項式$f(x)$常爲正.又若x之符號由正變負.則n爲偶數時,a_0x^n之符號爲正.n爲奇數時a_0x^n之符號爲負.此時x之值自$-\left(\frac{|a_k|}{a_0}+1\right)$向$-\infty$處減少.且若$n$爲偶數,則多項式$f(x)$之符號常爲正.若$n$爲奇數,則多項式$f(x)$之符號常爲負.此理可由次之補題明之.

補題　於多項式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

之諸係數絕對值 $|a_1|, |a_2|, \cdots\cdots |a_n|$ 中,以 $|a_k|$ 爲最大時.若 $|x|$ 之值大於或等於 $\frac{|a_k|}{a_0}+1$.則第一項之絕對值,比其餘各項之和之絕對值大.

證　吾人之目的在證明 $|x|$ 等於或大於 $\frac{|a_k|}{a_0}+1$ 時.同時有

$$|a_0x^n|>|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n|.$$

今作不等式

$$|a_0x^n|>|a_k|(|x|^{n-1}+|x|^{n-2}+\cdots\cdots+|x|+1),$$

以下與前之推論完全相同.結果即得 $|x|\geqq\frac{|a_k|}{a_0}+1$.

吾人觀於上定理之證明.即知由上法求得之值.能令多項式全體與第一項同符號.然吾人終可由他法求得另一值,比前值小,且與前值呈同一功用.蓋原多項式中各係數,本可爲正或負或 0. 又其絕對值亦可大可小.今上證明中除第一項外,其餘各項縱皆假定爲負.又其各項之絕對值縱皆假定爲 a_k.亦可得上述同一之結果.故上之法則殊不精密,益可斷言.

5. 前節表明 x 自極限值 $\frac{|a_k|}{a_0}+1$ 增長時,多項式內之主要項爲第一項.今探求 x 逐漸減少時多項式內最重要之項.並如前決定一極限值.若 x 自此極限值減少.則此項與多項式全體同符號.

定理　於多項式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n(a_n\neq 0)$$

之諸係數絕對值中,以 a_k 爲最大時.$(k\neq n)$ 若 $|x|$ 之值等於或

小於 $\dfrac{|a_n|}{|a_k|+|a_n|}$.則末項 a_n 之絕對值,比其餘各項之和之絕對值大.換言之,$|x|$ 自此極限減小時,多項式全體與末項同符號.卽對於 $|x|$ 之小值,末項爲主要項也.

證　令 $x=\dfrac{1}{y}$.則原多項式可化爲

$$a_0\left(\frac{1}{y}\right)^n+a_1\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}\frac{1}{y}+a_n$$

$$=\frac{1}{y^n}(a_0+a_1y+\cdots\cdots+a_{n-1}y^{n-1}+a_ny^n).$$

自第四節可知 $|y|$ 等於或大於 $\dfrac{|a_k|}{|a_n|}+1$ 時則有

$$|a_ny^n|>|a_{n-1}y^{n-1}+a_{n-2}y^{n-2}+\cdots\cdots+a_1y+a_0|.$$

令以 $|y^n|$ 除其兩端.因 $\dfrac{1}{y}=x$.是以

$$|a_n|>|a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots\cdots+a_1x^{n-1}+a_0x^n|.$$

故 $|y|$ 大於或等於 $\dfrac{|a_n|+|a_k|}{|a_n|}$.或 $|x|$ 小於或等於 $\dfrac{|a_n|}{|a_n|+|a_k|}$ 時.$|a_n|$ 比其餘各項之和之絕對值大.卽 $|x|$ 小於或等於 $\dfrac{|a_n|}{|a_n|+|a_k|}$ 時,末項爲主要項也.

由本定理可推出以下諸結果.

1. 吾人能求得 x 之值,使多項式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots a_{n-1}x$$

之絕對值,比任何微小正數 ϵ 尤小.

令 a_k 爲多項式內一係數,其絕對值最大.則當 $|x|$ 小於或等

於 $\frac{\epsilon}{|a_k|+\epsilon}$ 時,ϵ 之值比多項式之絕對值大.即多項式之絕對值比 ϵ 小.

2. 當 x 之絕對值極端減少時,多項式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x$$

之符號.與 $a_{n-1}x$ 之符號同.

因此多項式可書之如次.

$$x(a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1})$$

當 x 之絕對值極端減少時,括弧中多項式之符號,與 a_{n-1} 之符號同.因而多項式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x$$

之符號,與 $a_{n-1}x$ 之符號同.

6. 變數增減時多項式形式上之變化及導來函數 今討論以 $x+h$ 代 x 時,多項式 $f(x)$ 所取之形狀.若 h 爲正,則其結果爲 x 增加 h 時 $f(x)$ 之相當形狀.今以 $-h$ 代入上之結果內,又得 x 減少 h 時 $f(x)$ 之相當形狀.

當 x 變爲 $x+h$ 時.$f(x)$ 變爲 $f(x+h)$ 或變爲

$$a_0(x+h)^n+a_1(x+h)^{n-1}+a_2(x+h)^{n-2}+\cdots\cdots$$
$$+a_{n-2}(x+h)^2+a_{n-1}(x+h)+a_n.$$

若將上式各項依二項式定理展開,然後依 h 之升冪排列之.則 $f(x+h)$ 成爲

$$
\begin{aligned}
&a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n\\
&\quad+h\{na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\cdots\cdots\\
&\quad+2a_{n-2}x+a_{n-1}\}+\frac{h^2}{2!}\{n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}\\
&\quad+(n-2)(n-3)a_2x^{n-4}+\cdots\cdots+2a_{n-2}\}+\cdots\cdots\\
&\quad+\frac{h^n}{n!}[n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3,2,1]a_0.
\end{aligned}
$$

自上式可見 h 之係數,可由 $f(x)$ 式中導出. $\frac{h^2}{2!}$ 之係數,可由 h 之係數內導出. $\frac{h^3}{3!}$ 之係數,可自 $\frac{h^2}{2!}$ 之係數導出.餘準此.即 $f(x)$ 之各項,以其指數乘之.再將原指數減1.仍不變其符號.然後將所有新產生各項,仍依降冪排列之.如此卽得 h 項之係數.此係數爲一多項式.比原多項式 $f(x)$ 次數少一.稱爲 $f(x)$ 之一次導來函數,或導來式.以記號 $f'(x)$ 或 $f_1(x)$ 表之.是爲自 $f(x)$ 求 h 項係數之法則.若自 h 項之係數,求 $\frac{h^2}{2!}$ 項之係數,亦可適用上述法則.然自 $f(x)$ 適用上述法則二次,亦可將 $\frac{h^2}{2!}$ 項之係數求出.故此係數稱爲 $f(x)$ 之二次導來函數,或二次導來式.以記號 $f''(x)$ 或 $f_2(x)$ 記之.以下逐次如此,可得其餘各係數.此時上之結果可如次書之.

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\cdots\cdots+a_0h^n$$

以 x 與 h 互換 $f(x+h)$ 之值不變.故 $f(x+h)$ 又可書之爲

$$f(x+h)=f(h)+xf'(h)+\frac{x^2}{2!}f''(h)+\frac{x^3}{3!}f'''(h)+\cdots\cdots+a_0x^n.$$

若用第二種符號,上式又可寫爲

$$f(x+h)=f(x)+hf_1(x)+\frac{h^2}{2!}f_2(x)+\cdots\cdots+\frac{h^r}{r!}f_r(x)+\cdots\cdots+a_0h^n.$$

例題

以$x+h$代多項式$4x^3+6x^2-7x+4$中之x時,其結果爲何.

因 $f(x)=4x^3+6x^2-7x+4$ $f_1(x)=12x^2+12x-7$

$f_2(x)=24x+12$ $f_3(x)=24.$

是以 $f(x+h)=4x^3+6x^2-7x+4+h(12x^2+12x-7)+\frac{h^2}{2!}(24x+12)+\frac{h^3}{3!}\cdot 24.$

卽 $f(x+h)=4x^3+6x^2-7x+4+h(12x^2+12x-7)+6h^2(2x+1)+4h^3.$

7. 有理整函數之連續 今有x之有理整函數$f(x)$於此.若x自a逐漸增加至b.吾人將證$f(x)$同時自$f(a)$逐漸變化至$f(b)$、換言之,即x自a連續增加至b時.$f(x)$亦當自$f(a)$連續變化至$f(b)$.

證 令x自a增至$a+h$.則$f(x)$相應而生之變化$f(a+h)-f(a)$依第六節當如下式.式中$f'(a), f''(a), f'''(a),\cdots\cdots$等皆爲有限值.

$$hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f'''(a)+\cdots\cdots+a_0h^n$$

自第5節吾人能求得h之值,令上式之絕對值比任何微小正數ε_1尤小.即$f(a+h)-f(a)$之絕對值.比任何微小正數ε_1尤小.且h成0時,上式全體成0.$f(a+h)$與$f(a)$之差亦成0.實際不論x自a, b區域內何處開始變化,$f(x)$皆有此關係.

令前次所求h之值爲h_1.更令$a+h_1$等於x_1.則自x_1起可求得h_2一值,能令$f(x_1+h_2)-f(x_1)$之絕對值比任何微小正數ε_2

尤小.再令x_1+h_2等於x_2.如此又可求得h_3一值能令$f(x_2+h_3)-f(x_2)$之絕對值比任意微小正數ε_3尤小.如此逐次求之,終至一數x_{n-1}.且$f(b)-f(x_{n-1})$之絕對值比任何微小正數ε_n小.今依前後順序作級數

$$f(a)\ f(x)\ f(x_2)\cdots\cdots f(x_{n-1})\ f(b).$$

則級數中任意相鄰二項之差,其絕對值皆比任何微小正數ε小.即級數中任意相鄰二項,皆互相接近異常密切.亦即$f(x)$自$f(a)$依次變至$f(b)$時,皆依連續狀態始終如一.

注意　令$f(a)$比$f(b)$小.$f(x)$自$f(a)$達到$f(b)$時,其間經過之變化有數種.(1) $f(x)$自$f(a)$依增加狀態進至$f(b)$.(2) $f(x)$.最初由$f(a)$增加,俟達到某一極大值後,又漸漸減少,終至$f(b)$.(3) $f(x)$最初由$f(a)$減少,俟達到某一極小時,又漸漸增加,終至$f(b)$.(4) $f(x)$自$f(a)$經數回增減,始達到$f(b)$.故縱令$f(a)$比$f(b)$小.吾人只能云$f(x)$自$f(a)$連續變至$f(b)$.不能遽云$f(x)$自$f(a)$連續增至$f(b)$.但無論如何,$f(x)$至少總有一次經過自$f(a)$至$f(b)$間之一切值.又$f(x)$只能自$f(a)$連續變至$f(b)$.決不能自$f(a)$一躍而至$f(b)$明甚.

8. 以二項式除多項式所得之商及其剩餘　今多項式$f(x)$為

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

今以二項式$x-h$除之.令其剩餘為R.其商$Q(x)$為

$$b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1}.$$

則有次之關係式成立.

$$f(x)\equiv(x-h)Q(x)+R$$

此關係式之意義.爲以 $(x-h)$, $Q(x)$ 二者之積與 R 相加.其所得之結果,與 $f(x)$ 式中 x 同方乘之項及其常數項兩兩相等此種關係式,稱爲恆等式.恆等式與方程式不同.即方程式祇限於 x 爲其根時兩端始能相等.恆等式則不論 x 爲何值,其兩端均能相等.一般方程式兩端用記號 $(=)$ 連結.恆等式兩端則用記號 $(\equiv)$ 連結,以示區別.

今計算上式右端.則其結果爲

$$b_0x^n+(b_1-hb_0)x^{n-1}+(b_2-hb_1)x^{n-2}+(b_3-hb_2)x^{n-3}+\cdots\cdots$$
$$+(b_{n-1}-hb_{n-2})x+R-hb_{n-1}.$$

令兩端 x 同方乘之項及其常數項兩兩相等.則有下之關係式成立.

$$b_0=a_0,\qquad b_1=a_1+hb_0,\qquad b_2=a_2+hb_1,$$
$$b_3=a_3+hb_2,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_{n-1}=a_{n-1}+hb_{n-2},\qquad R=a_n+hb_{n-1}.$$

今將上式書爲次之形狀.則於計算 Q 之係數 $b_0, b_1, b_2, \cdots\cdots b_{n-1}$ 時非常敏捷.

$$\begin{array}{cccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & a_{n-1} & a_n \\
 & b_0h & b_1h & b_2h \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & b_{n-2}h & b_{n-1}h \\
\hline
 & b_1, & b_2, & b_3, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & b_{n-1}, & R.
\end{array}$$

今說明如次.

先將 $f(x)$ 之係數 $a_0, a_1, \cdots\cdots a_n$ 書於第一列.第二列之第一項為 b_0h 或 a_0h. 以 b_0 等於 a_0 故也.將 b_0h 加於 a_1, 即得第三列中第一項 b_1. 又將 b_1h 加於 a_2, 即得第三列內第二項 b_2. 再將 b_2h 加於 a_3, 即得 b_3. 以下逐次如此.便可將商式 $Q(x)$ 之係數 $b_0, b_1, \cdots\cdots b_{n-1}$ 及剩餘 R 完全求出.

例　題

(1) 求多項式 $3x^4-5x^3+10x^2+11x-61$ 與二項式 $x-3$ 之商及其剩餘.

依上法計算之如次.

3	−5	10	11	−61
	9	12	66	231
3	4	22	77	170

故其商為 $3x^3+4x^2+22x+77$. 其剩餘為 170.

(2) 求多項式 x^3+5x^2+3x+2 與 $x-1$ 之商及其剩餘.

答 $Q(x)=x^2+6x+9$　　$R=11$

(3) 求多項式 $x^5-4x^4+7x^3-11x-13$ 與 $x-5$ 之商及其剩餘.

注意: 若多項式中缺少某方乘之項.則書其係數時,須於其適當位置用 0 補充.在本例多項式之係數可如次書之.

1　　−4　　7　　0　　−11　　−13

答 $Q(x)=x^4+x^3+12x^2+60x+289$　　$R=1432$

(4) 求 $x^9+3x^7-15x^2+2$ 與 $x-2$ 之商及其剩餘.

答 $Q(x)=x^8+2x^7+7x^6+14x^5+28x^4+56x^3+112x^2+209x+418$　　$R=838$

(5) 求 $x^5+x^2-10x+113$ 與 $x+4$ 之商及其剩餘.

注意: $x+4$ 可視作 $x-(-4)$ 此時 h 之值爲 -4.

答 $Q(x)=x^4-4x^3+16x^2-63x+242$ $R=-855$

9. 作函數表法 有一多項式於此.令其變數 x 爲某值,而求此多項式之值.若用上法計算,則收效甚速.今說明於次.

因不論 x 爲何值,恆等式

$$f(x)\equiv Q(x)(x-h)+R$$

之兩端常相等.若 x 之值爲 h. 則 $f(x)$ 之值爲 R. 因此時 $x-h$ 之值成0. $Q(x)$ 之值又爲有限值故也.故用 h 代多項式 $f(x)$ 中之 x, 其所得結果.與以 $x-h$ 除 $f(x)$ 所得之剩餘 R 同.故可用上法計算之.

例如以 3 代多項式 $3x^4-5x^3+10x^2+11x-61$ 中之 x, 其所得之結果爲 170. 此與以 $x-3$ 除此多項式所得之剩餘同.(參攷8節例1)

又如以 -4 代多項式 $x^5+x^2-10x+113$ 中之 x, 其所得之結果爲 -855. 此仍與以 $x+4$ 除此多項式所得之剩餘同. (參攷8節例5)

在第 7 節已知 x 自 $-\infty$ 至 ∞ 連續增長時, $f(x)$ 之相應值同時亦當逐漸變化而成一連續級數.即此級數中相鄰二項之差可至任意小也.今用整數級數

$$\cdots\cdots-5\quad -4\quad -3\quad -2\quad -1\quad 0\quad 1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\cdots\cdots$$

代入多項式 $f(x)$ 中之 x 而計算 $f(x)$ 之相應值. 且作一函數表記其結果.

例　題

(1) 由下列 x 之值於三項式 $2x^2+x-6$ 之函數表.

$-4,\quad -3,\quad -2,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,$

x 之值	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$之值	22	9	0	-5	-6	-3	4	15	30

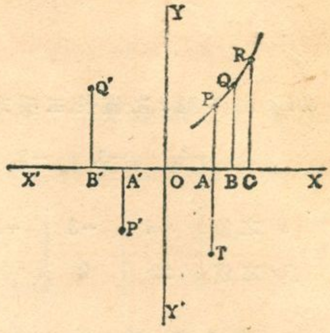
(2) 由上列 x 之值作多項式 $10x^3-17x^2+x+6$ 之函數表.

x 之值	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$之值	-910	-420	-144	-22	6	0	20	126	378

10. 多項式之圖表法 有數字係數之多項式 $f(x)$ 於此.其對於 x 所取之值, $f(x)$ 自有一有限值與之相應.且對於 x 值之變化, $f(x)$ 亦有適當之變化與之相應.今將 x 之每一值及 $f(x)$ 之相應值用作圖法表之.則其所得之結果,可使 $f(x)$ 之變化狀態,頓呈於吾人之眼前.今詳述如次.

取 $X'OX$, $Y'OY$ 二正交直線.在 OX 上取一段直線作爲長之單位.則無論正或負之數,皆可在 X 軸上以一段直線表之.且自 0 至 ∞ 間之一切值,定於 OX 方向上.自 0 至 $-\infty$ 間之一切值,定於 OX' 方向上.令 OA 代表 m 之值.且將 $f(m)$ 之值求出.又自 A 作 Y 軸之平行線 AP, 其長爲 $f(m)$.(AP 與 OA 同單位)由是在 XY 平面上得 P 點.若 $f(m)$ 爲正, 則將 P 點置於 X 軸上方.若 $f(m)$ 爲負,則將 P 點置於 X 軸下方.故視 P 點之位置,可定 $f(m)$ 之正負.對於 m 種種不同之值 OA, OB, OC,……等,先

計算其 $f(m)$ 之值．且如上法在 XY 平面上作出其相應點．如此可得一羣之點 $P, Q, R,$……等．若 m 能將 $-\infty$ 至 ∞ 間一切之值取盡．則此一羣之點便互相連續而成一曲線．自此曲線上若干個點至 X 軸作垂線．此等垂線之長，即代表 $f(x)$ 之若干個值．



第一圖

上法又可稱爲函數 $f(x)$ 之追跡．學者若曾習解析幾何，便知此法與一平面曲線 $y=f(x)$ 之追跡法相同也．

應用此法時，先作絕對值較小各整數之相應點．次將各點用曲線連結．便可藉此略知函數之性質及其變化狀態．若欲精密表示．則須增加相應點數目．使點與點之位置異常接近．

例題

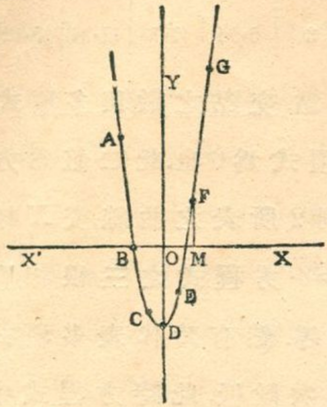
(1) 追跡三項式 $2x^2+x-6$.

此處所取之單位長爲第二圖上 OD 直線六分之一．

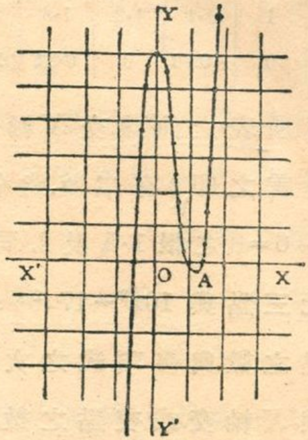
對於 -4 及 4 間一切整數值，吾人已知此三項式之相應各值．（參攷9節例1）由此等值，可決定曲線上九點之位置．其七點爲 A, B, C, D, E, F, G．如圖上所示．此外尙有二點．因其與 X 軸之距離甚大，超出本圖範圍外．故略之．

(2) 追跡多項式 $10x^3-17x^2+x+6$.

對於 -4 及 4 間一切整數值，吾人已知此三次式之相應各值．（參攷9節



第二圖



第三圖

例 2)

依第4節, x 之值比 2·7 大時,三次式之值常爲正. x 之值小於 $-2·7$ 時,三次式之值常爲負. 由是代表此三次式之曲線,若與 X 軸相交於一處或數處. 則此等交點之 x,其值必在 $-2·7$ 及 2·7 中間. 是故吾人之目的,若第在求三次式之根,或求三次式爲0時 x 所當有之值. 第在 $-2·7$ 及 2·7 二者間討論之已足.

如上所述,當追跡曲線時,若第就整數計算. 不能得精密結果. 今在(−10)(0,1)(1,2)內插入一組之值. 依小大順序排列之. 使其相隣二值之差爲 0·1. 然後以此各值一一代替 x 而定 $f(x)$ 之相應值. 今將其結果表之如次.

x 之值	−1	−0·9	−0·8	−0·7	−0·6	−0·5	−0·4	−0·3	−0·2	−0·1
$f(x)$ 之值	−22	−15·96	−10·8	−6·46	−2·88	0	2·24	3·9	5·04	5·72

x 之值	0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9
$f(x)$ 之值	6	5·94	5·6	5·04	4·32	3·5	2·64	1·8	1·04	0·42

x 之值	1	1·1	1·2	1·3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	2
$f(x)$之值	0	−0.16	0	0·54	1·52	3	5·04	7·7	11·04	15·12	20

例 1 所表之曲線,交 X 軸於二點.交點之數,與多項式之次數同.換言之,即 x 有二值,能令多項式爲0也.此二值爲方程式 $2x^2+x-6=0$ 之根 1·5 及 2. 同樣例 2 所表之曲線,交 X 軸於三點.而此三點與 $10x^3-17x^2+x+6=0$ 方程式之三根相應.在此例交點之數與多項式之次數亦等.然有時代表多項式之曲線,不與 X 軸交.或交點之數,比其次數低.此時方程式中與之相應之根,當爲虛根,而非實根.例如多項式 $2x^2+x+2$. 因此多項式比例 1 之多項式多一常數 8. 故計算此多項式之值,實際可由例 1 之相應值,與 8 相加而得.故其曲線,可由例 1 之曲線,平行 y 軸,向上移動至 8 單位之距離而得.因之此曲線當在 X 軸上方.即不與 X 軸相交.又解方程式 $2x^2+x+2=0$ 時,其二根爲虛根.即能令多項式爲 0 之 x, 其所有之二值當爲虛數.曲線與 x 軸相交,若交點之數比所代表多項式之次數少.則稱此曲線交 X 軸於虛點.

11. 多項式之極大值極小值 參觀第6節及第5節可知 $f'(a)$ 之符號,可以定 $f(x)$ 之增減.因 h 小至適度時,$f(a+h)-f(a)$ 之符號,與 $f'(a)h$ 之符號同.若 $f'(a)$ 爲正.則 h 爲正時, $f(a+h)-f(a)$ 亦爲正. h 爲負時, $f(a+h)-f(a)$ 亦爲負.即 x 由 a 增加時, $f(x)$ 亦自 $f(a)$ 增加. x 自 a 減少時, $f(x)$ 亦自 $f(a)$ 減少.若 $f'(a)$ 爲負.則其結果適得其反.卽 x 自 a 增加, $f(x)$ 反自 $f(a)$ 減少.

x 自 a 減少, $f(x)$ 反自 $f(a)$ 增加. 亦即在第一場合, $f(x)$ 呈增加狀態. 在第二場合, $f(x)$ 呈減少狀態.

x 自 $-\infty$ 變至 ∞ 時, $f(x)$ 之變化狀態可有種種. 已詳7節. 假定 x 成 x_0 時, $f(x)$ 由減少狀態變爲增加狀態. 即 x 將達到 x_0 之先, $f(x)$ 呈減少狀態. 既達到 x_0 之後, $f(x)$ 呈增加狀態. 則 $f(x)$ 在 x 成 x_0 時有極小之值. 於是稱 $f(x)$ 在 x 成 x_0 時成極小. 又令 x 成 x_0 時 $f(x)$ 由增加狀態變爲減少狀態. 即 x 將達 x_0 以前 $f(x)$ 呈增加狀態. 既達 x_0 之後, $f(x)$ 呈減少狀態. 則 $f(x)$ 在 x 成 x_0 時有極大之值. 於是稱 $f(x)$ 在 x 成 x_0 時成極大. 再精密言之. x 由 x_0 增減極微小之值 h, 而 $f(x)$ 常小於 $f(x_0)$ 時. 稱 $f(x)$ 在 x 爲 x_0 時成極大. 若 $f(x)$ 常大於 $f(x_0)$. 稱 $f(x)$ 在 x 爲 x_0 時成極小. 故此間所稱極大極小第就 x_0 點近旁而言.

多項式中極大極小值之數目. 與其次數有關係. 圖表法能將此種狀態描寫盡致. 自不待言.

令 P 爲曲線上一點. 在此點之相應值成極大或極小. 卽自 P 點至 X 軸之距離, 比附近各點之距離大或小. 則對於 X 軸 P 點必在曲線上彎曲位置. 故知多項式 $f(x)$ 之極大極小值. 則可藉此追跡此多項式所代表之曲線.

若 x 爲 x_0 時 $f(x)$ 有極大或極小值. 則 x_0 一般當爲導來方程式 $f'(x)=0$ 之根. 此理當於後章闡明之.

若多項式 $f(x)$ 自第一極大值至第二極大值. 即 $f(x)$ 由減少狀態變爲增加狀態. 則其間必經過一極小值. 又若 $f(x)$ 自

第一極小值至第二極小值．即 $f(x)$ 由增加狀態變爲減少狀態．則其間必經過一極大值．是以多項式之極大極小值常互相間隔．

第二章

方程式之普通性質

12. 欲求方程式 $f(x)=0$ 之根或其近似值.亦可藉追跡法而得.因將多項式 $f(x)$ 用曲線表之時.若此曲線與 X 軸相交.則自原點至此等交點之距離.即方程式 $f(x)=0$ 之根或其近似值.然第籍追跡法發見方程式之各根.其困難已可想見.故用之者絕少.由以下各定理屢可確定方程式中根之位置.今述於次.

定理 有方程式 $f(x)=0$ 於此.今以 a 與 b 代 x 而計算 $f(x)$ 之值.若其結果符號相反.則在 a 及 b 間方程式 $f(x)=0$ 至少有一實根.

證 $f(x)$ 自 $f(a)$ 連續變至 $f(b)$. 當 x 由 a 變至 b 時. $f(x)$ 經過 $f(a)$ 及 $f(b)$ 間一切之值至少有一次. 因 $f(a)$ 與 $f(b)$ 反符號.故在 a 及 b 間 x 至少當有一值能令多項式 $f(x)$ 成 0. 卽方程式 $f(x)=0$ 在 a 與 b 間至少有一實根.

今在 $x=a$ 及 $x=b$ 間,作出多項式 $f(x)$ 之曲線弧. 因 $f(a)$ 與 $f(b)$ 異號. 故此相應二點一在 X 軸上方,一在下方. 又因 $f(x)$ 爲連續函數.則其曲線上之點亦互相連續. 因此曲線至少當

與 X 軸交於一點.即在 a 及 b 間至少有一值能令多項式 $f(x)$ 成 0. 亦即方程式 $f(x)=0$, 在 a 及 b 間至少有一根.

因此曲線亦可交 X 軸於數點.故在 a 及 b 間方程式之根亦可有數個.例如10節例 2,x 爲 -2 時, $f(x)$ 爲 -144. x 爲 2 時, $f(x)$ 爲 20. 在此相應二點間之曲線與 X 軸交於三點.方程式 $f(x)=0$ 在 -2 及 2 間亦有三個實根相應.

系 對於 x 之一切實數值, $f(x)$ 若不爲 0. 則對於 x 之一切實數值, $f(x)$ 常爲正.

因 x 爲 ∞ 時, $f(x)$ 爲正.故對於 x 之一切實數值 $f(x)$ 不能爲負.否則依本定理 $f(x)$ 對於某一實數值爲 0. 是與假設不合.故對於 x 之一切實數值 $f(x)$ 常爲正.今自圖表法着想,便知若方程式 $f(x)=0$ 無一實根.則多項式 $f(x)$ 之曲線完全在 X 軸上方.

13. 定理 奇次方程式至少有一實根,與常數項符號相反.

證 以 $-\infty, 0, \infty$ 依次代 x 而計算 $f(x)$ 之符號.則

x 之值	$-\infty$	0	∞
$f(x)$ 之符號	$-$	a_n	$+$.

若 a_n 爲負.則在 0 及 ∞ 間至少有方程式之一正實根.若 a_n 爲正,則在 0 及 $-\infty$ 間至少有方程式之一負實根.故本定理能成立.

14. 定理 常數項爲負之偶次方程式,至少有一正實根

及一負實根.

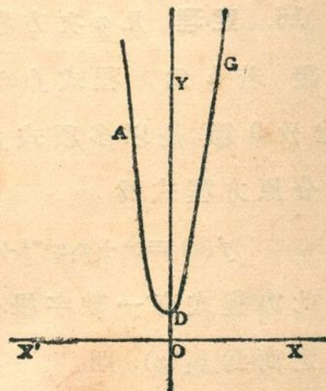
證　以 $-\infty, 0, \infty$ 代 x 而計算 $f(x)$ 之符號.則

x之值	$-\infty$	0	∞
$f(x)$之符號	$+$	$-$	$+.$

故在 $-\infty$ 及 0 間 $f(x)=0$ 方程式至少有一負實根.在 0 及 ∞ 間 $f(x)=0$ 方程式至少有一正實根.故本定理能成立.

15. 普通方程式之根　虛根

除常數項爲正之偶次方程式外.其餘各種方程式皆有實根存在.已詳於14及13兩節中.前之方程式,可不含有實根.即吾人不能覓一實數值代 x 令多項式 $f(x)$ 成 0.然則吾人能否另覓一虛數或複虛數代 x 令 $f(x)$ 成爲 0.如第4圖代表多項式 $2x^2+x+2$ 之曲線完全在 x 軸上方.故方程式



第　四　圖

$2x^2+x+2=0$ 無實根可言.然若將方程式解開則有二虛根.

$$-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{15}\sqrt{-1} \qquad -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{15}\sqrt{-1}.$$

故在此場合,方程式 $f(x)=0$ 雖缺乏實根.然有二虛根能令多項式 $f(x)$ 成 0.然此第就二次方程式言之.一般若 α 及 β 皆假定爲有限實數.則

凡有理整方程式皆含有 $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ 形狀之根.

上式可包括一切之數.即 β 成 0 時上式代表 α 一實數. α 成 0 時上式代表 $\beta\sqrt{-1}$ 一虛數.若 α 及 β 俱不爲 0.則上式代表一複數.複數何以得名.以此數同時含實數 α 及虛數 $\beta\sqrt{-1}$ 故也.上之理論又可如次說明之.

數字方程式有一數字根.而此數字根可爲實數虛數或複數.

證法詳後,今姑置之.

16. 定理 凡 n 次方程式,皆有 n 個根.且不能超過 n 個.

證 若 h 爲方程式 $f(x)=0$ 之根.則 $f(h)=0$. 即剩餘 R 成 0. (參攷 9 節) 是以多項式 $f(x)$ 可用 $x-h$ 除盡.

令原方程式爲

$$f(x)\equiv x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0.$$

則此方程式有一數字根.令爲 α_1. 又令以 $x-\alpha_1$ 除多項式所得之商爲 $\phi_1(x)$. 則

$$f(x)\equiv(x-\alpha_1)\phi_1(x)\text{.}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

又 $\phi_1(x)=0$ 爲 x 之 $n-1$ 次方程式.令此方程式之數字根爲 α_2. 又令以 $x-\alpha_2$ 除 $\phi_1(x)$ 所得之商爲 $\phi_2(x)$. 則

$$\phi_1(x)\equiv(x-\alpha_2)\phi_2(x).$$

以 $\phi_1(x)$ 之值代入 (A) 式中,又得

$$f(x)\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\phi_2(x).$$

而此 $\phi_2(x)=0$ 爲 x 之 $n-2$ 次方程式.又可有一數字根 α_3. 依此類推,即可證明 $f(x)$ 爲 n 個一次因子及一常數因子 ϕ_n 之

積.即

$$f(x)\equiv(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_{n-1})(x-a_n)\phi_n.$$

比較恆等式兩端 x^n 項之係數.便知 ϕ_n 為 1. 是以

$$f(x)\equiv(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_{n-1})(x-a_n).\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

將此 n 個值 $a_1,a_2,\cdots\cdots a_n$ 中任一值代 x, 能令 (B) 式右端為 0. 即能令 $f(x)$ 為 0. 即方程式 $f(x)=0$ 有 n 個根 $a_1,a_2,\cdots\cdots a_n$. 此外便無他一根.假定此外尚有他一根 β. 且以 β 代 x. 然其結果不能使 (B) 式右端任一因子為 0. 故不能使 $f(x)$ 成 0. 故 β 非方程式 $f(x)=0$ 之根.

系　有二 n 次多項式於此.若此二多項式非完全一致.則能令此二多項式相等之值至多只有 n 個.

先令二多項式之差為 0. 則得一 n 次方程式.若此方程式中 x 各乘冪之項之係數不俱為 0. 吾人至多只能求出 x 之 n 個值能滿足此方程式.即此二多項式若非全體一致.吾人至多只能求得 n 個值能令此二多項式相等.

本節之定理,雖於解方程式 $f(x)=0$ 時無甚效用.然若知方程式之根而求其方程式.則可應用此定理.令此方程式之根為 $a_1,a_2,\cdots\cdots a_n$. 則令

$$x-a_1\quad x-a_2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots x-a_n$$

之連乘積等於 0. 即得此方程式.又若已知方程式中 r 個根而求以其餘 $n-r$ 個根為根之方程式.亦可應用本定理.即以 r 個一次因子之連乘積除原多項式.令其所得之商等於 0.

即得所求之方程式.

例題

(1) 試作一方程式,其根爲 $-3,\ -1,\ 4,\ 5.$

答 $x^4-5x^3-13x^2+53x+60=0$

(2) 方程式 $x^4-6x^3+8x^2-17x+10=0$ 之一根爲 5. 試作含其餘各根之方程式.(用 8 節之除法)

答 $x^3-x^2+3x-2=0$

(3) 方程式 $x^4-16x^3+86x^2-176x+105=0$ 有二根爲 1 與 7. 試解此方程式.

答 其餘二根爲 3 與 5.

(4) 試作一方程式, 其根爲 $-\frac{3}{2},\ 3,\ \frac{1}{7}.$

答 $14x^3-23x^2-60x+9=0$

(5) 解三次方程式 $x^3-1=0.$

$x=1$ 能滿足此方程式. 故其一根爲 1. 今以 $x-1$ 除方程式左端. 令其商爲 0. 解之, 卽得其餘二根爲 $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1}$ $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1}.$

(6) 試作一方程式,其根之形狀爲 $\sqrt{p}+\sqrt{q}.$

因 $\sqrt{p}$ 包括 $+\sqrt{p}$ 及 $-\sqrt{p}$. $\sqrt{q}$ 亦然.故 $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ 可代表下列四種形狀.

$$\sqrt{p}+\sqrt{q} \qquad -\sqrt{p}-\sqrt{q} \qquad \sqrt{p}-\sqrt{q} \qquad -\sqrt{p}+\sqrt{q}$$

故其方程式爲

$$\{x-(\sqrt{p}+\sqrt{q})\}\{x+(\sqrt{p}+\sqrt{q})\}\{x-(\sqrt{p}-\sqrt{q})\}\{x+(\sqrt{p}-\sqrt{q})\}=0.$$

卽 $$(x^2-p-q-2\sqrt{pq})(x^2-p-q+2\sqrt{pq})=0.$$

亦卽 $$x^4-2(p+q)x^2+(p-q)^2=0.$$

17. 等根 多項式 $f(x)$ 之 n 個因子中.亦可有相同因子.此時方程式 $f(x)=0$ 仍有 n 個根.但其中有二個以上之根全

相等.若有二個之根相等.則稱此根爲二重根.若有三個稱爲三重根.以下四重根五重根俱準此.一般稱爲複根.

在第10節第3圖即知方程式 $10x^3-17x^2+x+6=0$ 中有二正根相距甚近.若加一適當數值於常數項.或將代表此多項式之曲線平行 y 軸向上移動至一適當距離.便可得一新方程式含有一對等根.此時 X 軸不復與曲線在兩點相交.但與之切於一點.此切點本可視作曲線移動時 X 軸上二交點逐漸接近終至相合而成之二重點.故一直線與一曲線相切時.不曰直線與曲線交於一點.而曰二者在二重點處相遇.學者若曾習平面曲線.則凡三重點四重點等均可同樣解釋之.

今有一多項式於此.若此多項式含有二以上之實根.則依適當變化,必能變第一多項式爲第二多項式.使前式中相鄰二實根,在後式內成爲二等根.若再將此第二多項式適當變化之.又能得一第三多項式.使第一多項式內二實根至此成爲二虛根.故等根介乎實根及虛根之間.若依圖表法又可如次解釋.有一曲線於此.其在 X 軸上含有二以上之交點.今移動此曲線.必可至一適當位置.使前之相鄰二交點,至此合併爲一切點.若再繼續移動.終可化此二交點爲烏有.亦可謂前之二實交點,至此成爲二虛交點.是以多項式變化時.若有一實根消滅.則必有第二實根隨之而滅.此時代二實根而生者爲一對虛根.故方程式中虛根之數目常爲偶數.次節更將此理闡明之.

18. 係數爲實數之方程式 $f(x)=0$ 若有 $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ 之根. 必同時有 $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ 之根.

證 先作恆等式 $(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})\equiv(x-\alpha)^2+\beta^2$. 今以恆等式右端之式除多項式 $f(x)$. 令其商爲 $Q(x)$. 餘數爲 $Rx+R'$. 則 $f(x)\equiv\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}Q(x)+Rx+R'$.

今以 $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ 代 x. 依假設,此值能令 $f(x)$ 成 0. 又能令 $(x-\alpha)^2+\beta^2$ 成 0. 結果 $R(\alpha+\beta\sqrt{-1})+R'=0$.

因實數同虛數不能互消.故又得 $R\alpha+R'=0$ $R\beta=0$.

自第 2 式則 R 當爲 0. 代入 1 式則 R' 當爲 0. 故剩餘 $Rx+R'$ 爲 0. 卽 $(x-\alpha)^2+\beta^2$ 能整除此多項式. 故多項式 $f(x)$ 含有 $x-\alpha+\beta\sqrt{-1}$ 一因子. 卽方程式 $f(x)=0$ 含有 $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ 一根. 是以係數爲實數之方程式.其中所含虛根數目,常爲偶數.

具有 $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ 及 $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ 形狀之一對虛根.稱爲共軛虛根.因此一對虛根所組成一對一次因子之積 $(x-\alpha)^2+\beta^2$ 爲一二次實因子.故凡多項式皆可視爲由每對虛根組成之二次實因子,及每個實根組成之一次實因子之連乘積.將多項式 $f(x)$ 實行分解爲此等因子時.卽可將方程式 $f(x)=0$ 完全解開.

上節已知等根介乎實根與虛根之間.今自他方面說明之.假定多項式有一二次因子 $(x-\alpha)^2+k$. 又令 k 之值變化.則當 k 爲負時,此多項式有二個不同之實根. k 爲 0 時,有一對等根 α. k 爲正時,有一對共軛虛根.

同樣又可證明係數爲有理數之方程式,若有 $\alpha+\sqrt{\beta}$ 之無理根.同時必有 $\alpha-\sqrt{\beta}$ 之無理根.

例　　題

(1) 求作一三次方程式,含有 1, $3+2\sqrt{-1}$ 之根.

$3-2\sqrt{-1}$

答 $x^3-7x^2+19x-13=0$

(2) 求作一方程式,含有 $1+5\sqrt{-1}$ $5-\sqrt{-1}$ 之二根.

$1-5\sqrt{-1}$　$5+\sqrt{-1}$

答 $x^4-12x^3+72x^2-312x+676=0$

(3) 已知方程式 $x^4+2x^3-5x^2+6x+2=0$ 有 $-2+\sqrt{3}$ 之根.試解此方程式.

$-2-\sqrt{3}$

答 方程式之根爲 $-2\pm\sqrt{3}$ $1\pm\sqrt{-1}$.

(4) 方程式 $3x^3-4x^2+x+88=0$ 之一根已知爲 $2+\sqrt{-7}$.試解此方程式.

$2-\sqrt{-7}$

答 方程式之根爲 $2\pm\sqrt{-7}$ $-\frac{8}{3}$.

19. Descartes 之符號規則 正根 此規則能令吾人第就方程式形式上觀察,即可推知方程式正根數目之最大根.今宣告如下.

在方程式 $f(x)=0$ 中正根之數目不能超過多項式 $f(x)$ 中各項之符號變化數.

證 今假定多項式中各項之符號,其先後次序爲

$$+\ +\ -\ +\ -\ -\ -\ +\ +\ -\ +\ -.$$

在上式中自 + 變 − 及自 − 變 + 之符號變化數共有 7. 今以二項式 $x-\alpha$ 乘之.則其積之符號變化數至少當比原式之符號變化數多 1. 今說明於次

將運算時所得各項之符號,依次書之於下.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
+ & + & - & + & - & - & - & + & + & - & + & - & \\
 & - & - & + & - & + & + & + & - & - & + & - & + \\
\hline
+ & \pm & - & + & - & \mp & \mp & + & \pm & - & + & - & +
\end{array}$$

第三列中雙關符號之項.由符號相反之二同次項相加所得之結果.由上可見在原多項式中與前項同符號之項.試在第三列中覓其相當項.其前必冠有雙關符號.今縱除去此等雙關符號不計.積之符號變化數,仍不小於原式之符號變化數.且在末端常增一符號變化數.

在前多項式中,其最後二項之符號相反.其末項爲 (−),其前項爲(+).今假定末端爲(+).亦可得相同之結果.因此時積之最後第二項前冠有雙關符號.至其前後兩項,一冠(+)號,一冠 (−) 號.今取雙關符號中 (+) 號.則對於後項有一符號變化數.若取 (−) 號.則對於前項有一符號變化數.前後合計至少仍比原式多一符號變化數.

總之無論如何.二項式 $x-\alpha$ 與多項式 $f(x)$ 之積之符號變化數,至少當比原式 $f(x)$ 之符號變化數多 1.今有一多項式於此.假定由虛根及負實根之相當因子而成.若以與正根 $\alpha, \beta, \gamma \cdots\cdots$ 等相當之因子 $x-\alpha,\ x-\beta,\ x-\gamma, \cdots\cdots$ 等乘之.則對於一個二項因子至少當增一符號變化數.故其積之符號變化數,至少當等於 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$ 等正根之個數.即積之正根之個數,至多等於其符號變化數.若令此積爲 $\phi(x)$.則方程式 $\phi(x)=0$

正根數目之最大限,即多項式 $\phi(x)$ 之符號變化數.是爲 Descartes 之符號規則.

20. Descartes 之符號規則 負根 欲應用上之規則求方程式中負根數目之最大限.須先將次之理論證明之.

以 $-x$ 代方程式 $f(x)=0$ 中之 x. 則新方程式 $f(-x)=0$ 之根.與原方程式中根之絕對值相等,符號相反.

證 自 16 節之恆等式.

$$f(x)\equiv(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots\cdots\cdots\cdots(x-a_n).$$

今以 $-x$ 代 x. 則其結果爲

$$f(-x)\equiv(-1)^n(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\cdots\cdots\cdots\cdots(x+a_n).$$

故方程式 $f(-x)=0$ 之根爲 $-a_1,\ -a_2,\ -a_3,\cdots\cdots\cdots\cdots-a_n.$

故方程式 $f(x)=0$ 中負根之個數.與 $f(-x)=0$ 方程式中正根之個數同.故方程式 $f(x)=0$ 中負根數目之最大限.爲多項式 $f(-x)$ 中所有之符號變化數.

21. 用 Descartes 規則證明虛根之存在 令方程式 $f(x)=0$ 之次數爲 n. 其正根數目之最大限爲 p. 負根數目之最大限爲 q. 若 p 與 q 之和小於 n. 則方程式中虛根數目之最小限爲 $n-(p+q)$. 例如方程式 $m \geq n-(p+q)$

$$x^8+10x^3+x-4=0.$$

此方程式之符號變化數爲 1. 故其正根之數目至多爲 1. 今以 $-x$ 代 x. 則

$$x^8-10x^3-x-4=0.$$

其符號變化數爲 1. 故其負根數目之最大限亦爲 1. 故此方程式之實根數目至多爲 2. 而此方程式共有 8 個根.故其中虛根之數目至少爲 6. 依14節之定理,則此方程式有 2 實根, 6 虛根,明甚.

因在完全方程式中,其 p 與 q 二者之和,常與原方程式之次數等.甚且超過之.故用符號規則求虛根數目之最小限.以在不完全方程式時爲宜.

22. 定理 設 a 及 b 爲相異二實數.以之代多項式 $f(x)$ 中之 x. 若 $f(a)$ 與 $f(b)$ 異號.則方程式 $f(x)=0$ 在 a 及 b 間有奇數個實根.若爲同號.則有偶數個實根,或全無實根.

證 令 a 及 b 間方程式 $f(x)=0$ 之一切實根爲 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_m$. 且除此 m 個實根外便無其他之實根.再令 $f(x)$ 與 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_m)$ 之商爲 $\phi(x)$.

則 $f(x)\equiv(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_m)\phi(x)$.

以 a 及 b 代上式中之 x. 又有

$$f(a)=(a-a_1)(a-a_2)\cdots\cdots\cdots\cdots(a-a_m)\phi(a),$$

$$f(b)=(b-a_1)(b-a_2)\cdots\cdots\cdots\cdots(b-a_m)\phi(b).$$

此時 $\phi(a)$ 與 $\phi(b)$ 同符號.否則由12節定理方程式 $\phi(x)=0$, 在 a 及 b 間至少有一實根.與假設不合.故 $\phi(a)$ 與 $\phi(b)$ 同號.

令 a 小於 b. 若 $f(a)$ 與 $f(b)$ 同號.則

$$(a-a_1)(a-a_2)\cdots\cdots(a-a_m),\quad (b-a_1)(b-a_2)\cdots\cdots(b-a_m),$$

二者同號.因 a 比 b 小.故第二連乘積中各因子爲正.其全體

亦爲正.因之第一連乘積亦爲正.然第一連乘積中各因子皆爲負,故其因子當有偶數個.若 $f(a)$ 與 $f(b)$ 異號.則第一連乘積爲負,故其因子當有奇數個.

於此當注意者,在本定理中 r 重根當作 r 個單根計算.

若用圖表法,則可如次解釋.連結二點作任何連續曲線.若此二點在 X 軸異側.則此曲線在 X 軸上當有奇數個交點.若此二點在 X 軸同側.則此曲線在 X 軸上當有偶數個交點,或竟無之.

例　題

(1) 若方程式中各項皆爲正.則此方程式無正根.

(2) 若完全方程式中各項正負互見,則此方程式無負根.

(3) 若方程式 $f(x)=0$ 中最初若干項皆爲正,以下皆爲負時.則此方程式只有一正根.

因多項式 $f(x)$ 有一符號變化數.故方程式 $f(x)=0$ 中正根數目至多爲1.但以 0 代 x, 則 $f(x)$ 多項式爲負.以 ∞ 代 x, 則多項式 $f(x)$ 又爲正.故在 0 至 ∞ 間方程式 $f(x)=0$ 至少有一正根.故方程式 $f(x)=0$ 只能有一正根.

(4) 方程式中各項皆正,且爲偶數冪時,則此方程式無實根.(參攷19及20節)

(5) 方程式中各項皆正,且爲奇數冪時,則此方程式除 $x=0$ 一實根外,便無其他實根.

(6) 若 $f(x)=0$ 爲完全方程式,則 $f(x)$ 式中連續符號之數目,與 $f(-x)$ 中變化符號之數目同.

如 $f(x)=x^6+3x^5-8x^4-4x^3+3x^2+2x-2$, 其連續符號之數目爲3.

則 $f(-x)=x^6-3x^5-8x^4+4x^3+3x^2-2x-2$, 其變化符號之數目爲3.

(7) 若 $f(x)=0$ 爲完全方程式,其所含之根又皆爲實根.則其正根數目與變化符號之數目等.負根數目與連續符號之數目等.

例如方程式 $10x^3-17x^2+x+6=0$ 有一連續符號二變化符號,故有兩個正根一個負根.(參攷10節例2)

(8) 若方程式之符號變化數爲偶數,則其最後一項爲正.若爲奇數.則其最後一項爲負.

胡說(除非首項為(+)).

(9) 由是證明,若方程式之符號變化數爲偶數,則其正根數目等於其符號變化數,或爲較小之一偶數.若爲奇數,則其正根之數目等於其符號變化數,或爲較小之一奇數.換言之,正根之數目.若不等於符號變化數,則此符號變化數少一偶數.

證　在第一場合,以 0 代 x, 則 $f(x)$ 爲正.以 ∞ 代 x, 則 $f(x)$ 又爲正,故 0 及 ∞ 間方程式 $f(x)=0$ 可有偶數個正根.因 $f(x)$ 之符號變化數爲偶數.且此變化數爲正根數目之最大限.故方程式 $f(x)=0$ 中正根之數目,或爲 $f(x)$ 之符號變化數.或爲較小之一偶數.餘準此.

(10) 求方程式 $x^6-3a^2-x+1=0$ 中虛根數目之最小限.

答　至少有兩個.

(11) 考察方程式 $x^4+15x^2+7x-11=0$ 中根之性質.(用14, 19, 20節理)

答　一爲正根,一爲負根,餘爲虛根.

(12) 若 q, r 爲正,則方程式 $x^3+qx+r=0$ 有一負根及二虛根.

(13) 若 q, r 爲正,則方程式 $x^3-qx+r=0$ 有一負根.其他二根,或爲正根.或爲虛根.

(14) 若 $a, b, c, \cdots\cdots l$ 各值互異,則下之方程式不能有虛根.

$$\frac{A^2}{x-a}+\frac{B^2}{x-b}+\frac{C^2}{x-c}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{L^2}{x-l}=x-m$$

證　以 $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ 及 $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ 先後代入方程式中,則

$$\frac{A^2}{\alpha-\beta\sqrt{-1}-a}+\frac{B^2}{\alpha-\beta\sqrt{-1}-b}+\frac{C^2}{\alpha-\beta\sqrt{-1}-c}+\cdots\cdots+\frac{L^2}{\alpha-\beta\sqrt{-1}-l}=\alpha-\beta\sqrt{-1}-m$$

$$\frac{A^2}{\alpha+\beta\sqrt{-1}-a}+\frac{B^2}{\alpha+\beta\sqrt{-1}-b}+\frac{C^2}{\alpha+\beta\sqrt{-1}-c}+\cdots\cdots+\frac{L^2}{\alpha+\beta\sqrt{-1}-l}=\alpha+\beta\sqrt{-1}-m.$$

以上二式相減,則

$$2\beta\sqrt{-1}\left\{\frac{A^2}{(\alpha-a)^2+\beta^2}+\frac{B^2}{(\alpha-b)^2+\beta^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{L^2}{(\alpha-l)^2+\beta^2}\right\}=-2\beta\sqrt{-1}.$$

或

$$2\beta\sqrt{-1}\left\{1+\frac{A^2}{(\alpha-a)^2+\beta^2}+\frac{B^2}{(\alpha-b)^2+\beta^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{L^2}{(\alpha-l)^2+\beta^2}\right\}=0.$$

然尖括弧中各項之和決不為 0, 故此時 β 為 0, 卽原方程式不能有虛根.

(15) n 為偶數時,方程式 $x^n-1=0$ 祇有二實根 1 及 -1. n 為奇數時,只有實根 1.(本題及次題可用 19 及 20 兩節解之.)

(16) n 為偶數時,方程式 $x^n+1=0$ 無實根. n 為奇數時,只有一負根 -1.

(17) 解方程式　$x^4+2qx^3+3q^2x^2+2q^3x-r^4=0.$

上式可化為　$(x^2+qx+q^2)^2-q^4-r^4=0.$

答　$-\frac{1}{2}q+\sqrt{-\frac{3}{4}q^2+\sqrt{q^4+r^4}}$

因 $\sqrt{p}$ 可代表 $+\sqrt{p}$ 及 $-\sqrt{p}$. 故上式可代表下列四種形狀.

$$-\frac{1}{2}q+\sqrt{-\frac{3}{4}q^2+\sqrt{q^4+r^4}} \qquad -\frac{1}{2}q-\sqrt{-\frac{3}{4}q^2+\sqrt{q^4+r^4}}$$

$$-\frac{1}{2}q+\sqrt{-\frac{3}{4}q^2-\sqrt{q^4+r^4}} \qquad -\frac{1}{2}q-\sqrt{-\frac{3}{4}q^2-\sqrt{q^4+r^4}}$$

(18) 若 $\theta^2=1$, 試作一方程式,其根為下式所代表各值.

$$2+\theta\sqrt{7}+\sqrt{11+\theta\sqrt{7}}$$

上式若無 θ 之限制.則可代表 8 個不同之值.旣有此限制,只能代表四個不同之值.以此時 $\sqrt{7}$ 之符號,在根號內外皆當一致也.

答 $x^4-8x^3-12x^2+84x-63=0$

(19) 若 $\theta^2=1$. 試作一方程式其根爲下式所表四個不同之值.

$$-9+\theta\sqrt{137}+3\sqrt{34-2\theta\sqrt{137}}$$

答 $x^4+36x^3-400x^2-3168x+7744=0$

(20) 若 $\theta_1^2=1, \theta_2^2=1, \theta_3^2=1$, 試以 $\theta_1\sqrt{p}+\theta_2\sqrt{q}+\theta_3\sqrt{r}$ 所代表各種不同之值爲根作一方程式.

上式代表8個不同之值,即

$$\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r} \quad \sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r} \quad \sqrt{q}-\sqrt{r}-\sqrt{p} \quad \sqrt{r}-\sqrt{p}-\sqrt{q}$$

$$-\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r} \quad -\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r} \quad -\sqrt{q}+\sqrt{r}+\sqrt{p} \quad -\sqrt{r}+\sqrt{p}+\sqrt{q}.$$

令 $x=\theta_1\sqrt{p}+\theta_2\sqrt{q}+\theta_3\sqrt{r}$. 兩端平方之則

$$x^2=p+q+r+2(\theta_1\theta_2\sqrt{pq}+\theta_2\theta_3\sqrt{qr}+\theta_3\theta_1\sqrt{rp}).$$

移項再平方之又有

$$\{x^2-(p+q+r)\}^2=4(pq+qr+rp)+8\theta_1\theta_2\theta_3\sqrt{pqr}(\theta_1\sqrt{p}+\theta_2\sqrt{q}+\theta_3\sqrt{r}).$$

今以 x 代 $\theta_1\sqrt{p}+\theta_2\sqrt{q}+\theta_3\sqrt{r}$. 並將上式移項又平方之.終得

$$\{x^4-2(p+q+r)x^2+(p+q+r)^2-4(pq+qr+rp)\}^2=64pqrx^2.$$

亦可化爲

$$\{x^4-2(p+q+r)x^2+p^2+q^2+r^2-2pq-2qr-2rp\}^2=64pqrx^2.$$

此爲以前式 $\theta_1\sqrt{p}+\theta_2\sqrt{q}+\theta_3\sqrt{r}$ 所表8個不同之值爲根所得之8次方程式. 因此方程式內不復含有 $\theta_1\theta_2\theta_3$. 故不論用8個值內任一值代 x 皆可得同一之結果.若如第16節例6作此8個根之一次因子而連乘之.亦可得上之8次方程式.惟勞逸懸殊耳.

第三章

根與係數之關係及根之等勢函數

23. 根與係數之關係 令方程式中最高次項之係數爲1,其根爲 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$. 則有次之恆等式成立.

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n\equiv(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n) \quad (1)$$

將上式右端實行乘法.其 x^n 項之係數爲1. x^{n-1} 項之係數爲 $-a_1, -a_2,\cdots\cdots -a_n$, n 個值之和,即 x^{n-1} 項之係數與此 n 個根之和相等,惟符號相反. x^{n-2} 項之係數爲由此 n 個值中每次取兩個相乘所得之積之和. x^{n-3} 項之係數爲由此 n 個值中每次取三個相乘所得之積之和.以下逐次如此.其最後之項爲此 n 個值之連乘積.令上式兩端中次數相同項之係數相等.則有下之關係式成立.

$$\left.\begin{aligned}
p_1&=-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)\\
p_2&=(a_1a_2+a_1a_3+\cdots\cdots+a_1a_n+a_2a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}a_n)\\
p_3&=-(a_1a_2a_3+a_1a_3a_4+\cdots\cdots+a_{n-2}a_{n-1}a_n)\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
p_n&=(-1)^n a_1a_2\cdots\cdots a_n
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

是以根及係數間有次之定理成立.

定理 有代數方程式於此.若其最高次項之係數爲 1. 則其次項係數符號變化時所得之値.與其 n 個根之和相等.第三項之係數.與此 n 個根中每兩個相乘所得之積之和相等.第四項之係數符號變化時所得之値.與此 n 個根中每三個相乘所得之積之和相等.以下準此.

若 x^n 項之係數 a_0 不爲 1. 須用 a_0 遍除全方程式中各項.此時 n 個根之和等於 $-\frac{a_1}{a_0}$. n 個根中每兩個相乘所得之積之和等於$\frac{a_2}{a_0}$. 餘準此.

系 1 方程式中每一根皆爲其常數項之一因子.

系 2 方程式中所有之根皆爲正時,則其各項之係數a_0, a_1, ……a_n 等正負相間.若皆爲負.則其係數一律爲正.

24. 應用 因方程式(2)對於根與係數二者間有 n 個關係式成立.則解原方程式時,似可利用之而得種種利益.其實不然.因欲決定 a_r 一根.須由此 n 個關係式中消去其餘各根.其所得之結果,即以 a_r 爲根之方程式.又欲決定 a_s 一根.亦當應用上法.惟 a_r 與 a_s 二根在方程式(2)中立於等勢地位.故 a_r 之方程式與 a_s 之方程式.其中各項之係數完全相同.故 a_s 之値亦能滿足 a_r 之方程式.令 s 爲 $1, 2, 3, \cdots\cdots r-1, r+1, \cdots\cdots n$ 各値.即知原方程式之 n 個根,俱能滿足 a_r 之方程式.亦即此 a_r 之方程式亦含有原方程式之 n 個根.由此 a_r 之方程式發見 n 個根.不能易於由原方程式發現此 n 個根.故雖有方程

式(2)成立.仍不能利用之以解原方程式.實際此消去所得之方程式,與原方程式無異.學者觀於下例,卽可釋然.

令 a_1, a_2, a_3, 爲三次方程式 $x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$ 之根. 依方程式(2)則

$$p_1=-(a_1+a_2+a_3) \quad p_2=(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3) \quad p_3=-a_1a_2a_3.$$

今以 $a_1{}^2$ 乘 p_1a_1 乘 p_2 以之與 p_3 相加,即有 $p_1a_1{}^2+p_2a_1+p_3=-a_1{}^3$. 亦卽 $a_1{}^3+p_1a_1{}^2+p_2a_1+p_3=0$.

學者可證明四次方程式中亦有相同之結果.若在 n 次方程式則以 $a^{n-1}, a^{n-2}, a^{n-3}, \cdots\cdots a$ 依次乘 $p_1, p_2, \cdots\cdots p_{n-1}$. 然後與 p_n 相加.

解方程式時,若用方程式(2),實際毫無利益.前已論之詳矣.然當解數字方程式時,若知其根有某種關係.亦可利用方程(2)以解之.其在代數方程式時,更可藉之發見一係數關係式,與根之關係相當.

例 題

(1) 已知方程式 $x^3-5x^2-16x+80=0$ 之三根中其二根之和爲 0, 試解此方程式.

令此三根爲 a, β, γ. 則

$$a+\beta+\gamma=5 \qquad a\beta+a\gamma+\beta\gamma=-16 \qquad a\beta\gamma=-80.$$

令 $\beta+\gamma=0$. 則 a 等於 5. 更由 2 式或 3 式便知 $\beta\gamma=-16$. 故 β 與 γ 二值一爲 (4), 一爲 (−4). 故此三根爲 (5, 4, −4).

(2) 已知方程式 $x^3-3x^2+4=0$ 之三根中有二根相等,試解此方程式.

令此三根爲 α, α, β. 則　$2\alpha+\beta=3$　　$\alpha^2+2\alpha\beta=0$.

由此二方程式,便可求得 α 爲 2, β 爲 -1. 故此三根爲 $(2, 2, -1)$.

(3) 已知方程式 $x^4+4x^3-2x^2-12x+9=0$ 之四個根中有兩對等根.試解此方程式.

令此四根爲 $\alpha, \alpha, \beta, \beta$. 則

$$2\alpha+2\beta=-4 \qquad \alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta=-2.$$

解此二方程式卽得 α 與 β 一爲 1, 一爲 -3. 故此四根爲 $1, 1, -3, -3$.

(4) 已知方程式 $x^3-9x^2+14x+24=0$ 中有二根爲 3 與 2 之比.試解此方程式.

令此三根爲 α, β, γ, 且 α, β 之間又有關係式 $2\alpha=3\beta$ 成立.若將 α 消去則

$$5\beta+2\gamma=18 \qquad 3\beta^2+5\beta\gamma=28.$$

由是可得 β 之二次式 $19\beta^2-90\beta+56=0$.

其二根爲 4 與 $\frac{14}{19}$. 若 β 爲 4. 則 α 爲 6, γ 爲 -1. 若 β 爲 $\frac{14}{19}$. 則由此所得之結果不適合於原方程式.在前例中亦可發生此種場合,此理可如次表之.

本節所舉之方程式,其中若干個根間有某種條件成立.由此種條件,可導出一個或多個根之關係式.利用此項關係式以解方程式時,可不必將方程式 2 中各關係式一一列出.但如此解方程式,有時可同時發生若干組值.故其所得之結果,當一一檢查.實行檢查時,只須將前未列出之關係式,重行列出.然後將各組之值一一代入.卽知何組合理,何組不合理.如上例 β 爲 4 時所成一組之值,滿足於方程式 $\alpha\beta\gamma=-24$. β 爲 $\frac{14}{19}$ 時所成一組之值則否.故知前組合理,後組不合理.

(5) 已知方程式 $x^3-9x^2+23x-15=0$ 之三根成等差級數.試解此方程式.

令此三根爲 $\alpha-\delta, \alpha, \alpha+\delta$. 則

$$3\alpha=9 \qquad 3\alpha^2-\delta^2=23.$$

由是得 1, 3, 5 三根.

(6) 已知方程式 $x^4+2x^3-21x^2-22x+40=0$ 之四根成等差級數.試解此方程式.

令此四根爲 $\alpha-3\delta,\ \alpha-\delta,\ \alpha+\delta,\ \alpha+3\delta.$

答 $-5,\ -2,\ 1,\ 4.$

(7) 已知方程式 $27x^3+42x^2-28x-8=0$ 之根成等比級數.試解此方程式.

令此三根爲 $\alpha\rho,\ \alpha,\ \dfrac{\alpha}{\rho}.$

則由方程式(2)中第 3 式可得 $\alpha^3=\dfrac{8}{27}.$ 由是 $\alpha=\dfrac{2}{3}.$

再由餘二關係式中任一關係式.可得 ρ 之二次方程式

答 $-2,\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{9}.$

(8) 已知方程式 $3x^4-40x^3+130x^2-120x+27=0$ 之四根成等比級數.試解此方程式.

令此四根爲 $\dfrac{\alpha}{\rho^3},\ \dfrac{\alpha}{\rho},\ \alpha\rho,\ \alpha\rho^3.$ 再應用方程式(2)中 2, 4 兩式.

答 $\dfrac{1}{3},\ 1,\ 3,\ 9.$

(9) 已知方程式 $x^4+15x^3+70x^2+120x+64=0$ 之根成等比級數.試解此方程式.

答 $-1,\ -2,\ -4,\ -8.$

(10) 已知方程式 $6x^3-11x^2+6x-1=0$ 之根成調和級數.試求其根.

令三根爲 $\alpha,\ \beta,\ \gamma.$ 則 $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{2}{\beta}.$ 由是

$$\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=3\gamma\alpha.$$

答 $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}.$

(11) 已知方程式 $81x^3-18x^2-36x+8=0$ 之根成調和級數.試求其根.

答 $\dfrac{2}{9},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{3}.$

(12) 若方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ 之根成調和級數.則其中項爲 $\dfrac{3r}{q}$.試表明之.

(13) 若方程式 $x^4-2x^3+4x^2+6x-21=0$ 中有二根.其絕對值相等符號相反.試解此方程式.

令 $\alpha+\beta=0$. 再應用方程式(2)中第一第三兩式.

答 $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $1\pm\sqrt{-6}$.

(14) 若方程式 $3x^4-25x^3+50x^2-50x+12=0$ 中有兩根.其積爲 2. 試解此方程式.

答 6, $\frac{1}{3}$, $1\pm\sqrt{-1}$.

(15) 若方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ 中有一根爲他根之 2 倍.則此根可由一二次方程式求得.試表明之.

〔附錄〕以 S_n 代表最初 n 個整數之平方和 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$.則有

$$S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

令 n 爲 $n-1$. 則 $S_{n-1}=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$.

(16) 若方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$ 中所有之根成等差級數.則此 n 個根能一一定出.試表明之.

令此 n 個根爲

$$\alpha,\quad \alpha+\delta,\quad \alpha+2\delta,\quad \alpha+3\delta\cdots\cdots\cdots\alpha+(n-1)\delta.$$

則公式(2)中第一式爲

$$-p_1=n\alpha+\{1+2+3+\cdots\cdots+n-1\}\delta=n\alpha+\frac{1}{2}n(n-1)\delta. \qquad (A)$$

又因諸數量之平方和.等於自諸數量和之平方中,減去諸相異二數量之積之 2 倍.是以

$$p_1^2-2p_2=\alpha^2+(\alpha+\delta)^2+(\alpha+2\delta)^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+\{\alpha+(n-1)\delta\}^2$$
$$=n\alpha^2+n(n-1)\alpha\delta+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)\delta^2. \qquad (B)$$

以 n 乘(B)式兩端.又將(A)式平方之.然後相減.如此可得 δ^2 之值.今以 δ 之值代入(A)式內.即可將 α 之值求得.由是方程式之 n 個根皆可求得.

(17) 若方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ 中有二根.其絕對值相等符號相反.則

其係數間所必須滿足之條件爲何.

答　$pq-r=0$

(18) 若方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ 中之根成等比級數.則其條件爲何.

答　$p^3r-q^3=0$

(19) 若上方程式之根成調和級數.則其條件爲何.(參攷例12)

答　$27r^2-9pqr+2q^3=0$

(20) 若方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 中有2根 α 及 β 滿足次之關係 $\alpha+\beta=0$. 試求其條件.並同時決定以 α, β 爲根之二次方程式.及以 γ, δ 爲根之二次方程式.

答　$pqr-p^2s-r^2=0,\ px^2+r=0,\ x^2+px+\frac{ps}{r}=0.$

(21) 若上方程式中四根 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 間有關係式 $\alpha+\delta=\beta+\gamma$ 成立.試求其條件.

答　$p^3-4pq+8r=0$

(22) 若上方程式之四根間有關係式 $\alpha\beta=\gamma\delta$ 成立.試求其條件.

答　$p^2s-r^2=0$

(23) 若上方程式之根成等比級數.則其係數間滿足於例(22)之條件.試表明之.

25. 方程式相關二根之減次　由前節便知方程式之根間,若有某種關係成立.則可用方程式(2)解此方程式.一般方程式之二根 α 及 β 間,若有關係式 $\beta=\phi(\alpha)$ 成立.則此方程式之次數可減少兩次.今表於次.

以 $\phi(x)$ 代 x. 則恆等式

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

變爲

$$f[\phi(x)]=a_0[\phi(x)]^n+a_1[\phi(x)]^{n-1}+a_2[\phi(x)]^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}\phi(x)+a_n.$$

令上式右端爲 $F(x)$. 以 α 代上式中之 x. 又有

$$F(\alpha)=f[\phi(\alpha)]=f(\beta)=0.$$

故 α 滿足於方程式 $F(x)=0$ 及方程式 $f(x)=0$. 故 $x-\alpha$ 爲多項式 $F(x)$ 及 $f(x)$ 之公因子.故求 $F(x)$ 及 $f(x)$ 之公因子.可以決定 α. 同時便可決定 $\phi(\alpha)$ 或 β. 因 $x-\alpha$ 及 $x-\beta$ 皆爲 $f(x)$ 之因子.故 $f(x)$ 可以 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 整除.即方程式 $f(x)=0$ 之次數可減少二次.

例 題

(1) 方程式 $x^3-5x^2-4x+20=0$ 中有 2 根其差爲 3. 試解此方程式.

令 $\beta-\alpha=3$. 則 $\beta=3+\alpha$. 以 $3+x$ 代多項式 $f(x)$ 中之 x. 簡之即得 $x^3+4x^2-7x-10$. 此式與原多項式 $f(x)$ 之公因子爲 $x-2$. 故 α 爲 2. 因之 β 爲 5. 以 $(x-2)(x-5)$ 除多項式 $f(x)$. 又得第三根爲 -2.

(2) 方程式 $x^4-5x^3+11x^2-13x+6=0$ 中有二根 α, β 滿足於次之關係式 $2\beta+3\alpha=7$. 試解此方程式.

答 1, 2, $1\pm\sqrt{-2}$

於此當注意者.若 $F(x)$ 與 $f(x)$ 二多項式有公因子.則此公因子可由通常求公約數之法求之.苟知二方程式有公根.可令其二多項式之最高公因子爲 0. 然後解之.即得.

例 題

(1) 試求次之二方程式之公根.

$$2x^3+5x^2-6x-9=0, \qquad 3x^3+7x^2-11x-15=0.$$

答　$-1,\ -3$

(2) 若次之二方程式有二公根.試求以此二公根爲根之二次方程式.並在各方程式中求其第三根.

$$x^3+px^2+qx+r=0 \qquad x^3+p'x^2+q'x+r'=0$$

答　$x^2+\dfrac{q-q'}{p-p'}x+\dfrac{r-r'}{p-p'}=0,\ -\dfrac{r(p-p')}{r-r'}\quad -\dfrac{r'(p-p')}{r-r'}.$

26. 1之立方根 含有最高次項及常數項之式 $x^n-1=0$ $x^n+1=0$. 稱爲二項 n 次方程式. $x^n-1=0$ 之 n 個根,稱爲1之第 n 次根. 後章於此將特別說明.今第就二項三次方程式 $x^3-1=0$ 討論之.此方程式之根已知爲

$$1,\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3},\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}. \quad (\text{參攷16節例5})$$

令此二虛根中之一爲 ω. 平方之又得他一虛根.此說又可如次表明之.

因 ω 爲方程式 $x^3-1=0$ 之根. 則 $\omega^3=1$. 平方之又得 $\omega^6=1$. 即 $(\omega^2)^3=1$. 故 ω^2 滿足於方程式 $x^3-1=0$ 而爲其根. 故方程式 $x^3-1=0$ 之三根爲 $1,\omega,\omega^2$. 因而有 $x^3-1\equiv(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)$.

以 $-x$ 代上式中之 x. 又得 $x^3+1\equiv(x+1)(x+\omega)(x+\omega^2)$. 由此便可決定 $x^3+1=0$ 方程式之三根爲 $-1,-\omega,-\omega^2$.

ω^n 之乘冪 n 比2高時.此 ω^n 可以 $1,\omega,\omega^2$ 三者中之一表之.例如

$$\omega^4=\omega^3\omega=\omega,\ \omega^5=\omega^3\omega^2=\omega^2,\ \omega^6=\omega^3\omega^3=1,\ \omega^7=\omega^6\omega=\omega.$$

餘倣此.

由方程式(2)中第一式.則方程式 $x^3-1=0$ 之三根 $1,\omega,\omega^2$ 當

滿足於次之關係式. $1+\omega+\omega^2=0$

由此關係式.則凡含有實數及立方虛根之式.概可用次之三式中任一式表之. $P+\omega Q \quad P+\omega^2 Q \quad \omega P+\omega^2 Q$

例　題

(1) $\omega m+\omega^2 n$ 與 $\omega^2 m+\omega n$ 之積爲有理式.試表明之.

答 m^2-mn+n^2

(2) 試證次之恆等式.

$$m^3+n^3\equiv(m+n)(\omega m+\omega^2 n)(\omega^2 m+\omega n)$$

$$m^3-n^3\equiv(m-n)(\omega m-\omega^2 n)(\omega^2 m-\omega n)$$

(3) $\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma$ 與 $\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma$ 之積爲有理式.試表明之.

答 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta$

(4) 證次之恆等式.

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)\equiv\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$$

(5) 證次之恆等式.(應用例 2)

$$(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)^3+(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)^3\equiv(2\alpha-\beta-\gamma)(2\beta-\gamma-\alpha)(2\gamma-\alpha-\beta)$$

(6) 證次之恆等式.

$$(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)^3-(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)^3\equiv-3\sqrt{-3}(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$$

引用例(2).且以 $\sqrt{-3}$ 代 $\omega-\omega^2$.

(7) 若 $\alpha'=\alpha^2+2\beta\gamma$, $\beta'=\beta^2+2\gamma\alpha$, $\gamma'=\gamma^2+2\alpha\beta$. 試證次之恆等式.

$$\alpha'^3+\beta'^3+\gamma'^3-3\alpha'\beta'\gamma'\equiv(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)^2$$

(8) 求作一方程式.其根爲 $m+n$, $\omega m+\omega^2 n$, $\omega^2 m+\omega n$.

答 $x^3-3mnx-(m^3+n^3)=0$

(9) 作一方程式.其根爲 $l+m+n$, $l+\omega m+\omega^2 n$, $l+\omega^2 m+\omega n$.

答 $x^3-3lx^2-3(l^2-mn)x-(l^3+m^3+n^3-3lmn)=0$　$l^3+m^3+n^3-3lmn$

既有 1 之 n 次根.自有任意數之 n 次根.方程式 $x^n-a=0$ 之根.即 a 之 n 次根也.

若 $\sqrt[3]{a}$ 爲 a 之立方實根.即依算術計算所得之立方根.則 a 之三立方根爲 $\sqrt[3]{a}, \omega\sqrt[3]{a}, \omega^2\sqrt[3]{a}$. 此中任意一個皆滿足於方程式 $x^3-a=0$. 若將其中任一根同以 $1, \omega, \omega^2$ 逐一乘之.又可得上之三根.

由是凡任意實數.除有一立方實根外.尙有二立方虛根.此二虛根爲以 ω, ω^2 乘立方實根而得.例如27有立方實根 3. 及二立方虛根 3ω 及 $3\omega^2$. 即其立方虛根爲

$$-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{-3},\ -\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{-3}.$$

(10) 若 $\omega^3=1$. 試作一有理方程式.以下式所代表各值爲其根(參攷例8)

$$\omega\sqrt[3]{Q+\sqrt{Q^2+P^3}}+\omega^2\sqrt[3]{Q-\sqrt{Q^2+P^3}}$$

答　$x^3+3Px-2Q=0$

(11) 若 $\theta_1{}^3=1$ $\theta_2{}^3=1$. 試以 $\theta_1\sqrt[3]{P}+\theta_2\sqrt[3]{Q}$ 所代表各式爲根作一方程式.

令 $x=\theta_1\sqrt[3]{P}+\theta_2\sqrt[3]{Q}$.

兩端立方之.則有 $x^3=P+Q+3\theta_1\theta_2\sqrt[3]{PQ}(\theta_1\sqrt[3]{P}+\theta_2\sqrt[3]{Q})$.

令以 x 代 $\theta_1\sqrt[3]{P}+\theta_2\sqrt[3]{Q}$. 且將上式移項再立方之.又得

$$(x^3-P-Q)^3=27PQx^3.$$

因 θ_1, θ_2 可爲 $1, \omega, \omega^2$ 三值中任一值.故此方程式有九根爲

$$\begin{array}{ccc}
\sqrt[3]{P}+\sqrt[3]{Q} & \omega\sqrt[3]{P}+\omega\sqrt[3]{Q} & \omega^2\sqrt[3]{P}+\omega^2\sqrt[3]{Q} \\
\omega\sqrt[3]{P}+\omega^2\sqrt[3]{Q} & \sqrt[3]{P}+\omega^2\sqrt[3]{Q} & \sqrt[3]{P}+\omega\sqrt[3]{Q} \\
\omega^2\sqrt[3]{P}+\omega\sqrt[3]{Q} & \omega^2\sqrt[3]{P}+\sqrt[3]{Q} & \omega\sqrt[3]{P}+\sqrt[3]{Q}
\end{array}$$

因在最後方程式無 θ_1 θ_2. 故不論用上九根中任一根爲 x 皆可得同樣結果

若自x逐一減此9個根而作9個一次因子.再連乘之.亦可得上方程式.

(12) 若將上表內每行之值爲根.試分別求此三個三次方程式.

首令m, n爲$\sqrt[3]{P}, \sqrt[3]{Q}$. 次令爲$\omega\sqrt[3]{P}, \omega\sqrt[3]{Q}$. 終令爲$\omega^2\sqrt[3]{P}, \omega^2\sqrt[3]{Q}$. 則由例(8)可將本題之結果直接書出.

答 $x^3-3\sqrt[3]{PQ}x-(P+Q)=0,\ x^3-3\omega\sqrt[3]{PQ}x-(P+Q)=0,\ x^3-3\omega^2\sqrt[3]{PQ}x-(P+Q)=0.$

27. 根之等勢函數 根之等勢函數云者,以方程式中各根在此函數式中,立於相似位置.無論將其中任意二根互換顧此函數式仍不受其毫末之影響者也.例如方程式(2)中所有各式,皆得稱爲等勢函數.因若將α_1與α_2互換.此函數式始終不變.同樣若r與m均爲n以下之正整數.且r不等於m,則將α_r與α_m互換,此等函數式亦不變.

方程式(2)中各式,爲最簡單之等勢函數式.各根在每一等勢式內各項中.其次數祇限於1.

應用方程式(2),則凡根之各種等勢函數.皆可以係數之項表之.不必先將方程式中各根一一以係數之項表之.然後能得此結果也.後章再討論本問題時.亦將證明凡根之等勢函數.可以係數之項表示.本節例題中大部分.第就簡單場合如三次方程式及四次方程式者論之.但由此等例題亦可略見解此項問題時所當用之初級方法.

取等勢函數中任一項.附希臘文字Σ於其前.用以代表等勢函數.此時等勢函數全體.可藉此種表示法立刻書出.如α, β, γ爲三次方程式之根.則$\Sigma\alpha^2\beta^2$表示次式全體.$\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2$

$+\beta^2\gamma^2$, 即在此三個根中,每次取不同兩個相乘.再將所得各項一一平方之.然後相加.即得 $\Sigma\alpha^2\beta^2$ 所代表之式.又如 $\Sigma\alpha^2\beta$ 表示次式全體, $\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\gamma+\beta^2\alpha+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta$, 即由此三根中每次取不同兩根排列之,如此可得六項.再將每項中第一字母平方,然後用加號連結.如此即得 $\Sigma\alpha^2\beta$ 所代表之式.

然在四次方程式中. $\Sigma\alpha^2\beta^2$ 代表次式全體.

$$\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2+\beta^2\delta^2+\gamma^2\delta^2$$

例　題

(1) 若 α, β, γ 為三次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根.試求 $\Sigma\alpha^2\beta$ 之值.

將二關係式 $\alpha+\beta+\gamma=-p$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=q$ 相乘,結果即得

$$\Sigma\alpha^2\beta+3\alpha\beta\gamma=-pq.$$

是以 $\Sigma\alpha^2\beta=3r-pq$.

(2) 試就上之三次方程式求 $\Sigma\alpha^2$ 之值.

答 $\Sigma\alpha^2=p^2-2q$

(3) 試就上之三次方程式求 $\Sigma\alpha^3$ 之值.

將 $\Sigma\alpha$ 與 $\Sigma\alpha^2$ 相乘.結果即得 $\Sigma\alpha^3+\Sigma\alpha^2\beta=-p^3+2pq$.

代入 $\Sigma\alpha^2\beta$ 之值,即得 $\Sigma\alpha^3=-p^2+3pq-3r$.

(4) 試就上之三次方程式求 $\Sigma\beta^2\gamma^2$ 之值.

吾人易知 $\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=q^2$.

故 $\Sigma\beta^2\gamma^2=q^2-2pr$.

(5) 試就上之三次方程式求 $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$ 之值.

此式可化為 $2\alpha\beta\gamma+\Sigma\alpha^2\beta$.

答 $r-pq$

(6) 若四次方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 之四根爲 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. 試求次之等勢函數之值.

$$\alpha^2\beta\gamma+\alpha^2\beta\delta+\alpha^2\gamma\delta+\beta^2\gamma\delta+\beta^2\alpha\delta+\beta^2\gamma\alpha+\gamma^2\alpha\beta+\gamma^2\alpha\delta+\gamma^2\beta\delta+\delta^2\alpha\beta+\delta^2\alpha\gamma+\delta^2\beta\gamma$$

將關係式 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-p$, $\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-r$ 二者相乘, 則有 $\Sigma\alpha^2\beta\gamma+4\alpha\beta\gamma\delta=pr$, 是以 $\Sigma\alpha^2\beta\gamma=pr-4s$.

(7) 試就上之四次方程式求 $\Sigma\alpha^2$ 之值.

將 $\Sigma\alpha=-p$ 平方之.卽得 $\Sigma\alpha^2+2\Sigma\alpha\beta=p^2$. 是以 $\Sigma\alpha^2=p^2-2q$.

(8) 試就上之四次方程式求 $\Sigma\alpha^2\beta^2$ 之值.

將 $\Sigma\alpha\beta=q$ 平方之,卽得 $\Sigma\alpha^2\beta^2+2\Sigma\alpha^2\beta\gamma+6\alpha\beta\gamma\delta=q^2$.

代入例(6)中 $\Sigma\alpha^2\beta\gamma$ 之值,卽得 $\Sigma\alpha^2\beta^2=q^2-2pr+2s$.

(9) 試就上之四次方程式求 $\Sigma\alpha^3\beta$ 之值.

若欲構成此等勢式.吾人先作二文字 α, β 之二排列 $\alpha\beta$ 及 $\beta\alpha$. 此時可得 Σ 中兩項 $\alpha^3\beta$ 及 $\beta^3\alpha$. 同樣自此四文字中取他一對文字. 又可得等勢式中他兩項.因前後共可取 6 對,故此等勢式全體共有十二項.

將次列二式 $\Sigma\alpha\beta=q$, $\Sigma\alpha^2=p^2-2q$ 相乘.則有

$$\Sigma\alpha^2\,\Sigma\alpha\beta=\Sigma\alpha^3\beta+\Sigma\alpha^2\beta\gamma.$$

若欲證實此恆等式.只須證其兩端項數相等已足,因 $\Sigma\alpha^2$ 共計四項. $\Sigma\alpha\beta$ 共有 6 項,故二者之積當有 24 項.然在右端 $\Sigma\alpha^3\beta$ 中共有 12 項, $\Sigma\alpha^2\beta\gamma$ 中亦有 12 項,全體共 24 項.與左端項數相等.故此恆等式能成立.

代入例(6)中 $\Sigma\alpha^2\beta\gamma$ 之值.卽得 $\Sigma\alpha^3\beta=p^2q-2q^2-pr+4s$.

(10) 試就上四次方程式求 $\Sigma\alpha^4$ 之值.

將 $\Sigma\alpha^2=p^2-2q$ 平方之.並應用例(8)之結果.卽得

$$\Sigma\alpha^4=p^4-4p^2q+2q^2+4pr-4s.$$

(11) 試將方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$ 中各根平方之和,以係數之項表之.

將 $\Sigma\alpha_1=-p_1$ 平方之.則 $p_1^2=\Sigma\alpha_1^2+2\Sigma\alpha_1\alpha_2=\Sigma\alpha_1^2+2p_2$.

是以 $\Sigma\alpha_1^2=p_1^2-2p_2$.

(12) 試以係數之項,表前方程式中各根逆數之和.

自方程式(2)中最後兩式便得 $\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n=(-1)^n p_n$.

$$\alpha_2\alpha_3\cdots\cdots\alpha_n+\alpha_1\alpha_2\alpha_4\cdots\cdots\alpha_n+\cdots\cdots+\alpha_2\alpha_3\cdots\cdots\alpha_n=(-1)^{n-1}p_{n-1}$$

以前式除後式便得 $\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\alpha_n}=-\frac{p_{n-1}}{p_n}$.

同樣在此 n 個逆數中,每次取兩個相乘.其一切積之和,可以 p_n 除 p_{n-2} 而得.若每次取三個,則其一切積之和.可以 p_n 除 $-p_{n-3}$ 而得,餘準此.

(13) 若 α, β, γ 爲三次方程式 $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$ 之根,試以係數之項表 $(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2$ 之值.

[注意] 書方程式時,常在其文字係數之前冠以適當之二項係數.如在本例方程式之次數爲3.則以 $(1+x)^3$ 展開式中數字係數 1, 3, 3, 1 依次冠於 a_0, a_1, a_2, a_3 之前.同樣若在四次方程式.則以 $(1+x)^4$ 展開式中數字係數 1, 4, 6, 4, 1 依次冠於 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 之前,餘準此.

解此問題時.易知 $a_0^2\{(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2\}=18(a_1^2-a_0a_2)$.

(14) 試根據上之假定.計算下列二次方程式中含有 x 項之係數及其常數項.

$$(x-\alpha)^2(\beta-\gamma)^2+(x-\beta)^2(\gamma-\alpha)^2+(x-\gamma)^2(\alpha-\beta)^2$$

此題於(13)題之等勢函數外,又須計算次之等勢函數.

$$\alpha(\beta-\gamma)^2+\beta(\gamma-\alpha)^2+\gamma(\alpha-\beta)^2, \qquad \alpha^2(\beta-\gamma)^2+\beta^2(\gamma-\alpha)^2+\gamma^2(\alpha-\beta)^2$$

答 $(a_0a_2-a_1^2)x^2+(a_0a_3-a_1a_2)x+a_1a_3-a_2^2=0$.

(15) 本上三次方程式,求以係數之項表次之等勢式.

$$(2\alpha-\beta-\gamma)(2\beta-\gamma-\alpha)(2\gamma-\alpha-\beta)$$

因 $2\alpha-\beta-\gamma=3\alpha-(\alpha+\beta+\gamma)=3\alpha+3\frac{a_1}{a_0}=3\left(\alpha+\frac{a_1}{a_0}\right)$.

同理　$2\beta-\gamma-\alpha=3\left(\beta+\frac{a_1}{a_0}\right)$，　$2\gamma-\alpha-\beta=3\left(\gamma+\frac{a_1}{a_0}\right)$.

是以　$(2\alpha-\beta-\gamma)(2\beta-\gamma-\alpha)(2\gamma-\alpha-\beta)=27\left(\alpha+\frac{a_1}{a_0}\right)\left(\beta+\frac{a_1}{a_0}\right)\left(\gamma+\frac{a_1}{a_0}\right)$.

故若能將 $\left(\alpha+\frac{a_1}{a_0}\right)\left(\beta+\frac{a_1}{a_0}\right)\left(\gamma+\frac{a_1}{a_0}\right)$ 之值定出,即可解決本問題.

由恆等式 $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3\equiv a_0(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

以 $-\frac{a_1}{a_0}$ 代恆等式中之 x，能將 $\left(\alpha+\frac{a_1}{a_0}\right)\left(\beta+\frac{a_1}{a_0}\right)\left(\gamma+\frac{a_1}{a_0}\right)$ 之值定出，由是可得

$a_0^3(2\alpha-\beta-\gamma)(2\beta-\gamma-\alpha)(2\gamma-\alpha-\beta)=-27(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3)$.

(16) 令 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 爲四次方程式 $a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$ 之根.試以係數之項表等勢函數 $(\beta-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2+(\gamma-\alpha)^2(\beta-\delta)^2+(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2$.

此等勢式與 $2\Sigma\alpha^2\beta^2-2\Sigma\alpha^2\beta\gamma+12\alpha\beta\gamma\delta$ 絕對相等,固不待論.若用例(6)例(8)之結果.則得

$$a_0^2\{(\beta-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2+(\gamma-\alpha)^2(\beta-\delta)^2+(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2\}=24(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2).$$

(17) 在上四次方程式中,將其四個根每次取兩個相乘.如此可得6項.將各項與含其他二文字之項相加.如此可得三種不同之結果.以式表之如下:

$$\beta\gamma+\alpha\delta,\qquad \gamma\alpha+\beta\delta,\qquad \alpha\beta+\gamma\delta.$$

今將此三個結果每次取兩個相乘.試以係數之項表此三個乘積之和,又以係數之項表此三者之連乘積.

前者爲 $(\gamma\alpha+\beta\delta)(\alpha\beta+\gamma\delta)+(\alpha\beta+\gamma\delta)(\beta\gamma+\alpha\delta)+(\beta\gamma+\alpha\delta)(\gamma\alpha+\beta\delta)$,

後者爲 $(\gamma\alpha+\beta\delta)(\alpha\beta+\gamma\delta)(\beta\gamma+\alpha\delta)$.

前之三種結果在四次方程式理論中甚重要.常用 λ, μ, ν 表之.故此問題與以係數之項表明 $\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu$ 及 $\lambda\mu\nu$ 無異.

前者等於 $\Sigma\alpha^2\beta\gamma$，由例(6)便知 $a_0^2\Sigma\mu\nu=4(4a_1a_3-a_0a_4)$.

若實行乘法.便知後者等於

$$\alpha\beta\gamma\delta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)+\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\delta^2}\right).$$

故易知其結果爲 $a_0^3\lambda\alpha\nu=8(2a_0a_3^2-3a_0a_2a_4+2a_1^2a_4)$.

(18) 若 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 爲上方程式之四根,試以係數之項表次之等勢函數.

$$\{(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)-(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)\}\{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)-(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)\}\{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)-(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)\}.$$

此等勢函數.在四次方程式理論中,亦佔重要位置,書此等勢函數及其他含有四次方程式中二根之差之相當函數時,爲免誤會起見,常解釋此記號如次.

將 α, β, γ 依一定方向順次書於圓周上,再依同方向取二文字相減,則有 $\beta-\gamma, \gamma-\alpha, \alpha-\beta$ 三個不同之結果,再由 α, β, γ 三者中各減去 δ, 又得 $\alpha-\delta, \beta-\delta, \gamma-\delta$ 三種不同之結果.今在上二組結果中,將其同位置之項相乘.再得以下三種不同之結果.

$$(\beta-\gamma)(\alpha-\delta), \quad (\gamma-\alpha)(\beta-\delta), \quad (\alpha-\beta)(\gamma-\delta).$$

今將此三式如前置於圓周上.又依同方向取兩式相減,再將所得之結果連乘之,即得本例之等勢函數.

由前例 λ, μ, ν 之值,便知

$$-\mu+\nu=(\beta-\gamma)(\alpha-\delta) \quad -\nu+\lambda=(\gamma-\alpha)(\beta-\delta) \quad -\lambda+\mu=(\alpha-\beta)(\gamma-\delta).$$

由是本題變爲以係數之項表次式之值, $(2\lambda-\mu-\nu)(2\mu+\nu-\lambda)(2\nu-\lambda-\mu)$.

上式又可變爲 $(3\lambda-\Sigma\alpha\beta)(3\mu-\Sigma\alpha\beta)(3\nu-\Sigma\alpha\beta)$.

今實行乘法.且將 $\Sigma\alpha\beta$ 之值代入.並注意例(17)之結果.可得

$$a_0^3(2\lambda-\mu-\nu)(2\mu-\nu-\lambda)(2\nu-\lambda-\mu)=-432(a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4-a_2^3),$$

本例所得之係數函數.及例 13, 15, 16 之係數函數.在三次及四次方程式中甚佔重要.

(19) 以前四次方程式中係數之項表次之等勢式.

$$(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2+(\gamma-\delta)^2.$$

此式可以 $\Sigma(\alpha-\beta)^2$ 簡單表之.

答　$a_0^2\Sigma(\alpha-\beta)^2=48(a_1^2-a_0a_2)$.

(20) 前四次方程式之根與其係數間有次之關係式.試證明之.

$$a_0^3(\beta+\gamma-\alpha-\delta)(\gamma+\alpha-\beta-\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta)=32(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3).$$

28. 等勢函數之理論 等勢函數之值,以係數之項表示時,多用次之二定理,證實其結果之當否.

1. 根之等勢函數.若以係數之項表之,則前式各項中各根之指數和,與後式各項中各文字末端所附數字之和相等.

等勢函數中各根指數之和,在每一項內常相等.一般稱此指數和爲等勢函數中一切根之次數.假定有一係數多項式於此,其中每一項之數字和等.今將式中各係數以23節方程式(2)中各函數代入,即得此式之相當等勢函數.因方程式(2)中各係數之數字已與其函數之次數等.故此式中每一項之數字和.與其相當等勢函數之次數等.

2. 今有二項係數之方程式於此,若以係數之項表其根之差之等勢函數,則由此組成之係數多項式,其數字係數之代數和爲 0.

令此方程式爲

$$a_0x^n+na_1x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+na_{n-1}x+a_n=0.$$

再令 $a_0, a_1, \cdots\cdots a_n$ 皆爲1.則上之方程式變爲 $(1+x)^n=0$. 即所有一切之根皆相等.因之此等勢函數之值爲 0. 又與此函數之值相等之係數多項式亦爲 0. 然當 $a_0, a_1, \cdots\cdots a_n$ 之值皆爲 1 時.此係數多項式僅含數字係數.其他一無所有,故本定理能成立.自 27 節例 (13),(15),(16),(18),(20) 更可徵實此理.

例　題

(1) 若 α, β, γ 爲三次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根，試以 p, q, r 之項表等勢式 $\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\beta\gamma}+\dfrac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma\alpha}+\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$.

答 $\dfrac{pq}{r}-3$.

(2) 本上方程式求 $(\beta+\gamma-\alpha)^3+(\gamma+\alpha-\beta)^3+(\alpha+\beta-\gamma)^3$ 之值.

答 $24r-p^3$.

(3) 本上方程式求 $\Sigma\alpha^3\beta^3$ 之值.

答 $q^3-3pqr+3r^2$.

因 $\Sigma\alpha\beta\Sigma\alpha^2\beta^2=\Sigma\alpha^3\beta^3+\alpha\beta\gamma\Sigma\beta^2\gamma$，故得上之結果.

(4) 本上方程式求 $(\beta^3-\gamma^3)^2+(\gamma^3-\alpha^3)^2+(\alpha^3-\beta^3)^2$ 之值.

若將 $\Sigma\alpha^3$ 平方之，可得 $\Sigma\alpha^6$ 之值.(參攷27節例3)

答 $2p^6-12p^4q+12p^3r+18p^2q^2-18pqr-6q^3$.

(5) 本上方程式求 $\dfrac{\alpha^2+\beta\gamma}{\beta+\gamma}+\dfrac{\beta^2+\gamma\alpha}{\gamma+\alpha}+\dfrac{\gamma^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ 之值.

答 $\dfrac{p^4+3p^2q+5pr+q^2}{\gamma-pq}$.

(6) 本上方程式求等勢函數 $\Sigma\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2$ 之值.

答 $\dfrac{3p^2q^2-4p^3r-4q^3-2pqr-9r^2}{(r-pq)^2}$.

(7) 本上方程式求 $\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma}+\dfrac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha}+\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}$ 之值.

答 $\dfrac{2p^2q-4pr-2q^2}{r-pq}$.

(8) 若 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 爲方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 之根. 試以 p, q, r, s 之項表 $\Sigma\dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2}$ 之值. ${}_4C_2=\frac{4\times3}{2}$

4×4

此時 $\Sigma\alpha\beta\Sigma\dfrac{1}{\alpha^2}=\Sigma\dfrac{\beta}{\alpha}+\Sigma\dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2}$. 又 $\Sigma\alpha\Sigma\dfrac{1}{\alpha}=4+\Sigma\dfrac{\beta}{\alpha}$.

答 $\dfrac{qr^2-2q^2s-prs+4s^2}{s^2}$.

(9) 若 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 爲方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$ 之根. 試求 $\Sigma\dfrac{\alpha}{\beta^2}$ 之值.

答 $\frac{p_{n-1}p_n-p_1p^2{}_{n-1}+2p_1p_{n-2}p_n}{p_n{}^2}$.

(10) 本例之三次方程式求 $\frac{2\beta\gamma-\alpha^2}{\beta+\gamma-\alpha}+\frac{2\gamma\alpha-\beta^2}{\gamma+\alpha-\beta}+\frac{2\alpha\beta-\gamma^2}{\alpha+\beta-\gamma}$ 之值.

答 $\frac{p^4-2p^2q+14pr-8q^2}{4pq-p^3-8r}$.

(11) 本例(8)之方程式求 $(\beta\gamma-\alpha\delta)(\gamma\alpha-\beta\delta)(\alpha\beta-\gamma\delta)$ 之值.

(比較24節例22)

答 γ^2-p^2s.

(12) 試本三次方程式 $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$, 求 $\Sigma(a_0\alpha+a_1)^2(\beta-\gamma)^2$ 之值.

答 $\frac{18}{a_0{}^2}(a_0a_2-a_1{}^2)^2$.

(13) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n$ 爲 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$ 方程式之根.試求$\Sigma\ \frac{\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2}{\alpha_1\alpha_2}$ 之值.

此等勢函數可寫爲 $\alpha_1\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right)-1+\alpha_2\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right)-1$

$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\alpha_{n-1}\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right)-1+\alpha_n\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right)-1.$

此又可化爲 $\Sigma\alpha_1\Sigma\frac{1}{\alpha_1}-n$ 故能求其值.

答 $\frac{p_1p_{n-1}}{p_n}-n$.

(14) 除去方程式 $\sqrt{t-\alpha^2}+\sqrt{t-\beta^2}+\sqrt{t-\gamma^2}=0$ 之根號.並以例(1)方程式求各係數表此新方程式內各係數.

答 $3t^2-(2p^2-4q)t-p^4+4p^2q-8pr=0$.

(15) 若 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 爲例(8)四次方程式之根.試證明

$$(\alpha^2+1)(\beta^2+1)(\gamma^2+1)(\delta^2+1)=(1-q+s)^2+(p-r)^2.$$

將方程式 $x^2+1=0$ 之二根,逐一代入16節之恆等式中而求其積.

(16) 在一般n次方程式中,其根與係數間有次之關係式成立,試證明之.

$$(\alpha_1{}^2+1)(\alpha_2{}^2+1)\cdots\cdots(\alpha_n{}^2+1)=(1-p_2+p_4-\cdots\cdots)^2+(p_1-p_3+\cdots\cdots)^2.$$

(17) 若 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 爲方程式 $x^4-7x^3+8x^2-5x+10=0$ 之根,試求次式之值,

$$(\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)(\delta^2+2).$$

以方程式 $x^2+2=0$ 之二根,一一代入16節之恆等式中而後相乘.

答 166.

(18) 若 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 爲四次方程式 $a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$ 之根.試證

$$a_0^3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)(\gamma+\delta)=16(6a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4).$$

本題之等勢函數與 $(\mu+\nu)(\nu+\lambda)(\lambda+\mu)$ 之值同,而此又可化之如下.

$$(\mu+\nu)(\nu+\lambda)(\lambda+\mu)=(\Sigma\lambda-\lambda)(\Sigma\lambda-\mu)(\Sigma\lambda-\nu)=(\Sigma\lambda)^3-(\Sigma\lambda)^2\Sigma\lambda+\Sigma\lambda\Sigma\mu\nu-\lambda\mu\nu$$

故此結果又可化爲 $\Sigma\lambda\Sigma\mu\nu-\lambda\mu\nu$, 而此 λ, μ, ν 三者代表27節例17之三值.

(19) 本例(8)四次方程式求根之等勢函數 $\Sigma(\alpha-\beta)^4$ 之值.

答 $3p^4-16p^2q+20q^2+4pr-16s$.

(20) 若本例18之四次方程式.則(19)之等勢函數可成爲次之形狀.試表明之.

$$a_0^4\Sigma(\alpha-\beta)^4=16\{48(a_0a_2-a_1^2)^2-a_0^2(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2)$$

(21) 自直線上某定點至其他二對點之距離 (α,β) (α', β') 令爲方程式

$$ax^2+2bx+c=0, \qquad a'x^2+2b'x+c'=0,$$

$\alpha\beta$　$\alpha'\beta'$

之根.若此一對點爲他一對點之調和共軛點,則兩方程式之係數間有關係式 $ac'+a'c-2bb'=0$ 成立.試表明之.

(22) 自直線上某定點至其他三點 A, B, C 之距離令爲三次方程式

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=0$$

之根.則當其中一點爲他二點連結線之中點時.其條件爲何.(比較27節例15)

答 $a^2d-3abc+2b^3=0$.

?

因27節例(15)之等勢函數 $(2\alpha-\beta-\gamma)(2\beta-\gamma-\alpha)(2\gamma-\alpha-\beta)$ 爲0.故與之相等之係數多項式亦爲0.即 $a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3$ 爲0.今以 a 代 a_0, b 代 a_1, c 代 a_2, d 代 a_3, 即得所求之條件.

(23) 保留前例之記號.試求 O, A, B, C 四點在此直線上成調和列點之

條件.

答 $ad^2-3bcd+2c^3=0.$

以例(22)方程式之反數爲根.作一新方程式.自此新方程式,求與例(22)同一之條件,可得吾人所要求之條件.此條件亦可如下法求得.

因 $$\left(\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{2}{\beta}-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{2}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)=0.$$

簡之則 $$(2\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta)(2\gamma\alpha-\alpha\beta-\beta\gamma)(2\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)=0.$$

化之爲 $$(3\beta\gamma-\Sigma\alpha\beta)(3\gamma\alpha-\Sigma\alpha\beta)(3\alpha\beta-\Sigma\alpha\beta)=0.$$

展開之爲 $$(\Sigma\alpha\beta)^3-3\Sigma\alpha\beta(\Sigma\alpha\beta)^2+9\alpha\beta\gamma\Sigma\alpha(\Sigma\alpha\beta)-27(\alpha\beta\gamma)^2=0.$$

卽 $$-2\left(\frac{3c}{a}\right)^3+9\frac{d}{a}\,\frac{3b}{a}\,\frac{3c}{a}-27\left(\frac{d}{a}\right)^2=0.$$

亦卽 $$ad^2-3bcd+2c^3=0.$$

(24) 若 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 爲方程式 $ax^4+4bx^3+bcx^2+4dx+e=0$ 之根.且 $\alpha-\delta, \beta-\delta, \gamma-\delta$ 間叉成調和級數.則方程式之係數間有次之關係式成立.試證明之.

$$ace+2bcd-ad^2-b^2e-c^3=0. \qquad \text{(比較 27 節 例 18)}$$

(25) 若 $\omega^3=1$. α, β, γ 爲 $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ 之根.求以次式爲根之方程式

$$-\frac{\beta\gamma+\omega\gamma\alpha+\omega^2\alpha\beta}{\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma}, \qquad -\frac{\beta\gamma+\omega^2\gamma\alpha+\omega\alpha\beta}{\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma}.$$

答 $(ac-b^2)x^2+(ad-bc)x+(bd-c^2)=0$ 　(比較 27 節 例 13, 14)

(26) 試以二立方和表示連乘積 $(2\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta)(2\gamma\alpha-\alpha\beta-\beta\gamma)(2\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$.

答 $(\beta\gamma+\omega\gamma\alpha+\omega^2\alpha\beta)^3+(\beta\gamma+\omega^2\gamma\alpha+\omega\alpha\beta)^3$ 　(比較 26 節 例 5)

(27) 若 $\omega^3=1$, 試以 $x^3+y^3+z^3$ 及 xyz 之項表次式全體.

$$(x+y+z)^3+(x+\omega y+\omega^2z)^3+(x+\omega^2y+\omega z)^3.$$

答 $3(x^3+y^3+z^3)+18xyz$

(28) 若 $(x^3+y^3+z^3-3xyz)(x'^3+y'^3+z'^3-3x'y'z')=X^3+Y^3+Z^3-3XYZ$, 試以 x, y, z, x', y', z', 之項表 X, Y, Z. (應用 26 節 例 4)

答 $X=xx'+yy'+zz'$. $Y=xy'+yz'+zx'$. $Z=x'y+y'z+z'x$.

(29) 試分解 $(\alpha+\beta+\gamma)^3\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3$ 爲三因子. 每一因子叉爲 α, β, γ

之二次式.　　　　　　　　　　　　　　　　(比較24節例18)

答 $(\alpha^2-\beta\gamma)(\beta^2-\gamma\alpha)(\gamma^2-\alpha\beta)$

(30) 試分解以下兩式爲一次因子.

(1)　$(\beta-\gamma)^3(\beta+\gamma-2\alpha)+(\gamma-\alpha)^3(\gamma+\alpha-2\beta)+(\alpha-\beta)^3(\alpha+\beta-2\gamma)$.

(2)　$(\beta-\gamma)(\beta+\gamma-2\alpha)^2+(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-2\beta)^2+(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-2\gamma)^2$.

答 (1) $(2\alpha-\beta-\gamma)(2\beta-\gamma-\alpha)(2\gamma-\alpha-\beta)$　(2) $-9(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$

(31) 若方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ 之根具有 $a\pm a\sqrt{-1}$ 之形式. 試求其條件.並表明在此條件下求其根之方法.

若此方程式之實根爲 b. 則此三根之和 $\Sigma\alpha$ 爲 $2a+b$. $\Sigma\alpha\beta$ 爲 $2a(a+b)$. $\alpha\beta\gamma$ 爲 $2a^2b$. $\Sigma\alpha^2$ 爲 b^2. 是以

$$2a+b=p \qquad 2a(a+b)=q \qquad 2a^2b=r \qquad b^2=p^2-2q.$$

自此四關係式消去 a 與 b. 卽得吾人所求之條件爲 $(p^2-2q)(q^2-2pr)-r^2=0$. 自第四關係式可發見實根之值 b. 再以 $x-b$ 除原三次多項式, 可得一新方程式.解之卽得預擬之二根.

(32) 已知方程式 $x^3-7x^2+20x-24=0$ 之根呈例(31)根中之形狀.試解此方程式.

答 其根爲 $3,\ 2\pm2\sqrt{-1}$.

(33) 若四次方程式 $x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$ 之根成 $a\pm a\sqrt{-1}$, $b\pm b\sqrt{-1}$ 之形式.其條件爲何.

因此方程式之根只含有兩個獨立量.故在係數間可求得兩個條件.

答 $p^2-2q=0$　　$r^2-2qs=0$

(34) 方程式 $x^4+4x^3+8x^2-120x+900=0$ 適合於例(33)之條件. 試解此方程式.

答 $3\pm3\sqrt{-1}$,　$-5\mp5\sqrt{-1}$.

(35) 若 $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ 爲方程式 $x^3+qx+r=0$ 之根,則 2α 爲 $x^3+qx-r=0$ 方程式

之根.試證明之.

(36) 若方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根 α 及 β 間有 $\alpha\beta+1=0$ 之關係.則其條件爲何.

答 $1+q+pr+r^2=0$.

(37) 若四次方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 之根 α 及 β 間有 $\alpha\beta+1=0$ 之關係.則其條件爲何.

依 s 之升冪排列時,上之條件爲

$$1+q+pr+r^2+(p^2+pr-2q-1)s+(q-1)s^2+s^3=0.$$

(38) 若方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$ 之根爲 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots\cdots \alpha_n$. 試求等勢式 $\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2\alpha_3\alpha_4\cdots\cdots\alpha_n$ 之值.

此式易變爲例(13)之式.

$_nC_2=\frac{n(n-1)}{2!}$

答 $(-1)^n(p_1p_{n-1}-n^2p_n)$.

(39) 若方程式 $a_0x^n+na_1x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$ 之根成等差級數.則此 n 個根可以 r 之值代入 $-\frac{a_1}{a_0}\pm\frac{r}{a_0}\sqrt{\frac{3(a_1^2-a_0a_2)}{n+1}}$ 而得.但 n 爲偶數時 r 之值爲 $1, 3, 5, \cdots\cdots n-1$ 各值. n 爲奇數時 r 之值爲 $0, 2, 4, \cdots\cdots n-1$ 各值.試證明之.

(40) 以 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ 表 α, β, γ 中兩文字之差.如下所示.

$$\alpha_1=\beta-\gamma \qquad \beta_1=\gamma-\alpha \qquad \gamma_1=\alpha-\beta$$

試證次之關係式.

$$\alpha_1^3+\beta_1^3+\gamma_1^3=3\alpha_1\beta_1\gamma_1,$$

$$\alpha_1^4+\beta_1^4+\gamma_1^4=\frac{1}{2}(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)^2,$$

$$\alpha_1^5+\beta_1^5+\gamma_1^5=\frac{5}{2}(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)\alpha_1\beta_1\gamma_1.$$

因 $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=0$. 故以此三者爲根之方程式.當缺乏第二項.假定此方程式爲 $x^3+qx-r=0$. 則 $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ 之值爲 r. 又因 $(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)^2=0$. 是以

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=-2(\alpha_1\beta_1+\beta_1\gamma_1+\gamma_1\alpha_1)=-2q.$$

以下再以 q, r 之項表 $\Sigma\alpha_1^3, \Sigma\alpha_1^4, \Sigma\alpha_1^5$ 之值. 卽可證實上之三個關係式. 其他等勢函數 $\Sigma\alpha_1^6$ $\Sigma\alpha_1^7$……亦可本此法擴充之. 因此種等勢函數皆可以 q, r 之項表示. 因而此種等勢函數. 皆可化爲 $\Sigma\alpha_1^2$ 及 $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ 之項.

此種等勢函數亦可用下法計算. 今說明於次.

自方程式 $x^3=r-qx$. 則凡 $x^p(p>3)$ 之式. 皆可將此方程式自乘若干次. 再以 $1, x, x^2$ 中一值乘之而得. 此時 x^p 可以比 p 次低之多項式表之. 在此多項式中. 凡 x 之乘羃等於或大於 3 之項. 均依前之方程式變化之. 直至 x 之乘羃比3次低而後已. 如此變化之結果. 可將 x^p 化爲次之形狀. $x^p=A+Bx+Cx^2$. 式中 A, B, C 皆爲 q, r 之函數. 今以 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ 三值一一代入上式內而加之. 卽得 $\Sigma\alpha_1^p=3A-2qC$. 學者可依此方法證明次之二關係式

$$\Sigma\alpha_1^7=7q^2r \qquad \Sigma\alpha_1^{11}=11qr(q^3-r^2).$$

第四章

方程式之變化

29. 方程式之變化 今有一方程式於此.縱未知其根之價值.然依初等交換法及根之等勢函數之援助.終可另得一方程式.使此二方程式之根間常有一定關係成立.若能直接解此新方程式.自能隨之解此原方程式.故當原方程式不易解決時.嘗利用此種變化.今將初等變化中最關重要者述之於次.

30. 變根之符號 令 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n$ 爲方程式

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$$

之根.則有恆等式

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)$$

成立.今以 $-y$ 代恆等式內之 x.則不論 n 爲奇數或偶數.常得下之恆等式.

$$y^n-p_1y^{n-1}+p_2y^{n-2}-p_3y^{n-3}+\cdots\cdots\pm p_{n-1}y\mp p_n$$
$$\equiv(y+\alpha_1)(y+\alpha_2)\cdots\cdots(y+\alpha_n)$$

令上式左端爲0.卽得一方程式.其根爲 $-\alpha_1, -\alpha_2, \cdots\cdots -\alpha_n$.故欲作一方程式.其根與原方程式之根等值異號.只須將原方程

式中偶數項之符號一律改變即得.

例　題

(1) 作一方程式.其根與 $x^5+7x^4+7x^3-8x^2+x+1=0$ 方程式之根等值異號.

答 $x^5-7x^4+7x^3+8x^2+x-1=0$.

(2) 變方程式 $x^7+3x^5+x^3-x^2+7x+2=0$ 中根之符號.

令缺項之係數爲0.即得所求之方程式爲 $x^7+3x^5+x^3+x^2+7x-2=0$.

31. 以一定量乘方程式之根. 在恆等式

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n\equiv(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n)$$

中.以 $\frac{y}{m}$ 代其 x. 並以 m^n 乘其兩端.又得一恆等式,

$$y^n+mp_1y^{n-1}+m^2p_2y^{n-2}+\cdots\cdots+m^{n-1}p_{n-1}y+m^np_n$$
$$\equiv(y-ma_1)(y-ma_2)\cdots\cdots(y-ma_n).$$

令上式左端爲0.即得一方程式.其根爲原方程式之根之 m 倍.故欲作一方程式.其根爲原方程式之根之 m 倍.祇須在原方程式內.自第二項起.以 $m, m^2, m^3,\cdots\cdots m^n$ 乘其各項即得.

當方程式中首項係數不爲1時.亦可用此法化之爲1.例如原方程式爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

式中 a_0 不爲1.今先將方程式變之爲

$$x^n+\frac{a_1}{a_0}x^{n-1}+\frac{a_2}{a_0}x^{n-2}+\cdots\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}x+\frac{a_n}{a_0}=0.$$

然後再作一方程式.其根爲上方程式之根之 a_0 倍.則可得一

方程式.其首項係數爲1.又原方程式中若有分數係數.亦可用此法化爲整數係數.

若方程式中有分數係數.則以分母之最小公倍數 m 乘原方程式之根.即可得一方程式.其係數爲整數.實際若用小於 m 之值乘方程式之根.有時亦可將所有分數係數一律除去.觀下例自明.

例題

(1) 變方程式 $3x^4-4x^3+4x^2-2x+1=0$ 爲他一方程式.其首項係數爲1.

以3乘方程式之根.卽得所求之方程式爲 $x^4-4x^3+12x^2-18x+27=0$.

(2) 除去方程式 $x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x-1=0$ 之分數係數.

以6乘其根.即得所求之方程式爲 $x^3-3x^2+24x-216=0$.

(3) 解除方程式 $x^3-\frac{5}{2}x^2-\frac{7}{18}x+\frac{1}{108}=0$ 之分數係數

以 m 乘上方程式之根.則上方程式可變爲

$$x^3-m\frac{5}{2}x^2-m^2\frac{7}{2\cdot 3^2}x+m^3\frac{1}{2^2 3^3}=0.$$

因 m 爲6.便可將各分母消去.故以6乘上方程式之根巳足.故分解各分母爲質因子時.便知比最小公倍數甚小之數.亦能勝此任務.

(4) 解除方程式 $x^4+\frac{3}{10}x^2+\frac{13}{25}x+\frac{77}{1000}=0$ 之分數係數.

視 x^3 項之係數爲0.再以10乘其根

答 $x^4+30x^2+520x+770=0$.

(5) 解除方程式 $x^4-\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{12}x^2-\frac{13}{900}=0$ 之分數係數.

答 $x^4-25x^3+375x^2-11700=0$.

32. 逆根及逆方程式　以$\frac{1}{y}$代30節恆等式中之x.則得恆等式,

$$\frac{1}{y^n}+p_1\frac{1}{y^{n-1}}+p_2\frac{1}{y^{n-2}}+\cdots+p_{n-1}\frac{1}{y}+p_n$$

$$\equiv\left(\frac{1}{y}-\alpha_1\right)\left(\frac{1}{y}-\alpha_2\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{y}-\alpha_n\right)$$

$$\equiv\frac{1}{y^n}(1-\alpha_1 y)(1-\alpha_2 y)\cdots\cdots(1-\alpha_n y)$$

$$\equiv\frac{(-1)^n p_n}{y^n}\left(\frac{1}{\alpha_1}-y\right)\left(\frac{1}{\alpha_2}-y\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{\alpha_n}-y\right)$$

$$\equiv\frac{p_n}{y^n}\left(y-\frac{1}{\alpha_1}\right)\left(y-\frac{1}{\alpha_2}\right)\cdots\cdots\left(y-\frac{1}{\alpha_n}\right)$$

以y^n乘兩端.又以p_n除之.則得恆等式,

$$y^n+\frac{p_{n-1}}{p_n}y^{n-1}+\frac{p_{n-2}}{p_n}y^{n-2}+\cdots\cdots+\frac{p_1}{p_n}y+\frac{1}{p_n}$$

$$\equiv\left(y-\frac{1}{\alpha_1}\right)\left(y-\frac{1}{\alpha_2}\right)\cdots\cdots\left(y-\frac{1}{\alpha_n}\right)$$

是故在原方程式中,以$\frac{1}{y}$代其x.又以y^n乘其結果.即得一新方程式.其根爲原方程式之根之逆數.

有一方程式於此.若以其根之逆數爲根作一新方程式.此新方程式,仍與原方程式一致.則稱此原方程式爲逆方程式.由上之證明.知原方程式爲逆方程式時.其係數與係數間須滿足次之條件.

$$\frac{p_{n-1}}{p_n}=p_1\quad\frac{p_{n-2}}{p_n}=p_2\quad\frac{p_{n-3}}{p_n}=p_3\cdots\cdots\frac{1}{p_n}=p_n.$$

由此最後條件.可得 $p_n^2=1$. $p_n=\pm1$. 若 $p_n=1$. 則稱原方程式爲第一種逆方程式.若 $p_n=-1$. 則稱原方程式爲第二種逆方程式.

(1) 若 $p_n=1$. 則 $p_{n-1}=p_1,\quad p_{n-2}=p_2,\quad p_{n-3}=p_3,\cdots\cdots$

故在第一種逆方程式中.自首項起.各項之係數.與自末項起相當各項之係數同號等值.

(2) 若 $p_n=-1$. 則 $p_{n-1}=-p_1,\quad p_{n-2}=-p_2,\quad p_{n-3}=-p_3,\cdots\cdots$

故在第二種逆方程式中.自首項起各項之係數.與自末項起相當各項之係數異號等值.於此當注意者.若方程式之次數 n 爲偶數 $2m$. 則有 $p_m=-p_{2m-m}$, 卽 p_m 爲 0. 故在第二種偶次逆方程式中缺少中項.

若 a 爲逆方程式之根.則 $\dfrac{1}{a}$ 亦爲逆方程式之根.由是逆方程式有 a 一根.即有 $\dfrac{1}{a}$ 一根與之相配.不論 a 爲正負整分.常有此性質.其在奇次逆方程式.則常有一根與其逆根相同.此根不爲 1 則爲 -1. 無待考慮.若方程式爲第一種奇次式.則有 (-1) 一根.因而此方程式左端有 $x+1$ 一因子.除去此因子.則得第一種偶次逆方程式.若方程式爲第二種奇次逆方程式.則有 (1) 一根.因而方程式左端有 $x-1$ 一因子.除去此因子.仍得一第一種偶次逆方程式.若方程式爲第二種偶次逆方程式.則有 1 及 -1 二根.故此方程式左端有 x^2-1 一因子.除去此因子.又得一第一種偶次逆方程式.由是各種逆方程式皆

可化爲第一種偶次逆方程式.一般稱此第一種偶次逆方程式爲模範逆方程式.今說明其理由如次.

第一種奇次逆方程式一般可書爲

$$x^{2m+1}+1+p_1x(x^{2m-1}+1)+p_2x^2(x^{2m-3}+1)+\cdots\cdots\cdots\cdots=0 \qquad (1)$$

第二種奇次逆方程式一般可書爲

$$x^{2m+1}-1+p_1x(x^{2m-1}-1)+p_2x^2(x^{2m-3}-1)+\cdots\cdots\cdots\cdots=0 \qquad (2)$$

第二種偶次逆方程式一般可書爲

$$x^{2m}-1+p_1x(x^{2m-2}-1)+p_2x^2(x^{2m-4}-1)+\cdots\cdots\cdots\cdots=0 \qquad (3)$$

由此可見,(1)式中有 -1 一根.(2)式中有 1 一根.(3)式中有 1 及 -1 二根.故(1)式中有 $x+1$ 一因子.(2)式中有 $x-1$ 一因子.(3)式中有 x^2-1 一因子.自此三式中除去此等因子.皆得一方程式.其絕對項爲 1.故此方程式當爲第一種偶次逆方程式.

例　題

(1) 求作一方程式,其根與 $x^4-3x^3+7x^2+5x-2=0$ 方程式中根之逆數同.

答 $2y^4-5y^3-7y^2+3y-1=0$

(2) 將下之逆方程式變爲第一種偶次式.

$$x^6+\frac{5}{6}x^5-\frac{22}{3}x^4+\frac{22}{3}x^2-\frac{5}{6}x-1=0$$

答 $x^4+\frac{5}{6}x^3-\frac{19}{3}x^2+\frac{5}{6}x+1=0$

33. 增減方程式之根　以 $y+h$ 代 $f(x)=0$ 式中之 x.其所得 y 之方程式與 x 之方程式比較.若 h 爲正.則 y 方程式之

根比 x 方程式之根減少 $|h|$. 若 h 爲負.則增加 $|h|$. 依 6 節理.此 y 方程式爲

$$f(h)+f'(h)y+\frac{f''(h)}{2!}y^2+\frac{f'''(h)}{3!}y^3+\cdots\cdots=0.$$

故求此方程式時.須先將原函數之逐次導來函數一一求出.又以 h 之值代入原函數及其逐次導來函數內而計算之.若用下述方法.則可免除前之困難.今表明於次.

令原方程式爲 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ (1)

今以 $y+h$ 代上式之 x. 令其結果爲

$$A_0y^n+A_1y^{n-1}+A_2y^{n-2}+\cdots\cdots+A_{n-1}y+A_n=0. \qquad (2)$$

因 $y=x-h$. 故(2)式之左端可化爲

$$A_0(x-h)^n+A_1(x-h)^{n-1}+A_2(x-h)^{n-2}+\cdots+A_{n-1}(x-h)+A_n. \qquad (3)$$

(3) 式當與(1)式之左端完全一致.故以 $x-h$ 除(1)式.其剩餘當爲 A_n. 其商當爲

$$A_0(x-h)^{n-1}+A_1(x-h)^{n-2}+\cdots\cdots+A_{n-2}(x-h)+A_{n-1}.$$

又以 $x-h$ 除前商.則其剩餘當爲 A_{n-1}. 其商當爲

$$A_0(x-h)^{n-2}+A_1(x-h)^{n-3}+\cdots\cdots+A_{n-3}(x-h)+A_{n-2}.$$

以後繼續進行.可將 y 方程式內各係數一一求出. A_0 與 a_0 相等.自不待論.由是依 8 節方法.可將此等係數迅速發見.觀下例題.即可釋然

例題

(1) 求作一方程式,其根比方程式 $x^4-5x^3+7x^2-17x+11=0$ 之根少 4.

以 $x-4$ 除原多項式.其第一商為 x^3-x^2+3x-5. 剩餘為 $-9.(=A_4)$ 又以 $x-4$ 除第一商.其第二商為 $x^2+3x+15$. 剩餘為 $55.(=A_3)$ 再以 $x-4$ 除第二商.其第三商為 $x+7$. 剩餘為 $43.(=A_2)$ 最後以 $x-4$ 除第三商.其剩餘為 $11.(=A_1)$ 其商為 $1.(=A_0)$ 故所求之方程式為

$$y^4+11y^3+43y^2+55y-9=0.$$

今將算式列下.

$$\begin{array}{cccccc}
1 & -5 & 7 & -17 & 11 \\
 & \underline{4} & \underline{-4} & \underline{12} & \underline{-20} \\
 & -1 & 3 & -5 & -9 \\
 & \underline{4} & \underline{12} & \underline{60} & \\
 & 3 & 15 & 55 & \\
 & \underline{4} & \underline{28} & & \\
 & 7 & 43 & & \\
 & \underline{4} & & & \\
 & 11 & & &
\end{array}$$

(2) 作一方程式.其根比方程式 $x^5+4x^3-x^2+11=0$ 之根少 3.

答　$y^5+15y^4+94y^3+305y^2+507y+353=0$

原方程式中缺少 x^4 項及 x 項.故應用 8 節除法時.須將其係數如次書之.

1,　0,　4,　-1,　0,　11.

今將算式列之於次.

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 11 \\
 & \underline{3} & \underline{9} & \underline{39} & \underline{114} & \underline{342} \\
 & 3 & 13 & 38 & 114 & 353 \\
 & \underline{3} & \underline{18} & \underline{93} & \underline{393} & \\
 & 6 & 31 & 131 & 507 & \\
 & \underline{3} & \underline{27} & \underline{174} & & \\
 & 9 & 58 & 305 & & \\
 & \underline{3} & \underline{36} & & & \\
 & 12 & 94 & & & \\
 & \underline{3} & & & & \\
 & 15 & & & &
\end{array}$$

(3) 作一方程式.其根比方程式 $4x^5-2x^3+7x-3=0$ 之根多 2.

本題之乘數為 -2.

答 $4y^5-40y^4+158y^3-308y^2+303y-129=0.$

(4) 作一方程式.其根比方程式 $3x^4+7x^3-15x^2+x-2=0$ 之根多 7.

答 $3y^4-77y^3+720y^2-2876y+4058=0.$

(5) 作一方程式.其根比方程式 $5x^3-13x^2-12x+7=0$ 之根少 23.

先作比原方程式之根少 20 之方程式.次作比第二方程式之根少 3 之方程式.此最後所得之方程式.卽所求之方程式.

5	−13	−12	7
	100	1740	34560
	87	1728	34567
	100	3740	19122
	187	5468	53689
	100	906	
	287	6374	
	15	951	
	302	7325	
	15		
	317		
	15		
	332		

答 $5y^3+332y^2+7325y+53686=0$

34. 消項 今有一方程式於此.若欲消去其中某一項.亦可用前節方法.今述於次.

命將 y 之方程式 $f(y+h)=0$ 依 y 之降冪書之爲

$$a_0y^n+(na_0h+a_1)y^{n-1}+\left\{\frac{n(n-1)}{2!}a_0h^2+(n-1)a_1h+a_2\right\}y^{n-2}+\cdots\cdots=0$$

若選擇 h 之值.使滿足關係式 $na_0h+a_1=0$. 則此方程式缺少第二項.此時 h 有一值.若選擇 h 之值.使滿足關係式 $\frac{n(n-1)}{2!}a_0h^2+(n-1)a_1h+a_2=0$. 則此方程式缺少第三項.此時 h 可有二值.若欲令此方程式缺乏第四項.祗須令 y^{n-3} 之係數爲 0. 解此三次方程式.而求 h 之值.此時 h 可有三值.若欲令上方程

式無常數項祇須求 h 之值.令滿足於方程式 $f(h)=0$ 即得.此時 h 爲原方程式中 n 個根內任一值均可.即此時 h 可有 n 個值.

例　題

(1) 變方程式 $x^3-6x^2+4x-17=0$ 爲缺少第二項之方程式.

$na_0h+a_1=0,\ 3h-6=0,\ h=2$ 自原方程式之根中減去 2, 卽得其新方程式爲 $y^3-8y-15=0$.

(2) 變方程式 $x^4+8x^3+x-5=0$ 爲缺少第二項之方程式.

自原方程式之根中加 2, 卽得.

答 $y^4-24y^2+65y-55=0$.

(3) 變方程式 $x^4-4x^3-18x^2-3x+2=0$ 爲缺少第三項之方程式.

自 h 之二次方程式 $6h^2-12h-18=0$ 而得 h 之二值爲 3 與 -1. 故變此方程式.有二徑可循.一則自原方程式之根內減去 3. 一則自原方程式之根內增上 1. 今將此二結果書之於次,

$$y^4+8y^3-111y-196=0 \quad y^4-8y^3+17y-8=0.$$

35. 二項係數 在代數上多數理論中.常將多項式 $f(x)$ 書作次之形狀

$$a_0x^n+na_1x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+na_{n-1}x+a_n$$

式中各項之文字係數.用 $(1+x)^n$ 展開式中相當項之數字係數置於其前.27 節例 13, 16 即其最顯明之例.任何多項式.皆可如此書之.

今採用下之記號.

$$U_n=a_0x^n+na_1x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+na_{n-1}x+a_n$$

卽於文字 U 右例下方附記數字 n. 以表二項係數之 n 次多項式. 則變 n 爲 $n-1, n-2, \cdots\cdots 3, 2, 1$ 時. 同時有下之關係式成立.

$$U_{n-1}=a_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}a_2x^{n-3}+\cdots\cdots(n-1)a_{n-2}x+a_{n-1}$$

$$\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$U_3=a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3$$

$$U_2=a_0x^2+2a_1x+a_2$$

$$U_1=a_0x+a_1$$

$$U_0=a_0$$

任意多項式若用二項係數表之.則其導來函數.可直接求得.例如 U_n 之一次導來函數可書爲次之形狀.

$$n\left\{a_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}a_2x^{n-3}+\cdots\cdots+a_{n-1}\right\}$$

卽 U_n 之一次導來函數爲 nU_{n-1}. 若令 n 爲 $n-1$. 又得 U_{n-1} 之一次導來函數爲 $(n-1)U_{n-2}$. 故二項係數之任意多項式.求其導來函數.可適用本變數 x 求 x^n 之導來函數之同一法則. 此時附記 U 後之數字 n 與 x^n 之指數相當. 例如 U_4 之導來函數爲 $4U_3$. 學者可自證之.

今以 $y+h$ 代多項式 U_n 中之 x. 則此多項式 U_n 變爲次之多項式.

$$A_0y^n+nA_1y^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}A_2y^{n-2}+\cdots\cdots+nA_{n-1}y+A_n$$

式中 $A_0, A_1,\cdots A_n$ 爲以 h 代 $U_0, U_1, U_2,\cdots U_n$ 中之 x 所得之結果.即

$$A_0=a_0,\ A_1=a_0h+a_1,\ A_2=a_0h^2+2a_1h+a_2,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

今證明於次.

展開 $f(y+h)$ 爲次之形狀.

$$f(h)+\frac{f_1(h)}{1!}y+\frac{f_2(h)}{2!}y^2+\frac{f_3(h)}{3!}y^3+\cdots\cdots+\frac{f_{n-1}(h)}{(n-1)!}y^{n-1}+\frac{f_n(h)}{n!}y^n$$

式中 $f(h)$ 爲以 h 代入 U_n 式中之 x 所得之值.故與 A_n 相等.$f_1(h)$ 爲 $f(h)$ 之一次導來函數.依上規則,其值與 nA_{n-1} 之值等.$f_2(h)$ 又爲 $f_1(h)$ 之一次導來函數.依同理,其值與 $n(n-1)A_{n-2}$ 之值等.以下類推,今將 $A_n, nA_{n-1}, n(n-1)A_{n-2},\cdots\cdots$ 代上式中之 $f(h)$ $f_1(h), f_2(h)\cdots\cdots$.即得前之結果.

例　題

(1) 以 $y+h$ 代多項式 $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3$ 之 x, 其結果爲何.

答　$a_0y^3+3(a_0h+a_1)y^2+3(a_0h^2+2a_1h+a_2)y+a_0h^3+3a_1h^2+3a_2h+a_3$

(2) 消去方程式 $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$ 中第二項.

自例(1)之結果中,令 $a_0h+a_1=0$, 卽 $h=-\frac{a_1}{a_0}$.將 h 之值代入 A_2A_3 二式內,卽得所求之方程式爲 $y^3+\frac{3(a_0a_2-a_1^2)}{a_0^2}y+\frac{a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3}{a_0^3}=0.$

(3) 若 h 之值能令 $U_n=0$ 方程式中第二項第三項同時爲 0. 其條件爲何

此時對於 h 之同一值, A_1 與 A_2 皆爲 0. 自方程式 $A_1=0, A_2=0$ 消去 h. 卽得所求之條件.

答　$a_0a_2-a_1^2=0$.

(4) 消去方程式 $3x^3+6x^2+12x-19=0$ 中第二項.並由此求原方程式之根.

自方程式 $a_0h+a_1=0$ 則 $h+2=0$. 亦即 $h=-2$. 故 -2 之值代入例(1)之結果內.能將其第二項 A_1 消去.因原方程式能滿足例(3)條件.故 -2 之值同時又能消去第 3 項 A_3. 其最後結果爲 $y^3-27=0$. 因 $x=y-2$. 故自最後方程式之各根內減去 2. 卽得原方程式之各根.

(5) 若 h 之值同時能令 $U_n=0$ 方程式中第二項第四項爲 0. 其條件爲何.

此時對於 h 同一之值. A_1 與 A_3 皆爲 0. 故自 $A_1=0$, $A_3=0$ 方程式內消去 h. 卽得所求之條件.卽在 $a_0h+a_1=0$, $a_0h^3+3a_1h^2+3a_2h+a_3=0$ 二方程式中消去 h. 其條件爲 $a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3=0$.

注意: 若四次方程式之係數適合此條件.則可同時消去方程式中二四兩項.而得一 y^2 二之次方程式.由是先求 y 之值. 然後再求 x 之值. 卽得原方程式之根.

(6) 消去方程式 $x^4+16x^3+72x^2+64x-129=0$ 中第二項.並由此求原方程式之根.

y 方程式爲　$y^4-24y^2-1=0$.

(7) 以上同樣之方法解方程式 $x^4+20x^3+143x^2+430x+462=0$.

答　其根爲　-7,　-3,　$-5\pm\sqrt{3}$

(8) 若 h 之值同時能令 $U_n=0$ 方程式中二五兩項爲 0. 其條件爲何.

答　$a_0^3a_4-4a_0^2a_1a_3+6a_0a_1^2a_2-3a_1^4=0$

36. 三次方程式

以 $y+h$ 代方程式

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0 \qquad (1)$$

中之 x. 則得　$a_0y^3+3A_1y^2+3A_2y+A_3=0$

式中 A_1, A_2, A_3 代表 35 節之值. 若 y 方程式內缺少第二項. 則

$$A_1=0 \quad a_0h+a_1=0 \quad h=-\frac{a_1}{a_0}.$$

以 h 之值代入 A_2, A_3 中.依 35 節例(2),則

$$a_0A_2=a_0a_2-a_1^2,\quad a_0^2A_3=a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3.$$

此時 y 方程式變爲

$$y^3+\frac{3}{a_0^2}(a_0a_2-a_1^2)\,y+\frac{1}{a_0^3}(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3)=0.$$

式中所含係數函數.在方程式理論中佔重要位置.常用文字代表之.今示如次.

$$a_0a_2-a_1^2=H,\quad a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3=G,$$

$a_1^2=a_0a_2$

此時 y 方程式可書爲

$$y^3+\frac{3}{a_0^2}Hy+\frac{1}{a_0^3}G=0. \tag{2}$$

若以 a_0 乘其根.上方程式又可變爲

$$z^3+3Hz+G=0. \tag{3}$$

式中 $z=a_0y=a_0\left(x+\dfrac{a_1}{a_0}\right)=a_0x+a_1$.

以 a_0^2 乘原多項式.其結果與 $(a_0x+a_1)^3+3H(a_0x+a_1)+G$ 完全相同.學者可自證之.

若 x 方程式之根爲 α, β, γ. 則 y 方程式之根爲 $\alpha+\dfrac{a_1}{a_0}, \beta+\dfrac{a_1}{a_0}$, $\gamma+\dfrac{a_1}{a_0}$. 又因 $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{3a_1}{a_0}$.則 $\alpha+\dfrac{a_1}{a_0}=\dfrac{1}{3}\left(3\alpha+\dfrac{3a_1}{a_0}\right)=\dfrac{1}{3}(3\alpha-\alpha-\beta-\gamma)$,

即 $\alpha+\dfrac{a_1}{a_0}=\dfrac{1}{3}(2\alpha-\beta-\gamma)$. 同理 $\beta+\dfrac{a_1}{a_0}=\dfrac{1}{3}(2\beta-\gamma-\alpha)$, $\gamma+\dfrac{a_1}{a_0}=\dfrac{1}{3}(2\gamma-\alpha-\beta)$.

因 $\alpha+\dfrac{a_1}{a_0}, \beta+\dfrac{a_1}{a_0}, \gamma+\dfrac{a_1}{a_0}$ 爲 y 方程式之根.故由 y 方程式可將等勢函數

$$\Sigma(2\alpha-\beta-\gamma)(2\beta-\gamma-\alpha),\ \Sigma(2\alpha-\beta-\gamma)(2\beta-\gamma-\alpha)(2\gamma-\alpha-\beta)$$

之值求得.即此二等勢函數可以 y 方程式中係數 a_0, H, G 之項表之.

有 n 次方程式於此.其根爲 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n$. 今變之爲缺少第二項之方程式.其根爲 $\alpha'_1, \alpha'_2, \cdots\cdots \alpha'_n$. 則前方程式中任意二根之差.與後方程式中相當二根之差相等.由是前方程式之根差等勢函數.亦與後方程式之根差等勢函數相等.但後之等勢函數.可以後方程式之係數表之.由是前之等勢函數.亦可以後方程式之係數表之.例如有三次方程式於此.其根差之等勢函數.可以 a_0, H, G 之項表之.

37. 四次方程式 以 $y+h$ 代方程式

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$$

中之 x. 則得 y 之方程式爲

$$a_0y^4+4A_1y^3+6A_2y^2+4A_3y+A_4=0.$$

若 y 方程式缺少第二項.則

$$A_1=0,\quad a_0h+a_1=0,\quad h=-\frac{a_1}{a_0}.$$

以 h 之值代入 A_2, A_3, A_4 三式中.則得

$$a_0^3A_4=a_0^3a_4-4a_0^2a_1a_3+6a_0a_1^2a_2-3a_1^4.$$

A_2, A_3 之值與前節之值同.此時 y 方程式成爲

$$y^4+\frac{6}{a_0^2}Hy^2+\frac{4}{a_0^3}Gy+\frac{1}{a_0^4}(a_0^3a_4-4a_0^2a_1a_3+6a_0a_1^2a_2-3a_1^4)=0.$$

若以某文字代表上方程式之絕對項.則得3種係數函數.

凡四次方程式之根差等勢函數.概可以此三文字表之.但實際上常視此絕對項由 H 與他之係數函數而成.今說明於次.

因 $a_0{}^3a_4-4a_0{}^2a_1a^3+6a_0a_1{}^2a_2-3a_1{}^4\equiv a_0{}^2\,(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2{}^2)-3(a_0a_2-a_1{}^2)^2$, 此絕對項含有 a_0, H 及他之係數函數 $a_0a_4-4a_1a_3+3a_2{}^2$, 此係數函數在四次方程式理論中甚有價值.常以字母 I 表之.由是

$$a_0{}^3a_4-4a_0{}^2a_1a_3+6a_0a_1{}^2a_2-3a_1{}^4\equiv a_0{}^2I-3H^2.$$

y 方程式今可寫為

$$y^4+\frac{6H}{a_0{}^2}y^2+\frac{4G}{a_0{}^3}y+\frac{a_0{}^2I-3H^2}{a_0{}^4}=0. \tag{1}$$

今以 a_0 乘上方程式之根又得

$$z^4+6Hz^2+4Gz+a_0{}^2I-3H^2=0. \tag{2}$$

z 之值與前節同.仍為 a_0x+a_1. 以 $a_0{}^3$ 乘原四次多項式所得之結果.與多項式 $(a_0x+a_1)^4+6H(a_0x+a_1)^2+4G(a_0x+a_1)+a_0{}^2I-3H^2$ 絕對相同.

此外尚有一係數函數在四次方程式中甚有價值.此函數曾見27節例(18).即

$$a_0a_2a_4+2a_1a_2aa_3-a_0a_3{}^2-a_1{}^2a_4-a_2{}^3.$$

通常以字母 J 表之.自該例即知 J 為原方程式之根差等勢函數.能以 a_0, H, G, I 之項表之.於是有恆等式,

$$a_0{}^3J\equiv a_0{}^2HI-G^2-4H^3.$$

學者可自證之.

上之恆等式.又可如次求得.若以係數多項式表原方程式

之根差等勢函數.則消去原方程式中第二項時.此新方程式之相當係數多項式.仍與原方程式之係數多項式等.即將 a_1 變爲 0, a_2 變爲 A_2, a_3 爲 A_3, a_4 爲 A_4 則

$$a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4-a_2^3\equiv a_0A_2A_4-a_0A_3^2-A_2^3.$$

若將 A_2, A_3, A_4 以 H, G, I 之項表之.又得上之恆等式通例如次書之

$$G^2+4H^3\equiv a_0^2(HI-a_0J)$$

原方程式之根差等勢函數.可以 y 方程式中 a_0, H, G, I 之項表之.

若原方程式之根爲 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. 則 y 方程式之根爲

$$\frac{1}{4}(3\alpha-\beta-\gamma-\delta),\ \frac{1}{4}(3\beta-\gamma-\delta-\alpha),\ \frac{1}{4}(3\gamma-\delta-\alpha-\beta),\ \frac{1}{4}(3\delta-\alpha-\beta-\gamma).$$

自 y 方程式即可推知此四根之和爲 0. 其中每兩個之積之和爲 $\frac{6H}{a_0^2}$. 每三個之積之和爲 $-\frac{4G}{a_0^3}$. 對於此四根之連乘積.則有關係式

$$a_0^4(3\alpha-\beta-\gamma-\delta)(3\beta-\gamma-\delta-\alpha)(3\gamma-\delta-\alpha-\beta)(3\delta-\alpha-\beta-\gamma)=256(a_0^2I-3H^2).$$

38. 等比異列變化 33 節所討論之變化.可視爲本節變化之特別場合.在此變化中.原變數 x 及新變數 y 間有次之關係 $y=\frac{\lambda x+\mu}{\lambda' x+\mu'}$.

若 $\lambda=1, \mu=-h, \lambda'=0, \mu'=1$. 即得 33 節之場合 $y=x-h$.

若以 y 表 x. 又有關係式 $x=\frac{\mu-\mu' y}{\lambda' y-\lambda}$. 若將此 x 之式代入原方

程式.結果即得 y 之 n 次方程式.

令 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\cdots$ 爲原方程式之根. $\alpha',\beta',\gamma',\delta'$ 爲新方程式之根.則自

$$\alpha'=\frac{\lambda\alpha+\mu}{\lambda'\alpha+\mu'},\quad \beta'=\frac{\lambda\beta+\mu}{\lambda'\beta+\mu'}\cdots\cdots\cdots$$

可導出 $$\alpha'-\beta'=\frac{(\lambda\mu'-\lambda'\mu)(\alpha-\beta)}{(\lambda'\alpha+\mu)(\lambda'\beta+\mu')}\cdots\cdots\cdots$$

故在原方程式中任意取四根 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. 其與新方程式中相當四根 $\alpha',\beta',\gamma',\delta'$ 間有次之關係 $\dfrac{(\alpha'-\beta')(\gamma'-\delta')}{(\alpha'-\gamma')(\beta'-\delta')}=\dfrac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}$.

有一直線於此.在其上取一定點.及一列之點.假定自定點至此一列點中各點之距離.皆爲原方程式之根.今在此直線上.依上固有關係.作出此列點中各點之相應點.則自定點至此一列相應各點之距離.當爲新方程式之根.且前列中任意四點之截比.又與後列中相應四點之截比等.因有此種關係.故稱之爲等比異列變化.

上之變化.又可以 $Axy+Bx+Cy+D=0$ 表之.

39. 等勢函數之變化　令 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\cdots$ 爲原方程式之根.今欲將原方程式變爲一新方程式.其根爲原方程式中根之有理函數 $\phi(\alpha,\beta,\gamma,\cdots)$. (但 ϕ 可含原方程式中一切根或其間若干個根.) 則先將此新方程式之一切根 $\phi(\alpha\beta\gamma\cdots)$, $\phi(\beta\gamma\delta\cdots)\cdots\cdots$ 一一作出.再作 $y-\phi(\alpha\beta\gamma\cdots)$, $y-\phi(\beta\gamma\delta\cdots)\cdots\cdots$ 之連乘積.積中 y 之各乘冪之係數皆爲原方程式中根之等勢函數.可以原方程式之係數表之.故將此等等勢函數一律換作原方程式之係數多項式時.即得所求之新方程式.

例題

(1) 若方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根爲 α,β,γ. 求以 $\alpha^2,\beta^2,\gamma^2$ 爲根之方程式.

令所求之方程式爲 $y^3+Py^2+Qy+R=0$.

則 $$-P=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\Sigma\alpha^2,\qquad Q=\Sigma\alpha^2\beta^2,\qquad -R=\alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

今更求 $\Sigma\alpha^2$, $\Sigma\alpha^2\beta^2$, $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ 之值.易知爲

$$\Sigma\alpha^2=p^2-2q,\qquad \Sigma\alpha^2\beta^2=q^2-2pr,\qquad \alpha^2\beta^2\gamma^2=r^2.$$

一一代入上式.卽得所求之方程式爲

$$y^3-(p^2-2q)y^2+(q^2-2pr)y-r^2=0.$$

(2) 在同一場合.求作以 $\alpha^3,\beta^3,\gamma^3$ 爲根之方程式.

答 $y^3+(p^3-3pq+3r)y^2+(q^3-3pqr+3r^2)y+r^3=0.$

(3) 若 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 爲方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 之根.求以 $\alpha^2,\beta^2,\gamma^2,\delta^2$ 爲根之方程式.

令所求之方程式爲 $y^4+Py^3+Qy^2+Ry+S=0$.

則 $$-P=\Sigma\alpha^2,\qquad Q=\Sigma\alpha^2\beta^2,\qquad -R=\Sigma\alpha^2\beta^2\gamma^2,\qquad S=\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2.$$

與27節例(8),(17)比較.卽得 $\Sigma\alpha^2\beta^2$, $\Sigma\alpha^2\beta^2\gamma^2$ 之值.

答 $y^4-(p^2-2q)y^3+(q^2-2pr+2s)y^2-(r^2-2qs)y+s^2=0.$

[附錄] $\Sigma\alpha^2\beta^2\gamma^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\delta^2}\right).$

(4) 若 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 爲方程式 $a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$ 之根.求以 λ,μ,ν 爲根之方程式.但 $\lambda=\beta\gamma+\alpha\delta$, $\mu=\gamma\alpha+\beta\delta$, $\nu=\alpha\beta+\gamma\delta$.

参攷27節例(17).

答 $y^3-\frac{6a_2}{a_0}y^2+\frac{4}{a_0^2}(4a_1a_3-a_0a_4)y-\frac{8}{a_0^3}(2a_0a_3^2-3a_0a_2a_4+2a_1^2a_4)=0$

(5) 自例(4)之結果中以$\frac{a_0}{2}$乘其各根.然後消去其第二項.可得次之方程式.試證明之. $z^3-Iz+2J=0$

40. 變換方程式以其根之乘冪 有一方程式於此.今欲作一新方程式.以其根之乘冪爲根.若用前節方法.計算上甚感困難.最敏捷之方法.祇用一乘法已足.但此法一般須有解 $x^n-1=0$ 二項 n 次方程式之智識.方能適用.下例第用二項二次式及二項三次式解決此種問題.學者於此亦可略知梗概矣.

例題

(1) 令 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$ 方程式之根爲 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\alpha_n$. 求以 $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \cdots\cdots\alpha_n^2$ 爲根之方程式.

先作恆等式

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n). \qquad (A)$$

令以 $-x$ 代恆等式中之 x. 依 30 節.則有

$$x^n-p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}-\cdots\cdots\mp p_{n-1}x\pm p_n\equiv(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\cdots\cdots(x+\alpha_n). \qquad (B)$$

(A), (B) 相乘.又得

$$(x^n+p_2x^{n-2}+p_4x^{n-4}+\cdots\cdots)^2-(p_1x^{n-1}+p_3x^{n-3}+\cdots\cdots)^2\equiv(x^2-\alpha_1^2)(x^2-\alpha_2^2)\cdots\cdots(x^2-\alpha_n^2).$$

故上恆等式左端祇含有 x 之偶次乘冪.今以 y 代 x^2. 則得次之恆等式.

$$y^n+(2p_2-p_1^2)y^{n-1}+(p_2^2-2p_1p_3+2p_4)y^{n-2}+\cdots\cdots\equiv(y-\alpha_1^2)\cdots\cdots(y-\alpha_2^2)\cdots\cdots(y-\alpha_n^2)$$

令左端之多項式爲 0. 卽得所求之方程式.

[注意] 由上之變化.能將原方程式中實根數目之極限求出.因實根之平方必爲正.故原方程式中實根之數目.不能比最後方程式中正根之數目多.

(2) 作一方程式,以 $x^3-x^2+8x-6=0$ 方程式中根之平方爲根.

答 $y^3+15y^2+52y-36=0$

依符號規則.此最後方程式至多祇能有一正根.故原方程式有二共軛虛根.

(3) 以方程式 $x^5+x^3+x^2+2x+3=0$ 中根之平方爲根.求作一方程式.

答 $y^5+2y^4+5y^3+3y^2-2y-9=0$

依符號定則.原方程式有四個虛根.

(4) 用例(1)之方法.證實 39 節 (1), (3) 兩例.

(5) 以方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$ 中根之立方爲根.求作一方程式

以 $f(x)$, $f(-x)$ 二者相乘.卽得例(1)之結果.式中變數 x 及 $-x$, 乃以方程式 $x^2-1=0$ 中二根 1 及 -1 與 x 相乘所得之積.今以方程式 $x^3-1=0$ 之三根 $1, \omega, \omega^2$ 乘 x. 又以 $x, \omega x, \omega^2 x$ 爲變數.作多項式 $f(x)$, $f(\omega x)$, $f(\omega^2 x)$. 然後作此三者之連乘積.卽得本題之結果.今詳述於次.

將多項式 $f(x)$ 書爲次之形狀.

$$(p_n+p_{n-3}x^3+\cdots\cdots)+x(p_{n-1}+p_{n-4}x^3+\cdots\cdots)+x^2(p_{n-2}+p_{n-5}x^3+\cdots\cdots)$$

今簡之爲 $P+xQ+x^2R$. 但 P, Q, R 三者均爲 x^3 之函數.

則
$$P+xQ+x^2R\equiv(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n). \tag{1}$$

以 ωx 及 $\omega^2 x$ 代上式之 x. 又得次之兩恆等式.

$$P+\omega xQ+\omega^2x^2R\equiv(\omega x-a_1)(\omega x-a_2)\cdots\cdots(\omega x-a_n) \tag{2}$$

$$P+\omega^2xQ+\omega x^2R\equiv(\omega^2x-a_1)(\omega^2x-a_2)\cdots\cdots(\omega^2x-a_n). \tag{3}$$

因 P, Q, R 三者皆爲 x^3 之函數.故以 ωx 及 $\omega^2 x$ 代其中之 x. 其值仍不變.

今將 (1), (2), (3) 三式兩端連乘.並注意 26 節例(4)之結果.卽得

$$P^3+x^3Q^3+x^6R^3-3x^3PQR\equiv(x^3+a_1^3)(x^3-a_2^3)\cdots\cdots(x^3-a_n^3).$$

上式左端各項中 x 之乘冪.常爲 3 之整倍數.故以 y 代左端之 x^3. 令之爲 0. 卽得所求之方程式.

(6) 以方程式 $x^4-x^3+2x^2+3x+1=0$ 中根之立方爲根.求作一方程式.

答 $y^4+14y^3+50y^2+6y+1=0$

(7) 用例(5)之方法證實 39 節例(2)之結果.

(8) 以方程式 $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ 中根之立方爲根.求作一方程式.

答 $a^3y^3+3(a^2d+9b^3-9abc)y^2+3(ad^2+9c^3-9bcd)y+d^3=0$

41. 一般之變化 在一般問題中.若欲由變數 x 之原方程式變爲變數 y 之新方程式.而 x 與 y 間又有關係式 $\phi(x,y)=0$ 存在.則自 $\phi(x,y)=0$ 式中求得 x 之式.以之代入原方程式內.卽得吾人所求之 y 方程式.或自 $f(x)=0,\ \phi(x,y)=0$ 二式中消去 x 亦可.例如有方程式

$$x^3-px^2+qx-r=0$$

於此.求以其中每對根之和爲根作一新方程式.因原方程式可取出三對根.則此新方程式當爲三次.且

$$\left.\begin{aligned}y_1&=x_2+x_3=x_1+x_2+x_3-x_1=p-x_1\\y_2&=x_3+x_1=x_2+x_3+x_1-x_2=p-x_2\\y_3&=x_1+x_2=x_3+x_1+x_2-x_3=p-x_3.\end{aligned}\right\}$$

故此時 x 與 y 之關係式爲 $y=p-x$. 或 $x=p-y$. 故以 $p-y$ 代原式中之 x. 卽得所求之結果.

例　題

(1) 若 α,β,γ 爲方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ 之根.求以 $\beta\gamma+\frac{1}{\alpha},\gamma\alpha+\frac{1}{\beta},\alpha\beta+\frac{1}{\gamma}$ 爲根.作一新方程式.

此時 $y_1=\beta\gamma+\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha\beta\gamma+1}{\alpha}=\frac{1+r}{\alpha}$. 故新舊變數 x, y 之間有關係式 $xy=1+r$. 或 $x=\frac{1+r}{y}$. 以 $\frac{1+r}{y}$ 代原式中之 x. 卽得吾人所求之結果.

答 $ry^3-q(1+r)y^2+p(1+r)^2y-(1+r)^3=0$

(2) 本上方程式.求以 $\alpha(\beta+\gamma), \beta(\gamma+\alpha), \gamma(\alpha+\beta)$ 爲根.作新方程式

以 $\frac{r}{q-y}$ 代 x.

答 $y^3-2qy^2+(pr+q^2)y-pqr=0.$

(3) 本上方程式.求以 $\frac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}, \frac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}$ 爲根.作一新方程式.

以 $\frac{py}{1+2y}$ 代 x.

答 $(p^3-4pq+8r)y^3+(p^3-4pq+12r)y^2+(6r-pq)y+r=0.$

(4) 若 α, β, γ 爲方程式 $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ 之根.則以

$$\frac{\beta\gamma-\alpha^2}{\beta+\gamma-2\alpha}, \quad \frac{\gamma\alpha-\beta^2}{\gamma+\alpha-2\beta}, \quad \frac{\alpha\beta-\gamma^2}{\alpha+\beta-2\gamma},$$

爲根之新方程式.可由次之等比異列變化求得.試證明之.

$$axy+b(x+y)+c=0.$$

42. 平方差之三次方程式 有一三次方程式於此.求以其中每對根之差之平方爲根.作一新方程式.則依 39 節方法.可先作此新方程式之根 $(\alpha_1-\alpha_2)^2, (\alpha_2-\alpha_3)^2, (\alpha_3-\alpha_1)^2$. 再作 $y-(\alpha_1-\alpha_2)^2, y-(\alpha_2-\alpha_3)^2, y-(\alpha_3-\alpha_1)^2$ 之連乘積. 積中各項之係數及常數項.皆爲根之等勢函數.一律以係數之項表之.再令此積爲0. 卽得所求之方程式.此方程式簡稱爲原方程式中平方差之方程式.

求平方差之方程式.以前節方法爲最適當.今縷述如次.

令 α,β,γ 爲方程式 $x^3+qx+r=0$ 之根.今作 y 方程式.其根爲 $(\beta-\gamma)^2, (\gamma-\alpha)^2, (\alpha-\beta)^2$. 首令 y 等於此三式中任一式. 如 $(\beta-\gamma)^2$.

因 $\Sigma\alpha^2=-2q, \alpha\beta\gamma=-r.$

則 $$y=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2-\frac{2\alpha\beta\gamma}{\alpha}=-2q-\alpha^2+\frac{2r}{\alpha},$$

此時新舊變數 x 與 y 間有關係式 $y=-2q-x^2+\frac{2r}{x}.$

此關係式又可書爲 $x^3+(2q+y)x-2r=0.$

以之與原方程式相減.又得 $(q+y)x-3r=0.$ 或 $x=\frac{3r}{q+y}.$

今以 $\frac{3r}{q+y}$ 代原式中之 x. 即得所求之方程式爲

$$y^3+6qy^2+9q^2y+4q^3+27r^2=0.$$

若欲作三次方程式 $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$ 之平方差方程式.須先消去其第二項.結果爲 $y^3+\frac{3H}{a_0{}^2}y+\frac{G}{a_0{}^3}=0.$ 此時二方程式之平方差方程式完全一致. 因前方程式中二根之差與後方程式中相當二根之差相等故也.故令 $q=\frac{3H}{a_0{}^2}, r=\frac{G}{a_0{}^3}$代入前之結果中.即得所求之方程式爲

$$x^3+\frac{18}{a_0{}^2}Hx^2+\frac{81}{a_0{}^4}H^2x+\frac{27}{a_0{}^6}(G^2+4H^3)=0.$$

令上平方差方程式中三根爲$(\beta-\gamma)^2,(\gamma-\alpha)^2,(\alpha-\beta)^2$. 若以 $a_0{}^2$ 乘之. 又得以 $a_0{}^2(\beta-\gamma)^2$, $a_0{}^2(\gamma-\alpha)^2$, $a_0{}^2(\alpha-\beta)^2$ 爲根之方程式如次.

$$x^3+18Hx^2+81H^2x+27(G^2+4H^3)=0.$$

由本方程式.可將原方程式中根差平方之連乘積. 以式表之如次.

$$a_0{}^6(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2=-27(G^2+4H^3).$$

由 37 節.易知 G^2+4H^3 式中含有 $a_0{}^2$ 一因子.事實上得

$$G^2+4H^3\equiv a_0{}^2(a_0{}^2a_3{}^2-6a_0a_1a_2a_3+4a_0a_2{}^3+4a_1{}^3a_3-3a_1{}^2a_2{}^2).$$

此括弧內之式.稱爲三次方程式之判別式.用符號 Δ 表之.即

$$G^2+4H^3\equiv a_0{}^2\Delta.\qquad HI-a_0J\equiv\Delta.$$

例題

(1) 求方程式 $x^3-7x+6=0$ 之平方差方程式.

答 $x^3-42x^2+441x-400=0.$

(2) 作方程式 $x^3+6x^2+7x+2=0$ 之平方差方程式.

先消去其第二項.

答 $x^3-30x^2+225x-68=0.$

(3) 作方程式 $x^3+6x^2+9x+4=0$ 之平方差方程式.

答 $x^3-18x^2+81x=0.$

(4) 例(3)之平方差方程式.與原方程式中根之關係若何.試推論之.

43. 三次方程式中根之性質之標準 因二共軛虛數之差之平方常爲負.故若原方程式有一對共軛虛根.則平方差方程式中有一負根相應.原方程式若無虛根.則平方差方程式不能有負根.反之,若平方差方程式有一負根.則原方程式有一對共軛虛根.平方差方程式若無負根.則原方程式不能有虛根.今分別論之如次.

(1) 當 G^2+4H^3 爲負時.原方程式之根皆爲實根.因 G^2+4H^3 爲負.則 H 必爲負.且 $|4H^3|>G^2$.由是前節中平方差方程式之係數正負相間.卽平方差方程式不能有負根.因之原方程式不能有虛根.

(2) 若 G^2+4H^3 爲正.則平方差方程式中有負根.因之原方程式有一對虛根.

(3) 若 G^2+4H^3 爲0.則原方程式有等根.因平方差方程式中有一根爲0故也.因 a_0 不爲0.故在此場合 Δ 爲0.是故判別式爲0爲三次方程式有等根之條件.

(4) 若 G 與 H 俱爲0.則原方程式有三等根.因此時平方差方程式之三根皆成爲0故也.此二條件又可書之爲 $\frac{a_0}{a_1}=\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}$.是爲三次方程式成完全立方之條件.

44. 差之一般方程式 依等勢函數之援助.則凡以 n 次方程式中每兩個根之差或差之平方爲根.皆可作一方程式此種方程式.可如次論之.

令原方程式爲 $f(x)\equiv(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n)=0$.

今以 $x+a_r$ 代上式中之 x.且逐次令 r 爲 $1, 2, \cdots\cdots n$ 等值.則得下之恆等式.

$$\left.\begin{array}{l} f(x+a_1)\equiv x(x+a_1-a_2)(x+a_1-a_3)\cdots\cdots(x+a_1-a_n) \\ f(x+a_2)\equiv x(x+a_2-a_1)(x+a_2-a_3)\cdots\cdots(x+a_2-a_n) \\ \cdots\ \cdots \equiv \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \cdots\ \cdots \equiv \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ f(x+a_n)\equiv x(x+a_n-a_1)(x+a_n-a_2)\cdots(x+a_n-a_{n-1}) \end{array}\right\} \quad (1)$$

應用第6節之展開式.則有下之關係式.式中 $f(a_r)=0$.

$$\frac{1}{x}f(x+a_r)=f'(a_r)+\frac{x}{2!}f''(a_r)+\frac{x^2}{3!}f'''(a_r)+\cdots\cdots+x^{n-1}$$

以 $\phi(x, a_r)$ 表等號右端之多項式.且將恆等式(1)之兩端互乘.可得第二恆等式.

$$\phi(x,\alpha_1)\phi(x,\alpha_2)\cdots\cdot\phi(x,\alpha_n)\equiv\{x^2-(\alpha_1-\alpha_2)^2\}\{x^2-(\alpha_1-\alpha_3)^2\}\cdots\cdots\{x^2-(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2\}$$

故作差之方程式時.只須作 $\phi(x,\alpha_1),\phi(x,\alpha_2),\cdots\phi(x,\alpha_n)$ 之連乘積.依 x 之降冪排列之.其中各項之係數.皆爲根之等勢函數.以原方程式中係數之項表之.再令此連乘積爲0. 卽得.或如42節所云.直接求第二恆等式右端 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 個因子之連乘積.然後以係數之項代根之等勢函數.再令爲0亦得.由此最後所得之方程式.其次數爲 $n(n-1)$.其中每兩根絕對値相等符號相反.因此方程式僅含 x 之偶次冪.故可以 y 代式中之 x^2. 其所得之 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次方程式.爲原方程式之平方差方程式.

三次以上之方程式.其差之方程式之組織.比較複雜.後章再就普通四次方程式討論其差之方程式.

例　　題

(1) 令方程式 $x^3-6x^2+11x-6=0$ 之根爲 α,β,γ. 求以 $\beta^2+\gamma^2,\ \gamma^2+\alpha^2,\ \alpha^2+\beta^2$ 爲根作方程式.

答 $y^3-28y^2+245y-650=0$

(2) 令 α,β,γ 爲方程式 $x^3+2x^2+3x+1=0$ 之根.試作一方程式.其根爲

$$\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}-\frac{1}{\alpha^3},\quad \frac{1}{\gamma^3}+\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3},\quad \frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}-\frac{1}{\gamma^3}.$$

答 $y^3+12y^2-172y-2072=0$

(3) 令 α,β,γ 爲方程式 $x^3+qx+r=0$ 之根.試作一方程式.其根爲

$$\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2,\qquad \gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2,\qquad \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2.$$

答 $(y+q)^3=0$

(4) 令 α,β,γ 爲方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根.試作一方程式,其根爲

$$\beta^2+\gamma^2-\alpha^2,\qquad \gamma^2+\alpha^2-\beta^2,\qquad \alpha^2+\beta^2-\gamma^2.$$

答 $y^3-(p^2-2q)y^2-(p^4-4p^2q+8pr)y+p^6-6p^4q+8p^3r+8p^2q^2-16pqr+8r^2=0$

(5) 若 α,β,γ 爲方程根 式 $x^3-3(1+a+a^2)x+1+3a+3a^2+2a^3=0$ 之根.試證 $(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$ 爲 a 之有理函數.

答 $\pm 9(1+a+a^2)$

(6) 若 α,β,γ 爲方程式 $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$ 之根.且 $(\beta-\gamma)^2,(\gamma-\alpha)^2,(\alpha-\beta)^2$ 三者成等差級數.試求 G 與 H 之關係.

答 $G^2+2H^3=0$

(7) 若 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 爲 $c^2x^4-2c^2x^3+2x-1=0$ 之根.試求次式之值.

$$(\beta^2-\gamma^2)^2(\alpha^2-\delta^2)^2+(\gamma^2-\alpha^2)^2(\beta^2-\delta^2)^2+(\alpha^2-\beta^2)^2(\gamma^2-\delta^2)^2$$

答 0.

(8) 若 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta=0$.試證次之關係式.

$$\{(\beta-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2+(\gamma-\alpha)^2(\beta-\delta)^2+(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2\}^2$$
$$=18\{(\beta^2-\gamma^2)^2(\alpha^2-\delta^2)^2+(\gamma^2-\alpha^2)^2(\beta^2-\delta^2)^2+(\alpha^2-\beta^2)^2(\gamma^2-\delta^2)^2\}$$

(9) 已知方程式 $x^5-x^4+8x^2-9x-15=0$ 中有 $1+\alpha\sqrt{-1}$ 形狀之根.試解此方程式.

作一方程式.其根比原方程式之根少1.並以 $\alpha\sqrt{-1}$ 代新方程式之變數.再令實數部與虛數部各爲0.則得 α 之兩方程式.

$$\alpha^4-3\alpha^2-4=0,\qquad \alpha^4-6\alpha^2+8=0.$$

此兩方程式之公根爲 $\alpha^2=4$.或 $\alpha=\pm 2$.故得 x^2-2x+5 之因子與此二根相應.他之因子爲 $x+1$ 及 x^2-3.

(10) 若 α,β,γ, 爲方程式 $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$ 之根.試作一方程式.其根爲 $\beta+\gamma,\ \gamma+\alpha,\ \alpha+\beta$.

此題之解法.已見於 41 節.今更用次法解之.用此法解本題.雖無何種利益.然在某種問題中.其效用亦有足稱者.今述於次.

作一方程式.其根比原方程式之根少 h. 令此方程式為

$$a_0y^3+3A_1y^2+3A_2y+A_3=0.$$

所有之根為 $\alpha-h,\ \beta-h,\ \gamma-h.$

假定此新方程式有二根.其絕對值相等符號相反.依 24 節例(17),其條件為

$$9A_1A_2-a_0A_3=0 \tag{A}$$

此為 h 之三次方程式.當有三個值能滿足此方程式.

依假定,在此條件下.可有次之三種結果.

$$\alpha-h+\beta-h=0,\qquad \beta-h+\gamma-h=0,\qquad \gamma-h+\alpha-h=0$$

故滿足此條件之值.當為以下三值. $\frac{1}{2}(\beta+\gamma),\ \frac{1}{2}(\gamma+\alpha),\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta).$

今作一方程式其根為 (A) 方程式之根之二倍.此最後所得之方程式.即為所求之方程式.

(11) 令 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 為方程式 $a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$ 之根.求作一方程式.其根為 $\alpha+\beta,\ \beta+\gamma,\ \gamma+\alpha,\ \alpha+\delta,\ \beta+\delta,\ \gamma+\delta.$

用例(10)之方法.且援引 24 節例(20)之條件.可得所求之方程式.

在本題其條件為 $6A_1A_2A_3-A_1^2A_4-a_0A_3^2=0$. 是為 h 之六次方程式.其根為 $\frac{1}{2}(\beta+\gamma),\ \frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\cdots\cdots$.今作一方程式.其根為 h 方程式之根之二倍.此最後之方程式.即吾人所求之方程式.

(12) 本例(10)之三次方程式.求作一方程式.其根為

$$\frac{\beta\gamma-\alpha^2}{\beta+\gamma-2\alpha},\quad \frac{\gamma\alpha-\beta^2}{\gamma+\alpha-2\beta},\quad \frac{\alpha\beta-\gamma^2}{\alpha+\beta-2\gamma}.$$

作一新方程式.其根比原方程式之根少 h. 令此新方程式之根成等比級數.並求其條件.依 24 節例(18).此條件為 $A_1^3A_3-a_0A_2^3=0$. 式中 h 四乘冪以上之項盡皆消去.故祇為 h 之三次方程式.其根與吾人預擬之根符合.因在上述條件下.當有 $(\alpha-h)^2=(\beta-h)(\gamma-h)$. 或 $h=\dfrac{\beta\gamma-\alpha^2}{\beta+\gamma-2\alpha}$ 故也.

(13) 本例(10)之三次方程式.求作一方程式.其根爲

$$\frac{2\beta\gamma-\alpha\beta-\alpha\gamma}{\beta+\gamma-2\alpha},\quad \frac{2\gamma\alpha-\beta\gamma-\alpha\beta}{\gamma+\alpha-2\beta},\quad \frac{2\alpha\beta-\gamma\alpha-\beta\gamma}{\alpha+\beta-2\gamma}.$$

作一方程式.其根此原方程式之根少 h. 令此新方程式之根成調和級數.並求其條件.依 24 節例(19)此條件爲 $a_0A_3^2-3A_1A_2A_3+2A_2^3=0$. 式中 h 四乘冪以上之項盡皆消去. 故祇爲 h 之三次方程式. 其根與吾人預擬之根符合.因在此條件下.當有 $\frac{2}{\alpha-h}=\frac{1}{\beta-h}+\frac{1}{\gamma-h}$ 或 $h=\frac{2\beta\gamma-\alpha\beta-\gamma\alpha}{\beta+\gamma-2\alpha}$ 故也.

(14) 若 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 爲四次方程式 $a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$ 之根.試作一方程式.其根爲 $\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\beta+\gamma-\alpha-\delta}$, $\frac{\gamma\alpha-\beta\delta}{\gamma+\alpha-\beta-\delta}$, $\frac{\alpha\beta-\gamma\delta}{\alpha+\beta-\gamma-\delta}$.

作一方程式.其根比原方程式之根少 h. 並在新方程中作 24 節例(22)之條件.此條件爲 $A_1^2A_4-a_0A_3^2=0$. 是爲 h 之三次方程式.其根與吾人預擬之根符合.因在此條件下當有 $(\alpha-h)(\beta-h)=(\gamma-h)(\delta-h)$ 或 $h=\frac{\alpha\beta-\gamma\delta}{\alpha+\beta-\gamma-\delta}$ 故也.

(15) 求作一方程式.其根爲方程式 $x^3+qx+r=0$ 中每對根之比.

令 $f(x)=0$ 爲原方程式. $\rho=\frac{\beta}{\alpha}$ 爲其中二根之比. 因 $f(\beta)=0$. 則 $f(\rho\alpha)=0$. 又 $f(\alpha)=0$. 由此最後二方程式消去 α. 卽得所求之 ρ 方程式.將此法適用於本題.其結果爲 $r^2(\rho^2+\rho+1)^3+q^3\rho^2(\rho+1)^2=0$.

(16) 令 α,β,γ 爲方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根.試作一方程式.其根爲

$$\beta^2+\gamma^2,\qquad \gamma^2+\alpha^2,\qquad \alpha^2+\beta^2.$$

答 $x^3-2(p^2-2q)x^2+(p^4-4p^2q+5q^2-2pr)x-(p^2q^2-2p^3r+4pqr-2q^3-r^2)=0$.

(17) 適用上之方程式.求作一方程式.其根爲 $\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$.

答 $r^2x^3-(pqr-3r^2)x^2+(p^3r-5pqr+3r^2+q^3)x-(p^2q^2-2p^3r+4pqr-2q^3-r^2)=0$

(18) 若 α,β,γ 爲方程式 $x^3+qx+r=0$ 之根.求作一方程式.其根爲

$$l\alpha+m\beta\gamma,\qquad l\beta+m\gamma\alpha,\qquad l\gamma+m\alpha\beta.$$

答 $y^3-mqy^2+(l^2q+3lmr)y+l^3r-l^2mq^2-2lm^2qr-m^3r^2=0.$

(19) 若α,β,γ爲方程式$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$之根.試作一方程式.其根爲

$$(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma),\qquad (\beta-\gamma)(\beta-\alpha),\qquad (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta).$$

答 $y^3+\dfrac{9H}{a_0^2}y^2-\dfrac{27(G^2+4H^3)}{a_0^6}=0$

(20) 本(19)之方程式.求作一方程式.其根爲

$$(\beta-\gamma)^2(2\alpha-\beta-\gamma)^2,\qquad (\gamma-\alpha)^2(2\beta-\gamma-\alpha)^2,\qquad (\alpha-\beta)^2(2\gamma-\alpha-\beta)^2.$$

作42節中平方差方程式之平方差方程式.即得所求之方程式.因

$$(\gamma-\alpha)^2-(\alpha-\beta)^2=(\beta-\gamma)(2\alpha-\beta-\gamma)$$ 故也.

(21) 本例(16)之方程式.求作一方程式.其根爲$\alpha(\beta-\gamma)^2,\ \beta(\gamma-\alpha)^2,\ \gamma(\alpha-\beta)^2.$

令新方程式爲 $x^3+Px^2+Qx+R=0.$

答 $P=pq-qr,\quad Q=q^3-9pqr+27r^2+p^3r,\quad R=-r(4q^3+27r^2+4p^3r-p^2q^2-18pqr)$

(22) 本例(16)之方程式.求作一方程式.其根爲 $\alpha^2+2\beta\gamma,\ \beta^2+2\gamma\alpha,\ \gamma^2+2\alpha\beta.$

答 $P=-p^2,\quad Q=q(2p^2-3q),\quad -R=4p^3r-18pqr+2q^3+27r^2.$

第　五　章

逆方程式及二項方程式之解法

45. **逆方程式**　在前32節.已知凡逆方程式.皆可化爲第一種偶次之模範式.今更證明凡模範逆方程式.皆可化爲一新方程式.其次數爲原次數之半.

考察方程式

$$a_0x^{2m}+a_1x^{2m-1}+a_2x^{2m-2}+\cdots\cdots+a_mx^m+\cdots\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0.$$

以 x^m 除其全體.並將多項式兩端等距離之項結合之.則

$$a_0\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+a_1\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+a_2\left(x^{m-2}+\frac{1}{x^{m-2}}\right)+\cdots\cdots+a_m=0.$$

令 $x+\dfrac{1}{x}$ 爲 z. $x^p+\dfrac{1}{x^p}$ 爲 V_p. 則有關係式　$V_{p+1}=V_pz-V_{p-1}$.

令 p 之值爲 $1, 2, 3, \cdots\cdots m$ 等值.則有

$$V_2=V_1z-V_0=z^2-2 \qquad V_3=V_2z-V_1=z^3-3z$$

$$V_4=V_3z-V_2=z^4-4z^2+2 \qquad V_5=V_4z-V_3=z^5-5z^3+5z$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots.$$

以之代入原方程式.即得 z 方程式.其次數爲固有次數之半.解此方程式.可得 z 之值.代入 $x+\dfrac{1}{x}=z$ 式中.又得 x 之值.

例題

(1) 求方程式 $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 之根.

此爲第一種奇次式.故有 $x+1$ 一因子.除去此因子.又得 $x^4+x^2+1=0$.

上式可化爲次數爲 2 之 z 方程式 $z^2-1=0$. $z=\pm1$.

是以 $x+\frac{1}{x}=\pm1$, $x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$, $x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$.

(2) 求多項式 $x^{10}-3x^8+5x^6-5x^4+3x^2-1=0$ 之根.

此爲第二種偶次式.故有 x^2-1 一因子.以 x^2-1 除之.依第 8 節之方法則

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -3 & 5 & -5 & 3 & -1 \\ & \underline{1} & \underline{-2} & \underline{3} & \underline{-2} & \underline{1} \\ & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

故得逆方程式 $x^8-2x^6+3x^4-2x^2+1=0$.

化爲 z 方程式 $z^4-6z^2+9=0$. $(z^2-3)^2=0$. $z=\pm\sqrt{3}$.

因之 $x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{3}$, $x=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}}{2}$, $x=\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}}{2}$.

是爲原方程式之二重根.

(3) 解方程式 $x^5-1=0$.

此爲第二種奇次式,故有 $x-1$ 一因子.除去此因子後,則有

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$

化爲 z 方程式.則有 $z^2+z-1=0$.

以 z 之值代入 $x+\frac{1}{x}=z$ 式中.又得 $x^2+\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})x+1=0$.

是以 $x=\frac{1}{4}\{-1+\theta\sqrt{5}\pm\sqrt{10+2\theta\sqrt{5}}\sqrt{-1}\}$.

上式可代表 x 之四值.式中 $\theta^2=1$.

(4) 分解 $x^6+1=0$ 爲二次因子.

此爲模範逆方程式,可化爲 $z^3-3z=0$, $z(z^2-3)=0$.

是以 $z=0$, $z=\pm\sqrt{3}$.

代入 $x+\frac{1}{x}=z$ 式中,即知有 $x^2+1=0$, $x^2\pm\sqrt{3}x+1=0$ 之結果.

46. 二項方程式之普通性質　本節及以下各節表明二項方程式之普通性質.

命題1　若 a 為 $x^n-1=0$ 之虛根, 則不論 m 為任何整數. a^m 均為 $x^n-1=0$ 之根.

因 a 為 $x^n-1=0$ 之根.則 $a^n=1$. 由是 $(a^n)^m=1$. 或 $(a^m)^n=1$. 亦即 $(a^m)^n-1=0$. 故 a^m 為方程式 $x^n-1=0$ 之根.

若 m 為奇數. 則對於方程式 $x^n+1=0$ 亦可得同一之結果.

47. 命題2　若 m 與 n 為互素數. 則方程式 $x^m-1=0$, $x^n-1=0$ 除公根 1 外,便無其他公根.

證明本題時.須用次之定理.若 m 與 n 為互素數.則可得二整數 a, b. 使適合於次之關係式, $mb-na=\pm1$.

若 a 為兩方程式之公根.則　$a^m=1$,　$a^n=1$.

於是有　$a^{mb}=1$,　$a^{na}=1$.

以後式除前式又得　$a^{mb-na}=1$.　即　$a^{\pm1}=1$.

是以 a 之值等於 1. 即兩方程式之公根只限於 1.

48. 命題3　若 k 為整數 m 與 n 之最大公約數. 則兩方程式 $x^m-1=0$ 及 $x^n-1=0$ 之公根.為方程式 $x^k-1=0$ 之根.

令 $m=km'$, $n=kn'$. 因 m' 與 n' 為互素數. 故可得二整數 a 與 b. 使滿足於方程式 $m'b-n'a=1$. 因之 $mb-na=k$.

若 a 為 $x^m-1=0$ 及 $x^n-1=0$ 之公根.則　$a^m=1$　$a^n=1$.

由是　$a^{mb}=1$,　$a^{na}=1$,　因之　$a^{mb-na}=1$.　亦即　$a^k=1$.

是以 a 為方程式 $x^k-1=0$ 之根.

49. 命題4　若 n 爲素數，α 爲方程式 $x^n-1=0$ 之虛根．則此方程式之一切根，皆包括於次之級數中．$1, \alpha, \alpha^2, \cdots\cdots\alpha^{n-1}$

由命題 1，上級數中各項．皆爲原方程式之根．今證明此 n 個根各不相同．假定 $\alpha^p=\alpha^q$．(p, q，俱比 n 小，且各不相同．) 則 $\alpha^{p-q}=1$．即 α 爲 $x^n-1=0, x^{p-q}-1=0$ 之公根．但 n 與 $p-q$ 爲互素數．方程式 $x^n-1=0, x^{p-q}-1=0$ 除 1 外，便無其他公根，故 α 不爲 $x^{p-q}-1=0$ 之根．即 α^{p-q} 不等於 1．亦即 α^p 不等於 α^q．

50. 命題5　若 n 爲因數 $p, q, r, \cdots\cdots$ 之積．則 $x^p-1=0, x^q-1=0, x^r-1=0\cdots\cdots$ 之根．皆滿足於方程式 $x^n-1=0$．

若 α 爲方程式 $x^p-1=0$ 之根．則 $\alpha^p=1$．由是 $(\alpha^p)^{qr\cdots\cdots}=1$．即 $\alpha^n=1$．是以 α 爲方程式 $x^n-1=0$ 之根．餘準此．

51. 命題6　若 n 爲素因數 $p, q, r, \cdots\cdots$ 之積．α 爲 $x^p-1=0$ 之根．β 爲 $x^q-1=0$ 之根．γ 爲 $x^r-1=0$ 之根．餘準此．則方程式 $x^n-1=0$ 之根，爲次之連乘積中各項．$(1+\alpha+\alpha^2+\cdots\cdots+\alpha^{p-1})(1+\beta+\cdots\cdots+\beta^{q-1})(1+\gamma+\cdots\cdots+\gamma^{r-1})\cdots\cdots$

今第就三個質因數 p, q, r 論之．餘準此．因 $\alpha^n=1, \beta^n=1$．$\gamma^n=1$．則不論 a, b, c 爲任何整數．常有 $\alpha^{na}=1, \beta^{nb}=1, \gamma^{nc}=1$．因而有 $(\alpha^a\beta^b\gamma^c)^n=1$．即 $\alpha^a\beta^b\gamma^c$ 爲 $x^n-1=0$ 方程式之根．令 a 比 p 小，b 比 q 小，c 比 r 小．$a'\ b'\ c'$ 亦同上假定．此時若有 $\alpha^a\beta^b\gamma^c=\alpha^{a'}\beta^{b'}\gamma^{c'}$．則 $\alpha^{a-a'}=\beta^{b'-b}\gamma^{c'-c}$．但此式左端爲方程式 $x^p-1=0$ 之根．右端爲方程式 $x^{qr}-1=0$ 之根．是 $x^p-1=0$ 方程式與 $x^{qr}-1=0$ 方程式有公根．但 p 與 qr 爲互素數．故此兩方程式

不能有公根.即 $\alpha^{a-a'}$ 不能等於 $\beta^{b'-b}\gamma^{c'-c}$ 亦即 $\alpha^a\beta^b\gamma^c$ 不能等於 $\alpha^{a'}\beta^{b'}\gamma^{c'}$.

52. 命題 7　若 p, q, r 爲素數. $n=p^aq^br^c$. α 爲 $x^{p^a}-1=0$ 之根. β 爲 $x^{q^b}-1=0$ 之根. γ 爲 $x^{r^c}-1=0$ 之相. 則方程式 $x^n-1=0$ 之 n 個根.爲具有 $\alpha\beta\gamma$ 形狀之 n 個積.

α 爲 $x^{p^a}-1=0$ 之根.則 $\alpha^{p^a}=1$. 從而 $\alpha^{p^aq^br^c}=1$, 即 $\alpha^n=1$. 同理 $\beta^n=1$, $\gamma^n=1$ 故 $(\alpha\beta\gamma)^n=1$. 卽 $\alpha\beta\gamma$ 爲 $x^n-1=0$ 方程式之根.同樣 $\alpha'\beta'\gamma'$ 亦爲 $x^n-1=0$ 之根. 假定 $\alpha\beta\gamma=\alpha'\beta'\gamma'$. 則 $\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{\beta'}{\beta}\dfrac{\gamma'}{\gamma}$. 因 $\alpha^{p^a}=1$, $\alpha'^{p^a}=1$. 是以 $\left(\dfrac{\alpha}{\alpha'}\right)^{p^a}=1$. 卽 $\dfrac{\alpha}{\alpha'}$ 爲 $x^{p^a}-1=0$ 方程式之根. 同樣 $\left(\dfrac{\beta'}{\beta}\right)^{q^b}=1$, $\left(\dfrac{\gamma'}{\gamma}\right)^{r^c}=1$. 由是可得 $\left(\dfrac{\beta'}{\beta}\right)^{q^br^c}=1$, $\left(\dfrac{\gamma'}{\gamma}\right)^{r^cq^b}=1$ 因而 $\left(\dfrac{\beta'}{\beta}\dfrac{\gamma'}{\gamma}\right)^{q^br^c}=1$. 即 $\dfrac{\beta'}{\beta}\dfrac{\gamma'}{\gamma}$ 爲方程式 $x^{q^br^c}-1=0$ 之根. 是方程式 $x^{p^a}-1=0$, $x^{q^br^c}-1=0$ 有公根. 但 p^a 與 q^br^c 爲互素數. 此二方程式不能有公根.即 $\dfrac{\alpha}{\alpha'}$ 不能等於 $\dfrac{\beta'}{\beta}\dfrac{\gamma'}{\gamma}$. 亦即 $\alpha\beta\gamma$ 不能等於 $\alpha'\beta'\gamma'$.

若 $n=p^aq^br^cs^d$........亦有同樣之結果.並得適用上之證法.

由本節及以上各節.可得次之結論.

欲決定 1 之 n 次根.須先決定 n 爲素數或素數之乘方.

53. 方程式 $x^n-1=0$ 之特根　若方程式 $x^n-1=0$ 含有若干個根不適合於 n 次以上任一二項方程式.則此若干個根.稱爲方程式 $x^n-1=0$ 之特根.或稱爲 1 之 n 次特根.若 n 爲素數.則此方程式之一切虛根,皆爲特根.若 p 爲質數. $n=p^a$

則自 p^a 個根中.除去其 p^{a-1} 個常根.所剩餘者.自爲其特根.此時特根之數目爲 $p^a-p^{a-1}=p^a\left(1-\dfrac{1}{p}\right)$. 若 pq 俱爲質數. $n=p^aq^b$. 則方程式 $x^{p^a}-1=0$ 有 $p^a\left(1-\dfrac{1}{p}\right)$ 個特根.方程式 $x^{q^b}-1=0$ 有 $q^b\left(1-\dfrac{1}{q}\right)$ 個特根.令 α 爲前方程式之特根. β 爲後方程式之特根.則 $\alpha\beta$ 爲原方程式 $x^n-1=0$ 之特根.否則當有矛盾場合發生.今證明於次.

若 $\alpha\beta$ 不爲原方程式之特根.則當有 $(\alpha\beta)^m=1$. $(m<n)$ 即有 $\alpha^m=\beta^{-m}$. 但 α^m 爲方程式 $x^{p^a}-1=0$ 之根. β^{-m} 爲方程式 $x^{q^b}-1=0$ 之根.故此二方程式有公根.但 p^a 與 q^b 爲互素數.此二方程式不能有公根.即 $\alpha^m\neq\beta^{-m}$. 亦即 $(\alpha\beta)^m\neq1$. 此又與固有假定不合.故 $\alpha\beta$ 必爲 $x^n-1=0$ 方程式之特根.

在 $x^{p^a}-1=0$ 方程式中.與 α 同性質之特根,有 $p^a\left(1-\dfrac{1}{p}\right)$ 個.在 $x^{q^b}-1=0$ 方程式中,與 β 同性質之特根,有 $q^b\left(1-\dfrac{1}{q}\right)$ 個.故在 $x^n-1=0$ 方程式中.與 $\alpha\beta$ 同性質之特根,當有 $p^a\left(1-\dfrac{1}{p}\right)q^b\left(1-\dfrac{1}{q}\right)$ 個.即 $n=p^aq^b$. p q 俱爲質數時. $x^n-1=0$ 方程式之特根,共有 $n\left(1-\dfrac{1}{p}\right)\left(1-\dfrac{1}{q}\right)$ 個.

當 $n=p^aq^br^c$ ……時.亦有同樣之結果.並得適用上之證法.

若 α 爲方程式 $x^n-1=0$ 之特根.則此方程式之一切根.皆包括於次之級數中. $1, \alpha, \alpha^2, \cdots\cdots\alpha^{n-1}$ 因級數中各項.皆爲原方程式之根.而此 n 個根中又不能有等根.假定 $\alpha^p=\alpha^q$. 則 $\alpha^{p-q}=1$.

但 $p-q$ 小於 n. 故 a 非原方程式之特根. 是與假設相違. 故 $a^p \neq a^q$, 即此 n 個根中不能有等根.

若已知方程式 $x^n-1=0$ 中一特根 a. 則此方程式中其餘各特根不難求得.因 a 爲一特根. 則此方程式之 n 個根當爲 $1, a, a^2, \cdots\cdots a^{n-1}$. 若在此 n 個根中取 a^p 一根. 且 p 與 n 爲互素數.則次組根 $a^p, a^{2p}, a^{3p}, \cdots\cdots a^{(n-1)p}, a^{np}=1$ 中各根.皆各不相同.因以 n 除此級數中各項之指數.其剩餘各不相等故也.由是次組根中含有原方程式之一切根.即次組根中各項可與前組根中各項一一相等.亦即 a^p 之性質與 a 之性質相類似.今更證明 a^p 爲原方程式之特根.假定 a^p 不爲原方程式之特根.則當有 $a^{mp}=1$ 之關係,且 m 小於 n. 此時次組根中同時有二項爲 1.即次組根中只有 $n-1$ 個各不相同之根.是與前說相反.故 a^p 必爲原方程式之特根.

此間所證得之結果.與前之結果完全一致. 因依整數之性質. 若 $n=p^aq^b$. 則比 n 小且與 n 爲互素數之數. 其數目爲 $n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)$ 個.依前之證明.則方程式 $x^n-1=0$ 之特根.亦有 $n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)$ 個.

例　　題

(1) 定方程式 $x^6-1=0$ 之特根

因 $6=2\times3$. 故 $x^2-1=0$ 及 $x^3-1=0$ 之根. 皆爲 $x^6-1=0$ 之根. 即 x^6-1 可以 x^2-1 及 x^3-1 二因子除盡.今先以 x^3-1 除 x^6-1 而得 x^3+1. 因 x^3-1 已含有

x^2-1 式中 $x-1$ 一因子. 故此後祇以 $\frac{x^2-1}{x-1}(=x+1)$,除 x^3+1 而得 x^2-x+1. 因原方程式中特根之數目 $=6\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=2$. 故 $x^2-x+1=0$ 之二根.卽爲原方程式之特根.令之爲 α, α_1. 則 $\alpha=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, $\alpha_1=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$.

因 $\alpha\,\alpha_1=1=\alpha^6=\alpha_1{}^6$. 故此二特根爲 α, α^5 $\alpha, \alpha_1{}^5$ $\alpha, \frac{1}{\alpha}$ $\alpha_1, \frac{1}{\alpha_1}$.

(2) 討論 $x^{12}-1=0$ 方程式之特根.

特根之數目 $=12\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=4$.

因 2 與 3 皆爲12之素因數.且$\frac{12}{2}=6, \frac{12}{3}=4$. 故 $x^6-1=0$ 與 $x^4-1=0$ 之根皆適合於方程式 $x^{12}-1=0$. 卽 $x^{12}-1$ 可以 x^6-1 及 x^4-1 二式除盡. 今以 x^6-1 除 $x^{12}-1$ 而得 x^6+1. 又以 x^4-1 除 $x^{12}-1$ 而得 x^8+x^4+1. 故知原方程式之特根必適合於方程式 $x^6+1=0$ 及 $x^8+x^4+1=0$. 卽原方程式之特根爲此最後二方程式之公根.今此最後二多項式之最高公因子爲4次多項式x^4-x^2+1. 故四次方程式 $x^4-x^2+1=0$ 之根卽爲原方程式之特根.

因4與6之最大公約數爲 2. 故 $x^2-1=0$ 之根爲 $x^4-1=0$, $x^6-1=0$ 之公根. 卽 x^4-1, x^6-1 二多項式有x^2-1一公因子.求此二多項之最低公倍數.則得一8次多項式.以此最低公倍數除 $x^{12}-1$. 又可得 x^4-x^2+1.

解遞方程式 $x^4-x^2+1=0$. 可得 $x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{3}$. 或 $x^2\pm\sqrt{3}x+1=0$. 令 $x^2-\sqrt{3}x+1=0$ 中一根爲 α. $x^2+\sqrt{3}x+1=0$ 中一根爲α_1. 因此兩方程式中二根之積皆爲 1. 故得 $\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}}{2}$, $\left(\alpha_1, \frac{1}{\alpha_1}\right)=\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}}{2}$. 是爲原方程式之特根.

令將此四根,以其中任一根 α 表之如次.

自遞方程式 $x^4-x^2+1=0$ 可知 $\alpha+\frac{1}{\alpha}+\alpha_1+\frac{1}{\alpha_1}=0$. 卽 $(\alpha+\alpha_1)\left(1+\frac{1}{\alpha\,\alpha_1}\right)=0$. 取 $\alpha\,\alpha_1=-1$. (因與 $\alpha\,\alpha_1$ 指定之値符合)因 α 爲 $x^6+1=0$ 之根.故 $\alpha^6=-1$. $\alpha^5=-\frac{1}{\alpha}=\alpha_1$. 又因 $\alpha^{12}=1$. 是以 $\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha^{12}}{\alpha}=\alpha^{11}$. $\frac{1}{\alpha_1}=\frac{\alpha^{12}}{\alpha^5}=\alpha^7$. 故 $\alpha, \alpha_1, \frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha}$ 四特根可依次以 α, α^5 α^7, α^{11} 表之.

若以 α^5 代前之 α. 則第一項爲 α^5. 第二項爲 $\alpha^{25}=\alpha^{24}\alpha=\alpha$. 第三項則爲 $\alpha^{35}=\alpha^{24}\alpha^{11}=\alpha^{11}$. 第四項則爲 $\alpha^{55}=\alpha^{48}\alpha^7=\alpha^7$. 其結果爲 $\alpha^5,\alpha,\alpha^{11},\alpha^7$. 同理若以 α^7 代 α,則其結果爲 $\alpha^7,\alpha^{11},\alpha,\alpha^5$. 若以 α^{11} 代 α. 則其結果爲 $\alpha^{11},\alpha^7,\alpha^5,\alpha$. 今列表如次.

α,	α^5,	α^7,	α^{11},
α^5,	α,	α^{11},	α^7,
α^7,	α^{11},	α,	α^5,
α^{11},	α^7,	α^5,	α,

表中每行及每列皆有此四特根.准其次序各不相同. 由上述可知已知四特根中任一根. 卽可將其餘三特根一一求出.又 1, 5, 7, 11 皆比 12 小且與 12 爲互素數.故與前所證明者一致.今將 $x^{12}-1=0$ 方程式之一切根.以此四特根之羃表之如次.

α,	α^2,	α^3,	α^4,	α^5,	α^6,	α^7,	α^8,	α^9,	α^{10},	α^{11},	1,
α^5,	α^{10},	α^3,	α^8,	α,	α^6,	α^{11},	α^4,	α^9,	α^2,	α^7,	1,
α^7,	α^2,	α^9,	α^4,	α^{11},	α^6,	α,	α^8,	α^3,	α^{10},	α^5,	1,
α^{11},	α^{10},	α^9,	α^8,	α^7,	α^6,	α^5,	α^4,	α^3,	α^2,	α,	1.

(3) 證方程式 $x^{15}-1=0$ 之特根爲方程式 $x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1=0$ 之根.

(4) 例(3)方程式之 8 根.可以方程式 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 之四根與方程式 $x^2+x+1=0$ 之二根相乘而得,試表明之.　5.3

(5) 作一 12 次方程式.其根爲 $x^{21}-1=0$ 方程式之特根.並變此方程式爲次數減半之方程式,

答 $x^6-x^5-6x^4+6x^3+8x^2-8x+1=0$.

54. 以圓函數解二項方程式

令普通二項方程式爲 $x^n=a+b\sqrt{-1}$. 式中 a 與 b 俱爲實數.

令 $a=R\cos\alpha$, $b=R\sin\alpha$. 則 $x^n=R(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)$

若 $r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$ 爲此方程式之根.則依 De Moivre 之定理.

$$r^n(\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta)=R(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha).$$

令實數部與實數部相等,虛數部與虛數部相等.又得

$$r^n\cos n\theta=R\cos\alpha, \qquad r^n\sin n\theta=R\sin\alpha.$$

求此二式平方和.即得 $r^{2n}=R^2$. 或 $r^n=R$.

在 ab 二式中 R 常取正號.因式中含有圓函數 ab 之符號可由圓函數之角 α 而定故也.同樣 r 之符號亦常爲正.因 $r^n=R$.

自上式可知

$$\sin n\theta=\sin\alpha, \qquad \cos n\theta=\cos\alpha.$$

結果得 $n\theta=2k\pi+\alpha$. k 爲任意整數.

由是此方程式之 n 次根其普通形狀爲

$$\sqrt[n]{R}\left[\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right].$$

在 $-\infty$ 及 ∞ 間任意取 n 個連續整數一一代入 k 而計算之.即得此 n 個根,且只有此 n 個根.因此 n 個根皆依一定之週期循環故也.下文更申明之.

令 k 之值爲 $0, 1, 2, \cdots\cdots n-1$. 則 $\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}$ 因 k 之值不同而有各異之值.因若對於 k_1, k_2 二值上式有等值.則必有

$$\cos\frac{\alpha+2k_1\pi}{n}=\cos\frac{\alpha+2k_2\pi}{n}, \qquad \sin\frac{\alpha+2k_1\pi}{n}=\sin\frac{\alpha+2k_2\pi}{n}.$$

即 $\frac{\alpha+2k_1\pi}{n}=2m\pi+\frac{\alpha+2k_2\pi}{n}$, 或 $k_1-k_2=mn$.

因 m 爲整數. k_1, k_2 各小於 n. 且各不相等.則 $k_1-k_2=mn$ 必不能成立. 是以 $\cos\frac{a+2k\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{a+2k\pi}{n}$ 對於 k 之 n 個值 0, 1, 2,……$n-1$ 有 n 個不相同之值.此外 k 爲 n 時上式之值.與 k 爲 0 時上式之值等. k 爲 $n+1$ 時上式之值.與 k 爲 1 時上式之值等. k 爲 $n+2$ 時之值.與 k 爲 2 時之值等.以下逐次如此.直至 k 爲 $2n-1$ 時之值.與 k 爲 $n-1$ 時之值等.以後 k 爲 $2n$ 時之值.又與 k 爲 0 時之值等.如是循環不已.

上式又可寫爲

$$\sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{a}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{a}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

若 $R=1, a=0$. 則 $a+b\sqrt{-1}$ 成爲 1. 原方程式成爲 $x^n-1=0$. 是以 1 之 n 次根可書作 $\cos\frac{2k\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}$.

若與 k 以任一定數如 0. 則 $\sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{a}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{a}{n}\right)$, 仍爲 $a+b\sqrt{-1}$ 之 n 次根.是故前之公式可如次表之.

任一複數量之 n 次根.爲其中任一根,與 1 之 n 次根之積.即將其中任一根,以 1 之 n 個 n 次根逐一乘之.可得此複數量之 n 個 n 次根.

若將次之二項方程式 $x^n=a+b\sqrt{-1}$, $x^n=a-b\sqrt{-1}$ 連結之.易知此 $x^{2n}-2R\cos ax^n+R^2$ 之因子,爲

$$\sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{a+2k\pi}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{a+2k\pi}{n}\right).$$

式中 k 之值爲 0, 1, 2,……$n-1$.

例題

(1) 解方程式 $x^7-1=0$.

以 $x-1$ 除之.原式變爲模範逆方程式.合 $z=x+\frac{1}{x}$. 則此模範逆方程式化爲 $z^3+z^2-2z-1=0$. 若知此最後方程式之根.則原方程式之根不難求得矣.

(2) 分解 $(x+1)^7-x^7-1$ 爲因子.

答 $7x(x+1)(x^2+x+1)^2$.

(3) 作一五次方程式,其根與二項方程式 $x^{11}-1=0$ 之根有關係.

答 $z^5+z^4-4z^3-3z^2+3z+1=0$.

(4) 若二項方程式 $x^n-1=0$ 變爲模範逆方程式.則此模範逆方程式之根皆爲虛根,試表明之.(參攷22節例15, 16)

(5) 若上模範逆方程式化爲 z 方程式.則此 z 方程式之根皆爲實根.且常界乎 -2 及 2 之間.試表明之.但 $z=x+\frac{1}{x}$.

因原方程式中 x 根之形狀爲 $\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha$, 則 $z=x+\frac{1}{x}$ 之形狀當爲 $2\cos\alpha=\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha+\cos\alpha-\sqrt{-1}\sin\alpha$. 因 $2\cos\alpha$ 爲實數.且常介乎 -2 及 2 之間.故如題所云.

(6) 表明方程式 $4(x^2-x+1)^3-27x^2(x-1)^2=0$ 爲逆方程式.且解之.

答 其根爲 $2,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -1,\ -1$.

(7) 將 $x^9-1=0$ 方程式之一切根宣布之.

原方程式之根,與 $x^3-1=0$, $x^3-\omega=0$, $x^3-\omega^2=0$ 三組之根無異.至於 ω 及 ω^2 則爲 1 之立方虛根.今第一組之根爲 $1,\omega,\omega^2$. 第二組之根爲 $\omega^{\frac{1}{3}},\omega^{\frac{4}{3}},\omega^{\frac{7}{3}}$. 第三組之根爲 $\omega^{\frac{2}{3}},\omega^{\frac{5}{3}},\omega^{\frac{8}{3}}$. 故此九個根可如次表之.

$$1,\quad \omega,\quad \omega^2,\quad \omega^{\frac{1}{3}},\quad \omega^{\frac{4}{3}},\quad \omega^{\frac{7}{3}}\quad \omega^{\frac{2}{3}}\quad \omega^{\frac{5}{3}}\quad \omega^{\frac{8}{3}}$$

上級數中除 $1,\omega,\omega^2$ 三根外.其餘皆爲 $x^6+x^3+1=0$ 之根.同時又爲原方程式

之特根.

(8) 依交換法 $z=x+\dfrac{1}{x}$ 能變53節例(3)之方程式爲 $z^4-z^3-4z^2+4z+1=0$ 方程式.試證此新方程式之根爲 $2\cos\dfrac{2\pi}{15}, 2\cos\dfrac{4\pi}{15}, 2\cos\dfrac{8\pi}{15}, 2\cos\dfrac{14\pi}{15}$.

(9) 變方程式 $4x^4-85x^3+357x^2-340x+64=0$ 爲逆方程式.且解之.

令 $z=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$.

答 原方程式之根爲 $\dfrac{1}{4}$, 4, 1, 16.

(10) 解方程式 $x^4+mpx^3+m^2qx^2+m^3px+m^4=0$.

以 m 除此方程式之根.則此方程式變爲逆方程式.

(11) 若 n 爲素數. α 爲方程式 $x^n-1=0$ 之虛根.試證次之關係式.

$$(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)\cdots\cdots\cdots\cdots(1-\alpha^{n-1})=n.$$

(12) 若三次方程式中各項係數.有24節例(18)之關係存在.則此三次方程式可變爲逆方程式.試證明之.

(13) 若四次方程式中各項係數.有24節例(22)之關係存在.則此四次方程式可變爲逆方程式.試證明之.

(14) 若 α 爲方程式 $x^7-1=0$ 之虛根.試作一三次方程式.其根爲 $\alpha+\alpha^6$, $\alpha^3+\alpha^4$, $\alpha^2+\alpha^5$.

答 $x^3+x^2-2x-1=0$.

若此三次方程式之根已知.則 $x^7-1=0$ 之根.可由他之二次方程式求得.因若此三根爲 x_1, x_2, x_3. 則 $\alpha+\alpha^6=+x_1$, $\alpha, \alpha^6=1$. 故 α, α^6 爲方程式 $x^2-x_1x+1=0$ 之根. 同樣 x^2, x^5 爲方程式 $x^2-x_2x+1=0$ 之根. α^3, α^4 爲方程式 $x^2-x_3x+1=0$ 之根.但 $\alpha+\alpha^6=\alpha+\dfrac{\alpha^7}{\alpha}=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$. 故 $\alpha+\alpha^6$ 爲實數. 同樣 $\alpha^3+\alpha^4, \alpha^2+\alpha^5$ 亦皆爲實數.故上三次方程式中所有之根皆爲實根

(15) 若 α 爲 $x^{13}-1=0$ 方程式之虛根.求以次之三值爲根作一方程式.

$$\alpha+\alpha^8+\alpha^{12}+\alpha^5,\qquad \alpha^2+\alpha^3+\alpha^{11}+\alpha^{10},\qquad \alpha^4+\alpha^6+\alpha^9+\alpha^7.$$

答 $x^3+x^2-4x+1=0$.

因 $\alpha+\alpha^{12}+\alpha^5+\alpha^8=\alpha+\dfrac{\alpha^{13}}{\alpha}+\alpha^5+\dfrac{\alpha^{13}}{\alpha^5}=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}+\alpha^5+\dfrac{1}{\alpha^5}$. 故此第一根當爲實數.同樣第二第三兩根亦皆爲實數.故上三次方程式之根皆爲實根,今以 x_1,x_2,x_3 順次代上三個根.則 $\alpha+\alpha^{12}+\alpha^5+\alpha^8=x_1$ 又 $(\alpha+\alpha^{12})(\alpha^5+\alpha^8)$ 可化爲 $\alpha^6+\alpha^9+\alpha^{17}+\alpha^{20}$, 代入 $\alpha^{13}=1$ 之關係. 此式又可化爲 $\alpha^6+\alpha^9+\alpha^4+\alpha^7$. 即 $(\alpha+\alpha^{12})(\alpha^5+\alpha^8)=x_3$. 故 $\alpha+\alpha^{12}$ 及 $\alpha^5+\alpha^8$ 爲 $x^2-x_1x+x_3=0$ 方程式之根. 同樣 $\alpha^2+\alpha^{11}$及$\alpha^3+\alpha^{10}$ 爲方程式 $x^2-x_2x+x_1=0$ 之根. $\alpha^4+\alpha^9$ 及 $\alpha^6+\alpha^7$ 爲方程式 $x^2-x_3x+x_2=0$ 之根.當此等方程式之根一一求得時.則每一對之根 $\alpha, \alpha^{12}, \alpha^8, \alpha^5$……如前又可由另一二次方程式定出.學者可自論之.

(16) 依二次方程式解法求方程式 $x^{17}-1=0$ 之根.

令 α 爲上方程式之虛根.今作一二次方程式.其根爲

$$\alpha_1=\alpha+\alpha^9+\alpha^{13}+\alpha^{15}+\alpha^{16}+\alpha^8+\alpha^4+\alpha^2, \qquad \alpha_2=\alpha^3+\alpha^{10}+\alpha^5+\alpha^{11}+\alpha^{14}+\alpha^7+\alpha^{12}+\alpha^6.$$

因 $1+\alpha_1+\alpha_2=0$. 故 $\alpha_1+\alpha_2=-1$. 又 $\alpha_1\alpha_2=4(\alpha_1+\alpha_2)=-4$. 故 α_1, α_2 爲方程式 $x^2+x-4=0$ 之根.解此方程式卽得此二根.再令

$$\beta_1=\alpha+\alpha^{13}+\alpha^{16}+\alpha^4, \quad \beta_2=\alpha^9+\alpha^{15}+\alpha^8+\alpha^2; \quad \gamma_1=\alpha^3+\alpha^5+\alpha^{14}+\alpha^{12}, \quad \gamma_2=\alpha^{10}+\alpha^{11}+\alpha^7+\alpha.$$

此時 $\beta_1+\beta_2=\alpha_1$. $\beta_1\beta_2=\alpha_1+\alpha_2=-1$. 故 β_1,β_2 爲方程式 $x^2-\alpha_1x-1=0$ 之根. 同樣 γ_1,γ_2 爲方程式 $x^2-\alpha_2x-1=0$ 之根.又令

$$\delta_1=\alpha+\alpha^{16}, \qquad \delta_2=\alpha^{13}+\alpha^4.$$

則 $\delta_1+\delta_2=\beta_1$, $\delta_1\delta_2=\gamma_1$ 故 δ_1, δ_2 爲方程式 $x^2-\beta_1x+\gamma_1=0$ 之根.此外因 $\alpha+\alpha^{16}=\delta$. $\alpha\,\alpha^{16}=1$. 故 α, α^{16} 爲方程式 $x^2-\delta_1x+1=0$ 之根. 餘準此. 故上方程式之各根.皆可依二次方程式解法而得.

n 爲素數時,求解二項方程式 $x^n-1=0$. 有 Gauss 之法則.以上三題.是其例也. n 旣爲素數.則 $n-1$ 非素數.卽 $n-1$ 可分解爲素因子積. 若其中最大素因數爲 p. 則方程式 $x^n-1=0$ 之根.可依不比 p 次更高之方程式之解法而得.例如 n 爲 13. 則 $13-1=12=3\times2^2$. 故 $x^{13}-1=0$ 方程式之根,可依另一三次

方程式而得.又如 n 爲 17. 則 $17-1=16=2^4$. 故 $x^{17}-1=0$ 方程式之根.可依二次方程式之解法而得.用 Gauss 方法時,須將此 $n-1$ 個虛根.置於適當位置.今述於次.設有一素數 n 及小於 n 之一整數 p 於此.今自 0 至 $n-2$ 求 p 之逐次方乘.又以 n 一一除之.若其剩餘爲 $n-1$ 個不同之值.則稱 p 爲素數 n 之素根.素數之素根可多於 1 個.如 13 之素根爲 2, 6, 7, 11. 又 17 之素根爲 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14. 今取素數 n 之一素根 p. 又自 0 至 $n-2$ 作 p 之乘方. $p^0(=1), p^1(=p), p^2, p^3, \ldots\ldots p^{n-2}$ 又取方程式 $x^n-1=0$ 中一虛根 α. 作級數 α, α^p $\alpha^{p^2}, \alpha^{p^3}, \ldots\ldots \alpha^{p^{n-2}}$. 再依 $\alpha^n=1$ 關係.將級數中各項變化之.至各項之指數俱比 n 小始止.然後將變化後各項.依固有次序書出.是爲 Gauss 之排列法.今自 0 至 11 求 13 之最小素根 2 之逐次方乘.且以 13 除之.其剩餘依次爲

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 3 \quad 6 \quad 12 \quad 11 \quad 9 \quad 5 \quad 10 \quad 7. \tag{1}$$

又自 0 至 15 求 17 之最小素根 3 之逐次方乘.且以 17 除之.其剩餘依次爲

$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 10 \quad 13 \quad 5 \quad 15 \quad 11 \quad 16 \quad 14 \quad 8 \quad 7 \quad 4 \quad 12 \quad 2 \quad 6. \tag{2}$$

依 Gauss 方法解方程式 $x^{13}-1=0$ 時,令其中一虛根爲 α. 且以第一剩餘級數中各項爲指數作 α 之各乘方.再將所得各項依第一剩餘中各項之次序書之爲

$$\alpha \quad \alpha^2 \quad \alpha^4 \quad \alpha^8 \quad \alpha^3 \quad \alpha^6 \quad \alpha^{12} \quad \alpha^{11} \quad \alpha^9 \quad \alpha^5 \quad \alpha^{10} \quad \alpha^7. \tag{A}$$

是爲級數 $\alpha^{2^0}, \alpha^{2^1}, \alpha^{2^2}, \ldots\ldots \alpha^{2^{11}}$, 依 $\alpha^{13}=1$ 變化後所得之結果.今將級數(A)全體分爲三組而求其和.每組四根.即自第一根 α 起.以下每間二項取出一根而求其和.又自第二根起.如前法求其和.更自第三根起.如前法求其和.此時作出例(15)中三次方程式之根.依此三次方程式.即可求出原方程式中一切根.又令 α 爲方程式 $x^{17}-1=0$ 之虛根.今以第二剩餘中各項爲指數.作 α 之乘方.再將所得結果依第二剩餘中各項之次序書之爲

$$\alpha \quad \alpha^3 \quad \alpha^9 \quad \alpha^{10} \quad \alpha^{13} \quad \alpha^5 \quad \alpha^{15} \quad \alpha^{11} \quad \alpha^{16} \quad \alpha^{14} \quad \alpha^8 \quad \alpha^7 \quad \alpha^4 \quad \alpha^{12} \quad \alpha^2 \quad \alpha^6. \tag{B}$$

是爲級數 $\alpha^{3^0}, \alpha^{3^1}, \alpha^{3^2}, \ldots\ldots \alpha^{3^{15}}$ 依 $\alpha^{17}=1$ 變化後所得之結果.今將級數(B)全

體分爲二組而求其和.每組 8 根.卽可第一根起.以下每間一項取出一根而求其和.又自第二根起.如前法求其和.此時可得例(16)中二次方程式如 $x^2+x-4=0$ 之根.依此二次方程式卽可求出原方程式中一切根.

一般在方程式 $x^n-1=0$ 中.若 n 爲素數.α 爲方程式中之虛根.則將此 $n-1$ 個虛根.依上法排列之.再分配爲數部分.而求其和.其分配之方法.一視 $n-1$ 中因子之性質而定.且其任意二和之積.爲其中二和或二和以上之總和.參觀前後各題.便知此說之可信矣.

應用 Gauss 方法.必須知素數之最低素根.此最低素根.亦可由實驗法求得.實際比 100 小之素數.除 71, 41 二數外.其最低素根,皆爲 2, 3, 5 三數中之一.41 之最低素根爲6. 71 之最低素根爲7. 求素數之素根.見於 Serret 之著作中.茲不贅.

(17) 求19之最低素根.並解方程式 $x^{19}-1=0$.

19之最低素根爲 2. 以19除自0至17. 2之各方乘.其剩餘可實行計算而得.因 $19-1=18=3^2\times2$. 故原方程式可自三次方程式及二次方程式之解法解出.今作一方程式.其根爲

$$\alpha+\alpha^8+\alpha^7+\alpha^{18}+\alpha^{11}+\alpha^{12},\quad \alpha^2+\alpha^{16}+\alpha^{14}+\alpha^{17}+\alpha^3+\alpha^5,\quad \alpha^4+\alpha^{13}+\alpha^9+\alpha^{15}+\alpha^6+\alpha^{10}.$$

卽得第一三次方程式.但 α 爲原方程式中一虛根.

(18) 自方程式 $x^{17}-1=0$ 以後.次數爲素數.且其根可自二次方程式解法而得之最低二項方程式爲 $x^{257}-1=0$. 試證明之.

自257以後.凡 $n-1$ 爲2之某方乘之素數 n. 首爲65537. 故得下級數.

3　　5　　17　　257　　65537　　…………

若 n 爲級數中任一值. Gauss 謂用幾何方法.能將一圓分爲 n 等分.或作一有規則 n 邊形.

(19) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n$ 爲 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n=0$ 方程式之根.求作一方程式.其根爲 $\alpha_1+\frac{1}{\alpha_1},\ \alpha_2+\frac{1}{\alpha_2},\ \cdots\cdots \alpha_n+\frac{1}{\alpha_n}$.

作恆等式 $x^n+p_1x^{n-1}+\cdots\cdots+p_n=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)$.

變 x 爲 $\frac{1}{x}$. 自32節.又得恆等式,

$$p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+p_1x+1=p_n\left(x-\frac{1}{\alpha_1}\right)\left(x-\frac{1}{\alpha_2}\right)\cdots\cdots\left(x-\frac{1}{\alpha_n}\right).$$

將二恆等式相乘.又以 x^n 除其結果.則積之右端各因子俱成 $x+\frac{1}{x}-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$ 形狀.令 $z=x+\frac{1}{x}$. 又依45節關係式.積之左端便成 z 之 n 次多項式.令此多項式爲0.即得所求之方程式.

(20) 若方程式 $a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$ 之根爲 $\alpha, \beta, \alpha, \delta$. 求等勢函數 $\Sigma\alpha^2\beta^2(\gamma-\delta)^2$ 之值.

答 $a_0^2\Sigma\alpha^2\beta^2(\gamma-\delta)^2=48(a_3^2-a_2a_4)$.

今以原方程式中根之逆數爲根作新方程式.再適用27節例(19)之結果.即可導出 $\Sigma\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)^2$ 之值.又以 $\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2$ 之值 $\frac{a_4^2}{a_0^2}$ 乘之.即得所求等勢函數之值.

(21) 若方程式 $a_0x^n+na_1x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+na_{n-1}x+a_n=0$ 之根爲 α_1 $\alpha_2,\cdots\cdots\alpha_n$. 試求等勢函數 $\Sigma(d_1-d_2)^2d_3^2d_4^2\cdots\cdots d_n^2$ 之值.

吾人易知 $a_0^2\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2$ 之值爲 $n^2(n-1)(a_1^2-a_0a_2)$. 今以原方程式中根之逆數爲根作新方程式.再適用上之結果.即可導出 $\Sigma\left(\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_2}\right)^2$ 之值.再以 α_1^2, $\alpha_2^2,\cdots\cdots\alpha_n^2$ 之值 $\frac{a_n^2}{a_0^2}$ 乘之.即得所求等勢函數之值爲 $\frac{n^2(n-1)(a^2_{n-1}-a_{n-2}a_n)}{a_0^2}$.

(22) 令 $\sqrt[5]{ab}=p$, $a+b=-2q$, θ 爲 1 之 5 次虛根.則以次之 5 值爲根之方程式爲 $x^5-5px^3+5p^2x+2q=0$. 試證明之.

$\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}$, $\theta\sqrt[5]{a}+\theta^4\sqrt[5]{b}$, $\theta^2\sqrt[5]{a}+\theta^3\sqrt[5]{b}$, $\theta^3\sqrt[5]{a}+\theta^2\sqrt[5]{b}$, $\theta^4\sqrt[5]{a}+\theta\sqrt[5]{b}$.

[注意]五次方程式變爲上之形狀時解之較易.

(23) 試用三角函數式表上例之根又令 p 之值爲正.試證明次之各場合.

1 若 $p^5<q^2$. 則有一實根四虛根.

2. 若 $p^5>q^2$. 則一切根皆爲實數.

3. 若 $p^5=q^2$. 則有一平方二次因子.

(24) 令 θ 爲 1 之 5 次虛根.試求下之連乘積.

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\theta\beta+\theta^4\gamma)(\alpha+\theta^2\beta+\theta^3\gamma)(\alpha+\theta^3\beta+\theta^2\gamma)(\alpha+\theta^4\beta+\theta\gamma).$$

答 $\alpha^5+\beta^5+\gamma^5-5\alpha\beta\gamma(\alpha^2-\beta\gamma)$

(25) 令 α 爲 1 之五次虛根.試作一四次方程式.其根爲

$$\alpha+2\alpha^4,\qquad \alpha^2+2\alpha^3,\qquad \alpha^3+2\alpha^2,\qquad \alpha^4+2\alpha.$$

答 $x^4+3x^3-x^2-3x+11=0.$

第六章

三次方程式及四次方程式之代數解法

55. 方程式之代數解法 討論三次及四次方程式之先.須將解此等方程式所適用之原理略陳梗概.本節首述二次方程式之三種解法.並說明若何可擴充之於三次及四次方程式.至其詳細情形.後節更闡明之.

第一解法 令根之一般式中含有方根符號.

令此根之一般式爲 $p+\sqrt{q}$.因平方根號之前具有兩重符號.故 $p+\sqrt{q}$ 實際可代表兩值.且只限於兩值.故不啻爲二次方程式之根之天然形狀.今將 $x=p+\sqrt{q}$ 化爲有理式.

則 $$x^2-2px+p^2-q=0. \tag{A}$$

令原二次方程式爲 $$x^2+Px+Q=0. \tag{B}$$

若 A 與 B 二者絕對相等.當有 $2p=-P$, $p^2-q=Q$.

因之 $p=-\dfrac{P}{2}$, $\sqrt{q}=\sqrt{p^2-Q}=\dfrac{\sqrt{P^2-4Q}}{2}$.

是以原方程式之二根爲 $-\dfrac{P}{2}\pm\dfrac{\sqrt{P^2-4Q}}{2}$.

因 $\sqrt[3]{p}+\dfrac{A}{\sqrt[3]{p}}$ 及 $\sqrt[3]{p}\sqrt[3]{q}(\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q})$ 兩式中之立方根符號.可代表三種不同之值如次. $\sqrt[3]{p}$, $\omega\sqrt[3]{p}$, $\omega^2\sqrt[3]{p}$, $\sqrt[3]{q}$, $\omega\sqrt[3]{q}$, $\omega^2\sqrt[3]{q}$.

因之此二式能代表三種不同之值.且只限於三種.第一式不待論矣.今第就第二式論之如次.

若兩立方根符號代表次之各組.

$$\sqrt[3]{p},\ \sqrt[3]{q}\quad \omega\sqrt[3]{p},\ \omega\sqrt[3]{q},\ \omega^2\sqrt[3]{p},\ \omega^2\sqrt[3]{q}.$$

則上式成爲 $\sqrt[3]{p}\sqrt[3]{q}(\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q})$ 之形狀.

若其各組爲 $\sqrt[3]{p},\ \omega\sqrt[3]{q},\ \omega\sqrt[3]{p},\ \omega^2\sqrt[3]{q},\ \omega^2\sqrt[3]{p},\ \sqrt[3]{q}.$

則上式成爲 $\sqrt[3]{p}\sqrt[3]{q}(\omega\sqrt[3]{p}+\omega^2\sqrt[3]{q})$ 之形狀.

若其各組爲 $\omega\sqrt[3]{p},\ \sqrt[3]{q},\ \omega^2\sqrt[3]{p},\ \omega\sqrt[3]{q},\ \sqrt[3]{p},\ \omega^2\sqrt[3]{q}.$

則上式成爲 $\sqrt[3]{p}\sqrt[3]{q}(\omega^2\sqrt[3]{p}+\omega\sqrt[3]{q})$ 之形狀.

故上兩式亦爲表三次方程式之根之適當形式.

同樣,在次之二式中變化平方根之符號.可導出四種不同之結果.且只限於此四種.故可以之代表四次方程式之根.

$$\sqrt{p}+\sqrt{q}+\frac{A}{\sqrt{p}\sqrt{q}}\qquad \sqrt{p}\sqrt{q}+\sqrt{q}\sqrt{r}+\sqrt{r}\sqrt{p}$$

第二解法 用分解因子法解二次方程式時.若能將此方程式左端分爲兩個一次因子.亦可將其根求出.因此先將原方程式左端書爲 $x^2+Px+Q+\theta-\theta$. 令 θ 之值能使 $x^2+Px+Q+\theta$ 爲完全平方.即令 $Q+\theta=\frac{P^2}{4}$.

此時 θ 之值爲 $\frac{P^2-4Q}{4}$. 以之代入原式.即得

$$x^2+Px+Q=\left(x+\frac{P}{2}\right)^2-\left(0x+\frac{\sqrt{P^2-4Q}}{2}\right)^2.$$

此時原方程式成爲 u^2-v^2 之形狀.故可分解爲 $u+v$ 與 $u-v$ 二因子.

吾人亦能將三次方程式書爲 $(lx+m)^3-(l'x+m')^3$, 或 u^3-v^3 之形狀.因之本一次方程式 $u-v=0$ $u-\omega v=0$ $u-\omega^2v=0$. 能將原方程式之三根一一求出.

同樣四次方程式之左端亦可變成次之形式,

$$(lx^2+mx+n)^2-(l'x^2+m'x+n')^2, \quad (x^2+px+q)(x^2+p'x+q').$$

因之原方程式之根.可自他兩個二次方程式求出.在第一場合時.此兩方程式爲 $lx^2+mx+n=\pm(l'x^2+m'x+n')$. 在第二場合時.此兩方程式一爲 $x^2+px+q=0$. 一爲 $x^2+p'x+q'=0$.

第三解法　依根之等勢函數解之.

令方程式 $x^2+Px+Q=0$ 之二根爲 α 與 β. 則 $\alpha+\beta=-P$, $\alpha\beta=Q$. 依此二方程式求 α 與 β 之值.與解原方程式無異.(參攷24) 故僅有此二方程式.並無何種利益.然若能知根與係數間之另一關係式 $l\alpha+m\beta=F(P,Q)$. 則將此方程式同方程式 $\alpha+\beta=-P$ 結合.即能定出 α 與 β. 因在二次方程式中常有 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=P^2-4Q$. 故此另一關係式爲

$$\alpha-\beta=\sqrt{P^2-4Q}.$$

令三次方程式 $x^3+Px^2+Qx+R=0$ 之三根爲 α, β, γ. 則此三根之和 $\alpha+\beta+\gamma=-P$. 若再能求得兩方程式其形狀爲 $l\alpha+m\beta+n\gamma=F(P, Q, R)$. 則由此三方程式.自可決定 α, β, γ 三者之值.至後便知 $(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)^3$ 與 $(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)^3$ 之值.皆可自一二次方程式定出.由是若知此等函數之值.則原方程式之根 α, β, γ 自易求得.

命 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 爲四次方程式 $x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S=0$ 之根.則此四根之和 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-P$. 此外若能再求得三種一次方程式其形狀爲 $l\alpha+m\beta+n\gamma+\gamma\delta=F(P,Q,R,S)$. 即可決定 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 之值. 在66節即知函數 $(\beta+\gamma-\alpha-\delta)^2$ $(\gamma+\alpha-\beta-\delta)^2$ $(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2$ 爲某三次方程式之根.故若知此三個函數之值.亦可將原方程式之根 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 定出.

56. 三次方程式之代數根 令普通三次方程式 $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ 變爲次之形狀,

$$z^3+3Hz+G=0 \tag{A}$$

此處　$z=ax+b,\quad H=ac-b^2,\quad G=a^2d-3abc+2b^3.$　(36節)

解此方程式時.令 $z=\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}.$

立方之即得 $z^3=p+q+3\sqrt[3]{p}\sqrt[3]{q}(\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q})=p+q+3\sqrt[3]{p}\sqrt[3]{q}\,z.$

是以　$z^3-3\sqrt[3]{p}\sqrt[3]{q}\,z-(p+q)=0.$

以之與(A)式相較.當有 $p+q=-G$　$\sqrt[3]{p}\sqrt[3]{q}=-H.$

由是可得 $p=\frac{1}{2}\{-G+\sqrt{G^2+4H^3}\}$, $q=\frac{1}{2}\{-G-\sqrt{G^2+4H^3}\}$. 今以 $-\frac{H}{\sqrt[3]{p}}$ 代 $\sqrt[3]{q}$. 則 $z=\sqrt[3]{p}+\frac{-H}{\sqrt[3]{p}}$ 爲(A)方程式之代數根. 因 $\sqrt[3]{p}$ 可代表三種不同之值 $\sqrt[3]{p}, \omega\sqrt[3]{p}, \omega^2\sqrt[3]{p}$. 故 A 方程式之三根爲

$$\sqrt[3]{p}+\frac{-H}{\sqrt[3]{p}},\qquad \omega\sqrt[3]{p}+\omega^2\frac{-H}{\sqrt[3]{p}},\qquad \omega^2\sqrt[3]{p}+\omega\frac{-H}{\sqrt[3]{p}}. \tag{B}$$

於此應宜注意者.上式中若以 q 代 p.則原之 $\sqrt[3]{p}+\frac{-H}{\sqrt[3]{p}}$,今變爲 $\sqrt[3]{q}+\frac{-H}{\sqrt[3]{q}}$. 但此後者之值與 $\sqrt[3]{q}+\sqrt[3]{p}$ 無異.故此 $\sqrt[3]{q}+\frac{-H}{\sqrt[3]{q}}$ 所代表三種不同之值.仍爲(A)方程式之代數根.

在 B 式中若 $\sqrt[3]{p}$ 代表 $\omega\sqrt[3]{p}$. 則 B 式中第一式變爲第二式. 第二式變爲第三式.第三式變爲第一式.若 $\sqrt[3]{p}$ 代表 $\omega^2\sqrt[3]{p}$. 則 B 式中第一式變爲第三式.第三式變爲第二式. 第二式變爲第一式.故不論 $\sqrt[3]{p}$ 所選擇之值如何. 以上三式不受何種影響.惟次序頓異耳.

今以 $ax+b$ 代 z. 則 $ax+b=\sqrt[3]{p}+\dfrac{-H}{\sqrt[3]{p}}$ 之根.即普通三次方程式如 $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ 之解答.式中 $p=\frac{1}{2}\{-G+\sqrt{G^2+4H^3}\}$, $\sqrt[3]{p}$ 可代表 $\sqrt[3]{p},\omega\sqrt[3]{p},\omega^2\sqrt[3]{p}$ 三值. $\sqrt{G^2+4H^3}$ 可代表 $+\sqrt{G^2+4H^3}$ 與 $-\sqrt{G^2+4H^3}$ 兩值.

57. 數字方程式之應用 上之公式與二次方程式之公式絕異.應用二次方程式之公式.可解一切二次數字方程式. 但若應用上之公式以解數字三次方程式.有時甚感困難.例如三次方程式之根一律爲實數時.依 43 節則 G^2+4H^3 當爲負.令 G^2+4H^3 之值爲 $-K^2$. 又以 $\frac{1}{2}(-G\pm K\sqrt{-1})$ 代 $\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$ 式中之 p, q. 則三次方程式之根爲

$$\{\tfrac{1}{2}(-G+K\sqrt{-1})\}^{\frac{1}{3}}+\{\tfrac{1}{2}(-G-K\sqrt{-1})\}^{\frac{1}{3}}.$$

此時吾人無適當算術方法將此複虛數之立方根求得.故三次方程式之根若一律爲實數.則上之公式即不便應用.

若原方程式有二虛根. 則 G^2+4H^3 爲正. 故依公式 $\left\{\dfrac{-G+\sqrt{G^2+4H^3}}{2}\right\}^{\frac{1}{3}}+\left\{\dfrac{-G-\sqrt{G^2+4H^3}}{2}\right\}^{\frac{1}{3}}$ 可算出根之數值.但在事實上求原方程式之實根.亦少用此方法.

若三次方程式之根皆爲實數.則可用三角法解之.今述於次.

令 $2R\cos\phi=-G.\quad 2R\sin\phi=K.$

則 $p=\dfrac{-G+K\sqrt{-1}}{2}=R(\cos\phi+\sqrt{-1}\sin\phi)=Re^{\phi\sqrt{-1}}.$

又 $q=\dfrac{-G-K\sqrt{-1}}{2}=R(\cos\phi-\sqrt{-1}\sin\phi)=Re^{-\phi\sqrt{-1}}.$

$$R^2=\frac{G^2+K^2}{4}=\frac{G^2-G^2-4H^3}{4}=(-H)^3,\quad R=(-H)^{\frac{3}{2}}.$$

$$\omega=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}=-\cos\frac{\pi}{3}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\cos\frac{2\pi}{3}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}=e^{\pm\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}.$$

$$\tan\phi=-\frac{K}{G}.$$

此時 $\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}=R^{\frac{1}{3}}e^{\frac{\phi}{3}\sqrt{-1}}+R^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{\phi}{3}\sqrt{-1}}=2(-H)^{\frac{1}{2}}\cos\dfrac{\phi}{3}.$

$$\omega\sqrt[3]{p}+\omega^2\sqrt[3]{q}=R^{\frac{1}{3}}e^{\pm\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}e^{\frac{\phi}{3}\sqrt{-1}}+R^{\frac{1}{3}}e^{\mp\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}e^{-\frac{\phi}{3}\sqrt{-1}}$$

$$=(-H)^{\frac{1}{2}}\left\{e^{\frac{\pm2\pi+\phi}{3}\sqrt{-1}}+e^{-\frac{\pm2\pi+\phi}{3}\sqrt{-1}}\right\},$$

$$\omega^2\sqrt[3]{p}+\omega\sqrt[3]{q}=R^{\frac{1}{3}}e^{\mp\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}e^{\frac{\phi}{3}\sqrt{-1}}+R^{\frac{1}{3}}e^{\pm\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}e^{-\frac{\phi}{2}\sqrt{-1}}$$

$$=(-H)^{\frac{1}{2}}\left\{e^{\frac{\mp2\pi+\phi}{3}\sqrt{-1}}+e^{-\frac{\mp2\pi+\phi}{3}\sqrt{-1}}\right\},$$

此最後二式皆包括於 $2(-H)^{\frac{1}{2}}\cos\dfrac{\phi\pm2\pi}{3}$ 式中.

因　$\cos\frac{\pm 2\pi+\phi}{3}=-\cos\left(\pi\mp\frac{\pm 2\pi+\phi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi\mp\phi}{3}.$

此時三次方程式 $z^3+3Hz+G=0$ 之根 $\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$, $\omega\sqrt[3]{p}+\omega^2\sqrt[3]{q}$, $\omega^2\sqrt[3]{p}+\omega\sqrt[3]{q}$ 之值成爲 $2(-H)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\phi}{3}$, $-2(-H)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi\pm\phi}{3}$.

由上所得之結果.更藉正餘弦數表之助.亦可將原方程式之根一一定出.此法在應用上不甚利便.若欲用算術方法計算方程式之實根.當用第十章之方法.茲不贅.

58. 化三次式爲兩立方之差. 令三次式 $ax^3+3bx^2+3cx+d\equiv\phi(x)$ 化爲 $z^3+3Hz+G$. 此間 z 代表 $ax+b$. 假定

$$z^3+3Hz+G\equiv\frac{1}{\mu-\nu}\left\{\mu(z+\nu)^3-\nu(z+\mu)^3\right\} \qquad (1).$$

式中 μ 與 ν 爲吾人所欲決定之值.(1) 式右端可化成 $z^3-3\mu\nu z-\mu\nu(\mu+\nu)$. 因與左端恆等.故有　$\mu\nu=-H$　$\mu\nu(\mu+\nu)=-G$.

由是　$\mu+\nu=\frac{G}{H}$　$\mu-\nu=\frac{\sqrt{G^2+4H^3}}{H}=\frac{a\sqrt{\Delta}}{H}$.　(見 42 節)

由上式求 μ 與 ν 之值,則得　$\mu=\frac{G+a\sqrt{\Delta}}{2H}$,　$\nu=\frac{G-a\sqrt{\Delta}}{2H}$.

又
$$(z+\mu)(z+\nu)=z^2+\frac{G}{H}z-H. \qquad (2)$$

代入 z 之值 $ax+b$. 由 (1) 式

$$a^2\phi(x)\equiv\frac{H}{a\sqrt{\Delta}}\left\{\frac{G+a\sqrt{\Delta}}{2H}\left(ax+b+\frac{G-a\sqrt{\Delta}}{2H}\right)^3\right.$$
$$\left.-\frac{G-a\sqrt{\Delta}}{2H}\left(ax+b+\frac{G+a\sqrt{\Delta}}{2H}\right)^3\right\}$$

由是
$$a^3\phi(x)\equiv\frac{G+a\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\left(ax+b+\frac{G-a\sqrt{\Delta}}{2H}\right)^3$$
$$-\frac{G-a\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\left(ax+b+\frac{G+a\sqrt{\Delta}}{2H}\right)^3.$$

此時 $\phi(x)$ 化成二立方差之形.自不待言.

藉上恆等式之助.則三次方程式左端可分解爲一次因子.由是可決定其根.今以 μ,ν 之項表原方程式之根.化 (1) 式爲
$$a^2(\mu-\nu)\phi(x)\equiv\mu(z+\nu)^3-\nu(z+\mu)^3=0.$$

分解爲一次因子.則有
$$\sqrt[3]{\mu}(z+\nu)-\sqrt[3]{\nu}(z+\mu)=0,$$
$$(\sqrt[3]{\mu}-\sqrt[3]{\nu})z=\sqrt[3]{\mu}\sqrt[3]{\nu}[(\sqrt[3]{\mu})^2-(\sqrt[3]{\nu})^2];$$
$$\sqrt[3]{\mu}(z+\nu)-\omega\sqrt[3]{\nu}(z+\mu)=0,$$
$$(\sqrt[3]{\mu}-\omega\sqrt[3]{\nu})z=\omega\sqrt[3]{\mu}\sqrt[3]{\nu}[(\sqrt[3]{\mu})^2-(\omega\sqrt[3]{\nu})^2];$$
$$\sqrt[3]{\mu}(z+\nu)-\omega^2\sqrt[3]{\nu}(z+\mu)=0,$$
$$(\sqrt[3]{\mu}-\omega^2\sqrt[3]{\nu})z=\omega^2\sqrt[3]{\mu}\sqrt[3]{\nu}[(\sqrt[3]{\mu})^2-(\omega^2\sqrt[3]{\nu})^2].$$

故 $z=ax+b$ 之三值爲
$$\sqrt[3]{\mu}\sqrt[3]{\nu}(\sqrt[3]{\mu}+\sqrt[3]{\nu}),\quad \sqrt[3]{\mu}\sqrt[3]{\nu}(\omega\sqrt[3]{\mu}+\omega^2\sqrt[3]{\nu}),\quad \sqrt[3]{\mu}\sqrt[3]{\nu}(\omega^2\sqrt[3]{\mu}+\omega\sqrt[3]{\nu}).$$

今自每組級數 $\sqrt[3]{\mu}, \omega\sqrt[3]{\mu}, \omega^2\sqrt[3]{\mu}$, 及 $\sqrt[3]{\nu}, \omega\sqrt[3]{\nu}, \omega^2\sqrt[3]{\nu}$ 中.各取一值以代上式之 $\sqrt[3]{\mu}, \sqrt[3]{\nu}$. 此時不論選擇方法爲何如.其代入結果.恆爲以上三式.惟方法不同.則次序時有變化耳.又不論式中立方根符號所代表之值爲何.而 $\sqrt[3]{\mu}\sqrt[3]{\nu}(\sqrt[3]{\mu}+\sqrt[3]{\nu})$ 式可代表三種不同之值. 然只限於三. 故表三次方程式之根. 以 $\sqrt[3]{\mu}\sqrt[3]{\gamma}(\sqrt[3]{\mu}+\sqrt[3]{\nu})$ 與前節 $\sqrt[3]{p}+\frac{-H}{\sqrt[3]{p}}$ 爲適當. (參攷55節1)

以 $ax+b$ 代(2)式之 z. 且簡單之.此時函數2變成次之形狀,

$$\frac{a^2}{H}\left\{(ac-b^2)x^2+(ad-bc)x+bd-c^2\right\}.$$

故此二次式以 $ax+b+\mu$ 及 $ax+b+\nu$ 爲其因子.此等因子,見於前 $a^3\phi(x)$ 之式中,μ 之值爲 $\frac{G+a\sqrt{\Delta}}{2H}$, γ 之值爲 $\frac{G-a\sqrt{\Delta}}{2H}$.

59. 以根之等勢函數解三次方程式 令三次方程式

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=0$$

之根爲 α, β, γ. θ 可取 $1, \omega, \omega^2$ 三值中任一值.則次式

$$\tfrac{1}{3}\{\alpha+\beta+\gamma+\theta(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)+\theta^2(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)\}.$$

之值.隨 θ 之值而變.若 θ 爲1.則此式爲 α. θ 爲 ω. 則此式爲 γ, θ 爲 ω^2. 則此式爲 β. 故若能以原方程式之係數表 $(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)$, $(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)$ 二式之值.則將此二式之值代入上式中.卽可求得原方程式之根 α, β, γ. 因此二式之積雖爲根之等勢函數.(見下)然其和不爲根之等勢函數.故此二式之值.不能自一二次式求得.今若將此二式各立方之.則其立方和確爲根之等勢函數.故此二式之立方又可自一二次式求得.今表之如次.

令　$L=\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma,\qquad M=\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma.$

則　$L^3=A+B\omega+C\omega^2,\qquad M^3=A+B\omega^2+C\omega.$

式中 $A=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+6\alpha\beta\gamma$, $B=3(\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha)$, $C=3(\alpha\beta^2+\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2)$.

由是 $L^3+M^3=2\Sigma\alpha^3-3\Sigma\alpha^2\beta+12\alpha\beta\gamma=-27\frac{G}{a^3}$.[參攷26節例(5),27節例(15)]

又 $$LM=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta=-9\frac{H}{a^2}.$$

是以 L^3, M^3 爲次之二次方程式之根, $t^2+3^3\frac{G}{a^3}t-3^6\frac{H^3}{a^6}=0.$

令此二次方程式之根 $\frac{3^3}{2a^3}\{-G\pm\sqrt{G^2+4H^3}\}$ 一爲 t_1,一爲 t_2. 則原方程式之三根爲

$$\alpha=-\frac{b}{a}+\frac{1}{3}(\sqrt[3]{t_1}+\sqrt[3]{t_2}),\quad \beta=-\frac{b}{a}+\frac{1}{3}(\omega^2\sqrt[3]{t_1}+\omega\sqrt[3]{t_2}),$$

$$\gamma=-\frac{b}{a}+\frac{1}{3}(\omega\sqrt[3]{t_1}+\omega^2\sqrt[3]{t_2}).$$

於此當注意者.上式所得 α,β,γ 各值.與 56 節所得原方程式之根一致.

又在 L^3, M^3 兩式中.若將 α,β,γ 三文字交換.則不論其交換法則若何,終不能於此二值之外更取得別值.例如

$$(\beta+\omega^2\gamma+\omega\alpha)^3=(\omega^3\beta+\omega^2\gamma+\omega\alpha)^3=\omega^3(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)^3=M^3$$

$$(\beta+\omega\gamma+\omega^2\alpha)^3=(\omega^3\beta+\omega^4\gamma+\omega^2\alpha)^3=\omega^6(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)^3=L^3$$

....

故 L^3, M^3 之值可自一二次式解出.故解三次方程式.可適用解二次方程式之法則.

α,β,γ 之函數.可有若干個.具上述 L^3, M^3 之同一性質.今在此等函數中.任意取兩個,則此二者間關係.可以一次有理式表之.詳見後章,茲不贅.

例題

(1) 分解 $(\alpha-\beta)^2(x-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2(x-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2(x-\beta)^2$ 爲簡單因子.

令 $U=(\beta-\gamma)(x-\alpha)$, $V=(\gamma-\alpha)(x-\beta)$, $W=(\alpha-\beta)(x-\gamma)$.

答 $\frac{2}{3}(U+\omega V+\omega^2 W)(U+\omega^2 V+\omega W)$

(2) 試證下組各方程式中有二次公因子.

$$(\beta-\gamma)^3(x-\alpha)^3=(\gamma-\alpha)^3(x-\beta)^3=(\alpha-\beta)^3(x-\gamma)^3$$

適用前之記號則 $U^3=V^3=W^3$, 因 $U+V+W=0$.

則 $U^3-V^3=(U-V)(U^2+UV+V^2)=\frac{1}{2}(U-V)(U^2+V^2+U^2+2UV+V^2)$

$$=\frac{1}{2}(U-V)(V^2+V^2+W^2).$$

同樣 $V^3-W^3=\frac{1}{2}(V-W)(U^2+V^2+W^2)$

$$W^3-U^3=\frac{1}{2}(W-U)(U^2+V^2+W^2).$$

故 $(\beta-\gamma)^2(x-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2(x-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2(x-\gamma)^2$ 爲所求之二次公因子.

(3) 分解次之各式爲因子.

(1) $(\beta-\gamma)^3(x-\alpha)^3+(\gamma-\alpha)^3(x-\beta)^3+(\alpha-\beta)^3(x-\gamma)^3$

(2) $(\beta-\gamma)^5(x-\alpha)^5+(\gamma-\alpha)^5(x-\beta)^5+(\alpha-\beta)^5(x-\gamma)^5$

(3) $(\beta-\gamma)^7(x-\alpha)^7+(\gamma-\alpha)^7(x-\beta)^7+(\alpha-\beta)^7(x-\gamma)^7$

在28節例(40)之結果中.以例(1)之記號 U, V, W 代 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. 即得各式之因子.

答 (1) $3UVW$, (2) $\frac{5}{2}(U^2+V^2+W^2)UVW$, (3) $\frac{7}{4}(U^2+V^2+W^2)^2UVW$.

(4) 試以兩立方之差表 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$,

令 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=U_1^3-V_1^3$,

則 $U_1-V_1\equiv\lambda(x-\alpha)$, $\omega U_1-\omega^2 V_1\equiv\mu(x-\beta)$, $\omega^2 U_1-\omega V_1\equiv\nu(x-\gamma)$.

以此三式各端相加.因 $1+\omega+\omega^2$ 爲 0. 故左端之和爲 0. 因之有

$$\lambda+\mu+\nu=0, \qquad \lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0.$$

是以 $\lambda=\rho(\beta-\gamma)$, $\mu=\rho(\gamma-\alpha)$, $\nu=\rho(\alpha-\beta)$.

以此三式相乘.因 λ, μ, ν 之積爲 1. 故 $\frac{1}{\rho^3}=(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$.

以 λ, μ, ν 之值代入.並用例(1)之符號.則有

$$U_1-V_1=\rho U\cdots\cdots(1),\ \omega U_1-\omega^2V_1=\rho V\cdots\cdots(2),\ \omega^2U_1-\omega V_1=\rho W\cdots\cdots(3).$$

以 1 乘(1)式,ω^2 乘(2)式,ω 乘(3)式而加之,則有 $3U_1=\rho(U+\omega^2V+\omega W)$.

以 1 乘(1)式,ω 乘(2)式,ω^2 乘(3)式而加之,又有 $-3V_1=\rho(U+\omega V+\omega^2W)$.

此時 U_1, V_1 之值可以定出.

(5) L 與 M 俱為根差之函數.試證明之.

因 $1+\omega+\omega^2=0$, 則 $L=\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma=\alpha-h+\omega(\beta-h)+\omega^2(\gamma-h)$.

此式對於 h 之任何值均合.故令 h 之值依次為 α, β, γ 各根時.則 L 之值可以 $\beta-\gamma, \gamma-\alpha, \alpha-\beta$ 之項表之.同樣 M 之值亦可以 $\beta-\gamma, \gamma-\alpha, \alpha-\beta$ 之項表之.

(6) 試以係數之項表根差平方之積.

$$L+M=2\alpha-\beta-\gamma, \qquad L+\omega^2M=(2\beta-\gamma-\alpha)\omega, \qquad L+\omega M=(2\gamma-\alpha-\beta)\omega^2.$$

又 $L-M=(\beta-\gamma)(\omega-\omega^2)$, $\omega^2L-\omega M=(\gamma-\alpha)(\omega-\omega^2)$, $\omega L-\omega^2M=(\alpha-\beta)(\omega-\omega^2)$.

由是如 26 節例(2)可得 $L^3+M^3=(2\alpha-\beta-\gamma)(2\beta-\gamma-\alpha)(2\gamma-\alpha-\beta)$.

$$L^3-M^3=-3\sqrt{-3}(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta).$$

在恆等式 $(L^3-M^3)^2\equiv(L^3+M^3)^2-4L^3M^3$ 中.代入上式 L^3-M^3. 及 59 節中 LM, L^3+M^3 各值.則有 $-27(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2=27^2\dfrac{G^2}{a^6}+4\left(27^2\dfrac{H^3}{a^6}\right)$

即 $a^6(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2=-27(G^2+4H^3)$. (參攷 42)

(7) 證次之恆等式, $L^3-M^3\equiv\sqrt{-3}\{(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3+(\alpha-\beta)^3\}$

$$L^3+M^3\equiv\tfrac{1}{3}\{(2\alpha-\beta-\gamma)^3+(2\beta-\gamma-\alpha)^3+(2\gamma-\alpha-\beta)^3\}$$

將前例中 $L-M$, $\omega^2L-\omega M$, $\omega L-\omega^2M$ 各式立方之又相加.即得 L^3-M^3 之值.又將 $L+M$, $L+\omega^2M$, $L+\omega M$ 各式立方再相加.即得 L^3+M^3 之值.

(8) 試以 α, β, γ 之差之項表 L^2, M^2 之值.

下式中 L^2 及 M^2 之式,乃由 $(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)^2$ 與 $(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)^2$ 中減去 $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\times(1+\omega+\omega^2)\equiv0$ 而得.

$$-L^2=(\beta-\gamma)^2+\omega^2(\gamma-\alpha)^2+\omega(\alpha-\beta)^2, \qquad -M^2=(\beta-\gamma)^2+\omega(\gamma-\alpha)^2+\omega^2(\alpha-\beta)^2$$

由上等式中同樣可得

$$-L^4=(\beta-\gamma)^2(2\alpha-\beta-\gamma)^2+\omega(\gamma-\alpha)^2(2\beta-\gamma-\alpha)^2+\omega^2(\alpha-\beta)^2(2\gamma-\alpha-\beta)^2$$

$$-M^4=(\beta-\gamma)^2(2\alpha-\beta-\gamma)^2+\omega^2(\gamma-\alpha)^2(2\beta-\gamma-\alpha)^2+\omega(\alpha-\beta)^2(2\gamma-\alpha-\beta)^2.$$

又吾人不難得 LM 與 L^2M^2 之根如次.

$2LM=(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2$, $L^2M^2=(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\beta)^2$

(9) 與 L, M 形狀類似之函數有 6. 卽

$$\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma,\qquad \omega\alpha+\omega^2\beta+\gamma,\qquad \omega^2\alpha+\beta+\omega\gamma$$

$$\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma,\qquad \omega\alpha+\beta+\omega^2\gamma,\qquad \omega^2\alpha+\omega\beta+\gamma.$$

試以此 6 式爲根,作一方程式.

第一列函數可書爲 $L, \omega L, \omega^2 L$. 第二列函數可書爲 $M, \omega M, \omega^2 M$. 故所求之方程式爲 $(\phi-L)(\phi-\omega L)(\phi-\omega^2 L)(\phi-M)(\phi-\omega M)(\phi-\omega^2 M)=0.$

上式可化爲 $(\phi^3-L^3)(\phi^3-M^3)=0.$ 或 $\phi^6-(L^3+M^3)\phi^3+L^3M^3=0.$

以 L^3+M^3 之值 $-\dfrac{27}{a^3}G$, LM 之值 $-\dfrac{9}{a^2}H$, 代入上式中.卽得所求之方程式爲

$$\phi^6+3^3\frac{G}{a^3}\phi^3-3^6\frac{H^3}{a^6}=0.$$

(10) 試以 L 與 M 之項作一方程式.其根爲三次方程式中根差之平方.

令 $\phi=(\alpha-\beta)^2$, 則依前結果 $\sqrt{-3\phi}=\omega L-\omega^2 M.$

化爲有理式.卽得所求之方程式爲 $\phi(\phi-LM)^2+\left(\dfrac{L^3-M^3}{\sqrt{27}}\right)^2=0.$ (A)

同樣,以(A)方程式中二根之差之平方或以下列三式

$$(\beta-\gamma)^2(2\alpha-\beta-\gamma)^2,\qquad (\gamma-\alpha)^2(2\beta-\gamma-\alpha)^2,\qquad (\alpha-\beta)^2(2\gamma-\alpha-\beta)^2$$

爲根之方程式.可依(8)例結果.以 $-L^2, -M^2$ 代(A)式中 M 與 L 而得.此法可重複至任何次.若欲以原方程式之係數表此等方程式.可採用前之關係式,

$$LM=-9\frac{H}{a^2},\quad L^3+M^3=-27\frac{G}{a^3}.$$

例如(A)方程式成爲 $\phi\left((\phi+9\dfrac{H}{a^2}\right)^2+27\dfrac{G^2+4H^3}{a^6}=0.$ (參攷 42 節)

(11) 令 α,β,γ 與 $\alpha'\beta'\gamma'$ 爲三次方程式

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=0,\qquad a'x^3+3b'x^2+3c'x+d'=0.$$

之根.試作一方程式.其根爲函數 $\phi=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'$ 所代表之六值.

令 $z=ax+b$. 作第一方程式之相當 z 方程式.則有 $z^3+3Hz+G=0.$
再令 $z=a'x+b'$. 作第二方程式之相當 z 方程式則有 $z^3+3H'z+G'=0.$ $\Big\}$ (A)

在(A)方程式中.其與原方程式之函數 ϕ 相當有一函數 ϕ_0 且

$$\phi_0=(a\alpha+b)(a'\alpha'+b')+(a\beta+b)(a'\beta'+b')+(a\gamma+b)(a'\gamma'+b')=aa'\phi-3bb'.$$

以(A)方程式中各根之值 $\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q},\ \omega\sqrt[3]{p}+\omega^2\sqrt[3]{q}$ 代其根則

$$\phi_0=(\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q})(\sqrt[3]{p'}+\sqrt[3]{q'})+(\omega\sqrt[3]{q}+\omega^2\sqrt[3]{q})(\omega\sqrt[3]{p'}+\omega^2\sqrt[3]{q'})$$
$$+(\omega^2\sqrt[3]{p}+\omega\sqrt[3]{q})(\omega^2\sqrt[3]{p'}+\omega\sqrt[3]{q'}).$$

上式可簡之爲 $\phi_0=3(\sqrt[3]{pq'}+\sqrt[3]{p'q})$.

立方之又得 $\phi_0^3-27\sqrt[3]{pqp'q'}\phi_0-27(p'q+pq')=0.$ (B)

今以 56 節之方程式 $x^2+Gx-H^3=0,\ x^2+G'x-H'^3=0.$

所決定 p,q,p',q' 之值,代入(B)式中,則得次之三次方程式,

$$\phi_0^3-27HH'\phi_0-\frac{27}{2}(GG'\pm\sqrt{a^2\Delta a'^2\Delta'})=0.\qquad (C)$$

式中 $a^2\Delta=G^2+4H^3,\ a'^2\Delta'=G'^2+4H'^3$. 由此二三次方程式可決 ϕ_0 之六值.最後以 $aa'\phi-3bb'$ 代(C)式中 ϕ_0, 且將兩三次方程式相乘.即得所求方程式.於此當注意者.若一三次方程式爲 $x^3-1=0$. 則 $\phi=\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma$. 此在例(9)已討論之.今不贅.

(12) 若 α,β,γ 爲方程式 $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ 之根.求作一方程式.以 ρ 之一切值爲根.但 ρ 之普通形狀爲 $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}$.

因 ρ 爲 α,β,γ 三者中二值之差之比.故以方程式 $z^3+3Hz+G=0$ 之根 z_1,z_2,z_3 代 α,β,γ. 其結果不變.故有

$$(2\rho-1)z_1=-(\rho+1)z_2,\qquad G=z_1z_2(z_1+z_2)=\frac{(2\rho-1)(\rho-2)}{(\rho+1)^2}z_1^3.$$

同樣 $H=-\frac{(\rho^2-\rho+1)}{(\rho+1)^2}z_1^2$.

自 G, H 式中消去 z_1. 卽得所求之方程式爲

$$H^3\{(\rho+1)(\rho-2)(2\rho-1)\}^2+G^2(\rho^2-\rho+1)^3=0.$$

(13) 若兩三次方程式 $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$, $a'x^3+3b'x^2+3c'x+d'=0$ 之根 α, β, γ α', β', γ' 間有關係式 $\alpha(\beta'-\gamma')+\beta(\gamma'-\alpha')+\gamma(\alpha'-\beta')=0$ 成立時. 試求此兩方程式間係數之關係式.

以 $\omega-\omega^2$ 乘之,則此關係式化作, $LM'=L'M$.

兩端立方之,並代入 L^3, M^3, L'^3, M'^3 之值.卽得所求之關係式爲

$$G^2H'^3=G'^2H^3.$$

(14) 若依一次形化 $x'=px+q$ 例(13)之 x' 方程式可變成 x 方程式,試以根或係數之項決定其條件.

在此場合 $\alpha'=p\alpha+q$, $\beta'=p\beta+q$, $\gamma'=p\gamma+q$.

消去 p, q, 則得 $\beta\gamma'-\beta'\gamma+\gamma\alpha'-\gamma'\alpha+\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$.

是爲例(13)中根之關係式.若以

$$l\alpha+m,\quad l\beta+m,\quad l\gamma+m,\qquad l'\alpha'+m',\quad l'\beta'+m',\quad l'\gamma'+m'.$$

代 $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ 各值. 上式仍等於 0. 故吾人能將例(13)之兩三次方程式,以經過一次形化 $z=ax+b$, $z'=a'x'+b'$ 後所得之結果

$$z^3+3Hz+G=0,\qquad z'^3+3H'z'+G'=0$$

代之.因前方程式中根所適合之條件必爲後方程式之根所適合也.

令 $z'=Kz$. 若 $H'=K^2H$, $G'=K^3G$. 則 z' 方程式變成 z 方程式. 今自 G', H' 二式內消去 K. 則 z' 方程式變成 z 方程式之條件爲

$$G^2H'^3=G'^2H^3$$

故吾人所求之條件亦當爲 $G^2H'^3=G'^2H^3$. 與例(13)之條件同. 於此當注意者此等三次方程式之縮減二次方程式.亦依同一形化

$$\frac{H'}{G'}(a'x'+b')=\frac{H}{G}(ax+b)$$

而成一致.

60. 三次方程式中二根之同比異列關係 在進行討論四次方程式之前.吾人先證明關於三次方程式次之重要命題.

三次方程式中.每一對根.可以係數之項連結之成爲同比異列關係.

參攷 27 節例(13),(14),則得次之關係式,

$$a_0{}^2\{(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2\}=18(a_1{}^2-a_0a_2)$$

$$a_0{}^2\{\alpha(\beta-\gamma)^2+\beta(\gamma-\alpha)^2+\gamma(\alpha-\beta)^2\}=9(a_0a_3-a_1a_2)$$

$$a_0{}^2\{\alpha^2(\beta-\gamma)^2+\beta^2(\gamma-\alpha)^2+\gamma^2(\alpha-\beta)^2\}=18(a_2{}^2-a_1a_3)$$

採用次之記號. $a_0a_2-a_1{}^2=H$, $a_0a_3-a_1a_2=2H_1$, $a_1a_3-a_2{}^2=H_2$ 以 $\alpha\beta$, $-(\alpha+\beta)$, 1 依次乘上各式而加之. 因

$$\alpha^2-\alpha(\alpha+\beta)+\alpha\beta=0,\quad \beta^2-\beta(\alpha+\beta)+\alpha\beta=0.$$

則 $a_0{}^2(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)^2=18\{H\alpha\beta+H_1(\alpha+\beta)+H_2\}.$ $\quad(A)$

依 42 節可得 $a_0{}^4(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2=-27\Delta.$ $\quad(B)$

以 B 式除 A 式之平方然後開方,又可得

$$H\alpha\beta+H_1(\alpha+\beta)+H_2=\sqrt{-\frac{\Delta}{3}}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

是以 $H\alpha\beta+\left(H_1+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\Delta}{3}}\right)\alpha+\left(H_1-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\Delta}{3}}\right)\beta+H_2=0.$ $\quad(C)$

是爲所求之同比異列關係式.於此當注意者.在(C)方程式中之係數.含有無理量.其根號前之第二種符號.所以表他對根間之關係.

61. 四次方程式之第一解法 Euler 氏之假定 令四次方程式 $ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0$ 變成次之形式,

$$z^4+6Hz^2+4Gz+a^2I-3H^2=0. \text{(參攷 37)} \qquad (A)$$

式中 $z=ax+b$, $H=ac-b^2$, $I=ae-4bd+3c^2$, $G=a^2d-3abc+2b^3$

Euler 氏解方程式(A)用次之方法.

令 $z=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$. 兩端平方之.可得

$z^2-(p+q+r)=2(\sqrt{pq}+\sqrt{qr}+\sqrt{rp}$. 再平方之.且代入 z 之值

則 $z^4-2(p+q+r)z^2-8\sqrt{pqr}z+(p+q+r)^2-4(pq+qr+rp)=0$.

以之與(A)方程式比較.則

$$p+q+r=-3H,\ qr+rp+pq=3H^2-\frac{a^2I}{4},\ \sqrt{p}\sqrt{q}\sqrt{r}=-\frac{G}{2}.$$

結果 p, q, r 為方程式 $t^3+3Ht^2+\left(3H^2-\frac{a^2I}{4}\right)t-\frac{G^2}{4}=0$ (1)

之根.因 $-G^2=4H^3-a^2HI+a^3J$. (37 節)故可書(1)式為次之形狀.

$$4(t+H)^3-a^2I(t+H)+a^3J=0.$$

更令 $t+H=a^2\theta$. 最後得方程式 $4a^3\theta^3-Ia\theta+J=0$. (2)

稱(2)為原四次方程式之縮減三次方程式.以下常用此名稱.又稱(1)為原四次方程式之 Euler 三次方程式.以示區別.

令 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 為(2)方程式之根.因 $t=b^2-ac+a^2\theta$. 故有

$p=b^2-ac+a^2\theta_1$, $q=b^2-ac+a^2\theta_2$, $r=b^2-ac+a^2\theta_3$. 因而

$$z=\sqrt{b^2-ac+a^2\theta_1}+\sqrt{b^2-ac+a^2\theta_2}+\sqrt{b^2-ac+a^2\theta_3}.$$

若令此公式表(A)方程式之根.則其根號前之符號.務宜略加限制.否則 z 有(8)個不同之值.為此公式所表.此適當之限制

爲 $\sqrt{p}\sqrt{q}\sqrt{r}=-\frac{G}{2}$. 由是 $\sqrt{p},\sqrt{q},\sqrt{r}$ 各值.雖有二種符號可取.惟其積之符號.須與 $-\frac{G}{2}$ 之符號一致.若其所取之符號.能滿足此條件.則此一組之符號可以採用.因

$$\sqrt{p}\sqrt{q}\sqrt{r}=\sqrt{p}(-\sqrt{q})(-\sqrt{r})=\sqrt{q}(-\sqrt{r})(-\sqrt{p})$$
$$=\sqrt{r}(-\sqrt{p})(-\sqrt{q}).$$

故不論 $\sqrt{p},\sqrt{q},\sqrt{r}$ 三者之符號原爲正或負.若有一組符號能滿足此條件.則此外便有三組符號亦滿足此條件.且除此四組外其他各組皆不滿足此條件.因有此條件之限制.故 z 之公式中雖能取出不同 8 值.然可用爲(A)方程式之根者.只限於能滿足此條件之四值.

若欲除却因符號而生之困難.惟有在 z 之公式中.利用上關係,消去 $\sqrt{p},\sqrt{q},\sqrt{r}$ 三者中任一值.則其餘二值之符號可不受限制.此時 z 成爲次之形狀. $z=\sqrt{p}+\sqrt{q}-\frac{G}{2\sqrt{p}\sqrt{q}}$ (B)

式中無論 $\sqrt{p},\sqrt{q}$ 之符號如何變化. z 能取四種不同之值.惟只限於四.故能免除前弊.又第一項 $\sqrt{p}$ 與第二項 $\sqrt{q}$ 所取之符號.當與第三項中 $\sqrt{p},\sqrt{q}$ 之符號完全一致.自不待論.

最後將前所決定 $p,q,$ 之值代入(B)式內.則有 $z=ax+b$ 之值爲

$$\sqrt{b^2-ac+a^2\theta_1}+\sqrt{b^2-ac+a^2\theta_2}-\frac{G}{2\sqrt{b^2-ac+a^2\theta_1}\sqrt{b^2-ac+a^2\theta_2}}.$$

由此求得 x 之值. 卽將原四次方程式之根完全定出. 式中 θ_1, θ_2 爲方程式

$$4a^3\theta^3-Ia\theta+J=0$$

之根

Euler 氏之假定.可由次之解釋說明之.

因方程式(A)缺少第二項.故其 4 根之和爲 0. 以式表之即 $z_1+z_2+z_3+z_4=0$. 結果具有此種形狀$(z_1+z_2)^2$ 之函數.在一般場合可有六種不同之值.在本場合則只三種.今令

$$(z_2+z_3)^2=(z_1+z_4)^2=4p,\quad (z_3+z_1)^2=(z_2+z_4)^2=4q,$$

$$(z_1+z_2)^2=(z_3+z_4)^2=4r$$

由上三式.則方程式(A)之四根 z_1, z_2, z_3, z_4. 皆包括於 $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ 式中.

今更以原方程式之根 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 表(1)及(2)之根.依前所述.關於方根符號之規定.則 $z=ax+b$ 之四值.可如次書之.

$$a\alpha+b=\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r},\quad a\beta+b=-\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r},$$

$$a\gamma+b=-\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r},\quad a\delta+b=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}. \tag{3}$$

由上四式.則方程式(1)之三根 p, q, r. 可如次書之,

$$p=\frac{a^2}{16}(\beta+\gamma-\alpha-\delta)^2,\quad q=\frac{a^2}{16}(\gamma+\alpha-\beta-\delta)^2,\quad r=\frac{a^2}{16}(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2. \tag{4}$$

在(3)式中.令第四式與第一式相減,又令第二式與第三式相減,求此兩差之積,卽得 $4(q-r)=-a^2(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)$ 若採用 p, q, r 與 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 之關係式.又有 $4(q-r)=4a^2(\theta_2-\theta_3)$. 由是

$$4(q-r)=-a^2(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)=4a^2(\theta_2-\theta_3)$$

$$4(r-p)=-a^2(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)=4a^2(\theta_3-\theta_1)$$

$$4(p-q)=-a^2(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)=4a^2(\theta_1-\theta_2). \qquad (5)$$

最後由關係式(5)再藉關係式 $\theta_1+\theta_2+\theta_3=0$ 之助.可以原方程式之根 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 表 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 之值.即

$$12\theta_1=(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)-(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)$$

$$12\theta_2=(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)-(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)$$

$$12\theta_3=(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)-(\gamma-\alpha)(\beta-\delta).$$

例題

(1) 若四次方程式有二等根.則其縮減三次方程式亦有二等根.反之亦然.

(2) 若四次方程式有三等根.則其縮減三次方程式之根一律為0.結果 I 與 J 皆成為0.

(3) 若四次方程式有兩對不相同之等根.則其 Euler 三次方程式中有二根成0.結果 $G=0,\quad a^2I-12H^2=0.$

(4) 試證下之各命題.

(1) 若四次方程式之根皆為實根.則 Euler 三次方程式之根皆為正實根.

(2) 若四次式程式之根皆為虛根則 Euler 三次方程式之根皆為實根.其中二根為負一根為正.

(3) 若四次方程式有一對實根一對虛根.則 Euler 三次方程式中有二虛根一正實根.

自(4)方程式中,以 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 之適當形狀代入 p, q, r 式內.即可得上述結

果於此應宜注意者.此四次方程式除不含有等根外.上述命題.可概括各種場合.又其逆定理亦眞.自不待論.是以若 Euler 三次方程式之根皆爲正實根.則此四次方程式之根皆爲實根.若 Euler 三次方程式有負根.則此四次方程式之根皆爲虛根.若 Euler 三次方程式有虛根.則四次方程式有二實根二虛根.

(5) 試證下之命題,

(1) 若四次方程式之根皆爲實根,或皆爲虛根.則其縮減三次方程式皆爲實根.反之亦然.

(2) 若四次方程式有一對實根一對虛根.則其縮減三次方程式有二虛根.反之亦然.

此等結果可由前例而得.因(1)(2)兩三次方程式之根間,有一次關係式互相連結故也.今列舉於次. $p=b^2-ac+x^2\theta_1$, $q=b^2-ac+a^2\theta_2$, $r=b^2-ac+a^2\theta_3$.

(6) 若 H 爲正.則四次方程式有虛根.

因在此場合 Euler 三次方程式之根不能盡爲正根.若此方程式之根一律爲正.則其符號當正負相間.

(7) 若 I 爲負.則四次方程式有二實根二虛根.

因在此場合.不論 J 爲正或負,縮減三次方程式有二虛根.(22 節例 12)(Descartes 之規則)

(8) 若 H 與 J 皆爲正,則四次方程式之根皆爲虛根.

因 J 爲正.則縮減三次方程式有負實根.因之 Euler 三次方程式亦有負實根.因 $t=a^2\theta-H$ 且 H 爲正故也.此爲例(4)第二種場合.在此證明中.首默認首項係數 a 爲正.若以 aJ 代 J.則 a 之符號無限制之必要.

(9) 此二四次方程式 $A_0x^4+6A_2a^2\pm4A_3x+A_4=O$ 之縮減三次方程式相同.試證明之.

(10) 求此二四次方程式 $x^4-6lx^2\pm8x\sqrt{l^3+m^3+n^3-3lmn}+3(4mn-l)^2=0$ 之縮

減三次方程式.

答 $\theta^3-3mn\theta-(m^3+n^3)=0$

(11) 證方程式 $\{x^4-6lx^2+3(4mn-l^2)\}^2=64(l^3+m^3+n^3-3lmn)x^2$ 之 8 根,皆爲公式 $\sqrt{l+m+n}+\sqrt{l+\omega m+\omega^2 n}+\sqrt{l+\omega^2 m+\omega n}$ 所表明.(比較 22 節例 20)

(12) 若方程式 $z^4+6Hz^2+4Gz+a^2I-3H^2=0$ 之根爲

$$\sqrt{l+m+n}+\sqrt{l+\omega m+\omega^2 n}+\sqrt{l+\omega^2 m+\omega n}$$

試以 l, m, n 之項表 H, I, J 之值.

答 $H=-l,\quad a_0^2 I=12mn,\quad x_0^3 J=-4(m^3+n^3)$.

(13) 若 $I=0$ 及 $J=0$ 時,試書四次方程式中根之公式.

(14) 試藉縮減三次方程式之助以根 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 之差表 I 與 J 之值.

(參攷 27 節例 16, 18)

(15) 試以 I, J 之項表根 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 之差之平方所成之積.

用本節方程式(5)及 42 節方程式(2),卽可將結果求得,

$$a^6(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\delta)^2(\gamma-\delta)^2=256(I^3-27J^2).$$

(16) 表根之公式中.其末平方根下(卽在縮減三次方程式之解答中,其立方根下所發見者)之量爲何.

答 $27J^2-I^3$.

(17) 四次方程式 $a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$ 之平方差方程式,可以 a_0, H, I, J 之項表其係數.試證明之.

消去此方程式第二項.則得 $y^4+\dfrac{6H}{a_0^2}y^2+\dfrac{4G}{a_0^3}y+\dfrac{a_0^2I-3H^2}{a_0^4}=0.$

變其根之符號,又得 $y^4+\dfrac{6H}{a_0^2}y^2-\dfrac{4G}{a_0^3}y+\dfrac{a_0^2I-3H^2}{a_0^4}=0.$

此二變化.能令根差之平方如 $(\alpha-\beta)^2$……始終不變.式中各項係數.除 G 變爲 $-G$ 外.餘均保持原狀.故 G 在平方差方程式之係數中必爲偶次數須無疑.依 37 節恆等式. G^2 可以 a_0, H, I, J 之項表之.卽由此恆等式可消去 G^2.同

樣可證明根差之偶次函數.皆可以 a_0, H, I, J 之項表其係數.且無 G 之奇次項存在.

62. 四次方程式之第二種解法 令四次方程式 $ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0$ 如前變為 $z^4+6Hz^2+4Gz+a^2I-3H^2=0$. 此間 $z=ax+b$.

今令 z 四次方程式之根為次之形狀.

$$z=\sqrt{q}\sqrt{r}+\sqrt{r}\sqrt{p}+\sqrt{p}\sqrt{q}.$$

式中含有三獨立平方根 $\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{r}$.

平方二次並變化之則有

$$\{z^2-(pq+qr+rp)\}^2=4pqr(2z+p+q+r).$$

或 $z^4-2(pq+qr+rp)z^2-8pqrz+(pq+qr+rp)^2-4pqr(p+q+r)=0.$

將此方程式與前之 z 方程式比較.則有

$$pq+qr+rp=-3H, \quad pqr=-\frac{G}{2}, \quad p+q+r=\frac{a^2I-12H^2}{2G}.$$

故 p, q, r 為方程式 $2Gt^3+(12H^2-a^2I)t^2-6HGt+G^2=0$ 之根.

上式可變為 Euler 三次方程式.或以 $\dfrac{G/2}{H-a^2\theta}$ 代上式之 t. 並以 H, I, J 表 G^2. 則可將上之三次方程式直接化為縮減三次方程式

$$4a^3\theta^3-Ia\theta+J=0.$$

於此當注意者.本節採用之方法.於根號前之符號.無 61 節所述之弊因其所假定 z 之公式中.無論根號前之符號如何

變化. z 之值只能有四個.然在 61 節. z 之值竟多至八個故也.此理可如次表明之.因

$$2(\sqrt{p}\sqrt{q}+\sqrt{q}\sqrt{r}+\sqrt{r}\sqrt{p})\equiv(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})^2-p-q-r.$$

故恆等式左端能代入表不同之值之數目.與右端平方項能代表不同之值之數目相等.但此平方項只能代表四個不同之值.故左端亦只能代表四個不同之值.

若欲以原方程式之根 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 表 p,q,r. 可令 x 爲 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. 則

$$z_1=a\alpha+b=\sqrt{q}\sqrt{r}-\sqrt{r}\sqrt{p}-\sqrt{p}\sqrt{q}$$

$$z_2=a\beta+b=-\sqrt{q}\sqrt{r}+\sqrt{r}\sqrt{p}-\sqrt{p}\sqrt{q}$$

$$z_3=a\gamma+b=-\sqrt{q}\sqrt{r}-\sqrt{r}\sqrt{p}+\sqrt{p}\sqrt{q}$$

$$z_4=a\delta+b=\sqrt{q}\sqrt{r}+\sqrt{r}\sqrt{p}+\sqrt{p}\sqrt{q}.$$

學者易知無論根號前之符號若何組合.決無超出上列四式以外之值.

由 $z_2+z_3-z_1-z_4$ 與 $z_2z_3-z_1z_4$ 可得

$$a(\beta+\gamma-\alpha-\delta)=-4\sqrt{q}\sqrt{r},\quad a^2(\beta\gamma-\alpha\delta)+ab(\beta+\gamma-\alpha-\delta)=4p\sqrt{q}\sqrt{r}.$$

以前式除後式.並適用 $-2pqr=G$ 之關係.則

$$-p=a\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\beta+\gamma-\alpha-\delta}+b=\frac{4p\sqrt{q}\sqrt{r}}{a(\beta+\gamma-\alpha-\delta)}$$

$$=2\frac{\dfrac{-G}{\sqrt{q}\sqrt{r}}}{a(\beta+\gamma-\alpha-\delta)}=\frac{8G}{a^2(\beta+\gamma-\alpha-\delta)^2}.$$

是以 $$-p=a\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\beta+\gamma-\alpha-\delta}+b=\frac{8G}{a^2(\beta+\gamma-\alpha-\delta)^2}.$$

同樣　$-q=a\dfrac{\gamma\alpha-\beta\delta}{\gamma+\alpha-\beta-\delta}+b=\dfrac{8G}{a^2(\gamma+\alpha-\beta-\delta)^2}.$

$$-r=a\frac{\alpha\beta-\gamma\delta}{\alpha+\beta-\gamma-\delta}+b=\frac{8G}{a^2(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2}.$$

63. 分解四次式爲二次因子　第一法

令四次式 $ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e$ 化爲二式平方之差

$$(ax^2+2bx+c+2a\theta)^2-(2Mx+N)^2.$$

以 a 乘原四次式.與上式比較.即得次之關係式.

$$M^2=b^2-ac+a^2\theta,\quad MN=bc-ad+2ab\theta,\quad N^2=(c+2a\theta)^2-ae$$

由此三個關係式消去 M, N. 則有

$$4a^3\theta^3-(ae-4bd+3c^2)a\theta+ace+2bcd-ad^2-eb^2-c^3=0.$$

是爲前之縮減三次方程式.由此方程式可得 θ 之三值 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, 同時 M^2, MN, N^2 對此亦有相當三值.故此四次式之平方差可由三種不同方法決定.於此應宜注意者.對於 M 之每一值.必有 N 之單一値與之相應.因

$$MN=bc-ad+2ab\theta$$

故也

四次式 $(ax^2+2bx+c+2a\theta)^2-(2Mx+N)^2$ 可分解爲次之兩個二次因子.即 $ax^2+2(b-M)x+c+2a\theta-N,\ ax^2+2(b+M)x+c+2a\theta+N.$ 當 θ 取 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 時.原四次式可分解爲三對二次因子.原方程式至此可完全解決.

欲知原方程式之根 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 與 M_1, M_2, M_3 之關係.可令前述每對二次因子之根依次爲 $\beta\gamma\alpha\delta,\ \gamma\alpha\beta\delta,\ \alpha\beta\gamma\delta$. 則有

$$\beta+\gamma=-\frac{2}{a}(b-M_1),\quad \gamma+\alpha=-\frac{2}{a}(b-M_2),\quad \alpha+\beta=-\frac{2}{a}(b-M_3)$$

$$\alpha+\delta=-\frac{2}{a}(b+M_1),\quad \beta+\delta=-\frac{2}{a}(b+M_2),\quad \gamma+\delta=-\frac{2}{a}(b+M_3).$$

式中 $M_1=\sqrt{b^2-ac+a^2\theta_1}$, $M_2=\sqrt{b^2-ac+a^2\theta_2}$, $M_3=\sqrt{b^2-ac+a^2\theta_3}$.

此時 $(\beta+\gamma)-(\alpha+\delta)=4\frac{M_1}{a}$, $(\gamma+\alpha)-(\beta+\delta)=4\frac{M_2}{a}$, $(\alpha+\beta)-(\gamma+\delta)=4\frac{M_3}{a}$.

又 $(\gamma+\alpha)+(\alpha+\beta)-(\beta+\gamma)=-\frac{2b}{a}+\frac{2}{a}(M_2+M_3-M_1)=2\alpha$. 是以有

$$a\alpha+b=M_2+M_3-M_1.\quad \text{同樣}\quad a\beta+b=M_3+M_1-M_2.$$

$$a\gamma+b=M_1+M_2-M_3.\qquad a\delta+b=-M_1-M_2-M_3.$$

於此易見本節中原四次方程式之根之公式.與 61 者所述者類似. M^2 之值 M_1^2, M_2^2, M_3^2 與 61 節所載 Euler 三次方程式之根完全相同.關於 M_1, M_2, M_3 根號前之符號.亦有相當限制. 與 61 節相仿. 因由前之關係式. 則有次之關係式成立, $a^3(\beta+\gamma-\alpha-\delta)(\gamma+\alpha-\beta-\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta)=64\,M_1M_2M_3$. 依 27 節例 (20), 上式左端等於 $32G$. 是以 $M_1M_2M_3=\frac{G}{2}$.應用此關係.即知 M_1, M_2, M_3 三者所受符號上之制限. 與 61 節所述者無異.

藉關係式 $M_1M_2M_3=\frac{G}{2}$ 之助. 可於原方程式之根之公式中消去 M_3 一值. 此時原方程式之四根能如 61 節以單一公式表之.即

$$ax+b=M_1+M_2-\frac{G}{2M_1M_2}.$$

式中 $M_1=\sqrt{b^2-ac+a^2\theta_1}$, $M_2=\sqrt{b^2-ac+a^2\theta_2}$ 之符號不受限制.

例　題

(1) 求作一方程式.以 $\lambda=\beta\gamma+\alpha\delta$, $\mu=\gamma\alpha+\beta\delta$, $\nu=\alpha\beta+\gamma\delta$ 爲根.

自四次式中第一對二次因子顯然有 $\beta\gamma+\alpha\delta=4\theta_1+2\dfrac{c}{a}$,

同樣 $\gamma\alpha+\beta\delta=4\theta_2+2\dfrac{c}{a}$, $\alpha\beta+\gamma\delta=4\theta_3+2\dfrac{c}{a}$,

因 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 爲縮減三次方程式之根.故能定出所求之方程式.

答 $(ax-2c)^3-4I(ax-2c)+16J=0$.

(2) 利用前例中各方程式.將縮減三次方程式之根.以原四次方程式之根表之.

$2\dfrac{c}{a}$ 之值,能以原四次方程式之根 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 之項表之.今將此值代入前例內 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 三式中.則有

$$12\theta_1=2\lambda-\mu-\nu=(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)-(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)$$

$$12\theta_2=2\mu-\nu-\lambda=(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)-(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)$$

$$12\theta_3=2\nu-\lambda-\mu=(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)-(\gamma-\alpha)(\beta-\delta).$$

(參攷 61 節 6 式)

(3) 試用在例(1)內 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 各式.證實 61 節例(5)之命題.

(4) 求作一方程式,以下列各函數爲根,

$$\tfrac{1}{8}(\beta\gamma-\alpha\delta)(\beta+\gamma-\alpha-\delta),\quad \tfrac{1}{8}(\gamma\alpha-\beta\gamma)(\gamma+\alpha-\beta-\delta),\quad \tfrac{1}{8}(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta).$$

由四次式之二次因子.則 $\beta+\gamma-\alpha-\delta=\dfrac{4M_1}{a}$, $\beta\gamma-\alpha\delta=-\dfrac{2N_1}{a}$.

又 $M_1N_1=b^2-ac+2ab\theta_1=-a^2\phi_1$. 但 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 爲所求三次方程式之根. $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, 爲縮減三次方程式之根.故由縮減三次方程式,依此一次形化,可將吾人預擬之結果求得.

答 $(a^2\phi+bc-ad)^3-b^2I(a^2\phi+bc-ad)-2b^3J=0$.

(5) 求作一方程式,其根爲 $\dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\beta+\gamma-\alpha-\delta}$, $\dfrac{\gamma\alpha-\beta\delta}{\gamma+\alpha-\beta-\delta}$, $\dfrac{\alpha\beta-\gamma\delta}{\alpha+\beta-\gamma-\delta}$.

令 ϕ 爲上式中任一函數. θ 爲縮減三次方程式中相當於 ϕ 之根.則依前之結果可有

$$-2\phi=\frac{MN}{M^2}=\frac{b^2-ad+2ab\theta}{b^2-ac+a^2\theta}.$$

如此自縮減三次方程式,依上同比異列形化.可得所求之結果.

上式又可變如次之形式, $a\phi+b=\dfrac{\frac{1}{2}G}{a^2\theta-H}$.

應用此關係.可得所求之關係式如次,

$$2G(a\phi+b)^3+(a^2I-12H^2)(a\phi+b)^2-6HG(a\phi+b)-G^2=0.$$

將上式展開.並以 a^3 除之.則爲(参攷 44 節例 14)

$$2G\phi^3+(a^2e+6b^2c-9ac^2+2abd)\phi^2+2(abe+2b^2d-3acd)\phi+b^2e-ad^2=0.$$

(6) 作一方程式,其根爲 $\dfrac{a^2}{4}(\beta\gamma-\alpha\delta)^2$, $\dfrac{a^2}{4}(\gamma\alpha-\beta\delta)^2$, $\dfrac{a^2}{4}(\alpha\beta-\gamma\delta)^2$.

此爲例(4) N^2 之三值.令其中一值爲 ϕ. 則由縮減三次方程式,依次之同比異列關係式.可得所求之結果 $\phi=(2bcd-ad^2-eb^2+4abd\theta)/(c-a\theta)$.

(7) 作一方程式其根爲

$$\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{(\beta+\gamma)\alpha\delta-(\alpha+\delta)\beta\gamma},\quad \frac{\gamma\alpha-\beta\delta}{(\gamma+\alpha)\beta\delta-(\beta+\delta)\gamma\alpha},\quad \frac{\alpha\beta-\gamma\delta}{(\alpha+\beta)\gamma\delta-(\gamma+\delta)\alpha\beta}.$$

本例之三根式.可自例(5)三根式中以各根之逆代其各根而得.故作本題時.可適用例(5)之結果.今述於次.

以原四次方程式中根之逆數爲根作一新方程式.又作此新方程式之縮減三次方程式.則有等比異列關係式 $\dfrac{b'c'-a'd'+2a'b'\theta'}{b'^2-a'c'+a'^2\theta'}=-2\phi$ 成立.式中 a', b'……爲新方程式中係數與原方程式中係數 $a, b,$……相當. θ' 爲新方程式中縮減三次方程式之根. ϕ 爲本例三根式中任一根式.故由此新縮減三次方程式.依上之等比異列形化.可將吾人預擬之結果作出.

64. 分解四次式爲二次因子 第二法

將四次式 $ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e$ 分解爲兩個二次因子.

$$a(x^2+2px+q)(x^2+2p'x+q')$$

將此二式比較.可知有

$$p+p'=2\frac{b}{a},\quad q+q'+4pp'=6\frac{c}{a},\quad pq'+p'q=2\frac{d}{a},\quad q'q=\frac{e}{a} \quad (1)$$

若能於上四個方程式外.再增一方程式如 $F(p,q,p',q')=\phi$.吾人便可消去 p,q,p',q' 而得一新方程式.由此新方程式.可決定 ϕ 之若干個值.

此第五方程式可假定爲 $pp'=\phi$.或 $q+q'=\phi$.但無論在何種場合.ϕ 均爲一三次方程式所定.因此之故,每個函數.若用四次方程式之根表之.只能有三種不同之值故也.若假定 $\phi=\frac{c}{a}-pp'=\frac{1}{4}\left(q+q'-\frac{2c}{a}\right)$.則較前更利便.此兩函數依(1)式中第二式相等.自不待論.借前後各方程式之助.易得

$$pq+p'q'=\frac{8b\phi}{a}+\frac{4abc-2a^2d}{a^3}.$$

消去 $p\,q\,p'\,q'$.則得關係式 $4a^3\phi^3-Ia\phi+J=0$.

是爲由前種解法所得之縮減三次方程式.若從此發見 pp' 或 $q+q'$ 之值.則依方程式(1)可將原四次方程式完全解開.

上文第五方程式之假定.其理由甚顯然.將 ϕ 之假定值,與63節例(1)內之方程式比較.便知 ϕ 與前節之 θ 相同.故消去 p,p',q,q' 時所導出之 ϕ 方程式.可預料其與前之縮減三次方

程式完全一致.一般若 ϕ 爲 λ, μ, ν 之差之任一函數.及因之爲 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 之差之偶次函數.(27 節例 18)則其根爲 ϕ 之各值之方程式.除 a, H, I, J 外.不能含他之係數函數.

若 ϕ 等於下方第二例中任一式.則以此式所表各種不同之值爲根之 ϕ 方程式.亦如上例.自消去 $p\,p'\,q\,q'$ 而得.

例題

(1) 分解 $z^4+6Hz^2+4Gz+a^2I-3H^2$ 爲二次因子.

將此式與積 $(z^2+2pz+q)(z^2-2pz+q')$ 比較.則得 p 之方程式

$$4p^6+12Hp^4+12\left(H^2-\frac{a^2I}{12}\right)p^2-G^2=0.\text{(參攷 61 節 1 式)}$$

令 $a^2\phi=p^2+H=\frac{1}{4}(q+q'-2H)$.

則得 ϕ 方程式.以 a^3 除之,成爲 $4a^3\phi^3-Ia\phi+J=0$.

(2) 若四次式能分解爲二次因子 $(x^2+px+q)(x^2+p'x+q')$.試證以下方各式中所能有之值爲根之 ϕ 方程式皆爲三次方程式.

$$q+q', \quad \frac{q-q'}{p-p'}, \quad \frac{pq'-p'q}{p-p'}, \quad \frac{pq'-p'q}{q-q'}.$$

$$(p-p)'^2, \quad (q-q')^2, \quad (p-p')(q-q'), \quad (pq'-p'q)^2$$

若以下方各式中所能有之值爲根.則 ϕ 方程式爲六次方程式.

$$p, \quad q, \quad p-p', \quad q-q', \quad pq'-p'q, \quad p^2-4q$$

若以根表此等函數即可知每個函數能有若干個值.

65. 四次方程式之逆方程式 令 $x=ky+\rho$.則四次式

$$ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0$$

變成次之形狀, $ak^4y^4+4U_1k^3y^3+6U_2k^2y^2+4U_3ky+U_4=0.$

式中　$U_1=a\rho+b,\quad U_2=a\rho^2+2b\rho+c,\quad U_3=a\rho^3+3b\rho^2+3c\rho+d\cdots\cdots$

(見 35 節)

若此方程式爲逆方程式.則可得二關係.藉以定 k 及 ρ 之值.

$$ak^4=U_4,\qquad\qquad k^2U_1=kU_3$$

消去 k, 則 ρ 方程式爲　$aU_3{}^2-U_1{}^2U_4=0.$

又因　$k^2=\dfrac{U^3}{U_1}=\dfrac{a\rho^3+3b\rho^2+3c\rho+d}{a\rho+b}.$

故對於 ρ 之每一值. k 之值有二.其絕對值相等.符號相反.

若將 U_3, U_4 依下式交換之.(36, 37 兩節)

$$a^2U_3=U_1{}^3+3HU_1+G,\quad a^3U_4=U_1{}^4+6HU_1{}^2+4GU_1+a^2I-3H^2$$

則 ρ 方程式成爲　$2GU_1{}^3+(a^2I-12H^2)U_1{}^2-6GHU_1-G^2=0$　(1)

是爲定 $U_1=a\rho+b$ 之三次方程式.若令 $a\rho+b=\dfrac{\frac{G}{2}}{a^2\theta-H}$ 則 θ 爲縮減三次方程式 $4a^3\theta^3-Ia\theta+J=0$ 之根.即 U_1 方程式今成 θ 方程式.

此變化可用之於解四次方程式.於此當注意者.(1)之三次方程式.與62節之三次方程式.其根之絕對值相等.符號相反.

今以原方程式之根 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 表 ρ 與 k. 因 y 方程式爲逆方程式.故其根之形狀爲 $y_1,\ y_2,\ \dfrac{1}{y_2},\ \dfrac{1}{y_1}.$ 故吾人可寫爲

$$\alpha=ky_1+\rho,\quad \beta=ky_2+\rho,\quad \gamma=k\frac{1}{y_2}+\rho,\quad \delta=k\frac{1}{y_1}+\rho.$$

是以　$(\alpha-\rho)(\delta-\rho)=(\beta-\rho)(\gamma-\rho)=k^2.$

是以 $\rho=\dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\beta+\gamma-\alpha-\delta}$, $-k^2=\dfrac{(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\beta+\gamma-\alpha-\delta)^2}$.

今用幾何理解釋 k 與 ρ 二量.令 O, A, B, C, D 爲同在一直線上五點. O 爲原點.自 O 至其餘各點之距離 OA, OB, OC, OD 等.以四次方程式

$$ax^4+4bx^3+bcx^2+4dx+e=0$$

之根 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 表之. O_1, O_2, O_3 爲以下三組二次方程式所定三對合系之心. $F_1, F_1', F_2, F_2', F_3, F_3'$ 爲其焦點.

$$\left.\begin{array}{ll}(x-\beta)(x-\gamma)=0, & (x-\alpha)(x-\delta)=0\\(x-\gamma)(x-\alpha)=0, & (x-\beta)(x-\delta)=0\\(x-\alpha)(x-\beta)=0, & (x-\gamma)(x-\delta)=0.\end{array}\right\}$$

若依對合系之性質.則有

$$O_1BO_1C=O_1AO_1D=O_1F_1^2\cdots\cdots\cdots\cdots$$

今變之爲 $(OB-OO_1)(OC-OO_1)=(OA-OO_1)(OD-OO_1)=O_1F_1^2\cdots$

以之與以下各方程式比較 $(\beta-\rho)(\gamma-\rho)=(\alpha-\rho)(\delta-\rho)=k^2\cdots\cdots$.

則可證明 ρ 之三值爲自原點 O 至心點 O_1, O_2, O_3 之距離 OO_1, OO_2, OO_3. 又因 $k^2=O_1F_1^2$. 故在幾何上 k 共計有六值. 爲以下之距離所表.

$$O_1F_1O_1F_1', \qquad O_2F_2O_2F_2', \qquad O_3F_3O_3F_3'$$

式中 $O_1F_1+O_1F_1'=0\cdots\cdots$.因此等距離長短相等方向相反故也.

吾人能單獨自幾何面以 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 之項表對合系之心點及

其焦點.今說明於次.

因 $\{F_1BF_1'C\}$, $\{F_1AF_1'D\}$ 成調和.是以

$$\frac{2}{F_1F_1'}=\frac{1}{F_1B}+\frac{1}{F_1C}=\frac{1}{F_1A}+\frac{1}{F_1D}.$$

若以 x 表自原點 O 至焦點 F_1 或 F_1' 之距離.則

$$\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\delta}.$$

解此方程式則有

$$x=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\beta+\gamma-\alpha-\delta}\pm\frac{\sqrt{-(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}}{\beta+\gamma-\alpha-\delta}=\rho\pm k.$$

是以 $\rho=\dfrac{OF_1+OF_1'}{2}$.　$k=\pm\dfrac{OF_1-OF_1'}{2}=\pm O_1F_1$.

例　題

(1) 變三次方程式 $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ 爲反數形.

自假定 $x=ky+\rho$ 可導出方程式

$$-GU_1^3+8H^2U_1^2+H^3=0.$$

式中 $U_1=a\rho+b$. ρ 之值易知爲

$$\frac{\beta\gamma-\alpha^2}{\beta+\gamma-2\alpha},\qquad \frac{\gamma\alpha-\beta^2}{\gamma+\alpha-2\beta},\qquad \frac{\alpha\beta-\gamma^2}{\alpha+\beta-2\gamma}.$$ (參攷 44 節例 12)

今用幾何方法解釋之.在軸上取 A', B', C' 三點.令 A' 爲對於 B, C 二點 A 之共軛調和點. B' 爲對於 C, A 二點 B 之共軛調和點. C' 爲對於 A, B 二點 C 之共軛調和點.則 k 與 ρ 之值爲 $\rho=\dfrac{OA+OA'}{2}$,　$-k=\dfrac{OA-OA'}{2}$.

若欲以 α, β, γ 之項表 OA', OB', OC' 之值.可參攷 44 節例 (13).

66. 以根之等勢函數解四次方程式 命 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 爲四次方程式之根.今作此四根之函數.若不論此四根在函數式中如何交換.此函數只能代表三種不同之值.則四次方程式可依三次方程式之解法解開.參攷64節例(2).便知同此性質之函數.可有若干個存在.此等函數亦如59節之函數.有一重要性質.以後當證明之.即假定有二組函數於此.在其一組中任取一函數.又在他組中取某一函數.則此二函數,可以係數之項.用同比異列關係式表之.

因欲達到此目的.吾人乃用55節中曾經討論之函數.以此等函數能直接導出四次方程式之根式故也.今述之於次.

作一方程式.其根爲 $t=\left(\dfrac{\alpha+\theta\beta+\theta^2\gamma+\theta^3\delta}{4}\right)^2$ 所代表之三值.

式中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 四者可任意交換. $\theta=-1$.

今命此三值爲 t_1,t_2,t_3. 則

$$t_1=\left(\frac{\beta+\gamma-\alpha-\delta}{4}\right)^2,\quad t_2=\left(\frac{\gamma+\alpha-\beta-\delta}{4}\right)^2,\quad t_3=\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{4}\right)^2.$$

因
$$(\beta+\gamma-\alpha-\delta)^2\equiv\Sigma\alpha^2+2\lambda-2\mu-2\nu,$$

$$\Sigma(\alpha-\beta)^2=\Sigma\alpha^2-2\lambda-2\mu-2\nu=-48\frac{H}{a^2}.$$

以後式中 $\Sigma\alpha^2$ 之值代入前式內.即得 (參攷27節例19)

$$t_1=\frac{2\lambda-\mu-\nu}{12}-\frac{H}{a^2}.\ \text{同樣}\ t_2=\frac{2\mu-\nu-\lambda}{12}-\frac{H}{a^2}.\quad t_3=\frac{2\nu-\lambda-\mu}{12}-\frac{H}{a^2}.$$

是以 $t_1+t_2+t_3=-3\dfrac{H}{a^2}.$

又因 $\Sigma(2\mu-\nu-\lambda)(2\nu-\lambda-\mu)=-36\dfrac{I}{a^2}$.（參攷 63 節例 2）

則 $t_2t_3+t_3t_1+t_1t_2=\dfrac{3H^2}{a^4}-\dfrac{I}{4a^2}$.

$(2\mu-\nu-\lambda)(2\nu-\lambda-\mu)(2\lambda-\mu-\nu)$ 之值.亦可自 63 節例(2) 導出.則

$$t_1t_2t_3=\frac{G^2}{4a^6}.$$

故以 t_1, t_2, t_3 爲根之方程式,成爲

$$(a^2t)^3+3H(a^2t)^2+\left(3H^2-\frac{a^2I}{4}\right)(a^2t)-\frac{G^2}{4}=0.$$

或以 37 節 G^2 之值代入.則得 $4(a^2t+H)^3-a^2I(a^2t+H)+a^3J=0$.
更依 $a^2t+H=a^2\theta$ 交換之.即將上式變爲模範縮減三次方程式.

若欲決定 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 之值.則有次之關係式,

$$\beta+\gamma-\alpha-\delta=4\sqrt{t_1},\quad -\beta+\gamma+\alpha-\delta=4\sqrt{t_2},$$

$$\beta-\gamma+\alpha-\delta=4\sqrt{t_3},\quad \beta+\gamma+\alpha+\delta=-4\frac{b}{a}.$$

由此等關係式.可得

$$\beta=-\frac{b}{a}+\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3},\quad \gamma=-\frac{b}{a}+\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3},$$

$$\alpha=-\frac{b}{a}-\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3},\quad \delta=-\frac{b}{a}-\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}.$$

又自上 $\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}, \sqrt{t_3}$ 之式.則有方程式

$$\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}=\frac{G}{2a^3}.\qquad\text{（參攷 63 節）}$$

由此方程式.一平方根.可以其餘二平方根表之.且能令本節所表根之普通公式與前所賦與者相同.

令 L, M 代表下列二函數.

$$L\equiv(\beta\gamma+\alpha\delta)+\omega(\gamma\alpha+\beta\delta)+\omega^2(\alpha\beta+\gamma\delta),$$

$$M\equiv(\beta\gamma+\alpha\delta)+\omega^2(\gamma\alpha+\beta\delta)+\omega(\alpha\beta+\gamma\delta)$$

依 63 節例(1)之方程式.此等函數.可以縮減三次方程式之根表之.即

$$\tfrac{1}{4}L=\theta_1+\omega\theta_2+\omega^2\theta_3,\qquad \tfrac{1}{4}M=\theta_1+\omega^2\theta_2+\omega\theta_3.$$

此二函數又可藉 t 與 θ 之關係式 $a^2t+H=a^2\theta$ 之助以 t_1, t_2, t_3 表之即

$$\tfrac{1}{4}L=t_1+\omega t_2+\omega^2 t_3,\qquad \tfrac{1}{4}M=t_1+\omega^2 t_2+\omega t_3.$$

此二函數 L 與 M 在四次方程式理論中佔重要位置.亦如 59 節中函數 L 與 M 之在三次方程式論中也.當 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 四量任意交換時.此二函數之立方.只能有二種值.且在四次方程式中有此性質之函數以此二函數之立方爲最簡.今作縮減三次方程式之縮減二次方程式.則此二次方程式之根卽此二函數之立方也.凡四次方程式之各種解法.皆可以此二者爲基礎.

例　　題

(1) 表明 L 與 M 爲 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 之差之函數.

令 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 四者各增長 h. 則 L 與 M 之值仍不變.因 $1+\omega+\omega^2=0$ 故也.

(2) 試以係數表根 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 之差之平方所成之積.

L 與 M 之值.可以 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 表之,已如上述.自此等關係式.易得

$$\left.\begin{aligned}12\theta_1&=L+M\\12\theta_2&=\omega^2L+\omega M\\12\theta_3&=\omega L+\omega^2M.\end{aligned}\right\}\text{又}\quad\left.\begin{aligned}L-M&=(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\omega^2-\omega)\\\omega^2L-\omega M&=(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)(\omega^2-\omega)\\\omega L-\omega^2M&=(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)(\omega^2-\omega).\end{aligned}\right\}$$

將此等方程式兩端相乘.並注意 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 三者為 $4a^3\theta^3-Ia\theta+J=0$ 方程式之根.則得

$$L^3+M^3=-432\frac{J}{a^3}.\quad L^3-M^3=3\sqrt{-3}(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta).$$

又將兩端平方之,然後相加.則有

$$2LM=24\frac{I}{a^2}=(\beta-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2+(\gamma-\alpha)^2(\beta-\delta)^2+(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2.$$

將 L^3-M^3,L^3+M^3,LM 之值一一代入 $(L^3-M^3)^2=(L^3+M^3)^2-4L^3M^3$ 恆等式中即得

$$a^6(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\delta)^2(\gamma-\delta)^2=256(I^3-27J^2).$$

(3) 若將 $\beta-\gamma,\ \gamma-\alpha,\ \alpha-\beta$ 依次變為 $-(\beta-\gamma)(\alpha-\delta),\ -(\gamma-\alpha)(\beta-\delta),\ -(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)$, 又將 H 變為 $-\frac{4}{3}I$, G 變為 $16J$. 則 59 節之結果.可推廣之於四次方程式.試比較 59 節及本節之方程式而表明之.

67. 四次方程式之平方差方程式 此問題與以原方程式之係數表次之連乘積無異

$$\{\phi-(\beta-\gamma)^2\}\{\phi-(\gamma-\alpha)^2\}\{\phi-(\alpha-\beta)^2\}\{\phi-(\alpha-\delta)^2\}\{\phi-(\beta-\delta)^2\}\{\phi-(\gamma-\delta)^2\}$$

實行計算時.先將此六因子分為三對.以其各對之積,以 Π_1,Π_2,Π_3 表之.又以縮減三次方程式之根表 Π_1,Π_2,Π_3 各值,然後以 a,H,I,J 表 Π_1,Π_2,Π_3 三者之積.今

$$\Pi_1=\phi^2-\{(\beta-\gamma)^2+(\alpha-\delta)^2\}\phi+(\beta-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2.$$

61 節 (3) 式所導出 $(\beta-\gamma)^2,\ (\alpha-\delta)^2$ 之式為

$$4\left(\sqrt{\theta_2-\frac{H}{a^2}}-\sqrt{\theta_3-\frac{H}{a^2}}\right)^2,\qquad 4\left(\sqrt{\theta_2-\frac{H}{a^2}}+\sqrt{\theta_3-\frac{H}{a^2}}\right)^2.$$

故易知 $\Pi_1=\phi^2+\left(8\theta_1+16\dfrac{H}{a^2}\right)\phi+4\dfrac{I}{a^2}-48\theta_2\theta_3$.

爲簡單計.採用次之記號. $16H=a^2P,\quad 4I=a^2Q,\quad 16J=a^3R,\quad \phi^2+P\phi+Q=\Psi$

此時 $\Pi_1=\Psi+8\theta_1\phi-48\theta_2\theta_3$.

依44節例(18)之結果.可變 Π_1, Π_2, Π_3 之積爲

$$\Psi^3+3Q\Psi^2-(4Q\phi^2+18R\phi)\Psi-(8R\phi^3+12Q^2\phi^2+36QR\phi+27R^2)=0.$$

將 Ψ 之值還元.即得平方差之方程式,如次.

$$\phi^6+3P\phi^5+(3P^2+2Q)\phi^4+(P^3+8PQ-26R)\phi^3+(6P^2Q-7Q^2-18PR)\phi^2$$
$$+9Q(PQ-6R)\phi+4Q^3-27R^2=0.$$

下式爲最後所得之結果,

$$a^6\phi^6+48a^4H\phi^5+8a^2(96H^2+a^2I)\phi^4+32(128H^3+16a^2HI-13a^3J)\phi^3$$
$$+16(384H^2I-7a^2I^2-288aHI)\phi^2+1152(2HI-3aJ)I\phi+256(I^3-27J^2)=0.$$

於此當注意者.若藉方程式 $\theta_2\theta_3=\theta_1^2-\dfrac{I}{4a^2}$ 之助.可將 Π_1 變爲 θ_1 之二次式.

由此二次式及縮減三次式消去 θ_1. 可得 ϕ 之六次方程式.

68. 四次方程式中根之性質之標準 於研究本題之先應將前節(43節)所述.重複申明.即關乎方程式中根之性質所成之條件.若用係數函數上所冠之符號表之.則此等係數代表一實數.又其第一項之係數不得爲0.

今有一係數函數於此.若以某正數因子乘之.即得方程式中根差平方之連乘積.如此函數.稱爲原方程式之判別式.以符號 Δ 表之.若用前之結果.則有

$$a^6(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\delta)^2(\gamma-\delta)^2=256\Delta.$$

此間 $\Delta\equiv I^3-27J^2$.

今分 Δ 爲 0 正負三種場合論四次方程式於次.

(1) 當 Δ 成 0 時.此方程式有等根.此理由上 Δ 之式可以知之.於此更發生四種不同場合.(α) 若原方程式祇有二等根.則 I 與 J 各不爲 0.(β) 若原方程式有三等根.則 I 與 J 皆爲 0.[參攷 61 節例 (2)](γ) 若原方程式有兩對不同等根.則 $G=0$, $a^2I-12H^2=0$.[參考 61 節例 (3)] 更依 37 節之恆等式可證明此二條件包容有方程式 $\Delta=0$.故此二方式程同方程式 $\Delta=0$ 不可認爲三獨立條件.(δ) 若原方程式之四根皆相等.則由 61 節可導出三獨立條件' $H=0$, $I=0$, $J=0$. 此可寫成另一形狀.與 43 節第 4 場合之條件相類.

(2) 當 Δ 爲負時.原四次方程式有一對實根一對虛根.此理可由 Δ 之式明之.因 Δ 可以表根差平方之積之符號.若原方程式之根皆爲實根.則 Δ 之符號爲正.若原方程式有兩對共軛虛根.則 Δ 之符號仍爲正.故 Δ 爲負時.原方程式不能有四實根及四虛根.因之原方程式有一對實根及一對虛根.

(3) 當 Δ 爲正時.原四次方程式之根或皆爲實或皆爲虛.此理亦可由 Δ 之式表之.此時若原四次方程式有一對實根一對虛根.則 Δ 之値爲負.是以當 Δ 爲正時.此係數函數不能完全表明根之性質.因在此場合.原方程式之根或皆爲實抑皆爲虛.吾人固無從判別也.欲判別此二場合.必另求適當之條件.此條件可由 Euler 三次方程式而得.(61 節) 今述於次.

欲令此三次程式之根皆爲正實根.則此三次方程式之符

號須互爲正負.且當此三次方程式之符號互爲正負時.則此三次方程式不能有負實根.是以吾人能藉 61 節例(4)之助導出次之結論.即若 Δ 爲正.則原四次方程式之根皆爲虛根.但此外若倘有 H 與 a^2I-12H^2 同時爲負之限制.則原四次方程式之根又皆爲實根無疑.

例題

(1) 若 $H\geqq 0$, $G\neq 0$. 則此三次方程式有一對虛根.試表明之.

(2) 若 $H<0$. 則此三次方程式有(1)三個不同之實根.(2)二等根.(3)二虛根.一視 G^2 (1)小於(2)大於(3)等於 $-4H^3$ 而定.試表明之.

(3) 若三次方程式 $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$ 有二根等於 α. 試證 $-\alpha=\frac{H_2}{H_1}=\frac{H_1}{H}$. 式中 $H=a_0a_2-a_1^2$, $2H_1=a_0a_3-a_1a_2$, $H_2=a_1a_3-a_2^2$.

(4) 若三次式 $ax^3+3bx^2+3cx+d+k(x-r)^3$ 爲一完全立方.試證

$$(ac-b^2)r^2+(ad-bc)r+bd-c^2=0.$$

(5) 若三次式 $ax^3+3bx^2+3cx+d$ 可書爲次之形狀.

$$l(x-\alpha_1)^3+m(x-\beta_1)^3+n(x-\gamma_1)^3$$

式中 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ 爲三次方程式 $a_1x^3+3b_1x^2+3c_1x+d_1=0$ 之根.試求其條件.

比較此二式.卽得

$$a=l+m+n,\qquad -b=l\alpha_1+m\beta_1+n\gamma_1,\qquad c=l\alpha_1^2+m\beta_1^2+n\gamma_1^2$$

$$-d=l\alpha_1^3+m\beta_1^3+n\gamma_1^3,\ 此外又有\ a_1\alpha_1^3+3b_1\alpha_1^2+3c_1\alpha_1+d_1=0\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

今以 d_1, $3c_1$, $3b_1$, a_1 乘第一二三四各式而加之.卽得所求之條件爲

$$ad_1-a_1d-3(bc_1-b_1c)=0.$$

(6) 若 α, β, γ 爲三次方程式 $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$ 之根. 試化次之方程式爲有理式.並以係數 a_0, a_1, a_2, a_3 之項表其結果.

$$\sqrt[4]{x-\alpha}+\sqrt[4]{x-\beta}+\sqrt[4]{x-\gamma}=0.$$

答　$125U_1^4+360HU_1^2+128GU_1-48H^2=0.$

(7) 若 α_1, β_1, 及 $\alpha_2\ \beta_2$ 爲方程式 $a_1x^2+2b_1x+c_1=0$, $a_2x^2+2b_2x+c_2=0$ 之根.試作一方程式.其根爲 α_1, α_2 所代表之四值.

令　$H_1=a_1c_1-b_1^2$,　$H_2=a_2c_2-b_2^2$,

答　$(a_1a_2\phi^2-2b_1b_2\phi+c_1c_2)^2-4H_1H_2\phi^2=0.$

〔注意〕本例及以下二例均可表 ϕ 爲係數之平方根式以解之.

(8) 用例(7)之記號.試作一方程式.其根爲 $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ 所代表之四值.

令　$2k_{12}=a_1c_2+a_2c_1+2b_1b_2$.

答　$\{2a_1a_2\phi^2+2(a_1b_2+a_2b_1)\phi+k_{12}\}^2-H_1H_2=0.$

在本例此最後四次方程式之 G 成 0.

(9) 在此同一場合.若 $\phi=\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)^2$. 求以 ϕ 所代表之一切值爲根作一方程式.

令　$M=a_1b_2-a_2b_1$,　$2H_{12}=a_1c_2+a_2c_1-2b_1b_2$.

答　$\{(a_1a_2\phi+H_{12})^2-2M^2\phi+H_1H_2\}^2=4H_1H_2(a_1a_2\phi+H_{12})^2.$

(10) 當四次方程式有二重根時.則以 ρ 之各值 (65 節) 爲根之三次方程式.亦有此同一之二重根.試表明之.又若此四次方程式有三重根時.試求此三次方程式所成之式.

(11) 若 H 與 J 皆爲正.試直接證明 (不藉 Euler 三次方程式之助) 四次方程式之根皆爲虛根.

H 之値可以方程式之根表之. (27 節例 19) 在此 H 之式中易知若 H 爲正.則原方程式至少有一對虛根 $h\pm k\sqrt{-1}$. 今自各根中減去 h. 又以 k 除之.(此種變化與他一對根 γ, δ 之性質無關,又與 H, J 二者之符號無關.)則此四次方程式可變爲次之形狀,

$$(x^2+4px+q)(x^2+1)=0.\quad 或\quad x^4+4px^3+6cx^2+4px+q=0.$$

式中　$6c=q+1.$

是以　$H=c-p^2,\quad I=q-4p^2+3c^2,\quad J=qc+2p^2c-p^2(q+1)-c^3=c(q-4p^2-c^2).$

故　$q-4p^2=c^2+\dfrac{J}{c}=(H+p^2)^2+\dfrac{J}{H+p^2}.$

或　$-\left(\dfrac{\gamma-\delta}{2k}\right)^2=(H+p^2)^2+\dfrac{J}{H+p^2}.$

卽得證明當 H 與 J 皆爲正時. γ 與 δ 二根爲共軛虛根. (參攷 61 節例 8)

(12) 若此四次方程式有兩對不同等根.試直接證明　$a_0^2I=12H^2,\ a_0^3J=8H^3.$

在此場合若以 a_0 除原四次方程式全體.則此四次方程式可如次書之.

$$(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=\left\{\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right\}^2=\left(\frac{z^2-k^2}{a_0^2}\right)^2.$$

式中　$z=a_0x+a_1.\quad \dfrac{k}{a_0}=\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$

比較次之兩式.　$z^4-2k^2z^2+k^4,\quad z^4+6Hz^2+4Gz+a_0^2I-3H^2.$

則得　$G=0,\qquad 3H=-k^2,\qquad a_0^2I-3H^2=k^4.$

由此等方程式.卽可求得上之結果.

學者易知此等關係式.與 61 節例(3)之關係式完全相同.於此應宜注意者.在此場合.只能有一平方根號在四次方程式之解答中.[自解 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 二次方程式而來.]

(13) 若四次式可變成 $l(x^2+2px+q)^2+m(x^2+2px+q)+n$ 之形狀.試求其條件.

答　$G=0.$

在此場合.第二第四兩係數經過此種變化後卽消滅無存.且其一般解答只含有二平方根符號.

(14) 試證四次式　$m(x-n)^4-n(x-m)^4$　中之 J 爲 0.

(15) 有經過原點之直線於此.今於其上取四點.若自原點至此四點之距離,爲四次方程式之根 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. 且此四點在直線上成調和.則 Euler 三

次方程式之根成等差級數. 62節中三次方程式之根成調和級數.試證明之.

(16) 有一直線於此.今於其上取四點.而此四點爲四次方程式

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$$

所定.今以此四點之六非調音函數爲根.試作其方程式.

此六非調音比爲 $\phi_1,\ \dfrac{1}{\phi_1},\ \phi_2,\ \dfrac{1}{\phi_2},\ \phi_3,\ \dfrac{1}{\phi_3}.$

此間

$$\phi_1=-\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)}=\frac{\lambda-\mu}{\lambda-\nu}=\frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1-\theta_3}.$$

$$\phi_2=-\frac{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}=\frac{\mu-\nu}{\mu-\lambda}=\frac{\theta_2-\theta_3}{\theta_2-\theta_1}.$$

$$\phi_3=-\frac{(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)}=\frac{\nu-\lambda}{\nu-\mu}=\frac{\theta_3-\theta_1}{\theta_3-\theta_2}.$$

又以 $(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)$, $(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)$, $(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)$ 爲根之方程式,爲次列三次方程式中之一. $a_0^3t^3-12a_0It\pm16\sqrt{I^3-27J^2}=0.$

今自上列任一方程式中.作其根之比.且變其符號.則此新方程式爲

$$4\Delta(\phi^2-\phi+1)^3-27I^3\phi^2(\phi-1)^2=0. \qquad (\text{參攷 44 節例 15})$$

式中 $\Delta=I^3-27J^2$. 此最後所得之 ϕ 方程式.即吾人所求之結果.此方程式如次所云.尙可書爲更顯明之形狀.

(a) 此六非調音比,可以其中任一値表之.如 $\phi,\ \dfrac{1}{\phi},\ 1-\phi,\ \dfrac{1}{1-\phi},\ \dfrac{\phi-1}{\phi}\ \ \dfrac{\phi}{\phi-1}$

由恆等式 $(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)+(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)+(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)=0.$

則有關係式 $\phi_1+\dfrac{1}{\phi_3}=1,\quad \phi_2+\dfrac{1}{\phi_1}=1,\quad \phi_3+\dfrac{1}{\phi_2}=1.$

由此等關係式.能將此六非調音比,以其中任一値表之.

(b) 在此六非調音比中.若有二比相等.則 ϕ 之六値中.有三値爲 $-\omega$ 三値爲 $-\omega^2$. 且在此場合 $I=0$.

假定 $\phi_1=\phi_2$. 則由 a 中第二關係式 $\phi_1+\dfrac{1}{\phi_1}=1$. 卽 $\phi_1^2-\phi_1+1=0$.

故 $\phi_1=-\omega$ 或 $\phi_1=-\omega^2$. 今以 $-\omega$ 或 $-\omega^2$ 代(a)式中之 ϕ 卽得此六非調音比.

又 $\dfrac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1-\theta_3}=\dfrac{\theta_2-\theta_3}{\theta_2-\theta_1}$. 化之為 $\theta_3^2-\theta_1\theta_3-\theta_2\theta_3+\theta_1\theta_2+\theta_1^2-2\theta_1\theta_2+\theta_2^2=0$.

簡之為 $\Sigma\theta_1^2-\Sigma\theta_1\theta_2=0$. 或 $(\Sigma\theta_1)^2-3\Sigma\theta_1\theta_2=0$.

但 $\Sigma\theta_1=0$. 是以 $\Sigma\theta_1\theta_2=0$. 卽 $I=0$.

(c) 若此諸比中. 有一為調音比. 則 ϕ 之六值中. 二值為 -1. 二值為 2. 二值為 $\dfrac{1}{2}$. 且在此場合 $J=0$. 因若 $\phi_1=-1$. 則 $\dfrac{\lambda-\mu}{\lambda-\nu}=-1$. 卽 $2\lambda-\mu-\nu=0$. 亦卽 J 之一因子成 0. (參攷 27 節例 18)

(d) 若將 ϕ 之六次方程式書為次之形狀. 卽可將此等結果及其逆定理完全證明. $I^3\{(\phi+1)(\phi-2)(\phi-\frac{1}{2})\}^2=27J^2(\phi+\omega)^3(\phi+\omega^2)^3$. (參攷 59 節例 12)

(17) 若 $\theta^4=1$. 則 ρ^2, $\dfrac{1}{\rho^2}$, $\left(\dfrac{1+\theta\sqrt{\rho}}{1-\theta\sqrt{\rho}}\right)^4$ 能滿足於次之方程式. 試證明之.

$$\left(\frac{x^2+14x+1}{\rho^4+14\rho^2+1}\right)^3=\frac{x(x-1)^4}{\rho^2(\rho^2-1)^4}.$$

(18) 試以 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 之有理函數表 $\Sigma(\alpha-\beta)^4(\gamma-\delta)^2$. 最後又以原方程式之係數表之.

答 $-128\Sigma(\theta_2-\theta_3)^2\left(\theta_1+\dfrac{2H}{a^2}\right)=-\dfrac{96}{a^4}(4HI+3aJ)$.

(19) 試以 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 之有理函數表

$$(\beta^2-\gamma^2)^2(\alpha^2-\delta^2)^2+(\gamma^2-\alpha^2)^2(\beta^2-\delta^2)^2+(\alpha^2-\beta^2)^2(\gamma^2-\delta^2)^2.$$

此等勢函數同於 $(\mu^2-\nu^2)^2+(\nu^2-\lambda^2)^2+(\lambda^2-\mu^2)^2=256\Sigma(\theta_2-\theta_3)^2\left(\theta_1-\dfrac{c}{a}\right)^2$.

(20) 試作一方程式. 其根為原四次方程式中每對根之積.

此所求之方程式為與次式相類三種因子之積.

$$(\phi-\beta\gamma)(\phi-\alpha\delta)=\phi^2-\lambda\phi+\frac{e}{a}=\phi^2-2\frac{c}{a}\phi+\frac{e}{a}-4\phi\theta_1. \quad (63 節例 1)$$

答 $(a\phi^2-2c\phi+e)^3-4I\phi^2(a\phi^2-2c\phi+e)+16J\phi^3=0.$

(21) 試作一方程式.其根爲 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 所代表之各值.此間 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 爲原四次方程式之根.

答 $4(a\phi^2+2b\phi+c)^3-I(a\phi^2+2b\phi+c)+J=0.$

此所求之方程式.爲與次式相類三種因子之積.

$$\left(\phi-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\left(\phi-\frac{\alpha+\delta}{2}\right)=\phi^2+2\frac{b}{a}\phi+\frac{\mu+\nu}{4}=\phi^2+2\frac{b}{a}\phi+\frac{c}{a}-\theta_1.$$

(22) 試證 $\Sigma\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}=\frac{9I}{2}\frac{3aJ-2HI}{I^3-27J^2}.$

$(\alpha-\beta)^2, (\alpha-\gamma)^2$………可以 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 之項表之.(參攷 67) 由此諸式可得

$$\Sigma\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}=-\frac{1}{2a^2}\left\{\frac{a^2\theta_1+H}{(\theta_2-\theta_3)^2}+\frac{a^2\theta_2+H}{(\theta_3-\theta_1)^2}+\frac{a^2\theta_3+H}{(\theta_1-\theta_2)^2}\right\}.$$

此式再以 a, H, I, J 之項表之.卽得上之結果.

(23) 若 $I=0$. p 爲正整數. $m=3p$ 或 $m=3p+1$. 試證 $\Sigma\frac{\theta_1^m}{(\theta_2-\theta_3)^2}=0.$

(24) 若 $J\equiv ace+2bcd-ad^2-eb^2-c^3=0$. 試證

$$U\equiv ax^2+cy^2+ez^2+2dyz+2czx+2bxy$$

能分解爲兩個平方之和或差.

此間 $aU\equiv(ax+by+cz)^2+(ac-b^2)y^2+2(ad-bc)yz+(ae-c^2)z^2.$

若 $(ac-b^2)(ae-c^2)=(ad-bc)^2$. 則 aU 式中第二項以下成完全平方式.卽 J 爲 0 時, aU 爲兩完全平方式之和.

(25) 若 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 爲四次方程式 $a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$ 之根.試以係數 a_0, a_1……之項解次之方程式

$$\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}+\sqrt{x-\gamma}+\sqrt{x-\delta}=0.$$

化 $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}=0$ 爲有理式.且以係數代替 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 之等勢函數.則得

$$(3a_0a_2-2a_1^2)^2=a_0^3a_4.$$

今以 U_0, U_1, U_2, U_3, U_4 代替 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 且簡單之.即得

$$a_0x+a_1=\frac{1}{G}\left(3H^2-\frac{a_0^2I}{4}\right).$$

(26) 求作兩方程式.其一以原四次方程式中二根之差爲根.其一則以同方程式中二根之和之半爲根.且以同一變化解此四次方程式.

以 $x'+\rho$ 代 x. 且用 65 節之記號.則有 $ax'^4+4U_1x'^3+6U_2x'^2+4U_3x'+U_4=0$. 吾人假定 x' 與 ρ 之值能滿足關係式

$$ax'^4+6U_2x'^2+U_4=0, \qquad U_1x'^2+U_3=0.$$

由上二方程式.可知對於 ρ 之任一值. x' 之值有二.其絕對值相等,符號相反.又若將 x' 消去.則得一 ρ 之六次方程式.

欲得 ρ 與 x' 之值.以四次方程式之根 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 表之.可假定

$$\rho_1+x_1'=\alpha,\quad \rho_1-x_1'=\beta.\quad 是以\quad 2\rho_1=\alpha+\beta,\quad 2x_1'=\alpha-\beta.$$

故由上二式消去 ρ 所得 x' 方程式.其根爲原四次方程式中二根之差之半. ρ 方程式之根則爲原四次方程式中二根之和之半.依 65 節之變化狀態.則此 ρ 方程式可表爲次之形式 $4U_2^3-IU_2+J=0$. (比較例 21)

若欲解此四次方程式.則由 ρ 方程式可得 $U_2=a\theta$. 但 θ 爲縮減三次方程式之根是以 $U_1=a\rho+b=\sqrt{a^2\theta-H}$, $x'^2=-\dfrac{U_3}{U_1}=-\dfrac{1}{a^2}\left(U_1^2+3H+\dfrac{G}{U_1}\right)$.

最後得 $ax+b=U_1+ax'=\sqrt{a^2\theta-H}+\sqrt{-a^2\theta-2H-\dfrac{G}{\sqrt{a^2\theta-H}}}$.

上式只能代表四種不同之值.式中四次方程式之根.可以縮減三次方程式中一單根表之.

(27) 令 θ 爲三次方程式中一根.則 θ 之每個有理代數函數.一般能變爲次之形狀.試證明之. $\dfrac{C_0+C_1\theta}{D_0+D_1\theta}$

令原函數爲 $\frac{\phi(\theta)}{\psi(\theta)}$. 式中 $\phi(\theta)$, $\psi(\theta)$ 皆爲 θ 之有理整函數. 依原三次方程式逐次交換.可變每個函數爲二次式.故原函數可變爲 $\frac{c_0+c_1\theta+c_2\theta^2}{d_0+d_1\theta+d_2\theta^2}$.

令此式與上式同.更依原三次方程式變化之.吾人可得一恆等式如

$$L_1+L_2\theta+L_3\theta^2=0.$$

式中 L_1, L_2, L_3 爲 C_0, C_1, D_0, D_1 之直線函數.是以吾人能得三次方程式

$$L_1=0, \qquad L_2=0, \qquad L_3=0$$

以定 C_0, C_1, D_0, D_1 之比.

(28) 令 θ 爲縮減三次方程式之根.若在四次方程式之根 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 間有一關係式,能以成 0 之 θ 有理函數表之.則此四次方程式之根中,不含有立方根符號.試證明之.

此成 0 之 θ 任意有理函數. 皆能變爲 θ 之二次方程式. 已於前例言之矣.故 θ 式中不含有立方根符號. 此時例 (26) 公式所表四次方程式之根. 亦不含有立方根符號.

(29) 若方程式 $4\rho^3-I\rho+J=0$ 爲下列各值所滿足.試求在每一場合原四次方程式之根間所成之關係式.

$$(1)\ \frac{H}{a},\quad (2)\ c,\quad (3)\ 0,\quad (4)\ \frac{\sqrt{ae}-c}{2},\quad (5)\ \sqrt[3]{-\frac{J}{4}},$$

$$(6)\ \sqrt{\frac{12}{I}},\qquad (7)\ \frac{3J}{2I},\qquad (8)\ \frac{ad-bc}{2b}.$$

答 (1) $\beta+\gamma-\alpha-\delta=0$, (2) $\beta+\gamma=0$, (3) $(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)-(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)=0$

(4), (8) $\beta\gamma-\alpha\delta=0$, (5) $(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)-\omega(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)=0$, (6), (7) $\beta-\gamma=0$.

(30) 證明恆等式 $a_0^6(I^3-27J^2)=(a_0^2I-3H^2)(a_0^2I-12H^2)^2+27G^2(G^2+2a_0^3J)$.

此可如證明之.在 I 與 J 式中.令 a_1 爲 0. 且展開之. 可知 Δ 式中與 a_1 無關係之部份可置於 $a_0a_4(a_0a_4-9a_2^2)^2+27a_0a_3^2(2a_0a_2a_4-a_0a_3^2-2a_2^3)$ 式中. 今以 A_2, A_3, A_4 代 a_2, a_3, a_4. 又以 37 節之值代 A_2, A_3, A_4. 即得上之結果.

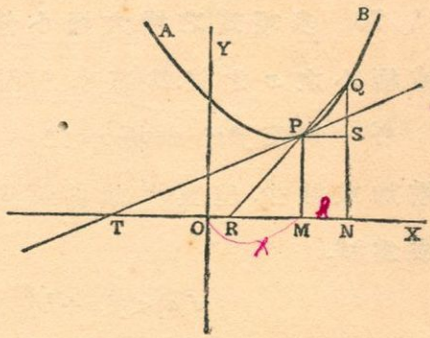
(31) 若四次方程式有二等根.試證 Euler 三次方程式有二等根 其值爲 $\frac{3aJ-2HI}{2I}$. 且由是證明在此場合內.原方程式中其餘二根營實根,等根或虛根.一視 $2HI-3aJ$ 爲負或 0 或正而定.

(32) 若四次方程式有兩對不同之等根.則其平方差方程式中(67 節)其最後兩項成 0. 所賦與條件爲 $\Delta=0$, $2HI-3aJ=0$. 若有三等根. 則其最後三項爲0. 所賦與條件爲 $I=0$, $J=0$. 試證明之.再表明由前場合所得之條件.與 61 節例(3), 68 例(12)例之條件同. 又其平方差方程式.在前之場合可變爲 $\phi^2(a^2\phi+12H)^4$. 在後之場合又可變爲 $\phi^3(a^2\phi+16H)^3$. 試證明之.

第 七 章

導來函數之性質

69. 導來函數之圖表法 令 APB 爲代表多項式 $f(x)$ 之曲線. P 爲其上一點.相當於變數 x 之值 OM. 取 x 之他一值 ON, 比前增長一小量 h. 且在曲線上取第二點 Q 與 x 之新值相當.則



第 五 圖

$OM=x,\quad MN=h,\quad ON=x+h.$

又 $PM=f(x),\quad QN=f(x+h).$

依前第 6 節之展開式.則

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots\cdots$$

或 $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\frac{h}{2!}f''(x)+\cdots\cdots \quad (1)$$

但 $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{QN-PM}{MN}=\frac{QS}{PS}=\tan QPS=\tan PRN.$$

當 h 極端減小時. Q 點漸與 P 點接近.最後至二者符合.此時弦 PQ 成爲曲線之切線 PT. 角 PRN 成爲角 PTM. 又當

h 極端減小時,(1)式右端各項中除第一項外,餘皆無限減小.且當 h 成 0 時亦隨之成 0. 此時(1)方程式成爲

$$\tan PTM = f'(x).$$

由此可得次之結論.以 x 之任一值代導來函數 $f'(x)$ 中之 x.由此所得之值.可以一角之正切表之.此角爲 OX 軸與曲線上 x 值之相當點之切線二者所成之角.此曲線代表函數 $f(x)$.

70. 多項式之極大極小值 **定理** 能令函數 $f(x)$ 爲極大或極小之 x 之值.爲導來方程式 $f'(x)=0$ 之一根.

令 a 爲使 $f(x)$ 成極小之一值.今證 $f'(a)$ 爲 0. 令 h 爲 x 之增加或減少.但其增減俱甚微.因 $f(a)$ 爲極小.則不論 k 爲增或爲減.

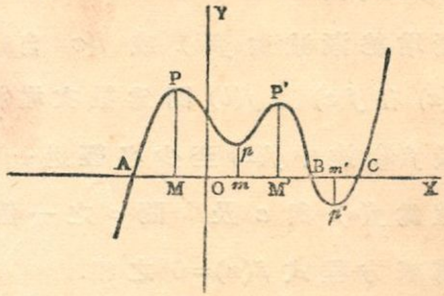
$$f(a) < f(a+h), \qquad f(a) < f(a-h).$$

是以 $f(a+h)-f(a)$ 與 $f(a-h)-f(a)$ 皆爲正.卽下列兩式

$$hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots \qquad -hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots$$

皆爲正.當 h 甚小時.此兩式之符號與其首項之符號同.故欲令此兩式之符號皆爲正.則當有 $f'(a)$ 成 0. 及 $f''(a)$ 爲正.同様可證明若 $f(a)$ 爲極大.則當有 $f'(a)$ 爲 0. $f''(a)$ 爲負.是以欲令多項式 $f(x)$ 爲極大極小.須解方程式 $f'(x)=0$ 而求其根.以之代入多項式 $f(x)$ 中.此導來方程式中每一根.皆能令多項式 $f(x)$ 成爲極大或極小.欲確定此標準.須視導來方程式之根代入 $f''(x)$ 式時 $f''(x)$ 之符號而斷.若 $f''(x)$ 冠有正符號.則此多項式爲極小.若 $f''(x)$ 冠有負符號.則此多項式爲極大.

本節之定理.可自第六圖表明之.因多項式 $f(x)$ 之值在 PP' 等處爲極大.在 pp' 等處爲極小.則在此等點作曲線之切線時.此切線必與 x 軸平行.結果即得



第　六　圖

$$f'(x)=\tan PTM=0$$

第六圖表五次多項式.對於 $f'(x)=0$,在此 OM, Om, OM' Om'.有兩種極大 $PM, P'M'$.兩種極小 $pm, p'm'$ 與之相應.

例　題

(1) 發見 $f(x)=2x^2+x-6$ 之極大或極小值.

$f'(x)=4x+1$, $f''(x)=4$, $x=-\frac{1}{4}$, 令 $f(x)=-\frac{49}{8}$ 爲極小.(10 節圖 2)

(2) 求 $f(x)=2x^3-3x^2-36x+14$ 之極大極小值.

$$f'(x)=6(x^2-x-6), \qquad f''(x)=6(2x-1)$$

$x=-2$ 令 $f(x)=68$ 爲極大.$x=3$ 令 $f(x)=-67$ 爲極小.

(3) 求 $f(x)=3x^4-16x^3+6x^2-48x+7$ 之極大極小.

此間 $f'(x)=0$ 只有一實根 $x=4$.此根以極小值 -345 與 $f(x)$.

(4) 求 $f(x)=10x^3-17x^2+x+6$ 之極大極小.

此 $f'(x)=0$ 之根之近似值爲 0.0302, 1.1031.前者以極大值與 $f(x)$.後者以極小值與 $f(x)$.(10 節 3 圖)

71. Rolle 氏之定理　在方程式 $f(x)=0$ 中相連二實根 a 及 b 間.導來方程式 $f'(x)=0$ 至少有一實根.

當 x 自 a 增加至 b 時. $f(x)$ 則自 $f(a)$ 連續變至 $f(b)$. 但以 $f(a)$ 與 $f(b)$ 俱爲 0. 故當 x 自 a 逐漸增至 b 時. $f(x)$ 可自 $f(a)$ 漸增終漸減至 $f(b)$. 或 $f(x)$ 自 $f(a)$ 漸減終漸增至 $f(b)$. 又或 $f(x)$ 在 $f(a)$ 及 $f(b)$ 間爲數次增減.但無論在何種場合.在 $f(a)$ 及 $f(b)$ 途中 $f(x)$ 至少必經過一極大或極小之值.若此 $f(x)$ 之值爲 $f(\alpha)$. 與 a 及 b 間 α 之一值相當.則依 70 節之定理. α 爲導來方程式 $f'(x)=0$ 之根.

前節之圖. 可表明此定理. 圖中 A, B 二截點間有二極大值.一極小值. B, C 二截點間有一極小值.由圖上可見兩相鄰截點極大極小值之總數常爲奇數.

系 導來方程式之相鄰二根間.可不含有原方程式之根若含有原方程式之根.絕不能多於 1 個.

因方程式 $f(x)=0$ 中相鄰二根間.可有二以上之值令多項式 $f(x)$ 爲極大或極小.此等值又爲導來方程式 $f'(x)=0$ 之根.故導來方程式之相連二根間.可不含有原方程式之根. 又若導來方程式之相鄰二根間含有原方程式中二以上之根.則原方程式之相鄰二根間可不含有導來方程式之根. 是與本定理不合. 故導來方程式中相鄰二根間至多只能含原方程式之一根.

72. 導來函數之組織 令方程式 $f(x)=0$ 之根爲 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\alpha_n$. 則

$$f(x)\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n).$$

在此恆等式中.以 $y+x$ 代 x. 則

$$f(y+x)=(y+x-a_1)(y+x-a_2)\cdots\cdots(y+x-a_n)$$
$$=y^n+q_1y^{n-1}+q_2y^{n-2}+\cdots\cdots+q_{n-1}y+q_n.$$

式中 $q_1=x-a_1+x-a_2+\cdots\cdots+x-a_n,$

$$q_2=(x-a_1)(x-a_2)+(x-a_1)(x-a_3)\cdots\cdots+(x-a_{n-1})(x-a_n)$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$q_{n-1}=(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n)+(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_n)+\cdots+(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})$$

$$q_n\ =(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n).$$

吾人又得 $f(y+x)=f(x)+f'(x)y+\dfrac{f''(x)}{2!}y^2+\cdots\cdots+y^n.$

將 $f(y+x)$ 之兩式比較.即得

$$f(x)=q_n,\quad f'(x)=q_{n-1},\quad \frac{f''(x)}{2!}=q_{n-2}\cdots\cdots\cdots.$$

此 $f'(x)$ 之值又可如次書之. $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x-a_1}+\dfrac{f(x)}{x-a_2}+\cdots\cdots+\dfrac{f(x)}{x-a_n}.$

73. 複根定理 $f(x)=0$ 之 p 重根.爲第一導來方程式 $f'(x)=0$ 之 $p-1$ 重根.

此理可由上節 $f'(x)$ 之公式明之.因若 $(x-a_1)^p$ 爲 $f(x)$ 式中一因子.即若 $a_1=a_2=\cdots=a_p$. 則 $f'(x)=\dfrac{pf(x)}{x-a_1}+\dfrac{f(x)}{x-a_{p+1}}+\cdots+\dfrac{f(x)}{x-a_n}.$ 在此式內各項中.其第一項含有 $(x-a_1)^{p-1}$ 一因子.其餘各項俱含有 $(x-a_1)^p$ 一因子.故 $(x-a_1)^{p-1}$ 爲式中各項之公子.即爲多項式 $f(x)$ 之因子.故本定理能成立.

系 1 方程式 $f(x)=0$ 之 m 重根.在最初 $m-1$ 個導來方程式中,其重複次數逐漸減少.其所減少次數,與其導來次數同.

因由 $f'(x)$ 導出 $f''(x)$ 之狀態.與由 $f(x)$ 導出 $f'(x)$ 之狀態同.故依本定理多項式 $f''(x)$ 有 $(x-a_1)^{m-2}$ 之因子.同理多項式 $f'''(x)$ 有 $(x-a_1)^{m-3}$ 之因子.餘準此.

系 2 若多項式 $f(x)$ 及其最初 $m-1$ 個導來式對於 x 之一值 a 皆成為 0.則 $(x-a)^m$ 為多項式 $f(x)$ 之因子.

此為系 1 之逆.證明之如次.以 $f_1(x), f_2(x), \cdots\cdots f_{m-1}(x)$ 代表 $f(x)$ 之第一,第二,……第 $m-1$ 次導來式.以 $a+x-a$ 代 $f(x)$ 式中之 x.則 $f(x)$ 可展開之如次,

$$f(a)+f_1(a)(x-a)+\cdots\frac{f_{m-1}(a)}{(m-1)!}(x-a)^{m-1}+\frac{f_m(a)}{m!}(x-a)^m+\cdots+\frac{f_n(a)}{n!}(x-a)^n$$

因 $f(a), f_1(a), \cdots\cdots f_{m-1}(a)$ 皆成 0.則上式中前 m 項皆為 0.因其不為 0 之各項中 $x-a$ 之最低次為 m.故 $(x-a)^m$ 為全式之因子.即 $(x-a)^m$ 為原多項式 $f(x)$ 之因子.

74. 複根之決定 若 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 有公因子 $(x-a)^{m-1}$.則以下 $m-2$ 個導來式當 $x=a$ 時亦如 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 成 0.故 a 為方程式 $f(x)=0$ 之 m 重根.同樣若 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 有他之公因子 $(x-\beta)^{p-1}$, $(x-\gamma)^{q-1}$, $(x-\delta)^{r-1}\cdots\cdots$.則方程式 $f(x)=0$ 有 p 個根等於 β, q 個根等於 γ, r 個根等於 $\delta\cdots\cdots$.

故欲考察原方程式 $f(x)=0$ 有無複根及其重複次數.必先求 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之最高公因子.令此最高公因子為 $\phi(x)$.則解

方程式 $\phi(x)=0$. 即可求得原方程式中複根之數目及每個之重複次數.

例　題

(1) 求方程式 $x^3+x^2-16x+20=0$ 之複根.

$f(x)$ 及 $f'(x)$ 之最高公因子爲 $x-2$. 故 $(x-2)^2$ 爲多項式 $f(x)$ 中一因子.其他一因子爲 $x+5$.

當 $f(x)$ 之複因子決定時.若欲決定其餘各因子.可應用 8 節之除法.例如以 $x-2$ 除原式二次.其運算如次.

1	1	−16	20
	2	6	−20
1	3	−10	0
	2	10	
1	5	0	

因 1 與 5 爲其餘兩係數. 故第三因子爲 $x+5$. 實行除法時. 每次所得之剩餘皆當爲 0. 固不待論.

(2) 求方程式 $x^5-10x^2+15x-6=0$ 之複根及其餘各因子.

$f(x)$ 與 $f'(x)$ 之最高公因子爲 x^2-2x+1. 故 $(x-1)^3$ 爲 $f(x)$ 之因子.今以 $x-1$ 除 $f(x)$ 三次.則得 $f(x)=(x-1)^3(x^2+3x+6)$.

(3) 求方程式 $x^4-2x^3-11x^2+12x+36=0$ 之複根.

$f(x)$ 與 $f'(x)$ 之最高公因子爲 x^2-x-6. 即 $(x-3)(x+2)$. 故

$$f(x)=(x-3)^2(x+2)^2.$$

(4) 求多項式 $f(x)=x^6-5x^5+5x^4+9x^3-14x^2-4x+8$ 之一切因子.

答 $f(x)=(x-1)(x+1)^2(x-2)^3$.

75. 區分方程式之根時，須應用本節及次節之定理. 今述於次.

定理 令 a 爲方程式 $f(x)=0$ 之根. $a-h$ 爲比 a 略小之值. $a+h'$ 爲比 a 略大之值.再令 x 在 $a-h, a+h'$ 二者間連續變化.則當 x 未經過 a 以前. $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之符號相反.既經過 a 以後. $f(x)$與 $f'(x)$ 之符號相同.

以 $a-h$ 代 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 式中之 x. 且展開之.則

$$f(a-h)=f(a)-hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots$$

$$f'(a-h)=f'(a)-hf''(a)+\cdots\cdots.$$

在第一式中 $f(a)$ 爲 0. 因 h 之值甚小.故兩式之符號.與兩式首項之符號同.今兩式首項之符號相反.故此兩式之符號亦相反.若變 h 之符號.則兩式又同符號.故本定理能成立.

系 若 a 爲原方程式之複根.則本定理亦眞.

令 a 爲方程式 $f(x)=0$ 之 r 重根.則 $f(x)$ 及其前 $r-1$ 個導來式在 x 爲 a 時俱成爲 0. 此 $f(a-h)$ 及 $f'(a-h)$ 各式之展開級數中不爲0之第一項.前者爲$\frac{f_r(a)}{r!}(-h)^r$. 後者爲$\frac{f_r(a)}{(r-1)!}(-h)^{r-1}$.因此兩項之符號反對.故此兩式之符號亦反對.但 h 變號時.此兩項同符號.故此兩式亦同符號.故本定理能成立.

76. 將上之理論擴充之於級數$f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots f_{r-1}(x), f_r(x)$中.則得次之定理.

定理 令 a 爲方程式 $f(x)=0$ 之 r 重根.當 x 之值比 a 略小時.上之級數中自首項起至末項止.其所有之符號正負相間.

若 x 之值比 a 略大.則其所有之符號全體一致.

又以 a 代級數 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots\cdots f_{r-1}(x), f_r(x), f_{r+1}(x)\cdots\cdots$ 各式中之 x. 其首不成 0 之項.爲其第 $r+1$ 項 $f_r(a)$. 此 $f_r(a)$ 之符號.卽 x 之值比 a 略大時前級數中各項之符號.

欲明瞭此理.可先假定 $f_5(a)$ 爲以 a 代 x 上級數中首不成 0 之項.且令其符號爲負.當 x 未至 a 以前. f_4 與 f_5 異號. f_3 與 f_4, f_2 與 f_3, f_1 與 f_2, f 與 f_1 亦然. 因 f_5 爲負.故 f_4 爲正. f_3 爲負. f_2 爲正. f_1 爲負. f 爲正.當 x 旣至 a 以後. f_4 與 f_5 同號. f_3 與 f_4, f_2 與 f_3, f_1 與 f_2, f 與 f_1 亦然.因 f_5 爲負. 故其餘各項皆爲負.故在第一場合. 級數中各項之符號順次爲 $+-+-+-$. 其在第二場合.則變爲 $------$.至於 h 之值.當受次之限制. 卽 x 自 $a-h$ 逐漸增長至 $a+h$ 時. 不經過 $f_5(x)=0$ 方程式之根.

例　題

(1) 求方程式 $f(x)=x^4+12x^3+32x^2-24x+4=0$ 之複根.

答 $f(x)=(x^2+6x-2)^2$.

(2) 二項方程式 $x^n-a^n=0$ 不能有等根.試表明之.

(3) 若 $q^n=r^{n-1}$. 則方程式 $x^n-nqx+(n-1)r=0$ 有一對等根.試表明之.

(4) 若 $q^2+4p^5=0$. 則方程式 $x^5+5px^3+5p^2x+q=0$ 有一對等根.又方程式中若有第一對等根.必有第二對等根.試表明之.

(5) 應用74節之法決定三次方程式 $z^3+3Hz+G=0$ 有一對等根之條件. 在求最高公因子法則中.其最後之剩餘必爲 0.

答 $G^2+4H^3=0$

(6) 用同一方法表明若 G 與 H 皆爲0.則此三次方程式有三等根.

(7) 若 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 爲四次方程式 $f(x)=0$ 之根.試證 $f'(\alpha)+f'(\beta)+f'(\gamma)+f'(\delta)$ 可以三因子之積表之.

答 $(\alpha+\beta-\gamma-\delta)(\alpha+\gamma-\beta-\delta)(\alpha+\delta-\beta-\gamma)$

(8) 若 $\alpha,\beta,\gamma\cdots\cdots$ 爲 $f(x)=0$ 之根. $\alpha',\beta',\gamma'\cdots\cdots$ 爲 $f'(x)=0$ 之根.則

$$f'(\alpha)f'(\beta)f'(\gamma)\cdots\cdots=n^n f(\alpha')f(\beta')f(\gamma')\cdots\cdots.$$

且此兩端各等於平方差方程式中之絕對項.試證明之.

(9) 若方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$ 有二重根 α.則 α 爲方程式 $p_1x^{n-1}+2p_2x^{n-2}+3p_3x^{n-3}+\cdots\cdots+np_n=0$ 之根.試證明之.

(10) 三次式 $ax^3+3bx^2+3cx+d$ 之極大極小值爲 $a^2\rho^2-2G\rho+\Delta=0$ 方程式之根.試證明之.此間 Δ 爲判別式.

令 ρ 爲 $f(x)$ 之極大或極小值.若將表多項式 $f(x)$ 之曲線.平行 y 軸移動 ρ 之距離.則 x 軸成爲曲線之切線.卽方程式 $f(x)-\rho=0$ 有二等根.故令 $f(x)-\rho$ 之判別式爲0.或以 $d-\rho$ 代 $G^2+4H^3=0$ 式中之 d.可知此極大或極小值 ρ,滿足上之二次方程式.

(11) 同樣,試證明四次式 $ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e$ 之極大極小值爲方程式 $a^3\rho^3-3(a^2I-9H^2)\rho^2+3(aI^2-18HJ)\rho-\Delta=0$ 之根.式中 Δ 爲四次式之判別式.

(12) 應用76節定理,於函數 $f(x)=x^4-7x^3+15x^2-13x+4$.

$f_1(x)=4x^3-21x^2+30x-13,\quad f_2(x)=2(6x^2-21x+15),\quad f_3(x)=2(12x-21),\quad f_4(x)=24.$

此間 $f_3(x)$ 爲當 $x=1$ 時,首不成0之函數.且 $f_3(1)$ 爲負.依前定理.當 x 未經過1以前. f,f_1,f_2,f_3 之符號依次爲 $+-+-$.當 x 旣經過1以後.則級數中各項之符號一律爲負.視此級數之中各項之符號.卽可在 $x=1$ 點近旁追跡級數中各項所代表之曲線.今就 $f(x)$ 所代表之曲線言之.當 x 未經過1以前.曲線在 x 軸上方.旣經過1以後.忽又轉到下方.又因 $(x-1)^3$ 爲 $f(x)$ 之因子.故 x 軸割曲線 $f(x)$ 於三重點1.再就 $f_1(x)$ 所代表之曲線言之.其在 $x=1$ 處與 x 軸相切.切點兩旁之曲線完全在 x 軸下方. $f_2(x)$ 曲線與 $f(x)$ 曲線相類.惟在 $x=1$ 處與 x 軸一次相割.

第八章

根之等勢函數

77. 奈端之定理 根之等勢函數.前已略加討論(27 節)今再從事研究.並進而證明關於此種函數之一般命題.

命題 1 今取一方程式而求其各根之乘方.若各乘方之次數相等.則其和可以係數之有理式表之.

令此方程式爲 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n\equiv f(x)$

$$\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)=0$$

今計算 $\Sigma\alpha^2, \Sigma\alpha^3\cdots\cdots\Sigma\alpha^m$ 之值.以係數 $p_1, p_2\cdots\cdots p_n$ 之項表之.表此等等勢函數.又可用 $s_2, s_3\cdots\cdots s_m$ 之記號.依 72 節則有

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-\alpha_1}+\frac{f(x)}{x-\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{f(x)}{x-\alpha_n}$$

$$\equiv nx^{n-1}+(n-1)p_1x^{n-2}+(n-2)p_2x^{n-3}+\cdots\cdots+2p_{n-2}x+p_{n-1}.$$

更依第 8 節之除法又有

$$\frac{f(x)}{x-\alpha}=x^{n-1}\begin{array}{l|l|l|l}
+\alpha & x^{n-2}\ +\alpha^2 & x^{n-3}\ +\alpha^3 & x^{n-4}+\cdots\cdots+\alpha^{n-1} \\
+p_1 & \qquad\ +p_1\alpha & \qquad\ +p_1\alpha^2 & \qquad\qquad\qquad +p_1\alpha^{n-2} \\
 & \qquad\ +p_2 & \qquad\ +p_2\alpha & \qquad\qquad\qquad +p_2\alpha^{n-3} \\
 & & \qquad\ +p_3 & \qquad\qquad\qquad +\cdots\cdots \\
 & & & \qquad\qquad\qquad +p_{n-2}\alpha \\
 & & & \qquad\qquad\qquad +p_{n-1}.
\end{array}$$

若在此最後所得之公式中.以 $a_1, a_2 \cdots\cdots a_n$ 代 a. 且令 $s_p = a_1^p + a_2^p + \cdots\cdots + a_n^p = \Sigma a_1^p$. 則將此等結果加之.可得 $f'(x)$ 之式.

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
f'(x) = nx^{n-1} + s_1 & x^{n-2} + s_2 & x^{n-3} + s_3 & x^{n-4} + \cdots\cdots + s_{n-1} \\
\qquad\qquad + np_1 & \quad + p_1 s_1 & \quad + p_1 s_2 & \qquad\qquad + p_1 s_{n-2} \\
 & \quad + np_2 & \quad + p_2 s_1 & \qquad\qquad + p_2 s_{n-3} \\
 & & \quad + np_3 & \qquad\qquad + \cdots\cdots \\
 & & & \qquad\qquad + p_{n-2} s_1 \\
 & & & \qquad\qquad + np_{n-1}.
\end{array}
$$

將此 $f'(x)$ 之式.與前 $f'(x)$ 之式兩兩比較.則得下之關係式.

$$s_1 + p_1 = 0$$

$$s_2 + p_1 s_1 + 2p_2 = 0$$

$$s_3 + p_1 s_2 + p_2 s_1 + 3p_3 = 0$$

$$s_4 + p_1 s_3 + p_2 s_2 + p_3 s_1 + 4p_4 = 0$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$s_{n-1} + p_1 s_{n-2} + p_2 s_{n-3} + \cdots\cdots + p_{n-2} s_1 + (n-1) p_{n-1} = 0.$$

自第一關係式.可得 s_1 之值.以之代入第二關係式中.可得 s_2 之值.又以 s_1, s_2 之值代入第三關係式.可得 s_3 之值.以下逐次如此.最後以 $s_1, s_2 \cdots\cdots s_{n-2}$ 之值代入末關係式中.即得 s_{n-1} 之值.今表之如次.

$$s_1 = -p_1. \qquad s_2 = p_1^2 - 2p_2. \qquad s_3 = -p_1^3 + 3p_1 p_2 - 3p_3$$

$$s_4 = p_1^4 - 4p_1^2 p_2 + 4p_1 p_3 + 2p_2^2 - 4p_4.$$

$$s_5 = -p_1^5 + 5p_1^3 p_2 - 5p_1^2 p_3 - 5(p_2^2 - p_4) p_1 + 5(p_2 p_3 - p_5).$$

....

$s_1, s_2, \cdots\cdots s_{n-1}$ 皆能以係數之項表之.已如上述.在此場合.根之乘方祇限於 $1, 2, \cdots\cdots n-1$. 若方指數爲任何正整數.則其等勢函數亦可自上之結果求得.今述於次.

以 x^{m-n} 乘原函數.則有

$$x^{m-n}f(x)=x^m+p_1x^{m-1}+p_2a^{m-2}+\cdots\cdots+p_nx^{m-n}=0.$$

以 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 代式中之 x 而加之.則有

$$s_m+p_1s_{m-1}+p_2s_{m-2}+\cdots\cdots+p_ns_{m-n}=0.$$

以 $n, n+1, n+2, \cdots\cdots$ 代 m. 並注意 $s_0=n$. 則由最後一關係式.可導出次之各關係式.

$$s_n+p_1s_{n-1}+p_2s_{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+np_n=0.$$

$$s_{n+1}+p_1s_n+p_2s_{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_ns_1=0.$$

$$s_{n+2}+p_1s_{n+1}+p_2s_n+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_ns_2=0.$$

....

由上第一關係式.則等勢函數 s_n, 可以係數之項表之.以 s_n 之值代入第二關係式.可得 s_{n+1} 之值.以 s_n, s_{n+1} 之值代入第三關係式中.可得 s_{n+2} 之值.以下逐次如此.可知不論方指數爲任何正整數.此種等勢函數.皆能以係數之項表之.今作一新方程式.其根爲原方程式之根之逆.則不論方指數爲任何負整數.上之理論亦成立.由是上之理論可推廣之於任何整數.

78. 命題 2　代數方程式中根之有理等勢函數.皆能以係數之有理式表之.

欲明此理論.第就整函數證之已足.因成分數形狀之等勢函數.皆可變爲分子分母俱爲等勢整函數之分數故也.

$a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 之整函數.俱可視作具有 $Na_1^p a_2^q a_3^r \cdots\cdots$ 形狀之項之和.式中 N 爲常數因子.若此函數成等勢.則可書之爲 $N\Sigma a_1^p a_2^q a_3^r \cdots\cdots$.式中各項之形狀皆相彷彿.若能證明 $\Sigma a_1^p a_2^q a_3^r \cdots\cdots$ 能以係數之有理式表之.則上之理論不證自明.今先計算等勢函數 $\Sigma a_1^p a_2^q$ 之值如次.

因 $s_p = a_1^p + a_2^p + \cdots\cdots + a_n^p,\qquad s_q = a_1^q + a_2^q + \cdots\cdots + a_n^q.$

則 $s_p s_q = a_1^{p+q} + a_2^{p+q} + \cdots\cdots + a_n^{p+q} + a_1^p a_2^q + a_1^q a_2^p + \cdots\cdots\cdots.$

或 $s_p s_q = s_{p+q} + \Sigma a_1^p a_2^q.$

是以
$$\Sigma a_1^p a_2^q = s_p s_q - s_{p+q}. \tag{1}$$

次求等勢函數 $\Sigma a_1^p a_2^q a_3^r$ 之值如次.

因
$$\Sigma a_1^p a_2^q = a_1^p a_2^q + a_1^q a_2^p + a_1^p a_3^q + \cdots\cdots,$$
$$s_r = a_1^r + a_2^r + \cdots\cdots + a_n^r,$$

故 $s_r \Sigma a_1^p a_2^q$ 式中含有三組形式絕異之項.一組爲 $\Sigma a_1^{p+r} a_2^q$ 一組爲 $\Sigma a_1^{q+r} a_2^p$, 一組爲 $\Sigma a_1^p a_2^q a_3^r$. 以式表之.則爲
$$s_r \Sigma a_1^p a_2^q = \Sigma a_1^{p+r} a_2^q + \Sigma a_1^{q+r} a_2^p + \Sigma a_1^p a_2^q a_3^r.$$

但
$$\Sigma a_1^p a_2^q = s_p s_q - s_{p+q},\quad \Sigma a_1^{q+r} a_2^q = s_{p+r} s_q - s_{p+q+r}$$
$$\Sigma a_1^{q+r} a_2^p = s_{q+r} s_p - s_{p+q+r}.$$

將此等之值一一代入上式中.即得 $\Sigma a_1^p a_2^q a_3^r$ 之值爲
$$\Sigma a_1^p a_2^q a_3^r = s_p s_q s_r - s_{p+q} s_r - s_{q+r} s_p - s_{p+r} s_q + 2 s_{p+q+r}. \tag{2}$$

同樣, $\Sigma a_1^p a_2^q a_3^r a_4^s$ 亦可以與上類似之式表之.餘準此.

由上文可知凡整式形狀之等勢函數.皆可以係數之項表之.因此種等勢函數.可以 $s_1, s_2, s_3 \cdots\cdots$ 之項表之.而 $s_1, s_2 \cdots\cdots$ 等又可以係數之項表之故也.因之凡有理等勢函數.亦可以係數之項表之.

上文第就指數互異時論之.始有(1)(2)各種結果.若指數相等.則其結果迥異.例如 p 與 q 等.則 $a_1{}^p a_2{}^q$ 與 $a_1{}^q a_2{}^p$ 亦等.此時(1)式中之項每兩個相等.是以

$$\Sigma a_1{}^p a_2{}^q = 2\Sigma a_1{}^p a_2{}^p, \qquad \Sigma a_1{}^p a_2{}^p = \tfrac{1}{2}(s_p{}^2 - s_{2p}).$$

又在 $\Sigma a_1{}^p a_2{}^q a_3{}^r$ 中,將任一項 $a_1{}^p a_2{}^q a_3{}^r$ 中各元互換之.可得六種不同之項.因之若 p, q, r 三者相等.則 $\Sigma a_1{}^p a_2{}^q a_3{}^r$ 中每六項相等.是以

$$\Sigma a_1{}^p a_2{}^p a_3{}^p = \frac{1}{3!}(s_p{}^3 - 3s_p s_{2p} + 2s_{3p}).$$

一般若有 t 個指數相等.則等勢式中每 $t!$ 項完全相同.

例　題

(1) 證明 $\Sigma a_1{}^p a_2{}^q a_3{}^r a_4{}^s = s_p s_q s_r s_s - \Sigma s_p s_q s_{r+s} + 2\Sigma s_p s_{q+r+s} + \Sigma s_{p+q} s_{r+s} - 6s_{p+q+r+s}.$

(2) 證明 $24\Sigma a_1{}^m a_2{}^m a_3{}^m a_4{}^m = s_m{}^4 - 6s_m{}^2 s_{2m} + 8s_m s_{3m} + 3s_{2m}{}^2 - 6s_{4m}.$

79. 命題 3 若以 $p_1, p_2 \cdots\cdots p_n$ 之項表 s_r. 又依 y 之升冪展開 $-r \log y^n f\left(\frac{1}{y}\right)$. 則 s_r 之式.與展開式中 y^r 之係數同.

因 $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots\cdots + p_n \equiv (x - a_1)(x - a_2) \cdots\cdots (x - a_n).$

今以 $\frac{1}{y}$ 代恆等式中之 x. 則有

$$1+p_1y+p_2y^2+\cdots\cdots+p_ny^n\equiv(1-a_1y)(1-a_2y)\cdots\cdots(1-a_ny).$$

兩端取納氏對數.則其左端成為

$$\begin{array}{ll|ll|ll|ll}
p_1y & +p_2 & y^2 & +p_3 & y^3 & +p_4 & y^4 & +\cdots\cdots+P_ry^r+\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & -\frac{1}{2}p_1^2 & & -p_1p_2 & & -p_1p_3 & & \\
 & & & +\frac{1}{3}p_1^3 & & -\frac{1}{2}p_2^2 & & \\
 & & & & & +p_1^2p_2 & & \\
 & & & & & -\frac{1}{4}p_1^4 & &
\end{array}$$

其右端為 $-y_1s_1-\frac{1}{2}y^2s_2-\frac{1}{3}y^3s_3-\cdots\cdots-\frac{1}{r}y^rs_r-\cdots\cdots.$

比較兩端之對數式.則有 $s_r=-rP_r.$

式中 P_r 為在 $\log y^nf\left(\frac{1}{y}\right)$ 展開式中 y^r 之係數.

由上式可知 s_r 式中祇含有係數 $p_1, p_2,\cdots\cdots p_r.$ $(r<n)$ 故縱令 $p_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots\cdots p_n$ 一一為 0. 於 s_r 之形狀亦不受何種影響.

80. 方程式之係數.亦可以根之乘方之和表之.

因 $1+p_1y+p_2y^2+\cdots\cdots+p_ny^2\equiv(1-a_1y)(1-a_2y)\cdots\cdots(1-a_ny).$

則 $$\log(1+p_1y+\cdots\cdots+p_ny^n)\equiv-ys_1-\tfrac{1}{2}y^2s_2-\tfrac{1}{3}y^3s_3-\cdots\cdots. \quad (1)$$

是以 $1+p_1y+p_2y^2+\cdots\cdots+p_ny^n\equiv e^{-ys_1-\frac{1}{2}y^2s_2-\frac{1}{3}y^3s_3-\cdots\cdots}.$

右端展開之卽得

$$\begin{array}{lll|ll|ll|l}
1 & -s_1\ y & -\frac{1}{2}s_2 & y^2 & -\frac{1}{3}s_3 & y^3 & -\frac{1}{4}s_4 & y^4\ -\cdots\cdots\cdots\cdots. \\
 & & +\frac{1}{1\cdot2}s_1^2 & & +\frac{1}{1\cdot2}s_1s_2 & & +\frac{1}{3}s_1s_3 & \\
 & & & & -\frac{1}{1\cdot2\cdot3}s_1^3 & & -\frac{1}{4}s_1^2s_2 & \\
 & & & & & & +\frac{1}{2\cdot4}s_2^2 & \\
 & & & & & & +\frac{1}{2\cdot3\cdot4}s_1^4 &
\end{array}$$

令兩端同方乘項之係數相等．即得 $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots$ 之值．以 $s_1, s_2, \cdots\cdots$ 之項表之．且 p_r 式中只含有 $s_1, s_2, \cdots\cdots s_r$ 各項．與 s_{r+1}, $s_{r+2}, \cdots\cdots$ 不生關係．

若本 y 微分恆等式(1)．則由最後恆等式．可導出 77 節中係數與各根乘方和所成之關係式．

於此應宜注意者．因以係數之項表根之等勢函數．或以根之乘方之和表方程式之係數．皆只能有一解答．故甚確定．

以係數之項表 s_m 及以各根乘方之和表 p_m 時．尚有 Waring 之一般關係式．詳見後章．

例　題

(1) 令 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n$ 爲方程式 $f(x)=0$ 之根．$\phi(x)$ 爲 x 之有理整函數．試定次式之值．$\phi(\alpha_1)+\phi(\alpha_2)+\cdots\cdots+\phi(\alpha_n)$

吾人有 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x-\alpha_1}+\dfrac{1}{x-\alpha_2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{x-\alpha_n}$.

及 $\dfrac{f'(x)\phi(x)}{f(x)}=\dfrac{\phi(x)}{x-\alpha_1}+\dfrac{\phi(x)}{x-\alpha_2}+\cdots\cdots+\dfrac{\phi(x)}{x-\alpha_n}$.

實行除法並將方程式兩端剩餘部分保留之．又得

$$\frac{R_0x^{n-1}+R_1x^{n-2}+\cdots\cdots+R_{n-1}}{f(x)}=\frac{\phi(\alpha_1)}{x-\alpha_1}+\frac{\phi(\alpha_2)}{x-\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{\phi(\alpha_n)}{x-\alpha_n}.$$

是以 $R_0x^{n-1}+R_1x^{n-2}+\cdots\cdots+R_{n-1}=\Sigma\phi(\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)$.

令上式兩端 x^{n-1} 之係數相等．則得 $R_0=\Sigma\phi(\alpha_1)$.

(2) 若依負乘冪之次第將 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 之商排列之．則式中 $\dfrac{1}{x^{p-1}}$ 項之係數爲 s_p．試表明之．

(3) 若將上之商式依正乘冪之次第排列之. 則式中 x^{p-1} 項之係數爲 s_{-p}. 試證明之

(4) 若 $\phi(x)$ 之次數不超過 $n-2$. 試證 $\sum_{r=1}^{r=n}\dfrac{\phi(\alpha_r)}{f'(\alpha_r)}=0$. 式中 $\sum_{r=1}^{r=n}$ 表明以自 1 至 n 間之 n 個整數一一代入上式之 r 所得結果之總和.

依部分分數法可得 $\dfrac{\phi(x)}{f(x)}=\dfrac{A_1}{x-\alpha_1}+\dfrac{A_2}{x-\alpha_2}+\cdots\cdots+\dfrac{A_n}{x-\alpha_n}$.

今以 $f'(x)$ 乘上式兩端. 並引用前例之式. 則得

$$\frac{f'(x)\phi(x)}{f(x)}=\frac{A_1f'(x)}{x-\alpha_1}+\frac{A_2f'(x)}{x-\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{A_nf'(x)}{x-\alpha_n}$$

$$=\frac{\phi(x)}{x-\alpha_1}+\frac{\phi(x)}{x-\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{\phi(x)}{x-\alpha_n}$$

更以 $f(x)$ 乘上式. 又得

$$f'(x)\phi(x)=A_1f'(x)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)+A_2f'(x)(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n)+\cdots\cdots$$

$$=\phi(x)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)+\phi(x)(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n)+\cdots\cdots.$$

令 $x=\alpha_1$. 則第二第三式中. 除首項外. 餘皆爲 0. 因首項無 $x-\alpha_1$ 一因子. 其餘各項皆有之故也. 此時 $A_1f'(\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2)\cdots\cdots(\alpha_1-\alpha_n)=\phi(\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2)\cdots\cdots(\alpha_1-\alpha_n)$,

故 $A_1=\dfrac{\phi(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}$.

再令 $x=\alpha_2$. 則上式中除第二項外. 餘皆爲 0. 此時有 $A_2=\dfrac{\phi(\alpha_2)}{f'(\alpha_2)}$.

以下逐次如此. 可得 $A_3=\dfrac{\phi(\alpha_3)}{f'(\alpha_3)}$, $A_4=\dfrac{\phi(\alpha_4)}{f'(\alpha_4)}\cdots\cdots$.

故 $\dfrac{\phi(x)}{f(x)}=\dfrac{\phi(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}\cdot\dfrac{1}{x-\alpha_1}+\dfrac{\phi(\alpha_2)}{f'(\alpha_2)}\cdot\dfrac{1}{\alpha-\alpha^2}+\cdots\cdots+\dfrac{\phi(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}\cdot\dfrac{1}{x-\alpha_n}$.

以 x 乘上式兩端. 即得 $\dfrac{x\phi(x)}{f(x)}=\sum_{r=1}^{r=n}\dfrac{\phi(\alpha_r)}{f'(\alpha_r)}\cdot\dfrac{x}{x-\alpha_r}=\sum_{r=1}^{r=n}\dfrac{\phi(\alpha_r)}{f'(\alpha_r)}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{\alpha_r}{x}}$

依二項式定理將 $\dfrac{1}{1-\dfrac{\alpha_r}{x}}$ 展開之. 上式成爲

$$\frac{x\phi(x)}{f(x)}=\sum_{r=1}^{r=n}\frac{\phi(a_r)}{f'(a_r)}\left(1+\frac{a_r}{x}+\frac{a_r^2}{x^2}+\cdots\cdots\right).$$

若 $\phi(x)$ 之次數爲 $n-2$. 則將上方程式左端展開成 $\frac{1}{x}$ 之函數式. 式中各項皆有 $\frac{1}{x}$ 一因子. 故比較上式兩端. 卽知 $\sum_{r=1}^{r=n}\frac{\phi(a_r)}{f'(a_r)}=0.$

因 ϕ 爲不超過 $n-2$ 次之任何有理整函數. 故得下之特別場合.

$$\Sigma\frac{a^{n-2}}{f'(a)}=0,\quad \Sigma\frac{a^{n-3}}{f'(a)}=0,\ \cdots\cdots\cdots\Sigma\frac{a}{f'(a)}=0,\quad \Sigma\frac{1}{f'(a)}=0.$$

（5）n 個變數 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ 間, 有 $n-2$ 個方程式成立如次.

$$\sum_{r=1}^{r=n}x_r=0,\quad \sum_{r=1}^{r=n}a_rx_r=0\cdots\cdots\ \sum_{r=1}^{r=n}a_r^{n-3}x_r=0.$$

試以二新變數 X_1, X_2 之項表此 n 個變數.

答　$x_r=\dfrac{X_1+a_rX_2}{f'(a_r)}$

81. 等勢函數之級數及其次數和　根之等勢函數中任意一項內所有各根次數之總和. 稱爲函數之次數和. 各根在函數式中之最高次數. 稱爲函數之級數. 例如 $\Sigma\alpha\beta^2\gamma^3$ 等勢函數之次數和爲六. 其級數則爲三. 若以係數多項式表根之等勢函數. 則等勢函數之次數和. 與式內每項中各係數所附數字之和相等. (28 節) 今更證明關係等勢函數之他種命題. 卽若以係數多項式表等勢函數. 則係數多項式之次數. 與函數之級數相等.

今舉例明之. 假定有一根之等勢函數於此. 其係數多項式爲 $p_2^2-2p_1p_3+2p_4$. 若欲求此等勢函數. 可代入 23 節之公式 $-p_1=\Sigma a_1$, $p_2=\Sigma a_1a_2$, $-p_3=\Sigma a_1a_2a_3$ 以及 $p_4=\Sigma a_1a_2a_3a_4$, 則此等勢

函數為 $(\Sigma\alpha_1\alpha_2)^2-2\Sigma\alpha_1\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3+2\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$. 但此等等勢函數中各根之次數一律為 1. 故所求之等勢函數中各根之最高次數一律為 2. 即係數之多項式次數.與函數之級數相等.實際此等勢函數為 $\Sigma\alpha_1{}^2\alpha_2{}^2$.

上之理論.關係至大.今更依次理表明之.即根之等勢函數與 a_0 之適當乘方相乘.其所得之積.可以 $a_0, a_1, a_2 \cdots\cdots a_n$ 之同次整函數表之.

以 $\dfrac{a_1}{a_0}, \dfrac{a_2}{a_0}, \cdots\cdots \dfrac{a_n}{a_0}$ 代 $p_1, p_2, \cdots\cdots p_n$. 若 $\phi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n)$ 為根之有理整式等勢函數.則 $a_0{}^h\phi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n)=F(a_0, a_1, \cdots\cdots a_n)$.

式中 F 為 $a_0, a_1, \cdots\cdots a_n$ 之同次整函數.不能以 a_0 除盡. h 為 F 下之次數.

今表明 h 為 ϕ 之級數.因此之故.吾人先變式中各根為其反數.並將係數函數中 $a_0, a_1, \cdots\cdots a_n$ 依次以 $a_n, a_{n-1}, \cdots\cdots a_0$ 代之.則有

$$a_n{}^h\phi\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2} \cdots\cdots \frac{1}{\alpha_n}\right)=F(a_n, a_{n-1}, \cdots\cdots a_0). \tag{1}$$

又
$$\phi\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2} \cdots\cdots \frac{1}{\alpha_n}\right)=\frac{\psi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n)}{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n)^p}.$$

式中 ψ 為有理整函數.不能以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n$ 之積除盡. p 為 ϕ 之級數. $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n)^p$ 為 ϕ 中各項之最低公分母.代入(1)式中.則有

$$a_0{}^p\psi(\alpha_1\alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n)=\pm a_n{}^{p-h}F(a_n, a_{n-1}, a_0).$$

此時若 p 大於 h. 則 ψ 可以 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n$ 之積除盡.若 p 小於 h. 則 F 可以 α_n 除盡.俱與假定相違.故 p 等於 h. 即係數之次數.與函數之級數相等.

82. 根之等勢函數之計算 任何有理等勢函數.皆能依78節之命題計算之.若用本節例題中各法.於計算上更覺利便也.

求等勢函數之項數.酌量適用排列法已足.例如 n 次方程式之等勢函數 $\Sigma\alpha_1{}^3\alpha_2{}^2\alpha_3$, 其項數爲 $n(n-1)(n-2)$. 是爲 n 物中每次取 3 物所有之排列數.若等勢函數中各項.有若干個根之指數同.則其項數與前略異.如四次方程式之等勢函數 $\Sigma\alpha^2\beta\gamma$. 依前例推之當有 24 項.但因此等勢函數中每兩項相等.如 $\alpha^2\beta\gamma$ 與 $\alpha^2\gamma\beta$. 故實際祇有 12 項.學者若諳排列法之理論.則無論在何種特別場合.皆易爲力.若等勢函數中各項有兩根同指數.則其項數爲各根指數互異時函數之項數.以 2! 除之所得之商.若各項中有三根同指數.則其項數爲以 3! 除之所得之商.一般 n 次方程式之等勢函數 $\Sigma\alpha_1{}^p\alpha_2{}^q\alpha_3{}^r\cdots\alpha_n{}^t$ 其各項中若有 r 個根同指數.則其全體之項數當有

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{r!}.$$

若等勢函數之級數甚低.則用 27 節之方法計算之.甚感便利.

於此應宜注意者.次數和爲 n 之任何等勢函數.若以 n 次方程式之係數 $p_1, p_2 \cdots\cdots p_n$ 表其值.同時又以超過 n 次之方

程式中各係數表其值.則此二者之值完全相同.以超過 p_n 之係數.不能在其值中保留.且計算等勢函數時可用77節之關係式.然此等關係式不論原方程式次數爲 n 或超過 n. 其形狀皆相同也.

又欲求 m 次方程式 $(m<n)$ 之等勢函數之值.可自 n 次方程式之同一等勢函數之值中.令超過 p_m 之係數 $p_{m+1}, p_{m+2},\cdots\cdots$ 一律爲 0. 即得.因自 n 次方程式中.令 p_m 以上之係數一律爲 0. 以之代入其等勢函數之值中.則其所得之結果.爲其等勢函數中有 $n-m$ 個根同時成 0 時之值.令此 $n-m$ 個根爲 $a_{m+1}, a_{m+2},\cdots\cdots a_n$. 則此根之等勢函數.成爲 m 次方程式中根之相當等勢函數.

例　題

(1) 令方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$ 之根爲 $a_1, a_2,\cdots\cdots a_n$. 試計算等勢函數 $\Sigma a_1{}^2a_2a_3$ 之值.

以 $\Sigma a_1=-p_1$, $\Sigma a_1a_2a_3=-p_3$ 二者相乘. 則積中 $a_1{}^2, a_2, a_3$ 之項祇限於一. 而 a_1, a_2, a_3, a_4 之項則共計有四. 因以 a_1 乘 a_2, a_3, a_4. 以 a_2 乘 a_1, a_3, a_4. 以 a_3 乘 a_1, a_2, a_4. 以 a_4 乘 a_1, a_2, a_3. 皆得 a_1, a_2, a_3, a_4 故也.是以 $\Sigma a_1\Sigma a_1a_2a_3=p_1p_3=\Sigma a_1{}^2a_2a_3+4\Sigma a_1a_2a_3a_4$. 或 $\Sigma a_1{}^2a_2a_3=p_1p_3-4p_4$.

若用78節之方法計算此等勢函數.則 $\Sigma a_1{}^2a_2a_3=\frac{1}{2}s_2s_1{}^2-s_1s_3-\frac{1}{2}s_2{}^2+s_4$. 將77節中 s_1, s_2, s_3, s_4 之值一一代入.亦得上之結果.以此法與前法相較.自以前法爲優.因代入 s_1, s_2, s_3, s_4 之值時.可引出甚多互相消滅之項故也.

(2) 計算普通方程式之等勢函數 $\Sigma a_1{}^2a_2{}^2$.

將 $\Sigma\alpha_1\alpha_2=p_2$ 平方之.則得 $p_2^2=\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2+2\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3+6\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$.

今解釋如次. $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 可以 $\alpha_1\alpha_2$ 與 $\alpha_3\alpha_4$ 相乘.或以 $\alpha_1\alpha_3$ 與 $\alpha_2\alpha_4$ 相乘.或以 $\alpha_1\alpha_4$ 與 $\alpha_2\alpha_3$ 相乘而得.因每對之積在平方式中共有二項.故全體當有六項.上之關係式旣成立.則最後得 $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2=p_2^2-2p_1p_3+2p_4$.

(3) 計算普通方程式之等勢函數 $\Sigma\alpha_1^3\alpha_2$.

亦如 27 節例(9)有關係式 $\Sigma\alpha_1^2\Sigma\alpha_1\alpha_2=\Sigma\alpha_1^3\alpha_2+\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3$.

應用前之結果卽得 $\Sigma\alpha_1^3\alpha_2=p_1^2p_2-2p_2^2-p_1p_3+4p_4$.

(4) 計算普通方程式之等勢函數 $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3$.

此與以普通五次方程式之係數表同一函數所得之結果無以異.欲得此結果.可將 $\Sigma\alpha_1\alpha_2$ 與 $\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 相乘.此時 $\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3$ 之項.在積中只能有一.因此項只能由 $\alpha_1\alpha_2$ 與 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 相乘而得故也.至於與 $\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 相同之項.在積中共計有三因 $\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 能由 $\alpha_1\alpha_2$ 與 $\alpha_1\alpha_3\alpha_4$ 相乘,或 $\alpha_1\alpha_3$ 與 $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$ 相乘,或 $\alpha_1\alpha_4$ 與 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 相乘而得故也.又與 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$ 相同之項,在積中共有十項.因此項乃由 5 根中以一對根與其餘三根相乘所得之積.而由 5 根中每次取二根其組合數爲十.故可得十項也.綜合以上所述.則

$$\Sigma\alpha_1\alpha_2\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3=\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3+3\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4+10\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5.$$

令 $n=5$, 吾人亦能用 27 節例(9)之證法證明上關係式合理.因 $\Sigma\alpha_1\alpha_2$ 及 $\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 各有 10 項.其積之項數共有 100.此第就左端言之.至其右端第一等勢函數 $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3$ 共有三十項.第二等勢函數 $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 共有二十項.第三等勢函數 $\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$ 只有一項.右端合計一百項.與左端之項數同.故左右相等.

第就上關係式以求 $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3$ 之值.仍無解決希望.以 $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 之值.尙未決定故也.欲決定此函數之值.則有次之關係式.

$$\Sigma\alpha_1\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4+5\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5.$$

最後得 $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3=-p_2p_3+3p_1p_4-5p_5$.

若用 78 節之法.須計算 s_5. 且藉 $s_1, s_2, \cdots\cdots s_5$ 所引出之項.多不見於結果中.

(5) 求等勢函數 $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4$ 之值.

以 $\Sigma\alpha_1\alpha_2$ 與 $\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 相乘.其積中所有之項.共計三組.第一組之項與 $\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4$ 項同類.第二組與 $\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$ 同類.第三組與 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6$ 同類.因 $\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4$ 只能由 $\alpha_1\alpha_2$ 與 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 相乘而得.故第一組爲 $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4$,又 $\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$ 能由 $\alpha_1\alpha_2$ 與 $\alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_5$ 或由 $\alpha_1\alpha_3$ 與 $\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_5$, 或由 $\alpha_1\alpha_4$ 與 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5$, 或由 $\alpha_1\alpha_5$ 與 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 相乘而得.故 $4\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$ 爲第二組.又由此最初六根中每次取二根與其餘四根連乘,卽得 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6$. 但由 6 個根中每次取二根.其組合之數爲 15. 故第三組爲 $15\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6$. 綜上所述.則

$$\Sigma\alpha_1\alpha_2\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4+4\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5+15\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6.$$

至於 $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$ 之值.可由次之關係式導出.

$$\Sigma\alpha_1\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5=\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5+6\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6.$$

最後卽得 $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4=p_2p_4-4p_1p_5+9p_6.$

(6) 試以普通方程式之係數表 $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2$ 之值.

將 $\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 平方之.則得

$$\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3=\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2+2\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4+6\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5+20\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6.$$

由此得 $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2=p_3^2-2p_2p_4+2p_1p_5-2p_6.$

83. 同次積 一般在 n 個根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\alpha_n$ 中.可有數種等勢函數.其次數和相同.且在此等等勢函數中.可有二種或二種以上之函數.其次數和及其級數均相同.例如 n 個根間有下列之等勢函數.其次數和均爲 4.

$$\Sigma\alpha_1^4,\ \Sigma\alpha_1^3\alpha_2,\quad \Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3,\quad \Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2,\quad \Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

上列三四兩等勢函數.其級數同爲 2.

由次數和爲 r 之一切等勢函數所成之和.稱爲 n 文字中同次積之總和.以記號 Π_r 表之.由此易知 Π_r 爲下列 n 個因子連乘積中 x^r 之係數.

$$(1+\alpha_1 x+\alpha_1{}^2x^2+\cdots\cdots)(1+\alpha_2 x+\alpha_2{}^2x^2+\cdots)\cdots(1+\alpha_n x+\alpha_n{}^2x^2+\cdots\cdots)$$

例　題

(1) 試證 $\Pi_r=\Sigma\dfrac{\alpha^{n+r-1}}{f'(\alpha)}$.

令 $y=\dfrac{1}{x}$.則 $\dfrac{x^n}{f(x)}=\dfrac{1}{(1-\alpha_1 y)(1-\alpha_2 y)\cdots\cdots(1-\alpha_n y)}$

$$=(1+\alpha_1 y+\alpha_1{}^2y^2+\cdots\cdots)(1+\alpha_2 y+\alpha_2{}^2y^2+\cdots\cdots)\cdots(1+\alpha_n y+\alpha_n{}^2y^2+\cdots)$$

$$=1+\Pi_1 y+\Pi_2 y^2+\cdots\cdots+\Pi_r y^r+\cdots\cdots.$$

又 $\dfrac{x^{n-1}}{f(x)}=\Sigma\dfrac{\alpha^{n-1}}{f'(\alpha)}\cdot\dfrac{1}{x-\alpha}$. (80 節) 是以 $\dfrac{x^n}{f(x)}=\Sigma\dfrac{\alpha^{n-1}}{f'(\alpha)}\cdot\dfrac{1}{1-\alpha y}=\Sigma\dfrac{\alpha^{n+r-1}}{f'(\alpha)}y^r$.

由此前後兩式比較 y^r 之係數.即得所求之結果.

(2) 試以方程式之係數.表同次積之總和.並以同次積之總和.表方程式之係數.

$$(1-\alpha_1 y)(1-\alpha_2 y)\cdots\cdots(1-\alpha_n y)=1+p_1 y+p_2 y^2+\cdots\cdots+p_n y^n,$$

由前例 $(1+p_1 y+p_2 y^2+\cdots\cdots+p_n y^n)(1+\Pi_1 y+\Pi_2 y^2+\cdots\cdots)=1$.

是以 $P_1+\Pi_1=0,\quad p_2+\Pi_2+p_1\Pi_1=0,\quad p_3+\Pi_3+p_1\Pi_2+p_2\Pi_1=0\cdots\cdots\cdots$.

由此等關係式可定 $p_1, p_2,\cdots\cdots$ 之值.以 $\Pi_1, \Pi_2,\cdots\cdots$ 表之.反之亦然.

由本例與前例.可求得下列等勢函數之值.以係數之項表之.

$$\Sigma\frac{\alpha^{n-1}}{f'(\alpha)},\qquad \Sigma\frac{\alpha^n}{f'(\alpha)},\qquad \Sigma\frac{\alpha^{n+1}}{f'(\alpha)}\cdots\cdots\cdots$$

(3) 以根之乘方之和表 Π_r.

以 $\dfrac{1}{n}$ 表連乘積 $(1-\alpha_1 y)(1-\alpha_2 y)\cdots\cdots(1-\alpha_n y)$.

兩端取對數又微分之,則 $\frac{1}{n}\cdot\frac{dn}{dy}=\Sigma\frac{\alpha}{1-\alpha y}=s_1+s_2y+s_3y^2+\cdots\cdots\cdots.$

又 $$n=1+\Pi_1y+\Pi_2y^2+\cdots\cdots.$$

故 $(1+\Pi_1y+\Pi_2y^2+\cdots\cdots)(s_1+s_2y+s_3y^2+\cdots\cdots)=\frac{d_n}{dy}=\Pi_1+2\Pi_2y+\cdots\cdots.$

令兩端同方乘項之係數相等.可得一組方程式.由此等方程式.能以 $s_1, s_2, s_3\cdots$ 之項,表同次積之總和 $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3\cdots\cdots$.

(4) 以係數之項表同次積之總和.其公式爲 $\frac{ds_{r+i}}{dp_r}=-(r+i)\Pi_i$, 試表明之.

將 80 節中方程式(1)兩端微分.並依例(2)之方程式導入 $\Pi_1, \Pi_2\cdots\cdots$ 之値

第九章

根之極限

84. 極限之定義 欲發見數字方程式之實根.須先將此實根所存在之範圍縮小.今採用4節之所研究.並進而證明關於實根之極限命題.

假定原方程式有數個正根.則比其中最大正根尚大之正數.稱爲正根之上限.比最小正根尙小之正數.稱爲正根之下限.同樣.比最大負根之絕對值尙大之負數.稱爲負根之上限.比最小負根之絕對值尙小之負數.稱爲負根之下限.此間所謂最大負根.乃諸負根中絕對值最大之一根.最小負根乃絕對值最小之一根.

若已求得實根之上下限.則解方程式之第二步.卽在求各根存在之區域.次章當詳加說明.今略之.

下之命題.祇與正根之上限有關.若欲求其上限及負根之上下限等.只須將此種理論略加變通已足.詳見後文.今姑略之.

85. 命題1 若方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$ 之第一負項爲 $-p_rx^{n-r}$. 最大負係數爲 $-p_k$. 則 $\sqrt[r]{p_k}+1$ 爲其

正根之上限.

x之正值若能令

$$x^n > p_k(x^{n-r}+x^{n-r-1}+\cdots\cdots+x+1)=p_k\frac{x^{n-r+1}-1}{x-1}, \tag{1}$$

必能令 $f(x)$ 爲正.

令 x 大於 1. 則 $x^{n-r+1}>x^{n-r+1}-1$. 此時若 $x^n \geqq p_k\frac{x^{n-r+1}}{x-1}$. 則 x 之值必能滿足(1).今將此式變化之.則

$$x^{r-1}(x-1) \geqq p_k. \tag{2}$$

又 $x-1<x$. 故若 x 之值能令 $(x-1)^{r-1}(x-1) \geqq p_k$. 則 x 之值必能滿足(2).即若 x 之值能令 $(x-1)^r \geqq p_k$. 則 x 之值必能滿足 (1). 亦即 $x \geqq 1+\sqrt[r]{p_k}$ 時. $f(x)$ 常爲正. 故 $1+\sqrt[r]{p_k}$ 爲方程式 $f(x)=0$ 中正根之上限.

86. 命題 2 方程式中各負係數之絕對值.以其前正係數之和除之.令其商中最大者爲 q. 則 $1+q$ 爲其正根之上限.

證 令原方程式爲

$$f(x) \equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}-a_3x^{n-3}+-a_rx^{n-r}+\cdots\cdots+a_n=0.$$

依 $x^m-1=(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots\cdots+x+1)$.

則 $a_mx^m=a_m(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots\cdots+x+1)+a_m$.

改原方程式中正係數各項爲此形狀.則 $f(x)$ 可書之如次.

$$\begin{aligned}
a_0(x-1)x^{n-1}+a_0(x-1)x^{n-2}&+a_0(x-1)x^{n-3}+\cdots+a_0(x-1)x^{n-r}+\cdots+a_0\\
+a_1(x-1)x^{n-2}&+a_1(x-1)x^{n-3}+\cdots+a_1(x-1)x^{n-r}+\cdots+a_1\\
&+a_2(x-1)x^{n-3}+\cdots+a_2(x-1)x^{n-r}+\cdots+a_2\\
&-a_3x^{n-3}
\end{aligned}$$

$$+\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$-a_r \qquad x^{n-r}$$

$$+a_n$$

即

$$f(x)\equiv a_0(x-1)x^{n-1}+(a_0+a_1)(x-1)x^{n-2}+\{(a_0+a_1+a_2)(x-1)-a_3\}x^{n-3}+\cdots$$
$$+\{(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{r-1})(x-1)-a_r\}x^{n-r}+\cdots+a_0+a_1+\cdots+a_n=0.$$

若 x 比 1 大.則上式中除尖括弧之項外.餘皆爲正.若 x 之值比 1 大.又能令式中各尖括弧之值皆爲正.則此 x 之值能令 $f(x)$ 全體爲正.但若 x 之值能令式中各尖弧爲正時.必滿足下列各不等式.

$$x>1+\frac{a_3}{a_0+a_1+a_2}\cdots\cdots x>1+\frac{a_r}{a_0+a_1+a_2+a_4+\cdots\cdots+a_{r-1}}.$$

令此等分數中最大者爲 q.則 $x\geqq 1+q$ 時.各尖括弧常爲正.各圓括弧亦然.即 $x\geqq 1+q$ 時. $f(x)$ 常爲正.故 $1+q$ 爲 $f(x)=0$ 方程式中正根上限.

87. 應用 根之極限.可自前節之命題求得.此二命題中.有時(1)之極限值較近於實際.又有時(2)之極限值較近於實際.實行計算時.不妨二者並用.而取其結果中之較小者.當第一負係數前冠有正項甚多時.則 r 之值較大.自宜用(1)之方法.當第一大負係數前冠有大正係數.又以用(2)之方法爲宜.一般(2)之方法較勝於(1).若由上法求得之值不爲整數.則方程式中正根上限.爲比此值略大之第一整數.

例題

(1) 求方程式 $x^4-5x^3+40x^2-8x+23=0$ 中正根之上限.

命題(1)以 $1+8=9$ 爲其上限.命題(2)以 $1+\frac{5}{1}=6$ 爲其上限.故 6 爲吾人所取之上限.

(2) 求方程式 $x^5+3x^4+x^3-8x^2-51x+18=0$ 中正根之上限.

由命題(1)所定之值爲 $\sqrt[3]{51}+1$. 故 5 爲其極限. 命題(2)所定之值爲 $\frac{51}{1+3+1}+1$ 故 12 爲其極限.在本例命題(1)優於命題(2).

(3) 求方程式 $x^7+4x^6-3x^5+5x^4-9x^3-11x^2+6x-8=0$ 中正根上限.

在此一組分數 $\frac{3}{1+4}$, $\frac{9}{1+4+5}$, $\frac{11}{1+4+5}$, $\frac{8}{1+4+5+6}$ 中.以第二爲最大.故 3 爲其極限.若用命題(1).則極限爲 5.

(4) 求方程式 $x^8+20x^7+4x^6-11x^5-120x^4+13x-25=0$ 中正根上限.

由此二法所得之極限均爲 6.

(5) 求方程式 $4x^5-8x^4+22x^3+98x^2-73x+5=0$ 中正根之上限.

答 由命題(1)其結果爲 20. 由命題(2)其結果爲 3.

依視察法.常能求得根之上限.比由上法所得之結果.更與實際接近.此法乃將方程式中各項.分爲數組.每組中第一項皆爲正.然後求一能令各組皆爲正之最小整數.實行分組時.在某一特別場合.與方程式之形狀有關.

(6) 例(2)之方程式.可如次排列. $x^2(x^3-8)+x(3x^3-51)+x^3+18=0$

若 $x\geqq 3$. 則此方程式之各組皆爲正.故 3 爲其極限.

(7) 例(4)之方程式.可如次排列. $x^5(x^3-11)+20x^4(x^3-6)+4x^6+13x-25=0$.

若 $x\geqq 3$. 則此方程式之各組皆爲正.故 3 爲其極限.

(8) 求方程式 $x^4-4x^3+33x^2-2x+18=0$ 中根之上限.

此方程式可書爲次之形狀. $x^2(x^2-4x+5)+28x\left(x-\frac{1}{14}\right)+18=0.$

因二次三項式 x^2-4x+5 有二虛根.故對於 x 之一切值皆爲正.(12節)由是 $x=1$ 爲其上限.

求極限時所導出之二次三項式.不論含有虛根或二重根.皆於吾人有益.

(9) 求方程式 $5x^5-7x^4-10x^3-23x^2-90x-317=0$ 中正根之上限.

在此種例題中.常將最高乘方之項.與各負項結合.故上方程式可書之如次.

$$x^4(x-7)+x^3(x^2-10)+x^2(x^3-23)+x(x^4-90)+x^5-317=0$$

由此可知7爲其上限.在此場合若用上法.則得一甚大之極限.

(10) 求方程式 $x^4-x^3-2x^2-4x-24=0$ 中正根之上限.

在此例中最高方乘之項.其係數爲1.而其負項共計有四.故須以4乘原方程式全體.此最高方乘之項始足分配.今依此法書原方程式如次.

$$x^3(x-4)+x^2(x^2-8)+x(x^3-16+x^4-96=0.$$

此時 x 之上限爲4.若由普通方法則爲25.

88. 命題3 令多項式 $f(x)$ 及其導來函數 $f_1, f_2, \cdots\cdots f_n$ 同時爲正之 x 之值.爲方程式 $f(x)=0$ 中正根之上限.是爲 Newton 之法則,

此法應用時.雖較他法煩難.然其結果甚精.且在一切根皆爲正之方程式中.依此法所得之上限.適爲比其最大正根尙大之第一整數.

於 $f(x)=0$ 方程式中.令 $x=y+h$.(式中 $h>0$) 又將 $f(y+h)$ 展開之.則

$$f(y+h)=f(h)+f'(h)y+\frac{f''(h)}{2!}y^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(h)}{n!}y^n.$$

若 h 之值能令 $f(h),f'(h),f''(h),\cdots\cdots$ 同時爲正.則對於 y 之正值 $f(y+h)>0$. 卽 x 大於 h 時 $f(x)>0$. 亦卽 h 爲方程式 $f(x)=0$ 中正根之上限.

例題

$$f(x)=x^4-2x^3-3x^2-15x-3$$

用此方法時.可依次之順序進行.先作一級數 $f,f_1,f_2,\cdots\cdots f_{n-1}$ 取能令 f_{n-} 爲正之最小整數.將此整數代入其前各項內.若對於此整數之值.級數中有一項 f_r 爲負.則於此整數上增1.仍代入 f_r 式中.若 f_r 仍爲負.則更增1.直至 f_r 之値爲正始止.又以此新整數代入 f_r 以前各項中.若此新整數又能令其中一項 f_r' 爲負.則更增1.代入 f_r' 式中.若 f_r' 仍爲負.則再增1.直至 f_r' 之符號由負而正始止.以下依此進行.直至 $f(x)$ 然後停止.此最後所得之整數.卽爲吾人所求之上限.在本例此級數爲

$$f(x)=x^4-2x^3-3x^2-15x-3,\qquad f_1(x)=4x^3-6x^2-6x-15$$

$$\tfrac{1}{2}f_2(x)=6x^2-6x-3,\qquad \tfrac{1}{6}f_3(x)=4x-2,\qquad \frac{1}{24}f_4(x)=1.$$

此間 $x=1$ 能令 f_3 爲正. f_2 爲負. $x=2$ 能令 f_2 爲正 f_1 爲負. $x=3$ 能令 f_1 爲正 f 爲負. $x=4$ 能令 f 爲正.故4爲吾人所求之上限.今陳其立法之理如次.

由展開式 $\phi(a+h)=\phi(a)+h\phi_1(a)+\frac{h^2}{2!}\phi_2(a)+\cdots\cdots.$

若 $\phi(a),\ \phi_1(a),\ \phi_2(a),\cdots\cdots$ 同爲正.而 h 又爲正.則 $\phi(a+h)$ 亦爲正.卽對於 a 之一值若 $\phi(x)$ 及其逐次導來函數皆爲正.則對於比 a 較大之值 $a+h$ $\phi(x)$ 必爲正.在上例中 $x=1$ 能令 f_3 爲正.則 x 爲1以上之值時.亦能令 f_3 爲正明甚.又 x 爲2時能令 f_3,f_2 同爲正.則 x 之值比2大時.皆有此功效.又 x 爲3時能令

f_3, f_2, f_1 同爲正.則 x 之值比 3 大時亦有此功效.又 x 爲 4 時能令 f_3, f_2, f_1, f 同爲正.則 x 之值大於 4 時亦有此功效.總之若某數能令 $f_r, f_{r+1}, \cdots\cdots f_n$ 各項一一爲正.則大於某數之量亦能令 $f_r, f_{r+1}, \cdots\cdots f_n$ 一一爲正.毋庸實行計算.足知此說之不謬矣.

奈端之方法.常能在相鄰二整數間決定最大正根.如上例 $x=3$ 令 $f(x)$ 爲負. $x=4$ 令 $f(x)$ 爲正.故方程式 $f(x)=0$ 之最大正根,在 3, 4 二整數間.

89. 下限及負根之極限 欲求正根之下限.先依交換式 $x=\frac{1}{y}$ 將 x 方程式變成 y 方程式.再求 y 方程式中正根之上限 h. 則其反數 $\frac{1}{h}$ 即爲原方程式中正根之下限.以 $y<h$. 則 $\frac{1}{y}>\frac{1}{h}$. 即 $x>\frac{1}{h}$ 故也.

欲求負根之極限.須依交換式 $x=-y$ 變 x 方程式爲 y 方程式.此時 x 方程式之正根變爲方程式之負根.又 x 方程式之負根變爲 y 方程式之正根.令 y 方程式中正根之上下限爲 h, h' 則 $-h, -h'$ 即 x 方程式中負根之上下限也.

90. 限制方程式 若能發見導來方程式 $f'(x)=0$ 之一切實根.則原方程式中實根之數目可以定出.

將 $f'(x)=0$ 方程式之一切實根.依小大順序排列之.如 $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \cdots\cdots$ 並將次列級數中各項一一代入原方程式 $f(x)=0$ 中. $-\infty, \alpha', \beta', \gamma', \cdots\cdots +\infty$ 若此級數中有相隣二項能令 $f(x)$ 之符號相反.則此二項間必有原方程式之根存在.且惟限於 1. (71 節系)若其符號相同.則無原方程式之根.故將級數中各項依

次代入 $f(x)$ 式中.對於其前後符號變化之多少.即可知方程式 $f(x)=0$ 有若干個實根.

若方程式 $f(x)=0$ 之一切根皆爲實.則依 71 節定理.導來方程式 $f'(x)=0$ 之一切根亦爲實.且在 $f(x)=0$ 之相鄰二根間皆有 $f'(x)=0$ 之一根.同樣 $f''(x)=0$ 及其他一切逐次導來方程式.其所有之根亦皆爲實.又凡任一方程式.其中每若干個根.可同時在其導出此方程式之原方程式中相鄰二根間.

今預定一方程式於此.若有一方程式.比此預擬之方程式次數低 1. 且其所有根中.每若干個根.同在此預擬方程式之相鄰二根間.則此方程式稱爲限制方程式.

令 $f(x)=0$ 爲一四次方程式.其各根皆爲正實根.今作其逐次導來方程式.則此等方程式之根亦皆爲實根.今將此等方程式之根如次表之.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\alpha & & \beta & & \gamma & & \delta \\
& \alpha_1 & & \beta_1 & & \gamma_1 & \\
& & \alpha_2 & & \beta_2 & & \\
& & & \alpha_3 & & &
\end{array}
$$

表中第一列表 $f(x)$ 之四實根.二列表 $f'(x)$ 之三實根.三列表 $f''(x)$ 之二實根.四列表 $f'''(x)$ 之一實根.各方程式之根皆依大小順序自左至右排列之.又 $f_1(x)$ 之各根在 $f(x)$ 之相鄰二根間.$f_2(x)$ 之各根在 $f_1(x)$ 之相鄰二根間.$f_3(x)$ 之根在 $f_2(x)$ 之二根間.

令 $f_2(x)$ 爲正. x 之値必比 α_3 大.令 $f_3(x)$ 爲負. x 之値必比 α_3 小.令 $f_2(x)$ 爲正. x 之値或比 α_2 大,或比 β_2 小.令 $f_2(x)$ 爲負 x 之値必在 α_2, β_2 間.令 $f_1(x)$ 爲正. x 之値或比 α_1 大.或在 β_1, γ_1 間.令 $f_1(x)$ 爲負. x 之値或在 α_1, β_1 間.或比 γ_1 小.令 $f(x)$ 爲正. x 之値或比 α 大.或在 β, γ 間.或比 δ 小.令 $f(x)$ 爲負. x 之値或在 α, β 間.或在 γ, δ 間.

今使 $f_3(x)$ 爲之最小整數爲 x_3. 則 x_3 爲比 α_3 大之第一整數.若 $f_2(x_3)$ 大於 0. 則 x_3 比 α_2 大.若 $f_2(x_3)$ 小於 0. 則 x_3 在 α_2, α_3 之間.卽 $\alpha_2 > x_3 > \alpha_3$. 此時令 x_2 爲比 x_3 大.且能使 $f_1(x)$ 爲正之第一整數.則 x_2 爲比 α_2 大之第一整數.若 $f_1(x_2)$ 大於 0. 則 x_2 當比 α_1 大.若 $f_1(x_2)$ 小於 0. 則 x_2 當在 α_1, α_2 之間.卽 $\alpha_1 > x_2 > \alpha_2$. 於是再令 x_1 爲比 x_2 大且能令 $f_1(x)$ 爲正之第一整數.則 x_1 爲比 α_1 大之第一整數.此時若 $f(x_1)$ 大於 0. 則 x_1 大於 α. 若 $f(x_1)$ 小於 0. 則 x_1 在 α, α_1 之間.卽 $\alpha > x_1 > \alpha_1$. 又令 x_0 爲比 x_1 大且能使 $f(x)$ 爲正之第一整數.則 x_0 爲比 α 大之第一整數.卽 x_0 爲比方程式 $f(x)=0$ 之最大正根尙大之第一整數.故用奈端方法.能發見與最大正根最接近之整數.

例　題

(1) 導來方程式 $f_m(x)=0$ 之虛根.不能比原方程式 $f(x)=0$ 之虛根多.其實根則反此.試證明之.

由此可見若知某一導來方程式所有虛根之數目.則原方程式中虛根之數目.至少亦當與前等.

(2) 試用 90 節之方法決定方程式 $x^3-qx+r=0$ 之根皆爲實數之條件.

(3) 試用同法決定方程式 $x^n-nqx+(n-1)r=0$ 中根之性質之條件.

答　若 n 爲偶數.則當 $q^n>r^{n-1}$ 時.此方程式有二實根. $q^n<r^{n-1}$ 時.此方程式無實根.若 n 爲奇數.則此方程式有三實根或一實根.依 q^n 大於 r^{n-1} 或小於 r^{n-1} 而定.

(4) 方程式 $x^n(x-1)^n=0$ 之根皆爲實數.試作其 n 次導來函數.以表次方程式之根.皆爲不同之實數.且皆在 0 與 1 間.

$$x^n-n\frac{n}{2n}x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}\;\frac{n(n-1)}{2n(2n-1)}x^{n-2}+\cdots\cdots=0.$$

(5) 方程式 $(x^2-1)^n=0$ 之根皆爲實數. 試作其 n 次導來函數. 以表次方程式之根皆爲不等實數.且在 -1 及 $+1$ 之間.

$$x^n-n\frac{n(n-1)}{2n(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)}{2!}\;\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}x^{n-4}+\cdots\cdots=0.$$

(6) 令 l, m, n 之任意二值爲0. 則次方程式變爲其限制二次方程式試證明之.並由此證明原方程式之根皆爲實數.

$$(x-a)(x-b)(x-c)-l^2(x-a)-m^2(x-b)-n^2(x-c)-2lmn=0.$$

(7) 若 p 爲各種不同之值.試討論方程式 $x^4+4x^3-2x^2-12x+p=0$ 中根之性質.

依 90 節法.若 $p<-7$. 則此方程式有一對實根一對虛根. 若 $-7<p<9$. 則其四根皆爲實數.若 $p>9$. 則其 4 根皆爲虛根. 若 $p=-7$. 則此方程式有一對等根.若 $p=9$. 則有兩對等根.

第十章

區分方程式之根

91. 依前章方法.吾人能將數字方程式中實根全體所存在之區域決定.若欲計算某一特別根之近似值.又須先將此根所存在之區域特別定出.本章所記載之定理.在決定任意二值間所含實根之數目.若能達到此目的.則不特實根全體之數目可以決定.卽各根存在之區域亦可以決定.

爲達到此目的.遂有 Fourier 及 Budan 之定理成立.此二定理形式雖異.原理則同.爲說明計.以 Fourier 所敍述者爲顯明.爲應用計.以 Budan 所宣布者較優勝.至於 Sturm 之定理.雖實用上甚覺煩難.然其價値遠勝前者.蓋當應用 Sturm 之定理時.常能在二定量間覓出實根之眞正數目.非如 Fourier 及 Budan 之定理.祇能發見實根數目之最大限也.

92. Fourier 及 Budan 之定理 今作 $f(x)$ 之逐次導來函數.且成立次之級數 $f, f_1, f_2, \cdots\cdots f_n$. 又以 a 及 b 代入級數各項中.若 a 小於 b 則第一級數之符號變化數及第二級數之符號變化數二者之差.卽爲 a 及 b 間實根數目之最大限.若在 a 及 b 間實根之數目小於此二符號變化數相差之數目.則

其所小者爲一偶數.是爲 Fourier 之定理.

吾人若云 a 比 b 小.即謂 a 比 b 較近於 $-\infty$. 此時 a 及 b 均爲負或其一爲正其一爲負均可.

令 x 自 a 連續增長至 b. 今討論上級數中各項符號之變化.此時能發生下之各種場合.

(1) x 之值可經過方程式 $f(x)=0$ 中一單根.

(2) x 之值可經過方程式 $f(x)=0$ 之 r 重根.

(3) x 之值可經過補助方程式 $f_m(x)=0$ 中一根.但此根非 $f_{m-1}(x)$ 及 $f_{m+1}(x)$ 之根.

(4) x 之值可經過補助方程式 $f_m(x)=0$ 中一 r 重根.但此根不現於 $f_{m-1}(x)$ 式中.

爲便利計.以下常略去 f 記號下之 x.

(1) 在第一場合.由 75 節.知 x 經過方程式 $f(x)=0$ 之一根時.則當失一符號變化數.因 x 在此根之前.函數 f 與 f_1 二者反符號.及在此根之後.函數 f 與 f_1 二者又爲同符號故也.

(2) 在第二場合.若 x 經過 $f(x)=0$ 方程式之 r 重根.則有 r 個符號變化數消滅.因 x 未經過此根之先.函數級數 $f, f_1, f_2, \cdots f_r$ 之符號正負相間.既經過此間根之後.則此級數中各函數之符號皆與 f_r 之符號一致故也.

(3) 在第三場合. $f_m(x)=0$ 之根非令 f_{m-1} 與 f_{m+1} 同號.即令 f_{m-1} 與 f_{m+1} 異號.若爲同號.則 x 經過此根時.函數級數中當有二符號變化數消滅.因 x 未經過此根之先. f_m 之符號與

此二符號相反.既經過此根之後.f_m 之符號與此二符號相同故也.(76節) 若 f_{m-1} 與 f_{m+1} 異號.則此函數級數有一定之符號變號變化數.因 x 未經過此根之先.f_{m-1}, f_m, f_{m+1} 之符號或爲 $++-$.或爲 $--+$.x 既經過此根之後.前二組符號將變成 $+--$ 及 $-++$ 故也.總之,x 經過 $f_m(x)=0$ 之根時.此函數級數之符號變化數.或減少二個.或始終一定.

(4) 在第四場合.x 所經過之根 a.不獨能令 f_m 爲 0.同時能令 $f_{m+1}, f_{m+2}\cdots\cdots f_{m+r-1}$ 皆爲 0.依 76 節之理論.x 經過此值時.當有若干個符號變化數消失.至其眞正數目.可由函數級數 $f_{m-1}, f_m, f_{m+1}\cdots\cdots f_{m+r-1}, f_{m+r}$ 而得.今分別論之.

(a) 若 $f_{m-1}(a)$ 與 $f_{m+r}(a)$ 同號.則有下列二種場合.

(1) r 爲偶數時,則有 r 個符號變化數消失.

x 未經過 a 之前.f_m, f_{m+r} 二者同號.因之 f_{m-1}, f_m 二者同號.自 f_{m-1} 至 f_{m+r} 只有 $r+1$ 項正負相間.即有 r 個符號變化數.x 既經過 a 以後.自 f_m 至 f_{m+r-1} 之符號.皆與 f_{m+r} 同.此時上之級數全體同號.前後相較.當有 r 個符號變化數消失.

(2) r 爲奇數時.則有 $r+1$ 個符號變化數消失.

x 未經過 a 以前.f_{m+r}, f_m 二者異號.故 f_m, f_{m-1} 二者異號.此時自 f_{m-1} 至 f_{m+r} 共有 $r+2$ 項正負相間.即有 $r+1$ 個符號變化數.x 既經過 a 以後.自 f_m 至 f_{m+r-1} 皆與 f_{m+r} 同號.故級數全體皆同號.前後相較.當有 $r+1$ 個符號變化數消失.

(b) 若 $f_{m-1}(a)$ 與 $f_{m+r}(a)$ 二者異號.則有下列二場合.

(1) r 爲偶數時.則有 r 個符號變化數消失.

x 未經過 α 以前.自 f_m 至 f_{m+r} 正負相間.因 f_m, f_{m+r} 同號,故 f_m, f_{m-1} 異號.自 f_{m-1} 至 f_{m+r} 共有 $r+2$ 項正負相間.有 $r+1$ 個符號變化數. x 旣經過 α 以後.自 f_m 至 f_{m+r-1} 皆與 f_{m+r} 同號.全體只有一個符號變化數.前後相較.當有 r 個符號變化數消失.

(2) r 爲奇數時.有 $r-1$ 個符號變化數消失.

x 未經過 α 以前.自 f_m 至 f_{m+r} 正負相間. f_{m+r}, f_m 二者異號.故 f_m, f_{m-1} 二者同號.故自 f_{m-1} 至 f_{m+r} 有 r 個符號變化數. x 旣經過 α 以後.自 f_{m-1} 至 f_{m+r} 只有一個符號變化數.前後相較.當有 $r-1$ 個符號變化數消失.

總之, x 經過 $f_m(x)=0$ 之 r 重根時.上級數中可消失偶數個符號變化數.

綜上所述.可知 x 自 a 增長至 b 時.每經過 $f(x)=0$ 方程式之一根.上級數中即有一個符號變化數消失.此外惟有消失偶數個符號變化數.決不能消失奇數個甚或更增其變化數.故 x 自 a 變化至 b 時.其所消失之符號變化數.或與 a, b 區域內方程式 $f(x)=0$ 所含實根之數目相等.或比實根數目多一偶數.是爲本定理之證.

93. 定理之應用 Budan 說明本定理如次.

令 a, b 爲任意二數. a 比 b 小.又自 $f(x)=0$ 方程式之根中先減去 a,次減去 b.則此二變換方程式中符號變化數之差.

爲在 a, b 區域內 $f(x)=0$ 方程式中實根數目之最大限.

此與 Fourier 所述無異.因此二變換方程式爲

$$f(a)+f_1(a)y+\frac{f_2(a)}{2!}y^2+\cdots\cdots\cdots,\qquad f(b)+f_1(b)y+\frac{f_2(b)}{2!}y^2+\cdots\cdots\cdots.$$

以之與前所敍述者相印證.便知此說之不謬.且在此現狀下,便可採用 33 節之簡法.故應用時甚感利便.

例　題

(1) 求方程式 $x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101=0$ 中根之位置.

爲計算利便計.令 x 之值在次列各區域內變化.

$$-10 \qquad -1 \qquad 0 \qquad 1 \qquad 10$$

自原方程式之根中減去1.所得之變換方程式.其各項係數爲

$$1 \qquad 2 \qquad -26 \qquad 15 \qquad 65 \qquad -78.$$

自原方程式之根中減去10.則在計算開始時.即易知變化方程式中各項之符號爲正.故在此場合.不必實行計算.

自原方程式之根中減去 -1 及 -10 時.可將原方程式中各偶數項之符號一律改變.然後自此第二方式程之根中減去1與10而作第三方程式.又將第三方程式中各偶數項之符號一律改變.卽得所求之方程式.自原方程式中減去 -1 後.其變化方程式之係數爲

$$1 \qquad -8 \qquad -2 \qquad 139 \qquad -291 \qquad 60.$$

自原方程式之根中減去 -10 時.考察其計算之途徑.如前易知計算到第三方程式時.其各項之符號一律爲正.將第三方程式中偶數項之符號一律改變.卽得所求之方程式.其各項之符號正負相間.

今將上之結果列表如次.

-10	+	−	+	−	+	−	
-1	+	−	−	+	−	+	
0	+	−	−	+	−	−	即爲原方程式之符號.
1	+	+	−	+	+	−	
10	+	+	+	+	+	+	

此爲以預定之值代入 $f(x)$ 及其逐次導來函數 f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 時所取之符號.但其次序與 92 節之次序正相反.即爲 $f_5, f_4, f_3, f_2, f_1, f$.

由上可得次之結論.方程式中所有之實根.皆在 -10 及 10 間.在 -10 及 -1 間有一實根.因其間有一符號變化數消失也. -1 至 0 間又有一實根.理與前同. 0 至 1 間無實根.因 1 至 10 間有三個符號變化數消失.故至少有一實根.其餘二根或爲虛根,或仍爲實根.

若欲決定二根性質.可將 1 至 10 間之區域.如上再分爲數區域.然後從事調查二根所存在之區域爲何.然當此二根非常接近時.則此種計算甚感困難.此爲本定理之弱點.對於此種弱點.二氏亦常設法糾正.但其法甚煩.不便計算.玆從略.

(2) 分析 54 節例(1)之方程式 $x^3+x^2-2x-1=0$.

此方程式之根皆爲實數.且在 -2 及 2 之間. (54 節例 5)

若方程式之根皆爲實數.則在二預定整數間實根之數目.可由 Fourier 函數之符號完全決定.今將其結果宣布如次.

本方程式之根.在以下各區域中. $(-2, -1)$ $(-1, 0)$ $(1, 2)$

(3) 分析 54 節例(3)之方程式 $x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1=0$.

答 二根在 $(-2, -1)$ 區域內. $(-1, 0)$ $(0, 1)$ $(1, 2)$ 三區域內各有一根.

(4) 分析方程式 $x^4-80x^3+1998x^2-14937x+5000=0$.

此方程式不能有負根.今自其根中逐次減去 10. 至係數之符號一律爲正始止.則得下之結果.

0	+	−	+	−	+
10	+	−	+	+	−
20	+	0	−	+	+
30	+	+	+	−	+
40	+	+	+	+	+

自上表可知自 0 至 10 間本方程式有一根.自 10 至 20 間有一根.自 20 至 30 間則無之.自 30 至 40 間之二根.或爲實數.或爲虛數.今用下法決定之.

自第三變化方程式之根中逐次減去 1. 即將其二根分離. 一根在 2 與 3 間. 一根在 4 至 5 間. 故原方程式之第三根在 (32, 33) 區域內. 第四根在 (34, 35) 區域內.

94. 根爲虛數時定理之應用 因 x 自 $-\infty$ 至 ∞ 變化時.上級數中有 n 個符號變化數消失.故若 x 在某區域內變化而其符號變化數有一對消失. 且此區域內並無原方程式之根存在.則此方程式必有一對虛根.應用 Fourier 定理時.若其變化方程式中有係數爲 0 之項.即發生此種場合. 因令此時 x 之值爲 a. 則依 76 節原理.即可求得對於在 a 前 x 之值及 a 後 x 之值.此係數爲 0 之項所應取之符號.且在 a 前後 x 所經過之區域.可假定爲不含有原方程式 $f(x)=0$ 之根故也.

例　　題

(1) 分析方程式 $f(x)=x^4-4x^3-3x+23=0.$

吾人將在區域 0, 1, 10 內考此函數.其變化方程式爲

$$\frac{1}{24}f_4(0)x^4+\tfrac{1}{6}f_3(0)x^3+\tfrac{1}{2}f_2(0)x^2+f_1(0)x+f(0)=0$$

$$\frac{1}{24}f_4(1)x^4+\tfrac{1}{6}f_3(1)x^3+\tfrac{1}{2}f_2(1)x^2+f_1(1)x+f(1)=0$$

$$\frac{1}{24}f_4(10)x^4+\tfrac{1}{6}f_3(10)x^3+\tfrac{1}{2}f_2(10)x^2+f_1(10)x+f(10)=0.$$

此第一方程式卽爲原方程式.

依前節方法實行計算時.卽可求得 $f_3(1)=0$. 今將結果表之如次.

0	+	−	0	−	+
1	+	0	−	−	+
10	+	+	+	+	+

今將含有係數爲 0 之列.另以他二列代之.其第一列相當於在 α 前 x 之値.第二列相當於在 α 後 x 之値.各列之符號.依 76 節之原理而定.於此應宜注意者.上表所列變化方程式之符號.與 76 節之符號次序相反.今令 h 爲一最小正數.則其結果如次.

0	$-h$	+	−	+	−	+
	h	+	−	−	−	+
1	$1-h$	+	−	−	−	+
	$1+h$	+	+	−	−	+
10		+	+	+	+	+

x 之値爲 $-h$ 及 h 時.各列之符號.依次之情形而定.卽 x 爲 0 時.若列中某項係數爲 0. 則 x 爲 $-h$ 時.此係數之符號.與列內左方鄰項之符號相反. x 爲 h 時.則與隣項相同 .x 之値爲 $1-h$ 及 $1+h$ 時.各列之符號.亦可同樣定之.

因 x 自 $-h$ 至 h 時有二符號變化數消失.且在 $(-h, h)$ 區域內.無 $f(x)=0$ 方程式之根.故知原方程式有二虛根.又 x 在 $1+h$ 及 10 間有二符號變化數消失.故在 $(1+h, 10)$ 區域內有一對實根或一對虛根.

(2) 若有若干個係數成 0. 吾人便能證明有數對虛根存在.今舉例明之.

例如:方程式 $x^6-1=0$.

$-h$	+	−	+	−	+	−	−
h	+	+	+	+	+	+	−

因自 $-h$ 至 h 間不含有上方程式之實根.又 x 自比 0 略小之值 $-h$ 變至比 0 略大之值 h 時.有四符號變化數消失.故本方程式有二對虛根存在.其他二根則爲實根.(參攷 14 節)自不待論.二項方程式中虛根之數目,俱可依此法定之.

(3) 發見方程式 $x^8+10x^3+x-4=0$ 中根之性質.

對於 $-h$, 0, h 其符號爲

$-h$	+	−	+	−	+	+	−	+	−
0	+	0	0	0	0	+	0	+	−
h	+	+	+	+	+	+	+	+	−

因有六符號變化數消失.故原方程式有六虛根.其餘二根依 14 節爲實.一爲正根.在 0 與 1 間.一爲負根.在 −2 與 −1 間.

(4) 完全分析方程式 $x^6-3x^2-x+1=0$.

此方程式有二虛根.原方程式之實根極限甚小時.若欲求其正根.可自其根中逐次減 1.依此法解本題.則其一根在 0 與 1 間.又一根在 1 與 2 間.至求其負根.可逐次減去 −1.在本例 −1 爲其負根.若將對於比 −1 略大之值一列符號書出.卽知尙有一負根在 −1 及 0 中間.

(5) 分析方程式 $x^5+x^4+x^2-25x-36=0$.

此方程式有二虛根.2 至 3 區域內有一正根.(−3, −2)(−2, −1) 每一區域內各有一負根.

95. 前定理之系 前節所述發見虛根之方法.稱爲二重符號規則.Fourier 定理未發明前.則以 De Gua 之規則.發見虛根之數目.此種規則及前 Descartes 之符號規則.皆可由前

之規則導出.今表之如次.

系 1 De Gua 規則 此規則可一般表之如次.

若方程式中缺乏相續 $2m$ 項.則此方程式有 m 對虛根.若有 $2m+1$ 項缺乏.則此方程式有 $m+1$ 對虛根或 m 對虛根.一視其兩端同號或異號而定.若如 92 節第四場合.對於 $-h$ 及 h 而考查其符號變化數之差.即可將此理了解.

系 2 Descartes 之符號規則

以 0 代級數 $f_n, f_{n-1}, \cdots\cdots f_2, f_1, f$ 中各項之 x. 則其所得之符號.與原方程式之係數 $a_0, a_1, \cdots\cdots a_{n-1}, a_n$ 之符號無異.若以 ∞ 代之.則其符號全體爲正.依 Fourier 之定理.則原方程式中正根之數目.不能超過自 0 至 ∞ 時上級數中之符號變化數之差.即此方程式中正根之數目.不能超過係數級數 $a_0, a_1, \cdots\cdots a_n$ 中之符號變化數.是爲 Descartes 之符號規則.至其負根規則.亦如尋常變根之符號而得.

系 3 奈端之極限法則

以 ∞ 代入級數 $f_n, f_{n-1} \cdots\cdots f_2, f_1, f$ 中之 x.則其各項一律爲正.此外若能求得一正值 h.亦能有此功效.則依 Fourier 定理.自 h 至 ∞ 區域內不能有方程式 $f(x)=0$ 之正根即 h 爲方程式 $f(x)=0$ 中正根之上限.是爲奈端之規則.

96. Sturm 之定理 方程式 $f(x)=0$ 之等根.可自多項式 $f(x)$ 及其導來函數 $f'(x)$ 之最高公因子而得.此理已詳於前節.(74 節) Sturm 之方法首當用此計算.

假定吾人實行計算 $f(x)$ 及其一次導來函數 $f'(x)$ 之最高公因子.其逐次剩餘之次數逐漸減少.其最後之剩餘或能整除與其相鄰之剩餘.或為不含有變數之常數.前者為有等根場合.後者則否.今將 Sturm 之定理分為此二場合.本節第就後之場合討論之.次節始更進一步討論前之場合.又此種計算不含有何種特例.固不待論.

Sturm 之輔助函數.非計算最高公因子時所得之剩餘.乃將此等剩餘變號後所得之式.求二式之最高公因子時.其剩餘之符號改變與否.其結果不受影響.然自 Sturm 之輔助函數之構成言之.則此種變化關係重要.故以下所假定者.乃先將剩餘之符號改變後.然後以之充當除式.

若方程式 $f(x)=0$ 無等根存在.則 Sturm 之定理可如次說明之.

定理　先作級數 $f(x), f_1(x), f_2(x) \cdots\cdots f_{n-1}(x), f_n(x)$. 式中 $f(x)$ 為已知多項式. $f_1(x)$ 為 $f(x)$ 之一次導來函數. $f_2(x)$ 與以 $f_1(x)$ 除 $f(x)$ 所得剩餘等值反號. $f_3(x)$ 與以 $f_2(x)$ 除 $f_1(x)$ 所得剩餘等值反號.以下類推直至 $f_n(x)$ 止.今以 a, b 二實數一一代入級數各項中之 x. 則此二級數符號變化數之差.為 a, b 區域內方程式 $f(x)=0$ 中實根之數目.

Sturm 之函數.滿足於下之一組方程式.式中 $q_1, q_2, \cdots\cdots q_{n-1}$ 為其累除所得之商.

$$\left.\begin{array}{l} f\ \ (x)=q_1\ f_1\ (x)-f_2\ (x) \\ f_1\ (x)=q_2\ f_2\ (x)-f_3\ (x) \\ \cdots\cdots\ \cdots\cdots\ \cdots\cdots\ \cdots\cdots \\ f_{r-1}(x)=q_r\ f_r\ (x)-f_{r+1}(x) \\ \cdots\cdots\ \cdots\cdots\ \cdots\cdots\ \cdots\cdots \\ f_{n-2}(x)=q_{n-1}f_{n-1}(x)-f_n\ (x) \end{array}\right\} \quad (1)$$

此等方程式.含有求最高公因子法之理論.今述於次.由第一方程式.若$f(x)$與$f_1(x)$含有公因子.則此公因子必爲$f_2(x)$之因子.同理再由第二方程式.此公因子必爲$f_3(x)$之因子.以下類推.直至$f_n(x)$止.是以若$f(x)$與$f_1(x)$有公因子.則$f_n(x)$亦以此公因子爲因子.因本節假定多項式$f(x)$及其一次導來函數$f_1(x)$無公因子.故此最後剩餘當爲常數.證明本定理時.又當特別注意者.即在此場合內上級數式中不能含有公共因子之相隣二函數.否則就上方程式.依前同一理論.即可證明$f(x)$與$f_1(x)$亦含有此因子.是與假定相違.故不合理.故x自a變至b時.考查級數中之符號變化數.可將對於x之同一值兩相續函數同時爲0之場合除去.今將關於符號變化數之各種場合.縷陳於次.

(1) 當x經過原方程式$f(x)=0$之根時.

(2) 當x經過之值能令級數$f_1, f_2, \cdots\cdots f_{n-1}$中一輔助函數成0時.

(3) 當x經過之值能令級數$f, f_1, f_2\cdots\cdots f_{n-1}$中二個或多個

輔助函數同時爲 0 時.(但此成 0 各函數中.無兩函數相鄰接.)

(1) 當 x 經過方程式 $f(x)=0$ 之根 α 時.由 75 節可知上級數式中當有一符號變化數消失.因 x 未至 α 以前 f 與 f_1 反號.及至 α 以後.f 與 f_1 又同號故也.

(2) 令 x 在 a,b 區域內取一值 α. 此 α 之值能滿足方程式 $f_r(x)=0$. 則由方程式 $f_{r-1}(x)=q_rf_r(x)-f_{r-1}(x)$ 而得 $f_{r-1}=-f_{r+1}$. 即方程式 $f_r(x)=0$ 之根能令 f_{r-1} 與 f_{r+1} 兩函數之絕對值相等符號相反.又 x 自比 α 略小變至比 α 略大時.其所經過之一切值.可假定爲不含有 $f_{r-1}(x)=0$ 及 $f_{r+1}(x)=0$ 之根.故 x 經過此等值時.此二函數之符號仍不變.此時若 $f_r(x)$ 之符號亦不變.[如 α 爲 $f_r(x)=0$ 之偶重根時.]則此級數之符號始終一致.若 $f_r(x)$ 之符號變化.但因其兩旁之函數符號相反.故不論此居間函數 $f_r(x)$ 之符號由正變負或由負變正.而此相連三項 f_{r-1},f_r,f_{r+1} 之符號變化數始終一定.因而上級數全體之符號變化數始終一定.即 x 經過 $f_r(x)=0$ 之根時. Sturm 級數全體之符號變化數始終不變.

(3) 上之理論.第就一函數之相隣兩項着想.因在本場合中相連兩項不同爲 0. 故在本場合亦得適用上之理論.由是 x 經過一能令 $f(x)$ 爲 0 之值時.上級數中始有一符號變化數消失.否則其符號變化數始終一定.決不受何種影響而增減也.

綜上所述.可知 x 自 a 變化至 b 時.上級數中所消失之符號變化數.與 (a, b) 區域內方程式 $f(x)=0$ 之實根數目完全相同.

於研究等根場合之前.先將本定理之應用舉例明之.實行考察時.首將 $-\infty, 0, +\infty$ 代入上級數各項中.由此可得正根及負根之數目.劃分負根時.以 $-1, -2, -3, \cdots\cdots$ 逐一代入上級數中各項.至其符號變化數與以 $-\infty$ 代入時之符號變化數相同始止.劃分正根時.以 $1, 2, 3, \cdots\cdots$ 逐一代入上級數中各項.至其符號變化數與以 ∞ 代入時之符號變化數相同始止.如此可得原方程式中正負各根存在之位置.

例題

(1) 求方程式 $x^3-2x-5=0$ 中實根之數目及其位置.

實行計算時.則有 $f_1(x)=3x^2-2,\ \ f_2(x)=4x+15\ \ f_3(x)=-643.$

對於 x 之值 $-\infty, 0, +\infty$ 則有

$$\left.\begin{array}{ccccc} -\infty & - & + & - & - \\ 0 & - & - & + & - \\ +\infty & + & + & + & - \end{array}\right\}\ \text{故祇能有一正實根.}$$

又對於 x 之值 1, 2, 3 則有

$$\left.\begin{array}{ccccc} 1 & - & + & + & - \\ 2 & - & + & + & - \\ 3 & + & + & + & - \end{array}\right\}\ \text{故此正實根在(2)與(3)間}$$

(2) 求方程式 $f(x)=x^3-7x+7=0$ 中實根之數目及其位置,

吾人易知 $f_1(x)=3x^2-7,\ \ f_2(x)=2x-3,\ \ f_3(x)=1.$ 故有

$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	故其所有之根皆爲實根.一根爲負,二根爲正.
0	$+$	$-$	$-$	$+$	
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	

吾人又得次之結果,

-4	$-$	$+$	$-$	$+$
-3	$+$	$+$	$-$	$+$
-2	$+$	$+$	$-$	$+$
-1	$+$	$-$	$-$	$+$
$+1$	$+$	$-$	$-$	$+$
$+2$	$+$	$+$	$+$	$+$

因 -4 代入所得之符號與 $-\infty$ 同. 2 之符號與 ∞ 同. 故計算至 -4 與 2 時卽停止進行. 故在 -4 與 -3 間則有一負根存在. 在 1 與 2 間則有二正根. 此例可表明 Sturm 之法則遠勝 Faurier 之法則. 以 1, 2 代入 Fourier 函數中.則其符號如次.

1	$+$	$-$	$+$	$+$
2	$+$	$+$	$+$	$+$

自 Fourier 之定理. 吾人祇能預言 1 至 2 間之實根數目爲 0 或爲 2. 若自 Sturm 之定理. 則可斷言 1 至 2 間有原方程式之二實根. 若欲劃分此二根.可將此區域分爲更小區域代入 $f(x)$ 中卽得.

(3) 求方程式 $x^4-2x^3-x^2+10x-4=0$ 中根之數目及其位置.

除去導來式之因子 2. 則得

$$f_1(x)=2x^3-3x^2-3x+5,\quad f_2(x)=9x^2-27x+11,\quad f_3(x)=-8x-3,\quad f_4(x)=-1433.$$

[注意] 作 Sturm 函數時.與求最高公因子同.可增減一正數因子. 此理可由方程式(1)明之. 惟此數因子祇限於正.故其剩餘之符號決不因之而變. 吾人得次之結果,

$-\infty$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
0	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$

自上表可知原方程式有二實根二虛根.而此二實根一爲正數一爲負數.因原方程式只有一正根及一負根.故只以正整數及負整數逐一代入 $f(x)$ 中卽可求得實根之位置.由此法易知負根在 $-2, -3$ 間.正根在 0 及1 間.

97. Sturm 之定理 等根 假定已實行計算 $f(x)$ 及 $f_1(x)$ 之最高公因子.並如前變其逐次剩餘之符號.因假定 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 含有公因子.故此 Sturm 函數中.最末一函數.即 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之公因子.而非不含有 x 之常數.令此函數級數爲

$$f(x),\quad f_1(x),\quad f_2(x)\cdots\cdots f_{r-1}(x),\ f_r(x).$$

當 x 變化時.除經過 $f(x)=0$ 方程式之複根外.本節級數中亦得適用前之結論.因除複根外.即無他種之值.能令本節級數中相鄰兩項同時成 0 故也.當 x 經過 $f(x)=0$ 之複根時.依 75 節之系.f 與 f_1 間有一符號變化數消失.但在級數 $f_1, f_2, \cdots f_r$ 中.其符號變化數始終一定.今證明之.令 α 爲 $f(x)=0$ 之 m 重根.則自 96 節方程式(1)即可知 $(x-\alpha)^{m-1}$ 爲級數 $f_1, f_2, \cdots\cdots f_r$ 中各函數之因子.除 $(x-\alpha)^{m-1}$ 一因子外.令各函數之他一因子爲 $\phi_1, \phi_2, \cdots\cdots \phi_r$. 以 $(x-\alpha)^{m-1}$ 除(1)之各方程式.卽得一組方程式.應用此等方程式.依前節理論.即可證明 x 經過 α 時.$\phi_1, \phi_2 \cdots \phi_r$ 級數之符號變化數始終不變.是以 $f_1, f_2, \cdots\cdots f_r$ 級數之符號變

化數亦始終不變.因以 $(x-a)^{m-1}$ 乘級數 $\phi_1, \phi_2, \cdots\cdots \phi_r$ 全體.即得級數 $f_1, f_2, \cdots\cdots f_r$ 全體.且當 x 自 $a-h$ 變至 $a+h$ 時.若 $(m-1)$ 爲奇數.則自 ϕ 級數變至 f 級數時.ϕ 級數中各項之符號有時可一律變化.至若 $m-1$ 爲偶數.則自 ϕ 級數變至 f 級數時.ϕ 級數中各項之符號始終一定.但此 ϕ 級數中各項之符號不論全體改變與否.而其符號變化數固始終一定也.

故 x 經過 $f(x)=0$ 之複根時.f 級數中 f 與 f_1 二項間有一符號變化數消失.此外 $f_1, f_2, \cdots\cdots f_r$ 間之符號變化數不受何種影響.若 x 經過 $f(x)=0$ 之單根.則有一符號變化數消失.自不待論.故方程式有等根時.此定理可如次表明之.

作級數 $f, f_1, f_2, \cdots\cdots f_r$. f_r 爲 f 與 f_1 之最高公因子.以 a 及 b 之值代入級數中各項內.則二者符號變化數之差.與 a, b 區域內方程式中各種不同實根數目相等.此間方程式之複根作一單根計算.

例　題

(1) 發見方程式 $x^4-5x^3+9x^2-7x+2=0$ 中根之性質.

吾人易得 $f_1(x)=4x^3-15x^2+18x-7,\quad f_2(x)=x^2-2x+1.$

因 f_2 能整除 f_1. 故在此場合 Sturm 級數即求至 f_2 止.由此可見 $f(x)=0$ 方程式有複根存在.欲求實根之數目.可以 $-\infty, +\infty$ 二者先後代入級數 f, f_1, f_2 中.其結果爲

$-\infty$	$+$	$-$	$+$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$.

故此方程式有兩種不同之實根.因 $f_2(x)=(x-1)^2$. 故此二種根中.一爲三重根.一爲單根.

(2) 發見方程式 $x^4-6x^3+13x^2-12x+4=0$ 中根之性質.

此間 $f_1(x)=4x^3-18x^2+26x-12,\quad f_2(x)=x^2-3x+2.$

f_2 爲 Sturm 級數中最末一函數.故原方程式有等根.

$-\infty$	$+$	$-$	$+$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$

由上表可知原方程式祇能有二種不同之根.因 $f_3(x)=(x-1)(x-2)$. 故 1 與 2 爲其二重根.

(3) 發見方程式 $x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1=0$ 中根之性質.

$$f_1(x)=5x^4+8x^3+3x^2-2x-2,\qquad f_2(x)=2x^3+7x^2+12x+7$$

$$f_3(x)=-x^2-6x-5,\qquad f_4(x)=-x-1.$$

因 f_5 爲 0. 則 $x+1$ 爲 f 與 f_1 之公因子.故 $f(x)=0$ 有一二重根 -1. 此外又有

$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$.

故 $f(x)=0$ 有二種不同之實根.故 $f(x)=0$ 於一二重根外.尙有一實根.二虛根.

(4) 發見方程式 $x^6-7x^5+15x^4-40x^2+48x-16=0$ 中根之性質.

此間

$$f_1(x)=6x^5-35x^4+60x^3-80x+48$$

$$f_2(x)=13x^4-84x^3+192x^2-176x+48$$

$$f_3(x)=x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^3.$$

答　共有三種不同之根.其一爲四重根.

98. Sturm 定理之應用　若方程式之次數甚高.則計算 Sturm 級數中各輔助函數.事實上甚感困難.爲減除此種困難計.乃有下述各項.今分論之.

(1) 令級數之最後剩餘爲常數.因此最後剩餘之絕對值.事

實上不甚重要.關係較大者,乃其絕對值前所冠之符號而已.若能用他種較簡方法將其符號求出.即可不計此最後剩餘之絕對值.依 96 節理.可知 $f_{n-1}(x)=0$ 之根.能令 f_{n-2}, f_n 兩式絕對值相等符號相反.故以 $f_{n-1}(x)=0$ 方程式之根代入 f_{n-2} 式中.即可發見 f_n 式之符號.如在 96 節例(3)以 $f_3(x)=0$ 之根 $-\frac{3}{8}$ 代入 $9x^2-27x+11$ 式中.其結果爲正.故 $f_4(x)$ 之符號爲負.在此例中毋庸計算 $f_4(x)$ 之值爲 -1433.

(2).若在 Sturm 級數中有一輔助函數.其所有之根皆爲虛數.則在此函數以下之輔助函數.皆可棄置勿計.蓋因對於變數之任何值.若此函數之符號常一定.則自此函數起至最後一函數止.其間之符號變化數始終不變.故以 a, b 之值一一代入 Sturm 級數中所生符號變化數之差.與級數中自此函數起至最後一函數止其間所表現之符號變化數無關係.若此輔助函數爲二次式 ax^2+bx+c. 且其首尾兩項同號.(否則此函數不能有虛根)則應用上法時.當先考察條件 $4ac>b^2$ 滿足與否.若能滿足.吾人即知其根爲虛數.以下之計算便可中止.

若前之輔助函數爲完全平方式.亦可得與上同一之結果.因對於 x 之實值.此函數之符號常一定也.

今第就第一場合詳加討論.則第二場合可迎刃而解矣.

令 $f_r(x)$ 爲 Sturm 級數中一補助函數.且其所有之根皆爲虛數.若 x 自 a 變至 b 時所經過之一切值.皆非級數 $f_r, f_{r+1}, f_{r+2},$

……f_n 中任一函數之根.則 x 自 a 變至 b 時.$f_r, f_{r+1}, \cdots\cdots f_n$ 級數中各項之符號常一定不變.其符號變化數亦一定不變明甚.

若 x 自 a 變至 b 時僅經過 $f_{r+m}(x)=0$ 之根.由關係式 $f_{r+m-1}=q_{r+m}f_{r+m}-f_{r+m+1}$ 則 $f_{r+m-1}=-f_{r+m+1}$. 即此二者符號相反.因 x 僅經過 $f_{r+m}(x)=0$ 之根,未經過 $f_{r+m-1}(x)=0$ 及 $f_{r+m+1}(x)=0$ 之根.故 x 自 a 變化至經過 $f_{r+m}(x)=0$ 之根後.f_{r+m-1} 與 f_{r+m+1} 二者之符號常一定且互相反對.此時不論 f_{r+m} 項之符號自正變負或自負變正.$f_{r+m-1}, f_{r+m}, f_{r+m+1}$ 之符號變化數僅能為 1.即其符號變化數始終為一.又 f_{r+m-1} 以前各項 f_{r+m+1} 以後各項之符號猶保持不變.故就全體言之.$f_r, f_{r+1}, \cdots\cdots f_n$ 之符號變化數當一定不變.

若 x 自 a 變至 b 時同時經過相鄰兩函數 f_{r+m}, f_{r+m+1} 之根.則由方程式(1)此根又為 f_{r+m-1} 之根.由此類推 $f_{r+m-2}, f_{r+m-3}, \cdots\cdots f_r$ 亦皆有此根.然 f_r 只有虛根.故 x 自 a 變至 b 時所經過之一切值中.不能有一值同時為相鄰兩函數之根.

若 x 自 a 變至 b 時同時經過 f_{r+m}, f_{r+m+2} 二者之根 α. 由 $f_{r+m-1}=q_{r+m}f_{r+m}-f_{r+m+1}$ 及 $f_{r+m+1}=q_{r+m+2}f_{r+m+2}-f_{r+m+3}$ 二關係式.可知 x 自 a 至 α 後 f_{r+m-1}, f_{r+m+1} 二者之符號不變且相反.f_{r+m+1} 與 f_{r+m+3} 二者之符號亦然.此時無論 f_{r+m}, f_{r+m+2} 二者之符號由正變負或由負變正.級數中 f_{r+m-1}, f_{r+m}, f_{r+m+1}, f_{r+m+2}, f_{r+m+3} 之符號變化數始終為 2. f_{r+m-1} 以前 f_{r+m+3} 以後各項

之符號始終不變.故就全體言之.$f_r, f_{r+1}, \cdots\cdots f_n$ 之符號變化數當一定不變.

若 x 自 a 變至 b 時同時經過 f_{r+m} 及 $f_{r+m'}$ 之根.(但 $m'-m>2$) 同上理可知 $f_{r+m-1}, f_{r+m}, f_{r+m+1}$ 之符號變化數始終不變. $f_{r+m'-1}$, $f_{r+m'}$ $f_{r+m'+1}$ 亦然.且自函數 f_{r+m-1} 以前. $f_{r+m'+1}$ 以後. f_{r+m+1} 至 $f_{r+m'-1}$ 之間.每個函數之符號皆一定不變.就全體言之. f_r, f_{r+1}, $\cdots\cdots f_n$ 之符號變化數亦一定不變.餘準此.

例　題

(1) 分析方程式 $x^4+3x^3+7x^2+10x+1=0$.

吾人得 $f_2(x)=-29x^2-78x+14$, $f_3(x)=-1086x-481$, $f_4(x)=-$.

由 $f_3(x)=0$ 所得 x 之值與 $-\frac{1}{2}$ 相差甚小.以之代入 $f_2(x)$ 中能令 $f_2(x)$ 爲正.故 f_4 爲負.此方程式有二實根二虛根.一實根在 $-2, -1$ 區域內.一實根在 $-1, 0$ 區域內.

(2) 分析方程式 $x^4-4x^3-3x+23=0$.

吾人得 $f_2(x)=12x^2-9x+89$, $f_3(x)=-491x+1371$. $f_4(x)=-$.

此間 $f_3(x)=0$ 中 x 之值爲 $x=\frac{1371}{491}>\frac{1371}{500}>2.74>\frac{5}{2}$. 又 $\frac{5}{2}$ 能令 $f_2(x)$ 爲正.故 $f_3(x)=0$ 之根亦令 $f_2(x)$ 爲正.本方程式有二實根二虛根.一實根在 $2, 3$ 區域內.一實根在 $3, 4$ 區域內.

(3) 分析方程式 $2x^4-13x^2+10x-19=0$.

此間 $f_1(x)=4x^3-13x+5$, $f_2(x)=13x^2-15x+38$.

因 $4\times13\times38>15^2$. 則 $f_2(x)=0$ 之根爲虛根.故 f_2 以下 f_3, f_4 皆可棄置勿計.

令以 $-\infty, 0, \infty$ 代入,則有

$-\infty$	$+$	$-$	$+$
0	$-$	$+$	$+$
∞	$+$	$+$	$+$

故此方程式之根有二為實.一為正根.一為負根.

(4) 分析方程式 $x^5+2x^4+x^3-4x^2-3x-5=0$.

此間 $f_1(x)=5x^4+8x^3+3x^2-8x-3$, $f_2(x)=6x^3+66x^2+44x+119$,

$f_3(x)=-116x^2-57x-223$.

因 $4\times116\times223>57^2$. 故計算至 f_3 時卽中止進行.今以 $-\infty, 0, \infty$ 代入,則

$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$-$
0	$-$	$-$	$+$	$-$
∞	$+$	$+$	$+$	$-$

故此方程式有四虛根一正實根.

(5) 發見方程式 $x^4-2x^3-7x^2+10x+10=0$ 中根之數目及其位置.

答 所有之根皆為實根.一在 $-3, -2$ 區域內.一在 $-1, 0$ 區域內.餘在 $2, 3$ 區域內.

(6) 分析方程式 $x^5+3x^4+2x^3-3x^2-2x-2=0$.

答 只有一實根在 $1, 2$ 區域內.其剩餘為二次式時便可中止.

(7) 分析方程式 $x^3+11x^2-102x+181=0$.

此間 $f_2(x)=854x-2751$. $f_3(x)=441$.

以最後第二函數之根代入前函數內而決定其符號.有時亦不易斷定.本題其一例也.實際若以 $f_2(x)$ 之根代入 $f_1(x)$ 中.其正負兩部之絕對值殆相等.此間已求得 $f_3(x)$ 之值.若自 $f_2(x)$ 之係數觀之.覺其結果甚小.此可為原方程式中有二根甚接近之特徵.今 $3, 4$ 區域內有二根存在.若將此區域分為更小區域.則此二根仍在 $3{\cdot}2, 3{\cdot}3$ 區域內.故此二根甚接近.關於實數與虛數間之連續.吾人於此又得一新解釋.(參考 17 節 18 節)若 $f_3(x)$ 為 0. 則此

二根爲等根.若 $f_3(x)$ 爲絕對值甚小之負數.則此二根爲虛根.

(8) 分析方程式 $x^5+x^4+x^3-2x^2+2x-1=0$.

其二次函數之根爲虛數.

答 只有一實根在 0, 1 區域內.

(9) 分析方程式 $x^6-6x^5-30x^2+12x-9=0$.

此間 $f_2(x)=5x^4+20x^2+7$. 因 $f_2(x)$ 中所有之根皆爲虛數.故從此中止.

答 在區域 $(-2, -1)$, $(6, 7)$ 內各有一根.

(10) 分解方程式 $2x^6-18x^5+60x^4-120x^3+18x-5=0$.

吾人得 $f_2(x)=5x^4+220x^2+1$. 以下棄置勿計.

答 在 $(-1, 0)$, $(5, 6)$ 區域內各有一根.

(11) 考察方程式 $2x^3+15x^2-84x-190=0$ 之根在 $-\infty, -7, 6, \infty$ 各區域內之狀況.

此間 $f_1(x)=x^2+5x-14$, $f_2(x)=27x+40$, $f_3(x)=+$.

將以上各值代入,則得

$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$
-7	$+$	0	$-$	$+$
6	$+$	$+$	$+$	$+$
∞	$+$	$+$	$+$	$+$.

若此等補助函數中有一函數對於某值爲 0. 則計算此列之符號變化數時.可略去爲 0 之項不計.蓋因其左右兩端之符號相反.故所略去者不論爲正爲負.皆與此列之符號變化數無關.

此方程式之根皆爲實數.一根在 $(-\infty, -7)$ 間.餘在 $(-7, 6)$ 間.

(12) 分析方程式 $3x^4-6x^2-8x-3=0$.

吾人得 $f_1(x)=3x^3-3x-2$, $f_2(x)=(x+1)^2$.

因 $f_2(x)$ 爲完全平方.故以下停止進行.

答 在區域 $(-1, 0)$, $(1, 2)$ 內各有一根.

99. 方程式之根皆爲實根之條件 由 $f(x)$, $f'(x)$ 及其 $n-1$ 個剩餘所成之級數通常有 $n+1$ 項.若原函數有缺項.則其剩餘數目亦可比 $n-1$ 小.原方程式有虛根時.始能有此現象.因 x 自 $-\infty$ 變至 ∞ 時.若此級數有 n 個符號變化數消失.(卽原方程式有 n 個實根.)則此級數項數斷無比 $n+1$ 小之理故也.又若原方程式之根皆爲實根.則以 ∞ 代入時各項同符號.以 $-\infty$ 代入時則其各項之符號正負相間.因方程式之首項常假定爲正.故其所有之根皆爲實根之條件.(假定不含有複根)可如次說明之.

若 n 次方程式之根皆爲實數.則其 $n-1$ 個剩餘之首項皆爲正.

例題

(1) 發見方程式 $ax^2+2bx+c=0$ 之根爲不等實根之條件.

答 $b^2-ac>0$.

(2) 發見三次方程式 $z^3+3Hz+G=0$ 之根爲不等實根之條件.

若此 z 三次方程式之根皆爲實根.則導出此 z 方程式之原三次方程式之根亦爲實根.故討論原三次方程式之根皆爲實根之條件.可書之爲上之形狀而研究之.

此間 $f_1(z)=z^2+H$, $f_2(z)=-2Hz-G$, $f_3(z)=-(G^2+4H^3)$.

以 f_2 除 f_1 之前,可用正因數 $2H^2$ 乘 f_1.

故其所求之條件爲 H 及 G^2+4H^3 皆爲負.

此用 G^2+4H^3 爲負一條件表之已足.用此條件已含有 $H<0$ 條件在內故也.

(3) 計算 $z^4+6Hz^2+4Gz+a^2I-3H^2=0$ 之剩餘.

吾人得 $f_2(z)=-3Hz^2-3Gz-(a^2I-3H^2)$, $\quad f_3(z)=-(2HI-3aJ)z-GI$,

$f_4(z)=I^3-27J^2$.

藉 37 節恆等式之助.此等剩餘不難求得.用 f_2 除 f_1 之前.可用正因數 $3H^2$ 乘 f_1 然後除之.又自其剩餘中除去正因子 a^2. 用 f_3 除 f_2 之前.以正因數 $(2HI-3aJ)^2$ 乘 f_2 然後除之.又自其剩餘中除去正因子 a^2H^2.

100　四次方程式之根皆爲實數之條件　欲依 Sturm 之法則討論普通四次代數方程式中根之性質之標準.用前節例(3)之方程式而研究之已足.依其間已得 Sturm 剩餘之各式.令其首項一律爲正.即可將四次方程式之根皆爲不等實數之條件宣告於次.

$$H<0, \qquad 2HI-3aJ<0, \qquad I^3-27J^2>0.$$

於此應宜注意者.本節之第二條件.與 68 節之相當條件.形式上各不相同是也.若欲證明此二條件有同等效力.可先證明 H 爲負 Δ 爲正時. $2HI-3aJ$ 小於 0 之條件.含有條件 $a^2I-12H^2<0$ 在內.次證明 H 爲負 Δ 爲正時.條件 $a^2I-12H^2<0$ 含有條件 $2HI-3aJ<0$ 在內.

由 37 節之恆等式可得

$$-H(a^2I-12H^2)\equiv a^2(2HI-3aJ)-3G^2.$$

此時若 $2HI-3aJ$ 與 H 俱爲負.則 a^2I-12H^2 必爲負.是爲第一場合之證明.

今證第二場合.若 aJ 爲正.則 $2HI-3aJ$ 爲負.蓋以 Δ 爲正.故

I 為正.因而 $2HI-3aJ$ 為負.是固不待論矣.至若 aJ 為負.則 $2HI-3aJ$ 仍為負.蓋依不等式 $12H^2>a^2I,\ I^3>27J^2$ 而知負項 $2HI$ 之絕對值超過 $-3aJ$ 正項之絕對值.結果 $2HI-3aJ$ 之值亦不能不為負.學者若用 Sturm 之函數.不難證實 68 節中其餘各種場合之結論.

例題

(1) 用 Budan 之法則劃分方程式 $x^4-16x^3+69x^2-70x-42=0$ 之根.

答 在區域 $(-1, 0)$, $(2, 3)$, $(4, 5)$, $(9, 10)$ 內各有一根.

(2) 用 Sturm 之定理分解方程式 $x^4-4x^3+7x^2-6x-4=0$.

若已知原四次方程式有二實根.則求剩餘至其首項為負時即可停止進行.因其餘二根此時必為虛根故也.至其實根位置.第就原方程式以數代入卽可決定.

答 有二根為虛,一實根在 $(-1, 0)$ 區域內,一實根在 $(2, 3)$ 區域內.

(3) 同上理分解方程式 $x^4-5x^3+10x^2-6x-21=0$.

答 $(-1, 0)$, $(3, 4)$ 區域內各有一實根.餘為虛根.

(4) 用 Sturm 之定理分解方程式 $x^4+3x^3-x^2-3x+11=0$.

答 皆為虛根.

(5) 用 Sturm 之方法發見方程式 $x^5-10x^3+6x+1=0$ 中根之數目及其位置.

答 $(-4, -3)$, $(0, 1)$, $(3, 4)$ 區域內各有一實根. $(-1, 0)$ 區域內有二實根.

(6) 計算下方程式之 Sturm 函數.並表明其所有之根皆為實數.

$$x^5-5x^4+5x^3+5x^2-5x-1=0$$

(7) 計算下方程式之 Sturm 函數.並表明其有四根為虛數.

$$3x^5+5x^3+2=0$$

求本題及前題之剩餘時.其中有兩個不連續剩餘含有公因子.

(8) 計算下方程式之 Sturm 函數.並證實54節例(13)中關於根之性質之結論.

$$x^5-5px^3+5p^2x+2q=0$$

(9) 若 c 爲 1 以外之任一值.試證方程式 $c^2x^4-2c^2x^3+2x-1=0$ 有一對虛根.

(10) 證方程式 $x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0$ 之根皆爲實數.若 a, b, c 三值中有二值相等.試解此方程式.

(11) 若四次方程式 $ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0$ 有三重根.則此四次式可表爲次之形狀 $a^3f(x)=(ax+b+\sqrt{-H})^3(ax+b-3\sqrt{-H})$ 試證明之.

(12) 試用 Sturm 之剩餘證實前四次式爲完全平方所滿足之條件.並在此場合證明 $a^3f(x)=\{(ax+b)^2+3H\}^2$.

(13) 若五次式中最初二剩餘之首項符號爲 $-+$.則其實根之數目已定.試證明之.

答　僅一實根.

(14) 若 H 與 J 俱爲正.試證四次方程式之根俱爲虛數.並在同條件下證明以二項係數表五次方程式時.此五次方程式祇有一實根.

(15) 若 Sturm 函數一律完備.則其各首項係數之符號變化數.與方程式中虛根之對數相等.試證明之.

(16) 應用 Sturm 之定理.若得一輔助函數.其各項皆爲正.或皆爲負.則以下之輔助函數可棄置勿計.卽能考察原方程式中正根之數目及其位置.又其各項若正負相間.亦可同樣考察其負根之數目及其位置.

(17) 若方程式 $f(x)=0$ 之根皆爲實數.則其各輔助函數之根亦皆爲實數.試證明之.

本題亦可依與96節類似之理明之.今討論其 k 次剩餘 R_k. 令其次數爲

m.由 R_k 及以下 m 個剩餘而成之級數中.不能有同時爲 0 之相鄰二函數.當 x 成 $-\infty$ 時.級數之各項正負相間.若 x 成 ∞.則此級數全體爲正.故 x 自 $-\infty$ 變至 ∞ 時.此級數有 m 個符號變化數消失.且除經過 $R_k=0$ 方程式之根外.此級數便無符號變化數消失.是以 $R_k=0$ 方程式有 m 個實根.

因能令一 Sturm 函數爲 0 之值.必令其相鄰二函數反號.故易推得由此函數所成之方程式.爲其前者之極限方程式.

(18) 若已知一輔助函數 $f_m(x)$ 之實根.則可不藉 f_m 以下各函數之助.卽可將原方程式中實根數目及其位置決定.試證明之.

令 $f_m(x)=0$ 之實根依大小順序書之爲 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots \eta, \theta$. 餘爲虛根.當 x 自 $-\infty$ 變至比 θ 略小之值時.$f_m(x)$ 之符號不變.故在 $(-\infty, \theta)$ 區域內檢查方程式 $f(x)=0$ 之根時.f_m 以下之函數可不注意.若 x 自比 θ 略大變至比 η 略小.亦得同一之結果.以下同樣.故在 $(-\infty, \theta), (\theta, \eta), \cdots(\beta, \alpha), (\alpha, \infty)$ 各區域內分別檢查方程式 $f(x)=0$ 中根之數目及其位置時.$f_m(x)$ 以下之函數可略之不計.

(19) 若任一輔助函數有若干對虛根.則其原方程式至少亦有同數虛根.

令 x 自 $-\infty$ 變至 ∞.再檢查自 $f(x)$ 至 $f_m(x)$ 前例級數中可能消失之最大符號變化數.卽可將此理推得.於此應宜注意者.卽 x 經過方程式 $f_m(x)=0$ 之根時.此級數可增一符號變化數.

(20) 用例 (18) 之法於 98 節例 (1) 之方程式.

略去其最後二剩餘.吾人得

$$f(x)=x^4+3x^3+7x^2+10x+1,\quad f'(x)=4x^3+9x^2+14x+10,\quad R_1=-29x^2-78x+14.$$

方程式 $R_1=0$ 之二根易知在 $(-3, -2), (0, 1)$ 兩區域內.因 R_1 中 x^2 之係數爲負.則方程式 $f(x)=0$ 至少有二虛根.若其餘二根爲實根.則其實根必爲負.且依例 (18) 理在 $(-\infty, -3), (-2, 0)$ 區域內.用以上三函數.已足決定原方程式中根之數目及其位置.易見原方程式之二根在 $(-2, 0)$ 區域內.

第十一章

數字方程式之解答

101. 代數方程式及數字方程式 代數方程式之解答.與數字方程式之解答.根本上截然爲二.前者之結果.爲一純粹記號性質之普通公式.以之表一根之值固可.以之表其餘各根之值亦可.若將公式中所含係數函數.以根之相當等勢函數表之.則其根號下之根式.可實行開方.當此等平方根號或立方根號解除後.則由此等根所成之式.可變爲一根.且依平方根號或立方根號所代表者不同.所成之根卽隨之而異.吾人參攷55節二次方程式之場合.卽可證此說之不謬.在59節及66節亦可於三次及四次方程上得一例解.於此又當注意者.縱令代數方程式之係數爲虛數.其根之公式仍能適用.

在數字方程式之場合.其根可依本章法則分別定之.在求各根近似値之先.須知此根所在之區域.且此區域內不含有他根.

數字方程式之根.可分爲可通約與不可通約二種.前者包括整數分數及可化成分數之有限小數或循環小數.後者第就無限小數言.前者可求其眞値.後者可依本章方法求其近

似值精密至任何度.

吾人將述一定理.凡前者所舉之根.皆可本此定理一律化爲整根.

102. 定理 有一方程式於此.若其首項之係數爲 1. 其餘各項之係數爲整數.則此方程式之根必不爲分數.

令 a 與 b 爲互素數.$\frac{a}{b}$爲下列方程式之一根.

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$$

則有 $\left(\frac{a}{b}\right)^n+p_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+p_2\left(\frac{a}{b}\right)^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}\frac{a}{b}+p_n=0.$

兩端以 b^{n-1} 乘之.則有

$$-\frac{a^n}{b}=p_1a^{n-1}+p_2a^{n-2}b+\cdots\cdots+p_{n-1}ab^{n-2}+p_nb^{n-1}.$$

今 a^n 與 b 爲互素數.且在上式右端各項皆爲整數.則是分子分母成互素數之分數與一整數相等.斷無是理.故 $\frac{a}{b}$ 不能爲上方程式之根.故上方程式之根.或爲整數.或爲不可通約數.

係數有限之方程式.不論此係數爲分數與否.皆可變爲另一方程式.其首項係數爲 1. 其餘各係數爲整數.(31 節) 故由此法可將方程式之可通約根一律化爲整根.

係數爲整數之方程式.求其整根時.有奈端之法則可循.今述於次.

103. 奈端之約數法則 今 h 爲下列方程式之整根.

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (1)$$

今以 $x-h$ 除之.令其商爲 $b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1}$. 式中 $b_0, b_1, b_2, \cdots\cdots b_{n-1}$ 皆爲整數.自不待言.再如第 8 節進行.則得下之關係式.

$$a_0=b_0, \qquad a_1=b_1-hb_0, \qquad a_2=b_2-hb_1\cdots\cdots$$

$$a_{n-2}=b_{n-2}-hb_{n-3}, \quad a_{n-1}=b_{n-1}-hb_{n-2}, \quad a_n=-hb_{n-1}$$

由上最後關係式.卽可證明 a_n 可以 h 整除.其商爲 $-b_{n-1}$ 變此最後第二方程式,卽得 $a_{n-1}+\frac{a_n}{h}=-hb_{n-2}$. 卽以 h 除 a_n 所得之商與方程式中最後第二係數相加.其和可以 h 除盡.其商爲 $-b_{n-2}$. 以下類推.

依此法繼續進行.則其最後所得之商.卽爲與 $-a_0$ 相等之值 $-b_0$.

今在根之上下限內.以 a_n 之約數依上法進行.若每次所得之商皆爲整數.且其最後之商與 $-a_0$ 相等.則此約數即爲原方程式之根.若其中有一商爲分數.則此約數自不宜用.

若 a_0 爲 1. 則原方程式中所有之整根.皆可依此法一一定出.若 a_0 不爲 1. 亦可依此法將原方程式之整根定出.若欲將其中可通約根一一定出. 仍須將原方程式化爲首項係數爲 1 餘爲整數之方程式.

104. 約數法則之應用 爲利便計.可將上之運算次第.依 8 節之類似狀態書之如次.

$$
\begin{array}{cccccc}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2}\cdots\cdots a_2 & a_1 & a_0 \\
 & -b_{n-1} & -b_{n-2}\cdots\cdots -b_2 & -b_1 & -b_0 \\
\hline
 & -hb_{n-2} & -hb_{n-3} \quad -hb_1 & -hb_0 & 0
\end{array}
$$

以 h 除 a_n. 即得第二列第一項 $-b_{n-1}$. 以與 a_{n-1} 相加.即得第三列第一項 $-hb_{n-2}$. 以 h 除第三列第一項.即得第二列第二項 $-b_{n-2}$. 以與 a_{n-2} 相加.即得第三列第二項 $-hb_{n-3}$. 又以 h 除 $-hb_{n-3}$. 如前繼續進行.若 h 爲原方程式之根.則由此所得第二列中最末一項將爲 $-a_0$.

若由此方法證實 h 爲原方程式之一整根.則用他一約數計算時.可不再用第一列中各係數.但變第二列中各項之符號而用之已足.因以 $x-h$ 除原多項式時.其商之係數.與第二列中各項絕對值相等符號相反故也.若某一約數依上法計算.中途得一分數之結果.則此計算即可停止.並擯斥此約數不用.

1 及 -1 二數.雖爲 a_n 之約數.但不必包括在試約數之數目內.在實用試約方法以前.可用直接代入法決定此二數是否爲原方程式之根.

例　題

(1) 發見方程式 $x^4-2x^3-13x^2+38x-24=0$ 之整根.

集合方程式之項(87節)而試驗之.不難察知其所有之根在 $-5, 5$ 二者間.以下之約數.皆可視作方程式之根.今一一驗之如次.

−4	−3	−2	2	3	4

今先從 4 起.

−24	38	−13	−2	1
	−6	8		
	32	−5		

因 −5 不能用 4 整除.故 4 非原方程式之根.計算從此停止.

今用 3 計算.

−24	38	−13	−2	1
	−8	10	−1	−1
	30	−3	−3	0

故 3 爲其根.

用 2 計算時.將上式第二列中各項符號一律變更而後用之.則得

8	−10	1	1
	4	−3	−1
	−6	−2	0

故 2 爲其根.繼用 −2 計算時.

−4	3	1
	2	
	5	

因 −2 不能整除 5. 故 −2 非根也.又因 −3 不能整除 −4. 故亦非方程式之根.且因 −3 非縮減方程式 $x^3+x^2-10x+8=0$ 中絕對項 8 之約數.故 −3 當受排斥無疑.吾人常用此種觀察以減少試約數之數目.

最後用 −4 計算.則得

−4	3	1
	+1	−1
	4	0.

故 -4 爲方程式之根.

故此方程式有整根 $3, 2, -4$. 以 $(x-3), (x-2), (x+4)$ 之連乘積除原多項式.則得 $x-1$. 故 1 亦爲其一根.此時原多項式等於 $(x-1)(x-2)(x-3)(x+4)$.

(2) 發見方程式 $3x^4-23x^3+35x^2+31x-30=0$ 之整根.

方程式之根在 -2 與 8 之間.故第就諸約數 2, 3, 5, 6 試驗之足矣.

吾人立知 6 非方程式之根.試驗 5 時.則有

-30	31	35	-23	3
	-6	5	8	-3
	25	40	-15	$0.$

故 5 爲一根.試驗 3 時.則有

6	-5	-8	3
	2	-1	-3
	-3	-9	$0.$

故 3 爲其根.以下易知 2 非方程式之根.

以 $(x-5)(x-3)$ 之積除原多項式.其商爲 $3x^2+x-2$. 故知 1 非方程式之根.-1 始爲其根.故此原方程式之整根爲 $-1, 3, 5$. 其餘一根爲 $\frac{2}{3}$. 此爲可通約根.因非整數.故不見於上之計算中.

(3) 發見方程式 $x^4+x^3-2x^2+4x-24=0$ 中一切根.

根之上下限爲 $-4, 3$.

答 其根爲 $-3, \quad 2, \quad \pm 2\sqrt{-1}$.

(4) 發見方程式 $x^4-2x^3-19x^2+68x-60=0$ 中一切根.

根之上下限爲 $-6, 6$.

吾人發見 $2, 3, -5$ 爲其根.又以 $(x-2)(x-3)(x+5)$ 除原多項式.其商爲 $x-2$. 故 2 爲二重根.故此多項式等於 $(x-2)^2(x-3)(x+5)$.

在 106 節將更討論複根之場合.

105. 限制約數數目之方法 用直接代入法.自可決定 a_n 之約數中.何者為根.何者非根.但用上述奈端方法.則某種約數是否為根更易表現.當 a_n 中所含約數數目在根之極限內甚大時.須於應用上法之先.酌量減少約數之數目.今殫述於次.

當 h 為方程式 $f(x)=0$ 之整根時.則 $x-h$ 能整除 $f(x)$.且其商之係數皆為整數.此已於前表明之.故若令 x 為任意整數.則 $x-h$ 之值必能整除 $f(x)$ 之值.令 x 為最簡整數 1 及 -1.若約數 h 為 $f(x)=0$ 之根.則 $f(1)$ 必能以 $1-h$ (或變其符號為 $h-1$) 整除.及 $f(-1)$ 必能以 $-1-h$ (或變其符號為 $1+h$) 整除.

應用上法時.第一步先求 $f(1)$ 及 $f(-1)$ 之值.若二者之中有一為 0. 則其相當之整數為方程式 $f(x)=0$ 之根.此後吾人進行.可依縮減方程式再用上法記算之.

例　題

(1)
$$x^5-23x^4+160x^3-281x^2-257x-440=0$$

根之上下限為 -1 與 24.

吾人得以下約數.　2, 4, 5, 8, 10, 11, 20, 22

吾人易得 $f(1)=-840,\qquad f(-1)=-648.$

故由上列各數中減 1 不能整除 840 之約數以及增 1 不能整除 648 之約數.皆非方程式 $f(x)=0$ 之根.皆在排斥之列.由第一條件 10 與 20 受擯.由第二條件 4 與 22 受擯.用約數方法於其餘各整數 2, 5, 8, 11. 吾人知 5, 8, 11 三者為其根.其最後所得之商為 x^2+x+1. 故原多項式等於

$$(x-5)(x-8)(x-11)(x^2+x+1).$$

(2) $$x^5-29x^4-31x^3+31x^2-32x+60=0$$

根之上下限爲 -3 與 32.

約數爲 $-2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12,\ 15,\ 20,\ 30.$

$f(1)=0$ 故 1 爲方程式之根.

$f(-1)=124$. 除 $-2, 3, 30$ 外.其餘各約數皆受此條件排斥.吾人易得 -2 與 30 爲方程式之根.且其最後之商爲 x^2+1. 故原多項式等於

$$(x-1)(x+2)(x-30)(x^2+1).$$

106. 複根之決定法 若複根爲可通約數.則可以試約數法則定之.今說明於次.令 a_n 之一約數爲原方程式之根.若此約數又爲縮減方程式中絕對項之約數時.則用上法考察此約數是否爲此縮減方程式之根.若爲其根.則此約數至低爲原方程式之二重根.若此約數又爲第二縮減方程式之根.則此約數又可爲原方程式之三重根.以下準此.大凡任何次數之方程式.若只有一 r 重根.皆可用此法發見之.因此時 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之最高公因子.其形狀爲 $(x-a)^{r-1}$. 且 a 爲不可通約數時.此最高公因子式中各係數.不能爲可通約數故也.

由下之觀察.三次四次五次方程式三者之複根.不藉求最高公因子法亦可決定.今表之於次.

(1) **三次方程式** 在此場合之複根.必爲可通約數.若非可通約數.今假定爲 $a+\sqrt{b}$. 則 $a-\sqrt{b}$ 亦爲原方程式之複根.即其因子之積當超過三次.

(2) **四次方程式** 在此場合.若方程式只有一複根.則必爲

可通約根無疑.若為不可通約根.便不只一複根也.若方程式有兩個不同之複根.則此方程式左端可化為完全平方式.因若有兩個不同之複根.則必屬於次之形狀.$(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$.且此形狀可化為二次式之平方式也.但二次方程式亦可有不可通約根.故若已知原方程式無可通約根.則可考察此四次式是否為完全平方式.以定其有無不可通約複根.

(3) 五次方程式　在此場合.若方程式只有一複根.則必為可通約根無疑.若方程式有二個不同複根.則其左端必屬於$(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)$, $(x-\alpha)^2(x-\beta)^3$二式中之一.若左端可化為第一式.則其$x-\gamma$一因子必為可通約因子.若可化為第二式.則式中之α及β必為可通約數.在此二場合.原方程式左端皆可化為一可通約因子與一二次式平方之積.而此二次式之根.亦可為不可通約數.故若已知一五次方程式無可通約根.則此方程式無複根.若已知此五次方程式有一可通約根.則須考察其餘一因子是否為完全平方.若其可通約根多於一個.則其複根亦將為可通約根.

例　題

(1) 發見方程式 $2x^3-31x^2+112x+64=0$ 中一切可通約根.

此方程式之根在 -1 與 16 之間.其約數為 2, 4, 8.

$$
\begin{array}{rrrr}
64 & 112 & -31 & 2 \\
 & \underline{8} & \underline{15} & \underline{-2} \\
 & 120 & -16 & 0
\end{array}
$$

故 8 爲其一根.今用縮減方程式如前進行.

$$\begin{array}{rrr} -8 & -15 & 2 \\ & \underline{-1} & \underline{-2} \\ & -16 & 0 \end{array}$$

8 又爲其縮減方程式之根.其餘一因子爲 $2x+1$.

答 $f(x)=(2x+1)(x-8)^2$

(2) 發見方程式 $x^4-x^3-30x^2-76x-56=0$ 中可通約根及其複根.

此方程式之根在 -6 及 12 中間 (用 87 節例 10 之法則)

答 $f(x)=(x+2)^3(x-7)$

(3) 發見方程式 $9x^4-12x^3-71x^2-40x+16=0$ 中可通約根及其複根.

方程式中所有之根在 $(-2, 5)$ 區域內.

此方程式不能有整根.但仍可有可通約根.欲試驗之.可以 3 乘原方程式之根而除去其首項之係數.則其新方程式爲 $x^4-4x^3-71x^2-120x+144=0$. 其上下限爲 $-6, 15$. 吾人發見 -4 爲此新方程式之二重根.且此新函數爲

$$(x^2-12x+9)(x+4)^2.$$

故原方程式爲　　$(x^2-4x+1)(3x+4)^2=0$.

(4) 發見方程式 $x^4+12x^3+32x^2-24x+4=0$ 之可通約根及其複根.

其根在 -12 與 1 中間.故可試驗之約數只限於 $-4, -2, -1$. 吾人發見此方程式無可通約根.今進而考察此原四次式是否爲完全平方.據開方法及 61 節例(3)條件易知此四次式爲 x^2+6x-2 之平方.(參攷 76 節例 1) 故原方程式有兩對不可通約等根.

(5) 發見方程式 $f(x)=x^5-x^4-12x^3+8x^2+28x+12=0$ 之可通約根及其複根.

根之上下限爲 $-4, 4$. 吾人發見 -3 爲其一根.且其縮減方程式爲

$$x^4-4x^3+8x+4=0.$$

式中無他種可通約根.故此方程式若有複根.其惟一場合.卽此最後函數爲完全平方.實際此最後函數爲 (x^2-2x-2) 之完全平方式.故

$$f(x)\equiv(x+3)(x^2-2x-2)^2.$$

(6) 發見方程式 $x^5-8x^4+22x^3-26x^2+21x-18=0$ 之可通約根及其複根.

答 $f(x)\equiv(x^2+1)(x-2)(x-3)^2$

(7) 下方程式只有二個不同之根.試發見之.

$$x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=0$$

一般若整數 h 爲原方程式之二重根.則 h^2 必爲其絕對項之因子.h 必爲其最後第二係數之因子.若 h 爲三重根.則 h^3 必爲絕對項之因子.h^2 必爲其最後第二係數之因子.h 爲最後第三係數之因子.以下類推.今原方程式之絕對項爲 $2^2\cdot3^3$.故若 1 及 -1 皆非原方程式之根.則其所求之根必爲 2 及 3.此固不難證實.因此方程式不能有負根,故不以 $-2, -3$ 爲其根.

(8) 方程式 $800x^4-102x^2-x+3=0$ 有等根.試發見其一切根.

本例在用約數方法以前.可變其根爲逆數.

答 $f(x)\equiv(10x-3)(5x-1)(4x+1)^2$

107. 奈端之近似值方法 方程式之可通約根.可依前節之法則求得.今進而討論求不可通約根之近似值之法則.本節所述奈端之方法.無論方程式中含有代數函數及超越函數.均能適用.故此方法甚有價值.雖在代數方程式上本節之方法不及下節所述 Horner 氏之方法.然就原理上言之.二法殆若合符節矣.

在各種近似值方法中.其所求之根.皆假定爲已與他根分離.且在一已知甚小區域內.

今已知方程式爲 $f(x)=0$.又令 a 爲比原方程式中一根少

一微量 h 之定量.因 $a+h$ 爲原方程式之根.吾人得 $f(a+h)=0$.

或 $f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots=0.$

因 h 之值甚微.故凡含有二乘方以上之項即可捨棄不用.此時得

$$f(a)+hf'(a)=0. \qquad h=-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

由此可得根之第一近似值爲 $a-\frac{f(a)}{f'(a)}$.

令此第一近値爲 b. 且計算 $\frac{f(b)}{f'(b)}$ 之值. 又可得第二近似值爲 $b-\frac{f(b)}{f'(b)}$.以下逐次如此.則精密至任何度之近似值皆可求得.

例題

（1）發見方程式 $x^3-2x-5=0$ 中正根之近似值.

根之極限在 2 與 3 間. (96 節例 1) 縮小此區域. 此根可在 2 與 2·2 間. 令 2·1 爲 a 所表之值. 此值與根之眞值 $a+h$ 之差不能超過 0·1. 則有

$$\frac{f(a)}{f'(a)}=\frac{f(2\cdot1)}{f'(2\cdot1)}=\frac{0.061}{11.23}=0.00543\cdots\cdots.$$

故其第一近似值爲 $2.1-0.00543\cdots\cdots=2.0946\cdots\cdots$.

令之爲 b. 計算 $\frac{f(b)}{f'(b)}$ 之值.則有 $b-\frac{f(b)}{f'(b)}=2.09455148\cdots\cdots$.

是爲第二近似值.餘準此.

奈端之近似值方法.一般甚敏捷.但若吾人所求之根.與方程式中他一根異常接近時. $\frac{f(a)}{f'(a)}$ 之值不必甚微.因無論對於

此二接近值中任一值.$f'(x)$ 之值皆甚小故也.此種場合.必須特別注意.吾人不必將此法再加討論.因在實用上常採用 Horner 氏之方法故也.

108. Horner 氏之數字方程式解法　依此法可得原方程式之可通約根及不可通約根.此根係自整數部分至小數部分每次一位逐漸求得.若根爲可通約數.則可將此根眞値完全求得.若爲不可通約數.則須求至所須要第若干位小數始止.此法與開平方開立方之法相類似.後者可視爲前者中一特別場合.

Horner 方法所根據之原理.爲在原方程式之根中每次減一定量如 33 節所云.此法之功效.在能將其逐次變化以嚴密算式公布之.且其所得之根.可正確至所需要之小數位數.

此法之原理.將於本節以簡單數例明之.此外尙有數種附帶理論用於此法時省力不少.詳見以下數節.

例　題

(1) 發見方程式 $2x^3-85x^2-85x-87=0$ 之正根.

2	-85	-85	-87	(43.5
	80	-200	-11400	
	-5	-285	-11487	
	80	3000	9594	
	75	2715	-1893	
	80	483	1893	
	155	3198	0	
	6	501		
	161	3699		
	6	87		
	167	3786		
	6			
	173			
	1			
	174			

解數字方程式時.首當發見根之第一位數字.雖在某種場合.可適用第十章中根之分離法求之.一般常經幾次試驗而得.本例中只有一正根.且依實驗發見在40及50之間.故此根之第一位數字爲4.自原方程式之根中減去40.則其第一變化方程式中只有一根在0及10間.依實驗此根在3與4間.今自第一變化方程式之根中減去3.卽自原方程式之根中減去43.則此第二變化方程式只有一根在0及1間.自此第二變化方程式之根中減去0.5則其絕對項變爲0.卽自原方程式之根中減去43.5其絕對項變爲0.故可決定43.5爲原方程式之根.其運算次第可如上書之.

每次變化之結果.以斷線劃出.斷線下之數.爲變化方程式之係數.例如

$$2x^3+155x^2+2715x-11487=0$$

爲第一變化方程式.其根比原方程式之根少40.且在3與4間.若此第二變化方程式之根非0.5.而爲0.5, 0.6間一値.則原方程式中根之前三位爲43.5.若欲求其次位數字.可自第二變化方程式之根中減去0.5以下類推

(2) 發見方程式 $4x^3-13x^2-31x-275=0$ 之正根.

吾人先將算式作出.然後對之作種種觀察.

4	−13	−31	−275	(6.25
	24	66	210	
	11	35	−65	
	24	210	51.392	
	35	245	−13.608	
	24	11.96	13.608	
	59	256.96	0	
	.8	12.12		
	59.8	269.08		
	.8	3.08		
	60.6	272.16		
	.8			
	61.4			
	.2			
	61.6			

依實驗此原方程式之正根在6與7間.故第一位數字爲6.自原方程式之根中減去6.而得方程式 $4x^3+59x^2+245x-65=0$.其根在0與1間.依實驗

此新方程式之根在·2及·3間.故原方程式中根之前兩位數字爲6.2.自此新方程式中減去0.2.此最後方程式之根爲0.05.故6.25爲原方程式之根.

在此運算中.若能脫離小數點不用.則運算上更覺便易.其法如次.若根之小數部分將實現.(假定爲$0.abc$……)則以10乘其相當變化方程式之根.卽以一0綴於變化方程式中第二係數右端.二0綴於第三係數右端.三0綴於第四係數右端.以下類推.此時新方程式之根.不爲$\cdot abc$……而爲$a.bc$…….自其根中減去a.則此新方程式之變化方程式,其根爲$\cdot bc$…….又以10乘其根.則其根成爲$b.c$…….以下類推.此後各例皆採用此簡法.今將本例依此法計算之.

4	−13	−31	−275	(6.25
	24	66	210	
	11	35	−65000	
	24	210	51392	
	35	24500	−13608000	
	24	1196	13608000	
	590	25696	0	
	8	1212		
	598	2690800		
	8	30800		
	606	2721600		
	8			
	6140			
	20			
	6160			

(3) 發見方程式 $20x^3-121x^2-121x-141=0$ 之正根.

此根在7與8之間.故其形狀爲$7.ab$…….今自其根減去7.並乘以10.則其所得之結果爲 $20x^3+2990x^2+112500x-57000=0$. 其正根當爲$a.bc$…….因此新方程式之根在0與1間.故$a$成0.今置0於根之小數部分中第一位.且再以10乘上新方程式之根.由此易見5爲此最後方程式之根.故原方程式之根爲7.05.

以上各例中根之位數甚少.故易於計算.當位數甚多時.若第依代入法求其各數字.則其困難倍增.但此亦非必要.因用

Horner 方法.在發見根之第二位或第三位數字(甚至僅知其第一位數字)後.便可自其變化方程式依視察法將其相鄰數字偵出.今述其原理於次.

109. 試約數之原理 在 107 節吾人已知若 a 比原方程式之眞根少一微量 h. h 與 a 之比又甚小時.則以 $a+h$ 代方程式中之 x 而展開之.由此所得 h 之近似值.爲以 $f'(a)$ 除 $f(a)$ 後所得之商.今 Horner 氏方法中所有各變化方程式.不啻爲此種變化之結果.其最後第一項爲 $f(a)$. 第二項爲 $f'(a)$. (見 33 節)故完畢二步或三步計算至根之剩餘部分比已知部分甚小時.則可以其變化方程式中最後第二係數除其第一係數而得根之二或三位眞正數字.故在 Horner 運算程途中.可參用奈端之法則.以求根之近似值.在 Horner 方法中.藉此原理.可以偵出已知數字後第一位數字.此每一變化方程式中最後第二係數.稱爲試約數.例如前節例(2)之數字 5. 可由試約數 2690800 偵出.在此例中根之第二位數字.亦可由第一變化方程式之試約數偵出.但此非普通場合.未可一概論也.在習慣上.學者常承認爲首各係數之效力.但根之展開愈遠.則此等係數之效力遂逐漸減少.

例　題

(1) 發見方程式 $x^3+x^2+x-100=0$ 之根至第四位小數無誤.

方程式之根在 4 與 5 間.今先將算式書出.然後對之作種種觀察.

1	1	1	−100	(4.2644
	4	20	84	
	5	21	−16000	
	4	36	11928	
	9	5700	−4072000	
	4	264	3788376	
	130	5964	−283624000	
	2	268	256071744	
	132	623200	−27552256	
	2	8196		
	134	631396		
	2	8232		
	1360	63962800		
	6	55136		
	1366	64017936		
	6	55152		
	1372	64073088		
	6			
	13780			
	4			
	13784			
	4			
	13788			
	4			
	13792			

先自原方程式之根中減去4.因其小數部分將實現.故於其第一變化方程式中各係數如108節例(2)各綴以0.因係數130與5700之比甚小.故可用試除數値出根之第二位數字.在此等場合中所採取根之數字.爲在變化後不改變其前方程式中絕對項之符號之最大數字.此間2爲其適當數字.若自第一變化方程式 $x^3+130x^2+5700x-16000=0$ 之根中減去2.則此第二變化方程式之絕對項(=−4072)與第一變化方程式之絕對項同號.若採用數字3.則其絕對項之符號將爲正.此符號變化所詔示吾人者.卽所求之値.已超過其所隸屬本方程式之根.吾人必須注意原方程式變成第一變化方程式後.此絕對項之符號以後當永遠不變.此理將於次例明之.至若吾人誤取甚小數字.則亦如開方法及普通除法.其下次値出之數字必比9大.惟此種錯誤將不常見.最普通場合爲誤取較大數字.此時在計算上所表

現者.卽絕對項之符號當起變化是也.在上算式中不必實施第五變化.卽知其根之相當數字爲4.故原方程式之根求至第四小數無誤時爲4.2644

(2) 下之方程式有一根在1與2間.試求此根至第四位小數無誤

$$x^4+4x^3-4x^2-11x+4=0$$

吾人毋庸完成第五變化.而知9爲其根之第五位數字.故其根爲1.6369….其前四位小數正確.在第二變化以後.此試約數之效用乃著.首値出一數字3無誤.以下繼續値出.今自第一變化方程式觀之.其最後二項爲負.其試約數之勢力.比其前項係數之勢力小.故此根之第二位數字.須依代入法求之.今在0與10間定方程式 $x^4+80x^3+1400x^2-3000x-60000=0$ 中根之位置.屢經試驗而知以6代入上式左端中所得結果爲負.以7代入則得正結果.故上方程式之根在6與7之間.是以吾人所求之根爲6.以下取3, 6, 9等最大數字時.仍令絕對項保持其負號.在前第一變化時.自原方程式之根中減去1.則原方程式之絕對項變號.由是可知原方程式中有0與1間之根.卽吾人所取之値.已超過此一根.因以0代入原方程式中.其結果爲4.以1代入.則爲−6故也.以下各種變化所取數字.苟不超過其所隸屬方程式之根.其絕對項之符號.當與1代入後之符號相同.此係假定在1與吾人所求之根間無他一根存在.然後有此結論.吾人敘本題時已成立此假定.事實上原方程式只能有二正根.一在0與1間.故只有一根在1與2間.

若在極限內有二根存在.卽方程式中有一對根殆相等.則計算時更須鄭重從事.下節將詳論之.

1	4	−4	−11	4	(1.6369
	1	5	1	−10	
	5	1	−10	−60000	
	1	6	7	50976	
	6	7	− 3000	−90240000	
	1	7	11496	72690561	
	7	1400	8496	−175494390000	
	1	516	14808	152131052016	
	80	1916	23304000	− 23363337984	
	6	552	926187		
	86	2468	24230187		
	6	588	935601		
	92	305600	25165788000		
	6	3129	189387336		
	98	308729	25355175336		
	6	3138	189766488		
	1040	311867	25544941824		
	3	3147			
	1043	31501400			
	3	63156			
	1046	31564556			
	3	63192			
	1049	31627748			
	3	63228			
	10520	31690976			
	6				
	10526				
	6				
	10532				
	6				
	10538				
	6				
	10544				

(3) 發見前方程式中0與1間一根至第四位小數止.

先以 10 乘其根.此時係數爲 1, 40, −400, −11000, 40000.

因其居首諸係數均比試約數小甚.故第一步卽可用試約數求根之數字.其絕對項之符號始終不變.

答 0.3373

(4) 發見方程式 $x^4-3x^2+75x-10000=0$ 中 9 與 10 間之根至第三位小數止.(補充 x^3 之係數 0.)

以上諸例.所展開之小數位數無幾.今說明一簡法.凡根之小數位數已展開至三位或四位後.其以下各數字.可依此簡

法求之.

110. Horner 氏之簡法 在尋常除法中.若其剩餘不能以除數除之.吾人不於剩餘右端增 0. 却捨去除數尾後一數字以代之.以下逐次如此.至除數中所有數字完全消滅始止.由此法所得之商.與其眞正之商比較.結果祇最後一數字至多最後二數字不相符合. Horner 之簡法.與此原理相類.用此法時.祇須將變化方程式內各係數之有效數字保留.其無關重輕數字則設法消滅.當此簡法開始時.吾人不採前述之法則於其變化方程式係數中爲首第二係數尾後增一 0. 以下每進一行再多添一 0. 乃在最後第二係數尾後捨去一數字.以下每退一行即多棄一數字.此法之效力.在能保留式中重要數字之固有地位.其不關重要之數字.又皆擯斥不用.

本節第一例中第一變化即遵守此簡法.學者若將此第一變化式與前節第二例之相當變化式較.即可察得能支配根之數字之重要領袖數字.在二場合內皆一致符合.且仍保存其相對位置.惟其不甚重要諸數字.在本場合已消滅始盡矣.

於上述簡法而外.尙有他種簡法.但其功用甚微.同時並易引起錯誤.故略之.

例題

(1) 在 1 與 2 間發見前節例 (2) 方程式之根至小數第七位或第八位.

$1\cancel{052}$	$3150\cancel{14}$	$2516578\cancel{8}$	-17549439	(1.636913575
	6	18936	15213090	
	3156	2535515	-2336349	
	6	18972	2301597	
	3162	$255448\cancel{7}$	-34752	
	6	285	25601	
	$31\cancel{68}$	255733	-9151	
		285	7680	
	$\cancel{31}$	$25601\cancel{8}$	-1471	
			1280	
			-191	
			179	
			12	

依前例之結果.至其第三變化完成後.始用上述簡法計算.其運算工作表之如上.因此方程式次數爲4.故其首項係數須捨去四位數字.次項三位.三項兩位.四項一位.絕對項不變.此時首項係數完全消滅.次項捨去 052 三項 14, 四項 8, 今將

$$1,\quad 3150,\quad 2516578,\quad -17549439$$

視作三次方程式之係數.自其根中減去6.用根之數字乘係數時.對其捨棄數字.須依心算乘之.然後如簡單除法處理其結果.

自前三次方程式之根中減去 6 後.對其第一變化方程式.仍依前簡法計算.此時首項係數消滅.次項捨去 68. 三項捨 7. 絕對項不變.又將

$$31,\quad 255448,\quad -2336349$$

視作二次方程式中各項之係數而如前進行.結果又將領袖係數 31 消滅.此後進行便與簡單除法無異.當此計算終結時.此商之小數數字.僅與最後二三數字有關.在此簡法未實行以前.須展開根至第幾位.與所需要之小數位數有關.因於簡法開始後.其於根之已知各數字外所能賦予數字位數只比試約數位數少 1 故也.

(2) 試在 2 與 3 間發見方程式 $x^4-12x+7=0$ 之根至七或八位小數.

1	0	0	−12	7	(2.0472755671
	2	4	8	−8	
	2	4	−4	−100000000	
	2	8	24	83891456	
	4	12	20000000	−16108544	
	2	12	972864	15493401	
	6	240000	20972864	− 615143	
	2	3216	985792	446262	
	800	243216	21958656	−168881	
	4	3232	17478	156226	
	804	246448	2213343	−12655	
	4	3248	17478	11159	
	808	249696	2230821	−1496	
	4	2496	49	1338	
	812		223131	−158	
	4		49	156	
	816	24	223180	− 2	

此方程式祇有二正根.一在 0 與 1 間.一在 2 與 3 間.對於後之一根.其演算如上.

自原方程式之根中減去2.又以 10 乘之.其第一變化方程式中之試約數 20000 不能除其絕對項10000.故在商之第二位數字爲 0. 須再以10乘第一變化方程式之根.然後如前進行.

(3) 求此同一方程式中 0 與 1 間之根.

答 0.593685829

(4) 求方程式 $x^3+24.84x^2-67.613x-3761.2758=0$ 之正根.

若原方程式之係數含有小數點.則以10累乘其根.終能將其小數位數消盡.

(5) 求方程式 $x^4-12x^2+12x-3=0$ 之負根至第七位小數.

若欲發見一負根.可將原方程式中根之符號變化之.然後依上述方法求此負根之絕對值.並於其前冠以負號即得.

111. 方程式之根異常接近時Horner氏法則之應用　在 107 節吾人已知若原方程式有極接近二根.則其所述近似值法則不甚適用.分析或解開此類問題.均有種種困難.若依 Horner 法解此問題.仍較他種場合略煩.當此二根尚未分離時.計算上須特別注意.將於下例表明之.在此二根分離後.分別計算其各根.則可適用前之方法.吾人參攷 109 節試約數

之解說.與 107 節所述不適用奈端法則之場合.而知在二根分離後即取試約數而實驗之.必無收效之理.

例　題

(1) 方程式 $x^3-7x+7=0$ 有二根在 1 與 2 間.(參考 96 節例 2) 試求其各根至 8 位小數.

自原方程式之根中減去 1. 又以 10 乘之.則其第一變化方程式

$$x^3+30x^2-400x+1000=0$$

在 0 與 10 間必有二根.吾人發見此二根一在 3 與 4 間.一在 6 與 7 間.此二根既分離.則此後分別計算各根.可適用前述法則.若此二根尚在相鄰二整數間.吾人須再發見此二根之第二共同數字.自其根內減去之.然後求此最後方程式中各根之區域.餘仿此.

答　1.35689584,　　1.69202147

(2) 求在 20 及 30 間發見方程式 $x^3-49x^2+658x-1379=0$ 之二根.

1	−49	658	−1379	(23.2131277
	20	−580	1560	
	−29	78	181	
	20	−180	−180	
	−9	−102	1000	
	20	42	−992	
	−11	−60	8000	
	3	51	−6739	
	14	−900	1261000	
	3	404	−1217403	
	17	−496	43597	
	3	408	−34183	
	200	−8800	9414	
	2	2061	−6786	
	202	−6739	2628	
	2	2062	−2372	
	204	−467700	256	
	2	61899	−236	
	2060	−405801	20	
	1	61908		
	2061	−343893		
	1	206		
	2062	−34183		
	1	206		
	20630	206 −33977		
	3	4		
	20633	−3393		
	3	4		
	20636	2 −3389		
	3			
	20639			

上式已將求小根近似值至七位小數之工程盡量宣布.今對之作種種觀察.藉以指導學者.凡類此一切場合.皆可由此引伸之.

自原方程式之根中減去20.則其絕對值之符號改變.故在0及20間有原方程式之一根.因與本題無關.故略之.此第一變化方程式

$$x^3+11x^2-102x+181=0$$

有二根同在3,4區域內.故尙未分離.今以3,4代入第一變化方程式中.左端因x自3變至4.當經過第一變化方程式之二根.經過其第一根.則其絕對項符號生一次變化.今前後變化二次.則其符號還元.故此二結果當同號.且皆爲正.故本場合比一般場合難.卽在一般場合.可適用絕對項變號之標準以發見根之數字.在本場合.須俟二根分離後始能循此標準進行.若二根尙未分離.卽不得適用此標準.今自第一變化方程式之根中減去4.則其新方程式爲

$$x^3+23x^2+34x+13=0.$$

其符號變化數爲0.卽此新方程式無正根.亦卽第一變化方程式中無比4大之根.又自第一變化方程式中減去3.則其所得之新方程式.(參考算式)與第一變化方程式之符號變化號同.卽此新方程式仍有二正根.亦卽第一變化方程式之二正根比3大.故第一變化方程式之二正根必在3與4間.與上同法.可發見第二變化方程式

$$x^3+200x^2-900x+1000=0$$

之二根同在2與3間.因自其根中減去3.則其新方程式之符號變化數爲0.若自其根中減去2.則其新方程式之符號變化數,與第二變化方程式同故也.至此可知原方程式之二根,其前三位數字同爲23.2.又第三變化方程式

$$x^3+2060x^2-8800x+1261000=0$$

有一根在1與2間.又有一根在2與3間.因以1代入第三變化方程式左

端.其結果爲正. 2之結果爲負. 3又爲正故也.此二根既分離.今如上式求小根之近似值.自第三變化方程式之根中減去1.在其次第二步運算後.此試約數卽可發生效力.若欲求其大根之近似值.則必自第三變化方程式之根中減去2.於此應宜注意者.前之絕對項之正符號今變成負符號後.此負符號以下當永遠不變.此第二根之近似值爲　23.2295212.

當此二根未分離時.根之適當數字.可以最後第二係數除其最後係數之二倍.或以最後第三係數之二倍除最後第二係數而得.如自 $\frac{2\times181}{102}$ 可值出數字3及自 $\frac{2\times1000}{900}$ 可值出數字2是也.今說明其理.在本場合.此原方程式今漸近於每個變化方程式中最後三項所成之二次方程式.若在一般場合.則原方程式漸近於變化式中最後二項所成之一次方程式.令此二次式爲 $ax^2+bx+c=0$. 因其二根殆相等.故其近似值爲 $-\frac{2c}{b}$ 或 $-\frac{b}{2a}$.

由上法則常能發見此一對根所存在之區域.若自 $-\frac{2c}{b}$ 及 $-\frac{b}{2a}$ 所值出之數字不同.卽知二根此時約已分離.

(3) 在4與5間發見方程式 $x^4+8x^3-70x^2-144x+936=0$ 之根至小數三位.

答　4.242,　4.246

(4) 求在2與3間發見方程式 $64x^3-592x^2+1649x-1445=0$ 之二根.

答　此二根俱爲 2.125

吾人所求原方程式之二根至第三位小數尙未分離.今自第三變化方程式之根中減去5則其所得第四變化方程式中最後二係數皆爲0.故在第四變化方程式中有二重根0.因之第三變化方程式中有二重根5.原方程式中有二重根2.125.

若原方程式中有二以上之根異常接近.亦可依上述情形

用 Horner 氏之法則求之.顧此種場合在實用上鮮有遇者.在此類問題中.前之原理足使學者觸類引伸.無往不適.茲不贅.

112. Lagrange 氏之近似值方法 Lagrange 氏曾予吾人一法則.將原方程式之根以連分數之形表之.因在實用上 Lagrange 氏之方法遠遜 Horner 氏之方法.故此間簡單表之已足.

令方程式 $f(x)=0$ 只有一根在連續二整數 a 及 $a+1$ 間.以 $a+\frac{1}{y}$ 代原方程式中之 x.化 x 方程式為 y 方程式.則 y 方程式有一正根.令此 y 方程式之正根依實驗決定在整數 b 及 $b+1$ 間.以 $b+\frac{1}{z}$ 代 y.化 y 方程式為 z 方程式.令此 z 方程式之正根依實驗發見在 c 及 $c+1$ 間.累用此法.可將根之近似值以下列連分數之形表之 $a+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\cdots$

例題

(1) 以連分數之形表方程式 $x^3-2x-5=0$ 之正根.

此方程式之根在 2 與 3 間.依 $x=2+\frac{1}{y}$ 變 x 方程式為 y 方程式時.可用 33 節之法.即作一方程式比原方程式之根少 2.然後以此新方程式中根之逆數為根另作一方程式.此最後所得之方程式.即 y 方程式.其形狀為

$$y^3-10y^2-6y-1=0.$$

y 方程式有一根在 10 與 11 間.以 $10+\frac{1}{z}$ 代 y.則 z 方程式

$$61z^3-94z^2-20z-1=0.$$

有一根有1與2間.令 $z=1+\frac{1}{n}$. 則 n 方程式 $54n^3+25n^2-89n-61=0$ 有一根在1與2間.餘仿此.故原方程式之根可以次之形狀表之.

$$x=2+\frac{1}{10+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\cdots\cdots$$

(2) 以連分數之形狀表方程式 $x^3-6x-13=0$ 之正根.

答 $3+\frac{1}{5+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\cdots\cdots$

113　四次方程式之數字解答　在本章宣告終結以前.宜將可作為六章問題之解法舉例明之.雖凡數字方程式一般可以本章之法則解開.然在某種場合解四次方程式.則以六章之法為甚簡.當四次方程式可導出一有可通約根之縮減三次方程式.則此可通約根可迅速發見.而此四次方程式亦因之完全解開.今用Descates氏法則(64節)解此類例題數則於次.此種解法在實用上甚覺利便.

例　題

(1) 分解四次式 $x^4-6x^3+3x^2+22x-6$ 為二次因子.

作64節之假定.易得 $p+p'=-3,\quad q+q'+4pp'=3,\quad pq'+p'q=11,$

$$qq'=-6,\quad \phi=\frac{1}{2}-pp'=\frac{1}{4}(q+q'-1).$$

今計算 I 及 J 之值.則其 ϕ 方程式為 $4\phi^3-\frac{111}{4}\phi-\frac{225}{8}=0.$

今以4乘其根.若 $4\phi=t$. 則 $t^3-111t-450=0.$

依約數法而知 t 方程式有一根為 -6. 是以 $\phi=-\frac{3}{2}$. 由是 $pp'=2q+q'=-5.$

由此二方程式及以前各方程式.知有 $p=-2,\ p'=-1,\quad q=1,\ q'=-6.$

當 q, q' 之値已知時.由 $pq'+p'q$ 之値之方程式.卽可定出與 q 相應之 p 及與 q' 相應之 p'.故此四次式分解爲因子 $(x^2-4x+1)(x^2-2x-6)$.

若用 ϕ 之他二値.吾人又能用他二種方法以分解此四次式.但若吾人就上之二次因子而再分解之.亦可成此同一工作.

(2) 分解四次式 $f(x)\equiv x^4-8x^3-12x^2+60x+63$ 爲因子.

ϕ 方程式爲 $4\phi^3-195\phi-475=0$. 其中有一根爲 -5.

答 $f(x)\equiv(x^2-2x-3)(x^2-6x-21)$

(3) 分解四次式 $f(x)\equiv x^4-17x^2-20x-6$ 爲因子.

此縮減三次方程式爲 $4\phi^3-\dfrac{217}{12}\phi+\dfrac{3185}{216}=0.$

令 $6\phi=t$. 則有 $4t^3-651t+3185=0$. 其中有一根爲 7. 故 ϕ 爲 $\dfrac{7}{6}$.

答 $f(x)\equiv(x^2+4x+2)(x^2-4x-3)$.

(4) 分解四次式 $f(x)\equiv x^4-6x^3-9x^2+66x-22$ 爲因子.

此縮減三次方程式爲 $4\phi^3-\dfrac{335}{4}\phi-\dfrac{897}{8}=0$. 故 ϕ 爲 $-\dfrac{3}{2}$.

答 $f(x)\equiv(x^2-11)(x^2-6x+2)$.

(5) 分解 $f(x)\equiv x^4-8x^3+21x^2-26x+14$ 爲因子.

答 $f(x)\equiv(x^2-2x+2)(x^2-6x+7)$.

(6) 分解 $f(x)\equiv x^4+12x+3$ 爲因子.

答 $f(x)\equiv(x^2-x\sqrt{6}+3+\sqrt{6})(x^2+x\sqrt{6}+3-\sqrt{6})$.

(7) 發見 $x^4-8x^3-12x^2+84x-63$ 之二次因子.並完全解此方程式.

(見 22 節例 18)

答 $f(x)\equiv\{x^2-2x(2+\sqrt{7})+3\sqrt{7}\}\{x^2-2x(2-\sqrt{7})-3\sqrt{7}\}$.

雜題

(1) 發見 $x^3-6x-13=0$ 之正根.

答 3.176814393.

(2) 發見 $x^3-2x-5=0$ 之正根至八位或九位小數無誤.

答 2.094551483.

(3) 方程式 $2x^3-650.8x^2+5x-1627=0$ 有一根在 300 及 400 之間. 試發見此根.

答 可通約根 325.4.

(4) 試發見方程式 $4x^3-180x^2+1896x-457=0$ 中在 20 與 30 間之一根.

答 28.52127738.

(5) 發見方程式 $x^3-49x^2+658x-1379=0$ 中在 2 與 3 間之一根至六位小數.

答 2.557351.

(6) 發見方程式 $x^4-12x^2+12x-3=0$ 中在 2 與 3 間之一根至六位小數.

答 2.858083

(7) 發見方程式 $x^3+2x^2-23x-70=0$ 之正根眞確至 10 位小數.

答 5.13457872528

(8) 發見 673373097125 之立方根.

答 8765

(9) 發見 537824 之五乘根.

答 14

(10) 發見方程式 $x^3-3x+1=0$ 之一切根.

此方程式由 54 節例(7)之方程式 $x^6+x^3+1=0$ 變化而成.

答 -1.87938,　0.34729,　1.53209

(11) 發見三次方程式 $x^3+x^2-2x-1=0$ 之各根. (見 54 節例 1)

答 -1.80194,　-0.44504,　1.24698

(12) 發見方程式 $x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1=0$ 中 -1 與 0 間之根至五位小

數.(參考 54 節例 3)

答 -0.28463

(13) 解方程式 $x^3-315x^2-19684x+2977260=0$.

吾人在 70 及 80 間發見有一根.依 Horner 氏之方法此根爲78.今於算式中最後變化二次方程式所供給之二根上各加 78.卽爲原方程式中其餘二根.

答 78, 347, -110

(14) 發見方程式 $x^4-11727x+40385=0$ 之二實根.

答 3.45592, 21.43067

(15) 發見三次方程式 $20x^3-24x^2+3=0$ 之各根.

答 -0.31469, 0.44603, 1.06865

(16) 發見方程式 $14x^3+12x^2-9x-10=0$ 之正根.

答 0.85906

(17) 發見方程式 $7x^4+20x^3+3x^2-16x-8=0$ 之正根.

答 0.91336

(18) 發見方程式 $x^5+12x^4+59x^3+150x^2+201x-207=0$ 之正根至十位小數.

答 0.6386058033

(19) 發見 $f(x)\equiv x^5+2x^4-36x^3-149x^2-232x-336=0$ 之各可通約根.並完全解此方程式.

答 $f(x)\equiv(x^2+x+3)(x+4)^2(x-7)$

(20) 同樣解此方程式 $f(x)\equiv x^5-32x^4+116x^3-116x^2+115x-84=0$.

答 $f(x)\equiv(x^2+1)(x-1)(x-3)(x-28$

(21) 若 99 節例(3 之二次剩餘之根爲虛.試求其條件.

答 $HI+3aJ>0$

若 H 與 J 俱爲正.則能滿足此條件.(因此時依37節之恆等式 I 必爲正)

故易推得若 H 與 J 俱爲正.則此四次方程之根皆爲虛.(參考 100 節例 14)

(22) 若此四次方程式有二根爲 α. 試證 $a\alpha+b=\dfrac{-GI}{2HI-3aJ}$.

(23) 若方程式 $f(x)=0$ 之根皆爲實根. 則方程式 $f(x)f''(x)-[f'(x)]^2=0$ 之根皆爲虛根. 試證明之.

(24) 若方程式中有三連續項成等比級數.則此方程式之根不皆爲實.試證明之.

此三項必爲 $kx^r+k\alpha x^{r-1}+k\alpha^2x^{r-2}$ 之形.今以 $x-\alpha$ 乘方程式全體.則此新方程式中有二連續項缺乏. 故此新方程式至少有 2 虛根. 但此新方程式中除 α 一根外.餘皆爲原方程式之根.

(25) 若一方程式中有四連續係數成等差級數.則其根不皆爲實數.試證明之.

將此四項書爲適當形狀而以 $x-1$ 乘之.則其所得新方程式中有三連續項成等比級數.

(26) 計算缺第二項之五次方程式 $f(x)\equiv x^5+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 中 Sturm 氏屠首二剩餘.

答 $R_1=-2ax^3-3bx^2-4cx-5d$, $\quad R_2=Ax^2+Bx+C$.

式中 $A=40ac-12a^3-45b^2$, $\quad B=50ad-8a^2b-60bc$, $\quad C=-4a^2c-75bd$.

保存此種符號.則第三剩餘 $R_3=Dx+E$ 之係數 D, E. 易用 a, b, c, d, A, B, C 之項表之.又能以 A, B, C, D, E 之項表 R_4.

(27) 有一爲二項係數所表之普通五次式於此. 試除去其第二項. 若作此新方程式之爲首二剩餘. 則其領袖係數爲 $-H$, $\quad -5HI+9a_0J$ 試證明之.

(28) 有一缺第二項之 n 次方程式 $x^n+ax^{n-2}+bx^{n-3}+cx^{n-4}+\cdots\cdots=0$ 於此. 試求其爲首二剩餘之領袖係數.

在所求之值中.無上式所表出以外之係數存在.吾人易得

$$R_1=-2ax^{n-2}-3bx^{n-3}-4cx^{n-4}-\cdots\cdots;\ R_2=-\{4(n-2)a^3-8nac+9nb^2\}x^{n-3}+\cdots\cdots$$

(29) 有一爲二項係數所表之普通 n 次方程式於此.試除去其第二項.若作此新方程式之爲首二剩餘.則其領袖係數爲 $-H,\quad -nHI+3(n-2)a_0J$, 試證明之.

自前例二式.依 35 節之變化.另可導出二式.與前例二式相當.今依

$$a_0A_2=H,\qquad a_0{}^2A_3=G,\qquad a_0{}^3A_4=a_0{}^2I-3H^2$$

諸方程式將 A_2, A_3, A_4 之值代入式中.又依 37 節之恆等式代入 G^2 之值.再將正因子除去.始獲此最後之結果.

(30) 計算 Euler 三次式之 Sturm 函數.(參考 61 節)

經過各種變化.又除去其正因子.則有

$$f(x)=x^3+3Hx^2+3\left(H^2-\frac{1}{12}a^2I\right)x-\frac{G^2}{4}$$

$$f'(x)=x^2+2Hx+H^2-\frac{1}{12}a^2I,\qquad R_1=2Ix+2HI-3aJ,\qquad R_2=I^3-27J^2.$$

68 節中四次方程式內根之性質之條件.可藉 61 節例 (4) 之助.自此等結果上導出.又 100 節及 68 節所表一切根皆爲實數之條件.俱能在此求得.因欲令 Euler 三次方程式之根皆爲正實根.則以 0 代 x 當有三符號變化數.此時 a^2I-12H^2 與 $2HI-3aJ$ 必爲負.

第十二章

複數及複變數

114. 複數 圖表法 在前章諸例中.常發現含有負數平方根$a+b\sqrt{-1}$之式.於數字方程式之解答中.此種含有a個正或負實單位及b個正或負虛單位之式稱爲複數.爲簡單計.虛單位$\sqrt{-1}$常以i表之.實數及虛數皆包括於$a+ib$式中.b爲0時此式表實數.a爲0時此式表虛數.複數可服從算術計算中一般規則.在此等計算結果內i之整數方乘若超過一次.常能依$i^2=-1$之關係縮減之.如

$$i^5=i^4i=(i^2)^2i=(-1)^2i=i.$$

今以幾何方式表複數.

$a+ib$ 之式可以 $\mu(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

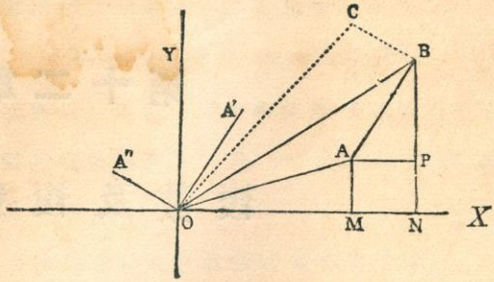
之形表之.式中 $\mu=\sqrt{a^2+b^2}\quad \cos\alpha=\dfrac{a}{\mu}\quad \sin\alpha=\dfrac{b}{\mu}$

μ之量稱爲$a+ib$複數之模數.α角爲其幅角.模數之符號常爲正.根號前之負號相當於幅角增一π.

今取正交軸OX, OY及$OA=\mu$, $\angle XOA=\alpha$之一點A.則得

$$OM=\mu\cos\alpha=a\quad AM=\mu\sin\alpha=b.$$

故 $a+ib$ 之式.可以直線 OA 表之.O 爲原點.A 爲對於定軸其坐標爲 a,b 之一點.自原點至此點之距離與複數之模數相等.$\angle XOA$ 與其幅角相等.



第 七 圖

複數之大小.以模數之大小計之.若複數爲 0.(即 a 與 b 各爲 0) 則其模數成 0.反之若模數成 0.因此時 a^2+b^2 成 0.故 a 與 b 各成 0.即其複數成 0.若 a 與 a' 等 b 與 b' 等.則複數 $a+bi$ 與複數 $a'+b'i$ 相等.換言之,即若二複數之模數相等.其幅角又相等或相差爲 2π 之整數倍.則此二複數相等.

爲簡單計.以下常用記號 $\mathrm{mod}(a+bi)$, $\mathrm{amp}(a+bi)$ 表複數 $a+bi$ 之模數及其幅角.

115. 複數 加法及減法 令第二複數 $a'+ib'$ 表一直線 OA'. 其

$$OA'=\mathrm{mod}(a'+ib') \qquad \angle XOA'=\mathrm{amp}(a'+ib').$$

今進而表其和之式. $a+ib+a'+ib'$

書此和爲 $a+a'+i(b+b')$. 則依 114 節之慣例此和爲連結原點與坐標爲 $a+a',b+b'$ 之點所成之直線.欲求此點.可作 AB 線與 OA' 平行且相等.因 AP, BP 與 a', b' 相等.故 B 爲所求之點.且得

$$OB=\mathrm{mod}\{a+a'+i(b+b')\},\quad \angle XOB=\mathrm{amp}\{a+a'+i(b+b')\}.$$

故此二複數相加時.先引 OA 線表其中一數.又在其末端作 AB 代表他數.(即 AB 之長等於其模數. AB 與 X 軸所成之角等於其幅角).則 OB 表此二複數之和.

因 OB 不大於 $OA+AB$. 故二複數和之模數.小於或至多等於二複數之模數和.

此種表示法可推至於二以上複數之加法.例如以 OA'' 代表之數 $a''+ib''$ 加於上之結果內.吾人可自 B 點作 BC 與 OA'' 平行且相等.又連結 O, C 二點.則 OC 表 OA, OA', OA'' 三者之和.吾人又可斷言曰.二以上之複數.其和之模數.小於或至多等於各複數之模數和.

減法亦可同樣表示.因 OB 可代表 OA, OA' 二者之和.則 OA 可代表 OB 與 OA' 之差.故二複數相減時.自代表第一數之直線極端.作一直線.與第二直線相等且平行.但方向反對.(即其方向與 OX 軸所成之角.比第二複數之幅角多一 π.)則原點 O 與此線極端連結所成之直線.即表此二複數之差.

116. 乘法及除法　以 $a+ib, a'+ib'$ 二複數相乘.可書此二複數如次.

$$a+ib=\mu(\cos\alpha+i\sin\alpha),\quad a'+ib'=\mu'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')$$

依 De Moivre 氏之定理.則有

$$(a+ib)(a'+ib')=\mu\mu'\{\cos(\alpha+\alpha')+i\sin(\alpha+\alpha')\}.$$

故二複數之積仍爲一複數.其模數爲原二模數之積.其幅角

爲原二幅角之和.

同樣可證明二以上之複數之積.亦爲一複數.其模數爲各模數之積.其幅角爲各幅角之和.

以 $a'+ib'$ 除 $a+ib$. 同樣可得

$$\frac{a+ib}{a'+ib'}=\frac{\mu}{\mu'}\{\cos(\alpha-\alpha')+i\sin(\alpha-\alpha')\}.$$

即二複數之商亦爲一複數.其模數爲原二模數之商.其幅角爲原二幅角之差.

在證明16節定理時.已假定若二以上因子之積成 0. 則其中必有一因子成 0. 此等因子皆爲實數時.吾人已知此理眞確.若爲複數.此理亦能成立.今試言之.因欲令複數之積成 0. 則積之模數必爲 0. 因而各複數中必有一複數之模數成 0. 是以有複數成 0.

117. 複數之他種運算 由前之提議.則凡複數之任意方乘 $(a+ib)^m$. 皆能以 $A+iB$ 之形表之.但 A 與 B 爲實數. 一般在任意有理整函數

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}z+a_n.$$

式中.若其係數爲複數.(包括實數)則以複數 $a+ib$ 代式中之 z 所得之結果.能以模範式 $A+iB$ 表之.

本書本章中除複數之有理整函數外.未嘗討論他種函數.但藉 De Moivre 氏定理之援助.則凡對數,指數爲分數,或複數之乘冪及指數均爲複數之乘冪.皆可以複數表其結果.故

複數本身自成一系統或一羣.

118. 複變數 變數自$-\infty$變至∞時.多項式之變化.已於本書前章研究之.且嘗用圖表法表明多項式之變化狀態.然此不過一般考察中一特別場合耳.假定有z之有理整函數$f(z)\equiv a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$.於此,其係數爲實數或複數.式中$z$有$x+yi$之複數形.$x$與$y$又可爲任何實數.若令$x$變化.$y$成爲0.則此$x+yi$之值自含有一切變數實值.今對於$z=x+yi$之各種值考究$f(z)$值之變化.依114節之原理.則$x+yi$可以自原點0至坐標爲$x, y$之點$P$所作之直線$OP$表之.(8圖)或以$P$點表$x+yi$.是以$x+yi$之一切值.可以平面上之點表之.此$x+yi$稱爲複變數.因對於$z=x+yi$之特別值.$f(z)$之值爲$A+iB$.(117節)則$f(z)$之值亦可同樣以平面上之點表之.今第就$x+yi$而考究之.吾人設想$x+yi$依連續狀態變化.例如$(x, y)$點沿一曲線運動.令$OP, OP'$表變數之相連兩值.吾人可書其相當值$x+yi, x'+y'i$如次.

$$z=x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta),\qquad z'=x'+y'i=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$$

因OP'表OP, PP'二者之和.則PP'表z之增加.故若$z'=z+h$.則h可書爲

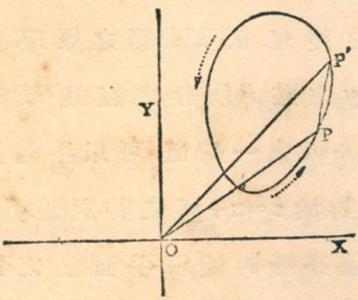
$$h=\rho(\cos\phi+i\sin\phi).$$

式中$\rho=PP'$.ϕ爲PP'與OX軸所成之角.

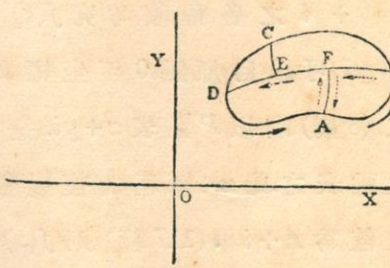
z之模數之變化爲$OP'-OP$.或$r'-r$.z之幅角之變化爲$P'OP$或$\theta'-\theta$.z本身之變化爲h或$\rho(\cos\phi+i\sin\phi)$.自不待論.

假定此點 z 畫一閉曲線.當其復歸於原位置 P 時.其模數複取得原有之值.此時若原點 O 在曲線外.則其幅角與原幅角等.若原點 O 在曲線內.則其幅角增一 2π.

若此複變數 z 依二正反對方向畫一相同曲線.則其幅角之變化相等符號相反.即其全體變化為 0.由此可導出一幅角變化之性質.在次之討論中甚感重要.



第八圖



第九圖

令一平面積依直線 BD, AF, EC,……分為數部分.則對其全面積周圍幅角之變化.與對其各部分周圍幅角變化之總和等.但此等部分皆假定為變數 z 依同方向運動而成.因當此點 z 依同方向沿各部分周圍廻轉時.全面積內每一分線皆當經過二次.其前後方向又相反.至其外圍之線祇經過一次.故在分線上之變化終歸烏有.所餘者僅外圍之變化而已.例如自圖取二面積 ABF, AFD.當此點 z 依矢所表示之方向畫此二面積時.AF之全變化完全消滅.

119. 複變數函數之連續 令複變數 z 自一定值 z_0 增長 $h=\rho(\cos\phi+i\sin\phi)$. 若 $f(z)$ 為原函數. 則以 z 代 6 節展開式內之 x. 即得

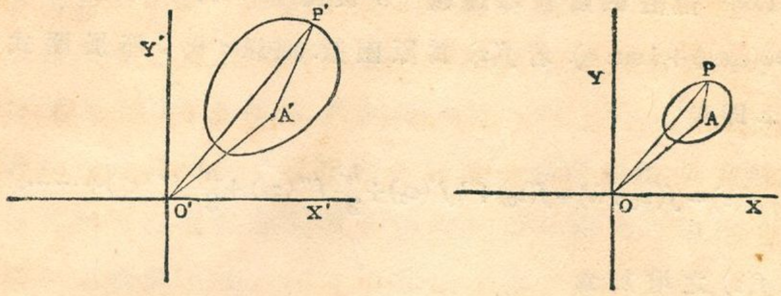
$$f(z)=f(z_0+h)=f(z_0)+hf'(z_0)+\frac{h^2}{2!}f''(z_0)+\frac{h^3}{3!}f'''(z_0)+\cdots\cdots.$$

又 $f(z)$ 之增加為

$$f(z_0+h)-f(z_0)=hf'(z_0)+\frac{h^2}{2!}f''(z_0)+\frac{h^3}{3!}f'''(z_0)+\cdots\cdots.$$

上式中 h 方乘之乘數皆為複數. 若其模數為 $a, b, c\cdots\cdots$ 等. 則其各項之模數為 $a\rho$, $b\rho^2$, $c\rho^3$,$\cdots\cdots$等.因和之模數比模數之和小. 故 $f(z)$ 式中其增加量之模數小於 $a\rho+b\rho^2+c\rho^3+\cdots\cdots$. 因吾人可與 ρ 一值. (5 節) 若 ρ 之值等於或小於此一值. 上式將比任一指定之值小. 故當 h 之模數 ρ 非常微小時. $f(z_0+h)-f(z_0)$ 之模數亦非常微小. 即 z 之變化 h 非常微小時. $f(z)$ 之變化 $f(z_0+h)-f(z_0)$ 亦非常微小. 亦即複變數 z 連續變化時. 則其函數 $f(z)$ 亦連續變化.

120. 複變數畫一小閉曲線時 f(x) 中幅角之相當變化 對於 z 之一羣連續值. 則有 $f(z)$ 之一羣相當連續值. 亦如 z 之各值. 可以平面上之點代表之. 為明瞭計. 今以各在一平面上之二圖表此二羣連續點. 對於表 $x+yi$ 之點 P. 即有表 $f(z)$ 之相當點 P'. P 畫一連續曲線時. P' 亦畫一連續曲線. 若 P 畫一閉曲線而復歸於原位置. 則 P' 亦歸於原位置.



第十圖

今之目的.在討論 P 畫一小閉曲線時.$f(x)$ 中幅角之相當變化.令 A 為任意一定點.其坐標為 x_0, y_0.即 $z_0=x_0+iy_0$.吾人分此討論為二種場合.

(1) 當 x_0+iy_0 非 $f(z)=0$ 之根時.即 $f(z_0)$ 不為 0 時.

(2) 當 x_0+iy_0 為 $f(z)=0$ 之根時.卽當 $f(z_0)$ 成 0 時.

在第一場合.對於此點 A.卽有表 $f(z_0)$ 之值之一相當點 A'.且 $O'A'$ 不為 0.令 $z=z_0+h$.但 $h=\rho(\cos\phi+i\sin\phi)$.又令代表 z 值之點 P 繞 A 點作一閉曲線.再令 P' 代表 $f(z)$.則 $A'P'$ 代表對於 z 之增加 AP, $f(z)$ 之相當增加.依前理吾人可與 ρ 某一值.ρ 等於或小於此值時.$f(z)$ 函數中增加量之模數比定量 $O'A'$ 小.故可假定 P 繞 A 畫一閉曲線.此閉曲線可小至於 P' 所畫之相當閉曲線在 O' 外方.故依 118 節.若對於 P 所畫一小閉曲線不含有滿足於 $f(z)=0$ 之點.則 $f(z)$ 函數中幅角之總變化為 0.

在第二場合.假定 x_0+iy_0 為方程式 $f(z)=0$ 之 m 重根.且令

$$f(z)\equiv(z-z_0)^m\psi(z).$$

則　　$$f(z)=h^m\psi(z)=\rho^m(\cos m\phi+i\sin m\phi)\psi(z).$$

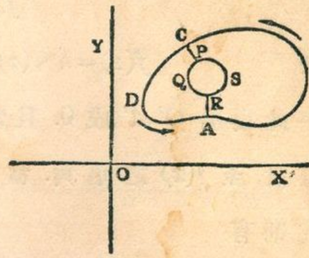
在此場合 $O'A'$ 成 0. 且當 P 繞 A 作一閉曲線時. P' 復歸於原位置. 至 $f(x)$ 之幅角. 當增 2π 之整數倍. 今確定之. 由上方程式則有

$$\text{amp}f(z)=m\phi+\text{amp}\psi(z).$$

且 amp$f(z)$ 之增長. 由 $m\phi$ 之增長與 amp$\psi(z)$ 之增長相加而得. 因 P 所畫之曲線假定爲不含有 $\psi(z)=0$ 之根. 故依第一場合. 後之增長終歸烏有. 又因在 P 每一迴轉中 ϕ 當增長 2π. 則 $m\phi$ 當增長 $2m\pi$. 故當 P 所畫小閉曲線含有方程式 $f(z)=0$ 之 m 重根時. 則 $f(z)$ 之幅角當增加 $2m\pi$.

121. Cauchy 氏之定理　當 z 在一平面上依二反對方向畫同一線時. $f(z)$ 亦在其平面中依二反對方向畫其相當線. 且其 amp$f(z)$ 受相等且反對之變化. 於是有次之理論成立. 有一平面積於此. 若依 118 節方法分爲數部分. 再令 z 依同一方向畫此各部分. 則此時 amp$f(z)$ 之變化之總和. 與 z 依同方向單獨畫平面積之閉圍線時 amp$f(z)$ 之變化同. 今在 XY 平面上畫一閉曲線. 並如前第一場合假定不圍有方程式 $f(z)=0$ 之點. 再分之爲數部分. 則每一部分可適用前節第一場合之結論. 又依上之理論. 則 z 畫此閉圍線時 amp$f(z)$ 之變化終歸烏有. 又如第二場合假定此閉圍線圍有方程式 $f(z)=0$ 之 m 重點. 今畫一小閉曲線圍此 m 重點. 則 z 作閉圍

線時.此 $\operatorname{amp} f(z)$ 之變化.與依同一方向畫 $ABCPSR$, $CDARQP$, $PQRS$ 諸部分曲線時 $\operatorname{amp} f(z)$ 之變化之總和等.今前之二變化依前證爲 0. 後者依前節第二場合爲 $zm\pi$. 故 $\operatorname{amp} f(z)$ 之全變化爲 $2m\pi$. 同樣若此閉圍線內更含有 m', m''……重點.則其全變化爲 $2(m+m'+m''+\cdots\cdots)\pi$.



第十一圖

由是可導出下之 Cauchy 氏定理.

當複變數 z 繞一定平面周圍作一度迴轉時.若以 2π 除多項式 $f(z)$ 式中幅角之全變化.則其所得之商.爲在此閉圍線內方程式 $f(z)=0$ 所有根之數目.

122. 普通方程式中根之數目 用前節成立之原理.吾人能證明 15, 16 兩節之定理. 即凡 n 次有理整方程式有 n 個實或虛之根.

令 $f(z)\equiv a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}z+a_n$

爲 z 之有理整函數.對於 z 之無限值不能爲 0. 至其根之存在與否可不必論.再令變數 z 在其平面上作一適當大之圓.使圓周外無方程式 $f(z)=0$ 之根.又令

$z^n\phi(z')$

$$f(z)=z^n(a_0+a_1z'+a_2z'^2+\cdots\cdots+a_nz'^n)=2^n\phi(z').$$

式中 $z'=\dfrac{1}{z}$. 則 z' 在平面上他部分畫一小圓. 且其模數爲 z 之模數之逆. 因 z' 圓內部與 z 圓外部相當. 故在 z' 圓內無

$\phi(z')=0$ 之根.故 z 在 z 圓上廻轉一周時. $\mathrm{amp}\phi(z')$ 之變化成 0. 是以 z 在 z 圓上迴轉一周時.

$$\mathrm{amp}f(z) \text{ 之變化 } = \mathrm{amp}z^n \text{ 之變化}.$$

令　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,　　$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$.

因 z 廻轉一周時 θ 之增長爲 2π. 故 z 廻轉一周時 $\mathrm{amp}z^n$ 之增長爲 $2n\pi$. 即 z 廻轉一周時 $\mathrm{amp}f(z)$ 之變化爲 $2n\pi$. 由 121 節 Cauchy 氏之定理.則在 z 圓內方程式 $f(z)=0$ 中根之數目爲 n. 即 n 次方程式 $f(z)=0$ 有 n 個根.故得本定理之證.

16 節之理論.可由 Cauchy 之定理推闡而出.故此定理可視爲方程論中基本定理. 顧宜注意者. 15 節之定理所謂每一數字方程式必有一數字根. 可藉 119 節及前節原理直接證明之.與 Cauchy 氏之原理不生關係.今再表明如次.

123. 基本定理之第二證法　令對於 z 之一切值 $f(z)$ 不爲 0. 又令第十圖中代表 z_0 之值 A 與 A' 點相當.且此 A' 點爲 P' 點中與原點 O' 距離最近之一點.今將表明 P' 點中有一點比 A' 點較近於原點 O' 吾人有下之展開式.

$$f(z_0+h)=f(z_0)+f'(z_0)h+\frac{f''(z_0)}{2!}h^2+\frac{f'''(z_0)}{3!}h^3+\cdots\cdots+a_0h^n$$

依假定 $f(z_0)$ 不爲 0. 但其導來函數中可有一個或多個爲 0. 令首不爲 0 之導來函數爲 $f_m(z_0)$. 並令 $\dfrac{f_m(z_0)}{m!}=\mu_m(\cos a_m+i\sin a_m)$.

以下尚有 h^{m+1}, h^{m+2}, h^{m+3},……各係數之相當式.今將超過 h^m 之項集合成一複數形.則上式可寫爲

$f(z_0+h)=f(z_0)+\mu_m\rho^m\{\cos(m\phi+\alpha_m)+i\sin(m\phi+\alpha_m)\}+\mu(\cos\varepsilon+i\sin\varepsilon)$,
依 115 節之假定. $\mu<\rho^{m+1}\mu^{m+1}+\rho^{m+2}\mu^{m+2}+\cdots\cdots$.
自 5 節易推得 ρ 之某一值能令 $\mu<\mu^m\rho^m$. 今自方程式 $m\phi+\alpha_m=\angle X'OA'+\pi$ 定 ϕ 之值.則依$f(z_0+h)$式中第二部分可知 P' 自 A' 在 $A'O'$ 方向運動經過 $\mu^m\rho^m$ 之距離. 令此時 P' 之位置爲 S. 更依式中第三部分而知 P' 又自 S 經過距離 $ST=\mu$ 而至一點 T. 且不論運動方向如何. 卽不論幅角 ε 如何. $O'T$ 常比 $O'A'$ 小.因 $ST<SA'$ 故也.故對原點 $O'A'$ 非 P' 點中最近一點.同理可表除0之一值外.其餘一切值皆不能爲$f(z)$之模數之最小值.

上述證明中僅表示凡方程式必有一根. 至其根之數目則尙未定. 已見於自 Cauchy 定理所導出之證明內. 故不贅述. 但若已證明至少必有一根.則由16節之方法.亦能完成此證明.

於此最宜注意者.若 $f'(z_0)$ 對於此特別點 z_0 不爲 0. 則$f(z_0)$之增長與 h 之比之極限爲一常數 $f'(z_0)=\mu_1(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)$. 由此最易推得此二增長之傾斜角爲一定. 其模數之比亦一定.換言之卽 P 與 P' 所作之圖在其無限小部分相似.

124. 複數根之決定 三次方程式之解答 在本方程式論上.對於複數根作者未嘗留意.然若在初等教科書中定一適當方法求之.其困難自在意中.若在理論上解此問題.亦不甚感繁劇.因若將 $f(x+iy)$ 之實數部分與虛數部分各令爲0.且

在此二方程式中消去一變數.則可得一方程式.今再依 Horner 氏之方法解此方程式.即可求得其餘一變數之值.

上法在實用上絕少價值.在本節及以下各節限定係數爲實數之三次及四次方程式.並在其例解中陳其適於應用之簡單計算法.令

$$f(x)\equiv x^3+px^2+qx+r=0$$

爲吾人所欲解之方程式.其根爲 $a,\ h+k,\ h-k.$ 式中 a 爲實數.因 k 由其平方而定.而其平方又可正可負.故其餘二根之性質可自計算方法中現出.若以 $h+k$ 代 x. 並如 68 節例(26)令 k 之奇次乘方和偶次乘方和分別爲 0. 則得方程式

$$-k^2=f'(h)=3h^2+2ph+q.$$

依上式可消去 k 而得 h 之三次方程式.但可不必作此 h 方程式.因 h 可自關係式 $a+2h=-p$ 而得.至 a 可自 Horner 氏之方法解原方程式而得故也.

計算 k 之值.可適用次之方法. $\Sigma f'(a)$ 之值.以係數之項表之.則爲 p^2-3q.

即 $f'(a)+f'(h+k)+f'(h-k)=p^2-3q.$

又 $f'(h+k)+f'(h-k)=2f'(h)+6k^2=6k^2-2k^2=4k^2.$

故 $f'(a)+4k^2=p^2-3q.$

由此即可決定 k^2 之值.因依 Horner 方法求 a 之值時.其最後變化方程式中末端第二係數.即 $f'(a)$ 之值故也. a 外二根之性質.依 k^2 之符號而定.並取 k^2 之正或負方根.即可決定此

二根.

例題

(1) 解方程式 $x^3+2x^2-23x-70=0$.

首計算正實根.依Horner氏之方法作其四變化式.則其最後變化方程式之係數爲 1, 17402, 76609868, -44341896.

此時須注意原方程式之根已受10乘三次.今以10^9除第一係數.卽得$f(a)$之值.以10^6除第二係數.卽得$f'(a)$之值.若依簡法再進行二次.可得$f'(a)$更精密之值爲76.6286. 自p^2-3q之值73中減去$f'(a)$. 則得 $4k^2=-3.6286$.

因k^2之值爲負.故已證明其餘二根爲虛.由a之值5.13457卽可發見h之值爲 -3.5672. 又以4除3.6286而取其商之平方根.則得方程式之二複數根爲

$$-3.5672\pm0.9524\sqrt{-1}.$$

(2) 完全解決奈端三次方程式 (107 節) $x^3-2x-5=0$.

依 Horner 氏方法完成四變化式. 並如前例進行. 則得 $a=2.09455$ $f'(a)=11.16078$. $k^2=-1.290195$. 又發見其餘二根 (如是證明爲虛) 爲

$$-1.04727\pm1.13504\sqrt{-1}.$$

(3) 發見109節第一例中方程式 $x^3+x^2+x-100=0$ 所餘二根.

吾人發見 $f'(a)=64.0841$, $k^2=-16.52102$, 又所求之根爲

$$-2.6322\pm4.0646\sqrt{-1}$$

(4) 解方程式 $20x^3-24x^2+3=0$.

以20除原方程式全體.則得 $x^3-1.2x^2+0.15=0$.

依Horner氏之方法在0及1間求此方程式之根.則得

$$a=0.4460366, \qquad f'(a)=-0.47364.$$

$$4k^2=p^2-3q-f'(a)=1.44+0.47364, \qquad k^2=0.47841.$$

故其餘二根爲實.以$h=0.37698$之值與k相加減.則其餘二根爲

1.06865,　-0.31469.　(參攷雜例第 15 題)

(5) 完全解決 Lagrange 氏三次方程式 $x^3-7x+7=0$.

變其根之符號.並在 3 及 4 間計算此變化方程式 $f(x)=0$ 之正根 α. 則

$$\alpha=3.0489173,\quad f'(\alpha)=20.88737,\quad k^2=0.0281575$$

$$k=0.1678\qquad h=-1.524458.$$

故得 $h+k$ 及 $h-k$ 之值.並將如此所得各根符號變化之.則原方程式之根爲

-3.0489,　1.3566,　1.6922.　(參攷 111 節例 1)

因上法可決定此二根爲實或虛.故用此法以解數字三次方程式時.不必如前檢查其餘二根之性質.確定此二根時所增之困難亦極少.今進而討論四次方程式.

125. 四次方程式之解法　當四次方程式有二或四個實根時.可以與前節類似方法解之.若某種例題中有實根存在無疑.則此例題可用下述之方法解之.

令原方程式爲　$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$.

其實根爲 α 及 β. 其餘二根爲 $h+k$ 及 $h-k$. 至其性質如何可不必計.令 α 與 β 俱依 Horner 氏之方法計算而得.又同時決定 $f'(\alpha)$, $f'(\beta)$ 二者之值.若以 $h+k$ 代 $f(x)$ 式中之 x. 且用 68 節例(26)之解法.則得

$$-k^2=\frac{6f'(h)}{f'''(h)}=\frac{4h^3+3ph^2+2qh+r}{4h+p},\quad f'(h)=-\frac{1}{6}f'''(h)k^2.$$

又得　$f'(\alpha)+f'(\beta)+f'(h+k)+f'(h-k)=-p^3+4pq-8r$.

及　$f'(h+k)+f'(h-k)=2f'(h)+f'''(h)k^2=4(4h+p)k^2$.

故　$-4k^2(4h+p)=f'(\alpha)+f'(\beta)+p^3-4pq+8r$.

因以 α 及 β 之值代入方程式 $\alpha+\beta+2h=-p$ 式中可先決定 h 之值.故上公式可用以計算 k^2 之值. $h+k$ 及 $h-k$ 之值爲實或虛.一視 k^2 之符號爲正或負而斷.

例題

(1) 完全解決方程式 $x^4-3x^3+7x^2-10x+1=0.$

此方程式有一實根在 0 及 1 間.故必有第二實根.今發見在 1 與 2 間.依 Horner 之方法.可得 $\alpha=0.107767,\qquad \beta=1.923292$

$$f'(\alpha)=-8.59078,\qquad f'(\beta)=12.09133.$$

故得 $f'(\alpha)+f'(\beta)+p^3-4pq+8r=-19.49945.$

又從 α, β 及 p 各值,可得 $h=0.484485$ 及 $4h+p=-1.06206.$

故 $-4k^2=\dfrac{19.49945}{1.06206}.$

故此二根 $h+k$ 及 $h-k$ 爲虛.又從此公式計算 k 之值.卽可將此二根決定.計算時用對數表較易爲力.此二根爲 $0.4845\pm2.1424\sqrt{-1}$

(2) 完全解決 110 節例 (2) 之方程式.即 $x^4-12x+7=0.$

吾人發見 $\alpha=0.59368,\ \beta=2.04727,\ f'(\alpha)=-11.1635,\ f'(\beta)=22.3180.$

故此一對虛根爲 $-1.32048\pm2.0039\sqrt{-1}.$

(3) 解方程式 $2x^4-13x^2+10x-19=0.$

此方程式必有二實根.一爲正根 α. 一爲負根 β. 以 2 除原方程式全體.且書之爲 $f(x)=x^4-6.5x^2+5x-9.5=0.$

計算 β 時.先依通常方法變方程式 $f(x)=0$ 中根之符號.此後若欲求 $f'(\beta)$.必將 Horner 氏最後變化式中末端第二係數之符號改變.則有

$$\alpha=2.45733,\quad \beta=-3.03055,\quad f'(\alpha)=32.409,\quad f'(\beta)=-66.936.$$

是以 $-4k^2=\dfrac{5.473}{1.1464}$ 又其虛根爲 $0.2866\pm1.0924\sqrt{-1}.$

(4) 解方程式 $x^4-80x^3+1998x^2-14937x+5000=0.$

此方程式有一實根在0與1間. 其第二實根在12及13間. (參攷93節例4) 吾人發見

$\alpha=0.35098,\quad \beta=12.75644,\quad f'(\alpha)=-13564,\quad f'(\beta)=5286.7.$

故 $4k^2=\dfrac{413.3}{53.785}.$

故其餘二根爲實.且易知爲 32.0602 及 34.8322.

126. 續四次方程式之解法 若四次方程式之根皆爲虛數.則前之解法完全失敗.在此場合及一般場合.皆可適用次之方法.

將原方程式書爲次之形狀. $x^4+qx^2+rx+s=0$

此方程式之根.可假定爲 $h\pm k,\ -h\pm k'$ 視 k^2 及 k'^2 之符號.即可決定此等根之性質.今以 $h+k$ 代 x. 並如前進行.則得

$$-k^2=\frac{6f'(h)}{f'''(h)}=\frac{4h^3+2qh+r}{4h}.$$

是以
$$-4k^2=4h^2+2q+\frac{r}{h}.$$

若已知 h 之値.即能由此式發見 k 之値.今在68節例(26)二方程式中消去 k. 則得 h 之六次方程式.今變之爲以 $4h^2$ 爲根之三次方程式

$$y^3+2qy^2+(q^2-4s)y-r^2=0.$$

此 y 方程式必有一正根.其餘二根或俱爲正或俱爲負.或俱爲虛.一視原方程式中根之性質而斷.以 y 方程式之根爲原方程式中Euler三次方程式之根之4倍故也.(61節例4)今依

Horner 氏之方法計算此 y 方程式之正根.(若此三根俱爲正.則其中各根均可.)如此可決定 $4h^2$. 即可決定 h. 更依次之二公式.便可完全解決原四次方程式.

$$h\pm\sqrt{-\frac{1}{4}\left(4h^2+2q+\frac{r}{h}\right)},\qquad -h\pm\sqrt{-\frac{1}{4}\left(4h^2+2q-\frac{r}{h}\right)}$$

例題

(1) 完全解開方程式 $x^4+x+10=0$

其 y 方程式爲 $y^3-40y-1=0$. 依 Horner 氏之方法.其正根爲 6.3370184. 故可得 h^2 之值.由此可得 $h=\pm1.2586$. 此時吾人發見 $\frac{r}{h}=\pm0.7945$. 其爲十號或一號.全視 h 所冠之符號而定.在此二種場合.根號下之量皆爲負.故原方程式之根皆爲虛根.今書之如次.

$$1.2586\pm1.3352\sqrt{-1},\qquad -1.2586\pm1.1771\sqrt{-1}.$$

(2) 解方程式 $x^4+9x^2-6x+5=0$.

此 y 三次方程式爲 $y^3+18y^2+61y-36=0$. 其正根爲 0.51094249. 故 $h=0.35740$. 以 h 除 r 其商之絕對值爲 16.7878. 又不論 h 之符號如何.此根號下之量皆爲負.故其各根皆爲虛.今書之如次.

$$0.3574\pm0.6563\sqrt{-1},\qquad -0.3574\pm2.9706\sqrt{-1}.$$

(3) 解方程式 $x^4-2x^3-7x^2+10x+10=0$.

以 2 乘其根.又自其中減去 1. 可除去 x^3 之項.此變化方程式之 y 三次方程式爲 $y^3-68y^2+320y-256=0$.

以 10 除此 y 方程式之根.又可發見此新方程式有一根在 6 與 7 間.若依前 Horner 氏之方法.則此根爲 6.29838. 故 $4h^2=62.9838$. 又 $h=\pm3.968$. 不論 h 之符號如何.此根號下之符號皆爲正.故此各根皆爲實根.今吾人發見

$$4k^2=9.0484,\quad 4k'^2=0.984\quad 故\quad k=\pm1.504,\quad k'=\pm0.496.$$

由此加入前消項時之關係.即得原方程式中四根爲

$$-0.732,\quad 2.732,\quad 2.236,\quad -2.236.$$

本例之結果.能迅速證實.因此原函數爲因子 x^2-5 與 x^2-2x-2 之積故也.(比較 98 節例 5)

(4) 解方程式 $x^4-7x^3+7x^2-7x+7=0$.

以 4 乘其根.又自其中減去 7. 可除去 x^3 之項.其變化方程式爲

$$x^4-182x^2-1624x-3059=0.$$

此變化方程式之 y 三次方程式爲

$$y^3-364y^2 . 45360y-£637376=0.$$

若欲發見 y 方程式中正根之位置.可先以 100 除其根.此時新方程式有一根在 2 及 3 間.依 Horner 氏之方法此根爲 2.0591, 故 $4h^2=205.91$. 且 $h=\pm7.17$. 當 h 爲正時.根號下之量爲正.故二根爲實.若 h 爲負.則其根號下之量爲負.故有二虛根.由此可得原方程式之根爲

$$5.993,\quad 1.091,\quad -0.042\pm1.033\sqrt{-1}.$$

(5) 解方程式 $x^4-80x^3+1998x^2-14937x+5000=0$.

此方程式已於前節解開.今再用本節之方法解之.當第二項容易除去(如本例)或原方程式中缺乏第二項.則本節之方法較優.自根中減去 20. 則

$$x^4-402x^2++983x+25460=0.$$

其 y 三次方程式爲　$y^3-804y^2+59764y-966289=0$.

依 Horner 氏之方法.則得　$4h^2=723.21038,\quad h=\pm13.4462$.

此時不論 h 之符號如何.根號下之量常爲正.且此四根可以下列二式表之.

$$-h\pm\sqrt{38.47390},\qquad h\pm\sqrt{1.92090}.$$

今加 20 於其各根.即得原方程式之四根如下.

$$12.7565,\quad 0.3511,\quad 34.8321,\quad 32.0603.$$

(6) 完全解開 109 節例 (4) 之方程式 $x^4-3x^2+75x-10000=0$.

其根爲 $9.8860, \quad -10.2609, \quad 0.18748\pm9.927\sqrt{-1}$.

(7) 完全解開 98 節例 (2) 之方程式 $x^4-4x^3-3x+23=0$.

其根爲 $3.7853, \quad 2.0526, \quad -0.9189\pm1.4545\sqrt{-1}$.

(8) 解 100 節例 (4) 之方程式 $x^4+3x^3-x^2-3x+11=0$.

以 4 乘其根.並除去其第二項.當用 Horner 氏方法於其 y 三次方程式時.此方程式有一可通約根 180. 故 h 爲 $3\sqrt{5}$. 此解法甚易完成.此四虛根可如下表之.

$$-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{5}\pm\frac{1}{4}\sqrt{-10-2\sqrt{5}}, \qquad -\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\sqrt{5}\pm\frac{1}{4}\sqrt{-10+2\sqrt{5}}$$

(9) 發見雜題例 (14) 中方程式 $x^4-11727x+40385=0$ 之虛根.

答 $-12\ 4433\pm19\ 7596\sqrt{-1}$

四三六五上

中華民國二十三年六月初版
中華民國二十四年七月三版

(50244精)

大學叢書(教本) 方程式論 一冊

The Theory of Equations
With an Introduction to the Theory of
Binary Algebraic Forms Vol. I

每冊定價大洋貳元
外埠酌加運費匯費

原著者 William Snow Burnside
Arthur William Panton

譯述者 幹仙椿
上海河南路

發行人 王雲五
上海河南路

印刷所 商務印書館
上海及各埠

發行所 商務印書館

(本書校對者楊靜盦)